



FACULTAD DE CIENCIAS
Instituto de Matemáticas

Invariantes de Nudos–Polinomio de Alexander

por

LUIS ANDRADES RUZ

Tesis presentada para optar al grado de Licenciado en Matemáticas.

Profesor guía Dr. Jesús Juyumaya

Enero 2015

Comisión Examinadora:

- ✓ Dr. Jesús Juyumaya (Universidad de Valparaíso)
 - ✓ Dr. Rodrigo Castro (Universidad de Valparaíso)
 - ✓ Dr. Marcelo Flores (Universidad de Valparaíso)
-

Índice general

Introducción	5
Tabla de Simbología	11
Capítulo 1. Preliminares de Álgebra	13
1. Álgebra	13
2. Tensores	14
3. Módulos	16
Capítulo 2. Nudos	19
1. Conceptos básicos	19
2. Diagrama de un nudo	20
3. Polinomio de Kauffman	23
4. Alexander-Conway	37
5. Polinomio de Jones	38
Capítulo 3. Grupo de trenzas	43
1. Representación de Burau	50
2. Construcción Polinomio de Alexander modo Algebraico	53
3. Contrucción del Polinomio de Alexander modo Combinatorio	61
4. Matrices ε -equivalentes	67
Capítulo 4. Álgebra Rook	77
1. Álgebra de Hecke	77
2. Traza Markov-Ocneanu	82
3. Polinomio de HOMFLYPT	88

4.	Álgebra de Temperley-Lieb	92
5.	Diagramas de Rook	99
6.	Construcción Polinomio de Alexander	106
	Bibliografía	109

Introducción

Al final del siglo XVIII hace su aparición la Teoría de Nudos con los estudios de A.T.Vandermonde, C.F. Gauss y F. Klein. En el siglo XIX, Lord Kelvin (1867) propuso la idea de que los átomos eran nudos, formados por pequeños vórtices o corrientes cerradas de éter. Esto lo llevo a querer clasificar todos los nudos y así explicar como los átomos absorben y emiten luz, pero con el tiempo se demostró que esta idea fue errónea. El físico Peter Tait pasó parte de su vida clasificando nudos con la convicción de que estaba haciendo una tabla de clasificación de elementos, pero esta idea también fué errónea. Y así los físicos perdieron interés en esta teoría.

Últimamente con los avances de la microscopía se ha visto que los nudos aparecen en las estructuras del ADN. En efecto, la forma cómo las cadenas de ADN se anudan pueden tener efecto en las propiedades que tiene la cadena de ADN luego de su replicación. Ver [SAT11].

El problema fundamental de la teoría de nudos es decidir cuando dos nudos son equivalentes o (isotópicos), es decir, cuando un nudo puede ser deformado continuamente hasta obtener el otro. Una manera de poder clasificar nudos es mediante invariantes. Esto es mediante una función que va del conjunto de nudos hasta algún conjunto de objetos conocidos. Existen varios invariantes de nudos (ver [Esp10]) la primera invariante polinomial es el polinomio de Alexander la cual fué definido por J.W. Alexander en el año 1928. Hago énfasis en este polinomio ya que mi tesis esta enfocada en construir el polinomio de Alexander de tres formas: combinatoria, Algebraica y vía diagramas. Otra contribución importante de J.W. Alexander es haber hecho la conexión entre nudos y trenzas, la cual dice que todo nudo puede ser obtenido por la clausura de una trenza.

El objetivo de la presente tesis es estudiar tres construcciones del polinomio de Alexander. Para esto, procederemos como sigue:

En el capítulo 1 veremos nociones básicas de álgebra, tensores y módulos.

En el capítulo 2 veremos la definición de nudos y definiremos lo que es un invariante de nudos. Veremos la proyección planar de un nudo y el teorema de Reidemeister. Este Teorema permite transpasar el estudio de nudos en \mathbb{R}^3 al estudio de diagramas de nudos, los cuales son objetos de \mathbb{R}^2 .

También en este capítulo veremos invariantes clásicos como el polinomio de Kauffman, que se construye de modo diagramático. Y se darán a conocer invariantes de isotopía regular como el polinomio bracket y la torsión, de los cuales se obtiene el polinomio de Kauffman salvo un re-escalamiento a la función. Donde nuestro polinomio conocido es el siguiente:

$$\mathcal{L}_K(\mathbf{A}) := (-\mathbf{A})^{-\omega(K_0)} \langle \mathbf{K} \rangle$$

Ahora nos vamos a dirigir a conocer el polinomio de Jones, que queda completamente determinado por dos axiomas, llamadas relaciones skein, estos permiten calcular este polinomio de forma recursiva y sencilla. El polinomio de Jones de un nudo \mathbf{K} , denotado $V_{\mathbf{K}}$, se puede recuperar mediante el polinomio de Kauffman, tomando:

$$\mathcal{L}_K(\mathbf{t}^{-\frac{1}{4}}) = V_{\mathbf{K}}(\mathbf{t})$$

Finalmente terminamos el capítulo 2 definiendo el polinomio de Alexander a través de la relación skein (ver 3)

En el capítulo 3 estudiaremos un poco la teoría de trenzas, basándonos en la presentación de Artin del grupo de trenzas B_n . Daremos a conocer uno de los teoremas principales de Alexander que dice que todo nudo puede ser obtenido de la clausura de una trenza. Esto es realmente interesante ya que si lo miramos como una función que va del conjunto de trenzas al conjunto de nudos, se puede decir que esta función es epiyectiva, pero no

inyectiva. A éste problema le da solución Markov, introduciendo los movimientos de Markov. Estos determinan cuando dos trenzas originan el mismo nudo. Con lo cual se obtiene una correspondencia biunívoca entre el grupo de trenzas bajo los movimientos de Markov hacia la isotópia de nudos, y con esto se empezaron a construir invariantes de nudos a través de grupo de trenzas.

La construcción del polinomio de Alexander usando trenzas, es vía la representación de Burau ϕ , definido como sigue:

$$\phi_n(\sigma_i) = \begin{pmatrix} I_{i-1} & & & \\ & 1-t & t & \\ & 1 & 0 & \\ & & & I_{n-i-1} \end{pmatrix}$$

Donde σ_i son los generadores de B_n . Si llamamos $M = \phi(\beta)$, entonces el Polinomio de Alexander es:

$$\det[M - I_n]_{1,1}.$$

Así podemos calcular el polinomio de Alexander, de manera puramente algebraica.

La segunda manera de construir el polinomio de Alexander es de modo combinatorio. El cual se define mediante relaciones entre los cruces y las regiones del nudo. Mas precisamente, consideremos cruces y regiones del nudo, con los cuales construimos una matriz no cuadrada de tamaño $n \times (n + 2)$, si el nudo tiene n cruces. A partir de esta matriz construimos el polinomio de Alexander mediante ciertos determinantes.

En el capítulo 4 mostraremos la construcción del polinomio HOMFLYPT como lo hizo Jones. Cabe destacar que el nombre de este polinomio es un acrónimo y corresponde a las iniciales de las 8 personas que lo descubrieron de manera simultanea. La manera que construyó Jones este polinomio fue mediante una representación π del grupo de trenzas en el álgebra de Hecke y la traza de Ocneanu tr sobre esta álgebra. Esencialmente el polinomio HOMFLYPT es la compuesta $\text{tr} \circ \pi$.

De este mismo modo se construyó el polinomio de Jones, sustituyendo el álgebra de Hecke por un cociente de ella conocida como el álgebra de Temperley-Lieb. También cabe

destacar que el polinomio de Jones es una especialización del polinomio de HOMFLYPT. Si denotamos por $X_K(\lambda, \mathbf{u})$ el polinomio de HOMFLYPT del nudo K , entonces el polinomio de Jones $V_K(\mathbf{u})$ es:

$$V_K(\mathbf{u}) = X_K(\mathbf{u}, \mathbf{u})$$

La última construcción del polinomio de Alexander que veremos fue realizada por S. Bigelow, E. Ramos, R. Yi ver [SB11]. Ellos adaptan la idea de Jones para construir el polinomio de HOMFLYPT. El álgebra que consideraron en vez del álgebra de Hecke fué el álgebra de Rook. Los elementos de álgebra de Rook pueden ser visto como diagramas o matrices. Ellos contruyen una función φ que va de B_n hacia el álgebra de rook $(\mathbb{C}P_n)^\times$, definida como sigue:

$$\varphi(\sigma_i) = \mathbf{a}d_{1i} + \mathbf{b}d_{2i} + \mathbf{c}d_{3i} + \mathbf{d}d_{4i} + \mathbf{e}d_{5i} + d_{6i}$$

donde $d_{j_i} = I^{\otimes i-1} \otimes d_j \otimes I^{\otimes n-i-1}$ y I es la identidad en P_1 y d_i son elementos de P_2 , ver ejemplo (38).

Ellos demostraron que φ es un homomorfismo si y solo si los coeficientes cumplen ciertas condiciones (en a, b, c, d, e) dentro de cinco familias ver Teorema 4.7. Cada una de las familias de condiciones entrega una construcción de alguno de los polinomios ya conocidos.

Sea $\varphi_5^{c,d}$ el homomorfismo φ con la condición 5 del Teorema 4.7 entonces el polinomio de Jones se construye mediante $\varphi_5^{c,d}$ y además con la primera traza definida en [SB11] que es:

$$\text{tr}_n^\beta(\mathbf{d}) = \beta^{k(\mathbf{d})}$$

Notemos que esta traza respeta el primer movimiento de Markov pero no respeta el segundo movimiento de Markov, entonces lo que queda por hacer es un reescalamiento a la función traza, luego obtenemos la nueva traza de Markov que si respeta los dos movimientos de Markov, entonces el invariante es:

$$I_n^5(\mathbf{x}) = (\sqrt{cd})^{\exp(\mathbf{x})+n} \text{tr}_n^{\frac{1+cd}{cd}}(\varphi_5(\mathbf{x}))$$

Si $cd \neq 1$ entonces obtenemos el polinomio de Jones, dado por:

$$I_n(x) = \frac{1 + cd}{\sqrt{cd}} V(\hat{x}).$$

Veremos la otra función que es $\varphi_2^{c,d}$ y además una nueva traza definida en [SB11] $\text{tr}_n : \mathbb{C}P_n \rightarrow \mathbb{C}$, dada por:

$$\text{tr}_n(x) = \begin{cases} 1 & k(x) = 1 \\ 0 & k(x) \neq 1 \end{cases}$$

Esta traza respeta el primer movimiento de Markov, pero no el segundo, entonces se hará un reescalamiento a la función para así poder lograr que esta nueva traza respete los movimientos de Markov. Entonces tenemos la invariante que es la siguiente:

$$\Delta_{\hat{x}}(t) = \frac{\text{tr}_n(\rho(x))}{\delta_n}.$$

Luego de este reescalamiento de la función obtenemos el polinomio de Alexander.

El tema desarrollado en la presente tesis es parte los proyectos FONDECYT 1141254 y DIUV NUMERO 1/2011.

Tabla de Simbología

$Z(G)$	Centro del grupo G .
$X \coprod Y$	Unión disjunta de los conjuntos X e Y .
$G \simeq H$	El grupo G es isomorfo con el grupo H .
S_n	Grupo simétrico de n símbolos.
B_n	Grupo de trenzas de n cuerdas.
B_∞	Unión disjunta de los grupos B_1, B_2, \dots
\mathcal{B}_n	Grupo de la trenzas geométricas de n cuerdas.
$\mathbf{b}_1 \sim \mathbf{b}_2$	Relación de isotopía de trenzas.
\mathcal{D}_b	Diagrama de la trenza b .
Λ	Anillo de polinomios de Laurent sobre \mathbb{Z} , en la variable t y t^{-1} .
(Λ, ϕ_n)	Representación de Burau de B_n .
$H_n(\mathbf{u})$	Algebra de Hecke, con n generadores e indeterminada $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^\times$.
R_n	Monoide Rook.
$\mathbb{C}P_n$	\mathbb{C} -álgebra de Rook.
$\mathbb{C}S_n$	\mathbb{C} -álgebra de grupo de S_n .
$H_\infty(\mathbf{u})$	Unión disjunta de las álgebras $H_0(\mathbf{u}), H_1(\mathbf{u}), H_2(\mathbf{u}), \dots$

tr_n	Función traza sobre el álgebra $H_n(\mathbf{u})$
tr	Función traza sobre el álgebra $H_\infty(\mathbf{u})$.
$\text{TL}_n(\mathbf{u})$	Algebra de Temperley-Lieb con n generadores e indeterminada $\mathbf{u} \in \mathbb{C}$.
\mathcal{K}	Conjunto de nudos
\mathcal{D}_K	Diagrama del nudo K .
K^*	Reflejado del nudo K .
$\text{Es}(K)$	Conjunto de estados del link K .
$\langle \sigma, K \rangle$	Efecto de σ en K .
$\ \sigma\ $	número de componentes de $\sigma \in \text{Es}(K)$ menos 1.
$\langle K \rangle$	Polinomio Bracket del link K .
$K_1 \approx K_2$	Relación de isotopía de nudos (links).
$\omega(K)$	Torsión del nudo K .
$L_K(A)$	Polinomio 1-variable de Kauffman del link K , en la variable A .
$K_1 \underset{\tilde{M}}{\sim} K_2$	K_1 es Markov equivalente a K_2 .
$X_K(\lambda, \mathbf{u})$	Polinomio 2-variable de HOMFLYPT del nudo K , en las variables λ y \mathbf{u} .
$V_K(\mathbf{u})$	Polinomio 1-variable de Jones del nudo K , en la variable \mathbf{u} .
$\nabla_K(\mathbf{t})$	Polinomio 1-variable de Alexander del nudo K , en la variable \mathbf{t} .
$k(\mathbf{d})$	Es el número de líneas verticales que aparecen en el diagrama $\mathbf{d} \in \mathbb{CP}_n$
$\text{Tr}_n^{\frac{1+\epsilon \mathbf{d}}{\epsilon \mathbf{d}}}$	Nuevos invariantes de nudos vía álgebra de Rook.

Capítulo 1

Preliminares de Álgebra

DEFINICIÓN 1.1. Sea X e Y dos espacios topológicos y f una función de X en Y , se dice que f es homeomorfismo si cumple que:

1. f es una función biyectiva.
2. f y f^{-1} son funciones continuas.

1. Álgebra

DEFINICIÓN 1.2. Sea A un \mathbb{C} -espacio vectorial, diremos que A es una \mathbb{C} -álgebra si tenemos un producto asociativo en A , tal que A tiene unidad con el producto, y:

1. $a(b + c) = ab + ac$ $a, b, c \in A$
2. $(a + b)c = ac + bc$ $a, b, c \in A$
3. $\alpha(ab) = a(\alpha b)$ $a, b \in A, \alpha \in \mathbb{C}$

EJEMPLO 1.

1. El \mathbb{C} -espacio vectorial $M_n(\mathbb{C})$ es una \mathbb{C} -álgebra con el producto usual de matrices.
2. Sea V un \mathbb{C} -espacio vectorial, $A := \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$.

A es una \mathbb{C} -álgebra con la composición de funciones.

DEFINICIÓN 1.3. Sea G un grupo finito, el álgebra de un grupo G , denotado por $\mathbb{C}G$ son sumas formales, es decir,

$$\mathbb{C}G = \left\{ \sum_{g \in G} a_g g \mid a_g \in \mathbb{C} \right\}.$$

OBSERVACIÓN 1.

$$\sum_{g \in G} a_g g = \sum_{g \in G} b_g g \iff a_g = b_g.$$

Si aparece $0 \cdot g$, se omite la expresión en la suma formal.

Definamos la suma y el producto en $\mathbb{C}G$ como:

1. $\{\sum \alpha_g g\} + \{\sum \beta_g g\} := \sum (\alpha_g + \beta_g) g.$
2. $\{\sum_{g \in G} \alpha_g g\} \cdot \{\sum_{h \in G} \beta_h h\} := \sum_{k \in G} \gamma_k k$, donde $\gamma_k = \sum_{gh=k} \alpha_g \beta_h$

EJEMPLO 2. Sea $G = S_3 = \{s_0 = (1), s_1, s_2, s_1 s_2 s_1, s_1 s_2, s_2 s_1\}$,

$$x = 0s_0 + is_1 + 2is_2 + \sqrt{2}is_2s_1$$

entonces tenemos que $x \in \mathbb{C}G$

PROPOSICIÓN 1.1. Con las operaciones recién definidas, $\mathbb{C}G$ es un anillo con unidad.

OBSERVACIÓN 2.

1. $0_{\mathbb{C}G} = \sum_{g \in G} 0g$
2. $1_{\mathbb{C}G} = 1e + \sum_{g \neq e} 0g$
3. $\mathbb{C}G$ no es un dominio de integridad. En efecto, sea $g \in G$ tal que su orden es n , entonces:

$$\begin{aligned} g^n &= e \in G \\ g^n - e &= 0 \in \mathbb{C}G \\ \underbrace{(g - e)}_{\neq 0} \underbrace{(g^{n-1} + \dots + e)}_{\neq 0} &= 0 \end{aligned}$$

PROPOSICIÓN 1.2. Si G tiene una presentación $\langle X|R \rangle$, entonces

$$\mathbb{C}G = \text{Alg}_{\mathbb{C}}\{X|R\}$$

2. Tensores

En lo que sigue los \mathbb{C} -espacios vectoriales se consideran de dimensión finita.

DEFINICIÓN 1.4. Sean V y W dos \mathbb{C} -espacios vectoriales. Un producto tensorial de V con W es un par (U_0, ι) donde U_0 es un \mathbb{C} -espacio vectorial $\iota : V \times W \rightarrow U_0$ una función bilineal tal que:

1. La imagen de ι genera a U_0 , es decir $U_0 = \text{vect}\{\iota(v, w) | v \in V, w \in W\}$.
2. Dado $\gamma : V \times W \rightarrow U$ bilineal, existe una función lineal ϕ de U_0 en U tal que $\phi \circ \iota = \gamma$

La definición anterior deja el siguiente diagrama.

$$\begin{array}{ccc}
 & \iota & \\
 V \times W & \xrightarrow{\quad} & U_0 \\
 & \searrow \gamma & \swarrow \phi \\
 & U &
 \end{array}$$

EJEMPLO 3. Sea $V = M_{n \times 1}(\mathbb{K})$, $W = M_{1 \times m}(\mathbb{K})$, veamos que (U_0, ι) es un producto tensorial de V con W cuando $U_0 = M_{n \times m}(\mathbb{K})$ y $\iota(M, N) = MN$ producto usual.

1: $\text{Im}(\iota)$ genera a $M_{m \times n}(\mathbb{K})$

Una base de $V \times W$ es $\{(E_{i1}, 0), (0, E_{1j}), 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$. Entonces tenemos que:

$$\iota(E_{i1}, E_{1j}) = E_{i1}E_{1j} = E_{ij}$$

por lo tanto $E_{ij} \in \text{Im}(\iota)$, es decir,

$$\text{Im}(\iota) = M_{n \times m}(\mathbb{K}).$$

2: Basta definir $\phi(E_{ij})$.

$\phi(E_{ij}) = \phi \circ \iota(E_{i1}, E_{1j}) = \gamma(E_{i1}, E_{1j})$, así γ se extiende por linealidad y claramente $\phi \circ \iota = \gamma$

El siguiente Teorema es importante, ya que nos muestra que el producto tensorial es único salvo isomorfismo.

TEOREMA 1.1. El Producto tensorial entre dos \mathbb{C} -espacios vectoriales V y W es unico en el siguiente sentido si (U_0, ι) y (U'_0, ι') son producto tensoriales de V con W entonces existe un isomorfismo $\delta : U_0 \rightarrow U'_0$ tal que $\delta \circ \iota = \iota'$.

NOTACIÓN 1. Como (\mathbf{U}_0, ι) es único para el producto tensorial de V con W lo denotaremos simplemente $V \otimes W$ y se lee V tensor W , $\mathbf{U}_0 = V \otimes W$

NOTACIÓN 2. A la imagen de un elemento (v, w) por medio de ι lo notaremos por $v \otimes w$.

PROPOSICIÓN 1.3. Para todo $v, v' \in V$, $w, w' \in W$ y $\alpha \in K$

1. $(v + v') \otimes w = v \otimes w + v' \otimes w$
2. $v \otimes (w + w') = v \otimes w + v \otimes w'$
3. $\alpha v \otimes w = v \otimes \alpha w$
4. $v \otimes 0 = 0 = 0 \otimes w$

3. Módulos

Sea A anillo conmutativo con unidad. Sea M un grupo abeliano.

Diremos que M es un A -módulo izquierdo si existe una función η de $A \times M$ en M dada por $\eta(a, m) = am$ tal que para todo $a, a_1, a_2 \in A$ y $m, m_1, m_2 \in M$ se tiene:

1. $a(m_1 + m_2) = am_1 + am_2$
2. $(a_1 + a_2)m = a_1m + a_2m$
3. $1_A m = m$
4. $a_1(a_2m) = (a_1a_2)m$

NOTACIÓN 3. Si M es un A -módulo izquierdo se denota por simplicidad ${}_A M$

Análogamente se define el concepto de A -módulo derecho, y lo denotaremos por M_A .

EJEMPLO 4.

1. Todo K -espacio vectorial V , es un K -módulo (derecho/izquierdo).
2. Todo grupo abeliano es un \mathbb{Z} -módulo(izquierdo).
3. A es un anillo: tenemos que ${}_A A$ y A_A

Acontinuación extenderemos a módulos la idea de tensor dada anteriormente para espacios vectoriales.

DEFINICIÓN 1.5. Sean $M_A, {}_A N$ y sea G un grupo abeliano. Una función f de $M \times N$ en G se dice bilineal si, para todo $m, m_1, m_2 \in M$ y $n, n_1, n_2 \in N$ y $a \in A$. Se tiene:

1. $f(m_1 + m_2, n) = f(m_1, n) + f(m_2, n)$
2. $f(m, n_1 + n_2) = f(m, n_1) + f(m, n_2)$
3. $f(ma, n) = f(m, an) = af(m, n)$

DEFINICIÓN 1.6. Sean $M_A, {}_A N$, diremos que un par $(M \otimes_A N, \iota)$ es un producto tensorial de M_A con ${}_A N$, si $M \otimes_A N$ es un grupo abeliano. Si ι es una función bilineal tal que para toda función bilineal $\gamma : M \times N \rightarrow G$, existe un único homomorfismo de grupos abelianos $\tilde{\gamma} : M \otimes_A N \rightarrow G$ tal que $\tilde{\gamma} \circ \iota = \gamma$

TEOREMA 1.2. El producto tensorial entre M_A y ${}_A N$ siempre existe y esta únicamente determinado salvo isomorfismo. Así, es legitima la notacion de $M \otimes_A N$.

OBSERVACIÓN 3. Dado $\iota(m, n) := m \otimes n$, tenemos las siguientes propiedades:
Para todo $m, m' \in M, n, n' \in N$ y $a \in A$.

1. $(m + m') \otimes n = m \otimes n + m' \otimes n$.
2. $m \otimes (n + n') = m \otimes n + m \otimes n'$.
3. $ma \otimes n = m \otimes an$.
4. $m \otimes 0 = 0 = 0 \otimes n$.

EJEMPLO 5. Sea G un grupo abeliano, es decir G es un \mathbb{Z} -módulo izquierdo, también tenemos que \mathbb{Q} es un \mathbb{Z} -módulo derecha, entonces tenemos el producto tensorial $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} G$.

Supongamos que G es finito.

Sea $g \in G$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $ng = 0$,

$$\begin{aligned}
 q \otimes g &= qn^{-1}n \otimes g \\
 &= (qn^{-1})n \otimes g \\
 &= qn^{-1} \otimes ng \\
 &= qn^{-1} \otimes 0 \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Es decir $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{G} = 0$

DEFINICIÓN 1.7. Sean A y B anillos, sea ${}_A M$ y M_B , si ocurre que para todo $a \in A$, $b \in B$ y $m \in M$ se tiene $(am)b = a(mb)$. Diremos que M es un (A, B) -bimódulo.

PROPOSICIÓN 1.4. Sean A, B, C anillos. Sea U un (A, B) -bimódulo y M un (B, C) -bimódulo, entonces tenemos que $U \otimes_B M$ es un (A, C) -bimódulo.

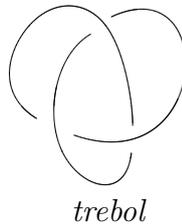
Capítulo 2

Nudos

1. Conceptos básicos

DEFINICIÓN 2.1. *Un nudo es una inscrustación f de S^1 en \mathbb{R}^3 , es decir, $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una función continua tal que S^1 es homeomorfo a $f(S^1)$.*

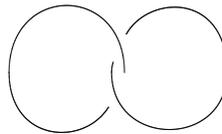
EJEMPLO 6.



En lo sucesivo el nudo será identificado con $K = f(S^1)$

DEFINICIÓN 2.2. *Un link es una unión disjunta finita de nudos.*

EJEMPLO 7.



Es un link con dos componentes.

DEFINICIÓN 2.3. *Dos nudos se dicen isotópicos (o equivalentes) si uno de ellos puede ser obtenido deformando continuamente el otro, es decir, si dos nudos K y K' son isotópicos, se denota $K \approx K'$, si y solo si existe un homeomorfismo $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $F(K) = K'$*

NOTACIÓN 4. *El conjunto de todos los nudos en \mathbb{R}^3 , se denotará \mathcal{K} .*

PROPOSICIÓN 2.1. \approx es una relación de equivalencia en \mathcal{K} .

El problema fundamental (no resuelto a la fecha) es la clasificación de nudos bajo isotopía. Una herramienta que ayuda a la clasificación de nudos son las invariantes de nudos.

DEFINICIÓN 2.4. Una invariante es una función $\mathcal{X} : \mathcal{K} \rightarrow \mathbf{Obj}$ donde \mathbf{Obj} es un conjunto de objetos conocidos y si $K \approx K'$ entonces $\mathcal{X}(K) = \mathcal{X}(K')$.

Nos interesa en particular el caso que \mathbf{Obj} es un anillo de polinomios. En este caso la invariante se llama invariante de nudos polinomial.

Los invariantes de nudos polinomiales clásicas son:

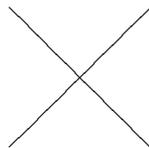
1. Polinomio de Alexander (1928).
2. Polinomio de Jones (1984).
3. Polinomio Homflypt (1985).
4. Polinomio de Kauffman (1987).

2. Diagrama de un nudo

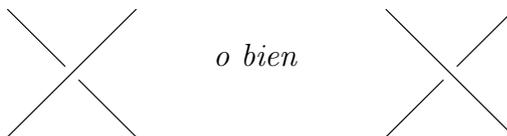
En cuanto a orden para construir invariantes de nudos, es útil trasladar los nudos de \mathbb{R}^3 a diagramas de nudos en \mathbb{R}^2 . Aquí aparecerá un Teorema fundamental para la teoría de nudos (debido a Reidemeister). En pocas palabras este teorema dice que clasificar nudos en \mathbb{R}^3 según isotopía, equivale a clasificar los diagramas de nudos en \mathbb{R}^2 según \mathbf{R} -isotopía.

DEFINICIÓN 2.5. Dado un nudo K , le asociamos un diagrama D_K de la siguiente forma:

1. Se proyecta el nudo K en el plano de modo genérico.

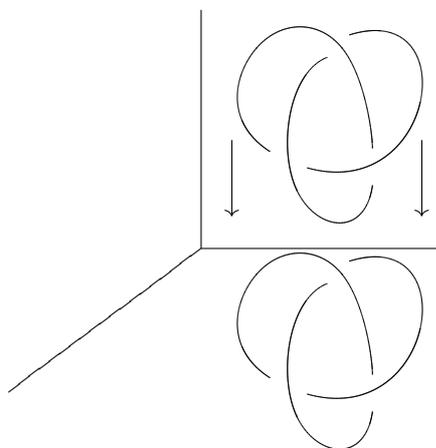


2. Se asigna a cada cruce una de las siguientes configuraciones:



dependiendo si el cruce proviene de arriba/abajo o viceversa.

