



# **UNIVERSIDAD DE VALPARAÍSO**

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS**

## ***APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO DE LA COMPOSICIÓN DE TRANSFORMACIONES ISOMÉTRICAS, A TRAVÉS DE SOFTWARE GEOMÉTRICO***

Memoria para optar al Título Profesional de Profesor de Matemáticas  
Mención en Didáctica.

Presentada por:

Felipe Andrés Castillo Morales

Carolina Andrea Quiñones Altamirano

Profesor Guía: Dr. Carlos Silva Córdova

Valparaíso 2013

# Índice

Resumen.....	6
Abstract .....	7
Capítulo 1.....	9
1.1 Introducción .....	9
Capítulo 2.....	11
2.1 Planteamiento del Problema.....	11
2.2 Justificación del Problema .....	12
2.3 Objetivos .....	14
2.3.1 Objetivos Fundamentales .....	14
2.3.2 Objetivos Generales .....	14
2.3.3 Objetivos Específicos.....	15
2.4 Preguntas de la Investigación.....	15
Capítulo 3.....	16
Marco Teórico.....	16
3.1 Aprendizaje Significativo.....	17
3.1.1 Aprendizaje mecánico .....	19
3.1.2 Aprendizaje por descubrimiento y por recepción.....	19

3.1.3 Didáctica y modelos de enseñanza y aprendizaje en las ciencias.....	20
3.1.4 Condiciones para que ocurra el aprendizaje significativo .....	21
3.1.5 Tipos de aprendizaje significativo.....	22
3.1.5.1 Aprendizaje representacional .....	22
3.1.5.2 Aprendizaje conceptual .....	23
3.1.5.3 Aprendizaje proposicional.....	23
3.1.6 Principio de asimilación.....	24
3.1.6.1 Formas de aprendizaje significativo.....	26
Aprendizaje subordinado.....	26
Aprendizaje superordenado.....	26
Aprendizaje combinatorio.....	26
3.1.7 Evaluación del aprendizaje significativo.....	27
3.1.8 Mapas conceptuales.....	27
3.2 Tic en educación .....	30
3.2.1 Proyecto Enlaces .....	31
 Capítulo 4.....	 33
Metodología .....	33
4.1 Diseño .....	34
4.2 Participantes .....	34
4.3 Instrumento evaluativo.....	36
4.4 Contenidos .....	38
4.4.1 Horarios.....	39

Capítulo 5.....	40
Secuencia didáctica y actividades.....	40
5.1 Justificaciones previas.....	41
5.2 Secuencia didáctica adoptada.....	42
5.3 Actividades realizadas en la intervención.....	45
5.4 Ilustración de las actividades realizadas.....	45
Capítulo 6.....	71
Análisis de datos.....	71
6.1 Análisis de encuesta de actitudes y expectativas.....	71
6.1.1 Análisis encuesta inicial.....	72
6.1.2 Análisis Encuesta Final.....	80
6.2 Análisis de datos.....	85
6.2.1 Análisis resultados de Pre-Test.....	87
6.2.2 Análisis resultado Post-test.....	92
6.3 Análisis Evaluación Aprendizaje Significativo mediante Mapas Conceptuales.....	96
Capítulo 7.....	100
Conclusión.....	100
Bibliografía.....	103
Apéndice A.....	105
Encuesta Inicial y Encuesta Final.....	105
A.1 Encuesta Inicial.....	105
A.2 Encuesta final.....	106

Apéndice B.....	107
Pruebas de Contenidos .....	107
B.1 Pre-test y Post-test.....	107
Apéndice C.....	114
Guía de Avance .....	114
C.1 Guía de trabajo .....	114
C.2 Actividades.....	118
Apéndice D.....	127
Actividades.....	127
D.1 Planificaciones de las clases.....	127
D.1.1 Clase nº1. <i>“Composición de traslaciones.”</i> .....	127
D.1.2 Clase nº2. <i>“Composición de reflexiones”</i> .....	134
D.1.3 Clase nº3. <i>“Composición de rotaciones”</i> .....	156
D.1.4 Clase nº4. <i>“Rotación compuesta con traslación.”</i> .....	168
D.1.5 Clase nº5. <i>“Simetría compuesta con traslación.”</i> .....	176
D.1.6 Clase nº6. <i>“Simetría compuesta con una rotación.”</i> .....	182
Apéndice E.....	189
Pruebas de Aprendizaje Significativo .....	189

## Resumen

El presente trabajo se presentan los resultados de una investigación en el subsector de Educación Matemática, específicamente abordando la unidad de Composición Transformaciones Isométricas, en el nivel NM1 de la Enseñanza Media, cuyo objetivo fue determinar cómo incide el uso del software geométrico llamado Geogebra en la enseñanza y aprendizaje de esta unidad, para lo cual consideramos como unidad de análisis los alumnos y alumnas pertenecientes a Primer Año Medio de un establecimiento particular subvencionado de la ciudad de Valparaíso, Villa Alemana.

Para concretar este estudio realizamos un estudio de casos, que se enmarca en el enfoque cualitativo cuasi-experimental de investigación.

En la experiencia, los alumnos trabajaron en grupos donde elaboraron y validaron hipótesis llegando a un acuerdo grupal, conjeturaron y dieron respuestas a las preguntas, debatieron en pleno los resultados obtenidos en cada grupo y finalmente, vivieron la etapa de institucionalización de los conceptos.

Se realizó un diseño cuasi-experimental con pre-prueba y post-prueba utilizando grupo de control y grupo experimental. Con los aportes del Software geométrico Geogebra, los estudiantes lograron identificar e interpretar las gráficas de las composiciones de las transformaciones isométricas.

Entre los instrumentos utilizados para la realización de esta investigación se encuentran registros pre y post-test, encuestas iniciales y finales, actividades y planificaciones de clases.

Los resultados obtenidos permiten concluir que la utilización del software geométrico Geogebra influye significativamente en el aprendizaje de las composiciones de Transformaciones Isométricas y a su vez en la motivación de los alumnos(as).

## Abstract

This research shows the results obtained in one of the fields of the Mathematic teaching process, specifically by analyzing the Isometric transformation composition unit applied on NM1 of High school. The main goal was to determine how “Geogebra”, a geometric software, can help students in the learning process of this unit. High school Students from a subsidized school by the government in Villa Alemana, V Region of Chile, were selected in order to get the research's results.

To set this research, we focused on a case study, which encloses a qualitative quasi-experimental approach of investigation.

During the process, students worked in groups work developing and confirming a hypothesis where they got into a group agreement. Students gave their points of view in a general discussion session, talking about the results of the hypothesis and getting used to the new concepts.

A quasi-experimental design (schema, procedure) was made with a pre-test and a post-test by using a control and experimental group. The students were able to identify and explain isometric transformation composition through contributions given by Geogebra.

To perform the research many instruments were used; in addition to this pre-test, post-test, initial and final surveys, worksheets and lesson plans were needed.

To conclude, the use of Geogebra software has a big influence in the learning of the isometric transformations compositions stimulating and motivating the students to accomplish the goals in this field of the mathematics learning process.

## Agradecimientos

- A los profesores de la carrera de matemáticas por el esfuerzo de formar y orientar a profesionales de la educación. Además a Gerardo por su eficacia y comprensión en lo que le solicitábamos durante este proceso.
- Al profesor Carlos Silva por sus orientaciones que permitieron concretizar esta tesis.
- A los profesores de los establecimientos educacionales que tuvieron la valentía de innovar con esta exploración pedagógica.
- A los alumnos involucrados en esta exploración, que a pesar de las dificultades sociales, con sus sonrisas y miradas limpias, me enseñaron que este país puede confiar en ellos.
- A nuestras familias por su apoyo y comprensión, así como también a Bernardita Cáceres por el trabajo realizado en esta tesis.

# Capítulo 1

## 1.1 Introducción

Estamos en una era donde la tecnología se hace cada día más necesaria, el nivel de desarrollo de ésta ha ido incrementándose y nos preguntamos, ¿qué tanto aprovechamos de estos recursos para poder ser implementados en las aulas? Esta investigación va íntimamente ligada al buen uso que éstas nos brindan, no decimos que el uso de papel o pizarra sea malo, pero por qué no complementarlo con el uso de un software educativo.

Queremos que los contenidos a estudiar sean lo más significativo para nuestros alumnos, donde brindemos un ambiente de exploración, sistematización y estructuración, para que finalmente lleguemos a una etapa de formalización.

¿Cuál es la interrogante que nos lleva a toda ésta investigación?

En un comienzo nuestro enfoque fue dirigido a Transformaciones Isométricas mediante el uso de software geométrico, a medida que fue pasando el tiempo y recopilando información percibimos el poco interés en un tema puntal que muchas veces era mencionado mas nunca abordado, el tema al que nos referimos es “Composiciones de Transformación Isométricas”, más aún nuestra pregunta es:

¿Cómo influye en el aprendizaje de los alumnos de 1° medio la utilización de software Geogebra, en la enseñanza de la composición de transformaciones isométricas? Este proceso lo complementaremos con guías didácticas de acuerdo con nuestra finalidad.

Por lo antes mencionado, la presente investigación tiene por objetivo determinar la influencia que tiene en el aprendizaje la utilización de un software geométrico, en la enseñanza de la composición de las transformaciones isométricas. También determinar como afecta en el aprendizaje significativo la implementación de herramientas computacionales.

# Capítulo 2

## 2.1 Planteamiento del Problema

Esta investigación se realizó con el fin de mejorar las aptitudes pedagógicas, lo que a su vez implicó informarnos que dice la Actualización Curricular 2009 sobre tres puntos importantes; Objetivos Fundamentales Transversales, Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios, ya que están directamente vinculados en el tema de estudio.

Los objetivos fundamentales transversales: “Tienen un carácter comprensivo y general orientado al desarrollo personal y a la conducta moral y social de los alumnos, y deben perseguirse en las actividades educativas realizadas durante el proceso de la educación media”, los Objetivos Fundamentales Transversales que conforman el Currículum son:

- Crecimiento y Autoafirmación Personal: orientar la forma en que la persona se relaciona con otros seres humanos y con el mundo

- Desarrollo del Pensamiento: desarrollo del pensamiento creativo y crítico.
- Formación Ética: fortalecer y afianzar la formación ético-valorativa.
- La Persona y su Entorno: mejoramiento de la interacción con su entorno.
- Tecnologías de Información y Comunicación: desarrollo de habilidades para el uso responsable de las tecnologías de la información y comunicaciones.

Nos focalizamos en el más reciente OFT integrado, “Tecnologías de Información y Comunicación”, pues es ahí donde encontramos la debilidad de nuestra problemática, si bien sabemos que el uso de las TIC ha sido masificado en el aula, aun es débil esta implementación. Debemos ocupar en forma óptima los recursos brindados conduciéndolos a su uso eficaz y responsable, con el fin de potenciar su aprendizaje y es así como nuestra propuesta abarca mucho más que lo ya antes visto, si bien ocuparemos recursos ya utilizados a la vez lo complementaremos con nuevos y novedosos software.

## **2.2 Justificación del Problema**

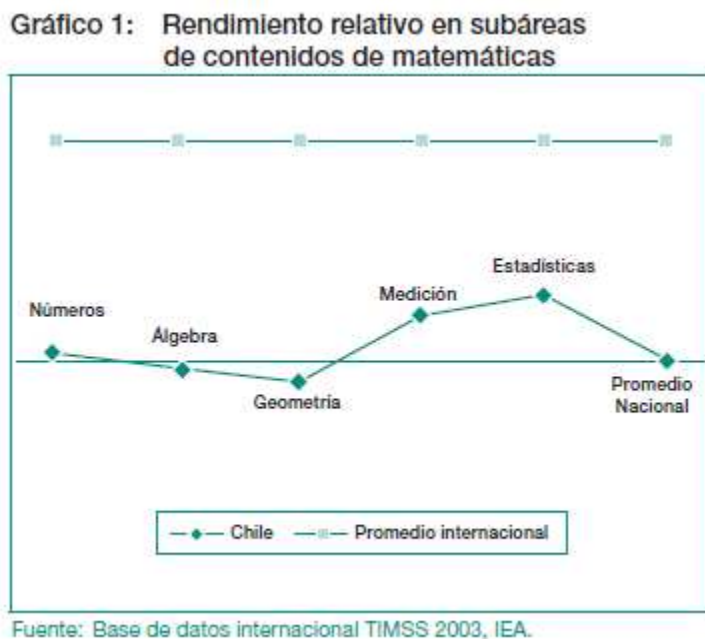
La interacción con las matemáticas comienza desde nuestros primeros pasos, lo vemos reflejado desde los primeros años de vida, en donde el niño recibe estímulos tanto en juguetes que se podrían denominar didácticos hasta la naturaleza misma. Más aún, si profundizamos la mayoría de los juguetes van orientados al mundo geométrico en donde éste es capaz de interpretar y modelar situaciones.

Con el paso del tiempo la educación y el estudio de la geometría se convierte en algo mas teórico y menos práctico, esto se ve provocado por la falta de material y la poca utilización de los recursos tecnológicos brindados, es por eso que nuestro material de apoyo para las actividades de Composiciones isométricas resulta útil para reubicar la geometría como una disciplina de estudio de primer orden del campo matemático y esto va de la mano con el ajuste curricular recientemente propuesto (Mineduc, 2009), en donde incrementa el uso de software computacional para tratar dicho contenido.

Pero nuestra visión no sólo la limitamos con uso de software, sino también en la utilización de simples juegos de mesa como un rompecabezas, donde nuestro enfoque es la motivación de nuestros alumnos, a pesar que lo ven como un simple juego , detrás de éste hay un aprendizaje significativo y una motivación para aprender jugando.

Si bien es sabido por muchos que la Geometría dentro de la enseñanza es un problema, son pocos los estudios que confirman esto, es por esto que profundizar en el tema resulta ser algo complejo.

Según mediciones internacionales como TIMSS (2003) los rendimientos en las diferentes subáreas de la matemática, presentados por los alumnos de Octavo Básico, son deficientes y el subárea que presenta mayor deficiencia es el de Geometría, como se muestra a continuación en el siguiente gráfico.



Al comparar el rendimiento de los alumnos chilenos, específicamente en el subárea de Geometría, con el promedio internacional se puede establecer que están muy por debajo de estos. Es por esto que nuestra investigación apunta a mejorar el aprendizaje de los estudiantes especialmente en esta área y así lograr mejores rendimientos en las diferentes evaluaciones internacionales a las cuales se somete nuestro país.

## 2.3 Objetivos

### 2.3.1 Objetivos Fundamentales

- Establecer relaciones de la experiencia de juego de los estudiantes con el contenido de transformaciones isométricas.
- Relacionar la aplicación de sucesivas transformaciones isométricas con la composición de diversas funciones.
- Extender una experiencia cotidiana, como el armado de un rompecabezas a una situación virtual (uso de software) de transformaciones isométricas.

#### **Aprendizaje Esperado**

- Relacionar los conceptos de composiciones isométricos.

### 2.3.2 Objetivos Generales

- Determinar un aprendizaje significativo con nuevos software geométricos antes no implementados en la Unidad Transformaciones Isométricas, específicamente en Composición de funciones relacionadas con las transformaciones isométricas, en los estudiantes de Primer Año de Enseñanza Media.
- Efectuar a cabalidad los Objetivos Fundamentales Transversales, especialmente “Tecnologías de Información y Comunicación”.

### 2.3.3 Objetivos Específicos

- Implementar el uso de un software que permita a los estudiantes una mejor comprensión y caracterización de la composición de funciones relacionadas con las transformaciones isométricas.
- Capacitar a los profesores y a los estudiantes participes en el buen uso del software geométrico Geogebra.
- Determinar el grado de aceptación para utilizar en el aula nuevas estrategias de aprendizaje, y a su vez como el alumnado presente se vincula con el nuevo conocimiento brindado.

## 2.4 Preguntas de la Investigación

Si hoy en día se han implementado el uso de recursos tecnológicos,

¿Tiene real influencia la implementación de un software geométrico en la adquisición de nuevos conocimientos y haciendo que estos sean realmente significativos para el estudiante?

# Capítulo 3

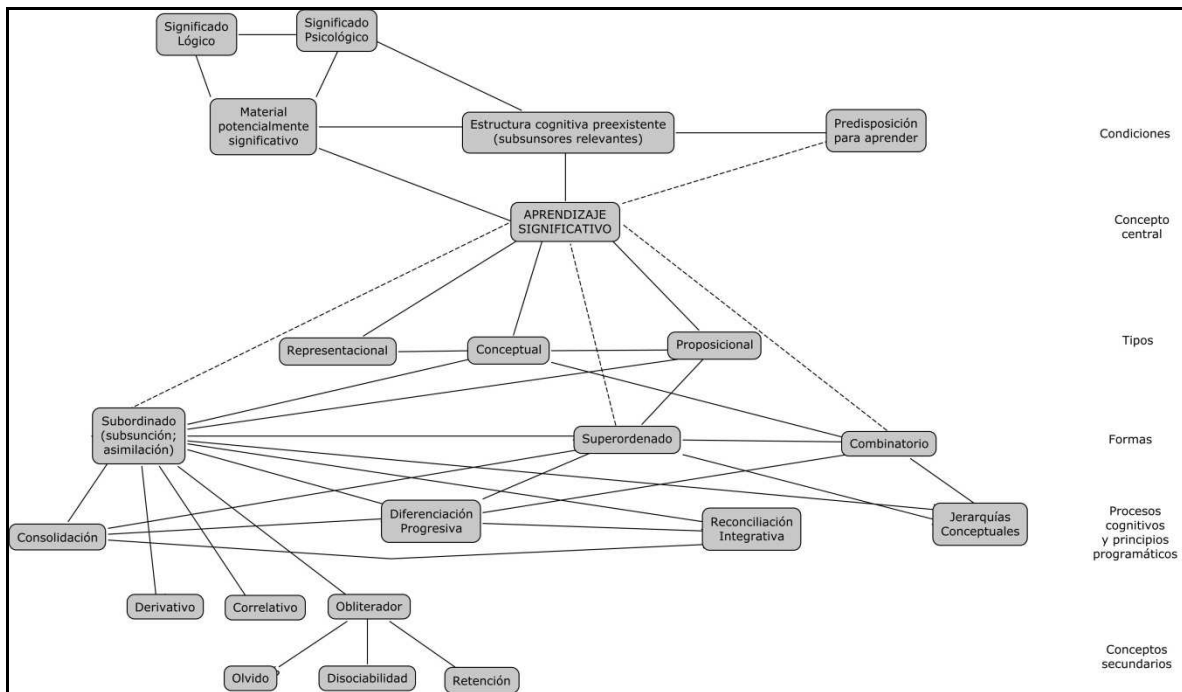
## Marco Teórico

Nuestra investigación se encuentra sustentada teóricamente por:

- Teoría del aprendizaje significativo de D. Ausubel.
- Tic en educación.

### 3.1 Aprendizaje Significativo

Mas de cuarenta años sustentan a la teoría ausubeliana, la que se da inicio con esta obra, a su vez, se limita a reiterar y confirmar la actualidad de la teoría original propuesta por Ausubel, en 1963, en la obra *The psychology of meaningful verbal learning*. Es más, ha habido una apropiación superficial, polisémica, del concepto de aprendizaje significativo, de modo que cualquier estrategia de enseñanza ha pasado a tener aprendizaje significativo como objetivo. (Moreira, 2010).



**Figura 1: Mapa conceptual para el aprendizaje significativo. Moreira (2010).**

En este periodo de implementación se justifica su creación por la importancia en los avances del contexto educativo . Por esto es de gran importancia introducirse en esta teoría y profundizar en la misma, para poder comprender de forma significativa, lo que ésta pretende comunicar. *“El conocimiento previo es, en la visión de Ausubel, la variable aislada más importante para el aprendizaje significativo de nuevos conocimientos. Es decir, si fuese posible separar una única variable como la que más influye en nuevos aprendizajes, esta variable sería el conocimiento previo, los subsunores ya existentes en la estructura cognitiva del sujeto que aprende.”*( Moreira, 2010:6). De lo anterior, se expone que es fundamental el conocimiento previo para un nuevo aprendizaje significativo de los nuevos saberes o conocimientos de los estudiantes.

Cabe señalar, que el *“Aprendizaje significativo es aquél en el que ideas expresadas simbólicamente interactúan de manera sustantiva y no arbitraria con lo que el aprendiz ya sabe. Sustantiva quiere decir no literal, que no es al pie de la letra, y no arbitraria significa que la interacción no se produce con cualquier idea previa, sino con algún conocimiento específicamente relevante ya existente en la estructura cognitiva del sujeto que aprende”* (Moreira, 2010:2). Lo anterior implica un parafraseo y entrega de los contenidos de forma tal, que sea entendido o asimilado por el estudiante, evitando lo literal, lo que supone a su vez, una correcta triangulación didáctica de lo que se enseña.

Por último, la planificación de cómo dirigir los conocimientos, se centra en lo que el aprendiz ya sabe, identificando los organizadores básicos que se enseñarán, los recursos utilizados (software en este caso) y los principios que faciliten el aprendizaje de manera significativa, así como la predisposición del alumno para aprender.

Este conocimiento, específicamente relevante para el nuevo aprendizaje puede ser un símbolo ya significativo, un concepto, una proposición, un modelo mental, una imagen Ausubel lo denomina subsunsores o idea ancla. Este se refiere al nombre que se le da a un conocimiento específico, ya existente en la estructura de conocimientos del individuo, que permite darle significado a un nuevo conocimiento que le es presentado o que es descubierto por él. Tanto por recepción o por descubrimiento, la atribución de significado a nuevos conocimientos depende de la existencia de conocimientos previos relevantes y la interacción entre ellos, como este proceso es interactivo, cuando sirve de idea ancla para el nuevo conocimiento, él mismo se modifica adquiriendo nuevos significados y corroborando los existentes. Respecto a lo anterior, *“Esta forma de aprendizaje significativo, en la cual una nueva idea, un nuevo concepto, una nueva proposición, más amplia, pasa a subordinar conocimientos previos se llama aprendizaje significativo superordenado. No es muy común; la manera más típica de aprender significativamente es el aprendizaje significativo subordinado, en el cual un nuevo conocimiento adquiere significado en el anclaje interactivo con algún conocimiento previo específicamente relevante”* (Moreira, 2010:3).

Por su parte es necesario que se presente la claridad, la estabilidad cognitiva, la amplitud, es decir, la diferenciación de un subsunsores varían a lo largo del tiempo de los aprendizajes significativos del sujeto. Se trata de un conocimiento dinámico, no estático, que puede evolucionar e, incluso, involucionar, siguiendo a (Moreira, 2010).

La estructura cognitiva es considerada como una estructura de subsunsores interrelacionados y jerárquicamente organizados es una estructura dinámica caracterizada

por dos procesos principales, la diferenciación progresiva y la reconciliación integradora. La primera, se refiere al proceso de atribución de nuevos significados a un determinado subsunor (un concepto o una proposición, por ejemplo) que es “*resultante de la sucesiva utilización de ese subsunor para dar significado a nuevos conocimientos.*” (Moreira, 2010:5).

La segunda es aquella que alude a un proceso también propio de la dinámica de la estructura cognitiva, el cual es simultáneo al de la diferenciación progresiva, que consiste en eliminar las diferencias aparentes, lo que implica “*resolver inconsistencias, integrar significados y hacer superordenaciones*” (Moreira, 2010:6).

### 3.1.1 Aprendizaje mecánico

De los diversos tipos de aprendizajes, el que más tiene lugar en la escuela es el aprendizaje mecánico, aquél que prácticamente no tiene significado, el cual es puramente memorístico, en donde la nueva información se aprende sin la interacción de los conceptos relevantes que existen en la estructura cognitiva del alumno. O sea, las nuevas informaciones son almacenadas de manera arbitraria y literal. Es importante destacar, que esta forma de aprendizaje es una fase inicial de adquisición del nuevo conocimiento, que el aprendizaje significativo y el aprendizaje mecánico no constituyen una dicotomía, sino que un continuo.

### 3.1.2 Aprendizaje por descubrimiento y por recepción

Según Ausubel, en el aprendizaje receptivo o expositivo lo que se debe aprender se le presenta al aprendiz en su forma final, requiere mucha actividad cognitiva para relacionar, interactivamente, los nuevos conceptos con los ya existentes en la estructura cognitiva, incluyendo procesos de captación de significados, anclaje, diferenciación progresiva y reconciliación integradora. En cambio, en el aprendizaje centrado en el descubrimiento el contenido principal y objeto del aprendizaje debe ser descubierto por él mismo, antes de ser aprendido e incorporado significativamente en la estructura cognitiva. Excepto en niños pequeños, el aprendizaje por descubrimiento no es condición para

aprender de manera significativa. De modo general, no es necesario descubrir para aprender significativamente.

Es necesario aclarar que el aprendizaje por recepción y el aprendizaje por descubrimiento no constituyen una dicotomía, debido a que el conocimiento no está, necesariamente, construido o por recepción o por descubrimiento.

### 3.1.3 Didáctica y modelos de enseñanza y aprendizaje en las ciencias.

La idea de que los alumnos puedan acceder a los conocimientos científicos más relevantes mediante un descubrimiento más o menos personal parte del supuesto que están dotados de unas capacidades intelectuales similares a las de los científicos, es decir, existiría una compatibilidad básica entre la forma en que abordan las tareas los científicos y la forma en que la abordan los alumnos, o que al menos estos últimos enfrentados a las mismas tareas y situaciones que los científicos acabarían desarrollando las estrategias propias del método científico y accediendo a las mismas conclusiones y elaboraciones teóricas que los científicos. La mente de los alumnos estaría formateada para hacer ciencia y de hecho la ciencia sería un producto natural del desarrollo de esa mente. Los modos de pensar de los alumnos y de los científicos no diferirían en lo esencial cuando estuvieran ante el mismo problema y vivieran las mismas experiencias. Todo lo que hay que hacer, que no es poco, es lograr que los alumnos vivan y actúen como pequeños científicos.

Además de esta supuesta compatibilidad, la enseñanza por descubrimiento en su versión más tradicional, asume también que ese método científico, la aplicación rigurosa de unas determinadas estrategias de investigación conduce necesariamente al descubrimiento de la estructura de la realidad. Si nos enfrentamos con rigor científico a una situación, acabaremos por descubrir los mismos principios que en ella encontraron los científicos. Que lo que éstos hacen es desentrañar la estructura del mundo, que si no puede ser directamente percibida, sí resulta accesible recurriendo a ciertos métodos. Silva, C (2012)

### 3.1.4 Condiciones para que ocurra el aprendizaje significativo

Ahora bien, para que el aprendizaje sea significativo, Ausubel (1978) declara que, esencialmente, se hacen necesarias dos condiciones para que este se desarrolle, por un lado, que el material de aprendizaje debe ser potencialmente significativo, y por otro, que la disposición del aprendiz, sea apropiada frente al material a enseñarse. En primer lugar, el material de aprendizaje tenga significado lógico, es decir, que el material que va a ser aprendido debe ser relacionable a la estructura cognitiva del aprendiz, de manera no arbitraria y no literal. Ahora bien, es necesario mencionar que la segunda condición implica que el aprendiz tenga en su estructura cognitiva ideas ancladas relevantes con las cuales se pueda relacionar ese material. Es decir, el material debe ser relacionable con la estructura cognitiva y el aprendiz debe tener el conocimiento previo necesario para hacer la relación de forma no arbitraria y no literal. Es necesario destacar que el material sólo puede ser potencialmente significativo, no significativo puesto que no existe libro significativo, ni clase significativa, el significado está en las personas, no en los materiales.

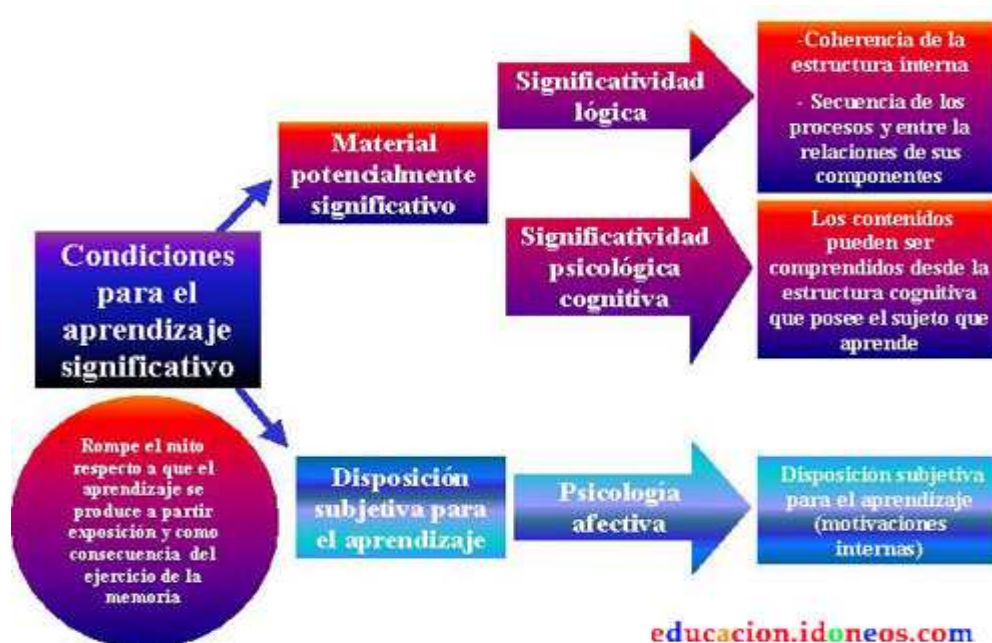


Figura 2: Esquema de las condiciones del aprendizaje significativo.

### 3.1.5 Tipos de aprendizaje significativo

Siguiendo a Ausubel, es esencial reconocer que el aprendizaje significativo (independiente del tipo) no quiere decir que la nueva información forma, simplemente, una especie de ligazón con elementos preexistentes en la estructura cognitiva. Al contrario, es solamente en el aprendizaje mecánico en el que una ligazón, arbitraria y no sustantiva, se produce con la estructura cognitiva preexistente. Es decir, *“en el aprendizaje significativo, el proceso de adquisición de informaciones resulta de un cambio, tanto de la nueva información adquirida como del aspecto específicamente relevante de la estructura cognitiva en la cual ésta se relaciona”*(Moreira, 2000:20). Ahora bien, el autor distingue tres tipos de aprendizaje significativo, los que se presentan en la siguiente figura.

<b>REPRESENTACIONES</b>	<b>Adquisición de vocabulario</b>	Previo a la formación de conceptos Posterior a la formación de conceptos
<b>CONCEPTOS</b>	<b>Formación (a partir de los objetos)</b>	Posterior a la formación de conceptos Comprobación de hipótesis
<b>PROPOSICIONES</b>	<b>Adquisición (A partir de los Conceptos preexistentes)</b>	Diferenciación progresiva (concepto subordinado) Integración jerárquica (concepto supraordinado) Combinación (Concepto del mismo nivel jerárquico)

[educacion.idoneos.com](http://educacion.idoneos.com)

Figura 3: Tipos de aprendizaje significativo, Ausubel (1963).

#### 3.1.5.1 Aprendizaje representacional

Uno de los tres aprendizajes significativos, es el representacional, que resulta ser el más básico de los tres, puesto que atribuye significados a elementos simbólicos; por lo general son palabras, que pasan a tener significado para el individuo. Sin embargo, no se

trata de una mera asociación entre los símbolos y el objeto; ya que, a medida que el aprendizaje sea significativo el alumno va a ser capaz de relacionar, de manera sustantiva y no arbitraria, la propuesta de equivalencia representacional a los contenidos que son relevantes y existentes en su estructura cognitiva.

### 3.1.5.2 Aprendizaje conceptual

Por su parte, el aprendizaje conceptual es el referido a lo representacional, es decir, los conceptos son representados por símbolos particulares, pero, a su vez, son genéricos o categóricos, dado que representan abstracciones de los atributos esenciales de los referentes, es decir, representan regularidades en objetos o eventos.

Ahora bien, el aprendizaje conceptual tiene lugar cuando el individuo percibe regularidades en eventos u objetos, pasando a representarlos por un determinado símbolo y ya no depende de un referente concreto del evento u objeto para dar significado a este.

### 3.1.5.3 Aprendizaje proposicional

El aprendizaje proposicional se contrapone al representacional, ya que la labor no es aprender significativamente lo que representan palabras aisladas o combinadas, sino que aprender el significado de las ideas en forma de proposición. O sea, la tarea es aprender el significado que está más allá de la suma de significados de cada una de las palabras o de conceptos que componen la proposición. Por lo tanto, el aprendizaje representacional es básico, o requisito, para que se logre el aprendizaje proposicional. En definitiva, aunque el aprendizaje significativo de las proposiciones sea más complejo que los aprendizajes representacional y conceptual, es muy similar a ellos, en el sentido que los significados emergen cuando la nueva proposición está relacionada e interactúa con proposiciones o conceptos relevantes en la estructura cognitiva.

### 3.1.6 Principio de asimilación

Para esclarecer y precisar el proceso de adquisición de significados en la estructura cognitiva, Ausubel (1978) introduce el “*Principio de asimilación*” o “*La Teoría de la asimilación*”, según él, es el resultado que se lleva a cabo en el aprendizaje significativo, entre el nuevo material que se va a aprender y la estructura cognitiva existente. Es decir, es una asimilación entre los antiguos y nuevos significados que contribuyen a la diferenciación de dicha estructura. Además, en este proceso, después de la aparición de los nuevos conceptos o significados, la relación entre las ideas-anclas y las asimiladas permanecen en la estructura; proceso que puede representarse de la siguiente forma.

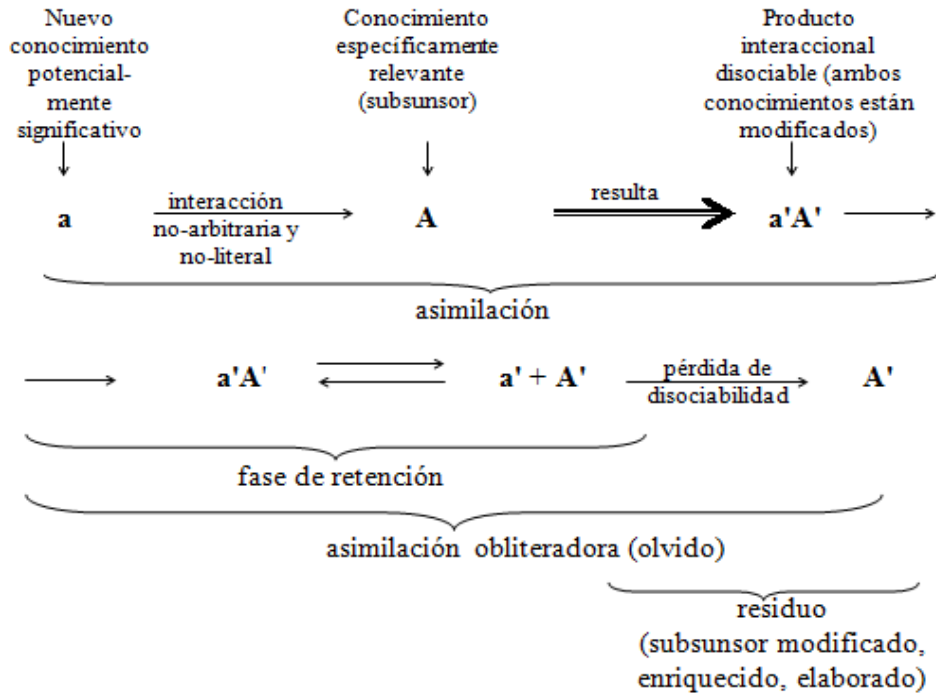


Figura n° 4: Esquema del proceso de asimilación de Ausubel, (Moreira, 2000)

Siguiendo la figura anterior, la asimilación es el proceso que ocurre cuando una idea, concepto o proposición, la cual es potencialmente significativa, es asimilada bajo una idea, concepto o proposición ya establecida, es decir un subsumidor. Ahora bien, siguiendo el esquema no sólo la nueva información  $A$  se modifica, sino que también el concepto subsumidor  $A$ , con el que se relaciona e interactúa. Por consiguiente, ambos productos de esta interacción  $a'$  y  $A'$ , permanecen relacionados como co-participantes de una unidad, o complejo ideacional,  $a'A'$ . (Moreira, 2000).

Por otro lado, el producto de la interacción  $a'A'$  puede sufrir modificaciones a lo largo del tiempo. Lo que quiere decir que la asimilación no es algo que finalice después del aprendizaje significativo, sino que continua a lo largo del tiempo, y puede suponer nuevos aprendizajes y pérdida de la capacidad de reproducción de las ideas subordinadas. Ahora bien, la importancia de éste proceso no es solamente la adquisición o retención de significados, sino que también se refiere al hecho de que implica un mecanismo de olvido subyacente de esos significados. Es decir, que los conceptos más amplios permanecen y sirven de andamiaje para nuevas ideas, las que posibilitan su retención. Por otra parte, el significado de las nuevas ideas tiende a ser asimilado por las ideas más estables. Pero después del aprendizaje, cuando ese estado obliterador de la asimilación comienza, las nuevas ideas se vuelven espontáneas y progresivamente menos separables de la estructura cognitiva, hasta que llega un punto en el cual ya no es posible reproducirlas de forma aislada, ni que se pueda decir que hubo “olvido”.(Moreira, 2000)

Inmediatamente después de producirse el aprendizaje significativo como resultado de la interacción entre la nueva información y los subsumidores, comienza una segunda etapa de asimilación a la que Ausubel llama “Asimilación obliteradora”. Ahora bien, en esta etapa las nuevas ideas se vuelven espontáneas y progresivamente menos separables de sus ideas-anclas (subsumidores) hasta que ya no se puedan reproducir como entidades individuales. Es decir, se llega a un grado de disociabilidad nula, y  $a'A'$  se reproduce simplemente como  $A'$ , por lo tanto, el olvido es una continuación temporal del mismo proceso que facilita el aprendizaje.

En definitiva, el centro de la “teoría de la Asimilación” está en la idea de que los nuevos conceptos o significados son adquiridos a través de la interacción del nuevo conocimiento con los conceptos o proposiciones previamente adquiridos. Por lo que, de esta interacción resulta un producto intencional  $a'A'$ , el que sólo la nueva información adquiere significado ( $a'$ ), sino que también el subsumidor  $A$  adquiere significados adicionales ( $A'$ ). durante la fase de retención ese producto es separable en  $a'$  y  $A'$ , aunque a medida que el proceso de asimilación continúa y entra en una fase obliteradora,  $A'a'$  se reduce a  $A'$ , produciéndose el olvido.

Ahora bien, dependiendo como la nueva información interactúa con la estructura cognitiva, las formas de aprendizaje planteadas por la teoría de asimilación son las siguientes, Aprendizaje Subordinado, Aprendizaje Superordenado y Aprendizaje Combinatorio.

### 3.1.6.1 Formas de aprendizaje significativo

Siguiendo la misma línea del aprendizaje significativo, se pueden distinguir tres formas del mismo tipo de aprendizaje, los señalados anteriormente, que se desarrollarán a continuación.

#### Aprendizaje subordinado

El aprendizaje subordinado, se produce cuando las nuevas ideas, es decir, las informaciones potencialmente significativas son relacionadas con los conocimientos pertinentes de la estructura cognitiva previa del alumno adquiriendo significado, para el sujeto que aprende. Esto se produce gracias al proceso de anclaje cognitivo, interactivo, junto con conocimientos previos relevantes más generales e inclusivos ya existentes en su estructura cognitiva. Este proceso recibe el nombre de subsunción.

#### Aprendizaje superordenado

Este tipo de aprendizaje implica procesos de abstracción, inducción, síntesis, que lleva a nuevos conocimientos que pasan a subordinar aquéllos que les dieron origen. Es un mecanismo fundamental para la adquisición de conceptos. Tiene lugar cuando la idea que se aprende es más general e inclusivo que los conceptos establecidos en la estructura cognitiva. El proceso de asimilación en este caso implica no sólo la vinculación de la nueva idea con otra ya aprendida, sino una fuerte reestructuración de un conjunto de ideas establecidas anteriormente. Los aprendizajes que implican razonamiento inductivo o síntesis de ideas, constituyen buenos ejemplos de aprendizaje superordenado.

#### Aprendizaje combinatorio

Finalmente, el aprendizaje combinatorio es una forma de aprendizaje significativo en la que la adquisición significativa de un nuevo conocimiento implica interacción con varios otros conocimientos ya existentes en la estructura cognitiva, pero no es ni más inclusiva ni más específica que los conocimientos originales. La nueva información no se relaciona

de manera subordinada ni superordenada con proposiciones o conceptos específicos, sino que se relaciona de manera general con aspectos relevantes de la estructura cognoscitiva. Es como si la nueva información fuera potencialmente significativa como un todo con la estructura cognitiva y no con aspectos específicos de la estructura.

La metodología utilizada en el enfoque constructivista, considera una interacción entre los participantes, enfatizando el trabajo cooperativo y colaborativo. Silva C, (2012) pag. 52.

### 3.1.7 Evaluación del aprendizaje significativo

La evaluación del aprendizaje en sí, es esencial, ya que mediante ella se comprueba si realmente se presentó de forma oportuna el aprendizaje significativo. Ahora bien, esta evaluación implica otro enfoque, porque lo que se debe evaluar es la comprensión, la captación de significados, la capacidad de transferencia del conocimiento a situaciones no conocidas y no rutinarias. Por lo tanto, la evaluación del aprendizaje significativo debe ser predominante formativa y recursiva. Por lo tanto, es necesario buscar evidencias del aprendizaje significativo, en lugar de querer determinar si ocurrió o no. Cabe destacar que es esencial la recursividad, o sea, permitir que el alumno pueda rehacer, más de una vez, si es el caso, las tareas de aprendizaje. En definitiva, es importante que exteriorice los significados que está aceptando, que explique y que justifique sus respuestas.

### 3.1.8 Mapas conceptuales

Abordar la temática de los mapas conceptuales sin hacer referencia a Joseph Novak sería desconocer en gran medida los orígenes de esta técnica o recurso que se utiliza a diario en la tarea de enseñanza.

Los mapas conceptuales fueron diseñados por Novak en 1975 y desde entonces, numerosas investigaciones han puesto de manifiesto que la elaboración de mapas conceptuales ayuda a lograr un aprendizaje significativo.

Joseph Novak conoció a Ausubel y quedó atrapado por el énfasis que éste ponía para explicar el importante papel que juegan los conceptos en el aprendizaje significativo. De hecho, los fundamentos teóricos del mapa conceptual son los mismos que los planteados por Ausubel en su concepción del aprendizaje. En este sentido, el mapa

conceptual -según Novak- es una proyección práctica de la teoría del aprendizaje de Ausubel.

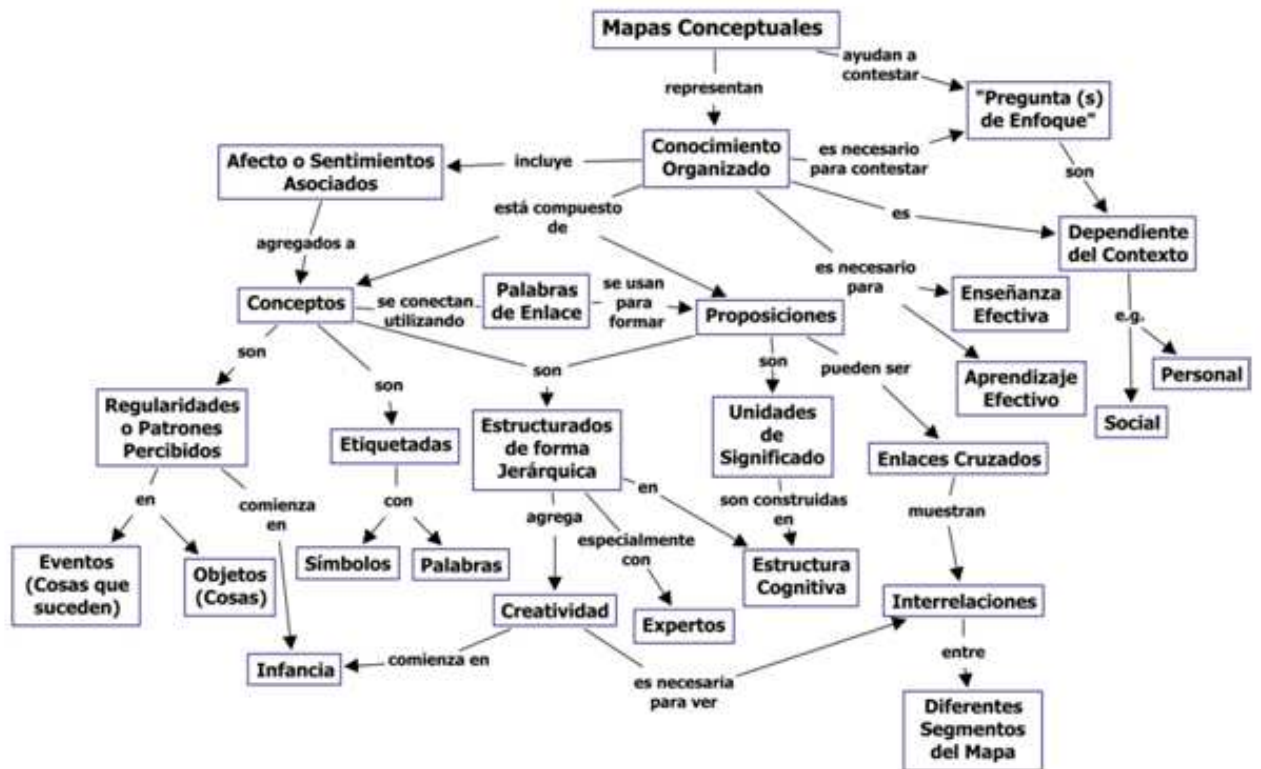
### **Los elementos que constituyen el mapa conceptual:**

De acuerdo con lo planteado por Novak, el mapa conceptual contiene tres elementos fundamentales:

- **Los conceptos:** hacen referencia a acontecimientos y a objetos que se producen en la mente del individuo.. No se consideran conceptos los nombres propios, los verbos, los adjetivos ni las fechas.
- **Las proposiciones:** forman una unidad semántica que consta de dos o más conceptos unidos por palabras enlace. Tienen valor de verdad puesto que afirman o niegan algo de un concepto.
- **Palabras-enlace:** son las palabras que se utilizan para vincular los conceptos y además, para representar el tipo de relación que se establece entre ellos. Son las preposiciones, las conjunciones, el adverbio y en general todas las palabras que no sean concepto y que se utilizan para relacionar estos y así armar una "proposición" Ej. : para, por, donde, como, entre otras. Las palabras enlace permiten, junto con los conceptos, construir frases u oraciones con significado lógico y hallar la conexión entre conceptos.

Otros elementos: Líneas y Flechas de Enlace y Conexiones Cruzadas.

Otro de los elementos principales en el proceso de aprendizaje son los diagramas que indican relaciones entre conceptos y buscan reflejar la estructura conceptual de un cierto conocimiento. Más específicamente, pueden ser vistos como diagramas conceptuales jerárquicos. Si bien existen otros métodos para cuantificar el aprendizaje significativo, tales como los diagrama de V, nuestra investigación se basará sólo en el estudio de los mapas conceptuales.



## 3.2 Tic en educación

Según diferentes autores esta noción produce confusiones, pues hay algunos que utilizan el término para referirse al modo en que los estudiantes aprenden a usar las tics mientras que otros lo usan para referirse a la educación que se entrega a través de las tics.

Efectivamente, se trata de dos lógicas diferentes: una, la lógica de aprender de la tecnología y la otra la lógica de aprender con la tecnología. Es en esta última en la cual nos centraremos para el desarrollo de nuestra investigación.

Según (Hopenhay, 2005) el uso de tic en educación constituye una herramienta poderosa que amplía y democratiza oportunidades de aprendizaje entre grupos de distintos ingresos.

Es con este fin que Chile a comienzo de los años 90 y con el financiamiento del banco mundial decide implementar y experimentar con el uso de computadores y comunicaciones en escuelas básicas, la cual es integrada gradualmente bajo el nombre de la red “Enlace”.

En las últimas décadas, según Álvarez (2010), las nuevas tecnologías han puesto de relieve las teorías sobre la importancia del uso de diferentes representaciones en la enseñanza de conceptos matemáticos, al hacer posibles nuevas formas de representar los objetos matemáticos, y su consecuente visualización por parte de los estudiantes.

Galvis (2004; en Jaramillo, 2005) considera que, el uso de TIC por parte de los estudiantes está muy ligado al enfoque educativo que tenga el docente, pues lo que se hace es fomentar la actividad de los estudiantes usando recursos digitales. Ni la sala ni su encargado son los que hacen el cambio, éste viene de los estudiantes que asumen los retos que les proponen sus maestros, cuando éstos deciden darles control creciente a sus estudiantes del proceso de aprender y propician una autonomía progresiva en ellos.

Galvis (1992, en Jaramillo, 2005) establece que, el uso de las TIC en educación es para proveer simulación, es decir, para apoyar aprendizajes donde se requiere la experimentación, ya que, las TIC pueden facilitar la interacción con un mundo virtual semejante a una situación real, difícil de reproducir. En una simulación se aprenden procedimientos, se entienden fenómenos y se aprende a tomar acciones en esas circunstancias.

Las TIC han contribuido enriquecer las posibilidades de aprendizaje y su adaptación a diferentes estilos y ritmos (Planas y Alsina, 2009). Según Coll (2007), diversos estudios muestran que la capacidad efectiva de las TIC para la transformación de las dinámicas de trabajo de profesores y estudiantes en los centros y los procesos de enseñanza y aprendizaje en las aulas está, en general, muy por debajo del potencial transformador e innovador que habitualmente se les atribuye; este autor señala como determinantes de mayor o menor capacidad transformadora e innovadora del contexto de uso, las finalidades que se persiguen con su incorporación, y los usos efectivos que de ellas hacen los profesores y estudiantes en los centros y en las aulas (Planas & Alsina, 2009).

### 3.2.1 Proyecto Enlaces

Este proyecto se inicia en Santiago con doce escuelas y luego se extiende a la Araucanía abarcando a 100 establecimientos. Su principal objetivo es proveer a los docentes de nuevas herramientas didácticas y ofrecer a todos los estudiantes las mismas oportunidades de acceder a una mayor cantidad y una mejor calidad de recursos de aprendizaje, independientemente de la ubicación geográfica o nivel socioeconómico de sus establecimientos.

Es así que Enlaces desarrolló el software La Plaza con el objeto de facilitar el uso del computador por parte de alumnos y profesores, en los comienzos de la inserción de la tecnología a las aulas. En ese entonces, existía una fuerte orientación hacia la creación de redes de personas con los medios disponibles: correo electrónico y listas de interés.

De esta manera, a través de la metáfora de una plaza como lugar de encuentro de una comunidad, se introduce la informática y las telecomunicaciones en los establecimientos educacionales. El recurso cuenta con cuatro ambientes: el Centro Cultural, el Correo, el Kiosco y el Museo. Los tres primeros están orientados a las comunicaciones, mientras que el cuarto, entrega una serie de herramientas pedagógicas para apoyar el trabajo docente.

En el año 1995 esta red inició su expansión nacional logrando una cobertura de 5 mil 300 escuelas y liceos a lo largo de todo el país, incluyendo Isla de Pascua y la Antártica. Ello significó que un total de dos y medio millones de escolares chilenos tuvieran acceso a los recursos informáticos provistos por la red nacional de informática educativa, Enlaces. También durante este año se crea la primera revista chilena especializada en informática educativa. La cual se publicó hasta el año 1999 con un total de 20 publicaciones y cuyo objetivos principales eran: difundir experiencias pedagógicas exitosas que incorporaran las TIC al currículum, entregar orientaciones pedagógicas para el

uso de los recursos informáticos en los distintos sectores de aprendizaje, fomentar la realización de proyectos de trabajo colaborativo y la conformación de redes de profesores y estudiantes, entre otros.

# Capítulo 4

## Metodología

En el siguiente capítulo se describen todos los métodos utilizados para poder realizar la investigación, la cual tiene su base en el paradigma cuasi-experimental, dentro de éste se contemplan la realización de un Pre-Test y Pos-Test, los cuales están enfocados en el diseño, los instrumentos evaluativos, procedimientos y herramientas utilizadas para la implementación.

## **4.1 Diseño**

Este diseño contempla dos grupos, uno de ellos es el que recibirá el procedimiento experimental y el otro no. Es decir, se tiene un grupo experimental designado GE y otro grupo de control, el cual llamaremos GC. Antes de la realización del procedimiento experimental a ambos grupos se les realizará un Pre-Test con la finalidad de determinar los conocimientos previos que tienen éstos sobre la unidad a tratar (transformaciones isométricas). Una vez obtenidos los resultados del Pre-Test se llevará a cabo la propuesta o experimento (X) con el grupo experimental (GE), en cambio con el grupo de control (GC) se abordará el tema de la manera tradicional, es decir, con las clases en aula sin la utilización de herramientas computacionales.

Una vez finalizada la intervención e inmediatamente después y en forma simultánea a ambos grupos se les realizará un Post-Test con el propósito de medir y comparar los resultados obtenidos. Wiersma (1986; en Hernández, Fernández & Baptista, 1997), comenta que el Post-Test debe ser, preferentemente, realizado inmediatamente después de que concluya el experimento, especialmente si la variable dependiente tiende a cambiar con el paso del tiempo.

Cabe señalar que el grupo GE y GC fueron totalmente homogéneos e independientes entre sí, puesto que el establecimiento cuenta con dos cursos por nivel sin hacer diferencia en los resultados académicos de los estudiantes.

## **4.2 Participantes**

La investigación se desarrolló en el Colegio Entrevalles de Villa Alemana, la cual es una institución educativa dependiente de la Sociedad Educacional Entrevalles S.A., la que fue fundada el 14 de Octubre del año 2005, se ubica en la calle Progreso # 1051, comuna de Villa Alemana, región de Valparaíso.

El colegio Entrevalles en un comienzo fue fundado como un colegio “artístico”, en el cual se desarrollaban con mayor énfasis este tipo de habilidades de los estudiantes. En la actualidad el colegio Entrevalles ha planteado su enseñanza como un colegio científico-humanista y ha adoptado la Jornada escolar completa con alumnos desde Básica a Cuarto Medio para varones y mujeres.

Debido a las diferentes realidades que presenta cada establecimiento es necesario contar con una clasificación más general que permita realizar comparaciones más justas entre éstos. Es por esto que, para el análisis de los resultados SIMCE, los establecimientos educacionales han sido clasificados en cinco grupos según características sociales y económicas, de acuerdo a estos parámetros el establecimiento antes mencionado fue clasificado por el ministerio de educación dentro del Grupo Socioeconómico bajo, donde la mayoría de los apoderados ha declarado tener hasta 9 años de escolaridad y un ingreso del hogar de hasta \$180.000, esto es, que entre el 80% y el 100% de los estudiantes se encuentra en condición de vulnerabilidad social.

La metodología fue implementada en la sala ENLACES del colegio Entrevalles, la que estaba constituida por 20 computadores, todos presentaban conexión a internet con sistema operativo Windows XP y tenían instalado el software geométrico Geogebra. Además de esto la sala enlace presentaba un computador conectado a un proyector data.



*Imagen 4.1: Sala Enlaces*

Los cursos participantes son el Primero Medio A y Primero Medio B. El curso Primero Medio A, tiene un total de 39 estudiantes de los cuales 21 son mujeres y 18 son hombres, su promedio general en el área de Matemáticas es 4,5. Es importante señalar que 7 de sus estudiantes presentan un promedio inferior a 4,0 (4 mujeres y 3 hombres). Por otro lado el Primero Medio B, con un total de 33 estudiantes, compuestos por 13 mujeres y 20 hombres, tienen un promedio general en el área de Matemáticas de 4,6 de los cuales 7 de sus estudiantes poseen nota inferior a 4,0 (6 mujeres y 1 hombre).

Con respecto a nuestra metodología esta se enfoca directamente al uso de software educativo, sin dejar de lado el uso de guías, no obstante estas guías siempre con una connotación didáctica y lúdica.

### **4.3 Instrumento evaluativo**

En esta investigación, que se basa en el diseño experimental, se utilizaron pruebas de contenidos, con lo cual se buscaba medir los aprendizajes alcanzados antes, durante y después del desarrollo experimental. Es por esto que las pruebas se aplicaron en la primera sesión (Pre-test) y en la última sesión (Post-test), sin embargo es necesario mencionar que se realizó un seguimiento del aprendizaje de los alumnos a través de la construcción de mapas conceptuales. El Pre y Post test iban enfocados ambos a los mismos objetivos y para ellos se establecieron los siguientes conceptos a evaluar según los aprendizajes esperados de la unidad.

*La validez de contenido* es compleja de obtener. Primero, es necesario revisar cómo ha sido utilizada la variable por otros investigadores. Y en base a dicha revisión elaborar un universo de ítems posibles para medir la variable y sus dimensiones (el universo tiene que ser lo más exhaustivo que sea factible).

Posteriormente, se consulta con investigadores familiarizados con la variable para ver si el universo es exhaustivo. Se seleccionan los ítems bajo una cuidadosa evaluación y si la variable tiene diversas dimensiones o facetas que la componen, se extrae una muestra probabilística de ítems (ya sea al azar o estratificada —cada dimensión constituiría un estrato—). Se administran los ítems, se correlacionan las puntuaciones de los ítems entre sí (debe haber correlaciones altas, especialmente entre ítems que miden una misma dimensión) (Bohmstedt, 1976; en Hernández, Fernández & Baptista, 1997) y se hacen estimaciones estadísticas para ver si la muestra es representativa. Para calcular la validez de contenido son necesarios varios coeficientes.

También, hay que mencionar que se realizó una encuesta a los estudiantes con el fin de medir las expectativas que éstos tenían de las clases de matemáticas, esta fue aplicada una vez finalizada la intervención, es decir, después de realizar el post- test con el objetivo de medir la percepción de los estudiantes hacia el desarrollo de las clases con el software geométrico Geogebra.

Por otro lado se realizó una validez de criterio de las pruebas de contenidos (Pre y Post test), la cual fue realizada por el Departamento de Matemáticas del colegio. Esta validez de criterio es más sencilla de estimar, lo único que hace el investigador es correlacionar su medición con el criterio y este coeficiente es el que se toma como coeficiente de validez (Bohmstedt, 1976; en Hernández, Fernández, & Baptista, 1997), como resultado de esta validación se realizaron algunos cambios en los parámetros de evaluación, los cuales fueron sugeridos por el departamento de matemáticas del colegio.

A continuación se describirán los pasos con los cuales se llevó a cabo esta investigación:

- En un comienzo se estableció la unidad y el nivel en el que se desarrollará la investigación, siendo estas la unidad de Transformaciones Isométricas (Composición) en el nivel de Primero Año de Enseñanza Media.
- Se realiza el diseño de las pruebas de contenido (Pre-test y Post-test) y las actividades de refuerzo en cada sesión, tanto para el grupo experimental como para el grupo de control.
- Se determina el establecimiento Educativo, en donde se desarrollará la investigación, que corresponde al Colegio Entrevalles Ubicado en la Región de Valparaíso, comuna de Villa Alemana
- Se realiza una reunión con los directivos del colegio Entrevalles y el profesor de la asignatura con el fin de informar de las planificaciones del experimento y la duración que este tendrá. Además se hace entrega de las evaluaciones y actividades diseñadas para una posterior validación.
- Se visita la sala de computadores, con lo cual se verifica el buen funcionamiento de los computadores y que estos tengan instalado el software geométrico Geogebra.
- Se establece cuáles serán los cursos en la intervención, es decir, al primero medio A se le asigna como el grupo de Control y al primero medio B Grupo experimental.

## 4.4 Contenidos

Los contenidos a tratar durante la investigación son los de transformaciones isométricas correspondiente a la unidad numero “3” que entrega los planes y programas del ministerio de educación señalados el año 2004. Esta unidad corresponde al nivel de Primer año medio y dentro de sus contenidos se contemplan los siguientes:

- Rotaciones de figuras planas
- Traslaciones de figuras planas
- Simetrías de figuras planas
- Composición de transformaciones isométricas

Tenemos que señalar que se consideró como conocimientos previos todo los contenidos de transformaciones isométricas, es decir, traslación, rotación y simetrías, ya que la intervención esta dirigida a la composición de éstas.

## 4.4.1 Horarios

Los horarios que se estipularon para el desarrollo de la intervención fueron los siguientes:

Primer Año medio A:

CLASE	DÍA	HORARIO
Nº1	LUNES	08:00 A 09:25
Nº2	MARTES	08:00 A 09:25
Nº3	MIÉRCOLES	08:00 A 09:25
Nº4	JUEVES	08:00 A 09:25

Primer Año medio B:

CLASE	DÍA	HORARIO
Nº1	LUNES	09:40 A 11:10 y 13:45 A 14:30
Nº2	MIÉRCOLES	09:40 A 11:10 y 13:45 A 14:30
Nº3	JUEVES	13:00 A 14:30
Nº4	JUEVES	12:05 A 13:35

Tenemos que destacar que esta planificación horaria fueron establecidas tanto para el grupo de control como para el grupo experimental, con la diferencia que este último realizó todas sus actividades a excepción de los test y encuestas en la sala enlace, no así el grupo de control que realizó todas sus actividades de manera tradicional dentro de la sala de clases, es decir, frente a la pizarra de clases. También hay que señalar que para cada una de las sesiones se establecieron los objetivos de las clases y los aprendizajes que los alumnos deberían adquirir durante la realización de la clase.

# Capítulo 5

## Secuencia didáctica y actividades.

En esta sección se refiere a la secuencia didáctica adoptada para implementar en el aula con el objetivo de realizar la investigación, basada en las tecnologías propuestas para la enseñanza de la unidad de transformación isométricas.

## 5.1 Justificaciones previas

En los últimos años en Chile, las TIC han sido fomentadas e incluidas con mayor énfasis en el proceso de enseñanza-aprendizaje como se hace referencia a continuación:

El siguiente reporte presenta los resultados de la búsqueda y sistematización de información obtenida respecto a un conjunto de políticas, iniciativas, proyectos, productos y servicios, existentes en el país entre los años 2000 y 2005, vinculadas al desarrollo, la investigación, aplicación y explotación de las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC) en diferentes ámbitos de la educación. El proceso de búsqueda, análisis y sistematización se organizó considerando los siguientes ámbitos:

1. Proyectos e iniciativas de investigación y desarrollo.
2. Oferta de contenidos digitales para educación.
3. Iniciativas y proyectos de uso educativo de las TIC orientados a impactar en variables académicas de los estudiantes.
4. Oferta de iniciativas de educación a distancia con uso de TIC.
5. Oferta de equipamiento y dispositivos orientados al mercado educativo.
6. Oferta de software y servicios para apoyar la gestión educativa.

