FACULTAD DE CIENCIAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS

EL PROBLEMA DE DIRICHLET PARA ELIPSOIDES

MEMORIA DE TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE LICENCIADO EN MATEMÁTICAS.

PARTICIPANTE : MARIANA PACHECO MARÍN
PROFESOR TUTOR : DR. GERARDO HONORATO GUTIÉRREZ (UV)
PROFESOR CO-TUTOR : DR. ALBERTO MERCADO SAUCEDO (UTFSM)

VALPARAÍSO (2018)

Agradecimientos

El camino hasta aquí fue largo y sinuoso. Representa para mi una enorme alegría haberlo recorrido, y necesité la ayuda de un montón de gente para avanzar. No quiero olvidarme de nadie en esta lista.

Mi más sentido agradecimiento a mi director el profesor Gerardo Honorato por haber estado presente siempre, dedicándome su apoyo incondicional, conocimiento y abrirme un mundo de matemáticas. Gracias por dirigirme, por la confianza, por la paciencia, las correcciones, las sugerencias, y por tus sólidos y completos cursos de análisis, sin lugar a duda fueron la base de mis intereses matemáticos que tengo en el futuro. Tu guía me permitió hacer este trabajo y conocerte. Eres un director excelente y una persona excepcional.

También quiero agradecer el apoyo recibido de mi Co-Director de Tesis el Dr. Alberto Mercado de la UTFSM, por todas sus aportaciones científicas para el desarrollo de esta tesis, siempre le estaré agradecida y en deuda con usted.

Al profesor Rodrigo Castro, por las correcciones y aceptar estar en la banca.

También quiero agradecer a las profesoras Amalia Pizarro y Jeannette Galleguillos y al profesor Lianggi Espinoza por su apoyo recibido en los momentos difćiles a lo largo de la carrera.

A Gerardo, eres el mejor secretario de la UV.

A mi familia, en especial a mi abuela, Pita, que ya no está con nosotros pero vivirá por siempre en mi memoria. Ella fue el pilar fundamental desde el inicio de mis estudios. A mis padres y mi hermana Catalina por acompañarme y apoyarme a lo largo de la carrera.

A mi amiga Camila, gracias por todos estos años de aprendizajes, logros y esas largas conversaciones en el Gervasoni.

A los amigos que dejó la universidad, Camila Victoria, Diego, Daniela (Mona), Daniela (Chica), Nelson y Alvarito. Me enseñaron más que matemáticas. La vida universitaria fue más bonita gracias a ustedes.

Finalmente, agradezco a FONDECYT que gracias a su programa de becas pude terminar de estudiar sin tener preocupaciones financieras.

Mathematics is the art of giving the same name to different things.
Henri Poncaré

Índice general

Introducción

[1]

El objetivo general de este trabajo es resolver el Problema de Dirichlet en un dominio acotado de $\mathbb{R}^n$ utilizando métodos clásicos y variacionales. En particular cuando el dominio es una elipsoide. Sea Ω un dominio, $\partial\Omega \neq \emptyset$ y $f : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ una función continua dada, el problema de Dirichlet consiste en encontrar una función $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ continua en $\overline{\Omega}$ y de clase C^2 verificando

$$\begin{cases} \triangle u = 0 & \Omega \\ u = f & \partial\Omega \end{cases}$$

Se propuso como objetivo específico, presentar condiciones de existencia y unicidad de dicha solución, representar la solución en el caso de que exista y caracterizar los domimios en donde el problema es soluble. Al estudiar estas condiciones, aparecen de forma natural los conceptos de función armónica (para la existencia) y Principio del máximo (para la unicidad).

El desarrollo de este trabajo está estructurado de la siguiente forma:

En el Capítulo 1 se presentan herramientas, notaciones y resultados de la teoría clásica. En el Capítulo 2 estudiaremos la solubilidad del problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace, $\triangle u = 0$, en el sentido clásico. Para ello introduciremos las Identidades de Green las cuales serán fundamentales en la buqueda de soluciones, en particular, la tercera Identidad de Green proporciona una solución para la ecuación de Laplace en una bola de $\mathbb{R}^n$. Luego daremos condiciones geométricas sobre el dominio para poder asegurar la existencia de soluciones clásicas del problema de Dirichlet. Finalmente resolvemos el problema de Dirichlet en un abierto acotado con frontera C^1.

En el Capítulo 3 caracterizaremos a las funciones armónicas en el plano complejo $\mathbb{C}$ y calcularemos el Kernel de Poisson para dar una solución explícita al problema en un disco abierto del plano. Además extenderemos estos resultados a dominios de Dirichlet Ω, es decir, a dominios del plano complejo tales que satisfacen que toda función f continua en $\partial_\infty\Omega$ se extiende a una función continua en $\overline{\Omega}$ y armónica en Ω.

El Capítulo 4 es el último y principal de esta tesis. En él se presentará un método alternativo para resolver el problema de Dirichlet en un Elipsoide de $\mathbb{R}^n$. Estudiamos resultados de existencia y unicidad con condición de borde polinomial, lo que nos lleva a aplicar técnicas diferentes a las que fuerón estudiadas en los capítulos anteriores. En particular, consideramos un

[1]Este trabajo de tesis fue financiado por el Proyecto FONDECYT 1171712

operador actuando en el espacio de polinomios, y en consecuencia la naturaleza de la solución es polinomial. Por último, se describe un método variacional para resolver este problema en particular.

Capítulo 1

Teoría clásica

1.1. ¿Qué son las EDP's?

Adoptaremos las siguientes notaciones en $\mathbb{R}^n$.
Si $u : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, escribimos $u(x) = u : (x_1, \ldots, x_n)$. Decimos que u es *suave* siempre que sea infinitamente diferenciable. Si $\mathbf{u} : U \to \mathbb{R}^m$, escribimos $\mathbf{u}(x) = (u^1(x), \ldots, u^m(x))$. La función u^k es la k-ésima componente de $\mathbf{u}$, $k = 1, \ldots, m$.
Una ecuación diferencial parcial (EDP) es una ecuación que involucra una función desconocida de dos o más variables y algunas de sus derivadas parciales. Fijemos un número entero $k \geq 1$ y sea U un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$. Una EDP es una expresión de la forma

$$F(D^k u(x), D^{k-1}u(x), \ldots, Du(x), u(x), x) = 0, \qquad (x \in U) \tag{1.1.1}$$

donde la función

$$F : \mathbb{R}^{n^k} \times \mathbb{R}^{n^{k-1}} \ldots \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times U \to \mathbb{R} \tag{1.1.2}$$

es dada y $u : U \to \mathbb{R}$ es la función incógnita, depende de la variable espacial $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y puede representar una cantidad física, como por ejemplo, temperatura.
Sea $u : U \to \mathbb{R}$ y $x \in U$. Escribimos u_{x_i} como $u_{x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}$.
Sea α un vector de la forma $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, donde cada componente α_i es un número natural, es llamado milti-índice de orden

$$|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n.$$

Dado un milti-índice α definimos

$$D^\alpha u(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} = \partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n} u.$$

Sea k un entero no negativo,

$$D^k u(x) = \{D^\alpha u(x) : |\alpha| = k\}$$

es el conjunto de todas las derivadas parciales de orden k.
En el caso de que $k = 1$, consideramos que los elementos de Du vienen dados por el vector

$$Du = (u_{x_1}, \ldots, u_{x_n})$$

que es el *vector gradiente*. Si $k = 2$ consideramos que los elementos de D^2u vienen dados por

$$D^2u = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n} \\ & \ddots & \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

conocida como *matriz Hessiana*.

Si $m = n$ se tiene

$$div\mathbf{u} = tr(D\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^{n} u^i_{x_i}$$

es la *divergencia* de $\mathbf{u}$.

Ejemplos de ecuaciones

1 *Ecuación de Laplace*. Sea $x \in U$, la función buscada $u : \overline{U} \to \mathbb{R}$ es de la forma $u = u(x)$, donde $U \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto dado y

$$\triangle u = 0, \tag{1.1.3}$$

donde $\triangle u = \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}$ es el operador llamado *Laplaciano*.

2 *Ecuación de Poisson*. Sea $x \in U$, la función buscada $u : \overline{U} \to \mathbb{R}$ es de la forma $u = u(x)$ tal que

$$-\triangle u = f, \tag{1.1.4}$$

donde la función $f : U \to \mathbb{R}$ es dada.

3 *Ecuación del calor*. Se busca $u(x, t)$ con $x \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$u_t - \triangle u = F(x, t). \tag{1.1.5}$$

Si $n = 1$, se reduce a $u_t - c^2 u_{xx} = F$.

4 *Ecuaciones de Cauchy-Riemann*. Se buscan $u(x, y)$ y $v(x, y)$ definidas en $\mathbb{R}^2$ tales que

$$\begin{cases} u_x &= v_y \\ u_y &= -v_x \end{cases}$$

Para $n = 2$, $x_1 = x$, $x_2 = y$, podemos asociar con una función armónica $u(x)$ una función armónica *conjugada* $v(x, y)$ tal que las ecuaciones de *Cauchy-Riemann* se satisfacen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{1.1.6}$$

Una solución real (u, v) de (1.1.6) da lugar a una función analítica

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y) \tag{1.1.7}$$

donde el argumento es un número complejo $z = x + y$.

1.2. Ecuación de Laplace

La *ecuación de Laplace* es muy importante dentro de la Física. Recordemos que Gauss en uno de sus muchos y grandes teoremas estableció el teorema de la divergencia.

Si u es una función escalar, entonces Du es el gradiente. Si $\mathbf{F}$ es una función vectorial, entonces $D\mathbf{F}$ es la matriz de derivadas parciales de las componentes de $\mathbf{F}$. La traza de esta matriz es $div\mathbf{F} = tr(D\mathbf{F})$, la divergencia del campo vectorial. Del mismo modo, del determinante de esta matriz es el Jacobiano.
La matriz de segundas derivadas parciales de u, D^2u, es simétrica y la traza de esta matriz corresponde al Laplaciano:

$$\triangle u = tr(D^2u) = div\ Du$$

Sea F un campo vectorial con divergencia $divF$. El teorema de la divergencia dice que para conjuntos abiertos y acotqados V con frontera orientable∂V se tiene:

$$\int_V div\ \mathbf{F}\, dy = \int_{\partial V} \mathbf{F} \cdot v\, dS,$$

donde v es el vector normal unitario que apunta hacia afuera, y ∂S es la medida de superficie.
Sea s una función escalar con gradiente Ds. Entonces, por la regla del producto:

$$div(s\mathbf{F}) = Ds \cdot \mathbf{F} = s\ div\mathbf{F}.$$

Aplicando el teorema de la divergencia al lado izquierdo,

$$\int_V Ds \cdot \mathbf{F}\, dy + \int_V s\ div\ \mathbf{F}\, dy = \int_{\partial V} s\mathbf{F} \cdot v\, dS.$$

Este resultado será utilizado en reiteradas ocuaciones a lo largo de este trabajo.
La ecuación de Laplace es una ecuación lineal de segundo orden, y es a la vez invariante bajo rotaciones y traslaciones. Ahora procedemos a la derivación de las ecuaciones de *Poisson* y *Laplace*. Sea$\mathbf{F}$ un campo vectorial en un subconjunto abierto U de $\mathbb{R}^n$, en Fśica puede ser interpretado, por ejemplo, como la corriente, flujo o energía. Sea f una función en U, esta es la fuente (la tasa de producción de alguna cantidad). Una ley de conservación de equilibrio es una ecuación de la forma:

$$\int_{\partial V} \mathbf{F}\ v\, dS = \int_V f(x)\, dV.$$

Aquí se supone que V se extiende sobre subconjuntos abiertos acotados de U. Se supone que la frontera ∂V es un subconjunto suave de U. Esta ecuación dice que la cantidad de sustancia que fluye fuera de la región V es igual a la tasa de producción. Si aplicamos el teorema de la divergencia, obtenemos

$$\int_V div\ \mathbf{F}\, dx = \int_V f\, dV.$$

Como se supone que esto es válido para todas las subregiones V, tenemos la forma diferencial de la ley de conservación de equilibrio:

$$div\mathbf{F} = f.$$

Ahora supongamos que la corriente es el negativo del gradiente de alguna función escalar u definida en U, es decir

$$\mathbf{F} = -Du.$$

Obtenemos la ecuación de Poisson

$$-\triangle u = -div\ Du = f.$$

Cuando hay equilibrio sin fuente, esta corresponde a la ecuaciónn de Laplace

$$\triangle u = 0.$$

Incluso si uno está interesado en la ecuación de Poisson, la ecuación de Laplace es importante, ya que la diferencia de dos soluciones de la ecuaci'on de Poisson es una solución particular de la ecuación de Laplace. A continuación, usualmente pensamos que la ecuación de Poisson o Laplace se cumple para una función u que es C^2 en un conjunto abierto U.
En aplicaciones, u podría ser temperatura, densidad o potencial eléctrico. La corriente $\mathbf{F}$ correspondiente será flujo de calor, corriente difusiva o campo eléctrico.
Si la ecuación de Laplace se satisface en U, entonces tenemos:

$$\int_{\partial V} \mathbf{F}\ v\, dS = 0,$$

para cada subregión adecuada de U. Esto dice que no hay flujo neto dentro o fuera de la región V.

1.2.1. Solución fundamental

Una de las propiedades del Laplaciano es que es invariante bajo rotaciones. Como consecuencia de esto es razonable buscar primero soluciones radiales, es decir, funciones de $r = |x|$, donde $|x|$ es la distancia del punto al origen. Este método será fundamental para el estudio de la existencia de soluciones vía funciones de Green como veremos más adelante.

Para encontrar una solución u de la ecuación de Laplace, primero lo haremos en $\Omega = \mathbb{R}^n$, donde u tiene la forma $u(x) = v(r)$. Comencemos calculando el valor del laplaciano para funciones radiales. Sea $v : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida por $v(|x|) = u(x)$. Notemos que $|x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$. Entonces

$$\begin{aligned} u_{x_i} &= v'(|x|)\frac{\partial}{\partial x_i}|x| \\ &= v'(|x|)\frac{1}{2\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}}2x_i \\ &= v'(|x|)\frac{x_i}{|x|}, \end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{aligned} u_{x_ix_i} &= v''(|x|)\frac{\partial}{\partial x_i}|x|\frac{x_i}{|x|} + v'(|x|)\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{x_i}{|x|} \\ &= v''(|x|)\frac{x_i^2}{|x|^2} + v'(|x|)\left[\frac{\frac{|x|^2-x_i^2}{|x|}}{|x|^2}\right] \\ &= v''(|x|)\frac{x_i^2}{|x|^2} + v'(|x|)(\frac{1}{|x|} - \frac{x_i^2}{|x|^3}). \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} \triangle u &= \sum_{i=1}^{n} v''(|x|)\frac{x_i^2}{|x|^2} + v'(|x|)\frac{1}{|x|} - v'(|x|)\frac{x_i^2}{|x|^3} \\ &= \frac{v''(|x|)}{|x|^2}|x|^2 + \frac{v'}{|x|}n - \frac{v'}{|x|^3}|x|^2 \\ &= v'' + \frac{v'}{|x|}n - \frac{v'}{|x|}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\triangle u = v'' + \frac{v'}{r}(n-1)$$

Así, las soluciones radiales de la ecuación de Laplace vienen dadas por las soluciones de la ecuación ordinaria de segundo orden:

$$v''(r) + \left(\frac{n-1}{r}\right)v'(r) = 0.$$

Cuya solución está dada por

$$v'(r) = Cr^{1-n},$$

entonces

$$v(r) = \begin{cases} a_1 \ln(r) + b_1 & si \quad n = 2 \\ \\ \frac{a_2}{(2-n)r^{n-2}} + b_2 & si \quad n > 2. \end{cases}$$

Por lo tanto

$$u(x) = \begin{cases} a_1 \ln|x| + b_1 & si \quad n = 2 \\ \\ \frac{a_2}{(2-n)|x|^{n-2}} + b_2 & si \quad n > 2. \end{cases}$$

En el caso $a_1 = 0$ ó $a_2 = 0$ las soluciones son constantes, y en otro caso son singulares en $r = 0$, es decir es una solución particular en $r = 0$. Esta singularidad será la clave de la utilidad de dichas funciones.

Consideremos la siguiente función radial singular:

$$v(r) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\ln(r) & si \quad n = 2 \\ \\ \frac{-1}{(n-2)W_n r^{n-2}} & si \quad n > 2, \end{cases} \tag{1.2.1}$$

definida para $x \in \mathbb{R}^n$ y $x \neq 0$.

donde W_n designa la medida de la esfera $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ (ver Apéndice). Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio con frontera regular $\partial\Omega$. Para $\xi \in \Omega$, sea $\rho > 0$ tal que $B_\rho(\xi) \subset \Omega$. Consideremos una traslación de la función radial (1.2.1) de forma que la singularidad se encuentre en $x = \xi$, es decir,

$$v(|x-\xi|) = \frac{-1}{(n-2)W_n|x-\xi|^{n-2}}.$$

Esta solución es llamada *solución fundamental* de la ecuación de Laplace.

1.2.2. Condiciones de contorno

La ecuación de Laplace puede ser complementada con condiciones de contorno.

El Problema de Dirichlet

Cuando en la condición de contorno o de frontera se especifica el valor de la función sobre el contorno $\partial\Omega$ del dominio Ω, se denomina *condición de contorno de Dirichlet o Problema de Dirichlet*:

$$\begin{cases} \triangle u = 0, & x \in \Omega \\ \\ u = f & si \quad x \in \partial\Omega \end{cases}$$

El problema de Dirichlet es típico en ecuaciones diferenciales parciales elípticas y teoría del potencial.

Las soluciones de la ecuación de Laplace se llaman funciones armónicas. Si alguna de las dos funciones son soluciones de la ecuación de Laplace (o cualquier ecuación diferencial lineal homogénea), su suma (o cualquier combinación lineal) también es una solución. Esta propiedad es muy útil, por ejemplo, las soluciones a problemas complejos se pueden construir sumando soluciones.

A lo largo de este trabajo, estudiaremos las condiciones de *existencia*, *unicidad* y *representación de soluciones* para este tipo de problemas.

1.3. Ecuación del calor

Ahora procedemos a la derivación de la ecuación de calor. Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial en un subconjunto abierto U de $\mathbb{R}^n$. Representa la corriente. Sea f una función en U. Esta es la fuente (la tasa de producción de alguna cantidad). La ley de conservación para el calor es de la forma,

$$\frac{d}{dt}\int_V u\,dx + \int_{\partial V} \mathbf{F}\cdot v\,dS = \int_V f\,dx.$$

Aquí se supone que V se extiende sobre subconjuntos abiertos y acotados de U. Se supone que el borde ∂V de cada V es un subconjunto suave de U. Esta ecuación dice que la tasa de aumento de u en la región, más la cantidad de sustancia que fluye fuera de la región V, es igual a la tasa de producción.

Si diferenciamos bajo el signo integral y además aplicamos el teorema de la divergencia, obtenemos

$$\int_V \frac{\partial u}{\partial t}\,dx + \int_V div\;\mathbf{F}\,dS = \int_V f\,dx.$$

Como se supone que esto es válido para todas las subregiones V, tenemos la forma diferencial de la ley de conservación de equilibrio:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + div\;\mathbf{F} = f$$

Ahora supongamos que la corriente es proporcional al negativo del gradiente de alguna función escalar u definida en U. Por lo tant0, podemos escribir F por

$$\mathbf{F} = -\frac{1}{2}\sigma^2 \cdot Du,$$

donde $\sigma^2 > 0$ es la llamada constante de difusión. Luego obtenemos la ecuación del calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\sigma^2 \triangle u + f.$$

Esta ecuación tiene un parámetro físico, la constante de difusión. Tiene dimensiones de distancia cuadrada dividida por tiempo. El significado físico de esto es que la difusión desde un punto es un proceso bastante lento, esto es, la distancia recorrida es proporcional en promedio a la raíz cuadrada del tiempo.

La interpretación de la cantidad en la ley de conservación depende de la aplicación. También se puede pensar en la ley como una ley de conservación de la energía térmica. En ese caso, u es la temperatura y $\mathbf{F}$ es un flujo de calor. En esa interpretación, f representa la producción de calor. La ecuación que dice que $\mathbf{F}$ es un tiempo constante y $-Du$ es la ley de Fourier de la conducción del calor.

1.3.1. El problema de la conducción del calor

El caso unidimensional, la ecuación de calor se obtiene a partir de la ley de Fourier y del principio de conservación de la energía. Según la ley de Fourier, la razón de cambio del flujo de energía calórica por unidad de área a través de una superficie, es proporcional al gradiente de temperatura negativo en la superficie,

$$q = -k\cdot\nabla u,$$

donde k es la conductividad térmica y u es la temperatura. En una dimensión, el gradiente es una derivada espacial ordinaria, y así la ley de Fourier es,

$$q = -k\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Considere una barra de longuitud L hecha de un material conductor uniforme del calor. Sea $u(x,t)$ la temperatura en el tiempo t. Supongamos que la superficie lateral de la barra esta aislada termicamente de modo que impide la transferencia de calor con el medio ambiente. Notemos que t es independiente del resto de las variables. Sea

$$u_t = k\triangle u, \tag{1.3.1}$$

la ecuación del calor, donde k es una constante y la temperatura es una función C^2 en una región del plano (x,t), dada por $0 < x < L$ y $t > 0$. La temperatura $u(x,t)$ de la barra satisface la ecuación (1.3.1), sin embargo no es única. Para saber cual de todas ellas va a representar la distribución del calor, se necesita información adicional sobre el problema específico en estudio. Inicialmente vemos que la distribución de la temperatura depende de la temperatura inicial a lo largo de la barra. La distribución de la temperatura corresponde a la condición inicial del problema. Sea

$$u(x,0) = f(x),$$

donde $f : [0,L] \to \mathbb{R}$ es una función dada que describe la temperatura en varios puntos de la barra en el tiempo $t = 0$. Además de esta condición, es importante saber qué pasa en los extremos de la barra. Esto influye en el valor de $u(x,t)$ ya que puede haber entrada o salida de calor. Existen varios tipos de condiciones de borde, por ejemplo,

$$u(0,t) = T_1, \qquad u(L,t) = T_2,$$

donde T_1 y T_2 son temperaturas dadas, es decir, constantes. También se puede tener

$$u(0,t) = u(L,t) = 0.$$

Sean $R = \{(x,\, t) \in \mathbb{R}^2, 0 < x < L, t > 0\}$ la región del plano (x,t) y $\overline{R}$ la unión de R con su frontera ∂R, la que está formada por las semi-rectas $\{x = 0, t > 0\}$, $\{x = L, t > 0\}$ y el segmento $\{0 \leq x \leq L, t = 0\}$. El problema de la conducción del calor consiste en determinar una función real $u(x,t)$ definida en $\overline{R}$ que satisface

$$\begin{cases} u_t = k\triangle u & t > 0, 0 < x < L \\ \\ u(x,0) = f(x) & 0 \leq x \leq L, \end{cases} \tag{1.3.2}$$

donde f es una función dada y satisface las condiciones de borde

$$u(0,t) = u(L,t) = 0.$$

Lo anterior se puede resumir como

$$\begin{cases} u_t = k\triangle u & t > 0, \quad 0 < x < L \\ \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & t > 0, \\ \\ u(x,0) = f(x) & 0 \leq x \leq L. \end{cases} \tag{1.3.3}$$

Este tipo de problemas recibe el nombre de *problema con valores iniciales y de frontera.*

Volviendo al ejemplo de la ecuación del calor, buscamos soluciones estacionarias, es decir, que no dependen del tiempo. Entonces $u_t = 0$ y de esta manera $\triangle u = 0$. Es decir, la ecuación de Laplace puede ser interpretada como la ecuación de una conducción de calor estacionaria. Si en (1.1.5) se buscan soluciones estacionarias como antes, las ecuaciones verificarían $-\triangle u = F(x)$. Dicha ecuación corresponde a la ecuación de Poisson. Por lo tanto la ecuación de Laplace es la ecuación homogénea correspondiente a la ecuación de Poisson.

Por lo tanto, en un dominio $U \subset \mathbb{R}^n$ se tiene

$$\begin{cases} \triangle u = F(x), & x \in U \\ \\ u = f(x), & x \in \partial U, \end{cases} \tag{1.3.4}$$

que corresponde al *problema de Dirichlet.*

1.4. Variable Compleja

1.4.1. Funciones Analíticas. Las condiciones de Cauchy-Riemann

Dedicamos esta sección a introducir conceptos básicos relacionados con los números complejos junto con algunos resultados analíticos y topológicos que vamos a necesitar más adelante. Recordemos que los números complejos son de la forma $z = x + iy$, donde x e y son números reales. Los números reales x e y de la expresión anterior están unívocamente determinados por el número complejo z. Corresponden a la parte real ($\Re z$) y parte imaginaria ($\Im z$) de z. Esta unicidad permite identificar el cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos con el espacio $\mathbb{R}^2$, asociando a cada número $x + iy$ el par ordenado (x, y). Esta es la interpretación geométrica de $\mathbb{C}$. como el conjunto de todos los puntos de un plano coordenado.

La norma euclídea en $\mathbb{R}^2$ se corresponde con el módulo de un número complejo

$$|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Consideraremos a $\mathbb{C}$ como espacio topológico con la topología usual de $\mathbb{R}^2$, que es la topología dada por el módulo, o también la topología producto inducida por $\mathbb{R}$.

Es usual llamar discos a lo que en la teoría general de espacios métricos se llaman bolas. Usaremos la notación

$$D(z_0, \epsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \epsilon\}.$$

Los discos cerrados los expresaremos como las clausuras de los discos abiertos, esto es,

$$\overline{D}(z_0, \epsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq \epsilon\}.$$

Definición 1.4.1. Un conjunto Ω es *conexo* si un par de puntos cualesquiera del conjunto se pueden unir por un camino formado por segmentos rectos (camino poligonal) cuyos puntos están en Ω. Si un conjunto es abierto y conexo se le llama *región* o *dominio.*

Para resultados utilizados en este trabajo, conviene extender el plano complejo $\mathbb{C}$ agregándole un punto infinito, con lo que obtenemos el espacio compacto $\mathbb{C}^\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, donde los entornos abiertos de ∞ son los complementarios de los subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$.

En coordenadas polares, todo número $z = x + iy \neq 0$ se caracteriza por el módulo $r = |z|$, y el *argumento* θ, que se define mediante fórmulas

$$x = r \sin\theta, \qquad y = r\cos\theta.$$

Se escribe $\theta = \arg z$. Dados el mdulo r y el argumento θ de un númer complejo z, lo podemos expresar como $z = r\cos\theta + r\sin\theta$. Como es sabido, el argumento no está defnido de manera única, ya que $\theta - 2\pi$, $\theta + 2\pi$, y en general, $\theta + 2k\pi$, donde k es cualquier número entero, representan el mismo ángulo que θ.

Definición 1.4.2. Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función, con $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto y $z \in \Omega$. Si el límite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

existe, entonces este límite se denota $f'(z)$. En tal caso se dice que f es diferenciable en z. Si el límite existe para todo z perteneciente a Ω, diremos que f es diferenciable en Ω.

