UNIVERSIDAD DE VALPARAÍSO

Facultad de Ciencias

Instituto de Matemáticas

Supercaracteres: el grupo de Cuaterniones generalizado

por

CAMILA YÁÑEZ CORNEJO

Tesis presentada para optar al grado de Licenciada en Matemáticas.

Profesor guía Dr. Jesús Juyumaya

Valparaíso 2014

Comisión Examinadora:

- ✓ Dr. Jesús Juyumaya (Universidad de Valparaíso)
- ✓ Mg. Miguel Cerda (Universidad de Valparaíso)
- ✓ Dr. Marcelo Flores (Universidad de Chile)

---

camila.yanezc@alumnos.uv.cl

kmilita161@hotmail.com

Agradezco
a mi madre y abuelos
quienes a lo largo de mi vida han velado por mi bienestar y educación siendo
mi apoyo en todo momento. Por hacer todo en la vida para que
yo pudiera lograr mis sueños, por motivarme y darme
la mano cuando sentía que el camino se terminaba.
A mi profesor guía,
por su paciencia, apoyo, por el
tiempo dedicado en estos últimos años
y a mis amigas,
por haberme ayudado siempre que lo precisé.
CAMILA.

Índice de Notaciones

Símbolo	Significado
e o 1	Denotan el Elemento Neutro
e_G	Elemento Neutro del grupo G
$\mathrm{Aut}(G)$	Automorfismo de G en G
$Z(G)$	Centro del grupo G
$[G, G]$	Subgrupo conmutador de G
$\mathrm{Int}(G)$	Automorfismo interior de G
$\mathrm{Est}_G(x)$	Estabilizador de x en G
O_x	Órbita de x
S_n	Grupo Simétrico de orden $n!$
C_n	Grupo Cíclico de orden n
$\mathcal{C}(x)$	Clase de conjugación de x en G
$\mathbb{Z}_n$	Grupo de enteros modulo n
$\mathbb{Z}_n^\times$	Grupo de enteros modulo n
D_n	Grupo Diédrico de orden $2n$
Q_{4m}	Grupo de Cuaterniones de orden $4m$
$\widehat{G}$	Representaciones Irreducibles de G
$\mathrm{Irr}(G)$	Caracteres Irreducibles de G
$\mathcal{X}$	Partición del conjunto $\mathrm{Irr}(G)$
$\mathcal{K}$	Partición del grupo G
$\mathcal{C}(g)$	Clase de conjungación de $g \in G$

Índice general

Introducción

La teoría de supercaracteres fue introducida en el año 2008 por P. Diaconis y I. M. Isaacs [**2**], y corresponde a una generalización de la teoría ordinaria de Caracteres. La teoría de supercaracteres tiene como fuente inspiradora los trabajos de André [**3**] y Yang [**4**], sobre la clasificación de los caracteres irreducibles del grupo unipotente finito.

El grupo unipotente finito es un grupo de suma importancia en la teoría de grupos clásicos. Clasificar sus representaciones irreducibles es un problema no resuelto a la fecha. Los trabajos de Andre y Yang estudian los caracteres irreducibles de estos grupos. Dada la imposibilidad de tener formulas para el valor de sus caracteres, ellos introducen cierta partición del conjunto de sus caracteres irreducibles y de sus clases de conjugación. De este modo obtienen los valores de ciertos supercaracteres (sumas de los caracteres de cada partición) sobre las particiones de las clases. Cada una de estas sumas se llaman supercaracteres y cada elemento de la partición del conjunto de clases se llama una superclase.

En estos últimos años la Teoría de supercaracters a llamado la atención de numerosos matemáticos y es un campo de investigación muy activo. Además se conecta sorprendentemente con teoría de números [**6**], teoría de codigos [**8**] y ciertas trazas de Markov [**9**].

Una manera de construir una teoría de supercaracteres de un grupo dado es mediante un teorema de Brauer [**5**] (Teorema 6.32 y Corolario 6.33) . Esta teoría de supercaracteres construida a partir de este teorema de Brauer a resultado ser muy eficiente, ver por ejemplo [**7**].

En esta tesis construiremos, usando el teorema de Brauer, una teoría de supercaracteres del grupo de cuaterniones generalizados. Nuestra construcción, hasta donde sabemos, no se encuentra en la literatura.

El Grupo de Cuaterniones Generalizado, denotado por Q_{4m} y de orden $4m$, es definido como un cociente entre el producto semi-directo $\mathbb{Z}_{2m} \rtimes_{\varphi} \mathbb{Z}_4$ de los grupos Z_{2m} y Z_4 con el subgrupo $K := \{(0,0),(m,2)\}$ de $\mathbb{Z}_{2m} \rtimes_{\varphi} \mathbb{Z}_4$ y donde $\varphi : \mathbb{Z}_4 \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_{2m})$ esta dado por $b \mapsto \varphi_b$, con $\varphi_b(c) = (-1)^b c$.

De modo resumido, el objetivo principal de esta tesis es construir y estudiar en general la teoría de caracteres y la teoría de supercaracteres para el grupo de cuaterniones generalizado. Más precisamente, se usará la maquina de Mackey para la construcción de los caracteres irreducibles de Q_{4m}. Posteriormente se considerará los automorfismo del grupo Q_{4m}, y a través del teorema de Brauer se obtiene una partición de conjunto de caracteres irreducibles $\mathrm{Irr}(Q_{4m})$ y del conjunto de clases de conjugación de Q_{4m}, los cuales son llamados supercaracteres y superclases de Q_{4m}, calculando esto, obtenemos una teoría de supercaracteres para Q_{4m}.

El esquema de la tesis, será indicado como sigue: El primer capítulo, corresponde a los preliminares el cual aborda tanto definiciones como notaciones que usaremos en los capítulos posteriores. Además se incluyen dos secciones, una de teoría de grupos abordando grupos de automorfismos, acciones de grupos, producto semi-directo y presentaciones de grupos; y otra sección, de representaciones de grupos, incluyendo Teorema de Maschke, que nos asegura la descomposición de una representación en suma directa de representaciones irreducibles y Lema de Schur, que nos permite estudiar la irreductibilidad de una representación. En el segundo capítulo, estudiaremos en una primera sección las propiedades de la Teoría de Caracteres, caracteres inducidos y la maquina de Mackey, la cual permite construir todos los caracteres irreducibles de un grupo $G = A \rtimes H$ a partir de subgrupos A y H de G, con A conmutativo. En la segunda sección, introduciremos la Teoría de Supercaracteres, abordando sus principales propiedades.

También recordamos el teorema de Brauer relativo a la acción de un grupo de automorfismos sobre los caracteres irreducibles y clases de conjugación. Y por último un tercer capítulo, en el cual se estudia en una primera sección, de manera concisa todo lo referido al grupo de cuaterniones de 8 elementos y construir una teoría de supercaracteres Q_8, a base de la teoría de caracteres, mostrando además la tabla de supercaracteres de este grupo. Cabe señalar que para usar el teorema de Brauer tuvimos que calcular el grupo de automorfismo de Q_8 (Ver 3.1). La segunda sección corresponde al estudio de una teoría de supercaracteres de Q_{4m}. Así, primero determinamos las clases de conjugación y la teoría de caracteres ordinaria de Q_{4m}(ver Teoremas 3.5 y 3.7), para posteriormente construir la teoría de supercaracteres de Q_{4m}. También se explicíta la tabla de supercaracteres de Q_{4m}. Por último hemos incluido una serie de conjeturas que relacionan el grupo de cuaterniones generalizado con el grupo Diédrico. Estas conjeturas darán una manera de construir una teoría de supercaracteres del grupo Diédrico a partir de la teoría de supercaracteres del grupo de cuaterniones generalizado.

A modo de conclusión y resumen, podemos decir que hemos construido una teoría de supercaracteres del grupo de cuaterniones clásico y el grupo de cuaterniones generalizados. Cabe destacar que esta última construcción no se encuentra en la literatura corriente. Además, hemos planteado varias conjeturas sobre una teoría de supercaracteres del grupo Diédrico, las cuales nos parecen de particular importancia y tampoco se encuentran en la literatura.

El presente trabajo de tesis fue parcialmente financiado por el proyecto FONDECYT No. 1141254 y DIUV 11-2011.

Capítulo 1

Grupos y Representaciones de Grupos

1. Preliminares de Teoría de Grupos

1.1. Grupo de Automorfismos. Recordemos que un automorfismo de un grupo G, es un homomorfismo biyectivo de G en si mismo.

Notación 1.1. *Denotaremos* $\mathrm{Aut}(G)$ *el conjunto de todos los automorfismos de* G.

En $\mathrm{Aut}(G)$ tenemos una estructura de grupo con la compuesta usual de funciones.

Proposición 1.1. *Sean* $g \in G$ *y* $f \in \mathrm{Aut}(G)$*, entonces se tienen las siguientes propiedades:*

1. $G = \langle g \rangle$ *si, y sólo si* $G = \langle f(g) \rangle$,
2. *Si el orden de* g *en* n*, entonces el orden de* $f(g)$ *es* n.

Definición 1.1. *Sea* G *un grupo,* $g \in G$. *Sea* $\mathrm{I}_g \in \mathrm{Aut}(G)$ *definida por* $\mathrm{I}_g(x) = gxg^{-1}$. I_g *se llama automorfismo interior asociado a* g.

Observación 1.1. Si G es abeliano, tenemos que para todo g y x se tiene

$$\mathrm{I}_g(x) = gxg^{-1} = gg^{-1}x = x,$$

es decir, si G abeliano I_g es la identidad para todo $g \in G$.

Notemos que el conjunto $\mathrm{Int}(G)$,

$$\mathrm{Int}(G) := \{\mathrm{I}_g \in \mathrm{Aut}(G) \; : \; g \in G\},$$

tiene estructura natural de grupo. En efecto, $\mathrm{Int}(G)$ es un subgrupo de $\mathrm{Aut}(G)$.

Es facil ver que la asignación $g \mapsto I_g$ define un homomorfismo $f : G \longrightarrow \mathrm{Int}(G)$. Nótese que $\mathrm{Ker}(f) = Z(G)$ y $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Int}(G)$ entonces por el primer teorema del isomorfismo se tiene que

$$G/Z(G) \simeq \mathrm{Int}(G)$$

Proposición 1.2. *Sean* G *y* H *grupos. Sea* $f : G \longrightarrow H$ *un isomorfismo, entonces* $\mathrm{Aut}(G) \simeq \mathrm{Aut}(H)$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\varphi : \mathrm{Aut}(G) \longrightarrow \mathrm{Aut}(H)$ definida mediante

$$\varphi(g) = f^{-1} \circ g \circ f \quad \text{para todo} \quad g \in \mathrm{Aut}(H).$$

Es facil ver que φ es un homomorfismo. Notar que $f^{-1} \circ g \circ f = \mathrm{Id}_H$ si y sólo si $g = \mathrm{Id}_G$, luego $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{\mathrm{Id}_G\}$, entonces φ es inyectiva. Solo basta ver que $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Aut}(H)$. Es claro que $\mathrm{Im}(\varphi) \subset \mathrm{Aut}(H)$, ahora sea $h \in \mathrm{Aut}(H)$, $h \in \mathrm{Im}(\varphi)$ si y sólo si existe $g \in \mathrm{Aut}(G)$ tal que $\varphi(g) = h$, luego basta tomar $g = f \circ h \circ f^{-1}$ tal que $\varphi(f \circ h \circ f^{-1}) = h$. Por lo tanto, φ es epiyectiva. Luego, $\mathrm{Aut}(G) \simeq \mathrm{Aut}(H)$. □

1.1.1. **Automorfismos del grupo de enteros módulo n.** Sea $n \in \mathbb{N}$. Como es usual denotaremos por $\mathbb{Z}_n$ el grupo de enteros móduloc n, es decir:

$$\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$$

Recordemos también que $\mathbb{Z}_n$ es un monoide con el producto de enteros modulo n, denotaremos por $\mathbb{Z}_n^\times$ el grupo de unidades de $\mathbb{Z}_n$.

Proposición 1.3.

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_n) \simeq \mathbb{Z}_n^\times.$$

DEMOSTRACIÓN. En efecto, dado $a \in \mathbb{Z}_n^\times$, se define la función $\phi_a :\longrightarrow \mathbb{Z}_n$, mediante

$$\phi_a(x) = ax.$$

Es claro que ϕ_a es un homomorfismo. Además como a es invertible resulta claro que ϕ_a es también invertible y $\phi_a^{-1} = \phi_{a^{-1}}$. □

También cabe destacar que la proyección natural π de $\mathbb{Z}_n$ sobre $\mathbb{Z}_m$ respeta unidades, esto es

Proposición 1.4 ([**15**]). $\pi(\mathbb{Z}_n^{\times}) = \mathbb{Z}_m^{\times}$, *donde* m *divide a* n. *Así,* $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_n)$ *se proyecta en* $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_m)$.

Este último resultado será usado mas adelante.

1.2. Acción de Grupo. Sean G un grupo y X un conjunto no vacío. Se dice que G actúa sobre X, o que X es un $G-$espacio si existe una función de $G \times X$ en X, donde $(g, x) \longmapsto g \cdot x$, tal que:

1. $g \cdot (h \cdot x) = (g \cdot h) \cdot x$, para todo $g, h \in G$ y para todo $x \in X$
2. $e \cdot x = x$, para todo $x \in X$.

Notemos que una acción define una relación en X, dada por:

$$x \sim y \quad \text{si y sólo si existe} \quad g \in G \quad \text{tal que} \quad g \cdot x = y \tag{1.1}$$

Proposición 1.5. $\sim$ *es una relación de equivalencia.*

Recordemos algunas definiciones sobre acciones de grupos.

Definición 1.2. *Sea* X *un* $G-$*espacio y* $x \in X$.

1. *Se define el estabilizador de* x *en* G *como*

$$\mathrm{Est}_G(x) = \{g \in G \ : \ g \cdot x = x\}$$

2. *Se define la órbita de* x *como*

$$O_x = \{g \cdot x \ : \ g \in G\}$$

Observación 1.2. Notemos que las órbitas son las clases de equivalencia de la relación (1.1), luego tenemos que

$$X = \coprod_{x \in R} O_x$$

donde R es un sistema de representantes.

Proposición 1.6. *El conjunto* $\mathrm{Est}_G(x)$ *es un subgrupo de* G.

Note, que G actua naturalmente en $G/\mathrm{Est}_G(x)$ con la acción

$$g \cdot \big(h\mathrm{Est}_G(x)\big) = (gh)\mathrm{Est}_G(x).$$

Luego, tenemos la siguiente proposición.

Proposición 1.7. *Si* X *es un* $G-$*espacio, entonces* X *es* $G-$*isomorfo con* $G/\mathsf{Est}_G(x)$. *En particular, si* G *es finito tenemos:*

$$\frac{|G|}{|\mathrm{Est}_G(x)|} = |O_x|.$$

Definición 1.3. *Un* G*-espacio se dice transitivo si posee una sola órbita.*

Ejemplo 1.1 (Acción por conjugación)**.** Consideremos $X = G$ y la acción por conjugación de G sobre G, tenemos

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & G \times G & \longrightarrow & G \\ & (g,h) & \to & g \cdot h = ghg^{-1} \end{array}$$

Dado $h \in G$, la órbita de h está dada por

$$O_h = \big\{g \cdot h \ : \ g \in G\big\} = \big\{ghg^{-1} \ : \ g \in G\big\}$$

Es decir los elementos de O_h corresponden a todos los conjugados de h. Usualmente O_h se denota $\mathcal{C}(h)$ y se llama clase de conjugación de h.

$$\mathrm{Est}_G(h) = \big\{g \in G \ : \ g \cdot h = h\big\} = \big\{g \in G \ : \ ghg^{-1} = h\big\}$$

en otras palabras, el estabilizador de h en G es el subgrupo, llamado centralizador de h en G, y se suele denotar $C_G(h)$. Notar que $\bigcap_{h\in G} C_G(h)$ es igual al centro $Z(G)$ de G.

Observación 1.3. Recordar que los conjugados de un ciclo en S_n tienen una facil descripción: Para $\sigma \in S_n$ tenemos

$$\sigma(x_1x_2\cdots x_n)\sigma^{-1} = (\sigma(x_1)\sigma(x_2)\cdots\sigma(x_n)). \tag{1.2}$$

La ecuación (1.2) implica que dos permutaciones son conjugadas si y sólo si tienen la misma estructura ciclica. Esto permite describir de manera sencillalas clases de conjugación de S_n. Más aún, ellas están parametrizadas por las particiones de n.

Ejemplo 1.2. Ejemplifiquemos la acción por conjugación para el grupo

$$S_3 = \{(1), (12), (13), (23), (123), (132)\}.$$

Las particiones de 3 son:

$$3; 2+1; 1+1+1,$$

luego las estructuras cíclicas de S_3 son:

$$\begin{array}{ccc} (3) & \longleftrightarrow & (\cdot\cdot\cdot) \\ (2,1) & \longleftrightarrow & (\cdot\cdot)(\cdot) \\ (1,1,1) & \longleftrightarrow & (\cdot)(\cdot)(\cdot) \end{array}$$

Por lo tanto, las clases de conjugación de S_3 son:

$$\begin{array}{rcl} O_{(1)} & = & \{(1)\} \\ O_{(12)} & = & \{(12), (13), (23)\} \\ O_{(123)} & = & \{(123), (132)\} \end{array}$$

Ejemplo 1.3. Sea Q_8 el grupo de cuaterniones de orden 8, esto es

$$Q_8 = \left\{1, i, j, k, -1, -i, -j, -k\right\}.$$

(más adelante, estudiaremos con detalle este grupo). Consideremos la acción por conjugación de Q_8 sobre Q_8. Dado $x \in Q_8$, la clase de conjugación de x es dada por:

$$\mathcal{C}(x) \;=\; \left\{gxg^{-1} \;:\; g \in G\right\}$$

Un calculo directo muestra que las clases de conjugación de Q_8 son:

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}(1) &= \{1\} \\
\mathcal{C}(i) &= \{i, -i\} \\
\mathcal{C}(j) &= \{j, -j\} \\
\mathcal{C}(-1) &= \{-1\} \\
\mathcal{C}(k) &= \{k, -k\}
\end{aligned} \tag{1.3}$$

1.3. Producto Semi-Directo. Recordar que G se dice que es el producto directo (interno) de dos subgrupos normales H, K si, y sólo si,

1. $H \cap K = \{e\}$
2. $HK = G$.

Una generalización natural de esta situación es suponer que sólo uno de los subgrupos es normal.

Definición 1.4 (Producto Semi-Directo)**.** *Diremos que* G *es un producto semi-directo de* H *con* K*, denotado* $H \rtimes K$*, si:*

1. $H \trianglelefteq G$,
2. $HK = G$,
3. $H \cap K = \{e\}$.

Dados dos grupos H, K y φ un homomorfismo del grupo K en $\mathrm{Aut}(H)$. Estudiaremos como construir un grupo que sea producto semi-directo de H con K.

Definición 1.5. *Sean* H, K *grupos y sea* $\varphi : K \longrightarrow \mathrm{Aut}(H)$ *un homomorfismo. Denotaremos* $\varphi_k = \varphi(k)$ *para todo* $k \in K$*. Definamos, sobre el producto cartesiano* $H \times K$*, el siguiente producto:*

$$(h_1, k_1)(h_2, k_2) = (h_1\varphi_{k_1}(h_2), k_1k_2) \tag{1.4}$$

Lema 1.1. *El producto definido en (1.4) define una estructura de grupo en el conjunto* $H \times K$*.*

Demostración. Sean $h_1, h_2, h_3 \in H$ y $k_1, k_2, k_3 \in K$, entonces

$$\begin{aligned}
((h_1, k_1)(h_2, k_2))(h_3, k_3) &= (h_1\varphi_{k_1}(h_2), k_1k_2)(h_3, k_3), \\
&= (h_1\varphi_{k_1}(h_2)\varphi_{k_1k_2}(h_3), k_1k_2k_3), \\
&= (h_1\varphi_{k_1}(h_2)\varphi_{k_1}(\varphi_{k_2}(h_3)), k_1k_2k_3), \\
&= (h_1, \varphi_{k_1}(h_2\varphi_{k_2}(h_3)), k_1k_2k_3), \\
&= (h_1, k_1)(h_2\varphi_{k_2}(h_3), k_2k_3), \\
&= (h_1, k_1)((h_2, k_2)(h_3, k_3)).
\end{aligned}$$

Es claro que $e_{H\times K} = (e_H, e_K)$ ya que

$$(h, k)(e_H, e_K) = (h\varphi_k(e_H), ke_K) = (h, k)$$

y

$$(e_H, e_K)(h, k) = (e_H\varphi_{e_K}(h), e_Kk) = (h, k)$$

Por último, notemos que

$$(h, k)^{-1} = (\varphi_{k^{-1}}(h^{-1}), k^{-1}), \tag{1.5}$$

pues

$$(h, k)(\varphi_{k^{-1}}(h^{-1}), k^{-1}) = (h\varphi_k(\varphi_{k^{-1}}(h^{-1})), kk^{-1}) = (e_H, e_K)$$

y

$$(\varphi_{k^{-1}}(h^{-1}), k^{-1})(h, k) = (\varphi_{k^{-1}}(h^{-1})\varphi_k(h), k^{-1}k) = (e_H, e_K).$$

Esto demuestra que el producto definido en (1.4) da estructura de grupo al conjunto $H \times K$. Denotaremos este grupo por $H \times_\varphi K$. □

Teorema 1.2 (Producto Semi-Directo)**.** *Tenemos que*

$$G = (H \times \{e_K\}) \rtimes (\{e_H\} \times K).$$

Demostración. Es claro que

$$(H \times \{e_K\}) \cap (\{e_H\} \times K) = (e_H, e_K) = \{e_{H\times K}\},$$

y también $G = (H \times \{e_K\})(\{e_H\} \times K)$, pues

$$(h, e_K)(e_H, k) = (h\varphi_{e_K}(e_H), e_Kk) = (h, k) \in H \times K.$$

Basta demostrar que $(H \times \{e_K\}) \trianglelefteq H \times K = G$. Para esto tenemos:

$$\begin{aligned}(h_1, k)(h_2, e_K)(h_1, k)^{-1} &= (h_1\varphi_k(h_2), ke_K)(\varphi_{k^{-1}}(h_1^{-1}), k^{-1}),\\ &= (h_1\varphi_k(h_2)\varphi_k(\varphi_{k^{-1}}(h_1^{-1})), kk^{-1}),\\ &= (h_1\varphi_k(h_2)h_1^{-1}), e_k) \in H \times \{e_K\}.\end{aligned}$$

Por lo tanto $G = (H \times \{e_K\}) \rtimes (\{e_H\} \times K)$. $\square$

Notemos que H es isomorfo de manera natural al subgrupo $H \times \{e_K\}$ de G, mediante $(h, e_K) \mapsto h$, análogamente para K con $\{e_H\} \times K$. Así, H y K pueden ser mirados como subgrupos de G y por lo tanto diremos que G es un producto semi-directo de H con K y escribiremos

$$G = H \rtimes K. \tag{1.6}$$

Observación 1.4. Notar que si φ es trivial, entonces $H \times_\varphi K$ es el grupo del producto directo $H \times K$ con el producto por componentes.

Ejemplo 1.4. Consideremos los grupos $\mathbb{Z}_{2m}$ y $\mathbb{Z}_4$ y definamos $\varphi : \mathbb{Z}_4 \longrightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}_{2m})$, por $b \mapsto \varphi_b$, donde φ_b es definida mediante $\varphi_b(c) = (-1)^b c$. Luego, $G := \mathbb{Z}_{2m} \rtimes \mathbb{Z}_4$ es un producto semi-directo con el operación

$$(a, b)(c, d) = (a + (-1)^b c, b + d) \tag{1.7}$$

donde $(a, b), (c, d) \in G$. Este grupo será usado más adelante el grupo de cuaterniones generalizado.

1.4. Presentación de Grupo. Una presentación, es una forma de definir únicamente un grupo mediante la especificación un conjuntos de generadores y un conjunto de relaciones. De modo preciso, sea G un grupo y X un conjunto de generadores de G y denotemos por $L(X)$ el grupo libre generado por X. Sea R un conjunto de relaciones, es decir igualdades entre elementos del grupo G y $\overline{R}$ denota la clausura normal[1] de R.

[1]Definición clausura normal: $\overline{R}$ es el subrupo normal de G mas pequeño que contiene a R.

Definición 1.6. *Diremos que un grupo* G *tiene la presentación* $\left\langle \mathsf{X} \,:\, \mathsf{R} \right\rangle$ *si* $\mathsf{G} \simeq \mathsf{L}(\mathsf{X})/\overline{\mathsf{R}}$.

Escribiremos $\mathsf{G} = \left\langle \mathsf{X} \,:\, \mathsf{R} \right\rangle$. En caso que X y R sean conjuntos finitos, se dice que G es finitamente presentado.

Observación 1.5. Intuitivamente, si G tiene una presentación $\left\langle \mathsf{X} \,:\, \mathsf{R} \right\rangle$ significa que G es el grupo mas grande que puede ser generado por X tal que las relaciones R son validas.

Ejemplo 1.5. Para $n > 1$. S_n tiene la siguiente presentación

$$S_n = \left\langle s_1, s_2, \ldots, s_{n-1} \;:\; \begin{array}{l} (s_i)^2 = 1 \\ s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}; 1 \leqslant i \leqslant n-2 \\ s_i s_j = s_j s_i,\ |i-j| \geqslant 2 \end{array} \right\rangle \tag{1.8}$$

Ejemplo 1.6. El grupo diédrico D_n, de orden $2n$, corresponde al grupo de simetría de un polígono regular (rotaciones y reflexiones); es presentado por

$$D_n = \left\langle r, s \,:\, r^n = e, s^2 = e, (sr)^2 = e \right\rangle.$$

Ejemplo 1.7. El grupo cíclico de enteros modulo n, puede ser presentado por

$$\left\langle x \,:\, x^n = e \right\rangle.$$

Teorema 1.3. *Sea* $\mathsf{G} = \left\langle \mathsf{X} \,:\, \mathsf{R} \right\rangle$ *y* H *un grupo arbitrario. Sea* $\varphi : \mathsf{X} \longrightarrow \mathsf{H}$. *Entonces, existe un homomorfismo* $\widetilde{\varphi} : \mathsf{G} \longrightarrow \mathsf{H}$ *que extiende a* φ*, si y sólo si toda relación:*

$$x_1^{r_1} \cdots x_m^{r_m} = e, \quad \textit{implica} \quad \varphi(x_1)^{r_1} \cdots \varphi(x_m)^{r_m} = e, \tag{1.9}$$

donde $x_i \in \mathsf{X}$*,* $r_i = \pm 1$*,* $i, 2, \ldots, m$.

