



UNIVERSIDAD DE VALPARAÍSO
FACULTAD DE CIENCIAS, MATEMÁTICA
Departamento de Matemática

ANÁLISIS DEL ERROR EN ECUACIONES CUADRÁTICAS

Tesis para optar al grado de Licenciado en Educación y al Título de
Profesor de Educación Media en Matemática con Mención Didáctica.

GLORIA ELIZABETH VELOZO BOZA

Profesor Guía: Jorge Ávila Contreras
Magíster en Ciencias en Matemática Educativa

Valparaíso, Octubre 2011.

AGRADECIMIENTOS

A mi hija, por ser el motor de mi vida y la mayor motivación para cada proyecto que me propongo.

A Eduardo, por colaborarme siempre y ayudarme a seguir mis estudios y sueños.

A mi familia, quiénes me ayudaron y creyeron en mí.

A mi profesor guía, Jorge Ávila, por acompañarme durante este largo proceso y colaborarme con su experiencia.

A mis estudiantes de tercer año medio, del Liceo de Limache, quiénes motivaron mi tema de investigación y colaboraron siempre que lo solicité.

A la profesora Angélica Chamorro y sus estudiantes del Liceo Tecnológico de Villa Alemana, que me permitieron indagar en mi tema de estudio.

A cada uno de los profesores de la carrera que incidieron positivamente en mí a través de sus conocimientos, pues gracias a ellos llego a esta instancia tan importante, en especial a la profesora Balvede Acosta, quién es un ejemplo a seguir como profesora y persona, por sus conocimientos y su honestidad.

RESUMEN

El presente estudio pretende constatar, indagar y analizar las dificultades y errores de alumnos de tercer año medio, considerando un grupo de estudiantes, con los cuales interactuar para apreciar las dificultades que surgen al enfrentarse a las ecuaciones cuadráticas, enfocándonos en el ámbito procedimental y emocional, entendiendo el primero con todo lo relativo a las operatorias que surgen al resolver ecuaciones de este tipo con sus diferentes posibles métodos de resolución, mientras que el segundo ámbito alude a las emociones o actitudes que surgen en los estudiantes al momento de desarrollar las actividades propuestas para indagar en nuestro tema de estudio.

Comprendiendo la diversidad de errores que surgen en las operatorias de resolución de ecuaciones cuadráticas, es que se delimita este estudio al análisis de errores y sus posibles dificultades en: ecuaciones cuadráticas equivalentes, cuando los coeficientes de la ecuación son números enteros y su equivalente con coeficientes fraccionarios, la generalización de la propiedad de sin divisores de cero a números distintos de cero y la resolución de problemas de planteo con ecuaciones cuadráticas, prestando atención en este último a la conversión de lenguaje natural al algebraico.

Para el estudio se utilizan dos períodos de indagación: el de búsqueda y conocimiento del grupo de estudiantes para el estudio y, en segundo lugar, el de aplicación de instrumentos de elaboración propia a ellos, con el objetivo de constatar y posteriormente analizar la temática indicada previamente en los ejes mencionados. Entre los resultados obtenidos llama la atención la frecuencia con que los estudiantes mencionan, intuyen o reconocen la influencia de la emocionalidad en su quehacer escolar, lo cual se desglosa en el estudio, junto a los errores procedimentales previstos a observar.

INDICE

	PÁGINA
AGRADECIMIENTOS.....	2
RESUMEN.....	3
INTRODUCCIÓN.....	7
CAPÍTULO 1:	
PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.....	11
1.1 Descripción del problema.....	11
1.2 Objetivos.....	19
1.2.1 Objetivo General.....	19
1.2.2 Objetivos Específicos.....	19
1.3 Preguntas de Investigación.....	20
1.4 Justificación.....	21
CAPÍTULO 2:	
MARCO TEÓRICO.....	22
2.1 Antecedentes.....	22
2.1.1 Estudios sobre resolución de ecuaciones.....	22
2.1.2 Análisis cognitivo, errores, reflexiones y emociones.....	32
2.2 Consideraciones teóricas.....	44
2.2.1 Dificultades, obstáculos y errores.....	44
2.2.2 Influencia de las emociones en clases.....	55

	PÁGINA
CAPÍTULO 3:	
METODOLOGÍA.....	66
3.1 Tipo de Investigación y diseño.....	67
3.2 Descripción de la aplicación de instrumentos indagatorios para la caracterización del grupo de muestra.....	71
3.3 Método y análisis de la información.....	82
CAPÍTULO 4:	
ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN.....	85
4.1 Análisis Cuestionarios Exploratorios.....	85
4.1.1 Análisis Cuestionario Exploratorio 1 (C.1).....	85
4.1.2 Análisis Cuestionario Exploratorio 2 (C.2).....	114
CAPÍTULO 5:	
CONCLUSIONES.....	127
BIBLIOGRAFÍA.....	132
ANEXOS.....	135
ANEXO 1.....	136
ANEXO 2.....	137
ANEXO 3.....	141
ANEXO 4.....	149

INTRODUCCIÓN

Es muy frecuente que la enseñanza de las matemáticas se focalice en el actuar de quién enseña, destacándose la presentación y explicación de temáticas a tratar y también el concebir el tratamiento del error como causa de sanción hacia el estudiante y no como una instancia de mejora en la enseñanza para cambiar la metodología frente al estudiantado. Esto se refleja generalmente en las evaluaciones que se realizan, donde se marca lo erróneo, ocurriendo que no se indaga en los conocimientos que portan los estudiantes y que pudiesen estar incidiendo como causa de ese error. Si bien es cierto, en el mejor de los casos, puede formar parte de la práctica docente el corregir los errores frente al curso, para eliminar las dudas y comprender sus errores, no necesariamente aquello se realiza a partir de los conocimientos estudiantiles involucrados como causa del error, sino que se afronta a partir de explicaciones pedagógicas ad hoc de cómo debiese ser resuelto el ejercicio o problema, desde un punto de vista explicativo por parte del o la docente.

De acuerdo a esto, se entiende que en el sistema educativo vigente, el error no es considerado un elemento importante en la enseñanza, aunque se mencione dentro de los planes y programas educativos. El foco parece estar más bien puesto en que los profesores logren pasar todos los contenidos, independiente de la profundidad de éstos o de lo real que el alumno haya logrado aprender de las unidades tratadas. Por lo tanto, se pierde una oportunidad valiosa de utilizar el error como una herramienta didáctica para lograr un

aprendizaje significativo a partir de ellos, aunque esto lleva de la mano un tiempo adicional para incorporarlo dentro del aula.

Lo anterior, conlleva a que a los estudiantes se les generen conflictos cuando intentan apropiarse de nuevos contenidos, sobre todo cuando deben conectar los conocimientos que ya poseen con los que deben incorporar. Es decir, los procesos de acomodación y asimilación del aprendizaje se ven truncados, según estudios desde la psicología cognitiva, donde la acomodación, se refiere a un ajuste o modificación de los esquemas, estructuras mentales que el sujeto posee, según Piaget, para lograr afiatar el nuevo concepto; mientras que en la asimilación, se comprende e interpreta el nuevo concepto generando un nuevo esquema (Shaffer, 2007; Doménech, 1999; Coll, 1998; et al).

En particular, la presente memoria de título pretende constatar, indagar y analizar dificultades y errores que surgen en estudiantes de tercer año medio cuando se enfrentan al desarrollo de ejercicios o problemas que involucran ecuaciones cuadráticas. El estudio se enfoca en el ámbito procedimental y emocional de los sujetos. Se entiende al primero como todo lo relativo a las operatorias que surgen al resolver ecuaciones cuadráticas con sus diferentes posibles métodos de resolución, mientras que el segundo ámbito alude a las emociones o actitudes que surgen en los estudiantes al momento de desarrollar las actividades propuestas para indagar en el tema de estudio.

El trabajo se divide en cinco capítulos: El Capítulo 1, Planteamiento del Problema, en el cual se presenta la problemática propuesta como investigación, explicando el contexto en

donde se evidencia la situación, la concepción del error en el aula, y enunciando los puntos a observar. Además se definen los objetivos y preguntas de investigación, como consecuencia del objetivo general planteado, presentando la justificación que sustenta esta investigación, según la importancia y aportes que puede brindar.

El Capítulo 2, Marco Teórico, se detalla en dos secciones: Antecedentes de la investigación y Consideraciones Teóricas. La primera abarca estudios sobre resolución de ecuaciones, planteados por Abrate, Font y Pochulu (2008) y Maffey (2006) y además el análisis cognitivo, errores, reflexiones y emociones, según investigaciones de Lupiáñez y Rico (2005), Ochoviet (2004), y Ávila (2005). Mientras que la segunda contiene ideas y concepciones de Socas (2000), Bachelard (2004) y Brousseau (2007), las cuales permiten el análisis de las dificultades y errores de los estudiantes. Por otra parte, en el ámbito emocional se considera principalmente a Mandler (1989) y Weiner (1986).

En el Capítulo 3, Metodología, se explica el proceso de investigación, en cuanto al tipo y diseño de ésta y la descripción de la aplicación de instrumentos indagatorios para la caracterización del grupo de muestra, tales como la prueba sociométrica y el Cuestionario de Honey – Alonso.

En el Capítulo 4, Análisis de la información, se estudian las respuestas que arrojan la aplicación de los dos Cuestionarios Exploratorios elaborados para el estudio. La información obtenida se analiza según los conceptos de dificultad, obstáculo y error con el

enfoque de autores tales como Brousseau (2007), Socas (2000), entre otros y de Mandler (1989), por ejemplo, en cuanto a la emocionalidad.

Finalmente, en el Capítulo 5, Conclusiones, se resumen los resultados de la investigación en coherencia con los objetivos planteados para la misma.

CAPÍTULO 1

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1 Descripción del problema

Desde mi experiencia en aula desde mayo del 2009 a la fecha, he podido constatar algunas dificultades que presentan los estudiantes de tercer año medio al tratar el tema de ecuaciones cuadráticas o ecuaciones de segundo grado. Una de las situaciones más frecuentemente observadas, es aquella en donde los estudiantes se estancan en las operatorias al resolver las ecuaciones cuadráticas, ya que a pesar de conocer la fórmula general u otro método para la resolución de éstas, muchas veces les resulta complejo hallar la solución o bien encuentran una errada. En este sentido, surgen cuestionamientos como ¿Por qué razón sucede aquello? ¿Cuáles son algunos planteamientos que ellos hacen al resolver ecuaciones cuadráticas?, ya sea en ejercicios o en problemas que involucran dichas ecuaciones.

En particular, a partir de la observación de errores en el aula y de la recolección de producciones estudiantiles obtenidas del trabajo diario como docente de matemáticas en el Liceo de Limache - efectuado por quién realiza la presente investigación para este trabajo de Memoria de Título - fue posible plantear tres ejes de estudio para la problemática

dilucidada, lo cual a su vez se fue profundizando con una revisión bibliográfica del tema.

Estos tres ejes son:

- a) Ecuaciones cuadráticas equivalentes: cuando el estudiante no reconoce la equivalencia entre una ecuación cuadrática con coeficientes enteros y su equivalente con coeficientes fraccionarios, siendo esta última de mayor dificultad en su resolución.
- b) La generalización de la propiedad de sin divisores de cero a expresiones igualadas a números distintos de cero.
- c) La errónea conversión¹ de lenguaje natural a lenguaje matemático de un problema de planteo con ecuaciones cuadráticas y su resolución.

Las observaciones preliminares que dan cuenta de la evidencia de los errores a analizar, se obtienen de dos cursos de tercer año medio del Liceo de Limache, que en adelante llamaremos *Liceo A*. Específicamente, del tercer año de Alimentación, de técnico profesional con 29 alumnos y del tercer año A, humanista científico, con 31 alumnos. Antecedentes del *Liceo A* son los bajos resultados en la Prueba SIMCE en Matemáticas, habiendo bajado en 11 puntos en la prueba 2008 con respecto a la de 2006. Los alumnos corresponden “*al grupo socioeconómico Medio Bajo, es decir que la mayoría de los apoderados ha declarado tener 10 años de escolaridad y un ingreso del hogar que varía*

¹ **Conversión:** se entiende según el concepto planteado por Raymond Duval, quién indica que es una transformación de una representación, desde un registro a otro, considerando tres tipos de registros: algebraico, gráfico y de lengua natural.

entre \$190.001 y \$300.000. Además, entre un 45,1% y 62,5% de los estudiantes se encuentra en condición de vulnerabilidad social” (MINEDUC²).

A continuación se exponen algunas evidencias de producciones estudiantiles recogidas en el Liceo A que dan cuenta de la presencia de errores en los tres ejes señalados anteriormente:

Handwritten student work on grid paper showing two quadratic equations and their solutions using the quadratic formula.

Equation 1: $x^2 - 2x + 1 = 0$
 Coefficients: $a: 1$, $b: -2$, $c: 1$
 Solution: $x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2}$
 $x = \frac{2 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{2 \pm 0}{2}$
 $x_1 = \frac{2}{2} = 1$
 $x_2 = \frac{2}{2} = 1$

Equation 2: $\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{3} = 0$
 Coefficients: $a: \frac{1}{3}$, $b: -\frac{2}{3}$, $c: \frac{1}{3}$
 Solution: $x = \frac{-\frac{2}{3} \pm \sqrt{(-\frac{2}{3})^2 - 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}}}{2 \cdot \frac{1}{3}}$
 $x = \frac{-\frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{9} - \frac{4}{9}}}{\frac{2}{3}}$
 $x = \frac{-\frac{2}{3} \pm \sqrt{0}}{\frac{2}{3}}$
 $x = \frac{-\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}} = -1$

Figura 1: Producción estudiantil de un control en clases (Abril, 2010)

La Figura 1, ilustra el primer eje temático. En la producción se observan dos ecuaciones cuadráticas que son equivalentes, la primera con coeficientes enteros y la segunda con coeficientes fraccionarios, pero este hecho pasa desapercibido por el estudiante, quién no logra deducirlo.

² Información extraída de MINEDUC en:
<http://www.simce.cl/index.php?id=228&iRBD=1464&iVRBD=8&iNivel=3&iAnio=2008>

Como una primera reflexión, podemos señalar que no obstante, en primer año medio se tratan las ecuaciones de primer grado con una variable, especificando en aquellas con coeficientes fraccionarios, y explicando el procedimiento a realizar para resolverlas, los estudiantes suelen olvidarla o no conectan ese procedimiento con el de las ecuaciones cuadráticas.

Se sabe que dicho procedimiento en el contexto de la resolución de una ecuación cuadrática - como el caso del estudiante que se ilustra en la Figura 1 - no entra en escena como procedimiento de resolución por éste. Es decir, teniendo conocimientos previos de las ecuaciones fraccionarias de primer grado, no fue puesto en acción por el estudiante.

Lo anterior es el planteamiento más bien de un foco docente pero ¿cuáles son los procesos cognitivos involucrados en el razonamiento de ese alumno? De acuerdo a esta interrogante, se solicita a estudiantes del Liceo A, que se refieran a las dificultades que presentan al resolver ecuaciones cuadráticas con coeficientes fraccionarios, presentándole las siguientes ($x^2 - 2x + 1 = 0$ y $\frac{3}{2}x^2 - 3x + \frac{3}{2} = 0$), obteniéndose algunas afirmaciones como las presentadas en el Cuadro 1.

<i>“A mí lo que me cuesta son los signos, me enredo mucho con ellos” E.1</i> <i>“Me dificultan los signos, las fracciones, etc. en verdad todo... El motivo yo creo es porque a lo mejor antiguamente nunca puse atención entonces ahora no sé mucho (o sea casi nada)” E.2</i> <i>“Me cuesta encontrar la raíz” E.3</i> <i>“Lo que me cuesta es encontrar la raíz, porque me complica y me es difícil” E.4</i> <i>“Me cuesta la cosa de la raíz y los signos + y – ya que en la multiplicación me enreda con el + y –” E.5</i>
--

Cuadro 1: Afirmaciones de estudiantes Liceo A: Grupo 1 y Grupo 2, sobre resolución de ecuaciones cuadráticas

(Mayo, 2010).

Dentro de las afirmaciones de los estudiantes de ambos grupos, se mencionan los conocimientos previos y además se aprecia que el foco de la dificultad lo asocian a los signos o a la raíz, en ningún caso vislumbran una posible relación entre ambas ecuaciones. Es decir, se distingue que el foco de su dificultad está más situado en el plano de lo que atinge a componentes o elementos que están inmersos en el procedimiento de resolución.

Con la Figura 2 se expone evidencia para el segundo eje propuesto: la generalización de la propiedad de sin divisores de cero a expresiones igualadas a números distintos de cero, la cual se obtiene como parte de un ejercicio planteado en clases con estudiantes del *Liceo A*, cuando se utilizó el método de factorización al resolver ecuaciones cuadráticas, para observar si lograban discriminar el caso en el cual el método era posible de utilizar.

Handwritten student work on grid paper showing the solution of a quadratic equation by factoring, incorrectly applying the zero-product property:

$$\begin{aligned}
 x^2 - 2x + 1 &= 0 \\
 x^2 - 2x &= -1 \\
 x(x - 2) &= -1 \\
 x = -1 & \quad x - 2 = -1 \\
 \boxed{x = -1} & \quad x = -1 + 2 \\
 & \quad \boxed{x = 1} \\
 \uparrow & \\
 \text{Solución.} &
 \end{aligned}$$

Figura 2: Producción estudiantil de resolución de ecuación cuadrática utilizando la propiedad de sin divisores de cero para igualaciones distintas de cero. Estudiante del Grupo 1, Liceo A (Mayo, 2010)

Se observa, una igualación a - 1, seguramente a causa de que en las ecuaciones de primer grado se tiende a decir que la(s) variable(s) debe(n) estar en un miembro de la ecuación y el(los) valor(es) numérico(s) en el otro. Además, se puede pensar que se factoriza considerando la ecuación cuadrática como una del tipo incompleta, según la clasificación que se hace de las ecuaciones cuadráticas en el ámbito escolar, cuando el coeficiente numérico del término libre o del término de grado cero es nulo. Lo importante es saber con qué lo asoció el alumno y por qué. Algunas explicaciones que se expresan por algunos estudiantes del *Liceo A*, según la experiencia descrita anteriormente del método de factorización, son las siguientes:

“... cuando hay sólo x se coloca x por el paréntesis y después se iguala a cero” E. 9 “Me confundo mucho con los signos y no sé cuando colocar los paréntesis” E. 15 “...en ocasiones se me olvida como despejar x y pasarla a raíz o a la fórmula general, eso me confunde” E. 6 “Es más fácil cuando se factoriza, porque se tiene que separar en dos partes para igualar al número” E.1

Cuadro 2: Afirmaciones de estudiantes del Liceo A, sobre resolución de ecuaciones cuadráticas (Mayo, 2010).

En un último caso, que hace relación al tercer eje planteado en esta investigación, tomado de un ejercicio en clase a estudiantes del *Liceo A*, en Mayo del 2010, se lee el siguiente problema: “Dentro de 11 años la edad de Pedro será la mitad del cuadrado de la edad que tenía hace 13 años. Calcule la edad de Pedro.” La conversión que realiza un estudiante es la siguiente:

Dentro de 11 años la edad de Pedro será la mitad del cuadrado de la edad que tenía hace 13 años. Calcule la edad de Pedro.

si P : edad de Pedro.
 $P + 11$ (dentro de 11 años)

$$\left(\frac{P - 13}{2}\right)^2$$

$$P + 11 = \left(\frac{P - 13}{2}\right)^2$$

$$P + 11 = \frac{P^2 - 26P + 169}{4} \cdot 4$$

$$4P + 44 = P^2 - 26P + 169$$

$$P^2 - 30P + 125 = 0$$

$$(P - 25)(P - 5) = 0$$

$$P - 25 = 0 \quad P - 5 = 0$$

$$P = 25 \quad P = 5$$

Figura 3: Producción estudiantil de un alumno del Liceo A resolviendo un problema con aplicación de ecuación cuadrática (Mayo, 2010)

La Figura 3, muestra un problema con aplicación de ecuaciones cuadráticas, en el cual el estudiante debe comprender el enunciado y realizar un correcto planteo de éste para escribirlo con lenguaje algebraico. Sin embargo, traduce erróneamente parte de éste, produciendo que se estanque en la resolución. Algunos de los comentarios que surgen al tratar los problemas con los estudiantes del Liceo A, son los siguientes:

“Lo que más me cuesta es el planteo y algo del desarrollo de los problemas” E. 16
“No entiendo cómo realizar los enunciados por las palabras claves y el desarrollo me confunde, porque me enredo por las fórmulas” E.22
“Lo que más me cuesta es el planteo, designar quiénes son las x , x^2 , etc.” E. 23
“A mí me cuesta interpretar los problemas, ya que no entiendo mucho como redactarlos y pasarlo a álgebra, por palabras claves como “consecutivos”, “excede”, “su anterior de tal número”, etc.” E. 6

Cuadro 3: Afirmaciones de estudiantes de tercer año medio del Liceo A sobre problemas con ecuaciones cuadráticas (Mayo, 2010).

Los ejemplos de errores dados anteriormente permitieron presentar evidencia de los errores a investigar como antecedentes del tema, para luego indagar los ejes planteados con un grupo de estudiantes de tercer año medio de especialidad de alimentación del Liceo Tecnológico de Villa Alemana, en adelante *Liceo B*, para corroborar las afirmaciones de los estudiantes, aplicándoles a éstos dos cuestionarios de elaboración propia, que abordarán los ejes propuestos en el presente estudio.

Así, una vez dado cuenta de la existencia de la problemática descrita con la resolución de ecuaciones cuadráticas (por evidencias arrojadas por estudiantes del *Liceo A*), se lleva a cabo la investigación en un liceo de Villa Alemana (*Liceo B*), con un grupo de estudiantes de tercer año medio de modalidad técnico profesional, abarcando los tres ejes enunciados previamente del ámbito procedimental, analizando sus desarrollos y la explicación que éstos dieron de sus procedimientos en la resolución de las actividades propuestas e incorporando a ésta última la influencia de la emocionalidad como causa de error.

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo general

Constatar, indagar y analizar las dificultades y errores de alumnos de tercer año medio de un liceo municipal de Villa Alemana en el desarrollo de ecuaciones cuadráticas, considerando el ámbito procedimental de la resolución y el emocional involucrado en éste.

1.2.2 Objetivos Específicos

- Constatar e indagar dificultades y errores que presentan los estudiantes al resolver ecuaciones cuadráticas equivalentes, cuando los coeficientes de la ecuación son números enteros y su equivalente con coeficientes fraccionarios.
- Constatar e indagar dificultades y errores asociadas a la generalización de la propiedad de sin divisores de cero a expresiones igualadas a números distintos de cero.
- Constatar e indagar dificultades y errores asociadas a la resolución de problemas de planteo con ecuaciones cuadráticas, prestando atención a la conversión de lenguaje natural al algebraico.

- Analizar los tres puntos anteriores desde dos ámbitos: el procedimental (explicación de procedimientos de resolución por parte de los estudiantes) y el emocional (reflexiones e identificación de afirmaciones que hacen referencia al estado emocional o anímico de los estudiantes cuando se enfrentan al desarrollo de las actividades propuestas, según la temática planteada).

1.3 Preguntas de investigación

- ¿Cuáles son algunas dificultades y errores que presentan los estudiantes al resolver ecuaciones cuadráticas equivalentes cuando los coeficientes de la ecuación son números enteros y su equivalente con coeficientes fraccionarios?, ¿cómo se evidencian?
- ¿Cuáles son algunas dificultades y errores asociadas a la generalización de la propiedad de sin divisores de cero?, ¿cómo se evidencian?
- ¿Cuáles son algunas dificultades y errores asociadas a la resolución de problemas de planteo con ecuaciones cuadráticas, en específico en la conversión de lenguaje natural al matemático?, ¿cómo se evidencian?
- ¿Cuál es el análisis procedimental y emocional que se extrae de las evidencias recolectadas a través de la constatación de los errores que surgen en los tres puntos anteriores?

1.4 Justificación

La Matemática es una ciencia transversal a muchas otras, por lo cual aprenderla, por lo menos en el nivel educativo obligatorio, es de suma importancia, independientemente del curso que quiera seguir en el futuro cada estudiante, pues no sólo contribuye en su disciplina misma, sino también en el razonamiento que permite incorporar a la persona, logrando ampliar el nivel de abstracción en ellos, favoreciendo la toma de decisiones y la capacidad de resolver problemas.

En particular, las ecuaciones constituyen una importante herramienta en el álgebra, por lo que adquirir las habilidades para resolverlas resulta de suma importancia, ya que ello facilita la solución a múltiples problemas que se presentan en aplicaciones de matemática y en otros campos tales como la física y la ingeniería, ya que permiten modelar situaciones y establecer leyes de ciertos fenómenos de relevancia. Además, el paso próximo de los alumnos de tercer año medio es el estudio de función cuadrática, dentro del mismo nivel, donde deben lograr dominar el cálculo algebraico para analizar la gráfica de esta función y en un cálculo universitario, puntos mínimos y máximos de la parábola, quién representa el lugar geométrico de ésta función.

Este trabajo pretende dar a conocer y analizar errores que surgen al tratar el tema de ecuación cuadrática para contribuir a la enseñanza de la disciplina en este tema en particular, pues si se logran comprender en mayor profundidad las dificultades que interfieren en el proceso de enseñanza aprendizaje, se podrá aportar con mayores herramientas para prevenir tal situación en el futuro.

CAPÍTULO 2

Marco teórico

2.1 Antecedentes

2.1.1 Estudios sobre resolución de ecuaciones

En Abrate, Font y Pochulu (2008) se documenta una investigación referente a los modelos y métodos de resolución de ecuaciones que utilizan los alumnos y los que aparecen en textos de Matemáticas. Se indaga en los obstáculos y dificultades que estos métodos y modelos producen en el aprendizaje de resolución de ecuaciones. Para ello se analizan las producciones escritas de 429 estudiantes aspirantes a ingresar en la Universidad Nacional de Villa María, Argentina, en el año 2007, mientras cursaban el Módulo de Matemática y con 60 libros de Matemática que abordan este contenido.

Los autores indican el uso de la metáfora como explicación a los procedimientos de resolución de ecuaciones. Entendiendo este concepto como el conocimiento de un dominio en términos de otro. Luego de una primera fase en su estudio, en la cual analizan el discurso utilizado por los estudiantes, distinguen entre dos tipos de metáforas: la objetual o resolución por propiedades y la operacional o por transposición de términos, las cuales utilizan para la indagación sobre la resolución de ecuaciones en los textos de matemáticas.

La metáfora objetual, hace referencia a un objeto matemático que es dotado de propiedades particulares, mientras que la operacional se presenta cuando al objeto matemático se lo considera como un dispositivo en donde se pueden “pasar”, “llevar” o “transferir” de un lugar a otro los objetos (Abrate, Font y Pochulu, 2008).

