



**FACULTAD DE CIENCIAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA**

**Propuesta de Enseñanza para el estudio de la
composición de funciones en estudiantes de primer
año medio**

**MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE PROFESOR
DE ENSEÑANZA MEDIA EN MATEMÁTICA CON
MENCIÓN EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA Y AL
GRADO DE LICENCIADO EN EDUCACIÓN**

Autor: Diego Alejandro Araya Faúndez

Profesora Guía: María Inés Pezoa Reyes

Valparaíso 2017

AGRADECIMIENTOS

Al finalizar esta etapa de mi formación profesional, es preciso recordar y agradecer a todas las personas que hicieron posible este sueño que parecía tan distante.

En primer lugar a mi madre Carolina, que en su incansable labor, enfrente la adversidad y con mucho sacrificio nos llevo junto a mi hermano por el camino del amor, el respeto y la honestidad para hacer de nosotros personas de bien.

A mi pareja Jennifer, quien me ha acompañado y ha sido soporte fundamental en este proceso; Con su amor, comprensión, apoyo incondicional y con quien espero concretar todos mis proyectos de vida en el futuro.

A mi abuela "Mama Rosa", a quien con mucha pena no pude mostrar mis logros, pero sé que desde el cielo se alegra por estar alcanzando mis metas.

A mi familia, por su afecto, preocupación y apoyo en los momentos difíciles.

Finalmente a mi "padre" Tomás Esparza, que de no ser por sus sabios consejos y esas extensas charlas en el Instituto Politécnico, no estaría redactando ni expresando estas palabras.

Diego Araya Faúndez.

<i>Introducción</i>	1
<i>Capítulo 1:</i>	4
1 <i>Antecedentes, Problemática y Objetivos</i>	4
1.1 <i>¿Por qué estudiar la composición de funciones?</i>	4
1.2 <i>Problemática</i>	4
1.3 <i>Objetivos</i>	7
1.3.1 <i>Objetivo General</i>	7
1.3.2 <i>Objetivos Específicos</i>	7
<i>Capítulo 2:</i>	8
2 <i>Marco Teórico Y Metodológico</i>	8
2.1 <i>Análisis Didáctico</i>	8
2.2 <i>Teoría de Situaciones Didácticas</i>	10
2.2.1 <i>Situación Didáctica</i>	11
2.2.2 <i>Contrato Didáctico</i>	11
2.2.3 <i>Efectos y Fenómenos</i>	11
2.2.4 <i>Devolución</i>	12
2.2.5 <i>Fases de una Situación Didáctica</i>	12
2.3 <i>Marco Metodológico</i>	13
2.3.1 <i>Tipo de Investigación</i>	13
2.3.2 <i>Contexto y Sujeto de Estudio</i>	14
2.3.3 <i>Instrumentos para la recogida de datos</i>	14
2.3.4 <i>Levantamiento de categorías de análisis</i>	15
<i>Capítulo 3:</i>	16
3 <i>Análisis Conceptual</i>	16
3.1 <i>Antecedentes Epistemológicos</i>	16
3.2 <i>Red de contenidos y definiciones</i>	19
3.2.1 <i>Definiciones</i>	20
<i>Capítulo 4:</i>	43
4 <i>Análisis de Contenido</i>	43
4.1 <i>Composición de Funciones Definición Experta</i>	43
4.2 <i>Composición de Funciones Definición Escolar</i>	43
4.3 <i>Distancia Entre Saberes</i>	47
4.4 <i>Análisis Fenomenológico</i>	48
4.5 <i>Registros de Representación</i>	49

4.5.1 Registro en Lenguaje Verbal:	49
4.5.2 Registro en Lenguaje Analítico:	49
4.5.3 Registro Gráfico:	50
4.5.4 Registro Tabular:	50
4.5.5 Registro Figural:.....	50
<i>Capítulo 5:</i>	52
<i>5 Análisis Cognitivo</i>	52
<i>5.1 Expectativas de Aprendizaje Programa de Estudio</i>	52
5.1.1 Objetivos Fundamentales.....	52
5.1.2 Conocimientos Mínimos Obligatorios (CMO).....	52
<i>5.2 Limitaciones del Aprendizaje</i>	53
<i>5.3 Oportunidades de Aprendizaje</i>	53
<i>Capítulo 6:</i>	55
<i>6 Análisis de instrucción</i>	55
<i>6.1 Cuestionario Exploratorio (Actividad 1)</i>	55
6.1.1 Descripción de la Actividad.....	56
6.1.2 Resultados de la aplicación	58
6.1.3 Dificultades y Errores.....	63
6.2 Diseño de Clase.....	64
6.2.1Diseño de Clase1 Pokémon Go (Actividad 2).....	65
6.2.1.1 <i>Plan de Clases 1</i>	67
6.2.1.2 <i>Oportunidades de aprendizaje</i>	70
6.2.2 Diseño de Clase 3 Intercambio Pokémon (Actividad 3).....	72
6.2.2.1 <i>Plan de Clases 2</i>	73
6.2.2.2 <i>Oportunidades de aprendizaje</i>	75
<i>Capítulo 7:</i>	77
<i>7 Análisis de Actuación</i>	77
<i>7.1 Implementación de Clase 1</i>	77
7.1.1 Percepción del docente que implementa la clase.....	77
7.1.2 Contraste de implementación 1 y planificación de la clase	78
7.1.3 Análisis de las producciones de los estudiantes (Implementación 1).....	78
7.1.4 Reformulación diseño de clase 1	82
7.1.5 Reformulación de tareas	83
<i>7.2 Implementación de Clase 2</i>	83

7.2.1 Percepción del docente que implementa la clase	83
7.2.2 Contraste de implementación 2 y planificación de la clase	83
7.2.3 Análisis de las producciones de los estudiantes (Implementación 2)	84
7.2.4 Reformulación diseño de clase 2	88
<i>Capítulo 8:</i>	89
<i>8 Conclusiones</i>	89
<i>Bibliografía</i>	92

Introducción

Actualmente en las bases curriculares (MINEDUC, 2015), se declara la importancia de que los estudiantes perciban la matemática en su entorno y que incorporen el conocimiento matemático con otros tipos de conocimientos, de modo de poder extraer conclusiones y enfrentar situaciones cotidianas. Sin embargo de acuerdo a lo observado en nuestras prácticas y la experiencia como docente en aula, la enseñanza de la matemática privilegia la cobertura curricular y se orienta de acuerdo a lineamientos de pruebas estandarizadas SIMCE y PSU.

En este sentido, abordamos la problemática del estudio de la composición de funciones a nivel escolar (Primer año de enseñanza media) ya que hemos observado que se privilegia un tratamiento procedimental, es decir, se realizan manipulaciones y operaciones algebraicas sin considerar los conocimientos previos y el significado que asignan los estudiantes a este contenido.

Considerando que nuestro objetivo es elaborar una propuesta de enseñanza para introducir el concepto de Composición de Funciones, hemos estructurado este trabajo en la línea del Análisis Didáctico (Rico, 2013), que organiza el saber desde los ámbitos disciplinar y de la enseñanza orientando el diseño e implementación. Este análisis está constituido por cinco unidades de estudio, que a su vez son las que estructuran el contenido de este trabajo, estas son: análisis conceptual, análisis de contenido, análisis cognitivo, análisis de instrucción y análisis de actuación.

La organización del trabajo sigue la siguiente estructura:

Capítulo 1. Se presentan antecedentes que describen la problemática, apoyados en documentos oficiales del marco curricular vigente (MINEDUC, 2015) que abordan el estudio de la enseñanza y aprendizaje de la Composición de funciones. Finalmente se establecen objetivo general y específicos.

Capítulo 2. Se desarrolla el marco teórico y metodológico utilizado en esta investigación, se considera el análisis didáctico como eje central y la teoría de situaciones didácticas. Conjuntamente se expone el tipo de investigación que tiene carácter descriptivo.

Capítulo 3. Se presenta un análisis conceptual de los antecedentes epistemológicos del concepto de función y sus contenidos asociados. Este análisis nos permite evidenciar como los conceptos de función y composición de estas, son utilizados para modelar situaciones cotidianas y de problemas más complejos. De este modo podemos destacar que la composición de funciones es un contenido aplicable a situaciones en niveles educativos posteriores al de enseñanza media, por lo que se hace relevante que los estudiantes asimilen correctamente las ideas de función y posteriormente de composición.

Capítulo 4. Se desarrolla el análisis de contenido, la definición de la operación de “Composición de Funciones” y luego se realiza un análisis fenomenológico el cual destaca la importancia de esta operación y de las aplicaciones que tiene en ámbitos escolares y sociales de las personas.

Capítulo 5. Se realiza un análisis cognitivo del programa de estudio de primer año medio del ministerio de educación, que se mantiene vigente desde al año 2011 hasta 2016. Este análisis nos permitirá observar cual es la intención del programa de estudio respecto del contenido de composición de funciones, así como también apreciar la estructura con la que se pretende abordar dicho contenido.

Capítulo 6. Se presenta el análisis de Instrucción, en el cual se describen las actividades aplicadas: cuestionario exploratorio del concepto de función y gráfica de funciones a través del plano cartesiano para abordar conceptos función lineal y afín en el juego virtual Pokémon Go y la composición de funciones en intercambio de Pokémon en el mismo juego. Las dos últimas actividades se consideran didácticas ya que tienen como objetivo hacer que la enseñanza de un contenido sea más eficaz, además favorece la interacción de

la triada educativa. Esto último se debe a que el contenido que se desea enseñar se trabaja a partir de situaciones que son atractivas para los estudiantes, lo que genera una motivación extrínseca por aprender, además permite al docente interactuar con los estudiantes acerca de las estrategias propuestas por ellos y dirigir sus procedimientos realizando comentarios que les permitan resolver correctamente los problemas propuestos. Conjuntamente se muestran evidencias y se levantan las categorías de las respuestas y se plantea el diseño y plan de clase. (Análisis a priori)

Capítulo 7. Se evidencia el análisis de actuación, en el cual se analizan las respuestas de los estudiantes (análisis a posteriori), contractando la planificación de las actividades.

Capítulo 8. Se abordan los resultados obtenidos de acuerdo a los objetivos planteados en esta investigación.

Capítulo 1:

1 Antecedentes, Problemática y Objetivos

1.1 ¿Por qué estudiar la composición de funciones?

Desde los primeros niveles educativos los estudiantes se relacionan con el concepto de función y composición de funciones a través de la proporcionalidad directa, indirecta o inversa hasta llegar a la proporcionalidad compuesta, la reflexión, traslación y rotación de objetos en el plano, todo esto relacionado directamente con álgebra.

Desde el currículum, de acuerdo a lo planteado en los planes y programas de primero medio Mineduc (2011), su eje principal es que permite que los estudiantes desarrollen el pensamiento matemático y puedan modelar y resolver distintas situaciones, ya sean concretas o abstractas. Potenciar los niveles de representación natural, algebraico, gráfico y simbólico así como también a realizar transformaciones de un sistema de representación a otro. Además, el aprendizaje de álgebra y funciones se relaciona fuertemente con números y geometría por lo que si se realiza un trabajo idóneo con este eje temático, permitirá que los estudiantes comprendan nuevos conceptos en los años posteriores en los futuros niveles educativos.

1.2 Problemática

La composición de funciones es un contenido que se encuentra en el marco curricular y los programas de estudio de primer año medio. El programa de Matemática está constituido por cuatro unidades, la unidad 1 es Números, la unidad 2 Álgebra, la unidad 3 Geometría y la unidad 4 Datos y Azar. La composición de funciones está inmersa dentro de la unidad de Álgebra a continuación del estudio de las funciones lineal y afín conectando además con la unidad 3 de Geometría a través de la mirada de transformaciones isométricas y composiciones de estas. Finalmente establece el concepto de congruencia de figuras plana a través de transformaciones isométricas y composiciones de estas.

En resumen se puede apreciar que el contenido de composición de funciones es transversal a la unidad de algebra y geometría por lo que se hace primordial la elaboración de una propuesta que permita a los estudiantes comprender en forma clara este contenido tan importante.

Cuando se trata de hablar de composición de funciones, la manera más práctica de hacerlo para los estudiantes es llevándolo a situaciones concretas en la que se pueda plantear acciones sucesivas y dependientes cada una de la anterior. Para esto desde el punto de vista geométrico las transformaciones isométricas son muy eficaces; ya que a través de traslaciones, rotaciones y simetrías consecutivas se puede estudiar de manera empírica. Al realizar este proceso los estudiantes pueden establecer secuencias o patrones potenciando el razonamiento lógico-matemático, aplicar nociones espaciales tales como distancia, ubicación, dirección y secuencia temporal. Según la mirada de Brousseau en (Fregona, 2007), el aprendizaje a través de situaciones didácticas consiste en modelar el aprendizaje a través de la recreación de acontecimientos que sean del interés de los educandos, transformando esta experiencia educativa en algo atractivo y de su interés, lo que podemos asociar con aprendizaje significativo según Ausubel en (Martinez, 2008).

Desde la experiencia vivida al interior de las aulas, se puede apreciar que el programa de estudios de matemática posee denso contenido, considerando factores tan importantes como el correcto dominio de contenidos de enseñanza básica, la transición que sufren los estudiantes en el paso de este nivel al nivel medio, además de aspectos biológicos, cognitivos motivacionales y emocionales, influyen fuertemente en la adquisición de los contenidos que se desea trabajar con los estudiantes. Desde esta mirada se puede concluir que los factores que inciden en el desarrollo del programa de matemática de primero medio, específicamente el de composición de funciones, son múltiples y por tanto invita a proponer estrategias que nos permitan abordar el contenido de función y composición, apoyados en conocimientos previos que los estudiantes debieran tener bien adquiridos pero que sin embargo debido a todos los factores mencionados, lo han logrado medianamente o insatisfactoriamente.

De acuerdo a lo planteado es que el investigador se realiza la siguiente interrogante:

¿Cómo se desarrolla el proceso de enseñanza y aprendizaje de la composición de funciones por medio de una propuesta didáctica, en estudiantes de primero medio?

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo General

Estudiar cómo se desarrolla el proceso de enseñanza y aprendizaje de la composición de funciones en estudiantes de primero medio frente a una propuesta didáctica.

1.3.2 Objetivos Específicos

Describir los objetivos fundamentales, contenidos mínimos obligatorios, conocimientos previos y aprendizajes esperados; que se encuentran en los programas de estudio con respecto al eje temático de Álgebra, específicamente del contenido de composición de funciones.

Identificar y analizar los conocimientos adquiridos por los estudiantes en séptimo y octavo básico sobre funciones.

Elaborar y aplicar una propuesta de enseñanza aprendizaje para el estudio de la composición de funciones en estudiantes de primero medio.

Identificar los conocimientos adquiridos y las principales dificultades que presentan los estudiantes de primero medio a partir de la implementación de la propuesta de enseñanza de la composición de funciones.

Capítulo 2:

2 Marco Teórico Y Metodológico

En este segundo capítulo, luego de conocer la problemática con sus respectivos objetivos, presentamos el marco teórico y la metodología que se utilizará en este trabajo. En esta línea, se expondrán, en primera instancia el marco teórico que considera el Análisis Didáctico como eje orientador del estudio, junto a teorías referidas al aprendizaje. En cuanto a la metodología señalaremos el tipo de investigación que se llevará a cabo, el contexto de los sujetos de estudio a los cuales se les implementará el plan de acción y el detalle de los instrumentos que se aplicarán para la recogida de datos y cómo será el proceso de levantamiento de categorías de análisis.

2.1 Análisis Didáctico

El Análisis Didáctico, es un método de investigación utilizado en la Didáctica de la Matemática, basado en las nociones generales que ha tenido el concepto de análisis, en la filosofía y a lo largo de la historia. Rico (2013) expone que el Análisis Didáctico tiene como fin fundamentar, organizar y coordinar la planificación y posterior implementación de los procesos de enseñanza y aprendizaje en torno a un contenido matemático escolar específico, constituyendo *“un procedimiento con el que es posible explorar, profundizar y trabajar con los diferentes y múltiples significados del conocimiento matemático escolar, para efectos de diseñar, llevar a la práctica y evaluar actividades de enseñanza y aprendizaje”* (Gómez 2002, p. 252).

Este análisis está constituido por cinco unidades de estudio, que a su vez son las que estructuran el contenido de este trabajo, estas son: análisis conceptual, análisis de contenido, análisis cognitivo, análisis de instrucción y análisis de actuación.

El análisis conceptual entrega un conocimiento acabado de lo que se quiere investigar a partir de sus fundamentos, evolución histórica, nociones básicas, origen y desarrollo, preocupándose así *“por la naturaleza de las definiciones y del lenguaje; trata de encuadrar los términos y sus*

interconexiones (...) Examina cuidadosamente la diversidad de significados, las posibilidades de conexión entre los términos y los niveles subjetivos (creencias y concepciones) y objetivos (conceptos)” (Rico, 2001, p.186).

La segunda unidad de estudio, el análisis de contenido, busca reconocer, estudiar y dar sentido a los distintos significados del concepto en cuestión. Los diferentes significados de un término constituyen su categoría representacional, y comprenden las notaciones gráficas y simbólicas, así como también sus manifestaciones verbales. Este análisis también desarrolla una categoría fenomenológica, que consiste en describir los fenómenos en los que está involucrado el concepto y la relación existente entre ellos, *“los contextos en los que se utilizan y aquellas situaciones en las que se presentan y en las cuales se aplican” (Rico, 2013, p.18).*

En el análisis cognitivo, el docente, considerando los diferentes aspectos abordados en los dos análisis anteriormente descritos, define y detalla sus conjeturas sobre cómo los estudiantes podrán alcanzar y desarrollar una construcción del conocimiento a partir de las actividades y tareas de enseñanza y aprendizaje que enfrentarán, constituyendo así un análisis a priori. De esta forma, podrá predecir las actuaciones, dificultades y errores de los estudiantes al enfrentarse a las tareas, y así poder definir las oportunidades de aprendizaje que le permitirán superar aquellas dificultades y errores. El desarrollo de cada tarea involucra conceptos de la estructura matemática en la que se está trabajando, y que se ponen en juego a través de diferentes sistemas de representación.

La cuarta unidad de estudio es el análisis de instrucción y es donde el docente diseña la propuesta de aprendizaje que aplicará, identificando y describiendo las tareas de enseñanza y aprendizaje. Estas tareas han de considerar el contenido abordado en la estructura conceptual y los objetivos de aprendizaje propuestos, por lo tanto, considera un análisis de las dificultades, errores y obstáculos identificados en el análisis anterior, que le permita superarlos.

El último análisis es el de actuación, y es donde el profesor, basándose en la descripción de las actuaciones de los estudiantes, determina los conocimientos y aprendizajes que adquirieron por medio de la propuesta de enseñanza y aprendizaje. Además, señala las dificultades y obstáculos que presentaron, y si fueron o no superados. Por lo tanto, esta unidad de estudio constituye un análisis a posteriori (Gómez, 2002), donde el docente describe y determina las destrezas, habilidades, estrategias, razonamientos y errores que el estudiante realizó, contrastándolo con lo previsto en el análisis de instrucción, para así poder reformular la propuesta, mediante un nuevo ciclo de Análisis Didáctico.

Antes de dar paso a la primera etapa del Análisis Didáctico, se presenta un esquema (figura 1) en el que se refleja el carácter cíclico del cual se hizo alusión en el párrafo anterior.

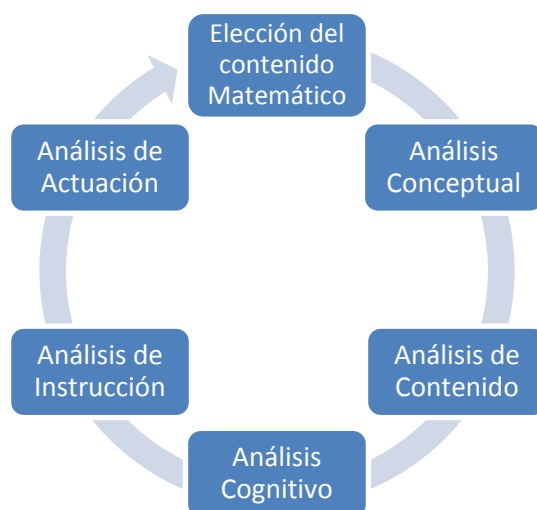


Figura 1: Esquema Análisis Didáctico. Fuente: Elaboración propia.

2.2 Teoría de Situaciones Didácticas

La Teoría de Situaciones Didácticas, creada por Guy Brousseau tiene por objetivo examinar y comprender las interacciones sociales entre alumnos, profesores y saberes matemáticos dadas en un medio escolar y que condicionan el qué y el cómo de lo que aprenden los alumnos, es decir, centra su atención en las condiciones para la enseñanza y aprendizaje de los saberes matemáticos (Brousseau, 1997).

A continuación, se explican los conceptos más relevantes de esta teoría.

2.2.1 Situación Didáctica

Brousseau (1997) habla de una situación como un modelo de interacción entre un sujeto y un determinado medio, que hace del conocimiento un recurso mediante el cual el individuo puede alcanzar un estado propicio. Una situación didáctica, es entonces, aquella creada intencionalmente por el docente, que permite al alumno adquirir e interiorizar un saber, y al mismo tiempo describe la actividad realizada por ambos actores. En otras palabras, es un conjunto de relaciones establecidas entre alumnos, profesor y un medio, con la finalidad de lograr que los estudiantes se apropien de un nuevo saber matemático, a través de *“problemas, elegidos de modo tal que el alumno pueda aceptarlos (...) que actúe, hable, reflexione y evolucione”* (Brousseau, 1997, p. 31).

Por contraparte una situación a-didáctica, es una interacción entre el alumno y el saber, que se lleva a cabo sin la intervención del docente.

2.2.2 Contrato Didáctico

Brousseau (1997) plantea que en toda situación didáctica deben repartirse las responsabilidades entre quien difunde el conocimiento y quien lo recibe. Se define el concepto de Contrato Didáctico, como el conjunto de reglas explícitas e implícitas dentro de la situación, en donde, *“cada uno, el maestro y el alumno, se hacen una idea de lo que el otro espera de él y de lo que cada uno piensa de lo que el otro piensa”* (Brousseau, 1997, p. 70).

Las actividades a realizar, los modos de trabajo y las expectativas por parte de los estudiantes hacia el docente y viceversa están considerados dentro del contrato didáctico.

