FACULTAD DE CIENCIAS

INSTITUTO DE MATEMÁTICAS

Las Razones Trigonométricas en la Educación Técnico Profesional, una mirada desde el Análisis Didáctico

Memoria para optar al Título de Profesor de Enseñanza Media en Matemáticas, mención Didáctica de la Matemática y al grado de Licenciado en Educación.

Memoria para optar al Título de Profesor de Enseñanza Media en Matemáticas, mención Computación y al grado de Licenciado en Educación.

Javier Esteban Alarcón Valenzuela

Nicolás Alfonso González Martínez

Profesora Guía: María Inés Pezoa Reyes

VALPARAÍSO

Enero 2019

Agradecimientos.

Gracias a mis padres, por aguantar, por estar presentes, por querer ser parte, por la alegría, por aceptar, por ser como son. Madre, eres motivación para siempre querer ser más, ejemplo de constancia y honestidad. Padre, eres de esas personas con las que uno va confiado a la guerra. Los quiero infinitamente.

Gracias a mi polola, mi Mariana, mi mi amor, a través de tu amor, tu orden y tus ganas de vivir la vida, motivan cada instancia de este trabajo. Te amo.

Gracias a mi hermana Macarena y a su pareja Boris, por ser apoyo incondicional, estar siempre presentes, entregarme alegría y una visión profesional. Gracias por permitir ser parte de la vida de Gaspi.

Gracias a Gaspar, chichito, por alegrar cada momento de trabajo y estudio con tu sonrisa.

Gracias a Nicolás, mi compañero de tesis, gracias por apoyar cada idea de este trabajo, por la alegría en cada acción. Fue un largo camino, pero todo lo que hemos compartido y todo el esfuerzo entregado tendrá una recompensa.

Gracias a mis compañeros de trabajo, Eduardo y Andrés, por su contribución en este trabajo, las tardes de estudio, las risas, y todo lo que hemos podido compartir a lo largo de este intenso año.

Gracias Profesora María Inés, sin su guía y motivación no podríamos haber logrado esto, esperamos siempre nos recuerde con cada rabia que le hicimos pasar.

Gracias a Gerardo, por la buena onda y la disposición a ayudar en los momentos de mayor desesperación estudiantil.

Gracias a cada persona que alegra la universidad, Tío y tías del túnel, Tío auxiliar, Tíos de la biblioteca, profesores, compañeros. Toda la buena onda entregada, hizo de este espacio un lugar muy especial.

Siempre estarán en mis recuerdos, mis abuelas, con ellas compartí momentos diferentes pero muy alegres, ambas me mostraron que se necesita fuerza para vivir pero que existe una recompensa al final del camino. Estarán siempre presente a través de la infinita familia en la que me toco nacer.

¡Gracias a todos!

Agradecimientos

En primer lugar, agradecer a mi familia por el apoyo durante mi proceso universitario el cual por fin se puede dar por finalizado.

En segundo lugar, a mi compañero de tesis y amigo, Javier, que sin duda alguna dejo hasta su última gota de sudor sufriendo por este trabajo y que, sin él, esto no habría podido ser posible. ¡¡¡¡Gracias compa!!!! Luego a los cabros, el Choro Barney de la Isla (Eduardo) y al Chico Violinista Ampuero (Andrés) que fueron un gran apoyo en el proceso de tesis y siempre tuvieron una muy buena disposición.

En la UV

Gerardo, como no nombrar a Don Gerardo Araya siempre dispuesto a ayudar en cualquier inconveniente o duda que tuviéramos, prometo algún día, cuando encuentre trabajo, prometo pagarte todas las impresiones y hojas que nos regalaste. Al tío del túnel que siempre hacía de los almuerzos algo más que comerse un completo. A Andrea Paola, que siempre hacía de los ratos de encuentro, un momento grato en donde más de alguna talla hacia ella causa la risa de muchos. ¿¿Como olvidar frases como “Andy es el día del plátano” o “Andy, Que?? Chu…” y así como tantas otras. A profes que dejaron una huella en mi formación profesional, estos son: “Edu Stangue” que si hubo algo que aprendí a hacer como los Dioses fue a integral; a la doctora por haberme llevado a la #Sochiem2014, a #Papito por enseñarme que el español no es el único lenguaje y que el látex no es solo un plástico, y a varios más que me da lata nombrar.

En Quintero

Al CDO por esperarme a que sacara mi título profesional y espero ahora si me contraten como profe y no como asistente.

El ave fénix con Dios no hay quien lo aterrice.

El ganador, la serie.

Nicky Jam, 2017.

Contenido

Introducción

Atendiendo a nuestras experiencias en aula, como estudiantes y en nuestras prácticas como profesores en formación, es que hemos podido identificar la distancia de los contenidos de la asignatura de matemática, con sus usos en la Educación Técnico Profesional (ETP), que actualmente corresponde al 43% de la matrícula escolar (Agencia de Calidad de la Educación, 2016). Considerando que el desarrollo de la matemática, desde la perspectiva de su desarrollo epistemológico, muestra una fuerte relación con un contexto socio cultural, en este trabajo se espera identificar aquellos quehaceres que dan sentido a la construcción del concepto de Razones Trigonométricas, y que le permitan al docente resignificar el contenido dentro de alguna especialidad técnico profesional.

Como marco referencial, hemos considerado en esta primera etapa las pautas teóricas que caracterizan los Análisis: Conceptual, de Contenido y Cognitivo contemplados en el Análisis Didáctico (Rico, 2013) que nos permite sustentar un proceso de estudio y reflexión referente a las Razones Trigonométricas. Para el Análisis de Instrucción, se incorporan constructos de la Socioepistemología, que permita dar significado al contenido mediante usos cotidianos que estén directamente vinculados con el ejercicio propio de las especialidades técnicas que lo utilizan. Propiciando la comprensión por sobre la mecanización de este contenido, el cual actualmente se presenta en el Programa de Estudio Matemática 2° Medio (MINEDUC, 2016).

Esta investigación es de corte descriptivo, bajo el paradigma cualitativo. El contexto, corresponde a estudiantes de Educación Técnico Profesional realizando sus tareas en el taller de su especialidad. Los Instrumentos para la recogida de los datos, serán: grabación en video, que permitan identificar interacciones entre los participantes de acuerdo con las etapas del plan propuesto, las tareas de clase, es decir, el material que se les facilita a los estudiantes para desarrollar durante la o las sesiones y finalmente las producciones de los estudiantes.

A continuación, se presenta el esquema que guía nuestro trabajo, donde se muestran los analisis que sustentan el diseño en el analisis de instrucción, el cual se apoya en esquema de la Socioepistemología.

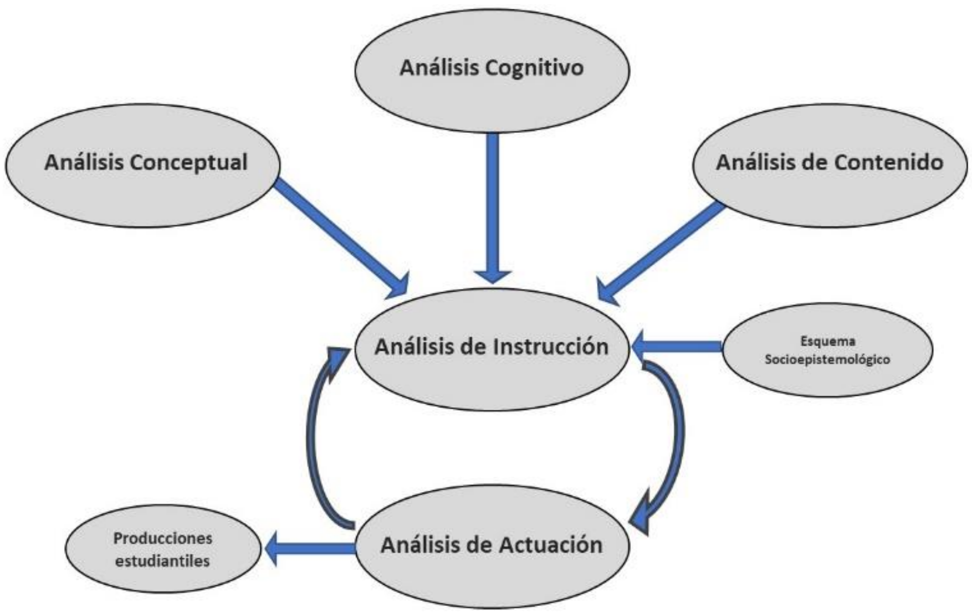


Figura N°1: Esquema del Análisis Didáctico.

Capítulo 1: Antecedentes, Problemáticas y Objetivos

Antecedentes y Problemática

La Educación Técnico Profesional (ETP), en el actual currículum escolar chileno, tiene por objetivo que las y los estudiantes desarrollen habilidades y conocimientos que le permitan desenvolverse tanto en contextos laborales como optar a la continuidad de estudios. En este mismo sentido, de acuerdo con lo señalado en el Marco Curricular vigente para la Enseñanza Media, se sugiere explícitamente que, en el ámbito matemático, su aprendizaje se cimente en contextos significativos, favoreciendo la comprensión por sobre el aprendizaje de reglas y mecanismos sin sentido (MINEDUC, 2015), Para el caso de la ETP, observamos una problemática en torno a la ausencia de recursos oficiales que guíen al docente en la transición de contenidos y metodologías apropiadas para este tipo de formación, además observamos una escasa vinculación de los contenidos del plan común con los de la especialidad elegida.

El contenido de razones trigonométricas, en 2° año medio, es planteado bajo el contexto astronómico y se proponen situaciones de uso en el cálculo de alturas y distancias en contextos generales.

¿Qué aprendí hoy?

Valentín y Margarita se encuentran el uno al norte y la otra al sur del cerro Paranal, en la Región de Antofagasta, y decidieron visitar el observatorio astronómico Paranal, emplazado en la cumbre del cerro. Antes de encontrarse, se comunican y comentan los ángulos de elevación con los que pueden ver el observatorio en este momento. Valentín lo estima en 37° y Margarita, en 12°.

a. Traza un esquema que te permita representar la situación.

b. Si respecto de su ubicación, la altura del cerro es aproximadamente 2600 m, ¿qué distancia separa a Margarita de Valentín?

c. ¿A qué distancia se encuentra cada uno de ellos respecto de la cima del cerro Paranal? Puedes redondear a la décima los valores obtenidos.

Figura N°1: Presentación de un cierre de clases en el texto del estudiante.

(Chacón, García, Rupin, Setz, & Villena, 2018, pág. 25)

Godino (1996) propone que la matemática, es una actividad humana que implica la solución de situaciones problemáticas, y que los objetos matemáticos son entidades institucionales socialmente compartidas, por lo que necesariamente los significados de los conceptos deben estar contextualizados de manera de generar sentido en el estudiante, y que este a su vez lo haga propio de manera de conectarlo con su entorno y su utilidad, lo cual no es posible en el entorno práctico del estudiante de ETP.

Vinner (1983) y Tall (1996), (citado en Montiel, 2005), señala que apropiarse del significado de la noción de un concepto implica formar una imagen de este, es decir, tener estructuras cognitivas que se asocien al concepto, incluyendo sus representaciones mentales, procesos y propiedades asociados, consideramos que la visualización de un problema real asociado a las especialidades de la ETP generaría un mayor acercamiento del estudiante con el contenido, en este caso la razón trigonométrica.

El informe Pearson (PEARSON, 2013), en referencia a la prueba de selección universitaria (PSU), requisito para optar a la educación superior, reveló el estancamiento en los puntajes de los estudiantes técnico profesionales al rendir dicha prueba, a diferencia del paralelo Científico Humanista, además, según Richard Phelps, quien dirigió este proceso, esta evaluación debe apuntar hacia una prueba de habilidades o aptitudes, en donde, según el investigador, las preguntas están más relacionadas al razonamiento que a los contenidos mismos. Esto no es más que un reflejo de que en los programas de estudio existe una mirada que prioriza la educación científico humanista en desmedro de la formación técnico profesional, dificultando las opciones de la ETP de realizar continuidad de estudio.

El informe "Calidad Educativa en Educación Media Técnico Profesional desde la perspectiva de los actores clave del sistema" (Agencia de Calidad de la Educación, 2016), señala que el 43% de los matriculados en 3° y 4° año de enseñanza media, corresponde a ETP que busca responder tanto, a las necesidades formativas de los estudiantes, como a las demandas que el sistema productivo necesita. Esta misma entidad motiva y confiere la responsabilidad a los profesores de asignatura, la tarea de vincular los contenidos de formación general con los aprendizajes de cada especialidad, en busca de que las metodologías de enseñanza y las estrategias didácticas (aprendizajes contextualizados), estén en consonancia con los usos técnicos que pudieran tener, de manera de dar coherencia al proceso de enseñanza y aprendizaje del sector técnico profesional.

Al realizar una revisión de los textos escolares, podemos observar la ausencia de aplicaciones que atiendan los requerimientos del escenario caracterizado por la especialidad técnico profesional y que permita de esta forma una articulación entre la formación general de estudios y las especialidades. En este sentido, por ejemplo, podemos encontrar el desarrollo de habilidades de carácter comunicacional dentro del entorno de las especialidades, las que pueden ser desarrolladas de manera particular en la asignatura de lenguaje y comunicación detallado en el "Estudio sobre la calidad educativa en educación media técnico profesional desde la perspectiva de los actores clave del sistema" (Agencia de Calidad de la Educación, 2016), De la misma manera, para la asignatura de Matemática preocupa lograr dicha articulación en busca de que el saber matemático no solo viva en el aula, sino que el estudiante logre encontrar un sentido al contenido aprendido dentro de las prácticas habituales de su especialidad. Esto se suma a la limitada preparación docente respecto de cómo aprenden estos estudiantes, lo que impide una caracterización del entorno que pudieran servir finalmente para acercarnos al quehacer profesional de estos estudiantes.

Es por todo lo anterior que en este trabajo abordamos las razones trigonométricas, concepto que cumple con lo señalado previamente, en el cual se observa que el contenido es planteado de manera instructiva y desvinculada del entorno practico/profesional en el que va a ser utilizado. Su estudio, contextualizado a través de astronomía, se limita a proporcionar a los estudiantes, técnicas que les permiten solamente resolver ejercicios de manera mecánica, ignorando su realidad contextualizada y el entorno práctico que viven a diario los estudiantes técnico-profesionales, en donde es primordial que ellos conciban los contenidos no solo como una forma de aprobar exámenes sino como herramientas útiles. lo que conlleva finalmente para estos estudiantes, a un aprendizaje centrado en fórmulas.

La problemática que aborda esta investigación es: **La desvinculación del contenido de razones trigonométrica con los usos y las características del entorno, que se pueden encontrar en algunas especialidades de la Educación Técnico Profesional.**

Las preguntas orientadoras para nuestra investigación son las siguientes:

- ¿Cómo se propone la enseñanza de las razones trigonométricas en el actual programa de estudios y que tan alejado está de la práctica de cada especialidad?
- ¿Qué actividades facilitan la comprensión de las razones trigonométricas en un entorno técnico profesional?

Objetivos

De acuerdo con los antecedentes descritos y a la problemática planteada anteriormente, podemos presentar los siguientes objetivos de nuestra investigación.

Objetivo General

- Diseñar e implementar una propuesta de enseñanza que permita a los estudiantes resignificar las razones trigonométricas en un escenario técnico profesional.

Objetivos Específicos

- Desarrollar un análisis conceptual y de contenido para el concepto de Razones trigonométricas.
- Identificar las características del escenario técnico profesional, a partir de un estudio etnográfico.
- Elaborar un análisis de instrucción, a partir del análisis cognitivo de las Razones trigonométricas.
- Analizar la propuesta a partir de las producciones de los estudiantes.

Capítulo 2: Marco Teórico y Metodológico

Para nuestro trabajo es relevante una metodología, que brinde herramientas desde la mirada docente y que nos aporte un modo especifico de abordar el objeto matemático en cuestión. En este sentido, hemos elegido el Análisis Didáctico (Rico, 2013) ya que es un método de investigación cíclico el cual señala cómo el docente debiera fundamentar, diseñar, organizar y llevar a la práctica los procesos de enseñanza-aprendizaje de un contenido matemático específico. Además, para el desarrollo del diseño se considerará atender las características del trabajo en taller de especialidades técnico profesional, por ello para el diseño nos apoyamos en constructos de la Socioepistemología. Este trabajo es de corte descriptivo, bajo el paradigma cualitativo, por ello en este capítulo se presenta las técnicas de recogida de datos para el análisis.

Análisis Didáctico

El Análisis Didáctico (Rico, 2013), es un método de investigación que le permite al docente llevar a la práctica un diseño en concordancia con el proceso de enseñanza-aprendizaje de un objeto matemático, fundamentado en un análisis tanto del contenido como del contexto en donde se desea aplicar. Gómez (2002) señala que el Análisis Didáctico "es un procedimiento que es posible explorar, profundizar y trabajar con los diferentes y múltiples significados del conocimiento matemático escolar para efecto de diseñar, llevar a la práctica y evaluar actividades de enseñanza-aprendizaje" (p. 252). El Análisis Didáctico consta de los siguientes análisis:

1. Análisis Conceptual, que permite validar lo que se quiere investigar a partir de su génesis y fundamentación, su evolución epistemológica, algunas concepciones básicas, y su desarrollo.
2. Análisis de Contenido, que otorga un conocimiento aproximado de los distintos significados y representaciones del concepto, y además muestra como el concepto se vincula a otros contextos y situaciones.

3. Análisis Cognitivo, que enfoca su investigación en revisar lo relacionado con el aprendizaje del concepto; se muestran las expectativas de aprendizaje que propone el programa de estudio actual, y sus limitaciones con las oportunidades pertinentes, reflejado en los objetivos planteados en la clase.
4. Análisis de Instrucción, donde el docente crea una propuesta de aprendizaje basada en los análisis previos, que aplicará y observara, evidenciando los resultados a través de la interacción de esta con los estudiantes.
5. Análisis de Actuación, donde el docente basado en los resultados obtenidos gracias a las producciones de los estudiantes determina los conocimientos y aprendizajes que adquirieron por medio de la propuesta de enseñanza-aprendizaje. Además, se indican las dificultades y errores que se presentaron, y si fueron o no superados.

Socioepistemología

Para el diseño de la propuesta se consideran constructos de la Socioepistemología, teoría que aborda la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas como una construcción del conocimiento situado, aquel que atiende a las circunstancias y a los escenarios socioculturales particulares, caracterizándolo como el fruto de la interacción entre epistemología y los factores sociales (Cantoral, 2002). Además, confiere a la actividad la función de producir objetos de conocimiento (Cantoral, Farfán, Lezama y Martínez, 2006), en donde las acciones del individuo responden a su pertenencia a un grupo social, a su presencia en escenarios específicos y la influencia de las diversas instituciones (Guimelli, 2004).

La Socioepistemología, como enfoque teórico, busca entender y comprender fenómenos específicos relacionados con la construcción y la transmisión de conocimiento matemático, lo que radica en el principio fundamental: la problematización del saber matemático, esto se reconoce al considerar a la matemática en juego como un actor de la unidad de análisis, cuestionando el saber institucional como aquello que se debe aprender y reconociendo que son las practicas sociales las que norman la construcción del conocimiento matemático, la que identifica sus usos en distintos escenarios. Con esto se propone identificar aquellas significaciones propias del saber, las cuales se diluyen, se transforman o se pierden al configurar el discurso escolar, pero que lo caracteriza como un saber funcional en escenarios específicos (Montiel & Buendía, 2012).

Considerando la problemática y los correspondientes objetivos de la investigación, este estudio se realizará bajo el paradigma cualitativo con un carácter descriptivo, ubicándonos con estudios que “pretenden medir o recoger información de manera independiente o conjunta sobre los conceptos o las variables a las que se refieren” (Hernández, Fernández, & Baptista, 2010). En una investigación de corte descriptivo, se estipula cuatro pasos que la constituyen como tal (Fernández, 2006), los cuales se presentan a continuación:

1. Obtener la información: hace referencia a los instrumentos para la recogida de información.
2. Capturar y ordenar la información: toda la información obtenida, debe ser transcrita en un formato legible.
3. Codificar la información: este paso indica que se deben realizar categorías de análisis, que concentren las ideas y conceptos claves que rigen a la investigación.
4. Integrar la información: relacionar las categorías obtenidas entre sí.

Contextos y sujetos de estudio

Hay que señalar que, en este apartado, se contempla un primer contexto que llamaremos “escenario”, donde se presentan los sujetos de estudio y los aspectos relevantes del ambiente en el que viven. Posterior a esto se muestra un segundo contexto de características diferentes, donde será presentada la actividad.

El Escenario

Nuestro escenario de trabajo corresponde a un Establecimiento Educacional de la ciudad de Valparaíso, que imparte formación Científica Humanista y Técnico Profesional, cuya dependencia es particular subvencionado. En rigor, se nos ha permitido observar clases de un curso de tercero medio (36 alumnos, 16-17 años), especialidad Mecánica Industrial, durante tres jornadas de clase en el taller mecánico.

Ambiente del Taller Mecánico.

Previo al ingreso al taller, se realiza una entrevista semiestructurada con el profesor a cargo, quien tiene 12 años como docente de Mecánica Industrial. Nos detalla que en este taller los estudiantes deben cumplir con ciertos protocolos de seguridad como el uso de elementos de protección personal (EPP) y el manejo de herramientas y maquinaria bajo la supervisión del docente a cargo. Las actividades que se realizan corresponden a torneado y fresado de piezas metálicas con la finalidad de construir partes mecanizadas de uso común y soldadura de estructuras metálicas. El objetivo es que los estudiantes logren los conocimientos y habilidades a través de la experiencia, que les permita desenvolverse en un contexto laboral o realizar continuidad de estudios, en áreas de desempeño similares.

Contexto 2

Nuestro segundo escenario de trabajo corresponde a un Establecimiento Educacional de la ciudad de Quintero, que imparte formación Científica Humanista y Técnico Profesional, el cual mantiene un carácter particular subvencionado. Con mayor detalle, se nos ha permitido aplicar la actividad en un curso de segundo año de enseñanza media que consta de 40 de alumnos de entre 14 y 15 años.