De acuerdo a estos conceptos, en la primera fase mencionada, proponen una actividad en la cual deben resolver ecuaciones de primer grado, cuadráticas, racionales, entre otras, además de exponer ecuaciones ya resueltas, para que los estudiantes explicaran el procedimiento que pensaban se había utilizado para resolverlas. De lo anterior los autores concluyen que “[...] 372 alumnos (79,7%) emplean, de manera explícita, la transposición de términos para explicar la resolución de ecuaciones. Además, la cantidad de alumnos se incrementa si incluimos a aquellos que de manera implícita usan este tipo de método. En este último caso, aludimos a quienes no dan explicaciones de la resolución que llevan a cabo y tampoco se evidencia el uso de propiedades, o aquellos que brindan explicaciones muy vagas que no resulta posible encuadrarlos en alguna categoría particular. No obstante ello, si se tienen en cuenta los alumnos que emplearon transposición de términos o metáfora operacional en su discurso escrito para ambos ejercicios, ya sea de manera explícita o inducen a ellas, el total asciende a 402, esto es, el 93,7% del total.” (Op. Cit., p. 167) (Ver Figura 4)

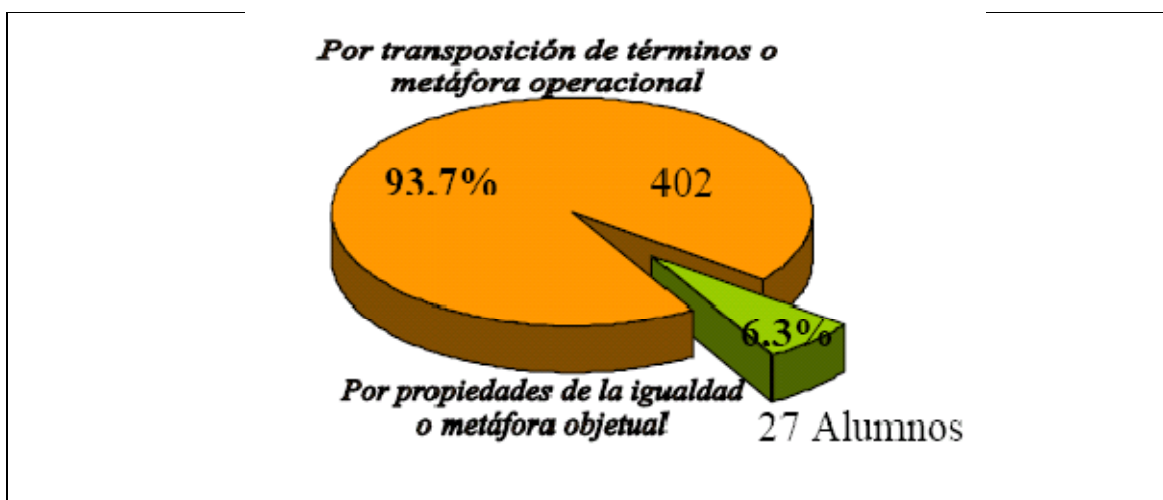


Figura 4: Métodos de resolución de ecuaciones que emplean los alumnos. (Extraído de Abrate, Font, Pochulu, 2008, p. 167).

De acuerdo a lo anterior, resulta interesante observar las respuestas por parte de algunos de los estudiantes, que según documenta el estudio, forman parte del 93,7% que utilizan metáforas operacionales (transposición de términos) para resolver ecuaciones.

“Debes despejar la incógnita (x) llevando los demás números al otro término cambiándole su signo.”

“Primero cambio de lugar el -1 para el otro lado con $+1$. ”

“Pasamos la raíz cuadrada que se transforma en exponente del resultado.”

“Cuando trasladamos de un término a otro invertimos el signo.”

(Abrate, Font y Pochulu, 2008, p.167)

Los autores conjeturan que el uso de estas transposiciones de términos, podría impedir que los estudiantes reconozcan las ecuaciones equivalentes y que presentarían dificultades al resolverlas con valores racionales. Para ello dentro de la primera fase, se pide a los estudiantes determinar el número de ecuaciones presentes en uno de los ejercicios planteados de su actividad, para saber si ellos advierten que cada paso del procedimiento

de resolución, es una ecuación equivalente a la original. Los estudiantes debían llegar a identificar cuatro ecuaciones. Sin embargo, en esta parte de la indagatoria, los resultados arrojan que sólo el 5,8% (25 alumnos) las identifican, mientras que el 94,2% (404 alumnos) no logran evidenciarlas todas.

Algunas de las aseveraciones que surgen de los estudiantes que afirman que solo hay una ecuación son:

“Porque el resultado que tengo que determinar es de una sola x ”

“Porque hay una sola igualdad con una incógnita”

“Porque siempre se resuelve la misma”

(Abrate, Font, Pochulu, 2008, p.168)

Del total de alumnos que no determinan todas las ecuaciones, el 32,8% indica que distinguió sólo 3 ecuaciones, considerando la última (que era $x = 3$), como el resultado solamente y no como una ecuación. Para argumentar este hecho, los alumnos justifican:

“Porque en cada una de ellas, la x no tiene valor.”

“Porque en la última la incógnita ya está encontrada o resuelta.”

“Porque en las tres primeras hay una incógnita. Siempre que hay una incógnita (x) es una ecuación.”

“Porque en tres veces aparece la incógnita creando una nueva ecuación.”

(Extraído de Abrate, Font, Pochulu, 2008, p. 168)

Luego de la actividad anterior, se pide a los estudiantes resolver dos ecuaciones cuadráticas equivalentes, una con coeficientes enteros y la otra con fraccionarios. Los autores intuían que aquellos que utilizan la transposición de términos en la resolución de ecuaciones, no lograrían identificar la equivalencia entre éstas, además de que provocaría errores al resolverla con coeficientes racionales. De acuerdo a lo anterior, los autores manifiestan: *“Tal como lo esperábamos, el 82,5 % (354 alumnos) presentaron dificultades para hallar el conjunto solución de una ecuación de segundo grado con coeficientes racionales no enteros, y ninguno de los estudiantes trabajó con ecuaciones equivalentes”* (Abrate, Font, Pochulu, 2008, p. 168)

Como segunda fase del estudio de Abrate, Font y Pochulu (2008) se analizaron 60 textos de matemáticas de nivel secundario y universitario, para dar respuesta a una tercera pregunta que apunta a los métodos y modelos de resolución de ecuaciones que se utilizan en los libros. Los autores indican: *“Hallamos que sólo un 15,5% de los libros de texto de matemáticas, para el nivel secundario, enfoca la resolución de ecuaciones mediante propiedades (metáfora objetual), mientras que los restantes (84,5%) se valen de la transposición de términos, metáforas operacionales o inducen a su uso”* (Op. Cit., p. 169). En cuanto a los textos de matemáticas de nivel superior, se concluyó que el 60% de ellos utiliza metáfora objetual y sólo uno de los libros emplea metáfora operacional cuando explica las propiedades de la igualdad.

Otro estudio sobre ecuaciones importante de explorar como antecedente para el presente estudio es el que realizó Maffey (2006) el cual es un trabajo de investigación sobre la situación de la enseñanza de las ecuaciones de primer grado en el nivel universitario, en México. Maffey dice que su trabajo consiste en:

- *“Una valoración del estado en que se encuentra la enseñanza de las ecuaciones de primer grado en el nivel medio superior, tomando en consideración qué tanta importancia se le da a la resolución de problemas por medio de éstas”*
- *“Un contraste entre la situación encontrada con lo que pretenden lograr las instituciones educativas del nivel medio superior, en particular los CECyT’s del IPN y las Preparatorias del Sistema incorporado (SI) de la UNAM en cuanto a la enseñanza del tema bajo estudio”.*
- *“Una propuesta de aproximación del estudiante a las ecuaciones de primer grado a partir de la resolución de problemas que provengan de contextos cotidianos”.*

(Extraído de Maffey, S., 2006, p. 6)

Maffey considera los conocimientos previos de los estudiantes limitados a la temática de su estudio y enfatiza que de los análisis preliminares que realizó, encontró que los objetivos planteados por los programas de estudio son muy pobremente logrados, a su vez que las percepciones de alumnos y profesores difieren de los resultados obtenidos, pues mientras éstos consideran que los aprendizajes logrados son entre buenos y regulares, la investigación muestra que podrían ser calificados de regulares a insuficientes. Además,

agrega que los textos escolares que utilizan los profesores están esquematizados partiendo por definiciones y tratando al final las aplicaciones a la resolución de problemas concretos, de allí que la autora presente como último punto la elaboración de un diseño de generación del conocimiento a ejecutar en el aula a un grupo pequeño de estudiantes.

La autora especifica las capacidades que el estudiante debe poseer para considerar que sus aprendizajes logrados sean buenos o suficientes, delimitados a su tema de estudio. Éstos son:

- *Modelar un problema concreto mediante el planteamiento de una ecuación de primer grado.*
- *Identificar la necesidad de modelar mediante una ecuación de primer grado una situación que lo amerite, en cualquier contexto.*
- *Resolver la ecuación de primer grado que resulte del modelado de un problema concreto, sin importar la complejidad de la misma, o bien, si ésta se le presenta de forma aislada.*

(Extraído de Maffey, S., 2006, p. 10)

Se obtuvieron interesantes resultados como fruto de la investigación de Maffey, al indagar en la concepción de los estudiantes sobre el signo igual. La muestra fue de 13 alumnos, siendo bastante pequeña, pero con diversidad, pues se seleccionaron estudiantes de diferentes escuelas, a los cuales les planteó tres preguntas que se detallan en el *Cuadro 4*:

- ¿Qué significados le encuentras al signo = en matemáticas?
 - ¿Te parece que el signo = representa lo mismo en las expresiones siguientes?
- 1) $b = 3$
 - 2) $5 + 2 = 7$
 - 3) $4x + 2x = 3x + 3x$
 - 4) $3x + 4 = 20$
- En caso de que tu respuesta a la pregunta anterior haya sido negativa, por favor, describe lo que significa el signo = en cada una de las expresiones presentadas.

Cuadro 4: Preguntas aplicadas a trece estudiantes de distintas escuelas de México para conocer la concepción que tienen del signo = (Extraído de Maffey, 2006, p. 37)

Los resultados que la autora obtuvo de la primera pregunta fue que “el 100% de los alumnos encuestados respondió que el signo sirve para expresar u “obtener” resultados y de entre éstos solo el 15.3% le confirió un significado adicional al signo, siendo éste el de servir para expresar igualdad e identidad entre dos cosas.” (Maffey, 2006, p. 37). De la segunda pregunta, la autora indica que “ocho estudiantes, es decir, el 61.5%, respondieron afirmativamente, en consecuencia el 38.5% dijeron no”. (Op cit, p. 37). De los cinco estudiantes que respondieron “no” a la segunda pregunta, el 100% expresó que en el caso (1), el signo = indica igualdad y en la (2), resultado. En el caso (3) indica: “...no hubo dos respuestas similares, se habló de indicación de operaciones a realizar, de combinación de cantidades, de equivalencia, de “mostrar” la segunda parte de la “ecuación” y de dar dos valores que no son el resultado.” (Op cit, p. 38). En la expresión (4), el 80% entiende el signo = como resultado y un estudiante (20%) expresa: “Aquí no sale la cantidad como suma” (Extraído de Maffey, 2006, p.38)

Las reflexiones obtenidas por medio de la investigación de Maffey, permiten dar cuenta del razonamiento que los estudiantes realizan de los conceptos y símbolos matemáticos, en este caso en la temática de ecuaciones de primer grado, pero que podrían extenderse a las cuadráticas. Siendo lo más importante, el hecho de que permiten mostrar o vislumbrar sus procesos de comprensión, los cuales al estar obstaculizados por conocimientos no adecuados, podrían desencadenar en un error, por lo tanto fortalece la idea de indagar y analizar en los entendimientos de los estudiantes y la explicación de sus procedimientos o creencias sobre un concepto.

Para los cuestionarios, Maffey trabajó con 34 alumnos de nivel medio superior y 14 profesores, con doce de ellos con más de dos años de experiencia. La autora concluyó que más del 80% de los estudiantes estudió primero la definición de ecuación de primer grado y al final la resolución de problemas. Mientras que el 75% de los profesores afirmó que abordaban la definición como entrada al tema. Dentro de las variadas preguntas que se realizaron a los profesores, se indica (ver Cuadro 5):

A tu parecer, las dificultades para desarrollar habilidad en tus alumnos para plantear las ecuaciones de primer grado que resuelven problemas concretos se debe a:

- *Su poco esfuerzo.*
- *Su inteligencia.*
- *Factores externos.*
- *Dificultad propia del tema.*
- *La forma en que se trabajó en clase.*
- *El sistema escolar.*

Cuadro 5: Pregunta dirigida a profesores de nivel medio superior, sobre las dificultades para desarrollar habilidades en sus alumnos en problemas concretos (Elaboración propia adaptado de Maffey, 2006, p. 51).

A continuación, se ilustra en una tabla (extraída de Maffey), los resultados obtenidos a esta pregunta:

	Poco esf.	Inteligencia	Factores ext.	Dificultad-T.	F. de trabajo	Sist. escolar
Profesores de CECyT	5	3	1	4	1	3
Profesores de ENP	5	1	2	4	4	2
Totales	10	4	3	8	5	5

Tabla 1: Dificultades para desarrollar habilidades en los alumnos en problemas concretos, según percepción de profesores. (Extraída de Maffey, 2006, p. 51).

Según la muestra, para los profesores de CECyT (Centro de Estudio Científico y tecnológico³) los factores que más se acentúan son la dificultad propia del tema y el poco esfuerzo de sus alumnos. Mientras que para los profesores de ENP⁴ (Escuela Nacional Preparatoria) son los mismos factores más la forma en que se trabaja. De estos resultados, resulta interesante observar las ideas y expresiones por parte de estudiantes y profesores que enriquecen el estudio enmarcado en el contexto de ecuaciones de primer grado, pero que podrían ampliarse a las cuadráticas.

³ **CECyT:** es una de las escuelas de nivel medio superior, equivalente a bachillerato del Instituto Politécnico Nacional (IPN) de la ciudad de México. Se fundó en el año 1963 e imparte diversas carreras tecnológicas. (http://es.wikipedia.org/wiki/Centro_de_Estudios_Cient%C3%ADficos_y_Tecnol%C3%B3gicos_No._7_%2C_uauht%C3%A9moc%22).

⁴ **ENP:** institución pública de enseñanza media superior. Forma parte del sistema educativo mexicano y es uno de los dos sistemas de bachillerato de la UNAM (Universidad Nacional Autónoma de México).

2.1.2 Análisis cognitivo, errores, reflexiones y emociones

En variados estudios del error en matemáticas, se aborda el plano cognitivo, se realizan indagatorias, se implementan cuestionarios, pruebas, etc. para analizar desde el pensamiento del estudiante, sus dificultades, obstáculos y errores, para proponer una metodología distinta que apoye y aporte a los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y de esta forma se inserta la didáctica de las matemáticas para apoyar este trabajo. Sin embargo, la mirada o el estudio del estudiante no es el único existente y es así como Lupiáñez y Rico (2005) realizan una propuesta didáctica dirigida hacia el profesor, planteando interrogantes y elaborando lineamientos que el docente debiera seguir para un óptimo diseño, implementación y evaluación de actividades en sus clases.

Lupiáñez y Rico (2005), ahondan en el punto de vista cognitivo, para describir el modo en el que los docentes debieran diseñar, implementar y evaluar actividades de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, analizando dentro de este los errores como tema importante a abordar, procurando ejemplificar con el caso de función cuadrática su propuesta. Ésta se aborda dentro de la asignatura de Didáctica de la Matemática en el Bachillerato de la Universidad de Granada, en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria.

La asignatura de Didáctica de la Matemática, comprende dos dimensiones: la primera, relativa a la participación en prácticas de la comunidad de educadores, mientras que la segunda abarca el desarrollo de conocimientos y habilidades que el profesor debiera

considerar para realizar planificaciones de unidades, logrando conceptualizar y dominar los procedimientos necesarios para diseñar, llevar a la práctica y evaluar una unidad didáctica sobre un tema. Esto se realiza mediante un análisis didáctico (Lupiáñez y Rico, 2005).

El análisis didáctico es un procedimiento cíclico en el que el docente debe decidir como incorporar su conocimiento didáctico para diseñar, implementar y evaluar actividades de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Lupiáñez y Rico, 2005). Dentro de este análisis se encuentran cuatro grupos categorizados que los autores llaman: el análisis de contenido, análisis cognitivo, análisis de instrucción y análisis de actuación. Para llevarlos a cabo se realizan los tres primeros en la etapa de planificación, y el último en la ejecución misma de la propuesta didáctica preparada. Lupiáñez y Rico ponen gran énfasis en la segunda dimensión que abarca este análisis, en especial el cognitivo, pues es aquí donde se trata de comprender las dificultades que tienen los estudiantes y que son traducidos a errores en su aprendizaje, lo cual permite que como docentes se elabore una mejor propuesta para sus estudiantes.

Según estos autores, al seleccionar la estructura matemática en la cual se enfocará la unidad didáctica, el nivel educativo que se tratará y el conocimiento base que poseen los estudiantes, el profesor podrá comenzar con el análisis de contenido, en el cual debe señalar los conceptos y procedimientos involucrados, haciendo notar las relaciones existentes entre los diferentes sistemas de representación. En el análisis cognitivo, el profesor debe estudiar la complejidad de los contenidos que trató en el análisis anterior,

enfocándose en que aquellos contenidos serán el objeto de aprendizaje de los estudiantes. Para la cual, el docente describirá las competencias que espera que desarrollen sus estudiantes y considerar los errores que los alumnos pudieran realizar, comprendiendo las dificultades que hay detrás de ellos. Luego, en la etapa del análisis de instrucción, el profesor deberá diseñar, seleccionar y organizar las actividades de enseñanza y las tareas que propondrá a sus alumnos (Lupiañez y Rico, 2005)

Finalmente, en el análisis de actuación, se realiza la puesta en marcha de la planificación creada a partir de los tres análisis anteriores, para verificar si fue efectiva o corregir parte de ella. A continuación se adjunta un esquema gráfico que representa el ciclo de análisis didáctico, con sus cuatro categorías, para representar de manera gráfica lo que explican de este ciclo (ver Figura 5):

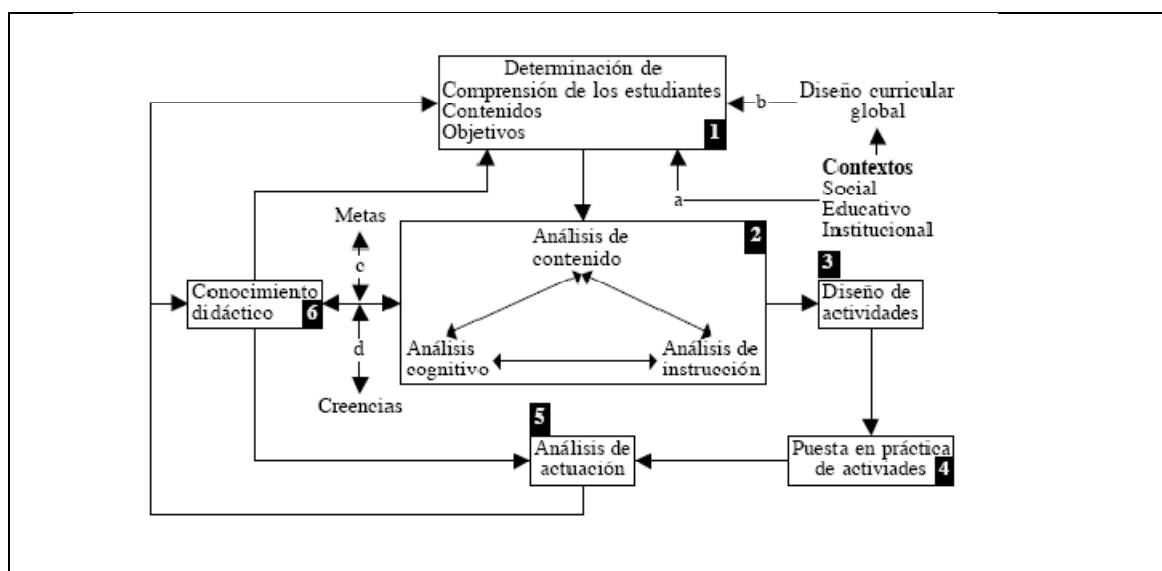


Figura 5: Ciclo del análisis didáctico (Gómez, 2002, p.258, citado por Lupiañez y Rico, 2005)

Los autores desglosan el análisis cognitivo, en el cual se desarrollan todos los cuestionamientos necesarios para desarrollar las actividades de las unidades temáticas a tratar. Dentro de éste, se encuentran dos componentes, que organizan y fundamentan el análisis cognitivo: las competencias y los errores y dificultades que hay tras éstos. Lupiáñez y Rico explican las competencias como “...lo que el profesor desea que sus estudiantes sean capaces de hacer a partir de los contenidos, a cómo pueden movilizar y usar los conocimientos aprendidos” (Lupiáñez y Rico, 2005, p. 3), las cuales son necesarias tener claras al momento de tratar una unidad, pues con ello se pueden identificar dónde se encuentran las dificultades de aquel estudiante que no logra cumplir con todas las competencias previstas para el contenido específico tratado. Dentro de las competencias se pueden distinguir cuatro tipos: cognitivas genéricas, cognitivas específicas, metacognitivas y actitudinales.

Las competencias cognitivas se refieren a los conocimientos, capacidades y habilidades que debe desarrollar un estudiante. Las cognitivas genéricas son las acciones básicas que se ejecutan al trabajar en matemáticas. Las específicas son las capacidades y habilidades que debiera desarrollar el estudiante en relación a un contenido. Las competencias metacognitivas corresponden a las estrategias de autorregulación y autocontrol sobre el propio conocimiento. Las competencias actitudinales se refieren a la actitud que presenta el alumno frente a la matemática. Por lo tanto, es de sumo interés esta última, ya que considera el ámbito personal del estudiante frente a la asignatura o un contenido específico de esta, en donde no sólo encontraremos actitudes sino también emociones dentro de ese contexto.

Para nuestro estudio, resulta importante conocer sobre ideas de análisis cognitivo, en especial cuando se menciona como un objetivo, el analizar las producciones y reflexiones de los estudiantes. Lupiáñez y Rico lo que hacen es describir el análisis cognitivo, presentándolo dentro del análisis didáctico, indicando la concepción de competencias. Si bien lo que los autores pretenden es que el docente logre diseñar, implementar y ejecutar sus actividades en clases, se torna importante también los puntos que deben observarse para entender sobre lo que son las competencias que un estudiante debiera tener para enfrentar una materia o las competencias que debe lograr luego de tratar una unidad. Por lo tanto, estos autores, nos aportan antecedentes sobre las ideas de análisis cognitivo, competencias del estudiante y la importancia de la actitud del alumno frente a estas, lo cual describen en las competencias actitudinales, las cuales son necesarias para un posterior análisis, en especial cuando lo que se pretende identificar es el error, las dificultades que presentan y la influencia del ámbito emocional.

La segunda componente que mencionan los autores, se refiere al estudio de las dificultades de aprendizaje que provocan errores en los estudiantes, pues permiten explicar una parte de la problemática de un mal aprendizaje. Al abordar estas componentes se debe considerar también, el conocimiento que los alumnos poseen, como lo expresan, representan y ejecutan. Para ello, los autores proponen la comprensión de la primera componente para llegar a entender los procesos de ésta última, que permitiría develar las dificultades presentes en el desarrollo de errores.

Otros autores abordan los errores desde las producciones, reflexiones y afirmaciones concretas de los estudiantes, tales como Ochoviet (2004) y Ávila (2005). Ochoviet (2004) realiza un estudio reflexivo sobre las implicaciones que tiene la Propiedad de ausencia de divisores de cero o Propiedad de Hankel, como la nombra la autora y es conocida en Uruguay. La investigación aborda a estudiantes de 14 a 17 años, equivalentes al nivel de enseñanza media en nuestro país, y de alumnos de pedagogía en Matemáticas, mayores de 21 años, con edades variadas.

La propiedad dice: “Sean $a, b \in \mathfrak{R}$. $a \cdot b = 0 \Rightarrow (a = 0 \vee b = 0)$ ”. Ochoviet (2004) abarca tres temáticas a analizar: la resolución de ecuaciones de segundo grado, que es el tema del presente trabajo; el análisis del error y la generalización abusiva de esta propiedad, los cuales se investigan dentro del segundo eje temático del trabajo de quién escribe. La autora expone los cursos en los cuáles se trata la Propiedad de ausencia de divisores de cero, muestra la presentación de ésta según textos y en ejercicios aplicados a los estudiantes considerados para esta investigación. Realiza además un trabajo exploratorio inicial y considera también su experiencia docente.

La propiedad de Hankel, como es conocida en Uruguay, se trata en los primeros años de Ciclo Básico, tratando temas como el Conjunto de los Números Naturales, el Conjunto de los Números Enteros y el de los Racionales; en los cuales se enseñan las operaciones y sus propiedades. La autora presenta diferentes ejemplos, con ilustraciones de textos y ejercicios para mostrar la presentación que se hace a los estudiantes para tratar esta

propiedad. A continuación, una ilustración que muestra la autora (Figura 6), extraída de un libro de Matemática de primero.

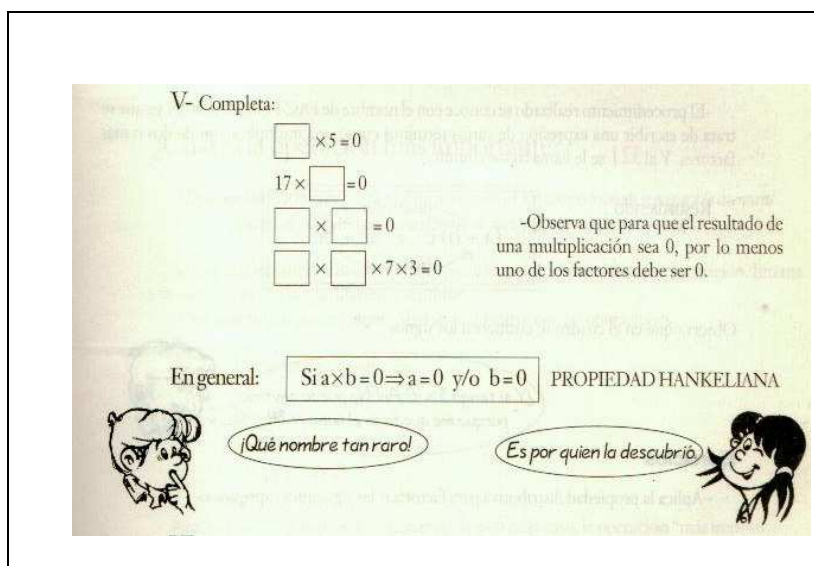


Figura 6: Ilustración de Libro de Matemática 1.(1995) Montevideo: Ediciones de la Plaza extraído de Ochoviet, (2004), p. 30.