(Agenda País Digital, 2012).

Se piensa que las nuevas tecnologías pueden hacer aportes fundamentales para crear estas condiciones de aprendizaje de otro modo difíciles de conseguir. Estos medios permiten generar de modo realista las situaciones apropiadas sobre las que el aprendiz puede actuar. Las simulaciones permiten acelerar los procesos cruciales, haciéndolos más explícitos, permitiendo su mejor comprensión y la actuación sobre ellos. Las tecnologías facilitan el acceso inmediato de materiales de referencia muy amplios y a presentaciones muy diversas. Facilitan además, el establecimiento de conexiones múltiples que favorecen un pensamiento más elaborado y semejante al de los expertos en una materia. Además las tecnologías facilitan las interacciones sociales ya sea para el aprendizaje como para los expertos. Por otra parte tiene un efecto motivador en los alumnos. Sin embargo las tecnologías constituyen una herramienta cuya utilidad dependerá de la finalidad y del modo con el que se involucren en el aula (NCTM, 2004).

Los objetivos que hoy persigue la educación son la comprensión, la autonomía en el aprendizaje, la comunicación tanto oral como escrita; la obtención, selección y el análisis críticos de la información y la resolución eficiente de los problemas. Estos objetivos suponen un alejamiento de los procedimientos tradicionales de aprendizaje, en los cuales el alumno era un mero receptor, debido a esto se ha enfatizado cada vez más las actividades destinadas a “enseñar a pensar” o “aprender a aprender” en forma autónoma y para poder aplicar estas actividades se ha modificado la forma de enseñar y se ha motivado una participación más activa del alumno.

Estos métodos demandan a los profesores además, de un conocimiento profundo de la materia que imparten, un buen conocimiento de los procesos de aprendizaje que guiarán su proyecto educativo, una planificación razonada y afectiva de las actividades que desarrollarán en el aula. Además, el profesor requiere de métodos flexibles adaptados a las necesidades de cada alumno(a) y basados en gran parte en el diálogo con ella o él, para proporcionarles la retroalimentación necesaria que compruebe sus conocimientos previos al enfrentarlos, cuando así convenga, con evidencia contradictoria.

Desde la percepción tradicional, el aprendizaje se entiende como la actividad de memorizar información relevante procedente de un profesor o de un texto, transmitido en cualquier caso en forma unidireccional (Vizcarro y León, 1997).

Todo lo antes mencionado ayuda a que el aprendizaje que estamos fomentando sea significativo, al tener las condiciones necesarias que este ocurra entregadas por la implementación de software Geogebra en las composiciones de transformaciones isométricas.

## **5.2 Secuencia didáctica adoptada**

En esta sección se detalla la secuencia didáctica empleada en nuestra investigación. La estrategia aquí señalada, es una adaptación del trabajo desarrollado por Ríos (2010), a la cual se le realizaron modificaciones que generaron los pasos que a continuación se explican. Esta secuencia, se basa en aprendizaje por descubrimiento, aprendizaje colaborativo y aprendizaje significativo con uso de un software Geogebra.

A continuación se presenta la secuencia didáctica enfocado en la temática de composición de Transformaciones Isométricas. Para comenzar, se conforman los grupos de trabajo que se componen de 2 o 3 integrantes, luego se sigue con los siguientes pasos:

- a) Mediante las actividades planteadas en clase a los alumnos se le plantearan interrogantes acerca de los conceptos matemáticos ligados a la unidad de transformación isométrica.
- b) Luego, mediante el uso del software Geogebra, los alumnos deberán realizar la construcción de la figura con sus respectivas composiciones de transformaciones para dar respuesta a las interrogantes.
- c) Posteriormente los alumnos deberán construir hipótesis acerca de la investigación generada a partir de las interrogantes planteadas
- d) Con las hipótesis planteadas, los alumnos discutirán con sus compañeros de grupo acerca de la validez de cada una de éstas, según la composición de las transformaciones isométricas.
- e) Todo lo concluido anteriormente se comprueba con el uso del software.
- f) Para finalizar, el docente institucionaliza los conceptos dados por los grupos para determinar las definiciones respectivas de las composiciones de las transformaciones isométricas.

En una primera instancia se diferenciaron los contenidos de composición de transformaciones isométricas en 2 etapas las cuales se describen a continuación.

- 1° etapa: Las tres primeras clases, tomando como referencias el concepto de transformación isométrica (traslación, reflexión y rotación), se introduce el concepto de composición de transformaciones isométricas iteradas de cada transformación (es decir,  $T_w \circ T_v$ ,  $R_2 \circ R_1$ ,  $R_{(O, \beta)} \circ R_{(O, \alpha)}$ ) En el inicio de cada clase se hace referencia al desarrollo de composición de transformaciones isométricas en figuras creadas por el alumno en Geogebra para así responder a las interrogantes planteadas en cada clase. Luego al finalizar cada clase se les presenta la institucionalización de cada caso de composición vista.
- 2° etapa: En las siguientes clases, se realiza la composición de transformaciones alternadas, con lo cual podrán mejorar el concepto de cada transformación (es decir,  $R_{(O, \alpha)} \circ T_w$ ,  $R_1 \circ T_v$ ,  $R_{(O, \alpha)} \circ R_1$ )

El contenido de composición de transformaciones isométricas es una unidad que contempla conceptos tales como traslación, rotación, simetría y variantes donde vectores, ángulos, rectas paralelas, rectas secantes se relacionan entre sí. Estos conceptos, en general, son bastantes dificultosos y complejos de estudiar sin la ayuda de una herramienta computacional, debido a lo engorroso que resulta graficar las figuras en un plano cartesiano o mostrar el desplazamiento de traslaciones, simetrías o rotaciones de las gráficas según sus vectores o ángulos. Por esto, se adopta esta secuencia, con el fin de utilizar la herramienta

computacional con la ayuda de los aprendizajes colaborativo y por descubrimiento, además el aprendizaje significativo que genera el empleo de esta herramienta, para así lograr la integración de los resultados obtenidos a las transformaciones isométricas.

Con la ayuda del software Geogebra y mediante las actividades propuestas, se espera que los estudiantes creen sus propias inquietudes, dudas y conjetura, en otras palabras, que ayude a los estudiantes a cambiar, progresivamente, de un pensamiento concreto a una representación conceptual.

Cuando las hipótesis de las actividades planteadas generen una discusión frente a la resolución de los ejercicios, empieza el desarrollo analizando la situación, graficando las figuras geométricas en el software y comprender los pasos a seguir. Para que esto funcione, el software constituirá una importante herramienta para que los estudiantes comprendan todos los factores y aspectos matemáticos relacionados, obteniendo una hipótesis que ayuda a dar respuestas a las interrogantes, ejercicios planteados y una conjetura sobre los resultados que obtiene de cada caso de composición de transformaciones isométricas.

Con el empleo del software Geogebra y su fácil manejo, podremos entregar al alumno una serie de ejercicios o actividades donde los conceptos de composición de transformaciones isométricas estén visibles, donde tendrán que resolver y obtener conclusiones usando el software, sin manejar las transformaciones isométricas, es decir traslación, rotación y simetrías con regla y compas. Además, la manipulación del software ayudará al alumno a identificar, aplicar y representar los conceptos matemáticos, esto conlleva a que el aprendizaje se vaya descubriendo por medio de las experiencias que realiza el alumno, aprendizaje por descubrimiento. Este aprendizaje se da en cada momento de la clase, en el desarrollo de los ejercicios, y principalmente cuando debe determinar la figura que se obtiene de la composición, inferir conceptos de cada transformación isométrica que no se manifiestan sencillamente, sino que se va determinando y obteniendo con la manipulación de este software.

El desarrollo y planteamiento de estas clases motiva a que los estudiantes tengan una actitud positiva y una predisposición para aprender participativamente consiguiendo tanto por recepción o por descubrimiento la atribución de significado a nuevos conocimientos, dependiendo de la existencia de conocimientos previos relevantes y la interacción entre ellos, como este proceso es interactivo, cuando sirve de idea ancla para el nuevo conocimiento, él mismo se modifica adquiriendo nuevos significados y corroborando los existentes para un mejor aprendizaje significativo a futuro.

## **5.3 Actividades realizadas en la intervención**

En relación a las actividades realizadas en el desarrollo de las clases, estas contemplaron la utilización de la propuesta didáctica sugerida en esta intervención. Con la finalidad de evaluar los conocimientos previos se realiza una prueba (pre-test), antes de iniciar las actividades a tratar.

La primera actividad en este experimento consistió en realizar los ejercicios propuestos en las planificaciones de cada clase. Esto se desarrollo en grupos de trabajo formados por 2 a 3 alumnos, utilizando el software Geogebra, a modo de herramienta con el objetivo de facilitar el proceso de composición de las transformaciones isométricas. A continuación los alumnos intentan responder las interrogantes planteadas de cada situación entregada, con el fin de establecer una hipótesis que luego el docente valida e institucionaliza la definición del concepto adquirido por ellos.

Luego de cada actividad concluida, al finalizar la clase es el alumno el que tiene que construir la figura geométrica y realizar la composición de transformaciones isométricas para verificar por sí mismo las hipótesis planteadas.

Al finalizar las clases se conceptualiza las clases anteriores para que el alumno fortalezca los conceptos estudiados de las respectivas clases. A modo de autoevaluación, los alumnos desarrollan los ejercicios en la pizarra aclarando dudas y corrigiendo errores.

Una vez concluida las planificaciones de las clases junto con eso sus actividades, se realiza una evaluación escrita (Post-test), con el fin de evaluar el aprendizaje adquirido.

## **5.4 Ilustración de las actividades realizadas.**

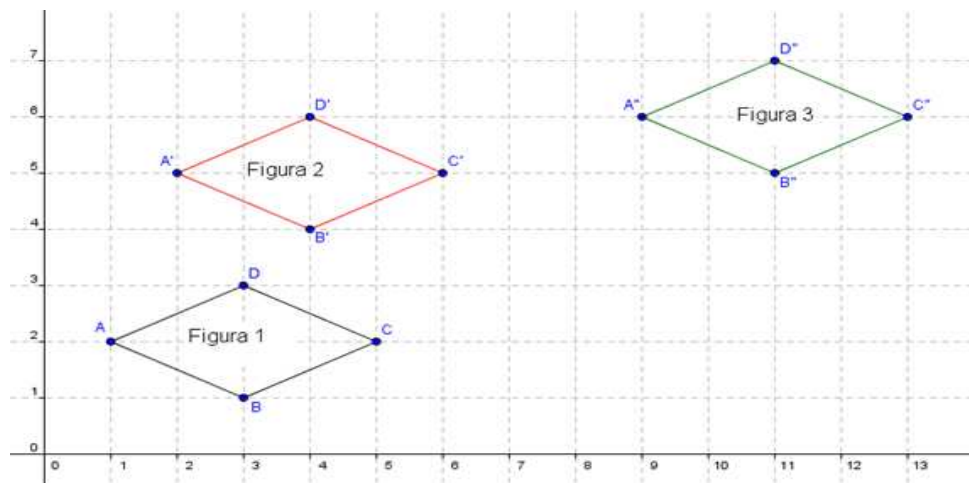
En esta sección se expone las actividades desarrolladas en la intervención, y el procedimiento que se implemento.

En la implementación de la propuesta se crearon las planificaciones de las clases que incluyen actividades para cada caso de composición de transformación isométrica. Estas planificaciones se crearon con un enfoque constructivista, específicamente a través de aprendizaje por descubrimiento y significativo, con el objeto de que los estudiantes mediante el software Geogebra realicen los ejercicios, fomentando debates, formulación de hipótesis y resolución de éstas. Para lograr los aprendizajes esperados las actividades se organizan por contenidos.

Para explicar la metodología utilizada en esta intervención, se expone a continuación la primera clase con sus respectivas interrogantes.

Clase n° 1:

1.1 Analiza las imágenes para responder las interrogantes.

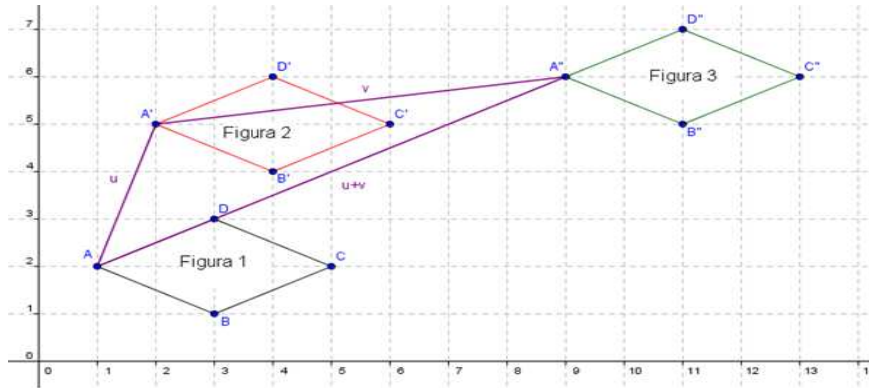


*Figura 5. Ilustración de la actividad n° 1 de la primera clase.*

1.2 Usando Geogebra, realiza la figura de la ilustración anterior, y responde las preguntas

**Preguntas:**

- 1) ¿Qué Transformación Isométrica se han realizado de la Figura 1 a la Figura 2, y de la Figura 2 a la Figura 3?
- 2) ¿Qué vector está involucrado en las traslaciones?
  - a) Figura 1 a Figura 2
  - b) Figura 2 a Figura 3
- 3) ¿Qué coordenadas deberá tener el vector de traslación que hace posible trasladar la Figura 1 a la posición de la Figura 3? Comenta.
- 4) ¿Qué relación existe entre éste vector y los otros antes mencionados?



**Figura 5.2** Respuesta realizada por un grupo de trabajo sobre la actividad n°1 de la primera clase.

El objetivo de esta clase es identificar la transformación isométrica presente en la imagen y determinar los vectores de traslación de cada figura, así como también el vector que genera la composición de traslaciones.

Para el desarrollo de este ejercicio, a los estudiantes se le da como referencia las imágenes de las figuras obtenidas, además se pide realizar la figura 1 en el software, determinar las traslaciones y el vector que generan las siguientes figuras. Mediante este procedimiento el alumno construye hipótesis.

- a) El vector que traslada a la figura 1 ubicándola en la posición de la figura 2 es positivo en el eje x si avanza hacia la derecha, en caso de avanzar hacia la izquierda el vector es negativo.
- b) Para el eje y si la figura 1 sube para ubicarse en la figura 2 el vector es positivo, en cambio si la figura debe bajar el vector es negativo

Las hipótesis se debatieron dentro de cada grupo, donde están fueron validadas y respondidas en el software (figura 5.2). Gracias a la implementación del software, todos los grupos logran responder correctamente entregando una buena argumentación del desarrollo de esta pregunta.

Clase n°2:

2.1 Representa en el plano cartesiano, utilizando Geogebra. Luego, responde.

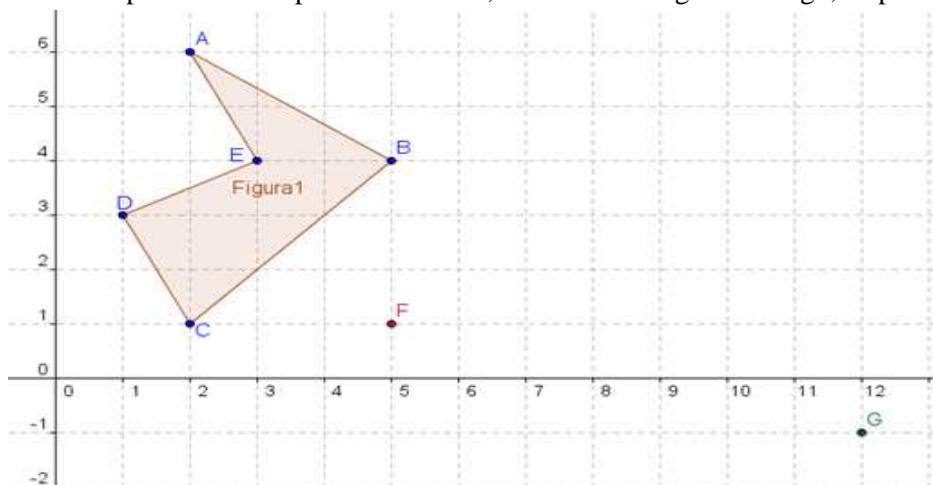


Figura 5.3 Ilustración de la actividad n° 1 de la segunda clase.

2.2 Usando Geogebra, realiza la figura y responde las preguntas

**Preguntas:**

a) Al polígono formado por los vértices  $A(2,6)$ ,  $B(5,4)$ ,  $C(2,1)$ ,  $D(1,3)$ ,  $E(3,4)$  se le aplica una Reflexión en torno a un punto  $F(5,1)$ , obteniendo  $A'B'C'D'E'$ , y después a la figura resultante, se le aplica una segunda Reflexión en torno al punto  $G(12,-1)$ , obteniendo  $A''B''C''D''E''$ . ¿Cuáles son las coordenadas de los vértices del polígono luego de las dos reflexiones?

$$A'' = ( \quad , \quad ) \quad B'' = ( \quad , \quad ) \quad C'' = ( \quad , \quad ) \quad D'' = ( \quad , \quad ) \quad E'' = ( \quad , \quad )$$

b) ¿Qué transformación isométrica se encuentra presente de la Figura 1<sup>1</sup> a Figura 3<sup>2</sup>, en caso que exista?

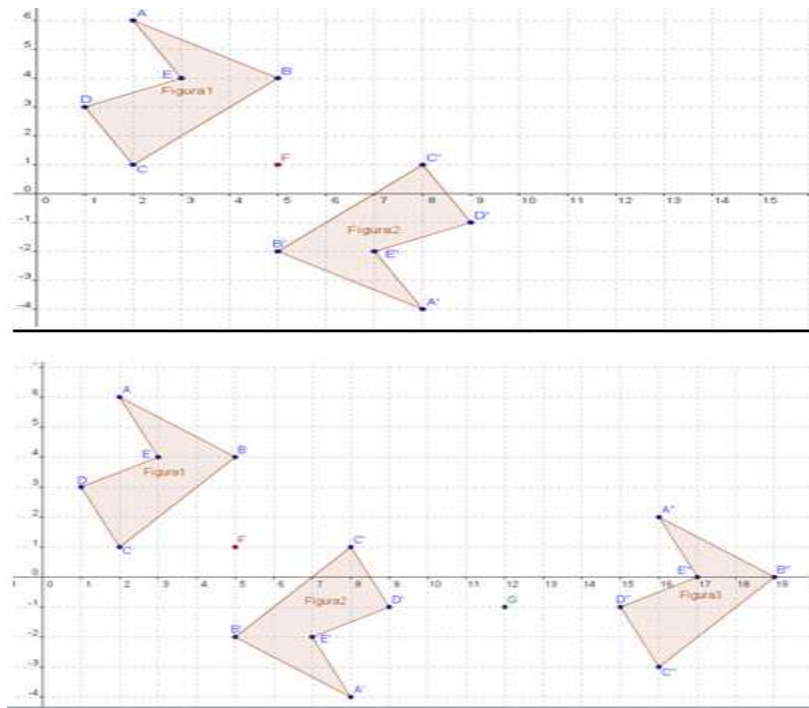
c) Realiza el proceso anterior, pero ésta vez haz primero la reflexión en torno al punto  $G(12,-1)$ , y luego de la figura que obtienes haz la reflexión en torno al punto  $F(5,1)$ . Compara y concluye. ¿Son Conmutativas?

El objetivo de esta clase es comparar la reflexión de la figura en torno al punto G y luego F también la situación contraria para así ver el comportamiento frente a la conmutatividad.

<sup>1</sup> Figura 1: Obtenida de la primera reflexión.

<sup>2</sup> Figura 3: Obtenida de la segunda reflexión

Al graficar la figura dada y aplicar las sucesivas reflexiones en torno a los puntos G y F, obtenemos la figura 5.4, observamos que algunos grupos se les complica cuando deben determinar que transformación isométrica genera a la figura resultante en una sola transformación aplicada a la figura inicial.



*Figura 5.4 Ilustración de las composiciones de dos reflexiones en torno a dos puntos distintos*

Este tipo de gráficas hizo que los grupos debatieran sobre que condiciones deben tener la composición de reflexiones para que fuese conmutativa. Encontrando conceptos que es difícil profundizar obteniendo hipótesis como:

- a) La distancia entre ambos puntos debe ser la misma para que ocurra la conmutatividad
- b) La composición de dos reflexiones en torno al mismo punto es conmutativa
- c) No ocurre conmutatividad en la composición de reflexiones en torno al punto F y luego G.

Se les pidió a los alumnos que comprobaran dichas hipótesis aplicando geogebra, les hicimos saber cuales de sus hipótesis eran correctas y cuales no, así terminaron la actividad de forma correcta.

Por otro lado, grupos que graficaron la composición de reflexiones primero en torno al punto G y luego F para así responder correctamente frente a la conmutatividad de la composición de dos reflexiones en torno a los puntos F y G

2.3 Representa en el plano cartesiano, utilizando Geogebra. Luego, responde.

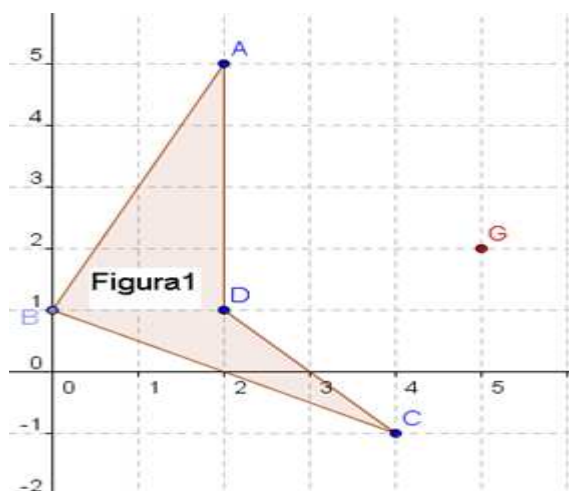


Figura 5.5 Ilustración de la actividad n° 2 de la segunda clase.

2.4 Usando Geogebra, realiza la figura y responde las preguntas

- a) Al polígono formado por los vértices A (2,5), B(0,1), C(4,-1),D(2,1), se le aplica una Reflexión en torno a un punto G(5,2), obteniendo A'B'C'D'E? y después a la figura resultante, se le aplica una segunda Reflexión en torno al eje X, obteniendo A''B''C''D''. ¿Cuáles son las coordenadas de los vértices del polígono luego de las dos reflexiones?

$$A''=( \quad , \quad ) \quad B''=( \quad , \quad ) \quad C''=( \quad , \quad ) \quad D''=( \quad , \quad ) \quad E''=( \quad , \quad )$$

- b) ¿Qué transformación isométrica se encuentra presente de la Figura1 a Figura 3, en caso que exista?

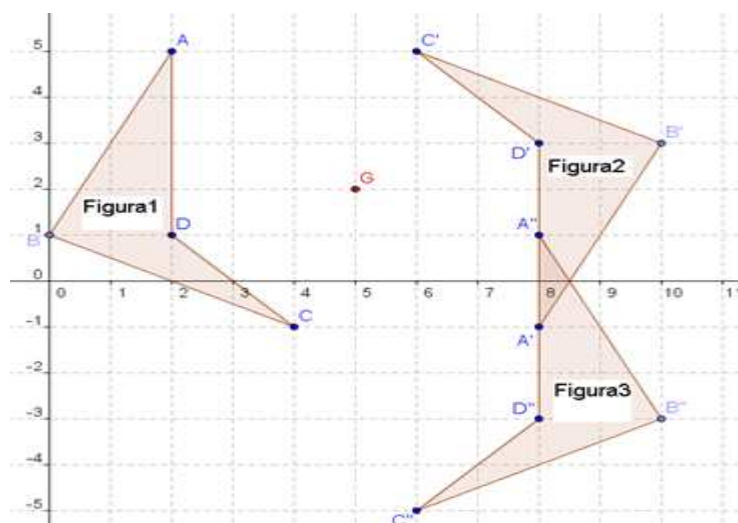
*Figura1: Obtenida de la primera reflexión*

*Figura3: Obtenida de la segunda reflexión*

- c) Realiza el proceso anterior, pero ésta vez haz primero la reflexión en torno al eje X, y luego de la figura que obtienes haz la reflexión en torno al punto G= (5,2). Compara y concluye.

El objetivo de este ítem es observar y comparar la composición de una reflexión en torno a un punto, luego a una recta dada y viceversa.

Los alumnos, luego de haber resuelto el ejercicio anterior, lograron graficar correctamente la situación formulando las siguientes hipótesis respecto a las preguntas planteadas, como muestra la figura 5.6.



*Figura 5.6 Ilustración de las gráficas realizadas correctamente por los alumnos en la segunda actividad.*

Las hipótesis aquí planteadas por los grupos son las siguientes:

- Mediante una rotación aplicada a la figura inicial se puede obtener la figura final
- La composición de una reflexión en torno al punto G y la recta el eje x no es conmutativa.

Las respuestas a la pregunta ¿que movimiento genera la figura inicial en la final luego de las composición de las reflexiones aplicada? Son concisas y de poca valides viéndolo en términos matemáticos, ya que es necesario determinar el punto y el ángulo de rotación necesario, así, la validez de sus hipótesis fueron recatadas y precisas.

2.5 Representa en el plano cartesiano, utilizando Geogebra. Luego, responde.

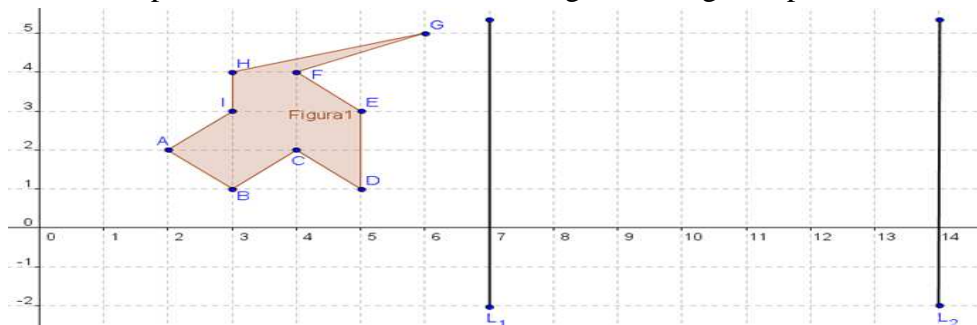


Figura 5.6 Ilustración de la actividad n° 3 de la segunda clase.

2.6 Usando Geogebra, realiza la figura y responde las preguntas

- ¿Qué relación existe entre las distancias de la figura original y la obtenida por la reflexión en torno a la recta  $L_2$ , al comparar con respecto a las distancias entre los ejes de reflexión ( $L_1$  y  $L_2$ )?
- Podemos llegar de la Figura1 a la Figura3 con una sola transformación. En caso de ser así ¿Cuál sería dicha transformación isométrica?

Realiza la reflexión de la Figura 1, primero en torno a la recta  $L_2$  y luego en torno a la recta  $L_1$ . Al compararla con la situación anterior, ¿Qué concluyes? ¿Son conmutativas?

El objetivo de esta actividad es determinar la composición de dos reflexiones en torno a dos rectas dadas y la obtención de la figura inicial en la figura final por medio de una traslación. Además, determinar que la distancia de la figura inicial a la figura final es el doble de la distancia entre las rectas paralelas.

Una vez realizadas las gráficas de la composición de dos reflexiones en torno a dos rectas dadas, los grupos formularon hipótesis, las cuales se mencionan a continuación:

- Las respuestas de la pregunta ¿Qué relación existe entre las distancias de la figura original y la obtenida por la reflexión en torno a la recta  $L_2$ , al comparar con respecto a las distancias entre los ejes de reflexión ( $L_1$  y  $L_2$ )?

Respuestas:

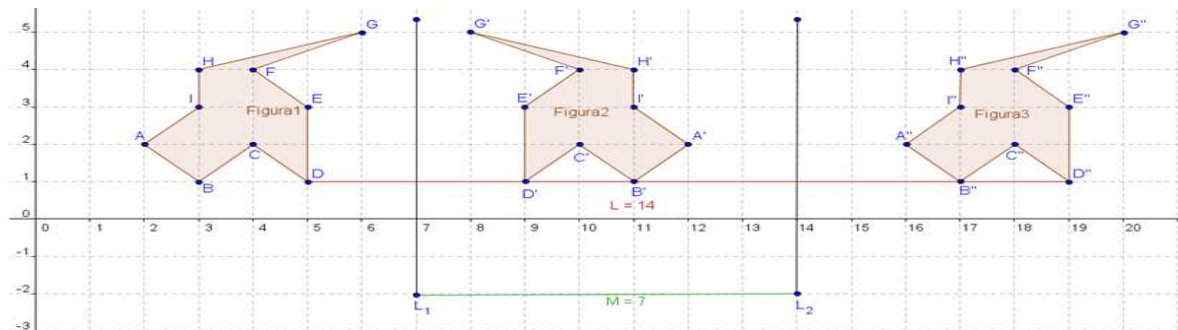
- La distancia es 14 de la figura original a la final, la distancia entre ambas rectas es 7.
- La distancia entre ambas figuras es mayor que la distancia entre ambas rectas.
- La diferencia entre ambas distancias es el doble.

2. Respuestas a la segunda pregunta, Podemos llegar de la Figura1 a la Figura3 con una sola transformación. En caso de ser así ¿Cuál sería dicha transformación isométrica?

Respuestas:

- Sí, es posible
- Mover la figura inicial hacia la final a través del eje x.
- La trasladar la figura inicial para obtener la final.

Estas respuestas debieron ser validadas por sus pares para luego exponer sus argumentos. Cabe destacar que hubo un grupo que no logro el objetivo, es decir no consiguieron determinar correctamente la transformación isométrica que convierte la figura inicial en la final. Una de las causas posibles corresponde a un concepto erróneo que tenían algunos estudiantes sobre las transformaciones isométricas, específicamente las confundían. También se observó que los estudiantes, no podían encontrar la relación de las medidas entre la figura inicial y la final con respecto a la distancia entre ambas rectas, lo que dificulto el trabajo al contestar las preguntas y aun que no sean de la forma más apropiada notamos que entienden el concepto, pero no saben expresarlo de la forma más adecuada. El desarrollo de los grupos referente a la gráfica con Geogebra figura 5.7 está correcto.



*Figura 5.7 Ilustración del desarrollo de los alumnos de la actividad n° 3 de la segunda clase.*

2.7 Representa en el plano cartesiano, utilizando Geogebra. Luego, responde.

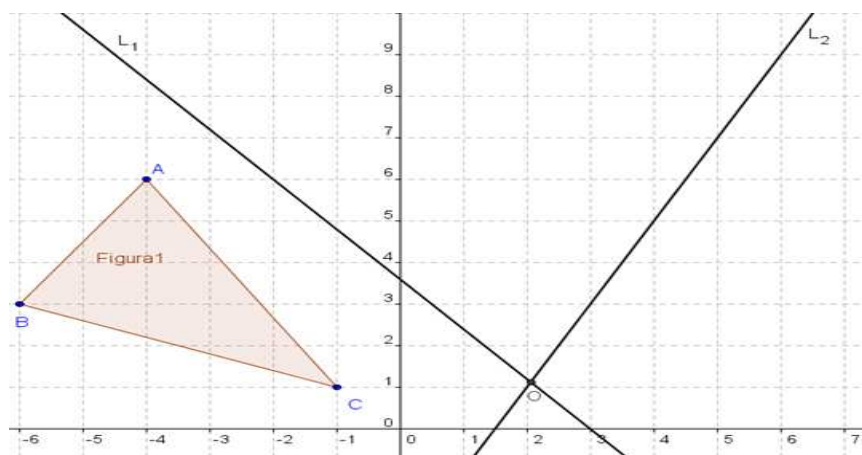


Figura 5.8 Ilustración de la actividad n° 4 de la segunda clase.

2.8 Usando Geogebra, realiza la figura y responde las preguntas

- Une los puntos AO y OA', el ángulo formado por estas dos semirrectas compáralo con el ángulo formado por las rectas secantes ( $L_1$  y  $L_2$ ) ¿Qué relación ves entre ellos?
- Podemos llegar de la Figura1 a la Figura3 con una sola transformación. En caso de ser así ¿Cuál sería dicha transformación isométrica?
- Realiza la reflexión de la Figura1, primero en torno a la recta  $L_2$  y luego en torno a la recta  $L_1$ . Al compararla con la situación anterior, ¿Qué concluyes? ¿Son conmutativas?

El objetivo de esta actividad es determinar la composición de dos reflexiones entre dos rectas secantes dadas, a su vez determinar que movimiento genera la figura inicial dada y la figura final obtenida en un solo movimiento, mediante una transformación isométrica.

Una vez realizadas las gráficas, los grupos formularon hipótesis, las cuales se mencionan a continuación:

1. Las respuestas de la pregunta Une los puntos AO y OA', el ángulo formado por estas dos semirrectas compáralo con el ángulo formado por las rectas secantes ( $L_1$  y  $L_2$ ) ¿Qué relación ves entre ellos?

Respuestas:

- a) Es el doble del ángulo entre el par de rectas de reflexión que se interceptan
- b) El ángulo de rotación formado por dos semirectas  $OA$  y  $OA''$  es el doble del ángulo entre el par de rectas de reflexión que se interceptan.

2. Las respuestas a la segunda pregunta, Podemos llegar de la Figura1 a la Figura3 con una sola transformación. En caso de ser así ¿Cuál sería dicha transformación isométrica?

Respuestas:

- a) La composición de dos rectas secantes, es equivalente a una rotación
- b) Es posible obtener la figura inicial mediante una rotación para obtener la figura final

3. Las respuestas a la tercera pregunta, Realiza la reflexión de la Figura1, primero en torno a la recta  $L_2$  y luego en torno a la recta  $L_1$ . Al compararla con la situación anterior, ¿Qué concluyes? ¿Son conmutativas?

Respuestas:

- a) La composición de dos reflexiones entre rectas secantes no es conmutativa por la gráfica obtenida.
- b) No se obtiene la misma figura al reflexionar en torno a la recta  $L_1$  y luego a  $L_2$  que al realizar la situación contraria.

Estas respuestas debieron ser validadas por sus pares para luego exponer sus argumentos. Cabe destacar que hubo un grupo que no logró el objetivo, es decir no consiguieron relacionar correctamente el ángulo que se forma para generar la rotación. Para la validación del concepto se les muestra la figura 5.9 que fue realizada por otro grupo.

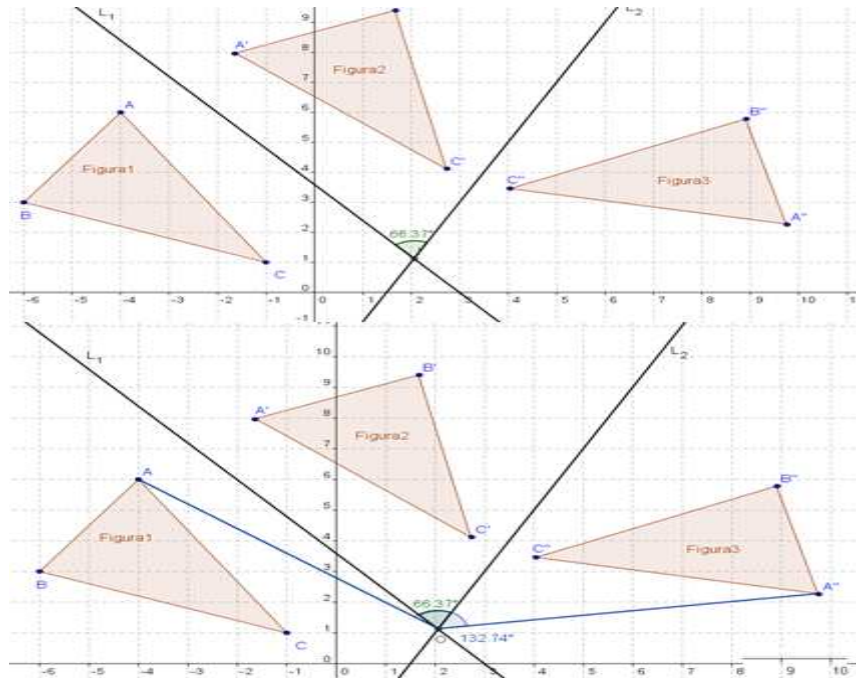


Figura 5.9 Ilustración del desarrollo de los alumnos de la actividad n° 4 de la segunda clase.

Clase n°3:

3.1 Representa en el plano cartesiano, utilizando Geogebra. Luego, responde.

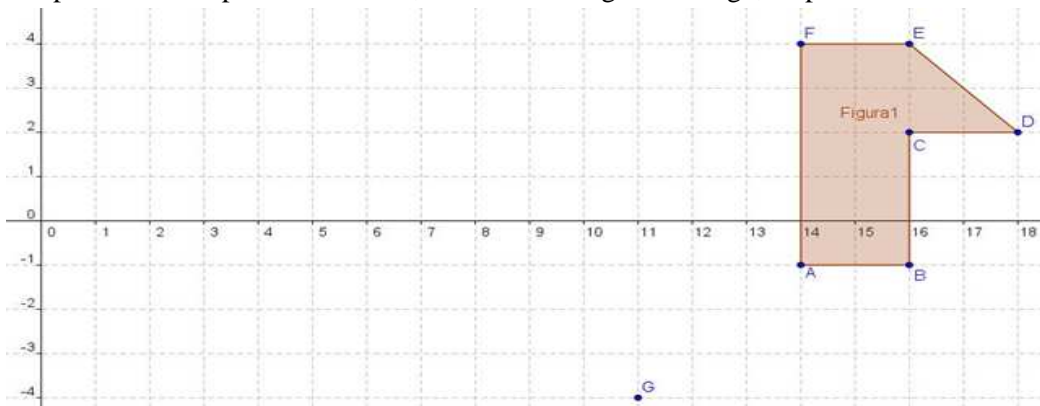


Figura 5.10 Ilustración de la actividad n° 1 de la tercera clase.

### 3.2 Usando Geogebra, realiza la figura 1 y responde las preguntas

1) Representa en el plano cartesiano. Luego, responde.

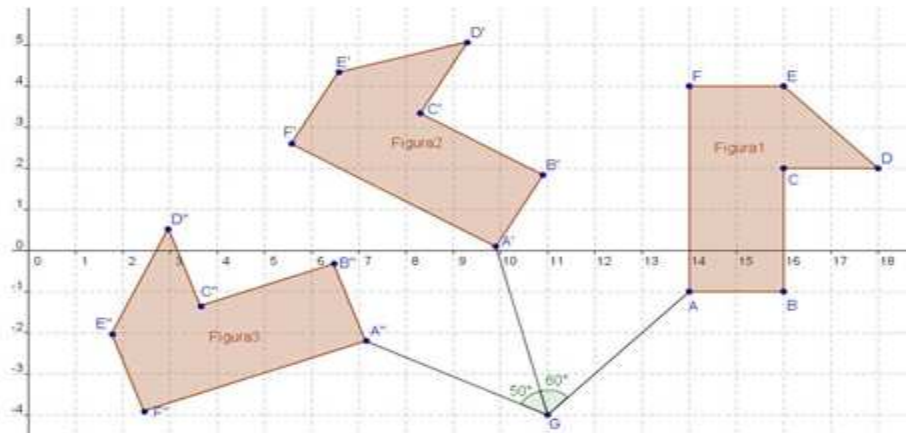
Dada la figura, realiza una rotación con centro  $G=(11,-4)$  y ángulo  $\alpha = 60^\circ$ , luego de la figura obtenida realiza una segunda rotación cuyo centro es el mismo, pero ahora con ángulo  $\beta = 50^\circ$ .

*Figura1: Obtenida de la primera rotación.*

*Figura3: Obtenida de la segunda rotación.*

Ahora responde:

- Podemos llegar de la figura 1 a la figura 3 con una sola transformación isométrica. Si tu respuesta es sí, ¿Cual sería dicha transformación isométrica?
- Con respecto a los ángulos brindados ( $\alpha = 60^\circ$ ,  $\beta = 50^\circ$ ), ¿Existirá alguna relación entre ellos y el ángulo formado  $\angle A'GA''$ ?



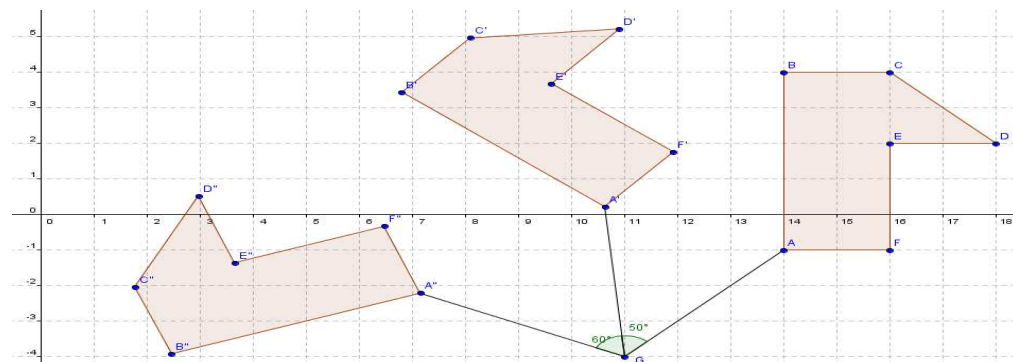
*Figura 5.11 Respuesta realizada por un grupo de trabajo sobre la actividad n°1 de la tercera clase.*

El objetivo de esta clase es determinar la composición de las rotaciones dado el centro y el ángulo de rotación de cada composición, a su vez determinar la transformación isométrica que genera la figura inicial en la final mediante un solo movimiento, además determinar si existe conmutatividad en esta composición.

Una vez realizadas las gráficas de ambas composiciones, los grupos formularon hipótesis y a debatir estas, las cuales se mencionan a continuación:

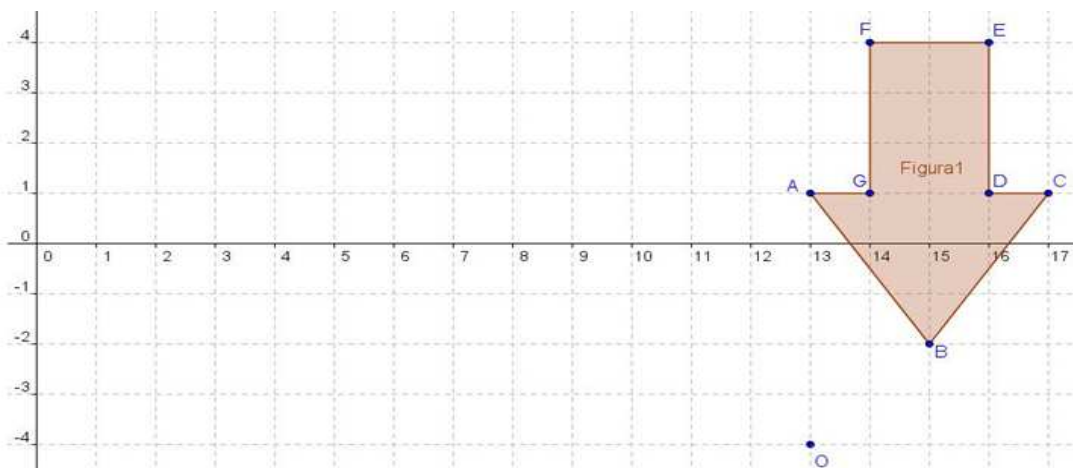
1. Las respuestas de la pregunta, Podemos llegar de la figura 1 a la figura 3 con una sola transformación isométrica. Si tu respuesta es sí, ¿Cuál sería dicha transformación isométrica?
  - a) Si, al girar la figura
  - b) Si, al rotar la figura
  - c) Si, mediante una rotación
  
2. Las respuestas de la pregunta, Con respecto a los ángulos brindados ( $\alpha = 60^\circ$ ,  $\beta = 50^\circ$ ), ¿Existirá alguna relación entre ellos y el ángulo formado AGA''?
  - a) El ángulo formado por AGA'' es  $110^\circ$
  - b) Es la suma del ángulo  $\alpha$  y  $\beta$

La mayoría de los grupos lograron encontrar la relación entre los ángulos dados y el ángulo de rotación necesario para poder convertir la figura inicial en la final, logrando también determinar la transformación isométrica que lo hace posible, logrando completar mejor sus hipótesis, así como podemos destacar a dos grupos que *realizaron el desarrollo inverso de dicha situación, es decir, rotar en primer lugar según el ángulo  $\beta$  y luego  $\alpha$* , para comprobar su conmutatividad, (figura 5.12). esto se debe a que los alumnos comienzan entender el concepto de conmutatividad en las composiciones de transformaciones isométricas



**Figura 5.12** Respuesta realizada por un grupo de trabajo sobre la conmutatividad de la composición de rotaciones vista en la tercera clase.

3.3 Representa en el plano cartesiano, utilizando Geogebra. Luego, responde.



*Figura 5.13 Ilustración de la actividad n° 2 de la tercera clase.*

3.4 Usando Geogebra, realiza la figura 1 y responde las preguntas

- a) Al polígono formado por los vértices A (13,1), B(15,-2), C(17,1),D(16,1),E(16,4),F(14,4), G(14,1), se le aplica una Rotación de ángulo  $\alpha = 70^\circ$  y centro  $O(13,-3)$ , obteniendo  $A'B'C'D'E'F'G'$  luego a la figura resultante, se le aplica una segunda Rotación de ángulo  $\beta = 90^\circ$  de centro  $O' = (6,-4)$ , obteniendo  $A''B''C''D''E''F''G''$ . ¿Cuáles son las coordenadas de los vértices del polígono luego de las dos rotaciones?

$$A'' = ( \quad , \quad ) \quad B'' = ( \quad , \quad ) \quad C'' = ( \quad , \quad ) \quad D'' = ( \quad , \quad ) \quad E'' = ( \quad , \quad ) \quad F'' = ( \quad , \quad ) \\ G'' = ( \quad , \quad )$$

- b) Representa gráficamente la situación.

- c) ¿Qué transformación isométrica se encuentra presente de la Figura 1<sup>3</sup> a Figura 3<sup>4</sup>, en caso que exista?

<sup>3</sup> Figura 1: Obtenida de la primera rotación

<sup>4</sup> Figura 2: Obtenida de la segunda rotación

- d) Realiza el proceso anterior, pero ésta vez haz primero la rotación a partir de la Figura 3 en torno al punto  $O' = (6, -4)$ , y luego de la figura que obtienes haz la rotación en torno al punto  $O = (13, -3)$ . Compara y concluye.

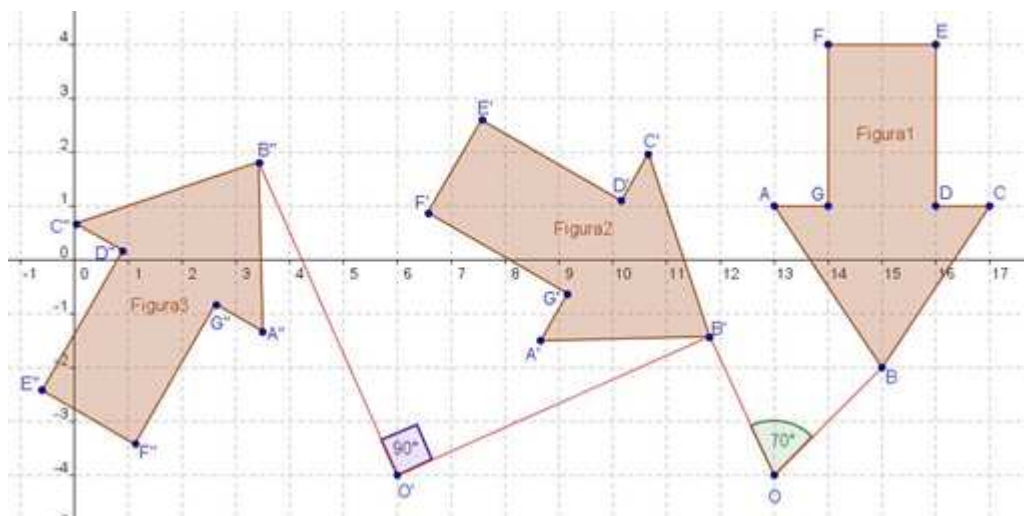


Figura 5.14 Respuesta realizada por un grupo de trabajo sobre la actividad n°2 de la tercera clase.

El objetivo de esta actividad es graficar para obtener la composición de rotaciones dado el centro y en ángulo de rotación distinto para cada movimiento.

Luego de haber trabajado en los ejercicios de la actividad con el software Geogebra y de haber comparado distintas rotaciones, con distintos centro y ángulos, las hipótesis a las interrogantes, obtenidas por los grupos de estudiantes, fueron las siguientes:

- La gráfica de la composición de rotaciones con centro en  $O'$  y ángulo de  $90^\circ$  seguida de otra rotación con centro en  $O$  y ángulo de rotación  $70^\circ$  genera la misma figura que su situación inversa. al igual que la transformación que genera en una sola transformación isométrica a la figura inicial en la final es una rotación.
- La gráfica de la composición de rotaciones con centro en  $o'$  y ángulo de  $90^\circ$  seguida de otra rotación con centro en  $o$  y ángulo de rotación  $70^\circ$  no genera la misma figura que su situación inversa. al igual que la transformación que genera en una sola transformación isométrica a la figura inicial en la final es una rotación.

Los grupos en general lograron el objetivo sin problema al realizar (figura 5.14), todos los grupos realizaron correctamente la gráfica de la composición de rotaciones de

distinto centro y distinto ángulos, además un grupo realizaron la situación inversa para comprobar la conmutatividad.

Clase n°4:

4.1 Representa en el plano cartesiano, utilizando Geogebra. Luego, responde.

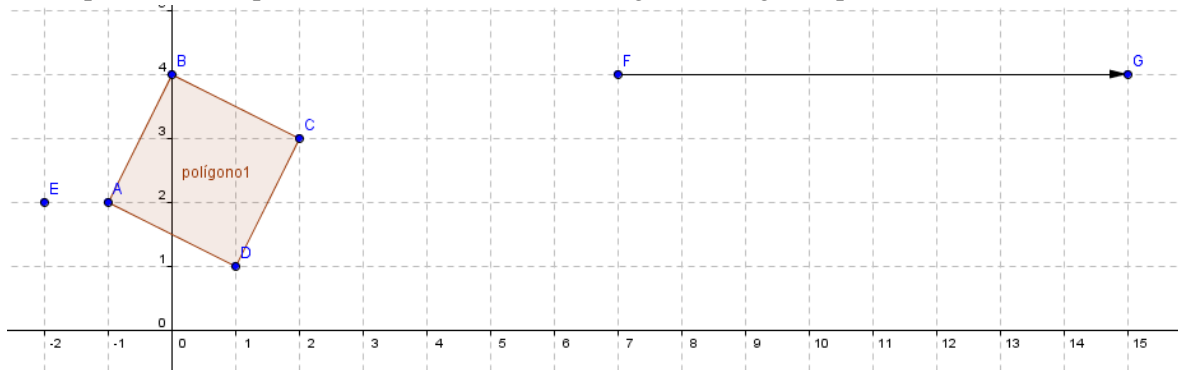


Figura 5.15 Ilustración de la actividad n° 1 y 2 de la cuarta clase.

4.2 Usando Geogebra, realiza la figura 1 y responde las preguntas

Actividad 1:

Dada la figura ABCD con  $A=(-1,2)$ ,  $B=(0,4)$ ,  $C=(2,3)$  y  $D=(1,1)$  Determina las coordenadas de la figura obtenida luego de aplicar una rotación con centro en  $E=(-2,2)$  y ángulo  $\alpha = 90^\circ$  y una traslación con vector  $\vec{v}$  donde  $F=(7,4)$  y  $G=(15,4)$ .

Actividad 2:

Dada la figura ABCD con  $A=(-1,2)$ ,  $B=(0,4)$ ,  $C=(2,3)$  y  $D=(1,1)$  Determina las coordenadas de la figura obtenida luego de aplicar una traslación con vector  $\vec{v}$  donde  $F=(7,4)$  y  $G=(15,4)$  y una rotación con centro en  $E=(-2,2)$  y ángulo  $\alpha = 90^\circ$

Preguntas:

- 1- ¿Mediante que movimiento puedo obtener en SOLO UN PASO la figura resultante F3?
- 2- Compara las coordenadas de A, B, C y D en la figura resultante del primer ejercicio con las obtenidas en el segundo ejercicio.
- 3- ¿Es lo mismo realizar una traslación seguida de una rotación que aplicar una rotación seguida de una traslación?

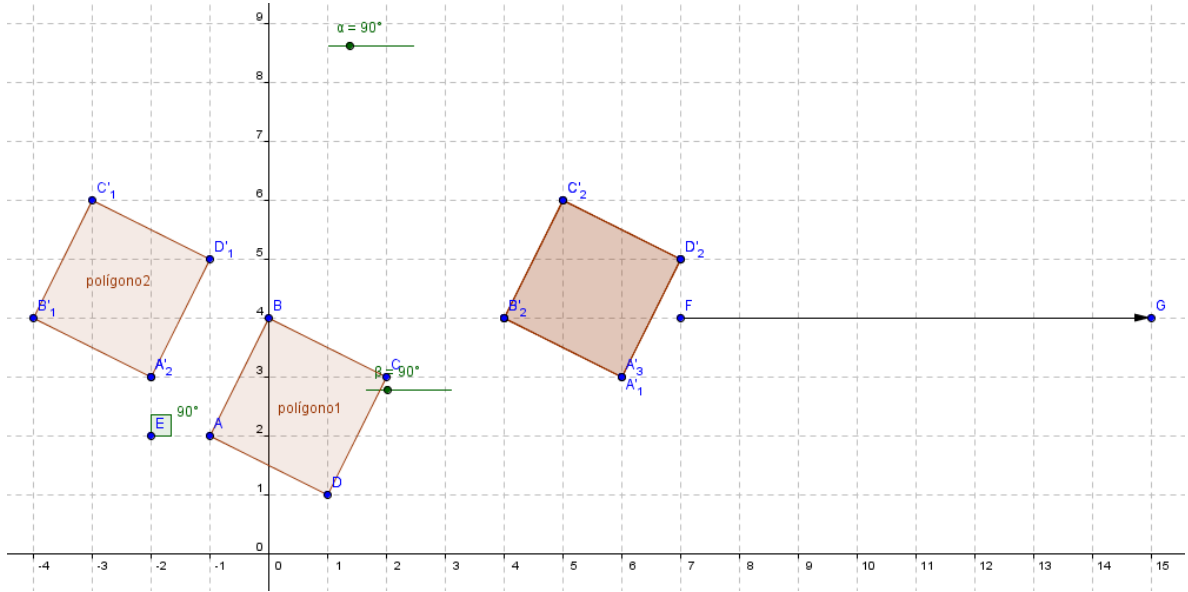


Figura 5.16 Respuesta realizada por un grupo de trabajo sobre la actividad n°1 de la cuarta clase.

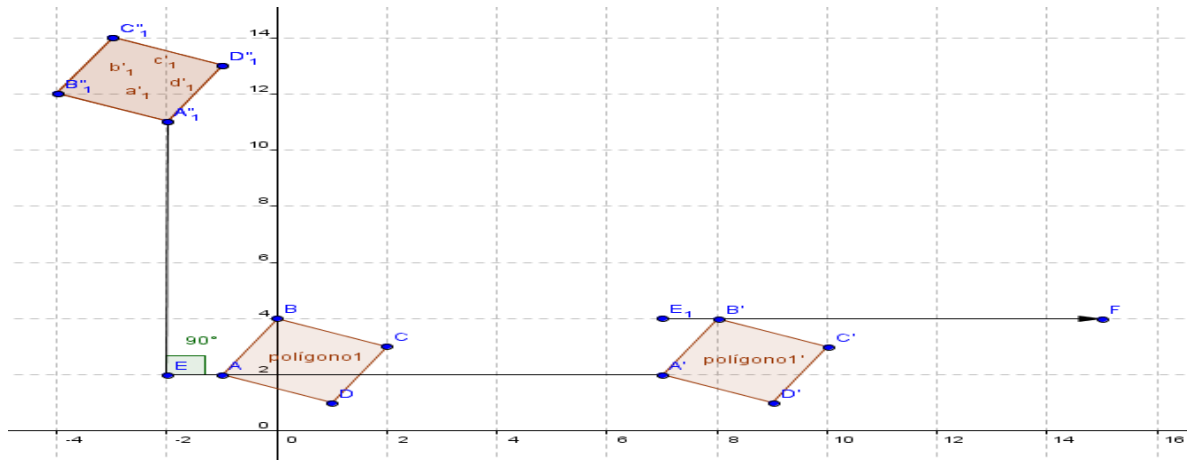
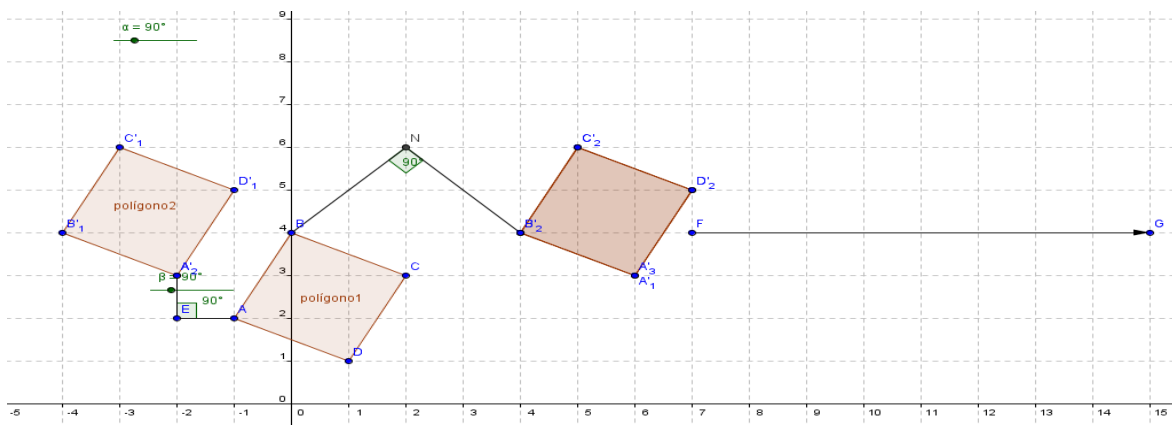


Figura 5.17 Respuesta realizada por un grupo de trabajo sobre la actividad n°2 de la cuarta clase.

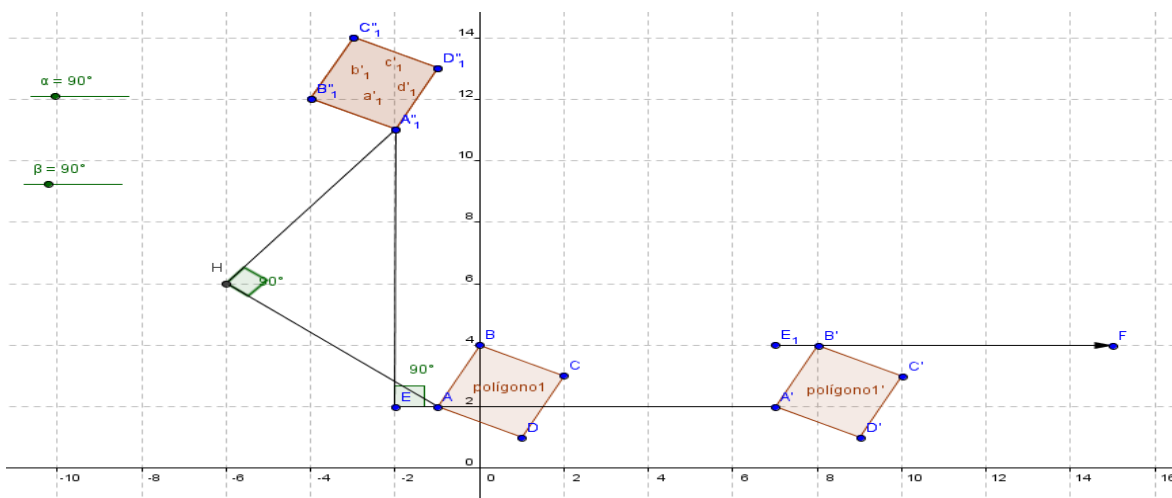
El objetivo de estas actividades es generalizar y conceptualizar la composición de una traslación seguida de una rotación y la situación contraria, determinando que transformación isométrica convierte la figura inicial en la final en ambas actividades.

A modo de conclusión, la mayoría de los grupos, lograron los objetivos de las actividades, obteniendo respuestas correctas en cuanto a la conmutatividad y la transformación isométrica que convierte la figura final en un solo movimiento.

Una observación a destacar, son los registros que ocuparon los alumnos para contestar las preguntas referente a las actividades 1 y 2 (se muestra en la figura 5.18 y 5.19) en donde se les entrego los conceptos necesarios para determinar el centro (N y h) que genera a cada rotación, utilizando el software fue mas rápido el proceso.



**Figura 5.18** Respuesta realizada por un grupo obteniendo la figura final mediante una rotación con centro en N y ángulo de rotación  $90^\circ$



**Figura 5.19** Respuesta realizada por un grupo obteniendo la figura final mediante una rotación con centro en H y ángulo de rotación  $90^\circ$

Clase n°5:

5.1 Representa en el plano cartesiano, utilizando Geogebra. Luego, responde.

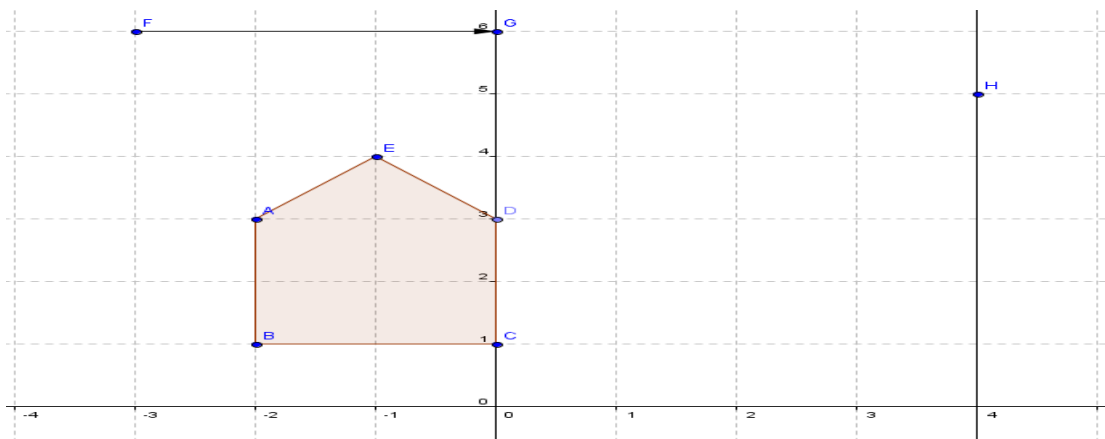


Figura 5.20 Ilustración de la actividad n° 1 y 2 de la quinta clase.