2.2.3 Efectos y Fenómenos

Los efectos y fenómenos didácticos están directamente relacionados con las fallas y paradojas del contrato didáctico y ocurren durante el proceso que se establece en la situación didáctica. Uno de ellos es el efecto Topaze, que sucede cuando el profesor entrega la resolución del problema o pistas para esta; el efecto Jourdain, es cuando el docente indica correcto un procedimiento

que no lo está, instalándose un conocimiento errado. Por otra parte, si el profesor se centra en el método de resolución como objeto de estudio, en lugar del objeto a enseñar está incurriendo en un Deslizamiento Metacognitivo. Cuando el educador recurre a ejemplos análogos para explicar el objeto y el alumno no es capaz de explicarlo sin esas comparaciones, está cometiendo un Uso Abusivo de la Analogía. Finalmente, cuando el profesor cambia ciertos componentes de sus métodos de enseñanza, buscando renovarse de alguna manera, porque siente que los resultados disminuyen cada vez que se aplica la situación, ocasiona un Envejecimiento de las Situaciones de Enseñanza.

2.2.4 Devolución

En palabras simples, la devolución es la forma en que el profesor hace que el alumno acepte la responsabilidad de una situación de aprendizaje, generalmente mediante respuestas que induzcan a que el estudiante sea activo dentro de su aprendizaje. El docente debe poner en contacto al alumno con el medio, sin rechazar o aceptar ideas que él todavía no haya corroborado o justificado por sí mismo.

2.2.5 Fases de una Situación Didáctica

2.2.5.1 Situación de Acción: En esta etapa se establece la primera interacción entre el estudiante y el medio. Al explorar la situación presentada, el alumno va recopilando información y buscando un método de resolución del problema que se le presenta. Sólo requiere el uso de conocimientos previos.

2.2.5.2 Situación de Formulación: El estudiante (o grupo de alumnos) genera hipótesis con base en sus ideas o creencias para encontrar una solución al problema, poniendo en juego las estrategias realizadas durante la fase anterior. En este momento, el alumno transmite dichas hipótesis e ideas a otro alumno (o grupo de alumnos), realizando una discusión, para finalmente consensuar una estrategia de resolución.

2.2.5.3 Situación de Validación: Las etapas anteriores derivan en un proceso de corrección y comprobación, con el fin de dar cierto grado de validez a los

conocimientos y estrategias empleadas. En este caso, el medio entrega información a los estudiantes, quienes intercambian las ideas descubiertas y llegan a un consenso de las afirmaciones que aceptan como verdaderas o falsas.

2.2.5.4 Institucionalización: A menudo se excluye la institucionalización como fase de la situación didáctica, ya que el aprendizaje se habría concretado en la fase anterior, sin embargo, es necesario formalizar este aprendizaje. Aquí, el principal actor es el docente y está a cargo de generalizar y descontextualizar los conocimientos adquiridos del caso particular, para una comprensión a nivel general por parte de los estudiantes. El profesor debe organizar y sistematizar los conocimientos, clarificar conceptos, aportar observaciones respecto a lo realizado por los estudiantes o agregar aspectos que ellos no discutieron y relacionar la producción de los estudiantes con el saber matemático.

2.3 Marco Metodológico

2.3.1 Tipo de Investigación

De acuerdo al objetivo propuesto, esta investigación será de carácter descriptivo, a decir de Hernández, Fernández y Baptista (2010), estos estudios “*pretenden medir o recoger información de manera independiente o conjunta sobre los conceptos o las variables a las que se refieren*” (p. 80). Lo anterior, se busca que sea “*con la mayor exactitud posible*” (Hernández, Fernández y Baptista, 2010, p. 82).

Además, el investigador en esta clase de estudio debe ser capaz de definir, o al menos visualizar, qué se medirá y cómo va a lograr esta medición, es decir, sobre qué o quienes se recolectarán los datos (Hernández et al., 2010).

En una investigación de corte descriptiva, Fernández (2006) estipula cuatro pasos que la constituyen como tal, estos son:

1. Obtener la información: hace referencia a los instrumentos para la recogida de información.

2. Capturar y ordenar la información: toda la información obtenida, debe ser transcrita en un formato legible.
3. Codificar la información: este paso indica que se deben realizar categorías de análisis, que concentren las ideas y conceptos claves que rigen a la investigación.
4. Integrar la información: relacionar las categorías obtenidas entre sí.

Para efectos de esta investigación, se interpretan los pasos que explica Fernández en función de responder a la problemática. A continuación se detallan el contexto y los instrumentos para la recogida de datos (1 y 2), posteriormente se muestra el levantamiento de las categorías de análisis (3).

2.3.2 Contexto y Sujeto de Estudio

Es preciso señalar, como estipulan Hernández et al. (2010), cómo se va a lograr la medición de esta investigación. En este sentido, el grupo de sujetos al cual se le presentó la propuesta didáctica, está constituido por estudiantes de primer año medio del Liceo de Constitución, ubicado en Freire #390, Constitución. Fueron 29 los individuos estudiados, cuyas edades fluctúan entre los 13 y 16 años.

El establecimiento educacional pertenece a la Dirección Municipal De Educación (DAEM), que depende de la Municipalidad De Constitución. Además es un establecimiento de enseñanza media científico-humanista, con jornada escolar completa (JEC)

En el siguiente apartado se precisan los instrumentos utilizados para la recogida de datos.

2.3.3 Instrumentos para la recogida de datos

Una vez seleccionado el tipo de investigación que se utilizará, que se rige bajo el paradigma cualitativo, y también el contexto del grupo de personas que son partícipes de este estudio, es preciso establecer cuáles serán los instrumentos para la recogida de los datos. Éstos serán:

1. Las tareas de clase, es decir, el material que se les facilitó a los alumnos para que lo trabajaran durante la sesión de clases.

Es a partir de este instrumento que se obtienen evidencias empíricas del trabajo de los sujetos de estudio.

2. Las evidencias escritas, tienen relación directa con las tareas de clase, porque en ellas los estudiantes plasmarán sus ideas y posibles estrategias de resolución al problema que se les planteará. Estas evidencias se encuentran en la sección de Anexos.

En el apartado siguiente, se describe el levantamiento de las categorías de análisis para este trabajo de investigación.

2.3.4 Levantamiento de categorías de análisis

Para analizar datos de tipo cualitativos, es necesario etiquetar la información, es decir, agrupar los datos obtenidos en categorías que concentren las ideas, conceptos o temas revelados por el investigador (Rubin y Rubin, 1995; Fernández, 2006).

El proceso de levantamiento de categorías de análisis, permite llevar a cabo comparaciones y contrastes, bajo una estructura organizada que posibilita establecer las ideas más importantes, los descubrimientos y las conclusiones.

Las categorías que se utilizarán en este estudio para examinar los datos obtenidos, se diseñarán a partir de las estrategias que realicen los sujetos de estudio, para dar respuesta a la problemática que conlleva el plan de acción. De este modo, se analizarán los aciertos y los errores que se constaten en cada categoría.

Capítulo 3:

3 Análisis Conceptual

El análisis conceptual utiliza la historicidad y dinamicidad de los términos para lograr una reflexión previa sobre lo que se desea investigar, delimitando y caracterizando los puntos claves del problema de estudio. En este sentido, comenzaremos con una revisión de aspectos epistemológicos del concepto función y luego continuaremos con la elaboración de una red de contenidos y definiciones asociadas a nuestro objeto de estudio “La Composición de Funciones”

3.1 Antecedentes Epistemológicos

Según lo señalado por Farfán & A. García (s.f.) en el artículo “El Concepto de Función: Un Breve Recorrido Epistemológico” el concepto de función es muy importante desde el punto de vista matemático, el cual ha sido empleado en muchos contextos a través del tiempo de la modelización de fenómenos existentes en nuestra realidad cotidiana. Al estudiar el concepto de función, se discute sobre situaciones, contextos y paradigmas que permitieron el origen de este objeto de estudio.

La idea de función no se construye rápidamente ya que es un concepto que ha venido elaborándose a través del tiempo por alrededor de dos mil años siendo consecuencia de muchos estudios partiendo por la idea de relación, avanzando hacia la modelización de situaciones naturales, hasta llegar a transformarse en un objeto matemático muy importante, tanto así que ha sido soporte fundamental para los estudios de la matemática moderna.

Los primeros acercamientos a la idea de función están relacionados con las culturas griega y babilónica; quienes formulan una idea remota del concepto de función. Los babilónicos realizaron estudios a través de regularidades en fenómenos naturales como el movimiento de los astros; posteriormente intentando aritmétizar y generalizar los resultados obtenidos. El movimiento por parte de los griegos fue considerado como algo externo a la

matemática, llevándolo al estudio de las proporciones y ecuaciones y no así a la idea de función.

En la edad media se evidencia un quiebre entre el álgebra y la trigonometría, tratándose como dos disciplinas con objetivos particulares. A partir de esta separación es que surge el concepto de modelización pues se intentaba dar explicación a los fenómenos naturales a través de procesos de abstracción, todo esto posteriormente, sería el precedente de lo que se formularía como noción de función.

De este modo en Inglaterra Heytesbury y Swineshead a través de la teoría de la intensidad de formas, da los primeros indicios del concepto de función, a través del álgebra de palabras; Por otro lado Oresme en Francia desde la geometría de gráficas. Manifestándose aquí por primera vez la noción de función.

En los siglos XV Y XVI no se avanza mucho en el concepto de función, sin embargo se establecen las bases de la simbología algebraica, en la cual se diferencia entre variable de una función e incógnita de una ecuación, estructurándose la noción de función. Así también la trigonometría comienza a estructurarse como una ciencia donde se obtiene las tablas de tangente y cotangente, surgiendo la idea de función trigonométrica.

En el siglo XVII, a partir del trabajo de Fermat y principalmente de Descartes, tras fusionar las concepciones griegas de número y magnitud, nace la geometría analítica. A partir de esto se origina el estudio de curvas y su descripción algebraica dando cabida al desarrollo de la teoría de funciones. Surge la noción de función y análisis, estudiado por Newton de dos maneras, el primero llamado el método de las primeras y últimas razones, de las cantidades que nacen y se desvanecen y el segundo a través del método de las fluxiones. Simultáneamente en Alemania, Leibniz a través del cálculo de los diferenciales.

El siglo XVIII, es un periodo muy importante para la matemática, donde se estudian fenómenos físicos por medio de un objeto matemático, ya no como una curva sino que como una función. Con Bernoulli y Euler la idea de

función es considerada una expresión analítica; Bernoulli impone la f para designar la característica de una función escribiéndola como « fx », la cual sería evolucionada por Euler escribiéndola como $f(x)$. Euler conjunta al cálculo diferencial de Leibniz con el método de fluxiones de Newton, de donde emerge el análisis matemático, disciplina que se encarga de estudiar los procesos infinitos.

Los avances realizados por Euler son el punto de inicio para posteriores trabajos realizados en el siglo XIX por Cauchy, (1827), Lobachevsky, (1834), Dirichlet, (1837), Riemann, (1858), quienes describían a la función con la particularidad de ser una correspondencia de tipo muy general. Cauchy, intenta más tarde definir de manera abstracta el concepto de función, saliendo del foco de relaciones geométricas y de curvas, las cuales habían sido el soporte del concepto de función.

En el siglo XX se intenta favorecer la definición del concepto de función con la descripción de fenómenos naturales, y por tanto la aplicación.

De acuerdo con lo expuesto en los párrafos anteriores, la definición de función y su aplicación en la modelización han sido muy importantes en el desarrollo de la matemática moderna, es por esto que nos apoyaremos del concepto de modelización para desarrollar la propuesta de enseñanza y aprendizaje de la composición de funciones.

3.2 Red de contenidos y definiciones

La siguiente red de contenidos organiza los saberes matemáticos asociados al estudio de la Composición de Funciones:

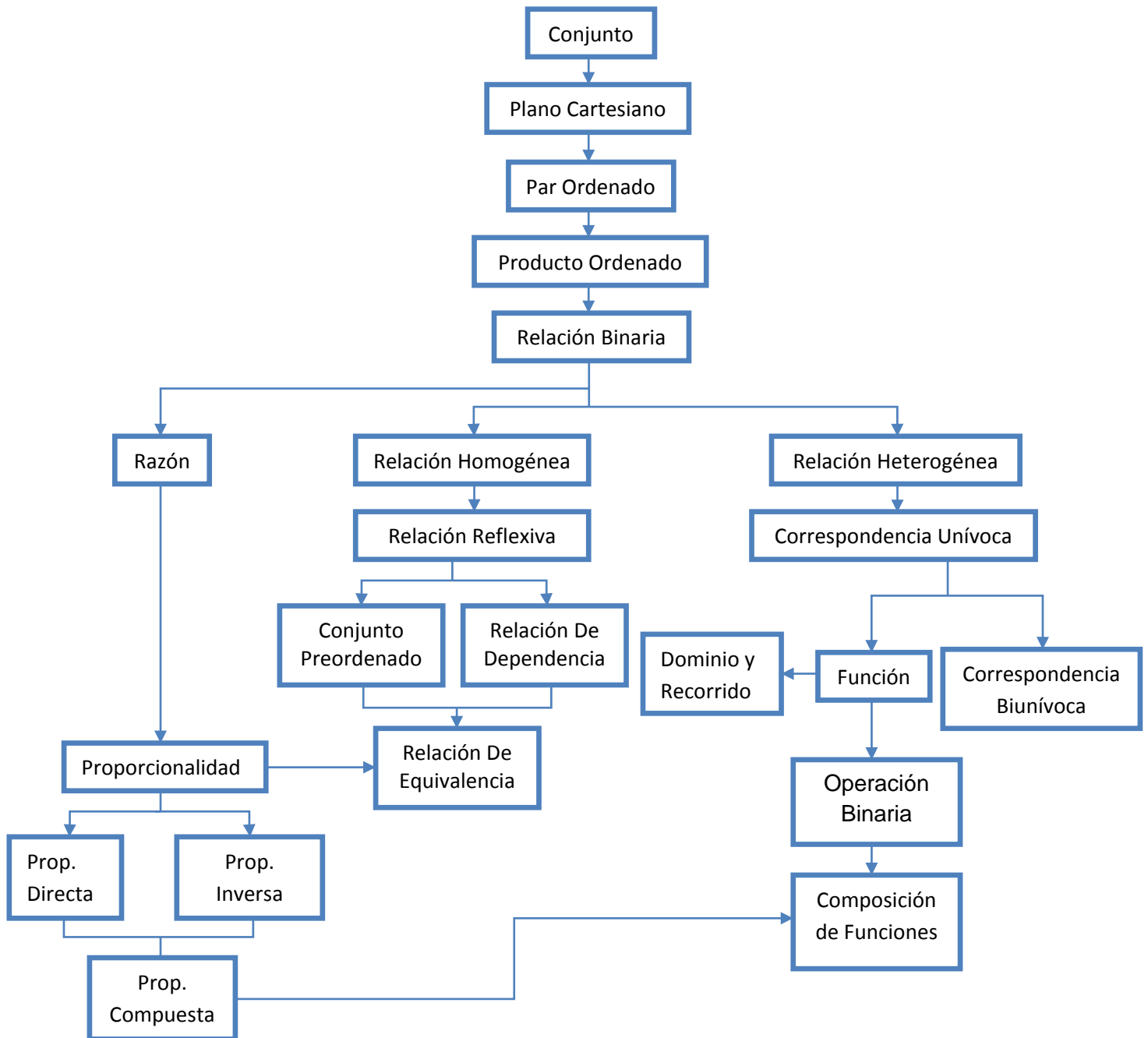


Figura 3. "Red de contenidos de Saberes Matemáticos"

3.2.1 Definiciones

Conjunto:

Intuitivamente, un conjunto es cualquier colección de objetos que pueda tratarse como una entidad. A cada objeto de la colección lo llamaremos elemento o miembro del conjunto. Es a partir de lo anterior que encontramos el primer acercamiento a este concepto en la denominada “Teoría ingenua de conjuntos” planteada por Cantor (Gonzales-Guzmán, 2002), dentro de esta teoría, si tenemos cierta cantidad finita de objetos que podemos identificar con algún rótulo, digamos, con letras de nuestro alfabeto: a, b, c, \dots, t entonces $\{a, b, c, \dots, t\}$ denota el conjunto de los objetos rotulados. Esta descripción, es sin embargo, completamente insuficiente si queremos trabajar con conjuntos infinitos, o incluso con conjuntos finitos donde la identificación de sus elementos es menos simple.

Debido a esto se introduce una notación más general, supongamos que disponemos de un conjunto de objetos al que llamaremos \mathcal{U} , sea P una cierta propiedad por ejemplo “ P : es un múltiplo de dos”. Denotaremos para $x \in \mathcal{U}$ como $P(x)$ cuando x cumpla o satisfaga la propiedad P , se denomina a $P(x)$ función proposicional, que se define como una función cuyas variables son proposiciones. Esto es, una afirmación expresada de manera que podría asumir los valores de verdad de falso o verdadero con la excepción de que existe alguna variable que no está definida o especificada y que por tanto no permite asignar un valor de verdad definido. Citando el ejemplo anterior para $x \in \mathcal{U}$ se denotara $P(x)$ a “ x es un múltiplo de dos”. Así $A = \{x \in \mathcal{U}: P(x)\}$ denotará a aquel conjunto de elementos de \mathcal{U} que satisfacen la propiedad P .

De aquí se introduce dos relaciones:

$x \in \mathcal{U}$: Relación de pertenencia: “ x es un elemento de \mathcal{U} ”

$A \subseteq \mathcal{U}$: Relación de subconjunto: “ A es subconjunto de \mathcal{U} ”

Aún más general, se define qué $A \subseteq B$ si y solo si $x \in A \Rightarrow x \in B$.

Dentro de la teoría ingenua de conjuntos se definen los siguientes axiomas y definiciones básicas:

❖ Axioma de extensión

Si todo elemento de A es un elemento de B y viceversa, entonces A es igual a B . Es decir $A = B \Leftrightarrow (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$.

❖ Axioma de comprensión

Si $P(x)$ es una función proposicional entonces existe el conjunto B de los elementos que verifican $P(x)$.

Esto es $\forall x \in \mathcal{U}, \exists B$ tal que $(x \in B \Leftrightarrow P(x))$.

❖ Unión de conjuntos

Si C es una colección de conjuntos, la unión de C , denotada por $\cup C$ es el conjunto cuyos elementos son los elementos de los elementos de C (valga la redundancia). Es decir, z es un elemento de $\cup C$ si y solo si z pertenece a alguno de los conjuntos de la colección C .

$$\cup C = \{z | \exists A (z \in A \vee A \in C)\}$$

En particular, la unión de dos conjuntos A, B , es decir $\cup \{A, B\}$, se denota $A \cup B$ y es el conjunto que contiene a todos los elementos de A y a todos los elementos de B .

$$A \cup B = \{x \in \mathcal{U} : x \in A \vee x \in B\}$$

❖ Intersección de conjuntos

Si C es una colección de conjuntos, la intersección de C , denotada por $\cap C$ es el conjunto cuyos elementos pertenecen a todos los elementos de C .

$$\cap C = \{z | \forall A (z \in A \wedge A \in C)\}$$

En particular, la intersección de dos conjuntos A, B , es decir $\cap \{A, B\}$ se denota $A \cap B$ y es el conjunto cuyos elementos pertenecen a A y B a la vez.

$$A \cap B = \{x \in \mathcal{U} : x \in A \wedge x \in B\}$$

- ❖ Conjunto vacío
Se define como el conjunto que no contiene ningún elemento y su notación es ϕ .
- ❖ Conjuntos disjuntos
Se dice que los conjuntos A y B son disjuntos si $A \cap B = \phi$.
- ❖ El conjunto complemento de A
Se define este conjunto como los elementos que no pertenecen a A y se denota como $\sim A$ o A^c donde $\sim A = \{x \in U : x \notin A\}$.

Con respecto a la notación de los conjuntos podemos identificar las siguientes definiciones de éstos:

- ❖ Definición de Conjuntos por Extensión:
 $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ Denota un conjunto X si y sólo si:
$$\forall y \in U, (y \in X \Leftrightarrow (y = x_1 \vee y = x_2 \vee \dots \vee y = x_n))$$

Ejemplo: $A = \{2,3,4,7\}, B = \{\text{perro, vaca, delfín}\}$

- ❖ Definición de Conjuntos por Comprensión:
 $\{x|P(x)\}$ Denota un conjunto X si y sólo si:
$$\forall z \in U, (z \in U \Leftrightarrow P(z))$$

Ejemplo: $A = \{x|x \in \mathbb{Z} \wedge x > 5\}$.

Temprano en el desarrollo de la teoría de conjuntos se descubrió que esta intuición conducía a contradicciones y que debía descartarse. Esto condujo a una reformulación de la teoría, dando paso a la teoría axiomática de conjuntos. Existen diversas teorías que se desarrollan desde esta perspectiva, entre ellas se destacan la teoría Axiomática de Zermelo-Fraenkel, la de Bertrand Russell y la de Von Neumann, no se profundizara en estas teorías, debido que escapan a los objetivos de la investigación.

Plano Cartesiano:

El plano cartesiano (ver figura 4) está formado por dos rectas numéricas perpendiculares, una horizontal y otra vertical que se cortan en un punto. La recta horizontal es llamada eje de las abscisas o de las equis (x), y la vertical, eje de las ordenadas o de las yes (y); el punto donde se cortan recibe el nombre de origen. El plano cartesiano tiene como finalidad describir la posición de puntos, los cuales se representan por sus coordenadas o pares ordenados.

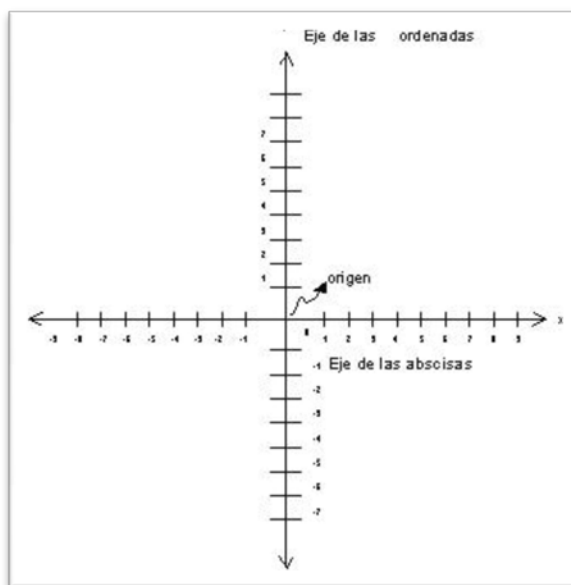


Figura 4: “Plano Cartesiano”

Para localizar puntos en el plano cartesiano se debe llevar a cabo el siguiente procedimiento:

1. Para localizar la abscisa o valor de x , se cuenta las unidades correspondientes hacia la derecha si son positivas o hacia la izquierda si son negativas, a partir de punto de origen, en este caso el cero.
2. Desde donde se localiza el valor de x , se cuenta las unidades correspondientes (en el eje de las ordenadas) hacia arriba si son positivas o hacia abajo, si son negativas. De esta forma se localiza cualquier punto dadas ambas coordenadas

Por ejemplo, para localizar el punto A (-4,5) en el plano cartesiano. El punto A se ubica 4 lugares hacia la izquierda en la abscisa (x) y 5 lugares hacia arriba en la ordenada (y). (Ver figura 5)

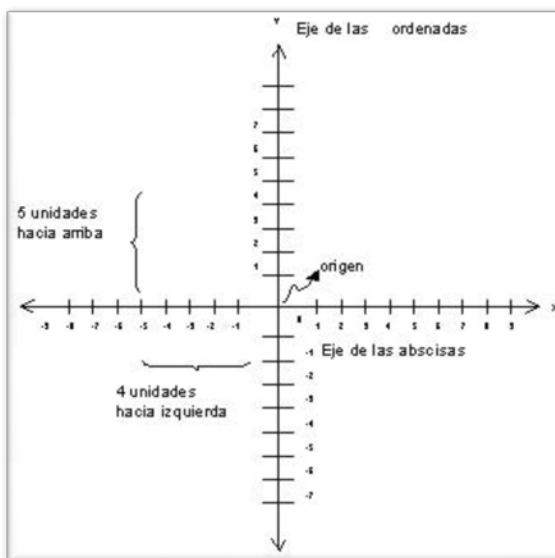


Figura 5: "Localización de puntos en el plano"

De modo inverso, este procedimiento también se emplea cuando se requiere determinada las coordenadas de cualquier punto de este en el plano cartesiano.

