UNIVERSIDAD DE VALPARAÍSO
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

Dificultades en el proceso de traducción del lenguaje natural al lenguaje algebraico en la resolución de problemas que involucran ecuaciones lineales con una y dos variables.

Tesis para optar al grado de Licenciado en Educación y al título de Pedagogo en Matemáticas con mención en Didáctica de las Matemáticas

Presentada por: Jorge Zamorano Silva

Profesor guía: Jorge Ávila Contreras

Valparaíso- Chile- 2011

Agradecimientos

Deseo expresar mis agradecimientos, en especial a mis padres,
Rosa Silva Jil y Luis Zamorano Farias,
ya que durante toda la vida me dieron la oportunidad de educarme y
gracias a ellos he podido conocer esta disciplina tan maravillosa; las matemáticas.

Mis agradecimientos a mi familia, por su apoyo constante para lograr
encaminar mis objetivos en la vida.

A mi pareja Carolina Lazo Acevedo, quien no sólo me ayudo en la redacción, y
en el incentivo a culminar este trabajo, sino que también estuvo presente
con el apoyo emocional constante
para superar dificultades a lo largo de esta investigación.

No olvidar a Don Sergio, quien también contribuyó con su experiencia y
sabiduría para que este trabajo fuera posible.

Finalmente agradezco a los profesores que han formado mi camino profesional.

A todos ellos que han fomentado mis ganas de aprender siempre, desde el arte de enseñar.

Contenido

INTRODUCCIÓN

La enseñanza de la matemática ha sido una tarea compleja para los docentes y al mismo tiempo, una tarea complicada para quienes aprenden en los establecimientos educacionales del país. Si bien, aprender matemática ha constituido, por múltiples razones, un desafío para los estudiantes en los distintos tipos de establecimientos, este estudio centrará su mirada en el proceso de traducción del lenguaje natural al lenguaje algebraico. Lo hace porque ahí según mi entender, se concentran las mayores dificultades. No se pretende abordar toda la problemática que el enseñar y aprender matemática conlleva, la presente investigación aborda como problema de investigación las dificultades que presentan los estudiantes de primer y segundo año medio, en el proceso de traducción de los registros de lenguaje natural al algebraico en la resolución de problemas que involucran ecuaciones lineales con una y dos variables.

A través del estudio el lector conocerá las evidencias claras que existen, tanto en el ámbito empírico como teórico de las dificultades que poseen los alumnos al abordar un problema que involucra ecuaciones lineales del tipo señalado, ya sea en su representación como en su comprensión.

La investigación tendría como propósito describir las dificultades que presentan hoy en día los estudiantes de primer y segundo año medio, en el proceso de traducción del lenguaje natural al algebraico en la resolución de problemas que involucran ecuaciones lineales con una y dos variables. Para ello se autoimpone cuatro objetivos a cumplir en el transcurso de la investigación: Conocer la literatura pertinente en los ámbitos teórico, matemático y didáctico para que fundamente el estudio acerca de las dificultades que presentan los estudiantes de primer y segundo año medio, en el traspaso del lenguaje natural al algebraico en la resolución de problemas que involucran ecuaciones lineales con una y dos variables; analizar en los programas de estudio y los textos de uso actual en el aula, el tratamiento que el currículo y docentes dan a la resolución de problemas y recomendaciones metodológicas que se sugieren; identificar, a partir de la práctica pedagógica las dificultades que los y las estudiantes enfrentan en el ámbito de estudio abordado por la investigación; y relacionar los programas, textos, y la práctica pedagógica con los aportes teóricos considerados en la investigación.

Para alcanzar estos objetivos el estudio se nutre de un marco teórico, que aborda en primer lugar el argumento constructivista que da sustento teórico a los cambios que se han venido produciendo en las últimas décadas en la educación del país. En segundo término se exponen las características del sistema educacional chileno, en tercer lugar se aboca a la resolución de problemas, en cuarto lugar se presentan las dificultades que hay en la enseñanza de las matemáticas, particularmente, del contenido específico que se señala para el estudio y por último, el sistema numérico y el objeto matemático en que se efectúa esta tesis.

El trabajo de investigación se realiza bajo el paradigma cualitativo. Se trata de un diseño descriptivo donde a través de entrevistas abiertas se consigna la opinión que los docentes tienen del problema, se analizan los programas de estudio del nivel donde corresponde estudiar el contenido que preocupa al estudio y se analizan los textos de Matemática en uso en el aula.

La información se recoge de cuatro docentes que juegan el rol de informantes claves, quienes a través de una entrevista abierta de auto administración dan a conocer su percepción del problema. El análisis de las entrevistas sumado a ello el análisis de programas y textos permiten el cumplimiento de los objetivos señalados para el estudio.

CAPÍTULO 1. PROBLEMATIZACIÓN

1.1 Planteamiento del Problema

El proceso de traducción en la resolución de problemas es sin duda una temática que a gran parte de los estudiantes más de alguna vez le ha traído complicaciones. Por ejemplo, en nuestra práctica laboral en la realización de clases particulares de matemáticas, nos encontramos con dichas dificultades, e incluso en nuestra propia experiencia estudiantil, tanto en la enseñanza media como en la etapa de formación universitaria, hemos sido testigos de los obstáculos y el fracaso continuo que presentan los estudiantes en la representación de problemas.

Al analizar el sistema educativo nos encontramos que en los textos de apoyo, por lo general, abundan ejercicios que no necesariamente necesitan el desarrollo de habilidades ni activan operaciones cognitivas complejas; al final de cada unidad hallamos un número reducido de problemas en su mayoría del mismo tipo y que pueden ser resueltos de acuerdo a un modelo a proceder; como consecuencia no ayuda a generar en los alumnos el desarrollo en su razonamiento matemático obteniéndose paulatinamente una actitud negativa en relación con el aprendizaje de la asignatura.

Por las razones expuestas anteriormente, en esta investigación, nos abocaremos al estudio de las dificultades en la resolución de problemas que involucran ecuaciones lineales de una y dos variables.

Consideraremos evidencias desde dos ámbitos: uno con base en antecedentes empíricos y otro, con base en antecedentes teóricos. Para el primer caso ilustraremos producciones escritas de tres estudiantes que asisten a nuestras clases particulares, además, un diagnostico aplicado a los estudiantes de 3° año medio. En tanto para el caso de antecedentes teóricos, se realizará una revisión bibliográfica acerca de dicha problemática, y se mostrará una mirada en la resolución de problemas en sí mismo, es decir, no necesariamente en la temática de ecuaciones lineales.

Evidencias empíricas.

En el desarrollo de las clases particulares se encuentran conflictos y dificultades, generando errores, por lo que incentiva a un estudiante o sus cercanos a querer subsanarlas, en este sentido se observaba una apreciación personal y un cuestionamiento mediante la experiencia en este tipo de clases, que en su mayoría estos obstáculos apuntaban a la resolución de problemas, específicamente en el proceso de traducción. Lo cual implicó la necesidad de estudiar acabadamente ésta temática. Es así, que se aprovechó la instancia de las clases particulares, puntualmente, a los estudiantes que asistían. Por consecuencia, no se aplicó ningún criterio, ya que durante el transcurso de todo este proceso se fue tomando en claro cual era el camino a seguir para el estudio, llegando al punto culmine de determinación de la problemática de ésta investigación.

Quienes asistían a clases particulares eran tres estudiantes, Nicolás y René estudiantes de tercer año medio, el primero del colegio Santa Ana en la comuna de Villa alemana, el segundo del colegio Limache College en la comuna de Limache; y Ximena, de cuarto año medio, del colegio Hispano en la comuna de Villa Alemana. Algunas características relevantes de los estudiantes mencionados, que pueden ayudar a complementar el análisis de sus producciones son las siguientes:

En el caso de René, se trata de un niño más bien callado y tímido con la gente que no conoce. A pesar de que tiene capacidad no se motiva a tener mejor rendimiento. En el colegio se queda con las dudas y prefiere no preguntar a su profesora, argumenta: “que saco con preguntar si no le entiendo”. En rendimiento, es regular sus calificaciones fluctúan entre 4.0 y 4.5 en la asignatura, en relación a las clases particulares, tiene una baja disposición para exponer todas sus dudas.

A diferencia de René, Nicolás es un estudiante participativo en clases, muy preocupado de su rendimiento académico, en el colegio trata de no quedarse con dudas y le pregunta el ¿por qué? de cada afirmación de su profesor, trata de mantener altas calificaciones no solo en matemáticas, sino que en todas las asignaturas, esto es lo que la llevo a tomar clase particulares, ya que quiere resaltar en sus calificaciones y más aún le interesa profundizar más allá de los contenidos de la clase, por otro lado manifiesta su deseo de obtener puntaje nacional en la Prueba Selección Universitaria (PSU), por lo mismo es un alumno dedicado y muy esforzado en las clases particulares.

Finalmente, Ximena es una adolescente extrovertida, con mucha personalidad, esto la hace desconcentrarse con facilidad, a pesar de que tiene capacidades su personalidad le juega en contra en el ámbito educacional, su rendimiento es más que regular, su promedio esta entre 5.0 y 6.0, en el ámbito de clases particulares es muy ansiosa, se frustra fácilmente si no logra adquirir los conocimientos de forma inmediata, esto hace que los avances sean lentos, ya que cuando esto sucede no quiere continuar con la clase y pide que continuemos en otra sesión.

En lo que respecta nuestro estudio, le aplicamos a cada uno de los tres adolescentes, antes descritos, los siguientes ejercicios y problemas, vale destacar que esto ocurrió en diferentes momentos y lugares.

- Dos ejercicios de resolución de ecuaciones lineales con una variable:

  Ítem I

  1.Resuelva las siguientes ecuaciones lineales.

a) $2(x-1) = 3(x+2) - 5(x+3)$

b) $\frac{1}{x} + \frac{3}{2x} = \frac{1}{3x} + \frac{13}{12}$

- Tres problemas que involucran el uso de ecuaciones lineales con una y dos variables.

  Ítem II

  2. Resuelva los siguientes problemas.

a) Dividir el número 600 en tres partes, tales que la segunda exceda la primera en 25 y la tercera exceda a la segunda en 50.
b) La suma de tres números impares consecutivos es 297. ¿Cuál es el doble del mayor?
c) Hace seis años la edad de un hijo era un quinto la edad de su padre, dentro de nueve años la edad del hijo será los dos quinto de la de su padre. Determinar las edades actuales.

<u>Análisis:</u>

Los ejercicios de resolución de ecuaciones lineales no presentaron mayores dificultades.

El primer ejercicio fue resuelto de modo similar por los tres estudiantes, esgrimiendo un buen uso de propiedades distributiva, inverso aditivo y multiplicativo, llegando todos a la respuesta correcta. Esto se debe a que los tres desarrollaron el ejercicio siguiendo una secuencia de pasos que los llevarán de manera segura a la solución, además al ser los coeficientes de la ecuación lineal números enteros les facilitó aún la resolución.

En el caso del segundo ejercicio se aprecian matices en el modo de resolver. En efecto, Nicolás (Fig.1) es riguroso en cada uno de los pasos a seguir, en tanto que René (Fig.2) desarrolla el ejercicio de manera correcta omitiendo pasos, pero finalmente ambos llegan a la respuesta correcta.

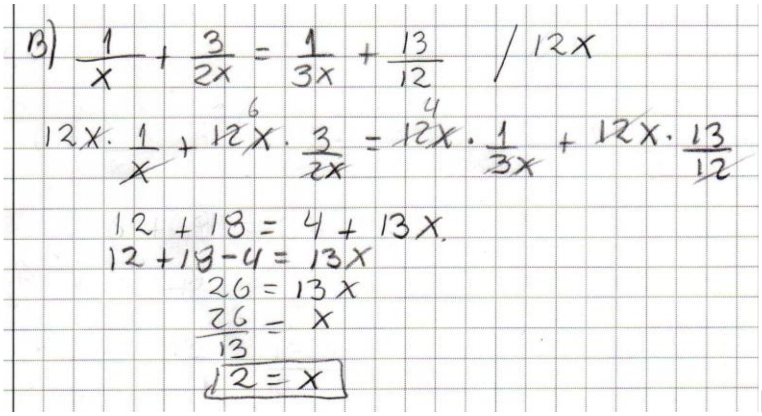


Fig. 1

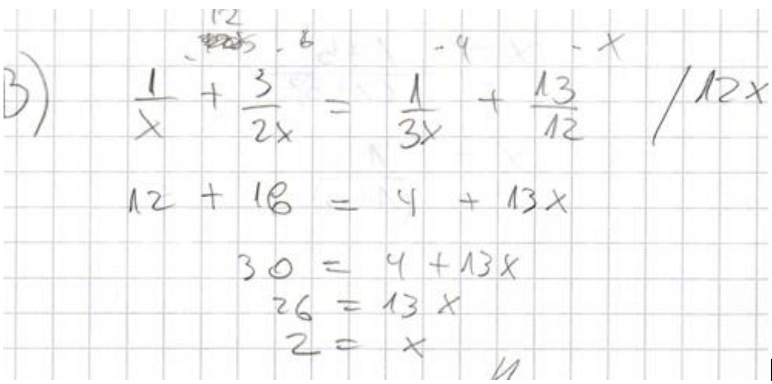
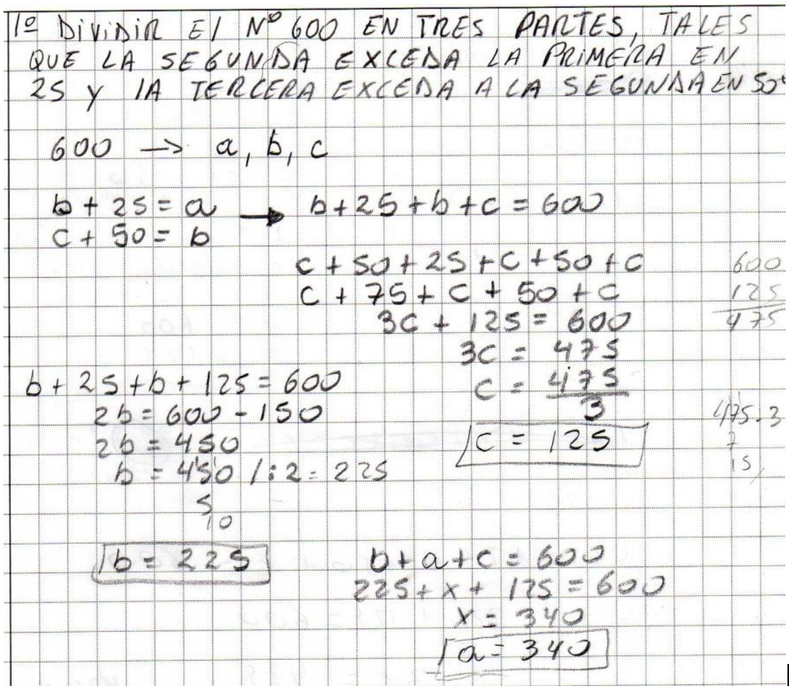


Fig.2

Al observar la resolución de problemas que involucran ecuaciones lineales, resueltos por los tres estudiantes, es claro que presentan complicaciones en sus desarrollos.

En el primer ejercicio vemos que Nicolás (Fig.3) realiza un trabajo limpio, pero no tan ordenado como en los ejercicios anteriores, en tanto que René (Fig.4) presenta un desarrollo ordenado e identifica claramente lo que se está pidiendo en el ejercicio, utilizando el planteamiento adecuado de las variables al igual que Nicolás, finalmente ambos realizan el proceso de traducción adecuadamente, del lenguaje natural al lenguaje algebraico, a diferencia de Ximena (Fig.5), quien no logra identificar lo que el problema pide, presentando un desarrollo desordenado, por lo que podría sospechar que es propio de su personalidad. En definitiva René es el único que llega a la solución correcta del ejercicio, ya que Nicolás en el último paso falla al aplicar inverso aditivo, por otro lado Ximena no logra llegar a la solución, concluyendo tres valores, sin comprobar que estos son erróneos.



1º DIVIDIR EL Nº 600 EN TRES PARTES, TALES QUE LA SEGUNDA EXCEDA LA PRIMERA EN 25 Y LA TERCERA EXCEDA A LA SEGUNDA EN 50.

600 → a, b, c

b + 25 = a → b + 25 + b + c = 600
c + 50 = b

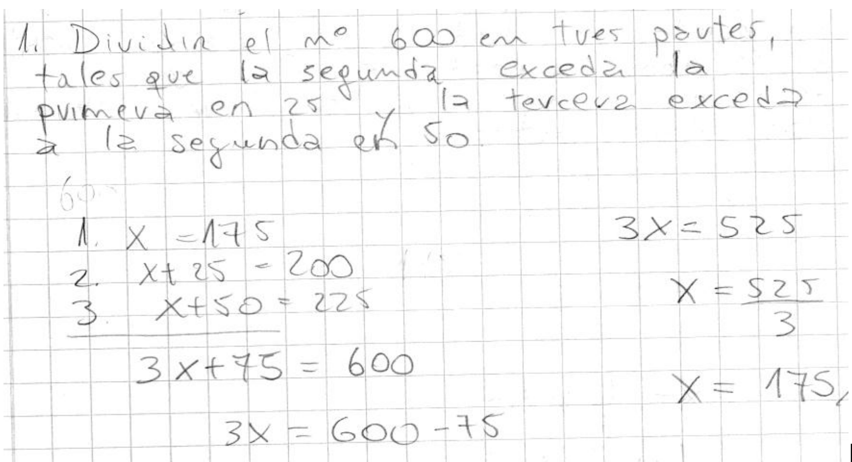
c + 50 + 25 + c + 50 + c
c + 75 + c + 50 + c
3c + 125 = 600
3c = 475
c = 475/3
$\boxed{c = 125}$

600 − 125 = 475

b + 25 + b + 125 = 600
2b = 600 − 150
2b = 450
b = 450 : 2 = 225
$\boxed{b = 225}$

b + a + c = 600
225 + x + 125 = 600
x = 340
$\boxed{a = 340}$

Fig.3

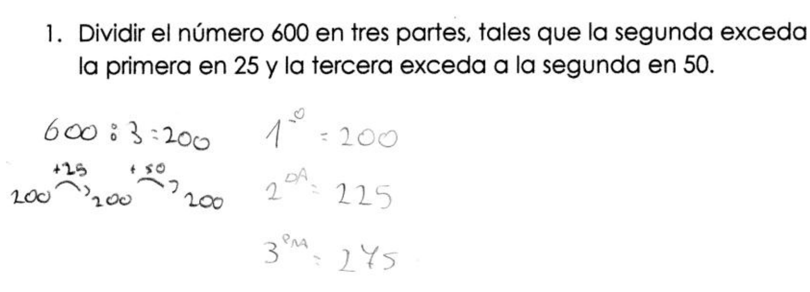


1. Dividir el nº 600 en tres partes, tales que la segunda exceda la primera en 25 y la tercera exceda a la segunda en 50

1. x = 175
2. x + 25 = 200
3. x + 50 = 225

3x + 75 = 600
3x = 600 − 75
3x = 525
x = 525/3
x = 175

Fig.4



1. Dividir el número 600 en tres partes, tales que la segunda exceda la primera en 25 y la tercera exceda a la segunda en 50.

600 : 3 = 200
$200 \xrightarrow{+25} 200 \xrightarrow{+50} 200$

1º = 200
2ºA = 225
3ºRA = 275

Fig.5

En el segundo ejercicio podemos ver que Nicolás (Fig.6) presenta un desarrollo muy desordenado y confuso, al igual que Ximena (Fig.8), en cambio René (Fig.7) presenta un desarrollo más estructurado y es el único que utiliza la noción de ecuación como herramienta para resolver, vale destacar que los tres logran encontrar la respuesta correcta, a pesar que el método de tanteo utilizado por Ximena y Nicolás esta fuera de contexto en relación a lo que se está estudiando.

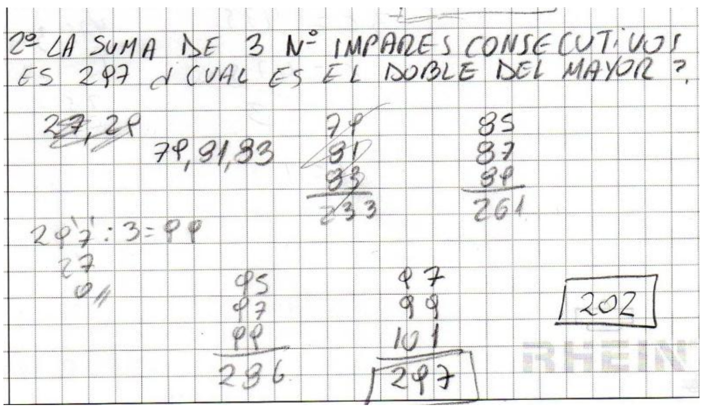


Fig.6

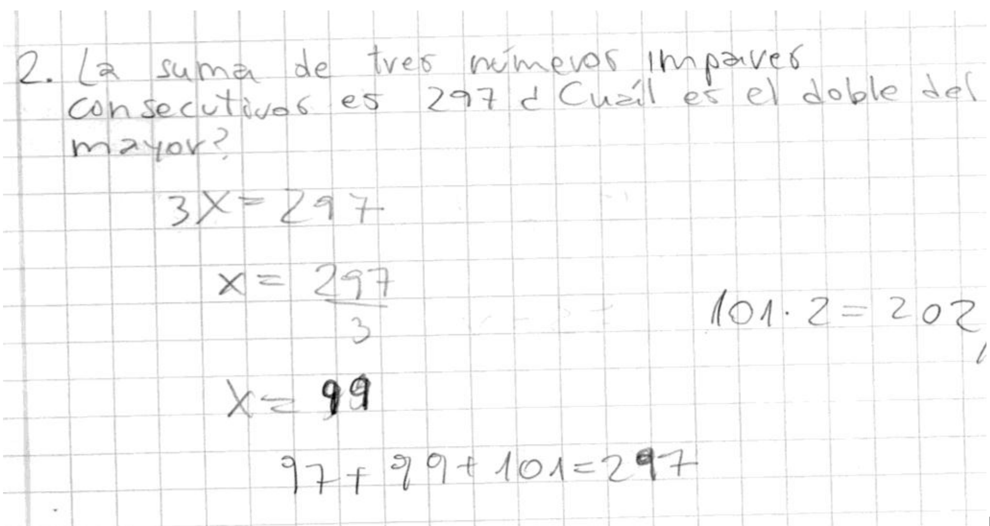


Fig.7

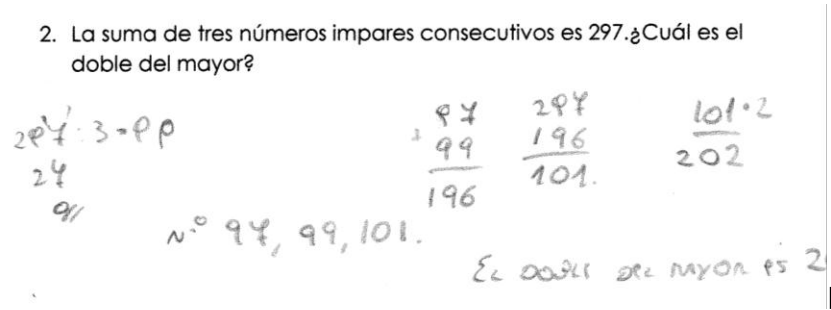


Fig.8

Al analizar el tercer ejercicio, notoriamente es el que presenta mayor dificultad, pues ningún estudiante llego a la solución correcta, claramente esto se observa en el caso de Ximena (Fig. 11) quien no escribió nada, argumentando “no se me ocurre cómo hacer éste”. Si observamos el desarrollo de Nicolás (Fig. 9) y René (Fig10) nos damos cuenta que manifiestan el mismo error en el planteamiento de las ecuaciones, es decir solo utilizan el instante de tiempo en un miembro de la ecuación, esto los lleva a encontrar soluciones erróneas posteriormente.

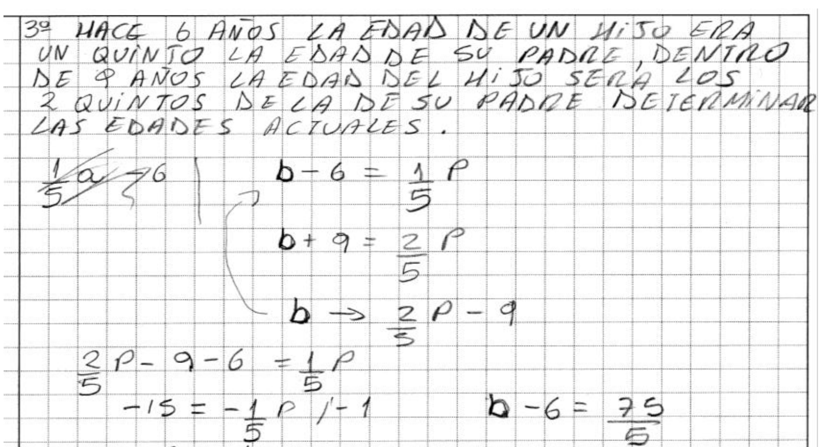
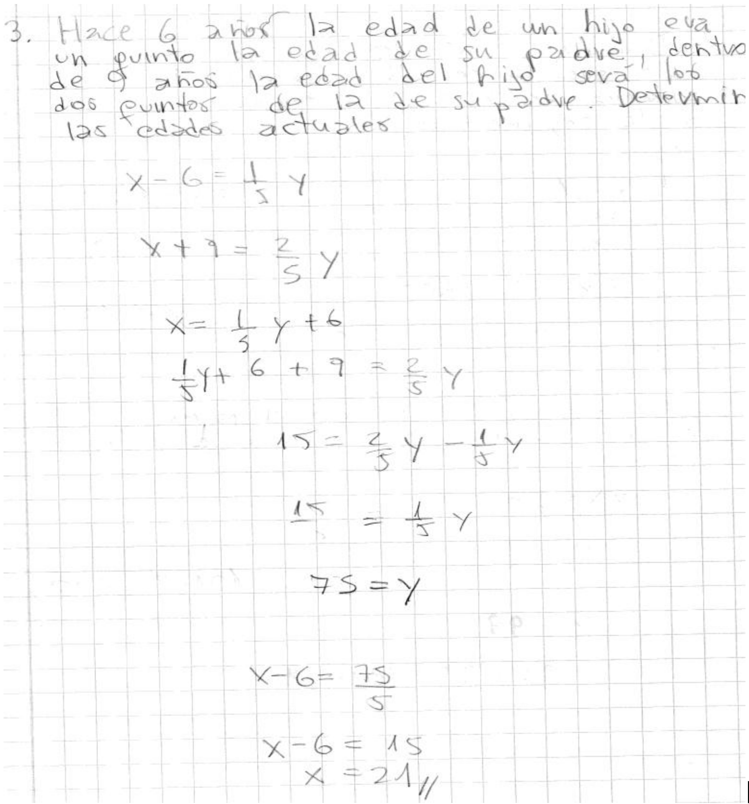


Fig.9



3. Hace 6 años la edad de un hijo era un quinto la edad de su padre, dentro de 9 años la edad del hijo será los dos quintos de la de su padre. Determin las edades actuales

$$x - 6 = \frac{1}{5}y$$

$$x + 9 = \frac{2}{5}y$$

$$x = \frac{1}{5}y + 6$$

$$\frac{1}{5}y + 6 + 9 = \frac{2}{5}y$$

$$15 = \frac{2}{5}y - \frac{1}{5}y$$

$$15 = \frac{1}{5}y$$

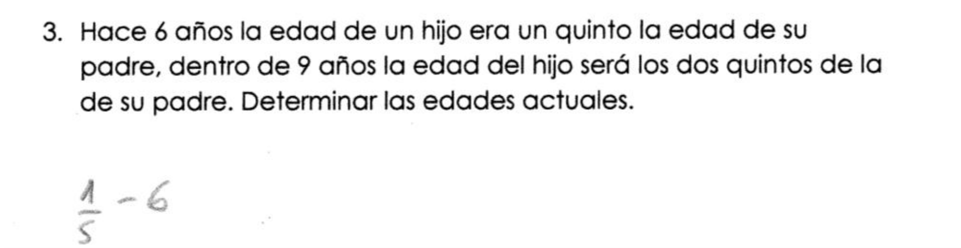
$$75 = y$$

$$x - 6 = \frac{75}{5}$$

$$x - 6 = 15$$

$$x = 21 //$$

Fig.10



3. Hace 6 años la edad de un hijo era un quinto la edad de su padre, dentro de 9 años la edad del hijo será los dos quintos de la de su padre. Determinar las edades actuales.

$$\frac{1}{5} - 6$$

Fig.11

Para evidenciar las dificultades se plantearon estos mismos ítems en un establecimiento educacional. El establecimiento seleccionado fue el colegio Limache College (Colegio particular Subvencionado Científico-Humanista), ubicado en la comuna de Limache (V región del país), el curso escogido fue el 3° medio A (enseñanza media), compuesto de 30 alumnos, los cuales se encuentran iniciando el primer semestre del año escolar 2011, en la formación diferenciada científica. Al igual que los estudiantes de clases particulares, se les aplicó una evaluación diagnóstica, sin previo aviso, de forma individual en una hora normal de clase de 45 minutos, sin permitirles consultar información alguna. Los contenidos de esta evaluación fueron de 1° y 2° de enseñanza media, por lo que se esperaba que estos contenidos ya hayan sido adquiridos por los alumnos en 3° año medio.

La siguiente es la evaluación diagnóstica aplicada a dicho curso:

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA
"<u>Ecuaciones lineales</u>"

Género: Edad:
Curso: Colegio:

<u>Instrucciones</u>
Realice todos los desarrollos en la hoja, incluso los cálculos.

1. Resuelva las siguientes ecuaciones lineales.

a) $2(x-1) = 3(x+2) - 5(x+3)$ b) $\frac{1}{x} + \frac{3}{2x} = \frac{1}{3x} + \frac{13}{12}$

2. Resuelva los siguientes problemas.

a) Dividir el número 600 en tres partes, tales que la segunda exceda la primera en 25 y la tercera exceda a la segunda en 50.

b) La suma de tres números impares consecutivos es 297. ¿Cuál es el doble del mayor?

c) Hace 6 años la edad de un hijo era un quinto la edad de su padre, dentro de 9 años la edad del hijo será los dos quintos de la de su padre. Determinar las edades actuales.

Análisis:

Ítem 1 a)

Cerca del 60% de los estudiantes resuelve de manera correcta este ejercicio 1 a). Dentro del 40% restante, se aprecian las dificultades más relevantes, entre las cuales están; aplicación de la propiedad distributiva en forma inadecuada, no identifican el significado de la relación de igualdad, desarrollan el inverso multiplicativo de manera incorrecta, etc.

