INSTITUTO
DE CIENCIAS
BIOLOGICAS
Y QUIMICAS / 508343 FAX 288866
- Depto de Biologia / 508016
- Depto de Fisiologia / 508015
- Depto de Química y Bioquímica / 508017
- Carrera de Ingeniería Ambiental /508340
- Carrera de Biomédica /508340

UNIVERSIDAD DE VALPARAISO
CHILE

FACULTAD DE CIENCIAS
SECRETARIA DE ESTUDIOS

INSTITUTO DE MATEMATICAS
Y FISICA
- Depto de Computación / 508300
- Depto de Estadistica / 508320
- Depto de Fisica y Meteorologia / 508700
- Depto de Matemáticas/508360

Seminario de Título

Estudio de propuestas de enseñanza y aprendizaje de los Números irracionales en la enseñanza escolar, en el caso particular de raíz de 2.

Autores
Israel Barrientos Toro – Edgar Rivera Severino

Profesora Guía
Patricia López

2011

Índice

Resumen 4

Introducción 5

Preguntas de Investigación 6

Objetivos de la Investigación 7

Objetivo General 7

Objetivos Específicos 7

Marco Teórico 8

I.- Método Histórico Crítico 8

II.- Asimilación, Acomodación y Adaptación 9

III.- La Teoría de las Situaciones Didácticas 10

IV.- Currículum 14

V.- El Enfoque de Resolución de Problemas 20

Metodología 23

Epistemología del Número Irracional 25

La Teoría de los irracionales 36

Cantor 38

Dedekind 40

Currículum 47

Análisis de textos escolares 50

Análisis texto 1 51

Análisis de texto 2 72

Planes de clases sobre el número irracional diseñados por profesores de enseñanza media 90

Respuestas y análisis de cuestionario realizado a alumnos sobre irracionalidad 98

Propuesta 110

Parte I 110

Parte II 114

Parte III 116

Anexo 121

Conclusión 129

Bibliografía_____133

Resumen

En este trabajo hemos realizado un estudio de cómo se trata el concepto de número irracional, en particular de raíz de dos, en dos cursos de la enseñanza escolar. Para este efecto hemos realizado un estudio de la evolución histórica del concepto de irracionalidad y analizado las sugerencias de tratamiento del tema en documentos oficiales del MINEDUC y en dos textos escolares. Con todos estos antecedentes hemos construido una propuesta de enseñanza que pensamos puede ayudar a que los estudiantes adquieran con mayor profundidad la idea de irracionalidad de un número en el caso particular de raíz de dos.

Introducción

El motivo de estudiar la irracionalidad de los números se inició con la experiencia que observamos en la práctica encontrándonos con alumnos de tercer año medio incapaces de comparar y dar características de los números irracionales, llamándonos profundamente la atención, ya que este tema debiera estar claro, debido a que es enseñado en primer año medio. Esto nos llevó a darnos cuenta del el poco conocimiento que teníamos sobre el tema y el interesante reto que asumiríamos. Pero el impulso inicial a estudiar el tema, fue estudiar y comentar cómo se introduce el tema de los números irracionales, visto en dos aspectos (Propuestas de dos profesores a alumnos de primer año medio y estudio de dos textos escolares), para luego estudiar y comentar lo que el MINEDUC propone para abordar el tema.

En base a la evidencia encontrada en tesis, libros de enseñanza media, ajuste curricular, mapas de progreso, programas de estudios y textos de historia de las matemáticas es posible constatar que el concepto de número irracional es un tema importante porque constituyen un conjunto numérico en el que es posible resolver problemas que no tienen solución en los números racionales y para poder comprender y completar el conjunto de los números reales, a pesar de que esto se encuentra en los planes y programas de estudios, no se trata con la profundidad que realmente merece y esto produce la confusión del alumno al no poder comprender la diferencia entre número racional e irracional, evidenciándolo con el tipo de respuesta que dan: "$\sqrt{0}$ y 3,141592654 pertenecen al conjunto de los números irracionales " y en frases dichas por el profesor como: "los números irracionales son aquellos que habitualmente no tienen solución real entera".

Para construir la propuesta estudiamos la evolución histórica del concepto de irracionalidad y en la medida de lo posible, las problemáticas que impulsaron el desarrollo de este concepto de irracionalidad (en particular raíz de dos), pero no solo tomando la historia, sino también el hecho de cómo los

textos escolares de media tratan la información, centrándonos en interrogantes como ¿existe una concordancia entre lo que ocurrió en las escuelas pitagóricas, con las situaciones específicas que se presentan actualmente al alumno?, ¿Con el tratamiento del concepto dado en textos escolares y en clases podrán realmente conjeturar los alumnos que raíz de dos es un número que presenta un desarrollo decimal infinito no periódico? ¿Se dará una característica esencial de estos números, para poder discriminar entre número racional e irracional o de otro tipo de número?. Entonces ¿Cómo el alumno en enseñanza media, podrá diferenciar entre número racional e irracional?

Hemos podido apreciar que el tema da para bastante, en el sentido de los conocimientos que el profesor debe tener para abordar el tema, con el fin de lograr que el alumno pueda reconocer, distinguir y caracterizar el número irracional.

Por todo lo anterior expresado, existe una gran motivación para elaborar una situación de enseñanza que favorezca el aprendizaje del concepto de número irracional, focalizándonos en $\sqrt{2}$.

Preguntas de Investigación

- ¿Cuál ha sido la evolución del concepto de irracionalidad (centrados en $\sqrt{2}$) a través de la historia?
- ¿Cómo es la organización del ajuste curricular (2009), planes y programas de estudio (2004) y mapas de progresos (2009) para el concepto de número irracional?
- ¿Cómo introducen los textos escolares la idea o el concepto de número irracional? y ¿Cómo es el tratamiento que hacen estos de $\sqrt{2}$?
- ¿Cómo es el tratamiento que hacen los profesores del concepto de número irracional, en el caso particular de $\sqrt{2}$?

Objetivos de la Investigación

Objetivo General

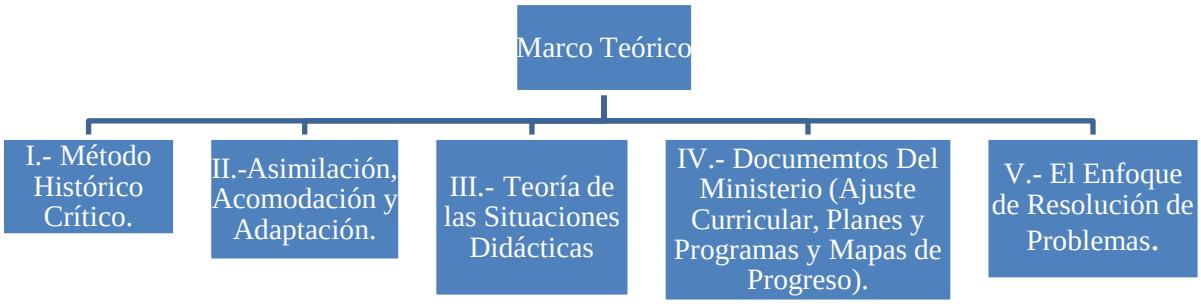
- Diseñar una situación de enseñanza que favorezca el aprendizaje del concepto de número irracional, en el caso particular de $\sqrt{2}$.

Objetivos Específicos

- Estudiar (investigar) la génesis y evolución del concepto de número irracional, focalizándonos en el caso del número $\sqrt{2}$.
- Estudiar lo que se indica del concepto de número irracional dentro de la organización presente en el ajuste curricular (2009), planes y programas de estudio (2004) y mapas de progresos (2009).
- Analizar la presentación y tratamiento del número irracional en textos escolares.
- Analizar registros de alumnos al momento que el profesor inicia el tratamiento del concepto de número irracional.
- Analizar la comprensión del objeto número irracional a alumno de segundo medio.

Marco Teórico

Para poder entender nuestro trabajo es necesario comprender la teoría en la cual nos basamos y de esta forma poder estudiar, comprender y analizar los objetivos específicos. Para que posteriormente podamos lograr el objetivo general de nuestra tesis. A continuación se presenta un diagrama que explica a grandes rasgos lo que se presentara en el Marco Teórico.



I.- Método Histórico Crítico

El objetivo de utilizar este método es permitir que las personas puedan comprender las metodologías, técnicas y las diferentes formas que utilizan los historiadores para transmitir las fuentes primarias del número irracional. Se encontró (Piaget, 1965/1975, citado por (Lenzi)y Borzi, Pág. 2) que:

" […] El método histórico-crítico consistirá en comprender cómo procedieron […] el inventor del principio [científico] o los autores que prepararon su descubrimiento; por ejemplo se tratara de descubrir con precisión a que especie de experiencia recurrieron […], y que deducciones extrajeron […] y […] y de acuerdo con que sistema deductivo o interpretativo llegaron a imaginar sus experiencias, etc. […] Todos los problemas de las relaciones entre sujeto y objeto […], de los procesos de invención o de descubrimiento […] pueden

encontrarse en el terreno […] de un desarrollo histórico reconstituido desde esos puntos de vista; por consiguiente, llamaremos método histórico-crítico al método de análisis epistemológico que utiliza la historia [de las ciencias] con miras a tales discusiones […] Sin embargo, el método histórico-crítico […],se refiere a las nociones construidas y empleadas por un pensamiento ya constituido: el de los científicos […] Las formas de pensamiento accesibles del método histórico-crítico ya están muy elaboradas […] este método [permite] vincular el presente con un pasado colmado de riquezas a menudo olvidadas, que lo esclarece y en parte explica gracias al examen de los sucesivos estadios del desarrollo de un pensamiento colectivo [científico] ”

Debemos aclarar que en la tesis no se hace una epistemología genética, sino que utilizamos una parte de ella, es decir, el método histórico crítico el cual creemos que es suficiente para conseguir los siguientes puntos:

1. Identificar los años donde se produjeron avances en el desarrollo del conocimiento sobre los números irracionales, es decir, donde el docente debiera fijar su mirada. Además observar como procedieron y a que tuvieron que recurrir nuestros antepasados para poder establecer la teoría de los números irracionales.
2. Identificar los conocimientos previos que están indirectamente relacionados con los números irracionales.
3. Ayuda al profesor cuando desea criticar textos escolares y planes de clases que presentan los números irracionales.
4. Permite al profesor relacionar y contextualizar situaciones que se pueden utilizar en la elaboración de una clase de números irracionales.

II.- Asimilación, Acomodación y Adaptación

Incorporar la asimilación, acomodación y adaptación en la tesis, facilitara al momento de criticar las situaciones que

utiliza el profesor al presentar un contenido u objeto (introducción del número irracional), ya que estas situaciones provocan que el alumno pueda pasar cognitivamente por estos tres estados.

A continuación (Piaget, 1969/1979, citado por Lenzi y Borzi, Pág. 2) define:

"Asimilación Cognoscitiva: […] ningún conocimiento, ni siquiera perceptivo, constituye una simple copia de lo real, puesto que supone un proceso de asimilación a estructuras anteriores. Entiendo el término asimilación [como] una integración [de contenidos u objetos] a estructuras previas. […] [Estas estructuras previa] pueden permanecer inalteradas o ser más o menos modificadas por esta integración, pero sin discontinuidad con el estado anterior, sin que sean destruidas, y acomodándose [las estructuras] a la nueva situación.

Acomodación: […] llamaremos acomodación a cualquier modificación de un esquema asimilador o de una estructura, modificación causada por los elementos que se asimilan.

Adaptación: […] La adaptación debe caracterizarse como un equilibro entre las acciones del organismo sobre el medio y las acciones inversas [del medio sobre el organismo]."

III.- La Teoría de las Situaciones Didácticas

Sostiene (Pérez, 1997, pág. 115) que "La teoría de las situaciones didácticas de Brousseau permite, por una parte, analizar todas las acciones del maestro y de los alumnos en el aula, y su relación con el conocimiento que se construye; y por otra, desarrollar una "ingeniería" didáctica que fabrica situaciones específicas de los conocimientos que se quiere enseñar."

"Para Brousseau, la situación didáctica es el medio que tiene el maestro de hacer comprender al alumno lo que quiera que éste aprenda. El profesor elige un conjunto de relaciones del alumno con el "medio" para que éstas le ayuden a construir

un conocimiento por adaptación a la situación." (Pérez, 1997, pág. 115)

"El objeto de estudio de la didáctica de Matemáticas es la situación didáctica, definida por Brousseau (1982b) como un conjunto de relaciones establecidas explícitas y/o implícitamente entre un alumno o un grupo de alumnos, un cierto medio (que comprende eventualmente instrumento u objetos) y un sistema educativo (representado por el profesor) con la finalidad de lograr que estos alumnos se apropien de un saber constituido o en vías de constitución.

Estas relaciones se establecen a través de una negociación entre maestro y alumnos cuyo resultado ha sido designado como contrato didáctico" (Gálvez, 1994, pág. 42)

"El objeto fundamental de la Didáctica de las Matemáticas es averiguar cómo funcionan las situaciones didácticas, es decir, cuáles de las características de cada situación resultan determinantes para la evolución del comportamiento de los alumnos y, subsecuentemente, de sus conocimientos. Esto no significa que sólo interese analizar las situaciones didácticas exitosas. Incluso si una situación didáctica fracasa en su propósito de enseñar algo, su análisis puede constituir un aporte a la didáctica, si permite identificar los aspectos de la situación que resultaron determinantes de su fracaso." (Gálvez, 1994, pág. 42)

Para Brousseau "un momento fundamental de la investigación en Didáctica lo constituye el análisis a priori de la situación. El investigador en Didáctica debe ser capaz de prever los efectos de la situación que ha elaborado, antes de ponerla a prueba en el aula; sólo posteriormente podrá contrastar sus previsiones con los comportamientos observados.

Para analizar las situaciones didácticas, Brousseau las modeliza, utilizando elementos de la teoría de los juegos y de la teoría de la información. Para una situación didáctica determinada se identifica un estado inicial y el conjunto de los diversos estados posibles, entre los que se encuentra el estado final que corresponde a la solución del problema involucrado

en la situación. Se explicitan las reglas que permiten pasar de un estado a otro. La situación es descrita, entonces, en términos de las decisiones que los jugadores (alumnos) puedan tomar en cada momento y de las diferentes estrategias que pueden adoptar para llegar al estado final" (Gálvez, 1994, pág. 43)

"Las relaciones del alumno con el medio se interpretan en esta teoría en términos de "juego" en el sentido de que hay unas reglas de juego (o consigna), que es preciso elaborar estrategias para ganar, y que las distintas estrategias deben permitir la anticipación de una estrategia ganadora.

Para que la situación funcione de esta forma, el maestro deberá realizar una triple "devolución": de la regla de juego, del problema y de la decisión. "Devolución" que es-en resumen- la acción por la que el maestro traspasa la responsabilidad al alumno, que es quien debe querer aprender, asumiendo las reglas de juego, tomando decisiones, haciendo anticipaciones y verificando sus conclusiones." (Pérez, 1997, pág. 116)

La devolución

Sostiene (Pérez, 1997, pág. 116) que

"aspectos de una situación de aprendizaje.

- **La devolución de la regla de juego.** Las consignas deben poder ser comprendidas por el alumno, lo que significa que los conocimientos que posee el alumno deben ser suficientes para interpretar correctamente las condiciones y las informaciones que definen la situación. La acción que provoca la situación tendrá que apoyarse en modelos que tienen significación para el alumno a quien se le presenta.

- **La devolución del problema.** La situación debe plantear un problema que el alumno no sabe resolver con los conocimientos que posee. Si el Alumno supiera responder a la situación resolviendo el problema que se plantea, ésta no sería un problema y

la situación tendría la condición de ejercicio de aplicación, de refuerzo, de consolidación, etc.

- **La devolución de la decisión.** El alumno debe poder elegir entre diversas posibilidades y ser capaz de considerar que existe una relación de causa a efecto entre las decisiones que toma y los resultados que obtiene. El maestro debe conseguir que el alumno se sienta responsable de sus decisiones."

Clasificación de las situaciones didácticas

(Gálvez, 1994, págs. 43-44) "Brousseau distingue, entre las situaciones que él produce para su estudio experimental, cuatro tipos, cuya secuencia, en los procesos didácticos que organiza, es lo siguiente:

1. Las situaciones de acción, en las que se genera una interacción entre los alumnos y el medio físico. Los alumnos deben tomar las decisiones que hagan falta para organizar su actividad de resolución del problema planteado.

2. Las situaciones de formulación, cuyo objeto es la comunicación de informaciones, entre alumnos. Para esto deben modificar el lenguaje que utilizan habitualmente, precisándolo y adecuándolo a las informaciones que deben comunicar.

3. Las situaciones de validación, en las que se trata de convencer a uno o varios interlocutores de la validez de las afirmaciones que se hacen. En este caso, los alumnos deben elaborar pruebas para demostrar sus afirmaciones. No basta la comprobación empírica de que lo que dicen es cierto; hay que explicar que, necesariamente, debe ser así.

4. Las situaciones de institucionalización, destinadas a establecer convenciones sociales.

En estas situaciones se intenta que el conjunto de alumnos de una clase asuma la significación socialmente establecida de

un saber que ha sido elaborado por ellos en situaciones de acción, de formulación y de validación."

IV.- Currículum

El (Ministerio de Educación, Mineduc - Curriculum, 2009, pág. 5) afirma lo siguiente: "El **Marco Curricular** define el aprendizaje que se espera que todos los alumnos y alumnas del país desarrollo a lo largo de su trayectoria escolar. Tiene un carácter obligatorio y es el referente en base al cual se construyen los planes de estudio, los programas de estudio, los mapas de progreso, los textos escolares y se elabora la prueba Simce. Por otro lado los **Planes de estudio** definen la organización del tiempo de cada nivel escolar. Consignan las actividades curriculares que los alumnos y alumnas deben cursar y el tiempo semanal que se les dedica, además los **Programas de estudio** entregan una organización didáctica del año escolar para el logro de los Objetivos Fundamentales definidos en el marco curricular. En los programas de estudio se ofrecen ejemplos de actividades de enseñanza y orientaciones metodológicas y de evaluación para apoyar el trabajo docente de aula. Y los **Mapas de progreso** describen el crecimiento de las competencias consideradas fundamentales en la formación de los estudiantes dentro de cada sector curricular y constituyen un marco de referencia para observar y evaluar el aprendizaje promovido por el marco curricular. Los mapas describen en 7 niveles de progreso las competencias señaladas, en palabras y con ejemplos de desempeño y trabajos de estudiantes ilustrativos de cada nivel".

Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios de la Educación Básica y Media

"Los aprendizajes y el conocimiento matemático que conforman los Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios del sector fueron organizados, de acuerdo con una progresión ordenada, en cuatro ejes que articulan la experiencia formativa de alumnas y alumnos a lo

largo de los años escolares (mencionaremos solo el de número, ya que corresponde a nuestro tema):

Números: este eje constituye el centro del currículo matemático para la enseñanza básica y media. Incluye los aprendizajes referidos a la cantidad y el número, las operaciones aritméticas, los diferentes sistemas numéricos, sus propiedades y los problemas provenientes de la vida cotidiana, de otras disciplinas y de la matemática misma. Se organiza en torno a los diferentes ámbitos y sistemas numéricos. Avanza en completitud, abstracción y complejidad desde los números naturales hasta los números complejos, pasando por enteros, racionales y reales. Se busca que los alumnos y alumnas comprendan que cada uno de estos sistemas permite abordar problemas que los precedentes dejaron sin resolver. Simultáneamente, el desarrollo de los números acompaña- y encuentra sus motivaciones-, en el desarrollo de las operaciones y el de los otros ejes. Así, la operación inversa a la suma motiva el cero y los negativos; el cuociente y la medición, los racionales; la extracción de raíz, motiva los irracionales y los reales y los números complejos. De este modo, se relacionan números, operaciones y campos de aplicaciones de la matemática, permitiendo avanzar en el sentido de la cantidad, en razonamiento matemático y precisar la forma en que la matemática contribuye a la descripción y comprensión de la realidad". (Ministerio de Educación, Mineduc - Curriculum, 2009, págs. 145-146)

Objetivos Fundamentales

"Los alumnos y alumnas serán capaces de (solo nombraremos los referentes a nuestro tema):

1. Comprender que los números irracionales constituyen un conjunto numérico en el que es posible resolver problemas que no tienen solución en los números racionales, y los números reales como aquellos que corresponden a la unión de los números racionales e irracionales.

2. Utilizar los números reales en la resolución de problemas, ubicarlos en la recta numérica, demostrar algunas de sus propiedades y realizar aproximaciones.

Para 1 el OFT que se pretende desarrollar es la habilidad de investigación y para 2 las habilidades comunicativas". (Ministerio de Educación, Mineduc - Curriculum, 2009, pág. 184)

Contenidos Mínimos Obligatorios

Números:

1. "Identificación de situaciones que muestran la necesidad de ampliar los números racionales a los números reales; reconocimiento de algunas de las propiedades de los números y de las operaciones y su uso para resolver diversos problemas.

2. Aproximación del valor de un número irracional por defecto, por exceso y por redondeo.

3. Ubicación de algunas raíces en la recta numérica; exploración de situaciones geométricas en que ellas están presentes; y, análisis de la demostración de la irracionalidad de algunas raíces cuadradas". (Ministerio de Educación, Mineduc - Curriculum, 2009, pág. 186)

Programa de Estudio Primer año Medio

Unidad 1(solo mencionaremos lo que compete a nuestro tema)

Números

"Orientaciones Didácticas

Durante sus años de Educación Básica las alumnas y alumnos han aprendido acerca de los números enteros, fraccionarios y decimales, positivos y negativos.

Esta unidad retoma esos conceptos y plantea fundamentalmente una profundización; se propone un trabajo que tiene como columna vertebral la resolución de problemas.

Se permite así, que los estudiantes continúen el desarrollo de sus capacidades para interpretar adecuadamente los resultados de los cálculos, para analizar los procedimientos y las respuestas a la luz de las características de los problemas; para

aproximar y evaluar con claros criterios las respuestas; para describir fenómenos cuantitativos en forma cada vez más adecuada y precisa.

Además, la resolución de problemas en esta unidad, se orienta hacia el conocimiento de características y propiedades de los números racionales e irracionales; de la presencia de regularidades o patrones en el mundo de los números; de cómo las potencias facilitan la descripción de algunas situaciones numéricas relativas a incremento o crecimiento.

El tema sobre algunos antecedentes relativos a la historia de los números es un complemento necesario para que los estudiantes perciban que estos números se inventaron por imperativo de necesidades presentes en actividades diarias.

Ahora, mencionaremos los dos núcleos temáticos que corresponden a los números irracionales:

1. Actividades con situaciones que involucran números racionales, irracionales, decimales y fracciones.
2. Actividades relativas a números racionales e irracionales". (Ministerio de Educación, Mineduc - Planes y Programas, 2004, pág. 16)

Contenido

- "Distinción entre números racionales e irracionales. Aproximación y estimación de números irracionales. Estimaciones de cálculos, redondeos. Construcción de decimales no periódicos. Distinción entre una aproximación y un número exacto". (Ministerio de Educación, Mineduc - Planes y Programas, 2004, pág. 17)

Aprendizajes Esperados

- "Diferencian entre números enteros, racionales e irracionales; los caracterizan, los expresan en notación

decimal y señalan su ubicación relativa en una recta numérica". (Ministerio de Educación, Mineduc - Planes y Programas, 2004, pág. 17)

Mapas de Progreso del Aprendizaje

*"***Mapa de Progreso de Números y Operaciones** (Ministerio de Educación, Mineduc - Mapas de Progreso, 2009, págs. 3-4)

Números y operaciones, describe el desarrollo del concepto de cantidad y de número y la competencia en el uso de técnicas mentales y escritas para calcular y resolver problemas que involucran distintos tipos de números.

Los aprendizajes descritos en el Mapa **Números y Operaciones** progresan considerando tres dimensiones que se desarrollan de manera interrelacionada:

a) **Comprensión y uso de los números:** Se refiere a la comprensión del significado de los números, la forma de expresarlos y los contextos numéricos a los que pertenecen, así como las aplicaciones y los problemas que los originaron y/o permiten resolver.

b) **Comprensión y uso de operaciones:** Se refiere a la comprensión del significado de las operaciones, los contextos numéricos en los que se realizan, las relaciones entre ellas, así como sus propiedades y usos para obtener nueva información a partir de la información dada.

c) **Razonamiento Matemático:** Involucra habilidades relacionadas con la selección, aplicación y evaluación de estrategias para la resolución de problemas; la argumentación y la comunicación de estrategias y resultados.

Elementos claves del Mapa de Progreso de Números y Operaciones

Un supuesto importante que orienta esta Mapa se refiere a la íntima relación entre los números, las operaciones que

permiten realizar y los problemas que resuelven; y cómo las operaciones generan preguntas y problemas que motivan nuevas definiciones de números y extensiones de los ámbitos numéricos. El progreso del concepto de número está dado, primero, por la extensión de los números naturales en relación con los requerimientos del proceso de conteo; luego, la operación de sustracción muestra la necesidad de los números negativos, motivando la noción de número entero; la división entre números enteros motiva la aparición de los racionales y, la operación de extracción de raíz, muestran la necesidad de utilizar nuevos números, dando inicio al estudio de los irracionales y, posteriormente, de los números imaginarios en el caso de las raíces de números negativos.

Las operaciones se consideran en este eje, principalmente, desde el punto de vista de su comprensión, su uso adecuado y cómo a través de ellas los alumnos y alumnas muestran dominio de los números. Operaciones también incluye la habilidad para estimar y calcular mentalmente.

Finalmente, el razonamiento Matemático, en este mapa, se refiere a la resolución de problemas con números y sobre números".

Nivel 5(Correspondiente a los logros que debieran tener los alumnos al final del periodo entre 1° y 2° medio)

"Reconoce a los números racionales como un conjunto numérico en el que es posible resolver problemas que no admiten solución en los enteros, a los irracionales como un conjunto numérico en el que es posible resolver problemas que no admiten solución en los racionales, y a los reales como la unión entre racionales e irracionales. Interpreta potencias de base racional y exponente racional, raíces enésimas y logaritmos, establece relaciones entre ellos y los utiliza para resolver diversos problemas. Realiza operatoria con números reales, calcula potencias, raíces y logaritmos y los aplica en diversos contextos. Resuelve problemas utilizando estrategias que implican descomponer un problema o situaciones propuestas en partes o sub-problemas. Argumenta sus estrategias o procedimientos y utiliza ejemplos y contraejemplos para verificar la validez o falsedad de

conjeturas.” (Ministerio de Educación, Mineduc - Mapas de Progreso, 2009, pág. 14)

V.- El Enfoque de Resolución de Problemas

La Clase de Matemáticas Centrada en la Resolución de Problemas

1.- El problema de la clase

¿Qué es un problema abierto?

“En el ámbito de la matemática escolar se dice que un problema es abierto para un estudiante si éste no dispone de procedimientos estándares para la solucionarlo, o bien, el problema tiene varias soluciones.

Los problemas abiertos son de especial interés para desarrollar en los alumnos una conducta de investigación y su pensamiento heurístico. Tiene un valor formativo, más que informativo en la formación matemática de los niños”. (Isoda, 2009, págs. 99-100)

Un buen problema para la clase

“Un buen problema es accesible a la mayor parte de los alumnos, por ende son buenos aquellos problemas que admiten varios enfoques para su resolución, tanto intuitivos como formales, siendo apropiados para atender a la diversidad de los alumnos de un curso.

Un problema que no tiene solución única o que admite soluciones parciales es particularmente útil para trabajarlo en clases, en el aula donde los ritmos de aprendizaje son distintos… Aquellos problemas que admiten distintos caminos y distintas soluciones dan la posibilidad que simultáneamente varios alumnos experimenten la alegría de resolver el problema con originalidad… La selección y estudio de buenos problemas es una tarea compleja y valiosa en la didáctica de la matemática.

