Facultad de Ciencias

Departamento de Matemáticas

"ANÁLISIS DE LA DEFINICIÓN Y PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS EN UN TEXTO ESCOLAR BASADA EN LA METODOLOGÍA DE ANÁLISIS DE JUAN D. GODINO"

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO PROFESIONAL DE PROFESOR DE EDUCACIÓN MEDIA EN MATEMÁTICA CON MENCIÓN EN DIDÁCTICA

Memoria

Cristian Alonso Alcaíno Fernández

Carolina Andrea Ortiz Rojas

Profesor Guía:

Silvana Gomez

Dedicatoria

Carolina

Agradezco a mi familia y amigos, los cuales creyeron en mí y me alentaron a alcanzar este gran éxito que forma parte de los objetivos fundamentales de mi vida. En especial agradezco a mis padres, que constantemente me brindaron su apoyo incondicional, el cual fue un pilar fundamental para llegar al final de este camino, a pesar de las adversidades que se interpusieron. Y como experiencia de vida les digo: "Con esfuerzo y sacrificio, se puede alcanzar la cima de lo que muchas veces se cree imposible, basta con creer en ti"…

Cristian

Cuesta contar todas las personas que han hecho posible que esta etapa este terminando, pues cada uno de ellos de una u otra manera han influido..., agradecer a todos ellos, pero sobre todo a quienes están presentes hoy en mí vida, que son mis padres y familia, Marcela y amigos. No puedo asegurar que esto sería imposible sin ellos, pero dar gracias por estar, pues así mi vida es más feliz.

Índice

Resumen

Se presenta el trabajo en donde se aplica una metodología de análisis a un proceso de instrucción matemática propuesto por un texto, con respecto a la definición y propiedades de los logaritmos según la metodología de Juan D. Godino, el trabajo comprenderá dos dimensiones:

- Análisis epistémico (naturaleza y secuenciación de los componentes del conocimiento matemático en juego).
- Análisis semiótico (proceso de interpretación y negociación de los significados).

A través de estos análisis, se persigue poner en evidencia los potenciales conflictos en relación a la propuesta de instrucción de un texto utilizado enseñanza media, pues según los resultados publicados por el Demre[1] muestran un problema en relación a algunas preguntas relacionadas con definición y propiedades de logaritmo.

Palabras clave: logaritmo, conflicto potencial, propiedades de los logaritmos, texto, significado local, significado de referencia, trayectoria epistémica, análisis semiótico.

[1] DEMRE: es el organismo técnico de la Universidad de Chile, responsable del desarrollo, construcción de instrumentos de evaluación y medición de las

Introducción

El punto de partida de J. Godino es el enfoque antropológico de Chevallard que considera la matemática como una actividad humana. Ésta se desarrolla en el seno de ciertas situaciones en que intervienen determinados instrumentos, lingüísticos por ejemplo, y que aporta técnicas para realizar determinados tipos de tareas, asumiendo que todo conocimiento es relativo a instituciones (los matemáticos, escuelas, profesionales, etc). En el seno de estas instituciones se realizan prácticas matemáticas específicas, que generan conocimientos matemáticas específicos.

Éste trabajo se gestó luego de revisar los resultados entregados por las pruebas de selección universitaria (PSU). Al indagar en estos resultados se pudo observar que hay un tema particular relacionado con la definición y propiedades de logaritmos que presenta un porcentaje importante de omisión o error (en los que responden). De esto, su pudo observó que hay un porcentaje muy variable entre el año 2004 y 2010, el porcentaje no es ni creciente ni decreciente, es decir, si un año sube, el otro baja, para luego volver a subir. Para intentar responder a esta omisión o error por parte de los estudiantes que rindieron la PSU entre estos años, se implementó una metodología de análisis epistemológico y semiótico propuesta por el profesor Juan D. Godino a una instrucción en un texto escolar. Con ella se intenta encontrar las diferencias entre los significados locales (que corresponden a los contenidos propuestos por el texto de estudio) de la definición y propiedades de los logaritmos y un significado de referencia para estos contenidos (significados del cual se toman los elementos para formar el significado local, pero que no se aplica en su totalidad) y determinar los potenciales conflictos semióticos que pueda presentar una instrucción matemática. Para esto se tomó como referencia de una instrucción matemática que está propuesta por un texto escolar de segundo año medio.

Para llevar a cabo este análisis se consideró una etapa inicial de subdivisión de la unidad principal, estas subdivisiones están compuestas por ejemplos, notaciones, definiciones y que reciben el nombre de unidades epistémicas. En una segunda etapa se realizó un análisis de cada una de estas unidades epistémicas, con el fin de encontrar los posibles conflictos semióticos, lo que puede implicar en una aprehensión incompleta o incorrecta de los contenidos propuestos por el texto.

Capítulo 1

Problemática

Los datos entregados por el Demre que muestran los resultados de las preguntas referentes a la definición y propiedades de los logaritmos llevan a preguntarse ¿Cómo se pueden identificar los obstáculos (epistemológicos y semióticos) que pueda presentar una instrucción matemática de la definición y propiedades de logaritmo en un texto escolar?

Justificación del problema:

Según las publicaciones del Demre del año 2005 hasta 2011 correspondientes a los resultados obtenidos en la PSU del año anterior (por ejemplo la publicación 2005 corresponde a los resultados obtenidos del proceso PSU 2004). En estos resultados se evidencia un importante problema en la definición y aplicación de propiedades de los logaritmos. En los distintos procesos existen importantes porcentajes omisión y error (en los que responden). La omisión más baja se presentó el año 2007 que estuvo cercana al 20% y el más alto índice de omisión fue el año 2006 alrededor del 62%, esto no significa que la omisión de las preguntas haya ido en aumento, pues ha sido relativamente variable. El último año del cual se tomó antecedente de estas publicaciones (2011) el porcentaje de omisión fue de un 37%. Este es un punto de partida importante para realizar el análisis de una instrucción de logaritmo y sus propiedades, pues surge la duda de las causas de este fenómeno que sucede en las respuestas de los estudiantes en la prueba de selección universitaria, para ello este trabajo se respalda en la teoría de análisis de Juan D. Godino.

Para investigar una de las posibles razones de los resultados de la PSU, se realiza un análisis epistemológico y semiótico de una instrucción matemática en un texto entregado de segundo año medio, para ello se optó por el libro que entrega el ministerio de educación, pues es el texto presente en todos los colegios públicos, por el ministerio, específicamente en el contenido de definición y propiedades de logaritmo, según la metodología de Juan D. Godino. Con este análisis se pretende identificar los elementos del significado local de los contenidos matemáticos pretendidos en un proceso instruccional y evaluar el nivel de complejidad semiótica del proceso instruccional y determinar los aspectos críticos que requieren negociación de significados o cambios en el proceso.

De todos los textos existentes, se ha escogido el que entrega el ministerio de educación, pues es el texto común en todos los establecimientos municipalizados (y también algunos subvencionados), aunque este texto es referencial para llevar a cabo el análisis, pues lo que interesa en este trabajo es ver en la instrucción los conflictos. Previo a la aplicación de la metodología de Godino, se hace una comparación en la instrucción de definición y propiedades de los logaritmos de tres textos distintos de segundo año medio para notar las diferencias y similitudes entre ellos.

OBJETIVOGENERAL

Analizar un proceso de instrucción matemática propuesto por un texto de segundo año medio, en el contenido de definición y propiedades de logaritmo, para determinar los conflictos epistemológicos y semióticos a través de la metodología de análisis de Juan D. Godino.

OBJETIVOSESPECÍFICOS

1.- Aprehensión de la metodología de análisis de Juan D. Godino en una instrucción matemática.

2.- Realizar una comparación de textos de segundo año medio, en relación al contenido de definición y propiedades de logaritmos, e identificar diferencias y similitudes entre ellos.

3.- Aplicar la metodología de análisis a la definición y propiedades de los logaritmos, en una instrucción matemática presente en un texto de segundo año medio.

4.- Identificar obstáculos epistemológicos y semióticos presentes en la instrucción correspondiente a la definición y propiedades de los logaritmos.

Capítulo 2

MARCOTEÓRICO

1. Análisis y valoración de textos de estudio

Respecto a análisis y valoración de textos escolares de matemáticas se distinguen diferentes trabajos:

Tomás Ortega (2009) presenta una valoración de texto escolar en el cual da una estructura compuesta por diez elementos organizadores, en los cuales, para cada uno de ellos presenta una serie de interrogantes que ayudan al profesor a pueda valorar de manera objetiva la elección de los textos escolares de matemáticas. A cada elemento se le da una puntuación en una escala. La puntuación en esta escala refleja la importancia de la pregunta planteada.

Picado y Rico (2011) en sus trabajos sobre los organizadores del currículo de matemáticas, consideran el texto como un elemento que estructura las unidades didácticas. No presenta una valoración de texto escolares, sino que una serie de consideraciones que sugiere las características que deben tener los elementos que se consideren como organizadores del modelo de valoración, con un carácter específico al área de matemáticas

Juan D. Godino, también realiza aportes en cuanto al tema de análisis de textos, entrega una herramienta que, según sus estudios puede aplicarse tanto en el análisis de texto como a una instrucción matemática y esta última ayuda a cumplir con el objetivo planteado. A continuación se da una descripción de los elementos relevantes de su trabajo y su metodología.

2. Antropología cognitiva. La matemática como actividad humana

Godino (2010) menciona que el enfoque antropológico en Didáctica de las Matemáticas que

Chevallard viene desarrollando desde 1992 nos parece que aporta los elementos básicos de una epistemología de las matemáticas que enlaza con las corrientes de tipo pragmático. El punto de partida es considerar la actividad matemática, y la actividad de estudio de las matemáticas, en el conjunto de las actividades humanas y de las instituciones sociales.

En los comienzos de la teoría antropológica se introducen como nociones técnicas las de objeto, sujetos, instituciones y relaciones personales e institucionales a los objetos. Se considera que estos objetos existen porque hay "actividad", es decir trabajo humano, del que todos son emergentes. (p.37)

"La teoría antropológica se ha centrado hasta el momento, casi de manera exclusiva, en la dimensión institucional del conocimiento matemático." (Godino, J, 2010, p.37)

3. La noción de objeto matemático

Godino considera útil hacer un uso amplio (débil) de la expresión "objeto matemático": Objetos matemáticos no son solo los conceptos, sino cualquier entidad o cosa a la cual nos referimos, o de la cual hablamos, sea real, imaginaria o de cualquier otro tipo, que interviene de algún modo en la actividad matemática. Esta "debilidad" de la noción de objeto deberá ser subsanada por una "teoría fuerte "que permita categorizar los diversos tipos de objetos que interesa considerar para describir la actividad matemática en los diversos contextos y marcos institucionales. Se aclara a continuación la posición ontológica, poniendo en juego los atributos contextuales duales introducidos en el enfoque ontosemiótico. "Objeto matemático" es una metáfora que cosiste en trasladar una de las características de las cosas físicas (la posibilidad de separación de otras "cosas") a las matemáticas. Por tanto, de entrada todo lo que se pueda "individualizar" en matemáticas será considerado como objeto (un concepto, una propiedad, una presentación, un procedimiento, etc). Constantemente nos empeñamos en descomponer de alguna manera la realidad en una multiplicidad de objetos identificables y discriminables a los que se refiere mediante términos singulares y generales (esta silla, una mesa, la letra equis de la pizarra, la función $f(x) = 3x + 2$, etc.). Sobre estos objetos actúa (sobre todo) la faceta extensivo/intensivo (ejemplar/tipo; particular/general).Las explicaciones que se pueden dar para justificar la activación de dicha faceta son diversas. Por ejemplo un foucaultiano diría que estos objetos ya han sido "dichos desde algún discurso" mientras que desde la filosofía de la ciencia se dirá que "toda percepción (observación) está cargada de teoría" ya que todo juicio de percepción supone la aplicación de conceptos (la proposición A es B).Otra posible explicación la ofrece la teoría de la cognición "corporeizada". Desde este punto de vista, uno de los orígenes del discurso objetual en matemáticas es la metáfora ontológica, la cual, a su vez, tiene su origen en nuestras experiencias con objetos físicos. Esta metáfora permite considerar acontecimientos, actividades, ideas, etc. como si fueran entidades (objetos, cosas, etc.). Esta metáfora se combina de manera inconsciente con otra metáfora ontológica: la del contenedor. La combinación de dichas metáforas permite considerar ideas, conceptos, etc. como entidades que se contiene unas a otras.

4. La noción de Significado

Una de las posibles maneras de concebir el significado de una palabra es considerarlo como el universal que se asocia a esa palabra. A su vez, las cosas designadas por el término se consideran ejemplificaciones de ese mismo universal. De esta manera, las palabras y las cosas quedan relacionadas a través de un tercer reino poblado de esencias y significados. Esta concepción, que en cierta manera se puede considerar platónica, se considera en el enfoque Ontosemiótico como una manera "unitaria" de plantear el problema ya que lo que se necesita para conocer el "significado" es una definición.

Otra posible manera de afrontar el problema es hacerlo en términos de comportamiento. Desde esta perspectiva, que en cierta manera se puede considerar pragmatista, el significado de un objeto matemático se debe entender en términos de lo que se puede hacer con dicho objeto matemático. Se trata de una perspectiva "sistémica" ya que se considera que el significado de un objeto es el sistema de prácticas en las que dicho objeto es determinante para su realización (o no).

La aparición en escena del sistema de prácticas lleva a una reflexión sobre lo que se entiende por práctica y por "realización de una práctica". Cuando un sujeto realiza y evalúa una práctica matemática es necesario activar un conglomerado formado por algunos (o todos) de los siguientes elementos: lenguaje, situaciones – problema, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos. A este conglomerado, necesario para la realización y evaluación de la práctica, en el enfoque ontosemiótico se le llama configuración. Estas configuraciones pueden ser cognitivas (conglomerado de objetos personales) o epistémicas (conglomerado de objetos institucionales) según que se considere la práctica desde la perspectiva personal o institucional.

5. Análisis epistémico

"Entenderemos por análisis epistémico de un proceso de instrucción matemática la identificación de los componentes del contenido matemático pretendido, su secuenciación a lo largo del mismo y comparación con el significado de referencia. Como componentes del contenido se consideran las identificadas como elementos del significado de un objeto matemático en trabajos previos (Godino, 1998), esto es, los elementos:

- Ostensivos (representaciones materiales, notaciones)
- Extensivos (situaciones-problemas, tareas)
- Actuativos (operaciones, algoritmos, procedimientos, técnicas)
- Intensivos (definiciones, proposiciones)
- Validativos (argumentaciones, justificaciones).

El análisis se basará en descomponer la crónica en unidades, que denominaremos epistémicas, esto es, relativo al conocimiento institucional. El criterio para definir las unidades de análisis será el cambio de elemento de significado, esto es, cuando se cambia de problema a estudiar dentro del campo de problemas considerado, se pasa del enunciado del problema al desarrollo de una técnica, el empleo de una notación, al uso o identificación de una propiedad, o a la descripción, sistematización y validación de las soluciones. Es decir, tendremos en cuenta para delimitar las unidades de análisis los momentos en los cuales se ponen en juego alguno de los cinco elementos introducidos en nuestro modelo epistemológico (ostensivos, extensivos, actuativos, intensivos, validativos), o también entidades mixtas derivadas.”(Godino , pág. 3)

El análisis epistémico lo consideramos como etapa previa y crucial de los análisis semiótico-cognitivo. La razón es que este análisis permitirá identificar el sistema de entidades que se ponen en juego en el estudio de un contenido matemático, los cuales requerirán procesos instruccionales específicos. Este análisis nos va a permitir describir el "significado local" del contenido estudiado, en nuestro caso la definición y las propiedades de los logaritmos, y la distribución temporal de sus distintos elementos **(trayectoria epistémica)**”. (Godino, Pag.3).

La valoración del carácter más o menos completo del significado local requiere disponer de un patrón de comparación que denominaremos **Significado de referencia**. Esta comparación entre significado local y de referencia se puede describir como la “transposición didáctica” localmente implementada en el proceso instruccional.

6. Análisis semiótico

El análisis semiótico de un proceso instruccional consiste, para este trabajo, en identificar la trama de funciones semióticas (expresiones, contenidos y códigos interpretativos) (Godino, 1998; Godino y Batanero, 1999) que se establecen en los procesos de comunicación entre los agentes participantes (investigador y texto). Será pues la indagación sistemática de lo que *puede* significar el texto de la crónica del proceso, y de cada una de las partes en que se puede descomponer dicho texto, para un interpretante potencial (análisis a priori), o la identificación de los significados atribuidos *de hecho* por los emisores de las expresiones (análisis a posteriori). En ambos casos se pueden confrontar con los significados institucionales de referencia, lo que permite formular hipótesis sobre conflictos semióticos potenciales.

El análisis semiótico tendrá en cuenta:

Los agentes involucrados: el profesor (en este caso los autores del texto) y el investigador o intérprete de referencia, que es la persona que realiza el análisis semiótico de las emisiones del profesor y de las interpretaciones del estudiante.

Objetos puestos en juego: expresiones, contenidos y códigos interpretativos (los objetos y significados que se ponen en juego en una expresión determinada pueden ser diferentes según el punto de vista del agente que se considere).

Diversos tipos de correspondencias entre expresión y contenido, tanto de tipo representacional como instrumental, elemental y sistémico, etc. (Godino, 1998).

Este tipo de análisis ayudará a formular hipótesis sobre puntos críticos del proceso instruccional en los cuales pueden haber lagunas o vacíos de significación, o disparidad de interpretaciones que requieran procesos de negociación de significados y cambios en el proceso de estudio. Así mismo, será una metodología básica para caracterizar los significados personales finales sobre los objetos matemáticos puestos en juego y el proceso de su constitución. El texto sometido a análisis puede ser el fragmento de una lección, la transcripción de un proceso de resolución de una tarea, entrevistas individuales, o los protocolos de las interacciones entre profesor y alumnos.

7. Comprensión y conocimiento en el enfoque ontosemiótico

Según Juan D. Godino existen dos maneras de entender la “comprensión”: una como proceso mental y el otro como competencia. Estos dos puntos de vista están claramente enfrentados. Por una parte los enfoques cognitivos en la didáctica de las matemáticas, entienden la comprensión como “proceso mental”. En cambio los posicionamientos pragmatistas del enfoque Ontosemiótico, llevan a entender la comprensión básicamente como una competencia[2] y no tanto como proceso mental. Esta última manera de entender la “comprensión” lleva a concebirla como “comprender las normas”, las cuales regulan la práctica. Esto trata de un punto de vista que procura dilucidar la inteligibilidad de las acciones humanas, con el objeto de clarificar el pensamiento que informa y lo sitúa en el contexto de

2 Se considerará que un sujeto comprende un determinado objeto matemático cuando lo usa de manera competente en diferentes prácticas (J. Godino, 2002, pág. 1)

normas sociales y de las formas de vida dentro de las cuales aquéllas ocurren.

Según Bruno D'amore y J. Godino "una cognición individual no necesariamente coincide con una institucional porque se puede identificar la cognición personal con el término cognitivo (lo cual hace la psicología cognitiva), mientras que la cognición institucional con epistémico, dado que se ocupa de un conocimiento institucional" (D'amore y J. Godino, 2007, p. 193).

Esta última distinción se toma como útil para enfrentar enfoques de investigación en didáctica de las matemáticas, que son el enfoque de la teoría antropológica de lo didáctico y el enfoque Ontosemiótico del conocimiento y de la instrucción matemática, este último considerado por Godino y D'amore como una ampliación de la visión antropológica, pues consideran que presenta limitaciones al ser tomado como base para la investigación en didáctica de las matemáticas (Redalyc, 2007)

El hecho de considerar que las funciones semióticas tienen un papel en el proceso relacional entre entidades, que se realiza en las prácticas matemáticas, permite también entender la comprensión en términos de funciones semióticas (Godino 2003). Se puede interpretar la compresión de un objeto por parte de un sujeto en términos de las funciones semióticas que el sujeto puede establecer, en circunstancias fijadas, en donde se pone en juego el objeto como expresión o contenido (J. Godino, 2002, pag. 2).

Cada función semiótica conlleva a un acto de semiosis por una agente que interpreta, lo cual constituye un conocimiento. Cuando se habla de conocimiento esto equivale a hablar de que el sujeto establece una función semióticas, de que el sujeto establece una función o una trama de funciones semiótica, de lo cual resulta una variedad de tipos de conocimientos en correspondencia con la diversidad de funciones semióticas que se pueden establecer entre las diversas entidades introducidas en el modelo (J. Godino, 2002, pag. 2).

8. El análisis semiótico como técnica para determinar significados

Según Godino los tipos de entidades emergentes de la actividad matemática y las diversas facetas o dimensiones desde las que se pueden considerar dichas entidades se fijan en las siguientes:

- Lenguaje (escrito, oral, gráfico,….)
- Situaciones-problema[3] (tareas, ejemplo de aplicación,..)
- Acciones (operaciones, algoritmos, procedimientos, técnicas)
  Conceptos (definiciones)
- Propiedades (proposiciones)
- Argumentos (justificaciones, validaciones).

Estas entidades primarias, según el juego de lenguaje en que participan, pueden ser consideradas desde las siguientes facetas o dimensiones:

- Personal- institucional (individual-social)
- Ostensiva – no ostensiva (perceptible- mental/gramatical)
- Extensiva-intensiva (ejemplar-tipo; concreta-abstracta)
- Elemental- sistémica (unitaria-compuesta)
- Expresión- contenido (significante-significado)

En nuestro trabajo según lo que propone Godino, aplicaremos una técnica, la cual se designa como "análisis semiótico", que permite caracterizar tanto los significados sistémicos (o praxeológicos) de un objeto matemático como los significados elementales puestos en juego en un acto de comunicación matemática. Así mismo, dicho análisis proporciona una herramienta para identificar conflictos semióticos potenciales en la interpretación de un texto usado en un proceso de estudio, o conflictos que tienen lugar en la realización efectiva de una interacción didáctica.

