UNIVERSIDAD DE VALPARAISO

FACULTAD DE CIENCIAS

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

CARRERA DE MATEMATICA

Creencias y concepciones sobre si mismos de estudiantes que cursan 2º año de enseñanza media respecto al concepto de logaritmos, tratamiento a dicho concepto y discurso escolar utilizado por el docente

Tesis para optar al Título de Profesor de Enseñanza Media en Matemática con Mención en Didáctica y el grado de Licenciado en Educación

Eduardo Andrés Salas Moya

Profesora Guía: Gladys González

UNIVERSIDAD DE VALPARAISO SISTEMA INTEGRADO DE BIBLIOTECAS

Valparaíso, Chile

2013

INDICE

AGRADECIMIENTOS

A Dios por darme la vida y permitirme terminar satisfactoriamente mis estudios de licenciatura.

A mi madre, por inculcarme desde siempre, el valor de la perseverancia, el esfuerzo, la responsabilidad y la importancia del estudio. Por su amor incondicional y por creer en mí.

A mi padre, por su apoyo y sustento durante toda mi vida, especialmente, en estos largos seis años. Por su amistad, paciencia, comprensión y esfuerzo por brindarme las mayores comodidades y permitirme culminar satisfactoriamente mis estudios de licenciatura.

A mi polola, por su amor, comprensión y paciencia. Con su apoyo, energía, ayuda y compañía de muchas noches, ha sido un pilar fundamental en la culminación de este proceso.

A mi asesora, la profesora Gladys González, por su comprensión, paciencia, tiempo y palabras en aquellos momentos de tribulación; por valorar cada ocurrencia y por su apoyo incondicional.

A mis queridos hermanos, por su apoyo y por creer en mi, en especial a Juan Pablo por dedicar parte importante de su vida a cuidarme, aconsejarme y convertirse en mi referente de esfuerzo, dedicación y entrega al trabajo y familia.

A mis profesores, que a lo largo de estos seis años, han influido en mi formación académica, profesional y humana. En especial a: Daniel Jiménez, Eduardo Stange, Jorge León y Miguel Cerda.

Agradezco a todas aquellas personas que contribuyeron directa o indirectamente con sus consejos, pláticas, buenos momentos y razonamientos lógicos que simplemente me hicieron pensar.

INTRODUCCION

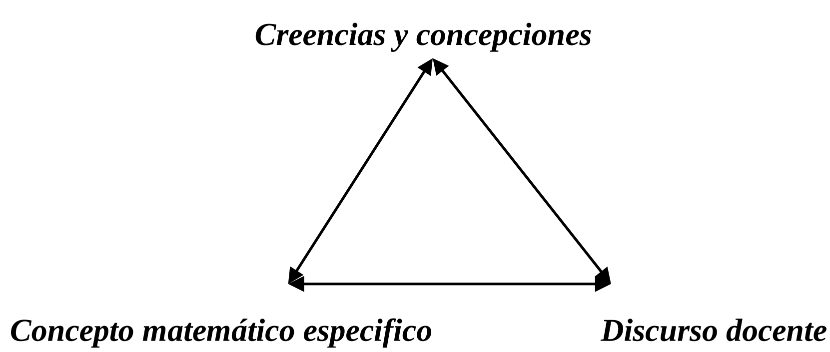
Esta investigación nace a raíz de la necesidad por conocer las razones del rendimiento poco satisfactorio que manifiestan los estudiantes de nuestro país en el área de las matemáticas, tomando en cuenta los requerimientos que deben alcanzar en cuanto a objetivos propuestos, además de los deficientes resultados expresados en pruebas a nivel nacional e internacional.

Este deficiente desempeño es una muestra de que existe una crisis educacional importante en el país, que la misma sociedad chilena se ha encargado a través de diversas manifestaciones de ponerlo en la palestra. Estos insuficientes resultados no son los únicos indicadores de la crisis en la educación, debido a que existen estadísticas a nivel nacional e internacional que nos posicionan como un país de bajo rendimiento a nivel educacional. Son, entre otros, estos indicadores y expresiones de disconformidad y de real preocupación, las que han convertido hoy a la educación, en un tema prioritario y trascendental a nivel nacional.

Esta investigación considera tres factores que influyen directamente en el desarrollo de las habilidades y el desempeño de los estudiantes en el área de las matemáticas, donde cada uno de estos factores conlleva al análisis de diferentes enfoques, como son la Psicología, la matemática y la Didáctica, Estos factores son:

- Sus creencias y concepciones sobre sí mismos.
- El discurso docente
- Un concepto matemático especifico.

Se establece una relación recíproca entre; creencias y concepciones; concepto matemático y discurso docente debido a que cada una juega un rol determinante en el desarrollo de las habilidades matemáticas de los estudiantes. Así, esta reciprocidad producida entre estos tres factores forma el ***"triángulo reciproco"*** de esta investigación.



Un factor relevante mencionado anteriormente y que influye en el rendimiento de los estudiantes son, las *creencias y concepciones sobre sí mismo.* En particular, esta investigación considera lo que expresa el modelo de Bandura (Bruning R, 2002), el cual menciona que las creencias de un estudiante sobre sí mismo influyen en su rendimiento académico. Por ejemplo, se considera el caso de un estudiante y el juicio sobre su propia capacidad para realizar una tarea que involucre un concepto matemático específico (auto-eficacia) entonces, a mayor juicio de capacidad para resolver una tarea del concepto matemático especifico, mejor rendimiento académico tendrá.

Otro de los factores importante en el desempeño de los estudiantes, es el docente, en particular su discurso escolar, debido a que puede influir en el éxito o fracaso de los estudiantes en el aula, y por lo tanto, en el rendimiento académico de los alumnos en un determinado concepto matemático. Por ejemplo, durante la enseñanza en el aula de un concepto matemático especifico, el profesor puede explicar a los alumnos el porqué es importante conocer y comprender el concepto, ofrecer ejemplos de cómo, cuándo y dónde se aplica o se utiliza, es decir, ofrecer expectativas a los estudiantes y así aumentar la motivación intrínseca de estos.

En particular, y considerando el tercer factor que influye en el rendimiento de los estudiantes, esta investigación centra su estudio entorno al concepto matemático de los logaritmos, pues al ser un concepto poco sencillo por su carácter abstracto, puede contribuir a obtener un primer acercamiento en relación a las creencias y concepciones sobre sí mismos de los estudiantes al enfrentarse a este particular concepto matemático.

Finalmente, ante la reciprocidad entre estos tres factores, el presente trabajo persigue identificar las creencias y concepciones de los estudiantes entorno a los logaritmos, y analizar la práctica del profesor, para posteriormente, describir de qué forma las creencias y concepciones de los estudiantes sobre sí mismos respecto de los logaritmos se relacionan con el tratamiento dado a este concepto.

Por otra parte, para describir el tratamiento que el docente da a los conceptos matemáticos, en particular el concepto de los logaritmos, se opta por utilizar las siguientes teorías:

- ✓ La teoría socio-cognitiva de Bandura, en particular, los conceptos de *auto-eficacia del profesor* y el de *modelar;*
- ✓ La teoría de la atribución, en particular los conceptos de *atribuciones en el aula* y el de *reconversión de atribuciones*;
- ✓ La teoría de la autonomía y control, en particular el concepto de *autonomía y control en el aula*,

- ✓ El modelo de tendencias didácticas de Contreras, 1998 (Caballero, 2010), quien propone cuatro *tendencias*, las cuales cada una de éstas, manifiesta una concepción distinta sobre la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas ya que resalta aspectos distintos y tiene fines diferentes.

Las creencias y concepciones de los estudiantes entorno a los logaritmos, fueron identificadas por medio de una encuesta y un cuestionario, en tanto que el tratamiento dado al concepto se identifica mediante la grabación de sesiones y la revisión de materiales curriculares utilizados por el docente.

La investigación se encuentra organizada en cuatro capítulos:

- ✓ En el **capítulo 1** se expone la problemática tratada y la justificación del estudio, así como los objetivos y las preguntas de investigación.
- ✓ En el **capítulo 2** se realiza una revisión de la literatura acerca de las creencias, concepciones y tratamiento y se muestra el sustento teórico que orienta la investigación.
- ✓ En el **capítulo 3** se detalla la metodología utilizada, así como la población de estudio y los instrumentos utilizados para recabar la información necesaria.
- ✓ En el **capítulo 4** se expone la información obtenida, y el análisis de la misma.

Finalmente se presentan las conclusiones y sugerencias derivadas de este estudio.

CAPITULO 1: PROBLEMÁTICA, PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN, OBJETIVOS GENERALES Y ESPECIFICOS

1.1. Problemática

1.1.1. La enseñanza de la matemática escolar

Una de las actividades humanas más pretéritas es la matemática, que en el transcurso de los siglos ha sido utilizada con diversas intenciones. Los egipcios, empleaban nociones matemáticas para la distribución de tierras y establecimiento de impuestos, así como para la construcción de sus colosales pirámides y palacios. Para los pitagóricos de la antigua Grecia, las matemáticas tenían un carácter cercano a lo espiritual, mediante la cual aspiraban entender los misterios de la vida, lo que hacía de la matemática un conocimiento al alcance de unos cuantos favorecidos.

Se concuerda con Caballero (2010) que se le ha dado un importante lugar en la educación a la matemática a nivel mundial, debido a su implicancia para la humanidad desde las primeras civilizaciones. La matemática, es un lenguaje preciso que favorece un pensamiento lógico, abstracto y racional, que se espera sea inculcado en los jóvenes, razón por la cual, la enseñanza y aprendizaje de la matemática ha ganado entre la sociedad un elevado estatus.

No obstante, se han detectado deficiencias en el aprendizaje de la matemática las cuales se ven reflejadas en resultados tanto en pruebas nacionales como internacionales. Según *Programme for international students assmente* (PISA) efectuada en el 2009, realizada por la *Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico* (OCDE) que evalúa las competencias de los estudiantes en tres áreas: Lenguaje y comunicación, Matemática y Ciencias Naturales, lo que permite establecer promedios para cada área y porcentajes de estudiantes según niveles de desempeño; El promedio de Chile en la escala de Matemática fue de 421 puntos. Este es menor al promedio OCDE que corresponde a 496 puntos y sitúa al país en el lugar 49, entre 65 países participantes.

Posición	País	Puntaje
1	Shangai China	600
2	Singapur	562
3	Hong Kong	555
4	Corea	546
5	China Taipei	543
6	Finlandia	541
7	Liechtenstein	536
8	Suiza	534
9	Japón	529
10	Canadá	527
11	Holanda	526
12	Macao	525
13	Nueva Zelanda	519
14	Bélgica	515
15	Australia	514
16	Alemania	513
17	Estonia	512
18	Islandia	507
19	Dinamarca	503
20	Eslovenia	501
21	Noruega	498
22	Francia	497
23	República Eslovaca	497
24	Austria	496
	Promedio OCDE	**496**
25	Polonia	495
26	Suecia	494
27	República Checa	493
28	Reino Unido	492
29	Hungría	490
30	Luxemburgo	489
31	Estados Unidos	487
32	Irlanda	487

Posición	País	Puntaje
33	Portugal	487
34	España	483
35	Italia	483
36	Letonia	482
37	Lituania	477
38	Federación Rusa	468
39	Grecia	466
40	Croacia	460
41	Dubai	453
42	Israel	447
43	Turquía	445
44	Serbia	442
45	Azerbaiyán	431
46	Bulgaria	428
47	Rumania	427
48	Uruguay	427
49	Chile	421
50	Tailandia	419
51	México	419
52	Trinidad y Tobago	414
53	Kazakhstan	405
54	Montenegro	403
55	Argentina	388
56	Jordania	387
57	Brasil	386
58	Colombia	381
59	Albania	377
60	Túnez	371
61	Indonesia	371
62	Qatar	368
63	Perú	365
64	Panamá	360
65	Kirguistán	331

Puntaje similar al promedio OCDE

Tabla: ***Porcentaje de cobertura en los curriculum nacionales de los tópicos evaluados por TIMMS.***

Por otra parte, según muestra la distribución de los niveles de rendimiento en Matemática (de 1 a 6 niveles), los estudiantes que se ubican en el primer nivel (de 318 a 420 puntos), pueden responder preguntas claramente definidas, que involucren contextos familiares, en los cuales toda la información relevante está presente. También son capaces de identificar información y de llevar a cabo procedimientos rutinarios, siguiendo instrucciones directas, en situaciones explicitas. Finalmente, estos estudiantes pueden realizar acciones obvias o aquellas que se desprenden directamente de los estímulos presentados.

En resumen, PISA afirma que en Chile el 22% de los estudiantes evaluados se ubica bajo el primer nivel de rendimiento que puede ser descrito para matemática, y por tanto, no domina siquiera las competencias más elementales. Por el contrario, en los niveles más altos de rendimiento descritos para matemática correspondientes a un desarrollo avanzado de las competencias (niveles 5 y 6, con 607 y desde 669 puntos respectivamente), Chile ubica al 1% de los estudiantes evaluados, muy por debajo del promedio, dado que para la OCDE ese nivel de desarrollo lo alcanza un porcentaje del 13% de los estudiantes. (PISA, OCDE. Chile, 2009).

El caso de *Third International Mathematics and Science Study* (TIMSS), es el quinto Estudio Internacional de Tendencias en Matemáticas y Ciencias que evalúa y describe los aprendizajes en estas áreas que los estudiantes de 4º y 8º básico han adquirido en las escuelas de nuestro país y en los demás países participantes. TIMSS es una prueba curricular que contempla en matemática, entre otras disciplinas, los contenidos de *números,* *figuras geométricas y medición* y *presentación de datos* en 4º básico, y contenidos de *números*, *álgebra*, *geometría* y *datos y azar* en 8º básico. (simce.cl)

TIMSS evalúa el rendimiento de los estudiantes en matemáticas y ciencias para aprender más de la naturaleza y el alcance del aprendizaje de los estudiantes en estas dos materias, así como del contexto en que ello ocurre. Pretende encontrar factores directamente relacionados con el aprendizaje de los estudiantes en ambas materias que puedan modificarse por la política educativa, tales como el currículo, la asignación de recursos o las prácticas de enseñanza. (Educrea.cl).

La evaluación realizada por TIMSS el año 2003, arrojó como resultados que las áreas de matemáticas evaluadas: *fracciones y sentido numérico*, *medición*, *representación de datos análisis y probabilidad*, *geometría* y *algebra* posiciona a Chile en el lugar 35 de un total de 38 países participantes. El promedio nacional en matemáticas según TIMSS fue de 387 puntos y ubica a Chile por debajo del promedio internacional que fue de 467 puntos.

En base a sus puntajes en matemáticas, los estudiantes son clasificados en niveles de logros que se definen a partir de puntos de corte en el puntaje de matemáticas. Estos niveles indican conocimientos y destrezas que los jóvenes demuestran tener, que van desde las más complejas y elaboradas, en el nivel avanzado, hasta las más básicas y elementales, en el nivel bajo.

Niveles de logro y puntos de corte que los establecen	
Nivel avanzado	**625 puntos**
Nivel alto	**550 puntos**
Nivel intermedio	**475 puntos**
Nivel bajo	**400 puntos**

Según estos datos, el 59% de los jóvenes chilenos muestra un conocimiento matemático inferior al mínimo que permite describir la prueba TIMSS. El 26% está en un nivel bajo, es decir, los jóvenes tienen solo algunos conocimientos matemáticos básicos, puede realizar cálculos básicos con números naturales sin usar calculadora, pueden aproximar números de dos decimales al entero más próximo, reconocen algunos términos básicos y comprenden la información que entrega un gráfico de líneas. Un 12% se encuentra en un nivel intermedio, es decir, los jóvenes pueden aplicar conocimiento matemático en situaciones reales. Mientras que un 3% se encuentra en un nivel alto, es decir, los jóvenes pueden aplicar su comprensión y conocimiento matemático en una amplia variedad de situaciones relativamente complejas. (Sector matematica.cl)

Cabe destacar que ningún estudiante chileno logró alcanzar el nivel de rendimiento avanzado permitido por TIMSS, esto significa que los jóvenes no son capaces de organizar información, hacer generalizaciones, resolver problemas no rutinarios y justificar conclusiones a partir de datos.

El análisis detallado del rendimiento en cada sub área de matemática, manifiesta que donde hay mejor rendimiento, y por ende mejores resultados, es en *representación de datos y análisis de probabilidades* (429 puntos), mientras que el área de menor rendimiento fue *Algebra* (399 puntos).

MATEMATICAS

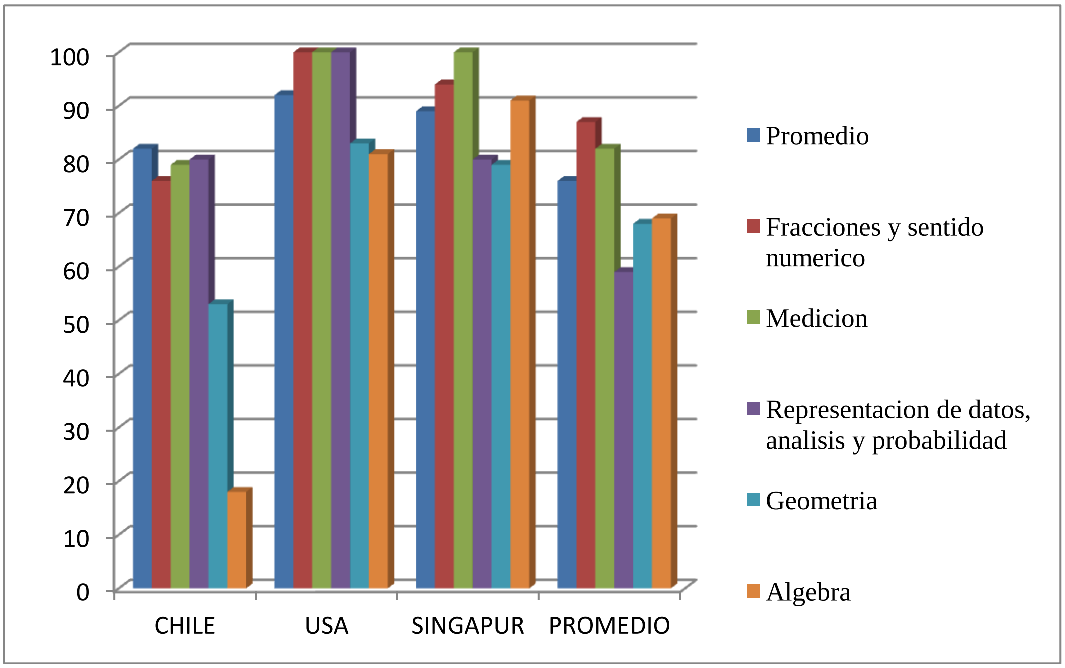


Tabla: ***Porcentaje de cobertura en los curriculum nacionales de los tópicos evaluados por TIMMS.*** **OCDE (2009)**

Lo anterior, según TIMSS, se explica de alguna manera con las respuestas dadas por los docentes respecto a las áreas que enfatizan, en Chile hay una enorme preponderancia a la ejercitación numérica, privándose de aspectos importantes del currículum, presentes en otros países (como álgebra y geometría). Por ejemplo, mientras la mayoría de los docentes (55%) en el promedio general de todos los países prioriza la enseñanza combinada de las materias de la matemática, en Chile sólo el 15% de los profesores trabaja así con sus alumnos. Mientras en Chile el 72% de los maestros dice que privilegia la enseñanza de los números, sólo el 14% de sus colegas de otros países lo hace.

Una información que contribuye al desarrollo de esta investigación es que los conocimientos requeridos por TIMSS exigen un grado de especialización relativamente alto de los profesores, lo que vuelve decisivo el nivel de preparación de estos. Uno de cada cuatro docentes chilenos (24%) se siente con un bajo nivel de auto-eficacia en sus propias capacidades para enseñar matemáticas, proporción 5 veces más alta que el promedio general (5%). En el caso chileno, mientras más capacitados se sentían los docentes para enseñar, mejores fueron los resultados obtenidos por los alumnos en la evaluación (TIMSS, 2003).

Otro dato relevante para esta investigación es que, si bien la experiencia de aprender mejora la auto percepción, también auto percibirse con capacidades limitadas constituye una barrera para el aprendizaje, es decir tener una tendencia de auto-eficacia baja. En efecto, en todos los países evaluados, mientras mejor se auto perciben los alumnos en cuanto a su capacidad de aprender, mayor es el puntaje alcanzado en el TIMSS. Queda de manifiesto que la proporción de niños chilenos que tienen un alto concepto de sí mismos para aprender matemáticas es comparativamente menor que el resto de los países (11% versus 18% a nivel internacional) al tiempo que en Chile es mayor la proporción de niños con un bajo concepto sobre sus capacidades de aprender matemáticas (21% versus 15% a nivel internacional). (TIMSS, 2003).

Los resultado deficientes que cada una de estas evaluaciones arrojó, sin duda son datos preocupantes, y como integrantes de la sociedad, no se puede actuar con indiferencia ni sentir que no se es parte de esta difícil realidad educacional que exige a gritos un cambio, un no al conformismo, que hace un llamado a continuar trabajando arduamente para entregar soluciones concretas a la dura realidad, que más de la mitad de los estudiantes en Chile no ha podido desarrollar competencias que les permitan enfrentar situaciones problemáticas de la vida cotidiana que impliquen el uso de las matemáticas.

En base a estos inquietantes antecedentes cuantitativos se tiene un gran desafío como sociedad, contribuir a mejorar el rendimiento y el aprendizaje de los estudiantes en el área de las matemáticas, para ello en un comienzo se debe reflexionar e identificar en la labor docente, las causas principales que influyen en estos insuficientes resultados, es decir, analizar desde una mirada más profunda los factores en la práctica áulica que dificulten el aprendizaje de los alumnos.

Es así como surge la motivación por llevar a cabo esta investigación, la necesidad de aportar antecedentes concretos que contribuyan a encontrar causas a las dificultades del aprendizaje en el aula para con los alumnos en matemática, y así sembrar bases para la búsqueda de soluciones y obtener mejores rendimientos de los estudiantes; es entonces, un momento clave para la gestación de estructuras que avalen esta investigación, y considerando los antecedentes anteriormente mencionados, se cree que un factor importante que influye directamente en el aprendizaje de los alumnos es el discurso escolar, el tratamiento a los conceptos matemáticos y la práctica docente, debido a que puede influir en el éxito o fracaso de los estudiantes en el aula, y por lo tanto, en el rendimiento académico de los alumnos en un determinado concepto matemático. Por ejemplo, durante la enseñanza en el aula del concepto de los logaritmos, el profesor puede explicar a los alumnos el porqué es importante conocer y comprender el concepto, ofrecer ejemplos de cómo, cuándo y dónde se aplica o se utiliza, es decir, ofrecer expectativas a los estudiantes y así aumentar la motivación intrínseca de estos.

Además de lo anterior, existen factores importantes que intervienen en el aprendizaje de los alumnos respecto de un concepto matemático específico, en particular, de los logaritmos. Para esta investigación resultan relevantes los siguientes:

- ✓ *Sus creencias, particularmente sobre sí mismos en relación al nivel de seguridad para enfrentar los logaritmos, por el hecho de que estas creencias son esenciales para el éxito o fracaso de los alumnos en el aula. Según el modelo de Bandura (Bruning R, 2002)*

- ✓ *Sus concepciones sobre un objeto matemático específico, en particular, de los logaritmos.*

Por ello, es que se considera que estudiar las creencias y concepciones de los alumnos, puede dar referencias importantes para entender las razones del rendimiento académico de estos mismos y, de alguna manera, mejorar como docentes, por ejemplo, el discurso escolar.

Específicamente esta investigación, se limitará a estudiar las creencias y concepciones de alumnos de segundo año de enseñanza media de una Institución Educacional en particular, y, en lo que concierne al concepto matemático a explorar, concretamente será en torno al concepto de los logaritmos.

Los logaritmos son un concepto matemático que se estudia particularmente en la enseñanza media de nuestro país, y su análisis expresado en los Programas de Estudio proporcionados por el Ministerio de Educación MINEDUC, no solo se limita a un contexto numérico y aritmético, sino también, a un contexto más generalizado, abstracto, funcional y gráfico como se trata en el eje de Algebra y Funciones.

1.1.2. Los logaritmos en la enseñanza escolar nacional.

A lo largo de la vida escolar, específicamente en la enseñanza media, se dedica parte importante del estudio a los logaritmos, siendo este un concepto útil para la vida en general, tanto para la vida cotidiana como profesional, pero no sencillo de entender sobre todo por su contexto generalizado y abstracto.

La unidad de *números y algebra* establecida en el Programa de Estudio de matemática para segundo año de Enseñanza Media, proporcionado por MINEDUC, considera las siguientes habilidades a desarrollar por los alumnos relacionadas con los logaritmos:

- ✓ *Demostrar propiedades de los logaritmos a partir de las propiedades de potencias.*

- ✓ *Relacionar potencias, raíces enésimas y logaritmos.*

✓ *Resolver situaciones en las que es necesario operar con logaritmos.*

Este mismo Programa de estudio para segundo año de Enseñanza Media, contiene los siguientes aprendizajes esperados:

✓ *Establecer relaciones entre los logaritmos, potencias y raíces.*

✓ *Deducir propiedades de los logaritmos.*

✓ *Resolver problemas en diversos contextos relacionados con los logaritmos.*

También se puede encontrar en el Programa de Estudio para matemática cuarto año de Enseñanza Media los siguientes indicadores de aprendizajes:

✓ *Analizan el comportamiento gráfico y analítico de la función logarítmica.*

✓ *Reconocen las funciones exponencial y logarítmica una como la inversa de la otra.*

✓ *Utilizan la función logarítmica para modelar situaciones o fenómenos naturales o sociales.*

Así, en los diferentes programas de estudio propuestos en el área de la matemática para la enseñanza media, los logaritmos cobran un rol importante en los contenidos necesarios en matemática, la enseñanza media, y de manera general en la vida escolar de los alumnos, debido a que además de incluirse en varios de los programas de estudio para enseñanza media, desempeña un papel importante en la enseñanza superior, sobretodo en disciplinas tales como la Química, Biología, Física, Ingenierías, Ciencias Computacionales, Economía y por supuesto Matemática. Es por esto que los logaritmos se consideran como un instrumento, por medio del cual los estudiantes pueden desempeñar sus labores profesionales futuras y que les permite mantenerlos como objeto de estudio en el curriculum nacional hasta nuestros días. Sin embargo, dada la complejidad de su concepto y gracias a estudios realizados por la Disciplina de la Didáctica de la Matemática, se han detectado importantes fenómenos propios de este concepto matemático en la mayoría de los niveles de enseñanza media y superior.

1.1.3. Situaciones relevantes asociadas al concepto de los logaritmos

Es la *Didáctica de la matemática* la que explica la problemática particular que produce el tratamiento de conceptos matemáticos desde el saber científico al saber escolar en un ambiente áulico, debiendo para ello estudiar y entender la naturaleza de los sucesos ocurridos en la sala de clases en torno a estos conceptos. En relación a esto último, Chevallard (1995), afirma que *el conocimiento generado por la élite de matemáticos, no llega al aula tal y como es producido, sino que sufre un proceso que ha denominado* ***transposición didáctica****, lo cual lo convierte inevitablemente en un fenómeno didáctico.*

Asimismo, una situación didáctica relevante para esta investigación es la que menciona (Ferrari M., 2010) en un estudio socio-epistemológico de la función logarítmica, donde menciona a Brousseau, el cual habla de una *"génesis ficticia" de los saberes puestos en juego en el aula con el propósito de facilitar su enseñanza, en la cual se aíslan las nociones y propiedades de las actividades que les dieron origen, sentido, motivo y utilización.* Brousseau, considera a su vez, la necesidad de retornar e incorporar en el discurso escolar, la historia de los saberes, para ello se debe indagar sobre las dificultades y preguntas que provocaron su aparición como conceptos necesarios, su evolución y uso en nuevos problemas.

Del mismo modo, enseñar conceptos matemáticos desprovistos de su historia suele tener como consecuencia el inconveniente de que pueden ser concebidos por los estudiantes como un concepto artificial y arbitrario de la matemática. El origen y la historia de los conceptos matemáticos no sólo permite conocer cómo se crearon, construyeron y las teorías que hoy se manejan, producto de un trabajo acumulativo, sino también, permite comparar técnicas y métodos de resolución actuales con otros que se emplearon en el pasado. Así, el quehacer matemático se torna valioso al poner de manifiesto que un mismo problema se resolvió de maneras diferentes en distintas épocas (Abrate R., Pochulu M., 2007).

A su vez, (Abrate R., Pochulu M., 2007) afirman que *"en una gran cantidad de casos, la enseñanza de los logaritmos se realiza de manera algorítmica y descontextualizada. Generalmente se parte de la definición, se dan algunos ejemplos, luego se enuncian y ejemplifican las propiedades y finalmente se realizan los ejercicios".* En relación a esto, los ejercicios propuestos suelen estar orientados al cálculo del logaritmo de un número (en distintas bases) de manera directa o utilizando las propiedades; o bien, aplicando finalmente el antilogaritmo.

En este sentido, se concuerda con Lefort (2001) el cual sostiene que *aunque esta introducción sea matemáticamente satisfactoria, se halla bastante lejos de ser evidente para los estudiantes y su propiedad fundamental queda oculta. Además, el problema histórico que llevó a concebir los logaritmos también estaría ausente a pesar de que su uso, para presentar esta nueva noción, tiene la ventaja de la simplicidad: se trata sencillamente de construir una tabla que permita realizar rápidamente multiplicaciones, divisiones y potencias.* (Abrate R., Pochulu M., 2007)

En conclusión, se puede afirmar que, iniciar la enseñanza de los logaritmos en base a preguntas que fomentaron su aparición, aportaría en encontrarle valor y sentido a su aprendizaje y en consecuencia, fomentar el desarrollo de una motivación intrínseca en los estudiantes.

No cabe duda que estas situaciones relacionadas con el concepto de los logaritmos son relevantes, sobre todo por sus consecuencias en los estudiantes. Estas situaciones didácticas muestran el rol preponderante que juega el docente en su práctica docente. Sin embargo, no es el único factor determinante, existe otro factor de importancia y que se debe considerar, estos son los estudiantes, en particular, sus creencias y concepciones.

1.1.4. Situaciones ligadas a las creencias y concepciones de los estudiantes

Como se menciona anteriormente, los estudiantes tienen un rol importante a la hora de su aprendizaje, debido a que la postura que estos posean, como por ejemplo hacia la resolución de tareas y/o ejercicios, es crucial en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Caballero M. (2010) en su estudio respecto de las concepciones de los profesores en torno a la ecuación lineal, afirma que es frecuente ver que los estudiantes desean saber simplemente el algoritmo que permite resolver un ejercicio, sin interesarse en entender los conceptos o ideas implicadas en el tema. (Conectar con f log)

Charnay (1990), citado por Caballero M. (2010) adicional a lo anterior, considera al estudiante como fuente de los errores asociados a sus propias concepciones de conceptos matemáticos, es el estudiante quien no sabe escuchar, observar y memorizar las explicaciones del docente.

Como consecuencia de lo anterior, particularmente, en lo que concierne a esta investigación, se considera que estudiar las creencias y las concepciones que tienen los alumnos de un curso de segundo año de enseñanza media sobre sí mismos respecto del concepto matemático de los logaritmos, además del tratamiento que da el profesor responsable del aprendizaje de los estudiantes a este concepto matemático, puede aportar referencias importantes para entender y describir la relación que existe entre creencias de los estudiantes de segundo año de enseñanza media y el tratamiento dado por el docente a los logaritmos.

1.2. Preguntas de investigación

Con el afán de informar y contribuir a optimizar la enseñanza de los logaritmos, que propicie un aprendizaje enfocado en la comprensión y no en la memorización de reglas, es decir, favorecer un aprendizaje significativo sobre el concepto de logaritmos, y por lo tanto una mejoría en el rendimiento de los alumnos, es que surgen las siguientes interrogantes para esta investigación:

- ✓ ¿Qué creencias y concepciones tienen alumnos de 2º año de enseñanza media sobre sí mismos, es decir, su nivel de auto-eficacia, tipos de atribuciones y motivaciones respecto del concepto matemático de los logaritmos, posterior a su aprendizaje?

- ✓ ¿Los alumnos logran resolver ejercicios que involucran a los logaritmos, relacionándolos con diferentes objetos matemáticos como son potencias, raíces, funciones, entre otros, considerando como parámetro actividades propuestas tanto por el docente como por el texto para el estudiante?

- ✓ ¿Qué tratamiento da el docente responsable de la enseñanza de los alumnos de 2º año de enseñanza media al objeto matemático de los logaritmos?

- ✓ ¿Cómo se relacionan las creencias y concepciones que tienen alumnos de un curso de 2º año de enseñanza media sobre sí mismos, es decir, su nivel de auto-eficacia (auto-percepción), tipos de atribuciones que realiza y sus tendencias autónomas y controladoras respecto del concepto de los logaritmos y el tratamiento dado por el docente a este concepto matemático?

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo general

Con el propósito de responder a las preguntas formuladas anteriormente se planteó el siguiente objetivo general para esta investigación:

- ✓ *Describir las relaciones que se dan entre las creencias y concepciones que tienen alumnos de un curso de 2º año de enseñanza media sobre sí mismos, es decir, su nivel de auto-eficacia, tipos de atribuciones que realiza y su motivación respecto del concepto de los logaritmos y el tratamiento dado por el docente a este objeto matemático.*

1.3.2. Objetivos específicos

El objetivo general mencionado anteriormente, se particulariza en los siguientes objetivos específicos:

- ✓ Describir las creencias y concepciones que tienen alumnos de un curso de 2º año de enseñanza media sobre sí mismos, es decir, su nivel de auto-eficacia (auto-percepción), tipos de atribuciones que realiza y sus tendencias autónomas y controladoras respecto del concepto matemático de los logaritmos.

- ✓ Describir si los alumnos participantes del estudio logran resolver ejercicios que involucran a los logaritmos, relacionándolos con diferentes objetos matemáticos como son potencias, raíces, funciones, entre otros, considerando como parámetro actividades propuestas tanto por el docente como por el texto para el estudiante.

- ✓ Describir el tratamiento que da el docente al objeto matemático de logaritmos en su práctica docente.

CAPITULO 2: ANTECEDENTES Y MARCO TEORICO

La educación matemática ha evolucionado en distintas áreas sus objetos de estudio, es por esta razón que los antecedentes a este trabajo de investigación muestren cortes cognitivos y didácticos. El aporte de ciencias como la Didáctica de la matemática y la Psicología, además de la evolución de los conceptos matemáticos, para explicar relaciones entre la enseñanza y aprendizaje en un área tan relevante como la matemática, le permite a esta investigación contar con fundamentos y paradigmas que expliquen estas relaciones en torno al objeto matemático de los logaritmos.

2.1. Creencias y concepciones:

Una de las principales preocupaciones en las investigaciones recientes sobre educación matemática, particularmente con lo que tiene que ver con creencias y concepciones es, precisamente, la definición de estos términos. En relación a esto último, algunos autores señalan que se debe distinguir entre los conceptos de *creencias* y *concepciones,* como por ejemplo:

Thompson (1992), citado por da Ponte J., (2004) caracteriza las creencias y concepciones como **"***una estructura mental general, abarcando creencias, los significados, conceptos, las proposiciones, reglas, las imágenes mentales, preferencias, y gustos",* es decir que creencias y concepciones son dos conceptos sinónimos entre sí, que subyacen dentro de un mismo marco teórico.