Un buen problema para la clase de matemáticas es consistente con el objetivo de la clase, con los objetivos de mediano plazo de la componente matemática del currículo y con los objetivos transversales del mismo. Un buen problema permite al alumno alcanzar un conocimiento nuevo al poner en juego los ya adquiridos en clases anteriores. También es un buen problema aquel que desarrolla habilidades genéricas propias del quehacer en matemáticas, como pensamiento inductivo, modelación, formulación, representación, argumentación y validación" (Isoda, 2009, pág. 100)

¿Por qué centrar la clase en la resolución de un problema?

"Porque este tipo de clases es proclive a la consecución de los múltiples objetivos que se propone el currículo a través de la matemática escolar. Un problema es un reactivo que involucra al alumno en una actividad orientada a la abstracción, la modelación, la formulación, la discusión, en fin… El enfoque de resolución de problemas en matemáticas se ajusta a las demandas sociales del currículo… Es la resolución de problemas la que lleva al alumno a integrar los conocimientos nuevos a los ya adquiridos, favoreciendo el enriquecimiento de la comprensión y por ende un mejor aprovechamiento de las capacidades personales para la vida del individuo y de su colectivo… En el modelo de clases, centrado en la exploración de un problema nuevo para los alumnos, el ritmo y enfoque de la clase es armoniosamente negociado por el profesor y los alumnos. Si bien la clase no conduce a los alumnos por un camino "óptimo" y uniforme, favorece la vinculación del concepto nuevo con los aprendizajes previos de los alumnos" (Isoda, 2009, págs. 101-102)

El uso de problemas abiertos frente a la diversidad

"Solucionar problemas es la norma en las clases de matemáticas porque aprender cómo solucionar problemas se considera importante. Sin embargo, muy a menudo incluso si hay varias maneras de solucionar el mismo problemas, hay solamente una respuesta correcta…

¿Cómo preparar la clase bajo el enfoque de resolución de problemas?

Para planificar la clase los profesores japoneses usualmente identifican una situación preliminar que los alumnos puedan resolver con sus conocimientos previos y una situación asociada, algo más compleja que no puedan resolver de manera inmediata por estar asociada a la vez a un conocimiento no adquirido previamente. Sin embargo, en la resolución del nuevo problema el alumno es desafiado a poner en juego las estrategias, de manera más generalizadas, usadas para la resolución del problema inicial…

El alumno se ve obligado a volcar su pensamiento hacia sus propias capacidades a la extensión de sus conocimientos, a la re-conceptuación de sus ideas. Se ve en la necesidad de disponer de nuevos procedimientos para resolver una gama más amplia de situaciones. El alumno ha sido desafiado a asumir la responsabilidad de su aprendizaje". (Isoda, 2009, pág. 106)

La clase centrada en la resolución de problemas

"La clase ha de entenderse como un proceso y el problema como un vacío o diferencia entre estado actual y uno esperado. El proceso consiste en que el alumno pasa del estado inicial al deseado recurriendo a elaboraciones personales… El profesor anticipará las posibles formas de pensar de los alumnos, ¿Cómo ellos podrían estar abordando el problema?, ¿qué dificultades podría tener? ¿Frente a qué obstáculos podrían estar detenidos?, ¿Qué podrían estar aprendiendo en el proceso?… El alumno debiera elaborar una forma propia de calcular teniendo en consideración los aprendizajes ya adquiridos… pero no bastará que encuentre la nueva forma de calcular o extienda la ya aprendida. Le será requerido que argumente su respuesta, que la valide y eventualmente que explique a sus compañeros por qué esa respuesta es adecuada" (Isoda, 2009, págs. 107-108)

Metodología

Para lograr el objetivo general de esta tesis, es necesario seguir el orden que se expuso anteriormente en los objetivos específicos, pero la pregunta que viene a continuación es ¿Cómo se lograra cada uno de estos puntos?, para dar respuesta a esto se debe tener presente lo siguiente:

Para investigar la génesis y la evolución del concepto, se recurrirá a libros de historia de la matemática y algunos que tengan relación con esta, estableciendo un orden cronológico del concepto de número irracional, y describir como se trató en cada periodo (teniendo presente que nuestra mirada es la $\sqrt{2}$), el método que se emplea es el histórico crítico.

Para estudiar la organización de enseñanza - aprendizaje del concepto de número irracional que plantea el Ministerio de Educación, se recurre al método histórico crítico y luego se darán comentarios pertinentes al tema.

Para el estudio y análisis de las situaciones específicas del concepto de número irracional que plantean los textos de primero y segundo medio, (McGraw- Hill, 2010 y Santillana, 2010), en los cuales se observará el objetivo que plantean y como tratan de lograrlo, teniendo presente que en cada libro utilizaremos el siguiente criterio:

1. Descripción de la situación.
2. Análisis de la situación desde la perspectiva del método histórico crítico, Currículum, Brousseau e Isoda.

Para la identificación de las situaciones de enseñanza-aprendizaje en aulas escolares, se estudiara registros escritos de alumnos de enseñanza media destacando frases que serán comentadas desde la perspectiva del método histórico crítico, Currículum, Brousseau e Isoda.

Para estudiar la comprensión del objeto número irracional a alumno de segundo medio, se elaboró un cuestionario con tres actividades, en las que se analiza las respuestas según lo que

pide el currículum (distinguir entre número racional e irracional).

Y para diseñar una situación de enseñanza que favorezca el aprendizaje del concepto de número irracional, en el caso particular de $\sqrt{2}$, se utilizaran problemas que involucran el infinito, desarrollos decimales y la idea de encajonamiento de Cantor, para esto nos basaremos método histórico crítico, Currículum, Brousseau e Isoda.

Epistemología del Número Irracional

Objetivo: Estudiar (investigar) la génesis y evolución del concepto de número irracional, focalizándonos en el caso del número $\sqrt{2}$

Pregunta de investigación: ¿Cuál ha sido la evolución del concepto de irracionalidad (centrados en $\sqrt{2}$) a través de la historia?

Para introducirnos en el método histórico-Critico de la epistemología del concepto de irracionalidad, más específicamente en raíz de dos, será necesario saber las épocas en donde se utilizó el concepto y los saltos que hubo para poder llegar a lo que conocemos en la actualidad como teoría de los números Irracionales. Finalmente, se presentara un resumen de los momentos que se consideran claves del concepto de irracionalidad.

A continuación, presentamos la interpretación de algunos historiadores de las matemáticas que a través de sus investigaciones, desarrollan el concepto de irracionalidad.

- **Hechos en Mesopotamia:** "de mayor importancia para el futuro de las matemáticas fue la reacción altamente inteligente de los algebristas babilonios ante los números Irracionales. Sus tablas y sus ecuaciones les decían que no todos los números racionales que figuraban en sus tablas tenían una raíz tabulada. Enfrentados a este hecho fundamental, procedieron a obtener valores aproximados por medio de las reglas, $\left(a^2+b^2\right)^{\frac{1}{2}}=a^2+\frac{b^2}{2a}$ o $\left(a^2+b^2\right)^{\frac{1}{2}}=a^2+2ab^2$. La primera es razonable y reaparece unos dos mil años después con Herón de Alejandría; la segunda es incurablemente errónea pues es dimensionalmente imposible.

  Observemos […] que esta aproximación razonable puede obtenerse por medio de la serie Binomial de Newton; pero tampoco esto implica una anticipación. En sucesivas

aproximaciones a las ecuaciones irracionales usaron lo que podría interpretarse como los primeros pasos hacia la conversión en fracciones periódicas continuas". (Bell, 1985, pág. 46)

Como mencionábamos anteriormente, "algunas tablillas hechas por los babilónicos son especialmente interesantes, ya que ponen en evidencia que los hombres ya utilizaban, además de las cuatro reglas aritméticas, la raíz cuadrada. Entre las miles de tablillas que se encuentran en la biblioteca de la Universidad De Yale (EE.UU), existe una muy importante que nos influye en nuestro tema, o sea de la raíz cuadrada de 2, con tres cifras decimales sexagesimales, resultando que al transcribirlo en caracteres modernos da 1; 24, 50, 10, en donde el punto y la coma representa la separación entre la parte entera y fraccionaria; en nuestro sistema decimal sería:

$\sqrt{2} = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3}$ " (Rodriguez, 1989, pág. 19)

La expresión anterior, también la mencionada como sigue:

"Los babilonios emplearon un procedimiento muy eficaz para evaluar la raíz cuadrada. Sea $x = \sqrt{b}$, la raíz buscada, y sea b_1 una aproximación de esta raíz. Supongamos que a_1 es otra aproximación, tal que $a_1 = \frac{b}{b_1}$. Si b_1 es demasiado pequeño, entonces, evidentemente a_1 es demasiado grande. Elijamos entonces la media aritmética $b_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}$. Si b_2 es demasiado grande, entonces $a_2 = \frac{b}{b_2}$ será demasiado pequeño. Luego, será suficientemente tomar la media aritmética $b_3 = \frac{a_2 + b_2}{2}$. Este procedimiento se continúa indefinidamente." (Collette, 1998, pág. 28). O como lo menciona (Bell, 1985, pág. 46) "para $\sqrt{2}$ dieron el valor aproximado $1\frac{5}{12}$, que es correcto hasta la segunda cifra decimal".

- **Hechos en Escuela Pitagórica:** A continuación veremos cómo algunos autores se refieren a la época pitagórica, respecto a la irracionalidad. Comencemos con lo que dice (Bell, 1985, pág. 71) " hacia el siglo IV A.C se vió que la demostración pitagórica ocultaba el supuesto sutil de que los números que median los lados a, b, c, a´, b´, c´ son racionales, esto es, que cada uno de ellos puede expresarse como la razón (el cociente) de los números enteros. Pero esos lados se habían supuesto que tenían longitudes finitas cualesquiera. Por consiguiente, se había supuesto que existe una correspondencia uno-uno entre las longitudes de los segmentos de líneas rectas y los números racionales. En particular, se había supuesto que la longitud de la diagonal de un cuadrado cuyo lado es un número racional es también un número racional […] Lo único que debemos tener presente es que los pitagóricos sabían hacia fines del siglo V A.C que $\sqrt{2}$ es irracional. Con un gran ingenio hallarán valores aproximados de $\sqrt{2}$, por medio de soluciones sucesivas de las ecuaciones: $2x^2 - y^2 = \pm 1$ […] quedan dos caminos expeditos. La elección era entre que algunas longitudes no corresponde ningún número, o que $\sqrt{2}$ y otros irracionales positivos fueran números. Eligiendo la segunda alternativa, los geómetras del siglo IV A.C pusieran unas de las piedras miliares en la historia de todo el pensamiento. "La gran continuidad" del análisis, el sistema del número real, estaba ya a la vista, y lo propio sucedía con las paradojas del infinito".

  En Historia de la Matemática de (J.Babini, 1985, pág. 45) leemos que " Fue el conocimiento de un caso particular del teorema de Pitágoras, quien aporto una consecuencia importante para el destino de la secta cuando no de la matemática toda: el *Descubrimiento de los Irracionales*, es decir, el descubrimiento de pares de cantidades diferentes, tales que la mayor no es múltiplo de la menor ni múltiplo de una parte de la menor; y por tanto cuya razón no resulta expresable mediante un número entero ni fraccionario".

Además (J.Babini, 1985, pág. 46) dice que "[…] cuando los pitagóricos chocaron con el *Escándalo de los Irracionales*, que los obligó a torcer el rumbo de sus investigaciones abandonando el campo de la aritmética donde los irracionales cerraban el paso a todo progreso y transformando las consideraciones aritméticas y algebraicas en cuestiones de índole geométrica."

En el libro de (Hofmann, 1960, págs. 24-25) encontramos lo siguiente sobre la irracionalidad (400-325): "Partiendo del problema de Pitágoras referente al triangulo rectángulo, cuya demostración mediante casos especiales y cuya generalización a triángulos no rectángulos es seguramente obra de la Escuela Italiana, se descubre ya una serie de triángulos rectángulos con todos cuya longitud es de números enteros, es decir, $n, \frac{n^2-1}{2}, \frac{n^2+1}{2}$ (siendo n impar). La esperanza de poder racionalizar de este modo cualquier triángulo rectángulo resulta imposible. Aunque se puede calcular con una aproximación cada vez mayor, por ejemplo, la razón de la diagonal y un lado de un cuadrado, es decir, $\frac{\sqrt{2}}{1}$ mediante las fracciones $\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}$ que convergen cada vez más desde arriba y desde abajo hacia el valor $\sqrt{2}$, cuyos números generadores se pueden calcular mediante la identidad geométricas fácilmente comprobable $2x^2 - y^2 = (2x+y)^2 - 2(x+y)^2 = \ldots$; se obtendrán, sin embargo, de esta forma números cada vez más aproximados sin alcanzar jamás el valor exacto. Y, por fin se reconoce – quizá por el procedimiento recíproco – que aquella relación es irracional (hacia el 400, probablemente Hipaso Metaponte)".

- **Hechos en Grecia:** Antes de comenzar a escribir algunos sucesos que rescatan algunos autores, se debe tener presente que las fechas que se dan no son exactas, por eso es muy fácil perderse en la línea de tiempo. Otra cosa que

hay que tener en cuenta es que no todos los griegos trataron de dar respuesta a la irracionalidad, pero de los que si trabajaron en el tema, podemos destacar los siguientes :

1. **Teodoro de Cirene** (456 A.C – 398 A.C): tanto (Hofmann, 1960, pág. 25), (Rodriguez, 1989, pág. 36) y (J.Babini, 1985, pág. 55) concuerdan en que Teodoro de Cirene fue maestro de Platón y, según éste, fue quien demostró la irracionalidad de las raíces cuadradas de los números naturales que no son cuadrados perfectos desde el 3 al 17, agregando además lo que dice (Hofmann, 1960, pág. 25) que estas demostraciones las pudo lograr "[…] mediante conclusiones geométricas, en las que juega quizá un papel importante la imposibilidad de representar una fracción de números dados mediante números más pequeños".

   Otra información que nos brinda (Bell, 1985, pág. 71) y que reafirma lo anterior "[…] Respondiendo a una pregunta de Sócrates, Teaeteto dice, *Teodoro estaba escribiendo para nosotros algo sobre raíces, como las raíces de tres o cinco pies, demostrando que en las medidas lineales (*esto es, comparando los lados de los cuadrados*) son inconmensurables por la unidad".*

2. **Eudoxo de Cnido**(408 A.C – 355 A.C): De él podemos rescatar lo que nos dice (J.Babini, 1985, pág. 63)"[…] Eudoxo, resolvió las dos máximas dificultades que impedían el progreso de la geometría en aquella época: Los Irracionales y Las Equivalencia […] Eudoxo las resolvió mediante un proceso único que comparta un principio, una definición y un método y que aun en forma oculta, abarca las nociones de índole infinitesimal que precisamente significaban los elementos indispensables para resolver aquellos problemas", como también lo expresa (Rodriguez, 1989, págs. 36-37) "el geómetra Eudoxo de Cnido consigue eliminar uno de los problemas más

engorrosos de los inconmensurables y cerrar el razonamiento entre las figuras curvilíneas y rectilíneas", recibiendo así "un duro golpe con el descubrimiento de los inconmensurables la teoría pitagórica de las proporciones". Y no podemos dejar de lado el método exhaustivo, el cual se expresa dentro de esta frase: "La respuesta la dará Eudoxo con una teoría aplicable tanto a las magnitudes conmensurables como a las inconmensurables… la célebre formulación de Eudoxo sobre la igualdad de las razones está dada en la definición 5 del libro v de los Elementos de Euclides:

La razón entre magnitudes es la misma, entre la primera y la segunda y entre la tercera y la cuarta, si, de todo equimúltiplo de la primera y de la tercera, y de todo equimúltiplo de la segunda y de la cuarta, los primeros equimúltiplos son mayores, iguales, o más pequeños que los últimos equimúltiplos considerados en el orden correspondiente.

Así si, dados a y b enteros, siempre que ax<bz, am<bn, o si ax=bz, am=bn, o si ax>bz, am>bn. Esta definición tiene la ventaja de ser aplicable, no sólo a números, sino también a elementos geométricos, ya que la razón entre esferas puede ser igual a la razón entre cubos." (Bell, 1985, pág. 97)

Aristóteles De Estagira (384 A.C – 322 A.C): "Se interesa, al igual que Platón, por las cuestiones matemáticas principales; sin embargo, no está tan al corriente como éste de las investigaciones más recientes. Quizá las demostración de la irracionalidad de $\sqrt{2}$, mediante la contraposición de par e impar, tan frecuentemente mencionada por él, sea invención suya". (Hofmann, 1960, pág. 28)

"La demostración que trae Aristóteles en uno de sus escritos alude al descubrimiento de la irracionalidad del número que hoy expresamos como $\sqrt{2}$.En efecto, un caso particular del teorema de Pitágoras muy fácil de demostrar independientemente del caso general,

comprobada que el cuadrado construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles era el doble del cuadrado construido sobre cualquiera de los dos catetos. Era claro que la hipotenusa no podía ser múltiplo del cateto, pues era mayor que él, pero menor que su doble, de ahí que la razón entre la hipotenusa y el cateto debía ser un múltiplo de *m* de la parte n^a del cateto, siendo *m y n* números primos entre sí y, por tanto, no podían ser ambos pares. Ahora bien, de la propiedad que hoy expresaríamos $m^2 = 2n^2$ es fácil deducir que *m*, por contener el factor 2, debe ser par, también lo que ha de ser su cuadrado y por contener este el factor 4, n^2 ha de contener el factor 2 y, por tanto, también *n*, ha de ser par, luego *m* y *n* son ambos pares, contradicción que implicaba la inexistencia de *m* y *n*". (J.Babini, 1985, págs. 49-50)

4. **Libro X de Euclides:** "Es el más extenso y el más difícil; se ocupa de los números irracionales clasificando, más no calculando, una serie de combinaciones de expresiones racionales e irracionales, tales como las que se presentarían como raíces de una ecuación bicuadrada". (J.Babini, 1985, pág. 76)

"Los Irracionales en los Elementos. El libro decimo de los Elementos estudian en forma geométrica de un cierto grupo de expresiones irracionales, hoy llamadas bicuadráticas con algunas aplicaciones. Por ejemplo, demuestra que en problema de aplicación de áreas por defecto de expresión algebraica $x(a-x) = \frac{1}{4}b^2$, los segmentos x y $(a-x)$ son conmensurables si lo son a y $\sqrt{a^2-b^2}$.

En definitiva el libro contiene una clasificación de irracionales bicuadráticos que pueden resumirse algebraicamente considerando la identidad $\sqrt{\sqrt{p} \pm \sqrt{q}} = \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{p} + \sqrt{p-q})} \pm \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{p} - \sqrt{p-q})}$

Considerando los 12 casos posibles que se obtienen combinando: a) dos signos superiores o inferiores; b) que p o q o ninguno de los dos sea un cuadrado perfecto y c) que p y (p - q) sean o no conmensurables" (J.Babini, 1985, pág. 86)

A lo anterior podemos agregar que "El amplio libro décimo se basa en las obras preliminares de Teaeteto. Usa signos y símbolos poco prácticos y emplea investigaciones poco comprensibles, proponiéndose como meta determinar el tipo de irracionalidades que se encuentran en el cálculo de los cuerpos regulares". (Hofmann, 1960, pág. 32)

- **Hechos en india:** De los trabajos encontrados de la civilización hindú, podemos destacar que "[…] Durante el siglo VI vivió el matemático Aryabhata autor de la obra titulada *Aryabhatiya*, en la que recopila todos los desarrollos matemáticos de sus predecesores, dando una serie de reglas para extraer las raíces cuadradas y cubicas de números enteros". (Rodriguez, 1989, pág. 55)

  "En la trigonometría de Aryabhata se encuentra también el valor de $\sqrt{10}$ como valor estimado de π". (Collette, 1998, pág. 187)

  No podemos dejar de lado lo siguiente: "[…] En problemas de semejanzas entran ecuaciones cuadráticas y también son manejadas en casos de irracionales. Resultados como $\sqrt{2} \approx 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3*4}-\frac{1}{3*4*34}$, nos delatan el método empleado; el procedimiento de obtención de la media aritmético- geométrica" (Hofmann, 1960, pág. 16)

- **Hechos Árabes:** Al-jwārismī da las reglas como se debe calcular las ecuaciones en su obra más importante "Hisāb al-ŷabrwa´lmuqqābala, que significa "ciencia de la transposición y la reducción", donde "al-ŷabr" se convirtió en "algebra", sinónimo ciencia de las

ecuaciones… En todos los tratados, la raíz nula (x=0) es descartada. El capítulo II se ocupa de los cuadrados iguales a números, es decir, de ecuaciones del tipo $ax^2 = c$ " (Collette, 1998, pág. 197), otra cosa que podemos rescatar para nuestro tema de Al-jwārismī es lo que expresa (Pérez, 1997, pág. 45) "la primera obra que se conoce –en la que el sistema decimal y las operaciones de cálculo en este sistema son objeto de explicaciones detalladas- es el Tratado de aritmética de Al-jwārismī. En este tratado, Al-jwārismī nos dice que decidió exponer la manera de contar de los indios con ayuda de los nueve caracteres, y demostrar cómo, gracias a su sencillez y concisión, estos símbolos permiten expresar todos los números".

Además, de la civilización Árabe podemos destacar a dos personajes que trabajaron en la irracionalidad, en primero lugar mencionamos a "[…] Abul-Wafa (940-998), Trata de desarrollar en su comentario sobre Diofanto la teoría de los irracionales de Euclides" y también "[…] Al-Karagi (1029), Maneja irracionalidades compuestas y radicación de expresiones", ambas citas son de (Hofmann, 1960, pág. 52)

- **Hechos en China:** De China mencionaremos solo a un matemático del periodo Sung quien nos aporta algo sobre el cálculo de raíces cuadradas, nos referimos al "[…] matemático Chhing-Chiu-Shao (1201-1261), quien en su tratado Shu-Shu-Chiu-Chang calcula la raíz cuadrada de los números por etapas". (Rodriguez, 1989, pág. 54)

De aquí en adelante destacaremos a personajes puntuales que trabajaron con algunos irracionales, el orden que damos a continuación es según las fechas que encontramos en los textos y volvemos a repetir que estas son aproximadas.

1. **M. Stifel** (1487-1567): "Con ayuda de amigos conocedores del griego, que le asisten al leer los textos originales en esta lengua, penetra totalmente en la teoría de los irracionales del libro X de los elementos de

Euclides $(\sqrt{a+\sqrt{b}})$ ampliándola hasta usar ya expresiones como $\sqrt[n]{a+\sqrt[n]{b}}$ ". (Hofmann, 1960, pág. 99)

2. **S. Stevin** (1548-1620): Reconoce magnitudes irracionales como números. (Hofmann, 1960, págs. 122-123)

Para la elaboración de nuestra propuesta, creemos importante este personaje ya que nos proporciona lo siguiente:

"Simón Stevin se propuso como objetivo mostrar que los cálculos y las medidas pueden simplificarse considerablemente con la utilización de los decimales […]

En 1585 publica un libro de 36 páginas, *La Disme*, título que significa La Décima […] para mostrar el descubrimiento de los números decimales, simplifica numerosas dificultades que existían en el cálculo con fracciones […] Define la *Disme* como una especie de aritmética que permite efectuar todas las cuentas utilizando únicamente enteros. Luego establece que "cualquier número que vaya al principio se dice "comienzo", y su signo es ○". Se refiere así a la parte entera que marca el principio de una progresión decimal en la que la razón es $\frac{1}{10}$. En las otras dos definiciones clasifica las posiciones decimales sucesivas de la progresión: $\frac{1}{10}$ se llama "primera" y se designa por ①, $\frac{1}{100}$ se llama "segunda" y se designa por ②;… y los números representados por ○, ①, ②,… se llama números decimales.

A las definiciones siguen las aplicaciones. Por ejemplo: 3①7②5 ③ que se lee "3 primeras, 7 segundas, 5 terceras" corresponde al número 0.375 […] La notación de Stevin fue sustituida a partir de 1620 por la notación actual, gracias a los trabajos del coinventor de los logaritmos. John Napier. La "coma" – que en los países anglosajones es un punto- aparece así como un símbolo que permite separar la parte entera de la parte "decimal" en los logaritmos, la característica de la mantisa". (Pérez, 1997, págs. 47-48)

3. **Pietro Antonio Cataldi** (1548-1626): (Rodriguez, 1989, pág. 82) sostuvo que Cataldi fue: "Quien había conseguido expresar los números irracionales, por ejemplo, $\sqrt{2}$ de la forma siguiente:

$$\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\ddots}}}$$ "

4. **Pierre de Fermat** (1601-1665): Según (Rodriguez, 1989, pág. 85) afirma que Fermat: "Para demostrar sus teoremas, Fermat suele, concretamente en el caso de enunciados de enteros positivos, adoptar el método que el mismo llamo "Por descenso al infinito", y decía que era la base de todas sus demostraciones en teoría de números. A continuación se mostrara la demostración por descenso al infinito que hace (Rodriguez, 1989, pág. 85) de $\sqrt{3}$:

   Si $\sqrt{3}$ es un número racional tendrá que ser igual a un cociente de números enteros.

   Supongamos que $\sqrt{3}=\frac{a_1}{b_1}$ donde a_1 y b_1 son enteros positivos y $a_1 > b_1$. Dado que $\sqrt{3}=1+\frac{1}{x_1} \Rightarrow \sqrt{3}-1=\frac{1}{x_1} \Rightarrow x_1=\frac{1}{\sqrt{3}-1}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$.

   Sustituyendo el primer $\sqrt{3}$ por $\frac{a_1}{b_1}$, tendremos $\sqrt{3}=\frac{3b_1-a_1}{a_1-b_1}$. Si $3b_1-a_1=a_2$ y $a_1-b_1=b_2$ son enteros y positivos y tales que $a_1 > a_2, b_1 > b_2$, $\sqrt{3}=\frac{a_2}{b_2}$.

   Este razonamiento se puede repetir indefinidamente, lo cual nos conduce a un proceso de descenso infinito en el que a_n y b_n son enteros positivos cada vez más pequeños,

verificándose siempre la igualdad $\sqrt{3} = \frac{a_n}{b_n}$. Esto implica la conclusión de que no existe un mínimo número positivo, lo que es totalmente falso. Por lo tanto, la hipótesis de que $\sqrt{3}$ es igual a un cociente de números enteros es falsa, es decir, $\sqrt{3}$ es un número irracional".

La Teoría de los irracionales

Se encontró (Robbins, 2002, pág. 83) que: "Si se comparan las magnitudes de dos segmentos de línea a y b, puede suceder que a esté contenido en b exactamente un número entero r veces, en cuyo caso podemos expresar la medida del segmento b en términos de la de a diciendo que la longitud de b es r veces la de a; o puede suceder que aunque ningún múltiplo entero de a iguale a b, podemos dividir al segmento a, digamos en n segmentos iguales, de longitud a/n y tal que algún múltiplo entero m del segmento a/n sea igual a b:

$$b = \frac{m}{n} a \quad (1)$$

Cuando se cumple una ecuación de la forma (1) decimos que los segmentos son conmensurables, pues tienen como una medida común al segmento a/n que cabe n veces en a y m veces en b"

Además (Kline, 1992, págs. 1296-1297) afirma que: "la construcción de una teoría de los irracionales no requería mucho más que un cambio de punto de vista. Euclides, en el libro V de los elementos, había estudiado las razones entre magnitudes Inconmensurables, y había definido la igualdad y la desigualdad entre tales razones. Su definición de igualdad (Cap.4, Sec 5) equivalía a dividir los números racionales $\frac{m}{n}$

en dos clases, la de aquellos para los que $\frac{m}{n}$ es menor que la razón $\frac{a}{b}$ entre las magnitudes inconmensurables a y b, y la de aquellos para los $\frac{m}{n}$ es más grande. Cierto es que la lógica de Euclides era diferente, ya que nunca definió la razón entre dos magnitudes inconmensurables.

