



Facultad de Ciencias.

Instituto de Matemáticas.

Modelo depredador presa con memoria.

Trabajo Especial de Grado presentado ante

la Universidad de Valparaíso

por Valentina J. Urzúa A.

Para optar al grado de Licenciada en Matemática.

Tutor: Dr. Rodrigo A. Castro M.

Valparaíso, Chile

Agosto de 2017.

Índice

1. Preliminares: Definiciones básicas	5
1.1. Campos vectoriales y flujos	6
1.2. Sistemas lineales: Dinámica de los sistemas lineales en \mathbb{R}^n	7
1.2.1. Operador exponencial	7
1.3. Plano traza determinante	21
1.4. Conjugación de sistemas lineales	22
1.5. Clasificación de los sistemas hiperbólicos	27
1.6. Estabilidad de los sistemas	28
1.7. Sistemas no lineales	30
1.8. Linealización de un sistema no lineal	31
1.9. Teoría cualitativa y teorema de la variedad estable y variedad central	31
1.10. Teorema de Hartman-Grobman:	33
1.11. Funciones de Liapunov	34
1.12. Teorema de la variedad central local	36
1.13. Sistemas dinámicos y Órbitas periódicas	40
1.13.1. Conjuntos límite y atractores	41
1.13.2. Órbitas periódicas y ciclos límite	43
1.13.3. Función de Poincaré, el cuestionamiento de Poincaré	46
2. Bifurcaciones, estabilidad estructural y teorema de Piexoto	50
2.0.4. Bifurcaciones en un punto de equilibrio no hiperbólico	52
2.0.5. Bifurcación Hopf (Valores propios complejos conjugados)	63
3. Modelo depredador presa con memoria	64
3.1. Planteamiento del problema	64
3.2. La familia de Miklós Farkas	66
3.3. Generalización de la familia de Miklós Farkas	67
4. Conclusiones	102

Agradecimientos

Tenemos un Dios grande y maravilloso, que nos llena de favores y misericordia todos los días. Que nos trata de igual a pesar de nuestros pecados, que nos ha dado salud, y felicidad. Quiero agradecerle por ser mi guía personal, por protegernos durante todo el camino y proceso de este trabajo, pues detrás de esta investigación hay profesores, familia y amigos que me apoyaron y permitieron llegar hasta este punto. Me dieron fuerzas para superar obstáculos y dificultades a lo largo de los años. Quiero agradecerle a Dios por cada bendición que permitió que las cosas se dieran, y porque hizo realidad este sueño anhelado.

Agradezco a mi familia, a cada uno de ellos, por la paciencia y contención, por el apoyo incondicional, por aconsejarme y regañarme cuando lo merecía, porque son mi pilar. Agradezco la confianza, y el apoyo brindado por su parte, que sin duda alguna en el trayecto de mi vida me han demostrado su amor, corrigiendo las faltas y celebrando mis triunfos.

A mi profesor guía el doctor Rodrigo Castro, por cada momento de enseñanza que dedicó, antes, en mi formación académica y luego en el presente trabajo. Quien con el profesor Eduardo Stange, en reiteradas ocasiones hacían notar su interés en mis avances, me dieron ánimo, y ganas de perseverar.

A mis amigas y amigos de la universidad e iglesia, mis hermanos de fe, quienes creyeron en mi y mis capacidades. Quienes aportaron con todo el material ilustrativo de este trabajo, ideas de estructura y organización temática.

A todos y cada uno de ustedes muchas gracias, éste también es su trabajo.

Introducción

Las cadenas tróficas dan cuenta de las relaciones que establecen los seres vivos para sobrevivir en el ecosistema, a menudo algunos actúan como alimento de otros. Los animales depredadores son, justamente, aquellos que necesitan cazar a otros animales para alimentarse. Muchas veces la importancia de éstos radica en que actúan como reguladores de la cantidad de individuos de una comunidad animal dada, que podría tornarse plaga de no mediar por la acción depredadora.

Existe este tipo de animales en los distintos hábitas naturales, por ejemplo, en el ambiente acuático, los tiburones son clásicos depredadores carnívoros de peces. En las selvas y sabanas de las zonas subtropicales, distintos mamíferos como tigres, leones y búfalos prosperan basando su alimentación en la depredación de otros miembros del ecosistema. También entre insectos existe el fenómeno de depredación. En este grupo la depredación adquiere particular relevancia, ya que, cuando el organismo depredado constituye una plaga para los cultivos, este proceso pasa a ser una estrategia natural de control biológico, que tiende a evitar el uso de plaguicidas.

Pero, otras veces la depredación representa una amenaza considerable para ciertas actividades. Tal es el caso de lo que ocurre en la región de Los Lagos al sur argentino con la avispa conocida como “*chiqueta amarilla*”: se cree que ésta ingresó en los años ochenta desde Chile, y encontró en la Patagonia Argentina excelentes condiciones para multiplicarse, convirtiéndose así en un insecto plaga que actúa como depredador de abejas, impactando en la producción de miel y en la polinización de especies fundamentales para la economía regional.

En el presente trabajo manifestaremos estos comportamientos naturales a través de un sistema de ecuaciones diferenciales, digamos:

Sistemas dinámicos

Un sistema dinámico es informalmente un modo de describir el recorrido a lo largo del tiempo de todos los puntos de un espacio dado E , cuyo estado evoluciona con el tiempo. El comportamiento en dicho estado se puede caracterizar determinando los límites del sistema, los elementos y sus relaciones, de esta forma se pueden elaborar modelos que buscan representar la estructura del mismo sistema, seleccionando aquellos componentes que contribuyan a generar los modos de comportamiento.

Geoméricamente, un sistema dinámico describe el movimiento de los puntos en el llamado espacio de fase a lo largo de las curvas solución definidas por el sistema de ecuaciones diferenciales, éste, da una descripción funcional de la solución de un problema físico o del modelo matemático que describe el problema físico.

Por ejemplo, el movimiento del péndulo amortiguado es un sistema dinámico en el sentido de que el movimiento del péndulo se describe por su posición y la velocidad en función del tiempo y las condiciones iniciales. Por lo que matemáticamente hablando esta situación de cambios a lo largo del tiempo nos invita

a pensar, ¿Qué sucede con el comportamiento de ciertas poblaciones dadas?. Es decir, ¿Qué sucede con su dinámica poblacional?.

Dinámica poblacional

La dinámica de poblaciones es la especialidad de la ecología que se ocupa del estudio de los cambios que sufren las poblaciones biológicas en cuanto a tamaño, dimensiones físicas de sus miembros, estructura de edad, sexo y otros parámetros que las definen, así como de los factores que causan esos cambios y los mecanismos por los que se producen.

La dinámica de poblaciones es uno de los principales objetos de la Bio-Matemática en general y de la ecología de poblaciones en particular. Tiene gran importancia en la gestión de los recursos biológicos, como las pesquerías, en la evaluación de las consecuencias ambientales de las acciones humanas y también en campos de la investigación médica relacionados con las infecciones y la dinámica de las poblaciones celulares.

Los sistemas dinámicos se han convertido en una de las herramientas principales para modelar el comportamiento de las poblaciones, ya que indican con un grado muy preciso cual es el comportamiento de una población a medida que el tiempo varía. Además, en estos sistemas vemos involucrados factores tales como las tasas de crecimiento, muerte, depredación, o capacidad del medio, entre otros, los cuales podemos tratar como parámetros, y nos da la oportunidad de experimentar teóricamente con las poblaciones al hacerlos variar.

En este trabajo, el concepto de bifurcación desempeña un rol central, pues casos interesantes surgen en las vecindades de los puntos de bifurcación, debido a que pequeños cambios en uno de los parámetros pueden ocasionar variaciones sustanciales en la evolución de las especies.

Respaldando nuestro trabajo, ocuparemos varios resultados elementales, del Álgebra lineal y propios de Ecuaciones Diferenciales, los cuales se enuncian pero no se demuestran, sin embargo, se pueden ver, por ejemplo, [9].

1. Preliminares: Definiciones básicas

Definición 1 Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo cualquiera. Una **ecuación diferencial** es una expresión de la forma:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

donde $x \in I$, $y = y(x)$ es una función n -veces diferenciable y F toma valores en \mathbb{R} .

Y si $y^{(n)} \neq 0$ en I , diremos que la ecuación diferencial es de orden n .

Definición 2 Una **solución** de $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ es una función $u : I \rightarrow \mathbb{R}$, n -veces derivable, tal que:

$$F(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(n)}(x)) = 0, \forall x \in I.$$

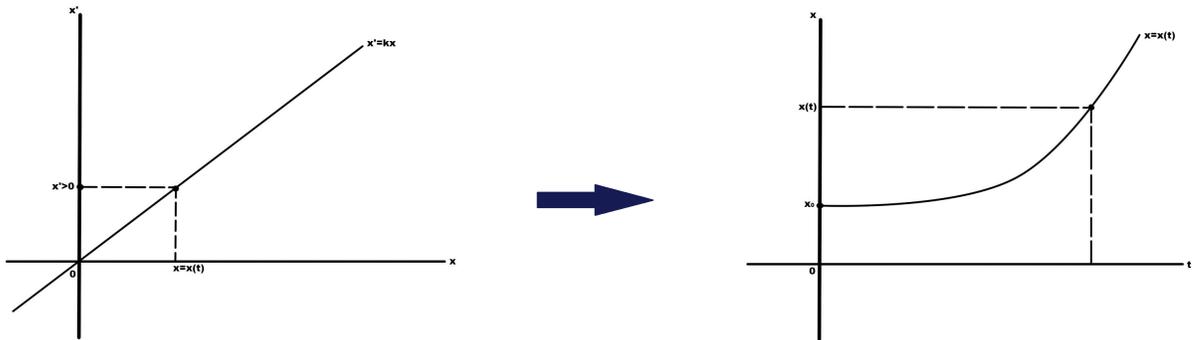
Veamos en un ejemplo, un caso aplicado:

Ejemplo 3 La ecuación diferencial $\frac{dx}{dt} = ky$, con $k > 0$.

Si $x(t)$ representa la cantidad de habitantes de una especie (biomasa) en el tiempo t , se observa que el cambio $\left(\frac{dx}{dt}\right)$ que experimenta la biomasa en cada instante de tiempo es proporcional al número de individuos, es decir, se rige por la ecuación diferencial:

$$\frac{dx}{dt} = ky, \text{ con } k > 0.$$

que podemos ver representada en la figura 1.



Fig,1

Como

$$\frac{dx}{dt} = ky, \text{ con } x = x(t) > 0,$$

entonces

$$\int \frac{dx}{x} = k \int dt$$

lo que implica que

$$x(t) = ce^{kt}, \text{ con } c > 0,$$

y como $x(0) = x_0$ se tiene que $c = x_0$, por lo que concluimos que $x(t) = x_0 e^{kt}$, con $k > 0$, $x(t)$ es la curva que modela el comportamiento de la población a lo largo del tiempo.

1.1. Campos vectoriales y flujos

Definición 4 Sea Δ un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n . Un campo vectorial de clase C^k con $1 \leq k \leq \infty$ en Δ es una aplicación $X : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^k .

A todo campo vectorial X le podemos asociar la ecuación diferencial:

$$\dot{x} = X(x).$$

Cuyas soluciones, son aplicaciones diferenciales $\varphi : I \rightarrow \Delta$, con I intervalo de la recta, tales que:

$$\frac{d\varphi}{dt}(t) = X(\varphi(t)),$$

para todo $t \in I$, ellas son llamadas **trayectorias** de X .

Definición 5 Un punto $x \in \Delta$ se llama **punto singular o de equilibrio** de X si $X(x) = 0$.

Notemos que x es un **punto singular** si y sólo si $\varphi(0) = x$, esto implica que $\varphi(t) = x$, con $-\infty < t < \infty$.

Definición 6 Una solución $\varphi : I \rightarrow \Delta$ se llama **solución máxima** de $\dot{x} = X(x)$ si para toda solución $\psi : J \rightarrow \Delta$ tal que $I \subseteq J$ y $\varphi = \psi|_I$ entonces $I = J$ y consecuentemente $\varphi = \psi$. En este caso I se llama **intervalo máximo de existencia de la solución**.

Notemos que φ es una solución de $\dot{x} = X(x)$ si y sólo si su vector tangente a φ , $\varphi'(t)$, coincide con el valor del campo X en el punto $\varphi(t)$.

Definición 7 Un sistema dinámico o flujo es una función de clase C^1 :

$$\varphi : \mathbb{R} \times U \rightarrow U, \text{ tal que } \varphi(t, x) \in U \text{ y está definida para todo } t \in \mathbb{R} \text{ y } x \in U \subset \mathbb{R}^n,$$

donde U es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n , que "describe como el punto $x \in U$ se mueve con respecto al tiempo t . Y, si $\varphi_t(x) = \varphi(t, x)$, entonces $\varphi_t : U \rightarrow U$ satisface:

1. $\varphi_0(x) = x$, para todo $x \in U$.
2. $(\varphi_t \circ \varphi_s)(x) = \varphi_{t+s}(x)$, para todo $s, t \in \mathbb{R}$ y $x \in U$.

1.2. Sistemas lineales: Dinámica de los sistemas lineales en \mathbb{R}^n

Definición 8 Un sistema lineal de ecuaciones diferenciales, es de la forma:

$$\dot{x} = Ax,$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in M_n(\mathbb{R})$ y

$$\dot{x} := \frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix},$$

es el vector columna que contiene las derivadas de x .

A continuación, utilizaremos un teorema del álgebra lineal que nos permitirá abordar este tipo de sistemas de ecuaciones diferenciales:

Teorema 9 Si los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ de la matriz A de tamaño $n \times n$ son todos reales y distintos, entonces el conjunto de sus vectores propios $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ forma una base de \mathbb{R}^n , la matriz $P = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n]$ es invertible y $P^{-1}AP = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$. Así la solución del sistema $\dot{x} = Ax$ es

$$x(t) = PE(t)P^{-1}x(0),$$

donde

$$E(t) = \text{diag}\{e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}\}.$$

Dem. Ver [2] ■

En lo que sigue, consideremos la transformación lineal T en \mathbb{R}^n representada por la matriz A con respecto a la base canónica de \mathbb{R}^n .

1.2.1. Operador exponencial

Para definir la exponencial de un operador lineal $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, es necesario definir el concepto de convergencia en el espacio lineal $L(\mathbb{R}^n)$ de operadores lineales en \mathbb{R}^n . Para ello es necesario definir la

norma de un operador T :

$$\|T\| = \max_{\|x\| \leq 1} |T(x)|,$$

donde $\|x\|$ denota la norma euclídeana de $x \in \mathbb{R}^n$, es decir,

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

La norma de un operador cumple:

1. $\|T\| \geq 0$ y $\|T\| = 0$, si y sólo si $T = 0$.
2. $\|kT\| = |k| \|T\|$, para $k \in \mathbb{R}$.
3. $\|S + T\| \leq \|S\| + \|T\|$.

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, si $T \in L(\mathbb{R}^n)$ esta representada por la matriz A con respecto a la base canónica de \mathbb{R}^n , entonces $\|A\| \leq \sqrt{nl}$, donde l es la longitud máxima de las filas de A .

La convergencia de la sucesión de operadores $T_k \in L(\mathbb{R}^n)$ está entonces definida en terminos del operador norma como sigue:

Definición 10 Una sucesión de operadores lineales $T_k \in L(\mathbb{R}^n)$ se dice que **converge** a un operador lineal $T \in L(\mathbb{R}^n)$ cuando $k \rightarrow \infty$, es decir,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T_k = T,$$

si para todo $\varepsilon > 0$ existe un N tal que para cada $k \geq N$, $\|T - T_k\| < \varepsilon$.

Lema 11 Para $S, T \in L(\mathbb{R}^n)$ y $x \in \mathbb{R}$,

1. $|T(x)| \leq \|T\| \|x\|$.
2. $\|TS\| \leq \|T\| \|S\|$.
3. $\|T^k\| \leq \|T\|^k$ para $k = 0, 1, 2, \dots$

Dem. (1) Es cierto para $x = 0$. En cambio, para $x \neq 0$ definamos el vector unidad $y = \frac{x}{\|x\|}$. Entonces por la definición de norma,

$$\|T\| \geq |T(y)| = \frac{1}{\|x\|} |T(x)|.$$

(2) Para $\|x\| \leq 1$, se sigue de (1) que

$$\begin{aligned} |T(S(x))| &\leq \|T\| |S(x)| \\ &\leq \|T\| \|S\| \|x\| \\ &\leq \|T\| \|S\|, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\|TS\| = \max_{\|x\| \leq 1} |TS(x)| \leq \|T\| \|S\|.$$

(3) Es consecuencia inmediata de (2). ■

Teorema 12 Dada $T \in L(\mathbb{R}^n)$ y $t_0 > 0$, la serie

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} \in M_n(\mathbb{R}),$$

es *absolutamente converge* para todo $|t| \leq t_0$.

Dem. Sea $\|T\| = a$. Por el lema precedente, para $|t| \leq t_0$,

$$\left\| \frac{T^k t^k}{k!} \right\| \leq \frac{\|T\|^k |t|^k}{k!} \leq \frac{a^k t_0^k}{k!},$$

pero

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k t_0^k}{k!} = e^{at_0},$$

por lo tanto, por el teorema de Weierstrass la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k t^k}{k!},$$

es absoluta y uniformemente convergente para todo $|t| \leq t_0$.

La exponencial del operador lineal T , está, entonces definido por las series absolutamente convergentes

$$e^T = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{k!},$$

luego, por la propiedad de los límites, podemos probar fácilmente que e^T es un operador lineal en \mathbb{R}^n y además $\|e^T\| \leq e^{\|T\|}$. ■

Como nuestro principal interés, dentro de estos conceptos, es la solución de sistemas lineales de la forma

$$\dot{x} = Ax,$$

asumiremos que la transformación T en \mathbb{R}^n esta representada por la matriz A de $n \times n$ con respecto a la base canónica de \mathbb{R}^n . A continuación definiremos la matriz exponencial e^{At} .

Definición 13 Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces para $t \in \mathbb{R}$, definimos

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}.$$

Para la matriz A , e^{At} es una matriz de tamaño $n \times n$ que puede ser calculada en términos de los valores y vectores propios de A .

Proposición 14 Si P y T son transformaciones lineales en \mathbb{R}^n y

$$S = PTP^{-1},$$

entonces

$$e^S = Pe^T P^{-1}.$$

Dem. Se sigue desde la definición de e^S que:

$$e^S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{(PTP^{-1})^k}{k!} = P \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{T^k}{k!} P^{-1} = Pe^T P^{-1}.$$

■

El siguiente corolario se sigue desde la proposición y definición precedente:

Corolario 15 Si $P^{-1}AP = \text{diag}[\lambda_i]$ entonces

$$e^{At} = P \text{diag}[e^{\lambda_i t}] P^{-1}.$$

Proposición 16 Si S y T son transformaciones lineales en \mathbb{R}^n **conmutativas**, esto es, que satisfacen $ST = TS$, entonces:

$$e^{S+T} = e^S e^T.$$

Dem. Si $ST = TS$, entonces por el teorema del binomio

$$(S + T)^n = n! \sum_{j+k=n} \frac{S^j T^k}{j!k!},$$

por lo tanto

$$e^{S+T} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j+k=n} \frac{S^j T^k}{j!k!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{S^j}{j!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{k!} = e^S e^T.$$

■

En el teorema anterior usamos el hecho de que el producto de dos series absolutamente convergentes es una serie absolutamente convergente.

Al establecer $S = -T$, en la proposición anterior, obtenemos:

Corolario 17 Si T es una transformación lineal en \mathbb{R}^n , la inversa de la transformación lineal e^T esta dada por $(e^T)^{-1} = e^{-T}$.

Corolario 18 Si $A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ entonces:

$$e^A = e^\alpha \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix}, \text{ con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Corolario 19 Si $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ entonces:

$$e^A = e^\alpha \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Teorema 20 (Fundamental de sistemas lineales)

Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ entonces, dado $x_0 \in \mathbb{R}^n$, el problema de valor inicial:

$$\dot{x} = Ax,$$

con condición

$$x(0) = x_0,$$

tiene una única solución: $x(t) = e^{At} x_0$.

Para la demostración de éste teorema, necesitaremos utilizar el siguiente lema:

Lema 21 Sea A una matriz cuadrada, entonces:

$$\frac{d}{dt} e^{At} = e^{At} A.$$

Dem. Como A es conmutativa consigo misma, por la proposición anterior se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}e^{At} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{A(t+h)} - e^{At}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} e^{At} \frac{(e^{Ah} - I)}{h} \\ &= e^{At} \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow \infty} \left(A + \frac{A^2 h}{2!} + \dots + \frac{A^k h^{k-1}}{k!} \right) \\ &= Ae^{At}. \end{aligned}$$

La última igualdad se sigue de 12. ■

Ahora procedamos a probar el teorema fundamental de sistemas lineales.

Dem. Por el lema precedente, si

$$x(t) = e^{At}x_0,$$

entonces

$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}e^{At}x_0 = Ae^{At}x_0 = Ax(t),$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. También,

$$x(0) = Ix_0 = x_0,$$

por lo tanto

$$x(t) = e^{At}x_0 \text{ es una solución.}$$

Para ver esto, sea $x(t)$ una solución del problema de valor inicial (P.V.I)

$$\dot{x} = Ax$$

$$x(0) = x_0,$$

y sea

$$y(t) = e^{-At}x(t),$$

entonces por el lema precedente y del hecho de que $x(t)$ es solución del P.V.I

$$\begin{aligned} y'(t) &= (e^{-At})'x(t) + e^{-At}x'(t) \\ &= -Ae^{-At}e^{At}x_0 + e^{-At}Ae^{At}x_0 \\ &= 0, \end{aligned}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, ya que, e^{-At} y A conmutan. Por lo tanto, $y(t)$ es una constante.

Poniendo $t = 0$, mostramos que $y(t) = x_0$ y por lo tanto toda solución del P.V.I es dada por

$$x(t) = e^{At}y(t) = e^{At}x_0.$$

Esto completa la prueba del teorema. ■

Antes de analizar la dinámica de los sistemas lineales en \mathbb{R}^n , analicemos el caso $n = 2$.

Consideremos el sistema lineal:

$$\dot{x} = Bx,$$

y A su forma canónica de Jordan, por lo que existe una matriz P invertible tal que:

$$B = P^{-1}AP \in M_n(\mathbb{R}).$$

Clasificaremos según los valores y vectores propios de la matriz, los diferentes comportamientos de los sistemas.

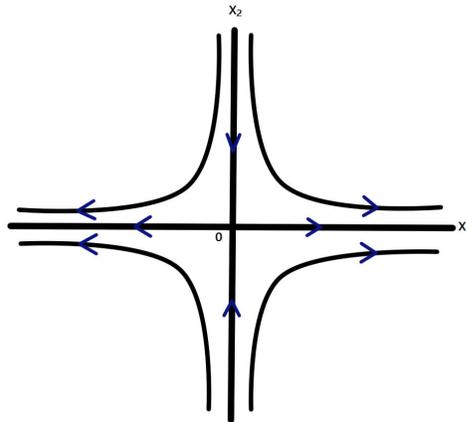
1. Si $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ entonces, la solución para el P.V.I, (cuyas representaciones podemos apreciar en las figuras 2, 3, 4, 5 y 6),

$$\dot{x} = Ax,$$

con condición

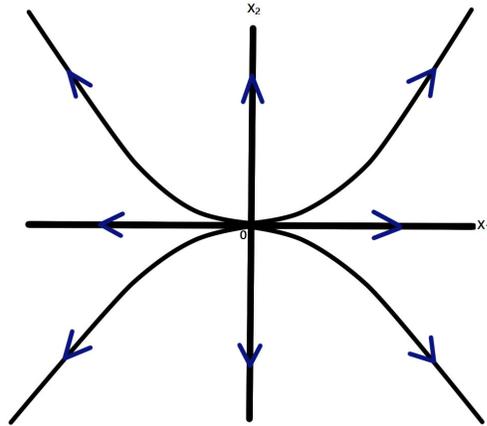
$$x(0) = x_0 \quad \text{es:} \quad x(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\mu t} \end{pmatrix} x_0.$$

Cuando $\lambda > 0 > \mu$ obtenemos una **silla hiperbólica**:



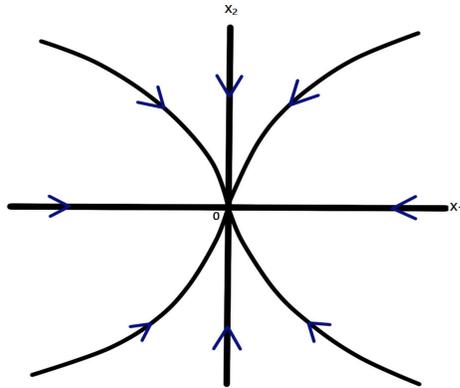
Fig,2

Cuando $\lambda > \mu > 0$ obtenemos un **nodo repulsor**:



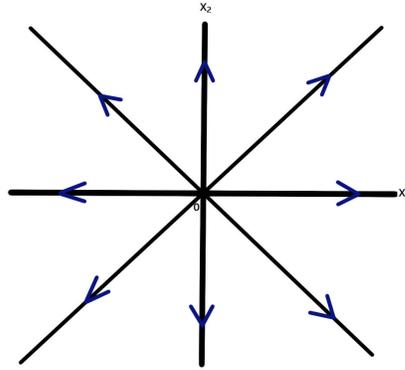
Fig,3

Cuando $\lambda < \mu < 0$ entonces obtenemos un **nodo atractor**:



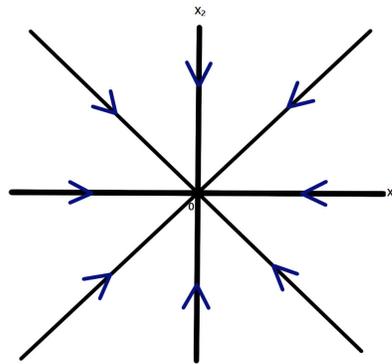
Fig,4

Cuando $\lambda = \mu > 0$ obtenemos un **nodo estelar repulsor**:



Fig,5

Cuando $\lambda = \mu < 0$ entonces obtenemos un **nodo estelar atractor**:



Fig,6

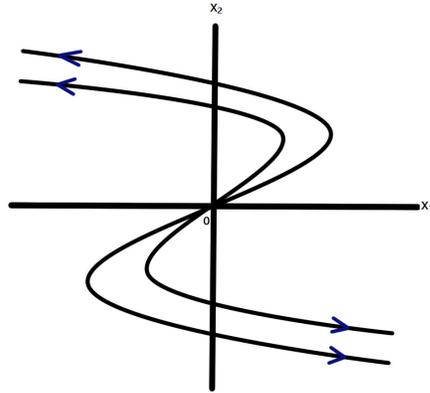
2. Si $B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ entonces, la solución para el P.V.I, (Cuyas representaciones podemos apreciar en las figuras 7 y 8),

$$\dot{x} = Ax,$$

con condición

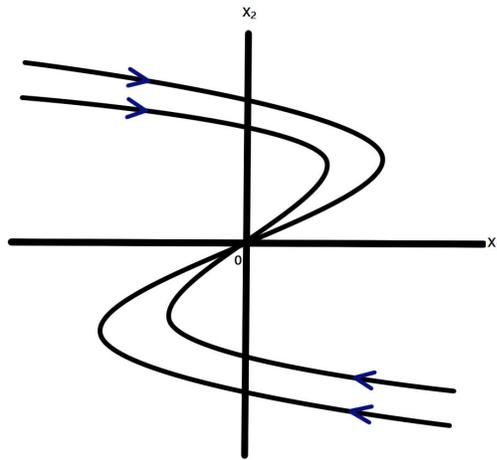
$$x(0) = x_0 \quad \text{es :} \quad x(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} x_0.$$

Cuando $\lambda > 0$ obtenemos un **nodo de una tangente repulsor**:



Fig,7

Cuando $\lambda < 0$ entonces obtenemos un **nodo de una tangente atractor**:



Fig,8

3. Si $A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ entonces, la solución para el P.V.I, (cuyas representaciones podemos apreciar en las figuras 9, 10, 11 y 12),

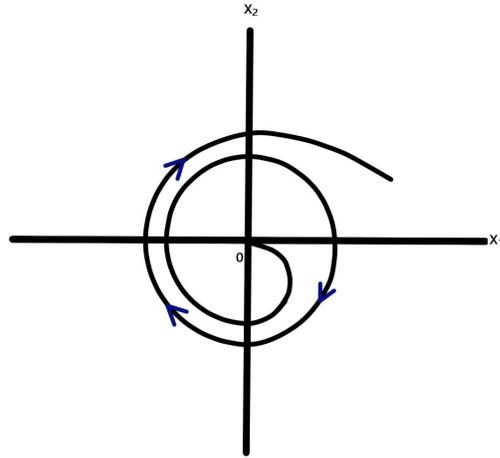
$$\dot{x} = Ax,$$

con condición

$$x(0) = x_0 \quad \text{es:} \quad x(t) = \begin{pmatrix} e^{\alpha t} \cos(\beta t) & -e^{\alpha t} \sin(\beta t) \\ e^{\alpha t} \sin(\beta t) & e^{\alpha t} \cos(\beta t) \end{pmatrix} x_0,$$

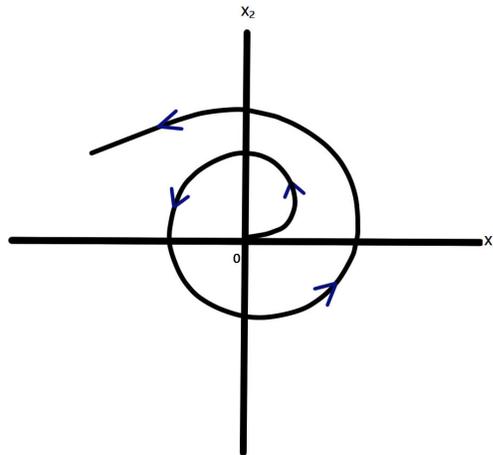
donde el valor que toma α es distinto de cero, tiene como comportamiento:

Cuando $\alpha > 0$ obtenemos un **foco repulsor**.



$$\beta > 0$$

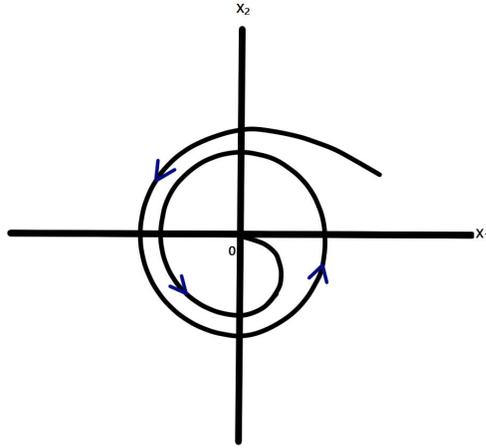
Fig,9



$$\beta < 0$$

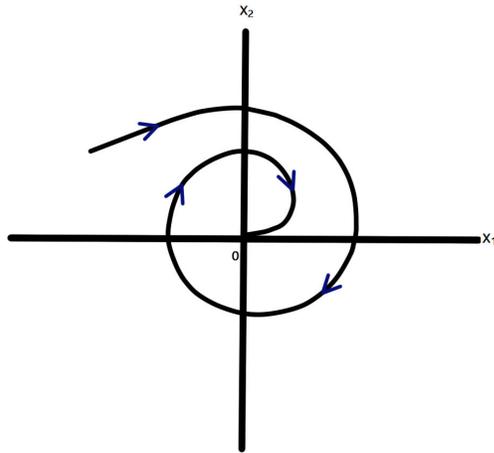
Fig,10

Cuando $\alpha < 0$ obtenemos un **foco atractor**.



$$\beta > 0$$

Fig,11



$$\beta < 0$$

Fig,12

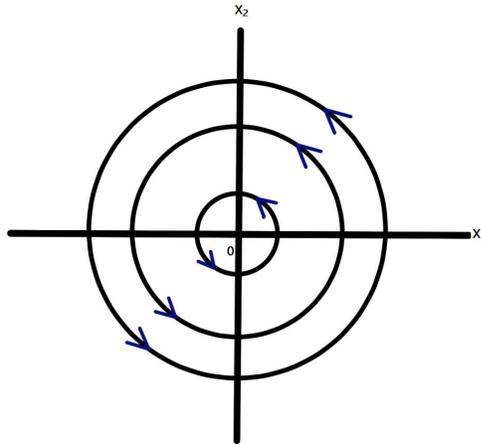
4. Y si $\alpha = 0$, entonces $B = \begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$ así, la solución para el P.V.I, (Cuyas representaciones podemos apreciar en las figuras 13 y 14),

$$\dot{x} = Ax,$$

con condición

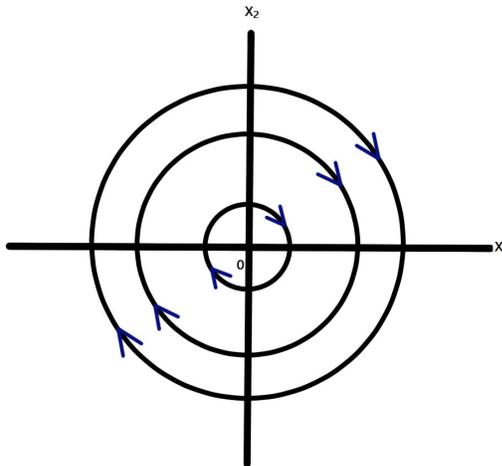
$$x(0) = x_0 \quad es : \quad x(t) = \begin{pmatrix} \cos(\beta t) & -\sin(\beta t) \\ \sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix} x_0.$$

Cuando $\beta > 0$ obtenemos un **centro** con dirección en sentido contrario a las manecillas del reloj:



Fig,13

Cuando $\beta < 0$ obtenemos un **centro** con dirección en sentido de las manecillas del reloj:



Fig,14

Ejemplo 22 *Estudiamos el siguiente sistema simple*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -3x_1 - 2x_2 \end{cases} \quad (1)$$

¿Qué tipo de solución presenta?