EJEMPLO 8.



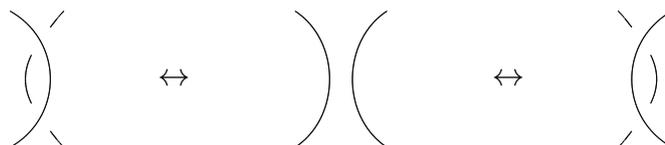
DEFINICIÓN 2.6. Los movimientos que describiremos a continuación se llaman los movimientos de Reidemeister.

R_0 : Isotopía en \mathbb{R}^2

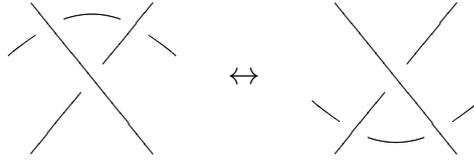
R_1 :



R_2 :

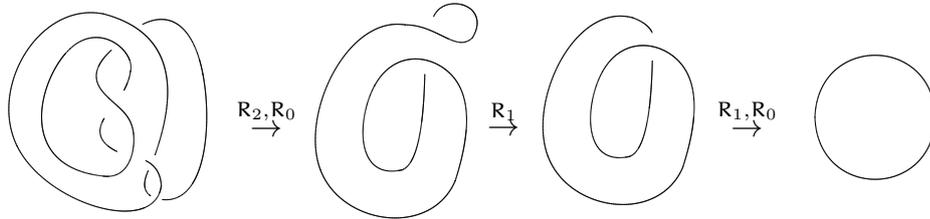


R_3 :

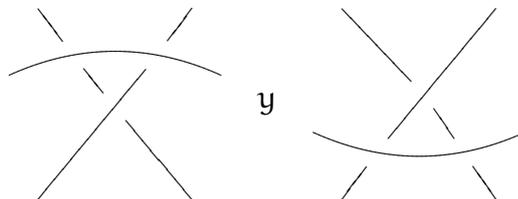


DEFINICIÓN 2.7. Diremos que dos diagramas de nudos D y D' son R -isotópicos, si y sólo si, uno de ellos puede ser obtenido del otro, usando los movimientos de Reidemeister. Este hecho se denotará $D \approx_R D'$.

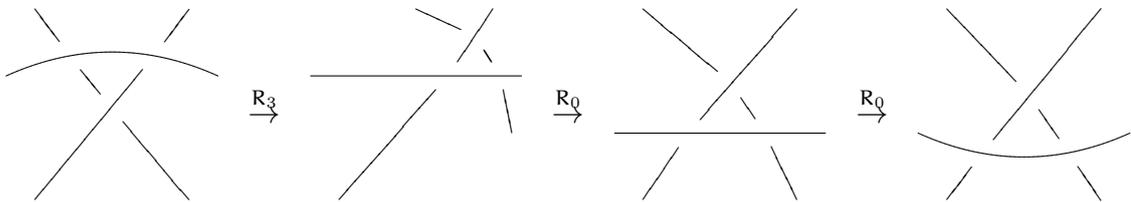
EJEMPLO 9.



OBSERVACIÓN 4.



Son R -isotópicos. En efecto, observemos que podemos obtener uno del otro mediante movimientos R_3 y R_0 .

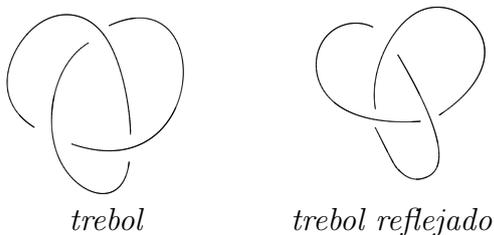


TEOREMA 2.1 (Reidemeister, 1927).

Sean K y K' dos nudos y $D_K, D_{K'}$, sus respectivos diagramas entonces $K \approx K'$ si y solo si $D_K \approx_R D_{K'}$.

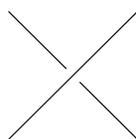
DEFINICIÓN 2.8. Sea K un nudo, el reflejado de él, se denotará K^* , significa cambiar los cruces en K .

EJEMPLO 10.



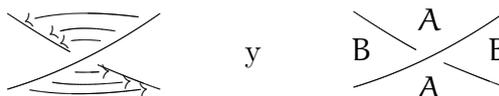
3. Polinomio de Kauffman

Sea K un nudo. Fijemos un cruce del nudo K .

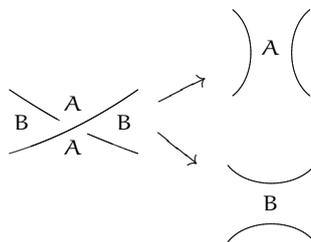


Sobre este cruce hacemos una descomposición, siguiendo la siguiente etapa:

1. Asignaremos marcas al cruce de la forma que indica la figura, es decir, tomar la línea continua del cruce y pensar que giramos está en sentido anti-horario:

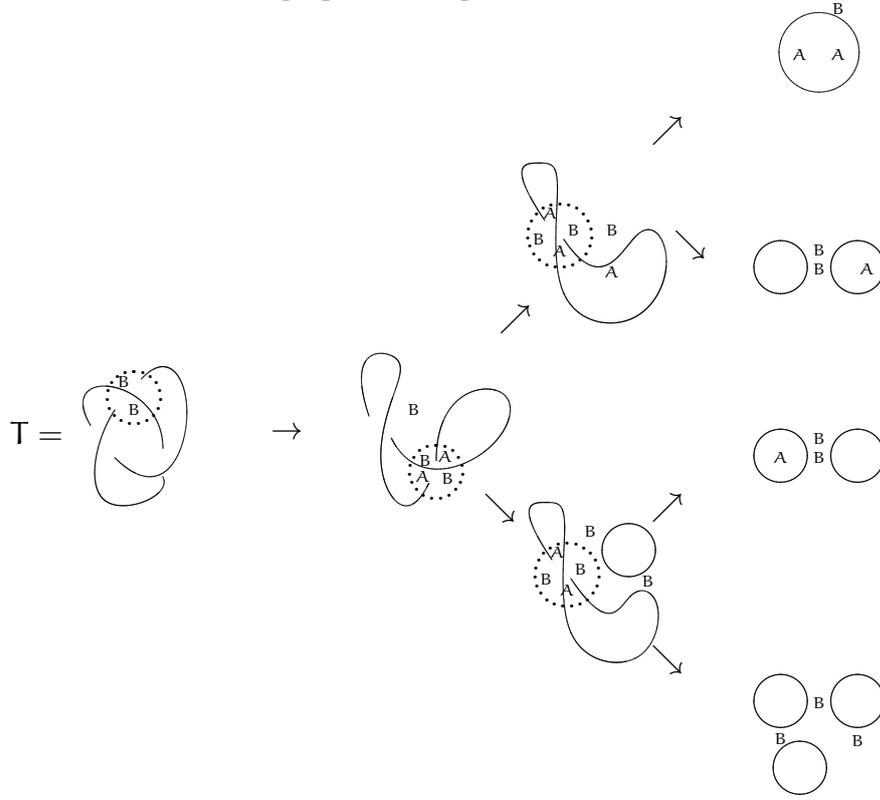


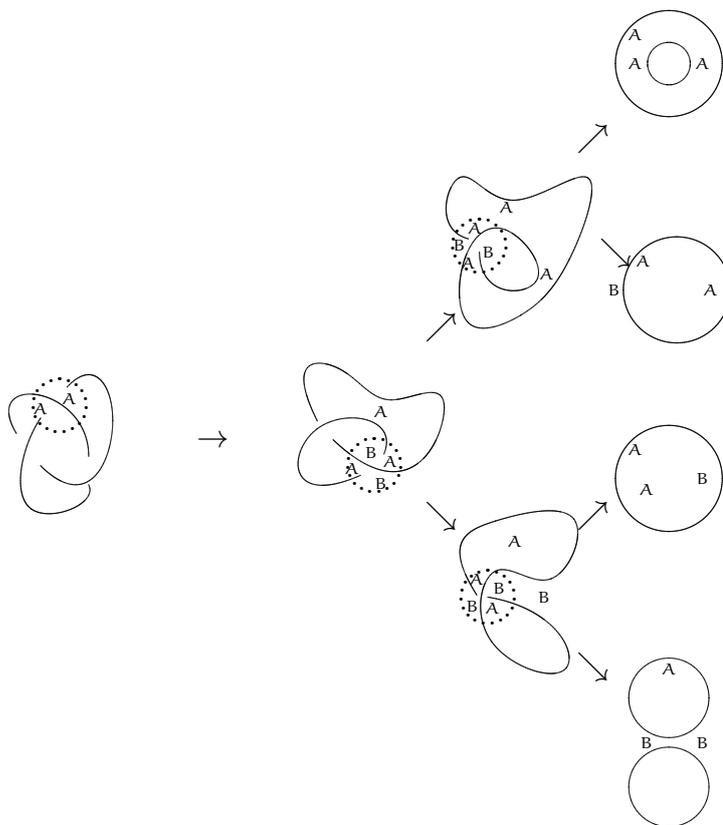
2. Se descompone cada cruce con las marcas en la siguiente forma:



3. Continuamos con este procedimiento hasta obtener solamente unknot(no-nudos) con sus respectivas marcas.

EJEMPLO 11. *Apliquemos el procedimiento al trébol.*





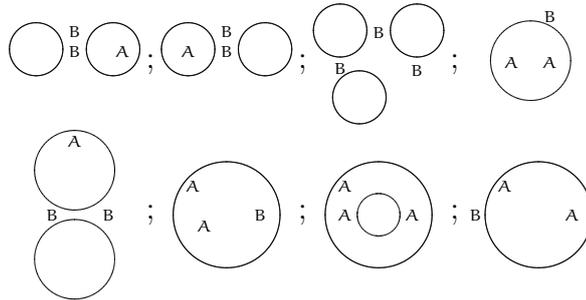
DEFINICIÓN 2.9. Sea K un nudo.

1. Los estados de un nudo son todos sus descendientes con sus respectivas marcas. Denotaremos por $\text{Est}(K)$ al conjunto de todos los estados de K .
2. Sea $\sigma \in \text{Est}(K)$. El producto conmutativo de las marcas de σ , es llamado efecto de σ en K y el cual denotaremos por $\langle K, \sigma \rangle$.
3. Sea $\sigma \in \text{Est}(K)$ un estado de n componentes. Se define:

$$\|\sigma\| := n - 1$$

OBSERVACIÓN 5. Si un nudo K tiene n cruces, entonces, la cantidad de estados de K es 2^n .

EJEMPLO 12. Los estados del ejemplo anterior son:



En lo que sigue, consideraremos el anillo de polinomios $\mathbb{Z}[A, B, z]$, donde A, B y z son tres variables conmutativas e independientes.

DEFINICIÓN 2.10. Sea K un nudo. El polinomio Bracket de K , que denotaremos por $\langle K \rangle$, se define como sigue:

$$\langle K \rangle := \sum_{\sigma \in \text{EST}(K)} \langle K, \sigma \rangle z^{|\sigma|} \in \mathbb{Z}[A, B, z]$$

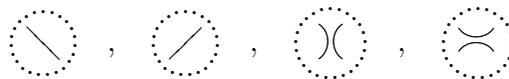
Además, notar que,

$$\langle \bigcirc \rangle = 1$$

EJEMPLO 13. Calculemos el polinomio bracket del trébol

$$\begin{aligned} \langle T \rangle &= A^3z + A^2B + A^2B + AB^2z + A^2B + AB^2z + AB^2z + B^3z^2 \\ &= A^3z + 3A^2B + 3AB^2z + B^3z^2 \end{aligned}$$

NOTACIÓN 5. Denotaremos por



o también

$$K \setminus , K / , K) (, K \times$$

el diagrama de un nudo que sólo difiere en el cruce que se indica.

OBSERVACIÓN 6. Notemos que el polinomio Bracket no es un invariante de nudos, ya que debe respetar los movimientos de Reidemeister, lo cual no ocurre pues no respeta R_1 esto lo veremos mas adelante.

OBSERVACIÓN 7. *Un invariante de nudos debe respetar los movimientos de Reidemeister, es decir, si I es un invariante de nudos, entonces :*

$$\begin{aligned}
 1. \quad & I \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) = I \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) = I \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) \\
 2. \quad & I \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) = I \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) = I \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) \\
 3. \quad & I \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) = I \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

LEMA 2.2. *Sea K un nudo, entonces:*

1. $\langle K \amalg \bigcirc \rangle = z \langle K \rangle$. En particular, $\langle \bigcirc^n \rangle = z^{n-1}$.
- 2.

$$\langle \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \rangle = A \langle \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \rangle + B \langle \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \rangle$$

- 3.

$$\langle \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \rangle = B \langle \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \rangle + A \langle \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \rangle$$

Demostración. Notemos que:

$$\begin{aligned}
 \text{Est}(K \amalg \bigcirc) &= \{ \sigma \amalg \bigcirc ; \sigma \in \text{Est}(K) \} \\
 &= \text{Est}(K) \amalg \text{Est}(\bigcirc) \\
 &= \text{Est}(K) \amalg \{ \bigcirc \}
 \end{aligned}$$

Además, si $\sigma \in \text{Est}(K \amalg \bigcirc)$, entonces

$$\langle K \amalg \bigcirc, \sigma \rangle = \langle K, \sigma \rangle$$

pues el no-nudo no tiene marcas. Así, tenemos:

$$\begin{aligned}
\langle \mathbb{K} \amalg \bigcirc \rangle &= \sum_{\sigma \in \text{Est}(\mathbb{K} \amalg \bigcirc)} \langle \mathbb{K} \amalg \bigcirc, \sigma \rangle z^{|\sigma|} \\
&= \sum_{\sigma \in \text{Est}(\mathbb{K}) \amalg \{\bigcirc\}} \langle \mathbb{K}, \sigma \rangle z^{|\sigma|} \\
&= \sum_{\rho \in \text{Est}(\mathbb{K})} \langle \mathbb{K}, \rho \rangle z^{|\rho|+1} \\
&= z \left(\sum_{\rho \in \text{Est}(\mathbb{K})} \langle \mathbb{K}, \rho \rangle z^{|\rho|} \right) \\
&= z \langle \mathbb{K} \rangle
\end{aligned}$$

Para la segunda parte, notemos que:

$$\text{Est}(\textcircled{\diagdown}) = \text{Est}(\mathbb{K} \underset{\text{A}}{\overset{\text{B}}{\times}}) = \text{Est}(\mathbb{K})^{\text{A}}(\text{ }) \amalg \text{Est}(\mathbb{K} \underset{\text{B}}{\smile}).$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\langle \textcircled{\diagdown} \rangle &= \sum_{\sigma \in \text{Est}(\textcircled{\diagdown})} \langle \textcircled{\diagdown}, \sigma \rangle z^{|\sigma|} \\
&= \sum_{\sigma \in \text{Est}(\mathbb{K})^{\text{A}}(\text{ })} \langle \mathbb{K} \rangle(\sigma) z^{|\sigma|} + \sum_{\sigma \in \text{Est}(\mathbb{K} \underset{\text{B}}{\smile})} \langle \mathbb{K} \underset{\text{B}}{\smile}, \sigma \rangle z^{|\sigma|} \\
&= \text{A} \left(\sum_{\sigma \in \text{Est}(\mathbb{K})} \langle \mathbb{K} \rangle(\sigma) z^{|\sigma|} \right) + \text{B} \left(\sum_{\sigma \in \text{Est}(\mathbb{K} \underset{\text{B}}{\smile})} \langle \mathbb{K} \underset{\text{B}}{\smile}, \sigma \rangle z^{|\sigma|} \right) \\
&= \text{A} \langle \textcircled{\diagup} \rangle + \text{B} \langle \textcircled{\smile} \rangle
\end{aligned}$$

es decir:

$$\langle \textcircled{\diagdown} \rangle = \text{A} \langle \textcircled{\diagup} \rangle + \text{B} \langle \textcircled{\smile} \rangle.$$

Análogamente, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\langle \textcircled{\diagup} \rangle &= \sum_{\sigma \in \text{Est}(\textcircled{\diagup})} \langle \textcircled{\diagup}, \sigma \rangle z^{|\sigma|} \\
&= \sum_{\sigma \in \text{Est}(\mathbb{K})^{\text{B}}(\text{ })} \langle \mathbb{K} \rangle(\sigma) z^{|\sigma|} + \sum_{\sigma \in \text{Est}(\mathbb{K} \underset{\text{A}}{\times})} \langle \mathbb{K} \underset{\text{A}}{\times}, \sigma \rangle z^{|\sigma|}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= B \left(\sum_{\sigma \in \text{Est}(K)} \langle K \rangle(\sigma) z^{|\sigma|} \right) + A \left(\sum_{\sigma \in \text{Est}(K)} \langle K \rangle(\sigma) z^{|\sigma|} \right) \\
 &= B \langle \text{diagram} \rangle + A \langle \text{diagram} \rangle
 \end{aligned}$$

es decir:

$$\langle \text{diagram} \rangle = B \langle \text{diagram} \rangle + A \langle \text{diagram} \rangle.$$

Lo cual completa la demostración. □

PROPOSICIÓN 2.2.

$$\langle \text{diagram} \rangle = AB \langle \text{diagram} \rangle + (A^2 + B^2 + ABz) \langle \text{diagram} \rangle.$$

(2.1)

Demostración.

$$\begin{aligned}
 \langle \text{diagram} \rangle &= A \langle \text{diagram} \rangle + B \langle \text{diagram} \rangle \\
 &= A[A \langle \text{diagram} \rangle + B \langle \text{diagram} \rangle] + B[A \langle \text{diagram} \rangle + B \langle \text{diagram} \rangle] \\
 &= A[A \langle \text{diagram} \rangle + Bz \langle \text{diagram} \rangle] + B[A \langle \text{diagram} \rangle + B \langle \text{diagram} \rangle] \\
 &= AB \langle \text{diagram} \rangle + (A^2 + B^2) \langle \text{diagram} \rangle + ABz \langle \text{diagram} \rangle \\
 &= AB \langle \text{diagram} \rangle + (A^2 + B^2 + ABz) \langle \text{diagram} \rangle.
 \end{aligned}$$

□

PROPOSICIÓN 2.3.

1.

$$\langle \text{diagram} \rangle = (Az + B) \langle \text{diagram} \rangle$$

2.

$$\langle \overline{\mathcal{G}} \rangle = (A + Bz) \langle \overline{\quad} \rangle$$

Demostración. Sólo probaremos la primera parte, ya que la segunda es análoga.

$$\begin{aligned} \langle \overline{\mathcal{G}} \rangle &= B \langle \overline{\mathcal{G}} \rangle + A \langle \overline{\mathcal{O}} \rangle \\ &= B \langle \overline{\quad} \rangle + Az \langle \overline{\quad} \rangle \quad (\text{Lema 2.2}) \\ &= (Az + B) \langle \overline{\quad} \rangle \end{aligned}$$

□

Para tener que el Bracket sea un invariante de nudos, por proposición (2.2), debe cumplir:

$$\begin{aligned} AB &= 1 \\ A^2 + B^2 + ABz &= 0 \end{aligned}$$

PROPOSICIÓN 2.4. Sea $B = A^{-1}$ y $z = -(A^2 + A^{-2})$, entonces:

1. $\langle \quad \rangle$ respeta R0
2. $\langle \quad \rangle$ respeta R3
3. Para R1 tenemos.

a)

$$\langle \overline{\mathcal{G}} \rangle = -A^3 \langle \overline{\quad} \rangle$$

b)

$$\langle \overline{\mathcal{G}} \rangle = -A^{-3} \langle \overline{\quad} \rangle$$

Demostración. Veamos que $\langle \quad \rangle$ respeta R3 con las especialidades dadas.

$$\begin{aligned}
\langle \text{Diagrama 1} \rangle &= B \langle \text{Diagrama 2} \rangle + A \langle \text{Diagrama 3} \rangle \\
&= B \langle \text{Diagrama 4} \rangle + A \langle \text{Diagrama 5} \rangle \\
&= B \langle \text{Diagrama 6} \rangle + A \langle \text{Diagrama 7} \rangle \\
&= \langle \text{Diagrama 1} \rangle
\end{aligned}$$

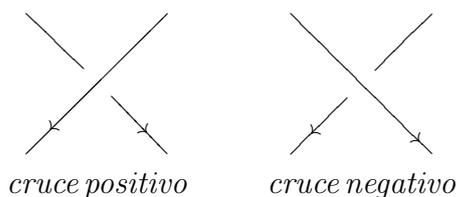
Así, el bracket bajo las condiciones anteriores respeta R_0, R_2 y R_3 , pero no R_1 (ver proposición 2.4). \square

DEFINICIÓN 2.11. Una función que respeta R_0, R_2 y R_3 se llama invariante de isotopía regular.

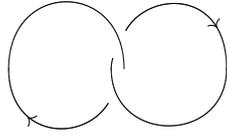
Principio de Kauffman. Dada una invariante de isotopía regular, es posible construir una invariante a partir de ella, vía normalización y eventualmente re-escalamiento.

Como sabemos que el Bracket es invariante de isotopía regular, y en orden a usar el principio de Kauffman, introduciremos la noción de orientación de un nudo para poder crear así un invariante de nudos, conocido como el Polinomio de Kauffman. A continuación daremos una definición necesaria para ir construyendo este polinomio .

DEFINICIÓN 2.12. Un nudo (o diagrama de nudo) se dice orientada si cada arco tiene orientación de modo tal que en cada cruce se tiene una de las siguientes:



EJEMPLO 14.

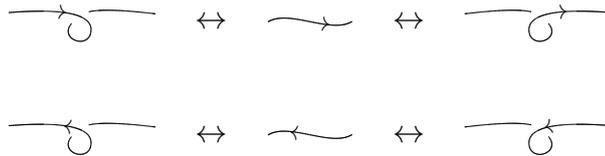


Así, también tenemos los conceptos de isotopía de nudos orientados.

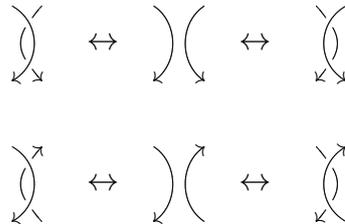
Es decir, dos nudos orientados K y K' son isotópicos si existe un homeomorfismo de \mathbb{R}^3 en \mathbb{R}^3 que preserve orientación y que envía K en K' .

También tenemos los conceptos de los movimientos de Reidemeister orientados R_0 , R_1 , R_2 y R_3 , para nudos orientados.

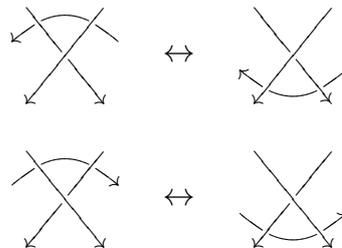
EJEMPLO 15. R_1 :



R_2 :



R_3 :





DEFINICIÓN 2.13. Si K es un nudo orientado, el grado de torsión $\omega(K)$ de K . Se define como sigue:

$$\omega(K) := \sum_{p \text{ cruces en } K} \varepsilon(p).$$

Donde $\varepsilon(p) = 1$ o -1 , dependiendo si p es un cruce positivo o negativo.

EJEMPLO 16.

$$\omega(\text{Three positive crossings}) = 3 \quad , \quad \omega(\text{Three negative crossings}) = -3$$

PROPOSICIÓN 2.5. ω es una invariante de isotopía regular.

Demostración. Primero observemos que la torsión respeta el movimiento R_0 . Sólo basta mostrar que respeta los movimientos R_2 y R_3 . Para el movimiento R_2 , observemos que:

$$\omega(\text{Crossing with strand over}) = 1 - 1 = 0 = \omega(\text{Two separate strands})$$

$$\omega(\text{Crossing with strand under}) = 1 - 1 = 0 = \omega(\text{Two separate strands})$$

Para el movimiento R_3 sólo veremos los siguientes dos casos:

$$\omega(\text{Crossing with strand over and another crossing}) = -1 - 1 + 1 = -1 = \omega(\text{Crossing with strand under and another crossing})$$

$$\omega(\text{Crossing with strand under and another crossing}) = 1 + 1 - 1 = 1 = \omega(\text{Crossing with strand over and another crossing})$$

□

ω no respeta R_1 , sin embargo tenemos la siguiente proposición:

PROPOSICIÓN 2.6.

1.

$$\omega(\text{diagrama 1}) = 1 + \omega(\text{diagrama 2}).$$

2.

$$\omega(\text{diagrama 3}) = 1 + \omega(\text{diagrama 4}).$$

3.

$$\omega(\text{diagrama 5}) = \omega(\text{diagrama 6}) - 1.$$

4.

$$\omega(\text{diagrama 7}) = \omega(\text{diagrama 8}) - 1.$$

DEFINICIÓN 2.14. Sea K un nudo orientado. El polinomio de Kauffman $\mathcal{L}_K(A)$ se define como sigue:

$$\mathcal{L}_K(A) = (-A)^{-3\omega(K)} \langle K \rangle \in \mathbb{Z}[A, A^{-1}].$$

EJEMPLO 17. Calculemos el polinomio de Kauffman del trébol.

Sea $T_+ =$ 

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{T_+}(A) &= (-A)^{-3\omega(T)} \langle T \rangle \\ &= (-A)^{-3(3)} \{A^3(-(A^2 - A^{-2})) + 3A^2A^{-1}\} + \\ &\quad (-A)^{-3(3)} \{3AA^{-2}(-(A^2 + A^{-2})) + A^{-3}(-(A^2 + A^{-2}))^2\} \\ &= A^{-4} + A^{-12} - A^{-16} \end{aligned}$$

TEOREMA 2.3 (Kauffman, 1987).

\mathcal{L}_K es un invariante de nudos orientados.

Demostración. Hay que verificar que \mathcal{L} respeta $R_0 - R_3$. Pero como el bracket y la torsión son invariantes de isotopía regular, así que sólo resta ver el movimiento R_1 . Tenemos:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{\text{Hopf}}(A) &= (-A^3)^{-\omega(\text{Hopf})} \langle \text{Hopf} \rangle \\
 &= (-A^3)^{-(1+\omega(\text{Hopf}))} (-A^3 \langle \text{Hopf} \rangle) \\
 &= (-A^3)^{-\omega(\text{Hopf})} \langle \text{Hopf} \rangle \\
 &= \mathcal{L}_{\text{Hopf}}(A)
 \end{aligned}$$

Es decir,

$$\mathcal{L}_{\text{Hopf}}(A) = \mathcal{L}_{\text{Hopf}}(A)$$

Los otros casos son análogos.