Además, el desarrollo de Euclides de la teoría de las proporciones, o igualdades entre razones, solo se podía aplicar a la geometría. Aun así, tuvo la idea esencial que podía haberse utilizado antes para definir los números irracionales. De hecho, Dedekind hizo uso del trabajo de Euclides y reconoció su deuda hacia este; También Weierstrass pudo guiarse por la teoría de Euclides… El largo retraso en sacar partido de alguna reformulación de las ideas de Euclides puede explicarse ahora fácilmente: los números negativos tenían que ser completamente aceptados antes de poder disponer del sistema completo de números racionales; además, tenía que experimentarse la necesidad de una teoría de los Irracionales, y esto ocurrió solamente una vez emprendida la aritmetización del análisis".

Al fin llegamos al periodo en donde por primera vez se estructura una teoría de números irracionales y es en este periodo donde surgen nombres como Weierstrass, Hamilton, Dedekind, Cantor, Otto Stolz entre otros y debido a estas grandes mentes es por primera vez que se aclara el tal engorroso concepto de Irracionalidad.

A continuación se mostrara los grandes avances que hicieron los matemáticos en el siglo XIX hasta comienzos del siglo XX.

(Kline, 1992, págs. 1297-1298) Sostuvo que: "todas las presentaciones de los irracionales anteriores a Weierstrass utilizaron la noción de irracional como límite de una sucesión infinita de racionales. Pero el límite, si es irracional, no tiene existencia lógica hasta que se hayan definido los irracionales. Cantor señaló que este error lógico no fue advertido durante algún tiempo porque no conducía a dificultades posteriores.

Weierstrass, en sus clases en Berlín a partir de 1859, ofreció una teoría de los números irracionales, señalando su necesidad.

En 1869 Charles Meray (1835-1911), uno de los apóstoles de la aritmetización de las matemáticas y equivalente francés de Weierstrass, dio una definición de los irracionales basada en los racionales. Georg Cantor también ofreció una teoría, que necesitaba para calificar las ideas sobre conjuntos que había utilizado en su trabajo de 1871 sobre series de Fourier. Fue seguida un año más tarde por la teoría Heinrich Heine, que apareció en el *JournalFürMathematik*, y por la Dedekind, publicada en *StetigkeitundIrrationaleZahlen"*

Cantor

Según (Kline, 1992) afirma que: "Todas estas teorías sobre los números irracionales son esencialmente parecidas; nos limitaremos a dar algunas indicaciones sobre las de Cantor y Dedekind. Cantor comienza con los números racionales. En su artículo de 1883, donde da más detalle sobre su teoría de los números irracionales, dice (p. 565) que no es necesario extenderse sobre los racionales, puesto que ya lo había hecho HermannGrassmann en su *Lehrbuch der Arithmetik* (1861) y J.H.T. Muller (1797-1862) en su *Lehrbuch der AllgemeinenArithmetik* (1855). De hecho tales presentaciones no resultaron definitivas. Cantor introdujo una nueva clase de números, los números reales, que incluyen racionales e irracionales. Construyo los números reales a partir de los racionales, definiendo primeramente lo que llamaba sucesión fundamental: cualquier sucesión de racionales que cumple la condición de que, para cualquier ε prefijado, todos los términos de la sucesión, salvo a los más un numero finito, difieren entre sí en menos de ε, o bien que

$$\lim_{x\to\infty}(a_{n+m}-a_n)=0$$

Para m arbitrario. Cada sucesión fundamental es, por definición, un número real al que podemos denotar por b .Dos sucesiones fundamentales (a_n) y (b_n) son el mismo número real si y solo si $|a_n-b_n|$ se aproxima a cero cuando n se hace infinito.

Para tales sucesiones se presenta tres posibilidades: dado un número racional arbitrario, los términos a_n de la sucesión para n suficientemente grande son todos en valor absoluto menores que el número dado; o todos los términos a partir de un cierto n son mayores que un cierto número racional ϱ; o bien todos los términos de la sucesión a partir de un cierto n son menores que un cierto número racional negativo –ϱ. En el primer caso, $b = 0$; en el segundo $b > 0$; en el tercero $b < 0$.

Si (a_n) y (a'_n) son dos sucesiones fundamentales, denotadas por b y b', se puede probar que $(a_n \pm a_n)$ y $(a_n \cdot a_n)$ son también sucesiones fundamentales, y definen $b + b'$ y $b \cdot b'$. Además, si $b \neq 0$, entonces $(\frac{a'_n}{a_n})$ es también una sucesión fundamental, que define $\frac{b'}{b}$.

Los números reales racionales quedan incluidos en la definición de más arriba, ya que una sucesión (a_n) con todos sus términos a_n iguales al mismo número racional a define el número real racional a.

A continuación se puede definir la igualdad y desigualdad entre dos números reales cualesquiera: así, $b = b'$, $b > b'$ o $b < b'$, según que $b - b'$ sea igual, mayor o menos que 0.

El siguiente teorema es crucial. Cantor demuestra que si (b_n) es cualquier sucesión de números reales (racionales o irracionales), y si $\lim_{x\to\infty}(b_{n+m} - b_n) = 0$ para m arbitrario, entonces existe un único número real b, determinado por una sucesión fundamental (a_n) de números racionales a_n tal que

$$\lim_{x\to\infty} b_n = b.$$

Es decir, que la formación de sucesiones fundamentales de números reales no crea la necesidad de otros nuevos tipos de números que puedan servir como límites para esas sucesiones fundamentales, puesto que los números reales ya existentes bastan para proporcionar tales límites. En otras palabras desde

el punto de vista de la convergencia de sucesiones fundamentales (o lo que es lo mismo, sucesiones que satisfacen el criterio de convergencia de Cauchy), los números reales contribuyen un sistema completo."

Lo anterior (Robbins, 2002, pág. 98) lo expresa como:

"podemos afirmar, siguiendo a Cantor, que cualquier sucesión $a_1, a_2, a_3, \ldots$ de números racionales define un número real si "converge". Se entiende que convergencia quiere decir que la diferencia $(a_m - a_n)$ entre dos miembros cualquiera de la sucesión tiende a 0 cuando a_m y a_n están lo suficientemente lejos en la sucesión, conforme m y n tiende a infinito (las aproximaciones decimales sucesivas a cualquier número tienen esta propiedad, pues dos cualesquiera de ellas, después de la n-ésima, pueden diferir a lo más por 10^{-n}). Dado que hay muchas maneras de acercarse al mismo número real mediante una sucesión de números racionales, decimos que dos sucesiones convergentes de racionales $a_1, a_2, a_3, \ldots$ y $b_1, b_2, b_3, \ldots$ definen el mismo número real si $a_n - b_n$ tiende a 0 conforme n aumenta indefinidamente. Las operaciones de sumas, etc., para tales sucesiones son muy fáciles de definir."

(Bell, 1985, pág. 289) Sostuvo que: "[…] Cantor definió los números irracionales mediante sucesiones infinitas de números racionales; por ejemplo $\sqrt{2}$, se puede definir por la sucesión 1, 14/10, 141/100, 1414/1000, 14142/10000,… En general si a_1, a_2, a_3, … es una sucesión infinita de números racionales tal que para cada racional $\varepsilon > 0$, por pequeño que sea, existe un índice m tal que $|a_n - a_v| < \varepsilon$ para cada $n, v \geq m$, se dice que la sucesión es regular. Se postula que toda sucesión regular define un número; la clase de todos los números así definidos es el sistema de los números reales […]"

Dedekind

"La teoría de Dedekind de los números irracionales, presentada en su libro de 1887 […], parte de las ideas con que ya contaba en 1858. En esa época tuvo que dar clases de cálculo y constato que el sistema de números reales carecía de

fundamentación lógica. Para probar que una cantidad monótonamente creciente y acotada se aproxima a un límite tenía que hacer uso, con otros autores, de la evidencia geométrica (decía que esa sigue siendo la forma en que hay que hacerlo en una primera presentación del cálculo, particularmente si uno no desea perder mucho tiempo). Además, muchos teoremas aritméticos básicos quedaban sin demostración; mostraba como ejemplo el hecho de que no se hubiera probado rigurosamente que $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{6}$.

En su exposición afirma que presupone el desarrollo de los números racionales, que comenta brevemente. Para introducir los irracionales se pregunta primero que significa la continuidad geométrica. Los pensadores contemporáneos y anteriores – por ejemplo Bolzano - creían que continuidad significaba la existencia de al menos otro número entre dos cualesquiera, propiedad que ahora se conoce como densidad. Pero los números racionales ellos mismo también forman un conjunto denso, luego densidad no es continuidad.

Lo que le sugirió a Dedekind la definición de numero Irracional fue la observación que en cada partición de la recta en dos clases de puntos tales que cada punto de la primera está a la izquierda de cada punto de la segunda, *hay uno y solo un punto* que produce la partición. Ese hecho hace a la recta continua. Para la recta se trata de un axioma; traslado entonces esa idea al sistema numérico. Consideremos, dice Dedekind, cualquier partición de los números racionales en dos clases tales que cualquier número de la primera es menor que cualquier número de la segunda. Tal partición de los números racionales es lo que se llama una cortadura, si las clases son denotadas por A_1 y A_2, la cortadura se denota por (A_1, A_2). Para algunas cortaduras, específicamente las determinadas por un numero racional, hay un número máximo en A_1 o un número mínimo en A_2. Recíprocamente, cada cortadura en los racionales en las que hay un máximo en la primera clase o un mínimo en la segunda está determinada por un número racional.

Pero hay cortaduras que no están determinadas por números racionales. Si ponemos en la primera clase todos los números

racionales positivos y negativos cuyo cuadrado es menos que 2, y en la segunda clase todos los demás racionales, esa cortadura no está determinada por ningún número racional. Para cada cortadura de ese tipo "Creamos un nuevo miembro α que está completamente definido por la cortadura; diremos que el número α corresponde a esa cortadura, o que produce la cortadura". Así, a cada cortadura le corresponde uno y un solo número, racional o irracional.

[…] Introduce el irracional α como correspondiente a la cortadura y definido por ella, pero no está demasiado claro de dónde viene α. Debería decir que el número irracional α no es otra cosa que la cortadura misma. De hecho, Heinrich Weber le dijo esto a Dedekind y este le replico en una carta de 1888 que el número irracional α no es la cortadura misma sino algo distinto, que corresponde a la cortadura y que la produce. De modo parecido aunque los números racionales generan cortaduras no son lo mismo que ellas. Y añadía que tenemos el poder mental de crear tales conceptos.

A continuación define cuando una cortadura A_1, A_2 es menor o mayor que otra cortadura $(B_{1,}B_2)$. Después de haber definido la desigualdad, señala que los números reales poseen tres propiedades demostrables:

1. Si $\alpha > \beta$ y $\beta > \gamma$, entonces $\alpha > \gamma$.

2. Si α y γ son dos números reales diferentes, entonces hay una cantidad infinita de números diferentes entre α y γ.

3. Si α es cualquier número real, entonces los números reales pueden dividirse en dos clases A_1 y A_2, cada una de las cuales contiene una infinita de elementos, y cada elemento de A_1 es menos que α y cada elemento de A_2 es mayor que α. El número alfa mismo puede ser asignado a cualquiera de las dos clases. El conjunto de los números reales posee ahora *continuidad*, que Dedekind expresa así: si se divide el conjunto de todos los números reales en dos clases A_1 y A_2 tales que cada elemento de A_1 es menos

que todos los elementos de A_2, entonces existe un y solo un número α que produce esa división.

Define después las operaciones con números reales. La suma de las cortaduras (A_1, A_2) y (B_1, B_2) se define así: si c es cualquier número racional, lo pondremos en la clase C_1 si hay un número a_1 en A_1 y un número b_1 en B_1 tales que $a_1 + b_1 \geq c$. Pondremos todos los demás números racionales en la clase C_2. Ese par de clase C_1 y C_2 constituyen una cortadura (C_1, C_2) puesto que cada elemento de C_1 es menor que cada elemento que C_2. La cortadura (C_1, C_2) es entonces la suma de (A_1, A_2) y (B_1, B_2). Las otras operaciones dice, se definen análogamente. Ahora ya puede establecer propiedades de la suma y la multiplicación, como la propiedad asociativa y conmutativa. Aunque la teoría de Dedekind de los números irracionales, con pequeñas modificaciones como las señalaba más arriba, es lógicamente satisfactoria, Cantor la critico porque las cortaduras no aparecen de manera natural en el análisis." (Kline, 1992, págs. 1299-1301)

Otros autores lo describen así:

"Dedenkind prefirió operar con ideas abstractas generales más que con sucesiones específicas de intervalos encajonados. Su procedimiento se basa en la definición de una "cortadura", que describiremos brevemente.

Supóngase que hay algún método dado para dividir el conjunto de todos los números racionales en dos clases, A y B, tales que todo elemento b de la clase B sea mayor que todo elemento a de la clase A. Cualquier clasificación de este tipo se denomina una cortadura en el conjunto de los números racionales. Para una cortadura hay exactamente tres posibilidades, de las cuales debe cumplirse una y sólo una:

1. Hay un elemento a* que es el mayor de A. Éste es el caso, por ejemplo, si A consta de todos los números racionales ≤ 1 y B, de todos los números racionales >1.

2. Hay un elemento b* que es el menor de B. Éste es el caso, por ejemplo, si A consta de todos los números racionales < 1 y B, de todos los números racionales ≥ 1.

3. No hay un elemento que sea el mayor en A ni un elemento que sea el menor en B. Éste es el caso, por ejemplo, se A consta de todos los números racionales negativos, el 0 y todos los números racionales positivos cuyo cuadrado sea menor que 2 y B, todos los números racionales cuyo cuadrado sea mayor que 2. A y B juntos contienen a todos los números racionales, pues hemos demostrado que no hay ningún número racional cuyo cuadrado sea igual a 2.

El caso en que A tenga un elemento a* que sea mayor y B un elemento b* que sea el menor es imposible, pues entonces el número racional (a*+b*)/2, que queda a medio camino entre a* y b*, sería mayor que el mayor elemento de A y el menor que el elemento de B, y por lo tanto no pertenecería a ninguno de los dos.

Para el tercer caso, en que no hay un número racional que sea el mayor en A ni un número racional que sea el menor en B, de acuerdo con Dedenkind la cortadura lo define, o simplemente es, un número irracional. Es fácil ver que esta definición concuerda con la definición dada por medio de intervalos encajados: cualquier sucesión $I_1, I_2, I_3, \ldots$ de intervalos encajados define una cortadura si colocamos en la clase A a todos aquellos números racionales que son excedidos por el extremo izquierdo de al menos uno de los intervalos I_n ; y en B, a todos los demás números racionales." (Robbins, 2002, págs. 97-98)

Se tiene que tener presente:

"Hay otros enfoques de la teoría de números irracionales además de los ya mencionados o descritos. Por ejemplo en 1696 Wallis había identificado números racionales y números decimales periódicos. Otto Stolz (1842- 1905), en su *Vorlesungenüber allgemeine Arithmetik* mostro que cada número irracional puede representarse como un decimal no periódico, y esto puede utilizarse como propiedad definitoria.

Queda claro de estos varios enfoques que la definición lógica del número irracional es bastante refinada. Desde el punto de vista lógico un número irracional no es simplemente un solo símbolo o un par de símbolos, tal como una razón entre dos enteros, sino que una colección infinita como una sucesión fundamental de Cantor o una cortadura de Dedekind. El número irracional, definido lógicamente, es un monstruo intelectual y podemos comprender por qué los griegos y tras ellos tantas generaciones de matemáticos los encontraron tan difíciles de manejar." (Kline, 1992, págs. 1301-1302)

En este periodo Charles Hermite (1873) demuestra que el número "e" era trascendente, esto es, que no es raíz de ninguna ecuación polinómica de coeficientes racionales, cualquiera que sea su grado y en años más tardes Lindemann (1882) demostraba de forma concluyente que π era también un número trascendente, o sea, no algebraico.

En Resumen

Podemos apreciar que llegar al concepto de número irracional, como se conoce en la actualidad, provocó varios desconciertos a lo largo de la historia. Este evolucionó lentamente en la historia y hubo períodos en los que ni siquiera se mencionó. Recordemos las controversias que ocurrieron en la escuela pitagórica en donde se les cae su principal pilar, es decir, la conmensurabilidad. Pasaron varias décadas para que los griegos demostraran con su método deductivo (por el absurdo) que no se puede comparar el lado de un cuadrado con su diagonal, que hoy en día se muestra como un número no racional, pero esto no define lo que es un número irracional. Sin embargo, esto no quiere decir que este tipo de situación no sirva como un primer encuentro para el concepto de número irracional. Hay que dejar en claro que las culturas anteriores a los griegos (babilónicos, egipcios) utilizaron como herramienta las aproximaciones de lo que conocemos en la actualidad como números irracionales para dar soluciones a ciertos problemas.

Los matemáticos que aparecieron después de los griegos solo manipularon el concepto, es decir, sabían que existían esos números pero no se interesaron en entenderlos, sino que pasaron muchísimos años para llegar al ansiado siglo XIX en el cual se formalizó el lenguaje y definición del número Irracional, y es en este momento donde aparece la dupla de amigos Cantor-Dedekind quienes con la fuerte artillería de análisis que se conocía en la época logran dar una respuesta satisfactoria a esta interrogante.

Y como mencionábamos, llegar al concepto de irracionalidad fue controvertido, porque a la matemática de Cantor desde el principio fue atacado, incluso por grandes matemáticos como uno de sus enemigos de por vida, su antiguo maestro en la Universidad de Berlín, Leopold Kronecker.

Currículum

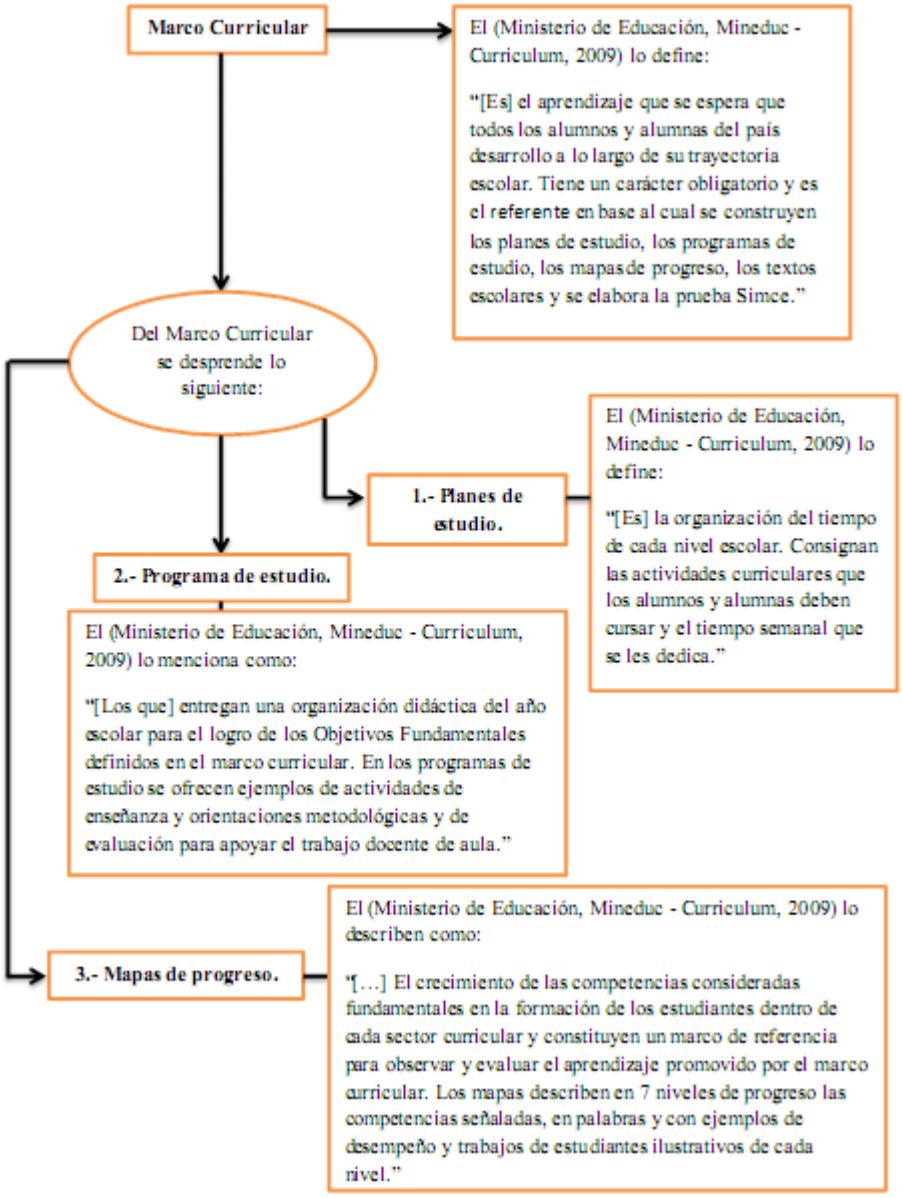
Decidir incorporar documentos oficiales del Mineduc nos permite lo siguiente:

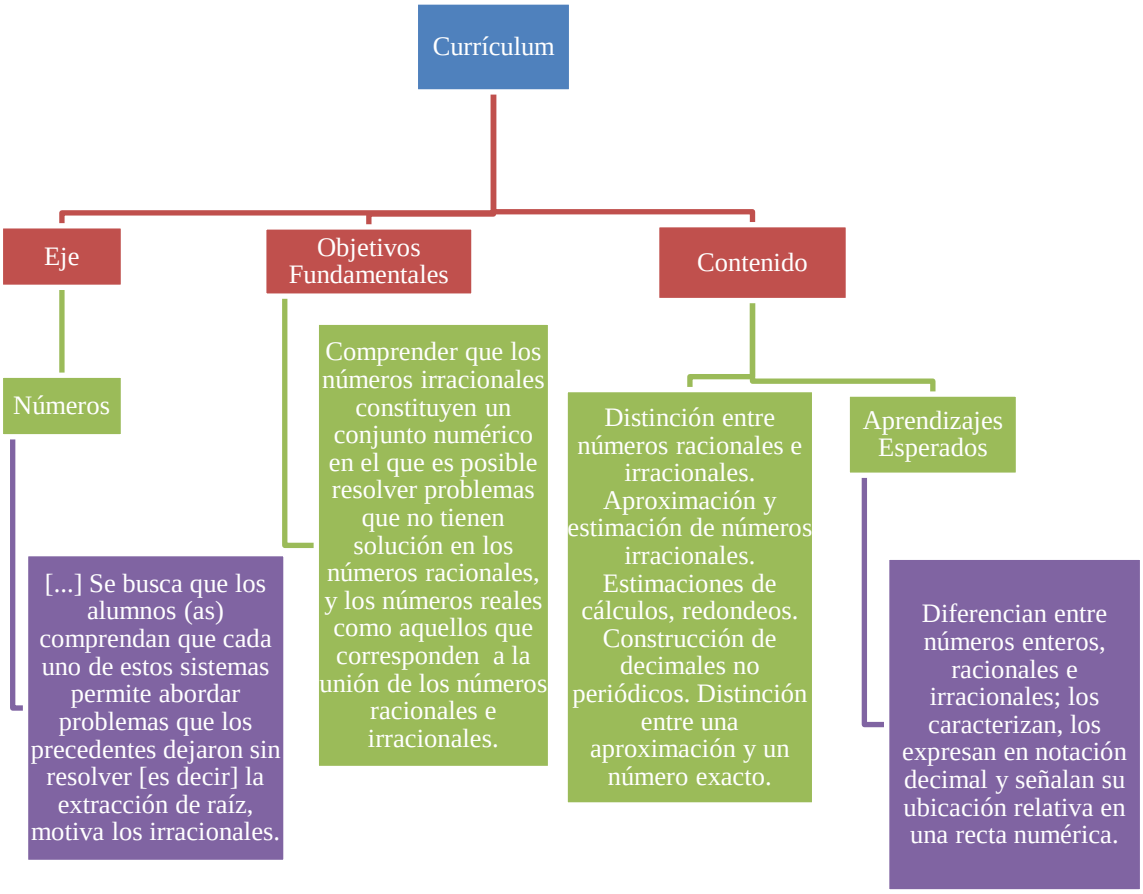
a) Que el profesor pueda saber cuáles son los contenidos, aprendizajes, y objetivos fundamentales esperados que debe tener el alumno respecto al número irracional.
b) Una Orientación Didáctica de como planificar una clase, en este caso la de números irracionales.

Objetivo: Estudiar lo que se indica del concepto de número irracional dentro de la organización presente en el ajuste curricular (2009), planes y programas de estudio (2004) y mapas de progresos (2009).

Pregunta de Investigación: ¿Cómo es la organización del ajuste curricular (2009), planes y programas de estudio (2004) y mapas de progresos (2009) para el concepto de número irracional?

Nota: La respuesta se muestra en las páginas siguientes y viene dada con dos diagramas y un comentario que se hace al final.


Marco Curricular
El (Ministerio de Educación, Mineduc - Curriculum, 2009) lo define:
"[Es] el aprendizaje que se espera que todos los alumnos y alumnas del país desarrollo a lo largo de su trayectoria escolar. Tiene un carácter obligatorio y es el referente en base al cual se construyen los planes de estudio, los programas de estudio, los mapas de progreso, los textos escolares y se elabora la prueba Simce."
Del Marco Curricular se desprende lo siguiente:
1.- Planes de estudio.
El (Ministerio de Educación, Mineduc - Curriculum, 2009) lo define:
"[Es] la organización del tiempo de cada nivel escolar. Consignan las actividades curriculares que los alumnos y alumnas deben cursar y el tiempo semanal que se les dedica."
2.- Programa de estudio.
El (Ministerio de Educación, Mineduc - Curriculum, 2009) lo menciona como:
"[Los que] entregan una organización didáctica del año escolar para el logro de los Objetivos Fundamentales definidos en el marco curricular. En los programas de estudio se ofrecen ejemplos de actividades de enseñanza y orientaciones metodológicas y de evaluación para apoyar el trabajo docente de aula."
3.- Mapas de progreso.
El (Ministerio de Educación, Mineduc - Curriculum, 2009) lo describen como:
"[…] El crecimiento de las competencias consideradas fundamentales en la formación de los estudiantes dentro de cada sector curricular y constituyen un marco de referencia para observar y evaluar el aprendizaje promovido por el marco curricular. Los mapas describen en 7 niveles de progreso las competencias señaladas, en palabras y con ejemplos de desempeño y trabajos de estudiantes ilustrativos de cada nivel."



Comentario

Es importante destacar que esta organización es muy útil en nuestra tesis, debido a que lo que entrega el currículum, nos muestra como debiera estructurarse una clase de números irracionales, porque fijémonos en las Orientaciones Didácticas que presenta el (Ministerio de Educación, Mineduc - Planes y Programas, 2004, pág. 16)diciendo:

"[…] Se propone un trabajo que tiene como columna vertebral la resolución de problemas […] la resolución de problemas en esta unidad, se orienta hacia el conocimiento de características y propiedades de los números racionales e irracionales; de la presencia de regularidades o patrones en el mundo de los números […] El tema sobre algunos antecedentes relativos a la historia de los números es un complemento necesario […]"

Si se toma en cuenta las frases anteriores, estas nos ayudan a la hora de llevar a cabo nuestro objetivo general de nuestra tesis, porque se menciona la historia y en nuestra tesis se muestra toda la historia del número irracional, a modo general y Luego habla de la resolución de problemas, de cierta forma, es lo que se extrae de Isoda.

Análisis de textos escolares

Una buena introducción seria responder **¿Por qué estudiar y analizar los textos escolares?** La respuesta a la interrogante se apoya en la mirada que da a los libros el Ministerio de Educación, es decir:

"Los **Textos Escolares** desarrollan los contenidos definidos en el Marco Curricular para apoyar el trabajo de los alumnos y alumnas en el aula y fuera de ella, y les entregan explicaciones y actividades para favorecer su aprendizaje y su autoevaluación. Para los profesores y las profesoras los textos constituyen una propuesta metodológica para apoyar la implementación del Curriculum en el aula, y los orienta sobre la extensión y profundidad con que pueden ser abordados los contenidos del Marco Curricular". (Ministerio de Educación, Mineduc - Curriculum, 2009, pág. 5)

Objetivo: Analizar la presentación y tratamiento del número irracional en textos escolares.