Instrumentos para la recogida de datos

Para el proceso de esta investigación, la cual se rige bajo el paradigma cualitativo, es preciso establecer los instrumentos que permitirán la recogida de datos, estos serán:
Grabación en video de los aconteceres de la experiencia, lo que concede hechos en sí mismos, es decir, se registran detalles del escenario y sus características, además de detalles que no son captados por otros medios (Quintana, 2008). De esta forma son visibles los momentos de la actividad y las interacciones entre los participantes.

Las tareas de clase, es decir, el material que se les facilito a los alumnos para que lo trabajaran durante la actividad.

Las evidencias escritas, tienen relación directa con las tareas de clase, porque en ellas los estudiantes plasmaran sus ideas y posibles estrategias de resolución. Estas evidencias se encuentran en la sección de Anexos.

Levantamiento de categorías de análisis

Al analizar datos de tipo cualitativos, es de suma importancia el modo al cual se examinarán los datos recogidos. Respecto de aquello, es necesario identificar y agrupar los datos obtenidos en categorías que concentren las ideas, conceptos o temas revelados por el investigador (Fernández, 2006). Este proceso permite llevar a cabo comparaciones y contrastes, bajo una estructura organizada que posibilita establecer las ideas centrales, los descubrimientos y las conclusiones. Cabe mencionar que dichas categorías serán presentadas en conjunto con los resultados de cada aplicación.

Capitulo N°3: Análisis Conceptual

Este análisis es el primero que se abordará, según el marco referencial escogido, el cual busca dar precisión al concepto tratado, en este caso las razones trigonométricas, de manera de clarificar el contexto histórico con el que nace, su proceso epistemológico y el entorno matemático en el que se desenvuelve. Finalmente, el análisis entregará el objeto de manera resumida en un mapa conceptual, para mostrar dichas características.

Antecedentes Históricos y Epistemológicos

El desarrollo de la Trigonometría se construye sobre las aportaciones prácticas que le dieron origen en el marco de la astronomía, la geografía y a través de la construcción de grandes estructuras. Se localizan sus orígenes a través del sistema geocéntrico de Ptolomeo (100 – 170) e identifica un punto de ruptura significativo con el modelo heliocéntrico de Copérnico (1473-1543).

Si consideramos desde un punto de vista epistemológico, Montiel (2011) identifica la anticipación como la práctica social que regula las actividades asociadas a la matematización de la astronomía, ya sea para la predicción o la explicación de fenómenos celestes, era necesario que éste sucediera para estar en condiciones de comprobar el dato y, a la vez, el modelo; la matematización, numérica o geométrica, orientaba las decisiones prácticas de la agricultura, el comercio o la navegación, del mismo modo que guiaba a las explicaciones teóricas de la astronomía o la geografía. Esto es, se tenía la necesidad de anticipación al fenómeno. Este acto anticipatorio preconfigura la emergencia de un conocimiento y, en consecuencia, de un saber institucional.

La Trigonometría se constituye como un preliminar matemático de la teoría astronómica, que en virtud del dominio de la racionalidad helenística debía desarrollarse en el marco epistemológico que brindaba la geometría deductiva. La construcción de modelos a escala de una entidad real no manipulable (la inmensidad celeste) constituye una transición de lo macro a lo micro, donde la proporcionalidad entre ellos (realidad presente y realidad representada) condiciona la precisión del modelo. De manera natural, las razones se convierten en la abstracción inmediata de la proporción y los círculos, los arcos/ángulos y las cuerdas en los elementos constitutivos del modelo geométrico.

Con el objetivo de resaltar la logística implícita en el Almagesto de Ptolomeo, Pedersen (1974, p.35) describe los modelos geométricos que acompañan los desarrollos que, hoy, consideramos trigonométricos, como conceptos estáticos que se refieren a un instante particular en el tiempo. Para simular el movimiento del planeta, la configuración debía cambiar continuamente en el tiempo y la posición de cualquier punto definido en el tiempo se podía determinar por geometría ordinaria y calcular por los métodos trigonométricos descritos, en el Almagesto. Pedersen reconoce que la Trigonometría se deriva de la Geometría y puede hacer una diferencia entre lo que le correspondería a cada una en el Almagesto, pero Ptolomeo lo desarrolla de forma integral y lo establece como presupuestos matemáticos para la astronomía teórica.

El momento en que las cuerdas del modelo Ptolemaico se sustituyen por el seno de la astronomía de la India del siglo IV, podría considerarse un paso significativo de la matemática-geométrica a la matemática-trigonométrica, es decir, un paso hacia la constitución de una rama del saber que, si bien se construye sobre la base de la lógica y del lenguaje euclidianos, nace, se desarrolla y consolida en estrecha relación con la observación de la naturaleza y el estudio de fenómenos no manipulables.

El conocimiento trigonométrico que se construye en este momento de anticipación, al estar vinculado a la matematización de la astronomía, está considerando una escala de tiempo finito, humana y cosmológica a la vez, cuyo período depende en definitiva del fenómeno específico en cuestión (día-noche, fases lunares, estaciones del año, eclipses, posición de un cuerpo celeste). Así, encontramos que la periodicidad y el valor de las cuerdas (valores acotados) estaban vinculados a la repetición de fenómenos astronómicos y a la posición de los cuerpos celestes, respectivamente, y una vez que eran encontrados periodo y posición, no había razón alguna para su estudio en tanto propiedad de la relación trigonométrica.

En la siguiente tabla se presentan las razones trigonométricas, mostrando sus características de acuerdo con el desarrollo epistemológico, poniendo énfasis en la construcción de la relación y la funcionalidad trigonométrica y su respectivo desarrollo del pensamiento geométrico proporcional.

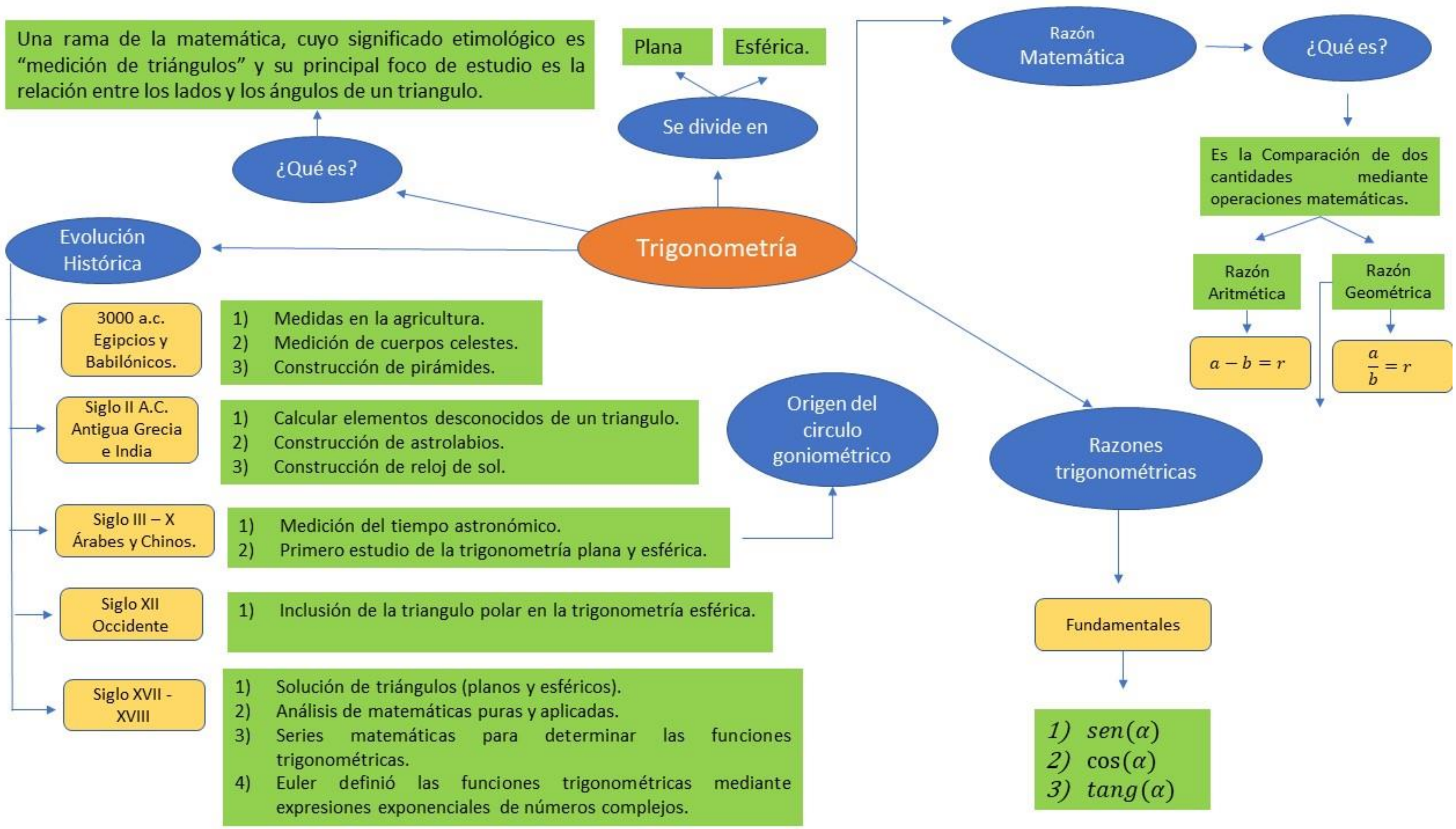
Practica de referencia	**Matematización de la astronomía**
Contexto	Estático – Proporcional
Lenguaje	Geométrico – Numérico
Racionalidad	Helenística – Euclidiana
Herramienta	Razón trigonométrica
Variables	$sen\ \theta$ (longitud) $\theta\ angulo\ (en\ grados)$
Escala de tiempo	Finita

Tabla N°1: Resumen características epistemológicas Razones trigonométricas.

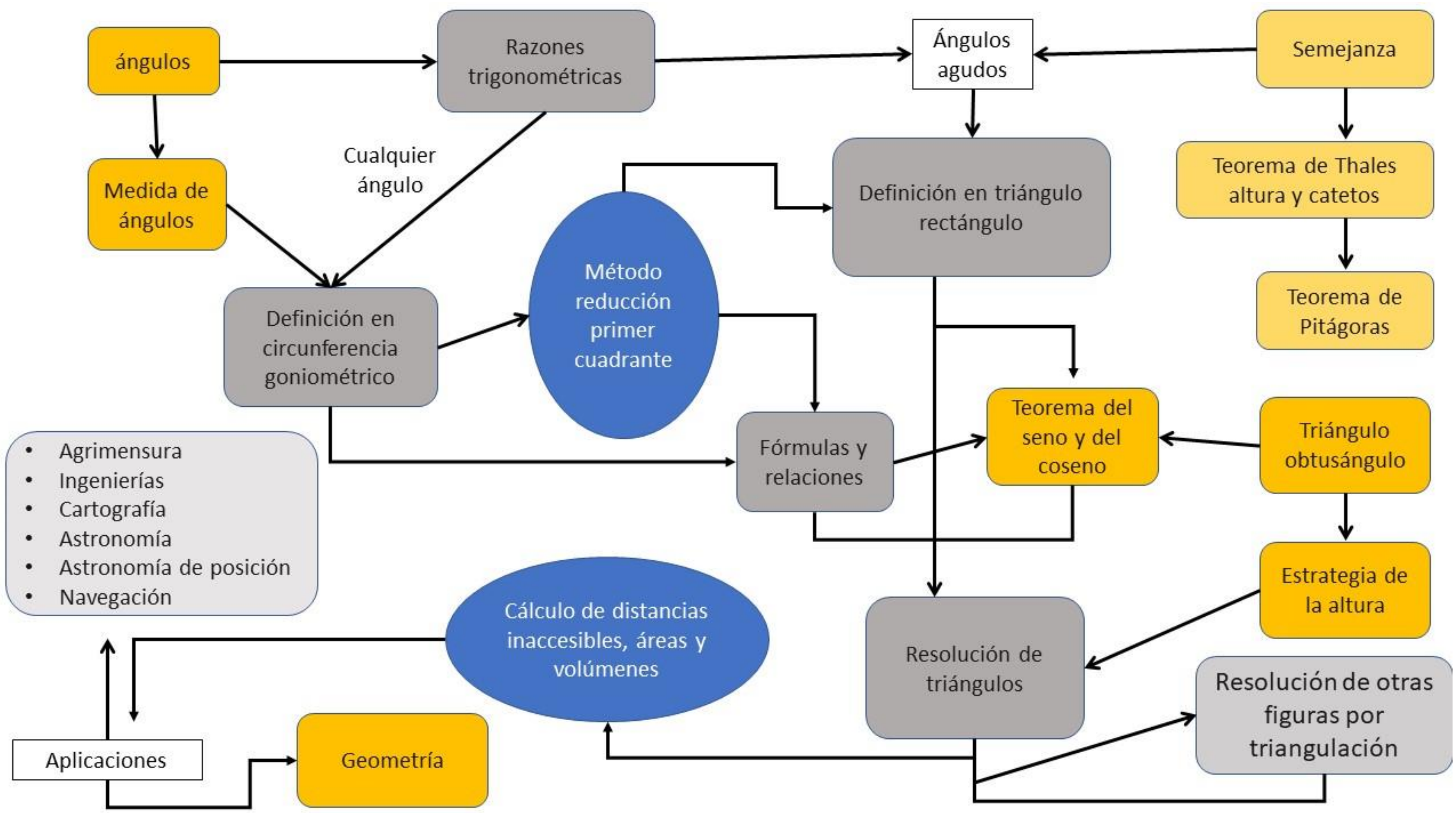
(Montiel, Desarrollo del Pensamiento Trigonométrico, 2013)

A continuación, se presenta un esquema, que de forma general pretende representar el entorno del objeto razones trigonométricas vinculado a su desarrollo histórico. Marcando su definición etimológica, el momento de consideración del circulo goniométrico y algunos otros hitos importantes referentes a su origen y sus usos.

Esquema del Desarrollo Histórico Epistemológico



Mapa Conceptual



Capitulo N°4: Análisis de Contenido

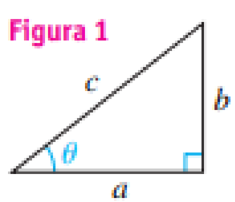
El siguiente análisis permitirá identificar y organizar los diferentes significados del concepto razones trigonométricas, este se presentará en tres partes: la estructura conceptual, los sistemas de representación y la fenomenología según lo propuesto por Rico (2013), la primera parte describe la definición matemática del objeto junto con su presentación a nivel escolar, luego los diferentes registros que permite el objeto y por último los usos que le dan sentido al concepto.

Definición Matemática

Para este trabajo se considera la definición extraída desde el texto: Álgebra y trigonometría con geometría analítica (Swokowski, 2009), la cual da forma a las relaciones trigonométricas, mostrando su construcción y unicidad, dentro del contexto de función.

Funciones trigonométricas de ángulos (Swokowski, 2009):

> Un triángulo es un triángulo rectángulo si uno de sus ángulos es un ángulo recto. Si θ es cualquier ángulo agudo, podemos considerar un triángulo rectángulo que tiene θ como uno de sus ángulos (figura 1). Donde el símbolo cuadrado especifica el ángulo de 90°. Se pueden obtener seis razones usando las longitudes A, B y C de los lados del triángulo (p.411-412).



$$\frac{b}{c},\quad \frac{a}{c},\quad \frac{b}{a},\quad \frac{a}{b},\quad \frac{c}{a},\quad \frac{c}{b}$$

Figura N°2: Presentación de un triángulo rectángulo y las razones que se forman con sus lados. (Swokowski, 2009, págs. 411-412)

A partir de las relaciones presentadas anteriormente, se puede observar que dependen del ángulo θ.

En efecto, si consideramos el triángulo ABC y trazamos $\overline{\boldsymbol{A'C'}}$ paralelo a $\overline{AC}$:

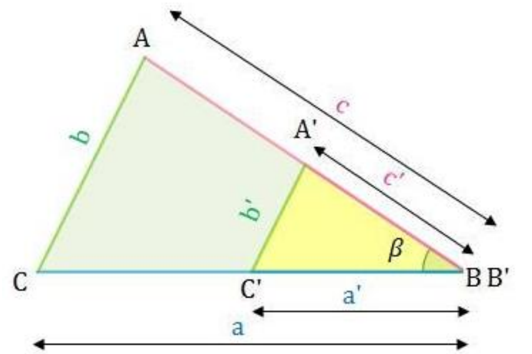


Figura N°3: Representación triángulo ABC

El primer teorema de Thales señala que: "Cuando dos triángulos tienen un vértice en común y los lados opuestos a ese ángulo son paralelos entre sí, entonces esos triángulos son semejantes". Denotamos por r el valor de la razón, con $r \in R$.

Donde:

$$\overline{AC} \quad // \quad \overline{A'C'}$$

$$\overline{AB} \quad // \quad \overline{A'B'}$$

$$\overline{BC} \quad // \quad \overline{B'C'}$$

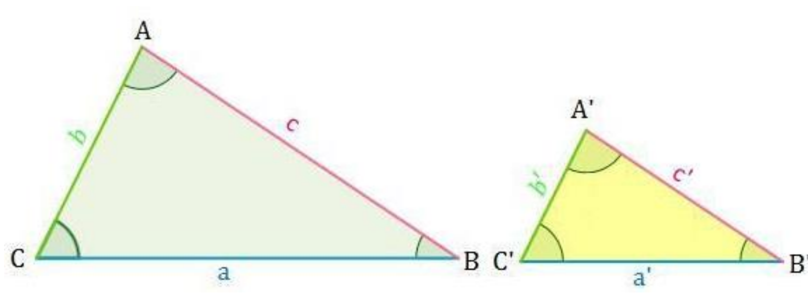


Figura N°4: Representación triángulos ABC y A´B´C

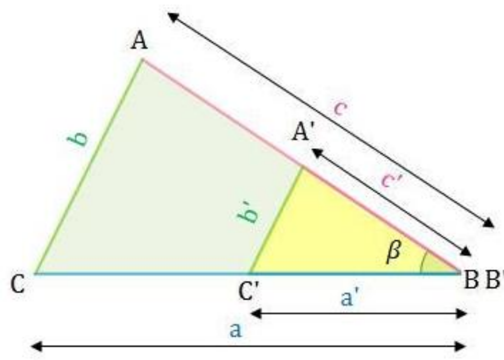
Entonces

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = r$$

ABC ~ A´B´C´

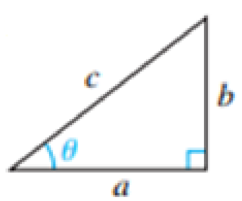
$$\alpha = \alpha' \qquad \beta = \beta'$$

Retomando la fig.3



Se pueden obtener las razones, $\frac{\overline{BC'}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BA'}}{\overline{BA}}$ que se pueden escribir como, $\frac{a'}{c'} = \frac{a}{c}$.

En cuanto a la definición de las razones trigonométricas, el texto Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica (Swokowski, 2009) presenta lo siguiente:



$$\operatorname{sen}\theta = \frac{b}{c} \qquad \cos\theta = \frac{a}{c} \qquad \tan\theta = \frac{b}{a}$$

$$\csc\theta = \frac{c}{b} \qquad \sec\theta = \frac{c}{a} \qquad \cot\theta = \frac{a}{b}.$$

Figura N°5: Definición de las razones trigonométricas elementales y sus reciprocas.

(Swokowski, 2009)

Si θ es el ángulo en la figura. Nos referiremos a los lados del triángulo de longitudes a, b y c como el lado adyacente (ady), lado opuesto(op) e hipotenusa(hip).

Definición de funciones trigonométricas de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo	$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{op}}{\text{hip}}$	$\cos\theta = \frac{\text{ady}}{\text{hip}}$	$\tan\theta = \frac{\text{op}}{\text{ady}}$
	$\csc\theta = \frac{\text{hip}}{\text{op}}$	$\sec\theta = \frac{\text{hip}}{\text{ady}}$	$\cot\theta = \frac{\text{ady}}{\text{op}}$

Figura N°6: Relación entre las razones trigonométricas con respecto a los catetos e hipotenusa.

El valor de las razones trigonométricas es número real que pertenece al intervalo cerrado $[-1,1]$.

Considerando el siguiente círculo unitario en el plano cartesiano:

$t = r\theta \qquad r = 1 \qquad t = \theta$

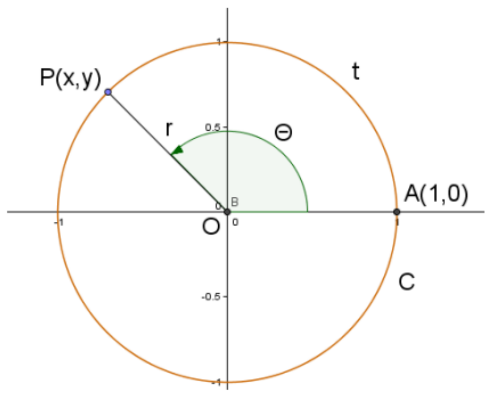


Figura N°7: Circulo Unitario en el plano Cartesiano

Llamaremos un ángulo en posición normal, si su lado inicial coincide con el semieje positivo de la abscisa.