Proposición 1.4.3. *Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es diferenciable en $a \in \Omega$, entonces f es continua en Ω.*

Demostración. En efecto,

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to a} |f(z) - f(a)| &= \left[\lim_{z\to a} \frac{|f(z) - f(a)|}{z - a}\right] \lim_{z\to a} |z - a| \\
&= |f'(a)| \cdot 0 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

Proposición 1.4.4. *Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es diferenciable en z y es de la forma $f = u + iv$, entonces $\partial_x f$ y $\partial_y f$ existen y satisfacen la ecuación de Cauchy-Riemann*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y}, \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x}
\end{aligned}$$

Demostración. Primero supongamos que $h \to 0$ es real, entonces

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{f(x+h, y) - f(x,y)}{h} \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Por otra parte, supongamos que $h = i\eta$, con η en $\mathbb{R}$ luego

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{f(x, y+\eta) - f(x,y)}{i\eta} \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}\frac{1}{i}.$$

Como f es diferenciable en z el límite tiene que ser el mismo sin importar el camino que se tome, y por lo tanto

$$\frac{\partial f}{\partial y} = i\frac{\partial f}{\partial x}.$$

Además, como $f = u + iv$, entonces

$$\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y} = i\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right),$$

luego igualando las partes real e imaginaria

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}$$

□

Teorema 1.4.5. *Sean u y v funciones reales definidas en una región Ω y suponga que u y v tienen derivadas parciales continuas. Entonces $f : \Omega \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = u(z) + iv(z)$ es analítica si y sólo si u y v satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann, que son dadas por*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad y \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Demostración. Sea f una función analítica y sean $u(x, y) = \Re f(x + iy)$, $v(v, y) = \Im f(x + iy)$ para $x + iy \in \Omega$. Vamos a evaluar el límite

$$\lim_{z_0 \to 0} \frac{f(z + z_0) - f(z)}{z_0}$$

de dos maneras distintas. Por un lado

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{x_0 \to 0} \lim_{y_0 \to 0} \frac{u(x + x_0, y + y_0) - u(x, y) + iv(x + x_0, y + y_0) - iv(x, y)}{x_0 + iy_0} \\ &= \lim_{x_0 \to 0} \frac{u(x + x_0, y) - u(x, y) + iv(x + x_0, y) - iv(x, y)}{x_0} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x, y). \end{aligned}$$

De manera análoga se obtiene

$$f'(z) = -i\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial v}{\partial y}(x, y).$$

Estas dos expresiones para $f'(z)$ concuerdan sí y sólo si las siguientes ecuaciones se verifican en (x, y),

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \text{y} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y},$$

es decir, si satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann.
En el otro sentido, supongamos que u y v satisfacen las ecuaciones de Cauchy Riemann. Probaremos que las derivadas parciales de u y v son continuas. En efecto, sea $x+iy \in \Omega$ y sea $B(z,r) \subset \Omega$. Si $z_0 \in B(0,r)$, entonces

$$u(x+x_0,y+y_0)-u(x,y)=[u(x+x_0,y+y_0)-u(x,y+y_0)]+[u(x,y+y_0)-u(x,y)].$$

Aplicando el teorema del valor medio para la derivada de una función en una variable para cada una de las expresiones entre corchetes, obtenemos para cada x_0+iy_0 en $B(0,r)$ números x_1, y_1 tales que $x_1<x$ e $y_1<y$, y

$$\begin{cases} u(x+x_0,y+y_0)-u(x,y+y_0) &= u_x(x+x_1,y+y_0)x_0 \\ u(x,y+y_0)-u(x,y) &= u_y(x,y+y_1)y_0. \end{cases} \tag{1.4.1}$$

Sea

$$\phi(x_0,y_0)=[u(x+x_0,y+y_0)-u(x,y)]-[u_x(x,y)x_0+y_y(x,y)y_0],$$

entonces de (1.4.1) se obtiene que

$$\frac{\phi(x_0,y_0)}{x_0+iy_0}=\frac{x_0}{x_0+iy_0}[u_x(x+x_1,y+y_0)u_x(x,y)]+\frac{y_0}{x_0+iy_0}[u_y(x,y+y_1)-u_y(x,y)].$$

Notemos que $|x_0|<|x_0+iy_0|$, $|y_0|<|x_0+iy_0|$, $|y_1|<|y_0|$ y $|x_1|<|x_0|$. Además como u_x y u_y son continuas, entonces

$$\lim_{x_0+iy_0\to 0}\frac{\phi(x_0,y_0)}{x_0+iy_0}=0. \tag{1.4.2}$$

Por lo tanto,

$$u(x+x_0,y+y_0)-u(x,y)=u_x(x,y)x_0+u_y(x,y)y_0+\phi(x_0,y_0),$$

donde $\phi(x_0,y_0)$ satisface (1.4.2).
Cálculos similares prueban que

$$v(x+x_0,y+y_0)-v(x,y)=v_x(x,y)x_0+v_y(x,y)y_0+\psi(x_0,y_0),$$

donde ψ verifica

$$\lim_{x_0+iy_0\to 0}\frac{\psi(x_0,y_0)}{x_0+iy_0}=0. \tag{1.4.3}$$

Usando la hipótesis de que u y v satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann podemos ver que

$$\frac{f(z+z_0)-f(z)}{z_0}=u_x(z)+iv_x(z)=\frac{\phi(x_0,y_0)+\psi(x_0,y_0)}{x_0+iy_0}$$

Por (1.4.2) y (1.4.3), f es diferenciable y $f'(z)=u_x(z)+iv_x(z)$. Como u_x y v_x son continuas, f' es continua y f es analítica. □

Definición 1.4.6. Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función, con $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto, entonces f es analítica en $z \in \Omega$ si es diferenciable en una vecindad de z. Así mismo, si $K\Omega$, diremos que f es analítica en K si es diferenciable en un abierto que contiene a K.

Definición 1.4.7. Una función $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es a*nalítica* si es continuamente diferenciable en Ω.

Exponencial Compleja

Vamos a extender la conocida función exponencial a una función de variable compleja. Queremos una función entera que cumpla

$$f(z_1 + z_2) = f(z_1)f(z_2), \tag{1.4.4}$$

$$f(x) = e^x, \qquad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R} \tag{1.4.5}$$

Para que se cumpla (1.4.4) y (1.4.5)), debemos tener entonces

$$f(z) = f(x + iy) = f(x)f(iy) = e^x f(iy).$$

Definiendo $f(iy) \equiv u(y) + iv(y)$, tenemos que

$$f(z) = e^x u(y) + ie^x v(y).$$

Para que f sea analítica necesitamos que se cumplan las condiciones de Cauchy-Riemann, y por lo tanto $u(y) = v'(y)$, y $u'(y) = -v(y)$, con lo que tenemos que $u'' = -u$, entonces consideraremos

$$u(y) = \alpha \cos y + \beta \sin y$$

$$v(y) = -u'(y) = -\beta \cos y + \alpha \sin y$$

Por la condición (1.4.5) tenemos que $u(0) = \alpha = 1$, y $v(0) = -\beta = 0$, con lo que concluimos que

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cos y + ie^x \sin y$$

En general, e^z tiene las mismas propiedades que la función exponencial real e^x, entre ellas $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$ y $|e^z| = e^x$. Lo anterior nos dice que $e^z = 0$ no tiene solución en el plano complejo. Además, por la definición de la exponencial compleja, uno de los valores que toma $\arg(e^z)$ es y, donde en general

$$\arg(e^z) = y + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

son los valores que toma el ángulo en su forma polar, de modo que el argumento de e^z se determina hasta una constante aditiva $2k\pi$, por la parte imaginaria de z. Definimos el *argumento principal* de z, denotado por $\mathbf{Arg}\, z$, como el único ángulo $\theta \in (-\pi, \pi]$ tal que $z = |z|e^{i\theta}$, dicho de otro modo,

$$\mathbf{Arg}\, z = \{\theta_p : -\pi < \theta_p \leq \pi\}. \tag{1.4.6}$$

Aunque e^x no es una función periódica de x, e^z varía periódicamente a medida que nos movemos en el plano z a lo largo de cualquier línea recta paralela al eje y. Por lo tanto e^z es periódica con período imaginario $2\pi i$.

Logaritmo complejo

Al igual que el logaritmo natural real, se define el *logaritmo complejo* como una función inversa de la función exponencial compleja.

Sean z y w dos números complejos. Se dice que w es un *valor del logaritmo* de z si

$$e^w = z \tag{1.4.7}$$

Vamos a derivar una fórmula para encontrar todos los logaritmos de z. Para ello, sea $w = u + iv$. Entonces $e^w = e^u e^{iv}$, y (1.4.7) se reduce al sistema de dos ecuaciones

$$e^u = |z|, \qquad v = \arg(z) \quad (\mod 2\pi)$$

Luego z no puede ser nulo y $u = \log|z|$. Obtenemos la fórmula

$$\log z = \log|z| + i(\arg z + 2k\pi), \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Por una *rama* de una función con múltiples valores f definida sobre un subconjunto D del plano complejo, entendemos una función $\hat{f}$, definida sobre un subconjunto $\hat{D}$ de D que es continua y tiene la siguiente propiedad: para todo $z \in \hat{D}$, $\hat{f}(z)$ es uno de los valores de $f(z)$.

Vamos a ver cómo podemos definir las ramas del logaritmo.

Sea τ un número real fijo. La función $w \to \exp(w)$ es uno a uno sobre la banda horizontal

$$H_\tau = \{w \in \mathbb{C} : \Im w \in (\tau, \tau + 2\pi)\}$$

y envía este conjunto sobre

$$F_\tau = \mathbb{C} - \{z = re^{i\tau} : r \geq 0\}$$

(el plano complejo menos un rayo). Es claro que $(\exp_{H_\tau})^{-1}(z)$ es uno de los valores de $\log(z)$. Es decir, poniendo

$$(\operatorname{Log} z)_\tau = (\exp_{H_\tau})^{-1}(z), \qquad z \in F_\tau$$

obtenemos una de las ramas del logaritmo, definida en el sector F_τ . Podemos definir también la *rama del argumento* $\arg z$ según la siguiente regla: $\arg_\tau z$ está definido para todo $z \in F_\tau$ y es el valor del argumento $\arg z$ tal que

$$\tau < \arg_\tau(z) < \tau + 2\pi.$$

A veces se define también $\arg_\tau(re^{i\tau}) = \tau$, $r > 0$. Con ello elegimos el único valor del argumento para todo $z \neq 0$, que satisface

$$\tau \leq \arg_\tau(z) < \tau + 2\pi.$$

Como $(\operatorname{Log} z)_\tau$ toma sus valores en H_τ, se cumple la fórmula

$$(\operatorname{Log} z)_\tau = \log|z| + i\arg_\tau(z), \qquad z \in F_\tau.$$

La rama

$$(\operatorname{Log} z) = (\operatorname{Log} z)_{-\pi},$$

definida sobre $\mathbb{C} - \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$, se llama la *rama principal de logaritmo*.

Ejemplo 1.4.8. La función e^z es analítica. *En efecto*, sean

$$u + iv = e^x \cos y + ie^x \sin y,$$

donde $u = \Re e^z = e^x \cos y$ y $v = \Im e^z = e^x \sin y$. Las funciones u y v tienen primeras derivadas parciales

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y,$$

que claramente son continuas en el plano. Luego u y v satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad -\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x},$$

para todo (x, y) en el plano. Por lo tanto e^z es analítica para todo z.

Definición 1.4.9. Sea Ω un conjunto abierto y conexo de $\mathbb{C}$ y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función continua tal que $z = \exp(f(z))$ para todo $z \in \Omega$, entonces f es una *rama del logaritmo*.

Proposición 1.4.10. *Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un conjunto abierto y conexo, y f es una rama de $\log z$ en Ω, entonces la totalidad de las ramas del $\log z$ son funciones $f(z) + 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$.*

Demostración. Sea f una rama del $\log z$ dada en un conjunto conexo Ω y sea k un número entero. Sea $g(z) = f(z) + 2k\pi i$. Luego $\exp g(z) = \exp f(z) = z$, entonces g también es una rama de $\log z$. Recíprocamente, si f y g son ramas de $\log z$, entonces para todo z en Ω se tiene que $f(z) = g(z) + 2k\pi i$ para algún entero k, donde k depende de z. Además el mismo entero k funciona para todo z en Ω. En efecto, si

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i}[f(z) - g(z)],$$

entonces h es continua en Ω y $h(\Omega) \subset \mathbb{Z}$. Como Ω es conexo, $h(\Omega)$ también lo es. Por lo tanto, existe k en $\mathbb{Z}$ tal que $f(z) + 2k\pi i = g(z)$, para todo $z \in \Omega$. $\square$

Proposición 1.4.11. *Sean A y B subconjuntos abiertos de $\mathbb{C}$. Suponga que $f : A \to \mathbb{C}$ y $g : B \to \mathbb{C}$ son funciones continuas tales que $f(A) \subset B$ y $g(f(z)) = z$ para todo $z \in A$. Si g es diferenciable y $g'(z) \neq 0$, entonces f es diferenciable y*

$$f'(z) = \frac{1}{g'(f(z))}.$$

Si g es analítica, f también lo es.

Demostración. Sea $a \in A$ fijo y $h \in \mathbb{C}$ tal que $h \neq 0$ y $a + h \in A$. Por lo tanto $a = g(f(a))$ y $a + h = g(f(a + h))$ implica que $f(a) \neq f(a + h)$. Además

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{g(f(a+h)) - g(f(a))}{h} \\ &= \frac{g(f(a+h)) - g(f(a))}{f(a+h) - f(a)} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}. \end{aligned}$$

Ahora el límite del lado izquierdo es 1, pués $h > 0$, así que el límite del lado derecho existe. Como

$$\lim_{h\to 0}[f(a+h) - f(a)] = 0,$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(f(a+h)) - g(f(a))}{f(a+h) - f(a)} = g'(f(a)).$$

Por lo tanto, obtenemos que

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

existe, ya que $g'(f(a)) \neq 0$, y $1 = g'(f(a))f'(a)$.
Por lo tanto, $f'(z) = [g'(f(z))]^{-1}$. Si g es analítica, g' es continua y esto da que f es analítica. $\square$

Corolario 1.4.12. Una rama de la función logaritmo es analítica y su derivada es z^{-1}.

Designamos la rama particular del logaritmo definido anteriormente en $\mathbb{C} - \{z : z < 0\}$ como la *rama principal del logaritmo*. Si escribimos log z como una función siempre lo tomaremos como la rama principal del logaritmo a menos que se indique lo contrario.

1.4.2. Integración

A continuación daremos una breve descripción de las integrales de líneas y caracterizaremos los dominios simplemente conexos.

Definición 1.4.13. Una función $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$, se dice de variación acotada si existe una constante $M > 0$ tal que para cualquier partición $P = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}$ de $[a, b]$ se tiene

$$v(\gamma; P) = \sum_{k=1}^{m} |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| \leq M$$

La variación total de γ, $V(\gamma)$ está definida por

$$V(\gamma) = \sup\{v(\gamma; P) : P \quad \text{es una partición de} \quad [a, b]\}.$$

Definición 1.4.14. Una funci´on de la forma $z(t) = x(t) + iy(t)$ con $a \leq t \leq b$ se dice diferenciable por pedazos si existe una partición $a < a_1 < a_2 \ldots < a_n < b$ tal que x, y son de clase C^1 en $[a, a_1], [a_1, a_2], \ldots, [a_n, b]$.En este caso nos referiremos a la función como curva, notar que el camino definido por la curva define siempre un conjunto compacto.

Proposición 1.4.15. *Sea $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ suave por pedazos, entonces γ es una variación acotada y*

$$V(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt.$$

Definición 1.4.16. Si $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ es suave por pedazos y $f[a, b] \to \mathbb{C}$ es una finción continua, entonces

$$\int_a^b f\, d\gamma = \int_a^b f(t)\gamma'(t)\, dt$$

Definición 1.4.17. Diremos que z es una curva rectificable si z es de variación acotada. Si además la curva $z(t)$ cumple que $z'(t) = x'(t) + y'(t) \neq 0$ excepto tal vez en un número finito de puntos, diremos que la curva es suave.

Definición 1.4.18. Si $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ es una curva rectificable y f es una función continua sobre la curva γ, entonces la (integral de linea) de f sobre γ está definida por

$$\int_a^b f(\gamma(t))\, d\gamma(t).$$

Esta integral de linea tambien se denota por $\int_\gamma f = \int_\gamma f(z)\, dz$.

Lema 1.4.19. *Sea A un conjunto abierto en $\mathbb{C}$, $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ un camino rectificable, y $f : A \to \mathbb{C}$ una función continua, entonces para todo $\epsilon > 0$ existe un camino poligonal Γ en A tal que $\Gamma(a) = \gamma(a)$, $\Gamma(b) = \gamma(b)$, y $|\int_\gamma f - \int_\Gamma f| < \epsilon$.*

Teorema 1.4.20. *Sea Ω un abierto en $\mathbb{C}$ y γ una curva rectificable en Ω cuyos puntos iniciales son a y b respectivamente. Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es una función continua cuya primitiva es $F : \Omega \to \mathbb{C}$, entonces*

$$\int_\gamma f = F(b) - F(a).$$

Definición 1.4.21. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ una función continua. Se define

$$\int_a^b f(t)\, dt = \int_a^b \Re f(t)\, dt + i \int_a^b \Im f(t)\, dt$$

Definición 1.4.22. Sea G un dominio en $\mathbb{C}$. Decimos que G es *simplemente conexo* si para toda curva cerrada simple γ contenida en G, el interior de γ también está contenido en G.

Teorema 1.4.23. *Sea $G \subset \mathbb{C}$ en un dominio simplemente conexo . Entonces para cualquier punto z_0 contenido en el interior de G y para cualquier camino γ cerrado simple también contenido en el interior de G que contenga al punto se tiene:*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz.$$

Como consecuencia tenemos que :

Teorema 1.4.24 (Cauchy)**.** *Sean G un dominio simplemente conexo y $f : G \to \mathbb{C}$ una función analítica en G. Entonces*

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0$$

para toda curva cerrada y C^1 a trozos γ.

Teorema 1.4.25. *Sean G un dominio y $f : G \to \mathbb{C}$ una función derivable en G. Sean $z \in \{\gamma\}$ y γ una curva de Jordan C^1 a trozos, orientada porsitivamente y contenida en G de manera que $z \in \{\gamma\} \subset S$. Entonces f es derivable infinitas veces en z y además*

$$f^{[n]}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}}\, dw, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Una función $f(z)$ definida sobre un abierto G de $\mathbb{C}$ se dirá *analítica* en $z_0 \in G$ si existe una serie de potencias tales que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \qquad \text{para todo} z \in G.$$

Teorema 1.4.26. *Sean $G \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto y $f : G \to \mathbb{C}$ una función derivable. Sean $z_0 \in G$ y $r > 0$ tales que $\overline{D}(z_0, r) \subset A$. Entonces*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{[n]}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

converge absolutamente sobre $D(z_0, r)$.

Proposición 1.4.27. *Sea $\phi[a, b] \times [c, d] \to \mathbb{C}$ una función continua y sea $g : [c, d] \to \mathbb{C}$ definida por*

$$g(t) = \int_a^b \phi(s, t)\, ds,$$

entonces g es continua. Además, si $\frac{\partial \phi}{\partial t}$ existe y es continua en $[a, b] \times [c, d]$, entonces g es continuamente diferenciable y

$$g'(t) = \int_a^b \frac{\partial \phi}{\partial t}(s, t)\, ds. \tag{1.4.8}$$

Lema 1.4.28. *Sea Ω un abierto en $\mathbb{C}$, γ un curva rectificable en Ω. Suponga que $\phi : \{\gamma\} \times \Omega \to \mathbb{C}$ es una función continua y sea $g : \Omega \to \mathbb{C}$ definida por*

$$g(z) = \int_\gamma \phi(w, z)\, dw,$$

entonces g es continua. Además, si $\frac{\partial \phi}{\partial z}$ existe y es continua en $\{\gamma\} \times \Omega$, entonces g es analítica y

$$g'(z) = \int_\gamma \frac{\partial \phi}{\partial z}(w, z)\, dw. \tag{1.4.9}$$

El siguiente resultado, aunque muy importante, es transitorio. Veremos un un resultado mucho más general que esta Fórmula integral de Cauchy; una fórmula que es uno de los hechos esenciales de la teoría.

Proposición 1.4.29. *Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función analítica y suponga que existe $r > 0$, $\overline{B}(a, r) \subset \Omega$. Si $\gamma(t) = a + re^{i\theta}$, $0 \leq r \leq 2\pi$, entonces*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(w)}{w - z}\, dw,$$

para $|z - a| < r$.

Proposición 1.4.30. *Sea f una función analítica en el disco $D(z,R)$ y suponga que γ es una curva rectificable cerrada en $D(z,R)$. Entonces*

$$\int_\gamma f = 0.$$

Toda función analítica en un punto z_0 es infinitamente diferenciable, luego podemos considerar su serie de Taylor

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^k(z_0)}{k}(z-z_0)^k$$

Teorema 1.4.31. *Sea $f : D(z_0,R) \to \mathbb{C}$ una función analítica. Entonces*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(z_0)}{k}(z-z_0)^n,$$

para todo $z \in D(z_0,R)$.

Teorema 1.4.32 (Principio del Módulo Máximo)**.** *Sean Ω una región del plano y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función analítica tal que $f(z) \leq f(a)$ para todo $a \in \Omega$, entonces f es constante.*

Definición 1.4.33. Si Ω es un conjunto abierto en $\mathbb{C}$ y (X,d) es un espacio metrico completo, denotamos por $C(\Omega,X)$ al conjunto de todas las funciones continuas de Ω en X.

El conjunto $C(\Omega,X)$ es no vacío pués siempre contiene a las funciones constantes.

Proposición 1.4.34. *El espacio metrico $C(\Omega,X)$ es completo.*

Definición 1.4.35. Sea Ω un subconjunto abierto del plano. Si $H(G)$ es el conjunto de las funciones analíticas en Ω, podemos considerar $H(\Omega)$ como un subconjunto de $C(\Omega,X)$.

Corolario 1.4.36. $H(G)$ es un espacio metrico completo.

Corolario 1.4.37. Si $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ es una sucesión de funciones analíticas y $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ converge uniformemente en compactos a $f(z)$, entonces

$$f^{[k]}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{[k]}(z).$$

En lo anterior hemos sustituido la hipótesis de convexidad sobre el dominio de la función en el teorema de Cauchy por una hipótesis específica sobre el arco de integración. Sin embargo, en muchos contextos teóricos necesitamos garantizar que una función tiene integral nula a lo largo de cualquier arco contenido en su dominio. La convexidad del mismo es una condición suficiente, pero no necesaria. Sucede que los abiertos Ω con la propiedad de que todos los arcos (o incluso ciclos) contenidos en Ω cumplen la hipótesis del teorema de Cauchy admiten una caracterización topológica muy simple:

Definición 1.4.38. Un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}^\infty$ es *simplemente conexo* si $\mathbb{C}^\infty - \Omega$ es conexo.

Para relacionar esta propiedad con el teorema de Cauchy necesitamos el siguiente resultado técnico

Teorema 1.4.39. *Sean A y B cerrados disjuntos en $\mathbb{C}^\infty$ de modo que $\infty \neq A$. Entonces existe un arco cerrado γ tal que tal que*

1. $\gamma \cap (A \cup B) = \emptyset$
2. *Para todo z en A:*
$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{w - z}\, dw = 1,$$
3. *Para todo $z \in B$, $z \neq \infty$*
$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{w - z}\, dw = 0.$$

El siguente teorema será de gran utilidad a lo largo del capítulo 3.

Teorema 1.4.40. *Sea G un subconjunto simplemente conexo de $\mathbb{C}$. Entonces son equivalentes*

1. *G es simplemente conexo.*
2. *$n(\gamma, a) = 0$ para toda curva cerada rectificable γ en G y todo punto a en $\mathbb{C} - G$.*
3. *$\mathbb{C}_\infty - G$ es conexo.*
4. *Para cualquier f en $H(G)$ existe una sucesión de polinomios que convergen a f en $H(G)$.*
5. *Para cualquier f en $H(G)$ y cualquier curva cerrada ractificable γ en G,*
$$\int_\gamma f = 0.$$
6. *Toda función f en $H(G)$ tiene primitiva.*
7. *Para cualquier f en $H(G)$ tal que $f(z) \neq 0$ para todo z en G, existe g en $H(G)$ tal que $f(z) = \exp(g(z))$.*
8. *Para cualquier f en $H(G)$ tal que $f(z) \neq 0$ para todo z en G existe g en $H(G)$ tal que $f(z) = [g(z)]^2$.*
9. *G es homeomorfo al disco unitario.*
10. *Si $u : G \to \mathbb{R}$ es armónica entonces existe otra función armónica $v : G \to \mathbb{R}$ tal que $f = u + iv$ es analítica en G.*

Demostración. Ver capítulo 8 de [2]. □

Capítulo 2

El Problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace en $\mathbb{R}^n$: Soluciones Clásicas

2.1. Identidades de Green

Como consecuencia del teorema de la divergencia de Gauss, obtenemos las identidades de Green, las cuales serán útiles en la búsqueda de soluciones.

Sea Ω_0 un dominio acotado de $\mathbb{R}^n$ con borde $\partial\Omega_0$, de clase C^1, y sea η el vector unitario normal exterior a $\partial\Omega_0$. Para cualquier campo w en $C^0(\overline{\Omega_0}) \cap C^1(\Omega_0)$, se tiene que

$$\int_{\Omega_0} div(w)dx = \int_{\partial\Omega_0} w \cdot \eta d\sigma, \tag{2.1.1}$$

donde $d\sigma$ denota el área $(n-1)$ dimensional en $\partial\Omega_0$. En particular, si $u \in C^1(\bar{\Omega_0}) \cap C^2(\Omega_0)$, tomando $w = \nabla u$ en (2.1.1), se tiene

$$\int_{\Omega_0} \triangle u dx = \int_{\partial\Omega_0} \nabla u \cdot \eta d\sigma = \int_{\partial\Omega_0} \frac{\partial u}{\partial \eta} d\sigma$$

Proposición 2.1.1 (Primera Identidad de Green)**.** *Sean $u \in C^2(\bar{\Omega})$ y $v \in C(\bar{\Omega})$, entonces*

$$\int_{\Omega} v(x)\triangle u(x)dx = \int_{\partial\Omega} v(x)\frac{\partial u}{\partial \eta}(x)d\sigma(x) - \int_{\Omega} \langle \triangle u, \triangle v\rangle dx \tag{2.1.2}$$

donde $\partial\Omega$ es la frontera de Ω, η es la normal exterior y $d\sigma$ es el elemento de área sobre $\partial\Omega$

Demostración. Sean $u \in C^2(\bar{\Omega})$ y $v \in C(\bar{\Omega})$. Entonces

$$\begin{aligned}
div(u\triangle v) &= div((vu_{x_1},\ldots,vu_{x_n}))\\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial(vu_{x_i})}{\partial x_i}\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}+v\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n} v_{x_i}u_{x_i}+v\sum_{i=1}^{n}u_{x_ix_i}\\
&= \nabla v\nabla u+v\triangle u.
\end{aligned}$$

Aplicando el teorema de la divergencia tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega div(v\nabla u)dx &= \int_{\partial\Omega}\langle v\nabla u,\eta\rangle d\sigma(x)\\
\int_\Omega(\nabla u\nabla v+v\triangle u)dx &= \int_{\partial\Omega}v\frac{\partial u}{\partial\eta}d\sigma(x)\\
\int_\Omega v\triangle u dx &= \int_{\partial\Omega}v\frac{\partial u}{\partial\eta}d\sigma(x)-\int_\Omega\nabla u\nabla dx,
\end{aligned}$$

que es lo que queríamos demostrar. □

Proposición 2.1.2 (Segunda Identidad de Green)**.** *Sean u y v en $C^2(\bar\Omega)$, entonces*

$$\int_\Omega(v(x)\triangle u(x)-u(x)\triangle v(x))dx=\int_{\partial\Omega}(v(x)\frac{\partial u}{\partial\eta}-u(x)\frac{\partial v}{\partial\eta})d\sigma(x), \tag{2.1.3}$$

donde $\partial\Omega$ es la frontera de Ω, η es la normal exterior y $d\sigma$ es el elemento de área sobre $\partial\Omega$.

Demostración. Sean u y v en $C^2(\bar\Omega)$. Por la primera identidad de Green obtenemos,

$$\int_\Omega v(x)\triangle u(x)dx=\int_{\partial\Omega}v(x)\frac{\partial u}{\partial\eta}(x)d\sigma(x)-\int_{\partial\Omega}\langle\nabla u,\nabla v\rangle dx \tag{2.1.4}$$

$$\int_\Omega u(x)\triangle v(x)dx=\int_{\partial\Omega}u(x)\frac{\partial v}{\partial\eta}(x)d\sigma(x)-\int_{\partial\Omega}\langle\nabla v,\nabla u\rangle dx \tag{2.1.5}$$

Restando estas dos expresiones tenemos la identidad requerida. □

Observación 2.1.3. Considere el problema de Dirichlet

$$\begin{cases}\triangle u=0 & si \quad x\in\Omega\\ \\ u=\phi & si \quad x\in\partial\Omega.\end{cases}$$

Notemos que si u es solución y $v=1$ en la primera identidad de Green, tenemos que

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} d\sigma = 0.$$

Proposición 2.1.4 (Tercera Identidad de Green)**.** *Sea $u \in C^2(\overline{\Omega})$ y $\xi \in \Omega$, entonces*

$$u(\xi) = -\int_{\partial\Omega} \left(v(|x-\xi|) \frac{\partial u}{\partial \eta}(x) - u(x) \frac{\partial v}{\partial \eta}(|x-\xi|) \right) d\sigma(x) + \int_{\Omega} v(|x-\xi|) \triangle u(x) dx,$$

donde v es la solución fundamental definida anteriormente.