Luego, en tercer año aparecen las ecuaciones polinómicas para ser resueltas a través de factorización, en donde se espera que los alumnos apliquen la Propiedad de ausencia de divisores de cero, pues desconocen la fórmula general de resolución de ecuaciones cuadráticas. Por lo tanto, el camino factible es factorizar y luego aplicar la propiedad. Como ejemplo, la autora muestra la siguiente ecuación:

$$x^2 - 9x = 0$$

Como los estudiantes en este nivel desconocen la fórmula general, primero se factoriza en:

$$x \cdot (x - 9) = 0$$

A continuación se aplica la Propiedad de ausencia de divisores de cero:

$$x = 0 \vee (x - 9) = 0$$

$$x = 0 \vee x = 9$$

Otra forma de presentar una ecuación cuadrática, es cuando ya se encuentra factorizada:

$$(2x - 6) \cdot (5x + 10) = 0$$

En este caso, los alumnos que conocen la fórmula general de resolución de ecuaciones cuadráticas, privilegian este método frente a la propiedad. Mientras que aquellos que la desconocen realizan igualmente el desarrollo del producto de los binomios, pero quedan estancados al final al desconocer la fórmula general y no utilizan el único paso posible para ellos, que es el de aplicar la propiedad de ausencia de divisores de cero. En el caso de los estudiantes que conformaron el grupo de muestra para la presente investigación, se identifican algunas diferencias con el estudio de Ochoviet a pesar de la similitud de la temática, la cual nos aporta antecedentes del problema a evidenciar, pero en un análisis distinto. Lo primero es que la incorrecta aplicación de la propiedad de ausencia de divisores de cero, se observa en un grupo que debe conocer la estructura y la resolución de una ecuación cuadrática en sus distintos métodos, por lo tanto se delimita a ese rango, además se analizan las dificultades y errores por concepciones de Socas, como se verá posteriormente en la sección de Consideraciones Teóricas y de Análisis de la información. También se considera el ámbito emocional como una de las causales en las dificultades por encontrar una solución o realizar un correcto desarrollo, lo cual no contempla Ochoviet por proponer objetivos distintos en su investigación.

Ochoviet (2004), luego del trabajo exploratorio inicial, realiza un cuestionario, el cual pretendía ver cómo reaccionaban los estudiantes frente a éste, para conocer las dudas que

surgían frente a la redacción de las preguntas y así lograr mejorarlas. También se dialogó con los maestros a cargo de los grupos de estudiantes para saber sobre la notación utilizada y la instrucción recibida. De los alumnos que realizaron el cuestionario (de 14 a 15 años) se corroboró que habían estudiado la resolución de ecuaciones dadas en forma factorizada e igualadas a cero. Se quería saber si los alumnos aplicaban la propiedad y observar cómo realizaban la comprobación.

Finalmente Ochoviet (2004), concluye que los estudiantes a pesar de conocer la propiedad, no la aplican para resolver una ecuación de segundo grado factorizada. En cambio, la desarrollan y aplican la fórmula cuadrática. Como en el caso: $(2x - 6) \cdot (5x + 10) = 0$. En esta misma ecuación, otro error que ocurre es el de asignar simultáneamente las soluciones de ésta (3 y -2) a la incógnita, verificando de forma errónea que $(2 \cdot 3 - 6) \cdot (5 \cdot -2 + 10) = 0$. Por lo tanto, $0 \cdot 0 = 0$. La primera inferencia que realiza la autora es que los alumnos podrían interpretar la ecuación fragmentando en dos de primer grado. Otra justificación de este hecho, es que fuera un error de tipo lógico, en el cual el alumno piensa que como la ecuación tiene dos raíces, las dos deben estar presentes en la expresión. El último planteamiento que hace Ochoviet (2004), es que los estudiantes creen que para que un producto sea cero, ambos términos deben ser ceros.

Ávila (2005), por su parte, realiza un estudio sobre Representaciones estudiantiles de la variación, apoyado con Bitácoras de Reflexión. En su investigación considera el discurso del grupo de estudiantes con los cuales desarrolla su indagación, interrogándose por el entendimiento de éstos en torno al contenido de variación, en nivel universitario (primer

año). El autor analiza el proceso de las bitácoras, para indagar los aspectos cognitivos relevantes que se presentan en el aula, considerando el ámbito emocional con respecto al saber en juego, hacia el profesor o a la situación de enseñanza.

La experiencia la realiza en dos períodos, entre 2002 y 2003, siendo él mismo quién dirige estos cursos de Cálculo. En ambos, se busca evidenciar las situaciones entre el profesor y los alumnos, realizando periódicamente una entrega por parte de los estudiantes, de sus reflexiones en clases. En el proceso de las bitácoras se busca promover la reflexión en sus estudiantes en relación a los temas tratados en sus clases o en otras variantes relativas a aspectos didácticos importantes. El autor realizó un instructivo para las bitácoras, en el cual explicita dos objetivos en la primera aplicación el año 2002:

- Que el alumno reflexione sobre su propio aprendizaje y que clarifique su entendimiento de la temática discutida.
- Que el alumno de al profesor retroalimentación sobre lo que piensa acerca de las actividades de aprendizaje que realizó, de tal forma que pudiesen mejorarse.

Dentro de las observaciones que Ávila (2005) realiza en cuanto al inicio de la aplicación de las bitácoras, reflexiona sobre las dificultades de sus estudiantes por explicar lo que las bitácoras piden, mientras que en la aplicación del año 2003 se logra presentar las bitácoras de forma mejorada, la cual se describe como consecuencia de la primera experiencia, se modifica el instructivo, incorporando preguntas tales como “*¿Qué hicimos?, ¿Qué piensa usted sobre eso? Y ¿Qué aprendió?*” (Ávila, 2005, p.70). El autor incorporó en sus clases

instancias de diálogo para generar en sus alumnos más confianza para realizar sus reflexiones, haciendo énfasis en la importancia de ellas y que no lo consideraran como parte de una obligación de la asignatura.

A continuación, algunas de las reflexiones de los estudiantes, recogidas por Ávila (2005) en su investigación en cuanto a lo que ellos comprendieron de las bitácoras:

“Para mí en un principio fue difícil, poder llegar a lo que usted (profesor) pide, ya que pide una metacognición, o sea, el como mi mente puede llegar a resolver un problema matemático, con lo que uno piensa, como toma el ejercicio, de que contexto lo puede hacer más fácil, todo esto me costó durante todo el semestre y me sigue costando, ya que en la enseñanza media sólo nos enseñan a llegar al resultado, y si esto está bien un siete¹¹ (...) Entre la 5º y la 7º yo por lo menos tuve mi más alto entusiasmo por hacerla, ya que tenía distintas sugerencias de todo tipo, también pudo haber sido por la materia que a mi me agradó bastante o haber encontrado el verdadero objetivo de la bitácora (...) Luego de la 8º fue más complicada su redacción de bitácoras, porque uno sabía lo que usted pedía y no podía irse por las ramas” (Ávila, 2005, p. 71)

“Todo comienza como una experiencia nueva, jamás en mi vida había visto una cosa así, en la cual tuviera que describir mi aprendizaje por intermedio de algo. ¿Bitácora...?”
(Ávila, 2005, p. 71)

“Cuando comenzamos el trabajo debo admitir que me desconcertó (...) no lograba entender que era lo que el profesor quería de ellas. Con el tiempo fui comprendiendo...”

(Ávila, 2005, p. 71)

En su estudio, el autor destaca el hecho de que por medio de las bitácoras es posible acceder a complejidades que están presentes en el aula en una situación de enseñanza, relatadas en las voces de los mismos estudiantes participantes de esas clases. Luego de analizar cada una de las bitácoras, el autor resalta la importancia de seguir el modelo de reflexiones, tal vez no cómo bitácoras, pero sí planteamientos reflexivos acerca de los aprendizajes de los estudiantes. El autor concluye: *“Como fruto de la investigación surge el dispositivo analítico de las representaciones estudiantiles variacionales constituidas por dos dimensiones: un dispositivo analítico de entendimientos y un esquema de actividad matemática”* (Ávila, 2005, p. 134)

El dispositivo analítico al cual hace referencia el autor en sus conclusiones, se utiliza para la comprensión entre redes de significados y el ámbito emocional del estudiante, mientras que los esquemas de actividad matemática son los desarrollados por los estudiantes que permiten predecir y conjeturar sobre los entendimientos de los estudiantes en investigaciones futuras.

En atención a lo anterior, puede decirse que el factor emocional se ha ido dilucidando como un factor importante a considerar en los estudios de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, por lo tanto, será un eje importante en este trabajo de Seminario, porque

puede permitir a futuro elaborar estrategias y metodologías de enseñanza que incorporen fuertemente el ámbito emocional, que como se ha evidenciado a través de los diversos autores que conforman los antecedentes de éste, interfieren en el proceso de aprendizaje.

2.2 Consideraciones teóricas

Este estudio se apoya en planteamientos de dificultades, obstáculos y errores de autores como Socas (2000), Bachelard (2004), Brousseau (2007); de emocionalidad con Gómez (2000), quién hace referencia a Mandler (1989) y a Weiner (1986) que hay desde la psicología. Socas entrega algunas concepciones sobre las dificultades en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, enunciando una clasificación de éstas. Bachelard (2004) y Brousseau (2007) aportan con la idea de obstáculo que causa la dificultad planteada por Socas indaga en la influencia de la emocionalidad como causa de los errores.

2.2.1 Dificultades, obstáculos y errores.

Diversos autores, han realizado estudios y planteando ideas y concepciones sobre las dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas (Socas, Rico, 2000; Brousseau, 2007; Bachelard, 2004), indicando en general, por qué indagar y analizar en las dificultades de los estudiantes, el por qué se obstaculizan sus aprendizajes y cómo es que desencadenan en errores los estudiantes, lo cual favorece a mejorar el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas si se conocen los distintos ámbitos en los cuales

se desarrolla el error, al lograr dar respuesta a las preguntas que se han generado en esta temática.

Los autores previamente mencionados coinciden en estudiar las dificultades de los estudiantes, cuestionándose el concepto de obstáculo. Para conocer esta idea nos aportará Bachelard (2004) y Brousseau (2007), quienes utilizan el término de obstáculo, pero es el primero quién introduce este concepto con el nombre de obstáculo epistemológico. Bachelard (2004) dice que hay que plantear el problema del conocimiento científico en función de obstáculos, agrega: *“No se trata de considerar los obstáculos externos, como la complejidad o fugacidad de los fenómenos, ni de incriminar a la debilidad de los sentidos o del espíritu humano: es el acto mismo de conocer, íntimamente donde aparecen, por una especie de necesidad funcional, los entorpecimientos y las confusiones. Es ahí donde mostraremos causas de estancamiento y hasta de retroceso, es ahí donde discerniremos causas de inercia que llamaremos obstáculos epistemológicos”*. (Bachelard, 2004, p. 15, 25° edición)

Bachelard (2004, 25°edición) profundiza en su libro *“La formación del espíritu científico”* sobre las limitaciones en el proceso de formación de los conceptos científicos, describiendo sobre el obstáculo epistemológico y dedicando varios capítulos a cada uno de los principales que se dan en el proceso de aprendizaje de las ciencias. Si bien explica este concepto, lo hace desde una perspectiva más general, de la cual se dan bases para seguir el tema en específico en didáctica matemática.

Bachelard (2004) habla sobre la experiencia básica, como primer obstáculo. Se refiere a que las personas tienen ciertos conocimientos o ideas básicas antes de comenzar un estudio, haciendo que éstas puedan limitar el proceso de aprendizaje, lo que pudiese hacer que las cosas no se vean como realmente son, lo cual desencadenaría en errores. Esto quiere decir que el estudiante se ve influenciado por su entorno, por lo que conoce, pudiendo observar esta situación cuando se les pide alguna definición sobre un concepto, lo cual se evidencia en el lenguaje que utilizan.

También el autor explica sobre el tipo de obstáculo epistemológico, en el cual se tiende a generalizar, lo cual puede provocar que se esconda la particularidad de la situación estudiada, por lo que se cae en equivocaciones, porque los conceptos se vuelven vagos e indefinidos. Por otra parte si se dan falsas definiciones, se crea una hipótesis errónea que se construyó mediante la observación a través de los sentidos. El hecho de generalizar por parte del estudiante elaborando una definición resumida, simple y sin el detalle que le da el carácter y la validez científica provoca que el conocimiento general sea un obstáculo epistemológico (Bachelard, 2004).

El siguiente obstáculo del que habla Bachelard es del obstáculo por el conocimiento pragmático y utilitario, que es contrario al anterior, pues en este caso se trata de reducir o simplificar los significados asignando la utilidad a que hace alusión el concepto por el cual se pregunta. Además agrega una explicación sobre el obstáculo animista, pero no podríamos relacionarlo directamente en matemáticas, pues dice: *“Los fenómenos biológicos son los que sirven de medios de explicación de los fenómenos físicos. Esta*

característica de valorizar el carácter biológico en la descripción de hechos, fenómenos u objetos, representan claramente el carácter del obstáculo animista”. (Bachelard, 2004, p.186).

Finalmente explica extensamente en uno de sus capítulos sobre el obstáculo verbal, el cual se presenta cuando se trata de explicar un concepto por medio de una sola palabra o imagen. En este obstáculo, la persona caracteriza o generaliza con una palabra el significado que no corresponde a la idea central del concepto por el cual se pregunta, por lo que desencadena un error, según Bachelard (2004) es una falsa explicación lograda mediante una palabra explicativa.

Tanto Bachelard (2004) como Brousseau (2007) consideran el obstáculo como un conocimiento que ha servido en un cierto contexto, pero que frente a un aprendizaje nuevo no es suficiente. El segundo autor, estudia también el obstáculo, cuando desarrolla la teoría de las situaciones didácticas, explicando que una situación didáctica implica la interacción del estudiante con situaciones problemáticas, a lo cual llama *interacción dialéctica*. El autor sugiere que esta interacción debe ser constante, lo cual significa que quién aprende debe revisar, modificar y complementar los conocimientos anteriores, e inclusive rechazar aquellos que no funcionan. De allí que Brousseau incorpore el concepto de obstáculo, cuando algunos de esos conocimientos obstaculizan la construcción de uno nuevo.

Este autor, considera que los obstáculos que se presentan en el sistema didáctico pueden ser de origen ontogénico o psicogénico, debido a las características del desarrollo del niño, éste tiene que ver con las limitaciones del individuo (neurofisiológicas entre otras), las cuales son propias del sujeto, por lo que tiene dificultades al asimilar y/o acomodar los conocimientos para que resulte un aprendizaje significativo. En el primer proceso cognitivo el sujeto debe modificar algunas estructuras o esquemas cognitivos para que se acomode el conocimiento, mientras que al asimilar se habla de un esquema totalmente nuevo y si estos procesos se obstaculizan entonces se produce el error en el estudiante, pues su conocimiento no está consolidado.

Un segundo obstáculo del que Brousseau (2007) habla es el de origen didáctico, resultado de una opción o de un proyecto del sistema educativo, esto es, de las elecciones didácticas que se hacen para establecer la situación de enseñanza, las cuales están a cargo del profesor, quién es el que decide la metodología y las estrategias que utilizará para fomentar los correctos aprendizajes en sus estudiantes. Por lo tanto, si la elección no es la mejor para el grupo de sujetos a su cargo o alguno de ellos, éstos no logran institucionalizar⁵ sus conocimientos y se convierte en un obstáculo didáctico. Otro obstáculo es el de origen epistemológico, intrínsecamente relacionado con el propio concepto, se refiere a la naturaleza misma del argumento. Un obstáculo epistemológico es aquél conocimiento que es satisfactorio en un contexto determinado, pero si lo cambiamos de éste resulta inadecuado, lo cual hace alusión a la naturaleza de ese conocimiento.

⁵ **Institucionalización de conocimientos o del saber:** se refiere al momento en que los estudiantes han construido su conocimiento, por lo tanto se han apoderado de ese conocimiento. Este concepto fue propuesto por Brousseau.

Al igual que a Bachelard (2004) y Brousseau (2007), Socas (2000) considera que el aprendizaje de las matemáticas genera muchas dificultades a los estudiantes y sus orígenes son diversos. La naturaleza de algunas dificultades puede hallarse en el macrosistema educativo y en particular en el microsistema, en las relaciones que se generan entre alumno, materia, profesor e institución escolar. Por lo cual, las dificultades se abordan al hacer énfasis en el desarrollo cognitivo de los estudiantes, en el currículo de las materias y/o en los métodos de enseñanza, o como lo plantea Lupiáñez y Rico (2004) cuando se focaliza en el análisis cognitivo y explica su relación dentro del análisis didáctico que el docente o en este caso, el investigador pudiesen hacer de la situación problema.

Estas dificultades son las que desencadenan en obstáculos para el estudiante, el cual lo manifiesta a través de errores en sus procedimientos (Socas, 2000). Sin embargo, ese error al delimitarse a un aspecto recriminatorio, no permite en la enseñanza habitual abrirse paso hacia una retroalimentación positiva, que permita indagar en los aspectos cognitivos o procesos mentales del estudiante que comete el error, para de esta forma aportarle y contribuir a la mejora de sus conocimientos.

Los estudiantes que poseen dificultades o manifiestan errores en el aprendizaje de las matemáticas, no son aquellos menos capaces; puesto que en general, a casi todos les sucede (Socas, 2000), lo cual se corrobora fácilmente mediante la observación o ejecución de una clase, en la cual se manifiestan las dudas de los estudiantes, los cuales se limitan a una estrategia de resolución o simplemente comprendieron de forma distinta el concepto,

la idea o explicación que el docente expone, por ello importante es identificar entre las variadas causas que ocasionan sus dificultades, las cuales según Socas, son de naturaleza distinta, considerando cinco categorías:

- Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos de las matemáticas.
- Dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático.
- Dificultades asociadas a los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de las matemáticas.
- Dificultades asociadas a los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos.
- Dificultades asociadas a actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas.

En cuanto a las *dificultades asociadas a la complejidad de los objetos de las matemáticas*, Socas (2000) considera de suma importancia el lenguaje que se utiliza en relación de los objetos matemáticos, entendiendo este concepto como el objeto de estudio. De allí, que el primer problema que surge es con respecto a la comunicación de aquellos objetos. Cuando se emplea el lenguaje matemático, con sus reglas específicas, las cuales no pueden asumir un significado por alusión o asociación de símbolos, se genera una dificultad en el estudiante al momento de apropiarse de sus significados, puesto que en su lengua es posible inferir un significado de la palabra que el lenguaje matemático le niega al existir palabras propias de la disciplina, como hipotenusa, o paralelogramo, por ser exclusivas de ésta y poco conocidas para el estudiante.

En relación al lenguaje natural, existe la confusión al utilizar palabras que tienen distintos o igual significados que en matemáticas, por lo que siempre está la opción de que por uno u otro lado puedan complicarse con los nombres que se dan a determinados objetos matemáticos. En el primer caso, encontramos palabras como raíz, integral o función, que además se utilizan en contextos distintos que en matemáticas, lo cual aumenta su confusión. Mientras que en el caso de palabras de igual significado en la lengua común y en matemáticas, provocan en los alumnos la impresión de que debe tener un significado diferente y complejo al que realmente tiene. En las ecuaciones cuadráticas por ejemplo, nos encontramos con que el estudiante no comprende el significado de la raíz cuadrada, la cual normalmente llaman raíz, pues el concepto no está asimilado en el estudiante, lo que genera que el discurso habitual dentro del desarrollo de la fórmula general de resolución de ecuaciones cuadráticas, sea “hay que calcular la raíz”, lo que implica, que el alumno se acostumbre a emplear un incorrecto vocabulario matemático, por ello es que surgen las dificultades asociadas al lenguaje que se emplea en matemáticas.

Dentro de las dificultades asociadas a la complejidad de los objetos de las matemáticas, Socas (2000), destaca aspectos del lenguaje simbólico que también generarían confusiones en los estudiantes, como por ejemplo, la sintaxis (reglas formales de las operaciones). Interesante resulta mencionar las etapas o estadios, que el autor afirma que ocurren en el proceso de aprendizaje del estudiante cuando debe enfrentarse a nuevos conocimientos, los cuales denomina: *estadio semiótico*, como la primera etapa, en la cual los alumnos aprenden el sistema nuevo de signos, caracterizado por el sistema antiguo. Luego, se

encuentra el *estadio estructural*, en el cual el sistema nuevo se estructura según la organización del antiguo y se crea un esquema general, por lo que en esta etapa se verán confrontados los conocimientos que el estudiante cree poseer con los que requiere incorporar cuando no basta con sólo los antiguos, generando las mayores dificultades cuando se ven enfrentados a desarrollar un problema o comprender un nuevo objeto matemático. Por último, se encuentra el *estadio autónomo*, en el cual las regularidades y patrones observados no bastan, por lo que los signos que no tienen un significado deben encontrar uno propio.

Por otra parte las *dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático*, se manifiestan, según Socas (2000), cuando el estudiante no posee la capacidad para seguir un argumento lógico, lo cual genera una mayor dificultad en el aprendizaje de las matemáticas. Esto sucede, porque se abandona la ejercitación de demostraciones, las cuales aportan a un alto nivel de competencia matemática. Ejemplo de esto es cuando se tratan las propiedades de las raíces de una ecuación de segundo grado, de acuerdo a como se menciona en la literatura escolar. Los estudiantes crean serias dificultades, pues memorizan la propiedad de suma y producto de las raíces de dicha ecuación, pero no comprenden su origen, pues para el alumno resulta ser una fórmula que aparece de modo misterioso o que alguien inventó, lo que hace difícil que asimilen el conocimiento involucrado en este desarrollo; inclusive en algunos casos en que el docente muestra el origen de estas propiedades a través de su demostración, siguen resultando misteriosos los cálculos desarrollados para llegar a ella, lo que tiene relación con las creencias que se tienen sobre las matemáticas.

Socas dice: *“Este enfoque lógico de las matemáticas debe conducir a resolver los problemas por medio de un pensamiento matemático inteligente, y, en este sentido, desarrolla una idea más amplia que la propia deducción formal...El pensamiento lógico debe estar presente en todas las actividades matemáticas”*. (Socas, 2000, p.131) Según esto, las demostraciones nos aportarían significativamente a que el estudiante adquiriera un pensamiento matemático, que sea lógico y permita desarrollar de mejor forma los problemas que se propongan, contrarrestando los errores que usualmente se producen por esta causa.

En este tipo de dificultad el autor dice que también puede influir el contexto social sobre el lógico, pues cuando se plantea un problema se busca el interés matemático, pero se enuncia en un contexto socialmente absurdo. Según el autor, el conflicto se origina al concebir una “lógica social” y una “lógica escolar”, lo cual pareciera inducir en el alumno la pregunta de lo que el docente quiere que éste responda.

Las dificultades asociadas a los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de las matemáticas, en cambio, se refiere a la institución educativa, el currículo y la metodología de enseñanza, la cual en conjunto debe considerar las habilidades en matemáticas de sus estudiantes para crear una metodología adecuada para su enseñanza, así como los recursos que utilicen (Socas, 2000). Podríamos relacionarlo con el proyecto educativo institucional (PEI) que la institución incorpore, a nivel micro al área de

matemáticas, en cuanto al desarrollo de sus planificaciones y las estrategias sugeridas para su desarrollo.

Socas (2000), considera diferentes enfoques que explican el razonamiento de las personas, pero que no se han tratado en profundidad en las matemáticas, éstas las agrupa en las *dificultades asociadas a los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos*. Se plantean teorías que a modo groso explican los procesos cognitivos en el razonamiento, pero al comprenderlo en los procesos específicos que se ven involucrados en el aprendizaje resultan escasos.

Las *dificultades asociadas a actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas*, considera la emocionalidad en el aula, tema que se tratará con mayor detalle al mencionar a Gómez (2000), Mandler (1989) y Weiner (1986). Se refiere a los sentimientos y actitudes emocionales que tienen los estudiantes frente a la asignatura. Socas dice: *“Muchas de las actitudes negativas y emocionales hacia las matemáticas están asociadas a la ansiedad y el miedo. La ansiedad por acabar una tarea, el miedo al fracaso, a la equivocación, etc., generan bloques de origen afectivo que repercuten en la actividad matemática de los alumnos”* (Socas, 2000, p. 135).

Al hacer coincidir las miradas de los autores mencionados preliminarmente, convergen los tres en la importancia de estudiar y categorizar las dificultades de los estudiantes, no como una forma sancionadora o rígida de enmarcar a quienes se equivocan, sino con la mira en que se aprende del error, por ello el interés en ahondar en conceptos tan importantes como

obstáculo y comprender no sólo el docente, sino también hacer comprender al estudiante que es importante el error, porque posteriormente el aprendizaje se institucionalizará en el estudiante de forma correcta, comprendiendo sus procesos y entendiendo que parte de ese proceso es errar.

2.2.2 Influencia de las emociones en clases

Antes de abordar el ámbito de la influencia de las emociones en clases es preciso comprender el término desde la perspectiva de la psicología, que nos aporta mayor precisión de su significado y la influencia que tiene en los aprendizajes.

De acuerdo a Kelly (1982) *“la emoción puede ser descrita como un complejo de sentimientos, complicados con sensaciones, imágenes, ideas y tendencias a la acción, caracterizado por los cambios fisiológicos o estados corporales de conmoción y dirigido hacia un objeto o situación específicos”* (Op. Cit., p.161)

La autora presenta el significado educativo de las emociones, indicando que no se valora totalmente la importancia e influencia de la emoción y los sentimientos en la conducta, a pesar de que se reconoce que el profesor puede controlar más fácilmente a sus estudiantes en el ámbito emocional y sentimental que en el intelectual. Agrega: *“Sería un gran paso adelante el que la escuela fuera capaz de manejar los problemas de la conducta afectiva con la misma energía que ha caracterizado sus esfuerzos para desarrollar las facultades intelectuales y físicas del niño. Los sentimientos y emociones constituyen importantes*

fuerzas de motivación de la vida y están íntimamente relacionados con la acción [...] El ideal de la escuela debe ser desarrollar individuos cuyas más bajas emociones se hallen bajo control, que se autodominen y autodirijan, que deriven sus mayores placeres de las cosas más elevadas y bellas de la vida” (Kelly, 1982, p. 168).

Kelly (1982) expone la importancia de la emocionalidad en el aula, pero deja en claro que el docente no debe por ello exagerar la importancia a las emociones ni descartarlas, sólo considerarlas como instrumentos del bien, además agrega que el profesor *“debe dar buen ejemplo, proporcionar control inteligente y orientación simpática, analizar la conducta del niño para descubrir los motivos que la impulsan [...] El maestro debe cultivar una comprensión genuinamente simpática de la naturaleza del niño, debe ser firme, amable, constante y digno de confianza. Debe ser un modelo, no un compañero; debe ser equilibrado e inspirar respeto; ser comprensivo, pero digno. Debe percatarse de que la emoción intensa obstaculiza la capacidad de aprender”* (Op cit, p. 168-169)

La autora afirma que sin los sentimientos y emociones no se podría adquirir ni lograr nada, o sea no se podrían adquirir los conocimientos que como maestro se desean lograr en los estudiantes. Indica que la simpatía o aborrecimiento del estudiante hacia a una asignatura afectará el rendimiento de ese alumno y no logrará consolidar sus aprendizajes, por lo tanto los sentimientos y emociones que sienten hacia la disciplina estudiada es importante de considerar, tal como aparece en Socas (2000), quién menciona a Buxton (1981) citando de su libro *Do you Panic about Maths?*, las principales creencias sobre la naturaleza de las matemáticas y que son transmitidas de padres a hijos, lo cual tiene

relación con las emociones y sentimientos que tienen hacia las matemáticas. Se lee que *“Las matemáticas son: fijas, inmutables, externas, intratables, irreales. Abstractas y no relacionadas con la realidad. Un misterio accesible a pocos. Una colección de reglas y hechos que deben ser recordados. Una ofensa al sentido común en algunas de las cosas que aseguran. Un área en la que se harán juicios, no sobre el intelecto, sino sobre la valía personal. Sobre todo cálculo.”* (Buxton, 1981, citado en Rico, L.; Castro, E.; Socas, M. y otros, 2000, 135) En este sentido, se entiende que si se desea enseñar una determinada temática a los estudiantes, será difícil que estos logren aprender de forma efectiva, si sienten o manifiestan algunas de las afirmaciones anteriores. Por lo tanto, dentro de la presente investigación es importante la relación entre las actitudes y emociones hacia las matemáticas y el estado de logro de sus aprendizajes. Para ello, se buscará conocer sobre las propias manifestaciones hacia la asignatura y las actividades que se propongan, las cuales se detallaran en la etapa metodológica.