---

3 Elementos promotores o contextualizados de la actividad matemática.

9. Conceptos y propiedades

A continuación se de describen los conceptos y propiedades que están relacionados con la definición y propiedades de los logaritmos:

Logaritmo.

Si $a, b \in \mathbb{R}^{+}$, con $a \neq 1$ y $n \in \mathbb{R}$, entonces se derine el logaritmo de b en base a como:

$$\log_a b = n \Leftrightarrow a^n = b.$$

Lo anterior se lee "Logaritmo de b en base a es igual a n".

Si miramos el logaritmo en su notación de potencia, este corresponde al exponente de la potencia.

Observación

La palabra logaritmo proviene de la raíz griega *logos,* que significa *proporción,* y arithmos, que significa *números.*

Propiedades de los logaritmos.

Sean $a, b, c\ y\ d \in \mathbb{R}^{+};\ con\ a, d \neq 1$, entonces se cumple que:

a. logaritmo de la unidad.

$\log_a 1 = 0$

b. logaritmo de la base.

$\log_a a = 1$

c. logaritmo de una potencia con igual base a la del logaritmo.

$\log_a a^n = n$

d. Propiedad del cambio de base de un logaritmo

$\log_a b = \frac{\log_d b}{\log_d a}$

e. logaritmo de un producto.

$\log_a b \cdot c = \log_a b + \log_b c$

f. Logaritmo de un cociente.

$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$

g. Logaritmo de una potencia

$\log_a b^n = n \cdot \log_a b$

h. Logaritmo de una raíz

$log_a \sqrt[n]{b} = \frac{\log_a b}{n}$

Otras propiedades

i. $\log_a(b \cdot c) \neq \log_{\boldsymbol{a}} b \cdot \log_a c$

j. $log_a(b + c) \neq \log_a b + \log_a c$

k. $\log_a(b - c) \neq \log_a b \ - \log_a c$

Notación especial para algunos logaritmos.

$log_{10} b = log\ b$

$$log_e\ b = ln\ b$$

Capítulo 3

Metodología

1. Comparación previa entre los Textos para el Estudiante:

A continuación se hará una comparación previa entre 3 textos destinados al estudiante, donde se analiza de forma general la instrucción que se entrega sobre logaritmo y a sus propiedades en los textos. El texto N°1 (anexo 1) corresponde al texto de la Editorial Santillana Bicentenario; el texto N°2 (anexo 2) corresponde texto de la Editorial SM; El texto N°3 corresponde texto de la Editorial Santillana (Edición especial para el ministerio de Educación). Este último corresponde al texto analizado con la metodología propuesta por J. Godino, pues es el texto que el ministerio reparte en los establecimientos municipales y generalidad de establecimientos subvencionados.

El **texto N°1** comienza con la definición de Logaritmo, luego se muestran ejemplos en los cuales se calculan logaritmos mediante la definición y resolviendo la ecuación exponencial correspondiente. En cuanto a la base y argumento del logaritmo, se muestran ejemplos por medio de los cuales se busca validar las restricciones mediante las propiedades de potencia. Se definen logaritmo natural y en base 10.

Sobre la ejercitación se pretende que los estudiantes determinen logaritmos mediante la definición, a su vez, se proponen ejercicios en los cuales se debe calcular el valor de diversos logaritmos (donde la base y el argumento son fracciones y decimales), expresar como logaritmos ecuaciones exponenciales, calcular sumas de logaritmos (se utilizan logaritmos en los cuales la base y el argumentos son raíces) y determinar la base de ciertos logaritmos.

Respecto a las propiedades, se observa que se comienza con una definición y notación para el logaritmo natural y logaritmo en base 10. Se observa que por medio de las propiedades de potencias se llega a la demostración de las siguientes propiedades: logaritmo de la unidad, logaritmo de una potencia de la base, logaritmo de la base del logaritmo, logaritmo de una potencia, logaritmo de una raíz, Logaritmo de un producto, logaritmo de un cociente y logaritmo cambio de base (ya que la calculadora solo permite calcular logaritmos en base 10 y e, para poder hacer el cálculo de logaritmos con base distinta, es necesario hacer el respetivo cambio de base). Para poder mostrar la aplicación de las propiedades se desarrollan ejemplos relativos a cada una de ellas.

En cuanto a las actividades presentes en este texto se proponen ejercicios combinados, ya sean: suma, resta, multiplicación y división de logaritmos. Ejercicios en los cuales se busca que el estudiante descomponga ciertos logaritmos, aplicando propiedades, para luego reemplazar ciertos valores (Por ejemplo: Si $log\, 2 = 0{,}301 \;\; y \; \log 3 = 0{,}477$, entonces será posible calcular $log\, 6$ aplicando la propiedad logaritmo de un producto, $log\, 3 \cdot 2 = log\, 3 \; + log\, 2 = 0{,}301 + 0{,}477 = 0{,}778$), ejercicios en los cuales se pretende que el alumno aplique la propiedad cambio de base y luego resuelva aplicando el método anteriormente descrito. Se plantean ejercicios combinados los cuales pretenden que el alumno, aplicando las propiedades, exprese cada uno como un solo logaritmo, exprese logaritmos en función de otros y resuelva logaritmos donde su argumento contiene raíces n-ésimas.

El **texto N°2** comienza a modo de introducción indicando el uso de la calculadora para el cálculo de logaritmo en base 10 y se muestran ejemplos donde se pretende, por medio del resultado de potencias, llegar a la representación logarítmica. Luego se muestra formalmente la definición de logaritmo y sus respectivas restricciones para la base y argumento, se ejemplifica el cálculo de logaritmos y se expresan los resultados en forma exponencial según la definición. Se definen al logaritmo natural y en base 10.

En cuanto a la ejercitación, está enfocada a determinar logaritmos mediante la definición, se proponen ejercicios en los cuales los alumnos deben justificar el resultado de logaritmos, expresándolos en notación exponencial, según como lo indica la definición. En un segundo apartado se busca que los alumnos relacionen logaritmos con sus respectivos resultados. Luego los alumnos deben analizar logaritmos para distintos valores de la base y argumento, en donde se pretende que deduzcan la propiedad logaritmo de la base del sistema y logaritmo de la unidad. Se presenta un ejemplo indicando el método de resolución (expresar el logaritmo según la definición y luego resolverlo mediante la respectiva ecuación exponencial) para luego aplicarlo en la resolución de los ejercicios de logaritmo propuestos. Se pretende que los alumnos analicen y justifiquen la validez de la propiedad logaritmo de una potencia de la base del sistema.

En este texto las propiedades son expuestas directamente (la propiedad del cambio de base la presentan más adelante) y se muestran sólo algunos ejemplos de ejercicios combinados donde se hacen aplicaciones de las propiedades.

Los ejercicios, presentes en el texto, enfocados a la aplicación de las propiedades, tratan de lo siguiente: relacionar correctamente ejercicios combinados de logaritmos con su respectivo resultado, detectar el error en resoluciones y corregirlas, demostrar las propiedades logaritmos de una potencia de la base y logaritmo de una raíz n-esima, analizar la propiedad del cambio de base y aplicarla en ejercicios combinados.

En el **texto N°3** se comienza con una reseña histórica y una tabla de potencias, la cual tiene como objetivo llegar a la definición de logaritmo, definición que se muestra más adelante en un glosario. Para llegar a la definición se realizan una serie de ejemplos donde se calculan logaritmos, según la conclusión obtenida por el análisis de la tabla, expresando en forma exponencial para luego obtener el resultado. Se muestran contraejemplos, con el fin de que los alumnos analicen los valores de la base y el argumento, luego se muestran las restricciones para tales valores.

Se define logaritmo en base 10 y su notación.

Se demuestran las siguientes propiedades: logaritmo de la unidad, logaritmo de la base del sistema, logaritmo de una potencia con igual base, cambio de base y logaritmo de un producto. Los casos del logaritmo de un cociente, logaritmo de una potencia y logaritmo de una raíz, no son demostrados, solo son validados mediante ejemplos.

Las actividades propuestas presentes en este texto pretenden que el alumno resuelva logaritmos mediante la definición y explique el procedimiento, determine el argumento de un determinado logaritmo, calcule logaritmos (con base distinta a 10 y e) utilizando la calculadora de (se pretende que el alumno aplique la propiedad cambio de base), resuelva operatoria combinada con logaritmos aplicando las propiedades, exprese logaritmos en función de otros y aplicando propiedades, reduzca expresiones a un solo logaritmo.

Observación:

Luego de mencionar las características en la instrucción referente a logaritmo en los diferentes textos se puede destacar la siguiente:

En los 3 textos se muestra, la definición de logaritmo y se explica el método de resolución, expresando en forma exponencial para luego resolverlos, se muestran algunos ejemplos. En el texto N°3 la definición de logaritmo (al comienzo) no se expresa de manera clara, se utilizan ejemplos, el profesor debe tener particular atención en aclarar este punto, ya que no están ligados directamente a la definición de logaritmo, dentro de estos ejemplos se menciona inmediatamente a la propiedad cambio de base.

En los 3 textos se utilizan ejemplos que buscan llegar y validar las respectivas restricciones de la base y el argumento del logaritmo. En los textos 1 y 2 se da la definición para el logaritmo en base 10 y logaritmo en base e, pero en el texto N°3 define al logaritmo en base 10 y al logaritmo natural lo menciona solo para indicar el uso de este en la calculadora.

Las propiedades son demostradas en textos 1, incluyendo ejemplos que en los que se utilizan. Con respecto al texto N°2 se omite la demostración entregando al estudiante inmediatamente las propiedades y son validadas mediante algunos ejemplos. En el texto N°3 se demuestran propiedades y ejemplos de aplicación, pero la demostración de las propiedades logaritmo de un cociente, logaritmo de una potencia y logaritmo de una raíz, no son demostradas. En el texto N°3 no se explica que para calcular logaritmo en base distinta a 10 o e, con la calculadora, se debe hacer el respectivo cambio de base.

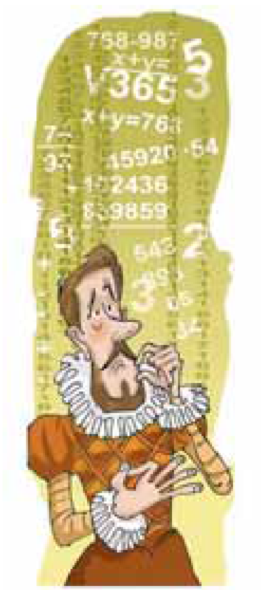
En cuanto a las actividades podemos rescatar que en el texto N°1 y N°2 se proponen una variedad de ejercicios, los cuales no están presentes en el texto N°3, como por ejemplo:

- Determinar la base de logaritmos, en donde esta se encuentra como la incógnita.
- Ejercicios variados donde la base del logaritmo contenga raíces n-esimas y operatoria con raíces.
- Demostración de propiedades
- Análisis y justificación de ejercicios con logaritmos (ejercicios variados).
- Detectar el error en procedimientos de resolución y hacer la respectiva corrección
- Expresar como logaritmo expresiones en forma exponencial.
- Asignación de valores decimales para la base y argumento del logaritmo
- Resolver logaritmos y relacionarlos con su resultado (similar a ejercicios con alternativas).

2. Análisis epistémico

Este análisis consiste en descomponer la crónica en unidades, que denominaremos epistémicas, las cuales denotaremos por con la letra mayúscula ‘E’ acompañado de la numeración correlativa, se tendrá en cuenta el orden en que aparecen a lo largo del proceso (trayectoria epistemológica), para luego hacer una comparación de los objetos y significados locales con los objetos de referencia, esto es relativo al conocimiento institucional.

Logaritmos



Hasta hace casi 400 años, la tarea de un calculador podía ser agotadora, imagina calcular multiplicaciones, divisiones, potencias, o sacar raíces, no solo de números enteros sino también de fracciones y números decimales, obviamente, sin tener una calculadora.

E1

Observa las siguientes multiplicaciones:

16 · 128	81 · 2187	256 · 16 384	625 · 78 125

E2

ANALICEMOS...

- Calcula los productos de las multiplicaciones anteriores sin usar calculadora y compara los resultados en tu curso. ¿Existen diferencias?, ¿por qué?
- ¿Existe alguna forma de simplificar estos cálculos, sin calculadora? Explica.
- Observa la siguiente tabla. ¿Reconoces en ella algunos de los factores anteriores?, ¿y algunos de tus resultados?, ¿qué tienen en común?

n	2^n	3^n	4^n	5^n
1	2	3	4	5
2	4	9	16	25
3	8	27	64	125
4	16	81	256	625
5	32	243	1024	3125
6	64	729	4096	15 625
7	128	2187	16 384	78 125
8	256	6561	65 536	390 625
9	512	19 683	262 144	1 953 125
10	1024	59 049	1 048 576	9 765 625
11	2048	177 147	4 194 304	48 828 125
12	4096	531 441	16 777 216	244 140 625

- Escribe los factores y el resultado, en cada caso, en forma de potencias. ¿Qué puedes concluir?

E3

Observa que todos los resultados conseguidos en la tabla anterior se ubican en la fila correspondiente a $n = 11$. Es decir, 11 es el exponente al que hay que elevar el 2 para obtener 2048, o el 3 para obtener 177 147, por ejemplo. E4

E6 Para referirnos a este exponente, al que hay que elevar el 2 para obtener 2048, decimos que el **logaritmo** de 2048, en base 2, es 11 y lo denotamos:

E7

$$log_2\ 2048 = 11, \text{ pues } 2^{11} = 2048$$

o que el logaritmo de 177 147 en base 3 es 11 y lo denotamos:

$$log_3\ 177\ 147 = 11, \text{ pues } 3^{11} = 177\ 147$$

Y así sucesivamente.

Glosario

E5

Logaritmo: exponente al que es necesario elevar una cantidad positiva para que resulte un número determinado.

E8 ¿Cómo se podría simplificar el cálculo de 625 · 78 125 utilizando la tabla?

Se ubican en la tabla cada uno de los factores y se expresan como potencias con igual base: $625 \cdot 78\ 125 = 5^4 \cdot 5^7 = 5^{11}$

Recuerda que...

E8

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

con $a \neq 0$, $n, m \in \mathbb{Q}$

$\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

E9 Entonces, se busca en la tabla, en la columna que corresponde a 5^n, su valor para $n = 11$. Este valor es 48 828 125, tal como cuando resolviste la multiplicación mediante el algoritmo habitual.

E10 De manera similar, podríamos efectuar otras operaciones, como divisiones, por ejemplo:

$$\frac{244\ 140\ 625}{390\ 625} = \frac{5^{12}}{5^8} = 5^4 = 625$$

E11 Además, utilizando la expresión $log_b\ B = \dfrac{log_c\ B}{log_c\ b}$, se puede determinar el resultado de $log_{27}\ 19\ 683$.

E12 A partir de la tabla, se observa que 19 683 y 27 son ambos potencias de 3, luego se pueden escribir utilizando los logaritmos en base 3 y ubicar los valores en la tabla. Observa.

$$log_{27}\ 19\ 683 = \frac{log_3\ 19\ 683}{log_3\ 27} = \frac{9}{3} = 3. \text{ Es decir, } 27^3 = 19\ 683$$ E13

E14 De esta manera, las multiplicaciones se pueden convertir en sumas, las divisiones en restas y las raíces por divisiones, con lo que se facilita notablemente el cálculo, más cuando los números implicados son muy grandes y se cuenta, obviamente, con tablas apropiadas.

E15 Volvamos a la definición de logaritmo: "exponente al que es necesario elevar una cantidad positiva para que resulte un número determinado". Si lo escribiera como ecuación, corresponde a resolver $log_b\ a = x$, donde b es la base del logaritmo y a es su argumento, con a y b positivos. E16

E17 Por ejemplo, calcular $log_2\ 16$ equivale a resolver la ecuación $log_2\ 16 = x$. Entonces, ya que la **base** del logaritmo es 2, el **exponente** no se conoce y 16 es el argumento, es decir, el **valor de la potencia**, se puede escribir $2^x = 16$. Y como 16 es una potencia de 2, de hecho, 2^4, esto equivale a $2^x = 2^4$, luego, igualando los exponentes, se concluye que $x = 4$. E18

E19

Ejemplo 1: Calcula el valor de $log_7\ 343$

$log_7\ 343 = x \qquad 7x = 343 = 7^3 \qquad x = 3$

Luego, $log_7\ 343 = 3$

Ejemplo 2: Obtener el valor de $log_2 \sqrt{8}$

$$log_2 \sqrt{8} = x \Rightarrow 2^x = 8^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 2^x = \left(2^3\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{2}}$$

Luego, $log_2 \sqrt{8} = \frac{3}{2}$

E20 Al igual que en el caso de las raíces, no todos los logaritmos se pueden calcular. Esta es la razón de la condición de valores positivos para a y b. Observa. E21

E22

Ejemplo 3: Obtener el valor de $log_8\ -512$

$log_8\ -512 = x \Rightarrow 8x = -512$

E23 Pero ¿la potencia de un número positivo puede ser negativa? No, en ningún caso. Luego, $log_8\ -512$ no existe.

E24

Ejemplo 4: Calcula el valor de $log_{(-2)}\ 8$

$log_{(-2)}\ 8 = x \Rightarrow (-2)^x = 8 = 2^3$

E25 En este caso, la base de la potencia es negativa y su exponente es impar, luego el valor de la potencia debiera ser negativo también. Como esto no se cumple, no existe $log_{(-2)}\ 8$.

E26

Ejemplo 5: ¿Cuánto resulta $log_1\ 5$?

$log_1\ 5 = x \Rightarrow 1^x = 5$

Ya que toda potencia de 1 es 1, no existe un valor de x, tal que 1^x sea igual a 5.

Considerando situaciones como estas, es que se ha definido que el valor de la base y el argumento del logaritmo deben ser positivos. En particular, la base debe ser distinta de 1. E27

En un mundo sin calculadoras, los logaritmos fueron utilizados como la principal herramienta en los cálculos aritméticos. Usándolos se ahorró un increíble esfuerzo, pues permitieron trabajar con los pesados cálculos necesarios en las aplicaciones a la agrimensura, la astronomía, y particularmente la navegación. Además, permitió realizar otros cálculos matemáticos que sin su invención no hubieran sido posibles. E28

Las tablas de logaritmos y las reglas de cálculo eran imprescindibles en cualquier centro de cálculo, hasta la aparición de las calculadoras y computadores. Actualmente los logaritmos ya no son necesarios para lo que fueron descubiertos. Sin embargo, ciertas características y utilidades, que durantes estos siglos se les han descubierto, los han hecho sobrevivir al desarrollo de la electrónica.

EN RESUMEN

E29

- El argumento y la base de un logaritmo son números reales positivos. Además, la base no puede ser 1. Es decir, en la expresión $log_b\ a$, siempre, por definición, $a \in \mathbb{R}^+$ y $b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$.
- Por definición, $x = log_b\ a \Rightarrow b^x = a$, entonces se puede decir que el logaritmo es el exponente de una potencia.
- La expresión $log_b\ a$ se lee como: "logaritmo de a en base b".

E30

EN TU CUADERNO

1. Calcula cada uno de los siguientes logaritmos.

a. $log_9\ 243$ c. $log_{0,7}\ 0{,}343$ e. $log_a \sqrt{a^8}$ g. $log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}$ i. $log_{16}\ 8$

b. $log_2\ 128$ d. $log_a\ a^9$ f. $log_6 \frac{1}{36}$ h. $log_8\ 16$ j. $log_a \sqrt[5]{a^2}$

2. Dada cada expresión, encuentra el valor de x.

a. $log_2\ x = 6$ b. $log_{\frac{3}{4}}\ x = -2$ c. $log_{0,3}\ x = 3$ d. $log_{0,004}\ x = -3$

E31

Tomás, a partir de la definición y luego de comprobarlo con algunos valores, determinó las siguientes relaciones entre los valores de a, b y c, con $a \neq 1$:

$$log_a\, b = c \qquad a^c = b \qquad a = \sqrt[c]{b}$$

ANALICEMOS...

- ¿Están correctas las relaciones que estableció Tomás? Compruébalas remplazando con los valores correspondientes, en cada caso.
- Tal como existen propiedades para las potencias y para las raíces, ¿se pueden establecer propiedades para los logaritmos? Justifica.
- Por ejemplo, en el caso de $log_b\, b^n$, ¿existe alguna propiedad que simplifique los cálculos? Explica.

E32

Las propiedades que se cumplen para logaritmos, para cualquier valor de la base b, se pueden establecer y demostrar a partir de las propiedades de las potencias.

E33

Observa.

- **Logaritmo de la unidad:**

$log_b\, 1 = x \quad \Leftrightarrow b^x = 1$, ya que $b > 0$, $b \neq 1$

$\Leftrightarrow b^x = b^0$

$\Leftrightarrow x = 0$

Por propiedades de potencias, ya que el valor de la potencia es 1 cuando el exponente de la potencia es cero (ya que la base es positiva y distinta de 1). Luego, $log_b\, 1 = 0$, con $b \neq 1$.

E34

Ejemplo: $log_5\, 1 = 0$

E35

- **Logaritmo de la base del sistema:**

$log_b\, b = x \quad \Leftrightarrow b^x = b \quad \Leftrightarrow b^x = b^1$

$\Rightarrow x = 1$.

Luego, $log_b\, b = 1$, con $b \neq 1$.