Demostración. Como v no cumple las condiciones de las hipótesis de las identidades de Green, procedemos como sigue. Sea $\Omega_\rho = \Omega \setminus B_\rho(\xi)$, entonces utilizando la segunda identidad de Green, obtenemos,

$$\int_{\Omega_\rho} v(|x-\xi|) \triangle u(x)\, dx = \int_{\partial\Omega_\rho} \left(v(|x-\xi|) \frac{\partial u}{\partial \eta}(x) - u(x) \frac{\partial v}{\partial \eta}(|x-\xi|) \right) d\sigma(x). \tag{2.1.6}$$

Ahora si analizamos esta ecuación tenemos:

1. $\displaystyle\int_{\Omega_\rho} v(|x-\xi|) \triangle u(x)\, dx \underset{\rho\to 0}{\longmapsto} \int_{\Omega} v(|x-\xi|) \triangle u(x)\, dx.$

   En efecto,

$$\int_{\Omega_\rho} v(|x-\xi|) \triangle u(x)\, dx = \int_{\Omega} v(|x-\xi|) \triangle u(x) \delta_{\Omega_\rho}(x)\, dx$$

   donde

$$\delta_{\Omega_\rho} = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \delta_{\Omega_\rho}, \\ 0, & \text{si } x \neq \delta_{\Omega_\rho}. \end{cases}$$

   Además, para todo x en Ω se tiene,

$$|v(|x-\xi|) \triangle u(x) \delta_{\Omega_\rho}(x)| \leq \frac{c}{|x-\xi|^{n-2}},$$

   donde

$$c \geq \frac{1}{(n-2)W_n} \max_{x\in\overline{\Omega}} |\triangle u(x)|.$$

   Por el teorema de convergencia dominada de Lebesgue, se tiene la integrabilidad de $|v(|x-\xi|) \triangle u(x) \delta_{\Omega_\rho}(x)|$, pués $\dfrac{c}{|x-\xi|^{n-2}}$ es integrable. Entonces

$$\lim_{\rho\to 0} \int_{\Omega_\rho} v(|x-\xi|) \triangle u(x)\, dx = \int_{\Omega} v(|x-\xi|) \triangle u(x)\, dx.$$

2. $\displaystyle\int_{\partial B_\rho(\xi)} v(|x-\xi|)\frac{\partial u}{\partial \eta}(x)\, d\sigma(x) = 0.$

En efecto,

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\partial B_\rho(\xi)} v(|x-\xi|)\frac{\partial u}{\partial \eta}(x)\, d\sigma(x)\right| &= \left|\frac{-1}{(n-2)W_n\rho^{n-2}}\int_{\partial B_\rho(\xi)} \frac{\partial u}{\partial \eta}(x)\, d\sigma(x)\right| \\
&= \left|\frac{-1}{(n-2)W_n\rho^{n-2}}\int_{\partial B_\rho(\xi)} \triangle u(x)\, dx\right| \\
&\leq \frac{c\rho^n}{\rho^{n-2}} = c\rho^2 \underset{\rho\to 0}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

3. $\displaystyle\lim_{\rho\to 0}\int_{\partial B_\rho(\xi)} u(x)\frac{\partial v}{\partial \eta}(|x-\xi|)\, d\sigma(x) = u(\xi).$

En efecto, como

$$\int_{\partial B_\rho(\xi)} u(x)\frac{\partial v}{\partial \eta}(|x-\xi|)\, d\sigma(x) = \frac{1}{W_n\rho^{n-1}}\int_{B_\rho(\xi)} u(x)\, d\sigma(x),$$

entonces

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{W_n\rho^{n-1}}\int_{\partial B_\rho(\xi)} u(x)\, d\sigma(x) - u(\xi)\right| &= \left|\frac{1}{W_n\rho^{n-1}}\int_{\partial B_\rho(\xi)} (u(x)-u(\xi))\, d\sigma(x)\right| \\
&\leq \frac{1}{W_n\rho^{n-1}}\sup_{x\in\partial B_\rho(\xi)}|u(x)-u(\xi)|\int_{\partial B_\rho(\xi)} d\sigma(x) \\
&= \sup_{x\in\partial B_\rho(\xi)}|u(x)-u(\xi)| \underset{\rho\to 0}{\longrightarrow} 0,
\end{aligned}$$

dado que u es continua.
Ahora si tomamos $\rho \to 0$ en (2.1.6) y en virtud de los cálculos anteriores obtenemos la expresión:

$$u(\xi) = -\int_{\partial\Omega} v(|x-\xi|)\frac{\partial u}{\partial \eta}(x) - u(x)\frac{\partial v}{\partial \eta}\, d\sigma(x) + \int_\Omega v(|x-\xi|)\triangle u(x)\, dx.$$

□

Los mismos argumentos son válidos si sustituimos $v(|x-\xi|)$ por una función

$$G(x,\xi) = v(|x-\xi|) + \phi(x,\xi),$$

tal que para cada $\xi \in \Omega$ fijo y $x \in \partial\Omega$ se tenga $G(x,\xi) = 0$, donde $\phi(x,\xi)$ es una función armónica, es decir, $\triangle\phi = 0$. Entonces vale la identidad

$$
\begin{aligned}
u(\xi) &= -\int_{\partial\Omega}\left(G(x,\xi)\frac{\partial u}{\partial\eta}(x) - u(x)\frac{\partial G}{\partial\eta}(x,\xi)\right) d\sigma(x) + \int_{\Omega} G(x,\xi)\triangle u(x)\,dx \\
&= \int_{\partial\Omega} u(x)\frac{\partial G}{\partial\eta}(x,\xi)\,d\sigma(x) + \int_{\Omega} G(x,\xi)\triangle u(x)\,dx,
\end{aligned}
$$

pues por la segunda identidad de Green obtenemos,

$$\int_{\Omega}\phi\triangle u(x)\,dx - \int_{\partial\Omega}\left(\phi\frac{\partial u}{\partial\eta} - u\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\right) d\sigma = 0.$$

Por lo tanto para resolver el problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\triangle u = F, & x \in \Omega \\ u = f, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

sólo necesitamos resolver:

$$\begin{cases} \triangle_x\phi(x,\xi) = 0, & x \in \Omega \\ \phi(x,\xi) = -v(|x-\xi|), & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

De esta forma, obtenemos

$$u(\xi) = \int_{\partial\Omega} f(x)\frac{\partial G}{\partial\eta}(x,\xi)\,d\sigma(x) - \int_{\Omega} G(x,\xi)F(x)\,dx.$$

El problema en una región arbitraria es altamente no trivial.

2.2. El Problema de Dirichlet en una bola de $\mathbb{R}^n$

De acuerdo con las identidades vistas en el capítulo 1 debemos encontrar para cada x fijo una solución de la ecuación

$$\begin{cases} \triangle_y\phi(x,y) = 0, & |y| < R \\ \phi(x,y) = \frac{1}{W_n(n-2)|x-y|^{n-2}}, & |y| = R. \end{cases}$$

Ensayemos una solucón del tipo:

$$\phi(x,y) = \frac{1}{W_n(n-2)}\frac{k}{|\lambda x - y|^{n-2}}; \qquad \lambda x \neq y,$$

donde k, λ dependen eventualmente de x. Ahora por las condiciones de contorno se tiene

$$\frac{1}{|x-y|^{n-2}} = \frac{k}{|\lambda x - y|^{n-2}}$$

ó bien, $k^{\frac{2}{n-2}}|x-y|^2 = |\lambda x - y|^2$, que desarrollando queda

$$k^{\frac{2}{n-2}}(|x|^2 - 2\langle x, y\rangle + |y|^2) = \lambda^2|x|^2 - 2\lambda\langle x, y\rangle + |y|^2.$$

Reemplazando $|y| = R$ resulta,

$$(1 - k^{\frac{2}{n-2}})R^2 = (k^{\frac{2}{n-2}} - \lambda^2)|x|^2 - 2(\lambda - k^{\frac{2}{n-2}})\langle x, y\rangle,$$

y para $\lambda = k^{\frac{2}{n-2}}$, resulta

$$(1-\lambda)R^2 = (\lambda - \lambda^2)|x|^2,$$

de donde, o bien $\lambda = 1$, o bien $\lambda = \frac{R^2}{|x|^2}$. El valor $\lambda = 1$ se descarta, en este caso, no se tendría $\lambda x \neq y$ para $|y| < R$.

El otro valor da que, como $\frac{R^2}{|x|^2} > 1$, se tiene que

$$|\frac{R^2}{|x|^2}x| = R|\frac{R}{|x|}| > R,$$

por tanto cualquiera que sea $|y| < R$, se tiene

$$\frac{R^2}{|x|^2}x \neq y.$$

Como $\lambda = k^{\frac{2}{n-2}}$ resulta

$$k = \left(\frac{R}{|x|}\right)^{n-2}.$$

Entonces la correspondiente función $\phi(x, y)$ viene dada por:

$$\phi(x,y) = \frac{1}{(n-2)W_n}\left(\frac{R}{|x|}\right)^{n-2}\left|\frac{R^2}{|x|^2}x - y\right|^{2-n}.$$

Así, la función de Green toma la forma

$$G(x,y) = -\frac{1}{(n-2)W_n}\begin{cases} \left[|x-y|^{2-n} - \left(\frac{|x|}{R}\right)^{2-n}\left|\frac{R}{|x|^2}x - y\right|^{2-n}\right], & x \neq 0 \\ |y|^{2-n} - R^{2-n}; & x = 0 \end{cases} \tag{2.2.1}$$

La última expresión se deduce ya que

$$\phi(0,y) = \frac{1}{(n-2)W_n}R^{2-n}.$$

Como nuestro objetivo es resolver el Problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \triangle u = 0, & x \in \Omega, \\ u = f, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

entonces, aplicando la tercera identidad de Green tenemos,

$$u(\xi) = \int_{\partial B_R(0)} \frac{\partial G}{\partial \eta_y}(y,\xi) f(y)\, d\sigma(y). \tag{2.2.2}$$

Ahora calculamos el kernel de Poisson $\frac{\partial G}{\partial \eta_y}$ cuando $|y| = R$.
Derivando en (2.2.1) tenemos,

$$\nabla_y G(x,y) = -\frac{1}{W_n} \sum_{i=1}^{n} \left(|x-y|^{-n}(x_i - y_i) - \left(\frac{|x|}{R}\right)^{2-n} \left| \frac{R^2 x_i}{|x|^2} - y_i \right| \right) e_i.$$

Luego, como estamos considerando el problema

$$\begin{cases} \triangle_y \phi(x,y) = 0, & \text{si} \quad |y| < R \\ \phi(x,y) = \frac{1}{W_n(n-2)} \frac{1}{|x-y|^{n-2}}, & \text{si} \quad |y| = R \end{cases}$$

y $G(x,y) = 0$ si $|y| = R$, entonces

$$|x-y| = \frac{|x|}{R} \left| \frac{R^2 x}{|x|^2} - y \right|,$$

sustituyendo en $\nabla_y G(x,y)$, obtenemos que

$$\begin{aligned} \nabla_y G(x,y) &= \frac{1}{W_n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{(x_i - y_i)}{|x-y|^n} - \left(\frac{|x|}{R}\right)^2 \left(\frac{R^2 x_i}{|x|^2} - y_i \right) |x-y|^{-n} \right) e_i \\ &= \frac{1}{W_n |x-y|^n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i - x_i + \frac{|x|^2}{R^2} y_i) e_i \\ &= \frac{-1}{W_n |x-y|^n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{|x|^2 - R^2}{R^2} \right) y_i e_i \\ &= \frac{R^2 - |x|^2}{R^2 W_n |x-y|^n} \sum_{i=1}^{n} y_i e_i. \end{aligned}$$

Además, como la normal a la esfera es

$$\eta = \frac{1}{R}(y_1, \ldots, y_n),$$

entonces, la derivada normal de la función de Green está dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial \eta}(x,y) &= \langle \nabla_y G(x,y), \eta_y \rangle \\ &= \frac{1}{W_n |x-y|^n} \left(\frac{R^2 - |x|^2}{R^2} \right) \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i^2}{R} \\ &= \frac{R^2 - |x|^2}{R W_n |x-y|^n}. \end{aligned}$$

Si ahora reemplazamos en (2.2.2) es natural el siguiente resultado.

Teorema 2.2.1. *Sea f una función continua en la esfera $S_R = \{y \in \mathbb{R}^n : |y| = R\}$. Si se define:*

$$u(x) = \begin{cases} \dfrac{R^2 - |x|^2}{RW_n} \displaystyle\int_{|y|=R} \frac{f(y)}{|x-y|^n}\, d\sigma(y), & si \quad |x| < R \\ \\ f(x), & si \quad |x| = R, \end{cases} \tag{2.2.3}$$

entonces u es continua en $|x| \leq R$ y $u \in C^\infty$ en $|x| < R$, siendo además solución del problema

$$\begin{cases} \triangle u(x) = 0, & si \quad |x| < R \\ \\ u(x) = f(x), & si \quad |x| = R. \end{cases}$$

Demostración. Si $|x| < R$, entonces $u \in C^\infty$. En efecto, si $|x| < R$ se tiene

$$\frac{R^2 - |x|^2}{RW_n|x-y|^n} \in C^\infty \qquad \text{si} \quad |y| = R \quad \text{y} \quad |x| < R,$$

por lo que podemos derivar reiteradas veces en (2.2.3). Por otra parte, por la construcción hecha, el núcleo de Poisson verifica la ecuación de Laplace en el interior de la bola de radio R. En efecto,

$$\begin{aligned} \triangle u(x) &= \frac{1}{RW_n} \int_{|y|=R} f(y) \triangle_x \left(\frac{R^2 - |x|^2}{|x-y|^n} \right) d\sigma(y) \\ &= \frac{1}{RW_n} \int_{|y|=R} f(y) [R^2 \triangle_x (|x-y|^{-n}) - \triangle_x (|x|^2 |x-y|^n)]\, d\sigma(y) \\ &= \frac{1}{RW_n} \int_{|y|=R} f(y) [R^2 (2n|x-y|^{-n-2}) - 2n|x-y|^{-n-2} R^2]\, d\sigma(y) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por último, probemos que $u \in C^0$ en $|x| = R$. Consideremos x_0 tal que $|x_0| = R$ y sea $\rho > 0$. Definamos

$$E_\rho = \{y : |y| = R, |x_0 - y| > \rho\},$$

entonces si $|x| < R$, $|x_0 - y| < \frac{\rho}{2}$. Obtenemos para cada $y \in E_\rho$:

$$|x - y| \geq |y - x_0| - |x - x_0| > \frac{\rho}{2},$$

lo que implica que:

$$
\begin{aligned}
\int_{E_\rho} \frac{1}{RW_n}\left(\frac{R^2-|x|^2}{|x-y|^n}\right) d\sigma(y) &\leq \frac{(R+|x|)(R-|x|)}{RW_n}\int_{E_\rho}\frac{d\sigma(y)}{|x-y|^n} \\
&\leq \frac{2R(R-|x|)}{RW_n}\int_{E_\rho}\frac{d\sigma(y)}{|x-y|^n} \\
&\leq \frac{2R(R-|x|)}{RW_n}\left(\frac{2}{\rho}\right)^n\int_{E_\rho} d\sigma(y) \\
&\leq \frac{2R(R-|x|)}{RW_n}\left(\frac{2}{\rho}\right)^n W_n R^{n-1} \\
&= 2^{n+1}\frac{(R-|x|)}{\rho}\left(\frac{R}{\rho}\right)^{n-1},
\end{aligned}
$$

por lo que:

$$
\begin{aligned}
|u(x)-f(x_0)| &= \left|\frac{1}{RW_n}\int_{|y|=R}\frac{R^2-|x|^2}{|x-y|^n}f(y)\,d\sigma(y)-f(x_0)\right| \\
&= \left|\frac{1}{RW_n}\int_{|y|=R}\frac{R^2-|x|^2}{|x-y|^n}f(y)\,d\sigma(y)-\frac{f(x_0)}{RW_n}\int_{|y|=R}\frac{R^2-|x|^2}{|x-y|^n}\,d\sigma(y)\right| \\
&= \left|\frac{1}{RW_n}\int_{|y|=R}\frac{R^2-|x|^2}{|x-y|^n}(f(y)-f(x_0))\,d\sigma(y)\right|.
\end{aligned}
$$

Además, como f es uniformemente continua en $|y|=R$, dado $\epsilon>0$, existe $\delta>0$ tal que si $|y_1-y_2|<\delta$, entonces $|f(y_1)-f(y_2)|<\frac{\epsilon}{2}$.
Consideremos $A=\max\{|f(y)|:|y|=R\}$, y $S_1=\{y:|y|=R,|y-x_0|<\rho\}$ con $\rho<\delta$, y $S_2=\partial B_R(0)\setminus S_1$. Entonces

$$
\begin{aligned}
|u(x)-f(x_0)| &= \left|\frac{1}{RW_n}\int_{|y|=R}\frac{R^2-|x|^2}{|x-y|^n}(f(y)-f(x_0))\,d\sigma(y)\right| \\
&\leq \frac{1}{RW_n}\int_{|y|=R}\left(\frac{R^2-|x|^2}{|x-y|^n}\right)|f(y)-f(x_0)|\,d\sigma(y) \\
&= \frac{1}{RW_n}\int_{S_1}\left(\frac{R^2-|x|^2}{|x-y|^n}\right)|f(y)-f(x_0)|\,d\sigma(y) \\
&\quad +\frac{1}{RW_n}\int_{S_2}\left(\frac{R^2-|x|^2}{|x-y|^n}\right)|f(y)-f(x_0)|\,d\sigma(y) \\
&\leq \frac{1}{RW_n}\frac{\epsilon}{2}\int_{S_2}\left(\frac{R^2-|x|^2}{|x-y|^n}\right)d\sigma(y)+\frac{|f(x_0)|}{RW_n}\int_{S_2}\left(\frac{R^2-|x|^2}{|x-y|^n}\right)d\sigma(y) \\
&= \frac{\epsilon}{2}+\frac{2A}{RW_n}\int_{S_2}\left(\frac{R^2-|x|^2}{|x-y|^n}\right)d\sigma(y) \\
&\leq \frac{\epsilon}{2}+2A\left(\frac{2^{n+1}(R-|x|)R^{n-1}}{\rho^n}\right),
\end{aligned}
$$

y $R-|x|=|x_0|-|x|\leq|x-x_0|$. Ahora si consideramos

$$|x-x_0|<\frac{\epsilon}{2}\left(\frac{\rho^n}{2AR^{n-1}2^{n+1}}\right),$$

entonces

$$\begin{aligned}|u(x)-f(x_0)| &\leq \frac{\epsilon}{2}+2A\left(\frac{2^{n+1}(R-|x|)R^{n+1}}{\rho^n}\right)\\ &\leq \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon.\end{aligned}$$

Por lo tanto, u es continua en $|x|\leq R$.

□

La expresión integral (2.2.3) se denomina *integral de Poisson de* f, y como consecuencia del teorema anterior se tiene el siguiente resultado de dependencia continua.

Corolario 2.2.2. Si f y $\overline{f}$ son funciones continuas en $|y|=R$ y u y $\overline{u}$ son sus respectivas integrales de Poisson definidas por (2.2.3), entonces

$$|u(x)-\overline{u}(x)|\leq\sup_{|y|=R}|g(y)-\overline{f}(y)|,$$

si $|x|<R$.

Resumiendo, si conocemos explícitamente la función de Green, el problema de Dirichlet está resuelto.

2.3. Propiedades de las funciones armónicas en $\mathbb{R}^n$

Consideremos Ω un domimio acotado. Diremos que una función u es armónica, si $u\in C^2$ y $\triangle u=0$ en Ω.

Proposición 2.3.1. *Sea u una función armónica en $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ y sea $x_0\in\Omega$. Entonces*

$$|u_{x_i}(x_0)|\leq\frac{n}{d(x_0)}\sup_{x\in\Omega}|u|,$$

donde $d(x_0)=\inf\limits_{y\in\partial\Omega}|x_0-y|$.

Demostración. Supongamos inicialmente que Ω es una bola con centro en el origen y radio R. Entonces

$$u(x)=\frac{1}{RW_n}\int_{|y|=R}\frac{(R^2-|x|^2)}{|x-y|^2}u(y)\,d\sigma(y).$$

Como

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{(R^2-|x|^2)}{|x-y|^2}\right]=\frac{(|x|^2-R^2)n(x_i-y_i)-2x_i|x-y|^2}{|x-y|^{n+2}},$$

entonces

$$\begin{aligned}
|u_{x_i}(0)| &= \left|\frac{n}{W_n R^{n+1}} \int_{|y|=R} y_i u(y)\, d\sigma(y)\right| \\
&\leq \frac{n}{W_n R^{n+1}} \int_{|y|=R} |y_i u(y)|\, d\sigma(y) \\
&\leq \frac{n}{W_n R^{n+1}} \max_{|y|=R} |y_i u(y)| \int_{|y|=R} d\sigma(y) \\
&= \frac{n}{W_n R^{n+1}} \max_{|y|=R} |y_i u(y)| R^{n-1} W_n \\
&\leq \frac{n}{R^2} \max_{|y|=R} |u(y)| \max_{|y|=R} |y_i| \\
&= \frac{n}{R} \max_{|y|=R} |u(y)|.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$|u_{x_i}(0)| \leq \frac{n}{R} \max_{|y|=R} |u(y)|. \tag{2.3.1}$$

Ahora volviendo a nuestro problema original consideremos $x_0 \in \Omega$ y denotemos por $d(x_0)$ la distancia de x_0 al borde de Ω. Aplicando (2.3.1) a la bola de radio $a < d(x_0)$ con centro x_0, tenemos:

$$|u_{x_i}(0)| \leq \frac{n}{a} \max_{y \in \partial B_a(x_0)} |u(y)|.$$

Por último, tomando el límite cuando $a \to d(x_0)$, obtenemos:

$$|u_{x_i}(0)| \leq \frac{n}{d(x_0)} \sup_{y \in \Omega} |u(y)|.$$

□

Proposición 2.3.2. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado y $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión de funciones armónicas uniformemente acotadas, es decir,*

$$\sup_{x\in\Omega} |u_n(x)| \leq M, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Entonces, si $K \subset \Omega$ es un compacto, existe una subsuseción que converge en K.

Demostración. Vamos a probar que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión equicontinua de funciones y luego aplicando el teorema de Arzela-Ascoli obtendremos el resultado deseado. En efecto, aplicando la propiedad anterior tenemos que,

$$\begin{aligned}
|Du(x)| &= \max_{|v|=1} |Du(x)v| \\
&= \max_{|v|=1} |\sum_{i=1}^{n} \alpha_i Du(x) e_i| \\
&= \max_{|v|=1} |\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_{x_i}(x)| \\
&\leq \max_{|v|=1} \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i||u_{x_i}(x)| \\
&\leq \frac{n}{d(x,\partial\Omega)} \sup_{y\in\Omega} |u(y)| \max_{|v|=1} \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \\
&\leq \frac{n^2}{d(x,\partial\Omega)} \sup_{y\in\Omega} |u(y)|.
\end{aligned}$$

Ahora consideremos $K \subset \Omega$ compacto. Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $|x-y| < \delta$ con x, $y \in K$. Aplicando el teorema del valor medio y tomando $\xi \in K$, tenemos que $d(K, \partial\Omega) \leq d(\xi, \partial\Omega)$ y así,

$$\begin{aligned}
|u_n(x) - u_n(y)| &\leq \frac{n^2}{d(K,\partial\Omega)} \sup_{z\in\Omega} |Du(z)||x-y| \\
&\leq \frac{n^2}{d(K,\partial\Omega)} M\delta < \epsilon,
\end{aligned}$$

donde basta considerar $0 < \delta \leq \dfrac{\epsilon d(K,\partial\Omega)}{n^2 m}$.

Como esto es dado para todo n, tenemos que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una sucesión equicontinua en K. Ahora aplicando el teorema de Arzela-Ascoli obtenemos el resultado deseado. □

Definición 2.3.3. Sea $v \in C(\Omega)$. Diremos qe v satisface la propiedad de la media en Ω, si para cada $r > 0$ tal que $B(x,r) \subset \Omega$, se verifica

$$v(x) = \frac{1}{W_n r^{n-1}} \int_{|x-y|=r} v(y)\, d\sigma(y).$$

Proposición 2.3.4. *$v \in C(\Omega)$ satisface la primera propiedad del valor medio, si y solo si,*

$$v(x) = \frac{n}{W_n r^n} \int_{|x-y|\leq r} v(y)\, d\sigma(y).$$

Demostración. Supongamos que v satisface la primera propiedad del valor medio y sea $0 < \rho < r$, entonces

$$W_n \rho^{n-1} v(x) = \int_{|x-y|=\rho} v(y)\, d\sigma(y).$$

Integrando en la ecuación anterior respecto a ρ entre 0 y r tenemos,

$$\begin{aligned} \int_0^r W_n \rho^{n-1} v(x)\, d\rho &= W_n \frac{r^n}{n} v(x) \\ &= \int_0^r \left[\int_{|x-y|=\rho} v(y)\, d\sigma(y) \right] \qquad (*) \\ &= \int_{|x-y|\le r} v(y)\, d\sigma(y). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$v(x) = \frac{n}{W_n r^n} \int_{|x-y|\le r} v(y)\, d\sigma(y).$$

Recíprocamente, basta considerar la ecuación $(*)$ para obtener el resultado deseado. $\square$

Teorema 2.3.5. *Sea u una función armónica en Ω, entonces u verifica la primera propiedad de la media.*

Demostración. Dado que $\triangle u = 0$ en Ω, en particular si $B(x,r) \subset \Omega$, utilizando la tercera identidad de Green obtenemos:

$$u(\xi) = -\int_{|x-y|=r} \left(v(|x-\xi|) \frac{\partial u}{\partial \eta}(x) - u(x) \frac{\partial v}{\partial \eta}(|x-\xi|) \right) d\sigma(x).$$

$\square$

Notemos que

$$\begin{aligned} \int_{|x-\xi|=r} v(|x-\xi|) \frac{\partial u}{\partial \eta}(x)\, d\sigma(x) &= \frac{-1}{(n-2)W_n r^{n-2}} \int_{|x-\xi|=r} \frac{\partial u}{\partial \eta}(x)\, d\sigma(x) \\ &= \frac{-1}{(n-2)W_n r^{n-2}} \int_{|x-\xi|<r} div(\nabla u(x))\, dx \\ &= \frac{-1}{(n-2)W_n r^{n-2}} \int_{|x-\xi|<r} \triangle u(x)\, dx. \end{aligned}$$

Por otro lado, tenemos que

$$\frac{\partial v}{\partial \eta}(|x-\xi|) = \frac{1}{W_n r^{n-1}}, \qquad \text{en} \quad |x-\xi| = r,$$

entonces

$$\begin{aligned} u(\xi) &= \int_{|x-y|=r} u(x) \frac{1}{W_n r^{n-1}}\, d\sigma(x) \\ &= \frac{1}{W_n r^{n-1}} \int_{|x-y|=r} u(x)\, d\sigma(x) \end{aligned}$$

Proposición 2.3.6 (Desigualdad de Harnack en una bola)**.** *Sea* $u \in C^2$ *en* $|x| < R$*,* $u \in C$ *en* $|x| \leq R$*,* $u \geq 0$ *y* $\triangle u = 0$ *en* $|x| < R$*. Entonces, si* $|x| < R$*, se tiene que*

$$\frac{R^{n-2}(R-|x|)}{(R+|x|)^n - 1}u(0) \leq u(x) \leq \frac{R^{n-2}(R+|x|)}{(R-|x|)^n - 1}u(0) \tag{2.3.2}$$

Demostración. En efecto, como u es armónica, entonces u verifica la primera propiedad de la media, es decir,

$$u(x) = \frac{1}{W_n R^{n-1}} \int_{|x-y|=R} u(y)\, d\sigma(y),$$

entonces

$$u(0) = \frac{1}{W_n R^{n-1}} \int_{|y|=R} u(y)\, d\sigma(y). \tag{2.3.3}$$

Por otra parte, si $|y| = R$ tenemos que

$$R - |x| = |y| - |x| \leq |x-y| \leq |x| + |y| = R + |x|. \tag{2.3.4}$$

Ahora aplicando el teorema de Poisson y considerando (2.3.3) y (2.3.4) obtenemos

$$\begin{aligned}
u(x) &= \frac{R^2 - |x|^2}{W_n R} \int_{|y|=R} \frac{u(y)}{|x-y|^n}\, d\sigma(y) \\
&\leq \frac{R^2 - |x|^2}{W_n R} \int_{|y|=R} \frac{u(y)}{(R-|x|)^n}\, d\sigma(y) \\
&= \frac{R+|x|}{W_n R(R-|x|)^{n-1}} \int_{|y|=R} u(y)\, d\sigma(y) \\
&= \frac{(R+|x|)R^{n-2}}{(R-|x|)^{n-1}} \left[\frac{1}{W_n R^{n-1}} \int_{|y|=R} u(y)\, d\sigma(y)\right] \\
&= \frac{(R+|x|)R^{n-2}}{(R-|x|)^{n-1}} u(0).
\end{aligned}$$

Análogamente,

$$\begin{aligned}
u(x) &= \frac{R^2 - |x|^2}{W_n R} \int_{|y|=R} \frac{u(y)}{|x-y|^n}\, d\sigma(y) \\
&\geq \frac{R^2 - |x|^2}{W_n R} \int_{|y|=R} \frac{u(y)}{(R-|x|)^n}\, d\sigma(y) \\
&= \frac{R+|x|}{W_n R(R-|x|)^{n-1}} \int_{|y|=R} u(y)\, d\sigma(y) \\
&= \frac{(R+|x|)R^{n-2}}{(R-|x|)^{n-1}} \left[\frac{1}{W_n R^{n-1}} \int_{|y|=R} u(y)\, d\sigma(y)\right] \\
&= \frac{(R+|x|)R^{n-2}}{(R-|x|)^{n-1}} u(0).
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{R^{n-2}(R-|x|)}{(R+|x|)^n-1}u(0) \le u(x) \le \frac{R^{n-2}(R+|x|)}{(R-|x|)^n-1}u(0)$$

como queríamos demostrar. □

Teorema 2.3.7 (Principio del máximo)**.** *. Sea Ω un dominio acotado de $\mathbb{R}^n$ y $u \in C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$ verificando $\triangle u \ge 0$, entonces el máximo de u se alcanza en la frontera $\partial\Omega$, es decir,*

$$\max_{x\in\overline{\Omega}} u(x) = \max_{y\in\partial\Omega} u(y)$$

Demostración. Observemos que una función continua u asume su máximo en algún lugar en el conjunto cerrado y acotado $\overline{\Omega}$. Es claro que

$$\max_{x\in\overline{\Omega}} u(x) \le \max_{y\in\partial\Omega} u(y).$$

Para probar la otra desigualdad, supongamos que $\triangle u > 0$ en Ω, entonces si u tubiese un máximo en el interior de Ω, la matriz hessiana sería semidefinida negativa y en particular su traza, pues la matriz hessiana tiene el mismo carácter que su matriz canónica de Jordan y la traza es invariante bajo matrices similares, la cual es el laplaciano de u. Entonces $\triangle u$ debería ser negativo, pues los valores propios son menores o iguales a 0, lo cual es una contradicción. Por lo tanto,

$$\max_{x\in\overline{\Omega}} u(x) = \max_{y\in\partial\Omega} u(y).$$

Supongamos ahora que $\triangle u = 0$. Consideremos la función auxiliar $v_\epsilon(x) = u(x) + \epsilon|x|^2$, donde $\epsilon > 0$, entonces

$$\triangle v_\epsilon(x) = \triangle u(x) + \epsilon > 0,$$

por el mismo argumento anterior obtenemos que:

$$\max_{x\in\overline{\Omega}} v_\epsilon(x) = \max_{y\in\partial\Omega} v_\epsilon(y).$$

Aplicando el límite cuando $\epsilon \to 0$ en la ecuación anterior obtenemos

$$\max_{x\in\overline{\Omega}} u(x) = \max_{y\in\partial\Omega} u(y)$$

□

Corolario 2.3.8 (Principio del mínimo)**.** Sea Ω un dominio acotado de $\mathbb{R}^n$ y $u \in C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$ verificando $\triangle u \le 0$, entonces el mínimo de u se alcanza en la frontera $\partial\Omega$.

Teorema 2.3.9. *Sea $u \in C(\overline{\Omega})$ satisfaciendo la condición de la media en Ω. Si existe $x_0 \in \Omega$ tal que:*

$$u(x_0) = M = \max_{x\in\overline{\Omega}} u(x),$$

entonces $u(x) \equiv M$, $x \in \Omega$.