Por otra parte, existen otras definiciones que conciben las creencias y concepciones con significado diferente y con implicancia una de la otra. Por un lado, Ponte (1992, 1994), citado por da Ponte J., (2004) afirma que "*las creencias tienen una naturaleza proposicional en relación a lo matemático-lógico, las concepciones son constructos cognitivos que pueden verse como el marco subyacente que organiza los conceptos en el individuo. El término concepciones se puede identificar con la percepción o visión acerca de la naturaleza de una disciplina"*. Por otro lado, Ponte menciona que las creencias "*pueden verse como un substrato conceptual que juega un papel importante en pensamiento y acción, proporcionando puntos de vista del mundo y a modo de organizadores de conceptos"*, es decir, habla de una diferencia entre ambos conceptos y que al mismo tiempo poseen una implicancia entre sí. Da Ponte, concibe que las creencias *hicieran visibles sucesos que se consideran verdad en algún ámbito, considerando a las concepciones como los argumentos utilizados para validar estas,* pensando además, que estas creencias son factor de comportamiento y acción relevante en un individuo, es decir que los comportamientos de las personas están directamente influenciados por las creencias de estas.

En relación a lo anterior, Mora F. & Barrantes H. (2008), afirman que el proceso de enseñanza - aprendizaje de un concepto matemático se ve influenciado por las creencias, que tanto estudiantes como profesores, y la sociedad en general, poseen acerca de este.

Cabe mencionar que esta investigación concuerda con las afirmaciones de Ponte (1992, 1994) y Mora F. & Barrantes H. (2008) anteriormente señaladas, lo cual, al articular ambas teorías se puede deducir que las creencias que los estudiantes poseen sobre un concepto matemático hacen visibles hechos que se consideran verdad en algún ámbito, considerando a las concepciones como los argumentos utilizados para validar estas creencias. En consecuencia, estas teorías son un gran aporte en la elaboración de la encuesta que busca conocer las creencias de un grupo de estudiantes en relación al concepto matemático de los logaritmos.

Así, al relacionar las afirmaciones de creencias y concepciones mencionadas anteriormente, con el aprendizaje del concepto matemático de los logaritmos, puede resultar como ejemplo lo siguiente:

Un estudiante después de la primera clase de logaritmos, expresa; "Nunca entenderé los logaritmos", frase que justifica diciendo; "porque nunca entendí ni las potencias ni las raíces,

2.2. Creencias y concepciones del alumno:

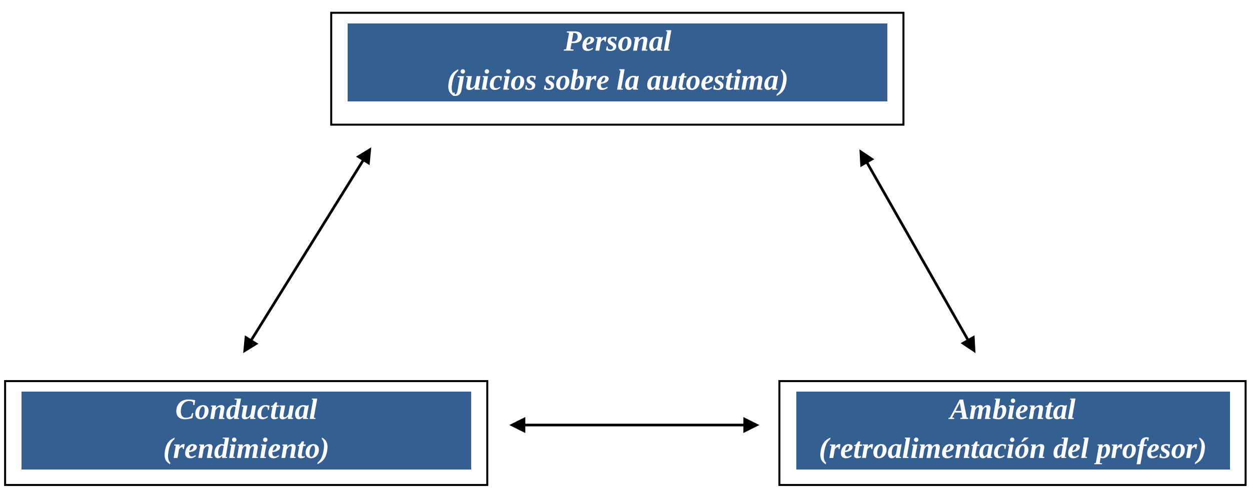
Para explicar el porqué de los fracasos matemáticos dentro del aula, se examinará una perspectiva relevante en el aprendizaje de los estudiantes, esta es las *creencias sobre el yo*, ilustrado en (Bruning R., 2002). Este factor hace alusión a los factores personales que influyen dentro del aprendizaje, es decir las actitudes que tienen los estudiantes y creencias que estos tienen sobre sí mismos, estas influyen directamente sobre la conducta y con las claves del entorno a través de las respuestas mediadas, es decir, el modo en que el alumno interpreta los hechos en el plano cognitivo antes de emitir una respuesta.

Para hablar de éxito o fracaso de los estudiantes en el aula se debe conocer tres perspectivas que ayudaran a entender estos éxitos o fracasos: La teoría socio-cognitiva de Bandura, la teoría de la Atribución y la función de Control y Autonomía del alumno. La primera, hace relación en como la seguridad en uno mismo influye en el rendimiento académico; La segunda explora la manera en como los estudiantes se explican a sí mismos sus éxitos o fracasos; La tercera y última, analiza como las expectativas del profesor y los alumnos generan un entorno controlador o autónomo en la sala de clases. (Bruning R., 2002).

En relación a esta investigación, el nivel de seguridad en sí mismo que tiene un alumno respecto a su capacidad para resolver actividades ligadas a los logaritmos, influyen directamente en su rendimiento futuro, a su vez, las razones por los cuales el alumno atribuye a su rendimiento en actividades relacionadas con los logaritmos, permite deducir el nivel de seguridad que este tiene en relación a este concepto matemático. Asimismo, tanto las expectativas del profesor, como las del estudiante, influyen directamente en el tipo de motivación de este último, y, por consecuencia, en el tipo de acciones que tendrá en relación a los logaritmos. Así, por ejemplo, si un alumno posee una motivación extrínseca, para con los logaritmos, seguramente sus acciones serán *controladoras*, es decir, dependientes o controladas por otros; por el contrario, si presenta una motivación intrínseca sus acciones serán *auto determinadas*, es decir, impulsadas desde una motivación propia (Bruning R., 2002)

2.2.1. La teoría socio-cognitiva del aprendizaje de Bandura

Para comprender la teoría socio-cognitiva de Albert Bandura, se debe conocer el principal concepto, *Auto-eficacia*. Bandura (1986, 1997), ha desarrollado una amplia teoría respecto de este concepto, durante 30 años ha estudiado el tema de la seguridad en uno mismo en diversas situaciones, de dónde proviene y como mejorarla. En el centro de la teoría, se encuentra el concepto de *determinismo reciproco*, el cuál es el resultado de la interacción de diversas variables como lo son: Los *factores personales*, Los *factores conductuales*, Los *factores ambientales*,



En la figura anterior, se presenta la relación que existe entre estos elementos básicos, como los describe Bandura.

- ✓ Los *factores personales*, son las creencias y actitudes que influyen en el aprendizaje, sobre todo en respuesta a los estímulos de la conducta y del entorno.

- ✓ Los *factores conductuales* son las respuestas que se dan en una situación determinada;

- ✓ Los *factores ambientales*, son las funciones que desempeña el entorno, ya sea padres, compañeros, profesores, etc.

Las creencias sobre uno mismo, influyen en la conducta y en la interpretación de las claves del entorno a través de las respuestas mediadas, es decir, el modo en que se interpretan los hechos antes de emitir una respuesta. El bajo rendimiento, puede provocar ansiedad en un alumno y un aumento del esfuerzo en otro, porque el mismo hecho se interpreta de manera diferente (Bruning R., 2002)

En el modelo de Bandura (1997) hay dos factores personales que ejercen una poderosa influencia en la conducta: *La auto-eficacia, que "*es el juicio sobre la propia capacidad de realizar una tarea en un dominio específico"; y las *expectativas sobre los resultados,* o la relación percibida entre llevar a cabo con éxito una tarea y obtener un resultado especifico como consecuencia de dicho rendimiento (Bruning R., 2002)

Cabe destacar que ser auto-eficaz en una situación, no garantiza que se sea en otra; por ejemplo, considerando el área de la matemática, ser eficaz en el concepto de ecuaciones, no garantiza que sea eficaz en el concepto de los logaritmos.

Según Bandura (1986), existen dos tipos de aprendizaje: el vicario, que se produce cuando se aprende a realizar una tarea observando a otros llevarla a cabo o hablar de ella; el activo, se produce cuando se aprende una tarea realizándola. Bandura sostiene que los logros constituyen la forma más importante de aprendizaje activo, porque suministran retroalimentación directa sobre el propio rendimiento. A su vez, llevar a cabo una tarea con éxito de forma repetida, origina un elevado nivel de auto-eficacia que no se ve afectado por los fracasos ocasionales. (Bruning R., 2002)

En un terreno especifico existe una relación recíproca entre los factores personales, conductuales y ambientales: Una auto-eficacia elevada influye de modo positivo en el rendimiento, mientras que un buen rendimiento lo hace, a su vez en el sentimiento de auto-eficacia, y que, también, influye indirectamente en aprendizajes futuros, al predisponer al estudiante a realizar tareas, a pesar de los fracasos iniciales (Bruning R., 2002)

Los juicios de Bandura sobre la auto-eficacia, se diferencian en tres dimensiones relacionadas con el rendimiento:

- ✓ La primera dimensión, es el *grado de dificultad de la tarea*, es decir, estudiantes con pericia en un terreno, pueden mostrarse reacios a continuar en un ámbito específico más difícil, por la carencia de conocimiento para rendir bien en el curso.

- ✓ La segunda dimensión, es la *generalidad de la auto-eficacia*, es decir, la auto-eficacia en un terreno no se relaciona con la eficacia en otro, lo que no implica que no haya personas que posean una elevada auto-eficacia general, sino que nos indica que tiene razones para creer que saben actuar de modo competente en muchos campos.

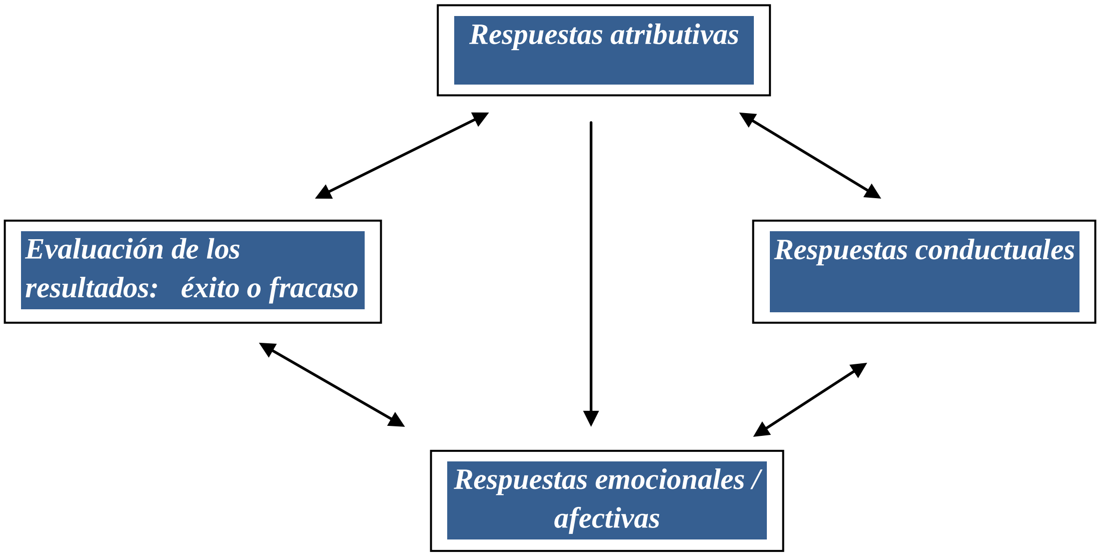
- ✓ La tercera dimensión, es la *intensidad de los juicios*, una misma situación para dos personas con nivel de auto-eficacia diferente puede influir de distinta manera en cada uno, ya que la persona con mayor nivel de auto-eficacia perseverará a pesar de los fracasos y bajo rendimiento, no así la persona con un nivel de auto-eficacia menor, esta desistirá de realizar dicha tarea.

Bandura señala que la auto-eficacia se relaciona estrechamente con la dedicación inicial a la tarea, la perseverancia y un buen rendimiento. Ha identificado cuatro factores que influyen en el grado, la generalidad y la intensidad de la auto-eficacia:

- ✓ El primero es la *información activa*, es decir, el éxito conduce a un mayor nivel de auto-eficacia; el fracaso conduce a un nivel menor.
- ✓ El segundo factor es la *observación*, esta suele mejorar la eficacia sobre todo cuando se considera que el modelo es similar en capacidad al observado, influye con más intensidad cuando los observadores dudan de la dificultad de la tarea o de su capacidad.
- ✓ El tercer factor es la *persuasión verbal*, esta puede facilitar que se aprenda una tarea de gran dificultad, lo que, a su vez, proporciona retroalimentación activa.
- ✓ El cuarto y último factor es el *estado psicológico*, suelen disminuir la auto-eficacia aunque no estén relacionadas con el rendimiento en la tarea (Bruning R.2002)

2.2.2. La teoría de la Atribución

A diferencia de la auto-eficacia que hace referencia a hechos futuros, la teoría de la atribución estudia el modo en que las personas explican los hechos que les suceden, es decir, los juicios sobre hechos pasados. Existe una directa relación entre los conceptos de atribuciones y auto-eficacia, debido a que las atribuciones son explicaciones causales de nuestras experiencias de éxito y fracaso en el aula, es decir, ponen de manifiesto nuestro nivel de auto-eficacia respecto a un concepto específico. El proceso atributivo corresponde a las razones que llevan a las personas a realizar determinadas clases de atribuciones, cuales son las más comunes, las clases de respuestas afectivas que provocan los juicios atributivos y el modo en que estos influyen en la conducta. A continuación se presenta el modelo del proceso atributivo:



En la figura anterior, se muestran los cuatros elementos que constituyen el proceso atributivo, uno de ellos es la *evaluación de los resultados,* proceso que evalúa si un resultado es favorable o desfavorable (p ej.: puntuación en una prueba); *respuestas atributivas,* se atribuye este resultado a una causa concreta; otra es *la respuesta afectiva,* en la que la respuesta atributiva provoca una reacción emocional; *respuesta conductual,* se responde al resultado de una determinada manera. Cabe mencionar que los hechos no provocan reacciones conductuales directamente, sino después de ser mediados por una interpretación cognitiva (Bruning R., 2002)

A continuación se detallaran cada uno de los elementos correspondientes al proceso atributivo:

- ✓ **Evaluación de los resultados:** Esta se realiza mediante diversos criterios. Uno de ellos es el historial anterior de resultados similares. Por ejemplo, si un alumno sistemáticamente rinde poco en la clase de matemática, una calificación media puede parecer favorable. Que un resultado se considere favorable también depende de las características de las personas, como la necesidad de logro, la importancia percibida de la tarea y las expectativas ajenas.

- ✓ **Respuestas atributivas:** Varían a lo largo de tres dimensiones causales. La primera es el *locus de control,* el cual define la causa de un resultado como interna o externa a la persona. Como causa interna se puede encontrar el estado de ánimo, aunque puedan influir en él variables externas. En cambio, como variable externa, se encuentran a los padres y profesores. La dimensión del locus de control se suele vincular al tipo de respuestas afectivas que se experimentan después de un resultado, así pues, se encuentra el orgullo y la confianza en causas internas del éxito académico como la capacidad, el esfuerzo y el conocimiento experto. Por otro lado, la vergüenza y la ansiedad se encuentran en causas externas del éxito académico como la ayuda del profesor no solicitada.

La segunda dimensión es la *estabilidad*. Se suele suponer que algunas causas del éxito son estables y otras inestables, pero de cualquier forma la dimensión de la estabilidad se relaciona con la expectativa de éxito de la persona. Si el éxito se atribuye a un rasgo relativamente estable, como la capacidad o el conocimiento, parece razonable esperar que dicho éxito de repita. En cambio, si se atribuye a causas muy inestables, como la suerte, no es lógico creer que se vaya a producir nuevamente.

La tercera dimensión es la *controlabilidad o grado de control*. Hay causas del éxito que son muy controlables, como el esfuerzo y empleo de estrategias; otras como la capacidad o el interés, no lo son. Es evidente que los factores incontrolables, como la suerte o la dificultad de la tarea, no fomentan la seguridad en la capacidad de volver a tener éxito. La dimensión del grado de control se suele relacionar con la cantidad de esfuerzo y la perseverancia que se dedica a la tarea. Los resultados que se consideren incontrolables, provocan ansiedad y estrategias de evitación, mientras que los controlables producen un aumento del esfuerzo y de la perseverancia.

Las tres dimensiones que se han descrito se pueden emplear para crear una matriz de locus-estabilidad-grado de controlabilidad, graficado en la siguiente tabla:

	INTERNAS		**EXTERNAS**	
	Estables	**Inestables**	**Estables**	**Inestables**
Controlables	**Esfuerzo típico**	**Esfuerzo especifico**	**Respuesta del profesor**	**Ayuda**
Incontrolables	**Capacidad**	**Interés de la tarea**	**Dificultad**	**Suerte**

TABLA: ***Las tres dimensiones de la teoría de la atribución de Weiner***

Se observa que se debe clasificar las atribuciones causales en las tres dimensiones al mismo tiempo, debido a que dos causas diferentes, como el esfuerzo y la capacidad, pueden tener dos dimensiones en común y diferir en la tercera. La configuración específica de cada causa atributiva, provoca diferentes respuestas emocionales y conductuales.

✓ **Respuestas afectivas:** Distintas configuraciones atributivas originan respuestas afectivas diferentes, aunque muy predecibles. Las respuestas afectivas positivas, como el orgullo y la seguridad, tienden a producirse cuando un hecho se atribuye a un factor interno, controlable y estable, como el esfuerzo en general. Otras emociones positivas, como la gratitud, tienden a producirse cuando atribuye un hecho a un factor externo, incontrolable e inestable, como la ayuda de personas que no se espera que la ofrezcan.

Las emociones negativas, como la ira, tiene mayores probabilidades de producirse cuando un hecho tiene causas externas, controlables y estables. En cambio, las emociones humillantes, como la vergüenza y culpa, poseen causas internas que varían a lo largo de otras dimensiones.

- ✓ **Respuestas conductuales**: Al hablar de respuestas conductuales, se refiere a que la interpretación de un resultado determina la respuesta conductual de la persona (atribución causal), ya sea por locus de control, estabilidad y/o grado de control. (Bruning R., 2002)

2.2.3. Autonomía y control

La noción de Autonomía en el estudiante es importante, debido a que se relaciona con éxitos reales e imaginarios en el aula. Se debe considerar, lo que significa estar motivado y el modo en que la motivación influye en la conducta y en el sentimiento de control del estudiante (Bruning R., 2002)

Una manera de reflexionar sobre la motivación consiste en distinguir las limitaciones internas de la conducta de las externas. La *motivación intrínseca*, es decir, “las conductas que se realizan por el placer que proporcionan” Deci, (1991). Un estudiante se halla intrínsecamente motivado cuando soluciona problemas de matemática porque le interesan, sin que se los haya puesto el profesor como deberes. La *motivación extrínseca*, es decir, “las conductas que se realizan para obtener una consecuencia premiada externamente” Deci, (1991) Por ejemplo, resolver problemas matemáticos por cumplir con los deberes escolares y no por el agrado de hacerlo. Existe una directa relación entre motivación y auto-eficacia, por la razón de que, a una *motivación intrínseca* mayor nivel de *auto-eficacia* en el estudiante (Bruning R., 2002)

Se puede establecer una diferencia fundamental entre acciones *auto determinadas* y acciones *controladoras.* Las primeras son las conductas que uno *elige* realizar por razones intrínsecas; las segundas son las que se realizan debido a presiones internas o externas, para ajustarse a una norma impuesta o para satisfacer una expectativa. Distinguir entre acciones autónomas y acciones controladoras es importante, dado que el grado de elección percibida determina la respuesta conductual en un contexto determinado. Para ser autónomo, la conducta debe ser elegida sin presiones y ser auto determinada. Por el contrario, se puede elegir un conducta controladora, pero nunca será auto determinada. La misma conducta de dos personas puede ser autónoma o controladora, dependiendo de la comprensión personal de por qué se lleva a cabo y de cuáles son las consecuencias internas y externas de llevarla a cabo o de no hacerlo (Bruning R., 2002)

2.3. Discurso del profesor y el tratamiento de conceptos matemáticos

2.3.1. Auto-eficacia, Atribuciones, Autonomía y Control en el aula:

Dentro de este marco de referencia, también es importante considerar los efectos de la auto-eficacia, las atribuciones y la autonomía en los docentes y el proceso de enseñanza aprendizaje. Para esta investigación, es de suma relevancia conocer la influencia de estas tres perspectivas en el aula, debido a que serán los fundamentos principales para interpretar hechos y acciones ocurridos en la sala de clases.

2.3.1.1. Eficacia del profesor:

La teoría socio-cognitiva de Bandura ha despertado mucho interés en quienes investigan en los campos de la educación, debido a que la *auto-eficacia* es un concepto aplicable no solo a los estudiantes, sino que también a los profesores y la relación profesor - saber - alumno.

Los juicios sobre la auto-eficacia también influyen en las expectativas y la conducta del profesor. En el proceso educativo influyen un sinfín de factores, entre los que se encuentran la *eficacia de la enseñanza,* que es la creencia en que el proceso educativo influye en los alumnos de modo importante, y la *eficacia didáctica personal*, que es la creencia en que el profesor puede producir un cambio significativo en sus alumnos. Otro factor que influye en el proceso educativo, es el modo en que el docente se relaciona con sus alumnos, ya sea en base a elogios o a críticas, esto depende en mayor medida de la *auto-eficacia* que el docente posea, cuando este posee una auto-eficacia elevada tiende a perseverar con los alumnos que rinden poco, a estar orientados a la tarea, a ser más tolerante con los alumnos y a elevar su nivel de rendimiento. En cambio, los profesores de baja eficacia, tienden a dedicar menos tiempo de la clase a las actividades didácticas, pasan más tiempo criticando a los alumnos y se dan por vencido con mayor rapidez frente a los estudiantes "problemáticos" Woolfolk, Hoy, (1990), citado por (Bruning R., 2002).

Contrario a lo que se piensa, Brousseau (1988), sostiene que los años de experiencia en el aula influyen de manera negativa en la auto-eficacia de los docentes, puesto que mientras más experimentados son, tienden a adoptar una actitud más drástica respecto de la disciplina en la sala de clases; en cambio los docentes con menos experiencia y/o los que aun conservan su auto-eficacia, manifiestan una visión *humanística* del control, en la que se tiene en cuenta la diversidad e individualidad. (Bruning R., 2002)

Por lo tanto, a raíz de lo mencionado anteriormente, nacen las siguientes preguntas:

¿El docente tenía una actitud positivamente persuasiva con sus alumnos, es decir los elogiaba de manera explícita al momento de dar una buena respuesta?

¿El docente perseveraba en explicar el concepto de los logaritmos o las actividades planteadas ligadas a este, a los alumnos que tenían mayores dificultades o dudas para resolverlas?

¿El docente utilizó diferentes materiales curriculares (guías de ejercicios, texto del estudiante, etc.) para cumplir el objetivo de la clase?

¿Cuál fue la actitud respecto del control del clima y comportamiento de los alumnos en el aula por parte del docente?

2.3.1.1.1. Modelar

Es de suma importancia para el desarrollo de la auto-eficacia el concepto de *modelar*, debido a que este demuestra y describe a un novato los elementos que constituyen una habilidad. Constantemente se utilizan modelos similares, según Bandura (1997) “los iguales que sirven de modelo suelen ser los más eficaces porque son los más similares a las personas que estudian el modelo”, de esto se puede concluir, que es más probable que mejoren su auto-eficacia de manera *vicaria,* es decir observando a un modelo de la misma edad y/o características. Esto no quiere decir que el profesor no sea un modelo importante debido a que, con frecuencia, es la única persona del aula capaz de modelar correctamente un procedimiento complejo. Una de las formas más eficaces de hacerlo es por medio del *modelado cognitivo* de Meichenbaum (1977). Este modelo cognitivo consiste en:

- ✓ Explicar las razones de la nueva habilidad de aprendizaje, es decir explicar a los estudiantes porque es importante adquirir la nueva habilidad y/o concepto
- ✓ Ofrecer ejemplos de cómo, cuándo y dónde hay que emplearla.
- ✓ Modelar el procedimiento en su totalidad mientras los estudiantes observan.
- ✓ Modelar los componentes de la tarea, es decir tratar de dividir la tarea en partes más pequeñas y modelar cada una de esas partes.
- ✓ Permitir que los estudiantes, orientados por el profesor, practiquen los pasos constitutivos.
- ✓ Permitir que los estudiantes practiquen el procedimiento completo orientados por el profesor. Todos estos pasos, llamados *pasos constitutivos*, se fusionan en un procedimiento único y fluido que se lleva a cabo en su totalidad.
- ✓ Hacer que el estudiante realice la tarea dirigiéndose a sí mismo, es decir modelar la tarea o la habilidad de una manera reciproca, en la que por ejemplo, de dos a cuatro estudiantes trabajan en grupos de aprendizaje cooperativo.

Independiente del método utilizado para realizar el trabajo y/o tarea, la retroalimentación debe ser parte esencial del proceso. La retroalimentación del profesor hacia los estudiantes, mejora tanto el rendimiento como la auto-eficacia (Bruning R., 2002). Es por esto que nacen las siguientes interrogantes:

¿El docente explicó la importancia y el sentido de aprender el concepto de logaritmos?

¿Qué procedimientos realizaba el docente para resolver el primer ejercicio de cada concepto nuevo?

¿Hubo una retroalimentación por parte del docente y/o los alumnos en los ejercicios planteados en la clase?

¿El docente realizó actividades en la clase, para luego hacer la revisión de estas en conjunto con los estudiantes?

¿El docente realizó actividades en grupo o de a pares para construir por si solos un concepto o procedimiento?

2.3.1.2. Atribución en el aula y reconversión de esta

Dentro de las atribuciones existen varios factores que influyen en estas, uno de estos tiene que ver con el profesor, factor que consiste en la forma en que este responde a sus estudiantes, es decir, el estilo atributivo que le otorga, ya sea positivo o negativo, este último se relaciona directamente con calificaciones bajas, escasas búsquedas de ayuda, metas poco claras, empleo deficiente de estrategias de aprendizaje e inferiores expectativas de rendimiento. En relación a la capacidad Barker y Graham, (1987), hallaron que los profesores transmitían información de capacidad baja a algunos estudiantes, por el tipo de elogio y/o culpas, los alumnos consideraban que aquellos a quienes se elogiaba por un rendimiento medio tenían menos capacidad que los estudiantes a los que se elogiaba por un rendimiento sobresaliente. Se obtuvieron los mismos resultados cuando los profesores culpaban a los estudiantes de errores en tareas simples frente a tareas complejas (Bruning R., 2002)

Por otro lado, se tiene la reconversión de las atribuciones, proceso que consiste en ayudar a las personas a comprender mejor sus respuestas atributivas y a desarrollar respuestas que fomenten la realización de las tareas. Una forma eficaz de realizar la reconversión de atribuciones, consiste en enseñar al estudiante a identificar conductas indeseables, luego se evalúan las atribuciones, como evitación de la tarea, se exploran atribuciones alternativas y por último, se ponen en práctica patrones atributivos favorables. Cambiar atribuciones “desfavorables”, basadas en la capacidad, a atribuciones “favorables” basadas en el esfuerzo, resulta eficaz, debido a que el esfuerzo es una variable controlable, mientras que la capacidad no lo es. La retroalimentación sobre el esfuerzo con frecuencia mejora la perseverancia en la tarea, lo ideal es ofrecerla al comienzo del ciclo de aprendizaje a modo de motivación. Un punto importante de la retroalimentación sobre las atribuciones, es que esta debe ser creíble para el estudiante, de no ser así resulta ineficaz. También se tiene la retroalimentación a la capacidad, la cual a veces tiene más influencia que la retroalimentación al esfuerzo, debido a que la información sobre la capacidad se relaciona estrechamente con el propio sentimiento de eficacia que la información sobre el esfuerzo (Bruning R., 2002)

Aumentar la conciencia de los estudiantes sobre las atribuciones que realizan y ayudarles a dar respuestas atributivas más favorables mejora la auto-eficacia y el aprendizaje, al tiempo que disminuye la ansiedad relacionada con el logro, razón por la que se cree que los docentes deben hablar de la función de la atribución en el aprendizaje y ofrecer un grado de reconversión a los alumnos que realizan atribuciones inadecuadas. Producto de lo anterior, nacen algunos consejos para mejorar las atribuciones de los estudiantes los cuales son:

- ✓ Discutir con los estudiantes los efectos de las atribuciones.
- ✓ Ayudar a los estudiantes a centrarse en causas controlables
- ✓ Ayudar a los estudiantes a comprender sus reacciones emocionales al éxito y al fracaso y considerar otras causas de éxito y fracaso.
- ✓ Ser consciente de las claves de baja capacidad involuntarias. (Bruning R., 2002)

De esto nace la siguiente interrogante:

¿Se dio la oportunidad en que el docente ayudara a una reconversión de las atribuciones, por ejemplo desde la capacidad del alumno para resolver ejercicios ligados a logaritmos, hacia atribuciones ligadas al esfuerzo para resolverlos?

2.3.1.3. Autonomía y control en el aula

Deci y Ryan, (1983), identificaron dos tipos de entornos; el que apoya la autonomía y el controlador. Existen factores que aumentan la autonomía y el control, así como la influencia en la dedicación a la tarea, la perseverancia y el aprendizaje, estos son:

- ✓ ***La naturaleza del material***

Las características más importantes del material son; Su dificultad, debido a que si esta es muy difícil no propicia un entorno controlador para el alumno y, por lo tanto, una disminución en la motivación intrínseca y una resistencia a la tarea. Su gramática y su relativa familiaridad (Bruning R., 2002)

El interés del material resulta más familiar a los estudiantes que el que no lo es. Los detalles atrayentes deberían ser incorporados a las ideas principales que no son tan atractivas.

En general el material tiende a fomentar la autonomía en mayor medida y a recordarse mejor cuando son los estudiantes que lo seleccionan o generan y cuando es de dificultad moderada, personalmente interesante y familiar. También se ha demostrado que relacionar el material con experiencias de la vida real aumenta el interés por él, facilita el aprendizaje y fomenta la autonomía (Bruning R., 2002)

- ✓ ***Limitaciones de la tarea***

La naturaleza de la tarea influye en que los estudiantes la perciban como generadoras de autonomía o como controladora. Una limitación que con frecuencia pasa desapercibida es si se entiende claramente el propósito de la tarea. Otro factor importante es la dificultad de la tarea. Parece que las tareas de dificultad moderada son las que suponen un mayor reto y una mayor satisfacción para los estudiantes, por ello acelerar la dificultad de la tarea para ir por delante del desarrollo de los alumnos tiene un efecto beneficioso en el aprendizaje y la motivación. Por el contrario, si se crea un estancamiento en la dificultad de la tarea, produce una comparación de rendimientos en la clase lo que influye negativamente en la motivación intrínseca. Variar los tipos de tareas influye directamente en el interés y aprendizaje de los estudiantes. Además, la investigación indica que las respuestas a distintos tipos de tareas del aula pueden depender de las expectativas que se crean antes de comenzar la tarea (Bruning R., 2002)

Existen otras características que fomentan la autonomía y control, como por ejemplo las expectativas del docente, las que a través de sus acciones y respuestas, crea un entorno que genera autonomía o un entorno controlador en el aula, es decir, ofrecer a los estudiantes tareas divertidas y que les suponga un reto, dar respuestas atributivas favorables que hagan hincapié en la función del esfuerzo y las estrategias, al tiempo que minimicen la de la capacidad y evaluar de manera no amenazadora. Por último, la evaluación y recompensas, actúan fuertemente en la creación de un ambiente autónomo o controlador en el aula (Bruning R., 2002). De lo anterior nacen las siguientes preguntas:

¿El docente ejemplificó con hechos cotidianos y familiares al momento de enseñar logaritmos a los estudiantes?

¿El docente realizó un aumento progresivo en la dificultad de las actividades y/o ejercicios?

¿Cuál fue el enfoque de las palabras que el docente dio a sus estudiantes para motivarlos a resolver los ejercicios?

¿El docente premió el esfuerzo y las capacidades en los estudiantes durante la clase?

¿El docente dejó entrever a los estudiantes que errar era parte del aprendizaje?

¿El docente hizo hincapié en errores comunes en torno a una actividad y/o al interior del aula?

¿El docente dio tiempo para realizar actividades?

2.4. Tratamiento de conceptos matemáticos

En esta investigación interesa describir el tratamiento que un docente da al concepto matemático de los logaritmos, dicho tratamiento forma parte de la práctica del profesor, y se considera que puede verse expresado en su *tendencia didáctica*. Por lo cual, se estima necesario utilizar el *modelo didáctico de Contreras (1998)*, quien afirma que "un individuo no puede definirse dentro de un patrón específico de enseñanza, y opta por utilizar el término tendencia didáctica; lo que se puede entender como aquella tendencia que involucre más aspectos hacia un modelo didáctico" Báez, Cantú y Gómez (2007), es decir, que un solo docente, aunque utilice varios modelos teóricos para su práctica, se orienta hacia uno en particular. (Caballero M., 2010).

Las tendencias didácticas que plantea Contreras (1998) son las siguientes: ***tradicional, tecnológica, espontaneísta e investigativa***. Cada una de estas, revela un concepto distinto sobre la enseñanza-aprendizaje de la matemática, debido a que predominan aspectos diferentes y tiene fines distintos (Caballero M., 2010).

- ✓ **Tendencia Tradicional**

Se caracteriza principalmente por la actividad pasiva del estudiante, un discurso expositivo magistral por parte del docente, los contenidos son rígidos y establecidos de antemano, la asignatura está orientada hacia la adquisición de contenidos y el uso del texto es, por lo general, el único material curricular utilizado para el aprendizaje.

- ✓ **Tendencia Tecnológica**

Su característica principal es la simulación de los procesos de construcción de los contenidos, el docente se apoya en estrategias expositivas, la asignatura está dirigida hacia lo informativo y práctico debido a que permite su aplicación en otras disciplinas.

- ✓ **Tendencia Espontaneísta**

Entre sus principales características destacan el uso de modelos por parte del docente, los procedimientos se tornan relevantes por sobre los conceptos, está basada en la formación de actitudes positivas hacia el trabajo escolar y en los intereses de los estudiantes.

- ✓ **La Tendencia Investigativa**

*S*e caracteriza principalmente por la investigación, es decir, se propone todo un proceso que conducirá al estudiante hacia la adquisición de los conocimientos y el fomento de actitudes positivas hacia la propia materia.

Entre los indicadores que propone Contreras para cada una de las Tendencias anteriormente nombradas, que engloban la metodología, el sentido de la asignatura, la concepción del aprendizaje, el papel del estudiante y del docente, y la evaluación, se han considerado sólo aquellos que hacen referencia al tratamiento dado a los conceptos matemáticos, en particular, estos indicadores se relacionaran con el concepto matemático de los logaritmos, los registros de representación utilizados y el tipo de ejercicios propuestos por el docente. Estos indicadores son los siguientes:

- ✓ ***Metodología***

La metodología consiste en la estructura utilizada por el docente para lograr que el estudiante adquiera el conocimiento sobre los logaritmos, que puede incluir las estrategias, métodos, recursos y materiales curriculares utilizados.

- ***Enfoque***

Es la finalidad última de la enseñanza, consiste en lo que el docente espera que los estudiantes aprendan sobre el concepto de los logaritmos.

- ***Procesos***

Son las acciones que el docente espera que realice el estudiante para lograr un aprendizaje de los logaritmos, e incluye la forma de organizar estas acciones.

