FACULTAD DE CIENCIAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS

CONFIGURACIÓN DE LO LINEAL CON BASE EN LA RAZÓN MATEMÁTICA

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE PROFESOR DE MATEMÁTICA CON MENCIÓN DIDÁCTICA Y AL GRADO DE LICENCIADO EN EDUCACIÓN

PRESENTADA POR: ALDO ANDRÉS CAMPUSANO PELLISSA

MARÍA DE LOS ANGELES FARÍAS MUÑOZ

PROFESORA GUÍA: Dra. LEONORA DÍAZ MORENO

VALPARAISO-CHILE-2018

Agradecimientos

Queremos iniciar nuestros agradecimientos a quienes fueron en todo momento nuestro apoyo más incondicional, las personas que con los gestos más mínimos nos llenaron de fuerza y energía para seguir adelante en los momentos más difíciles, aun cuando pensábamos que no podríamos superar los obstáculos, y la frustración se empoderaba de nosotros. Nos referimos a nuestras respectivas familias, muchas gracias por ser ese soporte, ese lugar de amor y calidez que nos mantuvo siempre en pie.

También queremos agradecer a todos los docentes que fueron parte de este laborioso proceso, quienes muchas veces fueron los responsables de nuestras angustias, pero también de alegrías, encontrando en ellos siempre la disposición para responder las dudas que nos aquejaban, una sonrisa y un consejo, reflejando de esta manera la sencillez y calidad humana que los enmarca. Agradecemos con especial afecto a nuestra profesora guía de tesis la Dra. Leonora Díaz Moreno, siendo parte importante en la construcción de este trabajo, mostrándose siempre dispuesta para ayudarnos a superar nuestros momentos de dudas e incertidumbre.

Tan importante para nosotros como el cuerpo docente que estuvo presente en nuestra formación, son los paradocentes, personas que muy pocas veces se les da el crédito y el agradecimiento que merecen, y de quienes siempre sentimos su voluntad, cercanía y aprecio, desde los auxiliares y porteros hasta los bibliotecarios.

Queremos destacar de forma especial a Gerardo y Adolfo quienes siempre estuvieron dispuestos a ayudarnos aun cuando su tiempo era limitado. Quienes en su trabajo silencioso son parte importante del funcionamiento del departamento de matemáticas, y que en conjunto hicieron que día a día nuestra estadía en la facultad fuese siempre un espacio de agrado y un lugar, que gracias a ellos y a los paradocentes, se transformó en nuestro segundo hogar.

Finalmente agradecer a Dios por poner en nuestros caminos a todos esos amigos que estuvieron tan presentes como nuestras familias en nuestros momentos de dificultad y también de alegría, en especial nuestros compañeros de tesis con los cuales compartimos la tutela de la profesora guía, quienes en esta recta final se transformaron en el soporte ideal para culminar esta tarea. Con especial cariño, y por sobretodo un agradecimiento infinito, a nuestra compañera Ary Briones, quien fue un apoyo incondicional e inconmensurable para lograr finalizar este proceso formativo.

RESUMEN

En la presente investigación, se aborda la problemática que se muestra en estudios realizados acerca de la opacidad de la razón matemática en el aula, formando esta parte de los planes y programas de estudio. Sin embargo se la sigue confundiendo con la fracción tanto en los programas de estudio como en los libros de textos. En éstos últimos se la utiliza como un medio para estudiar porcentajes en sexto año básico y variación proporcional en séptimo año básico.

En el marco de una investigación acción, se lleva a cabo una investigación de diseño que valida una secuencia de enseñanza para los aprendizajes, orientados a la construcción significativa de lo lineal por los estudiantes.

Dos de los diseños siguen un itinerario hipotético de configuración de lo lineal con base en modelación matemática, entendiendo a ésta como una práctica que articula dos entidades, con la intención de intervenir una de ellas a partir de la otra.

Se considera al pensamiento proporcional cualitativo como etapa precursora del pensamiento proporcional cuantitativo y a la razón matemática configurando a este último.

La construcción significativa de lo lineal por los estudiantes, resulta de la articulación de un fenómeno con modelos numérico, analítico-algebraico y gráfico, estableciendo una red de razones matemáticas en calidad de parámetros.

ABSTRACT

In the following investigation difficulties are addressed in conducted researches about the obscurity of mathematical ratio in a classroom, which make part in the study program. However, it can still be confused with fractions both in the study programs as in text books. The latter is used as a method to study percentages in sixth grade and proportional variation in seventh grade

In the research framework, a research of design will be conducted that validates a teaching sequence for learning, oriented in the significant linear shaping for the students.

Two designs follow a hypothetical itinerary of linear configuration based on mathematical modeling, understanding this as an experience that articulates both entities, with the intention of intervening on as a part of the other.

The proportional qualitative ratio is considered as a precursor stage of proportional quantitative ratio and the mathematical ratio, configuring the aforementioned.

The significant lineal construction by the students derives from the articulation of a phenomenon with numerical models, algebraic analysis and graphical models, establishing a network of mathematical ratio in quality of parameters.

Contenido

INTRODUCCIÓN

Los retos y desafíos de configurar al pensamiento proporcional en la escolaridad obligatoria atraviesan a cada aula de nuestro país. Lo proporcional forma parte de los planes y programas de estudio. Sus aprendizajes se evalúan también con pruebas estandarizadas, y las distancias entre el currículo prescrito y el currículo vivido se resisten a disminuir.

Una fuente de explicaciones la plantean Arrieta y Díaz (2015) quienes reportan que existe una separación de mundos entre la matemática escolar y la de la “vida real”. Plantean la preocupación de proporcionar diseños de enseñanza que acerquen la matemática al aula desde diseños didácticos con modelación.

Estudios han reportado trayectorias de constitución de lo proporcional por los estudiantes. La mayoría no repara en la razón matemática trabajando con ella como herramienta sin distinguirla en sus procedimientos.

Castro (2015) con base en un estudio pormenorizado de antecedentes, constata que la razón matemática ha sido invisibilizada como herramienta en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Ruiz y Valdemoros (2006) consideran el vínculo entre el pensamiento proporcional cualitativo y el pensamiento proporcional cuantitativo. Las autoras validan al pensamiento proporcional cualitativo como etapa precursora del pensamiento proporcional cuantitativo. Nos preguntamos por el rol de la razón matemática en ese tránsito.

En consecuencia, interesa a este estudio desvelar los modos de hacerse presente de la razón matemática y a lo proporcional, con base en enseñanza orientada a la construcción significativa de lo lineal.

Capítulo I.

El Problema

1.1 Antecedentes

Estudios de Díaz y Arrieta (2015), reportan que existe una separación de mundos entre la matemática escolar y la de la “vida real”. En Chile se ha incorporado la modelación en los currículos de la escolaridad obligatoria, integrada como una de las cuatro habilidades fundamentales de la formación en pensamiento matemático. Se espera que los estudiantes sean capaces de modelar información, situaciones o fenómenos para comprender y/o resolver problemas (Objetivos fundamentales y contenidos mínimos obligatorios de la educación básica y media, actualización 2009). A partir del año 2012 se afirma que: modelar es el proceso de utilizar y aplicar modelos, seleccionarlos, modificarlo y construir modelos matemáticos, identificando patrones característicos de situaciones, objetos o fenómenos que se desea estudiar o resolver, para finalmente evaluarlos (MINEDUC, 2013).

Bienbengut y Hein (1997, op. cit., Arrieta y Díaz, 2015) hacen notar lo crucial de la modelación en la construcción de conocimientos. Señalan que, en la actualidad, la construcción del conocimiento está en todas las ciencias, de modo que va colaborando en forma especial a la evolución del conocimiento humano. La modelación aporta a que los estudiantes se empoderen de su propio aprendizaje a través de un sentido crítico y creativo.

El estudio PISA (Programa Internacional de Evaluación de Estudiantes) realizado por la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE), busca evaluar en qué medida los estudiantes que se acercan al final de la enseñanza escolar obligatoria han adquirido competencias esenciales para una completa participación en la sociedad y dentro de sus competencias incluye la modelación (OCDE, 2004). El informe PISA (2015) muestra que alrededor del 50% de los estudiantes chilenos no alcanza el nivel 2 de competencia:

“Los estudiantes competentes del nivel 2 pueden interpretar y reconocer situaciones en contextos que no requieren una inferencia directa. Pueden extraer información relevante de una sola fuente y hacer uso de un único modo de representación. Los estudiantes de este nivel pueden emplear algoritmos básicos, fórmulas, procedimientos o convenciones. Son capaces de dirigir razonamiento y hacer interpretaciones literales de los resultados (Informe de resultados PISA 2015, p.73)"

En Chile las prácticas socio-escolares tradicionales del aula de matemática, se caracterizan entre otros aspectos por: 1. Ciclos rutinarios de exposición de la materia por el profesorado para seguir con ejercitación por parte del estudiantado. Ciclos que pueden ser reversibles, es decir, inician con ejercicios y siguen con la exposición de docente. Estos aspiran a poner en escena aspectos de institucionalización y un acercamiento inductivo a las materias. 2. Se privilegia el trabajo individual por sobre uno cooperativo. 3. La gestión de la unidad educativa privilegia 'pasar' la cantidad de materias estipuladas en los planes y programas, contenidas en las planificaciones entregadas a inicio de año con objeto de solo transmitir los contenidos apartando los aprendizajes (Contreras, 2013, p.16). Ejemplo de esto es lo que exponen Arrieta y Díaz (2015) en el caso de César, un niño que vende chicles en una de las calles de Acapulco, México. Nancy le compra cinco chicles a César, él recibe el dinero y devuelve el cambio. Nancy le pregunta cómo hace para entregar el cambio sin equivocarse a lo que César responde que es muy fácil y explica su procedimiento. Nancy le pide que la ayude a resolver un problema con lápiz y papel: Hay un niño en la Gran Plaza y vende chicles a tres cincuenta, llega una señora y le compra cinco, le paga con un billete de veinte, ¿cuánto debe darle de cambio? César intenta responder el problema haciendo algunos cálculos matemáticos hasta que finalmente responde a Nancy: "No sé, nunca he sido bueno en las cuentas".

La noción de razón matemática ha sido objeto de estudio por líneas de investigación cognitiva, didáctica y curricular entre otras, y ampliamente problematizada desde los procesos de enseñanza aprendizaje y es que su uso ha estado presente durante siglos. Block (2008) plantea que los estudiantes actualmente relacionan razón con las fracciones, haciendo que la razón sea suprimida; entre otros argumentos esto podría deberse a que las razones se escriben como fracciones, pero no se leen como tales; sin embargo, las fracciones sustraen el sentido pero proporcionan la técnica (Block, 2009, pp.73, 75). Estudios de Díaz (1998, 2006) con profesores de educación básica muestran que las dificultades del desarrollo de fracciones y razones aparecen en los docentes y en su actividad en el aula, desde la decisión de cómo abordar estos conceptos hasta las situaciones didácticas que desarrollan. Díaz y Castro (2011) consultaron a docentes por nociones y procedimientos propios del pensamiento métrico; referente a la comprensión general que tiene una persona sobre magnitudes, su medición y el uso de sistemas de medidas en diferentes situaciones. Escolano y Gairín (2005, p. 21) sostienen que el significado de razón surge de la necesidad de comparar dos cantidades de igual o diferente magnitud (razón interna y razón externa), y que el resultado de la comparación define una nueva magnitud.

Para Godino y Batanero la idea clave es que las fracciones son cualquier par ordenado de números enteros cuya segunda componente es distinta de cero; mientras que una razón es un par ordenado de cantidades de magnitudes. Cada una de esas cantidades viene expresada mediante un número real y una unidad de medida (Godino y Batanero, 2002, p.420)

David Block (2001) en su tesis doctoral afirma que el desaparecimiento de la razón matemática del discurso escolar, ha sido progresivo, y está relacionado con la tendencia, principalmente, a partir del siglo XIX, de la formalización del álgebra y del análisis, trivializando los teoremas relativos a razones y proporciones. Por su parte, Castro (2015) señala que históricamente se recurre a la razón matemática a partir de la necesidad humana de relacionar y comparar los objetos.

De Franceschi (2016) en su tesis de profesorado reporta información acopiada en base a una actividad individual aplicada tanto en estudiantes de profesorado como en estudiantes secundarios sobre las acepciones de razón. Los resultados obtenidos de estudiantes de profesorado muestran que un 68% enuncian acepciones de RAE, el 11% asocia significados de razón al área de matemática, un 11% pudo definir ambas indistintamente y un 10% no responde. Los resultados obtenidos por los estudiantes de secundaria, muestran que un 88,8% asocian con acepciones RAE, el 5,6% asocia el significado de razón al área de matemática y el 5,6% declara no saber.

En el curriculum chileno, la razón está presente desde sexto básico, donde los estudiantes deben "demostrar que comprenden el concepto de razón de manera concreta, pictórica, simbólica y/o usando software educativo" (MINEDUC, 2013, p. 52). Sin embargo, los ejercicios y ejemplos propuestos en los textos de estudio, se remiten a razón como el sinónimo de fracción y otras como proporción.

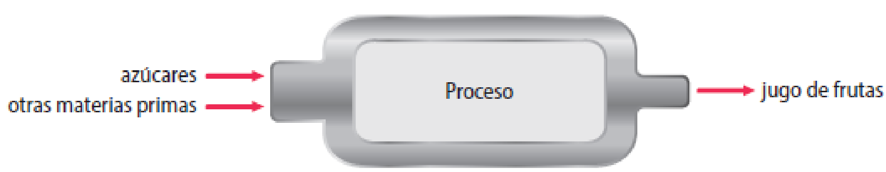
1.2 El Problema

La razón matemática aparece en el currículum chileno desde sexto básico como una herramienta para enseñar porcentajes y variación proporcional. Un estudio de textos escolares muestra que no se enseña a la razón en su propio mérito y se le confunde con fracción. Estudios de Díaz (1998, 2006) y Castro (2015) muestran que las dificultades del desarrollo de fracciones y razones no se limitan a los estudiantes sino también se presentan en docentes y en su actividad en el aula.

Una actividad que ilustra el aserto anterior, es una actividad extraída del Texto del Estudiante de octavo básico (MINEDUC, 2018, pp. 154-155) cuyo propósito es “Relacionar la proporcionalidad directa con la función lineal”. El texto recurre a la razón cuando alude a una relación entre una cantidad de kilos de azúcar y una cantidad de litros de jugo. Prosigue identificando a esta relación con una “constante de proporcionalidad”. Aquí remite a la relación a una constante exenta de magnitudes. Aumenta enseguida la opacidad de la relación inicial asociando a la constante con un cociente de cantidades. Este cociente invisibiliza a las magnitudes cuantificadas por el par de cantidades.

Se reconocen distintas perspectivas de modelación en didáctica de las matemáticas y se les puede distinguir desde las actividades que se proponen para desarrollar en el aula. La actividad del texto en comento considera tres fases:

A) Se informa una relación de cantidades de magnitudes a variables matemáticas *“Para elavorar 0,6 L de juego de frutas no gasificado se deben incorporar 48 g de azúcares”*



B) Se desplaza desde cantidades de magnitudes a cantidades

<u>Situación 1 Relacionando variables</u>

¿Qué relación existe entre la cantidad de kilogramos de azúcares que se deben agregar al proceso y el número de litros de jugo embotellado?

Para responder, primero constatamos que si se quiere aumentar el número de litros de jugo embotellado, entonces se debe aumentar la cantidad de kilogramos de azúcares que se incorporan en el proceso.

Paso 1 Representa el hecho de que si se desea embotellar 0,3 L de jugo (la mitad de 0,6 L) se deben agregar 24 g de azúcares (la mitad de 48 g) y que si se desea embotellar 1,2 L de jugo deben agregar 96 g de azúcares.

Paso 2 Completa la tabla con las cantidades de gramos de azúcares "A" que se deben agregar para poder embotellar diferentes cantidades de litros de jugo "J"

J (L)	0,3	0,6	0,9	1,2	1,5	1,8	2,1
A (g)	24	48		96			

Paso 3 Constata que el cociente $\frac{A}{J}$ es constante para todos los pares de valores de la tabla

Para 0,3 L	Para 0,6 L	Para 1,2 L
$\frac{A}{J} = \frac{24}{0,3} = 80$	$\frac{A}{J} = \frac{48}{0,6} = 80$	$\frac{A}{J} = \frac{96}{1,2} = 80$

Compruébalo para los otros pares de valores

R: El número de litros de jugo embotellado y la cantidad de kilogramos de azúcares que se deben incorporar son variables directamente proporcionales.

C) Se identifica al modelo como una relación matemática entre las variables

Situación 2 Modelando una relación directamente proporcional

¿Qué modelo matemático se puede plantear para describir la relación que existe entre las variables A y J de la situación 1?

Primero recordemos la definición J y A

J: números de litros de jugo embotellado

A: cantidad de kilogramos de azúcares que se deben incorporar

Paso 1: Define la constante de proporcionalidad de la relación existente entre J y A como el siguiente cociente constante $\frac{A}{J} = 80$

Paso 2: Confirma que para conocer la cantidad de azúcares que hay que agregar al proceso basta multiplicar el número de litros de jugos que se desean embotellar por 80

Escribe para completar los enunciados:

Para embotellar 0,3 L de jugo hay que agregar:
80 • ____ = ____ g de azúcares
Para embotellar 0,9 L de jugo hay que agregar:
80 • ____ = ____ g de azúcares
Para embotellar 90 L de jugo hay que agregar:
80 • ____ = ____ g de azúcares

Paso 3: Escribe la relación matemática existente entre las variables A y J

R: El modelo matemático que relaciona las variables A y J se pueden escribir como: A(J)=80J

Los elementos anteriores ilustran aristas de la problemática que se aborda en este estudio: Devolver la razón matemática al aula con la singularidad que le corresponde, en el marco de tender puentes entre lo que se hace en la escuela y lo que se hace fuera de ella y, de este modo, acercar la enseñanza para los aprendizajes a las matemáticas necesarias para la vida. Entonces, superar la invisibilidad de la razón matemática presente en los procesos de enseñanza para los aprendizajes, motiva la pregunta que aborda esta investigación.

1.3 Pregunta Orientadora

¿Cómo razones cualitativas y cuantitativas aportan al aprendizaje matemático de lo lineal, en el marco de una actividad de modelación?

1.4 Objetivos de la Investigación

1.4.1 Objetivo General

Examinar cómo razones cualitativas y cuantitativas, aportan a configurar lo lineal en la enseñanza para los aprendizajes matemáticos, con base en diseños de modelación.

1.4.2 Objetivos Específicos

1. Diseñar una actividad didáctica que recurre a una razón cualitativa en cuantificaciones intensivas, como antecedente para establecer a la razón cuantitativa.
2. Rediseñar actividades de una secuencia didáctica de modelación del llenado de un estanque, explicitando a la razón cuantitativa como comparación de cantidades de magnitudes.

1.5 Justificación

Los resultados de pruebas estandarizadas tanto nacionales (SIMCE, PSU), como internacionales (PISA, TIMS) aplicadas en los últimos años a estudiantes chilenos, dan cuenta que estos no logran obtener las competencias y saberes básicos, en todas las disciplinas pero mayormente en la disciplina de matemáticas. Esto se debe a que las prácticas escolares tradicionales del aula de matemática, que se caracterizan entre otros aspectos por ciclos rutinarios, a privilegiar el trabajo individual por sobre uno cooperativo y la gestión de la unidad educativa estipuladas en los planes y programas, contenidas en las planificaciones entregadas a inicio de año con objeto de solo transmitir los contenidos sin privilegiar los aprendizajes (Contreras, 2013). Y es que toda sociedad necesita que el conocimiento que se adquiere en la escuela sea funcional, es decir, que se integre y se resignifique permanentemente en la vida (fuera de la escuela) para transformarla (Suárez y Cordero, 2008, op. cit., Aracena, Hernández, Miranda, 2015).

La presente investigación se justifica por la necesidad de validar metodologías y diseños de enseñanza para que los estudiantes interioricen los conocimientos que no han podido adquirir. Se ha tomado a la modelación como fundamento de esta investigación, dado que, en Chile se ha incorporado la modelación en los currículos escolares, integrada como una de las cuatro habilidades fundamentales del pensamiento en estudiantes de educación básica, pues lo crucial de la modelación es la construcción de conocimientos y aporta a que los estudiantes pasen a empoderarse de su propio aprendizaje a través de un sentido crítico y creativo (Bienbengut y Hein, 1997, op. cit., Arrieta y Díaz, 2015).

1.6 Limitaciones

Por tratarse de un estudio cualitativo en el marco de una investigación acción, aquí se reportan resultados válidos para los contextos y estratos considerados y aquellos que se le puedan analogar.

Se trata de resultados provenientes de primeras aplicaciones de los diseños de enseñanza para los aprendizajes. Nuevas aplicaciones permitirán afinar la propuesta de este estudio.

Al contemplar la participación de estudiantes de un liceo técnico profesional, por el breve periodo de tiempo de una aplicación para cada diseño, no se tuvo oportunidad de profundizar en cuestiones de interés de los estudiantes ni de los investigadores, generadas desde las producciones estudiantiles acopiadas.

Los resultados de este estudio aportan elementos precursores para avanzar en la problemática que se aborda.

Capítulo II.

Marco Teórico Conceptual

2.1 Puentes escuela vida

Existe una separación de mundos matemáticos, unas son las matemáticas escolares y otras las matemáticas de la “vida real” (Arrieta y Díaz, 2015). Una de las propuestas para dar solución a esta dicotomía, es por medio de la modelación matemática.

El itinerario de configuración de lo lineal que se propone, contempla a la modelación matemática como eje central, valorando a la razón matemática, en cuyo entendimiento se ve favorecido mediante el desarrollo de los pensamientos racionales cualitativos y cuantitativos.

Cantoral, Moreno-Durazno, Caballero–Pérez (2018) indican que existen diferentes perspectivas sobre modelación matemática, cada una con ventajas y limitantes. Perspectivas fragmentadas, que separan “el mundo real” con el “mundo de las matemáticas”.

Entre diversos enfoques de modelación, se suscribe en este trabajo el descrito por Arrieta y Díaz (2015), estos autores lo plantean para que las matemáticas de la vida cotidiana no sean ajenas a las que se imparten en la escuela. No tratan con “contextualizaciones adecuadas”, las cuales pueden recurrir a fenómenos tan idealizados que les atribuyen propiedades que no poseen. Más bien procuran ubicar prácticas de comunidades para establecer puentes, estudiando sus intenciones, procedimientos, herramientas y argumentos con que justifican sus acciones, para formar dipolos modélicos que establecen puentes entre la escuela y su entorno.

2.2 Socioepistemología

La socioepistemología surge como una teoría de la matemática educativa desde Latinoamérica. Cantoral (2013, op. cip., Sepúlveda, 2015), señala que ésta corriente de investigación tiene sus orígenes en el cruce de caminos entre Matemáticas, Ciencias Sociales y Humanidades para intentar explicar las relaciones entre mente, saber y cultura en el campo de las matemáticas, apoyándose en la noción de práctica social.

Desde esta mirada, se distinguen perspectivas que aluden a las nociones matemáticas como objetos que precisen ser enseñados desde la obra matemática. Una matemática que propicia formas de actuar en contextos específicos.

Se pueden señalar que ésta considera cuatro dimensiones principales para la construcción y reconstrucción del conocimiento y a nivel sistémico, a saber, lo epistemológico, lo cognitivo, lo didáctico y lo sociocultural (Sepúlveda, 2015, p. 31).

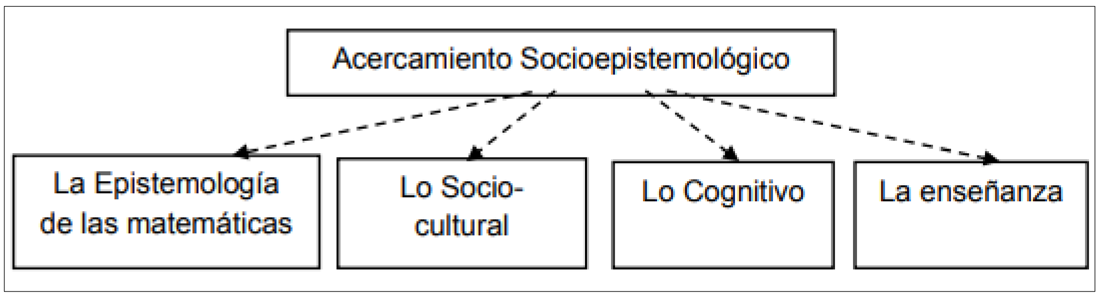


Figura 1. Acercamiento Socioepistemológico (Sepúlveda, 2015, p. 31)

Cantoral (2003, op. cit., Sepúlveda, 2015), reafirma lo anterior diciendo que los estudios que involucran la Socioepistemología reportan características del ejercicio de prácticas que anteceden y acompañan la producción o constitución de conocimiento: nociones y conceptos, procedimientos y propiedades, que a su vez evolucionan hacia formas del saber socialmente establecidos. Así se puede afirmar que la aproximación teórica Socioepistemologíca involucra tanto a los estudiantes como a los profesores, construyendo significados, identidades, realidades y su propia cognición.

2.3 Acto de Modelar

Arrieta y Díaz (2015) entienden a la modelación como una práctica de articulación entre dos entidades, una (llamada modelo) que actúa sobre la otra (llamada modelado). La intervención en lo modelado es diversa, y por tanto, la predicción, el diagnostico o la evaluación que podrían tener lugar (p. 35)

Los individuos modelan desde la articulación de estas dos entidades que les provee contextos para tomar decisiones. En este punto la intención de la intervención se consolida en prácticas relevantes para la realidad de los individuos, el diagnostico, la predicción, la aproximación y la evaluación, entre otros.

El acto de modelar también proporciona elementos para analizar la configuración de las prácticas de modelación.

La diversa índole de entidades matemáticas nos permite contar con un amplio juego de modelos como por ejemplo: ecuaciones o sistemas de ecuaciones algebraicas y/o diferenciales, gráficas cartesianas, trayectorias, formas geométricas, datos organizados en tablas, descripciones verbales y elementos proporcionados por la tecnología.

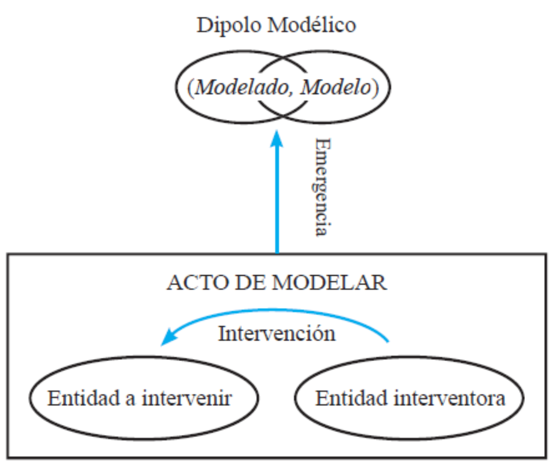


Figura 2. La modelación: El acto de modelar, el modelo, lo modelado y el dipolo modélico (Arrieta y Díaz, 2015, p. 36)

Lo que se "transporta" al aula es el acto de modelar, el cómo se han logrado construir los dipolos modélicos.

Bajo la perspectiva de la didáctica socioepistemológica expuesta por Castro y Díaz (2011), los objetos matemáticos y las representaciones semióticas, poseen un rol instrumental, los cuáles pueden asumir formas y usos distintos, en base a la funcionalidad requerida en la actividad matemática que se pretenda desarrollar. De ésta manera bajo ésta perspectiva la importancia radica en las prácticas sociales que dan cabida a la construcción y resignificación de los conceptos matemáticos. En específico si nos centramos en el contexto de aula, propicia a que los estudiantes construyan argumentos, herramientas, sentidos y significados, con base en esas prácticas sociales y matemáticas.

2.3.1 Modelación Tabular

Es una modelación que articula un fenómeno con una entidad tabular o con un arreglo de números que covarían (Hernández y Hernández, 2015).

Arrieta y Díaz (2015) definen a la modelación tabular como la relación entre dos entes, el fenómeno y el folio de datos, en el cual se entiende como (ma, mo). Donde el mo presenta valores establecidos y a su vez nos permite predecir que puede ocurrir con ma.

La predicción, desde la socioepistemología, es una práctica que está orientada a anticipar eventos (Arcos y Moya, 2015).

Con base en la actividad de predecir, se determinan estados futuros de un sistema, objeto o fenómeno con base en el estudio sistemático de las causas que lo generan y los efectos que producen. Se predicen estados futuros analizando y cuantificando cambios, por lo que se trata de una estrategia propia al estudio de la variación (Cantoral y Molina, 2005).

2.3.2 Modelación Algebraica

Se entiende como una representación de forma general, asociado a un fenómeno, a una expresión analítico-algebraica. Esta nos permite predecir cualquier valor que nosotros queremos, de acuerdo a la información dada, sin importar el valor que se nos esté pidiendo. Por ejemplo en la experimentación de la elasticidad de un resorte se piden valores extraños en la predicción, cuando los estudiantes tienen que modelar algebraicamente y este puede ser como 18,45 gramos, este tipo de valor no es trivial y es difícil de calcular con alguna estrategia antes utilizada (Arcos y Moya, 2015).

La modelación algebraica se entiende como la interacción entre el fenómeno y una expresión analítica (ma, mo). Donde mo es una expresión fija donde nos permite predecir la elongación alcanzada por el resorte y la altura alcanzada por el chorro de agua al ir llenando el estanque cilíndrico.

2.3.3 Modelación Figural

Arrieta y Díaz (2015) definen la modelación figural como una relación entre dos elementos, la figura y lo modelado. Lo modelado, puede ir variando tomando diversos roles, desde un fenómeno hasta otro tipo de modelo. Con respecto a la relación mencionada este puede tomar el carácter de predicción o intervención en lo modelado.

2.4 Proporcionalidad cualitativa

Para el diseño de esta secuencia, se consideran el vínculo entre el pensamiento proporcional cualitativo y cuantitativo descritos por Ruiz y Valdemoros (2006) quienes en el estudio de caso realizado lograron determinar la importancia que posee el pensamiento cualitativo a la hora de entender el pensamiento cuantitativo. Basándose en Piaget e Inhelder (1972), señalan que la noción de proporción empieza siempre de una forma cualitativa y lógica antes de estructurarse cuantitativamente.

Posteriormente Piaget e Inhelder (1978), añaden la distinción entre las comparaciones cualitativas y la verdadera cuantificación:

a) Lo cualitativo integra aspectos intuitivos y empíricos brindados por los sentidos.
b) Se crean categorías de comparación como “grande” “pequeño”.
c) En el paso de lo cualitativo a lo cuantitativo aparece la idea de orden sin que todavía emerja la cantidad, a lo que llaman *cuantificaciones intensivas*.

Streefland (1984, 1985) enfatiza que la enseñanza temprana de la razón y la proporción deben partir de niveles cualitativos. Comenta que el pensamiento cualitativo evoluciona cuando hay un avance en el pensamiento y el niño puede llegar a incorporar más elementos para un análisis que le permita considerar distintos factores conjuntamente.

Ruiz y Valdemoros (2006) hacen referencia al pensamiento proporcional cuantitativo del niño cuando puede hacer uso de las razones y proporciones y maneja indistintamente razones internas y externas para enfrentar problemas matemáticos. Freudenthal (1983) define a las razones internas como relaciones establecidas entre distintos valores de la misma magnitud (distancia con distancia, tiempo con tiempo, precio con precio) y a las razones externas, como vínculos entre valores de diferentes magnitudes (tiempo con distancia, litros de leche con precio).

2.5 Usos cotidianos de la razón

Freudenthal (1983) y Rouché (2006) concuerdan en que la razón, para ser una herramienta efectiva en los procesos de enseñanza y de aprendizaje, tiene que construir sentidos que trasciendan tanto la operatividad algebraica como la confusión de fracciones y cocientes.

Visibilizar la razón implica situarla como una práctica social que vive en distintos ámbitos de la vida cotidiana, profesional y escolar como una herramienta legítima para el acercamiento a distintos fenómenos y a la toma de decisiones, por lo tanto, es esencial que se desarrolle en el aula desde su propio mérito y se valoricen sus alcances en la construcción del conocimiento matemático. (Castro, 2015).

Ruiz y Valdemoros (2006) pusieron en evidencia, en su estudio de caso, que efectivamente la ampliación del pensamiento proporcional cualitativo fortalece el pensamiento proporcional cuantitativo en el terreno de resolución de problemas, su ampliación favorece incrementar las relaciones cuantitativas y así mejorar el manejo de algoritmos. Los estudiantes construyeron las nociones de razón y proporción, lo que se expresó en distintos ámbitos, usando distintos modos de representación.

De esta manera y haciendo uso de este estudio de caso es de esperar que los estudiantes logren entender y diferenciar los conceptos de razón y proporción, con especial atención al primero de estos, debido al poco o casi nulo entendimiento como concepto matemático, en parte porque en los libros de textos se utiliza la razón de manera tal que da forma a la proporcionalidad (la razón constituye una parte de la proporcionalidad despojándola de todo significado propio) o porque el simbolismo y el formalismo a través de los años terminan por invisibilizar a la razón como fundante de la proporcionalidad (Castro, 2015). Siendo esta la primera parte del itinerario de configuración de lo lineal que se quiere proponer.

2.6 La razón matemática en el aula

2.6.1 La razón matemática en planes y programas

En los planes y programas del Ministerio de Educación de nuestro país se encuentra formalmente la razón matemática desde sexto año de enseñanza básica. En este nivel educativo los estudiantes y profesores deben iniciar el trabajo con razones y proporciones, conceptos que le permitan comprender en forma más profunda las fracciones y los decimales, y que les proveerán herramientas para resolver problemas en contextos cotidianos, en particular en el área económica, siendo las fracciones el propósito principal de la unidad (Programa de Estudio Sexto Año Básico Unidad de Currículum y Evaluación, primera edición 2013, p. 51).

En el tercer objetivo de aprendizaje de la primera unidad se les pide a los estudiantes *demostrar que comprenden el concepto de razón de manera concreta, pictórica, simbólica y/o usando software educativo* (Programa de Estudio Sexto Año Básico Unidad de Currículum y Evaluación, primera edición 2013, p. 52), sin embargo, la razón será vinculada con la fracción.

En la Ilustración 1 se presenta un ejercicio propuesto por el MINEDUC, cuyo propósito es ser utilizado por parte de los docentes a modo de ejemplo para el entendimiento del concepto de razón matemática. Los estudiantes deben explicar la razón como parte de un todo utilizando los valores otorgados en objetos de la vida cotidiana como lo son las tazas de harina con las de leche o la cantidad de horas de clases de ciencias naturales y las de matemática. Los autores aluden a respuestas del tipo 4 tazas de harina : 2 tazas de leche o 4 horas de clases de ciencias naturales : 6 horas de clases de matemática. Ahora bien, si durante el programa de estudio a la razón se le trató como fracción y decimal (relación entre el antecedente y el consecuente, mediante el cociente entre ambos) ¿Qué es lo que se entiende de la forma decimal o fraccionaria de $\frac{4\ tazas\ de\ harina}{2\ tazas\ de\ leche}$? O ¿Qué es lo que se entiende de la forma decimal o fraccionaria de $\frac{4\ horas\ de\ clases\ de\ ciencias\ naturales}{6\ horas\ de\ clases\ de\ matemática}$?