□

PROPOSICIÓN 2.7. *Sea K un nudo, entonces*

$$\langle K^* \rangle(A) = \langle K \rangle(A^{-1})$$

Demostración. Procederemos por inducción sobre el número de cruces. Para $n = 2$, basta estudiar el Hopf-link, pues es el único nudo (salvo reflejado) con dos cruces. Un cálculo directo, nos muestra que:

$$\langle \text{Hopf} \rangle = -A^4 - A^{-4} = \langle \text{Hopf} \rangle$$

Ahora, supongamos que la proposición es válida para nudos con $n - 1$ cruces. Sea K un nudo con n cruces, luego:

$$\begin{aligned}
 \langle K \rangle(A^{-1}) &= \langle K \text{ con un cruce } \rangle(A^{-1}) \\
 &= A^{-1} \langle K \rangle(A^{-1}) + A \langle K \text{ con otro cruce } \rangle(A^{-1}) \\
 &= A^{-1} \langle K^* \rangle(A) + A \langle K^* \text{ con otro cruce } \rangle(A) \quad (\text{Hip induc.})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \langle \mathbf{K}^* \left\langle \begin{array}{c} \text{A}^{-1} \\ \text{A} \end{array} \right\rangle \rangle (\mathbf{A}) \\
&= \langle \mathbf{K}^* \rangle (\mathbf{A})
\end{aligned}$$

es decir, $\langle \mathbf{K}^* \rangle (\mathbf{A}) = \langle \mathbf{K} \rangle (\mathbf{A}^{-1})$. □

PROPOSICIÓN 2.8. *Sea \mathbf{K} un nudo orientado y \mathbf{K}^* su reflejado entonces $\mathcal{L}_{\mathbf{K}^*}(\mathbf{A}) = \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(\mathbf{A}^{-1})$.*

Demostración. Por Proposición 2.7 tenemos:

$$\langle \mathbf{K}^* \rangle (\mathbf{A}) = \langle \mathbf{K} \rangle (\mathbf{A}^{-1})$$

Procedamos con lo que tenemos que demostrar:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\mathbf{K}^*}(\mathbf{A}) &= (-\mathbf{A}^3)^{-\omega(\mathbf{K}^*)} \langle \mathbf{K}^* \rangle (\mathbf{A}) & \omega(\mathbf{K}^*) &= -\omega(\mathbf{K}) \\
&= (-\mathbf{A}^3)^{\omega(\mathbf{K})} \langle \mathbf{K} \rangle (\mathbf{A}^{-1}) \\
&= (-\mathbf{A}^{-1})^3)^{-\omega(\mathbf{K})} \langle \mathbf{K} \rangle (\mathbf{A}^{-1}) \\
&= \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(\mathbf{A}^{-1})
\end{aligned}$$

Así concluye la demostración. □

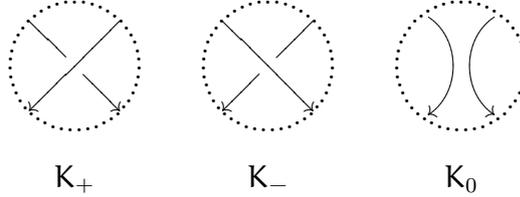
EJEMPLO 18.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\mathbf{T}^*}(\mathbf{A}) &= (-\mathbf{A})^{-3\omega(\mathbf{T}^*)} \langle \mathbf{T} \rangle \\
&= \mathbf{A}^4 + \mathbf{A}^{12} - \mathbf{A}^{16}
\end{aligned}$$

Tenemos que $\mathcal{L}_{\mathbf{T}} \neq \mathcal{L}_{\mathbf{T}^*}$ entonces el nudo \mathbf{T} no es isotópico con \mathbf{T}^* , podemos decir que el polinomio distingue isotopía del trébol con su reflejado.

4. Alexander-Conway

DEFINICIÓN 2.15. Notemos que tres nudos orientados K_+ , K_- y K_0 , difieren en un solo cruce, como se indica en la siguiente figura:



TEOREMA 2.4. Sea K un nudo y $z \neq 0$, entonces existe un único polinomio, $\nabla_K(z) \in \mathbb{Z}[z]$ definido por:

1. $\nabla_K(z)$ es un invariante de nudos.
2. $\nabla_{\bigcirc}(z) = 1$
3. $\nabla_{K_+}(z) - \nabla_{K_-}(z) = z\nabla_{K_0}(z)$

PROPOSICIÓN 2.9. Sea \bigcirc_u un link trivial con u componentes ($u \geq 2$) entonces:

$$\nabla_{\bigcirc_n}(z) = 0.$$

Demostración. Haremos la demostración por inducción sobre u . Para $u = 2$ tenemos que:

$$\begin{aligned} \nabla_{\bigcirc}(z) &= \nabla_{\bigcirc}(z) + z\nabla_{\bigcirc_2}(z) \\ 1 &= 1 + z\nabla_{\bigcirc_2}(z) \\ 0 &= \nabla_{\bigcirc_2} \end{aligned}$$

Supongamos que es válida la Proposición para $u = n - 1$, demostraremos que es válida para $u = n$

$$\begin{aligned} \nabla_{\bigcirc_{n-1}}(z) &= \nabla_{\bigcirc_{n-1}}(z) + z\nabla_{\bigcirc_n}(z) \\ 0 &= z\nabla_{\bigcirc_n}(z) \\ 0 &= \nabla_{\bigcirc_n}(z) \end{aligned}$$

así concluye la demostración. □

DEFINICIÓN 2.16. *El polinomio clásico de Alexander $\Delta_K(t)$. Se puede obtener mediante el polinomio de Alexander-Conway de la siguiente manera:*

$$\Delta_K(t) \doteq \nabla_K(t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})$$

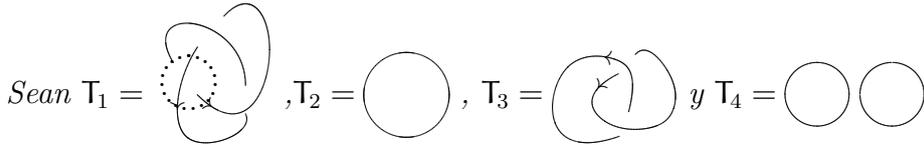
donde \doteq significa que $\Delta_K(t)$ y $\nabla_K(t^{-\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}})$ difieren en un solo factor $\pm t^k$, para algún $k \in \mathbb{Z}$.

PROPOSICIÓN 2.10. *Sea K^* el nudo reflejado de K , entonces:*

$$\Delta_{K^*}(t) = \Delta_K(t)$$

La anterior igualdad implica que el polinomio de Alexander no sirve para ver cuando un nudo es isotópico a su reflejado.

EJEMPLO 19.



Entonces:

$$\begin{aligned} \nabla_{T_1}(z) &= \nabla_{T_2}(z) + z\nabla_{T_3}(z) \\ &= 1 + z(\nabla_{T_4}(z) + z\nabla_{T_2}(z)) \\ &= 1 + z^2. \end{aligned}$$

Entonces el polinomio de Conway es $\nabla_{T_1}(z) = 1 + z^2$ y el polinomio de Alexander es $\Delta_{T_1}(t) = t^{-1} + t - 1 \doteq t^2 - t + 1$

5. Polinomio de Jones

Después de la aparición del polinomio de Conway, hubo muchos trabajos relacionados con él, pero curiosamente nadie intentó generalizar el esquema recursivo de Conway. No fué sino hasta 1984 que Vauhgan Jones anunció su polinomio, derivado de una representación del grupo de trenzas de Artin en un álgebra de Von Neumann. Jones demostró que su polinomio de Laurant está determinado por tres axiomas, de manera análoga al polinomio de Conway.

DEFINICIÓN 2.17. *El polinomio de jones asociado a un nudo orientado K , es un polinomio $V_K(t) \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$, que satisface:*

1. $K \approx K'$ entonces $V_K(t) = V_{K'}(t)$
2. $V_0(t) = 1$
3. $t^{-1}V_{K_+} - tV_{K_-} = (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})V_{K_0}$

TEOREMA 2.5. *Sea K un nudo orientado, entonces $V_K(t)$ existe y $V_K(t) = \mathcal{L}_K(t^{-\frac{1}{4}})$.*

Demostración.

1. Tomemos $V_K(t) := \mathcal{L}_K(t^{-\frac{1}{4}})$, entonces V satisface 1, pues, \mathcal{L}_K es un invariante de nudos.
2. $V_0(t) = \mathcal{L}_0(t^{-\frac{1}{4}}) = 1$
3. Recordemos:
 - a)

$$\langle \text{diagram with diagonal line} \rangle = A \langle \text{diagram with two arcs} \rangle + A^{-1} \langle \text{diagram with two arcs} \rangle \quad /A$$

b)

$$\langle \text{diagram with diagonal line} \rangle = A^{-1} \langle \text{diagram with two arcs} \rangle + A \langle \text{diagram with two arcs} \rangle \quad /A^{-1}$$

Luego restando **a** y **b** obtenemos:

$$A^{-1} \langle \text{diagram with diagonal line} \rangle - A \langle \text{diagram with diagonal line} \rangle = (A^{-2} - A^2) \langle \text{diagram with two arcs} \rangle$$

Sea $\omega := \omega(\text{diagram with two arcs})$.

$$\omega(\text{diagram with diagonal line}) = 1 + \omega \quad \omega(\text{diagram with diagonal line}) = -1 + \omega$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A}^{-2} - \mathbf{A}^2)\langle \bigcirc \rangle &= \mathbf{A}^{-1}\langle \diagdown \rangle - \mathbf{A}\langle \diagup \rangle && /(-\mathbf{A})^{-3\omega} \\
(\mathbf{A}^{-2} - \mathbf{A}^2)\mathcal{L} \langle \bigcirc \rangle &= (-\mathbf{A})^{-3\omega}\mathbf{A}^{-1}\langle \diagdown \rangle - (-\mathbf{A})^{-3\omega}\mathbf{A}\langle \diagup \rangle \\
(\mathbf{A}^{-2} - \mathbf{A}^2)\mathcal{L} \langle \bigcirc \rangle &= (-\mathbf{A})^{-3(\omega(\text{diagram})+1)}\mathbf{A}^{-1}\langle \diagdown \rangle - (-\mathbf{A})^{-3(\omega(\text{diagram})-1)}\mathbf{A}\langle \diagup \rangle \\
(\mathbf{A}^{-2} - \mathbf{A}^2)\mathcal{L} \langle \bigcirc \rangle &= (-\mathbf{A})^{-4}(-\mathbf{A})^{-3\omega(\text{diagram})}\langle \diagdown \rangle - (-\mathbf{A})^4(-\mathbf{A})^{-\omega(\text{diagram})}\langle \diagup \rangle \\
(\mathbf{A}^{-2} - \mathbf{A}^2)\mathcal{L} \langle \bigcirc \rangle &= (-\mathbf{A})^{-4}\mathcal{L} \langle \diagdown \rangle - (-\mathbf{A})^4\mathcal{L} \langle \diagup \rangle
\end{aligned}$$

Tomando $\mathbf{A} = \mathbf{t}^{-\frac{1}{4}}$.

$$-\mathbf{t}\mathbf{V} \langle \diagdown \rangle + \mathbf{t}^{-1}\mathbf{V} \langle \diagup \rangle = (\mathbf{t}^{\frac{1}{2}} - \mathbf{t}^{-\frac{1}{2}})\mathbf{V} \langle \bigcirc \rangle$$

Así, queda demostrado el Teorema. □

OBSERVACIÓN 8.

1. La relación 3 de la definición 2.17 se llama (*Skein relation o relación madeja*).
2. Las relaciones 1-3 permiten calcular el polinomio de Jones de modo recursivo.

PROPOSICIÓN 2.11. Sea $\bigcirc_{\mathbf{u}}$ un link trivial con \mathbf{u} componentes.

$$\mathbf{V}(\bigcirc_{\mathbf{u}}) = (-1)^{\mathbf{u}-1}(\mathbf{t}^{\frac{1}{2}} + \mathbf{t}^{-\frac{1}{2}})^{\mathbf{u}-1}$$

EJEMPLO 20.

Sean $\mathbb{T}_1 = \langle \bigcirc \rangle$, $\mathbb{T}_2 = \langle \bigcirc \rangle$, $\mathbb{T}_3 = \langle \bigcirc \rangle$ y $\mathbb{T}_4 = \langle \bigcirc \bigcirc \rangle$

Entonces:

$$\begin{aligned}
 V(T_1) &= t^2V(T_2) + (t^{\frac{3}{2}} - t^{\frac{1}{2}})V(T_3) \\
 &= t^2 + (t^{\frac{3}{2}} - t^{\frac{1}{2}})\{t^2V(T_4) + (t^{\frac{3}{2}} - t^{\frac{1}{2}})V(T_2)\} \\
 &= t^2 + (t^{\frac{3}{2}} - t^{\frac{1}{2}})\{-t^2(t^{\frac{1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}})(1)\} \\
 &= -t^4 + t^3 + t
 \end{aligned}$$

PROPOSICIÓN 2.12. *Sea $-K$ el nudo con la orientación inversa del nudo K , entonces*

1. $V_{-K}(t) = V_K(t)$
2. $V_{K^*}(t) = V_K(t^{-1})$

Por la Proposición 2.12 tenemos que $V_{T_1^*}(t) = V_{T_1}(t^{-1}) = -t^{-4} + t^{-3} + t^{-1}$, entonces tenemos que $V_{T_1^*}(t) \neq V_{T_1}(t)$, así T_1 no es isotópico con su reflejado. Podemos decir que el polinomio de Jones diferencia la isotopía entre el trébol y su reflejado.

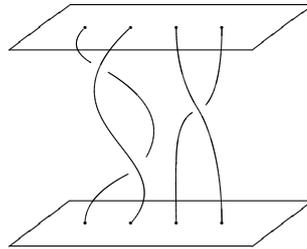
Capítulo 3

Grupo de trenzas

Sean P_1 y P_2 dos planos paralelos y fijemos puntos colineales A_1, \dots, A_n en P_1 y puntos colineales B_1, \dots, B_n en P_2 . Una n -trenza es una colección de arcos $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ comprendidas entre P_1 y P_2 tales que:

1. Los puntos iniciales de los arcos son A_1, \dots, A_n y los puntos finales de los arcos son B_1, \dots, B_n respectivamente.
2. γ_i y cualquier plano paralelo con P_i tiene solo un punto en común.
3. Los arcos γ_i son disjuntos entre si.

EJEMPLO 21.



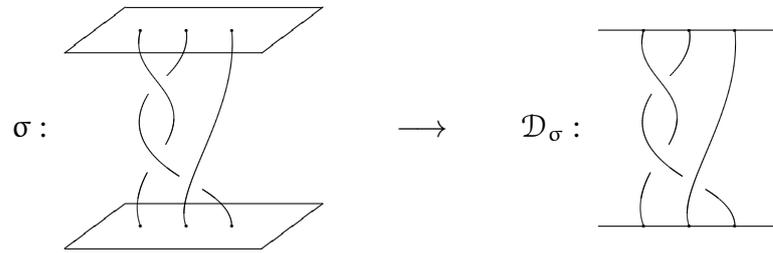
4 – trenza

DEFINICIÓN 3.1. *Dos trenzas son equivalentes (ó isotópicas) si una de ellas se obtiene por una deformación continua de la otra.*

DEFINICIÓN 3.2. *El conjunto de todas las n -trenzas en \mathbb{R}^3 , se denotara por \mathcal{B}_n .*

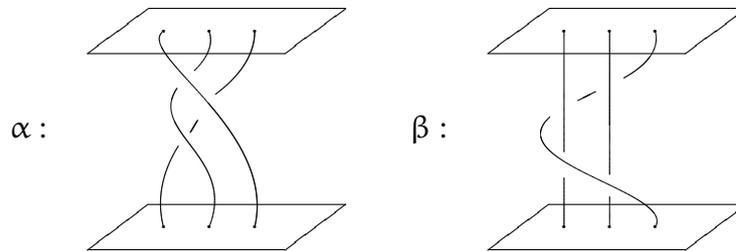
PROPOSICIÓN 3.1. *La relación ser isotópico es una relación de equivalencia en \mathcal{B}_n . Al igual que en nudos trabajaremos con proyecciones en el plano.*

EJEMPLO 22. *Diagrama de una 3-trenza*

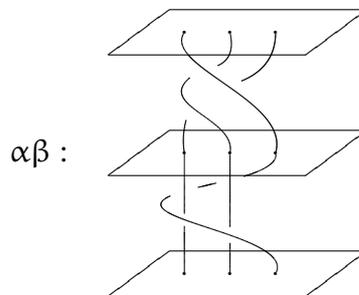


DEFINICIÓN 3.3. Sean α y β dos n -trenzas. La trenza $\alpha\beta$ es aquella que se obtiene identificando los puntos finales de α con los iniciales de β

EJEMPLO 23. Consideremos las 3-trenzas α y β :



Luego, $\alpha\beta$ nos queda:



LEMA 3.1.

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \sim \alpha' \\ \beta \sim \beta' \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha\beta \sim \alpha'\beta'$$

NOTACIÓN 6. Sea $B_n = \mathcal{B}_n / \sim$, las clases de equivalencia de las n -trenzas, y B_n se llama grupo de trenzas. En B_n se define el siguiente producto:

$$[\alpha][\beta] := [\alpha\beta]$$

donde $[\alpha], [\beta] \in \mathcal{B}_n$. A este hecho se le dice producto por concadenación.

En virtud del Lema 3.1 se tiene lo siguiente:

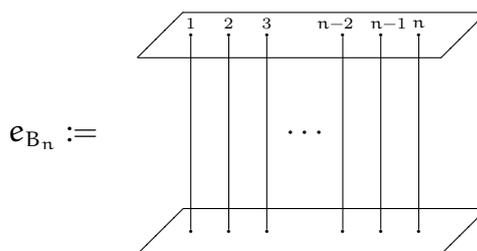
TEOREMA 3.2. *El producto por concadenación sobre \mathcal{B}_n define una estructura de grupo \mathcal{B}_n .*

Demostración. Ver [Esp10]

□

NOTACIÓN 7. *Por abuso de lenguaje escribiremos α en vez de $[\alpha]$.*

El elemento neutro de \mathcal{B}_n es:



También tenemos el inverso de un elemento $\alpha \in \mathcal{B}_n$ que esta dado por:

$$\alpha^{-1} = \alpha^*.$$

EJEMPLO 24.

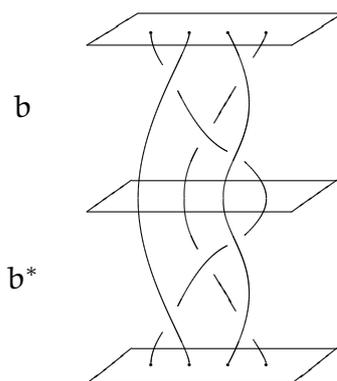


Figura 1: Producto de una 4-trenza con su reflejado

OBSERVACIÓN 9.

1. $B_1 = \{\text{id}\}$
2. $B_2 = \{1, \sigma^{\pm 1}, \sigma^{\pm 2}, \sigma^{\pm 3}, \dots, \sigma^{\pm k}\} = \{\sigma^k | k \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$.

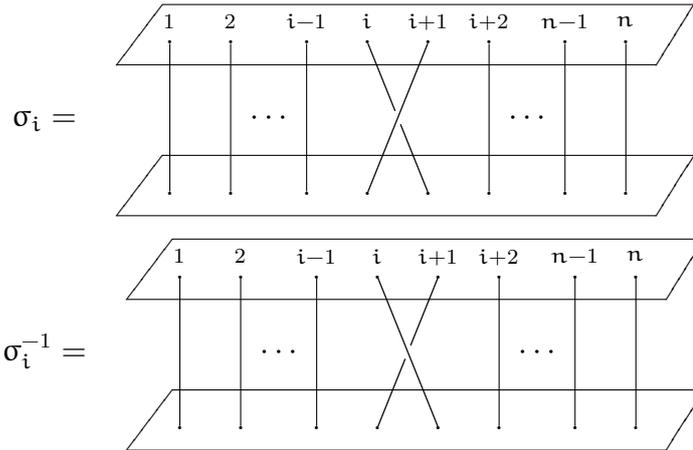
OBSERVACIÓN 10.

1. $B_n (n \geq 3)$ es un grupo no conmutativo e infinito.
2. Naturalmente tenemos $B_n \hookrightarrow B_{n+1}$.

TEOREMA 3.3 (E. Artin 1925). *El grupo de trenzas, está definido por los generadores $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ que están sujetas a las siguientes relaciones:*

1. $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$, si $|i - j| > 1$
2. $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$, si $|i - j| = 1$

donde:



DEFINICIÓN 3.4. *Se define la siguiente función π_n de B_n en el grupo de permutaciones (S_n) dada por:*

$$\pi_n(\sigma_i) = (i \ i + 1) = s_i$$

PROPOSICIÓN 3.2. π_n es un homomorfismo de grupos epiyectivo.

Demostración. Es fácil probar que π_n respeta las relaciones de trenzas, pues, la presentación de S_n tiene las siguientes relaciones:

1. $s_i^2 = 1$ para todo $i = 1, \dots, n - 1$.
2. $s_i s_j = s_j s_i$ para todo $|i - j| > 1$
3. $(s_i s_{i+1})^3 = 1$.

También es claro que $\text{Im}(\pi_n) = S_n$, debido a que $\pi(\sigma_i) = s_i$, por lo tanto, π_n es epiyectivo. □

OBSERVACIÓN 11.

1. Por el primer teorema del isomorfismo tenemos lo siguiente:

$$B_n / \ker(\pi_n) \cong S_n$$

2. Notemos que:

$$\begin{aligned} \pi_n(\sigma_i) &= s_i \\ &= s_i^{-1} \\ &= \pi_n(\sigma_i^{-1}) \end{aligned}$$

Así se ve claramente que π_n no es inyectivo.

DEFINICIÓN 3.5. G es libre de torsión, es decir, el único elemento de orden finito es la identidad.

LEMA 3.4. Para todo $\sigma_1, \sigma_2 \in B_3$ y $k \in \mathbb{Z}$, tenemos lo siguiente:

$$\sigma_1^k \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2^k.$$

Demostración. Demostraremos solamente el caso $k > 0$, pues los otros casos son análogos. Usaremos inducción sobre k .

Si $k = 1$ tenemos que $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2$, relación de trenzas.

Supongamos que es válido para k y demostraremos para $k + 1$.

$$\begin{aligned} \sigma_1^{k+1} \sigma_2 \sigma_1 &= \sigma_1 \underbrace{\sigma_1^k \sigma_2 \sigma_1}_{\text{(Hipótesis de inducción)}} && \text{(Hipótesis de inducción)} \\ &= \underbrace{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1}_{\text{(Relación de trenzas)}} \sigma_2^k && \text{(Relación de trenzas)} \\ &= \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_2^k \\ &= \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2^{k+1} \end{aligned}$$

□

PROPOSICIÓN 3.3. *Cada generador $\sigma_i \in B_n$ tiene orden infinito.*

Demostración.

Supongamos que σ_2 tiene orden finito, es decir, $\sigma_2^k = 1$ para algún $k \in \mathbb{Z}$. Además sabemos que $B_n \hookrightarrow B_{n+1}$.

Tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} (\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1) \sigma_2^k (\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1)^{-1} &= 1 \\ \sigma_1 \sigma_2 \underbrace{\sigma_1 \sigma_2^k \sigma_1^{-1}} \sigma_2^{-1} \sigma_1^{-1} &= 1 \\ \sigma_1 \sigma_2 \sigma_2^{-1} \sigma_1^k \sigma_2 \sigma_2^{-1} \sigma_1^{-1} &= 1 \\ \sigma_1 \sigma_1^k \sigma_1^{-1} &= 1 \\ \sigma_1^k &= 1 \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción, pues, $\sigma_1 \in B_2 = \mathbb{Z}$.

□

La idea es poder conectar las trenzas con los nudos y aquí nace un teorema fundamental dado a conocer por Alexander. Primero vayamos a la siguiente definición.

DEFINICIÓN 3.6. *Sea $\sigma \in B_n$, denotaremos la clausura de una trenza por $\widehat{\sigma}$, que significa identificar los puntos finales de σ con sus puntos iniciales.*

Ahora denotaremos por B_∞ el grupo obtenido a partir del límite inductivo de la cadena $B_1 \subset B_2 \subset \dots \subset B_n \subset \dots$. Así

$$B_\infty = \coprod_{n \geq 1} B_n$$

Sea φ la función que va de B_∞ en \mathcal{K} definida por:

$$\varphi(\sigma) = \widehat{\sigma}.$$

TEOREMA 3.5 (Alexander, 1923). *φ es epiyectiva, es decir, todo nudo puede ser obtenido como la clausura de una trenza.*

Demostración. Ver [KT08] □

OBSERVACIÓN 12. φ no es inyectiva, pues. En B_∞ tenemos:

$$1_1 : \begin{array}{|c} \hline \\ \hline \end{array} \not\sim \begin{array}{|c} \hline \diagdown \\ \diagup \hline \end{array} : \sigma_1$$

pero

$$\widehat{1}_1 : \begin{array}{|c} \hline \\ \hline \end{array} \approx \begin{array}{|c} \hline \\ \hline \end{array} \approx \begin{array}{|c} \hline \diagdown \\ \diagup \hline \end{array} : \widehat{\sigma}_1$$

EJEMPLO 25. El trébol es obtenido de la clausura de σ_1^3 , en efecto:

$$\widehat{\sigma_1^3} = \begin{array}{|c} \hline \\ \hline \end{array} \approx \begin{array}{|c} \hline \diagdown \\ \diagup \hline \end{array} \approx \begin{array}{|c} \hline \diagdown \\ \diagup \hline \end{array} = T$$

Tenemos el siguiente problema: si $\widehat{\sigma} = \widehat{\tau}$ cual es la relación entre σ y τ La respuesta es el Teorema de Markov.

DEFINICIÓN 3.7. Sea \approx_M la relación de equivalencia sobre B_∞ , generada por los siguiente movimientos (o movimientos de Markov):

$$M_1 := \text{Para todo } \alpha, \beta \in B_n \text{ tenemos que } \alpha \approx_M \beta\alpha\beta^{-1}.$$

$$M_2 := \text{Para todo } \alpha \in B_n \text{ y } \sigma^{\pm 1} \in B_{n+1}, \text{ tenemos que } \alpha \approx_M \alpha\sigma_n^{\pm 1}.$$

Así $\sigma \approx_M \tau$ significa que τ es obtenido a partir de σ aplicandole M_1 y/o M_2 .

TEOREMA 3.6 (Markov). Sean σ y $\tau \in B_\infty$ tenemos que $\widehat{\sigma} = \widehat{\tau}$ si y solo si, $\sigma \approx_M \tau$.

Demostración. Ver [Lic91] □

Así obtenemos lo siguiente:

$$B_\infty / \approx_M \longleftrightarrow \{ \mathcal{K} / \approx \}.$$

Por lo tanto, definir un invariante de nudos es equivalente a definir, X de B_∞ en \mathbf{Obj} que cumple las siguientes condiciones:

1. $X(\alpha\beta) = X(\beta\alpha)$.
2. $X(\alpha\sigma_n^{\pm 1}) = X(\alpha)$.

Donde $\alpha, \beta \in B_n$ y $\sigma_n^{\pm 1} \in B_{n+1}$.

1. Representación de Burau

DEFINICIÓN 3.8. Sea $\Lambda = \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$, el anillo de polinomios de Laurent en los términos t y t^{-1} . Sea la aplicación $\phi_n : B_n \rightarrow M_n(\Lambda)$ definida por:

$$\phi_n(\sigma_i) = \begin{pmatrix} I_{i-1} & & & \\ & 1-t & t & \\ & & 1 & 0 \\ & & & I_{n-i-1} \end{pmatrix}$$

PROPOSICIÓN 3.4. $\phi_n : B_n \rightarrow M_n(\Lambda)$ es un homomorfismo.

Demostración. Por Teorema 4.3 de [MK99], basta demostrar que ϕ_n respete las relaciones de trenzas.

Veamos que $\phi_n(\sigma_i)\phi_n(\sigma_j) = \phi_n(\sigma_j)\phi_n(\sigma_i)$, para $|i-j| > 1$.

Supongamos que $i+1 < j$, entonces tenemos:

$$\begin{aligned}
\phi_n(\sigma_i)\phi_n(\sigma_j) &= \begin{pmatrix} I_{i-1} & & & & & & \\ & 1-t & t & & & & \\ & 1 & 0 & & & & \\ & & & I_{n-i-1} & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{j-1} & & & & & & \\ & 1-t & t & & & & \\ & 1 & 0 & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & I_{n-j-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} I_{i-1} & & & & & & \\ & 1-t & t & & & & \\ & 1 & 0 & & & & \\ & & & I_{j-i} & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & I_{n-j-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{i-1} & & & & & & \\ & I_{j-i} & & & & & \\ & & 1-t & t & & & \\ & & 1 & 0 & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & I_{n-j-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} I_{i-1} & & & & & & \\ & 1-t & t & & & & \\ & 1 & 0 & & & & \\ & & & I_{j-i-2} & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & 1-t & t \\ & & & & & 1 & 0 \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & I_{n-j-1} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Por otro lado tenemos que:

$$\begin{aligned}
\phi_n(\sigma_j)\phi_n(\sigma_i) &= \begin{pmatrix} I_{j-1} & & & & & & \\ & 1-t & t & & & & \\ & & 1 & 0 & & & \\ & & & & I_{n-j-1} & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{i-1} & & & & & & \\ & 1-t & t & & & & \\ & & 1 & 0 & & & \\ & & & & I_{n-i-1} & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} I_{i-1} & & & & & & \\ & I_{j-i} & & & & & \\ & & 1-t & t & & & \\ & & & 1 & 0 & & \\ & & & & & I_{n-j-1} & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{i-1} & & & & & & \\ & 1-t & t & & & & \\ & & 1 & 0 & & & \\ & & & & I_{j-i} & & \\ & & & & & I_{n-j-1} & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} I_{i-1} & & & & & & \\ & 1-t & t & & & & \\ & & 1 & 0 & & & \\ & & & & I_{j-i-2} & & \\ & & & & & 1-t & t \\ & & & & & & 1 & 0 \\ & & & & & & & & I_{n-j-1} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

luego, queda demostrado la primera relación de trenza.