Par Ordenado

Un par ordenado es un conjunto con dos elementos en un orden específico. Usamos la notación (a, b) para denotar el par ordenado en la cual la primera coordenada, elemento o componente es a y el segundo es b . Esto establece universalmente la siguiente definición:

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

De esta forma, se tiene la siguiente propiedad:

Propiedad: Dos pares ordenados (a, b) y (c, d) son iguales si sus correspondientes componentes son iguales.

Es decir, $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$

Demostración:

Por definición $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$ y $(c, d) = \{\{c\}, \{c, d\}\}$

En el caso que $a = b$, entonces $(a, b) = (a, a) = \{\{a\}\}$.

Luego si $(a, b) = (c, d)$ entonces, nuevamente por definición:

$$x \in \{\{c\}, \{c, d\}\} \Leftrightarrow x \in \{\{a\}\} \Leftrightarrow \{a\} \in \{\{c\}, \{c, d\}\} \Leftrightarrow a = c$$

Por otra parte, $\{c, d\} \in \{\{a\}\} \Rightarrow a = d$

Ahora, cuando $a \neq b$ y si $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow \{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$

Si $\{a\} \in \{\{c\}, \{c, d\}\} \Rightarrow \{a\} = \{c\}$, de lo contrario $a = b = c = d$ lo que contradice nuestra hipótesis.

Por lo tanto $a = c$, luego $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a\}, \{a, d\}\}$

Producto Cartesiano

Con la noción anterior de par ordenado, se define el producto cartesiano de los conjuntos A y B definidos en un mismo universo (\mathcal{U}), denotado por $A \times B$, al conjunto cuyo elemento son los pares ordenados tales que la primera coordenada de par es un elemento de A y la segunda coordenada es un elemento del conjunto B . Es decir: $A \times B = \{(x, y) \in \mathcal{U} : x \in A, y \in B\}$

Este producto se llamara binario si $A = B$ o sea

$$A \times A = \{(x, y) \in \mathcal{U} : x \in A, y \in B\} \text{ y suele notarse por } A^2.$$

Propiedad: Sea A un conjunto, entonces $A \times \phi = \phi$

Demostración:

Supongamos que $A \times \phi = \phi$, entonces existe $(a, b) \in A \times \phi$, luego $a \in A$ y $b \in \phi$, lo que es una contradicción.

Relación Binaria

Se entiende por relación (binaria) entre elemento de A y B a cualquier subconjunto del producto cartesiano entre dichos conjuntos. Es decir, \mathcal{R} será una tal relación si acaso $\mathcal{R} \subseteq A \times B$.

Si acaso $(a, b) \in \mathcal{R}$, se dice que a y b están relacionados y se escribe a veces también $a \mathcal{R} b$.

Se denomina a los conjuntos A como conjuntos de partida y B al conjunto de llegada de la relación \mathcal{R} .

Las relaciones se pueden clasificar según las propiedades de la relación, algunas de estas, relevantes en nuestra investigación son:

Podemos diferenciar dentro de las relaciones binarias las homogéneas y heterogéneas, en las primeras la relación binaria se establece entre los elementos de un único conjunto, por lo que en realidad lo que determina es su estructura interna, mientras que en las segundas se establecen relaciones entre dos conjuntos distintos, lo que da lugar a operaciones o funciones matemáticas de cálculo. A continuación se caracterizan y describirán propiedades y clasificaciones pertinentes a nuestra investigación.

Relación Homogénea

Es una relación Binaria entre dos conjuntos cuya particularidad es que los conjuntos involucrados son iguales, es decir:

$$\mathcal{R}(a, b): (a, b) \in A \times B \wedge A = B$$

Dado que A y B son el mismo conjunto se representa de la forma:

$$\mathcal{R}(a, b): (a, b) \in A \times A \text{ O bien } \mathcal{R}(a, b): (a, b) \in A^2$$

Propiedades de las relaciones binarias homogéneas

Una relación binaria puede poseer propiedades que nos permite distinguir tipos de relaciones, algunas de estas son:

➤ Propiedad Reflexiva

Una relación tiene la propiedad reflexiva, si todo elemento está relacionado consigo mismo, es decir, para todo elemento a que pertenezca al conjunto A , el par ordenado (a, a) pertenece a la relación binaria \mathcal{R} .

$$\forall a \in A: (a, a) \in \mathcal{R}$$

En el caso contrario, o sea, si no todos los elementos de conjunto están relacionados consigo mismo, se dice que la relación no es reflexiva.

➤ Propiedad simétrica

Una relación binaria tiene la propiedad simétrica, si se cumple que un par ordenados (a, b) pertenece a la relación entonces el par (b, a) también pertenece a esta relación: $\forall a, b \in A: (a, b) \in \mathcal{R} \Rightarrow (b, a) \in \mathcal{R}$

➤ Propiedad antisimétrica

Una relación binaria tiene la propiedad antisimétrica, si los pares ordenados (a, b) y (b, a) pertenecen a la relación entonces $a = b$. Esto es:

$$\forall a, b \in A: ((a, b) \in \mathcal{R} \wedge (b, a) \in \mathcal{R}) \Rightarrow a = b$$

➤ Propiedad Transitiva

Una relación binaria tiene la propiedad transitiva cuando, dado los elementos a, b, c del conjunto, si a está relacionado con b y a su vez b está relacionado con c , entonces a está relacionado con c . Esto es:

$$\forall a, b, c \in A: ((a, b) \in \mathcal{R} \wedge (b, c) \in \mathcal{R}) \Rightarrow (a, c) \in \mathcal{R}$$

➤ Propiedad Total

Una relación binaria se dice que es total si para todo elemento de conjunto: a, b ; a está relacionado con b ó b está relacionado con a , esto es:

$$\forall a, b \in A: (a, b) \in \mathcal{R} \vee (b, a) \in \mathcal{R}$$

Partiendo de las propiedades que una relación binaria homogénea puede tener, se pueden diferenciar acorde con nuestra investigación las siguientes:

- **Relaciones reflexiva:**

Se dice que una relación binaria es reflexiva si cumple la propiedad reflexiva descrita anteriormente.

- **Relación de dependencia**

Dado un conjunto A y una relación binaria \mathcal{R} entre sus elementos, se dice que la relación binaria es la relación de dependencia si \mathcal{R} cumple la propiedad reflexiva y la propiedad simétrica.

- **Conjunto Preordenado**

Dado un conjunto A y una relación binaria \mathcal{R} entre sus elementos, se dice que la relación binaria define un Conjunto Preordenado si \mathcal{R} cumple las propiedades de reflexividad y transitividad.

- **Relación de Equivalencia**

Dado un conjunto A y una relación binaria \mathcal{R} entre sus elementos, se dice que la relación binaria es una relación de equivalencia si cumple las siguientes propiedades:

- Propiedades Reflexiva
- Propiedades Simétrica
- Propiedades Transitiva

Si \mathcal{R} es una relación de equivalencia sobre un conjunto A . Se define para cada $a \in A$, la clase de equivalencia de a , al conjunto formado por todo los elementos de A que estén relacionados con él. Se denota generalmente por $[a]$ o \bar{a} , esto es $[a] = \{x \in A: (x, a) \in \mathcal{R}\}$.

LEMA: Sea \mathcal{R} una relación de equivalencia sobre el conjunto A . Entonces,

- (i) $[a] = [b]$ si y sólo si $(a, b) \in \mathcal{R}$
- (ii) $[a] \neq [b]$, entonces $[a] \cap [b] = \phi$

Demostración

- (i) Supongamos que $[a] = [b]$. Como $a \in [a]$ y $[a] = [b]$, entonces $a \in [b]$, entonces $(a, b) \in \mathcal{R}$.

Por otro lado si $(a, b) \in \mathcal{R}$ y sea x cualquiera de A , entonces

$$\begin{aligned} x \in [a] &\Leftrightarrow (x, a) \in \mathcal{R} \\ &\Rightarrow (x, b) \in \mathcal{R} \quad \text{Por hipótesis de transitividad de } \mathcal{R} \\ &\Leftrightarrow x \in [b] \end{aligned}$$

Tenemos, pues, que

$$\forall x \in A, (x \in [a] \Rightarrow x \in [b])$$

Es decir, $[a] \subseteq [b]$

Análogamente se obtiene que $[b] \subseteq [a]$

De la doble inclusión se concluye que las clases son iguales.

(ii) Probaremos el contrarrecíproco. Es decir, si $[a] \cap [b] \neq \emptyset$ entonces $[a] = [b]$. En efecto,

$$\begin{aligned} [a] \cap [b] \neq \emptyset &\Rightarrow \exists x \in A: x \in [a] \wedge x \in [b] \\ &\Leftrightarrow \exists x \in A: (x, a) \in \mathcal{R} \wedge (x, b) \in \mathcal{R} \\ &\Rightarrow \exists x \in A: (a, x) \in \mathcal{R} \wedge (x, b) \in \mathcal{R} \text{ (Por prop. simétrica)} \\ &\Rightarrow (a, b) \in \mathcal{R} \text{ (Por transitividad)} \\ &\Leftrightarrow [a] = [b] \text{ (Por (i))} \end{aligned}$$

Dada una relación de equivalencia \mathcal{R} sobre un conjunto A , llamaremos **conjunto cociente** al formado por todas las clases de equivalencia, lo notaremos por A/\mathcal{R} , en donde $A/\mathcal{R} = \{[a]: a \in A\}$.

Razón

La razón es una relación binaria entre magnitudes (como por ejemplo: objetos, personas, estudiantes, cucarachas, unidades del SI, etc.), generalmente se expresa como “ a es a b ” o “ $a:b$ ”. En el caso de números toda razón se puede expresar como fracción y eventualmente como un decimal.

Proporcionalidad

La proporcionalidad es una relación o razón entre magnitudes. Podemos distinguir:

Proporcionalidad Numérica

Una proporcionalidad numérica es una igualdad entre dos razones numéricas.

En cualquier proporción el producto de los extremos es igual al producto de los medios. Esto es: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow ad = bc$. Donde a y b se llaman extremos, b y c medios.

Proporcionalidad Directa

Dadas dos variable x e y , se dice que y es directamente proporcional a x (x e y varían directamente, o x e y están en variación directa) si existe una constante k distinta de cero tal que $y = kx$.

La relación a menudo se denota $y \propto x$ y la razón constante $k = \frac{y}{x}$ es llamada constante de proporcionalidad.

Proporcionalidad Inversa

Si las cantidades de dos magnitudes vinculadas entre sí varían de modo tal que su producto permanece constante, decimos que se trata de una relación de proporcionalidad inversa.

Es decir, dos variable son inversamente proporcionales (o están en variación inversa, o en proporción inversa o en proporción recíproca) si una de las variables es directamente proporcional con la multiplicativa inversa (recíproca) de la otra, o equivalentemente, si sus productos son constante. Se sigue que la variable y es inversamente proporcional a la variable x si existe una constante k distinta de cero tal que $y = \frac{k}{x}$

Proposición:

La proporcionalidad es una relación de equivalencia en un conjunto $\mathbb{R} - \{0\}$.

Demostración:

Por demostrar que la proporcionalidad es una relación de equivalencia, esto es equivalente a demostrar que cumple las propiedades: reflexiva, simétrica y transitiva. Esto se prueba a continuación usando la definición: si $a \propto b$ entonces $a = kb$, donde k es una contante diferente de cero.

Reflexividad

Para todo $a \in \mathbb{R} - \{0\}$, $a = 1 \cdot a$. Por lo tanto, como uno es una constante diferencia de cero.

Simetría

Supóngase que $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$ y $a \propto b$, entonces $a = kb$ en donde k es una constante diferente de cero. Dividiendo por k , tenemos:

$$b = \frac{a}{k} = \frac{1}{k} \cdot a$$

Como k es diferente de cero, $\frac{1}{k}$ es también diferente de cero. De modo que: $b \propto a$.

Transitividad

Supóngase que $a, b, c \in \mathbb{R} - \{0\}$, $a \propto b$ y $b \propto c$. Entonces $a = kb$ y $b = nc$, en donde k y n son constantes distintas de cero. Substituyendo la segunda ecuación en la primera, tenemos:

$$a = k \cdot (nc) = (kn) \cdot c$$

Como k y n son diferentes a cero, kn debe ser también diferente de cero. Por lo tanto: $a \propto c$

Proporcionalidad Compuesta

La proporcionalidad compuesta es aquella en que intervienen tres o más magnitudes, relacionadas entre sí de forma directa o inversa.

Relación Heterogénea

Una relación binaria entre dos conjuntos A y B , se llama heterogénea cuando A es distinto de B : $\mathcal{R}(a, b) \in A \times B \wedge A \neq B$ lo que también se llama correspondencia matemática.

Así, dados dos conjuntos: X e Y , y una relación f , que determina alguna correspondencia entre X e Y , que representaremos: $f: X \rightarrow Y$ donde al menos un elemento de X está relacionado con al menos un elemento de Y .

En una correspondencia podemos distinguir distintos conjuntos:

- Conjunto inicial

Es el primero de la correspondencia, es este caso X , lo representaremos $in(f)$.

- Conjunto final

Es el segundo de la correspondencia en este caso Y , lo representaremos como $fin(f)$.

- Conjunto origen

Es el constituido por los elementos de conjunto inicial, que están relacionados con algún elemento de conjunto final, lo representaremos $or(f)$.

- **Conjunto imagen**

Es el constituido por los elementos del conjunto final con los que están relacionados los elementos del conjunto origen, lo representaremos $Im(f)$.

- **Elementos homólogos**

Dos elementos, uno del conjunto origen y otro del conjunto imagen, se dice que son homólogos, si están relacionados según la correspondencia f .

- **Imagen de un elemento**

Dado un elemento x del conjunto origen, y otro elemento y del conjunto imagen, se dice que y es imagen de x y se representa $f(x) = y$.

Correspondencia definida a partir del producto cartesiano

Dados los conjuntos X (conjunto inicial) e Y (conjunto final) y definido el producto cartesiano $X \times Y$, de estos dos conjuntos, como el conjunto de pares ordenados (x, y) , donde $x \in X$ e $y \in Y$, dado el conjunto F que contiene a los pares homónimos de la correspondencia f , y $F \subseteq X \times Y$ define esa correspondencia en su totalidad.

Por lo tanto podemos decir que una correspondencia entre dos conjuntos X e Y , es un subconjunto F del producto cartesiano $X \times Y$, que recoge los pares ordenados (x, y) , que forman la correspondencia.

Por otra parte, podemos distinguir las siguientes condiciones, que nos permiten diferenciar los subtipos de correspondencias.

- **Condición de existencia de imagen**

La condición de existencia de imagen garantiza que tomando un elemento cualesquiera x de X tiene al menos una imagen y en Y . Esto es:

$$\forall x \in X: \exists y \in Y \wedge (x, y) \in \mathcal{R}$$

Es decir, para todo elemento x de X se cumple que existe al menos un y en Y , tal que x e y están relacionados.

- **Condición de existencia de origen**

La condición de existencia de origen garantiza que todo elemento y en Y tiene al menos un origen x de X . Esto es:

$$\forall y \in Y: \exists x \in X \wedge (x, y) \in \mathcal{R}$$

Es decir, para todo elemento y de Y se cumple que existe un x de X y que x e y están relacionados.

- **Condición de unicidad de imagen**

La condición de unicidad de imagen garantiza que los elementos x de X que están relacionados con algún b de B está relacionado con un único elemento y en Y , es decir: $((a, b_1) \in \mathcal{R} \wedge (a, b_2) \in \mathcal{R}) \Rightarrow b_1 = b_2$.

Esto es, si un elemento x de X está relacionado con dos elementos $y \in Y$ esos dos elementos son iguales. Nótese que la condición de unicidad de imagen garantiza que los elementos que tienen imagen tengan una sola imagen, pero no garantiza que todos los elementos de X tengan imagen.

Partiendo de las características de las relaciones binarias heterogéneas, podemos diferenciar las siguientes clases de correspondencias:

Correspondencia unívoca

Una correspondencia es unívoca si cumple la condición de unicidad de imagen. Esta condición es necesaria y suficiente para que una correspondencia sea considerada unívoca.

Correspondencia biunívoca

Una correspondencia es biunívoca si cumple las condiciones de unicidad de imagen y unicidad de origen.

- **APLICACIÓN:**

Una correspondencia $f: X \rightarrow Y$ se denomina aplicación si todo elemento de X admite una única imagen en Y , esto es si cumple la condición de unicidad de imagen y de existencia de imagen.

Si la aplicación la representamos como f , tendremos:

$$f: X \rightarrow Y$$
$$x \rightarrow b = f(a)$$

Por la que definimos una aplicación que a cada elemento x de X se le asigna un único y de Y , esto es $\forall x \in X: \exists! y \in Y | y = f(x)$. Para todo x de X , se cumple que existe un único y de Y , tal que y es el resultado $f(x)$. El término **función** se suele utilizar cuando los conjuntos inicial y final son numéricos, como este es el caso pertinente a nuestra investigación nos referimos de esta forma a la aplicación.

Se denomina como el dominio de la función f a X : su primer conjunto o conjunto de partida; e Y es el codominio de f , su segundo conjunto o conjunto de llegada. Por $f(x)$ se denota la regla o algoritmo para obtener la imagen de un cierto objeto arbitrario x del dominio X , es decir, el (único) objeto de Y que le corresponde. En ocasiones esta expresión es suficiente para especificar la función por completo, infiriendo el dominio y condominio por el contexto.

Ahora si definimos según la perspectiva a partir del **Producto cartesiano**:

Si f es una función, entonces $F \subseteq X \times Y$, con F conjunto que contiene a los pares homónimos de la correspondencia f , se entiende por dominio de f al conjunto de elementos de X que tienen pareja en Y y recorrido de f al conjunto de elementos de Y que tienen pareja X .

Es decir, si denotamos como $dom(f)$ (f) al dominio y por $rec(f)$ al recorrido, se define:

$$dom(f) = \{x \in X: \exists y \in Y | (x, y) \in F\}$$

$$rec(f) = \{y \in Y: \exists x \in X | (x, y) \in F\}$$

Significa que $X = dom(f)$ pero que $rec(f) \subseteq B$

Operación Binaria

En algebra una operación matemáticas es la aplicación de un operador (un operador es un símbolo matemático que indica que debe ser llevada a cabo una operación especificada sobre un cierto número de operandos que pueden

ser números, vectores, funciones, etc.) sobre los elementos de un conjuntos. El operador toma los elementos iniciales y los relaciona con otro elemento de un conjunto final que puede ser de la misma naturaleza o no; esto se conoce técnicamente como ley de composición.

Se define como operación binaria a aquella operación matemática, que necesita el operador y dos operandos (argumentos) para que se pueda calcular un valor.

Dados tres conjuntos A, B, C una operación binaria producto, representado la operación por el signo \odot , es una aplicación que asigna a cada par de valores a de A y b de B un solo valor de c en C , que podemos representar:

$$\begin{aligned}\odot: A \times B &\rightarrow C \\ (a, b) &\rightarrow c\end{aligned}$$

Podemos expresar la operación:

$$a \odot b = c \quad \odot (a, b) = c$$

El tipo de operación binaria que son de mayor interés son las operaciones binarias internas en el conjunto A , o bien las aplicaciones de $A \times A$ en A :

$$\begin{aligned}\star: A \times A &\rightarrow A \\ (a, b) &\rightarrow c = a \star b\end{aligned}$$

Debido a que se utilizan tanto en los sistemas numéricos más abstractamente, y por otra parte son aquellas coherentes a nuestra investigación.

Estas operaciones gozan de ciertas propiedades, usadas con frecuencia en la axiomatización de los diversos sistemas matemáticos, si consideramos la operación

Definida anteriormente podemos mencionar entre ellas las que se indican a continuación:

- **Conmutatividad**

Se dice que \star tiene la propiedad conmutativa en A si se cumple:

$$\forall a, b \in A: a * b = b * a$$

Del mismo modo podemos decir que la ley de composición interna $*$, no es conmutativa en A si $\exists a, b \in A: a * b \neq b * a$.

- **Asociatividad**

Se dice que $*$ es asociativa si, solo si

$$\forall a, b, c \in A: (a * b) * c = b * (a * c)$$

Del mismo modo podemos decir que la ley de composición interna $*$, no es conmutativa en A si

$$\forall a, b, c \in A: (a * b) * c \neq b * (a * c)$$

- **Distributividad**

Considerando la operación $*$ definida anteriormente y la siguiente operación:

$$\begin{aligned} &*: A \times A \rightarrow A \\ &(a, b) \rightarrow d = a * b \end{aligned}$$

Se dice que la operación $*$ es distributiva por la derecha de $*$ si se cumple:

$$\forall a, b, c \in A: a * (b * c) = (a * b) * (a * c)$$

Del mismo modo se dice que la operación $*$ es distributiva por la izquierda de $*$ si se cumple:

$$\forall a, b, c \in A: (a * b) * c = (a * c) * (b * c)$$

Dentro de las operaciones binarias existen elementos que podemos distinguir:

Elemento neutro

Considerando el la operación $*$ definida anteriormente diremos que el elemento es el elemento neutro por la izquierda si $\forall a \in A, \exists e \in A: e * a = a$, análogamente se define el neutro por la derecha si $\forall a \in A, \exists e \in A: a * e = a$

Elemento simétrico

Considerando el la operación $*$ definida anteriormente diremos que a' es simétrico de a si $a * a' = a * a' = e$ donde e es el elemento neutro.