- ***Registros de representación***

Estas son todas las notaciones (símbolos, lenguaje verbal, etc.) a las que acude el docente como herramientas para explicar el concepto matemático de los logaritmos y fomentar un aprendizaje significativo, así como de los ejemplos y ejercicios. Se considera además, que el docente realice transformaciones y conversiones entre estos registros, es decir, que por medio de las diferentes notaciones, presente aspectos diferentes de los logaritmos, que además, exista una articulación entre las ideas presentes en cada uno de los registros y entre ellos. (Caballero M., 2010).

Así, los registros de representación que se consideran para explicar el concepto de los logaritmos son los siguientes:

- ***Algebraico***

Consiste en la representación de los logaritmos mediante símbolos y signos propios del lenguaje algebraico, por ejemplo:

$$\log_b a = c \leftrightarrow b^c = a$$

- ***Numérico***

Se representa el concepto de los logaritmos mediante el uso de números, y empleando operaciones aritméticas, o bien organizando un conjunto de datos en una tabla, por ejemplo:

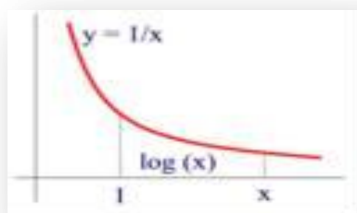
$$32768 \cdot 16384 = 2^{15} \cdot 2^{14} = 2^{15+14} = 2^{29} = 536870912$$

$$268435456 : 1048576 = 2^{28} : 2^{20} = 2^{28-20} = 2^{8} = 256$$

$$512^{3} = (2^{9})^{3} = 2^{9 \cdot 3} = 2^{27} = 134217728$$

- ***Gráfico***

La representación de los logaritmos está conformada por puntos del plano cartesiano, que a su vez, pertenecen a la gráfica de una línea curva, la cual corresponde al lugar geométrico asociado a la función logarítmica, por ejemplo:



- ***Lenguaje común***

Consiste en representar el concepto de los logaritmos mediante la utilización de palabras, articulando oraciones que emplean símbolos algebraicos, por ejemplo:

"El logaritmo de un número, en una base dada, es el exponente al cual se debe elevar la base para obtener el número".

- ***Ejercicios:*** Son las actividades que el profesor propone al estudiante para realizar, considerando el objetivo, o finalidad de estas actividades para el logro del aprendizaje, por ejemplo:

$$\mathbf{\log_6[\,4\,(\,x\,-\,1\,)] = 2}$$

Lo anteriormente expuesto, se puede ejemplificar considerando el concepto de *función logarítmica*, existen distintos registros de representación para este concepto matemático: gráfico, algebraico, verbal (lenguaje natural), etc. De este modo (como muestra la imagen), se pueden realizar distintas operaciones entre los registros: *transformación* dentro del mismo registro, en este caso, ocurre la transformación dentro del mismo registro algebraico de una función logarítmica. Otra es la *Conversión*, la cual puede ser, por ejemplo, la transformación de lenguaje natural a lenguaje gráfico, de la cual resultaría una *curva* como grafica de una función logarítmica.

A continuación se presenta una tabla que resume las tendencias didácticas que propone Contreras:

Tabla

Indicadores	Tendencia Tradicional	Tendencia Tecnológica	Tendencia Espontaneísta	Tendencia Investigativa
Metodología	Ejercitación repetitiva: El aprendizaje se da por la repetición constante de ejercicios cada vez más complicados	Ejercitación reproductiva: El aprendizaje se da por la asimilación de los procedimientos efectuados por el profesor en la resolución de ejercicios	Experimentación: Se realizan actividades experimentales, en las cuales se ponen en práctica métodos, recursos y conocimientos vistos en cursos anteriores.	Resolución de problemas: Se llega al aprendizaje por medio de la resolución de problemas para los cuales, el alumno no tiene una solución construida.
Enfoques	Formal – Memorístico: Hay una orientación a la adquisición de conceptos y reglas, enfatizando el nivel de abstracción del contenido a enseñar.	Conceptual: Se busca la comprensión de los conceptos, y su vinculación con situaciones reales.	Algorítmico: Se busca la adquisición de procedimientos para la resolución de situaciones reales	Constructivista: Se busca desarrollar, habilidades de razonamiento y comprensión, para que el estudiante construya su conocimiento apoyándose de las actividades guiadas, para después formalizar el concepto matemático.
Procesos	Deductivos: Se sigue un proceso deductivo, que implica seguir la estructura, definiciones, ejemplos, ejercicios.	Inductivos simulados: El aprendizaje comienza por procesos inductivos, que pueden incluir ejemplos o situaciones planteadas al alumno, pero solo se consolida a través de procesos deductivos.	Inductivos: El aprendizaje comienza con la participación del alumno en actividades que buscan la identificación de los conceptos.	Inducción-deducción: El aprendizaje comienza por la observación en problemas, de regularidades que permiten aflorar una conjetura; pero a ésta ha de seguir una comprobación razonable y una generalización adecuada.
Registros de representación	Algebraico	Algebraico Gráfico	Lenguaje común Numérico Álgebra y geometría básica	Algebraico Gráfico Lenguaje común Numérico
Ejercicios	Consolidación: Los ejercicios tienen la función de	Reforzamiento: Los ejercicios sirven para poner en	Descubrimiento: Los ejercicios permiten al estudiante	Descubrimiento y consolidación: Por medio de problemas

	consolidar los conocimientos adquiridos.	**práctica los conocimientos adquiridos.**	**observar patrones y particularidades que lo lleven a identificar los conceptos en juego.**	**planteados, el alumno reconocerá los conceptos implicados, para posteriormente formalizar estos conocimientos por medio de problemas más complicados.**

TABLA: ***Resumen de las tendencias didácticas que propone Contreras L.***

Así, con base en la estructura diseñada por Contreras, se afirma que un docente tiene una tendencia *Tradicional*, si la metodología que utiliza se basa en la ejercitación, es decir, que el aprendizaje se da por la realización constante de ejercicios, con un enfoque en la memorización de definiciones y reglas, usando un proceso de enseñanza deductivo, que implica iniciar éste con definiciones, mostrar ejemplos y realizar ejercicios. Asimismo, el único registro de representación que emplea para la enseñanza de los logaritmos es el algebraico, y utiliza ejercicios cuyo objetivo es la consolidación de los métodos de resolución de los logaritmos. (Caballero M, 2010)

Un docente presenta una tendencia *Tecnológica*, cuando utiliza una metodología que consiste en la asimilación por parte del estudiante de los procedimientos de resolución de actividades ligadas a los logaritmos realizados por el docente, enfocándose en la comprensión del concepto, planteando situaciones a los estudiantes para inducir al aprendizaje, pero consolidando posteriormente ese aprendizaje. En relación al registro de representación utilizado, principalmente se utiliza el registro algebraico, pero se busca relacionarlo con otros registros, como el geométrico y el gráfico, de modo que el estudiante pueda transitar el concepto de los logaritmos entre estos registros. Finalmente, los ejercicios permiten al estudiante poner en práctica los conocimientos adquiridos (Caballero M, 2010).

Se considera que un docente muestra un tendencia *Espontaneísta*, cuando emplea una metodología que consiste en la propuesta de actividades que motivan el uso de conocimientos previos del estudiante, y con énfasis en el aprendizaje de procedimientos y métodos para resolver situaciones de la vida diaria, para lo cual, el estudiante realiza actividades que permiten la identificación de las características de estos procedimientos. Se utilizan registros de representación que incluyen el numérico, el lenguaje natural, algebraico y geometría básica. Los ejercicios que proporciona el docente tienen la finalidad de que el estudiante llegue a identificar las características y propiedades del concepto de logaritmos (Caballero M, 2010).

Un docente muestra una tendencia *investigativa* cuando utiliza una metodología basada en la resolución de problemas, donde, a priori, el estudiante no cuenta con una respuesta inmediata, enfocándose en el desarrollo de habilidades de razonamiento matemático y comprensión, a la cual le sigue una comprobación y formalización. Los registros que utiliza el docente son variados, e incluyen el algebraico, gráfico, numérico, lenguaje natural, etc. Los ejercicios empleados tienen por objetivo que el estudiante forme una conjetura y la compruebe (Caballero M, 2010).

2.5. Objeto matemático: Los logaritmos

No cabe duda la importancia que la noción de los logaritmos ha poseído desde su origen hasta nuestros días; su evolución, su adaptabilidad a los distintos paradigmas científicos que han ido interrelacionándose, reemplazándose y superándose, ha permitido que arribe a nuestros días intacta, contando con un rincón propio en la estructura matemática actual (Ferrari M., 2010)

Dada la complejidad en su definición y las nociones que involucra, es que hacen pertinente explorar a los logaritmos en su evolución, obtener datos respecto a los orígenes y necesidades que produjeron su creación, en un intento de proporcionar situaciones concretas y reales para introducirla y desplegarla en el aula de forma más accesible para los estudiantes, los cuales se encuentran por lo general ante un objeto volátil, con el cual pueden operar y trabajar algorítmicamente. Es por ello, que se hace impostergable para esta investigación, realizar un análisis histórico del concepto matemático de los logaritmos.

2.5.1. Historia y aplicaciones de los logaritmos en la vida cotidiana

Los logaritmos irrumpen en la historia de la humanidad hace casi 400 años y fueron utilizados durante casi 350 años como la principal herramienta en los cálculos aritméticos. Un increíble esfuerzo se ahorró usándolos, pues permitieron trabajar con los pesados cálculos necesarios en los problemas de astronomía, y particularmente en las aplicaciones a la navegación. Así, las multiplicaciones pudieron sustituirse por sumas, las divisiones por restas, las potencias por productos y las raíces por divisiones, lo que no sólo simplificó enormemente la realización manual de los cálculos matemáticos, sino que permitió realizar otros que sin su invención no hubieran sido posibles (Abrate R., Pochulu M., 2007).

John Napier, considerado el inventor de los logaritmos, hacia el año 1594, estudió las sucesiones de las potencias de un número a $(a^0, a^1, a^2, a^3, \ldots\ldots, a^n)$ y concluyó que las multiplicaciones y divisiones de dos términos son iguales a las potencias de las sumas o diferencias de los exponentes de los mismos. Es decir:

$$a^n * a^m = a^{n+m} \quad y \qquad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

Sin embargo, estas sucesiones no resultaban útiles para el cálculo debido a que entre dos potencias enteras había un “espacio” extenso y la interpolación que había que realizar era imprecisa. Entonces, descubrió una relación directa entre la progresión geométrica de los exponenciales y la progresión aritmética, donde se podían transformar los primeros en los segundos para operar con estos y, una vez hallado el resultado, volver a transformarlos en los números originales. Si se pudiera expresar todos los números como potencias de un número base, la multiplicación se reduciría, simplemente a sumar exponentes y la división a restarlos (Abrate R., Pochulu M., 2007).

Ahora bien, el objetivo principal de crear los logaritmos estaba en facilitar las cuentas complejas y para ello se tendría que expresar como potencias los números fraccionarios entre los enteros. Para lograrlo, había sólo dos formas: una era usar potencias fraccionarias, sin embargo, las potencias fraccionarias no eran bien conocidas aún en la época de Napier. La otra, era encontrar un número cuyas potencias crecieran razonablemente despacio como para ir cubriendo los "espacios" entre los números enteros, pero no tanto como para que los exponentes se hicieran enormes y otra vez el sistema fuera engorroso. Napier llegó a la conclusión de que un número cercano a uno, pero no demasiado cercano podía ser una base razonable. Resolver este problema le llevó años y finalmente consideró al 0,9999999 $(1-10^{-7})$ como base (Abrate R., Pochulu M., 2007).

En cuanto a la elección precisa de 0.9999999, se debe considerar que el objetivo de Napier era reducir los engorrosos cálculos que se realizaban especialmente en Trigonometría, y entonces se dejó llevar por la práctica trigonométrica de entonces, que dividía el radio del círculo unidad en 10.000.000 partes (10^{7}), y entonces, si se resta de la unidad su 10^{7}-ésima parte, se obtiene el número más cercano a la unidad en este sistema. Con ese fin, y durante veinte años (desde 1594 a 1614) se dedicó a hacer una tabla obteniendo exponenciales de diversas funciones trigonométricas, debido a que se utilizaban mucho en cálculos astronómicos. Lo cierto, es que una vez que terminó con las cuentas, decidió que debía definir con un nombre a lo que estaba construyendo. El proceso de cálculo hizo que llamara a esos números *"logaritmos"* que quiere decir *"números proporcionados".* Logaritmos está formado por las palabras griegas λογος (logos) que significa razón o cociente, y ἐτυμος (arithmos), con el significado de número, y se define, literalmente, *como un número que indica una relación o proporción*. Es decir, alude a la proposición que fue hecha por Napier en su teorema fundamental, el cual establece que la diferencia de dos logaritmos determina la relación de los números a los cuales corresponden, de manera que, una serie aritmética de logaritmos corresponde a una serie geométrica de números. (Abrate R., Pochulu M., 2007).

Abordando los logaritmos retomando la idea original de Napier, que motivara el surgimiento de este concepto matemático, se propone emprender el tema de un modo similar, pero de una manera más simple. Se puede comenzar calculando, como se resuelve habitualmente y sin ayuda de la calculadora, las siguientes multiplicaciones:

a) 16 x 512 *b) 81 x 19683*

Aplicando el algoritmo de la multiplicación se tiene:

$\begin{array}{r} 512 \\ \times\ 16 \\ \hline 3072 \\ +\ 512 \\ \hline 8192 \end{array}$	$\begin{array}{r} 19683 \\ \times\ 81 \\ \hline 19683 \\ +157464 \\ \hline 1594323 \end{array}$

Ahora bien, se puede construir una tabla que contenga algunas potencias de base y exponente natural, como la que aparece a continuación, y se localiza en ella cada uno de los resultados obtenidos.

Tabla

N	2^n	3^n	4^n	5^n
1	2	3	4	5
2	4	9	16	25
3	8	27	64	125
4	16	81	256	625
5	32	243	1024	3125
6	64	729	4096	15625
7	128	2187	16384	78125
8	256	6561	65536	390625
9	512	19683	262144	1953125
10	1024	59049	1048576	9765625
11	2048	177147	4194304	48828125
12	4096	531441	16777216	244140625
13	8192	1594323	67108864	1220703125
14	16384	4782969	268435456	6103515625

Tabla: ***Potencias de base y exponente natural (Abrate R., Pochulu M., 2007)***

Se ve que los resultados obtenidos se presentan en la fila correspondiente a n = 13, es decir, que 13 es el exponente al que se debe elevar 2 para obtener 8.192, o el 3 para obtener 1.594.323. En matemática, este exponente se denomina “logaritmo”. En particular, se diría que el logaritmo de 8.192, en base 2, es 13 y se denota como:

$$\log_2 8292 = 13 \;\; pues \;\; 2^{13} = 8.182$$

Asimismo, el logaritmo de 1.594.323 en base 3 es 13 y se denota como:

$$\log_3 1594323 = 13 \quad pues \;\; 3^{13} = 1.594.323$$

Si los resultados anteriores se intentan expresar como multiplicación de potencias con igual base correspondientes a las multiplicaciones planteadas al inicio de la actividad resultaría lo siguientes, por ejemplo:

16 x 512 = 8.192

$$2^4 \text{ x } 2^9 = 2^{13}$$

De manera similar, se pueden realizar otras operaciones como son las divisiones, por ejemplo:

$$\frac{67.108.864}{263.144} = \frac{4^{13}}{4^9} = 4^4 = 256$$

El objetivo de esta actividad tuvo como principal propósito demostrar que las multiplicaciones se pueden convertir en sumas y las divisiones en restas, con lo que se facilita notablemente el cálculo, más cuando los números implicados son muy grandes y se cuenta con tablas apropiadas. Hoy, no tendría sentido realizarlas de esta manera, pero el fundamento que originó esta búsqueda de simplicidad de los cálculos, trasciende la utilidad que tuvo en su época (Abrate R., Pochulu M., 2007).

2.5.2. Aplicaciones

Destructividad de un terremoto: Una primera medida de la intensidad de los terremotos son los daños que ocasiona, no obstante, para lograr una caracterización más precisa, se han desarrollado diversas escalas. Pareciera lógico medir los sismos por la energía que liberan, sin embargo, muchas veces son números muy grandes. Por ejemplo, hay terremotos cien mil millones de veces más fuertes que otros, y por otro lado, algunos que no parecen ser muy intensos liberan tanta energía como una explosión. Para evitar números tan grandes, igual que ocurre para medir los sonidos, las escalas usan logaritmos (Abrate R., Pochulu M., 2007).

La escala sismológica de Richter (en honor de Charles Richter, 1900-1985), también conocida por su nombre más adecuado de escala de magnitud local (ML), es una escala logarítmica arbitraria que asigna un número para cuantificar el tamaño de un terremoto. Richter calculó que la magnitud de un terremoto o sismo puede ser medida mediante la siguiente fórmula:

$$M = \log(A) + C \; 10$$

Donde A es la amplitud de sus ondas superficiales en milímetros y C = 3,3 +1,66log (D) - log (T), es una constante que depende del período T de las ondas registradas en el sismógrafo y de la distancia D de éste al epicentro, en grados angulares. Naturalmente la magnitud M es una medida logarítmica. El uso del logaritmo en la escala es para reflejar la energía que se desprende en un terremoto. Nuevamente, el logaritmo incorporado a la escala hace que los valores asignados a cada nivel aumenten de forma exponencial, y no de forma lineal. Al ser logarítmica la magnitud M, una diferencia de una unidad en magnitud significa diez veces más de amplitud en la onda sísmica registrada, lo que significa que puede ser desastroso en sus efectos. Un terremoto de magnitud uno o dos es muy débil, y los de magnitud mayor que siete catastróficos (Abrate R., Pochulu M., 2007). Por ejemplo:

El 13 de marzo de 1996, a las 13:08 hrs, se produce un terremoto de magnitud 5,40 en Chile, causando daños en varias localidades del sur de la ciudad de Antofagasta. Aproximadamente cuatro años después (13 de marzo de 1996, a las 07:35 hrs.) se produce otro terremoto, pero de magnitud 7,40 que provocó daños importantes en casi toda la ciudad de Valparaíso, especialmente en la localidad de San Antonio, donde murieron 15 personas. También, ocasionó leves daños en la zona norte de Viña del Mar. Si se observa, la diferencia entre estos dos sismos no parece muy grande, pues:

$$M1 = 5{,}40 \qquad y \qquad M2 = 7{,}40.$$

En consecuencia, se tendría que $\log(A1) + C = 5{,}40$ *para el primer caso, y* $\log(A2) + C = 7{,}40$ *para el segundo.*

Restando miembro a miembro estas igualdades se concluye que:

$$\log(A2) - \log(A1) = 2$$

Si se aplican las propiedades de logaritmos se tiene $\log\frac{A2}{A1} = 2$. *Es decir:*

$$\frac{A2}{A1} = 10^2 \rightarrow A2 = 10^2 * A1$$

Lo que indica que el terremoto de Valparaíso fue aproximadamente cien veces más intenso que el ocurrido en Antofagasta. (Abrate R., Pochulu M., 2007).

Los logaritmos surgieron de una idea muy sencilla y hasta nuestros días siguen siendo un instrumento importante, no visible quizás para muchos, a tal punto de considerarlo innecesario de analizar, sin embargo, es esencial para el conocimiento científico.

En relación a lo anterior, se consideran las palabras de Martínez Negrete, (2004) el cual afirma que muchas veces enseñando matemáticas, el alumno pregunta al profesor para qué le sirven, por ejemplo, los logaritmos. Es difícil responder satisfactoriamente a la mayoría de las personas esta válida inquietud. El maestro teme reconocer que en términos estrictamente prácticos y cotidianos, saber de logaritmos es tan inútil como entender alguna revolución o conocer el ciclo de Krebs. Sin embargo estos conocimientos son vitales para comprender la realidad, y frente a las problemáticas de la existencia tener mejores enfoques y herramientas de análisis para su solución. (Abrate R., Pochulu M., 2007).

2.5.3. Los logaritmos desde el marco curricular chileno

Como se hace mención anteriormente en relación a los logaritmos en la enseñanza escolar, el Programa de estudio para matemática de segundo año de enseñanza media proporcionado por MINEDUC, posee en su unidad de *números y algebra* habilidades fundamentales a adquirir por los estudiantes sobre el contenido de los logaritmos:

- ✓ *Demostrar propiedades de los logaritmos a partir de las propiedades de potencias.*
- ✓ *Relacionar potencias, raíces enésimas y logaritmos.*
- ✓ *Resolver situaciones en las que es necesario operar con logaritmos.*

Asimismo, el Programa de estudio para segundo año de enseñanza media, contiene los siguientes aprendizajes esperados:

- ✓ *Establecer relaciones entre los logaritmos, potencias y raíces.*
- ✓ *Deducir propiedades de los logaritmos.*
- ✓ *Resolver problemas en diversos contextos relacionados con los logaritmos.*

El texto *edición especial para el MINEDUC, Texto para el estudiante*, distribuido por esta Institución, presenta contenidos en relación a estas habilidades y aprendizajes esperados para los estudiantes de segundo año de enseñanza media, los cuales son:

- ✓ *Breve reseña histórica.*
- ✓ *Definición de los logaritmos como número.*
- ✓ *Propiedades de los logaritmos.*
- ✓ *Propiedades de las operaciones de los logaritmos.*
- ✓ *Ecuaciones logarítmicas y aplicación de estas.*

Además, MINEDUC proporciona un documento llamado *Mapas de progreso del Aprendizaje*, el cual tiene como fin medir el aprendizaje de los contenidos enseñados anteriormente en los distintos niveles, es decir desde primer año de enseñanza básica hasta cuarto año de enseñanza media. Este documento, está compuesto por siete niveles, los cuales corresponden a dos cursos por nivel, es decir, el nivel uno corresponde a los aprendizajes de primer y segundo año de enseñanza básica, y así sucesivamente. Por lo tanto, los estudiantes de segundo año de enseñanza media se encuentran en el *nivel cinco* en los *Mapas de progreso.* Los aprendizajes que los estudiantes deben dominar en relación con el concepto matemático de los logaritmos en el nivel cinco son los siguientes:

Habilidades	Eje
1. Interpreta potencias de base racional y exponente racional, raíces enésimas y logaritmos, establece relaciones entre ellos y los utiliza para resolver diversos problemas. Realiza operatoria con números reales, calcula potencias, raíces y logaritmos y los aplica en diversos contextos. Resuelve problemas utilizando estrategias que implican descomponer un problema o situaciones propuestas en partes o sub-problemas. Argumenta sus estrategias o procedimientos y utiliza ejemplos y contraejemplos para verificar la validez o falsedad de conjeturas.	Números y Operaciones
2. Reconoce el tipo de situaciones que modelan las funciones lineal, afín, exponencial, logarítmica y raíz cuadrada, y las representa a través de tablas, gráficos y algebraicamente. Transforma expresiones algebraicas de forma entera y fraccionaria haciendo uso de convenciones del álgebra.. Resuelve problemas que involucran composición de funciones, modelos lineales y afines o sistemas de ecuaciones lineales. Justifica la pertinencia del modelo aplicado y de las soluciones obtenidas.	Álgebra y funciones

CAPITULO 3: METODOLOGIA

Para cumplir el objetivo de esta investigación, se optó por realizar una investigación cualitativa y de carácter descriptivo de un caso que involucra a un grupo didáctico formado por seis estudiantes y su profesora, y su carácter cualitativo - descriptivo se justifica por el interés de las condiciones y las relaciones existentes entre las concepciones y el tratamiento sobre el concepto de los logaritmos. Para recabar las concepciones de estos seis estudiantes, se construyeron una encuesta y un cuestionario, mientras que para obtener el tratamiento dado por la profesora al concepto matemático de los logaritmos se realizó la observación de tres clases que involucraron el estudio del concepto matemático de los logaritmos.

3.1. Participantes

La experiencia se realizará en una Institución Educacional de la ciudad de Valparaíso, Chile. La Misión de esta Institución es formar y educar a jóvenes de Enseñanza Media Técnico Profesional que respondan eficazmente a las necesidades presentes y futuras del desarrollo productivo regional y nacional, a través de su incorporación al trabajo dependiente o independiente o a la Educación superior.

La profesional escogida, es una profesora de matemática que desempeña su labor docente en la Institución hace más de 20 años, y la elección de la misma se explica por su vasta experiencia como docente en la educación pública, además de poseer características diferentes a las que podría tener un pedagogo recientemente egresado, ya sea en el ámbito formativo, social y empírico.

Para llevar a cabo la recolección de datos, se escogieron, según su rendimiento en el subsector de matemática, 6 alumnos del 2º medio H del Instituto Marítimo, de los cuales dos tienen promedios altos, es decir, igual o sobre 6,5, dos tienen promedios regulares, es decir, entre 5,0 y 6,0 y, finalmente, dos alumnos con rendimientos bajos, es decir, menores a 4,5. En relación a esto último, cabe mencionar que de los seis alumnos escogidos, ninguno tiene promedio menor a 4,0 en el subsector de matemática. A continuación, se presenta en detalle cómo se distribuirán los alumnos para analizar sus resultados individualmente:

- **Alumno A:** *alumno/a con <u>rendimiento alto</u>, en el 1º semestre obtuvo promedio general 6,7 y en el subsector de matemática obtuvo promedio 6,7.*

- **Alumno B:** *alumno/a con <u>rendimiento alto</u>, en el 1º semestre obtuvo promedio general 6,2 y en el subsector de matemática obtuvo promedio 6,5.*

- **Alumno C:** *alumno/a con <u>rendimiento regular</u>, en el 1º semestre obtuvo promedio general 6,0 y en el subsector de matemática obtuvo promedio 5,2.*

- **Alumno D:** *alumno/a con <u>rendimiento regular</u>, en el 1º semestre obtuvo promedio general 5,1 y en el subsector de matemática obtuvo promedio 5,9.*

- **Alumno E:** *alumno/a con rendimiento bajo, en el 1º semestre obtuvo promedio general 6,3 y en el subsector de matemática obtuvo promedio 4,2.*

- **Alumno F:** *alumno/a con rendimiento bajo, en el 1º semestre obtuvo promedio general 5,6 y en el subsector de matemática obtuvo promedio 4,2.*

3.2. Instrumentos y recopilación de información

Para describir las concepciones de los alumnos sobre el concepto de los logaritmos y el tratamiento dado por la profesora a dicho concepto, se optó por utilizar herramientas que permitan obtener información acerca del tratamiento, para así constatar los resultados obtenidos. Las concepciones de los alumnos sobre el concepto de los logaritmos se recabaran por medio de una encuesta y un cuestionario, en tanto que el tratamiento dado al concepto se conseguirá mediante la grabación de clases y revisión de documental, este último incluirá los apuntes y libros empleados por la profesora.

3.2.1. Observación de clases:

Para realizar el análisis de las sesiones dictadas por la profesora, se diseñaron preguntas en base a la *teoría socio-cognitiva de Bandura*, la *teoría de las atribuciones* y la *teoría de la autonomía y control,* además se consideró el enfoque que da el *Curriculum chileno* al concepto de logaritmos y, por último, se consideró la *teoría de Tendencias didácticas* de Contreras y finalmente la *teoría de los registros de representación* de Duval. A continuación se presentan las preguntas diseñadas, que posteriormente se responderán:

¿El docente expresó explícitamente, los objetivos de aprendizaje de la clase?

Según el concepto de autonomía y control, la naturaleza del concepto influye en que los estudiantes la perciban como generadoras de autonomía o como controladora. Una limitación que con frecuencia pasa desapercibida es si se entiende claramente el objetivo del concepto.

¿El docente explicó la importancia y el sentido de aprender el concepto de logaritmos?

Según el modelado cognitivo de Meichenbaum (1977), citado por Bruning R, (2002), si el profesor explica a sus estudiantes la importancia de aprender una habilidad, en particular el concepto de los logaritmos, probablemente aumente el nivel de auto-eficacia de los estos mismos.

¿El docente utilizó diferentes materiales curriculares para el objetivo de la clase?

Según el marco teórico, los profesores con un nivel alto de auto-eficacia tienden en mayor medida a utilizar diferentes recursos o materiales curriculares para el cumplimiento de los objetivos de la clase.

¿El docente ejemplificó con hechos cotidianos y familiares al momento de enseñar logaritmos a los alumnos?

Ejemplificar con hechos cotidianos el nuevo concepto fomenta el desarrollo de una motivación intrínseca en los alumnos y por lo tanto acciones auto determinadas.

¿El docente realizaba los procedimientos completos para resolver el primer ejercicio de cada concepto nuevo?

Según el concepto de modelar, una persona que maneje la habilidad (profesora) y realiza el procedimiento completo de los primeros ejercicios del nuevo concepto, aumenta el nivel de auto-eficacia de los alumnos que tienen un aprendizaje vicario.

¿El docente tenía una actitud positivamente persuasiva con sus alumnos, es decir los elogiaba de manera explícita al momento de dar una buena respuesta?

Según el marco teórico, los profesores que tienen un alto nivel de auto-eficacia tienden a elogiar más que a criticar a sus alumnos en el proceso de enseñanza – aprendizaje.

¿El docente realizó un aumento progresivo en la dificultad de las actividades y/o ejercicios?

Las tareas de dificultad moderada son las que suponen un mayor reto y una mayor satisfacción para los alumnos, por ello acelerar la dificultad de la tarea para ir por delante del desarrollo de los alumnos tiene un efecto beneficioso en el aprendizaje y la motivación.

¿El docente dio tiempo para que los alumnos realizaran las actividades, para luego revisarlas en conjunto con los alumnos?

Hacer que el estudiante realice la tarea dirigiéndose a sí mismo, es decir modelar la tarea o la habilidad de una manera reciproca, en la que por ejemplo, de dos a cuatro estudiantes trabajan en grupos de aprendizaje cooperativo mejora el nivel de auto-eficacia de los alumnos

¿El docente realizó actividades en grupo o de a pares para construir por si solos un concepto o procedimiento?

Proponer actividades que motiven la construcción del conocimiento propicia un aprendizaje activo y por consecuencia, mejora los niveles de auto-eficacia de los alumnos

¿El docente perseveraba con los alumnos que tenían dudas?

Según Bandura, los profesores con un nivel alto de auto-eficacia tienden a perseverar y a dedicarles mayor cantidad de tiempo a los alumnos que presentan dificultades para realizar o comprender las actividades ligadas a un concepto específico.

¿Hubo una retroalimentación por parte del docente y/o los alumnos en los ejercicios planeados en la clase?

Según el concepto de auto-eficacia, realizar una retroalimentación mejora el rendimiento y el nivel de auto-eficacia de los alumnos

¿Cuál fue la actitud respecto del control del aula en el docente?

Según el concepto de auto-eficacia, los docentes que presentan un nivel alto de auto-eficacia, tienen una visión más humanista respecto del control en el aula, es decir, consideran la diversidad de grupo e individualidad de cada alumno.

¿Se dio la oportunidad en que el docente ayudara a una reconversión de las atribuciones de un alumno?

Ayudar a la reconversión de las atribuciones de los alumnos por ejemplo de su capacidad hacia atribuciones más controlables como el esfuerzo en la tarea mejora los niveles de auto-eficacia en los alumnos.

¿Cuál fue el enfoque de las palabras que el docente dio a sus alumnos para motivarlos a resolver los ejercicios?

Según el concepto de autonomía y control, ofrecer a los estudiantes tareas divertidas y que les suponga un reto, dar respuestas atributivas favorables que hagan hincapié en la función del esfuerzo y las estrategias, al tiempo que minimicen la de la capacidad y evaluar de manera no amenazadora

¿El docente premió el esfuerzo y las capacidades en los alumnos durante la clase?

Según el concepto de autonomía y control, las recompensas, actúan fuertemente en la creación de un ambiente autónomo o controlador en el aula.

La observación de las clases relacionadas con el concepto de los logaritmos, fue realizada los días viernes 11, lunes 14 y miércoles 16 de noviembre del año 2011. La primera sesión observada la cual corresponde al día viernes 11 de noviembre, fue registrada en una grabación en el periodo de clases comprendido entre 10:30 a 12:00 Hrs., con previa autorización tanto de las autoridades pedagógicas de la Institución Educacional, como de la profesora de matemática de los alumnos de 2º año de enseñanza media.

Esta grabación se realizó estratégicamente, en la parte central de la sala de clases de tal manera de no interrumpir el proceso de enseñanza-aprendizaje ni tampoco desconcentrar a los alumnos, y con el fin de captar de manera óptima la voz de la profesora e imagen del trabajo desarrollado tanto en pizarra como alrededor de la sala.

En relación a la grabación misma, se destaca un funcionamiento fluido, sin interrupciones ni complicaciones, a tal punto que, tanto la profesora como los alumnos obviaron la presencia de la persona externa a la clase y de la grabación realizada.

Cabe mencionar que las siguientes sesiones observadas fueron registradas a través de escritos debido a que fue permitida la grabación de solamente una sesión de las tres que involucraron el concepto de los logaritmos.

3.2.2. Cuestionario matemático realizado

El siguiente cuestionario se ha diseñado con el afán de conocer y analizar las concepciones y nivel de conocimiento que los alumnos poseen en relación al concepto de los logaritmos.

Para recabar la información, se confeccionaron 4 preguntas relacionadas con los logaritmos, según las *habilidades* y *aprendizajes esperados* expresados por el MINEDUC, y considerando las actividades propuestas por la profesora y el *texto del estudiante de segundo año de enseñanza media* utilizados por los alumnos. Dos de las preguntas constan de sub-preguntas más específicas, donde se espera que los alumnos demuestren su aprendizaje respondiéndolas de manera explícita, con honestidad y aplicando sus reales conocimientos. A continuación se presentan las preguntas del cuestionario:

Pregunta Nº1:

Dada la siguiente expresión:

$$\log_x 256 = 2$$

donde $x > 0$ y $x \neq 1$, y representa la base del logaritmo

Determine el valor de la base "x" y justifique su respuesta con su respectivo procedimiento.

El objetivo de esta pregunta es averiguar si los alumnos saben calcular logaritmos utilizando la relación con las funciones potencias y raíces, considerando que es un contenido mínimo obligatorio expresado por el MINEDUC, a su vez, se considera como una de las habilidades a lograr por los alumnos en el nivel de 2º año de enseñanza media y es un tipo de actividad propuesta por la profesora.

En un inicio, se espera que los alumnos participantes de la investigación comiencen la construcción del procedimiento utilizando la relación de equivalencia entre la función potencia y la función logaritmo, es decir:

$$\log_x 256 = 2 \leftrightarrow x^2 = 256$$

Luego, se espera que recurran a la relación de equivalencia entre la función potencia y la función raíz, utilizada por la profesora en otros ejemplos:

$$x^2 = 256 \leftrightarrow x = \sqrt{256}$$

Finalmente, deducir que:

$$x = 16$$

Pregunta Nº2:

Explique con sus palabras la siguiente igualdad utilizando las propiedades de potencias.

$$\log_a(b * c) = \log_a b + \log_a c$$

El objetivo de esta pregunta es comprobar si los alumnos logran construir la propiedad utilizando conocimientos previos relacionados con potencias, considerando que la profesora construyo algebraicamente esta propiedad logarítmica desde la multiplicación a la suma de los logaritmos, además, uno de los contenidos mínimos obligatorios dado por el MINEDUC en relación a los logaritmos es "demostrar propiedades de los logaritmos a partir de las propiedades de potencias".