Ejemplo 1.8. Cosideremos el grupo de cuaterniones Q_8 (ver Ejemplo 1.3) y el grupo G definido por:

$$\mathsf{G} = \left\langle a, b \,:\, a^4 = e, a^2 b^{-2} = e, bab^{-1}a = e \right\rangle$$

Sea $\varphi : G \longrightarrow Q_8$ definido por: $\varphi(a) = i$, $\varphi(b) = j$. En virtud del Teorema 1.3 φ es un homomorfismo dado que:

$$\begin{aligned}
&\varphi(a^4) = \varphi(a)^4 = iiii = (-1)(-1) = 1\\
&\varphi(a^2b^{-2}) = \varphi(a)^2\varphi(b)^{-2} = ii(jj)^{-1} = 1\\
&\varphi(bab^{-1}a) = \varphi(b)\varphi(a)\varphi(b)^{-1}\varphi(a) = jij^{-1}i = 1
\end{aligned}$$

En consecuencia, Q_8 es presentado por

$$\left\langle a, b \ : \ a^4 = e, a^2b^{-2} = e, bab^{-1}a = e \right\rangle$$

2. Representaciones de Grupos

2.1. Representaciones. De ahora en adelante los grupos considerados son finitos y todos los espacios vectoriales considerados son sobre $\mathbb{C}$ y de dimensión finita.

Definición 1.7. *Una representación (lineal compleja) es un par* (V, ρ) *donde* V *un* $\mathbb{C}-$*espacio vectorial de dimensión finita y* $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ *es un homomorfismo. Usaremos la notación* ρ_g *para la imagen de* g *por* ρ*.*

$$\begin{array}{rcccc}
\rho & : & G & \longrightarrow & \mathrm{GL}(V)\\
 & & g & \longmapsto & \rho_g
\end{array}$$

El grado de la representación (V, ρ) *es la dimensión de* V*. Recuerde que si* $\dim V = n$*, entonces* $\mathrm{GL}(V)$ *es isomorfo a* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$*.*

Definición 1.8. *Sean* (V, ρ) *y* (W, σ) *dos representaciones de* G*. Diremos que ellas son* $G-$*isomorfas o equivalentes si existe un* $\mathbb{C}-$*isomorfismo* ϕ *de* V *en* W *tal que* $\sigma_g \circ \phi = \phi \circ \rho_g$*. Es decir, el siguiente diagrama conmuta.*

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\rho_g"'] & W \arrow[d, "\sigma_g"] \\
V \arrow[r, "\phi"] & W
\end{tikzcd}$$

También, ϕ *se suele llamar un entrelazamiento de* (V, ρ) *con* (W, σ)*.*

Notación 1.2. $\mathrm{Hom}_G(V, W)$ denotará el $\mathbb{C}-$espacio vectorial formado por los entrelazamientos de V con W y si $V = W$ denotaremos $\mathrm{Hom}_G(V, W)$, simplemente por $\mathrm{End}_G(V)$.

Notar que $\mathrm{Hom}_G(V, W)$ es un subespacio de $\mathrm{Hom}(V, W)$.

Definición 1.9. *Sean* U *un subespacio vectorial de* V *y* (V, ρ) *una representación de* G.

1. *Diremos que* U *es* $G-$*estable si* $\rho_g(U) \subseteq U$ *para todo* $g \in G$
2. (V, ρ) *es irreducible si los únicos subespacios* G-*estables son los triviales. Es decir,* $\{0\}$ *y* V
3. *Si* (V, ρ) *no es irreducible se dice reducible.*

Proposición 1.8. *Sea* $\phi \in \mathrm{Hom}_G(V, W)$. *Tenemos:*

1. $\ker \phi$ *es un subespacio estable de* V
2. $\mathrm{Im}\phi$ *es un subespacio estable de* W.

Notación 1.3. Para un grupo G denotaremos por $\widehat{G}$ todas las representaciones irreducibles de G, salvo isomorfismo. También, $\widehat{G}$ suele llamarse dual de G.

Proposición 1.9. G *es abeliano, si y sólo sí,* $\widehat{G}$ *está constituido por los elementos de dimensión* 1. *Más aún,* $|G| = |\widehat{G}|$

Observación 1.6. Si U es G-estable, entonces tenemos la representación:

$$\begin{array}{cccccccc} \widetilde{\rho} & : & G & \longrightarrow & GL(U) & & & \\ & & g & \longmapsto & \widetilde{\rho}_g : & U & \longrightarrow & U \\ & & & & & u & \longmapsto & (\widetilde{\rho}_g)(u) = \rho_g(u) \end{array}$$

Así, todo subespacio estable define una representación.

Ejemplo 1.9. Sea G un grupo finito, V es un $\mathbb{C}-$espacio vectorial de dimensión 1, la representación definida por $\rho_g = 1_V$ para todo $g \in G$ se llama representación trivial de G.

Ejemplo 1.10. Consideremos el grupo cíclico $\mathbb{Z}_n$. Si ρ es una representación de dimensión 1 de $\mathbb{Z}_n$, entonces $\rho : \mathbb{Z}_n \longrightarrow \mathbb{C}^{\times}$. Así, como es cíclico, generado por 1, se sigue que ρ queda completamente determinado conociendo $\rho(1)$. Ahora, $\rho(0) = 1$, pero $\rho(0) = \rho(n1) = \rho(1)^n$. Luego $\rho(1)$ es una una raíz n—ésima de la unidad. Por lo tanto, tenemos n representaciones de dimensión 1 de G, las cuales son determinadas por las raíces n—ésimas de 1. Más precisamente, para cada ω raíz n—ésima de 1, ω determina la representación ρ_ω definida como $\rho_\omega(1) = \omega$.

Notación 1.4. Más adelante se usará la siguiente notación para las representaciones de dimensión 1 de $\mathbb{Z}_n$: Para $1 \leqslant s \leqslant n$, e_s definido por:

$$\begin{array}{cccc} e_s & : & \mathbb{Z}_8 & \longrightarrow & \mathbb{C}^{\times} \\ & & k & \longmapsto & e_s(k) = e^{\frac{2\pi i k s}{8}} = e^{\frac{\pi i k s}{4}} \end{array}$$

Proposición 1.10. *El número de representaciones de dimensión* 1 *de* G *es igual al cardinal de* $G/[G,G]$.

Demostración. Note que el grupo cociente $G/[G,G]$ es abeliano, en consecuencia toda representación irreducible de $G/[G,G]$ es de grado uno (ver Proposición 1.9). Veamos, que hay una correspondencia biyectiva entre las representaciones de grado 1 de G y las de $G/[G,G]$, de donde se sigue la afirmación.

Sea $\pi : G \longrightarrow G/[G,G]$ la proyección canónica. Sea $\rho : G \longrightarrow \mathbb{C}^{\times}$ es una representación de G, como $G/[G,G]$ es abeliano, se tiene $\rho(xyx^{-1}y^{-1}) = \rho(x)\rho(y)\rho(x)^{-1}\rho(y)^{-1}$, donde $x, y \in G$, por lo tanto $[G,G] \subseteq \ker(\rho)$, y por los teoremas del isomorfismo se induce un morfismo $\rho' : G/[G,G] \longrightarrow \mathbb{C}^{-1}$ tal que $\rho' \circ \pi = \rho$.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "\rho"'] & G/[G,G] \arrow[d, "\rho'"] \\ & \mathbb{C}^{\times} \end{tikzcd}$$

Reciprocamente, dada una representación de grado 1, $\gamma : G/[G, G] \longrightarrow \mathbb{C}^{\times}$, la composición $\gamma \circ \pi$ es una representación de G. Luego, la correspondencia es biyectiva, esto concluye la demostración. $\square$

Ejemplo 1.11. Tenemos que $[S_n, S_n]$ es el grupo alternado A_n. En consecuencia, el grupo simétrico S_n solo posee dos representaciones de dimensión 1, la representación trivial y la representación signo Sg, donde $Sg(\sigma) : S_n \longrightarrow \mathbb{C}^{\times}$, definida por $\sigma \longmapsto Sg(\sigma)$ donde $Sg(\sigma)$ es el signo de la permutación $\sigma \in S_n$.

2.2. Construcciones Genéricas de representaciones. Sean (V, ρ) y (W, σ) dos representaciones de G. Tenemos:

1. La representación *suma directa* $(V \oplus W, \rho \oplus \sigma)$ de ρ con σ está definida por:

$$(\rho \oplus \sigma)_g(v \oplus w) = \rho_g(v) \oplus \sigma_g(w) \quad (g \in G)$$

2. La representación *producto tensorial* $(V \otimes W, \rho \otimes \sigma)$ de ρ con σ está definida por:

$$(\rho \otimes \sigma)_g(v \otimes w) = \rho_g(v) \otimes \sigma_g(w) \quad (g \in G)$$

3. La representación *dual* (V^*, ρ^*) de ρ es la representación definida como:

$$\rho_g^* := f \circ \rho_g^{-1} \quad (f \in V^*, g \in G)$$

Ejemplo 1.12. Sea $C_2 \times C_2$ llamado el grupo de Klein, producto directo de dos copias del grupo cíclico de 2 elementos $C_2 := \langle t \ : \ t^2 = 1 \rangle$. Luego, $\rho_i \otimes \rho_j$ es el producto tensorial de las representaciones ρ_1, ρ_2 de C_2, y

$$\rho_i(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = 1 \\ -1 & \text{si} \quad i = 2 \end{cases}$$

2.3. Teorema de Maschke y Lema de Schur. Los teoremas fundamentales de la Teoría de representaciones, son el Teoremas de Maschke y Lema de Schur. El teorema de Maschke, nos asegura la descomposición de una representación en suma directa de representaciones irreducibles, y el lema de Schur nos permite estudiar la irreducibilidad de una representación.

Los siguientes lemas, son requeridos para la demostración del Teorema de Maschke.

Lema 1.4. *Sobre toda representación* (V, ρ) *existe un producto escalar hermitiano* $\langle\ ,\ \rangle$ *que es* $G-$*invariante. Es decir* $\langle \rho_g(u), \rho_g(v)\rangle = \langle u, v\rangle$*, para todo* $u, v \in V$*,* $g \in G$*.*

Demostración. Como V es un $\mathbb{C}-$espacio vectorial de dimensión finita, entonces existe un producto escalar sobre V, digamos $[\ ,\ ] : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$. Definimos $\langle\ ,\ \rangle$ de $V \times V$ en $\mathbb{C}$, como sigue

$$\langle u, v\rangle = \sum_{g\in G} [\rho_g(u), \rho_g(v)]$$

$\langle\ ,\ \rangle$ es $G-$invariante. En efecto

$$\begin{aligned}\langle \rho_g(u), \rho_g(v)\rangle &= \sum_{h\in G} [\rho_h(\rho_g(u)), \rho_h(\rho_g(v))]\\ &= \sum_{h\in G} [\rho_{hg}(u), \rho_{hg}(v)]\,.\end{aligned}$$

Pongamos ahora $g' = gh$, luego

$$\begin{aligned}\langle \rho_g(u), \rho_g(v)\rangle &= \sum_{g'\in G} [\rho_{g'}(u), \rho_{g'}(v)]\\ &= \langle u, v\rangle\end{aligned}$$

$\square$

Lema 1.5. *Toda subrepresentación* W *de* V *tiene un complemento* W' *estable. Es decir,*

$$V =_G W \oplus W'$$

Demostración. Sea (V, ρ) una representación de G con un producto escalar hermitiano $G-$estable $\langle\ ,\ \rangle$. Sea $W' = W^{\perp}$, entonces $V = W \oplus W^{\perp}$ (descomposición como espacio vectorial). Solo basta ver que $W^{\perp}$ es $G-$estable por $\langle\ ,\ \rangle$.

$$W^{\perp} = \{v \in V \ : \ \langle u, v\rangle = 0\}$$

Sea $v \in V$ y por Lema 1.4 tenemos para todo $w \in W$

$$\begin{aligned} \langle \rho_g(v), w\rangle &= \left\langle \rho_g^{-1}(\rho_g(v)), \rho_g^{-1}(w)\right\rangle \\ &= \left\langle v, \rho_g^{-1}(w)\right\rangle \\ &= 0, \end{aligned}$$

dado que $\rho_g^{-1}(w) \in W$. Luego W es $G-$estable. $\square$

Teorema 1.6 (Teorema de Maschke)**.** *Toda representación de* G *es suma directa de representaciones irreducibles de* G*. Es decir:*

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_n$$

Demostración. Sea (V, ρ) una representación de G. Usaremos inducción sobre n, donde $n = \dim V$. Si $n = 1 = \dim V$, este caso es trivial. Sunpongamos ahora que el teorema de verdadero para dimensión menor n. Si V es irreducible, esta listo. Si V es reducible entonces existe W $G-$estable de V tal que $\dim V \neq 0, n$ por Lema 1.5

$$V_G = W \oplus W'.$$

Como W tiene dimensión $< n$, por hipótesis de inducción se sigue que W es suma directa de representanciones irreducibles de G. Idemticamente, como W' tiene dimensión $< n$, por la hipótesis de inducción, W' es suma directa de representaciones irreducibles de G. Por lo tanto, V es suma directa de representaciones irreducibles de G. $\square$

Lema 1.7 (Lema de Schur)**.** *Sean* (V, ρ) *y* (W, σ) *dos representaciones irreducibles de* G*. Si* $\phi \in \mathrm{Hom}_G(V, W)$ *entonces:*

1. ϕ *es isomorfismo o bien* $\phi \equiv 0$

2. *Si las representaciones* (V,ρ) *y* (W,σ) *son iguales, entonces* ϕ *es una homotecia.*

Demostración. Supongamos que $\phi \neq 0$. Como $\phi \in \mathrm{Hom}_G(V,W)$, $\ker\phi$ es un subespacio estable de V, como V es irreducible, tenemos que $\ker\phi$ es 0 o V, pero $\phi \neq 0$ entonces $\ker\phi = 0$; por lo tanto, ϕ es inyectiva. Similarmente, $\mathrm{Im}\phi$ es un subespacio estable de W, como V es irreducible, tenemos que $\mathrm{Im}\phi$ es 0 o W, pero $\phi \neq 0$ entonces $\mathrm{Im}\phi = W$. Por lo tanto, ϕ es epiyectiva. En conclusión, ϕ es un isomorfismo.

Para la segunda afirmación, demostramos que ϕ es una homotecia, es decir, que existe un $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\phi(v) = \lambda v$ para todo $v \in V$. Como V es un $\mathbb{C}-$espacio vectorial, sea λ un valor propio de ϕ entonces $\phi - \lambda \mathrm{Id}_V \in \mathrm{End}(V)$ es singular, por el item 1. tenemos que $\phi - \lambda\mathrm{Id}_V \equiv 0$. Es decir, $\phi = \lambda\mathrm{Id}_V$ entonces $\phi(v) = \lambda v$ para todo $v \in V$. □

Teorema 1.8. *Toda representación* V *de* G *tiene una descomposición*

$$V = m_1V_1 \oplus m_2V_2 \oplus \cdots \oplus m_rV_r$$

donde los V_i *son irreducibles pero no isomorfos entre si y* m_iV_i *denota la suma directa de* m_i *sumandos de* V_i.

Definición 1.10. m_i *del teorema anterior, se llama multiplicidad de* V_i *en* V. *La componente isotípica de tipo* V_i *en* V *es* $\oplus m_iV_i$.

Ejemplo 1.13. Sea G el grupo cíclico con n elementos $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ y w raiz $n-$ésima de la unidad. Sea ρ_w definido como sigue:

$$\begin{array}{rcccl} \rho_w & : & G & \longrightarrow & \mathbb{C}^\times \\ & & t & \longmapsto & w \end{array}$$

Así, $\Omega_n = \left\{\rho_w \ : \ w \text{ es una raiz } n-\text{ésima de la unidad} \right\} \subset \widehat{G}$. Por el criterio de completitud, tenemos

$$|G| = \sum_{\pi\in\widehat{G}} (\dim \pi)^2$$

Luego $\widehat{G} = \{\rho_w \ : \ w \in \Omega_n\}$

Observación 1.7. Consideramos $I(G)$ el conjunto de todas las representaciones de G, tenemos en este conjunto una relación de equivalencia definida por: (V, ρ) es equivalente a (V', ρ') si ellas son isomorfas.

Los problemas fundamentales de la teoría de representaciones de grupos son:

- El primer problema importante es describir $I(G)/\sim$, lo cual se reduce a describir $\widehat{G}$
- Dada un representacion (V, ρ) de G, hallar la descomposición en irreducibles de V
- Construir explicitamente los elementos de $\widehat{G}$.

2.4. Representaciones Naturales de un Grupo. Si G actúa sobre X entonces podemos construir una representación asociada a esta acción, la cual se llama representación natural asociada al $G-$espacio X. Mas precisamente, consideremos el $\mathbb{C}-$espacio vectorial $V = F(X)$, es decir:

$$F(X) := \{f : X \longrightarrow \mathbb{C} \ : \ \text{función}\},$$

Ahora, construimos una representación $(F(X), \rho)$ de G, mediante:

$$(\rho_g f)(x) := f(g^{-1} \cdot x), \quad \text{con} \quad x \in X, f \in \mathcal{F}(X), g \in G$$

Observación 1.8. Tenemos que $\dim V = |X|$. Más aun, una base de V es $\{\delta_x \ : \ x \in X\}$ donde δ_x es la función delta de dirac, es decir:

$$\delta_x(y) = \begin{cases} 1 & , x = y \\ 0 & , x \neq y \end{cases}$$

Note también, que para todo $x \in X$ y $g \in G$, se tiene:

$$\rho_g(\delta_x) = \delta_{g \cdot x}$$

Definición 1.11. *La representación* $(F(X), \rho)$ *de* G *se llama representación natural de* G *asociada al* $G-$*espacio* X.

Proposición 1.11. *Sean* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *las órbitas asociadas a las acción de* G *sobre* X. *Tenemos:*

$$F(X) \simeq F(X_1) \oplus F(X_2) \oplus \cdots \oplus F(X_n)$$

Proposición 1.12. *Si* X_1 *y* X_2 *son dos* $G-$*espacios, entonces las representaciones* $F(X_1) \otimes F(X_2)$ *y* $F(X_1 \times X_2)$ *son equivalentes.*

Para $X = G$, tenemos que G actúa sobre si mismo de dos formas:

1. La acción por traslación(izquierda):

$$g \cdot x = gx, \quad \text{con} \quad g, x \in G$$

2. La acción por conjugación:

$$g \cdot x = gxg^{-1}, \quad \text{con} \quad g, x \in G$$

Note, que la acción del item 1. es transitiva y se llama *Representación regular* de G. Y tenemos:

$$F(G) = \bigoplus_{\pi \in \widehat{G}} (\dim \pi)\pi$$

Es decir, en la descomposición de irreducibles de G aparecen todas las irreducibles del grupo G. Más aún, aparecen cada una de ellas tantas veces como su dimensión.

La acción del item 2. da lugar a la *Representación conjugación* de G. Según la Proposición 1.11 y dado que las órbitas son las clases de conjugación, digamos $C_1, C_2, \ldots, C_n$ de G. Tenemos:

$$F(G) = \bigoplus_{i=1}^{n} F(C_i).$$

Observación 1.9. Hasta donde se, no se conoce la descomposición de $F(G)$ en irreducibles.

$\mathsf{V} = \mathsf{F}(\mathsf{X})$ está provisto de un producto escalar hermitiano $\mathsf{G}-$estable:

$$\begin{array}{rcl} \langle\ ,\ \rangle\ :\ V\times V & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (f,h) & \longmapsto & \langle f,h\rangle = \frac{1}{|X|}\sum_{x\in X} f(x)\overline{h(x)} \end{array} \tag{1.10}$$

Notación 1.5. $\mathsf{L}^2(\mathsf{X})$ significa $\mathsf{F}(\mathsf{X})$ provisto del producto escalar hermitiano anterior.

Notar que $\mathsf{L}^2(\mathsf{X})$ tiene como subrepresentación de dimensión 1 a $\mathsf{U}_0 = \{f\ :\ f \text{ constante}\}$ subespacio $\mathsf{G}-$estable. Entonces tenemos:

$$L^2(X)_G = U_0 \oplus U$$

Así, U tiene dimensión $|X| - 1$.

Observación 1.10. U es siempre irreducible.

En general,

$$\begin{array}{rcl} U & = & \{f\in L^2(X)\ :\ \langle f,g\rangle = 0,\ \text{ para todo } g\in U_0\}, \\ & = & \{f\in L^2(X)\ :\ \langle f,\mathbb{1}\rangle = 0\}, \\ & = & \{f\in L^2(X)\ :\ \frac{1}{|X|}\sum_{x\in X} f(x)\overline{\mathbb{1}(x)} = 0\}, \\ & = & \{f\in L^2(X)\ :\ \sum_{x\in X} f(x) = 0\}. \end{array}$$

Recordemos que $\mathsf{F}(\mathsf{X}) = \mathsf{L}^2(\mathsf{X})$ tiene una base canónica $\{\delta_x\ :\ x\in X\}$. Una base para U es $\{\delta_{x_0} - \delta_x\ :\ x_0 \neq x\}$ con x_0 fijo.

Ejemplo 1.14. Consideremos el grupo S_3, el conjunto $\Omega_3 = \{1,2,3\}$ y la representación natural $(\mathsf{F}(\Omega_3),\rho)$ de S_3, donde $\mathsf{F}(\Omega_3) = \mathsf{L}^2(\Omega_3)$ provisto de un producto escalar hermitiano (ver ecuación (1.10)). Luego, por la observación anterior, tenemos

$$L^2(\Omega_3) = U_0 \oplus U$$

donde U_o es una subrepresentación de dimensión 1 y U una subrepresentación de dimensión 2. Luego, una base para U seria $\{\delta_1 - \delta_x\ :\ 1 \neq x\}$ con 1 fijo, donde $\{\delta_x\ :\ x\in\Omega_3\}$ es base canonica de $\mathsf{L}^2(\Omega_3)$.

Capítulo 2

Teoría de Caracteres y Teoría de Supercaracteres

1. Teoría de Caracteres

1.1. Teoría de Caracteres. La teoría de caracteres es una herramienta numérica creada para estudiar las representaciones (irreducibles) de un grupo.

Definición 2.1. *El carácter de una representación* (V, ρ) *de* G *es la función* $\chi_\rho : G \longrightarrow \mathbb{C}$ *definida por*

$$\chi_\rho(g) := \mathrm{tr}(\rho_g) \qquad (g \in G).$$

También, usaremos en algunos casos la notación χ_V*, para denotar* χ_ρ*.*

Notemos que $\chi_\rho(e) = \dim V$, pues ρ_e es la función identidad I_V de V por lo tanto, $\mathrm{tr}(\rho_e) = \mathrm{tr}(I_v) = \dim V$. En el caso que $\dim V = 1$, es decir, $\chi_\rho(e) = 1$, decimos que χ_ρ es un *carácter lineal.*

El carácter χ_ρ es una función constante sobre las clases de conjugación, es decir

$$\chi_\rho(g) = \chi_\rho(hgh^{-1}) \text{ para todo } h \in G$$

Si (V, ρ) y (W, σ) son dos representaciones isomorfas de G, entonces existe un isomorfismo lineal ϕ de V en W, tal que $\rho_g = \phi \circ \sigma_g \circ \phi^{-1}$, para todo $g \in G$; entonces $\chi_\rho(g) = \chi_\sigma(g)$. Más aún, tenemos el siquiente teorema.

Teorema 2.1. (V, ρ) *y* (W, σ) *son dos representaciones equivalentes si y sólo sí tienen el mismo caracter.*

Proposición 2.1. *Sean* (V, ρ) *y* (W, σ) *son dos representaciones de* G*. Entonces:*

1. $\chi_{\rho\oplus\sigma} = \chi_\rho + \chi_\sigma$

2. $\chi_{\rho\otimes\sigma} = \chi_\rho \chi_\sigma$
3. $\chi_\rho(g^{-1}) = \overline{\chi_\rho(g)}$.

Ejemplo 2.1. Sea $(L^2(X), \rho)$ la representación natural de G asociada al $G-$espacio X (ver Observación 1.8). Procedamos ahora a calcular el carácter χ_ρ de ρ. Usando la base canónica de $L^2(X)$ y teniendo presente que $\rho_g(\delta_x) = \delta_{g\cdot x}$, se sigue que el cálculo de $\mathrm{tr}(\rho_g)$ contribuyen solamente aquellos δ_x tal que $g \cdot x = x$. Luego,

$$\chi_\rho(g) = |\{x \in X \ : \ g \cdot x = x\}|. \tag{2.1}$$

Aplicando esta fórmula al caso de la representación regular $(L^2(G), \tau)$ de G, tenemos:

$$\chi_\tau(g) = \begin{cases} |G| & \text{si} \quad g = 1 \\ 0 & \text{si} \quad g \neq 1 \end{cases}$$

Definición 2.2 (Tabla de caracteres de G)**.** *Consideremos* $C_1, C_2, \ldots, C_m$ *las clases de conjugación de* G *y* $\widehat{G} = \{\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m\}$*, entonces la tabla de carácter de* G *es:*

	c_1	$\cdots$	c_i	$\cdots$	c_m
χ_{ρ_1}			$\vdots$		
$\vdots$			$\vdots$		
χ_{ρ_j}	$\cdots$	$\cdots$	$\chi_{\rho_j}(c_i)$		
$\vdots$					
χ_{ρ_m}					

donde c_i *es elemento representante de la clase* C_i *y* $\chi_{\rho_j}(c_i)$ *esta en la posición* (j, i).

Ejemplo 2.2. Consideremos C_n el grupo cíclico de n elementos, es decir $C_n = \langle t \ : \ t^n = e \rangle$ y ρ_{ω^k} la representación de dimensión 1 obtenida en el Ejemplo 2.1. Entonces, como C_n es conmutativo se tiene que las clases de conjugación de C_n son $\{t^k\}$ con $1 \leqslant k \leqslant n$. Luego, la tabla de caracteres de C_n se construye como sigue. Cada ω^k define el caracter lineal π_k, donde $k = 0, 1 \ldots, n-1$. Y tenemos

$\pi_k(i) = \mathrm{Tr}(\rho_k(i)) = \mathrm{tr}([\rho_k(i)]_{\{1\}}) = \mathrm{tr}((\omega^k)^i) = (\omega^k)^i$. Luego, graficamente la tabla de caracteres.