Pregunta de Investigación: ¿Cómo introducen los textos escolares la idea o el concepto de número irracional? y ¿Cómo es el tratamiento que hacen estos de $\sqrt{2}$?

Para estudiar los dos textos de matemáticas que presentan los números irracionales, se establece los siguientes pasos

1. Se presentara la información de los libros (título, autores, editorial, año) y los objetivos de la unidad de los dos textos, teniendo presente como foco de atención los números irracionales.

2. Se describe las situaciones que presenta los libros para luego ser analizadas.

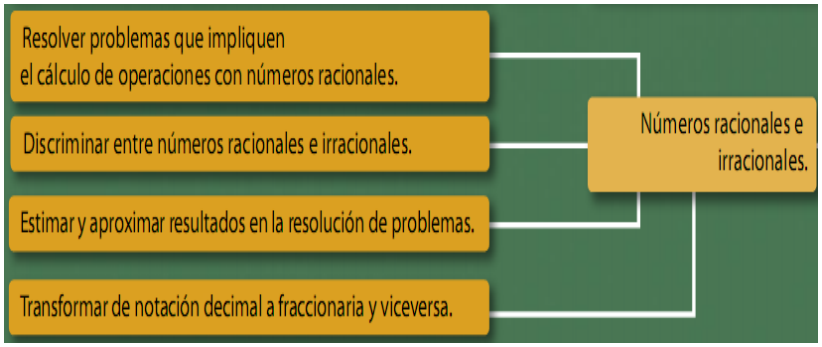
3. Conclusiones sobre ambos textos

Análisis texto 1

Información del Texto:

- ✓ Título: Matemática 1° Año Medio.
- ✓ Autores: Andrés Ortiz Jiménez, Cristian Reyes Reyes, Marisol Valenzuela Chandía, Eugenio Chandía Muñoz.
- ✓ Editorial: Mc Graw Hill.
- ✓ Año: 2010.

El texto presenta en la unidad de "Números" en la página 10, los objetivos que será capaz el/la alumno(a) de lograr al finalizar esta unidad, y dentro de esta se encuentra el tema de los Números Irracionales como lo muestra el siguiente diagrama.



Para lograr el objetivo de discriminar entre números racionales e irracionales, el texto muestra el siguiente orden (teniendo presente que solo nos enfocamos en dos subunidades), primero explica lo que es una *notación decimal (3)* y posteriormente *Números racionales v/s números irracionales (5).*

3 Notación decimal

importante

Cualquier decimal finito se puede escribir como una fracción de números enteros.

Recordemos que la notación decimal que usamos tiene como base 10, esto quiere decir que el lugar que ocupa un dígito en un número está relacionado con una potencia de 10. Por ejemplo, el número 3 456 es la suma:

$$3\cdot 10^3+4\cdot 10^2+5\cdot 10^1+6\cdot 10^0$$

Esta notación se puede extender a los números decimales no enteros. Por ejemplo 3 456,432 es la suma:

$$3\cdot 10^3+4\cdot 10^2+5\cdot 10^1+6\cdot 10^0+4\cdot 10^{-1}+3\cdot 10^{-2}+2\cdot 10^{-3}$$

que es lo mismo que: $3\cdot 10^3+4\cdot 10^2+5\cdot 10^1+6\cdot 10^0+\frac{4}{10}+\frac{3}{10^2}+\frac{2}{10^3}$

Como esto se puede hacer con cualquier decimal finito, entonces, cualquier decimal finito es una fracción de números enteros.

cuidado

Hemos demostrado que:

$1 = 0,\overline{9}$

vale decir que esos dos números son exactamente el mismo. No estamos diciendo que están cerquita, sino que están exactamente en el mismo lugar.

Es decir, la notación decimal no es única.

Por ejemplo $0,5 = 0,4\overline{9}$.

Sin embargo, hay fracciones que tienen un desarrollo decimal infinito; por ejemplo, $\frac{1}{3}$ tiene un desarrollo que es una seguidilla infinita de 3, después de la coma, se anota $0,\overline{3}$, es decir, $\frac{1}{3}$ es la suma que sigue:

$$\frac{1}{3}=\frac{3}{10}+\frac{3}{10^2}+\frac{3}{10^3}+\frac{3}{10^4}+\frac{3}{10^5}+\frac{3}{10^6}+\frac{3}{10^7}+\frac{3}{10^8}+\cdots \quad (1)$$

Otro ejemplo de lo mismo es $\frac{1}{9}$ que es el decimal infinito

$$0,111111111111111111111111111111111111111111111...=0,\overline{1}$$

o escrito en sumas:

$$\frac{1}{9}=\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\frac{1}{10^4}+\frac{1}{10^5}+\frac{1}{10^6}+\frac{1}{10^7}+\frac{1}{10^8}+\cdots$$

Es importante destacar que si multiplicamos la relación (1) por 3, resulta:

$$3\cdot\frac{1}{3}=\frac{9}{10}+\frac{9}{10^2}+\frac{9}{10^3}+\frac{9}{10^4}+\frac{9}{10^5}+\frac{9}{10^6}+\frac{9}{10^7}+\frac{9}{10^8}+\cdots$$

pero el número de la izquierda es 1 y el de la derecha es $0,\overline{9}$, es decir: $1 = 0,\overline{9}$

actividades

1. Explica por qué los números $0,4\overline{9}$ y $\frac{1}{10}\cdot\left(10\cdot 0,4\overline{9}\right)$ son iguales.
2. Recurre a lo anterior para mostrar que $0,4\overline{9}=\frac{1}{10}\cdot\left(4+0,\overline{9}\right)$.
3. Toma en cuenta que $0,\overline{9}=1$, para mostrar que $0,4\overline{9}=\frac{1}{10}\cdot(5)=0,5$.

Descripción de las Situaciones

- Para conseguir una notación decimal, el texto muestra dos casos particulares (entero, no entero).

  1. Caso entero: $3456 = 3\cdot10^3 + 4\cdot10^2 + 5\cdot10^1 + 6\cdot10^0$

  2. Caso no entero (extensión del caso 1):

  $$3456,432 = 3\cdot10^3 + 4\cdot10^2 + 5\cdot10^1 + 6\cdot10^0 + 4\cdot10^{-1} + 3\cdot10^{-2} + 2\cdot10^{-3}$$

  $$3456,432 = 3\cdot10^3 + 4\cdot10^2 + 5\cdot10^1 + 6\cdot10^0 + \frac{4}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{2}{10^3}$$

  Y la conclusión es que cualquier decimal finito se puede escribir como una fracción de números enteros.

- Posteriormente indica que hay algunas fracciones que tienen un desarrollo decimal infinito, mostrando dos casos particulares ($\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{9}$).

- Finalmente demuestran por qué $1 = 0,\overline{9}$, adhiriendo a esta que la notación decimal no es única.

Análisis

1. En frase "*cualquier decimal finito se puede escribir como una fracción de números enteros"*, lo correcto sería hablar de "número racional" en vez "fracción".

2. Fijémonos en las frases "*hay algunas fracciones que tienen un desarrollo decimal infinito*" y "*Otro ejemplo de lo mismo es* $\frac{1}{9}$ que es un decimal infinito", da entender que un desarrollo decimal infinito es lo mismo que un decimal infinito, lo que no correcto Ya que el número decimal corresponde solamente a los racionales con denominador de base 10^n, 5^m, 2^q o 5^m2^q. Los números racionales con distinto denominador mencionado

anteriormente se llama desarrollo decimal infinito periódico. Solamente en dos casos podríamos llamar a un número decimal como decimal infinito ya que es el mismo número representado en manera diferente. El primer caso es cuando el número tiene periodo 9, por ejemplo $0.99999\ldots=0.\overline{9}=1$ y el segundo caso es cuando tiene periodo 0, por ejemplo $3{,}2000\ldots=3{,}2\overline{0}=3{,}2$.

3. Para demostrar que $1=0,\overline{9}$ ocupan la operación $3\cdot\left(\frac{3}{10}+\frac{3}{10^2}+\frac{3}{10^3}+...\right)$ y esto no está definido. Porque se está multiplicando 3 a todos los términos que se encuentra dentro del paréntesis los que son infinitos términos, siendo cada termino menor que el anterior. Para demostrar esto se emplea las series infinitas (geométricas) monótonas y su convergencia, dicho de otra forma están suprimiendo el límite de la serie que existe.

5 Números racionales v/s números irracionales

En la Educación Básica estudiaste varios tipos de números, por ejemplo, conociste a los números naturales ($\mathbb{N}$). El 1 es un número natural, el sucesor del 1 es 2, que es un número natural y el sucesor del 2 es 3, que también es un número natural; entonces, podrías concluir que cada vez que tenemos un número natural su sucesor también es un número natural.

importante

Si **n** es un número entero, entonces lo podemos escribir como :

$$n = \frac{n}{1}$$

es decir, todo número entero es un número racional.

Conociste también los números enteros ($\mathbb{Z}$). Cada número entero es un número natural o es el cero o es el opuesto de un número natural. Por ejemplo, -3 es un número entero que no es un número natural.

También conociste las fracciones de números enteros, es decir, números de la forma $\frac{a}{b}$, con a y b números enteros y además b no es cero. Por ejemplo: $\frac{1}{2}$ es una fracción.

Un número racional es cualquier número que se puede escribir como el cuociente de dos números enteros de denominador no nulo.

Por ejemplo, 0,5 es un número racional, ya que es igual a $\frac{1}{2}$.

El número 1 es un número racional, porque lo podemos escribir como $\frac{5}{5}$ que es el cuociente de números enteros de denominador no nulo.

Recordemos que una fracción conserva su valor si se amplifica o simplifica por un número entero; por ejemplo, $\frac{1}{2}$ amplificada por 3 resulta $\frac{3}{6}$ es decir,

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$$

Entonces un número racional no tiene una escritura única como fracción; de hecho, existen infinitas formas de escribir un número racional como fracción. Por ejemplo, para cada entero $n \neq 0$, el número racional 0 se puede escribir como $\frac{0}{n}$.

actividades

1. Escribe cada uno de los números siguientes como fracción en dos formas distintas:

   a) $\frac{-2}{3}$ **b)** 0,3 **c)** $0,\overline{3}$

2. Escribe cada par de números como fracciones con el mismo denominador y luego compara estos números.

   a) $\frac{7}{8}$ y $\frac{4}{5}$ **b)** $\frac{14}{27}$ y $\frac{15}{29}$ **c)** $\frac{1}{3}$ y $\frac{3}{10}$

Descripción de las Situaciones

El texto para conseguir lo que menciona en su título "Números racionales v/s números irracionales", presenta la siguiente secuencia:

1. Recuerda los números naturales $(\mathbb{N})$ y que el sucesor de un número natural también es un natural.
2. Recuerda los enteros $(\mathbb{Z})$ haciendo uso de su definición.
3. Contrasta el conjunto de los números naturales con los números enteros.
4. Recuerda las fracciones, dando un ejemplo y luego define lo que es un número racional.
5. Muestra escrituras distintas de un número racional.
6. Menciona cuando una fracción conserva su valor.
7. Finaliza con la frase "*un número racional no tiene una escritura única como fracción*".

Análisis

Si bien, en los puntos 1 y 2 recuerda los conjuntos numéricos $(\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z})$ los que posteriormente se compara entre ellos en el punto 3, y es en este momento cuando definen lo que es un entero "*cada número entero es un número natural o es el cero o es el opuesto de un número natural*" para luego contrastar diciendo que "*No es un natural"*, pero ¿esto que después nombra como lo que no es, no creen que podría causar una confusión en el alumno(a)?, sin duda alguna que para tratar de esclarecer a un(a) alumno(a) es bueno utilizar analogías, pero en este caso particular no estaremos abusando de esto ya que anteriormente se definió con claridad lo que sí es un entero.

- se dijo en los comentarios de los planes y programas no se debe hablar de "fracción" sino de "número racional" cuando se habla de números ya que estos son entes abstractos, y las fracciones están relacionadas con problema de repartición.

- El libro utiliza las palabras "Fracción", "Número racional" y dentro de este último se menciona la palabra "cuociente" como sinónimo. Si bien, es bastante común encontrarse con este tipo de palabras en textos escolares, pero es rara la vez que explican de manera adecuada las definiciones que corresponde a cada una de ellas. En el texto dice:

  "*Recordemos que una fracción conserva su valor si se amplifica o simplifica por un número entero; por ejemplo,* $\frac{1}{2}$ amplificado por 3 resulta $\frac{3}{6}$ es decir, $\frac{1}{2}=\frac{3}{6}$".

  Fijémonos en esta última igualdad $\frac{1}{2}=\frac{3}{6}$, hablar de igualdad de fracciones no es adecuado, lo correcto es decir una igualdad de números racionales

- Otra cosa que nos llama la atención, es que al comienzo de la página muestra el símbolo para los conjuntos numéricos ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$) y omite por completo el símbolo que se utiliza para el conjunto de los números racionales ($\mathbb{Q}$).

  Ahora pasemos hablar de las dos actividades que se mencionan al final de la hoja, en ambas lo que se busca es que el/la alumno(a) utilice su comprensión de las líneas anteriores, para poder confirmar y aplicar, pero como vemos en la actividad 1 se pide que el/la alumno(a) con lo que comprendió de amplificar o simplificar, sea capaz de escribir de dos formas distintas los números $-\frac{2}{3}; 0,3$ y $0,\bar{3}$, precisémonos en estos dos últimos números que se les pide escribir de forma distinta, en estos dos casos, el/la alumno(a) tendría que $0,3$ y $0,\bar{3}$ expresarlo como un número racional, pero ¿Cómo determinaran a que numero racional corresponde cada uno?, el texto ¿Menciona en

algún momento él procedimiento que se utiliza para relacionar la notación decimal con un número racional?, tendrían que repasar contenidos de cursos anteriores. Por otro lado, en la actividad 2 pide escribir cada par de números como fracciones con el mismo denominar y luego comparar, cosa que en ningún momento se muestra en líneas anteriores.

Suma y productos de números racionales

Si tenemos dos números racionales, los podemos sumar y multiplicar, y el resultado sigue siendo un número racional; por ejemplo:

$$\frac{7}{8}+\frac{-5}{6}$$

se puede calcular encontrando dos fracciones iguales a las de arriba, pero con el mismo denominador, esto es; por ejemplo:

$$\frac{21}{24}+\frac{-20}{24}=\frac{1}{24}$$

En general si $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son dos números racionales, siempre se pueden amplificar de forma tal de obtener dos números racionales iguales a los de arriba, pero escritos como fracciones del mismo denominador, por ejemplo:

$$\frac{a\cdot d}{b\cdot d} \text{ y } \frac{b\cdot c}{b\cdot d}$$

entonces la suma ahora resulta:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot d}+\frac{b\cdot c}{b\cdot d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}$$

Como *a, b, c* y *d* son números enteros, el numerador es un número entero, y como *b* y *d* son no nulos, se tiene que *bd* es un entero no nulo; por lo tanto, tenemos que la suma de números racionales es un número racional.

De modo similar puedes demostrar que el producto de números racionales es un número racional.

importante

La suma y producto de números racionales es un número racional.

importante

Si $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$ y $\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}}$ son números racionales, el producto se define por

$$\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}}{\mathbf{b}\cdot\mathbf{d}}$$

Como **a** y **c** son números enteros se tiene que el numerador del producto es entero, y como **b** y **d** son no nulos se tiene que **bd** es no nulo, por lo tanto, el producto de números racionales es un número racional.

actividades

1. Considera los números racionales $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{4}$.
   a) Ubica los números en la recta numérica.
   b) Encuentra el punto medio **M** entre esos números. ¿Es un número racional?
   c) Encuentra el punto medio entre $\frac{1}{3}$ y **M** y el punto medio entre **M** y $\frac{1}{4}$. ¿Son esos puntos números racionales?

2. ¿Es cierto que el punto medio entre dos números racionales es un nuevo número racional?

3. ¿Es cierto que entre dos números racionales siempre hay un número racional?

Descripción de las Situaciones

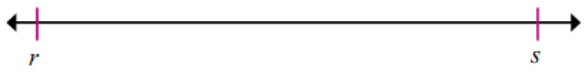
- El texto empieza mencionando que al operar con la suma o multiplicación dos números racionales el resultado será un número racional, presenta un caso particular de la suma de dos racionales da un racional

- luego generaliza con dos racionales cualquiera al sumarlo da un resultado racional, señala que se puede demostrar de una forma similar el caso de la multiplicación.

Análisis

En el texto para mostrar que el resultado de sumar dos números racionales da un racional, no se menciona de qué forma se tiene que proceder, para encontrar las fracciones equivalentes (cambiar el representante) de igual denominador, pero si en la demostración donde se indica que hay que amplificar. Encontramos que esto se debe mencionar en el ejemplo numérico, para que sea mejor la comprensión de cómo se debe proceder, tampoco se indica por cuanto se amplifico $\frac{7}{8}$ y $\frac{-5}{6}$ para que dé $\frac{21}{24}$ y $\frac{-20}{24}$, dejándolo al azar, sin indicar que se trata del mínimo común múltiplo de 8 y 6.

Tomemos dos números racionales $r=\frac{a}{b}$ y $s=\frac{c}{d}$ y supongamos que r está a la izquierda de s cuando se ubican en la recta numérica:



Notamos que el punto medio es:

$$\frac{r+s}{2}=\frac{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}}{2}=\frac{\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}}{2}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{2b\cdot d}$$

el cual es también un número racional, por lo tanto:

Entre dos números racionales siempre hay un número racional.

Si se repite este proceso, es decir, encontrar un racional entre medio de dos números racionales, pero ahora considerando los puntos r, s y el punto medio, entonces tendremos tres racionales entre los puntos r y s.

Ahora el punto medio para cada par de los puntos antes encontrados tendremos 7 racionales entre los puntos iniciales (r y s), y así podremos construir tantos racionales entremedio como queramos.

recuerda

Entre dos números racionales hay infinitos números racionales.

Es decir, si se itera este proceso de partir por la mitad cada tramo, notamos que entre dos números racionales hay **infinitos** números racionales.

Descripción de las Situaciones

- Presenta a dos números racionales representado en la recta numérica, uno está a la izquierda del otro, y que el punto medio de ellos es un número racional, luego definen "Entre dos números racionales siempre hay un número racional."

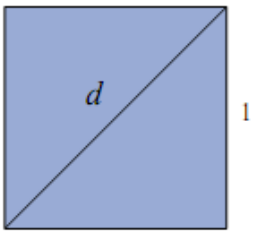
- Muestra que si se repite el proceso de partir por la mitad cada tramo, en dos racionales hay infinitos números racionales

Análisis

En esta página vemos dos hechos que ocurren en los números racionales, el primero lo marcan en amarillo *"entre dos números racionales siempre hay un número racional"* y el segundo que entre dos números racionales hay infinitos números racionales (es denso en $\mathbb{Q}$). Si bien, el lenguaje natural y las representaciones gráficas que utiliza son bastante acorde para mostrar por medio del método inductivo la densidad en $\mathbb{Q}$, pero por otro lado, nos limita, ya que da entender que como el libro lo menciona el iterar el proceso indefinidamente, solo nos está haciendo caer en un ciclo indefinido en el cual siempre se encontraran números racionales. Quizás, esto consigue la densidad en $\mathbb{Q}$, pero este no deja entrever la puerta que debiera abrirse para el comienzo de los números irracionales, pues la recta no solamente lo conforma de racionales, recuerden que lo que busca el libro en esta sección (5) es "Números racionales v/s números irracionales".

Un número no racional

Consideremos un cuadrado de lado 1.



La diagonal del cuadrado divide al cuadrado en dos triángulos rectángulos; si utilizamos el Teorema de Pitágoras para calcular la medida de la diagonal resulta que:

$$d^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

entonces d es un número positivo cuyo cuadrado es 2.

Supongamos que ese número fuese racional, entonces se puede escribir de la forma $d = \frac{a}{b}$ con a y b enteros positivos. Podemos asumir además, que esta fracción no se puede simplificar, por lo tanto, si uno de ellos es par, el otro es impar.

Como $d^2 = 2$ se tiene que:

$$d^2 = \frac{a^2}{b^2} = 2$$

de donde se deduce que:

$$a^2 = 2 \cdot b^2$$

lo que quiere decir que a es par porque es el doble de b^2, pero como a^2 es par, necesariamente a también lo es. De esto se deduce que a es el doble de un número entero k, esto es, $a = 2 \cdot k$.

Reemplazando en $a^2 = 2 \cdot b^2$ se tiene:

$$4 \cdot k^2 = 2 \cdot b^2$$

y dividiendo por 2 se tiene:

$$2 \cdot k^2 = b^2$$

por lo tanto, b^2 es par y como dijimos antes, esto implica que b es par. Entonces, tanto a como b son pares, lo cual no puede ser pues, asumimos que la fracción no se puede simplificar y que no pueden ser ambos pares, lo que genera una contradicción.

Resumiendo, si suponemos que d es racional llegamos a algo imposible, por lo tanto, suponer que d es racional es un error. Lo correcto es:

La medida de la diagonal del cuadrado de lado 1 no es racional.

nota

La idea de la demostración que no existe un número racional que su cuadrado sea 2, está basada en el hecho que algo falso no puede resultar de algo verdadero. Es decir, si se supone algo y luego de pasos "lógicos" resulta algo evidentemente falso, quiere decir que el supuesto primero es falso. En nuestro caso supusimos que un racional, escrito en su forma más reducida, al cuadrado, es 2, y resultó que no estaba en su forma reducida, lo cual es claramente falso, por lo tanto, la primera suposición es falsa.

actividades

1. Explica por qué la medida de la diagonal de un cuadrado de lado 2 no es racional.
2. Explica por qué la medida de la diagonal de un cuadrado de lado entero no es racional.
3.* Si **a** y **b** no son racionales, ¿puede serlo **ab**?, ¿puede serlo **a + b**?

Para conseguir un número no racional, el texto muestra el siguiente contexto:

Descripción de las Situaciones:

- La diagonal de cuadrado divide al cuadrado en dos triángulos rectángulos. De esta situación particular se desprenden dos procedimientos:

Del Teorema de Pitágoras se concluye que "*d es un número positivo cuyo cuadrado es 2*".

Del método deductivo por el absurdo se concluye "*La medida de la diagonal del cuadrado de lado 1 no es racional*".

Análisis

Como podemos ver, el texto presenta una situación que tuvo su origen en la antigua escuela pitagórica y fue esta la que provoco un punto crítico en la historia de las matemáticas, pero como todas las cosas tuvo que pasar un tiempo para poder dar una explicación a la interrogante que actualmente seria: ¿Qué número positivo al cuadrado es igual a dos?, y sin lugar a duda fueron los griegos con su excelente disciplina a quienes se les atribuye la primera respuesta a esta interrogante, con la ayuda de su magnífico razonamiento lógico deductivo (Reducción al absurdo), pero lamentablemente el utilizar este método nos conduce a sacar conclusiones como "*ese número positivo que al cuadrado es igual a dos es un no racional* ", pero la pregunta que vendría a continuación ¿Qué es eso que no es racional?, si bien, esto nos alerta de un número que no cumple con las condiciones de un numero racional, pero en ningún momento nos especifica lo que sí es y lamentablemente este texto escolar cae en este tipo de incertidumbre, es claro, que al alumno(a) hay que tratar de ponerlo(a) en jaque cuando se trata de insertar un nuevo conocimiento en él(ella), pero ¿esta demostración por el absurdo, bastara para que el/la alumno(a) haga suyo el concepto de número irracional?, la respuesta es ¡NO! Tajantemente, porque si queremos tener una idea clara

del concepto de número irracional no basta tomar este hecho histórico, sino más bien, hay que potenciarlo con otros que acontecieron unos siglos después de los griegos, nos referimos a los grandiosos aportes que hicieron dos mentes brillantes que dedicaron parte de su vida a la teoría de conjuntos, nos referimos a la dupla de amigos Cantor-Dedekind, los análisis que hacen estos dos personajes a los números, nos brindan por fin una definición de los números irracionales, que en el texto los nombran como "*no racionales*", el no incorporar situaciones que inmiscuyan los trabajos de Cantor-Dedekind, en vez de acercarnos a la verdadera esencia del número irracional nos aleja por completo y es por esta razón que criticamos la pobreza que existe en el libro sobre el concepto de irracionalidad. Ahora lo que se nos viene a la mente con esto, el/la alumno(a) ¿será realmente capaz discriminar entre números racionales e irracionales (AE)?, si ni siquiera el texto es capaz de dar una definición concreta y menos procedimientos que hagan acercar al alumno(a) al concepto de número irracional. Quizás, lo que podríamos rescatar y que sale en la página 31:

"Dado cualquier número en la recta, este tiene su notación decimal, que puede ser finita, periódica o no periódica. En los dos primeros casos el número es racional y en el último es irracional […]".

Pero, como todos sabemos una definición no basta para que el/la alumno(a) se apodere del conocimiento, sino que debe ocupar procedimientos que lo hagan conjeturar sus propias deducciones y a su vez ser capaz de hacer esquemas mentales que incluya una clasificación y caracterización de cada conjunto numérico.

Ahora fijémonos en las tres actividades que le piden al alumno, porque es bastante paradójico lo que se le pide:

1. *"Explica por qué la medida de la diagonal de un cuadrado de lado 2 no es racional.*

2. *Explica por qué la medida de la diagonal de un cuadrado de lado entero no es racional.*

3. *Si a y b no son racionales, ¿puede serlo* ***ab****?, ¿puede serlo* ***a+b****?"*

Con toda la explicación anterior, les hacemos la inquietud a los lectores ¿realmente él/la alumno(a) podrá explicar y conjeturar propiedades de números no racionales?, si ni siquiera fue el mismo quien conjeturo que "*La medida de la diagonal del cuadrado de lado 1 no es racional*", el/la alumno(a) no construye el conocimiento por adaptación a la situación. Además, el/la alumno(a) ¿tendrá claridad del concepto de lo que no es racional?, ya que con esto, recién podríamos someter al alumno(a) a problemáticas como la tercera pregunta.

Esto nos da para pensar, que faltan cosas por hacer para favorecer a los tratamientos que dan algunos textos escolares de enseñanza media.

nota

En general si **a<0,** se tiene que $\sqrt{a^2} = -a$

nota

¿Puedes tú explicar porqué si $0 < x < y$ se tiene que $x^2 < y^2$?

¿Qué relación tiene esto con el encajonamiento de $\sqrt{2}$?

cuidado

Es falso que $\sqrt{4} = \pm 2$ Recuerda que la raíz es siempre un número no negativo.

Al número que es la medida de la diagonal del cuadrado de lado 1 se le llama la raíz cuadrada de 2, o simplemente la raíz de 2, se anota $\sqrt{2}$ y es el único número positivo cuyo cuadrado es 2. En este lenguaje, lo que se hizo antes fue demostrar que $\sqrt{2}$ no es un número racional.

A los números que están en la recta, que no son racionales se les llama **números irracionales**.

En general, si tenemos un número no negativo a, la raíz de a es el único número positivo o cero que al calcularle su cuadrado resulta a. Por ejemplo $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$ pues $\frac{2}{3}$ es un número positivo tal que su cuadrado es $\frac{4}{9}$.

Tú puedes verificar que $\sqrt{1} = 1 \quad \sqrt{0} = 0 \quad \sqrt{4} = 2 \quad \sqrt{9} = 3$

En general, si a no es negativo, se tiene que $\sqrt{a^2} = a$. Pero es muy importante tener claro que la igualdad anterior es cierta sólo para valores no negativos. De hecho, es falso para los valores negativos, por ejemplo si $a = -1$, se tiene que $a^2 = 1$, y por lo tanto,

$$\sqrt{a^2} = \sqrt{1} = 1 \neq a$$

Si tomamos un número mayor o igual a 2, se tiene que el cuadrado de ese número es mayor que 4, por lo tanto, $\sqrt{2} < 2$. Como $1^2 = 1$ se tiene que $1 < \sqrt{2} < 2$.