Ilustración 1. Ejemplo propuesto en el programa de sexto año básico (p. 60)

1

Explican razones como parte de un todo. Por ejemplo:

- explican la razón 4 : 2 por medio de una situación que involucre tazas de harina y tazas de leche
- explican la razón 4 : 6 por medio de una situación que involucre horas de clases de Ciencias Naturales y Matemática en el colegio

En la primera de estas se obtiene un valor de 2 y en la segunda $0,\overline{6}$. Esto es confuso tanto para los estudiantes como para el profesorado dado que se obtiene un valor numérico, pero no se especifica las cantidades de magnitudes.

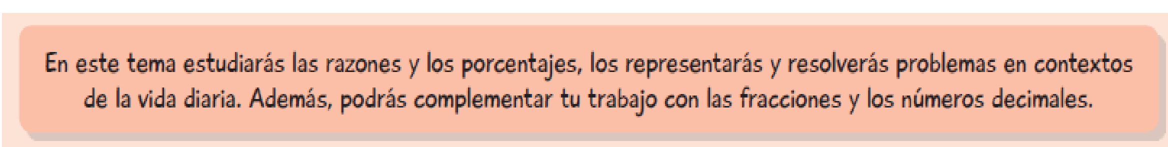
2.6.2 La razón matemática en un texto de estudio

En el texto para estudiantes que corresponde a sexto año de educación básica de la editorial SANTILLANA, una edición especial para el Ministerio de Educación (2017) y que sigue en vigencias en las aulas de nuestro país, tiene en su primera unidad el tema 4 llamado Razones y Porcentajes.

Ilustración 2. Tema 4 de la Unidad de Números y operaciones (p. 68)

Antes de dar iniciar al tema 4 de la unidad de “Números y operaciones” introduce lo siguiente: “*En este tema estudiarás las razones y porcentajes en contextos de la vida diaria. Además, podrás complementar tu trabajo con las fracciones y los números decimales*” (Texto para el estudiante, editorial SANTILLANA, p. 69). De esta manera se asume que el trabajo numérico posee mayor importancia que el significado de razón y porcentaje.

Ilustración 3. Propósito del tema 4 “Razones y porcentajes” (p. 69)


En este tema estudiarás las razones y los porcentajes, los representarás y resolverás problemas en contextos de la vida diaria. Además, podrás complementar tu trabajo con las fracciones y los números decimales.

Esto se ve reflejado en el texto de estudio cuando se define lo siguiente: “*La razón entre dos cantidades es una comparación de ellas mediante una división. La razón entre una cantidad a y una cantidad b la puedes escribir como “a es a b”, donde a es el antecedente y b el consecuente y, simbólicamente, la puedes expresar como a:b o a/b,* *cuando b ≠ 0*." (Texto para el estudiante editorial SANTILLANA, 2016, p. 71). Bajo ésta definición los autores no propician la comparación de la cantidad de magnitud "a" respecto a la cantidad de magnitud "b", empleando solo una comparación de cantidades numéricas mediante una división. De esta manera, la razón matemática pierde todo significado propio encasillándola solo como un valor numérico.

Ilustración 4. Definición de razón en el libro de texto de sexto básico (p. 71)

> La **razón** entre dos cantidades es una comparación de ellas mediante una división. La razón entre una cantidad a y una cantidad b la puedes escribir como "a es a b", donde a es el antecedente y b el consecuente y, simbólicamente, la puedes expresar como $a : b$ o $\frac{a}{b}$, cuando $b \neq 0$.

A continuación se presenta la razón matemática, en algunas de sus representaciones escritas o simbólicas, promoviendo a los estudiantes a la utilización de la expresión numérica, la cual carece de todo significado. Se pide que a partir de ellas representen gráficamente y creen una situación relacionándolas, sin tomar en consideración las cantidades de magnitudes, invisibilizando completamente a la razón matemática.

Ilustración 5. Ejemplo tomado del MINEDUC (p. 72)

> **2.** Representa gráficamente las siguientes razones. Luego, **crea** una situación que se relacione con cada una de ellas.
>
> **a.** 10 : 20 **b.** $\frac{8}{10}$ **c.** $\frac{3}{5}$ **d.** 5 es a 8

Tanto Freudenthal (1983) como Rouché (2006) concuerdan en que la razón, para ser una herramienta matemática efectiva en los procesos de enseñanza y aprendizaje, tiene que construir sentidos que trasciendan tanto la operatividad algebraica y la confusión con fracciones y cocientes (op. cit., Castro, 2015)

Visibilizar la razón requiere reconfigurar el modo de pensar de los docentes y de la reforma curricular de nuestro país, respecto al rol que la razón juega subordinada al desarrollo de ésta como herramienta matemática. De acuerdo con Barkatsas y Malone (2005, op. cit., Castro 2015), la formación inicial del profesorado tiene el poder de influenciar tanto sus prácticas, como sus creencias respecto a la naturaleza de la matemática.

2.7 La razón relaciona cantidades de magnitudes

Castro, en su tesis doctoral, afirma que los textos de la antigüedad de civilizaciones babilonias, egipcias, chinas e hindúes no tratan específicamente de razón y de proporción. Se hacen presentes y algunas veces visibles a través de un conjunto de problemas prácticos relacionados con sus vidas cotidianas para "calcular un valor desconocido o deseado". Esta práctica sigue vigente en las escuelas de educación básica y media de Chile (Castro, 2015 p. 272).

Un ejemplo de ello es, como se le designa en sus papiros, es el problema de "pesu". Su forma general respondía a la relación entre la cantidad de panes o jarros de cerveza que se podía producir con una cantidad dada de grano (sebada, trigo u otro).

Habían básicamente dos razones: una para "controlar" la consistencia del "pan de cerveza", la otra para "controlar" la concentración de la "bebida de cerveza" (Gillings, 1972, citado en Castro, 2015 p. 273).

Razón para el control de pan de cerveza	psw$_{pan}$ = $\frac{número\ de\ hogazas\ de\ pan\ producidas}{cantidad\ de\ granos\ para\ su\ producción}$
Razón para el control de bebida de cerveza	psw$_{cerveza}$ = $\frac{números\ de\ jarros\ producidos}{cantidad\ de\ granos\ para\ su\ producción}$

Obando (2015) señala que en general, el estudio de las razones en el contexto matemático griego se localiza en la rama de las matemáticas que estudian las cantidades relativas, es decir, las cantidades en sus relaciones mutuas de unas a otras y en particular, para el caso de los números, esta parte del estudio de las cantidades se consagraba en la música. El autor aclara que la palabra "razón" proviene del latín "ratio" que fue la traducción latina de la palabra griega λόγος (logos) y cuyo significado más habitual era la forma como comprendemos algo. En el contexto matemático griego, logos igualmente era usado para referir la relación mutua entre dos cantidades (números o magnitudes) asegura el autor (Obando, 2015, pp. 95, 96).

Para Godino y Batanero el hecho de que las razones se refieran a cantidades de magnitudes, medibles una con sus respectivas unidades, implica diferencias con las fracciones. La idea clave es que las fracciones son cualquier par ordenado de números enteros cuya segunda componente es distinta de cero; mientras que una razón es un par ordenado de cantidades de magnitudes. Cada una de esas cantidades viene expresada mediante un número real y una unidad de medida (Godino y Batanero, 2002, pp. 420, 421).

2.8 Lo lineal

Carol Sepúlveda, en su tesis de maestría, hace una distinción entre la función lineal, como objeto matemático, y la red de modelos lineales articulada con el fenómeno modelado llamado lo lineal. Siguiendo a la autora, modelar no solo son las expresiones analíticas, sino que también las tablas de datos y los gráficos (Sepúlveda, 2015, p. 37).

Méndez (2008, op. cit., Sepúlveda, 2015) señala que modelar linealmente un fenómeno, es ejercer una práctica de modelación creando distintos modelos lineales, como herramientas que servirán para predecir el comportamiento de éste. Algunos modelos lineales son los de carácter gráfico, numérico y algebraico.

Lo lineal corresponde a una red de prácticas y herramientas que se ejercen y construyen durante la práctica de modelación, como lo muestra la figura 2.

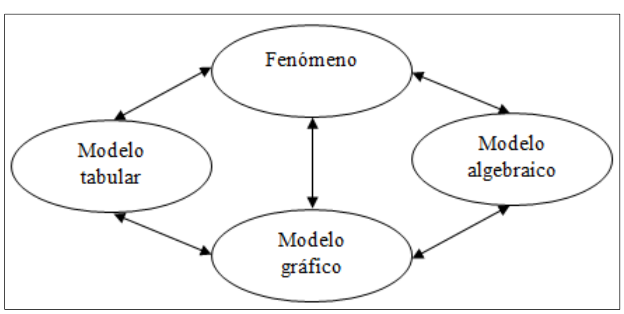


Figura 3. Lo lineal

Para Arrieta y Díaz (2015, pp. 42-44) los estudiantes articulan los modelos entre sí y estos con el fenómeno, configurando una red, a lo que llaman *red de lo lineal.* Ellos construyen una red que articula al fenómeno con el coeficiente de la variable *x* del modelo algebraico, la inclinación de la recta y la razón de cambio $\frac{\Delta x}{\Delta p}$.

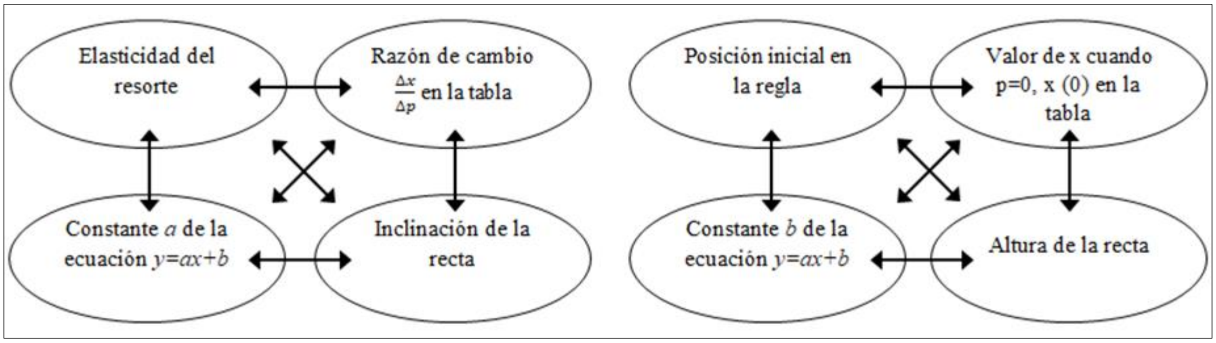


Figura 4. Redes que articulan la elasticidad del resorte o la posición de la regla con los parámetros de los modelos. (Tomada de Arrieta y Díaz, 2015, p. 44)

Así lo lineal se configura con base en estas redes que articulan fenómenos y modelos a través de prácticas. La especificidad de la modelación de lo lineal corresponde a las redes de modelos que se ponen en funcionamiento.

Capítulo III.

Metodología

3.1 Enfoque metodológico

Esta investigación es de carácter cualitativa y se desarrolla en el marco de una investigación-acción, cuya metodología de estudio toma como referencia la investigación de diseño, que busca validar una secuencia de enseñanza orientada a la construcción significativa de lo lineal, con base en una perspectiva de modelación utilizando a la razón matemática (Molina, 2006).

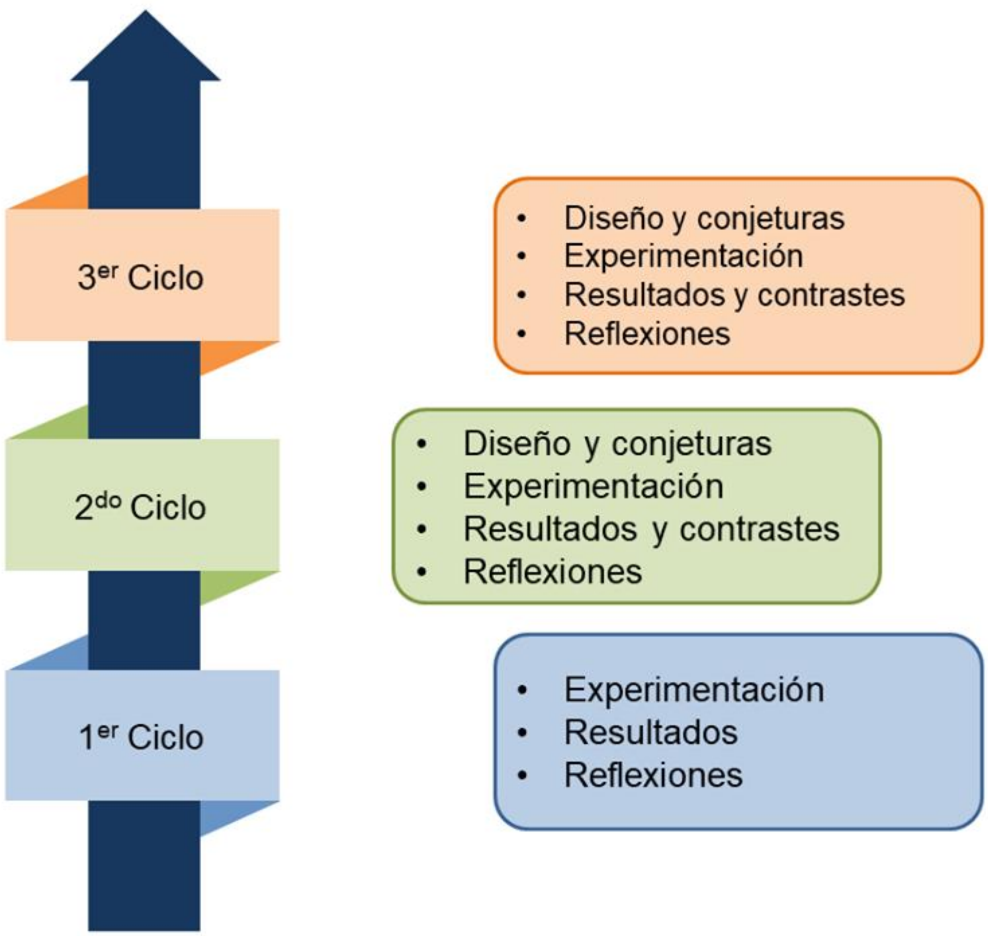
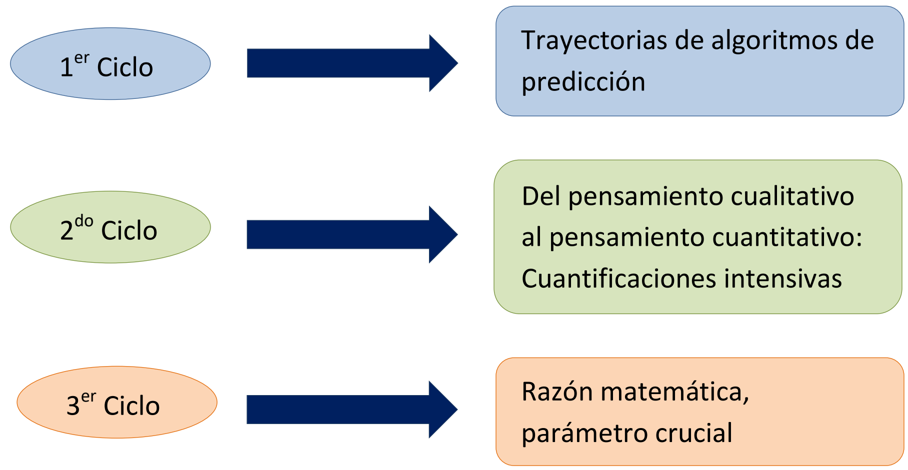


Figura 5. Ciclos del rediseño didáctico



Se entiende a la investigación basada en diseño como un estudio sistemático sobre el diseño, desarrollo y evaluación de intervenciones educativas, entre ellas las intervenciones en el proceso de enseñanza y aprendizaje a través de estrategias de enseñanza, actividades didácticas, materiales educativos, entre otros, con el objetivo de encontrar soluciones para los desafíos de enseñanza y los aprendizajes y avanzar en el conocimiento sobre las características de intervenciones, de sus diseños, sus desarrollos en el aula y sus consecuencias en la enseñanza y aprendizaje (Castro, 2015).

Se obtiene información usando técnicas de experimentación en el aula (Molina, 2006). Una de ellas se llevó a cabo mediante un estudio previo, "La elasticidad de un resorte" (Arrieta y Díaz, 2015).

Además se hace un estudio a textos y bases curriculares en donde la razón comienza a estar presente.

3.2 Sujetos

Para la primera experimentación de aula, el estudio previo, se realiza con estudiantes de primer año medio (32 estudiantes), de un establecimiento científico-humanista de la V Región. Se implementa el diseño propuesto por Arrieta y Díaz (2015) sobre el fenómeno de la elasticidad del resorte.

Para la segunda experimentación de aula, la cual consta de tres etapas, se lleva a cabo en un Liceo Técnico Profesional, con once estudiantes de primer año medio, los cuales estaban presentes al momento de la aplicación. Se conforman cinco equipos. La primera etapa consta en probar cinco mezclas de dulzores en vasos de diferentes colores y ordenarlos de acuerdo a su dulzor (Menos dulce, Más dulce). En la segunda etapa los estudiantes prueban una muestra testigo y deben averiguar cuál de los cinco vasos, anteriormente probados, corresponde al mismo dulzor de la muestra testigo. Finalmente la tercera etapa, corresponde a replicar la muestra testigo para la que se dispone de tres intentos.

Por último, la tercera experiencia de aula se realiza con 15 estudiantes del mismo grupo curso que realizó la segunda experimentación. Cuatro de ellos, que no vivieron la experiencia del dulzor, se integraron a los grupos que si la vivenciaron. Se implementa un diseño de aprendizaje que homologa al diseño propuesto por Arrieta y Díaz (2015), cuyo fin es que los estudiantes modelen tabular, analítico-algebraico y figural para configurar la red de parámetros de lo lineal.

3.3 Instrumentos

3.3.1 La elasticidad de un resorte

El estudio previo de experimentación de aula se utiliza como instrumento el propuesto por Arrieta y Díaz (2015) "La elasticidad de un resorte". Es una experimentación tipo discursiva compuesta por tres elementos:

a) Descripción narrada del fenómeno.
b) Imagen de un portapesas universal del cual cuelga un resorte. Además seis pesas de 20 gramos cada una.
c) Un folio con cantidades de pesos y elongaciones.

La experimentación cuenta con 17 reactivos donde los estudiantes deben predecir, conjeturar, analizar, argumentar, generalizar, numerizar.

3.3.2 Secuencia El dulzor

Se generó, en base al estudio desarrollado por Ruiz y Valdemoros (2006), la segunda secuencia de enseñanza que consta de tres etapas:

a) Probar y ordenar cinco vasos de distintos colores.
b) Probar una muestra y determinar cuál de los cinco vasos anteriores corresponde al mismo dulzor de la muestra testigo.
c) Replicar la muestra testigo (Tres intentos)

Esta secuencia tiene un total de ocho reactivos donde se requiere que el estudiante utilice el sentido del gusto en el desarrollo de toda la actividad con el fin de que se entienda el concepto de razón desde el pensamiento cualitativo al pensamiento cuantitativo a través de las cuantificaciones intensivas.

3.3.3 Secuencia El llenado de un estanque

Esta consiste en un diseño de aprendizaje basado en la modelación lineal (Arrieta y colaboradores, 2011) cuya práctica parte de datos numéricos obtenidos de la interacción con el fenómeno para establecer redes de modelos. En este caso lo modelado es el llenado de un estanque (fenómeno) y mediante actividades los estudiantes articulan con el fenómeno, la tabla de datos, las gráficas y fórmulas (modelos). Consta de:

a) Descripción narrada del fenómeno.
b) Imagen de un estanque llenándose y una regla que mide la cantidad de agua.
c) Una tabla que contiene el tiempo de llenado en segundos y el nivel del agua en centímetros.

La experimentación cuenta con 15 reactivos donde los estudiantes deben predecir, conjeturar, analizar, argumentar, generalizar, numerizar y graficar.

3.4 Método de análisis

Tanto para la secuencia de la “Elasticidad de un resorte” como para la secuencia “El llenado de un estanque”, se aplicó un análisis didáctico, desde una sensibilidad teórica que se enriquece con la perspectiva de modelación matemática propuesta por Arrieta y Díaz (2015).

En su diseño ambas secuencias presentan tres fases (Arrieta y Díaz, 2015):

Fase I: “La interacción con el fenómeno, la experimentación”: En “la elasticidad de un resorte” se plantea en el ambiente de la experimentación discursiva la cual recurre a la narración, desde la tabla inicial de datos, durante la experimentación y propone tres actividades, que para responder basta con “leer” el folio de datos para conectarlos con la situación planteada:

a) Describir al fenómeno con sus propias palabras.

b) Preguntar acerca de la posición del resorte cuando se coloca un peso que se da en la tabla.

c) Preguntar sobre el peso del portapesas si la posición del indicador es 135.

Fase II: "El acto de modelar, la predicción": La predicción a partir de la tabla de datos es la actividad que articulará las dos entidades pues se requiere actuar desde la tabla para decir qué sucederá con el resorte. Hasta aquí, los estudiantes articulan el fenómeno con una tabla de datos, construyendo dipolos modélicos.

Fase III: "La articulación de los modelos y el fenómeno en una red": Los estudiantes articulan los modelos entre sí y estos con el fenómeno, configurando una red, a la que se llama red de lo lineal.

El horizonte de vivenciar estas dos secuencias es para favorecer que los estudiantes establezcan la analogía entre ambas experimentaciones con modelación notando que coinciden en sus redes de parámetros. De este modo habrán establecido que en ambos fenómenos, elasticidad del resorte y llenado de un estanque cilíndrico las variaciones de cantidades de magnitudes ocurren de modo lineal.

En cuanto a la experimentación de aula El dulzor, se orienta a que los estudiantes doten de significado a la razón matemática como una comparación de cantidades de magnitudes la cual jugará un rol clave como parámetro de la modelación lineal. Se requiere aplicar un diseño de modo que surja el pensamiento cualitativo a través de reactivos de comparación (Etapa 1 y 2 del diseño) sin involucrar, cantidades, permitiendo que los estudiantes identifiquen sabores entre distintas mezclas de dulzor. Se conecta al pensamiento cualitativo y al pensamiento cuantitativo a través de cuantificaciones intensivas, agregando cantidades donde se debe replica una muestra testigo.

Capítulo IV.

Resultados y Análisis

En este capítulo se presentan los resultados y análisis de la información recogida desde de los instrumentos aplicados a estudiantes de secundaria, a saber, los secuencias respondidas en equipos, las secuencias de “La elasticidad de un resorte”, “El Dulzor” y por último “El llenado de un estanque”.

4.1 Razón matemática al modelar “La elasticidad de un resorte”

Se lleva a cabo una secuencia tipo discursiva presentada como “La elasticidad de un resorte”, a estudiantes de primer año medio de un establecimiento de la V Región, Chile. Basada en el marco de la modelación matemática, propuesta por Arrieta y Díaz (2015), esta secuencia presenta un fenómeno, datos numéricos, un párrafo en lenguaje natural y visual, de modo que los estudiantes logren establecer redes de modelos y modelen linealmente la elasticidad de un resorte.

Se analizan con detalle las producciones de la secuencia, utilizando la trayectoria de algoritmos de predicción que hipotetiza el diseño (Sepúlveda, Arrieta y Díaz, 2014), para estudiar las trayectorias de algoritmos de predicción que los estudiantes construyen. En estas, se nota una trayectoria de actividades que lo soporta, particularmente en la fase de predicción, que se logra reconstruir a pesar de no estar explícitamente y que no todos los estudiantes siguen.

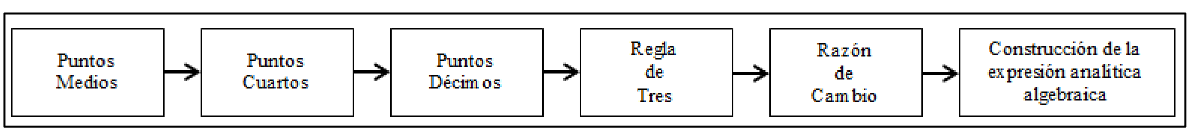


Figura 6. Trayectoria de algoritmos de predicción del diseño de aprendizaje “El resorte” (Con base en Sepúlveda, Arrieta y Díaz, 2015)

4.1.1 Tablas de trayectorias de algoritmos de predicción

A continuación se presentan las trayectorias de algoritmos de predicción construidas por algunos de los equipos:

Tabla 1. Trayectoria de algoritmos de predicción de los equipos 1, 2, 3

Equipo 1	Equipo 2	Equipo 3
• Puntos medios • Puntos cuartos • Puntos decimos • Puntos decimos • Construcción de la expresión analítico-algebraico • Uso del modelo algebraico	• Uso de la expresión analítico-algebraico • Uso de la expresión analítico-algebraico • Uso de la expresión analítico-algebraico • Uso de la expresión analítico-algebraico • Uso de la expresión analítico-algebraico • Uso de la expresión analítico-algebraico	• ______ • Regla de tres • Regla de tres • Regla de tres • Construcción de la expresión analítico-algebraico • Uso de la expresión analítico-algebraico

Tabla 2. Trayectoria de algoritmos de predicción de los equipos 4, 5, 6

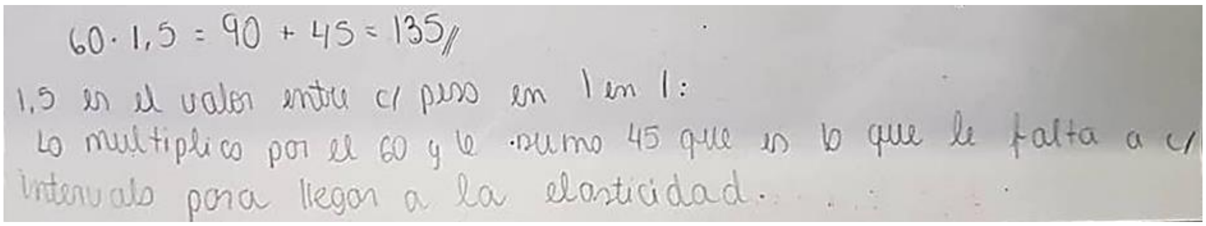
Equipo 4	Equipo 5	Equipo 6
• Puntos medios • Regla de tres • Regla de tres • Razón de cambio • No logran la construcción de la expresión analítico-algebraico • Regla de tres	• Puntos medios • Puntos cuartos • Puntos decimos • Puntos decimos • No logran la construcción de la expresión analítico-algebraico • ______	• Puntos medios • Puntos cuartos • Puntos decimos • Puntos decimos • No logran la construcción de la expresión analítico-algebraico • _______

4.1.2 Análisis de las tablas de las trayectorias de algoritmos de predicción

Al observar las acciones de predicción realizadas por los estudiantes, se advierte como algunos de los equipos utilizan variantes similares a la propuesta en la Figura 4 (Equipos 1, 5 y 6). Al estudiar al equipo 1, se observa que este se involucra en la experimentación identificando puntos medios, puntos cuartos y puntos décimos para completar la tabla de datos, modelando tabularmente. De esta manera encuentran la razón matemática de la experimentación y construyen su expresión analítico-algebraica. El posterior uso de esta conlleva a que constituyan el modelo algebraico.

El equipo 2, en cada una de sus respuestas, hizo uso de la expresión analítico-algebraica. Se logra visibilizar que hicieron uso de una trayectoria similar a la propuesta por el equipo 5, no obstante borraron la ruta utilizada para solo emplear la expresión a la que arribaron. Parecen proceder sustentados por una perspectiva que entiende que obtener un resultado haciendo uso de una expresión algebraica posee mayor validez que su itinerario de trabajo numérico-tabular, focalizados en dar una respuesta por sobre la valoración de sus procedimientos y saberes matemáticos allí involucrados.

Ilustración (6). Evidencia de las textualidades del equipo 1 en la secuencia "La elasticidad de un resorte"

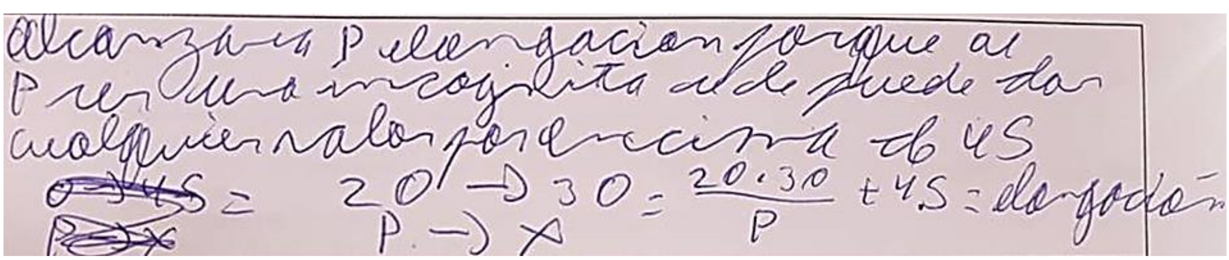

60 · 1,5 = 90 + 45 = 135

1,5 es el valor entre c/ peso en 1 en 1:
Lo multiplico por el 60 y le sumo 45 que es lo que le falta a c/
intervalo para llegar a la elasticidad.

En cuanto al equipo 3, recurre a la regla de tres para dar solución a las preguntas planteadas. No expresan cómo encuentran la razón matemática ni mucho menos el cómo encuentran la expresión analítico-algebraica.

Muy parecido al equipo 3, el quipo 4 comienza utilizando puntos medios para completar los datos de la tabla faltantes. Continúa con el uso de la regla de tres que los guía hacia la razón de cambio que se relaciona al fenómeno. Aun así construyen su expresión analítico-algebraica como una regla de tres que utilizan posteriormente para constituir al modelo algebraico.

Ilustración (7). Evidencia de las textualidades del equipo 4 en la secuencia "La elasticidad de un resorte"


alcanzaría p elongación porque al
P es una incognita se le puede dar
cualquier valor por encima de 45

= 20 → 30 = $\frac{20 \cdot 30}{P}$ + 4,5 = elongación
P. → x

Finalmente los equipos 5 y 6 constituyen una trayectoria parecida al equipo 1, se involucran en la experimentación identificando puntos medios, puntos cuartos y puntos décimos para completar la tabla de datos; sin embargo ninguno de los dos equipos construye su expresión analítico-algebraico ni mucho menos construirla en modelo.

4.1.3 Conclusión de la razón matemática al modelar "La elasticidad de un resorte"

En la aplicación del diseño de modelación del estudio previo, las trayectorias constituidas por los estudiantes no reparan en la razón matemática.

Dos de los seis equipos utilizan la regla de tres como estrategia, pero resulta inconducente excepto para aquellas trayectorias que incluyan el valor unitario en su camino para arribar a la expresión analítico-algebraico. Esto se puede solucionar mediante una secuencia que haga posible que la noción de razón matemática emerja desde un pensamiento cuantitativo antes de estructurarse cuantitativamente.

Una dificultad bastante común es la falta de argumentación, por parte de los estudiantes, para dar ciertas respuestas las cuales no permiten realizar un análisis completo de la comprensión y del trabajo que realizaron.

Esto nos ayuda a levantar nuestra pregunta de investigación y con ello generar secuencias que respondan a esta inquietud acompañada de aplicaciones que entreguen resultados para validarlas.

4.2 De la razón cualitativa a la razón cuantitativa. Secuencia "El dulzor"

4.2.1 Conjeturas Secuencia "El dulzor"

El diseño cuenta con tres etapas y un total de ocho reactivos con el fin de que se entienda el concepto de razón desde el pensamiento cualitativo al pensamiento cuantitativo a través de las cuantificaciones intensivas.

4.2.1.1 Etapa 1

Conjetura 1: Se espera que los estudiantes mediante comparaciones de cuantificaciones intensivas, establezcan un orden ascendente entre los vasos cuyas mezclas de dulzor (cantidades de magnitudes de cucharadas de agua y cantidades de magnitudes de gotas de endulzante) desconocen. Aparecen frases como "más dulce que" "menos dulce que", lo que coincide por lo señalado por Piaget (1978, op. cit., Ruiz y Valdemoros 2006).

Conjetura 2: Se espera que los estudiantes mediante comparaciones de cuantificaciones intensivas, no establezcan un orden ascendente completo, pero sí de algunos vasos cuyas mezclas de dulzor (cantidades de magnitudes de cucharadas de agua y cantidades de magnitudes de gotas de endulzante) desconocen. Aparecen frases como “más dulce que” “menos dulce que”, lo que coincide por lo señalado por Piaget (1978, op. cit., Ruiz y Valdemoros 2006).

4.2.1.2 Etapa 2

Conjetura 1: Se espera que los estudiantes mediantes comparaciones de cuantificaciones intensivas, determinen cuál de los cinco vasos ordenados y probados anteriormente posee el mismo dulzor que la muestra testigo entregada. No conocen aún las cantidades de cucharadas de agua y las cantidades de gotas de endulzante.

Conjetura 2: Se espera que los estudiantes mediantes comparaciones de cuantificaciones intensivas, no determinen cuál de los cinco vasos ordenados y probados anteriormente posee el mismo dulzor que la muestra testigo entregada. No conocen aún las cantidades de cucharadas de agua y las cantidades de gotas de endulzante.

4.2.1.3 Etapa 3

Conjetura 1: Los estudiantes replican la muestra testigo y en al menos uno de los tres intentos encuentran las cantidades de magnitudes exactas.

Conjetura 2: Los estudiantes no replican la muestra testigo y en al menos uno de los tres intentos encuentran las cantidades de magnitudes exactas.

4.2.2 Análisis de la razón cualitativa a la razón cuantitativa. Secuencia “El dulzor”

Los equipos, durante la etapa I y II, hacen uso del gusto para realizar comparaciones por medio de cuantificaciones intensivas sin considerar las cantidades de magnitudes de cucharadas de agua y gotas de endulzante inmersas en los cinco vasos.

En la etapa I se observa que el equipo E1, comparando con el vaso escogido como referente, identifica cuales de los cuatro vasos restantes son más dulces y menos dulces que éste, para luego obtener el orden ascendente de dulzor pre-establecido por los docentes. Por otro lado se aprecia que los equipos E2, E3, E4 y E5 logran discernir parcialmente cuales son los vasos más o menos dulces en comparación con el vaso referente escogido, estableciendo solo algunas de las posiciones en contraste con el orden propuesto por los profesores.

Durante la etapa II, se aprecia una mejora considerable de los equipos al comparar los cinco vasos ya ordenados de manera ascendente de dulzor con el vaso testigo entregado por los docentes, siendo el equipo E3 quien establece el vaso que posee el mismo dulzor. Por su parte los equipos E1, E2, E4 y E5, seleccionan vasos contiguos al que tiene la misma intensidad de dulzor que el vaso testigo.

En el desarrollo de la etapa III los equipos deben replicar cuantificando la muestra testigo entregada por los docentes, mediante las cantidades de magnitudes de cucharadas de agua y gotas de endulzante, para ello tienen tres intentos. A continuación se analizan las respuestas de cada equipo a esta etapa:

El equipo E1 si bien no replica la muestra testigo se acerca bastante a ella, manteniendo su tendencia de obtener constantemente resultados cercanos o iguales a los pre-establecidos por los docentes.

El equipo E2, durante el experimento, muestra una mejora en sus comparaciones de cuantificaciones intensivas mostrado en la etapa I, obteniendo en la etapa II un dulzor similar al del vaso testigo entregado. Si bien en la etapa III recrea muestras más dulces en comparación con la muestra testigo se alcanza observar una mejora gradual.