	0	1	$\cdots$	i	$\cdots$	$n-1$
π_0				$\vdots$		
$\vdots$				$\vdots$		
π_k	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$(\omega^k)^i$		
$\vdots$						
π_{n-1}						

Definición 2.3. χ *se llama carácter irreducible si proviene de una representación irreducible.*

Notación 2.1. Denotaremos por $\mathrm{Irr}(G)$ al conjunto de caracteres irreducibles de G.

Formemos $C(G) := \{\varphi : G \longrightarrow \mathbb{C} \ : \ \varphi \quad \text{función de clase}\}$[1]. Notese que $C(G)$ es un subespacio vectorial de $L^2(G)$. Nótese que la dimensión de $C(G)$ es igual al número de clases de conjugación de G. Además, $C(G)$ hereda el producto L^2, también llamado producto de Frobenius de $L^2(G)$:

$$\langle \varphi, \vartheta \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varphi(g)\overline{\vartheta(g)}.$$

Observación 2.1. $\mathrm{Irr}(G)$ es un subconjunto de $C(G)$. Más adelante veremos que $\mathrm{Irr}(G)$ es una base ortonormal de $C(G)$.

Sean $C_1, C_2, \ldots, C_k$ las clases de conjugación de G. Como $G = \coprod_{i=1}^{k} C_i$, tenemos

$$\langle \varphi, \vartheta \rangle \quad = \quad \frac{1}{|G|} \sum_{i=1}^{k} \sum_{g \in C_i} \varphi(g)\overline{\vartheta(g)}$$

[1]Definición función de clase: $f(x) = gxg^{-1}$ donde x, gxg^{-1} están en la misma clase de conjugación.

Ahora como φ y ϑ son funciones de clase, se sigue que

$$\langle \varphi, \vartheta \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{i=1}^{k} |C_i| \varphi(c_i) \overline{\vartheta(c_i)}$$

donde c_i es un elemento fijo de C_i.Por otra parte $|G| = |C_i||C_G(c_i)|$, donde $C_G(c_i)$ denota el centralizador de c_i en G. Luego, obtenemos la siguiente expresión para calcular $\langle \varphi, \vartheta \rangle$:

$$\langle \varphi, \vartheta \rangle = \sum_{i=1}^{k} \frac{\varphi(c_i)\overline{\vartheta(c_i)}}{|C_G(c_i)|}.$$

Proposición 2.2. $\mathrm{Irr}(G)$ *es una base ortonormal de* $C(G)$. *Es decir,* $\mathrm{Irr}(G)$ *es una base lineal tal que*

$$\langle \varphi, \vartheta \rangle = \begin{cases} 1 & \varphi = \vartheta \\ 0 & \varphi \neq \vartheta \end{cases} \qquad \textit{para todo} \quad \varphi, \vartheta \in \mathrm{Irr}(G)$$

Además, note que el cardinal de $\mathrm{Irr}(G)$ *es la cantidad de clases de conjugación.*

Sea (V, ρ) una representación de G. Entonces, por el teorema de Maschke, se deduce que:

$$V = \bigoplus_{\pi \in \mathrm{Irr}(G)} m_\pi \pi. \tag{2.2}$$

donde $m_\pi \pi$ denota la suma directa $\pi \oplus \cdots \oplus \pi$ (m_π veces). Calculemos m_π en terminos de caracteres. Tener (2.2) implica

$$\chi_V = \sum_{\pi \in \mathrm{Irr}(G)} m_\pi \chi_\pi$$

Ahora fijando $\sigma \in \mathrm{Irr}(G)$, entonces Si $\chi_\sigma \in \mathrm{Irr}(G)$, entonces

$$\begin{aligned} \langle \chi_V, \chi_\sigma \rangle &= \sum_{\pi \in \mathrm{Irr}(G)} m_\pi \langle \chi_\pi, \chi_\sigma \rangle \\ &= m_\pi \end{aligned}$$

Más aún, se puede deducir de la proposición anterior los siguientes corolarios.

Corolario 2.1. *La multiplicidad* m_i *de la representación* V_i *en la representación* V *es igual a* $\langle \chi_\rho, \chi_{\rho_i} \rangle$. *Además, las multiplicidades* m_i*'s satisfacen la siguiente ecuación*

$$\langle \chi_\rho, \chi_\rho \rangle = m_i^2 + m_2^2 + \cdots + m_k^2.$$

Corolario 2.2. *Sea* (V, ρ) *una representación de* G*, es irreducible si y sólo si* $\langle \chi_\rho, \chi_\rho \rangle = 1$.

Corolario 2.3. *Sea* $\sigma \in \widehat{G}$. *La multiplicidad de* σ *en la representación* $(L(G), \tau)$ *de* G *es igual al grado de* σ. *En particular,*

$$|G| = \sum_{\sigma \in \widehat{G}} \dim(\sigma)^2 = \sum_{\sigma \in \mathrm{Irr}(G)} (\chi(1))^2.$$

1.2. Caracteres Inducidos y Reciprocidad de Frobenius. Consideremos χ un caracter de G, $\chi \in C(G)$ y H subgrupo de G, tenemos $\chi|_H \in C(H)$ es un caracter de H. En esta sección, la idea es estudiar el proceso inverso.

Dada una función de clase φ sobre H, queremos definir una función de clase φ^G sobre G. Para esto necesitamos primero introducir la función $\varphi^0 : G \longrightarrow \mathbb{C}$,

$$\varphi^0 \;:\; g \;\longmapsto\; \begin{cases} \varphi(g) & g \in H \\ 0 & g \notin H \end{cases}$$

Definición 2.4. *Sea* $\varphi^0 \in C(H)$. *La función* $\varphi^G \in C(G)$ *se define por:*

$$\begin{array}{rcl} \varphi^G \;:\; G & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ g & \longmapsto & \frac{1}{|H|} \sum_{x \in G} \varphi^0(xgx^{-1}) \end{array}$$

Observación 2.2. $\varphi^G(1) = \varphi(1)[G : H]$.

Sea ahora T un sistema de representantes[2](derecho) de G según H,

$$G = \coprod_{t \in T} Ht \tag{2.3}$$

donde $Ht = \{ht : h \in H\}$ subconjunto de G. Luego,

[2]un sistema de representantes T de G según H, significa un $T \subset G$ tal que $G = \coprod_{t \in T} Ht$.

$$\begin{aligned}
\varphi^G(g) &= \frac{1}{|H|}\sum_{t\in T}\sum_{h\in H}\varphi^0(htg(ht)^{-1}) \\
&= \frac{1}{|H|}\sum_{h\in H}\sum_{t\in T}\varphi^0(htg(ht)^{-1})
\end{aligned}$$

Notese que

$$\varphi^0(htg(ht)^{-1}) = \begin{cases} \varphi(htg(ht)^{-1}) & htg(ht)^{-1}\in H \\ 0 & htg(ht)^{-1}\notin H \end{cases}$$

Pero como φ es una función de clase de H, $htg(ht)^{-1} \in H$ es equivalente a $tgt^{-1} \in H$, se sigue que

$$\varphi^0(htg(ht)^{-1}) = \begin{cases} \varphi(tgt^{-1}) & tgt^{-1}\in H \\ 0 & tgt^{-1}\notin H \end{cases}$$

Es decir, $\varphi^0(htg(ht)^{-1}) = \varphi^0(tgt^{-1})$. Por lo tanto:

$$\varphi^G(g) = \frac{1}{|H|}\sum_{t\in T}\sum_{h\in H}\varphi^0(tgt^{-1}) = \sum_{g\in G}\varphi^0(tgt^{-1}). \tag{2.4}$$

Teorema 2.2 (Reciprocidad de Frobenius)**.** *Sean* $\varphi \in C(H)$ *y* $\vartheta \in C(G)$. *Entonces*

$$\left\langle \varphi^G, \vartheta \right\rangle_G = \left\langle \varphi, \vartheta|_H \right\rangle_H$$

Demostración. Tenemos

$$\begin{aligned}
\left\langle \varphi^G, \vartheta \right\rangle_G &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\varphi^G(g)\overline{\vartheta(g)} \\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\left(\sum_{g\in G}\varphi^0(tgt^{-1})\right)\overline{\vartheta(g)} \\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\left(\frac{1}{|H|}\sum_{x\in G}\varphi^0(xgx^{-1})\right)\overline{\vartheta(g)} \\
&= \frac{1}{|G||H|}\sum_{g,x\in G}\varphi^0(xgx^{-1})\overline{\vartheta(g)}
\end{aligned}$$

Pongamos $y = xgx^{-1}$ y equivalentemente $g = x^{-1}yx$, luego

$$\begin{aligned}
\left\langle \varphi^G, \vartheta \right\rangle_G &= \frac{1}{|G||H|} \sum_{x,y \in G} \varphi^0(y)\overline{\vartheta(x^{-1}yx)} \\
&= \frac{1}{|G||H|} \sum_{x,y \in G} \varphi^0(y)\overline{\vartheta(y)} \\
&= \frac{1}{|H|} \sum_{y \in G} \varphi^0(y)\overline{\vartheta(y)} \\
&= \left\langle \varphi, \vartheta|_H \right\rangle_H
\end{aligned}$$

□

Corolario 2.4. *Si* φ *es un caracter de* H*, entonces* φ^G *es un caracter de* G*.*

Demostración. φ^G es combinación lineal de caracteres irreducibles de G, es decir:

$$\varphi^G = \sum_{\chi_i \in \mathrm{Irr}(G)} \alpha_i \chi_i,$$

con $\alpha_i = \left\langle \varphi^G, \chi_i \right\rangle_G$. Por otra parte, para todo $\chi|_H$ es un carácter de H. Luego $\left\langle \varphi, \chi_i|_H \right\rangle_H$ es un entero no negativo. Ahora, por Teorema 2.2 tenemos que $\left\langle \varphi^G, \chi_i \right\rangle_G = \left\langle \varphi, \chi_i|_H \right\rangle_H$. Por lo tanto, φ^G es una combinación lineal de elementos de $\mathrm{Irr}(G)$, donde los escalares de la combinación lineal son enteros no negativos. Así, φ^G es un caracter de G. □

1.3. Caracter de $L^2(X)$. Sea $\varphi = 1_H$ el carácter trivial de H y consideremos $T = \{t_1, \ldots, t_m\}$ un sistema de representantes de G según H, $G/H = \{H, Ht, \ldots, Ht_m\}$. Sea $g \in G$, entonces

$$\varphi^G(g) = \sum_{t \in T} \varphi^0(tgt^{-1}) = \sum_{t \in T, tgt^{-1} \in H} 1$$

Luego $\varphi^G(g) = |\{t \in T \ : \ tgt^{-1} \in H\}| = |\{tH \in G/H \ : \ gtH = tH\}|$, puesto que $tgt^{-1} \in H$ es equivalente a $gtH = tH$. Entonces, usando (2.1), se obtiene la siguiente proposición.

Proposición 2.3. *Sea* $\varphi = 1_H$*, entonces el carácter inducido* φ^G *es el caracter de la representación natural* $L^2(G/H)$*. Es decir,*

$$\varphi^G = \chi_{L^2(G/H)}.$$

Corolario 2.5. *Si* X *es un* $G-$*espacio con* k *órbitas. Entonces*

$$\left\langle \chi_{L^2(X)}, 1_G \right\rangle = k.$$

DEMOSTRACIÓN. Sean $X_1, \ldots, X_k$ las órbitas del $G-$espacio X. Tenemos $L^2(X) = \oplus_{i=1}^k L^2(X_i)$. Luego, $\left\langle \chi_{L^2(X)}, 1_G \right\rangle = \sum_{i=1}^k \left\langle \chi_{L^2(X_i)}, 1_G \right\rangle$. Es claro que G actua transitivamente en cada X_i y $\chi_{L^2(X)} = \sum_{i=1}^k \chi_{L^2(X_i)}$. Así, si denotamos por H_i el estabilizador de un punto de la órbita X_i, tenemos que la representaciones naturales $L^2(G/H_i)$ y $L^2(X_i)$ son equivalentes. Luego usando la Proposición 2.3 y la reciprocidad de Frobenius se tiene

$$\sum_{i=1}^{k} \left\langle \chi_{L^2(X_i)}, 1_G \right\rangle = \left\langle 1_{H_i}^G, 1 \right\rangle_G = \left\langle 1_{H_i}, 1_{H_i} \right\rangle_H = k.$$

□

Corolario 2.6. *Sea* X *un* $G-$*espacio transitivo. Sea* $x \in X$ *y denotemos por* G_x *el estabilizador de* $x \in G$*. Si la acción de* G_x *sobre* X *tiene* k *órbitas, entonces*

$$\left\langle \chi_{L^2(X)}, \chi_{L^2(X)} \right\rangle = k.$$

DEMOSTRACIÓN. Tenemos $\chi_{L^2(X)} = (1_{G_x}^G)$, pues $L^2(X) = L^2(G/G_x)$. Luego, usando la reciprocidad de Frobenius y el Corolario 2.5, se tiene:

$$\left\langle \chi_{L^2(X)}, \chi_{L^2(X)} \right\rangle = \left\langle (1_{G_x}^G), \chi_{L^2(X)} \right\rangle = \left\langle (1_{G_x}), (\chi_{L^2(X)})_{G_x} \right\rangle = k.$$

□

Definición 2.5. *Sea* X *un* $G-$*espacio, con* $|X| \geqslant 2$*. Sea* $x \in X$ *y* G_x *el estabilizador de* x *en* G*. Diremos que la acción es* $2-$*transitiva si* G_x *actúa transitivamente sobre* $X - \{x\}$*.*

Ejemplo 2.3. La acción del grupo simétrico S_n sobre $\Omega_n = \{1, \ldots, n\}$ es 2−transitiva. En efecto, sea $x = n \in X$, entonces G_x estabilizador de x en S_n, todas las permitaciones que fijan a n, es isomorfo a S_{n-1}. Así, G_x actúa transitivamente sobre $X - \{n\}$, equivalentemente S_{n-1} actúa transitivamente sobre $\Omega_{n-1} = \{1, 2, \ldots, n-1\}$.

Proposición 2.4. *Si* G *actúa* 2−*transitivamente sobre* X. *Entonces*

$$L^2(X) = \{1\} \oplus \{1\}^{\perp}.$$

Equivalentemente $\{1\}^{\perp}$ *es irreducible.*

Demostración. Consideremos

$$\chi_{L^2(X)} = \sum_{i=1}^{k} m_i \pi_i,$$

donde π_i caracteres irreducibles de G. Entonces se tiene

$$\left\langle \chi_{L^2(X)}, \chi_{L^2(X)} \right\rangle = \sum_{i=1}^{k} m_i^2,$$

Sea $x \in X$ y G_x el estabilizador de x en G. Tenemos que $\chi_{L^2(X)} = 1_{G_x}^{G}$, entonces

$$\left\langle \chi_{L^2(X)}, \chi_{L^2(X)} \right\rangle = \left\langle 1_{G_x}^{G}, 1_{G_x}^{G} \right\rangle$$

Ahora por hipotesis $\left\langle 1_{G_x}^{G}, 1_{G_x}^{G} \right\rangle = 2$ (ver Corolario 2.6). Luego se deduce que $k = 2$. □

Ejemplo 2.4. Tabla de caracteres de S_3. Recordemos, por Ejemplo 1.2 que las clases de conjugación de S_3 son:

$$C_1 = \{(1)\};\ C_2 = \{(12), (13), (23)\};\ C_3 = \{(123), (132)\}$$

Consideremos

$$\begin{array}{rcccl} \mathbb{1} : S_3 & \longrightarrow & GL(\mathbb{C}) & \simeq & \mathbb{C}^{\times} \\ \sigma & \longmapsto & \mathbb{1}_\sigma = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}} & : & \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ & & & & z \longmapsto z \end{array}$$

y

$$\begin{array}{rcccl} \mathsf{Sg} & : & S_3 & \longrightarrow & GL(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^{\times} \\ & & \sigma & \longmapsto & \mathsf{sg}_\sigma \; : \; \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ & & & & \qquad z \longmapsto \mathsf{sg}(\sigma)z \end{array}$$

Ahora, por la Proposicón 1.10, que S_3 tiene 2 representaciones de dimensión 1, pues el cardinal de S_3/A_3 es 2, donde $A_3 = [S_3, S_3]$ y por el Corolario 2.3, $|S_3| = 4 = 1^2 + 1^2 + 2^2$. Ahora, solo basta considerar la representación irreducible de dimensión 2 vista en el Ejemplo 1.14. Luego el caracter de la representación U es igual a $\chi_{L^2(\Omega_3)} - 1$. Así, tenemos la tabla de caracteres de S_3

	C_1	C_2	C_3
$\chi_{\mathbb{1}}$	1	1	1
χ_{sg}	1	-1	1
χ_{U}	2	0	-1

En orden a traspasar de los caracteres irreducibles de un grupo G al cociente G/N necesitamos introducir la siguiente definición.

Definición 2.6. *Sea* χ *caracter de* G*, se define* $\ker\chi$ *como*

$$\ker\chi = \{g \in \mathsf{G} \;:\; \chi(g) = \chi(1)\}.$$

El siguiente lema, es de suma importancia, pues permite identificar de modo eficiente los caracteres que pasan de un grupo a un cociente de él. De modo preciso, usaremos este lema para determinar los caracteres de grupo de cuaterniones generalizado.

Lema 2.3. *Sea* N *un subgrupo normal de* G*, con* $\mathsf{N} \subseteq \ker\chi$*. Entonces* χ *es constante sobre las clases* N *de* G *y* $\widehat{\chi}$ *caracter de* G/N *es tal que* $\widehat{\chi}(\mathsf{N}g) = \chi(g) = \widehat{\chi}(g\mathsf{N})$*. Luego,* $\chi \in \mathrm{Irr}(\mathsf{G})$ *entonces* $\widehat{\chi} \in \mathrm{Irr}(\mathsf{G}/\mathsf{N})$*.*

1.4. La máquina de Mackey. Sean H y A dos subgrupos de G, con A normal en G. Consideremos las siguientes hipótesis:

(i) A es abeliano.

(ii) G es un producto semi-directo de A con H.

Veremos que los caracteres irreducibles de G pueden ser construidos a partir de H y A. Más precisamente:

1. Como A es abeliano, sus caracteres irreducibles son de dimensión 1, y forman el grupo
$$\mathrm{Irr}(A) := \mathrm{Hom}(A, \mathbb{C}^\times).$$
2. Consideremos la siguiente acción de H sobre Irr(A):
$$(h \cdot \chi)(a) := \chi(hah^{-1}),$$
para todo $h \in H$, todo $\chi \in \mathrm{Irr}(A)$, $a \in A$.
3. Si (χ_i) es un sistema de representantes para las H—órbitas de $\mathrm{Irr}(A)$. Para cada i, se define el grupo H_i como sigue
$$H_i = \mathrm{Est}_H(\chi_i) = \{h \in H \ : \ h\chi_i = \chi_i\}.$$
4. Extendiendo la función χ_i a $G_i := A \rtimes H_i$, obtenemos una función $\widetilde{\chi}_i$ definida por:
$$\begin{array}{rccc} \widetilde{\chi}_i \ : & G_i & \longrightarrow & \mathbb{C}^\times \\ & (a,h) & \longmapsto & \widetilde{\chi}_i(ah) := \chi_i(a) \end{array}$$
donde $a \in A$ y $h \in H_i$.

Proposición 2.5. $\widetilde{\chi}_i$ *es un caracter lineal de* G_i.

Demostración. Ver [**11**] □

Ahora sea ρ un carácter irreducible de H_i, componiendo ρ con la proyección canónica,
$$\begin{array}{rccccc} \pi \ : & G_i & \longrightarrow & H_i & \longrightarrow & \mathbb{C}^\times \\ & ah & \longmapsto & \pi(ah) = h & \longmapsto & \rho(h) \end{array}$$

obtenemos un caracter irreducible $\rho \circ \pi$ de G_i el cual denotaremos por $\widetilde{\rho}$. Finalmente, tomando el producto tensorial de $\widetilde{\chi}_i$ y $\widetilde{\rho}$ obtenemos un carácter irreducible $\widetilde{\chi}_i \otimes \widetilde{\rho}$ de G_i,

$$\begin{array}{rccc} \widetilde{\chi}_i \otimes \widetilde{\rho} & : & G_i & \longrightarrow & \mathbb{C}^\times \\ & & ah & \longmapsto & \widetilde{\chi}_i(a)\widetilde{\rho}(h) \end{array}$$

Notación 2.2. *Para designar el caracter inducido de* G*, usaremos la siguiente notación*

$$\varphi_{i,\rho} := (\widetilde{\chi}_i \otimes \widetilde{\rho})_{G_i}^{G}.$$

Teorema 2.4. *Conservando las notaciones recién dadas y bajo las hipótesis* (i) *y* (ii) *sobre un grupo* G *tenemos*

$i)$ $\varphi_{i,\rho}$ *es un caracter irreducible.*

$ii)$ *Si* $\varphi_{i,\rho}$ *y* $\varphi_{j,\sigma}$ *son isomorfas, entonces* $i = j$ *y* $\rho \simeq \sigma$.

$iii)$ *Cada carácter de* G *es isomorfo a una de las* $\varphi_{i,\rho}$.

Demostración. Ver Proposición 25, [**1**]. □

2. Teoría de Supercaracteres

La teoría de supercaracteres fue introducida por P. Diaconis and I.M. Isaacs [**2**] para generalizar la teoría de çaracteres básicos". Esta teoría tiene como fuente los trabajos de André [**3**] y Yang [**4**] sobre la clasificación de los caracteres irreducibles del grupo unipotente finito. Esta teoría permite explícitar cálculos que sería poco práctico para trabajar con la plena tabla de caracteres.

2.1. Conceptos basicos.

Definición 2.7 (Diaconis-Isaacs)**.** *Sea* G *un grupo finito, sea* $\mathcal{K}$ *una partición de* G *y sea* $\mathcal{X}$ *una partición del conjunto* $\mathrm{Irr}(G)$ *caracteres irreducibles de* G*. El par* $(\mathcal{X}, \mathcal{K})$ *se llama una teoría se supercaracteres si*

1. $\{1\} \in \mathcal{K}$,
2. $|\mathcal{X}| = |\mathcal{K}|$,

3. *para todo* $X \in \mathcal{X}$ *el caracter*

$$\sigma_X = \sum_{\chi \in X} \chi(1)\chi$$

es constante sobre cada $K \in \mathcal{K}$.

Los caracteres σ_X *son llamados supercaracteres de* G *y los elementos* K *de* $\mathcal{K}$ *son llamadas superclases.*

Proposición 2.6. *Las superclases son uniones de clases de conjugación.*

Ejemplo 2.5. Consideremos $\mathcal{X}$ como la partición de $\mathrm{Irr}(G)$ cuyos elementos son singleton y $\mathcal{K}$ como las clases de conjugación de G. Es decir,

$$\mathcal{X} = \big\{\{\chi\} \;:\; \chi \in \mathrm{Irr}(G)\big\}$$

$$\mathcal{K} = \big\{\mathcal{C}(g) \;:\; g \in G\big\}$$

Claramente tenemos,

1. $\{1\} \in \mathcal{K}$,
2. $|\mathcal{X}| = |\mathcal{K}|$,
3. para todo $X = \{\chi\} \in \mathcal{X}$ el caracter

$$\sigma_X = \sum_{\chi \in X} \chi(1)\chi = \chi.$$

Así, claramente $\sigma_X = \chi$ es constante sobre $\mathcal{C}(g)$. Y luego la teoría de caracteres ordinaria de G es una teoría de supercaracteres de G.

Ejemplo 2.6. *Consideremos*

$$\mathcal{X} = \big\{\{\mathbb{1}\}, \{\chi \in \mathrm{Irr}(G) \;:\; \chi \neq \mathbb{1}\}\big\}$$

$$\mathcal{K} = \big\{\{1\}, \{g \in G \;:\; g \neq 1\}\big\}$$

Tenemos,

1. $\{1\} \in \mathcal{K}$,
2. $|\mathcal{X}| = |\mathcal{K}| = 2$,

3. $\sigma_1 = 1$ *y para* $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ *con* $\chi \neq 1$ *se tiene*

$$\sigma_{\chi} = \sum_{\chi \in X} \chi(1)\chi = \sum_{\chi \in X} (\dim \chi)\chi.$$

Así $\sigma_{\chi} = L^2(G) - 1$.

Una manera de construir una teoría de supercaracteres de un grupo G, es usando el siguiente Teorema.

Teorema 2.5 (Brauer)**.** *Sea* A *un grupo que actúa sobre* $\mathrm{Irr}(G)$ *y sobre el conjunto de clases de conjugación de* G*. Entonces, el número de* $A-$*órbitas de* $\mathrm{Irr}(G)$ *es igual al número de* $A-$*órbitas del conjunto de clases de conjungación de* G.

Consideremos como A en el teorema anterior a $\mathcal{G} = \mathrm{Aut}(G)$ el grupo de automorfismos de G. $\mathcal{G}$ actúa sobre los caracteres irreducibles de G y sobre G, de la siguiente forma:

- $\mathcal{G}$ actúa sobre $\mathrm{Irr}(G)$, como:

$$\varphi \cdot \chi := \chi \circ \varphi, \tag{2.5}$$

  donde $\varphi \in \mathcal{G}, \chi \in \mathrm{Irr}(G)$.
- $\mathcal{G}$ actúa sobre G, por:

$$\varphi \cdot g := \varphi(g), \tag{2.6}$$

  donde $\varphi \in \mathcal{G}, g \in G$. En particular, $\mathcal{G}$ actua sobre el conjunto de clases de conjugación de G.