Operaciones Binarias en funciones

Sumas de funciones:

Sean f, g funciones, la función $f + g$ está definida como:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \text{ Con } \text{dom}(f + g) = \text{dom}(f) \cap \text{dom}(g)$$

Resta de funciones:

Sean f, g funciones, la función $f - g$ está definida como:

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) \text{ Con } \text{dom}(f - g) = \text{dom}(f) \cap \text{dom}(g)$$

Producto de funciones:

Sean f, g funciones, la función fg está definida como:

$$(fg)(x) = f(x)g(x) \text{ Con } \text{dom}(fg) = \text{dom}(f) \cap \text{dom}(g)$$

Cociente de funciones:

Sean f, g funciones, la función f/g está definida como:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \text{ Con}$$

$$\text{dom}(f/g) = \text{dom}(f) \cap \text{dom}(g) - \{x \in \text{dom}(f) \cap \text{dom}(g) : g(x) = 0\}$$

Composición De Funciones:

Sean A, B, C tres conjuntos no vacíos, $g: A \rightarrow B$ y $f: B \rightarrow C$ funciones. Se define una nueva función denominada función composición de g seguida por f , la cual se denota por $f \circ g$. El dominio de esta función es un subconjunto del $\text{Dom}(g)$ que denotaremos como $\text{Dom}(f \circ g)$. Así para cada elemento de $\text{Dom}(f \circ g)$ la función $f \circ g$ estará definida de la siguiente forma:

$$(\forall x \in \text{Dom}(f \circ g))(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Así

$$\text{Dom}(f \circ g) = \{x \in A : (f \circ g)(x) \in C\}$$

$$\Leftrightarrow \{x \in A : f(g(x)) \in C\}$$

$$\Leftrightarrow \{x \in A : g(x) \in B \wedge f(g(x)) \in C\}$$

$$\Leftrightarrow \{x \in A : x \in \text{Dom}(g) \wedge (g(x) \in \text{Dom}(f))\}$$

$$\Leftrightarrow = \{x \in \text{Dom}(g) : g(x) \in \text{Dom}(f)\}$$

La función $f \circ g$ se denomina también como f compuesta con g , donde la operación binaria \circ se denomina composición de funciones.

De esto podemos deducir que $\text{Dom}(f \circ g) = \text{Dom}(g)$, es decir $f \circ g : A \rightarrow C$ si y solo si $\text{Rec}(g) \subseteq \text{Dom}(f)$.

Además la función $f \circ g$ será distinta de la función vacía (función matemática cuyo dominio es el conjunto vacío) C si y solo si $\text{Rec}(g) \cap \text{Dom}(f) \neq \emptyset$, ya que de esta forma se puede evaluar la función f sobre el elemento $g(a)$, con $a \in A$, como podemos apreciar en el siguiente diagrama:

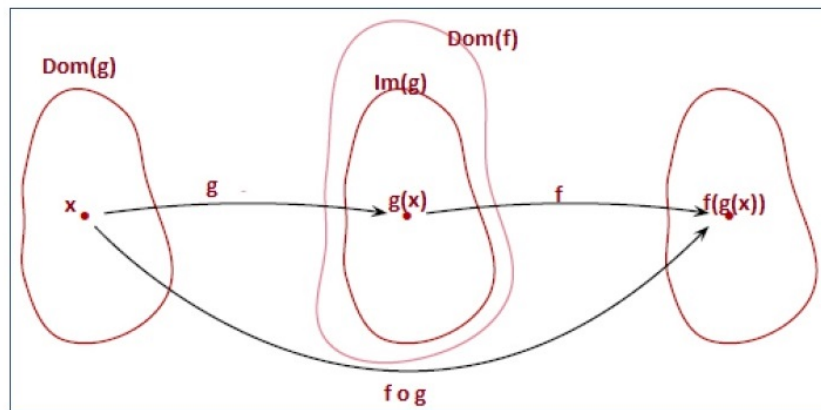


Figura 6: Diagrama composición de funciones

Propiedades de la función compuesta

Proposición: Sean $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$, $h : C \rightarrow D$ funciones, entonces

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f,$$

(Esta propiedad se denomina propiedad asociativa)

Con $\text{Rec}(f) \subseteq \text{Dom}(g)$ y $\text{Rec}(g) \subseteq \text{Dom}(h)$

Demostración

- i. Por definición de la compuesta de funciones se tiene que $g \circ f : A \rightarrow C$, luego $h \circ (g \circ f) : A \rightarrow D$

Por otro lado,

$$h \circ g : B \rightarrow D, \text{ así } (h \circ g) \circ f : A \rightarrow D$$

ii. Sea $x \in A$, por definición se tiene:

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))) = (h \circ g)(f(x)) = ((h \circ g) \circ f)(x)$$

De i. y ii. Se concluye que $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

Proposición: En general la compuesta de funciones no es conmutativa

Contraejemplo:

Sea $f(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, con $f(x) = 2x$ y $g(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con $g(x) = x + 3$. Entonces:

- $f \circ g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x + 3) = 2(x + 3) = 2x + 6$
 - $g \circ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x) = 2x + 3$
- $\Rightarrow \exists x \in \mathbb{R} / 2x + 6 \neq 2x + 3 \Rightarrow \exists x \in \mathbb{R} / (f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x) \Rightarrow f \circ g \neq g \circ f$

Proposición: Se define la función identidad del conjunto X al conjunto Y como $id_x: X \rightarrow Y, id_x(x) = x$. Sea $f: A \rightarrow B$ función, entonces la función identidad es neutro para la composición, esto es:

$$id_B \circ f = f \circ id_A = f$$

Demostración

- i. Dado que $id_B: B \rightarrow B \wedge f: A \rightarrow B$ entonces por definición de función compuesta $id_B \circ f: A \rightarrow B$. Luego se tiene que $Dom(id_B \circ f) = Dom(f)$
Por otro lado $(id_B \circ f)(x) = id_B(f(x)) = f(x), \forall x \in A$.
Así las funciones $id_B \circ f$ y f son iguales punto a punto. De lo anterior se concluye que $id_B \circ f = f$. Análogamente se puede concluir que $f \circ id_A = f$.
- ii. Dado que $id_A: A \rightarrow A \Rightarrow f \circ id_A: A \rightarrow B$ (definición de función compuesta). Por otro lado $(f \circ id_A)(x) = (f(id_A(x))) = f(x) \forall x \in A$
De lo anterior se concluye que $f \circ id_A = f$.

De i. y ii., por transitividad de la igualdad se concluye que

$$id_B \circ f = f \circ id_A = f$$

Proposición: Sea $f: A \rightarrow A$ función. Si f es biyectiva, entonces f^{-1} es el simétrico de f con la operación composición, esto es:

$$f \circ f^{-1} = id_B \vee f^{-1} \circ f = id_A$$

Demostración

Dada la función $f: A \rightarrow B$, entonces por definición de inversa y de compuesta se tiene que $f^{-1}: B \rightarrow A$ y $f^{-1} \circ f: B \rightarrow B$, como $Dom(id_B) = Rec(id_B) = B$, concluimos que $Dom(id_B) = Dom(f \circ f^{-1}) \wedge Rec(id_B) = Rec(f \circ f^{-1})$

Ahora, sea $y \in B$, llamaremos $x = f^{-1}(y) \in A$. Como f es la función inversa de f^{-1} , tenemos también que $y = f(x)$. Entonces

$$f \circ f^{-1}(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = y = id_B(y)$$

Por lo tanto podemos concluir que $f \circ f^{-1} = id_B$.

Análogamente demostramos que $f^{-1} \circ f = id_A$.

Proposición: Sean $f: A \rightarrow B$ y $g: B \rightarrow C$ funciones biyectivas, entonces $g \circ f$ es biyectiva.

Demostración

Probaremos que $g \circ f$ es inyectiva y sobreyectiva. Dado que g es biyectiva, en particular sobreyectiva, entonces $Rec(g) = C$, así $\forall c \in C, \exists b \in B / g(b) = c$, a la vez dado que $Rec(f) = B$, entonces $b \in Rec(f)$, por lo tanto $\exists a \in A$ tal que $f(a) = b$. De esta forma,

$$\forall c \in C, \exists a \in A / g(f(a)) = (g \circ f)(a) = c. \text{ Por lo tanto } Rec(g \circ f) = C.$$

Por otra parte si $x, w \in A$ y $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(w)$ entonces tendremos las siguientes equivalencias:

$$(g \circ f)(x) = (g \circ f)(w)$$

$$\Leftrightarrow g(f(x)) = g(f(w))$$

$$\Leftrightarrow f(x) = f(w) \text{ \{Debido a que } g \text{ es inyectiva\}}$$

$$\Leftrightarrow x = w \text{ \{Debido a que } f \text{ es inyectiva\}}$$

Por lo tanto $g \circ f$ es una función inyectiva. En conclusión $g \circ f$ es una función biyectiva.

A partir de las definiciones y proposiciones anteriores podemos demostrar lo planteado anteriormente en el capítulo I, en donde consideramos la composición de funciones como una necesidad para que la relación en donde dos conjuntos están relacionados si y solo si tienen la misma cardinalidad sea una relación de equivalencia, esto es que la biyectividad es una relación de equivalencia.

A considerar que se dice que el conjunto B tiene la misma cardinalidad o el mismo cardinal (el cardinal indica el número o cantidad de elementos de un conjunto, sea esta cantidad finita o infinita) de A , si existe una función $f: A \rightarrow B$ tal que f es biyectiva. En este caso denotaremos $card(A) = card(B)$.

PROPOSICIÓN:

La relación binaria es donde dos conjuntos están relacionados si y solo si tienen la misma cardinalidad es una relación de equivalencia.

Observe que esto es equivalente a decir que la biyectividad es una relación de equivalencia.

Demostración:

Notaremos como \mathcal{R} a dicha relación, si A y B son conjuntos entonces
 $(A, B) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow card(A) = card(B) \Leftrightarrow \exists f: A \rightarrow B$ tal que f es función biyectiva
Demostraremos las propiedades para que \mathcal{R} sea una relación de equivalencia; sean A y B conjuntos;

(i) **Reflexividad**

$(A, A) \in \mathcal{R}$ Ya que $\exists f = id_A: A \rightarrow A$ biyectiva. Por lo tanto la relación es reflexiva.

(ii) **Simetría**

Supongamos que

$(A, B) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow \exists f: A \rightarrow B$ tal que f es función biyectiva

$\Leftrightarrow \exists f^{-1}: B \rightarrow A$ Tal que f es función biyectiva

$\Leftrightarrow (B, A) \in \mathcal{R}$. Por lo tanto la relación es simétrica.

(iii) Transitividad

Supongamos que $(A, B) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow \exists f: A \rightarrow B$ tal que f es función biyectiva y que

$(B, C) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow \exists g: B \rightarrow C$ tal que g es función biyectiva

Entonces basta considerar la función $g \circ f: A \rightarrow C$, esta es biyectiva ya que f y g lo son, y como demostramos anteriormente, la composición de funciones biyectivas son biyectivas. Así $(A, C) \in \mathcal{R}$, por lo tanto la relación binaria es transitiva.

De (i), (ii) y (iii) se concluye que la relación binaria es una **relación de equivalencia**.

Observemos que en esta relación dos conjuntos pertenecen a una misma clase de equivalencia si tienen la misma cardinalidad, por lo tanto las clases de equivalencia estarán determinadas por conjuntos que tienen la misma cardinalidad.

Capítulo 4:

4 Análisis de Contenido

En este capítulo se presenta la definición experta de la operación “Composición de funciones” y las definiciones escolares encontradas en textos de primer año de enseñanza media, que nos permitirán realizar un contraste entre ambas definiciones (experta y escolar). Luego se continua con el análisis fenomenológico que corresponde a *“los fenómenos que dan origen a los conceptos, los contextos en los que se utilizan y aquellas situaciones en las que se presentan y en las cuales se aplican, que dotan de sentido a los contenidos en estudio”* (Rico, 2013, p. 18). Finalizamos este capítulo con los diferentes sistemas de representación asociados al estudio de la Composición de Funciones.

4.1 Composición de Funciones Definición Experta

Sean A, B, C tres conjuntos no vacíos, $g: A \rightarrow B$ y $f: B \rightarrow C$ funciones. Se define una nueva función denominada función composición de g seguida por f , la cual se denota por $f \circ g$. El dominio de esta función es un subconjunto del $Dom(g)$ que denotaremos como $Dom(f \circ g)$. Así para cada elemento de $Dom(f \circ g)$ la función $f \circ g$ estará definida de la siguiente forma:

$$(\forall x \in Dom(f \circ g))(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

La función $f \circ g$ se denomina también como f compuesta con g , donde la operación binaria \circ se denomina composición de funciones.

4.2 Composición de Funciones Definición Escolar

En el texto de matemática para el estudiante de primero medio del año 2016. Aparece el siguiente enunciado:

En resumen

Sean f y g dos funciones, tal que, $f: A \rightarrow B$ y $g: B \rightarrow C$, entonces la función compuesta $g \circ f: A \rightarrow C$ se define como: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. También se puede leer "g compuesta con f".

Figura 08: Fuente: 1° Medio Matemática. Texto del estudiante. Del Valle, J., Muñoz, G. & Santis, M. 2016 p.150

En este mismo texto, se pueden observar propiedades respecto a la composición de funciones:

En resumen

La composición de funciones lineales cumple con la propiedad de **clausura**, es decir, si f y g son funciones lineales, se tiene que: $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$ también lo son. Esto no ocurre si f y g son funciones afines.
Cabe destacar que la composición de funciones, no cumple con la propiedad conmutativa, es decir: $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$, para f y g funciones.

Figura 09: Fuente: 1° Medio Matemática. Texto del estudiante. Del Valle, J., Muñoz, G. & Santis, M. 2016 p.154

La composición de dos funciones bajo ciertas condiciones, utiliza los valores de salida de una función como valores de entrada para la otra.

En resumen

Para las funciones f, g y h , se cumple lo siguiente:

Asociatividad

$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$$

Elemento neutro

$I(x) = x$, tal que $(f \circ I)(x) = (I \circ f)(x) = f(x)$, donde $I(x) = x$ recibe el nombre de función identidad.

Figura 10. Del Valle, J., Muñoz, G. & Santis, M. (2016). 1° Medio Matemática. Texto del estudiante, p 155.

Luego, en el mismo texto del estudiante del año 2016 se utiliza el concepto de composición de funciones en la unidad de geometría, en el ámbito de la aplicación sucesiva de transformaciones isométricas a figuras en el plano cartesiano.

Previo a definir las transformaciones isométricas, se define el concepto de vector así como también las operaciones suma, resta y producto de un vector por un escalar.

En resumen

El **vector** es un segmento de recta dirigido que se caracteriza por tener magnitud o módulo, dirección y sentido. La **magnitud** es la longitud del vector, es decir, la distancia entre el inicio (cola) y el término (punta de flecha) y se denota de la forma $|\overline{AB}|$. El **sentido** está indicado por la punta flecha del vector e indica hacia donde se dirige. La **dirección** es la orientación o el ángulo que forma la recta que contiene al vector con el eje X.

Para representar vectores en el plano cartesiano se deben calcular sus componentes. Si un vector tiene como puntos extremos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, las componentes del vector \overline{AB} están dadas por:

$$\overline{AB} = (x_2, y_2) - (x_1, y_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1).$$

En el ejemplo, el vector tiene sentido noroeste y dirección 37° con respecto al eje X. Sus componentes son (4, 3) y su magnitud se calcula como se muestra a continuación:

$$\overline{AB} = (4, 3)$$

$$|\overline{AB}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$$

En general, si un vector \vec{u} tiene componentes (u_1, u_2) su magnitud o módulo se calcula como $|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$.

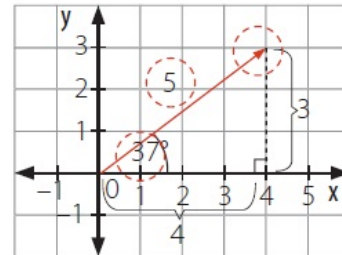


Figura 11. Del Valle, J., Muñoz, G. & Santis, M. (2016). 1° Medio Matemática. Texto del estudiante, p 181.

En resumen

Para multiplicar un vector $\vec{u} = (u_1, u_2)$ por un escalar k , se obtiene el producto $k \cdot \vec{u}$ y se calcula de la siguiente forma:

$$k \cdot \vec{u} = (k \cdot u_1, k \cdot u_2)$$

Al representar el vector resultante en el plano cartesiano se tiene que:

- Si $k > 1$, el vector $k \cdot \vec{u}$ tendrá igual dirección y sentido que \vec{u} , y su magnitud es k veces la magnitud de este vector.
- Si $0 < k < 1$, el vector $k \cdot \vec{u}$ tendrá igual dirección y sentido que \vec{u} , pero su magnitud será menor que la del \vec{u} siendo k veces la magnitud de este vector.
- Si $k < 0$, el vector $k \cdot \vec{u}$ tendrá sentido contrario.

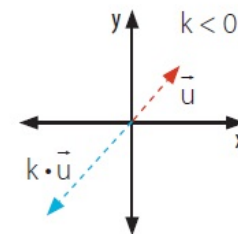
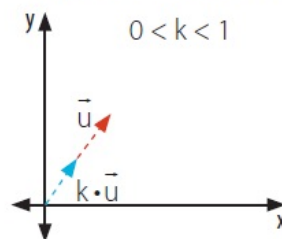
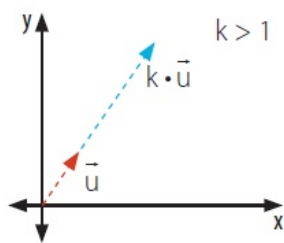


Figura 12. Del Valle, J., Muñoz, G. & Santis, M. (2016). 1° Medio Matemática. Texto del estudiante, p 185.

En resumen

En el paso a paso se obtuvo la forma gráfica para **sumar y restar vectores**, también es posible hacerlo a partir de sus componentes, realizando lo siguiente:

Sea $\vec{u}=(u_1,u_2)$ y $\vec{v}=(v_1,v_2)$,	Ejemplos:	$\vec{u}-\vec{v}=(2-(-5),-3-0)$
luego:	Si $\vec{u}=(2,-3)$ y $\vec{v}=(-5,0)$,	$=(7,-3)$
$\vec{u}+\vec{v}=\vec{p}=(u_1+v_1,u_2+v_2)$	entonces:	
$\vec{u}-\vec{v}=\vec{q}=(u_1-v_1,u_2-v_2)$	$\vec{u}+\vec{v}=(2+(-5),-3+0)$	
	$=(-3,-3)$	

Figura 13. Del Valle, J., Muñoz, G. & Santis, M. (2016). 1° Medio Matemática. Texto del estudiante, p 190.

Según el mismo texto, la traslación es una transformación isométrica que corresponde al movimiento de una figura en una dirección, un sentido y una magnitud dada.

En resumen

Para **trasladar** un punto $P(x, y)$ en el plano cartesiano respecto de un vector $\vec{u}=(u_1, u_2)$ definida como una función $T_{\vec{u}}$, tal que a cada punto del plano cartesiano lo asocia con un único punto de coordenadas:

$$T_{\vec{u}}(x, y) = (x + u_1, y + u_2)$$

Figura 14. Del Valle, J., Muñoz, G. & Santis, M. (2016). 1° Medio Matemática. Texto del estudiante, p 195.

La reflexión es una transformación isométrica en la que a cada punto de la figura original se le asocia otro punto que está a igual distancia de la recta llamada eje de simetría y el segmento que une ambos puntos es perpendicular al eje.

En resumen

Reflejar un punto $P(x, y)$ en plano cartesiano respecto de un eje coordenado puedes utilizar las siguientes expresiones:

- Si la reflexión de un punto (x, y) es respecto del eje X puede ser definida como una función:
$$R_x(x, y) = (x, -y)$$
- Si la reflexión de un punto (x, y) es respecto del eje Y puede ser definida como una función:
$$R_y(x, y) = (-x, y)$$
- La reflexión de un punto (x, y) respecto a la recta $y = x$ puede ser definida como una función:
$$R_{y=x}(x, y) = (y, x)$$

Figura 15. Del Valle, J., Muñoz, G. & Santis, M. (2016). 1° Medio Matemática. Texto del estudiante, p 199.

La rotación es una transformación isométrica en el plano que consiste en girar todos los puntos de una figura en torno a un punto O fijo llamado centro de rotación, en una medida angular α llamado ángulo de rotación, tal que cada punto gira siguiendo un arco de circunferencia con centro O y $\neq \alpha$.

En resumen

Para rotar un punto $P(x, y)$ en el plano cartesiano respecto al origen (O) y el ángulo dado en cada caso, el punto imagen se obtiene utilizando las siguientes expresiones:

$R_{(0, 90^\circ)}(x, y) = (-y, x)$	$R_{(0, -90^\circ)}(x, y) = (y, -x)$
$R_{(0, 180^\circ)}(x, y) = (-x, -y)$	$R_{(0, -180^\circ)}(x, y) = (-x, -y)$
$R_{(0, 270^\circ)}(x, y) = (y, -x)$	$R_{(0, -270^\circ)}(x, y) = (-y, x)$
$R_{(0, 360^\circ)}(x, y) = (x, y)$	$R_{(0, -360^\circ)}(x, y) = (x, y)$

Figura 16. Del Valle, J., Muñoz, G. & Santis, M. (2016). 1° Medio Matemática. Texto del estudiante, p 203.

4.3 Distancia Entre Saberes

Al comparar la definición experta con la definición escolar se puede observar que la definición escolar se limita a abordar el concepto algebraico de la composición de funciones mientras que la definición experta demuestra desde el punto de vista matemático la validez algebraica de la operación composición. Desde este ámbito, se puede decir que la definición escolar es menos elaborada que la definición experta. Sin embargo no deja de ser compleja para los estudiantes si es que estos no dominan los conocimientos previos alusivos a dicho contenido tales como operatoria algebraica, valorización, operatoria de números racionales, el trabajo en el plano cartesiano como lo es la ubicación de puntos, figuras y la grafica de funciones lineales y afines, las proporcionalidades directa e inversa que permiten construir el concepto de función lineal y afín desde el ámbito de la modelación

matemática. Debido a todo lo mencionado podemos apreciar que la construcción del conocimiento de composición de funciones requiere de un dominio conceptual superior, el cual se corresponde con la complejidad de la definición experta de la composición de funciones.