Gómez (2000) trata la influencia de las emociones en el ámbito de la matemática. La autora presenta cuadros resumen (ver *Figura 7*) con los autores que han tratado la emocionalidad en el aula, observando las tendencias sociocognitivas y constructivistas que abordan la emoción, la cual explican como la interrupción de un plan y como resultado de una serie de procesos cognitivos: evaluación de la situación, atribución de causalidad, evaluación de expectativas y de conformidad con las normas sociales, evaluación de expectativas y objetivos.

AUTORES Y FECHAS	TEORIAS SOBRE LA EMOCION (Autores de referencia)	CONCEPCION DE EMOCION	DENOMINACION	TIPO DE INVESTIGACION	METODO
Buxton (1981)	Ciencia Cognitiva. Skemp (1979)	Emoción como estado.	Respuesta emocional.	Estudio en adultos de las emociones negativas hacia la matemática. Desarrolla un modelo de inteligencia para explicar los mecanismos del pánico.	Entrevistas en profundidad. Observación durante el desarrollo de la actividad matemática. Grabaciones.
Mason, Burton, Stacey (1982)	Ciencia Cognitiva.	Sensaciones mientras discurre el razonamiento; estados psicológicos.	Estado emocional. Instantánea emocional.	Satisfacción del ¡Aja! en resolución de problemas. Sugerencias acerca de cómo los estudiantes pueden anticipar la experiencia emocional positiva relativa al aprendizaje de la matemática. Modelo de instrucción en resolución de problemas.	
McLeod (1985, 1988, 1989, 1990, 1992, 1994) McLeod y Adams (1989) McLeod y otros (1989) McLeod y otros (1990) McLeod y otros (1993)	Ciencia Cognitiva. Mandler (1975, 1984, 1989) Ortony, Clore y Collins (1987) Kagan (1978) Snow y Farr (1987)	La clase de afecto más visceral, una respuesta que es intensa pero de relativa corta duración.	Respuesta emocional. Emoción.	Revisión bibliográfica Configurar un marco teórico para el afecto en resolución de problemas. Interacción cognición y afecto. Las diferencias entre las reacciones emocionales de expertos y novatos.	Entrevistas. Gráfica emocional. Grabaciones audiovisuales en video (estudios de laboratorio).
Goldin (1988a, 1988b) Debellis y Goldin (1991, 1993)	Ciencia Cognitiva. Izard (1979) McLeod (1985, 1988) Rogers (1983) Zajonc (1980)	Cambios de estado de sentimientos durante la resolución de problemas.	Estado emocional y sentimientos. Afecto local. Afecto global.	Estudios longitudinales en primaria y secundaria sobre los cambios de estados emocionales en el comportamiento matemático. Análisis de metodologías y técnicas para la identificación de la interacción afecto cognición.	Grabaciones en video de entrevistas clínicas. Observación de la expresión verbal, gestual y facial. Utilización del Maximally Discriminative Facial Movement Coding System (MAX).

AUTORES Y FECHAS	TEORIAS SOBRE LA EMOCION (Autores de referencia)	CONCEPCION DE EMOCION	DENOMINACION	TIPO DE INVESTIGACION	METODO
Cobb, Yackel y Wood (1989)	Constructivismo Social e Interaccionismo Simbólico. Averill (1986) Armon-Jones (1986) Mandler (1989)	Consideran la emoción como acto. La emoción como acto reconoce la representación de emociones, las cuales expresan las valoraciones y evaluaciones relativas a alguna norma o valor. Valoración de un objeto o situación que está influenciado por el orden social.	Acto emocional. Norma Social.	Estudios sobre afecto y enseñanza. Analizar ejemplos de actos emocionales ocurridos en la clase de matemáticas de Infantil y Primaria. Tomar en cuenta cómo los estudiantes desarrollan creencias y valores y cómo llegan a ser intelectualmente autónomos en matemáticas. Describir procesos en los cuales se constituyen las normas socioculturales y cómo influyen en las oportunidades de aprendizaje tanto para el alumno como para el profesor.	Observaciones en clase Grabaciones audiovisuales Trabajo en grupo sobre actividades matemáticas.
Adams (1989)	Ciencia Cognitiva. Mandler (1984, 1989)	Reacción afectiva intensa en resolución de problemas.	Tono emocional de la clase. Tono emocional del individuo. Emociones del individuo.	Estudios sobre la influencia del afecto en la enseñanza de la matemática. Cuestiones afectivas que el profesor tiene que resolver para planificar e implementar la instrucción. Frustración. Expectativas del estudiante y metas del profesor.	Informes sobre resolución de problemas. Autoinformes de los estudiantes.
Hart (1989)	Mandler (1984) McLeod (1985) Silver (1985)	Reacción afectiva intensa.	Emociones. Reacciones. Variables afectivas.	Aspectos teóricos sobre el dominio afectivo.	
Marschall (1989)	Ciencia Cognitiva.	Respuestas afectivas « <i>hot</i> » (intensas).	Reacción emocional.	Afecto y aprendizaje. Respuesta afectivas en la resolución de problemas aritméticos en Primaria. Influencia en procesamiento (memoria y almacenaje de la información).	Cuestionario de lápiz y papel sobre 10 problemas. Entrevista de discusión sobre el cuestionario. Grabaciones audiovisuales.

AUTORES Y FECHAS	TEORIAS SOBRE LA EMOCION (Autores de referencia)	CONCEPCION DE EMOCION	DENOMINACION	TIPO DE INVESTIGACION	METODO
McDonald (1989)	Ciencia Cognitiva.		Reacciones emocionales.	Aspectos teóricos sobre concepciones psicológicas de matemáticas y emoción. Interacción procesamiento cognitivo, procesamiento emocional. Emoción-desarrollo de la personalidad-influencias sociales.	Utilización de juegos de ordenador. Entrevistas grabadas.
Sowder (1989)	Ciencia Cognitiva. Mandler (1984) Weiner (1974)	Emoción es la combinación de una evaluación, quizás inconsciente, que en algunos casos no es esperada o deseada, con el consiguiente sistema nervioso autónomo.	Respuesta emocional.	Estudios de afecto y aprendizaje. Analizar distintas estrategias de resolución de un mismo problema algebraico y sus diferentes reacciones afectivas.	Entrevistas. Escala de Diferencial Semántico.
Lafortune (1992) Lafortune y St. Pierre (1994)	Sillamy (1980) Martin y Briggs (1986) Schater y Singer (1962)	Es una reacción afectiva, feliz o triste, que se manifiesta de distintas maneras.	Emoción.	Afecto y teoría de la instrucción. Propuestas para la intervención sobre la dimensión afectiva matemática (adultos, universitarios). Aspectos teóricos y material didáctico para la intervención. Metacognición y emoción.	Investigación-Acción. Cuestionarios. Entrevistas. Material didáctico.
Isoda (1996)	Ciencia Cognitiva-Costruccionismo Social. Ekman (1975) McLeod (1990)	Interrupción de un plan como elemento que provoca la respuesta emocional.	Emoción.	Modelo de interacción social en la clase: cambios de la emoción en relación a la interacción social. Emoción-creencia. Interacción cognición-afecto.	Observación verbal, gestual y facial. Gráfica emocional. Grabaciones audiovisuales con distintas cámaras.

Figura 7: Cuadro extraído de *Matemática emocional* (Gómez, 2000). Investigaciones en educación matemática y teorías de la emoción.

Gómez (2000) explica que las teorías cognitivas exponen los procesos cognitivos, considerando la situación estímulo y respuesta emocional, además de los contenidos subjetivos, que tienen que ver con la reacción emocional o experiencia subjetiva. Destaca que existe una diferencia entre las perspectivas cognitivas y constructivas, por la forma de conceptualizar la naturaleza de la emoción, por la importancia que se da a la estructura social y cultural en la determinación del estado afectivo y en la diferencia que establecen entre la concepción de la emoción como estado o como acto.

Si bien Gómez indica a variados autores (*Figura 7*) que han estudiado la emocionalidad en ámbitos generales, destaca a Mandler (1989) por considerar el ámbito matemático en su investigación y con el cual abordaremos la presente investigación, junto a Weiner (1986). Mandler (1989) enfatiza el aspecto psicológico de la emoción en la elaboración de su modelo, dentro del cual aborda la activación fisiológica y el proceso de evaluación cognitiva. Este autor concibe la emoción como la interacción compleja que se produce entre el sistema cognitivo y el sistema biológico.

Mandler (1989) plantea su teoría desde el aspecto psicológico de la emoción, centralizándose en la resolución de problemas, con el objetivo de comprender la influencia de las emociones en el desarrollo de la resolución de problemas en matemáticas. Este autor incorpora dos conceptos: activación fisiológica y proceso de evaluación cognitiva, mencionados preliminarmente. La primera, se refiere a la activación del sistema nervioso autónomo, la cual se produce por la discrepancia entre pensamientos y acciones, mientras que la evaluación cognitiva será el que defina la cualidad de la emoción, o sea si

desencadenará en alegría, frustración, temor u otras. Una situación que podría ejemplificarlo es con las actividades que llevan nota, lo cual es preguntado al grupo de muestra de este estudio, que se detalla más adelante para conocer sobre las emociones que suceden en tal situación. La nota para la mayoría de los estudiantes genera tensión, pensando si obtuvo lo necesario para aprobar, o si tendrá consecuencias en el entorno familiar del estudiante, porque tiene un mal rendimiento, en el caso de aquellos que obtienen regularmente calificaciones bajas o están en el límite de aprobación. Mientras que para el caso de los estudiantes que mantienen un buen rendimiento, significa también una tensión e incertidumbre por permanecer en ese estado, por lo tanto la situación a la que se ven enfrentados es evaluada cognitivamente y como resultado a ese proceso obtenemos una determinada emoción.

Según Mandler (1989), existen tres fuentes de evaluación cognitiva: evaluaciones innatas, evaluaciones aprendidas culturalmente y evaluaciones de base estructural. Mandler expone en su teoría de la discrepancia el esquema:

- Problema planteado.
- Esquema activado, plan escogido
- Interrupción, bloqueado ante la solución.
- Reacción afectiva.
- Intentos de hacer cambios en el problema o abandonar frustrado.

De acuerdo a lo anterior, la emoción se evidencia frente a una situación problemática, como el plantear un ejercicio en clases, el cual obliga al estudiante a buscar la estrategia adecuada para su resolución, pero al verse truncados sus métodos, la emoción resulta negativa y puede abandonar el problema a causa de su frustración o por el contrario podría tratar de buscar otro camino que lo guíe a la solución.

Mandler (1989) presenta dos aproximaciones para el estudio de las emociones en la resolución de problemas, el macroanálisis, centrado en las diferencias individuales y la eficacia cognitiva; y el microanálisis, que se desarrolla en la interacción del individuo con la tarea de resolución de problemas. El autor explica como tratar de forma efectiva el ámbito emocional en los estudiantes: *“Para manejar el estrés y el afecto de forma eficiente en la tarea de resolver un problema, el individuo tiene que estar equipado con un conocimiento adecuado del problema, de la tarea y de los diferentes caminos posibles de resolverlo. En otras palabras, la información inadecuada conduce al estrés, pero el individuo bien informado puede usar el estrés de forma constructiva”*. (Mandler, 1989a, 15; citado en Gómez, 2000, p.42)

La teoría de la discrepancia no es la única que estudia este tema, sino también la teoría de la atribución de Weiner (1986), la cual trata los distintos modos de explicar el comportamiento social, las causas que se le atribuyen y las explicaciones que se basan en el sentido común. Su teoría busca las causas de la motivación y la emoción. En cuanto a la motivación, el autor expone dos conceptos: el incentivo y la expectativa; siendo la primera lo que se desea obtener, en términos subjetivos; mientras que la expectativa es la

probabilidad de conseguirlo. Las causas de éstas o atribuciones causales, como lo denomina Weiner, son los que determinan o guían las reacciones emocionales y las consecuencias subjetivas para lograr la meta. Por lo tanto, ante un mismo objeto, se puede producir distinto grado de satisfacción, según la atribución de causalidad que hagamos.

En cuanto a la emoción en específico, Weiner (1986) propone un punto de vista atributivo o cognitivo para el proceso emocional. Explica que luego del resultado de algún acontecimiento, sucede una reacción general que puede ser positiva o negativa en el individuo, la cual se denomina “*emoción primitiva*”. La emoción primitiva se basa en el éxito o fracaso del resultado percibido, lo cual se llama “*valoración primaria*”. Las emociones dependen del resultado, pero no de la atribución de causalidad, siendo las reacciones más frecuentes: la felicidad por el éxito y la frustración por el fracaso. Luego de la valoración y la emoción primaria, se pueden dar una serie de emociones diferentes, tales como la sorpresa, serenidad, orgullo, tristeza, entre otros.

Weiner (1986) analiza siete emociones, las cuales son: autoestima, ira, compasión, culpabilidad, vergüenza, gratitud y desesperación y luego las relaciona con las dimensiones causales. El siguiente cuadro extraído de Gómez (2000) explica la interpretación atribucional de las emociones:

- Ira: resultado negativo y atribución de ausencia de control (con atribución de conducta arbitraria al otro).
- Culpabilidad: resultado negativo, con atribución de causas controlables y falta de esfuerzo propio.
- Vergüenza: resultado negativo, con atribución de causas controlables, pero con falta de capacidad.
- Desesperanza: resultado negativo y atribución de causas estables.
- Orgullo y autoestima positiva: resultado positivo y atribución causal interna.
- Autoestima negativa: resultado negativo y atribución causal externa.
- Compasión: está relacionada con ausencia de control.
- Gratitud: sí y sólo si se atribuye a la conducta del otro el carácter de volitiva y dirigida a beneficiarnos.

Figura 8: Interpretación atribucional de las emociones según Weiner (1986) el cual aparece en Gómez (2000), p. 45.

Tanto Mandler (1989) como Weiner (1986) se refieren a procesos cognitivos que desencadenan la emoción, por la influencia psicológica de las que derivan sus teorías, identificando que una situación genera una respuesta (se puede interpretar como estímulo y respuesta), que nos permiten vislumbrar una semejanza en la propuesta de ambos autores. Lo importante a resaltar al momento de analizar las experiencias prácticas de esta investigación, es considerar el aspecto emocional al identificar las situaciones que detonan las emociones negativas como el temor, la frustración, entre otras y aquellas positivas, como la felicidad, la satisfacción, etc.

CAPÍTULO 3

Metodología

Esta parte del trabajo fue largo y arduo, pues los estudiantes considerados para el estudio tienen grandes dificultades en el ámbito del lenguaje, les dificulta expresarse y en eso se dedicó más de una sesión, que era lo previsto para desarrollar un cuestionario, sin embargo, influyó también el período escolar en el que se situó la aplicación de los instrumentos, por lo que fue difícil hallar y ajustar los momentos para ello, y de esta forma tener respuestas que enriquecieran la investigación y evidenciaran los errores que se pretendían corroborar a través de ésta.

Luego que se lograron realizar los cuestionarios, se procedió a seleccionar a algunos de los alumnos de acuerdo a si pertenecían al grupo con mayor frecuencia en alguna pregunta o por la explicación dada, para complementarlas a través del diálogo, en su gran mayoría por contacto telefónico o para citarlos y coordinar un encuentro con el grupo, porque no se hallaban en período escolar, por lo que después de realizar todo esto se logró comenzar con los análisis respectivos y comprobar en base a ello si las temáticas propuestas eran verdaderas y se daban por cumplidos los objetivos para dar respuesta a las preguntas iniciales señalados en esta investigación.

3.1 Tipo de Investigación y diseño.

Esta investigación es de tipo mixta, o sea documental y de campo, según Zorrilla (1993). Se basa en la búsqueda de información en libros, revistas, documentos, etc. y se investiga dentro del lugar donde ocurre la problemática, en este caso el aula, para aplicar los instrumentos necesarios, que permitan evidenciar el problema planteado en esta investigación, los cuales se indagaron por medio de dos cuestionarios que abordan los procedimientos de resolución de ecuaciones cuadráticas explícitas y aplicadas en problemas de planteo, así como también la emocionalidad presente al enfrentar estas actividades. Previo a la aplicación de los cuestionarios, se realizó un estudio de un curso seleccionado donde se extrajo el grupo para la investigación.

La etapa de metodología del estudio se divide en dos partes: la primera, de conocimiento de un curso de tercer año medio (estudiantes *Liceo B*) del cual se seleccionó una muestra de 20 estudiantes a los cuales se aplican cuestionarios de elaboración propia para indagar en una segunda parte en los ámbitos propuestos para la presente investigación. Ambas partes, constan de etapas para lograr desarrollar el estudio planteado, en un orden específico (ver *Figura 9*).

La primera etapa se desarrolla a través de dos instrumentos: prueba sociométrica (I.1) y cuestionario de estilos de aprendizaje (I.2) a un tercer año medio de la especialidad de Servicio de Alimentación Colectiva (G.1) del *Liceo B*.

Tanto I.1 como I.2 no son instrumentos de elaboración propia. El primero fue hallado en la web y conocido previamente - por parte de quién levanta la presente investigación - durante el desarrollo de jefatura de un curso del Liceo de Limache (Liceo A), curso en el cual se realizó esta prueba con la finalidad de conocer el grupo e interactuar mejor con quiénes lo conformaban. Mientras que I.2 fue conocido durante una de las asignaturas de psicología de la carrera de Matemáticas, durante el período que cursaba el ramo quién escribe esta memoria de título. Posteriormente fue utilizada por la misma, durante una investigación que se desarrolló en otra asignatura y en un curso del período de Práctica Profesional, con fines similares en ambos casos, por lo que el conocimiento y aporte de este instrumento creado por Honey y Alonso (1992) resultó ser pertinente como parte de la primera etapa metodológica en la cual se buscaba identificar las características del grupo de muestra en torno al aprendizaje, con el cual se realizaría la indagación del tema propuesto en la presente investigación.

Durante la segunda etapa, se utilizaron dos instrumentos indagatorios de elaboración propia: Cuestionario 1 (C.1) y Cuestionario 2 (C.2). El primero parte con un esbozo de lo que se piensa preguntar o averiguar de acuerdo a las indagatorias con el grupo de estudiantes del Liceo A, en torno a las emociones hacia las matemáticas y los posibles errores en relación a las ecuaciones cuadráticas equivalentes. Posteriormente se va afinando el cuestionario con ayuda del profesor tutor de Seminario, quién acompaña todo este proceso y se incorpora en C.1 la temática de los errores al aplicar incorrectamente la propiedad de sin divisores de cero.

Mientras que C.2 se confecciona según preguntas de textos de matemáticas de tercer año medio de los entregados por el Ministerio de Educación y por las producciones recogidas en el Liceo A. Las etapas mencionadas anteriormente se desglosan de la siguiente manera, según aparece en la *Figura 9*.

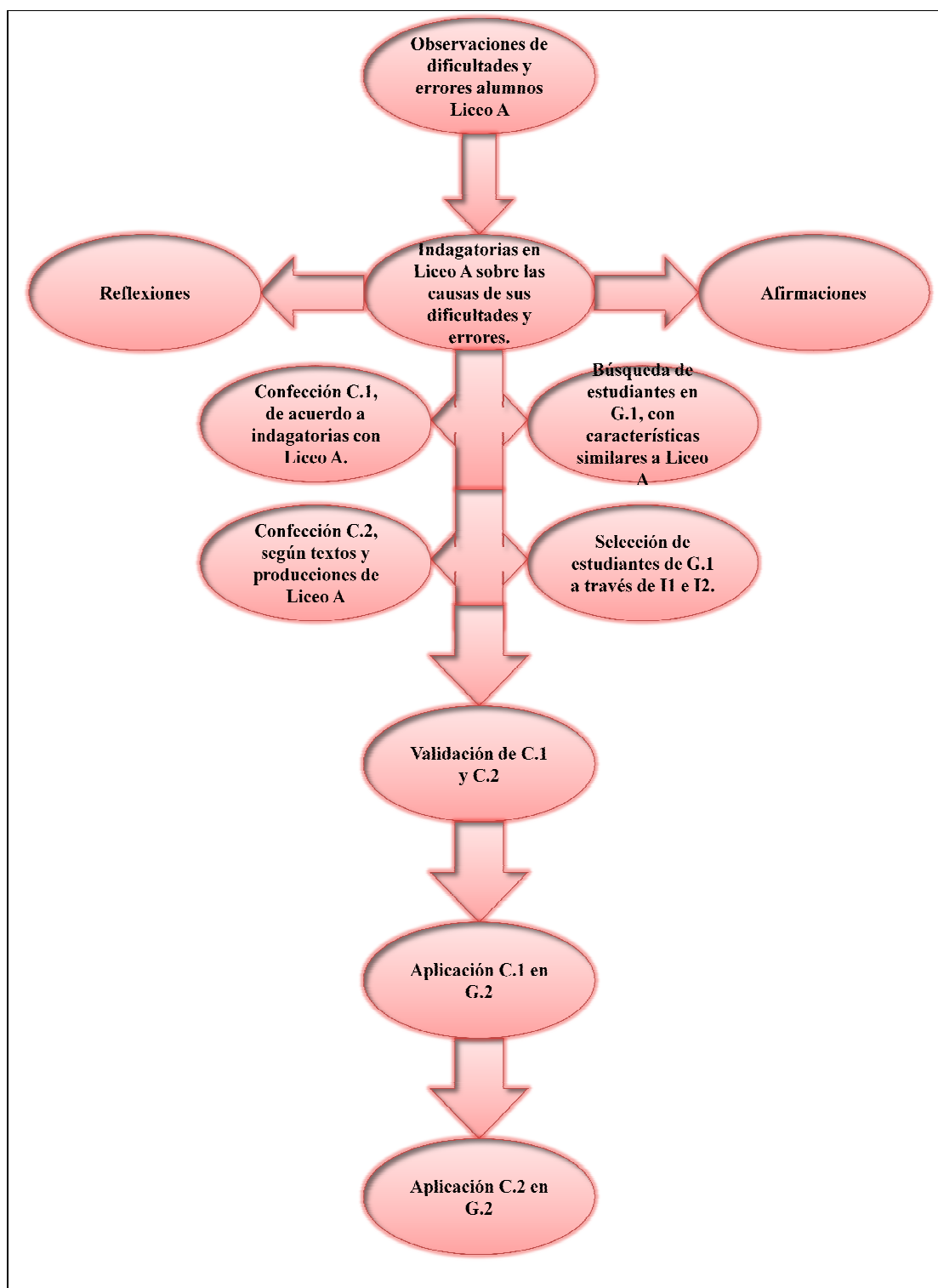


Figura 9: Diagrama de actividades de instrumentos metodológicos para aplicación.⁶

⁶ **Notación:** Liceo A: Liceo de Limache G.1: Curso tercer año medio Servicio de Alimentación Colectiva, Liceo Tecnológico de Villa Alemana. G.2: Grupo de alumnos de G.1 a los cuales se aplican C.1 y C.2 (20 estudiantes)

3.2 Descripción de la aplicación de instrumentos indagatorios para la caracterización del grupo seleccionado.

Durante la primera parte, de tipo indagatorio, se aplicó una prueba sociométrica (I.1) y el Cuestionario de Honey-Alonso (I.2) de los estilos de aprendizaje a un tercer año medio (G.1), del cual se seleccionó a algunos estudiantes para la aplicación de cuestionarios propios, a partir de características similares con un curso de tercer año medio técnico del Liceo A, en el cual se observaron ciertas dificultades y errores en esta temática, estos últimos estaban a cargo de quién expone este trabajo y con ellos se inicia una indagación sobre las dificultades y errores, según la percepción de los estudiantes.

Las características buscadas para la selección de los alumnos en G.1, en base a las de los estudiantes del Liceo A, eran:

- Pertenecer a liceo municipal.
- Ser estudiante de tercer año medio técnico profesional.
- Tener entre 16 y 19 años de edad.
- Pertenecer a curso con modalidad DUAL⁷.

La idea de que tuvieran características similares, surge inicialmente para obtener un grupo con el cual verificar si algunas aseveraciones y procedimientos se reproducen de manera análoga a los del Liceo A, en donde surgió el tema de estudio; luego por el nivel de

C.1: Cuestionario 1. **C.2:** Cuestionario 2. **I1:** Instrumento 1; prueba sociométrica. **I2:** Instrumento 2; Cuestionario Honey – Alonso, de los estilos de aprendizaje.

⁷ **Modalidad Dual:** reciente modalidad educativa en Chile que permite al estudiante participar de las clases (teoría) y de la empresa (práctica) para su formación técnica.

aprendizajes logrados de los estudiantes, pues se evidencia una diferencia entre alumnos de técnico profesional y de humanista científico, por la preparación que se da de la asignatura en cada caso. Los que pertenecen al humanista científico reciben más horas de matemáticas a la semana y se les refuerza mayormente porque rendirán PSU. Esto significa que tienen mayor apoyo para lograr sus aprendizajes por el mayor tiempo de reforzamiento que se da a la asignatura, mientras que en el caso de los técnico profesional, se minimiza el tiempo, sucediendo además pérdidas de horas de clases en algunas circunstancias por participar de eventos o presentaciones.

Además, varios de los estudiantes de técnico profesional trabajan en el lugar donde realizan su práctica y tienen un gasto adicional de su tiempo. En cuanto a la experiencia, los estudiantes que tienen modalidad dual se ven beneficiados en su especialidad, pero carecen de algunos conocimientos teóricos, inclusive de los básicos que se les exige en su área en matemáticas.

Todas estas similitudes permitirían verificar los ejes temáticos presentados para esta investigación, en la cual se logró hallar e interactuar con un grupo afín a las características buscadas, presentadas previamente. Más aún, los estudiantes del grupo donde se extrae la muestra además de pertenecer a un liceo municipal, estar dentro del rango de edad, ser de modalidad dual técnico, son también de la misma especialidad.

Luego de indagar en las características de G.1, aplicando I.1 e I.2, se decide el grupo final (G.2), que fue de 20 estudiantes. Estos alumnos son mencionados como estudiante 1, estudiante 2,..., estudiante 20, dentro de los análisis.

La prueba sociométrica (I.1) presenta un sociograma (*Ver anexo 1*) que identifica los líderes del curso y permite conocerlos desde un ámbito distinto al contexto de las clases de matemática. El instrumento fue elaborado por *L. Oseguera, psicopedagogo IES (Instituto de Educación Secundaria) Leonardo Da Vinci de Alicante* y extraído de la web.

Este tipo de prueba permite poder ejercer una influencia más eficaz en la dinámica de grupo, favorecer la convivencia, evitar el rechazo, constituir grupos eficaces, conseguir la colaboración de los alumnos con mayor empatía dentro del curso. Existen diversas actividades que permiten ahondar en este trabajo sociométrico, pero se escapan a los objetivos propuestos para esta investigación, por lo cual sólo se pretende tener algunos referentes.