Item 1 b)

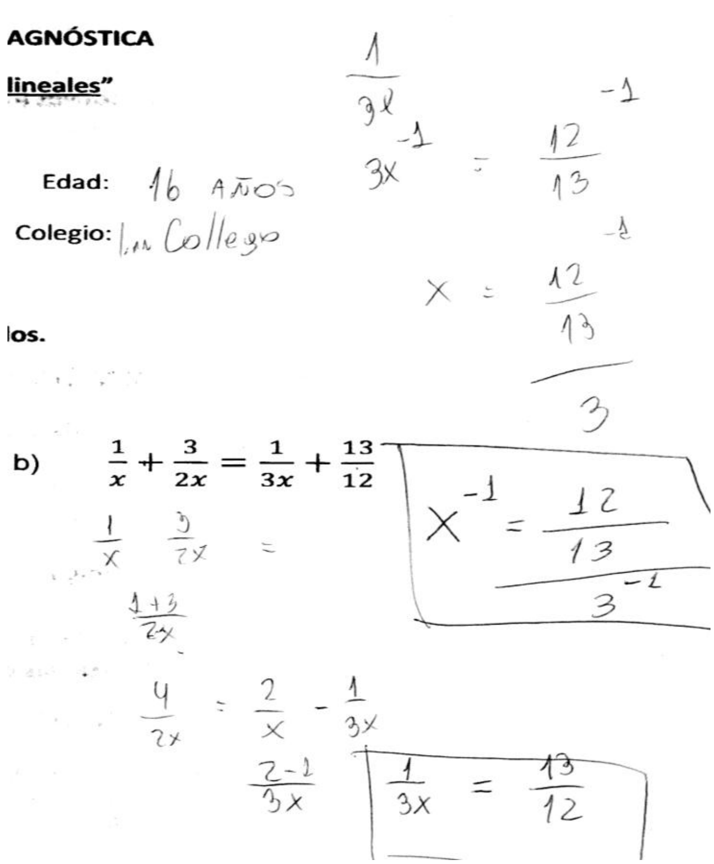


Fig. 12

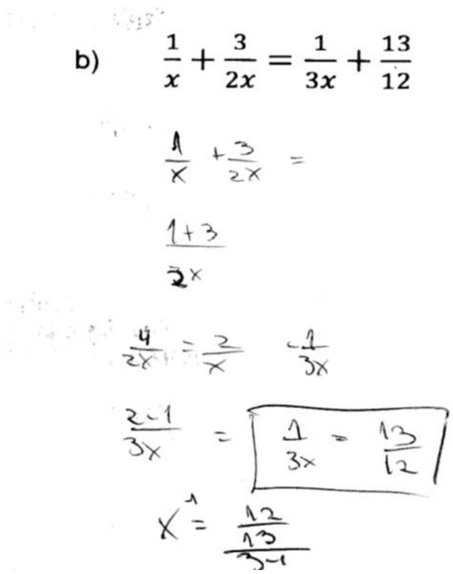
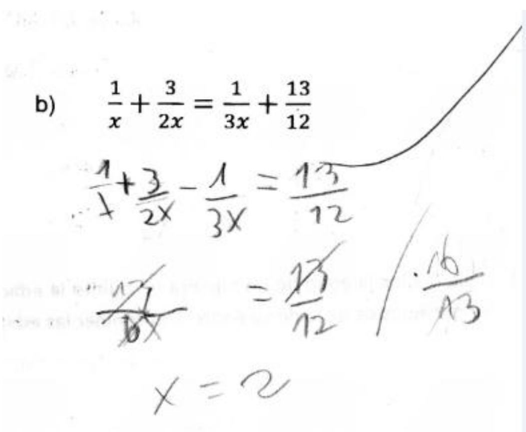


Fig. 13

Análisis:

En las figuras 12 y 13, los estudiantes presentan un desarrollo desordenado, con una secuencia de pasos sin claridad. Al presentarse la variable en el denominador desarrollan contradicciones con la forma de las ecuaciones lineales. Utilizando exponente negativo en la variable.



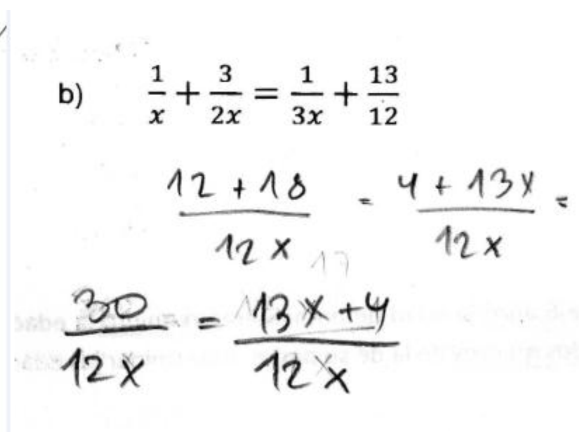
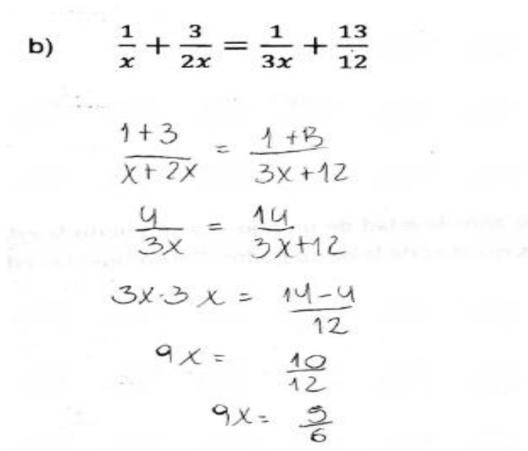


Fig. 14 Fig. 15



b) $\frac{1}{x}+\frac{3}{2x}=\frac{1}{3x}+\frac{13}{12}$

$\frac{1+3}{x+2x} = \frac{1+13}{3x+12}$

$\frac{4}{3x} = \frac{14}{3x+12}$

$3x\cdot 3x = \frac{14-4}{12}$

$9x = \frac{10}{12}$

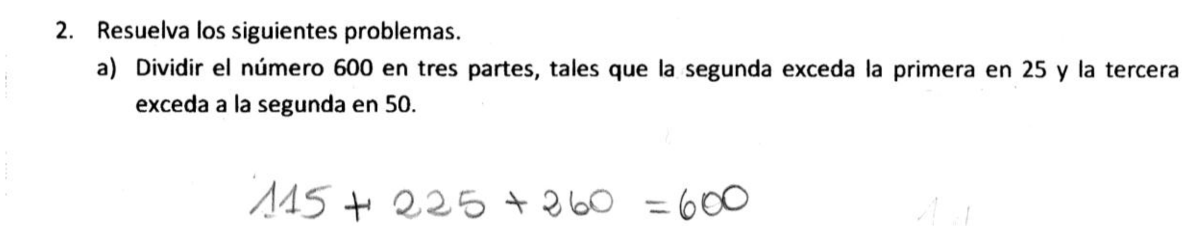
$9x = \frac{5}{6}$

Fig. 16

<u>Análisis:</u>

En las figuras 14-15-16. Manifiestan errores graves en el concepto de fracciones. Dificultades en las operatorias con fracciones, principalmente en la adición. No utilizan el mínimo común múltiplo. En la figura 16 el estudiante suma las expresiones de los denominadores. Amplifican, de manera errónea, pues, no amplifican el numerador de dichas fracciones.

Ítem 2 a)



2. Resuelva los siguientes problemas.
   a) Dividir el número 600 en tres partes, tales que la segunda exceda la primera en 25 y la tercera exceda a la segunda en 50.

$115 + 225 + 260 = 600$

Fig. 17

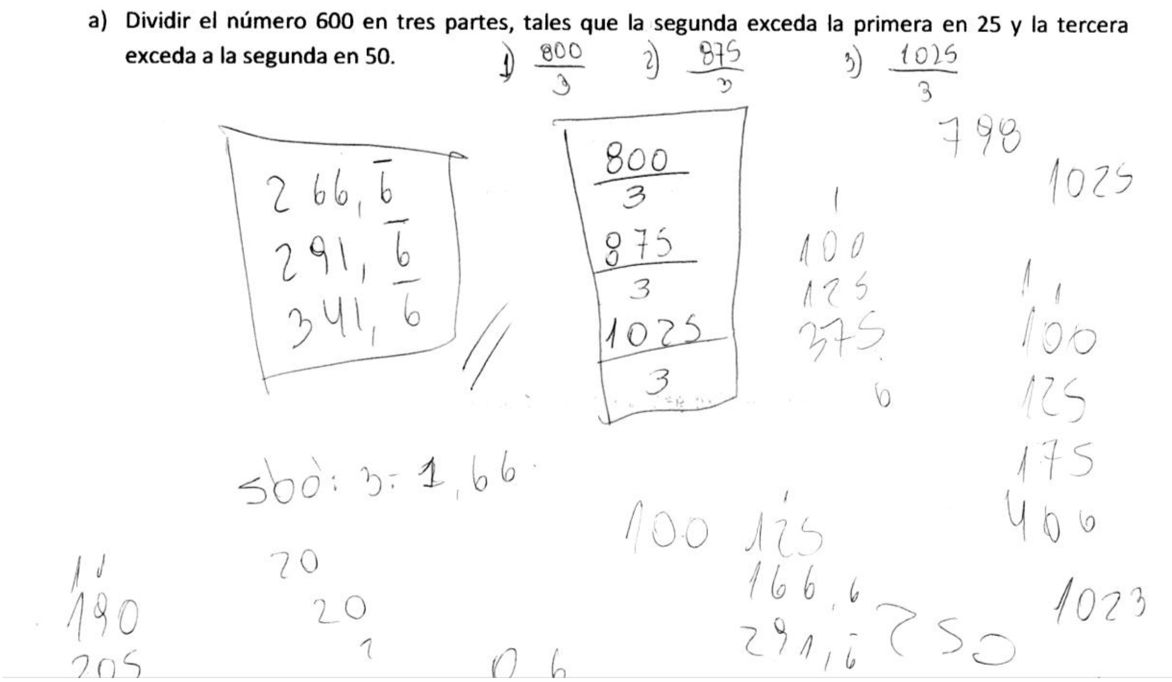

a) Dividir el número 600 en tres partes, tales que la segunda exceda la primera en 25 y la tercera exceda a la segunda en 50.

Fig. 18

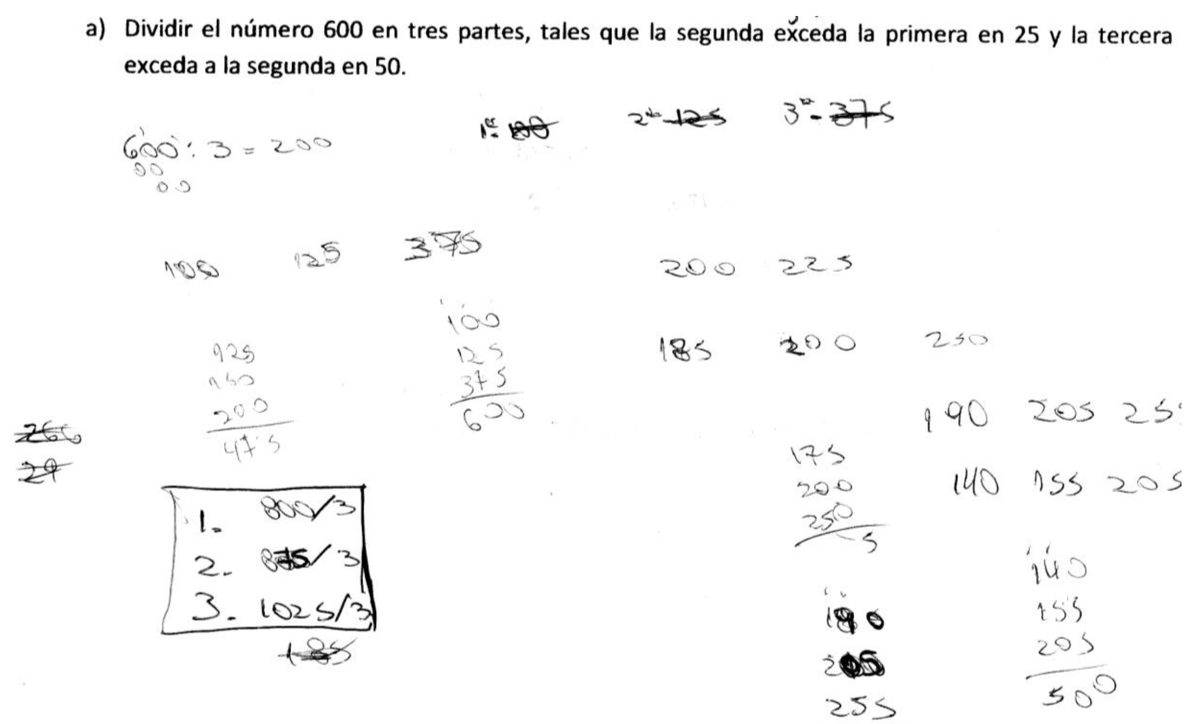

a) Dividir el número 600 en tres partes, tales que la segunda exceda la primera en 25 y la tercera exceda a la segunda en 50.

Fig. 19

a) Dividir el número 600 en tres partes, tales que la segunda exceda la primera en 25 y la tercera exceda a la segunda en 50.

$\frac{600}{3} = 200 \quad | \quad 200 \quad | \quad 200$

$165 \quad 190 \quad 240$

$$\begin{array}{r} 165 \\ 190 \\ \hline 355 \\ 240 \\ \hline 695 \end{array}$$

Fig. 20

Análisis:

Estos alumnos no identifican las variables para representar la ecuación pedida. Solo manejan el concepto de igualdad. Utilizan el método de ensayo-error. Ninguno llega a la solución correcta, no comprueban las soluciones para identificar los procedimientos o soluciones erróneas que cometen en su desarrollo. El estudiante (Fig. 18) en un momento llega a la solución, pero al parecer por su desorden, se confunde y responde incorrectamente.

a) Dividir el número 600 en tres partes, tales que la segunda exceda la primera en 25 y la tercera exceda a la segunda en 50.

$x \quad x+25 \quad x+x+25$

$x+x+25+x+x+25=600$

$4x=600-25-25$

$4x=600-50$

$4x=550$

$x=137$

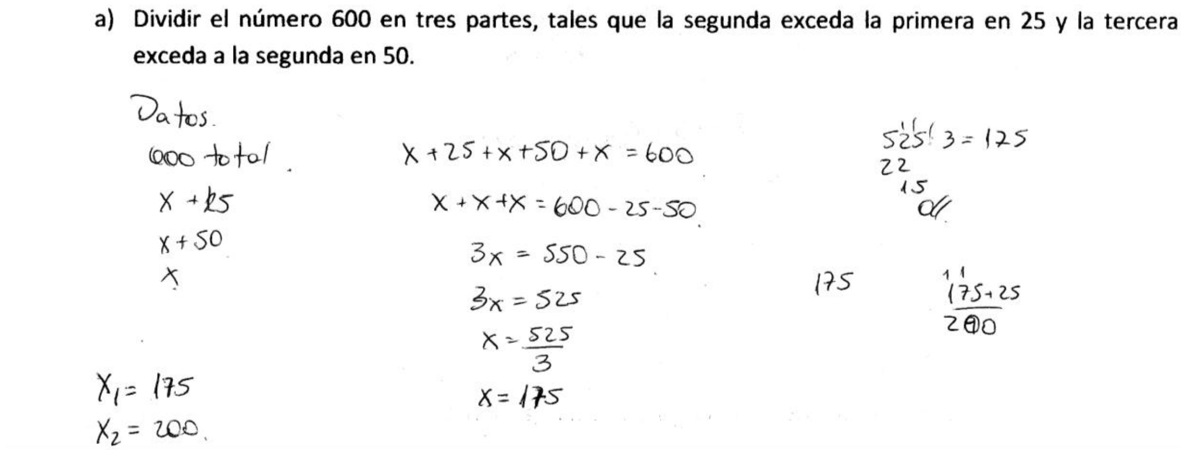
$550:4=137$

15

30

2

Fig. 21


a) Dividir el número 600 en tres partes, tales que la segunda exceda la primera en 25 y la tercera exceda a la segunda en 50.

Datos.
600 total
$x + 25$
$x + 50$
x

$x + 25 + x + 50 + x = 600$
$x + x + x = 600 - 25 - 50$
$3x = 550 - 25$
$3x = 525$
$x = \frac{525}{3}$
$x = 175$

$525 \div 3 = 175$
22
15
0

175

175 + 25
200

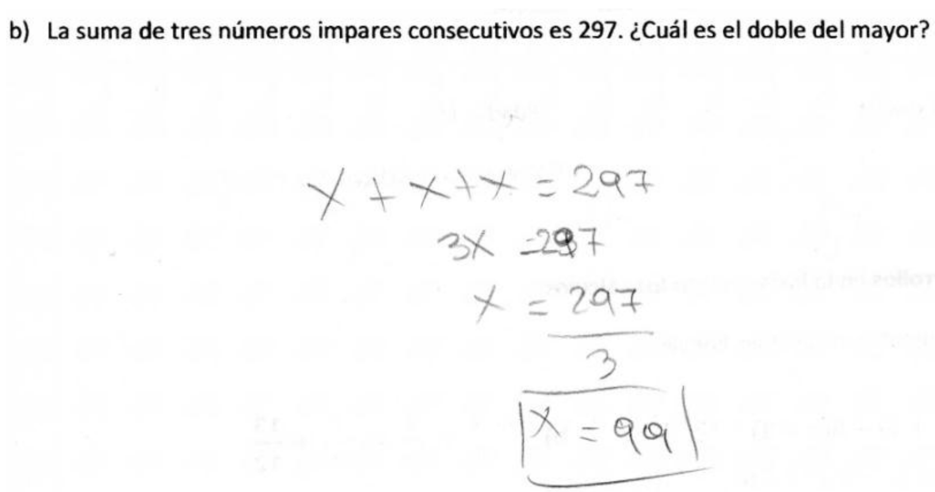
$X_1 = 175$
$X_2 = 200$

Fig. 22

Análisis:

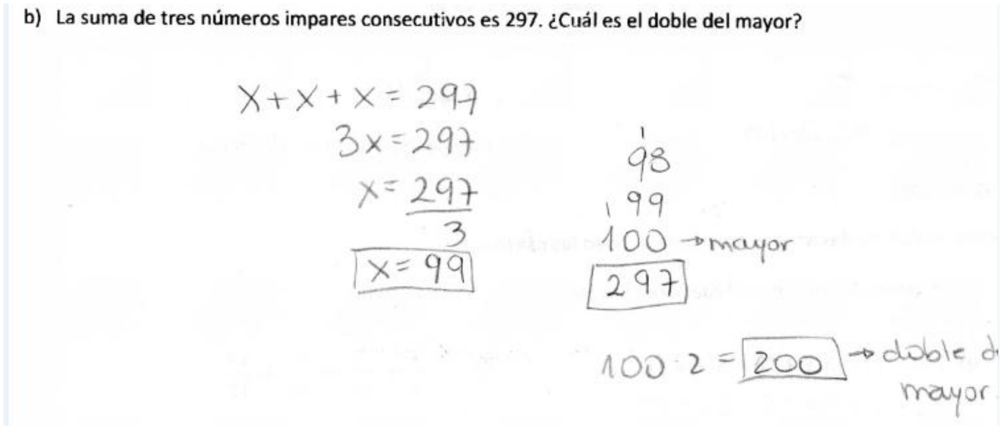
También se encuentran estudiantes (fig. 21-22), que resuelven por medio de ecuaciones lineales pero equivocan en la representación de los datos del enunciado al modelo matemático, es decir, plantean de manera inadecuada la ecuación, específicamente las variables del problema.

Item 2 b)


b) La suma de tres números impares consecutivos es 297. ¿Cuál es el doble del mayor?

$x + x + x = 297$
$3x = 297$
$x = \frac{297}{3}$
$\boxed{x = 99}$

Fig. 23


b) La suma de tres números impares consecutivos es 297. ¿Cuál es el doble del mayor?

$X+X+X=297$

$3x=297$

$x=\frac{297}{3}$

$\boxed{x=99}$

98

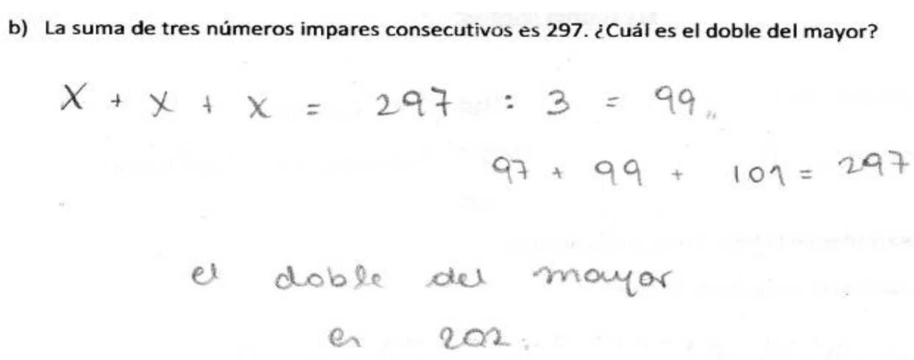
99

100 → mayor

$\boxed{297}$

$100 \cdot 2 = \boxed{200}$ → doble d mayor

Fig. 24


b) La suma de tres números impares consecutivos es 297. ¿Cuál es el doble del mayor?

$X + X + X = 297 : 3 = 99$

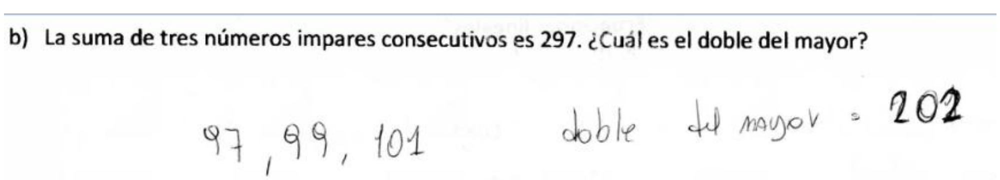
$97 + 99 + 101 = 297$

el doble del mayor es 202.

Fig. 25

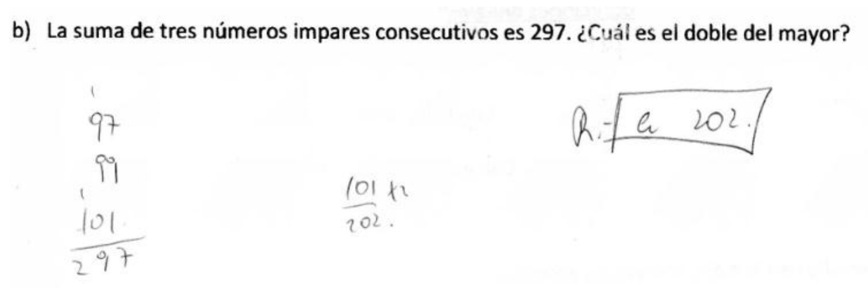
Análisis:

Realizan la resolución por medio de ecuaciones (fig. 23-24-25), pero no plantean de forma correcta tres números impares consecutivos, pues no hay diferencia de dos entre las variables, es decir, suman tres números cualquiera sin siquiera expresar que representa la variable en el problema.


b) La suma de tres números impares consecutivos es 297. ¿Cuál es el doble del mayor?

97, 99, 101 doble del mayor = 202

Fig. 26

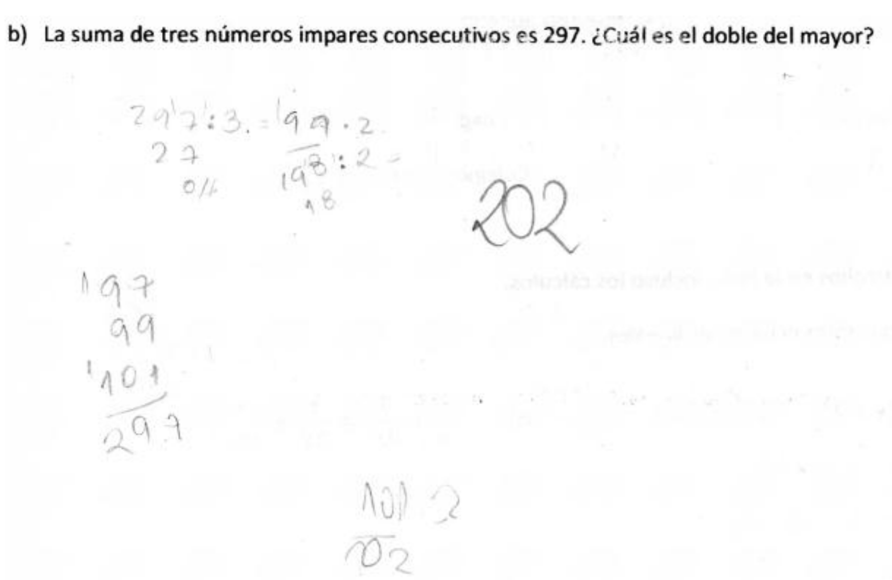

b) La suma de tres números impares consecutivos es 297. ¿Cuál es el doble del mayor?

97
99
101
297

101 x2
202.

R.- a 202.

Fig. 27


b) La suma de tres números impares consecutivos es 297. ¿Cuál es el doble del mayor?

297 : 3 = 99 . 2
27
0/
198 : 2 =
18

202

97
99
101
297

101 . 2
202

Fig. 28

<u>Análisis:</u>

Los estudiantes (fig. 26-27-28), usualmente desarrollan el método ensayo-error, evaluando a partir de la suma de tres números impares o dividen de tres el número dado para encontrar el valor central o número impar que represente la mediana según el problema.

Ítem 2 c)

c) Hace 6 años la edad de un hijo era un quinto la edad de su padre, dentro de 9 años la edad del hijo se
los dos quintos de la de su padre. Determinar las edades actuales.

6 años 9 años

$\frac{1}{5}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{\overset{2}{15} \cdot 5 =}{75}$

$15 = \frac{2}{5}x$

$\frac{2}{5}x = -15 \;/ : \frac{2}{5}$

$x = \underline{-15}$

$\overset{2}{7{,}5} \cdot 5$

$\boxed{37{,}5}$

Fig. 29

c) Hace 6 años la edad de un hijo era un quinto la edad de su padre, dentro de 9 años la edad del hijo será
los dos quintos de la de su padre. Determinar las edades actuales.

6 años 9 años = 15 años

$\frac{1}{5}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{2}{5}$ $+ \frac{1}{5}$ $= \frac{2}{5}x$

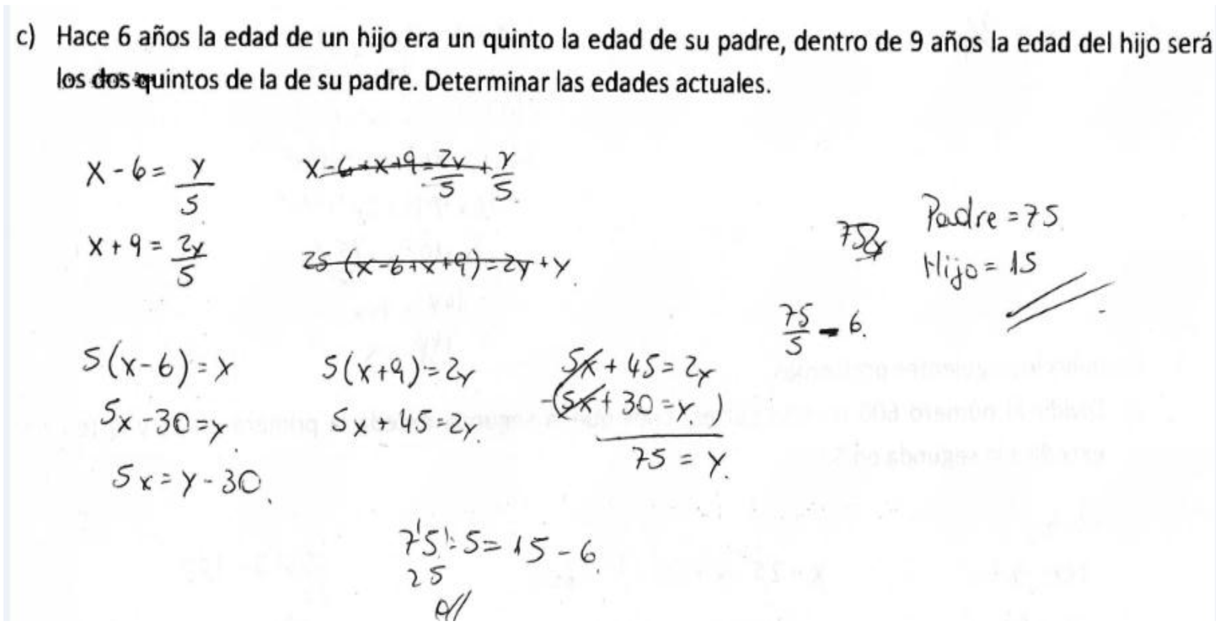
$15 \times 5 = 75$

$\frac{2}{5}x = 15 \;/$

Fig. 30

Análisis:

Los alumnos no identifican las variables del problema (fig. 29-30), debido a esto resuelven las ecuaciones en una variable cuando las variables expuestas en el enunciado son dos (edad hijo y edad padre).



c) Hace 6 años la edad de un hijo era un quinto la edad de su padre, dentro de 9 años la edad del hijo será los dos quintos de la de su padre. Determinar las edades actuales.

$x - 6 = \frac{y}{5}$ $\quad$ $\cancel{x - 6 + x + 9 = \frac{2y}{5} + \frac{y}{5}}$

$x + 9 = \frac{2y}{5}$ $\quad$ $\cancel{25(x - 6 + x + 9) = 2y + y}$

Padre = 75

Hijo = 15

$\frac{75}{5} - 6$

$5(x-6) = y$ $\quad$ $5(x+9) = 2y$ $\quad$ $5x + 45 = 2y$

$5x - 30 = y$ $\quad$ $5x + 45 = 2y$ $\quad$ $-(5x + 30 = y)$

$5x = y - 30$ $\quad$ $75 = y$

$75 : 5 = 15 - 6$

Fig. 31

Análisis:

No se traduce el enunciado acertadamente, se aprecia las relaciones del enunciado en una sola variable y no en las dos (fig. 31). La dificultad fundamentalmente se encuentra en el planteamiento de las ecuaciones, en consecuencia la edad del padre e hijo poseen valores erróneos.

c) Hace 6 años la edad de un hijo era un quinto la edad de su padre, dentro de 9 años la edad del hijo será los dos quintos de la de su padre. Determinar las edades actuales.

Fig. 32

Análisis:

El estudiante (fig. 32) intenta discriminar las palabras clave del enunciado que hacen referencia a las cantidades o números. No obstante su estrategia no conlleva a la solución del problema ya que no logra la representación matemática del enunciado.

Tras el análisis de los ejercicios anteriormente planteados, se aprecia que resolver una ecuación lineal es más sencillo que resolver un problema que involucre ecuación lineal, ninguno de los alumnos fue capaz de encontrar las soluciones de los problemas propuestos pero no obstante si fueron capaces de resolver las ecuaciones planteadas en el ítem I, esto lleva a pensar que muchas de las dificultades en la resolución de problemas se deben a una falta de comprensión o falta de dominio del lenguaje matemático, es decir expresan inadecuadamente las representaciones matemáticas necesarias del enunciado, en algunos casos la impulsividad lleva a los estudiantes a terminar por rendirse si la resolución no ocurre de inmediato, acostumbrados a invertir poco tiempo en ejercicios o problemas de esta índole.

Con la evidencia expuesta hasta el momento, y a las constantes equivocaciones en la resolución de problemas que involucran ecuaciones lineales, presentadas por estudiantes de tercer y cuarto año medio que asisten a clases particulares, y los estudiantes de 3° año medio A, de dicho establecimiento, nos preguntamos ¿Por qué falla la traducción del enunciado? para poder responder esta interrogante es necesario estudiar diferentes factores que afectan la manera de resolver dichos problemas, ya sean factores externos del alumno tales como: el ambiente, el pedagogo, la sociedad, la enseñanza, etc. y factores internos como lo son: la motivación, capacidad cognitiva, la actitud, etc.. y otras dificultades que pueden ser perjudiciales para el buen desarrollo del problema en sí. Debido a eso es que centraremos nuestro problema de investigación en el traspaso de un registro de representación a otro, vale decir de lenguaje natural a lenguaje algebraico, el proceso de traducción.

Evidencias teóricas

Al examinar la bibliografía publicada, podemos identificar la resolución de problemas no solo como una actividad cognitiva sino también como una capacidad de aprendizaje. Capacidad que encontramos en los objetivos de la educación como una de las características concretas del aprendizaje de alto nivel, ya que *"la resolución de problemas es una de las tareas más creativas, exigentes e interesantes para la mente humana y es un área que ha atraído el interés de los científicos cognitivos desde siempre, en especial en ciencias y matemáticas (Polya, 1957; Newel y Simon, 1972, Larkin y Reif, 1979)"*(Sanjosé, Valenzuela, Fortes, Solaz-Portolés, 2007, p. 540). Uno de los propósitos de la educación es desarrollar las habilidades del pensamiento, para esto se enfoca a la resolución de problemas como un eje transversal *"siendo el núcleo central de la actividad matemática,* debiendo *ocupar un lugar importante en el aprendizaje de esta disciplina, desde los niveles más básicos"(*Frías, Radbil, Ubilla, 2008, p.5).