Se espera que los alumnos investigados definan las siguientes relaciones:

$$\log_a b = x$$

$$\log_a c = y$$

Luego, utilizar la relación de equivalencia entre logaritmos y potencias:

$$\log_a b = x \rightarrow a^x = b$$

$$\log_a c = y \rightarrow a^y = c$$

Luego se espera que apliquen la siguiente relación de igualdad:

$$\rightarrow \log_a(b * c) = \log_a(a^x * a^y)$$

*Luego, se espera que los alumnos apliquen propiedad de potencias en el miembro derecho de la igualdad, conservando en el argumento del logaritmo la base **a** y la suma de los exponentes **x** e **y**, es decir:*

$$\rightarrow \log_a(b * c) = \log_a(a^{x+y})$$

Luego, se espera que los estudiantes que participan en la investigación apliquen las siguientes propiedades logarítmicas en la igualdad:

$$(1) \quad \boldsymbol{\log_a a = 1}$$

$$(2) \quad \boldsymbol{\log_a b^x = x * \log_a b}$$

Así:

$$\rightarrow \boldsymbol{\log_a(b * c) = (x + y) * \log_a(a)} \quad (2)$$

$$\rightarrow \boldsymbol{\log_a(b * c) = (x + y) * 1} \quad (1)$$

$$\rightarrow \boldsymbol{\log_a(b * c) = x + y}$$

Como:

$$\boldsymbol{\log_a b = x}$$

$$\boldsymbol{\log_a c = y}$$

Finalmente, se espera que los alumnos reemplacen en la igualdad y queda demostrada la propiedad:

$$\boldsymbol{\log_a(b * c) = \log_a b + \log_a c}$$

Pregunta Nº 3:

Dada la siguiente expresión:

$$f(x) = \log_4 x + 2$$

1. **Construya una tabla de valores para f.**
2. **¿Cuál es el dominio de f?**
3. **¿Cuál es el recorrido de f?**
4. **Grafique f.**

El objetivo de esta pregunta es averiguar si los alumnos logran relacionar y resolver situaciones que involucran funciones logarítmicas, considerando que la profesional docente, encargada de la enseñanza de los estudiantes investigados, no define formalmente a los logaritmos como una función, sino que se limita a tratarlo desde un punto de vista principalmente numérico. Además, en las sesiones observadas no se presentan ejercicios que involucren a este tipo de funciones, lo que obliga a los alumnos utilizar conocimientos previos relacionados con funciones y recientemente logaritmos para articular conceptos matemáticos que a priori no se presentan conexiones. Se considera también que el texto para el estudiante, a método de profundización del estudio de los logaritmos, proporciona actividades grupales e individuales que consisten en graficar funciones logarítmicas en el programa geométrico Geogebra. Se espera que los alumnos realicen lo siguiente:

En el primer ítem, se espera que los estudiantes construyan una tabla de valores reemplazando valores de x en la función f considerando la base del logaritmo (4) para evitar cálculos complejos, por ejemplo:

X	$f(x) = \log_4 x + 2$	Y
$\frac{1}{256}$	$f(x) = \log_4(\frac{1}{256}) + 2$	-4 + 2 = -2
$\frac{1}{64}$	$f(x) = \log_4(\frac{1}{64}) + 2$	-3 + 2 = -1
1	$f(x) = \log_4(1) + 2$	0 + 2 = 2
2	$f(x) = \log_4(2) + 2$	$\frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$
4	$f(x) = \log_4(4) + 2$	1 + 2 = 3
8	$f(x) = \log_4(8) + 2$	$1 + \frac{1}{2} + 2 = \frac{7}{2}$
16	$f(x) = \log_4(16) + 2$	2 + 2 = 4

En el segundo ítem se espera que los alumnos determinen el dominio de la función f, utilizando como herramienta en el procedimiento de la demostración las condiciones básicas que deben cumplir los elementos que constituyen el concepto matemático de logaritmos, es decir:

$$\mathbf{\log_a c = x \ \rightarrow a^x = c,} \qquad \boldsymbol{donde\ a} > 0, a \neq 1$$

En este caso particular,

$$\boldsymbol{f(x) = \log_4 x + 2}$$

Así entonces, para determinar el dominio de f solo basta relacionar:

$$\boldsymbol{\log_4 x = z \ \rightarrow 4^z = x}$$

Como 4 es un número positivo constante, el resultado de la potencia siempre será mayor que cero independiente del valor que se le asigne a z, esto implica que necesariamente x debe ser mayor que cero, por lo tanto:

$$\boldsymbol{domf} =]\mathbf{0}, \infty[$$

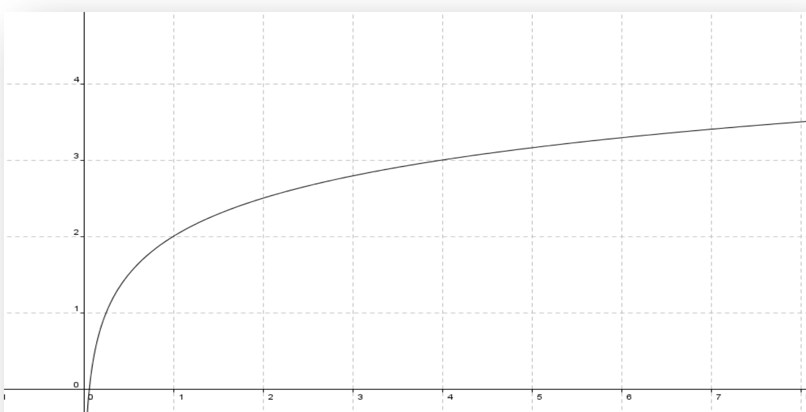
En el tercer ítem se espera que los alumnos investigados determinen el recorrido de la función f teniendo en cuenta que existen distintas formas de abordar la situación. En particular, considerando el nivel de los alumnos, se espera que utilicen, por ejemplo, la tabla *construida en el primer ítem y logren visualizar que al reemplazar un valor positivo (por condición) en "x", al realizar el procedimiento y reducir la expresión el resultado puede ser un numero negativo, cero o positivo:*

X	$\boldsymbol{f(x) = \log_4 x + 2}$	**Y**
$\frac{1}{256}$	$f(x) = \log_4(\frac{1}{256}) + 2$	-4 + 2 = -2
$\frac{1}{64}$	$f(x) = \log_4(\frac{1}{64}) + 2$	-3 + 2 = -1
1	$f(x) = \log_4(1) + 2$	0 + 2 = 2
2	$f(x) = \log_4(2) + 2$	$\frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$
4	$f(x) = \log_4(4) + 2$	1 + 2 = 3
8	$f(x) = \log_4(8) + 2$	$1 + \frac{1}{2} + 2 = \frac{7}{2}$
16	$f(x) = \log_4(16) + 2$	2 + 2 = 4

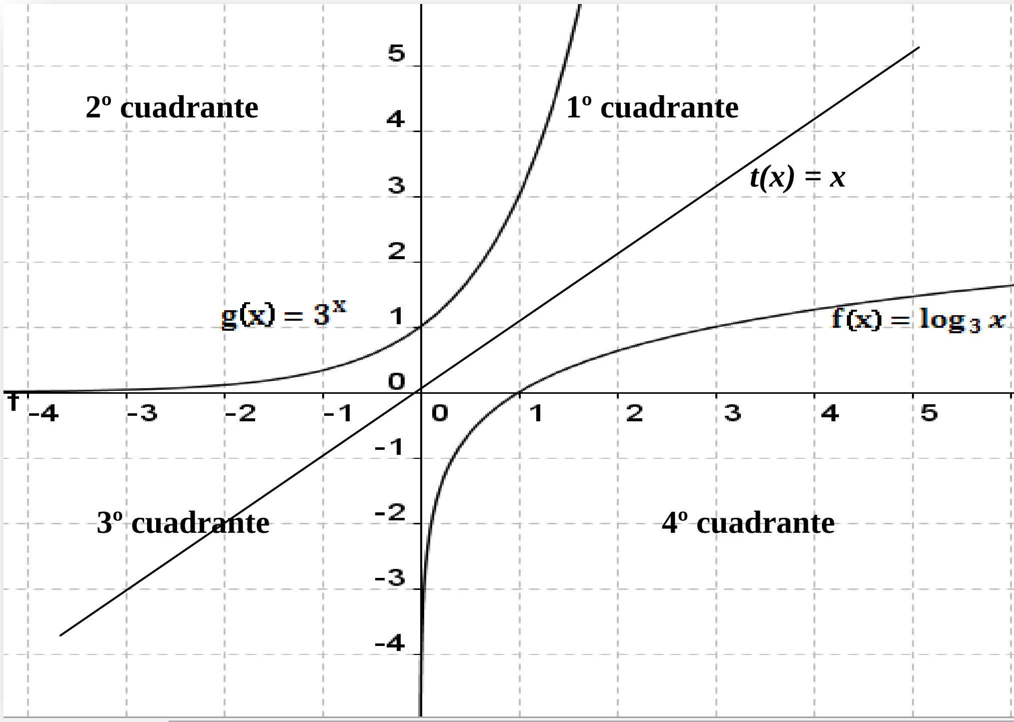
Por lo tanto,

$$\boldsymbol{recf} = \mathbb{R}$$

En el cuarto ítem se espera que los estudiantes utilicen la tabla de valores construida en el primer ítem como herramienta para construir el grafico de la función f. Un esbozo del grafico esperado es el siguiente:



Pregunta Nº4:



Según lo expresado en el gráfico, responda:

i. **Determine el dominio y recorrido de *f(x)*.**
ii. **Determine el dominio y recorrido de *g(x)*.**
iii. **¿Existe alguna relación entre *f(x)* y *g(x)*?Justifique**
iv. **¿Qué acción cumple la función *t(x)* en el grafico? Explique**

El objetivo de esta pregunta es saber si la comunidad didáctica investigada logra interpretar información expresada en gráficos y establecer relaciones entre conceptos matemáticos ya vistos con anterioridad como la función lineal, función logaritmo y transformaciones isométricas (simetría). Se considera también lo expresado por Duval, quien afirma que los cambios de registros de representación de un objeto matemático propician un aprendizaje más significativo. En ese sentido, proponer actividades donde los alumnos deban aplicar el concepto.

En una primera instancia, se espera que los de estudiantes que participan en la investigación, apliquen conocimientos y procedimientos análogos a los realizados en el ejercicio anterior. Para determinar el dominio de las funciones f y g se espera que lo deduzcan utilizando la visualización del grafico. Así resulta sencillo deducir que el dominio de la función f es:

$$\boldsymbol{dom f} =]\mathbf{0}, \infty[$$

De la misma manera, es decir, utilizando la visualización del grafico, se logra deducir que el dominio de la función g es:

$$\boldsymbol{domg} = \mathbb{R}$$

Por otra parte, en el segundo ítem, se esperan procedimientos parecidos a los realizados para determinar el recorrido de las funciones f y g. Así, el recorrido de la función f es:

$$\boldsymbol{recf} = \mathbb{R}$$

De la misma manera, el recorrido de la función g es:

$$\boldsymbol{recg} =]\mathbf{0}, \infty[$$

En el tercer ítem, se espera que los estudiantes deduzcan que la relación que existe entre ambas funciones es que una es la función inversa de la otra, es decir.

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{log_3}\, \boldsymbol{x} \ \ es\ la\ funcion\ inversa\ de\ \ \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{3^x}, \text{ y viceversa}$$

Finalmente, en el cuarto ítem, se espera que los alumnos utilicen sus habilidades desarrolladas en relación al concepto de transformaciones isométricas para solucionar la situación. En particular, se espera que los estudiantes visualicen y deduzcan desde el grafico que la función ***t(x) = x*** *actúa como eje de simetría en la reflexión de las funciones f y g.*

El proceso de aplicación del cuestionario se llevó a cabo el día *viernes 13 de abril del año 2012*, aproximadamente cinco meses después de haberse realizado las observaciones de clases (entre los cuales se consideran dos meses de vacaciones de verano). Esto ocurre por motivos correspondientes al cierre del 2º semestre del año 2011, movilizaciones estudiantiles del mismo año y la disponibilidad de tiempo – espacio de la profesora según la planificación de los contenidos a enseñar en el 1º semestre del año 2012.

En relación a la implementación del cuestionario, como se mencionó anteriormente, se llevó a cabo el día viernes 13 de abril de 2012, en el intervalo de tiempo comprendido entre las 10:30 y 12:00 Hrs. En un comienzo, se procedió a retirar del aula a los seis alumnos participantes de la investigación, para dirigirlos a una sala contigua totalmente vacía, preparada especialmente para resolver el cuestionario. Desde un principio, se destaca la disposición y el compromiso por parte de los estudiantes por participar y cooperar de la investigación. Durante el desarrollo del cuestionario, se destaca tranquilidad, silencio y respeto de cada uno de ellos en la resolución de este. El primero/a en concluir la prueba, lo hizo 35 minutos después del inicio de esta, mientras que el ultimo alumno en entregar, lo hizo 55 minutos después del inicio de la prueba, lo que implica una utilización de 60 minutos en total para la realización completa del cuestionario. Los 30 minutos restantes, se utilizaron para llevar a cabo la resolución de una encuesta.

3.2.3. Encuesta

La siguiente encuesta se ha diseñado con el afán de conocer y analizar las creencias de los alumnos sobre ellos mismos, es decir, conocer los niveles de auto-eficacia, las atribuciones, la autonomía y el control que estos experimentan al enfrentarse a situaciones que involucran al concepto de los logaritmos. Obviamente, se espera que estos factores se relacionen directamente con su rendimiento en el cuestionario realizado anteriormente en relación al mismo concepto, corroborando la importancia que tienen estas creencias en el desarrollo de habilidades y destrezas.

Esta encuesta consta de nueve preguntas, de las cuales cinco están relacionadas con el concepto de auto-eficacia, dos están relacionadas con los conceptos de autonomía y control, y por último, dos preguntas están relacionadas con el concepto de atribución, todas diseñadas con el fin de identificar las creencias de cada uno de los estudiantes respecto al concepto de los logaritmos. Cabe mencionar, que las preguntas Nº 1, 2, 3, 4, y 7, tienen tres tipos de respuestas, las cuales están relacionadas con el nivel de auto-eficacia por alumno y que apuntan a clasificarlas según nivel alto, medio y bajo respectivamente. De estas cinco preguntas relacionadas al concepto de auto-eficacia se considera lo siguiente:

- ✓ Si un estudiante presenta 4 o 5 respuestas que muestren una tendencia positiva en el desarrollo de su auto-eficacia en relación a logaritmos, entonces se afirma que este posee un *nivel alto de auto-eficacia*. Esto indica que su juicio sobre su propia capacidad es *mayoritariamente satisfactorio*

- ✓ Si un estudiante presenta 3 respuestas que muestran una tendencia positiva en el desarrollo de su auto-eficacia en relación a logaritmos, entonces se afirma que este posee un *nivel medio de auto-eficacia*. Esto indica que el juicio sobre su propia capacidad es *medianamente satisfactorio*

- ✓ Si un estudiante presenta 1 o 2 respuestas que muestran una tendencia positiva en el desarrollo de su auto-eficacia en relación a logaritmos, entonces se afirma que este posee un *nivel bajo de auto-eficacia*. Esto indica que el juicio sobre su propia capacidad es *poco satisfactorio*

A continuación se presentan las preguntas a aplicar:

1. **Cuando la profesora le presentó el concepto de los logaritmos, Ud.:**

a) *Se sintió capaz para lograr este nuevo desafío*
b) *Sintió que este nuevo desafío era muy difícil de lograr para Ud. en comparación otros que ha tenido*
c) *Se sintió incapaz para lograr este nuevo desafío*
d) *No sabe*

El objetivo de esta pregunta es conocer cuál es el nivel de auto-eficacia de cada alumno por segmento, comprendiendo así como se percibe cada alumno a sí mismo.

2. **Hipotéticamente hablando, cuando Ud. obtiene un mal resultado en una evaluación (tareas, ejercicios y/o pruebas) de logaritmos, su reacción en la siguiente evaluación es:**

a) No esforzarse, ya que su rendimiento de todas formas será deficiente.
b) Esforzarse aún más que la vez anterior para obtener un mejor rendimiento.
c) Pedir ayuda a un/a compañero/a que Ud. considere más capaz en la materia.
d) No sabe

El objetivo de esta pregunta es conocer la relación que ejerce el alumno/a entre su perseverancia y dedicación a la tarea con el rendimiento, además de saber el nivel de auto-eficacia que posee.

3. Respecto de aprender el procedimiento para calcular, por ejemplo, $\log_7 343$ Ud. considera que:

a) Logró aprender el procedimiento realizándolo solo
b) Logró aprender el procedimiento observando a otros llevarlo a cabo
c) No lo aprendió
d) No sabe

El objetivo de esta pregunta es conocer el tipo de aprendizaje que tienen los alumnos. Según el sustento teórico, el aprendizaje tiene lugar de dos maneras: el aprendizaje activo, el cual se produce realizando la tarea, y el aprendizaje vicario el cual se produce observando a otros realizar la tarea. Ambos tipos de aprendizaje son muy importantes, dado que, el aprendizaje activo capacita a las personas para desarrollar el conocimiento procedimental básico que se necesita para llevar a cabo una tarea, mientras que el aprendizaje vicario permite observar los detalles sutiles de la actuación experta mucho antes de que seamos capaces de conseguirla. Además de conocer el nivel de auto-eficacia de cada alumno.

4. Cuando se siente incapaz de realizar un ejercicio y/o tarea relacionada con los logaritmos y una persona de elevado conocimiento respecto al tema, ya sea profesor o compañero, le dice que es inteligente y que es capaz de realizar dicha tarea Ud.:

a) Cambia de parecer y realiza dicha tarea satisfactoriamente
b) No cambia de parecer, por lo que no realiza la tarea.
c) Pregunta a su profesor o compañero en reiteradas ocasiones hasta resolverlo completamente.
d) No sabe.

El objetivo de la pregunta es, conocer el nivel de seguridad que tiene el alumno y los factores ambientales que influyen en las decisiones de dicho alumno para afrontar la tarea y/o ejercicios, ya que el sustento teórico afirma que la persuasión verbal puede facilitar que se emprenda una tarea de gran dificultad, y así conocer su nivel de auto-eficacia.

5. Ud. considera que sus logros, éxitos o fracasos sobre un ejercicio de logaritmos depende de: (si es posible escoja más de una alternativa)

a) Un aumento o disminución de esfuerzo por realizar el ejercicio
b) Dificultad del ejercicio (su éxito o fracaso depende del ejercicio en cuestión)
c) La perseverancia por resolver el ejercicio
d) La ayuda que reciba de compañeros o el profesor
e) La capacidad para las matemáticas y en particular para logaritmos
f) El conocimiento sobre logaritmos
g) La suerte
h) No Sabe

El objetivo de las pregunta es saber a que atribuyen los alumnos sus éxitos o fracasos en una tarea específica. Según el sustento teórico, existen 3 dimensiones causales de la teoría de la atribución: locus de control, que define las causas de los resultados a factores internos o externos a la persona. La estabilidad se relaciona con las expectativas de éxito de la persona, éxito que puede definirse a causas relativamente estables como por ejemplo la capacidad; o inestables como por ejemplo, el esfuerzo. La controlabilidad o grado de control el cual se relaciona con causas controlables o incontrolables del éxito en la tarea, como por ejemplo el esfuerzo y la suerte respectivamente. Como consecuencia a la interpretación de los resultados, la persona puede emitir, según sus éxitos o fracasos, respuestas afectivas, como por ejemplo emociones y sentimientos de alegría, gratitud o ira y/o conductuales como por ejemplo mayor o menor esfuerzo, dedicación o deserción a la tarea. Además dos causas diferentes pueden tener dos dimensiones comunes y diferir en la tercera.

6. Cuando fracasa en una tarea y/o ejercicio de logaritmos Ud. cree que se debe a*:*

a) La falta de esfuerzo por realizar la tarea y/o ejercicios.
b) La responsabilidad no es suya, es del profesor por enseñar mal.
c) A la escaza capacidad para realizar la tarea y/o ejercicios.
d) No sabe

El objetivo de esta pregunta es saber a que atribuyen los alumnos sus fracasos ante una tarea de logaritmos. Según el sustento teórico, las personas que tienden a atribuir sus fracasos más al poco esfuerzo que a la escasa capacidad, se les considera personas auto-eficaces, mientras que las personas de baja eficacia atribuyen sus fracasos a la escasa capacidad.

7. Cuando fracasa en una tarea y/o ejercicio de logaritmos Ud.:

a) Desiste de realizar tareas y/o ejercicios posteriores
b) Persevera para obtener mejores resultados en las tareas y/o ejercicios siguientes.
c) No sabe

El objetivo de la pregunta es saber la reacción que tiene los alumnos ante un fracaso determinado, ya que el sustento teórico nos dice que al fracasar en determinada tarea, el *alumno puede experimentar sensaciones negativas y desistir de realizar tareas posteriores, o perseverar y esforzarse más en un futuro.*

8. Ud. realiza las tareas y ejercicios de logaritmos por:

a) Iniciativa propia, un deseo y satisfacción por aprender logaritmos
b) Obligación y presión del profesor
c) Un premio o recompensa (por ejemplo una nota)
d) Una amenaza o castigo
e) No sabe

El objetivo de esta pregunta es saber qué tipo de motivación tiene el alumno para resolver una tarea de logaritmos. Según el sustento teórico, las personas tienen una motivación intrínseca es decir, solucionan problemas de logaritmo porque les interesas, sin que los haya impuesto el profesor. Mientras que las personas con una motivación extrínseca, realizan una tarea para obtener consecuencias premiadas externamente, como por ejemplo evaluación, dinero, etc.

9. Al enfrentar la siguiente expresión, "Resuelva la siguiente ecuación logarítmica $\log_x 64 = 6$" Ud.:

a) Entiende claramente el procedimiento y el sentido del ejercicio
b) Entiende vagamente el procedimiento y el sentido del ejercicio
c) No entiende el procedimiento y el sentido del ejercicio
d) No sabe

El objetivo de esta pregunta es averiguar si los alumnos comprenden el procedimiento a realizar y el sentido de la pregunta. Según el sustento teórico, las tareas con objetivos poco claros o poco comprendidos por los alumnos, limitan la posibilidad de crear una motivación intrínseca en los alumnos.

En relación a la implementación de la encuesta, se realizó en el intervalo de tiempo comprendido entre las 11:20 y 11:55 Hrs., cinco minutos después del término de la aplicación del cuestionario. Cabe mencionar que se entregó la información e instrucciones pertinentes y necesarias para la resolución correcta y ordenada de la encuesta.

Finalmente, se destaca por sobre todo, la buena disposición y el compromiso de los estudiantes por cooperar de la investigación y de conocer prontamente los resultados de la encuesta y el cuestionario, evidenciado en la constante necesidad de saber cuándo estarían sus resultados.

El análisis detallado de la información obtenida a través de la encuesta y cuestionario, se realizará en función de las teorías que sustentan esta investigación. En relación al Tratamiento, se analizaran las sesiones realizada por la profesora según la *Teoría de las Tendencias Didácticas expresadas en el Modelo didáctico* de Contreras y la *Teoría de los Registros de Representación* de Raymond Duval. En relación con la encuesta, se analizarán las respuestas de cada estudiante según la *Teoría socio-cognitiva del aprendizaje de Bandura, Teoría de la atribución y* el concepto de *autonomía y control*. Finalmente, el análisis de las respuestas de los estudiantes al cuestionario se realizará principalmente desde la mirada específica de la *disciplina matemática que sustenta el surgimiento, la construcción del concepto de los logaritmos y su representación*. Además, se consideran en este análisis los ejemplos y ejercicios relacionados con el concepto que usados por la profesora en cada una de las sesiones y el material didáctico utilizado por ella.

CAPITULO 4: ANALISIS DE LOS RESULTADOS

A continuación, con el fin de transparentar los procesos de recolección de datos se realiza un análisis profundo de lo registrado en la observación de las clases desarrolladas por la profesora y lo recopilado en la encuesta y cuestionario realizado. En relación a estos últimos, cabe mencionar, que los resultados fueron organizados por alumno, mostrando en cada uno el análisis correspondiente a la encuesta y cuestionario.

4.1. Tratamiento

En este apartado se exponen los resultados obtenidos en el análisis de la grabación y observación de clases dictadas por la profesora, realizado con base en la teoría de la *auto-eficacia, atribuciones, autonomía y control en el aula*, considerando las *tendencias didácticas* de Contreras y los indicadores de cada una: *la metodología, el enfoque, los procesos de enseñanza, los registros de representación y los ejercicios*.

4.1.1. Auto eficacia, atribuciones y autonomía y control en el aula

Como análisis de la observación de las clases realizadas por la profesora en relación al concepto de los logaritmos, se responderá detalladamente cada una de las preguntas diseñadas, previamente sustentadas:

a) ¿El docente indicó explícitamente, los objetivos de aprendizaje en cada clase?

La profesora al comienzo de la primera clase, escribió en la parte superior izquierda de la pizarra el siguiente objetivo:

- *"Comprender la operatoria logarítmica, aplicando los conceptos de potencias y raíces" Además, la profesora escribe en pizarra bajo el objetivo "Guía de trabajos"*

Al comienzo de la segunda sesión, la profesora escribe el siguiente objetivo:

- *"Comprender y aplicar las propiedades de los logaritmos", bajo el objetivo planteado escribe "Guía de trabajos"*

Al comienzo de la tercera y última sesión, la profesora escribe el siguiente objetivo:

- *"Comprender y aplicar las propiedades de los logaritmos. Resolver situaciones que involucran funciones logarítmicas", bajo el objetivo planteado escribe "Guía de trabajos"*

b) ¿El docente explicó la importancia y el sentido de aprender el concepto de logaritmos?

No se observa ningún tipo de explicación, recordatorio, resumen ni comentario en todas las clases observadas por parte de la profesora de la importancia y necesidad que tiene para los alumnos, aprender el concepto de logaritmos.

c) ¿Cómo definió el docente el concepto de los logaritmos y qué relación estableció entre este concepto con el de potencias y raíces?

Al inicio de la primera clase, (inmediatamente después de los objetivos de la clase) la profesora escribe en pizarra el título "Logaritmos" y les dice a los alumnos "los logaritmos es el contenido que vamos a ver, que los logaritmos es una sucesión que viene así, potencias, raíces y logaritmos. Los logaritmos son parientes de las potencias y de las raíces, porque el objetivo de la unidad es comprender la operatoria logarítmica aplicando el concepto de potencias y raíces", dando así, una primera presentación general (verbal) del concepto de logaritmos y de la relación entre potencias, raíces y logaritmos.

Luego, la profesora propone una primera guía de ejercicios, la cual consiste en aplicar conocimientos previos, determinando el valor de la incógnita x, tanto en potencias como en raíces. Los ejercicios iban cambiando la posición de la incógnita ya sea como base, como exponente o como resultado en potencias, mientras que en raíces la utilizaba como índice de la raíz, argumento o resultado, acercándose paulatinamente a una primera relación, matemáticamente implícita, del concepto de logaritmos con potencias y raíces.

8) $3^x = 9$ 9) $10^x = 1.000$ 10) $x^{-4} = 10.000$ 11) $8^3 = x$ 12) $6^x = \frac{1}{36}$ 13) $9^{-x} = 81$

*Estos ejercicios fueron resueltos en pizarra por la profesora con participación de los alumnos, al cabo de los primeros 10 ejercicios, la profesora ofreció un tiempo adecuado para que los alumnos intentaran resolver los ejercicios restantes. Avanzada la clase, al término de la resolución en pizarra de la primera guía de ejercicios, la profesora presenta formalmente el concepto de logaritmos de esta forma: "Logaritmo es una expresión que se escribe así: lg logaritmo, en base a. b se llama resultado, y esto se llama c que es el exponente, entonces vamos a poner "**a**" elevado a "**c**" es igual a "**b**"". Cabe mencionar que, mientras la profesora definía verbalmente el concepto de logaritmo, escribía lo siguiente en pizarra:*

$$\boxed{\mathbf{lg}_a\, b = c \;\rightarrow\; a^c = b}$$

Dando la primera relación matemática entre potencias y logaritmos. En relación a esto último, la profesora utiliza solo lenguaje algebraico como representación formal del *concepto de logaritmos. No hubo construcción de tablas numéricas a modo de introducción al origen del concepto, tampoco proporciona a los alumnos en lenguaje natural la definición del concepto, lo que limita una comprensión y aprendizaje significativo del objeto matemático. Tampoco se visualiza a que conjunto numérico pertenecen los elementos a, b y c representados en la expresión, lo cual indica que no existe restricción alguna para tales elementos. No se visualiza alguna explicación sobre el significado del símbolo* $\rightarrow$ *en la relación, más aún, no se comprueba si los alumnos conocen el significado del símbolo, como representación general en el lenguaje matemático. Luego, oficializa matemáticamente la relación entre potencias, raíces y logaritmos de esta manera:"o* ***a*** *es igual a la raíz* ***c*** *de* ***b****"*

$$\boxed{\begin{array}{c} \lg_a b = c \rightarrow a^c = b \\ a = \sqrt[c]{b} \end{array}}$$

En esta situación, la profesora no culmina la secuencia relacionando las potencias con raíces, demostrando que asume conocimiento por parte de los alumnos de tal relación, lo cual puede limitar la comprensión de la secuencia en los alumnos. Nuevamente no se restringe el conjunto de los elementos involucrados, se asume que los alumnos entienden que, por ejemplo *b* debe ser un valor mayor que cero (b > 0).

d) ¿El docente ejemplificó con hechos cotidianos y familiares al momento de enseñar logaritmos a los alumnos?

Según el análisis realizado a la observación de cada clase, en la primera clase la profesora no utiliza ejemplos de la vida cotidiana, tampoco ejemplos relacionados con el quehacer diario de los alumnos al momento de introducir el concepto de logaritmos. Posteriormente, en las siguientes clases, tampoco se visualizan ejemplos.

e) ¿El docente utilizó diferentes materiales curriculares (guías de ejercicios, texto del estudiante, etc.) para el objetivo de cada la clase?

La profesora utilizo guías de ejercicios relacionadas con:

- *Conocimientos previos en potencias y raíces,*
- *Una breve reseña histórica relacionada con logaritmos, más una explicación del concepto y la relación entre potencias, raíces y logaritmos y ejercicios ligados al cálculo de logaritmos.*
- *Guía de trabajos que involucran la aplicación de las propiedades de logaritmos (Véase* ***anexo Nº1*** *guías presentadas por la profesora)*

f) ¿El docente realizaba los procedimientos completos para resolver el primer ejercicio de cada concepto nuevo?

Claramente. La profesora inmediatamente después de definir el concepto de logaritmos resolvió los primeros dos ejercicios de la segunda guía entregada mientras los alumnos observaban, los cuales son:

1) $\log_2 64 = x$ 2) $\log_9 729 = x$

$\rightarrow 2^x = 64$ $9^x = 729$

x = 6 *x= 3*

Luego, en la segunda sesión la profesora después de definir y presentar cada una de las propiedades de logaritmos, resolvió los tres primeros ejercicios mientras observaban los estudiantes, los cuales son:

(1) $\mathbf{\log_2(8 * 32) =}$

$\rightarrow \mathbf{\log_2 8 + \log_2 32}$
$\rightarrow \mathbf{\log_2 2^3 + \log_2 2^5}$
$\rightarrow \mathbf{3 * \log_2 2 + 5 * \log_2 2}$
$\rightarrow \mathbf{3 + 5 = 8}$

(2) $\mathbf{\log_5(25 * 125) =}$

$\rightarrow \mathbf{\log_5 25 + \log_5 125}$
$\rightarrow \mathbf{\log_5 5^2 + \log_5 5^3}$
$\rightarrow \mathbf{2 * \log_5 5 + 3 * \log_5 5}$
$\rightarrow \mathbf{2 + 3 = 5}$

g) ¿El docente dio tiempo para que los alumnos realizaran las actividades, para luego revisarlas en conjunto con los alumnos?

La profesora inmediatamente después de resolver los dos primeros ejercicios de cada guía relacionada con el concepto de logaritmos, dio tiempo suficiente (alrededor de 15 minutos) para que los alumnos resolvieran los ejercicios siguientes (en parejas o en grupo). En este periodo de tiempo, se visualizó a grupos dispersos de alumnos resolviendo los ejercicios sin mayores dificultades, sin embargo, hubo algunos grupos mínimos que no resolvieron los ejercicios, en tal caso, se ignoran las razones que motivaron el hecho. Luego, una vez finalizado el tiempo designado para el trabajo de los alumnos, la profesora corrigió en pizarra los ejercicios para todo el curso.

h) ¿El docente dio el espacio necesario para aclarar las dudas pertinentes de los alumnos?

En los primeros diez ejercicios relacionados con los conceptos de potencias y raíces, de la primera guía desarrollados por la profesora en pizarra y con participación de un pequeño número de alumnos, no hubo pausa para preguntar si algún alumno no había comprendido el desarrollo de los ejercicios, y tampoco ningún alumno le expresó a la profesora que no había entendido alguno de los doce ejercicios desarrollados. Por lo que la profesora continuó resolviendo los ejercicios de la guía entregada, en pizarra. A continuación algunos ejemplos de los doce ejercicios escritos y desarrollados en pizarra:

1) $7^x = 343$

$\rightarrow 7^x = 7^3$

$7^3 = 343$

$x = 3$

Sin embargo, desde el ejercicio once al dieciséis, la profesora dio algunos minutos para que los alumnos intentaran realizarlos por ellos mismos, individualmente o en pareja. Mientras tanto, la profesora se acercó a los alumnos que le habían pedido que explicara cómo resolver algunos ejercicios en particular que no lograban hacer, puesto que no comprendían como realizarlos. A continuación algunos ejemplos de los ejercicios dados por la profesora para desarrollarlos los alumnos:

15) $\frac{2}{5}^{-3} = \frac{125}{8}$

16) $\frac{7}{6}^{0} = 1$

En un análisis en relación a los ejercicios planteados en la primera guía por la profesora, se valora el hecho de que utiliza potencias con base tanto entera como fraccionaria, además de exponentes enteros, para reforzar y recordar conocimientos previos

En el desarrollo de la segunda guía de ejercicios, relacionada con el concepto de logaritmos, la profesora fue aclarando dudas individualmente (puesto por puesto) a los alumnos que necesitaban de su ayuda, este proceso duró aproximadamente 13 minutos de la clase, luego algunos alumnos fueron escribiendo en pizarra los resultados de cada uno de los ejercicios de la segunda guía sin intervención de la profesora, es decir, no hubo corrección en pizarra de los ejercicios desarrollados por los alumnos.

i) ¿Hubo una retroalimentación por parte del docente y/o los alumnos en los ejercicios planteados en cada clase?

Según lo observado en cada clase, en un primer momento, los ejercicios desarrollados por la profesora, tanto de la primera, segunda y tercera guía fueron explicados en su totalidad. Sin embargo, los ejercicios que fueron desarrollados por los alumnos sin ayuda de la profesora, no fueron corregidos ni hubo detención en realizar alcances sobre los ejercicios de la primera, segunda ni tercera guía de ejercicios, solo salieron a la pizarra algunos alumnos a copiar los procedimientos que propiamente lograron en cada ejercicios, pero no existió corrección por parte de la docente por lo expuesto en pizarra, lo que permite concluir que no se vio una retroalimentación por parte de la profesora con los alumnos en conjunto.

j) ¿El docente hizo hincapié en errores comunes en torno a una actividad y/o al interior del aula?

Según lo observado en las clases, no se logran visualizar acciones relacionadas con hacer hincapié en errores o fenómenos que se hayan producido en el desarrollo de las actividades realizadas por los alumnos en cada clase

k) ¿El docente tenía una actitud positivamente persuasiva con sus alumnos, es decir los elogiaba de manera explícita al momento de dar una buena respuesta?

Sí. Este hecho se demuestra en lo ocurrido en el ejercicio 28 de la primera guía entregada en la primera clase, donde la profesora pregunta "¿a qué número, bien especial, le saco la raíz cuadrada y me da cinco sextos?

28) $\sqrt{x} = \frac{5}{6}$

$$x = \frac{25}{36}$$

Dos alumnos (compañeros de banco), responden correctamente la pregunta de la profesora y en respuesta a ello, esta los felicita por su respuesta dada, explícitamente les dice "muy bien, que bien, están de blanco, están derechitos" en su manera lúdica de felicitar a los alumnos.

Sin embargo, cabe mencionar que este es el único hecho evidente que se logra apreciar, en la resolución de la primera y segunda guía de ejercicios que propuso la profesora para el objetivo de esa clase.

.

l) ¿El docente realizó actividades en grupo o de a pares para construir por si solos un concepto o procedimiento?