Realicemos el teorema de Brauer a través del siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.7. Sea $\mathbb{Z}_8$ el grupo cíclico de 8 elementos. Luego, los automorfismos de $\mathbb{Z}_8$ es isomorfo a las unidades de este grupo, es decir,

$$\mathcal{G} = \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_8) = \mathbb{Z}_8^{\times}.$$

Más precisamente, tenemos el isomorfismo $\varphi_a \in \mathcal{G}$, con $a \in \mathbb{Z}_8^\times$, donde

$$\begin{array}{rcccl} \varphi_a & : & \mathbb{Z}_8 & \longrightarrow & \mathbb{Z}_8 \\ & & k & \longmapsto & ak \end{array}$$

Usando el teorema de Brauer, construiremos una teoría de supercaracteres para $\mathbb{Z}_8$. Recuerde que tenemos

$$\mathrm{Irr}(\mathbb{Z}_8) = \big\{ e_s : \mathbb{Z}_8 \longrightarrow \mathbb{C}^\times \ : \ e_s \quad 1 \leqslant s \leqslant 8 \big\}$$

1. $\mathcal{G}$ actúa sobre $\mathrm{Irr}(\mathbb{Z}_8)$. Con la Notación 1.4, tenemos $\varphi_a \cdot e_s = e_{as}$ Así, obtenemos las $\mathcal{G}-$órbitas de $\mathrm{Irr}(\mathbb{Z}_8)$ son dadas por:

$$\mathrm{O}(e_s) = \big\{ e_{as} \ : \ a \in \mathbb{Z}_8^\times \big\},$$

luego, dado que ${\mathbb{Z}_8}^\times = \big\{1, 3, 5, 7\big\}$

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{O}(e_1) & = & \big\{e_1, e_3, e_5, e_7\big\}, \\ \mathrm{O}(e_2) & = & \big\{e_2, e_6\big\}, \\ \mathrm{O}(e_4) & = & \big\{e_4\big\}, \\ \mathrm{O}(e_8) & = & \big\{e_8\big\} \end{array}$$

entonces,

$$\mathcal{X} = \big\{ \mathrm{O}(e_1), \mathrm{O}(e_2), \mathrm{O}(e_4), \mathrm{O}(e_8) \big\}$$

2. $\mathcal{G}$ actúa sobre $\mathbb{Z}_8$, de la siguiente manera:

$$\varphi_a \cdot k = ak$$

para todo $k \in \mathbb{Z}_8$. Así tenemos las $\mathcal{G}-$óbitas de $\mathbb{Z}_8$ son dadas por:

$$\mathrm{O}(k) = \big\{ ak \ : \ a \in \mathbb{Z}_8^\times \big\},$$

luego, tenemos

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{O}(1) & = & \big\{1, 3, 5, 7\big\}, \\ \mathrm{O}(2) & = & \big\{2, 6\big\}, \\ \mathrm{O}(4) & = & \big\{4\big\}, \\ \mathrm{O}(8) & = & \big\{8\big\} \end{array}$$

entonces,

$$\mathcal{K} = \{\mathrm{O}(1), \mathrm{O}(2), \mathrm{O}(4)\mathrm{O}(8)\}$$

Por lo tanto, $|\mathcal{X}| = |\mathcal{K}| = 4$.

Capítulo 3

Grupo Cuaterniones

Solo existen dos grupos no abelianos (no isomorfos) de orden 8. A saber el grupo Diédrico y el grupo de Cuaterniones. El objetivo principal de nuestra tesis es construir una teoría de supercaracteres para el grupo Q_8 y el grupo de cuaterniones generalizado.

1. Grupo Q_8

1.1. El grupo Q_8. En terminos abstractos, Q_8 puede ser definido a través de la siguiente presentación

$$Q_8 = \left\langle a, b \ : a^4 = 1, a^2 = b^2, bab^{-1} = a^{-1} \right\rangle$$

(ver Ejemplo 1.8).

Nótese que cada elemento de Q_8 es de la forma $a^k b^r$ con $0 \leqslant k \leqslant 3$ y $0 \leqslant r \leqslant 1$ donde $k, r \in \mathbb{Z}$. Usando las relaciones de la presentación de Q_8, se sigue que la regla de multiplicación para los elementos arbitrarios $a^{k_1}b^{r_1}, a^{k_2}b^{r_2} \in Q_8$ está dada por:

$$(a^{k_1}b^{r_1})(a^{k_2}b^{r_2}) = \begin{cases} a^{k_1+k_2}b^{r_2} & \text{si} \quad r_1 = 0 \\ a^{k_1-k_2}b^{r_1+r_2} & \text{si} \quad r_1 = 1 \end{cases}$$

Así, se deduce que los 8 elementos del grupo Q_8, son:

$$Q_8 = \left\{1, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b\right\}$$

Notemos que, $a, a^3, b, ab, a^2b, a^3b$ son elementos de orden 4 y a^2 es el único elemento de orden 2. Así, tenemos que Q_8 no es un grupo cíclico, pues no tiene ningún elemento de orden 8 que lo genere completamente.

La tabla de multiplicación de Q_8, está dada como sigue:

	1	a	a^2	a^3	b	ab	a^2b	a^3b
1	$\mathbf{1}$	$\mathbf{a}$	$\mathbf{a^2}$	$\mathbf{a^3}$	$\mathbf{b}$	$\mathbf{ab}$	$\mathbf{a^2b}$	$\mathbf{a^3b}$
a	$\mathbf{a}$	a^2	$\mathbf{a^3}$	1	ab	a^2b	a^3b	b
a^2	$\mathbf{a^2}$	$\mathbf{a^3}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{a}$	$\mathbf{a^2b}$	$\mathbf{a^3b}$	$\mathbf{b}$	$\mathbf{ab}$
a^3	$\mathbf{a^3}$	1	$\mathbf{a}$	a^2	a^3b	b	ab	a^2b
b	$\mathbf{b}$	a^3b	$\mathbf{a^2b}$	ab	a^2	a^3	1	a
ab	$\mathbf{ab}$	b	$\mathbf{a^3b}$	a^2b	a^3	a^2	a	1
a^2b	$\mathbf{a^2b}$	ab	$\mathbf{b}$	a^3b	1	a^3	a^2	a
a^3b	$\mathbf{a^3b}$	a^2b	$\mathbf{ab}$	b	a	1	a^3	a^2

Ahora, si miramos la tabla anterior, podemos ver que la única fila y columna que es simétrica de acuerdo a la diagonal son las filas y columnas del elemento a^2 y del neutro. De esto, se deduce que:

$$Z(Q_8) = \left\{1, a^2\right\}. \tag{3.1}$$

Proposición 3.1. $[Q_8, Q_8] = \langle a^2 \rangle$.

Demostración. Sean $a^{k_1}b^{r_1}, a^{k_2}b^{r_2} \in Q_8$ dos elementos cualesquiera, recordemos que el conmutador de Q_8 es generado por el elemento $\left[(a^{k_1}b^{r_1})(a^{k_2}b^{r_2})\right]$. Luego usando las relaciones de conmutación de Q_8 se tiene:

$$\begin{aligned}
\left[(a^{k_1}b^{r_1})(a^{k_2}b^{r_2})\right] &= (a^{k_1}b^{r_1})(a^{k_2}b^{r_2})(a^{k_1}b^{r_1})^{-1}(a^{k_2}b^{r_2})^{-1} \\
&= a^{k_1-k_2}b^{r_1+r_2}b^{-r_1}a^{-k_1}b^{-r_2}a^{-k_2} \\
&= a^{k_1-k_2}b^{r_1+r_2-r_1}a^{-k_1}b^{-r_2}a^{-k_2} \\
&= a^{k_1-k_2+k_1}b^{r_1+r_2-r_1-r_2}a^{-k_2} \\
&= a^{k_1-k_2+k_1+k_2}b^{r_1+r_2-r_1-r_2} \\
&= a^{2k_1}.
\end{aligned}$$

Así $\left[(a^{k_1}b^{r_1})(a^{k_2}b^{r_2})\right] = (a^2)^{k_1} \in \langle a^2 \rangle$. Luego la demostración esta hecha. □

Note, que Q_8 contiene elementos de orden 4, ya que no puede contener solamente elementos de orden 2; pues en ese caso seria abeliano y Q_8 tampoco contiene elementos de orden 8, pues en ese caso sería cíclico.

Sea $\mathsf{H} = Z(Q_8)$. Claro que $\mathsf{H} \trianglelefteq Q_8$ y $[Q_8 : \mathsf{H}] = 2^2$. Luego, para el grupo cociente Q_8/H, tenemos

$$Q_8/\mathsf{H} \simeq C_2 \times C_2 \quad \text{o bien} \quad Q_8/\mathsf{H} \simeq C_4.$$

Ahora Q_8/H no es cíclico, entonces debe tenerse:

$$Q_8/\mathsf{H} \simeq C_2 \times C_2. \tag{3.2}$$

1.2. Construcción de los Automorfismos de Q_8. Para construir los automorfismos de Q_8, notemos que de la Proposición 1.2 y $\mathsf{f} \in \mathrm{Aut}(Q_8)$ tenemos lo siguiente:

- $\mathsf{f}(Q_8) = Q_8$, con $\mathsf{f}(1) = 1$ y $\mathsf{f}(\mathsf{a}^2) = \mathsf{a}^2$, por ser a^2 el único elemento de orden 2.
- f esta determinada por $\mathsf{f}(\mathsf{a})$ y $\mathsf{f}(\mathsf{b})$ debido a que a y b generan a Q_8.

Luego, tenemos que $\mathsf{f}(\mathsf{a})$ tiene 6 posibilidades, las cuales son:

$$\mathsf{a}, \mathsf{a}^3, \mathsf{b}, \mathsf{ab}, \mathsf{a}^2\mathsf{b}, \mathsf{a}^3\mathsf{b}.$$

Analizaré cada una de estas posibilidades (casos $1-6$), según el valor posible para $\mathsf{f}(\mathsf{b})$.

1º caso: Si $\mathsf{f}(\mathsf{a}) = \mathsf{a}$, entonces

$$\begin{aligned} \mathsf{f}(\mathsf{a}^3) &= \mathsf{f}(\mathsf{a})^3 = \mathsf{a}^3, \\ \mathsf{f}(\mathsf{ab}) &= \mathsf{f}(\mathsf{a})\mathsf{f}(\mathsf{b}) = \mathsf{a}\mathsf{f}(\mathsf{b}), \\ \mathsf{f}(\mathsf{a}^2\mathsf{b}) &= \mathsf{f}(\mathsf{a})^2\mathsf{f}(\mathsf{b}) = \mathsf{a}^2\mathsf{f}(\mathsf{b}), \\ \mathsf{f}(\mathsf{a}^3\mathsf{b}) &= \mathsf{f}(\mathsf{a})^3\mathsf{f}(\mathsf{b}) = \mathsf{a}^3\mathsf{f}(\mathsf{b}). \end{aligned}$$

De lo cual concluimos que $\mathsf{f}(\mathsf{b}) \notin \{1, \mathsf{a}, \mathsf{a}^2\}$. Además, $\mathsf{f}(\mathsf{b}) \neq \mathsf{a}^3$ pues en caso contrario tendremos $\mathsf{f}(\mathsf{ab}) = 1$ y esto no puede ser. Por lo tanto $\mathsf{f}(\mathsf{b}) \in$

$\{b, ab, a^2b, a^3b\}$. Así, tenemos 4 biyecciones de Q_8, digamos σ_i donde $i = 1, 2, 3, 4$:

	1	a	a^2	a^3	b	ab	a^2b	a^3b
σ_1	1	a	a^2	a^3	b	ab	a^2b	a^3b
σ_2	1	a	a^2	a^3	ab	a^2b	a^3b	b
σ_3	1	a	a^2	a^3	a^2b	a^3b	b	ab
σ_4	1	a	a^2	a^3	a^3b	b	ab	a^2b

2º caso: Si $f(a) = a^3$, entonces

$$\begin{aligned} f(a^3) &= f(a)^3 = (b^3)^3 = a, \\ f(ab) &= f(a)f(b) = a^3f(b), \\ f(a^2b) &= f(a)^2f(b) = a^2f(b), \\ f(a^3b) &= f(a)^3f(b) = a^3f(b). \end{aligned}$$

concluimos que $f(b) \notin \{1, a^2, a^3\}$. Además, $f(b) \neq a$, pues en caso contrario tendremos $f(ab) = 1$ y esto no puede ocurrir. Por lo tanto $f(b) \in \{b, ab, a^2b, a^3b\}$. Así tenemos otras 4 biyecciones de Q_8, digamos σ_i donde $i = 5, 6, 7, 8$:

	1	a	a^2	a^3	b	ab	a^2b	a^3b
σ_5	1	a^3	a^2	a	b	a^3b	a^2b	ab
σ_6	1	a^3	a^2	a	ab	b	a^3b	a^2b
σ_7	1	a^3	a^2	a	a^2b	ab	b	a^3b
σ_8	1	a^3	a^2	a	a^3b	a^2b	ab	b

3º caso: Si $f(a) = b$, entonces

$$\begin{aligned} f(a^3) &= f(a)^3 = (b)^3 = a^2b, \\ f(ab) &= f(a)f(b) = bf(b), \\ f(a^2b) &= f(a)^2f(b) = a^2f(b), \\ f(a^3b) &= f(a)^3f(b) = a^2bf(b). \end{aligned}$$

concluimos que $f(b) \notin \{1, a^2, b\}$. Además,$f(b) \neq a^2b$ pues en caso contrario tendremos $f(ab) = 1$ y esto no puede ocurrir. Por lo tanto $f(b) \in \{a, a^3, ab, a^3b\}$.

Así, tenemos otras 4 biyecciones de Q_8 digamos σ_i donde $i = 9, 10, 11, 12$:

	1	a	a^2	a^3	b	ab	a^2b	a^3b
σ_9	1	ab	a^2	a^2b	a	a^3b	a^3	ab
σ_{10}	1	ab	a^2	a^2b	a^3	ab	a	a^3b
σ_{11}	1	ab	a^2	a^2b	b	a	a^3b	a^3
σ_{12}	1	ab	a^2	a^2b	a^2b	a^3	ab	a

4º caso: Si $f(a) = ab$, entonces

$$\begin{aligned} f(a^3) &= f(a)^3 = (ab)^3 = ababab = a^3b, \\ f(ab) &= f(a)f(b) = abf(b), \\ f(a^2b) &= f(a)^2f(b) = a^2f(b), \\ f(a^3b) &= f(a)^3f(b) = a^3bf(b). \end{aligned}$$

concluimos que $f(b) \notin \{1, a^2, ab\}$. Además, $f(b) \neq a^3b$ pues en caso contrario tendremos $f(ab) = 1$ y esto no puede ocurrir. Por lo tanto $f(b) \in \{a, a^3, b, a^2b\}$. Así, tenemos otras 4 biyecciones de Q_8 digamos σ_i donde $i = 13, 14, 15, 16$:

	1	a	a^2	a^3	b	ab	a^2b	a^3b
σ_{13}	1	ab	a^2	a^3b	a	b	a^3	a^2b
σ_{14}	1	ab	a^2	a^3b	a^3	a^2b	a	b
σ_{15}	1	ab	a^2	a^3b	b	a^3	a^2b	a
σ_{16}	1	ab	a^2	a^3b	a^2b	a	b	a^3

5º caso: Si $f(a) = a^2b$, entonces

$$\begin{aligned} f(a^3) &= f(a)^3 = (ab)^3 = a^2ba^2ba^2b = b, \\ f(ab) &= f(a)f(b) = a^2bf(b), \\ f(a^2b) &= f(a)^2f(b) = a^2f(b), \\ f(a^3b) &= f(a)^3f(b) = bf(b). \end{aligned}$$

concluimos que $f(b) \notin \{1, a^2, a^2b\}$. Además, $f(b) \neq b$ pues en caso contrario tendremos $f(ab) = 1$ y esto no puede ocurrir. Por lo tanto $f(b) \in \{a, a^3, ab, a^3b\}$.

Así, tenemos otras 4 biyecciones de Q_8 digamos σ_i donde $i = 17, 18, 19, 20$:

	1	a	a^2	a^3	b	ab	a^2b	a^3b
σ_{17}	1	a^2b	a^2	b	a	ab	a^3	a^3b
σ_{18}	1	a^2b	a^2	b	a^3	a^3b	a	ab
σ_{19}	1	a^2b	a^2	b	ab	a^3	a^3b	a
σ_{20}	1	a^2b	a^2	b	a^3b	a	ab	a^3

6º caso: Si $f(a) = a^3b$, entonces

$$\begin{aligned} f(a^3) &= f(a)^3 = (ab)^3 = a^3ba^3ba^3b = ab, \\ f(ab) &= f(a)f(b) = a^3bf(b), \\ f(a^2b) &= f(a)^2f(b) = a^2f(b), \\ f(a^3b) &= f(a)^3f(b) = abf(b). \end{aligned}$$

concluimos que $f(b) \notin \{1, a^2, a^3b\}$. Además, $f(b) \neq ab$ pues en caso contrario tendremos $f(ab) = 1$ y esto no puede ocurrir. Por lo tanto $f(b) \in \{a, a^3, b, a^2b\}$. Así, tenemos otras 4 biyecciones de Q_8 digamos σ_i donde $i = 21, 22, 23, 24$:

	1	a	a^2	a^3	b	ab	a^2b	a^3b
σ_{21}	1	a^3b	a^2	ab	a	a^2b	a^3	b
σ_{22}	1	a^3b	a^2	ab	a^3	b	a	a^2b
σ_{23}	1	a^3b	a^2	ab	b	a	a^2b	a^3
σ_{24}	1	a^3b	a^2	ab	a^2b	a^3	b	a

Proposición 3.2. $\mathrm{Aut}(Q_8) = \langle \sigma_9, \sigma_{16}, \sigma_{24} \rangle$.

Demostración. Usando los casos 1 a 6 obtenemos que todo elemento en $\mathrm{Aut}(Q_8)$ es una palabra en $\sigma_9, \sigma_{16}, \sigma_{24}$. Más precisamente, las siguientes igualdades muestran que σ_9, σ_{16} y σ_{24} generan $\mathrm{Aut}(Q_8)$:

$$\begin{array}{ll}
\sigma_2 = \sigma_{24} \circ \sigma_9 \circ \sigma_{16} & \sigma_{14} = \sigma_9 \circ \sigma_{24} \\
\sigma_3 = \sigma_9 \circ \sigma_{16} \circ \sigma_{24} \circ \sigma_9 & \sigma_{15} = \sigma_9 \circ \sigma_{16} \circ \sigma_{24} \circ \sigma_9 \circ \sigma_{24} \\
\sigma_4 = \sigma_{16} \circ \sigma_9 \circ \sigma_{24} & \sigma_{16} = \sigma_{16} \\
\sigma_5 = \sigma_{16} \circ \sigma_{24} & \sigma_{17} = \sigma_9 \circ \sigma_{24} \circ \sigma_{16} \\
\sigma_6 = \sigma_9 \circ \sigma_{24} \circ \sigma_9 & \sigma_{18} = \sigma_{24} \circ \sigma_9 \circ \sigma_{16} \circ \sigma_9 \circ \sigma_{24} \\
\sigma_7 = \sigma_9 \circ \sigma_{16} \circ \sigma_{24} \circ \sigma_{16} & \sigma_{19} = \sigma_{16} \circ \sigma_9 \\
\sigma_8 = \sigma_9 \circ \sigma_{20} \circ \sigma_9 & \sigma_{20} = \sigma_{24} \circ \sigma_9 \\
\sigma_9 = \sigma_9 & \sigma_{21} = \sigma_{16} \circ \sigma_{24} \circ \sigma_9 \circ \sigma_{24} \\
\sigma_{10} = \sigma_{16} \circ \sigma_{24} \circ \sigma_9 & \sigma_{22} = \sigma_9 \circ \sigma_{16} \\
\sigma_{11} = \sigma_{16} \circ \sigma_9 \circ \sigma_{24} \circ \sigma_{16} & \sigma_{23} = \sigma_9 \circ \sigma_{16} \circ \sigma_{24} \circ \sigma_9 \circ \sigma_{16} \\
\sigma_{12} = \sigma_9 \circ \sigma_{24} \circ \sigma_9 \circ \sigma_{16} & \sigma_{24} = \sigma_{24} \\
\sigma_{13} = \sigma_{24} \circ \sigma_9 \circ \sigma_{16} \circ \sigma_9 &
\end{array}$$

□

Teorema 3.1. $\mathrm{Aut}(Q_8)$ *es isomorfo a* S_4

Demostración. Recordemos que por S_4 tiene la presentación dada en (1.8). Luego, basta ver que los generadores de $\mathrm{Aut}(Q_8)$ vistos en la proposición anterior satisfacen las relaciones de la presentación de S_4.

Claramente tenemos

$\sigma_9^2 = \sigma_{16}^2 = \sigma_{24}^2 = \sigma_1 = \mathtt{id}_{Q_8}$. También tenemos

$$\sigma_{16} \circ \sigma_{24} = \sigma_5$$

y por otro lado

$$\sigma_{24} \circ \sigma_{16} = \sigma_5$$

luego $\sigma_{16} \circ \sigma_{24} = \sigma_{24} \circ \sigma_{16}$.

$$\sigma_9 \circ \sigma_{24} \circ \sigma_9 = \sigma_6$$

$$\sigma_{24} \circ \sigma_9 \circ \sigma_{24} = \sigma_6$$

luego $\sigma_9 \circ \sigma_{24} \circ \sigma_9 = \sigma_{24} \circ \sigma_9 \circ \sigma_{24}$.

Además

$$\sigma_{16} \circ \sigma_9 \circ \sigma_{16} = \sigma_8$$

$$\sigma_9 \circ \sigma_{16} \circ \sigma_9 = \sigma_8$$

luego $\sigma_{16} \circ \sigma_9 \circ \sigma_{16} = \sigma_9 \circ \sigma_{16} \circ \sigma_9$.

Por lo tanto, los generadores σ_9, σ_{16} y σ_{24} de $\mathrm{Aut}(Q_8)$ satisfacen las relaciones que definen una presentación de S_4 y como $\mathrm{Aut}(Q_8)$ también tiene cardinal 24, se sigue que $\mathrm{Aut}(Q_8)$ es isomorfo a S_4. $\square$

1.3. Caracteres de Q_8. Note que, $C_2 \times C_2$ es un producto de dos copias del grupo cíclico de 2 elementos $C_2 := \langle t \,:\, t^2 = 1\rangle$. Luego, para construir representaciones de Q_8 consideremos la siguiente composición de homomorfismos

$$Q_8 \xrightarrow{\pi} Q_8/H \simeq C_2 \times C_2 \xrightarrow{\rho_r \otimes \rho_s} \mathrm{GL}(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^{\times}$$

donde $H = Z(Q_8)$ y $\rho_r \otimes \rho_s$ es el producto tensorial de las representaciones ρ_r con ρ_s de C_2, y

$$\rho_i(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = 1 \\ -1 & \text{si} \quad i = 2 \end{cases}$$

Sabemos que la tabla de caracteres de C_2 es

	1	t
χ_{ρ_1}	1	1
χ_{ρ_2}	1	-1

Ahora por la Proposición 2.1 tenemos $\chi_{\rho_{r,s}} = \chi_{\rho_r \otimes \rho_s} = \chi_{\rho_r}\chi_{\rho_s}$, luego la tabla de caracteres de $C_2 \times C_2$ es

	$(1,1)$	$(1,t)$	$(t,1)$	(t,t)
$\chi_{\rho_{1,1}}$	1	1	1	1
$\chi_{\rho_{1,2}}$	1	-1	1	-1
$\chi_{\rho_{2,1}}$	1	1	-1	-1
$\chi_{\rho_{2,2}}$	1	-1	-1	1

Sea $\widetilde{\rho}_{r,s} = (\rho_r \otimes \rho_s) \circ \pi$ el morfismo de Q_8 en $C_2 \times C_2$, donde $\pi : Q_8 \longrightarrow Q_8/H$ la proyección natura, tenemos

$$
\begin{array}{ccccc}
 & \pi & & \rho_{r,s} & \\
1, a^2 & \longmapsto & H & \longmapsto & (1,1) \\
a, a^3 & \longmapsto & aH & \longmapsto & (1,t) \\
b, a^2b & \longmapsto & bH & \longmapsto & (t,1) \\
ab, a^3b & \longmapsto & abH & \longmapsto & (t,t)
\end{array}
$$

Por otro lado, por el Ejemplo 1.3 las clases de conjugación de Q_8 son :

$$\{1\}, \{a^2\}, \{a, a^3\}, \{b, a^2b\}, \{ab, a^3b\},$$

las cuales representaré por: $1, a^2, a, b, ab$ respectivamente. En consecuencia, tenemos hasta ahora, que la tabla de caracteres de Q_8 es

	1	a^2	a	b	ab
$\chi_{\widetilde{\rho}_{1,1}}$	1	1	1	1	1
$\chi_{\widetilde{\rho}_{1,2}}$	1	1	-1	1	-1
$\chi_{\widetilde{\rho}_{2,1}}$	1	1	1	-1	-1
$\chi_{\widetilde{\rho}_{2,2}}$	1	1	-1	-1	1

Notemos que los irreducibles $\chi_{\rho_{1,1}}, \chi_{\rho_{1,2}}, \chi_{\rho_{2,1}}, \chi_{\rho_{2,2}}$ son de dimensión 1. Usando el Corolario 2.3, tenemos que

$$|Q_8| = 8 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + \mathbf{x}$$

Luego $\mathbf{x} = 4$. Ahora, podemos escribir 4, como suma de cuadrados, solamente como:

$$(a) \quad 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 \quad \text{ó} \quad (b) \quad 2^2.$$

Por la Proposición 1.10, tenemos que la cantidad de caracteres lineal de Q_8 es igual al cardinal de $Q_8/[Q_8, Q_8]$. Esto implica que debe darse el caso (b). Así, falta solo determinar un caracter irreducible de Q_8, digamos χ, cuya dimensión es 2. En consecuencia

$$\mathrm{Irr}(Q_8) = \{\chi_{\rho_{1,1}}, \chi_{\rho_{1,2}}, \chi_{\rho_{2,1}}, \chi_{\rho_{2,2}}, \chi\}$$

y la tabla de caracteres es

	1	a^2	a	b	ab
$\chi_{\tilde{\rho}_{1,1}}$	1	1	1	1	1
$\chi_{\tilde{\rho}_{1,2}}$	1	1	-1	1	-1
$\chi_{\tilde{\rho}_{2,1}}$	1	1	1	-1	-1
$\chi_{\tilde{\rho}_{2,2}}$	1	1	-1	-1	1
χ	2	x	y	z	w

Recordemos, por Proposición 2.2 el conjunto $\mathrm{Irr}(Q_8)$ es una base ortonormal de $C(Q_8)$. Así, podemos calcular los valores de x, y, z y w. Usando las relaciones de ortogonalidad.

$$\langle \chi, \chi_{\rho_{r,s}} \rangle = \frac{1}{|Q_8|} \sum_{i=1}^{5} |c_i| \chi(c_i) \overline{\chi_{\rho_{r,s}}(c_i)},$$

con $c_i = 1, a^2, a, b, ab$ representantes de cada clase de conjugación de Q_8. En efecto,

$$\left.\begin{array}{rcl} \langle \chi_s, \chi_{\rho_{1,1}} \rangle &=& 0 \\ \langle \chi_s, \chi_{\rho_{1,2}} \rangle &=& 0 \\ \langle \chi_s, \chi_{\rho_{2,1}} \rangle &=& 0 \\ \langle \chi_s, \chi_{\rho_{2,2}} \rangle &=& 0 \end{array}\right|$$

o equivalentemente

$$\left.\begin{array}{rcl} \frac{1}{8}(2 + x + 2y + 2z + 2w) &=& 0 \\ \frac{1}{8}(2 + x - 2y + 2z - 2w) &=& 0 \\ \frac{1}{8}(2 + x + 2y - 2z - 2w) &=& 0 \\ \frac{1}{8}(2 + x - 2y - 2z + 2w) &=& 0 \end{array}\right|$$

Así, tenemos 4 ecuaciones y 4 incognitas:

$$\left.\begin{array}{rcl} x + 2y + 2z + 2w &=& -2 \\ x - 2y + 2z - 2w &=& -2 \\ x + 2y - 2z - 2w &=& -2 \\ x - 2y - 2z + 2w &=& -2 \end{array}\right|$$

resolviendo con matrices elementales, tenemos:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 2 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & -2 & 2 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_{21}(-1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & -4 & 0 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & -2 & 2 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_{31}(-1)}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & -4 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & 2 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_{41}(-1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & -4 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_{2,3,4}(\frac{-1}{4})}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_{42}(-1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_{12}(-2)}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_{43}(-1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_{4}(\frac{-1}{2})}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_{13}(-2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_{14}(2)}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_{24}(-1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_{34}(-1)}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Por lo tanto, tenemos

$$\begin{aligned} x &= -2 \\ y &= 0 \\ z &= 0 \\ w &= 0 \end{aligned}$$

Luego, tenemos completamente determinada la tabla de caracteres de Q_8. Más precisamente tenemos

	1	a^2	a	b	ab
$\chi_{\tilde{\rho}_{1,1}}$	1	1	1	1	1
$\chi_{\tilde{\rho}_{1,2}}$	1	1	-1	1	-1
$\chi_{\tilde{\rho}_{2,1}}$	1	1	1	-1	-1
$\chi_{\tilde{\rho}_{2,2}}$	1	1	-1	-1	1
χ	2	-2	0	0	0

1.4. Supercaracteres de Q_8. Para obtener una teoría de supercaracteres de Q_8, usaremos el Teorema de Brauer y el Teorema 3.1.