Donde t denota la medida en radianes del ángulo θ. Así mismo, t es la medida del arco que inicia en el punto A (1,0) hasta un punto arbitrario P(x,y).

$$t \in \mathbb{R} \text{ tal que } 0 \leq 2t \leq 2\pi.$$

Las coordenadas del punto P, es decir (x, y), se utilizarán para definir las seis razones trigonométricas de t. Relacionando esto con el círculo unitario, se obtiene que:

$$sen(t) = sen(\theta) = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} = y$$

De la misma forma se obtiene que:

$$\cos(\theta) = x$$

Considerando el círculo unitario:

$$-1 \leq x \leq 1 \quad , \quad -1 \leq y \leq 1$$

Como

$$x = \cos(\theta) \quad , \quad y = sen(\theta)$$

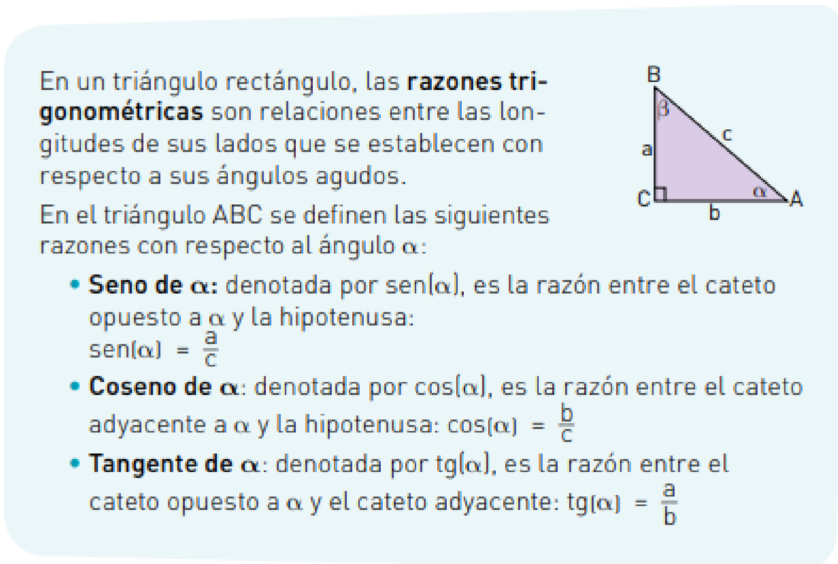
Entonces

$$-1 \leq sen(\theta) \leq 1 \quad , \quad -1 \leq y \leq 1$$

Definición Escolar

En el texto del estudiante de matemática de segundo medio (Chacon, García, Rupin, Setz, & Villena, 2017), destaca en la presentación de la unidad de geometría, que se especifica los conceptos que se trabajarán (¿Qué aprenderé?), vinculado al uso del mismo (¿para qué me servirá?), en donde detalla que las razones trigonométricas de seno, coseno y tangente, se utilizarán: para resolver problemas de la vida cotidiana, como calcular distancias inaccesibles, usar vectores asociados a fuerza, velocidad, y calcular proyecciones de vectores. Además, se especifica que la forma en cómo se aprenderá, será situando los conceptos en contextos relacionados con la astronomía y los observatorios astronómicos del norte de Chile, pues las características físicas de estos observatorios y los lugares donde se ubican presentan situaciones en las que se hace necesario aplicar la trigonometría.

"Las habilidades que se considerarán serán describir relaciones y situaciones matemáticas, usando lenguaje matemático, esquemas y gráficos. Explicar demostraciones de resultados mediante definiciones, axiomas, propiedades y teoremas y elegir o elaborar representaciones de acuerdo con las necesidades de la actividad, identificando sus limitaciones y su validez”. (Texto del estudiante, matemática 2°medio, p. 188). El texto del estudiante de matemática 2° medio, presenta la definición del concepto razones trigonométricas par triángulos rectángulos de la siguiente forma de manera verbal y luego resumiendo su forma en el triángulo rectángulo.

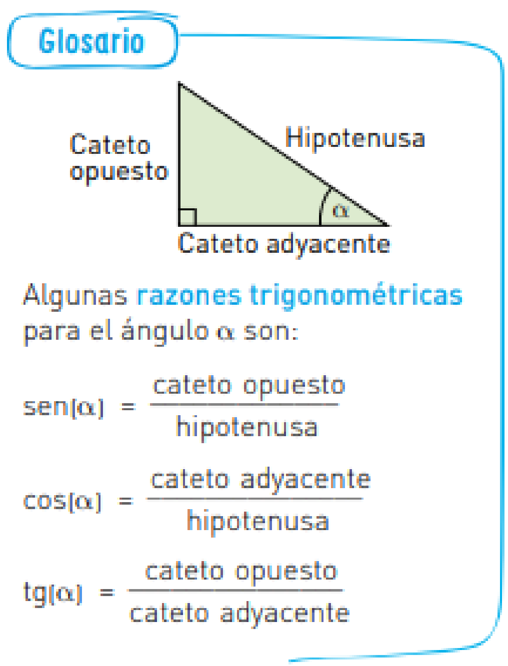

En un triángulo rectángulo, las **razones trigonométricas** son relaciones entre las longitudes de sus lados que se establecen con respecto a sus ángulos agudos.

En el triángulo ABC se definen las siguientes razones con respecto al ángulo α:

- **Seno de α:** denotada por sen(α), es la razón entre el cateto opuesto a α y la hipotenusa: $\text{sen}(\alpha) = \frac{a}{c}$
- **Coseno de α**: denotada por cos(α), es la razón entre el cateto adyacente a α y la hipotenusa: $\cos(\alpha) = \frac{b}{c}$
- **Tangente de α**: denotada por tg(α), es la razón entre el cateto opuesto a α y el cateto adyacente: $\text{tg}(\alpha) = \frac{a}{b}$

Figura N°8.1: Definición de las razones trigonométricas fundamentales.

(Chacón, García, Rupin, Setz, & Villena, 2018, pág. 215)



Algunas razones trigonométricas para el ángulo α son:

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{tg}(\alpha) = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

Figura N°8.2: Definición de las razones trigonométricas fundamentales.

(Chacón, García, Rupin, Setz, & Villena, 2018, pág. 213)

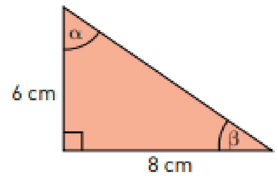
El contenido se ejercita por medio de las siguientes actividades:

1. Calcula las razones trigonométricas de cada ángulo agudo del triángulo.

a. $sen(\alpha)$ = ________ d. $sen(\beta)$ = ________

b. $cos(\alpha)$ = ________ e. $cos(\beta)$ = ________

c. $tg(\alpha)$ = ________ f. $tg(\beta)$ = ________



2. Sin utilizar calculadora, determina el valor de las siguientes expresiones.

a. $3\ sen(30°) + 2\ cos(60°)$ ________

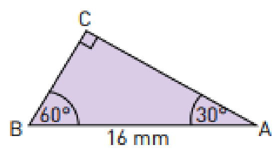
b. $\sqrt{3}\ tg(60°) - 3\ tg(45°)$ ________

c. $sen(30°) - cos(30°)$ ________

d. $sen(60°) + cos(45°) - tg(60°) \cdot tg(30°)$ ________

3. Calcula las medidas de los lados faltantes en los siguientes triángulos rectángulos:

a.



b.

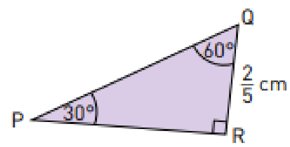


Figura N°9: Ejercicios del texto del estudiante.

(Chacón, García, Rupin, Setz, & Villena, 2018, pág. 217)

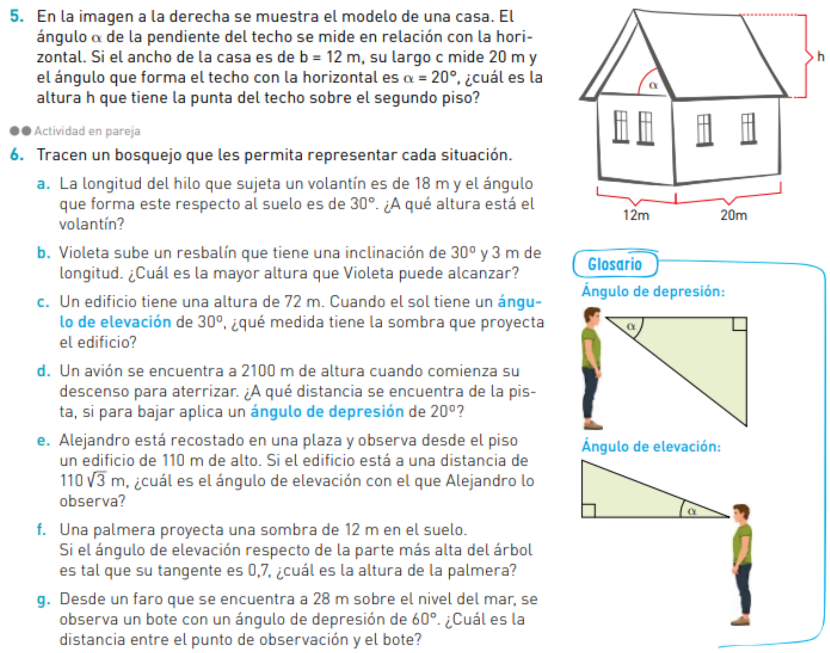
Completa la siguiente tabla con la razón trigonométrica correspondiente, las expresiones algebraicas y el resultado para cada caso. Redondea los ángulos al grado y las longitudes (en cm) a la décima.

Ángulo / lado dado	Lado dado	Lado / ángulo a determinar	Razón trigonométrica	Expresión algebraica	Resultado
$\alpha = 20°$	c = 5 cm	cateto opuesto a	$sen(\alpha) = \frac{a}{c}$	$a = c \cdot sen(\alpha)$	a = 1,7 cm
$\beta = 75°$	b = 3,5 cm	hipotenusa c			
$\alpha = 70°$	b = 6 cm	hipotenusa c			
$\beta = 30°$	c = 6,5 cm	cateto adyacente			
$\beta = 55°$	c = 7,5 cm	cateto opuesto			
α = 4 cm	b = 5 cm	ángulo α			
α = 4 cm	c = 8 cm	ángulo β			

Figura N°10: Ejercicios del texto del estudiante.

(Chacón, García, Rupin, Setz, & Villena, 2018, pág. 217)

Y por último actividades de ejercitación contextualizada en situaciones cotidianas.



5. En la imagen a la derecha se muestra el modelo de una casa. El ángulo α de la pendiente del techo se mide en relación con la horizontal. Si el ancho de la casa es de b = 12 m, su largo c mide 20 m y el ángulo que forma el techo con la horizontal es $\alpha = 20°$, ¿cuál es la altura h que tiene la punta del techo sobre el segundo piso?

Actividad en pareja

6. Tracen un bosquejo que les permita representar cada situación.

a. La longitud del hilo que sujeta un volantín es de 18 m y el ángulo que forma este respecto al suelo es de 30°. ¿A qué altura está el volantín?

b. Violeta sube un resbalín que tiene una inclinación de 30° y 3 m de longitud. ¿Cuál es la mayor altura que Violeta puede alcanzar?

c. Un edificio tiene una altura de 72 m. Cuando el sol tiene un **ángulo de elevación** de 30°, ¿qué medida tiene la sombra que proyecta el edificio?

d. Un avión se encuentra a 2100 m de altura cuando comienza su descenso para aterrizar. ¿A qué distancia se encuentra de la pista, si para bajar aplica un **ángulo de depresión** de 20°?

e. Alejandro está recostado en una plaza y observa desde el piso un edificio de 110 m de alto. Si el edificio está a una distancia de $110\sqrt{3}$ m, ¿cuál es el ángulo de elevación con el que Alejandro lo observa?

f. Una palmera proyecta una sombra de 12 m en el suelo. Si el ángulo de elevación respecto de la parte más alta del árbol es tal que su tangente es 0,7, ¿cuál es la altura de la palmera?

g. Desde un faro que se encuentra a 28 m sobre el nivel del mar, se observa un bote con un ángulo de depresión de 60°. ¿Cuál es la distancia entre el punto de observación y el bote?

Figura N°11: Ejercicios del texto del estudiante.

(Chacón, García, Rupin, Setz, & Villena, 2018, pág. 218)

Distancia Entre Saberes

Michel Verret (1975), define la didáctica como “la transmisión de aquellos que saben a aquellos que no saben. De aquellos que han aprendido a aquellos que aprenden”. (1975, p. 139) a partir de esto es que se plantea que no se puede enseñar un objeto si una previa transformación desde lo formal al aula.

Considerando lo anterior, y tomando en cuenta los usos cotidianos con que se presenta el contenido en la definición escolar del texto de estudiantes, es que podemos identificar la carencia de espacios que involucren, tanto el entorno que rige las prácticas de los estudiantes técnico-profesionales como su proceso epistemológico, la definición entregada prioriza la adquisición de contenido mediante el aprendizaje estático y desvinculado, evitando el conocimiento puesto en uso. Si bien el texto escolar problematiza el saber que está en juego, este no contempla los usos de las especialidades en las que pudiese ser aplicado.

La principal diferencia entre la definición experta y la entregada en el texto escolar MINEDUC (Vallejos, Cortés, Días, & Muñoz, 2018), es la complementación del contenido, mediante la demostración de las relaciones trigonométricas a partir de contenidos geométricos previamente adquiridos, como el teorema de Thales y Semejanza de Triángulo. De esta forma se generaliza para triángulos rectángulos de distinta medida. Tomando en cuenta que la definición de trigonometría es la relación entre ángulos y lados de un triángulo rectángulo, esta concepción es relevante ya que quita de las posibles presunciones las variaciones de cálculo cuando solamente cambian los lados al comparar dos triángulos de distinto tamaño.

Análisis Fenomenológico

Hoy en día las aplicaciones de las razones trigonométricas son variadas, lo que invita a diseñar actividades que sea extensibles fuera del aula de clase tradicional, esto permite quitar del foco al objeto y priorizar su uso desde lo cotidiano, En otras palabras, se busca recuperar el carácter social que ha sido dejado de lado y que el foco de atención se dirija hacia las prácticas sociales; las prácticas que norman la construcción social de conocimiento matemático y que se manifiestan a través de su uso (Cantoral, 2013)

A continuación, se presenta una tabla que busca mostrar de manera resumida algunos fenómenos asociados al contenido y el ámbito en el cual se desarrolla y que buscan ejemplificar otros contextos distintos a los presentados en el programa de estudio.

Contenido matemático	Fenómeno	Ámbito en el cual se desarrolla
Descomposición vectorial mediante razones trigonométricas: seno, coseno y tangente.	Medición tensión de cuerda, utilizado para el cableado en instalaciones domiciliarias e industriales.	Electricidad
	Cálculo de fuerzas de tensión, para contrarrestar pesos de estructuras y maquinaria.	Mecánica industrial y automotriz

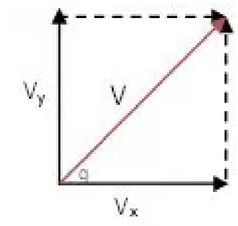
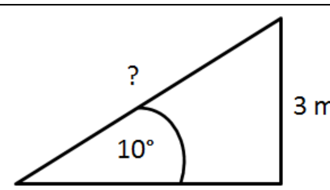
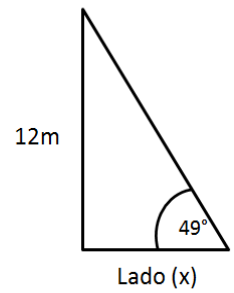
	Cálculo fuerzas de tensión para pesos de máquinas.	Construcción
Medición de alturas y áreas	Proyectar altura de estructuras de distinta índole	Construcción Mecánica
	Nivelar terrenos mediante implementos técnicos.	Topografía

Tabla N°2: Resumen fenómenos asociados a las razones trigonométricas.

Ejemplificaremos tipos de actividades donde se aplica las razones trigonométricas, mostrado en ejercicios que pudieran tener o ser modificados para lograr un vínculo con la especialidad de mecánica industrial con la cual trabajaremos. Por ejemplo, para construcciones metálicas.

Ejemplo	**Solución**
13 Una rampa para sillas de ruedas forma un ángulo de 10° con el suelo y se alza 3 m verticalmente. ¿Qué distancia debe recorrer la silla para llegar desde la base al extremo superior de la rampa? R: __________ **(Vallejos, Cortés, Días, & Muñoz, 2018, pág. 104)**	 $\sin\alpha = \frac{catetoopuesto}{hipotenusa}$ $\sin 10° = \frac{3}{?}$ $? = \frac{3}{\sin 10°}$ $? \approx 17{,}27m$

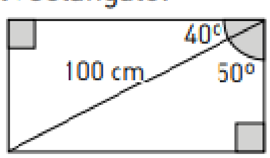
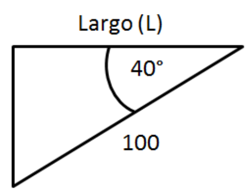
<table>
<tr>
<td>12 Un árbol de 12 m de altura proyecta una sombra de x m cuando el ángulo de elevación del sol es 49°. ¿Cuál es el valor de x?
R: ____________________

(Vallejos, Cortés, Díaz, & Muñoz, 2018, pág. 104)</td>
<td>

$$\tan \alpha = \frac{catetoopuesto}{catetoadyacente}$$
$$\tan 49° = \frac{12}{x}$$
$$x = \frac{12}{\tan 49°}$$
$$x \approx 10{,}43$$</td>
</tr>
</table>

Tabla N°3.1: Fenomenología asociada a las razones trigonométricas.

A partir de los anterior consideramos tomar en cuenta los siguientes ejercicios pertenecientes al texto del estudiante, en donde las situaciones pueden ser aplicadas a contextos vinculados a estructuras metálicas.

<table>
<tr>
<td>14 La figura muestra un rectángulo cuya diagonal mide 100 cm. Calcula el largo y el ancho del rectángulo.

</td>
<td>Largo


$$\cos \alpha = \frac{catetoadyacente}{hipotenusa}$$
$$\cos 40° = \frac{L}{100}$$
$$100 \times \cos 40° = L$$
$$76{,}60 \approx L$$</td>
</tr>
</table>

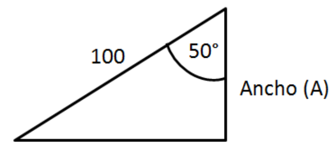
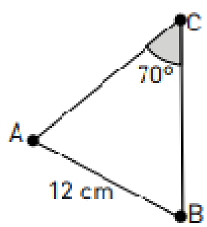
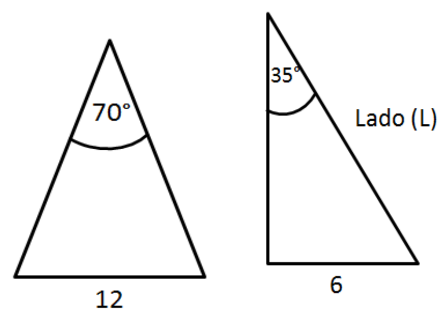
(Vallejos, Cortés, Díaz, & Muñoz, 2018, pág. 104)	Ancho  $\cos\alpha = \frac{catetoadyacente}{hipotenusa}$ $\cos 50° = \frac{A}{100}$ $100 \times \cos 50° = A$ $64.27 \approx A$
18 La figura muestra un triángulo isósceles cuya base mide 12 cm y el ángulo del vértice, 70°. ¿Cuánto miden los lados del triángulo?  R: ___ **(Vallejos, Cortés, Díaz, & Muñoz, 2018, pág. 104)**	 $\sin\alpha = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa}$ $\sin 35° = \frac{6}{L}$ $L = \frac{6}{\sin 35°}$ $L \approx 10{,}46$ Al ser un triángulo isósceles ambos lados del triángulo tienen la misma medida.

Tabla N°3.2: Fenomenología asociada a las razones trigonométricas.

Sistemas De Representación

El objeto que presentamos en este trabajo está comprendido bajo diferentes tipos de representación, lo que se considerará posteriormente en la secuencia didáctica que propondremos, cabe señalar que, para el marco utilizado, esto es la categoría representacional, que comprende las notaciones gráficas, simbólicas y sistemas de signos involucrados (Rico, 2013). Esto nos permite analizar el contenido matemático en un documento escolar y con esto identificar las adecuaciones que tienen, respecto de nuestra propuesta.

Respecto del objeto matemático que trabajamos hemos identificado 6 formas de representación que detallamos a continuación:

Representación algebraica	Se identifica por el uso de símbolos para presentar los elementos y relaciones del foco de contenido
Representación numérica	Permite expresar en valores numéricos las cantidades involucradas en el contenido
Representación figural	permite expresar los elementos del foco de contenido, en relaciones métricas y espaciales geométricas
Representación mediante el circulo unitario	Desprendido del proceso epistemológico del objeto, en donde se vincula su uso con el contexto de nacimiento del concepto y sus aplicaciones históricas.

Tabla N°4: Sistema de Representación

Estos sistemas de representación permiten presentar el foco del objeto matemático, en este caso las razones trigonométricas, para que el estudiante puede visualizar de mejor manera características y propiedades particulares de cada representación.

A continuación, se presenta la relación entre representaciones de razones trigonométricas, con ejemplos de aplicación.

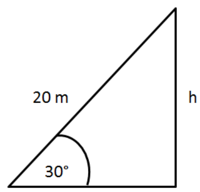
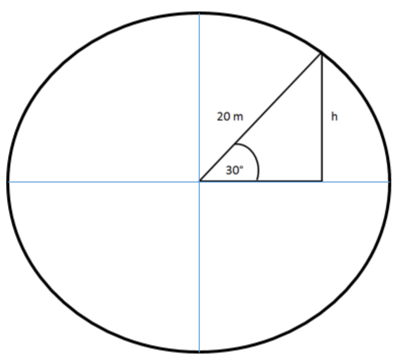
REPRESENTACIÓN	EJEMPLO	CARACTERÍSTICAS
FIGURAL		Ordena de manera visual la situación, ubicando los aspectos numéricos dentro de su representación geométrica
ALGEBRAICO	Hipotenusa: 20 Angulo: 30° h = $\sin 30° \times 20$	Identifica cada aspecto numérico de la problemática.
SIMBÓLICO	$\text{sen } 30 = \frac{catetoopuesto}{20}$	Relaciona los aspectos numéricos y simbólicos de la situación, lo que permite visualizar la resolución algebraica.
FIGURAL		Representación figural (círculo unitario) que hace referencia al nacimiento histórico- epistemológico de la razón trigonométrica

Tabla N°5: Relación entre Representaciones de las Razones Trigonométricas.

Capitulo N°5: Análisis Cognitivo

El foco de atención del análisis cognitivo es el aprendizaje del estudiante. En ese sentido es necesario que el análisis se realice diferenciando:

- Expectativas de aprendizaje, donde identificaremos características de las propuestas de aprendizaje que se le presentan al estudiante.
- Las limitaciones de aprendizaje, el cual permite ordenar limitaciones y errores relacionados al objeto matemático.
- Las oportunidades de aprendizaje, en donde se clasificarán las tareas propuestas en el texto escolar entregado por el MINEDUC (Chacon, García, Rupin, Setz, & Villena, 2017)**.**

Expectativas De Aprendizaje

A partir de la propuesta curricular, se hace una revisión del currículum vigente que va a permitir analizar todo lo que antecede a las razones trigonométricas y el entorno matemático en el que se desenvuelve, es decir, se hará un análisis a los conceptos que llevaron a construir el objeto matemático que investigamos y sobre los que este permite en el programa de estudio.