Conociendo la gran cantidad de características que se atribuyen a la resolución de problemas, no sólo en el ámbito escolar, se puede entender que tales exigencias no están ajenas a dificultades; estas últimas se presentan en nuestro dominio de estudio "el proceso de traducción en la resolución de problemas", que posee un enunciado planteado en lenguaje natural en el que se comunican los problemas, que el resolutor tiene que traducir a la representación matemática; es decir, al lenguaje algebraico. Para el alumno, "(…) *el conflicto determinante consiste en hallar el modelo matemático que le permita plantear el problema*" (Olazábal, 2005, p.11), por esto *"el proceso de traducción constituye una etapa primordial en el* *planteamiento y resolución de los problemas matemáticos contextualizados"* (Olazábal, 2005,p.6). Este proceso de resolución requiere de al menos 3 niveles (Hegarty, Mayer, y Monk, 1995) cada uno de los cuales puede presentar dificultades para los estudiantes:

a) Comprensión de la situación descrita en el enunciado con sus entidades, sus relaciones y sus atributos a un nivel concreto, no abstracto. Es decir, la persona resolutora debe construir las representaciones del texto del enunciado en términos del contenido léxico, semántico o referencial. Ello incluye las reglas y las normas que rigen el funcionamiento del mundo que el sujeto conoce, y que sirven para que la situación descrita sea plausible una vez entendida. El conocimiento general del mundo que el sujeto posee debe ser activado para incluir la situación descrita en un esquema de funcionamiento conocido.

b) Traducción de esa situación del lenguaje natural al matemático y viceversa. El sujeto debe pasar de un modelo mental de la situación descrita en términos concretos (objetos y eventos; atributos y características espacio-temporales) a una representación abstracta "Modelo del Problema" que involucra magnitudes y fenómenos; cantidades y relaciones matemáticas; teoremas, leyes y axiomas. También en sentido contrario, a la hora de interpretar el resultado de un problema: las cantidades y abstracciones resultantes deben vincularse de nuevo con objetos y eventos del mundo.

c) Manejo de las herramientas matemáticas necesarias para llegar al resultado, asociado con un conocimiento procedimental de los esquemas aritméticos, algebraicos, etc. de resolución (citado en Sanjosé y cols. 2007, p.538).

En el marco del primer nivel que señala Hegarty y cols., tenemos que: "l*a comprensión de un problema parte de la comprensión de su enunciado, el cual demanda una gran cantidad de inferencias y la activación de conocimiento previo específico conceptual, situacional, procedimental, estratégico y esquemático para atender la demanda del problema (Solaz-Portolés y Sanjosé, 2007; Nathan, Kintsch y Young, 1992; Ferguson-Hessler y de Jong, 1990)"* (citado en Sanjosé, 2007, p.539).

Sanjosé señala que *"la causa principal de las dificultades debe tener su origen en la construcción de un modelo de la situación y/o de un modelo del problema, adecuados"* (Sanjosé, 2007, p.538). Según el autor se entiende por modelo problema "*al conjunto de modelos mentales necesarios para representar el problema (…) que deben incluir abstracciones teóricas basadas en teoremas, leyes y principios";* y por modelo situación "*al conjunto de modelos mentales en el que la información semántica del texto se relaciona con el conocimiento previo y se puede aplicar a nuevas situaciones"*(Sanjosé, 2007, p.539-540).

Con todo lo señalado, y lo visto en la evidencia empírica, se refleja la diferencia entre ejercicio y problema, *"en el caso del ejercicio, el sujeto conoce desde el principio el modo en que debe ser resuelto; en el caso del problema, es necesario hallar los procedimientos para su resolución"* (Sanjosé y cols. 2007, p.538).

Sanjosé y cols. postulan que *"si el sujeto resolutor, tras la lectura del enunciado, activa representaciones almacenadas en su memoria suficientemente completas como para integrar simultáneamente los datos, la demanda y el procedimiento (es decir, plantear, resolver y responder), entonces se trata de un 'ejercicio'. Pero si para ello el sujeto requiere realizar inferencias para completar representaciones parciales activadas en su memoria, entonces se trata de un 'problema'* (2007, p.538)."

En el sistema escolar generalmente la enseñanza de resolución de problemas se realiza mediante estrategias de transferencia; "*se resuelve y explica un conjunto de problemas y después se pide a los estudiantes que resuelvan otros problemas análogos a los ejemplos trabajados. Los profesores con frecuencia asumen que las relaciones analógicas entre los problemas resueltos y los problemas propuestos son sencillas de comprender y establecer, y atribuyen el fracaso a la falta de dominio de los procedimientos matemáticos de resolución"* (Sanjosé y cols. 2007, p.538).

En la resolución de ecuaciones lineales con una variables, el alumno se desenvuelve dentro un mismo registro (algebraico), en el que es necesario aplicar los procedimientos de forma correcta, desarrollando una secuencia de pasos que conllevan claramente a la resolución de este tipo de ejercicios de forma más sencilla, como por ejemplo la lista de pasos a seguir que se muestra a continuación:

a) Deshacernos de los paréntesis, si los hubiera. Aplicando propiedades del conjunto de los números reales.

b) Transposición. Juntar todos los términos numéricos en un miembro de la ecuación y todos los términos con variables en el otro miembro.

c) Simplificar. Reducir todos los términos semejantes para obtener una ecuación con un sólo término en cada miembro.

d) Multiplicar o dividir por una cantidad conveniente en ambos miembros para que quede la incógnita sola.

e) Despejar la incógnita y calcular el resultado.

f) Comprobar el resultado. (Tomado de <http://es.wikipedia.org >, 2011)

En cambio para poder resolver problemas que involucren ecuaciones lineales, es necesario proporcionarles a los alumnos instrumentos y técnicas específicas de resolución de problemas que les permitan enfrentarse a los enunciados sin miedo y con ciertas garantías de éxito. Tomás (1990) señala las siguientes fases de resolución de un problema:

- *Lectura y comprensión del problema.*
- *Concepción de un plan de resolución.*
- *Traducción del enunciado al lenguaje algebraico matemático.*
- *Elección de una estrategia.*
- *Resolución del problema.*
- *Concretar una solución.*
- *Comprobación de los resultados* (p.123).

Se puede considerar una clara dificultad en la resolución de problemas de planteo, no solo en matemáticas, sino también en otras áreas. Según Orton (1990): "*la resolución de problemas se entiende como generadora de un proceso a través del cual el que aprende combina elementos de conocimiento, reglas, técnicas, habilidades y conocimientos previamente adquiridos para dar solución a una situación nueva*" (citado en Tomás, 1999, p.122). Es por ello que la resolución de problemas involucra muchas variables que influyen en la gran dificultad para abordarlos correctamente. Según la conformación básica de un problema, estas variables son:

- "variables que hacen referencia al enunciado
- variables que hacen referencia a la existencia o no del formato de resolución
- variables respecto a los mecanismos mentales para poder resolver el problema
- variables que hacen referencia a las operaciones concretas que deben realizarse para resolver el problema, es decir las habilidades mecánicas" (Tomás, 1990, p.124).

Según dicho autor, el orden de las dificultades que encuentran los estudiantes es el mismo orden en que se exponen las variables anteriormente citadas.

Por otro lado Mayer (1982) señala y expone los siguientes cuatro tipos de conocimientos, necesarios en la resolución de problemas:

"-lingüísticos: se refiere a la comprensión del texto

- esquemático: relación entre los problemas tipo.

- algorítmico: como se realizan los procedimientos de cálculo (…)

- estratégico: como se enfocan los problemas"(citado en Tomás, 1990, p. 123).

"El uso indiscriminado de estrategias puede llevar a hacer de la tarea de resolución de problemas una tarea meramente repetitiva. Sería peligroso reducir la solución de problemas en (…) ejercicios precarios de creatividad, de imaginación con lo cual dejarían de ser una ocasión para desarrollar la capacidad de pensar" (Tomás, 1990, p.124),es por eso y por lo anteriormente dicho, que la resolución de problemas es una tarea importantísima en el aprendizaje escolar, en consecuencia los estudiantes desarrollaran la capacidad de resolver situaciones problemáticas usando sus capacidades y los conocimientos que poseen, preparados para recibir una situación de mayor dificultad en donde sus conocimientos se tornen insuficientes, generando otros nuevos y desarrollando nuevas capacidades, transformándose en un ciclo de aprendizaje activo y continuo.

1.2. Problema de Investigación

¿Cuáles son las dificultades que enfrenta el estudiante en el proceso de traducción de un registro de lenguaje natural a un registro algebraico en la resolución de problemas que involucran ecuaciones lineales con una y dos variables?

1.3. Justificación del estudio

Actualmente se considera al profesor como un profesional reflexivo, que decide, diseña, e implementa estrategias para lograr el aprendizaje de sus alumnos; aprendizaje que muestra claras evidencias, cuando el alumno aplica de forma adecuada un objeto matemático, donde lo ha concebido como un saber propio. Sin embargo, cuando este objeto matemático está inmerso en un problema de planteo, el alumno no es capaz de resolver y llegar a la solución.

Se parte de la base que la resolución de problemas significa una dificultad marcada en todos los dominios de la educación escolar, donde el conocimiento aprendido ya no se procede a desarrollar de forma mecánica o estructurada, sino que involucra muchas variables, provenientes desde el enunciado hasta las operaciones concretas para la resolución del problema.

Según afirman Hernández, Fernández y Baptista (2006) cinco son los criterios adaptados de Ackoff (1973) y Miller y Salkind (2002) que, pueden dar cuenta de la relevancia de una investigación: conveniencia, relevancia social, implicaciones prácticas, valor teórico y utilidad metodológica. Un estudio se justifica si cumple con uno o más de estos criterios.

Conveniencia: El estudio responde a una necesidad manifiesta en la sociedad chilena preocupada del mejoramiento de la calidad de los aprendizajes que, particularmente en el ámbito de las matemáticas, presentan los estudiantes en escuelas y liceos.

La comprensión de la problemática por parte de los docentes se traduce en un primer paso para modificar las prácticas pedagógicas en orden a conseguir superar en este caso las dificultades que el alumno encuentra en la resolución de problemas. Responde así el estudio a las políticas que se han venido aplicando para lograr el mejoramiento de la calidad de los aprendizajes.

Implicaciones prácticas: La importancia de esta investigación radica también en que persigue promover y fomentar un trabajo exhaustivo dentro del registro natural en que se encuentra el enunciado y el registro algebraico en que se encuentra el modelo matemático a seguir. Se trata de pulir en el alumno la práctica del quehacer matemático en las distintas partes del problema, recalcando la relevancia de tener una visión integral del mismo y un conocimiento de las dificultades que enfrenta, con el fin de poder constituir la etapa primordial en el planteamiento y resolución de problemas: **el proceso de traducción**.

Los resultados del estudio podrían ser aplicables en una enseñanza basada en la resolución de problemas, en donde el estudiante descubra los procesos, los asimile y pueda transferirlos a cualquier situación de aprendizaje, tanto en la vida escolar como en la vida cotidiana, fomentando la capacidad de resolver problemas de manera independiente superando limitaciones de índole epistemológicas, didácticas, cognitivas u otras.

Los beneficiarios son los estudiantes y también los docentes, toda vez que los primeros pueden superar las dificultades que enfrentan en la resolución de problemas, facilitando su aprendizaje y los segundos encuentran en este estudio antecedentes teóricos y prácticos que mejoran su práctica pedagógica. Ello, conociendo las investigaciones recientes en la resolución de problemas con previo análisis de dificultades, comportamientos matemáticos, cognitivos, creencias y lo referente a las justificaciones matemáticas del estudiante frente a este tipo de problemáticas. Es muy probable que esto impacte positivamente en el ambiente de aprendizaje.

Implicancias teóricas: El reunir en un texto aportes de diversos autores acerca del tema, ayuda a los docentes de la especialidad a tener una mejor visión de los fundamentos teóricos que sustentan la enseñanza de las matemáticas. Sin pretender abarcar todas las posiciones el marco teórico ordena la preocupación que hay por el tema facilitando su reflexión.

1.4. Objetivos

1.4.1. Objetivo General

Describir las dificultades que presentan los estudiantes de primer y segundo año medio, en el proceso de traducción de los registros de lenguaje natural al algebraico en la resolución de problemas que involucran ecuaciones lineales con una y dos variables.

1.4.2. Objetivos Específicos

- Conocer la literatura pertinente en los ámbitos teórico, matemático y didáctico, que fundamente el estudio acerca de las dificultades que presentan los estudiantes de primer y segundo año medio, en el proceso de traducción de los registros de lenguaje natural al algebraico en la resolución de problemas que involucran ecuaciones lineales con una y dos variables.

- Analizar en los programas de estudio y los textos de uso actual en el aula el tratamiento que se da a la resolución de problemas y qué recomendaciones metodológicas se sugieren.

* Identificar, a partir de la práctica pedagógica las dificultades que los y las estudiantes enfrentan en el ámbito de estudio abordado por la investigación.

* Relacionar los programas, textos, y la práctica pedagógica con los aportes teóricos considerados en la investigación

1.5. Preguntas de investigación

- ¿Existe algún método para resolver problemas?
- ¿Influyen los factores externos o creencias del alumno en su aprendizaje?
- ¿Por qué es tan complejo para los estudiantes el proceso de traducción en la resolución de problemas?
- ¿Cuáles son las dificultades que conllevan este proceso?
- ¿La dificultad radica en las ecuaciones lineales o en el sistema numérico de los números reales?
- ¿Cómo se aborda la resolución de problemas en los textos de estudio pertenecientes al sistema escolar chileno?
- ¿Qué orientaciones entregan los programas de estudio al respecto?

CAPITULO 2. MARCO TEÓRICO

2.1. El argumento Constructivista

Los movimientos de reforma llevada a cabo por diversos países, entre ellos Chile, a finales del siglo XX, se han dado a la tarea de transformar las concepciones pedagógicas que hasta entonces han dominado el espacio educativo. Se trata de pasar de una educación basada en la transmisión de conocimientos a otra basada en la construcción de conocimientos por parte del sujeto que aprende. Para ello, se ha optado por un paradigma nuevo en relación a lo educativo y el aprendizaje: el constructivismo.

El argumento constructivista es una propuesta teórica que se va estructurando a lo largo del siglo XX con los aportes de diversos autores desde diferentes perspectivas: Jean Piaget, Lev Vygostky, George Mead y Jerome Bruner desde la Psicología; Charles Pierce desde la Semiótica y Nelson Goodman desde la Filosofía, por nombrar a los más representativos. Este argumento asume que la especie humana va evolucionando expresando logros culturales (Molina, 2000). "*El argumento constructivista se articula en torno a dos tesis centrales: primero, que el desarrollo de la mente (y sus productos) es fruto del esfuerzo constructivo activo por parte del sujeto humano (individual y social) y, segundo, que lo real es un constructo de esta mente*" (Molina, 2000).

En este camino evolutivo se reconoce un rol especial a la educación a la que se le hace responsable del desarrollo individual (mental) y cultural del sujeto. Los procesos educativos que permiten dar cuenta de este propósito de la educación implican una articulación entre los procesos de enseñanza, aprendizaje y desarrollo, en otras palabras, los procesos educativos deben provocar acciones de enseñanza que favorezcan el aprendizaje, el que a su vez debe desembocar en el desarrollo del sujeto.

2.1.1. El aprendizaje

A partir del argumento constructivista se han ido elaborando concepciones de aprendizaje que recogen los aportes de las disciplinas y los autores ya mencionados al inicio del capítulo.

De acuerdo a este argumento *"el buen aprendizaje es aquel que es significativo para el sujeto (...) implica, por tanto, la movilización de los instrumentos cognitivos a disposición del sujeto a partir de los cuales éste significa y da sentido a su experiencia"* (Piaget, Dewey y Ausubel, citados por Molina 2000). El aprendizaje es resultado entonces de la construcción previa y uso actual por parte del sujeto, de sus instrumentos mentales.

Este aprendizaje significativo supone un diálogo en que el otro es reconocido como un igual y diferente a la vez (Touraine) y supone para el sujeto una mediación activa de parte de los educadores y un acceso y uso de los instrumentos de significación (mediadores) que ofrece la cultura. Parafraseando a Lev Vygotsky (1988) el buen aprendizaje (significativo) es aquel que realizado en un proceso de mediación permite al sujeto recorrer su zona de desarrollo próximo. Es decir, el sujeto que aprende, parte de un nivel real de desarrollo para avanzar hacia un nivel potencial mediante la relación dialógica que establece con el educador y con los otros que aprenden con él. Una vez que el nivel potencial se transforma en real se abre nuevamente una zona de desarrollo próximo a recorrer. Pensamiento abductivo (Pierce).

2.2. El sistema educativo chileno

La educación chilena se ha consagrado primordialmente en la Constitución Política de la República, la cual ha sido aprobada en el año 1980 manifestando modificaciones en el año 2003 y luego en el 2009 con la Ley General de Educación (LEGE) la que ha derogado la anterior Ley Orgánica Constitucional de

Enseñanza de 1990 (LOCE), dando un nuevo paso a un marco para la institucionalidad de la educación en lo que respecta a la enseñanza básica y media, manteniendo así la normativa de educación superior (tomado de UNESCO, 2010).

Con la nueva normativa se define la educación como un proceso de aprendizaje que abarca las distintas etapas de la vida con la finalidad de alcanzar un desarrollo integral de la persona, cultivando así valores, conocimientos y destrezas cuya intencionalidad es respetar el derecho a la educación y la libertad de enseñanza en donde la inspiración se encuentra en principios como la calidad y equidad, autonomía, responsabilidad, integración, entre otros aspectos (UNESCO, 2010).

Se describe a continuación un panorama general del sistema educativo chileno, el cual se divide en:

- Educación preescolar (obligatoria)
- Educación general básica (obligatoria)
- Educación media (obligatoria)
- Educación superior (optativa)

El curriculum nacional se expresa en un Marco Curricular el cual es un documento que define los conocimientos, habilidades y actitudes que todos los estudiantes deben aprender en los distintos niveles y tipos de enseñanza escolar. Presenta ciertas características relevantes; define las áreas de estudio obligatorias y las reglas para distribuir el tiempo escolar, es común para las instituciones educativas y de carácter obligatorio, el cual puede ser adaptable a la creación de planes y programas propios, por tanto, una institución educativa opta por una opción curricular la cual se declara por medio de una planificación manifestada en los Proyectos Educativos de los establecimientos. Este Marco es el referente en base al cual se construyen los planes de estudio, programas de estudio, los mapas de progreso, los textos escolares y el Sistema de Medición de Calidad de la Educación (Simce). Dicho documento posee instrumentos curriculares que lo operacionalizan, los cuales poseen variadas funciones que están claramente determinadas (Ministerio de Educación Chile, 2009).

Los instrumentos que componen el Marco Curricular son:

- Planes de estudio: Precisan la organización del tiempo en cada nivel escolar.

- Programas de estudio: Otorgan una organización didáctica del año escolar, con la finalidad de alcanzar el logro de los Objetivos Fundamentales (determinados en el Marco Curricular) y determinan cuales son los aprendizajes esperados ya sea por semestre o por unidad. Conjuntamente en este programa se entregan ejemplos de actividades, orientaciones metodológicas y evaluaciones para apoyar la labor docente.

- Mapas de progreso: Se describen en siete niveles que pretenden determinar el crecimiento de las competencias consideradas fundamentales en la formación estudiantil de cada sector curricular. Son un marco de referencia para evaluar el aprendizaje explicitado en el Marco Curricular.

- Textos escolares: Desarrollan los contenidos entregados por el Marco Curricular cuyo objetivo es apoyar al estudiante dentro y fuera del aula. Por otra parte los docentes reciben textos que constituyen una propuesta metodológica para apoyar el curriculum, siendo utilizado como guía didáctica para planificar, preparar y desarrollar sus clases.

- Simce: (Sistema de Medición de Calidad de la Educación) Evaluación nacional que contribuye a determinar si los Objetivos Fundamentales y los Contenidos Mínimos Obligatorios del currículo nacional han sido alcanzados por los alumnos.

Con sus resultados cuantitativos se describe el desempeño que exhiben los estudiantes.
(Ministerio de Educación Chile, 2009)

Uno de los conceptos fundamentales de la organización curricular en E. Básica y E. Media son los Objetivos Fundamentales (OF); aprendizajes que los estudiantes deben lograr al finalizar los diversos niveles de la Educación Básica y Media. Estos hacen referencia a conocimientos, habilidades y actitudes favorecedoras de un desarrollo integral en cada estudiante (Ministerio de Educación Chile, 2009).

En el Marco Curricular se desprenden dos clases de OF los que corresponden a:

- Objetivos Fundamentales Verticales: Determinan las competencias que los alumnos deben lograr en las diferentes etapas de escolarización. Hacen referencia a los *conocimientos* entendidos como conceptos, sistemas conceptuales, e información; *habilidades* referidas a la capacidad de ejecutar un acto cognitivo y/o motriz con precisión y adaptable al medio y las *actitudes* destinadas a la disposición adoptada frente a situaciones diversas del diario vivir(tomado de Ministerio de Educación Chile, 2009).

- Objetivos Fundamentales Transversales: *Son aprendizajes orientados al desarrollo personal y a la conducta moral y social de los alumnos.* (…) *Tienen por propósito profundizar la formación de los valores fundamentales, (…) contribuyendo a orientar la forma en que la persona se relaciona con otros seres humanos y con el mundo"* (tomado de UNESCO, 2010, p. 15).

Por otra parte los Contenidos Mínimos Obligatorios (CMO) "*explicitan los conocimientos, habilidades y actitudes implicados en los OF*, es decir, (…) s*i los Objetivos Fundamentales están formulados desde la perspectiva del aprendizaje que cada alumno y alumna debe lograr, los CMO lo están desde la perspectiva de lo que cada docente debe obligatoriamente enseñar"* (tomado de Ministerio de

Educación Chile, 2009, p.9). En tanto, los OF como los CMO están destinados al desarrollo de la competencias fundamentales para el desarrollo personal durante el proceso de escolarización, con el objetivo de desenvolverse exitosamente en el ámbito social, laboral y ciudadano (tomado de Ministerio de Educación Chile, 2009).

Ámbitos formativos de la Educación Media.

La Educación Media se organiza contemplando tres modalidades: Humanístico-Científica, Técnico-Profesional y Artística.1° y 2° año Medio están destinados a la Formación General mayoritariamente. En cambio, la experiencia formativa en 3° y 4° medio, es diferente. La modalidad Humanístico Científica se aboca principalmente en la Formación General, mientras en las modalidades Técnico-Profesional y Artística se dedican a la Formación Diferenciada correspondiente. Sin embargo, Matemática se mantiene como sector obligatorio de Formación General en todas las modalidades y años(tomado de Ministerio de Educación Chile, 2009).

2.3. La Resolución de Problemas

2.3.1. Las ideas de Polya en la resolución de problemas

George Polya es el pionero o gestor en las etapas de la resolución de problemas. No se puede dejar de abordar esta temática sin dejar de destacar a este gran matemático. Nacido en Budapest en 1987, muere en California en 1985 (Alfaro, 2006)

La posición de Polya respecto a resolución de problemas se basa en una serie de procedimientos que podemos utilizar y aplicar en cualquier ámbito de la vida cotidiana. Por lo que Polya expresa *“Mi punto de vista es que la parte más* *importante de la forma de pensar que se desarrolla en matemáticas es la correcta actitud de la manera de cometer y tratar los problemas (…) la actitud correcta en la forma de pensar puede ser ligeramente diferente de un dominio a otro, pero solo tenemos una sola cabeza y por lo tanto es natural que en definitiva haya solo un método de acometer toda clase de problemas, (…) lo central en la enseñanza de las matemáticas es desarrollar tácticas en la resolución de problemas"* (Alfaro, 2006, p.1).

Polya cuestiono las estrategias que existían para resolver problemas o como se admitía una sucesión de pasos lógicos para aplicar a la resolución de cualquier tipo de problemas. En su primer libro llamado "El método de los cuatro pasos" plantea que para resolver cualquier tipo de problemas se debe:

- Comprender el problema
- Concebir un plan
- Ejecutar el plan
- Examinar la solución

Para cada uno de estos pasos señala una serie de preguntas y sugerencias:

1. Comprender el problema:

Se debe comenzar por familiarizarse con el problema de manera de tener claridad en lo que se debe resolver. Visualizado el problema se tendrá claro que se debe resolver, luego de este proceso se comprende el problema; en esta micro-fase se separan las partes y se comienzan a resolver.

Se tienen las siguientes preguntas

- *¿Cuál es la incógnita?*
- *¿Cuáles son los datos?*
- *¿Cuál es la condición?*
- *¿Es la condición suficiente para determinar la incógnita?*
- *¿Es insuficiente?*
- *¿Es redundante?*
- ¿Es contradictoria?(Alfaro, 2006, p.2).

2. Concebir un plan

   En este paso el problema debe relacionarse con problemas semejantes, con resultados útiles y determinar si se pueden utilizar estos problemas similares o sus resultados., para que así surja una idea útil. Por ello, plantea como importante determinar cuándo un problema es análogo a otro. Verlos de distintas perspectivas, conectarlo con conocimientos previos y buscar algo útil en lo que se haya trabajado antes.

   Se proponen las siguientes preguntas

- *¿Se ha encontrado con un problema semejante?*
- *¿Ha visto el mismo problema planteado en forma ligeramente diferente?*
- *¿Conoce un problema relacionado?*
- *¿Conoce algún teorema que le pueda ser útil?*
- *¿Podría enunciar el problema en otra forma?*
- *¿Podría plantearlo en forma diferente nuevamente? Refiérase a las definiciones.*(Alfaro, 2006, p.2).

3. Ejecución del plan

   Se iniciará con la idea cuando se está seguro que va a cumplir con los detalles, es decir, se hace una profunda revisión de todos, comprobando cada paso y verificando si son correctos.

- ¿Puede ver claramente que el paso es correcto?
- ¿Puede demostrarlo? (Alfaro, 2006, p.3).

4. Examinar la solución

   Fase denominada también como “Visión retrospectiva”. El sujeto debe detenerse a observar que ha realizado, siendo necesario verificar el resultado y razonamiento.

   Se señalan las siguientes preguntas para esta etapa:

- ¿Puede verificar el resultado?
- ¿Puede verificar el razonamiento?
- ¿Puede obtener el resultado en forma diferente?

- ¿Puede verlo de golpe?
- ¿Puede emplear el resultado o el método en algún otro problema?(Alfaro, 2006, p.3).

Durante esta etapa final se obtiene una retroalimentación para lograr resolver otros problemas planteando que cuándo se resuelve un problema se están creando habilidades que posteriormente se utilizaran en cualquier tipo de problemas, utilizando como herramientas tanto la solución como el método de solución. Esta visión retrospectiva tiene como finalidad que los resolutores visualicen una amplia gama de posibles caminos para resolver.

Labor del Profesor

Un punto muy importante en el proceso de la Resolución de Problemas es la labor del docente, debido a que es complicado llevar a cabo la ayuda que se le da al estudiante, es decir, es difícil mantener el equilibrio entre si se presta más ayuda de la conveniente o no, un profesor debe facilitar la información precisa y necesaria. El docente debe ser empático con el alumno y pensar que el estudiante se cuestiona si realmente se le puede ocurrir a él, la solución que el profesor da de forma muy natural.

Polya enfatiza dos puntos relevantes en la función del profesor;

- Preguntar y señalar el camino de distintas formas y
- Usar las preguntas para ayudar a que el alumno resuelva el problema y a la vez genere habilidades.

Una de las características fundamentales para resolver un problema es el interés, debido a esto se debe buscar la manera de interesar al alumno a resolver problemas, siendo de suma importancia exponer el problema con el objeto de atraer la curiosidad de los estudiantes y familiarizarlos con el problema.

La imitación resulta ser un método óptimo para este tipo de enseñanza por medio de resolución de problemas, el profesor debe ser un modelo, el mismo debe hacer las preguntas cuando resuelve un problema en la clase. Con esto “*el docente crea situaciones de aprendizaje al estudiante para que descubra estos procesos los asimile y pueda transferirlos a cualquier otra situación problemática”* (Ministerio de Educación Perú, 2006, p. 5)

El método de interrogar del profesor debe comenzar por una pregunta general o una sugerencia e ir de a poco a preguntas más precisas con el objeto de conseguir respuestas por parte de los estudiantes, llevándolos a razonar sobre el problema y apoyarse en problemas análogos.

Polya señala que las preguntas tienen que ser simples y naturales, de forma que estas se le puedan ocurrir a algún estudiante y logren ser desarrolladas en diferentes situaciones problemáticas sin restringirse en algún ámbito. Las preguntas deben ser generales.

La Heurística

Polya afirma que el estudio de la heurística busca comprender características generales y estrategias de resolución. Algunas de las heurísticas que señala son

- Variación del problema: *el problema original se puede variar descomponiéndolo* y no necesariamente enfocándolo directamente (Alfaro, 2006, p.6). Se puede separar por partes, cambiar alguna condición, en esto Polya afirma que esto genera la movilización y organización de los conocimientos previo.
- Generalización: El método es pasar del análisis de un objeto a el análisis de un conjunto de objetos., entre los cuales se encuentra el primer objeto.
- Particularización: Es el caso inverso de la generalización. Se comienza a particularizar en algunos casos para encontrar ideas sobre el problema.
- Analogía: Se puede apoyar en problemas análogos más simples

(Alfaro, 2006)

Se entiende por Heurística, a la capacidad de resolver problemas mediante la creatividad y el pensamiento lateral o pensamiento divergente. La capacidad heurística es un rasgo característico de los humanos, desde cuyo punto de vista puede describirse como "*el arte y la ciencia del descubrimiento y de la invención*" (tomado de <http://es.wikipedia.org>, 2011).

Razonamiento plausible

El matemático razona de distintas maneras no de una única forma conjeturando, buscando relaciones, etc. El conocimiento matemático se asegura por medio del razonamiento demostrativo, pero las conjeturas se apoyan en el razonamiento plausible. Polya afirma "aprendamos a probar, desde luego, pero aprendamos también a intuir" (1954, p.14). El resultado de la labor del matemático es probar lo que hace, realizando un razonamiento demostrativo, no obstante, la prueba, es descubierta mediante el razonamiento plausible, por medio de la intuición (Polya, 1954).

En el aprendizaje de las matemáticas se ofrece la posibilidad de adquirir el razonamiento demostrativo, pero no así en la oportunidad de aprender el razonamiento plausible. Debe haber un lugar para la intuición en la enseñanza de las matemáticas (Polya, 1954).

Pólya afirma que e*l razonamiento demostrativo es seguro, definitivo y está más allá de toda controversia*, (1954, p. 13) posee modelos rígidos aclarados por la lógica formal, el razonamiento plausible es aventurado, discutible y provisional (Polya, 1954).

Según Alfaro (2006) *el profesor de matemáticas debe mostrar el rostro humano de esta disciplina: dónde se equivoca, dónde las conjeturas se desechan o siguen ahí, si hay problemas abiertos en donde todavía no sabemos si tienen solución o no. Sería muy importante que muchos de esos aspectos pudieran incluirse en la enseñanza de las matemáticas. (p. 8)*

2.3.2. El trabajo de Allan Schoenfeld

Este se apoya en el trabajo hecho por Polya, pero del cual no pueden rescatar investigaciones de campo con estudiantes, por lo que se dedicó a este punto, realizando experimentos con estudiantes y profesores siguiendo las ideas de Polya. Y finalmente concluyendo que al utilizar la Resolución de Problemas como una estrategia didáctica en la enseñanza de las matemáticas, se deben considerar otros factores además de las heurísticas, de otra manera no funcionara este modelo de enseñanza.

Schoenfeld postula que el docente debe tener claridad sobre las herramientas que posee el sujeto, denominándolas *recursos* o conocimientos previos del sujeto. Conjuntamente, un docente debe conocer como accede el alumno a sus propios conocimientos, hacer un *inventario de recursos*. Además tiene la tarea de apreciar cuales son los recursos defectuosos, es decir, los conocimientos mal aprendidos que usa en alguna situación y resultan efectivos pero que resultan inútiles en situaciones nuevas, puede ser alguna fórmula, procedimiento, etc. (Barrantes, 2006).

Schoenfeld expone que las heurísticas son muy generales, cada tipo de problemas necesita de ciertas heurísticas específicas, por lo que habría que conocerlas y estudiar sus usos de modo de generar las habilidades necesarias.
Existen variados caminos para llegar a la solución de un problema, pero aquí el estudiante debe tener la capacidad de darse cuenta cuando la vía de solución escogida no funciona, de manera de retroceder e intentar de nuevo por otra vía. Esto es lo que Schoenfeld denomina *control*. Destacando la habilidad de evaluar el proceso de la resolución y del conocimiento de sí mismo, es decir, conocer cuáles son sus herramientas, y cómo reacciona con ellas ante las diversas situaciones problemáticas (Barrantes, 2006).