Demostración. Sea $A = \{x \in \Omega : u(x) = M\}$, entonces A es cerrado, pues es la imagen inversa de un cerrado bajo una función continua, $A = u^{-1}(M)$. Consideremos ahora $\xi \in A$ tal que $B(\xi, r) \subset \Omega$ para algún $r > 0$, entonces

$$0 = M - u(\xi) = \frac{1}{W_n r^n} \int_{|y-\xi|\leq r} (M - u(y))\, dy$$

lo que implica que

$$M - u(y) = 0, \qquad \forall y \in B[\xi, r].$$

Por lo tanto, A es abierto en Ω, luego $A = \Omega$.

□

Teorema 2.3.10. *Seau $\in C(\Omega)$ verificando la propiedad de la media en Ω. Entonces u es armónica en Ω.*

Demostración. Sea $x \in \Omega$ y consideremos el siguiente problema:

$$\begin{cases} \triangle v(y) = 0, & y \in B(x, r), \\ v(y) = u(y), & y \in \partial B(x, r). \end{cases}$$

Entonces, en virtud del teorema (2.3.9), $u - v$ satisface la primera propiedad de la media en $B(x, r) \subset \Omega$ y $u - v$ es continua en $\partial B(x, r)$, aplicando el principio del máximo se tiene que

$$0 = \min_{y\in\partial B(x,r)} (u(y) - v(y)) \leq (u(z) - v(z)) \leq \max_{y\in\partial B(x,r)} (u(y) - v(y)) = 0,$$

entonces $u(z) = v(z)$ para todo $z \in B(x, r)$ y como x fue escogido arbitrariamente se tiene que u es armónica en Ω. □

Corolario 2.3.11. Sea $F \in C(\Omega)$ y $f \in C(\partial\Omega)$, entonces

$$\begin{cases} \triangle u = F, & \Omega \\ u = f, & \partial\Omega \end{cases}$$

tiene a lo más una solución.

Demostración. Supongamos que u_1 y u_2 son soluciones del problema, enonces $u = u_1 - u_2$ satisface

$$\begin{cases} \triangle u = 0, & \Omega \\ u = 0, & \partial\Omega \end{cases}$$

lo que implica que

$$\max_{x\in\overline{\Omega}} u(x) = \max_{x\in\partial\Omega} u(x) = 0$$

y

$$\min_{x\in\overline{\Omega}} u(x) = \min_{x\in\partial\Omega} u(x) = 0,$$

entonces $u = 0$ en Ω, por lo tanto $u_1 = u_2$. □

Corolario 2.3.12. Sean u_1 y u_2 soluciones de los problemas

$$\begin{cases} \triangle u_i = F, & x \in \Omega \\ u_i = f_i, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

con $i = 1, 2$. Entonces para todo $x \in \Omega$ se tiene que

$$\min_{y \in \partial\Omega}(f_1(y) - f_2(y)) \leq u_1(x) - u_2(x) \leq \max_{y \in \partial\Omega}(f_1(y) - f_2(y)).$$

Teorema 2.3.13 (Primer teorema de Harnack)**.** *Sea $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones armónicas, $u_k \in C(\overline{\Omega})$ para todo $k \in \mathbb{N}$; si la sucesión $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a u en $\partial\Omega$, entonces $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a una función armónica u, sobre Ω.*

Demostración. Por el principio del máximo tenemos:

$$\sup_{x \in \overline{\Omega}} |u_k(x) - u_n(x)| \leq \sup_{y \in \partial\Omega} |u_k(y) - u_n(y)|$$

y así la sucesión es uniformemente de Cauchy en Ω, por lo tanto, converge uniformemente sobre Ω a una función continua u. Para ver que u es armónica, basta probar que u verfica la propiedad de la media. En efecto, sea $x \in \Omega$ y $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset \Omega$, entonces

$$\begin{aligned} u(x) &= \lim_{k\to\infty} u_k(x) \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{W_n r^{n-1}} \int_{|x-y|=r} u_k(y)\, d\sigma(y) \\ &= \frac{1}{W_n r^{n-1}} \int_{|x-y|=r} \lim_{k\to\infty} u_k(y)\, d\sigma(y) \\ &= \frac{1}{W_n r^{n-1}} \int_{|x-y|=r} u(y)\, d\sigma(y) \end{aligned}$$

como queríamos probar. □

Teorema 2.3.14 (Desigualdad de Harnack)**.** *Sea u una función armónica en Ω. Sea $A \subset \Omega$ un dominio acotado tal que su clausura, $\overline{A}$, esté contenida en Ω.*
Entonces existe una constante C que depende de Ω, A y n, tal que

$$\sup_{x \in A} u(x) \leq C \inf_{x \in A} u(x).$$

Demostración. Sea $x \in \Omega$ y $r > 0$ tal que $B(x, 4r) \subset \Omega$ y si y, $z \in B(x, r)$, entonces por la desigualdad triangular,

$$B(y, 3r) \subset \Omega, \qquad \text{y} \quad B(z, 3r) \subset \Omega,$$

y además,

$$B(y, r) \subset B(x, 2r) \subset B(z, 3r).$$

Ahora aplicando la propiedad de la media en u, tenemos:

$$u(y) = \frac{n}{W_n r^n} \int_{|x-y|=r} u(s)\, ds \leq \frac{n}{W_n r^n} \int_{B(x,2r)} u(s)\, ds \tag{2.3.5}$$

y

$$u(z) = \frac{n}{W_n(3r)^n} \int_{B(x,3r)} u(s)\, ds \geq \frac{n}{W_n(3r)^n} \int_{B(x,2r)} u(s)\, ds \tag{2.3.6}$$

Por lo tanto, como los cálculos anteriores son válidos para cada y, $z \in B(x,r)$, por (2.3.5) se tiene que

$$\sup_{y \in B(x,r)} u(y) \leq \frac{n}{W_n r^n} \int_{B(x,2r)} u(s)\, ds$$

y de (2.3.6) resulta

$$\frac{n}{W_n(3r)^n} \int_{B(x,2r)} u(s)\, ds \leq \inf_{z \in B(x,r)} u(z)$$

de donde

$$\sup_{y \in B(x,r)} u(y) \leq 3^n \inf_{z \in B(x,r)} u(z). \tag{2.3.7}$$

Ahora consideremos A como en el teorema, es decir, $\overline{A}$ es un compacto de Ω. Sean y, $z \in \overline{A}$ tales que u alcanza su máximo y mínimo en $\overline{A}$ respectivamente. Tales puntos pueden ser unidor por una curva contenida en $\overline{A}$, por ser conexo . Si tomamos $0 < 4r = dist(A, \partial\Omega)$ se tiene que todas las bolas con centro en los puntos de la curva y radio $4r$ están contenidas en Ω. Por otro lado, por la compacidad de la curva que una a y e z, se tiene que basta una cantidad finita, digamos m, de bolas para cubrirla. De esta forma, empezando por el punto máximo y aplicando (2.3.7) de forma reiterada, se tiene que

$$\sup_{y \in A} u(y) \leq 3^{nm} \inf_{y \in A} u(y).$$

$\square$

2.4. El Problema de Dirichlet en dominios generales. Método de Perron-Poincaré

En esta sección daremos condiciones geométricas sobre el dominio para poder asegurar la existencia de soluciones clásicas del problema de Dirichlet.

Proposición 2.4.1. *Sea $u \in C^2(\Omega)$, donde Ω es un dominio de $\mathbb{R}^n$ y $-\triangle u \leq 0$ en Ω. Si consideramos $r > 0$ tal que $\overline{B(x,r)} \subset \Omega$, entonces*

$$u(x) \leq \frac{1}{W_n r^{n-1}} \int_{|x-y|=r} u(y)\, d\sigma(y).$$

Demostración. Sea ρ_0 tal que $\overline{B(x,\rho)} \subset \Omega$ para todo $0 < \rho < \rho_0$. Aplicando la primera identidad de Green a u tenemos

$$\int_{|x-y|=\rho} \frac{\partial u}{\partial \eta}(y)\, d\sigma(y) = \int_{|x-y|\leq\rho} \triangle u(y)\, dy \geq 0.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\int_{|x-y|=\rho} \frac{\partial u}{\partial \eta}(y)\, d\sigma(y) &= \rho^{n-1} \int_{|w|=1} \frac{\partial u}{\partial \eta}(x+\rho w)\, d\sigma(w) \\ &= \rho^{n-1} \int_{|w|=1} \frac{\partial u}{\partial \rho}(x+\rho w)\, d\sigma(w) \\ &= \rho^{n-1} \frac{\partial}{\partial \rho} \int_{|w|=1} \frac{\partial u}{\partial \rho} u(x+\rho w)\, d\sigma(w) \\ &= \rho^{n-1} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^{1-n} \int_{|x-y|=\rho} u(y)\, d\sigma(y) \right) \\ &\geq 0,\end{aligned}$$

lo que implica que

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^{1-n} \int_{|x-y|=\rho} u(y)\, d\sigma(y) \right) \geq 0.$$

Si consideramos

$$F(\rho) = \rho^{1-n} \int_{|x-y|=\rho} u(y)\, d\sigma(y)$$

entonces F es creciente. Así, para todo $0 < \rho < \rho_0$ se tiene que

$$\rho^{1-n} \int_{|x-y|=\rho} u(y)\, d\sigma(y) \leq \rho_0^{1-n} \int_{|x-y|=\rho_0} u(y)\, d\sigma(y)$$

ahora si tomamos el límite cuando $\rho \to 0$ obtenemos

$$W_n u(x) \leq \rho_0^{1-n} \int_{|x-y|=\rho_0} u(y)\, d\sigma(y),$$

entonces

$$u(x) \leq \frac{1}{W_n \rho_0^{n-1}} \int_{|x-y|=\rho_0} u(y)\, d\sigma(y).$$

□

Definición 2.4.2. Sea $u \in C(\Omega)$. Diremos que u es subarmónica en Ω si para cada $x \in \Omega$ existe $\rho_0 > 0$ tal que $\overline{B(x, \rho_0)} \subset \Omega$ y para cada $0 < r \leq \rho_0$ se tiene que

$$u(x) \leq \frac{1}{W_n r^{n-1}} \int_{|x-y|=r} u(y)\, d\sigma(y).$$

Denotaremos por $\Sigma(\Omega)$ como el conjunto de todas las funciones continuas y subarmónicas en Ω, es decir

$$\Sigma(\Omega) = \{u \in C(\Omega) : u \quad \text{es subarmónica en} \quad \Omega\}.$$

Teorema 2.4.3. *Sea Ω un dominio en $\mathbb{R}^n$.*

1. *Si $u \in \Sigma(\Omega)$ entonces, u es constante en Ω, o bien, para todo $x \in \Omega$ se tiene que*
$$u(x) \leq \sup_{y \in \partial\Omega} u(y).$$

2. *Si además Ω es acotado, entonces u es constante, o bien, para todo $x \in \Omega$ se tiene que*
$$u(x) \leq \max_{y \in \partial\Omega} u(y).$$

Demostración. 1. Sea $M = \sup_{x\in\Omega} u(x)$. Supongamos que $M < \infty$, pues si $M = \infty$ la demostración es trivial. Consideremos
$$\Omega_1 = \{x \in \Omega : u(x) = M\}, \quad \text{y} \quad \Omega_2 = \{x \in \Omega : u(x) < M\},$$
entonces
$$\begin{cases} \Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset, \\ \Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2, , \end{cases}$$
Veamos que Ω_1 es abierto. Sea $x_1 \in \Omega_1$ y $r_0 > 0$ tal que $B(x_1, r_0) \subset \Omega$, entonces
$$u(x_1) \leq \frac{1}{W_n r_0^{n-1}} \int_{|x_1-y|=r_0} u(y)\, d\sigma(y)$$
así,
$$0 \leq \frac{1}{W_n r_0^{n-1}} \int_{|x_1-y|=r_0} (u(y) - M)\, d\sigma(y) \leq 0.$$
Lo que implica que $u(y) = M$, donde $|x_1 - y| = r_0$. Además como esto vale para todo $0 \leq r \leq r_0$, entonces $u(y) = M$ para todo $y \in B(x_1, r_0)$. Por lo tanto, Ω_1 es abierto.

Como Ω_2 es abierto y Ω es conexo, se tiene entonces que $\Omega_1 = \Omega$ y $\Omega_2 = \emptyset$, o bien, $\Omega_1 = \emptyset$ y $\Omega_2 = \Omega$ como queríamos probar.

2. Inmediata a partir del apartado anterior.

$\square$

Teorema 2.4.4 (Principio de comparación)**.** *Sean Ω un dominio de $\mathbb{R}^n$ y sean u_1 y $u_2 \in C^2(\Omega)$ verificando:*

I. $-\triangle u_1(x) \leq -\triangle u_2(x)$ *para* $x \in \Omega$

II. $u_1(x) \leq u_2(x)$ *para* $x \in \partial\Omega$

Entonces $u_1 \leq u_2$ en Ω.

Demostración. Consideremos $u = u_1 - u_2$, entonces $-\triangle u \leq 0$ en Ω. Por lo tanto, $u \in \Sigma(\Omega)$, luego aplicando el teorema (2.4.3) se tiene que u es constante, o bien, $u(y) \leq \max_{x\in\partial\Omega} u_1(x) - u_2(x) \leq 0$ con $y \in \Omega$. Lo cual implica que $u_1 \leq u_2$ en Ω. $\square$

Definición 2.4.5. Se dice que un dominio es de clase C^k si su frontera es expresable localmente como los ceros de una función con k derivadas continuas.

Definición 2.4.6. Diremos que un dominio Ω verfica la propiedad de la esfera interior si Ω es de clase C^2 y dado un punto x en $\partial\Omega$, existe una bola $B(y,r) \subset \Omega$ tal que

$$\overline{B}(y,r) \cap \partial\Omega = \{x\}.$$

Teorema 2.4.7 (Principio de Hopf)**.** *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio con la propiedad de la esfera interior. Sea $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ verificando:*

I. $-\triangle u \geq 0$ *en* Ω,

II. $u \geq 0$ *en* Ω,

III. $u = 0$ *en* $\partial\Omega$.

Entonces

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} < 0, \qquad y \in \partial\Omega$$

siendo η la normal exterior a Ω.

Demostración. Sea $x_0 \in \partial\Omega$. Como Ω verifica la condición de la esfera interior consideramos $B(y, 2r) \subset \Omega$ tal que:

$$\overline{B(y,2r)} \cap \partial\Omega = \{x_0\}.$$

Definamos ahora la función

$$v(x) = \begin{cases} \dfrac{r^{n-2}}{1-2^{2-n}}(|x-y|^{2-n} - (2r)^{n-2}), & n > 2 \\ \dfrac{1}{\ln 2}(\ln(2r) - \ln|x-y|), & n = 2, \end{cases}$$

la cual verifica:

1. $v(x) \equiv 1$ en $\partial B(y,r)$ y $v(x) = 0$ en $\partial B(y, 2r)$.
2. $0 < v(x) < 1$ si $x \in B(y,2r) \setminus B(y,r)$ y

$$|\nabla v(x)| > c > 0, \qquad \text{para alguna constante positiva} \quad c.$$

Dado que $u(x) > 0$ en Ω tenemos que:

$$\tau = \underset{x\in\partial B(y,r)}{u}(x) > 0,$$

considerando $\tau v = w$ tenemos que w satisface:

$$\begin{cases} -\triangle w(x) = 0, & \text{si} \quad x \in \partial B(y,2r) \setminus \overline{B}(y,r) \\ w(x) = \tau, & \text{si} \quad x \in \partial B(y,r), \\ w(x) = 0, & \text{si} \quad x \in \partial B(y,2r). \end{cases}$$

Puesto que $w \leq u$ sobre las dos esferas que constituyen la frontera de la región anular $B(y,2r) \setminus B(y,r)$ y también $-\triangle(w-u) \leq 0$ por hipótesis, podemos aplicar el principio de comparación, es decir, $w \leq u$ en $B(y,2r) \setminus B(y,r)$, siendo según la construcción hecha, $u(x_0) = w(x_0)$. Entonces

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(x_0) = \lim_{t\to 0^-} \frac{u(x_0+t\eta)}{t} \leq \lim_{t\to 0^-} \frac{w(x_0+t\eta)}{t} = \frac{\partial w}{\partial \eta}(x_0) \leq 0$$

como queríamos probar. □

La relevancia de las funciones subarmónicas es que, siendo una clase más simple de funciones armónicas, continúa verificando el principio del máximo, como se probó en el teorema (2.4.3). Ahora veremos qué papel juegan las funciones subarmónicas en la prueba de la existencia de solución del problema de Dirichlet en un dominio Ω.

El problema que queremos resolver es:

$$\begin{cases} \triangle u(x) = 0, & x \in \Omega \\ u(y) = f(y), & y \in \partial\Omega, \quad f \in C(\partial\Omega) \end{cases} \tag{2.4.1}$$

Acontinuación desarrollaremos métodos para encontrar la solución.

Proposición 2.4.8. *Si $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ es solución del problema (2.4.1) y si $v \in \Sigma(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ verfifica $v(y) \leq f(y)$ para todo $y \in \partial\Omega$. Entonces*

$$v(x) \leq u(x), \qquad \forall x \in \Omega.$$

Demostración. Sea $w = v - u$, entonces w es subarmónica en Ω y $w|_{\partial\Omega} \leq 0$. Usando el principio dele máximo para funciones subarmónicas se tiene que $w \leq 0$ en $\overline{\Omega}$, con lo cual obtenemos que $v \leq u$ en $\overline{\Omega}$. □

Consideremos ahora

$$u(x) = \sup\{v(x) : v \in \Sigma(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}), \quad v(y) \leq f(y), y \in \partial\Omega\}.$$

Ahora nuestro propósito es mostrar que esta función es armónica.

Definición 2.4.9. Sea $u \in C(\Omega)$ y $x_0 \in \Omega$. Consideremos $\rho > 0$ tal que $\overline{B}_\rho(x_0) \subset \Omega$. Se denomina levantamiento armónico de u en $B_\rho(x_0)$ a la función U definida en Ω por

$$U(x) = \begin{cases} u(x), & \text{si} \quad x \in \Omega \setminus B_\rho(x_0) \\ v(x), & \text{si} \quad x \in B_\rho(x_0) \end{cases}$$

donde por $v \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ denotamos a la solución del problema (2.4.1) con dato de contorno $v = u$ sobre $\partial B_\rho(x_0)$, es decir, satisface:

$$\begin{cases} v(x) = 0, & x \in B_\rho(x_0) \\ v(y) = u(y), & y \in \partial B_\rho(x_0). \end{cases}$$

Para el levantamiento armónico de u en $B_\rho(x_0)$ tenemos el resultado siguiente:

Lema 2.4.10. *Sea* $u \in \Sigma(\Omega)$ *y* $\overline{B}_\rho(x_0) \subset \Omega$. *Entonces*

1. $u(x) \leq U(x)$ *si* $x \in \Omega$.
2. $U(x) \in \Sigma(\Omega)$.

Demostración. 1. El resultado es claro si $x \in \Omega \setminus B_\rho(x_0)$. Por otro lado, en $B_\rho(x_0)$ se tiene que la función $w = u - U$ satisface:

$$w(x) \leq \frac{1}{W_n r^{n-1}} \int_{|y-x|=r} w(y)\, d\sigma(y), \qquad \text{si} \quad B(y,r) \subset B_\rho(x_0),$$

entonces w es subarmónica en $B_\rho(x_0)$ y además $w(y) = 0$ para todo y en $\partial B_\rho(x_0)$. Aplicando el principio del máximo para funciones subarmónicas se obtiene el resultado deseado.

2. Por la construcción de la función $U(x)$ tenemos que es armónica en $B_\rho(x_0)$ y subarmónica en $\Omega \setminus B_\rho(x_0)$, por lo que solo falta probar que $U(x)$ verifica la propiedad de la media en $\partial\Omega \setminus B_\rho(x_0)$, en efecto, si $|x - x_0| = \rho$, entonces $U(x) = u(x)$, por ser subarmónica y aplicando el resultado anterior obtenemos:

$$U(x) = u(x) \leq \frac{1}{W_n r^{n-1}} \int_{|x-y|=r} u(y)\, d\sigma(y) \leq \frac{1}{W_n r^{n-1}} \int_{|x-y|=r} U(y)\, d\sigma(y).$$

Por lo tanto, $U(x)$ verifica la propiedad de la media en todo punto de Ω, es decir $U \in \Sigma(\Omega)$. □

El resultado siguiente pone de manifiesto la flexibilidad de cálculo que se obtiene usando funciones subarmónicas: es una clase cerrada frente a la operació de tomar el máximo de una familia de funciones.

Lema 2.4.11. *Sean* $u_1, u_2, \ldots, u_k \in \Sigma(\Omega)$, *entonces*

$$v(x) = \max_{i=1,\ldots,k} u_i(x)$$

es subarmónica en Ω.

Demostración. Es claro que v es continua. Además si $\overline{B}(x,r) \subset \Omega$, entonces

$$\begin{aligned} v(x) &= \max_{i=1,\ldots,k} u_i(x) \leq \max_{i=1,\ldots,k} \left(\frac{1}{W_n r^{n-1}} \int_{|x-y|=r} u_i(y)\, d\sigma(y) \right) \\ &\leq \frac{1}{W_n r^{n-1}} \int_{|x-y|=r} v(y)\, d\sigma(y), \end{aligned}$$

es decir, $v \in \Sigma(\Omega)$. □

Definamos

$$\Sigma_f(\overline{\Omega}) = \{v \in \Sigma(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) : v|_{\partial\Omega} \leq f\},$$

el cual es no vacío pues, $v(y) = \text{mín}\{f(x) : x \in \partial\Omega\}$, pertenece a $\Sigma_f(\overline{\Omega})$.

Consideremos ahora,

$$w(x) = \sup\{v(x) : v \in \Sigma_f(\overline{\Omega})\}, \qquad x \in \Omega$$

notemos que si $M = \sup\{f(x) : x \in \partial\Omega\}$, entonces

$$v(x) \leq M, \qquad x \in \Omega, \forall v \in \Sigma_f(\overline{\Omega}).$$

Teorema 2.4.12. *La función w definida anteriormente es armónica en Ω.*

Demostración. Denotemos por:

$$m = \inf_{x\in\partial\Omega} f(x) \quad \text{y} \quad M = \max_{y\in\partial\Omega} f(y).$$

Por definición para cada $y \in \overline{\Omega}$ existe $\{\overline{v}_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma_f(\Omega)$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \overline{v}_n(y) = w(y).$$

Si se considera $v_n = \text{máx}\{\overline{v}_n, m\}$ se tiene que $v_n \in \Sigma_f(\overline{\Omega})$. Además por el principio del máximo para funciones subarmónicas, $m \leq v_n \leq M$ en $\overline{\Omega}$ y también:

$$\lim_{n\to\infty} v_n(y) = w(y),$$

en efecto, si $w(y) = m$, entonces es obvio, si $w(y) > m$, para $n > n_0$ se tiene $\overline{v}_n = v_n$ y se tiene el resultado.
Sea $r > 0$ tal que $\overline{B}(y, r) \subset \Omega$. Consideremos para cada $n \in \mathbb{N}$ la función V_n como el levantamiento de v_n en $B(y, r)$. De acuerdo con el lema (2.4.10) se tiene que: $V_n \in \Sigma(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ y

$$\begin{aligned} v_n(x) &\leq V_n(x), \qquad x \in \Omega \\ v_n(x) &= V_n(x), \qquad x \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

Por tanto, $V_n \in \Sigma_f(\overline{\Omega})$. En resumen V_n satisface:

1. $m \leq V_n \leq M$
2. $V_n \in \Sigma_f(\overline{\Omega})$
3. V_n es armónica en $\overline{B}(y, r)$
4. Dado que $v_n(y) \leq V_n(y) \leq w(y)$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} V_n(y) = w(y).$$

Tomando $\rho < r$, en $\overline{B}(y,\rho)$, $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente acotada y equicontinua. Aplicando el teorema de Arzela-Ascoli, existe una subsucesión uniformemente convergente en $\overline{B}(y,\rho)$ y por el primero teorema de Harnack resulta que si :

$$v = \lim_{n\to\infty} V_{n_k},$$

entonces v es una función armónica en $\overline{B}(y,\rho)$.
Además se tiene que

$$\begin{cases} v(x) \leq w(x), & x \in \overline{B}(y,\rho) \\ v(y) = w(y). \end{cases}$$

Sólo nos resta probar que $w \leq v$ en un entorno de cada punto. Spongamos lo contrario:
Si en algún punto $x_0 \in \overline{B}(y,\rho) \setminus y$ se tuviera:

$$v(x_0) < w(x_0), \tag{2.4.2}$$

entonces por definición de w, exste $u \in \Sigma_f(\Omega)$ tal que $v(x_0) < u(x_0)$.
Tomando $w_n = \max\{u, V_{n_k}\}$ y considerando el correspondiente levantamiento W_n en $B(y,\rho)$, y repitiendo el argumento anterior encontraríamos una función armónica $\overline{w}$, la cual es límite uniforme de alguna subsucesión $\{W_{n_k}\}$. Entonces

$$v \leq \overline{w} \leq w, \quad \text{en} \quad B(y,\rho) \quad \text{y} \quad v(y) = \overline{w}(y) = w(y).$$

Ahora aplicando el principio del máximo resulta que $v = \overline{w}$ en $B(y,\rho)$. Pero esto contradice (2.4.2). Por lo tanto, $w = v$ en $B(y,\rho)$, resultando w armónica en Ω, como queríamos probar. □

Ahora vamos a probar que w satisface la condición de frontera.

Perrón observó que la condición geométrica debe ser aquella que permita construir una *barrera*, es decir, una funcón subarmónica y continua en $\overline{\Omega}$ satisfaciendo ciertas propiedades locales que precisaremos en la siguiente definición.

Definición 2.4.13. Sea Ω un dominio de $\mathbb{R}^n$ y sea $z \in \partial\Omega$. Se dice que una función $b_z(x)$ es una barrera en z si:

$$\begin{cases} b_z \in \Sigma(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}), & \\ b_z(z) = 0 & \text{y} \quad b_z(x) < 0, \quad x \in \partial\Omega \setminus \{z\}. \end{cases} \tag{2.4.3}$$

A los puntos que admiten una barrera les llamaremos puntos regulares.

Al final daremos condiciones que permitan construir barreras. Por el momento pasaremos a demostrar el resultado que culmina la prueba de existencia para el problema de Dirichlet bajo la hipótesis de existencia de barreras.

Teorema 2.4.14. *Sea Ω un dominio acotado de $\mathbb{R}^n$ y sea $z \in \partial\Omega$ un punto regular. Sea w la función armónica dada por:*

$$w(x) = \sup\{v(x) : v \in \Sigma_f(\Omega)\}.$$

Entonces

$$\lim_{\substack{x\in\Omega \\ x\to z}} w(x) = f(z).$$

Demostración. Probaremos en primer lugar que

$$\liminf_{\substack{x\in\Omega\\ x\to z}} w(x) \geq f(z). \tag{2.4.4}$$

Para ello consideramos una barrera $b_z(x)$; para $\epsilon > 0$ y $k > 0$ dados, la función

$$u(x) = f(z) - \epsilon + kb_z(x),$$

es subarmónica en Ω y continua en $\overline{\Omega}$. Además por (2.4.3) se tiene que

$$\begin{cases} u(x) \leq f(z) - \epsilon, & \text{si} \quad x \in \partial\Omega \\ u(z) = f(z) - \epsilon. \end{cases}$$

Por continuidad, existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que si $|x - z| < \delta$ y $x \in \partial\Omega$ se tiene que

$$f(x) > f(z) - \epsilon,$$

es decir,

$$u(x) < f(x).$$

Por otra parte, de (2.4.3) se obtiene también que:

$$\lambda(\delta) = \sup\{b_z(x) : x \in \partial\Omega, \quad |x - z| \geq \delta\} < 0$$

Eligiendo un k suficientemente grande podemos conseguir que $u(x) \leq f(x)$ para $x \in \partial\Omega$, es decir, $u \in \Sigma_f(\overline{\Omega})$. Por consiguiente, de la definición de w, se concluye que:

$$u(x) \leq w(x), \qquad x \in \Omega.$$

Entonces

$$f(z) - \epsilon = \lim_{\substack{x\in\Omega\\ x\to z}} u(x) \leq \liminf_{\substack{x\in\Omega\\ x\to z}} w(x),$$

para todo $\epsilon > 0$. Es decir, tenemos (2.4.4).
Para terminar debemos probar

$$\limsup_{\substack{x\in\Omega\\ x\to z}} w(x) \leq f(z) \tag{2.4.5}$$

Sea $\phi \in \Sigma(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ tal que $-\phi \leq -f$ sobre $\partial\Omega$, definamos $v(x)$ como el ínfimo puntual sobre esta clase de funciones ϕ. Si $u \in \Sigma_f(\overline{\Omega})$, entonces $u - \phi \leq 0$ en $\partial\Omega$, y por el principio del máximo $u(x) - \phi(x) \leq 0$ sobre Ω.
Por tanto,

$$u(x) = \sup_{u\in\Sigma_f(\overline{\Omega})} u(x) \leq \inf_{\substack{\phi\in\Sigma(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})\\ -\phi\leq -f}} \phi(x) = v(x), \qquad x \in \Omega,$$

lo que implica que

$$\limsup_{\substack{x\in\Omega\\ x\to z}} w(x) \leq \limsup_{\substack{x\in\Omega\\ x\to z}} v(x) = -\liminf_{\substack{x\in\Omega\\ x\to z}} (-v(x)) \leq f(z),$$

por la primera parte de la demostración.
Las desigualdades (2.4.4) y (2.4.5) prueban el teorema. $\square$

En resumen, se tiene que si todo punto $z \in \partial\Omega$ es un punto regular, los teoremas presentados anteriormente establecen la existencia de solución $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, del problema de Dirichlet, cualquiera sea $f \in C(\partial\Omega)$. Diremos que en ese sentido *el problema de Dirichlet es soluble en el sentido clásico.*

Recíprocamente, si para cada $f \in C(\partial\Omega)$ el problema de Dirichlet tiene solución clásica, $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, resolviendo para cada $z \in \partial\Omega$ en concreto el problema:

$$\begin{cases} \triangle u(x) = 0, & x \in \Omega \\ u(x) = -|x - z|, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

su solución $b_z(x)$ es una barrera. Es decir, si el problema de Dirichlet es soluble en el sentido clásico, todo punto de la frontera es *regular.*

Teorema 2.4.15. *Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado. Son equivalentes:*

1. *El problema de Dirichlet admite solución $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ para cada $f \in C(\partial\Omega)$.*

2. *Todo punto $z \in \partial\Omega$ es un punto regular.*

2.5. Principio de Dirichlet en $\mathbb{R}^n$

El Principio de Dirchlet consiste en transformar el Problema de Dirichlet en un problema variacional donde ahora la solución es una función que minimiza un operador adecuado.