E36

Ejemplo: $log_3\, 3 = 1$

E37

- **Logaritmo de una potencia con igual base:**

$log_b\, b^n = x \quad \Leftrightarrow b^x = b^n \quad \Leftrightarrow = 1$

$\Rightarrow b^{(x-n)} = b^0$

$\Rightarrow x - n = 0\ (b \neq 1) \Rightarrow x = n$

Luego, $log_b\, b^n = n$, con $b \neq 1$.

E38

Ejemplo: $log_6\, 6^3 = 3$.

E39

- Cambio de base:

$log_b\, B = x \Leftrightarrow b^x = B$

$log_c\, b^x = log_c\, B$ ← Se aplican logaritmos en una base c

$x \cdot log_c b = log_c\, B$ ← Por propiedad de logaritmos

Por lo tanto, $log_b\, B = \dfrac{log_c\, B}{log_c\, b}$ para todo $b, c, B > 0$; $b, c \neq 1$

E40

Ejemplo: $log_2 5 = \dfrac{log\, 5}{log\, 2} = \dfrac{0{,}69897}{0{,}30103} = 2{,}32192$

NO OLVIDES QUE...

- Los logaritmos de base diez, es decir, $log_{10} x$, son llamados logaritmos decimales y en este texto los denotaremos como $log\ x$. E41
- Las calculadoras tienen teclas para calcular el logaritmo en base 10 (log) y el logaritmo natural (ln), pero no el logaritmo en una base cualquiera. En ese caso, se calcula usando la fórmula de cambio de base. E42

E43

EN RESUMEN

Se cumple, ya que la base b del logaritmo es positiva y distinta de 1, que:

- Logaritmo de la unidad: $log_b\, 1 = 0$.
- Logaritmo de la base del sistema: $log_b\, b = 1$.
- Logaritmo de una potencia con igual base: $log_b\, b^n = n$.
- Cambio de base: $log_b\, B = \dfrac{log_c\, B}{log_c\, b}$ para todo $b, c, B > 0$; $b, c \neq 1$

E44

EN TU CUADERNO

1. Calcula cada uno de los siguientes logaritmos.

a. $log_2\, 64$ d. $log_5\, 1$ g. $log_{16}\, 8$ j. $log_{\frac{4}{3}} \dfrac{16}{9}$

b. $log_9\, 243$ e. $log_3\, 3$ h. $log_{128}\, 1$ k. $log_{\frac{1}{2}}\, 128$

c. $log_{0,7}\, 0{,}49$ f. $log_5\, 5^7$ i. $log_6\, 6^3$ l. $log_5 \dfrac{1}{25}$

2. Utilizando una calculadora encuentra el valor de las siguientes expresiones.

a. $log_2\, 3$ b. $log_6\, 7$ c. $log_7\, 9$ d. $log_6\, 11$

3. Calcula el valor de cada una de las siguientes expresiones.

a. $log_4\, 64 + log\, 1000 + log_5\, 125$

b. $log_{\frac{2}{3}} \dfrac{4}{9} - log_{\frac{6}{5}} \dfrac{125}{216} + log\, 10\,000$

c. $2\, log_5\, 25 - 3\, log_7\, 49 + 4\, log_8\, 4096$

d. $3\, log_{\frac{1}{4}} 32 + 7\, log_{\frac{1}{5}} 125 - 6\, log_{\frac{1}{3}} 243$

e. $4\, log_{\frac{5}{7}} \dfrac{25}{49} + 2\, log_{\frac{2}{5}} \dfrac{8}{125} - 5\, log_{\frac{6}{7}} \dfrac{216}{343}$

f. $2\, log\, 100\,000 - 2\, log_4\, 256 + 4\, log_2\, 32$

E45 Al igual que para las potencias y las raíces, para los logaritmos también existen propiedades que permiten simplificar los cálculos. Para demostrarlas, los logaritmos se pueden escribir en forma exponencial y aplicar algunas de las propiedades de las potencias.

E46 Por ejemplo, el logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores. Es decir,

$$\log_b (a \cdot c) = \log_b a + \log_b c$$

E47

Analicemos...

- Considera valores positivos para a, b y c, con $b \neq 1$, y remplázalos en la expresión. ¿Efectivamente se cumple?, ¿por qué?
- ¿Crees que también se cumpla $\log_b (a \cdot c) = \log_b a \cdot \log_b c$? Justifica.
- A partir de esta propiedad ¿se pueden obtener otras? Explica.

E48 Para comprobar con un ejemplo que esta propiedad se cumple, se puede resolver un logaritmo de dos maneras distintas, directamente y aplicando el logaritmo del producto. Observa:

$$\log_2 128 \Leftrightarrow 2^x = 128$$
$$\Leftrightarrow 2^x = 2^7\text{, luego } x = 7$$

Por otra parte,

$$\log_2 128 = \log_2 (4 \cdot 32) = \log_2 4 + \log_2 32$$
$$= \quad 2 \quad + \quad 5 \quad = 7$$

E49 Pero no basta con comprobar con un ejemplo para justificar que la propiedad está correcta. Es necesario demostrar que se cumple para cualquier valor de a, b o c, con $b \neq 1$.

Considera que $\log_b a = y \Leftrightarrow b^y = a$

$\log_b c = z \Leftrightarrow b^z = c$

$\log_b (a \cdot c) = x \Leftrightarrow b^x = a \cdot c$

$b^x = b^y \cdot b^z \longleftarrow$ Remplazando

$b^x = b^{y+z} \Rightarrow x = y + z \longleftarrow$ por propiedad de potencias

$\log_b (a \cdot c) = \log_b a + \log_b c \longleftarrow$ Remplazando

E50 De manera similar, se pueden demostrar las siguientes propiedades:

- El logaritmo de un cociente es igual a la diferencia de los logaritmos de los factores.

$$\log_b \left(\frac{a}{c}\right) = \log_b a - \log_b c$$

E51 **Ejemplo:** $\log_3 \left(\frac{81}{243}\right) = \log_3 81 - \log_3 243 = 4 - 5 = -1$

E52
- El logaritmo de una potencia es igual al producto del exponente de dicha potencia por el logaritmo de su base.

$$log_b\ a^n = n \cdot log_b\ a$$

E53 Ejemplo: $log_2\ 4^3 = 3 \cdot log_2\ 4 = 3 \cdot 2 = 6$

E55
- El logaritmo de una raíz es igual al logaritmo de la cantidad subradical, dividido por el índice de la raíz.

$$log_b\ \sqrt[n]{a} = \frac{log_b\ a}{n}$$

E56 Ejemplo: $log_4\ \sqrt[6]{16} = \frac{1}{6} \cdot log_4\ 16 = \frac{1}{6} \cdot 2 = \frac{1}{3}$

NO OLVIDES QUE... E54

En relación con las propiedades de los logaritmos se debe tener presente que se cumple en general:

- $log_b\ (p \cdot q) \neq log_b\ p \cdot log_b\ q$
- $log_b\ (p + q) \neq log_b\ p + log_b\ q$
- $log_b\ (p - q) \neq log_b\ p - log_b\ q$

EN RESUMEN E57

Sean a, b, c números racionales y positivos, con la base b distinta de 1:

- Logaritmo de un cociente: $log_b \left(\frac{a}{c}\right) = log_b\ a - log_b\ c$
- Logaritmo de una potencia: $log_b\ a^n = n \cdot log_b\ a$
- Logaritmo de una raíz: $log_b \sqrt[n]{a} = \frac{log_b\ a}{n}$

E58

EN TU CUADERNO

1. Desarrolla cada una de las siguientes expresiones, utilizando propiedades.

   a. $log_b\ (x^2 - 9x - 22)$
   b. $log_b \left(100x^8 - 80x^7 + 16x^6\right)^{\frac{8}{3}}$
   c. $log_b\ (x^3 + y^3)^2$
   d. $log_p\ \frac{a^2 b^4 c^5}{d^2}$

2. Reduce cada una de las siguientes expresiones a un solo logaritmo.

   a. $log_m\ a - 2\ log_m\ b + log_m\ c - 3\ log_m\ d$
   b. $log_b\ (x^2 + 1) + log_b\ (x + 1) + log_b\ (x - 1)$
   c. $log_p\ (x + y + z) - 4\ log_p\ (x - y - z)$
   d. $log_p\ (x + 3) - 4\ log_p\ (x - 2)$
   e. $2\ log_b\ 3 + 3\ log_b\ 2$
   f. $log_b\ c - 6\ log_b\ a$
   g. $log_b\ a - log_b\ c - log_b\ d + log_b\ e$
   h. $log_b\ c + log_b\ a - 1$

3. Si $A = log_6\ 2$, $B = log_6\ 3$ y $C = log_6\ 5$, expresa en términos de A, B y C.

   a. $log_6\ 5400$
   b. $log_6\ 90$
   c. $log_6\ \sqrt{216}$
   d. $log_6\ \frac{1\,080}{32\,400}$

2.1. Trayectoria epistémica

E1: Presentación histórica como introducción de la sección de logaritmo. (Validativo)

E2: Aplicación de una técnica ya conocida (multiplicación). (Actuativo)

E3: Agrupación de tareas y técnicas que sistematizan prácticas de actividades que involucran conocimientos previos. (Colección de elementos extensivos-actuativos)

E4: Evaluación de la técnica desarrollada previamente (observar los datos obtenidos en la fila de exponente n = 11). (Validativo)

E5: Definición de Logaritmo: exponente al que es necesario elevar una cantidad positiva para que resulte un número determinado. (Intensivo nominal)

E6: Asignación de una propiedad al logaritmo a través del ejemplo de E4.(intensivo proposicional)

E7: Uso de notación para logaritmo en base 2 de 2048, $log_2 2048 = 11$ lo que en notación de potencia es $2^{11} = 2048$ (igual manera para logaritmo en base 3 de 177.147). (Ostensivo)

E8: Aplicación de una técnica ya conocida: expresar un producto de dos factores como producto de potencias de la misma base. (Actuativo)

E9: Justificación de la técnica de E8 apoyándose en tabla vista en E3. (Validativo)

E10: Aplicación del método de división de valores que se pueden transformar en potencias de misma base apoyándose en tabla de E3. (Actuativo)

E11: Asignación de una propiedad al logaritmo: propiedad de cambio de base se aplica a un ejemplo. (intensivo proposicional)

E12: Validación de una técnica apoyándose en la tabla de E3: los valores tomados en E11 corresponden a potencias de 3. (Validativo)

E13: Aplicación del método de solución visto en E11.(Actuativo)

E14: Asignación de propiedades al logaritmo: multiplicación de argumento en la función logaritmo se transforma en suma de logaritmos y la división en resta. (Intensivo proposicional)

E15: Definición de logaritmo. (Intensivo nominal)

E16: Asignación de propiedad a la base b y argumento (ser positivos) y asignación de equivalencia para $log_b a = x$ es lo mismo que resolver $b^x = a$. (Intensivo)

E17: Ejemplo particular de cálculo de logaritmo ocupando la equivalencia: equivale a resolver la ecuación.(Extensivo)

E18: Justificación del resultado de ejemplo en E17. (Validativo)

E19: Más ejemplos de cálculo del tipo visto en E17. (Extensivos)

E20: Asignación de propiedad a logaritmo recordando a las raíces: no todos los logaritmo se pueden calcular.(Intensivo)

E21: Justificación de propiedad de la base y argumento de E16.(Validativo)

E22: Ejemplo para validar propiedad del argumento en E16.(Validativo)

E23: Enunciado de una tarea problemática: decidir si una potencia de número positivo puede ser negativa.(Extensivo)

E24: Contraejemplo de la propiedad vista en E16: donde la base debe ser positiva. (Extensivo)

E25: Justificación de la propiedad E16 para el ejemplo de E24.(Validativo)

E26: Ejemplo importante para asignar propiedad al logaritmo.(Intensivo)

E27: Asignación propiedad al logaritmo: la base debe ser positiva y distinta de 1.(Intensivo)

E28: Motivación histórica sobre el uso y la utilidad que ha prestado el logaritmo y sus tablas en el tiempo. (Validativo)

E29: Agrupación de propiedades asignadas al logaritmo vistas hasta el momento.(Colección de elementos intensivos)

E30: Agrupación de tareas que se proponen como ejercitación y aplicación de los contenidos.(Colección de elementos extensivos)

E31: Enunciado de una tarea problemática (determinar las relaciones entre con :$log_b a = c,\ b^c = a$ y $\sqrt[c]{a}$) (Extensivo)

E32: Asignación de propiedad a los logaritmos: las propiedades de logaritmos se pueden demostrar a partir de las propiedades de potencias.(intensivo)

E33: Validación de la propiedad logaritmo de la unidad a partir de las propiedades de potencias.(Validativo)

E34: Ejemplo particular de la propiedad validada en E32.(Extensivo)

E35: Validación de la propiedad logaritmo de la base del sistema.(Validativo)

E36: Ejemplo particular de la propiedad validada en E35.(Extensivo)

E37: Validación de la propiedad logaritmo con una potencia de igual base. (Validativo)

E38: Ejemplo particular de la propiedad validad en E37. (Extensivo)

E39: Asignación de notación para los logaritmos de base 10 (log) y logaritmo en base e (ln) que este último corresponde al logaritmo natural.(Ostensivo)

E40: Validación de la propiedad del cambio de base para el logaritmo.(Validativo)

E41: Ejemplo particular de la propiedad validada en E40.(Extensivo)

E42: Uso de notación $logx$para los logaritmos en base 10 o logaritmos decimales, es decir los logaritmos $log_{10}x$. (Ostensivo)

E43: Agrupación de propiedades de logaritmo adicionales a E29 validadas en E35, E37,E39 y E41. (Colección de elementos intensivos)

E44: Agrupación de tareas que se proponen como ejercitación y aplicación de las propiedades agrupadas en E43.(Colección de elementos intensivos)

E45: Asignación de propiedad a las operaciones con logaritmo: escribir los logaritmos en forma exponencial y aplicar algunas propiedades de potencia. (Intensivo - Actuativo)

E46: Asignación de propiedad al argumento de un logaritmo que se puede escribir como producto: el logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores. (Intensivo)

E47: Agrupación de tareas y técnicas que sistematizan prácticas de actividades que involucran la propiedad de E45. (Extensivo - actuativo)

E48: Verificación de propiedad de E45 mediante un ejemplo particular. (Validativo - Actuativo)

E49: Validación de propiedad de E45 mediante la demostración formal.(Validativo)

E50: Asignación de propiedad al logaritmo de un cociente: el logaritmo de un cociente es la igual a la diferencia del dividendo y el divisor. (Intensivo)

E51: Ejemplo particular de aplicación de la propiedad vista en E49. (Extensivo)

E52: Asignación de una propiedad al logaritmo: el logaritmo de una potencia es igual al producto del exponente de dicha potencia por el logaritmo de su base. (Intensivo)

E53: Ejemplo particular aplicando propiedad vista en E51. (Extensivo)

E54: Agrupación de propiedades sobre los argumentos de los logaritmos. (Colección de elementos intensivos)

E55: Asignación de una propiedad al logaritmo: el logaritmo de una raíz es igual al logaritmo de la cantidad subradical, dividido por el índice de la raíz. (Intensivo)

E56: Ejemplo particular aplicando propiedad vista en E54. (Extensivo)

E57: Agrupación de propiedades de logaritmos sobre sus argumentos vistas hasta el momento. (Colección de elementos intensivos)

E58: Agrupación de tareas que se proponen como ejercitación y aplicación de las propiedades agrupadas en E54. (Colección de elementos extensivos)

2.2. Significado local de Logaritmo. Comparación con el significado de referencia

El tipo de análisis que hemos desarrollado nos permite caracterizar los elementos del significado local del contenido matemático pretendido en el proceso de estudio, los cuales pueden ser confrontados con el significado de referencia correspondiente. Indicamos a continuación estos elementos para el ejemplo del Logaritmo y los comparamos con el significado de referencia.

a. Elementos ostensivos: (representaciones materiales, notaciones)

Representaciones Usadas:

- Uso de la notación$y = log_b a$,para logaritmo general, donde b es la base del logaritmo y a es su argumento, $a = b^y$.
- Uso de la notación$y = lnx$, para logaritmo natural.
- Uso de la notación $log\ x$, para logaritmo de base 10.

Representaciones no usadas:

- Número e
- $Log_e a$

b. Elementos extensivos: (situaciones problemas tareas)

Situaciones estudiadas:

- Cambio de expresiones logarítmicas a expresiones exponenciales.
- Cálculo de logaritmo ocupando la equivalencia: equivale a resolver la ecuación.
- Ejemplo particular de la propiedad de logaritmo de la unidad.
- Ejemplo particular de la propiedad logaritmo de la base del sistema.
- Ejemplo particular de la propiedad logaritmo de una potencia con igual base.
- Ejemplo en el cual se busca determinar que el argumento del logaritmo debe ser positivo.

- Ejemplo en el cual se busca determinar que la base del logaritmo debe ser positiva y distinta de uno.
- Ejercicios de cálculo de logaritmo aplicando la definición.
- Ejemplo particular de las propiedades de logaritmo de la unidad.
- Ejemplo particular de la propiedad de logaritmo de la base del sistema.
- Ejemplo particular de la propiedad de logaritmo de una potencia.
- Ejemplo particular de la propiedad del logaritmo de una potencia con igual base.
- Ejemplo particular de la propiedad del logaritmo de una raíz.
- Ejemplos particulares de las propiedades logaritmo de un producto, cociente y cambio de base de un logaritmo.
- Agrupación de tareas que se proponen como ejercitación y aplicación de las propiedades.

Situaciones no estudiadas:

- Ejemplo particular de logaritmo de una raíz, expresada con la menor cantidad subradical posible.
- Cambio de expresiones exponenciales a expresiones logarítmicas.
- Ejercicios en donde se busca determinar la base del logaritmo.
- Ejercicios de representación de potencias a logaritmos.
- Ejercicios resueltos y explicación sobre su desarrollo.
- Ejemplo en donde se determina que la base del logaritmo debe ser distinta cero

c. Elementos actuativos: (operaciones, algoritmos, procedimientos, técnicas)

Técnicas estudiadas:

- Aplicación de técnicas ya conocidas, como por ejemplo resolver una ecuación exponencial.
- Aplicación de técnicas ya conocidas, como algunas propiedades de potencias.

- Expresar los logaritmos en forma exponencial y aplicación de algunas propiedades de potencias.
- Asignación de propiedad a las operaciones con logaritmos.
- Demostración de algunas propiedades de logaritmos, expresándolos en su forma exponencial y aplicando propiedades de potencias.

Técnicas no estudiadas:

-Expresar de forma exponencial a logarítmica, infiriendo propiedad.
- Ejercicios resueltos y procedimientos de resolución.
- Demostración de proposiciones.
- Indicaciones para el cálculo de logaritmo utilizando la calculadora.

d. Elementos intencionales:(definiciones, proposiciones)

- Definición de Logaritmo: exponente al que es necesario elevar una cantidad positiva para que resulte un número determinado.
- Propiedad a la base b y argumento del logaritmo.
- Recordatorio de algunas propiedades de las potencias.
- Asignación de equivalencia para $log_b a = x$ es lo mismo que resolver $b^x = a$.
- Propiedad al logaritmo de una raíz.
- Propiedad al logaritmo: propiedad de cambio de base
- Propiedad al logaritmo de un producto
- Propiedad al logaritmo de un cociente.
- Propiedad al logaritmo de la unidad.
- Propiedad al logaritmo de una potencia.
- Propiedad logaritmo de una potencia de la base del sistema.
- Propiedad al logaritmo de la base del sistema.

- Las propiedades de los logaritmos se pueden demostrar a partir de las propiedades de potencias.

Propiedades y definiciones no estudiadas:

- Definición del número$e$.

- Propiedad que indica que utilizando las propiedades, solo se necesitan los logaritmos de los números primos para obtener el logaritmo de cualquier número racional, ya que todos los números enteros se pueden descomponer en factores primos.

e. Elementos validativos: (argumentaciones, justificaciones).

- Justificación de propiedad sobre la base y argumento del logaritmo.

- Validación de propiedades mediante ejemplos

- Demostración de propiedad “Logaritmo de un producto” .

- Demostración de la propiedad cambio de base del logaritmo

- Demostración de la propiedad logaritmo de la unidad, mediante propiedades de potencia.

- Demostración de la propiedad del logaritmo de la base del sistema, mediante propiedad de potencia.

- Demostración de la propiedad logaritmo de una potencia con igual base.

Validaciones evitadas:

- Demostración formal del logaritmo de un cociente
- Demostración del logaritmo de una potencia
- Demostración del logaritmo de una raíz
- Demostración en donde se indica que la base del logaritmo debe ser distinta de cero.

Mediante el anterior análisis comparativo se ha logrado identificar diferencias importantes presentes en el texto del estudiante de los cuales se extraen los significados locales con relación a los del significado de referencia.

Respecto a los elementos Ostensivos se observa el uso de notaciones generales para logaritmo, ya sea de cualquier base (mayor a cero y distinta de uno), base 10 y logaritmo natural, pero se distingue la ausencia del numero e en el texto del significado local, el cual es importante para caracterizar los elementos del logaritmo natural y también para poder realizar su representación en forma exponencial.

En cuanto a los elementos extensivos notamos la ausencia en el texto entregado al estudiante de ejercicios y ejemplos en los cuales se representen logaritmos a partir de notaciones exponenciales, ejercicios en los cuales se determine el valor de la base del logaritmo y donde se utilicen operaciones combinadas (suma y resta de logaritmos), donde se busque que los alumnos logren aplicar las propiedades correctamente. Una parte que se considera importante es la falta de ejercicios y ejemplos en los cuales se explique el procedimiento de resolución detalladamente, para que el estudiante pueda comprender más aún las propiedades y procedimientos de resolución.