Actividad 1:

Dada la figura ABCDE realiza una traslación con vector FG, luego a la figura resultante aplícale una simetría respecto al eje de simetría  $x=4$ .

Actividad 2: (Traslación compuesta con simetría)

Dada la figura ABCDE realiza una simetría respecto al eje de simetría  $x=4$  luego a la figura resultante aplícale una traslación con vector FG.

Preguntas:

1. ¿Mediante que movimiento puedo obtener en SOLO UN PASO la figura resultante F3?
2. Compara las coordenadas de A, B, C y D en la figura resultante del primer ejercicio con las obtenidas en el segundo ejercicio.

¿Es lo mismo realizar una simetría seguida de una traslación que aplicar una traslación seguida de una simetría?

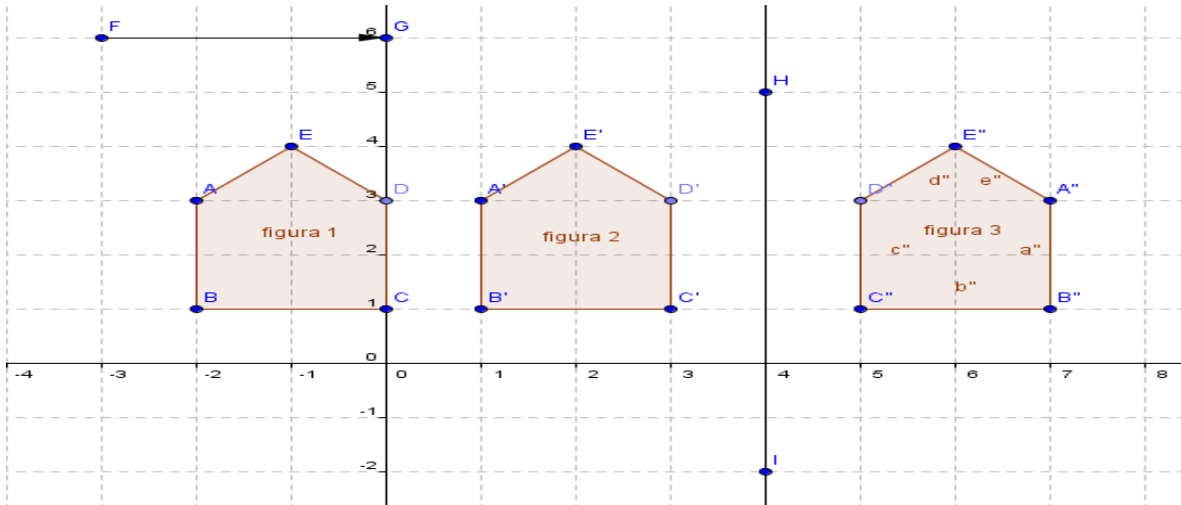


Figura 5.21 Respuesta realizada por un grupo de trabajo sobre la actividad n°1 de la quinta clase.

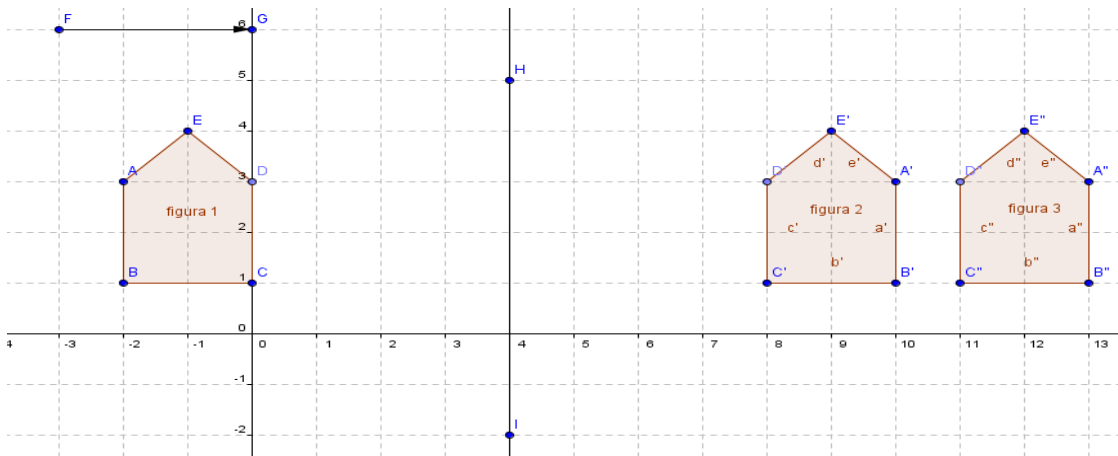


Figura 5.22 Respuesta realizada por un grupo de trabajo sobre la actividad n°2 de la quinta clase.

El objetivo de estas actividades es observar y comparar la situación de ambas graficas obtenida, respecto de la composición de una traslación y una simetría como la situación contraria, para identificar el sentido, dirección de la traslación y el eje de simetría.

El planteamiento de estas composiciones en el software logró en los grupos una mejor recepción y conceptualización de las graficas para formular hipótesis referentes a las preguntas tales como:

1. ¿Mediante que movimiento puedo obtener en SOLO UN PASO la figura resultante F3?

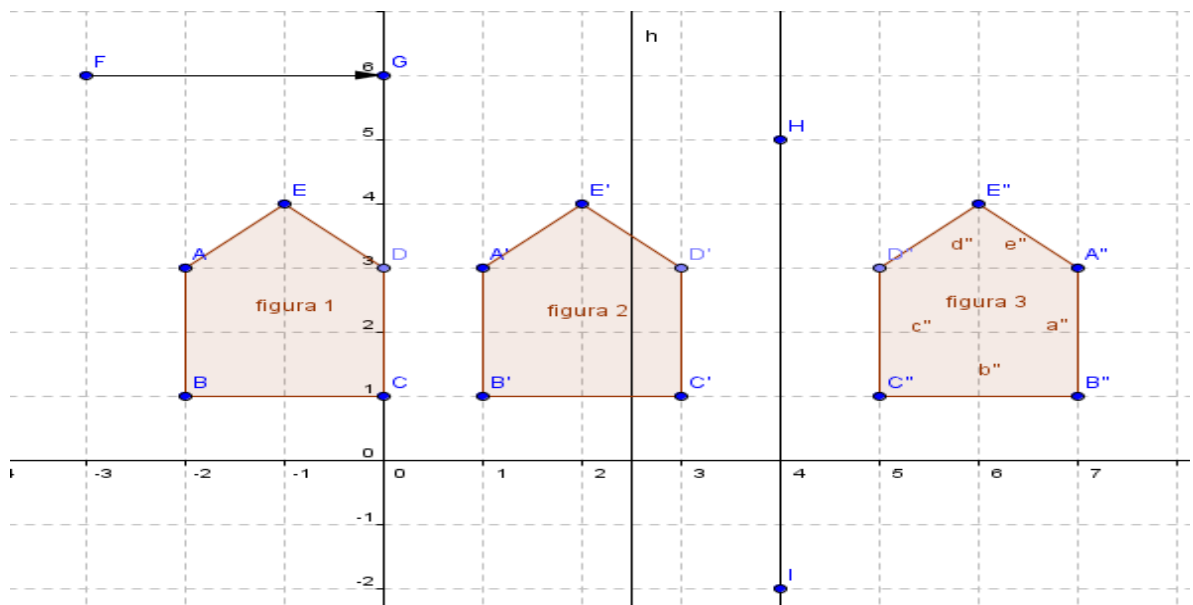
Respuestas:

- a) Al reflejar por medio una recta en ambas actividades.
  - b) Simetría referente a una recta en ambos casos, al realizar la composición de una traslación seguida de una simetría y viceversa.
2. Compara las coordenadas de A, B, C y D en la figura resultante del primer ejercicio con las obtenidas en el segundo ejercicio. ¿Es lo mismo realizar una simetría seguida de una traslación que aplicar una traslación seguida de una simetría?

Respuestas:

- a) La posición de figura resultante del ejercicio uno es distinta a la figura resultante de ejercicio 2. La composición no es conmutativa.
- b) Las coordenadas de la figura resultante del primer ejercicio es distinta a las coordenadas del segundo ejercicio. La composición no es conmutativa.

Cada grupo concreto de manera correcta las actividades, argumentado que transformación isométrica convierte la figura inicial en la final mediante una sola transformación isométrica (figura 5.23 y 5.24) además determinaron el eje necesario de la simetría que obtiene la figura resultante. Lograron comprobar la conmutatividad al observar la figuras resultantes no son las mismas.



*Figura 5.23 Respuesta realizada por un grupo obteniendo la figura final de la actividad 1 mediante una simetría con eje de simetría a la recta h.*

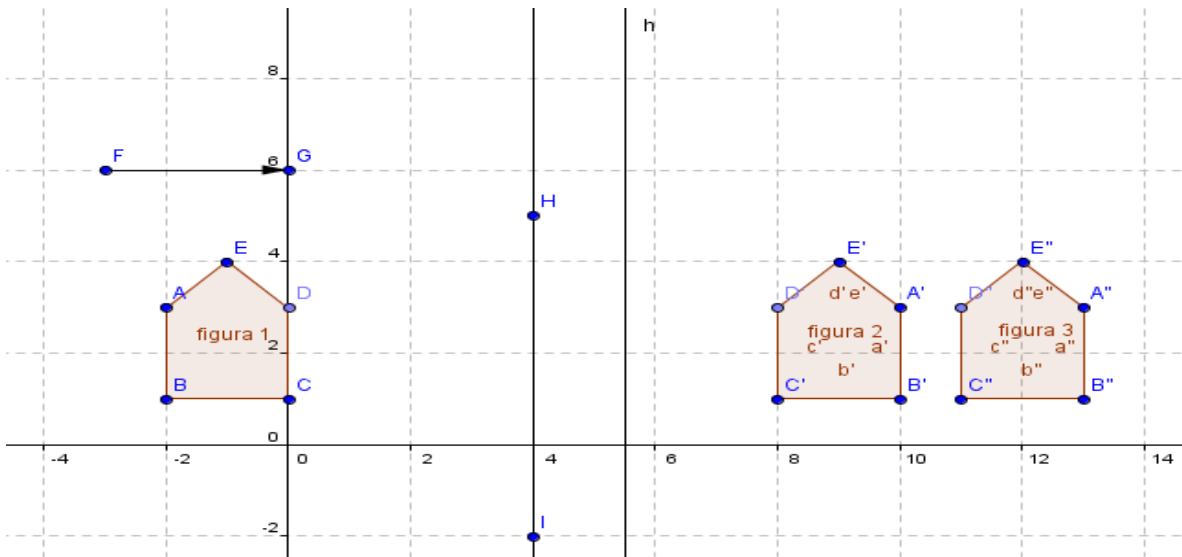


Figura 5.24 Respuesta realizada por un grupo obteniendo la figura final de la actividad 2 mediante una simetría con eje de simetría a la recta  $h$ .

Clase n°6:

6.1 Representa en el plano cartesiano, utilizando Geogebra. Luego, responde.

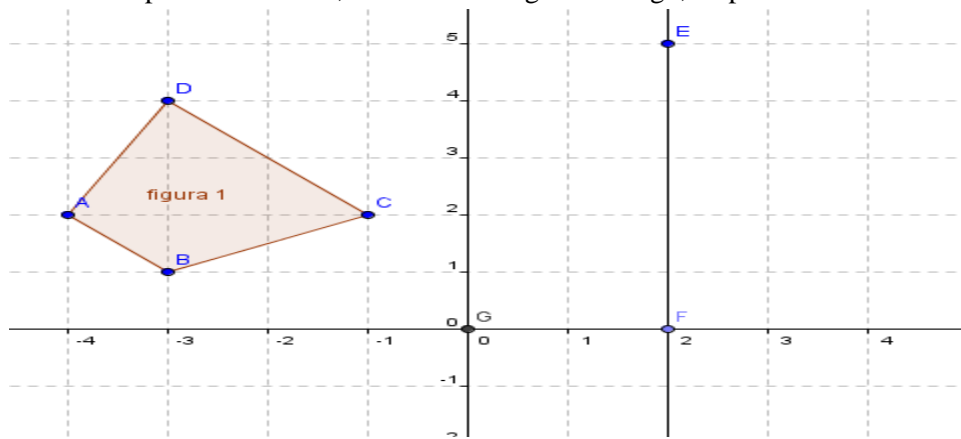


Figura 5.25 Ilustración de la actividad n° 1 y 2 de la sexta clase.

Actividad 1(simetría compuesta con rotación)

Dada la figura ABCDE realízale una rotación con centro en G y ángulo de rotación, luego a la figura resultante aplícale una simetría respecto al eje de simetría  $x=2$ .

Actividad 2: (rotación compuesta con simetría)

Dada la figura ABCDE realízale una simetría respecto al eje de simetría  $x=2$  luego a la figura resultante aplícale una rotación con centro en G y ángulo de rotación igual a  $90^\circ$ .

Preguntas:

1. Compara las coordenadas de A, B, C y D en la figura resultante del primer ejercicio con las obtenidas en el segundo ejercicio. ¿Es lo mismo realizar una simetría seguida de una rotación que aplicar una rotación seguida de una simetría?

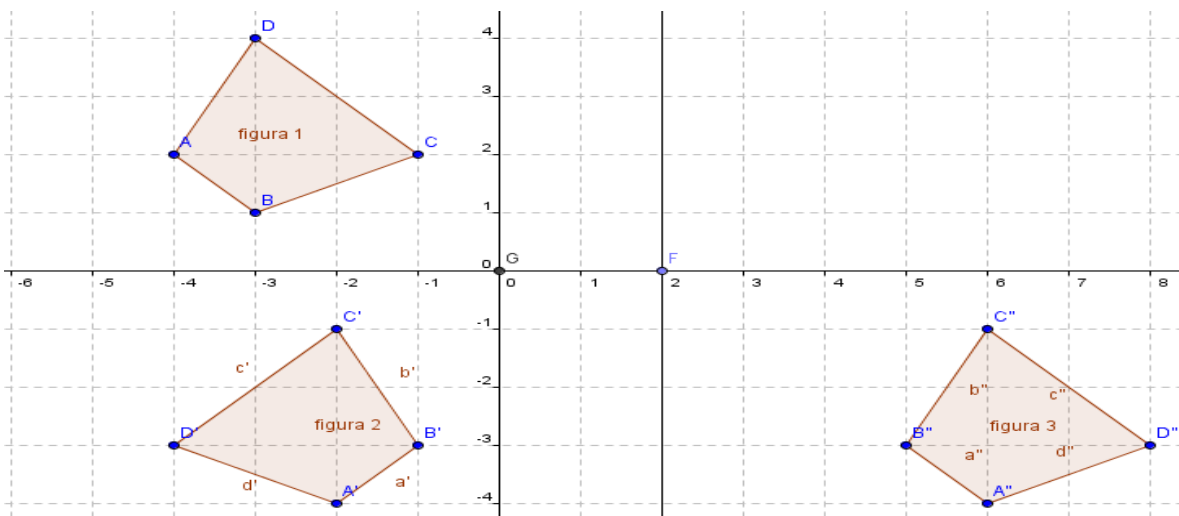
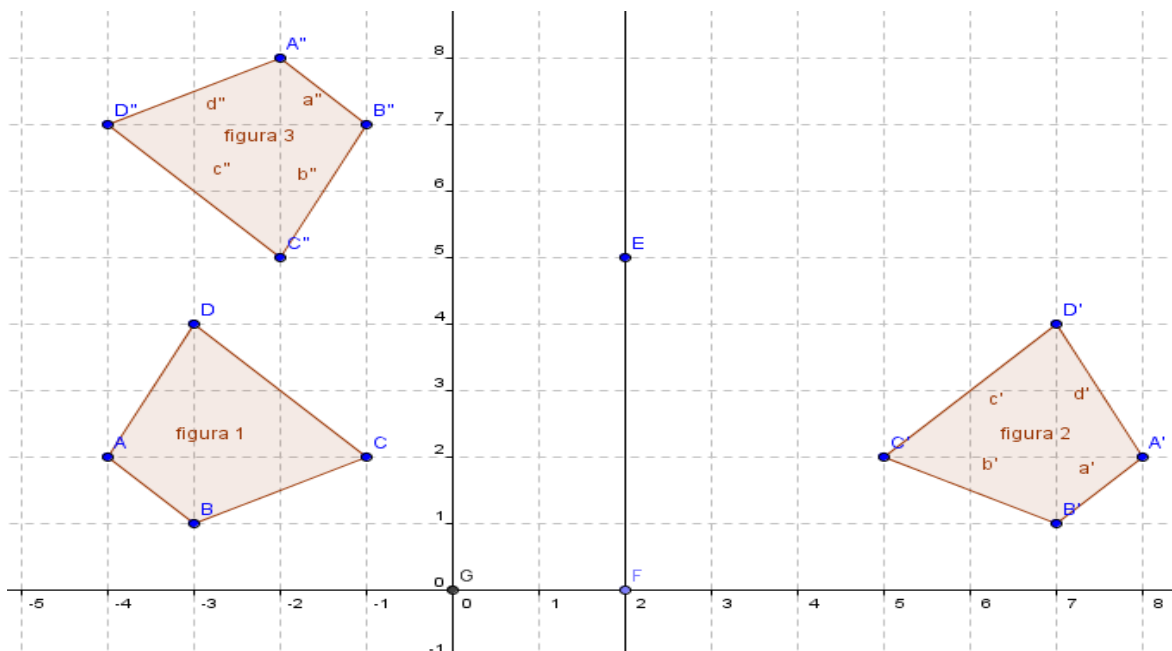


Figura 5.26 Respuesta realizada por un grupo de trabajo sobre la actividad n°1 de la sexta clase.



*Figura 5.27 Respuesta realizada por un grupo de trabajo sobre la actividad n°2 de la sexta clase.*

El objetivo de estas actividades es comparar las coordenadas de la gráfica obtenida de la composición de simetría compuesta con rotación (figura 5.26) versus la gráfica de una rotación compuesta con una simetría (figura 5.27). Para determinar la conmutatividad si las figuras obtenidas en ambas actividades coinciden en sus coordenadas. Cabe mencionar que todos los grupos contestaron de manera correcta, formulando las siguientes hipótesis:

1. Compara las coordenadas de A, B, C y D en la figura resultante del primer ejercicio con las obtenidas en el segundo ejercicio. ¿Es lo mismo realizar una simetría seguida de una rotación que aplicar una rotación seguida de una simetría?

Respuestas:

- a) No es lo mismo realizar la composición de una rotación seguida de una simetría que la situación inversa.
- b) Las figuras resultantes de ambas actividades no es la misma por ende la composición no es conmutativa.

Los resultados fueron favorables, no existe ninguna respuesta errónea, por ende se deduce que el trabajo con el software Geogebra se llevó a cabo con eficacia.

La clase se concluye con una discusión entre los grupos, corrigiendo errores, aclarando dudas e institucionalizando los conceptos visto en las actividades.

Para ejercitar, en las clases siguientes, lo estudiantes desarrollaron guía de ejercicios, con la finalidad que los estudiantes realicen anclajes de lo aprendido con respecto a la composición de transformaciones isométricas, y relaciones estos conceptos con los conocimientos anteriores.

Considerando los resultados de dicha aplicación, se observó que el uso del software Geogebra, fue fácil de manipular para los estudiantes, no hubo problemas con el uso, lo que favoreció el continuo desarrollo de las actividades. Hubo alumnos que no resolvieron una parte de las actividades correctamente, los errores cometidos fueron aclarados y presentado al resto de los grupos para que entre todos corrigieran los errores.

Según lo observado en las clases en que se implementó esta investigación, se puede concluir que la propuesta didáctica diseñada contribuyo para lograr los aprendizajes esperados, además que los alumnos adquieran nuevos conocimientos y modificaran los anteriores errados. Logrando que los alumnos jerarquicen los conocimientos entregados. Lo antes mencionado se puede sostener en base que los estudiantes pudieron realizar cada una de las etapas de la secuencia didáctica adoptada sin mayor dificultad, referente al software Geogebra resultó ser una herramienta de fácil manejo y ayuda para el desarrollo y comprensión de los ejercicios propuestos, permitiendo a los alumnos la comprensión de los contenidos, para su posterior construcción de hipótesis en base a ellos. Otro aspecto relevante que se presentó en la aplicación de esta propuesta didáctica, fue motivar a los alumnos a la comprensión de la materia, lo que fomenta un aprendizaje significativo.

# Capítulo 6

## Análisis de datos

En este capítulo se señalará el plan de análisis desarrollado para medir el rendimiento del Pre y Post-Test y el análisis de las encuestas realizadas.

### **6.1 Análisis de encuesta de actitudes y expectativas**

Las encuestas fueron realizadas a los alumnos, con el propósito de medir cual era el grado de opinión que estos tienen frente a diferentes temas, especialmente del área de matemáticas.

## 6.1.1 Análisis encuesta inicial

Esta encuesta fue realizada a los estudiantes al comienzo de la intervención, con el fin de medir las actitudes que estos presentan frente a la clase de matemáticas. Esta fue realizada al primero medio A (GE), el cual consta de un total de 39 alumnos.

Para poder tener una referencia, a las diferentes tendencias de los alumnos, se estableció una tabla de puntajes con ponderaciones, como se muestra a continuación en la siguiente tabla.

Totalmente De Acuerdo	5
De Acuerdo	4
Indiferente	3
Desacuerdo	2
Totalmente en Desacuerdo	1

*Tabla 6.1: Tabla de valores para alternativas de las encuestas*

Mediante la escala de ponderaciones de las actitudes se calculará la tendencia del grupo experimental.

$$T. A. = N^{\circ} \text{ de respuesta} \times \text{Ponderación (5)} = \text{Resultado 5}$$

$$D. A. = N^{\circ} \text{ de respuesta} \times \text{Ponderación (4)} = \text{Resultado 4}$$

$$I. = N^{\circ} \text{ de respuesta} \times \text{Ponderación (3)} = \text{Resultado 3}$$

$$D. = N^{\circ} \text{ de respuesta} \times \text{Ponderación (2)} = \text{Resultado 2}$$

$$T. D. = N^{\circ} \text{ de respuesta} \times \text{Ponderación (1)} = \text{Resultado 1}$$

$$N^{\circ} \text{ total de alumnos encuestados} \quad \text{Total de Resultados}$$

Luego se debe realizar:

$$\text{Total de Resultados} \div N^{\circ} \text{ total de alumnos encuestados} = \text{tendencia}$$

Con lo cual se obtiene la tendencia de los alumnos según las respuestas dadas por ellos.

Mediante el siguiente intervalo se establecen los parámetros donde se identifican las tendencias de cada pregunta realizadas en las encuestas.

[ 1 – 1,5 [	Totalmente de acuerdo
[ 1,5 – 2,5 [	De acuerdo
[ 2,5 – 3,5 [	Indiferente
[ 3,5 – 4,5 [	Desacuerdo
[ 4,5 – 5 ]	Totalmente en desacuerdo

*Tabla 6.2: Tabla de rangos según respuestas de las encuestas*

## ENCUESTA INICIAL

### Actitudes y expectativas

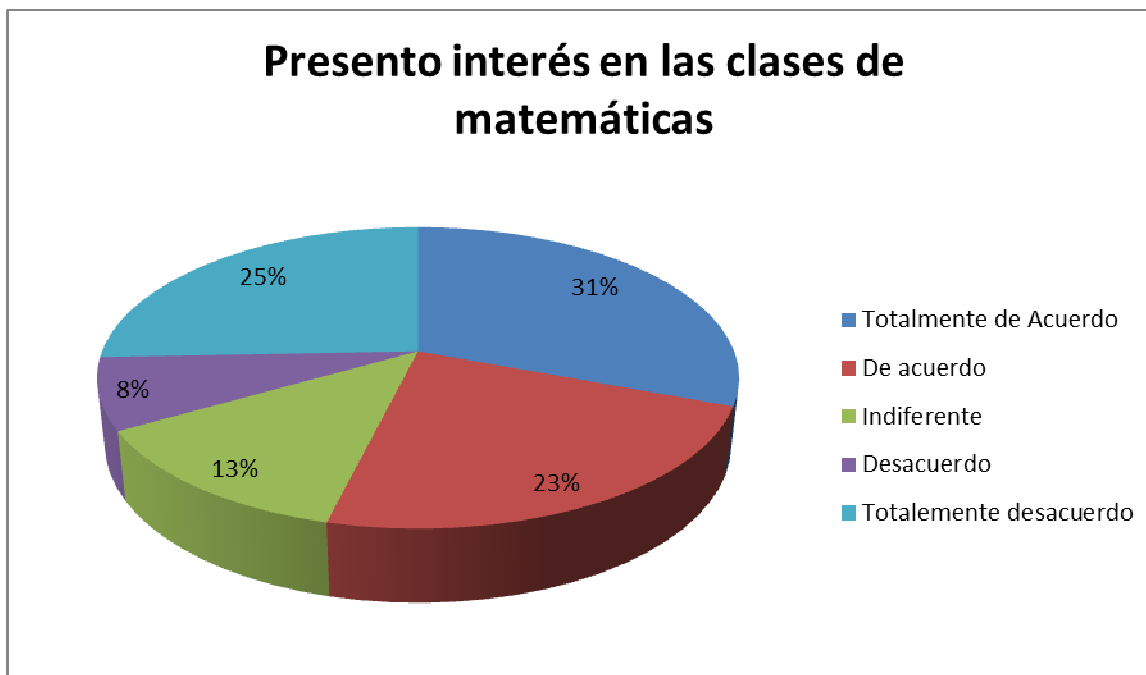
Marque con una "X" la tendencia con la que más se identifica en cada una de las preguntas

**TA:** Totalmente de acuerdo. **DA:** De acuerdo. **I:** Indiferente. **D:** Desacuerdo. **TD:** Totalmente en desacuerdo.

	PREGUNTAS	TA	A	I	D	TD
1	Presento interés en la clase de matemáticas					
2	Tengo dificultades para entender las explicaciones del profesor					
3	Tengo dificultades para comprender los contenidos de la clase de matemáticas					
4	Me interesaría más en los contenidos de la clase si fuesen presentados de otra forma					
5	Preferiría que en las clases de matemáticas se usaran más herramientas computacionales					

### Pregunta 1: Presento interés en la clase de matemáticas

Los resultados extraídos del curso experimental se muestran a continuación en el siguiente gráfico.

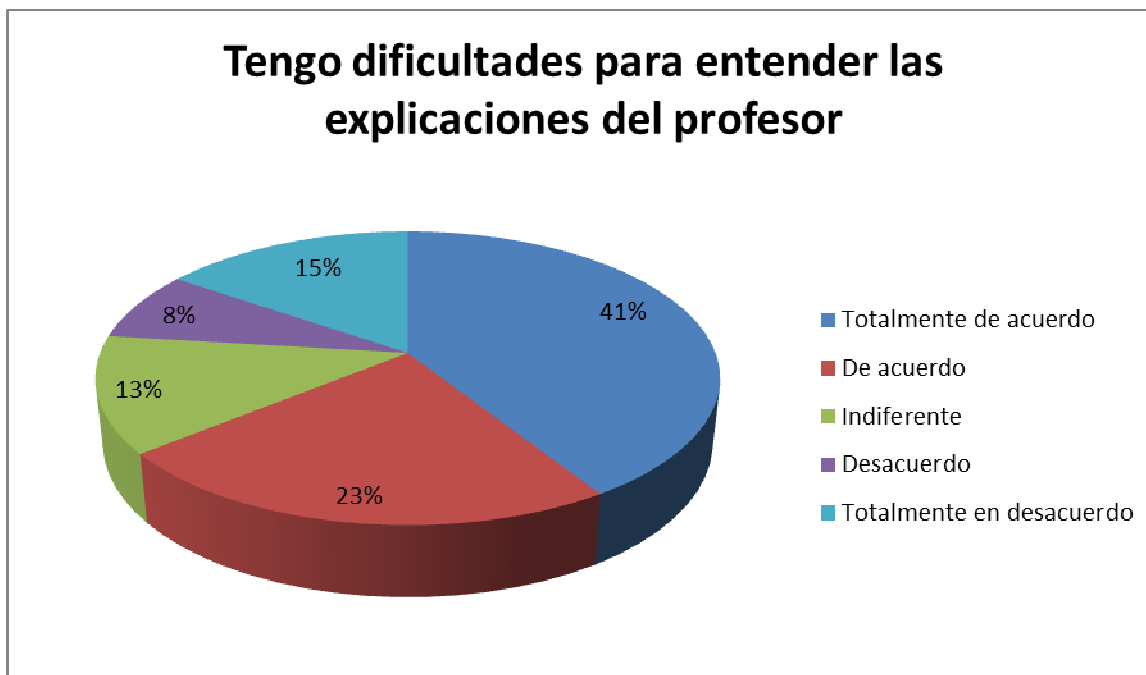


*Gráfico 6.1.1.1: Resultados obtenidos pregunta 1 (encuesta inicial)*

Se desprende de este gráfico que la tendencia del curso experimental muestra una inclinación hacia la alternativa “INDIFERENTE” con una ponderación de 3,25, es decir que los estudiantes no están totalmente de acuerdos ni en total desacuerdo frente a la interrogante planteada. En otras palabras no existe un consenso en este rasgo.

## Pregunta 2: Tengo dificultades para entender las explicaciones del profesor

Los resultados extraídos del curso experimental se muestran a continuación en el siguiente gráfico.

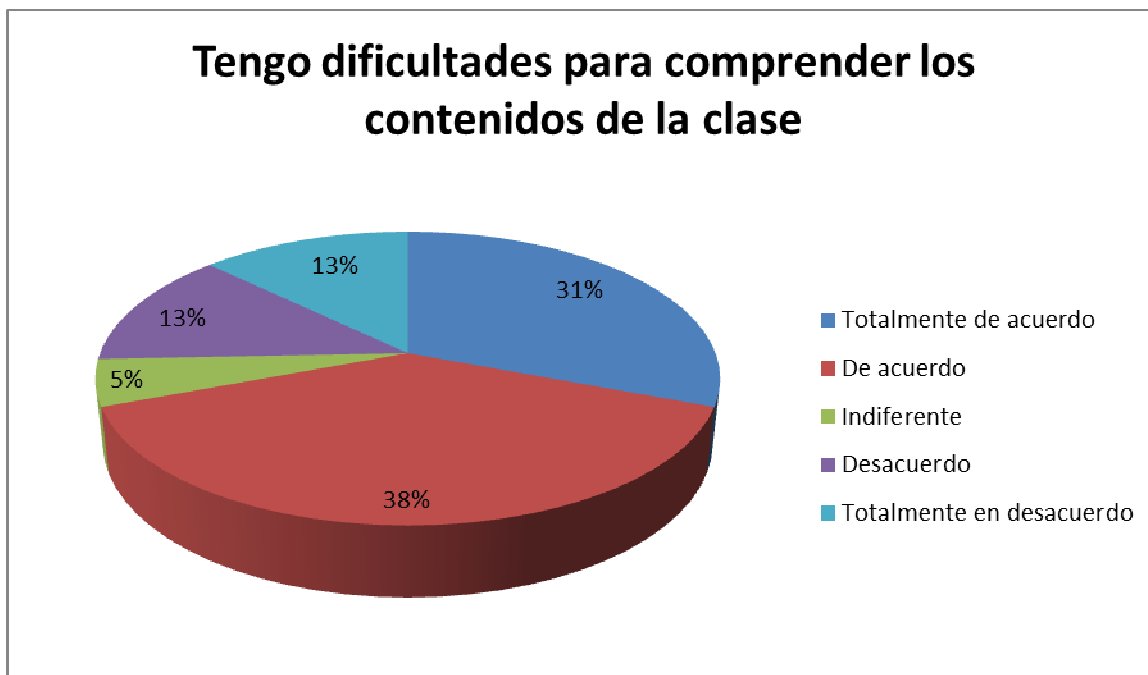


*Gráfico 6.1.1.2: Resultados obtenidos pregunta 2 (encuesta inicial)*

Se extrae del gráfico que los alumnos del curso experimental muestran una tendencia hacia la alternativa “De acuerdo” con un resultado de 3,6, esto quiere decir, que gran parte de los alumnos no comprende las explicaciones que el profesor realiza sobre las distintas unidades, lo que produce a que los alumnos no puedan aclarar sus dudas y presenten dificultades a la hora de ser evaluados

### **Pregunta 3: Tengo dificultades para comprender los contenidos de la clase de matemáticas**

Los resultados extraídos del curso experimental se muestran a continuación en el siguiente gráfico.

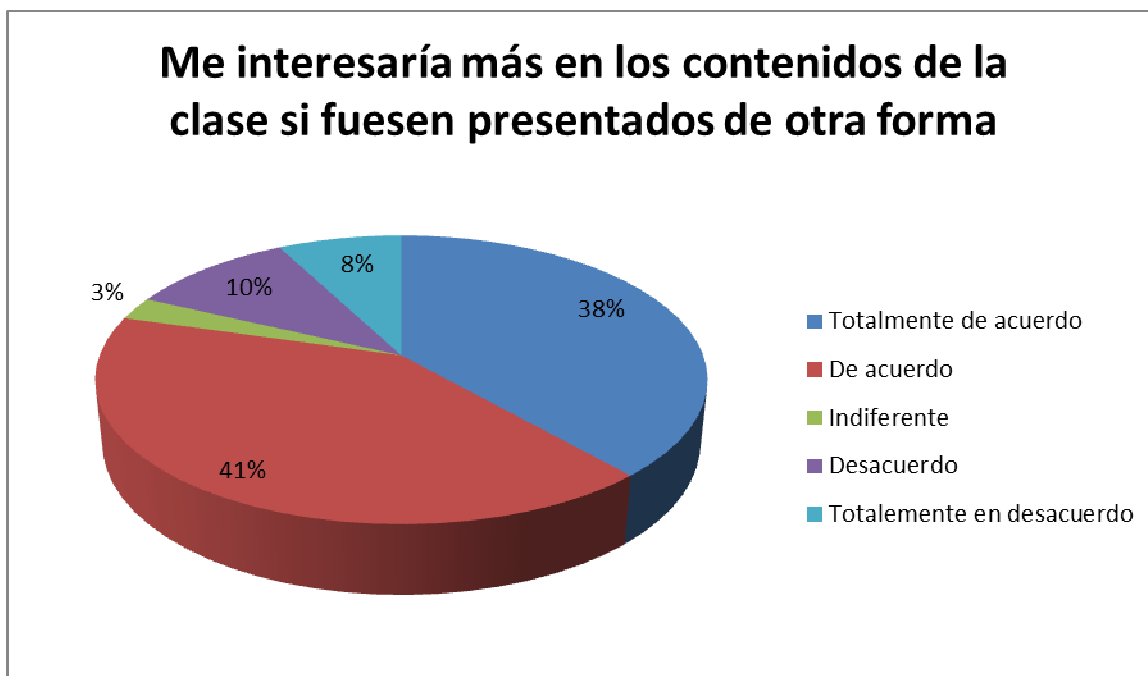


*Gráfico 6.1.1.3: Resultados obtenidos pregunta 3 (encuesta inicial)*

Se infiere de este gráfico que la tendencia marcada por los estudiantes es la alternativa “De acuerdo” con un resultado muy parecido al anterior de 3,6, esto profundiza aun más las dificultades que los alumnos presentan ante los diferentes contenidos planteados en las clases y se refleja claramente, ya que el 69% de los estudiantes marca la alternativa de “totalmente de acuerdo” o “de acuerdo”.

#### **Pregunta 4: Me interesaría más en los contenidos de la clase si fuesen presentados de otra forma**

Los resultados extraídos del curso experimental se muestran a continuación en el siguiente gráfico.

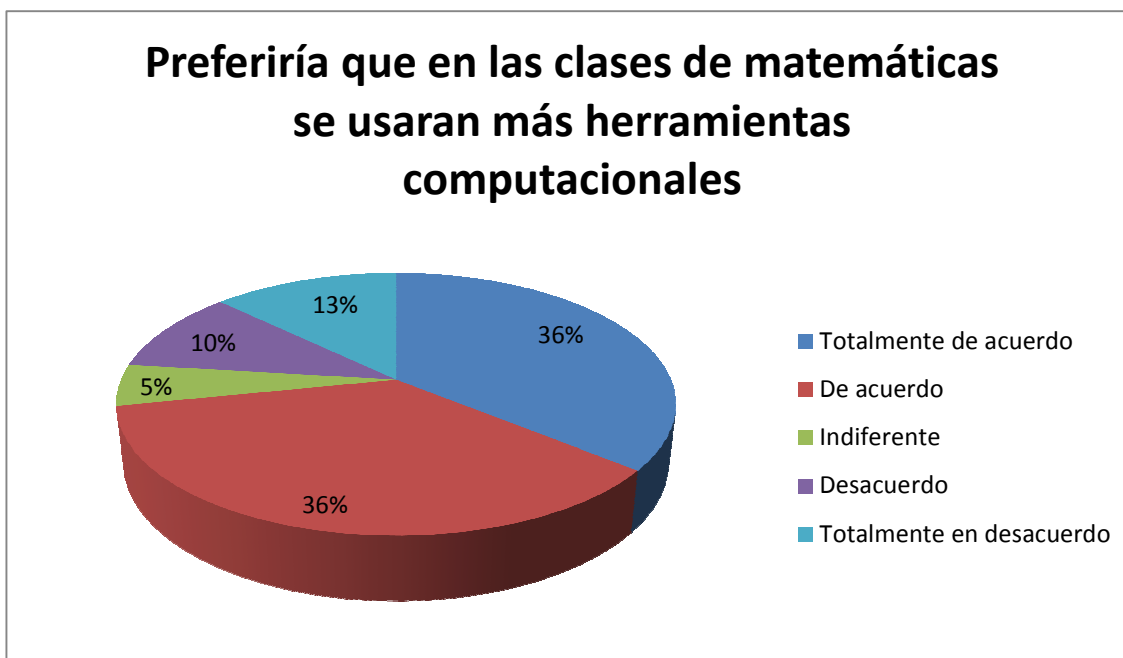


*Gráfico 6.1.1.4: Resultados obtenidos pregunta 4 (encuesta inicial)*

Se deriva de este gráfico que la tendencia del curso experimental muestra una inclinación a la alternativa “De Acuerdo” con un resultado de 3,9, además si se suman las alternativas totalmente de acuerdo y de acuerdo, sumarian un 79% del total de los estudiantes encuestados que quieren que los docentes presenten de otra forma la clase. Además. La metodología que será implementada pretende cambiar la forma de entregar los nuevos conocimientos utilizando los aprendizajes colaborativos y por descubrimiento, es decir, la participación grupal de los estudiantes a través de descubrir con la ayuda de los compañeros y de sí mismo en la construcción de nuevos conocimientos.

**Pregunta 5: Preferiría que en las clases de matemáticas se usaran más herramientas computacionales**

Los resultados extraídos del curso experimental se muestran a continuación en el siguiente gráfico.



*Gráfico 6.1.1.5: Resultados obtenidos pregunta 5 (encuesta inicial)*

Se infiere del gráfico anterior que la tendencia marcada por los estudiantes es la alternativa “de acuerdo” con un resultado de 3,7 según la tabla anterior, con lo cual demuestra a que los estudiantes están dispuestos y con ganas de trabajar diferentes áreas de la matemática a través de software o herramientas computacionales.

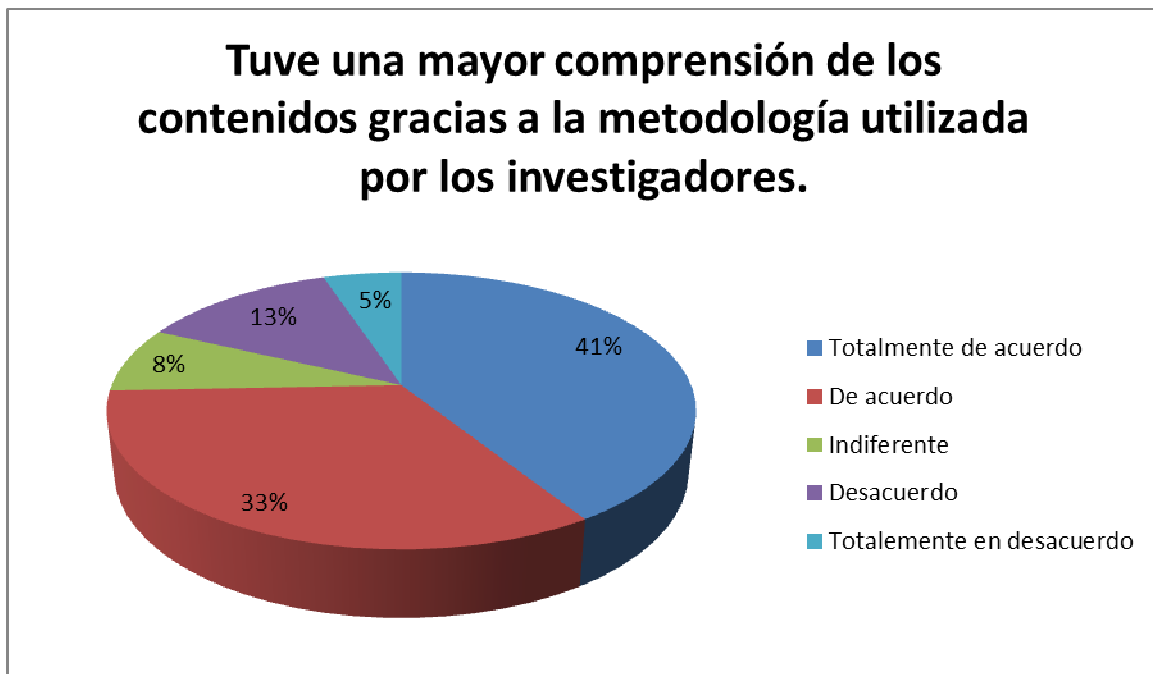
## 6.1.2 Análisis Encuesta Final

La siguiente encuesta fue desarrollada una vez finalizado el proceso de implementación de esta investigación, en donde se encuestó al mismo grupo experimental (GE), es decir al curso primero medio A con el fin de medir la opinión sobre la metodología implementada.

Al igual que en la encuesta anterior se utilizó la misma tabla de ponderaciones.

**Pregunta 1: Tuve una mayor comprensión de los contenidos gracias a la metodología utilizada por los investigadores.**

Los resultados extraídos del curso experimental se muestran a continuación en el siguiente gráfico.

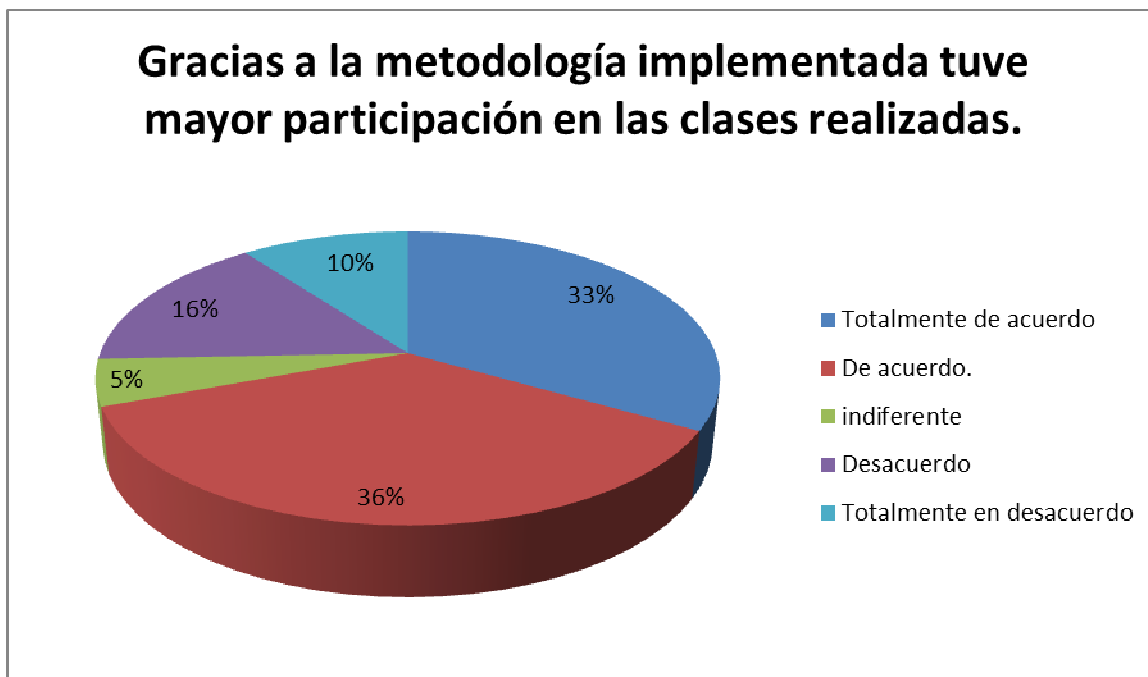


*Gráfico 6.1.2.1: Resultados obtenidos pregunta 1 (encuesta final)*

Se infiere del gráfico anterior que la tendencia marcada por los estudiantes es la alternativa “De acuerdo”, según la escala descrita anteriormente. Con esto los estudiantes manifiestan que con la nueva metodología utilizada se les hace más fácil la comprensión de los contenidos vistos, es decir, la forma de entregar los contenidos influye directamente en el aprendizaje de los estudiantes.

**Pregunta 2: Gracias a la metodología implementada tuve mayor participación en las clases realizadas.**

Los resultados extraídos del curso experimental se muestran a continuación en el siguiente gráfico.

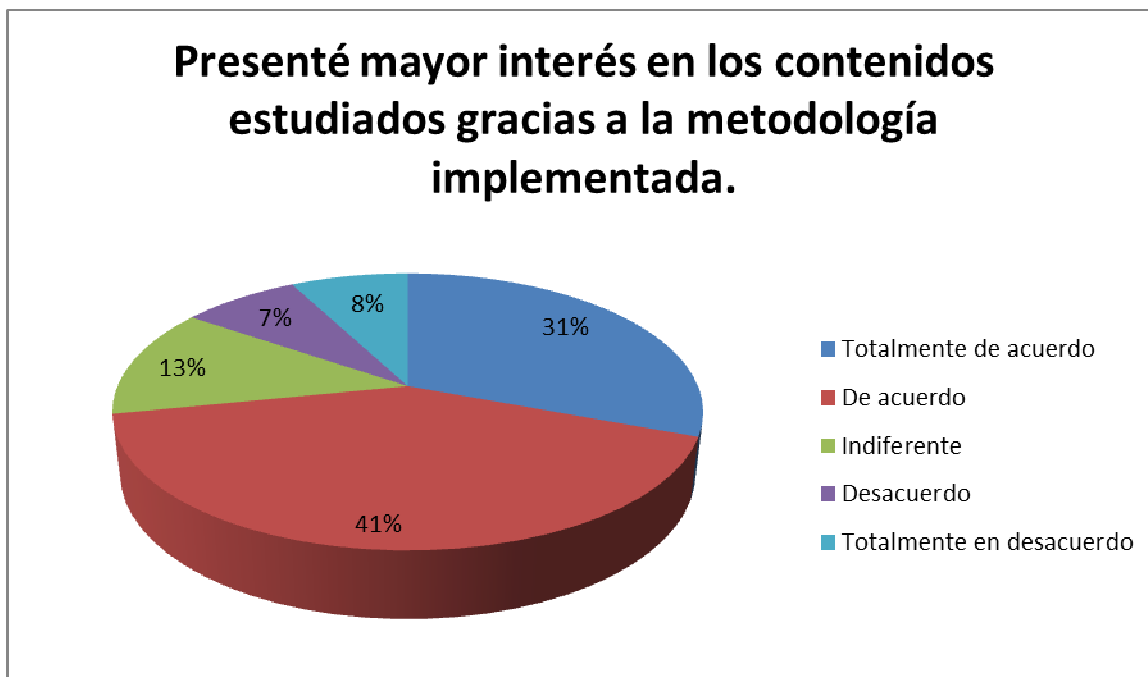


*Gráfico 6.1.2.2: Resultados obtenidos pregunta 2 (encuesta final)*

Del gráfico anterior se extrae que la tendencia del curso experimental es la alternativa “De acuerdo” con un resultado superior a 3,8 en donde los alumnos manifiestan que la metodología implementada tiene directa influencia en la participación que tienen durante el transcurso de las clases, lo que beneficia notablemente en la captación de nuevos conocimientos. Esto se debe a que el trabajo colaborativo, en el cual hay una participación activa de todos los estudiantes, hace que estos construyan mejor sus propios conocimientos.

**Pregunta 3: Presenté mayor interés en los contenidos estudiados gracias a la metodología implementada.**

Los resultados extraídos del curso experimental se muestran a continuación en el siguiente gráfico.

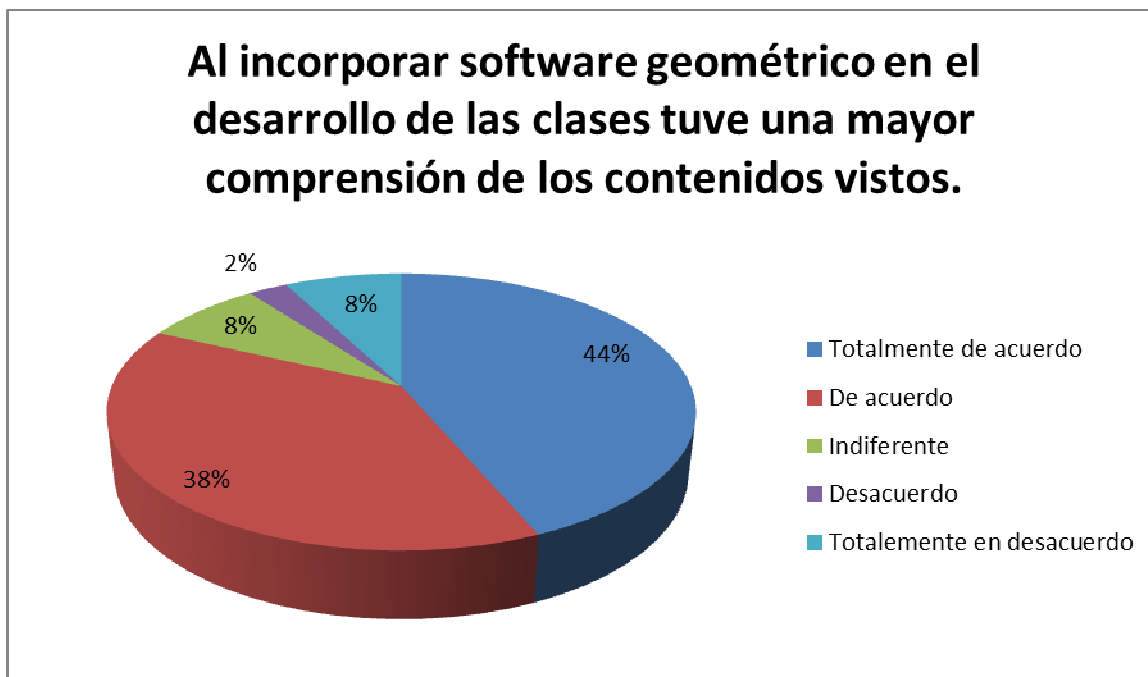


*Gráfico 6.1.2.3: Resultados obtenidos pregunta 3 (encuesta final)*

Se infiere del gráfico que la tendencia que nuevamente se marca es la alternativa “De acuerdo”, con un resultado de 4,0, es decir, que la materia al ser vista con una metodología distinta a la que los alumnos están acostumbrados, presenta para ellos un mayor interés en los contenidos. Estos resultados contrastan con los resultados obtenidos en la encuesta inicial, en donde se encuentran indiferentes frente al interés presentado a la clase de matemáticas.

**Pregunta 4: Al incorporar software geométrico en el desarrollo de las clases tuvo una mayor comprensión de los contenidos vistos.**

Los resultados extraídos del curso experimental se muestran a continuación en el siguiente gráfico.

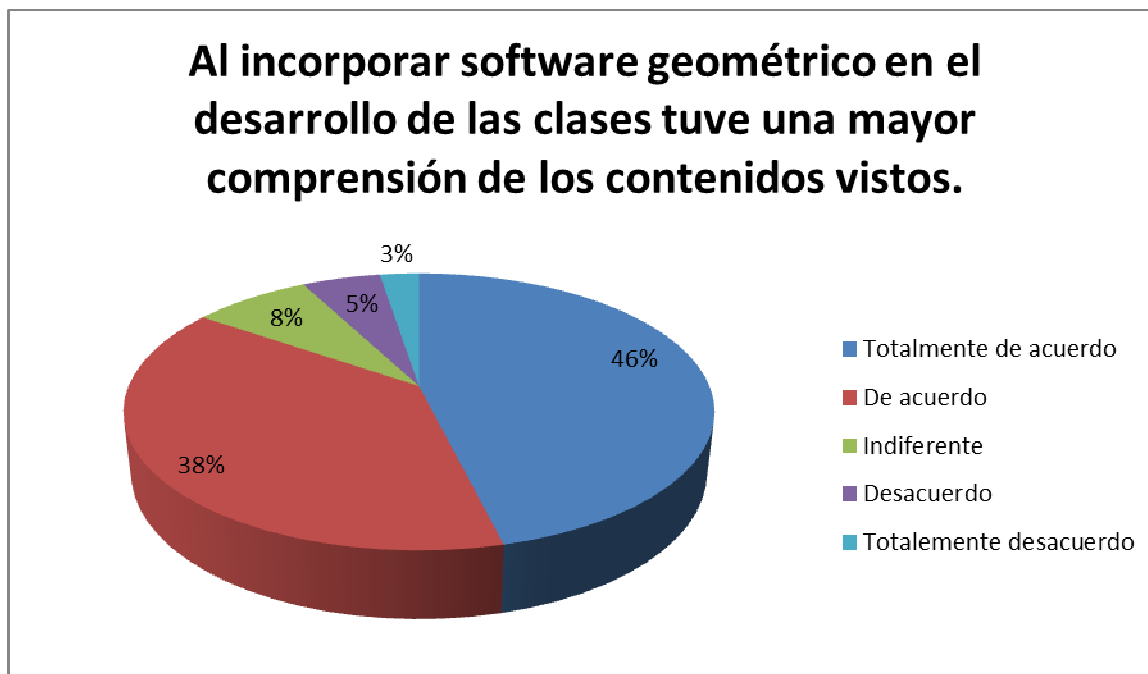


*Gráfico 6.1.2.4: Resultados obtenidos pregunta 4 (encuesta final)*

De este gráfico se infiere que la tendencia marcada por los estudiantes es la alternativa “De acuerdo” con un resultado de 4,0, donde los alumnos manifiestan que al incorporar herramientas computacionales como software geométricos

**Pregunta 5: Al incorporar herramientas computacionales me interesó participar activamente de las clases.**

Los resultados extraídos del curso experimental se muestran a continuación en el siguiente gráfico



*Gráfico 6.1.2.5: Resultados obtenidos pregunta 5 (encuesta final)*

Del gráfico se puede inferir que la tendencia marcada por los alumnos es la alternativa “De acuerdo”, con un resultado de 4,2 en la tabla presentada con anterioridad, donde los estudiantes manifiestan claramente que el uso de software geométrico en el desarrollo de las clases hace que comprendan de mejor manera los contenidos de la clase. Esto queda claramente reflejado con que el 74% de los estudiantes marca como alternativa estar de acuerdo o totalmente de acuerdo con incorporar herramientas computacionales a las clases de matemáticas.

## 6.2 Análisis de datos

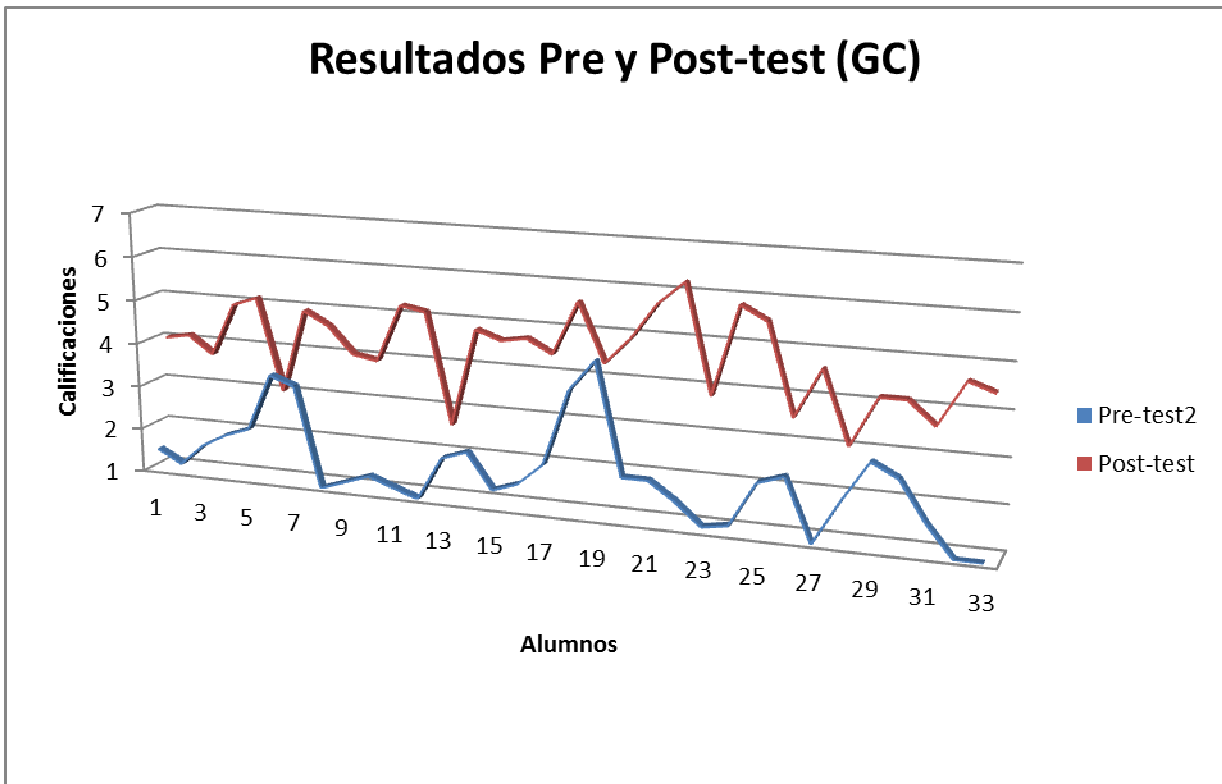
En primer lugar se debe seleccionar los cursos que serán analizados en esta investigación, siempre y cuando tengan la característica de que sean cursos homogéneos entre sí, los cursos participantes son el Primero Medio A y Primero Medio B del colegio Entrevalles. El curso Primero Medio A es designado como Grupo Experimental (GE), con un total de 39 estudiantes, que consta con 21 mujeres y 18 hombres, con un promedio general en el área de Matemáticas de 4,5 de los cuales 7 de sus estudiantes presentan un promedio inferior a 4,0 (4 mujeres y 3 hombres). Por otro lado, el Grupo de Control (GC), correspondiente al Primero Medio B, con un total de 33 estudiantes, los cuales están compuestos por 13 mujeres y 20 hombres, con un promedio general en el área de Matemáticas de 4,6 de los cuales 7 de sus estudiantes poseen nota inferior a 4,0 (6 mujeres y 1 hombre).

En el primer test (O1), para el cual, ambos cursos no habían revisado los contenidos de la unidad de Transformaciones Isométricas previamente, el Grupo Experimental se presentó con un promedio general de 1,9 y el Grupo de Control con un promedio de 1,8. Lo que corrobora que los cursos son homogéneos entre sí. Una vez implementado el experimento, se realizó el Post-Test (O2), con lo cual cada grupo concluyó con un incremento en sus conocimientos y esto es reflejado en el promedio general de los cursos estudiados en la investigación. El Grupo Experimental finalizó con un promedio de 5,8 y el Grupo de Control con un promedio de 4,1. Como se muestra en la siguiente tabla

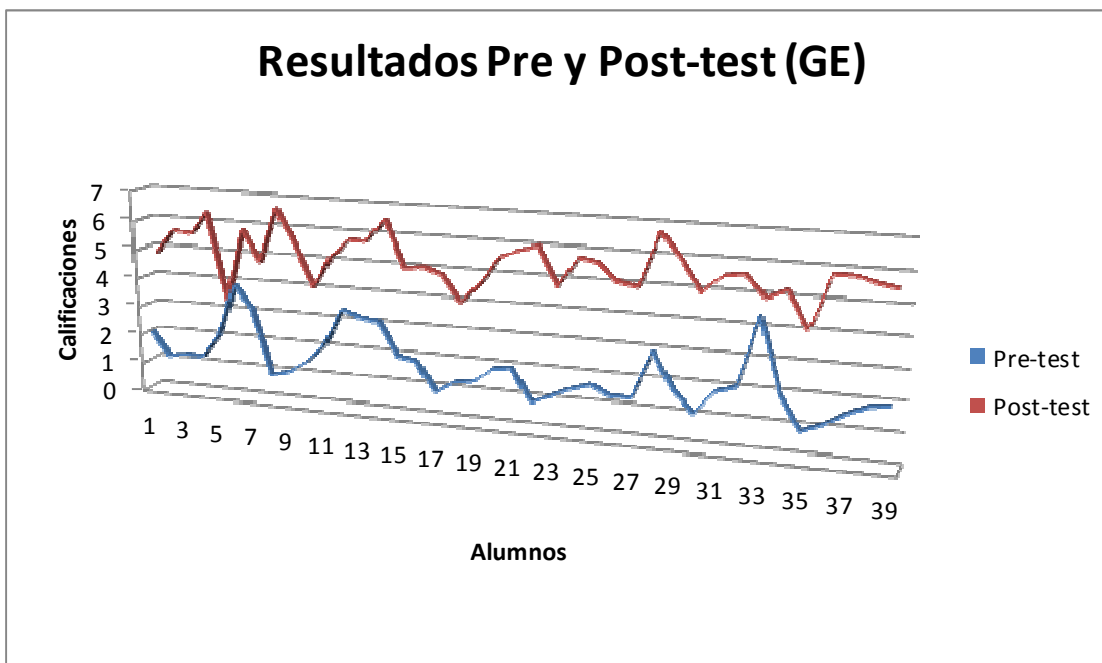
	Pre-test (O1)	Post-test(O2)	Diferencia
GC	1,8	3,8	2,0
GE	1,9	5,6	3,7

Para poder realizar un análisis de los test realizados, se compararon los resultados obtenidos por cada uno de los estudiantes, de los distintos cursos en los diferentes test.