Respecto al eje de geometría, el concepto de composición, es utilizado en la aplicación de transformaciones isométricas sucesivas en el plano cartesiano y para establecer propiedades de la composición de transformaciones isométricas. La definición escolar y la experta difieren respecto a los sistemas de representación con el cual se definen, ya que la definición experta se basa en una interpretación analítica a través del álgebra; mientras que la definición escolar se centra en la interpretación gráfica en el plano cartesiano, visualizando el comportamiento de las coordenadas cartesianas y de este modo poder realizar un análisis de carácter analítico, es decir a través del álgebra.

4.4 Análisis Fenomenológico

La composición de funciones ha estado presente implícitamente en nuestra vida cotidiana desde la antigüedad como es en el caso de las primeras civilizaciones donde se empleaba el trueque como manera de obtener elementos de primera necesidad ya que no existía el dinero; Un ejemplo de esto: Una persona cambiaba un caballo por nueve cabras, luego cambiaba una cabra por grano y agua. Al analizar la situación anterior se pueden apreciar la existencia de tres conjuntos los cuales se relacionan a través de una relación de dependencia en donde se establece a los caballos como el dominio y a las cabras como el recorrido; posteriormente se establece a las cabras como el dominio y el grano y agua como el recorrido, pudiendo de este modo establecer una relación entre caballos con el grano y el agua.

También se encuentra presente en la forma de llegar a algunos lugares dentro de grandes ciudades donde debes tomar más de una locomoción para llegar a tu destino, existiendo terminales intermedios donde poder realizar los transbordos. Lo anterior también se puede reflejar a gran escala donde se puede pensar en un viaje a otro continente en donde se hace necesario viajar ya sea por mar o en avión, para esto se debe ir a un puerto o un aeropuerto

respectivamente. O en aplicaciones que no se pueden ver y que debe haber pensamiento abstracto como por ejemplo: entender el proceso a través del cual los seres vivos llevan oxígeno hacia las células de todo el cuerpo.

Todas estas acciones entre otras permiten analizar el concepto de composición de funciones el cual se explica en términos simples como un conjunto de operaciones dependientes entre sí, que se realizan para transformar un elemento en otro bajo ciertas condiciones

Desde la mirada anterior, se comprende que la composición de funciones está presente en muchos ámbitos de nuestra vida cotidiana, lo que lo hace muy importante para el ámbito educativo; por lo que se hace necesario realizar un estudio de la composición de funciones desde el punto de vista de la enseñanza y proponer estrategias para lograr que los estudiantes entiendan la importancia de este conocimiento y la apliquen en su quehacer cotidiano.

4.5 Registros de Representación

Según Raymond Duval (2004) el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática requiere de la utilización del lenguaje natural o de imágenes, así como también de registros de representación.

En la matemática podemos utilizar distintos sistemas de escritura para expresar números, notaciones simbólicas, algebraicas, que son análogas al lenguaje natural. La enseñanza de la matemática involucra a los diferentes tipos de representación como lo son el Verbal, analítico, gráfico, tabular y figural, los cuales se describen a continuación:

4.5.1 Registro en Lenguaje Verbal:

Se refiere a la forma en la expresamos situaciones de nuestro entorno cotidiano a través de las palabras. Cabe mencionar que el lenguaje verbal puede ser transformado a cualquier sistema de representación.

4.5.2 Registro en Lenguaje Analítico:

Este tipo de registro corresponde a la utilización de expresiones algebraicas para la definición de funciones o composiciones de estas.

4.5.3 Registro Gráfico:

Corresponde a la representación de funciones en el plano cartesiano.

4.5.4 Registro Tabular:

Se refiere al establecimiento de una relación entre valores a través de funciones por medio de una tabla de valores.

4.5.5 Registro Figural:

Corresponde a la utilización de diagramas sagitales para establecer la relación entre los elementos de tres conjuntos. De esta forma comprender el concepto de función y composición, en la cual a cada elemento del conjunto de partida le corresponde un solo elemento del conjunto de llegada. Luego ese conjunto de llegada es utilizado como un nuevo conjunto de partida para establecer una nueva relación con un tercer conjunto que será interpretado como conjunto de llegada. De este modo es posible establecer una relación entre el primer conjunto mencionado con el tercer conjunto.

Verbal	Analítico	Gráfico	Tabular	Figural																
La relación que existe entre el puntaje obtenido en una prueba y la nota obtenida.	$f: A \rightarrow B$ $a \rightarrow f(a) = b$		<table border="1"> <thead> <tr> <th>Puntaje</th> <th>Nota</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>0</td><td>1,0</td></tr> <tr><td>1</td><td>2,0</td></tr> <tr><td>2</td><td>3,0</td></tr> <tr><td>3</td><td>4,0</td></tr> <tr><td>4</td><td>5,0</td></tr> <tr><td>5</td><td>6,0</td></tr> <tr><td>6</td><td>7,0</td></tr> </tbody> </table>	Puntaje	Nota	0	1,0	1	2,0	2	3,0	3	4,0	4	5,0	5	6,0	6	7,0	
Puntaje	Nota																			
0	1,0																			
1	2,0																			
2	3,0																			
3	4,0																			
4	5,0																			
5	6,0																			
6	7,0																			

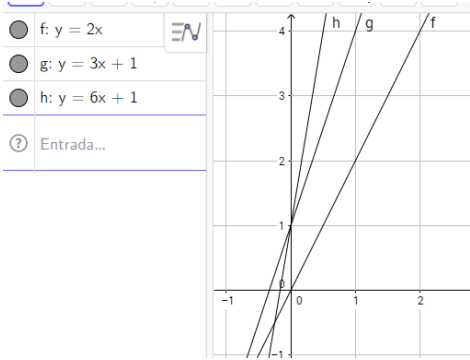
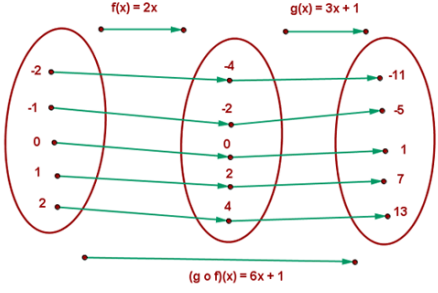
<p>Analítico:</p> $f(x) = 2x, g(x) = 3x + 1$ $(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(2x)$ $= 3(2x) + 1 = 6x + 1$ $(g \circ f)(1) = 6 \cdot 1 + 1 = 7$ $(g \circ f)(x) = h(x) = 6x + 1$	<p>Gráfico:</p> 																					
<p>Tabular:</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td colspan="3" style="text-align: center;">$(g \circ f)(x) = h(x) = 6x + 1$</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">$f(x) = 2x$</td> <td colspan="2" style="text-align: center;">$g(x) = 3x + 1$</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">-2</td> <td style="text-align: center;">-4</td> <td style="text-align: center;">-11</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">-1</td> <td style="text-align: center;">-2</td> <td style="text-align: center;">-5</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">0</td> <td style="text-align: center;">0</td> <td style="text-align: center;">1</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">1</td> <td style="text-align: center;">2</td> <td style="text-align: center;">7</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">2</td> <td style="text-align: center;">4</td> <td style="text-align: center;">13</td> </tr> </table>	$(g \circ f)(x) = h(x) = 6x + 1$			$f(x) = 2x$	$g(x) = 3x + 1$		-2	-4	-11	-1	-2	-5	0	0	1	1	2	7	2	4	13	<p>Figural:</p> 
$(g \circ f)(x) = h(x) = 6x + 1$																						
$f(x) = 2x$	$g(x) = 3x + 1$																					
-2	-4	-11																				
-1	-2	-5																				
0	0	1																				
1	2	7																				
2	4	13																				

Tabla 1: "Cuadro comparativo sistemas de representación"

Estos registros de representación, serán utilizados para el diseño de las actividades de la propuesta de enseñanza con el objetivo de que los estudiantes puedan comprender conceptos como el de función, función lineal y la composición de funciones mediante la interacción entre los diferentes tipos de registros.

Capítulo 5:

5 Análisis Cognitivo

En conformidad con Rico (2013), el análisis cognitivo busca organizar “el para qué” de estudiar un conocimiento, junto con el “hasta dónde” llegar en su aprendizaje, para lograrlo, una de las categorías alude a las expectativas de aprendizaje de los estudiantes, por lo mismo cada tema de conocimiento requiere establecer sus prioridades cognitivas, organizarlas y relacionarlas, y así determinar su objeto y alcance.

El estudio de la Composición de Funciones, se encuentran dentro del Programa de Estudio de primer año medio (MINEDUC, año 2011, p.45), específicamente en el eje: Álgebra y Funciones.

5.1 Expectativas de Aprendizaje Programa de Estudio

5.1.1 Objetivos Fundamentales

- Transformar expresiones algebraicas no fraccionarias utilizando diversas estrategias y utilizar las funciones lineales y afines como modelos de situaciones o fenómenos y representarlas gráficamente en forma manual o empleando herramientas tecnológicas.
- Comprender los conceptos y propiedades de la composición de funciones y utilizarlos para resolver problemas relacionados con las transformaciones isométricas.
- Aplicar modelos lineales que representan la relación entre variables, diferenciar entre verificación y demostración de propiedades y analizar estrategias de resolución de problemas de acuerdo con criterios definidos, para fundamentar opiniones y tomar decisiones.

5.1.2 Conocimientos Mínimos Obligatorios (CMO)

- Establecimiento de estrategias para transformar expresiones algebraicas no fraccionarias en otras equivalentes, empleando productos notables y factorizaciones.

- Resolución de problemas cuyo modelamiento involucre ecuaciones literales de primer grado.
- Análisis de las distintas representaciones de la función lineal, su aplicación en la resolución de diversas situaciones problema y su relación con la proporcionalidad directa.
- Estudio de la composición de funciones, análisis de sus propiedades y aplicación a las transformaciones isométricas.
- Utilización de software gráfico en la interpretación de la función afín, análisis de las situaciones que modela y estudio de las variaciones que se producen por la modificación de sus parámetros.

5.2 Limitaciones del Aprendizaje

Las limitaciones en el aprendizaje de la Composición de funciones, requieren de un análisis de errores y dificultades de los estudiantes para abordar el estudio.

Para Rico (1995), los errores son consecuencia del conocimiento que tienen los estudiantes al momento de abordar esa tarea, además del cómo lo utilizan para ello, mientras que *“las dificultades organizan los errores y se refieren al conocimiento que se pone en juego cuando los errores se producen”* (Gómez, 2002, p. 275).

Una de las posibles limitaciones se centra en las dificultades que puedan presentar los estudiantes al momento de aplicar el concepto de proporcionalidad para construir el conocimiento de la composición de funciones, así como también en el trabajo algebraico en la resolución de ecuaciones literales ya que no dominan los conceptos de inverso aditivo y multiplicativo.

5.3 Oportunidades de Aprendizaje

Las oportunidades de aprendizaje las consideraremos como las estrategias metodológicas y/o propuestas que el profesor entrega a los

estudiantes para superar las dificultades y errores que puedan presentar en el aprendizaje de un contenido.

Lo y Wheatly (1994) exponen que las oportunidades de aprendizaje son aquellas circunstancias desarrolladas dentro del aula y la escuela, para promover el aprendizaje de todos los estudiantes, que dependen del entorno en el cual son llevadas a cabo.

Para apoyar a los estudiantes en el desarrollo de las actividades propuestas se realizan preguntas abiertas al curso con el fin de que las dudas respecto de un procedimiento o instrucción de los problemas, sean resueltas por los estudiantes, por ejemplo si en un problema la relación tiempo distancia trae los valores del tiempo en minutos y la distancia en kilómetros, los estudiantes tendrán que transformar los minutos a horas, por lo que se debe aproximar a los estudiantes a la idea de que la relación tiempo distancia puede ser kilómetros y horas o bien metros y segundos; es en esta instancia donde se puede preguntar a los estudiantes a modo de activar conocimientos previos: ¿Cómo se transforman los minutos a horas?

Capítulo 6:

6 Análisis de instrucción

En el presente capítulo, se describe el diseño de las tareas y actividades así como también la planificación de clases y la gestión en el aula según lo mencionado por Rico (2013).

Finalizaremos este capítulo con el diseño del plan de clase, señalando las dificultades y errores asociados a la tarea y que tienen directa relación con las limitaciones de aprendizaje presentadas en el capítulo anterior.

6.1 Cuestionario Exploratorio (Actividad 1)

El cuestionario exploratorio, tiene como propósito conocer los conocimientos previos que poseen los estudiantes en cuanto a función y algunos conceptos asociados como dominio, recorrido, tipos de función, así como también de la ubicación de coordenadas en el plano cartesiano.

La implementación se realiza en el Liceo de Constitución, Establecimiento municipal de enseñanza Media de la comuna, el curso en el que se aplicara está formado por 15 varones y 14 damas. Se aplica en un Primero Medio debido a que en el último nivel de enseñanza básica se trabajan los conceptos asociados a función y plano cartesiano, por lo que se pretende averiguar cuáles son los aprendizajes y habilidades de los estudiantes con respecto a dichos temas.

Se inicia presentando el material a los jóvenes indicando en qué consiste. A continuación se leen las instrucciones de la actividad con la finalidad de que esta práctica se pueda desarrollar sin inconvenientes. En simples términos la actividad consta de responder algunas preguntas en forma escrita, con letra clara y ordenada, agregando ejemplos gráficos si lo consideran necesario en un tiempo estimado de 25 minutos.

6.1.1 Descripción de la Actividad

El cuestionario exploratorio (Actividad 1) está compuesto por 5 preguntas, las cuales tienen como propósito evidenciar las nociones que tienen los estudiantes acerca del concepto de función, tipos de función, dominio y recorrido, así como también del conocimiento que tienen acerca de la ubicación de coordenadas en el plano cartesiano.

A continuación, se describe la importancia que tiene cada una de las preguntas incorporadas en la actividad 1.

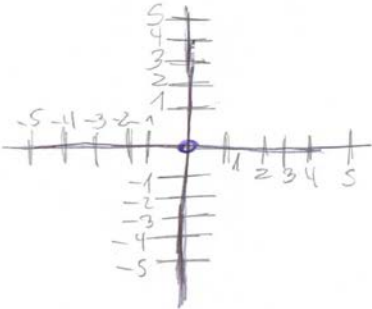
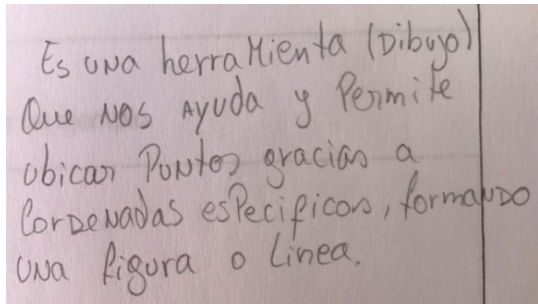
Actividad 1: Referido a la noción, tipos y grafica de una función lineal y afín.	
Pregunta	Justificación
<p>1. ¿Qué es el plano cartesiano? Explica con tus propias palabras y representa gráficamente.</p>	<p>En esta pregunta se espera que los estudiantes realicen mención a un sistema de coordenadas formado por dos ejes perpendiculares entre sí, además de que diferencien claramente cada eje por su orientación, horizontal en el caso del eje de las abscisas (eje X) y vertical en el caso del eje de las ordenadas (eje Y). Además se puede indicar que el plano cartesiano es aquel donde se ubican puntos o coordenadas cartesianas.</p> <p>Algunas formas de que puedan explicar con sus palabras puede ser:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Donde se ubican puntos • Una cruz • Dos rectas numéricas que se cruzan • Dos rectas perpendiculares • Está formado por el eje X y el eje Y • Está formado por una recta vertical y una horizontal • Donde se ubican puntos para formar líneas y figuras
<p>2. ¿Cómo se ubican puntos y figuras en el plano? Utiliza los puntos $(2, -3)$ y $(-3, 2)$ para describir tu procedimiento.</p>	<p>La ubicación de coordenadas cartesianas tiene como propósito que los estudiantes puedan diferenciar los ejes entre sí y aplicar el concepto de valor posicional. Se optó por estos puntos para verificar si notan la diferencia entre ellos y para detectar errores al momento de ubicarlos, ya que puede suceder que confundan la abscisa con la ordenada. Una forma de ubicar puntos en el plano cartesiano es realizar desplazamientos horizontales y luego verticales respectivamente. Es importante tener en cuenta que los desplazamientos en el eje X son hacia la izquierda si el signo es negativo y hacia la derecha si el signo es positivo. A continuación el desplazamiento en el eje Y es hacia abajo si el signo es negativo y hacia arriba si el signo es positivo.</p> <p>Otra manera es seguir la misma secuencia anterior pero usar los puntos cardinales en vez de hablar de izquierda, derecha,</p>

	<p>arriba y abajo; pues los estudiantes trabajan con su cuaderno en forma horizontal lo que hace que no dibujen hacia arriba ni hacia abajo pudiendo generar problemas de comprensión. En el eje de las abscisas desplazarse hacia el Oeste si el valor es negativo y hacia el Este si es positivo. En el eje de las ordenadas desplazarse hacia el sur si es negativo y hacia el norte si es positivo.</p>
<p>3. ¿Qué es una función? Puedes usar ejemplos</p>	<p>Se espera que los estudiantes describan una función como un proceso en el cual un elemento es transformado en otro mediante una acción o relación, la cual tiene condiciones establecidas.</p> <p>Posibles respuestas pueden ser:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Una relación entre dos conjuntos A y B. - Relación uno a uno entre los elementos de dos conjuntos. - Construcción de un diagrama sagital - Transformación de un elemento en otro
<p>4. ¿Qué son el dominio y el recorrido de una función?</p>	<p>De acuerdo con la interrogante anterior, establecer el dominio y el recorrido se simplifica a que los estudiantes mencionen que el dominio representa a los elementos que serán transformados por una acción y el recorrido será formado por aquellos elementos obtenidos a partir de dicha acción.</p> <p>Posibles respuestas pueden ser:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Valores de entrada y de salida - Elemento a transformar y elementos transformados - Conjunto de partida y de llegada
<p>5. ¿Cuándo una función es lineal? ¿Cuándo una función es afín? Apóyate con un ejemplo</p>	<p>Respecto a estas dos funciones se espera que los estudiantes puedan diferenciar de manera gráfica y algebraica a cual corresponde cada una de ellas.</p> <p>Una función es Lineal si su grafica coincide con el origen del plano. Algebraicamente se puede decir que la función es lineal si su coeficiente de posición es cero</p> <p>Una función es Afín si su grafica no coincide con el origen del plano. Algebraicamente se puede decir que la función es afín si su coeficiente de posición es distinto de cero.</p> <p>Algunas formas de diferenciar una función lineal de una afín es verbalizar que la lineal pasa por el origen del plano y la afín no. Esto también es fácil de describir mediante el dibujo de dichas rectas en el plano cartesiano.</p>

Tabla 2: "Justificación Cuestionario exploratorio"

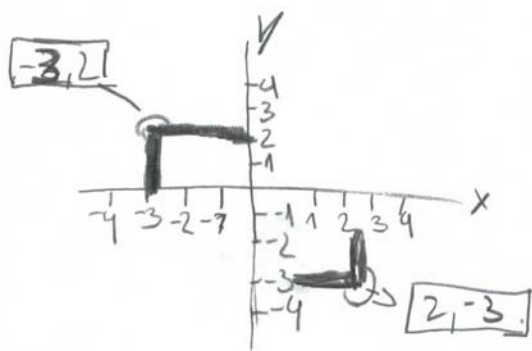
6.1.2 Resultados de la aplicación

A continuación se muestran los resultados obtenidos a partir de la implementación del cuestionario exploratorio.

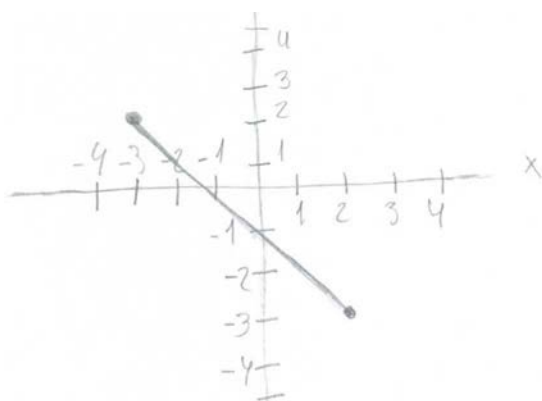
Actividad 1: Referido a la noción, tipos y grafica de una función lineal y afín.	
Pregunta 1	¿Qué es el plano cartesiano? Explica con tus propias palabras y representa gráficamente.
Evidencias:	
A1:	
	El plano cartesiano es formado por dos rectas perpendiculares, una horizontal y una vertical separados por un punto.
A2:	
El plano cartesiano es aquello en donde ubicábamos los puntos u ómeales de cada ubicación.	
A3:	
	
Pregunta 2	¿Cómo se ubican puntos y figuras en el plano? Utiliza los puntos $(2, -3)$ y $(-3, 2)$ para describir tu procedimiento.
Evidencias:	
A1:	

El primer número siempre se ubica en la línea X y el segundo en la Y (x,y)

A2:



A3:



Pregunta 3

¿Qué es una función? Puedes usar un ejemplo

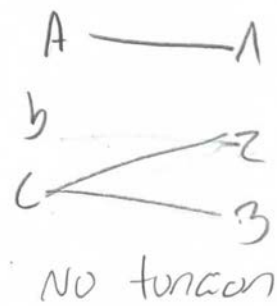
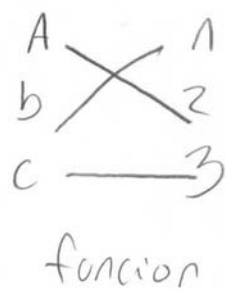
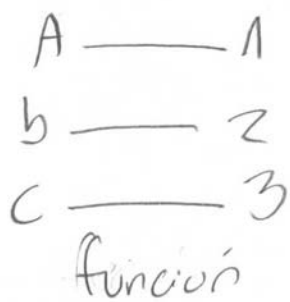
Evidencias:

A1:

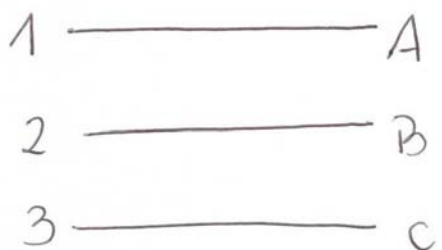
$$f(x) = x^2$$

Es la relación entre un conjunto x y un conjunto y

A2:



A3:

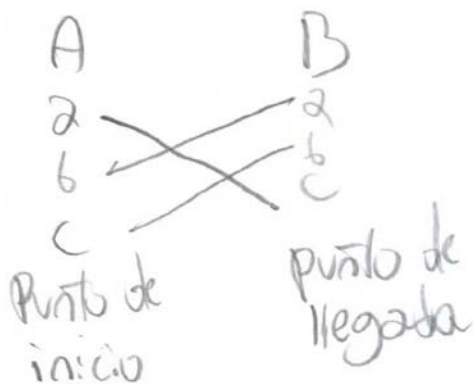


Pregunta 4

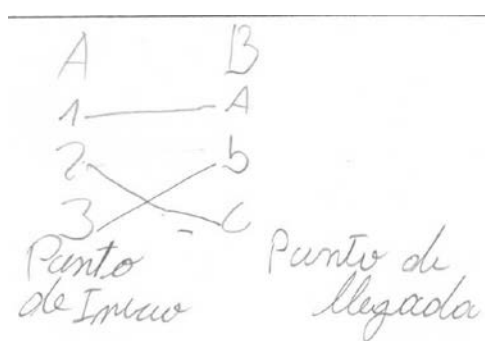
¿Qué son el dominio y el recorrido de una función?