2.3.3. Sistemas de Creencias

Una incidencia importante es la que tienen las creencias sobre las matemáticas, las que guiaran las maneras de comportarse del estudiante al enfrentarse a un problema. Según señala Schoenfeld, el matemático se apoya en la argumentación matemática formal para descubrir soluciones, por lo que Schoenfeld postula que el estudiante puede usar la argumentación matemática en solo dos situaciones:

- *Para confirmar algo que es intuitivamente obvio* (Barrantes, 2006, p.5).
- Para verificar algo que afirma el profesor y no es tan obvio para el estudiante (Barrantes, 2006).

Las creencias condicionan el aprendizaje de las matemáticas de muchas formas, una de ellas referida al momento en que el estudiante toma la decisión de cuándo debe ocupar argumentos formales y cuando no, otra forma de restricción ocurre al determinar cómo trata de comprender la matemática, en la cual sólo necesitan memorizar una serie de reglas y aplicar procedimientos, a la vez también determina la disposición para trabajar en matemáticas, es decir, si el sujeto cree que todos los problemas tomaran cinco minutos no le dedicara más tiempo a la resolución que ese tiempo (Barrantes, 2006).

En el desarrollo de la matemática se presentan creencias socio - culturales manifestadas en la experiencia escolar en la que *hacer matemáticas significa seguir las reglas dadas por el profesor; conocer matemáticas significa recordar y aplicar correctamente las reglas cuando el profesor lo requiera y la verdad matemática queda determinada cuando la respuesta es ratificada por el profesor* (Barrantes, 2006, p.5).

Schoenfeld señala las creencias comunes sobre las matemáticas:

- Los problemas matemáticos tienen una y solo una respuesta correcta
- Existe una única manera correcta para resolver cualquier problema, usualmente es la regla que el profesor dio en la clase.
- Los estudiantes corrientes no pueden esperar entender matemáticas, simplemente esperan memorizarla y aplicarla cuando la hayan aprendido mecánicamente. Esta creencia se ve con bastante frecuencia.
- La Matemática es una actividad solitaria realizada por individuos en aislamiento, no hay nada de trabajo en grupo.
- Los estudiantes que han entendido las matemáticas, que han estudiado podrán resolver cualquier problema que se les asigne en cinco minutos o menos.
- Las matemáticas aprendidas en la escuela tiene poco o nada que ver con el mundo real.

(Barrantes, 2006, p.5-6).

En un ámbito general las creencias sociales sobre las matemáticas afectan en el aprendizaje, determinando el currículo, el nivel de los programas, la forma de los libros de texto, etc. la sociedad decide qué es posible, qué es lo que desea que se aprenda y cómo es necesario enseñar (Barrantes, 2006)

2.4. Investigaciones recientes

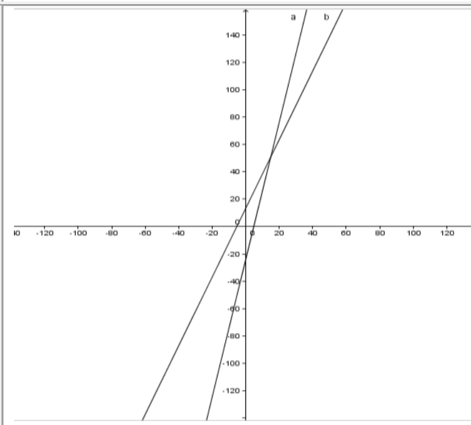
Dentro de las publicaciones recientes tomaremos investigaciones en las cuales se abordan dificultades en la resolución de problemas y que se encuentran dentro de la misma problemática en la que nosotros queremos profundizar, el proceso de traducción.

2.4.1. Los registros semióticos

Se sabe que las personas tienen una mente en la que generan procesos mentales, como también que los objetos externos a las personas producen representaciones mentales internas. Es decir, *hay dos mundos diferentes: el mundo real de los objetos exteriores al sujeto y el mundo mental del sujeto*. (Ministerio de Educación Perú, 2007, p.6)
La comprensión de los estudiantes está relacionada con conseguir establecer conexiones y traducciones entre distintas representaciones externas, semióticas, dicho de otra manera, relacionar producciones constituidas por el empleo de signos, de modo que estas incrementen las conexiones entre diferentes tipos de representaciones internas; mentales (Ministerio de Educación Perú, 2007).

Duval, se plantea dos interrogantes que considera de vital importancia en el aprendizaje de las matemáticas, ¿Cómo se aprende a cambiar de registro? ¿Cómo se aprende a no confundir un objeto con la representación que se propone?, al mismo tiempo el supone que la ignorancia de los docentes en este tema es una de las principales causas de las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. Además, Duval postula que para desarrollar en un alumno un aprendizaje significativo debe estar consciente de las distintas representaciones que posee el contenido, ejemplificando respecto a este estudio, la resolución de problemas de ecuaciones lineales con una y dos variables, podemos encontrar tres tipos de registros de representaciones semióticas; registro de lenguaje natural, registro algebraico y registro gráfico (Ministerio de Educación Perú, 2007).
Se entiende por registros de representaciones semióticas como *el medio del cual dispone un individuo para exteriorizar sus representaciones mentales, para hacerlas visibles o accesibles a los demás* (Ministerio de Educación Perú, 2007, p.5).

En el siguiente cuadro se ejemplifica dicha problemática:

Objeto matemático	Registro la lengua natural	Registro algebraico	Registro gráfico
Sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables.	Hace 6 años la edad de un hijo era un quinto de la edad de su padre, dentro de 9 años la edad del hijo será dos quintos de la edad de su padre. Determine las edades actuales.	$x - 6 = \frac{1}{5}(y - 6)$ $x + 9 = \frac{2}{5}(y + 9)$	

Una de las bases para la construcción de la situación que involucra el objeto, es el pasaje fluido entre registros. La coherencia en el cambio de registro puede darse de forma natural o espontánea en el sujeto.

En los casos de la evidencia empírica tenemos el siguiente enunciado: *la suma de 3 números impares consecutivos es 297.* Se representa en el lenguaje algebraico; $x + (x + 2) + (x + 4) = 297$, asumiendo x como número impar, ante la pregunta ¿Cuál es el doble del mayor?, el éxito del estudiante dependerá, de que haya una congruencia entre la representación algebraica de la ecuación y la traducción necesaria para el doble del mayor**;** $2(x + 4)$. El conflicto se presentará al no haber congruencia entre registros. Por ejemplo, si tomamos el siguiente enunciado; *Hace 6 años la edad de un hijo era un quinto de la edad de su padre, dentro de 9 años la edad del hijo será dos quintos de la edad de su padre. Determine las edades actuales*, es necesario un traspaso del lenguaje natural del enunciado al registro algebraico, ya que se trata de un problema que se compone de dos ecuaciones; una en la que se le añaden 9 años a la primera variable (edad del padre) y a la vez a la segunda variable (edad del hijo), y la otra ecuación donde se sustraen 6 años a las dos variables conjuntamente. Y además debe usar las condiciones en una de las variables, en función de la otra. Usualmente, el estudiante procede a sumar los 9 años o sustraer los 6 años, a sólo una de las dos variables, por lo general condiciona una variable en función de la otra pero lo hace inadecuadamente trabajando una variable distinta en cada ecuación. Uno de los errores comunes en este tipo de situaciones, consiste en igualar dos expresiones que no representen la misma cantidad. En este problema se aprecia el fenómeno de no congruencia, contemplando el cambio de registro de lenguaje natural al algebraico, de manera incorrecta.

Para desarrollar un objeto matemático se necesita de un significante (semiosis) y de un significado (noesis). "*Las representaciones mentales nunca pueden considerarse independientes de las representaciones semióticas"* (Ministerio de Educación Perú, 2007, p.8). Un punto muy importante que Duval menciona es la relación que existe entre semiosis y noesis, siendo noesis; "*los actos cognitivos, como la aprehensión conceptual de un objeto"* (Ministerio de Educación Perú, 2007, p.5), y semiosis; "*es el medio del cual dispone un individuo para exteriorizar sus representaciones mentales"* (Ministerio de Educación Perú, 2007, p.5), que si relacionamos las definiciones se concluye que sin noesis no puede haber semiosis, es decir no puede haber asimilación de ideas o conocimiento de un objeto sin algún representante de éste.

2.4.2. Traducción del lenguaje natural al algebraico

La primera investigación corresponde a la tesis de maestría perteneciente a: Ana María Olazábal Carpio, dirigida por la Dra. Patricia Camarena G., en el año 2005, titulada "Categorías en la traducción del lenguaje natural al algebraico de la matemática en contexto", presentada en el Instituto Politécnico Nacional Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada de México. Su objetivo principal radica en plantear tres categorías de problemas de acuerdo al nivel de traducción que demandan, en el proceso de traducción del lenguaje natural al algebraico de la matemática en contexto, fundamentando que la "*traducción es* *una habilidad básica en el entendimiento y planteamiento de los problemas"* (Olazábal, 2005, p.6).

Según Olazábal (2005) estas categorías son:

- Problemas con enunciado literal, son aquellos en cuales del mismo enunciado, se desprende la relación entre el vocabulario y el modelo matemático, es decir, el traductor debe conocer las representaciones algebraicas de los términos claves que se extraen literalmente del enunciado. En este tipo de enunciados comúnmente existen palabras o frases que hacen referencia a un elemento matemático, por ejemplo:

$\div \rightarrow$*entre, el cociente, la división, etc.*
$+ \rightarrow$*más, se aumenta, se añade, se hace mayor por, excede, etc.*
$\cdot \rightarrow$*por, se multiplica, se hace tantas veces, etc.*
$2(\ ) \rightarrow$*el doble de, dos veces, etc.*
$a = k * b$ *o* $\frac{a}{b} = k \rightarrow$ *a es directamente proporcional a b, la razón entre a y b es constante, etc.*
$(\ )^3 \rightarrow$*el triple producto, el cubo, la tercera potencia, etc.*
(Olazábal, 2005, p.24)
Un ejemplo de problemas con enunciado literal seria el siguiente:
Las edades de un padre y su hijo suman 83 años. La edad del padre excede en 3 años al triple de la edad del hijo. Hallar ambas edades (Baldor, 1983, citado en Olazábal, 2005, p.36)
Datos:
P: edad del padre
H: edad del hijo
3H: triple de la edad del hijo
P-3: P excede en 3 años

Las condiciones en este problema son las siguientes;

1. La suma de las edades es 83, es decir:

$$P + H = 83$$

2. La edad del padre excede en 3 al triple de la edad del hijo, entonces queda de la siguiente manera:

$$P - 3 = 3H$$

Al observar los datos y condiciones se observa que las ecuaciones se infieren únicamente del enunciado. y el modelo a resolver es el siguiente:

$$P + H = 83$$
$$P - 3 = 3H$$

- Problemas con enunciado evocador, el enunciado entrega elementos que permiten inferir la relación pertinente del modelo matemático a resolver; mencionándolo, describiéndolo o haciendo referencia a él, donde el traductor debe conocer el significado de aquellos elementos, siendo capaz de representar el modelo matemático presente en el enunciado.

Un ejemplo de problemas con enunciado evocador seria el siguiente:

La suma de dos números es 59 y si el mayor se divide por el menor, el cociente es 2 y el residuo 5. Hallar los números (Baldor, 1983, citado en Olazábal, 2005)

Datos:

A: número mayor

B: número menor

Cociente: 2

Resto: 5

La condición en este problema es:

La suma de dos números es 59, entonces:

$$A + B = 59$$

Pero, la siguiente condición no es posible traducirla directamente del enunciado, es necesario conocer el concepto de la "división" y su modelo matemático, es decir:

Dividendo $\div$ divisor = cociente + (residuo/ divisor)

De manera que el modelo para resolver el problema es el siguiente:

$$\mathbf{A + B = 59}$$

$$\frac{A}{B} = \mathbf{2} + \frac{\mathbf{5}}{B}$$

o en su forma equivalente:

$$\mathbf{59 - B = 2B + 5}$$

- Problemas con enunciado complejo, el modelo matemático en este caso se encuentra implícito en el enunciado por lo que el traductor debe deducir el modelo matemático que conlleva a la resolución del problema. Cabe destacar que esta categoría es la que demanda mayor cantidad de habilidades e inteligencias. Fundamentalmente la habilidad verbal e inteligencia lógico matemática; entendiendo por habilidad verbal al "*conjunto de recursos vinculados al conocimiento lingüístico que, subsumidos a estrategias cognitivas, permiten procesar información lingüística para acceder a los significados explícitos e implícitos, superficiales y profundos de textos diversos"* (tomado de Secretaría de Educación Jalisco, 2005, p.8). Se considera por inteligencia lógico matemática a "*la capacidad de razonamiento lógico: incluye cálculos matemáticos, pensamiento numérico, capacidad para problemas de lógica, solución de problemas, capacidad para comprender conceptos abstractos, razonamiento y comprensión de relaciones"* (Tomado de <http://sepiensa.org.mx>, Martínez, I. 2011).

Un ejemplo de problemas con enunciado complejo seria el siguiente:

*A y B corren una carrera de un kilómetro, ganando B por 1 minuto. Luego repiten la competencia, aumentando A su velocidad en 2 kilómetro por hora y disminuyendo B su velocidad en la misma cantidad; de este modo, A gana por 1 minuto. Calcular la velocidad de cada uno en la primera competencia. (*Lehmann,1979, citado en Olazábal, 2005)

Datos:

$\mathbf{v_{A1}}$: velocidad de A en la primera carrera

$\mathbf{v_{B1}}$**:** velocidad de B en la primera carrera

$\mathbf{t_{A1}}$: tiempo que hace A en la primera carrera

$\mathbf{t_{B1}}$: tiempo que hace B en la primera carrera

$\mathbf{v_{A2}}$: velocidad de A en la segunda carrera

$\mathbf{v_{B2}}$: velocidad de B en la segunda carrera

$\mathbf{t_{A2}}$: tiempo que hace A en la segunda carrera

$\mathbf{t_{B2}}$: tiempo que hace B en la segunda carrera

Condiciones:

Distancia por recorrer en ambas competencias es:

s = 1 km.

Además, es necesario conocer las unidades de tiempo para poder evocar que:

1h = 60 min

Luego del enunciado se desprende las siguientes situaciones:

$$v_{A2} = v_{A1} + \frac{2}{60}$$

$$v_{B2} = v_{B1} - \frac{2}{60}$$

$$t_{A1} = t_{B1} + 1$$

$$t_{A2} + 1 = t_{B2}$$

Para poder realizar el planteamiento correcto que permita resolver la problemática es necesario tener conocimiento de movimiento rectilíneo uniforme, es decir:

(v = s / t, expresado como t = s / v),

Y así poder relacionar las velocidades en la primera competencia:

$$\frac{1}{\mathrm{v}_{\mathrm{A1}}} = \frac{1}{\mathrm{v}_{\mathrm{B1}}} + 1$$

$$\frac{1}{\mathrm{v}_{\mathrm{A1}} + \frac{2}{60}} + 1 = \frac{1}{\mathrm{v}_{\mathrm{B1}} - \frac{2}{60}}$$

Se observa que la información que entrega el enunciado no es suficiente para plantear el problema.

Las categorías mencionadas fortalecen este trabajo, ya que la traducción del lenguaje natural al lenguaje algebraico es uno de los elementos que intervienen en el conocimiento y aprendizaje de la resolución de problemas.

En el análisis que presenta Olazábal se examinaron los enunciados de los problemas desde un punto de vista lingüístico y matemático, siguiendo la siguiente propuesta metodológica:

- Análisis de textos
- Levantamiento y puesta a prueba de propuesta
- Análisis de resultados

Uno de los puntos que la investigación menciona pero no profundiza es de las dificultades que genera el aprendizaje de la resolución de problemas, ligadas, ya sea, a la complejidad de los objetos en matemáticas, al desarrollo cognitivo de los estudiantes, al currículo de las matemáticas y métodos de enseñanza que se concretan en la práctica en obstáculos que posteriormente se manifiestan en errores.

Olazábal (2005) señala que en el proceso de traducción del lenguaje natural al algebraico encontramos dificultades según el enunciado en que estemos trabajando, recalcando la importancia de este proceso como uno de los objetivos de la matemática en el contexto de las ciencias.

De la investigación la autora menciona las siguientes conclusiones:

Se confirma fehacientemente que el proceso de traducción es una condición necesaria para la resolución de problemas, pero insuficiente para la consecución de ésta. Actuando como referencia, a través del cual se saben los dominios que tiene el alumno sobre el problema tanto en su entendimiento y planteamiento.

Utilizando la metodología se evidencio que no necesariamente al ascender de categoría el alumno enfrenta mayor dificultad, esto se justifica debido a que cada alumno tiene conocimientos previos distintos de los elementos claves en la traducción como son: conceptos, situaciones, objetos, fenómenos y el problema en particular al que nos estamos abocando.

Se enfatiza que el éxito de la resolución de problemas dependerá del grado de familiaridad que tenga el traductor, es decir, el conocimiento de los conceptos y modelos apropiados. Una vez que se comprenden los conceptos, la resolución reforzara los conocimientos de los mismos. No siempre existirá una relación directa entre el lenguaje natural al lenguaje algebraico, a veces será necesario utilizar un registro de representación adicional que servirá de puente entre el enunciado y el modelo matemático.

Finalmente se recomienda establecer descripciones puntuales para traducir enunciados, ya sean habilidad verbal e inteligencia lógico - matemáticas, estilos de aprendizaje y nivel de conocimientos previos, o factores como: sintaxis de los enunciados, número y tipo de traducciones por problemas y experiencia en resolución de problemas parecidos.

2.4.2. Dificultades en la resolución de problemas por transferencia

Otra investigación interesante es la que desarrollan Vicente Sanjosé, Tomás Valenzuela, María Fortes y Joan Solaz-Portolés, en el año 2007, titulada "Dificultades algebraicas en la resolución de problemas por transferencia" presentada por la Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias. La cual se enfoca en las dificultades que se encuentran en la enseñanza de resolución de problemas en cursos de Enseñanza Secundaria (ciencias y matemáticas) a través de estrategias de transferencia (transfer): el docente resuelve y explica un conjunto de problemas posteriormente les pide a los alumnos que utilizando estos ejemplos de base resuelvan otros problemas análogos a los trabajados.

Se busca esclarecer que el fracaso de este tipo de enseñanza, señalando que no se debe a la falta de conocimiento matemático, sino que al establecimiento de una representación mental acorde con el modelo del problema, de esta forma se refieren a que la dificultad se presenta en el proceso de traducción de la situación problemática en lenguaje común (lenguaje natural), al lenguaje matemático (lenguaje algebraico), haciendo hincapié en la construcción de modelos mentales deficientes que impiden llegar al modelo del problema y plantear las ecuaciones adecuadas.

Es así como se incorpora un modelo de representación mental especifico, cuando trabajamos con la resolución de problemas en el ámbito de las matemáticas, este modelo se denomina Modelo Problema el cual debe incluir las abstracciones teóricas regidas por axiomas, principios, teoremas y reglas pertinentes con el conocimiento matemático. Según Kintsh se poseen 3 niveles de representación mental de un texto (enunciado):

Nivel léxico: o de reconocimiento de las palabras
Nivel semántico o Base del texto: constituido por los significados de las oraciones independientemente de la forma que están escritas de las palabras usadas.

Nivel referencial o Modelo de la Situación: en el que la información semántica del texto se relaciona con el conocimiento previo y se puede aplicar a nuevas situaciones (citado en Sanjosé y cols. 2007, p.539).

Es en el vínculo entre el Modelo de la Situación y el Modelo Problema, donde se crean las dificultades, es decir, el resolutor es incapaz de relacionar las representaciones de los objetos y hechos del mundo observable a un nivel de representación abstracto para llegar a realizar las operaciones matemáticas necesarias para la resolución del problema, y viceversa es decir a la hora de volver a relacionar los conceptos abstractos con los acontecimientos y objetos del mundo tangible (traducción inversa).

En dicha investigación se diseña un experimento donde los participantes tienen que relacionar un problema explicado y totalmente resuelto (problema fuente) con un problema a resolver, el cual se resuelve de forma análoga (problema diana), los problemas utilizados requieren del conocimiento de sistemas de ecuaciones lineales con dos variables (en el conjunto de los números reales). Los resultados exponen que de cada 2 sujetos uno logra construir un vínculo correcto entre los problemas fuente y diana. Aludiendo como dificultad a *los procesos de construcción de las representaciones de los problemas; y a la falta de comprensión de la situación descrita en el enunciado (construcción del Modelo Situación),* (…) y al proceso de traducción entre el lenguaje natural del enunciado y el lenguaje matemático (construcción del Modelo Problema). Siendo fundamental en la enseñanza por medio de transfer el modo en que los sujetos construyen representaciones de los problemas. (Gentner, Loewenstein y Thompson, 2003, citado en Sanjosé y cols. 2007, p.554)

Los resultados concuerdan en que las clases de matemáticas deberían contemplar más problemas con enunciados, dando énfasis en establecer analogías estructurales para diversas situaciones planteadas para generalizar las representaciones y codificaciones de los problemas, facilitando desde luego la construcción del Modelo Problema a partir del Modelo Situación. Según Sanjosé y cols. "*La representación de un problema condiciona su codificación y almacenamiento en la memoria."(Sanjosé y cols. 2007, p.553).*

2.4.3. Dificultades en el aprendizaje de las matemáticas.

En el aprendizaje de las matemáticas se conciben muchas dificultades, las cuales en su mayoría tienen su origen en el microsistema educativo: alumno, contenido, docente, institución educativa.

Las dificultades y errores provienen de diversa índole, y no se reducen a los alumnos menos capaces en cuanto a destrezas matemáticas, tener dificultades y errores va de la mano con el aprendizaje de esta disciplina. Por esto, Socas propone los siguientes 5 tópicos de manera de organizarlos por sus orígenes:

- Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos en las matemáticas.
  La comunicación de los objetos matemáticos se realiza mediante signos matemáticos con la ayuda del lenguaje natural (habitual), este proceso genera conflictos que se originan en la función que el lenguaje natural proporciona para la interpretación de los signos matemáticos. Se entiende el significado del lenguaje natural aunque se realicen "*abusos morfosintácticos, tales como roturas de reglas gramaticales o faltas de ortografía"* (Socas, 1997, p.127). En cambio el lenguaje matemático no comunica su significado sin la interpretación exacta de sus signos, por lo que el" *uso del lenguaje ordinario* (natural) *dentro del contexto matemático, es un conflicto de precisión"* (Socas, 1997, p.127).

  Otro conflicto lo provoca el vocabulario común, las palabras tienen significados diferentes en matemáticas y en el lenguaje natural, causando confusiones semánticas. Algunas de ellas son, por ejemplo: factor, potencia, producto, función, raíz, etc. Las palabras de igual significado en lenguaje común y en matemáticas, generan dificultades en saber que, efectivamente, significan lo mismo, formando de esta manera parte de otro domino del lenguaje la Pragmática; "*estudio del sentido que se le da al discurso en función del contexto en que se enuncia*" (Socas, 1997, p.127).

Otro punto hace referencia al lenguaje de los signos, *su sintaxis y reglas formales de las operaciones, pueden entenderse y desarrollarse más allá del dominio original de sus aplicaciones"* (Socas, 1997, p.128), esto debido a la naturaleza abstracta de los conceptos matemáticos.

El aprendizaje de un objeto matemático, conlleva el desarrollo del lenguaje de signos, siendo estos una verdadera fuente de dificultades, debido a que al incorporar un nuevo sistema de signos nos encontramos con elementos que no pueden ser conocidos en términos del sistema de signos antiguo (previo).(Socas, 1997)

Es por esto que Socas lo analiza desde los sistemas de representación cognitivos, señalando los siguientes estadios de desarrollo para los signos matemáticos.
Estadio semiótico: los sujetos aprenden signos nuevos que adquieren significados con los signos antiguos.
Estadio estructural: el sistema nuevo se estructura según la organización del antiguo
Estadio autónomo: los signos actúan con significado propios.
El lenguaje matemático opera entonces en dos niveles, "*el nivel semántico; los signos son dados con un significado claro y preciso, y el nivel sintáctico; los signos pueden ser operados mediante reglas sin referencia directa a ningún significado"* (Socas, 1997, p.130).

Los objetos matemáticos (números, lenguaje algebraico, funciones, etc.) pueden funcionar desde estados distintos, ya sea desde un estado operacional; *"de carácter dinámico, donde los objetos son vistos como un proceso"* o de un estado conceptual*;" de carácter inmóvil, donde los objeto son vistos como una entidad conceptual"* (Socas, 1997, p.130).

- Dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático.

  Encontramos dificultades en los modos de pensamiento matemático, principalmente en el pensamiento lógico, es decir; "*la capacidad de seguir un argumento lógico"* (Socas, 1997, p.131)*. Este enfoque lógico de las matemáticas debe conducir a resolver los problemas por medio de un pensamiento matemático inteligente* (Socas, 1997, p.131), pero que se ve truncado por la influencia de lo social sobre lo lógico, generando con las matemáticas una "lógica escolar" diferente de la "lógica social", de esta forma, guiando al alumno a responder, según lo que él piensa "espera el profesor que el alumno realice" y no a la respuesta del problema que se le plantea.

- Dificultades asociadas a los procesos de enseñanza desarrollado para el aprendizaje de las matemáticas

  Dentro de estas dificultades tenemos a la organización que hay en: la institución escolar, el curriculum de matemáticas y los métodos de enseñanza.

  Como un deber de la institución escolar, es propiciar una organización escolar que tienda a reducir las dificultades del aprendizaje de las matemáticas, todo ello dependiendo de la óptima selección de los profesionales, materiales curriculares, de los recursos y los estilos de enseñanza.

  En la organización curricular en matemáticas, hay que considerar como dificultades a 4 elementos bases: las habilidades necesarias para desarrollar capacidades matemáticas, la exigencia de contenidos anteriores, nivel de abstracción pretendido y el pensamiento lógico de las matemáticas pertinente.

  Los métodos de enseñanza vendrán dados tanto de los elementos de organización de la institución escolar como de la organización escolar, debiendo considerar aspectos como: el lenguaje, adaptado a las capacidades y comprensión de los alumnos, secuencia de las unidades de aprendizaje adaptadas a lógica interna de las matemáticas, exigir al máximo los recursos para representaciones adecuadas, respeto a los ritmos de trabajo de cada alumno. (Socas, 1997)

- Dificultades asociadas a los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos. (Ministerio de Educación Perú, (2006), p.10)

La Teoría Cognitiva se orienta en el desarrollo del pensamiento, su campo de estudio son los procesos por los que la información de los sentidos se transforma, reduce, elabora, recupera, utiliza y transfiere. (Ministerio de Educación Perú, (2006), p.10)

La inteligencia del sujeto interviene en la elaboración de los razonamientos y las capacidades para dar solución a los problemas, se sabe que la resolución de problemas favorece el desarrollo de la inteligencia, siendo este progresivo y secuencial. En la inteligencia se producen las operaciones mentales que articulan la estructura cognitiva de los sujetos. Se entiende por operaciones mentales al *conjunto de acciones interiorizadas, organizadas y coordinadas por las cuales se elabora la información (…)las más elementales permiten que surjan las más complejas y abstractas.* (Ministerio de Educación Perú, (2006), p.10). Las estructuras cognitivas se refieren a *sistemas organizados de información almacenada pero activa* (Ministerio de Educación Perú, (2006), p.10), ya que intervienen en el pensamiento.

La cognición crea representaciones las que utilizamos y manipulamos; por tanto, le damos un valor funcional. El estudiante no sólo debe poseer el conocimiento y las habilidades requeridas para desarrollar las representaciones que dan solución a los problemas, sino que se espera sea capaz de utilizarlas y establecer una red o estructura cognitiva.

Las principales operaciones mentales son (tomado Ministerio de Educación Perú, (2006), p.11):

- Dificultades asociadas a actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas.

No a todos los estudiantes les gustan las matemáticas, muchos tienen actitudes negativas y sentimientos de miedo y tensión hacia ellas, provenientes de factores diversos como*: la naturaleza jerárquica del conocimiento matemático, la actitud de los profesores de matemáticas hacia sus alumnos, los estilos de enseñanza, (…) las creencias hacia las matemáticas que les son transmitidas" (Socas, 1997, p.135).*

Son muchos los prejuicios que rodean a las matemáticas y que son transmitidas de padres a hijos, según Buxton (1981) alguna de las creencias sobre las matemáticas son:

- *Fijas, inmutables, externas, intratables, irreales;*
- *Abstractas y no relacionadas con la realidad*
- *Un misterio accesible a pocos*
- *Una colección de reglas y hechos que deben ser recordados*
- *Una ofensa al sentido común en alguna de las cosas que aseguran*
- *Un área en la que se harán juicios, no sólo sobre el intelecto sino sobre valía personal.*

- *Sobre todo cálculo* (citado en Socas, 1997, p. 135).

Es necesario conocer el origen de estas dificultades para evitar que se conecten y refuercen *en redes complejas que se concretan en la práctica en forma de obstáculos y se manifiestan en los alumnos por medio de errores" (Socas, 1997).*

Un obstáculo es un conocimiento adquirido y no una carencia de conocimiento, el cual ha sido valido para un cierto dominio de problemas, razón por la cual se establece en la mente del estudiante, pero a la postre de otro contexto y nuevos problemas resulta ineficaz e inadaptable (Socas, 1997).

El obstáculo adquiere fuerza y resistencia mientras más tiempo demuestre su eficacia en el domino de validez, por tanto será mejor adquirido, por ello resulta fundamental identificarlo y preparar su rechazo en el nuevo conocimiento, analizando la procedencia de las respuestas inadecuadas por parte del estudiante.

Brousseau (1983) considera que los obstáculos que se presentan en el sistema didáctico pueden ser:

De origen ontogénico o psicogénico; debidos a las características del desarrollo del niño.
De origen didáctico; resultado de una elección o un proyecto del sistema educativo, es decir opciones didácticas que se proponen para generar una situación enseñanza.
De origen epistemológico; intrínsecamente relacionados con el propio concepto. (Socas, 1997)

En cambio Tall (1989) los llama obstáculos cognitivos, distinguiendo 2 tipos:

Obstáculos basados en la secuencia de un tema; hay conceptos matemáticos que son complejos, por lo que es necesario familiarizarse con ellos y en un cierto orden. Por ejemplo: en álgebra, *“las destrezas operatorias son enseñadas con anterioridad a ideas conceptuales aparentemente más profundas”* (citado en Socas, 1997, p.136).

Obstáculos basados sobre casos simples; *se suele limitar al estudiante a casos simples por un periodo sustancial de tiempo, y luego pasar a casos más complejos* (citado en Socas, 1997, p.136).

Errores en el aprendizaje de las matemáticas.

Conocer los errores provee de información sobre la forma en que los alumnos interpretan los problemas, además es importante para el profesor saber la no implicancia de, si un alumno es aparentemente óptimo no tenga serios errores conceptuales. Socas señala que *“en ningún caso el conocimiento nuevo se añade al saber antiguo, muy al contrario se construye luchando contra a él, porque debe provocar una estructuración nueva del conocimiento total” (1997, p. 143).*
En el aprendizaje de un nuevo saber se debe tener en cuenta dos aspectos básicos:

1. *El nuevo conocimiento debe tener significado para el alumno, debiendo éste asumir la responsabilidad de la construcción del conocimiento tomando el problema como propio y no del profesor.*

2. *El saber anterior produce modelos implícitos que a veces son favorables, por lo que hay que explicitarlos, pero otras son un obstáculo.*

El origen de un error en el aprendizaje de las matemáticas, se puede distinguir en tres ejes generales:

De origen en un obstáculo.
De origen en ausencia de sentido.
De origen en actitudes afectivas y emocionales.

Como objetivo para un aprendizaje basado en los errores, seria plantear el propio error como un problema matemático. Por lo mismo, Socas postula en guiarse por el siguiente principio: "*todo error puede ser el comienzo de un buen aprendizaje*" (Socas, 1997, p. 154).

Se puede dar una mirada desde un punto de vista práctico, pasar de una enseñanza de dos fases: contenidos y aplicaciones, en la que el error tiene solo una función negativa, a una de tres fases: evaluación y diagnóstico, contenido y aplicaciones, siendo la primera la más importante, "*y en la cual la explicación de los errores se tiene que hacer, (…) teniendo como objeto determinar inmediatamente una acción conveniente de remedio"* (Socas, 1997, p.148).