Un tipo de ejercicio importante que está ausente en los textos del estudiante es encontrar el error en la resolución de ciertos problemas con logaritmos, donde se espera que los alumnos corrijan y logren aplicar correctamente las propiedades.

Referente a los elementos actuativos presentes en el texto del significado local se observa que las propiedades son inmediatamente expuestas al estudiante, en cambio los textos de referencia se busca determinarlas a partir de la representación exponencial y aplicando las propiedades de potencias. Se percibe la ausencia de ejercicios resueltos y su respectiva indicación de los procedimientos de resolución. No existen ejercicios en los cuales se busque que los alumnos demuestren propiedades propuestas.

En cuanto a los elementos intensivos no se muestra la definición del número e y mucho menos es mencionado como base del logaritmo natural. Tampoco se indica a los estudiantes que todos los logaritmos (con argumento un número natural) se pueden calcular descomponiendo el argumento en números primos, para luego hacer uso de las propiedades. En el texto local se muestra un cuadro resumen de las propiedades del logaritmo, pero se omite la propiedad logaritmo de un producto.

Finalmente analizando los elementos validativos de cada texto, notamos que se omite la demostración de ciertas propiedades, la cual podría ser de gran ayuda para que el estudiante comprenda y aplique de manera correcta al enfrentarse a un tipo de tarea referente a los logaritmos (tampoco se busca que los alumnos realicen la demostración).

3. Análisis semiótico como una técnica para determinar significados y conflictos

En este trabajo llamaremos análisis semiótico (o análisis ontológico-semiótico) de un texto matemático, a la descomposición en unidades, la identificación de las entidades puestas en juego y las funciones semióticas que se establecen entre los mismos por parte de los distintos sujetos.

Además el significado se concibe como el contenido que se asigna a una expresión (función semiótica en el sentido de Hjemslev, 1943). No tiene por qué ser necesariamente una entidad mental, aunque también puede serlo: es sencillamente aquello a lo cual se refiere un sujeto en un momento y circunstancias dadas.

3.1. Unidades de análisis, componentes praxeológicos y conocimientos elementales

En esta sección caracterizamos los significados elementales puestos en juego en uno de los bloques[4] de contenido sobre la "aplicación de propiedades de logaritmos" que se desarrolla en el texto de segundo año de enseñanza media entregada por el ministerio. Para esta labor se dividió el bloque en unidades de análisis basadas en la estructura del texto.

---

[4] Se refiere a una sección específica del texto de estudio, en este caso para este trabajo, se refiere a la sección de logaritmos hasta las propiedades de las operaciones con logaritmos.

El bloque sobre "logaritmos y sus propiedades" está dividido en 9 unidades

1. Definición de Logaritmo.
2. Notación de Logaritmo
3. Cambio de base.
4. Ejemplos (1,2,3,4,5)
5. Actividades 1
6. Propiedades de los logaritmos
7. Actividades 2
8. Propiedades de las operaciones de los logaritmos
9. Actividades 3

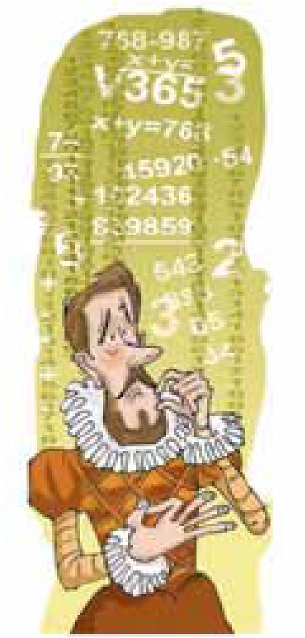
Para cada contenido se incluye: el texto y las unidades de análisis, además de los componentes praxeológicos[5], identificación de conocimientos puestos en juego y conflictos semióticos entre los significados puestos en juego en el texto y los atribuidos a las expresiones por el significado de referencia. Los conflictos se refieren a toda diferencia o desajuste entre los significados que se atribuyen a una misma expresión por dos sujetos (personas o instituciones) en interacción comunicativa. Los conflictos semióticos se consideran como explicaciones posibles de las dificultades y limitaciones de los aprendizajes (Godino y Arrieche, 2001, pag. 2).

En un primer momento del análisis se considerará útil clasificar la información del texto en tres apartados: Praxis, que incluye las situaciones problemáticas y los elementos actuativos; Lenguaje, en este apartado se incluyen los términos expresiones, notaciones y gráficos; Por último Teoría, que son, conceptos-definición, propiedades y argumentaciones.

[5] El lenguaje, praxis y los elementos discursivos o teóricos.

3.2. Definición de logaritmos
3.2.1 Texto y unidades primarias (unidades epistemológicas)

Logaritmos



Hasta hace casi 400 años, la tarea de un calculador podía ser agotadora, imagina calcular multiplicaciones, divisiones, potencias, o sacar raíces, no solo de números enteros sino también de fracciones y números decimales, obviamente, sin tener una calculadora. E1

Observa las siguientes multiplicaciones: E2

16 · 128	81 · 2187	256 · 16 384	625 · 78 125

Analicemos...

- Calcula los productos de las multiplicaciones anteriores sin usar calculadora y compara los resultados en tu curso. ¿Existen diferencias?, ¿por qué?
- ¿Existe alguna forma de simplificar estos cálculos, sin calculadora? Explica.
- Observa la siguiente tabla. ¿Reconoces en ella algunos de los factores anteriores?, ¿y algunos de tus resultados?, ¿qué tienen en común?

E3

n	2^n	3^n	4^n	5^n
1	2	3	4	5
2	4	9	16	25
3	8	27	64	125
4	16	81	256	625
5	32	243	1024	3125
6	64	729	4096	15 625
7	128	2187	16 384	78 125
8	256	6561	65 536	390 625
9	512	19 683	262 144	1 953 125
10	1024	59 049	1 048 576	9 765 625
11	2048	177 147	4 194 304	48 828 125
12	4096	531 441	16 777 216	244 140 625

- Escribe los factores y el resultado, en cada caso, en forma de potencias. ¿Qué puedes concluir?

Observa que todos los resultados conseguidos en la tabla anterior se ubican en la fila correspondiente a $n = 11$. Es decir, 11 es el exponente al que hay que elevar el 2 para obtener 2048, o el 3 para obtener 177 147, por ejemplo. E4

E6 Para referirnos a este exponente, al que hay que elevar el 2 para obtener 2048, decimos que el **logaritmo** de 2048, en base 2, es 11 y lo denotamos:

GLOSARIO

Logaritmo: exponente al que es necesario elevar una cantidad positiva para que resulte un número determinado. E5

3.2.2 Componentes y unidades elementales

Praxis	**Lenguaje**	**Teoría**
- Situaciones: Calculo de multiplicación sin el uso de calculadora. Análisis de tabla de potencias. -Técnicas: Representación de factores como potencias.	- Términos y expresiones: Multiplicaciones, divisiones, potencias, raíces, números enteros, fracciones, números decimales, productos, simplificar, comparar, factores, tabla, fila, base, exponente, elevar, logaritmo, positivo, cantidad.	- Concepto (definición): Logaritmo, potencia, exponente, base. - Restricción: la base de la potencia debe ser positiva.

3.2.3. Conocimientos y conflictos semióticos:

E1: En la parte introductoria a la unidad de logaritmo, se trata de dar al estudiante una motivación histórica, haciendo notar como podía ser de complejo para las personas en la antigüedad realizar cálculos con sumas, restas, divisiones y multiplicaciones y no solo con números enteros, sino que también con fracciones y decimales, sin el uso de la calculadora. Además, calcular potencias y raíces, que no en todos los casos son sencillos, pues basta tener presente obtener sin una calculadora el valor de una raíz de 10. El texto no aclara que el uso de esta herramienta presenta solo un apoyo que simplifica el trabajo humano, que si bien ayuda a liberar de tareas, no es, o no debe ser la herramienta fundamental en el trabajo de las matemáticas.

E2: Se muestran productos entre factores de dos a cinco cifras, los cuales corresponden a potencias de los números primos 2, 3 y 5 respectivamente. La palabra 'Observa' invita al estudiante a analizar el proceso de multiplicación mostrado, para luego responder a cuestiones que lleven a concluir que los productos están compuestos por potencias de los números nombrados anteriormente.

E3: En el primer punto, el cálculo se introduce en la actividad con la limitación de no usar calculadora, no especifica un método de hacerlo, y además no indica la cantidad de compañeros con los cuales debe realizar la comparación.

En la segunda pregunta invita a 'simplificar' el cálculo de los productos, con lo cual hace alusión a buscar un método o forma de hacer más fácil el proceso de multiplicación donde los factores están compuestos por números de dos cifras hasta 5 cifras.

En el tercer punto antes de la tabla y el cuarto punto después de la tabla pide reconocer 'factores' en la tabla, cuyo significado se supone conocido por el estudiante. Reconocer los factores de la multiplicación en la tabla, permite mostrar que se puede descomponer la multiplicación en producto de potencia de factores primos. Propone escribir los factores como potencias, y deja una pregunta abierta, sobre la cual no profundiza más.

E4: Se requiere que el estudiante interprete los factores como potencias correspondientes a un determinado exponente y ejemplo de las multiplicaciones dadas en E2 (correspondientes a n=11), pero no se indica cómo queda en la multiplicación al reemplazarlos, es decir, no reemplaza (no muestra) en ninguna de las multiplicaciones dadas como quedan representados los factores como potencias en ellas y asociadas al producto que también puede ser representado como una potencia (siempre que ambos factores sean producto de potencias de la misma base).

E5: Definición de logaritmo de tipo genérico, y carente de formalidad, pues habla de 'cantidad positiva' y no se refiere al conjunto de los reales positivos, para poder ser más claro y específico. Además deja muy vaga la palabra 'número determinado'. Si bien habla de exponente, no se refiere en ningún momento a la palabra potencia, pues el logaritmo se puede representar a través de una potencia.

E6: Enuncia la referencia de cálculo del logaritmo aplicando la definición dado en E5, es decir, el exponente al que hay que elevar un número. Supone que el estudiante entiende y presta atención al glosario que esta dado en un costado del texto, en donde se da la definición genérica del logaritmo.

3.3. Notación de logaritmo

3.3.1. Texto y unidades primarias de análisis

$$log_2\ 2048 = 11, \text{ pues } 2^{11} = 2048$$

o que el logaritmo de 177 147 en base 3 es 11 y lo denotamos:

$$log_3\ 177\ 147 = 11, \text{ pues } 3^{11} = 177\ 147$$

Y así sucesivamente.

E7

E8 ¿Cómo se podría simplificar el cálculo de $625 \cdot 78\ 125$ utilizando la tabla?

Se ubican en la tabla cada uno de los factores y se expresan como potencias con igual base: $625 \cdot 78\ 125 = 5^4 \cdot 5^7 = 5^{11}$

E9 Entonces, se busca en la tabla, en la columna que corresponde a 5^n, su valor para $n = 11$. Este valor es 48 828 125, tal como cuando resolviste la multiplicación mediante el algoritmo habitual.

E10 De manera similar, podríamos efectuar otras operaciones, como divisiones, por ejemplo:

$$\frac{244\ 140\ 625}{390\ 625} = \frac{5^{12}}{5^8} = 5^4 = 625$$

RECUERDA QUE...

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

con $a \neq 0$, $n, m \in \mathbb{Q}$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

E8

3.3.2. Componentes y unidades elementales

Praxis	Lenguaje	Teoría
- Situaciones: Ejemplo notacional de logaritmo -Técnica: Representación del logaritmo	- Términos y expresiones: Potencias, igual base, columna, valor, algoritmo, operaciones, calcular, valor, operaciones. - Notaciones:	Conceptos(definiciones): Potencias, logaritmo. Propiedad: multiplicación y

como potencias. Representación de producto y división de factores como producto y cociente de potencias de misma base respectivamente.	$log_2 2048 = 11, 2^{11} = 2048$ $a^n \cdot a^m = a^{n+m}, \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$, $a \neq 0$ y $m, n \in \mathbb{Q}$	división de potencias con igual base, suma y resta de exponentes respectivamente.

3.3.3 Conocimientos y conflictos semióticos.

E7: Se introduce la notación de logaritmo con dos ejemplos particulares. Muestra claramente cómo podemos expresar un logaritmo como una potencia, no hace referencia al hecho que una potencia, no siempre se puede escribir en notación logarítmica, pues se deben considerar algunas restricciones (que corresponden a las que se dan en la definición de logaritmo).

E8: Se muestra como el uso de la tabla puede simplificar el cálculo de las multiplicaciones vistas en E2, representando los factores como potencias, y para ayudar a esto recuerda las propiedades asociadas al producto y división de potencias con igual base.

Describe la técnica utilizando la tabla, pero no se refiere a transformar los factores de la multiplicación, a una multiplicación de factores primos y así llegar a lo mismo que se tiene en la tabla. Con esto, no muestra las limitaciones que esta podría presentar el cálculo de un logaritmo a falta de ella.

E9: Se ve la equivalencia del producto de una de las multiplicaciones planteadas en E2 con la potencia correspondiente. No hay ninguna argumentación del procedimiento.

E10: La división otra posible operación con el uso de la transformación de factores en potencias, pero de manera inherente a la tabla (pues valores muy grandes se deben transformar en potencias a través de descomposición de factores primos).

3.4 Cambio de base.

3.4.1 Texto y unidades primarias de análisis

E11 [Además, utilizando la expresión $log_b\ B = \frac{log_c\ B}{log_c\ b}$, se puede determinar el resultado de log_{27} 19 683.

E12 [A partir de la tabla, se observa que 19 683 y 27 son ambos potencias de 3] luego se pueden escribir utilizando los logaritmos en base 3 y ubicar los valores en la tabla. Observa.

$$log_{27}\ 19\ 683 = \frac{log_3\ 19\ 683}{log_3\ 27} = \frac{9}{3} = 3. \text{ Es decir, } 27^3 = 19\ 683$$] E13

E14 [De esta manera, las multiplicaciones se pueden convertir en sumas, las divisiones en restas y las raíces por divisiones, con lo que se facilita notablemente el cálculo, más cuando los números implicados son muy grandes y se cuenta, obviamente, con tablas apropiadas.

E15 [Volvamos a la definición de logaritmo: "exponente al que es necesario elevar una cantidad positiva para que resulte un número determinado".] Si lo escribiera como ecuación, corresponde a resolver $log_b\ a = x$, donde b es la base del logaritmo y a es su argumento, con a y b positivos.] E16

E17 [Por ejemplo, calcular log_2 16 equivale a resolver la ecuación $log_2\ 16 = x$]

3.4.2 Componentes y unidades elementales

Praxis	**Lenguaje**	**Teoría**
Situaciones: Ejemplo de aplicación de propiedad de cambio de base.	Términos y expresiones: Propiedad, resultado, números muy grandes, argumento,	Concepto-definición: Argumento

	expresión, número determinado, ecuación, valor de la potencia, equivalencia, definición. Notaciones: $log_b B = \frac{log_c B}{log_c b}$, $b^x = a$,	Propiedad: las multiplicaciones se transforman en sumas, las divisiones en restas y las raíces por divisiones.

3.4.3. Conocimientos y conflictos semióticos.

E11: Se habla de la 'existencia de una propiedad', de la cual no hay ninguna argumentación, se dice que a través de ella se puede calcular un logaritmo, cuyo cálculo no es trivial. Además de introducir una notación genérica para aplicar dicha propiedad.

E12: Se asocian valores correspondientes al ejemplo del logaritmo anterior a valores de la 'tabla', siempre suponiendo que el estudiante entiende su uso.

E13: No se representan los valores de E12 como potencias correspondientes a base 3, a pesar de que dice que los toma de la tabla. Aplica la propiedad introducida, que en este apartado carece de nombre o algún tipo de identificación.

E14: Se dan consecuencias de la propiedad de cambio de base (aún no nombrada así) sin argumentación y carente de ejemplo para la comprensión de los dichos "... las multiplicaciones se transforman en sumas, las divisiones en restas...". Deliberadamente se habla en el texto de 'facilitar' los cálculos donde se da solo un ejemplo particular en E13 de un tipo de expresión, que corresponde a calcular un logaritmo cuyos valores son relativamente grandes.

E15: Se vuelve a enunciar la definición de logaritmo dada en E5.

E16: Se da la indicación de que un logaritmo se puede calcular equivalentemente en su notación de potencia, donde el valor a determinar es el exponente, pero en la restricción de los valores de 'a' y 'b', no se especifica el conjunto numérico al cual pertenecen específicamente, para 'a' el argumento y 'b' la base.

E17: Se muestra un ejemplo particular del cálculo de un logaritmo sin el uso de calculadora, a través de la resolución de una ecuación exponencial. Podemos formular la hipótesis, que a través de estos ejemplos la noción de logaritmo quedara más clara.

3.5. Ejemplos

3.5.1. Texto y unidades primarias de análisis

En-tonces, ya que la **base** del logaritmo es 2, el **exponente** no se conoce y 16 es el argumento, es decir, el **valor de la potencia**, se puede escribir $2^x = 16$. Y como 16 es una potencia de 2, de hecho, 2^4, esto equivale a $2^x = 2^4$, luego, igualando los exponentes, se concluye que $x = 4$. E18

E19

Ejemplo 1: Calcula el valor de $log_7\ 343$

$log_7\ 343 = x \qquad 7x = 343 = 7^3 \qquad x = 3$

Luego, $log_7\ 343 = 3$

Ejemplo 2: Obtener el valor de $log_2 \sqrt{8}$

$log_2 \sqrt{8} = x \Rightarrow 2^x = 8^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 2^x = \left(2^3\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{2}}$

Luego, $log_2 \sqrt{8} = \frac{3}{2}$

E20 Al igual que en el caso de las raíces, no todos los logaritmos se pueden calcular. Esta es la razón de la condición de valores positivos para a y b. Observa. E21

E22

Ejemplo 3: Obtener el valor de $log_8 -512$

$log_8 -512 = x \Rightarrow 8x = -512$

E23 Pero ¿la potencia de un número positivo puede ser negativa? No, en ningún caso. Luego, $log_8 -512$ no existe.

E24

Ejemplo 4: Calcula el valor de $log_{(-2)}\ 8$

$log_{(-2)}\ 8 = x \Rightarrow (-2)^x = 8 = 2^3$

E25 En este caso, la base de la potencia es negativa y su exponente es impar, luego el valor de la potencia debiera ser negativo también. Como esto no se cumple, no existe $log_{(-2)}\ 8$.

E26

Ejemplo 5: ¿Cuánto resulta $log_1\ 5$?

$log_1\ 5 = x \Rightarrow 1^x = 5$

Ya que toda potencia de 1 es 1, no existe un valor de x, tal que 1^x sea igual a 5.

Considerando situaciones como estas, es que se ha definido que el valor de la base y el argumento del logaritmo deben ser positivos. En particular, la base debe ser distinta de 1. E27

En un mundo sin calculadoras, los logaritmos fueron utilizados como la principal herramienta en los cálculos aritméticos. Usándolos se ahorró un increíble esfuerzo, pues permitieron trabajar con los pesados cálculos necesarios en las aplicaciones a la agrimensura, la astronomía, y particularmente la navegación. Además, permitió realizar otros cálculos matemáticos que sin su invención no hubieran sido posibles.

Las tablas de logaritmos y las reglas de cálculo eran imprescindibles en cualquier centro de cálculo, hasta la aparición de las calculadoras y computadores. Actualmente los logaritmos ya no son necesarios para lo que fueron descubiertos. Sin embargo, ciertas características y utilidades, que durantes estos siglos se les han descubierto, los han hecho sobrevivir al desarrollo de la electrónica. E28

EN RESUMEN

- El argumento y la base de un logaritmo son números reales positivos. Además, la base no puede ser 1. Es decir, en la expresión $log_b\ a$, siempre, por definición, $a \in \mathbb{R}^+$ y $b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$.
- Por definición, $x = log_b\ a \Rightarrow b^x = a$, entonces se puede decir que el logaritmo es el exponente de una potencia.
- La expresión $log_b\ a$ se lee como: "logaritmo de a en base b".

E29

3.5.2. Componentes y unidades elementales

Praxis	**Lenguaje**	**Teoría**
Situaciones: Ejemplos de cálculo de logaritmos utilizando la definición $log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a$	Términos y expresiones: Igualar, condición, obtener, determinar, negativa, impar, no existe, logaritmo natural. Notaciones: $log_{10}a := loga$, $log_e a := lna$	Propiedad: no todos los logaritmos se pueden calcular. Restricción: la base del logaritmo debe ser distinta de 1.

3.5.3 Conocimientos y conflictos semióticos.

E18: En este punto se describe la equivalencia correspondiente de las partes de la notación en ecuación exponencial a logaritmo, de lo cual se transforma el argumento en la misma base del logaritmo (escrito como potencia), lo cual más adelante pasara a formar una propiedad, sin la utilización de la notación de de potencias (resolución de una ecuación exponencial).

E19: El primer ejemplo muestra el cálculo de un logaritmo de un número entero, a través de una ecuación exponencial, en este ejemplo particular no se usa la tabla vista en E3, se da por hecho que el estudiante entiende o ve claramente que el número 343 es una potencia de 7. Una vez resuelta la ecuación exponencial se da la respuesta equivalente para el logaritmo buscado.

En el segundo ejemplo al igual que el primero, se resuelve el logaritmo a través de una ecuación exponencial, pero el argumento esta vez es un número irracional, con lo que el resultado no es un número entero, sino racional y se escribe en notación fraccionaria. En el desarrollo se utiliza el conectivo lógico =>, con lo que se supone conocido su significado para el estudiante, lo que significa que de no ser así su significado podría dificultar la comprensión de lo explicado ¿Por que se utiliza la implicación en este caso?.