Solution 23 La matriz del sistema es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix},$$

si

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Entonces se escribe de la forma

$$\dot{x} = Ax.$$

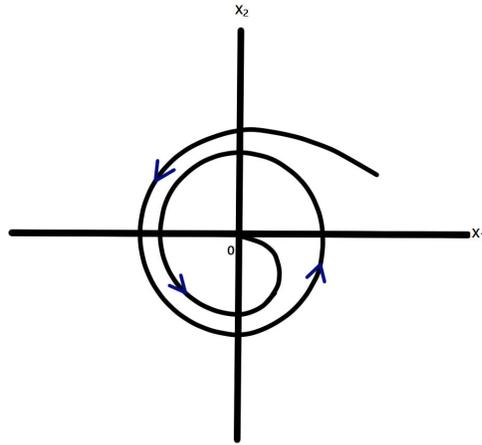
Y su polinomio característico es

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + 1 \quad y \quad \Delta = -3 < 0,$$

por lo tanto, el sistema presenta soluciones complejas. Sus valores propios son

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}.$$

Como $\text{Re}(\lambda_{1,2}) = \frac{-1}{2} < 0$, entonces tiene un foco atractor en el origen, (ver figura 15), la cual es su única singularidad.



Fig,15

Resolviendo el sistema, tenemos que la solución pasando por (x_0, y_0) está dada por

$$\varphi(t) = e^{tA} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix},$$

donde

$$e^{tA} = e^{\frac{-t}{2}} \begin{pmatrix} \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t) & -\text{sen}(\frac{\sqrt{3}}{2}t) \\ \text{sen}(\frac{\sqrt{3}}{2}t) & \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t) \end{pmatrix},$$

es decir

$$\varphi(t) = (x_0 e^{\frac{-t}{2}} \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t) - y_0 e^{\frac{-t}{2}} \text{sen}(\frac{\sqrt{3}}{2}t), x_0 \text{sen}(\frac{\sqrt{3}}{2}t) + y_0 \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t)).$$

1.3. Plano traza determinante

Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2, \end{cases},$$

donde $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i, j \in \{1, 2\}$ y $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$.

Haciendo $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ y $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 1}(\mathbb{R})$ con $x = x(t)$ y $t \in \mathbb{R}$, sabemos que dicho sistema es equivalente a la ecuación $\dot{x} = Ax$ con $\det(A) \neq 0$.

Denotemos por:

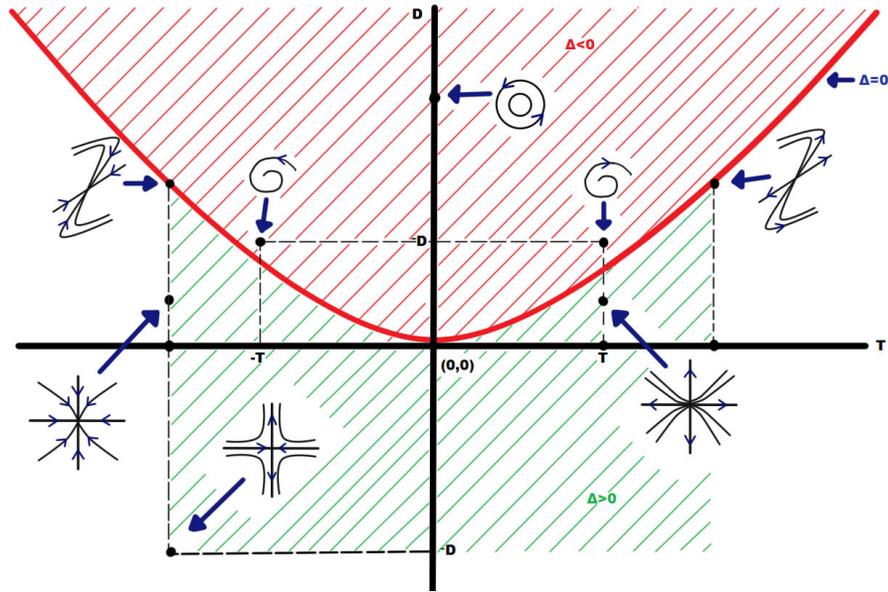
$$T = \text{traza}(A) \quad \text{y por} \quad D = \det(A),$$

entonces el polinomio característico de A es:

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda T + D.$$

Cuyo discriminante Δ es igual a $T^2 - 4D$. Y sus raíces son $\lambda_{1,2} = \frac{T \pm \sqrt{T^2 - 4D}}{2}$, $\lambda_{1,2} \neq 0$, pues $\det(A) \neq 0$. Caracterizaremos **focos**, **fuentes**, **sillas**, **nodos** y **centros**, (ver figura 16), según los valores que asuman T y D en el siguiente plano que llamaremos; el **plano traza/determinante** que denotaremos

por T/D .



Fig,16

1.4. Conjugación de sistemas lineales

Consideremos los siguientes sistemas lineales

$$\dot{x} = Ax \quad y \quad \dot{x} = Bx,$$

donde $A, B \in M_n(\mathbb{R})$.

Sabemos que los flujos respectivos están dados por

$$\varphi(t, x) = e^{tA}x \quad y \quad \psi(t, x) = e^{tB}x, \text{ con } x \in \mathbb{R}^n, \text{ y } t \in \mathbb{R}.$$

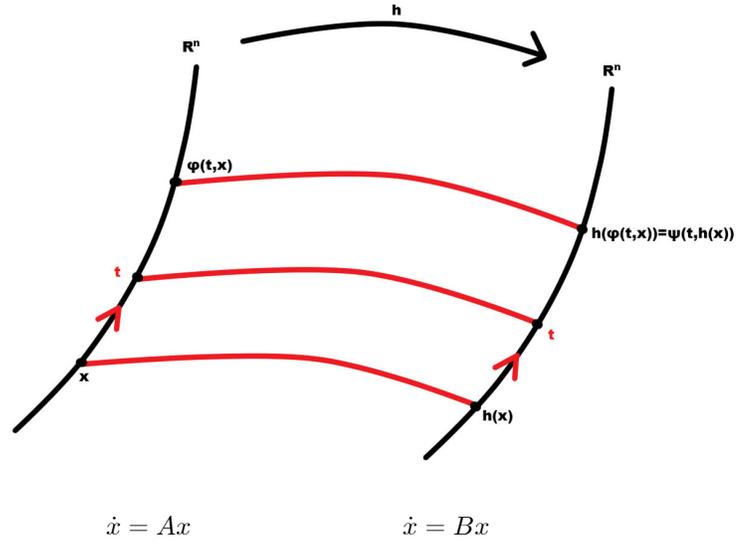
Definición 24 Diremos que los sistemas $\dot{x} = Ax$ y $\dot{x} = Bx$ o sus respectivos flujos, o campos vectoriales

$$\begin{array}{ccc} A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n & & B : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x \longmapsto Ax & y & x \longmapsto Bx \end{array},$$

son **conjugados**, (ver figura 17), si existe una biyección $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $h(\varphi(t, x)) = \psi(t, h(x))$ para todo $t \in \mathbb{R}$, y para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Definición 25 Diremos que h es una conjugación:

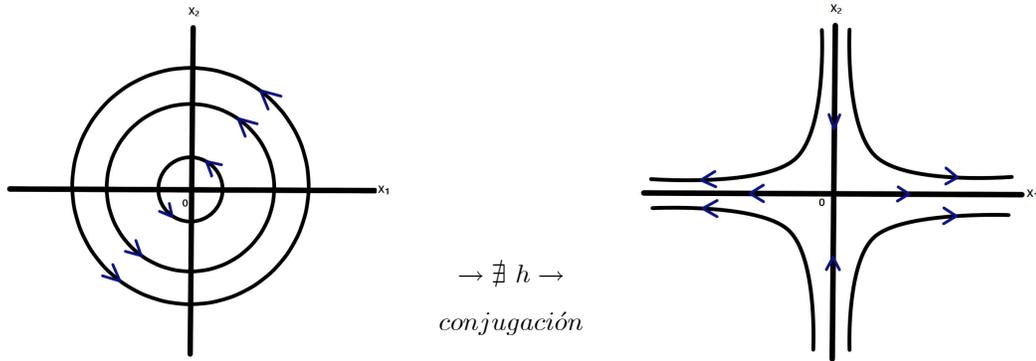
1. *Lineal* si h es un isomorfismo.
2. C^r -*diferenciable* si h es un C^r - difeomorfismo.
3. *Topológica* si h es un homeomorfismo.



Fig,17

Ejemplo 26 *Un centro no puede ser conjugado con una silla.* (Ver figura 18 y 19)

Solution 27



Fig,18

En efecto, supongamos que ellos son conjugados, luego

$$\varphi(t, (x_1, x_2)) = e^{\alpha\lambda t} \begin{pmatrix} \cos(\beta t) & -\text{sen}(\beta t) \\ \text{sen}(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

pero, si $\alpha = 0$ entonces

$$\varphi(t, (x_1, x_2)) = \begin{pmatrix} \cos(\beta t) & -\text{sen}(\beta t) \\ \text{sen}(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

así

$$\varphi(t, (x_1, x_2)) = (x_1 \cos(\beta t) - x_2 \text{sen}(\beta t), x_1 \text{sen}(\beta t) + x_2 \cos(\beta t)) = (x_1, x_2),$$

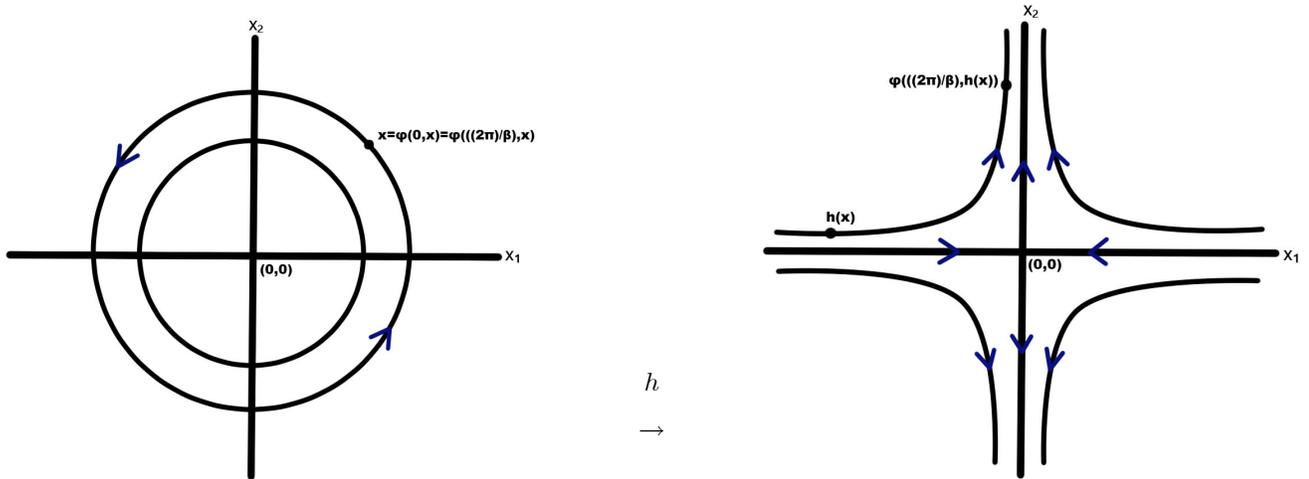
por lo que $\cos(\beta t) = 1$ y $\text{sen}(\beta t) = 0$, esto implica que

$$t = \frac{2\pi}{\beta},$$

luego

$$\varphi(0, x) = \varphi\left(\frac{2\pi}{\beta}, x\right) = x,$$

y así



Fig,19

$$h(x) = h\left(\varphi\left(\frac{2\pi}{\beta}, x\right)\right) = \psi\left(\frac{2\pi}{\beta}, h(x)\right),$$

es decir, los puntos coinciden, lo que es una contradicción.

Por lo tanto los sistemas **no son conjugados**.

Proposición 28 Una transformación lineal $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una **conjugación lineal** entre $\dot{x} = Ax$ y $\dot{x} = Bx$ si y sólo si, existe $C \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $CA = BC$. En particular, los sistemas $\dot{x} = Ax$ y $\dot{x} = Bx$ son **linealmente conjugados** si y sólo si A y B son matrices semejantes.

Dem. Primeramente supongamos que las matrices A y B son semejantes. Esto es

$$CA = BC,$$

entonces $Ce^{tA} = e^{tB}C$, para todo $t \in \mathbb{R}$, luego

$$h(e^{tA}x) = Ce^{tA}x = e^{tB}Cx = e^{tB}h(x), \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^n,$$

por lo tanto los sistemas **son linealmente conjugados**.

Ahora supongamos que los sistemas $\dot{x} = Ax$ y $\dot{x} = Bx$ son linealmente conjugados, entonces:

$$h(e^{tA}x) = e^{tB}h(x), \text{ para todo } t \in \mathbb{R}, \text{ y para todo } x \in \mathbb{R}^n,$$

luego

$$Ce^{tA}x = e^{tB}Cx,$$

entonces, derivando

$$CAe^{tA}x = Be^{tB}Cx,$$

luego, si

$$t = 0 \Rightarrow CAx = BCx, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^n$$

así

$$CA = BC,$$

por lo tanto las matrices **son semejantes**. ■

Proposición 29 Consideremos los sistemas $\dot{x} = Ax$ y $\dot{x} = Bx$ tales que $\varphi(t, x) = e^{tA}x$ y $\psi(t, x) = e^{tB}x$ respectivamente, entonces $\dot{x} = Ax$ y $\dot{x} = Bx$ son C^1 -diferenciablemente conjugados si, y sólo si A y B son matrices semejantes. En particular $\dot{x} = Ax$ y $\dot{x} = Bx$ son C^1 -diferenciablemente conjugados si, y sólo si son linealmente conjugados.

Dem. Primero supongamos $\dot{x} = Ax$ y $\dot{x} = Bx$ son linealmente conjugados, por proposición anterior

existe un isomorfismo lineal $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$$h(e^{tA}x) = e^{tB}h(x), \text{ para todo } t \in \mathbb{R}, \text{ y para todo } x \in \mathbb{R}^n,$$

entonces h es C^∞ – difeomorfismo, luego

$$\dot{x} = Ax \text{ y } \dot{x} = Bx$$

son C^∞ – diferenciablemente conjugados.

En el otro sentido $\dot{x} = Ax$ y $\dot{x} = Bx$ son C^1 – diferenciablemente conjugados si, y sólo si A y B son matrices semejantes. En particular $\dot{x} = Ax$ y $\dot{x} = Bx$ son C^1 – diferenciablemente conjugados Sea $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, un C^∞ – difeomorfismo tal que

$$h(e^{tA}x) = e^{tB}h(x), \text{ para todo } t \in \mathbb{R}, \text{ y para todo } x \in \mathbb{R}^n,$$

derivando con respecto a t , obtenemos

$$Dh(e^{tA}x)Ae^{tA}x = Be^{tB}h(x),$$

si $t = 0$, entonces

$$Dh(x)Ax = Bh(x), \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^n.$$

Veamos los siguientes casos:

1. Supongamos $h(0) = 0$ y hagamos $x = \lambda y$ y con $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$,

luego

$$Dh(\lambda y)A(\lambda y) = Bh(\lambda y),$$

esto implica

$$D(\lambda y)Ay = B \frac{h(\lambda y) - h(0)}{\lambda - 0},$$

si $\lambda \rightarrow 0$, entonces

$$Dh(0)Ay = BDh(0)y, \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

luego

$$Dh(0)A = BDh(0).$$

Finalmente, A y B son semejantes.

Ahora analicemos el caso:

2 Supongamos $h(0) = c \neq 0$ y consideremos el isomorfismo lineal

$$K : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ tal que } x \mapsto x - c,$$

donde K es una conjugación entre $\dot{x} = Bx$ y él mismo. De hecho,

$$K(e^{tB}x) = e^{tB}x - c,$$

pero

$$h(0) = c = h(0) = h(e^{tA}0) = e^{tB}h(0) = e^{tB}c.$$

Por otro lado

$$h(0) = c \Rightarrow c = e^{tB}c,$$

luego reemplazando en

$$K(e^{tB}x) = e^{tB}x - c = e^{tB}x - e^{tB}c = e^{tB}(x - c) = e^{tB}K(x),$$

así

$$\psi(e^{tA}x) = K(e^{tB}h(x)) = e^{tB}\psi(x),$$

y

$$\psi(0) = K(h(0)) = K(c) = 0.$$

Por lo tanto por 1 se tiene que A y B son matrices **semejantes**.

■

1.5. Clasificación de los sistemas hiperbólicos

Definición 30 Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$. Diremos que el sistema $\dot{x} = Ax$ o el origen $0 \in \mathbb{R}$ o el campo vectorial $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $x \mapsto Ax$ es **hiperbólico** si todos los valores propios de A tienen **parte real distinta de cero**.

Llamaremos **índice de estabilidad** al número de valores propios con parte real negativa, contando sus multiplicidades, y lo denotaremos por $I(A)$.

Ejemplo 31 En \mathbb{R}^2 son hiperbólicos los sistemas:

Sillas, fuentes, pozos y nodos, sin embargo los **centros** no caen en ésta categoría.

1.6. Estabilidad de los sistemas

La estabilidad es extremadamente importante. Un avión Jumbo no solo ha de volar, sino que su vuelo ha de ser estable, o caerá. Cuando un auto da la vuelta a una esquina no debe volcarse lateralmente, ha de permanecer estable en la carretera.

Teóricamente, los estados estables e inestables son soluciones de las mismas ecuaciones dinámicas básicas. Pero experimentalmente, un estado de reposo inestable nunca se observará del todo, por que pequeñas influencias externas lo destruirán. Un estado de movimiento inestable puede observarse, pero únicamente como un fenómeno transitorio, mientras el sistema esta en ruta desde su estado inestable original hasta donde quiera que acabe finalmente.

Un estado de equilibrio es aquel que permanece sin cambios con el paso del tiempo. Un equilibrio es inestable si un estado que difiere levemente del equilibrio, termina por evolucionar enseguida a un estado ampliamente diferente. Y es estable si una ligera perturbación inicial no produce un gran efecto subsiguiente.

La idea que presentaremos aquí, es separar la parte real positiva y negativa de los valores propios de la matriz asociada al sistema de ecuaciones lineal $\dot{x} = Ax$, definiremos en ésta sección lo que llamaremos un **subespacio estable, inestable y central**, que denotaremos por S^E, S^I y S^C respectivamente.

Cuando A tiene valores propios distintos, los subespacios generados por los vectores de la matriz A determinan el subespacio estable e inestable del sistema lineal $\dot{x} = Ax$, donde los valores propios positivos generan S^I y los valores propios negativos generan S^E .

Sin embargo, cuando $w_j = u_j + iv_j$ es el vector propio correspondiente al valor propio $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$ de la matriz A consideraremos la siguiente definición:

Definición 32 Sean $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$, $w_j = u_j + iv_j$ y $B = \{u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, v_{k+1}, \dots, u_m, v_m\}$ una base de \mathbb{R}^n , con $n = 2m - k$, definamos los espacios:

$$S^E = \langle u_j, v_j \mid \alpha_j < 0 \rangle.$$

$$S^I = \langle u_j, v_j \mid \alpha_j > 0 \rangle.$$

$$S^C = \langle u_j, v_j \mid \alpha_j = 0 \rangle.$$

Definición 33 Un subespacio $S \subset \mathbb{R}^n$ es llamado **invariante** con respecto al flujo $e^{At} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ si $e^{At}(S) \subset S$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

A continuación mostraremos que los **subespacios estables, inestables y central** de $\dot{x} = Ax$ son **invariantes** bajo el flujo de $\dot{x} = Ax$.

Lema 34 Sea S un espacio propio de A generado por el vector propio correspondiente valor propio λ . Entonces $A(S) \subset S$.

Dem. Sea $\{v_1, \dots, v_k\}$ una base generada por los vectores propios de S . Entonces dado $v \in S$, existen $c_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2, \dots, k$ tales que

$$v = \sum_{j=1}^k c_j v_j,$$

y por linealidad

$$Av = \sum_{j=1}^k c_j Av_j.$$

Ahora, como cada v_j satisface

$$(A - \lambda I)^{k_j} v_j = 0,$$

para algún k_j minimal, tenemos

$$(A - \lambda I)v_j = V_j,$$

donde $V_j \in \text{Ker}(A - \lambda I)^{k_j-1} \subset S$.

Por lo tanto, se sigue por inducción sobre la dimensión, que $Av_j = \lambda v_j + V_j \in S$ y como S es un subespacio de \mathbb{R}^n , se sigue que

$$\sum_{j=1}^k c_j Av_j \in S,$$

es decir, $Av \in S$ y por lo tanto, $A(S) \subset S$. ■

Teorema 35 Sea A la matriz real de tamaño $n \times n$, entonces:

$$\mathbb{R}^n = S^E \oplus S^I \oplus S^C.$$

Dem. Como $B = \{u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, v_{k+1}, \dots, u_m, v_m\}$ por la definición de S^E, S^I y S^C

$$x_0 = \sum_{j=1}^{n_E} c_j V_j,$$

donde $V_j = v_j$ o u_j y $\{V_j\}_{j=1}^n \subset B$ es una base para el subespacio estable S^E . Entonces por la linealidad de e^{At}

$$e^{At} x_0 = \sum_{j=1}^{n_E} c_j e^{At} V_j,$$

pero

$$e^{At} V_j = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(I + At + \dots + \frac{A^k t^k}{k!} \right),$$

pues para $j = 1, \dots, n_E$ por el lema anterior

$$A^k V_j \in S^E \text{ y } e^{At} (S^E) \subset S^E,$$

es decir, S^E es invariante bajo el fluido e^{At} .

Y podemos similarmente mostrar que S^I y S^C son invariantes bajo el fluido e^{At} . ■

Definición 36 *Si tenemos que todos los valores propios de la matriz A tienen parte real negativa, el origen es llamado un **pozo** del sistema lineal $\dot{x} = Ax$, en cambio, si los valores propios de la matriz A tienen parte real positiva, el origen es una **fuentes** del sistema lineal $\dot{x} = Ax$.*

Teorema 37 (Clasificación de los sistemas lineales hiperbólicos). *Sean $\dot{x} = Ax$ y $\dot{x} = Bx$ dos sistemas lineales hiperbólicos definidos en \mathbb{R}^n , entonces $\dot{x} = Ax$ y $\dot{x} = Bx$ son **topológicamente conjugados** si y sólo si tienen el mismo **índice de estabilidad**, que denotaremos por I .*

Dem. Ver [20] ■

1.7. Sistemas no lineales

Cuando se estudia matemáticamente una situación de la vida real, el modelo que se obtiene suele tener un carácter no lineal, siendo esto lo que le confiere, en la mayoría de los casos, una gran dificultad. Uno de los procedimientos más utilizados dentro de la Matemática y de la ciencia en general, cuando se aborda un problema difícil, es considerar un sistema más sencillo que sea, en algún sentido, una buena aproximación del anterior. Al estudiar este segundo problema se intenta obtener, de las conclusiones, algún tipo de resultado para el problema primitivo. Una de las formas más usuales de simplificar el problema es linealizarlo. Si se quiere estudiar un problema no lineal, el primer paso obligado es estudiar el problema lineal asociado de la manera más completa posible para poder analizar así que ocurrirá en el caso no lineal.

El estudio de los sistemas lineales es más sencillo que el estudio del sistema no lineal asociado y en numerosas ocasiones se pueden obtener resultados concluyentes pues la estructura algebraica de las soluciones es sencilla y a veces se puede dar una descripción de la misma en términos de funciones elementales.

Un sistema no lineal de ecuaciones diferenciales es de la forma:

$$\dot{x} = f(x), \tag{2}$$

donde $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, con U un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n , éste es un sistema autónomo, pues sólo depende de x .

En general, no es posible resolver un sistema de ecuaciones no lineal, como mencionamos, sin embargo, podemos obtener una gran cantidad de información cualitativa sobre el comportamiento local de la solución. El teorema de Hartman-Grobman y el teorema de la variedad estable nos muestran que topológicamente el comportamiento de un sistema no lineal cerca de un punto de equilibrio x_0 de 2 está topológicamente determinado por el comportamiento del sistema lineal $\dot{x} = Ax$ cerca del origen donde la matriz $A = Df(x_0)$, la que llamaremos matriz de la linealización del sistema $\dot{x} = f(x)$.

Definición 38 Sea U un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n y sea $f \in C^1(U)$. Para un punto $x_0 \in U$, sea $\varphi(t, x_0)$ el flujo de (2) que pasa por x_0 definida en el intervalo maximal $I(x_0)$, entonces, para $t \in I(x_0)$, la aplicación $\varphi_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por

$$\varphi_t(x_0) = \varphi(t, x_0),$$

es llamada el **flujo de la ecuación diferencial** $\dot{x} = f(x)$.

Definición 39 Sea U un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n , sea $f \in C^1(U)$, y consideremos, para todo $t \in \mathbb{R}$, $\varphi_t : U \rightarrow U$ el flujo de la ecuación diferencial (2). A un subconjunto V de U , lo llamaremos **invariante** con respecto al flujo, si $\varphi_t(V) \subset V$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

1.8. Linealización de un sistema no lineal

Recordemos que un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$, se dice que es un **punto de equilibrio** si $f(x_0) = 0$, y un punto x_0 se dice que es un **punto de equilibrio hiperbólico** de $\dot{x} = f(x)$ si ningún valor propio de la matriz $Df(x_0)$ tiene parte real cero. Luego, el sistema lineal

$$\dot{x} = Ax \tag{3}$$

donde $A = Df(x_0)$ es llamado **linealización** de (2) en x_0 .