En general, las actividades propuestas por la profesora (guía de ejercicios) fueron en función de aplicar el procedimiento para resolver ejercicios relacionados con potencias, raíces y propiedades de logaritmos, lo que responde a que no se presentan actividades de descubrimiento ni construcción de conceptos ni procedimientos relacionados con el concepto nuevo.

m) ¿El docente realizó un aumento progresivo en la dificultad de las actividades y/o ejercicios?

En relación a la primera guía, los ejercicios no tenían un orden establecido desde lo más sencillo hasta lo más complejo

1) $7^x = 343$ 2) $40^{-1} = x$ 3) $\frac{2^3}{3} = x$ 4) $\left(\frac{5}{6}\right)^{-2} = x$ 5) $x^3 = 729$ 6) $x^{-2} = 4$

8) $3^x = 9$ 9) $10^x = 1.000$ 10) $x^{-4} = 10.000$ 11) $8^3 = x$ 12) $6^x = \frac{1}{36}$

En la segunda guía de ejercicios, existe un mayor orden, pero la complejidad de los ejercicios no variaba en demasía. Sin embargo, se reconoce un aumento de dificultad desde una guía a otra guía. En la tercera y última guía planteada, también se logra apreciar un mayor orden en las dificultades de los ejercicios a medida de ir avanzando, además se reconoce una variabilidad de complejidad de ejercicios, más aún, se reconoce el uso del concepto de funciones para profundizar el aprendizaje de los logaritmos

n) ¿El docente perseveraba en explicar el concepto de los logaritmos o las actividades planteadas ligadas a este, a los alumnos que tenían mayores dificultades o dudas para resolverlas?

No se visualiza una acción en donde la profesora se haya detenido por un tiempo considerablemente largo a explicar detalladamente a uno o más alumnos complicados con dudas sobre el cómo resolver algún ejercicio planteado en las guías. Se observa que los alumnos que presentaban la mayor cantidad de dudas no reaccionaron ante la indiferencia y el no acercamiento de la profesora para ayudarles, lo que produjo que conservaran esas dudas.

o) ¿Cuál fue la actitud respecto del control del clima y comportamiento de los alumnos en el aula por parte del docente?

Se visualizó una actitud tranquila por parte de la profesora, demostrando su experiencia en aula, lo que tuvo como resultado clases que se desarrollaron fluidamente, donde la profesora no tuvo que perder mucho tiempo para mantener un clima apropiado para el desarrollo tranquilo de cada clase. Sin duda, la mayor parte de las clases, la profesora se dedicó a resolver ejercicios en pizarra con participación de los alumnos.

p) ¿Se dio la oportunidad en que el docente ayudara a una reconversión de las atribuciones, por ejemplo de capacidad del alumno para resolver ejercicios ligados a logaritmos, hacia atribuciones ligadas al esfuerzo para resolverlos?

No se aprecia en las clases observadas alguna actitud ni dialogo en que la profesora ayudase a una reconversión de atribuciones de un alumno en particular, o del grupo en general.

q) ¿Cuál fue el enfoque de las palabras que el docente dio a sus alumnos para motivarlos a resolver los ejercicios?

Al revisar el desarrollo de cada clase, en la resolución de las tres guías de ejercicios planteadas, sobresale un hecho en la segunda parte de la guía numero dos relacionada con logaritmos de base diez, la profesora resuelve con ayuda de los alumnos los primeros dos ejercicios. Luego incita a los alumnos que resuelvan el resto de los ejercicios en forma individual de esta forma "Ahora, solito haga desde el 3, 4 hasta el 10 para que venga a la pizarra a hacerlo", este hecho demuestra que no hubo palabras significativas que motivaran a los alumnos a resolver los ejercicios planteados.

r) ¿El docente premió el esfuerzo y las capacidades en los alumnos durante cada clase?

No se visualiza ningún tipo de premio, regalo, anotación positiva, felicitaciones, agradecimientos o cualquier tipo de gratificación por el esfuerzo y capacidad de los alumnos durante las clases observadas.

s) ¿El docente dejó entrever a los alumnos que errar era parte del aprendizaje?

Según lo observado en cada clase, no se visualiza explícitamente una acción verbal por parte de la profesora hacia los alumnos que tengan relación con que el error es parte del aprendizaje. Más aún, tampoco se visualizan actividades propuestas con la intención de que los alumnos a través del descubrimiento y ensayo-error puedan lograr el aprendizaje del concepto de logaritmos. La profesora solo muestra en pizarra los procedimientos y resultados correctos de cada ejercicio planteado en las guías.

4.1.2. Tendencias Didácticas

Para poder esclarecer la tendencia didáctica de la profesora, se analizó cada indicador según su discurso y acciones en las clases observadas:

En una primera instancia, la profesora propone material curricular (guía de ejercicios) ligado a conocimientos previos relacionados con potencias y raíces, este inicio lo define *"como primer paso para comprender el contenido"* de los logaritmos. La docente resuelve los primeros ejercicios de la guía planteada en pizarra (imagen 1) junto con los alumnos, para luego darles un tiempo considerable para que los resuelvan por su cuenta, con lo cual, se pretende que el estudiante *resuelva los ejercicios aplicando conocimientos previos*. En relación a los registros utilizados para representar a las potencias y raíces, se recurre únicamente al *algebraico* para la explicación de los ejemplos, al igual que el resto de los ejercicios planteados en la guía.

1) $7^x = 343$ 2) $40^{-1} = x$ 3) $\frac{2^3}{3} = x$ 4) $\left(\frac{5}{6}\right)^{-2} = x$ 5) $x^3 = 729$ 6) $x^{-2} = 4$ 7) $a^{-3} = 125$

8) $3^x = 9$ 9) $10^x = 1.000$ 10) $x^4 = 10.000$ 11) $8^3 = x$ 12) $6^x = \frac{1}{36}$ 13) $9^{-x} = 81$

14) $11^x = \frac{1}{121}$ 15) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-x} = \frac{125}{8}$ 16) $\left(\frac{7}{6}\right)^x = 1$ 17) $2^x = \frac{1}{128}$ 18) $0,2^2 = x$ 19) $x^3 = 64$

Imagen 1

La profesora continúa con la misma metodología al momento de resolver ejemplos ligados al concepto de los logaritmos. Cuando presenta la segunda guía de ejercicios, en ese momento define formalmente, utilizando generalizaciones el concepto de los logaritmos (imagen 2), resuelve ejemplos aplicando definición y reglas, variando la posición de la incógnita x y enfatizando el uso de procedimiento parecidos a los utilizados en la resolución de la guía anterior, lo que implica una metodología de *ejercitación repetitiva* pero con mayores dificultades. En esta oportunidad, utiliza representaciones *algebraicas* para definir el concepto de los logaritmos, para relacionarlo con los conceptos de potencias y raíces y para resolver los ejemplos y ejercicios.

LOS LOGARITMOS

OBSERVACION......... Luego diremos que, una base, con un exponente y un resultado se podrían escribir relacionando estos términos de la siguiente manera….

Llegando a la definición de lo que significa una operatoria llamada **LOGARITMOS….**

$\log_a b = c$ **donde diremos que** $a^c = b$ **ó** $a = \sqrt[c]{b}$ **con** $a \neq 1$

Entonces podríamos decir que "a" elevado a quién se obtienen "b".

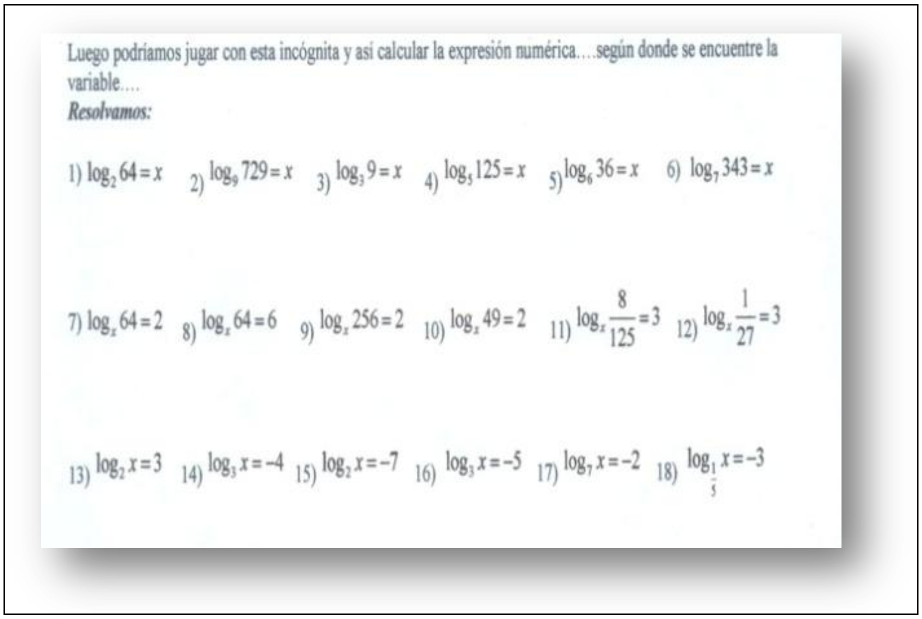
$$\log_a b = x \quad \Rightarrow \quad a^x = b$$

Luego podríamos jugar con esta incógnita y así calcular la expresión numérica….según donde se encuentre la variable….

Resolvamos:

Imagen 2

Los ejercicios correspondientes a la guía Nº 2 de ejercicios (imagen 3), tienen la finalidad de *consolidar los procedimientos* de los ejemplos, en los cuales, únicamente se utiliza la representación *algebraica*. A su vez, se observa en la guía Nº 3 de ejercicios (imagen 4) una serie de ejercicios que también tienen como objetivo *consolidar el aprendizaje* de los logaritmos a través de una *ejercitación repetitiva de procedimientos*.



Luego podríamos jugar con esta incógnita y así calcular la expresión numérica….según donde se encuentre la variable….

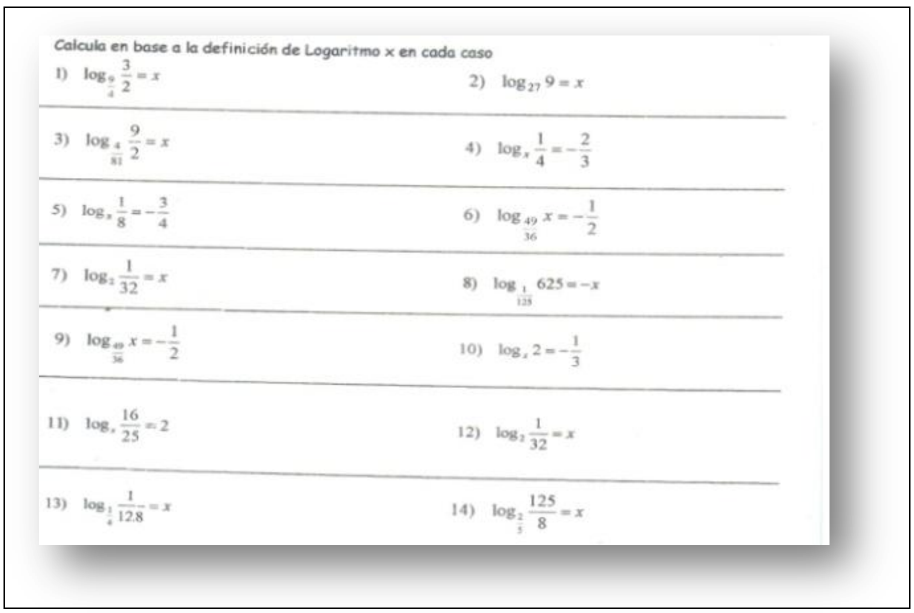
Resolvamos:

1) $\log_2 64 = x$ 2) $\log_9 729 = x$ 3) $\log_3 9 = x$ 4) $\log_5 125 = x$ 5) $\log_6 36 = x$ 6) $\log_7 343 = x$

7) $\log_x 64 = 2$ 8) $\log_x 64 = 6$ 9) $\log_x 256 = 2$ 10) $\log_x 49 = 2$ 11) $\log_x \frac{8}{125} = 3$ 12) $\log_x \frac{1}{27} = 3$

13) $\log_2 x = 3$ 14) $\log_3 x = -4$ 15) $\log_2 x = -7$ 16) $\log_3 x = -5$ 17) $\log_7 x = -2$ 18) $\log_{\frac{1}{5}} x = -3$

Imagen 3



Calcula en base a la definición de Logaritmo x en cada caso

1) $\log_{\frac{9}{4}} \frac{3}{2} = x$ 2) $\log_{27} 9 = x$

3) $\log_{\frac{4}{81}} \frac{9}{2} = x$ 4) $\log_x \frac{1}{4} = -\frac{2}{3}$

5) $\log_x \frac{1}{8} = -\frac{3}{4}$ 6) $\log_{\frac{49}{36}} x = -\frac{1}{2}$

7) $\log_2 \frac{1}{32} = x$ 8) $\log_{\frac{1}{125}} 625 = -x$

9) $\log_{\frac{49}{36}} x = -\frac{1}{2}$ 10) $\log_x 2 = -\frac{1}{3}$

11) $\log_x \frac{16}{25} = 2$ 12) $\log_2 \frac{1}{32} = x$

13) $\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{128} = x$ 14) $\log_{\frac{2}{5}} \frac{125}{8} = x$

Imagen 4

Asimismo, la profesional docente continúa utilizando una metodología constante ya usada en la resolución de guías anteriores al momento de resolver ejemplos ligados a la aplicación de las propiedades de los logaritmos. Al entregar a cada uno de los estudiantes la tercera guía de ejercicios, al mismo tiempo define formalmente, utilizando generalizaciones estas propiedades. Una vez presentadas a los estudiantes y escritas en pizarra estas propiedades, la profesora construye la demostración de la propiedad logarítmica $\boldsymbol{\log_a(b * c) = \log_a b + \log_a c}$, resuelve algunos ejemplos aplicando cada una de las propiedades definidas, enfatizando el uso de procedimientos realizados en los ejemplos para resolver los ejercicios presentados en la tercera guía, lo que implica una metodología de *ejercitación repetitiva* pero con un aumento en la dificultad de los ejercicios. En esta oportunidad, nuevamente utiliza representaciones *algebraicas* para definir las propiedades de los logaritmos, para construir ejemplos y resolver ejercicios.

Finalmente, la última parte de la tercera guía planteada a los estudiantes presenta ejercicios que involucran funciones logarítmicas, sin embargo, la profesora no define en ninguna de las sesiones observadas el concepto de función logarítmica, sino que utiliza como herramienta el concepto de función para profundizar el aprendizaje de los logaritmos. En esta ocasión, la profesora resuelve los dos primeros ejercicios que involucran funciones logarítmicas para que los alumnos utilizaran el procedimiento de cada ejercicio como modelo para resolver los ejercicios restantes, lo que implica una metodología de *ejercitación repetitiva* de cada actividad planteada.

Se tiene entonces que, la profesora desde un principio, emplea una metodología en la cual el aprendizaje se da por medio de *la ejercitación repetitiva* que consiste en resolver ejercicios relacionados a los logaritmos, propiedades logarítmicas y funciones logarítmicas, utilizando conocimientos previos ligados a potencias, raíces y funciones, con un *enfoque formal - memorístico*, que consiste en una adquisición del concepto de los logaritmos y sus propiedades. Además, recurre a un *proceso de enseñanza deductivo*, que consiste en seguir la estructura, definiciones y ejemplos, para introducir al estudiante en el estudio de los logaritmos y sus propiedades, y *consolidar* su aprendizaje a través de la resolución de ejercicios. En relación al uso de registros de representación para los logaritmos, la profesora utiliza en su mayoría registros *algebraicos* para resolver ejercicios, solo en el último ítem de la tercera guía de ejercicios planteadas propone ejercicios en donde los alumnos deben representar en forma gráfica algunas funciones logarítmicas. Asimismo, utiliza representaciones algebraicas para definir el concepto de los logaritmos y sus propiedades, además de la transformación de este registro para relacionar los conceptos de potencias, raíces y los logaritmos. En relación a los ejercicios planteados, estos fueron de *consolidación de conceptos*, es decir, con la finalidad *de poner en práctica* los procedimientos mostrados y consolidar este aprendizaje.

4.1.3. Conclusión

Según lo observado en cada sesión, se logra apreciar que la docente manifiesta explícitamente los objetivos de aprendizaje que se pretenden lograr en el desarrollo de la clase, presenta a cada uno de los alumnos una breve reseña histórica del concepto de los logaritmos, además, previo a definir el concepto, proporciona una guía de ejercicios para que los alumnos apliquen conocimientos previos y comprendan que lo aprendido anteriormente está ligado al nuevo concepto. Además, la profesora manifiesta en ocasiones una actitud positivamente persuasiva con sus alumnos, es decir, elogia de manera explícita a estudiantes al momento de dar una buena respuesta. A su vez, se logra apreciar un trabajo fluido de la docente, sin mayores interrupciones ni descontrol de los alumnos en las diferentes sesiones observadas. También, se logra visualizar que existen algunas situaciones en que la profesora aclara dudas relacionadas a los ejercicios planteados en las guías que involucran a los logaritmos, lo que permite deducir, considerando además su amplia experiencia en aula, que la profesora deja entrever una tendencia *media-alta en su nivel de auto-eficacia.*

En lo que concierne a promover el desarrollo de los niveles de auto-eficacia en relación a los logaritmos por medio del discurso de la profesora, se logran apreciar actitudes de la docente como por ejemplo, manifiesta explícitamente los objetivos de aprendizaje que se pretenden lograr en el desarrollo de la clase, presenta a cada uno de los alumnos una breve reseña histórica del concepto de los logaritmos, además, previo a definir el concepto, proporciona una guía de ejercicios para que los alumnos apliquen conocimientos previos y comprendan que lo aprendido anteriormente está ligado al nuevo concepto. Se aprecia que la docente define a los logaritmos desde una perspectiva donde manifiesta una relación matemática formal de las potencias con las raíces y los logaritmos demostradas mediante procedimientos algebraicos. Además, se visualizan momentos en los cuales existe un trabajo en equipo para resolver ejercicios y la participación de los alumnos en pizarra. Sin embargo, no manifiesta tendencias hacia la construcción de una definición formal del concepto en conjunto con los alumnos, solo construye la demostración de una de las propiedades de logaritmos, pero sin la participación de los alumnos, por lo que se considera una construcción netamente expositiva. Al mismo tiempo, no presenta explícitamente en su discurso un modelo cognitivo (necesidad de aprender) del concepto de los logaritmos para que los alumnos comprendieran la necesidad cierta y concreta de conocer y aprender el concepto. No se visualizan ejemplos ni situaciones de la vida cotidiana que involucren al concepto matemático para que los alumnos se familiaricen. Sin embargo, involucra material curricular como por ejemplo definiciones, guías de ejercicios, ejemplos de procedimientos para calcular logaritmos, resúmenes que proporcionan formulas, reseña histórica y relaciones con otros conceptos matemáticos como potencias, raíces y funciones, por lo que se puede concluir que según la teoría la profesora *manifiesta ocasionalmente algunas tendencias y actitudes que fomentan al desarrollo de un alto nivel de auto eficacia*.

Por otra parte, la profesora no manifiesta tendencias hacia una actitud persuasiva con los alumnos que demuestran desinterés y/o desanimo por no poder resolver ejercicios relacionados con los logaritmos, porque creen no tener la *capacidad* suficiente para realizarlos, lo que permite concluir que según la teoría, la profesora *no manifiesta acciones de reconversión de atribuciones desfavorables a favorables*, así los alumnos con atribuciones relacionadas, por ejemplo a la *capacidad* para con los logaritmos, verían mermada la posibilidad de modificar esa creencia a una más optimista. A su vez, no se observa ningún tipo de explicación, recordatorio, resumen ni comentario en todas las clases observadas por parte de la profesora de la importancia y necesidad que tiene para los alumnos, aprender el concepto de logaritmos. Asimismo, no se logra apreciar en las actividades planteadas, evaluaciones o discurso, algún tipo de premio y/o gratificación, observación o felicitaciones por parte de la profesora a algún alumno por realizar de buena forma una tarea o procedimiento, sin embargo, el planteamiento de objetivos puede de alguna manera propiciar un ambiente positivo para que exista dicha gratificación, lo que permite concluir que la docente *manifiesta mínimas actitudes que promueven un aumento del interés y motivación intrínseca de los alumnos por aprender y fomentar su autonomía,*

Finalmente, en relación a su tendencia didáctica para enseñar el concepto de los logaritmos, se observa que la profesora en un inicio, emplea una metodología en la cual, el aprendizaje se da por medio de *la ejercitación repetitiva* que consiste en resolver ejercicios relacionados con potencias y raíces, luego, para la enseñanza de los logaritmos, utiliza la *ejercitación repetitiva* de procedimientos y reglas, con un *enfoque formal - memorístico*, que consiste en una *adquisición del concepto* de los logaritmos y sus propiedades. Además, recurre a un *proceso de enseñanza deductivo*, que consiste en *seguir la estructura, definiciones y ejemplos* para introducir al estudiante en el estudio de los logaritmos, y *consolidar* su aprendizaje a través de la resolución de ejercicios. En relación a los ejercicios planteados, en general, estos fueron de *consolidación de conceptos*, es decir, tienen la finalidad *de poner en práctica* los procedimientos mostrados y *consolidar* este aprendizaje. Finalmente, la profesora maneja mayoritariamente el registro *algebraico* para resolver ejercicios, asimismo, utiliza representaciones algebraicas para definir, tanto el concepto de los logaritmos como el de sus propiedades, más aun, realiza transformaciones dentro del mismo registro para relacionar los conceptos de potencias, raíces y los logaritmos, sin embargo, se realizan conversiones desde el registro algebraico hacia el grafico para representar funciones logarítmicas, lo cual permite deducir que la profesora *transita ocasionalmente entre diferentes registros de representación*.

Considerando lo anterior, se concluye que el tratamiento dado a los logaritmos por la profesora corresponde a la tendencia *Tradicional- Tecnológica.*

Indicadores	**Metodología**	**Enfoque**	**Procesos**	**Representaciones semióticas**	**Ejercicios**	**Tendencia didáctica**
Tendencia	***Ejercitación reproductiva-repetitiva***	***Formal – memorístico***	***Deductivo***	***Algebraico – grafico***	***Consolidación***	***Tradicional-Tecnológica***

Tabla 3: *Tendencia didáctica de la profesora*

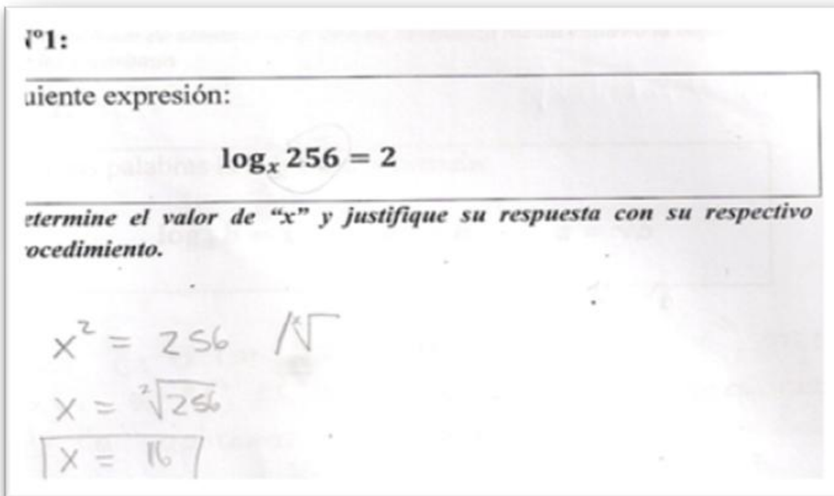
4.2. Cuestionario matemático y Encuesta

A continuación se presenta un análisis de las respuestas dadas por los alumnos participantes de la investigación a cada una de las preguntas planteadas tanto en el cuestionario matemático como en la encuesta:

4.2.1. Alumno A

Cuestionario matemático

- **Respuesta Nº1**



ºl:

uiente expresión:

$$\log_x 256 = 2$$

etermine el valor de "x" y justifique su respuesta con su respectivo ocedimiento.

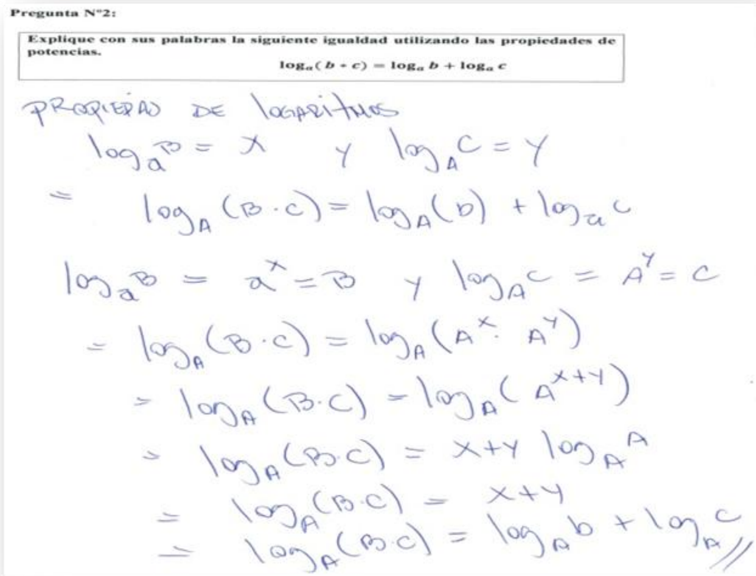
$x^2 = 256 \quad /\sqrt{\ }$

$x = \sqrt[2]{256}$

$\boxed{x = 16}$

Según lo expresado en la resolución del ejercicio, el alumno A realiza transformaciones dentro del mismo registro algebraico, aplica implícitamente la relación de la función cuadrática potencia con la respectiva función logaritmo. Luego, para resolver la ecuación, utiliza la función raíz cuadrada como un operador funcional. Finalmente, se evidencia que el alumno A *sabe resolver ejercicios relacionados con el concepto de los logaritmos*.

- **Repuesta Nº 2**



Pregunta N°2:

Explique con sus palabras la siguiente igualdad utilizando las propiedades de potencias.

$$\log_a(b*c) = \log_a b + \log_a c$$

PROPIEDAD DE logaritmos

$\log_a B = X \quad y \quad \log_A C = Y$

$= \log_A(B \cdot C) = \log_A(B) + \log_a C$

$\log_a B = a^X = B \quad y \quad \log_A C = A^Y = C$

$= \log_A(B \cdot C) = \log_A(A^X \cdot A^Y)$

$= \log_A(B \cdot C) = \log_A(A^{X+Y})$

$= \log_A(B \cdot C) = X+Y \log_A A$

$= \log_A(B \cdot C) = X+Y$

$= \log_A(B \cdot C) = \log_A b + \log_A c$ //

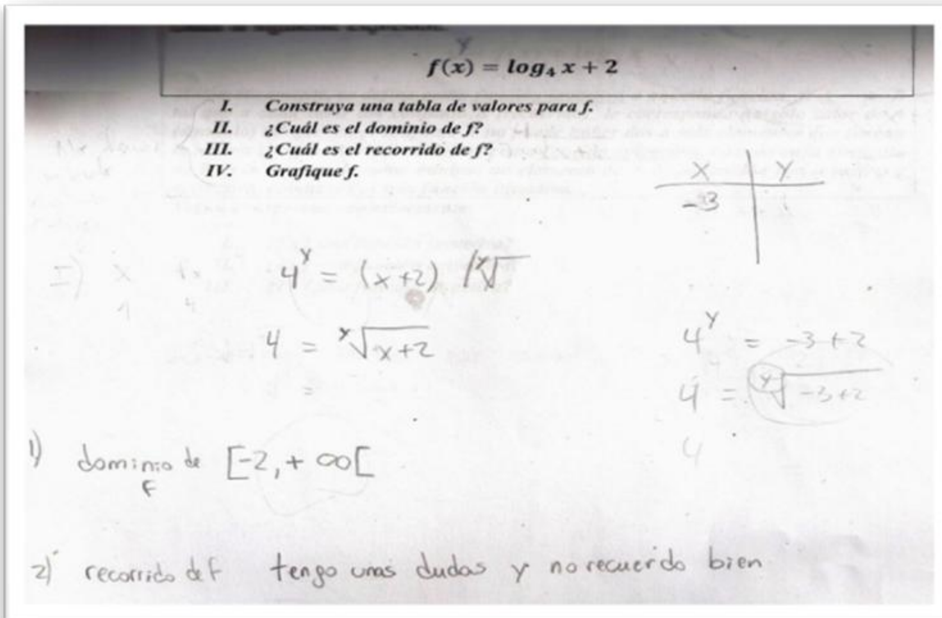
Según lo expresado en la resolución del ejercicio, el alumno A en una primera instancia define las funciones $\boldsymbol{log_a b = x, log_a c = y}$ para luego utilizar la relación de equivalencia entre la función potencia y la función logaritmo. En esta instancia, el alumno evidencia la habilidad para conjeturar una demostración usando el concepto básico de la función logaritmo. Luego, el estudiante emplea la relación de equivalencia expresada en el procedimiento:

$$\boldsymbol{\log_a b = x \leftrightarrow a^x = b}$$

$$\boldsymbol{\log_a c = y \leftrightarrow a^y = c}$$

Y lo reemplaza en el argumento del logaritmo del primer miembro de la igualdad, expresado de la forma $\boldsymbol{\log_a(b*c) = \log_a(a^x * a^y)}$. Luego, el alumno aplica la propiedad de multiplicación de potencias con igual base para reducir el logaritmo a la expresión $\boldsymbol{\log_a(a^{x+y})}$. Luego, aplica propiedad logarítmica donde el exponente del argumento del logaritmo en base a, ***(x + y)*** actúa como operador del logaritmo reduciendo la expresión a $\boldsymbol{(x+y) * \log_a a}$**.** Finalmente, el alumno aplica implícitamente la igualdad $\boldsymbol{\log_a a = 1}$ y reemplaza los valores iniciales *x* e *y* obteniendo el miembro derecho de la igualdad demostrando la propiedad logarítmica. Cabe mencionar que para articular sus procedimientos, el alumno utiliza el signo "=" para representar la implicancia en los procedimientos realizados. Este fenómeno, puede ser causa del escaso uso por parte del docente del lenguaje matemático básico en la articulación de procedimientos que justifiquen la solución de ejercicios planteados a los estudiantes. Por otro lado, el alumno utiliza solo lenguaje algebraico para representar sus argumentos y/o procedimientos, realizando transformaciones dentro del mismo registro algebraico, como por ejemplo representar desde la función logaritmo hacia la función potencia, lo que afirma que el alumno A *logra demostrar utilizando la función potencia a través de registros algebraicos la propiedad del "logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores".*

- **Respuesta Nº 3**



Según lo expresado en la resolución del ejercicio, en un principio, el alumno A intenta construir una tabla de valores, sin embargo, evidencia no lograr hacerlo. Realiza una transformación dentro del mismo registro algebraico, utiliza implícitamente la propiedad ***f(x) = y*** evidenciado en la expresión $\mathbf{4^y = (x+2)}$. Luego, relaciona logaritmos y potencias para expresar la función logarítmica original con su respectiva función exponencial. Sin embargo, previo a realizar esta transformación, no realizó operaciones en la igualdad para expresar la ecuación en términos de *y*:

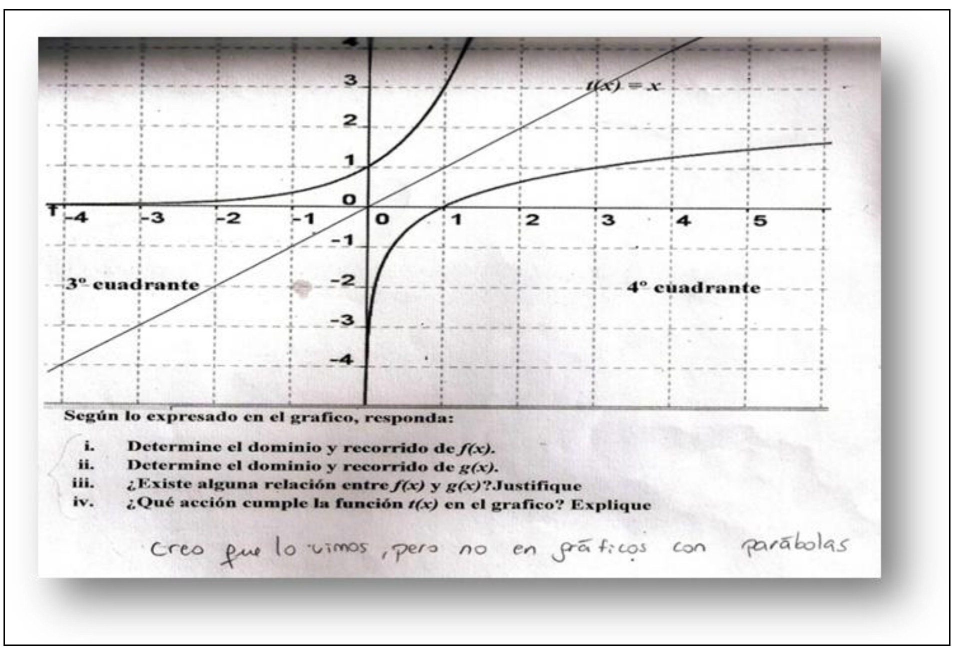
$$\mathbf{4^y = x + 2}$$

Lo anterior, es consecuencia de que el alumno confunde la expresión $\mathbf{\log_4 x + 2}$ con $\mathbf{\log_4(x+2)}$**.** Luego, consecuente de lo anterior, opera implícitamente en ambos lados de la igualdad por la respectiva raíz "y - esima" de $\mathbf{4^y}$ como técnica para relacionar la función potencia con su respectiva función logarítmica:

$$\mathbf{4 = \sqrt[y]{x+2}}$$

Al realizar el análisis de lo expresado anteriormente, el estudiante relaciona incorrectamente sus resultados con el dominio de la función f, debido a que, implícitamente deduce como dominio la restricción dada a la cantidad sub radical $\boldsymbol{x + 2 \geq 0}$ obteniendo el intervalo expresado y que es incorrecto. De esto se logra apreciar que el estudiante relaciona el concepto de desigualdad e intervalo con el dominio de la función. Asimismo, el alumno expresa tener dudas para encontrar el recorrido de la función f, lo cual es lógico dado que realiza procedimientos matemáticos incorrectos claves para poder determinarlo. Posible causa de lo anterior, es una “mecanización” en los procedimientos para determinar el dominio o recorrido por parte del estudiante, sin tener claridad del significado y el sentido de estos conceptos. Así, considerando lo expuesto anteriormente, es claro que el alumno A *presenta conocimientos relacionados con raíces.* Sin embargo, a pesar de los procedimientos realizados y considerando los fracasados intentos, el alumno A *evidencia escaso dominio de las funciones.* A su vez, en su intento por construir una tabla de valores para *x* e *y* fracasa dado que los procedimientos necesarios para construirla fueron incorrectos, lo que evidencia que el alumno A *no logra realizar conversiones desde registros algebraicos a registros numéricos de la función logarítmica dada*. De igual manera, no logra construir el grafico pedido, lo que demuestra que el alumno *no logra realizar conversiones desde registros algebraicos a registros gráficos de la función logarítmica dada*. En resumen, el alumno A *manifiesta conocimientos sobre el concepto de raíces,* sin embargo, *no evidencia conocimientos básicos sobre funciones, no logra relacionarlo con el concepto de los logaritmos, ni logra representar funciones logarítmicas a través de otros registros*.

- **Respuesta Nº 4**



Según lo expresado en la resolución del ejercicio, el alumno A, asocia erróneamente la gráfica de cada función logarítmica con la gráfica de parábolas. Es posible que este fenómeno sea de carácter visual, donde el estudiante relaciona estas graficas poco conocidas o tratadas con otras más conocidas curvas como son la gráfica de parábolas. El alumno no resuelve la actividad y claramente *no manifiesta los conocimientos para relacionar el concepto de los logaritmos con otros registros de representación* como lo es el lenguaje gráfico.