Ahora bien, como $\frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4} > 2$ se tiene que $1 < \sqrt{2} < \frac{3}{2}$

Como $\frac{5^2}{4^2} = \frac{25}{16} < \frac{32}{16} = 2$ se tiene que $\frac{5}{4} < \sqrt{2} < \frac{3}{2}$

Tomando siempre el punto medio de los extremos de las desigualdades, podemos encajonar $\sqrt{2}$ mediante números racionales de forma tal, que cada vez obtendremos una mejor aproximación de $\sqrt{2}$.

actividades

1. Explica por qué $\sqrt{2} + 1$ es un número irracional.
2. Ordena los siguientes números, de menor a mayor.

   $1,\ 2,\ 0,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ \sqrt{3} - \sqrt{2},\ \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2}$
3. ¿Cuáles de los números de arriba son racionales? Explica tu respuesta.

Descripción de las Situaciones:

- Se presenta con el ejemplo de la página anterior la notación y su nombre del símbolo $\sqrt{2}$.
- Define a los números irracionales como "A los números que están en la recta, que no son racionales se les llama **números irracionales**".
- Presenta la propiedad $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ con a $\geq$ 0.
- Presenta la propiedad $\sqrt{a^2}$= a con a $\geq$ 0, y en el margen de la hoja muestra que si a<0, se tiene que $\sqrt{a^2} = -a$.
- Muestra como encajonar $\sqrt{2}$ a través de los cuadrados para poder aproximar.
- Se da a conocer al borde de la página, que si 0<x<y se tiene $x^2 < y^2$. Y además indica que $\sqrt{4} = \pm 2$ es falso

Análisis

- Cuando presenta $\sqrt{2}$ como "único número positivo cuyo cuadrado es 2" y con su demostración que no es racional de la página anterior, se limita a un ejemplo particular, y con esto no se entiende que es un número no racional, se podría dejar planteado otro número para que demuestre, por ejemplo $\sqrt{3}$.
- Al definir al número irracional como "los números que están en la recta, que no son racionales" se apoya con que la recta numérica que no está completa, esto trae una dificultad ya que anteriormente cuando se mostró la densidad de los racionales no se mencionó que no cubría toda la recta.
- Como trabajan con$\sqrt{2}$como la magnitud de la diagonal de un cuadrado, se podría preguntar si es conmensurable con el lado del cuadrado.
- No se explicita que los números llamados no racionales, es un número irracional

- mostrar el desarrollo decimal infinito no periódico de raíz de dos.

- Al presenta la propiedad $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ con $a \geq 0$, ("si tenemos un número no negativo a, la raíz de a es el único número positivo o cero que al calcularle su cuadrado resulta a") los ejemplos presentados no tiene relación con la propiedad mencionada, sino más bien con la definición de raíz.

- La propiedad $\sqrt{a^2} = a$ con $a \geq 0$, no se ocupa para lo que se viene, la razón de presentar esta propiedad es quizás que, por ejemplo, en vez de buscar un número que su cuadrado es 4, los alumnos ya saben que ese número es dos, se le presenta la notación de $\sqrt{2^2} = \sqrt{4} = 2$.

- Al encajonar $\sqrt{2}$ con un número y otro, solo buscan donde se podrá encontrar la raíz de dos dando la instrucción "Tomando siempre el punto medio de los extremos de las desigualdades podemos encajonar", pero no muestran cuanto es su desarrollo decimal de raíz de dos (una parte de ella), solo muestra que se encuentra entre dos números racionales, sin mencionar que si se quiere ser más preciso entre que números se encuentra, esta labor no tendría termino.

¿Hay coherencia entre la declaración del objetivo y la propuesta que presenta para lograrlo?

Recordemos que el objetivo del libro es “Discriminar entre números racionales e irracionales”.

A modo general el texto en ocasiones en vez de esclarecer al alumno(a) lo desequilibra con la poca claridad del lenguaje que utiliza en algunos momentos. Pero refiriéndonos a la coherencia, de cierta forma está bien lo que muestra de números racionales (pese que en algunos momento se abusa de términos como fracción, cuociente y número racional), además en el tema de irracionalidad el/la alumno(a) se ve muy limitado a entender la esencia del concepto de número irracional ya que no se presenta ninguna situación en la que el alumno pueda adaptarse a este nuevo conocimiento, por esta razón creemos que la propuesta que presentan le faltan algunos detalles que favorecerían enormemente para lograr su objetivo y el ansiado aprendizaje esperado en el/la alumno(a).

Análisis de texto 2

Información del Texto:

- ✓ Título: Matemática 2° Año Educación Media.
- ✓ Autores: Mario Zañartu Navarro, Florencia Darrigrandi Navarro, Mauricio Ramos Rivera.
- ✓ Editorial: Santillana.
- ✓ Año: 2010.

La organización del texto respecto al número irracional plantea que el alumno se enfrentara a diversas situaciones, en las que podrá explorar, aprender, construir y consolidar conceptos relacionados con números.

- ❖ **En esta unidad aprenderás a…:** En esta sección dará a conocer al alumno(a) los principales objetivos que se espera que logre con el desarrollo de la unidad. A continuación se muestra el único objetivo que tiene relación con los números irracionales:

  "*Caracterizar los números irracionales como aquellos que no pueden ser escritos como un cuociente entre dos números enteros*".

Las preguntas que aparecen de manera espontánea serian ¿Cómo el texto lograra caracterizar los números irracionales?, ¿Qué estructura utilizara?, para contestar a estas interrogantes basta observar el orden que esté utiliza en el desarrollo y cierre de la unidad, para ello mostramos a continuación su organización y las citas respectivas a cada uno de ellos:

- ❖ **Analicemos…:** Por medio de preguntas, trabajara el alumno el razonamiento, explorando el contenido matemático que aprenderá, pondrá en práctica lo que ya sabe, compartirá sus ideas y extraerá conclusiones.

- **Glosario:** Presenta al alumno nuevos términos matemáticos relacionados con el contenido que se está desarrollando.

- **En Resumen:** se encuentran explicaciones, formalizaciones o definiciones que destacan y precisan lo que vas aprendiendo.

- **En tu cuaderno:** el alumno es sometido a resolver variadas actividades para ir construyendo los conceptos y reforzando así el aprendizaje.

- **Tic:** Cada vez que el alumno se encuentre con este icono, lo invitan a seguir aprendiendo con hipertextos, que se encuentran en la página del ministerio.

- **Recuerda que…:** Recordara un contenido o procedimiento ya aprendido y necesario para lograr los nuevos aprendizajes.

De aquí en adelante el texto se refiere a páginas de cierre de la unidad, utilizando lo siguiente:

- **No olvides que…:** recordara al alumno que debe revisar sus procedimientos, analizar la pertenencia y consistencia de las soluciones, entre otras.

Números irracionales

En cursos anteriores, aprendiste a reconocer los números racionales como aquellos que se pueden escribir como una fracción. Los números naturales y enteros son también números racionales. Los números decimales finitos también, ya que son equivalentes a una fracción decimal. En el caso de los decimales infinitos, solo si son periódicos o semiperiódicos corresponden a números racionales y, de hecho, existen procedimientos para escribir como fracción estos números.
Pero existen otros números decimales infinitos. Observa.

0,14364879657980853123465745 68...
0,00111222233333444444455556789...
1,41421356237309504880168872 42...
0,24635476809875400008764324 56...
3,14159265358979323846264338 32...

ANALICEMOS...

- ¿Algún número de estos tiene período?, ¿crees que si se conocieran más cifras decimales se podría observar algún período?, ¿por qué?
- Con los procedimientos conocidos, ¿se podrían escribir como fracción? Justifica.
- ¿Estos números son racionales?, ¿por qué?
- ¿Reconoces algún número de estos?, ¿cuál o cuáles?

Existen números decimales infinitos que, aunque se conozcan 100, 1 000 ó 1 000 000 cifras decimales, no tienen período alguno. Luego, no se podrían escribir como fracción con alguno de los procedimientos conocidos.

GLOSARIO

Número irracional: *número que no se puede obtener como cuociente de dos enteros.*
Número racional: *se puede expresar como cuociente de dos enteros.*

Un número decimal infinito que no es racional se llama **número irracional**. Es imposible escribirlos completamente, ya que tienen infinitas cifras decimales, por lo que usualmente se aproximan a la cantidad de cifras decimales necesarias, o bien se representan mediante operaciones, como $1 + \sqrt{3}$, o con constantes, como el caso del número π.

Algunos números irracionales destacados

El número irracional más conocido es el número π, que es la razón entre la longitud de una circunferencia y su diámetro, es decir:

$$\pi = \frac{\text{longitud de una circunferencia}}{\text{diámetro}}$$

Muchas han sido las aproximaciones de π en el transcurso de los años, por ejemplo, en 1987 se calculó con una precisión de más de 100 millones de cifras decimales, sin encontrarse período alguno.

Descripción de las Situaciones:

- Recuerdan que un racional se puede escribir como una fracción, y que los números naturales y enteros son números racionales.
- Menciona que los números decimales finitos son racionales porque estos son equivalentes a la fracción decimal, y que los números decimales infinitos periódico o semiperiódico también son racionales.
- Menciona que existen procedimiento para trasformar decimales infinito periódico o semiperiódicos a fracción
- Menciona que existe números decimales infinitos que no tienen periodo y que estas no se podría escribir como fracción.
- Definen "Un número decimal infinito que no es racional se llama **número irracional**"
- Menciona que los números irracionales tiene infinitas cifras decimales, y donde este número se puede presentar como una aproximación de una cantidad de cifras decimales necesarias, o por su operación, o constante (como por ejemplo π)
- Da pi como ejemplo de un número irracional, y este número es la razón entre la longitud de la circunferencia con su diámetro
- Al costado se da las definiciones "Número irracional: número que no se puede obtener como cuociente de dos enteros" y "Número racional: se puede expresar como cuociente de dos enteros"

Análisis:

- En el texto al desarrollo decimal infinito periódico lo llama decimales infinitos periódico, esto es un error como vimos anteriormente.

- Al observar los ejemplos de desarrollo decimal infinito no periódico que se entrega en el texto , los números terminan en … (sin indicar que significa los tres puntos) y no menciona que es lo que ocurre luego de esos tres puntos solo que hay infinitos términos, pero si no hay ninguna mención de los que vendrá después de esos tres puntitos puede perfectamente el estudiante pensar en que algún términos tendrá un periodo ya que solo se está mostrando solamente una parte del desarrollo decimal infinito. Las preguntas a continuación que se le presenta al alumno(a), sin esta información no podrá responder satisfactoriamente (tendría que mencionar que no hay ningún periodo en los términos que siguen del ultimo termino).

- Menciona que los números de desarrollo decimal infinito no periódico que "no se podrían escribir como fracciones con alguno de los procedimientos conocidos", dando entender que existe un procedimiento desconocido que a futuro se planteara que podría transformar los números irracionales a racionales, lo que no es así.

- Menciona que un número irracional se aproxima en cantidades de cifras decimales que se necesita, para esto se debiera dar ejemplos.

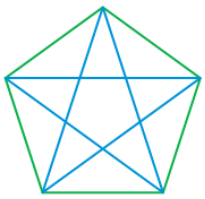
- Al definirlo al número irracional como un número que no se puede obtener como cuociente de dos enteros, tiene una dificultad para comprender esto ya que el alumno tendría que tener un número, y luego ver si ese número se puede obtener como "cuociente".

Otro importante número irracional es el número $e \approx 2{,}718281...$
El número e data del siglo XVI y aparece en forma natural cada vez que se estudian fenómenos de crecimiento o decrecimiento poblacional o se modelan las curvas, por ejemplo, que aparecen en los cables de tendido eléctrico.

El número $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}61803398...$, llamado **número áureo**, fue descubierto en la Antigüedad al observar la proporción que hay en algunas figuras geométricas (relación entre la diagonal y el lado del pentágono regular), también en algunas proporciones de la anatomía humana (por ejemplo, entre la altura de una persona y altura de su ombligo, o la relación entre el diámetro de la boca y diámetro de la nariz) y en la naturaleza (como en la disposición de los pétalos de las flores o en la distancia entre espiras de cualquier caracol).

Glosario

Número áureo:



$$\frac{\text{diagonal}}{\text{lado}} = \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$\phi \approx 1{,}61803398...$

En resumen

- Un **número irracional** es un número que no puede representarse como una fracción. Es un número decimal infinito que no tiene período.
- Algunos números irracionales destacados son π, el número e y el número de oro, ϕ.

En tu cuaderno

1. Clasifica los siguientes números en racionales e irracionales:

a. 0,737
b. 2,1732929...
c. 154,154154...
d. 23,242526...
e. 0,121231234...
f. 14,1010010001...
g. 26,0625
h. 12,4666...

2. Determina si m e y son números irracionales o no. Justifica tu decisión.

a. $m = \left(\frac{1+\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-\sqrt{6}}{2}\right)^2$

b. $y = \left(\frac{1+\sqrt{2}}{3}\right)^3 - \left(\frac{1-\sqrt{2}}{3}\right)^3$

3. Encuentra un número irracional que cumpla lo siguiente:

a. Sea mayor que $\sqrt{2}$ y menor que $\sqrt{3}$.
b. Sea mayor que $\sqrt{15}$ y menor que 4.
c. Sea mayor que 1 y menor que $\sqrt{2}$.
d. Sea mayor que $\sqrt{23}$ y menor que $\sqrt{24}$.

4. Completa con los signos <, > o =, según corresponda.

a. $\sqrt{2}$ ◯ 1,4142
b. $\sqrt{2}$ ◯ 1,41
c. $\sqrt{3}$ ◯ 1,73
d. $\sqrt{3}$ ◯ 1,733
e. $\sqrt{5}$ ◯ 2,23
f. $\sqrt{5}$ ◯ 2,236

Descripción de las Situaciones:

- Muestra los número irracional e y ϕ
- Muestra un resumen.

Análisis

- Es bueno dar ejemplos de números irracionales trascendentes
- El resumen que se da, define de dos formas el irracional, la primera es lo que no es "no se puede representar como una fracción" y la otra es lo que sí es, un desarrollo "decimal infinito que no tiene periodo", para nosotros es mejor la última definición.

Aproximación de un número irracional

Glosario

El número π es la razón entre la longitud de una circunferencia y su diámetro:

$$\pi = \frac{\text{longitud de una circunferencia}}{\text{diámetro}}$$

$$\pi \approx 3,141592...$$

Tatiana quiere decorar un viejo tambor metálico para usarlo de paragüero en la sala de clases. Tiene un trozo de cuerda muy gruesa que va a pegar en el contorno del borde superior. El diámetro del tambor mide 58,5 cm. Ella decide cortar la cuerda de 175,5 cm de longitud para que le quede justa, pero le faltaron más de 7 cm.

Analicemos...

- ¿Cuál fue el error de Tatiana?
- ¿Cómo aproximarías π?, ¿por qué?
- ¿Qué entiendes por aproximar por defecto?, ¿y por exceso?
- ¿Cuál es la mejor aproximación de π con dos cifras decimales?, ¿qué error se comete con esta aproximación?
- ¿Cuál es la ventaja de aproximar por redondeo?

Recuerda que...

***Aproximar** un número a ciertas cifras decimales consiste en encontrar un número con las cifras pedidas que esté muy próximo al número dado.*
***Aproximar por redondeo** un número consiste en dar la mejor de las aproximaciones, es decir, aquella con la que se comete un error menor.*
***Error de una aproximación** es la diferencia, en valor absoluto, entre un número y su aproximación.*

Tatiana calculó el perímetro del tambor usando 3 como aproximación de π, así: $P = 58,5 \cdot 3 = 175,5$. Después decidió aproximarlo a 3,2, para que no le quedara corta, $P = 58,5 \cdot 3,2 = 187,2$, pero, en este caso, le sobraron casi 4 cm. Entonces, decidió utilizar una calculadora y obtuvo $P = 58,5 \cdot \pi = 183,78317...$ y cortó nuevamente la cuerda, ahora de 183,8 cm, para cubrir completamente el contorno.

Al realizar una aproximación por **defecto**, se busca el número, con un determinado número de cifras decimales, que es inmediatamente menor que el dado. En cambio, para aproximar por **exceso**, se busca el número, con las cifras decimales fijadas, inmediatamente mayor.
Por ejemplo, dado el número π, al aproximarlo con dos cifras decimales:

- por defecto es 3,14.
- por exceso es 3,15.

Al utilizar la aproximación en lugar del número se comete un error, en el ejemplo anterior, los errores que se cometen son:

- por defecto: $3,141592... - 3,14 < 0,001592...$
- por exceso: $3,15 - 3,141592... < 0,008408...$

Entonces, al aproximar por **redondeo**, se escoge la aproximación con la que se comete el menor error, en este caso, $\pi \approx 3,14$.

No olvides que...

La cantidad de cifras decimales de una aproximación depende de la cantidad de cifras de los datos y también de la precisión requerida, según el contexto del problema.

Ahora, si no se conocen las cifras decimales de una raíz no exacta, por ejemplo $\sqrt{5}$, se puede aproximar por tanteo de la siguiente manera:
Sea D tal que $D^2 = 5$, entonces
$2 < D < 2,3$, ya que $2^2 = 4 < D^2 < 5,29 = 2,3^2$
$2,2 < D < 2,25$, ya que $2,2^2 = 4,84 < D^2 < 5,0625 = 2,25^2$
$2,23 < D < 2,24$, ya que $2,23^2 = 4,9729 < D^2 < 5,0176 = 2,24^2$.
Es decir, $D \approx 2,23$, aproximado con dos cifras decimales.

Descripción de las Situaciones:

- Se muestra un problema introductorio para el tema de aproximación
- Definen la aproximación por defecto cuando "se busca el número, con un determinado números de cifras decimales, que es inmediatamente menor que el dado"
- Definen la aproximación por exceso, cuando "se busca el número, con las cifras decimales fijadas, inmediatamente mayor"
- Se muestra la aproximación por defecto y por exceso de pi, y cuanto es el error (la resta entre el número y la aproximación), y con esto se menciona que aproximar por redondeo es cuando se elige "la aproximación con la que se comete el menor error"
- Se muestra una aproximación por tanteo la raíz no exacta de $\sqrt{5}$
- Se destaca en el borde de la página que pi es la razón entre la longitud de una circunferencia y su diámetro. Menciona que es aproximar, aproximar por redondeo, y error de una aproximación. Recuerda que la cantidad de cifras decimales de una aproximación va a depender la precisión que se quiera y el contexto del problema

Análisis

- En el problema introductorio, en el último corte que presenta para dar solución al problema, debiera mencionar que va sobrar un poco, pero servirá para poder decorar el viejo tambor ya que no se "notara".
- Se podría representar en la recta numérica la aproximación por defecto y exceso de π.
- Se podría dar más ejemplos sobre aproximación por redondeo π, a la décima, a la centésima, a la milésima, para que se dé cuenta el alumno que cada vez tendrá un menor error cuando el número se aproxime con más cifras decimales.
- Al dar el ejemplo de aproximación por "tanteo", da entender que $\sqrt{2}, \pi$, etc. Se conocían su desarrollo decimal infinito no periódico. ¿Pero cómo conocían su desarrollo?, ¿Porque no muestra cómo se aproxima la raíz de dos?, tendría más sentido.

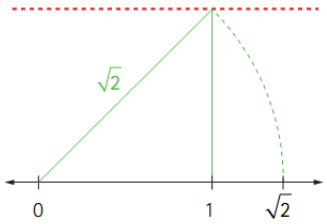
Ubicación de raíces en la recta numérica

Los números racionales son un conjunto que no completa la recta numérica; es decir, que por más números decimales que usemos, siempre existirán "huecos" entre ellos. Estos huecos corresponden a los números irracionales, como $\sqrt{2}$, que completan la recta numérica.

Analicemos...

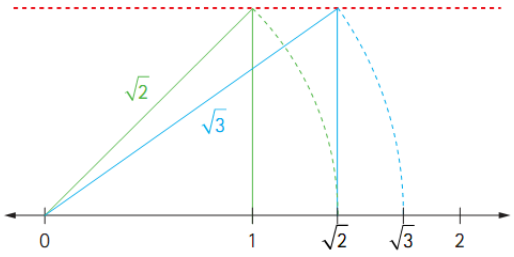
- ¿Cómo pueden ubicarse en la recta numérica algunos números irracionales?
- ¿Es posible representar todos los números correspondientes a raíces cuadradas?

Para ubicar las raíces no exactas, por ejemplo $\sqrt{2}$, se puede aplicar el teorema de Pitágoras a un triángulo rectángulo isósceles cuyos catetos miden 1 unidad: la hipotenusa de este triángulo será $\sqrt{2}$. Luego, al trazar un arco de circunferencia centrada en el punto 0 de la recta numérica, en la intersección con la recta numérica estará ubicado el número $\sqrt{2}$.



En general, para localizar de manera geométrica $\sqrt{n}$, siendo n cualquier número natural, se puede aplicar el teorema de Pitágoras a un triángulo rectángulo de catetos 1 y la raíz cuadrada del número natural anterior, es decir, $\sqrt{n-1}$.

Por ejemplo, con el segmento de longitud $\sqrt{2}$ y un segmento de longitud 1, se construye un nuevo triángulo rectángulo. Se traza un arco de circunferencia centrada en el punto 0, y de radio igual a la hipotenusa de este nuevo triángulo. La intersección de este arco con la recta numérica es el punto $\sqrt{3}$.



En resumen

Algunos números irracionales pueden representarse en la recta numérica, como, por ejemplo, las raíces cuadradas de un número natural y expresiones compuestas que contienen raíces cuadradas.

Descripción de las Situaciones:

- Explica que la recta numérica tiene "huecos", y esos "huecos" corresponde a números irracionales, y con eso se completa la recta numérica

- Da el método de ubicar en la recta numérica raíz de dos, dibujando sobre la recta un triángulo rectángulo isósceles de lado 1 y calcular la medida de la hipotenusa (raíz de dos) y luego trasladar esa medida trazando la circunferencia de radio raíz de dos, y el intercepto es donde se ubica el número raíz de dos. Luego da una forma general para ubicar un tipo de número irracional en la recta numérica.

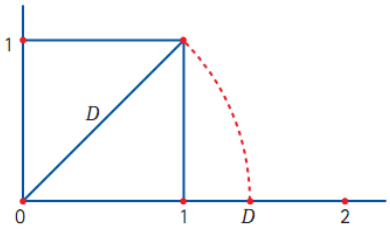
- Muestra un ejemplo como ubicar en la recta numérica $\sqrt{3}$ de partir de un triángulo rectángulo de lados $\sqrt{2}$ y 1

Análisis

- En general se presenta de buena manera como ubicar en la recta numérica los números irracionales algebraico $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$

Irracionalidad de algunas raíces cuadradas

Observa cómo se determina geométricamente la longitud de la diagonal de un cuadrado.



Analicemos...

- Según los datos de la figura, ¿cuánto mide la diagonal del cuadrado D?, ¿cómo lo supiste?
- ¿D es un decimal finito, o un decimal infinito (periódico o semiperiódico)?
- ¿Es D un número racional?, ¿se puede representar como fracción?

Aplicando el teorema de Pitágoras, se tiene que $D^2 = 2$. Luego, $D = \sqrt{2}$.
¿Cuánto es $\sqrt{2}$?

Al utilizar una calculadora, arrojará algo como: $\sqrt{2} = 1{,}4142135$

Esto **no** significa que: $\sqrt{2} = \frac{14\,142\,135}{10\,000\,000}$

Al observar el resultado de la calculadora, se podría pensar que $\sqrt{2}$ es un decimal finito, pero con muchos decimales, o bien infinito, cuyo período sea más largo que la precisión de la calculadora, o bien infinito, pero que no tenga período.
¿Es $\sqrt{2}$ un número racional? Si así fuera, $\sqrt{2}$ se debe poder escribir como una fracción irreducible, con denominador distinto de 0.

Para demostrar que $\sqrt{2}$ no es un número racional, se debe demostrar primero que:

Sea p un número natural. Si p^2 es un número par, entonces p es par.

Demostración por reducción al absurdo: supón que la propiedad **no es cierta**. Luego, debe haber un p impar cuyo cuadrado sea par. Para este número p existen números n y m naturales que cumplen:

$p = 2n + 1$ (porque p es impar)
$p^2 = 2m$ (porque p^2 es par)

Pero si $p = 2n + 1$, entonces, calculando p^2 se obtiene:
$p^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 2(2n^2 + 2n) + 1$, y, necesariamente, p^2 es impar.
Por lo tanto, p^2 es un número par e impar. Lo cual es una contradicción.
Entonces, la suposición era incorrecta y la propiedad queda demostrada.

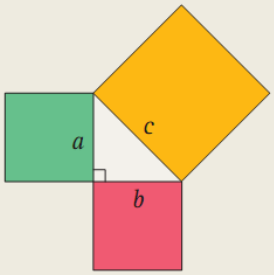
Glosario

Diagonal: *segmento que une dos vértices no consecutivos de un polígono.*
Demostración: *conjunto ordenado de argumentos que permiten obtener una verdad como consecuencia lógica de otra.*

Recuerda que...

Teorema de Pitágoras:
Si a y b son los catetos y c la hipotenusa de un triángulo rectángulo, entonces:

$$a^2 + b^2 = c^2$$



Glosario

Reducción al absurdo: *argumento de demostración, que consiste en suponer que la propiedad que se quiere demostrar* ***no es cierta*** *y deducir a partir de esto una contradicción. Entonces, como tal contradicción se debe a que la suposición era incorrecta, la propiedad debe ser cierta.*

Descripción de las Situaciones:

- Muestra un cuadrado de lado 1 sobre una recta numérica y traslada la medida de la diagonal a la recta numérica, designado el punto D
- Al aplicar el teorema Pitágoras, D=$\sqrt{2}$. Pregunta cuánto es $\sqrt{2}$.
- Muestra que lo que aparece en la calculadora es $\sqrt{2} = 1.4142135$
- Pregunta ¿Es $\sqrt{2}$ un número racional?, y si la respuesta es afirmativa , $\sqrt{2}$ se debe poder escribir como $\sqrt{2} = \frac{14142135}{10000000}$
- Demuestra por el absurdo que, si p^2 es par entonces p es par. (p es natural)

Análisis

- Al ocupar la calculador, el número que aparece en el visor 1,414213562 y si a este mismo número se eleva al cuadrado seria 2 (redondea la calculadora), pero el alumno como se presenta en el libro tendría un obstáculo porque ocupan el símbolo de igualdad en $\sqrt{2} = 1.4142135$, sin expresar los tres puntos y que no tiene periodo. Solo aclara que no es lo mismo $\sqrt{2} = \frac{14142135}{10000000}$

Ahora, se puede demostrar que $\sqrt{2}$ **no es un número racional.**

Demostración por reducción al absurdo:

Supón que $\sqrt{2}$ es un número racional, en tal caso existen p y q, primos relativos, tales que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ con $q \neq 0$. De modo que $p = \sqrt{2}q$, y $p^2 = 2q^2$, por lo que p^2 es par.

Pero si p^2 es par, por la demostración anterior, se sabe que p debe ser par.

Si p es par, existe un natural n tal que $p = 2n$.

Ahora, $\sqrt{2} = \frac{p}{q} = \frac{2n}{q}$, y elevando al cuadrado $2 = \frac{(2n)^2}{q^2}$ de donde: $2q^2 = 4n^2$. Simplificando se obtiene: $q^2 = 2n^2$.

Por tanto, q^2 es par y, como ya vimos, q es par.

En consecuencia, si $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, entonces p y q son ambos pares. Entonces, no es posible que exista una fracción irreducible. Pero todo número racional debe tener una fracción irreducible que lo represente. Esta es la contradicción. Luego, $\sqrt{2}$ **no es un número racional**. Por lo tanto, se dice que $\sqrt{2}$ es un número **irracional**.