Evidencias:

A1:



A2:




Pregunta 5	¿Cuándo una función es lineal? ¿Cuándo una función es afín? Apóyate con un ejemplo
<p>Evidencias:</p> <p>A1:</p> <p>$Y = mX + b$ m coeficiente de posición $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$</p> <p>$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ $M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$</p> <p>A2:</p>  <p>lineal afin.</p>	

Tabla 3: "Evidencias Cuestionario exploratorio"

Considerando las evidencias de la tabla anterior, se pueden construir las siguientes categorías de respuesta:

Respecto a la pregunta 1:

- Construye el plano dibujando las dos rectas, pero no las clásica
- Mencionan que sirve para ubicar puntos
- Dibuja el plano y destaca los ejes
- No entrega respuesta escrita

Respecto a la pregunta 2:

- Identifica la posición de los puntos, pero no registra el procedimiento con el cual obtiene dichas posiciones.
- Confunde la abscisa con la ordenada.
- Reconoce que el elemento a la izquierda se asocia con el eje X y el elemento de la derecha con el eje Y
- No entrega respuesta escrita

Respecto a la pregunta 3:

- Muestra de manera pictórica el ejemplo de función.
- Muestra ejemplos para indicar si es o no función.
- No entrega respuesta escrita

Respecto a la pregunta 4:

- Define el dominio como punto de inicio y el recorrido como punto de llegada
- Indica que el dominio es igual que el recorrido
- Los puntos por los que pasa en el plano

Respecto a la pregunta 5:

- Menciona el coeficiente de posición pero no indica cuando una función es lineal o afín
- Muestra gráficamente los dos casos e indica a cual corresponde cada uno en forma correcta.
- Muestra gráficamente dos casos de función afín

Al analizar las categorías se puede apreciar que los estudiantes tienen dificultades para expresarse en forma escrita, prefieren hacerlo con dibujos o gráficos.

Al analizarlas interrogantes del cuestionario exploratorio, se puede observar que en la primera pregunta, los estudiantes tienen una imagen mental de lo que es el plano cartesiano y saben que se emplea para ubicar puntos, figuras y graficar funciones. Sin embargo al analizar las respuestas de

la segunda interrogante, se puede observar que en muchos casos hay errores conceptuales como la distribución de los valores negativos en el eje de las abscisas, o que ubican erróneamente los puntos en el plano debido a que confunden la abscisa con la ordenada.

Respecto a la tercera y cuarta interrogante los estudiantes responden que una función relaciona los elementos de dos conjuntos. Sin embargo pocos estudiantes establecen la relación de dependencia de un conjunto con el otro y por consecuencia no entregan una respuesta a los conceptos de dominio y recorrido. Finalmente en la quinta interrogante se aprecia casi nula respuesta por parte de los estudiantes rescatando solo dos registros en donde hay un acercamiento a la respuesta, siendo una de ellas la grafica de ambas funciones (lineal y afín) y por otro lado la mención de concepto de coeficiente de posición sin lograr establecer que si dicho coeficiente es cero la función es lineal y en caso contrario la función es afín.

6.1.3 Dificultades y Errores

A continuación se clasifican las dificultades y errores en base a los resultados obtenidos:

Dificultad	Error (como se manifiesta la dificultad)
D1: Dificultad para comprender el significado de función	E1.1: Distribuyen de manera incorrecta los valores negativos en los ejes. E1.2: Confunden abscisa y ordenada. E1.3: No comprende el concepto de dominio y recorrido. E1.4: No diferencia una función lineal de una afín.
D2: Dificultad para formular una respuesta en forma escrita.	E2.1: Inconsistencia en las respuestas. E2.2: Definiciones escuetas. E2.3: Utiliza solo dibujos para responder

Tabla 4: "Dificultades y Errores cuestionario exploratorio"

De acuerdo a lo expuesto en la tabla anterior se reforzará los contenidos a través de la actividades, por ejemplo cuando deban ubicar coordenadas en el plano se les entregará el plano construido y con los valores numéricos de cada eje insertos en ellos. Además se le pedirá que completen tablas de valores con el fin de que puedan analizar la información de los problemas mediante distinto sistemas de representación. Se agregaran ítem adicionales a las situaciones de aprendizaje planteadas en las actividades, en donde los estudiantes resuelvan ejercicios de valorización y operatoria de expresiones algebraicas, todo esto

para reforzar el concepto de función, función lineal, función afín y también operatoria.

6.2 Diseño de Clase

El diseño de clase se basa en la creación de tareas como secuencias didácticas que se enmarcan en la teoría de situaciones didácticas ya que, y la estructura de análisis de la propuesta se basa en el análisis didáctico. Constituidas por una serie organizada “de unidades de información y propuestas de acción que el profesor suministra al alumno con diferentes intenciones” (Marín, 2009, p. 18)

Parcerisa (1996) clasifica las tareas de acuerdo a la funcionalidad que poseen en una secuencia de aprendizaje, y distingue:

- Tareas cuya finalidad es conocer los aprendizajes previos de los escolares
- Tareas para ayudar a la motivación y de relación con la realidad
- Tareas exploratorias fomentadoras de la interrogación y el cuestionamiento
- Tareas de elaboración y construcción de significados
- Tareas de ejercitación
- Tareas de síntesis

6.2.1 Diseño de Clase 1 Pokémon Go (Actividad 2)

Actividad n° 2

Objetivos: |

- Operar con números enteros y racionales.
- Aplicar conceptos de función y sus elementos.
- Modelar funciones a través de gráficos y tablas.

Instrucciones:

- Resuelve los siguientes problemas registrando los procedimientos necesarios para dicho proceso.
- Registra en forma escrita la respuesta de cada problema.
- Completa las tablas respetando los márgenes destinados para ello.

1. Daniel juega Pokémon Go y desea eclosionar algunos huevos de 2km. Para esto realiza caminatas desde su casa a la escuela ida y vuelta. Su velocidad al caminar es de 3 km/h. en promedio y tarda 20 minutos en llegar a la escuela.

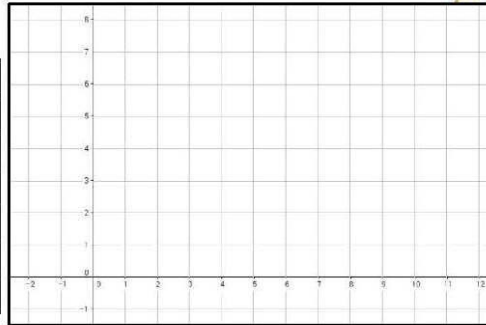
a) Si Daniel quiere eclosionar 6 huevos y puede hacerlo uno por vez, ¿Cuánto tiempo en horas le tomara realizar este objetivo?

b) ¿Cuántos días tendrá que ir al colegio Daniel para eclosionar los seis huevos?

Figura 17: "Tarea 1, parte 1"

- c) Construye una tabla a partir de la eclosión de huevos y luego elabora un gráfico de la situación.

Distancia recorrida en cierto tiempo	
Tiempo (horas)	Distancia (kilómetros)
0	



- d) Según el grafico, ¿a qué función corresponde?

2. Señala que funciones son lineales y que funciones son afines en cada caso.

	Lineal	Afin
$f(x) = 2x$	X	
a) $g(x) = \frac{3}{4}x$		
b) $h(x) = 2x - 1$		
c) $i(x) = 5x$		
d) $j(x) = -3x + 2$		
e) $k(x) = 3,4x$		

3. Evalúa cada función con los valores dados

$f(x) = -4x + 2 \rightarrow f(3) = -4 \cdot 3 + 2 = -12 + 2 = -10$
a) $g(x) = 3x + 5 \rightarrow g(2) =$
b) $h(x) = -5x + 8 \rightarrow h(-3) =$
c) $i(x) = 6 - x \rightarrow i(0) =$
d) $j(x) = 2 - 5x \rightarrow j(-1) =$

Figura 18: "Tarea 1 parte 2"

El diseño de esta actividad tiene el propósito de que los estudiantes se relacionen con la resolución de problemas y que la consideren como parte de su vida ya sea educativa o de esparcimiento. De este modo es que se plantea esta actividad comenzando con una situación alusiva a la aplicación para Smartphone “Pokémon Go”, donde se analiza una de las operaciones que posee el juego la cual se relaciona con el concepto de proporcionalidad directa, específicamente del concepto distancia-tiempo en el cual tendrán que responder algunas interrogantes, completar tablas y crear gráficos. Finalmente se les pide a los estudiantes que identifiquen el tipo de función al que corresponde la tabla y gráfico alusivos a la situación planteada.

Las preguntas a y b de la pregunta 1 requieren que el estudiante determine las variables independientes y dependientes respectivamente, así como también realizar las operaciones aritméticas necesarias para resolver el problema. También se incorpora la relación horas-días y tiempo-distancia con la intención de que puedan aplicar el concepto de proporcionalidad directa. Las preguntas c y d dirigen al estudiante a trabajar con la creación de tablas y la directa relación que tiene con el concepto de plano cartesiano a través de la ubicación de coordenadas y finalmente que observen la distribución de las coordenadas que representan los puntos de la situación para dilucidar que corresponde a una función lineal.

En la segunda sección de la actividad se espera que los estudiantes puedan diferenciar una función lineal de una afín a través de expresiones algebraicas.

Para finalizar, en la tercera sección se pretende que los estudiantes comprendan que la valorización de expresiones algebraicas se reduce a reemplazar un valor numérico en la variable de una función, además de que aprecien que ingresa un valor numérico y resulta otro (concepto de valor de entrada y salida de una función).

6.2.1.1 Plan de Clases 1

El siguiente plan de clases tiene por objetivo, que los estudiantes comprendan el concepto de función lineal y afín y su directa relación con la

proporcionalidad directa a través de una situación de modelación. Esta actividad será resuelta en forma grupal la cual se enmarca en la teoría de situaciones didácticas por medio de la aplicación para Smartphone “Pokémon Go”. Como una forma de atraer a los estudiantes a participar de la actividad es que se realizara una serie comentarios respecto a la idea de función, comentando que este conocimiento se involucra diariamente con muchos sucesos de la vida diaria donde una variable depende de otra, como por ejemplo: los megas que se pueden usar en sus teléfonos dependen de la recarga que hagan, la nota que se obtiene en una prueba depende del puntaje, el total a pagar en la boleta del agua depende de los metros cúbicos que se utilicen . En este punto se les puede invitar a los estudiantes a pensar en un ejemplo.

Continuaremos describiendo la actividad a realizar, resolviendo dudas que haya sobre las interrogantes de la actividad para que los estudiantes puedan abordarlas y responderlas. A continuación se realiza la formalización del contenido tratado a través de una presentación donde se muestra a los estudiantes las respuestas a cada interrogante y finalmente se realizan comentarios y se responden a dudas que haya acerca de la actividad.

Plan De Clases

Actividades de aprendizaje	Intervención docente	Indicadores de la marcha de clase
1. Contrato Pedagógico se definen normas de trabajo entre docente y estudiante para la realización de la clase	1.1 Contrato Pedagógico El docente hace énfasis en la importancia del contrato, pues a través de este podrán definir mecanismos de acción	¿Los estudiantes participan en la elaboración del contrato pedagógico? 5 minutos
2. Planteamiento de objetivo(s): Operar con números enteros y racionales. Aplicar conceptos de función y sus elementos. Modelar funciones a través de gráficos y tablas.	2.1 Plantea situación inicial. se desea mostrar que el conocimiento matemático se involucra con situaciones cotidianas	¿Los estudiantes entienden el propósito del objetivo planteado? 5 minutos ¿Se cumple el tiempo?
3. Activación de conocimientos previos	3.1 Activación de conocimientos previos	¿Los estudiantes reconocen los conceptos suficientes

<p>Se les comenta a los estudiantes la idea de función y su directa relación con sucesos cotidianos donde una variable depende de otra.</p>	<p>Se menciona a los estudiantes la importancia de la operatoria, de la proporcionalidad directa, identificación de variables involucradas y la regla de tres.</p>	<p>para lograr el objetivo de la clase?</p> <p style="text-align: right;">10 minutos</p> <p>¿Se cumple el tiempo?</p>
<p>3.1 Actividad Pokémon Go Esta actividad tiene como propósito que los estudiantes construyan el concepto de función a través de modelación matemática.</p> <p>a) Si Daniel quiere eclosionar 6 huevos y puede hacerlo uno por vez, ¿Cuánto tiempo en horas le tomara realizar este objetivo?</p> <p>b) ¿Cuantos días tendrá que ir al colegio Daniel para eclosionar los seis huevos?</p> <p>c) Construye una tabla a partir de la eclosión de huevos y luego elabora un gráfico de la situación.</p> <p>d) Según el grafico, ¿a qué función corresponde?</p> <p>2. Señala que funciones son lineales y que funciones son afines en cada caso.</p> <p>3. Evalúa cada función con los valores dados.</p>	<p>3.1 Actividad Pokémon Go Lectura de actividad</p> <p>¿Qué relación hay entre la distancia y el tiempo que demora Daniel en eclosionar un huevo?</p> <p>¿Cómo se transforman las horas a minutos? ¿Y los minutos a horas?</p> <p>¿Cuántos huevos puede Daniel eclosionar por día?</p> <p>¿Recuerdas como ubicar coordenadas en el plano cartesiano?</p> <p>¿Cómo se llama a la intersección entre los ejes coordenados X e Y?</p> <p>¿Cuándo una función es lineal?</p> <p>¿Cuándo una función es afín?</p> <p>¿Recuerdan que es el coeficiente de posición?</p> <p>¿En qué orden se resuelve la operatoria combinada?</p> <p>¿Recuerdan la frase PAPOMUDAS?</p>	<p>¿Los estudiantes responden favorablemente a cada pregunta?</p> <p style="text-align: right;">40 minutos</p> <p>¿Se cumple el tiempo?</p>
<p>3.3 Institucionalización</p>	<p>En este punto el profesor muestra en pizarra formas de responder al problema Como Daniel debe eclosionar 6 huevos y cada uno de ellos eclosiona a los dos kilómetros, entonces $2 \times 6 = 12$ Debe recorrer 12 kilómetros Además se sabe que Daniel camina 20 minutos para ir a la escuela y 20 para volver. Y se sabe también que Daniel camina a razón de 3km por hora (60 minutos) por lo que si se divide los 60 minutos por la velocidad de Daniel ($60 : 3 =$</p>	<p style="text-align: right;">15 minutos</p>

<p>puntos para formar una línea recta.</p> <p>D6: Los estudiantes no logran identificar el tipo de función al que corresponde la grafica.</p>	
<p>Síntesis</p> <p>D7: Relevancia de la clase</p>	<p>Síntesis</p> <p>D7.1: ¿Cuándo una función es lineal?</p> <p>D7.2: ¿Cómo se transforma las horas a minutos? ¿Y los minutos a horas?</p>

Tabla 6: "Posibles dificultades y preguntas de devolución"

Con esta planificación se espera que los estudiantes comprendan la importancia de los conocimientos ya adquiridos, y como esos conocimientos pueden influir en la adquisición de los nuevos. Pretende fomentar en los estudiantes el desarrollo de pensamiento matemático a través de la resolución de problemas y el aprendizaje colaborativo.

6.2.2 Diseño de Clase 3 Intercambio Pokémon (Actividad 3)

Actividad n° 3

Número de grupo	
Curso	
Objetivo	<ul style="list-style-type: none"> • Aplicar concepto de proporcionalidad compuesta • Comprender el concepto de composición de funciones. • Identificar dominio y recorrido de la compuesta de funciones.
Instrucciones	<ul style="list-style-type: none"> • Lea y responda cada pregunta en forma breve. • Puede.

1. En el juego “Pokémon Go” se desea implementar los intercambios de estas criaturas digitales. Para esto se establece una tabla comparativa de intercambio entre estos fascinantes pokémon según el tipo como se muestra a continuación.

N° Pokémon de Tipo		Equivalen		N° Pokémon de Tipo
10 Pokémon de Agua		≡		5 Pokémon de Fuego
3 Pokémon de Fuego		≡		5 Pokémon Eléctricos

- a) Encuentre una relación que permita establecer una equivalencia entre pokémon de tipo agua- fuego y luego fuego – eléctricos.

- b) Daniel tiene 30 pokémon de agua para intercambiar. ¿Cuántos pokémon eléctricos puede obtener con su intercambio?

- c) Establecer una relación entre pokémon de agua y eléctricos.

Figura 19: “Actividad 3 parte 1”

- d) Determine los valores de la variable independiente para que las soluciones obtenidas sean pertinentes.



Figura 20: "Actividad 3 parte 2"

El propósito de esta actividad es promover el aprendizaje de la composición de funciones, basado en la modelación de una situación la cual tiene relación con la actividad realizada en la clase anterior empleando conocimientos previos tales como función lineal y afín, proporcionalidad directa, regla de tres, interpretación de diagramas sagitales para la identificación de dominio y recorrido de funciones compuestas.

La primera parte de la actividad se origina a partir de una función alusiva a la aplicación para Smartphone "Pokémon Go", la cual consiste en intercambiar pokémon con otros usuarios a fin de coleccionar a todas las criaturas digitales. Para esto se establecen condiciones necesarias para que se produzcan dichos intercambios. A partir de la condición de intercambio surgen algunas preguntas las cuales dirigen a los estuantes a crear dos relaciones de proporcionalidad directa las cuales se deben relacionar entre sí para dar origen a la proporcionalidad compuesta y a través de este proceso poder establecer que la composición de funciones está relacionada con la composición de proporciones en forma directa.

6.2.2.1 Plan de Clases 2

Plan De Clases

Actividades de aprendizaje	Intervención docente	Indicadores de la marcha de clase
1. Contrato Pedagógico se definen normas de trabajo entre docente y estudiante para la realización de la clase	1.1 Contrato Pedagógico El docente hace énfasis en la importancia del contrato, pues a través de este podrán definir mecanismos de acción. Indicar a los estudiantes que pueden formar grupos de tres personas	¿Los estudiantes participan en la elaboración del contrato pedagógico? 5 minutos

<p>2. Planteamiento de objetivo(s):</p> <ul style="list-style-type: none"> • Aplicar concepto de proporcionalidad compuesta • Comprender el concepto de composición de funciones. Identificar dominio y recorrido de la compuesta de funciones. 	<p>2.1 Una forma de acercar a los estudiantes a este saber es comentar situaciones en donde se puede ver reflejado el concepto de proporcionalidad compuesta.</p>	<p>¿Los estudiantes entienden el propósito del objetivo planteado?</p> <p style="text-align: right;">5 minutos</p> <p>¿Se cumple el tiempo?</p>
<p>3. Activación de conocimientos previos</p>	<p>Se puede recordad la idea de dominio y recorrido para que los estudiantes analizar la situación propuesta así como también la regla de tres para su aplicación de la proporcionalidad directa y compuesta.</p>	<p>10 MINUTOS</p> <p>¿Se cumple el tiempo?</p>
<p>3.1 Actividad Intercambio Pokémon</p> <p>1. En el juego “Pokémon Go” se desea implementar los intercambios de estas criaturas digitales. Para esto se establece una tabla comparativa de intercambio entre estos fascinantes pokémon según el tipo como se muestra a continuación.</p> <p>a) Encuentre una relación que permita establecer una equivalencia entre pokémon de tipo agua- fuego y luego fuego – eléctricos.</p> <p>b) Daniel tiene 30 pokémon de agua para intercambiar. ¿Cuántos pokémon eléctricos puede obtener con su intercambio?</p> <p>c) Establecer una relación entre pokémon de agua y eléctricos.</p> <p>d) Determine los valores de la variable independiente para que las soluciones obtenidas sean</p>	<p>3.1 Actividad Intercambio Pokémon</p> <p>Leer actividad con el curso.</p> <p>¿Qué relación hay entre los pokémon de agua y los de fuego?</p> <p>¿Y entre los de fuego y los eléctricos?</p> <p>¿A cuántos pokémon de fuego corresponderá los 30 de agua? A continuación cuantos pokémon eléctricos puedo obtener a partir de los pokémon de fuego obtenidos.</p> <p>¿Qué relación puedes establecer entre pokémon de agua y eléctricos?</p> <p>¿Puedes indicar cuáles son las variables dependiente e independiente de la situación?</p> <p>¿Es igual ejercicio a que el del ejemplo?</p>	<p>40 minutos</p>

<p>pertinentes.</p> <p>2. Expresa mediante una sola función las siguientes composiciones de funciones</p> <p>¿Qué puedes decir del ejercicio a respecto del ejemplo? ¿Qué puedes decir de los ejercicios c y d? ¿Y de los ejercicios e y f? ¿Qué puedes decir de la función i en los ejercicios g y h?</p> <p>3. Identificar el dominio y recorrido de la composición de funciones expresadas en diagramas sagitales. ¿Cómo obtuviste los conjuntos solicitados? Justifica tu respuesta</p>	<p>¿Qué sucede con los resultados en los ejercicios c y d?</p> <p>¿Y en los ejercicios e y f?</p> <p>¿Qué puedes decir de la función i?</p> <p>Recuerda que el dominio es el conjunto de partida de una función y el recorrido es el conjunto de llegada</p>	
<p>3.2 Institucionalización</p>	<p>En este punto se muestra una presentación con la respuesta experta</p>	<p>15 minutos</p>
<p>Síntesis ¿Qué aprendieron hoy? ¿Qué importancia le atribuyen a esta actividad?</p> <p>¿Cuántos pokémon eléctricos puede obtener Daniel si quiere intercambiar 18 pokémon de agua?</p>	<p>Síntesis 10 minutos</p> <p>Ejercicio 5 minutos</p>	

Tabla 7: "Plan de clases Actividad 3"

6.2.2.2 Oportunidades de aprendizaje

Dificultades	Devoluciones
<p>Intercambio Pokémon</p> <p>D1: No comprende el enunciado, o no logra establecer la relación entre lo escrito y lo que se pide.</p> <p>Sistema</p> <p>D2: Justificaciones inadecuadas de proposiciones o aplica en forma incorrecta la regla de tres.</p> <p>D3: No logra conectar ambas relaciones</p>	<p>Intercambio Pokémon</p> <p>D1.1: Primero hacer una lectura grupal. Si no da resultado realizar preguntas como ¿Cómo se representa matemáticamente cada situación?</p> <p>D2.1: ¿Cómo lo abordaron? recuerden el concepto de proporcionalidad directa</p> <p>D3.1: Observa la respuesta a la pregunta anterior ¿Si tengo una cantidad a de pokémon de agua?</p>

<p>D4: Dificultades concomitantes de dominio y recorrido</p> <p>D5: Dificultades para valorizar las expresiones</p> <p>D6: Dificultades para realizar operaciones aritméticas</p> <p>D7: No logra determinar que la función i es constante</p> <p>D8: No logra identificar el dominio y el recorrido</p>	<p>D4.1: En caso de presentar problemas con conocimientos previos, se puede recurrir a recordar la actividad de la eclosión de huevos si demora 40 minutos en eclosionar un huevo ¿Cuántos tardara en eclosionar 3 huevos?</p> <p>D5.1: ¿Qué ocurre con los resultados del ejemplo y del ejercicio a?</p> <p>D6.1: ¿Qué ocurre con los ejercicios c, d, e y f?</p> <p>D7.1: ¿Qué puedes decir de la función i de los ejercicios g y h?</p> <p>D8: Recordar que el dominio está formado por los valores de entrada y el recorrido está formado por los valores de salida de una función.</p>
<p>Síntesis</p> <p>D7: Relevancia de la clase</p>	<p>Síntesis</p> <p>D7.1: ¿Qué aprendimos hoy?</p> <p>D7.2: ¿Qué elementos debo considerar para componer funciones?</p>

Tabla 8: "Posibles dificultades y preguntas de devolución"

Capítulo 7:

7 Análisis de Actuación

En el presente capítulo el profesor determina los conocimientos y aprendizajes que adquirieron los estudiantes a través de la propuesta de enseñanza y aprendizaje, basado en la descripción de sus actuaciones. Se plantean también las dificultades y obstáculos que presentaron y si fueron o no superados.