Encuesta

Las repuestas del alumno A, de cada pregunta de la encuesta, están resumidas en la siguiente tabla:

Preguntas	Orientación	Respuestas
Pregunta Nº 1	**Pregunta orientada al concepto de Auto-eficacia**	***Sintió que este nuevo desafío era muy difícil de lograr para Ud. en comparación a otros que ha tenido***
Pregunta Nº 2	**Pregunta orientada al concepto de Auto-eficacia**	***Pedir ayuda a un/a compañero/a que Ud. considere más capaz en la materia.***
Pregunta Nº 3	**Pregunta orientada al concepto de Auto-eficacia**	***Logró aprender el procedimiento observando a otros llevarlo a cabo***
Pregunta Nº 4	**Pregunta orientada al concepto de Auto-eficacia**	***Cambia de parecer y realiza dicha tarea satisfactoriamente***
Pregunta Nº 5	**Pregunta orientada al concepto de Atribución**	***Dificultad del ejercicio (su éxito o fracaso depende del ejercicio en cuestión)*** ***La capacidad para las matemáticas y en particular para logaritmos*** ***El conocimiento sobre logaritmos***
Pregunta Nº 6	**Pregunta orientada al concepto de Atribución**	***A la escasa capacidad para realizar la tarea y/o ejercicios.***
Pregunta Nº 7	**Pregunta orientada al concepto de Auto-eficacia**	***Persevera para obtener mejores resultados en las tareas y/o ejercicios siguientes.***
Pregunta Nº 8	**Pregunta orientada al concepto de Autonomía y control**	***No sabe***
Pregunta Nº 9	**Pregunta orientada al concepto de Autonomía y control**	***Entiende claramente el procedimiento y el sentido del ejercicio***

Conclusión

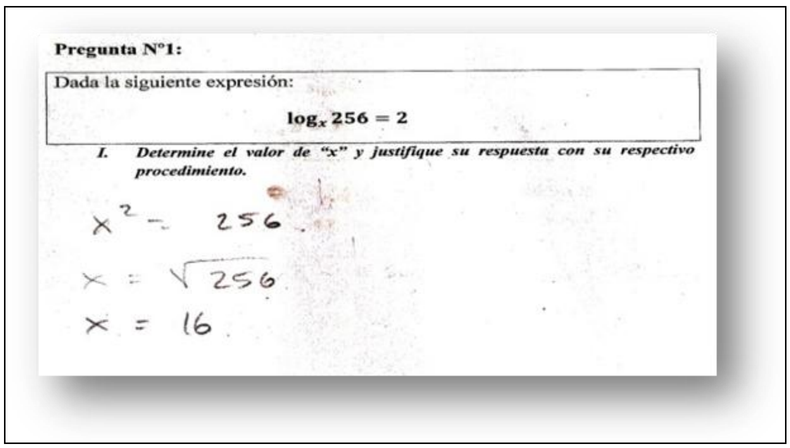
Según las respuestas del cuestionario y de la encuesta realizada en relación a las creencias que tiene el alumno A sobre sí mismo, se observa que, en relación a la teoría de la atribución, el alumno A, relaciona su proceso atributivo tanto con factores internos como externos; estables e inestables; controlables e incontrolables, pero cabe señalar que mayoritariamente su explicación causal es por factores ***internos-estables-incontrolables***, como por ejemplo la ***capacidad*** para resolver una tarea de los logaritmos. Además, el alumno A *no aclara que motivación posee* respecto de su aprendizaje para con los logaritmos. Finalmente, si se considera lo anteriormente descrito, y las respuestas relacionadas directamente con el concepto de auto-eficacia, el alumno A respondió 3 de 5 preguntas relacionadas al concepto, dejando entrever una tendencia hacia un nivel ***medio de***

auto-eficacia en los logaritmos, lo que significa que el juicio sobre su propia capacidad es ***medianamente satisfactorio*** respecto de estos, además posee un aprendizaje de tendencia ***vicario***, es decir logra adquirir los conocimientos observando a otros llevarlo a cabo. Esto se refleja en el rendimiento obtenido en el cuestionario, dado que, presenta desempeños óptimos en las dos primeras preguntas, sin embargo, en la tercera presenta un dominio parcial del ejercicio y finalmente, en la última pregunta no manifiesta los conocimientos necesarios para resolverlo. Se puede concluir que las creencias que tiene el alumno A sobre sí mismo en torno a los logaritmos, influye directamente en su rendimiento.

4.2.2 Alumno B

Cuestionario

- **Repuesta Nº 1**


Pregunta N°1:

Dada la siguiente expresión:

$$\log_x 256 = 2$$

I. Determine el valor de "x" y justifique su respuesta con su respectivo procedimiento.

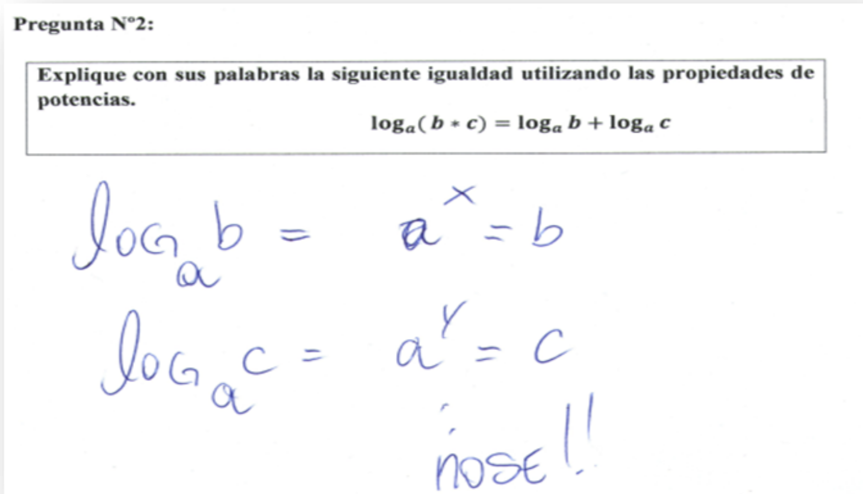
$x^2 = 256$

$x = \sqrt{256}$

$x = 16$

Según lo expresado en la resolución del ejercicio, el alumno B realiza transformaciones dentro del mismo registro algebraico, aplica implícitamente la relación de la función cuadrática potencia con la respectiva función logaritmo. Luego, para resolver la ecuación, utiliza la técnica para solucionar este tipo de expresiones, operando implícitamente, por la función raíz cuadrada, asumiendo finalmente que el valor de x es estrictamente positivo**.** Una causa de lo anterior, puede ser el escaso dominio de la propiedad matemática que se está utilizando, resultado quizás del precario significado y sentido que le da el docente al concepto de igualdad y sus propiedades. Finalmente, según lo expresado, el alumno B *sabe resolver ejercicios relacionados con el concepto de los logaritmos*.

- **Repuesta Nº 2**



Pregunta N°2:

Explique con sus palabras la siguiente igualdad utilizando las propiedades de potencias.

$$\log_a(b * c) = \log_a b + \log_a c$$

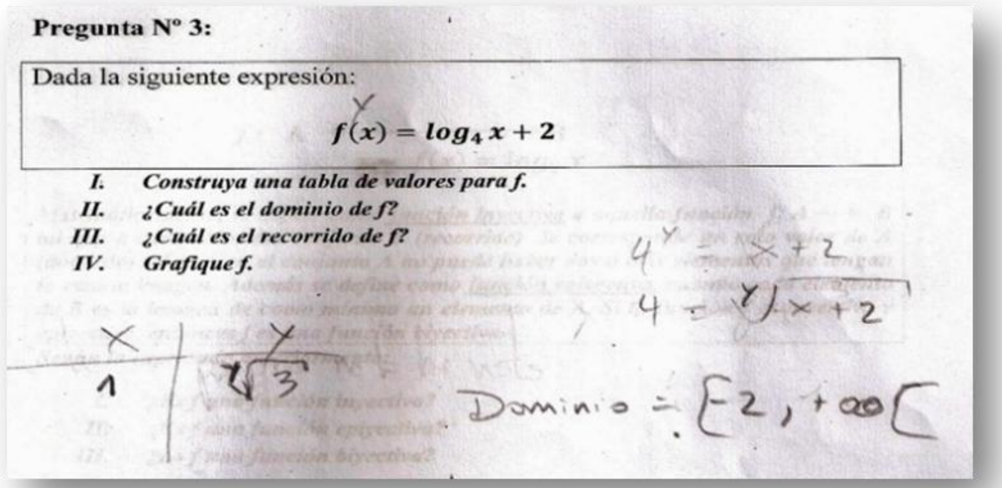
$\log_a b = a^x = b$

$\log_a c = a^y = c$

¡nose!!

Según lo expresado en la resolución del ejercicio, el alumno B logra identificar la relación de equivalencia entre la función potencia y la función logaritmo, sin embargo, expresa no saber cómo continuar la demostración. Causa de lo anterior, puede ser el escaso desarrollo de la habilidad para conjeturar demostraciones en el estudiante o el precario estimulo por parte del docente para desarrollar esta habilidad en sus estudiantes. Otra causa puede ser el leve conocimiento desarrollado por el estudiante sobre el concepto de logaritmo. Finalmente, *el alumno B no logra demostrar utilizando la función potencia a través de registros algebraicos la propiedad del "logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores".*

- **Respuesta Nº 3**


Pregunta Nº 3:

Dada la siguiente expresión:

$$f(x) = log_4 x + 2$$

I. ***Construya una tabla de valores para f.***
II. ***¿Cuál es el dominio de f?***
III. ***¿Cuál es el recorrido de f?***
IV. ***Grafique f.***

$4^y = x + 2$

$4 = \sqrt[y]{x+2}$

x	y
1	$\sqrt[4]{3}$

Dominio = [2, +∞[

Según lo expresado en la resolución del ejercicio, en un principio, para construir una tabla de valores el alumno B, realiza una transformación dentro del mismo registro algebraico, utiliza implícitamente la igualdad ***f(x) = y*** evidenciado en la expresión $\mathbf{4^y}$. Luego, relaciona logaritmos y potencias para expresar la función logarítmica original con su respectiva función exponencial. Sin embargo, previo a realizar esta transformación, no realizó operaciones en la igualdad para expresar la ecuación en términos de *y*:

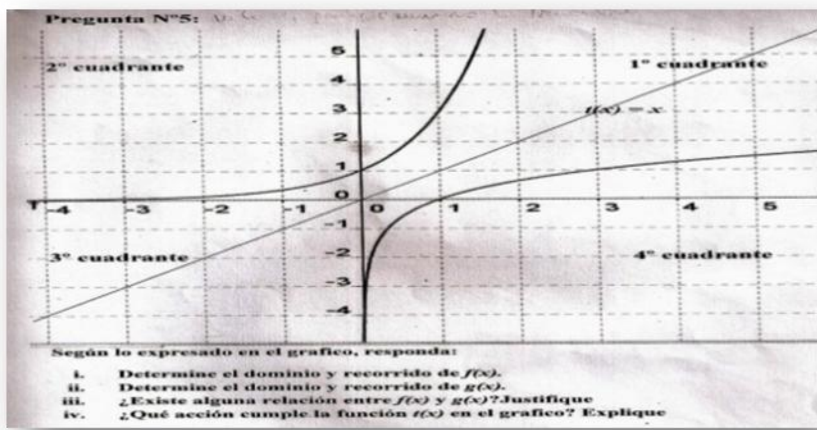
$$\mathbf{4^y = x + 2}$$

Lo anterior, es consecuencia de que el alumno confunde la expresión $\mathbf{\log_4 x + 2}$ con $\mathbf{\log_4(x + 2).}$ Luego, consecuente de lo anterior, utiliza la función raíz como técnica para relacionar la función potencia con su respectiva función logarítmica:

$$\mathbf{4 = \sqrt[y]{x + 2}}$$

Al realizar el análisis de lo expresado anteriormente, el estudiante relaciona incorrectamente sus resultados con el dominio de la función f, debido a que, implícitamente deduce como dominio la restricción dada a la cantidad sub radical $\boldsymbol{x + 2 \geq 0}$ obteniendo el intervalo expresado que es incorrecto. Asimismo, el alumno expresa tener dudas para encontrar el recorrido de la función f, lo cual es lógico dado que realiza procedimientos matemáticos incorrectos claves para poder determinarlo. Posible causa de lo anterior, es que el estudiante tiene poca claridad y confunde los conceptos de dominio y recorrido de una función. Relacionado a esto, puede existir una "mecanización" en los procedimientos para determinar el dominio o recorrido de una función, sin tener claridad del significado y el sentido de cada concepto. Así, considerando lo expuesto anteriormente, es claro que el alumno B *presenta conocimientos relacionados con raíces.* Sin embargo, a pesar de los procedimientos realizados y fracasados intentos, el alumno B *evidencia escaso dominio de las funciones.* A su vez, en su intento por construir una tabla de valores para *x* e *y* fracasa dado que los procedimientos necesarios para construirla fueron incorrectos, lo que evidencia que el alumno B *no logra realizar conversiones desde registros algebraicos a registros numéricos de la función logarítmica dada*. De igual manera, no logra construir el grafico pedido, lo que demuestra que el alumno *no logra realizar conversiones desde registros algebraicos a registros gráficos de la función logarítmica dada*. En resumen, el alumno B *manifiesta conocimientos sobre el concepto de raíces*, sin embargo, *no evidencia conocimientos básicos sobre funciones, no logra relacionarlo con el concepto de los logaritmos, ni logra representar funciones logarítmicas a través de otros registros*.

- **Respuesta Nº 4**



Según lo expresado en la resolución del ejercicio, el alumno B no resuelve la actividad. El estudiante *no manifiesta las habilidades para relacionar el concepto de los logaritmos con otros registros de representación* como lo es el lenguaje gráfico. Causa de lo anterior puede resultar el escaso desarrollo de la habilidad de visualización en el alumno, derivado del mínimo uso de conversiones por parte de la profesora para representar funciones logarítmicas a través de otros registros que no fuesen algebraicos.

Encuesta

Las repuestas del alumno B a cada pregunta de la encuesta, están resumidas en la siguiente tabla:

Preguntas	Orientación	Respuestas
Pregunta Nº 1	Pregunta orientada al concepto de Auto-eficacia	Se sintió capaz para lograr este nuevo desafío
Pregunta Nº 2	Pregunta orientada al concepto de Auto-eficacia	Pedir ayuda a un/a compañero/a que Ud. considere más capaz en la materia.
Pregunta Nº 3	Pregunta orientada al concepto de Auto-eficacia	Logró aprender el procedimiento observando a otros llevarlo a cabo
Pregunta Nº 4	Pregunta orientada al concepto de Auto-eficacia	Cambia de parecer y realiza dicha tarea satisfactoriamente
Pregunta Nº 5	Pregunta orientada al concepto de Atribución	Un aumento o disminución de esfuerzo por realizar el ejercicio La perseverancia por resolver el ejercicio La ayuda que reciba de compañeros y el profesor El conocimiento sobre logaritmos
Pregunta Nº 6	Pregunta orientada al concepto de Atribución	La falta de esfuerzo por realizar la tarea y/o ejercicios.
Pregunta Nº 7	Pregunta orientada al concepto de Auto-eficacia	Persevera para obtener mejores resultados en las tareas y/o ejercicios siguientes
Pregunta Nº 8	Pregunta orientada al concepto de Autonomía y control	Obligación y presión del profesor
Pregunta Nº 9	Pregunta orientada al concepto de Autonomía y control	Entiende claramente el procedimiento y el sentido del ejercicio

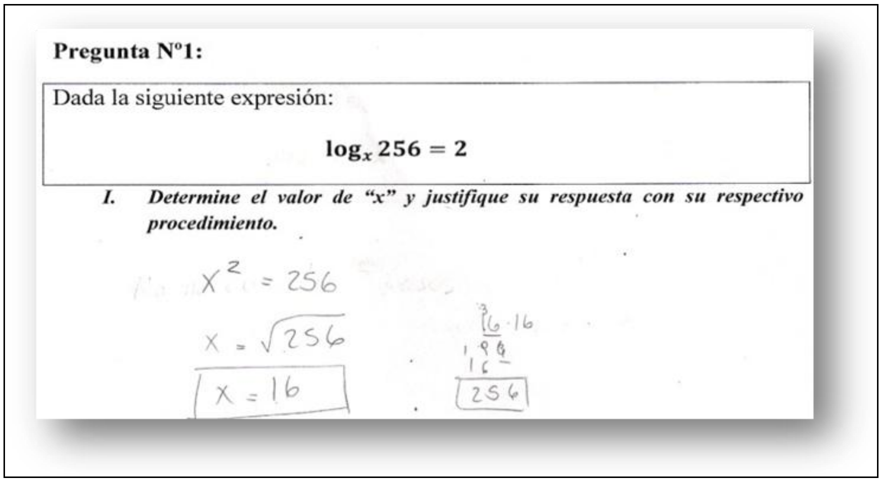
Conclusión

Según las respuestas del cuestionario y de la encuesta realizada en relación a las creencias que tiene el alumno B sobre sí mismo, se observa que, en relación la teoría de la atribución el alumno B relaciona su proceso atributivo tanto con factores internos como externos; estables e inestables; controlables e incontrolables, pero cabe señalar que mayoritariamente su explicación causal es por factores ***internos-inestables-controlables***, como por ejemplo el ***esfuerzo*** específico ante un ejercicio y/o tarea de los logaritmos. Además, el alumno B posee una ***motivación extrínseca*** para con los logaritmos, lo que se traduce en una motivación por una conducta premiada, no por el interés o deseo personal de dominar una tarea, lo cual nos indica que posee ***acciones controladoras***. Finalmente, si se considera lo anteriormente descrito, y las respuestas relacionadas explícitamente con el concepto de auto-eficacia, el alumno B respondió 4 de 5 preguntas relacionadas al concepto, dejando entrever una notoria tendencia hacia un nivel ***alto de auto-eficacia*** en los logaritmos, lo que significa que el juicio sobre su propia capacidad es ***mayoritariamente satisfactorio***, lo cual no indica que sea del todo satisfactorio, además posee un aprendizaje de tendencia ***vicario***, es decir logra adquirir los conocimientos observando a otros llevarlo a cabo. Esto se refleja en el rendimiento obtenido en el cuestionario, dado que, presenta desempeños óptimos en la primera pregunta, no así en la segunda, sin embargo, en la tercera presenta un dominio parcial del ejercicio y finalmente, en la última pregunta no manifiesta los conocimientos necesarios para resolverlo. Se puede concluir que las creencias que tiene el alumno B sobre sí mismo en torno a los logaritmos, influye directamente en su rendimiento.

4.2.3 Alumno/a C

Cuestionario

- **Respuesta Nº 1**



Pregunta Nº1:

Dada la siguiente expresión:

$$\log_x 256 = 2$$

I. Determine el valor de "x" y justifique su respuesta con su respectivo procedimiento.

$x^2 = 256$

$x = \sqrt{256}$

$\boxed{x = 16}$

$16 \cdot 16$

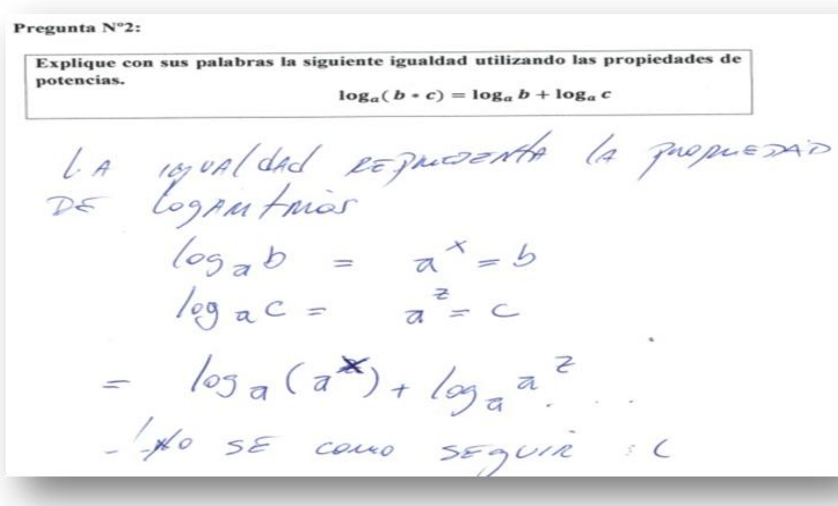
96

16

$\boxed{256}$

Según lo expresado en la resolución del ejercicio, el alumno C realiza transformaciones dentro del mismo registro algebraico, aplica implícitamente la relación de la función cuadrática potencia con la respectiva función logaritmo. Luego, para resolver la ecuación, utiliza la técnica para solucionar este tipo de expresiones, operando implícitamente, por la función raíz cuadrada**.** Una causa de lo anterior, puede ser el escaso dominio de la propiedad matemática que se está utilizando, resultado quizás del precario significado y sentido que le da el docente al concepto de igualdad y sus propiedades. Finalmente, según lo expresado, el alumno C *sabe resolver ejercicios relacionados con el concepto de los logaritmos*.

- **Respuesta Nº 2**



Pregunta Nº2:

Explique con sus palabras la siguiente igualdad utilizando las propiedades de potencias.

$$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

LA IGUALDAD REPRESENTA LA PROPIEDAD DE LOGARITMOS

$\log_a b = a^x = b$

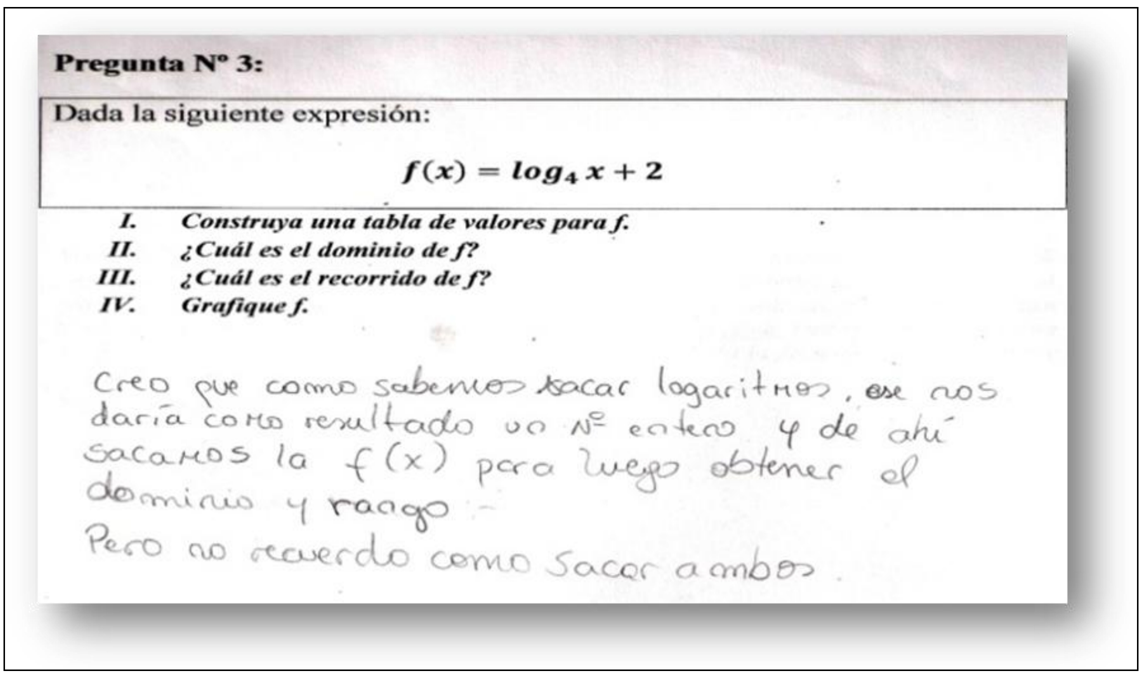
$\log_a c = a^z = c$

$= \log_a(a^x) + \log_a a^z$

¡NO SE COMO SEGUIR :c

Según lo expresado en la resolución del ejercicio, el alumno C en una primera instancia expresa en lenguaje natural que "la igualdad representa la propiedad de los logaritmos" como una manera de manifestar que identificó la expresión planteada. El alumno logra identificar la relación de equivalencia entre la función potencia y la función logaritmo. Luego, utiliza la relación de equivalencia entre la función potencia y la función logaritmo, sin embargo, a través de su procedimiento manifiesta no saber cómo continuar la demostración. Causa de lo anterior, puede ser el escaso desarrollo de la habilidad para conjeturar demostraciones en el estudiante o el precario estimulo por parte del docente para desarrollar esta habilidad en sus estudiantes. Otra causa puede ser el leve conocimiento desarrollado por el estudiante sobre el concepto de logaritmo. Finalmente, *el alumno C no logra demostrar utilizando la función potencia a través de registros algebraicos la propiedad del "logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores".*

- **Respuesta Nº 3**



Pregunta Nº 3:

Dada la siguiente expresión:

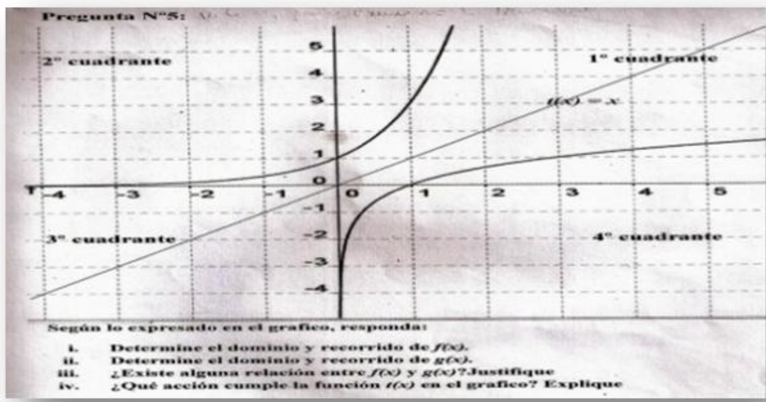
$$f(x) = log_4 x + 2$$

I. *Construya una tabla de valores para f.*
II. *¿Cuál es el dominio de f?*
III. *¿Cuál es el recorrido de f?*
IV. *Grafique f.*

Creo que como sabemos sacar logaritmos, ese nos daría como resultado un Nº entero y de ahí sacamos la f(x) para luego obtener el dominio y rango.
Pero no recuerdo como sacar ambos.

Según lo expresado en la resolución del ejercicio, el alumno C relaciona la función logarítmica planteada con un "logaritmo el cual se obtiene como resultado un número entero" cuya explicación es vaga e incorrecta de cómo debe abordarse el ejercicio. Además, no utiliza procedimientos matemáticos que avalen su explicación. Causa de lo anterior puede ser la escasa habilidad desarrollada por el alumno para resolver situaciones que involucren el concepto básico de funciones. Más aún, teniendo en cuenta que debe utilizar este concepto como una herramienta para fortalecer el desarrollo de la habilidad para resolver situaciones que involucren a funciones logarítmicas. Claramente, el alumno C no resuelve la actividad y *no manifiesta los conocimientos para relacionar el concepto de funciones con el concepto de los logaritmos.*

- **Respuesta Nº 4**



Según lo expresado en la resolución del ejercicio, el alumno C no resuelve la actividad. Causa de lo anterior puede resultar el escaso desarrollo de la habilidad de visualización en el alumno, derivado del mínimo uso de conversiones por parte de la profesora para representar funciones logarítmicas a través de otros registros que no fuesen algebraicos. El estudiante *no manifiesta las habilidades para relacionar el concepto de los logaritmos con otros registros de representación* como lo es el lenguaje gráfico.

Encuesta

Las repuestas del alumno C a cada pregunta de la encuesta, están resumidas en la siguiente tabla:

Preguntas	Orientación	Respuestas
Pregunta Nº 1	**Pregunta orientada al concepto de Auto-eficacia**	**Se sintió capaz para lograr este nuevo desafío**
Pregunta Nº 2	**Pregunta orientada al concepto de Auto-eficacia**	**Pedir ayuda a un/a compañero/a que Ud. considere más capaz en la materia.**
Pregunta Nº 3	**Pregunta orientada al concepto de Auto-eficacia**	**Logró aprender el procedimiento realizándolo solo.**
Pregunta Nº 4	**Pregunta orientada al concepto de Auto-eficacia**	**Pregunta a su profesor o compañero en reiteradas ocasiones hasta resolverlo completamente.**
Pregunta Nº 5	**Pregunta orientada al concepto de Atribución**	**Un aumento o disminución de esfuerzo por realizar el ejercicio** **Dificultad del ejercicio (su éxito o fracaso depende del ejercicio en cuestión)** **El conocimiento sobre logaritmos**
Pregunta Nº 6	**Pregunta orientada al concepto de Atribución**	**La falta de esfuerzo por realizar la tarea y/o ejercicios.**

Pregunta Nº 7	**Pregunta orientada al concepto de Auto-eficacia**	**Desiste de realizar tareas y/o ejercicios posteriores**
Pregunta Nº 8	**Pregunta orientada al concepto de Autonomía y control**	**Obligación y presión del profesor**
Pregunta Nº 9	**Pregunta orientada al concepto de Autonomía y control**	**Entiende vagamente el procedimiento y el sentido del ejercicio**

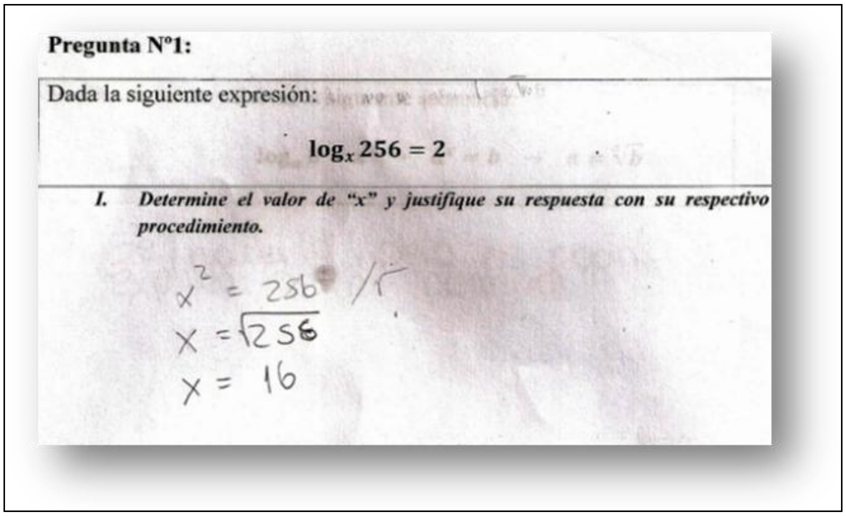
Conclusión

Según las respuestas del cuestionario y de la encuesta realizada en relación a las creencias que tiene el alumno C sobre sí mismo, se observa que, en relación a las la teoría de la atribución, el alumno C relaciona su proceso atributivo tanto con factores internos como externos; estables e inestables; controlables e incontrolables, pero cabe señalar que mayoritariamente su explicación causal es por factores ***internos-inestables-controlables***, como por ejemplo el ***esfuerzo*** específico ante un ejercicio y/o tarea de los logaritmos. Además, el alumno C posee una ***motivación extrínseca*** para con los logaritmos, lo que se traduce en una motivación por una conducta premiada, no por el interés o deseo personal de dominar una tarea, lo cual nos indica que posee ***acciones controladoras***. Finalmente, si se considera lo anteriormente descrito, y las respuestas relacionadas explícitamente con el concepto de auto-eficacia, se puede concluir que el alumno C respondió 2 de 5 preguntas relacionadas al concepto, lo cual deja entrever una tendencia hacia un nivel ***bajo de auto-eficacia*** en los logaritmos, lo que significa que el juicio sobre su propia capacidad es ***poco satisfactorio*** respecto de estos, además posee un aprendizaje de tendencia ***activo***, es decir logra adquirir los conocimientos llevando a cabo el procedimiento de las actividades a realizar por sí solo. Esto se refleja en el rendimiento obtenido en el cuestionario, dado que, presenta desempeños óptimos en la primera pregunta, sin embargo, no presenta claridad en la respuesta de la segunda, en la tercera pregunta presenta solo alguna noción de cómo resolver pero sin procedimientos, y finalmente, en la cuarta pregunta no manifiesta los conocimientos necesarios para resolver el ejercicio. Se puede concluir que las creencias que tiene el alumno C sobre sí mismo en torno a los logaritmos, influye directamente en su rendimiento.

4.2.4 Alumno/a D

Cuestionario

- **Respuesta Nº 1**



Pregunta N°1:

Dada la siguiente expresión:

$$\log_x 256 = 2$$

I. Determine el valor de "x" y justifique su respuesta con su respectivo procedimiento.

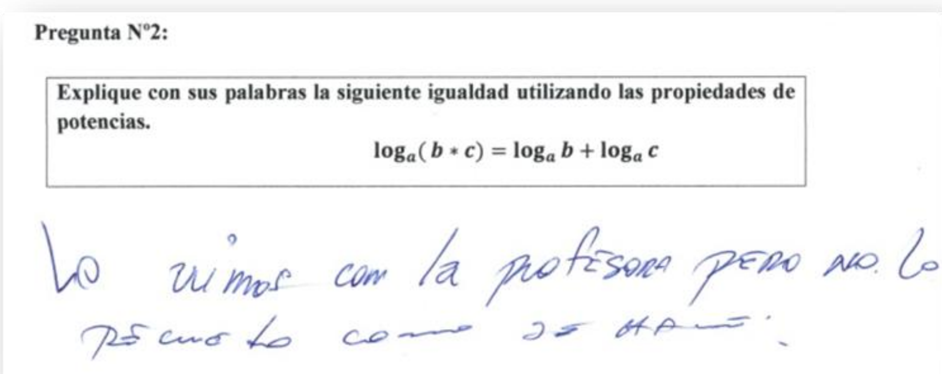
$x^2 = 256$

$x = \sqrt{256}$

$x = 16$

Según lo expresado en la resolución del ejercicio, el alumno D realiza transformaciones dentro del mismo registro algebraico, aplica implícitamente la relación de la función cuadrática potencia con la respectiva función logaritmo. Luego, para resolver la ecuación, utiliza la función raíz cuadrada como un operador funcional. Finalmente, se evidencia que el alumno D *sabe resolver ejercicios relacionados con el concepto de los logaritmos*.

- **Respuesta Nº 2**



Pregunta N°2:

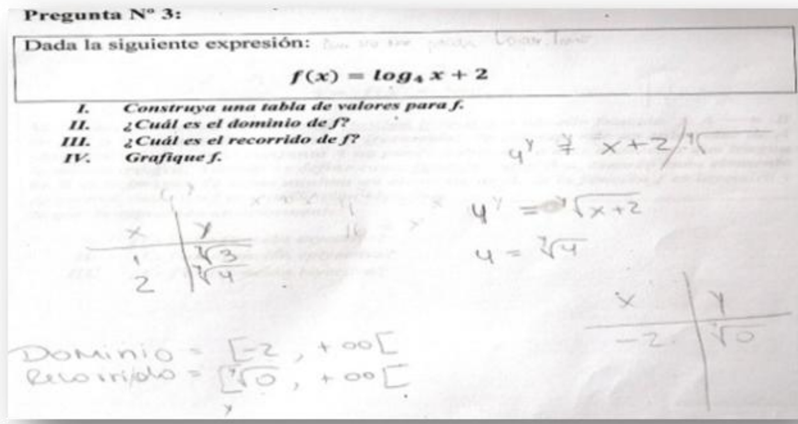
Explique con sus palabras la siguiente igualdad utilizando las propiedades de potencias.

$$\log_a(b * c) = \log_a b + \log_a c$$

Lo vimos con la profesora pero no lo pesco lo como se hace.