Estos resultados se muestran a continuación en los siguientes gráficos



*Figura 6.2.1: Resultados Pre y Post-test Grupo de Control*



*Figura 6.2.2: Resultados Pre y Post-test Grupo de Control*

La diferencia de rendimiento del promedio en el grupo experimental es de 3,7 décimas, en cambio la diferencia del Grupo de Control es de 2,0 décimas. La diferencia de rendimientos entre ambos grupos es de 1,7 décimas.

Finalmente para analizar si el incremento del rendimiento en el Grupo Experimental es significativo con respecto al Grupo de Control se deberá realizar una prueba estadística. Para esto se debe elegir que prueba estadística es conveniente utilizar, por lo cual se realizará una prueba de normalidad, que se estudiará a continuación.

## **6.2.1 Análisis resultados de Pre-Test**

En esta sección se realiza un análisis del Pre-Test realizado para identificar los conocimientos que los alumnos poseen antes de la aplicación de la metodología experimental, en el cual obtuvieron un bajo rendimiento, ya que al realizar este test los alumnos no debían tener los conocimientos de los contenidos de la unidad.

El Pre-Test fue realizado a los Grupos de Control y Experimental, el grupo de control (Tercero Medio C) estaba formado por 25 alumnos que rindieron este test, por otro lado, el Grupo Experimental (Primero Medio A) estaba formado por 19 alumnos. Analizando los resultados del Pre-Test (descrito en el Apéndice C), de los dos grupos en ejercicios, los promedios que obtuvieron fueron los siguientes:

Para realizar el análisis de este test se mostrará las respuestas de ambos grupos en las preguntas donde se presentó mayor dificultad.

### **Ítem I. Verdadero o Falso (V o F)**

En este ítem se buscaba como objetivo que los estudiantes identifiquen algunos resultados obtenidos de la composición de transformaciones isométricas, esto debido a que la información entregada en cada una de las preguntas era la necesaria para que los alumnos lograsen responder correctamente. Si bien este ítem tuvo un mayor rendimiento que los otros, los resultados obtenidos por los estudiantes fueron deficientes en ambos cursos, presentando un rendimiento inferior a 4.0.

I. Verdadero y Falso  
 Responde verdadero o falso según corresponda (Justificar las falsas)

a)  F La composición de dos traslaciones es una traslación.

b)  F La composición de dos simetrías axial da como resultado una rotación.

c)  V Al componer una rotación de centro O y ángulo  $90^\circ$  seguida de otra rotación con el mismo centro y ángulo  $180^\circ$  da como resultado una rotación de centro O y ángulo  $270^\circ$

d)  V Al componer una simetría con un eje dado, seguida de una traslación da como resultado una nueva simetría con el mismo eje dado.

e)  F Dado el punto  $(x,y)$ , al aplicarle una rotación con centro en el origen y ángulo  $90^\circ$  obtenemos como resultado el punto  $(-y, x)$

Al analizar los resultados obtenidos por los estudiantes, se concluye que las preguntas a y b mostradas en la figura anterior son las que presentaron un mayor índice de respuestas correctas en ambos curso. Por el contrario las preguntas que presentaron un mayor índice de respuestas incorrectas fueron la c y e, en donde casi la totalidad de los estudiantes respondieron incorrectamente. Si se comparan los resultados obtenidos por el grupo de control (GC) y el grupo experimental (GE), este último presentó un mejor resultado en este ítem, aunque como se dijo anteriormente no alcanzaron a tener un rendimiento superior a 4.0.

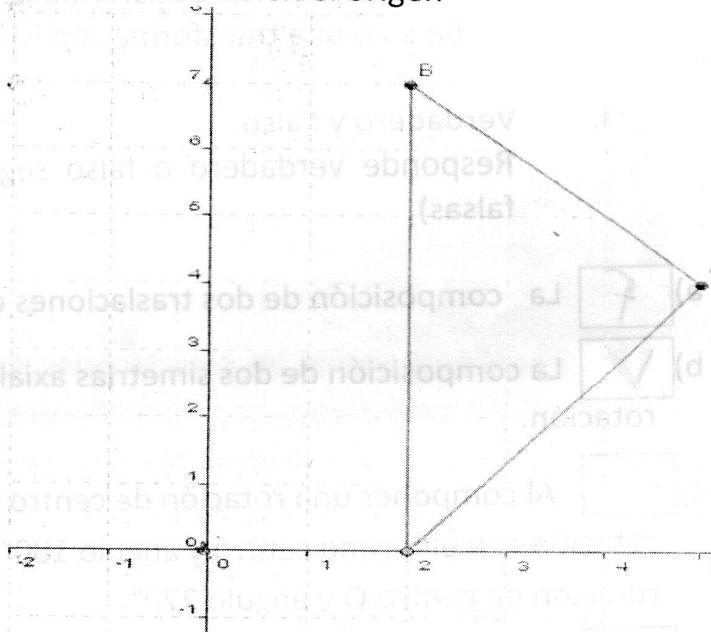
## Ítem II

En este ítem se les entregó a los estudiantes una serie de preguntas en donde ellos tenían que reconocer, identificar y aplicar los contenidos referentes a la unidad de transformaciones isométricas. A continuación se analizará solo alguno de ellos, ya que se realizó más de un ejercicio por contenido visto.

## Problema 2: Composición de una traslación con rotación

2- El triángulo que se obtiene al reflejar el triángulo ABC, ubicado en un plano cartesiano de vértices  $A(2,0)$ ,  $B(2,7)$  y  $C(5,4)$  con respecto al eje X seguida de una rotación de  $90^\circ$  con centro en el origen

- a.  $(0,0)$ ,  $(0,7)$ ,  $(2,4)$
- b.  $(0,-2)$ ,  $(7,-2)$ ,  $(4,-5)$
- c.  $(0,-2)$ ,  $(7,2)$ ,  $(4,5)$
- d.  $(2,0)$ ,  $(2,-7)$ ,  $(5,4)$
- e.  $(0,2)$ ,  $(7,2)$ ,  $(4,5)$



Con respecto a la composición de una traslación con una rotación es en donde los estudiantes presentan un mayor porcentaje de déficit en el rendimiento del Test. Analizando más profundamente los resultados de ambos cursos, queda de manifiesto que los alumnos no manejan en lo más mínimo los contenidos evaluados.

A partir de los datos analizados en este problema, los grupos en estudio no lograron el objetivo planteado, de determinar las coordenadas de la figura obtenida al realizar una composición de transformaciones isométricas. En primer lugar hubo un alto porcentaje de los alumnos, de ambos cursos, que omitió la pregunta (76% GC y 73% GE). Del resto solo un 6% y 5% respectivamente, respondió correctamente la pregunta.

Por último se infiere que los alumnos de ambos cursos tanto el experimental como el de control no están familiarizados con los contenidos de la unidad a tratar.

### Problema 5: Composición de traslaciones

5- Si en un plano cartesiano el punto  $A=(3,2)$  se traslada a  $B=(2,4)$  y luego a  $C(-2,-1)$ , ¿cuál es el vector traslación que se debe emplear para trasladar en un solo paso el punto  $A$  a la ubicación  $C$ ?

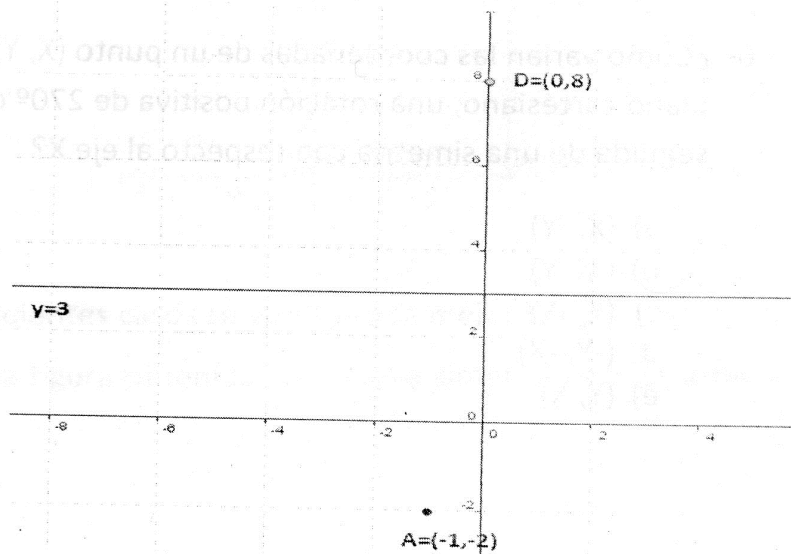
- a)  $T(-5, -3)$
- b)  $T(5, 3)$
- c)  $T(-5, 0)$
- d)  $T(0, -3)$
- e)  $T(-3,-5)$

El objetivo de este problema era que los estudiantes pudieran realizar la composición de dos traslaciones. Si bien un porcentaje relativamente elevado de ambos cursos (37% GC y 40% GE) pudo realizar la primera traslación, esto no ocurrió con la composición, es decir solo realizaron la primera etapa del ejercicio. Esto se debe a que los estudiantes manejan los contenidos de transformaciones isométricas, pero no así lo que es una composición de transformaciones isométricas.

### Pregunta 9: Composición de simetrías

9- En la figura, ¿Cuál es el punto simétrico del punto  $A(-1, -2)$  con respecto a la recta  $y=3$  Y luego con respecto del punto  $D(0,8)$  ?

- a)  $(-1,8)$
- b)  $(1, 8)$
- c)  $(-1, 6)$
- d)  $(7, -2)$
- e)  $(-1, -4)$



Es en el problema número nueve en donde se concentra el mayor índice de estudiantes que respondieron afirmativamente, esto se debe a que los estudiantes aun recordaban el concepto de simetrías y también ya que el encabezado los ayudaba en los pasos que debían realizar para poder completar el problema planteado.

Analizando profundamente los datos, se concluye que de los dos grupos en estudio, el grupo experimental es el que presenta un mejor rendimiento alcanzando un 35% de respuestas correctas. Los estudiantes relacionan la composición de simetrías con el hecho de realizar simetrías sucesivas una tras otra.

Para finalizar se puede concluir que se logra la finalidad de aplicar el Pre-test, de conocer previamente los conocimientos correspondientes a la unidad de Composición de Transformaciones Isométricas, lo que concluye que los estudiantes no manejan en lo más mínimo los contenidos. Dado esto se podrá analizar si al desarrollar la propuesta metodológica a través de un software geométrico marca diferencias a realizar las mismas actividades de la manera tradicional.

#### Problema 10: Composición de rotaciones

10- Si el trazo AB ubicado en un plano cartesiano, de extremos A(2,5) y B(-2,0) se gira positivamente con centro en el origen  $180^\circ$ , luego se gira  $90^\circ$  más y finalmente se gira otros  $90^\circ$ , los extremos del trazo resultante son:

- a) (5,2) y (0,-2)
- b) (-5,-2) y (0, 2)
- c) (-2,-5) y (2,0)
- d) (2,-5) y (-2,0)
- e) (2,5) y (-2,0)

Analizando y estudiando las respuestas de ambos grupos, podemos inferir que el GC no logra el aprendizaje esperado, ya que, no determinaron correctamente las coordenadas del punto resultante, cometiendo errores tales como, sentido de rotación de los puntos y el ángulo de rotación.

## 6.2.2 Análisis resultado Post-test

Como se mencionó anteriormente, el Post-test fue aplicado a ambos grupos (Grupo de Control y Grupo Experimental) inmediatamente finalizada la intervención metodológica.

A continuación se analizarán los resultados obtenidos por los estudiantes en los diferentes contenidos.

### Ítem I Verdadero o Falso (V o F)

I.	Verdadero y Falso
	Responde verdadero o falso según corresponda (Justificar las falsas)
a)	<input checked="" type="checkbox"/> La composición de dos traslaciones es una traslación.
b)	<input type="checkbox"/> La composición de dos simetrías axial da como resultado una rotación. <i>No, porque la composición de dos simetrías es una traslación.</i>
c)	<input checked="" type="checkbox"/> Al componer una rotación de centro O y ángulo $90^\circ$ seguida de otra rotación con el mismo centro y ángulo $180^\circ$ da como resultado una rotación de centro O y ángulo $270^\circ$
d)	<input type="checkbox"/> Al componer una simetría con un eje dado, seguida de una traslación da como resultado una nueva simetría con el mismo eje dado.
e)	<input checked="" type="checkbox"/> Dado el punto $(x,y)$ , al aplicarle una rotación con centro en el origen y ángulo $90^\circ$ obtenemos como resultado el punto $(-y, x)$ <i>No, porque se <sup>algebra</sup> multiplica con otro eje no el mismo</i>

En este ítem los alumnos debían clasificar, según los contenidos vistos en clases, si las afirmaciones que se entregaban eran falsas o verdaderas.

En comparación con los resultados obtenidos en el Pre-test, los alumnos obtienen en éste test un alto nivel de preguntas respondidas correctamente, en ambos grupos, tanto el grupo de control como el grupo experimental, pero en este último esto queda reflejado con un 79% de los estudiantes con respuestas correctas contra un 52 % del grupo de control.

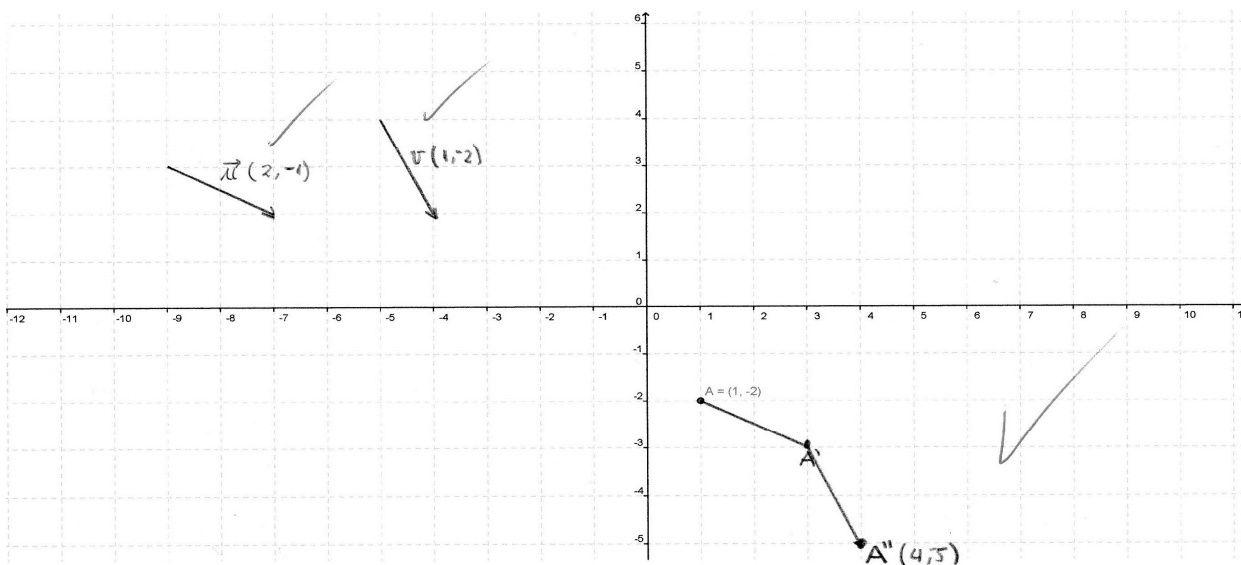
## Ítem II

En este ítem se les entregó a los estudiantes una serie de preguntas en donde ellos tenían que reconocer, identificar y aplicar los contenidos referentes a la unidad de transformaciones isométricas. A continuación se analizará solo alguno de ellos, ya que se realizó más de un ejercicio por contenido visto.

### Pregunta 1: Composición de Traslaciones

- 1- Si realizo una traslación al punto  $A(1, -2)$ , con un vector de traslación  $T(2, -1)$  en un plano cartesiano, el punto resultante después de otra traslación de vector  $T(1, -2)$  es:

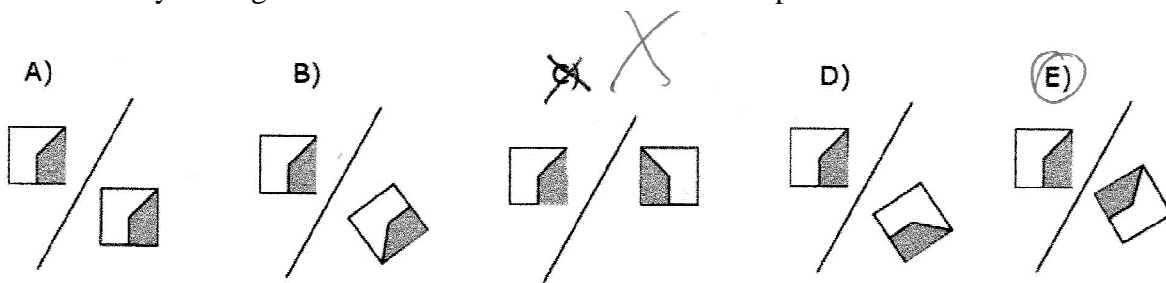
Desarrollo:



Al analizar y comparar los resultados obtenidos entre el pre y post-test referentes a esta pregunta, se logra distinguir que existe un gran avance por parte de los estudiantes, ya que tanto en el grupo de control, pero más aun en el grupo experimental el porcentaje de respuestas correctas aumenta notablemente de un 17% a un 65%, es decir que en este grupo se cumple el objetivo de la pregunta planteada. Aquí los alumnos lograron trasladar el punto dado, según los vectores traslación que también fueron dados en el mismo ejercicio.

### Pregunta 3: Composición de Simetrías

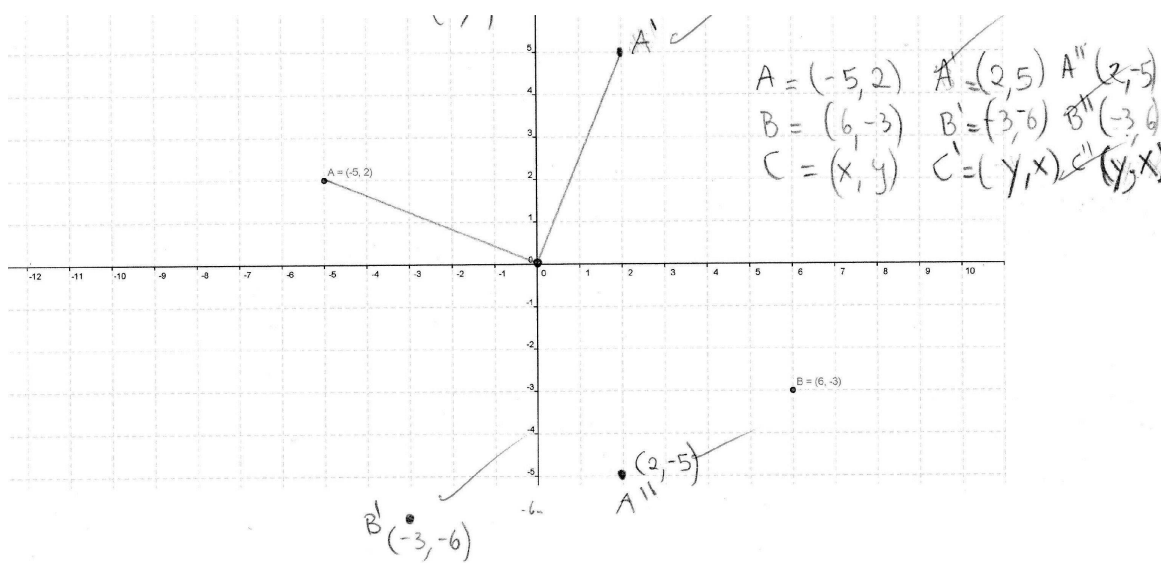
1- ¿En cuál de los siguientes casos se verifica una mejor simetría axial con respecto a L y a la figura obtenida una nueva simetría con respecto a L?



En el problema 3, referente a la composición de simetrías, es en donde se obtuvo un menor resultado por parte de los estudiantes. Muchos de ellos presentan problemas al realizar la primera reflexión en torno a una recta L dada. Si bien los resultados no cumplen con el objetivo planteado en la pregunta, se logra ver una leve mejoría en la cantidad de respuestas correctas con respecto al Pre-test del grupo experimental (GE). Al analizar los datos se tiene que, en el Grupo de Control se pasa de un 6% a un 11% de estudiantes que responde satisfactoriamente, en tanto el Grupo Experimental hace un saldo de un 10 a un 21% de respuestas correctas.

### Pregunta 6: Composición de Rotación y Simetría

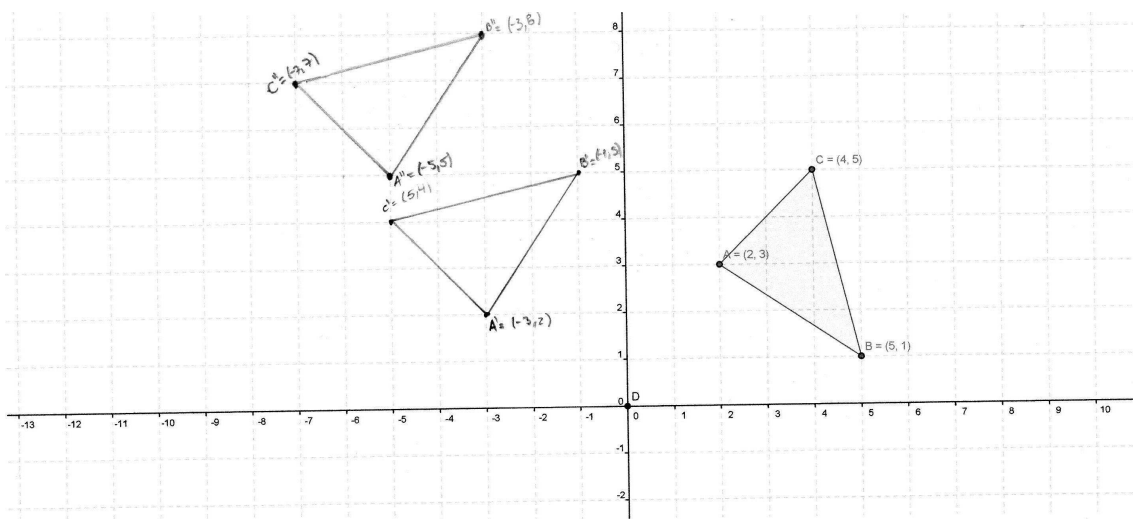
¿Cómo varían las coordenadas de un punto (X, Y) al efectuar en un plano cartesiano, una rotación positiva de  $270^\circ$  con centro en el origen seguida de una simetría con respecto al eje X?



Al analizar y comparar los resultados obtenidos en el Post-test se puede inferir que nuevamente el Grupo de Control no logra los objetivos planteados en la pregunta, ya que presenta una baja cantidad de estudiantes que responde satisfactoriamente, no así con el Grupo Experimental que sube la cantidad de alumnos que responde correctamente en el Post-test en comparación con la misma pregunta del Pre-test. También hay que mencionar que la mayoría de los alumnos tomó 2 puntos cualesquiera y realizó la rotación correspondiente para así luego aplicar a ese resultado la simetría respecto al eje X, obteniendo la respuesta correcta. En conclusión, se puede deducir que, estos estudiantes gracias a la metodología implementada muestran una mayor comprensión de los contenidos vistos.

### Pregunta 11: Composición de rotación seguida de una traslación

Si las coordenadas de un punto inicial  $(x, y)$  varían a  $(-y, x)$  cuando se aplica una rotación (positiva) de  $90^\circ$ , en un plano cartesiano, con centro en el origen. ¿Cuáles serían las coordenadas del triángulo  $ABC$  luego de aplicar una rotación de  $90^\circ$  (con centro en el origen) y posteriormente una traslación  $T(-2, 3)$ ?



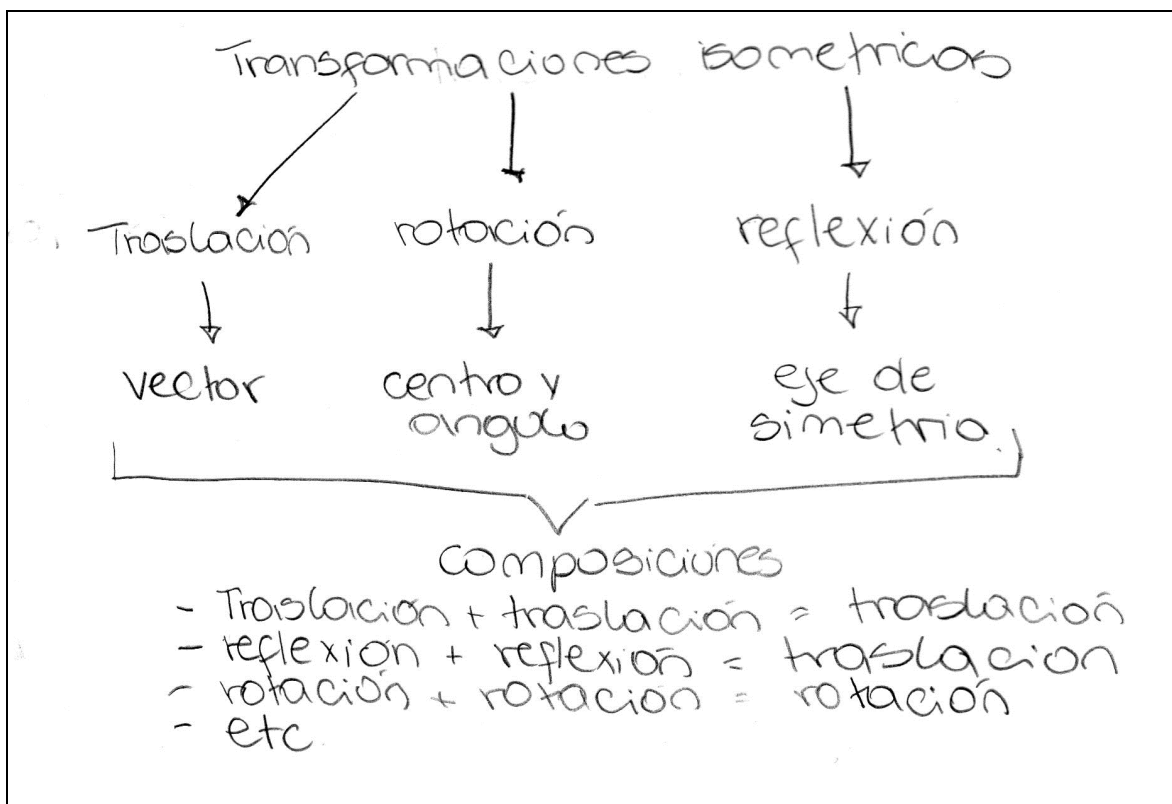
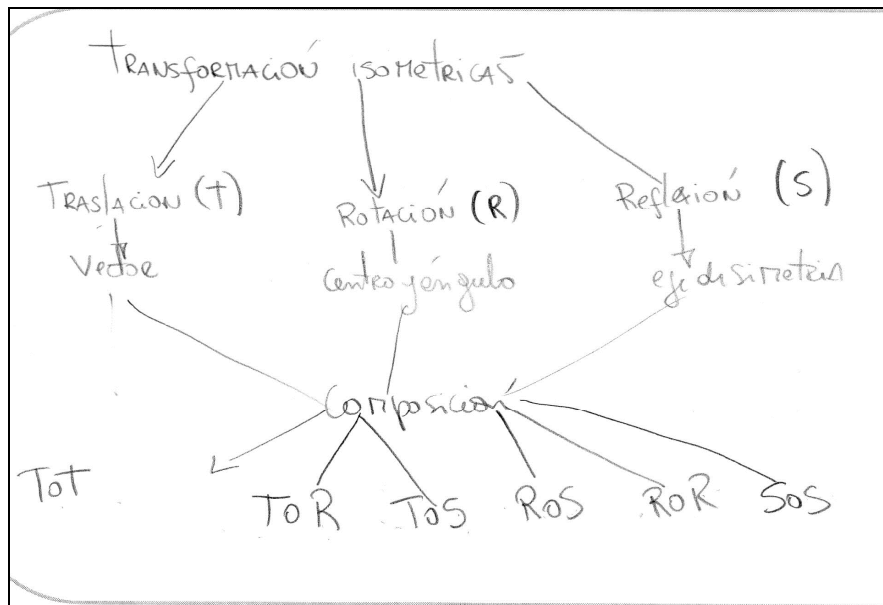
En esta pregunta al igual que en las anteriores se analizaron los resultados obtenidos en el Post-test, para ser comparados con los resultados del Pre-test. Si bien en este contenido, fue donde los estudiantes tuvieron un mayor déficit al realizar el Pre-test, esto se revirtió en el Grupo Experimental, ya que de un 6% de respuestas correctas pasaron a un 49% de respuestas correctas en el Post-test. De estos resultados se puede inferir que los estudiantes de este grupo, desarrollaron las habilidades que fueron propuestas en el problema.

Finalmente los resultados permiten observar una diferencia en la adquisición de aprendizaje de los grupos. Ambos logran los aprendizajes esperados, sin embargo el Grupo de Control presenta problemas para llevar a cabo los ejercicios planteados correspondientes a la composición de transformaciones isométricas, tal como se observó en el análisis anterior. En cambio el Grupo Experimental tuvo un aprendizaje uniforme de los conceptos de la unidad, donde logró identificar, graficar y componer las distintas transformaciones isométricas. Cabe destacar que el GE subió en 3,4 puntos con respecto al rendimiento promedio del curso y el GC solo lo hizo en 2,5 puntos. Los resultados y análisis hechos en este capítulo, indican que la secuencia didáctica adoptada y utilizada en esta investigación fue bastante positiva y supera de forma significativa a una clase hecha de forma tradicional, ya que se consiguió que el alumno obtuviera los conceptos en distintos registros del contenido composición de transformaciones isométricas.

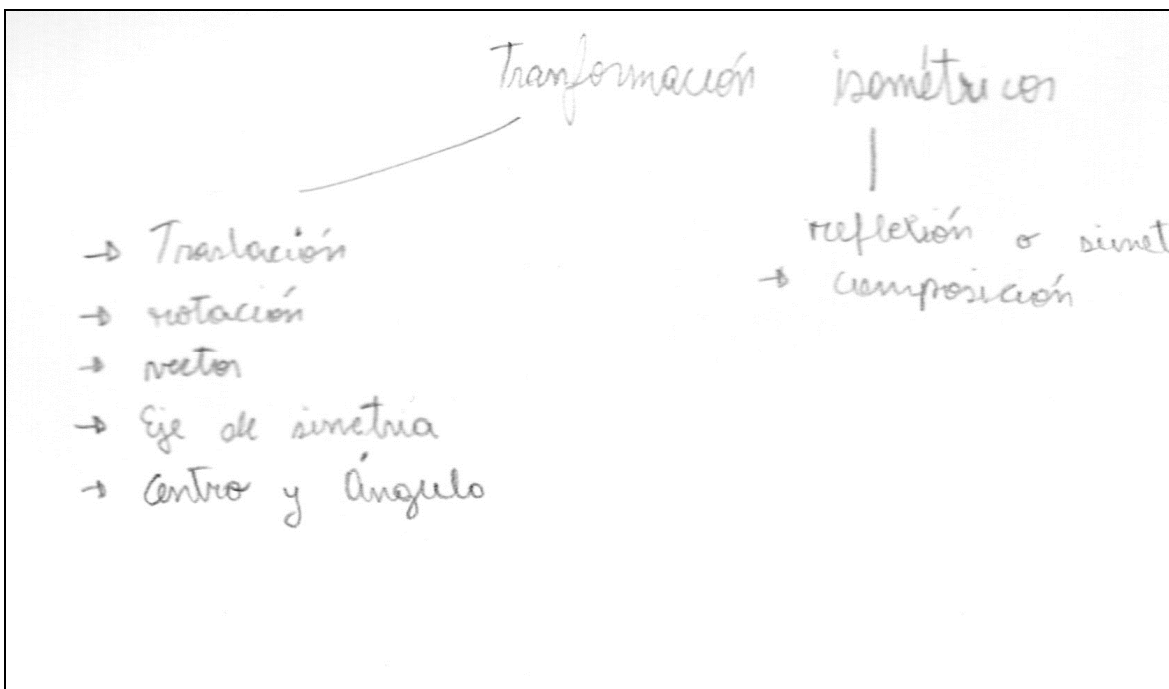
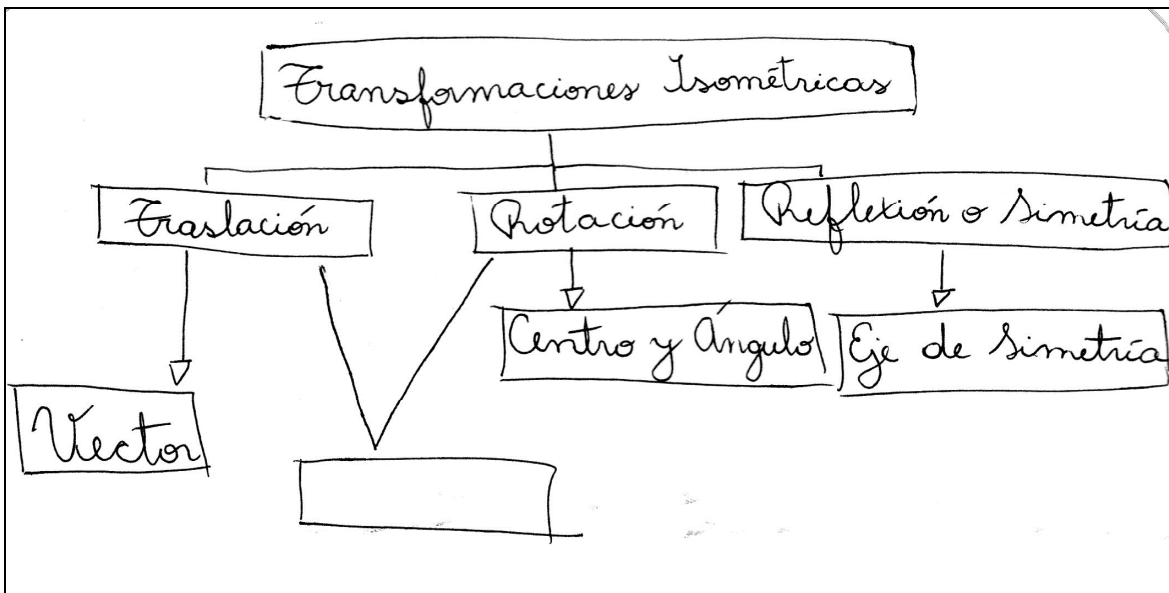
### **6.3 Análisis Evaluación Aprendizaje Significativo mediante Mapas Conceptuales**

A continuación se analizarán los resultados obtenidos por ambos grupos, tanto el Grupo de Control como el Grupo Experimental, en el desarrollo de un mapa conceptual de los contenidos vistos en la unidad, el cual se desarrolló 2 meses después de finalizada la intervención metodológica, todo esto con el fin de verificar en que grado los contenidos son recordados por ambos grupos.

## Resultados Grupo Experimental



## Resultados Grupo de Control



La implementación de este test de aprendizaje significativo es para verificar si el proceso de enseñanza-aprendizaje se produjo por medio del aprendizaje significativo.

Los resultados del mapa conceptual de los alumnos del grupo GC muestran que su aprendizaje no fue significativamente, ya que no existió el anclaje de los conceptos preexistentes con los adquiridos y tampoco perduraron en el tiempo.

A diferencia de esto, los alumnos del GE muestran que el aprendizaje perdura en el tiempo o bien basta un recordatorio para que ellos recuerden los conceptos involucrados.

Los conocimientos adquiridos se ordenan jerárquicamente mediante un mapa conceptual y la interacción entre ellos, es decir, los nuevos conocimientos y los preexistentes. Este proceso es interactivo, cuando sirve de idea ancla para el nuevo conocimiento, este mismo se modifica adquiriendo nuevos significados.

Esta forma de aprendizaje significativo, en la cual una nueva idea, un nuevo concepto, una nueva proposición, más amplia, pasa a subordinar conocimientos previos se llama aprendizaje significativo superordenado. No es muy común; la manera más típica de aprender significativamente es el aprendizaje significativo subordinado, en el cual un nuevo conocimiento adquiere significado en el anclaje interactivo con algún conocimiento previo específicamente relevante.

Finalmente podemos deducir, de los resultados obtenidos, que el Grupo Experimental presentó un aprendizaje perdurable en el tiempo, no obstante existe olvido de algunos conocimientos pero no es su totalidad todo esto gracias a la metodología implementada a través de software geométrico. Por otro lado el Grupo de Control presentó serios problemas en la construcción del mapa conceptual, todo esto debido a que las clases para ellos no presentaron un mayor interés que el habitual.

# Capítulo 7

## Conclusión

El propósito de esta investigación fue estudiar las condiciones bajo las cuales el software, permite que los estudiantes obtengan un aprendizaje significativo en la unidad de composición de transformaciones isométricas.

Durante la realización de esta investigación se diseñaron actividades y guías de trabajo enfocadas a la utilización del software mediante aprendizaje por descubrimiento y colaborativo todo lo mencionado va enfocado a los objetivos de determinar un aprendizaje eficaz y significativo al utilizar el software, los alumnos determinaron un espacio donde se puede explorar, discutir y trabajar en conjunto. Encontrando la relación de un instrumento tecnológico como un computador y la matemática, lo cual fomenta un aprendizaje por

descubrimiento, conceptualización, un trabajo colaborativo todo influye en el cambio de actitud de un alumno la que es una condición necesaria para que el aprendizaje significativo ocurra junto con el material potencialmente significativo.

Cada grupo de alumnos crearon hipótesis frente a las actividades y validaron sus respuestas con la implementación del software para su desarrollo, para que finalmente el profesor institucionalice el concepto correcto, corrigiendo si es necesario.

Respondiendo a nuestras interrogantes podemos decir que efectivamente el software geométrico tiene una relación directa con la comprensión de los contenidos, lo que conlleva a un aprendizaje significativo, en donde se manifiesta claramente las etapas de este, es decir, las condiciones necesarias para que ocurra el aprendizaje significativo, el material sea potencialmente significativo y que el aprendiz tenga la predisposición de aprender, conectando los nuevos conocimientos con la estructura cognitiva preexistente, ya sea de forma conceptual, representacional y proposicional.

En otro ámbito los resultados muestran que el grupo experimental tuvo un desempeño académico superior por sobre el grupo de control, lo que muestra una gran diferencia en la adquisición de conocimientos. Lo anterior queda reflejado en los resultados obtenidos por el GC y GE en los diferentes test, los que se presentan a continuación.

	Pre-test (O1)	Post-test(O2)	Diferencia
GC	1,8	3,8	2,0
GE	1,9	5,6	3,7

De la tabla anterior se desprende claramente que el GE tuvo un mayor rendimiento en la prueba de Post-Test, no así el GC que si bien aumenta su rendimiento no lo hace de manera consistente como el GE

Esto significa que el grupo experimental tuvo mejores calificaciones y mejores aprendizajes que el grupo de control, entonces, el emplear actividades basadas en Aprendizaje por Descubrimiento y Aprendizaje Colaborativo y el uso del software *Geogebra*, mejora los logros académicos de los estudiantes del contenido de composición de transformaciones isométricas demostrando la efectividad de su implementación.

Esto también se refleja en los mapas conceptuales que los alumnos realizaron, una vez terminada la intervención, con los conceptos claves de la unidad tratada. En estos se desprende claramente que hay un mejor manejo de estos conceptos por el GE, los cuales son capaces de construir diferentes mapas conceptuales siguiendo una determinada lógica, no así el GC quien en algunas ocasiones no fue capaz siquiera de realizar los mapas conceptuales.

# Bibliografía

Álvarez, T. (2010). La visualización de conceptos matemáticos y el aprendizaje del electromagnetismo. *Latin-American Journal of Physics Education* .

Ausubel, D.P. (1963). *The psychology of meaningful verbal learning*. New York: Grune & Stratton

Coll, C., & Moreneo, C. (2008). *Psicología de la educación virtual*. Madrid, España: Ediciones Morata.

Galvis, A. (2004). Colombia Aprende. Recuperado el 30 de 06 de 2010, de Oportunidades Educativas de las Tic:[http://www.colombiaprende.edu.co/html/investigadores/1609/articles-73523\\_archivo.pdf](http://www.colombiaprende.edu.co/html/investigadores/1609/articles-73523_archivo.pdf).

Grupo de acción digital (2012), *Agenda País Digital*, disponible en: <http://www.paisdigital.org/documentos/docseducacion/2005/TIC.pdf>

Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, P. (1997). *Metodología de Investigación*. México: Mc.Graw-Hill.

Jaramillo, P. (2005). Uso de la tecnología de información en el aula. ¿Qué saben hacer los niños con los computadores y la información? *Revistas de Estudios Sociales* N° 20 , 27 - 44.

MINEDUC (2008). *Fundamentación de ajuste a los marcos curriculares vigentes de educación básica y educación media*. Santiago; Chile.

MINEDUC (05 de 05 de 20012). MINEDUC. Recuperado el 21 de 08 de 2012, de Fundamentación de ajuste a los marcos curriculares vigentes de educación básica y educación media: <http://www.curriculummineduc.cl/docs/apoyo/fundamentos-del-ajuste-a-los-marcos-curriculares.pdf>

Ministerio de Educación. (2011). Sistema de Medición de Calidad de la Educación. Recuperado el 2011, de Informes de resultados para docentes y directivos: <http://www.simce.cl/index.php?id=241>

Ministerio de Educación. (2010) Resumen Ejecutivo, Chile y el aprendizaje de matemáticas y ciencias según TIMSS. Resultados de los estudiantes chilenos de 8° básico en el Estudio Internacional de Tendencias en Matemáticas y Ciencias 2003

Moreira, M. 2010¿Al final, qué es aprendizaje significativo? Nombre editorial: ciudad de publicación.

Moreira, M.A. (2000). Aprendizaje significativo: teoría y práctica. Madrid: Visor.

NCTM (2004). “Principios y estándares para la educación matemática”. España.

Silva, C (2012). “Didáctica y modelos de enseñanza y aprendizaje de las ciencias”. Universidad de Playa Ancha. Chile.

Silva, C (2012). “Visualización en la resolución de problemas matemáticos: Una propuesta constructivista, Revista Chilena de Educación Matemática. Volumen 6 N°1. Chile.

Vizcarro, C y León, J (1997) “Nuevas tecnologías para el aprendizaje”. Madrid: Ediciones Pirámide.

# Apéndice A

## Encuesta Inicial y Encuesta Final

### A.1 Encuesta Inicial

#### Actitudes y expectativas

Marque con una “X” la tendencia con la que más se identifica en cada una de las preguntas

**TA:** Totalmente de acuerdo. **DA:** De acuerdo. **I:** Indiferente. **D:** Desacuerdo. **TD:** Totalmente en desacuerdo.

	PREGUNTAS	TA	A	I	D	TD
1	Presento interés en la clase de matemáticas					
2	Tengo dificultades para entender las explicaciones del profesor					
3	Tengo dificultades para comprender los contenidos de la clase de matemáticas					
4	Me interesaría más en los contenidos de la clase si fuesen presentados de otra forma					
5	Preferiría que en las clases de matemáticas se usaran más herramientas computacionales					

## A.2 Encuesta final

### Actitudes y expectativas

Marque con una “X” la tendencia con la que más se identifica en cada una de las preguntas

**TA:** Totalmente de acuerdo. **DA:** De acuerdo. **I:** Indiferente. **D:** Desacuerdo. **TD:** Totalmente en desacuerdo.

	PREGUNTAS	TA	A	I	D	TD
1	<b>Tuve una mayor comprensión de los contenidos gracias a la metodología utilizada por los investigadores.</b>					
2	<b>Gracias a la metodología implementada tuve mayor participación en las clases realizadas.</b>					
3	<b>Presenté mayor interés en los contenidos estudiados gracias a la metodología implementada.</b>					
4	<b>Al incorporar software geométrico en el desarrollo de las clases tuve una mayor comprensión de los contenidos vistos.</b>					
5	<b>Al incorporar herramientas computacionales me interesó participar activamente de las clases.</b>					

# Apéndice B

## Pruebas de Contenidos

### B.1 Pre-test y Post-test

#### Evaluación Diagnóstica (Pre-test)

NOMBRE: \_\_\_\_\_

CURSO \_\_\_\_\_

FECHA \_\_\_\_\_

Puntaje Total:

Tiempo: 1 hora, 30 minutos.

Aprendizajes esperados:

Los alumnos y alumnas:

- ❖ Identifican transformaciones isometrías simples que conforman una composición.
- ❖ Reconocen la equivalencia entre la aplicación de una composición de transformaciones isométricas y la aplicación de solo una transformación isométrica.

I. Verdadero y Falso

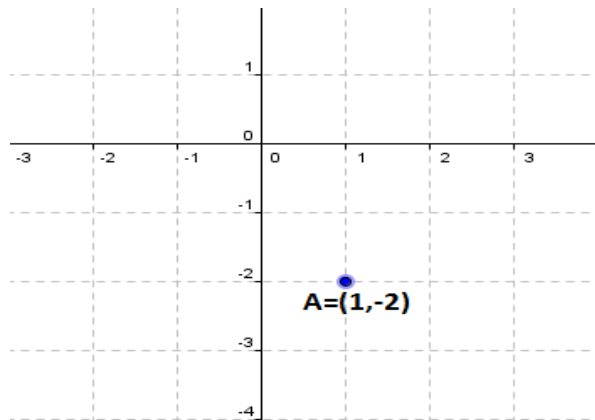
- a) La composición de dos traslaciones es una traslación.

- b) La composición de dos simetrías axial da como resultado una rotación.
- c) Al componer una rotación de centro O y ángulo  $90^\circ$  seguida de otra rotación con el mismo centro y ángulo  $180^\circ$  da como resultado una rotación de centro O y ángulo  $270^\circ$ .
- d) Al componer una simetría con un eje dado, seguida de una traslación da como resultado una nueva simetría con el mismo eje dado.
- e) Dado el punto  $(x,y)$  al aplicar una rotación con centro en el origen y ángulo  $90^\circ$  obtenemos como resultado el punto  $(-y,x)$ .

## II. Selección Múltiple

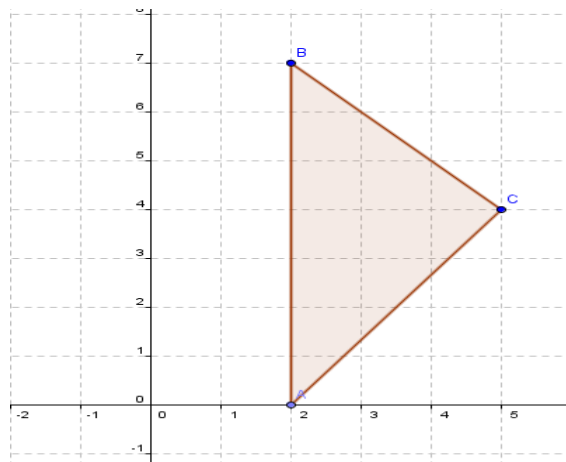
- 1- Si realizo una traslación al punto  $A(1, -2)$ , con un vector de traslación  $T(2, -1)$  en un plano cartesiano, el punto resultante después de otra traslación de vector  $T(1, -2)$  es:

- a)  $(-5, 4)$
- b)  $(4, -5)$
- c)  $(3, -3)$
- d)  $(-3, 3)$
- e)  $(3, 2)$

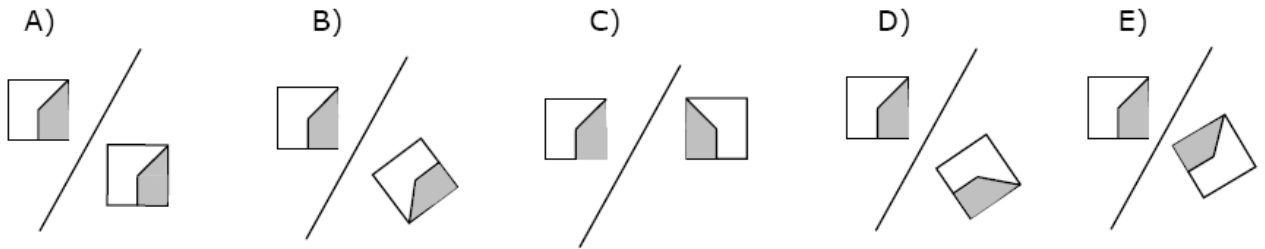


- 2- El triángulo que se obtiene al reflejar el triángulo ABC, ubicado en un plano cartesiano de vértices  $A(2,0)$ ,  $B(2,7)$  y  $C(5,4)$  con respecto al eje X seguida de una rotación de  $90^\circ$  con centro en el origen

- a.  $(0,0), (0,7), (2,4)$
- b.  $(0,-2), (7,-2), (4,-5)$
- c.  $(0,-2), (7,2), (4,5)$
- d.  $(2,0), (2,-7), (5,4)$
- e.  $(0,2), (7,2), (4,5)$



- 3- ¿En cuál de los siguientes casos se verifica una mejor simetría axial con respecto a  $L$  y a la figura obtenida una nueva simetría con respecto a  $L$ ?



- 4- Si al punto  $(3,-2)$  se le realiza una rotación positiva de  $90^\circ$ , en un plano cartesiano, con centro en el origen y luego una traslación con el vector  $T(4,1)$ , ¿dónde queda ubicado el punto?

- a)  $(4, 1)$
- b)  $(2, -3)$
- c)  $(6, 4)$
- d)  $(4, 6)$
- e)  $(7, -1)$

- 5- Si en un plano cartesiano el punto  $A=(3,2)$  se traslada a  $B=(2,4)$  y luego a  $C=(-2,-1)$ , ¿cuál es el vector traslación que se debe emplear para trasladar en un solo paso el punto  $A$  a la ubicación  $C$ ?

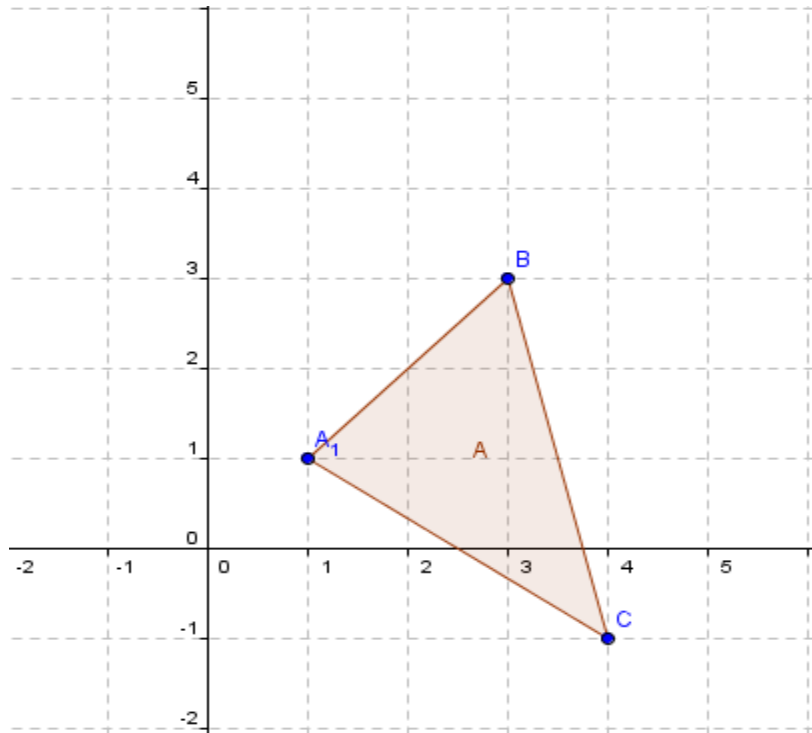
- a)  $T(-5, -3)$
- b)  $T(5, 3)$
- c)  $T(-5, 0)$
- d)  $T(0, -3)$
- e)  $T(-3,-5)$

- 6- ¿Cómo varían las coordenadas de un punto  $(X, Y)$  al efectuar en un plano cartesiano, una rotación positiva de  $270^\circ$  con centro en el origen seguida de una simetría con respecto al eje  $X$ ?

- a)  $(X, -Y)$
- b)  $(-X, Y)$
- c)  $(Y, -X)$
- d)  $(-Y, -X)$
- e)  $(Y, X)$

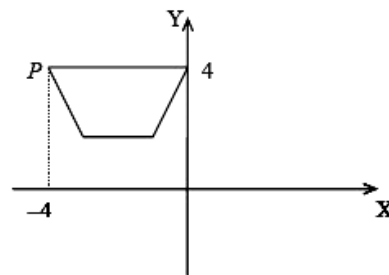
7- En la figura, se muestra el triángulo ABC se le aplica una composición de traslaciones de vectores  $T(3,2)$  y  $T(-1,-1)$  ¿Cuáles las coordenadas obtenidas del vértice A?

- a) (-2,-3)
- b) (2,3)
- c) (4,3)
- d) (3,4)
- e) (3,2)



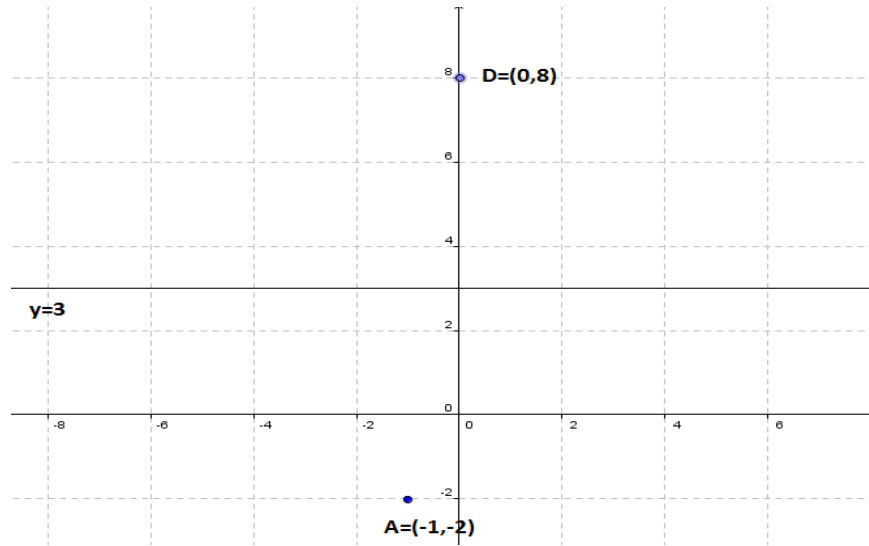
8- En la figura, la imagen del punto P respecto del eje de simetría Y es P'. Luego la imagen del punto P' respecto al eje de simetría X, es el punto de coordenadas:

- a) (-4,4)
- b) (-4,-4)
- c) (4,4)
- d) (0,4)
- e) (4,-4)



9- En la figura, ¿Cuál es el punto simétrico del punto A (-1, -2) con respecto a la recta  $y=3$  Y luego con respecto del punto D (0,8) ?

- a) (-1,8)
- b) (1, 8)
- c) (-1, 6)
- d) (7, -2)
- e) (-1, -4)



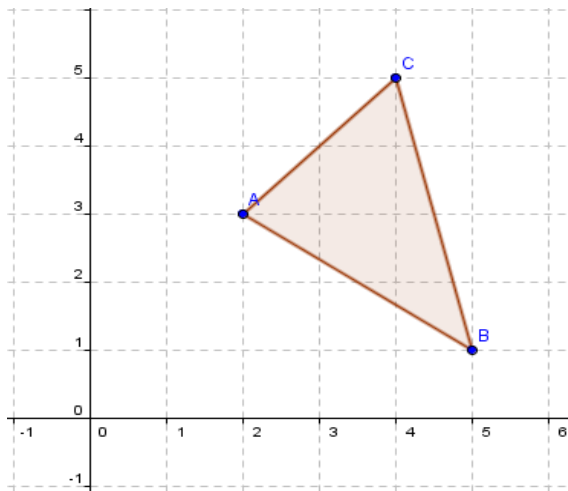
10- Si el trazo AB ubicado en un plano cartesiano, de extremos A(2,5) y B(-2,0) se gira positivamente con centro en el origen  $180^\circ$ , luego se gira  $90^\circ$  más y finalmente se gira otros  $90^\circ$ , los extremos del trazo resultante son:

- a) (5,2) y (0,-2)
- b) (-5,-2) y (0, 2)
- c) (-2,-5) y (2,0)
- d) (2,-5) y (-2,0)
- e) (2,5) y (-2,0)

11- Si las coordenadas de un punto inicial  $(x, y)$  varían a  $(-y, x)$  cuando se aplica una rotación (positiva) de  $90^\circ$ , en un plano cartesiano, con centro en el origen. ¿Cuáles serían las coordenadas del triángulo ABC luego de aplicar una rotación de  $90^\circ$  (con centro en el origen) y posteriormente una traslación  $T(-2, 3)$ ?

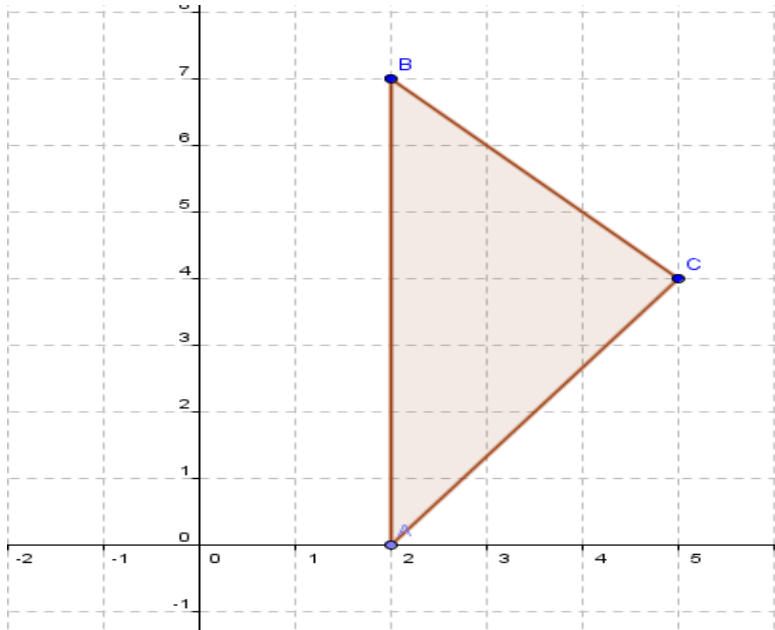
Nota: Los vértices del triángulo son: A (2, 3), B (5, 1) y C (4, 5).

- a) A(-3, 2), B(-1, 5) y C(-5, 4)
- b) A(0, 6), B(3, 4) y C(2, 7)
- c) A(-5, 5), B(-3, 8) y C(-7, 7)
- d) A(-5, 5), B(3, 4) y C(2, 7)
- e) Ninguna de ellas.



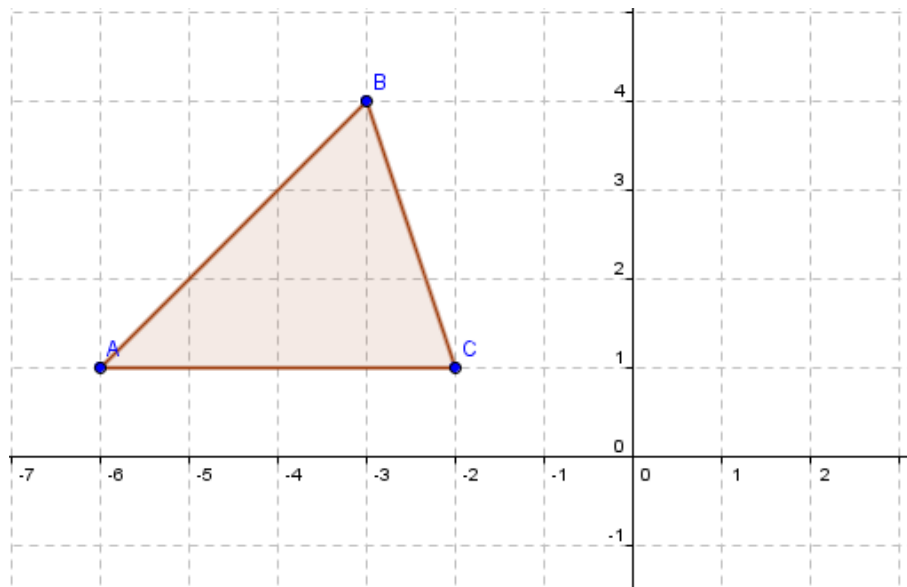
12-El triángulo que se obtiene al reflejar el triángulo  $ABC$ , ubicado en un plano cartesiano de vértices  $A(2,0)$ ,  $B(2,7)$  y  $C(5,4)$  con respecto al eje  $Y$  (considerando el eje  $Y$  como eje de simetría) y luego una traslación  $T(1,-1)$  tiene vértices:

- a)  $(1,-1), (1,6), (3,3)$
- b)  $(-1,-1), (-1,6), (-4,3)$
- c)  $(-1,-1), (3,6), (6,3)$
- d)  $(3,-1), (0,3), (3,6)$
- e)  $(3,-1), (6,3), (8,-1)$



13- Si se aplica una traslación a los puntos que forman el triángulo  $ABC$  de vértices  $A(-6, 1)$ ,  $B(-3, 4)$  y  $C(-2, 1)$ , de tal forma que dichos puntos se muevan dos unidades horizontalmente a la derecha y cinco unidades verticalmente hacia arriba, entonces las coordenadas del vértice A trasladado del triángulo  $ABC$  toma el valor:

- a)  $(0,6)$
- b)  $(-1,9)$
- c)  $(-4,6)$
- d)  $(-4,-4)$
- e)  $(-4,-1)$



14-¿Cómo varían las coordenadas de un punto  $(X, Y)$  al efectuar en un plano cartesiano, una rotación positiva de  $270^\circ$  con centro en el origen y luego de la obtenida una rotación con centro en el origen y ángulo de  $90^\circ$ ?