2.4.4. La diferencia entre un ejercicio y un problema matemático

Se considera que el sujeto aborda un problema cuando dispone de representaciones incompletas del Modelo de la Situación y/o Modelo Problema, necesarias para dar respuesta a las interrogantes formuladas en el enunciado. El sujeto entonces requiere realizar inferencias para completar representaciones parciales activadas en su memoria (Sanjosé y cols., 2007).

Según González (1999) se identifica a un problema como una situación que involucra cierto grado de incertidumbre, cuya clarificación requiere la actividad mental del resolutor en el proceso llamado resolución, en el que se ponen en juego los conocimientos matemáticos y la toma de decisiones comprendiendo las limitaciones y los errores que dichas decisiones producen, el cual finaliza cuando el resolutor encuentra la solución y da por acabada la tarea (citado en González, 2009).

Se trata de un ejercicio cuando el resolutor tras la lectura del enunciado activa representaciones almacenadas en su memoria, suficientemente completas como para integrar simultáneamente los datos, el modelo y su procedimiento. (Sanjosé y cols., 2007).

Por lo que es evidente la gran diferencia que existe entre un ejercicio; que implica una tarea de aplicación simple y directa, claramente sin una actividad cognitiva compleja como en el caso de un problema; el cual necesita de un dificultoso proceso llamado resolución, en el que intervienen conocimientos, estrategias y técnicas, decisiones, imaginación, concentración, autonomía y espíritu crítico, etc. Este es el sentido que señala Grupo Cero (1985) sobre la resolución de un problema: *"no estamos ante una 'respuesta' a encontrar ni ante un destino al que llegar, sino ante un proceso o un 'viaje' que realizar"* (citado en González, 2009, p.3). Es por ello que nuestra investigación se centra en la resolución de problemas que desarrolla una actividad funcional (de contexto) del conocimiento matemático y no en una actividad de aplicación mecánica que conlleva un ejercicio.

2.4.5. Lógica de justificación en la resolución de ecuaciones de primer grado

En nuestra actualidad se abandona la visión de la matemática estructuralista, centrada en los desarrollos matemáticos deductivos, que favorece el enfoque constructivista, y que potencia argumentaciones inductivas. Se entiende por Estructura matemática *a aquellos conjuntos formados por elementos tales que posibilitan definir una o más operaciones incluyendo propiedades* (Tomado de Hernández, diccionario de Matemáticas, citado en Ministerio de Educación, Perú, 2006).

La resolución de ecuaciones tiene su justificación lógica en la estructura algebraica o sistema numérico en el que se desarrolla. Dentro del aprendizaje de la dimensión formal, descubrimos la existencia de una axiomática de los números reales que facilita la resolución haciendo uso del opuesto aditivo. Pero a la vez, genera dificultades en su aplicación en la práctica con justificaciones informales, como la generalización de procedimientos, entre los cuales se puede identificar “la operación paseo”. Por ejemplo para la resolución de ecuaciones lineales es común decir: *si el número está sumando* (Ejemplo: +9), *pasa al otro lado restando* (-9); y *si el número está restando* (Ejemplo: -6), *pasa al otro lado sumando* (+6). O en otras ocasiones: si *el número está multiplicando* (Ejemplo: ·2), *pasa al otro lado dividiendo (en forma fraccionaria)* (*n*/2) (el número pasará sin cambiar su signo). Al decir, pasar al otro lado, será el resultado de cambiar una cantidad o expresión al otro miembro de la igualdad (tomado de <es.wikipedia.org>)

Dentro de la justificación de los procedimientos de resolución de ecuaciones de primer grado, encontramos conflictos, por lo general ocasionados por la complejidad implícita de una presentación axiomática, la cual dificulta a los alumnos en la comprensión y posterior aplicación de los procedimientos formales de la matemática, en la resolución de ecuaciones.

Generalmente los estudiantes, al resolver una ecuación lineal utilizan una lógica de justificación basada en descripciones de las técnicas usadas o de una visión fenomenológica, aseverando que se encuentran frente a verdades incuestionables que tienen como base la intuición, o acuerdos arbitrarios, demostrando que no tienen claridad en el ámbito de validez de la lógica de justificación que utilizan en la resolución de dichas ecuaciones. Esto ocurre debido a que los alumnos no poseen el conocimiento o comprensión que les permita justificar, pero si pueden con su conocimiento describir sus pasos de resolución. *La justificación de los pasos de resolución de una ecuación permite distinguir (…) entre una postura pragmática y una axiomática deductiva* (Olfos, s.f., p.1).
Las justificaciones de los alumnos podrían identificarse como:

- Pragmáticas (de hecho, imposiciones de sus profesores)
- Deductivas (derivaciones, axiomáticas)

- Inductivas (generalizaciones a partir de un modelo, por ejemplo: el modelo de la balanza; la ecuación es como una balanza, se mantendrá la igualdad tal como la balanza conserva el equilibrio si se suma lo mismo en ambos lados de la ecuación)
- Formales (deducciones que asumen la existencia de axiomas o saberes previos)

Olfos es claro en señalar que en la práctica priman argumentaciones de tipo pragmático, mezcladas con frases o ideas de tipo descriptivo (Olfos, s.f.).

2.5. Los números reales

El sistema numérico en el que se desarrolla nuestra investigación es en el conjunto $\mathbb{R}$, cuyos elementos se llaman números reales. En este conjunto $\mathbb{R}$ se definen una relación de igualdad y dos operaciones fundamentales:

La relación de igualdad "="satisface las propiedades de:

- Reflexividad: $a = a$
- Simetría: si $a = b$, entonces $b = a$
- Transitividad: si $a = b$ y $b = c$, entonces $a = c$.

Las dos operaciones son:

- La suma o adición: $a + b$

$$+: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(a, b) \rightarrow a + b$$

- La multiplicación: $a \cdot b$

$$\cdot: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(a, b) \rightarrow a \cdot b$$

Estas operaciones son compatibles con la relación de igualdad, es decir, si$a = b$ entonces $a + c = b + c$ y $a \cdot c = b \cdot c$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Se consideran las siguientes premisas que se aceptan sin demostración (axiomas):

i) Se admite la existencia de un conjunto $\mathbb{R}$ no vacío.

$0 \in \mathbb{R}, 1 \in \mathbb{R}, 0 \neq 1$

$ii)\ (\mathbb{R}, +)\ es\ un\ grupo\ abeliano$

$iii)\ (\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)\ es\ un\ grupo\ abeliano$

$iv)\ Distributividad.$

$\forall\ a, b, c \in \mathbb{R}: \quad a(b + c) = ab + ac$

Provisto de estos axiomas el conjunto $\mathbb{R}$ es un cuerpo y se escribe $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ es un cuerpo. En esta investigación nos limitaremos sólo a los axiomas de cuerpo que presenta dicho conjunto, dejando fuera los axiomas de Orden y Completitud por escaparse del nivel matemático necesario en el que se efectúa en éste trabajo.

El conjunto $\mathbb{R}$ es un grupo con la suma porque cumple con:

Sean a, b, c números reales

1. Asociatividad: $(a + b) + c = a + (b + c)$
2. Existencia del elemento neutro: 0 es neutro aditivo

$$\forall\ a \in \mathbb{R}, \exists!\ b \in \mathbb{R}\ tal\ que\ a + b = a, luego\ b = 0$$

3. Existencia del elemento inverso:

$$\forall\ a \in \Re, \exists! -a \in \mathbb{R}\ tal\ que \quad a + (-a) = 0$$

Además al ser un grupo abeliano cumple con:

Conmutatividad: $a + b = b + a, \forall\ a, b \in \mathbb{R}$

El conjunto $\mathbb{R} - \{0\}$ es un grupo con el producto porque cumple con:

1. Asociatividad: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
2. Existencia del elemento neutro: 1 es neutro multiplicativo.

$$\forall\, a \in \mathbb{R}, \exists!\, b \in \mathbb{R} \; tal\ que \;\; a \cdot b = a, \qquad luego\ b = 1$$

3. Existencia del elemento inverso:

$$\forall\, a \in \mathbb{R} - \{0\}, \exists! \frac{1}{a} \in \mathbb{R} \; tal\ que \;\; a \cdot \frac{1}{a} = 1$$

Además al ser un grupo abeliano cumple con:

Conmutatividad: $a \cdot b = b \cdot a, \forall\, a, b \in \mathbb{R}$

Proposición. En los números reales tenemos:

I. El neutro aditivo es único
II. El neutro multiplicativo es único
III. El inverso aditivo de un número real es único
IV. El inverso multiplicativo de un número real es único.

A partir de estas definiciones y axiomas se pueden obtener todas las otras propiedades de la aritmética usual, que se estudian durante la enseñanza escolar. Además de las propiedades más importantes que derivan de los axiomas de cuerpo.

2.6. Ecuaciones de primer grado o lineales con una y dos variables

El objeto matemático de nuestro estudio son las ecuaciones lineales con una y dos variables (incógnitas). Por lo que se abordará sobre estos temas en profundidad, desde el punto de vista netamente matemático.

2.6.1. Ecuación de primer grado o lineal con una variable

Al buscar la definición de ecuación de primer grado con una variable es común encontrarla como "una igualdad con una incógnita", pero cuando interviene una variable no se puede afirmar que es una igualdad. Una vez que se encuentran los valores de la o las variables, las ecuaciones se transforman en igualdades verdaderas o falsas.

Se consideran 2 tipos de ecuaciones, la identidad o ecuación idéntica y la ecuación o ecuación condicional. La identidad refiere a la igualdad en la cual ambos miembros son iguales para todos los valores de las variables para los cuales estén definidos los miembros. Una ecuación se define como una igualdad en la que ambos miembros son iguales solamente para ciertos valores particulares de las variables. Se dice entonces que la ecuación se satisface para dichos valores particulares. De este modo los valores de la variable que hacen cierta la igualdad se llaman soluciones o raíces de la ecuación.

Es así como una ecuación se define como una función proposicional, que al reemplazar las variables por valores se convierten en proposiciones verdaderas o falsas. Una ecuación de primer grado con una variable es una función proposicional de la forma:

$$ax + b = 0, con\ a, b \in \mathbb{R}\ y\ a \neq 0$$

Donde a y b son constantes de la ecuación; y x es la variable, la cual posee exponente 1, por tanto la ecuación es de primer grado.Una función proposicional en la letra x es una expresión formal $P(x)$ tal que se tiene lo siguiente, cada vez que se reemplaza la letra x por un elemento a de un conjunto (previamente) dado U, resulta una proposición $P(a)$.

Teorema: Sean $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$

Entonces, el conjunto solución S de $ax + b = 0$ es S=$\{-\frac{b}{a}\}$

Demostración:

Inverso aditivo	$ax + b = 0 \,/\, +(-b)$
Neutro aditivo	$ax + b + (-b) = 0 + (-b)$
Asociatividad de la adición	$ax + \big(b + (-b)\big) = -b$
Neutro aditivo	$ax + 0 = -b$
	$ax = -b$
Inverso multiplicativo	$ax = -b \,/ \cdot \left(\frac{1}{a}\right)$
Asociatividad del producto	$\left(\frac{1}{a}\right) \cdot ax = \left(\frac{1}{a}\right) \cdot -b$
Inverso multiplicativo	$\left(\frac{1}{a} \cdot a\right) x = -\frac{b}{a}$
Neutro multiplicativo	$1x = -\frac{b}{a}$
	$x = -\frac{b}{a}$

Domínguez afirma que "*una variable es una incógnita si se usa para representar valores específicos que se desconocen pero que se pueden calcular resolviendo una ecuación o desigualdad"*(Domínguez, s.f. p.6).

Resolución de ecuaciones de primer grado con una variable

Sean $a, b \in \mathbb{R}$

i) La ecuación $x + a = b$ tiene por única solución el real $b - a$

ii) Si $a \neq 0$ la ecuación $ax = b$ tiene como única solución el real $\frac{b}{a}$

La resolución de ecuaciones de primer grado consiste, generalmente, en hallar las raíces transformando la ecuación inicial en otra ecuación equivalente cuyas raíces se pueden obtener con más facilidad que las de la ecuación inicial.

2.6.2. Ecuación de primer grado o lineal con dos variables

Una ecuación de primer grado con dos variables es una función proposicional de la forma:

$$ax + by + c = 0, con\ a, b, c\ \in\ \mathbb{R}\ y\ a, b\ \neq 0$$

Donde a, b, c son constantes arbitrarias y x, y son variables, con exponente 1, por tanto la ecuación es de grado 1.

Resolución de ecuaciones de primer grado con dos variables.

Dos ecuaciones lineales constituyen un sistema de ecuaciones lineales, en este caso dos ecuaciones con dos incógnitas, se expresan de la forma:

(*) $$\left.\begin{array}{l} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{array}\right\} \text{Con } a_1, b_1, a_2, b_2, c_{1,}, c_2\ \in \mathbb{R}\ y\ a_1, b_1, a_2, b_2 \neq 0$$

En donde $a_1, b_1, a_2, b_2, c_{1,}, c_2$ son constantes, y x e y representan simultáneamente las mismas variables en ambas ecuaciones. Los sistemas en los que el número de ecuaciones coincide con el de las variables se denominan cuadrados.

En el análisis de un sistema de ecuaciones lineales se pueden presentar varios casos:

- Tiene solución, y ésta es única, se le llama compatible determinado.
- Presenta infinitas soluciones posibles, se le denomina compatible indeterminado.
- Si no tiene solución, se la da el nombre de imposible o incompatible.

Para resolver algebraicamente un sistema encontramos varios métodos, estos son: eliminación por reducción, eliminación por sustitución y eliminación por igualación, los cuales por lo general se presentan en los contenidos en que se encuentra la investigación.

Para resolver geométricamente, se sustenta en que la gráfica de una ecuación lineal con dos variables es una recta, por lo que en un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas, se grafican ambas rectas y luego se leen las coordenadas del punto de intersección, si su solución es única.

Otro método algebraico es de las determinantes. Donde la solución única del sistema existirá sólo si el determinante es distinto de cero. Esto es;

$a_1 b_2 - b_1 a_2 = 0$ (Dado el sistema **(*)** de dos ecuaciones y dos variables)

Si dicho determinante es igual a cero, entonces el sistema no tiene solución o bien tendrá infinitas soluciones.

La teoría completa requiere de otra investigación. Por ahora nos limitaremos a exponer la existencia de estos métodos, que se utilizan en los contenidos abordados en el estudio.

CAPÍTULO 3. MARCO METODOLÓGICO

3.1. Opción paradigmática:

Se ha optado por el enfoque cualitativo en que se usan datos no numéricos en la recolección de información como es el caso de la revisión de documentos y las entrevistas semi-estructuradas realizadas a informantes claves en el presente estudio.

El análisis de los datos se hace a partir de las representaciones que los actores, en este caso profesores, se hacen del fenómeno estudiado y de las unidades de significado relevantes que, en relación al problema, se desprenden de los documentos seleccionados.

Los datos se relacionan entre ellos y con la teoría pertinente, la que se va incorporando a medida que avanza el estudio (Hernández, Fernández y Baptista, 2006).

3.2. Diseño de investigación

Se trata de un estudio descriptivo en el que se busca señalar las características de un fenómeno a partir de la mirada de los actores contrastando esa perspectiva con la teoría.

En este caso se describen las dificultades que se desprenden del análisis de los programas y textos de estudio y de las prácticas pedagógicas de los docentes que hacen parte de la unidad de análisis. Hernández, Fernández y Baptista (2006) citando a Patton (1980 – 1990), definen “los datos cualitativos como descripciones detalladas de situaciones, eventos, personas, interacciones, conductas observadas y sus manifestaciones”.

3.3. Delimitación del Problema.

Si bien la situación general observada refiere a la resolución de problemas el estudio se centra en aspectos puntuales que requieren tres precisiones: :

- El proceso de traducción corresponde a la resolución de problemas con enunciado expresado en lenguaje habitual a la representación matemática que en su proceso de resolución implican el planteamiento de ecuaciones lineales con una y dos variables.
- Este contenido específico se aborda para su aprendizaje en 1° y 2° año de Enseñanza Media.
- Las dificultades que se busca describir son las que enfrentan los y las estudiantes en dicho proceso de traducción de registro en lenguaje natural a registro de lenguaje algebraico.

3.4. Muestra

Como muestra se han tomado, con un criterio de conveniencia para la investigación, las siguientes unidades de análisis:

- Programas vigentes de 1° y 2° Año Medio.
- Textos de estudio de 1° y 2° Año Medio de uso actual en el aula.
- Docentes de 1° y 2° Año Medio

3.5. Fuentes de los datos

Los datos provienen de fuentes primarias y secundarias como son, en este caso, los documentos en análisis y el discurso de los docentes.

3.6. Categorías

Se han definido a priori dos grandes categorías:

Dificultades **intrínsecas** que enfrentan los estudiantes, las que consideran al menos dos sub categorías:

- Desarrollo cognitivo
- Desarrollo afectivo

Dificultades **extrínsecas** que suponen otras dos subcategorías:

- Metodológicas (docente)
- Socioculturales (contexto)

Sin embargo, la definición a priori de estas categorías y sub categorías no impide que durante el estudio surjan otras emergentes que se agreguen al análisis.

3.7. Técnica de indagación

Para recolectar la información se ha optado por el análisis documental, en este caso de los programas de estudio y los textos actualmente en uso en aula, y una entrevista semi-estructurada que se realizará a docentes con el fin de rescatar su percepción del problema en estudio.

La entrevista de investigación es "*una conversación entre dos personas, un entrevistador y un informante, dirigida y registrada por el entrevistador con el propósito de favorecer la producción de un discurso conversacional, continuo y con una cierta línea argumental no fragmentado, segmentado, pre-codificado, y cerrado por un cuestionario previo del entrevistado sobre un tema definido en el marco de una investigación*" (Alonso, 1999).

El carácter semi-estructurado hace que la entrevista tenga solo un guion con los tópicos a tratar, dejando libertad al investigador para formular preguntas en la medida que avanza la conversación, favoreciendo, en todo momento la libre expresión del entrevistado.

3.8. Plan de análisis

En primer lugar se analizarán los programas y textos de estudio del subsector de Educación Matemática correspondiente a los cursos de 1° y 2° Medio.

Paralelamente, se escogerá los informantes clave teniendo los siguientes criterios de inclusión:

- Docentes de Enseñanza Media
- Especialidad Matemática
- Experiencia en 1° y 2° Medio

Primer nivel de análisis:

- Contenido de los documentos y de las entrevistas
- Levantamiento de categorías

Segundo nivel de análisis:

- Relaciones entre categorías
- Relaciones con la teoría

3.9. Trabajo de campo

El trabajo de campo se remite a las siguientes actividades:

- Revisión bibliográfica: insumos teóricos previos y emergentes según el avance del estudio.
- Análisis documental de programas de estudio y textos en uso en el aula.
- Entrevistas a informantes claves.

CAPÍTULO 4. RESULTADOS OBTENIDOS

4.1. Análisis de las entrevistas

La entrevista abierta realizada a los informantes claves (dispuesta en el anexo) a partir de las dos grandes categorías prefijadas, dificultades intrínsecas y extrínsecas que tienen los alumnos y alumnas a la hora de resolver problemas que involucran ecuaciones lineales que contemplan una o dos variables, emergen, a partir del discurso de los informantes, otras categorías que dicen relación con el origen de la dificultad, los contenidos específicos a tratar y las estrategias docentes. En casi todas las categorías, incluyendo las prefijadas, se contemplan subcategorías. El análisis da cuenta del discurso de los docentes entrevistados relacionando dicho discurso con el marco teórico que sustenta la investigación.

4.1.1 Dificultades intrínsecas

Este tipo de dificultades dicen relación con aquellos obstáculos que, para aprender el contenido, encuentran los estudiantes. Reconociendo de acuerdo al argumento constructivista, que en el aprendizaje están comprometidos indisolublemente elementos tanto cognitivos como afectivos, dentro de estas dificultades se consideran dos subcategorías.

Dificultades intrínsecas de tipo cognitivo:

Los docentes coinciden en señalar que desde el punto de vista cognitivo los y las estudiantes de los primeros cursos de Enseñanza Media, carecen de un dominio de aquellos contenidos previos pertinentes que les permitirían acceder al nuevo contenido. En dicho análisis no dejan fuera aquellas dificultades específicas que presentan los alumnos y alumnas con necesidades educativas especiales.

> *“Falta de dominio en contenidos previos”M1*
> *“la base que traen es deficiente” M1*

“las propias de los alumnos con problemas de aprendizaje”H1
“las relativas a comprensión lectora o de dislexia” H1
“(dificultades de) los alumnos relacionadas con problemas de aprendizaje”H1
“no son capaces de relacionar conceptos de la vida diaria con lenguaje matemático”M2

Refiriéndose específicamente a la dificultad que puede ofrecer el contenido señalan que dicha dificultad aparece en las siguientes situaciones:

“cuando deben representar un problema que aparentemente tiene más de una incógnita, pero en realidad es una sola”M1
“Complejidades referentes al traspaso de la aritmética al algebra”.H2
“De la costumbre de sólo trabajar con las cuatro operaciones básicas, a símbolos abstractos como las variables.”H2
“Hay dificultad cuando son variables dependientes”H2
“no son capaces de relacionar conceptos de la vida diaria con lenguaje matemático”M2..

La comprensión lectora deficiente que tienen los escolares es una habilidad básica para el acceso al aprendizaje, cuya carencia les dificulta entender lo que se les pide.

“Compresión lectora”M2.
“en la comprensión de los enunciados, fundamentalmente en el proceso de modelizar matemáticamente el problema” H2

.

Otra manera de referirse a esta dificultad cognitiva es señalando las carencias que los estudiantes tienen en este aspecto antes de llegar a 1° medio, aludiendo a una “mala” base en su formación de Educación Básica que no los prepara para las exigencias de la Educación Media, impidiendo que puedan enfrentar con éxito el aprendizaje de los Contenidos Mínimos Obligatorios contemplados en el currículo.

“la base que traen es deficiente” M1
“para la realidad que uno tiene en el liceo (desarrollo cognitivo)”M1
“como recibe a los alumnos que vienen de otras escuelas y llegan a primero medio (desarrollo cognitivo)”M1
“creo que los programas pretenden mucho como “contenidos mínimos”M1

Dificultades intrínsecas de tipo afectivo:

Se consideran acá aquellas dificultades que dicen relación con las actitudes asumidas por los estudiantes al enfrentarse con el contenido nuevo a aprender. Se señalan como obstáculos para el aprendizaje el bajo nivel de autoestima que actúan como un inhibidor del aprendizaje. Unido a ello se señala también la escasa motivación y la carencia de destrezas.

“alumnos con problemas de autoestima baja”.H1
“escasa motivación y destrezas en el alumno” H1
“se nota el miedo que tienen los menos aventajados cuando se les pide resolver un problema, por lo general ni siquiera lo intentan”H2

Otro aspecto relacionado con las actitudes de los alumnos y alumnas dice relación con el esfuerzo intencionado que este puede hacer para aprender. De acuerdo a Coll (1990), para aprender significativamente debe haber una intención de parte de quien aprende de hacerlo. Según lo dicho por los docentes entrevistados esa intencionalidad no está presente en los alumnos.

“no quieren tomarse la molestia de pensar” M1
“quieren tener el ejercicio resuelto y no pensar cómo se resuelve” M1
“Los alumnos para empezar no tienen hábitos de estudios”M1

“además tienen el lema de trabajar con el mínimo esfuerzo”M1
“No intentan solucionar o simplificar las dificultades de un ejercicio”M2

Aparece en el discurso de los estudiantes la negación de sus habilidades para aprender las matemáticas y justifican así su imposibilidad de resolver los problemas.

“Los estudiantes repiten con mucha frecuencia que ellos son negados para la matemática.”H2
“cuando se les pregunta alguna cosa te responden de inmediato “profe yo con las matemáticas no puedo soy negado”.H2
“No intentan solucionar o simplificar las dificultades de un ejercicio”M2.

4.1.2. Dificultades extrínsecas

Este tipo de dificultades dicen relación con aquellos impedimentos que, para aprender el contenido, encuentran los y las estudiantes pero que no dependen de su nivel cognitivo ni de sus actitudes frente al estudio. En el Marco de la Buena Enseñanza se señalan las condiciones en que se aprende. De esas condiciones el docente se hace cargo creando ambientes de aprendizaje desde, entre otras variables, definir una metodología de enseñanza. Por ello la metodología se contempla como una subcategoría. Por otro lado, el contexto cultural y social, considerado también una subcategoría, ejerce una gran influencia en la vida del estudiante quien aprende en primer término de su mundo cercano al que se incorpora la escuela y el liceo en algún momento de la vida. Esos aprendizajes son claves a la hora de enfrentar contenidos complejos como el que se analiza en este estudio.

Dificultades extrínsecas en relación a la metodología docente:

En relación a este aspecto, se considera el Marco de la Buena Enseñanza, como un referente importante a la hora de crear ambientes que favorezcan el aprendizaje Los docentes reconocen algunas de sus propias carencias en relación a conocer la realidad de los alumnos, para adecuar su metodología a dicha realidad. No obstante se deja en claro que la capacidad de los pedagogos es cuestionada no sólo por los sistemas de medición propios del Ministerio, sino también por organismos externos como la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE), que actualmente revela un informe sobre las principales falencias en el sistema educativo en Chile, el cual señala como principal punto a que ***“****no se logran captar profesionales capacitados para ejercer la profesión docente. Ante esto, la OCDE recomienda aumentar el sueldo de los profesores y crear oportunidades de ascenso dentro de la carrera pedagógica para educadores con buen desempeño”* (tomado de *<http://www.latercera.com>, 2011*).

“Falta de mayor contextualización con la realidad que tienen hoy los alumnos en algunos contenidos”M1
“que consideren las conductas de entrada” H1.

Otro aspecto dice relación con sus necesidades de capacitación referidas también al tema de la resolución de problemas y a la evaluación.

“carencia de cursos en distintos tipos de evaluación” M1
“la que se refiere al procedimiento o aplicación de algún método de resolución”H1

Dificultades extrínsecas en relación al contexto en que se aprende:

Una primera dificultad referida al contexto en que el alumno aprende la reconocen los docentes en relación a los textos de estudio en uso en los establecimientos. Para algunos puede ser indiferente el uso o no del texto, pero quienes los usan mantienen una mirada crítica acerca de la manera como se presentan los contenidos y procedimientos matemáticos:

> *"(los textos) No ayudan mucho ni tampoco obstaculizan"M1*
> *"obstaculizan (los textos) en el sentido que no presentan un procedimiento detallado de la resolución" H1*
> *"los textos de estudio no profundizan por ejemplo la parte formal de las matemáticas, en cuanto a su buen dominio en el lenguaje formal"H2*
> *"Con el intento de acercar los conceptos matemáticos a la vida diaria, muchas veces están dejando de lado los conceptos puros"M2*

La misma crítica alcanza a los programas de estudio, sin embargo hay en este ámbito opiniones contradictorias, por un lado se reconoce que los programas presentan contenidos mínimos obligatorios y, por otro, se reconoce que estos contenidos mínimos son ya de una sobre-exigencia para los alumnos:

> *"en los programas no se trata a la resolución de problemas como el eje central de las unidades"H2*
> *"programas pretenden mucho como "contenidos mínimos"M1*
> *"los programas de estudio consideran los aprendizajes de contenidos mínimos"H1.*

Sin embargo, una dificultad que ofrece el contexto es el ambiente socio cultural y económico, así como el ámbito familiar en que el alumno se desenvuelve. Los alumnos en los liceos, de acuerdo al juicio de los profesores, vienen de estratos socio económicos bajos donde a su pobreza económica se agrega la pobreza cultural.

> *"Creo que las dificultades de aprendizaje siempre se han manifestado con mayor intensidad en estratos bajos, que es el tipo de alumnos que tenemos en el liceo que trabajo"M1*

En ese contexto en que viven los alumnos, el apoyo de los padres es escaso y eso se nota en la percepción que los mismos alumnos tienen de sus padres, de quienes no reciben estímulos positivos:

> *“La mayoría recibe poco apoyo de sus padres”M1*
> *“creen que sus padres están sólo cuando los tienen que retar. No reciben un estímulo positivo cuando hacen algo bien” M1*

4.1.3. Otras categorías emergentes

Del discurso de los profesores, aparte de sus referencias a categorías ya instaladas por la misma entrevista, se agregan otras que emergen en la conversación como son el origen de las dificultades tanto desde el punto de vista cognitivo como afectivo. El contenido específico que se aborda como materia de estudio referido al contenido previo manejado por el alumno y a su falta de estrategia frente al aprendizaje del mismo y, por último hacen una referencia a la estrategia de enseñanza.

Origen de las dificultades en el aspecto cognitivo:

De acuerdo al discurso de los docentes las dificultades que el alumno manifiesta en el aspecto cognitivo tienen su origen en los aprendizajes realizados en la educación básica. Reconocen que en la educación básica no han adquirido contenidos previos que ahora necesitan, que no quedan potenciadas destrezas y habilidades elementales para el desarrollo de las matemáticas. Aducen que los cambios deben realizarse en ese nivel y que hay ausencia de especialistas en la materia.

> *“se supone que se adquieren en la básica” (el contenido previo que les falta) M1*
> *“que ya en primero medio vengan con algunas habilidades y destrezas básicas para el desarrollo de las matemáticas.”H2*

“Que siempre todo cambio, debe realizarse de la básica o la pre-básica, para que el alumno al encontrarse con la realidad de la media no sea tan brusco el cambio”M1.
“en el nivel de Enseñanza Básica debería haber profesores especialistas en matemática.”H2

Origen de las dificultades en el aspecto afectivo:

Hay que señalar que los docentes en ningún momento señalaron como en el caso de los contenidos, el origen de las dificultades en el aspecto afectivo en la educación básica. Más bien ponen el problema en el mismo alumno, en la necesidad que ellos tienen de conectar lo aprendido con su futuro y en la difícil experiencia del aprendizaje de las matemáticas.

“Están los estudiantes constantemente preguntando “profe para que me sirve esto si yo no voy a ir a la universidad”H2
“la resolución de problemas debe ser una de las experiencias más difíciles que afronta el estudiante durante su etapa escolar”H2

Falta de dominio del contenido previo:

Los docentes señalan dos contenidos que a su juicio son previos y que los alumnos no dominan, lo cual dificulta los aprendizajes en la educación media en el contenido específico que se aborda en este estudio:

“operatoria básica en números reales” M1
“No asimilan el concepto de igualdad y de inversos”M2.

Falta de estrategias para manejar el contenido

La carencia de estrategias para aprender el contenido específico que se aborda en este estudio por parte de los alumnos, tiene sus manifestaciones en las siguientes expresiones de los docentes:

> *"No recurren a los conocimientos propios para resolver problemas"M2*
> *"solo saben trabajar con un método de resolución porque está dentro del contrato didáctico"H2*
> *"No se conciben como llegar de una frase o palabra a una expresión algebraica"H2*
> *"Principalmente las dificultades de representación de los enunciados o datos de este, en el álgebra matemática"H2*
> *"cuando deben representar un problema que aparentemente tiene más de una incógnita, pero en realidad es una sola"M1*

Estrategias docentes

En este tema los docentes se remitieron a señalar algunas acciones que ellos realizaban con la finalidad de lograr el aprendizaje de sus alumnos, como confeccionar guías, intentar potenciar las habilidades y destrezas, y plantear problemas solucionables de manera de no generar desmotivación.

> *"uno debe recurrir a sus propias guías"M1*
> *"potenciar las habilidades y destrezas de alumnos"H1*
> *"no generar una desmotivación ante un problema que parece que solo el docente puede dar la solución, se trabaja mucho con problemas parecidos entre sí para que por lo menos adquieran un plan a seguir con estos problemas"H2*

4.2. Análisis de los programas de estudio

Los programas de Estudio son documentos destinados a los establecimientos que no cuentan con programas propios, específicamente a los docentes del sector pertenecientes a éstos. El cual tiene como finalidad promover los aprendizajes esperados para lograr los Objetivos Fundamentales y el desarrollo de los Contenidos Mínimos Obligatorios definidos por el Marco Curricular. Por otra parte, se puede encontrar una organización temporal en semestres y unidades, actividades de aprendizaje y de evaluación.