Ahora veamos la segunda relación de trenza, que es la siguiente:

$$\phi_n(\sigma_i)\phi_n(\sigma_{i+1})\phi_n(\sigma_i) = \phi_n(\sigma_{i+1})\phi_n(\sigma_i)\phi_n(\sigma_{i+1}).$$

Supongamos que $j = i + 1$, y sin pérdida de generalidad podemos suponer $n = 3$.

$$\begin{aligned}
\phi_3(\sigma_1)\phi_3(\sigma_2)\phi_3(\sigma_1) &= \begin{pmatrix} 1-t & t & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-t & t \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-t & t & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (1-t)^2 + t(1-t) & t(1-t) & t^2 \\ 1-t & t & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-t & t \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-t & t & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-t & t \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \phi_3(\sigma_2)\phi_3(\sigma_1)\phi_3(\sigma_2)
\end{aligned}$$

Así queda demostrado que ϕ_n es un homomorfismo. □

DEFINICIÓN 3.9. Llamaremos a ϕ_n la representación de Burau de B_n

2. Construcción Polinomio de Alexander modo Algebraico

Sea λ la aplicación de B_n en \mathcal{A} , definido por:

$$\lambda(\beta) := \det(\phi_n(\beta)).$$

Veremos que λ no respeta el segundo movimiento de Markov.

Sea $\beta, \sigma \in B_n$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\lambda(\sigma\beta\sigma^{-1}) &= \det(\phi_n(\sigma\beta\sigma^{-1})) \\
&= \det(\phi_n(\beta)) \\
&= \lambda(\beta)
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\lambda(\beta)$ respeta el primer movimiento de Markov. Para ver el segundo movimiento de Markov.

Para todo $\beta \in B_n$ y $\sigma_n \in B_{n+1}$, tenemos que:

$$\begin{aligned}\lambda(\beta\sigma_n) &= \det(\phi_{n+1}(\beta\sigma_n)) \\ &= \det(\phi_{n+1}(\beta))\det(\phi_{n+1}(\sigma_n)) \\ &= \det(\phi_{n+1}(\beta))(-t)\end{aligned}$$

lo anterior dice que λ no respeta el segundo movimiento de Markov.

Mediante un reescalamiento de la función λ , se define la función ψ , como sigue:

$$\psi(\beta) = \det(\phi_n(\beta))(-t)^{-e}$$

OBSERVACIÓN 13. ψ es un invariante de nudos no muy interesante, pues para todo $\beta \in B_n$ se tiene:

$$\psi(\beta) = 1.$$

LEMA 3.7. Si $\phi_n(\beta) = (a_{ij})_{n \times n}$, tenemos las siguientes propiedades:

1. $\sum_{j=1}^n a_{ij} = 1$, para todo $i = 1, \dots, n$
2. $\sum_{i=1}^n t^i a_{ij} = t^j$, para todo $j = 1, \dots, n$

Demostración. Para demostrar este Lema, debemos demostrar dos cosas, la primera es que ψ en los generadores de B_n satisface las 2 propiedades, y lo segundo que es cerrado bajo el producto, es decir, si tengo dos matrices que satisfacen las 2 propiedades, entonces el producto de esas matrices también las satisface.

Primero, es fácil verificar $\phi_n(\sigma_i^{\pm 1})$ cumple con las 2 propiedades del Lema. Ahora veremos que es cerrado bajo el producto. Sean $A = (a_{ij})_n$ y $B = (b_{kl})_n$ dos matrices que satisfacen las 2 propiedades entonces veremos que AB satisfacen las 2 propiedades.

sea $AB = (C_{pq})_n$, donde $C_{pq} = \sum_{j=1}^n a_{pj}b_{jq}$

$$\begin{aligned}\sum_{q=1}^n c_{pq} &= \sum_{q=1}^n \sum_{j=1}^n a_{pj}b_{jq} \\ &= \left(\sum_{j=1}^n a_{pj}\right) \left(\sum_{q=1}^n b_{jq}\right) \\ &= \sum_{j=1}^n a_{pj} \\ &= 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{p=1}^n t^p c_{pq} &= \sum_{p=1}^n \sum_{j=1}^n t^p a_{pj} b_{jq} \\
&= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{p=1}^n t^p a_{pj} \right) b_{jq} \\
&= \sum_{j=1}^n t^j b_{jq} \\
&= t^q
\end{aligned}$$

Así queda demostrado el Lema. □

OBSERVACIÓN 14. Sea $M = \phi_n(\beta)$, y $M_{p,q}$ la matriz de $(n-1) \times (n-1)$ obtenida de eliminar la p -ésima fila y la q -ésima columna, entonces:

1. $\det[M - I_n]_{p,p} = t^{p-1} \det[M - I_n]_{1,1}$
2. $\det[M - I_n]_{p,q} = (-1)^{p+q} t^{p-1} \det[M - I_n]_{1,1}$

TEOREMA 3.8. Sea K un nudo orientado y supongamos que existe $\beta \in B_n$ tal que $\widehat{\beta} = K$. Sea $M = \phi_n(\beta)$, entonces $\det[M - I_n]_{1,1}$ es un invariante de nudos, salvo un factor $\pm t^k$ para algún entero k . Es decir si $\beta_1 \in B_n$ y $\beta_2 \in B_m$ son dos trenzas tal que $\widehat{\beta}_1 \approx \widehat{\beta}_2$, entonces, para algún entero k , se tiene que

$$\det[\phi_n(\beta_1) - I_n]_{1,1} = \pm t^k \det[\phi_m(\beta_2) - I_m]_{1,1}.$$

OBSERVACIÓN 15. El invariante de nudos del Teorema anterior es llamado el polinomio de Alexander de K y lo denotaremos como $\Delta_K(t)$, y este dicho polinomio lo obtendremos al factorizar $\det[\phi_n(\beta) - I_n]_{1,1}$ de modo tal que su término constante quede positivo.

Procederemos a probar el Teorema.

Demostración. Debemos demostrar que la función X de B_n en Λ que envía β en $\det[\phi_n(\beta) - I_n]_{1,1}$, respete los movimientos de Markov.

Sea $\beta, \gamma \in B_n$, y estudiemos el primer movimiento de Markov:

$$\det[\phi_n(\gamma\beta\gamma^{-1}) - I_n]_{1,1} \doteq \det[\phi_n(\beta) - I_n]_{1,1}.$$

Sea $M = \phi_n(\beta)$, además consideremos las matrices de $n \times n$.

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & & & \\ & 1 & -1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & -1 & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$S^{-1}MS = \begin{pmatrix} \Lambda(t) & \\ * \dots * & 1 \end{pmatrix}$ donde $\Lambda(t)$ es una matriz de $(n-1) \times (n-1)$ no invertible, por lo tanto tenemos:

$$\det[S^{-1}(M - I_n)S]_{n,n} = \det[\Lambda(t) - I_{n-1}].$$

Sea $\beta, \gamma \in B_n$, entonces podemos escribir,

$$S^{-1}\phi_n(\beta)S = \begin{bmatrix} \Lambda(\beta) \\ \mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{n-1} & 1 \end{bmatrix},$$

$$S^{-1}\phi_n(\gamma)S = \begin{bmatrix} \Lambda(\gamma) \\ \mathbf{b}_1 \dots \mathbf{b}_{n-1} & 1 \end{bmatrix}$$

y similarmente

$$S^{-1}\phi_n(\gamma^{-1})S = \begin{bmatrix} \Lambda(\gamma)^{-1} \\ \mathbf{c}_1 \dots \mathbf{c}_{n-1} & 1 \end{bmatrix}$$

entonces

$$S^{-1}\phi_n(\gamma\beta\gamma^{-1})S = \begin{bmatrix} \Lambda(\gamma)\Lambda(\beta)\Lambda(\gamma)^{-1} \\ \mathbf{d}_1 \dots \mathbf{d}_{n-1} & 1 \end{bmatrix}$$

se tiene

$$\begin{aligned} \det[S^{-1}\phi_n(\gamma\beta\gamma^{-1})S - I_n]_{n,n} &= \det[\Lambda(\gamma)\Lambda(\beta)\Lambda(\gamma)^{-1} - I_{n-1}] \\ &= \det[\Lambda(\gamma)(\Lambda(\beta) - I_{n-1})\Lambda(\gamma)^{-1}] \\ &= \det[\Lambda(\beta) - I_{n-1}]. \end{aligned}$$

Antes de seguir con la demostración veremos el siguiente Lema:

$$\text{LEMA 3.9. } \det[\Lambda(t) - I_{n-1}] \doteq (1 + t + \dots + t^{n-1})\det[M - I_n]_{1,1}$$

Demostración. Sea $M = (a_{ij})$, por conveniencia trabajaremos con $[M - I_n]_{0,n}$ la matriz de $n \times (n - 1)$ obtenida eliminando la n -ésima columna. Entonces, las filas de la $[M - I_n]_{0,n}$ son de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} A_1 &= (a_{11} - 1, a_{12}, \dots, a_{1,n-1}) \\ A_2 &= (a_{21}, a_{22} - 1, \dots, a_{2,n-1}) \\ &\vdots \\ A_n &= (a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{n,n-1}) \end{aligned}$$

Un cálculo directo muestra que:

$$U(\Lambda(t) - I_{n-1})V = \begin{bmatrix} A_1 & - & A_2 \\ A_1 & - & A_3 \\ \vdots & & \\ A_1 & - & A_n \end{bmatrix}.$$

Donde $U = S^T$ y $V = S^{-1}$, y S^T significa la transpuesta de S , entonces,

$$\det(\Lambda(t) - I_{n-1}) = \det(U(\Lambda(t) - I_{n-1})V) = \det \begin{bmatrix} A_1 & - & A_2 \\ A_1 & - & A_3 \\ \vdots & & \vdots \\ A_1 & - & A_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\det \begin{bmatrix} A_1 & - & A_2 \\ A_1 & - & A_3 \\ \vdots & & \vdots \\ A_1 & - & A_n \end{bmatrix} &= \det \begin{bmatrix} A_1 \\ -A_3 \\ \vdots \\ -A_n \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} -A_2 \\ A_1 \\ -A_4 \\ \vdots \\ -A_n \end{bmatrix} + \dots + \det \begin{bmatrix} -A_2 \\ \vdots \\ -A_k \\ A_1 \\ -A_{k+2} \\ \vdots \\ -A_n \end{bmatrix} + \\
\dots + \det \begin{bmatrix} -A_2 \\ -A_3 \\ \vdots \\ -A_{n-1} \\ A_1 \end{bmatrix} &+ \det \begin{bmatrix} -A_2 \\ -A_3 \\ \vdots \\ -A_n \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Por observación anterior tenemos:

$$\det \begin{bmatrix} -A_2 \\ -A_3 \\ \vdots \\ -A_n \end{bmatrix} = (-1)^{n-1} \det(M - I_n)_{1,n} = \det(M - I_n)_{1,1}$$

$$\det \begin{bmatrix} -A_2 \\ -A_3 \\ \vdots \\ -A_n \end{bmatrix} = (-1)^{n-2} \det(M - I_n)_{2,n} = \text{tdet}(M - I_n)_{1,1}$$

Similarmente para cualquier $2 \leq k \leq n - 1$ obtenemos.

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} -A_2 \\ \vdots \\ -A_k \\ A_1 \\ -A_{k+2} \\ \vdots \\ -A_n \end{bmatrix} &= (-1)^{n-2+k-1} \det \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_k \\ A_{k+2} \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} \\ &= (-1)^{n+k-1} \det[M - I_n]_{k+1, n} \\ &= t^k \det[M - I_n]_{1, 1} \end{aligned}$$

luego,

$$\det(\Lambda(t) - I_{n-1}) = (1 + t + t^2 + \dots + t^{n-1}) \det[M - I_n]_{1, 1}.$$

□

Volviendo a la demostración, por Lema (3.9) tenemos:

$$(1 + t + t^2 + \dots + t^{n-1}) \det[\phi_n(\gamma\beta\gamma^{-1})]_{1, 1} \doteq (1 + t + t^2 + \dots + t^{n-1}) \det[\phi_n(\beta) - I_n]_{1, 1}.$$

Concluimos,

$$\det[\phi_n(\gamma\beta\gamma^{-1})]_{1, 1} \doteq \det[\phi_n(\beta) - I_n]_{1, 1}.$$

Veamos ahora que respeta el segundo movimiento Markov. Sea $\beta \in B_n$ y $\sigma_n \in B_{n+1}$,

$$\det[\phi_{n+1}(\beta\sigma_n) - I_{n+1}]_{1, 1} \doteq \det[\phi_n(\beta) - I_n]_{1, 1}.$$

Sea $\beta \in B_n$ y pongamos $\phi_n(\beta) = M = (a_{ij})$.

$$\phi_{n+1}(\beta) = \begin{bmatrix} M & \\ & 1 \end{bmatrix},$$

y

$$\phi_{n+1}(\sigma_n) = \begin{bmatrix} I_{n-1} & & \\ & 1-t & t \\ & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como ϕ es un homomorfismo tenemos:

$$\phi_{n+1}(\beta\sigma_n) = \begin{bmatrix} & \mathbf{a}_{1n}(1-t) & \mathbf{a}_{1n}(t) \\ & \vdots & \vdots \\ M_{n,n} & & \\ & \mathbf{a}_{n-1n}(1-t) & \mathbf{a}_{n-1,n}t \\ \mathbf{a}_{n,1}\dots\mathbf{a}_{n,n-1} & \mathbf{a}_{nn}(1-t) & \mathbf{a}_{nn}t \\ & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \det[\phi_{n+1}(\beta\sigma) - I_{n+1}]_{n,n} &= \det \begin{bmatrix} & * \\ M_{n,n} - I_{n-1} & \vdots \\ & * \\ & -1 \end{bmatrix} \\ &= -\det[M_{n,n} - I_{n-1}] = -\det[\phi_n(\beta) - I_n]_{n,n}, \end{aligned}$$

entonces:

$$\det[M - I_n]_{1,1} \doteq \det[M - I_n]_{n,n},$$

luego tenemos:

$$\det[\phi_{n+1}(\beta\sigma_n) - I_{n+1}]_{1,1} \doteq \det[\phi_{n+1}(\beta\sigma_n) - I_{n+1}]_{n,n} \doteq \det[\phi_n(\beta) - I_n]_{1,1}.$$

De forma similar se prueba que:

$$\det[\phi_{n+1}(\beta\sigma_n^{-1}) - I_{n+1}]_{1,1} \doteq \det[\phi_n(\beta) - I_n]_{1,1}$$

Así concluye la demostración. □

EJEMPLO 26. *Calcularemos el polinomio de Alexander del nudo trébol. Sabemos que el nudo se obtiene de la clausura de σ_1^3 . Entonces tenemos:*

$$\phi_2(\sigma_1) = \begin{pmatrix} 1-t & t \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

como ϕ es homomorfismo tenemos:

$$\phi_2(\sigma_1^3) = \begin{pmatrix} 1-t+t^2-t^3 & t(1-t+t^2) \\ 1-t+t^2 & t-t^3 \end{pmatrix}$$

Su determinante :

$$\det(\phi_2(\sigma_1^3) - I_2)_{1,1} = -1 + t - t^2.$$

Así obtenemos el polinomio de Alexander:

$$\Delta_{\sigma_1^3}(t) = 1 - t + t^2.$$

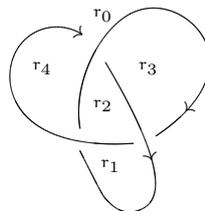
3. Contrucción del Polinomio de Alexander modo Combinatorio

NOTACIÓN 8. *Sea K un nudo orientado y sea n la cantidad de cruces del nudo. Denotaremos por c_1, c_2, \dots, c_n las cruces del nudo.*

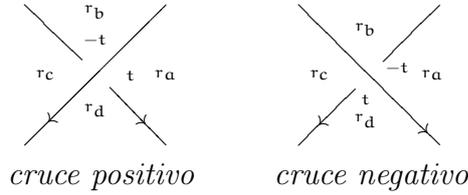
TEOREMA 3.10 (Teorema de Euler). *Si K un nudo orientado con n cruces, entonces la sombra del nudo divide el plano en $n + 2$ regiones.*

NOTACIÓN 9. *Si el nudo tiene n cruces, denotaremos las regiones como r_0, r_1, \dots, r_{n+1} .*

EJEMPLO 27. *El trébol tiene 3 cruces y 5 regiones:*

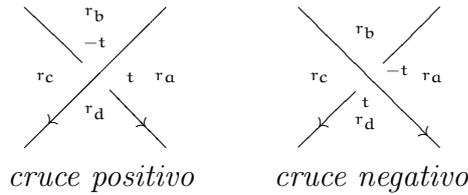


DEFINICIÓN 3.10. Sea K un nudo, consideremos un cruce arbitrario (c_i) del nudo. Sean (r_a, r_b, r_c, r_d) las regiones que rodean el cruce c_i , entonces adoptaremos la siguiente etiquetación para el cruce c_i :



Conservando estas etiquetaciones, procedemos de la siguiente forma:

1. Pensamos que la línea discontinua gire en sentido anti-horario.
2. Ahora etiquetamos la primera y segunda región del cruce por t y $-t$ respectivamente. Por ejemplo:



3. Luego asignamos una suma alternada según si el cruce es positivo o negativo, según la siguiente receta:

$$C_R = tr_a - tr_b + r_c - r_d \quad (\text{Cruce en sentido positivo})$$

$$C_L = -tr_a + r_b - r_c + tr_d \quad (\text{Cruce en sentido negativo})$$

DEFINICIÓN 3.11. Sea $\Lambda = \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$, el anillo de polinomios de Laurent en los términos t y t^{-1} . Un nudo K se le asocia una matriz $M_K = (a_{ij}) \in M_{n \times n+2}(\Lambda)$, como sigue:

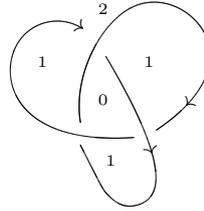
1. La cantidad de cruces del nudo es la cantidad de filas de dicha matriz.
2. La cantidad de regiones del nudo es la cantidad de columnas de dicha matriz.
3. Los a_{ij} son los coeficientes de dicha matriz.

DEFINICIÓN 3.12. Sea K un nudo, le asociamos un número entero $P \in \mathbb{Z}$ a cada región del nudo, el cual llamaremos índice de la región. Además adoptaremos la siguiente

convención:



EJEMPLO 28.



DEFINICIÓN 3.13. Sea $M \in M_{n \times n+2}(\Lambda)$, definiremos $M_{ij} \in M_{n \times n}(\Lambda)$ como la matriz que resulta de eliminar las columnas i -ésima y j -ésima de la matriz M .

OBSERVACIÓN 16. Denotaremos el determinante de la matriz $M_{p,p+1}$ como $\Delta_{p,p+1}(t)$, es decir:

$$\det(M_{p,p+1}) = \Delta_{p,p+1}(t).$$

PROPOSICIÓN 3.5. Sea $M_K = M$ la matriz asociada al nudo K , si reducimos M a una matriz cuadrada $M_{p,p+1}$. Entonces los determinantes de M y $M_{p,p+1}$ son iguales salvo factor $\pm t^k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Demostración. Sea R_p la columna de índice p , como cada fila tiene solo cuatro entredas que son $t, -t, 1, -1$. Se tiene que $\sum_p R_p = 0$. Como $\sum_p R_p = 0$, entonces deducimos que $\sum_p t^{-p} R_p = 0$. Luego:

$$\sum_p (t^{-p} - 1) R_p = 0$$

Notemos que, cuando $p = 0$ tenemos $t^0 = 1$, entonces los terminos de R_0 se cancelan. Si r_j es la región indexada por p con correspondiente columna v_j entonces $(t^{-p} - 1)v_j$ se

puede expresar en una combinación lineal de las otras columnas indexadas. Los coeficientes de las columnas que están en combinación lineal son de la forma $-(t^{-q} - 1)$ para cada columna indexada por q .

Por ejemplo el trébol:

$$\text{Sea } M = \begin{pmatrix} r_0 = 0 & r_1 = 1 & r_2 = 1 & r_3 = 2 & r_4 = 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}.$$

Entonces:

$$\begin{aligned} (t^{-1} - 1)[r_1 + r_2 + r_4] + (t^{-2} - 1)[r_3] &= 0 \\ (t^{-1} - 1)[r_1 + r_2 + r_4] &= -(t^{-2} - 1)[r_3] \\ -\frac{t^1 - 1}{t^{-2} - 1}[r_1 + r_2 + r_4] &= r_3 \end{aligned}$$

Por lo tanto, r_3 es combinación lineal de r_1, r_2, r_4 .

Siguiendo con la demostración, consideremos las matrices $M_{0,j}$ y $M_{0,k}$ donde las columnas v_j y v_k tienen índices p y q respectivamente.

Por propiedad de determinante tenemos:

$$(t^{-q} - 1)\Delta_{0,j}(t) = \pm(t^{-p} - 1)\Delta_{0,k}(t),$$

donde $\Delta_{0,j} = \det(M_{0,j})$.

Ahora más generalmente, si v_l y v_m dos columnas más de la matriz M indexada por r y s respectivamente, obtenemos esta relación:

$$\begin{aligned} (t^{r-q} - 1)\Delta_{l,j}(t) &= \pm(t^{r-p} - 1)\Delta_{l,k}(t) \\ (t^{q-s} - 1)\Delta_{k,l}(t) &= \pm(t^{q-r} - 1)\Delta_{k,m}(t), \end{aligned}$$

luego,

$$\begin{aligned}\Delta_{l,j} &= \frac{(t^{r-p}-1)}{t^{r-q}-1} \Delta_{l,k}(t) \\ \Delta_{l,j} &= \pm \frac{(t^{r-p}-1)}{t^{r-q}-1} \frac{t^{q-r}-1}{t^{q-s}-1} \Delta_{k,m}(t) \\ \Delta_{l,j} &= \pm \frac{(t^{r-q}-1)(t^{r-p}-1)}{t^{q-s}-1} \Delta_{k,m}(t).\end{aligned}$$

Tomando $p = r + 1$ y $s = q + 1$.

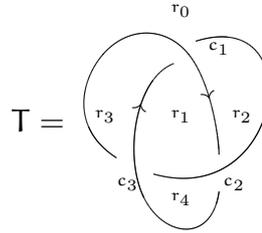
$$\begin{aligned}\Delta_{l,j}(t) &= \pm \frac{t^{r-q}(t^{-1}-1)}{(t^{-1})-1} \Delta_{k,m}(t) \\ \Delta_{l,j}(t) &= t^{r-q} \Delta_{k,m}(t) \quad , h = r - q \\ \Delta_{l,j}(t) &= t^h \Delta_{k,m}(t)\end{aligned}$$

Así, concluye la demostración. □

DEFINICIÓN 3.14. *Sea K un nudo orientado. La matriz $M_{p,p+1}$ se llamará matriz de Alexander asociada al nudo K .*

DEFINICIÓN 3.15. *El polinomio de Alexander se obtendrá al factorizar $\Delta_{p,p+1}(t)$ de modo tal que su término constante quede positivo. Este polinomio se denotará $\Delta_K(t)$.*

EJEMPLO 29. *Sea*



Los cruces están dados por:

$$\begin{aligned}c_1 &= r_0 t - r_3 t + r_1 - r_2 \\ c_2 &= r_0 t - r_2 t + r_1 - r_4 \\ c_3 &= r_0 t - r_4 t + r_1 - r_3\end{aligned}$$

Entonces, la matriz asociada al trébol es:

$$M = \begin{pmatrix} t & 1 & -1 & -t & 0 \\ t & 1 & -t & 0 & -1 \\ t & 1 & 0 & -1 & -t \end{pmatrix},$$

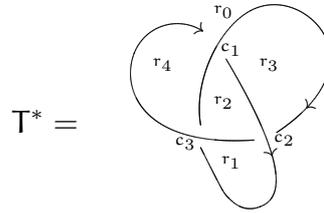
Entonces:

$$M_{0,4} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -t \\ 1 & -t & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Finalmente,

$$\Delta_T = t^2 - t + 1$$

EJEMPLO 30. Calculemos el polinomio de Alexander del trébol reflejado



Los cruces están dados por:

$$c_1 = r_3 t - t r_0 + r_4 - r_2$$

$$c_2 = t r_1 - t r_0 + r_3 - r_2$$

$$c_3 = t r_4 - t r_0 + r_1 - r_2$$

Entonces, la matriz asociada al trébol reflejado es:

$$M = \begin{pmatrix} -t & 0 & -1 & t & 1 \\ -t & t & -1 & 1 & 0 \\ -t & 1 & -1 & 0 & t \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$M_{0,4} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & t \\ t & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Finalmente

$$\Delta_{T^*} = t^2 - t + 1$$

OBSERVACIÓN 17. *Así podemos concluir que el $\Delta_{\Gamma} = \Delta_{\Gamma^*}$, entonces el polinomio de Alexander no distingue isotopía, es decir que no se si sus nudos respectivos son equivalentes, entre el trébol y su reflejado.*

Es necesario introducir el concepto de matrices ε -equivalentes en $M(\Lambda)$ con el fin de demostrar la invarianza del polinomio bajo los movimientos de Reidemeister.

4. Matrices ε -equivalentes

DEFINICIÓN 3.16. *Sea M_1 y $M_2 \in M(\Lambda)$*

Se dice que M_1 y M_2 son ε -equivalentes ($M_1 \sim_{\varepsilon} M_2$), si podemos obtener M_2 operando M_1 a partir de:

1. *Operaciones filas elementales $F_{ij}, F_{ij}(\mathbf{a}), F_i(\mathbf{t}^{\pm 1})$, donde $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}$.*
2. *Operaciones columnas $C_{ij}, C_{ij}(\mathbf{a}), C_i(\mathbf{t}^{\pm 1})$*
3. *Operación aumentación δ^+*

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ 0 & \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{pmatrix}$$

4. *Operación disminución δ^- .*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ 0 & \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{pmatrix}$$

OBSERVACIÓN 18.

1. *Si $\delta \in \{\delta^+, \delta^-\}$, entonces:*

$$\delta^{-1} := \begin{cases} \delta & \text{si } \delta = \delta^- \\ \delta^- & \text{si } \delta = \delta^+ \end{cases}$$

2. Si $M_1 \sim_\varepsilon M_2$, entonces

$AM_1B = M_2$, donde A y B son una cantidad finita de operaciones filas y operaciones columnas respectivamente. Denotaremos $M_1 \sim_\varepsilon M_2$ de la siguiente manera $M_1 \xrightarrow{(A,B)} M_2$

3. Como $A = F_1F_2\dots F_r$, donde F_i son las operaciones elementales filas, entonces A es invertible.

4. Como $B = C_1C_2\dots C_r$, donde C_i son las operaciones elementales columnas, entonces B es invertible.

5. $\det(F_{ij}) = -1$ y $\det(C_{ij}) = -1$

PROPOSICIÓN 3.6. La relación de ε -equivalencia \sim_ε es una relación de equivalencia sobre $M(\Lambda)$

Demostración.