Sea $\mathcal{G} = \mathrm{Aut}(Q_8) = S_4$ y recordemos que

$$\mathrm{Irr}(Q_8) = \left\{\chi_{\tilde{\rho}_{1,1}}, \chi_{\tilde{\rho}_{1,2}}, \chi_{\tilde{\rho}_{2,1}}, \chi_{\tilde{\rho}_{2,2}}, \chi\right\}$$

Notación 3.1. *Para simplicar la notación, omitiré el tilde en* $\chi_{\tilde{\rho}_{i,j}}$. *Es decir,* $\chi_{\rho_{i,j}}$ *denota* $\chi_{\tilde{\rho}_{i,j}}$.

Tenemos lo siguiente:

- $\mathcal{G}$ actúa sobre G mediante $\sigma \cdot x := \sigma(x)$, donde $\sigma \in \mathcal{G}, x \in Q_8$, es una acción. Determinamos ahora las $\mathcal{G}$—órbita de Q_8. tenemos:

$$O(x) = \left\{\sigma(x) \ : \ \sigma \in \mathcal{G}\right\}$$

Luego, un calculo directo muestra que las $\mathcal{G}$—órbitas son

$$\begin{array}{lcl} O(1) & = & \{1\}, \\ O(a^2) & = & \{a^2\}, \\ O(a) & = & \{a, a^3, b, ab, a^2b, a^3b\}. \end{array}$$

Así, según el Teorema 2.5, estas $\mathcal{G}$—órbitas definen el conjunto superclases $\mathcal{K} = \{K_1, K_2, K_3\}$ donde

$$K_1 = O(1),\ K_2 = O(a^2),\ K_3 = O(a).$$

Más aún, según Proposición 2.6 la superclase K_3 es la unión de las siguientes clases de conjugación:

$$\mathcal{C}(Q_8) = \{\ \{a, a^3\}, \{b, a^2b\}, \{ab, a^3b\}\ \},$$

- $\mathcal{G}$ actúa sobre $\mathrm{Irr}(Q_8)$ mediante $\sigma \cdot \chi := \chi \circ \sigma$, donde $\sigma \in \mathcal{G}$ y $\chi \in \mathrm{Irr}(Q_8)$, es una acción. Determinamos ahora las $\mathcal{G}$—órbitas de $\mathrm{Irr}(Q_8)$, tenemos:

$$O(\chi) = \{\sigma \cdot \chi\ :\ \sigma \in \mathcal{G}\}$$

Luego, un calculo directo muestra que las $\mathcal{G}$—órbitas están dadas por:

$$\begin{array}{lcl} O(\chi_{\rho_{1,1}}) & = & \{\chi_{\rho_{1,1}}\}, \\ O(\chi_{\rho_{1,2}}) & = & \{\chi_{\rho_{1,2}}, \chi_{\rho_{2,1}}, \chi_{\rho_{2,2}}\}, \\ O(\chi) & = & \{\chi\}. \end{array}$$

Así, según el Teorema 2.5, estas $\mathcal{G}$—órbitas definen el conjunto supercaracteres $\{X_1, X_2, X_3\}$ donde

$$X_1 = O(\chi_{\rho_{1,1}}),\ X_2 = O(\chi_{\rho_{1,2}}),\ X_3 = O(\chi).$$

Luego, tenemos una partición del grupo Q_8 y de $\mathrm{Irr}(Q_8)$. Luego tenemos

1. $\{1\} \in \mathcal{K}$,
2. Se tiene $|\mathcal{X}| = |\mathcal{K}| = 3$, lo cual es consecuencia del Teorema de Brauer (ver Teorema 2.5).

3. Para todo $X \in \mathcal{X}$ el caracter

$$\sigma_X = \sum_{\chi \in X} \chi(1)\chi$$

es constante sobre cada $K_i \in \mathcal{K}$. Es decir

$$\sigma_X(k) = \sigma_X(k') \quad \text{para todo} \quad k, k' \in K_i$$

A continuación, verificaremos que esto es así.

Para $X = X_1$, el caracter σ_{X_1} se escribe:

$$\sigma_{X_1} = \sum_{\chi \in X_1} \chi(1)\chi = \chi_{\rho_{1,1}}.$$

Solo basta ver que $\sigma_{X_1}(k) = \sigma_{X_1}(k')$ para todo $k, k' \in K_3$. En efecto

$$\begin{aligned}
\sigma_{X_1}(a) &= \chi_{\rho_{1,1}}(a) = 1, \\
\sigma_{X_1}(b) &= \chi_{\rho_{1,1}}(b) = 1, \\
\sigma_{X_1}(ab) &= \chi_{\rho_{1,1}}(ab) = 1.
\end{aligned}$$

Así, para $X = X_1$, se cumple que σ_X es constante sobre las superclases.

Para $X = X_2$, el caracter σ_{X_2} es:

$$\sigma_{X_2} = \sum_{\chi \in X_2} \chi(1)\chi = \chi_{\rho_{1,2}} + \chi_{\rho_{2,1}} + \chi_{\rho_{2,2}}.$$

Solo basta ver que $\sigma_{X_2}(k) = \sigma_{X_2}(k')$ para todo $k, k' \in K_3$. En efecto

$$\begin{aligned}
\sigma_{X_1}(a) &= \chi_{\rho_{1,2}}(a) + \chi_{\rho_{2,1}}(a) + \chi_{\rho_{2,2}}(a) = -1, \\
\sigma_{X_1}(b) &= \chi_{\rho_{1,2}}(b) + \chi_{\rho_{2,1}}(b) + \chi_{\rho_{2,2}}(b) = -1, \\
\sigma_{X_1}(ab) &= \chi_{\rho_{1,2}}(ab) + \chi_{\rho_{2,1}}(ab) + \chi_{\rho_{2,2}}(ab) = -1.
\end{aligned}$$

Así, para $X = X_2$, se cumple que σ_X es constante sobre las superclases.

Para $X = X_3$, el caracter σ_{X_3} se escribe:

$$\sigma_{X_3} = \sum_{\chi \in X_3} \chi(1)\chi = 2\chi.$$

Solo basta ver que $\sigma_{X_3}(k) = \sigma_{X_3}(k')$ para todo $k, k' \in K_3$. En efecto

$$\begin{aligned}\sigma_{X_1}(a) &= 2\chi(a) = 0,\\ \sigma_{X_1}(b) &= 2\chi(b) = 0,\\ \sigma_{X_1}(ab) &= 2\chi(ab) = 0.\end{aligned}$$

Así, para $X = X_1$, se cumple que σ_X es constante sobre las superclases. Concluyendo, tenemos que el par $(\mathcal{X}, \mathcal{K})$ definen una teoría de supercaracteres para Q_8.

1.5. Tabla de Supercaracteres de Q_8. Los siguientes calculos nos perminen determinar la tabla de supercaracteres para Q_8. En efecto, consideremos los representantes de cada superclase, es decir: $1, a^2, a$. Luego, tenemos lo siguiente:

Para $X = X_1$, el caracter

$$\sigma_{X_1} = \sum_{\chi \in X_1} \chi(1)\chi$$

así, para cada superclase en X_1 se tiene:

$$\begin{aligned}\sigma_{X_1}(1) &= \chi_{\rho_{1,1}}(1) = 1,\\ \sigma_{X_1}(a^2) &= \chi_{\rho_{1,1}}(a^2) = 1,\\ \sigma_{X_1}(a) &= \chi_{\rho_{1,1}}(a) = 1.\end{aligned}$$

Para $X = X_2$, el caracter

$$\sigma_{X_2} = \sum_{\chi \in X_1} \chi(1)\chi = \chi_{\rho_{1,2}} + \chi_{\rho_{2,1}} + \chi_{\rho_{2,2}}$$

así, para cada supercaracter en X_2 se tiene:

$$\begin{aligned}\sigma_{X_2}(1) &= \chi_{\rho_{1,2}}(1) + \chi_{\rho_{2,1}}(1) + \chi_{\rho_{2,2}}(1) = 3,\\ \sigma_{X_2}(a^2) &= \chi_{\rho_{1,2}}(a^2) + \chi_{\rho_{2,1}}(a^2) + \chi_{\rho_{2,2}}(a^2) = 3,\\ \sigma_{X_2}(a) &= \chi_{\rho_{1,2}}(a) + \chi_{\rho_{2,1}}(a) + \chi_{\rho_{2,2}}(a) = -1.\end{aligned}$$

Para $X = X_3$, el caracter

$$\sigma_{X_3} = \sum_{\chi \in X_1} \chi(1)\chi = 2\chi$$

así, para cada supercaracter en X_3 se tiene:

$$\begin{aligned}\sigma_{X_3}(1) &= 2\chi(1) = 4,\\ \sigma_{X_3}(a^2) &= 2\chi(a^2) = -4,\\ \sigma_{X_3}(a) &= 2\chi(a) = 0.\end{aligned}$$

Luego, la tabla de supercaracteres de Q_8 es:

	K_1	K_2	K_3
σ_{X_1}	1	1	1
σ_{X_2}	3	3	-1
σ_{X_3}	4	-4	0

2. Grupo Q_{4m}

2.1. El Grupo Q_{4m}. Denotaré por G el producto semi-directo $\mathbb{Z}_{2m} \rtimes \mathbb{Z}_4$ visto en el Ejemplo 1.4. Recordemos que la multiplicación en G está dada por:

$$(a, b)(c, d) = (a + (-1)^b c, b + d).$$

Definición 3.1. *Para $m \geqslant 2$, se define el grupo de cuaterniones generalizado, denotado Q_{4m}, como sigue*

$$Q_{4m} := G/K,$$

donde K es el subgrupo normal $\langle(m, 2)\rangle$ de G. Es decir $K = \{(0, 0), (m, 2)\}$

Notación 3.2. *Denotaré por $[a, b]$ al elemento o clase lateral de (a, b) de G según K.*

Teorema 3.2. *En Q_{4m}, sean $\mathbf{x} = [1, 0]$ e $\mathbf{y} = [0, 1]$. Entonces $Q_{4m} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle$; además*

a) $\mathbf{x}$ *es de orden $2m$, $\mathbf{y}$ es de orden 4,*
b) *Cada elemento de Q_{4m} se escribe de la forma $\mathbf{x}^a$ o $\mathbf{x}^a\mathbf{y}$ para algún $a \in \mathbb{Z}$,*
c) $\mathbf{x}^m = \mathbf{y}^2$
d) *Para todo $g \in Q_{4m}$ tal que $g \notin \langle \mathbf{x}\rangle$, $g\mathbf{x}g^{-1} = \mathbf{x}^{-1}$.*

DEMOSTRACIÓN. Note que $\mathbb{Z}_{2m}$ es generado por 1 y $\mathbb{Z}_4$ es generado por 1, luego Q_{4m} es generado por las clases de $(1,0)$ y $(0,1)$. Así $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ generan a Q_{4m}.

a) Como el orden de 1 es $2m$, se sigue que la menor potencia de $(1,0)$ que pertenece a K es $2m$. Así $\mathbf{x}$ es de orden $2m$ en Q_{4m}. Similarmente, se tiene que $(0,1)$ que pertenece a K es 4. Así $\mathbf{y}$ es de orden 4 en Q_{4m}

b) Un elemento cualquiera en $\mathbb{Z}_{2m} \rtimes \mathbb{Z}_4$ tiene la forma $(a,b) = (1,0)^a(0,1)^b$, por lo que cada elemento de Q_{4m} tiene la forma $\mathbf{x}^a\mathbf{y}^b$. Note que $(m,2)$ es trivial en Q_{4m} y $(m,2) = (1,0)^m(0,1)^2$, $\mathbf{x}^m = \mathbf{y}^{-2} = \mathbf{y}^2$ en Q_{4m}. Por lo tanto, en el producto $\mathbf{x}^a\mathbf{y}^b$, podemos absorber una potencia de $\mathbf{y}$ en una potencia de $\mathbf{x}$, lo que significa que podemos tomar $b = 0$ o $b = 1$.

c) Es trivial, por lo visto en b).

d) Sea $g \in Q_{4m}$ tal que $g \notin \langle \mathbf{x} \rangle$, es decir $g = \mathbf{x}^a\mathbf{y}$ o $g = \mathbf{y}$. Para $g = \mathbf{x}^a\mathbf{y}$ se tiene $g\mathbf{x}g^{-1} = \mathbf{x}^a\mathbf{y}\mathbf{x}\mathbf{y}^{-1}\mathbf{x}^{-a}$, por lo tanto, basta estudiar el caso $g = \mathbf{y}$. En G, $(0,1)(1,0)(0,1)^{-1} = (-1,1)(0,-1) = (-1,0) = (1,0)^{-1}$, luego $\mathbf{y}\mathbf{x}\mathbf{y}^{-1} = \mathbf{x}^{-1}$.

$\square$

Teorema 3.3. *Para $m \geqslant 2$. Sea P un grupo presentado por*

$$P = \langle x, y \ : \ x^{2m} = 1, y^4 = 1, yxy^{-1} = x^{-1}, x^m = y^2 \rangle.$$

Entonces hay un único homomorfismo inyectivo de Q_{4m} en P tal que $\mathbf{x} \mapsto x$ e $\mathbf{y} \mapsto y$. Más aún, como $|P| \leqslant 4m$ se sigue que este homomorfismo es un isomorfismo. Así Q_{4m} puede ser definido a través de la presentación anterior.

DEMOSTRACIÓN. Sea $f : G \longrightarrow P$ definida por $f(a,b) = x^a y^b$. Tenemos que f está bien definida, pues $x^{2m} = 1$ e $y^4 = 1$. Para ver que f es un homomorfismo, usaremos la condición $yxy^{-1} = x^{-1}$, que implica $y^b x y^{-b} = x^{(-1)^b}$. Se tiene

$$\begin{aligned} f((a,b)(c,d)) &= f(a + (-1)^b c, b + d) \\ &= x^{a+(-1)^b c} y^{b+d}, \end{aligned}$$

y por otro lado

$$\begin{aligned} f(a,b)f(c,d) &= x^a y^b x^c y^d \\ &= x^a (y^b x^c y^{-b}) y^{b+d} \\ &= x^a (y^b x y^{-b})^c y^{b+d} \\ &= x^a x^{(-1)^b c} y^{b+d} \\ &= x^{a+(-1)^b c} y^{b+d}. \end{aligned}$$

Luego f es un homomorfismo. tenemos que $f(m,2) = x^m y^2 = y^2 y^2 = y^4 = 1$ luego el kernel de f es generado por $(m,2)$, en otras palabras $\ker f = K$. Por lo tanto f induce un homomorfismo inyectivo de Q_{4m} en P dado por $\mathbf{x}^a \mathbf{y}^b \mapsto x^a y^b$. Es una rutina ver que $|P| \leqslant 4m$, luego se sigue que Q_{4m} es isomorfo a P. $\square$

Observación 3.1. *El grupo trivial satisface las condiciones del teorema (para $x = 1$ e $y = 1$), pero no todos estos grupos deben ser isomorfos a Q_{4m}, si no aquellos grupos de orden $4m$. Recordar que si $x^{2m} = 1$ y $y^4 = 1$ no significa que x es de orden $2m$ y que y es de orden 4, pero si no que sus ordenes dividen a $2m$ y a 4.*

Proposición 3.3. *Para $m \geqslant 2$, tenemos*

a) *El centro de Q_{4m} es $\{1, x^m\} = \{1, y^2\}$,*

b) $Q_{4m}/Z(Q_{4m}) \simeq D_m$.

Demostración. a) Del teorema anterior, se tiene $x^m = y^2$, es claro que x^m conmuta con x e y, por lo tanto con todo Q_{4m}, luego $x^m = y^2 \in Z(Q_{4m})$. Si x^a esta en el centro, entonces $yx^a y^{-1} = x^a$ y $yx^a y^{-1} = (yxy^{-1})^a = x^{-a}$. Luego $x^a = x^{-a}$. Por lo tanto $x^{2a} = 1$, así $2m$ divide a $2a$, entonces m divide a a, luego cada x^a es una potencia de x^m. Por lo tanto

$$Z(Q_{4m}) = \{1, x^m\}.$$

b) El grupo cociente $Q_{4m}/Z(Q_{4m})$ generado por $\overline{x}$ e $\overline{y}$. Además, $\overline{x}^m = 1$, pues $x^m = y^2 \in Z(Q_{4m})$, $\overline{y}^2 = 1$ y $\overline{yxy}^{-1} = \overline{x}^{-1}$. Así, las clases laterales $\overline{x}$ e $\overline{y}$ de $Q_{4m}/Z(Q_{4m})$ cumplen las relaciones de r y s en el grupo diedral.

Luego, la asignación $r \longmapsto \overline{x}$ y $s \longmapsto \overline{y}$ definen un homomorfismo de $Q_{4m}/\mathrm{Z}(Q_{4m})$ enD_m. Pero el orden de $Q_{4m}/\mathrm{Z}(Q_{4m})$ es $2m$ igual al orden de D_m, luego $Q_{4m}/\mathrm{Z}(Q_{4m})$ es isomorfo a D_m.

$\square$

Observación 3.2. *Realizando* $Q_{4m} = G/K$*, se tiene que de* a) *Proposición 3.3 que* $\mathrm{Z}(Q_{4m}) = \{[0,0],[m,0]\}$.

Dado $(s,r) \in \mathbb{Z}_{2m} \rtimes (\mathbb{Z}_{2m})^{\times}$, se define el automorfismo $\varphi := \varphi_{s,r}$ mediante:

$$\begin{array}{ccccccc} & \varphi & & & & \varphi & \\ a & \longmapsto & a^r & \text{o bien} & (1,0) & \longmapsto & (1,0)^r = (r,0) \\ b & \longmapsto & a^s b & & (0,1) & \longmapsto & (1,0)^s(0,1) = (s,1) \end{array}$$

En [**10**] se demuestra el siguiente teorema.

Teorema 3.4. *La asignación* $(s,r) \longmapsto \varphi_{s,r}$ *define un isomorfismo de* $\mathbb{Z}_{2m} \rtimes (\mathbb{Z}_{2m})^{\times}$ *con* $\mathrm{Aut}(Q_{4m})$.

2.2. Caracteres de Q_{4m}. Para calcular $\mathrm{Irr}(Q_{4m})$, usaremos la máquina de Mackey. Primero, pongamos $A := \mathbb{Z}_{2m}$ y $H := \mathbb{Z}_4$ subgrupos de G. Como A es abeliano, entonces los caracteres de A son de dimensión 1. Las cuales pueden ser descritas como sigue. Sea ω una raiz primitiva $2m-$ésimas de la unidad, entonces

$$\mathrm{Irr}(A) = \{\chi_{\omega^k} \ : \ 1 \leqslant k \leqslant 2m\},$$

donde $\chi_{\omega^k} : 1 \longmapsto \omega^k$.

Observación 3.3. *Notar que* $\omega^m = -1$ *pues* $\omega^{2m} = 1$.

Notación 3.3. *Denotaré por* χ_1 *al caracter irreducible trivial* $\chi_{\omega^{2m}}$ *de* H.

Por otro lado, notemos que

$$\mathrm{Irr}(H) = \{\rho_1, \rho_i, \rho_{-i}, \rho_{-1}\},$$

La acción de H sobre $\mathrm{Irr}(A)$, se traduce como:

$$(h \cdot \chi_{\omega^k})(a) = (\chi_{\omega^k} \circ h)(a) = (\omega^k)^{(-1)^h a}, \tag{3.3}$$

para todo $a \in A$ y todo $h \in H$.

Proposición 3.4. *Las* $H-$*órbitas de* $\mathrm{Irr}(A)$ *están dadas como sigue:*

1. $2-$*órbitas de cardinal* 1*:* $\{\chi_1\}$*,* $\{\chi_{\omega^m}\}$ *y*
2. $(m-1)-$*órbitas de cardinal* 2*:* $\{\chi_{\omega^k}, \chi_{\omega^{-k}}\}$*, donde* $k = 1, 2, \ldots, m-1$*.*

Demostración. Demostremos la afirmación 1., tenemos que para las órbitas de cardinal 1, el subgrupo $\mathrm{Est}_H(1) = \mathrm{Est}_H(\omega^m) = H$. En efecto, sea $h \in \mathrm{Est}_H(1)$, tenemos

$$(h \cdot \chi_1)(a) = \chi_1(a)$$

para todo $a \in A$, luego

$$1^{(-1)^h a} = 1^a$$

para todo $h \in H$. Por lo tanto, $\mathrm{Est}_H(1) = H$. Análogamente, se tiene que $\mathrm{Est}_H(\omega^m) = H$. Luego se tiene que las $2-$órbitas de cardinal 1 son: $\{\chi_1\}$ y $\{\chi_{\omega^m}\}$.

Demostremos ahora la afirmación 2., tenemos que para las órbitas de cardinal 2, el subgrupo $\mathrm{Est}_H(\omega^k) = \{0, 2\}$ donde $k = 1, 2, \ldots, m-1$. En efecto, si $h \in \mathrm{Est}_H(\omega^k)$, tenemos

$$(h \cdot \chi_{\omega^k})(a) = \chi_{\omega^k}(a)$$

para todo $a \in A$, luego

$$(\omega^k)^{(-1)^h a} = (\omega^k)^a$$

equivalentemente $k(-1)^h a = ka$ y esto ocurre para $h = 0, 2$, entonces $\mathrm{Est}_H(\omega^k) = \{0, 2\}$. Luego se tiene que las $(m-1)-$órbitas de cardinal 2, dadas por: $\{\chi_{\omega^k}, \chi_{\omega^{-k}}\}$, donde $k = 1, 2, \ldots, m-1$ $\square$

2.2.1. **Cálculo de caracteres lineales de $G = A \rtimes H$.** En orden a simplificar notación, denotaré, también por χ_k el caracter irreducible de G_k que se obtiene del caracter χ_k de A, mediante

$$\begin{array}{cccc} \chi_k & : & G_k & \longrightarrow & \mathbb{C}^\times \\ & & (a,h) & \longmapsto & \chi_k(a) \end{array}$$

Calculamos, según la máquina de Mackey, el caracter inducido por χ_1. Sea $G_1 := A \rtimes H_1$, donde $H_1 = \mathrm{Est}_H(1) = H$. Luego $G_1 = G$. Denotare por ϑ_u el caracter de G que se obtiene del caracter ρ_u de H compuesto con la proyección canónica de G_k sobre H. Es decir:

$$\begin{array}{ccccc} \vartheta_u : G_k & \xrightarrow{\pi} & H & \xrightarrow{\rho_u} & \mathbb{C}^\times \\ (a,h) & \longrightarrow & h & \longrightarrow & \vartheta_u(h) \end{array}$$

En consecuencia, tenemos el caracter $\chi_1 \otimes \vartheta_u$ de G, donde $\vartheta_u \in \mathrm{Irr}(H)$. Resumiendo, los caracteres lineales de G son:

$$\chi_1 \otimes \vartheta_1,\ \chi_1 \otimes \vartheta_i,\ \chi_1 \otimes \vartheta_{-1},\ \chi_1 \otimes \vartheta_{-i}$$

Veamos ahora, cuales de estos caracteres se factorizan al grupo G/K. Según el Lema 2.3, se debe tener:

$$\chi_1 \otimes \vartheta_u(m,2) = \chi_1 \otimes \vartheta_u(0,0) = 1, \tag{3.4}$$

pero $\chi_1 \otimes \vartheta_u(m,2) = 1^m u^2 = u^2$. Luego, (3.4) es equivalente a tener la ecuación $u^2 = 1$. Así,$u = 1$ ó -1. En consecuencia, los caracteres lineales de G/K son:

$$\chi_1 \otimes \vartheta_1,\ \chi_1 \otimes \vartheta_{-1}.$$

Análogamente, para χ_{ω^m}, se tienen $\chi_{\omega^m} \otimes \vartheta_u$ caracteres lineales de G con $\vartheta_u \in \mathrm{Irr}(H)$. Veamos cuales se factorizan al grupo G/K se debe tener que

$$\chi_{\omega^m} \otimes \vartheta_u(m,2) = \chi_{\omega^m} \otimes \vartheta_u(0,0) = 1. \tag{3.5}$$

Ahora $\chi_{\omega^m} \otimes \vartheta_u(m,2) = (\omega^m)^m u^2$. Luego, (3.5) es equivalente a tener la ecuación $(-1)^m u^2 = 1$. En consecuencia, basta analizar los siguientes situaciones:

1. Para m par tenemos que $u^2 = 1$ si y sólo si $u = 1, -1$.

2. Para m impar tenemos que $u^2 = -1$ si y sólo si $u = i, -i$.

En conclusión, se sigue:

1. Para m par, los caracteres lineales de G/K son $\chi_{\omega^m} \otimes \vartheta_1$ y $\chi_{\omega^m} \otimes \vartheta_{-1}$.
2. Para m impar, los caracteres lineales de G/K son $\chi_{\omega^m} \otimes \vartheta_i$ y $\chi_{\omega^m} \otimes \vartheta_{-i}$.