Supongamos que Ω es abierto y acotado en $\mathbb{R}^n$ y que $\partial\Omega$ es de clase C^1. Consideremos el problema con condiciones iniciales y de frontera

$$\begin{cases} -\triangle u(x) = f(x), & x \in \Omega, \\ \\ u(x) = g(x), & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.5.1}$$

Teorema 2.5.1 (Unicidad)**.** *Existe a lo más una solución $u \in C^2(\overline{U})$ de (2.5.1).*

Demostración. Sea $\tilde{u}$ otra solución de (2.5.1), entonces $w = \tilde{u} - u$ satisface

$$\triangle w(x) = 0 \quad \text{en} \quad \Omega \quad \text{y} \qquad w(x) = 0 \quad \text{en} \quad \partial\Omega$$

En efecto, por hipótesis

$$0 = \triangle w(x),$$

luego multiplicamos por w, y como w es una función en $C^2(\overline{U})$ podemos integrar.

Aplicando la Primera Identidad de Green obtenemos

$$\int_\Omega w(x)\triangle w(x)dx = \int_{\partial\Omega} w(x)\frac{\partial w}{\partial \eta}(x)d\theta(x) - \int_\Omega \langle \triangle w(x), \triangle w(x)\rangle dx$$

como w se anula en la frontera, se tiene que

$$\int_\Omega w(x)\triangle w(x)dx = -\int_\Omega \langle \triangle w(x), \triangle w(x)\rangle dx$$

Además $\triangle w(x) = 0$ en Ω, por lo tanto

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega \langle \triangle w(x), \triangle w(x) \rangle dx. \\ &= \int_\Omega |\nabla w(x)|^2 dx \end{aligned}$$

Observemos que la función $|\nabla w(x)|^2$ es no negativa y la única manera de que la integral resulte ser 0 es cuando $|w(x)| = 0$ en Ω, por lo tanto w es constante, es decir, $\nabla w(x) = \nabla(u(x) - \tilde{u}(x)) = 0$ en Ω, y como $w(x) = 0$ en $\partial\Omega$ concluimos que $u = \tilde{u}$. □

Vamos a probar que la solución a un problema con condiciones de frontera para la ecuación de Poisson se puede caracterizar como el minimizador de un funcional apropiado. Para esto definamos el funcional

$$I[w] = \int_\Omega \left(\frac{1}{2} |\nabla w|^2 - wf \right) dx, \tag{2.5.2}$$

donde w pertenece a la clase de funciones $\mathcal{A} = \{w \in C^2(\overline{\Omega}) | w = g \quad \text{en} \quad \partial\Omega\}$.

Antes de enunciar y probar el siguiente teorema daremos dos resultados previos. Para esto consideremos a Ω un abierto no vacío de $\mathbb{R}^n$ y $C^0(\Omega)$ el espacio de las funciones continuas $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$.

Definición 2.5.2. Sea $\varphi \in C^0(\Omega)$. Llamaremos soporte de φ (denotado por $\operatorname{sop} \varphi$) a la adherencia del conjunto $\{x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0\}$.

El conjunto $\operatorname{sop} \varphi$ es un cerrado contenido en $\overline{\Omega}$. Necesitaremos considerar varios subespacios de $C^0(\Omega)$, a saber $C_c^0(\Omega)$, $C_c^0(\Omega)$ y $D(\Omega)$. Estos se definen como

$$\begin{aligned} C_c^0(\Omega) &= \{\varphi \in C^0(\Omega) : sop\varphi \quad \text{es un compacto de} \quad \Omega\}, \\ C_c^0(\Omega) &= C^0(\Omega) \cap C_c^0(\Omega), \quad D(\Omega) = C_c^0(\Omega) \cap C^\infty(\Omega) \end{aligned}$$

Definición 2.5.3. Sea $M(\Omega)$ el espacio vectorial de las funciones $v : \Omega \to \mathbb{R}$ que son medibles. Se define el espacio de funciones

$$L^p(\Omega) = \{v \in M(\Omega) : \int_\Omega |v(x)|^p dx < \infty\}.$$

Teorema 2.5.4. *Para todo $p \in [1, \infty]$, $D(\Omega)$ es denso en $L^p(\Omega)$. En particular para $p = 2$.*

Lema 2.5.5. *Sea $u \in L^2(\Omega)$ tal que*

$$\int_\Omega u\varphi dx = 0 \qquad \forall \varphi \in D(\Omega).$$

Entonces $u = 0$ c.t.p.

Demostración. El teorema anterior implica que $D(\Omega)$ es un subespacio denso de $L^p(\Omega)$, por lo tanto$D(\Omega)^{\perp}=0$. En efecto, sea $z\in L^2(\Omega)$. Luego $\langle z,v\rangle=0$ para todo $v\in C_c^\infty(\Omega)$. Vamos a probar que $z=0$. Si hacemos $z=v$ en $C_c^\infty(\Omega)$, entonces $\langle z,z\rangle_{L^2}=0$, lo que implica que $z=0$. En general,si $z\in L^2$. Por densisad, existe $\{z_n\}\subset C_c^\infty(\Omega)$ tal que $z_n\to z$ en L^2, entonces

$$\underset{n\to\infty}{\langle z,z_n\rangle}=0\quad\forall n,$$

y por lo tanto

$$\langle z,z\rangle=||z||^2\Rightarrow z=0.$$

Por lo tanto lo que queda dentro de la integral es ≥ 0 y de aquí se concluye que la integral vale 0 para toda $\varphi\in D(\Omega)$.

□

Teorema 2.5.6 (Principio de Dirichlet)**.** *Sea Ω un dominio con $\partial\Omega$ de clase C^1, y $u\in C^2(\overline{\Omega})$. Entonces son equivalentes*

1. *Si u resuelve (2.5.1), entonces*
$$I[u]=\min_{w\in\mathcal{A}}I[w] \tag{2.5.3}$$

2. *Si $u\in\mathcal{A}$ y u satisface (2.5.3), entonces u resuelve el problema con condiciones de frontera (2.5.1).*

Dicho de otro modo, si $u\in\mathcal{A}$, la ecuación diferencial parcial $-\triangle u=f$ equivale a decir que u minimiza el operador $I[\cdot]$.

Demostración. 1. Supongamos que u resuelve (2.5.1). Vamos a probar que $I[u]\leq I[w]$ para todo $w\in\mathcal{A}$. En efecto, multiplicamos $-\triangle u(x)=f(x)$ por $(u(x)-w(x))$, con $w\in\mathcal{A}$ e integramos sobre Ω,

$$-\int_\Omega\triangle u(x)(u(x)-w(x))dx=\int_\Omega f(x)(u(x)-w(x))dx.$$

Para integrar aplicamos la primera identidad de Green a la parte izquierda de la ecuación anterior

$$\begin{aligned}\int_\Omega\triangle u(x)(u(x)-w(x))dx &= -\int_\Omega\nabla u(x)\cdot\nabla(u(x)-w(x))dx\\ &= -\int_\Omega|\nabla u(x)|^2dx+\int_\Omega\nabla u(x)\nabla w(x)dx.\end{aligned}$$

Reemplazamos,

$$\begin{aligned}\int_\Omega|\nabla u(x)|^2dx-\int_\Omega\nabla u(x)\nabla w(x)dx &= \int_\Omega f(x)(u(x)-w(x))dx\\ \int_\Omega|\nabla u(x)|^2dx-\int_\Omega f(x)u(x)dx &= \int_\Omega\nabla u(x)\nabla w(x)dx-\int_\Omega f(x)w(x)dx\\ \textit{(Por Desigualdad de Holder)} &\leq ||\nabla u(x)||_{L^2}||\nabla w(x)||_{L^2}-\int_\Omega f(x)w(x)dx\\ &\leq \frac{||\nabla u(x)||_{L^2}^2}{2}+\frac{||\nabla w(x)||_{L^2}^2}{2}-\int_\Omega f(x)w(x)dx\end{aligned}$$

Reordenando los términos

$$\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx - \int_\Omega f(x)u(x)dx - \frac{||\nabla u(x)||^2_{L^2}}{2} \leq \frac{||\nabla w(x)||^2_{L^2}}{2} - \int_\Omega f(x)w(x)dx.$$

De manera equivalente

$$\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 - \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx - \int_\Omega f(x)u(x)dx \leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx - \int_\Omega f(x)w(x)dx,$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 - \int_\Omega f(x)u(x)dx &= I[u] \\ &\leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla w(x)|^2 dx - \int_\Omega f(x)w(x)dx \\ &= I[w]. \end{aligned}$$

Como $w \in \mathcal{A}$ es arbitrario, $I[u] = \min_{w \in \mathcal{A}} I[w]$.

2. Recíprocamente, supongamos que I alcanza su mínimo en u. Vamos a probar que u es solución de (2.5.1). Fijemos $w \in C_c^\infty$ arbitrario y consideremos la función real

$$\lambda(t) = I[u + tw] \qquad t \in \mathbb{R}$$

Como u minimiza I, λ alcanza su mínimo en $t = 0$, entonces $\lambda'(0) = 0$. En efecto,

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= \int_\Omega \left[\frac{1}{2}|\nabla(u(x) + tw(x))|^2 - (u(x) - tw(x))f(x)\right] dx \\ &= \int_\Omega \left[\frac{1}{2}(\nabla u(x) + t\nabla w(x))^2 - (u(x)f(x) - tw(x)f(x))\right] dx \\ &= \int_\Omega \left[\frac{1}{2}(|\nabla u(x)|^2 + 2t\nabla u(x)\nabla w(x) + t^2|\nabla w(x)|^2) - (u(x)f(x) - tw(x)f(x))\right] dx \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx + t\int_\Omega \nabla u(x)\nabla w(x)dx + \frac{t^2}{2}\int_\Omega |\nabla w(x)|^2 dx - \int_\Omega f(x)v(x)dx - t\int_\Omega f(x)w(x \end{aligned}$$

Derivando respecto de t,

$$\lambda'(t) = \int_\Omega \nabla u(x)\nabla w(x)dx + t\int_\Omega |\nabla w(x)|^2 dx - \int_\Omega f(x)w(x)dx,$$

entonces,

$$\lambda'(0) = \int_\Omega \nabla u(x)\nabla w(x)dx - \int_\Omega f(x)w(x)dx = 0.$$

Así

$$\int_\Omega \nabla u(x)\nabla w(x)dx = \int_\Omega f(x)w(x)dx.$$

Aplicando la Primera Identidad de Green a la parte izquierda se obtiene

$$\int_{\partial\Omega} w(x)\frac{\partial u}{\partial \eta}(x) - \int_{\Omega} w(x)\triangle u(x)dx = \int_{\Omega} w(x)f(x)dx.$$

Como fijamos $w \in C_c^{\infty}(\Omega)$, luego en las proximidades de $\partial\Omega$, $w(x) = 0$. Entonces

$$0 = \int_{\Omega} w(x)\triangle u(x)dx + \int_{\Omega} w(x)f(x)dx,$$

de manera equivalente

$$0 = \int_{\Omega} w(x)[\triangle u(x) + f(x)]dx \qquad \forall w \in C_c^{\infty}(\Omega).$$

Por corolario (2.5.5), $\triangle u(x) + f(x) = 0$, es decir $-\triangle u(x) = f(x)$ para todo x en Ω. Además por hipótesis $u \in \mathcal{A}$ por lo cual se verifica la condición de borde y con esto se tiene que u es solución.

$\square$

Capítulo 3

El Problema de Dirichlet en $\mathbb{C}$

3.1. Propiedades de las Funciones Armónicas en $\mathbb{C}$

Algunas propiedades de las funciones analíticas como el principio del módulo máximo, pueden obtenerse como consecuencia de propiedades similares de las funciones armónicas, aunque aquí nos concentraremos en lo opuesto, es decir, usaremos la teoría que ya conocemos sobre funciones analíticas en $\mathbb{C}$ para estudiar las funciones armónicas de dos variables. Naturalmente, muchos de los resultados que probaremos son válidos para funciones armónicas de en varias variables, pero las pruebas ya fueron vistas en el capítulo 2.

Para el caso de funciones de dos variables los conceptos de Laplaciano y función armónica se definen de la siguiente forma.

Definición 3.1.1. Sea Ω un abierto en $\mathbb{C}$ y $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2. Se define el operador *Laplaciano* como la función

$$\triangle f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Diremos que f es *armónica* en un punto z si es armónica en todo entorno de z. La función f es *armónica* en Ω si verifica que $\triangle f(z) = 0$, para todo $z \in \Omega$.

En el capítulo 1 vimos algunos resultados para funciones armónicas, entre ellos dos hechos importantes: el primero es que una función f es analítica en una región Ω del plano sí y sólo si su parte real e imaginaria son funciones armónicas y además satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann, y el segundo pero no menos importante, es que una región Ω es simplemente conexa sí y sólo si para toda función u armónica en Ω existe una función armónica v en Ω tal que $f = u + iv$ es analítica en Ω.

Definición 3.1.2. Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función analítica, entonces $u = \Re f$ y $v = \Im f$ se denominan *conjugadas armónicas*.

Con esta terminología, el Teorema (1.4.40) nos dice que cada función armónica en una región simplemente conexa tiene un armónico conjugado. Si u es una función armónica en Ω y D es un disco contenido en Ω, entonces hay una función armónica v en D tal que $u + iv$ es analítica en D. En otras palabras, cada función armónica tiene localmente un conjugado armónico.

Proposición 3.1.3. *Si $u : \Omega \to \mathbb{C}$ es armónica, entonces es infinitamente diferenciable.*

Demostración. Fijemos $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$ y tomemos $\delta > 0$ de modo que $B(z_0, \delta) \subset \Omega$. Luego como u es armónica existe v conjugada armónica en $B(z_0, \delta)$. Esto es, $f = u + iv$ es analítica y por tanto infinitamente diferenciable en $B(z_0, \delta)$. Luego, u es infinitamente diferenciable. □

Las propiedades básicas de las funciones armónicas se deducen de propiedades similares de las funciones analíticas. La proposición anterior nos proporciona una propiedad que es compartida tanto por funciones armónicas, como funciones analíticas. El siguiente resultado es el análogo de la fórmula integral de Cauchy para funciones analíticas.

Teorema 3.1.4. *Sea $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una función armónica y sea $\overline{B}(a, r)$ el disco cerrado contenido en Ω. Si γ es el círculo $|z - a| = r$. Entonces*

$$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + re^{i\theta})\, d\theta$$

Demostración. Sea D un disco tal que $\overline{B}(a, r) \subset D \subset \Omega$ y f una función analítica en D tal que $u = \Re f$. Notemos que la igualdad anterior es la fórumula integral de Cauchy para el centro de un disco. En efecto

$$\begin{aligned} f(a) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{z-a} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(a + re^{i\theta})}{(a + re^{i\theta}) - a} d(a + re^{i\theta}) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(a + re^{i\theta})}{re^{i\theta}} (ire^{i\theta}) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}). \end{aligned}$$

Tomando la parte real, completamos la demostración. □

Definición 3.1.5 (Propiedad de la Media)**.** Digamos que una función continua $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tiene la propiedad de la media si para cualquier bola $\overline{B}(a, r) \subset \Omega$ tenemos,

$$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + re^{i\theta})\, d\theta$$

Teorema 3.1.6 (Principio del Máximo, versión 1)**.** *Sea Ω un dominio en el plano (no necesariamente acotado) y sea u una función continua en Ω con la propiedad de la media. Si existe un punto $a \in \Omega$ y un número real ξ tal que $\xi = u(a) \geq u(z)$ para todo $z \in \Omega$, entonces u es función constante, es decir, u alcanza su máximo en Ω.*

Demostración. Supongamos que la función armónica u alcanza su máximo en $a \in \Omega$, $u(a) = \xi$. Si u no es constante en Ω, entonces el conjunto de los puntos $z \in \Omega$ tal que $u(z) < u(a)$ es no vacío y abierto, por la contiuidad de u.

Sea A el conjunto definido por

$$A = \{z \in \Omega : u(a) = u(z)\}.$$

Como u es continua, A es cerrado en G, si no G sería disconexo. Por lo tanto, existe un punto $z_0 \in A$ tal que para $r > 0$, el disco $\overline{D}(z_0, r) \subset \Omega$ con borde $D(z_0, r)$ contiene al menos un punto z tal que $u(z) < u(z_0)$ para todos los puntos z en este arco. Supongamos que existe un punto $b \in D(z_0, r)$ tal que $u(b) \neq u(a)$, entonces $u(b) < u(a)$. Por la continuidad de u:

$$u(z) < u(a) = u(z_0),$$

para todo z en una vecindad de b. En particular, sea $\rho = |z_0 - r|$ y $b = z_0 + \rho e^{i\beta}$, con $0 \leq \rho < 2\pi$, entonces existe un intervalo I en $[0, 2\pi]$ tal que $\beta \in I$ y $u(z_0 + \rho e^{i\beta}) < u(z_0)$ para todo $\theta \in I$. Por la propiedad de la media se tiene que

$$\begin{aligned} u(z_0) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0 + \rho e^{i\beta})\, d\theta \\ &< \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0)\, d\theta = u(z_0) \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción. Entonces $D(z_0, r) \subset A$ y así A también es abierto. Por la conexidad de Ω, $A = \Omega$. $\square$

Teorema 3.1.7 (Principio del Máximo, versión 2)**.** *Sea Ω un dominio en el plano (no necesariamente acotado) y sean u y v funciones continuas con valores reales en Ω tales que tienen la propiedad del valor medio. Si para cada punto en el borde extendido de Ω, $\partial_\infty \Omega$ se tiene que*

$$\limsup_{z \to a} u(z) \leq \liminf_{z \to a} v(z),$$

entonces $u(z) < v(z)$ para todo $z \in \Omega$, o bien, $u = v$.

Demostración. Fijemos $a \in \partial_\infty \Omega$ y para todo $\delta > 0$ sea $\Omega_\delta = \Omega \cap b(a, \delta)$. De acuerdo con la hipótesis, tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &\geq \lim_{\delta \to 0}[\sup\{u(z) : z \in \Omega_\delta\} - \inf\{v(z) : z \in \Omega_\delta\}] \\ &= \lim_{\delta \to 0}[\sup\{u(z) : z \in \Omega_\delta\} + \sup\{-v(z) : z \in \Omega_\delta\}] \\ &\geq \limsup_{\delta \to 0}\{u(z) - v(z) : z \in \Omega_\delta\}. \end{aligned}$$

Así, $\limsup_{z \to a}[u(z) - v(z)] \leq 0$ para todo $a \in \partial_\infty \Omega$.
Por lo tanto, es suficiente probar el teorema bajo la suposición de que $v(z) = 0$ para todo z en Ω.

Es decir, asumimos que

$$\limsup_{z \to a} u(z) \leq 0 \tag{3.1.1}$$

para todo a en $\partial_\infty \Omega$ y probaremos que $u(z) < 0$ para todo z en Ω, o bien $u = 0$.
En virtud de la primera versión del Principio del Máximo, basta con probar que $u(z) \leq 0$ para

todo $z \in \Omega$.
Supongamos que u satisface (3.1.1) y que existe un punto $b \in \Omega$ tal que $u(b) > 0$.
Sea $\epsilon > 0$ de modo que $u(b) > \epsilon$ y sea $B = \{z \in \Omega : u(z) \geq \epsilon\}$. Si $a \in \partial_\infty \Omega$, entonces (3.1.1) implica que existe $\delta = \delta(a)$ tal que $u(z) < \epsilon$ para todo $z \in \Omega \cap B(a, \delta)$. Usando el Lema del número de Lebesgue (ver [2]), δ se puede escoger de manera que no dependa de a. Esto es, existe $\delta > 0$ tal que si $z \in \Omega$ y $d(z, \partial_\infty \Omega) < \delta$ entonces $u(z) < \epsilon$. Por lo tanto

$$B \subset \{z \in \Omega : d(z, \partial_\infty \Omega) \geq \delta\}.$$

Luego B es acotado en el plano, y como B es claramente cerrado, es compacto. Si B es no vacío, existe $z_0 \in B$ tal que $u(z_0) \geq u(z)$ para todo z en B. Como $u(z) < \epsilon$, con $z \in \Omega - B$ entonces u alcanza su máximo en un punto en Ω. Entonces u es constante, pero si lo fuera $u(z_0)$ sería mayor que 0 lo cual contradice (3.1.1). $\square$

El siguiente corolario es un caso especial y útil del Principio Máximo.

Corolario 3.1.8. Sea Ω un dominio acotado y supongamos que $w : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua con la Propiedad de la media en Ω. Si $w(z) = 0$ para todo z en $\partial\Omega$ entonces $w(z) = 0$ para todo z en Ω.

Demostración. Tome $w = u$ y $v = 0$ en la segunda versión del Principio del Máximo. Entonces $w(z) < 0$ para todo z, o bien $w(z) = 0$. Ahora tomemos $w = v$ y $u = 0$, entonces $w(z) > 0$ para todo z, o $w(z) = 0$. Así, concluimos que $w \equiv 0$. $\square$

Proposición 3.1.9 (Principio del Mínimo)**.** *Sea Ω un dominio y suponga que u es una función continua en Ω que satisface la Propiedad de la Media. Si existe un punto a en Ω tal que $u(a) \leq u(z)$ para todo z en Ω entonces u es una función constante.*

3.2. El Kernel de Poisson

Antes de estudiar las funciones armónicas en el caso general, es necesario estudiarlas localmente. Para ello vamos a estudiar las funciones armónicas en el disco unitario abierto $D(0, 1) = \{z : |z| < 1\}$ y luego extenderemos los resultados para discos arbitrarios. Para este trabajo es de importancia fundamental el núcleo de Poisson.

Nuestro objetivo es resolver el Problema de Dirichlet en el disco unitario, esto es,

$$\begin{cases} \triangle u(x, y) = 0 & si \quad x^2 + y^2 < 1 \\ \\ u(x, y) = g(x, y) & si \quad x^2 + y^2 = 1, \end{cases} \tag{3.2.1}$$

donde g es una función continua dada en la circunferencia unitaria $\partial D = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

El método que utilizaremos para resolver este problema se conoce como el *Método de Fourier*, el cual consiste en 2 etapas. En la primera, utilizamos separación de variables para obtener problemas de autovalor para ecuaciones diferenciales ordinarias asociadas a las ecuaciones diferenciales parciales en estudio. En esta etapa, obtenemos una familia de soluciones de la ecuación diferencial parcial que satisfacen una parte de las condiciones de frontera.

Para comenzar, utiizaremos coordenadas polares,

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta, \quad 0 < r < \infty, \quad 0 \leq \theta < 2\pi. \end{cases}$$

Calculando sus derivadas parciales obtenemos:

$$\begin{cases} r_x = \cos\theta \qquad \theta_x = \frac{-\sin\theta}{r} \\ r_y = \sin\theta \qquad \theta_y = \frac{\cos\theta}{r}. \end{cases} \tag{3.2.2}$$

Entonces

$$\begin{cases} r_{xx} = \frac{\sin^2\theta}{r} \qquad \theta_{xx} = \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2} \\ r_{yy} = \frac{\cos^2\theta}{r} \qquad \theta_{yy} = \frac{-2\sin\theta\cos\theta}{r^2}, \end{cases} \tag{3.2.3}$$

por lo que

$$\begin{cases} u_{xx} = u_{rr}\cos^2\theta + u_r\frac{\sin^2\theta}{r} - 2u_{r\theta}\frac{\sin\theta\cos\theta}{r} + u_{\theta\theta}\frac{\sin^2\theta}{r^2} + 2u_\theta\frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2} \\ u_{yy} = u_{rr}\sin^2\theta + u_r\frac{\cos^2\theta}{r} + 2u_{r\theta}\frac{\sin\theta\cos\theta}{r} + u_{\theta\theta}\frac{\cos^2\theta}{r^2} - 2u_\theta\frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2}. \end{cases} \tag{3.2.4}$$

Así, la ecuación de Laplace en coordenadas polares se escribe como

$$0 = u_{rr} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_{\theta\theta}}{r^2}. \tag{3.2.5}$$

Llamando $f(\theta) = g(\cos\theta, \sin\theta)$, f resulta ser una función continua y $2\pi-$periódica. Análogamente, llamando u a la composición $u(r,\theta) = u(r\cos\theta, r\sin\theta)$, se obtiene $u(r,\theta) = u(r, \theta + 2\pi)$.

En resumen, el problema en coordenadas polares resulta ser

$$\begin{cases} u_{rr} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_{\theta\theta}}{r^2} = 0 \qquad \text{para} \quad (r,\theta) \in (0,1)\times[0,2\pi] \\ u(r,\theta) = u(r\cos\theta, r\sin\theta) \\ u(1,\theta) = f(\theta) \qquad \text{en} \quad \theta \in [0,2\pi] \\ u \quad \text{es continua en} \quad [0,1]\times[0,2\pi]. \end{cases} \tag{3.2.6}$$

En la segunda etapa, para resolver (3.2.6) comenzamos buscando soluciones de la primera condición que sean de la forma $u(r,\theta) = \alpha(r)\beta(\theta)$. Se debe cumplir entonces

$$(r^2\alpha''(r) + r\alpha'(r))\beta(\theta) + \alpha(r)\beta''(\theta) = 0, \tag{3.2.7}$$

es decir,

$$\frac{r^2\alpha''(r) + r\alpha'(r)}{\alpha(r)} = \frac{-\beta''(\theta)}{\beta'(\theta)} = c, \tag{3.2.8}$$

donde necesariamente c es una constante. La ecuación diferencial en α, es de las llamadas de tipo Euler. Para este tipo de ecuaciones se buscan soluciones de la forma $\alpha(r) = r^k$. Sustituyendo en la ecuación diferencial para α en (3.2.8) se concluye que para que r^k sea solución se debe verificar

$$k^2 - c = 0. \tag{3.2.9}$$

Si $c \neq 0$, entonces dos variables de k dan dos soluciones linealmente independientes de la ecuación de Laplace para α. Si $c = 0$, la integral de la ecuación (3.2.8) puede hacerse bajando un orden. En resumen, las soluciones son

$$\begin{cases} \alpha(r) = ar^{\sqrt{c}} + br^{-\sqrt{c}} & c > 0 \\ \alpha(r) = a + b\log r & c = 0 \\ \alpha(r) = ar^{i\sqrt{-c}} + br^{-i\sqrt{-c}} & c < 0. \end{cases} \tag{3.2.10}$$

La ecuación que se obtiene en (3.2.8) para $\beta(\theta)$ es $\beta''(\theta) + c\beta(\theta) = 0$, que integrando implica,

$$\begin{cases} \beta(\theta) = Ae^{i\theta\sqrt{c}} + Be^{-i\theta\sqrt{c}} & c > 0 \\ \beta(\theta) = A + B\beta & c = 0 \\ \beta(\theta) = Ae^{\theta\sqrt{-c}} + Be^{-\theta\sqrt{-c}} & c < 0. \end{cases} \tag{3.2.11}$$

Si se impone la segunda ecuación en (3.2.8), resulta que necesariamente $c = n^2$ y para que se cumpla la cuarta condición de (3.2.6), b debe ser 0. Entonces

$$\begin{cases} u_0(r,\theta) = 1 & n = 0 \\ u_n(r,\theta) = r^n(ae^{in\theta} + be^{-in\theta}) & n \neq 0. \end{cases} \tag{3.2.12}$$

Podemos escribir (3.2.12) como,

$$\{u_n(r,\theta)\}_{-\infty}^{\infty} = \{r^{|n|}e^{in\theta}\}_{n\in\mathbb{Z}} \tag{3.2.13}$$

Nos resta por último verificar la tercera condición de (3.2.6). Para ello postulamos como solución una función de la forma

$$u(r,\theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n r^{|n|} e^{in\theta}, \tag{3.2.14}$$

la cual debe verificar:

$$f(\theta) = u(1,r) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{in\theta}. \tag{3.2.15}$$

Como $\{e^{in\theta}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ pertenece a la familia de autofunciones del problema con condiciones periódicas en $[-\pi,\pi]$ para la ecuación, se tiene que

$$\begin{cases} y'' + cy = 0 \\ \\ y(-\pi) = y(\pi) \\ \\ y'(-\pi) = y'(\pi) \quad \text{donde} \quad c = n^2. \end{cases} \tag{3.2.16}$$

Luego, los coeficientes de Fourier de f con respecto a $\{e^{in\theta}\}$ son,

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)e^{-ins}\,ds. \tag{3.2.17}$$

Suponiendo f continua, tenemos que

$$||f||_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2,$$

siendo cada a_n el coeficiente de Fourier definido por (3.2.17). Por tanto, en particular, la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ está acotada. De esta forma se tiene que (3.2.14) define una función continua en $0 \leq r < 1$. Además, derivando término a término con respecto de r o de θ se obtiene una serie mayorante, que converge uniformemente en $0 \leq r < 1$. Por tanto, la función definida por (3.2.14), cuyos coeficientes son calculados en (3.2.17), es una función con primeras derivadas continuas en $[0,1)\times[0,2\pi]$. Un argumento de inducción pone de manifiesto que la función u, es infinitamente diferenciable en $[0,1)\times[0,2\pi]$, y como cada sumando de la serie es solución de la ecuación de la Laplace, también lo es u. El único detalle que queda por establecer es que

$$\lim_{r\to 1} u(r,\theta) = f(\theta).$$

Para resolver este último problema, comenzamos expresando u detalladamente, notando que por las observaciones anteriores los cálculos siguientes están justificados si $0 \leq r < 1$. Así,

$$\begin{aligned} u(r,\theta) &= \sum_{-\infty}^{\infty} a_n r^{|n|} e^{in\theta} \\ &= \sum_{-\infty}^{\infty} r^{|n|} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) e^{in(\theta-s)}\, ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \left(\sum_{-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in(\theta-s)} \right) ds. \end{aligned}$$

Además podemos calcular explícitamente la suma de la serie del último término. En efecto,

$$\begin{aligned} \sum_{-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{inx} &= \sum_{0}^{\infty} r^n e^{inx} + \sum_{-\infty}^{-1} r^{-n} e^{inx} \\ &= \frac{1}{1-re^{ix}} + \frac{re^{-ix}}{1-re^{ix}} \\ &= \frac{1-r^2}{1-2r\cos x + r^2}, \end{aligned}$$

que resulta de haber sumado las dos series geométricas de razones re^{ix} y re^{-ix} respectivamente, y de un simple cálculo algebraico. De este forma, u se puede expresar por la siguiente fórmula integral

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-s)+r^2} f(s)\, ds, \quad \text{si} \quad 0 \le r < 1. \tag{3.2.18}$$

Al segundo término de la expresión se le llama *Integral de Poisson* de la función f. Por como se ha calculado la integral de Poisson de f se concluye que satisface la ecuación de Laplace en el interior del disco unidad. Por precisar más la terminología damos la siguiente definición.