La prueba socio-métrica define las siguientes categorías:

Alumno estrella:	El que recibe un número significativamente mayor de elecciones.
Alumno rechazado:	Número de rechazos significativo (+10%)
Alumno aislado:	No es elegido, ni rechazado.

Tabla 2: *Clasificación tipo de alumno, según Prueba Socio-métrica de L. Oseguera, psicopedagogo IES.*

Los instrumentos se aplicaron a G.1, como se mencionó anteriormente. Este curso consta de 31 alumnos en lista, de los cuales 30 realizaron el I.1. De acuerdo a la percepción de

los profesores de asignaturas (Lenguaje y Matemáticas) y del profesor jefe, G.1 es considerado con bajo rendimiento en especial en las asignaturas de Lenguaje y Matemáticas, lo cual se corrobora con las notas registradas en el libro de clases. El promedio general del curso durante el primer semestre del año 2010 fue de un 4.4 (considerando la totalidad de 31 alumnos). En la asignatura de Matemáticas los promedios y porcentajes de rendimiento del curso son como se detalla a continuación (ver *Tabla 3* y *Figura 10*):

PROMEDIO MATEMÁTICAS CURSO 3° SAC A PRIMER SEMESTRE: 4.5		
CATEGORÍA	N° ESTUDIANTES	PORCENTAJE
MB: MUY BUENO	6	19%
B: BUENO	4	13%
S: SUFICIENTE	16	52%
I: INSUFICIENTE	5	16%
T: TOTAL	31	100 %

Tabla 3: Resumen rendimiento en matemáticas durante el primer semestre (2010) de G1. ⁸.

A continuación se ilustra el gráfico circular que representa el rendimiento en la asignatura de matemáticas de G.1, durante el primer semestre del año 2010, según el detalle de la *Tabla 3*.

⁸ Categorías son: MB: de 6.0 a 7.0 B: de 5.0 a 5.94 S: de 4.0 a 4.94 I: menor que 4.0

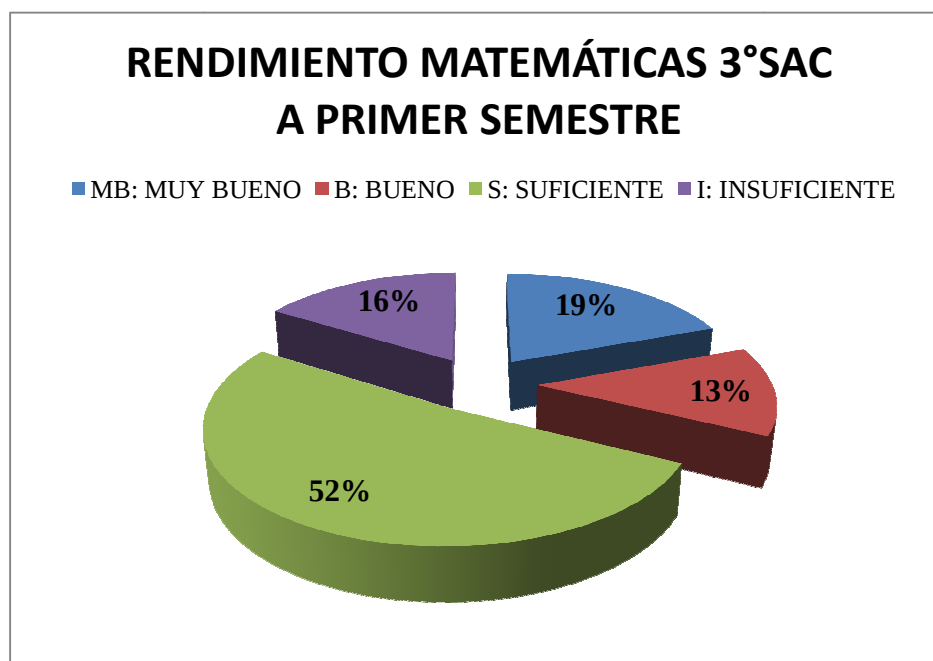


Figura 10: Gráfico circular que representa el rendimiento de G.1 (2010), durante el primer semestre.

En cuanto a la situación disciplinaria del curso, éste tiene un comportamiento bueno, aunque regular en cuanto a la motivación por la asignatura. La mayoría de ellos tiene muchas dificultades que se tornan evidentes en contenidos previos que debieran tener claros, pero que desconocen. A pesar de las dificultades que presentan en la asignatura se destaca la mayoría en su especialidad, salvo en la asignatura de Costo, en la cual deben aplicar constantemente matemáticas. Se realizó una indagación en los contenidos que más requieren los profesores de las especialidades relativas a la disciplina de servicio de alimentación colectiva, refiriéndose ellos mismos a los siguientes, como los más utilizados:

- Porcentajes.
- Operatoria en el conjunto de los números reales.
- Razones y proporciones.
- Ecuaciones de primer grado con una incógnita.
- Sistemas de ecuaciones.
- Conversión de medidas.

A través de un diálogo con los docentes de la especialidad de alimentación, quienes brindaron la información sobre los contenidos requeridos escritos previamente, coinciden en enfatizar sobre la importancia de éstos, sin significar aquello que el resto no lo sean.

Además agregan que algunos de los estudiantes de técnico profesional aspiran rendir PSU y entrar a estudiar alguna carrera técnica o profesional, según sus inquietudes, por lo que se torna importante reforzar algunos contenidos, principalmente en varios alumnos que no conocen, ni logran aplicar correctamente los procedimientos de resolución de ecuaciones de primer grado, lo que hace aún más difícil que comprendan las de segundo grado.

Por otra parte, la profesora de matemáticas de G.1 indica que *“en el caso de factorizar una ecuación cuadrática el estudiante debe resolver una ecuación de primer grado para lograr hallar las soluciones cuando ha aplicado el método de factorización para su resolución”*, por lo tanto se comprende la necesidad de conocer bien el método de resolución de ecuaciones de primer grado para lograr abordar las de segundo grado.

Luego de tener una visión preliminar del curso, de acuerdo al aporte realizado por los docentes del liceo, se aplica la prueba sociométrica, obteniendo que dos de los treinta estudiantes quedan en la categoría de *alumno estrella*, los cuales obtuvieron un 26% de aprobación. En cuanto a la categoría *alumno rechazado*, cinco alumnos son los que pertenecen a este grupo, obteniendo diferentes grados de desaprobación. Sólo un estudiante queda en la categoría de *alumno aislado*, lo cual se corrobora por sus ausencias prolongadas, quedando fuera de los grupos del curso, y siendo la razón por la cual no participa de los cuestionarios posteriores.

De los 30 estudiantes que realizan la prueba sociométrica, participan 20 de ellos en los cuestionarios de elaboración propia, de forma voluntaria, considerando en este grupo de muestra a la totalidad de los alumnos de las categorías *alumno estrella* y *alumno rechazado*. Estos estudiantes resultan tener características similares a los del curso de tercero de servicio de alimentación colectiva del Liceo A, los cuales permitieron elaborar algunas preguntas de los cuestionarios posteriores de elaboración propia; como su rendimiento.

Luego, se aplica el Cuestionario de Honey – Alonso (ver *Anexo 2*) el cual se crea a partir de la descripción de los estilos de aprendizaje: activo, reflexivo, teórico y pragmático de Honey y Mumford (1986), por Alonso, Gallego y Honey (1992), creando una lista de características que determina con claridad el campo de destrezas de cada estilo. A continuación se señalan algunas características principales de cada estilo, según Alonso, Gallego y Honey (1992):

- ❖ **Estilo Activo:** animador, improvisador, descubridor, arriesgado, espontáneo.
- ❖ **Estilo Reflexivo:** ponderado, concienzudo, receptivo, analítico, exhaustivo.
- ❖ **Estilo Teórico:** metódico, lógico, objetivo, crítico, estructurado.
- ❖ **Estilo Pragmático:** experimentador, práctico, directo, eficaz, realista.

De acuerdo a la cantidad de preguntas marcadas como positivas (+) en cada estilo, se clasifica el grado de tendencia en cada uno de ellos, de acuerdo con la siguiente tabla:

	Preferencia Muy Baja	Preferencia Baja	Preferencia Moderada	Preferencia Alta	Preferencia Muy alta	Media
Activo	0-6	7-8	9-12	13-14	15-20	10,7
Reflexivo	0-10	11-13	14-17	18-19	20	15,37
Teórico	0-6	7-9	10-13	14-15	16-20	11,3
Pragmático	0-8	9-10	11-13	14-15	16-20	12,1

Tabla 4: Clasificación de acuerdo al grado de tendencia a cada estilo de aprendizaje, según autores Cuestionario Honey – Alonso.

Al aplicar I.2 para conocer los estilos de aprendizaje de los estudiantes, se obtuvo lo siguiente (ver *Tabla 5*):

ESTILOS	MUY ALTA	ALTA	MODERADA	BAJA	MUY BAJA
ACTIVO	6	4	5	4	1
REFLEXIVO	1	1	11	4	3
TEÓRICO	4	3	11	2	0
PRAGMÁTICO	4	4	9	2	1

Tabla 5: Tendencias de los estilos de aprendizaje de la muestra de la investigación.

De acuerdo a la *Tabla 5*, se observa una tendencia moderada hacia el estilo reflexivo y le sigue el estilo pragmático, con una tendencia moderada también. Sin embargo en las

tendencias altas o muy altas no se agrupa un mayor número de alumnos prefiriendo un estilo en particular (ver Figura 11).

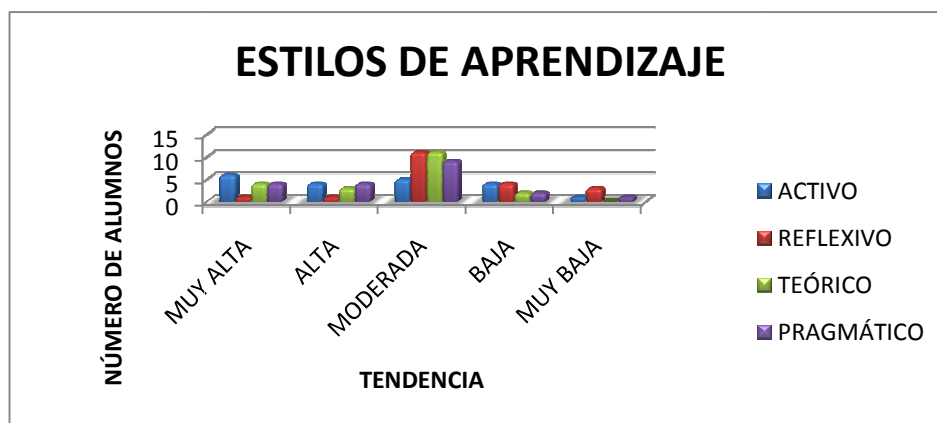


Figura 11: Gráfica que representa la tendencia a cada estilo de aprendizaje, de acuerdo a cuestionario de Honey – Alonso, de la muestra del curso 3°SAC A⁹.

Según Honey – Alonso (1992) las personas que presentan una tendencia al estilo reflexivo, “[...] les gusta considerar las experiencias y observarlas desde diferentes perspectivas. Recogen datos, analizándolos con detenimiento antes de llegar a alguna conclusión. Son personas que gustan considerar todas las alternativas posibles antes de realizar una acción” (Honey y Mumford, 1986. *Tendencias generales del comportamiento personal*. Obtenida de http://www.cca.org.mx/profesores/cursos/cep21-tec/modulo_2/mod_honey_mumford.htm#qwe). Según los autores estos estudiantes aprenderán mejor cuando.

⁹ 3°SAC A: Curso tercero de servicio de alimentación colectiva.

Aprenderán mejor cuando puedan:

- Observar
- Reflexionar sobre actividades
- Intercambiar, previo acuerdo, opiniones con otras personas
- Llegar a decisiones a su propio ritmo
- Trabajar sin presiones ni plazos obligatorios
- Revisar lo aprendido, lo sucedido
- Investigar detenidamente
- Reunir información
- Sondear para llegar al fondo de las cosas
- Pensar antes de actuar
- Asimilar antes de comentar
- Escuchar
- Distanciarse de los acontecimientos y observar
- Hacer análisis detallados
- Realizar informes cuidadosamente ponderados
- Trabajar concienzudamente
- Pensar sobre actividades
- Ver con atención una película o videos sobre un tema
- Observar a un grupo mientras trabaja
- Tener posibilidad de leer o prepararse de antemano algo que le proporcione datos
- Tener tiempo suficiente para preparar, asimilar, considerar
- Tener posibilidades de escuchar puntos de vista de otras personas, o mejor de una variedad de personas

Preguntas clave para los reflexivos

¿Tendré tiempo suficiente para analizar, asimilar y preparar?

¿Habrá oportunidades y facilidad para reunir la información pertinente?

¿Habrá posibilidades de escuchar los puntos de vista de otras personas, preferiblemente personas de distintos enfoques y opiniones?

¿Me veré sometido a presión para actuar precipitadamente o improvisar?

El **aprendizaje resultará más difícil** a estos alumnos cuando tengan que:

- ocupar el primer plano
- actuar de líder
- presidir reuniones o debates
- dramatizar ante personas que lo observan
- representar algún rol
- participar en situaciones que requieran acción sin planeación
- hacer algo sin previo aviso o exponer una idea espontáneamente
- no tener datos suficientes para sacar una conclusión
- estar presionado por el tiempo
- verse obligado a pasar rápidamente de una actividad a otra
- hacer un trabajo de forma superficial

Cuadro 6: *Sugerencias sobre como aprenderán mejor los estudiantes que tienen al estilo reflexivo, según Cuestionario Honey - Alonso, preguntas claves e indicaciones sobre cuándo será más difícil el aprendizaje. (Extraído de http://www.cca.org.mx/profesores/cursos/cep21tec/modulo_2/mod_honey_mumford.htm#2)*

Mientras que para los pragmáticos, según los autores: *“el punto fuerte de las personas con predominancia en estilo pragmático es la aplicación práctica de las ideas. Descubren el aspecto positivo de las nuevas ideas y aprovechan la primera oportunidad para experimentarlas. Actúan rápidamente y con seguridad con aquellas ideas y proyectos que les atraen”* (Honey y Mumford, 1986. *Tendencias generales del comportamiento*

personal. Obtenida de http://www.cca.org.mx/profesores/cursos/cep21tec/modulo_2/mod_honey_mumford.htm#qwe). Según Honey –Alonso, este tipo de alumnos aprenderán mejor en los siguientes casos:

Aprenderán mejor cuando puedan:	
• Aprender técnicas para hacer las cosas con ventajas prácticas evidentes • Estar expuestos ante un modelo al que puede emular • Adquirir técnicas inmediatamente aplicables en su trabajo • Elaborar planes de acción con un resultado evidente • Dar indicaciones, sugerir atajos • Tener la posibilidad de experimentar y practicar técnicas con asesoramiento o retroalimentación de algún experto • Ver que hay un nexo evidente entre el tema tratado y un problema u oportunidad que se presenta para aplicarlo • Tener posibilidad inmediata de experimentar y aplicar lo aprendido	• Ver la demostración de un tema de alguien que tiene un historial reconocido • Percibir muchos ejemplos o anécdotas • Ver películas o videos que muestren cómo se hacen las cosas • Concentrarse en cuestiones prácticas • Comprobar que la actividad de aprendizaje parece tener una validez inmediata • Vivir una buena simulación de problemas reales • Recibir muchas indicaciones prácticas y técnicas • Tratar con expertos que saben o son capaces de hacer las cosas ellos mismos
Preguntas clave para los pragmáticos	
¿Habrá posibilidades de practicar y experimentar? ¿Habrá suficientes indicaciones prácticas y concretas? ¿Se abordarán problemas reales y me ayudarán a resolver algunos de mis problemas?	
El aprendizaje resultará más difícil a estos alumnos cuando tengan que:	
• percatarse de que el aprendizaje no guarda relación con una necesidad inmediata que él reconoce o no puede ver • percibir que ese aprendizaje no tiene una importancia inmediata o un beneficio práctico • aprender lo que está distante de la realidad • aprender teorías y principios generales	• trabajar sin instrucciones claras sobre cómo hacerlo • considerar que las personas no avanzan y que no van a ninguna parte con suficiente rapidez • comprobar que hay obstáculos burocráticos o personales para impedir la aplicación • cerciorarse de que no hay una recompensa evidente por la actividad de aprendizaje

Cuadro 7: Sugerencias sobre como aprenderán mejor los estudiantes que tienen al estilo reflexivo, según Cuestionario Honey Alonso, preguntas claves e indicaciones sobre cuándo será más difícil el aprendizaje. (Extraído de http://www.cca.org.mx/profesores/cursos/cep21tec/modulo_2/mod_honey_mumford.htm#2)

De acuerdo a lo que plantean los autores serían indicadas actividades con las características descritas anteriormente para este grupo de alumnos, en caso que se quisiera abordar en el futuro la creación de una propuesta didáctica para apoyar las dificultades de los estudiantes a raíz de las evidencias que entregará este estudio.

En general, los autores indican que el ideal sería presentar una tendencia en todos los estilos, pues de esta forma presentaría mayor grado de adaptación a las diversas actividades que puedan plantearle y así abordarlas positivamente, a su vez el docente debe crear diferentes instancias para presentar los diferentes estilos y que ningún estudiante se sienta excluido siempre en ellas.

3.3 Método y análisis de la información.

En la etapa de recolección de reproducciones estudiantiles sobre resolución de ecuaciones cuadráticas, se tenían algunos antecedentes obtenidos de las observaciones del Liceo A. Ante el surgimiento de errores en las guías, actividades y ejercicios que se propusieron a los estudiantes y de que la temática tratada coincidía con el estudio, es que se incorporaron algunas preguntas enfocadas a indagar en las dificultades y los procedimientos que los estudiantes utilizaban en su resolución. Las reflexiones o afirmaciones que ellos plantearon dieron el origen a algunas preguntas de los cuestionarios creados para verificar con otro grupo con características similares (G.2), si las proposiciones eran parecidas o si se identificaban con éstas.

Una vez, que se conocían algunas características del grupo curso, se procede a indagar en las problemáticas referente a las ecuaciones cuadráticas, pensando en los ejes destacados de esta investigación. Se decide crear un “Cuestionario Exploratorio 1” (C.1) que contiene la temática de las ecuaciones cuadráticas equivalentes y la propiedad de sin divisores de cero. Luego, se diseña el “Cuestionario Exploratorio 2” (C. 2) que aborda los problemas de planteo, indagando en la conversión de lenguaje natural a lenguaje matemático. En cuanto a la influencia de la emocionalidad en la resolución de ecuaciones cuadráticas, es que cada uno de ellos contiene un ítem indagatorio en las emociones y/o percepciones de los estudiantes hacia las matemáticas, y luego de forma específica hacia las ecuaciones y problemas planteados.

El Cuestionario Exploratorio 1 (ver *Anexo 3*), contiene tres partes. La primera pretende dar una mirada general a la actitud y/o percepción de los estudiantes frente a la asignatura, mientras que la segunda parte, se enfoca en el desarrollo de ecuaciones cuadráticas, en cuanto a los procedimientos realizados por los alumnos y la explicación que dan de ellos en caso que se pueda o no resolver. La última parte en cambio indaga en las emociones y sensaciones que les produjo la actividad, y en específico el desarrollo de las ecuaciones propuestas. En este último punto, se presentan afirmaciones de estudiantes del Liceo A como alternativas de respuesta.

El Cuestionario Exploratorio 2 (ver *Anexo 4*), consta de dos partes. La primera plantea tres problemas que deben resolverse aplicando ecuaciones cuadráticas, las cuales son completas e incompletas, por lo que hay variedad en el método de resolución que los estudiantes puedan aplicar. La segunda parte pide al alumno reflexionar sobre los problemas que le causaron

mayor dificultad y la causa que le atribuyen, luego se pide seleccionar entre una serie de afirmaciones para verificar si se identifican con alguna de las originadas de los estudiantes del Liceo A.

CAPÍTULO 4

Análisis de la información

4.1 Análisis de los Cuestionarios Exploratorios

En general, los alumnos presentan variadas dificultades, que tienen que ver con el ámbito no sólo de los procedimientos matemáticos que debían ejecutar, sino también del área del lenguaje. Los estudiantes se complican al tener que redactar la explicación de sus procedimientos. No comprenden las instrucciones que se dan y requieren de un continuo asesoramiento para realizar las actividades propuestas. Previamente, se pensó en esta opción, siendo por ello que se agregaron tablas con afirmaciones que debían seleccionar según la afinidad con éstas. Sin embargo, no se podía dejar de lado la explicación de sus procedimientos matemáticos, para comprender por qué desencadenan el error, ahondando en el tema en algunos casos que se seleccionaron según las respuestas que dieron, preguntando el por qué de tal procedimiento o razonamiento.

4.1.1 Análisis del Cuestionario Exploratorio 1 (C.1)

El C.1 se divide en tres partes:

1° Percepción de los estudiantes hacia las matemáticas.

2° Evidencia de dificultades y errores en cuanto a la incorrecta aplicación de la propiedad de sin divisores de cero y la dificultad para identificar ecuaciones cuadráticas equivalentes junto a un mal procedimiento.

3° Percepción y actitud de los estudiantes hacia la actividad.

Parte I:

Esta parte contenía tres preguntas, las cuales eran:

1. ¿Te gusta la asignatura de matemáticas? Explica brevemente.
2. ¿Qué emociones surgen en ti al estar en una clase de matemáticas?
3. ¿Qué sientes cuando te plantean un ejercicio sin nota?, ¿y cuándo lleva una bonificación o nota?

En Anexo 3, se observa el formato de presentación de estas preguntas, siendo la primera la que apuntaba a la actitud o preferencia por la asignatura de matemáticas, en la cual el 75% de G.2, indicó que no le gustaban las matemáticas. Dentro de las explicaciones que daban, se encuentran las siguientes:

“No me gustan, porque aparecen muchas letras y números, hay que hacer muchos cálculos, es difícil”
(Estudiante 6)

“No sé nada” (Estudiante 9)

“Me cargan las matemáticas, los números, las x. Es muy difícil, nunca entendí. Sólo algunos saben, porque son más inteligentes” (Estudiante 10)

<i>“No mucho porque me frustra un poco al no comprender, lo que me lleva a tener rabia y tener un poco de desinterés en la materia” (Estudiante 12)</i> <i>“No mucho, porque cuando no entiendo la odio y me dan ganas de no hacer más matemáticas” (Estudiante 14)</i> <i>“No, porque no soy muy buena con los números.” (Estudiante 15)</i>
--

Cuadro 8: Afirmaciones de los estudiantes de la muestra pregunta 1, parte I, C.1.

En general, los estudiantes atribuyen a su causa la incomprensión del saber matemático, como si fuese algo interno a ellos que no hace posible un nexo entre el alumno y el conocimiento. Dentro del grupo destaca la respuesta de un estudiante que afirma que sí le gustan las matemáticas, pero no le encuentra un sentido (*Estudiante 4*), lo cual tiene relación con las dificultades asociadas a los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de las matemáticas (Socas, 2000), pues no le encuentra un sentido lógico, ya que el estudiante busca relacionarlo con su contexto cotidiano, pero al no encontrar una compatibilidad entre la lógica social y la lógica matemática, surge un obstáculo conceptual. Más aún, el *Estudiante 8*, responde a la pregunta 1, parte I de C.1., indicando que *“Sí aunque no pongo atención, porque encuentro que hay algunos ejercicios que no sé de qué sirven para la vida humana” (Estudiante 8)*, connotando que no hay una importancia si no tiene utilidad evidente, lo cual se refleja en la pregunta recurrente en aula *“¿Para qué sirve?”*.

El 75% correspondiente a 15 estudiantes de G.2, explican que las matemáticas en si misma son difíciles. Podríamos relacionarlo con la dificultad asociada a los objetos matemáticos, según Socas (2000), pues los estudiantes obstaculizan sus aprendizajes por

no comprender los símbolos, notaciones o escrituras de la disciplina. En general los comentarios de los éstos, tanto en las producciones escritas en los cuestionarios como en las afirmaciones verbales que realizan, denotan una faceta emocional. Recordemos que en Buxton (1981) aparecen algunas creencias sobre las matemáticas, que parecieran encontrarse en este grupo de estudio “*Las matemáticas son: [...] Un misterio accesible a pocos. [...] Un área en la que se harán juicios, no sobre el intelecto, sino sobre la valía personal. Sobre todo cálculo.*” (Buxton, 1981; citado en Rico, L.; Castro, E.; Socas, M. y otros, p. 2000)

Por otra parte, el 100% de los estudiantes que contestaron que no le gustaban las matemáticas, evidenciaban dificultades asociadas a actitudes afectivas y emocionales hacia la asignatura, según la concepción de Socas (2000). Si bien no se especificó en todos los casos cuando contestaron esta pregunta en el cuestionario, si lo reflejaron en sus afirmaciones al indagar en este punto, por el alto porcentaje de ellos que no gustaban de la asignatura.

A causa de lo anterior, se ahonda con la segunda pregunta de selección, en la cual los estudiantes deben marcar las emociones que surgen en ellos al estar en clases de matemáticas, haciendo énfasis en que contestaran lo que sentían, de acuerdo a la asignatura en general, sin especificar aún en el tema de ecuaciones cuadráticas. En la *Tabla 6* se muestra la selección del grupo de muestra en esta pregunta y la gráfica (*Figura 12*) que representa tal situación:

EMOCIÓN	NÚMERO DE ALUMNOS
MIEDO	5
RABIA	3
ANSIEDAD	3
ANGUSTIA	7
ALEGRÍA	5
FRUSTRACIÓN	12
DESCONCIERTO	3
DESINTERÉS	6
CURIOSIDAD	9
INSPIRACIÓN	8
PREOCUPACIÓN	7
FELICIDAD	3
OTRA	2

Tabla 6: Frecuencia de la muestra en cuanto a las emociones que surgen hacia las matemáticas.