GLOSARIO

Número primo: *número cuyos divisores son el 1 y él mismo.*

GLOSARIO

Fracción irreducible: *es aquella cuyo numerador y denominador no poseen divisores comunes distintos de 1.*

La medida de la diagonal de un cuadrado, que hoy nos parece natural, generó una crisis en la escuela pitagórica, en el siglo VI a. C. en Grecia pues aparecieron cantidades "inexpresables"; es decir, que no se pueden representar como una fracción, algo que los egipcios y los babilonios ya dominaban. Este descubrimiento afectó el curso del pensamiento matemático griego y les hizo abandonar la idea de que la medición sea un gran puente entre la geometría y la aritmética de los números racionales. De hecho, el conjunto de números racionales es notoriamente inadecuado para propósitos geométricos simples, ya que en su gran mayoría aparecen números irracionales.

EN TU CUADERNO

1. De manera similar, demuestra que $\sqrt{3}$ y $\sqrt{5}$ no son números racionales. Recuerda demostrar primero la propiedad anterior correspondiente.

Descripción de las Situaciones:

- demuestra que $\sqrt{2}$ no es número racional, por el método del absurdo
- explica que la medida de la diagonal de un cuadrado fue un problema importante en la antigüedad y su consecuencia en el tiempo
- pide que demuestre de la misma manera que $\sqrt{3}$ y $\sqrt{5}$ no son racionales.

Análisis

- En páginas anteriores definen al número irracional como "número que no se puede obtener como cuociente de dos enteros", pero aquí demuestra que no es racional, ¿Por qué no hablan de irracional?. Como se dijo anteriormente, hay problemas en ocupar la calculadora para mostrar al alumno porque elevar al cuadrado la cifra que aparece en el visor da 2.
- La demostración planteada por este texto afirma que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ para luego llegar a una contradicción, para demostrar a través del método del absurdo. Pero el paso donde muestran que $p = \sqrt{2}q$, y $p^2 = 2q^2$ el alumno tendría un obstáculo ya que no explica el libro como $\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$ para llegar a la segunda ecuación.

¿Hay coherencia entre la declaración del objetivo y la propuesta que presenta para lograrlo?

Recordemos que el objetivo del libro es "Caracterizar los números irracionales como aquellos que no pueden ser escrito como cuociente entre dos números".

La coherencia está bien en el tema de irracionalidad, dando características con la demostración por el absurdo que los números irracionales no se puede ser escrito como cuociente entre dos números y al expresarlo con su desarrollo decimal. Pero como el texto anterior se ve muy limitado a entender la esencia del concepto de número irracional ya que no se presenta ninguna situación acorde para que el/la alumno(a) pueda adaptarse a este nuevo conocimiento

Conclusión de los dos textos

De cierta forma ambos textos escolares cumplen con lo que solicita el currículum chileno, pero lo que definitivamente no se refleja es una situación de adaptación a este nuevo conocimiento, (número irracional), como lo plantea Brousseau.

Es posible ver que en el texto Nº 1 se limita a presentar el número irracional a través de la demostración por el absurdo, y esta no nace del alumno, si no de la explicación que el profesor hace.

Sin embargo en el texto Nº 2, al contrario del texto Nº1, no presenta una demostración por el absurdo, sino más bien, presenta el numero irracional con una definición apoyada de ejemplos.

Es importante mencionar además que dentro del contenido del Mineduc se expresa la siguiente frase "[…] Construcción de decimales no periódicos […]" ésta en ninguno de los dos textos se puede apreciar.

Cabe señalar que ambos textos ocupan parte de la historia del número irracional, centrando su mirada solamente en la demostración del absurdo que hacen los griegos, excluyendo a Cantor y Dedekind, quienes fueron los que formalizaron el lenguaje y definición del número irracional, como se menciona en el método histórico crítico.

Planes de clases sobre el número irracional diseñados por profesores de enseñanza media

A continuación, se muestra materia vista en clases de distintos profesores, de las cuales se extraerán frases para comentar cada una de ellas y luego hacer un comentario general.

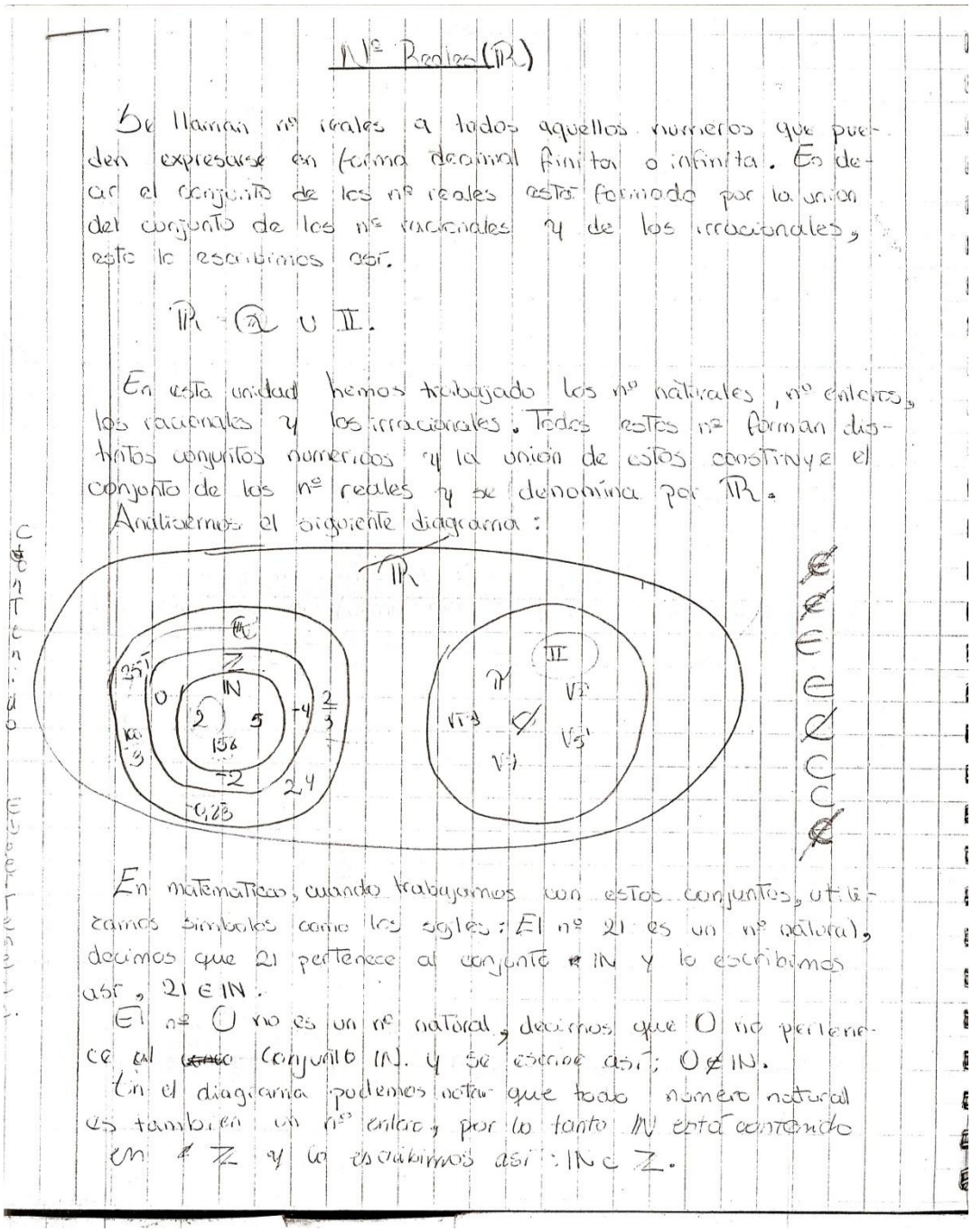
Nota: Omitiremos los datos de los establecimiento y nos referiremos a materia vista en clases del profesor A y B.

Objetivo: Analizar registros de alumnos al momento que el profesor inicia el tratamiento del concepto de número irracional.

Pregunta de Investigación: ¿Cómo es el tratamiento que hacen los profesores del concepto de número irracional, en el caso particular de $\sqrt{2}$?

Respuesta: Esto se responde en las páginas siguientes, debido a que se presentan imágenes.

Materia vista en clases del profesor A



Nº Reales ($\mathbb{R}$)

Se llaman nº reales a todos aquellos numeros que pueden expresarse en forma decimal finita o infinita. Es decir el conjunto de los nº reales esta formado por la union del conjunto de los nº racionales y de los irracionales, esto lo escribimos asi.

$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.

En esta unidad hemos trabajado los nº naturales, nº enteros, los racionales y los irracionales. Todos estos nº forman distintos conjuntos numericos y la union de estos constituye el conjunto de los nº reales y se denomina por $\mathbb{R}$.

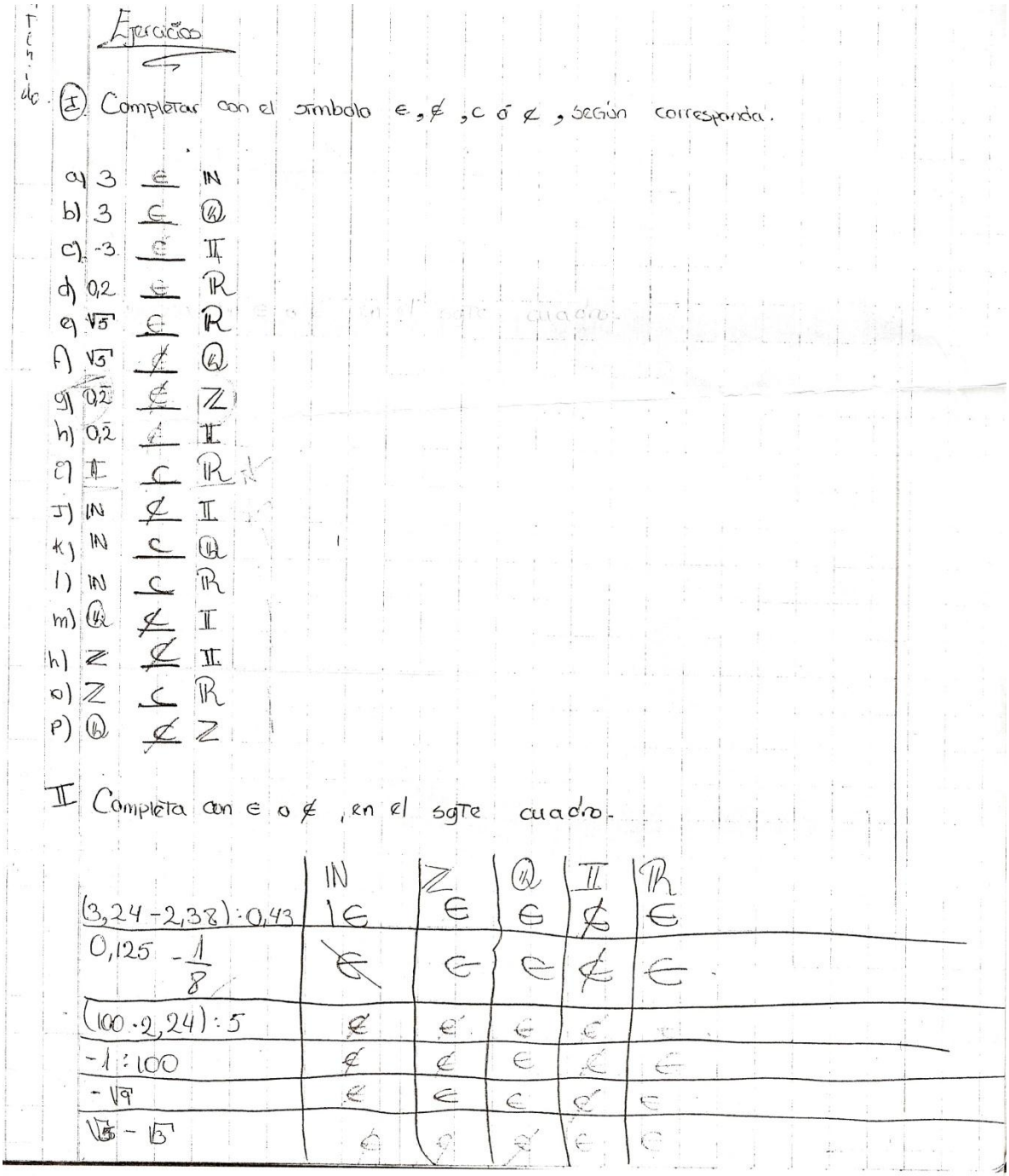
Analizemos el siguiente diagrama:

En matematicas, cuando trabajamos con estos conjuntos, utilizamos simbolos como los sigtes: El nº 21 es un nº natural, decimos que 21 pertenece al conjunto ℕ IN y lo escribimos asi, $21 \in \mathbb{N}$.

El nº 0 no es un nº natural, decimos que 0 no pertenece al conjunto IN. y se escribe asi: $0 \notin \mathbb{N}$.

En el diagrama podemos notar que todo numero natural es tambien un nº entero, por lo tanto IN esta contenido en ℤ y lo escribimos asi: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

Ningun nº entero es un nº irracional, decimos que el conjunto ℤ no esta contenido en el conjunto $\mathbb{I}$ y se escribe asi: $\mathbb{Z} \not\subset \mathbb{I}$



Ejercicios

I) Completar con el símbolo $\in$, $\notin$, $\subset$ ó $\not\subset$, según corresponda.

a) 3 $\in$ $\mathbb{N}$
b) 3 $\in$ $\mathbb{Q}$
c) -3 $\in$ $\mathbb{I}$
d) 0,2 $\in$ $\mathbb{R}$
e) $\sqrt{5}$ $\in$ $\mathbb{R}$
f) $\sqrt{5}$ $\notin$ $\mathbb{Q}$
g) $0,\overline{2}$ $\in$ $\mathbb{Z}$
h) $0,\overline{2}$ $\notin$ $\mathbb{I}$
i) $\mathbb{I}$ $\subset$ $\mathbb{R}$
j) $\mathbb{N}$ $\notin$ $\mathbb{I}$
k) $\mathbb{N}$ $\subset$ $\mathbb{Q}$
l) $\mathbb{N}$ $\subset$ $\mathbb{R}$
m) $\mathbb{Q}$ $\notin$ $\mathbb{I}$
n) $\mathbb{Z}$ $\notin$ $\mathbb{I}$
o) $\mathbb{Z}$ $\subset$ $\mathbb{R}$
p) $\mathbb{Q}$ $\notin$ $\mathbb{Z}$

II Completa con $\in$ o $\notin$, en el sgte cuadro.

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{I}$	$\mathbb{R}$
$(3,24-2,38):0,43$	$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$
$0,125 - \frac{1}{8}$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$
$(100 \cdot 2,24):5$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$
$-1:100$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$
$-\sqrt{9}$	$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$
$\sqrt{5} - \sqrt{5}$	$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$

Frase para comentar:

1. "*Se llaman números reales a todos aquellos números que pueden expresarse en forma decimal finita o infinito, Es decir, el conjunto de los reales está formado por la unión*

del conjunto de los números racionales y de los irracionales".

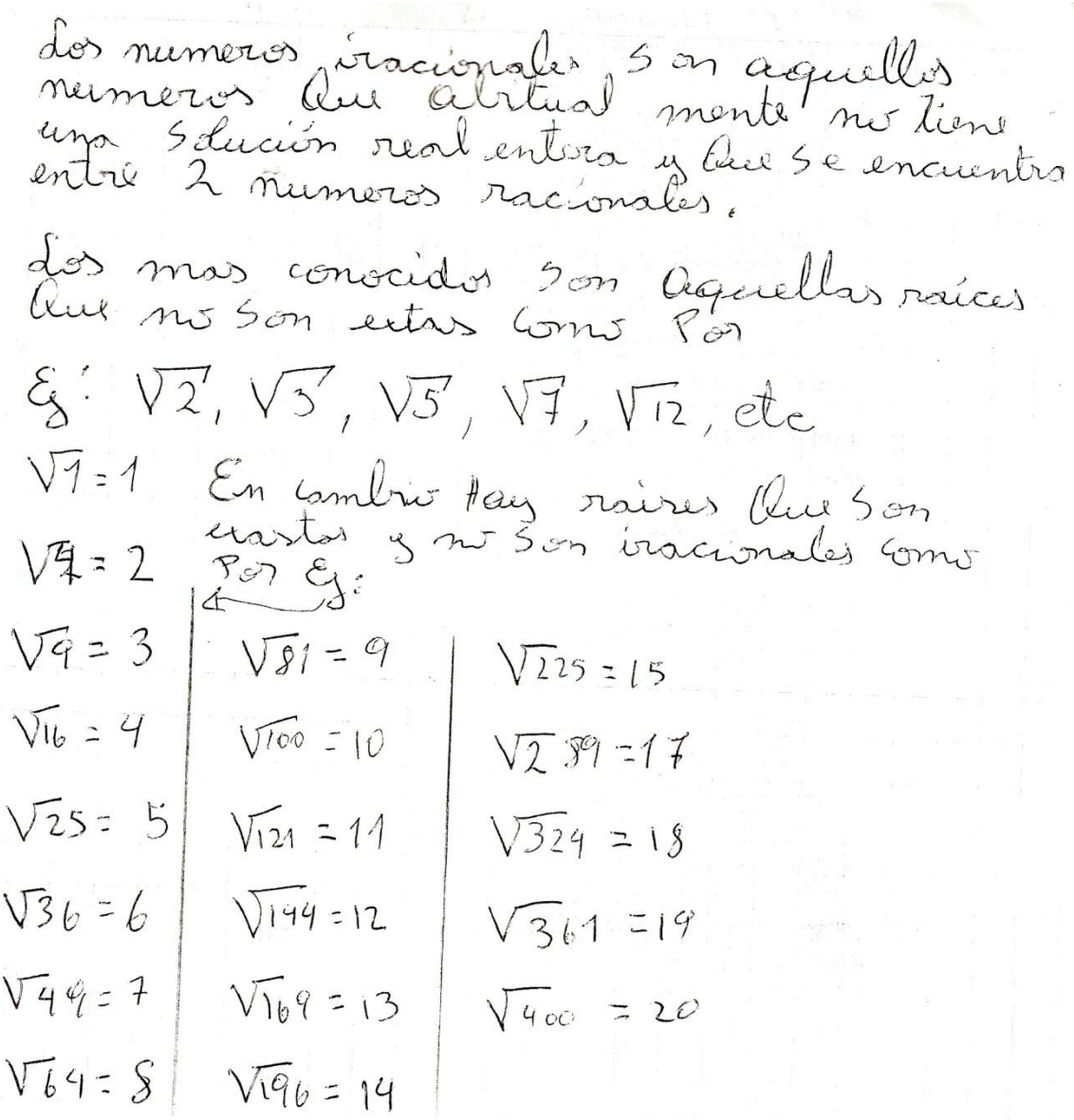
Observar que: En vez de mencionar que hay números que se expresan como desarrollos decimales infinitos dice "*decimal infinito*".

Comentario General: Como vemos, para evitar el difícil tratamiento del infinito y la convergencia de los números irracionales en la enseñanza media, el profesor del colegio A privilegia afirmaciones de la axiomática de la teoría de conjuntos. Además, muestra el número irracional en base a algunos elementos que presenta en el diagrama. Otra cosa que podemos objetar es que no presenta ninguna situación problemática en la cual haga surgir el número irracional, o como lo menciona (Isoda, 2009, pág. 100) "[…] un buen problema permite al alumno alcanzar un conocimiento nuevo al poner en juego los ya adquiridos en clases anteriores", solo se limita a escribir algunos ejemplos como $\sqrt{2}, \sqrt{13}, \pi$, etc. Y la pregunta que tendríamos que hacernos de inmediato ¿entregar de esta forma los números irracionales, provocara una adaptación de este nuevo conocimiento en el alumno? Con lo que define Brousseau creemos que no, porque no nace del alumno crear ese diagrama, sino que se lo dan y lo único que tienen que hacer, es reproducir lo que dijo el profesor del diagrama y decidir, esto lo podemos corroborar con los tipos de ejercicios que el profesor plantea a los alumnos. Otra cosa que se puede apreciar es que el profesor no toma ninguna parte histórica del número irracional, es decir, no hace un método histórico crítico del tema.

Finalmente, podríamos decir que abordar a los números irracionales a partir de los números reales no es lo que expresa el Curriculum, sino más bien, indica que hay que detenerse en esta sub-unidad de números de segundo año medio.

Materia vista en clases del profesor B

Hoja 1



Hoja 2

Un numero real muy conocido es el numero $\pi = 3,14$, que es el cociente constante entre el Perimetro de una circunferencia y su diametro. Esta relación Proporcional entre el diametro y el Perimetro de la circunferencia se conocia desde la antigüedad Por los Pueblos egipcios, Babilonios, Chinos, Sumerios y Hebreos entre otros. Además todos ellos tenian estimaciones del numero R $\pi = 3,14$ como por ej: en el Papiro de RH ind en los años 1800 antes de nuestra era.

El area de un circulo como la de un cuadrado cuyo lado es igual al diametro del circulo disminuido en $\frac{1}{9}$, lo que realmente quiere decir es que esta medida los egipcios la aproximaron como π con el numero de $\frac{256}{81}$.

En libro de la Biblia llamado reyes se lee: "Hizo fundir Hari mismo un mar de bodas de 10 de un lado a otro Perfectamente redondo, su altura era de 5 codos y los ceñia alrededor un cordon de 30 codos significa esto que el Pueblo Hebreo consideraba π un numero aproximado a 3.

En la antigua China se aproximaba π como 3,1724 y en Babilonia se aproxima Por el numero $\frac{31}{8} = 3,875$.

Con el transcurso de los años a ido evolucionando la medida exacta del numero π y se demostro que este numero no es una fracción, y Pasó a llamarse numero irracional.

Frases para comentar hoja 1

1. "*Los números irracionales son aquellos números que habitualmente no tienen solución real entera…*"

Comentario*:* ¿a qué se referirá con habitualmente no tiene solución real entera?, pero que ocurre con $x^2 = 0,09$ o $x^2 = \frac{1}{9}$ en ambos casos no tienen solución real entera, pero esto no quiere decir que sean irracionales. Ahora, lo otro es ¿se refiere a solución de una ecuación? Realmente no queda muy claro.

i. *"Los números irracionales son aquellos que se encuentran entre dos números racionales"*

Comentario: Si bien, esta afirmación es correcta pero creemos que no es suficiente si lo que se busca es brindar una característica de los números irracionales, debido a que también está la propiedad de densidad de los números racionales.

Comentario General: si bien, define lo que son los números irracionales, pero al igual que el profesor anterior no se presenta ninguna situación problemática, en donde los números que da como ejemplos aparezcan como una herramienta que permita resolver un problema. Análogamente al profeso A, se limitan a mencionar algunos ejemplos de números irracionales, entonces el alumno será capaz de saber y discriminar entre otros números, es decir, se lograran los aprendizajes esperados mencionados en el currículum. Otra cosa, fíjense que este profesor se dedica a dar más ejemplos de números que no son irracionales para tratar de mencionar que no todas las raíces cuadradas son números irracionales.

Frase para comentar hoja 2

1. "$\pi = 3{,}14$".

Comentario: Esperamos que ese signo "$=$" sea un error que comete el alumno al transcribir lo que expresa el profesor, ya que todos sabemos que el símbolo de aproximación es "$\approx$". Tampoco manifiesta que PI aproximado a la centésima es 3,14.

2. "*Con el transcurso de los años ha ido evolucionando la medida exacta del número* π *y se demostró que este número no es una fracción…*"

Comentario: Lo que ha ido evolucionando en el número π son sus aproximaciones. Por otro lado, lo que demostró Lindemann en 1882 fue que el número π era trascedente, esto es, que no es raíz de ninguna ecuación polinómica de coeficientes racionales, cualquiera que sea su grado, pero no que este número no es una fracción.

Comentario General: Este profesor B solo presenta una definición y da ejemplos de números irracionales, pero con esto el alumno quedara completamente claro con el concepto de número irracional, dicho de otra forma, evita darse el tiempo de buscar problemas que cuestionen al alumno y que a su vez este sea participe de su propio aprendizaje. Esto último concuerda con lo que afirma (Chirinos, 2004, pág. 50) "*Debemos considerar que no es lo mismo DESCUBRIR el número que CONSTRUIRLO, no es de extrañar entonces, que los estudiantes tengan una incompletitud en cuanto a su relación con los irracionales".*

Respuestas y análisis de cuestionario realizado a alumnos sobre irracionalidad

Objetivo: Analizar la comprensión del objeto número irracional en alumno de segundo medio.

Instrumento: Cuestionario.

El cuestionario que se muestra se desglosa en tres actividades, mencionando en cada una de ellas el objetivo respectivamente, para luego ser analizadas. Ahora se muestra el cuestionario utilizado:

Actividad 1
1.- ¿El número $\frac{5}{6}$ pertenece al conjunto de los racionales $(\mathbb{Q})$ o al conjunto de los irracionales (II)?. Justifica tu respuesta.
2.- ¿El número $0,3\overline{6}$ pertenece al conjunto de los racionales $(\mathbb{Q})$ o al conjunto de los irracionales (II)?. Justifica tu respuesta.
3.- ¿El número $\sqrt{2}$ pertenece al conjunto de los racionales $(\mathbb{Q})$ o al conjunto de los irracionales (II)?. Justifica tu respuesta.
Actividad 2
1.- ¿De qué otra forma puedes escribir el número $\frac{5}{6}$?. Justifica tu respuesta.
2.- ¿De qué otra forma puedes escribir el número $0,3\overline{6}$?. Justifica tu respuesta.
3.- ¿De qué otra forma puedes escribir el número $\sqrt{2}$?. Justifica tu respuesta.

Actividad 3

1.- De los siguientes números, responde a que conjunto (s) numérico (s) corresponden:

Instrucciones:

- Marque con el símbolo “ ✓ ”, si el número pertenece al conjunto.
- Marque con el símbolo “x”, si el número no pertenece al conjunto.

Puede utilizar calculadora.

	3,141592654	$\sqrt{0}$	1	0,333...	π	$\sqrt{2}$	2^{10}	$0,3\overline{6}$	$\frac{2}{3}$	$-\sqrt{100}$	3	$0,\overline{125}$	$\sqrt[3]{3}$	$-\frac{7}{20}$
$\mathbb{N}$														
$\mathbb{Z}$														
$\mathbb{Q}$														
II														
$\mathbb{R}$														

Actividad 1

Objetivo: Observar si los alumnos diferencian distintas formas de expresar un número Racional e Irracional.

Actividad 1

1.- ¿El numero $\frac{5}{6}$ pertenece al conjunto de los racionales ($\mathbb{Q}$) ó al conjunto de los irracionales($\mathbb{I}$)

Justifica tu respuesta.

Respuestas

Alumno A1 Pertenece a los racionales (los fracciones pertene cen a estos)
Alumno A2 Yo creo que pertenece al los irracionales, ya que al dividir, no dará un nº entero, sino que será decimal.
Alumno A3 El numero $\frac{5}{6}$ pertenece al conjunto de los racionales (Q)
Alumno A4 Creo que racional, pero no recuerdo muy bien el porqué.
Alumno A5 Este nº pertenece al conjunto de los racionales. Ya que en este entran nº enteros, nº positivos o negativos y fracciones
Alumno A6 El nº $\frac{5}{6}$ pertenece al conjunto de nº llamado Racional, dado que el conjunto irracional corresponde a todo los nº a fracción y Decimal.

Análisis

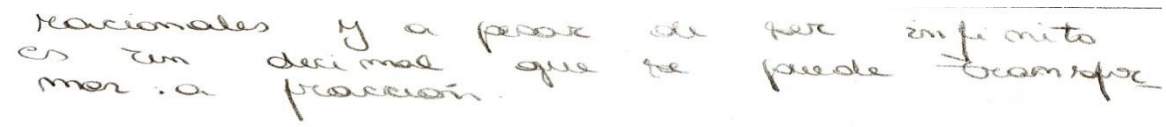
La respuesta A2 refleja que el alumno no logra los aprendizajes esperados, es decir, “Diferenciar entre número entero, racional e irracional […]”. Pero a su vez este (A2)

asocia el número irracional con decimal y no con desarrollo decimal infinito no periódico.