Definición 40 Un punto de equilibrio x_0 es llamado un **pozo** si todos los valores propios de la matriz $Df(x_0)$ tienen parte real negativa, es llamado una **fuerza** si todos los valores propios de la matriz $Df(x_0)$ tienen parte real positiva, y es llamado **silla** si es un punto de equilibrio hiperbólico y además $Df(x_0)$ tiene al menos un valor propio con parte real positiva y un valor propio con parte real negativa.

1.9. Teoría cualitativa y teorema de la variedad estable y variedad central

El teorema de la variedad estable es un resultado muy importante de la teoría cualitativa local de los sistemas dinámicos, pues muestra que cerca de un punto de equilibrio hiperbólico x_0 , el sistema no lineal

(2) tiene una variedad estable e inestable que son tangentes en el punto x_0 a los subespacios estable e inestable de la linealización del sistema (2).

Previo a enunciar los teoremas, recordemos que:

Definición 41 Dado M un espacio métrico y dados X, Y subespacios de M . Un homeomorfismo $h : X \rightarrow Y$ es una función continua biyectiva con inversa continua. Diremos que los subconjuntos X e Y , son *topológicamente equivalentes*.

Teorema 42 (Teorema de la variedad estable). Sean $0 \subset U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $f \in C^1(U)$, y φ_t el flujo del sistema no lineal (2). Supongamos que $f(0) = 0$ y que $Df(0)$ tiene k valores propios con parte real negativa, y $n - k$ valores propios con parte real positiva, entonces existe una variedad diferenciable k -dimensional E tangente al subespacio estable S^E del sistema lineal (3) en 0 tal que, para todo $t \geq 0$, $\varphi_t(E) \subset E$, y para todo $x_0 \in E$ se cumple que:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_t(x_0) = 0,$$

y existe una variedad diferencial $(n - k)$ -dimensional F tangente al subespacio inestable S^I del sistema lineal $\dot{x} = Ax$ en 0 tal que para todo $t \leq 0$, $\varphi_t(F) \subset F$, y para todo $x_0 \in F$ se cumple que:

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi_t(x_0) = 0.$$

Dem. Ver [2] ■

Recordemos que las variedades E y F están definidas sólo en una pequeña vecindad del origen, por lo que nos referiremos a ellas como variedades locales, en lo que sigue, definiremos las variedades globales:

Definición 43 Dado φ_t un flujo del sistema no lineal (2) definimos las variedades globales estable e inestables de (2) en 0 , como:

$$W^E(0) = \cup_{t \leq 0} \varphi_t(E),$$

y

$$W^F(0) = \cup_{t \geq 0} \varphi_t(F),$$

respectivamente, quienes son únicas e invariantes con respecto al flujo φ_t .

Teorema 44 (Teorema de la variedad central). Sean $0 \subset U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $f \in C^r(U)$, $r \geq 1$. Supongamos que $f(0) = 0$ y que $Df(0)$ tiene k valores propios con parte real negativa, j valores propios con parte real positiva y $m = n - k - j$ valores propios con parte real cero, entonces existe una **variedad central m -dimensional** $W^C(0)$ de clase C^r tangente al subespacio central S^C de $\dot{x} = Ax$ en 0 , existe

una **variedad estable k -dimensional** $W^E(0)$ de clase C^r tangente al subespacio estable S^E de $\dot{x} = Ax$ en 0 , y existe una **variedad inestable j -dimensional** $W^I(0)$ de clase C^r tangente al subespacio inestable S^I de $\dot{x} = Ax$ en 0 . Más aún, $W^C(0)$, $W^E(0)$, y $W^I(0)$ son invariantes bajo el flujo φ_t de (2).

Dem. Ver [2] ■

1.10. Teorema de Hartman-Grobman:

Este teorema nos mostrará que cerca de un punto de equilibrio hiperbólico x_0 , el sistema no lineal:

$$\dot{x} = f(x),$$

tiene la misma estructura cualitativa que el sistema lineal:

$$\dot{x} = Ax,$$

resolviendo completamente el problema para determinar la estabilidad y comportamiento cualitativo en una vecindad de un punto de equilibrio hiperbólico de un sistema no lineal. Es decir, el teorema de Hartman-Grobman nos asegura que los sistemas $\dot{x} = Ax$ y $\dot{x} = f(x)$ son localmente topológicamente conjugados (en entornos de 0 y x_0) si x_0 es un punto de equilibrio de f y $A = Df(x_0)$ es hiperbólico.

observación 45 *Dos sistemas de ecuaciones diferenciales autónomos como lo son: $\dot{x} = f(x)$ y $\dot{x} = g(x)$, son **topológicamente equivalentes** en una vecindad del origen si tienen la misma estructura cualitativa cerca del origen, es decir, si existe un **homeomorfismo** $h : 0 \subset U \rightarrow 0 \subset V$ que envíe las trayectorias de $\dot{x} = f(x)$ en U a las trayectorias de $\dot{x} = g(x)$ en V , y preserven su orientación en el tiempo, es decir, si una trayectoria es dirigida desde x_1 a x_2 en U , entonces sus imágenes son dirigidas desde $h(x_1)$ a $h(x_2)$ en V .*

Teorema 46 (Teorema de Hartman-Grobman). Sean U un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n conteniendo al origen, $f \in C^1(U)$ y sea φ_t el flujo del sistema no lineal $\dot{x} = f(x)$. Supongamos que $f(0) = 0$ y que la matriz $Df(0)$ no tiene valores propios con parte real cero, entonces existe un homeomorfismo $h : U \rightarrow V$ (ambos abiertos conteniendo al origen), tal que para cada $x_0 \in U$ existe un intervalo abierto $I_0 \subset \mathbb{R}$, tal que para todo $x_0 \in U$ y $t \in I_0$:

$$h \circ \varphi_t(x_0) = e^{At}h(x_0),$$

es decir, h envía las trayectorias de $\dot{x} = f(x)$ cerca del origen en las trayectorias de $\dot{x} = Ax$ cerca del origen y preserva tiempos.

Dem. Ver [2] ■

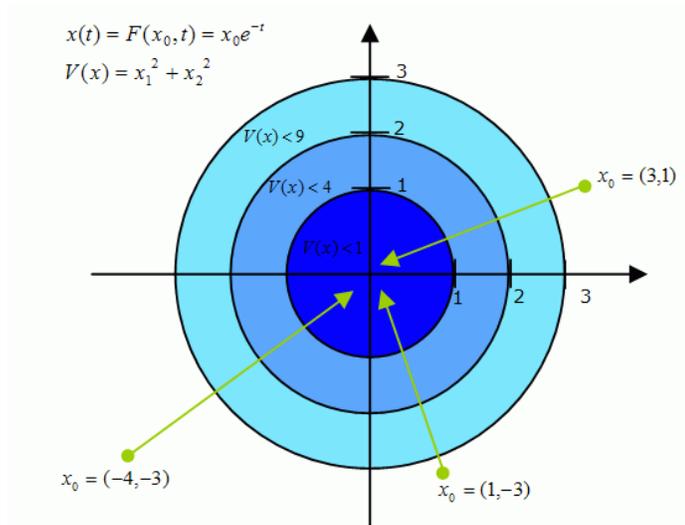
1.11. Funciones de Liapunov

Las funciones de Liapunov nos ayudarán a determinar la estabilidad de un punto de equilibrio no hiperbólico. Estas, planteadas en un principio por el ruso Aleksandr Liapunov, son funciones que demuestran la estabilidad de cierto punto fijo en un sistema dinámico o en ecuaciones diferenciales autónomas. Las funciones que podrían probar la estabilidad de un punto cualquiera de equilibrio son llamadas **candidateadas a funciones de Liapunov**.

No existe un método general para construir o encontrar una función candidata de Liapunov que demuestre la estabilidad de un equilibrio dado, en todo caso, la incapacidad de encontrar una función de Liapunov no implica automáticamente la inestabilidad del equilibrio mismo. Para los sistemas dinámicos (como los sistemas físicos) las leyes de conservación proveen frecuentemente a las funciones candidateadas de Liapunov.

Un sistema dinámico requiere un estado inicial x_0 y una función de evolución $f(x_0, t)$ que indica la trayectoria de los estados $x(t)$ futuros que tendrá el sistema. Una función de Liapunov corresponde intuitivamente a una familia de regiones llamadas de Liapunov, cada una de las cuales queda definida por una curva de nivel, (es decir, aquella línea que en un mapa une todos los puntos que tienen igualdad de condiciones y de altitud). Una vez que el estado $x(t)$ ha entrado a la región de Liapunov correspondiente a la curva de nivel $V(x_0) = V_0$, ya no podrá salir de ella. De este modo, a medida que el tiempo avanza, el estado irá quedando restringido a regiones de Liapunov cada vez menores, razón por la cual el valor de la función de Liapunov irá decreciendo al pasar el tiempo. La restricción en las trayectorias que imponen

las curvas de nivel permiten asegurar que el sistema dinámico es estable.



Función de Liapunov definida para un sistema dinámico. Las distintas trayectorias que pueden generarse van quedando atrapadas en regiones cada vez menores.

Definición 47 Consideremos φ_t el flujo de la ecuación diferencial no lineal (2) definido para todo $t \in \mathbb{R}$. Un punto de equilibrio x_0 de $\dot{x} = f(x)$ es estable si para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in N_\delta(x_0)$ y $t \geq 0$ tenemos:

$$\varphi_t(x) \in N_\varepsilon(x_0),$$

donde $N_\varepsilon(x_0)$ es una vecindad del punto de equilibrio x_0 . De lo contrario, x_0 será un **punto de equilibrio inestable**. Y finalmente, x_0 será **asintóticamente estable** si es estable y además existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in N_\delta(x_0)$ tenemos:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_t(x) = x_0.$$

Teorema 48 Un punto de equilibrio hiperbólico x_0 de (2) es **asintóticamente estable** si y sólo si $\text{Re}(\lambda_i) < 0$ para $j=1,2,\dots,n$, es decir, si y sólo si x_0 es un **pozo**. Y un punto de equilibrio hiperbólico x_0 es **inestable** si y sólo si o es una **fuelle** o es una **silla**.

Definición 49 De los dos grandes teoremas enunciados con anterioridad se sigue que: **todo pozo es asintóticamente estable** y toda **fuelle o silla es inestable**, por lo tanto, todo **punto de equilibrio hiperbólico es asintóticamente estable o es inestable**.

observación 50 Como los puntos de equilibrio hiperbólicos o son asintóticamente estables o son inestables, la única vez en que un punto de equilibrio pueda ser estable pero no asintóticamente estable

es cuando $Df(x_0)$ tiene un valor propio cero o un par de valores propios complejos conjugados puros $\lambda = \pm ib$.

A continuación definiremos lo que sería una función **candidata** a ser función de Liapunov.

Teorema 51 Sea U un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n conteniendo a x_0 . Supongamos que $f \in C^1(U)$ y que $f(x_0) = 0$. Además supongamos que existe una función real $V \in C^1(U)$, ($V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$) y dicha función es localmente definida positiva, es decir, existe una vecindad U de 0 tal que $V(x_0) = 0$ y $V(x) > 0$ cuando $x \neq x_0$, para todo $x \in U \setminus \{0\}$. Entonces:

1. Si la derivada con respecto al tiempo sistema (2) de V , está localmente semidefinida negativa, entonces existe una vecindad U centrada en 0 tal que: $\dot{V}_{(2)}(x) \leq 0$ para todo $x \in U$, luego el equilibrio x_0 es **estable**.
2. Si la derivada con respecto al tiempo de la función candidata de Liapunov V , está localmente definida negativa, esto es, si existe una vecindad U de 0 tal que: $\dot{V}_{(2)}(x) < 0$ para todo $x \in U \setminus \{x_0\}$, entonces el equilibrio x_0 es **asintóticamente estable**.
3. Si las funciones candidatas de Liapunov están definidas como positivas sobre todo el dominio y su derivada respecto al tiempo $\dot{V}_{(2)}(x) > 0$ para todo $x \in U \setminus \{x_0\}$, x_0 es **inestable**.

Dem. Ver [2] ■

1.12. Teorema de la variedad central local

Veremos que el comportamiento cualitativo en una vecindad de un punto de equilibrio no hiperbólico x_0 para el sistema no lineal

$$\dot{x} = f(x) \tag{4}$$

con $x_0 \in \mathbb{R}^n$ está determinado por su comportamiento en la variedad central cerca de x_0 .

Teorema 52 (Teorema de la variedad central local). Sean $f \in C^r(U)$, donde $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto conteniendo al origen y $r \geq 1$. Supongamos que $f(0) = 0$ y que $Df(0)$ tiene c valores propios con parte real cero y s valores propios con parte real negativa, donde $c + s = n$. Entonces el sistema (4) puede ser escrito de la forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Cx + F(x, y) \\ \dot{y} &= Py + G(x, y), \end{aligned}$$

donde $(x, y) \in \mathbb{R}^c \times \mathbb{R}^s$, C es una matriz cuadrada con c valores propios con parte real cero, P es una matriz cuadrada con s valores propios con parte real negativa y $F(0) = G(0) = 0$, $DG(0) = 0$, más aún, existe un $\delta > 0$ y una función $h \in C^r(N_\delta(0))$ que define la variedad central local:

$$W_{loc}^c(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^c \times \mathbb{R}^s \mid y = h(x) \text{ para } \|x\| < \delta\},$$

y ademásh satisface:

$$Dh(x)[Cx + F(x, h(x))] - [Ph(x) + G(x, h(x))] = 0,$$

para $\|x\| < \delta$ y el flujo en la variedad central $W^c(0)$ está definida por el sistema:

$$\dot{x} = Cx + F(x, h(x)),$$

para todo $x \in \mathbb{R}^c$ con $\|x\| < \delta$.

Dem. Ver [2] ■

Ejemplo 53 Consideremos el sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + y \\ \dot{x}_2 = y + x_1^2 \\ y = -y + x_2^2 + x_1y \end{cases} \quad (5)$$

En este caso la matriz de linealización es

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

y sus valores propios son $\lambda_1 = 0$ de multiplicidad 2 y $\lambda_2 = -1$. La parte lineal de este sistema puede ser reducida a la forma de jordan por la matriz

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Así, $P^{-1}AP = J$ es su forma canónica de jordan.

Si hacemos el cambio de coordenadas $w = P^{-1}x$, entonces $Pw = x$, esto es,

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ z \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ y \end{pmatrix} \quad \text{entonces} \quad P \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y \end{pmatrix},$$

y como

$$Pw = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_1 - z \\ z \end{pmatrix}$$

además

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 + y \\ y + x_1^2 \\ -y + x_2^2 + x_1y \end{pmatrix},$$

entonces

$$f(x) = f(Pw) = f \begin{pmatrix} w_1 \\ w_1 - z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_2 \\ z + w_1^2 \\ -z + (w_1 - z)^2 + w_1z \end{pmatrix},$$

así

$$\begin{aligned} P^{-1}f(Pw) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_2 - z + z \\ z + w_1^2 \\ -z + (w_1 - z)^2 + w_1z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} w_2 \\ z^2 - zw_1 + 2w_1^2 \\ z^2 - zw_1 - z + w_1^2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

Luego, el sistema (5) es equivalente al sistema

$$\begin{cases} \dot{w}_1 = w_2 \\ \dot{w}_2 = z^2 - zw_1 + 2w_1^2 \\ \dot{z} = z^2 - zw_1 - z + w_1^2 \end{cases} .$$

Ahora, hallaremos su variedad central $W_{loc}^c(0)$. En este caso:

$$c = 2, \quad u = 1, \quad P = [-1], \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f(v, z) = f(w_1, w_2, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ z^2 - zw_1 - z + w_1^2 \end{pmatrix},$$

$$f(v, z) = f(w_1, w_2, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ z^2 - zw_1 - z + w_1^2 \end{pmatrix}, y$$

$$G(v, z) = G(w_1, w_2, z) = (w_2 - z)^2 + w_1 z.$$

Nos permite sustituir las expresiones de $h(x)$ y $Dh(x)$ en

$$Dh(x) [Cx + F(x, h(x))] - Ph(x) - G(x, h(x)) = 0,$$

y obtenemos

$$(2ax_1 + bx_2)x_2 + (bx_1 + 2cx_2) [x_1^2 + (x_2 - y)^2 + x_1 y] + (ax_1^2 + bx_1 x_2 + cx_2^2) - (x_2 ax_1^2 - bx_1 x_2 - cx_2^2)^2 - x_1(ax_1^2 + bx_1 x_2) + x_2^2 + O(\|x\|^3) = 0,$$

ya que esto es para todo x_1, x_2 con $\|x\| < \delta$, obtenemos que, $a = 0$, $b = 0$ y $c = 1$.

Es decir, $h(x) = x_2^2 + O(\|x\|^3)$. Luego, sustituyendo este resultado en la ecuación

$$\dot{x} = Cx + F(x, h(x)), \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^c, \text{ con } \|x\| < \delta.$$

Entonces tenemos

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1^2 + x_2^2 + O(\|x\|^3) \end{aligned}$$

sobre el centro de la variedad $W^C(0)$ cerca del origen.

Teorema 54 Sea U un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n conteniendo al origen, y sea $f \in C^1(U)$, supongamos que $f(0) = 0$ y que la matriz de tamaño $n \times n$ $Df(0) = \text{diag}[C, P, Q]$ donde la matriz cuadrada C tiene c **valores propios con parte real cero**, la matriz cuadrada P tiene s **valores propios con parte real negativa**, y la matriz cuadrada Q tiene u **valores propios con parte real positiva**. Entonces, existen funciones $h_1(x), h_2(x) \in C^1$ que satisfacen:

$$Dh_2(x) [Cx + F(x, h_1(x), h_2(x))] - [Qh_2(x) + H(x, h_1(x), h_2(x))] = 0,$$

en una vecindad del origen tal que el sistema no lineal $\dot{x} = f(x)$, puede ser escrito de la forma:

$$\begin{cases} \dot{x} = Cx + F(x, y, z) \\ \dot{y} = Py + G(x, y, z) \\ \dot{z} = Qz + H(x, y, z) \end{cases},$$

el cual es **topológicamente conjugado** al sistema de clase C^1 :

$$\begin{cases} \dot{x} = Cx + F(x, h_1(x), h_2(x)) \\ \dot{y} = Py \\ \dot{z} = Qz \end{cases},$$

donde $(x, y, z) \in \mathbb{R}^c \times \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^u$ en una vecindad del origen.

Dem. Ver [2] ■

1.13. Sistemas dinámicos y Órbitas periódicas

Podemos ver que si A es una matriz de tamaño $n \times n$ entonces la función $\varphi(t, x) = e^{At}x$ define un sistema dinámico en \mathbb{R}^n y también, para cada $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\varphi(t, x_0)$ es la solución del P.V.I

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = x_0. \end{cases}.$$

En general, si $\varphi(t, x)$ es un **sistema dinámico** en $U \subset \mathbb{R}^n$, entonces la función

$$f(x) = \frac{d}{dt}\varphi(t, x)|_{t=0}$$

define un campo vectorial de clase C^1 en U y para cada $x_0 \in U$, $\varphi(t, x_0)$ es la solución del P.V.I

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases},$$

más aún, para cada $x_0 \in U$, el intervalo de existencia máximo de $\varphi(t, x_0)$, es $I(x_0) = (-\infty, +\infty)$. Por otro lado, dada una ecuación diferencial $\dot{x} = f(x)$ con $f \in C^1(U)$ y U un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n , la solución $\varphi(t, x_0)$ del P.V.I

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases},$$

será un sistema dinámico en U si y sólo si para todo $x_0 \in U$ el intervalo de existencia maximal $I(x_0)$ de $\varphi(t, x_0)$ es $(-\infty, +\infty)$.

1.13.1. Conjuntos límite y atractores

Dado un sistema dinámico, se desea determinar primero su comportamiento asintótico, es decir, el comportamiento de órbitas para tiempos grandes. Esta aproximación es relevante para sistemas de la naturaleza que son gobernados por leyes dinámicas dependientes del tiempo, sistemas que son autónomos o que pueden ser transformados en sistemas autónomos. Esto implica una idealización, porque las leyes que gobiernan muchos procesos evolutivos (biología o fenómenos sociales) actualmente dependen en el tiempo. Sin embargo, los cambios en el tiempo son a menudo muy lentos y se puede aplicar la aproximación de sistemas dinámicos.

Este estudio puede ser abordado desde dos direcciones. Primero investigando el comportamiento de órbitas individuales, o bien en un segundo enfoque se pueden estudiar los conjuntos de órbitas y seguir su distribución en el espacio de fases.

Los atractores son formas geométricas que caracterizan el comportamiento a largo plazo en el espacio de fases. A grandes rasgos, un **atractor es a lo que tiende, o a lo que es atraído**, el comportamiento de un sistema.

El tipo más **simple** de **atractor** es un punto **fijo**, también llamado **punto de equilibrio, singular o estacionario**. Por ejemplo, uno de tales atractores corresponde a un péndulo con rozamiento; el péndulo llega siempre a la misma posición de reposo, independientemente del modo en que empezó a oscilar.

El conocimiento de soluciones de sistemas lineales puede ser usado en el estudio de los sistemas no lineales en la vecindad de un punto estacionario. Así, el punto hacia el cual confluyen en espiral todas las líneas de flujo próximas se les conoce como **sumidero** (ver figura 20). Si el sistema comienza su movimiento en un punto próximo al sumidero, se moverá hacia él; esto significa que el estado estacionario en un sumidero es **estable**. Las **fuentes** son también estados estacionarios, pero los puntos vecinos se alejan; es decir, el estado estacionario es **inestable**. Por otro lado, los puntos **sillas** son más interesantes, en cierto sentido; estos son estados estacionarios que son **estables en algunas direcciones e inestables**

en otras.



sumidero



fuente



silla

Fig,20

Observemos que para un punto $x \in U$, la función $\varphi(\cdot, x) : \mathbb{R} \rightarrow U$ define una curva solución, una trayectoria u órbita de (4) mediante el punto $x_0 \in U$.

Y si identificamos la función $\varphi(\cdot, x)$ con su gráfico, podemos pensar la trayectoria mediante el punto $x_0 \in U$ como un movimiento a lo largo de la curva:

$$\Gamma_{x_0} = \{x \in U \mid x = \varphi(t, x_0), t \in \mathbb{R}\},$$

definido por (4).

Definición 55 Un punto $p \in U$ se dice que es punto ω -**límite** de la trayectoria $\varphi(\cdot, x)$ del sistema (4) si existe una sucesión $t_n \rightarrow +\infty$ tal que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t_n, x) = p.$$

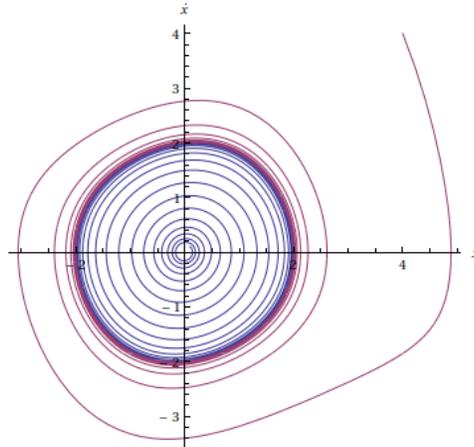
Similarmente un punto $q \in U$ se dice que es un punto α -**límite** de la trayectoria $\varphi(\cdot, x)$ del sistema (4) si existe una sucesión $t_n \rightarrow -\infty$ tal que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t_n, x) = q,$$

el conjunto de todos los puntos ω -límite de la trayectoria Γ es llamado **conjunto ω -límite** y lo denotaremos por $\omega(\Gamma)$, y el conjunto de todos los puntos α -límite de la trayectoria Γ es llamado **conjunto α -límite** y lo denotaremos por $\alpha(\Gamma)$.

1.13.2. Órbitas periódicas y ciclos límite

Un **ciclo límite** describe oscilaciones estables, es decir, no tienden al reposo a largo plazo, sino que recorren periódicamente una sucesión de estados. En el reloj de péndulo, por ejemplo, la energía perdida por rozamiento se repone con la almacenada en un peso. El péndulo repite su movimiento una y otra vez. En el espacio de fase, que es una construcción matemática que permite representar el conjunto de posiciones y momentos conjugados de un sistema de partículas. Más técnicamente, el espacio de fases es una variedad diferenciable de dimensión par, tal que las coordenadas de cada punto representan tanto las posiciones generalizadas como sus momentos conjugados correspondientes. Es decir, cada punto del espacio físico representa un estado del sistema físico. Ese estado físico vendrá caracterizado por la posición de cada una de las partículas y sus respectivos momentos, tal movimiento corresponde a un ciclo, a una órbita periódica. Independientemente de como empiece a balancearse el péndulo, el ciclo al que se aproxima a largo plazo es siempre el mismo. Tales atractores son llamados, por ello, **ciclos límite**, (ver figura 21).

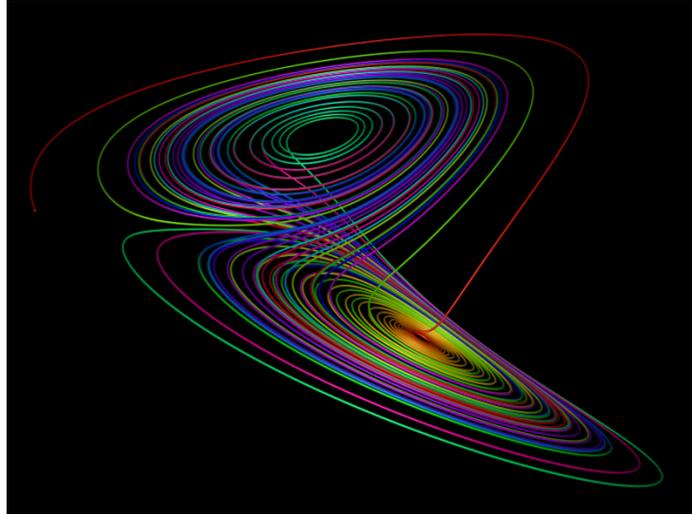


Fig,21

Hasta hace poco, los **puntos fijos**, los **ciclos límite** y los **toros** eran los únicos **atractores** conocidos. En 1963, Edward N. Lorenz descubrió un ejemplo de un sistema, que presentaba un comportamiento complejo. Motivado por el deseo de entender la impredecibilidad del tiempo meteorológico, empezó con las ecuaciones del movimiento de un fluido (atmósfera) simplificánolas, obtuvo un sistema con tan sólo tres variables. A pesar de ello, el sistema se comportaba de un modo aparentemente estocástico, es decir, se comportaba como un modelo matemático en el que la ley de probabilidad que da la evolución de un sistema depende del tiempo, y éste escapaba a toda caracterización adecuada por cualquiera de los tres atractores para entonces conocidos.

El atractor que observó, llamado hoy **atractor de Lorenz**, (ver figura 22), fué el primer ejemplo de

los llamados **atractores caóticos**.



Fig,22

El sistema de Lorenz es un sistema dinámico tridimensional (tres ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas) que tiene tres puntos fijos, el origen y dos puntos simétricos (los “ojos” del atractor de Lorenz). El origen es un punto hiperbólico que tiene un valor propio positivo (inestable) y dos valores propios negativos (estables). Los vectores propios del valor propio positivo se prolongan como curvas que se alejan del origen y se “enrollan” alrededor del atractor extraño de Lorenz. Los vectores propios de los otros dos valores propios negativos definen localmente un plano en el origen en el que las trayectorias que se inician en dicho plano convergen al origen. Cuando dicho plano se prolonga se obtiene una superficie, la variedad estable del origen, también llamada variedad de Lorenz. Cualquier condición inicial que esté exactamente en dicha variedad (que se enrolla por dentro del atractor de Lorenz) converge irremisiblemente al origen. Un punto cercano, por muy cercano que esté, pero fuera de esta superficie, converge hacia el atractor de Lorenz.

Los otros dos puntos fijos (o de equilibrio) del atractor de Lorenz son los responsables últimos de la aparición del atractor de Lorenz gracias a una bifurcación de Hopf. Hay un valor propio estable cuya variedad estable es unidimensional y corta transversalmente al atractor de Lorenz. Y hay dos valores propios complejos estables (parte real negativa) que colapsan a cierto valor crítico de los parámetros del sistema de Lorenz y se vuelven inestables, lo que da origen al atractor extraño de Lorenz.

Definición 56 1. *Un ciclo u órbita periódica de (4) es cualquier curva solución cerrada que no es un punto de equilibrio.*

2. *Una órbita periódica Γ es llamada **estable** si para cada $\varepsilon > 0$ existe una vecindad V de Γ tal que*

para todo $x \in V$, para todo $x \in V$, y $t \geq 0$, $d(\varphi(t, x), \Gamma) < \varepsilon$.

3. Una órbita periódica Γ es llamada **inestable** si ella no es estable.

Definición 57 Una órbita periódica Γ es llamada **asintóticamente estable** si es estable y si además para todo punto $x \in V$, tenemos que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(\varphi(t, x), \Gamma) = 0.$$

Sea Γ una órbita periódica y sea N una vecindad de Γ , entonces las variedades estables e inestables locales de Γ están dadas por:

$$E(\Gamma) = \{x \in N \mid d(\varphi_t(x), \Gamma) \rightarrow 0, \text{ cuando } t \rightarrow +\infty \text{ y } \varphi_t(x) \in N \text{ para } t \geq 0\},$$

y,

$$I(\Gamma) = \{x \in N \mid d(\varphi_t(x), \Gamma) \rightarrow 0, \text{ cuando } t \rightarrow -\infty \text{ y } \varphi_t(x) \in N \text{ para } t \leq 0\},$$

respectivamente, y las variedades estables e inestables globales de Γ están dadas por:

$$W^E(\Gamma) = \cup_{t \leq 0} \varphi_t(E(\Gamma)),$$

y

$$W^I(\Gamma) = \cup_{t \geq 0} \varphi_t(I(\Gamma)),$$

las que son invariantes bajo el flujo φ_t .