El equipo E3 no escribe en la hoja sus producciones, por lo que no se puede analizar el progreso final del equipo; sin embargo, hay que destacar la mejora considerable que tuvo el equipo en el paso de la etapa I a la etapa II, donde fueron capaces de seleccionar el vaso cuya mezcla de dulzor equiparaba a la del vaso testigo.

El Equipo E4 obtiene una mezcla ostensiblemente más dulce que el vaso testigo, pero al no escribir los dos intentos restantes, no se puede conjeturar su progreso final. Si bien en el paso de la etapa I a la etapa II se evidencia una mejora en sus comparaciones, si se analiza el equipo solo con la respuesta entregada se puede decir que no logran cuantificar la mezcla.

El equipo E5 cuantifica replicando la mezcla equivalente de dulzor del vaso testigo. Se evidencia que durante la secuencia el equipo fue obteniendo una mayor sensibilidad comparativa mediante el gusto.

4.2.3 Conclusiones desde la razón cualitativa a la razón cuantitativa. Secuencia “El dulzor”

Al concluir el experimento se puede decir que en general los equipos fueron afinando su sensibilidad comparativa mediante esta cuantificación intensiva en relación a las mezclas de dulzor de los vasos. Se logra obtener resultados muy similares o iguales cualitativamente hablando. Al momento de cuantificar las mezclas de cantidades de magnitudes de cucharadas de agua y gotas de endulzante para replicar la muestra testigo, algunos equipos estuvieron cerca de obtenerla habiendo incluso un equipo que replica la muestra testigo equivalente a la original.

Al realizar la institucionalización del experimento, se logra que los estudiantes comprendan la noción de razón matemática como una comparación de cantidades de magnitudes cuyo resultado emerge de la relación existente entre los componentes involucrados; sin embargo queda la sensación que los estudiantes no se apropian completamente de ella, sino más bien una idea generalizada donde se involucran las unidades de medidas.

4.3 Razón matemática al modelar “El llenado de un estanque”

4.3.1 Conjeturas

El diseño cuenta de tres fases (Arrieta y Díaz, 2015) cuya experimentación consta con 15 reactivos donde los estudiantes deben predecir, conjeturar, analizar, argumentar, generalizar, numerizar y graficar.

4.3.1.1 Fase I: “La interacción con el fenómeno, la experimentación”

Para los tres primeros reactivos se espera que los estudiantes interactúen con el fenómeno. En el primer reactivo los estudiantes deben describir el fenómeno, el segundo y tercer reactivo pregunta por datos que se encuentran en la tabla adjuntada.

Primer reactivo: Describan el experimento con sus propias palabras.

Se espera que los estudiantes analicen la situación, comentando características y elementos que forman parte de la experimentación (Imagen del llenado de un estanque y la tabla de datos que contiene el tiempo de llenado del estanque en segundos y el nivel de altura del agua en centímetros).

Segundo reactivo: Si han transcurrido 60 segundos, ¿Cuántos centímetros se ha llenado el estanque? Expliquen su proceder.

Los estudiantes responden que los centímetros que corresponden al nivel de la altura del agua son de 115 centímetros cuando transcurren 60 segundos. Para responder a este reactivo, basta que el estudiante observe la tabla adjunta.

Tercer reactivo: Si el nivel de altura del agua es 85 centímetros, ¿Cuánto tiempo ha transcurrido? Describan su proceder.

Los estudiantes responden que el tiempo de llenado transcurrido es de 40 segundos cuando el nivel de altura del agua es de 85 centímetros. Para responder este reactivo, basta que el estudiante observe la tabla adjunta.

4.3.1.2 Fase II: "El acto de modelar, la predicción"

Desde el reactivo cuatro al trece, excluyendo el reactivo nueve, se espera que los estudiantes puedan predecir, a partir de la tabla de datos, el fenómeno.

Cuarto reactivo: Si han transcurrido 50 segundos, ¿Cuántos centímetros marca el nivel de altura del agua? Expliquen muy bien cómo hicieron para encontrar el resultado.

Se conjeturan dos posibles respuestas por parte de los estudiantes:

1. Para comenzar, los estudiantes deben observar que existe una diferencia de 20 en 20 en el tiempo de llenado, y una diferencia de 30 en 30 en el nivel de altura del agua. Luego para ver cuánto es el nivel de altura del agua cuando el tiempo de llenado es cada 10 segundos deben realizar puntos medios determinando que por cada 10 segundos el nivel de altura del agua es de 15 centímetros. De esta manera realiza la siguiente suma: 50 (s) $\longrightarrow$ 85 + 15 = 100 Dónde 85 corresponde al nivel de altura del agua cuando el tiempo es de 40 (s) y 15 al aumento del nivel de altura del agua cuando el tiempo aumenta 10 segundos.

2. Los estudiantes utilizan la regla de tres para dar solución a la problemática de la siguiente manera:

$$40\text{seg} \rightarrow 85\text{cm}$$

$$50\text{seg} \rightarrow \text{xcm}$$

$$\text{x} = \frac{85\text{cm} \cdot 50\text{seg}}{40\text{seg}} = 106{,}25$$

Quinto reactivo: Si han transcurrido 85 segundos ¿Cuántos centímetros marca el nivel de altura del agua? Expliquen muy bien cómo hicieron para determinar el resultado.

Se conjeturan dos posibles respuestas por parte de los estudiantes:

1. Si cada 10 segundos de llenado del estanque aumenta 15 centímetros el nivel de altura del agua, entonces los estudiantes realizan puntos cuartos para determinar el nivel de altura del agua cuando el llenado del estanque es cada 5 segundos. Entonces concluyen que por cada 5 segundos el nivel de altura del agua aumenta 7,5 centímetros. De esta manera realiza la siguiente suma: 85(s) $\longrightarrow$ 145 + 7,5 = 152,5 Dónde 145 corresponde al nivel de altura del agua cuando el tiempo de llenado es de 80 (s) y 7,5 el aumento del nivel de altura del agua cuando el tiempo aumenta 5 segundos.

2. Los estudiantes utilizan la regla de tres para dar solución a la problemática de la siguiente manera:

$$85\text{seg} \rightarrow \text{xcm}$$

$$80\text{seg} \rightarrow 145\text{cm}$$

$$\text{x} = \frac{85\text{seg} \cdot 145\text{cm}}{80\text{seg}} = 154{,}0625$$

Sexto reactivo: ¿Cuántos centímetros marcará el nivel de altura del agua, si han transcurrido 31 segundos? Expliquen muy bien cómo hicieron para obtener el resultado.

Se conjeturan dos posibles respuestas por parte de los estudiantes:

1. Si cada 10 segundos de llenado del estanque aumenta 15 centímetros el nivel de altura del agua, entonces los estudiantes realizan puntos décimos para

determinar el nivel de altura del agua cuando el llenado del estanque es cada 1 segundo. Entonces concluyen que por cada 1 segundo el nivel de altura del agua aumenta 1,5 centímetros. De esta manera realizan la siguiente suma: 31(s) ⟶ 55+ 15+1,5 = 71,5 Dónde 55 corresponde al nivel de altura del agua cuando el tiempo de llenado es de 20 (s) y 15 el aumento del nivel de altura del agua cuando el tiempo aumenta cada 10 (s) más 1,5 segundos correspondientes al nivel de altura del agua cuando el tiempo aumenta cada 1 (s).

2. Los estudiantes utilizan la regla de tres para dar solución a la problemática de la siguiente manera:

$$31\text{seg} \rightarrow \text{xcm}$$

$$20\text{seg} \rightarrow 55\text{cm}$$

$$\text{x} = \frac{31\text{seg} \cdot 55\text{cm}}{20\text{seg}} = 85{,}25$$

Séptimo reactivo: ¿Cuántos centímetros marcará, si han transcurrido 1 segundo? Expliquen muy bien su proceder para obtener el resultado.

Se conjeturan dos posibles respuestas por parte de los estudiantes:

1. Los estudiantes responden al reactivo que por cada 1 segundo el nivel de altura del agua aumenta 1,5 centímetros. Para eso deben realiza puntos décimos. Entonces concluyen que cuando el tiempo de llenado sea de 1 segundo el nivel de altura del agua será de 26,5.

2. Los estudiantes utilizan la regla de tres para dar solución a la problemática de la siguiente manera:

$$1\text{seg} \rightarrow \text{xcm}$$

$$0\text{seg} \rightarrow 25\text{cm}$$

$$\text{x} = \frac{1\text{seg} \cdot 25\text{cm}}{0\text{seg}}$$

Aquí el estudiante se encuentra en un problema pues la división por cero es ∞

Octavo reactivo: ¿Cuántos centímetros marcará el nivel de altura del agua, si han transcurrido t segundos? ¿Por qué?

Se conjeturan dos posibles respuestas por parte de los estudiantes:

1. Los estudiantes ya conociendo lo anterior responden con la siguiente fórmula: N=1,5*T+25 entonces despejando T queda: T=(N-25)/1,5 Dónde N es el nivel de altura del agua en centímetros, T es el tiempo de llenado en segundos, 1,5 es el nivel de altura del agua cuando el llenado del estanque es cada 1 segundo y 25 son los centímetros cuando el tiempo de llenado es de 0 segundos.

2. Los estudiantes intentan realizar la regla de tres de alguna manera.

Noveno reactivo: ¿Existe la razón matemática en este experimento? Justifique

Se conjeturan dos posibles respuestas por parte de los estudiantes:

1. Los estudiantes responden que sí, recordando la experiencia vivida en la semana anterior de la secuencia del dulzor.

2. Los estudiantes responden que no, al no poder conectar la experiencia de la clase anterior con la nueva secuencia.

Décimo reactivo: ¿Cuántos centímetros marcará el nivel de altura del agua, si han transcurrido 18,45 segundos? ¿Por qué?

Se conjeturan dos posibles respuestas por parte de los estudiantes:

1. Los estudiantes utilizan la fórmula encontrada en el reactivo 8 de la siguiente manera: N=1,5*18,45+25 cuyo resultado es 52,675.

2. Los estudiantes utilizan la regla de tres para dar solución a la problemática de la siguiente manera:

$$18{,}45\text{seg} \rightarrow \text{xcm}$$

$$0\text{seg} \rightarrow 25\text{cm}$$

$$\text{x} = \frac{18{,}45\text{seg} \cdot 25\text{cm}}{0\text{seg}}$$

Aquí el estudiante se encuentra en un problema pues la división por cero es ∞

Décimo primer reactivo: ¿Cuál es la expresión algebraica que el equipo puede asociar al llenado del estanque? Identifiquen en ella sus valores fijos o parámetros y describan lo que representa cada uno.

Se conjeturan dos posibles respuestas por parte de los estudiantes:

1. Los estudiantes escriben la expresión algebraica encontrada en el reactivo 8 N=1,5*T+25 y responden que los valores fijos es el 1,5 correspondiente al nivel de altura del agua cuando el tiempo de llenado del estanque es cada 1 segundo y el 25 que corresponde al nivel de altura del agua cuando el tiempo de llenado del estanque está en 0 segundos. Los valores parámetros son el tiempo de llenado del estanque y el nivel de altura del agua.

2. No construyen el modelo algebraico.

Décimo segundo reactivo: ¿En qué tiempo el nivel de altura del estanque corresponde a 35 centímetros? Expliquen muy bien cómo hicieron para obtener su resultado.

Se conjeturan dos posibles respuestas por parte de los estudiantes:

1. Los estudiantes utilizan la fórmula encontrada en el reactivo 8 de la siguiente manera: T=(35-25)/1,5 cuyo resultado es $6,\overline{6}$.

2. Los estudiantes utilizan la regla de tres para dar solución a la problemática de la siguiente manera:

$$\mathrm{xseg} \rightarrow 35\mathrm{cm}$$

$$20\mathrm{seg} \rightarrow 55\mathrm{cm}$$

$$\mathrm{x} = \frac{20\mathrm{seg} \cdot 35\mathrm{cm}}{55\mathrm{seg}} = 12,\overline{72}$$

Décimo tercer reactivo: ¿Qué características tiene la gráfica que modela el llenado del estanque? ¿Cuál es esta gráfica?

Se conjeturan dos posibles respuestas por parte de los estudiantes:

1. Los estudiantes completan la tabla con los datos que han ido recopilando durante la secuencia, haciendo uso de estos realizan la gráfica y logran conjeturar que se trata de un fenómeno lineal.
2. Los estudiantes completan la tabla con los datos que han ido recopilando durante la secuencia, haciendo uso de estos realizan la gráfica y no logran conjeturar que se trata de un fenómeno lineal.
3. Los estudiantes completan la tabla con los datos que han ido recopilando durante la secuencia, haciendo uso de la tabla original realizan la gráfica y logran conjeturar que se trata de un fenómeno lineal.
4. Los estudiantes completan la tabla con los datos que han ido recopilando durante la secuencia, haciendo uso de la tabla original realizan la gráfica y no logran conjeturar que se trata de un fenómeno lineal.
5. Los estudiantes completan la tabla con los datos que han ido recopilando durante la secuencia, sin embargo no realizan la gráfica y por ende no dan cuenta que se trata de un fenómeno lineal.

4.3.1.3 Fase III: "La articulación de los modelos"

En los reactivos 14 y 15 se espera que los estudiantes digan que la gráfica será "más arriba" si cae más agua de la llave y que lo que cambia en la tabla de datos al modificar el llenado de un estanque, "son los segundos por altura", es decir, la razón de cambio. De este modo, articulan los modelos entre sí y estos con el fenómeno, configurando una red, a la que llamamos lo lineal (Arrieta y Díaz, 2015).

Décimo cuarto reactivo: Si cae más agua de la llave ¿cómo es la gráfica, la tabla, la razón matemática, la expresión algebraica? Señalen sus argumentos para cada afirmación que hagan.

Se conjeturan dos posibles respuestas por parte de los estudiantes:

1. Los estudiantes mediante palabras o graficando o utilizando un ejemplo (que cae el doble de agua), explican que si cae más agua de la llave la recta pendiente variará obteniendo un mayor ángulo de inclinación, el nivel de altura de agua presentado a en los intervalos de 20 segundos será mayor que los 30

de la tabla original, la razón matemática aumenta dado que el nivel de altura de agua aumenta y la expresión algebraica variara el coeficiente numérico que acompaña a la variable tiempo.

2. Los estudiantes mediante palabras o graficando explican que la recta será más larga, que la tabla sigue siendo la misma, no conjeturan si la razón matemática varia, y que la expresión algebraica es la misma.

Décimo quinto reactivo: ¿Qué hacer para que la gráfica esté más arriba, más alta? Expliquen con claridad

Se conjeturan dos posibles respuestas por parte de los estudiantes:

1. Los estudiantes responden que la gráfica estará más arriba, más alta, cuando el nivel de altura del agua esté sobre los 25 centímetros cuando el tiempo sea de 0 segundos.

2. Los estudiantes responden que la cantidad de agua que salga de la llave sea mayor. (Aludiendo a que el cambio sea la inclinación de la recta).

4.3.2 Análisis por fases de la razón matemática al modelar "El llenado de un estanque"

4.3.2.1 Fase I: "La interacción con el fenómeno, la experimentación"

Primer reactivo: Describan el experimento con sus propias palabras.

Los equipos E1, E4, E5, E6, E7 describen el comportamiento físico del experimento destacando, en gran medida, que el llenado del estanque es de manera constante, reconociendo en la gran mayoría de los casos que es cada 20 segundos mostrando un entendimiento de la covariación existente entre el nivel de agua y el tiempo transcurrido; sin embargo no describen todos los elementos que enmarcan el experimento en especial la cantidad de magnitud que posee el nivel de agua medida en centímetros. Por su parte los equipos E2 y E3 describen el fenómeno físico y también son capaces de reconocer la covariación existente entre el tiempo transcurrido y el nivel de agua alcanzado sin olvidar las cantidades de magnitudes presentes, no obstante no describen todos los elementos inmersos en el experimento.

Segundo reactivo: Si han transcurrido 60 segundos, ¿Cuántos centímetros se ha llenado el estanque? Expliquen su proceder.

En esta actividad los equipos E1, E3 y E4 no describen el procedimiento utilizado para explicar su proceder. En cambio los equipos E5, E6 y E7 visualizan la relación que existe entre el tiempo de llenado y el nivel de altura de agua entregado en la tabla. Por su parte, el equipo E2, no se limita a solo a visualizar los datos de la tabla adjunta, dado que a partir de estos generan un método propio para responder.

En general se evidencia que los equipos presentan inmersión en el experimento, debido que incluso los equipos que no describen el método que utilizan para responder hacen uso de las unidades de medidas presentes. La mayoría de los grupos muestran incluso una mayor inmersión en el experimento describiendo la relación existente entre los segundos transcurridos con el nivel de agua.

Tercer reactivo: Si el nivel de altura del agua es 85 centímetros, ¿Cuánto tiempo ha transcurrido? Describan su proceder.

Los equipos E1, E3, E4 y E5 no describen el procedimiento utilizado para explicar su proceder. En cambio los equipos E6 y E7 visualizan la relación que existe entre el tiempo de llenado y el nivel de altura de agua entregado en la tabla. Por su parte el equipo E2 no se limita a solo a visualizar los datos de la tabla adjunta, dado que a partir de estos generan un método propio para responder.

La mayoría de los equipos logran visualizar y describir la relación existente entre los segundos transcurridos con el nivel de agua del estanque pese a no especificar el método utilizado, son conscientes de la relación descrita.

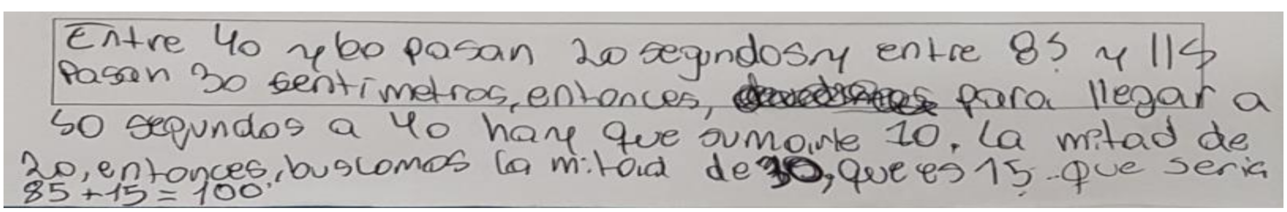
Se observa que los equipos al realizar las tres primeras actividades que corresponden a la fase I del diseño, muestran una clara inmersión en el experimento discursivo, pese a no describir en su totalidad los elementos que lo configuran. Son capaces de dar cuenta de la covariación existente entre los segundos transcurridos y el nivel de agua presente en el llenado del estanque. En su gran mayoría se muestra una interacción con los elementos presentes en la tabla, ya sea visualizándolos o haciendo uso de estos para crear sus propios métodos de resolución.

4.3.2.2 Fase II: “El acto de modelar, la predicción”

Cuarto reactivo: Si han transcurrido 50 segundos, ¿Cuántos centímetros marca el nivel de altura del agua? Expliquen muy bien cómo hicieron para encontrar el resultado.

En este reactivo los equipos E1, E2, E3, E5, E6, hacen uso de la estrategia de sacar los puntos medios para predecir el nivel de altura de agua en 50 segundos, dato que no se encuentra en la tabla adjunta. Por otra parte los equipos E4 y E7 no describen la estrategia implementada. El equipo E4 alude uso de la calculadora, por lo que eventualmente se puede decir que hicieron uso de la estrategia de puntos medios, al observar la tabla de datos. Del equipo E7 se evidencia que marcan entre medio de los valores 40 y 60 de la tabla adjuntada, de esta manera se sostiene que el equipo también hizo uso de la estrategia de puntos medios.

Ilustración (8). Evidencia de las textualidades del E1 en la secuencia “El llenado de un estanque”


Entre 40 y 60 pasan 20 segundos y entre 85 y 115 pasan 30 centimetros, entonces, para llegar a 50 segundos a 40 hay que sumarle 10, la mitad de 20, entonces, buscamos la mitad de 30, que es 15 que seria 85+15=100

La ilustración (8) muestra que el equipo utiliza los intervalos tanto de los segundos como los intervalos de los centímetros, utilizando puntos medios para predecir el valor requerido, que no se encuentra en la tabla de datos inicial. De esta manera se conjetura que los estudiantes modelan tabularmente.

Quinto reactivo: Si han transcurrido 85 segundos ¿Cuántos centímetros marca el nivel de altura del agua? Expliquen muy bien cómo hicieron para determinar el resultado.

Los equipos E1, E3 y E6 hacen uso de la estrategia de puntos cuartos para predecir el nivel de altura de agua al transcurrir 85 segundos, dato que no se encuentra en la tabla de datos adjunta. El equipo E5 mediante realización de regla de tres obtiene el aumento del nivel de agua al transcurrir los 5 segundos, luego haciendo uso de la relación de valores encontradas los suma a los ya establecidos en la tabla de datos. Por otra parte los equipos E2, E4y E7, no describen que estrategia utilizan. El equipo E4 menciona el uso de la calculadora, debido a esto es muy probable que hace uso de la estrategia de puntos cuartos. En tanto se cree que el equipo E7 entrega su respuesta mediante estimación haciendo uso de los datos de la tabla adjunta. El equipo E2, mencionan la variación de nivel de agua transcurridos 1 segundo, se estima que el equipo mediante la estrategia razón de cambio logra obtener este dato, el cual es utilizado para entregar su respuesta.

Sexto reactivo: ¿Cuántos centímetros marcará el nivel de altura del agua, si han transcurrido 31 segundos? Expliquen muy bien cómo hicieron para obtener el resultado.

En esta actividad el equipo E1 describe la utilización de puntos decimos para obtener la variación del nivel de altura de agua transcurrido un segundo, de esta manera predicen el nivel de altura presente a los 31 segundos. El equipo E5 mediante la utilización de regla de tres obtiene la razón de cambio presente en el fenómeno descrito, del cual hacen uso para obtener una expresión con la cual poder predecir el nivel de altura a los segundos requeridos. Por otra parte los equipos E2, E3, E4, E6 y E7, no describen la estrategia utilizada; sin embargo debido a las trayectorias expuestas en las preguntas anteriores, se cree que los equipos E3 y E4, hicieron uso de la estrategia de puntos decimos para obtener el nivel de altura de agua transcurrido 1 segundo. De esta manera los equipos predicen el nivel de altura transcurridos 31 segundos. Por su parte el equipo E2, se estima que predicen el nivel de altura de agua utilizando la igualdad de valores obtenidos en la pregunta anterior. En tanto se cree que los equipos E6 y E7 haciendo uso de los valores de la tabla adjunta entrega su respuesta mediante aproximación.

Séptimo reactivo: ¿Cuántos centímetros marcará, si han transcurrido 1 segundo? Expliquen muy bien su proceder para obtener el resultado.

En este reactivo los equipos E1, E6 y E7 hacen uso la estrategia de puntos decimos para encontrar la variación de nivel de agua transcurrido un segundo. Por su parte el equipo E5 haciendo uso de los datos entregados en la tabla y la razón de cambio obtenida en la pregunta anterior, predice el nivel de altura de agua transcurrido un segundo. En cambio los equipos E2, E3 y E4, no describen el procedimiento utilizado. De E2, se puede decir que anteriormente utilizó la razón de cambia inmersa en el fenómeno, de esta manera se presume que hacen uso del valor obtenido. Los equipos E3 y E4, mediante divisiones sucesivas, vale decir puntos medios, cuartos y decimos expuestos en las preguntas anteriores obtuvieron la variación de nivel de altura de agua transcurrido un segundo.

Octavo reactivo: ¿Cuántos centímetros marcará el nivel de altura del agua, si han transcurrido t segundos? ¿Por qué?

Los equipos E2, E4, E6 y E7, no establecen una expresión para un tiempo t cualquiera; sin embargo es de destacar que tanto el E2 como el E4, logran establecer la razón de cambio que posee el fenómeno. Por otra parte los equipos E1, E3 y E5 establecen una expresión dado un tiempo t cualquiera, utilizando los valores encontrados en los reactivos anteriores.

Luego de analizar las producciones de los equipos en los reactivos del 4 al 8 se puede decir que haciendo uso de la tabla de datos como un modelo del fenómeno, los equipos logran articular el acto de modelar. Esto queda reflejado por parte de algunos equipos por el uso de una variante de las trayectoria de algoritmos de predicción del diseño de aprendizaje “El resorte” expuesto por Sepúlveda, Arrieta y Díaz (2015), vale decir Puntos medios, Puntos cuartos, Puntos decimos, razón de cambio, construcción de la expresión analítico algebraico. Los equipos establecen su modelación tabular.

Noveno reactivo: ¿Existe la razón matemática en este experimento? Justifique

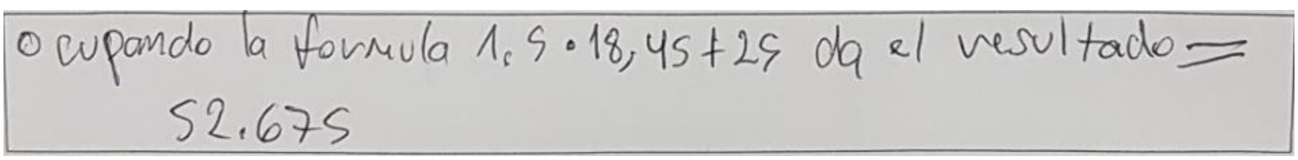
Para este reactivo los equipos E1, E3, E4, E5 y E6, establecen que si existe razón matemática. En las respuestas de los equipos se evidencia como en su totalidad constituyen la relación que existe entre las cantidades de magnitudes de tiempo con las cantidades de magnitudes de altura de agua. Por otra parte, los equipos E2 y E7 logran intuir la presencia de la razón matemática en el fenómeno, sin fundamentar su respuesta.

Aunque los equipos no logran encapsular completamente el concepto de razón matemática, se evidencia que luego de experimentar la secuencia del dulzor, los estudiantes son capaces de intuir que si se encuentra presente en el fenómeno descrito.

Décimo reactivo: ¿Cuántos centímetros marcará el nivel de altura del agua, si han transcurrido 18,45 segundos? ¿Por qué?

Se estima que en este reactivo los equipos E6 y E7, utilizando los datos de la tabla adjunta, se aproximan al valor requerido. Por su parte el equipo E2 utiliza la razón de cambio para multiplicar este valor con los segundos, no obstante omiten el nivel de altura de agua inicial. Los equipos E1, E3 y E5 dan respuesta a la pregunta utilizando la expresión obtenida en el reactivo 8, la cual fue construida mediante la modelación tabular. El equipo E4 no entrega respuesta.

Ilustración (9).Evidencia de las textualidades del E3 en la secuencia “El llenado de un estanque”



En la ilustración (9) muestra que los estudiantes utilizan la expresión algebraica encontrada en el reactivo 8 para dar respuesta a un valor difícil de predecir mediante divisiones sucesivas. Se conjetura que los estudiantes modelan algebraicamente.

Décimo primer reactivo: ¿Cuál es la expresión algebraica que el equipo puede asociar al llenado del estanque? Identifiquen en ella sus valores fijos o parámetros y describan lo que representa cada uno.

Los equipos E1, E3 y E5 concluyen que la expresión utilizada para encontrar el nivel de altura transcurrido en un tiempo t es la encontrada en el reactivo 8, es la expresión que se asocia al llenado del estanque. El E5 añade que el valor de la razón de cambio es variable y que los 25 centímetros de nivel de altura del agua inicial corresponden a un valor fijo. Los equipos E2, E4, E6 y E7 no conjeturan una expresión que se asocie al llenado del estanque, no obstante queda en evidencia que los equipos comprenden que existe una relación entre los segundos transcurridos con el llenado del estanque. Por su parte los equipos E2 y E4 abstraen esta relación existente construyendo la razón de cambio asociada al fenómeno.

Décimo segundo reactivo: ¿En qué tiempo el nivel de altura del estanque corresponde a 35 centímetros? Expliquen muy bien cómo hicieron para obtener su resultado.

Los equipos E1 y E5 mediante la expresión algebraica obtenida en la pregunta anterior, despejan la variable tiempo para consignar una expresión algebraica, que sirve para obtener el tiempo transcurrido dado el nivel de agua que posee el estanque. Los equipos E2, E3, E4, E6 y E7 utilizan los datos entregados por la tabla adjuntada para encontrar el valor requerido mediante estimaciones usando los valores cercanos. Los equipos E6 y E7 intentan aproximarse al valor dividendo en dos la cantidad de altura de nivel de agua inmediatamente superior a la requerida.

Décimo tercer reactivo: ¿Qué características tiene la gráfica que modela el llenado del estanque? ¿Cuál es esta gráfica?

El equipo E2, no responde el reactivo. Por otra parte los equipos E1, E3, E4, E5, E6 y E7 realizan el llenado de tabla de datos adjunta, presente en el reactivo, con los datos obtenidos a lo largo de la secuencia. Los equipos E3, E5, E6 y E7 grafican utilizando los valores utilizando los datos de la tabla original dado la facilidad al momento de graduar. Los equipos E6 y E7 no realizan conjeturas a partir de la gráfica. Los equipos E3 y E5 establecen que se trata de una función lineal.

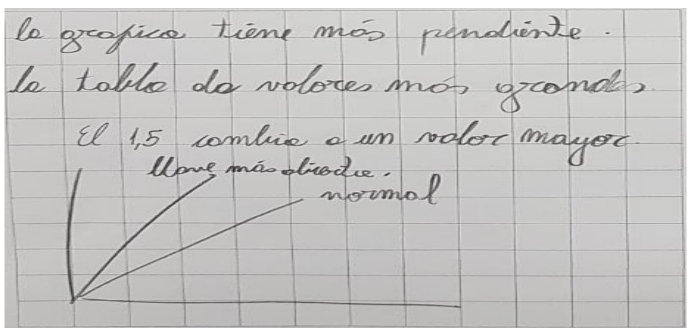
De los reactivos del 10 al 13 algunos de los equipos evidencian que logran establecer la relación de continuidad que existe entre la modelación tabular ya expuesta con la expresión analítica algebraica que articula el fenómeno.

4.3.2.3 Fase III: “La articulación de los modelos

Décimo cuarto reactivo: Si cae más agua de la llave ¿cómo es la gráfica, la tabla, la razón matemática, la expresión algebraica? Señalen sus argumentos para cada afirmación que hagan.

En este reactivo los equipos E6 y E7, realizan una gráfica utilizando valores contiguos a lo expuesto en la tabla de datos original manteniendo los mismos intervalos de valores, vale decir, el tiempo en segundos van de 20 en 20 y el nivel de altura de agua va de 30 en 30. El equipo E5 conjetura que tanto la pendiente de la recta como los valores de la tabla y la razón de cambio aumentarán. Se estima que los estudiantes muestran una inmersión en el fenómeno logrando predecir cuando las condiciones de este son alteradas, modelando figuralmente, como muestra la ilustración (10). Los equipos E1, E2, E3 y E4 no responden.

Ilustración (10).Evidencia de las textualidades del E5 en la secuencia "El llenado de un estanque"



Décimo quinto reactivo: ¿Qué hacer para que la gráfica este más arriba, más alta? Expliquen con claridad.

Los equipos E6 y E7 presumen que los centímetros de la tabla de datos deben aumentar. En tanto el Equipo E5 responde que debe salir mayor cantidad de agua de la llave. Los equipos E1, E2, E3 y E4 no responden.

Tomando los reactivos 14 y 15 cuya connotación se enmarca en la relación existente entre la modelación tabular, expresión analítico-algebraica y figural. El análisis es bastante reducido dado que pocos equipos respondieron. De los equipos que respondieron se pueden catalogar de dos maneras. Por un lado tenemos a los equipos E6 y E7 cuyas respuestas se hicieron apelando a la intuición sin realizar un análisis utilizando la información recopilada a lo largo de la secuencia y el equipo E5 que realizo un análisis haciendo uso de éstas. Podemos observar que el equipo E5 logro interactuar casi en su totalidad con la naturaleza del fenómeno descrito durante la secuencia pudiendo hacer una relación tabular, analítico algebraica y figural.

4.3.3 Conclusiones de la razón matemática al modelar "El llenado de un estanque"

Luego de revisar las producciones por cada uno de los equipos, damos cuenta que utilizaron en general una variante de las trayectoria de algoritmos de predicción del diseño de aprendizaje "El resorte", expuesto por Sepúlveda, Arrieta y Díaz (2015) (Ver figura 5).

Queda en evidencia que experimentar la razón matemática de manera cualitativa y cuantitativa brindó a los estudiantes un mejor entendimiento de este concepto matemático, puesto que los equipos luego de experimentar la secuencia del dulzor, donde vivenciaron de manera empírica el paso cualitativo al cuantitativo, utilizando el sentido del gusto para realizar comparaciones de cuantificaciones intensivas, los estudiantes lograron entender de manera superficial el concepto de razón matemática. Esto queda manifestado cuando responden de manera intuitiva o argumentando usando la relación existente entre los segundos con la cantidad de altura de agua con la cantidad de altura de agua que existe la razón en el fenómeno descrito que existe en el fenómeno descrito. Confirmando lo expuesto por Ruiz y Valdemoros (2006) que el tránsito de lo cualitativo a lo cuantitativo favorece al entendimiento de la razón matemática; sin embargo los estudiantes, al no apropiarse de esta, no son capaces de asociarla como la herramienta que configura la red de parámetros de lo lineal. Prueba de esto es el equipo E5, quien logra construir la red que articula el llenado del estanque (Ver figura 7) con el coeficiente de la variable x, la inclinación de la recta y la razón de cambio $\frac{\Delta h}{\Delta t}$ de la tabla, pero no se aprecia una vinculación de la razón matemática con la red articulada.

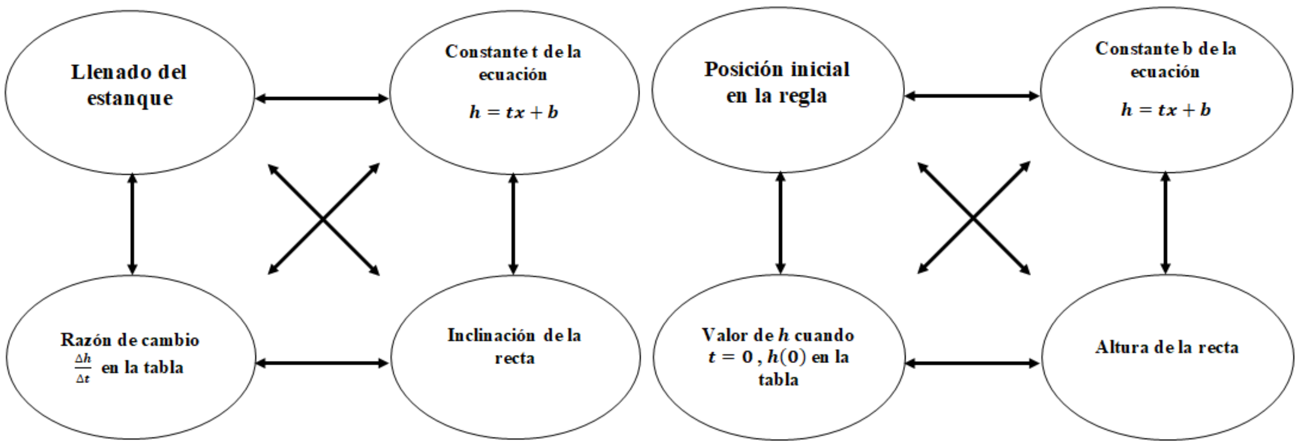


Figura 7. Redes que articulan el llenado de un estanque o la posición de la regla con los parámetros de los modelos

Capítulo V.