A continuación, se presenta el objetivo que detalla las razones trigonométricas dentro del programa de estudio.

Nivel: II año de enseñanza media
Objetivo de Aprendizaje: (OA) 08: mostrar que comprenden las razones trigonométricas del seno, coseno y tangente en triángulos rectángulos: • Relacionándolas con las propiedades de la semejanza y los ángulos. • Explicándolas de manera pictórica y simbólica, de manera manual y/o con software educativo. • Aplicándolas para determinar ángulos o medidas de lados. Resolviendo problemas geométricos y de otras asignaturas.

Tabla N°6: Objetivo del programa de Segundo año de enseñanza media.

(Saiz & Blumenthal, 2016)

A partir de la revisión, podemos observar que el objeto solamente es presentado en 2° año medio, en donde llama la atención que su aplicación se promueva mediante la resolución de problemas de tipo geométricos y en concordancia con las aplicaciones en otras asignaturas. Para comprender las razones trigonométricas, a modo de conocimientos previos, se necesita primero comprender la noción de ángulo, que actualmente se encuentra presente en el curriculum escolar chileno, a partir del nivel de tercero básico hasta segundo medio. En la siguiente tabla se presentan las nociones previas siendo los hitos más importantes los presentados a continuación.

Nivel	Conocimiento
3° enseñanza básica	Primera noción de ángulo de 45° y 90°
4° enseñanza básica	Función de un transportador.
5° enseñanza básica	Concepto formal de ángulo, comprensión del grado sexagesimal y uso de transportador.
6° enseñanza básica	Construcción de ángulos mediante trasportador o compas.
7° enseñanza media	Suma de ángulos en polígonos
8° enseñanza media	Uso en vectores traslación de figuras 2D.
1° enseñanza media	Semejanza de triángulos

Tabla N°7: niveles en que los que se imparten conocimientos previos para razones trigonométricas.

Limitaciones Del Aprendizaje

Muchos estudiantes tienen dificultades con las matemáticas y con la capacidad de entender sus conceptos, su lenguaje formal y sus símbolos, lo que se puede volver un verdadero disgusto al momento de abordar conocimientos nuevos. Para Rico (1995), los errores son consecuencia del conocimiento que tienen los estudiantes al momento de abordar una tarea, además del cómo lo utilizan para aquello, mientras que “las dificultades organizan los errores y se refieren al conocimiento que se pone en juego cuando los errores se producen” (Gómez, 2002, p.275). A continuación, se presenta un ordenamiento que busca vincular tres dificultades identificadas con los errores surgidos a raíz de ellos.

Dificultades	Errores
Dificultad para reconocer, construir y representar propiedades y elementos geométricos asociados a problemas, en los que se involucran las razones trigonométricas.	• No reconoce los triángulos rectángulos. • No distingue correctamente la hipotenusa de los catetos. • Confunde el ángulo recto con los ángulos agudos en un triángulo rectángulo. • No traza correctamente las alturas en triángulos cualesquiera. • No reconoce que la suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a 180º. • No identifica correctamente los lados del triángulo respecto a un ángulo, impidiéndole construir las razones trigonométricas. • Representa en lo bidimensional figuras de tercera dimensión sin la perspectiva adecuada. • No asigna correctamente los ángulos en la representación gráfica de un problema trigonométrica • No identifica las longitudes dadas en un problema dentro de su representación gráfica
Dificultad para realizar las traducciones entre las distintas representaciones de las razones trigonométricas, a partir de los datos dados en el problema.	• Establece de forma equivocada la razón trigonométrica a partir del modelo gráfico del problema. • Establece de forma equivocada la razón trigonométrica a partir del modelo gráfico del problema. • En la representación gráfica del problema coloca equivocadamente los datos conocidos. • No interpreta ni relaciona correctamente los valores numéricos obtenidos dentro de la solución del problema. • A pesar de que el estudiante conoce la razón trigonométrica para encontrar el ángulo pedido en el problema, no determina su valor al hacer uso de la herramienta tecnológica.

Dificultad para construir transformaciones sintácticas de las razones trigonométricas entre una misma representación, a partir de los datos dados en el problema.	• Al determinar la razón trigonométrica que resuelve el problema, no asigna correctamente los datos conocidos en ella. • No despeja correctamente las variables pedidas en las razones trigonométricas. • Halla la amplitud de un ángulo, afirmando que el valor obtenido por una razón trigonométrica lo representa. • No utiliza de forma correcta las herramientas tecnológicas para resolver el problema

Tabla N°8: Dificultades y errores asociados a la enseñanza de la trigonometría.

(Becerra, Arenas, Morales, Urrutia, & Gómez, 2014)

Oportunidades De Aprendizaje

Analizaremos las tareas que se encuentran en el programa de estudio de 2° año medio y del texto del estudiante del mismo nivel, las cuales promueven el logro del objetivo de aprendizaje referente a las razones trigonométricas.

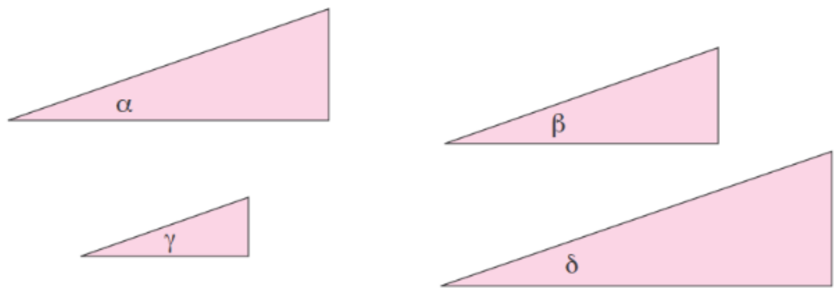
La siguiente tabla está basada en “Los Indicadores para los grados de complejidad de las tareas” (Lupiáñez, 2009), la cual nos muestra tres categorías, cada una de ella dividida en subcategorías, las cuales nos ayudarán a clasificar los tipos de tareas que hoy en día se ofrecen en el curriculum nacional, de manera de identificar el nivel de la demanda cognitiva que exige cada una de ellas. A continuación, se presenta cada categoría incluyendo sus subcategorías.

Reproducción	Conexión	Reflexión
• **Contextos familiares.** • **Conocimientos ya practicados.** • **Aplicación de algoritmos estándar.** • **Realización de operaciones sencillas.** • **Uso de fórmulas elementales.**	• **Contextos menos familiares.** • **Interpretar y explicar.** • **Manejar y relacionar diferentes sistemas de representación.** • **Seleccionar y usar estrategias de resolución de problemas rutinarios**	• **Tareas que requieren comprensión y reflexión.** • **Creatividad** • **Ejemplificación y uso de conceptos.** • **Relacionar conocimientos para resolver problemas complejos.** • **Generalizar y justificar resultados obtenidos**

Tabla N°9: Indicadores para los grados de complejidad de las tareas.

(Lupiáñez, 2009)

A continuación, presentamos el análisis de tareas propuestas por el programa de estudio de segundo año de enseñanza media y el libro de ejercitación de los estudiantes de segundo medio. Dicho análisis está basado en las categorías y subcategorías anteriormente señaladas presentada en la tabla de tareas propuestas por el programa de estudios, categorizadas según “Los Indicadores para los grados de complejidad de las tareas” (Lupiáñez, 2009).

Tarea	Categoría
La pendiente de una calle se expresa en porcentaje (por cientos), que se refiere a la razón entre la altura (vertical) a la cual sube la calle, y la distancia por la que avanza en dirección horizontal. El dibujo muestra el perfil de cuatro calles:  Determinan la pendiente del perfil de cada calle. Responden: ¿Qué relación existe entre los tres triángulos? Explican la respuesta con el resultado de la actividad anterior. Determinan, aproximadamente y mediante un modelo gráfico, las pendientes en % de las calles que suben por los siguientes ángulos: 10°, 20°, 30°, 40° Determinan, aproximadamente, mediante representación gráfica, los ángulos por los cuales suben las calles si las pendientes son las siguientes: 25 %, 40 %, 50 %, 100 % Una calle tiene una pendiente de 20 % y sube a una altura de 40 m sobre el nivel anterior. Construyen el perfil de la calle a escala 1: 1000. En un triángulo rectángulo, la razón entre el cateto opuesto y el cateto adyacente al ángulo se denomina “tangente”. Los alumnos y las alumnas: Comprueban las pendientes aproximadas del ejercicio c) con la tecla [tan] de la calculadora. Comprueban los ángulos aproximados del ejercicio d) con la tecla [$\tan^{-1}$] de la calculadora. **(MINEDUC, 2016, pág. 133)**	Interpretar y explicar.

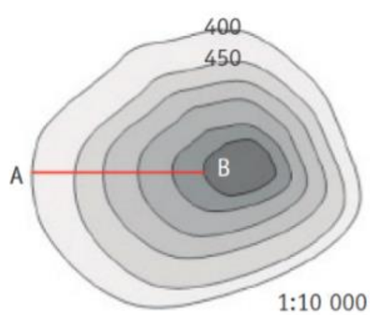
Completan la siguiente tabla con las razones trigonométricas de seno, coseno y tangente, los ángulos y las expresiones algebraicas. Redondean los ángulos a grados enteros y las longitudes en cm al primer decimal:

ÁNGULO/ LADO DADO	LADO DADO	LADO/ ÁNGULO POR DETERMINAR	RAZÓN TRIGONOMÉTRICA	EXPRESIÓN ALGEBRAICA	RESULTADO
$\alpha = 20°$	$c = 5$ cm	cateto opuesto a	$\text{sen}\ \alpha = \frac{a}{c}$	$a = c \cdot \text{sen}\ \alpha$	$a = 1{,}7$cm
$\beta = 75°$	$b = 3{,}5$ cm	hipotenusa c			
$a = 4$ cm	$b = 5$ cm	ángulo α			
$a = 4$ cm	$c = 8$ cm	ángulo β			
$b = 6$ cm	$c = 9$ cm	ángulo α			
$c = 10$ cm	$a = 4$ cm	ángulo α			
$\alpha = 70°$	$b = 6$ cm	hipotenusa c			
$\beta = 30°$	$c = 6{,}5$ cm	cateto adyacente			
$\beta = 55°$	$c = 7{,}5$ cm	cateto opuesto			

(MINEDUC, 2016, pág. 134)

Uso de fórmulas elementales

El dibujo muestra el mapa topográfico de un cerro. Una línea de nivel representa la misma altura sobre la superficie del mar. Se proyecta construir un teleférico que lleva del punto A de la base hasta el punto B en el nivel más alto:



Determinan la pendiente por medio de la traza del teleférico, con una regla y los datos del mapa topográfico.

Calculan el ángulo de elevación de la traza del teleférico con la calculadora.

Determinan la pendiente más inclinada del cerro y calculan el ángulo de elevación respectivo.

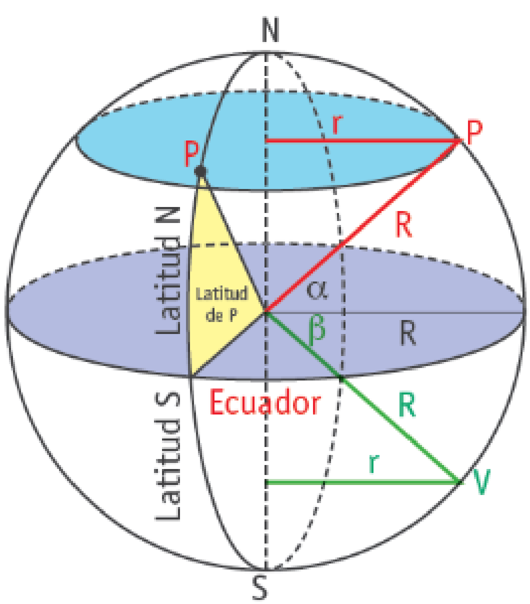
(MINEDUC, 2016, pág. 135)

Contextos menos familiares.

<table>
<tr>
<td>El Seno Agostini, en la Región de Magallanes, tiene un ancho aproximado de 5 000 m. Una embarcación parte de Punta Estela en la dirección de la flecha verde, que forma un ángulo de 65° con la línea punteada en rojo. Manteniendo la dirección, la embarcación llegará a un punto B en la orilla opuesta.

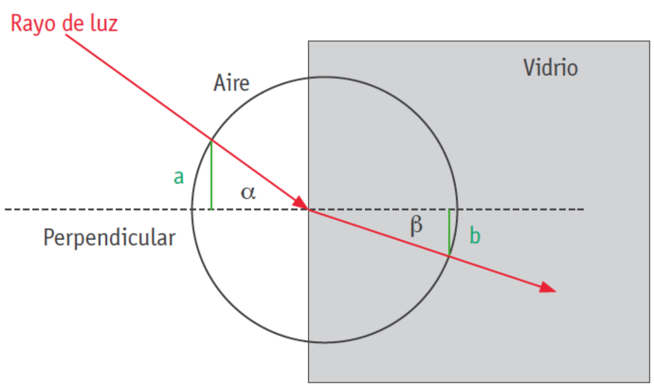
Calculan la distancia entre los puntos A (la partida) y B, mediante una razón trigonométrica. Redondean el resultado a metros enteros.

(MINEDUC, 2016, pág. 135)</td>
<td>Contextos menos familiares.</td>
</tr>
<tr>
<td>La imagen muestra un dibujo esquemático de la Tierra. Aparecen el radio de la Tierra R y el radio r del paralelo de un punto P, de la latitud $\alpha = 38°$, en el hemisferio norte, que corresponde a la ciudad de Palermo, en Italia.


</td>
<td>Relacionar conocimientos para resolver problemas complejos</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>El ángulo α representa el ángulo de elevación sobre el plano del Ecuador, que lleva al punto P en la superficie de la Tierra. ¿En qué parte del dibujo hay otra vez un ángulo que iguala al ángulo α? Explican la respuesta.
El radio R de la Tierra es de 6371 km. Calculan el radio del paralelo en la Tierra, en el cual se ubica la ciudad de Palermo.
Valparaíso tiene una latitud sur de $\beta = 33°$. Calculan el radio r del paralelo en el cual se ubica esa ciudad.
Calculan la velocidad con la cual Valparaíso gira alrededor del eje terrestre. Expresan la velocidad en km /h.
Responden: ¿En qué partes de la Tierra la velocidad de la rotación es 0? Explican la respuesta mediante una razón trigonométrica.

(MINEDUC, 2016, pág. 136)</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>Si un rayo de luz pasa del aire a un material transparente, como vidrio, cambia su dirección hacia la línea perpendicular. El ángulo entre el rayo y la perpendicular antes del vidrio se denomina $\boldsymbol{\alpha}$, y entre el vidrio y la perpendicular se denomina $\boldsymbol{\beta}$. La razón a: b entre el segmento a y el segmento b se llama “índice de refracción”.



Verifican que el “índice de refracción” se puede expresar con la razón $\mathbf{sin}\,\boldsymbol{\alpha}$, en la cual el ángulo $\boldsymbol{\alpha}$ es el ángulo entre el rayo y la perpendicular fuera del vidrio, y el ángulo $\boldsymbol{\beta}$ es el ángulo entre el rayo y la perpendicular dentro del vidrio.
Calculan el ángulo $\boldsymbol{\beta}$ si el ángulo $\boldsymbol{\alpha}$ es de 30°. Redondean al primer decimal.
Calculan si el ángulo $\boldsymbol{\beta}$ es de 60°. Redondean al primer decimal.

(MINEDUC, 2016, pág. 138)</td>
<td>Conocimientos ya practicados.</td>
</tr>
</table>

1 Si los catetos de un triángulo rectángulo miden 5 cm y 9 cm, ¿cuánto mide la hipotenusa? R:____________________ **2** Si un cateto de un triángulo rectángulo mide 1 cm y la hipotenusa mide $\sqrt{8}$ cm, ¿cuánto mide el otro cateto? R:____________________ **3** Marca los tríos de medidas que correspondan a los lados de triángulos rectángulos. **a.** 2 cm, 3 cm, 5 cm ______ **c.** 12 cm, 16 cm, 20 cm ______ **b.** 3 cm, 4 cm, 5 cm ______ **d.** 15 cm, 36 cm, 39 cm ______ **4** Una escalera de 5 metros se apoya contra un edificio. Si la base de la escalera se encuentra a 3 metros del edificio, ¿cuál es la distancia desde el piso hasta la parte superior de la escalera? R:____________________ **5** Dos polígonos son semejantes con una razón de semejanza 1,8. Si un lado de este polígono mide 2,4 cm, ¿cuánto mide el lado correspondiente en el polígono imagen? R:____________________ **6** Si dos polígonos son semejantes, con una razón de semejanza r, ¿cuál es la razón entre los perímetros de los polígonos? R:____________________ **(Vallejos, Cortés, Díaz, & Muñoz, 2018, pág. 101)**	Conocimientos ya practicados.
1 Un volantín está sujeto al suelo por un hilo que mide 20 m. Si el ángulo de elevación del volantín es de 30°, ¿a qué altura se encuentra? R: ____________________ **2** Un árbol proyecta una sombra de 15 m cuando el ángulo de elevación del sol es de 60°. Aproximando al metro, ¿cuál es la altura del árbol? R: ____________________ **3** Una persona se encuentra a 200 m de un famoso edificio y el ángulo de elevación entre ella y el extremo superior de un edificio es de 45°. Aproximando al metro, ¿cuál es la altura del edificio? R: ____________________ **(Vallejos, Cortés, Díaz, & Muñoz, 2018, pág. 103)**	Relacionar conocimientos para resolver problemas complejos

<table>
<tr>
<td>

Con la ayuda de una calculadora, completa la siguiente tabla. Entrega tus resultados con dos dígitos decimales.

<table>
<tr><th></th><th>17°</th><th>73°</th><th>24°</th><th>66°</th></tr>
<tr><td>seno</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>coseno</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

a. ¿Qué relación hay entre los ángulos de las columnas primera y segunda?, ¿y entre los ángulos de la tercera y la cuarta?

R: ______________________________

b. ¿Qué relación puedes observar entre el valor del seno de un ángulo y el de su complemento?, ¿y del coseno?

R: ______________________________

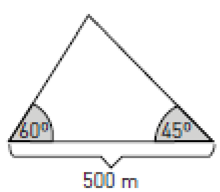
c. Generaliza tus resultados completando las siguientes igualdades.

$\cos(90 - \alpha) =$ _____ $\operatorname{sen}(90 - \alpha) =$ _____

(Vallejos, Cortés, Díaz, & Muñoz, 2018, pág. 102)

</td>
<td>Relacionar conocimientos para resolver problemas complejos</td>
</tr>
<tr>
<td>

4 Dos personas que se encuentran a 500 m de distancia observan un avión con ángulos de elevación de 60° y 45°, como lo muestra la figura.



a. ¿A qué altura vuela aproximadamente el avión?

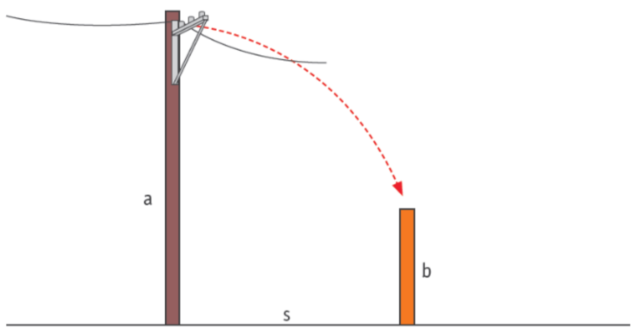
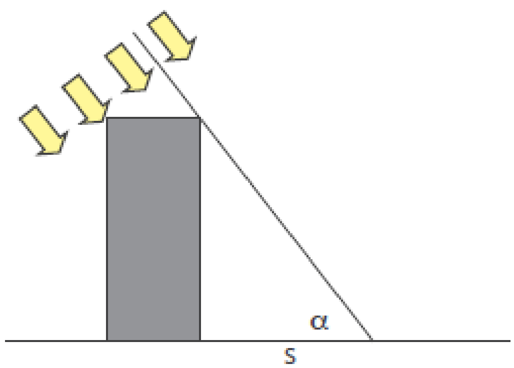
R: ______________________________

b. ¿Cuál es la distancia entre el avión y cada observador?

R: ______________________________

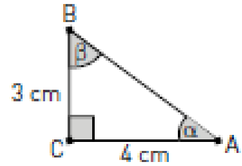
(Vallejos, Cortés, Díaz, & Muñoz, 2018, pág. 103)

</td>
<td>Relacionar conocimientos para resolver problemas complejos</td>
</tr>
</table>

Un poste de madera de alumbrado público tiene una altura a = 5,5 m. El poste está frente a un muro, a una distancia de s = 4 m; el muro tiene una altura b = 2 m. Debido a un temporal, el poste cae hacia el muro y se quiebra al chocar con este.  Resuelven con una razón trigonométrica: ¿Qué largo tiene la parte del poste que cae al otro lado del muro? Resuelven el problema con el teorema de Pitágoras y comparan los resultados. **(MINEDUC, 2016, pág. 139)**	Conocimientos ya practicados.
La luz del Sol cae sobre la Tierra en un ángulo $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{53}°$. De un edificio se proyecta una sombra que tiene un largo de s = 12 m en terreno horizontal.  Calculan la altura del edificio y la expresan en metros redondeados a la primera décima. Responden: ¿La sombra se reduce o se agranda si se anota en la mañana? Explican la respuesta. Conjeturan, sin realizar cálculos, acerca del efecto en la sombra que tienen los siguientes cambios; explican y comunican la respuesta: Se proyecta la sombra de un edificio que tiene la mitad de la altura. El ángulo $\boldsymbol{\alpha}$ se disminuye. ® Ciencias Naturales OA 11 de 1° medio. **(MINEDUC, 2016, pág. 137)**	

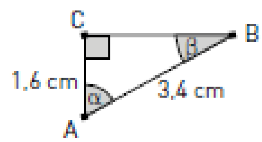
Calcula las razones trigonométricas de los ángulos agudos de cada triángulo rectángulo. Luego, completa las tablas.

a.



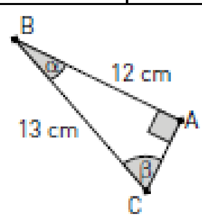
	α	β
seno		
coseno		
tangente		

b.



	α	β
seno		
coseno		
tangente		

c.



	α	β
seno		
coseno		
tangente		

(Vallejos, Cortés, Díaz, & Muñoz, 2018, pág. 102)

Uso de fórmulas elementales.