1. Refleja:

$$M \xrightarrow{F_{12}(0)} M, \text{ entonces } M \sim_\varepsilon M$$

2. Simétrica:

Si $M \sim_\varepsilon N$, entonces,

$$M \xrightarrow{(A_1, B_1)} M_1 \xrightarrow{\delta_1} M'_1 \xrightarrow{(A_2, B_2)} M_2 \xrightarrow{\delta_2} M'_2 \rightarrow \dots \rightarrow M_k \xrightarrow{\delta_k} M'_k \xrightarrow{(A_{k+1}, B_{k+1})} N$$

Donde δ_i puede ser la operación aumentar o disminuir la matriz. Luego,

$$N \xrightarrow{(A_{k+1}^{-1}, B_{k+1}^{-1})} N_1 \xrightarrow{\delta_k^{-1}} N'_1 \xrightarrow{(A_k^{-1}, B_k^{-1})} N_2 \xrightarrow{\delta_{k-1}^{-1}} N'_2 \rightarrow \dots \rightarrow N_k \xrightarrow{\delta_1^{-1}} N'_k \xrightarrow{(A_1^{-1}, B_1^{-1})} M.$$

Es decir, $N \sim_\varepsilon M$

3. Transitividad: si $M \sim_\varepsilon N$ y $N \sim_\varepsilon R$ entonces,

$$M \xrightarrow{(A_1, B_1)} M_1 \xrightarrow{\delta_1} M'_1 \xrightarrow{(A_2, B_2)} M_2 \xrightarrow{\delta_2} M'_2 \rightarrow \dots \rightarrow M_k \xrightarrow{\delta_k} M'_k \xrightarrow{(A_{k+1}, B_{k+1})} N$$

y

$$N \xrightarrow{(A'_1, B'_1)} N_1 \xrightarrow{\delta'_1} N'_1 \xrightarrow{(A'_2, B'_2)} N_2 \xrightarrow{\delta'_2} N'_2 \rightarrow \dots \rightarrow N_s \xrightarrow{\delta'_s} N'_s \xrightarrow{(A'_{s+1}, B'_{s+1})} R$$

Luego:

$$M \xrightarrow{(A_1, B_1)} M_1 \xrightarrow{\delta_1} M_1 \rightarrow \dots \rightarrow N \xrightarrow{(A'_1, B'_1)} N_1 \xrightarrow{\delta'_1} N'_1 \rightarrow \dots \rightarrow N'_s \xrightarrow{(A'_{s+1}, B'_{s+1})} R$$

Así $M \sim_\varepsilon R$

□

PROPOSICIÓN 3.7. Sean $M, N \in M(\Lambda)$, si $M \sim_\varepsilon N$ entonces

$$\det(N) = \pm t^k \det(M)$$

para algún $k \in \mathbb{Z}$.

Demostración. Sea $M \sim_\varepsilon N$, esto significa

$$M \xrightarrow{(A_1, B_1)} M_1 \xrightarrow{\delta_1} M'_1 \xrightarrow{(A_2, B_2)} M_2 \xrightarrow{\delta_2} M'_2 \rightarrow \dots \rightarrow M_k \xrightarrow{\delta_k} M'_k \xrightarrow{(A_{k+1}, B_{k+1})} N$$

entonces:

$$\begin{aligned} A_{k+1}(\delta_k[\dots A_2(\delta_1(A_1 M B_1)) B_2 \dots]) B_{k+1} &= N \\ \det(A_{k+1}) \det(\delta_k[\dots]) \det(B_{k+1}) &= \det(N) \\ \pm t^s \det(\delta_k[\dots]) &= \det(N) \\ \pm t^s \det([\dots]) &= \det(N) \\ &\vdots \\ \pm t^j \det(\delta_1(A_1 M B_1)) &= \det(N) \\ \pm t^k \det(M) &= \det(N). \end{aligned}$$

Así concluye la demostración. □

En orden a demostrar que \sim_ε respeta los movimientos de Reidemeister es necesario el siguiente lema.

LEMA 3.11. Sea la matriz N que se obtiene al cambiar todos los signos de una matriz M a positivos. Entonces $M \sim_\varepsilon N$.

Demostración. Es fácil ver que es $M \sim_\varepsilon N$ por medio de operaciones del tipo $f_i(\pm 1)$ y $C_i(\pm 1)$. □

TEOREMA 3.12. *Sea K y K' dos nudos, si $K \approx K'$ entonces $M_{p,p+1} \sim_\varepsilon M'_{p,p+1}$, donde $M_{p,p+1}$, $M'_{p,p+1}$ son las respectivas matrices de Alexander asociadas a los nudos K y K' .*

Demostración.

Basta ver que \sim_ε respete los movimientos de Reidemeister:

1. Primer movimiento de Reidemeister. Sean



denotaremos como M y M' sus respectivas matrices asociados a ellos. Sea $M = (a_{ij})$, donde cada entrada de una columna esta identificada por la región que hay en el nudo. La primera entrada esta denotada por r_1 , la segunda por r_2 y así sucesivamente, del mismo modo para el nudo cuya matriz asociada es M' .

Luego es claro.

$$M' = \begin{pmatrix} -t & -1 & t+1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & & & \\ \vdots & & & M & & \\ 0 & & & & & \end{pmatrix}$$

Donde la Primera columna en que aparece $-t$ está determinada por la región r^* la segunda columna en que aparece -1 esta determinada por la región r'_1 y así sucesivamente.

Ahora veremos que $M_{1,2} \sim_\varepsilon M'_{1,2}$

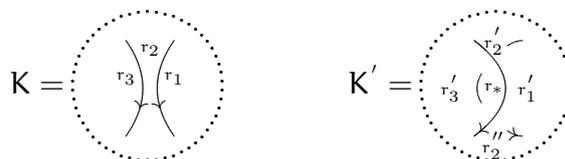
$$M' = \begin{pmatrix} -t & -1 & t+1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & & & \\ \vdots & & & M & & \\ 0 & & & & & \end{pmatrix}$$

$$M'_{1,2} = \begin{pmatrix} -t & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & M_{1,2} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \sim_{\varepsilon} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & M_{1,2} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \sim_{\varepsilon} M'_{1,2}$$

Así queda demostrado el primer movimiento de Reidemeister.

2. Segundo movimiento de Reidemeister

Sean los nudos



que tienen matrices asociadas a ellos, denotadas por M y M' respectivamente.

Sea $M = (a_{ij})$. Cada entrada de una columna está identificada por la región que hay en el nudo y la primera entrada denotada por r_1 , la segunda por r_2 y así sucesivamente, del mismo modo hacemos para el otro nudo que tiene asociada la matriz M' .

$$M' = \begin{pmatrix} -t & t & 0 & -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ t & -t & 1 & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & | & | & | & & & & \\ 0 & u & v & w & & & M_{1,2} & \\ 0 & | & | & | & & & & \end{pmatrix}$$

Donde la primera columna hasta la quinta columna está determinada por las regiones $r^*, r'_1, r'_2, r''_2, r'_3$ respectivamente.

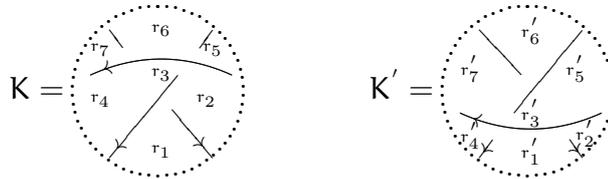
Quitaremos la columna 2 y 4. Nuestra matriz quedará así:

$$\begin{aligned}
M'_{1,2} &= \begin{pmatrix} -t & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ t & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & | & & & & \\ 0 & \mathbf{v} & & M_{1,2} & & \\ 0 & | & & & & \end{pmatrix} \sim_{\varepsilon} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & | & & & & \\ 0 & \mathbf{v} & & M_{1,2} & & \\ 0 & | & & & & \end{pmatrix} \sim_{\varepsilon} \\
&\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & | & & & & \\ 0 & \mathbf{v} & & M_{1,2} & & \\ 0 & | & & & & \end{pmatrix} \sim_{\varepsilon} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & | & & & & \\ 0 & \mathbf{v} & & M_{1,2} & & \\ 0 & | & & & & \end{pmatrix} \sim_{\varepsilon} \\
&\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ | & & & & \\ \mathbf{v} & & M_{1,2} & & \\ | & & & & \end{pmatrix} \sim_{\varepsilon} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & & \\ \vdots & & M_{1,2} & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix} \sim_{\varepsilon} M_{1,2}
\end{aligned}$$

Así queda demostrado el segundo movimiento de Reidemeister.

3. Tercer movimiento de Reidemeister

Sean los nudos



que tienen matrices asociadas a ellos, denotadas por M y M' .

$$M = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & r_3 & r_4 & r_5 & r_6 & r_7 & \cdots & \cdot \\ -1 & t & -t & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & t & -1 & 0 & -t & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & t & -1 & 0 & -t & 1 & \cdots & 0 \\ | & | & 0 & | & | & | & | & & \\ \mathbf{u} & \mathbf{v} & \vdots & \mathbf{w} & \mathbf{x} & \mathbf{y} & \mathbf{z} & \mathbf{X} & \\ | & | & 0 & | & | & | & | & & \end{pmatrix}$$

Donde los r_i , $1 \leq i \leq 7$ son las regiones del nudo.

Análogamente el otro nudo con matriz asociada M'

$$M' = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & r_3 & r_4 & r_5 & r_6 & r_7 & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & -1 & 0 & t & -t & 1 & \cdots & 0 \\ t & 0 & -t & -1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ -1 & t & 1 & 0 & -t & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ | & | & 0 & | & | & | & | & & \\ \mathbf{u} & \mathbf{v} & \vdots & \mathbf{w} & \mathbf{x} & \mathbf{y} & \mathbf{z} & \mathbf{X} & \\ | & | & 0 & | & | & | & | & & \end{pmatrix}$$

Por Lema 3.11 tenemos que $M \sim_\varepsilon N$ y $M' \sim_\varepsilon N'$

Donde:

$$N = \begin{pmatrix} 1 & t & t & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & t & 1 & 0 & t & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & t & 1 & 0 & t & 1 & \cdots & 0 \\ | & | & 0 & | & | & | & | & & \\ \mathbf{u} & \mathbf{v} & \vdots & \mathbf{w} & \mathbf{x} & \mathbf{y} & \mathbf{z} & \mathbf{X} & \\ | & | & 0 & | & | & | & | & & \end{pmatrix} y$$

$$N' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & t & t & 1 & \cdots & 0 \\ t & 0 & t & 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & t & 1 & 0 & t & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ | & | & 0 & | & | & | & | & & \\ \mathbf{u} & \mathbf{v} & \vdots & \mathbf{w} & \mathbf{x} & \mathbf{y} & \mathbf{z} & \mathbf{X} & \\ | & | & 0 & | & | & | & | & & \end{pmatrix}$$

Veremos que $N \sim_\varepsilon N'$. Si esto ocurre tendríamos por transitividad que $M \sim_\varepsilon M'$ y en particular $M_{1,2} \sim_\varepsilon M'_{1,2}$ y quedaría demostrado el Tercer movimiento de Reidemeister.

Para probar $N \sim_\varepsilon N'$, basta analizar la matriz de 3×4

$$\begin{pmatrix} 1 & t & t & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 1 & 0 & t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t & 1 & 0 & t & 1 \end{pmatrix} \sim_\varepsilon \begin{pmatrix} 0 & 0 & t & 1 & 0 & t & 1 \\ 0 & t & 1 & 0 & t & 1 & 0 \\ 1 & t & t & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

entonces

$$N = \begin{pmatrix} 1 & t & t & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 1 & 0 & t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t & 1 & 0 & t & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{1,3}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & t & 1 & 0 & t & 1 \\ 0 & t & 1 & 0 & t & 1 & 0 \\ 1 & t & t & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_{2,(-t)}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & t & 1 & 0 & t & 1 \\ 0 & -t^2 & -t & 0 & -t^2 & -t & 0 \\ 1 & t & t & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{1,2}(1)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & t & 1 & 0 & t & 1 \\ 0 & -t^2 & 0 & 1 & -t^2 & 0 & 1 \\ 1 & t & t & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{C_{3,(t^{-1})}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & t & 1 \\ 0 & -t^2 & 0 & 1 & -t^2 & 0 & 1 \\ 1 & t & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_{3,4}(-1)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & t & 1 \\ 0 & -t^2 & 0 & 1 & -t^2 & 0 & 1 \\ 1 & t & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& \xrightarrow{C_3(t)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & t & 0 & 0 & t & 1 \\ 0 & -t^2 & 0 & 1 & -t^2 & 0 & 1 \\ 1 & t & t & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{3,2}(t)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & t & 0 & 0 & t & 1 \\ t & 0 & t^2 & 1 & -t^2 & 0 & 1 \\ 1 & t & t & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_{3,5}(1)} \\
& \begin{pmatrix} 0 & 0 & t & 0 & t & t & 1 \\ t & 0 & t^2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & t & t & 0 & t & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_3(t^{-1})} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & t & t & 1 \\ t & 0 & t & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & t & 1 & 0 & t & 0 & 0 \end{pmatrix} = N'
\end{aligned}$$

Por lo tanto queda demostrado el tercer movimiento de Reidemeister.

□

Con este Teorema deducimos la invarianza del Polinomio de Alexander, pues, por Proposición (3.7) tenemos que si $K \approx K'$ entonces $\det(M_{p,p+1}) = t^k \det(M'_{p,p+1})$, Para algún $k \in \mathbb{Z}$.

Álgebra Rook

1. Álgebra de Hecke

DEFINICIÓN 4.1. Sea $u \in \mathbb{C}^\times$. El álgebra de Hecke, denotada por $H_n(u)$, es la \mathbb{C} -álgebra definida por generadores h_1, h_2, \dots, h_{n-1} sujetas a las siguientes relaciones:

1. $h_i h_j = h_j h_i$ si $|i - j| > 1$.
2. $h_i h_{i+1} h_i = h_{i+1} h_i h_{i+1}$ si $|i - j| = 1$.
3. $h_i^2 = u + (u - 1)h_i$.

Otra manera de ver el álgebra de Hecke, es como cociente del álgebra del grupo de trenzas $\mathbb{C}B_n$ con el ideal bilátero generado por todas las expresiones: $\sigma_i^2 - u - (u - 1)\sigma_i$.

OBSERVACIÓN 19.

1. Sea $u = 1$, entonces $H_n(1) = \mathbb{C}S_n$.
2. $H_n(u) \subset H_{n+1}(u)$.
3. Los h_i son invertibles, en efecto:

$$\begin{aligned} h_i^2 &= u + (u - 1)h_i \\ h_i^2 - (u - 1)h_i &= u \\ h_i(h_i - (u - 1)) &= u \\ h_i(u^{-1}h_i - (1 - u^{-1})) &= 1 \end{aligned}$$

Luego

$$h_i^{-1} = u^{-1}h_i - (1 - u^{-1}).$$

LEMA 4.1. Todo elemento de $H_n(u)$ se puede escribir como una combinación lineal de monomios en $1, h_1, h_2, \dots, h_{n-1}$, teniendo a lo más una aparición de h_{n-1} .

Demostración. Por inducción sobre n .

Para $n = 2$, tenemos que $H_2(\mathbf{u}) = \text{Alg}_{\mathbb{C}}\{1, \mathbf{h}_1; \mathbf{h}_1^2 = \mathbf{u} + (\mathbf{u} - 1)\mathbf{h}_1\}$. Se sabe que los elementos de $H_2(\mathbf{u})$ son sumas de potencias de \mathbf{h}_1 , las cuales pueden ser reducidas, por la relación cuadrática, a la forma $\alpha + \beta\mathbf{h}_1$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Supongamos válido el lema para n y demostraremos el lema para $n + 1$.

Basta probar que cualquier monomio en $\{1, \mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_n\}$, puede ser escrito como una combinación lineal de monomios en $1, \mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_n$ con a lo más una ocurrencia de \mathbf{h}_n .

Sea M un monomio en $\{1, \mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_n\}$, y supondremos que en M aparecen 2 veces \mathbf{h}_n , así $M = M_1\mathbf{h}_nM_2\mathbf{h}_nM_3$, donde M_1, M_2, M_3 son monomios en $H_n(\mathbf{u})$, por hipótesis de inducción, podemos suponer que M_2 es un monomio en $\{1, \mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_{n-1}\}$ que tiene a lo más una aparición de \mathbf{h}_{n-1} .

Separaremos en dos casos.

1. M_2 no tiene \mathbf{h}_{n-1}

$$\begin{aligned} M &= M_1\mathbf{h}_nM_2\mathbf{h}_nM_3 \\ &= M_1M_2\mathbf{h}_n^2M_3 \\ &= M_1M_2(\mathbf{u} + (\mathbf{u} - 1)\mathbf{h}_n)M_3 \\ &= \mathbf{u}M_1M_2M_3 + (\mathbf{u} - 1)M_1M_2\mathbf{h}_nM_3 \end{aligned}$$

2. M_2 tiene exactamente una aparición de \mathbf{h}_{n-1} entonces $M_2 = M_2'\mathbf{h}_{n-1}M_2''$, donde M_2', M_2'' son monomios en $\{1, \mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_{n-2}\}$.

$$\begin{aligned} M &= M_1\mathbf{h}_nM_2\mathbf{h}_nM_3 \\ &= M_1\underbrace{\mathbf{h}_nM_2'}_{\mathbf{h}_n}\mathbf{h}_{n-1}\underbrace{M_2''\mathbf{h}_n}_{\mathbf{h}_n}M_3 \\ &= M_1M_2'\underbrace{\mathbf{h}_n\mathbf{h}_{n-1}\mathbf{h}_n}_{\mathbf{h}_n\mathbf{h}_{n-1}}M_2''M_3 \quad (\text{relación de trenzas}) \\ &= M_1M_2'\mathbf{h}_{n-1}\mathbf{h}_n\mathbf{h}_{n-1}M_2''M_3 \end{aligned}$$

Lo cual concluye la demostración. □

DEFINICIÓN 4.2. Sean los conjuntos T_i , definidos como sigue:

$$\begin{aligned}
T_1 &:= \{1, h_1\} \\
T_2 &:= \{1, h_2, h_2h_1\} \\
T_3 &:= \{1, h_3, h_3h_2, h_3h_2h_1\} \\
&\vdots \\
T_k &:= \{1\} \cup h_k T_{k-1}
\end{aligned}$$

DEFINICIÓN 4.3. Un monomio en la forma, m_1, m_2, \dots, m_{n-1} tal que $m_i \in T_i$, se llama monomio normal.

EJEMPLO 31. En $H_3(\mathbf{u})$ el conjunto de los monomios normales es:

$$\{1, h_1, h_2, h_1h_2, h_2h_1, h_1h_2h_1\}.$$

PROPOSICIÓN 4.1. El conjunto de monomios normales generan linealmente a $H_n(\mathbf{u})$.

Demostración.

Usando el Lema anterior, basta demostrar que todo monomio M que tiene a los mas h_{n-1} se puede expresar como una combinación lineal de monomios normales. Usaremos inducción sobre n .

Para $n = 2$ es trivial, pues el conjunto $\{1, h_1\} = T_1$ genera a $H_2(\mathbf{u})$. Supongamos que la afirmación es válida para $n-1$, sabemos que todo elemento de $H_n(\mathbf{u})$ es una combinación lineal de monomios $\{1, h_1, \dots, h_{n-1}\}$ con la ocurrencia de a los mas un h_{n-1} . Tendremos dos casos:

1. Si $M_0 \in H_n(\mathbf{u})$ es un monomio que no contiene a h_{n-1} , entonces $M_0 \in H_{n-1}(\mathbf{u})$ y por hipótesis de inducción tenemos que M_0 es una combinación lineal de monomios normales en H_{n-1} , entonces también lo es en $H_n(\mathbf{u})$.
2. Si $M = M_1 h_{n-1} M_2 \in H_n(\mathbf{u})$, donde $M_1, M_2 \in H_{n-1}$, por hipótesis de inducción M_2 es una combinación lineal de monomios normales en $H_{n-1}(\mathbf{u})$. Así, basta estudiar el caso cuando $M_2 = (m_1 \dots m_{n-2})$.

$$\begin{aligned}
M &= M_1 h_{n-1}(m_1 \cdots m_{n-2}) \\
&= \underbrace{M_1 m_1 m_2 m_{n-3}} h_{n-1} m_{n-2} \\
&= M'_1 m'_{n-1},
\end{aligned}$$

donde $m'_{n-1} \in T_{n-1}$ y $M'_1 \in H_{n-1}(\mathbf{u})$, y por hipótesis de inducción tenemos que $M'_1 = m'_1 \cdots m'_{n-2}$,

entonces $M = m'_1 \cdots m'_{n-2} m'_{n-1}$ donde $m_i \in T_i$, luego M es una combinación de monomios normales en $H_n(\mathbf{u})$.

Por lo tanto $H_n(\mathbf{u})$ está generado por el conjunto de monomios normales. Así concluye la demostración. □

TEOREMA 4.2. *El conjunto de monomios normales constituyen una base de $H_n(\mathbf{u})$, en consecuencia $\dim H_n(\mathbf{u}) = n!$.*

Demostración. Ver [Lic91] □

PROPOSICIÓN 4.2. *La función:*

$$\begin{aligned}
\psi : H_n \oplus H_n \otimes_{H_{n-1}} H_n &\rightarrow H_{n+1} \\
\mathbf{a} + \sum_i b_i \otimes c_i &\mapsto \mathbf{a} + \sum_i b_i h_n c_i
\end{aligned}$$

es un isomorfismo de $(H_n(\mathbf{u}), H_n(\mathbf{u}))$ -bimódulos.

Demostración. Veamos que ψ es una función bien definida, si $D \in H_{n-1}(\mathbf{u})$, entonces D es un monomio en $\{1, h_1, h_2, \dots, h_{n-2}\}$, luego

$$\psi(AD \otimes_{H_{n-1}} B) = ADh_n B = Ah_n DB = \psi(A \otimes_{H_{n-1}} DB),$$

para todo $A, B \in H_{n-1}$.

Ahora, probaremos que ψ es \mathbb{C} -lineal. Sean $\alpha \in \mathbb{C}$ y

$$x = A + \sum_i^n B_i \otimes_{H_{n-1}} C_i, \quad y = A' + \sum_{i=n+1}^m B_i \otimes_{H_{n-1}} C_i'$$

$$\begin{aligned} \psi(\alpha x + y) &= \psi(\alpha A + \sum_{i=1}^n \alpha B_i \otimes_{H_{n-1}} C_i + A' + \sum_{i=n+1}^m B_i' \otimes_{H_{n-1}} C_i') \\ &= \psi((\alpha A + A') + \sum_{i=1}^{n+m} B_i'' \otimes_{H_{n-1}} C_i'') \end{aligned}$$

donde

$$B_i'' = \begin{cases} \alpha B_i & \text{si } 1 \leq i \leq n \\ B_i' & \text{si } n < i \leq m \end{cases} \quad C_i'' = \begin{cases} C_i & \text{si } 1 \leq i \leq n \\ C_i' & \text{si } n < i \leq m \end{cases}$$

y luego

$$\begin{aligned} \psi(\alpha x + y) &= (\alpha A + A') + \sum_{i=1}^{n+m} B_i'' h_n C_i'' \\ &= \alpha A + A' + \alpha \sum_{i=1}^n B_i h_n C_i + \sum_{i=n+1}^m B_i' h_n C_i' \\ &= \alpha(A + \sum_{i=1}^n B_i h_n C_i) + (A' + \sum_{i=n+1}^m B_i' h_n C_i') \\ &= \alpha \psi(A + \sum_{i=1}^n B_i \otimes_{H_{n-1}} C_i) + \psi(A' + \sum_{i=n+1}^m B_i' \otimes_{H_{n-1}} C_i') \end{aligned}$$

es decir, $\psi(\alpha x + y) = \alpha \psi(x) + \psi(y)$.

Por el Teorema anterior tenemos que ψ es un epimorfismo, luego nos resta probar que ψ es inyectiva. Para esto, basta demostrar que $\dim_{\mathbb{C}}(H_n \oplus H_n \otimes_{H_{n-1}} H_n) = (n+1)!$, pero sabemos que $\dim_{\mathbb{C}} H_n(\mathbf{u}) = n!$, luego basta demostrar que $\dim_{\mathbb{C}}(H_n \otimes_{H_{n-1}} H_n) = n!n$. Sabemos que $B = \{m_1 m_2 \cdots m_{n-1}; m_i \in T_i\}$ es una base de $H_n(\mathbf{u})$, luego $B \otimes B$ es una base de $H_n(\mathbf{u}) \otimes H_n(\mathbf{u})$. Ahora, si consideramos el producto tensorial sobre $H_{n-1}(\mathbf{u})$, se sigue que para todo $x, y \in B$, tenemos

$$\begin{aligned} x \otimes_{H_{n-1}} y &= x \otimes_{H_{n-1}} m_1 m_2 \cdots m_{n-2} m_{n-1} \quad m_i \in T_i \\ &= x m_1 m_2 \cdots m_{n-2} \otimes_{H_{n-1}} m_{n-1} \end{aligned}$$

es decir, $x \otimes y \in H_n(\mathbf{u}) \otimes_{H_{n-1}} T_{n-1}$. Así tenemos que $B \otimes_{H_{n-1}} T_{n-1}$ es una base de $H_n \otimes_{H_{n-1}} H_n$, lo cual implica que $\dim_{\mathbb{C}} H_n \otimes_{H_{n-1}} H_n = n!n$.

□

2. Traza Markov-Ocneanu

La traza de Ocneanu es una función \mathbb{C} -lineal definida sobre el conjunto $H_{\infty}(\mathbf{u}) := \coprod_{n \geq 1} H_n(\mathbf{u})$. Primero daremos la siguiente observación:

OBSERVACIÓN 20. Sean \mathcal{A} una \mathbb{C} -álgebra y $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ una función \mathbb{C} -lineal. Si S genera linealmente a \mathcal{A} , y $f(as) = f(sa)$ para todo $a \in \mathcal{A}$ y $s \in S$, entonces $f(ab) = f(ba)$ para todo $a, b \in \mathcal{A}$. En efecto, si ponemos $b = \sum_{s \in S} M_s$ se tiene:

$$\begin{aligned} f(ab) &= f\left(a \sum_{s \in S} M_s\right) \\ &= \sum_{s \in S} f(aM_s) \\ &= \sum_{s \in S} f(M_s a) \\ &= f\left(\sum_{s \in S} M_s a\right) \end{aligned}$$

Luego, $f(ab) = f(ba)$.

TEOREMA 4.3. Sea z una indeterminada sobre \mathbb{C} . Entonces, para todo $n \geq 1$ existe una función $\text{tr}_n : H_n(\mathbf{u}) \rightarrow \mathbb{C}$, tal que, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} H_n(\mathbf{u}) & \xrightarrow{i} & H_{n+1}(\mathbf{u}) \\ & \searrow \text{tr}_n & \swarrow \text{tr}_{n+1} \\ & & \mathbb{C} \end{array}$$

y que para todo $x, y \in H_n(\mathbf{u})$, se cumple:

1. La función tr_n es \mathbb{C} -lineal.
2. $\text{tr}_n(1) = 1$.
3. $\text{tr}_n(xy) = \text{tr}_n(yx)$.
4. $\text{tr}_{n+1}(xh_n) = z \text{tr}_n(x)$.

Esta función es llamada traza de Markov-Ocneanu.