Notación 3.4. *Denotare por* $\pi_{x,y}$ *a el caracter lineal* $\chi_x \otimes \vartheta_y$ *de* G/K.

Todo lo anterior se puede resumir en el siguiente Teorema.

Teorema 3.5. Q_{4m} *tiene* 4 *caracteres lineales. Más precisamente*

1. *Para* m *par, ellos son:*

$$\pi_{1,1},\ \pi_{1,-1},\ \pi_{\omega^m,1},\ \pi_{\omega^m,-1}.$$

2. *Para* m *impar, ellos son:*

$$\pi_{1,1},\ \pi_{1,-1},\ \pi_{\omega^m,i},\ \pi_{\omega^m,-i}.$$

2.2.2. **Cálculo de caracteres de dimensión 2 de $G = A \rtimes H$.** Para χ_{ω^k} con $k = 1, 2, \ldots, m-1$, sea $G_k = A \rtimes H_k$, donde $H_k = \mathrm{Est}_H(\omega^k) = \{0, 2\}$. En este caso, se tiene que

$$\mathrm{Irr}(H_k) = \{\mathbb{1}, \delta\},$$

donde δ envia $0 \mapsto 1$ y $2 \mapsto -1$.

Note que $|G/G_k| = 2$, entonces $T = \{(0,0), (x,y)\}$ es un sistema de representantes de G según G_k, significa que $(0,0)$ no es igual a (x,y) modulo G_k, es decir $(x,y) \notin G_k$. En conclusión, se sigue que $T = \{(0,0), (0,1)\}$. De acuerdo a la máquina de Mackey, se tiene el siguiente Teorema.

Teorema 3.6. *Sea* $\chi_{\omega^k} \otimes \mathbb{1}$ *y* $\chi_{\omega^k} \otimes \delta$ *caracteres irreducibles de* G_k. *Entonces,*

$$(\chi_{\omega^k} \otimes \mathbb{1})_{G_k}^{G}, (\chi_{\omega^k} \otimes \delta)_{G_k}^{G}$$

Son todos los caracteres irreducibles de G. *Además, hay* $m-1$ *de ellos.*

Demostración. Utilizando la ecuación (2.4) y el Corolario 2.4 se sigue la demostración. En efecto,

$$(\chi_{\omega^k} \otimes \vartheta)_{G_k}^{G}(a, h) = \sum_{(x,y)\in T} (\chi_{\omega^k} \otimes \vartheta)^0((x, y)(a, h)(x, y)^{-1}).$$

Notar que

$$(x, y)(a, h)(x, y)^{-1} = \begin{cases} (a, h) & (x, y) = (0, 0) \\ (-a, h) & (x, y) = (0, 1) \end{cases}$$

y

$$(\chi_{\omega^k} \otimes \vartheta)^0 = \begin{cases} \chi_{\omega^k} \otimes \vartheta(x, y) & (x, y) \in G_k \\ 0 & (x, y) \notin G_k \end{cases}$$

Luego

$$(\chi_{\omega^k} \otimes \vartheta)_{G_k}^{G}(a, h) = (\chi_{\omega^k} \otimes \vartheta)^0(a, h) + (\chi_{\omega^k} \otimes \vartheta)^0(-a, h).$$

En conclusión, tenemos

1. $(\chi_{\omega^k} \otimes \mathbb{1})_{G_k}^{G}(a, h) = \omega^{ka} + \omega^{-ka} = 2\mathrm{Re}(\omega^{ka})$ y
2. $(\chi_{\omega^k} \otimes \delta)_{G_k}^{G}(a, h) = (\omega^{ka} + \omega^{-ka})\delta(h) = 2\mathrm{Re}(\omega^{ka})\delta(h)$.

$\square$

Notación 3.5. *Denotaré por* φ_k *(resp.* $\triangle_k$*) el caracter* $(\chi_{\omega^k} \otimes \mathbb{1})_{G_k}^{G}$ *(resp. el caracter* $(\chi_{\omega^k} \otimes \delta)_{G_k}^{G}$*).*

Observación 3.4. *Usaremos el Lema 2.3 para determinar que caracter de* G *se traspasa a caracter de* G/K*. El caracter* χ *de* G *que se traspasa a* G/K *también se denotará* χ.

Tenemos que φ_k y $\triangle_k$ son caracteres de dimensión 2 de G. Ahora, veamos cuales se factorizan en G/K. Usando el Lema 2.3, se tiene que χ determina un caracter de G/K si y sólo si

$$\chi(m, 2) = \chi(0, 0) = \dim \chi = 2.$$

Entonces, para $\chi = \varphi_k$ se tiene

$$\begin{aligned} \varphi_k(m,2) &= 2\mathrm{Re}(\omega^{km}), \\ &= 2\mathrm{Re}((\omega^m)^k), \\ &= \begin{cases} 2 & k \quad \text{par} \\ -2 & k \quad \text{impar} \end{cases} \end{aligned}$$

Por lo tanto, si k es par origina el caracter φ_k de G/K.

Análogamente, para $\chi = \triangle_k$ se tiene

$$\begin{aligned} \triangle_k(m,2) &= 2\mathrm{Re}(\omega^{km})\delta(2), \\ &= -2\mathrm{Re}((\omega^m)^k), \\ &= \begin{cases} -2 & k \quad \text{par} \\ 2 & k \quad \text{impar} \end{cases} \end{aligned}$$

Así, si k es impar origina el caracter $\triangle_k$ de G/K. Unificando la notación para φ_k y $\triangle_k$, se tiene:

$$\begin{array}{ll} \varphi_{2j}(a,h) = 2\mathrm{Re}(\omega^{2ja}) & \text{con} \quad 1 \leqslant j \leqslant [\frac{m+1}{2}] - 1, \\ \varphi_{2j+1}(a,h) = 2\mathrm{Re}(\omega^{(2j+1)a})\delta(h) & \text{con} \quad 1 \leqslant j \leqslant [\frac{m}{2}] - 1. \end{array} \tag{3.6}$$

Resumiendo tenemos el siguiente Teorema.

Teorema 3.7. *Los caracteres irreducibles de dimesión* 2 *de* G/K *son* φ_{2j} *y* φ_{2j+1}.

2.2.3. **Clases de conjugación de G.** Note que la clase de conjugación $\mathcal{C}(x,z)$ de (x,z) está dada por:

$$\mathcal{C}(x,z) = \big\{(a + (-1)^h x + (-1)^z(-a), z) \ : \ (a,h) \in G\big\}. \tag{3.7}$$

De lo anterior, se sigue que los elementos conjugados con (x,z) son de la forma $(*,z)$. Más precisamente, la siguiente proposición explicita las clases de conjugación de G.

Proposición 3.5. G *tiene* $2m+6$ *clases de conjugación de* G*, las cuales se clasifican como sigue:*

1. 8 *clases de conjugación dadas por:*

   a)
   $$\begin{aligned}\mathcal{C}(0,z) &= \{(0,z)\},\\ \mathcal{C}(m,z) &= \{(m,z)\},\end{aligned}$$
   donde $z = 0, 2$.

   b)
   $$\begin{aligned}\mathcal{C}(1,z) &= \{(2j+1,z) \,:\, 0 \leqslant j \leqslant m-1\},\\ \mathcal{C}(0,z) &= \{(2j,z) \,:\, 0 \leqslant j \leqslant m-1\},\end{aligned}$$
   donde $z = 1, 3$.

2. $2m-2$ *clases de conjugación de* G*, para* $z = 0, 2$ *son dadas por:*
   $$\mathcal{C}(n,z) = \{(n,z), (-n,z)\},$$
   con $1 \leqslant n \leqslant m-1$.

Demostración. Usando (3.7) tenemo:

1. a) Para $z = 0, 2$, se tiene
   $$\begin{aligned}\mathcal{C}(0,z) &= \{(a + (-1)^h(0) + (-1)^z(-a), z) \,:\, (a,h) \in G\}\\ &= \{(a-a,z) \,:\, (a,h) \in G\} = \{(0,z)\}\end{aligned}$$
   $$\begin{aligned}\mathcal{C}(m,z) &= \{(a + (-1)^h m + (-1)^z(-a), z) \,:\, (a,h) \in G\}\\ &= \{((-1)^h m, z) \,:\, (a,h) \in G\}\end{aligned}$$
   pero $-m = m$ modulo $2m$. Luego $\mathcal{C}(m,z) = \{(m,z)\}$

   b) Para $z = 1, 3$, se tiene
   $$\begin{aligned}\mathcal{C}(1,z) &= \{(a + (-1)^h + (-1)^z(-a), z) \,:\, (a,h) \in G\}\\ &= \{(2a + (-1)^h, z) \,:\, (a,h) \in G\}\end{aligned}$$
   pero $2a + (-1)^h$ siempre es impar, por lo tanto
   $$\mathcal{C}(1,z) = \{(2j+1,z) \,:\, 1 \leqslant j \leqslant m-1\}$$
   $$\begin{aligned}\mathcal{C}(0,z) &= \{(a + (-1)^h(0) + (-1)^z(-a), z) \,:\, (a,h) \in G\}\\ &= \{(2a,z) \,:\, (a,h) \in G\}\end{aligned}$$

pero $2a$ siempre es par, por lo tanto

$$\mathcal{C}(1,z) = \{(2j,z) \ : \ 1 \leqslant j \leqslant m-1\}$$

2. Para $z = 0, 2$, con $1 \leqslant n \leqslant m-1$ se tiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(n,z) &= \{(a + (-1)^h n + (-1)^z(-a), z) \ : \ (a,h) \in G\} \\ &= \{((-1)^h n, z) \ : \ (a,h) \in G\} \\ &= \{(n,z), (-n,z)\}. \end{aligned}$$

□

El próximo objetivo es obtener las clases de conjugación de Q_{4m}, para lo cual se requiere de los siguientes lemas.

Lema 3.8. *Sea* G *un grupo y* K *subgrupo normal de* G. *Si* x *e* y *son conjugados en* G *(lo cual se denota por* $x \sim_c y$*) entonces* $\overline{x}$ *e* $\overline{y}$ *son conjugados en* G/K.

Lema 3.9. *Sea* G *un grupo y* K *subgrupo normal de* G. *Dos elementos* $\overline{x}$ *e* $\overline{y}$ *son conjugados en* G/K *si y sólo si existe* $g \in G$ *tal que* $gxg^{-1}y^{-1} \in K$.

Proposición 3.6. Q_{4m} *tiene* $m+3$ *clases de conjugación dadas por:*

1. *Para* m *par:*

   a) 3 *clase dada por*

   $$\begin{aligned} \mathcal{C}[0,0] &= \{[a,b] \ : \ (a,b) \in \mathcal{C}(0,0) \cup \mathcal{C}(m,2)\}, \\ \mathcal{C}[0,1] &= \{[a,b] \ : \ (a,b) \in \mathcal{C}(0,1) \cup \mathcal{C}(0,3)\}, \\ \mathcal{C}[1,1] &= \{[a,b] \ : \ (a,b) \in \mathcal{C}(1,1) \cup \mathcal{C}(1,3)\}, \end{aligned}$$

   b) m *clases dada por*

   $$\mathcal{C}[n,0] = \{[a,b] \ : \ (a,b) \in \mathcal{C}(n,0) \cup \mathcal{C}(m-n,2)\},$$

   con $1 \leqslant n \leqslant m$

2. *Para* m *impar:*

$\mathfrak{a}$) 3 *clase dada por*

$$\begin{aligned}\mathcal{C}[0,0] &= \{[\mathfrak{a},\mathfrak{b}] \ : \ (\mathfrak{a},\mathfrak{b}) \in \mathcal{C}(0,0) \cup \mathcal{C}(\mathfrak{m},2)\},\\ \mathcal{C}[0,1] &= \{[\mathfrak{a},\mathfrak{b}] \ : \ (\mathfrak{a},\mathfrak{b}) \in \mathcal{C}(0,1) \cup \mathcal{C}(1,3)\},\\ \mathcal{C}[1,1] &= \{[\mathfrak{a},\mathfrak{b}] \ : \ (\mathfrak{a},\mathfrak{b}) \in \mathcal{C}(1,1) \cup \mathcal{C}(0,3)\},\end{aligned}$$

$\mathfrak{b}$) $\mathfrak{m}$ *clases dada por*

$$\mathcal{C}[\mathfrak{n},0] = \{[\mathfrak{a},\mathfrak{b}] \ : \ (\mathfrak{a},\mathfrak{b}) \in \mathcal{C}(\mathfrak{n},0) \cup \mathcal{C}(\mathfrak{m}-\mathfrak{n},2)\},$$

con $1 \leqslant \mathfrak{n} \leqslant \mathfrak{m}$

Demostración. Solo utilizare el Lema 3.9 para la demostracioón de la proposición.

1. Para $\mathfrak{m}$ par, se tiene:
   $\mathfrak{a}$) Primero, se tiene que $(0,0) \sim_{\mathfrak{c}} (\mathfrak{m},2)$ pues $(0,0),(\mathfrak{m},2) \in \mathsf{K}$. Luego,

$$\mathcal{C}[0,0] = \{[\mathfrak{a},\mathfrak{b}] \ : \ (\mathfrak{a},\mathfrak{b}) \in \mathcal{C}(0,0) \cup \mathcal{C}(\mathfrak{m},2)\}$$

Del Lema 3.9 tenemos $(0,1) \sim_{\mathfrak{c}} (0,3)$ si y sólo si existe $(\mathfrak{a},\mathfrak{h}) \in \mathsf{G}$ tal que

$$(\mathfrak{a} + (-1)^{\mathfrak{h}}0 + (-1)^{1}(-\mathfrak{a}),1)(0,3)^{-1} \in \mathsf{K}$$

Ahora

$$\begin{aligned}(\mathfrak{a} + (-1)^{\mathfrak{h}}0 + (-1)^{1}(-\mathfrak{a}),1)(0,3)^{-1} &= (2\mathfrak{a},1)(0,1)\\ &= (2\mathfrak{a},2)\end{aligned}$$

Luego $(0,1) \sim_{\mathfrak{c}} (0,3)$ si y sólo si exite $\mathfrak{a} \in \mathbb{Z}_{2\mathfrak{m}}$ tal que $(2\mathfrak{a},2) \in \mathsf{K}$. Es decir $2\mathfrak{a} = \mathfrak{m}$, pero como $\mathfrak{m}$ es par. Se sigue que tal $\mathfrak{a}$ existe, así

$$\mathcal{C}[0,1] = \{[\mathfrak{a},\mathfrak{b}] \ : \ (\mathfrak{a},\mathfrak{b}) \in \mathcal{C}(0,1) \cup \mathcal{C}(0,3)\}.$$

Análogamente $(1,1) \sim_{\mathfrak{c}} (1,3)$ si y sólo si existe $(\mathfrak{a},\mathfrak{h}) \in \mathsf{G}$ tal que

$$(\mathfrak{a} + (-1)^{\mathfrak{h}}1 + (-1)^{1}(-\mathfrak{a}),1)(1,3)^{-1} \in \mathsf{K}$$

tenemos

$$\begin{aligned}(a+(-1)^h+(-1)^1(-a),1)(1,3)^{-1} &= (2a+(-1)^h,1)(1,1)\\ &= (2a+(-1)^h+(-1)^1,2)\end{aligned}$$

Luego $(2a+(-1)^h-1,2)\in K$ si y sólo si $2a+(-1)^h-1=m$, si $h=0,2$ entonces $2a+1-1=2a=m$ es decir m par y si $h=1,3$ entonces $2a-1-1=2a-2=m$ es decir m par. Se sigue que tal a existe. Así

$$\mathcal{C}[1,1]=\big\{[a,b]\ :\ (a,b)\in\mathcal{C}(1,1)\cup\mathcal{C}(1,3)\big\}.$$

b) Para $1\leqslant n\leqslant m$, $(n,0)\sim_c(m-n,2)$ si y sólo si existe $(a,b)\in G$ tal que

$$(a+(-1)^h n+(-1)^0(-a),1)(m-n,2)^{-1}\in K$$

Ahora

$$\begin{aligned}(a+(-1)^h n+(-1)^0(-a),1)(m-n,2)^{-1} &= ((-1)^h n,0)(-m+n,2)\\ &= ((-1)^h n-m+n,2)\end{aligned}$$

Luego $(n,0)\sim_c(m-n,2)$ si y sólo si existe $h\in\mathbb{Z}_4$ tal que

$$((-1)^h n-m+n,2)\in K.$$

Es decir $(-1)^h n-m+n=m$, pero como $-m=m(\mathrm{mod}2m)$, tenemos que existe $h=1,3$ tal que $((-1)^h n-m+n,2)\in K$. Así

$$\mathcal{C}[n,0]=\big\{[a,b]\ :\ (a,b)\in\mathcal{C}(n,0)\cup\mathcal{C}(m-n,2)\big\}$$

2. Para m impar, Añalogo a lo anterior, se tiene que

$$\begin{aligned}\mathcal{C}[0,0]&=\big\{[a,b]\ :\ (a,b)\in\mathcal{C}(0,0)\cup\mathcal{C}(m,2)\big\},\\ \mathcal{C}[n,0]&=\big\{[a,b]\ :\ (a,b)\in\mathcal{C}(n,0)\cup\mathcal{C}(m-n,2)\big\}.\end{aligned}$$

$(0,1)\sim_c(1,3)$ si y sólo si existe $(a,b)\in G$ tal que

$$(a+(-1)^h 0+(-1)^1(-a),1)(1,3)^{-1}\in K$$

Ahora

$$\begin{aligned}(a+(-1)^h 0+(-1)^1(-a),1)(1,3)^{-1} &= (2a,1)(1,1)\\ &= (2a-1,2)\end{aligned}$$

Luego $(0,1)\sim_c(1,3)$ si y sólo si exite $a\in\mathbb{Z}_{2m}$ tal que $(2a-1,2)\in K$ si y sólo si $2a-1=m$, pero m es impar, se sigue que tal a existe. Así

$$\mathcal{C}[0,1]=\big\{[a,b]\ :\ (a,b)\in\mathcal{C}(0,1)\cup\mathcal{C}(1,3)\big\}.$$

$(1,1)\sim_c(0,3)$ si y sólo si existe $(a,b)\in G$ tal que

$$(a+(-1)^h 1+(-1)^1(-a),1)(0,3)^{-1}\in K$$

$$\begin{aligned}(a+(-1)^h+(-1)^1(-a),1)(0,3)^{-1} &= (2a+(-1)^h,1)(0,1)\\ &= (2a+(-1)^h,2)\end{aligned}$$

Luego $(2a+(-1)^h,2)\in K$ si y sólo si $2a+(-1)^h=m$, es decir m impar, pero m es impar, se sigue que tal a existe, así

$$\mathcal{C}[1,1]=\big\{[a,b]\ :\ (a,b)\in\mathcal{C}(1,1)\cup\mathcal{C}(0,3)\big\}.$$

□

2.3. Tabla de Caracteres de Q_{4m}. De los Teoremas (3.5) y (3.6), vistos en la sección anterior, se sigue que podemos construir la tabla de caracteres del grupo Q_{4m}, distinguiendo según m sea par o bien impar.

Para m par, los caracteres irreducibles de Q_{4m} son:

$$\pi_{1,1},\ \pi_{1,-1},\ \pi_{\omega^m,1},\ \pi_{\omega^m,-1},\ \varphi_{2j},\ \varphi_{2j+1},$$

y para m impar, los caracteres irreducibles de Q_{4m} son:

$$\pi_{1,1},\ \pi_{1,-1},\ \pi_{\omega^m,i},\ \pi_{\omega^m,-i},\ \varphi_{2j},\ \varphi_{2j+1},$$

Por otro lado, los distintos representantes de las clases de conjugación son:

$$[0,0],\ [1,0],\ [0,1],\ [1,1],\ [m,0],\ [n,0]\ \text{para}\ 1<n\leqslant m-1.$$

Solo mostraré los calculos más representativos para obtener la tabla de caracteres de Q_{4m}. Así, calcularé el valor de los caracteres $\pi_{\omega^m,1}$ y φ_{2j} en las clases de conjugación de Q_8.

Según la Observación 3.3 tenemos que $\omega^m = -1$. Luego

$$\begin{aligned}
&\pi_{\omega^m,1}[1,0] = (\omega^m)^1 1^0 = -1,\\
&\pi_{\omega^m,1}[0,1] = 1,\\
&\pi_{\omega^m,1}[1,1] = -1,\\
&\pi_{\omega^m,1}[m,0] = -1,\\
&\pi_{\omega^m,1}[n,0] = (\omega^m)^n = (-1)^n \quad \text{para todo} \quad 1 < n \leqslant m-1.
\end{aligned}$$

Ahora, de acuerdo a (3.6) se tiene que $\varphi_{2j}[1,0] = 2\mathrm{Re}(\omega^{2j})$,

$$\varphi_{2j}[0,1] = 0, \quad \text{pues} \quad (0,1) \notin G_{2j}$$

Análogamente, se tiene

$$\begin{aligned}
&\varphi_{2j}[1,1] = 0,\\
&\varphi_{2j}[m,0] = 2,
\end{aligned}$$

Para la clase $[n,0]$, se tiene

$$\varphi_{2j}[n,0] = 2\mathrm{Re}(\omega^{2jn}) = 2\mathrm{Re}(\omega^{2j})^n \quad \text{para todo} \quad 1 < n \leqslant m-1$$

Luego, tenemos la tabla de caracteres para Q_{4m}, con m par, más precisamente tenemos

	$[0,0]$	$[1,0]$	$[0,1]$	$[1,1]$	$[m,0]$	$[n,0]; 1 < n \leqslant m-1$
$\pi_{1,1}$	1	1	1	1	1	1
$\pi_{1,-1}$	1	1	-1	-1	1	1
$\pi_{\omega^m,1}$	1	-1	1	-1	1	$(-1)^n$
$\pi_{\omega^m,-1}$	1	-1	-1	1	1	$(-1)^n$
φ_{2j}	2	$2\mathrm{Re}(\omega^{2j})$	0	0	2	$2\mathrm{Re}((\omega^{2j})^n)$
φ_{2j+1}	2	$2\mathrm{Re}(\omega^{(2j+1)})$	0	0	-2	$-2\mathrm{Re}((\omega^{(2j+1)})^n)$

Para m impar, los caracteres irreducibles de Q_{4m} son:

$$\pi_{1,1},\ \pi_{1,-1},\ \pi_{\omega^m,i},\ \pi_{\omega^m,-i},\ \varphi_{2j},\ \varphi_{2j+1}.$$

Con un calculo equivalente al caso impar, obtenemos la tabla de caracteres.

	$[0,0]$	$[1,0]$	$[0,1]$	$[1,1]$	$[m,0]$	$[n,0]; 1 < n \leqslant m-1$
$\pi_{1,1}$	1	1	1	1	1	1
$\pi_{1,-1}$	1	1	-1	-1	1	1
$\pi_{\omega^m,i}$	1	-1	i	$-i$	-1	$(-1)^n$
$\pi_{\omega^m,-i}$	1	-1	$-i$	i	1	$(-1)^n$
φ_{2j}	2	$2\mathrm{Re}(\omega^{2j})$	0	0	2	$2\mathrm{Re}((\omega^{k2j})^n)$
φ_{2j+1}	2	$2\mathrm{Re}(\omega^{(2j+1)})$	0	0	-2	$-2\mathrm{Re}((\omega^{k(2j+1)})^n)$

2.4. Supercaracteres de Q_{4m}. Ahora determinaremos una teoria de supercaracteres de Q_{4m}, a través del Teorema de Brauer. Recordar que para el grupo de automorfismo $\mathcal{G}$ de Q_{4m} (ver Corolario 3.4) se tiene:

$$\mathcal{G} := \mathbb{Z}_{2m} \rtimes (\mathbb{Z}_{2m})^{\times}$$

Recordemos también que el conjunto de todos los caracteres irreducibles de Q_{4m} están dados por:

$$\mathrm{Irr}(Q_{4m}) = \left\{\pi_{1,1},\ \pi_{1,-1},\ \pi_{\omega^m,1},\ \pi_{\omega^m,-1},\ \varphi_{2j},\ \varphi_{2j+1}\right\} \quad \text{para } m \text{ par.}$$

y

$$\mathrm{Irr}(Q_{4m}) = \left\{\pi_{1,1},\ \pi_{1,-1},\ \pi_{\omega^m,i},\ \pi_{\omega^m,-i},\ \varphi_{2j},\ \varphi_{2j+1}\right\} \quad \text{para } m \text{ impar.}$$

Finalmente notemos que $\mathcal{G}$ actúa sobre $\mathrm{Irr}(Q_{4m})$ y sobre Q_{4m} (ver ecuaciones (2.5) y (2.6)). Usando esta acción, determinamos una teoría de supercaracteres de Q_{4m}. El conjunto de supercaracteres $\mathcal{X}$ es determinado en el Teorema 3.11 y el conjunto de superclases $\mathcal{K}$ es determinado en el Teorema 3.10.