E20: Se hace una analogía de los logaritmos con las raíces, en el sentido de que no todos los logaritmos se pueden calcular, pero no se especifica que para las raíces de índice par no se pueden calcular, pues en ese caso la cantidad subradical no puede ser negativa.

E21: Se justifica con E20 el motivo por el cual la base y el argumento deben ser positivos. La justificación no es formal, pues en el punto siguiente justifica los dichos con un ejemplo.

E22: Se muestra un ejemplo en el cual se da un argumento con un valor negativo contrario a las restricciones que se dan para el logaritmo, lo cual lleva a una ecuación exponencial sin solución. Se invita al estudiante a 'Obtener' el resultado del logaritmo, lo que podría llevar en el futuro a confusión. Se Formula la tesis de plantear el enunciado como una pregunta ¿Se puede obtener el ?.

E23: Se responde a lo planteado en E22. Las argumentaciones más detalladas están ausentes. El logaritmo usado en la conclusión es distinto del planteado en el ejemplo, pues este tiene la base negativa y el planteado el argumento, lo cual claramente puede llevar a una confusión al estudiante, por no encontrar la correspondencia entre los logaritmos.

E24: Se muestra un ejemplo en donde la base del logaritmo es negativa, que es contrario a las restricciones, la resolución es a través de una ecuación exponencial, la cual no tiene solución. Nuevamente se invita a calcular un logaritmo que no es calculable, pues se podría plantear a través de una pregunta ¿se puede calcular?, además de solicitar que se justifique la respuesta, pues el estudiante estaría obligado a tener presentes las restricciones para responder correctamente.

E25: Se da la justificación (la limitación), porque no es posible calcular el logaritmo en E24 con base negativa (en general). No se muestra el caso cuando base y argumento son negativos.

E26: Se plantea un ejemplo en donde la base es 1, la cual según la definición de logaritmo hasta el momento no se ha dado como excluyente, pues calcular el logaritmo en base 1 con un argumento distinto de 1 no tiene sentido pues, no existe exponente al cual elevar 1 obtengamos un valor distinto de 1. En la definición de logaritmo dada solo habla de cantidad positiva y 1 es una cantidad positiva.

E27: Se reafirman las restricciones de la definición de logaritmo basado en los ejemplos anteriores, y además se agrega una restricción adicional que corresponde a que la base debe ser distinta de 1. Con esto se regula el cálculo de los logaritmos.

E28: La narración histórica habla sobre la importancia de los logaritmos en la vida de las personas y del trabajo que facilitaron, pero solo menciona en que se usa, no muestra un ejemplo de concreto. Además las tablas de logaritmos eran utilizadas hasta la aparición de las calculadoras y computadoras, pero solo se habla de la importancia sin dar ejemplo.

E29: Se da un resume de algunas cosas importantes: la equivalencia de un logaritmo en notación de potencia, como se lee la expresión que representa un logaritmo y las restricciones que tienen base y argumento. En el resumen además se debería también considerar la propiedad de cambio de base que se vio en esta sección, pero el texto lo considera en el resumen de la siguiente sección.

3.6. Actividades 1

3.6.1. Texto y unidades primarias de análisis

E30

En tu cuaderno

1. Calcula cada uno de los siguientes logaritmos.

a. $log_9 243$ c. $log_{0,7} 0,343$ e. $log_a \sqrt{a^8}$ g. $log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}$ i. $log_{16} 8$

b. $log_2 128$ d. $log_a a^9$ f. $log_6 \frac{1}{36}$ h. $log_8 16$ j. $log_a \sqrt[5]{a^2}$

2. Dada cada expresión, encuentra el valor de x.

a. $log_2 x = 6$ b. $log_{\frac{3}{4}} x = -2$ c. $log_{0,3} x = 3$ d. $log_{0,004} x = -3$

3.6.2. Componentes y unidades elementales

Praxis	**Lenguaje**	**Teoría**
Situaciones: - Ejercicios de cálculo de logaritmos. Técnica: - Encontrar la incógnita en el logaritmo dada en el argumento. - Explicar estrategias de resolución.	Términos y expresiones: Verificar, resultados, explicar, encontrar.	- Validación: Se requiere argumentar, explicando el método de resolución para determinar la incógnita.

3.6.3. Conocimientos y conflictos semióticos.

E30: Se proponen dos actividades, en la primera consiste en cálculo de logaritmos utilizando las propiedades, el estudiante debe saber cuáles son las propiedades que deben aplicar, y además de la posterior verificación con la calculadora, en este punto el estudiante debe realizar el cálculo utilizando cambio de base llevándolo a base 10 (que es la que posee la calculadora). En la segunda actividad el estudiante debe encontrar el argumento del logaritmo, para ello debe transformar el logaritmo en notación de potencia y hacer el cálculo respectivo. Esta segunda actividad se espera que el estudiante aplique una estrategia "libre" de cálculo para determinar el valor pedido. El estudiante debe representar el logaritmo en notación de potencia y realizar el cálculo respectivo.

3.7. Propiedades de los logaritmos

3.7.1 Texto y unidades primarias de análisis

E31

Tomás, a partir de la definición y luego de comprobarlo con algunos valores, determinó las siguientes relaciones entre los valores de a, b y c, con $a \neq 1$:

$$log_a\, b = c \qquad a^c = b \qquad a = \sqrt[c]{b}$$

ANALICEMOS...

- ¿Están correctas las relaciones que estableció Tomás? Compruébalas remplazando con los valores correspondientes, en cada caso.
- Tal como existen propiedades para las potencias y para las raíces, ¿se pueden establecer propiedades para los logaritmos? Justifica.
- Por ejemplo, en el caso de $log_b\, b^n$, ¿existe alguna propiedad que simplifique los cálculos? Explica.

E32 Las propiedades que se cumplen para logaritmos, para cualquier valor de la base b, se pueden establecer y demostrar a partir de las propiedades de las potencias.

E33

Observa.

- **Logaritmo de la unidad**:

$$log_b\, 1 = x \quad \Leftrightarrow b^x = 1, \text{ ya que } b > 0,\ b \neq 1$$
$$\Leftrightarrow b^x = b^0$$
$$\Leftrightarrow x = 0$$

Por propiedades de potencias, ya que el valor de la potencia es 1 cuando el exponente de la potencia es cero (ya que la base es positiva y distinta de 1). Luego, $log_b\, 1 = 0$, con $b \neq 1$.

E34 **Ejemplo:** $log_5\ 1 = 0$

E35
- **Logaritmo de la base del sistema:**

$$log_b\ b = x \quad \Leftrightarrow b^x = b \quad \Leftrightarrow b^x = b^1$$
$$\Rightarrow x = 1.$$

Luego, $log_b\ b = 1$, con $b \neq 1$.

E36 **Ejemplo:** $log_3\ 3 = 1$

E37
- **Logaritmo de una potencia con igual base:**

$$log_b\ b^n = x \quad \Leftrightarrow b^x = b^n \quad \Leftrightarrow = 1$$
$$\Rightarrow b^{(x-n)} = b^0$$
$$\Rightarrow x - n = 0\ (b \neq 1) \Rightarrow x = n$$

Luego, $log_b\ b^n = n$, con $b \neq 1$.

E38 **Ejemplo:** $log_6\ 6^3 = 3$.

E39
- Cambio de base:

$log_b\ B = x \Leftrightarrow b^x = B$

$log_c\ b^x = log_c\ B$ ← *Se aplican logaritmos en una base c*

$x \cdot log_c b = log_c\ B$ ← *Por propiedad de logaritmos*

Por lo tanto, $log_b\ B = \dfrac{log_c\ B}{log_c\ b}$ para todo b, c, $B > 0$; b, $c \neq 1$

E40 Ejemplo: $log_2\ 5 = \dfrac{log\ 5}{log\ 2} = \dfrac{0{,}69897}{0{,}30103} = 2{,}32192$

No olvides que...

- *Los logaritmos de base diez, es decir, $log_{10}\, x$, son llamados logaritmos decimales y en este texto los denotaremos como $log\ x$.* E41
- *Las calculadoras tienen teclas para calcular el logaritmo en base 10 (log) y el logaritmo natural (ln), pero no el logaritmo en una base cualquiera. En ese caso, se calcula usando la fórmula de cambio de base.* E42

E43
En resumen

Se cumple, ya que la base b del logaritmo es positiva y distinta de 1, que:
- Logaritmo de la unidad: $log_b\ 1 = 0$.
- Logaritmo de la base del sistema: $log_b\ b = 1$.
- Logaritmo de una potencia con igual base: $log_b\ b^n = n$.
- Cambio de base: $log_b\ B = \dfrac{log_c\ B}{log_c\ b}$ para todo b, c, $B > 0$; b, $c \neq 1$

3.7.2 Componentes y unidades

<table>
<tr><th>Praxis</th><th>Lenguaje</th><th>Teoría</th></tr>
<tr><td>Técnica:
Analizar las relaciones que existen entre expresiones (referidas a logaritmos)

Explicar si existe propiedad para simplificar algunos cálculos.</td><td>Términos y expresiones: comprobar, relaciones, establecer, correctas, reemplazar, justificar, demostrar, logaritmo de la unidad, cero, sistema, igual base, número real, cambio de base, logaritmo decimal,
Notación:
$log_b b^n$
$log_b 1 = 0$
$log_b b = 1$
$log_b b^a = a$
$b \neq 1$</td><td>Concepto-definición:
Propiedades: las propiedades que se cumplen para logaritmos, se pueden establecer y demostrar a partir de las propiedades de las potencias.
Propiedad: El valor de la potencia es uno cuando el exponente de la potencia es cero.
Propiedad: La base b del logaritmo es positiva.</td></tr>
</table>

3.7.3 Conocimientos y conflictos semióticos.

E31: Se propone una tarea problemática que presenta relaciones que dicen ser equivalentes, donde el estudiante debe determinar aquellos dichos, en el primer punto este debe comprobarlas, se supone que este sabe cómo realizar dicha tarea, pero para simplificarla el texto debiese sugerir que compruebe con valores concretos y en el problema plantea "compruébelas reemplazando con los valores correspondientes en cada caso", lo que puede ser un tanto ambiguo para el estudiante. En los siguientes puntos habla sobre las propiedades que se pueden establecer sobre los logaritmos que se analizan en las siguientes unidades.

E32: Se da una indicación importante que sale de la definición de logaritmo, pues se vio en el texto que un logaritmo (según la definición dada) es el exponente al cual se debe elevar un determinado número positivo, según esto toda propiedad de logaritmo se puede obtener representando el logaritmo como potencia y aplicando las propiedades de estas. Se espera que el estudiante entienda de la frase “...para cualquier valor adecuado de b...” que la base debe ser positiva y distinta de 1.

E33: Se muestra la demostración de la propiedad de logaritmo de la unidad se utilizan conectivos lógicos, se asume que el estudiante entiende su significado, aunque con esto se puede formular la tesis de que el estudiante puede tener mayor dificultad con los conectivos lógicos que si fuese explicado en lenguaje natural.

E34: Se presenta un ejemplo particular de E33, en la cual carece de toda explicación y conclusión, pues se está dando como ejemplo a partir de una demostración de una propiedad, solo aparece como una relación (igualdad) entre un logaritmo y un valor. Formulamos la tesis que esto podría traer pequeñas confusiones si no se presenta con la ayuda de un guía, que oriente y asocie la propiedad con el ejemplo.

E35: Se presenta la propiedad de logaritmo de la base del sistema. En la demostración no hay explicación alguna, solo siguen una 'secuencia lógica '[6] (con los respectivos conectivos lógicos). Sería conveniente que esta secuencia lógica vaya acompañada de explicación en lenguaje natural para alejar dudas del estudiante.

E36: Se presenta un ejemplo en donde aplica la propiedad vista en E35, pero no se dan observaciones ni conclusiones adicionales referentes al ejemplo en función de la propiedad.

E37: Se presenta la propiedad de logaritmo de una potencia con igual base que el logaritmo. En la demostración carece de explicaciones que vayan más allá de la secuencia lógica.

E38: Se presenta un ejemplo correspondiente a la propiedad vista en E37, el cual no presenta explicaciones u observaciones referentes a la propiedad utilizada.

E39: Se presenta la propiedad de cambio de base de un logaritmo. Se asume que el estudiante entiende la equivalencia entre $b^x = B$ y $log_c b^x = log_c B$, a pesar de que en el texto no utiliza el conectivo lógico de equivalencia. La argumentación en la demostración es sólo de carácter lógico. Podemos formular la tesis de que el estudiante podría presentar dificultades en la aplicación de esta propiedad en

6 Entenderemos por secuencia lógica a una cadena de relaciones conectada por conectivos lógicos.

determinados casos, los cuales no se presentan como ejemplos (por ejemplo utilizar cambio de base cuando la base es una raíz).

E40: Se da un ejemplo de aplicación de propiedad de cambio de base. Este ejemplo no muestra una equivalencia con otra base para aclarar al estudiante que es independiente la base que se tome, para el cambio de base (por ejemplo $log_2 5 = \frac{log 5}{log 2} = \frac{log_3 5}{log_3 2} = 2{,}32192$).

E41: Se introduce la notación de $logx$para denotar los logaritmos en base 10 $log_{10}x$, además de nombrarlos de manera especial como logaritmos decimales. El significado de decimal se supone conocido por el estudiante.

E42: Se dan las notaciones y para los logaritmos en base 10 y base *e*, además una observación importante referente al cálculo con calculadora de un logaritmo cualquiera, pues este solo se puede realizar haciendo un cambio de base, a base 10 o base *e*, pues son las bases consideradas en estos instrumentos. Se debiera dar un ejemplo al estudiante para hacer el cálculo utilizando la calculadora en una base cualquiera para que aplique lo dicho en la observación.

E43: Estas propiedades se dan a modo de resumen, entendiendo que el estudiante asume que son propiedades y comprende su uso, para la posterior aplicación en las actividades propuestas.

3.8 Actividades 2.

3.8.1. Texto y unidades primarias de análisis

EN TU CUADERNO

E44

1. Calcula cada uno de los siguientes logaritmos.

a. $\log_2 64$ **d.** $\log_5 1$ **g.** $\log_{16} 8$ **j.** $\log_{\frac{4}{3}} \frac{16}{9}$

b. $\log_9 243$ **e.** $\log_3 3$ **h.** $\log_{128} 1$ **k.** $\log_{\frac{1}{2}} 128$

c. $\log_{0,7} 0{,}49$ **f.** $\log_5 5^7$ **i.** $\log_6 6^3$ **l.** $\log_5 \frac{1}{25}$

2. Utilizando una calculadora encuentra el valor de las siguientes expresiones.

a. $\log_2 3$ **b.** $\log_6 7$ **c.** $\log_7 9$ **d.** $\log_6 11$

3. Calcula el valor de cada una de las siguientes expresiones.

a. $\log_4 64 + \log 1000 + \log_5 125$

b. $\log_{\frac{2}{3}} \frac{4}{9} - \log_{\frac{6}{5}} \frac{125}{216} + \log 10\,000$

c. $2 \log_5 25 - 3 \log_7 49 + 4 \log_8 4096$

d. $3 \log_{\frac{1}{4}} 32 + 7 \log_{\frac{1}{5}} 125 - 6 \log_{\frac{1}{3}} 243$

e. $4 \log_{\frac{5}{7}} \frac{25}{49} + 2 \log_{\frac{2}{5}} \frac{8}{125} - 5 \log_{\frac{6}{7}} \frac{216}{343}$

f. $2 \log 100\,000 - 2 \log_4 256 + 4 \log_2 32$

Números y raíces | 47

3.8.2. Componentes y unidades elementales

Praxis	**Lenguaje**	**Teoría**
Técnica: Calculo de logaritmo haciendo uso de la calculadora. Calculo de expresiones aplicando propiedades de logaritmos.		

3.8.3. Conocimientos y conflictos semióticos

E44: Se requiere la resolución de tres puntos en las actividades. En el primer punto el estudiante debe aplicar las propiedades de logaritmo para el cálculo de cada una de las expresiones, aunque puede también realizar los cálculos a través de la transformación del logaritmo en notación de potencia (pues en este caso los resultados son todos números Racionales).

En el punto dos se requiere que el estudiante aplique la propiedad de cambio de base a base 10, para poder obtener el resultado en la calculadora (también se podría hacer el cambio de base a base *e* y utilizar el logaritmo natural para realizar al cálculo). Estas expresiones corresponden a resolver también una ecuación, pues con esto se asume que el estudiante debe igualar cada logaritmo *x*.

En el tercer punto para obtener el resultado de las expresiones el estudiante puede aplicar las propiedades de potencia (suma o resta de logaritmo con misma base utilizando el cambio de base cuando sea necesario), y calculando el valor de cada logaritmo para luego sumar o restar los resultados de cada expresión.

3.9. Propiedades de las operaciones de los logaritmos.

3.9.1. Texto y unidades primarias de análisis

E45 Al igual que para las potencias y las raíces, para los logaritmos también existen propiedades que permiten simplificar los cálculos. Para demostrarlas, los logaritmos se pueden escribir en forma exponencial y aplicar algunas de las propiedades de las potencias.

E46 Por ejemplo, el logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores. Es decir,

$$log_b\ (a \cdot c) = log_b\ a + log_b\ c$$

E47 **ANALICEMOS...**

- Considera valores positivos para a, b y c, con $b \neq 1$, y remplázalos en la expresión. ¿Efectivamente se cumple?, ¿por qué?
- ¿Crees que también se cumpla $log_b\ (a \cdot c) = log_b\ a \cdot log_b\ c$? Justifica.
- A partir de esta propiedad ¿se pueden obtener otras? Explica.

E48 Para comprobar con un ejemplo que esta propiedad se cumple, se puede resolver un logaritmo de dos maneras distintas, directamente y aplicando el logaritmo del producto. Observa:

$$log_2\ 128 \quad \Leftrightarrow 2^x = 128$$
$$\Leftrightarrow 2^x = 2^7,\ \text{luego } x = 7$$

Por otra parte,

$$log_2\ 128 = log_2\ (4 \cdot 32) = log_2\ 4 + log_2\ 32$$
$$= \quad 2 \quad + \quad 5 \quad = 7$$

E49 Pero no basta con comprobar con un ejemplo para justificar que la propiedad está correcta. Es necesario demostrar que se cumple para cualquier valor de a, b o c, con $b \neq 1$.

Considera que
$$\log_b a = y \quad \Leftrightarrow b^y = a$$
$$\log_b c = z \quad \Leftrightarrow b^z = c$$
$$\log_b (a \cdot c) = x \quad \Leftrightarrow b^x = a \cdot c$$

$$b^x = b^y \cdot b^z \longleftarrow \text{Remplazando}$$
$$b^x = b^{y+z} \Rightarrow x = y + z \longleftarrow \text{por propiedad de potencias}$$
$$\log_b (a \cdot c) = \log_b a + \log_b c \longleftarrow \text{Remplazando}$$

E50 De manera similar, se pueden demostrar las siguientes propiedades:

- El logaritmo de un cociente es igual a la diferencia de los logaritmos de los factores.

$$\log_b \left(\frac{a}{c}\right) = \log_b a - \log_b c$$

E51 **Ejemplo:** $\log_3 \left(\frac{81}{243}\right) = \log_3 81 - \log_3 243 = 4 - 5 = -1$

E52
- El logaritmo de una potencia es igual al producto del exponente de dicha potencia por el logaritmo de su base.

$$\log_b a^n = n \cdot \log_b a$$

E53 **Ejemplo:** $\log_2 4^3 = 3 \cdot \log_2 4 = 3 \cdot 2 = 6$

E55
- El logaritmo de una raíz es igual al logaritmo de la cantidad subradical, dividido por el índice de la raíz.

$$\log_b \sqrt[n]{a} = \frac{\log_b a}{n}$$

E56 **Ejemplo:** $\log_4 \sqrt[6]{16} = \frac{1}{6} \cdot \log_4 16 = \frac{1}{6} \cdot 2 = \frac{1}{3}$

No olvides que... E54

En relación con las propiedades de los logaritmos se debe tener presente que se cumple en general:

- $\log_b (p \cdot q) \neq \log_b p \cdot \log_b q$
- $\log_b (p + q) \neq \log_b p + \log_b q$
- $\log_b (p - q) \neq \log_b p - \log_b q$

En resumen E57

Sean a, b, c números racionales y positivos, con la base b distinta de 1:

- Logaritmo de un cociente: $\log_b \left(\frac{a}{c}\right) = \log_b a - \log_b c$
- Logaritmo de una potencia: $\log_b a^n = n \cdot \log_b a$
- Logaritmo de una raíz: $\log_b \sqrt[n]{a} = \frac{\log_b a}{n}$

3.9.2 Componentes y unidades elementales

Praxis	**Lenguaje**	**Teoría**
Situación: Desarrollo de una técnica de comprobación de la propiedad logaritmo de un producto. Ejemplificación de las propiedades: logaritmo de un producto, logaritmo de un cociente, logaritmo de una potencia y logaritmo de una raíz.	Términos y expresiones: Exponencial, logaritmo de un Producto, suma de logaritmos, logaritmo de un cociente, diferencia de logaritmos, cantidad subradical. Notaciones: $log_b(a \cdot c) = log_b a + log_b c$ $log_b\left(\frac{a}{c}\right) = log_b a - log_b c$ $log_b a^n = n \cdot log_b a$ $log_b \sqrt[n]{a} = \frac{log_b a}{n}$ $log_b(p \cdot q) \neq log_b p \cdot log_b q$ $log_b(p + q) \neq log_b p + log_b q$ $log_b(p - q) \neq log_b p - log_b q$	Propiedad: El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores. Propiedad: El logaritmo de un cociente es igual a la diferencia de los logaritmos de los factores. Propiedad: El logaritmo de una potencia es igual al producto del exponente de dicha potencia por el logaritmo de su base. Propiedad: El logaritmo de una raíz es igual al logaritmo de la cantidad subradical, dividido por el índice de la raíz.