Demostración. La función tr_n la definiremos por inducción sobre n . Para $n = 1$, la función $\text{tr}_1 : H_1(\mathbf{u}) = \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es la función identidad. Supongamos que tenemos definida la función $\text{tr}_n : H_n(\mathbf{u}) \rightarrow \mathbb{C}$, utilizando la estructura de $H_{n+1}(\mathbf{u})$. Definimos inductivamente $\text{tr}_{n+1} : H_{n+1}(\mathbf{u}) \rightarrow \mathbb{C}$ por

$$\text{tr}_{n+1}(\mathbf{a} + \sum_i \mathbf{b}_i \mathbf{h}_n \mathbf{c}_i) := \text{tr}_n(\mathbf{a}) + \sum_i z \text{tr}_n(\mathbf{b}_i \mathbf{c}_i)$$

donde $\mathbf{a}, \mathbf{b}_i, \mathbf{c}_i \in H_n(\mathbf{u})$. Para probar que la traza es \mathbb{C} -lineal procederemos por inducción sobre n . Para $n = 1$ definimos $\text{tr}_1 := \text{Id}_{\mathbb{C}}$. Supongamos que $\text{tr}_n : H_n(\mathbf{u}) \rightarrow \mathbb{C}$ es \mathbb{C} -lineal. Debemos probar que $\text{tr}_{n+1}(\alpha \mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha \text{tr}_{n+1}(\mathbf{x}) + \text{tr}_{n+1}(\mathbf{y})$ para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in H_{n+1}(\mathbf{u})$ y $\alpha \in \mathbb{C}$. Sean

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} + \sum_{i=1}^n \mathbf{b}_i \mathbf{h}_n \mathbf{c}_i \quad \text{e} \quad \mathbf{y} = \mathbf{a}' + \sum_{i=n+1}^m \mathbf{b}_i' \mathbf{h}_n \mathbf{c}_i'$$

tenemos:

$$\begin{aligned} \text{tr}_{n+1}(\alpha \mathbf{x} + \mathbf{y}) &= \text{tr}_{n+1}(\alpha \mathbf{a} + \sum_{i=1}^n \alpha \mathbf{b}_i \mathbf{h}_n \mathbf{c}_i + \mathbf{a}' + \sum_{i=n+1}^m \mathbf{b}_i' \mathbf{h}_n \mathbf{c}_i') \\ &= \text{tr}_{n+1}((\alpha \mathbf{a} + \mathbf{a}') + \sum_{i=1}^{n+m} \mathbf{b}_i'' \mathbf{h}_n \mathbf{c}_i'') \end{aligned}$$

donde

$$\mathbf{b}_i'' = \begin{cases} \alpha \mathbf{b}_i & \text{si } 1 \leq i \leq n \\ \mathbf{b}_i' & \text{si } n < i \leq m \end{cases} \quad \mathbf{c}_i'' = \begin{cases} \mathbf{c}_i & \text{si } 1 \leq i \leq n \\ \mathbf{c}_i' & \text{si } n < i \leq m \end{cases}.$$

Luego

$$\begin{aligned} \text{tr}_{n+1}(\alpha \mathbf{x} + \mathbf{y}) &= \text{tr}_n(\alpha \mathbf{a} + \mathbf{a}') + \sum_{i=1}^{n+m} z \text{tr}_n(\mathbf{b}_i'' \mathbf{c}_i'') \\ &= \alpha \text{tr}_n(\mathbf{a}) + \text{tr}_n(\mathbf{a}') + \sum_{i=1}^n z \text{tr}_n(\alpha \mathbf{b}_i \mathbf{c}_i) + \sum_{i=n+1}^m z \text{tr}_n(\mathbf{b}_i' \mathbf{c}_i') \\ &= \alpha (\text{tr}_n(\mathbf{a}) + \sum_{i=1}^n z \text{tr}_n(\mathbf{b}_i \mathbf{c}_i)) + (\text{tr}_n(\mathbf{a}') + \sum_{i=n+1}^m z \text{tr}_n(\mathbf{b}_i' \mathbf{c}_i')) \\ &= \alpha \text{tr}_{n+1}(\mathbf{a} + \sum_{i=1}^n \mathbf{b}_i \mathbf{h}_n \mathbf{c}_i) + \text{tr}_{n+1}(\mathbf{a}' + \sum_{i=n+1}^m \mathbf{b}_i' \mathbf{h}_n \mathbf{c}_i') \end{aligned}$$

es decir, $\text{tr}(\alpha \mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha \text{tr}(\mathbf{x}) + \text{tr}(\mathbf{y})$.

De la definición, es claro que $\text{tr}_{n+1}(\mathbf{a}h_n) = z \text{tr}_n(\mathbf{a})$ para todo $\mathbf{a} \in H_n(\mathbf{u})$. Entonces, solo nos resta probar que $\text{tr}_n(\mathbf{a}\mathbf{b}) = \text{tr}_n(\mathbf{b}\mathbf{a})$ para todo $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in H_n(\mathbf{u})$, que probaremos por inducción sobre n . Para los casos $n = 1, 2$ la demostración es trivial. Ahora, supongamos que $\text{tr}_n(\mathbf{a}\mathbf{b}) = \text{tr}_n(\mathbf{b}\mathbf{a})$ para todo $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in H_n(\mathbf{u})$. Sean $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in H_{n+1}(\mathbf{u})$, por Lema 4.1 podemos suponer que \mathbf{a} y \mathbf{b} son monomios en $\{1, h_1, \dots, h_n\}$ con a lo más una ocurrencia de h_n . Luego tenemos los siguientes casos:

Caso 1. Si \mathbf{a} y \mathbf{b} no contienen a h_n , tenemos que $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in H_n(\mathbf{u})$, luego por hipótesis inductiva se tiene que $\text{tr}_{n+1}(\mathbf{a}\mathbf{b}) = \text{tr}_{n+1}(\mathbf{b}\mathbf{a})$.

Caso 2. Si \mathbf{a} contiene a h_n y \mathbf{b} no lo contiene, podemos poner $\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 h_n \mathbf{a}_2$, donde $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in H_n(\mathbf{u})$, luego tenemos:

$$\begin{aligned} \text{tr}_{n+1}(\mathbf{a}\mathbf{b}) &= \text{tr}_{n+1}(\mathbf{a}_1 h_n \mathbf{a}_2 \mathbf{b}) \\ &= z \text{tr}_n(\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{b}) \\ &= z \text{tr}_n(\mathbf{b} \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2) \quad (\text{hip. induc.}) \\ &= \text{tr}_{n+1}(\mathbf{b} \mathbf{a}_1 h_n \mathbf{a}_2) \\ &= \text{tr}_{n+1}(\mathbf{b}\mathbf{a}) \end{aligned}$$

es decir, $\text{tr}_{n+1}(\mathbf{a}\mathbf{b}) = \text{tr}_{n+1}(\mathbf{b}\mathbf{a})$.

En el último caso usaremos la observación anterior.

Caso 3. Supongamos que \mathbf{a} y \mathbf{b} contiene a h_n . Por la observación anterior, basta ver que $\text{tr}_{n+1}(\mathbf{a}\mathbf{s}) = \text{tr}_{n+1}(\mathbf{s}\mathbf{a})$ para todo $\mathbf{a} \in H_{n+1}(\mathbf{u})$ y $\mathbf{s} \in H_n(\mathbf{u}) \cup \{h_n\}$, si $\mathbf{s} \in H_n(\mathbf{u})$, estamos en el caso anterior. Luego, la demostración se reduce a probar que $\text{tr}_{n+1}(\mathbf{a}h_n) = \text{tr}_{n+1}(h_n\mathbf{a})$. Poniendo $\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 h_n \mathbf{a}_2$, debemos destacar varios casos dependiendo si \mathbf{a}_1 y \mathbf{a}_2 contienen o no a h_{n-1} . Primero, veamos el caso en que \mathbf{a}_1 y \mathbf{a}_2 no contiene a h_{n-1} , tenemos:

$$\text{tr}_{n+1}(\mathbf{a}h_n) = \text{tr}_{n+1}(\mathbf{a}_1 h_n \mathbf{a}_2 h_n) = \text{tr}_{n+1}(h_n \mathbf{a}_1 h_n \mathbf{a}_2) = \text{tr}(h_n \mathbf{a})$$

Ahora, supongamos que \mathbf{a}_2 contiene a \mathbf{h}_{n-1} , luego podemos poner $\mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_2' \mathbf{h}_{n-1} \mathbf{a}_2''$, donde $\mathbf{a}_2', \mathbf{a}_2'' \in H_{n-1}(\mathbf{u})$, entonces:

$$\begin{aligned}
\text{tr}_{n+1}(\mathbf{a}\mathbf{h}_n) &= \text{tr}_{n+1}(\mathbf{a}_1 \mathbf{h}_n \mathbf{a}_2 \mathbf{h}_n) \\
&= \text{tr}_{n+1}(\mathbf{a}_1 \mathbf{h}_n \mathbf{a}_2' \mathbf{h}_{n-1} \mathbf{a}_2'' \mathbf{h}_n) \\
&= \text{tr}_{n+1}(\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2' \mathbf{h}_n \mathbf{h}_{n-1} \mathbf{h}_n \mathbf{a}_2'') \\
&= \text{tr}_{n+1}(\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2' \mathbf{h}_{n-1} \mathbf{h}_n \mathbf{h}_{n-1} \mathbf{a}_2'') \\
&= z \text{tr}_n(\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2' \mathbf{h}_{n-1}^2 \mathbf{a}_2'') \\
&= z \text{tr}_n(\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2' (\mathbf{u} + (\mathbf{u} - 1) \mathbf{h}_{n-1}) \mathbf{a}_2'') \\
&= \mathbf{u} z \text{tr}_n(\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2' \mathbf{a}_2'') + (\mathbf{u} - 1) z \text{tr}_n(\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2' \mathbf{h}_{n-1} \mathbf{a}_2'') \\
&= \mathbf{u} z \text{tr}_n(\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2' \mathbf{a}_2'') + (\mathbf{u} - 1) z \text{tr}_n(\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2).
\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
\text{tr}_{n+1}(\mathbf{h}_{n-1} \mathbf{a}) &= \text{tr}_{n+1}(\mathbf{h}_n \mathbf{a}_1 \mathbf{h}_n \mathbf{a}_2) \\
&= \text{tr}_{n+1}(\mathbf{h}_n^2 \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2) \\
&= \text{tr}_{n+1}((\mathbf{u} + (\mathbf{u} - 1) \mathbf{h}_n) \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2) \\
&= \mathbf{u} \text{tr}_{n+1}(\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2) + (\mathbf{u} - 1) \text{tr}_{n+1}(\mathbf{h}_n \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2) \\
&= \mathbf{u} \text{tr}_{n+1}(\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2' \mathbf{h}_{n-1} \mathbf{a}_2'') + (\mathbf{u} - 1) z \text{tr}_n(\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2) \\
&= \mathbf{u} z \text{tr}_n(\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2' \mathbf{a}_2'') + (\mathbf{u} - 1) z \text{tr}_n(\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2).
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\text{tr}_{n+1}(\mathbf{a}\mathbf{h}_n) = \text{tr}_{n+1}(\mathbf{h}_{n-1} \mathbf{a})$. El caso en que \mathbf{a}_1 contiene a \mathbf{h}_{n-1} es análogo al anterior, por esto lo omitiremos. Por último, supongamos que \mathbf{a}_1 y \mathbf{a}_2 contiene a \mathbf{h}_{n-1} , luego podemos poner $\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_1' \mathbf{h}_{n-1} \mathbf{a}_1''$ y $\mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_2' \mathbf{h}_{n-1} \mathbf{a}_2''$, donde $\mathbf{a}_1', \mathbf{a}_1'', \mathbf{a}_2', \mathbf{a}_2'' \in H_{n-1}(\mathbf{u})$, entonces:

$$\begin{aligned}
\text{tr}_{n+1}(\mathbf{a}\mathbf{h}_n) &= \text{tr}_{n+1}(\mathbf{a}_1 \mathbf{h}_n \mathbf{a}_2 \mathbf{h}_n) \\
&= \text{tr}_{n+1}(\mathbf{a}_1 \mathbf{h}_n \mathbf{a}_2' \mathbf{h}_{n-1} \mathbf{a}_2'' \mathbf{h}_n) \\
&= \text{tr}_{n+1}(\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2' \mathbf{h}_n \mathbf{h}_{n-1} \mathbf{h}_n \mathbf{a}_2'') \\
&= \text{tr}_{n+1}(\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2' \mathbf{h}_{n-1} \mathbf{h}_n \mathbf{h}_{n-1} \mathbf{a}_2'') \\
&= z \text{tr}_n(\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2' \mathbf{h}_{n-1}^2 \mathbf{a}_2'')
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= z \operatorname{tr}_n(\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2' (\mathbf{u} + (\mathbf{u} - 1) \mathbf{h}_{n-1}) \mathbf{a}_2'') \\
&= \mathbf{u} z \operatorname{tr}_n(\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2' \mathbf{a}_2'') + (\mathbf{u} - 1) z \operatorname{tr}_n(\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2' \mathbf{h}_{n-1} \mathbf{a}_2'') \\
&= \mathbf{u} z \operatorname{tr}_n(\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2' \mathbf{a}_2'') + (\mathbf{u} - 1) z \operatorname{tr}_n(\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2).
\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}_{n+1}(\mathbf{h}_n \mathbf{a}) &= \operatorname{tr}_{n+1}(\mathbf{h}_n \mathbf{a}_1 \mathbf{h}_n \mathbf{a}_2) \\
&= \operatorname{tr}_{n+1}(\mathbf{h}_n \mathbf{a}_1' \mathbf{h}_{n-1} \mathbf{a}_1'' \mathbf{h}_n \mathbf{a}_2) \\
&= \operatorname{tr}_{n+1}(\mathbf{a}_1' \mathbf{h}_n \mathbf{h}_{n-1} \mathbf{h}_n \mathbf{a}_1'' \mathbf{a}_2) \\
&= \operatorname{tr}_{n+1}(\mathbf{a}_1' \mathbf{h}_{n-1} \mathbf{h}_n \mathbf{h}_{n-1} \mathbf{a}_1'' \mathbf{a}_2) \\
&= z \operatorname{tr}_n(\mathbf{a}_1' \mathbf{h}_{n-1}^2 \mathbf{a}_1'' \mathbf{a}_2) \\
&= z \operatorname{tr}_n(\mathbf{a}_1' (\mathbf{u} + (\mathbf{u} - 1) \mathbf{h}_{n-1}) \mathbf{a}_1'' \mathbf{a}_2) \\
&= \mathbf{u} z \operatorname{tr}_n(\mathbf{a}_1' \mathbf{a}_1'' \mathbf{a}_2) + (\mathbf{u} - 1) z \operatorname{tr}_n(\mathbf{a}_1' \mathbf{h}_{n-1} \mathbf{a}_1'' \mathbf{a}_2) \\
&= \mathbf{u} z \operatorname{tr}_n(\mathbf{a}_1' \mathbf{a}_1'' \mathbf{a}_2) + (\mathbf{u} - 1) z \operatorname{tr}_n(\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2)
\end{aligned}$$

Pero, notemos que:

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}_n(\mathbf{a}_1' \mathbf{a}_1'' \mathbf{a}_2) &= \operatorname{tr}_n(\mathbf{a}_1' \mathbf{a}_1'' \mathbf{a}_2' \mathbf{h}_{n-1} \mathbf{a}_2'') \\
&= z \operatorname{tr}_{n-1}(\mathbf{a}_1' \mathbf{a}_1'' \mathbf{a}_2' \mathbf{a}_2'') \\
&= \operatorname{tr}_n(\mathbf{a}_1' \mathbf{h}_{n-1} \mathbf{a}_1'' \mathbf{a}_2' \mathbf{a}_2'') \\
&= \operatorname{tr}_n(\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2' \mathbf{a}_2'')
\end{aligned}$$

Así, tenemos:

$$\operatorname{tr}_{n+1}(\mathbf{a} \mathbf{h}_n) = \mathbf{u} z \operatorname{tr}_n(\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2' \mathbf{a}_2'') + (\mathbf{u} - 1) z \operatorname{tr}_n(\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2) = \operatorname{tr}_{n+1}(\mathbf{h}_n \mathbf{a})$$

Así, concluye la demostración. \square

DEFINICIÓN 4.4. La familia $\operatorname{tr} := \{\operatorname{tr}_n\}_{n \geq 1}$, $\operatorname{tr} : \mathbf{H}_\infty \rightarrow \mathbb{C}$ es llamada traza de Markov-Ocneanu (o simplemente traza).

EJEMPLO 32. Sea k un entero. Calcularemos la traza de \mathbf{h}_i^k , donde los \mathbf{h}_i 's son los generadores estandares del álgebra de Hecke $\mathbf{H}_n(\mathbf{u})$.

Sabemos que $\operatorname{tr}(\mathbf{h}_i) = z$. De un cálculo tenemos que para $k > 0$. Si k es par se tiene:

$$h_i^k = \left(\sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{j+1} u^j \right) h_i + \left(\sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{j+1} u^j \right)$$

Luego

$$\text{tr}(h_i^k) = \left(\sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{j+1} u^j \right) z + \left(\sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{j+1} u^j \right)$$

ahora si k es impar tenemos:

$$h_i^k = \left(\sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j u^j \right) h_i + \left(\sum_{j=1}^{k-1} (-1)^j u^j \right),$$

luego

$$\text{tr}(h_i^k) = \left(\sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j u^j \right) z + \left(\sum_{j=1}^{k-1} (-1)^j u^j \right)$$

Ahora podemos definir la siguiente compuesta de funciones:

$$B_n \xrightarrow{\pi} H_n(\mathbf{u}) \xrightarrow{\text{tr}} \mathbb{C},$$

donde $\pi(\sigma_i) = h_i$, ahora veamos que la función $\text{tr} \circ \pi$ es un invariante de nudos, eso equivale a decir que respeta los movimientos de Markov.

Claramente $\text{tr} \circ \pi$ respeta M_1 , pues, si $\alpha, \beta \in B_n$, entonces

$$\begin{aligned} \text{tr} \circ \pi(\alpha\beta) &= \text{tr}(\pi(\alpha\beta)) \\ &= \text{tr}(\pi(\alpha)\pi(\beta)) \\ &= \text{tr}(\pi(\beta)\pi(\alpha)) \\ &= \text{tr}(\pi(\beta\alpha)) \\ &= \text{tr} \circ \pi(\beta\alpha) \end{aligned}$$

$\text{tr} \circ \pi$ respeta M_2 , pues

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr} \circ \pi(\sigma_1) &= \mathrm{tr} \circ \pi(\sigma_1^{-1}) \\
\mathrm{tr}(\pi(\sigma_1)) &= \mathrm{tr}(\pi(\sigma_1^{-1})) \\
\mathrm{tr}(\mathbf{h}_1) &= \mathrm{tr}(\mathbf{h}_1^{-1}) \\
z &= \mathrm{tr}((\mathbf{u}^{-1} - 1) + \mathbf{u}^{-1}\mathbf{h}_1) \\
z &\neq (\mathbf{u}^{-1} - 1) + z\mathbf{u}^{-1}
\end{aligned}$$

Por lo cual se debe reescalar la función π , es decir, definimos

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_n &\xrightarrow{\pi_\theta} \mathbf{H}_n(\mathbf{u}) \\
\sigma_i &\mapsto \theta \mathbf{h}_i,
\end{aligned}$$

donde θ es un valor a determinar para tener el segundo movimiento de Markov. Calcularemos ese valor θ . Calculemos $\mathrm{tr} \circ \pi(\sigma_1)$ y $\mathrm{tr} \circ \pi(\sigma_1^{-1})$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr} \circ \pi_\theta(\alpha_1) &= \mathrm{tr}(\pi_\theta(\alpha_1^{-1})) \\
\mathrm{tr}(\theta \mathbf{h}_1) &= \theta^{-1} \mathrm{tr}(\mathbf{h}_1^{-1}) \\
\theta z &= \theta^{-1}((\mathbf{u}^{-1} - 1) + \mathbf{u}^{-1}z),
\end{aligned}$$

entonces debe tenerse lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\theta z &= \theta^{-1}((\mathbf{u}^{-1} - 1) + \mathbf{u}^{-1}z) \\
\theta^2 &= \frac{1 - \mathbf{u} + z}{z\mathbf{u}},
\end{aligned}$$

por lo tanto $\theta = \sqrt{\lambda}$, donde $\lambda = \frac{1 - \mathbf{u} + z}{z\mathbf{u}}$ o de manera equivalente $z = \frac{1 - \mathbf{u}}{\mathbf{u}\lambda - 1}$.

3. Polinomio de HOMFLYPT

En esta sección veremos el polinomio de HOMFLYPT, este polinomio fue descubierto de manera casi simultaneamente en el año 1985, por Hoste, Ocneanu, Millet, Freid, Lickorish, Przytycki y Traczyk. Este polinomio lo llamaron HOMFLYPT, cabe destacar también que este generaliza al polinomio de Jones en una variable y al polinomio de Alexander.

DEFINICIÓN 4.5. Sea $\alpha \in \mathbb{B}_n$ tal que $\widehat{\alpha} = \mathbb{K}$, definiremos el polinomio de HOMFLY-PT, por:

$$X_{\mathbb{K}}(\lambda, \mathbf{u}) := \left(-\frac{1 - \lambda \mathbf{u}}{\sqrt{\lambda}(1 - \mathbf{u})} \right)^{n-1} (\sqrt{\lambda})^{\exp(\alpha)} (\text{tr} \circ \pi(\alpha))$$

TEOREMA 4.4. $X_{\mathbb{K}}$ es un invariante de nudos

Demostración. Demostrar que es un invariante de nudos equivale a decir que respete los movimientos de Markov.

M_1 : Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{B}_n$

$$\begin{aligned} X_{\widehat{\alpha\beta}}(\lambda, \mathbf{u}) &= \left(-\frac{1 - \lambda \mathbf{u}}{\sqrt{\lambda}(1 - \mathbf{u})} \right)^{n-1} (\sqrt{\lambda})^{\exp(\alpha)} (\text{tr} \circ \pi(\alpha\beta)) \\ &= \left(-\frac{1 - \lambda \mathbf{u}}{\sqrt{\lambda}(1 - \mathbf{u})} \right)^{n-1} (\sqrt{\lambda})^{\exp(\alpha)} (\text{tr}(\pi(\alpha)\pi(\beta))) \\ &= \left(-\frac{1 - \lambda \mathbf{u}}{\sqrt{\lambda}(1 - \mathbf{u})} \right)^{n-1} (\sqrt{\lambda})^{\exp(\alpha)} (\text{tr}(\pi(\beta)\pi(\alpha))) \\ &= \left(-\frac{1 - \lambda \mathbf{u}}{\sqrt{\lambda}(1 - \mathbf{u})} \right)^{n-1} (\sqrt{\lambda})^{\exp(\alpha)} (\text{tr}(\pi(\beta\alpha))) \\ &= \left(-\frac{1 - \lambda \mathbf{u}}{\sqrt{\lambda}(1 - \mathbf{u})} \right)^{n-1} (\sqrt{\lambda})^{\exp(\alpha)} (\text{tr} \circ \pi(\beta\alpha)) \\ X_{\widehat{\alpha\beta}}(\lambda, \mathbf{u}) &= X_{\widehat{\beta\alpha}}(\lambda, \mathbf{u}) \end{aligned}$$

M_2 : Sean $\alpha \in \mathbb{B}_n$ y $\sigma_n \in \mathbb{B}_{n+1}$

$$\begin{aligned}
X_{\widehat{\alpha\sigma_n}}(\lambda, \mathbf{u}) &= \left(-\frac{1-\lambda\mathbf{u}}{\sqrt{\lambda}(1-\mathbf{u})}\right)^n (\sqrt{\lambda})^{\exp(\alpha\sigma_n)}(\mathbf{tr} \circ \pi(\alpha\sigma_n)) \\
&= \left(-\frac{1-\lambda\mathbf{u}}{\sqrt{\lambda}(1-\mathbf{u})}\right)^n (\sqrt{\lambda})^{\exp(\alpha\sigma_n)}(\mathbf{tr}(\pi(\alpha)\pi(\sigma_n))) \\
&= \left(-\frac{1-\lambda\mathbf{u}}{\sqrt{\lambda}(1-\mathbf{u})}\right)^n (\sqrt{\lambda})^{\exp(\alpha)}(\sqrt{\lambda})(\mathbf{tr}(\pi(\alpha)\mathbf{h}_n)) \\
&= \left(-\frac{1-\lambda\mathbf{u}}{\sqrt{\lambda}(1-\mathbf{u})}\right)^n (\sqrt{\lambda})^{\exp(\alpha)}(\sqrt{\lambda})z(\mathbf{tr}(\pi(\alpha))) \\
&= \left(-\frac{1-\lambda\mathbf{u}}{\sqrt{\lambda}(1-\mathbf{u})}\right)^n (\sqrt{\lambda})^{\exp(\alpha)}(\sqrt{\lambda})\left(-\frac{1-\mathbf{u}}{1-\mathbf{u}\lambda}\right)(\mathbf{tr}(\pi(\alpha))) \\
&= \left(-\frac{1-\lambda\mathbf{u}}{\sqrt{\lambda}(1-\mathbf{u})}\right)^{n-1} (\sqrt{\lambda})^{\exp(\alpha)}(\mathbf{tr} \circ \pi(\alpha))
\end{aligned}$$

$$X_{\widehat{\alpha\sigma_n}}(\lambda, \mathbf{u}) = X_{\widehat{\alpha}}(\lambda, \mathbf{u}).$$

Por otro lado se puede probar de forma análoga que $X_{\widehat{\alpha}} = X_{\widehat{\alpha\sigma_n^{-1}}}$. Así se concluye la demostración. \square

EJEMPLO 33. Sea Γ el nudo trébol, se sabe que $\Gamma = \widehat{\sigma_1^3}$, entonces calcularemos el polinomio de HOMPLYPT del trébol.

$$\begin{aligned}
X_{\widehat{\sigma_1^3}}(\lambda, \mathbf{u}) &= \left(-\frac{1-\lambda\mathbf{u}}{\sqrt{\lambda}(1-\mathbf{u})}\right) \sqrt{\lambda}^3(\mathbf{tr} \circ \pi(\sigma_1^3)) \\
&= \left(-\frac{1-\lambda\mathbf{u}}{\sqrt{\lambda}(1-\mathbf{u})}\right) \sqrt{\lambda}^3(\mathbf{tr}(\mathbf{h}_1^3)) \\
&= \left(-\frac{1-\lambda\mathbf{u}}{\sqrt{\lambda}(1-\mathbf{u})}\right) \sqrt{\lambda}^3((\mathbf{u}^2 - \mathbf{u} + 1)z + (\mathbf{u} - 1)\mathbf{u}) \\
&= \left(-\frac{1-\lambda\mathbf{u}}{\sqrt{\lambda}(1-\mathbf{u})}\right) \sqrt{\lambda}^3((\mathbf{u}^2 - \mathbf{u} + 1)\frac{1-\mathbf{u}}{\mathbf{u}\lambda-1} + (\mathbf{u} - 1)\mathbf{u}) \\
&= \left(-\frac{1-\lambda\mathbf{u}}{(1-\mathbf{u})}\right) \lambda\left(\frac{\mathbf{u}(\mathbf{u}-1)(\mathbf{u}\lambda-1)+(\mathbf{u}^2-\mathbf{u}+1)(1-\mathbf{u})}{\mathbf{u}\lambda-1}\right) \\
&= \left(\frac{\lambda}{(1-\mathbf{u})}\right) (\mathbf{u}(\mathbf{u}-1)(\mathbf{u}\lambda-1) + (\mathbf{u}^2 - \mathbf{u} + 1)(1-\mathbf{u})) \\
&= (\lambda)(-\mathbf{u}(\mathbf{u}\lambda-1) + (\mathbf{u}^2 - \mathbf{u} + 1)) \\
&= -\mathbf{u}^2\lambda^2 + \mathbf{u}^2\lambda + \lambda
\end{aligned}$$

Por otro lado podemos calcular el polinomio del trébol reflejado que va ser $X_{\sigma_1^{-3}}(\lambda, \mathbf{u}) = -\mathbf{u}^{-2}\lambda^{-2} + \mathbf{u}^{-2}\lambda^{-1} + \lambda^{-1}$. Así podemos decir que el polinomio de HOMPLYPT distingue isotopía entre el nudo trébol y su reflejado, es decir, $X_{\Gamma} \neq X_{\Gamma^*}$ entonces $\Gamma \not\cong \Gamma^*$.