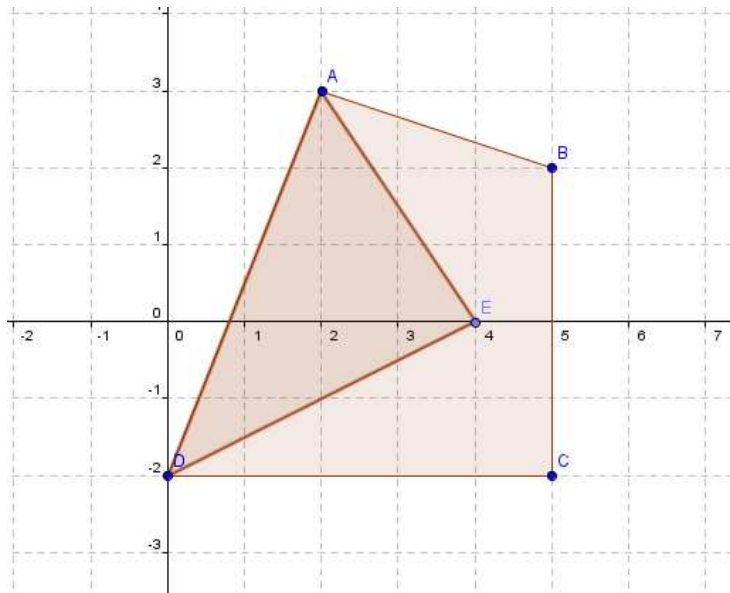
- a)  $(X, Y)$
- b)  $(-X, Y)$
- c)  $(Y, -X)$
- d)  $(-Y, -X)$
- e)  $(-Y, X)$

# Apéndice C

## Guía de Avance

### C.1 Guía de trabajo

1. En la figura, la imagen del punto E respecto del eje de simetría X es E'. Luego la imagen del punto E' respecto al eje de simetría Y, es el punto de coordenadas:

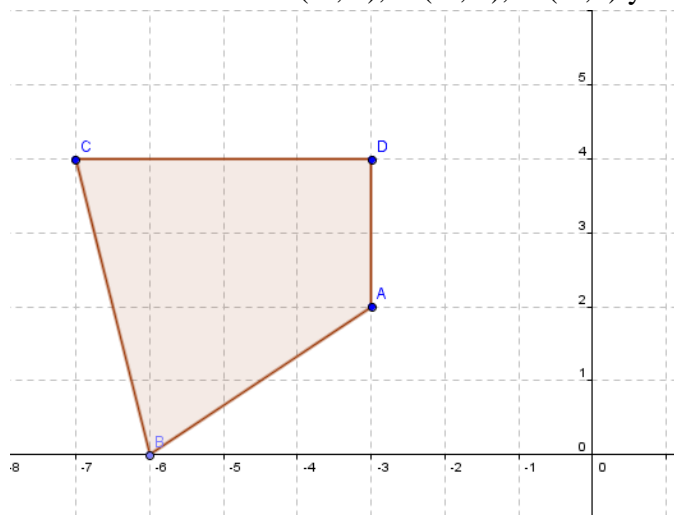


2. En la figura, ¿Cuál es el punto simétrico del punto A( 2,3) con respecto al eje X luego con respecto del punto B (1,5) ?

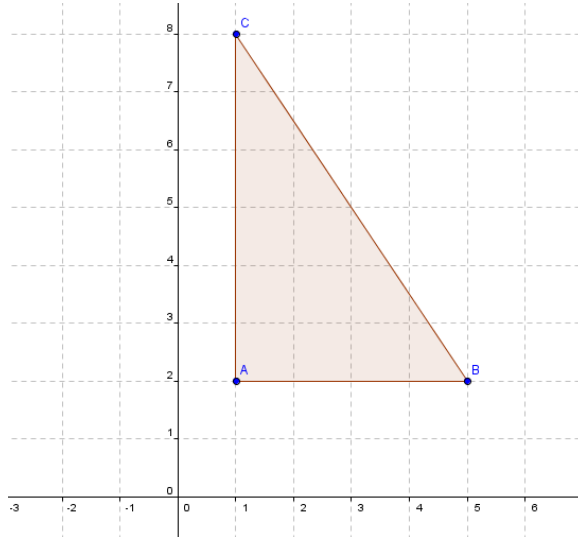


3. Si el trazo AB ubicado en un plano cartesiano, de extremos A(2,5) y B(-2,0) se gira positivamente con centro en el origen  $360^\circ$ , luego se gira  $90^\circ$  más y finalmente se gira otros  $90^\circ$ , los extremos del trazo resultante son:
4. Si las coordenadas de un punto inicial  $(x, y)$  varían a  $(-y, x)$  cuando se aplica una rotación (positiva) de  $90^\circ$ , en un plano cartesiano, con centro en el origen. ¿Cuáles serían las coordenadas del cuadrilátero ABCD luego de aplicar una rotación de  $90^\circ$  (con centro en el origen) y posteriormente una traslación  $T(-3,0)$ ?

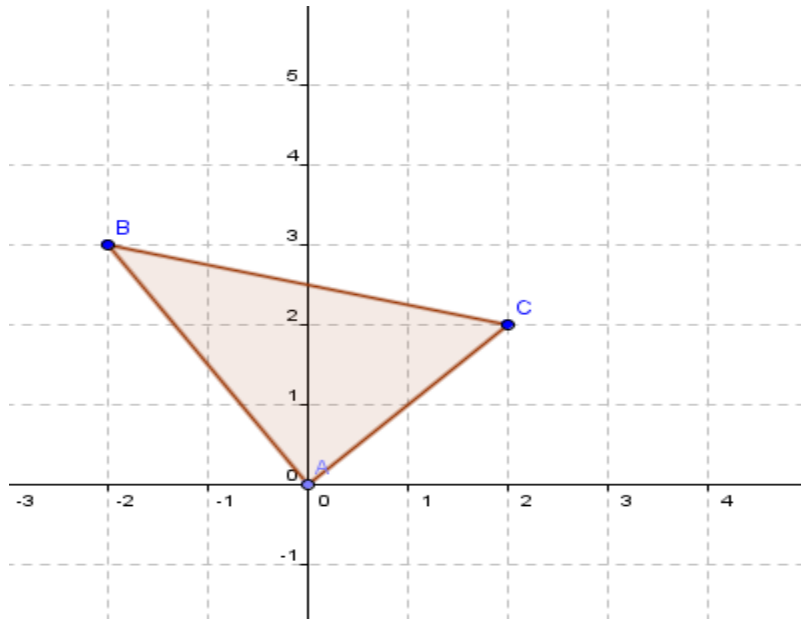
Nota: Los vértices del cuadrilátero son: A (-3, 2), B (-6, 0), C (-7,4) y D(-3,4).



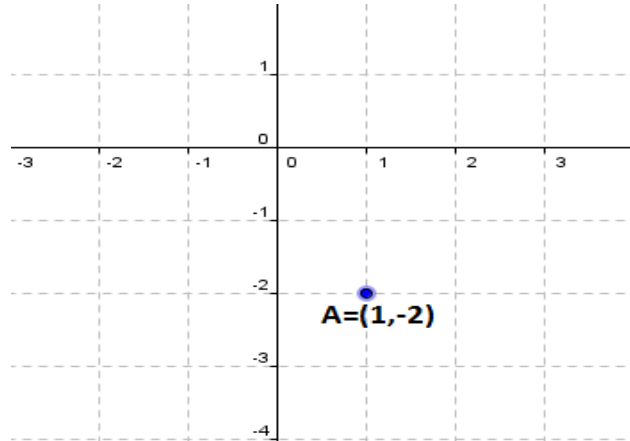
5. El triángulo que se obtiene al reflejar el triángulo  $ABC$ , ubicado en un plano cartesiano de vértices  $A(1,2)$ ,  $B(5,2)$  y  $C(1,8)$  con respecto al eje  $Y$  (considerando el eje  $Y$  como eje de simetría) y luego una traslación  $T(2,-1)$  tiene vértices:



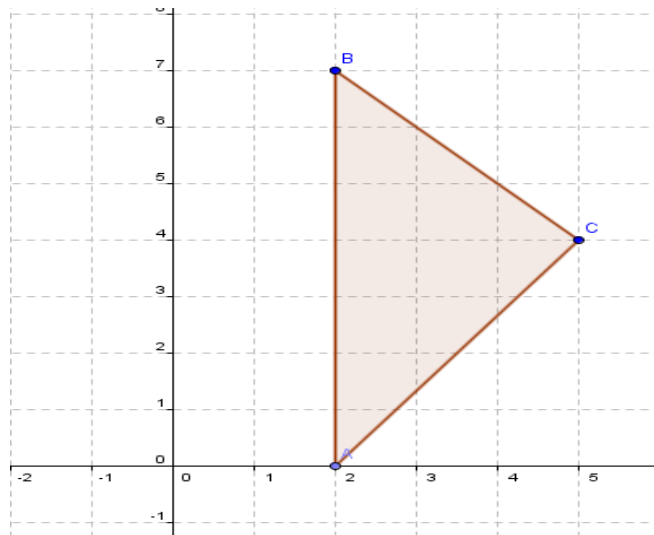
6. Si se aplica una traslación a los puntos que forman el triángulo  $ABC$  de vértices  $A(0,0)$ ,  $B(-2, 3)$  y  $C(2,2)$ , de tal forma que dichos puntos se muevan 4 unidades horizontalmente a la derecha y 3 unidades verticalmente hacia abajo, entonces las coordenadas del vértice  $A$  trasladado del triángulo  $ABC$  toma el valor:



7. ¿Cómo varían las coordenadas de un punto  $(7, 3)$  al efectuar en un plano cartesiano, una rotación positiva de  $270^\circ$  con centro en el origen y luego de la obtenida una rotación con centro en el origen y ángulo de  $90^\circ$ ?
8. Si realizo una traslación al punto  $A(1, -2)$ , con un vector de traslación  $T(3, -2)$  en un plano cartesiano, el punto resultante después de otra traslación de vector  $T(2, -3)$  es:



9. El triángulo que se obtiene al reflejar el triángulo ABC, ubicado en un plano cartesiano de vértices  $A(2,0)$ ,  $B(2,7)$  y  $C(5,4)$  con respecto al eje X seguida de una rotación de  $90^\circ$  con centro en el origen



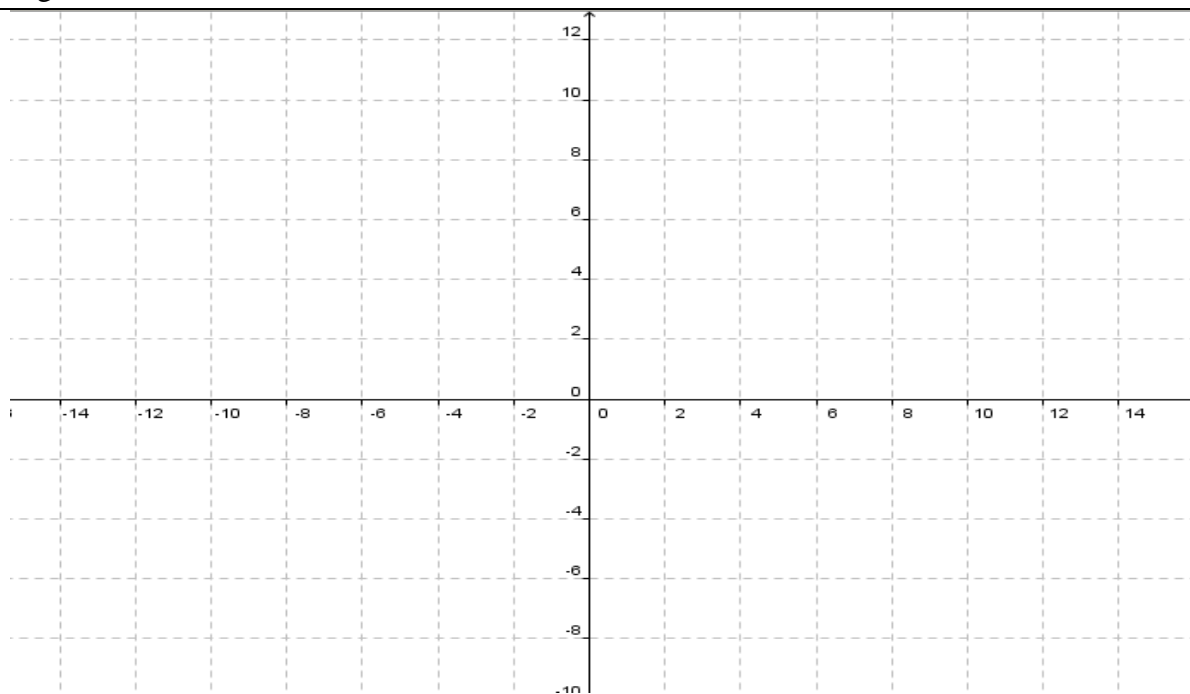
## C.2 Actividades

### Actividad 1

**Objetivo:** los alumnos aplican rotaciones y traslaciones a figuras geométricas (con el uso de instrumentos geométricos) expresando como compuesta de funciones los movimientos realizados a las figuras, los alumnos por medio de la experimentación lleguen a ciertas conjeturas sobre la compuesta de rotaciones.

1.- En el siguiente plano escoge un origen D y un punto, por ejemplo C (4,1).

Efectúa la rotación con centro en D, en un ángulo de  $30^\circ$  en sentido anti-horario y luego con el mismo centro y el punto obtenido anteriormente realiza una rotación con un ángulo de  $45^\circ$  también en sentido anti-horario. Observa cual es el efecto de la composición de estas dos rotaciones. Compara con el resultado de efectuar primero la rotación en  $45^\circ$  y en seguida la rotación en  $30^\circ$ , ambas en sentido anti-horario.



Escoge como centro el punto  $O(3,4)$  y repite la actividad con los puntos R y S que tu elijas.

¿Qué puedes percibir? ¿Podríamos deducir algo del ejercicio anterior?

-----  
-----  
-----

¿Es posible realizar una sola rotación para obtener el mismo resultado que de la compuesta de rotaciones anterior?

-----  
-----  
-----

2.- La siguiente imagen es un rompecabezas al cual le faltan dos piezas para completarlo, hay que realizarle ciertas transformaciones a las piezas para que lleguen a encajar en el rompecabezas.



Observa las siguientes piezas, ¿Qué transformaciones debes realizar para que estas piezas encajen en el rompecabezas? (considera que deben ser la menor cantidad de movimientos posibles)



Expresa como compuesta de funciones los movimientos que realizaste para que encajen las figuras en el rompecabezas:

Pieza 1:

Pieza 2:

Ahora bien, ¿Podrías realizar otra(s) transformación(es) para que las piezas encajen en el rompecabezas? (justifica)

---

---

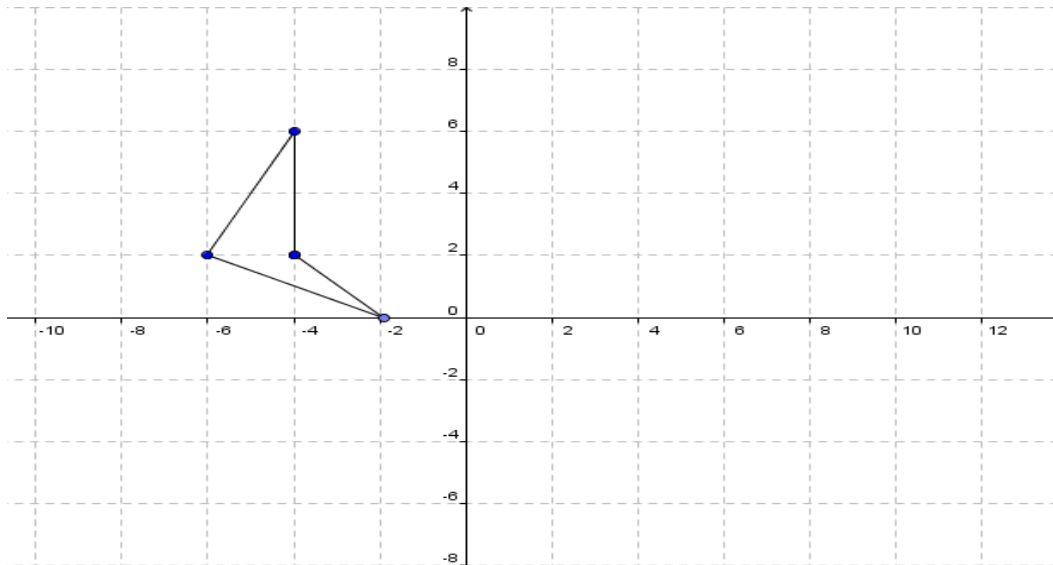
---

## Actividad 2

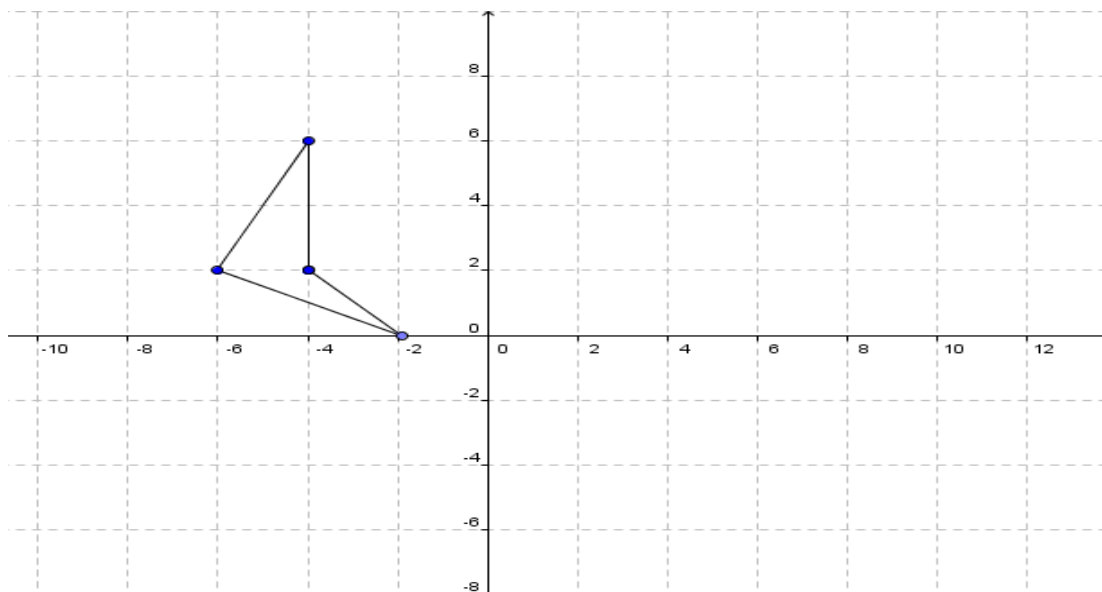
**Objetivo:** Los alumnos componen traslaciones de figuras planas y llegan a ciertas conjeturas sobre la composición de estas, identifican el vector que desplaza a los puntos de la figura.

1.- Trasladar la figura con respecto al vector  $(0,2)$  y luego trasladar esta con respecto al vector

$(-1,-3)$ . Realizando el dibujo respectivo en el plano



Ahora bien traslada la misma figura, respecto al vector  $(-1,-3)$  y luego respecto al vector  $(0,2)$ . Realizando el dibujo respectivo en el plano.

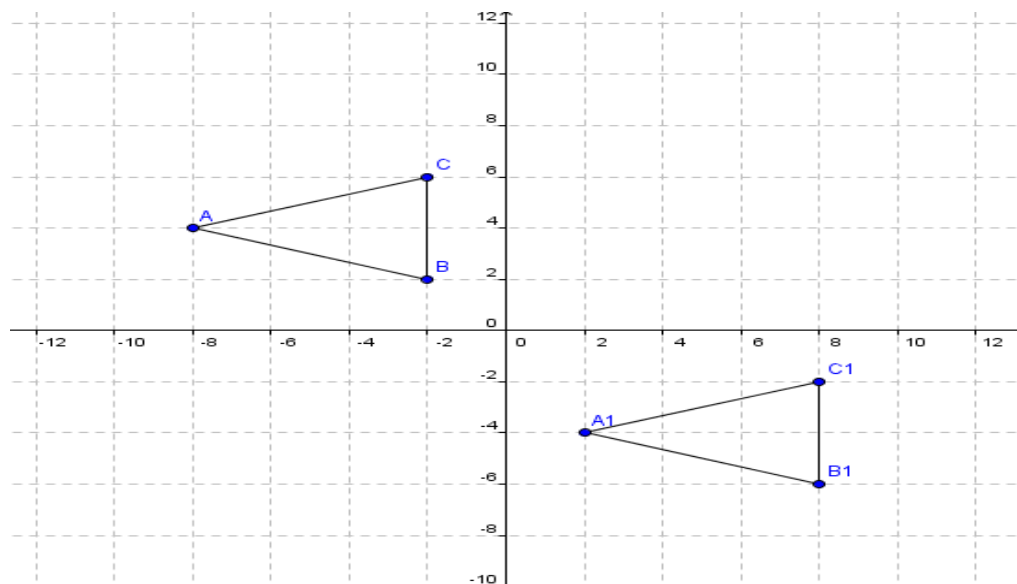


¿Podrías deducir algo del ejercicio anterior?

-----  
-----

-----

2.- Al siguiente triangulo ABC se le realizaron dos traslaciones, resultando el triangulo A1B1C1.



Expresa como compuesta de traslaciones cuales pudieron ser los dos posibles movimientos que se realizaron para obtener el triangulo A1B1C1.

-----  
-----  
-----

¿Se puede con una sola transformación llegar del triangulo ABC al triangulo A1B1C1? (justifica tu respuesta)

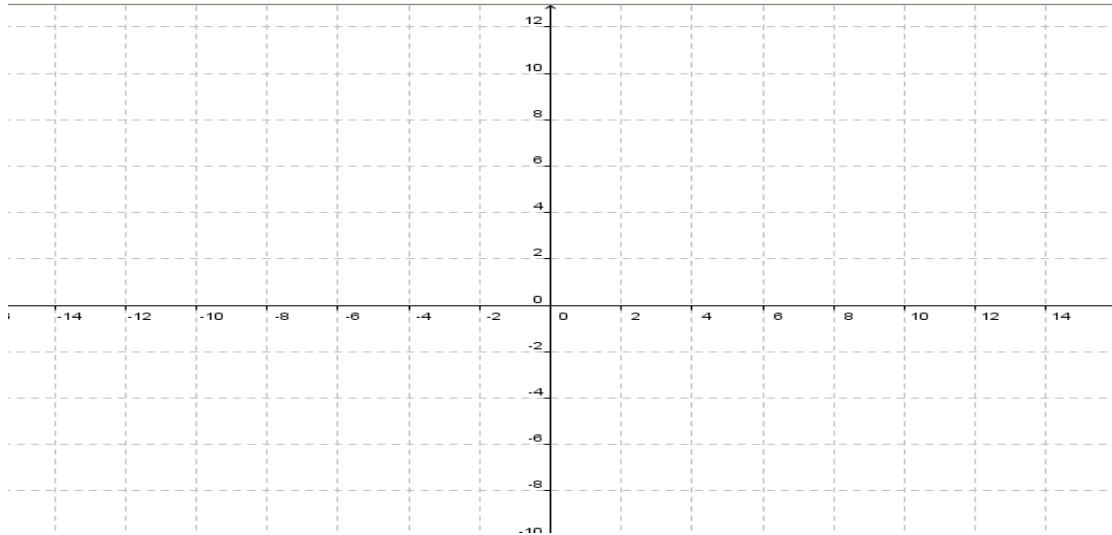
-----  
-----  
-----

¿Podrías generalizar esta situación? ¿Llegar a alguna conjetura?

-----  
-----  
-----

3.- Dibuja un triangulo con los vértices A (0,0), B (6,0) y C (4,4) después de una traslación

el vértice A se trasforma en  $A'(4,8)$  ¿Cuáles son las coordenadas de los otros vértices?  
Después de otra traslación el vértice  $A'$  se transforma en  $A''(-2,6)$  ¿Cuáles son las coordenadas de los otros vértices? ¿Cuál es la traslaciones que lleva A en  $A''$ ?



**En Conclusión:**

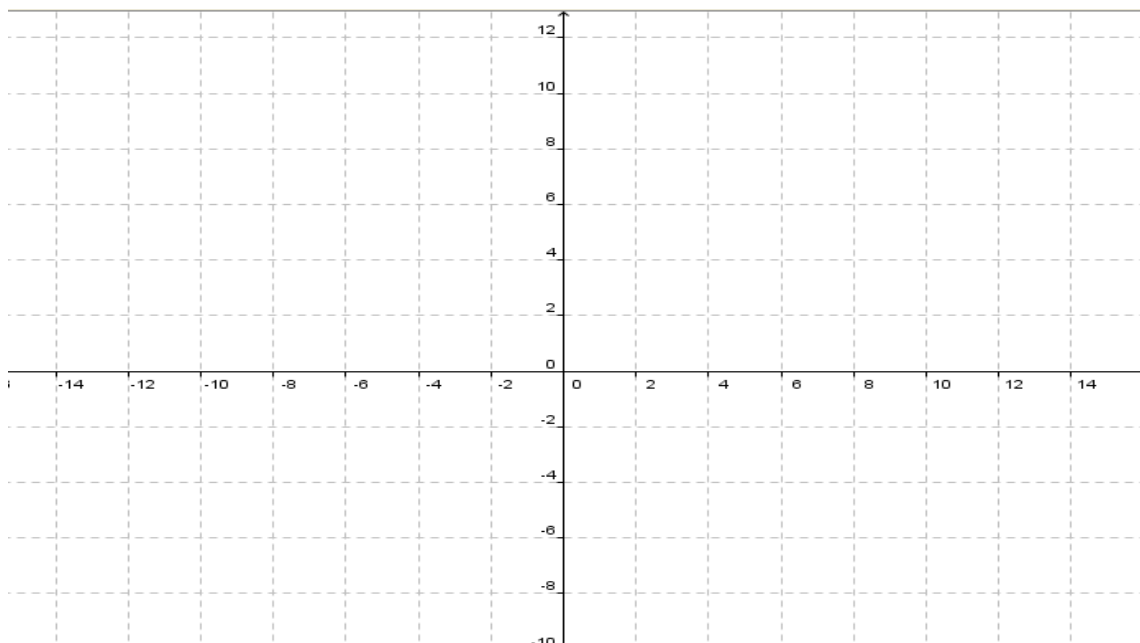
Generalmente si al punto  $(x,y)$  se le aplica una traslación  $T(a,b)$ , resulta  $(x+a, y+b)$ , si ahora le aplicamos al resultado la traslación  $T(c,d)$  resulta  $(x+a+c, y+b+d)$  que es lo mismo que aplicar al punto  $(x,y)$  la traslación  $T(a+c, b+d)$ .

Si aplicamos dos traslaciones una después de la otra el orden no importa y lo mas es lo mismo que aplicar una sola traslación.

### Actividad 3

**Objetivo:** Los alumnos componen reflexiones de figuras planas y llegan a ciertas conjeturas sobre la composición de estas.

Dibuja una figura en la siguiente cuadrícula, por ejemplo un triángulo.

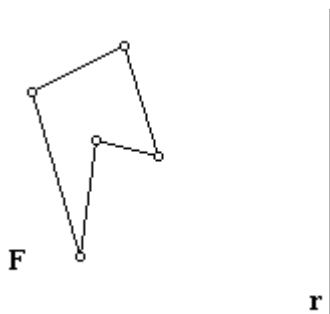


Ahora traza una recta cualquiera  $r$  que consideraras como eje de simetría. Grafica la figura reflejada. Piensa que haría o como transformaría a tu triángulo (el que obtuviste luego de reflejarlo) una reflexión cuyo eje de simetría también es  $r$ . ¿Qué puedes observar?

-----  
-----  
-----  
---

Después de llevar a cabo la actividad anterior puedes concluir que si para dos reflexiones sus dos ejes coinciden, esto significa en realidad que las dos reflexiones son la misma, al componer entonces se obtiene la identidad (ningún punto se mueve).

2. - Realiza una reflexión de eje de simetría  $r$  a la figura  $F$  mostrada a continuación. Luego realiza a  $F'$  (obtenida anteriormente) una reflexión de eje de simetría paralelo a  $r$ .

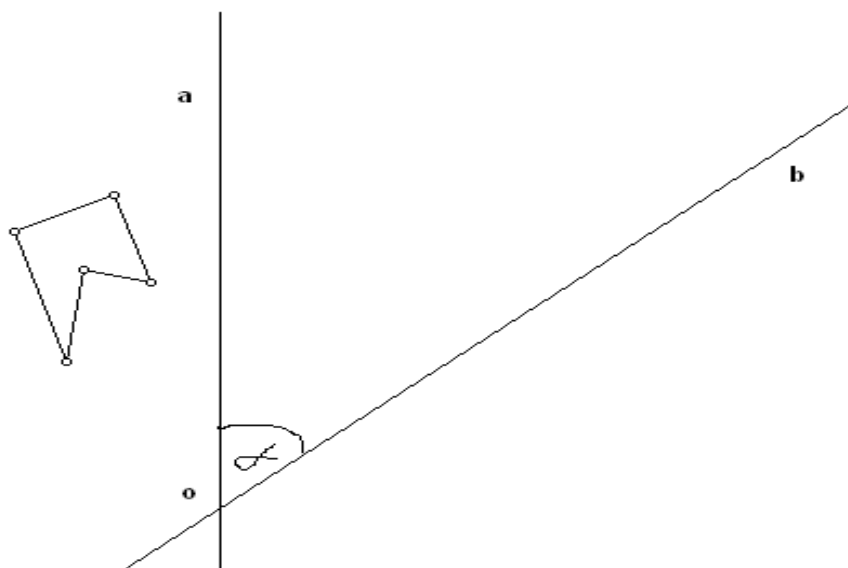


¿Podemos llegar de la figura  $F$  a la  $F''$  con una sola transformación? ¿Qué podemos deducir del resultado de componer dos reflexiones cuyos ejes de simetría son paralelos?

-----  
 -----  
 -----  
 ---

La siguiente imagen muestra dos rectas  $a$  y  $b$  las cuales se interceptan en un punto  $o$  formando un ángulo  $\alpha$  y una figura  $T$ . Realiza una reflexión de eje de simetría  $a$  obteniendo  $T'$ . Luego realiza una reflexión a  $T'$  con eje de simetría  $b$  (llamemos a esta  $T''$ )

(Realiza los dibujos pertinentes)



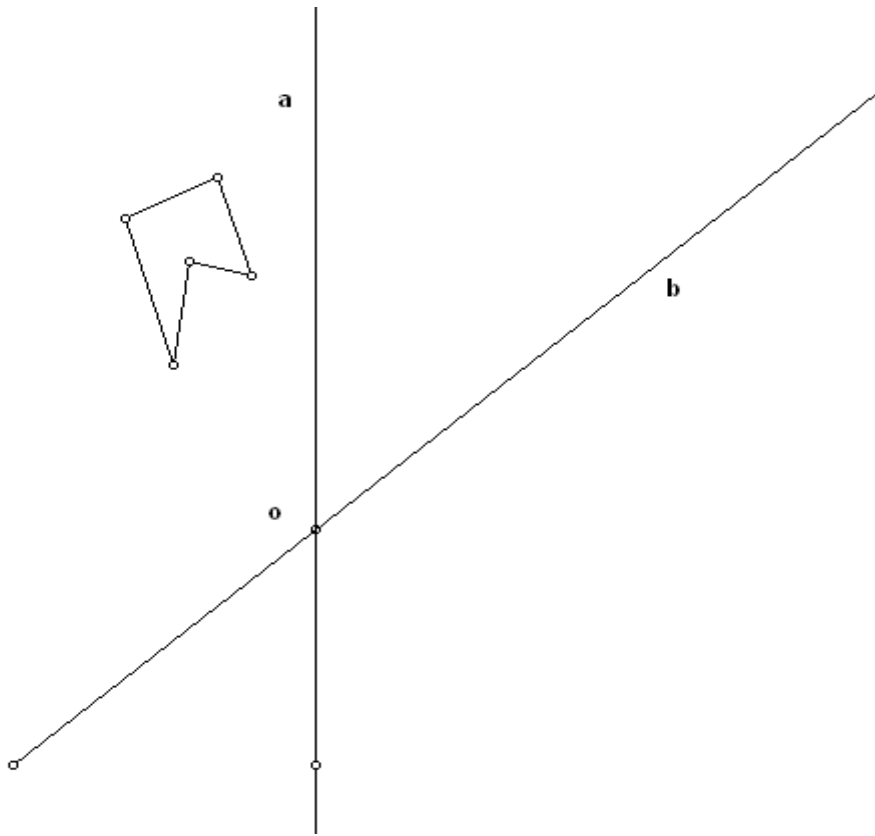
¿Se puede llegar de la figura T a la figura T'' con una sola transformación? Justifica

---

---

---

---  
¿Qué sucede si ahora realizas la reflexión con eje de simetría **b** y luego a la imagen resultante le aplicas una reflexión de eje de simetría **a**?



¿Qué podrías deducir de lo anterior?

---

---

---

---

# Apéndice D

## Actividades

### D.1 Planificaciones de las clases

#### D.1.1 Clase n°1. “Composición de traslaciones.”.

**Objetivos:**

- 1) Identificar la forma de la gráfica de una composición de traslaciones.
- 2) Identificar la orientación de los vectores presentes en la grafica de cada traslación.

**Organización:** Responde en grupos de 2 o 3 personas las siguientes actividades.

**Tiempo:** 60 min 140

<i>Primera Clase</i>	<i>Sin Software</i>
<b><u>Composición De Transformaciones Isométricas</u></b>	
<p>Dentro de las Transformaciones Isométricas has estudiado, Reflexiones, Traslaciones y Rotaciones de manera separada, sin embargo, estas funciones pueden suceder de manera dependiente una de otra.</p> <p>Reflexiones: <math>R_x, R_y, R_0</math>.</p> <p>Traslaciones: <math>T_{\vec{v}}</math></p> <p>Rotaciones : <math>R_{(a,\alpha)}</math></p> <p><b><u>Formalización del Concepto:</u></b></p> <div style="border: 1px solid black; padding: 10px; margin: 10px auto; width: 80%;"><p>La <b>Composición de Transformaciones Isométricas</b> es la aplicación sucesiva de transformaciones isométricas sobre un punto o una figura, es decir, al resultado de la primera transformación se le aplica una segunda y así sucesivamente.</p><p>La Composición Isométrica no altera ni la forma ni el tamaño de la figura en cuestión, sólo cambia de posición (la orientación o sentido de la figura), resultando que la figura inicial y la final sean semejantes, y geoméricamente congruentes.</p></div>	

## Composición de Traslaciones:

### Definición:

La composición de dos (o más) traslaciones de vectores  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$ , sobre una figura1 (**F1**), consiste en obtener la figura3 (**F3**), al aplicar la traslación respecto al vector  $\vec{v}$  a la figura1 (**F1**) obtenemos figura2 (**F2**), luego a la figura2 (**F2**) aplicamos la traslación con respecto al vector  $\vec{w}$ , donde obtendremos la figura3 (**F3**).

$$\text{Notación: } T_w \circ T_v (\mathbf{F1}) = T_w (T_v (\mathbf{F1})) = T_w (\mathbf{F2}) = \mathbf{F3}$$

**Observación:**  $T_v \circ T_w (\mathbf{F1}) = T_v (T_w (\mathbf{F1})) = T_v (\mathbf{F4}) = \mathbf{F3}$

$$\begin{aligned} \text{O sea} \quad T_w \circ T_v (\mathbf{F1}) &= T_v \circ T_w (\mathbf{F1}) \\ T_w (T_v (\mathbf{F1})) &= T_v (T_w (\mathbf{F1})) \\ T_w (\mathbf{F2}) &= T_v (\mathbf{F4}) \\ \mathbf{F3} &= \mathbf{F3} \end{aligned}$$

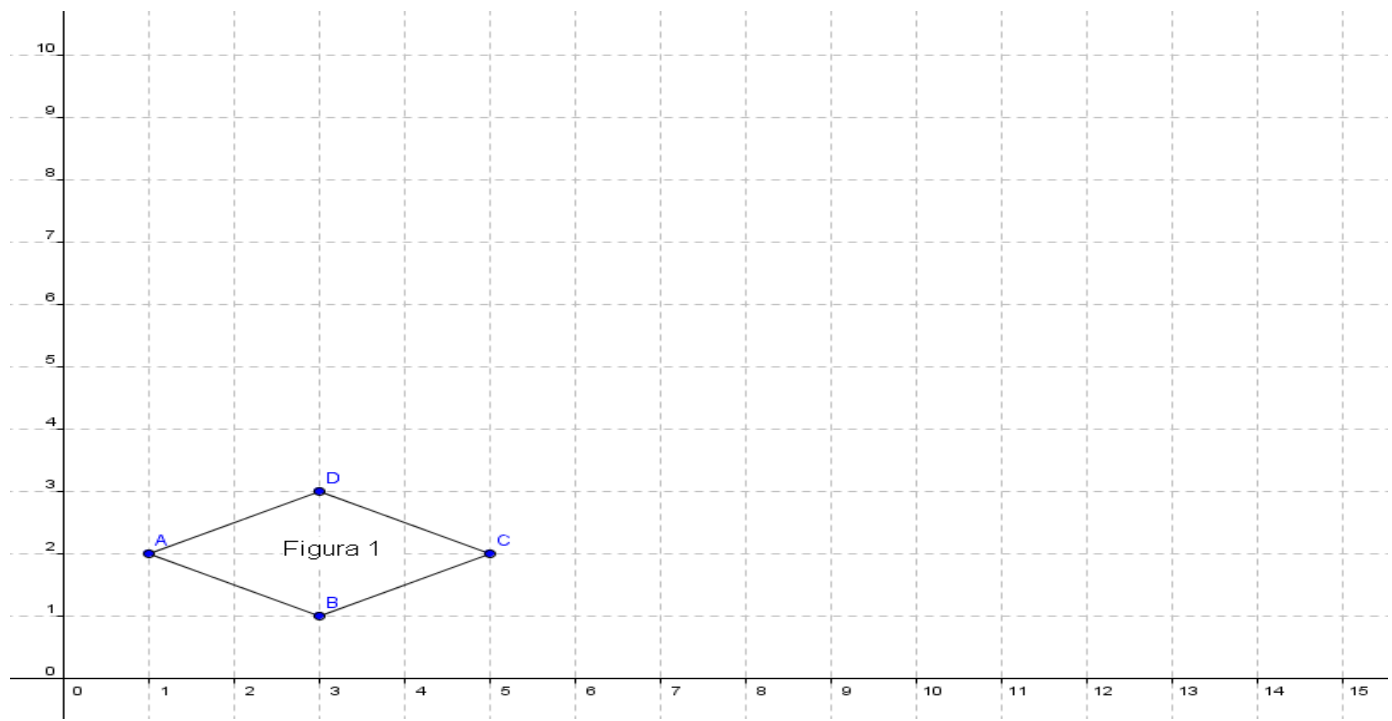
(**F2 = F4, solo se diferencian en posición. No significa que sean una figura distinta** )

Es decir, si aplicamos dos traslaciones, una después de la otra, el orden NO IMPORTA, pues la composición de traslaciones conmuta.

También debemos observar, que la composición de dos traslaciones de vectores  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$  aplicadas a una figura dada resulta lo mismo que aplicar una sola traslación, cuyo vector es la suma de los vectores.  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$

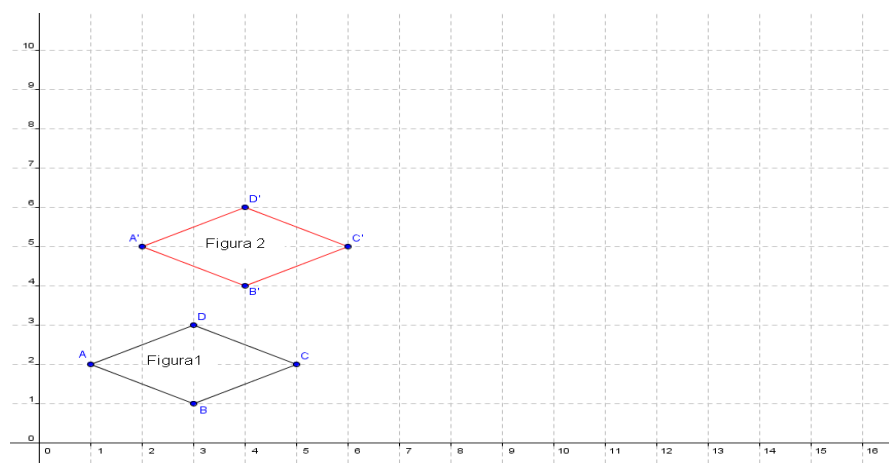
$$\begin{aligned} \text{Se tiene} \quad & \vec{v} + \vec{w} \\ & \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \vec{v} \\ & \mathbf{A}'' = \mathbf{A} + \vec{v} + \vec{w} \end{aligned}$$

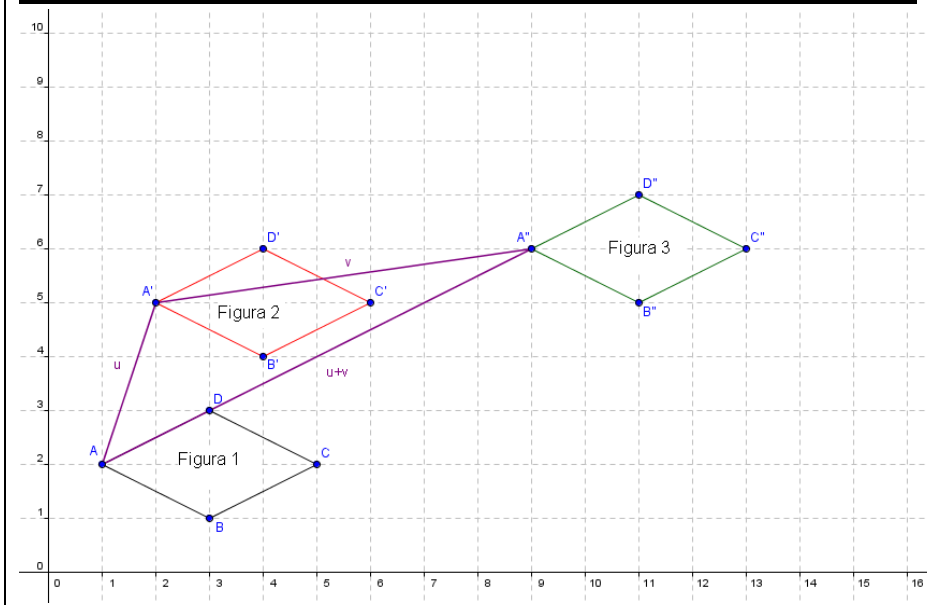
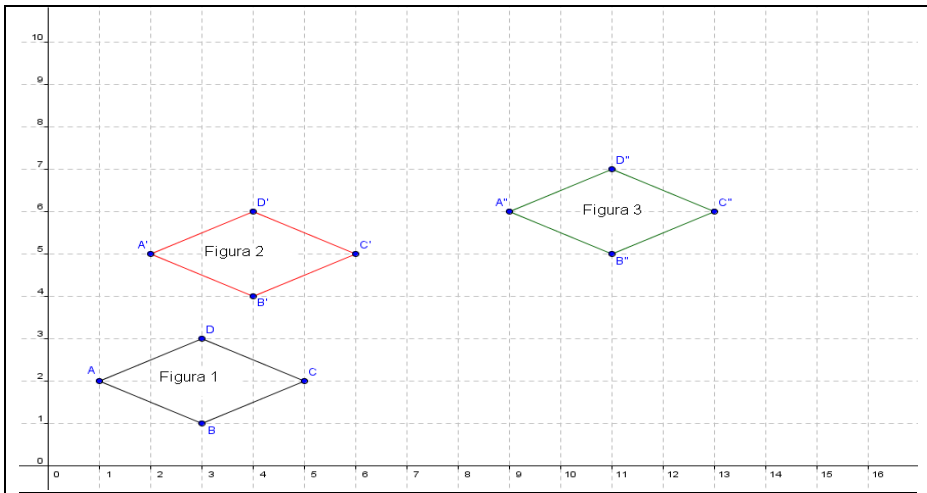
### Ejercicio:



- 1) Dada la siguiente figura, traslada con respecto al vector  $u(1, 3)$ , de la figura obtenida realiza una segunda traslación con respecto al vector  $v(7, 2)$  ¿Qué obtienes? Luego realiza la traslación aplicando primero el vector  $w$  seguido de  $v$ . Compara las situaciones.
- 2) De la figura brindada, traslada con respecto al vector  $u+v$ . Compara con la situación anterior, ¿Qué concluyes?

### (Presentación PPT)





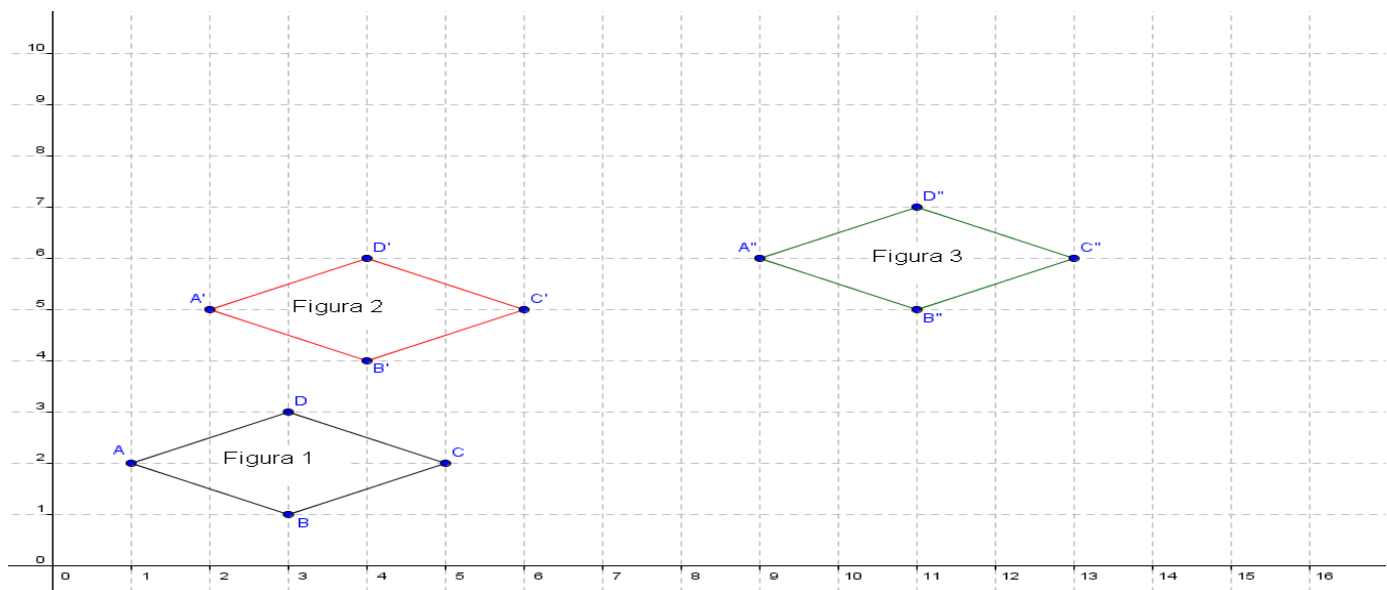
Composición De Transformaciones Isométricas

Dentro de las Transformaciones Isométricas has estudiado, Reflexiones, Traslaciones y Rotaciones de manera separada, sin embargo, estas funciones pueden suceder de manera dependiente una de otra.

Reflexiones:  $R_x, R_y, R_0$ .

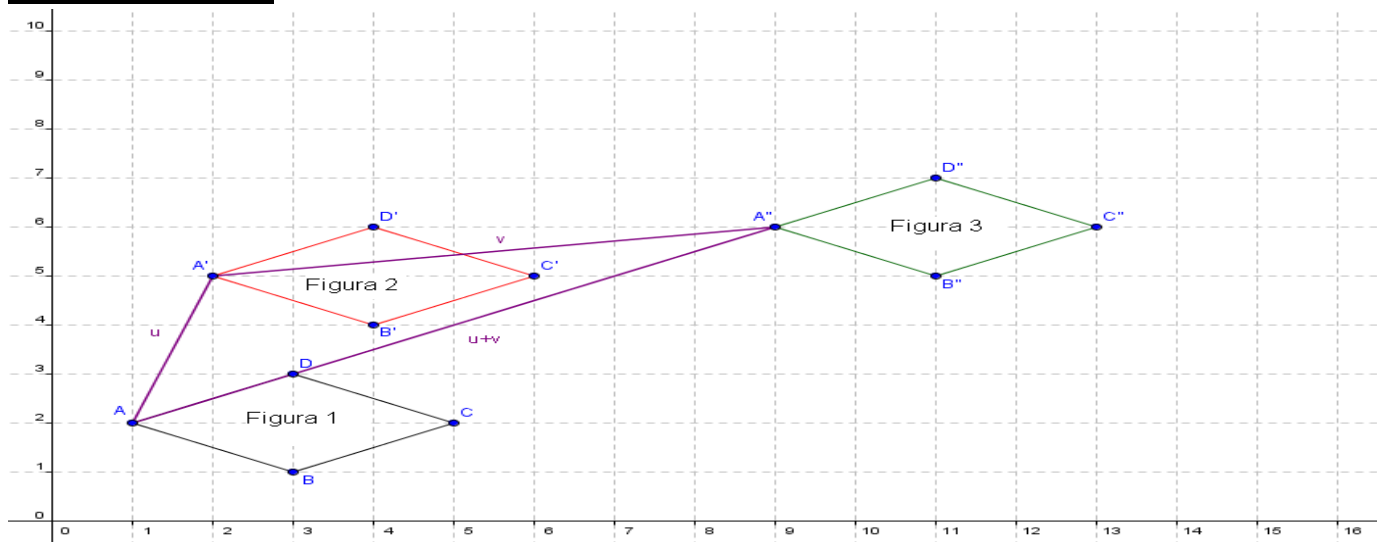
Traslaciones:  $T_{\vec{v}}$

Rotaciones :  $R_{(a,\alpha)}$

Ejercicio Motivador:**Preguntas:**

- 5) ¿Qué Transformación Isométrica se han realizado de la Figura 1 a la Figura 2, y de la Figura 2 a la Figura 3?
- 6) ¿Qué vector está involucrado en las traslaciones?
  - c) Figura 1 a Figura 2
  - d) Figura 2 a Figura 3
- 7) ¿Qué coordenadas deberá tener el vector de traslación que hace posible trasladar la Figura 1 a la posición de la Figura 3? Comenta.
- 8) ¿Qué relación existe entre éste vector y los otros antes mencionados?

## (Presentación PPT)



## Formalización del Concepto:

La **Composición de Transformaciones Isométricas** es la aplicación sucesiva de transformaciones isométricas sobre un punto o una figura, es decir, al resultado de la primera transformación se le aplica una segunda y así sucesivamente.

La Composición Isométrica no altera ni la forma ni el tamaño de la figura en cuestión, sólo cambia de posición (la orientación o sentido de la figura), resultando que la figura inicial y la final sean semejantes, y geoméricamente congruentes.

## Composición de Traslaciones:

### Definición:

La composición de dos (o más) traslaciones de vectores  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$ , sobre una figura1 (**F1**), consiste en obtener la figura3 (**F3**), al aplicar la traslación respecto al vector  $\vec{v}$  a la figura1 (**F1**) obtenemos figura2 (**F2**), luego a la figura2 (**F2**) aplicamos la traslación con respecto al vector  $\vec{w}$ , donde obtendremos la figura3 (**F3**).

$$\text{Notación: } T_w \circ T_v (F1) = T_w (T_v (F1)) = T_w (F2) = F3$$

**Observación:**  $T_v \circ T_w (F1) = T_v (T_w (F1)) = T_v (F4) = F3$

O sea  $T_w \circ T_v (F1) = T_v \circ T_w (F1)$

$T_w (T_v (F1)) = T_v (T_w (F1))$

$T_w (F2) = T_v (F4)$

$F3 = F3$

**(F2 = F4, solo se diferencian en posición. No significa que sean una figura distinta )**

Es decir, si aplicamos dos traslaciones, una después de la otra, el orden NO IMPORTA, pues la composición de traslaciones conmuta.

También debemos observar, que la composición de dos traslaciones de vectores  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$  aplicadas a una figura dada resulta lo mismo que aplicar una sola traslación, cuyo vector es la suma de los vectores.  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$

Se tiene

$$\begin{aligned} & \vec{v} + \vec{w} \\ A' &= \vec{A} + \vec{v} \\ A'' &= \vec{A} + \vec{v} + \vec{w} \end{aligned}$$

## D.1.2 Clase n°2. “Composición de reflexiones”.

### Objetivos:

- 1) Identificar la forma de la gráfica de una composición de reflexiones.
- 2) Identificar los ejes y puntos de simetría presentes en la grafica de cada reflexión.

**Organización:** Responde en grupos de 2 o 3 personas las siguientes actividades.

**Tiempo:** 60 min 140

*Segunda Clase*

*Sin Software*

### Composición De Transformaciones Isométricas

#### Composición de Reflexiones:

##### Definición:

La composición de dos (o más) reflexiones sobre una figura1 (**F1**), consiste en obtener la figura3 (**F3**), al aplicar la reflexión a la figura1 (**F1**) obtenemos figura2 (**F2**), luego a la figura2 (**F2**) aplicamos una segunda reflexión, donde obtendremos la figura3 (**F3**).

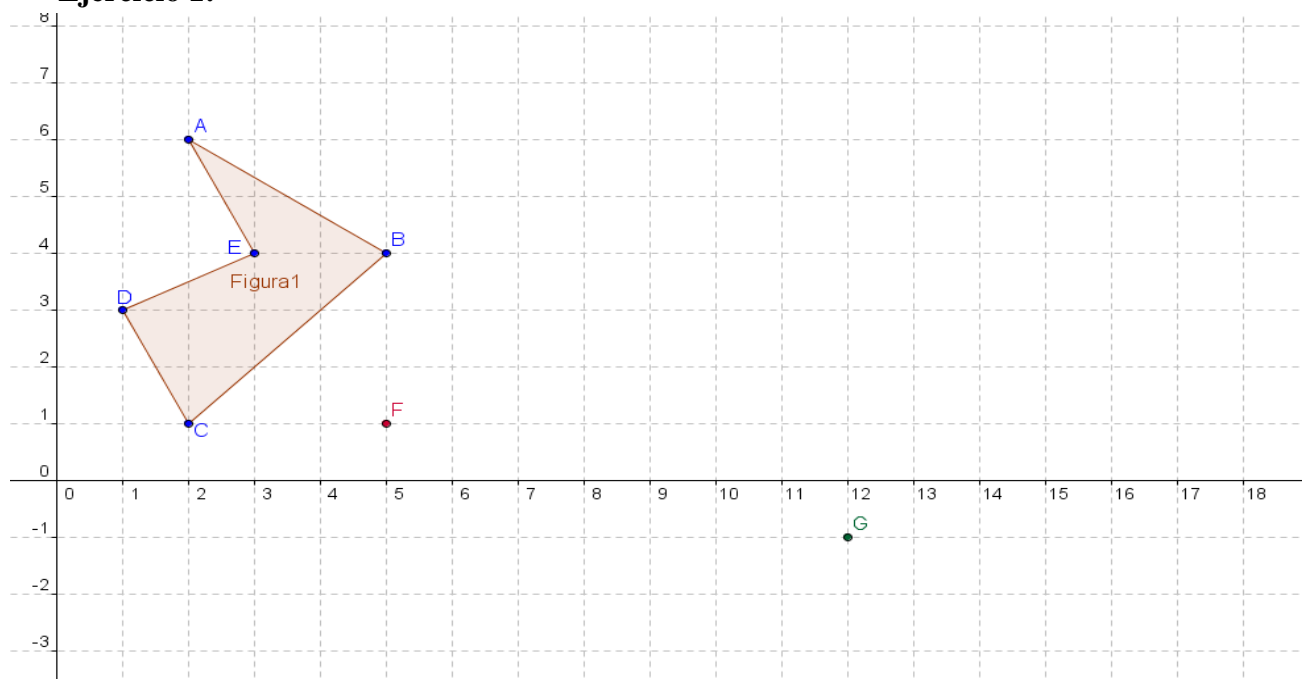
**Notación:  $R_2 \circ R_1 (F1) = R_2 (R_1 (F1)) = R_2 (F2) = F3$**

A continuación detallaremos distintos casos que se presentarán en las composiciones de Reflexiones Isométricas.

#### Caso 1:

- a) Composiciones Sucesivas de Reflexiones a través de un punto: Esta consiste en realizar una reflexión en torno a un punto **F(x,y)** a la figura1 (**F1**) con lo cual se obtendrá la figura2 (**F2**), luego a esta figura obtenida de la primera reflexión se le aplica una segunda reflexión en torno a otro punto **G(x', y')** obteniendo como resultado la figura3 (**F3**).

### Ejercicio 1:



En el gráfico que se presenta, se muestra una Figura1.

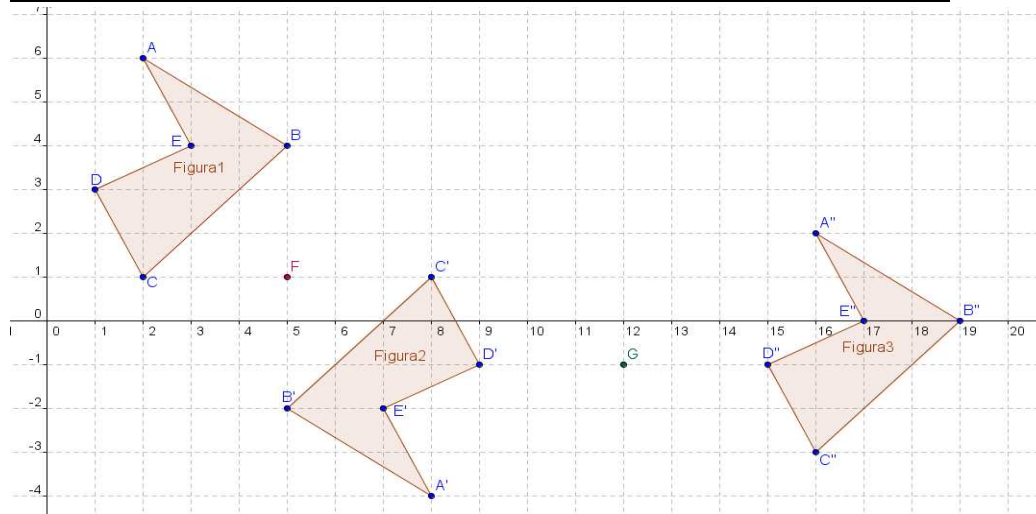
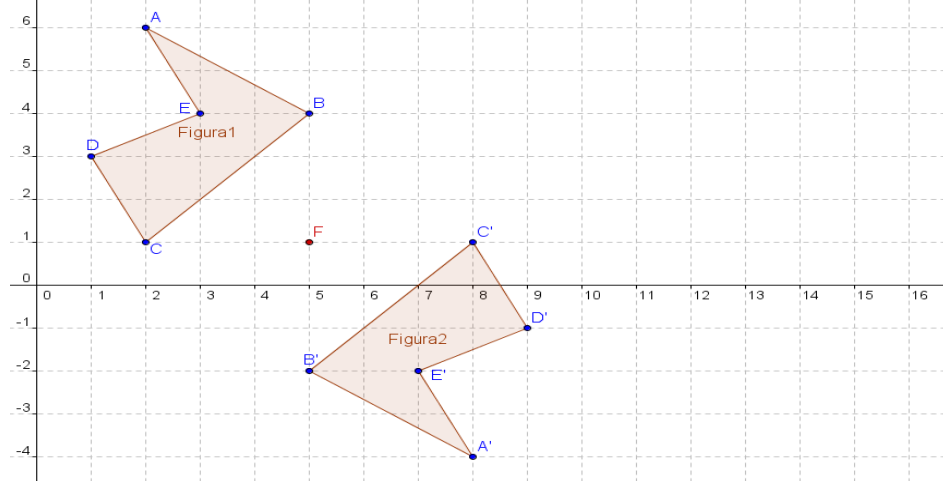
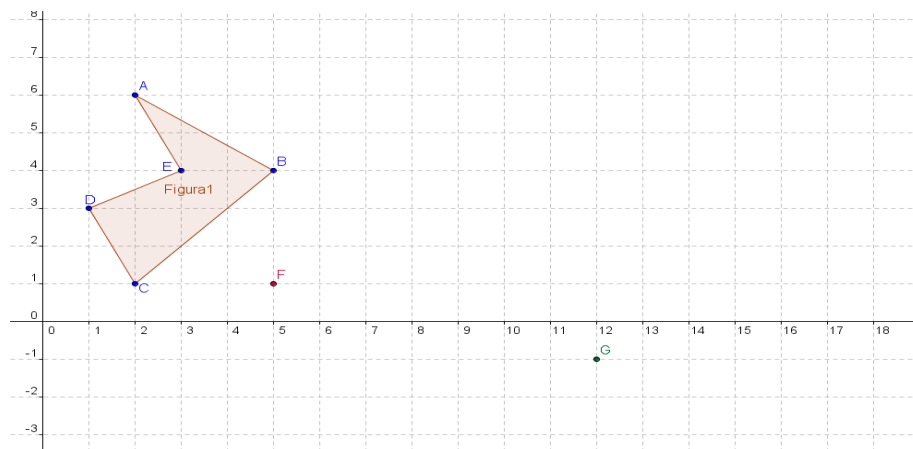
- 1) Dada la figura, realiza una reflexión en torno al punto  $F = (5,1)$ , luego a la figura obtenida realiza una segunda reflexión en torno al punto  $G = (12,-1)$ . ¿Qué transformación isométrica se encuentra presente de la Figura1 a Figura 3, en caso que exista?

*Figura1: Obtenida de la primera reflexión*

*Figura3: Obtenida de la segunda reflexión*

- 2) Realiza el proceso anterior, pero ésta vez haz primero la reflexión en torno al punto  $G = (12,-1)$ , y luego de la figura que obtienes haz la reflexión en torno al punto  $F = (5,1)$ . Compara y concluye.