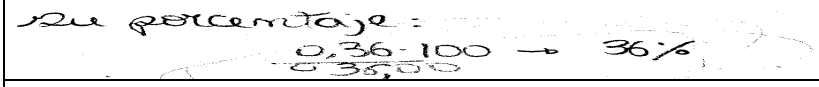
Es interesante observar que los alumnos A1, A3, A4, A5 y A6 no tienen problemas en expresar el número racional de la forma $\frac{a}{b}$; $a,b \in \mathbb{Z}; b \neq 0$, es decir, cumplen en cierta forma con el mapa de progreso de Números y Operaciones, específicamente en la primera dimensión (Comprensión y uso de los números).

2.- ¿El numero $0,3\bar{6}$ pertenece al conjunto de los racionales ($\mathbb{Q}$) ó al conjunto de los irracionales ($\bar{\mathbb{I}}$)? Justifica tu respuesta.

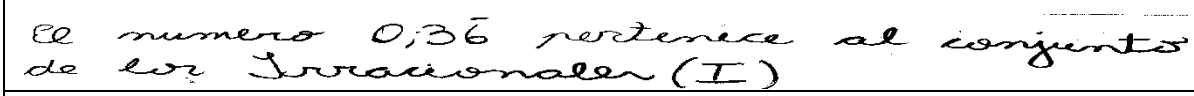
Alumno A1



Alumno A2

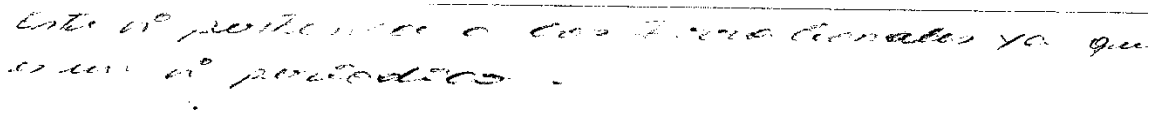


Alumno A3



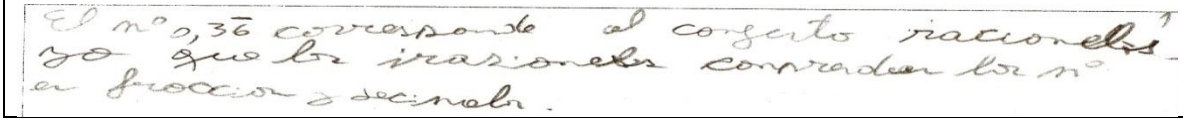
Alumno A4

Alumno A5



Este número pertenece a los irracionales ya que es un número periódico.

Alumno A6



Análisis

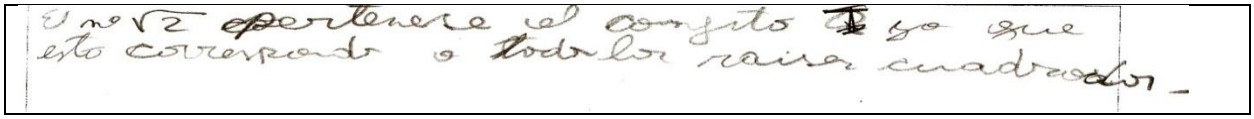
Lo interesante de los alumnos A2, A3 y A5, es que a pesar de que se pregunta un aprendizaje esperado, es decir, "[…] los racionales los expresan en notación decimal […]", sus respuestas reflejan lo contrario.

Las respuestas de A3 y A5 no cumplen con los aprendizajes esperados que nos dice: "Diferenciar entre número […], racional e irracional", porque un desarrollo decimal infinito semiperiódico lo caracterizan como un número irracional.

Lo que reflejan las respuestas A1, A4 y A6, más específicamente A1 y A6 es que si logran fundamentar sus respuestas, es decir, que hubo en ellos Adaptación de un contenido como los menciona Brousseau.

3.- ¿El numero $\sqrt{2}$ pertenece al conjunto de los racionales ($\mathbb{Q}$) ó al conjunto de los irracionales ($\mathbb{I}$)? Justifica tu respuesta.

Alumno A1 Irracionales. Nunca será un número exacto.
Alumno A2 No lo recuerdo.
Alumno A3 El numero $\sqrt{2}$ pertenece al conjunto de los Irracionales (I)
Alumno A4 Irracionales.
Alumno A5 NO CONTESTA
Alumno A6



Análisis

Si bien, las respuestas A1, A3, A4 y A6 son correctas en afirmar que $\sqrt{2}$ pertenece a los números irracionales, fijémonos en la justificación del alumno A6:

Notemos cuando dice que todas las raíces cuadradas pertenecen al conjunto de los números irracionales, dejando entre ver una característica que le da a estos, pero que ocurre con la $\sqrt{4}$, $\sqrt{\frac{1}{9}}$, etc. Son ¿Irracionales?, este comentario es el mismo que se hace en los Objetivos Fundamentales (Números), donde se afirma: "[…] la extracción de raíz motiva los irracionales […]", y donde no se dice que solo algunas raíces pertenecen al conjunto de los irracionales.

También donde surgen algunas dudas es cuando el alumno A1 justifica diciendo nunca será número exacto, quedándonos como inquietud que hubiera respondido si se le presentara el número $\sqrt{0,\bar{1}}$.

Actividad 2

Objetivo: Identificar distintas formas de escrituras de los números racionales e irracionales.

Actividad 2

1. ¿De qué otra forma puedes escribir este el número $\frac{5}{6}$? Justifica tu respuesta

Alumno A1 $\frac{5}{6} = 0,8\overline{3}$ como decimal
Alumno A2 Se puede escribir como su resultado 0,83.
Alumno A3 Puede escribirse 5:6 o 5 en a 6, $(0,8\overline{3})$
Alumno A4 $0,8\overline{3}$
Alumno A5 50 : 6 = 0,83 Se puede expresar en forma de decimal, resultando el nº 0,83.
Alumno A6 En forma de fracción $\frac{5}{6}$; 5:6; 5 es a 6 o $0,8\overline{3}$

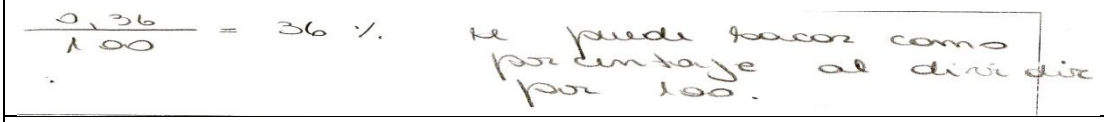
Análisis

En las respuestas A3 y A6 los alumnos están asociando razones con números racionales, es decir, no se está cumpliendo con la primera dimensión de los mapas de progreso (comprensión y uso de los números) que nos dice:

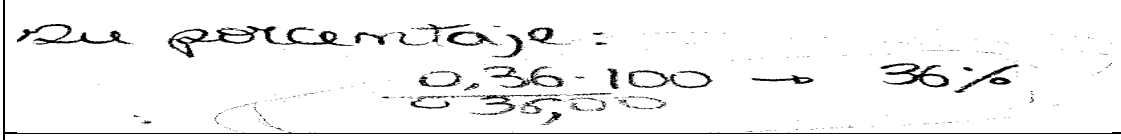
"[…] se refiere a la comprensión del significado de los números […]"

2. ¿De qué otra forma puedes escribir este el número $0,3\overline{6}$? Justifica tu respuesta.

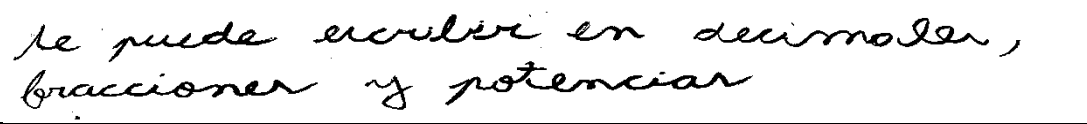
Alumno A1



Alumno A2

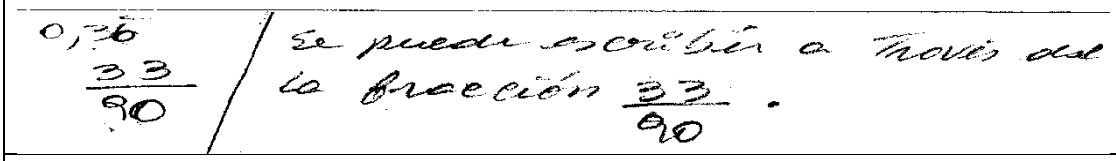


Alumno A3



Alumno A4

Alumno A5



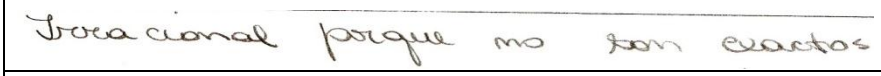
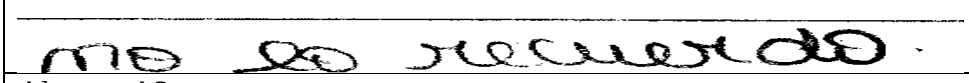
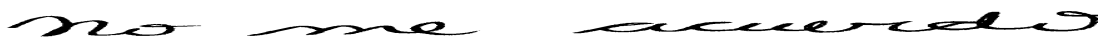
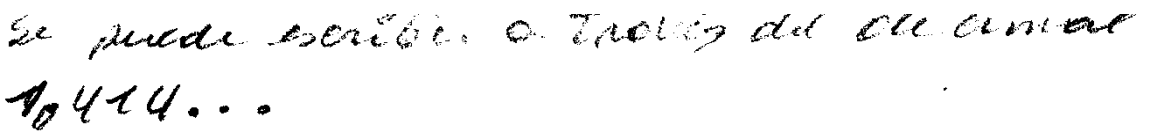
Alumno A6

Análisis

En las respuestas A1, A2 y A4 identifican el número $0,3\overline{6}$ con porcentaje y en las respuestas A3 y A6 con potencias y al igual que la pregunta anterior no se está cumpliendo con la primera dimensión de los mapas de progreso (comprensión y

uso de los números) que nos dice: "[…] se refiere a la comprensión del significado de los números […]"

3. ¿De qué otra forma puedes escribir este el número $\sqrt{2}$? Justifica tu respuesta.

Alumno A1 
Alumno A2 
Alumno A3 
Alumno A4
Alumno A5 
Alumno A6

Análisis

En la respuesta A1 deja entre ver que el número irracional $\sqrt{2}$ tiene limitación al escribirse como un desarrollo decimal infinito no periódico, pero no se aprecia siquiera una aproximación, un truncamiento u otra forma de expresar el número, como bien lo hacen los alumnos A5 y A6.

Actividad 3

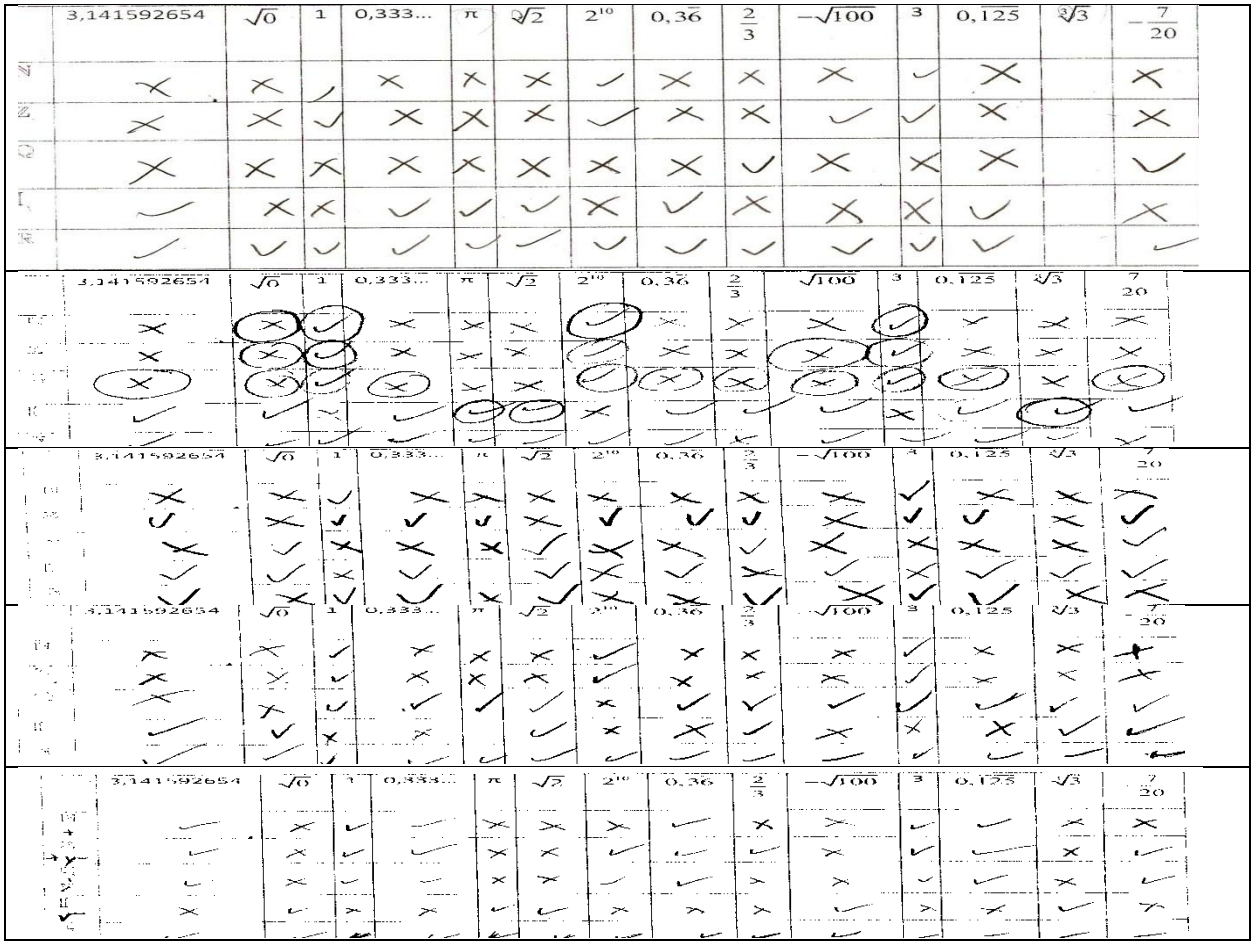
Objetivo: Distinguir entre números racional e irracional, comprender la forma de expresar los números enteros, racionales e irracionales, y los números reales como aquellos que corresponde a la unión de los números racionales e irracionales.

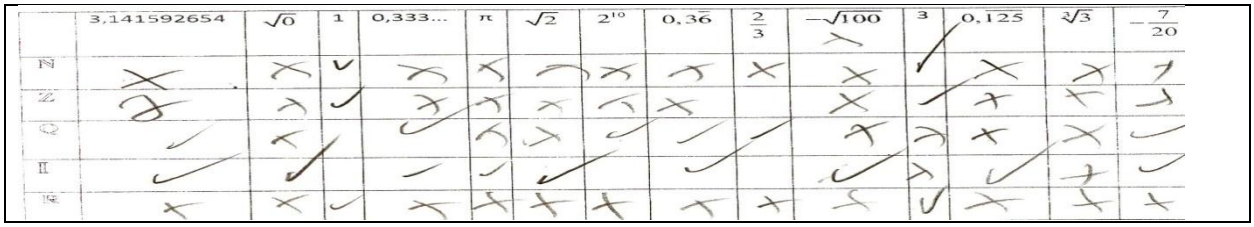
Actividad 3

1.- De los siguientes números, responde a que conjunto(s) numérico(s) pertenece.

Instrucciones:

- Marque con el símbolo " ✓ " si el número pertenece al conjunto.
- Marque con el símbolo "**x**" si el número no pertenece al conjunto. .
- Puede utilizar calculadora.





Análisis

Antes de analizar es conveniente aclarar que para lograr el objetivo de esta actividad, se expresan los números racionales e irracionales de la siguiente forma (página siguiente):

Están dando una característica a los números irracionales que no siempre se cumple, lo podemos corroborar con las respuestas que dan los alumnos A2, A3, A4, A5 y A6 donde dicen que $\sqrt{0}$ pertenece a los irracionales y vuelve a ocurrir lo mismo cuando responden los alumnos A2, A3, A5 y A6 que $-\sqrt{100}$ también es un número irracional.

Todos los alumnos asocian desarrollo decimal finito e infinito (periódico y semiperiódico) con números irracionales, esto se aprecia con las respuestas que dan de los números $3{,}141592654$, $0{,}333\ldots$, $0{,}3\overline{6}$ y $0{,}\overline{125}$, de otra forma se aprecia que están teniendo problemas de expresión de un número racional, es decir, no se logra el aprendizaje esperado que pide el Currículum.

Algo que nos llama rotundamente la atención, es que los alumnos no tienen problemas en reconocer el número racional expresado de la forma $\frac{a}{b};\ a,b\in\mathbb{Z};b\neq 0$, porque fijémonos en las respuestas que dan de $\frac{2}{3}$ y $-\frac{7}{20}$.

Por último, los alumnos A2, A3 y A6 tienen problemas en comprender los números reales como aquellos que corresponden a la unión de los números racionales e irracionales, es decir, no se cumple el primer objetivo fundamental de segundo medio.

Comentario general

Se aprecia poco dominio en las formas de expresar un número racional, y lamentablemente para lograr entender los números irracionales, el alumno debe saber trabajar con desarrollos decimales y caracterizarlos para que se logre acercar a la idea de encajonamiento de Cantor.

Propuesta

Objetivo General: Diseñar una situación de enseñanza que favorezca el aprendizaje del concepto de número irracional, en el caso particular de $\sqrt{2}$.

Nuestro diseño de clase consiste en la resolución de problemas separado en tres partes, la primera de ellas consiste en problemas que involucran el infinito, la segunda en un problema que utilice los números racionales expresados en forma de desarrollos decimales finitos e infinitos periódicos y semiperiódicos, para luego finalizar con un problema que introduce el concepto de número irracional.

Parte I

Problemas para la clase que involucran el Infinito.

Objetivo pregunta 1: Que el alumno involucre la idea de límite.

Una forma de enfrentar al alumno con ejercicios que involucre el infinito, seria plantear un ejercicio como lo indica (Chirinos, 2004, pág. 60) del tipo:

Pregunta 1

1. ¿A qué es igual: 1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+1-1…? Justifique su respuesta.

Análisis Pregunta 1

❖ Una respuesta óptima seria que algunos alumnos pueden contestar que el resultado no existe, explicando que partió enumerando cada número y se dio cuenta que en las posiciones pares el término da 1 y que en las posiciones impares da -1.

❖ Los alumnos al enfrentarse a esta interrogante, podría caer en la tentativa de responder que es igualdad cero, ya que

podría asociar de la siguiente forma (1-1)+ (1-1)+ (1-1)+ (1-1)+ (1-1)+ (1-1)…

❖ Otros alumnos, quizás podrían responder que eso es igual a 1 o -1 truncando la expresión.

❖ Y otros, quizás contesten sencillamente que no saben sin justificar.

Objetivo pregunta 2: Que el alumno involucre la idea de límite y serie geométrica.

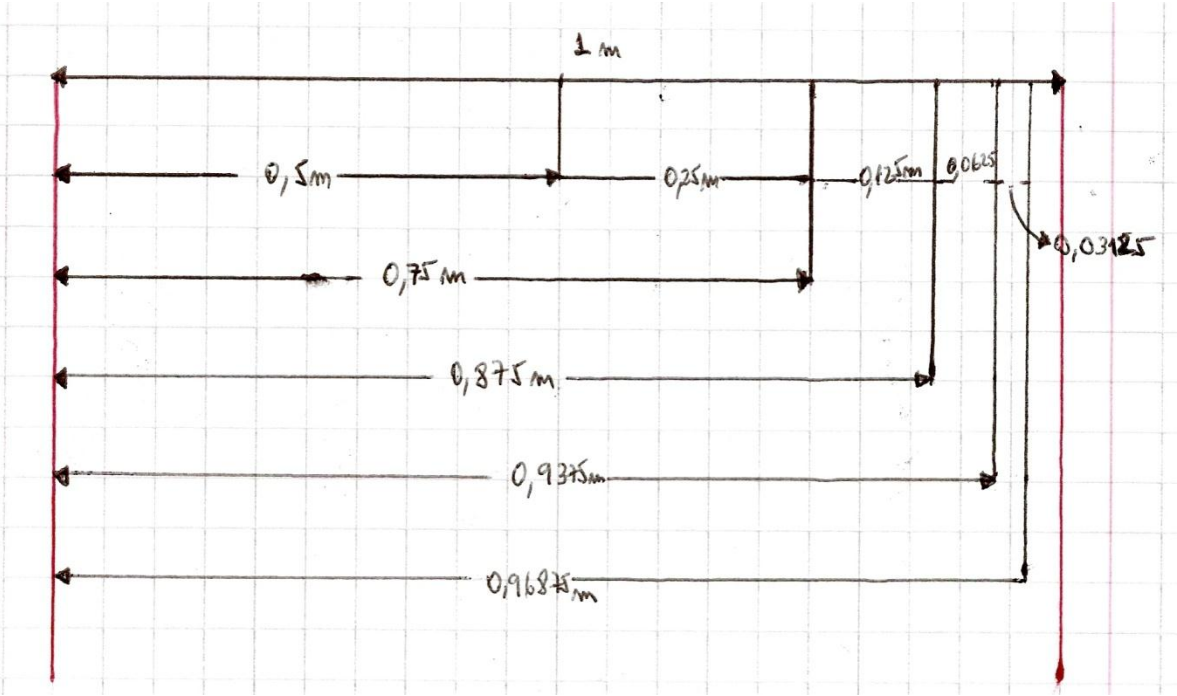
Pregunta 2

Otra forma, seria enfrentar al niño a la siguiente situación problemática:

1. Imaginase una regla de medida 1 m

2. Tomen en primer lugar la mitad de la medida original (0,5m), luego a esta mitad agreguen la mitad (0,25m) y a esta vuelvan agregar la mitad de esta última (0,125m) y reiteremos sucesivamente este proceso.

Esta situación puede ir acompañado de una figura gráfica, como por ejemplo:



Y preguntamos:

1. ¿Qué ocurre si continuamos agregando más mitades? Justifica.

2. ¿Qué sucede con la diferencia entre la medida inicial (1m) y la suma de las mitades sucesivos? Justifica.

Análisis pregunta 2

❖ Creemos que el alumno al contestar la pregunta (1), logra una adaptación a que esos totales sucesivos se acercan cada vez más a un metro.

❖ Responder la pregunta (2) nos asegura que esa diferencia que se menciona se hace más y más pequeña, es decir, que está tendiendo a cero la diferencia.

❖ Otra cosa que facilitaría entender más lo que está sucediendo, es que los alumnos fabriquen su propia tabla de cálculos aritméticos, como por ejemplo:

Mitades de las medidas	Suma de términos sucesivos	Diferencia entre medida inicial y suma de términos sucesivos
1:2=0,5	0,5	1-0,5=0,5
0,5:2=0,25	0,5+0,25=0,75	1-0,75=0,25
0,25:2=0,125	0,75+0,125=0,875	1-0,875=0,125
0,125:2=0,0625	0,875+0,0625=0,9375	1-0,9375=0,0625
0,0625:2=0,03125	0,9375+0,03125=0,96875	1-0,96875=0,03125
. . .	. . .	. . .

Los números decimales (azules) muestran aritméticamente lo que está ocurriendo al contestar la pregunta (1), mientras que los números decimales (Rojos) muestran aritméticamente lo que está ocurriendo al responder la pregunta (2).

Aprendizajes esperados de las preguntas 1 y 2: Que los alumnos logren la idea de orden de elementos y así puedan adaptar lo que ocurre en un n-ésimo término y más allá, y de esta manera que los alumnos entiendan como (Boll, 1981, pág. 53) lo menciona:

"[El infinito no es] *lo que no puede ser contado*, [sino lo que] *no ha sido todavía contado*".

Parte II

Problemas que utilice los números racionales expresados en forma de desarrollos decimales finitos e infinitos periódicos y semiperiódicos

Objetivo: Analizar situaciones y resolver problemas para su notación y/o aproximación decimal de números racionales.

Situación Problemática:

El profesor o profesora propone las siguientes reglas del juego:

1. yo pienso un número cualquiera;
2. ustedes buscan maneras para descubrir cuál es el que he pensado; tienen derecho a proponer números;
3. ante los números que ustedes digan yo les indicaré si es el que yo he pensado, o bien, si es mayor o menor.

Nota: La actividad mencionada fue sacada de los planes y programas 2004 del Mineduc.

En esta oportunidad no se dará un análisis, sino que se presentara las indicaciones al docente que plantean los planes y programas 2004 del Mineduc.

Indicaciones al Docente

- Es conveniente llevar un registro en el pizarrón de los números que se van diciendo y establecer un código que permita distinguir si el número pensado es mayor o menor; así es posible reconstruir la sucesión de números propuestos.
- Es conveniente pensar en un decimal con dos o tres cifras decimales.
- En cuanto a la estrategia para descubrir el número, a veces hay que orientar hacia el encajonamiento sistemático. Si el número pensado fuera 34,567, por

ejemplo, los gestos y rostros expresan desconcierto en el momento en que constatan que dicho número es mayor que 34 y menor que 35.

- En cierta medida, las alumnas y alumnos logran visualizar la idea de infinitas cifras decimales.

- ¿Cómo se desarrolla este ejemplo si el número pensado es 1,3333... periódico o si el número pensado fuera [0,1111…]? Importante: En esta indicación hemos sacado al número π y hemos puesto el número 0,1111…, porque nuestro objetivo está ligado a números racionales.

- El desarrollo de esta actividad puede apoyar un proceso de sistematización sobre los decimales, los periódicos y los no periódicos.

Aprendizajes esperados de la actividad: Que los alumnos logren utilizar los números racionales expresados en forma decimal y orientar hacia el encajonamiento del número.

Parte III

Problema para introducir el concepto de número irracional.

Objetivo: Construir una parte de un desarrollo decimal infinito no periódico.

Situación problemática:

A un maestro le falta una baldosa cuadrada de área $2m^2$ para completar el embaldosado, decide ir a un local para comprar la baldosa que le falta, pero cuando está comprando se da cuenta que no recuerda cuánto mide el lado de la baldosa. Si fueras el vendedor ¿cómo lo ayudarías para determinar la medida del lado de la baldosa? Justifica tu respuesta.

Descripción de este momento: el estudio de esta situación es que provoque un aprendizaje del concepto de número irracional, es decir, como sabe la información del área de la baldosa cuadrada ($2m^2$) y además recuerda de cursos de básica que el área de un cuadrado es lado (L) por lado (L), entonces lo anterior lo podría expresar en lenguaje algebraico como sigue:

$L^2 = 2$, teniendo presente que L representa al lado de la baldosa. Luego de esto, viene lo más importante ya que es el momento en que el alumno empieza la construcción de este número irracional.

Análisis de posibles procedimientos que podrían desarrollar los estudiantes

1. Algunos alumnos podrían hacer lo siguiente:

Posibles Valores de L que escogerá	¿Qué ocurre al elevar al cuadrado los posibles valores de L ?
1.- Tantea con estos posibles Números enteros: 1 2 3 otros	Si $L=1$ entonces $L^2=1$. Si $L=2$ entonces $L^2=4$. Si $L=3$ entonces $L^2=9$. otros
2.- Tantea con estos posibles Números a la decima: 1,1 1,3 1,4 1,5 1,9 otros	Si $L=1,1$ entonces $L^2=1,21$. Si $L=1,3$ entonces $L^2=1,69$. Si $L=1,4$ entonces $L^2=1,96$. Si $L=1,5$ entonces $L^2=2,25$. Si $L=1,4$ entonces $L^2=3,61$. otros
3.- Tantea con posibles Números a la centésima: 1,45 1,43 1,49 1,41 otros	Si $L=1,45$ entonces $L^2=2,1025$. Si $L=1,43$ entonces $L^2=2,0449$. Si $L=1,49$ entonces $L^2=2,2201$. Si $L=1,41$ entonces $L^2=1,9881$. otros

Lo importante de esto para el profesor, es seleccionar algunos desarrollos hechos por los alumnos, por ejemplo en el primer tanteo que hacen y donde posiblemente ocupan números enteros, es una buena instancia para introducir conceptos como exceso y defecto, utilizando estos conceptos el alumno podrá saber cuándo debe discriminar con respecto al número escogido, por ejemplo si el número escogido es 4 entonces su cuadrado es 16 y este último supera (excede) a lo buscado (2), hace preguntarse de manera automática ¿habrá un número

menor que 4 que se acerque más al área de la baldosa?, de manera análoga ocurre para los defectos, estos procesos también provocan ir limitando el número buscado, es decir, el encajonamiento que se empieza a producir, y en cierto momento bajar a la unidad que sigue, por ejemplo se comienza a limitar con los enteros 1 y 2, pero esto provoca bajar a la unidad siguiente, es decir, a la décima y así sucesivamente.