Tabla N°10: Categorización de las tareas del texto del estudiante, en base a los indicadores de Lupiáñez.

(Lupiáñez, 2009)

En las problemáticas planteadas podemos notar, en dos formas de promover el aprendizaje, por un lado, se identifica una aplicación general del contenido que toma en cuenta su representación descontextualizada, y en la segunda parte, a pesar de ser propuesto mediante un contexto explícito, este no presenta un acercamiento hacia el entorno pedagógico del estudiante de la ETP.

Capítulo 6: Análisis de Instrucción

De acuerdo con el marco que guía nuestro trabajo, el Análisis Didáctico (Rico, 2013), en este capítulo se presenta el Análisis de Instrucción que corresponde al diseño de una propuesta, que considera los Análisis Conceptual, de Contenidos y Cognitivo. En el siguiente esquema podemos observar cómo se articulan los diferentes análisis.

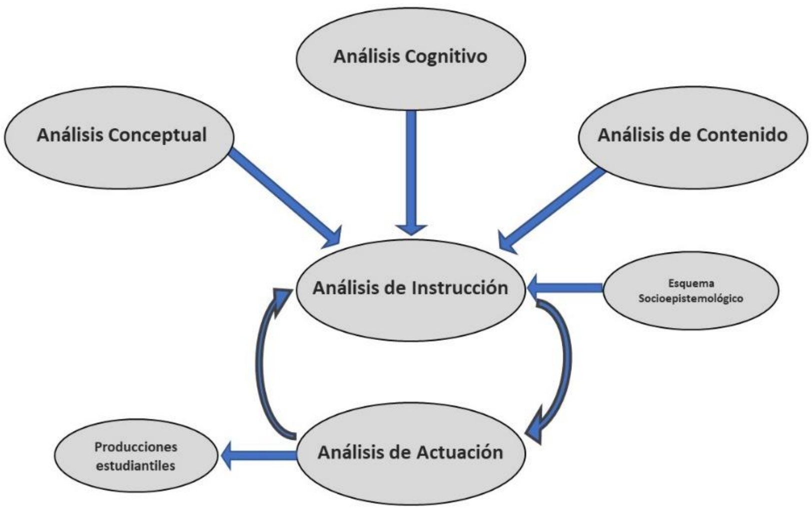


Figura N°12: Esquema del Análisis Didáctico.

Es importante recordar que la problemática que se aborda en este trabajo es la desvinculación del contenido de razones trigonométrica con los usos y las características del entorno, que se pueden encontrar en las especialidades de la Educación Técnico Profesional.

El diseño de la propuesta se organiza considerando previamente las siguientes etapas:

1. Conocer el escenario y las condiciones institucionales en las que se busca la construcción situada del conocimiento para proponer la reorganización de la matemática escolar, descrita previamente en el análisis Cognitivo.
2. Identificar prácticas que se realizan en el taller, que permitan articular el contenido de razones trigonométricas.

3. Considerando el esquema metodológico para la investigación Socioepistemológica (Montiel & Buendía, 2012), a partir de la problemática identificada en este trabajo, retomamos el análisis epistemológico de las Razones Trigonométricas, realizado en el Análisis Conceptual, para analizar cómo se sitúa hoy en el contexto de la Educación Técnico Profesional.

A continuación, se presentan las observaciones realizadas en el escenario, las que permitirán la conformación del diseño de la propuesta.

Observación 1

El ruido constante de las máquinas y el amplio espacio en que se desenvuelven los estudiantes es el primer quiebre respecto de las reglas establecidas en el aula tradicional.
Al inicio de esta sesión, el docente entrega instrucciones y los lineamientos generales, extraídos de su planificación, para el desarrollo de la actividad. Luego los estudiantes retoman las labores que vienen desarrollando desde días pasados, tornería, fresadora o soldadura. Son los estudiantes quienes gestionan el tiempo y forma de trabajo y en donde el docente guía y acompaña el proceso de manera personal o grupal.
En esta imagen podemos observar como el docente explica cómo se debe medir la diagonal de una estructura rectangular, para comprobar si se encuentra “cuadrada” o no.

Figura N°13: Observación del taller de Mecánica Industrial

Observación 2

En esta clase, nos centramos en uno de los grupos de estudiantes que realizan una estructura rectangular, que sería usada como separador de ambiente en el sector de soldadura del taller, esta exigía requerimientos específicos entregados por el profesor como: medidas establecidas para cada sección de la estructura y que los todos los ángulos involucrados fuesen de 90°.

Durante el transcurso de la clase pudimos observar las técnicas utilizadas de medición y confección de ángulos, además del uso de herramientas y cálculos referidos para cada una de estas tareas. Para saber que la estructura está "cuadrada" verifican que los fierros diagonales midan lo mismo y para la unión de la estructura utilizan una sierra graduada. En esta observación, no se evidencia uso de un lenguaje matemático formal, predominan las herramientas utilizadas que permitían dar solución a las especificaciones exigidas.

En la primera imagen se observa a un estudiante soldando dos fierros, los cuales serán los lados de la estructura. En la segunda imagen se aprecia una herramienta llamada "flecha magnética" la cual, si calza justo con el ángulo de la estructura, es porque está bien realizado el procedimiento. Y en la tercera se ve a los estudiantes comprobando la "cuadratura" de la estructura con el método que enseño el profesor.

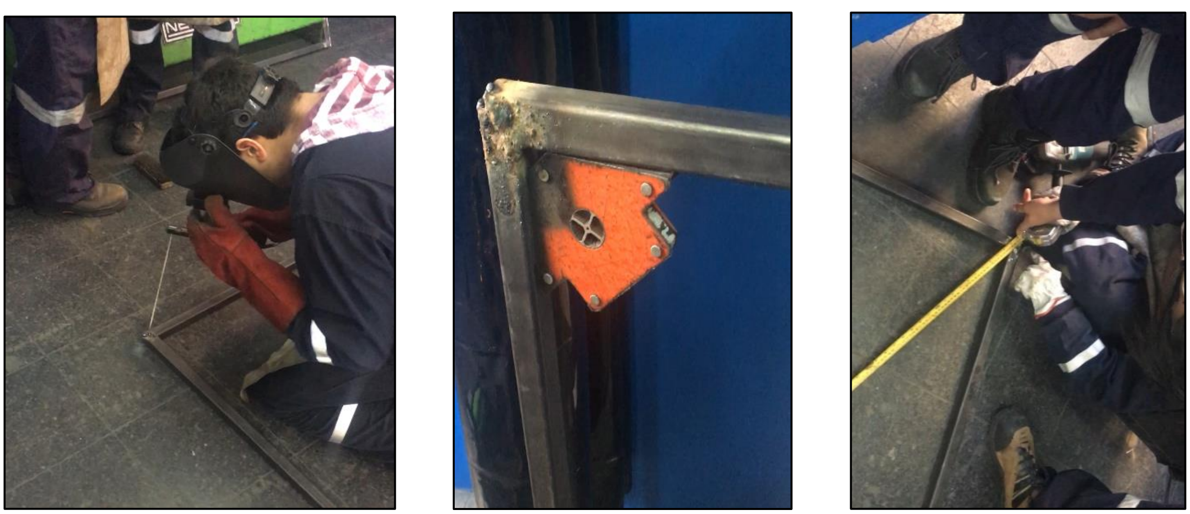


Figura N°14: Estudiantes trabajando en el taller de Mecánica Industrial.

Observación 3

A partir de las observaciones anteriores, se consulta a un grupo de estudiantes si tienen alguna forma de medir ángulos ya que la sierra permite solo cortar el fierro a partir de un ángulo determinado. Los estudiantes nos manifiestan que tienen una herramienta llamada Goniómetro, para la construcción de ángulos en las estructuras metálicas requeridas, este instrumento operaba como guía para las partes de la estructura que necesitaban estuviera en una posición referente a un ángulo en particular. Nos muestra su uso de forma práctica con las estructuras construidas. En las imágenes a continuación ponemos ver como es y el uso que se le da a la herramienta "goniómetro".

Figura N°15: Instrumentos del taller de Mecánica Industrial.

A partir de esta primera etapa identificamos prácticas que realizan los estudiantes en el taller mecánico que podemos utilizar para el diseño de nuestra propuesta, que permitan la resignificación de conceptos matemáticos estudiados en el aula. Un importante hallazgo es el Goniómetro, instrumento que nos da luces para retomar el análisis epistemológico de las Razones Trigonométricas. Durante este estudio pudimos identificar que el goniómetro surge desde la observación del cielo, pero que se transforma en una herramienta capaz de estimar grandes estructuras, como fue el caso de las pirámides. A raíz de esto es que consideramos posible su articulación con el aula técnico profesional y ser considerado como una forma de acercar el contenido involucrado con ciertas prácticas cotidianas de los estudiantes observados.

Diseño de la Propuesta

La propuesta que presentamos incorpora las prácticas que realizan los estudiantes en el taller de mecánica y hemos consideramos el uso del goniómetro, como punto de partida. Para ello adaptamos como instrumento de medida el transportador y otros elementos como: lápiz plástico, cuerda y un peso que aplome el sistema. De esta forma, esperamos extender la capacidad del goniómetro utilizado por los estudiantes en el taller y permitirnos estimar medidas de mayor envergadura. Esto fue diseñado en base a experiencias realizadas por investigadores (Montiel, 2013), en donde a través de artículos similares, pone en juego el uso de la noción de razón trigonométrica para medir situaciones bajo el mismo contexto. Cabe mencionar que cada diseño propuesto, conlleva el detalle de lo que se espera por parte de los estudiantes.

Esta imagen presenta la construcción de un goniómetro con elementos que los estudiantes tienen presente en su entorno escolar.

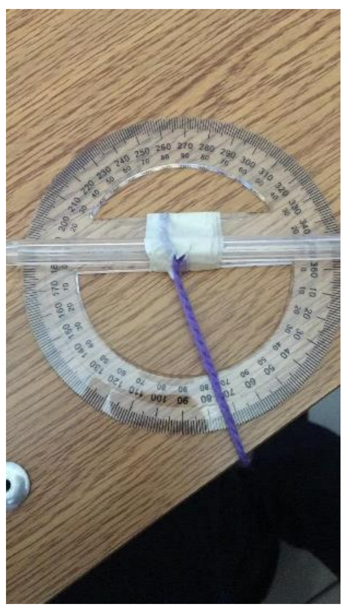


Figura N°16: Goniómetro.

Diseño 1

Este diseño tiene por objetivo que los estudiantes establezcan una relación entre la medida de la altura y la amplitud del ángulo de una estructura utilizando el goniómetro y la huincha de medir. El diseño de esta propuesta considera dos instancias, la primera busca dar a conocer la herramienta y la forma de medición y la segunda parte consta con una tabla de datos, que debe ser completada con la información recopilada de la experiencia. A continuación, se presenta el diseño con los objetivos que tiene para cada sección.

¿Cómo calcular una altura mediante una razón trigonométrica?

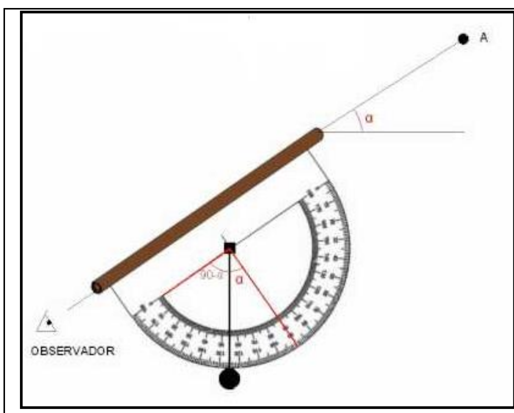
Curso: 3° Medio A, Mecánica Industrial – Colegio Salesiano Valparaíso

Nombres:

Debemos medir la altura de una estructura, y como es demasiado alta, no podemos utilizar la huincha de medir, por lo que utilizaremos un instrumento llamado Goniómetro.

El GONIÓMETRO que utilizaremos, no es más que una extensión que el que utilizas en la construcción de estructuras de pequeña escala realizadas en el taller mecánico.

Este consta de un **visor** y un **peso aplomado** el cual nos ayudará a obtener un estimado del trabajo que queremos realizar, cuando sea imposible utilizar la huincha de medir.

	RECUERDA: El ángulo a = 90° - α (α = ángulo observado)

Instrucciones:

Con la ayuda de un compañero (más una huincha de medir), pídele que mida la altura que existe entre el suelo y tus ojos, ya que desde ese punto utilizaremos el Goniómetro. Posiciónate frente a la estructura que mediremos y pídele a tu compañero que mida la distancia que hay entre tus pies y la base de la estructura elegida.

Por medio del Goniómetro, mide la elevación hasta punto más alto de la estructura, pídele a tu compañero que observe el ángulo que se forma en el goniómetro en ese momento.

Anota los resultados en la tabla y calculen.

Intercambien roles y realicen la actividad nuevamente.

Altura observadora (h)	Distancia hasta la base de la estructura (b)	Ángulo de elevación (a)	¿Cómo calculamos la altura de la estructura?	Altura medida (x)	Altura estructura (x + h)
			RESULTADO FINAL (PROMEDIO)		

Responde las siguientes Preguntas:

¿Crees poder utilizar este tipo de goniómetro en otra situación? Comenta.

¿Cuál crees que es la mayor dificultad de utilizar este método de medición?

¿Qué crees que sucede con el ángulo cuando nos acercamos a la estructura?

¿Qué crees que sucede con el ángulo cuando nos alejamos?

¿Existe alguna otra ubicación en donde el ángulo se mantenga constante? Comenta.

¡¡¡Muchas Gracias!!!

El primer momento de la actividad, presenta la herramienta en conjunto con un recordatorio de la forma de medición del ángulo que se trabajará, cabe señalar que esta parte, solo pretende ser una guía de apoyo a las instrucciones del docente, la cual será medida bajo las evidencias obtenidas de la sección posterior.

En la segunda sección se espera que el estudiante:

- Complete la tabla de datos de acuerdo con los requerimientos establecidos en ella.
- Represente la situación mediante un triángulo rectángulo.
- Identifique en el diagrama los ángulos y lados involucrados.
- Diseñe y conjeture una estrategia que le permita resolver la situación.

Plan de Clases

<table>
<tr><td colspan="4">Nivel: Segundo año de enseñanza media
Profesores: Javier Alarcón Valenzuela – Nicolás González Martínez
Número de la Unidad: 3
Nombre del Eje Temático: Geometría</td></tr>
<tr><td colspan="4">Objetivo de la clase:
Introducir concepto razones trigonométricas mediante la medición de una altura, utilizando el goniómetro.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Descripción de la clase:
La actividad está planificada para que los estudiantes puedan establecer relaciones métricas entre, la medida de alguna estructura y la amplitud del ángulo. Esta actividad tiene un carácter teórico-practica. Esta inicia en la sala de clases, en donde se entrega las instrucciones correspondientes a los procedimientos del trabajo, se explicará el uso del goniómetro y como se debe realizar la recolección de datos. Luego de esto se dará paso a que los estudiantes salgan al patio del colegio en donde deberán medir la altura de un objeto seleccionado, pero fijándose siempre en el ángulo que se debe formar (este estará dado en la hoja que se les entregará para realizar la actividad). Concluyendo con una retroalimentación en el aula, en donde los estudiantes deberán dar a conocer su opinión de la actividad y que conclusiones pueden obtener, a partir de ellas es que el docente tiene la oportunidad de formalizar el uso de la razón trigonométrica, como un facilitador de la experiencia realizada.</td></tr>
<tr><th>ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE</th><th>ACTIVIDAD DE LOS ALUMNOS</th><th>INTERVENCIÓN DOCENTE</th><th>EVALUACIÓN DE LA MARCHA DE LA CLASE</th></tr>
<tr><td>Introducción al tema
Se procede a dar las instrucciones necesarias para la realización de la actividad. Se explica el cómo usar el goniómetro.</td><td>Los estudiantes deben prestan atención a las instrucciones que da el profesor.</td><td>El profesor muestra el uso del goniómetro.</td><td>¿Utilizan de manera correcta el goniómetro?
¿Calculan el ángulo de manera correcta?</td></tr>
<tr><td>Presentación de la actividad
Se entrega la siguiente actividad:</td><td>Una vez entregada la actividad en papel, los estudiantes la revisan y comentan sobre ella entre su grupo de trabajo.</td><td>El docente lee las preguntas de la actividad. Se enfatiza en la comprensión de las preguntas.</td><td>¿Muestran interés por la actividad?
¿Los estudiantes visualizan la situación planteada?</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>
¿Cómo calcular una altura mediante una razón trigonométrica?

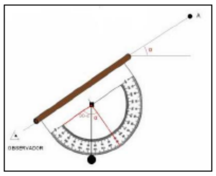
Curso: 3° Medio A, Mecánica Industrial - Colegio Salesiano Valparaíso

Nombres:

Debemos medir la altura de una estructura, y como es demasiado alta, no podemos utilizar la huincha de medir, por lo que necesitaremos otro método que nos ayude en esta tarea. Este será el GONIÓMETRO.

El GONIÓMETRO que utilizaremos, no es más que una extensión que el que utilizas en la construcción de estructuras de pequeña escala realizadas en el taller mecánico.

Este consta de un visor y un peso aplomado el cual nos ayudará a obtener un estimado del trabajo que queremos realizar, cuando sea imposible utilizar la huincha de medir.



RECUERDA:
• El ángulo a = 90° - α
(α = ángulo observado)

Instrucciones:
1. Con la ayuda de un compañero (más una huincha de medir), pídele que mida la altura que existe entre el suelo y tus ojos, ya que desde ese punto utilizaremos el Goniómetro.
2. Posiciónate frente a la estructura que mediremos y pídele a tu compañero que mida la distancia que hay entre tus pies y la base de la estructura elegida.
3. Por medio del Goniómetro, mide la elevación hasta punto más alto de la estructura, pídele a tu compañero que observe el ángulo que se forma en el goniómetro en ese momento.
4. Anota los resultados en la tabla y calculen.
5. Intercambien roles y realicen la actividad nuevamente.

<table>
<tr><th>Altura observador (h)</th><th>Distancia hasta la base de la estructura (b)</th><th>Ángulo de elevación (a)</th><th>¿Cómo calculamos la altura de la estructura?</th><th>Altura medida (x)</th><th>Altura estructura (x + h)</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td colspan="2">RESULTADO FINAL (PROMEDIO)</td><td></td></tr>
</table>
Responde las siguientes Preguntas:

1. ¿Crees poder utilizar este tipo de goniómetro en otra situación? Comenta.

2. ¿Cuál crees que es la mayor dificultad de utilizar este método de medición?

3. ¿Qué crees que sucede con el ángulo cuando nos acercamos a la estructura?

4. ¿Qué crees que sucede con el ángulo cuando nos alejamos?

5. ¿Existe alguna otra ubicación en donde el ángulo se mantenga constante? Comenta.
</td>
<td></td>
<td></td>
<td>¿Comprenden como varía el ángulo en las situaciones propuestas?</td>
</tr>
</table>

Resolución de la actividad El trabajo se realizará de manera grupal, en grupos de no más de cinco estudiantes, y dichos grupos son formados por ellos mismos.	Posibles respuestas: 1.- Que los estudiantes planteen relaciones con los valores encontrados. 2.- Cuando se habla de medir la distancia al objeto, que ellos midan la distancia desde el punto de referencia y no la perpendicular al objeto que queremos determinar su altura.	Posibles devoluciones: 1.- Entregar la actividad en blanco ya sea porque no supo cómo hacerla o porque no quiso realizar la actividad.	¿Logran completar la tabla de datos? ¿Encuentran relaciones similares entre grupos? ¿Logran conjeturar causas de la similitud en las relaciones?
Compartiendo ideas y estrategias de resolución El profesor explica de manera breve el cómo se debía desarrollar de forma correcta la toma de datos.	Los estudiantes miran al docente mientras explica el paso a paso del desarrollo de la actividad.	El profesor pregunta a los estudiantes si la forma de como recolectaron los datos era la misma a como la explico él.	¿Expresan claramente sus respuestas y justificaciones ante sus compañeros?
Sintetizando ideas desde los aprendizajes de los alumnos El docente realiza sus propias conclusiones de la actividad de acuerdo con las justificaciones de los estudiantes.	Los alumnos escuchan las conclusiones del profesor y exponen sus dudas sobre la actividad.	El profesor da a conocer la relación entre la actividad y el objetivo de la clase.	¿Los estudiantes comprenden las ventajas del concepto para la resolución de la situación planteada?

Implementación diseño 1

Esta implementación se realiza con estudiantes de la ETP, quienes cursan 3° de enseñanza media. Para la implementación se entrega a los estudiantes la actividad impresa, seguido de la lectura en conjunto de las instrucciones. Luego se instruye a los estudiantes en el uso del goniómetro y se forman grupos de cinco estudiantes. Los estudiantes salen del taller en busca del objeto que medirán, toman datos y realizan las acciones que la tabla de datos exige. Durante este proceso, el profesor solo acompaña la actividad, dejando libertad de acción a los grupos de trabajo.

Estudiantes realizando la actividad en el patio del establecimiento educacional. En la primera imagen se observa a un estudiante midiendo la altura de su compañero. Y en la segunda, se aprecia como el estudiante usa el goniómetro para determinar una altura.

Figura N17: Estudiantes realizando la actividad propuesta.

Resultados y análisis: Diseño 1

Sección 1

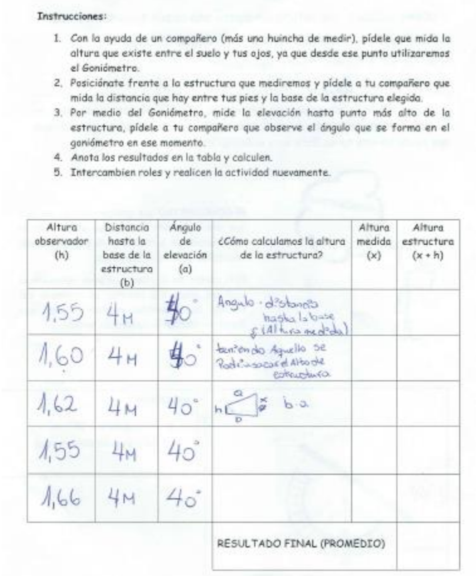
Instrucciones:

1. Con la ayuda de un compañero (más una huincha de medir), pídele que mida la altura que existe entre el suelo y tus ojos, ya que desde ese punto utilizaremos el Goniómetro.
2. Posiciónate frente a la estructura que mediremos y pídele a tu compañero que mida la distancia que hay entre tus pies y la base de la estructura elegida.
3. Por medio del Goniómetro, mide la elevación hasta punto más alto de la estructura, pídele a tu compañero que observe el ángulo que se forma en el goniómetro en ese momento.
4. Anota los resultados en la tabla y calculen.
5. Intercambien roles y realicen la actividad nuevamente.