TEOREMA 4.5. *Sea K un nudo orientado. El polinomio de HOMFLYPT (X_K de K), está únicamente determinado por:*

1. *El polinomio $X_K(\lambda, \mathbf{u})$ es invariante bajo isotopía de K .*
2. $X_{\bigcirc}(\lambda, \mathbf{u}) = 1$.
3. *Sean K_+, K_-, K_0 (Ver definición 2.15) se tiene que:*

$$(\sqrt{\lambda}\sqrt{\mathbf{u}})^{-1}X_{K_+}(\lambda, \mathbf{u}) - (\sqrt{\lambda}\sqrt{\mathbf{u}})X_{K_-}(\lambda, \mathbf{u}) = \left(\sqrt{\mathbf{u}} - \frac{1}{\sqrt{\mathbf{u}}}\right)X_{K_0}(\lambda, \mathbf{u}) \quad (4.1)$$

La igualdad (4.1) es llamada relación skein HOMFLYPT. Sólo probaremos que el polinomio de HOMFLYPT satisface (2) y (3).

Demostración. Como el no-nudo es la clausura de la 1-trenza trivial, y además, $(\text{tr} \circ \pi)(1) = 1$ y $\exp(1) = 0$, entonces:

$$X_{\bigcirc}(\lambda, \mathbf{u}) = \left(-\frac{1 - \lambda\mathbf{u}}{\sqrt{\lambda}(1 - \mathbf{u})}\right)^0 (\sqrt{\lambda})^{\exp(1)} (\text{tr} \circ \pi)(1) = 1.$$

Ahora, consideremos el triple de Conway $K_{\pm} = \alpha\sigma_i^{\pm}\beta$ y $K_0 = \alpha\beta$, donde $\alpha, \beta \in B_n$, $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Tenemos,

$$\begin{aligned} & (\sqrt{\lambda}\sqrt{\mathbf{u}})^{-1}X_{K_+}(\lambda, \mathbf{u}) - (\sqrt{\lambda}\sqrt{\mathbf{u}})X_{K_-}(\lambda, \mathbf{u}) \\ &= (\sqrt{\lambda}\sqrt{\mathbf{u}})^{-1} \left(-\frac{1 - \lambda\mathbf{u}}{\sqrt{\lambda}(1 - \mathbf{u})}\right)^{n-1} (\sqrt{\lambda})^{\exp(\alpha\sigma_i\beta)} (\text{tr} \circ \pi)(\alpha\sigma_i\beta) \\ & \quad - (\sqrt{\lambda}\sqrt{\mathbf{u}}) \left(-\frac{1 - \lambda\mathbf{u}}{\sqrt{\lambda}(1 - \mathbf{u})}\right)^{n-1} (\sqrt{\lambda})^{\exp(\alpha\sigma_i^{-1}\beta)} (\text{tr} \circ \pi)(\alpha\sigma_i^{-1}\beta) \\ &= \left(-\frac{1 - \lambda\mathbf{u}}{\sqrt{\lambda}(1 - \mathbf{u})}\right)^{n-1} (\sqrt{\lambda})^{\exp(\alpha\beta)} \left[\frac{1}{\sqrt{\mathbf{u}}}(\text{tr} \circ \pi)(\alpha\sigma_i\beta) - \sqrt{\mathbf{u}}(\text{tr} \circ \pi)(\alpha\sigma_i^{-1}\beta)\right] \\ &= \sqrt{\mathbf{u}} \left(-\frac{1 - \lambda\mathbf{u}}{\sqrt{\lambda}(1 - \mathbf{u})}\right)^{n-1} (\sqrt{\lambda})^{\exp(\alpha\beta)} \text{tr}(\mathbf{u}^{-1}\pi(\alpha)h_i\pi(\beta) - \pi(\alpha)h_i^{-1}\pi(\beta)) \\ &= \sqrt{\mathbf{u}} \left(-\frac{1 - \lambda\mathbf{u}}{\sqrt{\lambda}(1 - \mathbf{u})}\right)^{n-1} (\sqrt{\lambda})^{\exp(\alpha\beta)} \text{tr}(\mathbf{u}^{-1}\pi(\alpha)h_i\pi(\beta) - \\ & \quad \pi(\alpha)(\mathbf{u}^{-1}h_i + \mathbf{u}^{-1} - 1)\pi(\beta)) \\ &= \sqrt{\mathbf{u}} \left(-\frac{1 - \lambda\mathbf{u}}{\sqrt{\lambda}(1 - \mathbf{u})}\right)^{n-1} (\sqrt{\lambda})^{\exp(\alpha\beta)} \text{tr}((1 - \mathbf{u}^{-1})\pi(\alpha)(\beta)) \end{aligned}$$

$$= \left(\sqrt{\mathbf{u}} - \frac{1}{\sqrt{\mathbf{u}}} \right) \left(-\frac{1 - \lambda \mathbf{u}}{\sqrt{\lambda}(1 - \mathbf{u})} \right)^{n-1} (\sqrt{\lambda})^{\exp(\alpha\beta)} \operatorname{tr}(\pi(\alpha)(\beta))$$

luego,

$$(\sqrt{\lambda}\sqrt{\mathbf{u}})^{-1} X_{K_+}(\lambda, \mathbf{u}) - (\sqrt{\lambda}\sqrt{\mathbf{u}}) X_{K_-}(\lambda, \mathbf{u}) = \left(\sqrt{\mathbf{u}} - \frac{1}{\sqrt{\mathbf{u}}} \right) X_{K_0}(\lambda, \mathbf{u})$$

□

Para simplificar notación, consideremos el cambio:

$$\mathbf{x} = \sqrt{\lambda}\sqrt{\mathbf{u}} \quad \text{y} \quad \mathbf{z} = \sqrt{\mathbf{u}} - \frac{1}{\sqrt{\mathbf{u}}}$$

Luego, el polinomio de HOMFLY–PT queda caracterizado por la relación skein

$$\mathbf{x}^{-1} X_{K_+}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) - \mathbf{x} X_{K_-}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \mathbf{z} X_{K_0}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \quad (4.2)$$

OBSERVACIÓN 21. *La importancia del polinomio de HOMFLYPT es que éste también generaliza al polinomio de Alexander. Para verificar esto, basta considerar $\mathbf{x} = 1$ y $\mathbf{z} = \mathbf{t}^{-\frac{1}{2}} - \mathbf{t}^{\frac{1}{2}}$ en la relación skein (4.2), la cual caracteriza el polinomio de Alexander–Conway.*

4. Álgebra de Temperley–Lieb

En orden a construir el polinomio de Jones de modo análogo a la construcción del polinomio de HOMFLYPT, necesitamos introducir el álgebra de Temperley–Lieb. Esta álgebra puede ser definida mediante una presentación, es decir, mediante generadores y relaciones, ver 4.6. También puede ser definida diagramáticamente, ver [Esp10]. Aquí definiremos el álgebra de Temperley–Lieb como un cociente del álgebra de Hecke.

Definamos \mathbf{h}_{ij} como sigue:

$$\mathbf{h}_{ij} := \mathbf{h}_i \mathbf{h}_j \mathbf{h}_i + \mathbf{h}_i \mathbf{h}_j + \mathbf{h}_j \mathbf{h}_i + \mathbf{h}_i + \mathbf{h}_j + 1,$$

DEFINICIÓN 4.6. *Sea $n \geq 3$. El álgebra de Temperley–Lieb $\mathrm{TL}_n(\mathbf{u})$, se define como el siguiente cociente:*

$$\mathrm{TL}_n(\mathbf{u}) := H_n(\mathbf{u})/I$$

donde I es el ideal bilátero generado por todo los \mathbf{h}_{ij} , con $|i - j| = 1$

PROPOSICIÓN 4.3. *El ideal I es principal, mas precisamente esta generado por \mathbf{h}_{12} .*

Demostración. Probaremos que $I = \langle \mathbf{h}_{12} \rangle$. Note que $\langle \mathbf{h}_{12} \rangle \subseteq I$. Para demostrar la otra inclusión basta probar $\mathbf{h}_{ij} \in \langle \mathbf{h}_{12} \rangle$ para todo i, j .

Sabemos que $\mathbf{h}_i = (\mathbf{h}_1 \cdots \mathbf{h}_j)^{i-1} \mathbf{h}_1 (\mathbf{h}_1 \cdots \mathbf{h}_j)^{-(i-1)}$, cuando $|i - j| = 1$, para efectos prácticos definamos $\# := (\mathbf{h}_1 \cdots \mathbf{h}_{n-1})$ tenemos:

$$\begin{aligned}
\mathbf{h}_{ij} &= 1 + \mathbf{h}_i + \mathbf{h}_j + \mathbf{h}_i \mathbf{h}_j + \mathbf{h}_j \mathbf{h}_i + \mathbf{h}_i \mathbf{h}_j \mathbf{h}_i \\
&= (\#)^{j-1} (\#)^{-(j-1)} + (\#)^j \mathbf{h}_1 (\#)^{-j} + (\#)^{j-1} \mathbf{h}_1 (\#)^{-(j-1)} + (\#)^j \mathbf{h}_1 (\#)^{-j} (\#)^{j-1} \mathbf{h}_1 (\#)^{-(j-1)} + \\
&\quad + (\#)^{j-1} \mathbf{h}_1 (\#)^{-(j-1)} (\#)^j \mathbf{h}_1 (\#)^{-j} + (\#)^j \mathbf{h}_1 (\#)^{-j} (\#)^{j-1} \mathbf{h}_1 (\#)^{-(j-1)} (\#)^j \mathbf{h}_1 (\#)^{-j} \\
&= (\#)^{j-1} (1 + (\#)^1 \mathbf{h}_1 (\#)^{-1} + \mathbf{h}_1 + (\#)^1 \mathbf{h}_1 (\#)^{-1} \mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_1 (\#)^1 \mathbf{h}_1 (\#)^{-1} + \\
&\quad + (\#)^1 \mathbf{h}_1 (\#)^{-1} \mathbf{h}_1 (\#)^1 \mathbf{h}_1 (\#)^{-1}) (\#)^{-(j-1)} \\
&= (\#)^{j-1} (1 + \mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2 + \mathbf{h}_1 \mathbf{h}_2 + \mathbf{h}_2 \mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_1 \mathbf{h}_2 \mathbf{h}_1) (\#)^{-(j-1)} \\
&= (\#)^{j-1} \mathbf{h}_{12} (\#)^{-(j-1)} \\
&= (\mathbf{h}_1 \cdots \mathbf{h}_{n-1})^{j-1} \mathbf{h}_{12} (\mathbf{h}_1 \cdots \mathbf{h}_{n-1})^{-(j-1)}.
\end{aligned}$$

Así concluimos que $\mathbf{h}_{ij} \in \langle \mathbf{h}_{12} \rangle$ y por lo tanto $I \subset \langle \mathbf{h}_{12} \rangle$. □

LEMA 4.6. *Sea x un elemento en la base standard de $\mathcal{H}_3(\mathbf{u})$, entonces tenemos que:*

$$\mathrm{tr}(x \mathbf{h}_{12}) = \theta \mathrm{tr}(\mathbf{h}_{12}).$$

Para algún $\theta \in \mathbb{C}$.

Demostración. Para $x = 1$, la afirmación es trivial. Para $x = \mathbf{h}_1$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(\mathbf{h}_1 \mathbf{h}_{12}) &= \mathrm{tr}(\mathbf{h}_1 (\mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2 + \mathbf{h}_1 \mathbf{h}_2 + \mathbf{h}_2 \mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_1 \mathbf{h}_2 \mathbf{h}_1 + 1)) \\
&= \mathrm{tr}(\mathbf{h}_1^2 + \mathbf{h}_1 \mathbf{h}_2 + \mathbf{h}_1^2 \mathbf{h}_2 + \mathbf{h}_1 \mathbf{h}_2 \mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_1^2 \mathbf{h}_2 \mathbf{h}_1) \\
&= \mathrm{utr}(\mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2 + \mathbf{h}_1 \mathbf{h}_2 + \mathbf{h}_2 \mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_1 \mathbf{h}_2 \mathbf{h}_1 + 1).
\end{aligned}$$

Para el caso $x = \mathbf{h}_2$ es de modo análogo a $x = \mathbf{h}_1$.

Los casos $x = h_1 h_2$ y $x = h_2 h_1$ son análogos, demostraremos solamente para $x = h_1 h_2$:

$$\begin{aligned} \text{tr}(h_1 h_2 h_{12}) &= \text{tr}(h_1 h_2 (h_1 + h_2 + h_1 h_2 + h_2 h_1 + h_1 h_2 h_1 + 1)) \\ &= u^2 \text{tr}(h_{12}). \end{aligned}$$

Finalmente el caso $x = h_1 h_2 h_1$ también se prueba sin mayor dificultad. \square

PROPOSICIÓN 4.4. *La traza de Ocneanu tr se factoriza al álgebra de Temperley–Lieb si y solo si*

$$z = \frac{-1}{u+1} \quad \text{o} \quad z = -1$$

Demostración. Sabemos por proposición (4.3) que $I = \langle h_{12} \rangle$. Las condiciones suficientes y necesarias para que la traza de Ocneanu sobre $H_n(u)$ pase al álgebra de Temperley–Lieb $TL_n(u)$ es $\langle h_{12} \rangle \subseteq \ker(\text{tr})$. En un diagrama tenemos:

$$\begin{array}{ccc} H_n(u) & \longrightarrow & H_n(u)/\langle h_{12} \rangle \\ & \searrow \text{tr} & \swarrow f \\ & \mathbb{C} & \end{array}$$

Lo anterior equivale a decir $\text{tr}(\langle h_{12} \rangle) = 0$. Mas precisamente, para todo $x, y \in H_n(u)$:

$$\text{tr}(x h_{12} y) = 0, \tag{4.3}$$

Más aún, como la tr es lineal basta demostrar (4.3), cuando x, y recorre la base de $H_n(u)$. Por la propiedad traza demostrar (4.3) es equivalente a demostrar:

$$\text{tr}(x h_{12}) = 0 \tag{4.4}$$

Para todo x en la base de $H_n(u)$. Por Lema 4.6 y la propiedad traza se concluye que (4.4) equivale a demostrar

$$\text{tr}(h_{12}) = 0,$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(\mathbf{h}_1 \mathbf{h}_2 \mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2 + \mathbf{h}_1 \mathbf{h}_2 + \mathbf{h}_2 \mathbf{h}_1 + 1) &= 0 \\
\operatorname{tr}(\mathbf{h}_1 \mathbf{h}_2 \mathbf{h}_1) + \operatorname{tr}(\mathbf{h}_1) + \operatorname{tr}(\mathbf{h}_2) + 2\operatorname{tr}(\mathbf{h}_1 \mathbf{h}_2) &= 0 \\
z\operatorname{tr}(\mathbf{h}_1^2) + 2z + 2z^2 + 1 &= 0 \\
z(\mathbf{u} + (\mathbf{u} - 1)z) + 2z + 2z^2 + 1 &= 0 \\
z^2(\mathbf{u} + 1) + z(\mathbf{u} + 2) + 1 &= 0,
\end{aligned}$$

luego los valores para z son $z = -\frac{1}{\mathbf{u}+1}$ o $z = -1$. Así para que la traza de Ocneanu se factorice al álgebra de Temperley–Lieb la condición necesaria es $z = -\frac{1}{\mathbf{u}+1}$ o $z = -1$. \square

Antes de finalizar esta subsección veremos como aparece la definición clásica del álgebra de Temperley–Lieb mediante generadores y relaciones, a partir de la definición que hemos dado anteriormente. Para esto primero presentaremos el álgebra de Hecke mediante generadores \mathbf{e}_i , dados por:

$$\mathbf{e}_i := \frac{1}{\mathbf{u} + 1}(\mathbf{h}_i + 1)$$

PROPOSICIÓN 4.5. *El álgebra de Hecke puede representada por generadores $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1}$ sujetos a las siguientes relaciones:*

1. $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_j \mathbf{e}_i$ si $|i - j| > 1$,
2. $(\mathbf{u} + 1)^2 \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_i - \mathbf{u} \mathbf{e}_i = (\mathbf{u} + 1)^2 \mathbf{e}_j \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j - \mathbf{u} \mathbf{e}_j$ si $|i - j| = 1$
3. $\mathbf{e}_i^2 = \mathbf{e}_i$.

Demostración. Es fácil probar que \mathbf{e}_i respeta las relaciones del álgebra de Hecke, basta reemplazar $\mathbf{h}_i = (\mathbf{u} + 1)\mathbf{e}_i - 1$ en las relaciones de Hecke. \square

PROPOSICIÓN 4.6. *El álgebra de Temperley–Lieb puede ser presentada por generadores \mathbf{e}_i sujetos a las siguientes relaciones:*

1. $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_j \mathbf{e}_i$ si $|i - j| > 1$;
2. $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_{i+1} \mathbf{e}_i = \frac{\mathbf{u}}{(\mathbf{u}+1)^2} \mathbf{e}_i$;
3. $\mathbf{e}_i^2 = \mathbf{e}_i$.

Demostración. Veamos la primera relación. Supongamos que $|i - j| > 1$:

$$\begin{aligned} e_i e_j &= \frac{(h_i+1)}{u+1} \frac{h_j+1}{u+1} \\ &= \frac{1}{(u+1)^2} (h_j + 1)(h_i + 1) \\ &= e_j e_i. \end{aligned}$$

Sabemos que

$$h_{ij} = 0$$

Para la segunda relación, para todo $|i - j| = 1$:

$$\begin{aligned} e_i e_j e_i &= \frac{1}{(u+1)^3} (h_i + 1)(h_j + 1)(h_i + 1) \\ &= \frac{1}{(u+1)^3} (h_i h_j h_i + h_i^2 + h_j h_i + h_i + h_i h_j + h_i + h_j + 1) \\ &= \frac{1}{(u+1)^3} (h_i^2 + h_i) \\ &= \frac{1}{(u+1)^2} \frac{1}{u+1} (u(h_i + 1)) \\ &= \frac{u}{(u+1)^2} e_i \end{aligned}$$

Para la tercera relación :

$$\begin{aligned} e_i^2 &= \frac{1}{(u+1)^2} (h_i^2 + 2h_i + 1) \\ &= \frac{1}{(u+1)^2} (u + 1)(h_i + 1) \\ &= e_i \end{aligned}$$

□

DEFINICIÓN 4.7. Sea $u \in \mathbb{C}^\times$ el álgebra de Temperley–Lieb, que se denotará como $TL_n(u)$, es la \mathbb{C} -álgebra definida por los generadores h_1, h_2, \dots, h_{n-1} que están sujetas a las siguientes relaciones:

1. $h_i h_j = h_j h_i$ si $|i - j| > 1$,
2. $h_i h_j h_i = -(h_i h_j + h_j h_i + h_i + h_j + 1)$,
3. $h_i^2 = u + (u - 1)h_i$.

4.1. Polinomio de Jones vía álgebra de Temperley–Lieb. La idea es poder construir el polinomio de Jones en forma análoga a como se construyó el polinomio HOMPLYPT. Notemos ahora el álgebra de Temperley–Lieb es un cociente del álgebra de Hecke. Así tenemos que el grupo de trenzas se puede representar en el álgebra de Temperley–Lieb. Mas precisamente, tenemos la siguiente representación: $\rho := \pi \circ \mathfrak{p}$, donde \mathfrak{p} es la proyección canónica del álgebra de Hecke en el álgebra de Temperley–Lieb.

Ahora por Proposición (4.4), tenemos que la traza tr pasa al álgebra de Temperley–Lieb si y solo si

$$z = \frac{-1}{u+1} \quad \text{o} \quad z = -1$$

El valor $z = -1$ se descarta pues no tiene interés topológico. Denotemos por:

$$\text{Tr} : \text{TL}_n(\mathbf{u}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

para el valor $z = \frac{-1}{1+u}$.

La función $\rho_\theta : \mathcal{B}_n \longrightarrow \text{TL}_n(\mathbf{u})$ dada por lo siguiente: $\rho_\theta(\sigma_i) = \theta \mathbf{h}_i$.

y la traza es: $\text{Tr} : \text{TL}_n \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por $\text{Tr}(\theta \mathbf{h}_i) = \theta z$.

Se ve claramente que el invariante $\text{Tr} \circ \rho$ respeta el movimiento de de Markov M_1 , pero no respeta el movimiento M_2 . Para que respete M_2 , se debe tener en particular:

$$\begin{aligned} \text{Tr} \circ \rho_\theta(\sigma_1) &= \text{Tr} \circ \rho_\theta(\sigma_1^{-1}) \\ \theta \text{Tr}(\mathbf{h}_1) &= \theta^{-1} \text{Tr}(\mathbf{h}_1^{-1}) \\ \theta^2 z &= \text{Tr}(-(1 - u^{-1}) + u^{-1} \mathbf{h}_1) \\ \theta^2 z &= -(1 - u^{-1}) + u^{-1} z \\ \theta^2 &= (1 - u^{-1})(u + 1) + u^{-1} \\ \theta^2 &= u \\ \theta &= \sqrt{u} \end{aligned}$$

Así, obtenemos el polinomio de Jones.

$$V_{\hat{\alpha}}(\mathbf{u}) := \left(-\sqrt{u} - \frac{1}{\sqrt{u}} \right)^{n-1} \sqrt{u}^{\exp(\alpha)} (\text{Tr} \circ \rho)(\alpha)$$

DEFINICIÓN 4.8. Sea $K = \widehat{\alpha}$, un nudo, el polinomio en una variable $V_K(\mathbf{u})$ se llama polinomio de Jones.

EJEMPLO 34. Calcularemos el polinomio de Jones del trébol.

$$V_{\widehat{\sigma_1^3}}(\mathbf{u}) = \left(-\sqrt{\mathbf{u}} - \frac{1}{\sqrt{\mathbf{u}}} \right) \sqrt{\mathbf{u}}^3 (\text{Tr} \circ \rho)(\sigma_1^2).$$

Por otro lado calculemos la traza:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\mathbf{h}_1^3) &= \text{Tr}((\mathbf{u}^2 - \mathbf{u} + 1)\mathbf{h}_1 + \mathbf{u}(\mathbf{u} - 1)) \\ &= (\mathbf{u}^2 - \mathbf{u} + 1)z + \mathbf{u}(\mathbf{u} - 1) \end{aligned}$$

Ahora tenemos que:

$$\begin{aligned} V_{\widehat{\sigma_1^3}}(\mathbf{u}) &= -\left(\frac{\mathbf{u}+1}{\mathbf{u}}\right)\mathbf{u}^2(\mathbf{u}^2 - \mathbf{u} + 1)z + \mathbf{u}(\mathbf{u} - 1) \\ &= -\left(\frac{\mathbf{u}+1}{\mathbf{u}}\right)\mathbf{u}^2(\mathbf{u}^2 - \mathbf{u} + 1)\left(\frac{-1}{\mathbf{u}+1}\right) + \mathbf{u}(\mathbf{u} - 1) \\ &= -(\mathbf{u} + 1)\mathbf{u}\left(\frac{-(\mathbf{u}^2 - \mathbf{u} + 1) + \mathbf{u}^3 - \mathbf{u}}{\mathbf{u} + 1}\right) \\ &= -\mathbf{u}^4 + \mathbf{u}^3 + \mathbf{u}. \end{aligned}$$

OBSERVACIÓN 22. Notemos que, el polinomio de HOMFLYPT es una generalización del polinomio de Jones. En efecto, sea $K = \widehat{\alpha}$ un nudo, luego, si hacemos $\lambda = \mathbf{u}$ en el polinomio de HOMFLYPT de K :

$$\begin{aligned} X_{\widehat{\alpha}}(\lambda, \mathbf{u})|_{\lambda=\mathbf{u}} &= \left(-\frac{1 - \mathbf{u}^2}{\sqrt{\mathbf{u}}(1 - \mathbf{u})} \right)^{\mathbf{n}-1} (\sqrt{\mathbf{u}})^{\exp(\alpha)} (\text{tr} \circ \pi)(\alpha) \quad (\alpha \in \mathbf{B}_n) \\ &= \left(-\sqrt{\mathbf{u}} - \frac{1}{\sqrt{\mathbf{u}}} \right)^{\mathbf{n}-1} (\sqrt{\mathbf{u}})^{\exp(\alpha)} (\text{tr} \circ \pi)(\alpha). \end{aligned}$$

Además, para todo $i \in \{1, \dots, \mathbf{n} - 1\}$, tenemos:

$$\begin{aligned} \text{Tr} \circ \rho(\sigma_i) &= \text{Tr}(\mathbf{h}_i) \\ &= z \\ &= -\frac{1}{\mathbf{u} + 1}, \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\text{tr} \circ \pi(\sigma_i) = \text{tr}(\mathbf{h}_i) = z = \frac{1 - \mathbf{u}}{\lambda \mathbf{u} - 1} \stackrel{(\lambda=\mathbf{u})}{=} -\frac{1}{\mathbf{u} + 1}$$

luego, $\text{Tr} \circ \rho = \text{tr} \circ \pi$, por lo tanto

$$\mathcal{X}_{\hat{\alpha}}(\lambda, \mathbf{u})|_{\lambda=\mathbf{u}} = V_{\hat{\alpha}}(\mathbf{u}).$$

5. Diagramas de Rook

En esta sección definiremos los diagramas de Rook (Torre). Estos diagramas los podemos obtener de la siguiente manera: Imaginemos que en una matriz el coeficiente 1 es una torre en el juego de ajedrez, la matriz está formada por las posibilidades de colocar torres en el tablero de ajedrez de modo que las torres no se aniquilen entre sí. Ahora daremos la siguiente definición.

DEFINICIÓN 4.9. Sea \mathbf{R}_n , el conjunto de todas las matrices de tamaño $n \times n$ en $\mathbf{M}_n(\mathbb{Z})$ que tenga, a lo mas un 1 en fila y su columna simultaneamente.

EJEMPLO 35. El monoide \mathbf{R}_2 es:

$$\mathbf{R}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Ahora definiremos \mathbf{R}_n como diagrama

DEFINICIÓN 4.10. \mathbf{R}_n consiste de los grafos que tienen 2 filas de n vertices una fila arriba de la otra (formando un rectangulo) tal que cada vertice tiene grado 1 o 0.

EJEMPLO 36.

Los Elementos de \mathbf{R}_2 son:

$$\mathbf{R}_2 = \left\{ \begin{array}{ccccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \begin{array}{c} | \\ | \\ | \\ | \\ | \\ | \\ | \end{array}, \begin{array}{cc} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{array} \begin{array}{c} / \\ \backslash \end{array}, \begin{array}{cc} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{array} \begin{array}{c} \backslash \\ / \end{array}, \begin{array}{cc} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{array} \begin{array}{c} | \\ | \\ | \end{array}, \begin{array}{cc} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{array} \begin{array}{c} / \\ \backslash \end{array}, \begin{array}{cc} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{array} \begin{array}{c} \backslash \\ / \end{array} \end{array} \right\}$$

DEFINICIÓN 4.11. El producto en \mathbb{R}_n , se definirá de la siguiente forma, dados $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}_n$, el producto de \mathbf{a} por \mathbf{b} es la multiplicación de matrices.

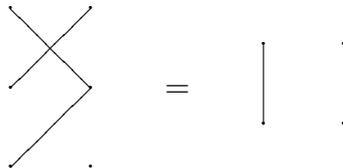
De modo equivalente, el producto de dos digramas corresponde al producto por concatenación (análogo al definido en producto de trenzas). Mas precisamente:

DEFINICIÓN 4.12. El producto por concatenación entre dos elementos de \mathbb{R}_n es yuxtaponer uno sobre el otro, y el diagrama resultante será el que se mantenga por una línea continua.

OBSERVACIÓN 23. \mathbb{R}_n con la multiplicación por concatenación resulta ser un monoide, se llama monoide de Rook.

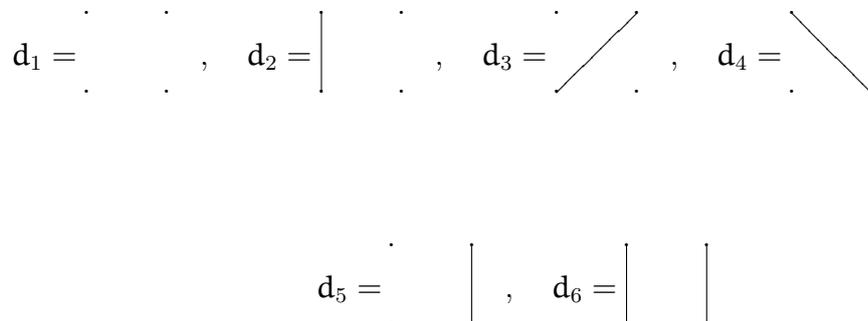
EJEMPLO 37. Sea $A = \begin{array}{c} \cdot \\ \diagdown \quad \diagup \\ \cdot \end{array}$, $B = \begin{array}{c} \cdot \\ / \\ \cdot \end{array} \in \mathbb{R}_2$.