En resumen este capítulo describe el análisis a posteriori, donde se describen y determina las destrezas, habilidades, estrategia, razonamiento y errores que los estudiantes realizaron, siendo comparado con lo previsto en el análisis de instrucción. Finalmente y considerando el capítulo anterior se propone una reformulación de las actividades.

7.1 Implementación de Clase 1

7.1.1 Percepción del docente que implementa la clase

En la implementación de la segunda clase hay otra disposición al trabajo debido a que esta vez se realizará en grupos de tres personas.

Se da inicio a la clase proyectando el objetivo de la clase en la pizarra, seguido del proceso de activación de conocimientos previos indicando que la actividad está formada por tres ítems. Una parte de resolución de problemas y dos de aplicación. En las cuales se aplicará la noción de proporcionalidad directa, función, tablas y gráfica en el plano cartesiano.

En el desarrollo de esta actividad se pudo percibir una actitud distinta a la de la primera actividad ya que los estudiantes podían discutir acerca de los procedimientos que querían implementar y debatían acerca de la validez de los mismos. Cuando estaban finalizando el primer apartado de la actividad el cual contemplaba 4 interrogantes algunos estudiantes comentan “profe estamos haciendo lo mismo que en el cuestionario”. Este comentario nos permite apreciar la significatividad que tiene para los estudiantes el plantear actividades que se acercan a sus intereses y además que dichas actividades estén directamente relacionadas

En algunos casos se puede apreciar que tienen algunas dificultades con la operatoria, pero entre pares resuelven dudas y corrigen sus procedimientos.

A diferencia de la actividad anterior los estudiantes finalizan la actividad antes de que se acabe el tiempo.

7.1.2 Contraste de implementación 1 y planificación de la clase

Momento	Logros	Dificultades
Inicio	<ul style="list-style-type: none"> • Presentación de los objetivos de la clase • Basados en el ámbito epistemológico se menciona ejemplos donde se aplica la proporcionalidad directa para la resolución de problemas • Se lee las preguntas de la actividad y se da el espacio para aclarar dudas. 	<ul style="list-style-type: none"> • Nuevamente se pierde bastante tiempo por la interrupción de estudiantes que ingresa tarde a la sala de clases • Se aclara la prioridad de la operatoria combinada para resolver ítem 3
Desarrollo	<ul style="list-style-type: none"> • Se hace el comentario en forma de pregunta acerca de cómo transformar los minutos a horas y viceversa. • Los estudiantes logran responder a las interrogantes sin grandes dificultades. • Los estudiantes comentan en sus grupos y contribuyen al desarrollo de las actividades 	<ul style="list-style-type: none"> • Tienen dificultades para establecer la transformación de minutos a horas • Se hace necesario recordar concepto de coeficiente de posición para que los estudiantes puedan resolver el ítem 2
Cierre	<ul style="list-style-type: none"> • Se realizó una institucionalización de los contenidos a través de una presentación power point, en la cual se evidenciaron las respuestas a las interrogantes. 	<ul style="list-style-type: none"> •

Tabla 9: "Contraste planificación-implementación"

7.1.3 Análisis de las producciones de los estudiantes (Implementación 1)

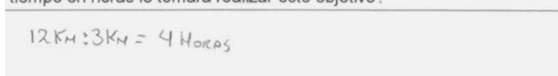
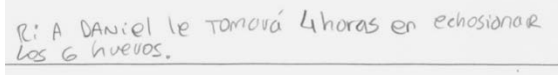
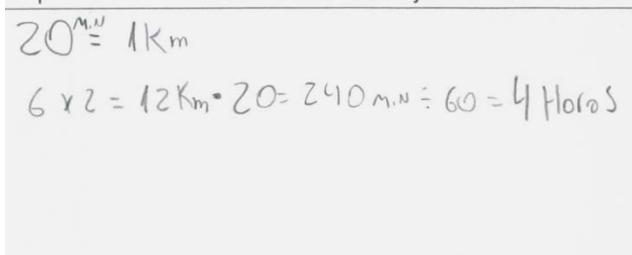
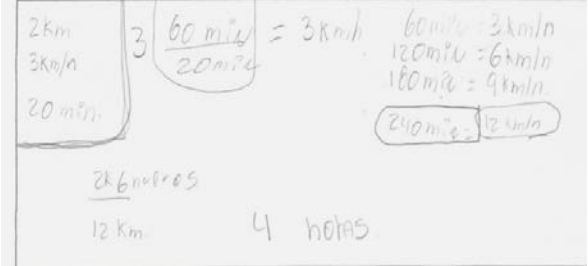
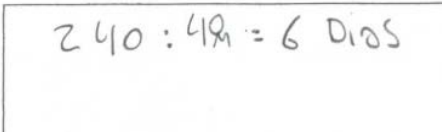
Segundo Momento: Pokémon Go	<p>Objetivo Específico: Operar con números racionales.</p> <p>Modelar situaciones, utilizando funciones lineales.</p> <p>Representar gráficamente funciones lineales y afines.</p>
Actividad De Aprendizaje:	
1. Daniel juega Pokémon Go y desea eclosionar algunos huevos de 2km. Para esto realiza	

caminatas desde su casa a la escuela ida y vuelta. Su velocidad al caminar es de 3 km/h. en promedio y tarda 20 minutos en llegar a la escuela.

- Si Daniel quiere eclosionar 6 huevos y puede hacerlo uno por vez, ¿Cuánto tiempo en horas le tomara realizar este objetivo?
- ¿Cuántos días tendrá que ir al colegio Daniel para eclosionar los seis huevos?
- Construye una tabla a partir de la eclosión de huevos y luego elabora un gráfico de la situación.
- Según el grafico, ¿a qué función corresponde?

2. Señala que funciones son lineales y que funciones son afines en cada caso.

3. Evalúa cada función con los valores dados.

Comentarios Y Reflexiones	Evidencia
<p>Pregunta 1.a:</p> <p>De los 9 grupos de trabajo solo 4 realizaron procedimientos destacando el ejemplo E1.</p> <p>En el caso de E2 también resuelven el problema en forma correcta.</p> <p>Finalmente en los ejemplos E3 y E4 aplicando operaciones diferentes a las anteriores lograron determinar la respuesta en forma correcta</p>	<p>E1: </p> <p>E2: </p> <p></p> <p>E3: </p>
Comentarios Y Reflexiones	Evidencia
<p>Pregunta 1.b:</p> <p>En esta interrogante hay 7 grupos que registran la respuesta correcta. Sin embargo solo 4 justifican registrando un procedimiento para llegar al resultado.</p>	<p>E1: </p>

E2:

Se demoraria 6 dias
 40 m = Llegada y salida = 1 dia = 1 huevo
 y como son 6 huevos son 6 dias

E3:

20 + 20 = 1 20 + 20 = 6
 20 + 20 = 2
 20 + 20 = 3 Se demoraria 6 Dias
 20 + 20 = 4
 20 + 20 = 5

Comentarios Y Reflexiones

Pregunta 1.c:

Respecto a la pregunta c se puede observar que todos los grupos completan la tabla con la relación kilómetros- horas a excepción de un grupo que hace la relación de 20 minutos por 1 kilometro como se muestra en las figuras E1 y E2.

En cuanto a la gráfica de la situación solo el grupo que registró los datos de la tabla en porciones de 20 minutos no realizo la gráfica.

En E3 se evidencia de una de las representaciones graficas de la situación.

Evidencia

gráfico de la situación.

E1:

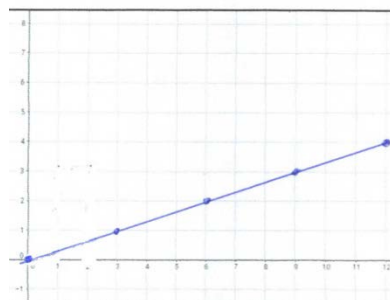
Distancia recorrida en cierto tiempo	
Tiempo (horas)	Distancia (kilómetros)
0	0 Km
1	3 Km
2	6 Km
3	9 Km
4	12 Km

E2:

c) Construye una tabla a partir de la gráfico de la situación.

Distancia recorrida en cierto tiempo	
Tiempo (horas)	Distancia (kilómetros)
0	0 Km
20 minutos	1 Km
40 minutos	2 Km
60 minutos	3 Km

E3:



Comentarios Y Reflexiones	Evidencia																																										
<p>Pregunta 1.d</p> <p>En esta interrogante un grupo indica que la grafica corresponde a una función afín. El grupo que realizo la tabla usando la representación en minutos en la variable tiempo no responde la pregunta y el resto responde de manera correcta En las figuras E1, E2 y E3 se puede apreciar los registros visuales.</p>	<p>E1: Corresponde a una función afín</p> <p>E2: Función lineal porque pasa por el 0</p> <p>E3:</p> <hr/> <p>Corresponde a función lineal.</p>																																										
Comentarios Y Reflexiones	Evidencia																																										
<p>Pregunta 2:</p> <p>En cuanto a esta pregunta, responden de manera correcta casi todos los grupos; siendo el mismo grupo que completo la tabla con el tiempo en minutos el que no pudo clasificar en forma correcta (marco que todas las funciones eran lineales como se muestra en E1) a qué tipo de función correspondían las funciones expresadas en forma algebraica. En E2 se puede observar la manera correcta de clasificar.</p>	<p>E1:</p> <table border="1" data-bbox="670 795 1292 1019"> <thead> <tr> <th></th> <th>Lineal</th> <th>Afín</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>$f(x) = 2x$</td> <td>X</td> <td></td> </tr> <tr> <td>a) $g(x) = \frac{3}{4}x$</td> <td>X</td> <td></td> </tr> <tr> <td>b) $h(x) = 2x - 1$</td> <td>X</td> <td></td> </tr> <tr> <td>c) $i(x) = 5x$</td> <td>X</td> <td></td> </tr> <tr> <td>d) $j(x) = -3x + 2$</td> <td>X</td> <td></td> </tr> <tr> <td>e) $k(x) = 3,4x$</td> <td>X</td> <td></td> </tr> </tbody> </table> <p>E2:</p> <table border="1" data-bbox="646 1097 1364 1355"> <thead> <tr> <th></th> <th>Lineal</th> <th>Afín</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>$f(x) = 2x$</td> <td>X</td> <td></td> </tr> <tr> <td>a) $g(x) = \frac{3}{4}x$</td> <td>X</td> <td></td> </tr> <tr> <td>b) $h(x) = 2x - 1$</td> <td></td> <td>X</td> </tr> <tr> <td>c) $i(x) = 5x$</td> <td>X</td> <td></td> </tr> <tr> <td>d) $j(x) = -3x + 2$</td> <td></td> <td>X</td> </tr> <tr> <td>e) $k(x) = 3,4x$</td> <td>X</td> <td></td> </tr> </tbody> </table>		Lineal	Afín	$f(x) = 2x$	X		a) $g(x) = \frac{3}{4}x$	X		b) $h(x) = 2x - 1$	X		c) $i(x) = 5x$	X		d) $j(x) = -3x + 2$	X		e) $k(x) = 3,4x$	X			Lineal	Afín	$f(x) = 2x$	X		a) $g(x) = \frac{3}{4}x$	X		b) $h(x) = 2x - 1$		X	c) $i(x) = 5x$	X		d) $j(x) = -3x + 2$		X	e) $k(x) = 3,4x$	X	
	Lineal	Afín																																									
$f(x) = 2x$	X																																										
a) $g(x) = \frac{3}{4}x$	X																																										
b) $h(x) = 2x - 1$	X																																										
c) $i(x) = 5x$	X																																										
d) $j(x) = -3x + 2$	X																																										
e) $k(x) = 3,4x$	X																																										
	Lineal	Afín																																									
$f(x) = 2x$	X																																										
a) $g(x) = \frac{3}{4}x$	X																																										
b) $h(x) = 2x - 1$		X																																									
c) $i(x) = 5x$	X																																										
d) $j(x) = -3x + 2$		X																																									
e) $k(x) = 3,4x$	X																																										
Comentarios Y Reflexiones	Evidencia																																										
<p>Pregunta 3:</p> <p>Respecto al tercer ítem se puede apreciar que se cometen errores en la multiplicación de números negativos (E1); así como también en el caso de un grupo que registra que $6-0=0$(E2). Por consecuencia no llegan al resultado esperado. Solo dos grupos resuelven de manera correcta (E3).</p>	<p>E1:</p> <table border="1" data-bbox="622 1500 1364 1657"> <tbody> <tr> <td>$f(x) = -4x + 2$</td> <td>\rightarrow</td> <td>$f(3) = -4 \cdot 3 + 2 = -12 + 2 = -10$</td> </tr> <tr> <td>a) $g(x) = 3x + 5$</td> <td>\rightarrow</td> <td>$g(2) = 3 \cdot 2 + 5 = 6 + 5 = 11$</td> </tr> <tr> <td>b) $h(x) = -5x + 8$</td> <td>\rightarrow</td> <td>$h(-3) = -5 \cdot -3 + 8 = 15 + 8 = 23$</td> </tr> <tr> <td>c) $i(x) = 6 - x$</td> <td>\rightarrow</td> <td>$i(0) = 6 - 0 = 6$</td> </tr> <tr> <td>d) $j(x) = 2 - 5x$</td> <td>\rightarrow</td> <td>$j(-1) = 2 - 5 \cdot -1 = 2 + 5 = 7$</td> </tr> </tbody> </table> <p>E2:</p> <table border="1" data-bbox="622 1769 1340 1915"> <tbody> <tr> <td>$f(x) = -4x + 2$</td> <td>\rightarrow</td> <td>$f(3) = -4 \cdot 3 + 2 = -12 + 2 = -10$</td> </tr> <tr> <td>a) $g(x) = 3x + 5$</td> <td>\rightarrow</td> <td>$g(2) = 3 \cdot 2 + 5 = 6 + 5 = 11$</td> </tr> <tr> <td>b) $h(x) = -5x + 8$</td> <td>\rightarrow</td> <td>$h(-3) = -5 \cdot -3 + 8 = 15 + 8 = 23$</td> </tr> <tr> <td>c) $i(x) = 6 - x$</td> <td>\rightarrow</td> <td>$i(0) = 6 - 0 = 6$</td> </tr> <tr> <td>d) $j(x) = 2 - 5x$</td> <td>\rightarrow</td> <td>$j(-1) = 2 - 5 \cdot -1 = 2 + 5 = 7$</td> </tr> </tbody> </table> <p>E3:</p>	$f(x) = -4x + 2$	\rightarrow	$f(3) = -4 \cdot 3 + 2 = -12 + 2 = -10$	a) $g(x) = 3x + 5$	\rightarrow	$g(2) = 3 \cdot 2 + 5 = 6 + 5 = 11$	b) $h(x) = -5x + 8$	\rightarrow	$h(-3) = -5 \cdot -3 + 8 = 15 + 8 = 23$	c) $i(x) = 6 - x$	\rightarrow	$i(0) = 6 - 0 = 6$	d) $j(x) = 2 - 5x$	\rightarrow	$j(-1) = 2 - 5 \cdot -1 = 2 + 5 = 7$	$f(x) = -4x + 2$	\rightarrow	$f(3) = -4 \cdot 3 + 2 = -12 + 2 = -10$	a) $g(x) = 3x + 5$	\rightarrow	$g(2) = 3 \cdot 2 + 5 = 6 + 5 = 11$	b) $h(x) = -5x + 8$	\rightarrow	$h(-3) = -5 \cdot -3 + 8 = 15 + 8 = 23$	c) $i(x) = 6 - x$	\rightarrow	$i(0) = 6 - 0 = 6$	d) $j(x) = 2 - 5x$	\rightarrow	$j(-1) = 2 - 5 \cdot -1 = 2 + 5 = 7$												
$f(x) = -4x + 2$	\rightarrow	$f(3) = -4 \cdot 3 + 2 = -12 + 2 = -10$																																									
a) $g(x) = 3x + 5$	\rightarrow	$g(2) = 3 \cdot 2 + 5 = 6 + 5 = 11$																																									
b) $h(x) = -5x + 8$	\rightarrow	$h(-3) = -5 \cdot -3 + 8 = 15 + 8 = 23$																																									
c) $i(x) = 6 - x$	\rightarrow	$i(0) = 6 - 0 = 6$																																									
d) $j(x) = 2 - 5x$	\rightarrow	$j(-1) = 2 - 5 \cdot -1 = 2 + 5 = 7$																																									
$f(x) = -4x + 2$	\rightarrow	$f(3) = -4 \cdot 3 + 2 = -12 + 2 = -10$																																									
a) $g(x) = 3x + 5$	\rightarrow	$g(2) = 3 \cdot 2 + 5 = 6 + 5 = 11$																																									
b) $h(x) = -5x + 8$	\rightarrow	$h(-3) = -5 \cdot -3 + 8 = 15 + 8 = 23$																																									
c) $i(x) = 6 - x$	\rightarrow	$i(0) = 6 - 0 = 6$																																									
d) $j(x) = 2 - 5x$	\rightarrow	$j(-1) = 2 - 5 \cdot -1 = 2 + 5 = 7$																																									

	$f(x) = -4x + 2 \rightarrow f(3) = -4 \cdot 3 + 2 = -12 + 2 = -10$ a) $g(x) = 3x + 5 \rightarrow g(2) = 3 \cdot 2 + 5 = 6 + 5 = 11$ b) $h(x) = -5x + 8 \rightarrow h(-3) = -5 \cdot (-3) + 8 = 15 + 8 = 23$ c) $i(x) = 6 - x \rightarrow i(0) = 6 - 0 = 6$ d) $j(x) = 2 - 5x \rightarrow j(-1) = 2 - 5 \cdot (-1) = 2 + 5 = 7$
Tercer Momento: Institucionalización	Objetivo Específico: Operar con números racionales. Modelar situaciones, utilizando funciones lineales. Representar gráficamente funciones lineales y afines.
Actividad De Aprendizaje	
4. Daniel juega Pokémon Go y desea eclosionar algunos huevos de 2km. Para esto realiza caminatas desde su casa a la escuela ida y vuelta. Su velocidad al caminar es de 3 km/h. en promedio y tarda 20 minutos en llegar a la escuela. d) Si Daniel quiere eclosionar 6 huevos y puede hacerlo uno por vez, ¿Cuánto tiempo en horas le tomara realizar este objetivo? e) ¿Cuántos días tendrá que ir al colegio Daniel para eclosionar los seis huevos? f) Construye una tabla a partir de la eclosión de huevos y luego elabora un gráfico de la situación. f) Según el grafico, ¿a qué función corresponde? 5. Señala que funciones son lineales y que funciones son afines en cada caso. 6. Evalúa cada función con los valores dados.	
Comentarios Y Reflexiones	Evidencia
Luego de exponer la respuesta experta frente a los estudiantes se da un espacio para reflexionar acerca de los errores cometidos	E1: Los estudiantes debaten acerca de los errores cometidos
Cuarto Momento: discusión y comentarios	Objetivo Específico: Revisar tema tratado y resolver dudas acerca de la actividad
Comentarios Y Reflexiones	Evidencia
A modo de cierre de la actividad se comenta con los estudiantes acerca de los errores cometidos por ellos haciendo preguntas de devolución. ¿Cuál es el signo resultante de multiplicar dos números negativos? ¿Cuál es el resultado de la diferencia entre un número y cero?	E1: Los estudiantes responden en forma verbal A las interrogantes indicando que el producto entre dos negativos da como resultado un número positivo Para el caso de la diferencia entre un número y cero el resultado es el número ya que cero es neutro aditivo.

Tabla 10: "Análisis a posteriori y evidencias"

7.1.4 Reformulación diseño de clase 1

La actividad no presenta dificultades ni conflictos siendo entre las tres actividades propuestas la que tuvo mejores desempeños se incluirá un cuadro de ayuda donde se menciona el proceso necesario para transformar minutos a horas.

7.1.5 Reformulación de tareas

Solo se incorporara un cuadro en el cual se mostrará el procedimiento necesario para transformar minutos a horas.

7.2 Implementación de Clase 2

7.2.1 Percepción del docente que implementa la clase

La tercera actividad llamada “intercambio pokémon”, consta de 4 preguntas, las cuales tienen como propósito que los estudiantes elaboren la definición de composición de funciones a través de la situación didáctica basándose en la proporcionalidad compuesta. Se realizó a partir del aprendizaje colaborativo (conformación de equipos de trabajo).

La clase se realiza enfatizando los tres momentos, comenzando por el planteamiento de los objetivos y la activación de conocimientos previos, se realizan comentarios y preguntas mediadoras sobre el concepto de proporcionalidad, recordando a través del ejemplo de la eclosión de los huevos pokémon en la actividad anterior.