En los siguientes cuadros se presentan síntesis de los contenidos específicos de la investigación, relacionados a la información que otorgan los programas de estudio. Las categorías se establecieron de acuerdo al ordenamiento de las características que presenta el programa:

Programa de Estudio Primer año medio Matemática. (Diciembre 2010)

Autor: Ministerio de Educación. Unidad de Currículum y evaluación.
Título: Matemática. Programa de Estudio. Primero Medio. (Diciembre 2010).
Medio del que se ha extraído: disponible en la web; www.mineduc.cl.

CATEGORÍAS	SÍNTESIS
PRESENTACIÓN DEL CONTENIDO	El modo de especificar los contenidos, es a través de los aprendizajes esperados, los que son un desglose de los Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios. Se presenta como aprendizaje esperado: “Resolver problemas asociados a situaciones cuyos modelos son ecuaciones literales de primer grado”. Los aprendizajes esperados se presentan desde el punto de vista de lo que se espera que los estudiantes sean capaces de aprender, y asimismo se muestran indicadores de evaluación señalando cuándo los estudiantes han logrado este aprendizaje. En relación a la estructura del documento se evidencia una organización de los contenidos en recuadros. En el primero se halla la unidad, su propósito, los conceptos claves, los prerrequisitos, contenidos disciplinares, habilidades y actitudes.

	El segundo se divide en dos columnas, la primera explicita los aprendizajes esperados y la segunda los indicadores de evaluación. Dentro de la primera columna en el sexto lugar encontramos el aprendizaje esperado que involucra éste estudio. Continuamente se exponen los aprendizajes esperados en relación a los Objetivos Fundamentales Transversales. Luego se exhiben observaciones al docente, finalizando con ejemplos de actividades de aprendizaje y de evaluación.
ORGANIZACIÓN TEMPORAL DEL CONTENIDO	El contenido está dispuesto en el primer semestre, de un total de dos. La unidad dos llamada “Álgebra” posee un tiempo estimado de 70 horas, situándolo como sexto y último aprendizaje esperado, por lo que se puede inferir que posee un tiempo aproximado de 10-12 horas.
HABILIDADES INVOLUCRADAS	Al observar transversalmente las habilidades que se desarrollan en el sector tenemos: • Analizar estrategias de resolución de problemas de acuerdo con criterios definidos • Fundamentar opiniones y tomar decisiones. • Aplicar modelos lineales que representan la relación entre variables. • Diferenciar entre verificación y demostración de propiedades. Dentro de la unidad Algebra encontramos mayor cantidad de habilidades. Sin embargo, la habilidad directamente involucrada al aprendizaje esperado en estudio es: • Resolver problemas mediante ecuaciones literales.
ORIENTACIONES DIDÁCTICAS	Dentro de la unidad lo más próximo a las orientaciones didácticas son las observaciones al docente, ya que las primeras se encuentran al comienzo del programa, siendo transversales a todas las unidades, considerando una serie de complementos como: • Los conceptos Matemáticos: profundidad e integración. • El uso del contexto. • Razonamiento matemático y resolución de problemas. • Uso del error. • Aprendizaje matemático y desarrollo personal. • Tecnologías digitales y aprendizaje matemático. • Clima y motivación. De acuerdo, a las observaciones al docente, se sugiere incentivar el logro de los Objetivos Fundamentales Transversales. Por otra parte hay recomendaciones en el trabajo con productos notables, funciones lineales y afines,

	invitando a hacer énfasis en las composiciones de funciones para posteriores unidades. Finalmente se propone realizar análisis de las representaciones de funciones mediante software.
PROPUESTA DE ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE Y EVALUACIÓN	Por cada aprendizaje esperado se exponen a lo menos tres actividades a modo de ejemplo, con algunas observaciones al docente puntuales de la actividad. Refiriéndose a la propuesta de actividad de aprendizaje número seis se muestran tres actividades, en donde la primera da una idea de la habilidad que debe ser ejecutada por el estudiante. En la segunda y tercera actividad se mantiene la misma habilidad "resolver problemas", con contexto matemático y luego ligado a la física respectivamente. Respecto a la actividad de evaluación se plantea un ejemplo basado en el aprendizaje esperado número cinco, en donde se ordena de la siguiente forma: • Aprendizaje esperado • Indicadores de evaluación • Instrucciones • Situación • Pregunta • Criterios de evaluación

Programa de Estudio Segundo año medio Matemática (2011).

Autor: Ministerio de Educación. Unidad de Currículum y evaluación.

Título: Programa de Estudio. Matemática. II Medio. (Junio 2011).

Medio del que se ha extraído: disponible en la web; www.mineduc.cl.

CATEGORÍAS	SÍNTESIS
PRESENTACIÓN DEL CONTENIDO	De la misma forma que el programa de estudio de primer año medio, se presentan los Aprendizajes Esperados como una compilación de los Objetivos Fundamentales y los Contenidos Mínimos Obligatorios. Cuyo aprendizaje es "*Modelar y aplicar la función exponencial, raíz cuadrada y logarítmica en la resolución de problemas, y resolver problemas que involucren sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas*" (Ministerio de Educación, 2011, p. 48). El Currículo se mantiene de la misma manera, pues los aprendizajes esperados se presentan desde el punto de

	vista de lo que se espera que los estudiantes sean capaces de aprender, y asimismo se muestran indicadores de evaluación señalando cuándo los estudiantes han logrado este aprendizaje. Con respecto a la estructura del documento se observa una organización de los contenidos en recuadros. En el primero se halla la unidad, su propósito, los conceptos claves, los prerrequisitos, contenidos disciplinares, habilidades y actitudes. El segundo se divide en dos columnas, la primera explicita los aprendizajes esperados y la segunda las sugerencias de indicadores de evaluación. Dentro de la primera columna encontramos en el séptimo lugar el aprendizaje esperado que involucra éste estudio. Seguidamente se presentan los aprendizajes esperados en relación a los Objetivos Fundamentales Transversales. Luego se muestran las orientaciones didácticas de la unidad. Finalizando con ejemplos de actividades y de evaluación.
ORGANIZACIÓN TEMPORAL DEL CONTENIDO	El contenido está ubicado en el segundo semestre, de un total de dos. La unidad tres llamada "Álgebra" posee un tiempo estimado de 80 horas, situándolo como séptimo y último aprendizaje esperado de la unidad, por lo que se puede inferir que posee un tiempo aproximado de 10-12 horas.
HABILIDADES INVOLUCRADAS	Focalizándose en las habilidades que se desarrollan en el sector encontramos las siguientes: • Aproximar números mediante variados métodos. • Argumentar respecto a las variaciones que se producen en la representación gráfica de funciones. • Ubicar raíces en la recta numérica. • Modelar situaciones diversas a través de funciones. • Demostrar propiedades y teoremas. En la unidad Álgebra encontramos una mayor cantidad de habilidades. Sin embargo, la habilidad directamente involucrada al aprendizaje esperado en estudio es: • Resolver problemas mediante sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.
ORIENTACIONES DIDÁCTICAS	En general, se recomienda apoyar el estudio de funciones o de la gráfica de solución de los sistemas de ecuaciones, con programas matemáticos que permitan usar y visualizar las gráficas. Así es como, se invita a proponer problemas abiertos que impulsen a encontrar soluciones y aventurarse

	a la búsqueda de patrones y de soluciones más generales. Con respecto a la evaluación se aconseja monitorear el logro de los Aprendizajes Esperados a medida que avanza la unidad.
PROPUESTA DE ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE Y EVALUACIÓN	En cada aprendizaje esperado se muestran ejemplos de actividades, en algunas con breves observaciones al docente. Puntualmente, en los ejemplos para el aprendizaje esperado número siete, se observan 8 actividades, las primeras dos se desarrollan sobre una situación problemática en la que se debe determinar el sistema de ecuaciones lineales asociado. La tercera propuesta procura la formulación de situaciones de interés para los estudiantes, asociadas a modelos consistentes en sistemas de ecuaciones. En la cuarta actividad se dan a conocer situaciones que se modelan exponencialmente. En las siguientes cuatro actividades se aplican modelos exponenciales, logarítmicos y de raíces cuadradas para resolver problemas, en algunos casos graficándolas y respondiendo preguntas sobre dichas situaciones. Respecto a la actividad de evaluación se plantea un ejemplo basado en el aprendizaje esperado número cinco, en donde se ordena de la siguiente forma: • Aprendizaje esperado • Indicadores de evaluación • Situación • Ejercicio • Criterios de evaluación

Analizando los cuadros síntesis de los Programas de Estudio, es necesario comenzar señalando la forma en cómo se exponen y se tratan los contenidos de los mencionados programas. En este sentido se recalca la importancia de los Aprendizajes Esperados como base y eje primordial de cada unidad de aprendizaje, donde cada uno de ellos actúa como guía para el docente, de modo que a medida que avanza la unidad, contribuyen al logro de los propósitos de las unidades, es decir, son la principal herramienta que entrega el programa para la planificación y ejecución de las unidades de aprendizaje, en conjunto con las propuestas de actividades. Estableciendo en la parte anexa del programa de estudio la relación de los aprendizajes esperados con los objetivos fundamentales y los contenidos mínimos obligatorios.

Situándonos en el aprendizaje esperado número seis *“Resolver problemas asociados a situaciones cuyos modelos son ecuaciones literales de primer grado*” (Ministerio de Educación, 2010, p. 41), se puede observar la falta de exactitud al no determinar la cantidad de incógnitas o variables, que deben poseer las ecuaciones literales de primer grado. Por tanto queda en manos del docente verificar la cantidad de variables con la que debe culminar la unidad. Respecto a éste aprendizaje se generan numerosas dificultades, ya sean de la complejidad del objeto matemático en estudio (ecuaciones lineales), dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático, relacionado a la naturaleza lógica de la resolución de ecuaciones lineales y sus rupturas en relación con los modos de pensamiento, ya que “*en la práctica priman argumentaciones de tipo pragmáticas mezcladas con frases o ideas de tipo descriptivo” (Olfos, s.f.),* dejando de lado los argumentos lógico formales. Asimismo cabe señalar la dificultad propia del desarrollo cognitivo de cada alumno, entendiéndose que la resolución de problemas con enunciado en lenguaje natural involucra en una de sus partes un proceso muy complejo, llamado traducción, según Olazábal *“el proceso de traducción constituye una etapa primordial en el planteamiento y resolución de los problemas matemáticos contextualizados”* (2005, p.6), por lo que el alumno debe realizar la construcción de un modelo mental específico, que propicie el modelo del problema y plantear la o las ecuaciones adecuadas. A partir de lo dicho, el aprendizaje esperado debiese promover el proceso de traducción como parte importante de resolución de ecuaciones de primer grado con enunciado en lenguaje natural. A su vez existen dificultades no directamente asociadas al aprendizaje esperado, las que se desprenden desde la experiencia de aprendizaje y que de igual modo alteran el desarrollo de la potenciación de la resolución de problemas en ecuaciones lineales. Así, se tiene a los procesos de enseñanza de la resolución de problemas, puesto que frecuentemente como estrategia de enseñanza se utiliza el método que expone Sanjosé y cols., quienes lo denominan como Estrategia de transferencia en la enseñanza de resolución de problemas "*se resuelve y explica un conjunto de problemas y después se pide a los estudiantes que resuelvan otros problemas análogos a los ejemplos trabajados"* (2007, p.538). Finalmente las dificultades relacionadas a las conductas afectivas y emocionales hacia las matemáticas, tales como: temores, miedos, creencias, prejuicios, etc., que son transversales a todo contenido de esta disciplina.

Respecto al Aprendizaje Esperado de Segundo año medio, que se aproxima a esta investigación, "*Modelar y aplicar la función exponencial, raíz cuadrada y logarítmica en la resolución de problemas, y resolver problemas que involucren sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas*" (Ministerio de Educación, 2011, p. 48). El cual, para mayor entendimiento se podría dividir en dos partes, en una "Modelar y aplicar dichas funciones en la resolución de problemas" y en la segunda "Resolver problemas que involucren sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas". La segunda parte tendría directa relación con el presente estudio, por tanto, se considerará por sobre la primera. Teniendo en cuenta que la intencionalidad de éste aprendizaje esperado es promover la resolución de problemas, entonces se podría aludir a González (1999), quien plantea la importancia del proceso de resolución, que llega a través de la actividad mental del resolutor, en el que se ponen en juego los conocimientos matemáticos y la toma de decisiones comprendiendo las limitaciones y errores de dichas decisiones, y que finaliza cuando el resolutor encuentra la solución que da por acabada la situación. Dentro del proceso de resolución con enunciado Hegarty y cols. (1995), plantean al menos tres niveles a considerar; comprensión de la situación descrita en el enunciado, traducción del lenguaje natural al matemático y viceversa, y por último el manejo de las herramientas matemáticas necesarias (citado en Sanjosé y cols.). Con todo ello, y dentro del marco del primer nivel descrito, existen aspectos que no deben quedar relegados en la comprensión de un problema, como lo es la comprensión de su enunciado. En este sentido tenemos la teoría de Kintsch (1998; Kintsch y van Dijk, 1978; Kintsch y van Dijk, 1983), postulando sobre tres niveles de representación mental de un texto; nivel léxico, semántico y situacional. Pero además Kintsch y Greeno (1985), plantean un modelo mental específico de los problemas, el Modelo Problema (citado en Sanjosé y cols.). Las dificultades entonces, se pueden generar en las construcciones de modelos mentales no adecuados que impidan llegar al Modelo Problema y plantear las ecuaciones adecuadas. También en cada uno de los niveles del proceso de resolución.

Centrándose en la presentación de los contenidos es relevante resaltar que los indicadores de evaluación son un buen apoyo para el cumplimiento de los aprendizajes esperados, se aprecian por ejemplo en el programa de Primero medio, considerando la identificación, reconocimiento y modelización mediante ecuaciones literales. De estos tres aspectos quizás el principal es la modelización, que según Olazabal (2005), *"el conflicto determinante consiste en hallar el modelo matemático que le permita plantear el problema*" (p. 11), se sabe en este caso que el modelo matemático debe ser una ecuación lineal, dando como función al alumno conseguir la ecuación que resuelva la situación.

Al relacionar los aprendizajes esperados con los Objetivos Fundamentales Transversales, en ambos programas se considera la originalidad, perseverancia, el rigor y la flexibilidad como características para alcanzar el aprendizaje que según Pólya (1957; Newel y Simon, 1972; Larkin y Reif, 1979), *"la resolución de problemas es una de las tareas más creativas, exigentes e interesantes para la mente humana (…)"* (citado en Sanjosé y cols.).

Considerando las habilidades involucradas en relación al Programa de Primer año medio, tenemos que la capacidad de resolución de problemas como capacidad fundamental se genera a partir de las capacidades específicas como analizar, que se desarrolla en dicho programa; "*analizar estrategias de resolución de problemas de acuerdo con criterios definidos"* con un rasgo característico de reflexión lógica.

Además se encuentran las siguientes habilidades; *“Fundamentar opiniones y tomar decisiones*” y *“Aplicar modelos lineales que representan la relación entre variables”,* donde la primera está relacionada con otras capacidades de orden superior que requieren del razonamiento y reflexión por parte del estudiante**,** entendiéndose ésta como la necesidad de “*hacer un análisis para escoger de entre muchas, la alternativa que nos parezca la más pertinente para lograr el resultado esperado”*(Ministerios de Educación, 2006, p.29). Lo cual también se puede relacionar con las capacidades específicas de evaluar, enjuiciar, juzgar y revisar, que poseen un rasgo característico de actuación adaptativa. De la misma forma ocurre con la segunda habilidad mencionada, que se vincula con el mismo rasgo característico de actuación adaptativa con la capacidad específica de aplicar. Respecto a la habilidad específica de la unidad “Resolver problemas mediante ecuaciones literales” relaciona todas las capacidades específicas con los rasgos a las que pertenecen a cada una ellas.

Las habilidades involucradas de Segundo año medio que son transversales a este nivel escolar, no se encuentra ninguna directamente relacionada con la solución de problemas, por lo tanto el papel primordial lo toma la habilidad desarrollad en la unidad, la cual se relaciona a todas las capacidades específicas de los rasgos.

CAPACIDAD FUNDAMENTAL	RASGOS	CAPACIDADES ESPECÍFICAS
SOLUCIÓN DE PROBLEMAS	Agudeza perceptiva	Identifica, descubre, observa...
	Reflexión lógica	Analiza, deduce, infiere, formula...
	Actuación adaptativa	Juzga, enjuicia, revisa, evalúa, utiliza, aplica...
	Discriminación selectiva	Clasifica, selecciona, compara, jerarquiza...
	Visión prospectiva	Anticipa, predice, imagina, intuye...
	Pensamiento estratégico	Extrapola, planifica, diseña, experimenta, organiza, elabora...
	Flexibilidad de pensamiento	Explora, adecúa, adapta, interpreta...
	Autonomía	Asume, discrepa...

(Tomado de Ministerio de Educación, 2006)

Respecto a las observaciones al docente en el programa de Primero, no existe ninguna que se refiera al aprendizaje esperado en cuestión, sin importar que la resolución de problemas es una de las habilidades más relevantes. Según Frías y cols. (2008), la resolución de problemas se entiende como *"el núcleo central de la actividad matemática debiendo ocupar un lugar importante en el aprendizaje de ésta disciplina, desde los niveles más básicos"*. Asimismo, ocurre con las orientaciones didácticas de la unidad del programa de Segundo medio, no se rescata ninguna sobre la resolución de problemas en sí, es decir, se manifiesta la falta de atención o prevención sobre las dificultades en el proceso de resolución, o también en la comprensión de los enunciados, pero se propone la resolución de sistemas de ecuaciones lineales como herramienta capaz de resolver situaciones de la vida cotidiana, con la invitación al docente de proponer problemas abiertos que impulsen a los estudiantes a encontrar soluciones más generales. Así, queda plasmada que no hay una clara intencionalidad por parte del currículo, de cumplir un rol de colaboración a las labores pedagógicas, sobre ésta temática.

En las propuestas de actividades referidas a Primero medio, se plantean tres, en la primera encontramos: *"Identifican situaciones cuyos modelos son ecuaciones literales de primer grado"* (Ministerio de Educación, 2010, p. 43), de la cual se puede desprender un punto de partida para el desarrollo del aprendizaje esperado. En la segunda actividad *"resuelven problemas que involucran ecuaciones literales en contextos geométricos"* (Ministerio de Educación, 2010, p. 43), se exponen ejemplos de problemas que buscan el desarrollo en el registro algebraico matemático, sin embargo son sólo propuestas, donde el docente decidirá dejarlos dentro del marco de un mismo registro, o adaptarlos a problemas con enunciado en lenguaje habitual, por tanto debiese desarrollarse el proceso de traducción. Por último en la tercera actividad *"resuelven problemas relativos a la velocidad del sonido"* (Ministerio de Educación, 2010, p. 43), de manera que la condición es posible traducirla tras conocer el concepto de sonido y su modelo matemático.

Las propuestas de actividades representadas en el Programa de Segundo año medio, son ocho en total. Las primeras tres son aproximadas al presente estudio, la primera actividad “determinan los sistemas de ecuaciones lineales asociados a situaciones en diversos contextos” (Ministerio de Educación, 2011, p. 57), de acuerdo a ésta el planteamiento correcto de las ecuaciones que modelen la situación seria el conflicto a superar por los estudiantes, es decir se centra en el proceso de traducción. La segunda actividad se debe realizar considerando la primera, pues se pide analizar los resultados en función del problema y respondiendo preguntas sobre el punto de intersección de las grafica e interpretaciones. Se sugiere se propongan situaciones de la vida cotidiana, como problemas de comparación de insumos básicos. Por último en la tercera actividad se plantea la formulación de situaciones problemáticas, es decir, la generación de enunciados asociadas a sistemas de ecuaciones. Este tipo de situaciones de aprendizaje, son útiles para que el estudiante descubra estos procesos, los asimile y pueda transferirlos a cualquier otra situación problemática (Ministerio de Educación, 2006).

Enfatizando en las actividades de evaluación se deja en claro la estructura a seguir para el docente, no obstante en ambos programas se señala un ejemplo del aprendizaje esperado número cinco, en el caso de Primer año medio es; *“realizar composiciones de funciones y establecer algunas propiedades algebraicas de esta operación”* (Ministerio de Educación, 2010, p. 44). En el caso del Segundo año medio el aprendizaje esperado es: “Establecer estrategias para operar fracciones algebraicas simples, con binomios en el numerados y en el denominados, y determinar los valores que indefinen estas expresiones” (Ministerio de Educación, 2011, p. 60), por lo que queda en evidencia la carencia de herramientas, para promover el logro de los aprendizajes esperados a los cuales hace referencia el estudio.

En relación a la organización temporal es pertinente mencionar que se mantiene la unidad “Álgebra” en ambos programas, comprensiblemente varían los

Aprendizajes Esperados. Respecto a la unidad de Primer año medio, es la que posee menor cantidad de aprendizajes esperados, con sólo 6, la cual es la segunda más duradera en el tiempo (70 horas), es decir, sólo está precedida por las 80 horas estimadas a la cuarta y última unidad sugerida; “Datos y Azar”. De acuerdo a la unidad del aprendizaje esperado de Segundo año medio, posee una mayor estimación de tiempo (80 horas) que el resto de las unidades; a pesar de ser la que tiene menos cantidad de Aprendizajes Esperados. Por tanto se puede inferir la importancia de dichas unidades de aprendizaje en ambos programas, durante el año escolar.

4.3. Análisis de los textos de estudio

Se procede con las mismas categorías utilizadas que el programa de estudios. Los siguientes cuadros sintetizan lo observado:

Texto para el estudiante Matemática Primer año medio

Autores: Ortiz, A. Reyes, C. Valenzuela, M. Chandía, E. Editorial; Mc Graw Hill, año 2010.

Título: Matemática 1er año medio, texto para el estudiante. Edición especial para el Ministerio de Educación.

Medio del que se ha extraído: Ejemplar impreso.

CATEGORÍAS	SÍNTESIS
PRESENTACIÓN DEL CONTENIDO	Al igual que el programa de estudio las unidades se dividen en cuatro áreas, las cuales son: Números, Álgebra, Geometría y Datos y azar. El formato en que se presentan los contenidos contempla un inicio de la unidad, desarrollo de los contenidos y cierre de la unidad. Referente a los contenidos relacionados directamente al estudio, estos se encuentran en la segunda unidad denominada “Igualdades y ecuaciones” Comienza con un ejemplo introductorio para explicar el concepto de igualdades de expresiones algebraicas. Asimismo en la explicación existe un recuadro llamado

	"Recuerda", al que se integra más adelante un recuadro nombrado "Investiga", el que propone indagar al estudiante en base a su iniciativa. A continuación se presentan actividades (ejercicios), luego se señalan unos problemas resueltos, los cuales disponen de una metodología que se complementan con actividades de aplicación. A lo largo del contenido se puede encontrar "información en los medios", que es un extracto de información que confieren los medios de comunicación, el cual se comprende con la ayuda del mismo contenido en sí. Finalmente se observa una sección llamada "aplicando lo aprendido", esta posee ejercicios y problemas para profundizar y aplicar los conocimientos que se han adquirido durante la enseñanza del contenido.
ORGANIZACIÓN TEMPORAL DEL CONTENIDO	La unidad Álgebra es la segunda de un total de cuatro. El contenido relacionado con la investigación se ubica en el cuarto punto de un total de dieciocho, por tanto dispone la mayor cantidad de contenidos a estudiar durante el periodo escolar.
HABILIDADES INVOLUCRADAS	Las habilidades se encuentran expuestas respecto a la unidad Álgebra, de forma transversal, por lo que se deben sintetizar de acuerdo al contenido de estudio. • Representar situaciones que involucren cantidades variables. • Resolver ecuaciones de primer grado con coeficientes numéricos y literales.
PROPUESTA DE ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE Y EVALUACIÓN	Se presentan como actividades de aprendizaje la comparación entre una igualdad y un espejo, donde se explica un ejemplo de una formula física y sus despejes a las variables. Se observan actividades en la que se plantean igualdades y se pide despejar alguna variable. También encontramos problemas resueltos que muestran la resolución algebraica con explicaciones, entregando un método de resolución, a través de estos se adjuntan actividades con la intencionalidad de usar el mismo método de resolver los problemas planteados en éstas últimas. Asimismo como propuesta de actividad se expone la "información de los medios", que aborda una temática que puede ser entendida con la ayuda de las ecuaciones lineales, que adjunta sus actividades de aplicación. En relación a las actividades de evaluación se encuentran al final del contenido, y ponen a prueba los conocimientos que

	se han adquirido durante el contenido de la unidad, por medio de ejercicios en donde se relaciona una balanza con una ecuación, resolución de ecuaciones, despeje de formulas y resolución de problemas.

Texto para el estudiante Matemática Segundo año medio

Autor: Cid, Eduardo. Editorial; Cal y Canto, 2006.

Título: Matemática 2° Medio. Texto para el estudiante. Edición especial para Ministerio de Educación, 2008 – 2009.

Medio del que se ha extraído: Ejemplar impreso.

CATEGORÍAS	SÍNTESIS
PRESENTACIÓN DEL CONTENIDO	En este caso el texto de estudio se divide en tres unidades: • Unidad uno: Álgebra y funciones • Unidad dos: Geometría • Unidad tres: Probabilidades Las unidades se dividen en capítulos, y estos últimos en contenidos. En la primera unidad se encuentra el contenido relacionado al estudio; llamado “Sistemas de ecuaciones”, y se halla en el tercer capítulo. Dicho capítulo comienza con su presentación, señalando los aprendizajes esperados y los contenidos que se desarrollarán durante éste. Se inicia con una introducción, que trata sobre la intersección de funciones (lineal y afín). Continúa con una sección donde se busca activar conocimientos previos, recordando y aplicando, en ejercicios y problemas lo aprendido en años anteriores. Tras ello se muestra la representación gráfica de un sistema de ecuaciones lineales, con dos ecuaciones y dos incógnitas (sistemas de 2x2), donde la solución del sistema es el punto de intersección de las gráficas, (en este caso existe la intersección). Luego, se proponen ejercicios de resolución de sistemas de ecuaciones lineales (2x2), seguido de ejercicios en los que dadas las graficas se expresan en estos sistemas. Más adelante, se dan a conocer tres métodos de resolución para los sistemas de ecuaciones lineales con 2 variables, de la siguiente manera; se da un ejemplo en el que se presenta un problema con enunciado en lengua habitual, el que se traduce a un sistema de ecuaciones lineales, que se resuelve utilizando el método respectivo. A estos ejemplos se le asocian

	actividades que consisten en problemas en lengua natural que se modelan a través de dichas ecuaciones y ejercicios de sistemas en los que se pide resolver mediante el método correspondiente. En las secciones finales se hallan; análisis de las soluciones de un sistema de ecuación lineal y un taller de profundización, las primeras muestran consideraciones generales entre la representación gráfica y la representación algebraica, además, de casos particulares de las constantes en un sistema de ecuación lineal, a esto se suman las propuestas de ejercicios de aplicación. Durante el capítulo se observan recuadros, uno es el "toma nota", en el que se destaca algún aspecto de relevancia, también tenemos el "para entretenerse" que propone resolver problemas, otro es el "Para saber más", que invita a profundizar los contenidos desarrollados por medio de software o paginas web de interés.
ORGANIZACIÓN TEMPORAL DEL CONTENIDO	La unidad Álgebra y Funciones es la primera de un total de tres siendo la más extensa con tres capítulos. El contenido relacionado con la investigación se ubica en el tercer capítulo.
HABILIDADES INVOLUCRADAS	Las habilidades se presentan para el capítulo en específico. • Resolver sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. • Graficar las rectas correspondientes sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. • Plantear y resolver problemas y desafíos que involucren sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. • Analizar la pertinencia de las soluciones. • Relacionar entre expresiones gráficas y algebraicas de los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.
PROPUESTA DE ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE Y EVALUACIÓN	Las actividades en un comienzo se presentan, con un repaso de ejercicios resueltos, resolución de ecuaciones lineales, pertenencia de puntos en rectas dadas, análisis de las pendientes, luego, se proponen actividades análogas a los ejercicios resueltos, todo ello con la finalidad de activar los conocimientos previos. Para continuar se proponen ejemplos resueltos, se da un sistema, el cual se explica su resolución paso a paso, operando con las ecuaciones se obtiene la ecuación principal, la cual facilita su representación gráfica con la obtención de su pendiente y el coeficiente de posición. Posteriormente, se proponen actividades en la que se debe resolver sistemas de ecuaciones, representando cada una de ellas, en su forma

	gráfica. De la misma manera se señalan cada uno de los métodos que propone el texto para resolver ecuaciones lineales (reducción, igualación y sustitución), con la excepción que se plantea un ejemplo de un problema con enunciado en lenguaje natural el que se modela en un sistema de ecuaciones de primer grado con dos variables, seguidamente se resuelve aplicando el respectivo método, y luego se plantean actividades debiendo utilizar el método correspondiente. Avanzado el capítulo se formulan actividades en las que no se pide la resolución del sistema, pues se determinan si poseen infinitas soluciones o no tienen, por lo que se debe analizar las constantes de ambas ecuaciones. Además, se observan actividades en las que deben completar esquemas con los conceptos clave del capítulo. Asimismo, se tienen actividades para profundizar en las que se resuelven sistemas con más de dos incógnitas; "*Resuelve los siguientes sistemas de 3x3".* (Cid, 2006, p.111) Otras actividades de aprendizaje se encuentran en los recuadros "Para entretenerse", los cuales plantean la resolución de problemas con enunciado en lenguaje habitual. Respecto a las actividades de evaluación, se plantea la completación de mapas conceptuales y de oraciones con conceptos claves del capítulo. Resolver sistemas mediante el método respectivo. Resolver problemas con enunciado por medio de sistemas. Representar un sistema dada la gráfica de las rectas, expresar ejemplos de sistemas con solución, infinitas soluciones, sin solución. La última parte de estas actividades consiste en determinar la alternativa correcta, con 30 ejercicios y problemas del contenido del capítulo.

Analizando los cuadros síntesis de los Textos de Estudio, se observa que en ambos textos se aborda la resolución de problemas con ejemplos resueltos, por lo que se puede extraer una estrategia de resolución por parte de cada uno de ellos.

Para esto se hace pertinente apoyarse en la teoría de Pólya para resolver problemas matemáticos, quien plantea en su primera fase: "Ante todo, el enunciado verbal del problema debe ser comprendido (…) poder separar las principales partes del problema, la incógnita, los datos, la condición (…) Si hay alguna figura relacionada al problema, debe dibujar la figura y destacar en ella la incógnita y los datos. Es necesario dar nombres a dichos elementos y por consiguiente introducir una notación adecuada (…) ¿Es posible satisfacer una condición?" (Pólya, 1965, p. 29).Polya al mencionar "introducir una notación adecuada", se puede inferir que se refiere al proceso de traducción. En tanto, en el texto de Primer año medio, dentro de los problemas resueltos, no se observa una separación organizada entre las principales partes del problema; incógnita, los datos y la condición, o un análisis previo de si la condición ¿es suficiente para determinar la incógnita? No existen estos tecnicismos, desde luego se muestran las partes del problema centrándose en la condición. En el caso del texto de Segundo año medio en la resolución de problemas que involucran sistemas de dichas ecuaciones, se plantean los datos y las incógnitas, pero no así la condición.

En la segunda fase Pólya postula que "(…) tenemos un plan cuando sabemos, al menos a 'grosso modo', qué cálculos, qué razonamientos o construcciones habremos de efectuar para determinar la incógnita" (Pólya, 1965, p. 30). En el caso de ambos texto de estudio, no se incita al estudiante para llegar al modelo matemático que represente el planteamiento, puesto que por lógica de la estructura de un libro de estudio (unidades, capítulos, contenidos), el problema se resolverá con el contenido que se está enseñando, lo que genera que el individuo no desarrolle un pensamiento lógico matemático de las situaciones problemáticas, para establecer las relaciones entre el problema y su representación matemática.

En la tercera etapa de "ejecución del plan" se desarrolla lo que se concibió en la etapa anterior, es decir, se inicia con la idea asegurándose que cada paso esté correcto. En el libro correspondiente a Primer año medio se señala paso a paso los desarrollos matemáticos, como el inverso aditivo, inverso multiplicativo, reducción de términos semejantes, etc. que se ejecutan en la ecuación lineal para así llegar a la solución. De la misma forma, en el texto de Segundo año medio, se va explicando y revisando cada paso de desarrollo, utilizando el método respectivo de resolución para sistemas de ecuaciones lineales.