2. Otros alumnos quizás ataquen el problema con el método tan antiguo de los Babilónicos y egipcios, como se muestra a continuación:

Lo primero que hacen es tantear dos números que al cuadrado den muy próximos a 2, pero de ahí en adelante van acercándose por las mitades, por ejemplo: como se sabe que ese número buscado se encuentra entre 1 y 2, ellos deciden probar con la mitad de estos, o sea 1,5 y este lo elevan al cuadrado (2,25) y como este se pasa del área buscada, se descarta el intervalo entre 1,5 y 2, entonces se empieza a reducir el intervalo en donde se encuentra el número que al cuadrado me da 2, el siguiente número seria la mitad entre 1 y 1,5, es decir 1,25 y este último al cuadrado es 1,5625, entonces se descarta el intervalo de 1 a 1,25 y nos quedamos con los extremos 1,25 y 1,5 y nuevamente se busca la mitad de estos… así sucesivamente. Si utilizan este método los alumnos también nos da el chance de introducir los conceptos de exceso y defecto y estos a su vez los encajonamientos que se están formando.

Sin duda cualquiera de los dos métodos nos proporcionan la idea de encajonamiento de Cantor, pero lo que nos quedaría es diferenciar entre desarrollo decimal infinito periódico - no periódico y este es el momento donde podríamos preguntar al alumno ¿Existe algún patrón que permita anticipar el número que sigue?, como por ejemplo:

El número racional c posee el siguiente desarrollo decimal infinito periódico:

$\frac{1}{9}$ = 0,1111…=0,1+0,01+0,001+0,0001+…, cómo podemos ver el patrón el patrón que se sigue aquí en que el centésimo se forma al multiplicar la décima por 0,1, aplicando el mismo procedimiento milésimo se forma multiplicando el centésimo por 0,1 y así sucesivamente…

Si un alumno contesta que hay un patrón y lo afirma diciendo que se puede seguir aplicando los procedimientos mostrando en 1 y 2, es en este momento donde se le dice al alumno que aplicar los procedimientos antes mencionados sirve únicamente para tener cada vez una mejor aproximación a ese número que al cuadrado da 2. Otra cosa que hay que mencionar es que ese número que se busca tiene un desarrollo decimal infinito no periódico y se desafía a un alumno a tratar de dar una explicación ¿por qué este tipo números no admite periodo?, creemos que quizás este tipo de pregunta surja de alguna manera la demostración de este tipo de número no racional (Se puede indicar Quizás que averigüen acerca del método del Absurdo utilizado desde Grecia hasta nuestros días).

Finalmente, es el momento de mostrar el símbolo que se utiliza para representar ese desarrollo decimal infinito no periódico, es decir, $\sqrt{2}$. Y dar algunas conclusiones como:

1. Todo número que presente un desarrollo decimal infinito no periódico pertenece al conjunto de los números irracionales.

2. El símbolo que actualmente se está utilizando para designar al conjunto de los irracionales es𝕀.

3. Indicar que no todas las raíces cuadradas son números irracionales.

4. Indicar que los números irracionales no admiten un patrón como lo que ocurre con los números racionales.

Una tarea buena para los alumnos, seria averiguar sobre Números Trascendentes y Números Cebras, para que no se queden con la idea que solo ciertas raíces son números irracionales.

Aprendizajes esperados de la situación problemática: Que los alumnos sean capaces de construir el número irracional por medio de los números racionales expresados en decimales e introducir los conceptos de exceso y defecto y estos a su vez los encajonamientos que se están formando.

Anexo

Material de apoyo sobre la notación decimal.

A continuación se presenta al profesor, un recordatorio de los números que tienen una notación decimal, porque este tema no es bien tratado o hay confusión con el número decimal y el desarrollo decimal. Para ello el profesor ve, según el conocimiento que posea los alumnos, si refuerza esto.

Números con coma (notación decimal)

(Pérez, 1997, pág. 39) "Cuando leemos el número 3333,3 atribuimos al símbolo 3 valores diferentes, según el lugar que ocupa en la escritura. Así, el primer 3 a la derecha representa tres veces la décima parte de la unidad, el 3 anterior representa tres unidades y, a su vez, tres décimas del valor representado por el 3 que tiene inmediatamente a su izquierda, y así sucesivamente"

Para entender lo anterior anotaremos su desarrollo decimal

$$3333{,}3 = 3 * 10^3 + 3 * 10^2 + 3 * 10^1 + 3 * 10^0 + 3 * 10^{-1}$$

El sistema decimal fue consolidado en el siglo XVI gracias a Simón Stevin donde el se propuso "como objetivo mostrar que los cálculos y las medidas pueden simplificarse considerablemente con la utilización de los decimales" (Centeno Perez, 1997, pág. 48)

Podemos encontrar varios tipos de números con comas como por ejemplo: 1,2; 3,444444…; 1,414213562…y estos se pueden escribir de distinta forma.

- 1,2 donde se puede escribir de la forma $12 * 10^{-1}$ o su desarrollo decimal

$1,2 = 1 * 10^0 + 2 * 10^{-1}$ se les llamara número decimal o desarrollo decimal finito

- 3,4444 ... o $3,\overline{4}$, donde se puede escribir de la forma $3 * 10^0 + 4 * 10^{-1} + 4 * 10^{-2} + 4 * 10^{-3} + 4 * 10^{-4} + \cdots$ o

$3 * 10^0 + \sum_{i=1}^{\infty} 4 * 10^{-i}$ se les llamara desarrollo decimal infinito periódico, tiene periodo 4

- 1,414213562… donde se puede escribir como

$1{,}414213562 \ldots = 1 * 10^0 + 4 * 10^{-1} + 1 * 10^{-2} + 4 * 10^{-3} + 2 * 10^{-4} + 1 * 10^{-5} + 3 * 10^{-6} + 5 * 10^{-7} + 6 * 10^{-8} + 2 * 10^{-9} \ldots$ Se les llama desarrollo decimal infinito no periódico (no tiene ningún periodo).

En general:

El conjunto de los números decimales se puede definir como:

$$D = \{b * 10^{-n} / b \epsilon \mathbb{Z}; n \epsilon \mathbb{N}_0\}$$

Observación 5:

1) El número decimal $z, a_1 a_2 a_3 \ldots a_n$ donde z es un número entero, y las $a_{i,1 \leq i \leq n}$ son dígitos que pueden tomar los siguientes valores(0,1,2,3,4,5,6,7,8,9) que indica los décimos (a_1), centésimos (a_2), y así sucesivamente.

2) El desarrollo decimal finito de $z, a_1 a_2 a_3 \ldots a_n$ es $z * 10^0 + a_1 * 10^{-1} + a_2 * 10^{-2} + a_3 * 10^{-3} + \ldots + a_n * 10^{-n}$

3) Algunos números racionales son números decimales, ya que $b * 10^{-n} = \frac{b}{10^n}$. Puede que los números racionales su denominador sea un divisor de 10 o una amplificación, por ejemplo: $\frac{1}{5}$ es un decimal ya que $\frac{1}{5} = \frac{2}{10}$, y $\frac{1}{250}$ es un decimal ya que $\frac{1}{250} = \frac{4}{1000}$. En general los números racionales que tienen denominador 5^n, 2^n, o $5^m 2^n$ son números decimales.

4) Se Admite que las expresiones del tipo: 0.19999… y 0.20000… representa el mismo número, el 0.2

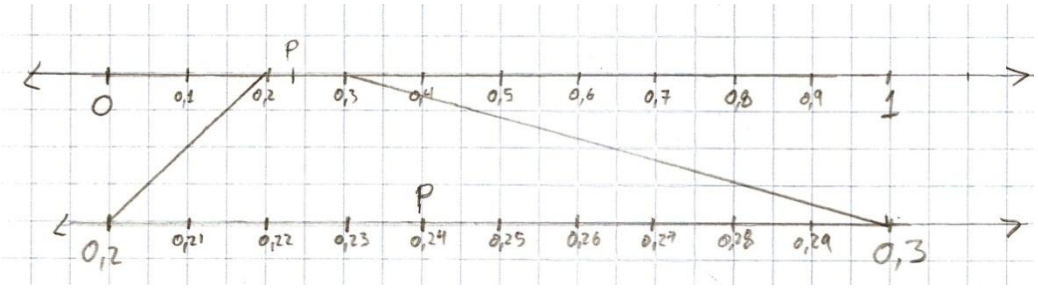
5) Como vimos solo algunos números racionales son decimales, los otros números racionales que no sean de la forma de 3) tienen desarrollos decimales infinito periódico, tendrán un periodo, por ejemplo: $\frac{2}{7} = 0, \overline{285714}$; y $\frac{4}{3} = 1, \overline{3}$.

6) Los números irracionales tienen desarrollo decimal infinito no periódico por ejemplo $\sqrt{2} = 1{,}414213562$ ..., estos números nunca se repetirá un periodo.

Ubicación de los números en la recta numérica (con notación decimal)

(Robbins, 2002, pág. 86) Sostuvo que "Para cubrir la recta numérica con un conjunto de puntos densos en todas partes no necesitamos a todos los números racionales; por ejemplo, es suficiente considerar sólo aquellos números que se originan al subdividir cada intervalo unitario en 10 segmentos iguales, luego en 100, después en 1000, y así sucesivamente. Los puntos así obtenidos corresponden a las "fracciones decimales"".

Por ejemplo, el punto P=$0{,}24 = 0 * 10^{0} + 2 * 10^{-1} + 4 * 10^{-2}$ corresponde al situado en el primer intervalo unitario, en el segundo subintervalo de longitud 10^{-1} y en el inicio del quinto "sub-subintervalo" de longitud 10^{-2}



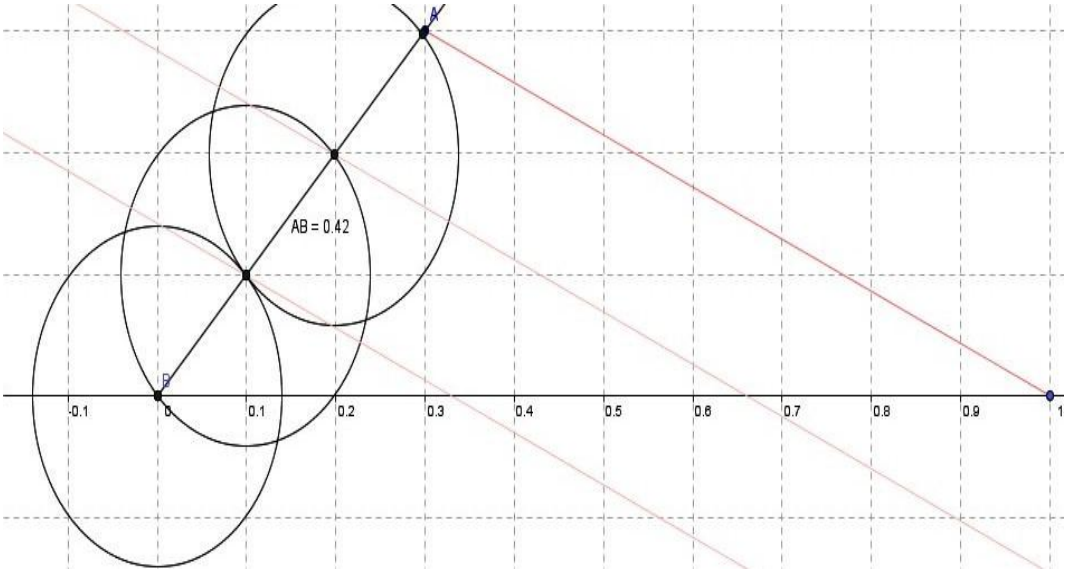
(Robbins, 2002, pág. 87) "ahora escojamos cualquier punto P en la recta numérica que no corresponda a una fracción decimal, por ejemplo 1/3 o el punto irracional $\sqrt{2}$. Entonces,

en el proceso de subdividir el intervalo unitario en diez partes iguales, y así sucesivamente, P nunca será el punto inicial de un subintervalo. Aun así el punto P puede incluirse en intervalos cada vez más pequeños de la división decimal con el grado de aproximación que se quiera."

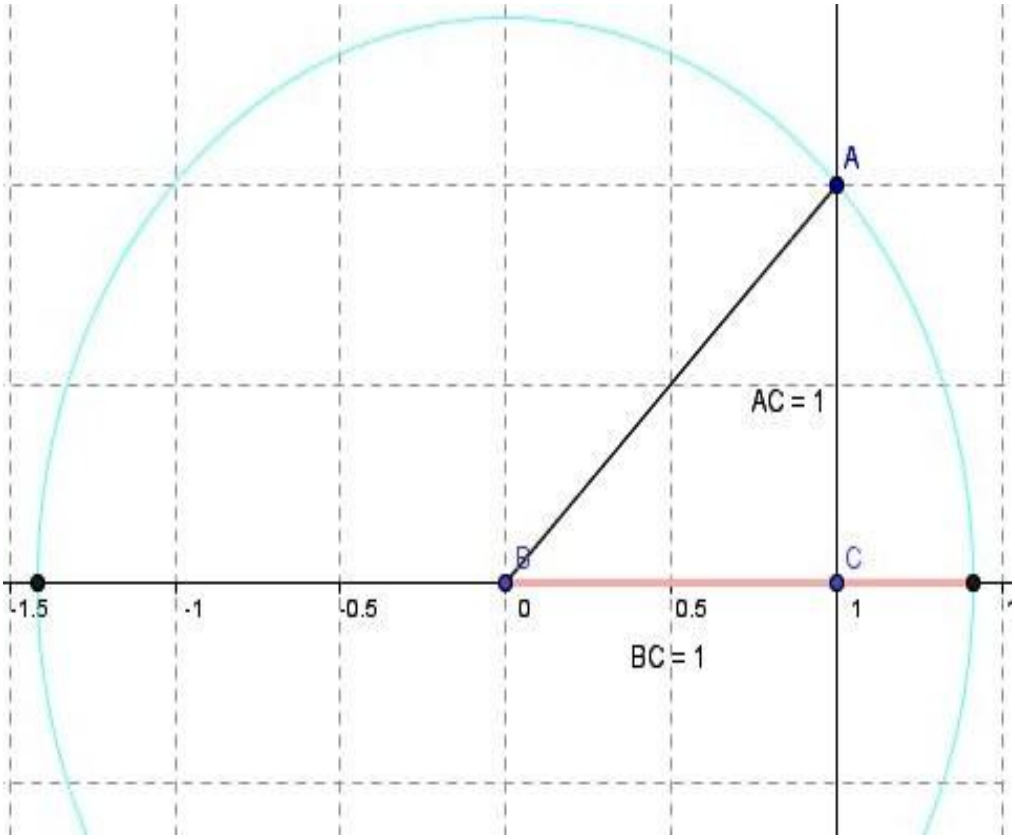
Notar que este tipo de número (número decimal) siempre se ubicara en la recta numérica en el comienzo de un intervalo o final de este (o un subintervalo de él) sin problema para ubicar en la recta. Lo que no sucede con los números de desarrollo decimal infinito (periódico o no periódico), estos lo podemos encontrar entre dos números decimales y existe un "truco" para poder ubicarlos.

A continuación se mostrara dos puntos que son de desarrollo decimal infinito periódico y no periódico representado en la recta numérica como lo es 1/3 y $\sqrt{2}$.

Ejemplo del número 1/3 en la recta numérica



Ejemplo del número $\sqrt{2}$ en la recta numérica



Sugerencias para el tratamiento de números decimales para el alumno

Actividad 1

En las siguientes frases.

- Me saque en la prueba de matemática un 4,5
- La estatura María es de 1,56 m.
- El desempleo en la región es de un 8,5%

Responda las siguientes preguntas:

1. ¿qué entiendes tú por los números que se poseen coma?

2. ¿tu estatura es mayor, menor o igual que la estatura de María?, Explica tu respuesta.

3. ¿Tu estatura es mayor, menor o igual que tu compañero(a) de banco? Discútelo con tu compañero(a)

Comentarios

Posibles respuestas de alumnos(as) para la pregunta 1:

- Un alumno(a) puede estar familiarizado con los números decimales, e indique que números con coma corresponde, por ejemplo que el número 4,5 es mayor a 4 pero menor que 5(se encuentra entre esos dos números).
- Un alumno(a) puede mencionar que el ejemplo 4,5 corresponde a un número a la décima ya que el 5 se llama a la décima por la posición que se encuentra después de la coma.

Posibles respuestas de alumnos(as) para la pregunta 2:

- Puede decir con facilidad si es mayor, menor si distingue los números después de la coma corresponde a centímetros (la parte a la décima) y difiere a su estatura, explique que es mayor o menor que la estatura de María.

- Puede que un alumno conteste que no sabe su estatura

- Puede que tenga la misma cifra decimal, pero no sepa distinguir que es lo llamado parte centésima

- Puede que mida 1,6 y no comprende que 1,6 es mayor que 1,56

Posibles respuestas de alumnos(as) para la pregunta 3:

- Puede decir que simple vista se ve más alto(bajo) que su otro compañero(a)

- No sepan su altura

- No sepan que tienen que ir comparando por cada posición del número para ver si es mayor o menor

- Distinga quien es mayor o menor al comparar cada digito de la medida de sus alturas correspondiente

Actividad 2

En los siguientes ejercicios se pregunta al curso:

1. ¿El número 25,6 entre qué número se encuentra?

Comentario

Pueden responder:

- Entre 20 y 30, entre 25 y 26, entre25, 5 y 25,7, entre 25,1 y 25,8 etc.

Actividad 3

Dibuja una recta y ubique los siguientes números. Para esto póngase de acuerdo con su compañero como tiene que efectuar esto. Si tiene una dificultad escriba porque razón tuvo esa dificultad

1,4 1,50 1,45 1,41 1,405 1,5 1,415

Comentario

- Ubica sin problema en la recta numérica los números
- Problema con ubicar el 1,5 y 1,50

Conclusión

Para lograr nuestro objetivo general del trabajo, "Diseñar una situación de enseñanza que favorezca el aprendizaje del concepto de número irracional, en el caso particular de $\sqrt{2}$", se tuvo que pasar por diferentes momentos, el primero de ellos fue el acceder a la historia de la matemática siguiendo el método Histórico-Critico, el cual nos indico los periodos donde teníamos que centrarnos para luego analizar el número irracional. En un comienzo las miradas solo se centraron en los hechos que ocurrieron en Grecia, específicamente en la inconmensurabilidad y en la demostración por absurdo, y de manera automática afloro la siguiente pregunta, ¿Los griegos entendían realmente el concepto de número irracional ó solo sabían demostrar y aproximar lo que no era racional?

Al parecer, como lo menciona Babini y Rodríguez citados en las páginas 29 y 30 de nuestro trabajo, fue Eudoxo de Cnido quien logra mostrar algo más formal con respecto al número irracional. Posteriormente indagamos más sobre las aproximaciones de $\sqrt{2}$, que se mencionan en nuestro trabajo (Mesopotamia, India y la de Antonio Cataldi según Rodríguez). Lo interesante de estas aproximaciones es conocer el método que se emplea para tratar de llegar a mejores aproximaciones.

Sin embargo, el tema de la irracionalidad aún no estaba claro, ya que no basta solo con saber emplear un método para aproximar, sino conocer y comprender lo que es un número irracional. Esto nos condujo a indagar en desarrollos que se hicieron cientos de años después de los Griegos, específicamente en dos hombres (Dedekind y Cantor) los cuales formalizan el concepto y muestran métodos distintos para explicar que es un número irracional. Es aquí donde nos detenemos a analizar por un lado las "Cortadura de Dedekind" y por otro lado el "Encajonamiento de intervalos de Cantor". Este fue el instante en que por primera vez reconocemos tener claridad sobre el objeto matemático "número irracional".

No podemos dejar de mencionar que para entender y aproximar mejor estos números se hace indispensable la utilización de dos conceptos relacionados con los números irracionales, es decir:

1. El concepto de número racional, pero expresados por su desarrollo decimal , es decir, la notación de Steven que realiza en su publicación (La Disme) en 1585, la que luego fue sustituida a partir de 1620 por la notación actual, gracias a los trabajos del coinventor de los logaritmos John Napier, por medio de la "notación con coma".

2. El concepto de límite de una serie infinita.

Teniendo más claridad de los hechos que acontecieron en el pasado, con respecto a los números irracionales, se incorporan en nuestro trabajo tres tareas fundamentales: Análisis de 2 textos escolares, de Planes de clases sobre número irracional diseñados por profesores de enseñanza media y respuestas con análisis de cuestionarios realizados a alumnos sobre la irracionalidad de un número. Todos ellos son analizados y comentados en base al Método Histórico crítico, Teoría de situaciones didácticas en lo que se refiere a los conceptos de Asimilación, acomodación y adaptación, y Documentos del Ministerio de Educación (específicamente curriculum).

En base a los datos anteriormente mencionados, lo que podemos extraer de aquello es que algunos profesores solo tratan en clases una parte del Currículo y no profundizan en el tema. Por otro lado, las indicaciones al docente no se están tomando en consideración, más aún, llama la atención que en la planificación realizada por los profesores observados en nuestro trabajo no incluyen Situaciones problemas, a pesar que lo promueve el Currículo, sino que simplemente se remiten a dar ejemplos de números irracionales.

Por otro lado, los textos escolares incorporan el Curriculum, pero la manera en como presentan el número irracional consideramos que no es la más adecuada, porque iniciar un contenido con una demostración (Texto Mc- Graw Hill) a un alumno de primero o segundo medio, no acerca al alumno a la

comprensión del número irracional, con esto no quiere decir que demostrar es malo, sino que se podría utilizar en un momento más avanzado del tema. Respecto a los dos textos estudiados, incorporan el Currículum, pero no presentan ninguna Situación problema, que propicie la construcción por parte del estudiante del objetivo de aprendizaje.

Es importante mencionar que una de las características que esta investigación detectó en las prácticas docentes es que estos sólo se remiten a dar ejemplos de números irracionales, por ende los alumnos solo se están quedando en el proceso de asimilación del contenido.

En base a todo lo anterior y con el marco del Enfoque de resolución de problemas (La Clase de Matemáticas Centrada en la Resolución de Problemas) diseñamos una propuesta que pretende introducir el número irracional. Esta está dividida en tres partes: En la primera parte se presentan problemas que involucran el concepto del infinito (con el fin de generar una idea intuitiva de límite y serie geométrica); La segunda parte, con la ayuda de indicaciones al docente que se extraen del currículo chileno, se presenta un problema con números racionales pero expresados con notación con coma, con el fin de que el alumno de conocimientos previos y del profesor pueda asimilar el encajonamiento de intervalos, y finalmente en la tercera parte se presenta un problema en el cual el alumno cae en la siguiente expresión $L^2 = 2$.

Luego de plantear la introducción del número irracional dividida en tres partes, en cada una de estas se muestra un análisis de posibles procedimientos que podrían desarrollar los estudiantes y lo que el docente desearía ver reflejado en el alumno al momento del aprendizaje.

A lo largo de toda la investigación y antecedentes recopilados en este trabajo es importante mencionar que el aporte de esta propuesta la podemos evidenciar en los siguientes puntos:

- ✓ Incluir una Clase de Matemáticas Centrada en la Resolución de Problemas.
- ✓ Recoger la historia sobre el encajonamiento de Cantor, a través de esto el alumno encontrara (una parte) de su desarrollo decimal infinito no periódico del número raíz de dos, facilitando la comprensión para luego simbolizarlo como $\sqrt{2}$.
- ✓ Se incorporan problemas que involucran el concepto del infinito ya que este es un pilar importante para introducir y caracterizar el número irracional.
- ✓ Se presenta una estructura de como generar una propuesta de cualquier contenido de enseñanza media, primero se toma la historia del contenido (utilizando el método histórico-critico), luego se observar y analiza lo que entrega el Curriculum Chileno (Centrándose específicamente en los Objetivos Fundamentales y Aprendizajes Esperados) , de esta aleación se consigue elaborar un test y la forma de analizar texto escolares y planificaciones de clases de profesores, a estas se incorporar la teorías de Situaciones Didácticas y procesos cognitivos los cuales también son de gran utilidad a la hora de hacer una critica. Con todo este trabajo tenemos los antecedentes necesarios para generar cualquier propuesta. (Se debe aclarar que este último aporte detalla una forma de planificar una clase de matemática)

Finalmente, no podemos dejar de mencionar algo bastante interesante que se puede hacer para una investigación futura, seria hacer una Transposición Didáctica sobre limites de sucesiones infinitas y no solo quedarnos con ejercicios que involucren este tema.

Bibliografía

Bell, E. (1985). *Historia de las Matemáticas.* Mexico: Fondo de Cultura Economica.

Boll, M. (1981). *Historia de las Matemáticas.* Mexico: Diana.

Centeno Perez, J. (1997). *NUMEROS DECIMALES ¿POR QUE? ¿PARA QUE?* madrid, España: SÍNTESIS S.A.

Chirinos, D. M. (2004). *Análisis de la actividad del profesor dentro de un proceso didáctico: el caso de los irracionales en la enseñanza secundaria peruana.* Valparaíso, Chile: Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Collette, J. P. (1998). *Historia de las Matemáticas I* (Vol. I). Siglo Veintiuno Editores.

Eduteka. (1 de Febrero de 2010). *Eduteka.* Recuperado el Jueves de Febrero de 2011, de Eduteka: http://www.eduteka.org/TaxonomiaBloomCuadro.php3

Gálvez, G. (1994). La Didactica de las Matemáticas . En C. Parra, & I. S. (compiladoras), *Didáctica de Matemáticas - Aportes y reflexiones* (págs. 39-50). Buenos Aires: Paidos.

Hofmann, J. E. (1960). *Historia de la Matemática* (Vol. I). Mexico: Hispano Americana.

Isoda, M. (2009). *El Enfoque de Resolución de Problemas.* Valparaíso: Ediciones Universitarias de Valparaíso Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

J.Babini, J. P. (1985). *Historia De La Matemática* (Vol. I). Barcelona, España: Gedisa.

Kline, M. (1992). *El pensamiento matemático de la antiguedad a nuestros días III* (Vol. III). Alianza Universidad.

Lenzi, A. M.-S. (s.f.). NOCIONES CENTRALES DE LA TEORÍA PIAGETIANA. *Catedra de la Psicología Genética.*

Ministerio de Educación, R. d. (2004). *Mineduc - Planes y Programas*. Recuperado el 2010, de http://www.curriculum-mineduc.cl/ficha/1-medio-matematica/

Ministerio de Educación, R. d. (Diciembre de 2009). *Mineduc - Curriculum*. Obtenido de http://www.curriculum-mineduc.cl/docs/Marco_Curricular_Ed_Basica_y_Media_Actualizacion_2009.pdf

Ministerio de Educación, R. d. (Marzo de 2009). *Mineduc - Mapas de Progreso*. Obtenido de http://www.curriculum-mineduc.cl/curriculum/mapas-de-progreso/matematica/

Pérez, J. C. (1997). *NUMEROS DECIMALES ¿POR QUE? ¿PARA QUE?* Madrid, España: SÍNTESIS, S.A.

Robbins, R. C.-H. (2002). *¿Qué son las matemáticas?* Mexico: Fondo de Cultura Económica.

Rodriguez, J. A. (1989). *Historia de las Matemáticas.* Akal.