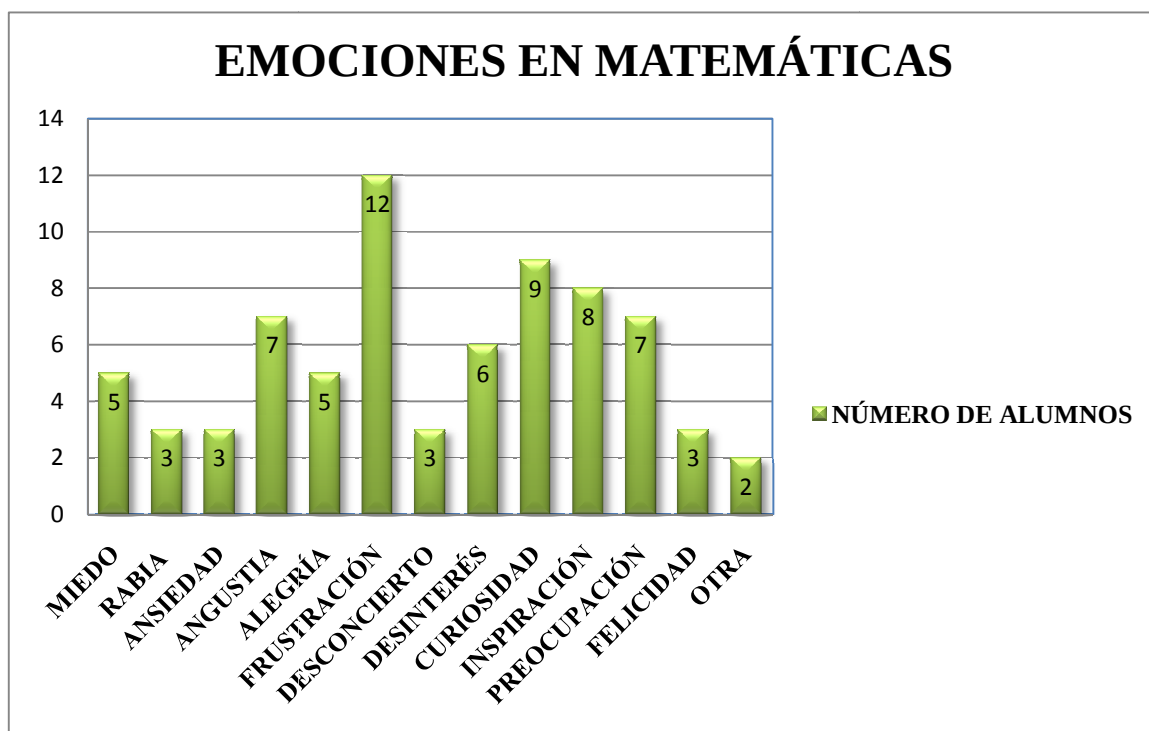


Figura 12: Gráfica que representa las emociones de los estudiantes hacia las matemáticas.

De las alternativas presentes en esta pregunta se consideraba probable que la más seleccionada sería la emoción de angustia y frustración y las emociones positivas serían las menos seleccionadas. Apoyándonos en Mandler, el estudiante activa su sistema nervioso autónomo (SNA), proceso que se denomina *activación fisiológica*, cuando existen discrepancias entre sus pensamientos y acciones, por ejemplo al resolver una ecuación cuadrática, un estudiante pudo plantear factorizar la expresión cuando no era posible, pero en la acción, en el hecho de encontrar el error en sus procedimientos, se genera la *evaluación cognitiva*, que le dará la cualidad a la emoción luego del fracaso, que en este grupo detonó en su mayoría en la frustración. Siendo lo más lógico, puesto que dentro de las afirmaciones de los estudiantes, corroboran sus dificultades con la asignatura y un rechazo de antemano hacia ella.

De los resultados obtenidos, como se mencionó anteriormente, la frustración es la emoción que encabeza las preferencias, según la frecuencia presentada en las respuestas del C.1, pregunta 2, parte I. Luego, se indagó a los doce estudiantes que seleccionaron esta opción, por medio de diálogo con ellos, para saber porque sentían frustración frente a las clases de matemáticas. De ellos, el 67% afirmó que su frustración radicaba en la falta de conocimientos en matemáticas, que sabían que les iría mal, porque nunca aprendieron, aseveración que coincide con algunos estudiantes del Liceo A, además se rinden antes de comenzar una tarea. El 25% en cambio no supo atribuir una razón a su frustración, sólo consideraban esa emoción cuando se enfrentaban a la clase y un estudiante indicó que era producto de las malas notas, pero cuando le iba bien se sentía satisfecha con su rendimiento y la asignatura.

La tercera pregunta de esta primera parte del C.1, consistía en la importancia que le daban los estudiantes a las bonificaciones y/o notas, según lo que sentían en estos casos. La mayoría de ellos manifiesta que la actitud frente a las actividades, pruebas o evaluaciones con nota, presentan mayor interés para ellos y por lo tanto se esfuerzan en terminarla, incluyendo el caso en que deban copiar para obtener el puntaje o nota, eso es lo que se privilegia en desmedro de los aprendizajes. Algunas de las afirmaciones que se registran en la aplicación de C.1 son:

<i>“Cuando es sin nota la verdad los hago por aprender y si es con nota o bonificación lo hago por cumplir y tener una buena nota” (Estudiante 5)</i> <i>“Cuando es con nota me da miedo al no saber nada” (Estudiante 11)</i> <i>“Bueno si es sin nota es mucho menos inspirador que si la lleva o bonifica” (Estudiante 17)</i> <i>“Cuando es con nota es como una presión que hay que hacerla si o si y en un tiempo determinado” (Estudiante 20)</i> <i>“Cuando lleva nota es como obvio que hay que hacerlo sea como sea, pero si no lleva no importa si se hace o no” (Estudiante 13)</i> <i>“Cuando no es con nota no siento que sea importante, en cambio cuando lleva nota la hago si o si” (Estudiante 10)</i> <i>“Me gustan que todos los ejercicios que hacemos lleven notas porque si no, no me importan” (Estudiante 8)</i> <i>“Trato de ganarme el punto y me gusta porque me ayuda para la prueba” (este estudiante hace alusión a las actividades que se realizan con bonificaciones para las pruebas, para subir sus puntajes o notas), (Estudiante 14)</i>

Cuadro 9: Afirmaciones de estudiantes de la muestra sobre pregunta 3, parte I, C.1.

De acuerdo a esto, en la *Figura 13*, se ilustra las preferencias hacia las bonificaciones y/o notas:

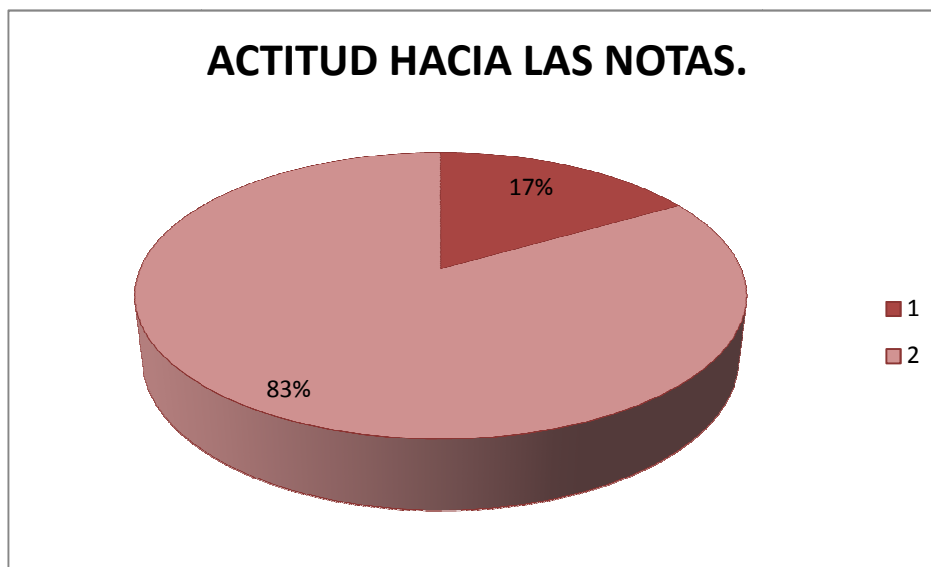


Figura 13: Gráfico circular que representa la actitud hacia las notas del grupo de muestra¹⁰.

En conclusión tenemos tres dificultades que se evidencian en la primera parte de C.1, basándonos sólo en afirmaciones por parte de G.2:

- Dificultades asociadas al desarrollo cognitivo de los alumnos.
- Dificultades asociadas a los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de las matemáticas.
- Dificultades asociadas a las actitudes afectivas y emocionales.

¹⁰ **SIMBOLOGÍA:** 1: con nota o sin nota realiza la actividad. 2: sin nota no realiza la actividad.

Parte II:

Esta sección de C.1 consta de cinco ejercicios (*ver Anexo 3*), siendo cada uno de ellos una ecuación cuadrática que debe ser resuelta, con el método que los estudiantes consideren más adecuada. Se espera hallar dentro de las resoluciones erróneas, dificultades por no reconocer ecuaciones equivalentes y por generalizar la propiedad de sin divisores de cero a igualaciones distintas de cero.

Cabe señalar que algunos estudiantes tuvieron algunas dificultades con la opción: **“NO ES POSIBLE RESOLVERLA”**, pues si no hallaban una forma para abordar el ejercicio escribían “no entiendo”, pero la frase apuntaba a que explicaran que si no existía algún procedimiento por el cual se pudiera resolver, entonces explicar la razón de ello. Por lo que en la aplicación del cuestionario hubo que asesorarlos aclarando que en el caso de no lograr desarrollar el ejercicio se dejara en blanco, pero si pensaban que no tenía solución o no podía resolverse entonces dieran la explicación de aquello.

Cada una de las ecuaciones, apuntaba a identificar ciertos errores, como se detalla en la *Tabla 7*. Para cada ecuación cuadrática se indican los posibles errores a encontrar, según los dos primeros ejes temáticos planteados para esta investigación y cuál sería el indicador que permitiría identificar que ocurre ese error. Además, se incorpora una columna que contiene otra posible forma de resolución del ejercicio, en términos erróneos, lo cual correspondería a un error distinto al perseguido por la ecuación seleccionada.

Nº	ECUACIÓN CUADRÁTICA	ERRORES POSIBLES A OBSERVAR	INDICADOR	OTRA FORMA DE RESOLUCIÓN
1.	$x^2 - 2x - 3 = 0$	Generalización de la propiedad de sin divisores de cero a igualaciones distintas cero. Nota: 1. Esta ecuación permite generar las dos siguientes ecuaciones equivalentes, para identificar errores en este caso. 2. Permite comparar las dificultades que tienen si no logran resolver alguna de las equivalentes a ella (ecuaciones 2 y 3).	Uso de factorización para su resolución, luego de igualar a 3 la ecuación por medio de despeje, utilizando procedimiento similar al de ecuaciones de primer grado.	El estudiante podría aplicar fórmula general y presentar dificultades en ese procedimiento, con lo cual no se observaría el error posible indicado. Por otra parte, con una resolución correcta (ya sea por fórmula general o por factorización de la expresión del miembro izquierdo de la ecuación y posterior aplicación de la propiedad de Hankel) Otra posibilidad es que el estudiante no resuelva.
2.	$\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2} = 0$	Erróneos procedimientos en ecuaciones cuadráticas con coeficientes fraccionarios y la imposibilidad de identificar una ecuación cuadrática equivalente.	El estudiante no logra identificar la ecuación equivalente con coeficientes enteros (ecuación 1), por lo tanto desarrolla con dificultad la ecuación por ser coeficientes fraccionarios (comparación a resolución ecuación 1), utilizando la fórmula general.	El estudiante no resuelve. Otra opción, es en el caso de que lograra hallar la ecuación cuadrática equivalente con coeficientes enteros, pero que despejara al igual que en la situación anterior, aplicando una factorización y empleando la propiedad de sin divisores de cero erróneamente.
3.	$3x^2 - 6x - 9 = 0$	Erróneos procedimientos en ecuaciones cuadráticas con coeficientes fraccionarios y la imposibilidad de identificar una ecuación cuadrática equivalente.	El estudiante no logra simplificar la ecuación cuadrática, obteniendo una equivalente (ecuación 1), por lo tanto aplica fórmula general para resolver.	El estudiante no resuelve o bien despeja y factoriza como los errores indicados en los casos anteriores.

4.	$x^2 - 2x + 3x = 0$	Extensión de la propiedad de sin divisores cero a igualaciones distintas de cero.	El estudiante despeja - 2x o 3x para factorizar e igualar a algún número, tratando de aplicar la propiedad mencionada, sin identificar los términos semejantes para factorizar inmediatamente.	El estudiante indica que no hay solución o que no es posible resolverla, porque no se presenta en la forma tradicional para ellos.
5.	$x \cdot (x - 2) = 7$	Extensión de la propiedad de sin divisores de cero a igualaciones distintas de cero.	El estudiante aplica la propiedad sin divisores de cero con igualación a 7, considerando que es el mismo procedimiento.	El estudiante indica que no hay solución o que no es posible resolverla, porque no se presenta en la forma tradicional para ellos.

Tabla 7: Ecuaciones cuadráticas pregunta 2, parte II, C.1, con errores a observar, el indicador u otra posible resolución.

Cuando se plantea el eje de errores al utilizar la propiedad de sin divisores de cero para igualaciones distintas de cero, se piensa en Socas (2000) al proponer las dificultades asociadas a la complejidad de los objetos de las matemáticas. El autor plantea que el *“lenguaje de las matemáticas que difieren de la lengua común, son los que hacen referencia al lenguaje de los signos, y que son fuente de confusión en muchos alumnos; por ejemplo su sintaxis- reglas formales de las operaciones- puede algunas veces entenderse y desarrollarse más allá del dominio original de sus aplicaciones. Esto pertenece a lo que denominamos la naturaleza abstracta de los conceptos matemáticos”* (Socas, 2000, p. 128), por lo tanto el estudiante al enfrentarse a un problema en donde los procedimientos que se requieren no están bien institucionalizados, desarrolla en cuanto a lo que entendió, aunque esto no necesariamente sea lo correcto.

Tomando de ejemplo la ecuación número 5 (ver *Tabla 7*), tenemos que hay una factorización, la cual está igualada a 7, por lo tanto, podríamos pensar que el estudiante recuerda que se igualaba al número que allí aparece y se obtienen las soluciones, porque recuerda que eso fue lo que aprendió, así que también es una dificultad asociada a los procesos de enseñanza, (Socas, 2000) , puesto que el discurso utilizado fue probablemente el menos indicado para explicar el procedimiento matemático que acontecía en ese caso. Por lo tanto, el estudiante extiende esa situación a cualquier número, pensando: “si tengo un producto igualado a un **número** entonces aplico la propiedad”. Luego, el alumno a raíz de esa dificultad produce un error por el obstáculo que crea a partir de esa situación. Recordemos que tanto Bachelard (2004) como Brousseau (2007) consideran el obstáculo como un conocimiento, sólo que ese conocimiento no es el adecuado para ese contexto y por ello se genera el error.

Por otra parte, en las ecuaciones 2 y 3, puede suceder que el estudiante resuelva directamente las ecuaciones cuadráticas aplicando la fórmula general para su resolución, lo cual es un camino posible, pero más difícil o más probable que aparezca un error por las complicaciones que tienen la mayoría de los estudiantes al operar con números fraccionarios, olvidando que existen otros métodos y que cada contenido visto pertenece a las matemáticas, por lo tanto lo que se estudie hoy podrá ser utilizado en un problema futuro, el caso es cómo discernir el momento adecuado, cómo seleccionar la estrategia más beneficiosa y eso se consigue al obtener un aprendizaje significativo de las materias tratadas en donde los conocimientos utilizados en la problemática sean los pertinentes para el contexto tratado. Recordemos que en primer año medio, en álgebra, se tratan las

ecuaciones de primer grado con coeficientes fraccionarios y el método utilizado es multiplicar la ecuación por el mínimo común múltiplo de los denominadores, de esta forma se obtiene una ecuación con coeficientes enteros. Para el caso de las ecuaciones de segundo grado, el método también es aplicable, pues esto permite emplear la fórmula para resolverla con números enteros, en vez de fraccionarios, por lo tanto la dificultad y la probabilidad de cometer un error es menor, además se pudo factorizar en algunos casos.

Al realizar el cuestionario 1, se logra corroborar algunas de las hipótesis y analizar poniendo atención a los indicadores especificados en la *Tabla 7*. La mayoría utilizó la fórmula general para resolver la primera ecuación. La inferencia fue que influyó en los estudiantes el hecho de que era el procedimiento más reciente y utilizado en el curso, lo cual corroboré por medio de indagación a través del diálogo con ellos. La justificación de los procedimientos es escasa, en los alumnos destacados del curso (en especial los *alumnos estrella*), hubo un mayor interés por explicar y realizar la actividad que el resto de ellos, con mayor minuciosidad. En general, este curso no posee mayor dominio en la asignatura y los que destacan tienen igualmente dificultades en algunos procedimientos, lo cual permite indagar con éstos alumnos en el error. Parte de ellos explica que hay pasos “automáticos”. Ejemplo de esto es el caso del estudiante 5, en el ejercicio II. 1 (ver *Figura 14*):

- II. Resuelva cada una de las ecuaciones que se presentan a continuación, explicando en cada caso el procedimiento que utilizó. Si considera que alguna de las ecuaciones no es posible resolverla, explique por qué.

1. $x^2 - 2x - 3 = 0$

SÍ, ES POSIBLE RESOLVERLA	
DESARROLLO:	
$x^2 - 2x - 3 = 0$ (x	$x^2 - 2x - 3 = 0$ $(x - 3)(x + 1)$ $x - 3 = 0$ $x + 1 = 0$ $x_1 = 3$ $x_2 = -1$

2. $\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2} = 0$

NO ES POSIBLE RESOLVERLA
EXPLICACION:
No es posible ya que no tengo un apoyo de procedimiento con lo cual en estos momentos no entiendo el problema.

3. $3x^2 - 6x - 9 = 0$

SÍ, ES POSIBLE RESOLVERLA
DESARROLLO: $a = 3 \quad b = -6 \quad c = -9$ $3x^2 - 6x - 9 = 0$
EXPLICACIÓN DEL PROCEDIMIENTO UTILIZADO:

Figura 14: Producciones ejercicio 1, 2 y 3 de Estudiante 5.

Desarrolla el ejercicio por factorización y explica: “Como tenemos un término elevado a 2 en este caso x^2 lo dividí en paréntesis separados y busqué dos números que restado [...] y cuando pasa a la igualdad el número cambia de signo automáticamente” (estudiante 5). Si bien el estudiante obtiene las soluciones y argumenta (con sus palabras) el procedimiento utilizado, desconoce que aplicó la propiedad de sin divisores de cero, más aún, en la segunda línea de su procedimiento (ver Figura 14), no iguala a cero la

factorización, lo que denota la ignorancia de la propiedad mencionada, la mecanicidad en el procedimiento y la urgencia por llegar a los resultados.

Otra situación interesante que sucede con el *Estudiante 5* tiene que ver con sus procedimientos en las ecuaciones 2 y 3, en las cuales no logra hallar las soluciones, considerando que son equivalentes a la número 1 que sí logró resolver (ver *Figura 14*). En la ecuación 2, indica que “no se puede resolver”, pero no argumenta correctamente, sólo indica que no sabe cómo realizarlo. En la ecuación 3 prefiere el método de la fórmula general, pero sólo identifica los coeficientes de la ecuación, según la estructura presentada en clase (a , b y c). Finalmente, en las ecuaciones 4 y 5 donde se intenta saber si el estudiante errará al aplicar la propiedad de ausencia de divisores de cero o buscará otro método para su resolución, nos encontramos con que indica que “no es posible resolverla”. En la ecuación 4, explica: “No se puede porque hay dos x ” (*Estudiante 5*), este comentario se repite en varios estudiantes para argumentar por qué no es posible resolverla. En cambio la justificación que da a la ecuación 5 es que no es una ecuación cuadrática.

De acuerdo a lo anterior, se concluye que el estudiante citado, no reconoce una ecuación de segundo grado en sus distintas formas y que se enfoca en saber si hay un resultado o no, considerando que si lo hay debe obtener la solución por el método que está mayormente capturado en su memoria y si no encuentra una estrategia deja truncados sus procedimientos sin finalizar sus desarrollos. Lo que alude a una dificultad asociada a los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos, según lo denomina Socas (2000), pues

describe que las dificultades que producen el obstáculo en el estudiante que representa en los errores, se ven influenciados por sus procesos cognitivos, en específico por el razonamiento, que el estudiante ejecuta para enfrentarse al problema, de allí que dude, acierte, seleccione una estrategia o tome otra decisión para abordarlo o desertar.

Esto lleva de la mano una situación de tensión, cuando no se vislumbra el camino más óptimo para solucionar la actividad propuesta, que en pensamientos de Weiner (1986) sería generar una emoción primitiva, luego de evaluar la situación (valoración primaria). Mientras que por parte de Mandler (1989), quién considera en primera instancia el estado biológico, sucede la activación fisiológica desencadenada por el sistema nervioso autónomo que produce la evaluación cognitiva que produce la emoción, la cual tendría diversas causas (atribución causal), como la situación de leer el problema planteado y no hallar ninguna forma o estrategia para su resolución.

Otro caso es el de *estudiante 3* (ver *Figura 15*), quién identifica primero los coeficientes, luego calcula el discriminante y finalmente aplica la fórmula general, con los datos anteriores. Sin embargo, al tener dificultades en la primera parte (coeficientes), todo el desarrollo posterior es errado (ecuación 1). El *Estudiante 3*, no logra identificar que las ecuaciones 2 y 3 son equivalentes a la 1. Plantea en los tres casos el método de fórmula general para resolver las ecuaciones, al identificar los coeficientes numéricos de la ecuación se olvida de los signos, pero intenta resolver, aunque con múltiples dificultades, como hace notar en sus afirmaciones y el desarrollo de los ejercicios.

El *Estudiante 3*, explica que la fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas es de clasificación, lo cual llamó la atención al momento de revisar los desarrollos, por lo que se entrevistó brevemente a este estudiante, para comprender a que se refería con esto. El *Estudiante 3*, plantea que la fórmula es una clasificación, porque *“hay que clasificar los números con las letras a, b y c”* (*Estudiante 3*). Luego, se le explica la fórmula para que comprenda que es un procedimiento y se sigue indagando en lo que realizó. Se le pregunta por qué no escribió lo que hizo (sus procedimientos) en los siguientes ejercicios y en vez de ello escribió lo que pensaba o sentía. A esto responde: *“Es que no estaba segura así que coloqué no más por qué no sabía, es que me cuestan mucho las ecuaciones, siempre me va mal en matemáticas, porque no entiendo, o entiendo cuando me explican a mi y después se me olvida. Entonces escribí no más que no sabía para cuando viera lo que había hecho porque sabía que iba a estar malo”* (*Estudiante 3*). En las afirmaciones del *Estudiante 3*, se deja ver una predisposición al fracaso, pues asume que iba a equivocarse, lo cual tiene que ver con las creencias que los estudiantes poseen sobre las matemáticas y sobre sus propias capacidades.

1. $x^2 - 2x - 3 = 0$

SÍ, ES POSIBLE RESOLVERLA

DESARROLLO:

$$a = 2 \quad b = 0 \quad c = -3$$

$$\Delta = 0^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)$$

$$\Delta = 0 - 24$$

$$\Delta = 24$$

$$x = \frac{-0 \pm \sqrt{24}}{2 \cdot 2}$$

$$x = \frac{-0 \pm 4}{4} =$$

$$x_1 = \frac{0 + 4}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$x_2 = \frac{0 - 4}{4} = \frac{-4}{4} = -1$$

EXPLICACIÓN DEL PROCEDIMIENTO UTILIZADO:

Que es una fórmula general de clasificación

2. $\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2} = 0$

SÍ, ES POSIBLE RESOLVERLA

DESARROLLO:

$$a = \frac{1}{2} \quad b = -\frac{3}{2} \quad c = 0$$

$$\Delta = \frac{3}{2} - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0$$

$$\Delta = \frac{3}{2} - \frac{4}{2}$$

$$\Delta = \frac{3}{2} - \frac{4}{2}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{6}{2} + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0 = 1$$

$$x_2 = \frac{6}{2} - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0 = 1$$

EXPLICACIÓN DEL PROCEDIMIENTO UTILIZADO:

me lo fue fácil y me salió
mejor respuesta

NO ES POSIBLE RESOLVERLA

EXPLICACIÓN:

porque no aprendí no le
entiendo como resolverlo
es muy complicado

3. $3x^2 - 6x - 9 = 0$

SÍ, ES POSIBLE RESOLVERLA
DESARROLLO: $3x^2 - 6x - 9 = 0$ $A = 3 \quad B = 6 \quad C = 9$ $\Delta = 6^2 - 4 \cdot 3 \cdot 9$ $\Delta = 12 + 102$ $\Delta = 222$ $x = \frac{-6 \pm \sqrt{222}}{2 \cdot 3}$ $x = \frac{-6 \pm 222}{6}$ $x_1 = \frac{-6 + 222}{6} = 228 = 38$ $x_2 = \frac{-6 - 222}{6} = \frac{-228}{6} = -38$
EXPLICACIÓN DEL PROCEDIMIENTO UTILIZADO: lo encuentro no evidente

Figura 15: Producción Estudiante 3.

En consecuencia se obtiene que de los 20 estudiantes de la muestra ninguno logró identificar las ecuaciones cuadráticas equivalentes, por lo que se corrobora la dificultad en esta temática, en especial considerando a algunos de los estudiantes que pudiendo resolver la primera ecuación, no lo logran con las siguientes, lo cual apunta a las dificultades asociadas a los procesos de desarrollo cognitivos de los alumnos, según la denominación de Socas (2000). En resumen a esta segunda parte se presenta el detalle de la cantidad de estudiantes que lograron resolver las ecuaciones y los que tuvieron dificultades en ellas (ver *Tabla 8* y *Figura 16*).

Nº	ECUACIÓN	Nº ALUMNOS QUE RESPONDEN CORRECTAMENTE (SERIE 1)	Nº ALUMNOS QUE NO RESPONDEN (SERIE 2)	Nº ALUMNOS QUE TIENEN ERRORES EN SU PROCEDIMIENTO (SERIE 3)
1.	$x^2 - 2x - 3 = 0$	5	2	13
2.	$\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2} = 0$	0	6	14
3.	$3x^2 - 6x - 9 = 0$	2	3	15
4.	$x^2 - 2x + 3x = 0$	2	5	13
5.	$x \cdot (x - 2) = 7$	0	4	16

Tabla 8: Estadísticas de aciertos, errores y sin contestar de parte II, C.1.

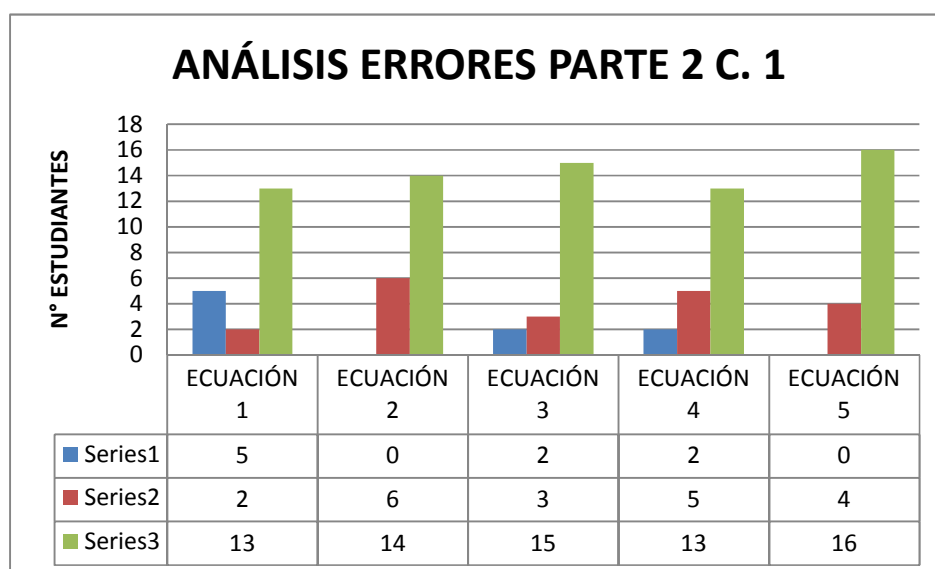


Figura 16: Gráfico de aciertos, errores y sin constestar de Parte II, C. 1.