Durante el desarrollo de la actividad, los estudiantes manifiestan interés por resolver la situación planteada, pero presentan dificultades a la hora de operar expresiones algebraicas, se observa que responden a través de la proporcionalidad directa.

Finalmente los estudiantes observan la respuesta experta a cada una de las interrogantes y comparan con sus procedimientos.







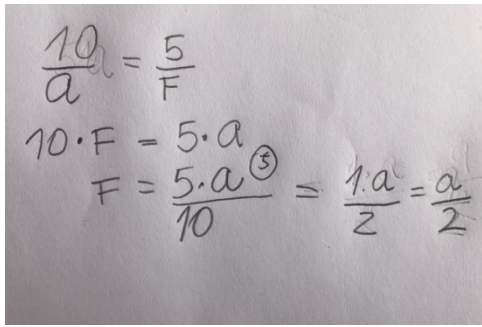
7.2.2 Contraste de implementación 2 y planificación de la clase

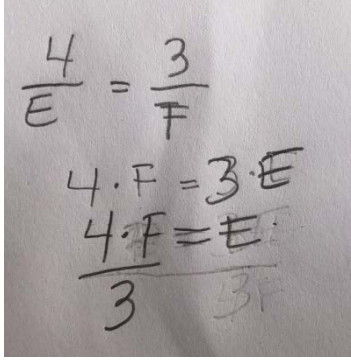
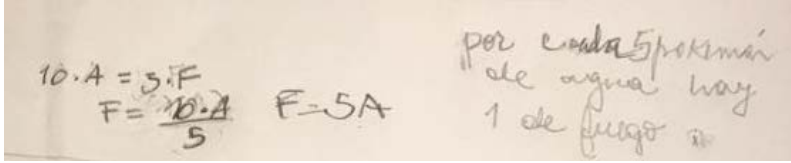
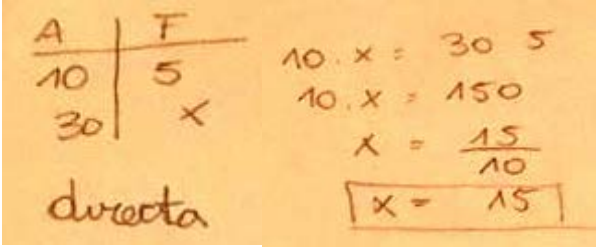
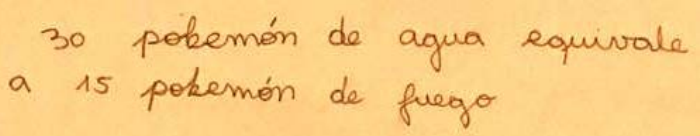
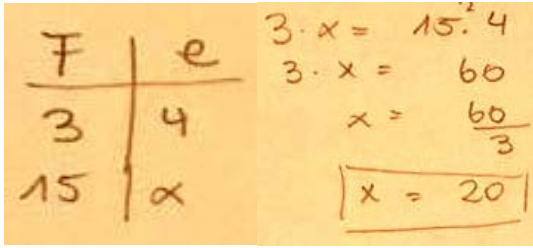
Momento	Logros	Dificultades
Inicio	<ul style="list-style-type: none">• Presentación de los objetivos de la clase• Se lee las preguntas de la actividad y se da el espacio para aclarar dudas.	<ul style="list-style-type: none">• No comprende el enunciado.• No logra establecer una relación entre las variables.
Desarrollo	<ul style="list-style-type: none">• Los estudiantes aplican regla de tres• Los estudiantes establecen relaciones de correspondencia entre las variables.	<ul style="list-style-type: none">• Los estuantes cometen errores de cálculo.• Los estudiantes• Los estudiantes no logran establecer los valores de la variable independiente
Cierre	<ul style="list-style-type: none">• Se realizo una institucionalización	<ul style="list-style-type: none">• Los estudiantes tienen

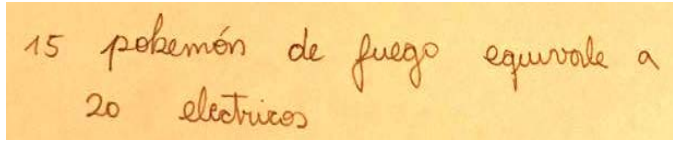
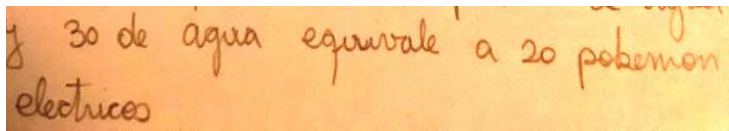
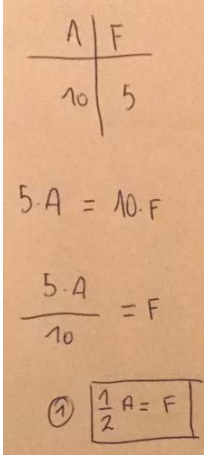
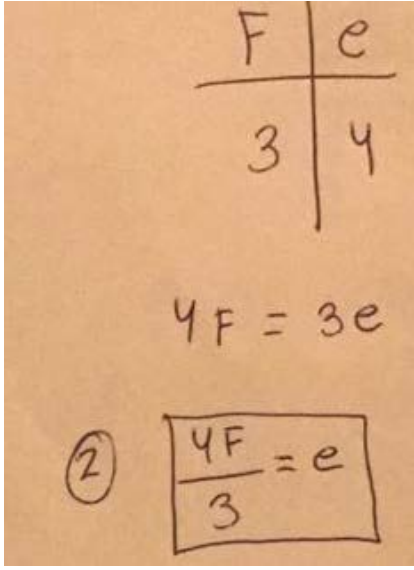
	de los contenidos a través de una presentación Power Point, en la cual se evidenciaron las respuestas a las interrogantes.	dificultades en la comprensión del lenguaje algebraico
--	--	--

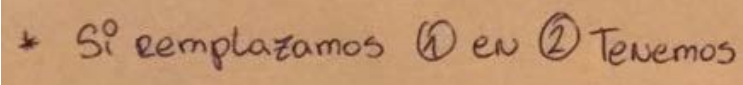
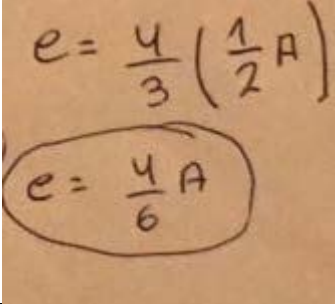
Tabla 11: "Contraste planificación-implementación"

7.2.3 Análisis de las producciones de los estudiantes (Implementación 2)

Segundo Momento: Intercambio Pokémon	Objetivo Específico: <ul style="list-style-type: none"> • Aplicar concepto de proporcionalidad compuesta • Comprender el concepto de composición de funciones. Identificar dominio y recorrido de la compuesta de funciones.															
Actividad De Aprendizaje:																
<p>4. En el juego "Pokémon Go" se desea implementar los intercambios de estas criaturas digitales. Para esto se establece una tabla comparativa de intercambio entre estos fascinantes pokémon según el tipo como se muestra a continuación.</p> <p>5.</p>																
<table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <thead> <tr style="background-color: #009682; color: white;"> <th style="padding: 5px;">N° Pokémon de Tipo</th> <th style="padding: 5px;"></th> <th style="padding: 5px;">Equivalen</th> <th style="padding: 5px;"></th> <th style="padding: 5px;">N° Pokémon de Tipo</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="padding: 5px;">10 Pokémon de Agua</td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;">≡</td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;">5 Pokémon de Fuego</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">3 Pokémon de Fuego</td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;">≡</td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;">4 Pokémon Eléctricos</td> </tr> </tbody> </table>		N° Pokémon de Tipo		Equivalen		N° Pokémon de Tipo	10 Pokémon de Agua		≡		5 Pokémon de Fuego	3 Pokémon de Fuego		≡		4 Pokémon Eléctricos
N° Pokémon de Tipo		Equivalen		N° Pokémon de Tipo												
10 Pokémon de Agua		≡		5 Pokémon de Fuego												
3 Pokémon de Fuego		≡		4 Pokémon Eléctricos												
<p>a) Encuentre una relación que permita establecer una equivalencia entre pokémon de tipo agua-fuego y luego fuego – eléctricos.</p> <p>b) Daniel tiene 30 pokémon de agua para intercambiar. ¿Cuántos pokémon eléctricos puede obtener con su intercambio?</p> <p>c) Establecer una relación entre pokémon de agua y eléctricos.</p> <p>d) Determine los valores de la variable independiente para que las soluciones obtenidas sean pertinentes.</p>																
Comentarios Y Reflexiones	Evidencia															
<p>Pregunta 1.a:</p> <p>e) Encuentre una relación que permita establecer una equivalencia entre pokémon de tipo agua- fuego y luego fuego – eléctricos.</p> <p>De acuerdo con los resultados de la actividad se puede evidenciar que los grupos logran establecer las relaciones entre variables a través del</p>	<p>E1:</p> 															

<p>la noción de proporcionalidad directa. Sin embargo en algunos casos aplican en forma errónea la regla de tres.</p> <p>En E1 se establece la relación entre los pokémon de agua y de fuego</p> <p>En E2 se puede observar la relación entre pokémon de fuego y eléctricos.</p> <p>En la figura E3 se aprecia un error en la aplicación de la regla de tres para la relación de proporcionalidad.</p>	<p>E2:</p>  <p>E3:</p> 
<p>Comentarios Y Reflexiones</p>	<p>Evidencia</p>
<p>Pregunta 1.b:</p> <p>f) Daniel tiene 30 pokémon de agua para intercambiar. ¿Cuántos pokémon eléctricos puede obtener con su intercambio?</p> <p>A través de las relaciones establecidas en la pregunta anterior, los estudiantes determinan la correspondencia entre pokémon eléctricos que obtiene Daniel a partir del intercambio de 30 de sus pokémon de agua.</p> <p>En la secuencia de imágenes E1, E2, E3, E4 y E5 se muestra el procedimiento empleado por uno de los grupos para la resolución esta interrogante</p>	<p>E1:</p>  <p>E2:</p>  <p>E3:</p> 

	<p>E4:</p>  <p>E5:</p> 
<p>Comentarios Y Reflexiones</p>	<p>Evidencia</p>
<p>Pregunta 1.c:</p> <p>g) Establecer una relación entre pokémon de agua y eléctricos.</p> <p>En este punto solo un grupo logra establecer la relación entre pokémon de agua y eléctricos, a través de la unión de las dos relaciones de dependencia determinadas en la pregunta uno. Para esto, los estudiantes reemplazaron el valor de algebraico de la variable $F = \frac{1}{2}A$ en la expresión $E = \frac{4}{3}F$</p> <p>Obteniendo lo siguiente:</p> $E = \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}A\right)$ $E = \frac{4}{6}A$ <p>Tal como se muestra en E1, E2, E3 y E4</p>	<p>E1:</p>  <p>E2:</p> 

	<p>E3:</p>  <p>E4:</p> 
<p>Comentarios Y Reflexiones</p>	<p>Evidencia</p>
<p>Pregunta 1.d</p> <p>h) Determine los valores de la variable independiente para que las soluciones obtenidas sean pertinentes.</p> <p>En esta interrogante no registra respuestas coherentes por parte de los estudiantes, debido a que requiere de trabajo más elaborado del algebra. Y las definiciones formales</p>	
<p>Tercer Momento: Institucionalización</p>	<p>Objetivo Especifico:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Aplicar concepto de proporcionalidad compuesta • Comprender el concepto de composición de funciones. Identificar dominio y recorrido de la compuesta de funciones.
<p>Actividad De Aprendizaje</p> <p>Contrastar las respuestas de los estudiantes con la respuesta experta</p>	
<p>Comentarios Y Reflexiones</p>	<p>Evidencia</p>
<p>Los estudiantes identifican los errores cometidos en el desarrollo de sus actividad</p>	<p>E1: "Profe nos faltó reemplazar nomas"</p>
<p>Cuarto Momento: discusión y comentarios</p>	<p>Objetivo Especifico:</p> <p>Revisar el tema tratado y resolver dudas respecto s sus respuestas erróneas o no contestadas.</p>

Actividad De Aprendizaje	
Realizar retroalimentación del concepto de proporción compuesta y su importancia para la construcción de la definición de la composición de funciones desde el punto de vista algebraico.	
Comentarios Y Reflexiones	Evidencia
Los estudiantes analizan sus respuestas a partir de la exposición de la respuesta experta.	E1: Los grupos analizan sus limitaciones y comprenden la importancia del manejo de la operatoria algebraica.

Tabla 12: "Análisis a posteriori y evidencias"

7.2.4 Reformulación diseño de clase 2

Se propone cambiar la cuarta pregunta por ¿Qué cantidades de pokémon de agua se pueden intercambiar para obtener cantidades coherentes de pokémon eléctricos?

Capítulo 8:

8 Conclusiones

Las conclusiones de esta investigación están basadas en las respuestas de las preguntas de investigación y en el análisis de los resultados de los estudiantes una vez aplicada la propuesta de situación didáctica basada en el juego Pokémon GO en los contenidos de función lineal a través de la eclosión de huevos y la composición de funciones a través del intercambio Pokémon.

- En cuanto a la pregunta:

¿Cómo se desarrolla el proceso de enseñanza y aprendizaje de la composición de funciones por medio de una propuesta didáctica, en estudiantes de primero medio?

Durante la intervención utilizando el cuestionario exploratorio individual basado en los contenidos del programa de estudio de octavo año de enseñanza básica (aprendizajes previos de los estudiantes de primero medio) del Mineduc, se obtiene que los estudiantes no responden de manera escrita, más bien a través de gráficos y diagramas, asimismo constantemente consultan sobre sus respuestas validando si estarán bien. Conjuntamente varias de las interrogantes no fueron contestadas por falta de conocimiento. Una vez proyectadas las respuestas correctas, los estudiantes logran recordar algunas ideas y complementan después de entregar el cuestionario.

El programa de estudio de primero medio, considera: contenido, aprendizajes previos, habilidades de los estudiantes y aprendizajes esperados, pero se observa que las situaciones didácticas planteadas a modo de ejemplo, no se encuentran contextualizadas y no consideran los intereses de los estudiantes.

Con respecto a la propuesta diseñada y aplicada a los estudiantes de primero medio, en las actividades 2 y 3, considerada como situación didáctica (el juego virtual Pokémon GO). Los estudiantes logran aprendizajes significativos, puesto que en el momento de la implementación, el juego es

conocido por todos los estudiantes, dada la exposición mediática a nivel mundial, conjuntamente todos tenían la aplicación en sus Smartphone, por lo tanto asocian sus aprendizajes previos a la propuesta planteada.

- En cuanto a los resultados de los estudiantes:

De acuerdo con los análisis de instrucción y actuación, los estudiantes obtienen mejores logros y respuestas al plantear una situación didáctica que considere su contexto y realidad actual (Juego Pokémon GO) y casi todos los equipos de trabajo, responden las interrogantes planteadas.

Conjuntamente puedo decir que, al realizar la propuesta de situación didáctica a través del aprendizaje colaborativo a diferencia del cuestionario exploratorio que se realizó de manera individual, los equipos de trabajo generaron discusión, análisis de resultados, ideas y definieron roles entre los participantes, lo cual permitió establecer procedimientos para abordar y resolver los problemas propuestos y cumplir con los objetivos y metas propuestas y además los estudiantes pudieron elaborar respuestas escritas.

Respecto a la propuesta de actividades, esta se fundamenta en la teoría de situaciones didácticas, ya que se implementaron las actividades basadas en las fases de una situación didáctica y en donde se destacaron:

- La interacción entre los estudiantes y la situación problema (situación de acción)
- Los estudiantes discuten y formulan procedimientos para resolver los problemas propuestos como por ejemplo utilizaron la proporcionalidad directa como estrategia de resolución para la eclosión de huevos (situación de formulación)
- Cada grupo valida sus respuestas comparando las estrategias y procedimientos utilizados (situación de validación)
- Se expusieron las respuestas de los grupos, y finalmente el profesor muestra por medio de una presentación los conceptos involucrados en el desarrollo de cada actividad, potenciando aquellos conceptos y estrategias utilizadas por los estudiantes.

Otro aspecto importante de destacar, es haber establecido roles y responsabilidades de los estudiantes, indicando objetivos, aprendizajes, y habilidades que se esperaba que los estudiantes desarrollaran a través de las actividades (Contrato Didáctico)

En el desarrollo de las actividades se produjeron algunas dificultades en la comprensión de los problemas propuestos, donde surgió la necesidad de orientar el trabajo de los estudiantes como por ejemplo que transformaran los minutos a horas en el caso de la actividad 2 en la eclosión de huevos (esto conocido como efecto Topaze).

Respecto al método de investigación de análisis didáctico, se puede destacar que las etapas permitieron al investigador desarrollar de manera estructurada la elaboración e implementación de la propuesta así como también el análisis de las respuestas de los estudiantes y de este modo reformular instrucciones, preguntas o situaciones insertas en las actividades propuestas.

En algunas instrucciones dentro de las actividades el docente orientó a los estudiantes para mejorar la comprensión y ejecución de dichas actividades realizando preguntas de devolución a los grupos con la intención de que pudieran superar las dificultades de comprensión de algunas preguntas. En cuanto a lo evidenciado en el desarrollo de las actividades propuestas, le permitió mejorar sus prácticas al investigador, respecto a la construcción y aplicación de actividades a realizar por los estudiantes.

Bibliografía

Arias Gallegos, Walter L.; Oblitas Huerta, Adriana (2014) Boletín vol. 34, núm. 87. Academia Paulista de Psicología. Perú. Artículo en línea extraído de <http://www.redalyc.org/pdf/946/94632922010.pdf> consultado el día 18 de diciembre del 2016.

Ausubel, D. P., Novak, J., & Hanesian, H. (1983). *Teoría del Aprendizaje Significativo*. México: Trillas.

Brousseau, Guy (1997). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Buenos Aires: Editorial Zorzal –ISBN: 978-987-599-035-7 Traducción de: FREGONA, Dilma.

Cassany, Daniel (2004) “Aprendizaje Colaborativo para ELE”. Artículo en línea disponible en <https://www.upf.edu/documents/2853238/0/AprCoo04.pdf/4c84be3f-7897-404c-8b13-b8afb805a145> Extraído el día 23 de Enero del 2017

Del Valle, J., Muñoz, G. & Santis, M. (2016). *1° Medio Matemática. Texto del estudiante*. Santiago, Chile: SM Chile S.A.

Farfán, R. M., & A. García, M. (s.f.). *Universidad De Los Andes*. Recuperado el 28 de Enero de 2017, de <http://funes.uniandes.edu.co/59741/FarfánElconceptoAlme2005.pdf>

Fernández, L. (2006). ¿Cómo analizar datos cualitativos? *Butlletí La Recerca*. Institut de Ciències de l'Educació, Universitat de Barcelona. ISSN: 1886-1946.

Fregona, D. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de situaciones didácticas "Traducción"*. Buenos Aires, Argentina: Del Zorzal.

Gómez, P. (2002). Análisis Didáctico y Diseño Curricular en Matemáticas. *Revista Ema* (7), 251-292.

Hernández, R, Fernández, C., & Baptista, P. (2010). *Metodología de la Investigación*. México D.F.: McGraw-Hill.

Johnson, D. W., Johnson, R. T., & Holubec, E. J. (1999). *El Aprendizaje Colaborativo en el Aula "Traducción"*. Virginia: Editorial Paidós.

Línea, C. e. (s.f.). *currículum en línea mineduc*. Recuperado el 10 de noviembre de 2016, de <http://www.curriculumenlineamineduc.cl/605/w3-propertyvalue-49395.html>

Lo, J. & Wheatly, G. (1994). Learning opportunities and negotiating social norms in mathematics class discussion. *Educational Studies in Mathematics* 27(2), 145-164.

Marín, A. (2009). Informe-memoria sobre el contenido y las expectativas de la sección del análisis didáctico dedicada al análisis de instrucción en la materia Didáctica de la Matemática. Documento no publicado: Universidad de Granada

Martínez, J. M. (2008). *El arte de aprender y de enseñar manual para docentes*. La Hoguera.

MINEDUC (2011). *Matemática Programa de Estudio Primer Año Medio*. Santiago, Chile.

MINEDUC (2016). Unidad De Currículum Y Evaluación Vigencia De Dispositivos Curriculares 2016. Santiago, Chile.

Reibelo Martín, J. D. (1998). *Método de Enseñanza-Aprendizaje para la enseñanza por Descubrimiento*. gijón: Aula Abierta.

Revista Enlaces. (s.f.). *Enlaces*. Recuperado el 30 de Enero de 2017, de <http://historico.enlaces.cl/index.php?t=54&i=2&cc=1372&tm=2>

Parcerisa, A. (1996). *Materiales curriculares*. Barcelona: Grao

Rico, L. (1995). Errores y Dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. *Educación Matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia* (69-108). Bogotá: Una Empresa Docente.

Rico, L. (2013). El método del Análisis Didáctico. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática* (33), 11-27.

Rico, L. (2001). *Análisis conceptual e investigación en didáctica de la matemática. Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática.* Universidad de Granada.

Rodríguez, M. (2004). *La Teoría del Aprendizaje Significativo.* Centro de Educación a Distancia. España. [Artículo en línea]. Disponible en: <http://cmc.ihmc.us/papers/cmc2004-290.pdf>. Consultado el 09 de Febrero 2017.

Rojas, V (2011). Teoría del Aprendizaje Significativo de Ausubel. Blog: Teorías y Paradigmas educativos. [Artículo en línea]. Disponible en:

<http://paradigmaseducativosuft.blogspot.cl/2011/05/teoria-del-aprendizaje-significativo-de.html> Consultado el 10 de Febrero 2017

Rubin, H. & Rubin, I. (1995). *Qualitative interviewing. The art of hearing data.* Thousand Oaks, California: Sage Publications.

Ruiz, Barrón (1993). Investigación y experiencias didácticas. Enseñanza de las ciencias, Universidad de Salamanca.

<http://www.raco.cat/index.php/ensenanza/article/viewFile/39881/93162>

Consultado el día 12 de Febrero del 2017.

Sadovsky, P. (2015). *La Teoría de Situaciones Didácticas: Un marco para pensar y actuar la enseñanza de la matemática.* Recuperado el 2017, de Facultad de Ingeniería Universidad de la República: https://www.fing.edu.uy/grupos/nifcc/material/2015/teoria_situaciones.pdf

Universidad internacional de Valencia (2015). El aprendizaje por descubrimiento de Bruner. Categoría educación extraído de <http://www.viu.es/el-aprendizaje-por-descubrimiento-de-bruner/> consultado el día 12 de Febrero 2017.

<https://bibliotecavirtual.unl.edu.ar/ojs/index.php/AulaUniversitaria/article/download/4112/6207> Extraído el día 28 de Enero del 2017