Definición 58 Si un ciclo límite Γ es un conjunto ω -límite de toda trayectoria en alguna vecindad de Γ , diremos que Γ es un **ciclo ω -límite** o un **ciclo límite estable**. Si Γ es un conjunto α -límite de toda trayectoria en alguna vecindad de Γ diremos que Γ es un **ciclo α -límite** o un **ciclo límite inestable**. Y si Γ es el conjunto ω -límite de alguna otra trayectoria Γ y el conjunto α -límite de otra trayectoria, entonces diremos que Γ es un **ciclo límite semi estable**.

Teorema 59 Si una trayectoria en el exterior de un ciclo límite Γ de un sistema planar de clase C^1 como lo es (4) tiene a Γ como conjunto ω -límite, entonces toda trayectoria en alguna vecindad exterior V de Γ tiene a Γ como conjunto ω -límite. El mismo resultado se obtiene para vecindades interiores de Γ y también cuando Γ es el conjunto α -límite de alguna trayectoria.

Dem. Ver [2] ■

1.13.3. Función de Poincaré, el cuestionamiento de Poincaré

A finales del siglo XIX Henri Poincaré (1854-1912), matemático francés, introdujo un nuevo punto de vista al preguntarse si el sistema solar sería estable para siempre. Poincaré fué el primero en pensar en la posibilidad del caos, en el sentido de un comportamiento que dependiera sensiblemente de las condiciones iniciales. En 1903 Poincaré postulaba acerca de lo aleatorio y del azar en los siguientes términos:

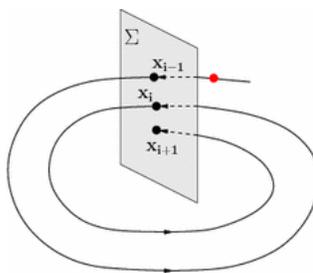
“El azar no es más que la medida de la ignorancia del hombre”,

Reconociendo, a la vez, la existencia de innumerables fenómenos que no eran completamente aleatorios, que simplemente no respondían a una dinámica lineal, aquellos a los que pequeños cambios en las condiciones iniciales conducían a enormes cambios en el resultado.

Algunas de las propiedades identificadas por Poincaré que hacían imposible la predicción a largo plazo se encontraron en la práctica en sistemas físicos tales como el clima, la sangre cuando fluye a través del corazón, las turbulencias, las formaciones geológicas, los atascos de vehículos, las epidemias, la bolsa o la forma en que las flores florecen en un prado.

La función de Poincaré es una herramienta que nos servirá para estudiar la estabilidad y bifurcaciones de órbitas periódicas, éstas funciones fueron definidas en 1881. Su idea es simple:

Si Γ es una órbita periódica del sistema (4) a través del punto x y Σ es un hiperplano (ver figura 23 y 24) perpendicular a Γ en x_0 , entonces para cualquier punto $x \in \Sigma$ suficientemente cerca de x_0 , la solución de (4) a través de x en $t = 0$, $\varphi_t(x)$, atraviesa Σ nuevamente en un punto $P(x)$ de x_0 . La función $x \rightarrow P(x)$ es llamada la función de Poincaré.



Fig,23

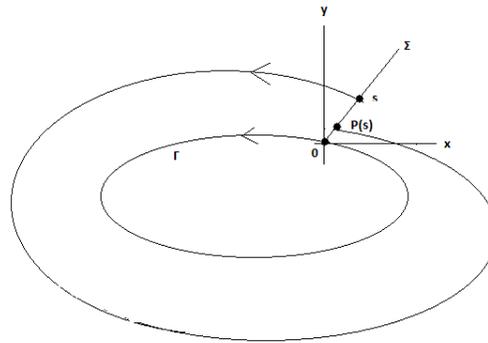
Veamos que en el caso bidimensional la estabilidad de Γ está determinada por la derivada de la función de Poincaré:

Para el sistema planar, si trasladamos el origen al punto $x_0 \in \Gamma \cap \Sigma$, la línea normal Σ será una línea a través del origen.

El punto $0 \in \Gamma \cap \Sigma$ divide la línea Σ en dos segmentos Σ^+ y Σ^- , donde Σ^+ queda situado enteramente

en el exterior de Γ .

Sea s la distancia a lo largo de Σ con $s > 0$ para puntos en Σ^+ y $s < 0$ para puntos en Σ^- .



Fig,24

La función de Poincaré $P(s)$ está definida entonces para $|s| < \delta$ y $P(0) = 0$.

Veamos como la estabilidad del ciclo Γ es determinada por $\dot{P}(0)$:

Introduzcamos la **función desplazamiento**

$$d(s) = P(s) - s.$$

Entonces $d(0) = 0$ y $\dot{d}(s) = \dot{P}(s) - 1$ y podemos desprender del teorema del valor medio que para $|s| < \delta$

$$d(s) = \dot{d}(\sigma)s,$$

para algún $0 < \sigma < s$.

Como $\dot{d}(s)$ es continua, el signo de $\dot{d}(s)$ será el mismo que el signo de $\dot{d}(0)$ para $|s|$ suficientemente pequeño, mientras $\dot{d}(0) \neq 0$. Por lo tanto, si $\dot{d}(0) < 0$ se sigue que $d(s) < 0$ para $s > 0$ y que $d(s) > 0$ para $s < 0$, es decir, el **ciclo Γ es un ciclo límite estable o un ciclo ω -límite**.

Similarmente si $\dot{d}(0) > 0$ entonces Γ es un ciclo límite inestable o un ciclo α -límite.

Además si $P(0) = 0$ y $\dot{P}(0) < 1$ entonces Γ es un ciclo límite estable y si $P(0) = 0$ y $\dot{P}(0) > 1$ entonces Γ es un ciclo límite inestable.

Por lo tanto la estabilidad de Γ está determinada por la derivada de la función de Poincaré.

Teorema 60 Sea U un subconjunto abierto de \mathbb{R}^2 y supongamos que $f \in C^1(U)$. Sea $\gamma(t)$ una solución periódica de (4) de período T . Entonces, la derivada de la función de Poincaré $P(s)$ a lo largo de la línea

recta Σ normal a $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x = \gamma(t) - \gamma(0), 0 \leq t \leq T\}$ en $x = 0$ esta dada por:

$$\dot{P}(0) = \exp\left(\int_0^T \nabla \cdot f(\gamma(t)) dt\right).$$

Dem. Ver [2] ■

Teorema 61 *Bajo las hipótesis del teorema precedente tenemos que, la solución periódica $\gamma(t)$ es un ciclo límite estable si:*

$$\int_0^T \nabla \cdot f(\gamma(t)) dt < 0,$$

y es un ciclo límite inestable si:

$$\int_0^T \nabla \cdot f(\gamma(t)) dt > 0.$$

Dem. Ver [2] ■

Definición 62 *Sea $P(s)$ la función de Poincaré para un ciclo Γ de un sistema planar analítico (4) y sea*

$$d(s) = P(s) - s,$$

su función desplazamiento. Si:

$$d(0) = d'(0) = \dots = d^{(k-1)}(0) = 0 \text{ y } d^{(k)}(0) \neq 0,$$

diremos que Γ es un ciclo límite de multiplicidad k . Si $k = 1$ diremos que Γ es un ciclo límite simple.

Notemos que $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x = \gamma(t), 0 \leq t \leq T\}$ es un ciclo límite simple si y sólo si:

$$\int_0^T \nabla \cdot f(\gamma(t)) dt > 0.$$

El teorema de Poincaré-Bendixon da un criterio para la localización de ciclos límites en el plano, es una herramienta fundamental para la comprensión de los sistemas dinámicos planos, pero no tiene generalización para ecuaciones diferenciales en más dimensiones.

Por **órbita cerrada** de un sistema dinámico se entiende la imagen de una **solución periódica** no trivial. Así, una trayectoria γ es una órbita cerrada si γ no es un punto de equilibrio y $\phi_p(x) = x$ para ciertos $x \in im(\gamma)$ y $p \neq 0$. Se sigue que $\phi_{np}(y) = y$ para todo $y \in \gamma$, con $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Teorema 63 (Teorema de Poincaré). *Un conjunto límite compacto no vacío de un sistema dinámico plano C^1 que no contiene puntos de equilibrio es una órbita cerrada.*

Dem. Denotemos por $L_\omega(x)$ el conjunto de todos los puntos ω –*límite* de y . Supongamos que éste es compacto y que $y \in L_\omega(x)$. (El caso de los $L_\alpha(x)$ es análogo.)

Veamos en primer lugar que la trayectoria de y es una órbita cerrada.

Puesto que y pertenece al conjunto invariante compacto $L_\omega(x)$, sabemos que $L_\omega(y)$ es un subconjunto no vacío de $L_\omega(x)$. Sea $z \in L_\omega(y)$, sean S una sección local en z , y V una vecindad de la forma caja de flujo en z alrededor de un cierto intervalo J , $z \in J \subset S$. La trayectoria de y corta a S exactamente en un punto. Por otro lado, existe una única sucesión $t_n \rightarrow \infty$ tal que $\phi_{t_n}(y) \rightarrow z$, con lo que una cantidad infinita de los $\phi_{t_n}(y)$ pertenece a V . En consecuencia, podemos encontrar $r, s \in \mathbb{R}$ tales que $r > s$ y

$$\phi_r(y) \in S \cap V, \phi_s(y) \in S \cap V.$$

Resulta entonces que $\phi_r(y) = \phi_s(y)$, es decir, $\phi_{r-s}(y) = y$, con $r - s > 0$. Como $L_\omega(x)$ no contiene puntos de equilibrio, y pertenece a una órbita periódica cerrada.

Queda por demostrar que si γ es una órbita cerrada en $L_\omega(x)$ entonces $\gamma = L_\omega(x)$. Basta con ver que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(\phi_t(x), \gamma) = 0,$$

donde $d(\phi_t(x), \gamma)$ es la distancia de $\phi_t(x)$ al conjunto compacto γ (es decir, es la distancia de $\phi_t(x)$ al punto más próximo de γ).

Sea S una sección local en $z \in \gamma$, lo bastante pequeña para que $S \cap \gamma = z$. Considerando una caja de flujo V , en z vemos que existe una sucesión $t_0 < t_1 < \dots$ tal que

$$\phi_{t_n}(x) \in S, \phi_t(x) \rightarrow z, \phi_t(x) \notin S \text{ para } t_{n-1} < t < t_n, n = 1, 2, \dots$$

Pongamos $x_n = \phi_{t_n}(x)$. x_n converge monotonamente a z en S .

Existe una cota superior para el conjunto de números positivos $t_{n+1} - t_n$. En efecto, supongamos que $\phi_\lambda(z) = z$, $\lambda > 0$, entonces, para x_n suficientemente próximo a z , $\phi_\lambda(x_n) \in V$, y por tanto

$$\phi_{\lambda+t}(x_n) \in S,$$

para cierto $t \in [-\epsilon, \epsilon]$. Así pues

$$t_{n+1} - t_n \leq \lambda + \epsilon.$$

Sea $\beta > 0$. Existe un $\delta > 0$ tal que si $|x_n - u| < \delta$ y $|t| \leq \lambda + \epsilon$, entonces $|\phi_t(x_n) - \phi_t(u)| < \beta$.

Sea n_0 lo bastante grande para que $|x_n - z| < \delta$ para todo $n \geq n_0$. Entonces

$$|\phi_t(x_n) - \phi_t(z)| < \beta,$$

si $|t| \leq \lambda + \epsilon$ y $n \geq n_0$. Sea ahora $t \geq t_{n_0}$, y sea $n \geq n_0$ tal que

$$t_n \leq t \leq t_{n+1}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} d(\phi_t(x), \gamma) &\leq |\phi_t(x) - \phi_{t-t_n}(z)| \\ &= |\phi_{t-t_n}(x_n) - \phi_{t-t_n}(z)| \\ &< \beta, \end{aligned}$$

puesto que $|t - t_n| \leq \lambda + \epsilon$. Queda así terminada la demostración del teorema de Poincaré-Bendixon. ■

2. Bifurcaciones, estabilidad estructural y teorema de Piexoto

La teoría de la bifurcación estudia el comportamiento de familias de soluciones, como por ejemplo las curvas integrales de un campo vectorial, y las soluciones de una familia de ecuaciones diferenciales. Generalmente en referencia a sistemas dinámicos, una bifurcación se da cuando una pequeña variación en los valores de los parámetros de un sistema (parámetros de bifurcación) causa un brusco cambio cualitativo.^o topológico en su comportamiento futuro.

Estudiaremos en esta sección varios tipos de bifurcaciones que ocurrirán en sistemas del tipo:

$$\dot{x} = f(x, \mu), \tag{6}$$

donde $\mu \in \mathbb{R}^m$ es el parámetro del que hablamos y del que el sistema depende. Estudiaremos la estabilidad estructural de un campo vectorial o sistema dinámico y veremos las condiciones suficientes y necesarias para que un campo vectorial de clase C^1 en una variedad 2-dimensional compacta tenga estructurabilidad estable.

Cuando cambiamos el campo vectorial f por otro cerca de él, la idea será dar respuesta a la pregunta ¿Qué pasa con el comportamiento cualitativo de $\dot{x} = f(x)$ para todos los campos vectoriales cerca de f ?

Si el comportamiento no cambia, diremos que el campo vectorial f es **estructuralmete estable**,

ésta idea se debe a Andronov y Pontryagin en 1937 y junto con Peixoto caracterizaron todos los campos vectoriales definidos sobre una 2-variedad compacta. Cabe destacar que estos resultados no son generalizables para $n \geq 3$.

Cuando el campo vectorial f **no** sea estructuralmente estable, pertenece al conjunto de **bifurcaciones** de $C^1(U)$. Y es ahí cuando la estructura cualitativa del retrato de fase (flujo) cambia, es decir, cuando pasa a través de un punto del conjunto de bifurcaciones.

Definición 64 Sea $f \in C^1(U)$, donde U es un subconjunto abierto y conexo de \mathbb{R}^n , entonces la C^1 norma de f está definida por:

$$\|f\|_{C^1} = \sup_{x \in U} |f(x)| + \sup_{x \in U} \|Df(x)\|,$$

donde $|\cdot|$ denota la norma euclídea en \mathbb{R}^n y $\|\cdot\|$ denota la norma usual de transformaciones lineales o matrices.

observación 65 Notemos que si $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto, entonces:

$$\|f\|_{C^1} = \max_{x \in K} |f(x)| + \max_{x \in U} \|Df(x)\| < \infty,$$

donde $f \in C^1(U)$, ésto pues, toda función continua alcanza su máximo y mínimo en un compacto.

Definición 66 Sea U un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n , un campo vectorial $f \in C^1(U)$, es **estructuralmente estable** si existe $\varepsilon > 0$ tal que, para todo $g \in C^1(U)$, con $\|f - g\|_{C^1} < \varepsilon$, se tiene que f y g son **topológicamente equivalentes** sobre U , es decir, existe un homeomorfismo $H : U \rightarrow U$, que envía trayectorias de $\dot{x} = f(x)$ en trayectorias de $\dot{x} = g(x)$ preservando orientación y tiempo. De lo contrario diremos que el sistema es **estructuralmente inestable**.

Definición 67 Sea $f \in C^1(M)$, donde M es una variedad n -dimensional y compacta, entonces f es estructuralmente estable sobre M , si existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $g \in C^1(M)$, con $\|f - g\|_{C^1} < \varepsilon$, se tiene que f y g son **topológicamente equivalentes** sobre M .

Teorema 68 Sea $f \in C^1(U)$, donde U es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n conteniendo un punto de equilibrio hiperbólico x_0 de $\dot{x} = f(x)$, entonces, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $g \in C^1(U)$ con $\|f - g\|_{C^1} < \delta$, existe $y_0 \in B(x_0, \varepsilon)$ tal que y_0 es un punto de equilibrio hiperbólico de $\dot{x} = g(x)$, y además $Df(x_0)$ y $Dg(y_0)$ tienen el mismo número de valores propios con parte real negativa y positiva.

Dem. Ver [2] ■

Teorema 69 Sea $f \in C^1(U)$, donde U es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n conteniendo una órbita **no hiperbólica** Γ de $\dot{x} = f(x)$ entonces, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $g \in C^1(U)$, con $\|f - g\|_{C^1} < \delta$, existe una órbita periódica hiperbólica Γ' de $\dot{x} = g(x)$ contenida en una ε -vecindad de Γ , es más, las variedades estables $W^E(\Gamma)$ y $W^E(\Gamma')$ y las variedades inestables $W^I(\Gamma)$ y $W^I(\Gamma')$ tienen la misma dimensión.

Dem. Ver [2] ■

observación 70 Como Consecuencia del teorema (68), en el caso de los sistemas lineales $\dot{x} = Ax$, tendremos que será estructuralmente estable si todos los valores propios de A tienen parte real distinta de cero.

Definición 71 Un punto $x \in U \subset \mathbb{R}^n$, (o bien $x \in M$, con M variedad) es **no errante** del flujo φ_t de $\dot{x} = f(x)$ si para cualquier vecindad V de x y cualquier $T > 0$, existe $t > 0$, donde $t > T$, tal que:

$$\varphi_t(V) \cap V \neq \emptyset.$$

Definición 72 El conjunto no errante Ω del flujo φ_t es el conjunto de todos los puntos no errantes de φ_t en U , (o bien en M).

Teorema 73 (Teorema de Poincaré, 1962). Si f es un campo vectorial de clase C^1 sobre una variedad diferenciable y compacta 2-dimensional orientable M , entonces, f es estructuralmente estable sobre M si y sólo si:

- a) El número de puntos de equilibrios y ciclos límites es **finito** y cada uno es **hiperbólico**.
- b) No hay trayectorias que conecten puntos de **silla**.
- c) El conjunto no errante consiste de **puntos de equilibrio** y **ciclos límite** solamente.

Además, si M es **orientable**, entonces el conjunto de campos vectoriales estructuralmente estable es un subconjunto abierto y denso de $C^1(M)$.

Dem. Ver [2] ■

2.0.4. Bifurcaciones en un punto de equilibrio no hiperbólico

Para la consecución de nuestro objetivo, es necesario establecer una metodología que permita plasmar, mediante expresiones matemáticas, todos los aspectos del análisis. En este sentido, hemos seleccionado

los últimos resultados existentes ya en la bibliografía al respecto, que de manera más efectiva, resuelven nuestros problemas.

Los sistemas dinámicos que hemos estudiado son no lineales, formulados con una concepción del tiempo como conjunto continuo. Entendemos por conjunto numerable a aquel conjunto en el que se puede encontrar una biyección entre él y los números naturales. Por ejemplo, son numerables \mathbb{Z} , $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, \mathbb{Q} , $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$. Un conjunto continuo es un conjunto no numerable. Por ejemplo \mathbb{R} , o el conjunto de funciones continuas de \mathbb{R} en \mathbb{R} . Además, estos sistemas son disipativos, es decir, lejos del equilibrio, la materia se comporta de forma diferente a las regiones cercanas al equilibrio, donde las nociones de no linealidad, y bifurcación son fundamentales y son el dominio de las estructuras disipativas, las que se encuentran en el origen de los estudios de sistemas complejos. Y estos sistemas pueden poseer así atractores en forma de **puntos fijos, ciclos límites, órbitas periódicas o incluso atractores extraños.**

Como los cambios cualitativos a los que se refiere la teoría sobre bifurcaciones locales ocurren en un entorno de un punto fijo u órbita cerrada, nos hemos centrado en el estudio de los **puntos de equilibrio no hiperbólicos**, es decir, aquéllos para los cuales la matriz Jacobiana del sistema posee valores propios nulos o con parte real nula, pues sabemos por el **Teorema de Hartman-Grobman** que los equilibrios hiperbólicos son estructuralmente estables o inestables. En este contexto, resulta fundamental el **Teorema de la variedad central** que establece la existencia de una variedad invariante pasando por el punto fijo (no hiperbólico) a la cual puede restringirse el sistema para estudiar la dinámica en un entorno del mismo, análogamente a como ocurre en los sistemas lineales con el subespacio vectorial generado por los vectores propios asociados a valores propios nulos o con parte real nula.

Cuando el punto de equilibrio es **no hiperbólico**, debido a la presencia de al menos un valor propio con parte real nula, la restricción del sistema original a la variedad central es un sistema de dimensión al menos uno y si el sistema presencia de un par de valores propios imaginarios puros, dicha restricción es bidimensional, siendo el estudio de las bifurcaciones en los sistemas resultantes más sencillo que en el de partida, toda vez que los mismos son susceptibles de escribirse bajo cierta forma estándar de expresión (llamada forma normal topológica) común a todos los sistemas que poseen un mismo tipo de bifurcación.

En el caso de las bifurcaciones relacionadas con la aparición de un valor propio real simple nulo, se identifican tres tipos de bifurcaciones: **Silla-Nodo, Transcrítica y Pitchfork.**

El análisis de la forma normal topológica asociada a cada tipo de bifurcación permite comprender qué tipo de cambio se produce en el sistema cuando el parámetro rebasa el valor de bifurcación. Así, la **Bifurcación Silla-Nodo** puede identificarse como el mecanismo básico de creación-destrucción de puntos fijos: conforme el parámetro del sistema varía, dos puntos fijos se mueven uno hacia el otro, colisionan (cuando el parámetro toma el valor de bifurcación) y desaparecen.

En la **Bifurcación Transcrítica**, los puntos fijos colisionan igualmente, pero no desaparecen sino

que intercambian su estabilidad. En la **Bifurcación Pitchfork**, los puntos fijos tienden a aparecer y desaparecer en pares simétricos.

Y en el caso de que el equilibrio estacionario sea no hiperbólico debido a la presencia de un par de valores propios imaginarios puros para cierto valor del parámetro del sistema, $\alpha = \alpha_0$, la restricción del sistema original a la variedad central es un sistema bidimensional, el cual presentará una bifurcación de Hopf para $\alpha = \alpha_0$, si se verifica que los valores propios $\lambda(\alpha)$ que son imaginarios puros en α_0 crucen el eje imaginario con velocidad no nula, esto es:

$$d = \frac{d \operatorname{Re} \lambda(\alpha)}{d\alpha} \Big|_{\alpha=\alpha_0} \neq 0.$$

En tales circunstancias el **Teorema de Hopf** asegura la existencia de algunas soluciones periódicas bifurcándose a partir de α_0 . La estabilidad de las mismas viene determinada por una segunda condición expresada en términos del llamado primer coeficiente de Liapunov, $l_1(\alpha_0)$, el cual se deduce en el cálculo de la forma normal topológica correspondiente.

En estas circunstancias, una condición suficiente para la existencia de un ciclo límite estable es que $l_1(\alpha_0) < 0$, y si $l_1(\alpha_0) > 0$ el ciclo límite es inestable.

En el primer caso estamos ante una **Bifurcación de Hopf supercrítica** y un ciclo límite estable surge para cada valor del parámetro α mayor que α_0 lo suficientemente próximo a él. En el segundo caso, se trata de una **Bifurcación de Hopf subcrítica** y los ciclos aparecen antes de que el parámetro alcance el valor de bifurcación.

Entonces, dado un sistema n -dimensional con un equilibrio no hiperbólico para cierto valor de un parámetro, podemos encontrar una variedad central pasando por ese punto y restringir el sistema original a la misma, con lo que el estudio de las bifurcaciones en los sistemas resultantes de dimensiones uno o dos es menos complejo, una vez calculadas las formas normales topológicas equivalentes.

Dicho esto, prosigamos a las definiciones formales:

Supongamos que tenemos el sistema

$$\dot{x} = f(x, \mu),$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $\mu \in \mathbb{R}^m$, y $f \in C^1(U, J)$, donde U es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n y J es un intervalo.

Tendremos que un valor de bifurcación $\mu_0 \in J$ es un valor para el cual el campo vectorial es estructuralmente inestable.

La teoría de las bifurcaciones consiste en hallar estos valores de bifurcación para sistemas:

$$\dot{x} = f(x, \mu).$$

Los siguientes tres ejemplos nos ilustrarán, mediante un sistema las tres bifurcaciones mas conocidas en un punto de equilibrio no hiperbólico, estas serán las Bifurcaciones silla-nodo, transcritical y pitchfork respectivamente.

Ejemplo 74 Consideremos el sistema

$$\dot{x} = \mu - x^2.$$

Solution 75 Sus puntos de equilibrio son:

$$x = \pm\sqrt{\mu}.$$

Si

$$f(x, \mu) = \mu - x^2,$$

entonces

$$D_x f(x, \mu) = 2x,$$

luego, para

$$x = \sqrt{\mu}, \text{ tenemos que } D_x f(\sqrt{\mu}, \mu) = -2\sqrt{\mu},$$

y para

$$x = -\sqrt{\mu}, \text{ tenemos que } D_x f(\sqrt{\mu}, \mu) = 2\sqrt{\mu}.$$

Así, concluimos que:

Si $\mu < 0$, el sistema

$$\dot{x} = \mu - x^2,$$

no tiene punto de equilibrio, ya que los posibles equilibrios $\pm\sqrt{\mu}$ no serían números reales.

Si $\mu = 0$, el sistema tiene un sólo punto de equilibrio, que es $x = 0$.

Y si $\mu > 0$, el sistema tiene dos puntos de equilibrios, estos son $\pm\sqrt{\mu}$. Esto implica que $\mu_0 = 0$ es un valor de bifurcación pues es en 0 que se genera un cambio en la estabilidad estructural del campo $f(x, \mu) = \mu - x^2$, por lo tanto el sistema es **estructuralmente inestable**.

Veamos, ¿Cómo es que el equilibrio $x = 0$ de $\dot{x} = -x^2$?, para ello, veamos ¿Qué sucede en una vecindad muy pequeña del origen?

Para ello, consideremos el sistema

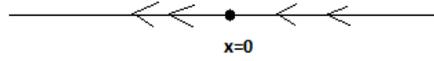
$$\dot{x} = -(x + \varepsilon)^2.$$

Así

$$D_x f(x) = -2(x + \varepsilon) \quad \text{y} \quad D_x f(0) = -2\varepsilon,$$

luego para

$\varepsilon > 0, x = 0$ es **atractor**, y para $\varepsilon < 0, x = 0$ es **repulsor**. (Ver figura 25)

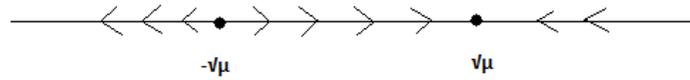


Fig,25

Entonces $x = 0$ es un punto de **silla**.

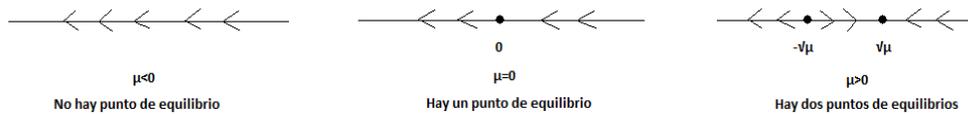
Si $\mu > 0$, entonces los puntos de equilibrio son $\pm\sqrt{\mu}$ y como $D_x f(\sqrt{\mu}, \mu) = -2\sqrt{\mu}$ y $D_x f(-\sqrt{\mu}, \mu) = 2\sqrt{\mu}$ entonces $x = \sqrt{\mu}$ es **atractor** y $x = -\sqrt{\mu}$ es **repulsor**.

Dinámica que se explica en la figura 26 y 27:



Fig,26

Por último, la dinámica del sistema $\dot{x} = -x^2$ es:



Fig,27

Y la curva $\mu - x^2 = 0$ en el plano μ, x determina la posición de los puntos de equilibrio del sistema. (Ver

figura 28).

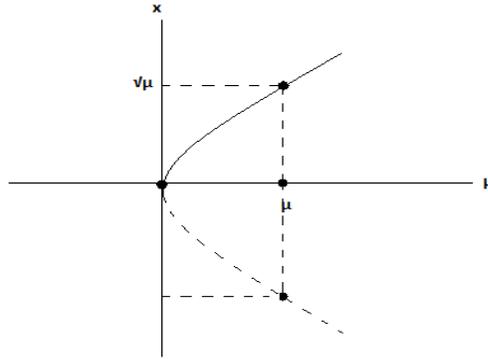


Fig. 28 Diagrama de la bifurcación silla-nodo

Donde la parte dibujada sólida nos indica los puntos de equilibrio **estables**, y la parte dibujada punteada los **inestables**, a dicha curva la llamaremos diagrama de bifurcación.

Ejemplo 76 Consideremos el sistema

$$\dot{x} = \mu x - x^2.$$

Solution 77 Al igual que en el ejemplo anterior, hallaremos sus valores de bifurcación:

Si

$$\mu x - x^2 = 0, \text{ entonces } x = 0 \text{ o } x = \mu.$$

Esto nos muestra, entre otras cosas, que $\mu = 0$ es un valor de bifurcación, pues si $\mu = 0$ hay un sólo equilibrio y si $\mu \neq 0$ hay dos equilibrios, que son: $x = 0$ y $x = \mu$.