La tabla y gráfico anteriores permiten dimensionar las dificultades de la muestra en torno a la resolución de ecuaciones cuadráticas. En la ecuación 2 y 5 no hubo ningún estudiante que lograra resolver correctamente el ejercicio. Mientras que la ecuación que más estudiantes lograron resolver fue la número 1. De acuerdo a la *Tabla 8*, indicamos que se buscaría

corroborar las dificultades de los estudiantes a través de los errores producidos en la temática de:

- Ecuaciones cuadráticas equivalentes (ecuaciones 1, 2 y 3).
- Propiedad de sin divisores de cero (ecuaciones 4 y 5).

En las ecuaciones 1, 2 y 3 que apuntaban a las ecuaciones cuadráticas equivalentes, se obtiene que sólo el 25% de los estudiantes, logra resolver la primera ecuación, la cual se expone como la de menor dificultad de las propuestas. A continuación se adjuntan ilustraciones de los procedimientos de dos estudiantes en modo comparativo entre la ecuación 1 con la 2 y 3.

1. $x^2 - 2x - 3 = 0$ SÍ, ES POSIBLE RESOLVERLA DESARROLLO: $(x-3)(x+1) = 0$ $x-3=0 \vee x+1=0$ $x=3 \quad x=-1$ $x_1 = 3$ $x_2 = -1$ EXPLICACIÓN DEL PROCEDIMIENTO UTILIZADO: SE COLOCAN DOS PARENTESIS Y SE BUSCAN NÚMEROS QUE SIRVEN QUE SON 3 y 1 y DESPUES SE ESCRIBEN LAS SOLUCIONES.	2. $\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2} = 0$ SÍ, ES POSIBLE RESOLVERLA DESARROLLO: $a = \frac{1}{2}, b = 0, c = -\frac{3}{2}$ $x = 0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot -\frac{3}{2}}$ $x = 0 \pm \sqrt{0 - \frac{12}{4}} = 0 \pm \sqrt{-3}$ $x = 0 \pm \sqrt{\frac{-12}{4}} = 0 \pm \sqrt{-3} \rightarrow x_1 = 0 + \sqrt{3}$ $x_2 = 0 - \sqrt{3}$ EXPLICACIÓN DEL PROCEDIMIENTO UTILIZADO: COMO NO SE PUEDE FACTORIZAR, SE USA LA FORMULA GENERAL. COLOCO QUE ES a, b, y c, DESPUES COLOCO LOS NÚMEROS EN LA FORMULA Y ME DA DOS SOLUCIONES
--	--

3. $3x^2 - 6x - 9 = 0$

SÍ, ES POSIBLE RESOLVERLA

DESARROLLO:

$$3x^2 - 6x - 9 = 0$$

$$(3x - 3)(x + 3) = 0$$

$$3x - 3 = 0$$

$$3x = 3$$

$$x = \frac{3}{3} = 1$$

$$+ \frac{3}{3} = 1$$

$$x_1 = 1$$

$$\checkmark x + 3 = 0$$

$$x_2 = -3$$

EXPLICACIÓN DEL PROCEDIMIENTO UTILIZADO:

SE FACTORIZA igual que el ejercicio 1 (lo mismo)

Figura 17: Producciones Estudiante 1, ejercicios 1, 2 y 3, parte II, C.1.

Resuelva cada una de las ecuaciones que se presentan a continuación, explicando en cada caso el procedimiento que utilizó. Si considera que alguna de las ecuaciones no es posible resolverla, explique por qué.

1. $x^2 - 2x - 3 = 0$

SÍ, ES POSIBLE RESOLVERLA

DESARROLLO:

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x - 3)(x + 1) = 0$$

EXPLICACIÓN DEL PROCEDIMIENTO UTILIZADO:

- Copie la ecuación
- la resolví buscando y multiplicando números que me daban

2. $\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2} = 0$

SÍ, ES POSIBLE RESOLVERLA

DESARROLLO:

EXPLICACIÓN DEL PROCEDIMIENTO UTILIZADO:

NO ES POSIBLE RESOLVERLA

EXPLICACIÓN:

NO HE DADO LA
MENTE PARA HACERLA

3. $3x^2 - 6x - 9 = 0$

SÍ, ES POSIBLE RESOLVERLA

DESARROLLO:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-9)}}{2 \cdot 3}$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 108}}{6}$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{-72}}{6}$$

EXPLICACIÓN DEL PROCEDIMIENTO UTILIZADO:

Busque coeficiente y constante D
use las formulas y lleve a un resultado
coherente

Figura 18: Producciones Estudiante 2, ejercicios 1, 2 y 3, parte II, C.1.

La Figura 17 y 18 muestra las producciones de dos estudiantes, destacando una gran diferencia entre ambas resoluciones, por ello se adjuntan para compararlas. En el caso de la primera ecuación, el *Estudiante 1* logra solucionar el problema a pesar de que sus explicaciones no son muy rigurosas y parecen un tanto rígidas con ausencia de justificaciones o explicaciones matemáticas a su desarrollo, mientras que el *Estudiante 2*, deja ver unos pasos memorísticos, al explicar: “*Copie la ecuación, la resolví buscando y multiplicando números que me calzaron*” (*Estudiante 2*). Además la resolución queda incompleta, lo cual verifica que no logró identificar la propiedad de ausencia de divisores de cero, la cual era una estrategia posible, según lo que desarrolló (la factorización). En la ecuación 2 se repiten las dificultades ya descritas, pues el hecho de que la ecuación tenga coeficientes fraccionarios, produce la confusión, como si no fuese una ecuación del mismo tipo, que se pueda resolver por los procedimientos habituales, si bien el *Estudiante 1* entiende que puede aplicar fórmula general, no reconoce una equivalencia con la ecuación 1 y comete errores al inicio al identificar los coeficientes. Por otra parte el *Estudiante 2*, escribe: “*no me da la mente para hacerla*” y no resuelve la ecuación, asume que él no podrá. En la ecuación 3 observamos nuevamente que los estudiantes no logran reconocer las ecuaciones equivalentes, lo cual hubiese permitido aplicar una factorización y resolver por la propiedad de ausencia de divisores de cero.

En la ecuación 4, sólo el 10% de los estudiantes consigue resolver satisfactoriamente la ecuación cuadrática, mientras que el 65% intenta desarrollarla, pero no logra una respuesta satisfactoria, sin embargo de este porcentaje, 6 de ellos indican la segunda opción: “**NO ES POSIBLE RESOLVERLA**”. De esos 6 alumnos, cuatro justifican su respuesta indicando que es porque la ecuación cuadrática contiene dos términos algebraicos con variable x . Los otros

dos estudiantes, no justifican, sólo seleccionan esa opción. La ecuación 5 se presenta factorizada e igualada a 7, con la intención de captar el error en el caso de que apliquen incorrectamente la propiedad de sin divisores de cero. Los resultados que se obtienen, son que el 80% de los estudiantes cometen errores al resolver esta ecuación, mientras que el 25% de ese grupo de estudiantes que cometen errores, indican que **“NO ES POSIBLE RESOLVERLA”**. En este caso su justificación es que no es una ecuación de segundo grado.

En general, en esta parte (*Parte II*) del C.1 hubo muchas dificultades y dudas sobre la resolución, en los casos donde aparecían errores y debían argumentar sus procedimientos, ellos evidencian que poseen un conocimiento, pero como Bachelard (2004) y Brousseau (2007) dice, no es el adecuado para tratar ese ejercicio, o sea no el adecuado en ese contexto.

Parte III:

De acuerdo a las afirmaciones propuestas se obtiene una mayoría en la afirmación: “*Me tensiona resolver ecuaciones*”. El detalle de la selección de los estudiantes por cada afirmación se indica en la *Tabla 9*, junto a un gráfico que representa la situación (*Figura 19*).

AFIRMACIONES	N° ESTUDIANTES
ME PARECIÓ INTERESANTE.	3
ME ABURRÍ.	6
NO LE ENCUENTRO SENTIDO A LA ACTIVIDAD.	2
NO ME INTERESA RESOLVERLOS.	0
ME PARECIERON FÁCILES.	0
ME TENSIONA RESOLVER ECUACIONES.	11
NO HICE NADA, PORQUE NUNCA APRENDÍ	0
OTRA	6

Tabla 9: *Tabla de frecuencias de afirmaciones grupo muestra pregunta 2, parte III, C.1.*



Figura 19: Gráfico que representan las afirmaciones de pregunta 2, parte III, C.1

De la muestra, seis estudiantes como indica la *Figura 20*, seleccionan otra respuesta, de las cuales se encuentran:

<i>“Me coloco nerviosa cuando tengo que resolver ecuaciones, porque son complicadas. Siempre me costó, pero con factorización entendí más” (Estudiante 1)</i> <i>“Me dio sueño, había que explicar todo” (Estudiante 8)</i> <i>“Fue muy difícil, habían muchas ecuaciones distintas” (Estudiante 13)</i> <i>“No hice mucho, pero lo intenté, siempre me ha costado y esto igual no eran todas las ecuaciones iguales como las que hacemos en clase que son siempre con x^2 y no tienen números difíciles” (Estudiante 14)</i>
--

Cuadro 10: Afirmaciones de algunos estudiantes, que seleccionan “OTRA” en parte III, C.1.

En el caso del *estudiante 13 y 14* evidencian la dificultad hacia un tipo variado de ejercicios y la complicación que surge en el *Estudiante 15* al no reconocer ecuaciones cuadráticas sin que aparezcan en su forma general. Destacamos también al *Estudiante 5*,

del cual ya se ha realizado un análisis previamente en las partes anteriores de C.1, para encontrar una relación entre sus procedimientos y el ámbito emocional. Éste ha indicado que le pareció interesante la actividad propuesta, que sí le gustan las matemáticas, pero comete errores en la mayoría de las ecuaciones, lo cual descarta la causa del miedo a las matemáticas o alguna otra actitud hacia ellas, como las indicadas por Buxton (1981), por lo tanto corrobora que tiene que ver con el razonamiento que utiliza, que no es el más adecuado, reafirmando lo escrito en la parte 2.

Mientras que resulta interesante observar que la moda de la muestra está en la afirmación “*Me tensiona resolver ecuaciones*”, lo cual indica que más del 50% de los estudiantes se sienten identificados con esto y que previo a abordar el ejercicio desencadenan la tensión. Por lo tanto, se corrobora la influencia del elemento emocional en los aprendizajes. Según lo que explica Mandler (1989), primero ocurre la activación fisiológica que sucede al enfrentarse el estudiante a la *ecuación* que es lo que afirma le provoca la tensión, o sea, según Weiner (1986) la atribución causal que detona la emoción primitiva. De allí que no consiga la estrategia para resolver el ejercicio propuesto, ya que está fuertemente influenciado a nivel cognitivo por la fuente emocional.

En conclusión, el C.1 cumple con corroborar las premisas de errores que se pretendían encontrar: incapacidad de reconocer ecuaciones cuadráticas equivalentes, errores en los procedimientos de ecuaciones cuadráticas con coeficientes fraccionarios aplicando fórmula general, generalización de la propiedad de sin divisores de cero en casos no pertinentes e influencia de la emocionalidad en el proceso, causadas fundamentalmente

por rendirse antes de iniciar una actividad o considerar la temática de ecuaciones como un concepto difícil de abordar.

4.1.2 Análisis Cuestionario Exploratorio 2 (C.2)

El C.2 se divide en dos partes, la primera que contiene tres problemas de ecuaciones cuadráticas en los cuales se pretende identificar las dificultades de los estudiantes al enfrentarse a éstos, identificadas por medio de sus errores en las producciones. Mientras que la segunda parte consta de dos preguntas que apuntan a la percepción de los estudiantes sobre las dificultades que tuvieron al resolver y una selección de afirmaciones con las cuales ellos se identifican.

Parte I:

Consta de tres problemas, los cuales pretenden encontrar errores y apreciar las dificultades en la conversión de lenguaje natural a lenguaje matemático como ya se ha mencionado. Las ecuaciones que los estudiantes debieran obtener son las siguientes:

PROBLEMA 1	$x \cdot \frac{x}{5} = 1.280$
PROBLEMA 2	$x^2 = 2x$
PROBLEMA 3	$x^2 - 3x = 108$

Tabla 10: Ecuaciones de problemas 1, 2 y 3 parte I, C.2.

Cada una de las ecuaciones que el estudiante debe obtener (*Tabla 10*) abre la posibilidad para métodos de resolución amplios. En el problema 1, basta con despejar la ecuación cuadrática y aplicar raíz cuadrada pero con el signo $\pm$, siempre que el estudiante reconozca que es una ecuación de segundo grado y por lo tanto lleva dos soluciones, de allí el hecho del signo, lo cual es otra dificultad. Este procedimiento más breve se puede deducir al aplicar la fórmula general, pero en vez de eso sólo realizan pasos repetitivos, pues dentro de sus explicaciones aparece la palabra “automático” para explicar varios de sus procedimientos como por ejemplo éste en el caso de quienes lograron desarrollarlo.

Este cuestionario, como se mencionó previamente, apunta al análisis del error en problemas, en específico en la conversión de lenguaje natural a lenguaje algebraico, el cual es un lenguaje formal, por lo que provoca algunas dificultades en el estudiante por el enfrentamiento de este con el natural que utiliza en su contexto habitual. Esto queda corroborado con las experiencias de los estudiantes de la muestra, quienes casi en su totalidad tuvieron errores en sus procedimientos. Varios de ellos argumentaban, luego de realizar el C.2, a través de indagatorias efectuadas a través del diálogo, del cual se tomaron notas, para aclarar las respuestas y efectuar así un mejor análisis de lo desarrollado, lo siguiente:

<i>“Fue muy complicado escribir la ecuación, ya me cuesta resolverla y traspasarla de palabras a números es peor” (Estudiante 7)</i> <i>“Las ecuaciones y los problemas no los entiendo, aparecen muchos datos y había que colocar la respuesta después y no entendía bien” (Estudiante 8)</i> <i>“Es difícil traducir los problemas a las matemáticas” (Estudiante 11)</i> <i>“Los problemas son muy difíciles, hay que pensar cómo escribirlo, saber cuáles son las palabras claves” (Estudiante 12)</i> <i>“Como se pidió resolver los problemas escribiendo un desarrollo matemático me costó mucho porque me había puesto a probar los números y encontré el que me daba, pero escribirlo con letras o signos es complicado para mi” (Estudiante 19)</i>
--

Cuadro 11: Afirmaciones de estudiantes sobre C.2

Las afirmaciones que resultaron luego de la aplicación de C.2, fueron muy enriquecedoras a la investigación. Notemos que el *Estudiante 11* y el *Estudiante 19*, explican sus dificultades por causa de un “ingreso” o “traslado” hacia un universo matemático, en donde la lógica funcionaría muy distinta por lo cual les resulta complejo comprenderlo. Según Socas (2000) nos encontraríamos frente a dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos, en este caso considerando el lenguaje que es propio de las matemáticas, el cual es fuente de las confusiones de los estudiantes o en palabras de Abrate, Font, Pochulu (2008) utilizan metáforas operacionales para describir sus procedimientos. Lo cual corroboramos al citar al *Estudiante 11*, quién señala que se trata de “traducir [...] a [hacia] las matemáticas”, y en el caso del *Estudiante 19*, quién explica

que sus dificultades se enfocan en la utilización de letras y signos, los cuales son objetos matemáticos, que deben ser correctamente comprendidos para ser empleados en este contexto matemático, mientras que se desecha como dificultad la manipulación con números en la actividad de probar con ellos.

Por otra parte, las textualidades expuestas en el *Cuadro 11* hacen referencia también a la emocionalidad en torno a las dificultades matemáticas, al escribir “*fue muy complicado*”, “*es difícil*”, pues son frases que llevan una carga emocional y tensional, que pueden provocar en el estudiante un temor hacia este tipo de problemas, por lo que serán rechazadas las actividades con estas características o evidenciar que en el pasado ya “sufrieron” con ellas, lo cual es muy usual y se observa el rechazo ante los problemas que exigen la conversión de lenguaje natural a lenguaje algebraico, durante la realización de C.2 y por observación de las clases que ha realizado, quién presenta esta investigación.

Concretamente, se obtienen los siguientes resultados, en relación al planteamiento del problema en lenguaje matemático, sin considerar el desarrollo de la ecuación o expresión presentada (ver *Tabla 11*)

	PROBLEMA 1	PROBLEMA 2	PROBLEMA 3
CORRECTO	3	4	2
INCORRECTO	13	13	14
NO RESUELVE	4	3	4

Tabla 11: Número de estudiantes que plantean correcta o incorrectamente los problemas realizando la conversión de lenguaje natural a lenguaje matemático.

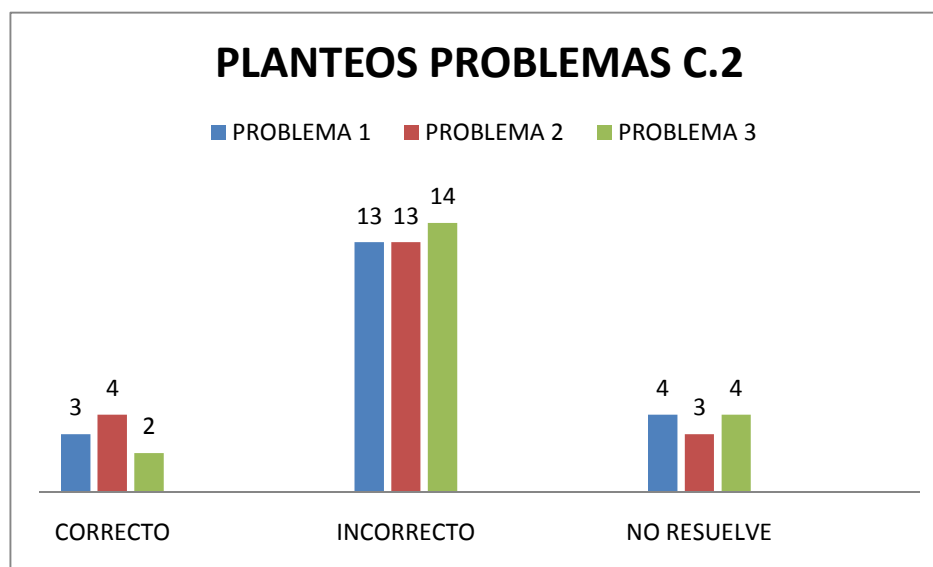


Figura 20: Gráfico que representa el número de estudiantes que plantean correcta o incorrectamente los problemas realizando la conversión de lenguaje natural a lenguaje matemático.

En el problema 1 como muestra la *Figura 20* y la *Tabla 11*, se tiene que sólo tres estudiantes plantean correctamente el problema en lenguaje matemático, de los cuales dos lo resuelven correctamente. Mientras que el 65% de la muestra plantean el problema, pero de forma incorrecta, considerando una conversión errada de éste, como se indicó anteriormente. Dificultades que se explican de acuerdo a las textualidades del *Cuadro 11* y el análisis realizado, escrito previamente.

Los cuatro alumnos restantes no escriben nada y uno de ellos agrega un mensaje transversal en la hoja con los problemas: “*Nunca he podido hacer problemas, disculpe por no hacerlos*” (*Estudiante 6*) Indagando para comprender este caso, pues llamó la atención su escrito, es que se dialoga con éste para registrar notas sobre lo que explica. De acuerdo a esto, se entiende que prácticamente le tiene miedo a las matemáticas, porque

dice: “*las matemáticas son muy difíciles, hay que hacer muchas cosas de sumas, multiplicaciones, cosas de calcular*” (*Estudiante 6*) lo que hace alusión a los estudios de Buxton (1981) cuando menciona las principales creencias de la naturaleza de las matemáticas indicando entre estas que es “*Un misterio accesible a pocos [...] Sobre todo cálculo*” (Buxton, 1981, citado en Rico, L.; Castro, E.; Socas, M. y otros, 2000, 135). Por otra parte, Mandler (1989), en cuanto a la emocionalidad, se puede considerar que este alumno al enfrentarse al problema le activa su sistema nervioso autónomo (activación fisiológica) y posteriormente provoca la evaluación cognitiva que le da la cualidad a la emoción en este caso miedo y frustración, porque se rinde antes de emprender la tarea al igual que sucede con afirmaciones de C.1, por lo que independiente de los ejes tratados, la emoción impacta en cada caso a los alumnos que presentan antecedentes de fracaso en la asignatura.

El problema 2 permite ser resuelto, luego de plantear correctamente la ecuación, por medio de la aplicación de la propiedad de sin divisores de cero. De los cuatro estudiantes que logran el planteo correcto, tres de ellos utilizan el método descrito y el cuarto aplica la fórmula general, pero se confunde al identificar los coeficientes numéricos de la ecuación, según los resultados de la aplicación de C.2. Uno de los estudiantes que aplican la propiedad comete errores al despejar, lo que determina una solución errada. Sin embargo, los *Estudiantes 4 y 16* desarrollan correctamente todo el problema, lo interesante está al comparar con el desarrollo del problema 3 (ver *Figura 21 y 22*), en esta podemos inferir que el *Estudiante 4* piensa que cuando hay un producto igualado a algún número se separa igualando a 0 siempre la x y que la expresión que lo multiplica debe igualarse al número

que aparece, pues es lo que hace con el problema 3 y que se corrobora indagando al alumno. Mientras que para el *Estudiante 16*, se debe igualar siempre a 0. Por lo tanto, la parte 1 de C. 2 no sólo aportó con evidenciar las dificultades en la conversión de lenguaje natural a lenguaje matemático, sino también a corroborar las dificultades con la propiedad de sin divisores de cero.

2. ¿Existe algún número cuyo cuadrado sea igual al doble de dicho número?

$$x^2 = 2x$$

$$x^2 - 2x = 0$$

$$x(x - 2) = 0$$

$$x = 0 \quad x - 2 = 0$$

$$x = 2$$

3. Encuentra un número tal que su cuadrado, disminuido en el triple del mismo número sea igual a 108.

$$x^2 - 3x = 108$$

$$x(x - 3) = 108$$

$$x = 0 \quad x - 3 = 108$$

$$x = 0 \quad x = 108 + 3$$

$$x = 111$$

Figura 21: Problema 2 y 3, Estudiante 4, parte I, C.2.

2. ¿Existe algún número cuyo cuadrado sea igual al doble de dicho número?

$$\begin{aligned}x^2 &= 2x \\x^2 - 2x &= 0 \\x \cdot (x - 2) &= 0 \\x &= 0 \quad x - 2 = 0 \\x_1 &= 0 \quad x = 0 + 2 = 2 \\x_2 &= 2\end{aligned}$$

3. Encuentra un número tal que su cuadrado, disminuido en el triple del mismo número sea igual a 108.

$$\begin{aligned}x^2 - 3x &= 108 \\x \cdot (x - 3) &= 108 \\x_1 &= 0 \quad x - 3 = 0 \\x &= 0 + 3 \\x &= 3 \\x_2 &= 3\end{aligned}$$

Figura 22: Problema 2 y 3, Estudiante 16, parte I, C.2.

En cuanto a las respuestas a preguntas de los problemas, considerando buenas y malas se obtiene que sólo 4 estudiantes escriben una respuesta, cerrando con ello la resolución, lo que sugiere que consideran el sentido lógico del problema, al tomar en cuenta lo que se pregunta en el enunciado, por lo tanto su visión debiera ser enfocada hacia aquella pregunta, pues buscan darle una respuesta. Sin embargo en el caso de las respuestas erradas, lo que se tiene es una dificultad asociada a los procesos de desarrollo cognitivo de los estudiantes, según la denominación de Socas (2000), pues es el razonamiento

incorrecto o según Bachelard (2004) y Brousseau (2007) el conocimiento inadecuado lo que determina su error.

Parte II:

Consta de dos preguntas, la primera a consultar por cuál de los problemas les resultó con mayor dificultad y su respectiva argumentación, por lo que se busca o pretende hallar son dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos, según Socas (2000), pues nos referimos en específico al problema de conversión, donde se espera hallar dificultades en la poca, compleja o confusa comprensión de los enunciados de los problemas. Paralelo a esto, se encuentran dificultades en los procedimientos de cada una de las ecuaciones que logren desarrollar, por lo que se mirará allí el obstáculo presente en ellos, lo cual se reflejó en las producciones de éstos (*Figura 23* por ejemplo). Mientras que la segunda pregunta, pide al estudiante seleccionar una o más opciones de las que allí aparecen, de acuerdo a la identificación de ellos con las afirmaciones propuestas, las cuales son prácticamente textuales de las obtenidas por G.1, abordando el ámbito emocional en esta parte.

Algunas de las afirmaciones que los estudiantes realizan con respecto a la primera pregunta son:

“El 1 y el 3. El 1 porque había que reducir números grandes y el 3 porque me costó acordarme de factorizar, cuando hay x^2 y x y se separa en dos al estar multiplicándose” (Estudiante 1)

“Todas por las palabras del problema y después intenté hacer algo, pero no las pude completar ya que las raíces, el cuadrado me complican un poco” (Estudiante 3)

“El número 2 porque no pude desarrollarlo, tanto que me costó formular la ecuación y la respuesta y me enredo” (Estudiante 11)

“Casi todos, ya que no entendía los problemas, pero la más difícil fue la tres” (Estudiante 12)

“La número 3 porque me hizo hacer pensar y me costó mucho entenderlo” (Estudiante 16)

Cuadro 12: Afirmaciones estudiantes sobre pregunta 1, parte II, C.2.

El Cuadro 12 nos permite evidenciar la percepción sobre la dificultad de las preguntas, según los estudiantes de la muestra. Varios de ellos, como el *Estudiante 3*, alude su dificultad a las palabras del enunciado. Interesante resulta la frase del *Estudiante 16* quién dice: *“La número 3 porque me hizo hacer pensar y me costó mucho entenderlo”*, lo cual denota que es escaso este tipo de problemas para él, en los cuales se debe razonar y comprender lo que se pide antes de dar cualquier respuesta o utilizar una fórmula memorizada para todos los ejercicios. En este sentido, los problemas de este tipo exigen el aspecto deductivo, el razonamiento para abordarlo de manera correcta y comprenderlo, pues *“siempre se ha considerado como una de las*

principales dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, el aspecto deductivo formal” (Socas en el quinto capítulo de Rico, 2000, p. 130).

Socas (2000) se refiere a la dificultad que tienen los estudiantes al seguir un argumento lógico, que le permita deducir en nuestro caso la ecuación correcta que representa el enunciado que se plantea. Sin entender esto, será imposible concluir el ejercicio, además de los obstáculos que surgen al momento de obtener la ecuación, correcta o incorrecta, en donde como segundo paso, se debe desarrollar la ecuación y obtener soluciones, logrando discernir entre estas si son válidas para el contexto que plantea el problema. Entonces nuevamente tenemos la dificultad asociada a los procesos de pensamiento matemático, en donde el estudiante por lo general piensa que si tiene una ecuación cuadrática debe obtener las dos soluciones, olvidando que esa ecuación es parte de un problema que se situó en un contexto matemático determinado. Consideremos el problema 1, de la parte 1 de C2, dice “Determina un número real de modo que el producto de él mismo por su quinta parte sea 1280”. En el caso de que se hubiera solicitado un número entero o natural, hubiésemos encontrado probablemente algunos estudiantes que hubiesen contestado con las dos soluciones que hallaran, sin discriminar esa situación. Sin embargo, como no era parte de los ejes investigativos no se incorporó esa opción en la pregunta, pero da pie a que suceda en otro estudio.