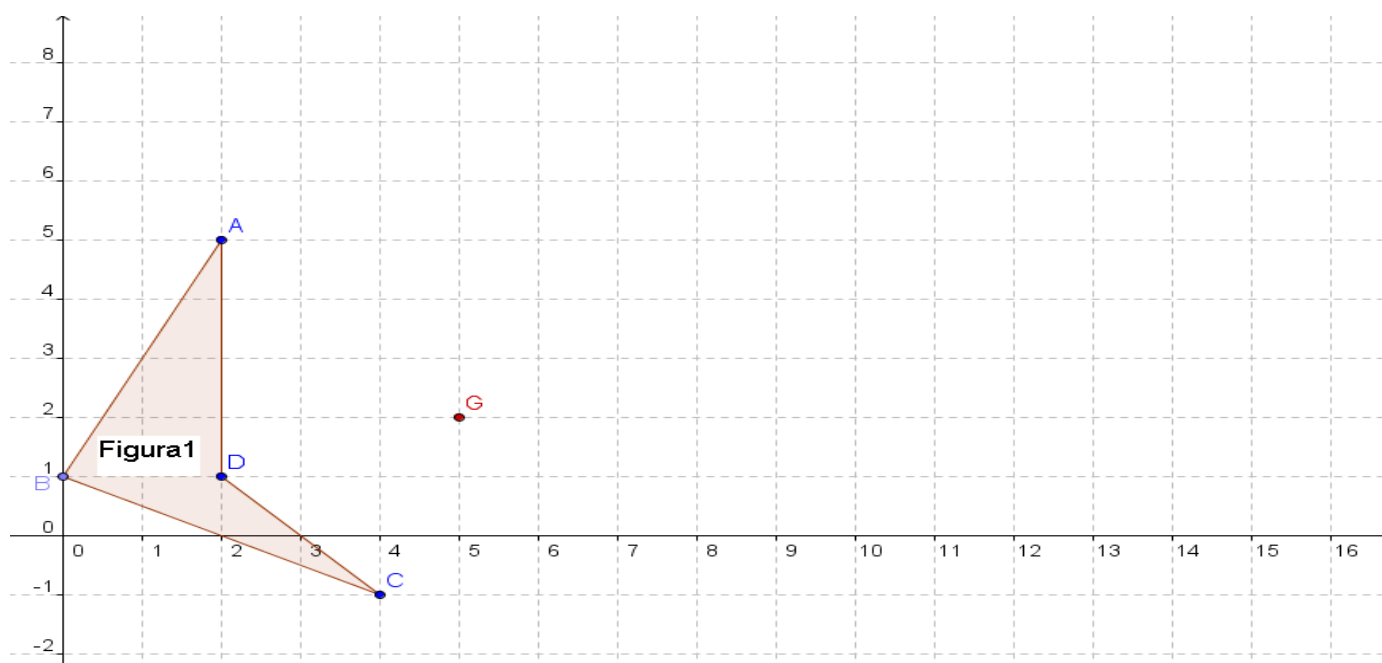
(Presentación en PPT)



b) **Composición de Reflexiones a través de un punto y una recta:** Esta consiste en realizar una reflexión en torno a un punto  $G(x,y)$  a la figura1 (**F1**) con lo cual se obtendrá la figura2 (**F2**), luego a esta figura obtenida de la primera reflexión se le aplica una segunda reflexión en torno a una recta (**L1**) obteniendo como resultado la figura3 (**F3**).

c) **Composición de Reflexiones a través de una recta y un punto:** Esta consiste en realizar una reflexión en torno a una recta (**L1**) a la figura1 (**F1**) con lo cual se obtendrá la figura2 (**F2**), luego a esta figura obtenida de la primera reflexión se le aplica una segunda reflexión en torno a un punto  $B(x',y')$  obteniendo como resultado la figura3 (**F3**).

### Ejercicio 2:



En el gráfico que se presenta, se muestra una Figura1.

1) Dada la figura, realiza una reflexión en torno al punto  $G=(5,2)$ , luego a la figura obtenida realiza una segunda reflexión en torno al eje **X**. ¿Qué transformación isométrica se encuentra presente de la Figura1 a Figura 3, en caso que exista?

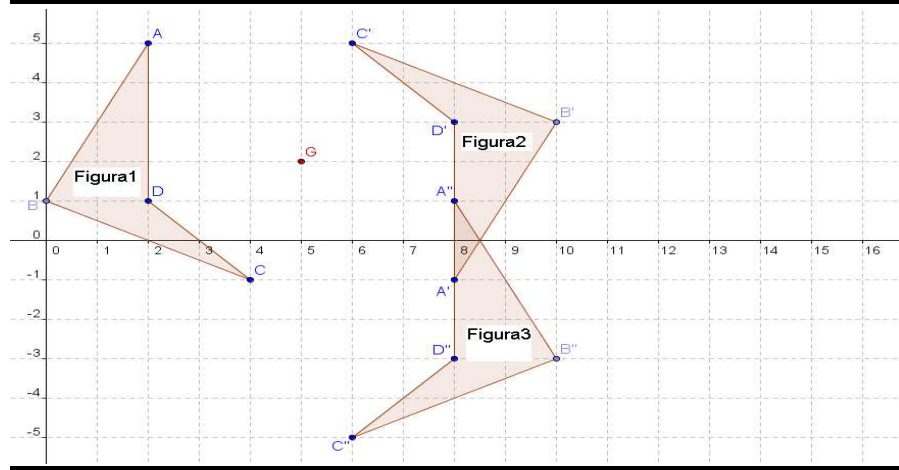
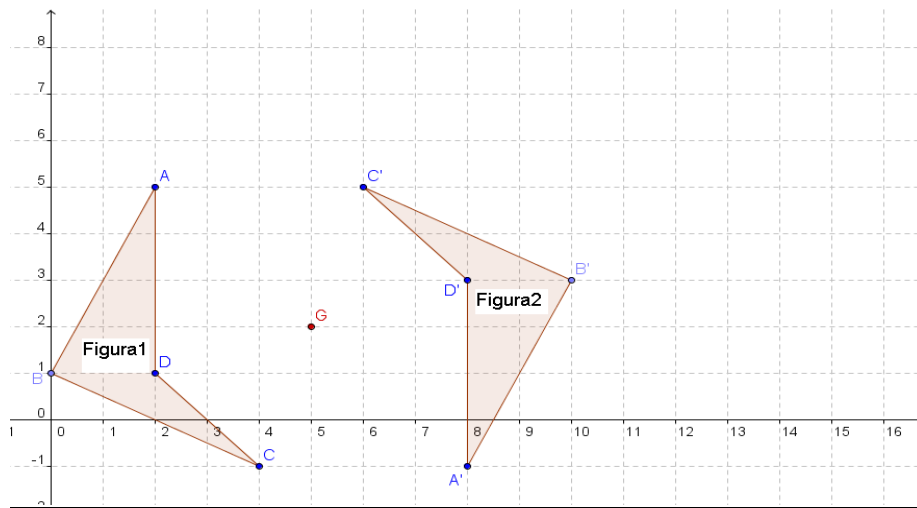
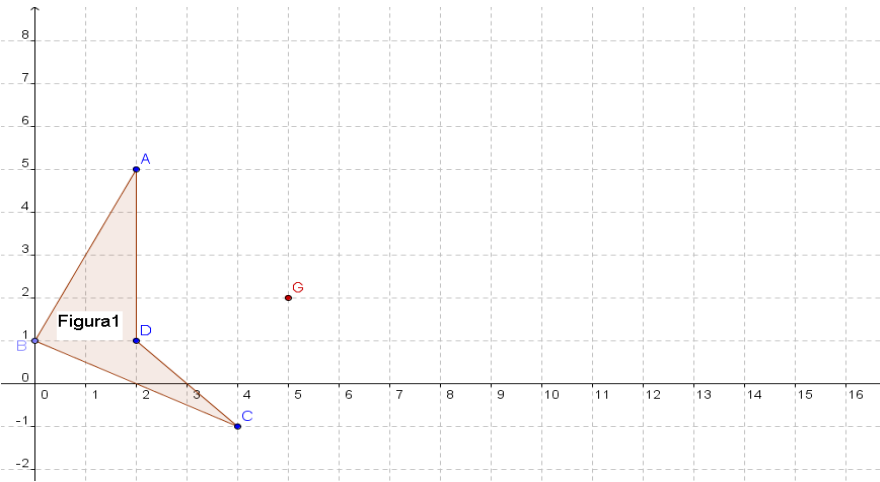
*Figura1: Obtenida de la primera reflexión*

*Figura3: Obtenida de la segunda reflexión*

2) Realiza el proceso anterior, pero ésta vez haz primero la reflexión en torno al eje **X**, y luego de la figura que obtienes haz la reflexión en torno al punto  $G=(5,2)$ . Compara y concluye.

# ¿Son Conmutativas?

(Presentación en PPT)

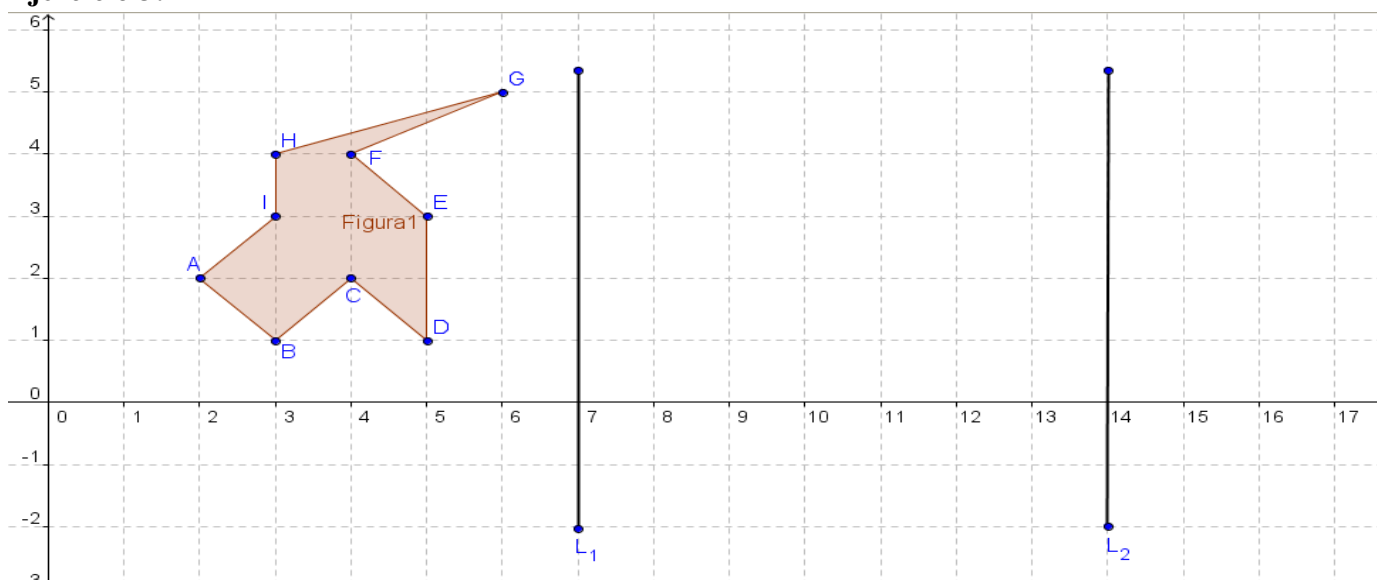


## Caso2 :

**Reflexiones a través de dos rectas Paralelas** Esta consiste en realizar una reflexión en torno a una recta  $L_1$  a la figura1 (F1) con la cual se obtendrá la figura2 (F2), luego a esta figura obtenida de la primera reflexión se le aplica una segunda reflexión en torno a la recta  $L_2$  ( $L_1/L_2$ ) obteniendo como resultado la figura3 (F3).

**Observación:** La composición de éstas dos reflexiones a través de éstas rectas  $L_1$  y  $L_2$  es equivalente a una **Traslación**. Además, la distancia desde cualquier punto de la figura inicial (F1) a su segunda imagen (F3), bajo las dos reflexiones, es el doble de la distancia entre las rectas paralelas.

## **Ejercicio 3:**

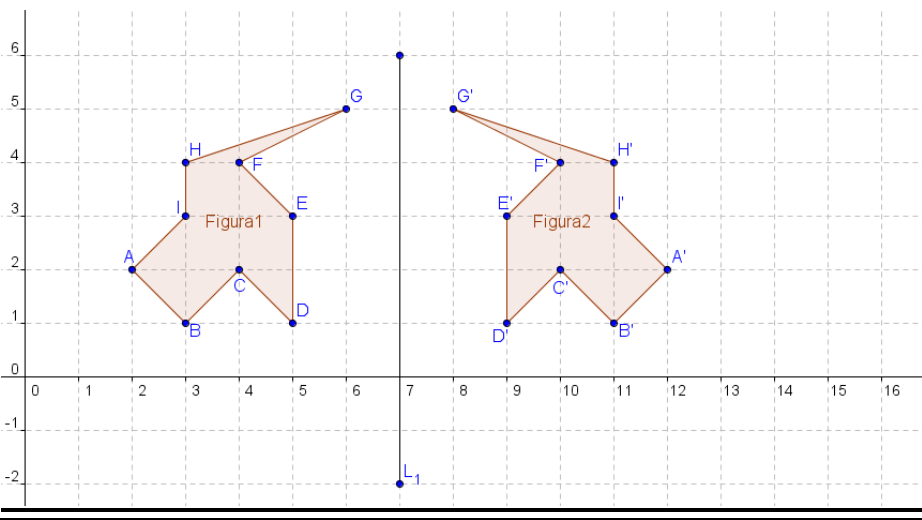
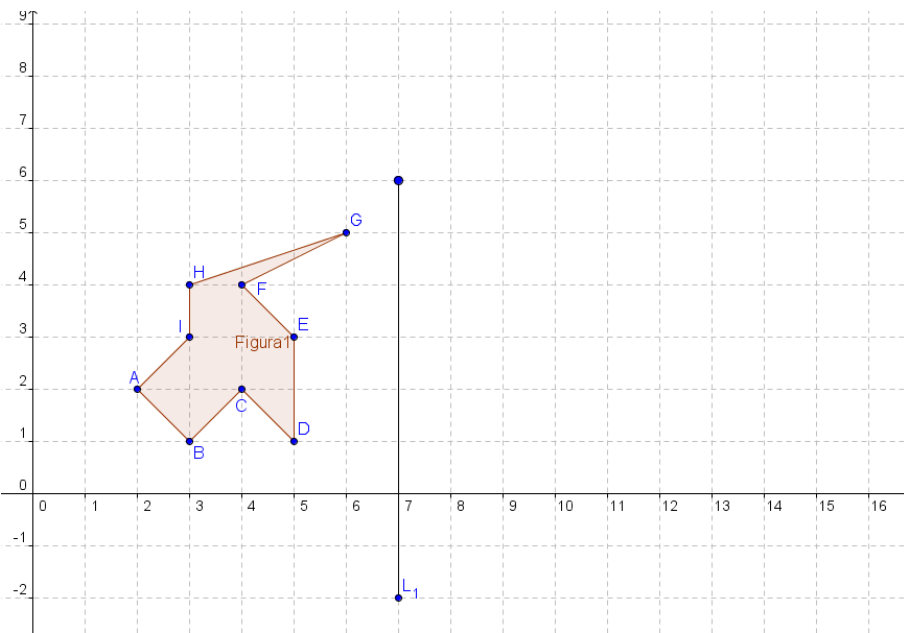


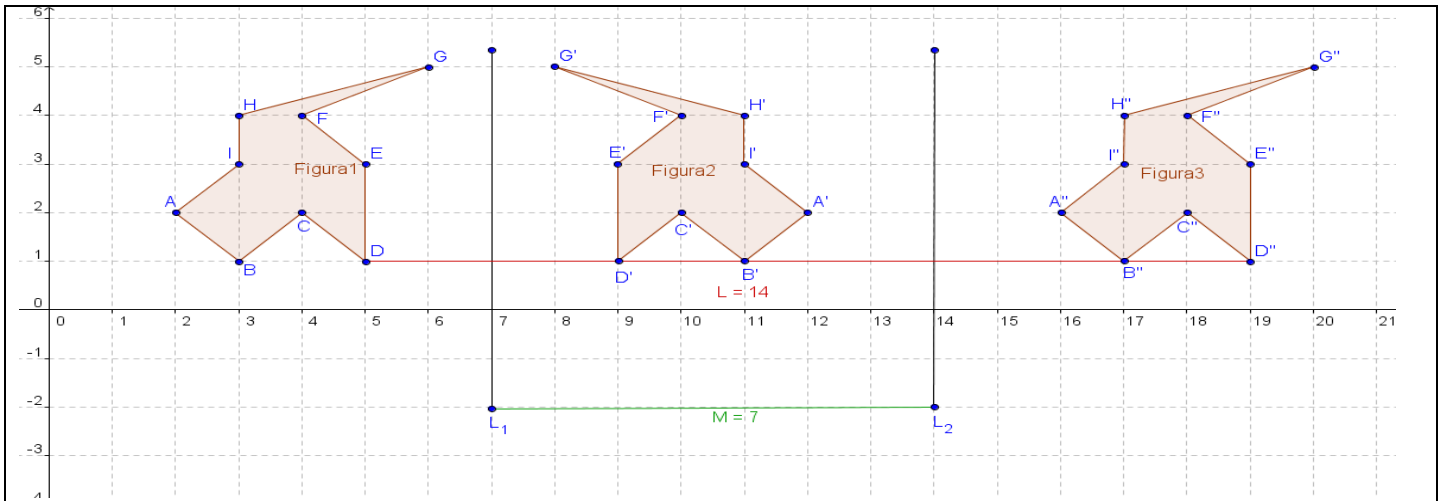
En el gráfico que se presenta, se muestra una Figura1. Dada ésta figura, realiza una reflexión en torno a la recta  $L_1$ , a la figura obtenida aplica una segunda reflexión en torno a la recta  $L_2$ .

Ahora contesta:

- 1) ¿Qué relación existe entre las distancias de la figura original y la obtenida por la reflexión en torno a la recta  $L_2$ , al comparar con respecto a las distancias entre los ejes de reflexión ( $L_1$  y  $L_2$ )?
- 2) Podemos llegar de la Figura1 a la Figura3 con una sola transformación. En caso de ser así ¿Cuál sería dicha transformación isométrica?
- 3) Realiza la reflexión de la Figura 1, primero en torno a la recta  $L_2$  y luego en torno a la recta  $L_1$ . Al compararla con la situación anterior, ¿Qué concluyes? ¿Son conmutativas?

(Presentación en PPT)



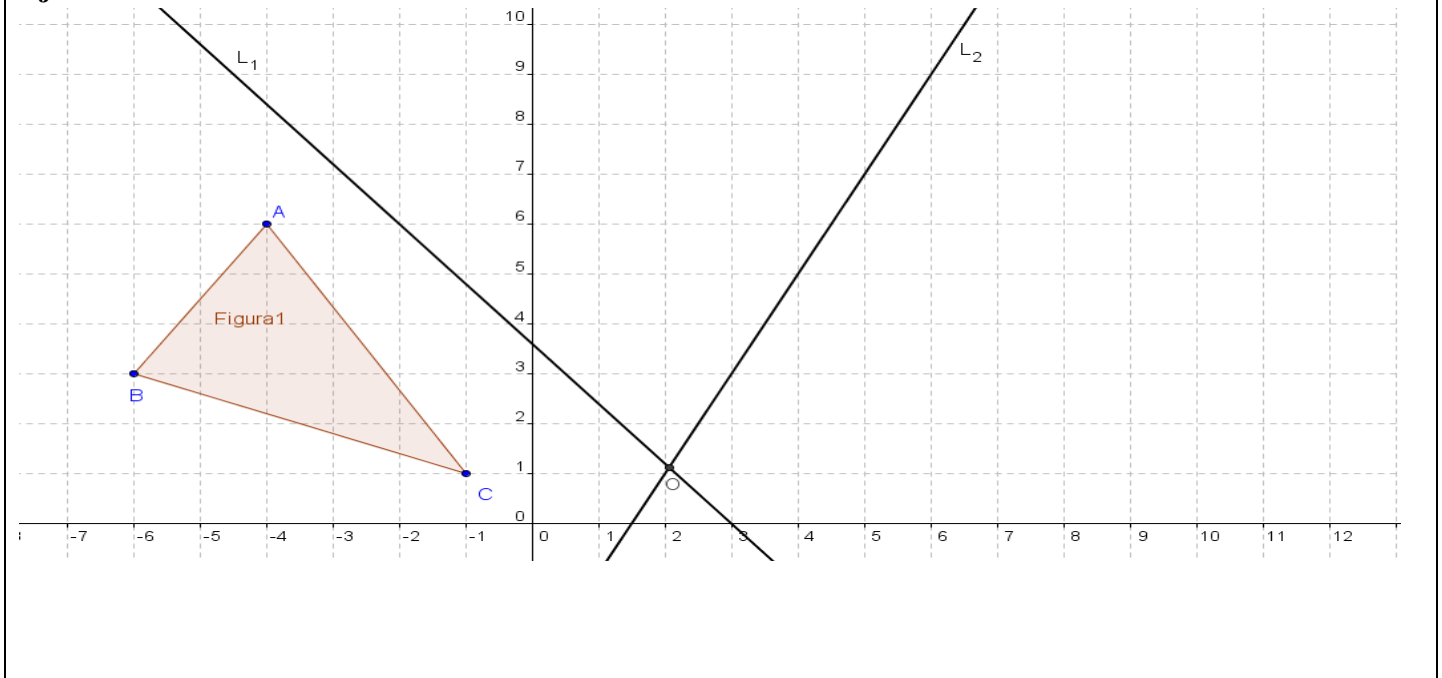


### Caso 3:

**Reflexiones a través de dos rectas que se interceptan (o Reflexión de Ejes Secantes):** Esta consiste en realizar una reflexión en torno a una recta  $L_1$  a la figura1 (**F1**) con la cual se obtendrá la figura2 (**F2**), luego a esta figura obtenida de la primera reflexión se le aplica una segunda reflexión en torno a la recta  $L_2$  ( $L_1$  y  $L_2$  se interceptan) obteniendo como resultado la figura3 (**F3**).

**Observación:** Una composición de dos reflexiones a través de un par de rectas  $(L_1 \text{ y } L_2)$  que se interceptan, es equivalente a una **Rotación**. El ángulo de rotación formado por dos semirrectas  $OA$  y  $OA''$  (siendo  $O$  el punto donde se interceptan éstas dos rectas secantes) es el doble del ángulo entre el par de rectas de reflexión que se interceptan.

### **Ejercicio 4:**

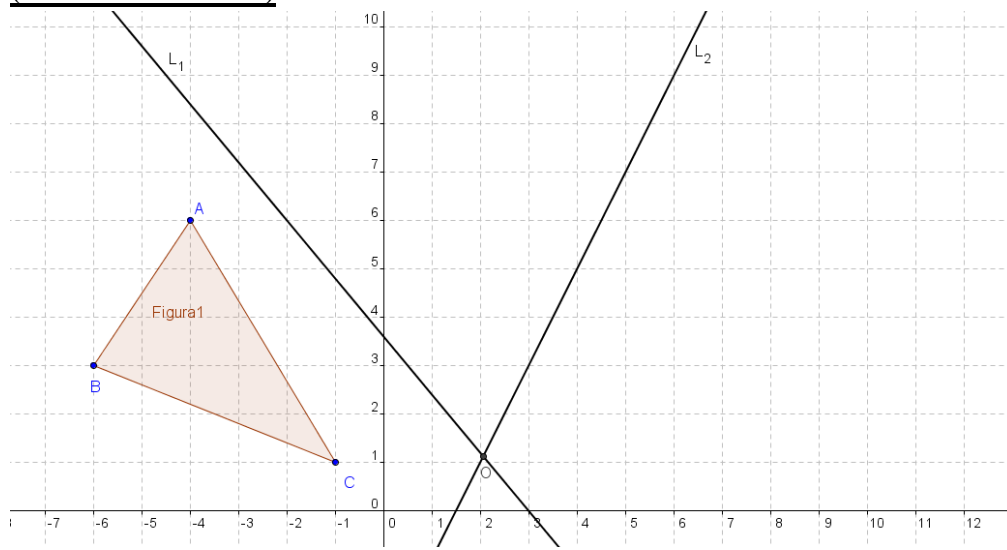


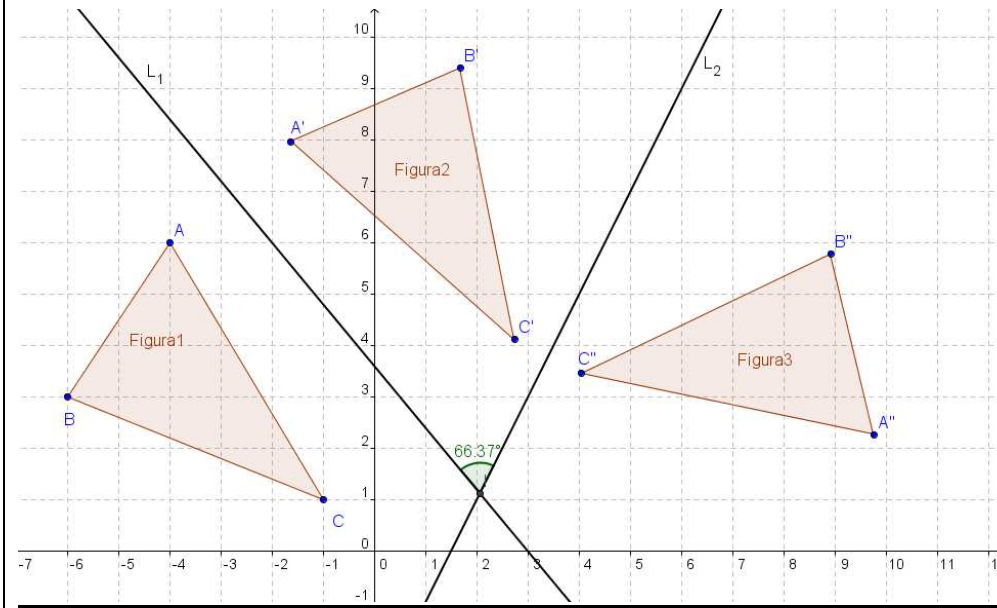
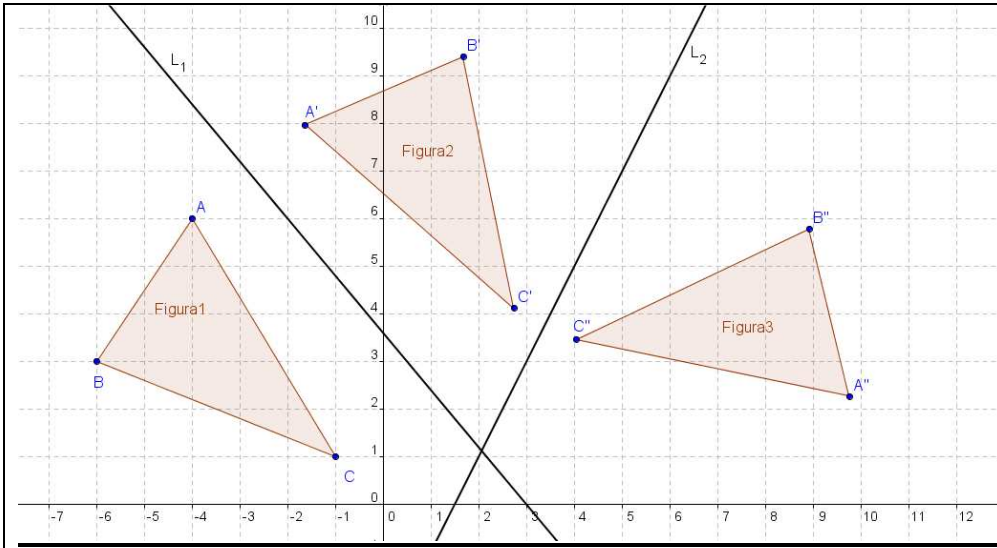
En el gráfico que se presenta, se muestra una Figura1. Dada ésta figura, realiza una reflexión en torno a la recta  $L_1$ , a la figura obtenida aplica una segunda reflexión en torno a la recta  $L_2$ . ( $L_1$  y  $L_2$  rectas que se interceptan)

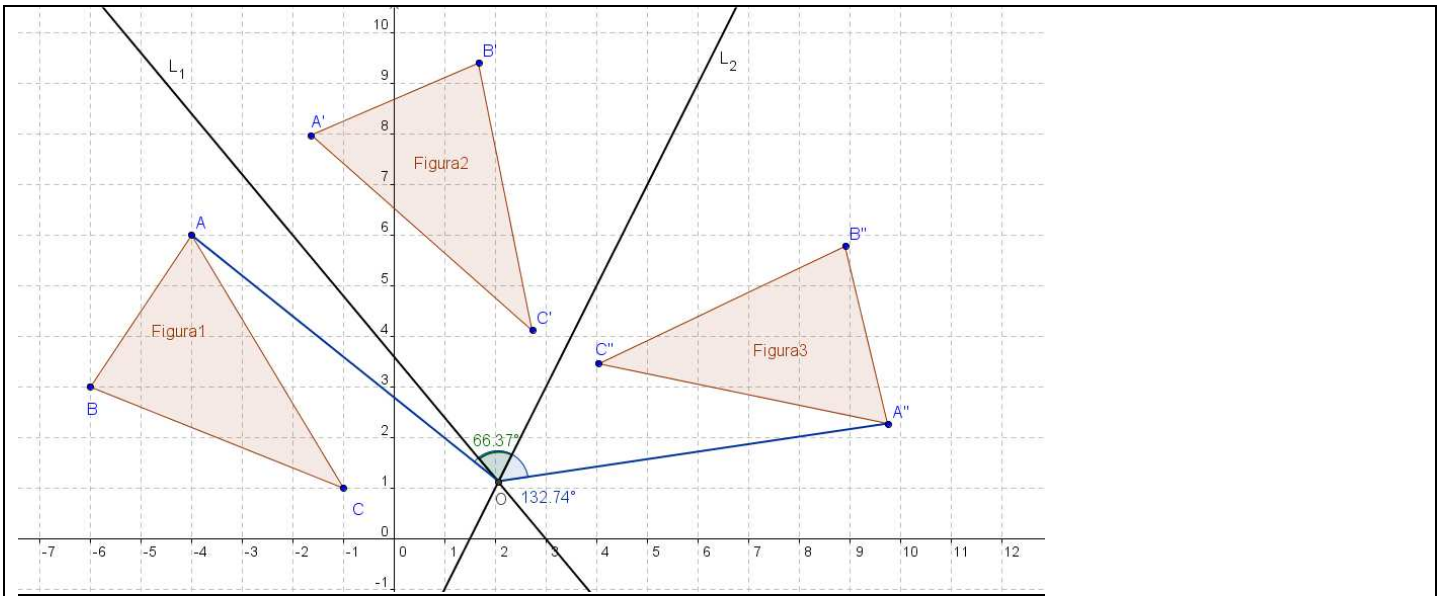
Ahora contesta:

- 1) Une los puntos  $AO$  y  $OA'$ , el ángulo formado por estas dos semirrectas compáralo con el ángulo formado por las rectas secantes ( $L_1$  y  $L_2$ ) ¿Qué relación ves entre ellos?
- 2) Podemos llegar de la Figura1 a la Figura3 con una sola transformación. En caso de ser así ¿Cuál sería dicha transformación isométrica?
- 3) Realiza la reflexión de la Figura1, primero en torno a la recta  $L_2$  y luego en torno a la recta  $L_1$ . Al compararla con la situación anterior, ¿Qué concluyes? ¿Son conmutativas?

**(Presentación PPT)**





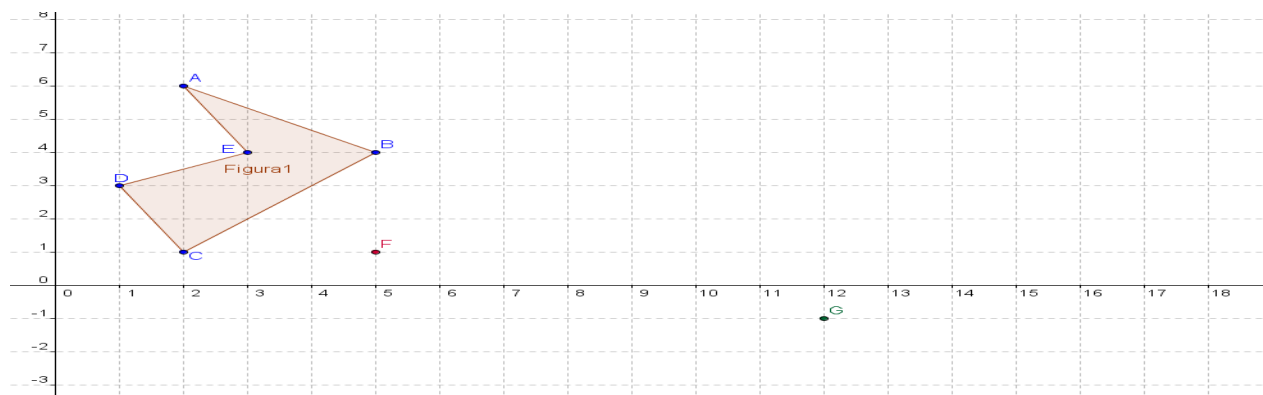


Composición De Transformaciones IsométricasComposición de Reflexiones:Definición:

La composición de dos (o más) reflexiones sobre una figura1 (**F1**), consiste en obtener la figura3 (**F3**), al aplicar la reflexión a la figura1 (**F1**) obtenemos figura2 (**F2**), luego a la figura2 (**F2**) aplicamos una segunda reflexión, donde obtendremos la figura3 (**F3**).

$$\text{Notación: } R_2 \circ R_1 (F1) = R_2 (R_1 (F1)) = R_1 (F2) = F3$$

A continuación detallaremos distintos casos que se presentarán en las composiciones de Reflexiones Isométricas.

Ejercicio Motivador 1:**Preguntas:**

2) Representa en el plano cartesiano. Luego, responde.

d) Al polígono formado por los vértices A (2,6), B(5,4), C(2,1),D(1,3),E(3,4) se le aplica una Reflexión en

torno a un punto F(5,1), obteniendo A'B'C'D'E', y después a la figura resultante, se le aplica una segunda

Reflexión en torno al punto G = (12,-1), obteniendo A''B''C''D''E''. ¿Cuáles son las coordenadas de los vértices del polígono luego de las dos reflexiones?

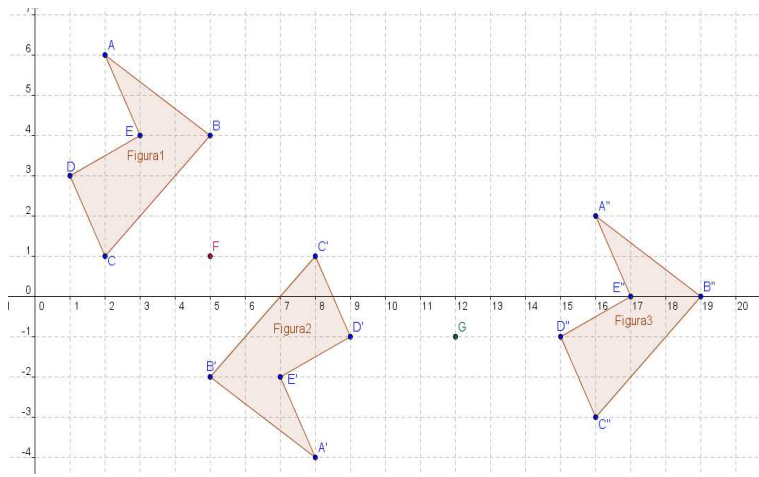
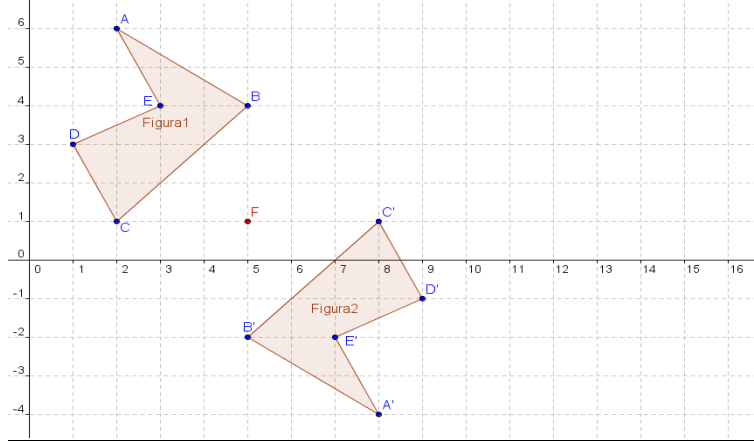
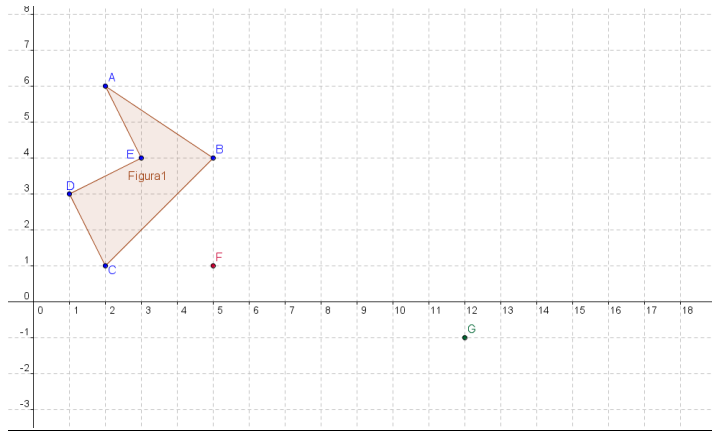
$$A''=( \quad , \quad ) \quad B''=( \quad , \quad ) \quad C''=( \quad , \quad ) \quad D''=( \quad , \quad ) \quad E''=( \quad , \quad )$$

e) ¿Qué transformación isométrica se encuentra presente de la Figura1 a Figura 3, en caso que exista?

Figura1: Obtenida de la primera reflexión, Figura3: Obtenida de la segunda reflexión

f) Realiza el proceso anterior, pero ésta vez haz primero la reflexión en torno al punto  $G = (12, -1)$ , y luego de la figura que obtienes haz la reflexión en torno al punto  $F = (5, 1)$ . Compara y concluye. ¿Son Conmutativas?

(Presentación en PPT)

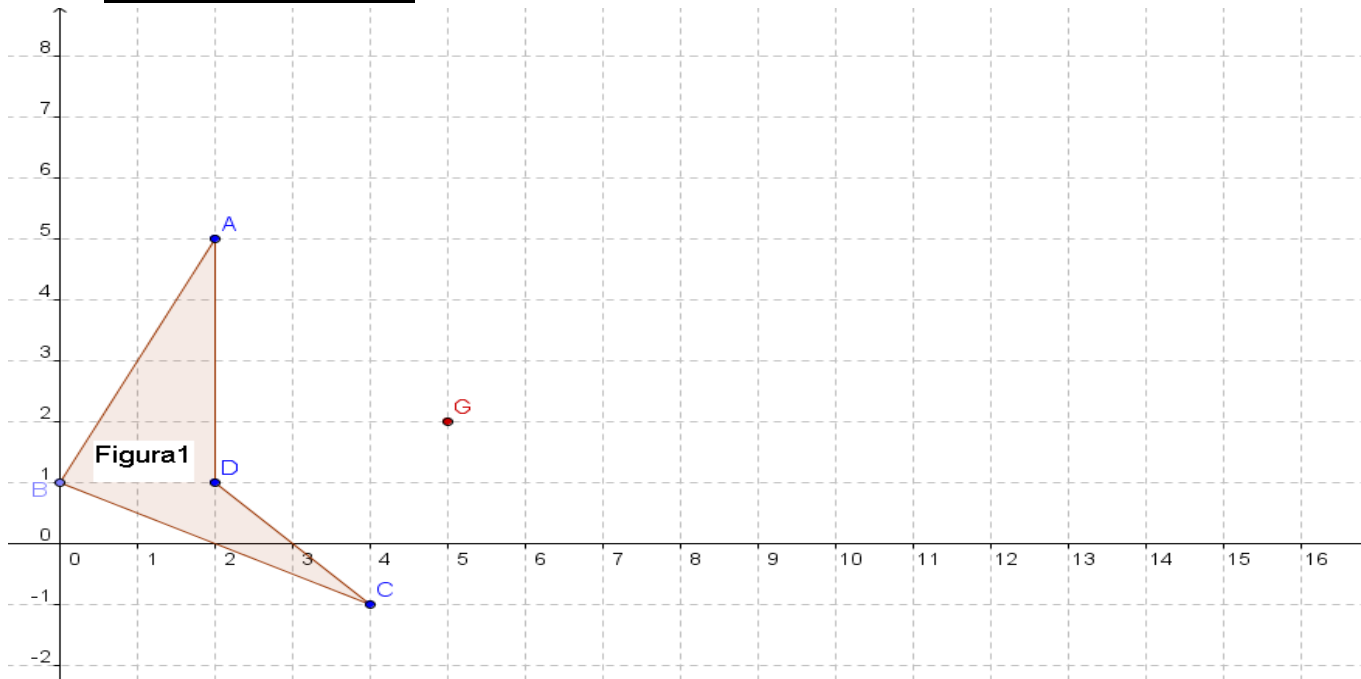


## Formalización

### Caso 1:

- a) **Composiciones Sucesivas de Reflexiones a través de un punto:** Esta consiste en realizar una reflexión en torno a un punto  $F(x,y)$  a la figura1 (**F1**) con lo cual se obtendrá la figura2 (**F2**), luego a esta figura obtenida de la primera reflexión se le aplica una segunda reflexión en torno a otro punto  $G(x', y')$  obteniendo como resultado la figura3 (**F3**).

### Ejercicio Motivador 2:



### **Preguntas:**

1) Representa en el plano cartesiano. Luego, responde.

- a) Al polígono formado por los vértices A (2,5), B(0,1), C(4,-1),D(2,1), se le aplica una Reflexión en torno a un punto  $G(5,2)$ , obteniendo  $A'B'C'D'E'$ ? y después a la figura resultante, se le aplica una segunda Reflexión en torno al eje  $X$ , obteniendo  $A''B''C''D''$ . ¿Cuáles son las coordenadas de los vértices del polígono luego de las dos reflexiones?

$$A''=( \quad , \quad ) \quad B''=( \quad , \quad ) \quad C''=( \quad , \quad ) \quad D''=( \quad , \quad ) \quad E''=( \quad , \quad )$$

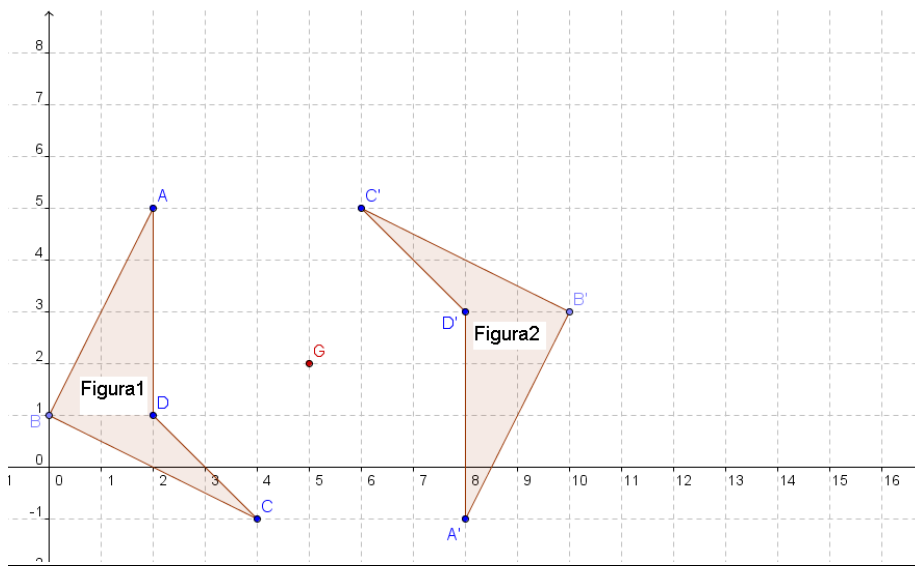
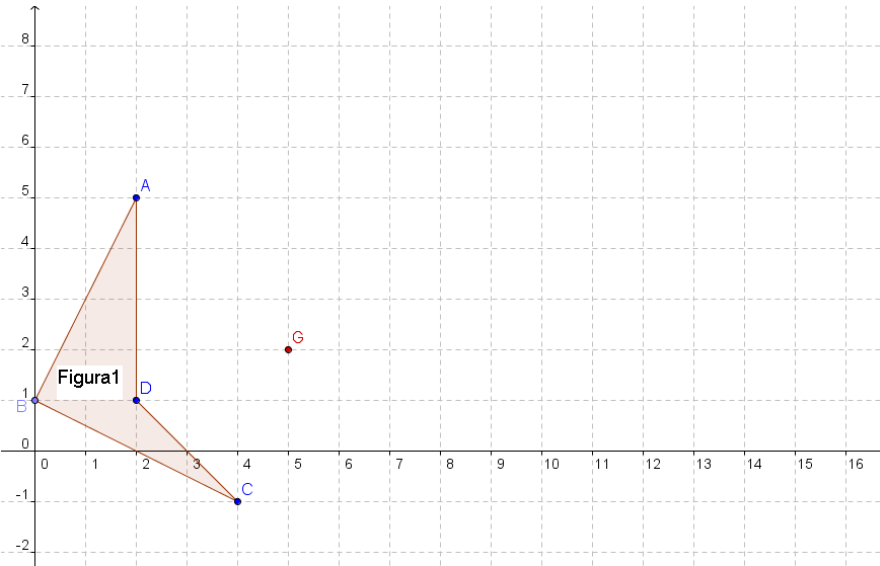
- b) ¿Qué transformación isométrica se encuentra presente de la Figura1 a Figura 3, en caso que exista?

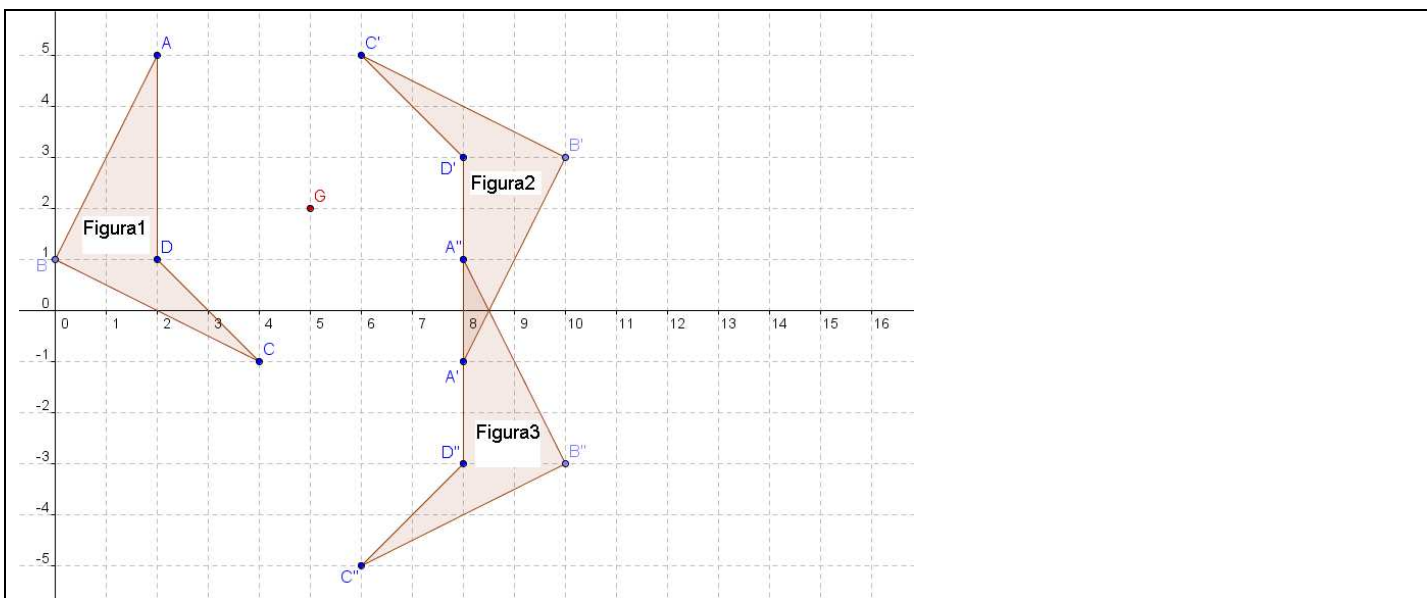
*Figura1: Obtenida de la primera reflexión*

Figura3: Obtenida de la segunda reflexión

c) Realiza el proceso anterior, pero ésta vez haz primero la reflexión en torno al eje **X**, y luego de la figura que obtienes haz la reflexión en torno al punto  $G = (5,2)$ . Compara y concluye.

(Presentación en PPT)

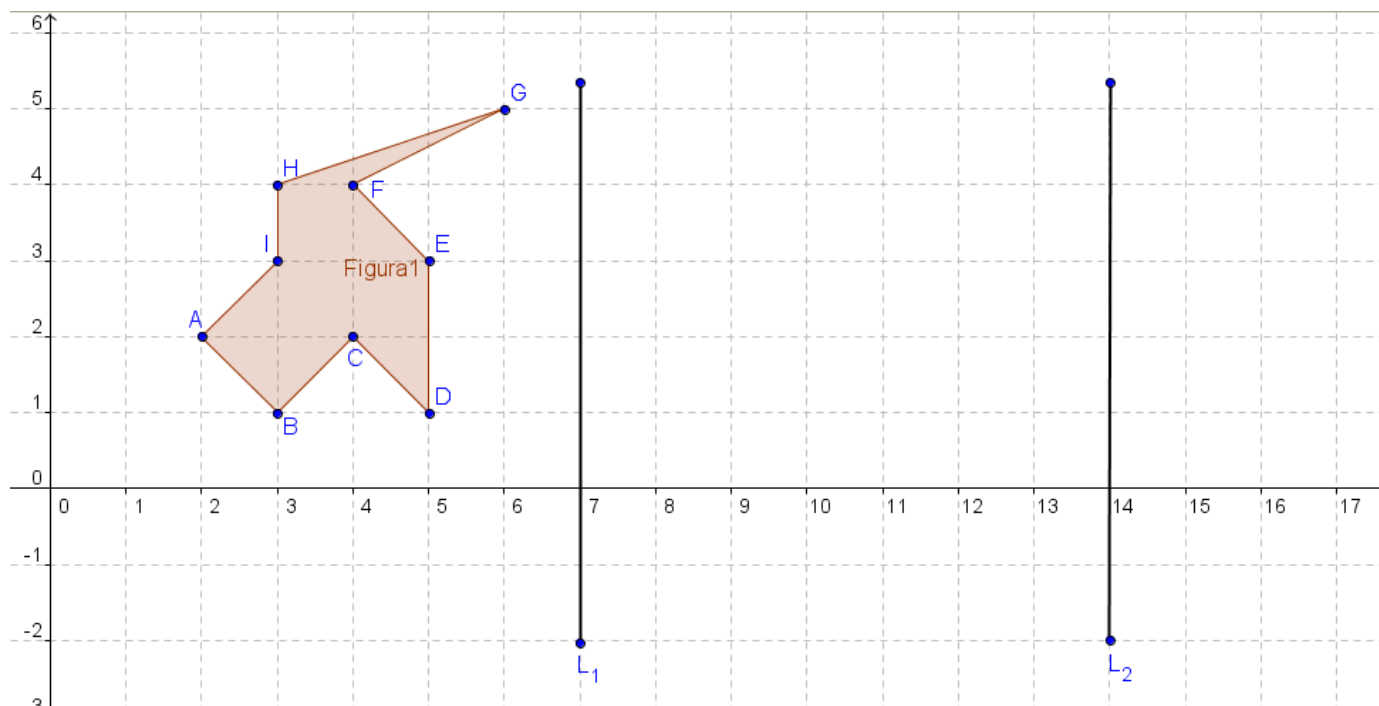




### Formalización

- b) **Composición de Reflexiones a través de un punto y una recta:** Esta consiste en realizar una reflexión en torno a un punto  $G(x,y)$  a la figura1 (**F1**) con lo cual se obtendrá la figura2 (**F2**), luego a esta figura obtenida de la primera reflexión se le aplica una segunda reflexión en torno a una recta (**L1**) obteniendo como resultado la figura3 (**F3**).
- c) **Composición de Reflexiones a través de una recta y un punto:** Esta consiste en realizar una reflexión en torno a una recta (**L1**) a la figura1 (**F1**) con lo cual se obtendrá la figura2 (**F2**), luego a esta figura obtenida de la primera reflexión se le aplica una segunda reflexión en torno a un punto  $B(x',y')$  obteniendo como resultado la figura3 (**F3**).

### Ejercicio Motivador 3:

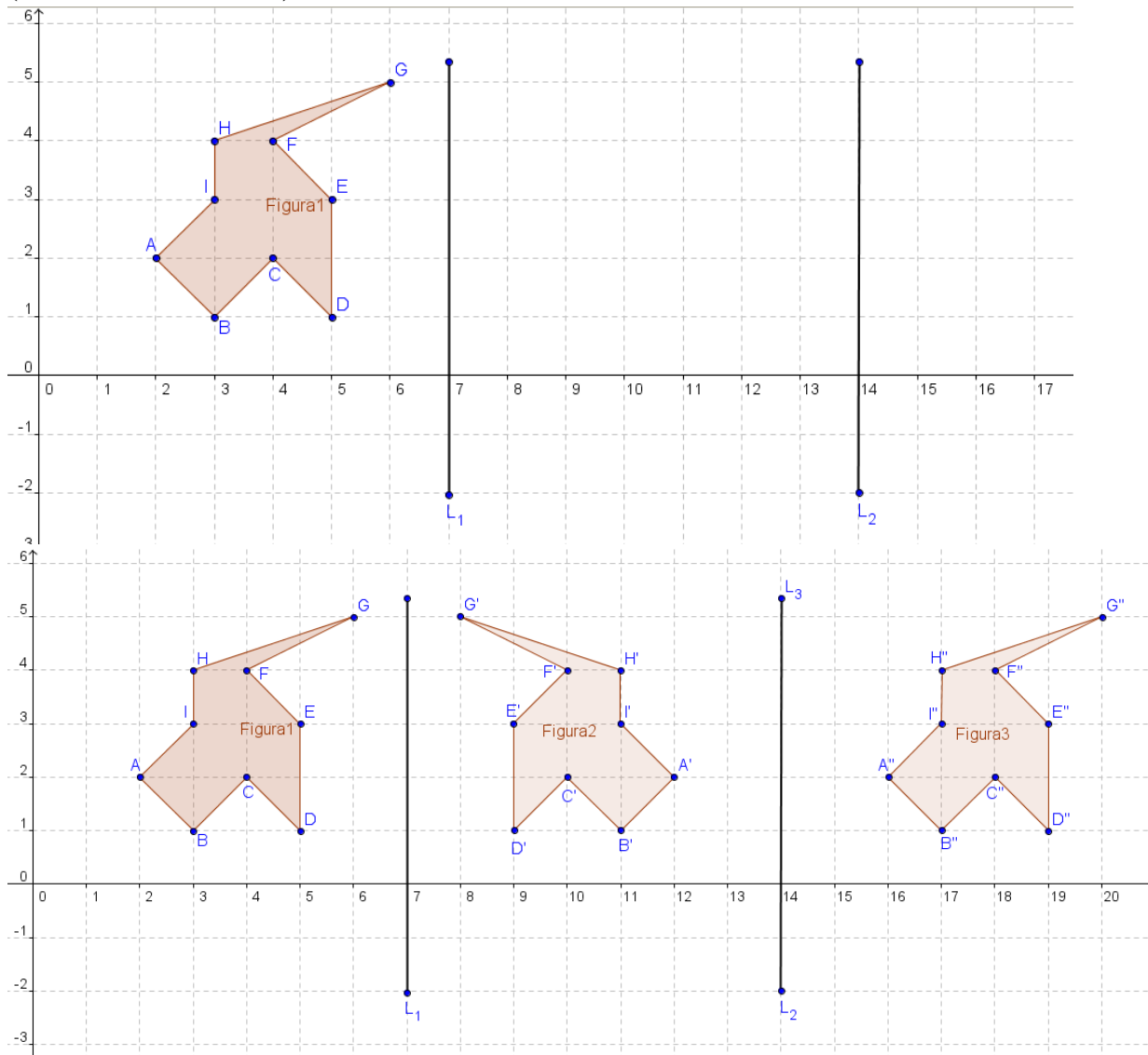


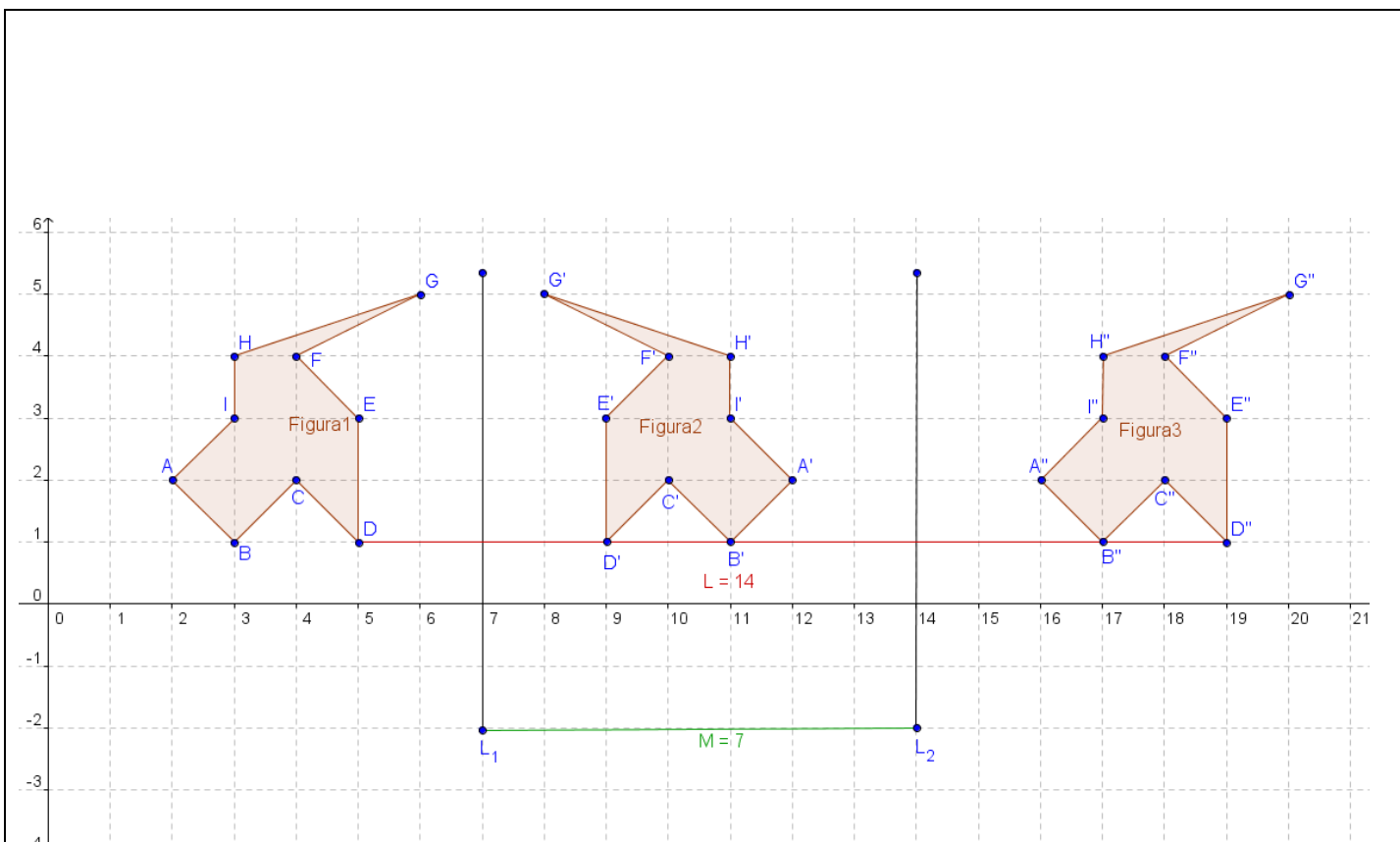
En el gráfico que se presenta, se muestra una Figura1. Dada ésta figura, realiza una reflexión en torno a la recta  $L_1$ , a la figura obtenida aplica una segunda reflexión en torno a la recta  $L_2$ .

Ahora contesta:

- 1) ¿Qué relación existe entre las distancias de la figura original y la obtenida por la reflexión en torno a la recta  $L_2$ , al comparar con respecto a la distancias entre los ejes de reflexión ( $L_1$  y  $L_2$ )?
- 2) Podemos llegar de la Figura1 a la Figura3 con una sola transformación. En caso de ser así ¿Cuál sería dicha transformación isométrica?
- 3) Realiza la reflexión de la Figura 1, primero en torno a la recta  $L_2$  y luego en torno a la recta  $L_1$ . Al compararla con la situación anterior, ¿Qué concluyes? ¿Son conmutativas?

(Presentación en PPT)





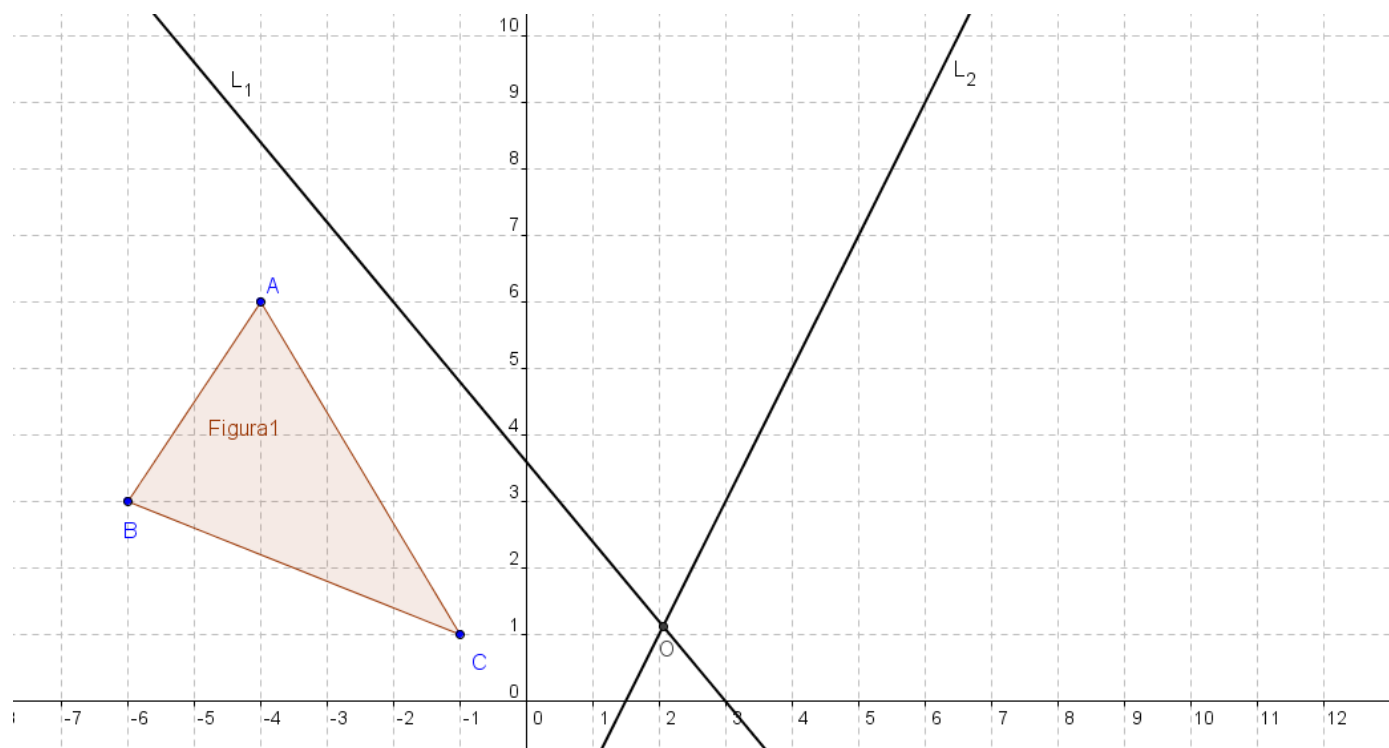
## Formalización

### Caso2 :

**Reflexiones a través de dos rectas Paralelas** Esta consiste en realizar una reflexión en torno a una recta  $L_1$  a la figura1 (**F1**) con la cual se obtendrá la figura2 (**F2**), luego a esta figura obtenida de la primera reflexión se le aplica una segunda reflexión en torno a la recta  $L_2$  ( $L_1//L_2$ ) obteniendo como resultado la figura3 (**F3**).