Conclusiones y proyecciones

Los resultados de este estudio, con respecto al uso de la razón matemática, muestran que, en el programa de estudio de sexto básico, es usada con la intención de comprender en forma más profunda las fracciones y los decimales, que les proveerán herramientas para resolver problemas en contextos cotidianos, en particular en el área económica.

La definición del texto para el estudiante de sexto año de educación básica, entregado por el MINEDUC a las aulas de nuestro país, definen a la razón como una comparación entre dos cantidades mediante una división la cual se puede escribir como "a" es a "b", a:b o $\frac{a}{b}$ cuando b≠0 . Bajo esta definición los autores solo emplean una comparación de cantidades numéricas mediante una división que no propician la comparación de la "cantidad de magnitud a" respecto a la "cantidad de magnitud b", resultando así que la razón matemática carezca de magnitudes y pierda todo significado propio, se usa como un instrumento para anotar y simbolizar números de enunciados que carecen de sentido y no admite relacionar cantidades de magnitudes irracionales y mucho menos usarla si la cantidad de magnitud es nula en el denominador.

Esta investigación inicia con un estudio previo tomando una actividad de modelación propuesta por Arrieta y Díaz (2015), conocida como "La elasticidad de un resorte". Se realizó a estudiantes de primer año medio y los análisis de sus producciones nos muestran que la razón matemática es invisible para ellos, sus trayectorias de algoritmos así nos lo indican. La regla de tres aparece como una estrategia, pero resulta inconducente porque no incluyen el valor unitario en su procedimiento para construir su expresión analítico-algebraica. Para dar una pronta solución a esta problemática se diseñó una secuencia ("El dulzor") basada en el estudio Ruiz y Valdemoros (2006) cuyo propósito era devolver la noción de razón matemática al aula con la singularidad que le corresponde a través del tránsito entre el pensamiento cualitativo al pensamiento cuantitativo por medio de cuantificaciones intensivas.

La secuencia "El dulzor" fue aplicada a estudiantes de primer año medio de un liceo técnico profesional, los cuales trabajaron en equipo. Los estudiantes experimentaron con mezclas de agua y azúcar, mediante comparaciones por el sentido del gusto, transitando por el pensamiento proporcional cualitativo. Dichas comparaciones fueron realizadas mediante cuantificaciones intensivas las cuales propiciaron el tránsito al pensamiento cuantitativo, donde lograron numerizar la mezcla de dulzor de la muestra testigo, utilizando cantidades de cucharadas de agua y cantidades de gotas de endulzante. Al finalizar la secuencia se realizó una institucionalización de la razón matemática presente en la experimentación, instancia donde los estudiantes entendieron a esta como una comparación de cantidades de magnitudes cuyo resultado emerge de la relación existente entre los componentes involucrados.

Para validar lo expuesto por Ruiz y Valdemoros, se aplica una secuencia que homologa al diseño de la secuencia aplicada en el estudio previo, llamada “El llenado de un estanque”. Esta se aplicó una semana después al mismo grupo de estudiantes que realizaron la secuencia del diseño “El dulzor”, con el fin de corroborar si los estudiantes se apropiaron del concepto de razón matemática entendiendo a esta como una comparación de cantidades de magnitudes. Luego de analizar las producciones de los estudiantes, damos cuenta, en primera instancia y de manera análoga al grupo que experimentó la secuencia de la elasticidad de un resorte, que construyen una trayectoria de algoritmos de predicción similar a la propuesta en la figura 5; sin embargo, destacamos a un equipo que utilizó la regla de tres considerando en todo momento el valor unitario. Al revisar en concreto las producciones de los equipos en el reactivo 9 del “Llenado de un estanque” *¿existe razón matemática en este experimento? Justifique,* todos ellos responden que si existe razón matemática en el experimento, seis de ellos hacen alusión a la relación existente entre los segundos y la cantidad de altura de agua evidenciando así la comprensión de razón tal como se esperaba tras la intervención realizada en el grupo de estudiantes, solo uno declaro no saber cómo explicarlo. De esta manera, podemos decir que se valida lo expuesto por Ruiz y Valdemoros al experimentar la secuencia de “El Dulzor”, donde los estudiantes vivenciaron la noción de razón matemática de una forma cualitativa y lógica antes de estructurarse cualitativamente mediante cuantificaciones intensivas; sin embargo, pese a este avance, los estudiantes no lograron apropiarse totalmente de la noción de razón matemática con base en las dos actividades, considerando que el trabajo de campo expuesto por las autoras mencionadas, tuvo una duración de diez meses.

Los análisis de las producciones de los estudiantes muestran indicios de la conformación de la red de parámetros de lo lineal al observar elementos precursores, tales como los puntos medios, puntos cuartos, puntos décimos y regla de tres, que determinan los parámetros que conforman el modelo tabular y algebraico (covariación y razón de cambio). Estos parámetros tabulares se ponen en correspondencia con los parámetros del modelo algebraico (coeficiente de la varible y el término libre).

Un equipo que logró construir la red que articula el llenado del estanque con el coeficiente de la variable x, la inclinación de la recta y la razón de cambio $\frac{\Delta h}{\Delta t}$ de la tabla, no se aprecia una vinculación de la razón matemática con la red de lo lineal articulada, como representa la siguiente figura (8).

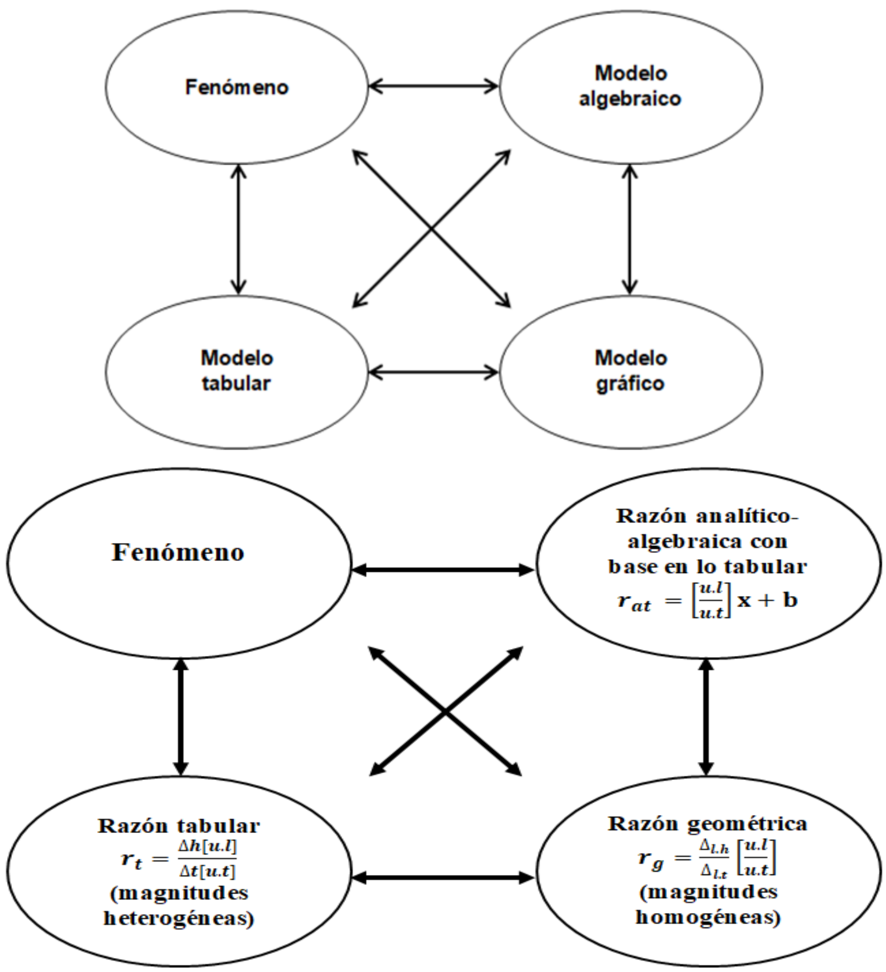


Figura 8. Red de articulación de parámetros de lo lineal con base en la razón matemática

La razón matemática habita en tres parámetros que enmarcan un fenómeno lineal (tabular, analítico-algebraico y figural), con los que se constituye una red que articula estos parámetros configurando lo que Arrieta y Díaz denominan “lo lineal”.

Considerando el fenómeno lineal, expuesto en la secuencia “el llenado del estanque”, damos cuenta como la razón matemática habita en los tres parámetros mencionados:

<u>De manera tabular</u>: Cuando se relaciona el tiempo del llenado del estanque en segundos con el nivel de altura de agua establecidos en la tabla de datos, mediante la covariación existente entre ellos, dando cabida a los deltas de cambios presentes en una razón heterogénea como la que se muestra a continuación $r_t = \frac{\Delta h[u.l]}{\Delta t[u.t]}$

<u>De manera analítico-algebraica</u>: Haciendo uso de la razón de cambio obtenida mediante la covariación tabular existente y el valor inicial de esta, se da origen a la expresión analítico- algebraica $h = \frac{\Delta h[u.l]}{\Delta t[u.t]}t + b$, siendo la razón tabular el coeficiente que acompaña a la incógnita y “b” el valor de altura de agua cuando el tiempo es igual a cero.

<u>De manera figural</u>: Si consideramos un gráfico cartesiano, la razón de cambio configura la inclinación de la recta, mientras que el valor de “b” representa el punto de intersección que la recta tiene en el eje y. Al observar la figura resultante, damos cuenta cómo a partir de esta se origina una razón homogénea, donde las longitudes expresadas se relacionan tal como se puede observar en la siguiente figura.

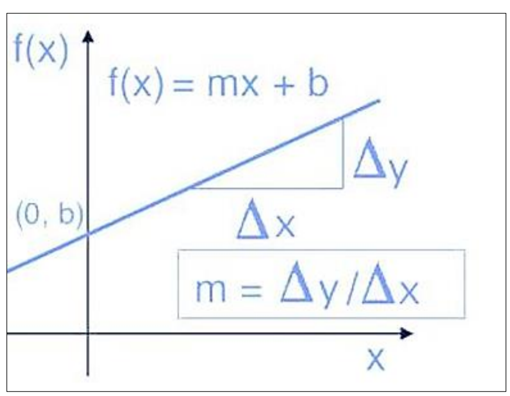


Figura 9. Razón Geométrica (Razones homogéneas)

Resta pendiente entonces que se logre constituirla configurando la red de parámetros de lo lineal.

Entre las proyecciones orientadas a que los elementos precursores emergentes se institucionalicen en aulas de matemáticas se dejan planteados dos rediseños surgidos desde este estudio.

Se propone el rediseño de la secuencia “El dulzor” con el fin de promover el entendimiento de la razón matemática mediante el tránsito de un pensamiento cualitativo a uno cuantitativo. La comprensión de su significado propio se torna vital en la superación de su opacidad y de su reemplazo como un conjunto de algoritmos mecanizados.

También se propone un rediseño para la secuencia de “El llenado de un estanque” que la haga visible a los estudiantes como una herramienta crucial en la modelación de un fenómeno en el que ocurre un modo de variar lineal. Este modo de variar se expresa como una red de razones matemáticas en calidad de parámetros del fenómeno.

Referencias Bibliográficas

Aracena, C., Hernández, J., Miranda, B. (2015) *Enseñanza y Evaluación que propicia modelar figurando* (Tesis de Pregrado). Universidad de Valparaíso. Chile.

Arcos, P., Moya, J. (2015) *Elementos precursores de lo lineal con base en modelación taular y algebraica* (Tesis de pregrado). Universidad de Valparaíso. Chile.

Arrieta, J., Díaz, L., Carrasco, E., Ávila, J. (2013) *Laboratorios virtuales de modelación, una propuesta para la incorporación de la experimentación y la modelación en el aula*. Proyecto postulado a Programa IDeA. Conicyt. Chile.

Arrieta, J., Díaz, L. (2015) *Una perspectiva de la modelación desde la socioepistemología*. Revista Latinoamericana de Investigación Matemática Educativa. Recuperado de http://www.scielo.org.mx/pdf/relime/v18n1/v18n1a2.pdf

Arrieta, J., Díaz, L. (2016) *Investigaciones Latinoamericanas en Modelación Matemática.* México: Editorial Gedisa.

Bienbengut, M., Hein, N. (1997) *Modelaje y Etnomatemática: puntos (in)comunes*. Recuperado de https://mdc.ulpgc.es/utils/getfile/collection/numeros/id/531/filename/534.pdf

Castro, I. (2015) *Razón matemática y configuración de lo proporcional desde prácticas socio escolares de estudiantes de profesorado* (Tesis doctoral). Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación – Universidad Federal de Sao Paulo, Chile - Brazil.

Campusano, A., Farías, M. (2014) *La Razón Olvidada* (P077). En memorias de las XVIII Jornadas de Educación Matemática. Universidad de Santiago, Chile. Recuperado de https://www.sochiem.cl/documentos/2014-acta-jnem.pdf

Cantoral, R., Molina, J., Sánchez, M. (2005) Socioepistemología de la predicción. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Volúmen* (18), pp. 463-468

Cantoral, R., Moreno-Durazno, A., Caballero-Pérez, M. (2018) *Investigación socioepistemológica sobre la modelación matemática: un enfoque empírico para la enseñanza y el aprendizaje*. Recuperado de https://doi.org/10.1007/s11858-018-0922-8

Contreras, C. (2013) *Desplazamiento de prácticas socioescolares desde una experiencia de modelación* (Tesis de pregrado). Universidad Católica Silva Henríquez. Chile.

Díaz, L., Castro, I. (Junio 2011) *Articulando prácticas para las fracciones con redes conceptuales*. Conferencia llevada a cabo en la XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática, Recife, Brasil. Recuperado de http://www.lematec.net.br/CDS/XIIICIAEM/artigos/1301.pdf

Escolano, R., Gairín, J. (2005) Modelos de medida para la enseñanza del número racional en Educación Primaria. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática. Volumen* (1), p. 21.

De Franceschi, G. (2016) *Diferencias entre la razón en el aula y la razón en comunidades de práctica* (Tesis de pregrado). Universidad de Valparaíso. Chile.

Godino, J., Batanero, C., (2002) *Probabilidad*. Recuperado de https://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/3_Proporcionalidad.pdf

Informe de Resultados PISA 2015, Competencia científica, lectora y matemática en estudiantes de quince años en Chile. Recuperado de http://archivos.agenciaeducacion.cl/INFORME_DE_RESULTADOS_PISA_2015.pdf

Maldonado, L., Catro, C. (2017) Matemática sexto básico, Ministerio de Educación de Chile, Chile.

MINEDUC (2018) Programa de estudio sexto año básico: Matemática. Unidad de curriculum y Evaluación (primera edición: 2013) Ministerio de Educación, República de Chile.

Molina, M. (2006) *Desarrollo del pensamiento racional y comprensión del signo igual por los alumnos de tercero de educación primaria* (Tesis doctoral). Universidad de Granada. España.

Obando, G. (2015) *Sistema de prácticas matemáticas en relación con las Razones, las Proporciones y la Proporcionalidad en los grados 3º y 4º de una institución educativa de la Educación Básica* (Tesis doctoral). Universidad del Valle. Colombia.

Ruiz, E., Valdemoros, Marta. (2006) Vínculo entre el pensamiento proporcional cualitativo y cuantitativo: el caso de Paulina. *Revista Latinoamericana de Investigación Matemática Educativa*. *Volumen* (9), pp. 299-324

Sepúlveda, C., Díaz, L., Arrieta, J. (2014) Concurrencia de predicción y algoritmia en la modelación. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Volumen* (27), pp. 1483-1490.

Sepúlveda, C., Arrieta, J., Díaz, L. (2015) Trayectorias constituidas y emergentes en prácticas de modelación desde una mirada socioepistemológica. En memorias de las XIX Jornadas Nacionales de Educación Matemática. Pontificia Universidad Católica de Chile, campus Villarrica. Chile.

Sepúlveda, C. (2015) *Trayectorias de algoritmos de predicción en la modelación lineal* (Tesis de maestría). Universidad de los Lagos. Chile.

Anexos

Anexo 1. Secuencia de Experimentación y Modelación (La elasticidad de un resorte)

SECUENCIA DE EXPERIMENTACIÓN Y MODELACIÓN

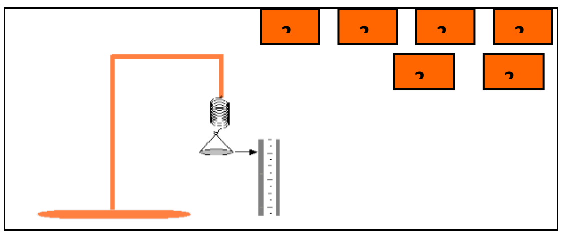
NOMBRE:________________________________Curso:________Fecha:_______

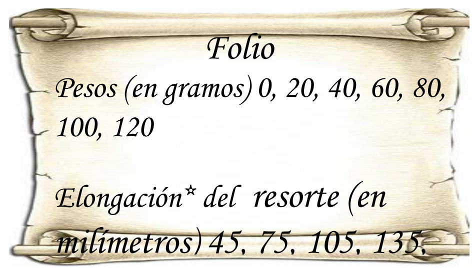
I. PLANTEAMIENTO DEL EXPERIMENTO

Vamos a investigar cómo se comporta **la elasticidad de un resorte**.

Tenemos un soporte universal y un resorte colgando de él, en su extremo le colocamos un portapesas que tiene una flechita (indicador) que apunta a una regla y contamos con seis pesas de 20 gramos.

Entonces vamos colocando pesas en el portapesas y tomamos las ubicaciones de la flechita, obteniendo los siguientes datos presentados en él folio.





1. Describan el experimento con sus propias palabras.

2. Si colocamos 60 gramos ¿Qué elongación alcanza el resorte? Escriban su respuesta y expliquen con sus propias palabras el procedimiento que ocuparon para determinarlo.

3. Si el resorte alcanza una elongación de 75 mm, ¿qué peso tiene el portapesas? Escriban su respuesta y expliquen con sus propias palabras el procedimiento que ocuparon para determinarlo.

4. Si colocamos 50 gramos ¿Qué elongación alcanzará el resorte? Escriban su respuesta y expliquen con sus propias palabras cada procedimiento que ocuparon para determinar la elongación a los 50 gramos. Ingrésenlo en la tabla.

TABLA

Peso (gramos)	Elongación del resorte (milímetros)
0	45
20	75
40	105
60	135
80	165
100	195
120	225

5. Si colocamos 85 gramos ¿Qué elongación alcanzará el resorte? Escriban su respuesta y expliquen con sus propias palabras cada procedimiento que ocuparon para determinar la elongación a los 85 gramos. Ingrésenlo en la tabla.

6. Si colocamos 21 gramos ¿Qué elongación alcanzará el resorte? Escriban su respuesta y expliquen con sus propias palabras cada procedimiento que ocuparon para determinar la elongación a los 21 gramos. Ingrésenlo en la tabla.

7. ¿Qué elongación alcanzará el resorte si se coloca 1 gramo? Escriban su respuesta y expliquen con sus propias palabras cada procedimiento que ocuparon para determinar la elongación con 1 gramo. Ingrésenlo en la tabla.

8. ¿Qué elongación alcanzará el resorte si se colocan P gramos? ¿Por qué? Escriban su respuesta y expliquen con sus propias palabras cada procedimiento que ocuparon para determinar la elongación a los P gramos.

9. Utilizando el procedimiento de su respuesta anterior, determinen la elongación del resorte cuando se colocan 60 gramos en el portapesas.
   a) Confronten su resultado con el valor de la tabla.
   b) Argumenten* su respuesta.

10. ¿Qué elongación alcanzará el resorte si se colocan 38.3 gramos? Escriban su respuesta y expliquen con sus propias palabras cada procedimiento que ocuparon para determinar la elongación con 38.3 gramos. Ingrésenlo en la tabla 1.

11. ¿Qué elongación alcanzará el resorte si se colocan 62.6 gramos? Escriban su respuesta y expliquen con sus propias palabras cada procedimiento que ocuparon para determinar la elongación con 62.6 gramos. Ingrésenlo en la tabla.

12. ¿Podrían dar una expresión general para comunicar esto?
    a) Expliquen muy bien como construyeron la expresión algebraica.
    b) Predigan la elongación del resorte si se colocan 100 gramos utilizando la expresión algebraica.
    c) Comparen la elongación obtenida, con el valor que indica la tabla.

d) ¿Qué concluyen de la comparación?

Para sorprenderse:
¡Con la expresión algebraica podemos obtener las mismas parejas de valores que presenta el folio!

13. ¿Qué elongación alcanzará el resorte si se colocan 18.45 gramos? Escriban su respuesta y expliquen con sus propias palabras cada uno de los procedimientos que ocuparon para determinar la elongación con 18.45 gramos. Ingrésenlo en la tabla.

14. ¿Qué elongación alcanzará el resorte si se colocan 125.9 gramos? Escriban su respuesta y expliquen con sus propias palabras cada uno de los procedimientos que ocuparon para determinar la elongación con 125.9 gramos. Ingrésenlo en la tabla.

15. Ahora que tenemos la expresión algebraica, ¿Qué pasará si el coeficiente de la variable disminuye? ¿Qué ocurrirá con la elongación del resorte? ¿Por qué?

16. Ahora que tenemos la expresión algebraica, ¿Qué pasará si el coeficiente de la variable aumenta? ¿Qué ocurrirá con la elongación del resorte? ¿Por qué?

17. Describan cómo se comportó la elasticidad del resorte en este experimento.

Sintetizando:

Hemos construido valores que no registraba el folio.

Usamos métodos numéricos para predecirlos.

Construimos una expresión algebraica con base en nuestros métodos.

También usamos la expresión algebraica para predecir valores.

Anexo 2. Desarrollo y análisis se la Secuencia de Experimentación y Modelación (La elasticidad de un resorte)

1. Describan el experimento con sus propias palabras.	
E1: el experimento consiste en que entre más peso se aplique a mas elasticidad llegará el elástico (resorte).	Más que explicar el experimento, los estudiantes están describiendo el fenómeno físico que se les ha presentado.
E2: Con un resorte y un porta pesas se busca determinar una relación directa que tiene la elongación de un resorte y un peso añadido a este.	Los estudiantes realizan una conjetura a priori, haciendo alusión a que existirá una relación directa entre la elongación del resorte por el peso proporcionado.
E3: Consiste en poner peso sobre una pesa y poder ver cuanta elasticidad tiene (el resorte).	Los estudiantes logran describir el proceso del experimento, sin embargo no es claro si dan cuenta de la relación que existe entre peso/elasticidad.
E4: El experimento sirve para saber cuanto se puede elongar un resorte poniendo diferentes pesos en la base.	Más que describir el experimento, los estudiantes informan el propósito del experimento.
E5: El experimento trata de saber que la elongación del resorte se expanda más.	Los estudiantes no describen el experimento, y logran una idea básica que el resorte se expanderá (probablemente pensando que a mayor peso, mayor elongación).
E6: En este experimento vemos como se comporta la elasticidad de un resorte.	Los estudiantes logran describir el experimento; sin embargo no hacen alusión a la relación de peso/elongación del resorte.
2. Si colocamos 60 gramos ¿Qué elongación alcanza el resorte? Escriban su respuesta y expliquen con sus propias palabras el procedimiento que ocuparon para determinarlo.	
E1: 135 ml, lo vimos en la tabla.	Los estudiantes utilizan la tabla dada para dar respuesta a la pregunta.
E2: Alcanza una elongación de 135 mm, hicimos una expresión que consiste en multiplicar el número por 1,5 y sumarle 45 = n*1,5+45 = elongación.	Los estudiantes logran encontrar la expresión general para dar respuesta a la pregunta. Posteriormente hicieron uso de la tabla de datos para corroborar el resultado obtenido; sin embargo no explican el procedimiento utilizado.
E3: Alcanza 135 de elongación.	Los estudiantes dan solución sin explicar el procedimiento utilizado.
E4: Alcanza una elongación de 135 milimetros. El procedimiento que usamos fue simplemente ver la tabla.	Los estudiantes respondieron utilizando la tabla de datos adjuntada.
E5: Alcanza 135 mire la taba y dividiendo por la mismas los 30.	Los estudiantes respondieron utilizando la tabla de datos adjuntada; sin embargo utilizaron otro método, el cual no describen claramente. (se presume que los 30 que nombran es de la relación por cada 20 gramos el resorte posee una elongación de 30 milímetros, siendo así mas que dividir fueron restando al quitar 20 gramos, el resorte pierde 30 milímetros de elongación y así hasta quitar los 60 gramos llegando así a los 45 milímetros que el resorte posee de elongación con peso cero)
E6: La elongación del resorte va a ser de 135mm. Lo descubrimos gracias a la tabla y al folio.	Los estudiantes respondieron utilizando la tabla de datos y el folio adjuntados en la actividad.
3. Si el resorte alcanza una elongación de 75 mm, ¿qué peso tiene el portapesas? Escriban su respuesta y expliquen con sus propias palabras el procedimiento que ocuparon para determinarlo.	
E1: 20g, lo vimos en la tabla.	Los estudiantes respondieron utilizando la tabla de datos adjuntada.

E2: El porta pesas pesaria 20 gr, hicimos el patrón pero al revés: n*1,5+45 -> (n-45)/1,5.	Los estudiantes respondieron utilizando una variante a la ecuación general encontrada en la pregunta anterior, donde debieron despejar la variable n (peso en gramos) para encontrar la ecuación utilizada. (Quizás para entender mejor la expresión debieron utilizar otra variable, dado que n es la cantidad de peso y el dato entregado fue la elongación del resorte.)
E3: Tiene un soporte de 20 g.	Los estudiantes responden la pregunta; sin embargo no explican el procedimiento utilizado.
E4: Se le pusieron 20 gramos. El procedimiento que usamos fue por cada 20 gramos le multiplicamos 30 milimetros.	Para dar respuesta, los estudiantes observaron la relación existente entre peso y elongación del resorte; sin embargo no queda claro que es lo que multiplican. (Aparentemente al darse cuenta de la relación existente, que por cada 20 gramos de peso el resorte se elonga 30 milímetros, restaron 30 milímetros a los 75 milímetros planteados en el problema haciendo uso también de los 45 milímetros que el resorte posee de elongación inicial).
E5: Su peso será de 20. Sacamos la mitad de 30 y lo sacamos.	No queda claro el procedimiento utilizado por parte de los estudiantes.
E6: El porta pesas pesa 20 gramos. Esto se sabe gracias a la tabla.	Los estudiantes responden utilizando la tabla de datos adjuntada.
4. Si colocamos 50 gramos ¿Qué elongación alcanzará el resorte? Escriban su respuesta y expliquen con sus propias palabras cada procedimiento que ocuparon para determinar la elongación a los 50 gramos. Ingrésenlo en la tabla.	
E1: 120 ml, calculamos la diferencia entre cada intervalo de la tabla.	Haciendo uso de los datos proporcionados por la tabla, se puede aludir que los estudiantes observaron que por cada 20 gramos de peso la elongación del resorte variaba en 30 milímetros. Luego al ubicar el 50, debieron conjeturar que estaba justo en el medio de 40 y 60, por ende la variación también sería la mitad, vale decir 15 milímetros. Sabiendo esto y que a los 60 gramos la elongación era de 135 milímetros, debieron restar los 135-15 obteniendo así los 120 milímetros a los 50 gramos. (Hicieron uso de los puntos medios) (Los estudiantes calculan, se preocupan de obtener un número sin saber a ciencia cierta si logran darle un significado o no. Utilizan la unidad de medida correcta; sin embargo eso no garantiza que logren otorgarle un significado al valor obtenido).
E2: (el resorte) alcanzara una elongación de 120 mm. Hicimos el mismo proceso del ejercicio 2.	Los estudiantes se limitan a utilizar una fórmula ya conocida, dando con la respuesta esperada. Logran asociar el valor obtenido al cambio de estado que sufre el resorte.
E3: (el resorte) Alcanzara una elongación de 120 ml.	Los estudiantes se limitan a responder encontrando el valor esperado. Logran asociar el valor obtenido al cambio de estado que sufre el resorte; sin embargo no describen el procedimiento utilizado.
E4: Alcanzara 120 mm el procedimiento fue dividir 30 en 2 y sumarle el resultado a los 105 mm de los 40 gramos.	Los estudiantes utilizaron la estrategia de puntos medios para responder. Utilizan parte de la discursiva en su respuesta, pero no es seguro que se den cuenta que el resultado numérico está asociado al cambio de elongación que sufre el resorte, pues no lo indican implícitamente, aun cuando utilizan la unidad de medida correspondiente.
E5: 120 sacamos la mitad…(no se lee bien)	Al decir “sacamos la mitad” se puede conjeturar que los estudiantes utilizaron la estrategia de los puntos medios. (Más conjeturas no se pueden extraer debido a la poca claridad).

E6: (el resorte) Alcanza una elongación de 120 milimetros porque si 60 g son 135 y 40 son 105 y de 105 a 135 son 30 se le suman15 que es la mitad.	Los estudiantes logran llegar a la respuesta esperada, entienden el cambio que sufrirá el resorte en su elongación. También utilizan la estrategia de los puntos medios siendo capaces de utilizar y entender la relación existente entre peso/elongación.
5. Si colocamos 85 gramos ¿Qué elongación alcanzará el resorte? Escriban su respuesta y expliquen con sus propias palabras cada procedimiento que ocuparon para determinar la elongación a los 85 gramos. Ingrésenlo en la tabla.	
E1: 172,5, calculamos la diferencia de el intervalo y lo restamos.	Utilizan el mismo proceso que en la pregunta anterior, vale decir calcularon las diferencias respectivas de la tabla, ya sabiendo la variación que existe cuando la diferencia es de 20 y de 10, proceden a calcular nuevamente la diferencia, ahora con 5 gramos. Podemos decir que están utilizando la estrategia de los puntos cuartos. Cabe destacar se limitan a contestar el resultado numérico, pero no se logra saber a ciencia cierta si logran vincular este valor al cambio que sufre el resorte en su elongación.
E2: Alcanzará una elongación de 132 mm, usamos el proceso anterior.	Los estudiantes no llegan a la respuesta esperada, tampoco queda claro cómo llegaron a este resultado. En las preguntas anteriores el grupo llegó a la expresión que les permitiría responder sin dificultades, probablemente erraron al ingresar los datos en la fórmula encontrada.
E3: con 85 gramos la elongación que alcanzara 175mm 80 -> 165 85 x 85*165=14.025:80=175.	Los estudiantes no llegan a la respuesta esperada, pues utilizan la estrategia de regla de tres la cual no entrega una solución correcta a esta actividad. Cabe señalar que pese a no dar con la respuesta correcta entienden de igual manera que el resorte presentará un cambio en su elongación.
E4: 80->165 85->x = alcanza una elongación de 175 mm	Los estudiantes no llegan a la respuesta esperada, pues utilizan la estrategia de regla de tres la cual no entrega una solución correcta a esta actividad. Cabe señalar que los estudiantes, pese a no dar con la respuesta correcta, entienden de igual manera que el resorte presentara un cambio en su elongación.
E5: 172,5 divide 15:2 y lo sume.	Los estudiantes logran dar con el resultado esperado, haciendo uso del punto medio ya encontrado. Vuelven a dividir el resultado en 2 obteniendo así los puntos cuartos. De esta manera se puede conjeturar que se dieron cuenta que al aumentar 5 gramos se refería a la mitad de la mitad de la diferencia original, obteniendo de esta manera que la elongación a los 5 gramos era de 7,5 milímetros y eso lo sumaron a los 165 que correspondían a los 80 gramos según la tabla. Cabe señalar que los estudiantes se centraron únicamente a encontrar el valor numérico sin asociarlo con el cambio sufrido por el resorte.
E6: Alcanza una elongación de 170,5 mm porque si 80g son 16mm(165mm) y 100g son 195 mm, hay una diferencia de 5 que es la mitad de los números que van de 10 a 10 en g.	Los estudiantes intentaron utilizar la estrategia de los puntos cuartos, pero se equivocaron al hacer la diferencia. Se observa, que pese al error de cálculo, no olvidan que el resorte sufre un cambio su elongación.
6. Si colocamos 21 gramos ¿Qué elongación alcanzará el resorte? Escriban su respuesta y expliquen con sus propias palabras cada procedimiento que ocuparon para determinar la elongación a los 21 gramos. Ingrésenlo en la tabla.	
E1: Alcanzara 76.5 ml Dividimos el 10 en 15.	Los estudiantes utilizan la estrategia de los puntos decimos, sabiendo que por cada 10 gramos la variación de la elongación es de 15 ml, lo dividen en 10 para saber la variación que poseerá el resorte con 1 gramo de peso. De esta manera utilizando el valor de

	la tabla a los 20 gramos, le suman la variación que tiene el resorte con 1 gramo de peso. Señalar que los estudiantes no olvidan la unidad de medida, pero no hacen referencia que el valor está ligado a la elongación del resorte.
E2: Alcanzara una elongación de 76,5, usamos el mismo procedimiento.	Los estudiantes emplean bien la formula encontrada en las preguntas anteriores. Logran dar con el resultado correcto, y no pierden de vista que el resultado obtenido tiene directa relación con el cambio de elongación que sufre el resorte.
E3: Con 21 gramos la elongación que alcanzara el resorte es de 78.7mm 20-> 75 21 x 21*75=1575:20=78,75.	Los estudiantes emplean la estrategia de la regla de tres. Al no ser una actividad de esa naturaleza el resultado obtenido es incorrecto; sin embargo los estudiantes son capaces de relacionar el resultado obtenido con el cambio que sufre el resorte y su elongación.
E4: 20->75 (no se lee bien)	Al no poder leerse bien la respuesta, solo se logra evidenciar los datos de la tabla.
E5: 76,5 Hicimos el 7,5 por 5 y lo sacamos asi.	Los estudiantes logran obtener la elongación que posee el resorte cada 1 gramos haciendo uso de lo obtenido en la pregunta anterior, vale decir sabiendo que por cada 5 gramos la elongación del resorte es 7,5 milímetros, toman el valor de los 7,5 y lo dividen en 5 para así obtener el valor de la unidad. De esta manera usando los datos de la tabla y el valor de la unidad, solo suman el valor obtenido con lo ya conocido. Destacar que solo se centran en contestar la parte numérica sin hacer relación con el fenómeno del resorte.
E6: Alcanza una elongación de 76,5 mm porque por cada mm hay una de 7,5g	Los estudiantes logran dar con el resultado sin olvidar el fenómeno que está ocurriendo, pero el argumento dado no es el más óptimo, (se estima que calcularon el valor de la unidad a partir de la elongación en mm que posee el resorte por cada 5 gramos).
7. Qué elongación alcanzará el resorte si se coloca 1 gramo? Escriban su respuesta y expliquen con sus propias palabras cada procedimiento que ocuparon para determinar la elongación con 1 gramo. Ingrésenlo en la tabla.	
E1: 1,5 ml. Vimos la diferencia entre el intervalo y dividimos.	Los estudiantes logran obtener con éxito el valor de la unidad, pero no se dan cuenta que a los 0 gramos el resorte posee una elongación inicial de 45 mm. Además se aprecia que no hacen una relación del valor con el fenómeno aun cuando son capaces de identificar la unidad de medida utilizada.
E2: Se alcanzara una elongación de 46.5mm, usamos la expresión anterior.	Los estudiantes emplean bien la formula encontrada en las preguntas anteriores. Logran dar con el resultado correcto, además de no perder de vista que el resultado obtenido tiene directa relación con el cambio de elongación que sufre el resorte.
E3: La elongación es de 6mm 10->60 1-> x.	Los estudiantes emplean la estrategia de la regla de tres. Al no ser una actividad de esa naturaleza, el resultado obtenido es incorrecto; sin embargo los estudiantes son capaces de relacionar el resultado obtenido con el cambio que sufre el resorte y su elongación.
E4: 30:20=1,5 lo que equivale a 1 gramo	Los estudiantes encuentran el valor de la unidad mediante el cociente existente entre las razones de la actividad, pero al centrarse solo en el cálculo numérico no fueron capaces de darse cuenta que el resorte posee una elongación en su estado inicial, la cual es la base para los pesos en gramos que se apliquen posteriormente.
E5: 46,5 dividimos 15:10 y así lo sacamos.	Los estudiantes fueron capaces de sacar el valor de la unidad mediante la estrategia de los puntos decimos. Utilizando el valor de elongación de los 10 gramos, prosiguieron a dividirlo en 10 para así encontrar el valor de la elongación cada 1 gramo sin olvidar que el

	resorte en su estado inicial ya posee una elongación, pero al no utilizar las unidades de medida y no mencionar la elongación del resorte no es del todo claro que entiendan que el resultado obtenido tenga relación con esto.
E6: Alcanza 46,5 porque por cada milímetro hay una de 7,5.	Los estudiantes dan con la respuesta correcta, saben que deben encontrar el valor por unidad; sin embargo al momento de escribirlo en la respuesta lo hacen equivocadamente.
8. ¿Qué elongación alcanzará el resorte si se colocan P gramos? ¿Por qué? Escriban su respuesta y expliquen con sus propias palabras cada procedimiento que ocuparon para determinar la elongación a los P gramos.	
E1: Pgr* 1,5+45	Los estudiantes logran encontrar una expresión para dar respuesta si fuesen p gramos, pero no describen el procedimiento utilizado. Cabe destacar la nomenclatura utilizada, Pgr, donde P es la incógnita y gr los gramos, es decir, podrían eventualmente saber que se refiere a peso, pero en su respuesta no queda claro que con esa expresión calculan la elongación del resorte puesto que no aparece explícitamente.
E2: Resorte alcanzaría una elongación de: P*1,5+45.	Los estudiantes logran encontrar una expresión para dar respuesta si fuesen p gramos, pero no describen el procedimiento utilizado. Aun así son capaces de darse cuenta que los resultados obtenidos mediante el uso de la expresión entregara la variación que tendrá el resorte en su elongación.
E3: 1.5 x P+45.	Los estudiantes logran encontrar una expresión para dar respuesta si fuesen p gramos, pero no describen el procedimiento utilizado. No queda claro si saben que con esa expresión calculan la elongación del resorte puesto que no aparece explícitamente.
E4: Alcanzará P elongación porque al P ser una incognita se le uede dar cualquier valor por encima de 45 20->30 P->x =(20*30)/P +45= elongación.	Los estudiantes no logran encontrar una expresión general para dar solución a la problemática debido que intentan armar una regla de tres; sin embargo son capaces de darse cuenta de varias cosas como que p es la incógnita que ira variando, además de intentar utilizar las diferencias existentes entre peso y elongación para poder armar la expresión, sin olvidar el hecho que el resorte posee una elongación inicial. Saben que se trata de encontrar una manera general para calcular la elongación del resorte. (Si bien no encuentran la formula por utilizar una estrategia que no sirve para este caso, dan cuenta de lo que se intenta encontrar).
E5: (no se puede leer)	No se puede hacer un análisis debido a la poca claridad.
E6: Si se colocan P=20g su elongación sera de 75 mm ya que hay una diferencia de 55 entre g y mm. P=x(0+7,5)	Los estudiantes intentan de manera errónea hacer la diferencia de la elongación con la cantidad de gramos, sin percatarse que si hubiesen tomado otros valores de la tabla la diferencia no sería de 55.
9. Utilizando el procedimiento de su respuesta anterior, determinen la elongación del resorte cuando se colocan 60 gramos en el portapesas. a) Confronten su resultado con el valor de la tabla. b) Argumenten* su respuesta.	