Definición 3.2.1. Llamaremos *núcleo de Poisson* a la función

$$P_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{int} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos t + r^2} = \Re\left(\frac{1-re^{it}}{1-re^{it}} \right), \qquad \text{para} \quad 0 \le r < 1 \tag{3.2.19}$$

Si f es una función real continua en la circunferencia unidad, definimos la *integral de Poisson* de f como la función definida en $D(0,1)$ mediante

$$P_f(re^{it}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(t-\theta) f(e^{i\theta})\, d\theta. \tag{3.2.20}$$

Proposición 3.2.2. *El núcleo de Poisson satisface:*

1.

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(t)\, dt = 1 \tag{3.2.21}$$

2. *$P_r(t) > 0$ para todo t, $P_r(-t) = P_r(t)$ y $P_r(t)$ es 2π-periódica en t.*

3. *Si $0 < \delta < |t| \leq \pi$, entonces $P_r(t) < P_r(\delta)$.*

4. *Para cada $\delta > 0$, $\lim_{r\to 1^-} P_r(t) = 0$ uniformemente en $\delta \leq |t| \leq \pi$.*

Demostración. 1. Como la serie geométrica de (3.2.19) converge uniformemente en los compactos del disco unidad, es fácil ver que esta serie converge uniformemente en la recta real (para r fijo). Esto nos permite integrarla término a término:

$$\int_{-\pi}^{\pi} P_r(t)\,dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} \int_{-\pi}^{\pi} e^{int}\,dt = 2\pi$$

pues si $n \neq 0$, entonces

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{int}\,dt = 0.$$

Con esto podemos evaluar la integral de Poisson de la función constante 1:

$$P_1(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(t-\theta)\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta)\,d\theta = 1.$$

Esto prueba que P_1 es la solución del problema de Dirichlet en el disco unidad determinado por la función constante 1.

2. De la ecuación (3.2.19), $P_r(t) = (1-r^2)|1-re^{it}|^{-2} > 0$, pués $r < 1$. Lo demás viene de la construcción que se hizo.

3. Sea $0 < \delta < t \leq \pi$ y definamos $f : [\delta, t] \to \mathbb{R}$ por $f(\theta) = P_r(\theta)$. Utilizando (3.2.19), cálculos rutinarios prueban que $f'(\theta) < 0$, así $f(\delta) > f(t)$.

4. Debemos probar que
$$\lim_{r\to 1^-} [\sup\{P_r(t) : \delta \leq |t| \leq \pi\}] = 0.$$
Por la parte 3. si $\delta \leq |t| \leq \pi$, se tiene que $P_r(t) \leq P_r(\delta)$, así que basta con probar que
$$\lim_{r\to 1^-} P_r(\delta) = 0.$$
Nuevamente esto es una consecuencia de (3.2.19).

□

El siguiente teorema establece que el problema de Dirichlet se puede resolver para el disco unidad.

Teorema 3.2.3. *Suponga que $f : \partial D \to \mathbb{R}$ es una función continua. Entonces existe una única función continua $u : \overline{D} \to \mathbb{R}$ tal que*

1. *$u(z) = f(z)$ en ∂D.*

2. u es armónica en D.

Además u se define por

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) f(e^{it})\, dt \tag{3.2.22}$$

para $0 \leq r < 1$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Demostración. Es natural proponer una solución del tipo

$$u : \overline{D} \to \mathbb{R}$$

definida por $u(re^{i\theta})$ como en (3.2.22) si $0 \leq r < 1$ y fijando $u(e^{i\theta}) = f(e^{i\theta})$. Claramente u satisface la primera parte del teorema, por lo que resta probar que u es armónica en D y continua en $\overline{D}$.
En efecto,vamos a probar que la integral de Poisson es armónica, si $0 \leq r < 1$, entonces

$$\begin{aligned} u(re^{i\theta}) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Re\left(\frac{1+re^{i(\theta-t)}}{1-re^{i(\theta-t)}}\right) f(e^{it})\, dt \\ &= \Re\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})\left(\frac{1+re^{i(\theta-t)}}{1-re^{i(\theta-t)}}\right) dt\right) \\ &= \Re\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})\left(\frac{e^{it}+re^{i\theta}}{e^{it}-re^{i\theta}}\right) dt\right) \end{aligned}$$

Luego, definiendo $g : D \to \mathbb{C}$ por

$$g(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})\left[\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right] dt.$$

Como u es igual a la parte real de g, debemos probar que g es analítica. Pero esto se deduce al considerar en el Teorema (1.4.40) el arco como la circunferencia unidad.

Para probar la continuidad de u en $\overline{D}$, basta probar que si $z_0 = e^{it_0} \in \partial D(0,1)$, existe

$$\lim_{z \to z_0} P_f(z) = f(z_0).$$

Teniendo en cuenta que $P_1(z) = 1$ para todo $z = re^{it} \in D(0,1)$, se verifica:

$$\begin{aligned} |P_f(z) - f(z_0)| &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|P_r(t-\theta)(f(e^{i\theta}) - f(e^{it_0}))\, d\theta\right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(t-\theta)|f(e^{i\theta}) - f(e^{it_0})|\, d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{t_0-\pi}^{t_0+\pi} P_r(t-\theta)|f(e^{i\theta}) - f(e^{it_0})|\, d\theta. \end{aligned}$$

El último cambio de variable es válido porque el integrando es 2π-periódico en θ. Fijemos la cota M de f como $M = \max\{f(e^{i\theta}) : |\theta| \leq \pi\}$ y un número real $\epsilon > 0$. Puesto que f es uniformemente continua existe $\eta > 0$ tal que si $|\theta - t_0| < \eta$, entonces $|f(e^{i\theta}) - f(e^{it_0})| < \frac{\epsilon}{2}$. Adicionalmente, supongamos que $|t - t_0| < \frac{\eta}{2}$. Descomponemos la integral en dos partes, una correspondiente a los puntos θ tales que $|\theta - t_0| < \eta$ y otra con los puntos restantes, es decir, con los que cumplen $|\theta - t_0| \geq \eta$ y, por consiguiente, $|t - \theta| \geq \frac{\eta}{2}$. Así

$$|P_f(z) - f(z_0)| \leq \frac{\epsilon}{2} + MP_r\left(\frac{\eta}{2}\right)$$

Finalmente, de la definición de P_r se sigue inmediatamente que

$$\lim_{r\to 1} P_r\left(\frac{\eta}{2}\right) = 0,$$

con lo que tomando un $\delta < \eta$ adecuados se cumple que si $|t - t_0| < \delta$ y $|1 - r| < \delta$, entonces $|P_f(z) - f(z_0)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$, y con esto se prueba la existencia del límite en z_0.

La unicidad de u es consecuencia del corolario (3.1.8).

□

Corolario 3.2.4. Sea $u : \bar{D} \to \mathbb{R}$ es una función continua y armónica en D, entonces

$$u(re^{i\theta}) = \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)u(e^{it})\, dt$$

para $0 \leq r < 1$ y para todo θ. Ademá, u es la parte real de una función analítica

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} u(e^{it})dt$$

Demostración. La primera parte es una consecuencia del teorema anterior. La segunda parte se sigue del hecho de que f es una función analítica. □

Corolario 3.2.5. Sea $a \in \mathbb{C}$, $\rho > 0$. Supongamos que h es una función continua con valores reales en $\{z : |z - a| = \rho\}$. Entonces existe una única función continua $w : \bar{B}(a;\rho) \to \mathbb{R}$ tal que w es armónica en $B(a;\rho)$ y $w(z) = h(z)$ para $|z - a| = \rho$.

Hemos trabajado en el disco unidad por comodidad, pero no es difícil obtener una fórmula análoga para discos arbitrarios. En el caso general, si f es armónica en el disco $D(z_0, r)$ y continua en su clausura, entonces la función $h(z) = f(z_0 + Rz)$ cumple las hipótesis del teorema anterior. Luego para un punto $z_0 + re^{it}$ con $0 \leq r < R$, se tiene que

$$f(z_0 + re^{it}) = h\left(\frac{r}{R}e^{it}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_{r/R}(t - \theta) f(z_0 + Re^{i\theta})\, d\theta.$$

Esta fórmula nos proporciona la solución explícita al problema de Dirichlet en un disco arbitrario. Como aplicación vamos a caracterizar las funciones armónicas por la propiedad de la media.

Teorema 3.2.6. *Si $u : \Omega \to \mathbb{R}$ es una función continua con la propiedad de la Media, entonces u es armónica.*

Demostración. Sea $a \in \Omega$ y escogemos $\rho > 0$ tal que $\bar{B}(a,\rho) \subset \Omega$, aplicando el problema de Dirichlet en la bola trasladada $B(a,\rho)$, entonces existe $w : B(a,\rho) \to \mathbb{R}$ armónica en la bola y $u(\rho+i\theta) = w(a+re^{i\theta})$ para todo θ. Como $u-w$ satisface la propiedad de la Media y$(u-w) = 0$ en $|z-a| = \rho$, entonces $u = w$ en la $B(a,\rho)$, luego u es armónica. □

Teorema 3.2.7. *Sea u una función continua en un abierto Ω tal que para todo $a \in \Omega$, existe una sucesión $\{r_n\}$ de números reales positivos convergente a 0 de modo que*

$$u(a) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(a + r_n e^{i\theta})\, d\theta.$$

Entonces u es armónica

Demostración. Sea $a \in \Omega$ y fijemos $R > 0$ tal que $\overline{D}(a,R) \subset \Omega$, aplicando el problema de Dirichlet , existe una única función g continua en este disco cerrado, armónica en su interior y que coincide con u en su frontera. Sea $h = u - g$ y sea m el supremo de h en $\overline{D}$. Supongamos que $m > 0$. Como h se anula en ∂D, el conjunto

$$A = \{z \in \overline{D}(a,R) : h(z) = m\}$$

es en realidad un subconjunto compacto de $D(a,R)$. Sea $z_0 \in A$ donde $|z-a|$ toma el valor máximo k. Así, para todo r suficientemente pequeno, al menos la mitad de la circunferencia de centro z_0 y radio r está fuera del disco de centro 0 y radio k, luego fuera de A.

Tomando como r uno de los valores para los que por hipótesis se cumple la propiedad del valor medio, concluimos que

$$m = h(z_0) = u(z_0) - g(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (u-g)(a + r_n e^{i\theta})\, d\theta < \frac{1}{2\pi} m\, d\theta = m$$

Esta contradicción muestra que $m = 0$, es decir, $u \leq g$. Razonando igualmente con $g - f$, concluimos que $u = g$, y por lo tanto u es armónica. □

Es deseable derivar una fórmula para el núcleo de Poisson de un disco arbitrario. Para hacer esto sólo necesitamos hacer un cambio de variables en la fórmula (3.2.22). En efecto, sea $R > 0$. Vamos a sustituir r por $\dfrac{r}{R}$. Luego,

$$\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rRcos(\theta) + r^2}, \tag{3.2.23}$$

con $0 \leq r < R$ para todo θ. De esta forma, si u es continua en $\overline{D}(a,R)$ y armónica en $D(a,R)$, entonces tenemos que

$$u(a + re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rRcos(\theta - t) + r^2} u(a + Re^{it})dt.$$

Ahora podemos escribir la ecuación (3.2.23) como

$$\frac{R^2 - r^2}{|Re^{it} - re^{i\theta}|^2},$$

y

$$R - r \leq |Re^{it} - re^{i\theta}| \leq R + r.$$

Por lo tanto

$$\frac{R-r}{R+r} \leq \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR\cos(\theta - t) + r^2} \leq \frac{R+r}{R-r}.$$

Definición 3.2.8 (Desigualdad de Harnack)**.** Sea $u : \overline{D}(a, R) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua, armónica en $D(a, R)$ y $u \geq 0$ entonces para $0 \leq r < R$ y para todo θ,

$$\frac{R-r}{R+r} u(a) \leq u(a + re^{i\theta}) \leq \frac{R+r}{R-r} u(a). \tag{3.2.24}$$

Definición 3.2.9. Sea Ω es un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$ entonces $Har(\Omega)$ es el espacio de las funciones armónicas en Ω. Como $Har(\Omega) \subset C(\Omega, \mathbb{R})$, hereda la métrica de $C(\Omega, \mathbb{R})$.

Una consecuencia inmediata del teorema (3.2.7) es que el límite uniforme de una sucesión de funciones armónicas es una función armónica, pues la sucesión converge uniformemente en las circunferencias, lo que permite intercambiar el límite con la integral que proporciona el teorema del valor medio para cada término de la sucesión, y así concluir que el límite está en las hipótesis del teorema anterior.

Teorema 3.2.10 (Teorema de Harnack)**.** *Sea Ω una región:*

1. *El espacio metrico $Har(\Omega)$ es completo.*

2. *si $\{u_n\}$ es una sucesión en $Har(\Omega)$ tal que $u_1 \leq u_2 \leq \ldots \leq$ entonces, o bién $u_n(z) \longrightarrow \infty$ uniformemente en subconjuntos compactos de Ω, ó $\{u_n\}$ converge en $Har(\Omega)$ a una función armónica.*

Demostración. 1. Para esto basta ver que $Har(\Omega)$ es un subespacio cerrado de $C(\Omega, \mathbb{R})$. En efecto, sea u_n una sucesión en $Har(\Omega)$ tal que $u_n \longrightarrow u$ en $C(\Omega, \mathbb{R})$. Luego u tiene la propiedad de la media, entonces por teorema (3.2.7), u es armónica.

2. Sin pérdida de generalidad podemos asumir $u_1 \geq 0$. Sea $u(z) = \sup_n \{u_n(z) : n \in \mathbb{N}\}$. Entonces para cada z tenemos dos posibilidades: $u(z) = \infty$ ó $u(z) \in \mathbb{R}$ y $u_n(z) \longrightarrow u(z)$. Consideremos los conjuntos:

$$\begin{aligned} A &= \{z \in \Omega : u(z) = +\infty\} \\ B &= \{z \in \Omega : u(z) < +\infty\}. \end{aligned}$$

Vamos a probar que ambos son abiertos, con lo que por la conexidad uno de ellos coincidirá con Ω. Sea $z_0 \in \Omega$ y $R > 0$ tal que el disco $|z - z_0| \leq R$ está contenido en Ω. Si $|z - z_0| = r < R$, entonces

$$u_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_{r/R}(t - \theta) u_n(z_0 + Re^{i\theta})\, d\theta,$$

donde
$$P_{r/R}(t-\theta) = \frac{R^2 - r^2}{|Re^{i\theta} - re^{it}|^2},$$
y
$$R - r \leq |Re^{i\theta} - re^{it}| \leq R + r.$$
Luego,
$$\frac{R-r}{R+r} \leq P_{r/R}(t-\theta) \leq \frac{R+r}{R-r}. \tag{3.2.25}$$
Por consiguiente,
$$\frac{R-r}{R+r}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u_n(z_0 + Re^{i\theta})\,d\theta \leq u_n(z) \leq \frac{R+r}{R-r}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u_n(z_0 + Re^{i\theta})\,d\theta,$$
y teniendo en cuenta la propiedad del valor medio queda
$$\frac{R-r}{R+r}u_n(z_0) \leq u_n(z) \leq \frac{R+r}{R-r}u_n(z_0).$$
Así, si $u_n(z_0)$ tiende a $+\infty$ o converge, lo mismo sucede con $u_n(z)$ para todo z en el disco $D(z_0, R)$, es decir, $D(z_0, R)$ está contenido en el mismo conjunto A o B al cual pertenece z_0.
Supongamos que $\Omega = A$, es decir u_n converge a $+\infty$. Con la notación anterior tomamos $0 < r < r' < R$. Entonces
$$M = \frac{R-r'}{R+r'} \leq \frac{R-r}{R+r},$$
con lo que $Mu_n(z_0) \leq u_n(z)$ para todo z en el disco $D(z_0, r')$. De aquí se concluye que u_n converge uniformemente a $+\infty$ en el último disco. Si $\Omega = B$ se razona de igual manera.
Sea $r' < R$ entonces, como arriba, existe una constante N, que depende sólo de z_0 y r' tal que $Mu_n(z_0) \leq u_n(z) \leq Nu_n(z_0)$ para $|z - z_0| \leq r'$ para todo n. Luego si $m \leq n$ se tiene que $0 \leq u_n(z) - u_m(z) \leq Nu_n(z_0) - Mu_m(z_0) \leq C(u_n(z_0) - u_m(z_0))$ para alguna constante C.

Así, $\{u_n(z)\}$ es una sucesión de Cauchy que converge uniformemente en $\overline{D}(z_0, R)$. Por lo tanto $\{u_n\}$ es una seuceión de Cauchy en $Har(\Omega)$ y entonces, por la primera parte, debe converger a una función armónica. Como $u_n(z) \longrightarrow u(z)$, u es función armónica y con esto concluye la demostración.

□

Definición 3.2.11. Sea Ω una región y Γ su clausura en $\mathbb{C}^\infty$, definimos su borde extendido como $\partial_\infty \Omega = \Gamma - \Omega$.

3.3. Funciones subarmónicas

Las funciones que queremos introducir ahora son el análogo a las funciones cóncavas y convexas. Una función es convexa si en cualquier intervalo en el que está definida es menor que la recta que coincide con ella en los extremos. Similarmente, una función es cóncava si en cualquier intervalo en el que está definida se mantiene por encima de la recta que coincide con ella en los extremos.

Definición 3.3.1. Sea Ω un abierto en $\mathbb{C}$ y sea $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua.

- φ es una función subarmónica si para todo disco cerrado $D \subset \Omega$ se verifica que

$$\varphi(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(a + re^{i\theta})\, d\theta.$$

- φ es una función superarmónica si para todo disco cerrado $D \subset \Omega$ se verifica que

$$\varphi(a) \geq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(a + re^{i\theta})\, d\theta.$$

Es inmediato que una función es armónica si y sólo si es subarmónica y superarmónica al mismo tiempo. Así mismo, una función f es subarmónica si y sólo si $-f$ es superarmónica, y viceversa. Notemos que no exigimos que las funciones subarmónicas y superarmónicas sean derivables.

Cada propiedad de las funciones subarmónicas se corresponde con una propiedad de las funciones superarmónicas invirtiendo el sentido de las desigualdades. Por simplicidad en lo sucesivo trataremos ínicamente con funciones subarmónicas.

Proposición 3.3.2 (Principio de Máximo 3 versión)**.** *Sea Ω un abierto conexo en $\mathbb{C}$ y sea $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ una función subarmónica. Si existe un punto $a \in \Omega$ tal que $\varphi(a) \geq \varphi(z)$ para todo z en G. Entonces φ es una función constante.*

Demostración. La prueba es análoga a la prueba de la primera versión del Principio del Máximo. □

Proposición 3.3.3 (Principio de Máximo 4 versión)**.** *Sea Ω una región y sean φ y ψ funciones reales definidad en Ω tal que φ es subarmónica y ψ es superarmónica. Si para todo a en $\partial_\infty \Omega$ se verifica que*

$$\lim_{z\to a} \sup \varphi(z) \leq \lim_{z\to a} \inf \psi(z) \tag{3.3.1}$$

entonces $\varphi = \psi$ y φ es armónica, o bien $\varphi(z) < \psi(z)$ para todo a en Ω.

Demostración. Sea $h = \psi - \varphi$, h es superarmónica y cumple:

$$\lim_{z\to a} \inf h(z) \geq 0.$$

Podemos tomar una sucesión z_n en Ω tal que $h(z_n)$ converja al al ínfimo de h. Tomando una subsucesión podemos suponer que z_n converge a un punto a de la clausura de Ω en C^∞.
Si h es constante es claro que se cumple el teorema. En caso contrario, el principio del mínimo implica que h no toma un valor mínimo en Ω, luego $a \in \partial_\infty \Omega$. Entonces la definición de límite inferior implica que el ínfimo de h ha de ser mayor o igual que 0, luego h es estrictamente positiva en Ω. □

Hemos enunciado este teorema con límites superiores e inferiores porque después lo necesitaremos con este grado de generalidad, pero conviene recordar un caso particular mucho más simple y no menos útil: Si una función subarmónica es menor o igual que una función superarmónica en todos los puntos de la frontera de un abierto conexo, entonces la desigualdad vale también en los puntos del abierto. Sin embargo, la versión general del teorema es más potente. Por ejemplo, de él se sigue que en la definición de función subarmónica podemos sustituir los discos por abiertos cualesquiera.

Cuando decimos que una función satisface el Principio Máximo, nos referimos a la tercera versión. Es decir, suponemos que no tiene un máximo en Ω a menos que sea constante.

Teorema 3.3.4. *Sea G una región y $\varphi : G \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces φ es subarmónica si y sólo si para cada región G_1 contenida en G y toda función armónica u_1 en G_1, $\varphi - u_1$ saisface el principio del máximo en G_1.*

Demostración. Supongamos que φ es subarmónica y G_1 y u_1 son como en la descripción del teorema. Entonces $\varphi - u_1$ es claramente subarmónica y debe satisfacer el principio del máximo. Ahora supongamos qie φ es continua y con esta propiedad:

$$\text{sea } \bar{B}(a,r) \subset G$$

De acuerdo con el teorema (3.2.3) existe una función continua $u : \bar{B}(a,r) \to \mathbb{R}$ la cual es armónica en $B(a,r)$ y $u(z) = \varphi(z)$ para $|z-a| = r$. Por hipótesis $\varphi - u$ satisface el principio del máximo. Pero $(\varphi - u)(z) = 0$ para $|z-a| = r$, entonces

$$\begin{aligned} \varphi(a) \leq u(a) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(a+re^{i\theta})d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(a+re^{i\theta})d\theta \end{aligned}$$

Por lo tanto φ es subarmónica. □

Corolario 3.3.5. Sea G una región y $\varphi : G \to \mathbb{R}$ función continua, entonces φ es subarmónica si y solo si para cada región acotada G tal que $G_1 \subset G$ y para toda función continua $u_1 : \bar{G}_1 \to \mathbb{R}$ que es armónica en G_1 y satisface $\varphi(z) \leq u_1(z)$ con z en G y $\varphi(z) \leq u_1(z)$ para $z \in G_1$.

Corolario 3.3.6. Sea G una región y φ_1 y φ_2 funciones armónicas en G, si $\varphi(z) = \max\{\varphi_1, \varphi_2 \, \forall z \in G\}$. Entonces φ es una función armónica.

Demostración. Sea G_1 una región con $G1 \subset G$ y sea u_1 una función continua en $\bar{G}_1$ que es armónica en G_1 con $\varphi(z) \leq u_1(z) \forall z \in \partial G_1$. Entonces ambos $\varphi_1(z)$ y $\varphi_2(z) \leq u_1(z)$ en ∂G_1. Por corolario anterior coonseguimos que $\varphi_1(z)$ y $\varphi_2(z) \leq u_1(z) \forall z \in G_1$. Por lo tanto $\varphi(z) \leq u_1 \forall z \in G_1$ y por el mismo corolario se tiene que φ es subarmónica. □

Corolario 3.3.7. Sea φ una función subarmónica en una región G y sea $\bar{B}(a,r) \subset G$. Sea φ' la función definida en G por

1. $\varphi'(z) = \varphi(z)$ con $z \in G - B(a,r)$
2. φ' es uan función continua en $\bar{B}(a,r)$ tal que es armónica en $B(a,r)$ y está de acuerdo con $\varphi(z)$ para $|z-a| = r$.

Entonces φ' es subarmónica.

Demostración. Basta ver que φ' es subarmónica en los puntos de la frontera de B. Tomamos un disco E con centro en un punto de dicha frontera. Sean h y h' las funciones harmónicas en el interior de E que coinciden con φ y φ' en la frontera. Como $\varphi \leq \varphi'$, por la cuarta versión del principio del máximo, resulta que $\varphi \leq h \leq h'$ en E.

Por otra parte, $\varphi' \leq h'$ en la frontera de $B \cap E$.Consecuentemente (y dado que φ' y h' son armónicas en el interior de $B \cap E$) concluimos que $\varphi' \geq h'$ en $B \cap E$, con lo que de hecho $\varphi' \leq h'$ en E. □

3.4. El Problema de Dirichlet en $\mathbb{C}$

Como se mencionó al comienzo de esta sección, uno de los propósitos al estudiar las funciones subarmónicas es que entran en la solución del Problema de Dirichlet. De hecho, la cuarta versión del Principio Máximo da una idea de cómo ocurre esto. Si Ω es una región y $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ es una función continua que es armónica en Ω, entonces $\varphi(z) \leq u(z)$ para todo z en Ω y para todas las funciones subarmónicas φ que a su vez satisfacen $\limsup_{z\to a} \varphi(z) \leq u(a)$ para todo a en $\partial_\infty G$. Dado que u es en sí misma una función subarmónica, es natural el siguiente resultado

$$u(z) = \sup\{\varphi(z) : \varphi \quad \text{es subarmónica y } \limsup_{z\to a} u(z) \leq u(a)\ \forall a \in \partial_\infty G\} \tag{3.4.1}$$

Aunque esta es una afirmación trivial, es sin embargo un faro que señala el camino hacia una solución del Problema de Dirichlet. La ecuación dice que si $f : \partial_\infty\Omega \to \mathbb{R}$ es una función continua y si f puede extenderse a una función u que es armónica en Ω, entonces u se puede obtener a partir de un conjunto de funciones subarmónicas que se definen únicamente en términos de los valores de borde f. Esto lleva a la siguiente definición.

Definición 3.4.1. Si Ω es una región y $f : \partial_\infty\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua entonces *La Familia de Perrón*, $P(f, \Omega)$, consiste en todas las funciones subarmónicas $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\limsup_{z\to a} \varphi(z) \leq f(a)$$

para todo $a \in \partial_\infty\Omega$.

Dado que f es continua, existe una constante M tal que $|f(a)| \leq M$ para todo $a \in \partial_\infty\Omega$. Así que la función constante $-M$ pertenece a $P(f, \Omega)$ y la familia de Perrón es no vacía.
Si $u : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua que además es armónica en Ω y coincide con f en $\partial_\infty\Omega$, entonces (3.4.1) se convierte en

$$u(z) = \sup\{\varphi(z) : \varphi \in P(f, \Omega)\} \tag{3.4.2}$$

para todo z en Ω. De manera inversa, si se da f y u se define por (3.4.2), entonces u debe ser la solución del Problema de Dirichlet con los valores de frontera de f, es decir, siempre que el Problema de Dirichlet pueda ser resuelto. Para mostrar que (3.4.2) es una solución, dos preguntas deben responderse de manera afirmativa.

- Es u armónica en Ω
- $\lim_{z\to a} u(z) = f(a)$ para cada a en $\partial_\infty\Omega$.

Teorema 3.4.2. *Sea* Ω *una región y* $f : \partial_\infty \Omega \to \mathbb{R}$ *una función continua, entonces*

$$u(z) = \sup\{\varphi(z) : \varphi \in P(f, \Omega)\}$$

define una función armónicas u *en* Ω*.*

Demostración. Sea $|f(a)| \leq M$ para todo a en $\partial_\infty \Omega$. Notemos que

$$\varphi(z) \leq M \qquad \text{para todo} \quad z \in \Omega, \varphi \in P(f, \Omega) \tag{3.4.3}$$

Esto se debe a que, por definición, $\lim_{z \to a} \sup \varphi(z) \leq M$ siempre que $\varphi \in P(f, \Omega)$; entonces (3.4.3) es una concecuencia directa del principio de máximo.
Fijemos a en Ω y sea $\overline{B}(a, r) \subset \Omega$. Entonces $u(a) = \sup\{\varphi(a) : \varphi \in P(f, \Omega)\}$. Luego, existe una sucesión de funciones $\{\varphi_n\}$ en $P(f, \Omega)$ tales que $u(a) = \sup \varphi_n(a)$. Sea $\phi_n = \text{máx}\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ y por el corolario (3.3.6) es subarmónica. Sea ϕ'_n una función subarmónica en Ω tal que

- $\phi'_n(z) = \phi_n(z)$ para todo z en $\Omega - B(a, r)$
- ϕ'_n es armónica en $B(a, r)$

Queda por verificar que

1. $\phi'_n \leq \phi'_{n+1}$
2. $\varphi_n \leq \phi_n \leq \phi'_n$
3. $\phi'_n \in P(f, \Omega)$

Por 3, $\phi'_n(a) \leq u(a)$, luego por 2 y por la elección de φ_n se tiene que

$$u(a) = \lim_{z \to a} \phi'_n(a) \tag{3.4.4}$$

Además, por (3.4.3) resulta que $\phi'_n \leq M$ para todo n. Considerando 1, el Teorema de Harnack implica que existe una función armónica U en $B(a, r)$ tal que $U(z) = \lim \phi'_n(z)$ uniformemente para z en cualquier subdisco apropiado de $B(a, r)$. Se sigue de 3 que $U \leq u$ y por (3.4.4) se tiene $U(a) = u(a)$.