3.9.3 Conocimientos y conflictos semióticos.

E45: Se introduce la sección de propiedades de las operaciones con logaritmos, delimitando su demostración a través de las propiedades de potencias en notación exponencial.

E46: Se presenta una de las propiedades de los logaritmos para los argumento, en este caso cuando existe un producto en el argumento del logaritmo, pero no da de inmediato las restricciones pues si los factores de la multiplicación son negativos, esta propiedad no es válida por definición de logaritmo. El uso de la propiedad se realiza en los apartados más adelante, en donde presenta una demostración para argumentar demostración.

E47: Se presentan preguntas sobre la propiedad mencionada en E46, y dando las restricciones las respectivas restricciones. Se sugiere que se trate un ejemplo para el argumento cuando los factores en la multiplicación son negativos (pues con esto se obtiene un producto positivo que cumple con la definición de logaritmo, es decir que el argumento es positivo, pero no se cumple al separarse en suma de logaritmos).

En el segundo punto se plantea el caso si el logaritmo de un producto es igual al producto de los logaritmos. Este hecho que en general no se cumple no es suficiente para probar que logaritmo de un producto es la suma de los logaritmos, pero deja claro que la propiedad no se cumple en general, asumiendo que el estudiante debe reemplazar valores según las restricciones del primer punto para verificar.

El tercer punto la pregunta es muy abierta, no da ninguna delimitación. Además se asume que el estudiante aplicara las técnicas basándose en las restricciones dadas en el primer punto.

E48: A través de un ejemplo se comprueba que se cumple la propiedad de E48, primero calculando el logaritmo transformándolo en notación exponencial y aplicando propiedades de potencias, y luego comprobando que se cumple con la propiedad de E46.

E49: Se realiza la demostración de la propiedad dada en E46, los valores *a* y *c* son los argumentos y *b* es la base del logaritmo. La demostración utiliza una secuencia lógica, para ello se transforma el logaritmo en notación exponencial y se aplica la propiedad de potencias con igual base (se suman los exponente y se conserva la base). Para comprender la demostración el estudiante debe poner en juego los conocimientos previos de potencias y resolución de ecuaciones.

E50: Se presenta la propiedad del logaritmo de un cociente, esta propiedad no se demuestra, ya que la metodología para esta tarea es similar la demostración en E49, pero tampoco invita al estudiante a llevar a cabo esta tarea. Se asume que el estudiante toma las mismas restricciones para los valores de la base y argumentos, pues en el cociente el valor c no puede tomar el valor cero (en E49 se toman todo los valores como positivos y la base además distinta de uno).

E51: El ejemplo aplica la propiedad vista en E50. En el ejemplo se puede ver solo cálculos, sin ninguna explicación ni conclusión respecto de este. En el cálculo se asume que el estudiante sabe calcular $log_3 81$y $log_3 243$, lo cual lo puede realizar aplicando propiedades de potencia o bien utilizando la calculadora.

E52: Se presenta la propiedad de logaritmo de una potencia. La propiedad no tiene argumentación, pero se puede demostrar utilizando propiedades de potencias como en E49.

E53: El ejemplo presentado corresponde a la aplicación de la propiedad de E52, el ejemplo no presenta ninguna indicación (como enunciado del ejercicio), tampoco se presentan observaciones o conclusiones al respecto.

E54: Se lista una serie de propiedades que se cumplen para los argumentos de los logaritmos, pero con la relación$\neq$. Se asume que el estudiante considerara las respectivas restricciones para base y argumentos. Se considera que sería apropiado que el estudiante realice algunos ejemplos para tener la certeza de los dichos, lo cual en el texto no lo considera. Además las demostraciones se pueden realizar a través de las propiedades de potencias realizando la transformación del logaritmo a notación exponencial.

E55: Se presenta la propiedad de logaritmo de una raíz, la cual es un caso extendido de la propiedad de logaritmo de una potencia, pues una raíz $\sqrt[n]{a}$ es igual a $a^{\frac{1}{n}}$, esta observación el texto no la realiza. Además no realiza ninguna argumentación de la propiedad (que bien se puede demostrar con la propiedad de logaritmo de una potencia).

E56: Se presenta un ejemplo correspondiente a la propiedad logaritmo de una raíz. En la resolución además de aplicar la propiedad de la raíz se puede solucionar aplicando la propiedad de potencia transformando la raíz a notación exponencial y aplicar la propiedad de logaritmo de una potencia.

E57: El resumen consta de las 4 propiedades de las operaciones de los logaritmo (o propiedades de los argumentos del logaritmo), las propiedades no se nombran como tal.

3.10 Actividades 3.

3.10.1. Texto y unidades primarias de análisis

E58

EN TU CUADERNO

1. Desarrolla cada una de las siguientes expresiones, utilizando propiedades.

a. $log_b (x^2 - 9x - 22)$

b. $log_b \left(100x^8 - 80x^7 + 16x^6\right)^{\frac{8}{3}}$

c. $log_b (x^3 + y^3)^2$

d. $log_p \dfrac{a^2 b^4 c^5}{d^2}$

2. Reduce cada una de las siguientes expresiones a un solo logaritmo.

a. $log_m a - 2\, log_m b + log_m c - 3\, log_m d$

b. $log_b (x^2 + 1) + log_b (x + 1) + log_b (x - 1)$

c. $log_p (x + y + z) - 4\, log_p (x - y - z)$

d. $log_p (x + 3) - 4\, log_p (x - 2)$

e. $2\, log_b 3 + 3\, log_b 2$

f. $log_b c - 6\, log_b a$

g. $log_b a - log_b c - log_b d + log_b e$

h. $log_b c + log_b a - 1$

3. Si $A = log_6 2$, $B = log_6 3$ y $C = log_6 5$, expresa en términos de A, B y C.

a. $log_6 5400$

b. $log_6 90$

c. $log_6 \sqrt{216}$

d. $log_6 \dfrac{1\,080}{32\,400}$

3.10.2. Componentes y unidades elementales

Praxis	**Lenguaje**	**Teoría**
Técnica: Desarrollo de expresiones utilizando propiedades. Reducción de expresiones a un solo logaritmo. Expresar en función de parámetros.		

3.10.3. Conocimientos y conflictos semióticos

E58: Se plantean actividades en las cuales deben aplicar las propiedades de las operaciones de los logaritmos.

En el primer punto el estudiante debe desarrollar el logaritmo y dejar expresado en suma o resta de logaritmo (según corresponda), pero el enunciado no deja claro esto al estudiante, lo cual puede llevar a confusiones y obstáculos para completarla. En el enunciado habla de aplicar las 'propiedades' suponiendo que se refiere a las propiedades vistas en E57.

En el segundo punto se supone que el estudiante conoce el trabajo algebraico, el cuál debe aplicar a las expresiones en términos de las operaciones con las propiedades de logaritmo, para llevar a una sola expresión en cada caso.

En el tercer punto el estudiante debe realizar una transformación del argumento para obtener las potencias en base 2, 3 o 5, para luego reemplazar, pues la actividad está regulada para ello. Además de realizar una interpretación en términos. Se fórmula la tesis que esta actividad puede traer algunos conflictos para el estudiante, no deja claro cuál es el objetivo real.

3.11. Resultados del análisis semiótico

Como resumen se presentan los principales conflictos semióticos encontrados en el análisis.

1. Se habla sobre la importancia de los logaritmos y sus tablas. El fin es dar una motivación para introducir y/o acercar los contenidos matemáticos los cuales evolucionaron por una necesidad humana de ahorrar tiempo y simplificar los cálculos. Solo queda la idea de esto, pues en ninguno de los casos se muestra una aplicación en problemas cotidianos que si bien significan una tarea más compleja, muestran lo valioso e importante que es su aprehensión.

2. En el texto podemos encontrar que en la actividad matemática hay tendencia a verificar las propiedades con ejemplos bastante sencillos y que cubren una variedad limitada de casos.

Mientras que en las tareas problemáticas hay casos, que si bien son no de mayor complejidad, pueden traer algunas complicaciones. Por ejemplo se consideran en los ejemplos logaritmos con argumentos enteros positivos y en las tareas problemáticas los argumentos son con números racionales tanto como notación fraccionaria como decimal.

Otro punto importante que es referente a la actividad matemática, es que hay tendencia hacia generar ejemplos monótonos y particulares solo de tipo cálculo. También se ve en algunas actividades de libre resolución, donde no todas son objeto de discusión, y si la hay no acota la cantidad de compañeros que deben realizar esta.

3. En las notación se puede ver en ocasiones en los ejemplos que se utilizan valores contrarios a la definición de logaritmos para verificar las que la definición de logaritmo para estos valores no es válido, a pesar de que el texto presenta las circunstancias en cada notación de manera apropiada, pues basta notar que para muchos de los ejemplos, el logaritmo lo representa en notación exponencial (por definición), este no presenta mayores argumentaciones, soslayando los conflictos que puedan generar esta omisión.

4. Falta de justificación o argumentación de algunas propiedades mencionadas, como la propiedad de logaritmo de un cociente, logaritmo de una potencia, logaritmo base b de un producto ac es distinto al producto del logaritmo en base b de a por el logaritmo en base b de c, *etc.* Además, en las demostraciones que siguen una secuencia lógica, estas podrían estar acompañadas de explicaciones en lenguaje natural, para aislar obstáculos que pudiesen presentarse al estudiante.

5. En algunas actividades se puede observar un conflicto potencial, y que corresponde requerir al estudiante que realice tareas para lo que no ha recibido una instrucción lo suficientemente clara: resolver ecuaciones a nivel de argumento de un logaritmo; cálculo de logaritmo para números racionales e irracionales; tareas abiertas de libre resolución y explicación del método utilizado. Además, no se dan ejemplos ni actividades para comprobar las propiedades sobre argumentos de un logaritmo: logaritmo de un producto (cociente) es distinto a ese producto (cociente), logaritmo de la suma (resta) es distinto a la suma (resta) de los logaritmos. (notar que es propiedad)

El contenido matemático “Logaritmo y propiedades de los logaritmos” se caracteriza por introducir nuevas notaciones y términos, de lo cual su uso debe estar bien regulado y debe ser de forma precisa. También sucede que en ejemplos y ejercicios se dan como “explicación” de las reglas (propiedades), y con esto fijan su uso.

En base a estos resultados se da una sugerencia, en anexo 3, de una instrucción de logaritmo.

Conclusiones

Tras la realización de los análisis según la metodología escogida e intentar responder al problema sobre el cual se desarrolla el presente trabajo obtenemos las siguientes conclusiones por objetivo específico

La técnica del análisis semiótico es un recurso útil para la investigación en didáctica de las matemáticas. En una primera parte gracias a la metodología, se pudo determinar diferencias entre los significados de referencia y significados locales, con lo que se pudo apreciar los conflictos potenciales como por ejemplo: se consideran en los ejemplos logaritmos que los argumentos son números enteros positivos y en las tareas problemáticas los argumentos son con números racionales tanto como notación fraccionaria como decimal, se pide al estudiante que realice actividades para las cuales no se les ha dado instrucción lo suficientemente clara, además de considerar contenidos posteriores como base (ecuaciones exponenciales), lo que se aprecia en la página 46.

En lo referente a la aplicación de la metodología en el texto, se pudo observar que existen elementos que este no trata en profundidad como por ejemplo la justificación de propiedades de los logaritmos, además no cubre un rango amplio (mayor variedad) de ejercicios, ejemplos, como también está el hecho de omitir algunas notaciones que pudiesen. Otro tema importante que se nota ausente es la falta de demostraciones como parte de los ejercicios propuestos.

Los resultados obtenidos se utilizaron para dar una sugerencia de instrucción de logaritmos, está apoyada en base a los resultados obtenidos del análisis y, que consiste básicamente en cubrir aquellos ejemplos, notaciones y ejercicios ausentes en la instrucción propuesta por el texto.

Bibliografía

- Blanco, M. Bozt, J. Calderón, F. Jiménez, M. Gonzales, M. Lopez, G. Romero, P. Diaz, M.Muñoz, G. & Rupin, P. (2011).*Matemática 2°, Proyecto Bicentenario.* Chile: Santillana
- Carreño, X & Cruz, X. (2002). *Álgebra.* (2da edición). Chile: Arrayan.
- D´Amore, B. & Godino, J. (2007). El enfoque ontosemiótico como un desarrollo de la teoríaantropológica en didáctica de la matemática. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa.*
- Demre. (2005, Junio). Pruebas de selección universitaria, Informativo prueba de matemáticas. *Proceso de admisión 2006, Documento Oficial Psu*, 7(29): 9.
- Demre. (2006, Julio).Resolución preguntas 19 a 35. *Facsímil Psu 2006 Matemáticas, Proceso de admisión 2007, Documento oficial*, 13: 9.
- Demre. (2007, Julio).Resolución Facsímil Prueba de Matemáticas Parte II. *Psu 2007 Documento oficial*, 13: 12.
- Demre. (2008, Julio).Resolución Facsímil Prueba de Matemáticas Parte II. *Psu Proceso de admisión 2009*, 13: 12.
- Demre. (2009, Julio).Resolución preguntas 19 a 35. *Facsímil Psu 2009 Matemáticas, Proceso de admisión 2010, Documento oficial*, 13: 6.
- Demre. (2010, Agosto).Resolución Prueba de Matemáticas Parte II. *Proceso de admisión 2011, Documento oficial*, 13: 7.
- Demre. (2012, Septiembre).Resolución Prueba Oficial de Matemáticas Parte III. *Psu en el Mercurio*, 15: 4.
- Godino, J & Arrieche, M (2001). *El análisis Semiótico como técnica para determinar Significados.* Recuperado el 2 de Marzo de 2012 de: http://www.ugr.es/~jgodino/siidm/almeria/Analisis_semiotico.PDF
- Godino, J. & Font, V (2002). *Algunos desarrollos y aplicaciones de la teoría de las funcionessemióticas.* Recuperado 5 marzo 2012, de: http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/anexo2_enfoque%20ontosemi%F3tico%20cognici%F3n.pdf.

- Godino, J. (1999). *Análisis Epistémico, Semiótico y Didáctico de procesos de instrucción matemática.* Recuperado el 10 Diciembre 2011 de: http://servidor-opsu.tach.ula.ve/profeso/guerr_o/praticamatema/referencias/practica_marcosteoricos3/Analisis%20epistemico%20Godino.pdf
- Godino, J. (2010). *Marcos teóricos sobre el conocimiento y aprendizaje matemático.* Recuperado el dia 3, Junio 2012, de http://www.ugr.es/~jgodino/fundamentos_teoricos/marcos_teoricos_ddm.pdf.
- Mabel, V & Zúñiga, G.(2010). Matemática 2° medio. Chile: Ediciones SM
- OCDE. (2009). *Resumen de resultados PISA 2009.* Recuperado el 3 de noviembre de: http://www.simce.cl/fileadmin/Documentos_y_archivos_SIMCE/evaluaciones_inter/pisa_2009/Resumen_Resultados_PISA_2009_Chile.pdf
- Ortega, T. (2009). *Creación de un modelo de valoración de textos matemáticos. Aplicaciones.* Recuperado el día 20, julio 2012, de http://www.seiem.es/publicaciones/archivospublicaciones/actas/Actas13SEIEM/SEIEMXIII-MonterrubioOrtega.pdf.
- Picado, R., & Rico, L.(2011). *Análisis de contenido en textos históricos de matemáticas.* Recuperado el dia 12, julio 2012, de http://www.pna.es/Numeros2/pdf/PicadoAnalisis2011.pdf.
- Unesco. (2011). *Principios y Objetivos generales de Educación.Datos Mundiales de Educación*.(7ª ed). Recuperado el 17 marzo de 2012 de: http://www.ibe.unesco.org/fileadmin/user_upload/Publications/WDE/2010/pdf-versions/Chile.pdf
- W.Kitchen , J. (1986). Cálculo. (4ta ed.) España, Madrid: McGraw-Hill.
- Zañartu, M. , Darrigrandi, F. & Ramos, M. (2011). *Texto para el estudiante Matemática 2°educación Media* .Chile: Santillana.

Anexo 1

> ¿SABÍAS QUE...?

John Napier
(1550-1617)

John Napier –creador de los logaritmos– llamó al exponente de cada potencia "número artificial". Más tarde cambió de opinión y lo llamó logaritmo, que significa "relación del número".

La nomenclatura moderna de logaritmos fue introducida por Leonhard Euler en 1728, casi un siglo después de que Napier publicara sus primeras tablas logarítmicas.

Definición de logaritmo y restricciones

Se define **logaritmo** como el exponente de una potencia con cierta base, es decir, el número al cual se debe elevar una base dada para obtener un resultado determinado.

$$\log_b a = c \leftrightarrow b^c = a$$

En la expresión anterior, **b** es la **base del logaritmo**, a es el **argumento** o antilogaritmo, y c es el **logaritmo en base b de a.**

Además, si c es un número natural, se tiene que:

$$\log_b a = c \leftrightarrow b^c = a \leftrightarrow b = \sqrt[c]{a}$$

Ejemplos

1. Determina x, si $\log_3 81 = x$.

   Por definición:

   $$\log_3 81 = x \leftrightarrow 3^x = 81$$

   Dado que $81 = 3^4$, se tiene que:

   $$3^x = 3^4$$

   Por lo tanto, $x = 4$.

2. Determina x, si $\log_2 \frac{1}{8} = x$.

   Por definición:

   $$\log_2 \frac{1}{8} = x \leftrightarrow 2^x = \frac{1}{8}$$

   Dado que $\frac{1}{8} = 2^{-3}$, se tiene que:

   $$2^x = 2^{-3}$$

   Por lo tanto, $x = -3$.

3. Determina x, si $\log_{0,5} 2 = x$.

   Por definición:

   $$\log_{0,5} 2 = x \leftrightarrow 0,5^x = 2$$

   Se tiene que $0,5 = \frac{1}{2} = 2^{-1}$.

   Luego:

   $$0,5^x = 2$$
   $$\left(2^{-1}\right)^x = 2$$
   $$2^{-x} = 2^1$$

   Por lo tanto, $x = -1$.

Hace algunos siglos, los logaritmos permitieron simplificar muchos cálculos relativos a la astronomía, donde el uso de grandes números hacía muy difícil realizar operaciones. John Napier (conocido también como Neper) se dio cuenta de que si las operaciones se realizaban con logaritmos en lugar de hacerlas con los números originales, se podía trabajar con números mucho más pequeños.

En vista de ello, en 1614 escribió el libro *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*, en el cual describe la operatoria con ellos. Su uso fue resistido por algunos matemáticos y físicos, hasta que Johannes Kepler los utilizó para calcular y explicar los movimientos planetarios.

> **SOS Mat**
>
> El número e es un número irracional y aunque los logaritmos creados por Napier tenían como base un número cercano a $\frac{1}{e}$, se conoce a los logaritmos con base **e** como neperianos, en su honor.
>
> $$e \approx 2{,}718281828459$$

Propiedades de los logaritmos

Se llama **logaritmo común** a aquel cuya base es **10.** Por convención, se expresa $\log_{10} a$ como **log a**, es decir:

$$\log_{10} a = \log a$$

Se llama **logaritmo neperiano** o **logaritmo natural** a aquel cuya base es **e.** Por convención, se expresa $\log_e a$ como **ln a**, es decir:

$$\log_e a = \ln a$$

A continuación, se analizarán algunas propiedades de los logaritmos y su operatoria.

1. Logaritmo de la unidad.

Observa:

$$7^0 = 1 \qquad 20^0 = 1 \qquad 12^0 = 1$$

Luego, por definición:

$$7^0 = 1 \leftrightarrow \log_7 1 = 0 \qquad 20^0 = 1 \leftrightarrow \log_{20} 1 = 0$$

$$12^0 = 1 \leftrightarrow \log_{12} 1 = 0$$

En general, para todo número real $b \neq 0$, se tiene que $b^0 = 1$. Luego:

$$\log_b 1 = 0$$

Es decir, el logaritmo de 1, en cualquier base, es igual a **0.**

2. Logaritmo de la base.

Observa:

$$5^1 = 5 \qquad 8^1 = 8 \qquad 12^1 = 12$$

Luego, por definición:

$$5^1 = 5 \leftrightarrow \log_5 5 = 1 \qquad 8^1 = 8 \leftrightarrow \log_8 8 = 1$$

$$12^1 = 12 \leftrightarrow \log_{12} 12 = 1$$

En general, para todo número real $b \neq 0$, se tiene que $b^1 = b$, por lo tanto:

$$\log_b b = 1$$

Es decir, el logaritmo de la base es igual a **1.**

3. Logaritmo de una potencia de la base.

Se tiene para todo número real $b \neq 0$:

$$b^n = b^n$$

Luego, por definición:

$$b^n = b^n \leftrightarrow \log_b b^n = n$$

$$\log_b b^n = n$$

Es decir, el logaritmo de una potencia de la base del logaritmo es igual al exponente de la potencia.

4. Logaritmo de una potencia.

Se tiene:

$$c = \log_b a \leftrightarrow b^c = a$$

Elevando a un número **x** la segunda igualdad se obtiene:

$$(b^c)^x = a^x$$

$$b^{cx} = a^x$$

Luego, por definición:

$$b^{cx} = a^x \leftrightarrow \log_b a^x = c \cdot x$$

Por lo tanto, como $c = \log_b a$, se tiene que:

$$\log_b a^x = x \log_b a$$

Es decir, el logaritmo de una potencia de un número es igual al producto entre el exponente de la potencia y el logaritmo del número.