En cuanto a las afirmaciones que debían seleccionar, según su identificación con ellas, se obtiene lo siguiente:

AFIRMACIONES	N° ESTUDIANTES
A) NO ENTIENDO NADA DEL ENUNCIADO.	4
B) NO ENTIENDO ALGUNAS PALABRAS DEL ENUNCIADO DEL PROBLEMA.	14
C) NO LE ENCUENTRO SENTIDO A LOS PROBLEMAS.	8
D) NO ME INTERESA RESOLVERLOS.	2
E) ME PARECIERON FÁCILES.	0
F) ME TENSIONA REALIZAR PROBLEMAS.	8
G) ME PARECE ABURRIDO.	2
H) NO ME CUESTA DESARROLLAR EL ENUNCIADON DEL PROBLEMA, PERO SÍ RESOLVER LA ECUACIÓN.	6
OTRA	3

Tabla 12: Frecuencia afirmaciones pregunta 2, parte II, C.2.

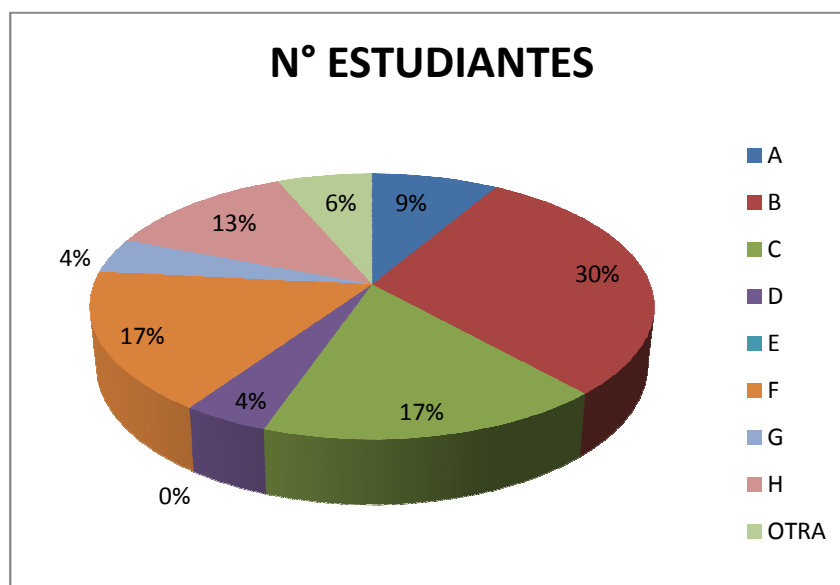


Figura 23: Gráfico circular que representa la tendencia a cada afirmación de la pregunta 2, parte II, C.2.

La afirmación que más frecuencia presenta en la muestra es la B, lo cual se repite en relación al grupo G.1. Posterior a los resultados, se indaga por la selección de esta opción, a lo cual el 100% de los alumnos consultados indican directa o indirectamente que son las palabras que no recuerdan o identifican (“palabras claves”) las que causan los errores al escribir en lenguaje matemático.

Según Socas (2000) esta dificultad de los estudiantes al intentar plantear la ecuación basándose en el enunciado del problema, se debe a las dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos, pues el autor indica la complejidad entre el lenguaje utilizado comúnmente y el algebraico, lo que provoca dudas, la confusión del estudiante y su complicación al enfrentarse a ello.

CAPÍTULO 5

Conclusiones

Dentro del proceso investigativo realizado, en sus diferentes etapas, se logró constatar que los tres ejes planteados como posibles errores en los estudiantes existían generalizadamente y a raíz de ello se logró analizar las causas de estos errores, a través de teorías desde la didáctica y la psicología, en el ámbito de las dificultades, obstáculos y errores y en el ámbito de la emocionalidad, respectivamente. Socas, M. (2000) aporta con nociones, conceptos y análisis desde la didáctica sobre la educación matemática, el cual aparece en el quinto capítulo del texto *La Educación Matemática en la enseñanza secundaria* (Rico, L.; Castro M., E.; Castro, E.; Coriat, M.; Marín, A.; Puig, L.; Sierra, M.; Socas, M. , 2000), de quién se extraen las causas de las dificultades según a lo que se asocian, contemplando también parte del ámbito emocional, pero sin profundizar en ello con este autor. Luego, tenemos a Bachelard (2004) y Brousseau (2007) con su aporte sobre la noción de obstáculo, para dejar de entenderlo como algo erróneo o malo, sino que como un conocimiento que es posible utilizarlo en ciertos contextos, y que cuando se introduce en el inadecuado es cuando se genera el error a causa de ese obstáculo.

Un obstáculo se presenta cuando el estudiante aprende a resolver ecuaciones de primer grado, dentro de las explicaciones que da el profesor, el alumno entiende que debe hallar el valor de la incógnita y para ello debe despejar, quedando en un miembro de la ecuación la variable y en el otro, los términos numéricos que se operaran según la ecuación dada.

Por lo cual para algunos estudiantes, según como lo hayan comprendido se quedan con esa idea, generalizándola para la ecuación cuadrática, donde se les genera un conflicto al tener que concebir una resolución distinta. Como el conocimiento que tiene el estudiante sobre ecuaciones de primer grado le funciona en ese contexto, piensa que también será adecuado en el de las ecuaciones cuadráticas, con lo cual el estudiante ni siquiera está analizando el hecho de que éste último tipo de ecuación tiene dos soluciones, por lo tanto no es compatible el método utilizado.

En el ámbito de la emocionalidad el estudio se basa principalmente en Mandler (1989), y Weiner (1986). Estos autores resultaron interesantes por la importancia que dan a las emociones en el aprendizaje de las matemáticas. Los conceptos base de Mandler son los de activación fisiológica y evaluación cognitiva, sin profundizar demasiado en esto, pero si tornándolo como algo relevante al momento de analizar los cuestionarios C.1 y C.2 que se aplicaron a los estudiantes, resultando una gran experiencia, y mucho más fluida en este ámbito que cuando debían explicar los procedimientos que utilizaron en la resolución de las ecuaciones y el desarrollo de los problemas, siendo esto último lo de mayor dificultad para ellos.

Si bien el establecimiento educacional, los profesores y el grupo de muestra presentaron mucha disposición para la aplicación de los instrumentos indagatorios I.1 e I.2, los cuestionarios C.1 y C.2 y para las indagatorias posteriores; el proceso de análisis de las resoluciones de los estudiantes, en específico, en las explicaciones que dan de sus procedimientos, no fueron fáciles de analizar, pues habían grandes dificultades en ellos,

que no les permitían explicar matemáticamente lo que realizaban, y siendo un gran número de estudiantes de la muestra incapaces de resolver las ecuaciones planteadas, por lo que al explicar sus resoluciones era difícil comprender sus significados y dotarlos de sentido, por ello que se seleccionan sólo algunos casos para mostrar sus producciones, y el resto forma parte de la estadística, que permite evidenciar que hay un real problema en esos temas, pero que se agudiza mayormente con las escasas bases en las temáticas previas, que son necesarias para abordar el tema de ecuaciones cuadráticas.

Estas evidencias permiten proponer a futuro indagatorias en las temáticas planteadas para un grupo mayor de estudiantes, con similares o distintas características, según lo deseado por el estudio, para corroborar si esto se repite y agregarle una propuesta didáctica que prevenga estos errores en los estudiantes, dejando a libre elección si se desea incorporar el ámbito emocional, o sólo se trataran los procedimientos para justificar en profundidad los obstáculos de los alumnos y abordarlo en este ámbito.

Uno de los grandes aportes que realiza esta investigación es el ámbito emocional, pues a pesar de las dificultades de los estudiantes al expresarse por escrito o verbalmente, dejan muy en claro que influye en su desempeño escolar, pues si bien logramos corroborar que el problema planteado existe y se manifiesta en la totalidad de la muestra, lo que le agrega un matiz distinto es que se mostraran abiertos a reconocer sus debilidades y temores, a reconocer sus frustraciones, como se evidencia a lo largo de este trabajo.

En cuanto a los lineamientos iniciales se logró constatar e indagar profundamente en las dificultades y errores que presentan los estudiantes, con un grupo como muestra del Liceo Tecnológico de Villa Alemana, en: resolución de ecuaciones cuadráticas equivalentes, cuando los coeficientes de la ecuación son números enteros y su equivalente con coeficientes fraccionarios, la generalización de la propiedad de sin divisores de cero a número distinto de cero y en problemas de planteo con ecuaciones cuadráticas con foco en la conversión desde el enunciado a la representación de éste en ecuación; a través de la aplicación de cuestionarios de elaboración propia e indagatorias por medio del diálogo, sin las cuales no hubiese sido posible evidenciar el problema que presentan los estudiantes de este grupo seleccionado, al tratar las ecuaciones cuadráticas.

En cuanto a las ecuaciones cuadráticas equivalentes se logra constatar que no las identifican, ni las utilizan como método de resolución. Mientras que con la propiedad de sin divisores de cero, se observa un desconocimiento de ésta, pues si bien en algunos casos se aplica, pasa inadvertida la razón o la justificación matemática de ese desarrollo. En el caso del último eje planteado, el de los problemas de planteo, se observaron en su mayoría dificultades y errores con la conversión, que se pensó sería del total de la muestra.

Se analizaron los lineamientos anteriores desde enfoques de Socas (2000), Bachelard (2004) y Brousseau (2007) como se mencionó inicialmente, en el aspecto de las dificultades y errores, siendo los siguientes los más recurrentes en este ámbito; las dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático, a los procesos de

desarrollo cognitivo y las dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos en relación a Socas, mientras que se corroboró y se concluyó que los obstáculos están presentes en los estudiantes del grupo de muestra, el cual se concibe como un conocimiento inadecuado para el contexto utilizado, lo cual desencadena los errores, según las ideas de los dos últimos autores.

Mientras que el ámbito emocional se constata como una importante influencia en el aprendizaje de las matemáticas, basándose los análisis en conceptos de Mandler (1989) y Weiner (1986) esencialmente, logrando identificar similitudes con G.1 en sus afirmaciones en torno a este aspecto. Evidenciándose que al enfrentarse a una situación difícil, desde el punto de vista del estudiante, en el caso de problemas o actividades que presenten dificultades para ellos, es cuando se desencadenan los estados emocionales que provocan truncamientos en sus estrategias resolutivas que finalmente desencadenan el error, como se manifiesta en el análisis de la información.

Se espera que más adelante se pueda retomar este tema, acotarlo y especificarlo pero agregándole, como se ha indicado previamente, la propuesta didáctica que por parte de quién escribe, sería muy interesante poder realizarla en algún momento, y así generar una ayuda en los estudiantes para dejar atrás los temores y frustraciones, todas esas emociones negativas, como Weiner (1986), las denomina, se presentan en esta disciplina, y conducirlos al éxito hacia ella.

BIBLIOGRAFÍA.

Abrate, R., Font, V. y Pochulu, M. (2008). *Obstáculos y dificultades que ocasionan algunos modelos y métodos de resolución de ecuaciones*. En II Reunión Pampeana de Educación Matemática. Argentina: Universidad Nacional de la Pampa. [versión electrónica]

Ávila, J. (2005). *Representaciones estudiantiles de la variación. Un estudio con bitácoras reflexivas*. Tesis de Maestría. México: CICATA - IPN.

Bachelard, G. (2004). *La formación del espíritu científico. Contribución a un psicoanálisis del conocimiento objetivo*. (25° edición). México: Editorial Siglo XXI.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Argentina: Libros del Zorzal.

Coll, C., Miras, M., Onrubia, J. y Solé, I. (1998). *Psicología de la Educación*. España: Editorial Eduuoc.

Doménech, B. (1999). *Proceso de enseñanza / aprendizaje universitario*. España: Editorial Universitas.

Gómez, I. (2000). *Matemática Emocional. Los efectos en el aprendizaje matemático*. España: Editorial Narcea.

Kelly, W. (1982). *Psicología de la educación*. 7º Edición. España: Ediciones Morata.

Lupiáñez, J. y Rico, L. (2005) *Análisis cognitivo en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Extraído de <http://cumbia.ath.cx:591/pna/Archivos/LupiannezJ04-2738.PDF>

Maffey, S. (2006). *Estudio sobre la metacognición y competencia de profesores y estudiantes en relación al tema de las ecuaciones lineales*. Tesis de Maestría. México: CICATA - IPN.

Mandler (1989). *Teoría de la discrepancia* en Gómez, I. (2000). *Matemática Emocional. Los efectos en el aprendizaje matemático*. España: Editorial Narcea.

Ochoviet, C. (2004). $\dot{A} \bullet B = 0 \Rightarrow (A=0 \vee B=0)$? *Reflexiones e implicancias en la enseñanza de la matemática*. Tesis de Maestría. Uruguay: CICATA - IPN

Shaffer, D. & Kipp, K. (2007). *Psicología del desarrollo, infancia y adolescencia*, 7º edición. México: Editorial Thomson.

Socas (2000). *Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en educación secundaria (Capítulo V)* en Rico, L.; Castro M., E.; Castro, E.; Coriat, M.;

Marín, A.; Puig, L.; Sierra, M.; Socas, M. (2000). *La Educación Matemática en la enseñanza secundaria, 2º edición*. España: Editorial Horsori.

Weiner, B. (1986). *Teoría de la atribución* en Gómez, I. (2000) *Matemática Emocional. Los efectos en el aprendizaje matemático*. España: Editorial Narcea.

Zorrilla, N, (1993). *Investigación documental, de campo o Mixta* en Grajales, T. (n.d.) *Tipos de Investigación*. Extraído de <http://tgrajales.net/investipos.pdf>

SITIOS WEB CONSULTADOS

MINEDUC.Web:<http://www.simce.cl/index.php?id=228&iRBD=1464&iVRBD=8&iNivel=3&iAnio=2008>

CUESTIONARIO HONEY – ALONSO. ESTILOS DE APRENDIZAJE.
http://www.cca.org.mx/profesores/cursos/cep21tec/modulo_2/mod_honey_mumford.htm#2

CECyT:http://es.wikipedia.org/wiki/Centro_de_Estudios_Cient%C3%ADficos_y_Tecnol%C3%B3gicos_No._7_%22Cuauht%C3%A9moc%22

ANEXOS

ANEXO 1

PRUEBA SOCIOMÉTRICA.

NOMBRE: _____

CURSO: _____ FECHA: _____

Contesta estas preguntas con sinceridad, todo lo que escribas tendrá carácter confidencial. En ningún caso se hará público. Debes poner el nombre y el apellido del compañero o compañera que elijas en cada caso.

1.- ¿Quiénes son los compañeros o compañeras de tu clase con los que te gustaría seguir el curso que viene? (recuerda poner el nombre y el apellido)

2.- Escribe los o las que preferirías no encontrarte el curso que viene

3.- Adivina el nombre de los compañeros o compañeras que habrán puesto que les gustaría seguir el año que viene contigo.

4.- Si pudieras invitar a alguien de tu curso a estudiar matemáticas. ¿A quiénes invitarías?

ANEXO 2

CUESTIONARIO HONEY-ALONSO DE ESTILOS DE APRENDIZAJE (CHAEA)

C. M. ALONSO, D. J. GALLEG0 Y P. HONEY

NOMBRE:

ESTE NO ES UN TEST DE INTELIGENCIA.

INSTRUCCIONES:

- MARCAR CON UN SIGNO (+) AQUELLAS AFIRMACIONES CON LAS QUE ESTÁS DE ACUERDO.

- CONTESTA HONESTAMENTE.

- 1.- Tengo fama de decir lo que pienso claramente y sin rodeos.
- 2.- Estoy seguro de lo que es bueno y lo que es malo, lo que está bien y lo que está mal.
- 3.- Muchas veces actúo sin mirar las consecuencias.
- 4.- Normalmente trato de resolver los problemas metódicamente y paso a paso.
- 5.- Creo que los formalismos coartan y limitan la actuación libre de las personas.
- 6.- Me interesa saber cuáles son los sistemas de valores de los demás y con qué criterios actúan.
- 7.- Pienso que el actuar intuitivamente puede ser siempre tan válido como actuar reflexivamente.
- 8.- Creo que lo más importante es que las cosas funcionen.
- 9.- Procuro estar al tanto de lo que ocurre aquí y ahora.
- 10.- Disfruto cuando tengo tiempo para preparar mi trabajo y realizarlo a conciencia.
- 11.- Estoy a gusto siguiendo un orden, en las comidas, en el estudio, haciendo ejercicio regularmente.
- 12.- Cuando escucho una nueva idea enseguida comienzo a pensar cómo ponerla en práctica.
- 13.- Prefiero las ideas originales y novedosas aunque no sean prácticas.

- 14.- Admito y me ajusto a las normas solo si me sirven para lograr mis objetivos.
- 15.- Normalmente encajo bien con personas reflexivas, y me cuesta sintonizar con personas demasiado espontáneas, imprevisibles.
- 16.- Escucho con más frecuencia que hablo.
- 17.- Prefiero las cosas estructuradas a las desordenadas.
- 18.- Cuando poseo cualquier información, trato de interpretarla bien antes de manifestar alguna conclusión.
- 19.- Antes de hacer algo estudio con cuidado sus ventajas e inconvenientes.
- 20.- Crezco con el reto de hacer algo nuevo y diferente.
- 21.- Casi siempre procuro ser coherente con mis criterios y sistemas de valores. tengo principios y los sigo.
- 22.- Cuando hay una discusión no me gusta ir con rodeos.
- 23.- Me disgusta implicarme afectivamente en mi ambiente de trabajo. prefiero mantener relaciones distantes.
- 24.- Me gustan más las personas realistas y concretas que las teóricas.
- 25.- Me gusta ser creativo, romper estructuras.
- 26.- Me siento a gusto con personas espontáneas y divertidas.
- 27.-La mayoría de las veces expreso abiertamente cómo me siento.
- 28.- Me gusta analizar y dar vueltas a las cosas.
- 29.- Me molesta que la gente no se tome en serio las cosas.
- 30.-Me atrae experimentar y practicar las últimas técnicas y novedades.
- 31.-Soy cauteloso a la hora de sacar conclusiones.
- 32.-Prefiero contar con el mayor número de fuentes de información. cuantos más datos reúna para reflexionar, mejor.
- 33.-Tiendo a ser perfeccionista.
- 34.-Prefiero oír las opiniones de los demás antes de exponer la mía.
- 35.-Me gusta afrontar la vida espontáneamente y no tener que planificar todo previamente.
- 36.-En las discusiones me gusta observar cómo actúan los demás participantes.
- 37.-Me siento incómodo con las personas calladas y demasiado analíticas.
- 38.-Juzgo con frecuencia las ideas de los demás por su valor práctico.
- 39.-Me agobia si me obligan a acelerar mucho el trabajo para cumplir un plazo.

- 40.-En las reuniones apoyo las ideas prácticas y realistas.
- 41.-Es mejor gozar del momento presente que deleitarse pensando en el pasado o en el futuro.
- 42.-Me molestan las personas que siempre desean apresurar las cosas.
- 43.-Aporto ideas nuevas y espontáneas en los grupos de discusión.
- 44.-Pienso que son más conscientes las decisiones fundamentadas en un minucioso análisis que las basadas en la intuición.
- 45.-Detecto frecuentemente la inconsistencia y puntos débiles en las argumentaciones de los demás.
- 46.-Creo que es preciso saltarse las normas muchas más veces que cumplirlas.
- 47.-A menudo caigo en cuenta de otras formas mejores y más prácticas de hacer las cosas.
- 48.-En conjunto hablo más que escucho.
- 49.-Prefiero distanciarme de los hechos y observarlos desde otras perspectivas.
- 50.-Estoy convencido que deber imponerse la lógica y el razonamiento.
- 51.-Me gusta buscar nuevas experiencias.
- 52.-Me gusta experimentar y aplicar las cosas.
- 53.-Pienso que debemos llegar pronto al grano, al meollo de los temas.
- 54.-Siempre trato de conseguir conclusiones e ideas claras.
- 55.-Prefiero discutir cuestiones concretas y no perder el tiempo con charlas vacías.
- 56.-Me impaciento cuando me dan explicaciones irrelevantes e incoherentes.
- 57.-Compruebo antes si las cosas funcionan realmente.
- 58.-Hago varios borradores antes de la redacción definitiva de un trabajo.
- 59.-Soy consciente de que en las discusiones ayudo a mantener a los demás centrados en el tema, evitando divagaciones.
- 60.-Observo que, con frecuencia, soy uno de los más objetivos y desapasionados en las discusiones.
- 61.- Cuando algo va mal le quito importancia y trato de hacerlo mejor.
- 62.- Rechazo ideas originales y espontáneas si no las veo prácticas.
- 63.- Me gusta sopesar diversas alternativas antes de tomar una decisión.
- 64.- Con frecuencia miro hacia delante para prever el futuro.

- 65.- En los debates y discusiones prefiero desempeñar un papel secundario antes que ser el/la líder o el/la que más participa.
- 66.- Me molestan las personas que no actúan con lógica.
- 67.- Me resulta incomodo tener que planificar y prever las cosas.
- 68.- Creo que el fin justifica los medios en muchos casos.
- 69.- Suelo reflexionar sobre los asuntos y problemas.
- 70.- El trabajar a conciencia me llena de satisfacción y orgullo.
- 71.- Ante los acontecimientos trato de descubrir los principios y teorías en que se basan.
- 72.- Con tal de conseguir el objetivo que pretendo soy capaz de herir sentimientos ajenos.
- 73.- No me importa hacer todo lo necesario para que sea efectivo mi trabajo.
- 74.- Con frecuencia soy una de las personas que más anima las fiestas.
- 75.- Me aburro enseguida con el trabajo metódico y minucioso.
- 76.- La gente con frecuencia cree que soy poco sensible a sus sentimientos.
- 77.- Suelo dejarme llevar por mis intuiciones.
- 78.- Si trabajo en grupo procuro que se siga un método y un orden.
- 79.- Con frecuencia me interesa averiguar lo que piensa la gente.
- 80.- Esquivo los temas subjetivos, ambiguos y poco claros.

ANEXO 3

Cuestionario Exploratorio.

Estimado/a alumno/a:

El presente cuestionario pretende indagar en “*el análisis del error en ecuaciones cuadráticas*”, para ello el desarrollo honesto de este instrumento es de suma importancia para la investigación. Ten en cuenta que esta **información es confidencial y se utilizará sólo como objeto de estudio**.

El objetivo central de este cuestionario es analizar los procedimientos realizados por estudiantes de tercer año medio en el desarrollo de ecuaciones cuadráticas, además de indagar en el razonamiento y emocionalidad en el proceso de resolución de los problemas planteados.

Datos Personales:

Nombre Completo	
Edad	
Curso	
Teléfono	
E-Mail	

Instrucciones

- Lee atentamente cada actividad propuesta y contesta con honestidad.
- No hay respuestas correctas o incorrectas.
- Contesta siguiendo las indicaciones de cada actividad.

I. Responde las siguientes preguntas:

4. ¿Te gusta la asignatura de matemáticas? Explica brevemente.

5. ¿Qué emociones surgen en ti al estar en una clase de matemáticas? Marca con una X, la(s) que te identifique(n) más:

Miedo	
Rabia	
Ansiedad	
Angustia	
Alegría	
Frustración	
Desconcierto	
Desinterés	
Curiosidad	
Inspiración	
Preocupación	
Felicidad	
OTRA (Explique)	

6. ¿Qué sientes cuando te plantean un ejercicio sin nota?, ¿y cuándo lleva una bonificación o nota?

- II. Resuelva cada una de las ecuaciones que se presentan a continuación, explicando en cada caso el procedimiento que utilizó. Si considera que alguna de las ecuaciones no es posible resolverla, explique por qué.

1. $x^2 - 2x - 3 = 0$

SÍ, ES POSIBLE RESOLVERLA
DESARROLLO:
EXPLICACIÓN DEL PROCEDIMIENTO UTILIZADO:

NO ES POSIBLE RESOLVERLA
EXPLICACIÓN:

2. $\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2} = 0$

SÍ, ES POSIBLE RESOLVERLA

DESARROLLO:

EXPLICACIÓN DEL PROCEDIMIENTO UTILIZADO:

NO ES POSIBLE RESOLVERLA

EXPLICACIÓN:

3. $3x^2 - 6x - 9 = 0$

SÍ, ES POSIBLE RESOLVERLA
DESARROLLO:
EXPLICACIÓN DEL PROCEDIMIENTO UTILIZADO:

NO ES POSIBLE RESOLVERLA
EXPLICACIÓN:

4. $x^2 - 2x + 3x = 0$

SÍ, ES POSIBLE RESOLVERLA
DESARROLLO:
EXPLICACIÓN DEL PROCEDIMIENTO UTILIZADO:

NO ES POSIBLE RESOLVERLA
EXPLICACIÓN:

5. $x \cdot (x - 2) = 7$

SÍ, ES POSIBLE RESOLVERLA
DESARROLLO:
EXPLICACIÓN DEL PROCEDIMIENTO UTILIZADO:

NO ES POSIBLE RESOLVERLA
EXPLICACIÓN:

III. ¿Con cuál(es) de las siguientes afirmaciones te identificaste, al momento de desarrollar las actividades anteriores? Selecciona con una X.

Me pareció interesante.	
Me aburrí.	
No le encuentro sentido a la actividad.	
No me interesa resolverlos.	
Me parecieron fáciles.	
Me tensiona resolver ecuaciones.	
No hice nada, porque nunca aprendí.	
OTRA (explique):	

ANEXO 4

Cuestionario Exploratorio 2.

Estimado/a alumno/a:

El presente cuestionario pretende indagar en “*el análisis del error en ecuaciones cuadráticas*”, para ello el desarrollo honesto de este instrumento es de suma importancia para la investigación. Ten en cuenta que esta **información es confidencial y se utilizará sólo como objeto de estudio.**

El objetivo central de este cuestionario es analizar los procedimientos realizados por estudiantes de tercer año medio en el desarrollo de ecuaciones cuadráticas, además de indagar en el razonamiento y emocionalidad en el proceso de resolución de los problemas planteados.

Datos Personales:

Nombre Completo	
Edad	
Curso	
Teléfono	
E-Mail	

Instrucciones

- Lee atentamente cada actividad propuesta y contesta con honestidad.
- No hay respuestas correctas o incorrectas.
- Contesta siguiendo las indicaciones de cada actividad.

I. Lea con atención y resuelva los siguientes problemas:

1. Determina un número real de modo que el producto de él mismo por su quinta parte sea 1280.
2. ¿Existe algún número cuyo cuadrado sea igual al doble de dicho número?
3. Encuentra un número tal que su cuadrado, disminuido en el triple del mismo número sea igual a 108.

II. Responde las siguientes preguntas:

1. Indica cuál(es) de los problemas anteriores, presentaron mayor dificultad para ti. Argumenta por qué.
2. De las siguientes afirmaciones, ¿cuáles te identifican más? Argumenta la que selecciones.

No entiendo nada del enunciado.	
No entiendo algunas palabras del enunciado del problema.	
No le encuentro sentido a los problemas.	
No me interesa resolverlos.	
Me parecieron fáciles.	
Me tensiona realizar problemas.	
Me parece aburrido.	
No me cuesta desarrollar el enunciado del problema, pero sí resolver la ecuación.	
OTRA (Explique)	