Altura observador (h)	Distancia hasta la base de la estructura (b)	Ángulo de elevación (a)	¿Cómo calculamos la altura de la estructura?	Altura medida (x)	Altura estructura (x + h)
			RESULTADO FINAL (PROMEDIO)		

Respuestas	
Grupo A	**Grupo B**

Grupo A

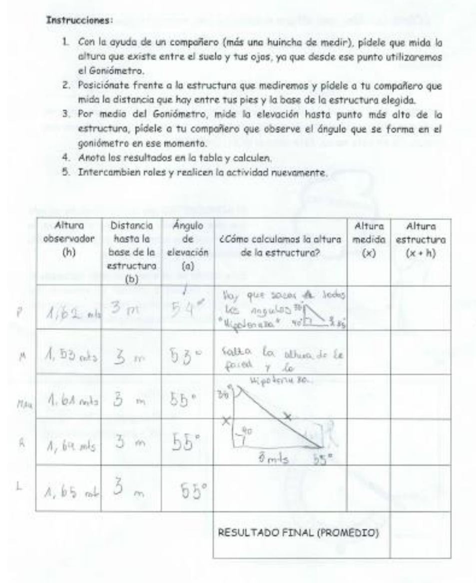


Instrucciones:

1. Con la ayuda de un compañero (más una huincha de medir), pídele que mida la altura que existe entre el suelo y tus ojos, ya que desde ese punto utilizaremos el Goniómetro.
2. Posiciónate frente a la estructura que mediremos y pídele a tu compañero que mida la distancia que hay entre tus pies y la base de la estructura elegida.
3. Por medio del Goniómetro, mide la elevación hasta punto más alto de la estructura, pídele a tu compañero que observe el ángulo que se forma en el goniómetro en ese momento.
4. Anota los resultados en la tabla y calculen.
5. Intercambien roles y realicen la actividad nuevamente.

Altura observador (h)	Distancia hasta la base de la estructura (b)	Ángulo de elevación (a)	¿Cómo calculamos la altura de la estructura?	Altura medida (x)	Altura estructura (x + h)
1,55	4M	40°	Angulo · distancia hasta la base = (Altura medida)		
1,60	4M	40°	teniendo aquello se podría sacar el alto de estructura		
1,62	4M	40°	b · a		
1,55	4M	40°			
1,66	4M	40°			
			RESULTADO FINAL (PROMEDIO)		

Grupo B



Instrucciones:

1. Con la ayuda de un compañero (más una huincha de medir), pídele que mida la altura que existe entre el suelo y tus ojos, ya que desde ese punto utilizaremos el Goniómetro.
2. Posiciónate frente a la estructura que mediremos y pídele a tu compañero que mida la distancia que hay entre tus pies y la base de la estructura elegida.
3. Por medio del Goniómetro, mide la elevación hasta punto más alto de la estructura, pídele a tu compañero que observe el ángulo que se forma en el goniómetro en ese momento.
4. Anota los resultados en la tabla y calculen.
5. Intercambien roles y realicen la actividad nuevamente.

	Altura observador (h)	Distancia hasta la base de la estructura (b)	Ángulo de elevación (a)	¿Cómo calculamos la altura de la estructura?	Altura medida (x)	Altura estructura (x + h)
P	1,62 mts	3 m	54°	Hay que sacar todos los angulos "hipotenusa" 35° 90° 55°		
M	1,53 mts	3 m	53°	falta la altura de la pared y la hipotenusa.		
Mau	1,61 mts	3 m	55°	35° X X 90 3 mts 55°		
R	1,69 mts	3 m	55°			
L	1,65 mts	3 m	55°			
				RESULTADO FINAL (PROMEDIO)		

Observaciones

Ambos grupos completan la tabla

Grupo B representan la situación mediante un triángulo rectángulo

Ambos grupos identifican los lados y los ángulos involucrados

El grupo A consigue los datos requeridos y explicitados en las instrucciones de la experiencia, sin embargo, la altura del observador genera una dificultad, en la representación de la situación. Grupo B conjetura la situación, siendo resuelta por medio del teorema de Pitágoras.

A partir de las evidencias presentadas, podemos observar que el orden de las columnas de la tabla, son un factor importante para su resolución, ya que confundió a los estudiantes, no permitiendo visualizar la situación de manera correcta. La actividad además necesita de una introducción que guíe el pensamiento y lo posicione en un contexto geométrico. Atendiendo al objetivo de la actividad, consideramos que el énfasis debe estar puesto en las posibles relaciones entre las medidas, por sobre la variable del ángulo, y que la actividad debe enfocarse en comparar la relación de los lados medidos.

Diseño 2

Para este diseño, se incorpora una situación inicial que promueve el análisis de los cambios que sufre un ángulo y las medidas involucradas. Además, para la gestión de la implementación, se consideran momentos para que los estudiantes compartan resultados y conjeturen sus posibles causas, y finalmente se conforma un espacio en donde se espera que los estudiantes puedan extrapolar conclusiones en una actividad, que promueve el uso de una noción de la razón seno y coseno. A continuación, se presenta cada sección de la actividad, y posteriormente se explicita, lo que se espera del estudiante, identificado para cada sección detallada.

Sección 1

- ¿Qué crees que sucede con el ángulo cuando nos acercamos a la estructura?
- ¿Qué crees que sucede con el ángulo cuando nos alejamos?
- Si deseamos mantener fijo el ángulo de elevación ¿Qué ocurrirá con las medidas que tomaremos?

Sección 2

Ángulo de elevación (α)	Altura observadora (c)	Altura estructura u objeto (a) (solo considera la altura restante a "c")	Distancia hasta la base de la estructura u objeto (b)	Relación entre a y b
75°				
35°				
60°				
20°				
85°				

Sección 3 • ¿Encontraron alguna relación en común al comparar resultados de un mismo ángulo con otros grupos? Comenta tu respuesta. • ¿Es posible medir un objeto de mayor o menor altura, utilizando un mismo ángulo? ¿Qué debemos hacer en tales casos? Comenta tu respuesta. • Si deseamos siempre mantener el ángulo fijo, ¿Qué deberá ocurrir con la distancia hasta el objeto cuando este es de mayor altura? Y ¿cuándo es de menor altura? • ¿Es posible utilizar este método para alturas aún más altas, incluso en donde no podamos utilizar la huincha de medir? Comenta y explica tu respuesta.
Sección 4 A partir de la actividad realizada y mediante el uso de los datos recopilados: • Si quisiéramos conectar un cable tensor, desde donde medí el ángulo, hasta el punto más alto de la estructura elegida de manera de brindarle estabilidad. • ¿Es posible calcular el largo del cable que necesitamos utilizar para esta tarea? Explique su respuesta. • ¿Qué relación existe entre el cable mencionado, y las medidas que ya manejábamos en la actividad anterior? Explique su respuesta. • ¿Es posible calcular la extensión del cable, si no podemos medir la altura de la estructura? Explique su respuesta. • ¿Es posible medir la extensión del cable, si no tenemos una huincha que nos permita medir las distancias hasta la base? Explique su respuesta.

Se espera que el estudiante:	
Sección 1	• Comprenda que aumenta la apertura del ángulo cuando nos acercamos. • Comprenda que disminuye cuando nos alejamos. • Comprenda que las medidas varían para mantener el ángulo.
Sección 2	• Complete la tabla de datos según sus requerimientos. • Relacione medida a y b mediante una división.

Seccion3	• Identifique relaciones similares con sus compañeros. • Explique qué, la distancia de medición aumentara cuando el objeto es más alto y disminuirá cuando es más bajo. • Identifique datos faltantes que le impiden encontrar la solución. • Conjeture un procedimiento de solución.
Sección 4	• Represente la situación mediante un triángulo rectángulo. • Identifique el teorema de Pitágoras. • Identifique datos faltantes que le impiden encontrar la solución.

Plan de Clases

Nivel: Segundo año de enseñanza media Profesores: Javier Alarcón Valenzuela – Nicolás González Martínez Número de la Unidad: 3 Nombre del Eje Temático: Geometría			
Objetivo de la clase: Introducir concepto razones trigonométricas mediante la medición de una altura, utilizando el goniómetro.			
Descripción de la clase: La actividad está planificada para que los estudiantes puedan establecer relaciones métricas entre, la medida de alguna estructura y la amplitud del ángulo. Esta actividad tiene un carácter teórico-practica. Esta inicia en la sala de clases, en donde se entrega las instrucciones correspondientes a los procedimientos del trabajo, se explicará el uso del goniómetro y como se debe realizar la recolección de datos. Luego de esto se dará paso a que los estudiantes salgan al patio del colegio en donde deberán medir la altura de un objeto seleccionado, pero fijándose siempre en el ángulo que se debe formar (este estará dado en la hoja que se les entregará para realizar la actividad). Concluyendo con una retroalimentación en el aula, en donde los estudiantes deberán dar a conocer su opinión de la actividad y que conclusiones pueden obtener, a partir de ellas es que el docente tiene la oportunidad de formalizar el uso de la razón trigonométrica, como un facilitador de la experiencia realizada.			
ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE	ACTIVIDAD DE LOS ALUMNOS	INTERVENCIÓN DOCENTE	EVALUACIÓN DE LA MARCHA DE LA CLASE
Introducción al tema Se procede a dar las instrucciones necesarias para la realización de la actividad. Se explica el cómo usar el goniómetro y se hace una demostración.	Los estudiantes deben prestan atención a las instrucciones que entrega el profesor	El docente demuestra el uso del goniómetro y da un par de ejemplos de cómo deben medir las distancias.	¿Utilizan de manera correcta el goniómetro? ¿Calculan el ángulo de manera correcta?
Presentación de la actividad Se entrega la siguiente actividad:	Una vez entregada la actividad en	El docente lee la actividad con las preguntas.	¿Muestran interés por la actividad?

<table>
<tr>
<td>ACTIVIDAD 2.0

Nombre:
Colegio:

Lee atentamente las siguientes preguntas y responde:
1. ¿Qué crees que sucede con el ángulo cuando nos acercamos a la estructura?
2. ¿Qué crees que sucede con el ángulo cuando nos alejamos?
3. Si deseamos mantener fijo el ángulo de elevación ¿Qué ocurrirá con las medidas que tomaremos?

Instrucciones:
1. Formen equipos de 4-5 compañeros e identifiquen a cada uno con una labor especifica.
2. Elijan una estructura u objeto con el que trabajarán, y midan su altura.
3. Con la ayuda de un compañero ubiquen el ángulo requerido de manera que el visor del goniómetro este ubicado en el punto mas alto de la estructura u objeto.
4. Con el ángulo logrado, pide a tu compañero que mida la distancia entre tus pies y la base de la estructura u objeto.
5. Anoten todos los resultados en la tabla.

<table>
<tr><th>Ángulo de elevación (α)</th><th>Altura observadora (c)</th><th>Altura estructura u objeto (a) (solo considera la altura restante a "c")</th><th>Distancia hasta la base de la estructura u objeto (b)</th><th>Relación entre a y b</th></tr>
<tr><td>75°</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>35°</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>60°</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>20°</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>85°</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Luego de la actividad realizada, comenta tus resultados con otros grupos y responde:
4. ¿Encontraron alguna relación en común al comparar resultados de un mismo ángulo con otros grupos? Comenta tu respuesta.
5. ¿Es posible medir un objeto de mayor o menor altura, utilizando un mismo ángulo? ¿Qué debemos hacer en tales casos? Comenta tu respuesta.
6. Si deseamos siempre mantener el ángulo fijo, ¿Qué deberá ocurrir con la distancia hasta el objeto cuando este es de mayor altura? Y ¿cuándo es de menor altura?
7. ¿Es posible utilizar este método para alturas aun mas altas, incluso en donde no podamos utilizar la huincha de medir? Comenta y explica tu respuesta.

partir de la actividad realizada y mediante el uso de los datos recopilados:
Si quisiéramos conectar un cable tensor, desde donde medí el ángulo, hasta el punto más alto de la estructura elegida de manera de brindarle estabilidad.
1. ¿Es posible calcular el largo del cable que necesitamos utilizar para esta tarea? Explique su respuesta.
2. ¿Qué relación existe entre el cable mencionado, y las medidas que ya manejábamos en la actividad anterior? Explique su respuesta.
3. ¿Es posible calcular la extensión del cable, si no podemos medir la altura de la estructura? Explique su respuesta.
4. ¿Es posible medir la extensión del cable, si no tenemos una huincha que nos permita medir las distancias hasta la base? Explique su respuesta.</td>
<td>papel, los estudiantes la revisan y comentan sobre ella entre su grupo de trabajo.</td>
<td>Se enfatiza en la comprensión de las preguntas.</td>
<td>¿Los estudiantes visualizan la situación planteada?

¿Comprenden como varía el ángulo en las situaciones propuestas?</td>
</tr>
<tr>
<td>Resolución de la actividad

El trabajo se realizará de manera grupal, en grupos de no más de cinco</td>
<td>Posibles respuestas:

1.- Que los estudiantes</td>
<td>Posibles devoluciones:

1.- entrega en blanco de la</td>
<td>¿Logran completar la tabla de datos?</td>
</tr>
</table>

estudiantes, y dichos grupos son formados por ellos mismos.	planteen relaciones con los valores encontrados. 2.- Cuando se habla de medir la distancia al objeto, que ellos midan la distancia desde el punto de referencia y no la perpendicular al objeto que queremos determinar su altura.	actividad porque no hubo comprensión de esta. 2.- se resuelve de manera incorrecta ya que no hubo una compresión en la totalidad de las instrucciones. 3.- completan en totalidad la actividad, pero no hacen bien la relación solicitada ya que ellos no se imaginan que necesitan hallar un cociente. Quizás las relaciones que ellos planteen sean las de adición o sustracción de los valores hallados.	¿Encuentran relaciones similares entre grupos? ¿Logran conjeturar causas de la similitud en las relaciones?
Compartiendo ideas y estrategias de resolución El profesor explica de manera breve el cómo se debía desarrollar de forma correcta la toma de datos.	Los estudiantes miran al docente mientras explica el paso a paso del desarrollo de la actividad.	El profesor pregunta a los estudiantes si la forma de como recolectaron los datos era la misma a como la explico él. Se hace un intercambio de opiniones con los grupos y el profesor las va comentando.	¿Expresan claramente sus respuestas y justificaciones ante sus compañeros?
Sintetizando ideas desde los aprendizajes de los alumnos El docente realiza sus propias conclusiones de la actividad de acuerdo con las justificaciones de los estudiantes.	Los alumnos escuchan las conclusiones del profesor y exponen sus dudas sobre la actividad.	El profesor da a conocer la relación entre la actividad y el objetivo de la clase.	¿Los estudiantes comprenden las ventajas del concepto para la resolución de la situación planteada?

Implementación diseño 2

Este diseño se aplica en un curso de 2° año medio perteneciente a la educación científico humanista, consta con 42 alumnos en total quienes tienen entre 14 y 16 años. Esta implementación busca contrastar la evidencia obtenida durante la experiencia con estudiantes pertenecientes a la ETP, con alumnos de distinta formación, y que además cursan el nivel que contiene el objetivo referente a las razones trigonométricas, por lo que vivenciaron la formalización del concepto tratado. Esto es motivado por identificar similitudes y diferencias entre estos dos escenarios y la acomodación de la propuesta a la clase de matemática en el aula tradicional.

Estudiantes realizando la actividad en el patio del establecimiento educacional. Se aprecia como los estudiantes usan el goniómetro y como miden las distancias que necesitan obtener.

Figura N°18: Estudiantes realizando la actividad en el patio del establecimiento.

Resultados y análisis: Diseño 2

Sección 1:
• ¿Qué crees que sucede con el ángulo cuando nos acercamos a la estructura? • ¿Qué crees que sucede con el ángulo cuando nos alejamos? • Si deseamos mantener fijo el ángulo de elevación ¿Qué ocurrirá con las medidas que tomaremos?

<table>
<tr><td colspan="2">Respuestas</td></tr>
<tr><td>1. ¿Qué crees que sucede con el ángulo cuando nos acercamos a la estructura?
El angulo comienza a abrirse y sus grados aumentan.
2. ¿Qué crees que sucede con el ángulo cuando nos alejamos?
El angulo se va cerrando y comienza a disminuir los grados.
3. Si deseamos mantener fijo el ángulo de elevación ¿Qué ocurrirá con las medidas que tomaremos?
Va a variar las medidas dependiendo de la distancia.</td><td>1. ¿Qué crees que sucede con el ángulo cuando nos acercamos a la estructura?
A medida que nos acercamos al ángulo, éste va disminuyendo.
2. ¿Qué crees que sucede con el ángulo cuando nos alejamos?
A medida que nos alejamos del ángulo, éste va aumentando.
3. Si deseamos mantener fijo el ángulo de elevación ¿Qué ocurrirá con las medidas que tomaremos?
éstas se deben mantener fijas.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Comentarios
Los estudiantes logran los objetivos esperados para la pregunta N°1, 2 y 3. Muestran visualizar la situación de tal manera que les permite dar cuenta de las variaciones que sufren las parte involucradas cuando las movilizamos.
Los estudiantes no logran la respuesta esperada en pregunta N°1 y 2. Visualizan la situación de forma inversa además de no responder en el momento adecuado la pregunta N°3, lo que no le permite alcanzar el objetivo.
Los estudiantes no logran mostrar la respuesta esperada en las preguntas N°1, 2 y 3.
Visualizan de manera inversa la situación planteada en las pregunta N°1 y N°2, en la pregunta N°3 visualiza la problemática de forma estática, lo que no le permita responder lo esperado.</td></tr>
</table>

Sección 2:

Ángulo de elevación (α)	Altura observadora (c)	Altura estructura u objeto (a) (solo considera la altura restante a "c")	Distancia hasta la base de la estructura u objeto (b)	Relación entre a y b
75°				
35°				
60°				
20°				
85°				

Respuestas

Grupo A

Ángulo de elevación (α)	Altura observadora (c)	Altura estructura u objeto (a) (solo considera la altura restante a "c")	Distancia hasta la base de la estructura u objeto (b)	Relación entre a y b
75°	1,60	2,26 m 3,86	8,75 m	0,258
35°	1,60	2,26	2,00 m	1,13
60°	1,60	2,26	4,30 m	0,525
20°	1,60	2,26	8,5 cm	2,658
85°	1,60	2,26	16,60 m	0,131

Grupo B

Ángulo de elevación (α)	Altura observadora (c)	Altura estructura u objeto (a) (solo considera la altura restante a "c")	Distancia hasta la base de la estructura u objeto (b)	Relación entre a y b
75°	154 cm.	185 − 154 = 31 cm.	89 cm.	$\frac{31}{89}$ = 0,348
35°	154 cm	185 − 154 = 31 cm.	4 cm.	$\frac{31}{4}$ = 7,75.
60°	154 cm	185 − 154 = 31 cm.	14 cm	$\frac{31}{14}$ = 2,214
20°	154 cm.	185 − 154 = 31 cm	0 cm.	$\frac{31}{0}$ = error.
85°	154 cm	185 − 154 = 31 cm	203 cm.	$\frac{31}{203}$ = 0,152

Comentarios

Logra completar la tabla de datos según lo indicado. En donde se puede verificar que las relaciones obtenidas mantienen la lógica esperada, pero se observa que se utilizó y complemento del ángulo para conseguirlas, lo que indica un mal uso del instrumento.

Ordena de manera correcta la información obtenida en la experiencia. Pero se observan datos que no se condicen con la lógica de que, a mayor ángulo, menor distancia y viceversa. Además, se observan datos que distan de la experiencia realizada, lo que no le permite conseguir las relaciones esperadas.

Logra ordenar la información recabada en la tabla de datos, y consigue datos acordes a lo esperado, sin embargo, identificamos que, en la primera fila, la distancia obtenida hasta la estructura se escapa de la proporción que indican los restantes resultados, lo que podría indicar error de escritura o de la toma de datos mediante el instrumento.

Logra ordenar de manera correcta la información recabada en la tabla de datos. Obtiene datos que indican haber sido considerados con el complemento del ángulo requerido, lo que produce una lógica inversa en las relaciones obtenidas.

<table>
<tr><td colspan="2">Sección 3:
¿Encontraron alguna relación en común al comparar resultados de un mismo ángulo con otros grupos? Comenta tu respuesta.
¿Es posible medir un objeto de mayor o menor altura, utilizando un mismo ángulo? ¿Qué debemos hacer en tales casos? Comenta tu respuesta.
Si deseamos siempre mantener el ángulo fijo, ¿Qué deberá ocurrir con la distancia hasta el objeto cuando este es de mayor altura? Y ¿cuándo es de menor altura?
¿Es posible utilizar este método para alturas aún más altas, incluso en donde no podamos utilizar la huincha de medir? Comenta y explica tu respuesta.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Respuestas</td></tr>
<tr><td>4. ¿Encontraron alguna relación en común al comparar resultados de un mismo ángulo con otros grupos? Comenta tu respuesta. en algunas ocaciones se mantenian las proporciones
5. ¿Es posible medir un objeto de mayor o menor altura, utilizando un mismo ángulo? ¿Qué debemos hacer en tales casos? Comenta tu respuesta. Si, pero mediante formulas, que nos establezcan relaciones
6. Si deseamos siempre mantener el ángulo fijo, ¿Qué deberá ocurrir con la distancia hasta el objeto cuando este es de mayor altura? Y ¿cuándo es de menor altura?
tiene que ser a mayor altura, menos distancia y viceversa
7. ¿Es posible utilizar este método para alturas aun mas altas, incluso en donde no podamos utilizar la huincha de medir? Comenta y explica tu respuesta.
Si, aunque se haria más complicado si no tenemos una huincha de medir</td><td>4. ¿Encontraron alguna relación en común al comparar resultados de un mismo ángulo con otros grupos? Comenta tu respuesta.
5. ¿Es posible medir un objeto de mayor o menor altura, utilizando un mismo ángulo? ¿Qué debemos hacer en tales casos? Comenta tu respuesta.
Si pero en algunos casos hay que acercarse demasiado y en otros alejarse demasiado
6. Si deseamos siempre mantener el ángulo fijo, ¿Qué deberá ocurrir con la distancia hasta el objeto cuando este es de mayor altura? Y ¿cuándo es de menor altura?
Si es de mayor altura hay que acercarse y si es menor alejarse
7. ¿Es posible utilizar este método para alturas aun mas altas, incluso en donde no podamos utilizar la huincha de medir? Comenta y explica tu respuesta.
No porque si es muy alta estariamos practicamente [illegible]</td></tr>
<tr><td colspan="2">Comentarios
Logra identificar relaciones comparables con sus compañeros, pero no establece el vínculo con lo propuesto en la pregunta N°5.
Confirma lo planteado en la primera sección de que a mayor altura menor distancia y viceversa.</td></tr>
</table>

No logra encontrar relaciones similares al comparar con otros grupos. Intuye que los datos c y b del problema son claves para la resolución de otra estructura de distinta altura, y que mantienen una relación en donde a mayor altura mayor distancia y viceversa.