Ahora sea $z_0 \in B(a, r)$ y sea $\{\psi_n\}$ una sucesión en $P(f, \Omega)$ tal que $u(z_0) = \lim \psi_n(z_0)$.

Sea $\chi_n = \text{máx}\{\phi_n, \psi_n\}$ y $X_n = \text{máx}\{\chi_1, \ldots, \chi_n\}$ y sea X'_n una función subarmónica que coincide con X_n en $B(a, r)$ y es armónica en $B(a, r)$. Como arriba, esto conduce a una función armónica U_0 en $B(a, r)$ tal que $U_0 \leq u$ y $U_0(z_0) = u(z_0)$. Pero $\phi_n \leq X_n$, entonces $\phi'_n \leq X'_n$. Por lo tanto $U \leq U_0 \leq u$ y $U(a) = U_0(a) = u(a)$. Por consiguente $U - U_0$ es una función armónica negativa en $B(a, r)$ y $(U - U - 0)(a) = 0$. Por el Principio del máximo, $U = U_0$, entonces $U(z_0) = u(z_0)$. Como z_0 es arbitrario, $u = U$ en $B(a, r)$. Es decir, u es armónica en cada disco contenido en Ω.

□

Definición 3.4.3. Sea Ω un dominio y $f : \partial_\infty \Omega \to \mathbb{R}$ una función continua. La función armónica u obtenida en el teorema anterior se llama *Función Perron asociada con f.*

El siguiente paso para resolver el problema de Dirichlet es probar que para cada punto a en $\partial_\infty \Omega$ el $\lim u(z)$ existe y es igual a $f(a)$. Es importante mencionar que esto no siempre se cumple. El siguente ejemplo ilustra este fenómeno.

Ejemplo 3.4.4. Sea $\Omega = D(0,1) - \{0\}$ y sea f la función que vale 0 sobre la circunferencia unidad y $f(0) = 1$. Fijemos $0 < \epsilon < 1$ y consideremos la función $u_\epsilon = \frac{\log|z|}{\log \epsilon}$. Claramente u_ϵ es armónica en Ω y continua en su clausura, toma el valor 1 en la circunferencia $|z| = \epsilon$ y el valor 0 en la circunferencia $|z| = 1$.
Si $v \in P(f, \Omega)$, entonces $|v| \leq 1$ por el principio del máximo, ya que $|f| \leq 1$. Por lo tanto si $|a| = \epsilon$ se cumple que $\lim\sup_{z\to a} v(z) \leq u_\epsilon(a)$ y si $|a| = 1$ se tiene la misma desigualdad por definición de $P(f, \Omega)$. La cuarta versión del Principio del máximo implica que $v(z) \leq u_\epsilon(z) = \frac{\log|z|}{\log \epsilon}$ para todo z en Ω. Si fijamos z y hacemos tender ϵ a cero queda $v(z) \leq 0$, para toda función v en $P(f, \Omega)$, con lo que, $u(z)$ definido por (3.4.2) es menor o igual a cero. Entonces $u(z) = 0$ y por lo tanto no tiende a f en $\partial\Omega$. Así pues, el problema de Dirichlet no tiene solución en este caso.

Definición 3.4.5. Una región A se dice Region de Dirichlet si en ella se puede resolver el Problema de Dirichlet. Es decir, Ω es una Dominio de Dirichlet si para toda función continua $f : \partial_\infty \Omega \to \mathbb{R}$, existe una función continua $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ tal que u es armónica y $f(z) = u(z)$ para todo $z \in \partial_\infty \Omega$

Ya hemos visto que un disco es una Dominio de Dirichlet, pero el el disco pinchado no lo es. En esta sección, veremos condiciones que son suficiente para que una región sea una Dominio de Dirichlet. El primer paso en esto dirección es suponer que hay funciones que pueden usarse para restringir el comportamiento de las Funciones de Perron cerca del borde.

Vamos a encontrar una condición topológica muy simple que garantice que un abierto es un Dominio de Dirichlet, pero primero hemos de caracterizar los Dominios de Dirichlet por una propiedad local sobre los puntos de su frontera.

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto y $a \in \partial_\infty \Omega$. Supongamos por el momento que a es finito. En tal caso, la función $f(z) = |z - a|/(1 + |z - a|)$, extendida a ∞ mediante $f(\infty) = 1$ es continua en C^∞, en particular en $\partial_\infty \Omega$, toma valores en $[0, 1]$ y sólo se anula en a.
Si Ω es un Dominio de Dirichlet existe una función u armónica en Ω, continua en $\overline{\Omega}$ (la clausura entendida en $\mathbb{C}^\infty$ y que coincida con f en $\in \partial_\infty \Omega$. Claramente $u : \overline{\Omega} \to [0, 1]$ y sólo se anula en el punto a.

La existencia de una función u con estas propiedades para cada punto a caracteriza a los dominios de Dirichlet, pero hemos dicho que buscamos una propiedad local, es decir, que dependa sólo de un entorno de cada punto a. Por ello, vamos a debilitar la condición todavía más.

Definimos el abierto

$$\Omega_r(a) = \begin{cases} \Omega \cap D(a, r) & \text{si} \quad a \neq \infty \\ \\ \Omega \cap A(0, r, \infty) & \text{si} \quad a = \infty. \end{cases}$$

donde $A(0,r,\infty)$ es el anillo definido por $\{z\in\mathbb{C} : r<|z|<R\}$.

Sea también

$$\partial\Omega_r(a)=\begin{cases}\{z\in\Omega : |z-a|=r\} & \text{si}\quad a\neq\infty\\[2ex] \{z\in\Omega : |z|=r\} & \text{si}\quad a=\infty.\end{cases}$$

Notemos que $\partial\Omega_r(a)$ no es toda la frontera de $\Omega_r(a)$ sino una parte de ella. Sea $c_r=\text{ínf}\{u(z) : z\in\partial\Omega_r(a)\}>0$ y $\varphi_r=\text{mín}\{u(z)/c_r,1\}$. Es claro que estas funciones cumplen la siguiente definición

Definición 3.4.6. Sea Ω un abierto en $\mathbb{C}$ y $a\in\partial_\infty\Omega$. Una *barrera* para a en Ω es una familia de funciones $\{\varphi_r : r>0\}$, tales que

- $\varphi_r:\Omega_r(a)\to[0,1]$ es superarmónica;
- $\lim\limits_{z\to a}\varphi_r(z)=0$;
- para todo $w\in\partial\Omega_r(a)$, existe $\lim\limits_{z\to w}\varphi_r(z)=1$.

A los puntos $z\in\partial\Omega$ que admiten una barrera, les llamaremos *puntos regulares*.

Las funciones φ_r que hemos construido son continuas, de hecho, en toda la clausura de $\partial\Omega_r(a)$ pero en la definición recogemos las condiciones imprescindibles para caracterizar los dominios de Dirichlet, pues después probaremos la existencia de barreras en un contexto muy general y entonces agradeceremos que la definición sea lo más débil posible.

Al final de este capítulo se darán condiciones geométricas suficientes para construir barreras. Por el momento pasamos a demostrar el resultado que culmina la prueba de existencia para el problema de Dirichlet bajo la hipótesis de existencia de barreras. El resultado es de caracter puntual

Teorema 3.4.7. *Sea Ω un dominio acotado y sea a en $\partial_\infty\Omega$ tal que existe una barrera en Ω para a. Si $f:\partial_\infty G\to\mathbb{R}$ es continua y u es la función de Perrón asociada a f, entonces*

$$\lim_{z\to a}u(z)=f(a).$$

Demostración. Supongamos que $a\neq\infty$. El caso de ∞ se trata de forma análoga, sustituyendo las aproximaciones a a de la forma $|z-a|<\delta$ por aproximaciones a ∞ de la forma $|z|>R$. Fijemos una barrera φ_r para a. Sea $\epsilon>0$ y escogemos $\delta>0$ de modo que $w\in\partial_\infty\Omega$ y $|w-a|<2\delta$, entonces $|f(w)-f(a)|<\epsilon$. Podemos tomar δ lo suficientemente pequeño como para que esté definida φ_δ. Definimos $\varphi:\Omega\to[0,1]$ por

$$\varphi(z)=\begin{cases}\varphi_\delta(z) & \text{si}\quad z\in\Omega_\delta(a)\\[2ex] 1 & \text{si}\quad z\in\Omega-\Omega_\delta(a).\end{cases}$$

Es claro que φ es continua en Ω. Probaremos que es superarmónica. Los únicos puntos en los que esto no es evidente son los de $\partial_r\Omega(a)$. Si $z_0\in\partial_r\Omega(a)$, sea $\overline{D}(z_0,t)$ un disco en Ω y sea h

una función armónica que coincide con φ en su frontera. Vamos a probar que $h \leq \varphi$. En efecto, es claro que $h \leq 1$, luego $h \leq \varphi_\delta$ en la frontera $\Omega_\delta(a)D(z_0, t)$, de donde $h \leq \varphi_\delta$ en este conjunto, y por lo tanto, $h \leq \varphi$.
Sea R una cota de f. Entonces $-2R\varphi + f(a) - \epsilon$ es subarmónica en Ω. Vamos a probar que está en $P(f, \Omega)$. Sea $w \in \partial_\infty \Omega$ tal que $|w - a| \geq \delta$, entonces

$$\lim_{z \to w} (-2R\varphi + f(a) - \epsilon) = -2R\varphi + f(a) - \epsilon < f(w).$$

Si $|w - a| < \delta$, entonces

$$\limsup_{z \to w} (-2R\varphi + f(a) - \epsilon) \leq f(a) - \epsilon < f(w).$$

Por consiguiente, $-2R\varphi + f(a) - \epsilon$ pertenece a $P(f, \Omega)$, y entonces

$$-2R\varphi + f(a) - \epsilon \leq u(z).$$

De manera análoga se prueba que si $w \in \partial_\infty \Omega$, entonces

$$\liminf_{z \to w} (2R\varphi + f(a) + \epsilon) \geq f(w).$$

Por lo tanto, si $u \in P(f, \Omega)$ se verifica que

$$\limsup_{z \to w} u(z) \leq \liminf_{z \to w} (2R\varphi(z) + f(a) + \epsilon),$$

y el principio del máximo implica entonces que $u \leq 2R\varphi(z) + f(a) + \epsilon$, luego

$$-2R\varphi + f(a) - \epsilon \leq u(z) \leq 2R\varphi(z) + f(a) + \epsilon.$$

Por consiguiente,

$$-\epsilon \leq \liminf_{z \to a} (u(z) - f(a)) \leq \limsup_{z \to a} (u(z) - f(a)) \leq \epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ es arbitrario, se concluye que existe $\lim_{z \to a} u(z) = f(a)$. $\square$

Como resumen de todo lo anterior se tiene que si todo punto $a \in \partial\Omega$ es un punto regular, en el sentido de la definición anterior, los teoremas establecen la existencia de solución $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, del problema de Dirichlet, cualquiera sea $f \in C(\partial\Omega)$. Diremos en este sentido que el problema de Dirichlet es soluble en *sentido clásico*.

Lema 3.4.8. *Sea Ω una región en $\mathbb{C}$ y sea S un subcojunto cerrado conexo de $\mathbb{C}_\infty$ tal que S y $S \cap \partial_\infty \Omega = \{a\}$. Si Ω_0 es la componente de $\mathbb{C}_\infty - S$ que contiene a Ω, entonces Ω_0 es una región simplemente conexa del plano.*

Con esto estamos en condiciones de probar el teorema siguiente, que nos permite reconocer fácilmente una gran cantidad de dominios de Dirichlet:

Teorema 3.4.9. *Sea Ω una región en $\mathbb{C}$ y suponga que $a \in \partial_\infty \Omega$ tal que la componente de a en $\mathbb{C}_\infty - \Omega$ no se reduzca a un punto $\{a\}$. Entonces a tiene una barrera en Ω.*

Demostración. Sea S la componente conexa de $C^\infty - \Omega$ que contiene a a. Por hipótesis existe $b \in S$ tal que $b \neq a$. Sea T una transformación de Möbius tal que $T(a) = 0$ y $T(b) = \infty$. Sea Ω_0 la componente de $C^\infty - S$ contenida en Ω. Veamos que Ω_0 es simplemente conexo. Cualquier otra componente conexa A de $C^\infty - S$ es un abierto cuya frontera está contenida en S, luego su clausura es conexa, corta a S y es disjuta de Ω_0. Luego, $\overline{A} \cup S$ es conexo y disjunto de Ω_0. Notemos que $C^\infty - \Omega_0$ es la unión de todos los conjuntos $\overline{A} \cup S$, la unión de conexos con intersección común es conexa.

Como $0 \notin \Omega_0$, existe una rama uniforme del logartimo L definida en Ω_0. En particular L está definida en Ω. Para cada $r > 0$ y $z \in \Omega_r(0)$ sea $L_r(z) = L(z) - \log r$. Como 0 está en la componente no acotada de $C^\infty - \Omega$, ninguna circunferencia de centro 0 puede estar contenida en Ω, luego

$$\partial_r\Omega(0) = \{z \in \Omega : |z| = r\}$$

es la unión de a lo sumo una cantidad numerable de arcos abiertos disjuntos $\{\gamma_k\}$. Entonces, $-L_r[\gamma_k] = \{it : \alpha_k < t < \beta_k\}$, y entonces

$$-L_r[\partial_r\Omega(0)] = i\bigcup_k]\alpha_k, \beta_k[,$$

donde los intervalos son disjuntos y la longitud de γ_k es $r(\beta_k - \alpha_k)$, así

$$\sum_{i=1}^{\infty} \beta_k - \alpha_k \leq 2\pi$$

Ahora, si log es el logaritmo con parte imaginaria entre $-\pi$ y π, la función

$$h_k(z) = \Im \log\left(\frac{z - i\alpha_k}{z - i\beta_k}\right)$$

es armónica en el semiplano y $0 < h_k(z) < \pi$ para $\Re z > 0$. Notemos que la función de dentro del logaritmo es una transformación de Möbius que deja fijo al semiplano $\Re z > 0$.

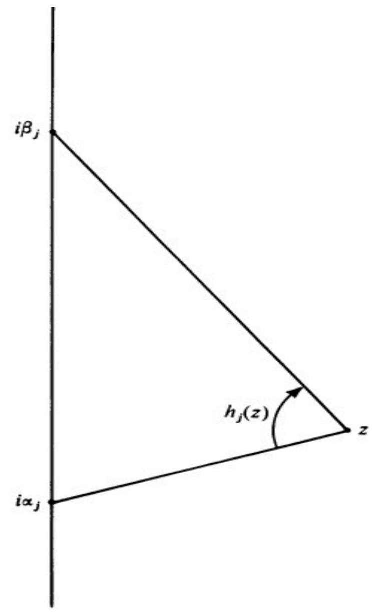
Es fácil ver que los argumentos de $z - i\alpha_k$ y $z - i\beta_k$ están entre $-\pi/2$ y $\pi/2$ y el primero es mayor que el segundo (ver diujo).

Luego, $h_k(z) = \Im(\log(z - i\alpha_k)) - \Im(\log(z - i\beta_k))$, y en particular, $0 < h_k(z) < \pi$. Esto nos da la expresión integral

$$\begin{aligned} h_k(z) &= \Im\left(i\int_{\alpha_k}^{\beta_k} \frac{d\varsigma}{z - \varsigma i}\right) = \Re\left(i\int_{\alpha_k}^{\beta_k} \frac{d\varsigma}{z - \varsigma i}\right) \\ &= \int_{\alpha_k}^{\beta_k} \frac{x}{x^2 + (y-t)^2}\, dt \\ &= \arctan\frac{y - \alpha_k}{x} - \arctan\frac{y - \beta_k}{x}, \end{aligned}$$

donde $z = x + iy$. Geométricamente esto se interpreta como que $h_k(z)$ es el ángulo de vértice z en el dibujo. Entonces

$$\sum_{k \leq n} h_k(z) \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2 + (y-t)^2}\, dt = \pi.$$



Como las funciones h_k son positivas, el teorema de Harnack implica que la función

$$h(z) = \sum_k h_k(z)$$

es armónica en el semiplano $\Re z > 0$. La función analítica $-L_r$ toma valores en este semiplano, luego podemos definir $\psi_r(z) = h(-L(z))/\pi$, que es una función armónica en $\Omega_r(0)$.
Vamos a probar que las funciones $\{\psi_r\}$ forman una barrera para 0. Dado que $\Re L_r(z)$ tiende a $-\infty$ cuando z tiende a 0, tenemos que probar que h tiende a 0 cuando $\Re(z)$ tiende a $+\infty$. Ahora bien,

$$\begin{aligned} h(x+iy) &= \sum_k h_k(x+iy) \\ &= \sum_k \int_{\alpha_k}^{\beta_k} \frac{x}{x^2+(y-t)^2}\,dt \\ &\leq \sum_k \frac{\beta_k-\alpha_k}{x} \leq \frac{2\pi}{x}. \end{aligned}$$

Sólo queda demostrar que si $w \in \Omega$ y $|w| = r$, entonces

$$\lim_{z\to w} \psi_r(z) = 1.$$

Si w está en el arco γ_k, entonces $-L_r(z)$ transforma cualquier sucesión que tienda a w en una sucesión que tiende a ic, con $\alpha_k < c < \beta_k$, luego basta probar que

$$\lim_{z\to ic} h(z) = \pi, \qquad \text{para} \quad \alpha_k < c < \beta_k.$$

Sea $]\alpha_i, \beta_i[$ un intervalo tal que $\beta_k \leq \alpha_i$. Entonces $\alpha_i - \beta_k$ es mayor o igual que la suma s_i de las longitudes de los intervalos contenidos en $[\beta_k, \alpha_i]$. Definimos $a_i = \beta_k + s_i$ y $b_i = a_i + \beta_i - \alpha_i$.

De este modo el intervalo $]a_i, b_i[$ tiene la misma longitud que$]\alpha_i, \beta_i[$ pero $a_i \leq \alpha_i$. Es fácil ver que los intervalos $]a_i, b_i[$ son disjuntos dos a dos y por construcción la unión de todos ellos está contenida en $]\beta_i, \beta_i + 2\pi[$.

Sea H_i la función definida como h_i pero con $]ai, bi[$ en lugar de $]\alpha_i, \beta_i[$. La expresión integral muestra que $h_i \leq H_i$ y la suma de todas las funciones h_i con $\beta_k \leq \alpha_i$ es menor o igual que

$$v(x, y) = \int_{\beta_k}^{\beta_k + 2\pi} \frac{x}{x^2 + (y - t)^2}\, dt.$$

Analogamente se razona con los intervalos $]\alpha_i, \beta_i[$ tales que $\beta_i \leq \alpha_k$, de modo que la suma de todas las funciones h_i correspondientes a estos intervalos está mayorada por

$$u(x, y) = \int_{\alpha_k - 2\pi}^{\alpha_k} \frac{x}{x^2 + (y - t)^2}\, dt.$$

Por lo tanto $0 \leq h(z) - h_k(z) \leq u(z) + v(z)$. Calculando las primitivas (arcos tangentes) se ve inmediatamente que

$$\lim_{z \to ic} (h(z) - h_k(z)) = 0.$$

Por otra parte,

$$\lim_{z \to ic} h_k(z) = \lim_{z \to ic} \left(\arctan \frac{y - \alpha_k}{x} - \arctan \frac{y - \beta_k}{x} \right) = \pi.$$

□

Como consecuencia tenemos:

Corolario 3.4.10. Si Ω es un abierto conexo tal que ninguna de las componentes conexas de $\mathbb{C}_\infty - \Omega$ consta de un único punto, entonces Ω es un Dominio de Dirichlet.

Puede probarse que la condición no es necesaria, pero abarca todos los casos de interés. Notemos que en particular todo abierto conexo simplemente conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un dominio de Dirichlet.

Corolario 3.4.11. Un dominio simplemente conexo es un Dominio de Dirichlet.

Demostración. En efecto, $\mathbb{C}_\infty - \Omega$ tiene una única componente conexa. Si ésta fuera un punto, habría de ser ∞, luego $\Omega = \mathbb{C}$, pero $\mathcal{C}$ es obviamente un Dominio de Dirichlet (las funciones constantes resuelven el problema de Dirichlet para cualquier condición en ∞). □

Capítulo 4

El Problema de Dirichlet para la Ecuación de Laplace en el Elipsoide

El propósito de este capítulo es presentar un método alternativo para resolver el Problema de Dirichlet, planteado de forma no tradicional sobre un Elipsoide de $\mathbb{R}^n$, y determinar las condiciones de existencia y unicidad de las soluciones. Recordemos que nuestro problema es: *Dada una región* Ω *en* $\mathbb{R}^n$ *con frontera* $\partial\Omega$ *y una función continua* $f : \partial\Omega \to \mathbb{R}$*, ¿existe una única función* $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ *tal que es armónica en el interior de* Ω *y coincide con* f *en la frontera* $\partial\Omega$*?* Dada una frontera suficientemente suave $\partial\Omega$ y f continua, las soluciones generales se logran por medio de técnicas clásicas de EDP. La unicidad es consecuencia del principio del máximo.

Aparte de la existencia y unicidad, una pregunta común es la naturaleza de las soluciones que surgen dado el dominio Ω y la función como datos f. Por ejemplo, si f es algún polinomio y Ω es una bola abierta en $\mathbb{R}^n$, ¿que se puede decir sobre el resultado solución u?. Esta pregunta es difícil de abordar a través de las ecuaciones integrales, por lo que en su lugar recurrimos al álgebra de los espacios vectoriales de dimension finita.

4.1. Existencia y Unicidad

En esta sección vamos a establecer las condiciones de existencia y unicidad para nuestro problema. Sea T un endomorfismo en un espacio vectorial de dimensión finita. Uno de los resultados más importantes en el álgebra lineal elemental es que T es inyectivo si y solo si T es sobreyectivo. Aplicaremos este hecho al Problema de Dirichlet con polinomios como datos de borde.

En este capítulo nos ocuparemos del caso en que Ω es una elipse en $\mathbb{R}^n$ para $n \geq 2$ arbitrario y especialmente cuando f restricta a $\partial\Omega$ es un polinomio. Adoptaremos las siguientes notaciones y definiciones.

Fijemos un $n \geq 2$ en $\mathbb{N}$, constantes $r_1, \ldots, r_n > 0$ en $\mathbb{R}^+$ y definimos

$$b(x) = 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2}{r_k^2}, \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

El conjunto $\mathcal{E}$ denota a la elipsoide

$$\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^n : b(x) > 0\},$$

y su frontera es

$$\partial\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^n : b(x) = 0\}$$

El objetivo es resolver el Problema de Dirichlet para $\mathcal{E}$ mostrando primero que se puede manejar en el caso particular cuando la función como dato de borde es un polinomio. Esto se lograraá con la ayuda de una consecuencia elemental de un trabajo de E. Fischer..

Llamaremos $\mathcal{P} = \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ al anillo de polinomios de n variables sobre el cuerpo de los números reales, y para un entero $m \geq 0$, $\mathcal{P}_m = \{f \in \mathcal{P} : deg(f) \leq m\}$ denotará el subespacio lineal de dimensión finita de $\mathcal{P}$.

Lema 4.1.1 (Lema de Fischer)**.** *Para $f \in \mathcal{P}$ definamos $L(f) = \triangle(fb)$. Entonces L es un operador lineal, preserva el grado y es una biyección de $\mathcal{P}$ en sí mismo.*

Demostración. Sea $L : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ tal que $L(f) = \triangle(fb)$. No es dificil notar que L es un operador lineal en $\mathcal{P}$. Vamos a probar que L es inyectivo, para esto, supongamos que $L(f) = 0$ para algún f en $\mathcal{P}$. Sea $u = fb$, entonces $\triangle u(x) = 0$ para todo x en $\mathbb{R}^n$ y $u(x) = 0$ para todo x en $\partial\mathcal{E}$. Luego u es armónica y por el corolario anterior, $u(x) = 0$ a lo largo de toda la elipse definida por b, es decir, $u(x) = 0$ para todo x en $\bar{\mathcal{E}}$, así $f(x) = 0$ para todo x en $\mathcal{E}$. Pero f es un polinomio, por lo tanto $f(x) = 0$ para todo x en $\mathbb{R}^n$. Por lo tanto, hemos probado que $Ker(L) = 0$, es decir L es inyectiva.

Sea $f \in \mathcal{P}_m$, entonces $fb \in \mathcal{P}_{m+2}$ y $\triangle(fb) \in \mathcal{P}_m$. Esto es, L es función de $\mathcal{P}_m$ en sí mismo. Como $\mathcal{P}_m$ tiene dimensión finita y L es un operador lineal inyectivo, L es una función sobreyectiva en $\mathcal{P}_m$. $\square$

Veremos dos soluciones elementales y novedosas del problema de Dirichlet para elipsoides, una utilizando el Lema de Fischer y otra un poco más geométrica. En este caso Ω corresponde a un elipsoide en $\mathbb{R}^n$ para $n \geq 2$ arbitrario.

Problema:

Queremos resolver el problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace, es decir, dada una región Ω en $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ y una función continua $f : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ como dato de borde, deseamos encontrar una única función $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ continua, tal que u es $C^2(\Omega)$,

$$\begin{cases} \triangle u(x) = 0 & x \in \Omega \\ \\ u(x) = f(x) & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.1.1}$$

El primer caso que vamos a considerar es cuando la función de borde como dato es un polinomio y Ω la elipse en $\mathbb{R}^n$. El lema de Fischer y el principio del máximo, dan una prueba simple de:

Teorema 4.1.2. *Sea f un polinomio en $\mathcal{P}_m$ para algún $m \geq 0$. Entonces existe una única solución u en $\mathcal{P}_m$ que satisface*

$$\begin{cases} \triangle u(x) = 0 & si \quad x \in \mathcal{E}, \\ \\ u(x) = f(x) & si \quad x \in \partial\mathcal{E}. \end{cases} \tag{4.1.2}$$

Demostración. Si $m \leq 1$ la conclusión se cumple con $u = f$. Supongamos que $m \geq 2$ y que el grado de f es a lo menos 2. Podemos mirar a u de la forma $f + vb$ con v en $\mathcal{P}_{m-2}$ para cualquier u, tal que $u(x) = f(x)$ para todo x en $\partial\mathcal{E}$ y $\triangle u = \triangle f + \triangle(vb)$. Por el lema de Fischer, existe una única g en $\mathcal{P}_{m-2}$ tal que $\triangle(gb) = -\triangle f$. Por lo tanto, si se define $u = f + gb$, entonces u está en $\mathcal{P}_m$ y 4.1.2 se verifica. La unicidad está garantizada por el principio del máximo.

□

Teorema 4.1.3 (Teorema de aproximación de Weierstrass). *Dado un rectángulo I en $\mathbb{R}^n$, una función continua $f : I \to \mathbb{R}$ y $\epsilon > 0$, entonces existe p en $\mathcal{P}$ tal que $|f(x) - p(x)| < \epsilon$ para todo x en I. Cuando hablamos de un rectángulo en $\mathbb{R}^n$ nos referimos a un producto de n intervalos cerrados y acotados.*

Ahora estudiaremos el caso cuando el dato de borde es una función continua.

A continuación presentamos un resultado análogo al Teorema (4.1.2) con la hipótesis de que la función como dato de borde f es continua.

Teorema 4.1.4. *Dada una función continua $f : \partial\mathcal{E} \to \mathbb{R}$, existe una única función continua $u : \bar{\mathcal{E}} \to \mathbb{R}$ tal que u es $C^2(\mathcal{E})$ y satisface*

$$\begin{cases} \triangle u(x) = 0 & si \quad x \in \mathcal{E}, \\ \\ u(x) = f(x) & si \quad x \in \partial\mathcal{E}. \end{cases}$$

Demostración. Para x en $\mathbb{R}^n$ sea $v(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2}{r_k^2}$ y

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} v(x) f\left(\frac{x}{v(x)}\right) & si \quad x \neq 0, \\ \\ 0 & si \quad x = 0. \end{cases}$$

En efecto, $\tilde{f}$ es continua en $\mathbb{R}^n$ y por lo tanto, por teorema de Weierstrass, puede ser aproximada uniformemente en cada rectangulo por una función polinomial. Pero $\tilde{f}(x) = f(x)$ para todo x en $\partial\mathcal{E}$. Por lo tanto existe una sucesión $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ en $\mathcal{P}$ que converge a f uniformemente en $\partial\mathcal{E}$. De acuerdo con el Teorema 4.1.2, para todo k en $\mathbb{N}$ existe una única u_k en $\mathcal{P}$ tal que $\triangle u_k = 0$ para todo x en $\mathbb{R}^n$ y $u_k(x) = f_k(x)$ para todo x en $\partial\mathcal{E}$. Por el principio del máximo, para $j, k \in \mathbb{N}$ y x en $\bar{\mathcal{E}}$,

$$|u_j(x) - u_k(x)| \leq \max\{|f_j(y) - f_k(y)| : y \in \partial\mathcal{E}\} \underset{j,k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Por lo tanto, $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ converge uniformemente en $\bar{\mathcal{E}}$ a una función $u : \bar{\mathcal{E}} \to \mathbb{R}$. Por el corolario de la propiedad de la Media, u es armónica en $\mathcal{E}$. Además, para todo x en $\partial\mathcal{E}$,

$$\begin{aligned} u(x) &= \lim_{k\to\infty} u_k \\ &= \lim_{k\to\infty} f_k(x) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

□

Hemos establecido así las condiciones de existencia y unicidad de dos maneras distintas, primero para el caso en que la función como dato de borde f es un polinomio, usando el Lema de Fischer y luego de manera más geométrica el caso en que f es una función continua . Ahora veremos la naturaleza de las soluciones.