... respecto de su base y su argumento.

Respecto a su base

Caso 1

Sea $\log_1 5 = x$.

Por definición:

$$\log_1 5 = x \leftrightarrow 1^x = 5$$

Pero se sabe que, para todo número real x:

$$1^x = 1$$

Luego, no existe x tal que $1^x = 5$.

En general, se exige que la base del logaritmo sea distinta de 1.

Caso 2

Sea $\log_0 5 = y$.

Por definición:

$$\log_0 5 = y \leftrightarrow 0^y = 5$$

Pero se sabe que, para todo número real $y \neq 0$:

$$0^y = 0$$

Por lo tanto, no existe y tal que $0^y = 5$.

En general, se exige que la base del logaritmo sea distinta de 0.

Caso 3

Sea $\log_{(-5)} 125 = z$.

Por definición:

$$\log_{(-5)} 125 = z \leftrightarrow (-5)^z = 125$$

Entonces:

$$(-5)^z = 125$$
$$(-5)^z \equiv 5^3$$

Por lo tanto, no existe z tal que $(-5)^z = 125$.

En general, se exige que la base del logaritmo sea positiva.

Respecto a su argumento

Sea $\log_7 a = c$.

Por definición:

$$\log_7 a = c \leftrightarrow 7^c = a$$

Se sabe que, para todo número real c:

$$7^c > 0$$

Por lo tanto, necesariamente debe ser $a > 0$.

En general, se exige que el argumento del logaritmo sea mayor que 0.

En síntesis

- Se define **logaritmo** como el exponente de una potencia.

  $$\log_b a = c \leftrightarrow b^c = a$$
  con $a > 0$, $b \neq 1$, $b > 0$

- La expresión anterior se lee "c es el logaritmo en base b de a".

Práctica

Calcula el valor de los logaritmos aplicando la definición.

1. $\log_4 16$
2. $\log_3 \frac{1}{9}$
3. $\log_{27} 81$
4. $\log_7 \frac{1}{7}$
5. $\log_{\frac{1}{3}} 81$
6. $\log_{0,01} 0,0001$

Escribe como logaritmos las siguientes expresiones.

7. $8^2 = 64$
8. $3^5 = 243$
9. $2^{10} = 1.024$
10. $5^{-1} = \frac{1}{5}$
11. $5^0 = 1$
12. $3^{-2} = \frac{1}{9}$
13. $\sqrt{49} = 7$
14. $27^{\frac{2}{3}} = 9$
15. $\sqrt{3a} = b$

Calcula el valor de las siguientes expresiones.

16. $\log_{10} 100 + \log_4 1 - \log_3 27$
17. $\log_8 \sqrt{2} + \log_{\sqrt{2}} \sqrt{8}$
18. $\log_{100} 0,001 + \log_{\sqrt{2}} 8$

Calcula las bases de los siguientes logaritmos.

19. $\log_b 1.000 = 3$
20. $\log_b 49 = 2$
21. $\log_b 27 = \frac{3}{4}$
22. $\log_b 9 = \frac{1}{2}$

> **SOS MAT**
>
> El número **e** es un número [illegible] y aunque los logaritmos creados por [illegible] tienen como base un número cercano a $\frac{1}{e}$, se conoce a los logaritmos con base **e** como neperianos, en su honor.
>
> $$e = 2{,}718281828459$$

Propiedades de los logaritmos

Se llama **logaritmo común** a aquel cuya base es **10**. Por convención, se expresa $\log_{10}$ como **log a**, es decir:

$$\log_{10} a = \log a$$

Se llama **logaritmo neperiano** [illegible] natural a aquel cuya base es **e**. [illegible] convención, se expresa $\log_e$ [illegible] a, es decir:

$$\log_e a = [illegible]$$

A continuación, se analizarán algunas propiedades de los [illegible].

1. Logaritmo de la unidad.

Observa:

$$7^0 = 1 \qquad 20^0 = 1 \qquad 12^0 = 1$$

Luego, por definición:

$$7^0 = 1 \leftrightarrow \log_7 1 = 0 \qquad 20^0 = 1 \leftrightarrow \log_{20} 1 = 0$$

$$12^0 = 1 \leftrightarrow \log_{12} 1 = 0$$

En general, para todo número real positivo **b ≠ 0**, se tiene que $\mathbf{b^0 = 1}$, luego:

$$\mathbf{\log_b 1 = 0}$$

Es decir, el logaritmo de **1**, en cualquier base, es igual a **0**.

2. Logaritmo de la base.

Observa:

$$5^1 = 5 \qquad 8^1 = 8 \qquad 19^1 = 19$$

Luego, por definición:

$$5^1 = 5 \leftrightarrow \log_5 5 = 1 \qquad 8^1 = 8 \leftrightarrow \log_8 8 = 1$$

$$12^1 = 12 \leftrightarrow \log_{12} 12 = 1$$

En general, para todo número real **b ≠ 0**, se tiene que $\mathbf{b^1 = b}$, por lo tanto:

$$\mathbf{\log_b b = 1}$$

Es decir, el logaritmo de la base es igual a **1**.

3. Logaritmo de [illegible] de la base.

Se tiene [illegible] real positivo **b ≠ 0**:

$$b^n = b^n$$

Luego, por definición:

$$b^n = b^n \leftrightarrow \log_b b^n = n$$

$$\mathbf{\log_b b^n = n}$$

Es decir, el logaritmo de una potencia de la base del logaritmo [illegible] igual al exponente de la potencia.

4. Logaritmo de una potencia.

Se tiene:

$$c = \log_b a \leftrightarrow b^c = a$$

Elevando a un número **x** la segunda igualdad, se obtiene:

$$\left(b^c\right)^x = a^x$$

$$b^{cx} = a^x$$

Luego, por definición:

$$b^{cx} = a^x \leftrightarrow \log_b a^x = c \cdot x$$

Por lo tanto, como $\mathbf{c = \log_b a}$, se tiene que:

$$\mathbf{\log_b a^x = x \log_b a}$$

Es decir, el logaritmo de una potencia de un número es igual [illegible] producto entre el exponente de la potencia y el logaritmo de[illegible] número.

Ejemplo

Si **$\log 5 \approx 0{,}7$**; calcula $\log 125 + \log 25 - \log 1.000$.

Se tiene:

$$125 = 5^3 \qquad 25 = 5^2 \qquad 1.000 = 10^3$$

Al remplazar en la expresión, se obtiene:

$$\log 125 + \log 25 - \log 1.000 = \log 5^3 + \log 5^2 - \log 10^3$$

$$\underset{\text{Por propiedad 4}}{=} 3 \cdot \log 5 + 2 \cdot \log 5 - 3 \quad \text{Por propiedad 4}$$

$$= 3 \cdot 0{,}7 + 2 \cdot 0{,}7 - 3 = 0{,}5$$

Por lo tanto, **$\log 125 + \log 25 - \log 1.000 \approx 0{,}5$.**

5. Logaritmo de una raíz.

Se tiene que $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$, por lo tanto, se aplica la propiedad 4.

$$\log_b \sqrt[n]{a^m} = \log_b a^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n} \cdot \log_b a$$

$$\boxed{\log_b \sqrt[n]{a^m} = \frac{m}{n} \cdot \log_b a}$$

Ejemplo

Calcula $\log \sqrt{100.000} + \log_2 \sqrt[7]{64}$.

$$\log \sqrt{100.000} + \log_2 \sqrt[7]{64} = \log \sqrt{10^5} + \log_2 \sqrt[7]{2^6} = \frac{5}{2}\underbrace{\log 10}_{1} + \frac{6}{7}\underbrace{\log_2 2}_{1} = \frac{47}{14}$$

6. Logaritmo de un producto.

Sean:

$$x = \log_b p \leftrightarrow b^x = p \qquad y = \log_b q \leftrightarrow b^y = q$$

Entonces:

$$pq = b^x b^y = b^{x+y}$$

$$\log_b (pq) = \log_b (b^{x+y}) = x + y$$

$$\boxed{\log_b (pq) = \log_b p + \log_b q}$$

El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores.

Ejemplos

1. Desarrolla $\log_3 (27a^5)$.

$$\log_3 (27a^5) = \log_3 27 + \log_3 a^5$$
$$= \log_3 3^3 + 5\log_3 a$$
$$= 3 + 5\log_3 a$$

2. Si $\ln 5 \approx 1{,}61$ y $\ln 3 \approx 1{,}01$; calcula $\ln 45$.

$$\ln 45 = \ln (3^2 \cdot 5) = \ln 3^2 + \ln 5$$
$$= 2 \cdot \ln 3 + \ln 5$$
$$\approx 2 \cdot 1{,}01 + 1{,}61 = 3{,}63$$

CALCULADORA

En algunas calculadoras existen las teclas **log**, que indica logaritmo en base **10**, y **ln**, que indica el logaritmo en base **e**.

Si se quiere calcular **log 5**, existen dos formas, dependiendo de la calculadora:

1. Se presiona **log**, se digita **5** y finalmente se presiona **enter** o **=**.
2. Se digita **5** y se presiona **log**.

En ambos casos, el resultado es **0,69897...**

Para calcular logaritmos naturales, se utiliza la tecla **ln**.

SOS MAT

Utilizando las propiedades, solo se necesitan los logaritmos de los números primos para obtener el logaritmo de cualquier número racional, ya que todos los números enteros se pueden descomponer en factores primos.

Por ejemplo, si se tiene el valor de los logaritmos de todos los números primos menores que **100**, se pueden obtener los valores de los logaritmos de **1** a **100**.

Ejemplos

1. $\log 38 = \log (2 \cdot 19) = \log 2 + \log 19$
2. $\log 49 = \log (7^2) = 2\log 7$

Anexo 2

Logaritmos

Ampliando memoria

La palabra **logaritmo** proviene de la raíz griega *logos*, que significa **proporción**, y *arithmos*, que significa **número**.

En la mayoría de las calculadoras científicas encontrarás la tecla log, que representa el logaritmo en base 10 de un número. Utilizándola podrás comprobar que:

$$2 = 10^{0,30102}\ ,\ 5 = 10^{0,69897}\ ,\ 500 = 10^{2,698987}$$

$$\text{log } 2 = 0{,}30102...,\ \text{log } 5 = 0{,}69897...,\ \text{log } 500 = 2{,}698987...$$

- ¿Qué opinas de la afirmación: "Todo número real positivo r se puede escribir como una potencia de base 10 y exponente x, es decir, $10^x = r$"?
- ¿Cómo escribirías el número 1 000 en base 10? ¿Y en base 5?

Para grabar

Si $a, b \in \mathbb{R}^+$, con $a \neq 1$ y $n \in \mathbb{R}$, entonces se tiene que:

$$\log_a b = n \Leftrightarrow a^n = b$$

Donde **a** es la base del logaritmo y **b** su argumento, y se lee: "Logaritmo de **b** en base **a** es igual a **n**".

Ejemplos:

- $\log_2 16 = 4$, ya que $2^4 = 16$
- $\log_4 16 = 2$, ya que $4^2 = 16$
- $\log_{10} \frac{1}{10} = -1$, ya que $10^{-1} = \frac{1}{10}$
- $\log_{\frac{5}{2}} 1 = 0$, ya que $\left(\frac{5}{2}\right)^0 = 1$

Ayuda

Usualmente si se trabaja con un logaritmo en base 10, la notación es:

$$\log_{10} b = \log b$$

1. **Interpreta** cada uno de los siguientes enunciados. Luego, completa con la potenciia respectiva.

a. $\log_5 25 = 2$, ya que ________.

b. $\log \frac{1}{100} = -2$, ya que ________.

c. $\log_{\frac{3}{2}} \frac{9}{4} = 2$, ya que ________.

d. $\log_{\frac{1}{1000}} \frac{1}{1.000} = 1$, ya que ________.

e. $\log_{0,1} 0{,}1 = 1$, ya que ________.

f. $\log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2}$, ya que ________.

g. $\log_7 \sqrt[3]{7} = \frac{1}{3}$, ya que ________.

h. $\log_{\frac{2}{5}} \frac{25}{4} = -2$, ya que ________.

2. **Relaciona** las expresiones de la columna A con las de la columna B. Para ello, escribe la letra correspondiente en cada caso.

Columna A	Columna B
a. $\log_3 \frac{1}{9}$	________ -2
b. $\log 100$	________ 3
c. $\log_5 \sqrt{25}$	________ 1
d. $\log_{\frac{1}{10}} 0{,}001$	________ 2

3. Analiza la siguiente tabla. Luego, complétala y responde.

a	$\log_a a$	$\log_a 1$
$\frac{5}{2}$		
5	$\log_5 5 = 1$	$\log_5 1 = 0$
0,35		

- Si el valor de **a** aumenta, ¿qué ocurre con los valores correspondientes de cada columna?

____

____

- ¿Cuál es el valor de $\log_1 1$? Discute con tus compañeras y compañeros.

____

____

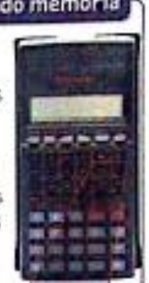
- Utiliza la información del cuadro **Para grabar** de la página anterior y demuestra que:

a. Si $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$, entonces $\log_a a = 1$.

b. Si $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$, entonces $\log_a 1 = 0$.

Ampliando memoria

John Napier (1550-1617) fue uno de los precursores en la utilización de los logaritmos para métodos ligados con el cálculo. Por ello, en variadas publicaciones de la época y actuales se conocen los logaritmos en base **e** como logaritmos "neperianos".



4. Analiza la siguiente información. Luego, calcula cada logaritmo.

> **Ejemplo**:
> Calcula $\log_4 1.024$.
> **1.** Por la definición de logaritmo, se tiene que $4^x = 1.024$.
> **2.** Utilizando potencias, se tiene que $1.024 = 4^5$. Luego, $x = 5$.
> Por lo tanto, $\log_4 1.024 = \log_4 4^5 = 5$

a. $\log_2 16$

b. $\log_{\frac{5}{9}} \frac{25}{81}$

c. $\log_7 \frac{1}{\sqrt{7}}$

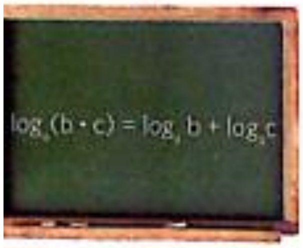
d. $\log_{25} 625^x$

- Si $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$, ¿es cierto que $\log_a a^n = n$? Justifica.

____

____

Propiedades de los logaritmos



Al demostrar que la afirmación: "El logaritmo de un producto es equivalente a la adición entre los logaritmos de cada uno de sus factores" es verdadera, se tiene:

Sean a, b, c $\in \mathbb{R}^+$, con $a \neq 1$, entonces se cumple que:

$$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

Demostración:

(1) Sea $\log_a b = x$, $\log_a c = y$. Luego, $a^x = b$ y $a^y = c$.

(2) Usando **(1)**, se tiene que $b \cdot c = a^x \cdot a^y = a^{x+y}$.

(3) Como $b \cdot c = a^{x+y}$, aplicando la definición de logaritmo, se tiene que $\log_a(b \cdot c) = x + y$.

(4) De **(1)** se sabe que $x = \log_a b$ e $y = \log_a c$. Luego, en **(3)** se tendrá $\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$.

Para grabar

Si a, b, c $\in \mathbb{R}^+$, con $a \neq 1$, se cumplen las siguientes propiedades:	Ejemplos:
• $a^{\log_a b} = b$	• $\log_2 \frac{3}{8} = \log_2 3 - \log_2 8 = \log_2 3 - \log_2 2^3 = \log_2 3 - 3$
• $\log_a 1 = 0$	
• $\log_a a = 1$	• $\log_a \sqrt[4]{17} + \log_a \sqrt[4]{17^3} = \frac{1}{4}\log_a 17 + \frac{3}{4}\log_a 17 = \log_a 17$
• $\log_a a^n = n$	
• $\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$	
• $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$	• $\log_5 125 - \log_5 625 = \log_5 5^3 - \log_5 5^4 = 3 - 4 = -1$
• $\log_a b^n = n \log_a b$	
• $\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{\log_a b}{n}$; $n \in \mathbb{N}$	
• $\log_a b = \log_a c \Rightarrow b = c$	

Advertencia

Comúnmente se utilizan de manera incorrecta las propiedades del logaritmo. Por ejemplo, se considera:

- $\log_2(8 + 8) = \log_2 8 + \log_2 8$

Pero:

$\log_2(8 + 8) = \log_2 16 = \log_2 2^4 = 4$

Mientras que:

$\log_2 8 + \log_2 8 = \log_2 2^3 + \log_2 2^3 = 3 + 3 = 6$. Claramente $4 \neq 6$.

En general, debes tener cuidado y considerar lo siguiente:

- $\log_c(a + b) \neq \log_c a + \log_c b$
- $\log_c a \cdot \log_c b \neq \log_c a + \log_c b$
- $\log_c(a - b) \neq \log_c a - \log_c b$
- $\frac{\log_c a}{\log_c b} \neq \log_c a - \log_c b$

1. **Relaciona** las expresiones de la columna A con las de la columna B. Para ello, escribe la letra correspondiente en cada caso.

Columna A	Columna B
a. $\log 0{,}00000001$	________ -2
b. $\log_4 16^5 + \log_4 4 + \log_4 1$	________ -8
c. $\log_7 \sqrt{343} - \log_7 343$	________ -1,5
d. $\log_2 512 + \log_2 \frac{1}{512}$	________ -16
e. $\log_{\frac{1}{5}} 25$	________ 11
f. $\log 0{,}00000001 + \log 0{,}00000001$	________ 0

2. Detecta el error en cada caso. Luego, corrígelo.

a. $\frac{1}{2}\log\frac{1}{1000} = \frac{1}{2}(\log 10 \cdot \log 1000) = \frac{1}{2}(1-3) = -1$

Error:	Corrección:

b. $\log_9\sqrt[5]{9} - \frac{1}{5}\log_{100}1 + 3\log_{\frac{1}{2}}2 = \frac{1}{5}\log_9 9 - \frac{1}{5}\cdot 0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{5} + \frac{1}{3} = \frac{8}{15}$

Error:	Corrección:

3. Demuestra cada una de las siguientes proposiciones.

a. Si $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$, con $a \neq 1$ y $n \in \mathbb{R}$, entonces $\log_a a^n = n$.

b. Si $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$, con $a \neq 1$ y $n \in \mathbb{R} - \{0\}$, entonces $\log_a\sqrt[n]{b} = \frac{\log_a b}{n}$.

Paso a Paso

Si $a, b \in \mathbb{R}^+$, con $a \neq 1$ y $n \in \mathbb{Q}$, entonces $\log_a b^n = n\log_a b$

$a^{\log_a b} = b \quad /(\ )^n$ (1)

$\left(a^{\log_a b}\right)^n = b^n \Rightarrow a^{n\cdot\log_a b} = b^n$ (2)

De la misma forma, $b^n = a^{\log_a b^n}$. (3)

Por lo tanto,
$a^{n\cdot\log_a b} = a^{\log_a b^n} \Rightarrow n\log_a b = \log_a b^n$ (4)

(1) Se utiliza la propiedad 1 de la sección **Para grabar** de la página anterior.
(2) Se eleva a n en ambos miembros de la igualdad y se multiplican los exponentes involucrados en la expresión de la izquierda de esta.
(3) Como es una igualdad, se puede cambiar el orden de las expresiones y esta se conservará.
(4) Del paso (2) y (3) se concluye lo pedido.

4. Analiza la siguiente información. Luego, resuelve cada una de las siguientes ecuaciones.

Si $a, b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ y $c \in \mathbb{R}^+$, se tiene que: $\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$

a. $\log_{81} 9 + \log_3 27 = \log_2 x$ x=

b. $\log_{12} 1.728 - \log_2 x = \frac{1}{2}\log 10^2$ x=

c. $\log_7 343 - \frac{\log 343}{\log 7} + \frac{\log 7}{\log 343} = x$ x=

d. $\log_{\frac{1}{4}} 256 - 2 + \frac{\log_{\frac{1}{4}} 2}{\log_{0.25}\frac{1}{2}} = \log_{\frac{1}{2}} x$ x=

Desafíate

5. Demuestra la siguiente proposición en tu cuaderno.

Si $a, b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$, entonces $\log_a b = (\log_b a)^{-1}$.

Anexo 3

Secuencia de Logaritmo:

A continuación se presenta una sugerencia al diseño de actividades para una clase sobre la definición y propiedades de logaritmo, tratando de buscar la mayor comprensión de los conceptos y procedimientos por parte del estudiante.

Al inicio de la clase el profesor hace un repaso sobre potencias, definición y propiedades.

Luego para introducir el tema de logaritmos, se comenta la importancia que estos han tenido y cómo han aportado en la vida, como lo fue hace algunos siglos en la astronomía, donde su uso simplifico los cálculos de operaciones que constaban con grandes números, permitiendo realizar las mismas, pero con números mucho más pequeños.

Para lograr explicar en qué consisten los logaritmos, se construye una tabla que contiene algunas potencias de base y exponente natural.

n	2^n	3^n	4^n	5^n
1	2	3	4	5
2	4	9	16	25
3	8	27	64	125
4	16	81	256	625
5	32	243	1024	3125
6	64	729	4096	15625
7	128	2187	16384	78125

El profesor indica a los alumnos que observen los resultados obtenidos en la fila $\boldsymbol{n = 7}$. Donde los resultados arrojan que 7 es el **exponente** al que hay que elevar 2 para obtener 128 o 7 es el exponente al que hay que elevar 3 para obtener 2.187.