Según lo expresado en la resolución del ejercicio, el alumno D identifica el tipo de ejercicio debido a que admite haber "visto con la profesora pero no sabe cómo realizar la demostración", no manifiesta ninguna explicación respecto de la igualdad planteada. Una posible causa es el escaso desarrollo en los estudiantes de las habilidades relacionadas con las propiedades de logaritmos o la falta de propuesta de actividades que reforzaran la misma. Así, se torna evidente que el estudiante *no logra demostrar utilizando la función potencia a través de registros algebraicos la propiedad del "logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores".*

- **Respuesta Nº 3**



Según lo expresado en la resolución del ejercicio, en un principio, para construir una tabla de valores el alumno D, realiza una transformación dentro del mismo registro algebraico, utiliza implícitamente la igualdad ***f(x)* = *y*** evidenciado en la expresión $\mathbf{4^y}$**.** Luego, relaciona logaritmos y potencias para expresar la función logarítmica original con su respectiva función exponencial. Sin embargo, previo a realizar esta transformación, no realizó operaciones en la igualdad para expresar la ecuación en términos de *y*:

$$\mathbf{4^y = x + 2}$$

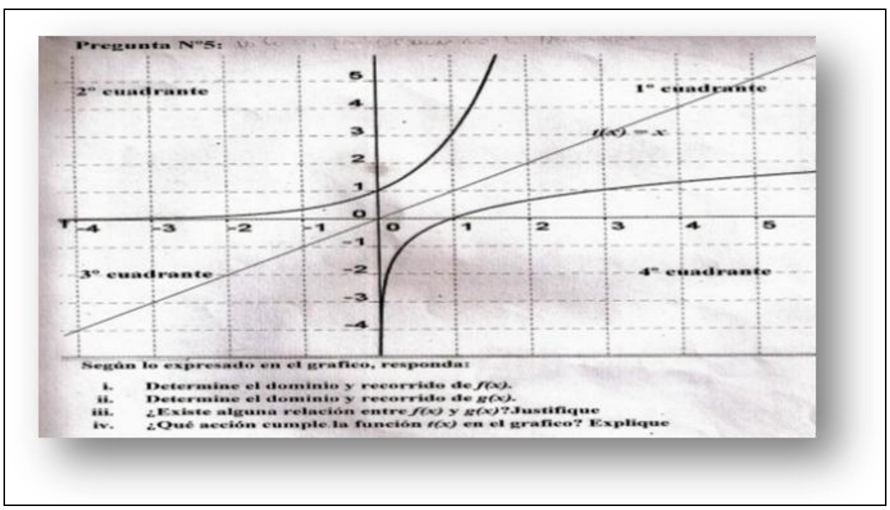
Lo anterior, es consecuencia de que el alumno confunde la expresión $\mathbf{\log_4 x + 2}$ con $\mathbf{\log_4 (x + 2)}$**.** Luego, consecuente de lo anterior, opera implícitamente en ambos lados de la igualdad por la respectiva raíz "y- esima" de $\mathbf{4^y}$ como técnica para relacionar la función potencia con su respectiva función logarítmica, pero conserva como cantidad sub radical "4" en vez de x + 2:

$$\mathbf{4 = \sqrt[y]{x + 2}}$$

$$\mathbf{4 = \sqrt[y]{4}}$$

Al realizar el análisis de lo expresado anteriormente, el estudiante relaciona incorrectamente sus resultados con el dominio de la función f, debido a que, implícitamente deduce como dominio la restricción dada a la cantidad sub radical $\boldsymbol{x + 2 \geq 0}$ obteniendo el intervalo expresado y que es incorrecto. De esto se logra apreciar que el estudiante relaciona el concepto de desigualdad e intervalo con el dominio de la función. Asimismo, el alumno expresa como recorrido de la función f al intervalo $[0, \infty[$, sin procedimientos que avalen tal resultado incorrecto. Posible causa de lo anterior, es que puede existir una "mecanización" en los procedimientos para determinar el dominio o recorrido, sin tener claridad del significado y el sentido de estos conceptos. Así, considerando lo expuesto anteriormente, es claro que el alumno *presenta conocimientos relacionados con raíces.* Sin embargo, a pesar de los procedimientos realizados y considerando los fracasados intentos, el alumno *evidencia escaso dominio de las funciones.* A su vez, en su intento por construir una tabla de valores para x e y fracasa dado que los procedimientos necesarios para construirla fueron incorrectos, lo que evidencia que el alumno D *no logra realizar conversiones desde registros algebraicos a registros numéricos de la función logarítmica dada*. De igual manera, no logra construir el grafico pedido, lo que demuestra que el alumno *no logra realizar conversiones desde registros algebraicos a registros gráficos de la función logarítmica dada*. En resumen, el alumno D *manifiesta conocimientos sobre el concepto de raíces*, sin embargo, *no evidencia conocimientos básicos sobre funciones, no logra relacionarlo con el concepto de los logaritmos, ni logra representar funciones logarítmicas a través de otros registros*.

- **Respuesta Nº 4**



Según lo expresado en la resolución del ejercicio, el alumno D no resuelve la actividad. El estudiante *no manifiesta las habilidades para relacionar el concepto de los logaritmos con otros registros de representación* como lo es el lenguaje gráfico. Causa de lo anterior puede resultar el escaso desarrollo de la habilidad de visualización en el alumno, derivado del mínimo uso de conversiones por parte de la profesora para representar funciones logarítmicas a través de otros registros que no fuesen algebraicos.

Encuesta

Las repuestas del alumno D a cada pregunta de la encuesta, están resumidas en la siguiente tabla:

Preguntas	Orientación	Respuestas
Pregunta Nº 1	**Pregunta orientada al concepto de Auto-eficacia**	**Se sintió capaz para lograr este nuevo desafío**
Pregunta Nº 2	**Pregunta orientada al concepto de Auto-eficacia**	**Pedir ayuda a un/a compañero/a que Ud. considere más capaz en la materia.**
Pregunta Nº 3	**Pregunta orientada al concepto de Auto-eficacia**	**Logró aprender el procedimiento observando a otros llevarlo a cabo**
Pregunta Nº 4	**Pregunta orientada al concepto de Auto-eficacia**	**Pregunta a su profesor o compañero en reiteradas ocasiones hasta resolverlo completamente.**
Pregunta Nº 5	**Pregunta orientada al concepto de Atribución**	**La perseverancia por resolver el ejercicio** **La ayuda que reciba de compañeros y el profesor** **El conocimiento sobre logaritmos**
Pregunta Nº 6	**Pregunta orientada al concepto de Atribución**	**La falta de esfuerzo por realizar la tarea y/o ejercicios.**
Pregunta Nº 7	**Pregunta orientada al concepto de Auto-eficacia**	**Persevera para obtener mejores resultados en las tareas y/o ejercicios siguientes.**
Pregunta Nº 8	**Pregunta orientada al concepto de Autonomía y control**	**Iniciativa propia, un deseo y satisfacción por aprender logaritmos.**
Pregunta Nº 9	**Pregunta orientada al concepto de Autonomía y control**	**Entiende vagamente el procedimiento y el sentido del ejercicio**

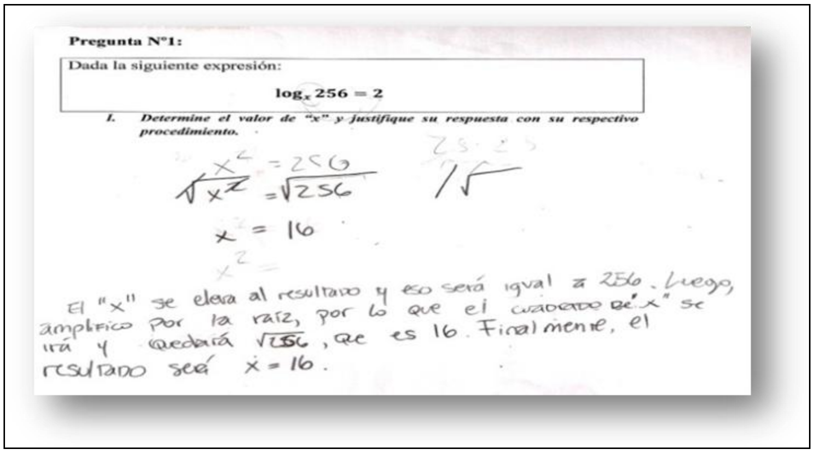
Conclusión

Según las respuestas del cuestionario y de la encuesta realizada en relación a las creencias que tiene el alumno D sobre sí mismo, se observa que, en relación a la teoría de la atribución, el alumno D relaciona su proceso atributivo tanto con factores internos como externos; estables e inestables; controlables e incontrolables, pero cabe señalar que mayoritariamente su explicación causal es por factores ***internos-inestables-controlables***, como por ejemplo el ***esfuerzo*** específico ante un ejercicio y/o tarea de los logaritmos. Además, el alumno D posee una ***motivación intrínseca*** para con los logaritmos, lo que se traduce en una motivación por una conducta que se realiza *por el placer* que proporciona, es decir por el interés o deseo personal de dominar una tarea, lo cual indica que el alumno D posee ***acciones auto determinadas***. Finalmente, si se considera lo anteriormente descrito, y las respuestas relacionadas explícitamente con el concepto de auto-eficacia, el alumno D respondió 2 de 5 preguntas relacionadas al concepto, lo cual nos deja entrever una tendencia hacia un nivel ***bajo de auto-eficacia*** en los logaritmos, lo que significa que su juicio sobre su propia capacidad es ***poco satisfactorio*** respecto de estos. Esto se refleja en el rendimiento obtenido en el cuestionario, dado que, presenta desempeños óptimos en la primera pregunta, sin embargo, no presenta procedimientos en la respuesta de la segunda, en la tercera pregunta presenta un dominio parcial por el ejercicio con procedimientos erróneos pero que demuestran conocimiento y finalmente, en la cuarta pregunta no manifiesta los conocimientos necesarios para resolver el ejercicio. Se puede concluir que las creencias que tiene el alumno D sobre sí mismo en torno a los logaritmos, influye directamente en su rendimiento.

4.2.5 Alumno/a E

Cuestionario:

- **Respuesta Nº 1**



Pregunta N°1:

Dada la siguiente expresión:

$$\log_x 256 = 2$$

I. Determine el valor de "x" y justifique su respuesta con su respectivo procedimiento.

$x^2 = 256$

$\sqrt{x^2} = \sqrt{256}$

$x = 16$

El "x" se eleva al resultado y eso será igual a 256. Luego, amplifico por la raíz, por lo que el cuadrado de "x" se irá y quedará $\sqrt{256}$, que es 16. Finalmente, el resultado será $x = 16$.

Según lo expresado en la resolución del ejercicio, el alumno E realiza transformaciones dentro del mismo registro algebraico, aplica implícitamente la relación de la función cuadrática potencia con la respectiva función logaritmo. Luego, para resolver la ecuación, utiliza la función raíz cuadrada como un operador funcional. Finalmente, para hacer más evidente su habilidad, el estudiante justifica ordenadamente los procedimientos efectuados, realizando una conversión de registros desde una representación algebraica al uso de lenguaje verbal. Sin embargo, al realizar la conversión, el estudiante utiliza la frase "amplifico por la raíz cuadrada" para justificar el uso de la función raíz cuadrada como operador funcional para resolver la ecuación. Causa de lo anterior puede ser una réplica de lo expresado por la profesora al resolver este tipo de ejercicios en pizarra, utilizando la operación multiplicación en una igualdad para facilitar en los estudiantes la comprensión de los procedimientos para resolver este tipo de situaciones. Así, el alumno E *sabe resolver ejercicios relacionados con el concepto de los logaritmos*.

- **Respuesta Nº 2**

Pregunta Nº2:

Explique con sus palabras la siguiente igualdad utilizando las propiedades de potencias.

$$\log_a(b * c) = \log_a b + \log_a c$$

Según lo expresado en la resolución del ejercicio, el alumno E no resuelve la actividad. Una posible causa es el escaso desarrollo en los estudiantes de las habilidades relacionadas con las propiedades de logaritmos o la falta de propuesta de actividades que reforzaran la misma. Así, se torna evidente que el estudiante *no logra demostrar utilizando la función potencia a través de registros algebraicos la propiedad del "logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores".*

- **Respuesta Nº 3**

Pregunta Nº 3:

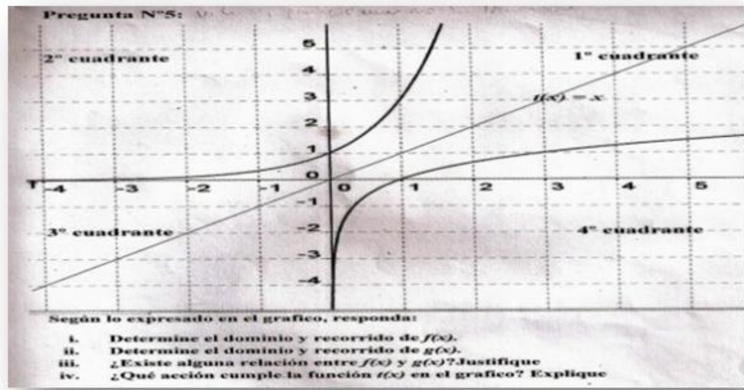
Dada la siguiente expresión:

$$f(x) = log_4 x + 2$$

I. ***Construya una tabla de valores para f.***
II. ***¿Cuál es el dominio de f?***
III. ***¿Cuál es el recorrido de f?***
IV. ***Grafique f.***

Según lo expresado en la resolución del ejercicio, el alumno E no resuelve la actividad, Causa de lo anterior puede ser la escasa habilidad desarrollada por el alumno para resolver situaciones que involucren el concepto básico de funciones. Más aún, teniendo en cuenta que debe utilizar este concepto como una herramienta para fortalecer el desarrollo de la habilidad para resolver situaciones que involucren a funciones logarítmicas. Claramente, el alumno E no resuelve la actividad y *no manifiesta los conocimientos para relacionar el concepto de funciones con el concepto de los logaritmos.*

- **Respuesta Nº 4**



Según lo expresado en la resolución del ejercicio, el alumno E no resuelve la actividad. El estudiante *no manifiesta las habilidades para relacionar el concepto de los logaritmos con otros registros de representación* como lo es el lenguaje gráfico. Causa de lo anterior puede resultar el escaso desarrollo de la habilidad de visualización en el alumno, derivado del mínimo uso de conversiones por parte de la profesora para representar funciones logarítmicas a través de otros registros que no fuesen algebraicos.

Encuesta

Las repuestas del alumno E a cada pregunta de la encuesta, están resumidas en la siguiente tabla:

Preguntas	Orientación	Respuestas
Pregunta Nº 1	**Pregunta orientada al concepto de Auto-eficacia**	**Se sintió capaz para lograr este nuevo desafío**
Pregunta Nº 2	**Pregunta orientada al concepto de Auto-eficacia**	**Pedir ayuda a un/a compañero/a que Ud. considere más capaz en la materia.**
Pregunta Nº 3	**Pregunta orientada al concepto de Auto-eficacia**	**No lo aprendió**
Pregunta Nº 4	**Pregunta orientada al concepto de Auto-eficacia**	**Pregunta a su profesor o compañero en reiteradas ocasiones hasta resolverlo completamente.**
Pregunta Nº 5	**Pregunta orientada al concepto de Atribución**	**La perseverancia por resolver el ejercicio**
Pregunta Nº 6	**Pregunta orientada al concepto de Atribución**	**La falta de esfuerzo por realizar la tarea y/o ejercicios.**
Pregunta Nº 7	**Pregunta orientada al concepto de Auto-eficacia**	**No sabe**
Pregunta Nº 8	**Pregunta orientada al concepto de Autonomía y control**	**Obligación y presión del profesor**
Pregunta Nº 9	**Pregunta orientada al concepto de Autonomía y control**	**Entiende claramente el procedimiento y el sentido del ejercicio**

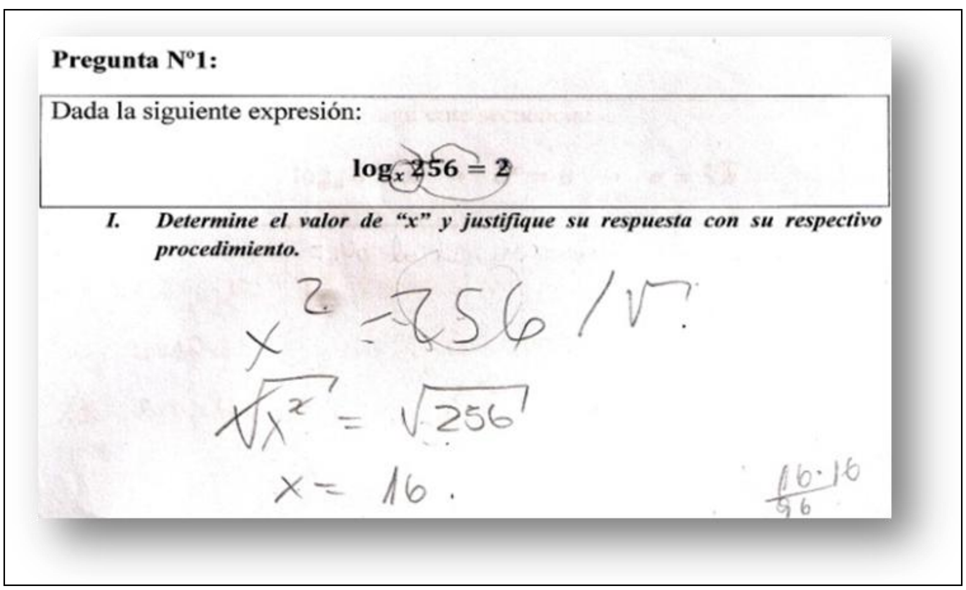
Conclusión

Según las respuestas del cuestionario y de la encuesta realizada en relación a las creencias que tiene el alumno E sobre sí mismo, se observa que, en relación a la teoría de la atribución, el alumno E relaciona su proceso atributivo tanto con factores internos como externos; estables e inestables; controlables e incontrolables, pero cabe señalar que mayoritariamente su explicación causal es por factores ***internos-inestables-controlables***, como por ejemplo el ***esfuerzo*** específico ante un ejercicio y/o tarea de los logaritmos. Además, el alumno E posee una ***motivación extrínseca*** para con los logaritmos, lo que se traduce en una motivación por una conducta premiada, no por el interés o deseo personal de dominar una tarea, lo cual nos indica que posee ***acciones controladoras***. Finalmente, si se considera lo anteriormente descrito, y las respuestas relacionadas explícitamente con el concepto de auto-eficacia, el alumno E respondió 2 de 5 preguntas relacionadas al concepto, dejando entrever una tendencia hacia un ***nivel bajo de auto-eficacia*** en los logaritmos, lo que significa que su juicio sobre su propia capacidad es ***poco satisfactorio*** respecto de estos, cabe mencionar que el alumno E no deja entrever el tipo de aprendizaje que posee. Esto se refleja en el rendimiento obtenido en el cuestionario, dado que, presenta desempeños óptimos en la primera pregunta, sin embargo, en la segunda, tercera y cuarta pregunta no manifiesta los conocimientos necesarios para resolver los ejercicios. Se puede concluir que las creencias que tiene el alumno E sobre sí mismo en torno a los logaritmos, influye directamente en su rendimiento.

4.2.6 Alumno/a F

Cuestionario

- **Respuesta Nº 1**



Pregunta Nº1:

Dada la siguiente expresión:

$$\log_x 256 = 2$$

I. Determine el valor de "x" y justifique su respuesta con su respectivo procedimiento.

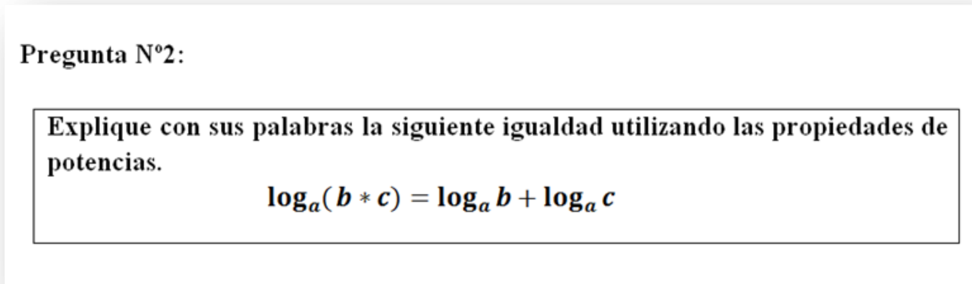
$x^2 = 256 \,/\sqrt{}$

$\sqrt{x^2} = \sqrt{256}$

$x = 16.$

Según lo expresado en la resolución del ejercicio, el alumno F realiza transformaciones dentro del mismo registro algebraico, aplica implícitamente la relación de la función cuadrática potencia con la respectiva función logaritmo. Luego, para resolver la ecuación, utiliza la función raíz cuadrada como un operador funcional. El procedimiento realizado por el alumno F demuestra que *sabe resolver ejercicios relacionados con el concepto de los logaritmos*.

- **Respuesta Nº 2**



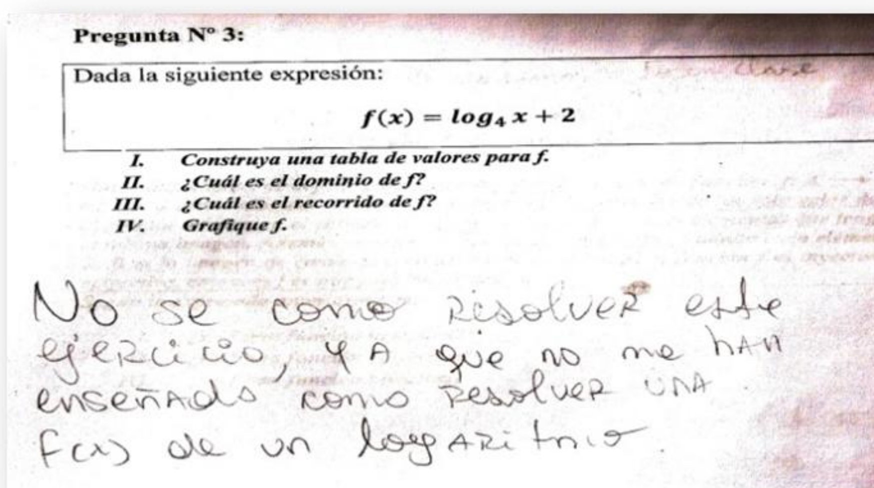
Pregunta N°2:

Explique con sus palabras la siguiente igualdad utilizando las propiedades de potencias.

$$\log_a(b * c) = \log_a b + \log_a c$$

Según lo expresado en la resolución del ejercicio, el alumno F no resuelve la actividad dejándola en blanco. Una posible causa es el escaso desarrollo en los estudiantes de las habilidades relacionadas con las propiedades de logaritmos o la falta de propuesta de actividades que reforzaran la misma. Así, se torna evidente que el estudiante *no logra demostrar utilizando la función potencia a través de registros algebraicos la propiedad del "logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores".*

- **Respuesta Nº 3**



Pregunta N° 3:

Dada la siguiente expresión:

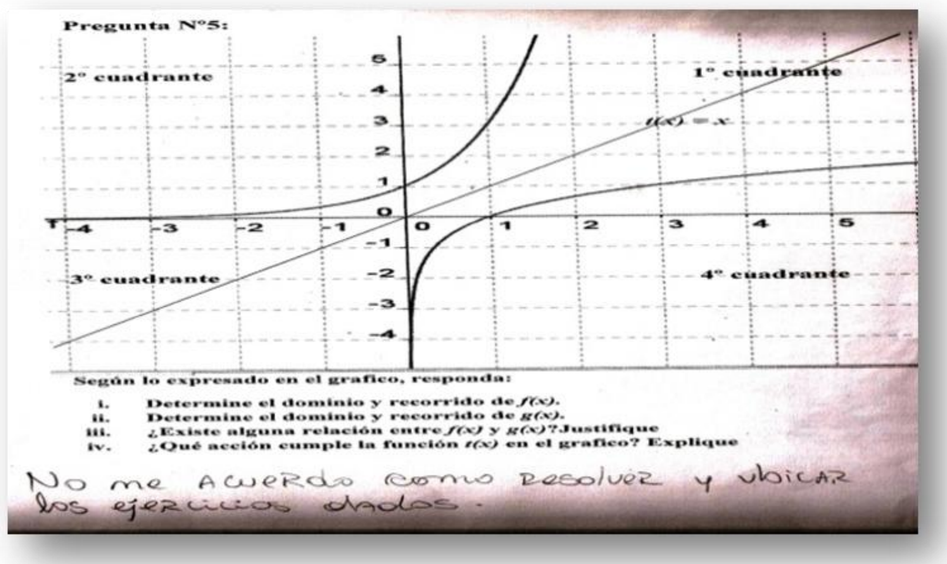
$$f(x) = log_4 x + 2$$

I. Construya una tabla de valores para f.
II. ¿Cuál es el dominio de f?
III. ¿Cuál es el recorrido de f?
IV. Grafique f.

No se como resolver este ejercicio, ya que no me han enseñado como resolver una f(x) de un logaritmo.

Según lo expresado en la resolución del ejercicio, el alumno F no resuelve la actividad, argumentando que "no me han enseñado como resolver una f(x) de un logaritmo". Causa de esto, puede ser la inasistencia del alumno a las sesiones donde la profesora presento este tipo de actividades. Otra causa es que el estudiante no haya logrado desarrollar las habilidades anteriores necesarias para resolver este tipo de actividades y atribuya su fracaso completamente hacia otros. Así, el estudiante F *no manifiesta los conocimientos para relacionar el concepto de funciones con el de los logaritmos.*

- **Respuesta Nº 4**



Según lo expresado en la resolución del ejercicio, el alumno F no resuelve la actividad. El estudiante *no manifiesta las habilidades para relacionar el concepto de los logaritmos con otros registros de representación* como lo es el lenguaje gráfico. Causa de lo anterior puede resultar el escaso desarrollo de la habilidad de visualización en el alumno, derivado del mínimo uso de conversiones por parte de la profesora para representar funciones logarítmicas a través de otros registros que no fuesen algebraicos.

Encuesta

Las repuestas del alumno F a cada pregunta de la encuesta, están resumidas en la siguiente tabla:

Preguntas	Orientación	Respuestas
Pregunta Nº 1	Pregunta orientada al concepto de Auto-eficacia	Se sintió capaz para lograr este nuevo desafío
Pregunta Nº 2	Pregunta orientada al concepto de Auto-eficacia	Esforzarse aun más que la vez anterior, para obtener un mejor rendimiento.
Pregunta Nº 3	Pregunta orientada al concepto de Auto-eficacia	Logró aprender el procedimiento observando a otros llevarlo a cabo
Pregunta Nº 4	Pregunta orientada al concepto de Auto-eficacia	Pregunta a su profesor o compañero en reiteradas ocasiones hasta resolverlo completamente.
Pregunta Nº 5	Pregunta orientada al concepto de Atribución	Un aumento o disminución de esfuerzo por realizar el ejercicio La ayuda que reciba de compañeros y el profesor
Pregunta Nº 6	Pregunta orientada al concepto de Atribución	La falta de esfuerzo por realizar la tarea y/o ejercicios.
Pregunta Nº 7	Pregunta orientada al concepto de Auto-eficacia	Persevera para obtener mejores resultados en las tareas y/o ejercicios siguientes.
Pregunta Nº 8	Pregunta orientada al concepto de Autonomía y control	Un premio o recompensa (por ejemplo una nota)
Pregunta Nº 9	Pregunta orientada al concepto de Autonomía y control	Entiende claramente el procedimiento y el sentido del ejercicio

Conclusión

Según las respuestas del cuestionario y de la encuesta realizada en relación a las creencias que tiene el alumno F sobre sí mismo, se observa que, en relación a la teoría de la atribución, el alumno F relaciona su proceso atributivo tanto con factores internos como externos; estables e inestables; controlables e incontrolables, pero cabe señalar que mayoritariamente su explicación causal es por factores ***internos-inestables-controlables***, como por ejemplo el esfuerzo específico ante un ejercicio y/o tarea de los logaritmos. Además, el alumno F posee una ***motivación extrínseca*** para con los logaritmos, lo que se traduce en una motivación por una conducta premiada, no por el interés o deseo personal de dominar una tarea, lo cual nos indica que posee ***acciones controladoras***. Finalmente, si se considera lo anteriormente descrito, y las respuestas relacionadas explícitamente con el concepto de auto-eficacia, el alumno F respondió 4 de 5 preguntas relacionadas al concepto, lo cual nos deja entrever su notoria tendencia hacia un nivel ***alto de auto-eficacia*** en los logaritmos, lo que significa que su juicio sobre su propia capacidad es ***mayoritariamente satisfactorio***, lo cual no quiere decir que sea del todo satisfactorio. Además posee un aprendizaje de tendencia ***vicario***, es decir logra adquirir los conocimientos observando a otros llevarlo a cabo. Esto no se refleja en el rendimiento obtenido en el cuestionario, dado que, presenta desempeños óptimos en la primera pregunta, sin embargo, en la segunda pregunta no logra demostrar la igualdad entre las funciones planteadas, y finalmente, en la tercera y cuarta pregunta no manifiesta los conocimientos necesarios para resolver los ejercicios. Cabe mencionar que el alumno F respondió la mayoría de las preguntas relacionadas con el concepto de auto-eficacia de manera correcta (es decir reflejando una auto-eficacia elevada), mas no se ve reflejado en los conocimientos aplicados al cuestionario, mermando así la posibilidad de realizar una conclusión certera. Una posible causa de esto, es la falta de comunicación entre docente - estudiante e incentivar el apoyo pedagógico por parte del profesional para mejorar el desarrollo de las habilidades matemáticas del estudiante.

4.3 Tabla resumen Nº1 cuestionario matemático

A continuación se presenta una tabla, la cual contiene el resumen de las respuestas a cada pregunta del cuestionario por alumno.

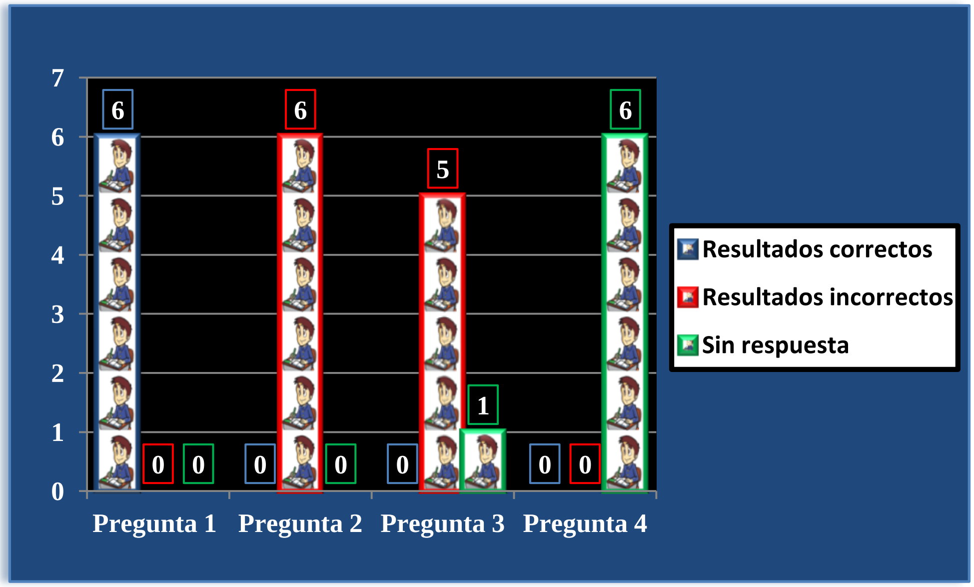
Pregunta	Variables	Alumno A	Alumno B	Alumno C	Alumno D	Alumno E	Alumno F
Pregunta Nº 1	Procedimiento de ecuación	Realizado	Realizado	Realizado	Realizado	Realizado	Realizado
	Resultado	Correcto	Correcto	Correcto	Correcto	Correcto	Correcto
Pregunta Nº 2	Demostración	Explicado	No explicado	No Explicado	No explicado	No Explicado	No Explicado
Pregunta 3	Tabla de valores para f	Incorrecto	Incorrecto	Incorrecto	Incorrecto	Sin respuesta	Incorrecto
	Dominio de f	Incorrecto	incorrecto	Sin resultado	Incorrecto	Sin resultado	Sin resultado
	Recorrido de f	Sin resultado	Sin resultado	Sin resultado	incorrecto	Sin resultado	Sin resultado
	Grafico de f	Sin respuesta	Sin respuesta	Sin respuesta	Sin respuesta	Sin respuesta	Sin respuesta
Pregunta 4	Dominio y recorrido de f (x)	Sin resultado	Sin resultado	Sin resultado	Sin resultado	Sin resultado	Sin resultado
	Dominio y recorrido de g (x)	Sin respuesta	Sin respuesta	Sin respuesta	Sin respuesta	Sin respuesta	Sin respuesta
	Relación entre f(x) y g(x)	Sin respuesta	Sin respuesta	Sin respuesta	Sin respuesta	Sin respuesta	Sin respuesta
	Acción que cumple la función t(x) en el grafico	Sin respuesta	Sin respuesta	Sin respuesta	Sin respuesta	Sin respuesta	Sin respuesta

Tabla Nº 1: *Resumen de respuestas por alumno a cada pregunta del cuestionario*

4.4 Gráfico Nº2: Cuestionario matemático

En el siguiente gráfico se muestra la cantidad de estudiantes que respondieron cada pregunta y si estas respuestas fueron correctas o incorrectas.

<u>Gráfico Nº 2:</u>



Se puede observar que en la pregunta número uno relacionada con el concepto de los logaritmos la totalidad de los alumnos respondió correctamente, además se observa que en la pregunta número dos existe un elevado índice de respuestas incorrectas, solos dos alumnos obtuvieron resultados correctos. Referente a la pregunta número tres, se observa que cinco estudiantes obtuvieron resultados incorrectos y solo uno no realizó procedimiento alguno. Finalmente se observa que ninguno de los alumnos respondió la pregunta número cuatro.

4.5 Análisis didáctico global

A continuación, se presenta un análisis didáctico general de las respuestas expresadas por los alumnos participantes de la investigación a cada una de las cuatro preguntas del cuestionario matemático presentado, con la finalidad de dar información o fenómenos ocurridos a nivel global que sean importante destacar, pensando en contribuir antecedentes para mejorar el discurso de los docentes y el tratamiento del concepto matemático de los logaritmos.

<u>Pregunta Nº 1</u>

Según lo expresado por los alumnos participantes en el cuestionario, en su totalidad resolvieron correctamente el ejercicio utilizando el lenguaje algebraico como procedimiento para resolverlo. Se visualizan transformaciones dentro del mismo registro concebido en la *aplicación de una serie de técnicas sin evidenciar las propiedades que la respalden*. Por ejemplo, la aplicación <u>implícita</u> de la relación de equivalencia que existe entre potencias y logaritmos,

$$\boldsymbol{log_a b = c \leftrightarrow a^c = b}$$

Lo anterior se justifica debido a que, en una primera instancia, cada uno de los estudiantes manifiesta en sus procedimientos la transformación del logaritmo a términos de una potencia. Luego, se asume implícitamente, el dominio por parte de los estudiantes del concepto de potencias con exponente racional y su representación simbólica a través de raíces:

$$\boldsymbol{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}$$

Debido a que esta relación de equivalencia entre potencias y raíces, surge implícitamente, en los procedimientos del ejercicio de la forma $\boldsymbol{\sqrt[n]{a^n} = a}$ que fue el argumento matemático que utilizaron los estudiantes para realizar la amplificación en ambos miembros de la igualdad para resolver la ecuación, para luego aplicar, en forma <u>implícita</u>, la propiedad de la igualdad $\boldsymbol{\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b} \leftrightarrow a = b.}$ Finalmente, los alumnos evidencian su dominio en el cálculo de raíces cuadradas para dar solución explicita a la ecuación planteada. Lo anterior permite deducir que los estudiantes *establecen relaciones entre potencias, raíces y logaritmos. Además, demuestran saber resolver ejercicios básicos relacionados con el concepto de los logaritmos.*

Un fenómeno importante que se produce en esta pregunta es el abuso de asumir, obviar o simplemente reducir lo más posible el lenguaje matemático en la aplicación de propiedades elementales para argumentar cada uno de los procedimientos realizados en la búsqueda de una solución a la ecuación. En relación a esto, de lo observado en cada sesión, una respuesta a lo anterior es el "modelo" de procedimientos y lenguaje especifico, tanto oral como escrito, que deducen los estudiantes de la oratoria y la forma de abordar, argumentar y solucionar por parte de la docente ejercicios que involucran logaritmos. *(Véase pág. 55 letra f, análisis de resultados, tratamiento)*

<u>Pregunta Nº 2</u>

Como una forma de averiguar en los estudiantes el desarrollo de la habilidad de explicar y argumentar, ya sea utilizando lenguaje natural o lenguaje matemático, la habilidad de reconocer patrones o regularidades y el dominio de la abstracción matemática, es que surge esta pregunta, en donde deben demostrar la propiedad de logaritmos $\boldsymbol{log_a(B * C) = log_a B + log_a C}$, utilizando procedimientos algebraicos o simplemente argumentando a través del lenguaje natural. En base a esto último y según los procedimientos expresados por cada uno de los alumnos participantes de la investigación, tres de ellos manifiesta dominio o conocimiento para demostrar la propiedad, mientras que el porcentaje restante de estudiantes, no manifiesta ningún tipo de procedimiento que evidencie el dominio de esta.