En la última etapa (visión retrospectiva) es importante una vez que se resuelve el problema, considerar que siempre hay un aprendizaje para analizar lo que se desarrolló. El mismo problema puede ser útil en otro. Respecto al texto de Primer año, no hay verificación del resultado ni un estímulo para obtenerlo en forma diferente, alguna propuesta para emplear la solución o el método utilizado a otro problema. En cambio en el texto de estudio de Segundo año medio se puede ver una invitación a resolver el problema de una manera diferente, no obstante no se suele verificar el resultado y el razonamiento. En ambos textos se procede a emplear el método con distintos problemas que se plantean como actividades de aplicación.

Según lo mencionado sobre los textos de estudio, se puede afirmar que se encuentran en desventaja, especialmente la segunda fase, puesto que el pensamiento del estudiante para llegar al modelo matemático que se representa en el planteamiento, no ocurre en toda su expresión, porque el individuo conoce de antemano el modelo del planteamiento matemático de acuerdo a la estructura de los contenidos en los textos de estudio, es decir, si el capítulo consiste en representar los problemas con sistemas de ecuaciones lineales, el alumno se predispone a tratar de modelarlo "mecánicamente". Un punto en contra es la verificación de los resultados o métodos de solución, ya que el mismo problema puede ser útil por el razonamiento que llevó a los resultados, además puede haber una forma más practica o un método más eficiente de llegar a la solución, al respecto Pólya afirma que: "*Reconsiderando la solución, rexaminando el resultado y el camino que les condujo a ella, podrían consolidar sus conocimientos y desarrollar sus aptitudes para resolver problemas"* (1965, p.35).

CONCLUSIONES:

Es posible resolver una gran cantidad de problemas utilizando ecuaciones de primer grado con una y dos variables. Por ello, el estudio realizado se describió la directa relación que existe entre este tipo de ecuaciones y las dificultades que presentan los estudiantes, en la resolución de problemas que involucran este objeto matemático y específicamente todo aquello que concierne al proceso de traducción del lenguaje natural con que se expresan los enunciados, al lenguaje algebraico en el que se representan matemáticamente.

Tras la evidencia empírica se deja en claro el conflicto que presentan los estudiantes al enfrentarse a un problema. En su análisis, se puede determinar que resolver un problema resulta de mayor complejidad en comparación a resolver un ejercicio, pues se encuentran con dificultades para expresar en lenguaje matemático las relaciones, ideas, datos del enunciado, es decir, el conflicto determinante es hallar el modelo matemático que permita plantear el problema; “traducir el problema”. Otro atenuante que se observó en la evidencia es que los estudiantes no resuelven los problemas a través de ecuaciones lineales, aunque el acuerdo con el profesor haya sido resolver por medio de éstas.

Además de la evidencia empírica, se encontró que la fundamentación de las dificultades en el proceso de traducción del lenguaje natural al algebraico en la resolución de problemas que involucran ecuaciones lineales con una y dos variables, viene dada desde los ámbitos teórico, didáctico y matemático.

En el ámbito teórico se manifiesta que podemos encontrar dificultades desde factores extrínsecos del estudiante como; las creencias, el docente, la enseñanza, la sociedad, etc. También factores intrínsecos, tales como: la motivación, capacidad cognitiva, la actitud, etc. Y además factores originados por el propio dominio de estudio; las matemáticas, como son; signos, objetos matemáticos, sistemas numéricos, etc. Desarrollar dificultades, obstáculos y errores en matemáticas, va de la mano con el aprendizaje de esta disciplina.

En la teoría se reconoce que resolver problemas es el núcleo central de la actividad matemática, en la educación no se aprecia la misma distinción, puesto que en el currículo, ya sean Programas y Textos de estudio no existe una organización clara desde la perspectiva de la resolución de problemas.

Respecto al análisis de los programas de estudio de primero y segundo año medio se tiene que la resolución de problemas no actúa como eje central en el desarrollo de las unidades, ni tampoco ocupa un lugar importante en la aplicación de los contenidos de estas. Presenta orientaciones didácticas, pero no específicamente relacionadas con la temática de estudio.

En las observaciones de los textos de estudio de los sectores involucrados en la investigación, la metodología predominante es platear un ejemplo resuelto y proponer actividades análogas a éstos. En cuanto a los problemas resueltos, al contrastarlo con el método de los cuatro pasos que plantea Pólya, quedan al debe, puesto que se omiten partes fundamentales de la resolución, impidiendo el desarrollo de actitudes para la resolución de problemas

La resolución de problemas en un contexto de ecuaciones lineales con una y dos variables, se identifica por un proceso que requiere de al menos tres etapas, cada una de los cuales puede presentar dificultades: comprensión de la situación del enunciado a un nivel concreto no abstracto, traducción de la situación del lenguaje natural al matemático y viceversa, y por último el conocimiento matemático para resolver. Sin embargo, específicamente en el segundo nivel encontramos el proceso de traducción, como una condición necesaria, pero no ajena a conflictos, pues no sólo consiste en representar con símbolos los conceptos matemáticos, sino que también requiere del pensamiento lógico matemático, para establecer las relaciones entre las representaciones mentales y su correspondiente representación matemática. En ella, se tiene a la construcción de modelos mentales deficientes que impiden llegar al Modelo Problema (modelo mental propio de los problemas matemáticos) y plantear las ecuaciones adecuadas. En consecuencia en el proceso de traducción encontramos dificultades según el enunciado que estemos trabajando, además éste proceso considera elementos claves como; conceptos, situaciones, objetos, abstracciones, fenómenos y el problema en particular.

En el ámbito didáctico, se describen los registros de representación semióticos con el uso de signos como medio, para exteriorizar representaciones mentales, siendo necesarias para el desarrollo de la actividad matemática y para la comunicación. Los estudiantes no reconocen el mismo objeto a través de las representaciones que se dan en sistemas semióticos diferentes. De otra forma, la incongruencia entre registros provoca conflictos en los aprendices.

En el ámbito matemático, se expone la falta de formalidad en el sistema numérico de los números reales y la ausencia en la comprensión de la relación de igualdad. Los estudiantes no tienen claridad sobre la validez de la lógica de justificación que utilizan en los procedimientos de resolución de ecuaciones lineales. Esto ocurre debido a que los alumnos no poseen el conocimiento o comprensión que les permita justificar.

Se conviene en que la resolución de problemas debe ocupar un lugar importante desde los niveles básicos de la educación escolar, por ser una de las tareas más creativas, exigentes e interesantes para la mente de las personas.

Desde la práctica pedagógica se aprecian dificultades de tipos intrínsecas y extrínsecas, dentro de las primeras tenemos dos grandes tipos las dificultades, de tipo cognitivo, y las de tipo afectivo. El dominio de contenidos previos y la comprensión lectora, resaltan en las observaciones de tipo cognitivo. El miedo hacia las matemáticas, la escasa motivación y trabajar sin esforzarse, sobresalen en las de tipo afectivo. En cuanto a las dificultades extrínsecas, dicen relación con la metodología docente y al contexto en el que se aprende, en las primeras se valoran la falta de contextualización con la realidad que tienen los alumnos, las segundas desprenden la falta de apoyo desde los textos y programas de estudio.

También están las categorías emergentes referidas al origen de las dificultades, tanto en el aspecto cognitivo como afectivo. De las cuales, principalmente se reconoce un cambio abrupto desde la Enseñanza Básica a la Enseñanza Media, en distintos puntos, como ausencia de habilidades y destrezas básicas, hasta la falta de estrategias para resolver problemas.

Finalmente, los docentes en la práctica pedagógica no validan los programas y textos de estudio como verdadero apoyo en su labor, mas bien existe la creencia que como contenidos mínimos obligatorios pretenden más de lo alcanzable para el proceso de enseñanza – aprendizaje del año escolar. El tiempo y la cantidad de contenido se muestran como factores que juegan en contra de la enseñanza en los establecimientos.

Las creencias que postula Schoenfeld sobre las matemáticas están relacionadas con las dificultades que encontramos en el análisis de la práctica pedagógica, donde se aprecia una baja disposición para trabajar en matemáticas, o la creencia de que las matemáticas que se aprenden en la escuela tienen poco y nada que ver con la realidad. De igual forma las dificultades que señala Socas, son parte de éstas; dificultades asociadas a los procesos de enseñanza, dificultades asociadas a los procesos de desarrollo cognitivo, dificultades asociadas a actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas.

La representación de un problema condiciona su codificación y almacenamiento en la memoria, por tanto, se debiese trabajar más en profundidad este aspecto dentro del dominio del aprendizaje de las matemáticas por medio de la resolución de problemas.

Respecto al objetivo general de la presenta investigación, se han logrado captar las dificultades que se presentan en el proceso de traducción, dando a conocer que éste proceso es primordial, pero no es suficiente para conseguir la resolución de un problema. Por consiguiente, a través de la investigación se encontraron aproximaciones a posibles soluciones. Desde luego, se conoció la literatura pertinente en los ámbitos teórico, matemático y didáctico, dejando en claro la importancia de las etapas que involucra la resolución de problemas y las dificultades que éstas conllevan. Respecto al análisis de los programas y textos de estudio, de uso actual, se desprende una síntesis en relación a la teoría, en la presentación de los contenidos, orientaciones didácticas, habilidades involucradas, ubicación temporal y las actividades que se proponen tanto para el aprendizaje y la evaluación. Asimismo, se observa un análisis de acuerdo a la teoría del método de los cuatro pasos, que a su vez se complementa con la evidencia de dificultades desde la práctica pedagógica, poniendo en jaque la forma de tratar los problemas por parte del currículo nacional.

Los resultados son aplicables en una enseñanza basada en la resolución de problemas en donde el estudiante descubra los procesos, los asimile y los transfiera a otras situaciones. Generando así un impacto positivo dentro del ambiente de aprendizaje.

Tras el estudio se proponen como principales recomendaciones:

Comprender que no existe siempre una relación directa en el traspaso del lenguaje natural al algebraico, a veces, se necesitará utilizar un registro de representación adicional, por lo que se podría estudiar el registro de representación gráfico.

Establecer una metodología transversal en el currículo para la resolución de problemas que involucran el objeto matemático estudiado.

Proponer una enseñanza desde el traspaso de los registros de representación algebraico al registro de representación del lenguaje natural.

Identificar la realidad a la que se enfrentan los docentes en las aulas, es decir, visitas de expertos para capacitar a docentes, para trabajar en conjunto temas como la motivación, el desinterés, y el desacuerdo de docentes con los tiempos en que se distribuyen los contenidos.

BIBLIOGRAFÍA:

Alfaro, C. (2006). Las ideas de Pólya en la Resolución de Problemas. Cuadernos de investigación y formación en educación matemática. Escuela de Matemática. Universidad Nacional.

Alonso, Luis Enrique. (1999). "Sujeto y discurso: el lugar de la entrevista abierta en las prácticas de la sociología cualitativa". En Delgado, Juan Manuel y Gutiérrez, Juan, editores. Métodos y Técnicas Cualitativas de Investigación en Ciencias sociales. España: Editorial Síntesis.

Barrantes, H. (2006). Resolución de Problemas. El trabajo de Allan Schoenfeld. Cuadernos de investigación y formación en educación matemática. Centro de Investigaciones Matemáticas y Meta-Matemáticas, UCR. Escuela de Ciencias Exactas y Naturales UNED.

Cid, E. (2007). Matemática 2° medio. Edición especial para el Ministerio de educación (2ª edición).Chile: Ediciones Cal y Canto.

Colaboradores de Wikipedia. Ecuación [en línea]. Wikipedia, La enciclopedia libre. Obtenida con fecha 23 de febrero del 2011, de http://es.wikipedia.org/wiki/Ecuaci%C3%B3n#Ecuaci.C3.B3n_Polinomial

Colaboradores de Wikipedia. Heurística [en línea]. Wikipedia, La enciclopedia libre. Obtenida con fecha 24 de febrero del 2011, de http://es.wikipedia.org/wiki/Heur%C3%ADstica

Colaboradores de Wikipedia. Heurística [en línea]. Wikipedia, La enciclopedia libre. Obtenida con fecha 24 de febrero del 2011, de http://es.wikipedia.org/wiki/Ecuaci%C3%B3n

Coll, C. (1990). "Un marco de referencia psicológico para la educación escolar: la concepción constructivista del aprendizaje y la enseñanza". En Coll, C., Palacios, J. y Marchesi, A. (Comp). Desarrollo Psicológico y Educación. Vl II. Madrid. Alianza.

Domínguez Cuenca, Ángeles (s.f.). Comprensión de la noción de variable algebraica por estudiantes universitarios.

Frías, M.; Radbil, M. C.; Ubilla, D. (2008). 1° de Educación Matemática. Guía didáctica para el profesor. Edición especial para el Ministerio de Educación (1ªedición). Santiago Chile: Editorial F y F.

González, J. L. (2009). Resolución de problemas. Diferentes clases y métodos de resolución. Planificación, gestión de los recursos, representación, interpretación y valoración de los resultados. Estrategias de intervención educativa. Curso CEP Ceuta, UMA. Universidad de Málaga.

Hernández, Roberto; Fernández, Carlos y Baptista, Pilar (2006). Metodología de la Investigación (4ª edición). México: Mac Graw Hill. P. 8- 9.

La Tercera. (2011). OCDE revela informe con las principales fallas del sistema educativo chileno. Obtenida con fecha 09de Abril del 2011, de http://www.latercera.com/noticia/educacion/2011/04/657-357009-9-ocde-revela-informe-con-las-principales-fallas-del-sistema-educativo-chileno.shtml

Martínez Z., Irene (s.f.). Inteligencias Múltiples. Obtenido con fecha 16 de Febrero de 2011, de http://sepiensa.org.mx/contenidos/f_inteligen/f_intelimate/matem_1.htm

Ministerio de Educación. (2009). Objetivos fundamentales y contenidos mínimos obligatorios de la Educación Básica y Media. Santiago de Chile, diciembre 2009.

Ministerio de Educación. (2004). Matemática. Programa de Estudio, segundo año medio, Formación General. Santiago de Chile, diciembre 2004.

Ministerio de Educación. (2010). Matemática. Programa de Estudio primer año medio. Formación General. Santiago de Chile, diciembre 2010.

Ministerio de Educación. (2011). Matemática. Programa de Estudio segundo año medio. Formación General. Santiago de Chile, junio 2011.

Ministerio de Educación. (2007). Aspectos metodológicos en el aprendizaje del álgebra en secundaria. Serie 2 para docentes de Secundaria, Didáctica de la Matemática Fascículo 2. (1ª edición). Perú.

Ministerio de Educación. (2006). Guía para el desarrollo de la capacidad de Solución de Problemas (1ª edición). Perú.

Nieto, J. H. (2004). Resolución de problemas matemáticos. Talleres de formación matemática. Maracaibo.

Olazabal, A. (2005). Categorías en la traducción del lenguaje natural al algebraico de la matemática en contexto. Tesis de maestría. Instituto Politécnico Nacional Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, México.

Olfos, R. (s.f.). Lógica de justificación en la resolución de ecuaciones de primer grado. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Chile.

Ortiz, A., Reyes, C., Valenzuela, M., Chandía, E. (2010). Matemática 1° año medio. Texto para el estudiante. Edición especial para el Ministerio de Educación (1ª edición). Chile: McGraw-Hill Interamaricana.

Polya, G. (1953). Matemáticas y razonamiento plausible. Madrid: Editorial L Tecnos, S.A.

Polya, G. (1965). Como plantear y resolver problemas. Madrid: Editorial Trillas, México.

Rodríguez, J. G., Caraballo, A. L., Cruz, T., Hernández, O., (2000). Razonamiento matemático. Fundamentos y aplicaciones. (2ª edición). México. International Thomson Editores.

Sanjosé, V., Valenzuela, T., Fortes, M. y Solaz-Portolés, J. (2007) Dificultades algebraicas en la resolución de problemas por transferencia. Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias, Volumen 6, Nº3, 538-561.

Secretaria de Educación Jalisco, (2005). Guía de actividades para la preparación del examen de Admisión a las Escuelas Normales. (2ª edición). Guadalajara, Jalisco, México, febrero 2005.

Socas, M. (1997): "Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria", cap. 5., pp. 125-154, en RICO, L., y otros: La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria. Barcelona: Ed. Horsori.

Tomás Folch, Marina. (1990). Los problemas aritméticos de la enseñanza primaria. Estudio de dificultades y propuesta didáctica. Revista Educar 17, p.119-140.

United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization (UNESCO), (2010). Datos Mundiales de Educación (7ª edición).

ANEXOS

ANEXO 1. ENTREVISTA M1

Cuestionario base para entrevista 1 M1
Años de servicio: 13
Edad: 36
Género: femenino
Experiencia en 1° y 2° Medio: 13
Tipo de establecimiento (experiencia en 1° y 2° medio): particular subvencionado

Preguntas

1. ¿Qué tipo de dificultades en el aprendizaje de las matemáticas observa en estos cursos?

   Falta de dominio en contenidos previos, que se supone que se adquieren en la básica, como por ejemplo: operatoria básica en números reales.

2. ¿Reconoce dificultades específicas en la resolución de problemas?

   Si, por que no quieren tomarse la molestia de pensar, quieren tener el ejercicio resuelto y no pensar cómo se resuelve.

3. De manera más específica, ¿hay alguna dificultad particular referida a la **resolución de problemas que involucran ecuaciones lineales de una y dos incógnitas**?

   La mayor dificultad la tienen cuando deben representar un problema que aparentemente tiene más de una incógnita, pero en realidad es una sola, por ejemplo " la mama tiene el doble de la edad de la hija mayor, y a la vez la hija mayor el triple de…"

   En relación a este problema en particular:

4. ¿De qué forma los textos de estudio en uso, a su juicio, ayudan u obstaculizan al estudiante para superar esas dificultades?

   No ayudan mucho ni tampoco obstaculizan, sino que uno debe recurrir a sus propias guías.

5. ¿Observa alguna dificultad con respecto a esta temática particular relacionada con los programas de estudio?

   No, pero si creo que los programas pretenden mucho como “contenidos mínimos”, para la realidad que uno tiene en el liceo y como recibe a los alumnos que vienen de otras escuelas y llegan a primero medio.

6. ¿Podría señalar que dificultades Ud. relacionaría con el desarrollo cognitivo de los estudiantes?

   Los alumnos para empezar no tienen hábitos de estudios, la base que traen es deficiente, y además tienen el lema de trabajar con el mínimo esfuerzo.

7. ¿Podría señalar que dificultades Ud. relacionaría con el desarrollo afectivo de los estudiantes?

   La mayoría recibe poco apoyo de sus padres, por lo tanto, creen que sus padres están sólo cuando los tienen que retar. No reciben un estímulo de positivo cuando hacen algo bien.

8. En relación al docente ¿reconoce Ud. alguna dificultad relacionada con la metodología de enseñanza?

   Falta de mayor contextualización con la realidad de tienen hoy los alumnos en algunos contenidos, carencia de cursos en distintos tipos de evaluación.

9. En relación al contexto ¿reconoce Ud. dificultades relacionadas con el ambiente social y cultural del estudiante?

   Creo que las dificultades de aprendizaje siempre se han manifestado con mayor intensidad en estratos bajos, que es el tipo de alumnos que tenemos en el liceo que trabajo.

10. ¿Qué agregaría en relación a esta problemática?

Que siempre todo cambio, debe realizarse de la básica o la pre-básica, para que el alumno al encontrarse con la realidad de la media no sea tan brusco el cambio.

ANEXO 2. ENTREVISTA H1

Entrevista 2. H1

El entrevistado solo devolvió las respuestas.

1.- las propias de los alumnos con problemas de aprendizaje.
2.- las relativas a comprensión lectora o de dislexia.
3.- la que se refiere al procedimiento o aplicación de algunmetodo de resolucion.
4.- obtaculizan en el sentido que no presentan un procedimiento detallado de la resolucion.
5.- no, los oprogramas de estudio consideran los aprendizajes de contenidos minims.
6.- alummnos con problemas de aprendizaje.
7.- alumnos con problemas de autoestima baja.
8.- las referidas a que consideren las conductas de entrada.
9.- escasa motivacion o perspectivas de estudios superiores.
10.- potenciar las habilidades y destrezas del alumno.

ANEXO 3. ENTREVISTA H2

Cuestionario base para entrevista H2
Años de servicio: 14
Edad: 38
Género: Masculino
Experiencia en 1° y 2° Medio: 10
Tipo de establecimiento (experiencia en 1° y 2° medio): Liceo Municipal y Particular Subvencionado

Preguntas

1. ¿Qué tipo de dificultades en el aprendizaje de las matemáticas observa en estos cursos?

   Complejidades referentes al traspaso de la aritmética al algebra. De la costumbre de sólo trabajar con las cuatro operaciones básicas, a símbolos abstractos como las variables.

2. ¿Reconoce dificultades específicas en la resolución de problemas?

   Si en la comprensión de los enunciados, fundamentalmente en el proceso de modelizar
   matemáticamente el problema. Por ejemplo "solo saben trabajar con un método de resolución porque está dentro del contrato didáctico", me refiero que si estamos trabajando con probabilidades saben que ocuparan la fórmula de Bayes de casos favorables entre casos totales, etc.

3. De manera más específica, ¿hay alguna dificultad particular referida a la **resolución de problemas que involucran ecuaciones lineales de una y dos incógnitas**?

   Si sobre todo hay dificultad cuando son variables dependientes, o que no saben que ciertas palabras como por ejemplo aumenta inmediatamente tienen un significado en la simbología matemática a desarrollar.

   En relación a este problema en particular:

4. ¿De qué forma los textos de estudio en uso, a su juicio, ayudan u obstaculizan al estudiante para superar esas dificultades?

   A mi juicio los textos de estudio no profundizan por ejemplo la parte formal de las matemáticas, en cuanto a su buen dominio en el lenguaje formal

5. ¿Observa alguna dificultad con respecto a esta temática particular relacionada con los programas de estudio?

   Si en los programas no se trata a la resolución de problemas como el eje central de las unidades, siendo esta una posibilidad para saber que domina el estudiante y en que le hace falta profundizar, además la resolución de problemas es una buena oportunidad en matemáticas para hacer trabajar grupalmente al curso.

6. ¿Podría señalar que dificultades Ud. relacionaría con el desarrollo cognitivo de los estudiantes?

   Principalmente las dificultades de representación de los enunciados o datos de este, en el álgebra matemática. No se conciben como llegar de una frase o palabra a una expresión algebraica.

7. ¿Podría señalar que dificultades Ud. relacionaría con el desarrollo afectivo de los estudiantes?

   Los estudiantes repiten con mucha frecuencia que ellos son negados para la matemática, incluso cuando se les pregunta alguna cosa te responden de inmediato "profe yo con las matemáticas no puedo soy negado"

8. En relación al docente ¿reconoce Ud. alguna dificultad relacionada con la metodología de enseñanza?

   Si pienso que en el nivel de Enseñanza Básica debería haber profesores especialistas en matemática. De forma que ya en primero medio vengan con algunas habilidades y destrezas básicas para el desarrollo de las matemáticas.

9. En relación al contexto ¿reconoce Ud. dificultades relacionadas con el ambiente social y cultural del estudiante?

   De todas maneras, están los estudiantes constantemente preguntando "profe para que me sirve esto si yo no voy a ir a la universidad", por lo mismo constantemente hay que estar motivándolos.

10. ¿Qué agregaría en relación a esta problemática?

Creo que la resolución de problemas debe ser una de las experiencias más difíciles que afronta el estudiante durante su etapa escolar, se nota el miedo que tienen los menos aventajados cuando se les pide resolver un problema, por lo general ni siquiera lo intentan. Por lo mismo para no generar una desmotivación ante un problema que parece que solo el docente puede dar la solución, se trabaja mucho con problemas parecidos entre sí para que por lo menos adquieran un plan a seguir con estos problemas.

ANEXO 4. ENTREVISTA M2

Cuestionario base para entrevista M2
Años de servicio: 3 años
Edad: 31 años
Género: Femenino
Experiencia en 1° y 2° Medio: 2 años
Tipo de establecimiento (experiencia en 1° y 2° medio): Liceos Municipales con alumnos en riesgo social.

1. ¿Qué tipo de dificultades en el aprendizaje de las matemáticas observa en estos cursos?

Muchos de los alumnos no son capaces de relacionar conceptos de la vida diaria con lenguaje matemático.
No intentan solucionar o simplificar las dificultades de un ejercicio.

2. ¿Reconoce dificultades específicas en la resolución de problemas?

Compresión lectora. No recurren a los conocimientos propios para resolver problemas.

3. De manera más específica, ¿hay alguna dificultad particular referida a la **resolución de problemas que involucran ecuaciones lineales de una y dos incógnitas**?

No asimilan el concepto de igualdad y de inversos.

4. En relación a este problema en particular: ¿De qué forma los textos de estudio en uso, a su juicio, ayudan u obstaculizan al estudiante para superar esas dificultades?

Con el intento de acercar los conceptos matemáticos a la vida diaria, muchas veces están dejando de lado los conceptos puros.

5. ¿Observa alguna dificultad con respecto a esta temática particular relacionada con los programas de estudio?

6. ¿Podría señalar que dificultades Ud. relacionaría con el desarrollo cognitivo de los estudiantes?

7. ¿Podría señalar que dificultades Ud. relacionaría con el desarrollo afectivo de los estudiantes?

8. En relación al docente ¿reconoce Ud. alguna dificultad Ud. relacionada con la metodología de enseñanza?

9. En relación al contexto ¿reconoce Ud. dificultades relacionadas con el ambiente social y cultural del estudiante?

10. ¿Qué agregaría en relación a esta problemática?

ANEXO 5. EVALUACIONES DIAGNÓSTICO

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA

"Ecuaciones lineales"

Género: Femenino.   Edad: 16

Curso: 3°   Colegio: Limache College

Instrucciones

Realice todos los desarrollos en la hoja, incluso los cálculos.

1. Resuelva las siguientes ecuaciones lineales.

a) $2(x-1) = 3(x+2) - 5(x+3)$ b) $\frac{1}{x} + \frac{3}{2x} = \frac{1}{3x} + \frac{13}{12}$

$2x - 1 = 3x + 6 - 5x + 15$

$2x - 3x + 5x = 1 + 6 + 15$

$2x - 3x + 5x = 22$

$7x = 22 \quad /:7$

$x = \frac{22}{7}$

$\boxed{x = 3{,}1}$

2. Resuelva los siguientes problemas.
   a) Dividir el número 600 en tres partes, tales que la segunda exceda la primera en 25 y la tercera exceda a la segunda en 50.

$115 + 225 + 260 = 600$

b) La suma de tres números impares consecutivos es 297. ¿Cuál es el doble del mayor?

$$x + x + x = 297$$

$$3x = 297$$

$$x = \frac{297}{3}$$

$$\boxed{x = 99}$$

c) Hace 6 años la edad de un hijo era un quinto la edad de su padre, dentro de 9 años la edad del hijo será los dos quintos de la de su padre. Determinar las edades actuales.

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA

"Ecuaciones lineales"

Género: MASCULINO Edad: 16 AÑOS

Curso: 3°1 A Colegio: Lim Collego

Instrucciones

Realice todos los desarrollos en la hoja, incluso los cálculos.

1. Resuelva las siguientes ecuaciones lineales.

a) $2(x-1) = 3(x+2) - 5(x+3)$

$2x - 2 = 3x + 6 - 5x - 15$

$2x - 3x + 5x = 2 + 6 - 15$

$4x = -7$

$x = -\frac{7}{4}$

b) $\frac{1}{x} + \frac{3}{2x} = \frac{1}{3x} + \frac{13}{12}$

$\frac{1}{x} \quad \frac{3}{2x} =$

$\frac{1+3}{2x}$

$\frac{4}{2x} = \frac{2}{x} - \frac{1}{3x}$

$\frac{2-1}{3x}$ $\boxed{\frac{1}{3x} = \frac{13}{12}}$

$\frac{1}{3x}$ -1

$3x^{-1} = \frac{12}{13}$

$x = \frac{\frac{12}{13}}{3}$

$\boxed{x^{-1} = \frac{\frac{12}{13}}{3^{-1}}}$

2. Resuelva los siguientes problemas.

a) Dividir el número 600 en tres partes, tales que la segunda exceda la primera en 25 y la tercera exceda a la segunda en 50.

1) $\frac{800}{3}$ 2) $\frac{875}{3}$ 3) $\frac{1025}{3}$

$\boxed{\begin{matrix} 266,\overline{6} \\ 291,\overline{6} \\ 341,\overline{6} \end{matrix}}$ //

$\boxed{\begin{matrix} \frac{800}{3} \\ \frac{875}{3} \\ \frac{1025}{3} \end{matrix}}$

798

1025

100
125
375
6

100
125
175
406

500 : 3 = 1,66

100 125

166,6

291,6 750

1023

190
205

20
20

0 6

b) La suma de tres números impares consecutivos es 297. ¿Cuál es el doble del mayor?

97, 99, 101 doble del mayor = 202

c) Hace 6 años la edad de un hijo era un quinto la edad de su padre, dentro de 9 años la edad del hijo será los ~~dos~~ quintos de la de su padre. Determinar las edades actuales.

30 AÑOS 75 AÑOS

15

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA

"Ecuaciones lineales"

Género: Masculino   Edad: 16

Curso: 3°/2 A   Colegio: Limache college.

Instrucciones

Realice todos los desarrollos en la hoja, incluso los cálculos.

1. Resuelva las siguientes ecuaciones lineales:

a) $2(x-1) = 3(x+2) - 5(x+3)$

$2(x-1) = \cancel{2}\ \cancel{(x+5)}$

$\cancel{(x+4)}x$

$\cancel{4x}$

$2x-2 = 3x+6-5x-15$

$2x-3x = 6+2-15$

$4x = -7$

$\boxed{x = \frac{-7}{4}}$

b) $\frac{1}{x} + \frac{3}{2x} = \frac{1}{3x} + \frac{13}{12}$

$\frac{1}{x} + \frac{3}{2x} =$

$\frac{1+3}{2x}$

$\frac{4}{2x} = \frac{2}{x}$ $-\frac{1}{3x}$

$\frac{2-1}{3x} = \boxed{\frac{1}{3x} = \frac{13}{12}}$

$x^{-1} = \frac{\frac{12}{13}}{3-1}$

2. Resuelva los siguientes problemas.
   a) Dividir el número 600 en tres partes, tales que la segunda exceda la primera en 25 y la tercera exceda a la segunda en 50.

$600 : 3 = 200$

1°: ~~80~~   2°: ~~125~~   3°: ~~375~~

100   125   375

200   225

100
125
375
600

125
150
200
475

185   200   250

190   205   255

140   155   205

175
200
250
5

~~260~~
~~27~~

$\boxed{\begin{array}{l} 1.\ 800/3 \\ 2.\ \cancel{875}/3 \\ 3.\ 1025/3 \end{array}}$

~~185~~

190
205
255

140
155
205
500

b) La suma de tres números impares consecutivos es 297. ¿Cuál es el doble del mayor?

97 , 99 , 101 doble del mayor = 202

c) Hace 6 años la edad de un hijo era un quinto la edad de su padre, dentro de 9 años la edad del hijo será los dos quintos de la de su padre. Determinar las edades actuales.

30 años

75 años

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA

"Ecuaciones lineales"

Género: Masculino. Edad: 15 años

Curso: 3° A. Colegio: Limache college.

Instrucciones

Realice todos los desarrollos en la hoja, incluso los cálculos.

1. Resuelva las siguientes ecuaciones lineales.

a) $2(x-1) = 3(x+2) - 5(x+3)$

$2x + 2 = 3x + 6 - 5x - 15$

$2x - 3x + 5x = 6 - 15 - 2$

$4x = -11$

b) $\frac{1}{x} + \frac{3}{2x} = \frac{1}{3x} + \frac{13}{12}$

$\frac{5}{2x} = \frac{1}{3x} + \frac{13}{12}$

$-\frac{1}{3x} + \frac{5}{2x} = \frac{13}{12}$

$\frac{2+15}{6x} = \frac{13}{12}$

$\frac{17}{6x} = \frac{13}{12}$

2. Resuelva los siguientes problemas.
   a) **Dividir el número 600 en tres partes, tales que la segunda exceda la primera en 25 y la tercera exceda a la segunda en 50.**

$600 : 3 = 200$

000

1era aceda en 25 a la primera oxeza

① 166,5

② 191,5

③ 242

b) La suma de tres números impares consecutivos es 297. ¿Cuál es el doble del mayor?