E1: 60*1.5=90+45=135 1,5 es el valor entre el peso en 1 en 1. Lo multiplico por el 60 y le sumo 45 que es lo que le falta al intervalo para llegar a la elasticidad	Los estudiantes haciendo uso de la formula encontrada vieron que efectivamente llegan al mismo valor que aparece en la tabla de datos, argumentando que a 1 gramo la elongación que sufre el resorte es de 1,5 milímetros. Luego, al ser 60 gramos lo requerido lo multiplican por los 1,5 y le suman los 45 que es el valor inicial de cuando el resorte no es intervenido por algún peso. Cabe destacar que los estudiantes no olvidan que los datos numéricos que están manejando se refieren a la elongación del resorte.
E2: b) 60*1,5= 90+45=135 a) Nuestra respuesta es igual a la de la tabla.	Los estudiantes dan cuenta que efectivamente la fórmula hallada funciona al momento de comparar con los datos de la tabla, sin embargo no ahondan más en su respuesta y tampoco hacen referencia a que los datos obtenidos tenga relación con la elongación del resorte.
E3: 1,5* 60+45 90 + 45 135	Los estudiantes solo se centran en hacer uso de la formula calculando el valor numérico, sin responder si efectivamente eran los mismos valores de la tabla y el procedimiento utilizado. No hacen referencia a que los datos obtenidos tengan relación con la elongación del resorte.
E4: Alcanza 135 milimetro de elongación, según los datos de la tabla.	Los estudiantes se limitan a revisar los resultados de la tabla, debido a que el grupo no fue capaz de encontrar la expresión que dan respuesta. Destacar que son capaces de darse cuenta que el resorte va sufriendo un cambio en su elongación.
E5: 60gr=135 b) (no se lee bien)}	Los estudiantes se limitan a revisar los resultados de la tabla, debido a que no fueron capaces de encontrar alguna expresión que diera respuesta. Más no se puede analizar debido a la poca claridad.
E6: Queda 135 porque en la tabla 60=gramos equivale a 135	Los estudiantes se limitan a revisar los resultados de la tabla, debido a que no fueron capaces de encontrar alguna expresión diera respuesta. Además no se puede afirmar que entiendan que los resultados expuestos relaciona la cantidad de peso aplicado con la elongación que pueda alcanzar el resorte.
10. ¿Qué elongación alcanzará el resorte si se colocan 38.3 gramos? Escriban su respuesta y expliquen con sus propias palabras cada procedimiento que ocuparon para determinar la elongación con 38.3 gramos. Ingrésenlo en la tabla 1.	
E1: 38,3 *1,5 = 57,45+45=102,45 ml.	Los estudiantes responden correctamente limitándose a utilizar la fórmula que ya poseían, sin explicar el procedimiento utilizado. A señalar que no olvidaron la unidad de medida que se estaba trabajando.
E2: 38,3 * 1,5=57,45+45=102,45 Usamos la expresión GR * 1,5 + 45 = elongación.	Los estudiantes logran dar con la respuesta esperada, para esto utilizan la formula encontrada anteriormente utilizándola como argumento. Cabe destacar que los estudiantes saben que el valor obtenido tiene relación con la elongación que sufre el resorte al ser expuesto a un peso determinado.
E3: 1.5*38.3+45 57.45 102.45	Los estudiantes responden correctamente limitándose a utilizar la fórmula que ya poseían, sin explicar el procedimiento utilizado. No queda claro si los estudiantes son capaces de relacionar el valor obtenido con la elongación que sufre el resorte.
E4: Alcanzara 102.45 milimetros debido a que si multiplicamos lo que alcanza 1 gramo que es 1,5 por 38,3 gramos y le sumamos lo de 0 nos dara lo que alcanza.	Los estudiantes llegan al valor esperado, fueron capaces de encontrar la elongación que sufrirá el resorte al ser expuesto a 1 gramo de peso, vale decir encontraron el valor de la unidad. Utilizando este valor lo multiplican por el nuevo valor pedido y le suman el valor inicial que posee el resorte como elongación al no tener peso.

E5: 102,5 dividimos 38,3:45 y después 15:100	Los estudiantes llegan al valor esperado, pero no se entiende el procedimiento realizado.
E6: Alcanza una elongación de 93.3g, porque si a 38.3 le sumamos 55 (diferencia entre g y mm) nos va a dar el resultado.	Los estudiantes no logran llegar al resultado esperado, debido a una mala estrategia, al utilizar una diferencia al azar entre gramos y milímetros de la tabla de datos adjuntada.
11. ¿Qué elongación alcanzará el resorte si se colocan 62.6 gramos? Escriban su respuesta y expliquen con sus propias palabras cada procedimiento que ocuparon para determinar la elongación con 62.6 gramos. Ingrésenlo en la tabla.	
E1: 62,6 * 1,5 = 93,75 + 45 = 138,75 ml.	Los estudiantes responden correctamente limitándose a utilizar la fórmula que ya poseían, sin explicar el procedimiento utilizado. A señalar que no olvidaron la unidad de medida que se estaba trabajando.
E2: 62,6 * 1,5 + 45 = 138,9 ml. Usamos la expresión Gr* 1,5+45 = El	Los estudiantes logran dar con la respuesta esperada, para esto utilizan la formula encontrada anteriormente y lo utilizan como argumento. Cabe destacar que los estudiantes saben que el valor obtenido tiene relación con la elongación que sufre el resorte al ser expuesto a un peso determinado.
E3: 15 * 62.6 + 45 93.9 + 45 138.9	Los estudiantes responden correctamente limitándose a utilizar la fórmula que ya poseían, sin explicar el procedimiento utilizado. No queda claro si los estudiantes son capaces de relacionar el valor obtenido con la elongación que sufre el resorte.
E4: Alcanzara 138.9 milimetros por lo explicado en el ejercicio anterior.	Los estudiantes llegan al valor esperado, fueron capaces de encontrar la elongación que sufrirá el resorte al ser expuesto a 1 gramo de peso, vale decir encontraron el valor de la unidad, utilizando este valor lo multiplican por el nuevo valor pedido y le suman el valor inicial que posee el resorte como elongación al no tener peso.
E5: Dividimos 2,6:15 y 15:2 y daa 138,9	Los estudiantes llegan al valor esperado, pero no se entiende el proceder realizado por los estudiantes.
E6: 107,6	Los estudiantes no logran llegar al resultado esperado, al no describir el procedimiento no se sabe cómo obtuvieron el resultado. Al parecer intentaron utilizar el mismo procedimiento que en su respuesta anterior; sin embargo esta vez no sumar 55, sino 45.
12. ¿Podrían dar una expresión general para comunicar esto? a) Expliquen muy bien como construyeron la expresión algebraica. b) Predigan la elongación del resorte si se colocan 100 gramos utilizando la expresión algebraica. c) Comparen la elongación obtenida, con el valor que indica la tabla. d) ¿Qué concluyen de la comparación?	
E1: Si (P gr*1,5)+45 a.- cuando calcule la elasticidad en 1 en 1 b.- (100*1,5)+45= 150+45=195 c.- Son las mismas. d.- Que la operación aplicada para sacar los valores de la tabla fue la misma que la mia.	Los estudiantes logran llegar a una expresión general que da respuesta a la situación expuesta, lograron llegar a la expresión luego de haber encontrado la relación peso/elongación en su unidad. Al momento de utilizar la expresión general con algún peso específico que estuviera en la tabla para poder comprar. Respecto a la respuesta dada en el punto d, llama la atención que no da cabida a que exista otra expresión con la cual se pueda modelar la situación dada.

E2: gr *1,5 = 45 = elongación E-45:1,5= gramos a) Ya que cada 1 gr equivale a 1,5 mm de elongación y la tabla al partir del 45 le agregamos 45 b) 100 * 1,5 + 45 = 195 c) x d) Concluimos que los valores en comparación a la tabla son iguales.	Los estudiantes logran llegar a una expresión general que da respuesta a la situación expuesta, de la cual además sacan la variante en caso que se entregue la elongación y se pidan los gramos como incógnita. Para lograr encontrar la expresión encontraron la unidad, vale decir encontraron la variación de elongación que obtendría el resorte al aplicarse un gramo de peso. Sin olvidar la elongación en estado de inercia del resorte. Al aplicar la formula y comparar los resultados, se dan cuenta que la expresión funciona al obtener los mismos datos que la tabla proporciona.
E3: Mientras más peso tenga más abajo va a estar y a menos peso más arriba estará. 1.5 * 100 + 45 450 + 45 195	Los estudiantes logran encontrar una expresión para dar respuesta a la pregunta, pero no explican el como la obtuvieron, si se logra advertir que entienden el fenómeno que se aplica al resorte, que a mayor peso más abajo estará la flecha, por ende mayor elongación y a menor peso aplicado estará más arriba por lo tanto menor elongación. Al parecer los estudiantes no comparan el resultado obtenido con los entregados en la tabla al no escribirlo en su respuesta.
E4: a) Multiplico la elongación de 1 gramos la cual es=1,5 con los gramos que se dan y luego le sumo la elongación de 0 la que es 45 para sacar la elongación de este. b) La elongación seria de 195 milimetros c) Los 2 resultados dan el mismo digito. d) Que la expresión algebraica esta bien hecha porque da el mismo resultado de la tabla.	Los estudiantes se centran en responder los ítems a,b,c y d, sin responder la pregunta; sin embargo se aprecia que saben y entienden la expresión algebraica obtenida. La cual obtuvieron utilizando la estrategia de encontrar la elongación del resorte al ser sometido a 1 gramo de peso, es decir, encontraron el valor de la unidad. Además fueron capaces de darse cuenta de la elongación que posee el resorte en su estado inicial, o sea al momento de no ser sometido a algún peso. Hacen un uso correcto de la expresión que obtuvieron al ver que cuando comparan con el resultado de la tabla es el mismo valor. (a tener en cuenta, los estudiantes aprovechan el hecho a raíz de la comparativa “Que la expresión algebraica está bien hecha porque da el mismo resultado de la tabla.” Si bien es cierto para este ejercicio es correcto, podría traer ideas erróneas a futuro que al comparar 1 resultado o una cantidad finita generalizar algo que no se cumpla siempre).
E5: a) 10:15=1=1,5+ b) 100+1,5=150+45= c) La misma d) Tenemos el procedimiento bueno.	No responden la pregunta, los estudiantes de alguna manera poseen el valor 1,5 que es la razón existente entre peso y elongación, no se entiende el proceder que hacen los estudiantes (nos podemos aventurar a decir que en realidad realizaron la división de 15:10=1,5 y que el “1=1,5” quiere decir que por cada 1 gramo de peso la elongación es de 1,5mm y que en lugar de una suma es una multiplicación lo que querían poner en la pregunta b o sea 100*1,5 y así obtener los 150 y luego le suman los 45 de elongación que posee el resorte sin poseer peso alguno) No escriben el valor final que es 195 que es el valor deseado, solo dejan la suma expresada. Aseguran que su proceder es bueno; sin embargo no se entienden del todo su proceder, no dan los suficientes indicios para saber a ciencia cierta lo que hacen.
E6:	No responden
13. ¿Qué elongación alcanzará el resorte si se colocan 18.45 gramos? Escriban su respuesta y expliquen con sus propias palabras cada uno de los procedimientos que ocuparon para determinar la elongación con 18.45 gramos. Ingrésenlo en la tabla.	

E1: 18,45 * 1,5= 27,675+45=72,675	Los estudiantes se limitan a utilizar la expresión encontrada para dar solución a la pregunta de la cual solo se centran en encontrar el valor numérico, sin utilizar las unidades de medidas ni entrar en detalles de su proceder. Calculan pero no analizan su desarrollo.
E2: 18,45 * 1,5 + 45= 72,675 Usamos la expresión gr * 1,5 + 45 = elongación.	Los estudiantes utilizan la expresión encontrada para dar solución a la pregunta, si bien no utilizan la unidad de medida en su justificación queda claro que los estudiantes saben que el valor encontrado se refiere a la elongación del resorte.
E3: 1.5 * 18.45 + 45 27,675 + 45 72,675	Los estudiantes se limitan a utilizar la expresión encontrada para dar solución a la pregunta de la cual solo se centran en encontrar el valor numérico, sin utilizar las unidades de medidas ni entrar en detalles de su proceder. Calculan pero no analizan su desarrollo.
E4 :20->7.5 18.45->x = (18.45*7.5):20=	Los estudiantes no logran llegar a la respuesta deseada, intentar utilizar la estrategia de regla de 3 la cual no es la adecuada para esta situación. A señalar que los estudiantes solo tratan de obtener el valor numérico, sin hacer referencia a la unidad de medida o que el valor a obtenerse propicia la elongación del resorte.
E5:72,6 18.45*1,5=745	Los estudiantes redondean el resultado obtenido mediante la fórmula, solo ponen “72,6” en lugar de poner 72,675. Solo se centran en encontrar el valor numérico sin utilizar la unidad de medida no hacer referencia que el valor a obtener tiene relación con la elongación del resorte.
E6:	No responden
14. ¿Qué elongación alcanzará el resorte si se colocan 125.9 gramos? Escriban su respuesta y expliquen con sus propias palabras cada uno de los procedimientos que ocuparon para determinar la elongación con 125.9 gramos. Ingrésenlo en la tabla.	
E1: 125,9 * 1,5 = 188,85 + 45 = 233,9	Los estudiantes se limitan a utilizar la expresión encontrada para dar solución a la pregunta de la cual solo se centran en encontrar el valor numérico, sin utilizar las unidades de medidas ni entrar en detalles de su proceder. Calculan pero no analizan su desarrollo.
E2: 125,9* 1,5 +45=233,85 Usamos la expresión gr * 1,5 + 45 = elongación.	Los estudiantes utilizan la expresión encontrada para dar solución a la pregunta, si bien no utilizan la unidad de medida en su justificación queda claro que los estudiantes saben que el valor encontrado se refiere a la elongación del resorte.
E3: 1.5 * 125.9 + 45 188,85 + 45 233,85	Los estudiantes se limitan a utilizar la expresión encontrada para dar solución a la pregunta de la cual solo se centran en encontrar el valor numérico, sin utilizar las unidades de medidas ni entrar en detalles de su proceder. Calculan pero no analizan su desarrollo.
E4:	No responden
E5: 222,85	Los estudiantes solo entregan un valor numérico, aparentemente se equivocaron en sumar algo, pero a ciencia cierta no se puede decir puesto que no escribieron su proceder ni la estrategia utilizada para poder sacar unas conclusiones claras del error que pudieron cometer. Además hay que mencionar que no utilizan la unidad de medida correspondiente ni que el valor hace referencia a la elongación del resorte.
E6:	No responden
15. Ahora que tenemos la expresión algebraica, ¿Qué pasará si el coeficiente de la variable disminuye? ¿Qué ocurrirá con la elongación del resorte? ¿Por qué?	

E1: también disminuirá, porque son directamente proporcionales.	Los estudiantes entienden la naturaleza del fenómeno y llegan a una buena conjetura, pero no es claro que entiendan el real significado del término que utilizaron “directamente proporcionales”, si bien se trata efectivamente de una relación directa, no podemos afirmar que los estudiantes vean que es una proporción directa por que la relación de razón existente (peso/elongación) no varía, y a medida que una de las variables disminuye, la otra también. O si solo se centraron en el hecho que si una de las variables disminuye la otra también sin tomar en cuenta la invariabilidad de la razón presente.
E2: la elongacion bajara porque a menos peso menos presión ejercida hacía abajo o sea son directamente proporcionales.	Los estudiantes entienden la naturaleza del fenómeno y llegan a una buena conjetura, pero no es claro que entiendan el real significado del término que utilizaron “directamente proporcionales”, si bien se trata efectivamente de una relación directa, no podemos afirmar que los estudiantes vean que es una proporción directa por que la relación de razón existente (peso/elongación) no varía, y a medida que una de las variables disminuye, la otra también. O si solo se centraron en el hecho que si una de las variables disminuye la otra también sin tomar en cuenta la invariabilidad de la razón presente
E3: el resorte disminuye su elongación.	Los estudiantes logran articular los datos proporcionado en la tabla con el fenómeno que ocurrente, vale decir logran dar cuenta que a menos peso aplicado al resorte, menor será la elongación que éste exhiba.
E4:	No responden
E5: (no se lee bien)	Al no poder leerse bien su respuesta, hace imposible poder hacer un análisis de lo escrito.
E6:	No responden
16. Ahora que tenemos la expresión algebraica, ¿Qué pasará si el coeficiente de la variable aumenta? ¿Qué ocurrirá con la elongación del resorte? ¿Por qué?	
E1: también aumentara, porque son directamente proporcionales.	Los estudiantes entienden la naturaleza del fenómeno y llegan a una buena conjetura, pero no es claro que entiendan el real significado del término que utilizaron “directamente proporcionales”, si bien se trata efectivamente de una relación directa, no podemos afirmar que los estudiantes vean que es una proporción directa por que la relación de razón existente (peso/elongación) no varía, y a medida que una de las variables aumenta, la otra también. O si solo se centraron en el hecho que si una de las variables aumenta la otra también sin tomar en cuenta la invariabilidad de la razón presente.
E2: la elongación aumentara porque mientras más peso, más presión ejercida hacia abajo, o sea son directamente proporcionales.	Los estudiantes entienden la naturaleza del fenómeno y llegan a una buena conjetura, pero no es claro que entiendan el real significado del término que utilizaron “directamente proporcionales”, si bien se trata efectivamente de una relación directa, no podemos afirmar que los estudiantes vean que es una proporción directa por que la relación de razón existente (peso/elongación) no varía, y a medida que una de las variables aumenta, la otra también. O si solo se centraron en el hecho que si una de las variables aumenta la otra también sin tomar en cuenta la invariabilidad de la razón presente.
E3: la elasticidad del resorte es mas	Los estudiantes logran articular los datos proporcionado en la tabla con el fenómeno que ocurrente, vale decir logran dar cuenta que a mayor peso aplicado al resorte, mayor será la elongación que este exhiba.
E4:	No responden
E5:	No responden

E6	No responden
17. Describan cómo se comportó la elasticidad del resorte en este experimento.	
E1: era directamente proporcional con el peso Siempre seguían una secuencia.	Los estudiantes se dan cuenta de manera correcta que la actividad presenta un fenómeno proporcionalmente directo, pero no de una manera del todo acertada, dado que solo utilizan el hecho que si una de las variables aumenta la otra también; sin embargo cuando hacen este análisis no toman en cuenta que la razón es invariante, olvidando el valor 1,5 que es la relación peso/elongación (la razón). Solo hacen uso de los valores que van obteniendo las variables. Cuando hablan de "Siempre seguían una secuencia." Muy probablemente hacen referencia que para obtener las cantidades requeridas a lo largo de la actividad utilizaban la misma expresión.
E2: se comporto directamente proporcional en relación con el peso ejercido sobre este, mientras uno suba el otro también lo hara.	Los estudiantes se dan cuenta de manera correcta que la actividad presenta un fenómeno proporcionalmente directo, pero no de una manera del todo acertada, dado que solo utilizan el hecho que si una de las variables aumenta la otra también; sin embargo cuando hacen este análisis no toman en cuenta que la razón es invariante, olvidando el valor 1,5 que es la relación peso/elongación (la razón). Solo hacen uso de los valores que van obteniendo las variables.
E3: el resorte al ponerle mas peso se estiraba mas y al sacarle peso disminuiría el resorte.	Los estudiantes haciendo uso de los valores que van obteniendo las variables logran darse cuenta del fenómeno que enmarca al resorte de manera superficial, no entrando en si las cantidades variaban de manera proporcional, tampoco usando la razón existente entre la elongación con el peso, simplemente observando que si uno aumentaba el otro también y lo mismo cuando las cantidades disminuían.
E4:	No responden
E5:	No responden
E6:	No responden

Anexo 3. Secuencia de Aprendizaje “El dulzor”

SECUENCIA DE APRENDIZAJE “El dulzor”

NOMBRES:______________________CURSO:______COLEGIO:________

Etapa 1

1. Tienen cinco vasos con mezclas de agua y endulzante en distintas cantidades. Elijan uno de ellos, al que llamaremos Vaso Referente, para comparar su dulzor con los demás. Cada integrante del equipo pruebe el dulzor del vaso elegido. Luego pinten el color del Vaso Referente en la huincha “Dulzor Saboreado”.

Dulzor saboreado					VR				

2. Prueben los cuatro vasos restantes y compárenlos con el Vaso Referente. Los **más dulces** pónganlos al lado **derecho** y los **menos dulces** pónganlos al lado **izquierdo**. Pinten la situación actual de los vasos en la huincha “Dulzor Saboreado”.

	Menos Dulce					Más Dulce			
Dulzor saboreado					VR				

3. Ordenen de **menor** a **mayor** según su dulzura, comparando los vasos que resultaron **Menos Dulce**. Dibujen y pinten cada comparación que utilizaron para encontrar el orden.

4. Ordenen de **menor** a **mayor** según su dulzura, comparando los vasos que resultaron **Más Dulce**. Dibujen y pinten cada comparación que utilizaron para encontrar el orden.

5. Pinten en la huincha “Dulzor Saboreado” de **Menos Dulce a Más Dulce** los cuatro vasos previamente ordenados.

Dulzor saboreado					VR				

Etapa 2

Prueben el dulzor de la muestra testigo entregada y respondan la siguiente pregunta:

¿Cuál de los cinco dulzores, es igual al dulzor de la muestra testigo?

Etapa 3

Vamos a replicar el dulzor de la muestra testigo. Para ello, cada equipo tiene tres intentos que deben anotar en la siguiente tabla:

Intentos	Cantidad de cucharadas de agua	Cantidad de gotas de endulzante	**Cantidad de cucharadas de agua es a cantidad de gotas de endulzante**	**O cantidad de volúmenes de agua : cantidad de volúmenes de endulzante**
			ES A	:
			ES A	:
			ES A	:

Como catadores ¿sus razones de dulzores fueron más o menos dulces que la muestra testigo? Argumenten respecto a las razones de dulzores planteadas por ustedes.

Anexo 4. Protocolo oral para la réplica en equipo de la Secuencia de Aprendizaje “El dulzor”

Etapa 1

Primero: Se nombran los materiales dispuestos para cada equipo

5 vasos de distintos colores (morado, rojo, negro, naranjo y rosado) de 250 cc que contienen mezclas de agua y endulzante.

1 huincha “Vasos por probar”.

1 círculo “Vaso Referente”.

1 huincha “Menos Dulce”.

1 huincha “Más dulce”.

1 huincha “Ordenar de menos dulce a menos dulce”.

3 Paletas para revolver café.

Toalla de papel (para uso auxiliar)

Segundo: Explicación del procedimiento para realizar la primera etapa de la secuencia

1. Las mezclas de los cinco vasos tienen una cantidad desconocida de cucharadas de azúcar y de gotas de endulzantes.
2. Los equipos deben poner los cinco vasos en la huincha “vasos por probar”, seleccionar uno de ellos como vaso referente que ubicarán en el círculo establecido y colorearlo en la “secuencia de aprendizaje” (Ver Anexo 4)
3. Los estudiantes de cada equipo deberán ir comparando los cuatro vasos restantes con el vaso referente e ir ubicándolos en la huincha “menos dulce” si corresponde o en la huincha “más dulce” si es el caso. Deberán responder coloreando en la “secuencia de aprendizaje” (Ver Anexo 4).
4. Deberán ordenar de manera ascendente según su dulzura en la huincha resultante “menos dulce”. Enfatiza que escriban o dibujen en la “secuencia de aprendizaje” (Ver anexo 4) las comparaciones realizadas.
5. Deberán ordenar de manera ascendente según su dulzura la huincha resultante “más dulce”. Enfatiza que escriban o dibujen en la “secuencia de aprendizaje” (Ver anexo 4) las comparaciones realizadas.
6. Los equipos deben colorear el orden final resultante.

Etapa 2 y 3

Primero: Se nombran los materiales dispuestos para cada equipo

1 vaso transparente de 500 cc que contiene la muestra testigo.

3 vasos transparentes de 500 cc para replicar muestra testigo.

1 vaso transparente de 500 cc que contiene agua.

1 vaso blanco de 240 cc que contiene endulzante.

1 gotario.

1 cuchara de metal (tamaño sopera).

3 Paletas para revolver café.

Toalla de papel (para uso auxiliar).

Segundo: Explicación del procedimiento para realizar la segunda y tercera etapa de la secuencia

1. La muestra testigo entregada tiene una cantidad desconocida de cucharadas de agua y gotas de azúcar.
2. Los estudiantes de cada equipo deberán probar la muestra testigo con los 5 vasos ya ordenados y deberán descubrir cuál posee el mismo dulzor. Deben responder en la "secuencia de aprendizaje" (Ver Anexo 4)
3. Deben replicar la muestra testigo entregada en los tres vasos transparentes, para ello utilizarán la cuchara para el agua y el gotario para el endulzante. Enfatiza que tienen tres intentos y por ello los tres vasos.
4. Los equipos deben escribir las cantidades de cada intento en la tabla de la "secuencia de aprendizaje" (Ver Anexo 4).
5. Se revela a los estudiantes las cantidades de cucharadas de agua y las cantidades de gotas de endulzante de la muestra testigo.
6. A los estudiantes se les hace preguntas del tipo: Si quisiéramos replicar la mitad de la mezcla del vaso testigo (manteniendo su dulzor) ¿cuáles serían las cantidades de cucharadas de agua y las cantidades de gotas de endulzante? y ¿Si quisiéramos hacer el doble de la mezcla? Si quisiéramos hacer una mezcla con la mitad del dulzor que la muestra del vaso testigo ¿cuáles serían las cantidades de magnitudes de cucharadas de agua y las cantidades de magnitudes de gotas de endulzante? y ¿si quisiéramos un

cuarto de dulzor? Si quisiéramos hacer una mezcla con el doble de dulzor que la muestra del vaso testigo ¿cuáles serían las cantidades de magnitudes de cucharadas de agua y las cantidades de magnitudes de gotas de endulzante? y ¿si quisiéramos cuádruple de su dulzor?

Tercero: Institucionalización de la razón matemática presente en la actividad.

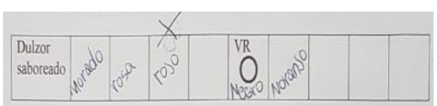
1. Una vez recolectados los resultados de los equipos, se les revela las cantidades de la muestra testigo y las porciones equivalentes a ésta.
2. Se les pregunta a los equipos si alguno logró obtener las cantidades expuestas en la pizarra con el objetivo de construir la razón matemática (agua-endulzante) en conjunto.
3. Se les pregunta a los equipos cómo les fue catando dulzores, si más o menos dulces respecto a la muestra testigo.
4. Se les pregunta si recuerdan haber visto las nomenclaturas utilizadas en la tabla de la "secuencia de aprendizaje" donde debían expresar las cantidades de magnitudes de agua y endulzante, con el fin que los estudiantes recuerden la razón matemática, y así institucionalizar el concepto.

Anexo 5. Desarrollo y análisis en equipo de la Secuencia de Aprendizaje “El dulzor”

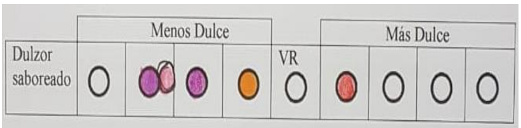
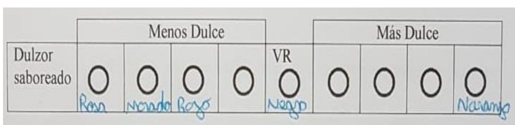
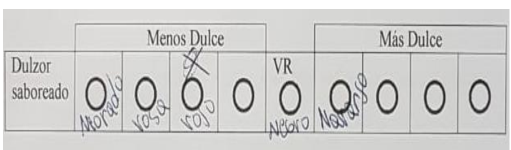
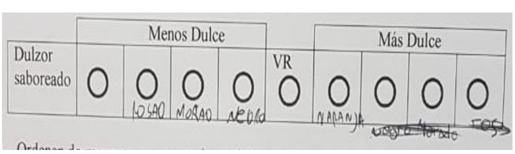
Etapa 1

Reactivo 1: Tienen cinco vasos con mezclas de agua y endulzante en distintas cantidades. Elijan uno de ellos, al que llamaremos Vaso Referente, para comparar su dulzor con los demás. Cada integrante del equipo pruebe el dulzor del vaso elegido. Luego pinten el color del Vaso Referente en la huincha “Dulzor Saboreado”.

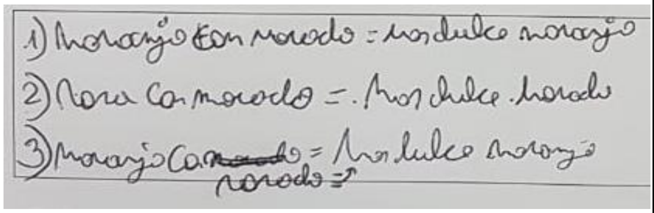
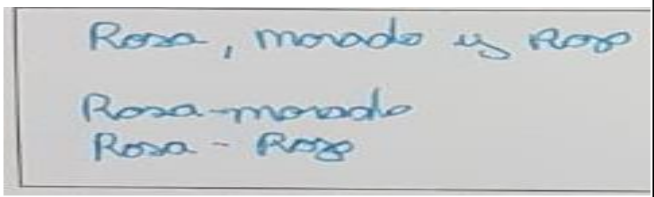
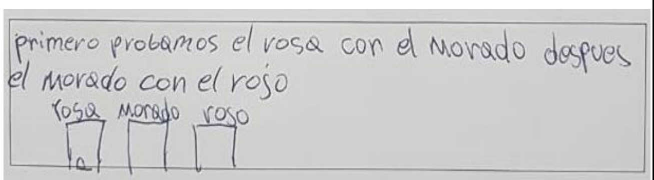
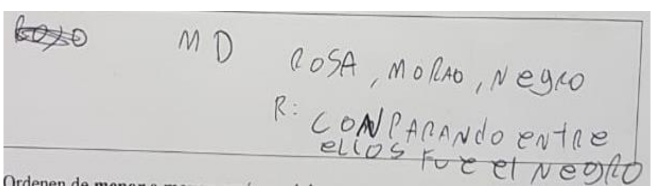
<table>
<tr><th>E</th><th>Evidencia</th><th>Descripción de la Inducción</th></tr>
<tr><td>E1</td><td>
</td><td rowspan="5">Se entrega a cada equipo la secuencia con las instrucciones y las huinchas en las cuales se posarán los vasos durante las fases del experimento con el orden de distribución que tendrán en la mesa. Una vez distribuidas las huinchas sobre la mesa, se provee a los estudiantes de sin un orden especifico los vasos con las mezclas de agua con azúcar. Los estudiantes no poseen conocimiento de las cantidades mezcladas. Finalmente se pide a los estudiantes que escojan un vaso al azar el cual lo utilizaran como vaso referente.