Teorema 3.10. *Sea $X_1 = \left\{\pi_{1,1}\right\}$ y $X_3 = \left\{\pi_{1,-1}\right\}$. El conjunto de supercaracteres $\mathcal{X}$ de Q_{4m} está dado por:*

1. *Si* m *es par, ellos son*

$$\{X_1, X_2, X_3, Y_d\},$$

donde

$$X_2 = \{\pi_{\omega^m,1},\ \pi_{\omega^m,-1}\}$$

$$Y_d = \coprod_{\substack{y \in (\mathbb{Z}_{\frac{2m}{d}})^\times \\ 0 < y < [\frac{m}{d}]+1}} \{\varphi_{dy}\}.$$

donde d *es cualquier divisor de* $2m$ *tal que* $d < m$*.*

2. *Si* m *es impar, ellos son*

$$\{X_1, X_2, X_3, Y_d\},$$

donde

$$X_2 = \{\pi_{\omega^m,i},\ \pi_{\omega^m,-i}\}$$

y

a) Para d *divisor impar de* $2m, d \neq m, 2m$*, se tiene*

$$Y_d = \coprod_{\substack{y \in (\mathbb{Z}_{\frac{2m}{d}})^\times \\ 0 < y < \frac{m}{d}}} \{\varphi_{dy}\}$$

b) Para d *divisor par de* $2m, d \neq m, 2m$*, se tiene*

$$Y_d = \coprod_{\substack{y \in (\mathbb{Z}_{\frac{4m}{d}})^\times \\ 0 < y < \frac{2m}{d}}} \{\varphi_{dy}\}$$

DEMOSTRACIÓN. Solo daremos una demostración para el caso m par, pues de manera análoga se demuestra el caso m impar. $\mathcal{G}$ actúa sobre $\mathrm{Irr}(Q_{4m})$ mediante la acción vista en (2.5). Sea $\varphi \in \mathcal{G}$, es claro que la órbita del caracter trivial $\pi_{1,1}$ es

$$X_1 = \{\pi_{1,1}\}$$

Ahora, $\pi_{\omega^m,1}$ y $\pi_{\omega^m,-1}$ pertenecen a la misma $\mathcal{G}$—órbita si y sólo si existe $(s,r) \in \mathbb{Z}_{2m} \rtimes (\mathbb{Z}_{2m})^\times$ tal que $\varphi_{s,r} \cdot \pi_{\omega^m,1} = \pi_{\omega^m,-1}$. Esto implica las siguientes ecuaciones

$$(\pi_{\omega^m,1} \circ \varphi_{s,r})(1,0) = \pi_{\omega^m,-1}(1,0)$$
$$(\pi_{\omega^m,1} \circ \varphi_{s,r})(0,1) = \pi_{\omega^m,-1}(0,1)$$

o equivalentemente

$$\pi_{\omega^m,1}(r,0) = \pi_{\omega^m,-1}(1,0) = \omega^m$$
$$\pi_{\omega^m,1}(s,1) = \pi_{\omega^m,-1}(0,1) = -1$$

o bien

$$\omega^{mr} = \omega^m \quad \text{si y sólo si} \quad r = 1$$
$$\omega^{ms} = -1 \quad \text{si y sólo si} \quad s = 1$$

Luego, existe $(s,r) = (1,1) \in \mathbb{Z}_{2m} \rtimes (\mathbb{Z}_{2m})^\times$ tal que

$$X_2 = \{\pi_{\omega^m,1},\ \pi_{\omega^m,-1}\}.$$

Por otro lado, tenemos que $\pi_{1,-1}$ es el único elemento de su $\mathcal{G}$—órbita. Basta verificar que $\pi_{1,-1}$ no está relacionado con $\pi_{\omega^m,1}$, esto ocurre si y sólo si no existe $(s,r) \in \mathbb{Z}_{2m} \rtimes (\mathbb{Z}_{2m})^\times$ tal que $\varphi_{s,r} \cdot \pi_{1,-1} = \pi_{\omega^m,1}$. Supongamos lo contrario, esto implica las siguientes ecuaciones

$$(\pi_{1,-1} \circ \varphi_{s,r})(1,0) = \pi_{\omega^m,1}(1,0)$$
$$(\pi_{1,-1} \circ \varphi_{s,r})(0,1) = \pi_{\omega^m,1}(0,1)$$

o equivalentemente

$$\pi_{1,-1}(r,0) = \pi_{\omega^m,1}(1,0) = \omega^m$$
$$\pi_{1,-1}(s,1) = \pi_{\omega^m,1}(0,1) = 1$$

o bien

$$\begin{aligned} 1 &= \omega^m \\ -1 &= 1 \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción. Luego, no existe $(s,r) \in \mathbb{Z}_{2m} \rtimes (\mathbb{Z}_{2m})^\times$ tal que $\pi_{1,-1}$ este relacionado con $\pi_{\omega^m,1}$, así

$$X_2 = \{\pi_{1,-1}\}$$

Sea d divisor de $2m$, $d < m$, demostremos que la órbita de φ_d es Y_d.

$$Y_d = \coprod_{\substack{y \in (\mathbb{Z}_{\frac{2m}{d}})^{\times} \\ 0 < y < [\frac{m}{d}]+1}} \{\varphi_{dy}\}.$$

esto ocurre si y sólo si existe $(s, r) \in \mathbb{Z}_{2m} \rtimes (\mathbb{Z}_{2m})^{\times}$ tal que $\varphi_{s,r} \cdot \varphi_d = \varphi_{dy}$. Es decir, si existe (s, r) tal que:

$$(\varphi_d \circ \varphi_{s,r})(1, 0) = \varphi_{dy}(1, 0)$$
$$(\varphi_d \circ \varphi_{s,r})(0, 1) = \varphi_{dy}(0, 1)$$

o equivalentemente

$$\varphi_d(r, 0) = \varphi_{dy}(1, 0),$$
$$\varphi_d(s, 1) = \varphi_{dy}(0, 1),$$

notar ahora que $\varphi_d(s, 1) = \varphi_{dy}(0, 1) = 0$, pues $(0, 1) \notin G_d$ y $(s, 1) \notin G_{dy}$. Por lo tanto, solo consideramos el caso $\varphi_d(r, 0) = \varphi_{dy}(1, 0)$. Se tiene

$$2\mathrm{Re}(\omega^{dr}) = 2\mathrm{Re}(\omega^{dy}) \quad \text{si y sólo si} \quad dr \equiv \pm dy (\mathrm{mod} 2m)$$

Equivalentemente $r \equiv \pm y(\mathrm{mod}\frac{2m}{d})$. Entonces, usando la Proposición 1.4 podemos considerar $r = y \in \mathbb{Z}_{2m}^{\times}$ tal que $\varphi_d(r, 0) = \varphi_{dy}(1, 0)$. Así

$$Y_d = \coprod_{\substack{y \in (\mathbb{Z}_{\frac{2m}{d}})^{\times} \\ 0 < y < [\frac{m}{d}]+1}} \{\varphi_{dy}\}.$$

Demostremos además, que si tenemos d y d' divisores de $2m$ tal que $d, d' < m$, entonces no existe $(s, r) \in \mathbb{Z}_{2m} \rtimes (\mathbb{Z}_{2m})^{\times}$ tal que $\varphi_{s,r} \cdot \varphi_{dy} = \varphi_{d'}$. Supongamos que existe, entonces

$$(\varphi_{dy} \circ \varphi_{s,r})(1, 0) = \varphi_{d'}(1, 0)$$
$$(\varphi_{dy} \circ \varphi_{s,r})(0, 1) = \varphi_{d'}(0, 1)$$

o equivalentemente

$$\varphi_{dy}(r, 0) = \varphi_{d'}(1, 0),$$
$$\varphi_{dy}(s, 1) = \varphi_{d'}(0, 1),$$

notar ahora que $\varphi_{dy}(s,1) = \varphi_{d'}(0,1) = 0$, pues $(0,1) \notin G_{d'}$ y $(s,1) \notin G_{dy}$. Por lo tanto, se tiene

$$2\mathrm{Re}(\omega^{dyr}) = 2\mathrm{Re}(\omega^{d'}) \quad \text{si y sólo si} \quad dyr = \pm d'$$

Supongamos que $dyr = d'$, y como d' divide a $2m$, entonces dyr también divide a $2m$, luego existe $\alpha \in \mathbb{Z}$ tal que $2m = \alpha dyr = (\alpha dy)r$ esto implica que r divide a $2m$ lo cual es una contradictión, pues $r \in (\mathbb{Z}_{2m})^{\times}$. Análogamente, si $dyr = -d'$ implica r divide a $2m$. Luego, no existe $(s,r) \in \mathbb{Z}_{2m} \rtimes (\mathbb{Z}_{2m})^{\times}$ tal que $\varphi_{s,r} \cdot \varphi_{dy} = \varphi_{d'}$. □

Ejemplo 3.1. Consideremos para $m = 10$ el grupo de cuaterniones Q_{40}, por el teorema visto, tenemos el conjunto de supercaracteres $\mathcal{X}$ de Q_{40} dado por:

$$\{X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_4, Y_5\},$$

donde

$$\begin{aligned}
X_1 &= \{\pi_{1,1}\} \\
X_2 &= \{\pi_{\omega^m,1},\ \pi_{\omega^m,-1}\} \\
X_3 &= \{\pi_{1,-1}\} \\
Y_1 &= \{\varphi_1,\ \varphi_3,\ \varphi_7,\ \varphi_9\} \\
Y_2 &= \{\varphi_2,\ \varphi_6\} \\
Y_4 &= \{\varphi_4,\ \varphi_8,\} \\
Y_5 &= \{\varphi_5\}
\end{aligned}$$

Luego, tenemos que $|\mathcal{X}| = 7$.

Teorema 3.11. *Sean* $K_1 = \mathcal{C}[0,0], K_2 = \mathcal{C}[0,1] \cup \mathcal{C}[1,1]$ *y* $K_3 = \mathcal{C}[m,0]$. *El conjunto de superclases* $\mathcal{K}$ *de* Q_{4m} *está dado por:*

1. *Si* m *es par, ellos son:*

$$\{K_1, K_2, K_3, L_t\},$$

donde

$$L_t = \coprod_{\substack{x \in (\mathbb{Z}_{\frac{2m}{t}})^\times \\ 0 < x < [\frac{m}{t}]+1}} \mathcal{C}[tx, 0].$$

donde t *es cualquier divisor de* $2m$ *tal que* $t < m$*.*

2. *Si* m *es impar, ellos son:*

$$\{K_1, K_2, K_3, L_t\},$$

donde

a) *Para* t *divisor impar de* $2m, t \neq m, 2m$*, se tiene*

$$L_t = \coprod_{\substack{x \in (\mathbb{Z}_{\frac{2m}{t}})^\times \\ 0 < x < \frac{m}{t}}} \mathcal{C}[tx, 0].$$

b) *Para* t *divisor par de* $2m, t \neq m, 2m$*, se tiene*

$$L_t = \coprod_{\substack{x \in (\mathbb{Z}_{\frac{4m}{t}})^\times \\ 0 < x < \frac{2m}{t}}} \mathcal{C}[tx, 0].$$

Demostración. Solo daremos una demostración para el caso m par, pues de manera análoga se demuestra el caso m impar. $\mathcal{G}$ actúa sobre Q_{4m} mediante la acción vista en (2.6). Sea $\varphi \in \mathcal{G}$, es claro que la órbita de la clase $[0, 0]$ es:

$$K_1 = \mathcal{C}[0, 0]$$

Ahora, $\varphi([0, 1]) = [s, 1]$ con $s \in \mathbb{Z}_{2m}$, luego la $\mathcal{G}-$órbita de $[0, 1]$ es:

$$K_2 = \mathcal{C}[0, 1] \cup \mathcal{C}[1, 1]$$

$\varphi([m, 0]) = \varphi([1, 0]^m) = [r, 0]^m = [mr, 0]$ con $r \in (\mathbb{Z}_{2m})^\times$, luego la $\mathcal{G}-$órbita de $[m, 0]$ es:

$$K_3 = \mathcal{C}[m, 0]$$

pues solo se considera $r = 1$, dado que $r \in (\mathbb{Z}_{2m})^\times$ es impar, $rm \equiv m(\text{mod} 2m)$.

Sea t divisor de $2m, t < m$, demostremos que la órbita de $[t, 0]$ es L_t

$$L_t = \coprod_{\substack{x \in (\mathbb{Z}_{\frac{2m}{t}})^{\times} \\ 0 < x < [\frac{m}{t}]+1}} \mathcal{C}[tx, 0].$$

esto ocurre si y sólo si existe $(s, r) \in \mathbb{Z}_{2m} \rtimes (\mathbb{Z}_{2m})^{\times}$ tal que $\varphi([t, 0]) = [tx, 0]$ para todo $x \in \mathbb{Z}_{\frac{m}{t}}$. Es decir, si existe (s, r) tal que:

$$[tr, 0] = [tx, 0]$$

equivalentemente $\mathcal{C}[tr, 0] = \mathcal{C}[tx, 0]$.

Ahora, por el Lema 3.9 tenemos $[tx, 0] \sim_c [tr, 0]$ si y sólo si existe $(a, h) \in G$ tal que

$$(a + (-1)^h tx + (-1)^0(-a), 0)(tr, 0)^{-1} \in K$$

Ahora

$$\begin{aligned} (a + (-1)^h tx - a, 0)(tr, 0)^{-1} &= ((-1)^h tx, 0)(-tr, 0) \\ &= ((-1)^h tx + (-1)^0(-tr), 0) \\ &= ((-1)^h tx - tr, 0) \end{aligned}$$

Luego, $[tx, 0] \sim_c [tr, 0]$ si y sólo si exite $h \in \mathbb{Z}_4$ tal que $((-1)^h tx - tr, 0) \in K$. Es decir, $(-1)^h tx - tr \equiv 0(\text{mod} 2m)$. Luego, con $(-1)^h = \pm 1$, se tiene

$$tr \equiv \pm tx(\text{mod} 2m)$$

equivalentemente

$$r \equiv \pm x(\text{mod}\tfrac{2m}{t})$$

Entonces usando la Proposición 1.4 podemos tomar $r = x \in (\mathbb{Z}_{2m})^{\times}$ tal que $[tr, 0] = [tx, 0]$. Así, existe $(s, r) \in \mathbb{Z}_{2m} \rtimes (\mathbb{Z}_{2m})^{\times}$, tal que

$$L_t = \coprod_{\substack{x \in (\mathbb{Z}_{\frac{2m}{t}})^{\times} \\ 0 < x < [\frac{m}{t}]+1}} \mathcal{C}[tx, 0].$$

Demostremos además, que si tenemos t y t' divisores de $2m$, tal que $t, t' < m$ entonces no existe $(s, r) \in \mathbb{Z}_{2m} \rtimes (\mathbb{Z}_{2m})^{\times}$ tal que $\varphi_{s,r}([tx, 0]) = [t', 0]$. Supongamos que existe, entonces

$$[txr, 0] = [t', 0]$$

o equivalentemente

$$txr = \pm t'$$

Si $txr = t'$ como t' divide a $2m$ entonces txr también divide a $2m$, luego existe $\alpha \in \mathbb{Z}$ tal que $2m = \alpha txr = (\alpha tx)r$ esto implica que r divide a $2m$ lo cual es una contradictión, pues $r \in (\mathbb{Z}_{2m})^{\times}$. Análogamente, si $txr = -t'$ implica r divide a $2m$. Luego, no existe $(s, r) \in \mathbb{Z}_{2m} \rtimes (\mathbb{Z}_{2m})^{\times}$ tal que $\varphi_{s,r}([tx, 0]) = [t', 0]$. $\square$

Ejemplo 3.2. Siguiendo con el Ejemplo 3.1 y el teorema anterior, tenemos el conjunto de superclases $\mathcal{K}$ de Q_{40} dado por:

$$\{K_1, K_2, K_3, L_1, L_2, L_4, L_5\},$$

donde

$$\begin{aligned} L_1 &= \mathcal{C}[1,0] \cup \mathcal{C}[3,0] \cup \mathcal{C}[7,0] \cup \mathcal{C}[9,0] \\ L_2 &= \mathcal{C}[2,0] \cup \mathcal{C}[6,0] \\ L_4 &= \mathcal{C}[4,0] \cup \mathcal{C}[8,0] \\ L_5 &= \mathcal{C}[5,0] \end{aligned}$$

Luego, tenemos que $|\mathcal{K}| = 7$.

El siguiente Corolario, nos indica que la cantidad de superclases coincide con la cantidad de supercaracteres.

Corolario 3.1. $|\mathcal{X}| = |\mathcal{K}|$

1. *Para* m *par,* $|\mathcal{X}| = |\mathcal{K}| = \nu(2m) + 3$*, donde* $\nu(2m)$ *denota la el cardinal de divisores de* $2m$*, menores que* m.
2. *Para* m *impar,* $|\mathcal{X}| = |\mathcal{K}| = \mu(2m) + 1$*, donde* $\mu(2m)$ *denota la el cardinal de divisores de* $2m$.

Demostración. Al igual que los Teoremas anteriores solo daré una demostración para m par, pues análagamente se demuestra el caso m impar. Recordemos, para m par, el conjunto de los supercaracteres es

$$\mathcal{X} = \left\{X_1, X_2, X_3, Y_d\right\}$$

donde d es cualquier divisor de $2m$ tal que $d < m$, y el conjunto de las superclases es

$$\mathcal{K} = \left\{K_1, K_2, K_3, L_t\right\}$$

donde t es cualquier divisor de $2m$ tal que $t < m$. Así, para el conjunto $\mathcal{X}$ y $\mathcal{K}$ tenemos 3 supercaracteres y 3 superclases estándar, que son X_1, X_2, X_3 e K_1, K_2, K_3 respectivamente. Y para los conjuntos $Y_d \in \mathcal{X}$ y $L_t \in \mathcal{K}$ con d y t divisores de $2m$ tal que $d, t < m$. Así, solo basta considerar los divisores de $2m$ con el rango ya mencionado. Mas precisamente, definamos $\nu(2m)$ como el cardinal de todos los divisores d de $2m$ tal que $d < m$. Luego, tenemos la misma cantidad de Y_d en $\mathcal{X}$ como L_t en $\mathcal{K}$. En conclusión, $|\mathcal{X}| = |\mathcal{K}| = \nu(2m) + 3$. □

De los Teoremas 3.11 y 3.10, tenemos una partición $\mathcal{X}$ de $\mathrm{Irr}(Q_{4m})$ y una partición $\mathcal{K}$ de Q_{4m} tal que

1. $\left\{[0, 0]\right\} \in \mathcal{K}$.
2. Se tiene $|\mathcal{X}| = |\mathcal{K}|$ (ver Corolario 3.1).
3. Para todo $X \in \mathcal{X}$ el caracter

$$\sigma_X = \sum_{\chi \in X} \chi(1)\chi = \chi.$$

es constante sobre cada $K \in \mathcal{K}$. Es decir

$$\sigma_X(k) = \sigma_X(k') \quad \text{para todo} \quad k, k' \in K_i$$

y todo $\chi \in \mathcal{X}$.

Así, solo falta verificar la condición 3 de la Definición 2.7 para tener que el par $(\mathcal{X}, \mathcal{K})$ es una teoría de supercaracteres para Q_{4m}. Solo consideraré los calculos para m par.

Notar que, las superclases K_1 y K_3 resultan ser clases de conjugación de Q_{4m}, entonces solo basta ver que $\sigma_X(k) = \sigma_X(k')$ para todo $k, k' \in K_2$ y para todo $k, k' \in L_t$

Para $X = X_1$, el caracter σ_{X_1} se escribe:

$$\sigma_{X_1} = \sum_{\chi \in X_1} \chi(1)\chi = \pi_{1,1}.$$

Considero $\mathcal{C}[0,1], \mathcal{C}[1,1] \in K_2$, entonces tenemos

$$\begin{aligned} \sigma_{X_1}(0,1) &= \pi_{1,1}(0,1) = 1, \\ \sigma_{X_1}(1,1) &= \pi_{1,1}(1,1) = 1. \end{aligned}$$

Así, $\sigma_{X_1}(0,1) = \sigma_{X_1}(1,1)$. Ahora, escogemos $\mathcal{C}[tx,0], \mathcal{C}[t,0] \in L_t$, entonces

$$\begin{aligned} \sigma_{X_1}(tx,0) &= \pi_{1,1}(tx,0) = 1, \\ \sigma_{X_1}(t,0) &= \pi_{1,1}(t,0) = 1. \end{aligned}$$

Así $\sigma_{X_1}(tx,0) = \sigma_{X_1}(t,0)$. Luego, para $X = X_1$, se cumple que σ_X es constante sobre las superclases.

Para $X = X_2$ y m par, el caracter σ_{X_2} se escribe:

$$\sigma_{X_2} = \sum_{\chi \in X_2} \chi(1)\chi = \pi_{\omega^m,1} + \pi_{\omega^m,-1}.$$

En efecto, considero $\mathcal{C}[0,1], \mathcal{C}[1,1] \in K_2$, entonces

$$\begin{aligned} \sigma_{X_2}(0,1) &= \pi_{\omega^m,1}(0,1) + \pi_{\omega^m,-1}(0,1) \\ &= (\omega^m)^0 1^1 + (\omega^m)^0(-1)^1 = 1 - 1 = 0, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \sigma_{X_2}(1,1) &= \pi_{\omega^m,1}(1,1) + \pi_{\omega^m,-1}(1,1) \\ &= (\omega^m)^1 1^1 + (\omega^m)^1(-1)^1 = 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Así, $\sigma_{X_2}(0,1) = \sigma_{X_2}(1,1)$. Ahora, escogemos $\mathcal{C}[tx,0], \mathcal{C}[t,0] \in L_t$, entonces

$$\begin{aligned} \sigma_{X_2}(tx,0) &= \pi_{\omega^m,1}(tx,0) + \pi_{\omega^m,-1}(tx,0) \\ &= (\omega^m)^{tx} 1^0 + (\omega^m)^{tx}(-1)^0 = 2(-1)^{tx}, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\sigma_{X_2}(t,0) &= \pi_{\omega^m,1}(t,0)+\pi_{\omega^m,-1}(t,0)\\ &= (\omega^m)^t(-1)^0+(\omega^m)^t(-1)^0 = 2(-1)^t.\end{aligned}$$

Así, $\sigma_{X_2}(tx,0)=\sigma_{X_2}(t,0)$ si y sólo si $(-1)^{tx}=(-1)^t$.

Ahora, $(-1)^{tx}=(-1)^t$ si y soló si $tx-t$ es par. En efecto, $tx-t$ es par pues t es divisor de $2m$ y $x\in(\mathbb{Z}_{\frac{2m}{t}})^\times$, si t es par, es trivial ver que $t(x-1)$ es par. Ahora, si t impar, $\frac{2m}{t}$ es par, luego para $x\in(\mathbb{Z}_{\frac{2m}{t}})^\times$ se tiene x impar, entonces $x-1$ par implica $t(x-1)$ es par.

Así $\sigma_{X_2}(tx,0)=\sigma_{X_2}(t,0)$, entonces para $X=X_2$, se cumple que σ_X es constante sobre las superclases.

Para $X=X_3$, el caracter σ_{X_3} se escribe:

$$\sigma_{X_3}=\sum_{\chi\in X_3}\chi(1)\chi=\pi_{1,-1}.$$

Considero $\mathcal{C}[0,1],\mathcal{C}[1,1]\in K_2$, entonces

$$\begin{aligned}\sigma_{X_3}(0,1) &= \pi_{1,-1}(0,1)=-1,\\ \sigma_{X_3}(1,1) &= \pi_{1,-1}(1,1)=-1.\end{aligned}$$

Luego $\sigma_{X_3}(0,1)=\sigma_{X_3}(1,1)$. Ahora, escogemos $\mathcal{C}[tx,0],\mathcal{C}[t,0]\in L_t$, entonces

$$\begin{aligned}\sigma_{X_3}(tx,0) &= \pi_{1,-1}(tx,0),\\ &= 1,\\ &= \pi_{1,-1}(t,0),\\ &= \sigma_{X_3}(t,0).\end{aligned}$$

Así, para $X=X_3$, se cumple que σ_X es constante sobre las superclases.

Para $X=Y_d$, con m par, el caracter σ_{Y_d} se escribe:

$$\sigma_{Y_d}=\sum_{\substack{y\in(\mathbb{Z}_{\frac{2m}{d}})^\times\\ 0<y<[\frac{m}{d}]+1}}\varphi_{dy}.$$

Considero $\mathcal{C}[0,1], \mathcal{C}[1,1] \in K_2$, entonces

$$\begin{aligned}
\sigma_{Y_d}(0,1) &= 2 \sum_{\substack{y \in (\mathbb{Z}_{\frac{2m}{d}})^\times \\ 0<y<[\frac{m}{d}]+1}} \varphi_{dy}(0,1) = 0, \\
\sigma_{Y_d}(1,1) &= 2 \sum_{\substack{y \in (\mathbb{Z}_{\frac{2m}{d}})^\times \\ 0<y<[\frac{m}{d}]+1}} \varphi_{dy}(1,1) = 0,
\end{aligned}$$

Pues $(0,1),(1,1) \notin G_{dy}$. Así, $\sigma_{Y_d}(0,1) = \sigma_{Y_d}(1,1)$. Ahora, escogemos $\mathcal{C}[tx,0], \mathcal{C}[t,0] \in L_t$, entonces

$$\begin{aligned}
\sigma_{Y_d}(tx,0) &= 2 \sum_{\substack{y \in (\mathbb{Z}_{\frac{2m}{d}})^\times \\ 0<y<[\frac{m}{d}]+1}} \varphi_{dy}(tx,0), \\
&= 2 \sum_{\substack{y \in (\mathbb{Z}_{\frac{2m}{d}})^\times \\ 0<y<[\frac{m}{d}]+1}} 2\mathrm{Re}(\omega^{dytx}), \\
\sigma_{Y_d}(t,0) &= 2 \sum_{\substack{z \in (\mathbb{Z}_{\frac{2m}{d}})^\times \\ 0<z<[\frac{m}{d}]+1}} \varphi_{dz}(t,0), \\
&= 2 \sum_{\substack{z \in (\mathbb{Z}_{\frac{2m}{d}})^\times \\ 0<z<[\frac{m}{d}]+1}} 2\mathrm{Re}(\omega^{dzt}),
\end{aligned}$$

Entonces, se debe tener que

$$\sum_{\substack{y \in (\mathbb{Z}_{\frac{2m}{d}})^\times \\ 0<y<[\frac{m}{d}]+1}} \mathrm{Re}(\omega^{dytx}) = \sum_{\substack{z \in (\mathbb{Z}_{\frac{2m}{d}})^\times \\ 0<z<[\frac{m}{d}]+1}} \mathrm{Re}(\omega^{dzt})$$

Lo cual es claro, dado que una suma es solo es una permutación de los sumandos de la otra suma.

Así, para $X = Y_d$, se cumple que σ_X es constante sobre las superclases.

Concluyendo, hemos mostrado se satisfacen las condiciones de la Definición 2.7, así tenemos que el par $(\mathcal{X}, \mathcal{K})$ define una teoría de Supercaracteres para el grupo de cuaterniones generalizado Q_{4m}.