**Observación:** La composición de éstas dos reflexiones a través de éstas rectas  $L_1$  y  $L_2$  es equivalente a una **Traslación**. Además, la distancia desde cualquier punto de la figura inicial (**F1**) a su segunda imagen (**F3**), bajo las dos reflexiones, es el doble de la distancia entre las rectas paralelas.

### Ejercicio Motivador 4:

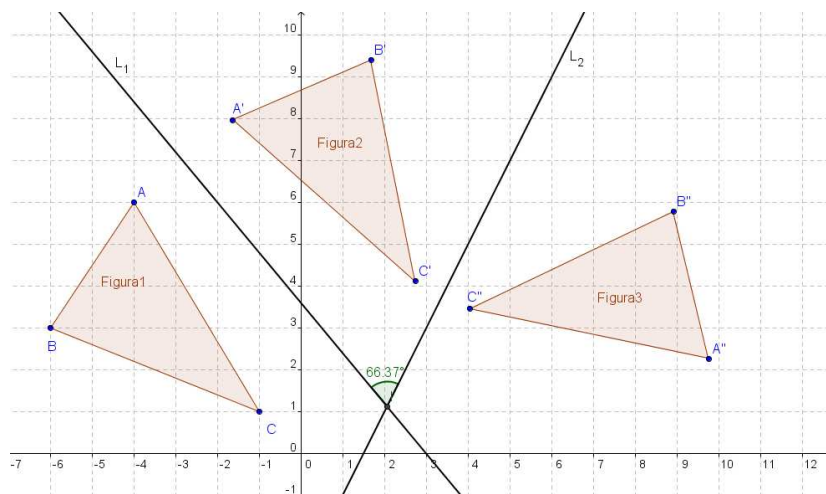
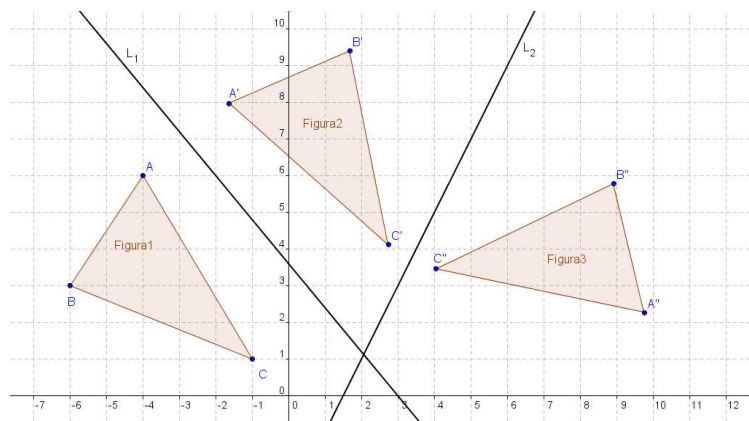
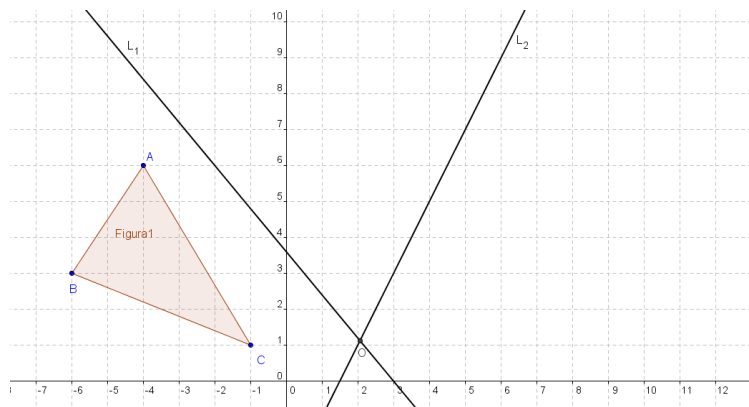


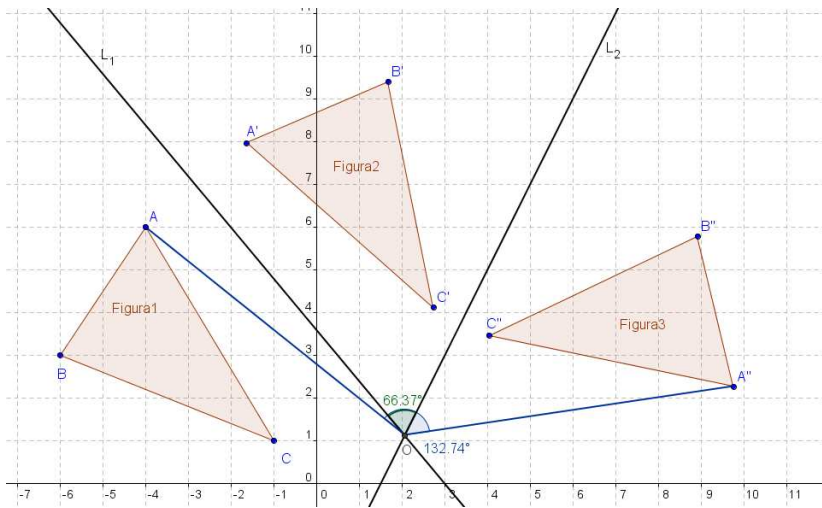
En el gráfico que se presenta, se muestra una Figura1. Dada ésta figura, realiza una reflexión en torno a la recta  $L_1$ , a la figura obtenida aplica una segunda reflexión en torno a la recta  $L_2$ . ( $L_1$  y  $L_2$  rectas que se interceptan)

Ahora contesta:

- 1) Une los puntos AO y OA', el ángulo formado por estas dos semirrectas compáralo con el ángulo formado por las rectas secantes ( $L_1$  y  $L_2$ ) ¿Qué relación ves entre ellos?
- 2) Podemos llegar de la Figura1 a la Figura3 con una sola transformación. En caso de ser así ¿Cuál sería dicha transformación isométrica?
- 3) Realiza la reflexión de la Figura1, primero en torno a la recta  $L_2$  y luego en torno a la recta  $L_1$ . Al compararla con la situación anterior, ¿Qué concluyes? ¿Son conmutativas?

(Presentación en PPT)





### Formalización

#### Caso 3:

**Reflexiones a través de dos rectas que se interceptan (o Reflexión de Ejes Secantes):** Esta consiste en realizar una reflexión en torno a una recta  $L_1$  a la figura1 (**F1**) con la cual se obtendrá la figura2 (**F2**), luego a esta figura obtenida de la primera reflexión se le aplica una segunda reflexión en torno a la recta  $L_2$  ( $L_1$  y  $L_2$  se interceptan) obteniendo como resultado la figura3 (**F3**).

**Observación:** Una composición de dos reflexiones a través de un par de rectas ( $L_1$  y  $L_2$ ) que se interceptan, es equivalente a una **Rotación**. El ángulo de rotación formado por dos semirrectas  $OA$  y  $OA''$  (siendo  $O$  el punto donde se interceptan éstas dos rectas secantes) es el doble del ángulo entre el par de rectas de reflexión que se interceptan.

### D.1.3 Clase n°3. “Composición de rotaciones”

#### Objetivos:

- 1) Identificar la forma de la gráfica de una composición de rotaciones.
- 2) Identificar la orientación del centro y ángulos presentes en la gráfica de cada rotación.

**Organización:** Responde en grupos de 2 o 3 personas las siguientes actividades.

**Tiempo:** 60 min 140

*Tercera Clase*

*Sin Software*

## Composición De Transformaciones Isométricas

### Composición de Rotaciones:

#### Definición:

La composición de dos (o más) rotaciones con una punto y un ángulo de amplitud sobre una figura1 (**F1**), consiste en obtener la figura3 (**F3**), al aplicar la rotación (con su respectivo punto y ángulo) a la figura1 (**F1**) obtenemos figura2 (**F2**), luego a la figura2 (**F2**) aplicamos una segunda rotación (con su respectivo punto y ángulo), donde obtendremos la figura3 (**F3**).

A continuación detallaremos distintos casos que se presentarán en las composiciones de Reflexiones Isométricas.

#### Caso 1:

**Composición de dos Rotaciones de centro común (  $O=O'$  ):** Esta consiste en realizar una rotación con abertura  $\alpha$  y centro **O**, es decir **F** (**O**,  $\alpha$ ), a la figura1 (**F1**) con lo cual se obtendrá la figura2 (**F2**), luego a esta figura obtenida de la primera rotación se le aplica una segunda rotación con abertura  $\beta$  y centro **O**, es decir **G** (**O**,  $\beta$ ) obteniendo como resultado la figura3 (**F3**).

**Notación:**  $R_{(O, \beta)} \circ R_{(O, \alpha)} (F1) = R_{(O, \beta)} (R_{(O, \alpha)} (F1)) = R_{(O, \beta)} (F2) = F3$

**Observación:** La composición de dos rotaciones con el mismo centro **F**(**O**,  $\alpha$ ) y **G**(**O**,  $\beta$ ), es otra rotación del mismo centro **O** cuyo ángulo de abertura es la suma de los ángulos anteriores, es decir la nueva rotación es **H**(**O**,  $\alpha + \beta$ ).

#### Caso 2:

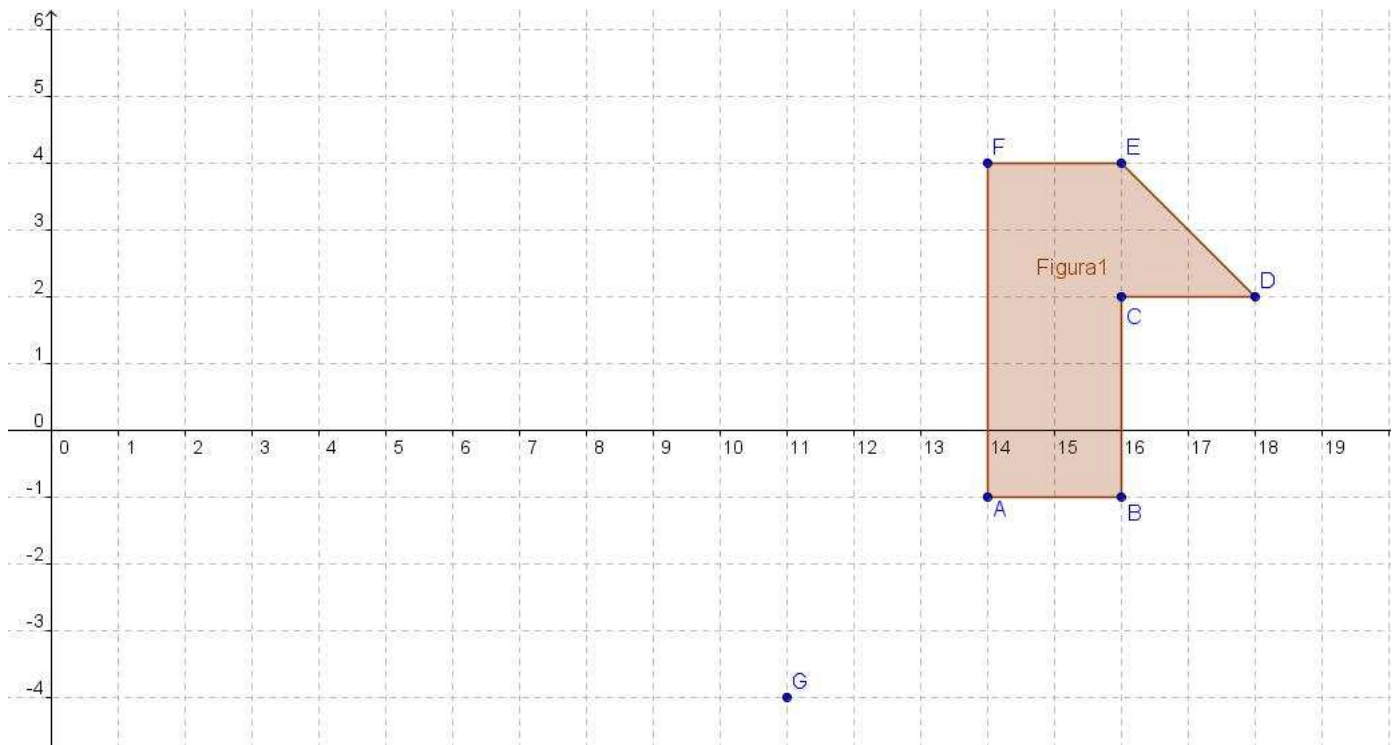
**Composición de dos Rotaciones de centros distintos (  $O \neq O'$  ):** La composición de dos (o más) rotaciones, de amplitudes  $\alpha$  y  $\beta$  y centros **O** y **O'**, sobre una figura 1 (**F1**), consiste en obtener la figura3 (**F3**), al aplicar la rotación con centro y abertura (**O**,  $\alpha$ ) a la figura1 (**F1**) obtenemos figura2 (**F2**), luego a la figura2 (**F2**)

aplicamos una segunda rotación con centro y abertura  $(O', \beta)$ , donde obtendremos la figura3 (F3).

**Notación:**  $R_{(O', \beta)} \circ R_{(O, \alpha)} (F1) = R_{(O', \beta)} (R_{(O, \alpha)} (F1)) = R_{(O', \beta)} (F2) = F3$

**Observación:** La composición de dos rotaciones con centro  $F(O, \alpha)$  y  $G(O', \beta)$ , es otra rotación.

### Ejercicio 1: (caso 1)



En el gráfico se muestra una Figura1.

- 1) Dada la figura, realiza una rotación con centro  $G=(11,-4)$  y abertura  $Alfa = 60^\circ$ , luego de la figura obtenida realiza una segunda rotación cuyo centro es el mismo, pero la nueva abertura es  $Beta=50^\circ$ .

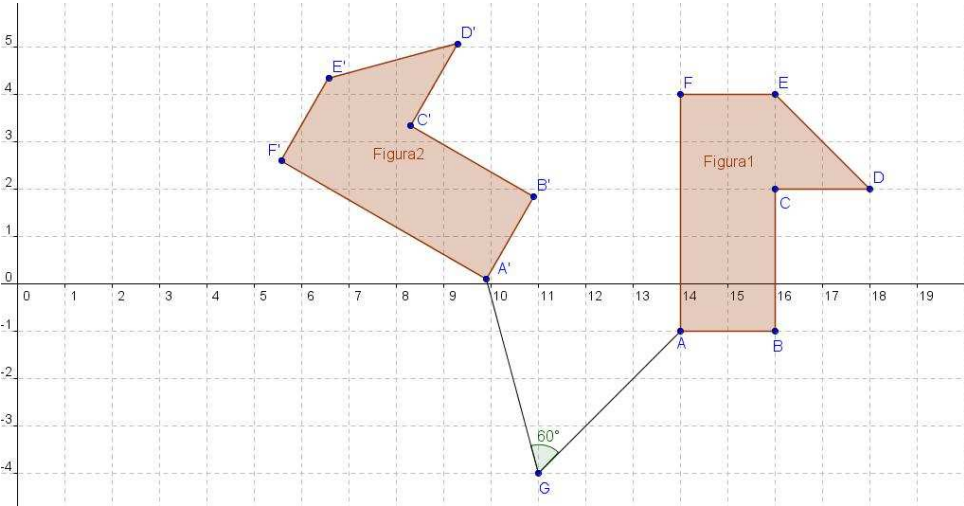
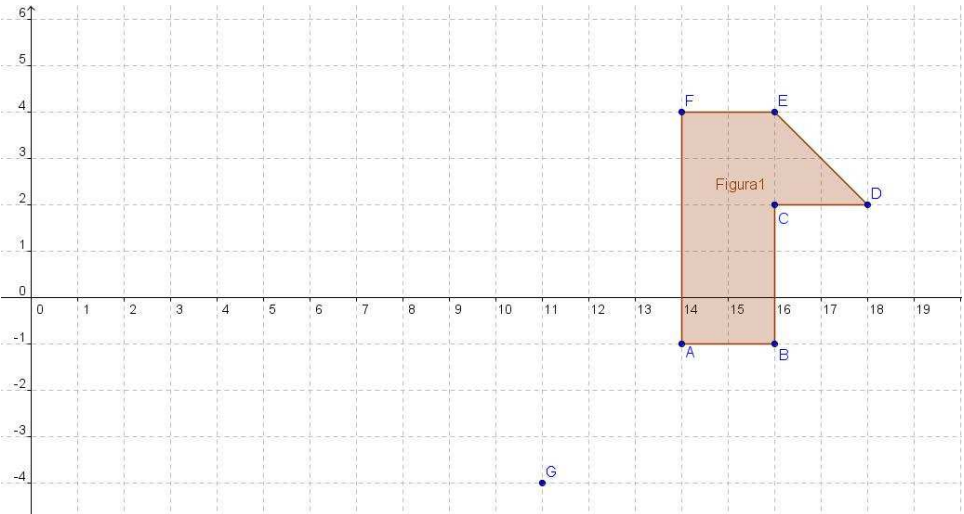
*Figura1: Obtenida de la primera rotación.*

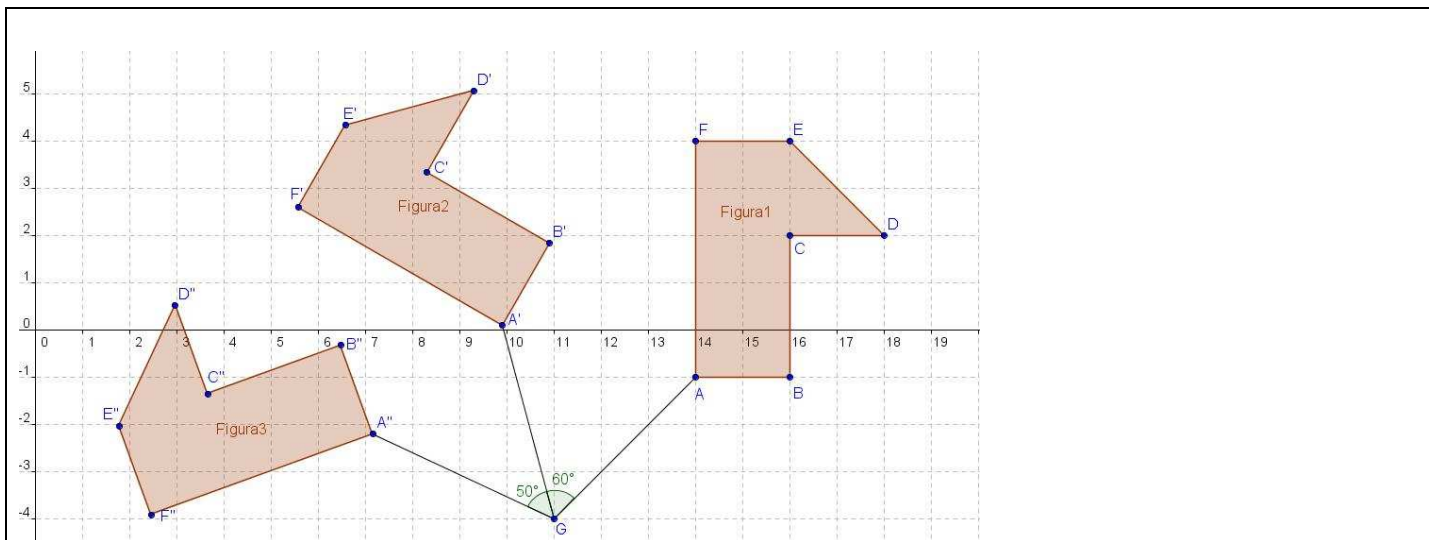
*Figura3: Obtenida de la segunda rotación.*

*Ahora responde:*

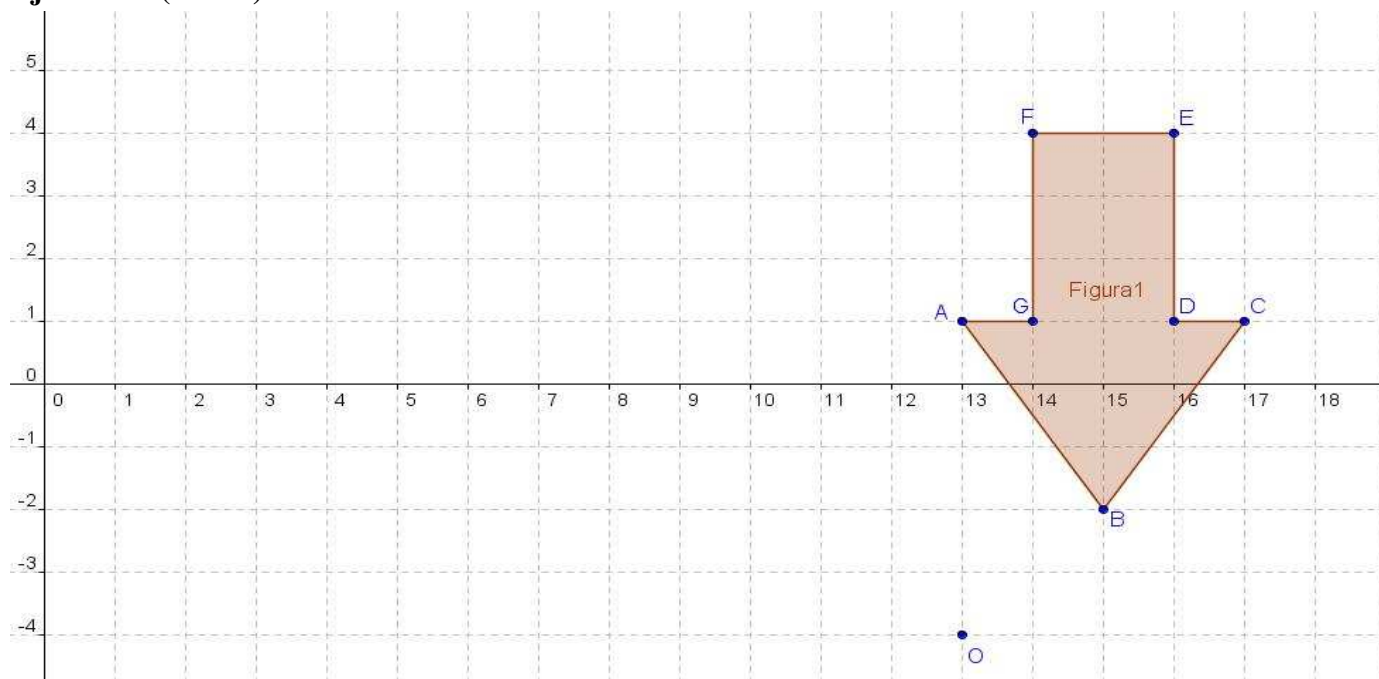
- b) Podemos llegar de la figura 1 a la figura 3 con una sola transformación. Si tu respuesta es sí, ¿Cual sería dicha transformación isométrica?
- b) Con respecto a los ángulos brindados ( $Alfa = 60^\circ$ ,  $Beta=50^\circ$ ), ¿Existirá alguna relación entre ellos y con el ángulo formado  $AGA$ ?

(Presentación en PPT)





**Ejercicio : ( caso 2 )**



En el gráfico se muestra una Figura1.

1) Dada la figura, realiza una rotación con centro  $O = (13, -4)$  y abertura  $\text{Alfa} = 70^\circ$ , luego de la figura obtenida realiza una segunda rotación cuyo centro  $O' = (6, -4)$  y abertura  $\text{Beta} = 90^\circ$

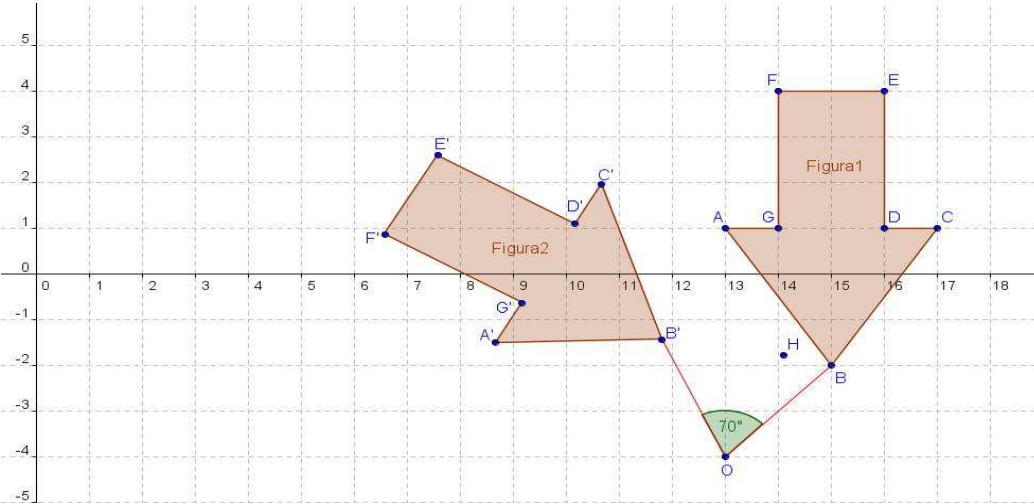
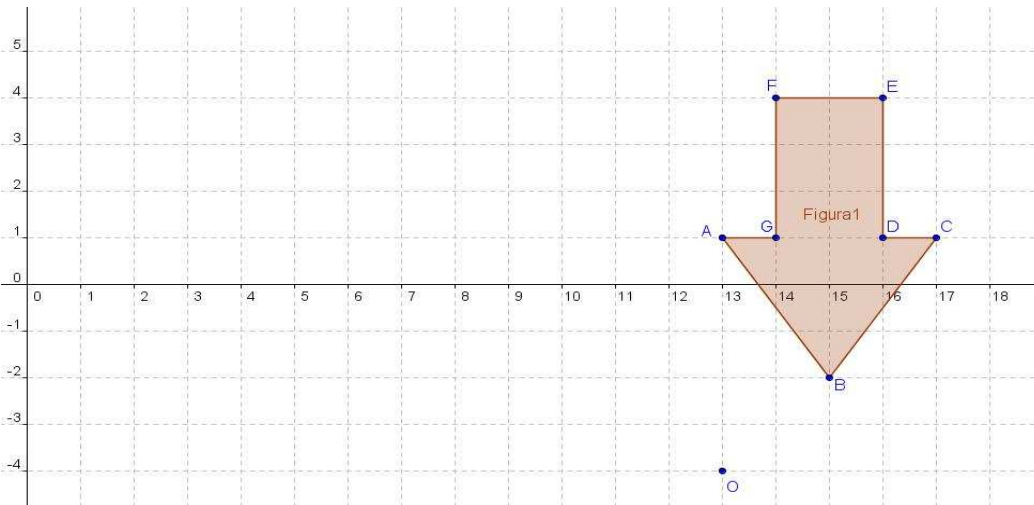
*Figura1: Obtenida de la primera rotación.*

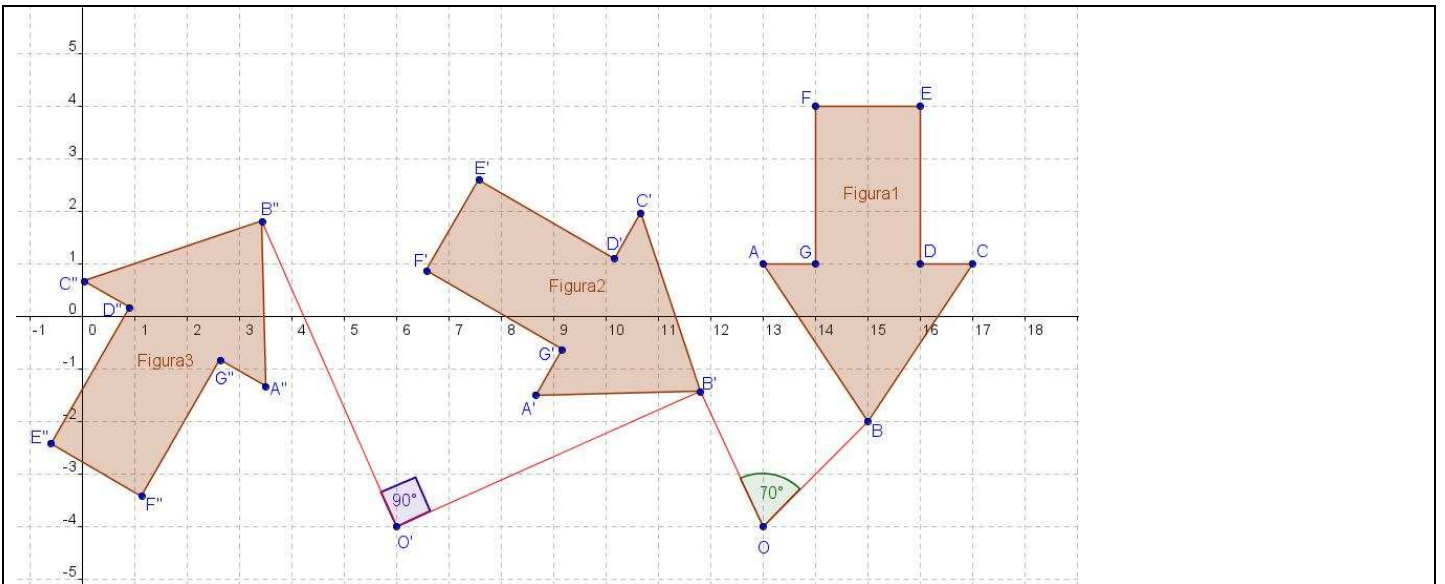
*Figura3: Obtenida de la segunda rotación.*

Ahora responde:

a) Podemos llegar de la figura 1 a la figura 3 con una sola transformación. Si tu respuesta es sí, ¿Cuál sería dicha transformación isométrica?

(Presentación en PPT)

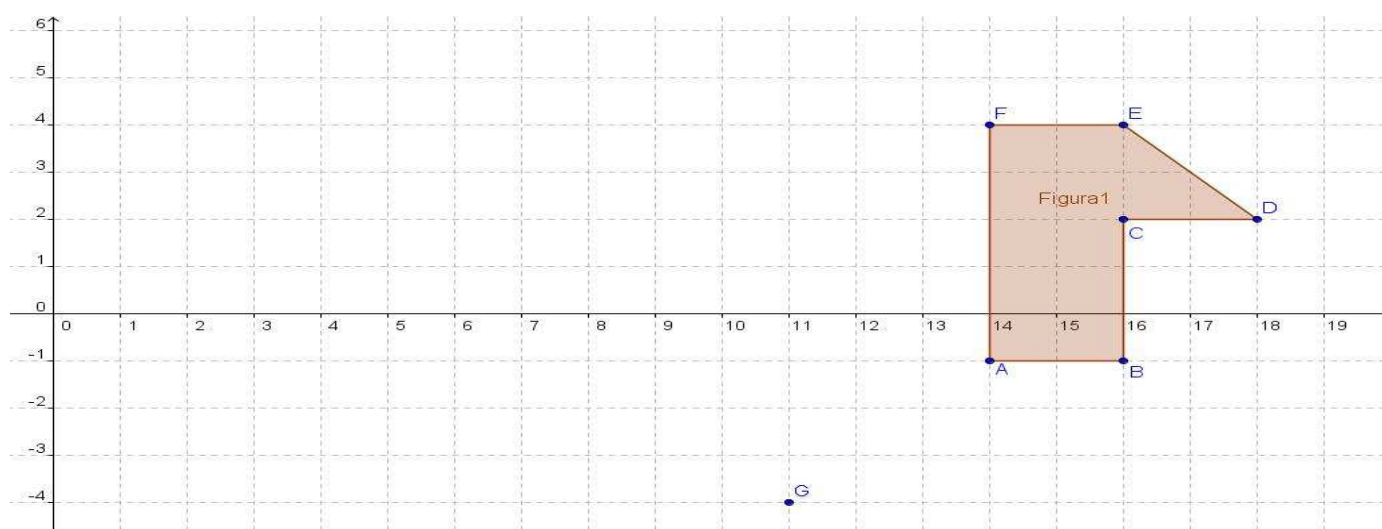




**Composición De Transformaciones Isométricas****Composición de Rotaciones:****Definición:**

La composición de dos (o más) rotaciones con un punto y un ángulo de amplitud  $\alpha$  sobre una figura1 (**F1**), consiste en obtener la figura3 (**F3**), al aplicar la rotación (con su respectivo punto y ángulo) a la figura1 (**F1**) obteniendo la figura2 (**F2**), luego ésta (**F2**) aplicamos una segunda rotación (con su respectivo punto y ángulo), donde obtendremos la figura3 (**F3**).

A continuación detallaremos distintos casos que se presentarán en las composiciones de Rotaciones Isométricas.

**Ejercicio Motivador 1:****Preguntas:**

3) Representa en el plano cartesiano. Luego, responde.

Dada la figura, realiza una rotación con centro  $G = (11, -4)$  y ángulo  $\alpha = 60^\circ$ , luego de la figura obtenida realiza una segunda rotación cuyo centro es el mismo, pero ahora con ángulo  $\beta = 50^\circ$ .

*Figura1: Obtenida de la primera rotación.*

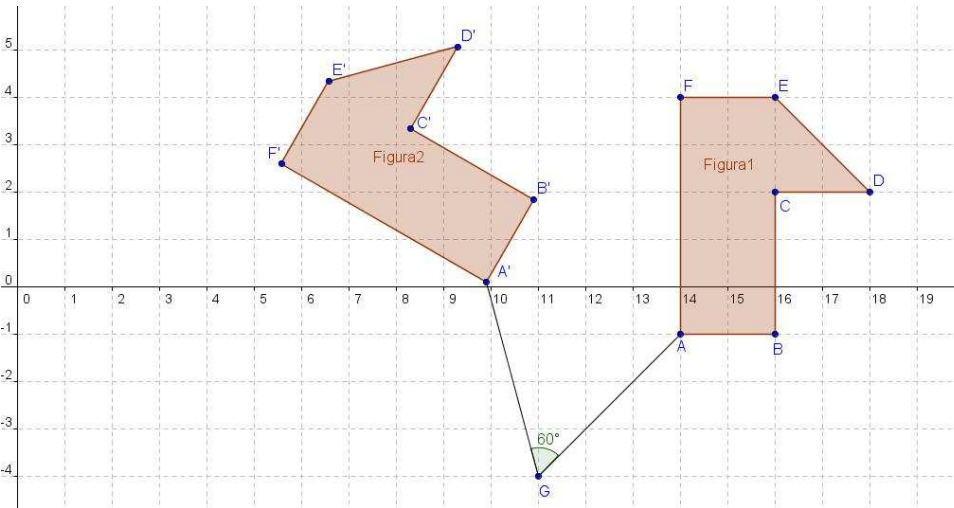
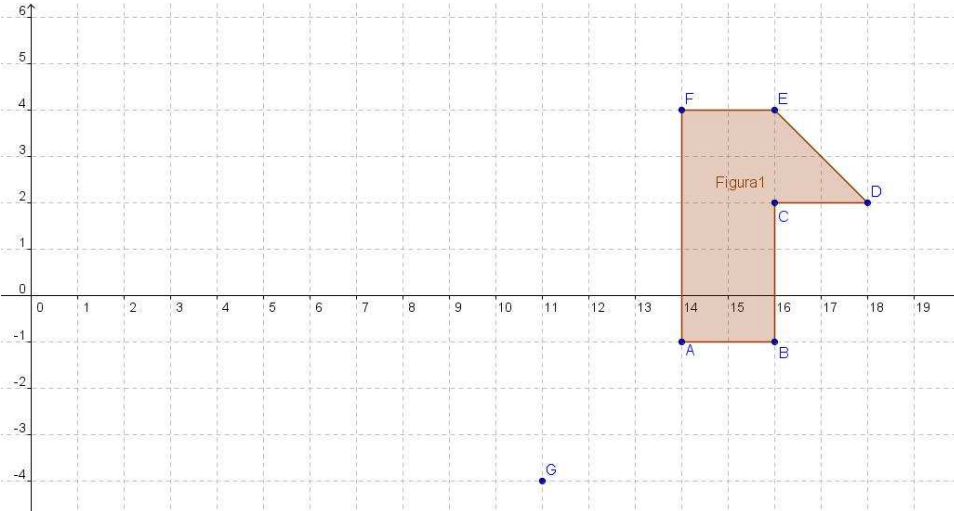
*Figura3: Obtenida de la segunda rotación.*

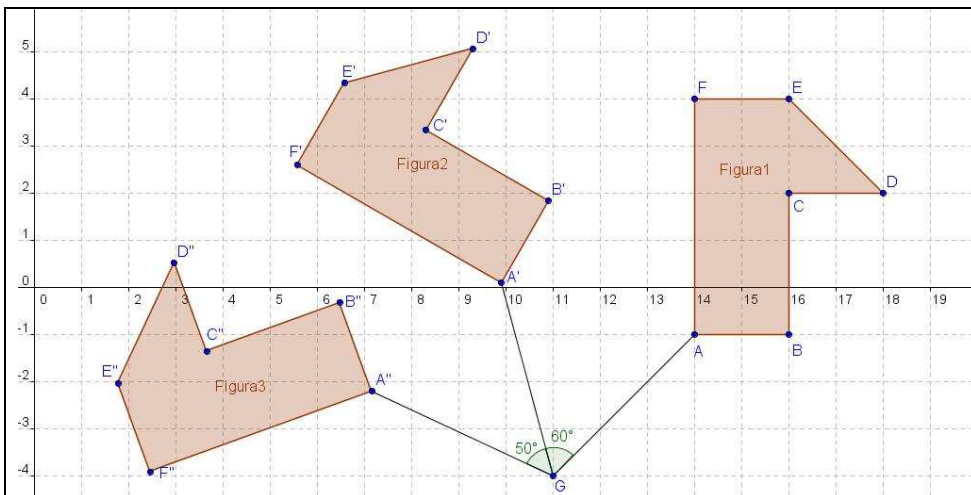
Ahora responde:

- c) Podemos llegar de la figura 1 a la figura 3 con una sola transformación isométrica. Si tu respuesta es sí, ¿Cual sería dicha transformación isométrica?

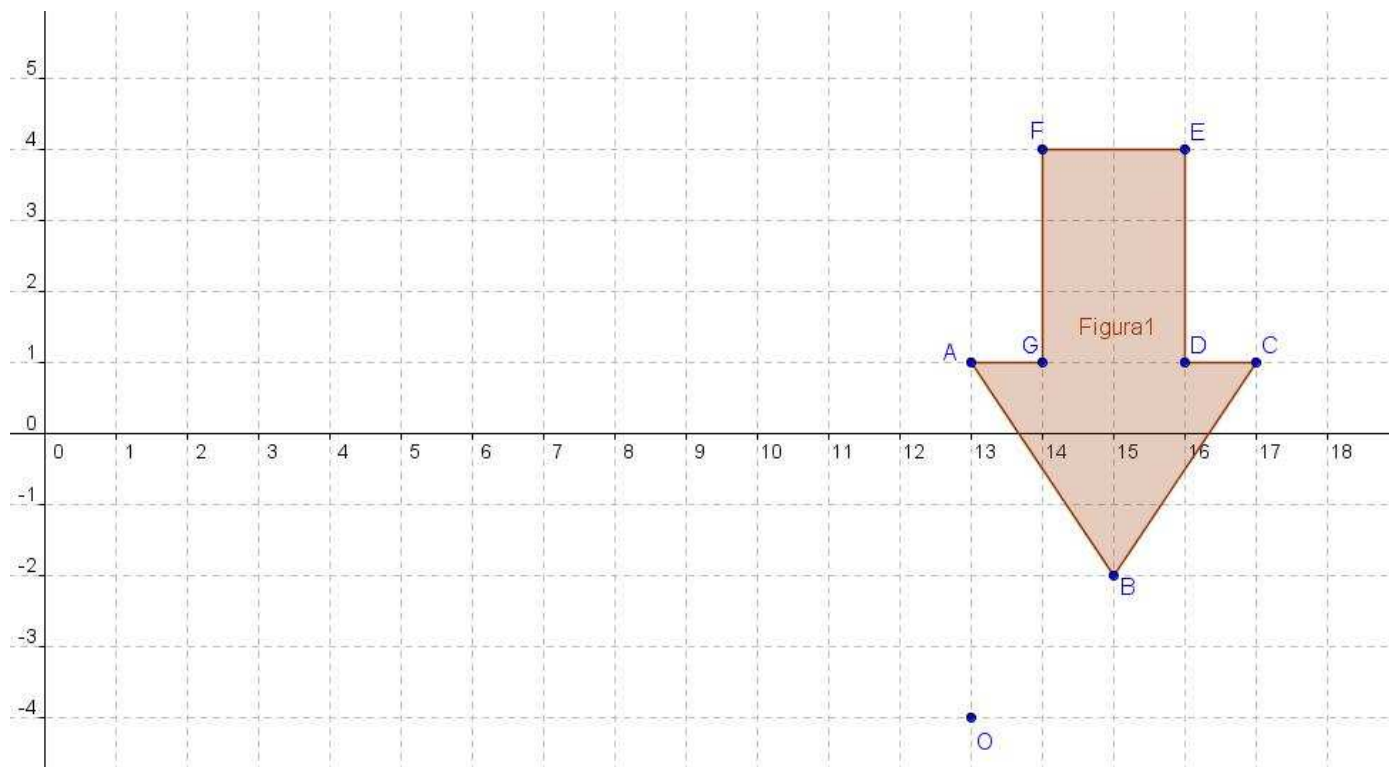
b) Con respecto a los ángulos brindados ( $\alpha = 60^\circ$ ,  $\beta = 50^\circ$ ), ¿Existirá alguna relación entre ellos y el ángulo formado AGA”?

(Presentación en PPT)





**Ejercicio Motivador 2:**



## Preguntas:

4) Representa en el plano cartesiano. Luego, responde.

g) Al polígono formado por los vértices A (13,1), B(15,-2), C(17,1),D(16,1),E(16,4),F(14,4), G(14,1), se le aplica una Rotación de ángulo  $\alpha = 70^\circ$  y centro  $O(13,-3)$ , obteniendo  $A'B'C'D'E'F'G'$  luego a la figura resultante, se le aplica una segunda Rotación de ángulo  $\beta = 90^\circ$  de centro  $O' = (6,-4)$ , obteniendo  $A''B''C''D''E''F''G''$ . ¿Cuáles son las coordenadas de los vértices del polígono luego de las dos rotaciones?

$$A''=( \quad , \quad ) \quad B''=( \quad , \quad ) \quad C''=( \quad , \quad ) \quad D''=( \quad , \quad ) \quad E''=( \quad , \quad ) \quad F''=( \quad , \quad ) \quad G''=( \quad , \quad )$$

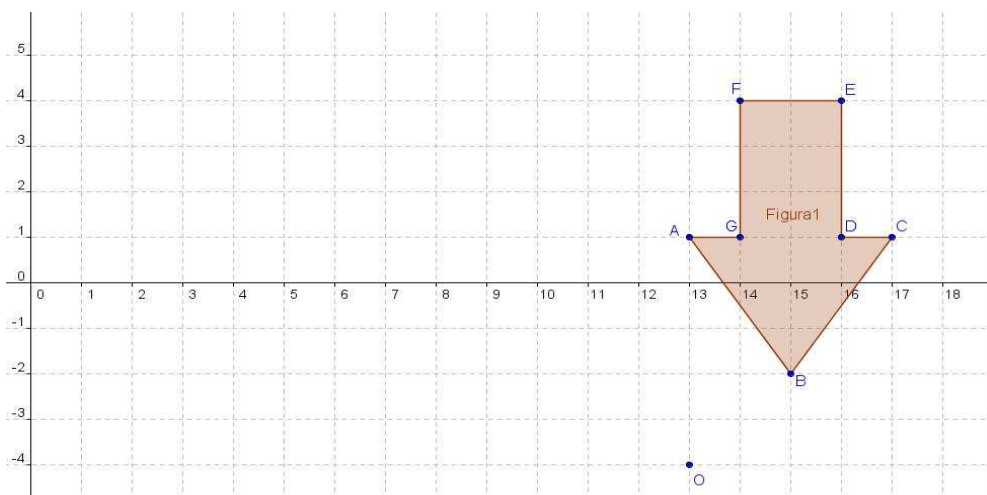
h) Representa gráficamente la situación.

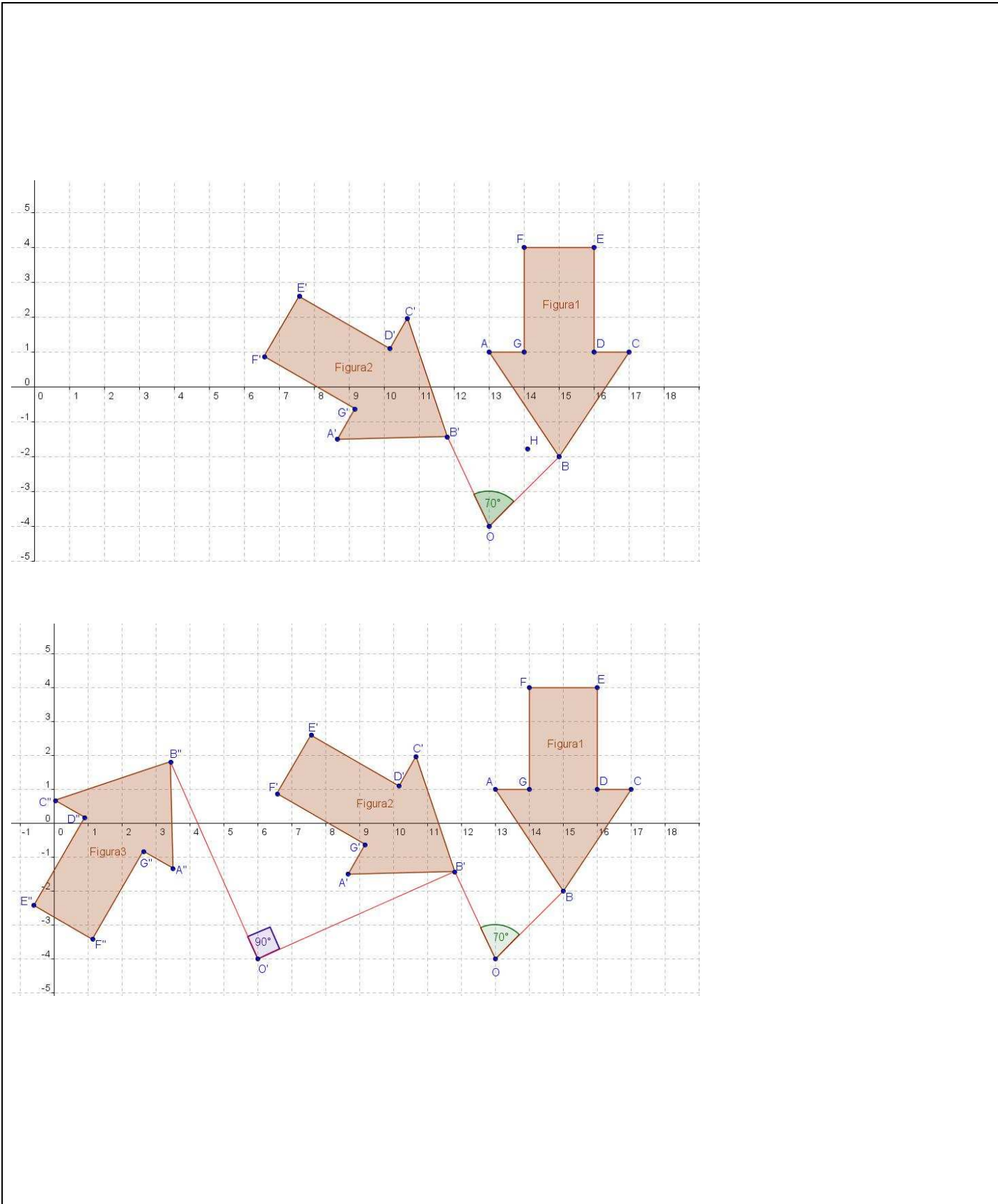
i) ¿Qué transformación isométrica se encuentra presente de la Figura1 a Figura 3, en caso que exista?

*Figura1: Obtenida de la primera rotación, Figura3: Obtenida de la segunda rotación*

j) Realiza el proceso anterior, pero ésta vez haz primero la rotación a partir de la Figura 3 en torno al punto  $O' = (6,-4)$ , y luego de la figura que obtienes haz la rotación en torno al punto  $O(13,-3)$ . Compara y concluye.

## (Presentación en PPT)





## Formalización

### Caso 2:

**Composición de dos Rotaciones de centros distintos ( $O \neq O'$ ):** La composición de dos (o más) rotaciones , de amplitudes  $\alpha$  y  $\beta$  y centros  $O$  y  $O'$  ,sobre una figura 1 (**F1**), consiste en obtener la figura3 (**F3**), al aplicar la rotación con centro y abertura ( $O, \alpha$ ) a la figura1 (**F1**) obtenemos figura2 (**F2**), luego a la figura2 (**F2**) aplicamos una segunda rotación con centro y abertura ( $O', \beta$ ) , donde obtendremos la figura3 (**F3**).

$$\text{Notación: } R_{(O', \beta)} \circ R_{(O, \alpha)} (F1) = R_{(O', \beta)} (R_{(O, \alpha)} (F1)) = R_{(O', \beta)} (F2) = F3$$

**Observación:** La composición de dos rotaciones con centro  $F(O, \alpha)$  y  $G(O', \beta)$ , es otra rotación.

## D.1.4 Clase n°4. “Rotación compuesta con traslación.”

### Objetivos:

- 1) Identificar la forma de la gráfica de una composición de una rotación seguida de una traslación y la situación inversa.
- 2) Identificar la orientación del centro, ángulos y vectores presentes en la grafica de cada rotación y traslación.

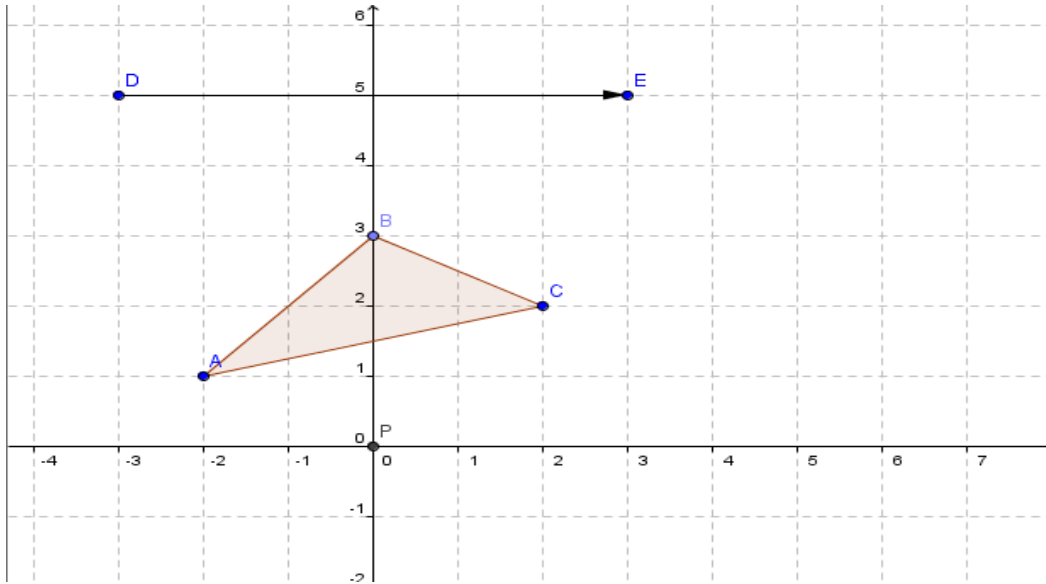
**Organización:** Responde en grupos de 2 o 3 personas las siguientes actividades.

**Tiempo:** 60 min 140

<i>Cuarta Clase</i>	<i>Sin Software</i>
<b><u>Composición De Transformaciones Isométricas</u></b>	
<b><u>Rotación compuesta de una traslación</u></b>	
<b><u>Definición:</u></b>	
La composición de una rotación con una traslación consiste en que dada una figura F1 a esta se le aplique una traslación con un cierto vector v con lo cual se obtendrá una nueva figura (F2) a la que finalmente se le aplicara una rotación en un punto P y con un ángulo (alfa) obteniendo una figura resultante F3	
<b>Notación: <math>R_{(P, \alpha)} \circ T_v (F1) = R_{(P, \alpha)} (T_v (F1)) = R_{(P, \alpha)} (F2) = F3</math></b>	

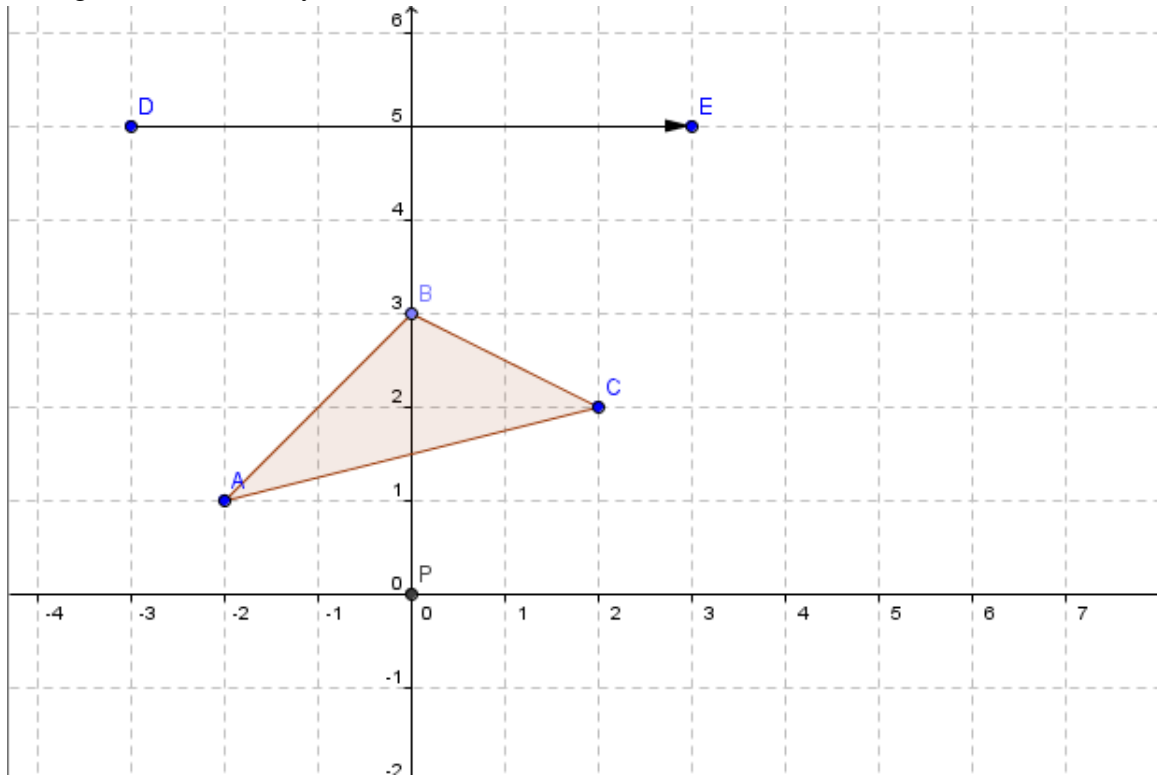
### Ejercicio 1:

Dado el triángulo ABC y el vector DE, realiza una rotación con centro  $P = (0,0)$  y ángulo  $\alpha = 45^\circ$ , luego a la figura resultante aplícale una traslación con vector DE.