Si $\mu = 0$, determinemos la estabilidad del equilibrio $x = 0$ del sistema $\dot{x} = -x^2$, para ello, analicemos el sistema:

$$\dot{x} = -(x + \varepsilon)^2,$$

donde

$$D_x f(0) = -2\varepsilon,$$

luego, si $\varepsilon > 0$, entonces $x = 0$ es **atractor** por la derecha y si $\varepsilon < 0$, entonces $x = 0$ es **repulsor** por la izquierda. (Ver figura 29)



Fig,29

Por otra parte, si $\mu \neq 0$, entonces

$$D_x f(x, \mu) = \mu - 2x,$$

lo que implica que

$$D_x f(0, \mu) = \mu,$$

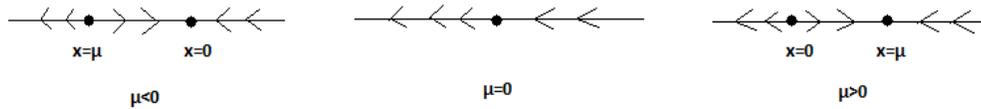
luego

$x = 0$ es **atractor** si $\mu < 0$ y $x = 0$ es **repulsor** si $\mu > 0$. (Ver figura 30)



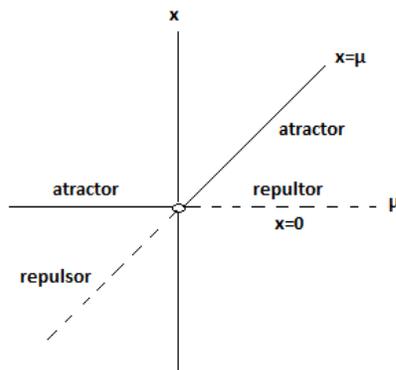
Fig,30

Y como $D_x f(\mu, \mu) = \mu - 2\mu = -\mu$, esto es, el equilibrio $x = \mu$, será **repulsor** si $\mu < 0$ y **atractor** si $\mu > 0$. (Ver figura 31)



Fig,31

Así, esta bifurcación es llamada **bifurcación transcritical** (ver figura 32) y el campo estructuralmente inestable es $f(x) = -x^2$. Por último para hallar su diagrama de bifurcación, hacemos $\mu x - x^2 = 0$.



Fig,32 Diagrama de la Bifurcación transcritical.

Ejemplo 78 Consideremos el sistema

$$\dot{x} = \mu x - x^3,$$

y estudiemos su dinámica. Los equilibrios son:

$$x = 0, x = -\sqrt{\mu}, x = \sqrt{\mu},$$

entonces

$$\mu = 0 \text{ es un valor de bifurcación.}$$

Veamos que para $\mu < 0$ hay un equilibrio, para $\mu > 0$ hay tres equilibrios. El sistema si $\mu = 0$ es

$$\dot{x} = -x^3.$$

Perturbemos el sistema para ver los comportamientos laterales:

$$\dot{x} = -(x + \varepsilon)^3 \text{ entonces } D_x f(x) = -3(x + \varepsilon)^2,$$

y

$$D_x f(0) = -3\varepsilon^2 < 0, \text{ para todo } \varepsilon$$

así, $x = 0$ es atractor del sistema $\dot{x} = -x^3$.

Como

$$D_x f(x, \mu) = \mu - 3x^2$$

Si $\mu < 0$ entonces,

$$D_x f(0, \mu) = \mu < 0,$$

luego

$x = 0$ es **atractor**, y si $\mu > 0$ entonces, $D_x f(0, \mu) = \mu > 0$, luego $x = 0$ es **repulsor**.

$$\begin{aligned} D_x f(-\sqrt{\mu}, \mu) &= \mu - 3(-\sqrt{\mu})^2 \\ &= \mu - 3\mu \\ &= -2\mu < 0, \end{aligned}$$

entonces

$$x = -\sqrt{\mu} \text{ es un } \mathbf{atractor},$$

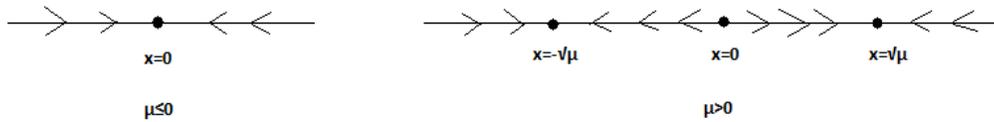
y

$$\begin{aligned} D_x f(\sqrt{\mu}, \mu) &= \mu - 3(\sqrt{\mu})^2 \\ &= -2\mu < 0, \end{aligned}$$

entonces

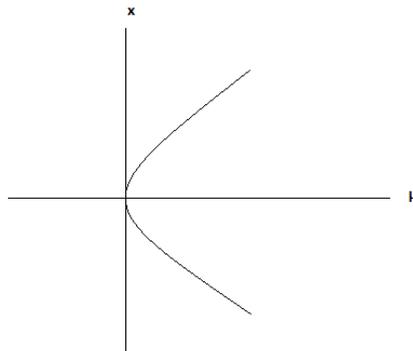
$$x = \sqrt{\mu} \text{ es } \mathbf{atractor}.$$

Finalmente, tenemos las representaciones gráficas, en la figura 33 y 34:



Fig,33

Y el diagrama de bifurcación



Fig,34 diagrama de la bifurcación pitch.fork.

Teorema 79 (Sotomayor). Consideremos el sistema (6) donde $(x, \mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Supongamos que $f(x_0, \mu_0) = 0$ y que $D_x f(x_0, \mu_0)$ tiene un valor propio simple $\lambda = 0$, es decir, que su multiplicidad es uno en el polinomio característico, con vector propio v y A^T tiene un vector propio w asociado al valor propio $\lambda = 0$.

Además supongamos que $Df(x_0, \mu_0)$ tiene k valores propios con parte real negativa y $(n - k - 1)$

valores propios con parte real positiva, tal que, se satisfacen las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} w^T f_\mu(x_0, \mu_0) &\neq 0, \\ w^T (D_x^2 f_\mu(x_0, \mu_0)(v, v)) &\neq 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Entonces existe en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ una curva suave de equilibrios, (esto es, que todo punto es punto de equilibrio) de $\dot{x} = f(x, \mu)$ que pasa a través de (x_0, μ_0) y es tangente al hiperplano $\mathbb{R}^n \times \{\mu_0\}$.

Y dependiendo de los signos de la expresión (7):

- a) No existen puntos de equilibrio de (6) cerca de x_0 cuando $\mu < \mu_0$ (o cuando $\mu > \mu_0$).
- b) Existen dos puntos de equilibrio de (6) cerca de x_0 cuando $\mu > \mu_0$ (o cuando $\mu < \mu_0$).

En el caso b), ambos equilibrios son hiperbólicos y tienen variedades estables de dimensión k y $k + 1$ respectivamente.

Entonces $\dot{x} = f(x, \mu)$ tiene una bifurcación del tipo **Silla-Nodo** en x_0 y el valor de bifurcación es μ_0 .

Si la condición

$$\begin{aligned} W^T f_\mu(x_0, \mu_0) &\neq 0, \\ W^T (D_x^2 f_\mu(x_0, \mu_0)(v, v)) &\neq 0, \end{aligned}$$

es cambiada por:

$$\begin{aligned} W^T f_\mu(x_0, \mu_0) &= 0, \\ W^T (D_x f_\mu(x_0, \mu_0)v) &\neq 0, \\ W^T (D_x^2 f(x_0, \mu_0)(v, v)) &\neq 0, \end{aligned}$$

entonces la bifurcación es **Transcrítica**. Y si

$$\begin{aligned} W^T f_\mu(x_0, \mu_0) &= 0, \\ W^T (D_x f_\mu(x_0, \mu_0)v) &\neq 0, \\ W^T (D_x^2 f(x_0, \mu_0)(v, v)) &= 0, \\ W^T (D_x^3 f(x_0, \mu_0)(v, v, v)) &\neq 0, \end{aligned}$$

entonces la bifurcación es de **Pitchfork**.

Recordemos que para utilizar éste teorema debemos primero saber el valor de la bifurcación, pues éste teorema sólo los clasifica.

Dem. Ver [2] ■

Ejemplo 80 Consideremos el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu - x^2 \\ \dot{y} = -y \end{cases}$$

Cuyo campo vectorial asociado es

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu - x^2 \\ -y \end{pmatrix},$$

entonces

$$f_\mu(x, \mu) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Usando el teorema de Sotomayor, veamos que el sistema tiene una bifurcación silla-nodo.

$$D_{(x,y)}f((x,y), \mu) = \begin{pmatrix} -2x & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$D_x f(0, \mu) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

tiene un valor propio $\lambda = 0$ con vector propio asociado

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

y es fácil calcular que el vector propio de la transpuesta de $D_x f(0, \mu)$ asociado al su valor propio $\lambda = 0$ es

$$w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

luego

$$W^T f_\mu((0,0), 0) = (1, 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \neq 0.$$

Por lo tanto, se cumple la primera condición del teorema.

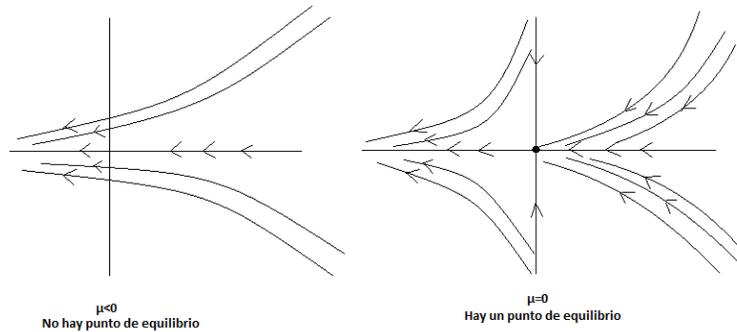
Hallaremos ahora $D_{(x,y)}^2 f((0,0),0)(v,v)$, sea

$$\begin{aligned} D_{(x,y)}^2 f((x,y),\mu)(v,v) &= D_{(x,y)} \left(\begin{pmatrix} -2x \\ 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

luego

$$W^T \cdot \left(D_{(x,y)}^2 f((0,0),0)(v,v) \right) = (1,0) \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = -2 \neq 0$$

por lo tanto la bifurcación es del tipo **silla-nodo**, con valor de bifurcación $\mu_0 = 0$. (Ver figura 35)



Fig,35

2.0.5. Bifurcación Hopf (Valores propios complejos conjugados)

Una bifurcación de Hopf, también llamada bifurcación de Poincaré-Hopf-Andronov o bifurcación de Andronov-Hopf, se refiere a la desaparición o aparición local de un equilibrio de una solución periódica, o un ciclo límite, de ecuaciones diferenciales ordinarias que describen un sistema dinámico con cual ese equilibrio (valores críticos) cambia estabilidad cuando, y solo cuando, el parámetro varía de valor por la “derecha” o la “izquierda”, o matemáticamente, a través de un par de valores propios puramente imaginarios que cruzan el eje imaginario en el plano complejo hacia la parte derecha (real).

Una bifurcación de Hopf es entonces la aparición o la desaparición de una órbita periódica a través de un cambio local en las propiedades de estabilidad (parámetro) de un punto de equilibrio. Es decir, la bifurcación de Hopf es un punto crítico en el que la estabilidad de un sistema cambia y surge una solución periódica.

Teorema 81 (Hopf 1942). Consideremos el sistema

$$\dot{x} = f(x, \mu), \quad (8)$$

donde $f \in C^{k+1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, donde $k \geq 4$ y $f(0, \mu) = 0$ (es decir, consideramos el origen como equilibrio). Supongamos que para $|\mu|$ suficientemente pequeño, $D_x f(0, \mu)$, tiene un par de valores propios **complejos conjugados**: $\alpha(\mu) \pm i\omega(\mu)$, donde $\alpha(0) = 0$, $\alpha'(0) > 0$ y los otros $n - 2$ valores propios tienen **parte real negativa**, entonces:

1. Existen $\delta > 0$ y una función $\mu \in C^{k-2}((-\delta, \delta), \mathbb{R})$ tal que para todo $\varepsilon \in (-\delta, \delta)$, entonces el sistema $\dot{x} = f(x, \mu(\varepsilon))$ tiene una solución periódica $p(t, \varepsilon)$ con período $T(\varepsilon) > 0$, $T \in C^{k-2}$, $\mu(0) = 0$, $T(0) = \frac{2\pi}{\omega}$, $p(t, 0) = 0$ y la amplitud media de la órbita periódica es proporcional a $\sqrt{|\mu(\varepsilon)|}$.
2. El origen $(x, \mu) = (0, 0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ tiene una vecindad que no contiene ninguna órbita periódica de (8) excepto las de la familia $p(t, \varepsilon)$, con $\varepsilon \in (-\delta, \delta)$.
3. Si el origen es un equilibrio **asintóticamente estable** (respectivamente **inestable**) del sistema (8), entonces $\mu(\varepsilon) > 0$ (respectivamente $\mu(\varepsilon) < 0$) y la órbita periódica es **asintótica orbitalmente inestable** (respectivamente **estable**).

Dem. Ver [2] ■

3. Modelo depredador presa con memoria

3.1. Planteamiento del problema

Los modelos depredador-presa han desempeñado un papel muy importante en el estudio de muchas poblaciones donde aparece una determinada relación entre ellas. Con todo ello podemos decir que forman uno de los temas mas interesantes y dominantes dentro de la ecología.

Uno de los primeros trabajos sobre la dinámica de poblaciones lo podemos encontrar en **"An Essay on the Principle of Population"** Obra de demografía escrita por el economista inglés Thomas Robert Malthus, en la que desarrolla la influyente teoría de que la población crece más rápidamente que los recursos, conduciendo a una progresiva pauperización de la población, es decir, un proceso de empobrecimiento de esta.

Malthus, en su trabajo, propone la siguiente ecuación para estimar la cantidad de población en un tiempo determinado t .

$$\dot{N}(t) = rN(t),$$

donde $N(t)$ representa la cantidad de individuos existentes en el tiempo t y r es una constante, llamada “**tasa de crecimiento intrínseco de la población**”. Esta tasa depende de muchos factores, por ejemplo, supongamos que depende sólo del alimento per-capita disponible σ , donde σ es una constante positiva. De aquí existe un mínimo σ_0 de alimento en el que la población puede sustentarse.

Cuando $\sigma > \sigma_0$ entonces, la tasa de crecimiento es **positiva**.

Cuando $\sigma < \sigma_0$ entonces, la tasa de crecimiento es **negativa**.

Por lo que podemos pensar que la tasa de crecimiento r es una función lineal, que expresaremos de la siguiente forma:

$$r = a(\sigma - \sigma_0), \text{ donde } a > 0.$$

Y la solución de la ecuación

$$\dot{N}(t) = rN(t)$$

es

$$N(t) = N_0 e^{rt}, \text{ donde } N_0 = N(0)$$

Donde $N(0)$ es la cantidad de presa en el tiempo inicial $t = 0$, luego una población Malthusiana crece exponencialmente.

Thomas Malthus se puede considerar como uno de los pioneros de la ecología, aunque su modelo sobre el crecimiento de las poblaciones, no sea realista ya que un crecimiento ilimitado no se produce en la naturaleza, debido a la existencia de múltiples limitaciones como lo son las físicas y biológicas, además de la atenuación del crecimiento población caracterizado por disminución de mortalidad y natalidad. Es por esto que podemos afirmar que la **tasa de crecimiento per-capita** de una población no es una constante, sino una función del tamaño de la población y que debe acercarse a cero cuando la población alcanza el máximo que puede ser permitido por el hábitat, y que varía según las condiciones propias de la especie.

Lo que podemos escribir como:

$$\frac{\dot{N}(t)}{N(t)} = rf(N, K),$$

donde K es la constante que representa la **capacidad de carga del hábitat o medio**.

Cuarenta años más tarde, Verhulst (1838) en su trabajo "Principle of Population", formula un modelo en el que trata de corregir el crecimiento Malthusiano con un factor freno en el modelo, y que se puede considerar como el germen de todos los modelos conocidos como logísticos.

Posteriormente, y a partir del auge que estaban adquiriendo todos estos temas, Lotka (1925) y

Volterra (1928) realizan uno de los grandes avances en la dinámica de poblaciones, donde proponen el primer modelo depredador-presa que en lugar de ser obtenido por extensión de la ley logística a dos especies, adoptan el principio químico de acción de masas. En otras palabras, en dichos trabajos se asume que la respuesta de la población será proporcional al producto de sus biomasa.

3.2. La familia de Miklós Farkas

En lo que sigue denotaremos las siguientes constantes no negativas por:

ϵ : Tasa de crecimiento de la presa.

α : Tasa de depredación.

γ : Tasa de mortalidad del depredador en ausencia de presa.

β : Tasa de conversión de la presa, esto es, la cantidad de presas consumidas que influyen en la reproducción del depredador.

K : Capacidad de carga del hábitat.

$Y G : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$ una función de densidad de probabilidad de clase C^1 .

Entre los años 1984 y 1988, Farkas y Szabo propusieron una generalización del modelo clásico de depredador-presa de Lotka-Volterra

$$\begin{aligned}\dot{N} &= N(\epsilon - \alpha P), \\ \dot{P} &= P(-\gamma + \beta N),\end{aligned}$$

la que lo mejora en dos aspectos:

Primero, el modelo tiene en cuenta la **competencia intraespecífica de la presa**, que tiene un efecto de saturación, y por lo tanto la presa no crece exponencialmente en ausencia de depredación y tiende a un límite finito.

Segundo, el modelo introduce un término de **memoria**, ya que, mientras se acepte que la cantidad de depredadores tiene un efecto instantáneo en la tasa de crecimiento de la presa, la tasa de crecimiento del depredador no depende solo de la cantidad de comida, sino también de la cantidad anterior de individuos en la etapa de gestación.

Así Farkas, ver ([13]) propuso el modelo:

$$\begin{aligned}\dot{N}(t) &= \epsilon N(t)f(N/K) - \alpha N(t)P(t), \\ \dot{P}(t) &= -\gamma P(t) + \beta P(t) \int_{-\infty}^t N(\xi)G(t - \xi)d\xi,\end{aligned}$$

donde $N(t)$ y $P(t)$ denotan la cantidad de presa y depredador respectivamente y $f(N/K) = (1 - N/K)$,

es la clásica función logística, que constituye un refinamiento del modelo exponencial para el crecimiento de esta magnitud.

Además supuso la función de densidad en dos casos distintos, el primero:

$$G(s) = ae^{-as}, \quad a > 0,$$

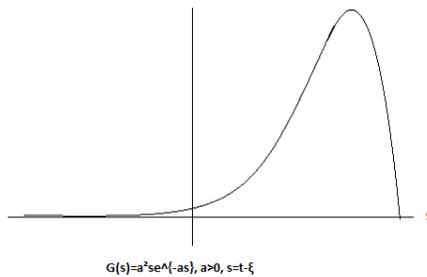
que recibe el nombre de **sistema con desvanecimiento exponencial de memoria**. (Ver figura 36)

Fig,36

y el segundo cuando la función de densidad es:

$$G(s) = a^2 se^{-as}, \quad a > 0$$

que recibe el nombre de **memoria con joroba**. (Ver figura 37)



Fig,37

Ellos, establecieron condiciones para la existencia de puntos de equilibrios y la estabilidad de estos, y demostraron la existencia de una bifurcación del tipo Hopf, que da origen a la aparición de órbitas periódicas.

3.3. Generalización de la familia de Miklós Farkas

En consecuencia de lo anteriormente planteado, nos preguntamos entonces ¿Qué sucederá al suponer que la ecuación logística no es lineal?. (Ver [27]).

Supongamos que esta ecuación logística es una función arbitraria positiva de clase C^3 , decreciente en $\frac{\gamma}{K\beta}$ que decrece cuando la población se acerca a la capacidad de carga del medio, esto es, cuando $N = K$, y si además suponemos que es un sistema con desvanecimiento exponencial de memoria.

Entonces, estudiemos el sistema

$$\begin{cases} \dot{N}(t) = \epsilon N(t)f(N/K) - \alpha N(t)P(t) \\ \dot{P}(t) = -\gamma P(t) + \beta P(t) \int_{-\infty}^t N(\xi)G(t-\xi)d\xi, \end{cases}$$

donde

$$G(t) = ae^{-as}, \quad f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad f \in C^3(0, 1), \quad f'(\frac{\gamma}{K\beta}) < 0 \text{ y } f(1) = 0.$$

A través del estudio del sistema, estableceremos condiciones para la existencia de puntos de equilibrios y órbitas periódicas, estudiaremos la estabilidad de estos puntos y demostraremos la existencia de una bifurcación del tipo Hopf.

Entonces, para facilitar el análisis de este sistema, definamos la siguiente función auxiliar:

$$Q(t) = \int_{-\infty}^t N(\xi)G(t-\xi)d\xi.$$

Determinemos $\dot{Q}(t)$, para ello utilizaremos la regla de Leibniz, la que dice:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^x h(x, y)dy = h(x, x) + \int_{-\infty}^x \frac{\partial}{\partial x} h(x, y)dy,$$

lo que en nuestro caso implica:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^t N(\xi)G(t-\xi)d\xi &= N(\xi)G(t-t)d\xi + \int_{-\infty}^t \frac{\partial}{\partial t} N(\xi)G(t-\xi)d\xi \\ &= N(\xi)G(0) + \int_{-\infty}^t \frac{\partial}{\partial t} N(\xi)G(t-\xi)d\xi, \end{aligned}$$

donde $G(s) = G(t - \xi) = ae^{-a(t-\xi)}$ por lo que $G(0) = a$. Luego

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^t N(\xi)G(t - \xi)d\xi &= N(\xi)a + \int_{-\infty}^t \frac{\partial}{\partial t} N(\xi)G(t - \xi)d\xi \text{ para un } t \text{ cualquiera} \\
&= aN(t) + \int_{-\infty}^t N(\xi) \frac{\partial}{\partial t} G(t - \xi)d\xi \\
&= aN(t) + \int_{-\infty}^t N(\xi) \frac{\partial}{\partial t} ae^{-a(t-\xi)}d\xi \\
&= aN(t) + \int_{-\infty}^t N(\xi) \cdot -a^2 e^{-a(t-\xi)}d\xi \\
&= aN(t) \cdot (-a) \int_{-\infty}^t N(\xi)ae^{-a(t-\xi)}d\xi \\
&= aN(t) \cdot (-a) \int_{-\infty}^t N(\xi)G(t - \xi)d\xi \\
&= aN(t) - aQ(t) \\
&= a(N(t) - Q(t)).
\end{aligned}$$

Así, el sistema

$$\begin{cases} \dot{N}(t) = \epsilon N(t)f(N/K) - \alpha N(t)P(t) \\ \dot{P}(t) = -\gamma P(t) + \beta P(t) \int_{-\infty}^t N(\xi)G(t - \xi)d\xi \end{cases},$$

equivale a

$$\begin{cases} \dot{N} = \epsilon Nf(N/K) - \alpha NP \\ \dot{P} = -\gamma P + \beta PQ \\ \dot{Q} = a(N - Q). \end{cases}$$

En donde deberemos entender la equivalencia, de la siguiente manera:

Si denotamos $\overline{C^0}(-\infty, 0]$ al conjunto de funciones real-valuadas que son continuas y acotadas en $(-\infty, 0]$, y $(N, P) : [0, \infty) \rightarrow [0, K] \times \mathbb{R}$ es la solución de:

$$\begin{cases} \dot{N}(t) = \epsilon N(t)f(N/K) - \alpha N(t)P(t) \\ \dot{P}(t) = -\gamma P(t) + \beta P(t) \int_{-\infty}^t N(\xi)G(t - \xi)d\xi \end{cases},$$

que corresponde a la función inicial $\tilde{N} \in \overline{C^0}(-\infty, 0]$ y al valor inicial $P_0 = P(0)$, entonces $(N, P, Q) : [0, \infty) \rightarrow [0, K] \times \mathbb{R}^2$ es la solución de:

$$\begin{cases} \dot{N} = \epsilon Nf(N/K) - \alpha NP \\ \dot{P} = -\gamma P + \beta PQ \\ \dot{Q} = a(N - Q) \end{cases},$$

que satisface la condición inicial $N(0) = \tilde{N}(0)$. $P(0) = P_0$ y

$$Q(0) = Q_0 = \int_{-\infty}^t \tilde{N}(\xi) e^{a\xi} d\xi,$$

y viceversa.

El sistema

$$\begin{cases} \dot{N} = \epsilon N f(N/K) - \alpha NP \\ \dot{P} = -\gamma P + \beta PQ \\ \dot{Q} = a(N - Q) \end{cases},$$

lo estudiaremos para $t \in [0, \infty)$.

Introduciremos para facilitar cálculos, un cambio de variables y obtendremos un sistema equivalente al sistema anterior. Posteriormente, determinaremos sus puntos de equilibrio y analizaremos la estabilidad de cada uno de ellos. Luego, sean,

$$N = Kn, \quad P = Kp, \quad Q = Kq \quad y \quad t = \frac{s}{\epsilon},$$

sustituyendo en el sistema anterior, obtenemos,

$$\begin{cases} K\dot{n} = \epsilon Kn f(n) - \alpha K^2 np \\ K\dot{p} = -\gamma Kp + \beta K^2 pq \\ K\dot{q} = aK(n - q) \end{cases},$$

donde ahora " $\dot{\cdot}$ " representa la derivada respecto a la variables multiplicando por $\frac{1}{\epsilon K}$, obtenemos

$$\begin{cases} \dot{n} = n f(n) - \frac{\alpha K np}{\epsilon} \\ \dot{p} = \frac{-\gamma p}{\epsilon} + \frac{\beta K pq}{\epsilon} \\ \dot{q} = \frac{a(n - q)}{\epsilon} \end{cases},$$

eliminaremos el parámetro ϵ , haciendo, sin pérdida de generalidad

$$\alpha \leftrightarrow \frac{\alpha}{\epsilon}, \quad \gamma \leftrightarrow \frac{\gamma}{\epsilon}, \quad \beta \leftrightarrow \frac{\beta}{\epsilon}, \quad y \quad a \leftrightarrow \frac{a}{\epsilon},$$

obteniendo el sistema

$$\begin{cases} \dot{n} = n f(n) - \alpha K np \\ \dot{p} = -\gamma p + \beta K pq \\ \dot{q} = a(n - q) \end{cases}. \quad (9)$$

De esta manera nuestro problema inicial, se reduce a demostrar que el sistema (9) tiene una bifurcación del tipo Hopf. Además, daremos condiciones para la estabilidad de las órbitas periódicas que aparecen en dicha bifurcación.

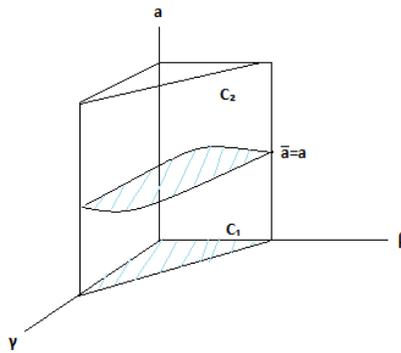
Definamos pues, por el **criterio de Routh-Hurwitz**, que nos servirá para analizar la estabilidad de los puntos de nuestro sistema dinámico, los siguientes factores:

$$\bar{a} = \frac{\gamma}{K\beta} f' \left(\frac{\gamma}{K\beta} \right) - K\beta \frac{f \left(\frac{\gamma}{K\beta} \right)}{f' \left(\frac{\gamma}{K\beta} \right)},$$

que mostraremos que es nuestro valor de bifurcación,

$$C = \left\{ (\gamma, \beta, a) : 0 < \frac{\gamma}{K\beta} < 1 \right\},$$

el cilindro de base triangular, (ver figura 38)



Fig,38

y los conjuntos:

$$C_1 = C \cap \{(\gamma, \beta, a) : a < \bar{a}\} \text{ y } C_2 = C \cap \{(\gamma, \beta, a) : a > \bar{a}\}.$$

El **criterio de Routh-Hurwitz** nos permitirá saber si una ecuación polinómica posee raíces positivas sin resolverla.

Dado un polinomio

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \dots + a_0 s^0$$

sabremos, si todas sus raíces se encuentran en el semiplano izquierdo o no. El criterio resulta de plantear un arreglo de coeficientes, con forma triangular, y de observar si la primera columna tiene todos sus coeficientes con signos iguales o no.

El criterio de estabilidad de Routh- Hurwitz plantea que el número de raíces de la ecuación con

partes reales positivas es igual al número de cambios de signo de los coeficientes de la primera columna del arreglo.

La condición necesaria y suficiente para que todas las raíces de la ecuación se encuentren en el semiplano izquierdo del plano s es que todos los coeficientes de la ecuación sean positivos y que todos los términos de la primera columna del arreglo tengan signo positivo.

Enunciaremos y demostraremos tres teoremas que nos ayudarán a dar solución a nuestro problema y que en un primer resultado nos dará condiciones para la estabilidad de los puntos de equilibrio del sistema

$$\begin{cases} \dot{n} = nf(n) - \alpha Knp \\ \dot{p} = -\gamma p + \beta Kpq \\ \dot{q} = a(n - q) \end{cases} .$$

Teorema 82 1). Si $\bar{a} < 0$, entonces el punto de equilibrio

$$(n_0, p_0, q_0) = \left(\frac{\gamma}{K\beta}, \frac{\gamma}{\alpha K} f\left(\frac{\gamma}{K\beta}\right), \frac{\gamma}{K\beta} \right),$$

del sistema anterior, es **siempre estable**.

2). Si $\bar{a} > 0$, entonces, existe una subvariedad de dimensión dos en el espacio tridimensional de parámetros $\{(\gamma, \beta, a) : \gamma, \beta, a \in \mathbb{R}\}$ definida en forma implícita por

$$\left[\frac{\gamma}{K\beta} f'\left(\frac{\gamma}{K\beta}\right) \right]^2 - \gamma f\left(\frac{\gamma}{K\beta}\right) - a \frac{\gamma}{K\beta} f'\left(\frac{\gamma}{K\beta}\right) = 0,$$

la que divide al cilindro de base triangular en las dos componentes conexas C_1 y C_2 , y la estabilidad del punto de equilibrio depende de la componente en que son elegidos los parámetros, esto es, si $(\gamma, \beta, a) \in C_1$ el equilibrio (n_0, p_0, q_0) es **estable**, y si $(\gamma, \beta, a) \in C_2$ el equilibrio es **inestable**.

El caso más interesante que se presenta es cuando $\bar{a} > 0$, pues es allí cuando, y como lo demostraremos, que nuestro modelo biológico exhibe una bifurcación de tipo **Hopf**.