Ejemplo 3.3. De los Ejemplos 3.1 y 3.2, chequearemos que el supercaracter σ_{X_2} es constante sobre la superclase L_4. En efecto, el supercaracter σ_{X_2} se escribe

$$\sigma_{X_2} = \sum_{\chi \in X_2} \chi(1)\chi = \pi_{\omega^{10},1} + \pi_{\omega^{10},-1}.$$

considero $\mathcal{C}[4,0], \mathcal{C}[8,0] \in L_4$, entonces

$$\begin{aligned} \sigma_{X_2}(4,0) &= \pi_{\omega^{10},1}(4,0) + \pi_{\omega^{10},-1}(4,0) \\ &= (\omega^{10})^4 1^0 + (\omega^{10})^4(-1)^0 = 1 + 1 = 2, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \sigma_{X_2}(8,0) &= \pi_{\omega^{10},1}(8,0) + \pi_{\omega^{10},-1}(8,0) \\ &= (\omega^{10})^8 1^0 + (\omega^{10})^8(-1)^0 = 1 + 1 = 2, \end{aligned}$$

Así, $\sigma_{X_2}(4,0) = \sigma_{X_2}(8,0)$. Luego, el supercaracter σ_{X_2} es constante sobre la superclase L_4.

2.5. Tabla de Supercaracteres de Q_{4m}. Los siguientes calculos nos permiten determinar una tabla de supercarcteres para Q_{4m}. Más precisamente, consideremos un representates de cada superclase, a saber: $[0,0], [0,1], [m,0]$ y $[t,0]$ con t divisor de $2m$ tal que $t < m$ respectivamente. Solo mostraré los calculos para el caso m par. Luego, tenemos lo siguiente:

Para $X = X_1$, el caracter σ_{X_1} se escribe:

$$\sigma_{X_1} = \sum_{\chi \in X_1} \chi(1)\chi = \pi_{1,1},$$

así, para cada superclase en $\mathcal{K}$, se tiene

$$\begin{aligned} \sigma_{X_1}([0,0]) &= \pi_{1,1}([0,0]) = 1, \\ \sigma_{X_1}([0,1]) &= \pi_{1,1}([0,1]) = 1, \\ \sigma_{X_1}([m,0]) &= \pi_{1,1}([m,0]) = 1. \end{aligned}$$

Y para cualquier valor de t, se tiene

$$\sigma_{X_1}([t,0]) \;=\; \pi_{1,1}([t,0]) = 1.$$

Para $X = X_2$ y m par, el caracter σ_{X_2} corresponde a:

$$\sigma_{X_2} = \sum_{\chi\in X_2} \chi(1)\chi = \pi_{\omega^m,1} + \pi_{\omega^m,-1},$$

así, para cada superclase en $\mathcal{K}$, se tiene

$$\begin{aligned}
\sigma_{X_2}([0,0]) &= \pi_{\omega^m,1}([0,0]) + \pi_{\omega^m,-1}([0,0]) = 1+1 = 2,\\
\sigma_{X_2}([0,1]) &= \pi_{\omega^m,1}([0,1]) + \pi_{\omega^m,-1}([0,1]) = 1-1 = 0,\\
\sigma_{X_2}([m,0]) &= \pi_{\omega^m,1}([0,0]) + \pi_{\omega^m,-1}([0,0]) = 1+1 = 2.
\end{aligned}$$

Y para cualquier valor de t, se tiene

$$\sigma_{X_2}([t,0]) \;=\; \pi_{\omega^m,1}([t,0]) + \pi_{\omega^m,-1}([t,0]) = 2(\omega^m)^t = 2(-1)^t.$$

Para $X = X_3$, el caracter σ_{X_3} es:

$$\sigma_{X_3} = \sum_{\chi\in X_3} \chi(1)\chi = \pi_{1,1},$$

así, para cada superclase en $\mathcal{K}$, se tiene

$$\begin{aligned}
\sigma_{X_3}([0,0]) &= \pi_{1,-1}([0,0]) = 1,\\
\sigma_{X_3}([0,1]) &= \pi_{1,-1}([0,1]) = -1,\\
\sigma_{X_3}([m,0]) &= \pi_{1,-1}([m,0]) = 1.
\end{aligned}$$

Y para cualquier valor de t, se tiene

$$\sigma_{X_3}([t,0]) \;=\; \pi_{1,-1}([t,0]) = 1.$$

Para $X = Y_d$, con m par y d divisor de m, el caracter σ_{X_d} se escribe:

$$\sigma_{Y_d} = \sum_{\substack{y\in(\mathbb{Z}_{\frac{2m}{d}})^\times \\ 0<y<\left[\frac{m}{d}\right]+1}} \varphi_{dy},$$

así, para cada superclase en $\mathcal{K}$, se tiene

$$\begin{aligned}
\sigma_{Y_d}([0,0]) &= 2\sum_{\substack{y\in(\mathbb{Z}_{\frac{2m}{d}})^\times\\ 0<y<\left[\frac{m}{d}\right]+1}} \varphi_{dy}([0,0]),\\
&= 2\sum_{\substack{y\in(\mathbb{Z}_{\frac{2m}{d}})^\times\\ 0<y<\left[\frac{m}{d}\right]+1}} 2,\\
&= 4\phi\left(\frac{2m}{d}\right),
\end{aligned}$$

donde $\phi\left(\frac{2m}{d}\right)$ denota el cardinal de $\mathbb{Z}_{\frac{2m}{d}}$ tal que $0<y<\left[\frac{m}{d}\right]+1$.

$$\begin{aligned}
\sigma_{Y_d}([0,1]) &= 2\sum_{\substack{y\in(\mathbb{Z}_{\frac{2m}{d}})^\times\\ 0<y<\left[\frac{m}{d}\right]+1}} \varphi_{dy}([0,1]),\\
&= 2\sum_{\substack{y\in(\mathbb{Z}_{\frac{2m}{d}})^\times\\ 0<y<\left[\frac{m}{d}\right]+1}} 0 = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{Y_d}([m,0]) &= 2\sum_{\substack{y\in(\mathbb{Z}_{\frac{2m}{d}})^{\times}\\ 0<y<[\frac{m}{d}]+1}} \varphi_{dy}([m,0]),\\
&= 2\sum_{\substack{y\in(\mathbb{Z}_{\frac{2m}{d}})^{\times}\\ 0<y<[\frac{m}{d}]+1}} 2\mathsf{Re}(\omega^{dym}),\\
&= 4\sum_{\substack{y\in(\mathbb{Z}_{\frac{2m}{d}})^{\times}\\ 0<y<[\frac{m}{d}]+1}} \mathsf{Re}((\omega^{m})^{dy}),\\
&= 4\sum_{\substack{y\in(\mathbb{Z}_{\frac{2m}{d}})^{\times}\\ 0<y<[\frac{m}{d}]+1}} \mathsf{Re}((-1)^{dy}),\\
&= 4\sum_{\substack{y\in(\mathbb{Z}_{\frac{2m}{d}})^{\times}\\ 0<y<[\frac{m}{d}]+1}} (-1)^{dy}.
\end{aligned}$$

Y para t divisor de $2m$, se tiene

$$\begin{aligned}
\sigma_{Y_d}([t,0]) &= 2\sum_{\substack{y\in(\mathbb{Z}_{\frac{2m}{d}})^{\times}\\ 0<y<[\frac{m}{d}]+1}} \varphi_{dy}([t,0]),\\
&= 2\sum_{\substack{y\in(\mathbb{Z}_{\frac{2m}{d}})^{\times}\\ 0<y<[\frac{m}{d}]+1}} 2\mathsf{Re}(\omega^{dyt}),\\
&= 4\sum_{\substack{y\in(\mathbb{Z}_{\frac{2m}{d}})^{\times}\\ 0<y<[\frac{m}{d}]+1}} \mathsf{Re}(\omega^{dyt}).
\end{aligned}$$

Luego, tenemos la tabla de supercaracteres para Q_{4m}, con m par. Con un calculo equivalente, se obtiene la misma tabla para el caso m impar. más precisamente tenemos:

	K_1 $[0,0]$	K_3 $[0,1]$	K_3 $[m,0]$	$L_t; t/2m, t < m$ $[t,0]; 1 < n \leqslant m-1$
X_1	1	1	1	1
X_2	2	0	2	$2(-1)^t$
X_3	1	-1	1	1
Y_d $d/2m, d < m$	$4\phi\left(\frac{2m}{d}\right)$	0	$4\sum(-1)^{dy}$	$4\sum \mathsf{Re}(\omega^{dyt})$

Ejemplo 3.4. Para $m = 10$ y utilizando los calculos generales anteriores, se obtiene la tabla de supercaracteres para el grupo de cuaterniones Q_{40} :

	K_1 $[0,0]$	K_3 $[0,1]$	K_3 $[10,0]$	L_1 $[1,0]$	L_2 $[2,0]$	L_4 $[4,0]$	L_5 $[5,0]$
X_1	1	1	1	1	1	1	1
X_2	2	0	2	-2	2	2	-2
X_3	1	-1	1	1	1	1	1
Y_1	16	0	-16	$4\mathsf{Re}(\omega^1)+$ $4\mathsf{Re}(\omega^3)+$ $4\mathsf{Re}(\omega^7)+$ $4\mathsf{Re}(\omega^9)$	$8\mathsf{Re}(\omega^2)+$ $8\mathsf{Re}(\omega^6)$	$8\mathsf{Re}(\omega^4)+$ $8\mathsf{Re}(\omega^8)$	$16\mathsf{Re}(\omega^5)$
Y_2	8	0	8	$4\mathsf{Re}(\omega^2)+$ $4\mathsf{Re}(\omega^6)$	$4\mathsf{Re}(\omega^4)+$ $4\mathsf{Re}(\omega^8)$	$8\mathsf{Re}(\omega^4)$	$8\mathsf{Re}(\omega^5)$
Y_4	8	0	8	$4\mathsf{Re}(\omega^4)+$ $4\mathsf{Re}(\omega^8)$	$4\mathsf{Re}(\omega^4)+$ $4\mathsf{Re}(\omega^8)$	$8\mathsf{Re}(\omega^4)$	8
Y_5	4	0	-4	$4\mathsf{Re}(\omega^5)$	-4	4	$4\mathsf{Re}(\omega^5)$

2.6. Digresión: Supercaracteres de $Q_{4m}/Z(Q_{4m})$. Para obtener una Teoría de Supercaracteres del grupo cociente de Q_{4m} por su centro $Z(Q_{4m})$ es necesario determinar el conjunto de caracteres irreducibles de $Q_{4m}/Z(Q_{4m})$. Para esto, recordemos que el conjunto de todos los caracteres irreducibles de Q_{4m}, como sigue:

$$\mathrm{Irr}(Q_{4m}) = \left\{\pi_{1,1},\ \pi_{1,-1},\ \pi_{\omega^m,1},\ \pi_{\omega^m,-1},\ \varphi_{2j},\ \varphi_{2j+1}\right\} \quad \text{para } m \text{ par.}$$

y

$$\mathrm{Irr}(Q_{4m}) = \left\{\pi_{1,1},\ \pi_{1,-1},\ \pi_{\omega^m,i},\ \pi_{\omega^m,-i},\ \varphi_{2j},\ \varphi_{2j+1}\right\} \quad \text{para } m \text{ impar.}$$

Ahora, de acuerdo al Lema 2.3, veamos cuales caracteres de Q_{4m} se factorizan en $Q_{4m}/Z(Q_{4m})$. Recordar que $Z(Q_{4m}) = \left\{(0,0),(m,0)\right\}$ (ver Observación 3.2). Es decir, χ caracter de $Q_{4m}/Z(Q_{4m})$ si y sólo si

$$\chi(m,0) = \chi(0,0) = \dim\chi.$$

Veamos primero, para el caso m par, cuales caracteres lineales de Q_{4m} se factorizan en $Q_{4m}/Z(Q_{4m})$.

$$\begin{aligned}
\pi_{1,1}(m,0) &= 1 = \dim\pi_{1,1}\\
\pi_{1,-1}(m,0) &= 1 = \dim\pi_{1,1}\\
\pi_{\omega^m,1}(m,0) &= 1 = \dim\pi_{\omega^m,1}\\
\pi_{\omega^m,-1}(m,0) &= 1 = \dim\pi_{\omega^m,-1}
\end{aligned}$$

Entonces, los caracteres lineales de $Q_{4m}/Z(Q_{4m})$, para m par son:

$$\pi_{1,1},\ \pi_{1,-1},\ \pi_{\omega^m,1},\ \pi_{\omega^m,-1}.$$

Ahora, para el caso m impar, cuales caracteres lineales de Q_{4m} se factorizan en $Q_{4m}/Z(Q_{4m})$.

$$\begin{aligned}
\pi_{1,1}(m,0) &= 1 = \dim\pi_{1,1}\\
\pi_{1,-1}(m,0) &= 1 = \dim\pi_{1,1}\\
\pi_{\omega^m,i}(m,0) &= -1 \neq \dim\pi_{\omega^m,1}\\
\pi_{\omega^m,-i}(m,0) &= -1 \neq \dim\pi_{\omega^m,-1}
\end{aligned}$$

Luego, los caracteres lineales de $Q_{4m}/Z(Q_{4m})$, para m impar son:

$$\pi_{1,1},\ \pi_{1,-1}.$$

Ahora, para los caracteres de dimensión 2 de Q_{4m}, veamos cuales caracteres se factorizan a $Q_{4m}/Z(Q_{4m})$. Tenemos:

$$\begin{aligned}\varphi_{2j}(m,0) &= 2\mathsf{Re}(\omega^{2jm})\\ &= 2\mathsf{Re}((\omega^{m})^{2j}))\\ &= 2\\ &= \dim\varphi_{2j}\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\varphi_{2j+1}(m,0) &= 2\mathsf{Re}(\omega^{(2j+1)m})\delta(0)\\ &= 2\mathsf{Re}((\omega^{m})^{(2j+1)}))\\ &= -2\\ &\neq \dim\varphi_{2j+1}\end{aligned}$$

Por lo tanto, los caracteres de dimensión 2 de $Q_{4m}/Z(Q_{4m})$ son los siguientes:

$$\varphi_{2j} \quad \text{con} \quad 1 \leqslant j \leqslant [\tfrac{m+1}{2}] - 1. \tag{3.8}$$

Resumiendo, tenemos el siguiente Teorema.

Conjetura 1. *El conjunto de caracteres irreducibles de* $Q_{4m}/Z(Q_{4m})$ *es:*

- *Para* m *par*

$$\mathrm{Irr}(Q_{4m}/Z(Q_{4m})) = \left\{\pi_{1,1},\ \pi_{1,-1},\ \pi_{\omega^m,1},\ \pi_{\omega^m,-1},\ \varphi_{2j}\right\}.$$

- *Para* m *impar*

$$\mathrm{Irr}(Q_{4m}/Z(Q_{4m})) = \left\{\pi_{1,1},\ \pi_{1,-1},\ \varphi_{2j}\right\}.$$

Ahora, si bien recordamos, el grupo Q_{4m} tiene $m+3$ clases de conjugación, las cuales pueden ser representadas por los siguientes elementos:

$$[0,0],\ [1,0],\ [0,1],\ [1,1],\ [m,0],\ [n,0] \text{ para } 1 < n \leqslant m-1.$$

Tenemos:

Conjetura 2. *Para el grupo* $Q_{4m}/Z(Q_{4m})$, *se distinguen dos tipos de clases de conjugación:*

1. *Para* m *par, se tienen* $\frac{m+6}{2}$ *clases de conjugación, dadas por:* 3 *clases del tipo*

$$\begin{aligned}\mathcal{C}[\![0,0]\!] &= \big\{[a,b] \;:\; (a,b) \in \mathcal{C}[0,0] \cup \mathcal{C}[m,0]\big\},\\ \mathcal{C}[\![0,1]\!] &= \big\{[a,b] \;:\; (a,b) \in \mathcal{C}[0,1]\big\},\\ \mathcal{C}[\![1,1]\!] &= \big\{[a,b] \;:\; (a,b) \in \mathcal{C}[1,1]\big\},\end{aligned}$$

y $\frac{m}{2}$ *clases de la forma*

$$\mathcal{C}[\![n,0]\!] = \big\{[a,b] \;:\; (a,b) \in \mathcal{C}[n,0] \cup \mathcal{C}[m-n,0]\big\}$$

con $1 \leqslant n \leqslant \frac{m}{2}$.

2. *Para* m *impar, se tienen* $\frac{m+3}{2}$ *clases de conjugación, dadas por:* 2 *clases del tipo*

$$\begin{aligned}\mathcal{C}[\![0,0]\!] &= \big\{[a,b] \;:\; (a,b) \in \mathcal{C}[0,0] \cup \mathcal{C}[m,0]\big\},\\ \mathcal{C}[\![0,1]\!] &= \big\{[a,b] \;:\; (a,b) \in \mathcal{C}[0,1] \cup \mathcal{C}[1,1]\big\},\end{aligned}$$

$\frac{m-1}{2}$ *clases de la forma*

$$\mathcal{C}[\![n,0]\!] = \big\{[a,b] \;:\; (a,b) \in \mathcal{C}[n,0] \cup \mathcal{C}[m-n,0]\big\},$$

con $1 \leqslant n \leqslant \frac{m-1}{2}$.

Luego, tenemos la tabla de caracteres para $Q_{4m}/Z(Q_{4m})$, con m par, más precisamente tenemos

	$[\![0,0]\!]$	$[\![1,0]\!]$	$[\![0,1]\!]$	$[\![1,1]\!]$	$[\![n,0]\!]; 1 < n \leqslant \frac{m}{2}$
$\pi_{1,1}$	1	1	1	1	1
$\pi_{1,-1}$	1	1	-1	-1	1
$\pi_{\omega^m,1}$	1	-1	1	-1	$(-1)^n$
$\pi_{\omega^m,-1}$	1	-1	-1	1	$(-1)^n$
φ_{2j}	2	$2\mathrm{Re}(\omega^{2j})$	0	0	$2\mathrm{Re}((\omega^{2j})^n)$

Para m impar, la tabla de caracteres para $Q_{4m}/Z(Q_{4m})$ es:

	$[\![0,0]\!]$	$[\![1,0]\!]$	$[\![0,1]\!]$	$[\![n,0]\!]; 1 < n \leqslant \frac{m-1}{2}$
$\pi_{1,1}$	1	1	1	1
$\pi_{1,-1}$	1	1	-1	1
φ_{2j}	2	$2\mathrm{Re}(\omega^{2j})$	0	$2\mathrm{Re}((\omega^{k2j})^n)$

Para obtener una teoría de supercaracteres para $Q_{4m}/Z(Q_{4m})$, consideremos la Proposición 3.3 y por la Proposición 1.2 tenemos

$$\mathrm{Aut}(Q_{4m}/Z(Q_{4m})) \simeq \mathrm{Aut}(D_m)$$

donde $\mathrm{Aut}(D_m)$ es isomorfo a un producto semi-directo de $\mathbb{Z}_m$ con $\mathbb{Z}_m^\times$, más precisamente

$$\mathcal{G} = \mathbb{Z}_m \rtimes \mathbb{Z}_m^\times$$

Sea $\varphi \in \mathcal{G}$ denotado por $\varphi := \varphi_{s,r}$ con $s \in \mathbb{Z}_m$ y $r \in \mathbb{Z}_m^\times$, tal que

$$\begin{array}{ccccccc} & \varphi & & & & \varphi & \\ a & \longmapsto & a^r & \quad \text{o bien} \quad & (1,0) & \longmapsto & (1,0)^r = (r,0) \\ b & \longmapsto & a^s b & & (0,1) & \longmapsto & (1,0)^s(0,1) = (s,1) \end{array}$$

Recordemos que $\mathcal{G}$ actúa sobre $\mathrm{Irr}(Q_{4m}/Z(Q_{4m}))$ y sobre $Q_{4m}/Z(Q_{4m})$ (ver ecuaciones (2.5) y (2.6)). Usando esta acción, determinamos una teoría de supercaracteres de $Q_{4m}/Z(Q_{4m})$. El conjunto de supercaracteres $\mathcal{X}$ y el conjunto de superclases $\mathcal{K}$ son determinados en los siguientes Teoremas.

Conjetura 3. *El conjunto se supercaracteres $\mathcal{X}$ de $Q_{4m}/Z(Q_{4m})$, para m par y d divisor par de $2m$, es:*

$$\{X_1, X_2, X_3, Y_d \ : \ d/2m, d < m\},$$

donde

1. $X_1 = \{\pi_{1,1}\}$,
2. $X_2 = \{\pi_{\omega^m,1},\ \pi_{\omega^m,-1}\}$
3. $X_3 = \{\pi_{1,-1}\}$

4.
$$\mathsf{Y}_d = \coprod_{\substack{y \in (\mathbb{Z}_{\frac{2m}{d}})^{\times} \\ 0<y<\frac{m}{d}+1}} \{\varphi_{dy}\}.$$

Conjetura 4. *El conjunto se supercaracteres $\mathcal{X}$ de $Q_{4m}/Z(Q_{4m})$, para m impar y d divisor par de $2m$, es:*

$$\{\mathsf{X}_1, \mathsf{X}_3, \mathsf{Y}_d \ : \ d/m, d \neq 2m\},$$

donde

1. $\mathsf{X}_1 = \{\pi_{1,1}\}$,
2. $\mathsf{X}_3 = \{\pi_{1,-1}\}$
3.
$$\mathsf{Y}_d = \coprod_{\substack{y \in (\mathbb{Z}_{\frac{4m}{d}})^{\times} \\ 0<y<\frac{2m}{d}}} \{\varphi_{dy}\}.$$

Conjetura 5. *El conjunto de superclases $\mathcal{K}$ de $Q_{4m}/Z(Q_{4m})$ para m par y t divisor par de $2m$, es:*

$$\{\mathsf{K}_1, \mathsf{K}_2, \mathsf{K}_3, \mathsf{L}_t \ : \ t/2m, t < m\},$$

donde

1. $\mathsf{K}_1 = \mathcal{C}[0,0]$,
2. $\mathsf{K}_2 = \mathcal{C}[0,1]$,
3. $\mathsf{K}_3 = \mathcal{C}[1,1]$,
4.
$$\mathsf{L}_t = \coprod_{\substack{x \in (\mathbb{Z}_{\frac{2m}{t}})^{\times} \\ 0<x<\frac{m}{t}+1}} \mathcal{C}[tx, 0].$$

Conjetura 6. *El conjunto de superclases $\mathcal{K}$ de $Q_{4m}/Z(Q_{4m})$ para m impar y t divisor par de $2m$, es:*

$$\{\mathsf{K}_1, \mathsf{K}_2, \mathsf{L}_t \ : \ t/m, t \neq 2m\},$$

donde

1. $\mathsf{K}_1 = \mathcal{C}[0,0]$,
2. $\mathsf{K}_2 = \mathcal{C}[0,1] \cup \mathcal{C}[1,1]$,
3. $$\mathsf{L}_t = \coprod_{\substack{x \in (\mathbb{Z}_{\frac{4m}{t}})^{\times} \\ 0 < x < \frac{2m}{t}}} \mathcal{C}[tx, 0].$$

Conjetura 7. $|\mathcal{X}| = |\mathcal{K}|$

1. *Para* m *par,* $|\mathcal{X}| = |\mathcal{K}| = \nu(2m) + 3$*, donde* $\nu(2m)$ *denota la el cardinal de divisores de* $2m$*, menores que* m.
2. *Para* m *impar,* $|\mathcal{X}| = |\mathcal{K}| = \frac{\nu(2m)}{2} + 2$*, donde* $\nu(2m)$ *denota el cardinal de divisores de* $2m$ *distintos de* m *y* $2m$.

Bibliografía

[1] Serre, Jean-Pierre. Linear Representations of Finite Groups, *United States of América: Springer-Verlag New York Inc.*, (1977).

[2] Diaconis, P; Isaacs, M. Supercharacters and superclasses for algebra groups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 360 (2008), 2359-2392.

[3] C. André. Basic characters of the unitriangular group, *J. Algebra* 175 (1995), 287-319.

[4] Ning Yang, Representation Theory of the finite unipotent linear groups, Unpublished manuscript, (2001).

[5] I. M. Isaacs, Character theory of finite groups, *Dover*, New York, (1994).

[6] C. Fowler, S. Garcia, and G. Karaali, Ramanujan sums as super- characters, Ramanujan J.,(*in press*) http://arxiv.org/abs/1201.1060

[7] P. S. Fleming, S. Garcia, and G. Karaali, Classical Kloosterman sums: representation theory, magic squares, and Ramanujan multigraphs, *J. Number Theory* 131 (2011), no. 4, 661-680. MR 2753270 (2012a:11114)

[8] A. Piñera, Super-Caracteres de grupos de álgebra. Aplicaciones a la teoría cuantica de codigos. Tesis doctoral, Universidad de Oviedo, (2008)

[9] J. Juyumaya, S. Lambropoulou, p-adic framed braid II, *Advances in Mathematics* 234 (2013), 149-191

[10] Golasiński M; Gonçalves D. L. Spherical Space Forms - Homotopy Types and Selfequivalences. Progress in Mathematics: Categorical Decomposition Techniques in Algebraic Topology, Birkhauser. (2004)

[11] González, J. Grupos de Heisenberg y Unipotente. Trabajo de graduación (Licenciatura en Matemáticas). Valparaíso: Departamento de Matemáticas, Universidad de Valparaíso, (2006).

[12] Gómez, K. Descomposición de la Representación Conjugación de B_n. Trabajo de graduación (Licenciatura en Matemáticas). Valparaíso: Departamento de Matemáticas, Universidad de Valparaíso, (2006).

[13] Conrand, K. Generalized Quaternions.

[14] Gómez, C. Ardila de la P, V. Los cuaterniones y su grupo de automorfismos. *Boletin de Matemáticas* Nueva serie Vol.I No.1 (1994)(9-15).

[15] Dummit, D. Abstract Algebra. Third Edition, John Wiley and Sons,Inc. (2004).

[16] Johnson, D. L. Topics in the Theory of Group Presentations. 1st. ed. Great Britain: Cambridge University Press England, (1980).

[17] Johnson, D. L. Presentations of Groups. 2nd. ed. United Kingdom: Cambridge University Press England, 1997.

[18] O'Brien, Horacio H. Propiedades Elementales.Estructuras Algebráicas III (Grupos Finitos). Washington, D.C.: Departamento de Asuntos Científicos de la Secretaría General de la Organización de los Estados Americanos, 1973.