</td></tr>
<tr><td>E2</td><td>
</td></tr>
<tr><td>E3</td><td>
</td></tr>
<tr><td>E4</td><td>
</td></tr>
<tr><td>E5</td><td>
</td></tr>
</table>

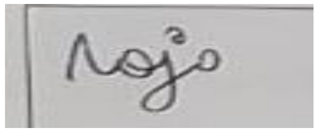
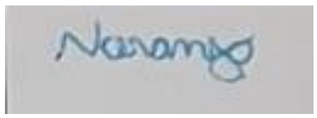
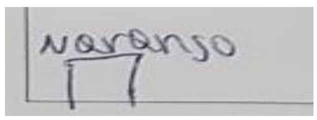
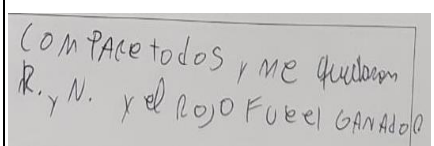
Reactivo 2: Prueben los cuatro vasos restantes y compárenlos con el Vaso Referente. Los más dulces pónganlos al lado derecho y los menos dulces pónganlos al lado izquierdo. Pinten la situación actual de los vasos en la huincha “Dulzor Saboreado”.

<table>
<tr><th>E</th><th>Evidencia</th><th>Cuantificación intensiva referente</th><th>Análisis</th></tr>
<tr><td>E1</td><td>
</td><td rowspan="5"><table>
<tr><th>Dulzor saboreado</th><th>Valor por construcción</th></tr>
<tr><td></td><td>10 c.a es a 2 c.g.e</td></tr>
<tr><td></td><td>10 c.a es a 4 c.g.e</td></tr>
<tr><td></td><td>10 c.a es a 6 c.g.e</td></tr>
<tr><td></td><td>10 c.a es a 8 c.g.e</td></tr>
<tr><td></td><td>10 c.a es a 10 c.g.e</td></tr>
</table>
c.a= Cantidad de cucharas de agua
c.g.e= Cantidades de Gotas de endulzante</td><td>El equipo, mediante cuantificaciones intensivas por medio del gusto, es completamente capaz de discernir que mezclas son menos dulces comparadas con el vaso referente seleccionado y cuales son más dulces.</td></tr>
<tr><td>E2</td><td>
</td><td>El equipo, mediante cuantificaciones intensivas por medio del gusto, es medianamente capaz de discernir que mezclas son menos dulces comparadas con el vaso referente seleccionado y cuales son más dulces.</td></tr>
<tr><td>E3</td><td>
</td><td>El equipo, mediante cuantificaciones intensivas por medio del gusto, es medianamente capaz de discernir que mezclas son menos dulces comparadas con el vaso referente seleccionado y cuales son más dulces.</td></tr>
<tr><td>E4</td><td>
</td><td>El equipo, mediante cuantificaciones intensivas por medio del gusto, es medianamente capaz de discernir que mezclas son menos dulces comparadas con el vaso referente seleccionado y cuales son más dulces.</td></tr>
<tr><td>E5</td><td>
</td><td>El equipo, mediante cuantificaciones intensivas por medio del gusto, no es capaz de discernir que mezclas son menos dulces comparadas con el vaso referente seleccionado y cuales son más dulces.</td></tr>
</table>

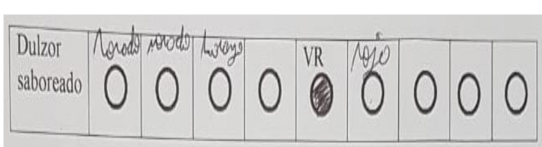
Reactivo 3: Ordenen de menor a mayor según su dulzura, comparando los vasos que resultaron Menos Dulce. Dibujen y pinten cada comparación que utilizaron para encontrar el orden.

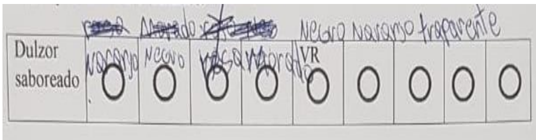
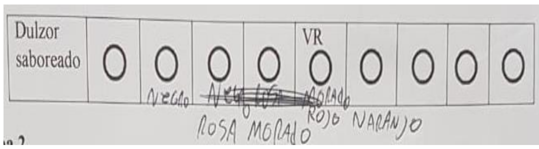
E	Transcripción	Evidencia	Análisis
E1	1)Naranjo con morado = mas dulce naranjo 2)Rosa con morado = mas dulce morado 3)Naranjo con rosado= mas dulce naranjo		El equipo compara de a dos vasos y según sus cuantificaciones intensivas disciernen cual es más o menos dulce.
E2	Rosa, morado y rojo Rosa-morado Rosa-Rojo		El equipo compara de a dos vasos y según sus cuantificaciones intensivas disciernen cual es más o menos dulce.
E3	Primero probamos el rosa con el morado despues el morado con el rojo		El equipo compara de a dos vasos y según sus cuantificaciones intensivas disciernen cual es más o menos dulce.
E4	M D Rosa, morado, negro R: Conparando entre ellos fue el negro		El equipo compara de a dos vasos y según sus cuantificaciones intensivas disciernen cual es más o menos dulce.
E5			El equipo compara los dos vasos resultantes según sus cuantificaciones intensivas en la huincha "menos dulce" para determinar cuál es más o menos dulce.

Reactivo 4: Ordenen de menor a mayor según su dulzura, comparando los vasos que resultaron Más Dulce. Dibujen y pinten cada comparación que utilizaron para encontrar el orden.

E	Transcripción	Evidencia	Análisis
E1	Rojo		Como resultado de la elección del vaso referente y las cuantificaciones intensivas realizadas en las preguntas anteriores, el equipo solo posee un vaso en la hincha “más dulce”, por lo que no deben efectuar ningún tipo de comparación.
E2	Naranjo		Como resultado de la elección del vaso referente y las cuantificaciones intensivas realizadas en las preguntas anteriores, el equipo solo posee un vaso en la hincha “más dulce”, por lo que no deben efectuar ningún tipo de comparación.
E3	Naranjo		Como resultado de la elección del vaso referente y las cuantificaciones intensivas realizadas en las preguntas anteriores, el equipo solo posee un vaso en la hincha “más dulce”, por lo que no deben efectuar ningún tipo de comparación.
E4	Comparando todos, me quedaron R. y N, y el rojo fue el ganador		Como resultado de la elección del vaso referente y las cuantificaciones intensivas realizadas en las preguntas anteriores, el equipo solo posee un vaso en la hincha “más dulce”, por lo que no deben efectuar ningún tipo de comparación; Sin embargo se olvidan de colocarlo y hacen alusión a quienes resultaron menos dulces que el vaso referente.
E5			Como resultado de la elección del vaso referente y las cuantificaciones intensivas realizadas en las preguntas anteriores, el equipo en la hincha “más dulce”, debió realizar solo una comparación entre dos vasos para discernir el orden correspondiente.

Reactivo 5: Pinten en la huincha “Dulzor Saboreado” de Menos Dulce a Más Dulce los cuatro vasos previamente ordenados.

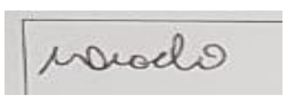
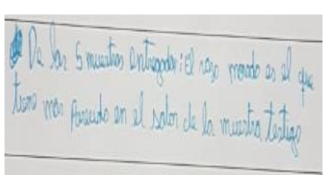
E	Evidencia	Análisis
E1		El quipo mediante las comparaciones de cuantificaciones intensivas, obtiene el orden ascendente de las mezclas establecido por los docentes.
E2		El quipo mediante las comparaciones de cuantificaciones intensivas, ordena algunos de los vasos según sus mezclas establecido por los docentes. Se cree que la variación presentada por los estudiantes podría ser que no son buenos catadores de dulzor, o bien que no se tomaron con seriedad la secuencia o transcribieron de

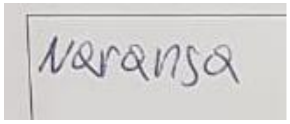
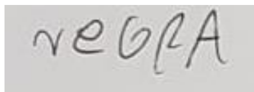
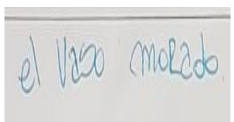
		manera errada el orden obtenido.
E3		El quipo mediante las comparaciones de cuantificaciones intensivas, ordena algunos de los vasos según sus mezclas establecido por los docentes. Se cree que la variación presentada por los estudiantes podría ser que no son buenos catadores de dulzor, o bien que no se tomaron con seriedad la secuencia o transcribieron de manera errada el orden obtenido.
E4		El quipo mediante las comparaciones de cuantificaciones intensivas, ordena algunos de los vasos según sus mezclas establecido por los docentes. Se cree que la variación presentada por los estudiantes podría ser que no son buenos catadores de dulzor, o bien que no se tomaron con seriedad la secuencia o transcribieron de manera errada el orden obtenido.
E5		El quipo mediante las comparaciones de cuantificaciones intensivas, ordena algunos de los vasos según sus mezclas establecido por los docentes. Se cree que la variación presentada por los estudiantes podría ser que no son buenos catadores de dulzor, o bien que no se tomaron con seriedad la secuencia o transcribieron de manera errada el orden obtenido.

Etapa 2

Reactivo 1: Prueben el dulzor de la muestra testigo entregada y respondan la siguiente pregunta:

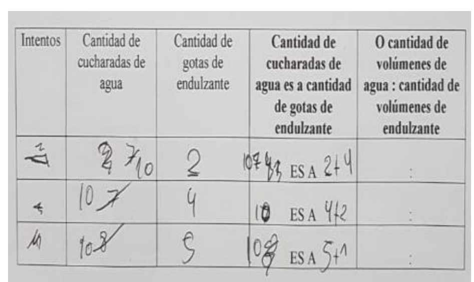
¿Cuál de los cinco dulzores, es igual al dulzor de la muestra testigo?

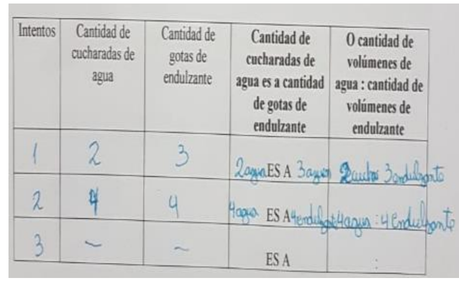
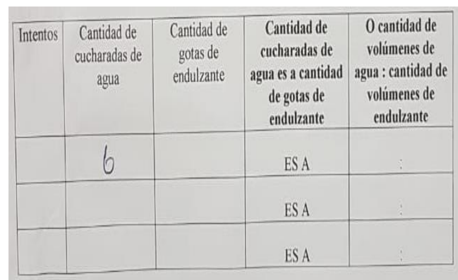
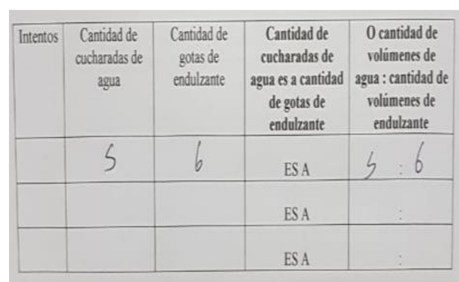
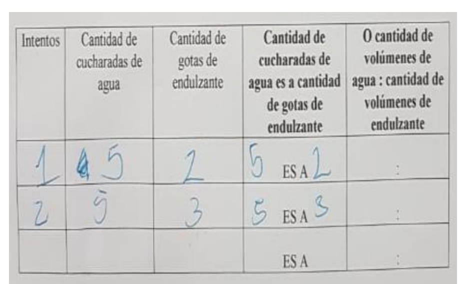
<table>
<tr><th>E</th><th>Transcripción</th><th>Evidencia</th><th>Descripción y cuantificación</th><th>Análisis</th></tr>
<tr><td>E1</td><td>Morado</td><td></td><td rowspan="2">
<table>
<tr><th>Dulzor saboreado</th><th>Valor por construcción</th><th>Muestra testigo</th></tr>
<tr><td></td><td>10 c.a es a 2 g.e</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>10 c.a es a 4 g.e</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>10 c.a es a 6 g.e</td><td>○</td></tr>
<tr><td></td><td>10 c.a es a 8 g.e</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>10 c.a es a 10 g.e</td><td></td></tr>
</table>
c.a= Cucharadas de agua
g.e= Gotas de endulzante</td><td>Mediante las comparaciones de cuantificaciones intensivas, el equipo muestra una gran cercanía en su elección.</td></tr>
<tr><td>E2</td><td>De las 5 muestras entregadas: El vazo morado es el que tiene mas parecido en el sabor de la muestra testigo</td><td></td><td>Mediante las comparaciones de cuantificaciones intensivas, el equipo muestra una gran cercanía en su elección.</td></tr>
</table>

E3	Naranjo	 	En esta etapa, los equipos mediante cuantificaciones intensivas, deberán comparar el vaso testigo que se les entrega, con los vasos ordenados de menos dulce a más dulce (al finalizar la etapa 1 se dio a los equipos el orden correspondiente sin especificar las cantidades de agua y endulzante que éstos poseen). Deben discernir cuál de éstos posee el mismo dulzor que el nuevo vaso entregado. De esta manera los equipos comparan mezclas establecidas a modo de preparación para la siguiente etapa en donde ellos deben preparar las mezclas y recrear la muestra testigo.	Mediante las comparaciones de cuantificaciones intensivas, el equipo muestra una correcta elección.
E4	Negra	 		Mediante las comparaciones de cuantificaciones intensivas, el equipo muestra una gran cercanía en su elección.
E5	El vaso morado	 		Mediante las comparaciones de cuantificaciones intensivas, el equipo muestra una gran cercanía en su elección.

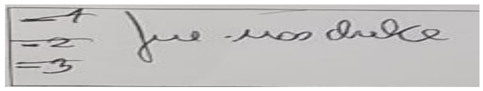
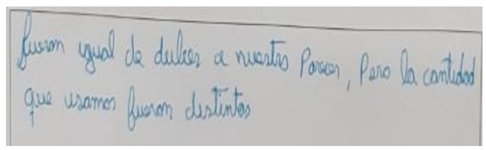
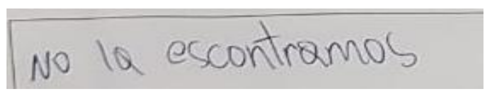
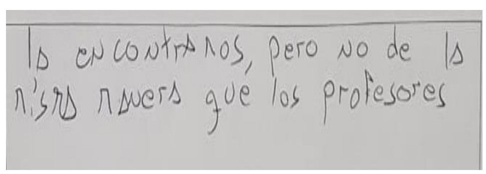
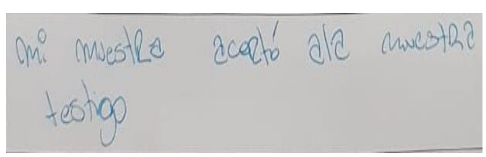
Etapa 3

Reactivo 1: Vamos a replicar el dulzor de la muestra testigo. Para ello, cada equipo tiene tres intentos que deben anotar en la siguiente tabla:

<table>
<tr><th>E</th><th>Transcripción</th><th>Evidencia</th><th>Análisis</th></tr>
<tr><td>E1</td><td>
<table>
<tr><th>Intentos</th><th>Cucharadas de agua</th><th>Cantidad de gotas de endulzante</th><th>Cucharadas de agua ES A gotas de endulzante</th></tr>
<tr><td>1</td><td>10</td><td>3</td><td>10 ES A 2+4</td></tr>
<tr><td>2</td><td>10</td><td>4</td><td>10 ES A 4+2</td></tr>
<tr><td>3</td><td>10</td><td>5</td><td>10 ES A 5+1</td></tr>
</table>
</td><td>

<table>
<tr><th>Intentos</th><th>Cantidad de cucharadas de agua</th><th>Cantidad de gotas de endulzante</th><th>Cantidad de cucharadas de agua es a cantidad de gotas de endulzante</th><th>O cantidad de volúmenes de agua : cantidad de volúmenes de endulzante</th></tr>
<tr><td>[illegible]</td><td>8 7 10</td><td>2</td><td>10 ES A 2+4</td><td>:</td></tr>
<tr><td>[illegible]</td><td>10 7</td><td>4</td><td>10 ES A 4+2</td><td>:</td></tr>
<tr><td>[illegible]</td><td>10 8</td><td>5</td><td>10 ES A 5+1</td><td>:</td></tr>
</table>
</td><td>El equipo en sus producciones, mediante cuantificaciones intensivas y cuantificaciones cuantitativas, obtiene una mezcla cercana a la entregada en la muestra testigo.</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>E
2</td>
<td>
<table>
<tr><th>Intentos</th><th>Cucharadas de agua</th><th>Cantidad de gotas de endulzante</th><th>Cucharadas de agua ES A gotas de endulzante</th></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>2 ES A 3</td></tr>
<tr><td>2</td><td>4</td><td>4</td><td>4 ES A 4</td></tr>
<tr><td>3</td><td>-</td><td>-</td><td>ES A</td></tr>
</table>
</td>
<td>

<table>
<tr><th>Intentos</th><th>Cantidad de cucharadas de agua</th><th>Cantidad de gotas de endulzante</th><th>Cantidad de cucharadas de agua es a cantidad de gotas de endulzante</th><th>O cantidad de volúmenes de agua : cantidad de volúmenes de endulzante</th></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>2agua ES A 3agua</td><td>2agua 3endulzante</td></tr>
<tr><td>2</td><td>4</td><td>4</td><td>4agua ES A 4endulzante</td><td>4agua : 4endulzante</td></tr>
<tr><td>3</td><td>~</td><td>~</td><td>ES A</td><td>:</td></tr>
</table>
</td>
<td>El equipo en sus producciones, mediante cuantificaciones intensivas y cuantificaciones cuantitativas obtiene unas mezclas lejanas a la entregada en la muestra testigo.</td>
</tr>
<tr>
<td>E
3</td>
<td>
<table>
<tr><th>Intentos</th><th>Cucharadas de agua</th><th>Cantidad de gotas de endulzante</th><th>Cucharadas de agua ES A gotas de endulzante</th></tr>
<tr><td></td><td>6</td><td></td><td>ES A</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>ES A</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>ES A</td></tr>
</table>
</td>
<td>

<table>
<tr><th>Intentos</th><th>Cantidad de cucharadas de agua</th><th>Cantidad de gotas de endulzante</th><th>Cantidad de cucharadas de agua es a cantidad de gotas de endulzante</th><th>O cantidad de volúmenes de agua : cantidad de volúmenes de endulzante</th></tr>
<tr><td></td><td>6</td><td></td><td>ES A</td><td>:</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>ES A</td><td>:</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>ES A</td><td>:</td></tr>
</table>
</td>
<td>El equipo no transcribe los intentos realizados en sus producciones.</td>
</tr>
<tr>
<td>E
4</td>
<td>
<table>
<tr><th>Intentos</th><th>Cucharadas de agua</th><th>Cantidad de gotas de endulzante</th><th>Cucharadas de agua ES A gotas de endulzante</th></tr>
<tr><td></td><td>5</td><td>6</td><td>5 ES A 6</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>ES A</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>ES A</td></tr>
</table>
</td>
<td>

<table>
<tr><th>Intentos</th><th>Cantidad de cucharadas de agua</th><th>Cantidad de gotas de endulzante</th><th>Cantidad de cucharadas de agua es a cantidad de gotas de endulzante</th><th>O cantidad de volúmenes de agua : cantidad de volúmenes de endulzante</th></tr>
<tr><td></td><td>5</td><td>6</td><td>ES A</td><td>5 : 6</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>ES A</td><td>:</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>ES A</td><td>:</td></tr>
</table>
</td>
<td>El equipo en sus producciones, mediante cuantificaciones intensivas y cuantificaciones cuantitativas obtiene una mezcla lejana a la entregada en la muestra testigo.</td>
</tr>
<tr>
<td>E
5</td>
<td>
<table>
<tr><th>Intentos</th><th>Cucharadas de agua</th><th>Cantidad de gotas de endulzante</th><th>Cucharadas de agua ES A gotas de endulzante</th></tr>
<tr><td>1</td><td>5</td><td>2</td><td>5 ES A 2</td></tr>
<tr><td>2</td><td>5</td><td>3</td><td>5 ES A 3</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>ES A</td></tr>
</table>
</td>
<td>

<table>
<tr><th>Intentos</th><th>Cantidad de cucharadas de agua</th><th>Cantidad de gotas de endulzante</th><th>Cantidad de cucharadas de agua es a cantidad de gotas de endulzante</th><th>O cantidad de volúmenes de agua : cantidad de volúmenes de endulzante</th></tr>
<tr><td>1</td><td>5</td><td>2</td><td>5 ES A 2</td><td>:</td></tr>
<tr><td>2</td><td>5</td><td>3</td><td>5 ES A 3</td><td>:</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>ES A</td><td>:</td></tr>
</table>
</td>
<td>El equipo en sus producciones mediante, cuantificaciones intensivas y cuantificaciones cuantitativas replica el dulzor de la muestra testigo.</td>
</tr>
</table>

Reactivo 2: Como catadores ¿sus razones de dulzores fueron más o menos dulces que la muestra testigo? Argumenten respecto a las razones de dulzores planteadas por ustedes.

E	Transcripción	Evidencia	Análisis
E1	Fue mas dulce		Una vez develadas las cantidades de magnitudes de cucharadas de aguas y gotas de endulzante presentes en el vaso testigo y sus equivalencias, el equipo observa que sus producciones fueron más dulces.
E2	Fueron igual de dulces a nuestro parecer, pero la cantidad que usamos fueron distintas		Una vez develadas las cantidades de magnitudes de cucharadas de aguas y gotas de endulzante presentes en el vaso testigo y sus equivalencias, el equipo alude que su parecer que encontraron el dulzor; sin embargo no anotaron su último intento en la tabla adjuntada.
E3	No la encontramos		Una vez develadas las cantidades de magnitudes de cucharadas de aguas y gotas de endulzante presentes en el vaso testigo y sus equivalencias, el equipo observa que en sus producciones no lograron replicar el dulzor.
E4	La encontramos, pero no de la misma manera que los profesores		Una vez develadas las cantidades de magnitudes de cucharadas de aguas y gotas de endulzante presentes en el vaso testigo y sus equivalencias, el equipo alude que encontraron el dulzor; sin embargo no anotaron los otros dos intentos en la tabla adjuntada.
E5	Mi muestra acertó a la muestra testigo		Una vez develadas las cantidades de magnitudes de cucharadas de aguas y gotas de endulzante presentes en el vaso testigo y sus equivalencias, el equipo observa que una de sus producciones posee el mismo dulzor que la muestra testigo.

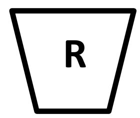
Anexo 6. Rediseño Secuencia de Aprendizaje “El dulzor”

SECUENCIA DE APRENDIZAJE “El dulzor”

NOMBRES:______________________CURSO:______COLEGIO:_________

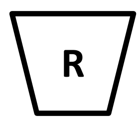
Etapa 1

1. Tienen cinco vasos con mezclas de agua y endulzante en distintas cantidades. Elijan uno de ellos, al que llamaremos Vaso Referente, para comparar su dulzor con los demás. Cada integrante del equipo pruebe el dulzor del vaso elegido. Luego pinten el color del “Vaso Referente”.



2. Prueben los cuatro vasos restantes y compárenlos con el “Vaso Referente”. Los **más dulces** pónganlos a su lado **derecho** y los **menos dulces** pónganlos a su lado **izquierdo**. Dibujen y pinten, o escriban la situación.

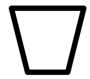
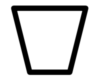
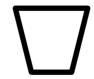
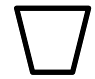
Menos dulces **Más dulces**



3. Comparando los vasos que resultaron **Menos Dulce**. Dibujen y pinten, o escriban cada comparación.

4. Comparando los vasos que resultaron **Más Dulce**. Dibujen y pinten, o escriban cada comparación.

5. Pinten en la huincha “Dulzor Saboreado” de **Menos Dulce a Más Dulce** los vasos saboreados.

Dulzor saboreado					

Etapa 2

1. Prueben el dulzor de la muestra testigo entregada y respondan la siguiente pregunta:
   ¿Cuál de los cinco dulzores, es igual al dulzor de la muestra testigo?

2. Vamos a replicar el dulzor de la muestra testigo. Para ello, cada equipo tiene tres intentos que deben anotar en la siguiente tabla:

Intentos	Cantidad de cucharadas de agua	Cantidad de gotas de endulzante	**Cantidad de cucharadas de agua es a cantidad de gotas de endulzante**	**O cantidad de volúmenes de agua : cantidad de volúmenes de endulzante**
			ES A	:
			ES A	:
			ES A	:

3. Ordene las razones matemáticas de sus réplicas me menos dulce a más dulce.

Etapa 3

1. Si quisiéramos replicar la mitad de la mezcla del vaso testigo (manteniendo su dulzor) ¿cuáles serían las cantidades de magnitudes de cucharadas de agua y las cantidades de magnitudes de gotas de endulzante?

Y ¿Si quisiéramos hacer el doble de la mezcla?

2. Si quisiéramos hacer una mezcla con la mitad del dulzor que la muestra del vaso testigo ¿cuáles serían las cantidades de magnitudes de cucharadas de agua y las cantidades de magnitudes de gotas de endulzante?

Y ¿si quisiéramos un cuarto de dulzor?

3. Si quisiéramos hacer una mezcla con el doble de dulzor que la muestra del vaso testigo ¿cuáles serían las cantidades de magnitudes de cucharadas de agua y las cantidades de magnitudes de gotas de endulzante?

Y ¿si quisiéramos cuádruple de su dulzor?

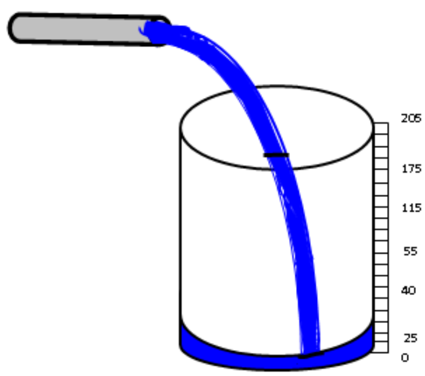
Anexo 7. Secuencia de Experimentación y Modelación “El llenado de un estanque”

SECUENCIA DE EXPERIMENTACIÓN Y MODELACIÓN

NOMBRES:___________________________ Curso:_______ Fecha: ________

I. PLANTEAMIENTO DEL EXPERIMENTO

Vamos a investigar cómo se comporta el llenado de un estanque.
Tenemos un estanque cilíndrico que se va llenando con un chorro de agua constante. Al inicio el estanque tiene un nivel de altura de agua de 25 cm.
Al llenar el estanque se mide el nivel de altura del agua cada 20 segundos, según la regla graduada que se encuentra en él, con estos datos hacemos una tabla.



Tiempo de llenado (segundos) t	Nivel del agua (centímetros) H
0	25
20	55
40	85
60	115
80	145
100	175
120	205

1. Describan el experimento con sus propias palabras.

2. Si han transcurrido 60 segundos, ¿Cuántos centímetros se ha llenado el estanque? Expliquen su proceder

3. Si el nivel de altura del agua es 85 centímetros, ¿Cuánto tiempo ha transcurrido? Describan su proceder

4. Si han transcurrido 50 segundos, ¿Cuántos centímetros marca el nivel de altura del agua? Expliquen muy bien cómo hicieron para encontrar el resultado.

5. Si han transcurrido 85 segundos ¿Cuántos centímetros marca el nivel de altura del agua? Expliquen muy bien cómo hicieron para determinar el resultado.

6. ¿Cuántos centímetros marcará el nivel de altura del agua, si han transcurrido 31 segundos? Expliquen muy bien cómo hicieron para obtener el resultado.

7. ¿Cuántos centímetros marcará, si han transcurrido 1 segundo? Expliquen muy bien su proceder para obtener el resultado.

8. ¿Cuántos centímetros marcará el nivel de altura del agua, si han transcurrido t segundos? ¿Por qué?

9. ¿Existe la razón matemática en este experimento? Justifique

10. ¿Cuántos centímetros marcará el nivel de altura del agua, si han transcurrido 18,45 segundos? ¿Por qué?

11. ¿Cuál es la expresión algebraica que el equipo puede asociar al llenado del estanque? Identifiquen en ella sus valores fijos o parámetros y describan lo que representa cada uno.

12. ¿En qué tiempo el nivel de altura del estanque corresponde a 35 centímetros? Expliquen muy bien cómo hicieron para obtener su resultado.

13. ¿Qué características tiene la gráfica que modela el llenado del estanque? ¿Cuál es esta gráfica?

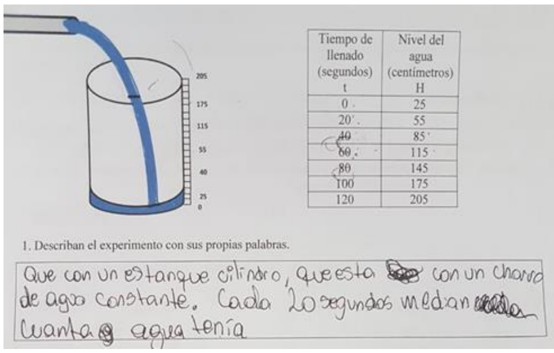
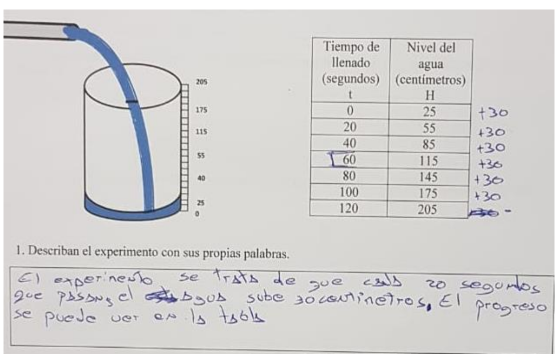
Tiempo de llenado (segundos) t	Nivel de altura del agua (centímetros) h
0	25
1	
	35
18,45	
20	55
31	
40	85
50	
60	115
80	145
85	
100	175
120	205

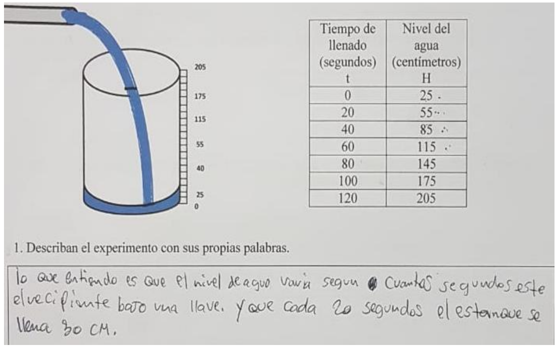
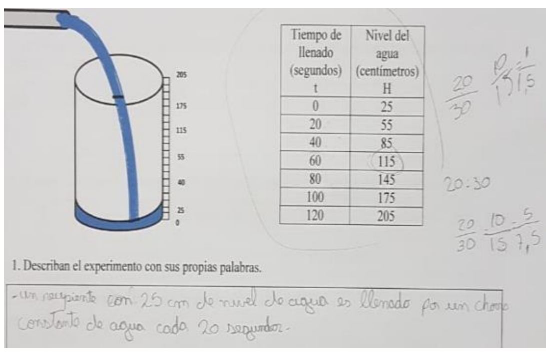
14. Si cae más agua de la llave ¿cómo es la **gráfica**, la **tabla**, la **razón matemática**, **la expresión algebraica**? Señalen sus argumentos para cada afirmación que hagan.

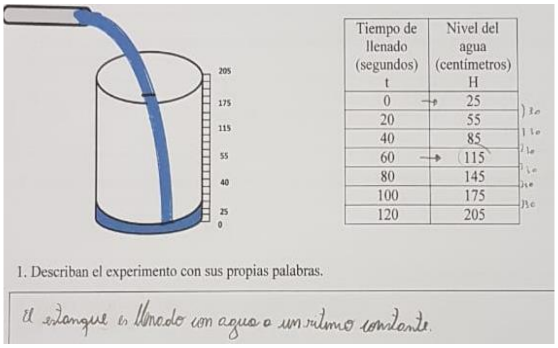
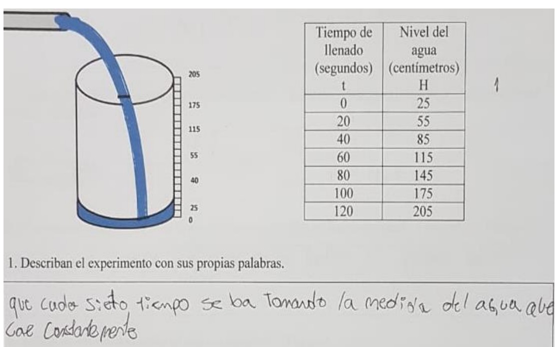
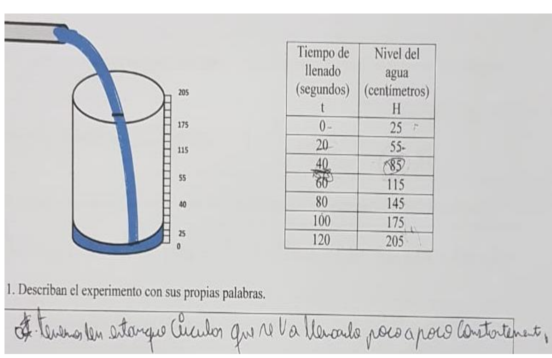
15. ¿Qué hacer para que la gráfica este más arriba, más alta? Expliquen con claridad

Anexo 8. Desarrollo y análisis descriptivo en equipo de la secuencia de aprendizaje “El llenado de un estanque”

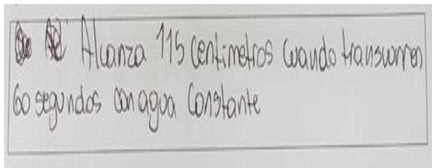
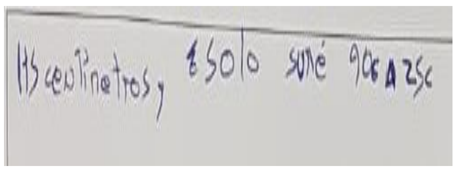
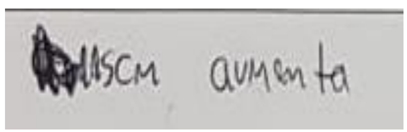
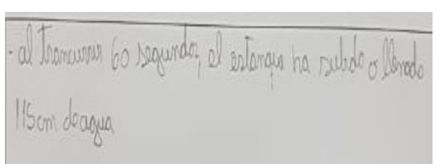
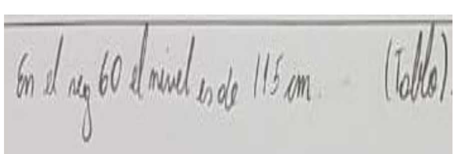
Reactivo 1: Describan el experimento con sus propias palabras.