Esta bifurcación es de suma importancia pues, se refiere a la desaparición o aparición local de un equilibrio de una solución periódica de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias que describen un sistema dinámico donde ese equilibrio (valores críticos) cambia su estabilidad cuando, y sólo cuando, el parámetro varía de valor por la “derecha” o la “izquierda”, esto quiere decir que, nos suministrará valiosa información acerca de los momentos críticos que marcan la supervivencia de las especies.

Usaremos el Teorema de Bifurcación de Andronov (1937), para probar la existencia de la bifurcación de tipo Hopf en nuestro sistema (9)

Dem. Veremos que el sistema (9) tiene tres puntos de equilibrio. Los que antes de calcularlos, para

facilitar la notación, supondremos que dicho sistema es de la forma

$$\dot{x} = g(x),$$

donde

$$x = (n, p, q)^t \quad y \quad g(x) = \begin{pmatrix} nf(n) - K\alpha np \\ -\gamma p + K\beta pq \\ a(n - q) \end{pmatrix}.$$

Ahora, procederemos a calcular los puntos de equilibrio, para ello, igualamos cada una de las ecuaciones del sistema anterior a cero

$$\begin{cases} 1) \quad nf(n) - K\alpha np = 0 \\ 2) \quad -\gamma p + K\beta pq = 0 \\ 3) \quad a(n - q) = 0. \end{cases}$$

De la ecuación 2), tenemos

$$p(-\gamma + \beta Kq) = 0$$

por lo que

$$p = 0 \text{ o } -\gamma + \beta Kq = 0,$$

tomando $p = 0$ y reemplazando en la ecuación 1), tenemos

$$\begin{aligned} nf(n) &= 0 \\ \Rightarrow n &= 0 \text{ o } f(n) = 0, \end{aligned}$$

pero $n \neq 0$, entonces $f(n) = 0$, de donde $n = 1$.

Esto implica, reemplazando en la ecuación 3) que

$$a(1 - q) = 0$$

luego

$$a = 0 \text{ o } q = 1,$$

así, tenemos que los dos primeros puntos de equilibrio son: $(0, 0, ?)$ y $(1, 0, 1)$.

Ahora, si suponemos

$$p \neq 0,$$

podemos multiplicar por $\frac{1}{p}$ en la ecuación 2) y así

$$q = \frac{\gamma}{K\beta},$$

por lo que, de la ecuación 3) tenemos

$$n = q = \frac{\gamma}{K\beta},$$

luego de la ecuación 1)

$$p = f\left(\frac{\gamma}{K\beta}\right) \frac{1}{\alpha K},$$

lo que indica que el tercer punto de equilibrio es

$$(n_0, p_0, q_0) = \left(\frac{\gamma}{K\beta}, \frac{1}{\alpha K} f\left(\frac{\gamma}{K\beta}\right), \frac{\gamma}{K\beta}\right),$$

el cual será el más importante en nuestra discusión.

Definamos

$$b = \frac{\gamma}{K\beta},$$

de esta manera

$$(n_0, p_0, q_0) = \left(b, \frac{1}{\alpha K} f(b), b\right).$$

Analicemos la estabilidad de estos tres puntos:

La matriz jacobiana es

$$D_g(n, p, q) = \begin{pmatrix} \frac{dg_1}{dn} & \frac{dg_1}{dp} & \frac{dg_1}{dq} \\ \frac{dg_2}{dn} & \frac{dg_2}{dp} & \frac{dg_2}{dq} \\ \frac{dg_3}{dn} & \frac{dg_3}{dp} & \frac{dg_3}{dq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(n) + n f'(n) - K\alpha p & -K\alpha n & 0 \\ 0 & -\gamma + K\beta q & K\beta p \\ a & 0 & -a \end{pmatrix}.$$

i) Evaluando el primer punto $(n, p, q) = (0, 0, 0)$ en $D_g(n, p, q)$, tenemos

$$D_g(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} f(0) & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma & 0 \\ a & 0 & -a \end{pmatrix},$$

resolviendo la ecuación característica

$$\begin{aligned}
 P_\lambda(D_g(0,0,0)) &= \det \left(\begin{pmatrix} f(0) & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma & 0 \\ a & 0 & -a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right) = \det \begin{pmatrix} f(0) - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -(\gamma + \lambda) & 0 \\ a & 0 & -(a + \lambda) \end{pmatrix} \\
 &= -(a + \lambda) \det \begin{pmatrix} f(0) - \lambda & 0 \\ 0 & -(\gamma + \lambda) \end{pmatrix} = -(a + \lambda)(f(0) - \lambda)(-\gamma + \lambda) \\
 &= (a + \lambda)(f(0) - \lambda)(\gamma + \lambda) = 0,
 \end{aligned}$$

obteniendo así, los valores propios

$$\lambda_1 = -a, \quad \lambda_2 = -\gamma \text{ y } \lambda_3 = f(0) \geq 0.$$

En este caso el origen es inestable.

ii) Evaluando el segundo punto $(n, p, q) = (1, 0, 1)$ en $D_g(n, p, q)$, tenemos

$$D_g(1, 0, 1) = \begin{pmatrix} f(1) + f'(1) & -K\alpha & 0 \\ 0 & -\gamma + K\beta & 0 \\ a & 0 & -a \end{pmatrix},$$

resolviendo la ecuación característica

$$\begin{aligned}
 P_\lambda(D_g(1,0,1)) &= \det \left(\begin{pmatrix} f(1) + f'(1) & -K\alpha & 0 \\ 0 & -\gamma + K\beta & 0 \\ a & 0 & -a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right) \\
 &= \det \begin{pmatrix} f(1) + f'(1) - \lambda & -K\alpha & 0 \\ 0 & -\gamma + K\beta - \lambda & 0 \\ a & 0 & -(a + \lambda) \end{pmatrix} \\
 &= -(a + \lambda) \det \begin{pmatrix} f(1) + f'(1) - \lambda & -K\alpha \\ 0 & -\gamma + K\beta - \lambda \end{pmatrix} \\
 &= -(a + \lambda)((f(1) + f'(1) - \lambda)(-\gamma + K\beta - \lambda)) = 0
 \end{aligned}$$

obteniendo los valores propios

$$\lambda_1 = -a < 0, \quad \lambda_2 = f(1) + f'(1), \text{ y } \lambda_3 = -\gamma + K\beta > 0.$$

Como $f'(1)$ y $-a$ son valores menores que cero, entonces, tenemos que el punto $(1, 0, 1)$ es inestable, pues $b = \frac{\gamma}{K\beta} < 1$.

iii) Evaluando el tercer punto, y el que resultará de mayor interés: $(n, p, q) = (b, \frac{1}{\alpha K} f(b), b)$ en $D_g(n, p, q)$, tenemos

$$D_g \left(b, \frac{1}{\alpha K} f(b), b \right) = \begin{pmatrix} b f'(b) & -K\alpha b & 0 \\ 0 & -\gamma + K\beta b & \frac{\beta}{\alpha} f(b) \\ a & 0 & -a \end{pmatrix},$$

pero $b = \frac{\gamma}{K\beta}$, entonces reemplazando convenientemente,

$$D_g \left(b, \frac{1}{\alpha K} f(b), b \right) = \begin{pmatrix} b f'(b) & \frac{-\alpha\gamma}{\beta} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\beta}{\alpha} f(b) \\ a & 0 & -a \end{pmatrix},$$

su polinomio característico es

$$\begin{aligned} P_\lambda \left(D_g \left(b, \frac{1}{\alpha K} f(b), b \right) \right) &= \det \left(\begin{pmatrix} b f'(b) & \frac{-\alpha\gamma}{\beta} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\beta}{\alpha} f(b) \\ a & 0 & -a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right) \\ &= \det \begin{pmatrix} b f'(b) - \lambda & \frac{-\alpha\gamma}{\beta} & 0 \\ 0 & -\lambda & \frac{\beta}{\alpha} f(b) \\ a & 0 & -(a + \lambda) \end{pmatrix} \\ &= -(a + \lambda) - \det \begin{pmatrix} b f'(b) - \lambda & \frac{-\alpha\gamma}{\beta} \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} - \frac{\beta}{\alpha} f(b) \det \begin{pmatrix} b f'(b) - \lambda & \frac{-\alpha\gamma}{\beta} \\ a & 0 \end{pmatrix} \\ &= -(a + \lambda)(-\lambda(b f'(b) - \lambda)) - f(b) a \gamma. \end{aligned}$$

y su ecuación característica es

$$\begin{aligned} (a + \lambda)(\lambda^2 - b\lambda f(b)) + f(b) a \gamma &= 0 \\ \lambda^3 + \lambda^2 a - \lambda^2 b f'(b) - a b f'(b) \lambda + f(b) \gamma a &= 0 \\ \lambda^3 + (a - b f'(b)) \lambda^2 - (a b f'(b)) \lambda + a \gamma f(b) &= 0. \end{aligned}$$

luego, por el criterio de Routh-Hurwitz, el polinomio es estable si y sólo si a_0, a_1 , y a_2 son coeficientes

mayores que cero y $a_1 a_2 > a_0$, donde

$$\begin{aligned} a_0 &= a\gamma f(b), \\ a_1 &= -abf'(b), \\ a_2 &= a - bf'(b). \end{aligned}$$

Como f es positiva en el intervalo $(0, 1)$ y es decreciente en b , esto implica que $f'(b) < 0$, y así la condición $a_0, a_1, a_2 > 0$ se cumple, por lo que, el polinomio es estable si, y sólo si:

$$(a - bf'(b))(-abf'(b)) > a\gamma f(b),$$

lo que implica que

$$\begin{aligned} -a^2bf'(b) + b^2a(f'(b))^2 &> a\gamma f(b), \\ a - bf'(b) &< \frac{-\gamma f(b)}{bf'(b)}, \end{aligned}$$

así

$$a < bf'(b) - \frac{\gamma f(b)}{bf'(b)}.$$

CONCLUSIONES: Si el lado derecho de la desigualdad es negativo o cero, entonces se tiene que el equilibrio (n_0, p_0, q_0) es asintóticamente estable para todo valor de a , pues $a > 0$. Por lo tanto, hemos demostrado el primer inciso del teorema.

Ahora debemos probar que existe una subvariedad de dimensión 2 en espacio tridimensional de parámetros.

Si suponemos que

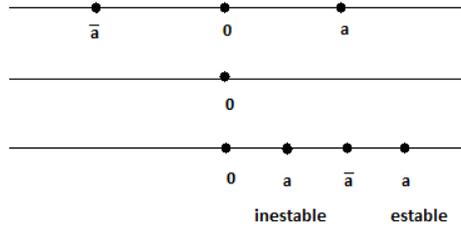
$$bf'(b) - \frac{\gamma f(b)}{bf'(b)} > 0,$$

el criterio de Routh-Hurwitz nos dice que a es un parámetro de bifurcación, con punto de bifurcación:

$$\bar{a} = bf'(b) - \frac{\gamma f(b)}{bf'(b)}$$

Más explícitamente, el punto de equilibrio (n_0, p_0, q_0) pierde su estabilidad para valores de a menores

que \bar{a} , y a medida que a va creciendo, el equilibrio comienza a recuperar su estabilidad. (Ver figura 40)



Fig,40

Definamos ahora,

$$F(\gamma, \beta, a) = \left(\frac{\gamma}{K\beta} f' \left(\frac{\gamma}{K\beta} \right) \right)^2 - \gamma f \left(\frac{\gamma}{K\beta} \right) - a \frac{\gamma}{K\beta} f' \left(\frac{\gamma}{K\beta} \right),$$

y

$$M = \{(\gamma, \beta, a) : F(\gamma, \beta, a) = 0\}.$$

Como $\nabla F(\gamma, \beta, a) \neq 0$ para todo $(\gamma, \beta, a) \in M$, pues, $\frac{\partial F}{\partial a}(\gamma, \beta, a) \neq 0$, entonces M es una subvariedad de dimensión 2 en el espacio tridimensional de parámetros (γ, β, a) , definida de forma implícita por

$$\left(\frac{\gamma}{K\beta} f' \left(\frac{\gamma}{K\beta} \right) \right)^2 - \gamma f \left(\frac{\gamma}{K\beta} \right) - a \frac{\gamma}{K\beta} f' \left(\frac{\gamma}{K\beta} \right) = 0.$$

Además, ella divide al cilindro de base triangular

$$C = \left\{ (\gamma, \beta, a) : 0 < \frac{\gamma}{K\beta} < 1 \right\},$$

en el espacio de parámetros $\{(\gamma, \beta, a) : \gamma, \beta, a \in \mathbb{R}\}$ en dos componentes conexas abiertas

$$C_1 = C \cap \{(\gamma, \beta, a) : a < \bar{a}\} \text{ y } C_2 = C \cap \{(\gamma, \beta, a) : a > \bar{a}\},$$

y la estabilidad del sistema depende de la componente en que son elegidos los parámetros. Más concretamente

Si

$$(\gamma, \beta, a) \in C_2,$$

entonces el equilibrio

(n_0, p_0, q_0) es inestable y si $(\gamma, \beta, a) \in C_1$, el equilibrio es estable.

■

Teorema 83 Si

$$\bar{a} = \frac{\gamma}{K\beta} f' \left(\frac{\gamma}{K\beta} \right) - K\beta \frac{f \left(\frac{\gamma}{K\beta} \right)}{f' \left(\frac{\gamma}{K\beta} \right)} > 0,$$

existe un $\delta > 0$ tal que para cada $a \in (\bar{a} - \delta, \bar{a} + \delta)$ el sistema (9) tiene una única órbita periódica en una vecindad del punto de equilibrio

$$(n_0, p_0, q_0) = \left(\frac{\gamma}{K\beta}, \frac{\gamma}{\alpha K} f \left(\frac{\gamma}{K\beta} \right), \frac{\gamma}{K\beta} \right).$$

Dem. En lo que sigue, lo que haremos es verificar que el sistema (9) satisface las condiciones del Teorema de Andronov-Hopf.

Al reemplazar $a = \bar{a} = b f'(b) - \frac{\gamma f(b)}{b f'(b)}$, en la ecuación característica

$$\lambda^3 + (a - b f'(b)) \lambda^2 - (a b f'(b)) \lambda + a \gamma f(b) = 0,$$

tenemos que:

$$\lambda^3 + \left(b f'(b) - \frac{\gamma f(b)}{b f'(b)} - b f'(b) \right) \lambda^2 - \left(\left(b f'(b) - \frac{\gamma f(b)}{b f'(b)} \right) b f'(b) \right) \lambda + \left(b f'(b) - \frac{\gamma f(b)}{b f'(b)} \right) \gamma f(b) = 0,$$

de donde, simplificando:

$$\lambda^3 - \left(\frac{\gamma f(b)}{b f'(b)} \right) \lambda^2 - ((b f'(b))^2 - \gamma f(b)) \lambda + \left(b f'(b) - \frac{\gamma f(b)}{b f'(b)} \right) \gamma f(b) = 0,$$

la que podemos factorizar como:

$$(\lambda^2 - ((b f'(b))^2 - \gamma f(b))) \left(\lambda - \frac{\gamma f(b)}{b f'(b)} \right) = 0,$$

y como

$$f'(b) < 0 \text{ y } b f'(b) - \frac{\gamma f(b)}{b f'(b)} > 0,$$

entonces

$$-((b f'(b))^2 - \gamma f(b)) > 0,$$

así es que las raíces de

$$\lambda^3 - \left(\frac{\gamma f(b)}{b f'(b)} \right) \lambda^2 - ((b f'(b))^2 - \gamma f(b)) \lambda + \left(b f'(b) - \frac{\gamma f(b)}{b f'(b)} \right) \gamma f(b),$$

son

$$\lambda_0(\bar{a}) = \frac{\gamma f(b)}{b f'(b)} \text{ y } \lambda_{1,2}(\bar{a}) = \pm \omega i,$$

donde

$$\omega = \sqrt{(b f'(b))^2 - \gamma f(b)},$$

donde, además, $\lambda_0(\bar{a}) < 0$ y $\omega > 0$.

Ahora, para aplicar el *Teorema de Andronov-Hopf* a nuestro modelo, debemos probar que la derivada con respecto al parámetro de bifurcación de la parte real de la extensión continua de $\lambda_1(\bar{a})$ es mayor que cero.

Y para ello, denotaremos por $\lambda_1(\bar{a})$ a la raíz de

$$P(\lambda) = \lambda^3 + (a - b f'(b)) \lambda^2 - (a b f'(b)) \lambda + a \gamma f(b),$$

que asume el valor de ωi en \bar{a} , y definamos la función

$$F(\lambda, a) = \lambda^3 + (a - b f'(b)) \lambda^2 - (a b f'(b)) \lambda + a \gamma f(b),$$

la que, recordemos, es el polinomio característico de $D_g(n_0, p_0, q_0)$.

Sabemos que

$$F(\lambda_1(\bar{a}), \bar{a}) = F(\omega i, \bar{a}) = 0,$$

pues

$$\lambda_1(a) \text{ es raíz y } \bar{a} = b f'(b) - \frac{\gamma f(b)}{b f'(b)},$$

además,

$$F'_{\lambda}(\lambda, a) = 3\lambda^2 + 2(a - b f'(b))\lambda - a b f'(b),$$

entonces

$$F'_{\lambda}(\omega i, \bar{a}) = -2\omega^2 - 2\frac{\gamma}{b}\omega i \neq 0. \tag{10}$$

En virtud del *Teorema de la función implícita*, existe un $\delta > 0$ tal que

$$\lambda_1 : (\bar{a} - \delta, \bar{a} + \delta) \rightarrow \mathbb{R},$$

es una función de clase C^1 determinada localmente y de forma única por

$$F(\lambda_1(\bar{a}), a) = 0 \text{ y } \lambda_1(\bar{a}) = \omega i.$$

Además podemos determinar la derivada de λ_1 en \bar{a} por medio de la fórmula

$$\frac{d(\lambda_1(\bar{a}))}{da} = -\frac{F'_a(\omega i, \bar{a})}{F'_{\lambda}(\omega i, \bar{a})}.$$

Observemos que

$$F'_a(\lambda, a) = \lambda^2 - bf'(b)\lambda + \gamma f(b), \quad (11)$$

así

$$F'_a(\omega i, \bar{a}) = -\omega^2 - bf'(b)\omega i + \gamma f(b),$$

por lo tanto, reemplazando (10) y (11) en

$$\frac{d(\lambda_1(\bar{a}))}{da} = -\frac{F'_a(\omega i, \bar{a})}{F'_{\lambda}(\omega i, \bar{a})},$$

tenemos que:

$$\frac{d(\lambda_1(\bar{a}))}{da} = -\frac{F'_a(\omega i, \bar{a})}{F'_{\lambda}(\omega i, \bar{a})} = -\frac{\lambda^2 - bf'(b)\lambda + \gamma f(b)}{-2\omega^2 - 2\frac{\gamma}{b}\omega i},$$

multiplicando por el conjugado

$$-\frac{(\lambda^2 - bf'(b)\lambda + \gamma f(b))(-2\omega^2 + 2\frac{\gamma}{b}\omega i)}{(-2\omega^2 - 2\frac{\gamma}{b}\omega i)(-2\omega^2 + 2\frac{\gamma}{b}\omega i)},$$

obtenemos

$$-\frac{\omega^2 b^2 (f'(b))^2}{2\omega^2 b^2 (f'(b))^2 + 2\gamma^2 (f(b))^2} + i(\dots)$$

donde (...) denota un término que no aporta a nuestros análisis. Lo que implica que

$$\frac{d \operatorname{Re}(\lambda_1(\bar{a}))}{da} = -\frac{\omega^2 b^2 (f'(b))^2}{2\omega^2 b^2 (f'(b))^2 + 2\gamma^2 (f(b))^2},$$

y consecuentemente

$$\frac{d \operatorname{Re}(\lambda_1(\bar{a}))}{da} < 0.$$

Ahora, si el parámetro de bifurcación

$$\mu = \frac{1}{a} - \frac{1}{\bar{a}} \text{ o bien } a(\mu) = \frac{\bar{a}}{1 + \bar{a}\mu},$$

es introducido en el sistema (9) se obtiene:

$$a = \bar{a} \text{ si y sólo si } \mu = 0,$$

$$a > \bar{a} \text{ si y sólo si } \mu < 0,$$

y

$$a < \bar{a} \text{ si y sólo si } \mu > 0.$$

Así, el equilibrio (n_0, p_0, q_0) es *asintóticamente estable* para valores negativos de μ , e *inestable* para valores positivos de μ , perdiendo su estabilidad en $\mu = 0$.

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \frac{d \operatorname{Re}(\lambda_1(a(\mu)))}{d\mu} &= \frac{d \operatorname{Re}(\lambda_1(a))}{da} \frac{da}{d\mu} \\ &= -\frac{\omega^2 b^2 (f'(b))^2}{2\omega^2 b^2 (f'(b))^2 + 2\gamma^2 (f(b))^2} \frac{-\bar{a}^2}{(1 + \bar{a}\mu)^2}. \end{aligned}$$

Así podemos concluir que

$$\left. \frac{d \operatorname{Re}(\lambda_1(a(\mu)))}{d\mu} \right|_{\mu=0} > 0,$$

lo que verifica las hipótesis del teorema de *Andronov-Hopf* para nuestro modelo.

Por lo tanto, el sistema (9) presenta una órbita periódica cuando $a \in (\bar{a} - \delta, \bar{a} + \delta)$, esto es, cuando μ pertenece a $(-\delta, \delta)$ con δ lo suficientemente pequeño. ■

Ahora nuestro objetivo es determinar la estabilidad de la órbita periódica del sistema, generada por la bifurcación de Hopf.

Teorema 84 *Bajo las hipótesis del teorema precedente, si se satisface que*

$$\bar{a} > \frac{\gamma}{K\beta} f' \left(\frac{\gamma}{K\beta} \right) - K\beta \frac{f \left(\frac{\gamma}{K\beta} \right)}{f' \left(\frac{\gamma}{K\beta} \right)} > 0 \quad y \quad G_4 > 0,$$

donde

$$\begin{aligned}
G_4 = & \frac{1}{8\beta^3\gamma^2k^3(\beta^4F^2k^4 + 4\beta^2\gamma FG^2k^2 - 4\gamma^2G^4)(\beta^4F^2k^4 + \beta^2\gamma FG^2k^2 - \gamma^2G^4)^2} * \\
& (8Fk^2\beta^2\gamma^{10}G^{15} + 4FHK\beta\gamma^{11}G^{14} - 4Fk^3\beta\gamma^{10}G^{14} - 4FH^2\gamma^{12}G^{13} - 4FHK^2\gamma^{11}G^{13} \\
& - 16F^2k^4\beta^4\gamma^9G^{13} + 16k^4\beta^4\gamma^7G^{13} - 6F^2Hk^3\beta^3\gamma^{10}G^{12} + 8F^2k^5\beta^3\gamma^9G^{12} \\
& + 16Hk^3\beta^3\gamma^8G^{12} + 10F^2H^2k^2\beta^2\gamma^{11}G^{11} + 8F^2Hk^4\beta^2\gamma^{10}G^{11} + 4H^2k^2\beta^2\gamma^9G^{11} \\
& - 32Fk^6\beta^6\gamma^6G^{11} + 16k^6\beta^6\gamma^4G^{11} - F^3Hk^5\beta^5\gamma^9G^{10} - 8F^3k^7\beta^5\gamma^8G^{10} \\
& + 4Fk^4S\beta^4\gamma^8G^{10} - FHk^5\beta^5\gamma^7G^{10} - 8Fk^7\beta^5\gamma^6G^{10} + 16Hk^5\beta^5\gamma^5G^{10} \\
& - F^3H^2k^4\beta^4\gamma^{10}G^9 + 4F^3Hk^6\beta^4\gamma^9G^9 + 4F^3k^8\beta^4\gamma^8G^9 + 8F^4k^8\beta^8\gamma^7G^9 \\
& - 12FHK^6\beta^4\gamma^7G^9 + 4Fk^8\beta^4\gamma^6G^9 + 4H^2k^4\beta^4\gamma^6G^9 + 16F^2k^8\beta^8\gamma^5G^9 \\
& - 24Fk^8\beta^8\gamma^3G^9 + F^4Hk^7\beta^7\gamma^8G^8 + 12F^4k^9\beta^7\gamma^7G^8 - 4F^2k^6S\beta^6\gamma^7G^8 \\
& - 12F^2Hk^7\beta^7\gamma^6G^8 + 2F^2k^9\beta^7\gamma^5G^8 - 20FHK^7\beta^7\gamma^4G^8 - 7F^4H^2k^6\beta^6\gamma^9G^7 \\
& - 14F^4Hk^8\beta^6\gamma^8G^7 - 8F^4k^{10}\beta^6\gamma^7G^7 + 3F^2H^2k^6\beta^6\gamma^7G^7 + 12F^2Hk^8\beta^6\gamma^6G^7 \\
& - 8F^2k^{10}\beta^6\gamma^5G^7 - 4FH^2k^6\beta^6\gamma^5G^7 + 8F^3k^{10}\beta^{10}\gamma^4G^7 - 4F^2k^{10}\beta^{10}\gamma^2G^7 \\
& - F^5Hk^9\beta^9\gamma^7G^6 - 9F^3k^8S\beta^8\gamma^6G^6 - 16F^3Hk^9\beta^9\gamma^5G^6 + 10F^3k^{11}\beta^9\gamma^4G^6 \\
& - 12F^2Hk^9\beta^9\gamma^3G^6 - 8F^2k^{11}\beta^9\gamma^2G^6 - F^5H^2k^8\beta^8\gamma^8G^5 + F^5Hk^{10}\beta^8\gamma^7G^5 \\
& - 6F^3H^2k^8\beta^8\gamma^6G^5 + F^3Hk^{10}\beta^8\gamma^5G^5 + 4F^3k^{12}\beta^8\gamma^4G^5 - 5F^2H^2k^8\beta^8\gamma^4G^5 \\
& - 10F^4k^{12}\beta^{12}\gamma^3G^5 - 4F^2Hk^{10}\beta^8\gamma^3G^5 + 10F^3k^{12}\beta^{12}\gamma G^5 - 8F^6k^{13}\beta^{11}\gamma^5G^4 \\
& + 4F^4k^{10}S\beta^{10}\gamma^5G^4 - 8F^4Hk^{11}\beta^{11}\gamma^4G^4 + 13F^3Hk^{11}\beta^{11}\gamma^2G^4 + 8F^3k^{13}\beta^{11}\gamma G^4 \\
& + 2F^4k^{14}\beta^{14}G^3 + 7F^6Hk^{12}\beta^{10}\gamma^6G^3 + 4F^6k^{14}\beta^{10}\gamma^5G^3 - 7F^4H^2k^{10}\beta^{10}\gamma^5G^3 \\
& + 2F^4Hk^{12}\beta^{10}\gamma^4G^3 + 4F^3H^2k^{10}\beta^{10}\gamma^3G^3 + 4F^3Hk^{12}\beta^{10}\gamma^2G^3 + 2F^4k^{15}\beta^{13}G^2 \\
& + 6F^5k^{12}S\beta^{12}\gamma^4G^2 + 17F^5Hk^{13}\beta^{13}\gamma^3G^2 - 2F^5k^{15}\beta^{13}\gamma^2G^2 + 3F^4Hk^{13}\beta^{13}\gamma G^2 \\
& + F^7Hk^{14}\beta^{12}\gamma^5G - F^5H^2k^{12}\beta^{12}\gamma^4G + F^5Hk^{14}\beta^{12}\gamma^3G + F^4H^2k^{12}\beta^{12}\gamma^2G \\
& + F^4Hk^{14}\beta^{12}\gamma G + F^6k^{14}S\beta^{14}\gamma^3 + 4F^6Hk^{15}\beta^{15}\gamma^2).
\end{aligned}$$

entonces existe un $\delta > 0$ tal que para cada $a \in (\bar{a} - \delta, \bar{a})$ el sistema (9) tiene una única órbita periódica en una vecindad del punto de equilibrio

$$(n_0, p_0, q_0) = \left(\frac{\gamma}{K\beta}, \frac{\gamma}{\alpha K} f\left(\frac{\gamma}{K\beta}\right), \frac{\gamma}{K\beta} \right),$$

y la correspondiente solución periódica es asintóticamente orbitalmente estable.

Por otro lado si

$$\bar{a} > \frac{\gamma}{K\beta} f' \left(\frac{\gamma}{K\beta} \right) - K\beta \frac{f \left(\frac{\gamma}{K\beta} \right)}{f' \left(\frac{\gamma}{K\beta} \right)} > 0 \quad y \quad G_4 < 0 ,$$

entonces existe un $\delta > 0$ tal que para cada $a \in (\bar{a}, \bar{a} + \delta)$ el mismo sistema tiene una única órbita periódica en una vecindad del mismo punto de equilibrio exterior y la correspondiente solución periódica es asintóticamente orbitalmente inestable.

Dem. Primero, trasladaremos el punto de equilibrio (n_0, p_0, q_0) al origen, lo que nos permitirá facilitar cálculos de la variedad central, pues el nuevo punto de equilibrio será $(0, 0, 0)$.

Luego haremos un cambio de variables adecuado al sistema:

$$\begin{cases} \dot{n} = nf(n) - \alpha Knp \\ \dot{p} = -\gamma p + \beta Kpq \\ \dot{q} = a(n - q) \end{cases} ,$$

obteniendo un nuevo sistema, equivalente en nuevas coordenadas.