No logra encontrar relaciones al comparar resultados con otros grupos, pero conjetura que la necesidad de mantener el ángulo fijo implica que debe existir variaciones en las distancias implicadas, sin embargo, no concluye una relación clara.

Sección 4

A partir de la actividad realizada y mediante el uso de los datos recopilados:

- Si quisiéramos conectar un cable tensor, desde donde medí el ángulo, hasta el punto más alto de la estructura elegida de manera de brindarle estabilidad.
- ¿Es posible calcular el largo del cable que necesitamos utilizar para esta tarea? Explique su respuesta.
- ¿Qué relación existe entre el cable mencionado, y las medidas que ya manejábamos en la actividad anterior? Explique su respuesta.
- ¿Es posible calcular la extensión del cable, si no podemos medir la altura de la estructura? Explique su respuesta.
- ¿Es posible medir la extensión del cable, si no tenemos una huincha que nos permita medir las distancias hasta la base? Explique su respuesta.

Respuestas

GRUPO A

1. ¿Es posible calcular el largo del cable que necesitamos utilizar para esta tarea? Explique su respuesta.

Sí, pues utilizamos las medidas como si el cable fuera los pies del observador, y con la medida de la altura de la estructura y la distancia del observador utilizamos el teorema de pitágoras para saber la hipotenusa es decir, la medida del cable.

2. ¿Qué relación existe entre el cable mencionado, y las medidas que ya manejábamos en la actividad anterior? Explique su respuesta.

la distancia entre el cable y la estructura debe ser la misma que la de los pies del observador para mantener el ángulo, y desde ahí juntar el cable hasta la punta de la estructura.

3. ¿Es posible calcular la extensión del cable, si no podemos medir la altura de la estructura? Explique su respuesta.

Sí se puede. mediante razones trigonométricas, en este caso sería el seno del ángulo. $\rightarrow \frac{c.o}{hip}$, pues tenemos el valor del cateto opuesto y necesitamos encontrar la hipotenusa.

4. ¿Es posible medir la extensión del cable, si no tenemos una huincha que nos permita medir las distancias hasta la base? Explique su respuesta.

Sí, a la antigua, con una cuerda se mide la distancia hasta la base.

GRUPO B

1. ¿Es posible calcular el largo del cable que necesitamos utilizar para esta tarea? Explique su respuesta.

Si, mediante el teorema de pitagoras usando el cable como Hipotenosa

2. ¿Qué relación existe entre el cable mencionado, y las medidas que ya manejábamos en la actividad anterior? Explique su respuesta.

existe lo mismo relación que el teorema de pitagoras donde utilizamos $c^2 + c^2 = H^2$.

3. ¿Es posible calcular la extensión del cable, si no podemos medir la altura de la estructura? Explique su respuesta.

no es posible, porque necesitamos saber 2 valores de 3 para obtener el tercero.

4. ¿Es posible medir la extensión del cable, si no tenemos una huincha que nos permita medir las distancias hasta la base? Explique su respuesta.

Se puede medir con medidas aproximadas como con pasos, pies, al ojo como se dice, pero no tendríamos la medida exacta.

Comentarios

- Ambos grupos identifican el teorema de Pitágoras dentro la situación planteada.
- Grupo A identifica el uso de las razones trigonométricas para la solución de la situación planteada.
- Grupo B identifica información faltante para la resolución de la problemática.
- Ambos grupos conjeturan que con medidas no establecidas se puede lograr una medición de la estructura, cuando no se contempla una huincha.

Esta segunda implementación se realiza en un centro escolar de Quinteros, con el fin de validar el diseño, se evidencia que los cambios realizados permiten que emerjan conocimientos matemáticos como las razones trigonométricas y el teorema de Pitágoras, el cual es de uso recurrente por los estudiantes.

Para el rediseño se considerará en la gestión de la implementación lo siguiente:

Se propondrán las preguntas de manera abierta, con esto se busca generar discusión entre los estudiantes, que les permita, mediante un consenso, responder la actividad.

Un momento de instrucción en el uso del goniómetro que contemple mayor tiempo, que posteriormente se vea reflejado en la correcta recopilación de datos a partir del uso de la herramienta.

Diseño 3

A continuación, se muestra el siguiente diseño que se hizo entrega a un nuevo grupo de estudiantes. Se presenta en forma de diferenciar las partes que propone el nuevo diseño.

<table>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>1.-</td><td>

¿Qué crees que sucede con el ángulo cuando nos acercamos a la estructura?
¿Qué crees que sucede con el ángulo cuando nos alejamos?
Si deseamos mantener fijo el ángulo de elevación ¿Qué ocurrirá con las medidas que tomaremos?

</td></tr>
<tr><td>2.-</td><td>
<table>
<tr><th>Ángulo de elevación (β)</th><th>Altura observadora (c)</th><th>Altura estructura u objeto (a) (recuerda restarle “c”)</th><th>Distancia hasta la base de la estructura u objeto (b)</th><th>Relación $\frac{a}{b}$</th></tr>
<tr><td>75°</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>35°</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>60°</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>20°</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>85°</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
Luego de la actividad realizada, comenta tus resultados con otros grupos y responde:

¿Encontraron alguna relación en común al comparar resultados de un mismo ángulo con otros grupos? Comenta tu respuesta.
¿Es posible medir un objeto de mayor o menor altura, utilizando un mismo ángulo? ¿Qué debemos hacer en tales casos? Comenta tu respuesta.

</td></tr>
</table>

	• Si deseamos siempre mantener el ángulo fijo, ¿Qué deberá ocurrir con la distancia hasta el objeto cuando este es de mayor altura? Y ¿cuándo es de menor altura? • ¿Es posible utilizar este método para alturas aún más altas, incluso en donde no podamos utilizar la huincha de medir? Comenta y explica tu respuesta.
3.-	A partir de la actividad realizada y mediante el uso de los datos recopilados: • Si quisiéramos conectar un cable tensor, desde donde medí el ángulo, hasta el punto más alto de la estructura elegida de manera de brindarle estabilidad. • ¿Es posible calcular el largo del cable que necesitamos utilizar para esta tarea? Explique su respuesta. • ¿Qué relación existe entre el cable mencionado, y las medidas que ya manejábamos en la actividad anterior? Explique su respuesta. • ¿Es posible calcular la extensión del cable, si no podemos medir la altura de la estructura? Explique su respuesta. • ¿Es posible medir la extensión del cable, si no tenemos una huincha que nos permita medir las distancias hasta la base? Explique su respuesta.

Se espera que el estudiante:	
Sección 1	• Comprenda que aumenta la apertura del ángulo cuando nos acercamos. • Comprenda que disminuye cuando nos alejamos. • Comprenda que las medidas varían para mantener el ángulo.
Sección 2	• Complete la tabla de datos según sus requerimientos. • Relacione medida a y b mediante una división.
Seccion3	• Identifique relaciones similares con sus compañeros. • Explique qué, la distancia de medición aumentara cuando el objeto es más alto y disminuirá cuando es más bajo. • Identifique datos faltantes que le impiden encontrar la solución.

	• Conjeture un procedimiento de solución.
4.-	• Represente la situación mediante un triángulo rectángulo. • Identifique el teorema de Pitágoras. • Identifique datos faltantes que le impiden encontrar la solución.

Plan de Clases

Nivel: Segundo año de enseñanza media Profesores: Javier Alarcón Valenzuela – Nicolás González Martínez Número de la Unidad: 3 Nombre del Eje Temático: Geometría			
Objetivo de la clase: Introducir concepto razones trigonométricas mediante la medición de una altura, utilizando el goniómetro.			
Descripción de la clase: La actividad está planificada para que los estudiantes puedan establecer relaciones métricas entre, la medida de alguna estructura y la amplitud del ángulo. Esta actividad tiene un carácter teórico-practica. Esta inicia en la sala de clases, en donde se entrega las instrucciones correspondientes a los procedimientos del trabajo, se explicará el uso del goniómetro y como se debe realizar la recolección de datos. Luego de esto se dará paso a que los estudiantes salgan al patio del colegio en donde deberán medir la altura de un objeto seleccionado, pero fijándose siempre en el ángulo que se debe formar (este estará dado en la hoja que se les entregará para realizar la actividad). Concluyendo con una retroalimentación en el aula, en donde los estudiantes deberán dar a conocer su opinión de la actividad y que conclusiones pueden obtener, a partir de ellas es que el docente tiene la oportunidad de formalizar el uso de la razón trigonométrica, como un facilitador de la experiencia realizada.			
ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE	ACTIVIDAD DE LOS ALUMNOS	INTERVENCIÓN DOCENTE	EVALUACIÓN DE LA MARCHA DE LA CLASE
Introducción al tema Se procede a dar las instrucciones necesarias para la realización de la actividad. Se explica el cómo usar el goniómetro y se hace una demostración.	Los estudiantes deben prestan atención a las instrucciones que entrega el profesor	El docente demuestra el uso del goniómetro y da un par de ejemplos de cómo deben medir las distancias.	¿Utilizan de manera correcta el goniómetro? ¿Calculan el ángulo de manera correcta?
Presentación de la actividad Se entrega la siguiente actividad:	Una vez entregada la actividad en papel, los estudiantes la revisan y comentan sobre ella entre su grupo de trabajo.	El docente lee la actividad con las preguntas. Se enfatiza en la comprensión de las preguntas.	¿Muestran interés por la actividad? ¿Los estudiantes visualizan la situación planteada? ¿Comprenden como varía el ángulo en las situaciones propuestas?

ACTIVIDAD 2.0

Nombre:

Colegio:

Lee atentamente las siguientes preguntas y responde:

1. ¿Qué crees que sucede con el ángulo cuando nos acercamos a la estructura?

2. ¿Qué crees que sucede con el ángulo cuando nos alejamos?

3. Si deseamos mantener fijo el ángulo de elevación ¿Qué ocurrirá con las medidas que tomaremos?

Instrucciones:

1. Formen equipos de 4-5 compañeros e identifiquen a cada uno con una labor especifica.
2. Elijan una estructura u objeto con el que trabajarán, y midan su altura.
3. Con la ayuda de un compañero ubiquen el ángulo requerido de manera que el visor del goniómetro este ubicado en el punto mas alto de la estructura u objeto.
4. Con el ángulo logrado, pide a tu compañero que mida la distancia entre tus pies y la base de la estructura u objeto.
5. Anoten todos los resultados en la tabla.

Ángulo de elevación (α)	Altura observadora (c)	Altura estructura u objeto (a) (solo considera la altura restante a "c")	Distancia hasta la base de la estructura u objeto (b)	Relación entre a y b
75°				
35°				
60°				
20°				
85°				

Luego de la actividad realizada, comenta tus resultados con otros grupos y responde:

4. ¿Encontraron alguna relación en común al comparar resultados de un mismo ángulo con otros grupos? Comenta tu respuesta.

5. ¿Es posible medir un objeto de mayor o menor altura, utilizando un mismo ángulo? ¿Qué debemos hacer en tales casos? Comenta tu respuesta.

6. Si deseamos siempre mantener el ángulo fijo, ¿Qué deberá ocurrir con la distancia hasta el objeto cuando este es de mayor altura? Y ¿cuándo es de menor altura?

7. ¿Es posible utilizar este método para alturas aun mas altas, incluso en donde no podamos utilizar la huincha de medir? Comenta y explica tu respuesta.

partir de la actividad realizada y mediante el uso de los datos recopilados:

Si quisiéramos conectar un cable tensor, desde donde medí el ángulo, hasta el punto más alto de la estructura elegida de manera de brindarle estabilidad.

1. ¿Es posible calcular el largo del cable que necesitamos utilizar para esta tarea? Explique su respuesta.

2. ¿Qué relación existe entre el cable mencionado, y las medidas que ya manejábamos en la actividad anterior? Explique su respuesta.

3. ¿Es posible calcular la extensión del cable, si no podemos medir la altura de la estructura? Explique su respuesta.

4. ¿Es posible medir la extensión del cable, si no tenemos una huincha que nos permita medir las distancias hasta la base? Explique su respuesta.

Resolución de la actividad El trabajo se realizará de manera grupal, en grupos de no más de cinco estudiantes, y dichos grupos son formados por ellos mismos.	Posibles respuestas: 1.- Que los estudiantes planteen relaciones con los valores encontrados. 2.- Cuando se habla de medir la distancia al objeto, que ellos midan la distancia desde el punto de referencia y no la perpendicular al objeto que queremos determinar su altura.	Posibles devoluciones: 1.- entrega en blanco de la actividad porque no hubo comprensión de esta. 2.- se resuelve de manera incorrecta ya que no hubo una compresión en la totalidad de las instrucciones. 3.- no completan la actividad, pero no hacen bien la relación solicitada ya que no se imaginan que necesitan hallar un cociente. Quizás las relaciones que ellos planteen sean las de adición o sustracción de los valores hallados.	¿Logran completar la tabla de datos? ¿Encuentran relaciones similares entre grupos? ¿Logran conjeturar causas de la similitud en las relaciones?
Compartiendo ideas y estrategias de resolución El profesor explica de manera breve el cómo se debía desarrollar de forma correcta la toma de datos.	Los estudiantes miran al docente mientras explica el paso a paso del desarrollo de la actividad.	El profesor pregunta a los estudiantes si la forma de como recolectaron los datos era la misma a como la explico él. Se hace un intercambio de opiniones con los grupos y el profesor las va comentando.	¿Expresan claramente sus respuestas y justificaciones ante sus compañeros?
Sintetizando ideas desde los aprendizajes de los alumnos El docente realiza sus propias conclusiones de la actividad de acuerdo con las justificaciones de los estudiantes.	Los alumnos escuchan las conclusiones del profesor y exponen sus dudas sobre la actividad.	El profesor da a conocer la relación entre la actividad y el objetivo de la clase.	¿Los estudiantes comprenden las ventajas del concepto para la resolución de la situación planteada?

Implementación Diseño 3

Este diseño es aplicado en 3° de enseñanza media con un grupo de estudiantes pertenecientes a la Educación Técnico Profesional. Para la implementación se entrega a los estudiantes la actividad impresa, se leen y explican las instrucciones procedimentales referentes a la forma de completar la tabla y el uso del goniómetro. Posteriormente los estudiantes forman grupos de 4 personas y salen del taller en busca del objeto que medirán, toman datos siendo guiados por el docente.

Se aprecia a un grupo de estudiantes usando la herramienta goniómetro, en este caso lo que ellos quieren medir es la altura de un muro del patio del establecimiento educacional al que pertenecen.

Figura N°19: Estudiantes usando el goniómetro.

Resultados y análisis: Diseño 3

Sección 1 • ¿Qué crees que sucede con el ángulo cuando nos acercamos a la estructura? • ¿Qué crees que sucede con el ángulo cuando nos alejamos? • Si deseamos mantener fijo el ángulo de elevación ¿Qué ocurrirá con las medidas que tomaremos?

<table>
<tr><td colspan="2">Respuestas</td></tr>
<tr><td>Grupo A

Lee atentamente las siguientes preguntas y responde:
1. ¿Qué crees que sucede con el ángulo cuando nos acercamos a la estructura?
VA AUMENTANDO CADA VEZ QUE ME ACERCÓ
2. ¿Qué crees que sucede con el ángulo cuando nos alejamos?
VA DISMINUYENDO CADA VEZ QUE NOS ALEJAMOS
3. Si deseamos mantener fijo el ángulo de elevación ¿Qué ocurrirá con las medidas que tomaremos?
LAS MEDIDAS SE MANTIENEN DEBIDO A TENER FIJO EL ANGULO DE ELEVACIÓN .</td><td>Grupo B

1. ¿Qué crees que sucede con el ángulo cuando nos acercamos a la estructura?
El ángulo va disminuyendo al momento de acercarnos
2. ¿Qué crees que sucede con el ángulo cuando nos alejamos?
Aumenta el ángulo al alejarnos.
3. Si deseamos mantener fijo el ángulo de elevación ¿Qué ocurrirá con las medidas que tomaremos?
No aumenta, ni disminuye, el ángulo se mantiene.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Comentarios
Grupo A identifica la situación de aumento y disminución de la apertura del ángulo cuando se acerca o aleja de la estructura.
Grupo B contempla la situación, de manera inversa a lo esperado, se atribuye al error de concepto, en donde se relaciona la longitud de la distancia a la estructura con la apertura del ángulo. A mayor longitud los estudiantes esperan mayor ángulo.
Ambos grupos no visualizan la situación de cambio de las medidas cuando pretendemos mantener el ángulo fijo cuando pretendemos coincidir el ángulo con la altura de la estructura.</td></tr>
</table>

Sección 2

Ángulo de elevación (β)	Altura observadora (c)	Altura estructura u objeto (a) (recuerda restarle “c”)	Distancia hasta la base de la estructura u objeto (b)	Relación $\frac{a}{b}$
75°				
35°				
60°				
20°				
85°				

Respuestas

Grupo A

Ángulo de elevación (β)	Altura observadora (c)	Altura estructura u objeto (a) (recuerda restarle “c”)	Distancia hasta la base de la estructura u objeto (b)	Relación $\frac{a}{b}$
75°	1.66 cms	310-1,66 144	405 cms	0,35 cm
35°	1,66 cms	310-1,66 144	184 cms	0,78 cm
60°	1,66 cms	310-1,66 144	193 cms	0,74 cm
20°	1,66 cms	310-1,66 144	350 cms	0,41 cm
85°	1,66 cms	310-1,66 144	934 cms	0,15 cm

Grupo B

Ángulo de elevación (β)	Altura observadora (c)	Altura estructura u objeto (a) (recuerda restarle “c”)	Distancia hasta la base de la estructura u objeto (b)	Relación $\frac{a}{b}$
75°	1,55m	2,40m	6,80 mt	$\frac{1,54}{6,80}$ = 0,22 mt
35°	1,55m	2,40m	2 mt	$\frac{1,54}{2}$ = 0,77 mt
60°	1,55m	2,40 m	90 cm	$\frac{1,54}{0,90}$ = 1,71 mt
20°	1,55m	2,40m	7 mt	$\frac{1,54}{7}$ = 0,22 mt
85°	1,55m	2,40 m	20 cm	$\frac{1,54}{0,20}$ = 7,7 mt

Comentarios

Ambos grupos completan la tabla de datos según los requerimientos.

Grupo A presenta toma de datos, acorde a lo esperado, respecto de la concepción de ángulo y su apertura.

Grupo B presenta datos inversos a la concepción de datos y su apertura, lo que indica un incorrecto uso del instrumento goniómetro, ya que este contempla el cálculo del ángulo complementario para lograr la apertura requerida.

Sección 3

Luego de la actividad realizada, comenta tus resultados con otros grupos y responde:

- ¿Encontraron alguna relación en común al comparar resultados de un mismo ángulo con otros grupos? Comenta tu respuesta.
- ¿Es posible medir un objeto de mayor o menor altura, utilizando un mismo ángulo? ¿Qué debemos hacer en tales casos? Comenta tu respuesta.
- Si deseamos siempre mantener el ángulo fijo, ¿Qué deberá ocurrir con la distancia hasta el objeto cuando este es de mayor altura? Y ¿cuándo es de menor altura?
- ¿Es posible utilizar este método para alturas aún más altas, incluso en donde no podamos utilizar la huincha de medir? Comenta y explica tu respuesta.

Respuestas

1. LISTO 2. SI, SOLO CAMBIA LA DISTANCIA A LAS CUALES SE MIDEN LOS ANGULOS 3. CUANDO ES DE MAYOR ALTURAS HAY QUE ACERCASE Y DE MENOR ALTURA ALEJARSE 4. SI POR QUE HAY INSTRUMENTOS QUE NOS PUEDEN AYUDAR O SOLO TENIENDO UNA REFERENCIA DE MEDIDA.	2 Sí, porque varía según el punto de referencia. Cambiar el punto de Referencia. 3 El objeto debe estar o ser más alto para ser el mismo ángulo. menos distancia mismo ángulo. 4 Si se puede pero no tendrá la misma presición ya que dependera de como se realice la medición.

Comentarios

Ambos grupos muestran entender cómo debe cambiar la longitud del punto de referencia de la medición, cuando se requiere medir un objeto de distinta altura mediante un ángulo establecido.

A pesar de que los estudiantes de ambos grupos visualizan la situación de cambio de longitud, cuando deseamos observar un objeto de distinta altura, estos confunden el aumento en la apertura del ángulo con la longitud de la estructura. Es decir que cuando deseamos medir una estructura de mayor altura, estos aplican el razonamiento previamente utilizando en donde el ángulo aumenta cuando nos acercamos a la estructura.

Sección 4

A partir de la actividad realizada y mediante el uso de los datos recopilados:

- Si quisiéramos conectar un cable tensor, desde donde medí el ángulo, hasta el punto más alto de la estructura elegida de manera de brindarle estabilidad.
- ¿Es posible calcular el largo del cable que necesitamos utilizar para esta tarea? Explique su respuesta.
- ¿Qué relación existe entre el cable mencionado, y las medidas que ya manejábamos en la actividad anterior? Explique su respuesta.
- ¿Es posible calcular la extensión del cable, si no podemos medir la altura de la estructura? Explique su respuesta.
- ¿Es posible medir la extensión del cable, si no tenemos una huincha que nos permita medir las distancias hasta la base? Explique su respuesta.