En relación a los tres estudiantes que justifican algún dominio o conocimiento del ejercicio, todos evidencian la habilidad para relacionar la función potencia con la función logaritmo en forma generalizada, debido a que inician la demostración de esta propiedad utilizando la relación de equivalencia entre potencias y logaritmos, es decir:

$$\boldsymbol{log_a b = x \leftrightarrow a^x = b \ \wedge \ log_a c \leftrightarrow a^y = c}$$

A su vez, sorprende el uso del lenguaje algebraico para justificar sus argumentos realizando transformaciones dentro del mismo registro. Sin embargo, a pesar de que uno de los estudiantes logra demostrar la propiedad completamente, todos manifiestan un limitado uso del lenguaje matemático para conectar los procedimientos realizados, esto queda de manifiesto en el no uso de símbolos cuando corresponde y en el uso del símbolo "=" para representar implicancia o equivalencia entre los procedimientos, provocando confusión y poco entendimiento empañando la eficacia en la transmisión de su dominio al lector.

Considerando el total de alumnos participantes, cinco de seis estudiantes, evidencian un mínimo o nulo desarrollo de la habilidad de demostrar y argumentar la propiedad de logaritmos. Esto permite concluir que estos *manifiestan un limitado uso del lenguaje matemático y la habilidad para demostrar la propiedad de logaritmo.* En relación a esto, de lo observado en cada sesión, una respuesta a lo anterior es el tratamiento dado por la docente a las propiedades de los logaritmos como una transmisión de formulas aplicables a tipos de ejercicios que involucran logaritmos, dándole un sentido notoriamente práctico y "mecánico", en desmedro de un proceso de construcción de cada una de las propiedades utilizando como herramienta las propiedades de potencia y la relación de estas con el concepto matemático de los logaritmos.

Pregunta Nº3

Según lo manifestado por cada alumno participante en la resolución del ejercicio, cinco estudiantes manifiestan procedimientos. En relación a este número de alumnos, al elaborar la tabla de valores realizan una transformación dentro del mismo registro algebraico, utilizando implícitamente la igualdad ***f(x) = y*** evidenciado en la expresión $\boldsymbol{4^y}$ donde aplican la relación de equivalencia entre logaritmos y potencias para transformar la función logarítmica $\mathbf{y = log_4}\, \boldsymbol{x} + \mathbf{2}$ en la función exponencial $\boldsymbol{4^y = x + 2}$ lo cual es incorrecto. Luego, para expresar la ecuación exponencial en términos de *y*, aplican implícitamente la propiedad de la igualdad de raíces con igual índice:

$$\boldsymbol{\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b} \leftrightarrow a = b}$$

El fenómeno mencionado anteriormente, es consecuencia de que los estudiantes confunden $\boldsymbol{log_4 x + 2}$ con $\boldsymbol{log_4(x+2)}$**.** Sin embargo, a pesar del error evidente, relacionan correctamente el resultado con el dominio de f, debido a que implícitamente, manifiestan como dominio la restricción dada a la cantidad sub radical ***x + 2 > 0*** obteniendo como resultado el intervalo $[-2, \infty[$. Sin embargo, ninguno de los estudiantes explica porqué incluye el – 2 en el intervalo solución considerando que según lo expresado en sus procedimientos, restringen erróneamente la cantidad sub radical x + 2 a valores estrictamente mayores que cero. Lo anteriormente expuesto demuestra que a pesar de que los procedimientos realizados son incorrectos, los alumnos *evidencian habilidades con* *función raíz.* A su vez, en sus intentos por construir una tabla de valores para *x* e *y*, fracasan dado que los procedimientos necesarios para construirla fueron incorrectos, lo que permite concluir que los alumnos *no lograron realizar conversiones desde registros algebraicos a registros numéricos de la función logarítmica dada*. Asimismo, estos alumnos expresan el recorrido de la función a través de un intervalo (incorrecto) sin procedimientos que lo validen, lo cual resulta lógico dado que realizan procedimientos matemáticos erróneos claves para poder determinarlo. De igual manera, no construyen el grafico pedido, lo que muestra que ninguno de los estudiantes *logra realizar conversiones desde registros algebraicos a registros gráficos de la función logarítmica*. Finalmente, considerando lo anteriormente expuesto, se deduce que los alumnos participantes de la investigación *no evidencian o evidencian parcialmente la habilidad de operar funciones logarítmicas*.

Una explicación al fenómeno ocurrido en la pregunta anterior, se encuentra en el discurso y tratamiento dado por la docente al concepto de funciones logarítmicas. De lo observado en las sesiones relacionadas con este concepto, no se observan ejercicios propuestos por la profesora que involucren el tratamiento, transformación ni conversión de una función logarítmica expresada en lenguaje algebraico a una representación grafica que refuerce su aprendizaje. Más aún, no se evidencian actividades que promuevan el análisis funcional del concepto a pesar de contar con habilidades ya desarrolladas en los estudiantes como es el trato con funciones.

<u>Pregunta Nº4</u>

Como una forma de averiguar el desarrollo en los estudiantes de su capacidad para visualizar e interpretar representaciones gráficas de funciones logarítmicas, además de la habilidad para relacionar conceptos matemáticos (vistos como herramientas para fortalecer el aprendizaje de los logaritmos), realizando conversiones en diferentes registros de representación que faciliten los procesos, es que surge este ejercicio. En base a esto, y según lo expresado por los estudiantes en el ejercicio, ninguno de ellos logra resolverlo, más aún, ninguno evidencia procedimiento alguno.

De lo observado en cada sesión, una respuesta a lo anterior es el insuficiente planteamiento de ejercicios u actividades por parte de la docente que promuevan la transición de una función logarítmica por diferentes registros de representación y su relación con otros conceptos matemáticos como por ejemplo, las transformaciones isométricas. A pesar de que la profesora propone ejercicios donde los alumnos deben representar gráficamente una función logarítmica, no presenta actividades donde estos representen esta función desde un gráfico hacia una representación algebraica. Claramente, ninguno de los estudiantes *manifiesta las habilidades y destrezas necesarias para relacionar una función logarítmica desde otro registro de representación como lo es el lenguaje gráfico*.

4.6 Tabla Nº2 resumen encuesta

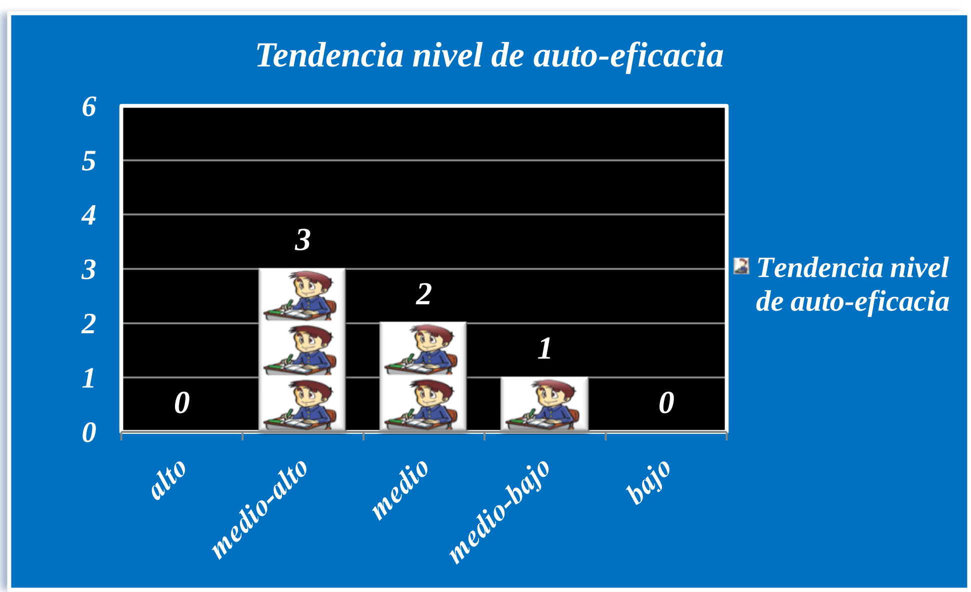
A continuación se presenta una tabla con un resumen de los niveles de *Auto-eficacia*, *proceso atributivo*, tipo de *motivación* para resolver actividades relacionadas con logaritmos y tipo de *acciones* que cada alumno obtuvo como resultado en la encuesta desarrollada.

Alumnos / Tendencias	Auto-eficacia	Proceso Atributivo	Motivación	Tipo de acción
Alumno A	**medio-alto**	**Interno- estables-incontrolables**	**No deja claro**	**No deja claro**
Alumno B	**medio-alto**	**Interno- inestables-controlables**	**Extrínseca**	**Controladoras**
Alumno C	**Medio**	**Interno- inestables-controlables**	**Extrínseca**	**Controladoras**
Alumno D	**Medio**	**Interno- inestables-controlables**	**Intrínseca**	**Autodeterminadas**
Alumno E	**medio-bajo**	**Interno- inestables-controlables**	**Extrínseca**	**Controladoras**
Alumno F	**medio-alto**	**Interno- inestables-controlables**	**Extrínseca**	**Controladoras**

Tabla Nº2: Resumen respuesta de los alumnos a cada pregunta de la encuesta

4.6.1 Gráficos encuesta

Grafico Nº 3:



En el **gráfico Nº3** se observa el número de estudiantes en relación a su tendencia nivel de auto-eficacia. Según lo observado en el grafico, existen cuatro de seis estudiantes que presentan niveles óptimos de auto-eficacia (medio o alto) respecto al concepto de logaritmos. Lo anterior tiene directa relación con el discurso dado en cada sesión por parte de la profesora. Se logran apreciar múltiples acciones de la docente que promueven el desarrollo de los niveles de auto-eficacia en los estudiantes, por ejemplo:

- ✓ Manifiesta explícitamente los objetivos de aprendizaje que se pretenden lograr en el desarrollo de la clase
- ✓ Presenta a cada uno de los alumnos una breve reseña histórica del concepto de los logaritmos, además, previo a definir el concepto, proporciona una guía de ejercicios para que los alumnos apliquen conocimientos previos y comprendan que lo aprendido anteriormente está ligado al nuevo concepto.
- ✓ Se aprecia que la docente define a los logaritmos desde una perspectiva donde manifiesta una relación matemática formal de las potencias con las raíces y los logaritmos demostradas mediante procedimientos algebraicos.
- ✓ Se visualizan momentos en los cuales existe un trabajo en equipo para resolver ejercicios y la participación de los alumnos en pizarra.
- ✓ Involucra material curricular como por ejemplo definiciones, guías de ejercicios, ejemplos de procedimientos para calcular logaritmos, resúmenes que proporcionan formulas, reseña histórica y relaciones con otros conceptos matemáticos como potencias, raíces y funciones.

Sin embargo, existen algunas acciones y no acciones que perjudican su buen desarrollo en los estudiantes:

- ✓ No manifiesta tendencias hacia la construcción de una definición formal del concepto en conjunto con los alumnos, solo construye la demostración de una de las propiedades de logaritmos, pero sin la participación de los alumnos, por lo que se considera una construcción netamente expositiva.
- ✓ No presenta explícitamente en su discurso un modelo cognitivo (necesidad de aprender) del concepto de los logaritmos para que los estudiantes comprendieran la necesidad cierta y concreta de conocer y aprender el concepto.
- ✓ No se visualizan ejemplos ni situaciones de la vida cotidiana que involucren al concepto matemático para que los alumnos se familiaricen.

Finalmente, considerando que la profesora *manifiesta ocasionalmente algunas tendencias y actitudes que fomentan al desarrollo de un alto nivel de auto eficacia* y los resultados expresados tanto en la tabla como en el grafico, se puede deducir que *existe una directa relación entre el tratamiento y discurso de la profesora y los niveles de auto-eficacia desarrollados por el grupo de estudiantes.*

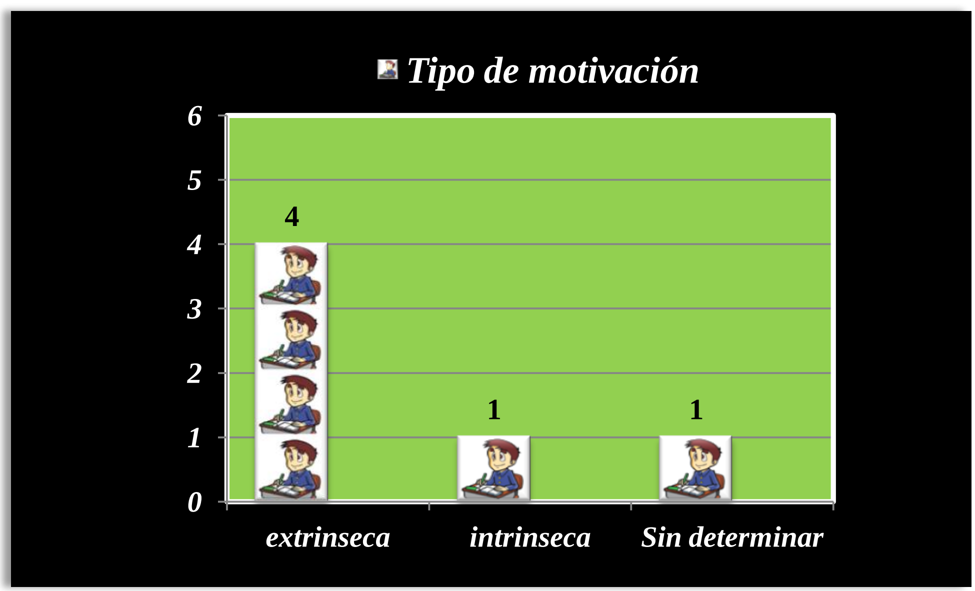
Grafico Nº 4:

El **gráfico Nº 4** representa el número de alumnos en relación a las distintas tendencias atributivas que existe.

Gráfico Nº 5:

En el **gráfico Nº5** se observa el número de alumnos que tienen tendencias a acciones controladoras o auto determinadas. En caso de no haber respuesta queda sin determinar.

Grafico Nº 6:



En el **gráfico Nº6** se observa el número de alumnos que posee motivación extrínseca o intrínseca. En caso de no existir respuesta se define como sin determinar.

En relación a lo expuesto en los gráficos Nº 5 y Nº 6, existen cuatro de seis estudiantes que presentan una motivación extrínseca y por lo tanto, acciones controladoras respecto al concepto de logaritmos. Por otra parte, de los dos alumnos restantes, uno de ellos manifiesta un tipo de motivación intrínseca y por lo tanto, acciones autodeterminadas en relación con el concepto de logaritmos. Lo anterior tiene directa relación con el tratamiento y discurso dado por la profesora a los estudiantes en cada una de las sesiones propuestas. Ejemplo de aquello es lo siguiente:

- ✓ No se observa ningún tipo de explicación, recordatorio, resumen ni comentario en todas las clases observadas por parte de la profesora de la importancia y necesidad que tiene para los alumnos, aprender el concepto de logaritmos.

- ✓ No se logra apreciar en las actividades planteadas, evaluaciones o discurso, algún tipo de premio y/o gratificación, observación o felicitaciones por parte de la profesora a algún alumno por realizar de buena forma una tarea o procedimiento.

- ✓ Se destaca que el planteamiento de objetivos puede de alguna manera propiciar un ambiente positivo para que exista dicha gratificación,

Finalmente, considerando que la docente *manifiesta mínimas actitudes que promueven un aumento del interés y motivación intrínseca de los alumnos por aprender y fomentar su autonomía* y los resultados expresados tanto en la tabla como en los gráficos Nº5 y Nº 6, se logra deducir que *existe una directa relación entre el tratamiento y discurso de la profesora y el tipo de motivación y acciones desarrolladas por los estudiantes encuestados.*

CONCLUSIONES

En el transcurso de esta investigación se ha observado que, en relación a los estándares que existen en el área de matemática a nivel internacional, Chile muestra un déficit importante en su rendimiento y por sobre todo en la auto-percepción de los alumnos respecto de sus capacidades para la matemática (TIMSS, 2003). No existe solo una razón para esta problemática, debido a que se ha hecho un profundo análisis de esta, poniéndose de manifiesto la holística de la misma, es decir, son varios los factores que hacen de Chile un país con bajos índices de rendimiento en el área de la matemática. Es por esto que de todos los factores existentes, se consideraron tres que son de suma relevancia en esta investigación; ***el Tratamiento de conceptos matemáticos, las creencias de los alumnos sobre sí mismos y el concepto matemático de los logaritmos***. Basado en lo anterior surge el objetivo de esta investigación, el cual fue por una parte, identificar las creencias y concepciones de los alumnos de segundo año de enseñanza media sobre sí mismos en función del concepto matemático de los logaritmos, también, verificar si los alumnos logran resolver ejercicios que involucran a los logaritmos, relacionándolos con diferentes objetos matemáticos como son potencias, raíces, funciones, entre otros. Asimismo, describir el tratamiento que da el docente al objeto matemático de los logaritmos y, finalmente, analizar el tipo de relación que se produce entre las creencias y concepciones que tienen los alumnos de segundo año de enseñanza media sobre sí mismos con el concepto de los logaritmos y el tratamiento dado por el docente a este concepto matemático.

En el ***tratamiento*** dado a los logaritmos se observa que, la profesora manifiesta ocasionalmente algunas tendencias y actitudes que fomentan el desarrollo de la auto-eficacia en los estudiantes, es decir, promueve por momentos al aumento en la seguridad de que lograrán resolver correctamente ejercicios ligados a los logaritmos. Por otra parte, la docente no manifiesta acciones de reconversión de atribuciones desfavorables a favorables en el aula, es decir, no muestra tendencias hacia una actitud persuasiva con los educandos que demuestran desinterés y/o desanimo por no poder resolver ejercicios relacionados con los logaritmos, porque creen no tener la capacidad suficiente para realizarlos. Finalmente, la docente manifiesta ocasionalmente algunas actitudes que promueven un aumento del interés y motivación intrínseca de los estudiantes, es decir que estos realicen los ejercicios de los logaritmos por la satisfacción que esto implica, además de fomentar su autonomía.

En relación al ***tratamiento*** otorgado a los logaritmos por la profesora, se observa que predomina una tendencia ***tradicional*** por parte de la misma**,** debido a que utiliza una metodología en la cual el *aprendizaje se da por medio de la* ***ejercitación repetitiva*** de ejercicios relacionados con potencias, raíces y logaritmos, con un enfoque ***formal - memorístico***, el cual consiste en una *memorización de reglas y definicione*s. Además, recurre a un proceso de enseñanza ***deductivo*** de los logaritmos, el cual consiste en iniciar con la definición del concepto, presentar ejemplos de logaritmos y proponer ejercicios a los estudiantes con la finalidad de consolidar los conocimientos obtenidos en clase. Los ejercicios planteados fueron de ***consolidación de conceptos.*** Finalmente, la profesora sólo maneja el registro *algebraico* para resolver ejercicios, asimismo, utiliza representaciones ***algebraicas*** para definir el concepto de los logaritmos, lo cual indica que la profesora *no transita entre diferentes registros de representación*.

En cuanto a las creencias sobre sí mismos del grupo didáctico investigado, en relación a al concepto de auto-eficacia se observa que existe una predominancia en los estudiantes al ***aprendizaje*** de tendencia ***vicario,*** es decir que la mayor parte de ellos adquieren el conocimiento observando a otros llevar a cabo actividades y/o ejercicios relacionados con los logaritmos. Este tipo de aprendizaje influye positivamente sobre su tendencia de ***auto-eficacia***, debido a que observar a un modelo experto permite dedicar todos nuestros recursos a aprender sobre la tarea en vez de llevarla a cabo, además permite ver, de modo ininterrumpido la puesta en práctica de estrategias expertas. Por último, observar a otros motiva a los observadores menos hábiles.

En cuanto a los resultados de los estudiantes de 2º año de enseñanza media encuestados en relación a sus ***tendencias de auto-eficacia***, cabe mencionar que ninguno de ellos manifiesta una tendencia alta de auto-eficacia, así también, ninguno de ellos manifiesta una tendencia baja de auto-eficacia en relación a los logaritmos, lo que permite concluir que en general, todos los alumnos encuestados manifiestan un mínimo de seguridad de que lograrán tener un buen rendimiento en ejercicios, tareas o actividades relacionadas con los logaritmos, por el contrario, ninguno de ellos revela un nivel alto de seguridad en relación al rendimiento en actividades que involucren a los logaritmos.

En relación a las atribuciones de los alumnos encuestados, se identifica que el proceso atributivo dominante en ellos es el ***Interno - estable – incontrolable,*** es decir, atribuyen su rendimiento, por ejemplo, al ***esfuerzo específico*** ante un ejercicio y/o tarea relacionada con los logaritmos.

En relación a la ***motivación, autonomía y control***, se observa que la motivación predominante en los estudiantes encuestados es una ***motivación extrínseca*** para con los logaritmos, lo que se traduce en una motivación por una conducta premiada, no por el interés o deseo personal de dominar una tarea, lo cual indica que poseen ***acciones controladoras***.

En relación al ***cuestionario*** realizado, de las cuatro preguntas planteadas a los estudiantes, en su totalidad resolvieron correctamente la **pregunta Nº1** utilizando el lenguaje algebraico como procedimiento para resolverlo. Esto permite deducir que los estudiantes ***establecen relaciones entre potencias, raíces y logaritmos. Además, demuestran saber resolver ejercicios básicos relacionados con el concepto de los logaritmos***. Esto indica que existe, a lo menos, una habilidad básica de los logaritmos desarrollada en los estudiantes investigados. En la **pregunta Nº2**, considerando el total de alumnos participantes, cinco de seis de ellos, evidencian un mínimo o nulo desarrollo de la habilidad para demostrar y argumentar la propiedad de logaritmos. Esto permite concluir que estos ***manifiestan un limitado uso del lenguaje matemático y la habilidad para demostrar la propiedad de logaritmo***. A su vez, en la **pregunta Nº3,** según lo manifestado por cada alumno participante en la resolución del ejercicio, cuatro estudiantes del total manifiesta procedimientos. Se deduce que los alumnos ***no evidencian o evidencian parcialmente la habilidad de operar funciones logarítmicas*.** Finalmente, en la **pregunta Nº4** según lo expresado por los estudiantes en el ejercicio, ninguno de ellos logra resolverlo, más aún, ninguno evidencia procedimiento alguno. Claramente, ninguno de los estudiantes ***manifiesta las habilidades y destrezas necesarias para relacionar una función logarítmica desde otro registro de representación como lo es el lenguaje gráfico***.

Existe una relación directa entre las ***creencias*** que tienen los estudiantes encuestados sobre sí mismos respecto al concepto de logaritmos y el ***tratamiento y discurso docente***. Tanto el nivel de auto-eficacia, como el tipo de motivación y acciones desarrollados por los estudiantes se han visto influenciados tanto por el discurso, como por las actitudes y acciones de la docente.

El ***tratamiento y discurso*** de la profesora dado a los logaritmos a través de su tendencia didáctica ***tradicional***, se relaciona directamente con el tipo de aprendizaje encontrado en los estudiantes, denominado ***aprendizaje vicario***, es decir la mayor parte de ellos adquirieron los conocimientos observando a la profesora (modelo experto), la persona más capacitada en el aula para modelar un procedimiento complejo relacionado con los logaritmos, sobre todo cuando los alumnos dudan de la dificultad de la tarea o de su propia capacidad.

El ***tratamiento y discurso*** dado por la profesora influye directamente en las ***habilidades desarrolladas*** por los estudiantes en relación a los logaritmos. Esto queda en evidencia según lo observado en cada una de las sesiones realizadas por la docente y los procedimientos mostrados por los estudiantes en cada uno de los ejercicios planteados en el ***cuestionario***. Algunas de las influencias encontradas son:

- *El "modelo" de procedimientos y lenguaje especifico, tanto oral como escrito, que deducen los estudiantes de la oratoria, lenguaje y la forma de abordar, argumentar y solucionar por parte de la docente ejercicios que involucran logaritmos.*

- *El tratamiento dado por la docente a las propiedades de los logaritmos como una transmisión de fórmulas aplicables a tipos de ejercicios que involucran logaritmos, dándole un sentido notoriamente práctico y "mecánico", en desmedro de un proceso de construcción de cada una de las propiedades utilizando como* *herramienta las propiedades de potencia y la relación de estas con el concepto matemático de los logaritmos.*

- *El tratamiento y discurso dado por la docente al concepto de funciones logarítmicas. De lo observado en las sesiones relacionadas con este concepto, no se observan ejercicios propuestos por la profesora que involucren el tratamiento, transformación ni conversión de una función logarítmica expresada en lenguaje algebraico a una representación gráfica que refuerce su aprendizaje. Más aún, no se evidencian actividades que promuevan el análisis funcional del concepto a pesar de contar con habilidades ya desarrolladas en los estudiantes como es el trato con funciones.*

- *El insuficiente planteamiento de ejercicios u actividades por parte de la docente que promuevan la transición de una función logarítmica por diferentes registros de representación y su relación con otros conceptos matemáticos como por ejemplo, las transformaciones isométricas. A pesar de que la profesora propone ejercicios donde los alumnos deben representar gráficamente una función logarítmica, no presenta actividades donde estos representen esta función desde un gráfico hacia una representación algebraica.*

Se concluye que para lograr un aprendizaje significativo respecto a los logaritmos, se deben considerar las creencias de los alumnos sobre sí mismos, incentivar y promover tendencias elevadas de auto-eficacia, respuestas atributivas hacia el esfuerzo, una motivación intrínseca y conductas auto determinadas en los alumnos en relación a los logaritmos, es el desafío del docente. Para que ocurra lo anterior, se deben generar instancias para que los profesores mejoren sus prácticas, promoviendo cambios en el tratamiento de tal forma que se orienten hacia tendencias didácticas en las que contengan de forma amplia y precisa, los elementos y características tanto de las creencias de los alumnos como de los conceptos matemáticos a enseñar. En el caso de los logaritmos, se requiere un cambio hacia tendencias didácticas ***espontaneista o investigativa,*** debido a que estas tendencias promueven un desarrollo óptimo de auto-eficacia al fomentar un aprendizaje activo de los logaritmos, incentiva una motivación intrínseca en los alumnos por el uso de situaciones reales y familiares en donde deben resolver utilizando procedimientos que involucren logaritmos, logran una articulación entre los diferentes registros de representación de este concepto, y se considera el uso de variables el cual es un elemento esencial para el aprendizaje del álgebra.

BIBLIOGRAFIA

Caballero, M. (2010). *Concepciones y enseñanza del concepto ecuación lineal un estudio con profesores de bachillerato*. Tesis de licenciatura no publicada. Mérida, Yucatán, México.

Ferrari, M. (2010). *Una visión socio epistemológica. Estudio de la función logaritmo*. Resumen. Departamento de Matemática Educativa CINVESTAV- IPN, México.

OCDE (2009). *Resumen de resultados PISA 2009 Chile. SIMCE* – Unidad de Curriculum y Evaluación. Ministerio de Educación de Chile.

TIMSS (2003). *Chile y el aprendizaje de matemáticas y ciencias según TIMSS. Resultados de los estudiantes chilenos de 8º básico en el Estudio Internacional de Tendencias en Matemáticas y Ciencias 2003*. Unidad de Curriculum y Evaluación. Ministerio de Educación Chile.

TIMSS (2003). Revista de educación MINEDUC. *Oportunidad para crecer. Situarse para mejorar resultados*. Consultado en mayo 2011 en www.educarchile.cl/Userfiles/P0001%5CFile%5CTIMSS.pdf

Mora F., Barrantes Campos H. *¿QUÉ ES MATEMÁTICA? Creencias y concepciones en la enseñanza media costarricense*. Cuaderno de investigación, educación y formación matemática, 2008, año 3, numero 4, pp. 71-81. Centro de Investigaciones Matemáticas y Metamatemáticas. Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica.

Bruning R., Schraw G., Ronning R. *Creencias sobre el yo. Psicología cognitiva e instrucción*. España, 2002, Cap. Nº 6, pp.167 - 200.

Contreras, L. (1998). *Marco Teórico sobre concepciones acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática*. En Caballero, M. (2010). Concepciones y enseñanza del concepto ecuación lineal un estudio con profesores de bachillerato, pág. 24 - 28. Tesis de licenciatura no publicada. Mérida, Yucatán, México.

Abrate, R. & Pochulu, M. (2007). *Experiencias, propuestas y reflexiones para la clase de Matemática.* Editado por la UNIVERSIDAD NACIONAL DE VILLA MARÍA. 1ª ed. Villa María: Universidad Nacional de Villa María, 2007

ANEXOS

A continuación se adjuntan las guías presentadas por la profesora en la clase de logaritmos:

LOS LOGARITMOS

GUIÁ DE TRABAJO…."El Inicio"….

Observación…
Cuando hablamos de Potencias y Raíces, siempre pensamos en una escritura con base y exponente, entero o fraccionario. Luego podemos tener los siguientes ejercicios, que nos sirven para recordar estas escrituras valorativas, que anteriormente hemos usado para trabajar y comprender las operatorias matemáticas en un contexto numérico, (y también hemos resuelto tratando de ubicar estos números en la recta numérica).
Por ejemplo pensemos estos ejercicios y encontremos el valor numérico de la incógnita dada:

1) $7^x = 343$ 2) $40^{-1} = x$ 3) $\frac{2^3}{3} = x$ 4) $\left(\frac{5}{6}\right)^{-2} = x$ 5) $x^3 = 729$ 6) $x^{-2} = 4$ 7) $a^{-3} = 125$

8) $3^x = 9$ 9) $10^x = 1.000$ 10) $x^{-4} = 10.000$ 11) $8^3 = x$ 12) $6^x = \frac{1}{36}$ 13) $9^{-x} = 81$

14) $11^x = \frac{1}{121}$ 15) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-x} = \frac{125}{8}$ 16) $\left(\frac{7}{6}\right)^x = 1$ 17) $2^x = \frac{1}{128}$ 18) $0{,}2^2 = x$ 19) $x^3 = 64$

20) $0{,}3^3 = x$ 21) $5^{-x} = 625$ 22) $\sqrt{x} = 7$ 23) $\sqrt[5]{x} = 2$ 24) $\sqrt[3]{64} = x$ 25) $\sqrt[3]{8^2} = x$ 26) $\sqrt[x]{125} = 5$

27) $\sqrt[x]{256} = 4$ 28) $\sqrt{x} = \frac{5}{6}$ 29) $\sqrt{x} = \frac{7}{8}$ 30) $49^x = 7$ 31) $64^x = 8$ 32) $\left(\frac{3}{7}\right)^x = \frac{343}{27}$ 33) $\left(\frac{4}{9}\right)^x = \frac{3}{2}$

LOS LOGARITMOS

OBSERVACION………Luego diremos que, una base, con un exponente y un resultado se podrían escribir relacionando estos términos de la siguiente manera….

Llegando a la definición de lo que significa una operatoria llamada **LOGARITMOS….**

$\log_a b = c$ **donde diremos que** $a^c = b$ **ó** $a = \sqrt[c]{b}$ **con** $a \neq 1$

Entonces podríamos decir que "a" elevado a quién se obtienen "b".

$$\log_a b = x \quad \Rightarrow \quad a^x = b$$

Luego podríamos jugar con esta incógnita y así calcular la expresión numérica….según donde se encuentre la variable….

Resolvamos:

1) $\log_2 64 = x$ 2) $\log_9 729 = x$ 3) $\log_3 9 = x$ 4) $\log_5 125 = x$ 5) $\log_6 36 = x$ 6) $\log_7 343 = x$

7) $\log_x 64 = 2$ 8) $\log_x 64 = 6$ 9) $\log_x 256 = 2$ 10) $\log_x 49 = 2$ 11) $\log_x \frac{8}{125} = 3$ 12) $\log_x \frac{1}{27} = 3$

13) $\log_2 x = 3$ 14) $\log_3 x = -4$ 15) $\log_2 x = -7$ 16) $\log_3 x = -5$ 17) $\log_7 x = -2$ 18) $\log_{\frac{1}{5}} x = -3$

OBS:

-Ahora debes saber que los logaritmos antiguamente se calculaban con unas tablas logarítmicas, muy extensas, que las puedes encontrar en el Algebra de Baldor, pero actualmente se trabajan con calculadora, cuando es necesario….

-También los logaritmos se trabajan con base 10 (diez), es decir, $\log_{10} x$, son llamados **Logaritmos Decimales** y en este contexto los denotaremos como $\log\ x$

-Las calculadoras tienen teclas para calcular el logaritmo en base 10 (log) y el logaritmo natural (ln), pero no el logaritmo en una base cualquiera…..En ese caso se usan propiedades de los logaritmos y se cambia la base.

Por ejemplo veamos estos casos simples: (la base 10 no se escribe, se asume que allí hay un 10).

1) $\log 1.000 = x$ 2) $\log 0{,}0001 = x$ 3) $\log 10.000 = x$ 4) $\log 10.000.000 = x$ 5) $\log 0{,}1 = x$

6) $\log 0{,}01 = x$ 7) $\log 0{,}001 = x$ 8) $\log 0{,}00001 = x$ 9) $\log 1.000.000 = x$ 10) $\log 100.000 = x$

OBS: De la misma manera que la operación opuesta de la <u>suma</u> es la <u>resta</u> y la de la <u>multiplicación</u> la <u>división</u>, la logaritmación es la operación inversa a la exponenciación.

<u>Matematicas....</u>

Contenido : Definición ......Propiedades de Logaritmos
Nombre :
Calcula en base a la definición de Logaritmo x en cada caso

1) $\log_{\frac{9}{4}} \frac{3}{2} = x$

2) $\log_{27} 9 = x$

3) $\log_{\frac{4}{81}} \frac{9}{2} = x$

4) $\log_x \frac{1}{4} = -\frac{2}{3}$

5) $\log_x \frac{1}{8} = -\frac{3}{4}$

6) $\log_{\frac{49}{36}} x = -\frac{1}{2}$

7) $\log_2 \frac{1}{32} = x$

8) $\log_{\frac{1}{125}} 625 = -x$

9) $\log_{\frac{49}{36}} x = -\frac{1}{2}$

10) $\log_x 2 = -\frac{1}{3}$

11) $\log_x \frac{16}{25} = 2$

12) $\log_2 \frac{1}{32} = x$

13) $\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{128} = x$

14) $\log_{\frac{2}{5}} \frac{125}{8} = x$

15) $\log_x \frac{1}{4} = -2$

16) $\log_x \frac{1}{4} = -\frac{2}{3}$

17) $\log_x \frac{1}{8} = -\frac{3}{4}$

18) $\log_{\frac{49}{36}} x = -\frac{1}{2}$