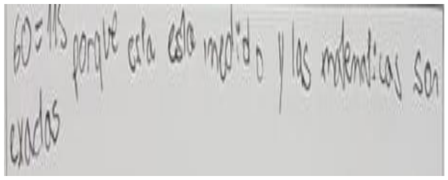
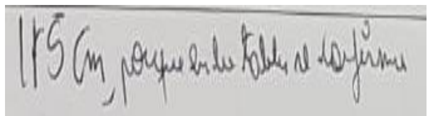
E	Transcripción	Evidencia	Descripción	Análisis
E1	Que con un estanque cilindro, que esta con un chorro de agua constante. Cada 20 segundos median cuanta agua tenía		Describen al experimento diciendo que un estanque cilindro tiene un chorro constante y que cada 20 segundos se mide cuánta agua cae.	El equipo describe el proceder de la toma de datos según la situación, no tomando en cuenta la totalidad de los elementos que son parte de la secuencia. Mencionan que cada 20 **segundos** se debe medir cuánta agua tenia, pero no que el nivel del agua se mide en centímetros. Esto deja en evidencia que el grupo de estudiantes no comprende la noción de razón matemática que se mide entre dos cantidades de magnitudes.
E2	El experimento se trata de que cada 20 segundos que pasan, el agua sube 30 centimetros. El progreso se puede ver en la tabla		Describen al experimento diciendo que cada 20 segundos transcurridos el agua aumenta 30 centímetros y se puede observar en la tabla.	El equipo interactúa con los datos de la tabla describiendo el fenómeno, dando cuenta de la covariación existente entre el tiempo de llenado y el nivel de altura del agua. Mencionan que el recipiente cada 20 segundos se llena 30 cm (dando a entender que notan que existe una razón matemática, entre el tiempo de llenado (segundos) vs nivel de altura de agua (centímetros)). No toman en cuenta los elementos que forman parte del experimento como lo son la imagen del estanque, el agua, tabla de datos y la regla graduada.
E3	Lo que entiendo es que el nivel de agua varia según cuantos segundos este el recipiente		Describen al experimento diciendo que el nivel del agua cambia según los segundos que el recipiente este bajo el	El equipo describe el comportamiento que posee el fenómeno. Hacen referencia a la covariación existente entre el tipo de llenado y

	bajo una llave. Y que cada 20 segundos el estanque se llena 30 cm.		chorro de agua y que cada 20 segundos el estanque se llena 30 centímetros.	nivel de altura del agua proporcionado en la tabla. Entienden que el nivel de altura del agua medido en centímetros varía según cuantos segundos este el recipiente bajo una llave (dando a entender que notan la presencia de las cantidades de magnitudes presentes). Los estudiantes comprenden cómo será la toma de datos y menciona características del experimento como lo son el recipiente y el agua; sin embargo dejan fuera algunos elementos como lo son la tabla de datos y la regla graduada.
E4	Un recipiente con 25 cm de nivel de agua es llenado por un chorro constante de agua cada 20 segundos.		Describen al experimento diciendo que el recipiente tiene 25 centímetros de agua al inicio y que se llena constantemente por un chorro de agua cada 20 segundos.	El equipo describe el comportamiento físico del fenómeno, considerando el llenado inicial del estanque. El comportamiento del llenado del recipiente será constante, por lo tanto entienden que el suceso no cambiará durante la experimentación y que se trabajará con dos cantidades de magnitudes que son los centímetros y los segundos. No considera, para dar respuesta a la pregunta, algunos de los elementos que forman parte de la experimentación como lo son la tabla de datos y la regla graduada.

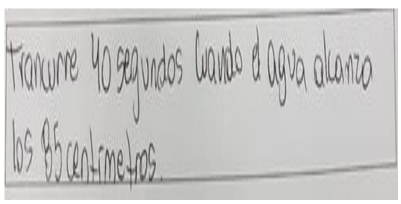
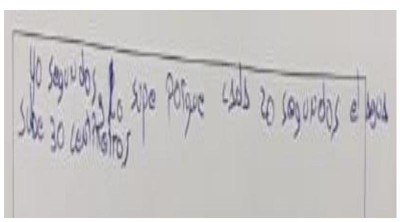
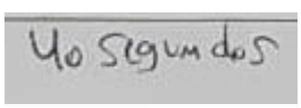
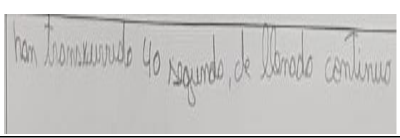
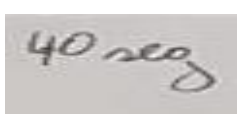
E5	El estanque es llenado con agua a un ritmo constante.		Describen al experimento diciendo que un estanque se llena con un chorro de agua constante.	El equipo describe el comportamiento del fenómeno y se refiere a él como un ritmo constante, no considerando que dicho ritmo será medido en segundos, pero si comprenden que será perdurable durante la experimentación. No consideran la magnitud del agua constante que será medida en centímetros. Menciona algunos elementos existentes en el planteamiento del problema como lo son el estanque y el agua, pero dejan fuera a la regla graduada y la tabla de datos.
E6	Que cada sierto tiempo se ba tomando la memdida del agua que cae constantemente		Describen al experimento diciendo que cada intervalos de tiempo se mide la cantidad de agua que cae constantemente.	El equipo describe que cada cierto tiempo se va tomando la medida del agua, no mencionan que el tiempo se mide en segundos y el nivel del agua en centímetros. Lo cual deja en evidencia que no consideran las magnitudes en juego en el planteamiento del experimento. No mencionan elementos propios de la experimentación como lo son el estanque, regla graduada y la tabla de datos.
E7	Tenemos un estanque circular que se va llenando poco a poco constantemente		Describen al experimento diciendo que se tiene un estanque circular y que se llena constantemente	El equipo describe el experimento, como un estanque circular que se va llenando poco a poco constantemente, no mencionan que dicho estanque se llena con agua. Es un llenado constante, lo cual se puede observar en la tabla de datos. No aluden a elementos como la tabla de datos, la regla graduada y el agua.

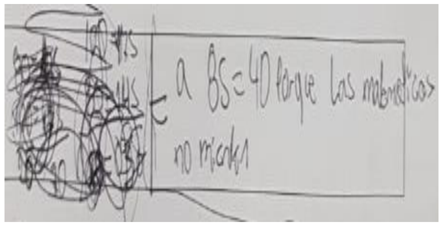
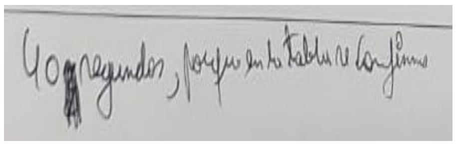
Reactivo 2: Si han transcurrido 60 segundos, ¿Cuántos centímetros se ha llenado el estanque? Expliquen su proceder

E	Transcripción	Evidencia	Descripción	Análisis
E1	Alcanza 115 centimetros cuando transcurren 60 segundos con agua constante		Responden los centímetros que se ha llenado el estanque cuando transcurren 60 segundos. No explican su proceder.	El equipo da respuesta a la pregunta sin explicar el proceder, se cree que utilizaron los datos proporcionados en la tabla.
E2	115 centimetros, solo sumé 90c+25c		Responden, a través de una suma, los centímetros que se ha llenado el estanque transcurrido 60 segundos.	El equipo da cuenta de la covariacion existente entre el tiempo de llenado y el nivel de agua entregado en la tabla de datos, de esta manera al ser 60 segundos la cantidad de altura varia en 90 cm, a lo cual se les suma los 25 cm que el estanque posee inicialmente dando los 115 cm.
E3	115 cm aumenta		Responden los centímetros que se ha llenado el estanque cuando transcurren 60 segundos. No explican su proceder.	El equipo da respuesta sin explicar el método utilizado. Se cree que lo hicieron mediante la utilización de los datos otorgada por la tabla de datos. Se puede deducir que los estudiantes no toman en consideración el nivel de agua inicial que el estanque presenta, dado que dicen “115 cm aumenta”, cuando en realidad el aumento es de 90 cm desde el segundo 0 al segundo 60.
E4	Al trancurrir 60 segundos, el estanque ha subido o llenado 115 cm de agua		Responden los centímetros que se ha llenado el estanque cuando transcurren 60 segundos. No explican su proceder.	El equipo da respuesta sin explicar el método utilizado. Se conjetura que lo hicieron mediante la utilización de los datos otorgada por la tabla de datos. No queda claro si los estudiantes logran evidenciar que al inicio el estanque ya presenta un nivel de altura de agua.
E5	En el seg 60 el nivel es de 115 cm (tabla)		Responden los centímetros que se ha llenado el estanque cuando transcurren 60 segundos. Expresan en paréntesis que usaron la tabla para explicar su proceder.	El equipo da respuesta a la pregunta, utilizando la tabla de datos adjunta.

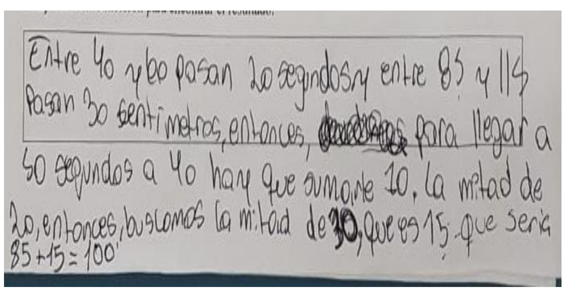
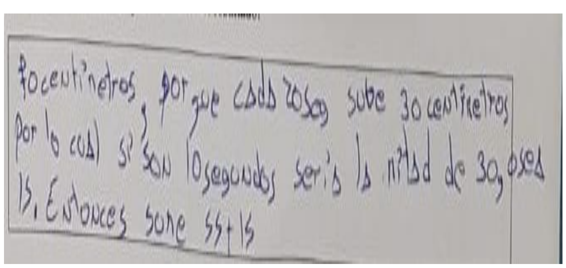
E6	60=115 porque esta medido y las matemáticas son exactas		Responden los centímetros que se ha llenado el estanque cuando transcurren 60 segundos. No explican su proceder.	El equipo da respuesta a la pregunta, se puede cee que los estudiantes utilizaron los datos de la tabla adjunta.
E7	115 cm, porque en la tabla se confirma		Responden los centímetros que se ha llenado el estanque cuando transcurren 60 segundos. Explican que su respuesta lo confirma la tabla.	El equipo responde la pregunta, haciendo uso de los datos entregados por la tabla adjunta.

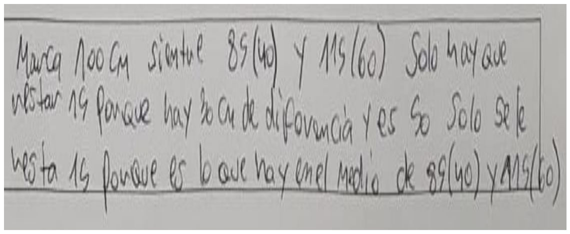
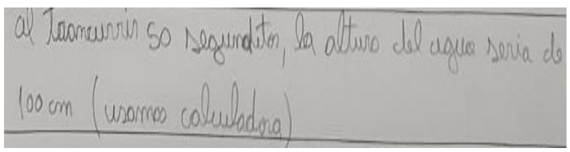
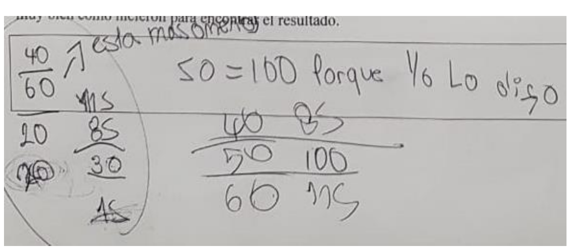
Reactivo 3: Si el nivel de altura del agua es 85 centímetros, ¿Cuánto tiempo ha transcurrido? Describan su proceder.

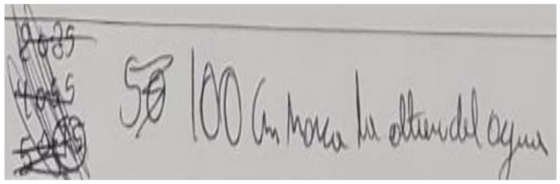
E	Transcripción	Evidencia	Descripción	Análisis
E1	Transcurre 40 segundos cuando el agua alcanza los 85 centímetros		Responden el tiempo en segundos que trascurre cuando el nivel de altura del agua es de 85 centímetros. No explican su proceder.	El equipo da respuesta a la pregunta, sin detallar el procedimiento utilizado. Se cree que utilizaron la tabla de datos adjunta.
E2	40 segundos, lo supe porque cada 20 segundos el agua sube 30 centimetros		Responden el tiempo en segundos que trascurre cuando el nivel de altura del agua es de 85 centímetros. Explican su proceder explicando que cada 20 segundos el agua sube 30 centímetros.	El equipo da cuenta de la covariación existente entre el tiempo de llenado y el nivel de agua entregado en la tabla de datos, de esta manera al ser 85 centímetros la cantidad de segundos varia en 40, donde se asume que los estudiantes toman en cuenta los 25cm iniciales de nivel de agua a los 0 segundos.
E3	40 segundos		Responden el tiempo en segundos que trascurre. No explican su proceder.	El equipo responde sin detallar el procedimiento utilizado, se cree que utilizaron la tabla de datos adjunta.
E4	Han transcurrido 40 segundos, de llenado continuo		Responden el tiempo en segundos que trascurre cuando el llenado es continuo. No explican su proceder.	El equipo responde sin detallar el procedimiento utilizado, se cree que utilizaron la tabla de datos adjunta.
E5	40 seg		Responden el tiempo en segundos. No explican su proceder.	Responden sin detallar el procedimiento utilizado, se cree que utilizaron la tabla de datos adjunta.

E6	A 85=40 porque las matemáticas no mienten		Responden el tiempo de llenado cuando el nivel de altura del agua es de 85. No explican su proceder ni la unidad de medida.	El equipo responde sin detallar el procedimiento utilizado, se cree que utilizaron la tabla de datos adjunta.
E7	40 segundos, porque en la tabla se confirma		Responden el tiempo en segundos. Explican que su respuesta está en la tabla.	El equipo responde utilizando la data de datos adjunta.

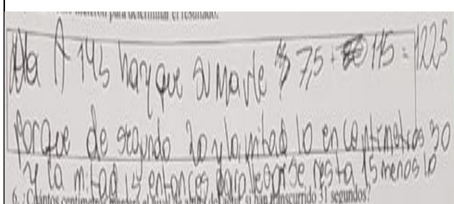
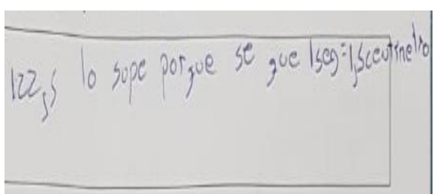
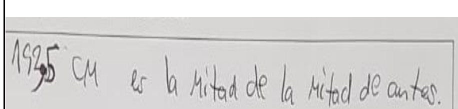
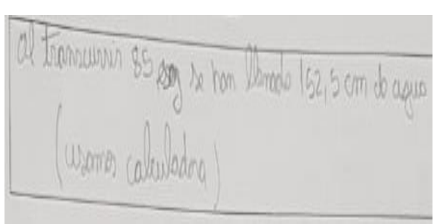
Reactivo 4: Si han transcurrido 50 segundos, ¿Cuántos centímetros marca el nivel de altura del agua? Expliquen muy bien cómo hicieron para encontrar el resultado.

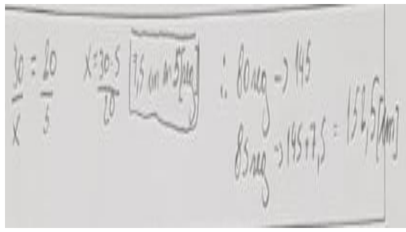
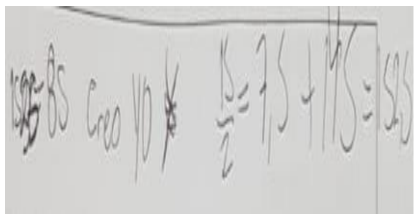
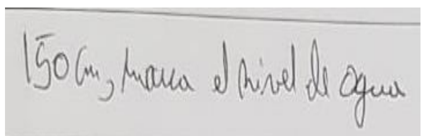
E	Transcripción	Evidencia	Descripción	Análisis
E1	Entre 40 y 60 pasan 20 segundos y entre 85 y 115 pasan 30 centímetros, entonces, para llegar a 50 segundos a 40 hay que sumarle 10. La mitad de 20, entonces, buscamos la mitad de 30, que es 15 que seria 85+15=100		Responden que los centímetros son de 100. No menciona la unidad de medida. Explican que cada 40 y 60 pasan 20 segundos. En 115 pasan 30 centímetros. Para llegar a 50 segundos de 40 le suman 10. Buscan la mitad de 30 que es 15 y se la suman a los 85.	El equipo, haciendo uso de la tabla de datos adjunta, realiza la estrategia de puntos para obtener los pares de valores necesarios para sumar a los ya suministrados en la tabla de valores y así dar respuesta a la pregunta.
E2	70 centimetros, porque cada 20 seg sube 30 centímetros por lo cual si son 10 segundos seria la mitad de 30, osea 15. Entonces sume 55+15		Responden que son 70 centímetros. Explican que cada 20 segundos sube 30 centímetros y para 10 segundos subirá la mitad de 30, es decir, 15. Suman 55 con 15.	El equipo, haciendo uso de los datos entregados en la tabla adjunta, emplea la estrategia de puntos medios para saber que a 10 segundos el nivel de agua aumenta 15 cm; sin embargo se cree que suman el valor obtenido al valor de la tabla a los 20 segundos, haciendo la suma propuesta por los estudiantes de 55+15.

E3	Marca 100 cm si entre 85(40) y 115(60) solo hay que restar 15 porque hay 30 cm de diferencia y es 50 solo se le resta 15 porque es lo que hay en el medio de 85(40) y 115(60)		Responden que marca 100 centímetros el nivel de altura del agua. Explican que entre 85 cm que corresponden a 40 seg. y 115 cm corresponden a 60 seg. le restan 15 porque hay una diferencia de 30 segundos y es 50 solo se le resta los 15 porque está entre 85(40) y 115(60).	El equipo, haciendo uso de los datos entregados en la tabla adjunta, emplea la estrategia de puntos medios para saber que a 10 segundos el nivel de agua aumenta 15 cm, utilizando los valores obtenidos los estudiantes restan con los valores de la tabla a los 60 segundos.
E4	Al transcurrir 50 segundos, la altura del agua seria de 100 cm (usamos calculadora)		Responden que al transcurrir 50 segundos, la altura del agua es 100 centímetros. Explican que utilizaron la calculadora para su proceder.	El equipo da respuesta a la pregunta, sin precisar el algoritmo realizado, solo mencionan el uso de la "calculadora" como herramienta. Se deduce que utilizaron el método de los puntos medios, para saber qué valor sumar o restar a los ya establecidos en la tabla de datos.
E5	100 cm (Cada 20 seg llena 30 cm, en 10 seg debería llenar la mitad)		Responden que el nivel de altura del agua es de 100 centímetros. Explican, entre paréntesis, que cada 20 segundos el estanque se llena 30 centímetros y que en 10 segundos, se llena el estanque a la mitad.	El equipo, haciendo uso de los datos entregados en la tabla adjunta, emplea la estrategia de puntos medios y así saber que a 10 segundos el nivel de agua aumenta 15 cm, luego suman o restan el valor obtenido con alguno de los establecidos en la tabla de datos.
E6	$\frac{\frac{40}{60}}{20}$esta mas o menos 115 $\frac{\frac{85}{30}}{15}$ 50=100 porque yo lo digo 40 85 50 100 60 115		Responden que 50 es igual a 100. No mencionan unidades de medida. Muestran su proceder realizando restas, pero no explican su proceder.	El equipo, haciendo uso de los datos entregados en la tabla adjunta, emplea la estrategia de puntos medios para saber que a 10 segundos el nivel de agua aumenta 15 cm. Luego suman o restan el valor obtenido con alguno de los establecidos en la tabla de datos. En sus respuestas se evidencia como crearon una tabla comparativa de los valores obtenidos.

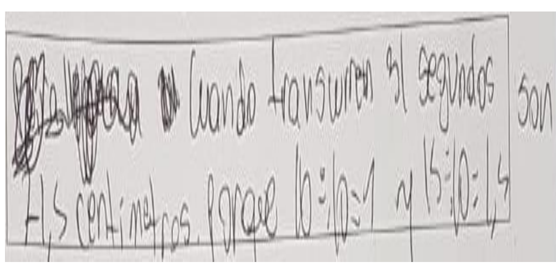
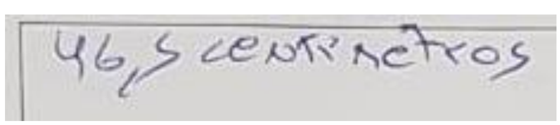
E7	100 cm marca la altura del agua		Responden que el nivel de altura del agua marca 100 cm. No explican su proceder.	El equipo mediante comparaciones de los datos de la tabla adjunta intenta llegar al resultado, se cree que utilizaron la estrategia de puntos medios para obtener los valores, sumar o restar a los ya establecidos en la tabla de datos.

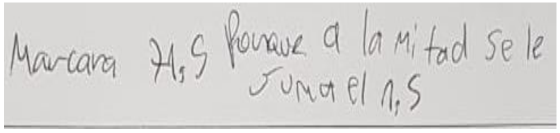
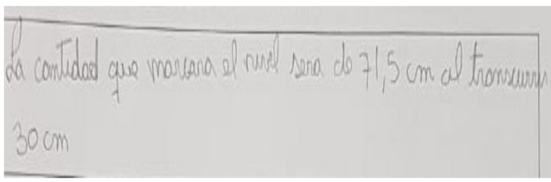
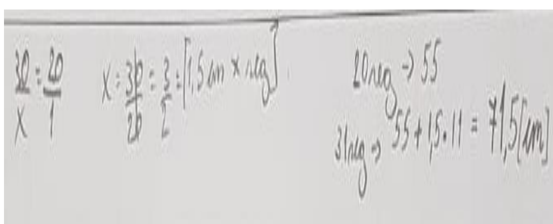
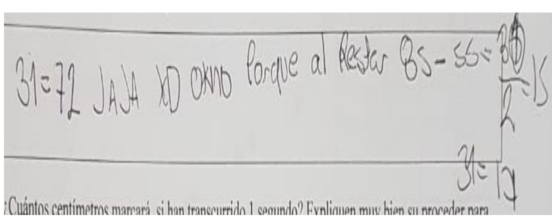
Reactivo 5: Si han transcurrido 85 segundos ¿Cuántos centímetros marca el nivel de altura del agua? Expliquen muy bien cómo hicieron para determinar el resultado.

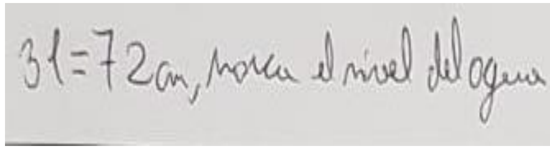
E	Transcripción	Evidencia	Descripción	Análisis
E1	A 145 hay que sumarle 7,5+115=122,5 porque de segundo 20 y la mitad 10 en centimetros 30 y la mitad 15 entonces para llegar se resta 15 menos 10		Responden que marcan 122,5. No mencionan unidades de medida. Explican que suman 7,5+115 cuyo resultado es 122,5 porque de segundo 20 y la mitad 10 en centímetros. 30 y la mitad de 15 entonces para llegar se resta 15 menos 10.	El equipo, haciendo uso de los datos entregados por la tabla adjunta, hace uso de la estrategia de puntos cuartos, obteniendo el nivel de altura a los 5 segundos. Luego suman el dato obtenido a los ya establecidos en la tabla.
E2	122,5 lo supe porque se que 1seg=1,5 centimetros		Responden que marca 122,5. No mencionan unidades de medida. Explican que supieron porque 1 seg=1,5 centímetros, sin explicar el procedimiento que utilizaron para concluir eso.	Se cree que el equipo mediante divisiones sucesivas encuentra el nivel de altura transcurrido 1 segundo, o bien mediante la razón de cambio $\frac{30}{20}$. Luego utilizan este dato para multiplicarlo por los 5 segundos restantes a los 80 que proporciona la tabla adjunta.
E3	152,5 cm es la mitad de la mitad de antes		Responden que marca 152,5 cm. Mencionan que es la mitad de la mitad de antes, pero no explican su proceder.	El equipo, haciendo uso de los datos entregados por la tabla adjunta, hace uso de la estrategia de puntos cuartos, obteniendo el nivel de altura a los 5 segundos. Luego suman el dato obtenido a los ya establecidos en la tabla.
E4	Al transcurrir 85 seg se han llenado 152,5 cm de agua (usamos calculadora)		Responden que al transcurri 85 seg se llena el estanque 152,5 cm de agua. Mencionan que utilizaron calculadora, pero no explican su proceder.	El equipo responde, sin precisar el algoritmo realizado, solo mencionan el uso de la “calculadora” como herramienta de cálculo. Se cree que utilizaron el método de los puntos cuartos, para saber qué valor sumar al ya establecido en la tabla de datos.

E5	$\frac{30}{x}$ = $\frac{20}{5}$ x = $\frac{30x5}{20}$ [7,5cm en 5 seg] ∴ 80seg->145 85seg-> 145+7,5x11=152,5[cm]		Responden que marca 152,5 cm. Explica su proceder utilizando una regla de tres.	El equipo mediante la utilización de regla de tres encuentra el nivel de altura que existirá a los 5 segundos. Utilizando este dato lo suman al ya proporcionado en la tabla de datos.
E6	152,5 creo yo $\frac{15}{2}$=7,5+145=152,5		Responden que marca 152, 5. No menciona unidades de medida. Explica que dividiendo 15 sobre dos, su cociente es 7,5 y le suma 145, pero no explica el porqué de su proceder.	El equipo, haciendo uso de los datos entregados por la tabla adjunta, hace uso de la estrategia de puntos cuartos, obteniendo el nivel de altura a los 5 segundos, luego suman el dato obtenido a los ya establecidos en la tabla.
E7	150 cm, marca el nivel de agua		Responden que 150 centímetros marca el nivel de agua. No explican su proceder.	El equipo no describe el método utilizado. Se estima que la diferencia entre los 85 y 80 segundos, la utilizaron para sumar a los datos establecidos en la tabla.

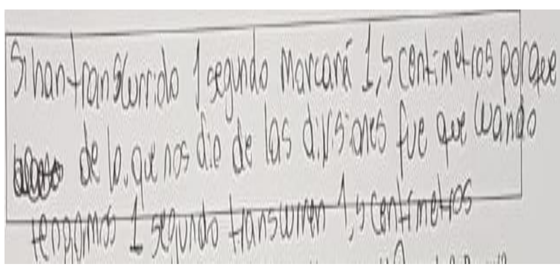
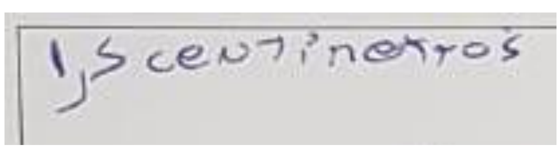
Reactivo 6: ¿Cuántos centímetros marcará el nivel de altura del agua, si han transcurrido 31 segundos? Expliquen muy bien cómo hicieron para obtener el resultado.

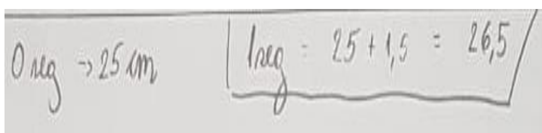
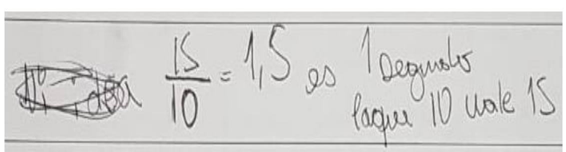
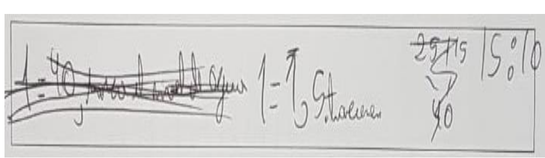
E	Transcripción	Evidencia	Descripción	Análisis
E1	Cuando transcurren 31 segundos son 71,5 centímetros porque 10:10=1 y 15:10=1,5		Responden que marca 71,5 centímetros cuando transcurren 31 segundos. Explican que dividiendo 10 sobre 10 su cociente es 1 y que 15 sobre 10 es 1,5.	El equipo utiliza la estrategia de los puntos decimos, usando los valores obtenidos a los 10 segundo, dividen por 10 para encontrar el nivel de altura transcurrido 1 segundo. Luego haciendo uso de los valores obtenidos a los 10 y a los 1 segundos son empleados para sumar o restar a los ya establecidos en la tabla de datos.
E2	46,5 centímetros		Responden que marca 46,5 centímetros. No explican su proceder.	Se cree que el equipo utiliza la estrategia de los puntos decimos, usando los valores obtenidos a los 10 segundo, dividen por 10 obteniendo el nivel de altura transcurrido 1 segundo o bien mediante la razón de cambio $\frac{30}{20}$. Luego suman los datos obtenidos. 15+15+15+1.5=46.5, olvidándose de los 25 cm de altura inicial.

E3	Marca 71,5 porque a la mitad se le suma 1,5		Responden que marca 71,5. No mencionan unidades de medida. Explican que le suman 1,5 a la mitad.	Se cree que el equipo utiliza la estrategia de los puntos decimos, usando los valores obtenidos a los 10 segundo, dividen por 10 para encontrar el nivel de altura transcurrido 1 segundo. Luego haciendo uso de los valores obtenidos a los 10 y a los 1 segundos son empleados para sumar o restar a los ya establecidos en la tabla de datos.
E4	La cantidad que marcara el nivel sera de 71,5 cm al transcurrir 30 cm		Responden que la cantidad que marca el nivel es de 71,5 centímetros cuando transcurre 30 centímetros. No explican su proceder.	El equipo no precisa el método utilizado. Se conjetura que utilizan la estrategia de los puntos decimos, usando los valores obtenidos a los 10 segundo, los dividen por 10 para encontrar el nivel de altura transcurrido 1 segundo Luego haciendo uso de los valores obtenidos a los 10 y a los 1 segundos son empleados para sumar o restar a los ya establecidos en la tabla de datos.
E5	$\frac{30}{x} = \frac{20}{1}$ x = $\frac{30}{20}$ = $\frac{2}{3}$ = [1,5cm x seg] 20seg->55 31seg-> 55+1,5x11=71,5[cm]		Responden que marcara 71,5 centímetros. Explican su proceder mediante el uso de la regla de tres.	El equipo, haciendo uso de regla de tres utilizando los valores de covarianza, obtiene la razón de cambio. Utilizando este dato crean una expresión algebraica. Se cree que al momento de escribir su respuesta en la hoja, se equivocaron en colocar los valores.
E6	31=72 jaja XD porque al restar 85-55= $\frac{30}{2}$ = 15 31=17		Responden que transcurridos 31 segundos, serán 72 centímetros lo que marcara el nivel del agua. No mencionan unidades de medida. Explican que restan 85-55 cuyo resultado es 30 dividido dos cuyo resultado es 15.	Se cree que el equipo utilizando los valores entregados en la tabla, realiza la diferencia de los valores que esta antes y después del requerido (segundos-nivel de altura). Utilizando esta diferencia la dividen en 2, para obtener el nivel de altura a los 10 segundos, ocupan este valor sumando o restando a algunos de los valores utilizados en la diferencia para así saber el nivel de agua a los 30 segundos. A partir de este resultado, el equipo estima por aproximación el valor.

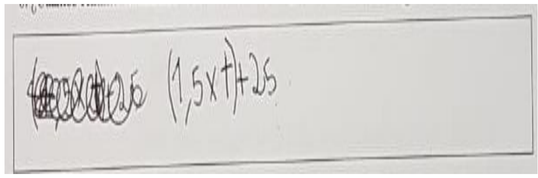
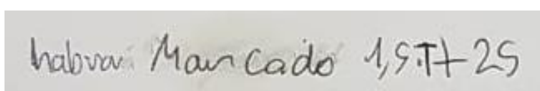
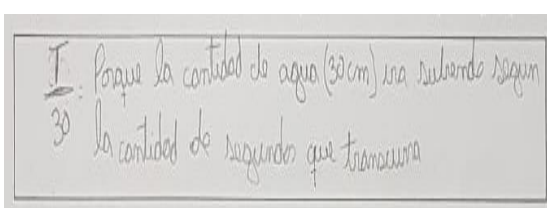
E7	31=72 cm, marca el nivel del agua		Responden que transcurridos 31 segundos, serán 72 centímetros lo que marcara el nivel del agua. No explican su proceder.	Se cree que el equipo utilizando los valores entregados en la tabla, realiza la diferencia de los valores que esta antes y después del requerido (segundos-nivel de altura). Utilizando esta diferencia la dividen en 2, para obtener el nivel de altura a los 10 segundos, ocupan este valor sumando o restando a algunos de los valores utilizados en la diferencia para así saber el nivel de agua a los 30 segundos. A partir de este resultado, el equipo estima por aproximación el valor.

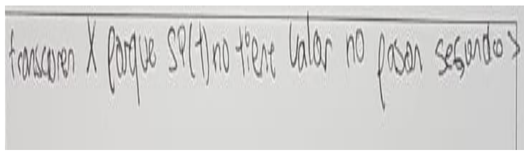
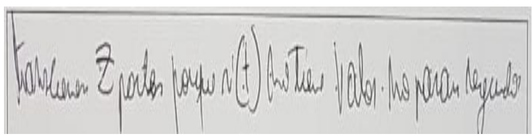
Reactivo 7: ¿Cuántos centímetros marcará, si han transcurrido 1 segundo? Expliquen muy bien su proceder para obtener el resultado.

E	Transcripción	Evidencia	Descripción	Análisis
E1	Si han transcurrido 1 segundo marcará 1,5 centímetros porque de lo que nos dio de las divisiones fue que cuando tengamos 1 segundo transcurren 1,5 centímetros		Responden que marca 1,5 centímetros cuando transcurre 1 segundo. Explican que habían realizado divisiones antes llegando al resultado.	El equipo, haciendo divisiones sucesivas, vale decir, puntos medios, puntos cuartos y puntos decimos, encuentran el nivel de altura que se obtendrá cada 1 segundo; sin embargo, el marco de la pregunta es cuanto es el nivel de agua transcurrido 1 segundo, por lo que no suman los 25 cm de altura inicial.
E2	1,5 centímetros		Responden que marca 1,5 centímetros. No explican su proceder.	Se cree que el equipo haciendo divisiones sucesivas, vale decir, puntos medios, puntos cuartos y puntos decimos, encuentran el nivel de altura que se obtendrá cada 1 segundo; sin embargo, el marco de la pregunta es cuanto es el nivel de agua transcurrido 1 segundo, por lo que no suman los 25 cm de altura inicial.
E3	Marcara 1,5		Responden que marca 1,5. No explican su proceder.	Se cree que el equipo, haciendo divisiones sucesivas, vale decir, puntos medios, puntos cuartos y puntos decimos,

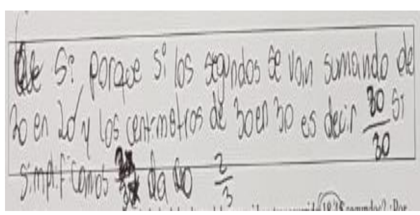
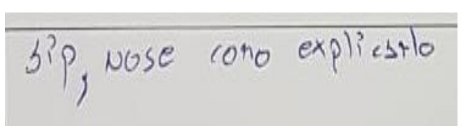
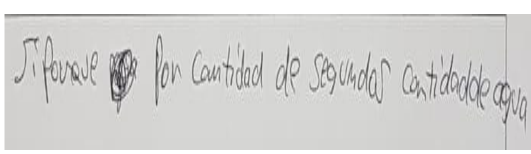
				encuentran el nivel de altura que se obtendrá cada 1 segundo; sin embargo, el marco de la pregunta es cuanto es el nivel de agua transcurrido 1 segundo, por lo que no suman los 25 cm de altura inicial.
E4	La cantidad que ha llenado al cabo de 1 sg es de 26,5 cm		Responden que la cantidad que se ha llenado el estanque al cabo de 1 seg es de 26,5. No explican su proceder.	Se cree que el equipo haciendo divisiones sucesivas, vale decir, puntos medios, puntos cuartos y puntos decimos, encuentran el nivel de altura que se obtendrá cada 1 segundo. Al valor obtenido se suman los 25 cm de altura inicial.
E5	0 seg -> 25 cm 1seg = 25 + 1,5 = 26,5		Responden que marca 26,5. Explican su proceder mediante una suma.	El equipo mediante utilización de regla de tres encuentra el nivel de altura que se obtendrá cada 1 segundo. Al valor obtenido se suman los 25 cm de altura inicial.
E6	$\frac{15}{10}$=1,5 es 1 segundo porque 10 vale 15		Responden que marca 1,5. No mencionan unidades de medida. Explican su proceder mediante la división de 15 sobre 10.	El equipo mediante la utilización de puntos decimos, encuentran el nivel de altura que se obtendrá cada 1 segundo; sin embargo, el marco de la pregunta es cuanto es el nivel de agua transcurrido 1 segundo, por lo que no suman los 25 cm de altura inicial.
E7	1=1,5 transcurren 15:10		Responden que transcurren 1,5. No mencionan unidades de medida. Explican su proceder mediante una división.	El equipo mediante la utilización de puntos decimos, encuentran el nivel de altura que se obtendrá cada 1 segundo; sin embargo, el marco de la pregunta es cuanto es el nivel de agua transcurrido 1 segundo, por lo que no suman los 25 cm de altura inicial.