Dicho **exponente**, en matemáticas se denomina **Logaritmo.** Entonces observando la tabla diríamos que el logaritmo de 128 en base 2 es 7 y lo denotamos de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{log_2 128 = 7}$$

o que el logaritmo de 2.187 en base 3 es 7 y lo denotamos de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{Log\ _5 78.125 = 7}$$

<u>Actividad 1:</u> Observando los resultados de la tabla, resuelve los siguientes logaritmos

A) $Log_5 625 =$

B) $Log_3 243 =$

C) $Log_4 1024 =$

D) $Log_5 15625 =$

<u>Actividad 2:</u> Observando los resultados de la tabla encuentra el valor de la base de los siguientes logaritmos.

A) $Log_x 64 = 3$

B) $Log_x 243 = 5$

C) $Log_x 32 = 5$

D) $Log_x 81 = 4$

<u>Actividad 3:</u> Observando los resultados de la tabla encuentra el valor del argumento de los siguientes logaritmos.

A) $Log_5 x = 5$

B) $Log_4 x = 6$

C) $Log_3 x = 6$

D) $Log_4 x = 7$

A continuación se entrega a los alumnos la definición formal de logaritmo:

$$\boldsymbol{Si\ a, b\ \in \mathrm{R}+, con\ a \neq 1\ y\ n\ \in R, entonces\ se\ tiene\ que}:$$

$$\boldsymbol{log_a b = n \iff a^n = b}$$

Donde $\boldsymbol{a}$ es la base del logaritmo y $\boldsymbol{b}$ su argumento, y se lee " Logaritmo de $\boldsymbol{b}$ en base $\boldsymbol{a}$ es igual a $\boldsymbol{n}$"

Para una definición completa de los logaritmos, el profesor demuestra el por qué de las restricciones respecto a la base y argumento.

<u>Caso 1</u> **(Restricción respecto a la base)**

Sea $\boldsymbol{Log_1 6 = x}$, por definición tenemos $\boldsymbol{Log_1 6 = x \Leftrightarrow 1^x = 6}$

Pero se sabe que, para todo número real x : $1^x = 5$

Luego, no existe $\boldsymbol{x}$ tal que $1^x = 5$.

En general se exige que la base del logaritmo sea distinta de 1.

<u>Caso 2</u> **(Restricción respecto a la base)**

Sea $\boldsymbol{Log_0\, 5 = x}$ **,** por definición tenemos $\boldsymbol{Log_0 5 = x \Leftrightarrow 0^x = 5}$

Pero se sabe que para todo número real $x \neq 0$:

$$0^x = 0$$

Por lo tanto no existe $\boldsymbol{x}$ tal que $0^x = 5$

En general se exige que la base del logaritmo sea distinta de 0.

<u>Caso 3</u> **(Restricción respecto a la base)**

Sea $\boldsymbol{Log_{(-4)} 64 = x}$ **,** por definición tenemos $\boldsymbol{Log_{(-4)} 64 = x \Leftrightarrow (-4)^x = 64}$

Entonces

$$\boldsymbol{(-4)^x = 64}$$

$$\boldsymbol{(-4)^x = 4^3}$$

Por lo tanto, no existe $\boldsymbol{x}$ tay que $\boldsymbol{(-4)^x = 64.}$

En general, se exige que la base del logaritmo sea positiva.

<u>Caso 4</u> **(Restricción respecto a su argumento)**

Sea $\boldsymbol{Log_5\, x = y}$, por definición tenemos $\boldsymbol{Log_5\, x = y \Leftrightarrow 5^{\,y} = x}$

Se sabe que, para todo número real y, $5^{\,y} > 0$

Por lo tanto, necesariamente $\boldsymbol{x} > 0$

En general, se exige que el argumento del logaritmo sea mayor que 0.

Analiza la siguiente información y luego resuelve los ejercicios propuestos:

Observando la definición de logaritmo, podemos darnos cuenta que para encontrar el valor de un logaritmo este se puede expresar en forma de una ecuación exponencial, para luego proceder a resolverlo utilizando potencias. Veamos los siguientes ejemplos

Ejemplo 1: Calcular $\boldsymbol{Log_5 125 = x}$

Expresándolo exponencialmente tenemos lo siguiente: $5^x = 125$

Pero sabemos que 125 corresponde a 5^3, por lo tanto la expresión anterior equivale a resolver $5^x = 5^3$ ($En\ una\ ecuacion\ exponencial\ es\ necesario\ igualar\ las\ bases\ de\ las\ potencias$), donde finalmente se concluye que $x = 3$, Luego $Log_5 125 = 3$

Ejemplo 2: Calcular $\boldsymbol{Log_4 \sqrt[3]{16}}$

Por definición $\boldsymbol{Log_4 \sqrt[3]{16} = x \iff 4^x = \sqrt[3]{16}}$

// Toda raíz se puede expresar como potencia de la siguiente forma $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$//

$$\boldsymbol{4^x = \sqrt[3]{16}}$$

$$\boldsymbol{4^x = 16^{\frac{1}{3}}}$$

// En una ecuación exponencial se trata de conseguir la misma base a ambos lados de la igualdad. Una vez conseguido esto, se igualan los exponentes dando lugar a una ecuación algebraica//

$$\boldsymbol{4^x = \left(4^2\right)^{\frac{1}{3}}}$$

// Por propiedad de potencia "potencia de una potencia", se multiplican los exponentes//

$$\boldsymbol{4^x = 4^{2 \cdot \frac{1}{3}}}$$

$$\boldsymbol{4^x = 4^{\frac{2}{3}}}$$

Luego al igualar los exponentes tenemos que $\boldsymbol{x = \frac{2}{3}}$

Ejemplo 3: Calcular $\boldsymbol{Log_{0,25} \frac{1}{16}}$

Por definición $\boldsymbol{Log_{0,25} \frac{1}{16} = x \iff 0,25^x = \frac{1}{16}}$

Se tiene que $\boldsymbol{0,25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}}$

Luego: $\boldsymbol{0,25^x = \frac{1}{16}}$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^x = \frac{1}{16}$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^x = \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

Por lo tanto $\boldsymbol{x = 2}$

<u>Actividad 4</u>: Calcula el valor de los siguientes logaritmos utilizando la definición.

A) $Log_7 49 =$

B) $Log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8} =$

C) $Log_{\frac{3}{2}} \frac{9}{4} =.$

D) $Log_{\frac{2}{5}} \frac{25}{4} =$

E) $Log_3 \frac{1}{9} =$

F) $Log\ _7\sqrt{7} =$

G) $Log_5 \sqrt[3]{5} =$

<u>Actividad 5</u>: Exprese x en forma de logaritmo en cada igualdad siguiente:

A) $4^x = 1$

B) $14^x = 17$

C) $a^x = m \cdot n$

D) $q^x = \sqrt{a+b}$

<u>Actividad 6:</u> Analiza la siguiente tabla, complétala y responde las siguientes preguntas:

$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{Log_a a}$	$\boldsymbol{Log_a 1}$	$\boldsymbol{Log_a a^n}$
$\boldsymbol{\frac{7}{8}}$			
12,6			

13	**1**	**0**	$\boldsymbol{n}$

1) Si el valor de $\boldsymbol{a}$ aumenta, ¿Qué ocurre con los valores de cada columna?
2) Discute con tu compañero: ¿Cuál es el valor de $\boldsymbol{Log_1 1}$?

Actividad 7: Utilizando la información entregada en la definición de logaritmo demuestra lo siguiente:

- Si $a \in$ R$^+$ - $\{1\}$, entonces $Log_a a = 1$

- Si $a \in$ R$^+$ - $\{1\}$, entonces $Log_a 1 = 0$

- Si $a \in$ R$^+$ - $\{1\}$, entonces $Log_a a^n = n$

Luego el profesor presenta a los alumnos las siguientes propiedades:

Si $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ $\in$ R$^+$ con $\boldsymbol{a} \neq$ 1, se cumplen las siguientes propiedades

i) $\boldsymbol{Log_a a = 1}$

ii) $\boldsymbol{Log_a 1 = 0}$

iii) $\boldsymbol{Log_a a^n = n}$

Actividad 8: Resuelve los siguientes logaritmos aplicando propiedades.

A) $Log_9 9^{\frac{2}{3}} =$

B) $Log_{0,45}\, 0,45 =$

C) $Log_{\,167}\, 1 =$

D) $Log_{0,5} \frac{1}{2} =$

Actividad 9: Calcula el valor de los siguientes logaritmos, aplicando la definición.

A) $Log_{16}32 =$

B) $Log_{\frac{1}{3}}\,81 =$

C) $Log_{0,01}\,0{,}0001 =$

D) $Log_{\frac{2}{3}}\frac{243}{32} =$

<u>Actividad 10:</u> Calcula con tu compañero las bases de los siguientes logaritmos.

A) $Log_{\,x}\,8 = \frac{3}{4}$

B) $Log_{\,x}\,27 = \frac{3}{5}$

C) $Log_{\,x}\,243 = \frac{5}{2}$

Luego de que los alumnos hayan realizado las actividades propuestas, se entrega la definición de logaritmo en $\boldsymbol{base}\ \mathbf{10}$ y en logaritmo en base $\boldsymbol{e}$.

Se llama **logaritmo común** a aquel cuya base es 10. El logaritmo de la forma $\boldsymbol{Log_{10}\,a}$ se expresa como $\boldsymbol{Log\ a}$, es decir:

$$\boldsymbol{Log_{10}\,a = Log\ a}$$

Se llama **Logaritmo natural** a aquel cuya base es $\boldsymbol{e}$ ($\boldsymbol{e} = \mathbf{2{,}71828182}\ldots$). El logaritmo de la forma $\boldsymbol{Log_{e}a}$ se expresa como $\boldsymbol{Ln\ a}$, es decir:

$\boldsymbol{Log_{e}a\ = Ln\ a}$

Observación: En las calculadoras existen las teclas $\boldsymbol{Log}$, que indica el log en base 10, y $\boldsymbol{Ln}$, que indica el logaritmo en base $\boldsymbol{e}$.

Si se quiere calcular por ejemplo Log 7 , utilizando la calculadora, se presiona log, se digita 5 y finalmente se presiona enter o $=$.

Para calcular Logaritmos naturales, se utiliza la tecla $\boldsymbol{Ln}$.

Actividad 11: Usando una calculadora científica determina el número cuyo logaritmo decimal es: (Representa cada logaritmo y comprueba tus resultados.)

- **A)** 0,2
- **B)** 1,2
- **C)** 2,2
- **D)** 3,2

A continuación el profesor analiza el cumplimiento de la propiedad logaritmo de una potencia de la siguiente manera:

Se tiene:

$\boldsymbol{Log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b}$

Elevando a un número $\boldsymbol{x}$ la segunda igualdad, se obtiene:

$$\boldsymbol{(a^c)^x = b^x}$$
$$\boldsymbol{a^{c\cdot x} = b^x}$$

Luego por definición

$\boldsymbol{a^{c\cdot x} = b^x \Leftrightarrow Log_a b^x = c \cdot x}$

Por lo tanto, como $\boldsymbol{c = Log_a b}$, se tiene que:

$$\boldsymbol{Log_a b^x = x \cdot Log_a b}$$

Es, decir, el logaritmo de una potencia de un número es igual al producto entre el exponente de la potencia y el logaritmo del número.

Actividad 12: Junto con tu compañero de puesto, analiza y demuestra la siguiente proposición :

$Si\ \boldsymbol{a} \in R^+ - \{1\}, \boldsymbol{con\ a \neq 1}$ **y n** $\in \boldsymbol{N}$**, entonces** $\boldsymbol{Log_a \sqrt[n]{b} = \frac{Log_a b}{n}}$

Luego el profesor después de las anteriores demostraciones formaliza las siguientes propiedades:

$\boldsymbol{Si\ a \in R^+ - \{1\}, con\ a \neq 1}$ y $\boldsymbol{n \in N, se\ cumplen\ las\ siguientes\ propiedades}$

i) $\boldsymbol{Log_a b^x = x \cdot Log_a b}$

ii) $\boldsymbol{Log_a \sqrt[n]{b} = \frac{Log_a b}{n}}$

Ejemplo 1:

$\boldsymbol{Log_3\, 9^2 = 2\ \cdot Log_3 9}$

$$Log_3 81 = 2 \cdot\ Log_3 9$$

$$4 = 2 \cdot 2$$

$$4 = 4$$

Ejemplo 2:

$\boldsymbol{Log \sqrt[5]{1000} = \frac{Log\ 1000}{5}}$

$$Log 1000^{\frac{1}{5}} = \frac{Log\ 1000}{5}$$

$$Log\ (10^3)^{\frac{1}{5}} = \frac{3}{5}$$

$$Log\ 10^{\frac{3}{5}} = \frac{3}{5}$$

// Por propiedad "Logaritmo de una potencia de la base"//

$\boldsymbol{\frac{3}{5} = \frac{3}{5}}$

<u>Actividad 13:</u> Resuelve los siguientes ejercicios aplicando las propiedades vistas hasta el momento

A) $Log_3\ 27^5 + Log_4 4 + Log_8 1 =$

B) $Log_6 \sqrt{216} - \ Log_6 216 =$

C) $Log\ 0{,}0001 + Log\ 10000 =$

D) $Log_{\frac{1}{3}} 81 - \ Log_{\frac{1}{2}} 256 + \ Log_2\ 512 =$

E) $Log_7 \sqrt[5]{9^2} + \ Log_7\ \sqrt[5]{9^3} =$

F) $Log_{27} \sqrt{3} + \ Log_3 \sqrt{27} =$

A continuación, se analizará la propiedad logaritmo de un producto y su operatoria:

Sean:

$\boldsymbol{Log_a b = x \ \Leftrightarrow\ \ a^x = b}$ $\qquad\qquad$ $\boldsymbol{Log_a c = y\ \Leftrightarrow\ a^y\ = c}$

Entonces:

$$b \cdot c = a^x \cdot a^y$$

Por propiedad "Multiplicación de potencias de igual base"

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

Por lo tanto:

$$\boldsymbol{Log_a(b \cdot c)} = Log_a\,(a^{x+y}) = \boldsymbol{x + y}$$

Luego:

$$\boldsymbol{Log_a(b \cdot c) = Log_a b + Log_a c}$$

El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores

Ejemplo1:

$$\boldsymbol{Log_3\, 9\ \cdot 3 = Log_3 9 + Log_3 3}$$
$$\boldsymbol{= 2 + 1}$$
$$\boldsymbol{= 3}$$

En efecto $\boldsymbol{Log_3\, 9\ \cdot 3 = Log_3\, 27 = 3}$

Ejemplo 2:

Si $Log_4 64 = 3\ \ y\ \ Log_4\, 16$, calcula $\boldsymbol{Log_4 1024}$.

$$\boldsymbol{Log_4 1024} = Log_4(64 \cdot 16)$$
$$Log_4(64 \cdot 16) = Log_4 64 + Log_4 16$$
$$= 3 + 2$$
$$= 5$$

Ejemplo 3:

La siguiente expresión, aplicando la propiedad, es representada como un solo logaritmo.

$Log_m a + Log_m\, b + Log_m\, c = Log_m\, a \cdot b \cdot c$

<u>Actividad 14:</u>

Discute con tu compañero si se cumplen las siguientes situaciones:

A) $Log_5\,(25+5) = Log_5 25 + Log_5\,5$
B) $Log_2(16\ \cdot 4) = Log_2 16\ \cdot\ Log_2\,4$
C) $Log\,(1000+100) = Log\,1000\ \cdot Log\,100$
D) $Log_6 216\ \cdot\ Log_3\,81 = Log_6\,216 + Log_3\,81$

Justifica en cada caso.

Actividad 15:

Aplicando la propiedad reduce cada una de las siguientes expresiones a un solo logaritmo y simplifica cuando sea posible.

A) $Log_3\,a^3 + Log_3\,b^5 + Log_3\,a^2 + Log_3\,c$
B) $Log_a\,\frac{2}{3} + Log_a\,30 + Log_3\,8$
C) $Log_a\,(x^2+3x+2) + Log_a\left(\frac{1}{x+1}\right) + Log_a\,(x+2)^{-1}$
D) $Log_3\left(9+\sqrt{27}\right) + Log_3\left(9-\sqrt{27}\right)$
E) $Log_c(a+b) + 2\,Log_c\,(b+a)$

Después de que el docente realiza la respectiva corrección de los ejercicios, a continuación se analiza la propiedad logaritmo de un cociente y su operatoria:

Sean:

$Log_b\,a = x \Leftrightarrow b^x = a$ $\qquad\qquad$ $Log_b\,c = y \Leftrightarrow b^y = c$

Entonces:

$$\boldsymbol{\frac{a}{c} = \frac{b^x}{b^y} = b^{\,x-y}}$$

Por propiedad "División de potencias de igual base" tenemos

$$\boldsymbol{\frac{b^x}{b^y} = b^{\,x-y}}$$

Por lo tanto:

$$Log_{\,b}\left(\frac{a}{c}\right) = Log_b\left(b^{x-y}\right) = x-y$$

Luego:

$$\boldsymbol{Log_b\left(\frac{a}{c}\right) = Log_b a - Log_b c}$$

El logaritmo de un cociente es igual a la diferencia entre el logaritmo del dividendo y el logaritmo del divisor.

Ejemplo 1: Desarrollo del siguiente logaritmo utilizando la propiedad.

$$\boldsymbol{Log_5 \frac{125}{25} = Log_5 125 - Log_5 25}$$

$$\boldsymbol{= 3 - 2}$$

$$\boldsymbol{= 1}$$

En efecto, $\boldsymbol{Log_5\left(\frac{125}{25}\right) = Log_5 5 = 1}$

Ejemplo 2: Desarrollo del siguiente logaritmo utilizando la propiedad.

$$Log_a\left(\frac{c^3 \cdot b}{n^2}\right) = Log_a\,(c^3 \cdot b) - Log_a\,n^2$$

$$= Log_a\,c^3 + Log_a b - Log_a\,n^2$$

<u>**Actividad 16**</u>: Analiza y discute con tu compañero, si se cumplen las siguientes situaciones

- **A)** $\frac{Log_3 81}{Log_3 27} = Log_3 81 - Log_3 27$
- **B)** $Log_2(16-8) = Log_2\left(\frac{16}{8}\right)$
- **C)** $Log_7\left(\frac{49}{7}\right) = \frac{Log_7 49}{Log_7 7}$

Justifica en cada caso

<u>**Actividad 17:**</u> Aplicando las propiedades desarrolla los siguientes logaritmos:

- **A)** $Log\left(\frac{b\sqrt{c}}{a}\right)^4$
- **B)** $Log\left(\frac{a^2\sqrt{b}}{\sqrt{c}}\right)^3$

C) $Log\sqrt{\frac{a^3\sqrt{b}}{c^3\sqrt{a^3}}}$

<u>Actividad 18:</u> Aplicando las propiedades, reduzca las siguientes expresiones

A) $\frac{1}{2}\ Log\ a + \frac{3}{2}\ Log\ b - \frac{1}{2}\ Log\ c - \frac{1}{2}\ Log\ d$

B) $Log\ n + 3\ Log\ p - Lg\ n - Log\ (a+b)$

C) $5\left(Log\ a - \left(3\ Log\ b^2 + \frac{3}{7}\ Log\ c\right)\right)$

El profesor explica que las calculadoras solo permiten calcular logaritmos en base 10 y e. Por lo tanto para calcular logaritmos en otra base, se utiliza la propiedad "Cambio de base"

Demostración:

Sea $\quad \boldsymbol{Log_a b = x} \quad$ se tiene $\quad \boldsymbol{a^x = b \ \ /Log_c}$

$$Log_c a^x = Log_c\ b$$

Por propiedad "Logaritmo de una potencia"

$$x\ Log_c a^x = Log_c\ b$$

$$\boldsymbol{x = \frac{Log_c\ b}{Log_c a}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{Log_a b = \frac{Log_c\ b}{Log_c a}}}$$

Observación: Entonces basta calcular con $\boldsymbol{c = 10}$ o $\boldsymbol{c = e}$ para determinar el valor pedido utilizando la calculadora.

Ejemplo1: (Cambio de base, a base 2)

$$\boldsymbol{Log_4 16 = \frac{Log_2 16}{Log_2 4} = \frac{4}{2} = 2}$$

Ejemplo 2: Hacer el cálculo de $\boldsymbol{Log_3 7}$ no es exacto, por lo tanto es necesario ocupar calculadora, pero antes se debe hacer el respectivo cambio de base ($base$ 10 o $base$ e)

A) $\boldsymbol{Log_3 7 = \frac{Log 7}{Log\ 3} \approx \frac{0{,}845}{0{,}477} \approx 1{,}77}$

B) $Log_3 7 = \frac{Ln\,7}{Ln\;3} \approx \frac{1{,}946}{1{,}099} \approx 1{,}77$

<u>Actividad 19</u>: Encuentre usando la calculadora:

A) El logaritmo en base 3 de 4,6,8,10

B) El logaritmo en base $\frac{1}{3}$ de 4,6,8,10

¿Qué relación existe entre los resultados?

<u>Actividad 20 :</u> Aplicando las propiedades calcula el valor de las siguientes expresiones

A) $Log_3 8 - Log_5 2$

B) $\frac{Log_7\left(\frac{1}{49}\right) + Log_5 125}{Log_5 3}$

C) $\frac{Log_8 \sqrt[3]{\frac{1}{4}}}{Log_9 27 + Log_9 3 + Log_6 1}$

D) $3Log_a a + Log_a a^2 + Log_a a^{-5}$

E) Sabiendo que $Log 5 \approx 0{,}7$, calcula $Log\,125 + Log\,25 - Log\,1000$