Entonces, sean

$$\begin{aligned} x &= n - n_0 = n - b, \\ y &= p - p_0 = p - \frac{1}{K\alpha} f(b), \\ z &= q - q_0 = q - b. \end{aligned}$$

Así

$$n = x + b, \quad p = y + \frac{1}{K\alpha} f(b), \quad y \quad q = z + b.$$

Reemplazando en nuestro sistema, considerando $\mu = 0$, es decir, $a = \bar{a}$, obtenemos

$$\begin{aligned} \begin{cases} \dot{n} = nf(n) - \alpha Knp \\ \dot{p} = -\gamma p + \beta Kpq \\ \dot{q} = \bar{a}(n - q) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = (x + b)f(x + b) - \alpha K(x + b) \left(y + \frac{1}{K\alpha} f(b) \right) \\ \dot{y} = -\gamma \left(y + \frac{1}{K\alpha} f(b) \right) + \beta K \left(y + \frac{1}{K\alpha} f(b) \right) (z + b) \\ \dot{z} = \bar{a}((x + b) - (z + b)) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = (x + b)f(x + b) - \alpha K(x + b) \left(y + \frac{1}{K\alpha} f(b) \right) \\ \dot{y} = -\gamma \left(y + \frac{1}{K\alpha} f(b) \right) + \beta K \left(y + \frac{1}{K\alpha} f(b) \right) (z + b) \\ \dot{z} = \bar{a}(x - z) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = (x + b)f(x + b) - \alpha K(x + b) \left(y + \frac{1}{K\alpha} f(b) \right) \\ \dot{y} = -\gamma \left(y + \frac{1}{K\alpha} f(b) \right) + \beta K \left(y + \frac{1}{K\alpha} f(b) \right) (z + b) \\ \dot{z} = \left(bf'(b) - \frac{\gamma f(b)}{bf'(b)} \right) (x - z) \end{cases} . \end{aligned}$$

Procedamos a calcular, los correspondientes espacios propios asociados a los valores propios:

i) $\lambda_0(\bar{a}) = \frac{\gamma f(b)}{bf'(b)} < 0$.

La matriz $D_g(n_0, p_0, q_0)$ en el punto $a = \bar{a} = bf'(b) - \frac{\gamma f(b)}{bf'(b)}$ es

$$D_g(n_0, p_0, q_0) = \begin{pmatrix} bf'(b) & \frac{-\alpha\gamma}{\beta} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\beta}{\alpha}f(b) \\ a & 0 & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bf'(b) & \frac{-\alpha\gamma}{\beta} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\beta}{\alpha}f(b) \\ bf'(b) - \frac{\gamma f(b)}{bf'(b)} & 0 & -\left(bf'(b) - \frac{\gamma f(b)}{bf'(b)}\right) \end{pmatrix} := A$$

Y la matriz:

$$\begin{aligned} A - \lambda_0(\bar{a})I_3 &= \begin{pmatrix} bf'(b) & \frac{-\alpha\gamma}{\beta} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\beta}{\alpha}f(b) \\ bf'(b) - \frac{\gamma f(b)}{bf'(b)} & 0 & -\left(bf'(b) - \frac{\gamma f(b)}{bf'(b)}\right) \end{pmatrix} - \frac{\gamma f(b)}{bf'(b)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} bf'(b) - \frac{\gamma f(b)}{bf'(b)} & \frac{-\alpha\gamma}{\beta} & 0 \\ 0 & -\frac{\gamma f(b)}{bf'(b)} & \frac{\beta}{\alpha}f(b) \\ bf'(b) - \frac{\gamma f(b)}{bf'(b)} & 0 & -bf'(b) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

luego, el vector propio asociado al valor propio $\lambda_0(\bar{a})$ de la matriz A cumple la ecuación característica

$$\begin{pmatrix} bf'(b) - \frac{\gamma f(b)}{bf'(b)} & \frac{-\alpha\gamma}{\beta} & 0 \\ 0 & -\frac{\gamma f(b)}{bf'(b)} & \frac{\beta}{\alpha}f(b) \\ bf'(b) - \frac{\gamma f(b)}{bf'(b)} & 0 & -bf'(b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

es decir

$$\begin{cases} \left(bf'(b) - \frac{\gamma f(b)}{bf'(b)}\right)v_1 - \frac{\alpha\gamma}{\beta}v_2 = 0 \\ -\frac{\gamma f(b)}{bf'(b)}v_2 + \frac{\beta}{\alpha}f(b)v_3 = 0 \\ \left(bf'(b) - \frac{\gamma f(b)}{bf'(b)}\right)v_1 - bf'(b)v_3 = 0, \end{cases}$$

luego, despejando variables adecuadas, tenemos que:

$$\begin{pmatrix} \frac{(bf'(b))^2}{\gamma f(b) - (bf'(b))^2} \\ -\frac{\beta bf'(b)}{\alpha\gamma} \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Luego, reemplazando $\omega^2 = \gamma f(b) - (bf'(b))^2$, el espacio propio correspondiente al vector propio $\lambda_0(\bar{a})$ es:

$$E^0 = \left\langle \begin{pmatrix} \frac{(bf'(b))^2}{\omega^2} \\ -\frac{\beta bf'(b)}{\alpha\gamma} \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Del mismo modo, operando con los valores propios $\lambda_{1,2}(\bar{a}) = \pm\omega i$, obtenemos el vector propio complejo:

$$\begin{pmatrix} \frac{\gamma\omega f(b) - (b\gamma f(b)f'(b))i}{b^2(f'(b))^2\omega + \omega^3} \\ -\frac{\beta f(b)}{\omega\alpha}i \\ 1 \end{pmatrix},$$

luego, simplificando y utilizando

$$\omega = \sqrt{(bf'(b))^2 - \gamma f(b)},$$

obtenemos el espacio propio E^1 asociado al valor propio $\lambda_1(\bar{a}) = \omega i$:

$$E^1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{b}{\omega}f'(b) \\ -\frac{\beta}{\alpha\omega}f(b) \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

y tomando

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{b}{\omega}f'(b) \\ -\frac{\beta}{\alpha\omega}f(b) \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{b^2(f'(b))^2}{\omega^2} \\ -\frac{b\beta}{\gamma\alpha}f'(b) \\ -1 \end{pmatrix} \right\},$$

como una base de \mathbb{R}^3 . Si Ca es la base canónica de \mathbb{R}^3 , podemos realizar la siguiente transformación de coordenadas

$$T : (\mathbb{R}^3, Ca) \rightarrow (\mathbb{R}^3, E)$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{b}{\omega}f'(b) & \frac{b^2(f'(b))^2}{\omega^2} \\ 0 & -\frac{\beta}{\alpha\omega}f(b) & -\frac{b\beta}{\gamma\alpha}f'(b) \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

o equivalentemente

$$x = x_1 - \frac{b}{\omega}f'(b)x_2 + \left(\frac{b^2(f'(b))^2}{\omega^2}\right)x_3,$$

$$y = -\frac{\beta}{\alpha\omega}f(b)x_2 - \frac{b\beta}{\gamma\alpha}f'(b)x_3,$$

$$z = x_1 - x_3,$$

que transforma nuestro sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = (x+b)f(x+b) - \alpha K(x+b) \left(y + \frac{1}{K\alpha}f(b)\right) \\ \dot{y} = -\gamma \left(y + \frac{1}{K\alpha}f(b)\right) + \beta K \left(y + \frac{1}{K\alpha}f(b)\right) (z+b) , \\ \dot{z} = \left(bf'(b) - \frac{\gamma f(b)}{bf'(b)}\right) (x-z) \end{cases}$$

en uno equivalente en base E .

Veamos pues, definamos

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{b}{\omega}f'(b) & \frac{b^2(f'(b))^2}{\omega^2} \\ 0 & -\frac{\beta}{\alpha\omega}f(b) & -\frac{b\beta}{\gamma\alpha}f'(b) \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Y calculando la matriz inversa de B , obtenemos

$$\begin{aligned} B^{-1} &= \frac{\omega^2\gamma}{(f(b))^2\gamma^2 + (f'(b))^2\omega^2} \begin{pmatrix} f(b) & -\frac{\alpha bf'(b)}{\beta} & \frac{1}{\omega^2\gamma}(\gamma f(b) + \omega^2)b^2(f'(b))^2 \\ -\frac{b\omega f'(b)}{\gamma} & -\frac{\gamma\alpha f(b)}{\beta\omega} & \frac{b\omega f'(b)}{\gamma} \\ f(b) & -\frac{\alpha bf'(b)}{\beta} & -f(b) \end{pmatrix} \\ &= C\omega^2\gamma \begin{pmatrix} f(b) & -\frac{\alpha bf'(b)}{\beta} & \frac{1}{\omega^2\gamma}(\gamma f(b) + \omega^2)b^2(f'(b))^2 \\ -\frac{b\omega f'(b)}{\gamma} & -\frac{\gamma\alpha f(b)}{\beta\omega} & \frac{b\omega f'(b)}{\gamma} \\ f(b) & -\frac{\alpha bf'(b)}{\beta} & -f(b) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

donde

$$C^{-1} = (f(b))^2\gamma^2 + (f'(b))^2b^2\omega^2.$$

Por medio de la expansión de Taylor de orden tres,

$$f(x+b) = f(b) + f'(b)x + \frac{1}{2}f''(b)x^2 + \frac{1}{6}f'''(b)x^3,$$

en la ecuación número 1) del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = (x+b)f(x+b) - \alpha K(x+b) \left(y + \frac{1}{K\alpha}f(b)\right) \\ \dot{y} = -\gamma \left(y + \frac{1}{K\alpha}f(b)\right) + \beta K \left(y + \frac{1}{K\alpha}f(b)\right) (z+b) , \\ \dot{z} = \left(bf'(b) - \frac{\gamma f(b)}{bf'(b)}\right) (x-z) \end{cases}$$

pues, es en esta ecuación que tenemos presente la función $f(x+b)$ y x de orden dos, entonces obtenemos

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= (x+b)f(x+b) - K\alpha(x+b) \left(y + \frac{1}{K\alpha}F \right) \\
&= (x+b) \left(F + Gx + \frac{1}{2}Hx^2 + \frac{1}{6}Sx^3 \right) - K\alpha(x+b) \left(y + \frac{1}{K\alpha}F \right) + O(|x|^4) \\
&= (bG)x + \left(G + \frac{b}{2}H \right) x^2 + \left(\frac{1}{2}H + \frac{b}{6}S \right) x^3 - K\alpha xy - K\alpha by + O(|x|^4),
\end{aligned}$$

donde

$$F = f(b), \quad G = f'(b), \quad H = f''(b) \text{ y } S = f'''(b),$$

obteniendo finalmente el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = (bG)x + \left(G + \frac{b}{2}H \right) x^2 + \left(\frac{1}{2}H + \frac{b}{6}S \right) x^3 - K\alpha xy - K\alpha by \\ \dot{y} = \frac{K}{\beta}yz + \frac{\beta}{\alpha}Fz \\ \dot{z} = \left(bG - \frac{\gamma}{b}\frac{F}{G} \right) (x - z) \end{cases}$$

Continuaremos, despejando $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3$ en términos de x_1, x_2, x_3 para obtener un sistema equivalente al anterior, pero en base E .

Primero, notemos que

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = B^{-1} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix},$$

y como \dot{x} , \dot{y} , y \dot{z} son escritos en términos de x, y , y z tal como obtuvimos en el sistema anterior, que a su vez están en términos de x_1, x_2 , y x_3 como en

$$\begin{aligned}
x &= x_1 - \frac{b}{\omega} f'(b)x_2 + \left(\frac{b^2(f'(b))^2}{\omega^2} \right) x_3, \\
y &= -\frac{\beta}{\alpha\omega} f(b)x_2 - \frac{b\beta}{\gamma\alpha} f'(b)x_3, \\
z &= x_1 - x_3,
\end{aligned}$$

es que podemos escribir \dot{x}_1, \dot{x}_2 y \dot{x}_3 en términos de x_1, x_2 , y x_3 , esto es

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} &= B^{-1} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \\ &= C\omega^2\gamma \begin{pmatrix} F & -\frac{\alpha bG}{\beta} & \frac{1}{\omega^2\gamma}(\gamma F + \omega^2)b^2G^2 \\ -\frac{b\omega G}{\gamma} & -\frac{\gamma\alpha F}{\beta\omega} & \frac{b\omega G}{\gamma} \\ F & -\frac{\alpha bG}{\beta} & -F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (bG)x + (G + \frac{b}{2}H)x^2 + (\frac{1}{2}H + \frac{b}{6}S)x^3 - K\alpha xy - K\alpha by \\ \frac{K}{\beta}yz + \frac{\beta}{\alpha}Fz \\ (bG - \frac{\gamma}{b}\frac{F}{G})(x - z) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A \\ \frac{K}{\beta} \left(-\frac{\beta F}{\omega\alpha}x_2 - \frac{b\beta G}{\alpha\gamma}x_3 \right) (x_1 - x_3) + \frac{\beta}{\alpha}F(x_1 - x_3) \\ (bG - \frac{\gamma}{b}\frac{F}{G}) \left(\left(x_1 + \frac{b^2G^2}{\omega^2}x_3 - \frac{bG}{\omega}x_2 \right) - (x_1 - x_3) \right) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

que obtuvimos al reemplazar x, y, z del sistema

$$\begin{cases} x = x_1 - \frac{b}{\omega}f(b)x_2 + \left(\frac{b^2(f(b))^2}{\omega^2} \right) x_3 \\ y = -\frac{\beta}{\alpha\omega}f(b)x_2 - \frac{b\beta}{\gamma\alpha}f(b)x_3 \\ z = x_1 - x_3 \end{cases},$$

y multiplicando luego por

$$\begin{pmatrix} F & -\frac{\alpha bG}{\beta} & \frac{1}{\omega^2\gamma}(\gamma F + \omega^2)b^2G^2 \\ -\frac{b\omega G}{\gamma} & -\frac{\gamma\alpha F}{\beta\omega} & \frac{b\omega G}{\gamma} \\ F & -\frac{\alpha bG}{\beta} & -F \end{pmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned} A &= bG \left(x_1 + \frac{b^2G^2}{\omega^2}x_3 - \frac{bG}{\omega}x_2 \right) + \left(G + \frac{b}{2}H \right) \left(x_1 + \frac{b^2G^2}{\omega^2}x_3 - \frac{bG}{\omega}x_2 \right)^2 + \\ &\quad \left(\frac{1}{2}H + \frac{b}{6}S \right) \left(x_1 + \frac{b^2G^2}{\omega^2}x_3 - \frac{bG}{\omega}x_2 \right)^3 - \\ &\quad K\alpha \left(x_1 + \frac{b^2G^2}{\omega^2}x_3 - \frac{bG}{\omega}x_2 \right) \left(-\frac{\beta F}{\omega\alpha}x_2 - \frac{b\beta G}{\alpha\gamma}x_3 \right) - K\alpha b \left(-\frac{\beta F}{\omega\alpha}x_2 - \frac{b\beta G}{\alpha\gamma}x_3 \right). \end{aligned}$$

Por lo tanto, podemos reescribir el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = (bG)x + \left(G + \frac{b}{2}H\right)x^2 + \left(\frac{1}{2}H + \frac{b}{6}S\right)x^3 - K\alpha xy - K\alpha by \\ \dot{y} = \frac{K}{\beta}yz + \frac{\beta}{\alpha}Fz \\ \dot{z} = \left(bG - \frac{\gamma}{b}\frac{F}{G}\right)(x - z) \end{cases},$$

como

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 = & \omega x_2 + CF\omega^2\gamma \left(G + \frac{1}{2}Hb\right)x_1^2 + \frac{1}{2}CFG\gamma(-2\omega^2 + HGb^3)x_2^2 \\ & + \frac{C\gamma bG^2}{2\omega^2\beta^2}(2\gamma F^2Gb\beta^2 + HFG^2b^4\beta^2 + 2\omega^4)x_3^2 \\ & + \frac{CF\gamma\omega}{b\beta^2}(-2G^2b^2\beta^2 - HGb^3\beta^2 + \gamma Gb + F\gamma\beta^2)x_1x_2 \\ & - \frac{C\gamma FG}{\omega\beta^2}(G^3b^3\beta^2 + HG^2b^4\beta^2 + \gamma\omega^2)x_2x_3 \\ & + \frac{CG\gamma}{\beta^2}(2FG^2b^2\beta^2 + Gb\omega^2 + F\omega^2\beta^2 + FHGb^3\beta^2)x_1x_3 \\ & + \frac{1}{6}CF\omega^2\gamma(3H + Sb)x_1^3 + \frac{1}{2}CFG^2b^2\gamma(3H + Sb)x_1x_2^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 = & -\omega x_1 - \frac{CGb\omega}{\gamma} \left(G + \frac{1}{2}Hb\right)x_1^2 \\ & - \frac{1}{2}CG^2b\omega(-2\omega^2 + HGb^3)x_2^2 \\ & - \frac{CG}{2\omega\beta^2}(HG^4b^6\beta^2 + 2FG^3b^3\beta^2\gamma - 2F\omega^2\gamma^2)x_3^3 \\ & + \frac{C}{b\beta^2}(F^2\gamma^3 - FGb\omega^2\beta^2\gamma + 2G^3b^3\omega^2\beta^2 + HG^2b^4\omega^2\beta^2)x_1x_2 \\ & + \frac{C}{b\beta^2}(-F^2\gamma^3 + G^5b^5\beta^2 + HG^4b^6\beta^2)x_3x_2 \\ & - \frac{CG\omega}{\beta^2}(2G^3b^3\beta^2 + Gb\omega^2\beta^2 - F\gamma^2 + HG^2b^4\beta^2)x_1x_3 \\ & + \frac{1}{6}CG^4b^4(3H + Sb)x_2^3 + \frac{1}{2}CG^2b^2\omega^2(3H + Sb)x_1^2x_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{x}_3 = & \frac{F\gamma}{Gb}x_3 + CF\omega^2\gamma\left(G + \frac{1}{2}Hb\right)x_1^2 \\
& + \frac{1}{2}CFG\gamma(-2\omega^2 + HGb^3)x_2^2 \\
& + \frac{C\gamma bG^2}{2\omega^2\beta^2}(2\gamma F^2Gb\beta^2 + HFG^2b^4\beta^2 + 2\omega^4)x_3^2 \\
& + \frac{CF\gamma\omega}{b\beta^2}(-2G^2b^2\beta^2 - HGb^3\beta^2 + \gamma Gb + F\gamma\beta^2)x_1x_2 \\
& - \frac{C\gamma FG}{\omega\beta^2}(G^3b^3\beta^2 + HFG^2b^4\beta^2 + \gamma\omega^2)x_2x_3 \\
& + \frac{CG\gamma}{\beta^2}(2FG^2b^2\beta^2 + Gb\omega^2 + F\omega^2\beta^2 + FHGb^3\beta^2)x_1x_3 \\
& + \frac{1}{6}CF\omega^2\gamma(3H + Sb)x_1^3 + \frac{1}{2}CFG^2b^2\gamma(3H + Sb)x_1x_2^2.
\end{aligned}$$

Donde hemos omitido los términos de grado tres que no son útiles para el cálculo del segundo coeficiente de Poincaré Liapunov G_4 .

Notemos que interesante es, que en los términos de grado uno de las tres ecuaciones anteriores aparecen involucradas raíces del polinomio

$$\lambda^3 - \left(\frac{\gamma f(b)}{bf'(b)}\right)\lambda^2 - ((bf'(b))^2 - \gamma f(b))\lambda + \left(bf'(b) - \frac{\gamma f(b)}{bf'(b)}\right)\gamma f(b) = 0,$$

y la primera y tercera ecuación tienen parte derecha igual en los términos de grado mayor que uno.

De esta manera, el sistema que reescribimos previamente, puede ser escrito de la forma:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \omega x_2 + U(x_1, x_2, x_3) \\ \dot{x}_2 = -\omega x_1 + V(x_1, x_2, x_3) \\ \dot{x}_3 = \frac{F\gamma}{Gb}x_3 + U(x_1, x_2, x_3), \end{cases} \quad (12)$$

donde U y V están definidas por:

$$\begin{aligned}
U(x_1, x_2, x_3) = & CF\omega^2\gamma(G + \frac{1}{2}Hb)x_1^2 + \frac{1}{2}CFG\gamma(-2\omega^2 + HGb^3)x_2^2 \\
& + \frac{\gamma bG^2C}{2\omega^2\beta^2}(2\gamma F^2Gb\beta^2 + HFG^2b^4\beta^2 + 2\omega^4)x_3^2 \\
& + \frac{F\gamma\omega C}{b\beta^2}(-2G^2b^2\beta^2 - HGb^3\beta^2 + \gamma Gb + F\gamma\beta^2)x_1x_2 \\
& - \frac{\gamma FGC}{\omega\beta^2}(G^3b^3\beta^2 + HG^2b^4\beta^2 + \gamma\omega^2)x_2x_3 \\
& + \frac{G\gamma C}{\beta^2}(2FG^2b^2\beta^2 + Gb\omega^2 + F\omega^2\beta^2 + FHGb^3\beta^2)x_1x_3 \\
& + \frac{1}{6}F\omega^2\gamma C(3H + Sb)x_1^3 + \frac{1}{2}CFG^2b^2\gamma(3H + Sb)x_1x_1^2,
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
V(x_1, x_2, x_3) = & -\frac{Gb\omega C}{\gamma}(G + \frac{1}{2}Hb)x_1^2 - CG^2b\omega(-2\omega^2 + HGb^3)x_2^2 \\
& - \frac{GC}{2\omega\beta^2}(HG^4b^6\beta^2 + 2FG^3b^3\beta^2\gamma - 2F\omega^2\gamma^2)x_3^2 \\
& + \frac{C}{b\beta^2}(F^2Gb\omega^2\beta^2\gamma + 2G^3b^3\omega^2\beta^2 + HG^2b^4\omega^2\beta^2)x_1x_2 \\
& + \frac{C}{b\beta^2}(-F^2\gamma^3 + G^5b^5\beta^2 + HG^4b^6\beta^2)x_3x_2 \\
& - \frac{G\omega C}{\beta^2}(2G^3b^3\beta^2 + Gb\omega^2\beta^2 - F\gamma^2 + HG^2b^4\beta^2)x_1x_3 \\
& + \frac{1}{6}CG^4b^4(3H + Sb)x_2^3 + \frac{1}{2}CG^2b^2\omega^2(3H + Sb)x_1^2x_2.
\end{aligned}$$

En lo que sigue, determinaremos la estabilidad de la órbita periódica del sistema (9) generada por la bifurcación Hopf, para lo cual lo que haremos es restringir el sistema (12) a la variedad central.

Encontremos la sección en $\mu = 0$, de la variedad central M que es caracterizada por ser tangente al espacio central x_1x_2 , esto es, el espacio propio correspondiente a los valores propios $\pm\omega i$ en el origen, el cual es localmente invariante con respecto al flujo del sistema anterior.

Asumiremos por el teorema de la variedad central que su ecuación es de la forma

$$x_3 = h(x_1, x_2),$$

donde

$$h(0, 0) = \frac{dh}{dx_i}(0, 0) = 0, \quad h \in C^k, \quad k \geq 3.$$

Si

$$\frac{dh}{dx_i}(x_1, x_2) = h_{i1}x_2 + h_{i2}x_1 + O(|x|^2), \quad i = 1, 2 \text{ y } x = (x_1, x_2),$$

integrando la igualdad y con la propiedad de continuidad $h_{i1} = h_{i2}$, entonces

$$h(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(h_{11}x_1^2 + 2h_{12}x_1x_2 + h_{22}x_2^2) + O(|x|^3),$$

suponiendo que $(x_1(s), x_2(s), x_3(s))$ es una solución de (12) cerca del origen contenida en M entonces ésta solución se queda en M , puesto que M es invariante, esto es,

$$x_3(s) = h(x_1(s), x_2(s)),$$

y como consecuencia

$$\dot{x}_3(s) - h_{x_1}(x_1(s), x_2(s))\dot{x}_1(s) - h_{x_2}(x_1(s), x_2(s))\dot{x}_2(s) = 0.$$

Usando (12) obtenemos la identidad

$$\begin{aligned} & h(x_1, x_2) \frac{F\gamma}{Gb} + U(x_1, x_2, h(x_1, x_2)) - (h_{11}x_1 + h_{12}x_2 + O(|x|^2))(\omega x_2 + O(|x|^2)) \\ & - (h_{12}x_1 + h_{22}x_2 + O(|x|^2))(-\omega x_1 + O(|x|^2)) \equiv 0. \end{aligned}$$

Omitiendo los términos de grado mayor que dos tenemos que:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(h_{11}x_1^2 + 2h_{12}x_1x_2 + h_{22}x_2^2) \frac{F\gamma}{Gb} + \frac{1}{2}CFG\gamma(-2\omega^2 + HGb^3)x_2^2 + CF\omega^2\gamma(G + \frac{1}{2}Hb)x_1^2 \\ & + \frac{CF\gamma\omega}{b\beta^2}(-2G^2b^2\beta^2 - HGb^3\beta^2 + \gamma Gb + F\gamma\beta^2)x_1x_2 - \omega h_{11}x_1x_2 - \omega h_{12}x_2^2 + \omega h_{12}x_1^2 + \omega h_{22}x_1x_2 = 0, \end{aligned}$$

luego, igualando los coeficientes a cero, obtenemos:

$$\begin{aligned} & F\gamma h_{11} + 2Gb\omega h_{12} + 2CFG^2b\omega^2\gamma + CFGHb^2\omega^2\gamma = 0 \\ & F\gamma h_{22} - 2Gb\omega h_{12} + CFG^3Hb^4\gamma - 2CFG^2b\omega^2\gamma = 0 \\ & F\beta^2\gamma h_{12} - Gb\omega\beta^2 h_{11} + Gb\omega\beta^2 h_{22} + CFG^2b\omega\gamma^2 + CF^2G\omega\beta^2\gamma^2 - 2CFG^3b^2\omega\beta^2\gamma - CFG^2Hb^3\omega\beta^2\gamma = 0, \end{aligned}$$

de donde encontramos finalmente:

$$\begin{aligned} h_{11} &= -\frac{CGb^2\omega^2}{R}(HF^2\beta^2\gamma^2 + 4FG^3b\beta^2\gamma + 4HFG^2b^2\beta^2\gamma - 2FG^2\gamma^2) \\ h_{12} &= -\frac{CFG\omega\gamma}{R}(F^2\beta^2\gamma^2 + FGb\gamma^2 + 2G^2b^2\omega^2\beta^2 - 2G^4b^4\beta^2 - 2HG^3b^5\beta^2) \\ h_{22} &= -\frac{CG^2b}{R}(2FGb\omega^2\gamma^2 - 4G^2b^2\omega^4\beta^2 - 4G^4b^4\omega^2\beta^2 + F^2GHb^3\beta^2\gamma^2), \end{aligned}$$

donde

$$R = F^2\beta^2\gamma^2 + 4G^2b^2\omega^2\beta^2.$$

Así, para restringir el sistema (12) a la variedad central M introduciremos las coordenadas

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_3 - h(x_1, x_2) \end{cases}.$$

Con esta transformación de coordenadas, como $x_3 = y_3 + h(x_1, x_2)$, pero $y_1 = x_1$ y $y_2 = x_2$ entonces, $x_3 = y_3 + h(y_1, y_2)$, la ecuación de M es $y_3 = 0$, es decir, el plano y_1y_2 . Por esta transformación de coordenadas el sistema precedente se transforma en:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \omega y_2 + U(y_1, y_2, y_3 + h(y_1, y_2)) \\ \dot{y}_2 = -\omega y_1 + V(y_1, y_2, y_3 + h(y_1, y_2)) \\ \dot{y}_3 = \frac{F\gamma}{Gb}(y_3 + h(y_1, y_2)) + U(y_1, y_2, y_3 + h(y_1, y_2)) \end{cases}.$$

Restringiendo el sistema a la variedad central M podemos asumir que $y_3 = 0$ (restricción a la variedad) y tomando en cuenta que $\dot{y}_3 = 0$, pues

$$\dot{x}_3(s) - h_{x_1}(x_1(s), x_2(s))\dot{x}_1(s) - h_{x_2}(x_1(s), x_2(s))\dot{x}_2(s) = 0,$$

obtenemos el sistema bidimensional

$$\begin{aligned}
\dot{y}_1 &= \omega y_2 + CF\omega^2\gamma\left(G + \frac{1}{2}Hb\right)y_1^2 \\
&+ \frac{1}{2}CFG\gamma(-2\omega^2 + HGb^3)y_2^2 \\
&+ \frac{CF\gamma\omega}{b\beta^2}(-2G^2b^2\beta^2 - HGb^3\beta^2 + \gamma Gb + F\gamma\beta^2)y_1y_2 \\
&- \frac{C\gamma FG}{2\omega\beta^2}(G^3b^3\beta^2 + HG^2b^4\beta^2 + \gamma\omega^2)(h_{11}y_1^2 + 2h_{12}y_1y_2 + h_{22}y_2^2)y_2 \\
&+ \frac{CG\gamma}{2\beta^2}(2FG^2b^2\beta^2 + Gb\omega^2 + F\omega^2\beta^2 + FHGb^3\beta^2)(h_{11}y_1^2 + 2h_{12}y_1y_2 + h_{22}y_2^2)y_1 \\
&+ \frac{1}{6}F\omega^2\gamma(3H + Sb)y_1^3 + \frac{1}{2}FG^2b^2\gamma(3H + Sb)y_1y_2^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{y}_2 &= -\omega y_1 - \frac{CGb\omega}{\gamma}\left(G + \frac{1}{2}Hb\right)y_1^2 - \frac{1}{2}CG^2b\omega(-2\omega^2 + HGb^3)y_2^2 \\
&+ \frac{C}{b\beta^2}(F^2\gamma^3 - FGb\omega^2\beta^2\gamma + 2G^3b^3\omega^2\beta^2 + HG^2b^4\omega^2\beta^2)y_1y_2 \\
&+ \frac{1}{2b\beta^2}(-F^2\gamma^3 + G^5b^5\beta^2 + HG^4b^6\beta^2)(h_{11}y_1^2 + 2h_{12}y_1y_2 + h_{22}y_2^2)y_2 \\
&- \frac{CG\omega}{2\beta^2}(2G^3b^3\beta^2 + Gb\omega^2\beta^2 - F\gamma^2 + HG^2b^4\beta^2)(h_{11}y_1^2 + 2h_{12}y_1y_2 + h_{22}y_2^2)y_1 \\
&+ \frac{1}{6}CG^4b^4(3H + Sb)y_2^3 + \frac{1}{2}CG^2b^2\omega^2(3H + Sb)y_1^2y_2,
\end{aligned}$$

que podemos denotar como:

$$\begin{aligned}
\dot{y}_1 &= -\omega y_2 + f(y_1, y_2, \mu), \\
\dot{y}_2 &= \omega y_1 + g(y_1, y_2, \mu),
\end{aligned}$$

en $\mu = 0$.