97
99
101
297

101 x2
202.

R: $\boxed{a\ 202.}$

c) Hace 6 años la edad de un hijo era un quinto la edad de su padre, dentro de 9 años la edad del hijo será los ~~dos~~ quintos de la de su padre. Determinar las edades actuales.

$$\frac{15 \to 2}{15 \to 5} = \frac{30}{75}$$

hijo = 30

Padre = 75.

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA

"Ecuaciones lineales"

Género: MASculino Edad: 16

Curso: 3ºA Colegio: Limache college

Instrucciones

Realice todos los desarrollos en la hoja, incluso los cálculos.

1. Resuelva las siguientes ecuaciones lineales.

a) $2(x-1) = 3(x+2) - 5(x+3)$ b) $\frac{1}{x} + \frac{3}{2x} = \frac{1}{3x} + \frac{13}{12}$

$2x - 2 = 3x + 6 - 5x - 15$

$2x - 3x + 5x = 6 - 15 + 2$

$4x = -7$

$x = \frac{-7}{4}$

2. Resuelva los siguientes problemas.
   a) Dividir el número 600 en tres partes, tales que la segunda exceda la primera en 25 y la tercera exceda a la segunda en 50.

1) 166,5
2) 191,5
3) 242

1) 169
194
244
607

166
192
242

1) 165
190
240
595

1) 170
195
245
610

2) 1) 167
192
242

2) 1) 166,5
191,5
242,0

b) La suma de tres números impares consecutivos es 297. ¿Cuál es el doble del mayor?

1) 97

2) 99

3) 101

$$\begin{array}{r} {}^{1}97 \\ {}^{1}99 \\ 101 \\ \hline 297 \end{array}$$

c) Hace 6 años la edad de un hijo era un quinto la edad de su padre, dentro de 9 años la edad del hijo será los ~~dos~~ quintos de la de su padre. Determinar las edades actuales.

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA

"Ecuaciones lineales"

Género: F

Edad: 16

Curso: 3° Medio.

Colegio: Limache College

Instrucciones

Realice todos los desarrollos en la hoja, incluso los cálculos.

1. Resuelva las siguientes ecuaciones lineales.

a) $2(x-1) = 3(x+2) - 5(x+3)$

$2x - 2 = 3x + 6 - 5x - 15$

$2x - 3x + 5x = 2 + 6 - 15$

$4x = -7$

$x = \frac{-7}{4}$

b) $\frac{1}{x} + \frac{3}{2x} = \frac{1}{3x} + \frac{13}{12}$

2. Resuelva los siguientes problemas.
   a) Dividir el número 600 en tres partes, tales que la segunda exceda la primera en 25 y la tercera exceda a la segunda en 50.

b) La suma de tres números impares consecutivos es 297. ¿Cuál es el doble del mayor?

$$X + X + X = 297$$
$$3x = 297$$
$$x = \frac{297}{3}$$
$$\boxed{x = 99}$$

98
99
100 → mayor
$\boxed{297}$

$100 \cdot 2 = \boxed{200}$ → doble del mayor.

c) Hace 6 años la edad de un hijo era un quinto la edad de su padre, dentro de 9 años la edad del hijo será los dos quintos de la de su padre. Determinar las edades actuales.

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA

"Ecuaciones lineales"

Género: MÁSCULINO

Edad: 15 años

Curso: 3° A

Colegio: Limache college

Instrucciones

Realice todos los desarrollos en la hoja, incluso los cálculos.

1. Resuelva las siguientes ecuaciones lineales.

a) $2(x-1) = 3(x+2) - 5(x+3)$

$2x - 2 = 3x + 6 - 5x + 15$

$2x - 2 = 3x - 5x + 6 + 15$

$2x - 2 = -2x + 21$

$2x + 2x = 2 + 21$

$4x = 23$

$x = \frac{23}{4}$

b) $\frac{1}{x} + \frac{3}{2x} = \frac{1}{3x} + \frac{13}{12}$

2. Resuelva los siguientes problemas.
   a) Dividir el número 600 en tres partes, tales que la segunda exceda la primera en 25 y la tercera exceda a la segunda en 50.

b) La suma de tres números impares consecutivos es 297. ¿Cuál es el doble del mayor?

c) Hace 6 años la edad de un hijo era un quinto la edad de su padre, dentro de 9 años la edad del hijo será los dos quintos de la de su padre. Determinar las edades actuales.

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA

"Ecuaciones lineales"

Género: M

Edad: 17

Curso: 3 A

Colegio: limache college

Instrucciones

Realice todos los desarrollos en la hoja, incluso los cálculos.

1. Resuelva las siguientes ecuaciones lineales.

a) $2(x-1) = 3(x+2) - 5(x+3)$

$2x-1-3x-6+5x+15=0$

$4x+7=0$

$4x=7$

$x=\frac{7}{4}$ //

b) $\frac{1}{x} + \frac{3}{2x} = \frac{1}{3x} + \frac{13}{12}$

$\frac{1}{1} + \frac{3}{2x} - \frac{1}{3x} = \frac{13}{12}$

$\cancel{\frac{17}{6x}} = \frac{13}{12}$ / $\cdot \frac{16}{13}$

$x = 2$

2. Resuelva los siguientes problemas.
   a) Dividir el número 600 en tres partes, tales que la segunda exceda la primera en 25 y la tercera exceda a la segunda en 50.

600

162, 192, 241

b) La suma de tres números impares consecutivos es 297. ¿Cuál es el doble del mayor?

$$\begin{array}{r} 97 \\ 99 \\ 101 \\ \hline 297 \end{array}$$

202

c) Hace 6 años la edad de un hijo era un quinto la edad de su padre, dentro de 9 años la edad del hijo será los dos quintos de la de su padre. Determinar las edades actuales.

$$6 - \frac{1}{5} - 9 - \frac{2}{5} = \frac{72}{5} = 14,$$

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA

"Ecuaciones lineales"

Género: Femenino Edad: 16 años.

Curso: 3 medio A Colegio: Limache College.

Instrucciones

Realice todos los desarrollos en la hoja, incluso los cálculos.

1. Resuelva las siguientes ecuaciones lineales.

a) $2(x-1) = 3(x+2) - 5(x+3)$

$2x - 2 = 3x + 6 - 5x - 15$

$2x - 3x + 5x = 6 - 15 + 2$

$4x = -7 \quad /4$

$x = \frac{-7}{4}$.

b) $\frac{1}{x} + \frac{3}{2x} = \frac{1}{3x} + \frac{13}{12}$

$\frac{12+18}{12x} = \frac{4+13}{12x}$

$\frac{30}{12x} = \frac{17}{12x}$

2. Resuelva los siguientes problemas.

a) Dividir el número 600 en tres partes, tales que la segunda exceda la primera en 25 y la tercera exceda a la segunda en 50.

$\frac{600}{3} = 200 \;/\; 200 \;/\; 200$

165 190 240

165
190
$\overline{355}$
240
$\overline{595}$

b) La suma de tres números impares consecutivos es 297. ¿Cuál es el doble del mayor?

$X + X + X = 297 : 3 = 99$

$97 + 99 + 101 = 297$

el doble del mayor es 202.

c) Hace 6 años la edad de un hijo era un quinto la edad de su padre, dentro de 9 años la edad del hijo será los dos quintos de la de su padre. Determinar las edades actuales.

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA

"Ecuaciones lineales"

Género: Femenino Edad: 15.

Curso: 3 1/2 A Colegio: Limache college.

Instrucciones

Realice todos los desarrollos en la hoja, incluso los cálculos.

1. Resuelva las siguientes ecuaciones lineales.

a) $2(x-1) = 3(x+2) - 5(x+3)$

$2x - 2 = 3x + 6 - 5x - 15$

$2x - 3x + 5x = 2 - 6 - 15$

$7x - 3x = 2 - 21$

$4x = -19 \ /:4$

$x = -\frac{19}{4}$

$x =$

b) $\frac{1}{x} + \frac{3}{2x} = \frac{1}{3x} + \frac{13}{12}$

$\frac{12+18}{12x} = \frac{4+13x}{12x}$

$\frac{30}{12x} = \frac{13x+4}{12x}$

2. Resuelva los siguientes problemas.
   a) Dividir el número 600 en tres partes, tales que la segunda exceda la primera en 25 y la tercera exceda a la segunda en 50.

$165 + 190 + 240 = 595$

b) La suma de tres números impares consecutivos es 297. ¿Cuál es el doble del mayor?

$X + X + X = 297 : 3 = 99$

27

$97 + 99 + 101 = 297$

$101 \cdot 2$

202

$\boxed{202}$

c) Hace 6 años la edad de un hijo era un quinto la edad de su padre, dentro de 9 años la edad del hijo será los ~~dos~~ quintos de la de su padre. Determinar las edades actuales.

6 años 9 años

$\frac{1}{5}$ $\frac{2}{5}$

$15 \cdot 5 =$

75

$15 = \frac{2}{5}x$

$\frac{2}{5}x = -15 \ / : \frac{2}{5}$

$x = \underline{-15}$

$7,5 \cdot 5$

$\boxed{37,5}$

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA

"Ecuaciones lineales"

Género: Femenino **Edad:** 15

Curso: 3° medio A **Colegio:** Limache College

Instrucciones

Realice todos los desarrollos en la hoja, incluso los cálculos.

1. Resuelva las siguientes ecuaciones lineales.

a) $2(x-1) = 3(x+2) - 5(x+3)$

$2x - 2 = 3x + 6 - 5x - 15$

$2x - 3x + 5x = 6 - 15 + 2$

$4x = -7 \quad | :4$

$x = \frac{-7}{4}$

b) $\frac{1}{x} + \frac{3}{2x} = \frac{1}{3x} + \frac{13}{12}$

$\frac{12+18}{12x} = \frac{4+13}{12x}$

$\frac{30}{12x} = \frac{17}{12x}$

2. Resuelva los siguientes problemas.

a) Dividir el número 600 en tres partes, tales que la segunda exceda la primera en 25 y la tercera exceda a la segunda en 50.

$\frac{600}{3} = 200 \,/\, 200 \,/\, 200$

175 200 250

165 / 190 / 240

165
190
240
595

b) La suma de tres números impares consecutivos es 297. ¿Cuál es el doble del mayor?

c) Hace 6 años la edad de un hijo era un quinto la edad de su padre, dentro de 9 años la edad del hijo será los dos quintos de la de su padre. Determinar las edades actuales.

6 años   9 años $= \boxed{15 \text{ años}}$

$\frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5} X$

$\frac{2}{5} X = 15$

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA

"Ecuaciones lineales"

Género: Femenino. **Edad:** 15

Curso: 3ro 1/2 A **Colegio:** limache college.

Instrucciones

Realice todos los desarrollos en la hoja, incluso los cálculos.

1. Resuelva las siguientes ecuaciones lineales.

a) $2(x-1) = 3(x+2) - 5(x+3)$

$2x - 2 = 3x + 6 - 5x - 15$

$2x = 3x + 6 - 5x - 15 + 2$

$2x - 3x + 5x = 6 - 15 + 2$

$7x - 3x = 6 - 17$

$4x = -11$

$x = \frac{-11}{4}$

b) $\frac{1}{x} + \frac{3}{2x} = \frac{1}{3x} + \frac{13}{12}$

$\frac{12 + 18}{12x} = \frac{4 + 13x}{12x} =$

$\frac{30}{12x} = \frac{13x + 4}{12x}$

2. Resuelva los siguientes problemas.
   a) Dividir el número 600 en tres partes, tales que la segunda exceda la primera en 25 y la tercera exceda a la segunda en 50.

$600 : 3 = 200$

b) La suma de tres números impares consecutivos es 297. ¿Cuál es el doble del mayor?

97

99

101 → 101×2

297 $\boxed{202}$

$X + X + X = 297 : 3 = 99$

27

c) Hace 6 años la edad de un hijo era un quinto la edad de su padre, dentro de 9 años la edad del hijo será los dos quintos de la de su padre. Determinar las edades actuales.

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA

"Ecuaciones lineales"

Género: Masculino | Edad: 16

Curso: 3½ A | Colegio: Limache College

Instrucciones

Realice todos los desarrollos en la hoja, incluso los cálculos.

1. Resuelva las siguientes ecuaciones lineales.

a) $2(x-1) = 3(x+2) - 5(x+3)$

$2x - 2 = 3x + 6 - 5x - 15$

$2x - 3x + 5x = 2 + 6 - 15$

$4x = -7$

$\boxed{x = \frac{-7}{4}}$

b) $\frac{1}{x} + \frac{3}{2x} = \frac{1}{3x} + \frac{13}{12}$

$\frac{1+3}{x+2x} = \frac{1+13}{3x+12}$

$\frac{4}{3x} = \frac{14}{3x+12}$

$3x \cdot 3x = \frac{14-4}{12}$

$9x = \frac{10}{12}$

$9x = \frac{5}{6}$

2. Resuelva los siguientes problemas.

a) Dividir el número 600 en tres partes, tales que la segunda exceda la primera en 25 y la tercera exceda a la segunda en 50.

1) 200 + 25 = 175 2) 200 3) 250

200
250
175
625

10 : 3 = 10

170 195 245

$\boxed{163,3}$ $\boxed{188,3}$ $\boxed{238,3}$

170
+195
245
610

163
+188
238
599 = F0000 XD

b) La suma de tres números impares consecutivos es 297. ¿Cuál es el doble del mayor?

c) Hace 6 años la edad de un hijo era un quinto la edad de su padre, dentro de 9 años la edad del hijo será los dos quintos de la de su padre. Determinar las edades actuales.

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA

"Ecuaciones lineales"

Género: Femenino   Edad: 16

Curso: 3 1/2 A   Colegio: Limache College

Instrucciones

Realice todos los desarrollos en la hoja, incluso los cálculos.

1. Resuelva las siguientes ecuaciones lineales.

a) $2(x-1) = 3(x+2) - 5(x+3)$

$2x - 2 = 3x + 6 - 5x - 15$

$2x - 3x + 5x = 6 - 15 + 2$

$4x = -7$

$x = \frac{-7}{4}$

b) $\frac{1}{x} + \frac{3}{2x} = \frac{1}{3x} + \frac{13}{12}$

2. Resuelva los siguientes problemas.

a) Dividir el número 600 en tres partes, tales que la segunda exceda la primera en 25 y la tercera exceda a la segunda en 50.

575
25
550
50
500.

b) La suma de tres números impares consecutivos es 297. ¿Cuál es el doble del mayor?

297 : 3 = 99 · 2
27
07
198 : 2
18

202

197
99
101
297

101 · 2
202

c) Hace 6 años la edad de un hijo era un quinto la edad de su padre, dentro de 9 años la edad del hijo será los dos quintos de la de su padre. Determinar las edades actuales.

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA

"Ecuaciones lineales"

Género: masculino | Edad: 16

Curso: 3°A | Colegio: Limache college

Instrucciones

Realice todos los desarrollos en la hoja, incluso los cálculos.

1. Resuelva las siguientes ecuaciones lineales.

a) $2(x-1) = 3(x+2) - 5(x+3)$

$2x - 2 = 3x + 6 - 5x - 15$

$2x - 3x + 5x = 6 - 15 + 2$

$4x = -7 /\cdot -1$

$x = \frac{4}{7}$

b) $\frac{1}{x} + \frac{3}{2x} = \frac{1}{3x} + \frac{13}{12}$

$-\frac{4}{3x} = \frac{14}{3x+12}$

2. Resuelva los siguientes problemas.
   a) **Dividir el número 600 en tres partes, tales que la segunda exceda la primera en 25 y la tercera exceda a la segunda en 50.**

150
275
325

$266,\overline{6}$
$291,\overline{6}$
$341,\overline{6}$

b) La suma de tres números impares consecutivos es 297. ¿Cuál es el doble del mayor?

97
99
101
297

R = 202

c) Hace 6 años la edad de un hijo era un quinto la edad de su padre, dentro de 9 años la edad del hijo será los ~~dos~~ quintos de la de su padre. Determinar las edades actuales.

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA

"Ecuaciones lineales"

Género: masculino Edad: 16 años

Curso: 3° A Colegio: Rimache college

Instrucciones

Realice todos los desarrollos en la hoja, incluso los cálculos.

1. Resuelva las siguientes ecuaciones lineales.

a) $2(x-1)=3(x+2)-5(x+3)$

$2x - 2 = 3x + 6 - 5x - 15$

$2x - 3x + 5x = 6 - 15 + 2$

$4x = -7 \quad /:-1$

$x = \frac{4}{7}$

b) $\frac{1}{x}+\frac{3}{2x}=\frac{1}{3x}+\frac{13}{12}$

$\frac{-4}{3x} = \frac{14}{3x+12}$

$\frac{10}{6x+12}$

2. Resuelva los siguientes problemas.
    a) Dividir el número 600 en tres partes, tales que la segunda exceda la primera en 25 y la tercera exceda a la segunda en 50.

$266,\overline{6}$

$291,\overline{6}$

$341,\overline{6}$

b) La suma de tres números impares consecutivos es 297. ¿Cuál es el doble del mayor?

$$\begin{array}{r} 99 \\ 97 \\ 101 \\ \hline 297 \end{array}$$

$$X + X + X = 297$$

$$3X = 297$$

$$x = \frac{3}{297}$$

R.: 202

c) Hace 6 años la edad de un hijo era un quinto la edad de su padre, dentro de 9 años la edad del hijo será los dos quintos de la de su padre. Determinar las edades actuales.

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA

"Ecuaciones lineales"

Género: Femenino **Edad:** 16 años

Curso: 3° A **Colegio:** Limache College

Instrucciones

Realice todos los desarrollos en la hoja, incluso los cálculos.

1. Resuelva las siguientes ecuaciones lineales.

a) $2(x-1) = 3(x+2) - 5(x+3)$

$2x - 2 = 3x + 6 - 5x - 15$

$2x - 3x + 5x = 6 - 15 + 2$

$4x = 7$

$\boxed{x = \frac{-7}{4}}$

b) $\frac{1}{x} + \frac{3}{2x} = \frac{1}{3x} + \frac{13}{12}$

$\frac{1}{x} + \frac{3}{2x} - \frac{1}{3x} = \frac{13}{12} \quad / (x)(2x)(3x$

$(\cancel{x})(2x)(3x)\frac{1}{\cancel{x}} + (x)(\cancel{2x})(3x)\frac{3}{\cancel{2x}} - (x)(2x)(\cancel{3x})\frac{1}{\cancel{3x}} = \frac{13}{12}$

$2x \cdot 3x + 3x \cdot 9x - x \cdot -2x = \frac{13}{12}$

$6x + 27x + 2x = \frac{13}{12}$

$3x = \frac{13}{12}$

$3x \cdot 12 = 13$

$36x = 13$

$x = \frac{13}{36}$

2. Resuelva los siguientes problemas.

   a) Dividir el número 600 en tres partes, tales que la segunda excede la primera en 25 y la tercera exceda a la segunda en 50.

   ExedA

b) La suma de tres números impares consecutivos es 297. ¿Cuál es el doble del mayor?

c) Hace 6 años la edad de un hijo era un quinto la edad de su padre, dentro de 9 años la edad del hijo será los dos quintos de la de su padre. Determinar las edades actuales.

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA

"Ecuaciones lineales"

Género: Femenino **Edad:** 16 años

Curso: 3° A **Colegio:** Limache College.

Instrucciones

Realice todos los desarrollos en la hoja, incluso los cálculos.

1. Resuelva las siguientes ecuaciones lineales.

a) $2(x-1) = 3(x+2) - 5(x+3)$

$2x - 2 = 3x + 6 - 5x - 15$

$2x - 3x + 5x = 6 - 15 + 2$

$4x = -7 \quad / \cdot 1$

$x = \frac{4}{7}$

b) $\frac{1}{x} + \frac{3}{2x} = \frac{1}{3x} + \frac{13}{12}$

$\frac{4}{3x} = \frac{14}{3x + 12}$

2. Resuelva los siguientes problemas.
   a) Dividir el número 600 en tres partes, tales que la segunda exceda la primera en 25 y la tercera exceda a la segunda en 50.

$600 : 3 = 25 + 50$

$200 =$

b) La suma de tres números impares consecutivos es 297. ¿Cuál es el doble del mayor?

$$X + X + X = 297$$

$$3X = 297$$

$$X = \frac{3}{297}$$

$$\begin{array}{r} 99 \\ 99 \\ 99 \\ \hline 297 \end{array}$$

c) Hace 6 años la edad de un hijo era un quinto la edad de su padre, dentro de 9 años la edad del hijo será los dos quintos de la de su padre. Determinar las edades actuales.

$$\frac{6}{1} = \frac{1}{5} \qquad \frac{9}{1} = \frac{2}{5}$$

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA

"Ecuaciones lineales"

Género: masculino | Edad: 16

Curso: 3º A | Colegio: S. monte college

Instrucciones

Realice todos los desarrollos en la hoja, incluso los cálculos.

1. Resuelva las siguientes ecuaciones lineales.

a) $2(x-1) = 3(x+2) - 5(x+3)$

$2x - 2 = 3x + 6 - 5x - 15$

$2x - 3x + 5x = 2 + 6 - 15$

$4x = -7$

$\boxed{x = -\frac{7}{4}}$

b) $\frac{1}{x} + \frac{3}{2x} = \frac{1}{3x} + \frac{13}{12}$

$\frac{1}{x} + \frac{3}{2x} - \frac{1}{3x} = \frac{13}{12}$

2. Resuelva los siguientes problemas.

a) Dividir el número 600 en tres partes, tales que la segunda exceda la primera en 25 y la tercera exceda a la segunda en 50.

b) La suma de tres números impares consecutivos es 297. ¿Cuál es el doble del mayor?

c) Hace 6 años la edad de un hijo era un quinto la edad de su padre, dentro de 9 años la edad del hijo será los dos quintos de la de su padre. Determinar las edades actuales.

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA

"Ecuaciones lineales"

Género: M

Edad: 16 Años

Curso: 3°/2 A

Colegio: Limache College

Instrucciones

Realice todos los desarrollos en la hoja, incluso los cálculos.

1. Resuelva las siguientes ecuaciones lineales.

a) $2(x-1) = 3(x+2) - 5(x+3)$

$2x-2 = 3x+6-5x-15$

$2x-3x+5x = 2-6+15$

$4x = 19$

$x = \frac{19}{4}$

b) $\frac{1}{x} + \frac{3}{2x} = \frac{1}{3x} + \frac{13}{12}$

$\frac{1}{x} + \frac{3}{2x} = \frac{1}{3x} + \frac{13}{12}$

$\frac{\cancel{1}}{\cancel{x}} + \frac{2\cancel{x}}{\cancel{3}}$

$\frac{2}{x} = \frac{14}{15x}$ $30x$ y $14x$

$x = \frac{30}{14}$

$\boxed{x = 2,1}$

2. Resuelva los siguientes problemas.
   a) Dividir el número 600 en tres partes, tales que la segunda exceda la primera en 25 y la tercera exceda a la segunda en 50.

$600 = 200, 200, 200$] → DIVIDIDO en 3 partes

$200, 175, 225$

b) La suma de tres números impares consecutivos es 297. ¿Cuál es el doble del mayor?

c) Hace 6 años la edad de un hijo era un quinto la edad de su padre, dentro de 9 años la edad del hijo será los dos quintos de la de su padre. Determinar las edades actuales.

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA

"Ecuaciones lineales"

Género: Femenino | Edad: 16 años

Curso: 3½ A | Colegio: Limache College.

Instrucciones

Realice todos los desarrollos en la hoja, incluso los cálculos.

1. Resuelva las siguientes ecuaciones lineales.

a) $2(x-1) = 3(x+2) - 5(x+3)$

b) $\frac{1}{x} + \frac{3}{2x} = \frac{1}{3x} + \frac{13}{12}$

$2(x-1)\ 3(x+2)\ {-5}(x+3)$

$2x - 6x - 15x$

$4x - 6x - 3x$

$\boxed{4x}$

$\boxed{7x}$

2. Resuelva los siguientes problemas.

a) Dividir el número 600 en tres partes, tales que la segunda exceda la primera en 25 y la tercera exceda a la segunda en 50.

b) La suma de tres números impares consecutivos es 297. ¿Cuál es el doble del mayor?

c) Hace 6 años la edad de un hijo era un quinto la edad de su padre, dentro de 9 años la edad del hijo será los dos quintos de la de su padre. Determinar las edades actuales.

$\frac{6}{3} + \frac{1}{5} + \frac{2}{5} = \frac{9}{\ }$

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA

"Ecuaciones lineales"

Género: Masculino | Edad: 15

Curso: 3° A | Colegio: Limache College

Instrucciones

Realice todos los desarrollos en la hoja, incluso los cálculos.

1. Resuelva las siguientes ecuaciones lineales.

a) $2(x-1) = 3(x+2) - 5(x+3)$

$2x - 2 = 3x + 6 - 5x + 15$

$2x - 3x + 5x = 6 - 15 - 2$

$4x = -7$

$x = \frac{-7}{4}$

b) $\frac{1}{x} + \frac{3}{2x} = \frac{1}{3x} + \frac{13}{12}$

$\frac{1}{x} + \frac{3}{2x} = \frac{1}{3x} + \frac{13}{12}$

2. Resuelva los siguientes problemas.
   a) Dividir el número 600 en tres partes, tales que la segunda exceda la primera en 25 y la tercera exceda a la segunda en 50.

b) La suma de tres números impares consecutivos es 297. ¿Cuál es el doble del mayor?

c) Hace 6 años la edad de un hijo era un quinto la edad de su padre, dentro de 9 años la edad del hijo será los dos quintos de la de su padre. Determinar las edades actuales.

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA

"Ecuaciones lineales"

Género: Masculino Edad: 16

Curso: 3ºA Colegio: Limache College

Instrucciones

Realice todos los desarrollos en la hoja, incluso los cálculos.

1. Resuelva las siguientes ecuaciones lineales.

a) $2(x-1) = 3(x+2) - 5(x+3)$

$2x - 2 = 3x + 6 - 5x + 15$

$2x - 3x + 5x = 6 + 15 + 2$

$4x = -7$

$x = -\frac{7}{4}$

b) $\frac{1}{x} + \frac{3}{2x} = \frac{1}{3x} + \frac{13}{12}$

2. Resuelva los siguientes problemas.
   a) Dividir el número 600 en tres partes, tales que la segunda exceda la primera en 25 y la tercera exceda a la segunda en 50.

163,3

188,3

238,3

589,9

b) La suma de tres números impares consecutivos es 297. ¿Cuál es el doble del mayor?

c) Hace 6 años la edad de un hijo era un quinto la edad de su padre, dentro de 9 años la edad del hijo será los dos quintos de la de su padre. Determinar las edades actuales.

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA

"Ecuaciones lineales"

Género: Masculino

Edad: 16 años

Curso: 3° medio A

Colegio: Limache College

Instrucciones

Realice todos los desarrollos en la hoja, incluso los cálculos.

1. Resuelva las siguientes ecuaciones lineales.

a) $2(x-1) = 3(x+2) - 5(x+3)$

$2x - 2 = 3x + 6 - 5x - 15$

$x - 3x + 5x = +6 - 15 + 2$

$4x = -7$

$x = \frac{-7}{4}$

b) $\frac{1}{x} + \frac{3}{2x} = \frac{1}{3x} + \frac{13}{12}$

2. Resuelva los siguientes problemas.
   a) Dividir el número 600 en tres partes, tales que la segunda exceda la primera en 25 y la tercera exceda a la segunda en 50.

$x \quad x+25 \quad x + x + 25$

$x + x + 25 + x + x + 25 = 600$

$4x = 600 - 25 - 25$

$4x = 600 - 50$

$4x = 550$

$x = 137$

$550 : 4 = 137$
15
30
2//

b) La suma de tres números impares consecutivos es 297. ¿Cuál es el doble del mayor?

c) Hace 6 años la edad de un hijo era un quinto la edad de su padre, dentro de 9 años la edad del hijo será los dos quintos de la de su padre. Determinar las edades actuales.

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA

"Ecuaciones lineales"

Género: femenino Edad: 16 años

Curso: 3°A Colegio: Limache College

Instrucciones

Realice todos los desarrollos en la hoja, incluso los cálculos.

1. Resuelva las siguientes ecuaciones lineales.

a) $2(x-1)=3(x+2)-5(x+3)$

$2x-2=3x+6-5x-15$

$2x-3x+5x=2+6-15$

$4x=-7$

$\boxed{x=\frac{-7}{4}}$

b) $\frac{1}{x}+\frac{3}{2x}=\frac{1}{3x}+\frac{13}{12}$

$\frac{1}{x}+\frac{3}{2x}-\frac{1}{3x}=\frac{13}{12}$

2. Resuelva los siguientes problemas.
   a) Dividir el número 600 en tres partes, tales que la segunda exceda la primera en 25 y la tercera exceda a la segunda en 50.

200 200 25 200 50 = 675

b) La suma de tres números impares consecutivos es 297. ¿Cuál es el doble del mayor?

c) Hace 6 años la edad de un hijo era un quinto la edad de su padre, dentro de 9 años la edad del hijo será los dos quintos de la de su padre. Determinar las edades actuales.

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA

"Ecuaciones lineales"

Género: Masculino

Edad: 16 años

Curso: 3° Medio A.

Colegio: Limache College.

Instrucciones

Realice todos los desarrollos en la hoja, incluso los cálculos.

1. Resuelva las siguientes ecuaciones lineales.

a) $2(x-1) = 3(x+2) - 5(x+3)$

$\cancel{2x} - 2 = \cancel{3x} + 6 - \cancel{5x} - 15$

$2x - 3x + 5x = 6 - 15 + 2$

$-x + 5x = -9 + 2$

$4x = -7$

$x = -7/4$

b) $\frac{1}{x} + \frac{3}{2x} = \frac{1}{3x} + \frac{13}{12}$

$1 + \frac{3}{2x} = x\left(\frac{1}{3x} + \frac{13}{12}\right)$

$1 + 3 = 2x\left(\frac{x}{3x} + \frac{13x}{12}\right)$

$1 + 3 = \frac{2x^2}{3x} + \frac{13x^2}{12}$

$(3x)(12)\, 1 + 3 = 2x^2 + 13x^2$

$3x(12 + 36) = 2x^2 + 13x^2$

$36x + 108 = 2x^2 + 13x^2$

$36 + 108 = \frac{15x^2}{x}$

$144 = 15x$

$144/15 = x$

2. Resuelva los siguientes problemas.

a) Dividir el número 600 en tres partes, tales que la segunda exceda la primera en 25 y la tercera exceda a la segunda en 50.

Datos.

600 total

$x + 25$

$x + 50$

x

$x + 25 + x + 50 + x = 600$

$x + x + x = 600 - 25 - 50$

$3x = 550 - 25$

$3x = 525$

$x = \frac{525}{3}$

$x = 175$

$525 : 3 = 175$

22

15

0//

175

$175 + 25$

200

$x_1 = 175$

$x_2 = 200$

b) La suma de tres números impares consecutivos es 297. ¿Cuál es el doble del mayor?

$a + (a+1) + (a+3) = 297$

$a+1 + a+3 + a+\cancel{5} = 297$

$3a = 297-1-3-5$

$296-3$

$293-5$

$3a = 288$

$a = \frac{288}{3}$

$288 : 3 = 96$

$2(a+3) =$

$2a + 6 =$

$2a = -6$

$a = -6/2$

~~96 +~~

$297 : 3 = 99$

$\frac{297}{3} = 99$

$99 + (99-2) + (99-4)$

$2(99+3) =$

$198+3 = 201$

95
97
99
291

c) Hace 6 años la edad de un hijo era un quinto la edad de su padre, dentro de 9 años la edad del hijo será los dos quintos de la de su padre. Determinar las edades actuales.

$x - 6 = \frac{y}{5}$

$x + 9 = \frac{2y}{5}$

~~$x - 6 + x + 9 = \frac{2y}{5} + \frac{y}{5}$~~

~~$25(x-6+x+9) = 2y + y$~~

$5(x-6) = x$

$5x - 30 = y$

$5x = y - 30$

$5(x+9) = 2y$

$5x + 45 = 2y$

$\cancel{5x} + 45 = 2y$

$-(\cancel{5x} + 30 = y)$

$75 = y$

$75 : 5 = 15 - 6$

$\frac{75}{5} - 6$

Padre = 75

Hijo = 15