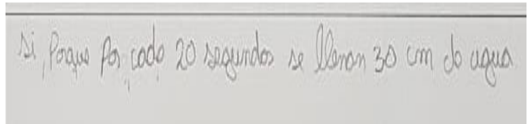
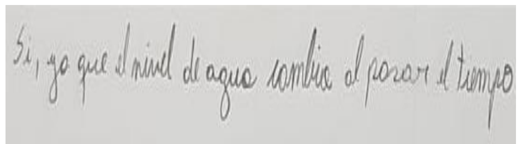
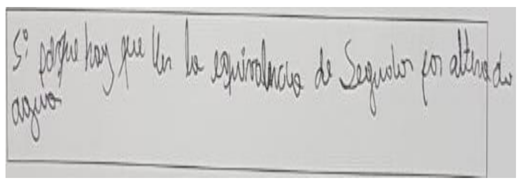
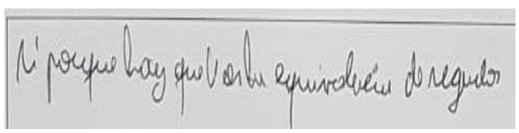
Reactivo 8: ¿Cuántos centímetros marcará el nivel de altura del agua, si ha transcurrido t segundos? ¿Por qué?

E	Transcripción	Evidencia	Descripción	Análisis
E1	(1,5xt)+25		Responden escribiendo la expresión (1,5xt)+25. No mencionan unidades de medida. No explican el porqué de su respuesta.	Mediante las divisiones sucesivas realizadas por el equipo, obtuvieron la cantidad de altura que se tiene a 1 segundo. Se cree que el equipo multiplico el 1,5 por algunos de los tiempos de la tabla observando que debían sumar los 25 cm iniciales para obtener los valores dados en la tabla de datos.
E2	$\frac{30}{20}$=1,5 T+1seg= T=tiempo		Responden escribiendo la expresión T+1seg=. Destacan que el T de la expresión es el tiempo. Escriben la división de 30 sobre 20 cuyo cociente es 1,5, pero no explican el porqué de ello. No mencionan el porqué de su respuesta.	El equipo mediante la razón de cambio obtiene la cantidad de altura de agua a 1 segundo.
E3	Habran marcado 1,5xT+25		Responden que a los t segundos marcan 1,5xT+25. No mencionan unidades de medida. No explican el porqué de su pregunta.	Mediante las divisiones sucesivas realizadas por el equipo, el equipo la cantidad de altura que se tiene a 1 segundo. Se cree que el equipo multiplico el 1,5 por algunos de los tiempos de la tabla observando que debían sumar los 25 cm iniciales para obtener los valores dados en la tabla de datos.
E4	$\frac{T}{30}$= porque la cantidad de agua (30 cm) va subiendo según la cantidad de segundos que transcurra		Responden escribiendo la expresión $\frac{T}{30}$=. Explican que es porque la cantidad de agua aumenta según la cantidad de segundos que transcurra.	El equipo expresa un alto entendimiento de la razón de cambio inmersa en el experimento.

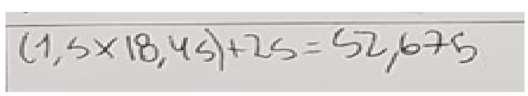
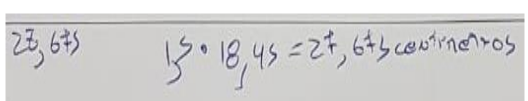
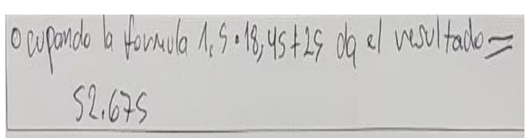
E5	25 + 1,5t [cm]		Responden escribiendo la expresión 25 + 1,5t [cm]. No explican el porqué de su proceder.	Mediante la utilización de regla de tres el equipo obtiene la cantidad de altura que aumenta cada un segundo. Haciendo uso de este dato los se cree que estudiantes dan cuenta que ese valor se debe multiplicar por el tiempo dado y sumar los 25 cm iniciales.
E6	Trascurren x porque si (t) no tiene valor no pasan segundos		Responden que transcurre x segundos. Explican que si (t) no tiene valor entonces no transcurren segundos.	El equipo no relaciona que t es una incógnita que puede adoptar cualquier valor.
E7	Transcurren Z partes porque si (t) no tiene valor no pasan segundos		Responden que transcurre Z segundos. Explican que si (t) no tiene valor entonces no transcurren segundos.	El equipo no relaciona que t es una incógnita que puede adoptar cualquier valor.

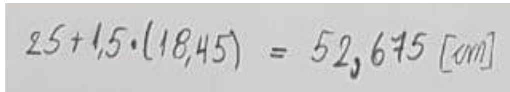
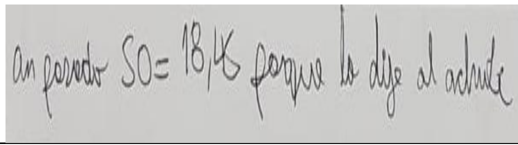
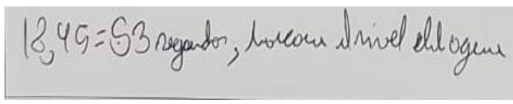
Reactivo 9: ¿Existe la razón matemática en este experimento? Justifique

E	Transcripción	Evidencia	Descripción	Análisis
E1	Si porque si los segundos se van sumando de 20 en 20 y los centímetros de 30 en 30 es decir $\frac{20}{30}$ si simplificamos da $\frac{2}{3}$		Responden que si existe razón. Justifican diciendo que si los segundos aumentan de 20 en 20 y los centímetros de 30 en 30 eso es 20 sobre 30 que simplificando les queda 2 sobre 3.	El equipo intuye que existe razón matemática dado que hay una relación entre los segundos transcurridos y el nivel de agua.
E2	Sip, no se como explicarlo		Responden que si existe razón matemática. No justifican su respuesta por no saber explicarla.	El equipo presume que si existe razón matemática; sin embargo no poseen argumentos para sostenerlo.
E3	Si porque por cantidad de segundos cantidad de agua		Responden que si existe razón matemática. Justifican diciendo que por cantidad de segundos hay una cantidad de agua.	El equipo sostiene que existe una razón matemática aludiendo a una relación de cantidades de magnitudes (segundos y cantidades de agua)

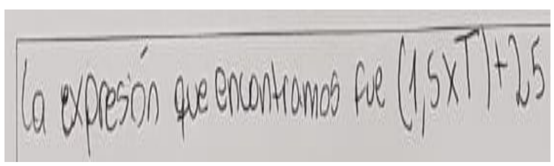
E4	Si, porque por cada 20 segundos se llenan 30 cm de agua		Responden que si existe razón matemática. Justifican diciendo que por cada 20 segundos se llenan 30 centímetros de agua.	El equipo sostiene que existe una razón matemática aludiendo a una relación de cantidades de segundos y cantidades de agua
E5	Si, ya que el nivel de agua cambia al pasar el tiempo.		Responden que si existe razón matemática. Justifican diciendo que el nivel de agua cambia al pasar el tiempo.	El equipo sostiene que existe razón matemática debido al aumento de agua que se obtiene al transcurrir una cantidad de segundos.
E6	Si porque hay que ver la equivalencia de segundos por altura de agua		Responden que si existe razón matemática. Justifican diciendo que hay que ver la equivalencia de segundos por altura de agua.	El equipo sostiene que existe una razón matemática aludiendo a una relación de cantidades de segundos y cantidades de agua
E7	Si porque hay que ver la equivalencia de segundos		Responden que si existe razón matemática. Justifican diciendo que hay que ver la equivalencia de segundos.	El equipo sostiene que existe una razón matemática aludiendo a una relación de cantidades de segundos y cantidades de agua

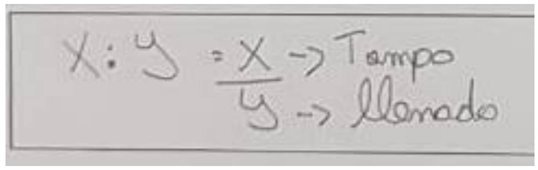
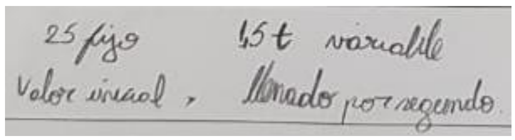
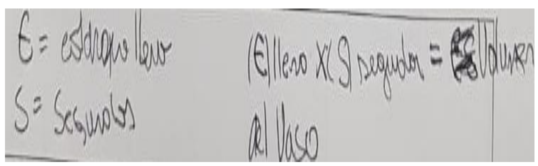
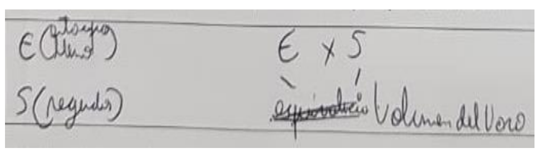
Reactivo 10: ¿Cuántos centímetros marcará el nivel de altura del agua, si han transcurrido 18,45 segundos? ¿Por qué?

E	Transcripción	Evidencia	Descripción	Análisis
E1	(1,5x18,45)+25=52, 675		Responden que marca 52,675. No mencionan unidades de medida. Explican mediante la expresión (1,5x18,45)+25.	El equipo utiliza la expresión armada a los t segundos.
E2	27,675 1,5x18,45=27,675 centímetros		Responden que marca 27,675 centímetros. Explican mediante la expresión 1,5x18,45	El equipo utiliza la razón de cambio encontrada en la pregunta anterior, sin utilizar el nivel de agua inicial.
E3	Ocupando la formula 1,5x18,45+25 da el resultado = 52.675		Responden que el resultado da 52.675. No menciona unidades de medida. Explican que ocuparon la fórmula 1,5x18,45+25	El equipo utiliza la expresión armada a los t segundos.
E4	No responde	No responde	No responde	No responde

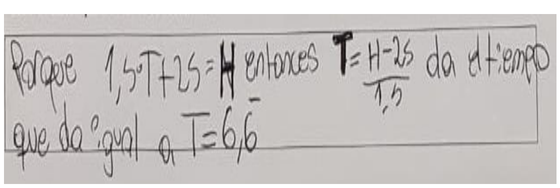
E5	25 + 1,5x(18,45) = 52,675 [cm]		Responden que marca 52,675 centímetros. Explica mediante la expresión 25 + 1,5x(18,45)	El equipo utiliza la expresión armada a los t segundos.
E6	An pasado 50=18,45 porque lo dije al achunte		Responden que 50=18,45. No explica su proceder. No mencionan unidades de medida.	Se estima que el equipo utilizando los datos de la tabla por proximidad de valores estima el nivel de agua.
E7	18,45=53 segundos, marcara el nivel del agua		Responden que 18,45=53 segundos marcara el nivel del agua. No explican su proceder.	Se estima que el equipo utilizando los datos de la tabla por proximidad de valores estima el nivel de agua.

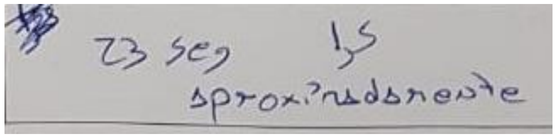
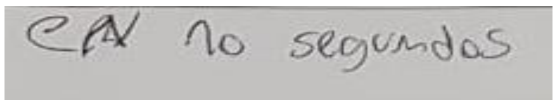
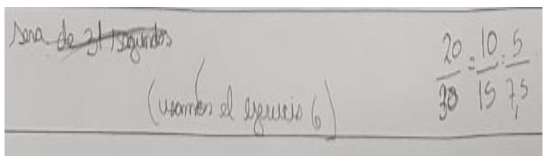
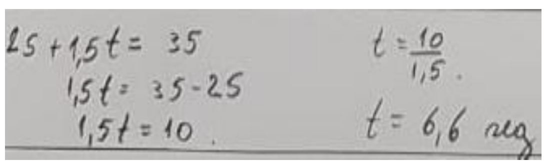
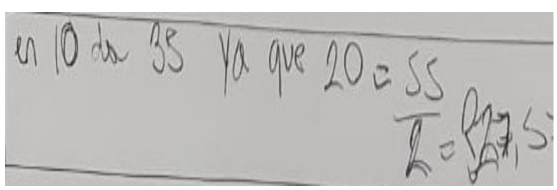
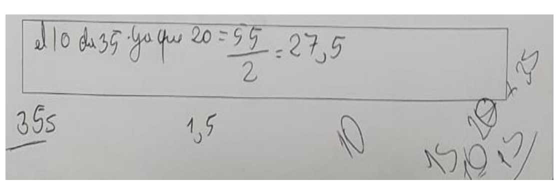
Reactivo 11: ¿Cuál es la expresión algebraica que el equipo puede asociar al llenado del estanque? Identifiquen en ella sus valores fijos o parámetros y describan lo que representa cada uno.

E	Transcripción	Evidencia	Descripción	Análisis
E1	La expresión que encontramos fue (1,5xT)+25		Responden que la expresión encontrada es (1,5xT)+25. No identifican los valores fijos o parámetros ni lo que representa cada uno.	El equipo ratifica la expresión escrita en la pregunta 8.
E2	30:20=1,5cm= 1s=1,5cm s=segundos Cm= centímetros		Responden que 30 sobre 20 es 1,5 centímetros. 1s=1,5cm. Destacan que s son segundos y que cm son centímetros. No identifican los valores fijos o parámetros ni lo que representa cada uno.	El equipo realiza una comparación de cantidades de magnitudes utilizando la razón de cambio.
E3	1,5*x+25		Responden que su expresión algebraica es 1,5*x+25. No menciona unidades de medida. No identifican los valores fijos o parámetros ni lo que representa cada uno.	El equipo ratifica la expresión escrita en la pregunta 8.

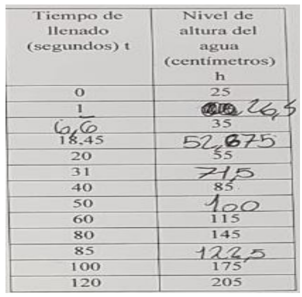
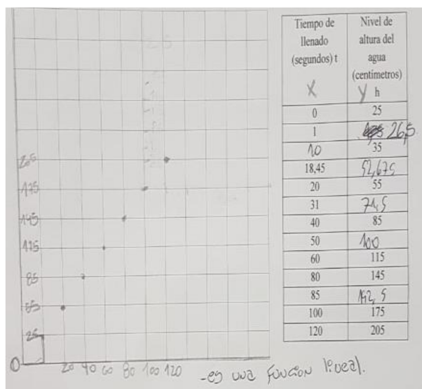
E4	X:y = $\frac{x}{y}$ Tiempo llenado		Responden que su expresión algebraica es X:y = $\frac{x}{y}$, donde x corresponde al tiempo e y al llenado. No identifican los valores fijos o parámetros ni lo que representa cada uno.	El equipo describe la razón de cambio. Si bien no expresa las unidades de medida, comprenden que es una relación de tiempo y llenado del estanque.
E5	25 fijo Valor inicial 1,5 variable llenado por segundo		No escriben la expresión algebraica, pero dicen que 25 es fijo y corresponde al valor inicial y que 1,5 es la variable y que corresponde al llenado por segundo.	El equipo identifica haciendo uso de la expresión expuesta en la pregunta 6, cuales son los parámetros fijos y los variables.
E6	t=estanque lleno s=segundos (E)lleno X(S)segundos = Volumen del vaso		Responden que su expresión algebraica es (E) lleno X(S) segundos = Volumen del vaso, destacan que t corresponde al estanque lleno y s a los segundos.	El equipo entiende que existe una relación entre el llenado del estanque con los segundos transcurridos.
E7	E (estanque lleno) S(Segundo) E x S (volumen del vaso)		Responden que su expresión es E x S=volumen del vaso. Destacan que E corresponde al estanque lleno y S a los segundos	El equipo entiende que existe una relación entre el llenado del estanque con los segundos transcurridos.

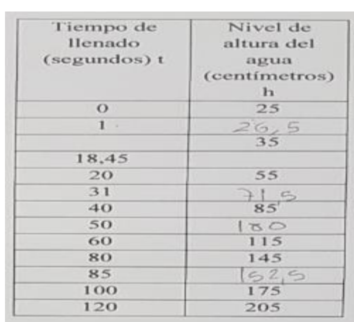
Reactivo 12: ¿En qué tiempo el nivel de altura del estanque corresponde a 35 centímetros? Expliquen muy bien cómo hicieron para obtener su resultado.

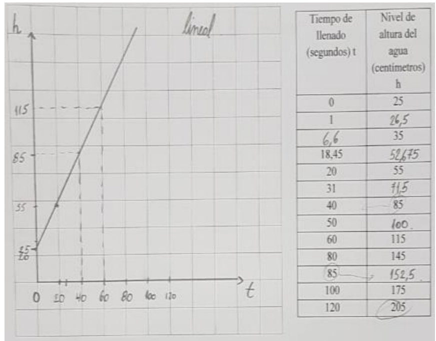
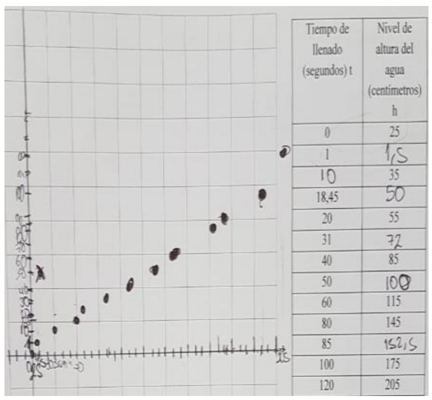
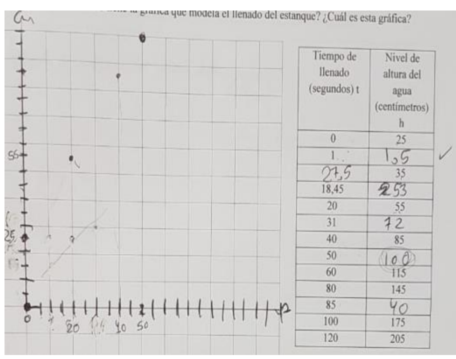
E	Transcripción	Evidencia	Descripción	Análisis
E1	Porque 1,5xT+25=H entonces T=$\frac{H-25}{1,5}$ da el tiempo que da igual a T=6,$\overline{6}$		Responden que T=6,$\overline{6}$. Explican utilizando la expresión algebraica que encontraron y despejan la variable T para encontrar el tiempo.	El equipo, trabajando la expresión ya expuesta en la pregunta 8, a modo de ecuación despeja la variable T, obteniendo una expresión para calcular el nivel de altura en t segundos y una expresión para calcular el tiempo transcurrido de acuerdo al nivel de agua.

E2	23 seg 1,5 Aproximadamente		Responden que el tiempo es de 23 segundos aproximadamente. Escriben un 1,5 pero no dicen nada con respecto a ese número. No explican su prodecer.	Se estima que el equipo escribió un número al azar.
E3	En 10 segundos		Responden que el tiempo es de 10 segundos. No explican su proceder.	Se estima que el equipo escribió un número al azar.
E4	Sera de 31 segundos (usamos el ejercicio 6) $\frac{20}{30}=\frac{10}{15}=\frac{5}{7,5}$		Responden que el tiempo es de 31 segundos. Explican que para responder utilizan el ejercicio 6 $\frac{20}{30}=\frac{10}{15}=\frac{5}{7,5}$	El equipo utiliza puntos medios y puntos cuartos.
E5	$25 + 1,5t = 35$ $1,5t = 35-25$ $1,5t = 10$ $t = \frac{10}{1,5}$ $t = 6,6$ seg		Responden que el tiempo es de 6,6 segundos. Explican su proceder mediante la expresión algebraica encontrada anteriormente.	El equipo, trabajando la expresión ya expuesta en la pregunta 8, a modo de ecuación despeja la variable T, obteniendo una expresión para calcular el nivel de altura en t segundos y una expresión para calcular el tiempo transcurrido de acuerdo al nivel de agua.
E6	En 10 da 35 ya que $20=\frac{55}{2}=27,5$		Responde que el tiempo es de 10 cuando el nivel de altura del agua es de 35. No menciona unidades de medida. Explican su proceder de la siguiente manera: $20=\frac{55}{2}=27,5$	El equipo utilizando los datos entregados por la tabla, divide el nivel de altura de agua a los 20 segundo en 2.
E7	El 10 da 35 ya que $20=\frac{55}{2}= 27,5$		Responde que el tiempo es de 10 cuando el nivel de altura del agua es de 35. No menciona unidades de medida. Explican su proceder de la siguiente manera: $20=\frac{55}{2}=27,5$	El equipo utilizando los datos entregados por la tabla, divide el nivel de altura de agua a los 20 segundo en 2.

Reactivo 13: ¿Qué características tiene la gráfica que modela el llenado del estanque? ¿Cuál es esta gráfica?

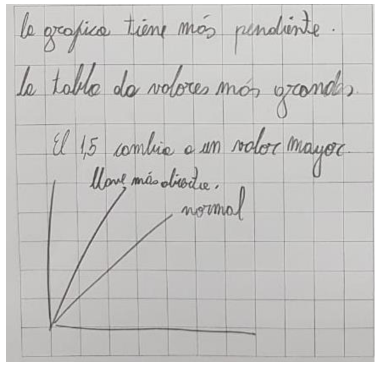
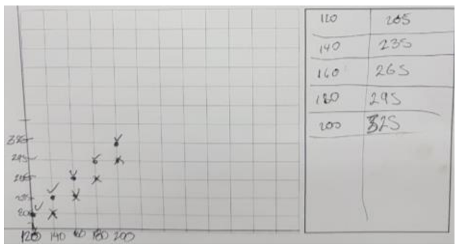
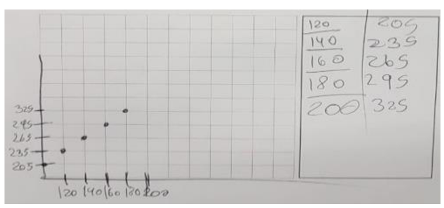
<table>
<tr><th>E</th><th>Transcripción</th><th>Evidencia</th><th>Descripción</th><th>Análisis</th></tr>
<tr><td>E1</td><td></td><td>
<table>
<tr><th>Tiempo de llenado (segundos) t</th><th>Nivel de altura del agua (centímetros) h</th></tr>
<tr><td>0</td><td>25</td></tr>
<tr><td>1</td><td>26,5</td></tr>
<tr><td>6,6</td><td>35</td></tr>
<tr><td>18,45</td><td>52,675</td></tr>
<tr><td>20</td><td>55</td></tr>
<tr><td>31</td><td>71,5</td></tr>
<tr><td>40</td><td>85</td></tr>
<tr><td>50</td><td>100</td></tr>
<tr><td>60</td><td>115</td></tr>
<tr><td>80</td><td>145</td></tr>
<tr><td>85</td><td>122,5</td></tr>
<tr><td>100</td><td>175</td></tr>
<tr><td>120</td><td>205</td></tr>
</table></td><td>No responden qué características tiene la gráfica. No grafican. Completan la tabla con los datos encontrados en las preguntas anteriores.</td><td>El equipo, completa la tabla de datos utilizando los valores obtenidos durante la secuencia.</td></tr>
<tr><td>E2</td><td>Es una función lineal.</td><td>

<table>
<tr><th>Tiempo de llenado (segundos) t
X</th><th>Nivel de altura del agua (centimetros)
y h</th></tr>
<tr><td>0</td><td>25</td></tr>
<tr><td>1</td><td>26,5</td></tr>
<tr><td>10</td><td>35</td></tr>
<tr><td>18,45</td><td>52,675</td></tr>
<tr><td>20</td><td>55</td></tr>
<tr><td>31</td><td>71,5</td></tr>
<tr><td>40</td><td>85</td></tr>
<tr><td>50</td><td>100</td></tr>
<tr><td>60</td><td>115</td></tr>
<tr><td>80</td><td>145</td></tr>
<tr><td>85</td><td>142,5</td></tr>
<tr><td>100</td><td>175</td></tr>
<tr><td>120</td><td>205</td></tr>
</table></td><td>Responden qué la gráfica es una función lineal. Grafican y completan la tabla con los datos encontrados en las preguntas anteriores.</td><td>El equipo, completa la tabla de datos utilizando los valores obtenidos durante la secuencia. Construyen la gráfica ubicando los puntos de la tabla inicial, una vez ubicados los puntos conjeturan que se trata de una función lineal.</td></tr>
<tr><td>E3</td><td>No responde</td><td>No responde</td><td>No responde</td><td>No responde</td></tr>
<tr><td>E4</td><td></td><td>
<table>
<tr><th>Tiempo de llenado (segundos) t</th><th>Nivel de altura del agua (centímetros) h</th></tr>
<tr><td>0</td><td>25</td></tr>
<tr><td>1</td><td>26,5</td></tr>
<tr><td></td><td>35</td></tr>
<tr><td>18,45</td><td></td></tr>
<tr><td>20</td><td>55</td></tr>
<tr><td>31</td><td>71,5</td></tr>
<tr><td>40</td><td>85</td></tr>
<tr><td>50</td><td>100</td></tr>
<tr><td>60</td><td>115</td></tr>
<tr><td>80</td><td>145</td></tr>
<tr><td>85</td><td>152,5</td></tr>
<tr><td>100</td><td>175</td></tr>
<tr><td>120</td><td>205</td></tr>
</table></td><td>No responden qué características tiene la gráfica. No grafican. Completan la tabla con los datos encontrados en las preguntas anteriores.</td><td>El equipo procede a llenar la tabla, utilizando algunos de los datos obtenidos durante la secuencia. Haciendo uso de los datos entregados por la tabla original grafican conjeturando que se trata de algo lineal.</td></tr>
</table>

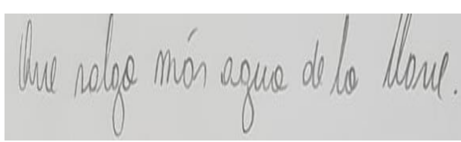
E5			Responden que la gráfica es lineal y completan la tabla con los datos encontrados en las preguntas anteriores.	El equipo, completa la tabla de datos utilizando los valores obtenidos durante la secuencia. Construyen la gráfica ubicando los puntos de la tabla inicial, una vez ubicados los puntos conjeturan que se trata de una función lineal.
E6			No responden qué características tiene la gráfica. Grafican y completan la tabla con los datos encontrados en las preguntas anteriores.	El equipo, completa la tabla de datos utilizando los valores obtenidos durante la secuencia. Construyen la gráfica ubicando los puntos de la tabla construida.
E7			Intentan graficar, pero no mencionan características de la gráfica. Completan la tabla con los datos obtenidos en las respuestas anteriores.	El equipo, completa la tabla de datos utilizando los valores obtenidos durante la secuencia. Construyen la gráfica ubicando los puntos de la tabla inicial.

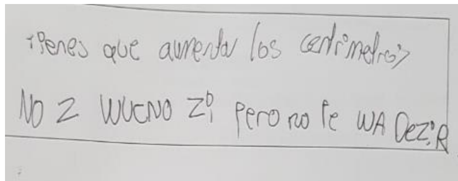
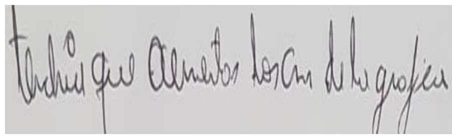
Reactivo 14: Si cae más agua de la llave ¿cómo es la gráfica, la tabla, la razón matemática, la expresión algebraica? Señalen sus argumentos para cada afirmación que hagan.

E	Transcripción	Evidencia	Descripción	Análisis
E1	No responde	No responde		
E2	No responde	No responde		
E3	No responde	No responde		
E4	No responde	No responde		

E5	La gráfica tiene más pendiente La tabla de valores más grandes El 1,5 cambia a un valor mayor Llave más abierta. normal		Responden que la gráfica tiene más pendientes, que la tabla da valores más grandes, el 1,5 cambia a un valor mayor y la línea más arriba dice “llave más abierta” y la línea más abajo dice “normal”.	El equipo conjetura que si cae más agua de la llave, la pendiente de la gráfica será mayor. Los valores de la tabla también aumentará (se cree que los estudiantes aluden que los valores que aumentan son los del nivel de agua a igualdad de segundos con la tabla original). Dan cuenta que la razón de cambio también variará y en este caso será mayor que la establecida.
E6			Responden intentado graficar y dibujan una tabla de datos con valores más grandes a la original.	El equipo no asocia que al caer más agua el nivel de altura alcanzado a la misma cantidad de segundo será mayor. Se limitan a crear una tabla en donde solo transcurren más segundos manteniendo la misma frecuencia de llenado descrita al principio.
E7			Responden intentado graficar y dibujan una tabla de datos con valores más grandes a la original.	El equipo no asocia que al caer más agua el nivel de altura alcanzado a la misma cantidad de segundo será mayor. Se limitan a crear una tabla en donde solo transcurren más segundos manteniendo la misma frecuencia de llenado descrita al principio.

Reactivo 15: ¿Qué hacer para que la gráfica este más arriba, más alta? Expliquen con claridad

E	Transcripción	Evidencia	Descripción	Análisis
E1	No responde	No responde		
E2	No responde	No responde		
E3	No responde	No responde		
E4	No responde	No responde		
E5	Que salga más agua de la llave		Responden que, para que la gráfica este más arriba o más alta, salga más agua de la llave.	El equipo asocia la cantidad de caída de agua con el aumento de la gráfica.

E6	Tienes que aumentar los centimetros		Responden que, para que la gráfica este más arriba o más alta, se tiene que aumentar los centímetros.	El equipo asocia que para que la gráfica esté más arriba debe haber más centímetros. (Se cree que los estudiantes solo escribieron algo para llenar el espacio de la pregunta).
E7	Tendria que aumentar los cm de la grafica		Responden que, para que la gráfica este más arriba o más alta, tienen que aumentar los centímetros de la gráfica.	El equipo asocia que para que la gráfica esté más arriba debe haber más centímetros. (Se cree que los estudiantes solo escribieron algo para llenar el espacio de la pregunta).

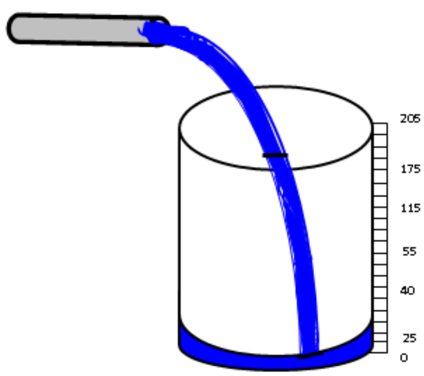
Anexo 9. Rediseño Secuencia de Experimentación y Modelación "El llenado del estanque"

REDISEÑO SECUENCIA DE EXPERIMENTACIÓN Y MODELACIÓN

NOMBRES:______________________________ Curso:_______ Fecha: ________

I. PLANTEAMIENTO DEL EXPERIMENTO

Vamos a investigar cómo se comporta el llenado de un estanque.
Tenemos un estanque cilíndrico que se va llenando con un chorro de agua constante. Al inicio el estanque tiene un nivel de altura de agua de 25 cm.
Al llenar el estanque se mide el nivel de altura del agua cada 20 segundos, según la regla graduada que se encuentra en él, con estos datos hacemos una tabla.



Tiempo de llenado (segundos) t	Nivel del agua (centímetros) H
0	25
20	55
40	85
60	115
80	145
100	175
120	205

1. Describan la situación con sus propias palabras.

2. Si han transcurrido 60 segundos, ¿Cuántos centímetros se ha llenado el estanque?

Expliquen su proceder

3. Si el nivel de altura del agua es 85 centímetros, ¿Cuánto tiempo ha transcurrido?

Describan su proceder

4. Si han transcurrido 50 segundos, ¿Cuántos centímetros marca el nivel de altura del agua? Expliquen muy bien cómo hicieron para encontrar el resultado.

5. Si han transcurrido 85 segundos ¿Cuántos centímetros marca el nivel de altura del agua? Expliquen muy bien cómo hicieron para determinar el resultado.

6. ¿Cuántos centímetros marcará el nivel de altura del agua, si han transcurrido 31 segundos? Expliquen muy bien cómo hicieron para obtener el resultado.

7. ¿Cuántos centímetros marcará, si han transcurrido 1 segundo? Expliquen muy bien su proceder para obtener el resultado.

8. ¿Cuántos centímetros marcará el nivel de altura del agua, si han transcurrido t segundos? ¿Por qué?

9. Utilizando el procedimiento de la respuesta anterior, determinen el nivel de altura del agua cuando han transcurrido 80 segundos.

a) Confronten su resultado con el valor de la tabla.

b) Argumenten su respuesta.

10. ¿Identifican una razón matemática en sus desarrollos? Argumente

11. ¿Cuántos centímetros marcará el nivel de altura del agua, si han transcurrido 18,45 segundos? ¿Por qué?

12. ¿Cuál es la expresión algebraica que el equipo puede asociar al llenado del estanque? Identifiquen en ella sus valores fijos o parámetros y describan lo que representa cada uno.

13. ¿En qué tiempo el nivel de altura del estanque corresponde a 35 centímetros? Expliquen muy bien cómo hicieron para obtener su resultado.

14. ¿Qué características tiene la gráfica que modela el llenado del estanque? ¿Cuál es esta gráfica?

Tiempo de llenado (segundos) t	Nivel de altura del agua (centímetros) h
0	25
1	
	35
18,45	
20	55
31	
40	85
50	
60	115
80	145
85	
100	175
120	205

Características de la gráfica

15. Si del chorro constante cae más agua ¿cómo es la **gráfica**, la **tabla**, la **razón matemática**, **la expresión algebraica**? Señalen sus argumentos para cada afirmación que hagan.

16. ¿Qué hacer para que la gráfica este más arriba, más alta? Expliquen con claridad