4.2. Soluciones Polinomiales

Sea T el endomorfismo dado por

$$T : \mathcal{P}_m \to \mathcal{P}_m$$
$$f \to T(f) = \triangle(bf)$$

Lema 4.2.1. *El operador T es invertible*

Demostración. Daremos una demostración equivalente al Lema de Fischer. La linealidad es clara, por lo que demostraremos que T es inyectivo. Supongamos $T(f) = 0$ y sea $u = bf$. Se deduce que u es armónico, porque $\triangle u = \triangle(bf) = T(f) = 0$ y $u = 0$ automáticamente a lo largo de la elipse definida por b. Aplicando el principio del máximo y del mínimo a la vez, obtenemos que $u = 0$, como antes. Como el anillo de polinomios es un dominio de integridad, $bf = 0$ sí y sólo si $f = 0$. Por lo tanto $KerT = \{0\}$. □

Vamos a resolver el problema de dos maneras, la primera bajo la hipótesis de que la función como dato f de borde dada es una función continua y luego cuando f es un polinomio. Para esto en primer lugar estableceremos las condiciones de existencia y unicidad para luego presentar una solucón general.

El Problema de Dirichlet para la ecuación de Poisson en la Elipsoide con dato de borde una función continua.

Sea g en $\mathcal{P}$. Ahora queremos resolver el Problema de Dirichlet para la ecuación de Poisson: *para el Laplaciano $\triangle$ queremos encontrar una función $u \in \mathcal{P}$ que resuelva*

$$\begin{cases} -\triangle u(x) = g(x) & x \in \mathcal{E}, \\ \\ u(x) = f(x) & x \in \partial\mathcal{E}. \end{cases} \tag{4.2.1}$$

donde $f : \partial\mathcal{E} \to \mathbb{R}$ es una función continua dada.

La prueba de esto viene dada por el *Lema de Fischer*(4.1.1) y el *Teorema* (4.1.2)

Demostración. En efecto, por el *Lema de Fischer* (4.1.1) existe $v \in \mathcal{P}$ tal que $g = \triangle(vb)$ y por el *Teorema* (4.1.2) existe una función contina $w : \overline{\mathcal{E}} \to \mathbb{R}$ tal que w es $C^2(\mathcal{E})$ y satisface

$$\begin{cases} \triangle w(x) &= \quad 0 \qquad \forall x \in \mathcal{E} \\ w(x) &= f(x) \qquad \forall x \in \partial\mathcal{E}. \end{cases}$$

Sea $u(x) = w(x) + v(x)b(x)$ con $x \in \overline{\mathcal{E}}$. Entonces u es continua en $\mathcal{E}$, $C^2(\mathcal{E})$ y

$$\begin{cases} \triangle u(x) &= \triangle w(x) + \triangle(vb)(x) = g(x) \quad \text{para} \quad x \in \mathcal{E} \\ u(x) &= \qquad w(x) = f(x) \quad \text{para} \quad x \in \partial\mathcal{E}. \end{cases}$$

□

El Problema de Dirichlet para la elipsoide con polinomios como datos de borde

Consideremos la elipse definida anteriormente $\mathcal{E}$ y sean $r, p \in \mathcal{P}$. Para el laplaciano queremos encontrar una función $u \in \mathcal{P}$ que resuelva el Problema de Dirichlet para la Ecuación de Poisson:

$$\begin{cases} \triangle u(x) = p(x) \quad si \quad x \in \mathcal{E}, \\ \\ u(x) = r(x) \qquad si \quad x \in \partial\mathcal{E}. \end{cases} \tag{4.2.2}$$

Nuestro objetivo principal es obtener el inverso del operador T.

Teorema 4.2.2. *Sea $m \geq 0$, $p \in \mathcal{P}_m$ y $r \in \mathcal{P}_{m+2}$. Entonces (4.2.2) tiene solución en P_{m+2} .*

Demostración. Si $\deg b(x) = 2$ y $b(x) = 0$ en $\partial\mathcal{E}$, entonces basta probar que existe $v(x) \in \mathcal{P}_m$ tal que
$$\triangle(bv(x) + r(x)) = p(x) \quad \text{en} \quad \mathcal{E} \quad \text{con} \quad bv(x) + r(x) \in \partial\mathcal{E}.$$

Consideremos el funcional lineal $T : \mathcal{P}_m \to \mathcal{P}_m$ tal que $f \to T(v) = \triangle(bv)$, donde

$$\triangle(bv) = b\triangle v + 2\langle \nabla b, \nabla v \rangle + v\triangle b.$$

T es inyectivo. En efecto, sea $v \in \mathcal{P}_m$ tal que $T(v) = 0$, entonces $u = bv$ resuelve

$$\begin{cases} \triangle u(x) &= \quad 0 \qquad \text{en} \quad \mathcal{E} \\ u(x) &= 0 \qquad \text{en} \quad \partial\mathcal{E}. \end{cases}$$

Aplicando el Principio del Máximo y el Principio del Mínimo tenemos que $v = 0$ en $\mathcal{E}$, y como $\mathcal{E}$ es abierto y $v \in \mathcal{P}$, se concluye que $bv = 0$ sí y sólo sí $b = 0$. Por lo tanto T es sobreyectivo. En particular, existe $v \in \mathcal{P}_m$ tal que $T(v) = b - \triangle r$ y esto significa que $\triangle(bv + r) = p$. □

El Principio del Máximo asegura que (4.2.2) tiene a lo más una solución. A continuación daremos una prueba alternativa de esto.

Teorema 4.2.3. *Existe una única solución $u \in \mathcal{P}_m$ que resuelve (4.2.2).*

Demostración. Afirmamos que $u(x) = f(x) - b(x)T^{-1}(\triangle f(x))$ es una solución. Esto se verifica del siguiente cálculo :

$$\begin{aligned} \triangle u(x) &= \triangle f(x) - \triangle(b(x)T^{-1}(\triangle f(x))) \\ &= \triangle f(x) - TT^{-1}\triangle f(x) \\ &= \triangle f(x) - \triangle f(x) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Como la elipse está definida por b, tenemos que $u = f$. $\square$

Ya establecimos las condiciones de existencia y unicidad. Además hemos encontrado un operador solución para (4.2.2), el cual nos dará una idea de cómo son las soluciones. Definamos

$$\mathcal{S} : \mathcal{P}_m \times \mathcal{P}_{m+2} \to \mathcal{P}_{m+2} \tag{4.2.3}$$

$$\mathcal{S}(p(x), r(x)) = b(x)T^{-1}(p(x)) - b(x)T^{-1}(\triangle r(x)) + r(x).$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(p, r) &= b[T^{-1}(p) - T^{-1}(\triangle r)] + r \\ &= b[T^{-1}(p - \triangle r)] + r \\ &= bv + r. \end{aligned}$$

Luego se tiene que

$$\begin{cases} \triangle\mathcal{S}(p, r) = \triangle(bv + r) = p & \text{en} \mathcal{E} \\ bv + r = r & \text{en} \quad \partial\mathcal{E}. \end{cases}$$

Veremos que el teorema (4.2.2) se puede aplicar para obtener soluciones polinomiales para ciertos problemas de borde con funcionales diferenciales.
Sea $\mathcal{P}$ un espacio normado y definamos $||v|| = \text{máx}\{|v(x)| : x \in \overline{\mathcal{E}}\}$ donde $||\cdot||$ denota la norma de funcionales lineales en $\mathcal{P}_m$. Por el Principio del Máximo para funciones armónicas:

$$\begin{aligned} ||\mathcal{S}(p, r)|| &= \text{máx}\{|u(x)| : x \in \partial\mathcal{E}\} \\ &= \text{máx}\{|r(x)| : x \in \partial\mathcal{E}\} \\ &\leq \text{máx}\{r(x) : x \in \overline{\mathcal{E}}\} \\ &= ||r||, \end{aligned}$$

ya que r está definido en todas partes. Por lo tanto $||\mathcal{S}(p, r)|| = \text{máx}\{|r(x)| : x \in \partial\mathcal{E}\} \leq ||r||$, con $r \in \mathcal{P}$.

El operador $\mathcal{S} : \mathcal{P}_m \times \mathcal{P}_{m+2} \to \mathcal{P}_{m+2}$ es continuo. En efecto, sean $f : \mathcal{P}_{m+2} \to \mathcal{P}_m$ y $g : \mathcal{P}_{m+2} \to \mathcal{P}_{m+2}$ funciones continuas y acotadas, es decir, $||f|| \leq M_f$ y $||g|| \leq M_g$. Definimos el operador

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} : \mathcal{P}_{m+2} &\to \mathcal{P}_{m+2} \\ w &\to \mathcal{Q}(w) = \mathcal{S}(f(w), b(w)) = \mathcal{S}(f(w), 0) + \mathcal{S}(0, g(w)). \end{aligned}$$

Este operador es continuo y acotado. En efecto,

$$\begin{aligned} ||\mathcal{Q}(w)|| &= ||\mathcal{S}(f(w), b(w))|| \\ &\leq ||\mathcal{S}(f(w), 0)|| + ||\mathcal{S}(0, g(w))|| \\ &\leq ||bv|| + ||g|| \\ &\leq ||b|| \cdot ||T^{-1}|| M_f + M_g. \end{aligned}$$

El Teorema del Punto fijo de Brouwer (ver [8]) asegura que $\mathcal{Q}$ tiene un punto fijo $u \in \mathcal{P}_{m+2}$ y este polinomio es solución de

$$\begin{cases} \triangle u(x) = f(u)(x), & \text{en} \quad \mathcal{E} \\ u(x) = g(u)(x), & \text{en} \quad \partial\mathcal{E}. \end{cases}$$

4.3. El Principio de Dirichlet en la Elipsoide

Sea $m \geq 2$ y $V = \{q(x)b(x) : q(x) \in \mathcal{P}_{m-2}\}$ el subespacio lineal de $\mathcal{P}_m$. Observe que cada elemento de V desaparece en $\partial\mathcal{E}$.

Probaremos que el problema de Dirichlet para la ecuación de Poisson en la elipsoide es equivalente a un problema variacional. Esto es, para $g \in \mathcal{P}_m$

$$\begin{cases} -\triangle u(x) = g(x) & x \in \mathcal{E}, \\ u(x) = f(x) & x \in \partial\mathcal{E} \end{cases} \tag{4.3.1}$$

donde $f(x) : \partial\mathcal{E} \to \mathbb{R}$ es un polinomio dado y u la función incógnita. Esto es equivalente a considerar

$$I[u] = \min_{\phi \in F} I[\psi], \tag{4.3.2}$$

donde I es el operador definido por

$$I[\psi] = \int_{\mathcal{E}} \left(\frac{1}{2} |\nabla\psi(x)|^2 - \psi(x)g(x) \right) dx \tag{4.3.3}$$

y ψ pertenece al conjunto $F = \{\psi \in \mathcal{P}_m : \psi(x) = f(x), \quad x \in \partial\mathcal{E}\}$.

Teorema 4.3.1. *Existe una única solución $u \in \mathcal{P}_m$ del problema (4.3.1).*

En la sección anterior dimos una prueba de esto basada en el Principio del Máximo, ahora daremos una prueba alternativa a esto.

Demostración. Sea $\tilde{u}(x)$ otra solución. Como u y $\tilde{u}$ son soluciones, podemos escribir $w(x) = u(x) - \tilde{u}(x)$ y esta función satisface

$$\begin{cases} \triangle w(x) = 0 & x \in \mathcal{E}, \\ w(x) = 0 & x \in \partial\mathcal{E} \end{cases}$$

Multiplicamos $\triangle w(x)$ por $w(x)$. Sabemos que los polinomios son funciones C^∞ definidas en todas partes, en particular son C^2 asi que podemos integrar sobre $\mathcal{E}$. Así,

$$\int_{\mathcal{E}} w(x) \triangle w(x) dx = 0.$$

Aplicando la primera Identidad de Green,

$$\int_{\mathcal{E}} w(x)\triangle w(x)dx = -\int_{\mathcal{E}} \nabla w(x)\nabla w(x)dx + \int_{\partial\mathcal{E}} w(x)\frac{\partial w}{\partial n}(x)d\sigma(x),$$

y como como $w(x) = 0$ en $\mathcal{E}$, nos queda

$$0 = \int_{\mathcal{E}} \nabla w(x)\nabla w(x)dx = \int_{\mathcal{E}} |\nabla w(x)|^2 dx.$$

Entonces $|w(x)|^2 \geq 0$ y así $w(x) \in \mathcal{P}_0$, es decir, $w(x)$ es una función constante y $\nabla w(x) = \nabla(u(x) - \tilde{u}(x))$ en $\mathcal{E}$. Además $w(x) = 0$ en $\mathcal{E}$ con lo cual se concluye que $u(x) = \tilde{u}(x)$. □

Teorema 4.3.2 (Principio de Dirichlet). *Sea $u \in \mathcal{P}_m$, en particular, u es $C^2(\mathcal{E}) \cap C^1(\overline{\mathcal{E}})$, entonces u es solución de (4.3.1) si y solo si u es solución de (4.3.2).*

Demostración. Para todo $\psi \in F$, podemos escoger $u - \psi \in \mathcal{P}_m$ en (4.3.1). Como en particular los polinomios son funciones de clase C^2 y están definidos en todas partes, podemos integrar sobre $\mathcal{E}$. En efecto, intgrando en (4.3.1), tenemos

$$-\int_{\mathcal{E}} \triangle u(x)(u(x) - \psi(x))\, dx = \int_{\mathcal{E}} g(x)(u(x) - \psi(x))\, dx.$$

Aplicamos la primera identidad de Green a la parte izquierda de la igualdad tenemos que

$$\int_{\mathcal{E}} \triangle u(x)(u(x) - \psi(x))\, dx = \int_{\mathcal{E}} \nabla(x)\nabla(u(x) - \psi(x))\, dx - \int_{\partial\mathcal{E}} (u(x) - \psi(x))\frac{\partial u}{\partial \eta}(x)\, d\sigma(x).$$

Observemos que en $\partial\mathcal{E}$, $\psi(x) = f(x)$ y por hipótesis $f(x) = u(x)$ para todo $x \in \partial\mathcal{E}$, es decir, usando la hipótesis se tiene que $u(x) - \psi(x) = 0$ en $\partial\mathcal{E}$. Así lo anterior se puede escribir como

$$\int_{\mathcal{E}} |\nabla(x)|^2\, dx - \int_{\mathcal{E}} \nabla u(x)\nabla\psi(x)\, dx = \int_{\mathcal{E}} g(x)(u(x) - \psi(x))\, dx,$$

o equivalentemente,

$$\int_{\mathcal{E}} |\nabla(x)|^2\, dx - \int_{\mathcal{E}} g(x)u(x)\, dx = \int_{\mathcal{E}} \nabla u(x)\nabla\psi(x)\, dx - \int_{\mathcal{E}} g(x)\psi(x)\, dx$$

Usando la desigualdad $ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$, tenemos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{E}} |\nabla(x)|^2\, dx - \int_{\mathcal{E}} g(x)u(x)\, dx &= \int_{\mathcal{E}} |\nabla(x)|^2\, dx - \int_{\mathcal{E}} g(x)u(x)\, dx = \int_{\mathcal{E}} \nabla u(x)\nabla\psi(x)\, dx - \int_{\mathcal{E}} g(x)\psi(x)\, dx \\ &\leq \frac{1}{2}\int_{\mathcal{E}} |\nabla u(x)|^2\, dx + \frac{1}{2}\int_{\mathcal{E}} |\nabla\psi(x)|^2\, dx - \int_{\mathcal{E}} g(x)\psi(x)\, dx.\end{aligned}$$

De esta forma,

$$\frac{1}{2}\int_{\mathcal{E}} |\nabla(x)|^2\, dx - \int_{\mathcal{E}} g(x)u(x)\, dx \leq \frac{1}{2}\int_{\mathcal{E}} |\nabla\psi(x)|^2\, dx - \int_{\mathcal{E}} g(x)\psi(x)\, dx,$$

lo que implica directamente que

$$I[u] \leq I[\psi] \qquad \forall \psi \in F.$$

Recíprocamente, sea $u \in F$ tal que u satisface (4.3.2). Sea $\psi(x) \in \mathcal{P}_m$ un polinomio no nulo arbitrario tal que $\psi(x) = f = 0$ en $\partial\mathcal{E}$. Entonces para todo $\psi \in V$ se tiene que $u + t\psi \in F$ con $t \in \mathbb{R}$. En efecto, la suma de dos polinomios de grado a lo más m tiene grado a lo más m, así $u + t\psi \in \mathcal{P}_m$. Además, $u + t\psi$ restringido a la frontera $\partial\mathcal{E}$ es $u + t\psi = u + 0 = f$.

Sea $\lambda(t) = I[u + t\psi]$ una función real. Como u es mínimo en I, sabemos que $\lambda'(t)_{t=0} = 0$, más precisamente,

$$\begin{aligned}
\lambda'(t)_{t=0} &= \frac{d}{dt}\left[\int_{\mathcal{E}} \left(\frac{1}{2}|\nabla(u + t\psi)|^2 - g(u + t\psi)\right) dx\right] \\
&= \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\int_{\mathcal{E}} |\nabla u(x)|^2\, dx + t\int_{\mathcal{E}} \nabla u(x)\nabla\psi(x)\, dx + \frac{t^2}{2}\int_{\mathcal{E}} |\psi(x)|^2\, dx - \int_{\mathcal{E}} u(x)g(x)\, dx - t\int_{\mathcal{E}} g(x)\psi(x \right. \\
&= \int_{\mathcal{E}} \nabla u(x)\nabla\psi(x)dx + t\int_{\mathcal{E}} |\psi(x)|^2 dx - \int_{\mathcal{E}} g(x)\psi(x)dx \\
&= \int_{\mathcal{E}} \nabla u(x)\nabla\psi(x)dx - \int_{\mathcal{E}} g(x)\psi(x)dx \\
&= 0
\end{aligned}$$

Equivalentemente,

$$\int_{\mathcal{E}} \nabla u(x)\nabla\psi(x)dx = \int_{\mathcal{E}} g(x)\psi(x)dx.$$

Aplicamos la primera identidad de Green a la parte izquierda y nos queda:

$$\int_{\mathcal{E}} \psi(x)(-\triangle u(x) - \psi(x))\, dx = 0.$$

Como $\psi(x) \in \mathcal{P}_m$, en particular se puede escribir como $\psi(x) = q(x)b(x)$. Luego,

$$\int_{\mathcal{E}} \underbrace{b(x)}_{\in\mathcal{P}_2}\ \underbrace{q(x)}_{\in\mathcal{P}_{m-2}}\ \underbrace{(\triangle u(x) + g(x))}_{\in\mathcal{P}_{m-2}}\, dx = 0.$$

En particular, podemos tomar $q(x) := \triangle u(x) + g(x)$. Así

$$\int_{\mathcal{E}} b(x)(\triangle u(x) + g(x))^2\, dx = 0,$$

y $b(x)(\triangle u(x)+g(x))^2 \geq 0$. Como $b > 0$, podemos dividir y así tenemos que $\triangle u(x)+g(x) = 0$, para todo $x \in \mathcal{E}$. Además $u = f$ en $\partial\mathcal{E}$ por hipótesis. Por lo tanto u es solución de (4.3.1), lo que concluye la demostración.

$\square$

4.4. Conclusiones

El objetivo fundamental de esta tesis fue entender la resolución del Problema de Dirichlet en un dominio acotado de $\mathbb{R}^n$ y en elipsoides, obteniendo condiciones de existencia y unicidad. En algunos casos podemos encontrar la solución explícita del problema. Dicho problema se planteó para la ecuación de Laplace y Poisson. El estudio fue abordado de 3 maneras distintas.

Primero se resolvió el problema en un dominio Ω de $\mathbb{R}^n$, utilizando técnicas clásicas de EDP's y herramientas del análisis. Obtuvimos una solución general y explícita gracias a las identidades de Green, y una particular cuando consideramos Ω como una bola de $\mathbb{R}^n$. Gracias a este resultado y a las propiedades de las funciones armónicas pudimos dar condiciones de existencia y unicidad para las soluciones en dominios más generales.

Luego resolvimos el problema en el plano complejo. Utilizando las Series de Fourier pudimos derivar una fórmula para la solución en el disco unitario El *Kernel de Poisson*, fue fundamental para extender la solución a discos arbitrarios.

Por último, el objetivo específico de esta investigación era resolver el problema en una *Elipsoide*. Nos enfocamos en las propieades algebraicas de las soluciones cuando el dominio era en particular una elipse en $\mathbb{R}^n$, y la función como dato de contorno es un polinomio. La existencia y unicidad fueron garantizadas por el Lema de Fisher y el Principio del máximo. Finalmente obtuvimos un resultado novedoso y particular, el Principio de Dirichlet para una Elipsoide vía funcionales.

Capítulo 5

Apéndice

5.1. El área de la esfera n dimensional de radio 1

Definición 5.1.1 (Función Gamma)**.** Sea $\Gamma : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida por

$$\Gamma(y) = \int_0^\infty x^{y-1} e^{-x}\, dx. \tag{5.1.1}$$

Además verifica:

1. Para todo $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n) = n!$.
2. $\Gamma(y+1) = y\Gamma(y)$.

Definición 5.1.2 (Área)**.** Consideremos $M \subset \mathbb{R}^n$ una sueperficie diferenciable 2-dimensional y sea $\phi : U \subset \mathbb{R}^2 \to M$ una parametrización, entonces

$$\text{Área}(M) = a(M) = \int\int_U \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv,$$

donde

$$\begin{aligned} E &= \langle \phi_u, \phi_u \rangle \\ F &= \langle \phi_u, \phi_v \rangle \\ G &= \langle \phi_v, \phi_v \rangle. \end{aligned}$$

Ahora, si consideramos la superficie diferenciable $S \subset \mathbb{R}^n$ y su parametrización $\phi : U \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$, tenemos que

$$\text{Área}(S) = a(S) = \int_U \sqrt{\det(\phi'(u)^t(\phi'(u)))}\, du$$

Ejemplo 5.1.3. Sea $S = \text{graf}(f)$, donde $f : U \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ es una aplicación diferenciable, entonces podemos parametrizar S como sigue. Consideremos $\phi : U \to S$ donde $\phi(x) = (x, f(x))$, entonces

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}(x) = \begin{cases} 1 & 0 i = j \\ 0 & 0 i \neq j \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_j} & i = k+1 \end{cases}$$

Entonces la diferencial de ϕ es

$$\phi'(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) \end{pmatrix}$$

y

$$\phi'(x)^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) \end{pmatrix}$$

entonces

$$\det \phi'(x)(\phi'(x))^t = 1 + \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \right)^2 .$$

Por lo tanto,

$$a(S) = \int_U \left(1 + \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \right)^2 \right)^{1/2} du.$$

Aplicación

Ahora veremos cuánto vale el área de la esfera de radio r contenida en $\mathbb{R}^n$, es decir,

$$S_r^{n-1} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = r^2\}.$$

Considerando el hemisferio superior de S_r^{n-1}, el cual es el grafico de la función diferenciable $f : U \subset \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ donde $U = B(0, r)$, está dada por

$$f(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \left(r^2 - \sum_{i=1}^{n-1} \left(x_i^2\right) \right)^{1/2},$$

entonces

$$\begin{aligned} A(S_r^{n-1}) &= 2 \int_U \left(1 + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(u) \right)^2 \right)^{1/2} du \\ &= 2 \int_{B(0,r)} \left(r^2 \left(r^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{-1} \right)^{1/2} dx_1 \cdots dx_{n-1} \\ &= 2 \int_{B(0,1)} \frac{r}{\left(r^2 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2\right)^{1/2}} \, dx_1 \cdots dx_n \end{aligned}$$

Consideremos ahora $T : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^{n-1}$ dada por $T(x) = rx$, entonces $T(B(0,1)) = B(0,1)$, aplicando el teorema de cambio de variables obtenemos

$$\begin{aligned}
a(S_r^{n-1}) &= 2\int_{B(0,1)} \frac{1}{\sqrt{1-\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2}} r^{n-1}\, dx_1 \cdots dx_{n-1} \\
&= 2r^{n-1}\int_{B(0,1)} \frac{dx_1 \cdots dx_{n-1}}{\sqrt{1-\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2}} r^{n-1} \\
&= r^{n-1} a(S_r^{n-1})
\end{aligned}$$

Denotamos por $W_n = a(S^{n-1})$ y $r^{n-1}W_n = a(S_r^{n-1})$.
Ahora trataremos de encontrar una expresión más familiar para el coeficiente W_n. Para esto consideremos la siguiente figura

donde $R = (1-x_{n-1}^2)^{1/2}$, entonces $(R^2 - x_1^2 - \cdots - x_{n-2}^2)^{1/2} = (1 - x_1^2 - \cdots - x_{n-2}^2)^{1/2}$, lo que permite calcular:

$$\begin{aligned}
W_n &= 2\int_{B^{n-1}} \frac{dx_1 \cdots dx_{n-1}}{\sqrt{1-\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2}} \\
&= 2\int_{-1}^{1} \left(\int_{B_R^{n-1}} \frac{dx_1 \cdots dx_{n-2}}{\sqrt{R^2-\sum_{i=1}^{n-2} x_i^2}} \right) dx_{n-1} \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{a(S_R^{n-2})}{R}\, dx_{n-1} \\
&= W_{n-1}\int_{-1}^{1} R^{n-3}\, dx_{n-1} \\
&= W_{n-1}\int_{-1}^{1} (1-x_{n-1}^2)^{\frac{n-3}{2}}\, dx_{n-1} \\
&= 2W_{n-1}\int_{0}^{1} (1-x_{n-1}^2)^{\frac{n-3}{2}}\, dx_{n-1}
\end{aligned}$$

Si hacemos el cambio de variable $x_{n-1} = -\cos\theta$, entonces $dx_{n-1} = \sin\theta\, d\theta$, W_n está dado por

$$W_n = 2W_{n-1}\int_0^{2\pi} \sin^k\theta\, d\theta,$$

denotemos por $I_k = \int_0^{2\pi} \sin^k\theta\, d\theta$, entonces

$$W_n = 2I_{n-2}W_{n-2} = 4I_{n-2}I_{n-3}W_{n-2},$$

por otro lado, se puede probar que

$$I_k = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\frac{\Gamma(\frac{p}{2}+\frac{1}{2})}{\Gamma(1+\frac{p}{2})}\right)$$

y

$$I_k I_{k-1} = \frac{\pi}{2k},$$

entonces

$$W_n = \frac{2\pi}{n-2} W_{n-2} = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}.$$

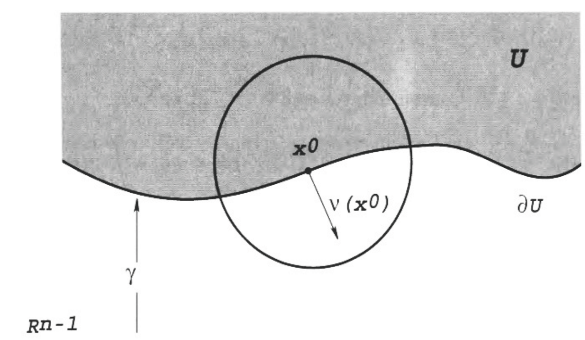
5.2. Bordes de clase C^1

Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y acotado y $k = \{1, 2, \dots\}$

Definición 5.2.1. Decimos que ∂U es C^k si para cada punto $x^0 \in \partial U$ existen $r > 0$ y una función C^k $\gamma : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ tal que, reetiquetado y reorientación de los ejes de coordenadas si es necesario, se tiene

$$U \cap B(x^0, r)\{x \in B(x^0, r) : x_n > \gamma(x_1, \dots, x_{n-1}\}.$$

Del mismo modo, ∂U es C^∞ si ∂U es C^k para $k = 1, 2, \dots$, y ∂U es analítica si γ es analítica.



Aplicación

En $\mathbb{R}^n$, el borde de un subconjunto abierto y acotado es C^k si localmente el gráfico de una función C^k en alguna dirección. Entonces, un círculo tiene borde C^∞ porque todos los puntos en el plano medio superior positivo corresponden al gráfico de la función $y = \sqrt{1 - x^2}$, que tiene infinitamente muchas derivadas en cada punto excepto en los dos puntos finales. Pero esos puntos finales están en el gráfico de $x = \sqrt{1 - y^2}$, o $x = -\sqrt{1 - y^2}$, que también tiene infinitamente muchas derivadas.

Bibliografía

[1] HERZOG, G. *Polynomials solving Dirichlet boundary value problems.* Amer. Math. Monthly 107 , (2000) , no. 10, 934-936

[2] MUNKRES, J. R. *Topology: a first course.* Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1975.

[3] CONWAY, J. B. *Functions of one complex variable. Second edition.* Graduate Texts in Mathematics, 11. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1978.

[4] BAKER, J. A. *The Dirichlet problem for ellipsoids.* Amer. Math. Monthly 106 (1999), no. 9, 829-834.

[5] PERAL, I. A. *Primer Curso de Ecuaciones en Derivadas Parciales.* Addison Wesley/Universidad Autónoma de Madrid, 1995.

[6] DJAIRO GUEDES DE FIGUEIREDO. *Analise de Fourier e Equaciones Diferenciais Parciais.* IMPA, Rio de Janeiro, 1977.

[7] EVANS, L. C.*Partial differential equations. Second edition.* Graduate Studies in Mathematics, 19. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.

[8] MASSEY, W. S. *A basic course in algebraic topology.* Graduate Texts in Mathematics, 127. Springer-Verlag, New York, 1991.