O equivalentemente:

$$\begin{aligned}
\dot{y}_1 &= -\omega y_2 + g_{12}(y_1, y_2, 0) + g_{13}(y_1, y_2, 0) + O((y_1^2 + y_2^2)^{\frac{3}{2}}), \\
\dot{y}_2 &= \omega y_1 + g_{22}(y_1, y_2, 0) + g_{23}(y_1, y_2, 0) + O((y_1^2 + y_2^2)^{\frac{3}{2}}),
\end{aligned}$$

donde g_{12} y g_{22} son polinomios homogéneos de grado dos, y g_{13} y g_{23} son polinomios homogéneos de

grado tres dados por:

$$\begin{aligned}
g_{12}(y_1, y_2, 0) &= a_1 y_1^2 + a_2 y_1 y_2 + a_3 y_2^2, \\
g_{13}(y_1, y_2, 0) &= b_1 y_1^3 + b_2 y_1^2 y_2 + b_3 y_1 y_2^2 + b_4 y_2^3, \\
g_{22}(y_1, y_2, 0) &= c_1 y_1^2 + c_2 y_1 y_2 + c_3 y_2^2, \\
g_{23}(y_1, y_2, 0) &= d_1 y_1^2 + d_2 y_1^2 y_2 + d_3 y_1 y_2^2 + d_4 y_2^3.
\end{aligned}$$

Luego, por el Teorema de Bautin Andronov-Leontovich-Gordon-Mayer, el segundo coeficiente de Poincaré-Liapunov del sistema dos dimensional, está dado por

$$G_4 = \frac{1}{4}(3b_1 + b_3 + d_2 + 3d_4) + \frac{1}{4\omega}(a_1 a_2 + a_2 a_3 - c_1 c_2 - c_2 c_3 + 2(a_3 c_3 - a_1 c_1)),$$

donde

$$\begin{aligned}
a_1 &= CF\omega^2\gamma(G + \frac{1}{2}Hb). \\
a_2 &= \frac{CF\gamma\omega}{b\beta^2}(-2G^2b^2\beta^2 - HGb^3\beta^2 + \gamma Gb + F\gamma\beta^2). \\
a_3 &= \frac{1}{2}CFG\gamma(-2\omega^2 + HGb^3). \\
c_1 &= -\frac{CGb\omega}{\gamma}(G + \frac{1}{2}Hb). \\
c_2 &= \frac{C}{b\beta^2}(F^2\gamma^3 - FGb\omega^2\beta^2\gamma + 2G^3b^3\omega^2\beta^2 + HG^2b^4\omega^2\beta^2). \\
c_3 &= -\frac{1}{2}CG^2b\omega(-2\omega^2 + HGb^3). \\
b_1 &= \frac{CG\gamma}{2\beta^2}(2FG^2b^2\beta^2 + Gb\omega^2 + F\omega^2\beta^2 + FHGb^3\beta^2)h_{11} + \frac{1}{6}CF\omega^2\gamma(3H + Sb). \\
d_2 &= \frac{1}{2b\beta^2}(-F^2\gamma^3 + G^5b^5\beta^2 + HG^4b^6\beta^2)h_{11} + \frac{1}{2}CG^2b^2\omega^2(3H + Sb) \\
&\quad - \frac{CG\omega}{2\beta^2}(2G^3b^3\beta^2 + Gb\omega^2\beta^2 - F\gamma^2 + HG^2b^4\beta^2)2h_{12}. \\
b_3 &= -\frac{C\gamma FG}{2\omega\beta^2}(G^3b^3\beta^2 + HG^2b^4\beta^2 + \gamma\omega^2)2h_{12} + \frac{1}{2}CFG^2b^2\gamma(3H + Sb) \\
&\quad + \frac{CG\gamma}{2\beta^2}(2FG^2b^2\beta^2 + Gb\omega^2 + F\omega^2\beta^2 + FHGb^3\beta^2)h_{22}. \\
d_4 &= \frac{1}{2b\beta^2}(-F^2\gamma^3 + G^5b^5\beta^2 + HG^4b^6\beta^2)h_{22} + \frac{1}{6}CG^4b^4(3H + Sb).
\end{aligned}$$

Y

$$F = f(b), \quad G = f'(b), \quad H = f''(b) \quad y \quad S = f'''(b).$$

Así, usando el Software Mathematica, encontramos

$$\begin{aligned}
G_4 = & \frac{1}{8\beta^3\gamma^2k^3(\beta^4F^2k^4 + 4\beta^2\gamma FG^2k^2 - 4\gamma^2G^4)(\beta^4F^2k^4 + \beta^2\gamma FG^2k^2 - \gamma^2G^4)^2} * \\
& (8Fk^2\beta^2\gamma^{10}G^{15} + 4FHk\beta\gamma^{11}G^{14} - 4Fk^3\beta\gamma^{10}G^{14} - 4FH^2\gamma^{12}G^{13} - 4FHk^2\gamma^{11}G^{13} \\
& - 16F^2k^4\beta^4\gamma^9G^{13} + 16k^4\beta^4\gamma^7G^{13} - 6F^2Hk^3\beta^3\gamma^{10}G^{12} + 8F^2k^5\beta^3\gamma^9G^{12} \\
& + 16Hk^3\beta^3\gamma^8G^{12} + 10F^2H^2k^2\beta^2\gamma^{11}G^{11} + 8F^2Hk^4\beta^2\gamma^{10}G^{11} + 4H^2k^2\beta^2\gamma^9G^{11} \\
& - 32Fk^6\beta^6\gamma^6G^{11} + 16k^6\beta^6\gamma^4G^{11} - F^3Hk^5\beta^5\gamma^9G^{10} - 8F^3k^7\beta^5\gamma^8G^{10} \\
& + 4Fk^4S\beta^4\gamma^8G^{10} - FHk^5\beta^5\gamma^7G^{10} - 8Fk^7\beta^5\gamma^6G^{10} + 16Hk^5\beta^5\gamma^5G^{10} \\
& - F^3H^2k^4\beta^4\gamma^{10}G^9 + 4F^3Hk^6\beta^4\gamma^9G^9 + 4F^3k^8\beta^4\gamma^8G^9 + 8F^4k^8\beta^8\gamma^7G^9 \\
& - 12FHk^6\beta^4\gamma^7G^9 + 4Fk^8\beta^4\gamma^6G^9 + 4H^2k^4\beta^4\gamma^6G^9 + 16F^2k^8\beta^8\gamma^5G^9 \\
& - 24Fk^8\beta^8\gamma^3G^9 + F^4Hk^7\beta^7\gamma^8G^8 + 12F^4k^9\beta^7\gamma^7G^8 - 4F^2k^6S\beta^6\gamma^7G^8 \\
& - 12F^2Hk^7\beta^7\gamma^6G^8 + 2F^2k^9\beta^7\gamma^5G^8 - 20FHk^7\beta^7\gamma^4G^8 - 7F^4H^2k^6\beta^6\gamma^9G^7 \\
& - 14F^4Hk^8\beta^6\gamma^8G^7 - 8F^4k^{10}\beta^6\gamma^7G^7 + 3F^2H^2k^6\beta^6\gamma^7G^7 + 12F^2Hk^8\beta^6\gamma^6G^7 \\
& - 8F^2k^{10}\beta^6\gamma^5G^7 - 4FH^2k^6\beta^6\gamma^5G^7 + 8F^3k^{10}\beta^{10}\gamma^4G^7 - 4F^2k^{10}\beta^{10}\gamma^2G^7 \\
& - F^5Hk^9\beta^9\gamma^7G^6 - 9F^3k^8S\beta^8\gamma^6G^6 - 16F^3Hk^9\beta^9\gamma^5G^6 + 10F^3k^{11}\beta^9\gamma^4G^6 \\
& - 12F^2Hk^9\beta^9\gamma^3G^6 - 8F^2k^{11}\beta^9\gamma^2G^6 - F^5H^2k^8\beta^8\gamma^8G^5 + F^5Hk^{10}\beta^8\gamma^7G^5 \\
& - 6F^3H^2k^8\beta^8\gamma^6G^5 + F^3Hk^{10}\beta^8\gamma^5G^5 + 4F^3k^{12}\beta^8\gamma^4G^5 - 5F^2H^2k^8\beta^8\gamma^4G^5 \\
& - 10F^4k^{12}\beta^{12}\gamma^3G^5 - 4F^2Hk^{10}\beta^8\gamma^3G^5 + 10F^3k^{12}\beta^{12}\gamma G^5 - 8F^6k^{13}\beta^{11}\gamma^5G^4 \\
& + 4F^4k^{10}S\beta^{10}\gamma^5G^4 - 8F^4Hk^{11}\beta^{11}\gamma^4G^4 + 13F^3Hk^{11}\beta^{11}\gamma^2G^4 + 8F^3k^{13}\beta^{11}\gamma G^4 \\
& + 2F^4k^{14}\beta^{14}G^3 + 7F^6Hk^{12}\beta^{10}\gamma^6G^3 + 4F^6k^{14}\beta^{10}\gamma^5G^3 - 7F^4H^2k^{10}\beta^{10}\gamma^5G^3 \\
& + 2F^4Hk^{12}\beta^{10}\gamma^4G^3 + 4F^3H^2k^{10}\beta^{10}\gamma^3G^3 + 4F^3Hk^{12}\beta^{10}\gamma^2G^3 + 2F^4k^{15}\beta^{13}G^2 \\
& + 6F^5k^{12}S\beta^{12}\gamma^4G^2 + 17F^5Hk^{13}\beta^{13}\gamma^3G^2 - 2F^5k^{15}\beta^{13}\gamma^2G^2 + 3F^4Hk^{13}\beta^{13}\gamma G^2 \\
& + F^7Hk^{14}\beta^{12}\gamma^5G - F^5H^2k^{12}\beta^{12}\gamma^4G + F^5Hk^{14}\beta^{12}\gamma^3G + F^4H^2k^{12}\beta^{12}\gamma^2G \\
& + F^4Hk^{14}\beta^{12}\gamma G + F^6k^{14}S\beta^{14}\gamma^3 + 4F^6Hk^{15}\beta^{15}\gamma^2).
\end{aligned}$$

Concluyendo así, que las (órbitas periódicas)del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = (x + b)f(x + b) - \alpha K(x + b) \left(y + \frac{1}{K\alpha}f(b)\right) \\ \dot{y} = -\gamma \left(y + \frac{1}{K\alpha}f(b)\right) + \beta K \left(y + \frac{1}{K\alpha}f(b)\right) (z + b) , \\ \dot{z} = \left(bf(b) - \frac{\gamma f(b)}{bf(b)}\right) (x - z) \end{cases}$$

obtenidas según el parámetro de bifurcación μ , donde M es la variedad central, son estables cuando $G_4 < 0$, e inestables cuando $G_4 > 0$.

Así, podemos afirmar, en el caso en que $G_4 > 0$ que las trayectorias relativas según el parámetro de bifurcación μ son atraídas por la órbita periódica, y si $G_4 < 0$ ellas son repelidas. ■

Ejemplo 85 *A través del siguiente ejemplo, mostraremos paso a paso el comportamiento de las órbitas y su estabilidad, tanto en el sistema tridimensional*

$$\begin{cases} \dot{n} = nf(n) - \frac{\alpha Knp}{\epsilon} \\ \dot{p} = \frac{-\gamma p}{\epsilon} + \frac{\beta Kpq}{\epsilon} \\ \dot{q} = \frac{a(n-q)}{\epsilon} \end{cases},$$

su equivalente en la base de los vectores propios, y finalmente su restricción a la variedad central.

Recordemos para ello que, para que el sistema tenga una bifurcación de Hopf se deben de cumplir las siguientes hipótesis sobre la función f y los parámetros:

$$\alpha, \beta, \gamma, \epsilon, K > 0; \quad 0 \leq b \leq 1; \quad f(n) > 0, \quad n \in (0, 1); \quad f(1) = 0; \quad f'(b) < 0; \quad y \quad \bar{a} = b\epsilon f'(b) - \frac{\gamma}{b} \frac{f(b)}{f'(b)} > 0.$$

Consideremos pues para el ejemplo el crecimiento logístico hipergeométrico

$$f(n) = (1 - n)^2,$$

y

$$K = 2, \quad \alpha = 1, \quad \beta = 1, \quad \epsilon = \frac{1}{2}, \quad y \quad \gamma = 1.$$

Luego, el sistema

$$\begin{cases} \dot{n} = nf(n) - \frac{\alpha Knp}{\epsilon} \\ \dot{p} = \frac{-\gamma p}{\epsilon} + \frac{\beta Kpq}{\epsilon} \\ \dot{q} = \frac{a(n-q)}{\epsilon} \end{cases},$$

se transforma en

$$\begin{cases} \dot{n} = n(1 - n)^2 - 4np \\ \dot{p} = -2p + 4pq \\ \dot{q} = 2a(n - q). \end{cases}.$$

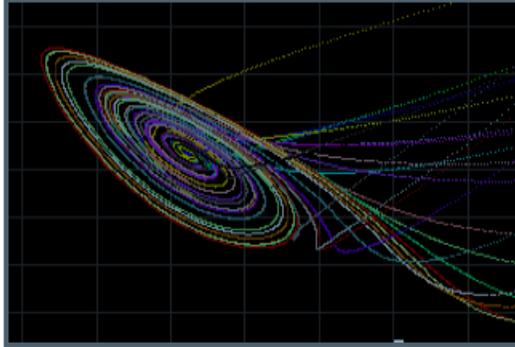
Sabemos que la bifurcación ocurre en $\mu = 0$ o equivalentemente en $\bar{a} = \frac{1}{4}$.

Los siguientes gráficos (ver figuras 41, 42 y 43) muestran el comportamiento del flujo y se puede observar que el punto de equilibrio $(\frac{1}{2}, \frac{1}{16}, \frac{1}{2})$ es asintóticamente estable para valores negativos de μ ,

inestables para valores positivos de μ , y muestra la existencia de una órbita periódica en $\mu = 0$.

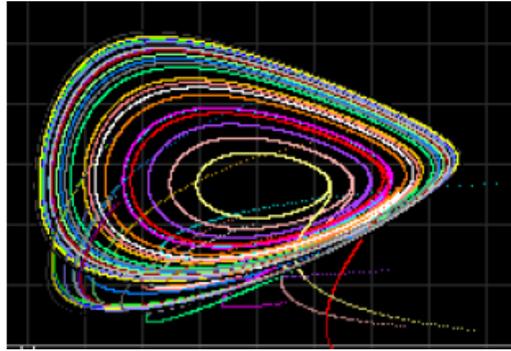
Recordemos que

$$a(\mu) = \frac{\bar{a}}{1 + \bar{a}\mu} = \frac{1}{\mu + 4},$$



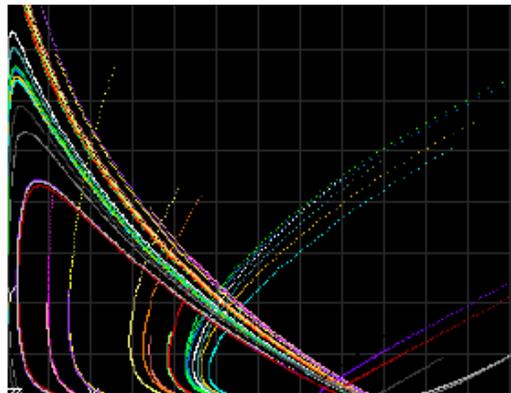
$$\mu = -2 \text{ o } a = \frac{1}{2}$$

Fig,41



$$\mu = 0 \text{ o } a = \frac{1}{4}$$

Fig,42



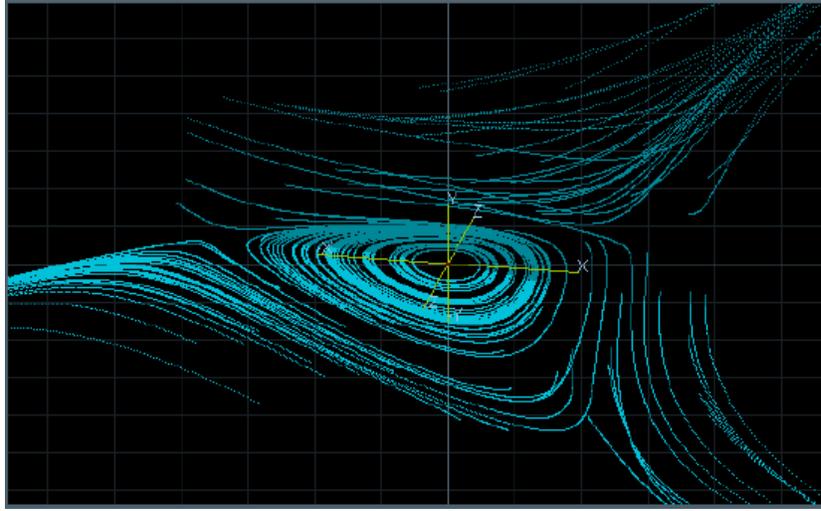
$$\mu = 6 \text{ o } a = \frac{1}{10}$$

Fig,43

El sistema tridimensional $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3$ descrito con anterioridad, en la base de los vectores propios y en el parámetro de bifurcación queda:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{5}x_1^2 + \frac{2}{5}x_2^2 + \frac{1}{5}x_3^2 - \frac{6}{5}x_1x_2 + \frac{8}{5}x_2x_3 + \frac{2}{5}x_1^3 + \frac{6}{5}x_1x_2^2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{1}{2}x_1 - \frac{4}{5}x_1^2 + \frac{3}{10}x_2^2 - \frac{19}{10}x_3^2 + \frac{17}{5}x_1x_2 - \frac{16}{5}x_2x_3 - 2x_1x_3 + \frac{1}{5}x_2^3 + \frac{3}{5}x_1^2x_2, \\ \dot{x}_3 &= -x_3 - \frac{1}{5}x_1^2 + \frac{2}{5}x_2^2 + \frac{1}{5}x_3^2 - \frac{6}{5}x_1x_2 + \frac{8}{5}x_2x_3 + \frac{2}{5}x_1^3 + \frac{6}{5}x_1x_2^2\end{aligned}$$

y su flujo asociado se puede ver, en la figura 44, como:



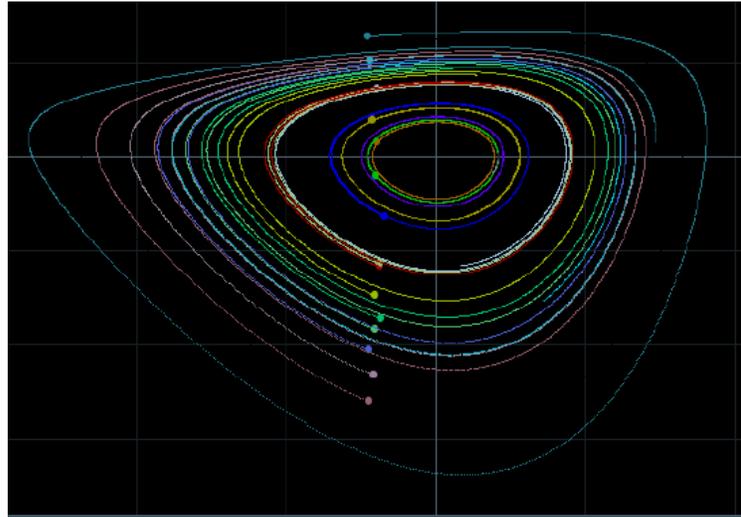
Fig,44

Finalmente, el sistema restringido a la variedad central es:

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{5}y_1^2 + \frac{2}{5}y_2^2 - \frac{6}{5}y_1y_2 - \frac{14}{25}y_1^2y_2 - \frac{309}{800}y_1y_2^2 + \frac{22}{25}y_2^3 + \frac{1}{32}y_1^3 \\ \dot{y}_2 &= -\frac{1}{2}y_2 - \frac{4}{5}y_1^2 + \frac{3}{10}y_2^2 + \frac{17}{5}y_1y_2 + \frac{103}{80}y_1^2y_2 - \frac{41}{40}y_1y_2^2 + \frac{7}{10}y_1^3 + \frac{1}{16}y_2^3\end{aligned}$$

Luego, como $G_4 = \frac{1231}{800} > 0$ entonces el origen es un punto de equilibrio inestable, lo que da lugar a una

órbita periódica, la cual es atractora. (Ver figura 45)



Fig,45

observación 86 La siguiente tabla muestra algunos modelos de competición interespecífica, que se determinan por once funciones dependiendo de los parámetros. De la misma manera, como en los modelos depredador-presa θ -logísticos, las funciones estudiadas dan origen a diferentes modelos depredador-presa. Por otra parte, podemos observar que, de las once tasas de crecimiento del tamaño de la población de presas, cinco de ellas son de la forma $\epsilon N f(N/K) - \alpha NP$, donde la función f se da explícitamente en cada caso y N y P denotan la población de presas y depredadores, respectivamente, en el tiempo t . Por lo tanto, la teoría desarrollada en este trabajo muestra que el modelo depredador-presa con memoria de desvanecimiento exponencial asociada a cada una de estas cinco funciones, tiene una bifurcación Hopf. Obsérvese que el primer modelo es el Lotka-Volterra clásico estudiado por Farkas y que desarrollamos

en este trabajo. (Ver [28]).

Modelo	N	$f(n)$
1	$(\epsilon N/K)(K - N - \alpha P)$	$1 - n$
2	$(\epsilon N/\log K)(\log K - \log N - \alpha \log P)$	<i>no se aplica</i>
3	$(\epsilon N/K^{\frac{1}{2}})(K^{\frac{1}{2}} - N^{\frac{1}{2}} - \alpha P/K^{\frac{1}{2}})$	$1 - n^{\frac{1}{2}}$
4	$(\epsilon N/K)(K - N - \alpha P - \beta NP)$	<i>no se aplica</i>
5	$(\epsilon N/K)(K - N - \alpha P - \beta N^2)$	$1 - n - K\beta n^2$
6	$(\epsilon N/K)(K - N - \alpha P - \beta P^2)$	<i>no se aplica</i>
7	$(\epsilon N/K^\theta)(K^\theta - N^\theta - \alpha P/K^{1-\theta})$	$1 - n^\theta$
8	$(\epsilon N/K)(K - N - \alpha P - \beta(1 - \exp(-\gamma^N)))$	$1 - n - \beta(1 - \exp(-\gamma Kn))$
9	$(\epsilon N/K)(K - N - \alpha P - \beta(1 - \exp(-\gamma^P)))$	<i>no se aplica</i>
10	$(\epsilon N/K)(K - N - \alpha P - \beta NP - \delta N^2)$	<i>no se aplica</i>
11	$(\epsilon N/K)(K - N - \alpha P - \beta NP - \delta N^2 - \gamma p^2)$	<i>no se aplica</i>

4. Conclusiones

El modelo de Lotka-Volterra estudiado y analizado en este trabajo destaca la importancia de un escenario en la dinámica

de poblaciones, puesto que describen un caso de coexistencia entre las especies. En términos biológicos la coexistencia de estas puede ser muy beneficiosa para el funcionamiento de los ecosistemas, implicando que este modelo pueda ser usado en otros contextos como modelos espaciales o problemas de evolución. Es por esto que nuestro análisis puede ser muy útil para biólogos y ecólogos, donde sería de mucho interés poderlo contrastar con hechos reales.

Demostremos la existencia de una bifurcación del tipo Hopf en nuestro sistema mejorado propuesto, es decir, este modelo presenta soluciones periódicas.

Presentamos una situación ideal para la supervivencia en el largo futuro de algunas especies al introducir en el modelo poblacional una función para la tasa de crecimiento per-cápita de la presa en ausencia de depredación, positiva que se acerca a cero cuando alcanza la totalidad de capacidad.

Establecimos condiciones para la existencia de dichos puntos de equilibrios, y la estabilidad de los mismos.

En el estudio de los sistemas con dos especies y término de interacción lineal, hemos considerado, como lo mencionamos, el modelo básico de Lotka-Volterra introducido en el año 1920. Del estudio cualitativo y numérico del mismo, se extraen como conclusión algunos comportamientos que se observan en la naturaleza, y que justificaron el éxito inicial del modelo, tal como el comportamiento cíclico de las

soluciones con periodos constantes. Sin embargo también se dan situaciones carentes de significado físico o biológico, tales como la nula estabilidad estructural.

Por ello resulta inmediato perfeccionar el modelo añadiendo términos de competencia intraespecie, para prevenir que las soluciones puedan diverger a infinito. El hecho de introducir estos terminos aumenta la estabilidad estructural de las ecuaciones.

No obstante, las ecuaciones con este término pierden la posibilidad de presentar órbitas periódicas, resultado totalmente general al que se llega aplicando las potentes herramientas analíticas obtenidas por Poincaré, Bendixson, entre otros. Dado que las órbitas periódicas con estabilidad estructural sí se presentan en la naturaleza, necesitando una sofisticación del modelo, por medio de términos de interacción no lineales, tal como el modelo que estudiamos obteniendo comportamientos en las soluciones tales como atractores cíclicos y bifurcaciones de Hopf.

Referencias

- [1] D. Alstad, Basic Populus Models of Ecology, Preitice hall, Upper Saddle River, N. j Chapeter 5, 2001
- [2] L. Perko, Differential equations and dynamical systems, Springer Verlag, New York Berlin Heidelberg, 2000.
- [3] J. Ayala, E. Gilpin, J Ehrenfled, Competition between species: Theoretical models and experimental tests, Theor. Population Biology 4, 331-356. 1973
- [4] A. Blumberg, Logistic Growth Rate Functions, J. Theo. Biol., 21, pp 42-44, 1968.
- [5] Blanchard, R. Devaney & G. Hall, Ecuaciones diferenciales.
- [6] R. Buis, On the Generalization of the Logistic Law of Growth, Acta Biotheoretica, 39, pp 185-195, 1991.
- [7] F. Dumortier, Singularities of vector fields, Monograf. Mat. N° 32, Inst. Mat. Pura e Apl. (IMPA), Rio de Janeiro, 1978.
- [8] Miklós Farkas, Dynamical Models in Biology, Academic Press, 525 B Street, Suite 1900, San Diego, CA 92101-4495, USA.
- [9] Morris W.Hirsch and Stephen Smale, Ecuaciones Diferenciales, Sistemas Dinámicos y Álgebra lineal, Academic Press, New York, 1974.

- [10] H. El-Owaidy and A. A. ammar, Stable oscillations in a predator-prey model with time lag, *Journal of mathematical analysis and applications* 130, 191-199, 1988.
- [11] E. Gilpin, J. Ayala, Schoener's model and Drosophila competition, *Theoretical Population Biology* Volume 9, Issue 1, February 1976, Pages 12-14
- [12] M. Farkas, Stable oscillations in a predator-prey model with time lag, *J. Math. Anal. Appl.*, 102, pp 175-188, 1984.
- [13] M. Farkas, A. Farkas and G. Szabo, Multiparameter bifurcation diagrams in predator prey models with time lag, *J. Math. Biol.*, 26, pp 93-103, 1988.
- [14] J. Glick and H. Koçak. *Phaser Scientific Software: A Universal Simulator for Dynamical Systems*, LLC. 2003.
- [15] N.G. Lloyd, Limit cycles of polynomial systems-some recent developments, In *new Direction in Dynamical Systems*. Cambridge University Press, pp. 192-234, 1988.
- [16] S. Krise, S. Roy Choudhury, Bifurcations and chaos in a predator-prey model with delay and a laser-diode system with self-sustained pulsations, *Chaos, Solitons and Fractals* 16, 59-77, 2003.
- [17] R. Shigui, Bifurcation Analysis of a Chemostat Model with a Distributed Delay, *Journal of mathematical analysis and applications* 204, 786-812, 1996.
- [18] M. Sibly, Daniel Barker, C. Denham, Jim Hone, MarkPage, On the Regulation of Populations of Mammals, Birds, Fish, and Insects, *Science*. 2005 Jul 22;309(5734):607-10
- [19] P. Stiling, *Ecology: Theories and Applications* 2nd ed. Prentice Hall International 1998.
- [20] J. Sotomayor, *Licoes de Equacoes Diferenciais Ordinárias*, Rio de Janeiro, 1979.
- [21] A. Tsoularis, Analysis of Logistic Growth Models, *Res. Lett. Inf. Math. Sci.*, 2, pp 23-46, 2001.
- [22] A. Tsoularis and J. Wallace, Analysis of logistic growth models, *Math. Biosc.*, 179, pp 21-55, 2002.
- [23] Sh. Wang and Z. Ge, The Hopf Bifurcation for a Predator-Prey System with θ -Logistic Growth and Prey Refuge, *Abst. Appl. Anal.*, pp(13), 2013.
- [24] J.L. Willems, *Stability Theory of Dynamical Systems*, New York: Wley, 1970.
- [25] S. Wiggins, *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, *Tex in Applied Mathematics*, Springer-Verlag New York, Inc., 1990.

- [26] S. Wolfram, The Mathematica Book, 5th ed. Wolfram Media, 2003.
- [27] Abstract (artículo guía).
- [28] Bifurcations in a predator–prey model with general logistic growth and exponential fading memory. Rodrigo Castro *, Willy Sierra , Eduardo Stange. Instituto de Matemáticas. Universidad de Valparaíso, Casilla 5030, Valparaíso, Chile