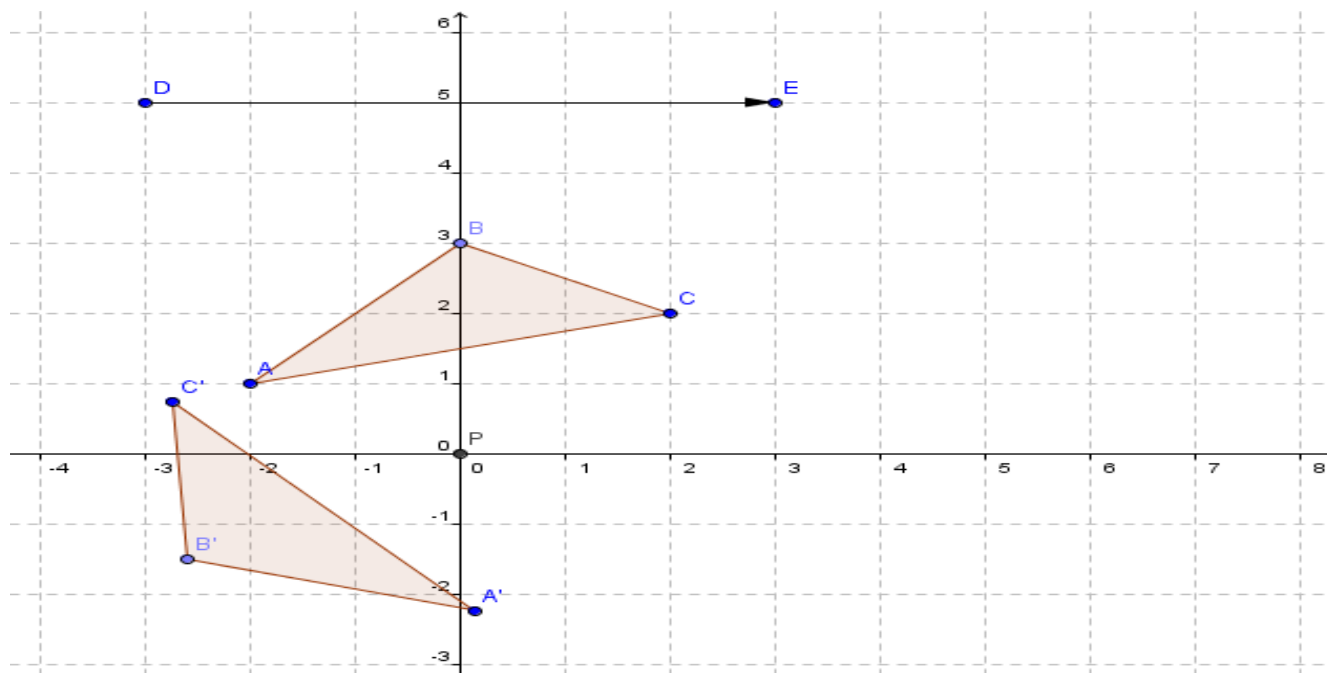
### SOLUCION PPT

Se tiene la figura inicial ABC y el vector DE



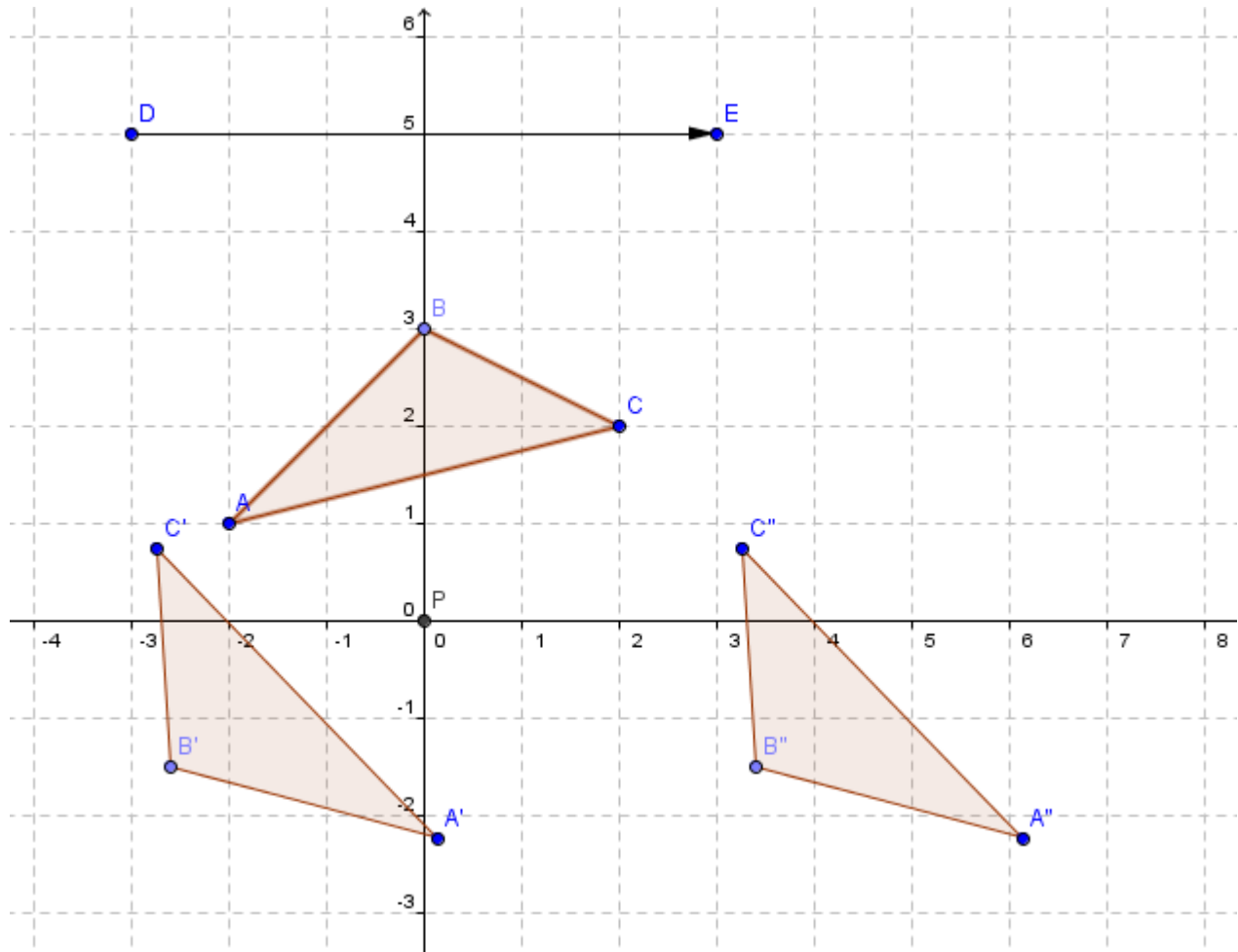
**Paso 1:**

A la figura 1 ABC se le aplica una rotación con centro en el punto  $P=(0,0)$  y ángulo  $\alpha = 45^\circ$  obteniendo como resultado la figura 2 de coordenadas  $A'B'C'$



**Paso 2:**

Luego a la figura resultante  $A'B'C'$  se le aplica una traslación de magnitud vector  $DE$  obteniendo como resultado la figura  $A''B''C''$

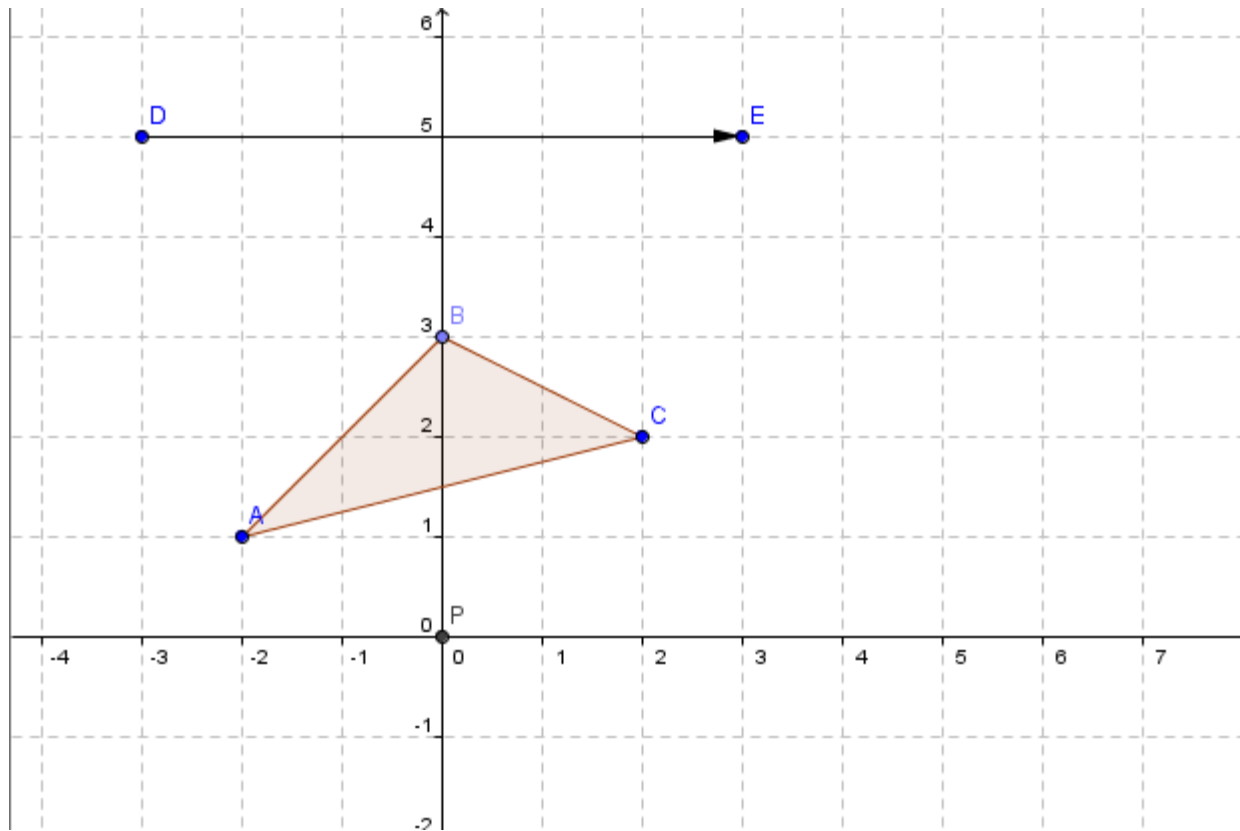


**Observación:**

Al realizar la composición de una rotación de centro  $P$  y ángulo  $\alpha$  con una traslación de vector  $v$  a una figura dada resulta ser una sola rotación de centro  $O$  y ángulo  $\beta$

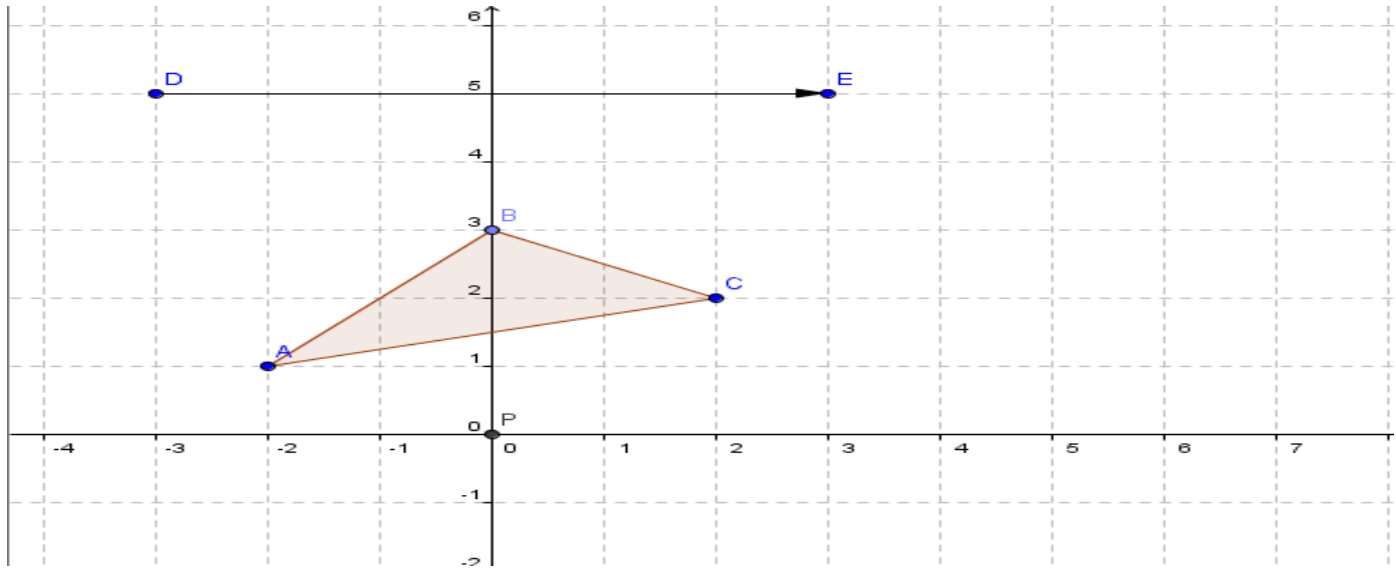
### Ejercicio 2:

Dado el triángulo ABC y el vector DE, realiza una traslación con vector DE, luego a la figura resultante aplícale una rotación con centro  $P = (0,0)$  y ángulo  $\alpha = 45^\circ$



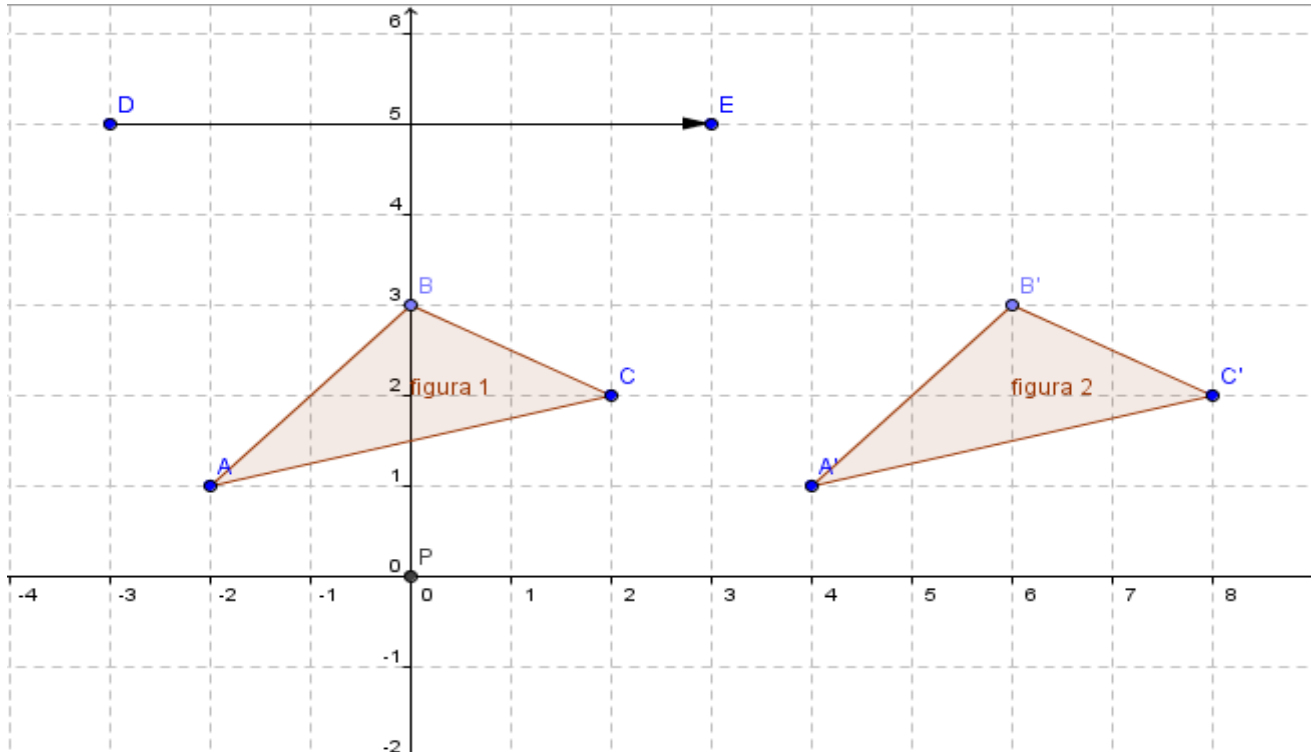
## SOLUCION PPT

Se tiene la figura inicial ABC y el vector DE



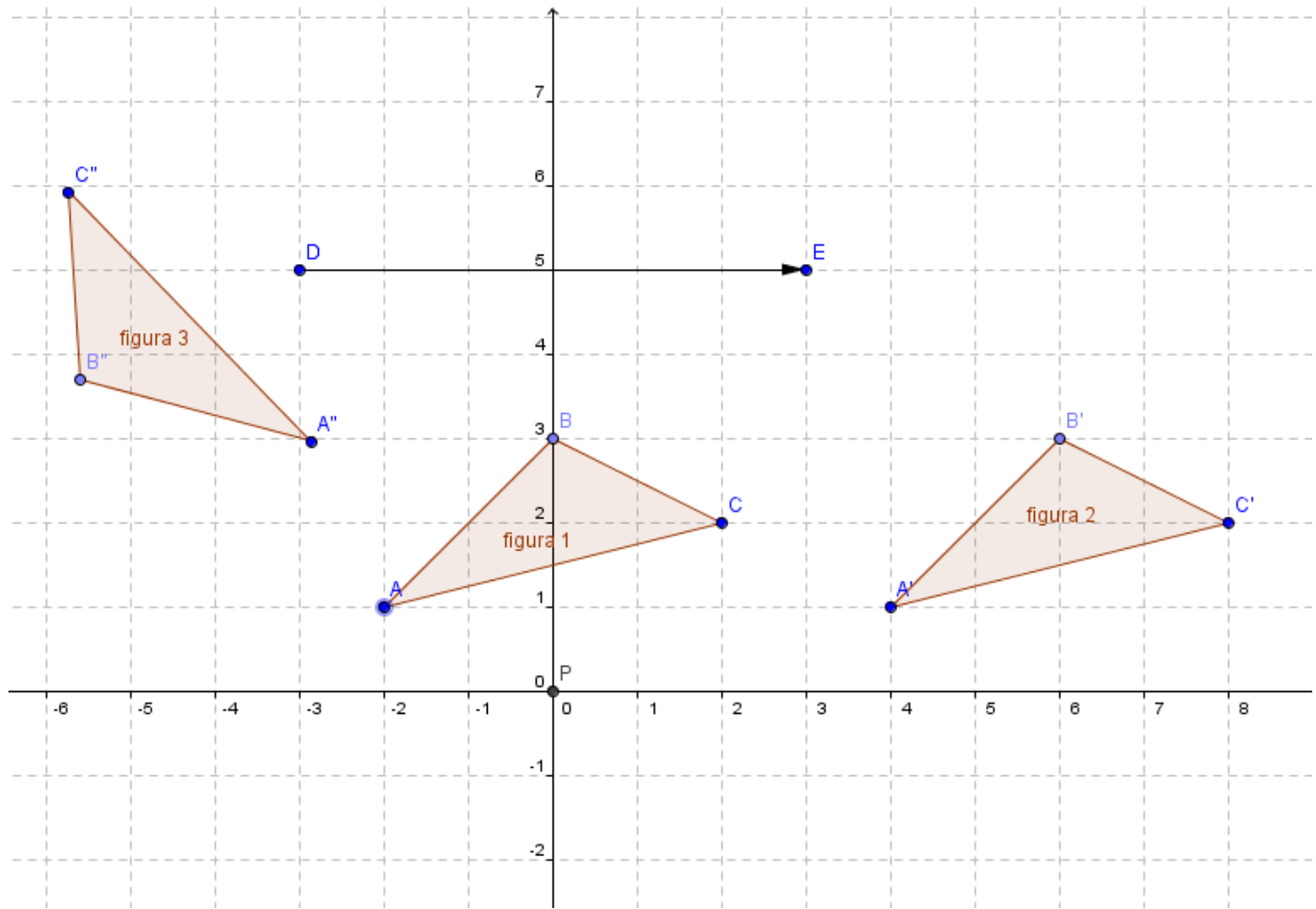
### Paso 1:

Al triángulo ABC se le aplica una traslación de vector DE obteniendo como resultado la Figura 2 de coordenadas A'B'C'



**Paso 2:**

A la figura 2 de coordenadas A'B'C' se le aplica finalmente una rotación con centro en P=(0,0) y ángulo  $\alpha = 45^\circ$



Composición de Transformaciones IsométricasRotación compuesta de una traslaciónDefinición:

La composición de una rotación con una traslación consiste en que dada una figura F1 a esta se le aplique una traslación con un cierto vector  $v$  con lo cual se obtendrá una nueva figura (F2) a la que finalmente se le aplicará una rotación en un punto P y con un ángulo dado  $\alpha$  obteniendo la figura resultante F3

<b>Notación: <math>R_{(P, \alpha)} \circ T_v (F1) = R_{(P, \alpha)} (T_v (F1)) = R_{(P, \alpha)} (F2) = F3</math></b>
---

Ejercicio 1:

Dada la figura ABCD con A=(-1,2), B=(0,4), C=(2,3) y D=(1,1 ) Determina las coordenadas de la figura obtenida luego de aplicar una rotación con centro en E= (-2,2) y ángulo  $\alpha =90^\circ$  y una traslación con vector

$\overrightarrow{FG}$  donde F=(7,4) y G=(15,4).

Rota y luego traslada animada

Ejercicio 2:

Dada la figura ABCD con A=(-1,2), B=(0,4), C=(2,3) y D=(1,1 ) Determina las coordenadas de la figura obtenida luego de aplicar una traslación con vector  $\overrightarrow{FG}$  donde F=(7,4) y G=(15,4) y una rotación con centro en E= (-2,2) y ángulo  $\alpha =90^\circ$

Traslada y luego rota animada

Preguntas:

- 1- ¿Mediante que movimiento puedo obtener en SOLO 1 PASO la figura resultante F3?
- 2- Compara las coordenadas de A, B, C y D en la figura resultante del primer ejercicio con las obtenidas en el segundo ejercicio.  
¿Es lo mismo realizar una traslación seguida de una rotación que aplicar una rotación seguida de una traslación?

Complementario: La animación geogebra (zorrito)

## D.1.5 Clase n°5. “*Simetría compuesta con traslación.*”.

### **Objetivos:**

- 1) Identificar la forma de la gráfica de una composición de una simetría seguida de una traslación y la situación contraria.
- 2) Identificar la orientación de los ejes, punto de simetría y vectores presentes en la grafica de cada rotación.

**Organización:** Responde en grupos de 2 o 3 personas las siguientes actividades.

**Tiempo:** 60 min 140

*Quinta Clase*

*Sin Software*

### **Composición De Transformaciones Isométricas**

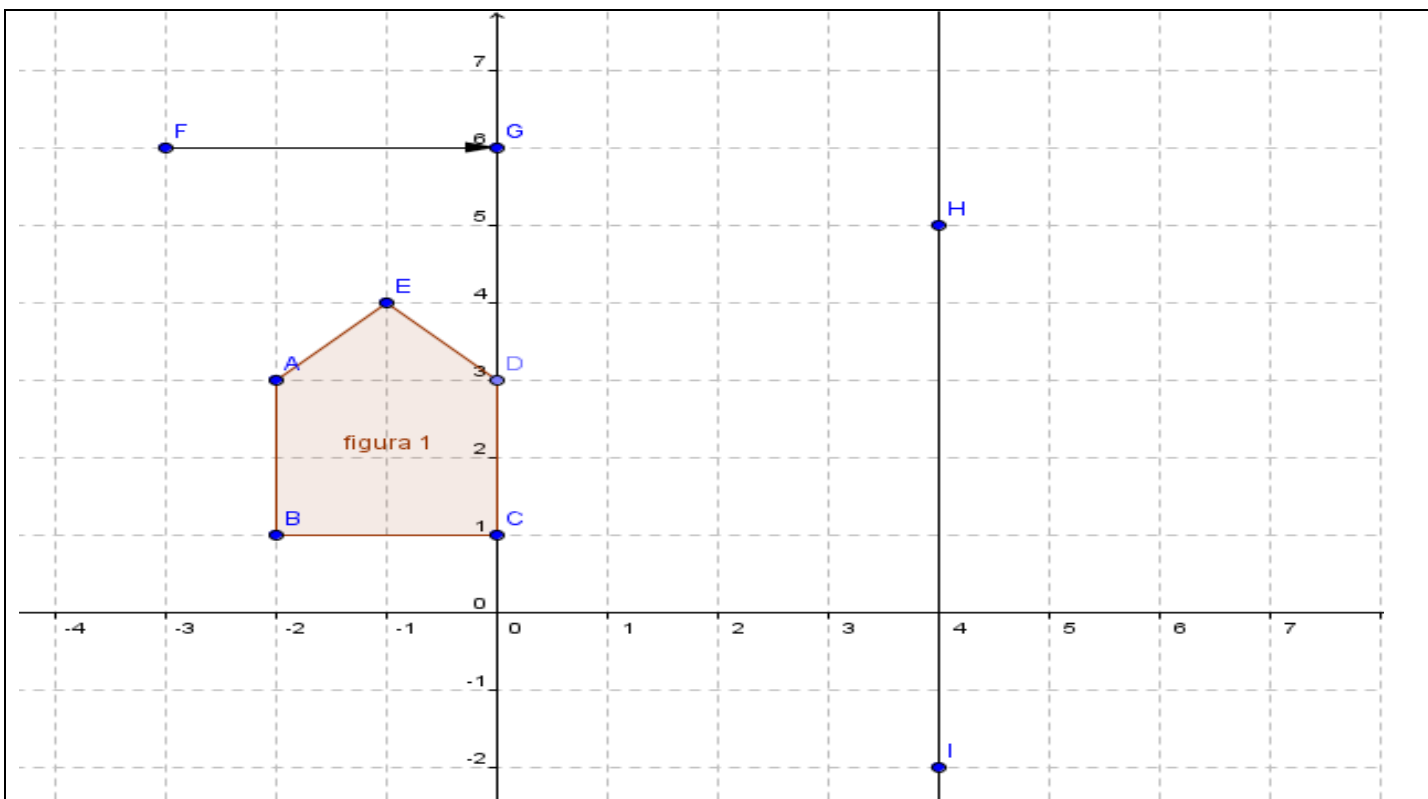
#### **Simetría compuesta con traslación:**

#### **Definición:**

La composición de una simetría con una traslación consiste en que dada una figura F1 a esta se le aplique una traslación con cierto vector  $v$  con lo cual se obtendrá una nueva figura (F2) a la que finalmente se le aplicara una simetría con un cierto eje (recta o punto) obteniendo una figura resultante F3

#### **Ejercicio 1**

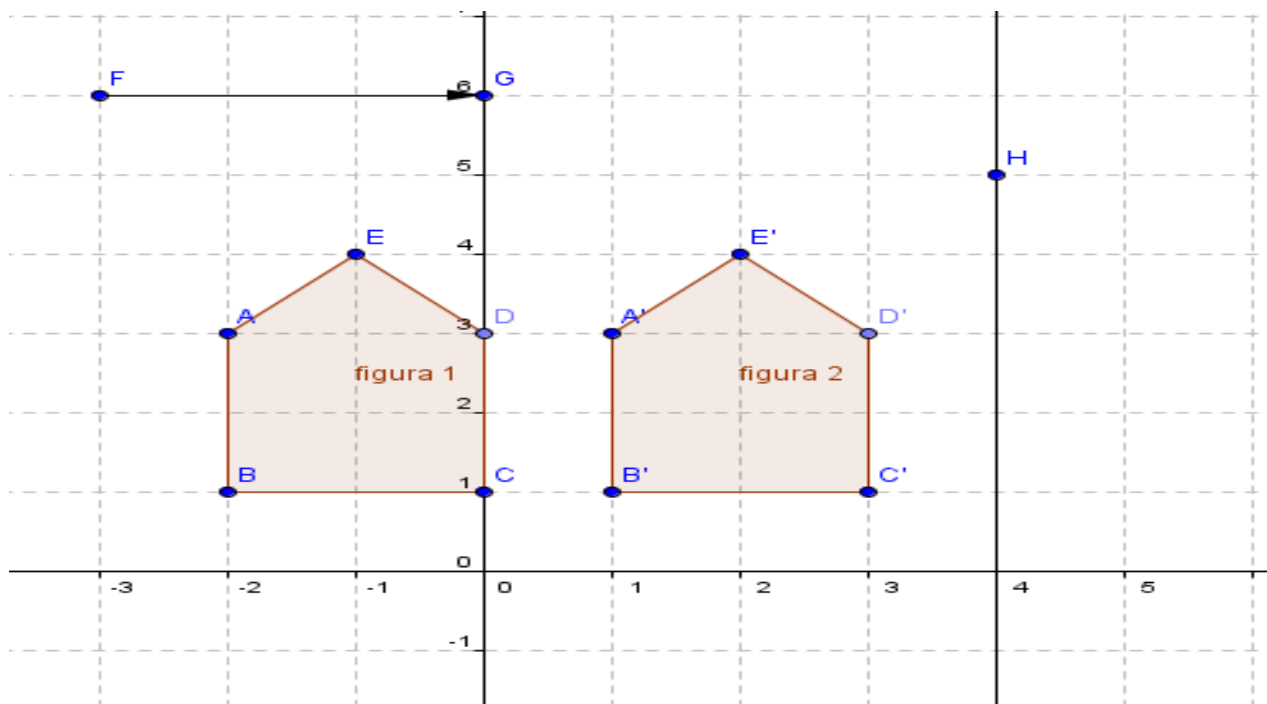
Dada la figura ABCDE realiza una traslación con vector FG, luego a la figura resultante aplícale una simetría respecto al eje de simetría  $x=4$ .



## Solución PPT

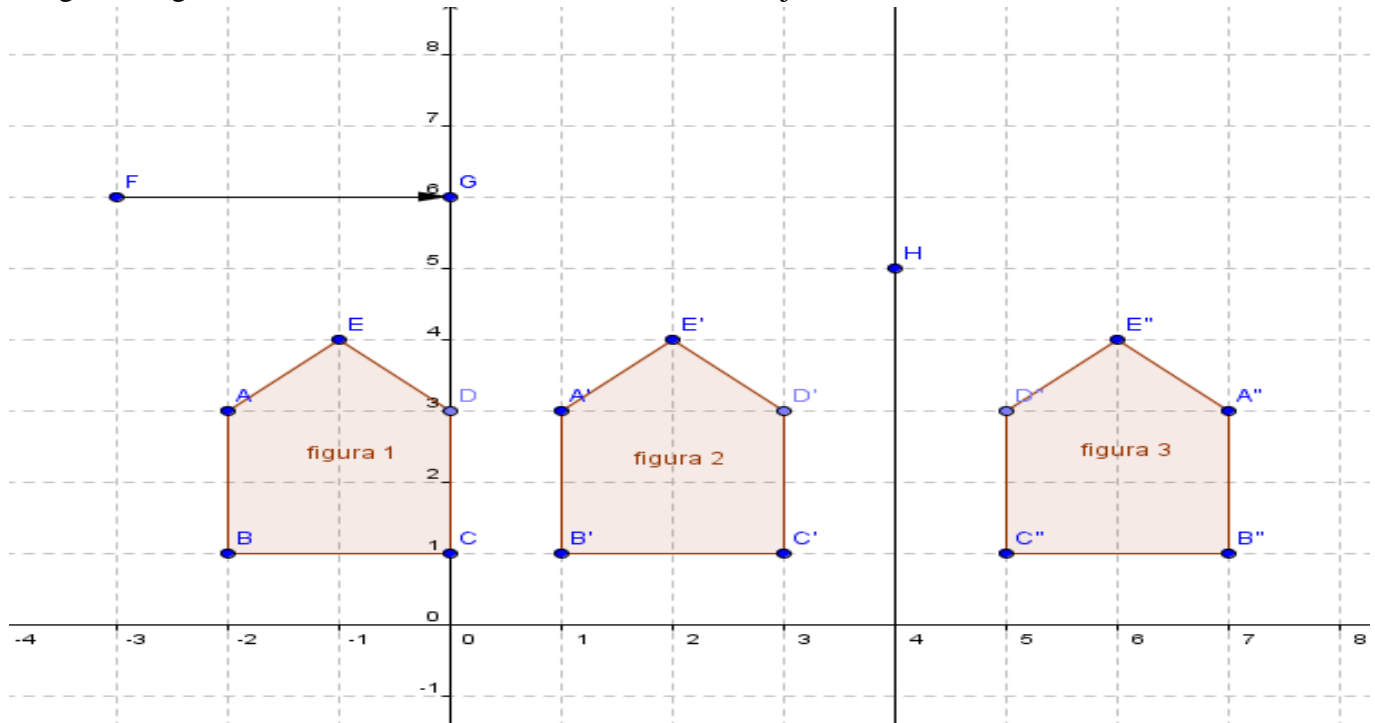
### Paso 1:

Se tiene la figura ABCDE, a ésta se le aplica una traslación de vector  $\vec{FG}$  obteniendo una nueva figura de coordenadas  $A'B'C'D'E'$



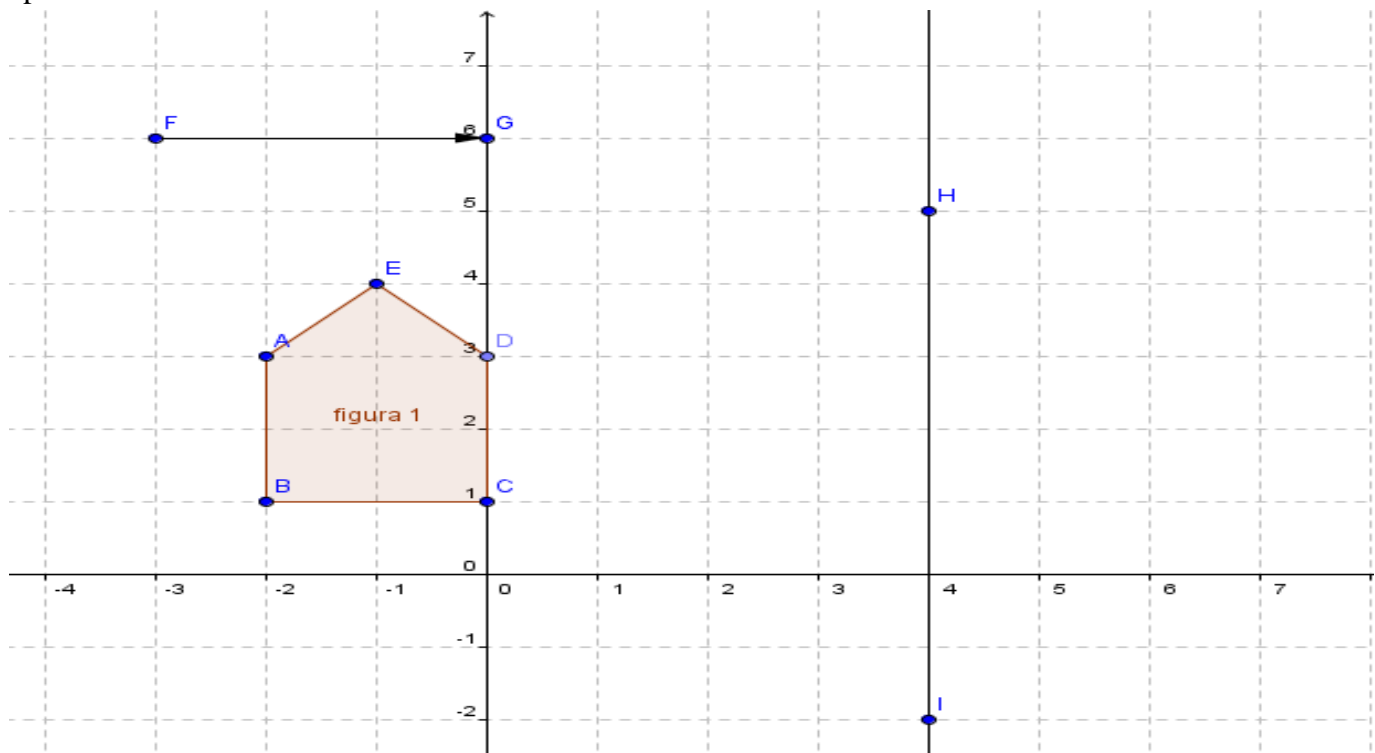
## Paso 2:

Luego a la figura A'B'C'D'E' se le realiza una simetría de eje  $x=4$



## Ejercicio 2: (Traslación compuesta con simetría)

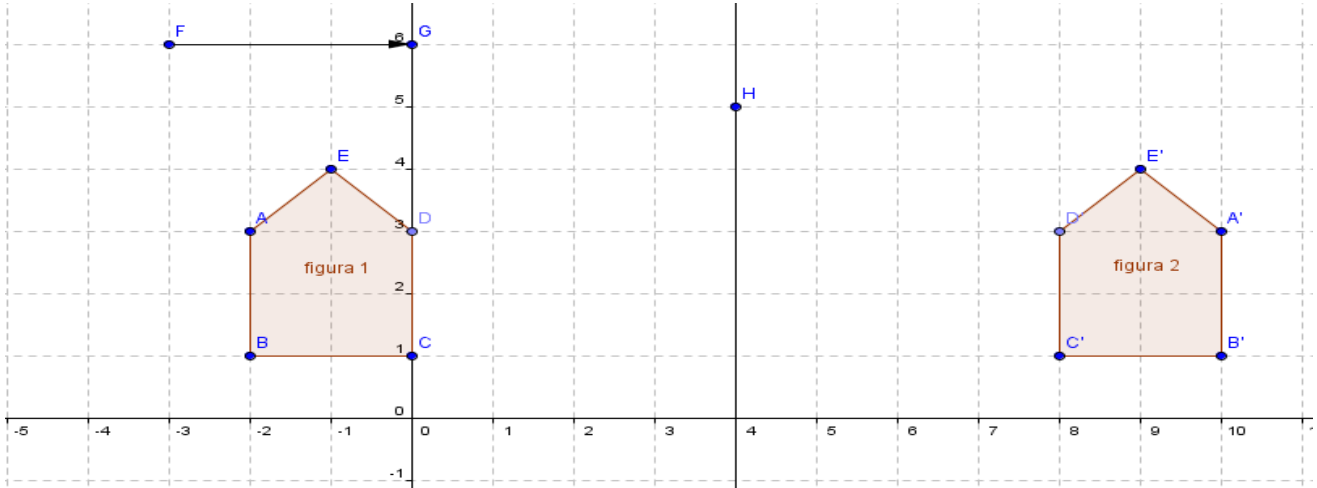
Dada la figura ABCDE realízale una simetría respecto al eje de simetría  $x=4$  luego a la figura resultante aplícale una traslación con vector  $\vec{FG}$ .



## SOLUCION PPT

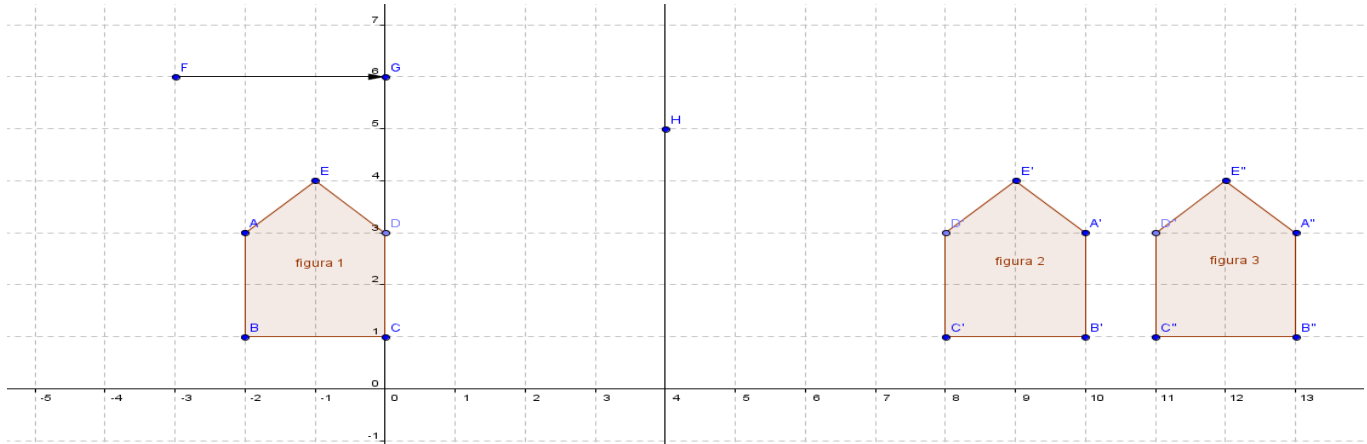
### Paso 1:

A la figura dada se le aplica una simetría con eje  $x=4$  obteniendo una nueva figura  $A'B'C'D'E'$



### Paso 2:

Luego a la figura 2 obtenida se le aplica una traslación de vector  $\vec{FG}$ , obteniendo como resultado la figura 3

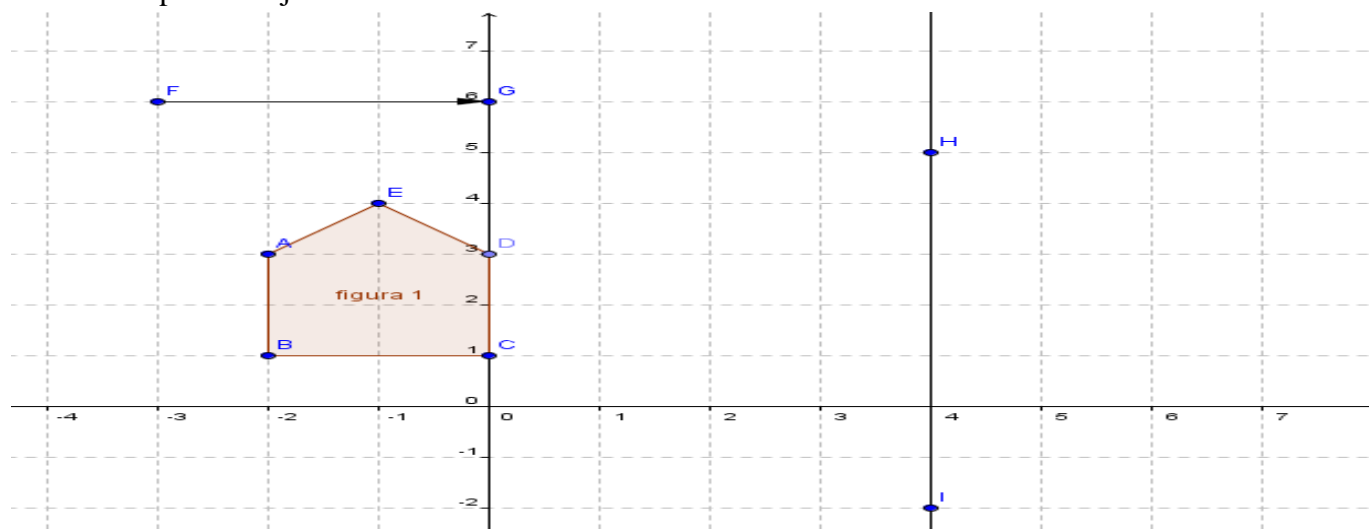


**Composición De Transformaciones Isométricas****Simetría compuesta con traslación:****Definición:**

La composición de una simetría con una traslación consiste en que dada una figura F1 a esta se le aplique una traslación con cierto vector  $v$  con lo cual se obtendrá una nueva figura (F2) a la que finalmente se le aplicará una simetría con un cierto eje (recta o punto) obteniendo una figura resultante F3.

**Ejercicio 1:**

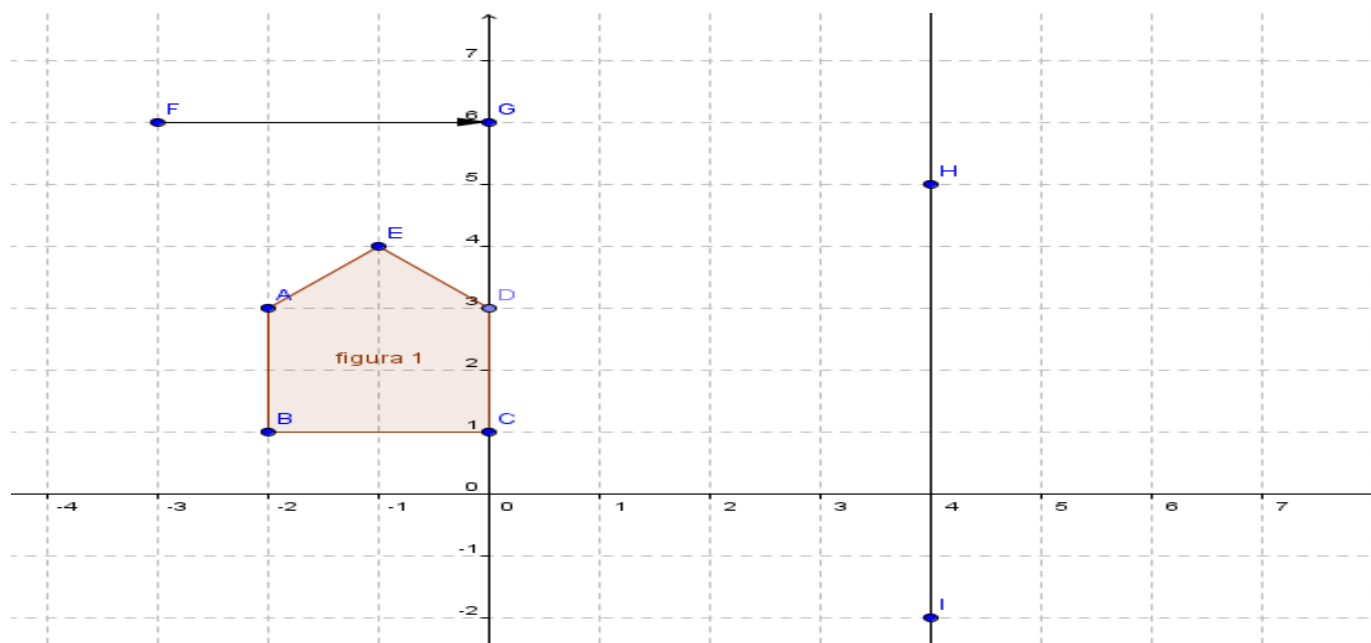
Dada la figura ABCDE realízale una traslación con vector FG, luego a la figura resultante aplícale una simetría respecto al eje de simetría  $x=4$ .



Traslada luego simetría

**Ejercicio 2: (Traslación compuesta con simetría)**

Dada la figura ABCDE realízale una simetría respecto al eje de simetría  $x=4$  luego a la figura resultante aplícale una traslación con vector FG.



Simetría luego traslada

1. ¿Mediante que movimiento puedo obtener en SOLO 1 PASO la figura resultante F3?
2. Compara las coordenadas de A, B, C y D en la figura resultante del primer ejercicio con las obtenidas en el segundo ejercicio. ¿Es lo mismo realizar una simetría seguida de una traslación que aplicar una traslación seguida de una simetría?

## D.1.6 Clase n°6. “*Simetría compuesta con una rotación.*”.

### Objetivos:

- 1) Identificar la forma de la gráfica de una composición de una simetría seguida de una rotación y la situación contraria.
- 2) Identificar la orientación del eje de simetría, centro y ángulos presentes en la gráfica de cada composición.

**Organización:** Responde en grupos de 2 o 3 personas las siguientes actividades.

**Tiempo:** 60 min 140

*Sexta Clase*

*Sin Software*

### Composición De Transformaciones Isométricas

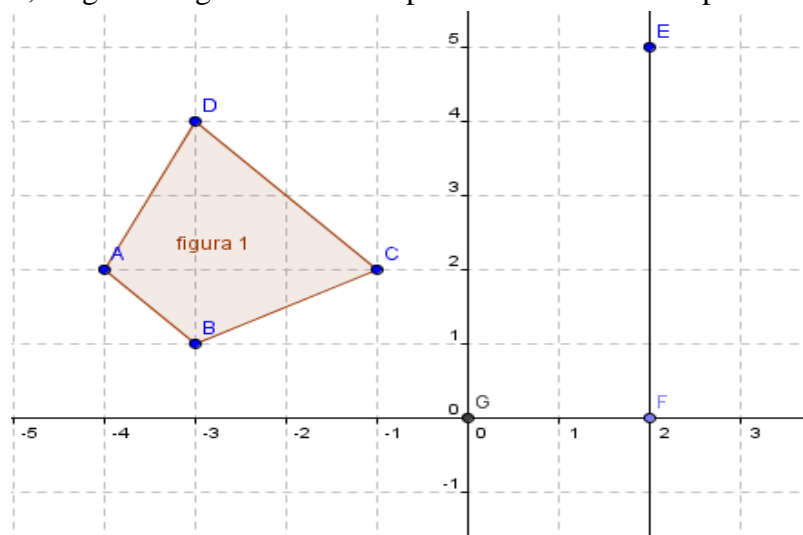
#### *Simetría compuesta con rotación :*

#### *Definición:*

La composición de una simetría con una rotación consiste en que dada una figura F1 a esta se le aplique una rotación con cierto ángulo  $\alpha$  y centro  $(x,y)$  con lo cual se obtendrá una nueva figura (F2) a la que finalmente se le aplicara una simetría con un cierto eje (recta o punto) obteniendo una figura resultante F3

### Ejercicio 1

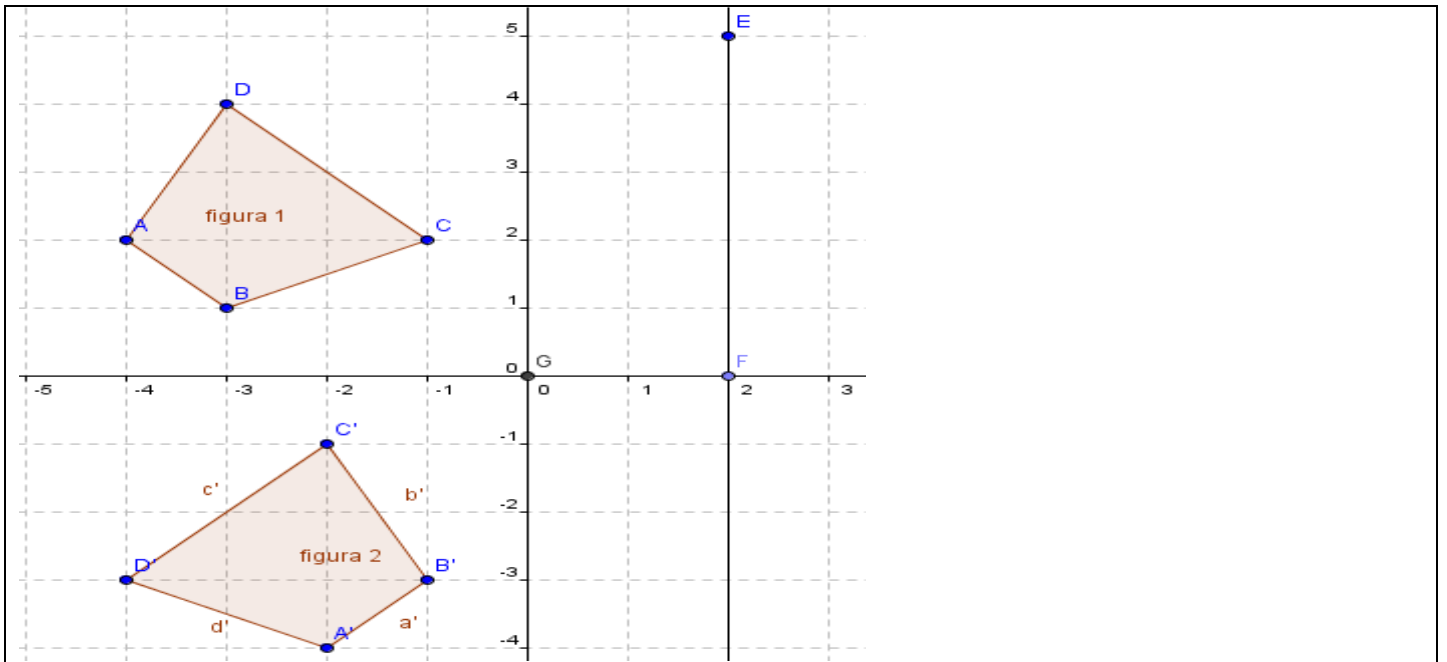
Dada la figura ABCDE realiza una rotación con centro en G y ángulo de rotación  $\alpha = 90^\circ$ , luego a la figura resultante aplícale una simetría respecto al eje de simetría  $x=2$ .



### Solución PPT

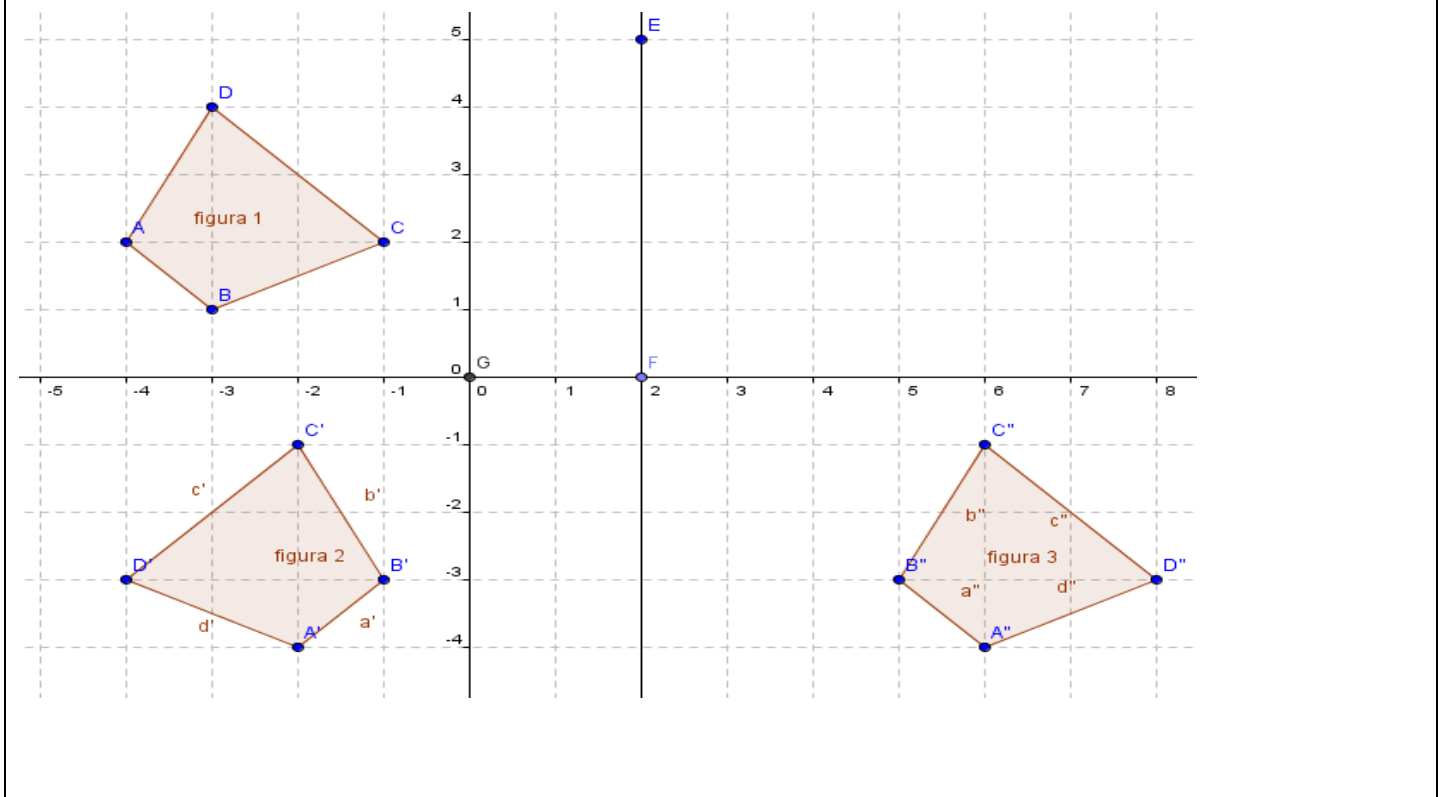
#### Paso 1:

Se tiene la figura ABCDE, a ésta se le aplica una rotación de centro G y ángulo de rotación igual a  $90^\circ$  obteniendo una nueva figura de coordenadas A'B'C'D'E'



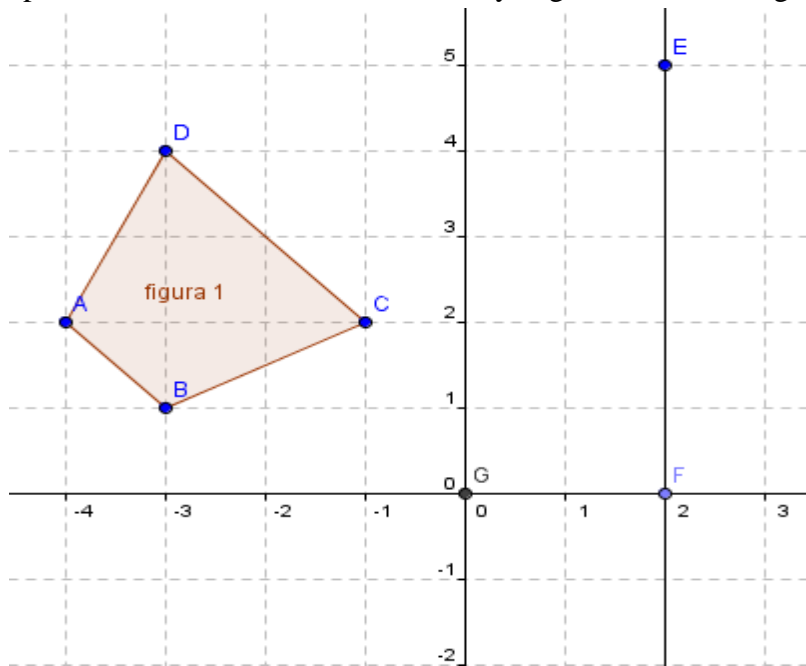
**Paso 2:**

Luego a la figura  $A'B'C'D'E'$  se le realiza una simetría de eje  $x=2$



### Ejercicio 2: (rotación compuesta con simetría)

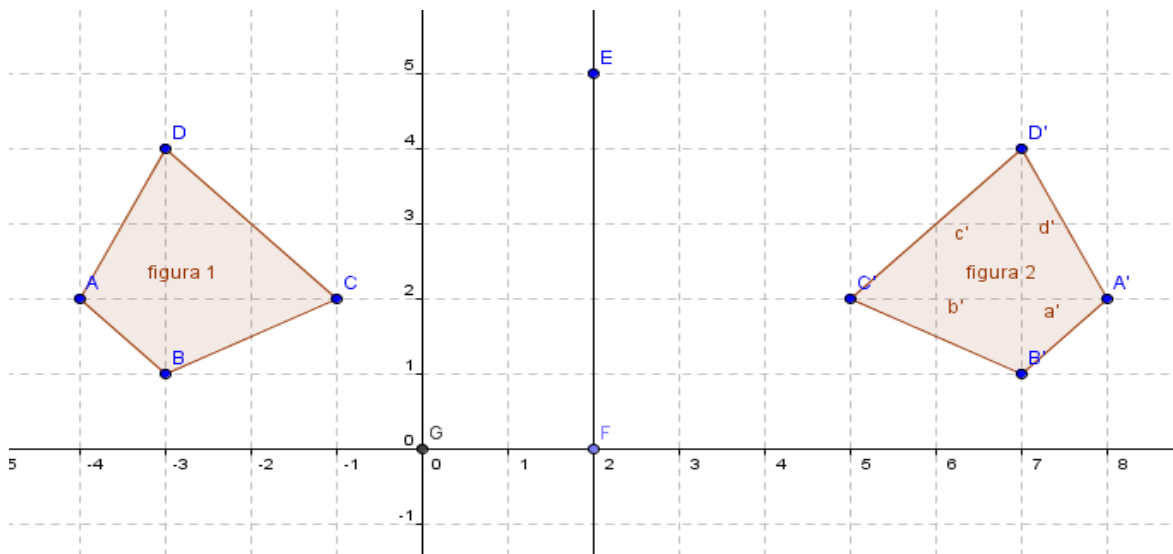
Dada la figura ABCDE realízale una simetría respecto al eje de simetría  $x=2$  luego a la figura resultante aplícale una rotación con centro en G y ángulo de rotación igual a  $90^\circ$ .



### SOLUCION PPT

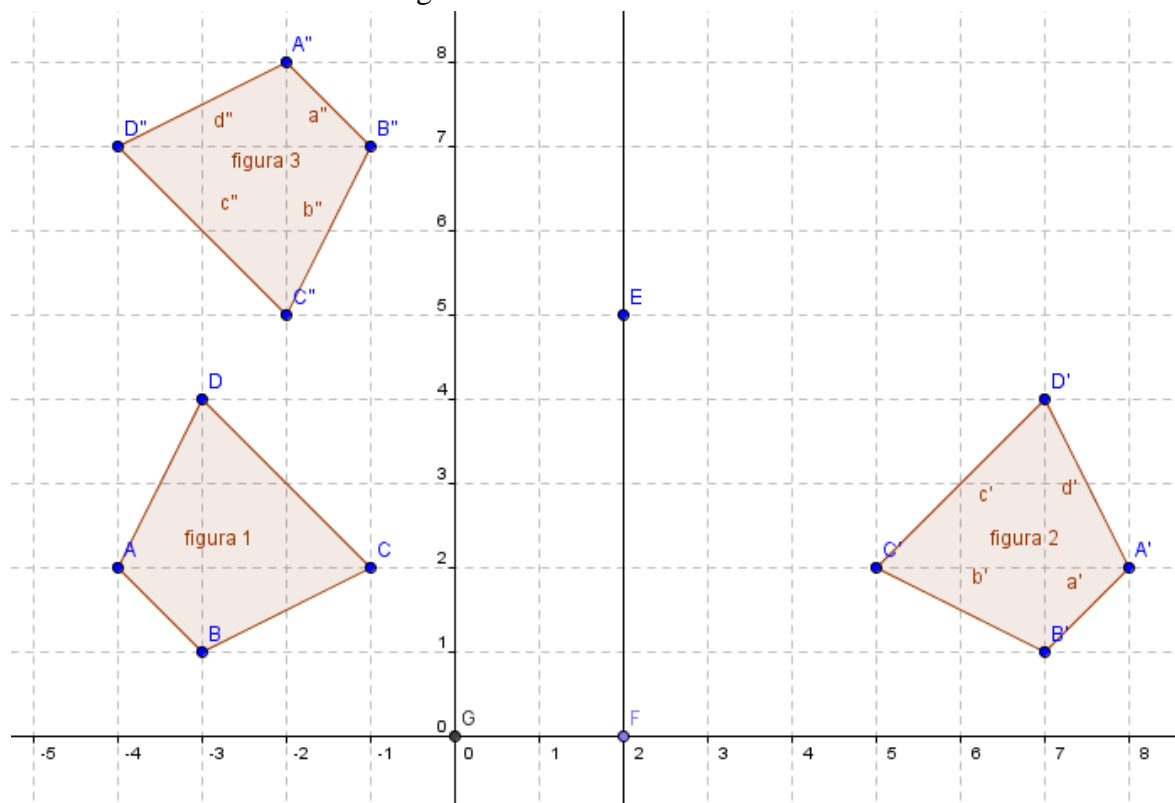
#### Paso 1:

A la figura dada se le aplica una simetría con eje  $x=2$  obteniendo una nueva figura  $A'B'C'D'E'$



## Paso 2:

Luego a la figura 2 obtenida se le aplica una rotación de centro G y ángulo de rotación igual a  $90^\circ$ , obteniendo como resultado la figura 3

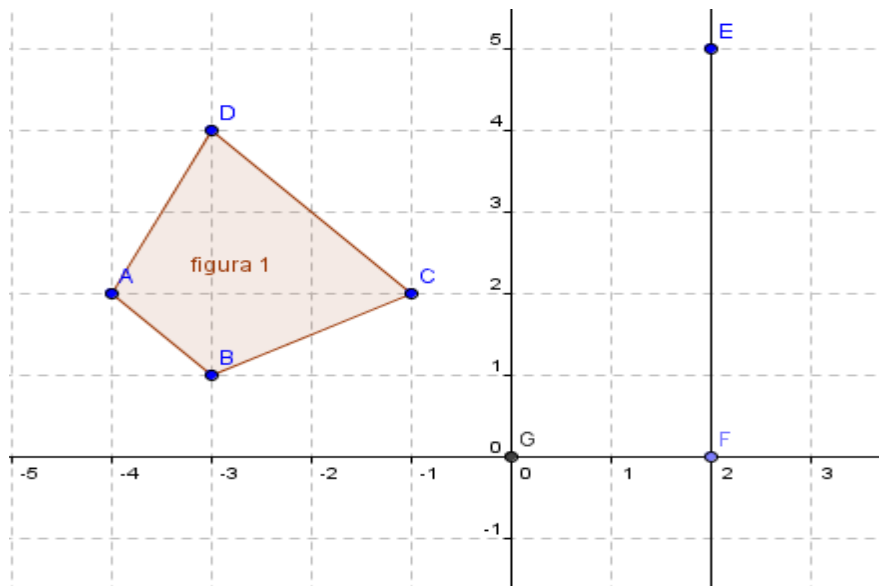


**Composición De Transformaciones Isométricas****Simetría compuesta con traslación:****Definición:**

La composición de una simetría con una rotación consiste en que dada una figura F1 a esta se le aplique una rotación con cierto ángulo  $\alpha$  y centro  $(x,y)$  con lo cual se obtendrá una nueva figura (F2) a la que finalmente se le aplicara una simetría con un cierto eje (recta o punto) obteniendo una figura resultante F3

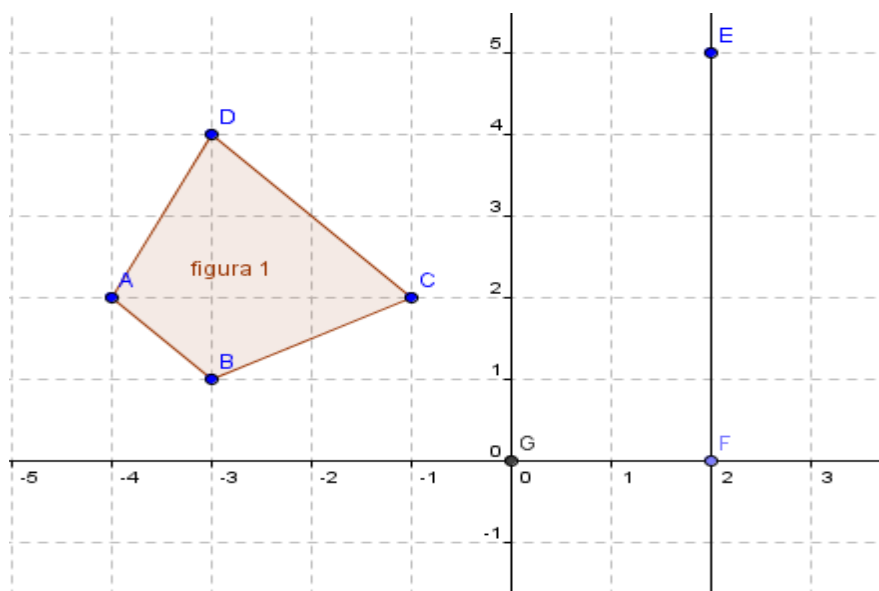
**Ejercicio 1:**

Dada la figura ABCDE realízale una rotación con centro en G y ángulo de rotación  $\alpha = 90^\circ$ , luego a la figura resultante aplícale una simetría respecto al eje de simetría  $x=2$ .



## **Ejercicio 2: (rotación compuesta con simetría)**

Dada la figura ABCDE realízale una simetría respecto al eje de simetría  $x=2$  luego a la figura resultante aplícale una rotación con centro en G y ángulo de rotación igual a  $90^\circ$ .



### **Preguntas:**

1. Compara las coordenadas de A, B, C y D en la figura resultante del primer ejercicio con las obtenidas en el segundo ejercicio.

¿Es lo mismo realizar una simetría seguida de una rotación que aplicar una rotación seguida de una simetría?

# Apéndice E

## Pruebas de Aprendizaje Significativo

### Test Aprendizaje Significativo

**Objetivos:** Los alumnos deberán jerarquizar los conocimientos necesarios de la composición de transformaciones Isométricas

Nombre: \_\_\_\_\_

Curso: Primero Medio \_\_\_\_

1. Ahora que tienes claras las ideas principales elabora un mapa conceptual que te permita relacionar algunos conceptos claves trabajados en la unidad

**Conceptos Claves:**

- Transformaciones isométricas
- Traslación
- Rotación
- Reflexión o Simetría
- Composición
- Vector
- Eje de simetría
- Centro y ángulo

Construye aquí tu mapa conceptual.

A large, empty rounded rectangular box with an orange border, intended for drawing a conceptual map. The box is centered on the page and occupies most of the upper half of the page.