Entonces el producto de AB será:



DEFINICIÓN 4.13. Denotaremos \mathbb{P}_n , el conjunto de todos los elementos de \mathbb{R}_n tal que los lazos de los diagramas no se intersecten.

EJEMPLO 38. Los elementos de \mathbb{P}_2 son:



DEFINICIÓN 4.14. *Dados dos diagramas, $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{P}_n$, se define el producto tensorial, $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$, como el diagrama obtenido de poner \mathbf{b} al lado derecho de \mathbf{a} .*

EJEMPLO 39.

$$\mathbf{d}_1 \otimes \mathbf{d}_3 = \begin{array}{cccc} & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \nearrow \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

Definiremos la función φ de \mathcal{B}_n en $(\mathbb{C}\mathcal{P}_n)^\times$ como sigue:

$$\varphi(\sigma_i) := \mathbf{a}\mathbf{d}_{1i} + \mathbf{b}\mathbf{d}_{2i} + \mathbf{c}\mathbf{d}_{3i} + \mathbf{d}\mathbf{d}_{4i} + \mathbf{e}\mathbf{d}_{5i} + \mathbf{d}_{6i}$$

donde $\mathbf{d}_{ji} = I^{\otimes i-1} \otimes \mathbf{d}_j \otimes I^{\otimes n-i-1}$ y I es la identidad en \mathcal{P}_1 .

TEOREMA 4.7. *Asumiendo $\mathbf{a} + \mathbf{c} + \mathbf{d} \neq 1$ y $\mathbf{c}\mathbf{d} \neq 0$, se tiene que φ es homomorfismo si y sólo si los coeficientes $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}$ satisfacen la ecuación de una de las siguientes cinco familias:*

1. $\mathbf{b} = \mathbf{e} = 1$
2. $\mathbf{a} = -\mathbf{c} - \mathbf{d}, \mathbf{b} = -1, \mathbf{e} = -\mathbf{c}\mathbf{d}$
3. $\mathbf{a} = -\mathbf{c} - \mathbf{d}, \mathbf{b} = -\mathbf{c}\mathbf{d}, \mathbf{e} = -1$
4. $\mathbf{a} = 1 - \mathbf{c} - \mathbf{d} + \mathbf{c}\mathbf{d}, \mathbf{b} = -\mathbf{c}\mathbf{d}, \mathbf{e} = -1$
5. $\mathbf{a} = 1 - \mathbf{c} - \mathbf{d} + \mathbf{c}\mathbf{d}, \mathbf{b} = -1, \mathbf{e} = -\mathbf{c}\mathbf{d}$

Además, tenemos la función inversa para cada una de las cinco familias, dadas por:

1. $\varphi(\sigma_i^{-1}) = (1 - \frac{1}{\mathbf{d}} - \frac{1}{\mathbf{c}} + \frac{1}{-1+\mathbf{a}+\mathbf{c}+\mathbf{d}})\mathbf{d}_{1i} - \mathbf{d}_{2i} + \frac{1}{\mathbf{d}}\mathbf{d}_{3i} + \frac{1}{\mathbf{c}}\mathbf{d}_{4i} - \mathbf{d}_{5i} + \mathbf{d}_{6i}$
2. $\varphi(\sigma_i^{-1}) = (-\frac{1}{\mathbf{c}} - \frac{1}{\mathbf{d}})\mathbf{d}_{1i} - \frac{1}{\mathbf{c}\mathbf{d}}\mathbf{d}_{2i} + \frac{1}{\mathbf{d}}\mathbf{d}_{3i} + \frac{1}{\mathbf{c}}\mathbf{d}_{4i} - \mathbf{d}_{5i} + \mathbf{d}_{6i}$
3. $\varphi(\sigma_i^{-1}) = (-\frac{1}{\mathbf{c}} - \frac{1}{\mathbf{d}})\mathbf{d}_{1i} - \mathbf{d}_{2i} + \frac{1}{\mathbf{d}}\mathbf{d}_{3i} + \frac{1}{\mathbf{c}}\mathbf{d}_{4i} - \frac{1}{\mathbf{c}\mathbf{d}}\mathbf{d}_{5i} + \mathbf{d}_{6i}$
4. $\varphi(\sigma_i^{-1}) = (1 - \frac{1}{\mathbf{d}} - \frac{1}{\mathbf{c}} + \frac{1}{\mathbf{c}\mathbf{d}})\mathbf{d}_{1i} - \mathbf{d}_{2i} + \frac{1}{\mathbf{d}}\mathbf{d}_{3i} + \frac{1}{\mathbf{c}}\mathbf{d}_{4i} - \frac{1}{\mathbf{c}\mathbf{d}}\mathbf{d}_{5i} + \mathbf{d}_{6i}$
5. $\varphi(\sigma_i^{-1}) = (1 - \frac{1}{\mathbf{d}} - \frac{1}{\mathbf{c}} + \frac{1}{\mathbf{c}\mathbf{d}})\mathbf{d}_{1i} - \frac{1}{\mathbf{c}\mathbf{d}}\mathbf{d}_{2i} + \frac{1}{\mathbf{d}}\mathbf{d}_{3i} + \frac{1}{\mathbf{c}}\mathbf{d}_{4i} - \mathbf{d}_{5i} + \mathbf{d}_{6i}$

Demostración. Basta ver que φ respeta las relaciones de trenzas.

1. Veremos que $\varphi(\sigma_i)\varphi(\sigma_j) = \varphi(\sigma_j)\varphi(\sigma_i)$, para $|i-j| > 1$, para este hecho podemos ver los diagramas, ya que $\varphi(\sigma_i) = \mathbf{a}\mathbf{d}_{1i} + \mathbf{b}\mathbf{d}_{2i} + \mathbf{c}\mathbf{d}_{3i} + \mathbf{d}\mathbf{d}_{4i} + \mathbf{e}\mathbf{d}_{5i} + \mathbf{d}_{6i}$ y lo

mismo para $\varphi(\sigma_j) = \mathbf{a}d_{1j} + \mathbf{b}d_{2j} + \mathbf{c}d_{3j} + \mathbf{d}d_{4j} + \mathbf{e}d_{5j} + \mathbf{d}_{6j}$; sólo nos enfocaremos en el producto de los diagramas pero como \mathbf{d}_{ti} y \mathbf{d}_{tj} con t recorriendo entre 1 y 6, también tenemos que $|i - j| > 1$ entonces los \mathbf{d}_j y \mathbf{d}_i están lejos y no se conectan entre ellos. Así la relación de trenza se obtiene al multiplicar sus términos.

2. Sólo basta ver para $n = 3$, demostraremos que satisface la relación de trenzas $\varphi(\sigma_1)\varphi(\sigma_2)\varphi(\sigma_1) = \varphi(\sigma_2)\varphi(\sigma_1)\varphi(\sigma_2)$, esta prueba fue realizada por métodos computacionales. Para ver que φ cumple con la segunda relación de trenzas, hay que ver las condiciones suficientes sobre los coeficientes, ahora bien se realizó un sistema de ecuaciones sobre:

$$\varphi(\sigma_1)\varphi(\sigma_2)\varphi(\sigma_1) - \varphi(\sigma_2)\varphi(\sigma_1)\varphi(\sigma_2) = 0.$$

Cuando se resolvió este sistema de ecuaciones, obtubieron alrededor de 400 polinomios iguales a 0, entonces al factorizar estos polinomios se dieron cuenta que un factor salía con mucha frecuencia, este factor es $\mathbf{c}(\mathbf{b} + 1)(\mathbf{e} + 1)$, entonces resolvieron el sistema de ecuaciones por separado para los casos \mathbf{c} , $(\mathbf{b} + 1)$, $(\mathbf{e} + 1)$ igual a 0. Al finalizar esto se descartaron las soluciones no invertibles.

□

NOTACIÓN 10. *Por simplicidad el homomorfismo $\varphi_i^{\mathbf{c}, \mathbf{d}}$, con $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ significa que el homomorfismo esta representado por la familia i del Teorema 4.7, en las variables \mathbf{c} y \mathbf{d} .*

Ahora trabajaremos tomando la condición 5 del Teorema 4.7, es decir φ_5 .

LEMA 4.8. *El homomorfismo $\varphi_5 : \mathbf{B}_n \longrightarrow (\mathbb{C}\mathbf{P}_n)^\times$ satistace la siguiente relación skein: Para todo $\sigma_j, j \in \{1, \dots, n - 1\}$ y $\mathbf{x} \in \mathbf{B}_n$, se tiene que:*

$$\varphi_5(\mathbf{x}\sigma_j) - \mathbf{c}\mathbf{d}\varphi_5(\mathbf{x}\sigma_j^{-1}) = (1 - \mathbf{c}\mathbf{d})\varphi_5(\mathbf{x}).$$

En particular el homomorfismo satisface la siguiente relación cuadrática.

$$(\varphi_5(\sigma_j) - \varphi_5(1))(\varphi_5(\sigma_j) + cd\varphi_5(1)) = 0$$

Demostración. Basta demostrar que $\varphi_5(\sigma_j) - cd\varphi_5(\sigma_j^{-1}) = (1 - cd)\varphi_5(1)$.

Tenemos que:

$$\varphi_5(\sigma_j) = (1 - c - d + cd)d_{1i} - d_{2i} + cd_{3i} + dd_{4i} - cdd_{5i} + d_{6i}$$

y tambien se tiene

$$\varphi_5(\sigma_i^{-1}) = (1 - \frac{1}{d} - \frac{1}{c} + \frac{1}{cd})d_{1i} - \frac{1}{cd}d_{2i} + \frac{1}{d}d_{3i} + \frac{1}{c}d_{4i} - d_{5i} + d_{6i}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \varphi_5(\sigma_j) - cd\varphi_5(\sigma_j^{-1}) &= (1 - c - d + cd - cd(\frac{1-c-d+cd}{cd}))d_{1j} + (-1 + \frac{cd}{cd})d_{2j} + \\ &\quad + (c - \frac{cd}{d})d_{3j} + (d - \frac{cd}{c})d_{4j} + (-cd + cd)d_{5j} + (1 - cd)d_{6j} \\ &= (1 - cd)\varphi_5(1). \end{aligned}$$

□

Ahora buscaremos una traza sobre el álgebra \mathbb{CP}_n , para así poder definir el polinomio de Jones mediante la álgebra de Rook y una traza definida a continuación.

DEFINICIÓN 4.15. *Para cualquier $\beta \in \mathbb{C}$, La función traza Bubble (burbuja).*

$$\text{tr}_n^\beta : \mathbb{CP}_n \longrightarrow \mathbb{C}$$

Esta definida por:

$$\text{tr}_n^\beta(\mathbf{d}) = \beta^{k(\mathbf{d})}.$$

Donde $\mathbf{d} \in \mathbb{CP}_n$ y $k(\mathbf{d})$ es el numero de lineas verticales que aparecen en el diagrama \mathbf{d} .

LEMA 4.9. *Para todo diagrama $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{P}_n$ tenemos que $k(\mathbf{ab}) = k(\mathbf{ba})$.*

Demostración. Ver [SB11].

□

Notemos que tr_n^β respeta el primer movimiento de Markov, por el Lema 4.9

PROPOSICIÓN 4.7. Sea tr_n^β la traza bubble, entonces

$$I_n(\mathbf{x}) = (\sqrt{\mathbf{cd}})^{\exp(\mathbf{x})+n} (\text{tr}_n^{\frac{1+\mathbf{cd}}{\mathbf{cd}}} \circ \varphi_5)(\mathbf{x})$$

es un nuevo invariante de nudos.

Demostración. El primer movimiento es preservado por el Lema 4.9. Veamos ahora que preserva el segundo movimiento de Markov.

Consideremos $\text{tr}_{n+1}^\beta(\varphi_5(\mathbf{x}\sigma_n))$, donde $\mathbf{x} \in \mathbb{B}_n$, sabemos que

$$\text{tr}_{n+1}^\beta(\mathbf{x}\sigma_n) = (\mathbf{a} + \mathbf{c} + \mathbf{d} + \mathbf{e}\beta)\text{tr}_n^\beta(\varphi_5'(\mathbf{x})) + (\beta + \mathbf{b})\text{tr}_n^\beta(\varphi_5(\mathbf{x})).$$

donde $\varphi_5'(\mathbf{x})$ es una combinación lineal de todos los diagramas de $\varphi_5(\mathbf{x})$, notemos que $(\mathbf{a} + \mathbf{c} + \mathbf{d} + \mathbf{e}\beta) = 0$, entonces:

$$\text{tr}_{n+1}^{\frac{1+\mathbf{cd}}{\mathbf{cd}}}(\varphi_5(\mathbf{x}\sigma_n)) = \frac{1}{\mathbf{cd}} \text{tr}_n^{\frac{1+\mathbf{cd}}{\mathbf{cd}}}(\varphi_5(\mathbf{x})),$$

multiplicando el resultado anterior por $(\sqrt{\mathbf{cd}})^{\exp(\mathbf{x}\sigma_n)+n+1}$ y usando la definición de Tr_n^5 , tenemos que:

$$\begin{aligned} I_{n+1}(\mathbf{x}\sigma_n) &= (\sqrt{\mathbf{cd}})^{\exp(\mathbf{x})+1+n+1-2} \text{tr}_n^{\frac{1+\mathbf{cd}}{\mathbf{cd}}}(\varphi_5(\mathbf{x})) \\ &= (\sqrt{\mathbf{cd}})^{\exp(\mathbf{x})+n} \text{tr}_n^{\frac{1+\mathbf{cd}}{\mathbf{cd}}}(\varphi_5(\mathbf{x})) \\ &= I_n(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

por lo tanto I_n , respeta los movimientos de markov. □

TEOREMA 4.10. Si $\mathbf{cd} \neq 1$ entonces $I_n(\mathbf{x}) = \frac{1+\mathbf{cd}}{\sqrt{\mathbf{cd}}} \mathbf{V}_{\hat{\mathbf{x}}}(\mathbf{cd})$, donde \mathbf{V} es el polinomio de Jones.

Demostración. Debemos probar que $I_n(\mathbf{x})$ satisfice la relación skein del polinomio de Jones.

Primero, la función $I_n(\mathbf{x})$ satisfice la primera propiedad ya que este es un invariantes de nudos.

Ahora veremos la relación skein.

Por Lema 4.8 tenemos la siguiente relación skein:

$$\begin{aligned}
\varphi_5(x\sigma_i) - cd\varphi_5(x\sigma_i^{-1}) &= (1 - cd)\varphi_5(x) \quad / \text{tr}_n^{\frac{1+cd}{cd}} \\
\text{tr}_n^{\frac{1+cd}{cd}}(\varphi_5(x\sigma_i)) - cd\text{tr}_n^{\frac{1+cd}{cd}}(\varphi_5(x\sigma_i^{-1})) &= (1 - cd)\text{tr}_n^{\frac{1+cd}{cd}}(\varphi_5(x)) \\
(\sqrt{cd})^\zeta I_n(x\sigma_i) - cd(\sqrt{cd})^{(\zeta+2)} I_n(x\sigma_i^{-1}) &= (1 - cd)(\sqrt{cd})^{\zeta+1} I_n(x) \\
(\sqrt{cd})^{(\zeta+2)} \left((\sqrt{cd})^{-2} I_n(x\sigma_i) - cd I_n(x\sigma_i^{-1}) \right) &= \frac{1-cd}{\sqrt{cd}} (\sqrt{cd})^{\zeta+2} I_n(x) \\
(cd)^{-1} I_n(x\sigma_i) - cd I_n(x\sigma_i^{-1}) &= ((cd)^{-\frac{1}{2}} - (cd)^{\frac{1}{2}}) I_n(x)
\end{aligned}$$

Donde $\zeta = -(n + \exp(x) + 1)$.

Así queda resuelto la relación Skein, ahora basta probar que $I_1(1) = \frac{1+cd}{\sqrt{cd}}$, esto es inmediato de la definición de I_n .

$$\begin{aligned}
I_n(1) &= (\sqrt{cd}^{0+1}) \text{tr}_1^{\frac{1+cd}{cd}}(\varphi_5(1)) \\
&= (\sqrt{cd}) \left(\frac{1+cd}{cd} \right) \\
&= \frac{1+cd}{\sqrt{cd}}.
\end{aligned}$$

Así concluye la demostración. □

EJEMPLO 40. *Calcularemos el polinomio de Jones del nudo Hopf-link, sabemos que el nudo se puede obtener mediante la clausura de σ_1^2 .*

$$I_2(\sigma_1^2) = \sqrt{cd}^{2+2} \text{tr}_n^{\frac{1+cd}{cd}}(\varphi_5(\sigma_1^2))$$

Calcularemos la $\text{tr}_n^{\frac{1+cd}{cd}}(\varphi_5(\sigma_1^2))$. Llamaremos $\text{tr} := \text{tr}_n^{\frac{1+cd}{cd}}$.

$$\begin{aligned}
\text{tr}_n^{\frac{1+cd}{cd}}(\varphi_5(\sigma_1^2)) &= \text{tr}(((1 - c - d + cd)d_1 - d_2 + cd_3 + dd_4 - cdd_5 + d_6)^2) \\
&= 1 + cd - \left(\frac{1+cd}{cd} \right) + \left(\frac{1+cd}{cd} \right)^2 \\
&= \frac{1+cd}{(cd)^2} ((cd)^2 + 1).
\end{aligned}$$

Obtenemos el polinomio de Jones de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
I_2(\sigma_1^2) &= (\mathbf{cd})^2 \frac{1+\mathbf{cd}}{(\mathbf{cd})^2} ((\mathbf{cd})^2 + 1) \\
&= (1 + \mathbf{cd})((\mathbf{cd})^2 + 1) \\
&= \frac{1+\mathbf{cd}}{\sqrt{\mathbf{cd}}} ((\mathbf{cd})^{\frac{5}{2}} + (\mathbf{cd})^{\frac{1}{2}})
\end{aligned}$$

Así nuestro polinomio de Jones es:

$$V_K(\mathbf{cd}) = ((\mathbf{cd})^{\frac{5}{2}} + (\mathbf{cd})^{\frac{1}{2}})$$

6. Contrucción Polinomio de Alexander

Se desea construir el polinomio de Alexander de manera análoga a del polinomio HOMFLYPT mediante un álgebra y una traza. En lo que sigue tomaremos el homomorfismo con la segunda condición, es decir, φ_2 .

Primero tomaremos $\rho = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{cd}}} \varphi_2$;

entonces tendremos que:

$$\rho(\sigma_j) = \left(-\frac{\sqrt{\mathbf{c}}}{\sqrt{\mathbf{d}}} - \frac{\sqrt{\mathbf{d}}}{\sqrt{\mathbf{c}}}\right) \mathbf{d}_{1j} - \frac{1}{\sqrt{\mathbf{cd}}} \mathbf{d}_{2j} + \frac{\sqrt{\mathbf{c}}}{\sqrt{\mathbf{d}}} \mathbf{d}_{3j} + \frac{\sqrt{\mathbf{d}}}{\sqrt{\mathbf{c}}} \mathbf{d}_{4j} - \sqrt{\mathbf{cd}} \mathbf{d}_{5j} + \frac{1}{\sqrt{\mathbf{cd}}} \mathbf{d}_{6j}$$

$$\rho(\sigma_j^{-1}) = \left(-\frac{\sqrt{\mathbf{c}}}{\sqrt{\mathbf{d}}} - \frac{\sqrt{\mathbf{d}}}{\sqrt{\mathbf{c}}}\right) \mathbf{d}_{1j} - \frac{1}{\sqrt{\mathbf{cd}}} \mathbf{d}_{2j} + \frac{\sqrt{\mathbf{c}}}{\sqrt{\mathbf{d}}} \mathbf{d}_{3j} + \frac{\sqrt{\mathbf{d}}}{\sqrt{\mathbf{c}}} \mathbf{d}_{4j} - \sqrt{\mathbf{cd}} \mathbf{d}_{5j} + \sqrt{\mathbf{cd}} \mathbf{d}_{6j}$$

COROLARIO 4.1. Para cada $x \in B_n$ tenemos la siguiente relación:

$$\rho(x\sigma_i) - \rho(x\sigma_i^{-1}) = \left(\frac{1}{\sqrt{\mathbf{cd}}} - \sqrt{\mathbf{cd}}\right) \rho(x)$$

Demostración. Basta demostrar que

$$\rho(\sigma_i) - \rho(\sigma_i^{-1}) = \left(\frac{1}{\sqrt{\mathbf{cd}}} - \sqrt{\mathbf{cd}}\right) \rho(1)$$

y este hecho resulta inmediato de restar $\rho(\sigma_i)$ con $\rho(\sigma_i^{-1})$.

Así concluye la demostración. □

COROLARIO 4.2. ρ satisface la relación skein del polinomio de Alexander.

Demostraci3n. Reemplazando $t = cd$ en

$$\rho(\sigma_i) - \rho(\sigma_i^{-1}) = \left(\frac{1}{\sqrt{cd}} - \sqrt{cd}\right)\rho(1),$$

tenemos que:

$$\rho(\sigma_i) - \rho(\sigma_i^{-1}) = \left(\frac{1}{\sqrt{t}} - \sqrt{t}\right)\rho(1).$$

As3 obtenemos una relaci3n skein del polinomio de Alexander.

□

DEFINICI3N 4.16. *Definamos la funci3n $\text{tr}_n : \mathbb{C}P_n \rightarrow \mathbb{C}$, por:*

$$\text{tr}_n(x) = \begin{cases} 1 & k(x) = 1 \\ 0 & k(x) \neq 1 \end{cases}$$

DEFINICI3N 4.17. *Sea Δ_K el polinomio de Alexander mediante la 3lgebra de Rook y la traza anterior, se define $\Delta_{\widehat{x}}(t)$ como sigue:*

$$\Delta_{\widehat{x}}(t) = \frac{\text{tr}_n(\rho(x))}{\delta_n}.$$

Donde $\delta_n = \left(\frac{-1}{\sqrt{cd}}\right)^{n-1}[1 + cd + (cd)^2 + \dots + (cd)^{n-1}]$.

EJEMPLO 41. *Calcularemos el polinomio de Alexander del nudo Hopf-Link. por otro lado sabemos que la clausura de la trenza $\widehat{\sigma_1^2}$ es el nudo Hopf-Link. entonces:*

$$\Delta_{\widehat{\sigma_1^2}}(t) = \frac{\text{tr}_n(\rho(\sigma_1^2))}{\delta_2}.$$

Primero calculemos $\text{tr}(\rho(\sigma_1^2))$, como ρ es homomorfismo tenemos que:

$$\begin{aligned} \text{tr}(\rho(\sigma_1^2)) &= \text{tr}((\rho(\sigma_1^2))) \\ &= \text{tr}((\rho(\sigma_1))^2) \\ &= \left(\left(-\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{d}} - \frac{\sqrt{d}}{\sqrt{c}}\right)d_{11} - \frac{1}{\sqrt{cd}}d_{21} + \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{d}}d_{31} + \frac{\sqrt{d}}{\sqrt{c}}d_{41} - \sqrt{cd}d_{51} + \frac{1}{\sqrt{cd}}d_{61}\right)^2 \\ &= \left(\left(-\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{d}} - \frac{\sqrt{d}}{\sqrt{c}}\right)d_1 - \frac{1}{\sqrt{cd}}d_2 + \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{d}}d_3 + \frac{\sqrt{d}}{\sqrt{c}}d_4 - \sqrt{cd}d_5 + \frac{1}{\sqrt{cd}}d_6\right)^2 \end{aligned}$$

sabemos que la traza de un diagrama con una linea vertical es 1 y en los otros casos es 0.

entonces los únicos diagramas que tienen una lineal vertical son:

$$d_2 d_2; d_2 d_6; d_3 d_4; d_4 d_3; d_5 d_5; d_6 d_5; d_6 d_2,$$

luego la traza es:

$$\begin{aligned} \text{tr}(\rho(\sigma_1)^2) &= \frac{1}{cd} \text{tr}(d_2 d_2) - \frac{1}{cd} \text{tr}(d_2 d_6) + 1 \text{tr}(d_3 d_4) + 1 \text{tr}_{d_4 d_3} + cd \text{tr}(d_5 d_5) - 1 \text{tr}(d_5 d_6) \\ &\quad - 1 \text{tr}(d_6 d_5) - \frac{1}{cd} \text{tr}(d_6 d_2) \\ &= \frac{1}{cd} - \frac{1}{cd} + 1 + 1 + cd - 1 - 1 - \frac{1}{cd} \\ &= cd - \frac{1}{cd}. \end{aligned}$$

Siguiendo el orden tenemos que:

$$\delta_2 = -\frac{1}{\sqrt{cd}} - \sqrt{cd}$$

entonces tenemos que el polinomio de Alexander del nudo Hopf-Link es

$$\begin{aligned} \Delta_{\widehat{\sigma_1^2}}(t) &= \frac{\text{tr}_n(\rho(\sigma_1^2))}{\delta_2} \\ &= \frac{cd - \frac{1}{cd}}{-\frac{1}{\sqrt{cd}} - \sqrt{cd}} \\ &= \frac{t^{-\frac{1}{t}}}{-\frac{1}{\sqrt{t}} - \sqrt{t}} \\ &= \frac{\sqrt{t}(t^2-1)}{t(-1-t)} \\ &= \frac{\sqrt{t}(t-1)(t+1)}{-t(1+t)} \\ &= t^{-\frac{1}{2}}(t-1) \\ &= t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Bibliografía

- [Art25] E. Artin. *Theorie der Zöpfe*. Abh. 4, 47-72, Hamburg, 1925.
- [Esp10] Jorge Espinoza. *Grupos de Trenzas e Invariantes Polinomiales de Nudos*. Valparaíso, 2010.
- [Joh80] D.L. Johnson. *Topics in the Theory of Groups Presentations*. Cambridge University Press, New York, 1980.
- [Jon05] Vaughan F.R. Jones. *The Jones Polynomial*. University of California at Berkeley, Berkeley, 2005.
- [Kau83] Louis H. Kauffman. *Formal Knots Theory*. Princeton University Press, USA, New Jersey, 1983.
- [Kau01] Louis H. Kauffman. *Knots and Physics (Third Edition)*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, USA, 2001.
- [KL94] Louis H. Kauffman and Sóstenes L. Lins. *Temperley-Lieb recoupling theory and invariants of 3-Manifold*. Princeton University Press, New Jersey, 1994.
- [KT08] Christian Kassel and Vladimir Turaev. *Braid Groups*. Springer, New York, 2008.
- [Lic91] W.B. Raymond Lickorish. *An introduction to knot theory*. Springer-Verlang, New York, 1991.
- [Man04] Vassily Manturov. *Knots Theory*. CRC Press LLC, Boca Raton, Florida, 2004.
- [MK96] Kunio Murasugi and Bohdan I. Kurpita. *Knot Theory and its Applications*. Birkhusen, Boston, 1996.
- [MK99] Kunio Murasugi and Bohdan I. Kurpita. *A Study of Braids*, volume 484. Kluwer Academic Publishers, Boston/London, 1999.
- [SAT11] J.A. Crespo J.I. Extremiana L.J. Hernández M.T. Rivas J. Roca y M. Vázquez S. Ardanza-Trevijano, J. Arsuaga. *Invariantes topológicos en el ADN, los Fullerenos y la Teoría de Elección Social*. 2011.
- [SB11] R. Yi S. Bigelow, E. Ramos. *The Alexander and Jones Polynomials Through Representations of Rook Algebras*. California, 2011.
- [Sch92] Dana Schlomiuk. *Bifurcations and periodic orbits of vector fields*. Kluwer Academic Publishers, Montréal, Canada, 1992.