Respuestas

1. ¿Es posible calcular el largo del cable que necesitamos utilizar para esta tarea? Explique su respuesta.

SI USANDO EL TEOREMA DE PITAGORAS

2. ¿Qué relación existe entre el cable mencionado, y las medidas que ya manejábamos en la actividad anterior? Explique su respuesta.

MUCHA RELACIÓN DEBIDO A QUE EL ÁNGULO

3. ¿Es posible calcular la extensión del cable, si no podemos medir la altura de la estructura? Explique su respuesta.

SI POR QUE PODEMOS USAR UN OBJETO O PERSONA DE REFERENCIA

4. ¿Es posible medir la extensión del cable, si no tenemos una huincha que nos permita medir las distancias hasta la base? Explique su respuesta.

SI CON REFERENCIA

1. ¿Es posible calcular el largo del cable que necesitamos utilizar para esta tarea? Explique su respuesta.

Si se puede por medio del teorema de pitagoras.

2. ¿Qué relación existe entre el cable mencionado, y las medidas que ya manejábamos en la actividad anterior? Explique su respuesta.

El cable seria en este caso la hipotenusa del teorema.

3. ¿Es posible calcular la extensión del cable, si no podemos medir la altura de la estructura? Explique su respuesta.

No se podría por la falta de datos.

4. ¿Es posible medir la extensión del cable, si no tenemos una huincha que nos permita medir las distancias hasta la base? Explique su respuesta.

Si se puede por medio de otros tipos de medición como los pies, cuartas o uno mismo sabiendo la medida.

Comentarios Ambos grupos conjeturan la solución mediante el teorema de Pitágoras. El grupo B identifica la ausencia de datos que le permite lograr la solución. Ambos grupos proponen el uso de medidas de referencias no estandarizadas para resolver la situación cuando no se cuenta con instrumento de medición.

De acuerdo al rediseño de nuestra propuesta, se observa, a partir de las actividades realizadas en el taller, que los estudiantes tienden a acostumbrarse a ciertas conductas y condiciones que ofrece este entorno, como la mayor cantidad de espacio respecto la sala de clases, la toma de decisiones que ofrece el tipo de trabajo, el ordenamiento y priorización de sus labores acordes a su propia decisión, además del trabajo colaborativo con roles que les permite ser parte de un grupo y responder por la responsabilidad añadida a cada uno de ellos.

Sin embargo, los estudiantes presentan dificultades respecto del uso de la noción de ángulo cuando se enfrentan a una situación que implica poner en juego este objeto, ambos grupos comprenden la variación existente cuando deseamos mover al observador respecto al objeto que queremos medir. Sin embargo, la noción de ángulo en algunos grupos es entendida respecto de la distancia que tiene el observador al objeto medido, relacionan la apertura del ángulo con la longitud de uno de los trazos que lo componen, en donde se considera que, a mayor longitud, mayor apertura y viceversa. Junto con los anterior, los estudiantes, al no tener una formalización previa del concepto de razón trigonométrica, no logran visualizar la situación hacia un modelo similar, a pesar de lograr identificar el uso del teorema de Pitágoras como punto de inicio para resolver.

A continuación, se presenta la propuesta de enseñanza y el correspondiente plan de clase, que considera un rediseño que mantiene el momento de instrucción por parte del docente, promueve el uso de una representación figural que guíe y apoye las producciones de los estudiantes, además de una mayor transición por preguntas que intencionan el razonamiento, respecto del ángulo y las medidas en un contexto de cambio. Estas adecuaciones son realizadas en función de las evidencias analizadas.

Actividad Final

Colegio: ____

Especialidad: Curso:

Lee atentamente las siguientes preguntas y responde:

¿Qué crees que sucede con el ángulo cuando nos acercamos a la estructura?

¿Qué crees que sucede con el ángulo cuando nos alejamos?

Si deseamos mantener fijo el ángulo de elevación ¿Qué ocurrirá con las medidas que tomaremos?

Instrucciones:

Formen equipos de 4-5 compañeros e identifiquen a cada uno con una labor específica.

Elijan una estructura u objeto con el que trabajarán, y midan su altura.

Con la ayuda de un compañero ubiquen el ángulo requerido de manera que el visor del goniómetro este ubicado en el punto más alto de la estructura u objeto.

Con el ángulo logrado, pide a tu compañero que mida la distancia entre tus pies y la base de la estructura u objeto.

Anoten todos los resultados en la tabla.

Ángulo de elevación (β)	Altura observadora (c)	Altura estructura u objeto (a) (recuerda restarle "c")	Distancia hasta la base de la estructura u objeto (b)	Relación $\frac{a}{b}$
75°				
35°				
60°				
20°				
85°				

Luego de la actividad realizada, comenta tus resultados con otros grupos y responde:

¿Encontraron alguna relación en común al comparar resultados de un mismo ángulo con otros grupos? Comenta tu respuesta.

Representa la situación mediante un esquema (dibujo)

¿Es posible medir un objeto de mayor o menor altura, utilizando el mismo ángulo? ¿Qué debemos hacer en tales casos? Comenta tu respuesta.

¿Es posible utilizar este método para alturas aún más altas, incluso en donde no podamos utilizar la huincha de medir? Comenta y explica tu respuesta.

A partir de la actividad realizada y mediante el uso de los datos recopilados:
Si quisiéramos conectar un cable tensor, desde donde mediste el ángulo, hasta el punto más alto de la estructura elegida de manera de brindarle estabilidad.

Si ahora deseamos conectar un cable desde donde estamos parados hasta una estructura más alta, ¿Qué ocurre con el cable tensor? Explique su respuesta.

Si aumentamos la altura de la estructura y tenemos un cable tensor de la misma longitud, ¿Que debemos hacer para que todo siga conectado? Explique su respuesta.

¿Es posible calcular la extensión del cable, si no podemos medir la altura de la estructura? Explique su respuesta.

¿Es posible medir la extensión del cable, si no tenemos una huincha que nos permita medir las distancias hasta la base? Explique su respuesta.

Plan de clases

Nivel: Segundo año de enseñanza media Profesores: Javier Alarcón Valenzuela – Nicolás González Martínez Número de la Unidad: 3 Nombre del Eje Temático: Geometría
Objetivo de la clase: Introducir concepto razones trigonométricas mediante la medición de una altura, utilizando el goniómetro.
Descripción de la clase: La actividad está planificada para introducir el concepto de razones trigonométricas a través de una experiencia fuera del aula, en la que los estudiantes realizaran una actividad teórico-practica. Esta inicia en la sala de clases, en donde se entrega las instrucciones correspondientes a los procedimientos del trabajo, se explicará el uso del goniómetro y como se debe realizar la recolección de datos. Luego de esto se dará paso a que los estudiantes salgan al patio del colegio en donde deberán medir la altura de un objeto seleccionado, pero fijándose siempre en el ángulo que se debe formar (este estará dado en la hoja que se les entregará para realizar la actividad). Concluyendo con una retroalimentación en el aula, en donde los estudiantes deberán dar a conocer su opinión de la actividad y que conclusiones pueden obtener, a partir de ellas es que el docente tiene la oportunidad de formalizar el uso de la razón trigonométrica, como un facilitador de la experiencia realizada.

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE	ACTIVIDAD DE LOS ALUMNOS	INTERVENCIÓN DOCENTE	EVALUACIÓN DE LA MARCHA DE LA CLASE
Introducción al tema Se procede a dar las instrucciones necesarias para la realización de la actividad. Se explica y muestra la forma correcta de cómo usar el goniómetro, como se debe mirar este para entender el ángulo que nos muestra.	Los estudiantes escuchan con atención las instrucciones y observan la demostración del uso del instrumento.	El docente demuestra el uso del goniómetro y realiza un par de ejemplos de cómo deben hacer la recolección de datos.	¿Utilizan de manera correcta el goniómetro? ¿Calculan el ángulo de manera correcta?
Presentación de la actividad Se entrega la siguiente actividad: Propuesta de Enseñanza **Actividad Final** Colegio: ____________________ Especialidad: Curso: Lee atentamente las siguientes preguntas y responde: ¿Qué crees que sucede con el ángulo cuando nos acercamos a la estructura? ¿Qué crees que sucede con el ángulo cuando nos alejamos? Si deseamos mantener fijo el ángulo de elevación ¿Qué ocurrirá con las medidas que tomaremos?	Los estudiantes ya con la actividad en sus manos la revisan y escuchan como el docente explica la forma de completarla.	El docente lee la actividad con las preguntas. Se enfatiza en la comprensión de las preguntas.	¿Muestran interés por la actividad? ¿Los estudiantes visualizan la situación planteada? ¿Comprenden como varía el ángulo en las situaciones propuestas?

Instrucciones:

Formen equipos de 4-5 compañeros e identifiquen a cada uno con una labor específica.

Elijan una estructura u objeto con el que trabajarán, y midan su altura.

Con la ayuda de un compañero ubiquen el ángulo requerido de manera que el visor del goniómetro este ubicado en el punto más alto de la estructura u objeto.

Con el ángulo logrado, pide a tu compañero que mida la distancia entre tus pies y la base de la estructura u objeto.

Anoten todos los resultados en la tabla.

Ángulo de elevación (β)	Altura observadora (c)	Altura estructura u objeto (a) (recuerda restarle "c")	Distancia hasta la base de la estructura u objeto (b)	Relación $\frac{a}{b}$
75°				
35°				
60°				
20°				
85°				

Luego de la actividad realizada, comenta tus resultados con otros grupos y responde:

¿Encontraron alguna relación en común al comparar resultados de un mismo ángulo con otros grupos? Comenta tu respuesta.

Representa la situación mediante un esquema (dibujo)

¿Es posible medir un objeto de mayor o menor altura, utilizando el mismo ángulo? ¿Qué debemos hacer en tales casos? Comenta tu respuesta.

¿Es posible utilizar este método para alturas aún más altas, incluso en donde no podamos utilizar la huincha de medir? Comenta y explica tu respuesta.

A partir de la actividad realizada y mediante el uso de los datos recopilados: Si quisiéramos conectar un cable tensor, desde donde mediste el ángulo, hasta el punto más alto de la estructura elegida de manera de brindarle estabilidad. Si ahora deseamos conectar un cable desde donde estamos parados hasta una estructura más alta, ¿Qué ocurre con el cable tensor? Explique su respuesta. Si aumentamos la altura de la estructura y tenemos un cable tensor de la misma longitud, ¿Que debemos hacer para que todo siga conectado? Explique su respuesta. ¿Es posible calcular la extensión del cable, si no podemos medir la altura de la estructura? Explique su respuesta. ¿Es posible medir la extensión del cable, si no tenemos una huincha que nos permita medir las distancias hasta la base? Explique su respuesta.			
Resolución de la actividad El trabajo se realizará de manera grupal, en grupos de no más de cinco estudiantes, y dichos grupos son formados por ellos mismos.	Posibles respuestas: 1.- Que los estudiantes planteen relaciones con los valores encontrados. 2.- Cuando se habla de medir la distancia al objeto, que ellos midan la distancia desde el	Posibles devoluciones: 1.- Entregar la actividad en blanco ya sea porque no supo cómo hacerla o porque no quiso realizar la actividad.	¿Logran completar la tabla de datos? ¿Encuentran relaciones similares entre grupos? ¿Logran conjeturar causas de la similitud en las relaciones?

	punto de referencia y no la perpendicular al objeto que queremos determinar su altura.		
Compartiendo ideas y estrategias de resolución Se pregunta que estudiantes desean compartir sus resultados, con el grupo curso y que expliquen como obtuvieron dichos resultados.	Los estudiantes escuchan los argumentos que exponen sus compañeros, afirmando o refutando las explicaciones que se exponen.	El profesor pregunta a ciertos estudiantes que resultado obtuvieron y sus argumentos para concluir porqué es la respuesta correcta.	¿Expresan claramente sus respuestas y justificaciones ante sus compañeros?
Sintetizando ideas desde los aprendizajes de los alumnos El docente realiza sus propias conclusiones de la actividad de acuerdo con las justificaciones de los estudiantes. Se introduce al concepto de razón trigonométrica como un nuevo método de resolución de problemas que involucran cálculo	Los alumnos escuchan las conclusiones del profesor y exponen sus dudas sobre la actividad.	El profesor da a conocer la conexión entre la actividad desarrollada y el concepto de razones trigonométricas, resolviendo la situación mediante su uso,	¿Los estudiantes comprenden las ventajas del concepto para la resolución de la situación planteada? ¿Los estudiantes son capaces de

de longitudes y que facilita el trabajo realizado en la experiencia.		además explica, enfatizando en las características positivas, su modo de empleo.	resolver situaciones similares utilizando alguna razón trigonométrica?

Capítulo 7: Conclusiones

Realizar este estudio siguiendo los lineamientos del análisis didáctico, nos permitió formar una amplia perspectiva del objeto matemático que trabajamos, ya que, a través de este marco referencial, es posible una articulación entre la disciplina matemática, y los aspectos pedagógicos y didácticos que involucra, fortaleciendo así la labor docente. Identificar una problemática y someterla a los análisis que comprende el marco, le entrega al investigador los recursos necesarios para diseñar una propuesta acorde a los requerimientos que el aula necesita.

El objeto matemático, razones trigonométricas, bajo la mirada del Análisis Didáctico, nos muestra una fuerte relación con su origen y desarrollo epistemológico, lo que en un primer momento se ve reflejado en las propuestas de aprendizaje analizadas. Si bien dentro del programa de estudios, al concepto escogido no se le confiere la misma importancia que a la función trigonométrica, debido en parte a las diferencias en la multiplicidad de usos actuales y el nivel de dificultad para ser comprendido, este mantiene un uso predominante por sobre la función en algunas especialidades técnicas, como por ejemplo la de mecánica industrial, producto del tipo de labor que en ella se cumplen.

El objeto razón trigonométrica basa su construcción en la medición y el manejo de ángulo, conceptos primordiales dentro del taller mecánico, que al no ser atendidos confieren una limitante al contenido y en particular al docente, cuando debe proponer a sus estudiantes situaciones que permitan la comprensión de estos conceptos. Finalmente, estos antecedentes nos muestran una guía para el diseño de la propuesta, que en su implementación refleje una mejora para la labor docente cuando se enfrente y busque métodos de enseñanza eficaces que le permitan al alumno dar significado a las tareas que desarrolla.

Considerando las preguntas que orientaron nuestro trabajo:

- ¿Cómo se propone la enseñanza de las razones trigonométricas en el actual programa de estudios y que tan alejado está de la práctica de cada especialidad?
- ¿Qué actividades facilitan la comprensión de las razones trigonométricas en un entorno técnico profesional?

Respondiendo nuestro primer cuestionamiento, y posterior a la revisión de los planteamientos entregados por el actual programa de estudios, el objeto razones trigonométricas, es planteado bajo un enfoque astronómico en concordancia con su origen epistemológico, sin embargo, este no contempla lineamientos que le permitan al docente apoyar su labor bajo una guía que sustente actividades que acerquen el concepto con algunas especialidades técnicas. Si bien, el contenido está preparado para ser llevado a cabo en 2° año medio, nivel que mantiene una programación transversal para todo tipo de formación, consideramos que este debe mantener un estrecho vínculo con la ETP debido al gran porcentaje que esta abarca en el país y particularmente al significado que adquiere su uso en el taller mecánico industrial.

Para dar respuesta a nuestro segundo cuestionamiento, es imperativo considerar los que nos brinda el Análisis didáctico, en este sentido este marco nos entregó un método de acercamiento a la problemática en donde en cada análisis realizado, pudimos visualizar una parte de lo que sería llevar el objeto al aula técnico profesional. A nivel general pudimos observar que es necesario contemplar el escenario que viven los estudiantes pertenecientes a este tipo de formación, en particular acomodar las metodologías empleadas a las formas de trabajo que están acostumbrados, manteniendo la libertad y los tiempos que maneja el docente de esta formación, además de tomar en cuenta las habilidades que busca logra en la ETP las cuales hacen referencia al trabajo colaborativo y empleado en situaciones no solo actuales sino aplicables en un entorno profesional.

Tomando en cuenta los análisis anteriores y enmarcado en el análisis de instrucción, es que la mirada Socioepistemológica nos brindó el contraste entre el aula tradicional y el aula técnico. Esto conformó una base para el diseño de la propuesta, además de una forma de entender la enseñanza dentro de esta formación, para la cual no habíamos sido preparados, en este sentido las concepciones erradas, dificultaron nuestro actuar y el de los estudiantes al momento de enfrentarse a nuestra propuesta. Sin embargo, plasmar el objeto matemático, en una actividad que surja fuera del aula tradicional, siendo llevado a cabo bajo las reglas de este nuevo escenario, es un facilitador en la resignificación del objeto tratado dentro del espacio pedagógico-técnico, considerando que los contenidos deben mantener una mirada profesional, pero sin perder de vista que se realiza para estudiantes que necesitan aprender de una manera vinculada a su entorno. Las aplicaciones realizadas, nos muestran que la propuesta puede ser una vía que introduzca y resignifique el contenido tanto a nivel en el que está enmarcado dentro del programa, como a nivel técnico, permitiendo lograr el objetivo de la clase o contribuir a generar una habilidad concreta para la especialidad. El análisis de actuación nos mostró la implicancia de nuestro diseño y los cambios que seguirá sufriendo, sin embargo, se transforma en una fuente de aprendizaje que contribuye a la labor docente, cuando desea cambiar el escenario y necesita contemplar nuevas variables en su gestión y planeación de clase.

Reflexión Final

Durante el proceso de este estudio surgieron situaciones que visibilizaron el poco conocimiento que tenemos acerca de la ETP, el gran porcentaje de estudiantes que esta representa, los lineamientos que debe cumplir y las proyecciones que tiene a nivel de país. Por lo que se vuelve importante abordar este tipo de problemática, ya que visibiliza estos aspectos, y obliga a adquirir competencias acordes a estos requerimientos. La conformación del diseño y su posterior implementación nos permitió trabajar fuera del aula para el que hemos sido preparado, sacándonos de la comodidad, pero llevándonos a un espacio de crecimiento, en donde logramos interactuar con el estudiante evidenciando motivación y colaboración que muchas veces no está presenta en el aula tradicional.

Este tipo de actividad no solo contribuye a la comprensión del saber matemático, también pone en juego habilidades que no teníamos consideradas, como el manejo de grupo fuera de la sala, el uso de la voz y la entrega oportuna y clara de las instrucciones, estas son puestas en juego en actividades que se escapan de lo convencional y que están caracterizadas por quiebres de la dinámica habitual de la sala de clase. De la misma manera, el uso de metodologías que le den un sustento a la planeación de clase nos deja una herramienta validadora de nuestras producciones, aplicables a otros contenidos en el futuro. Por lo que proyectamos este trabajo, como una guía, que nos permita corregir y optimizar nuestro quehacer como docentes.

Bibliografía

Agencia de Calidad de la Educación. (2016). *Calidad Educativa en Educacion Técnico Profesional desde la perspectiva de los actores clave del sistema.* Santiago de Chile: MINEDUC.

Becerra, M., Arenas, F., Morales, F., Urrutia, L., & Gómez, P. (2014). Razones Trigonométricas. En P. Gómez, *Diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas en MAD 1* (págs. 359-435). Bogotá : Universidad de los Andes.

Chacon, A., García, G., Rupin, P., Setz, J., & Villena, M. (2017). *Matemática 2° Medio.* Providencia: SM Chile.

Chacón, A., García, G., Rupin, P., Setz, J., & Villena, M. (2018). *Matemática 2° Medio.* Santiago de Chile: SM Chile.

Fernández, L. (2006). *¿Cómo analizar datos cualitativos? Butlletí LaRecerca.* Institut de Ciències de l'Educació, Universitat de Barcelona. ISSN: 1886-1946.

Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, P. (2010). *Metodología de la Investigación.* México D.F.: McGraw-Hill.

Lupiáñez, J. L. (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación de profesores de matemática de secundaria.* Granada: Universidad de Granada.

MINEDUC. (2016). *Matemática Programa de Estudio Segundo medio.* Santiago de Chile: SM Chile.

MINEDUC. (2016). Programa de estudios. *Matemática Segundo medio* , 37-38.

MINEDUC. (2017). En J. Vallejos, M. Cortéz, M. Díaz, & V. Muñoz, *Matemática 2° Medio Cuaderno de Ejercicios* (págs. 100-103). Providencia: SM Chile.

Montiel, G. (2013). *Desarrollo del Pensamiento Trigonométrico.* Distrito Federal, México: Secretaría de educación pública.

Montiel, G., & Buendía, G. (2012). un Esquema metodológico para la investigación socioepistemológica: ejemplos e ilustraciones. En A. Rosas, & A. Romo, *Metodología en Matemática educativa: Visiones y Reflexiones* (págs. 61-88). Ciudad de Mexico: Lectorum.

OCDE. (2017). *Marco de Evaluación y de Análisis de PISA para el desarrollo: Lectura, matemáticas y ciencias.* Paris: OECD Publishing.

PEARSON. (2013). *Informe Final Evaluación de la PSU Chile.* Londres.

Picochet, J., Cortés, M., Díaz, M., & Muñoz, V. (2018). *Matemática 2° Medio.* Santiago de Chile: Ediciones SM Chile S.A.

Quintana, E. (2008). *Las Grabaciones en Video de Secuencias Didácticas como instrumento de observación, análisis y reflexión para la evaluación y autoevaluación de la práctica docente. La evaluación en el aprendizaje y la enseñanza del español como lengua extranjera/segunda.* XVIII Congreso Internacional de la Asociación para la Enseñanza del Español como lengua Extranjera (ASELE), 611-617.

Rico, L. (2013). El Método del Análisis Didáctico. *Unión Revista Iberoaméricana de educación matemática*, 11-27.

Saiz, O., & Blumenthal, V. (2016). *Matemática 3° Medio.* Santiago de Chile: Unidad de Currículum y Evaluación.

Swokowski, E. (2009). *Algebra y Trigonometría con Geometría Analítica.* México. D.F: Cengage Learning Editores S.A.

Vallejos, J., Cortés, M., Días, M., & Muñoz, V. (2018). *Matemática 2° Medio.* Santiago: SM Chile.

Vallejos, J., Cortés, M., Díaz, M., & Muñoz, V. (2018). *Matemática 2° Medio.* Santiago de Chile: SM Chile.