



**Aplicación de técnicas geostatísticas a datos generados
en GPS para el análisis del desplazamiento de la
corteza terrestre en la región de Coquimbo**

Trabajo final presentado por:
Alex González Fuentes

Para optar al título de:
Ingeniero en Estadística.

Profesora guía:
Orietta Nicolis, Ph.D.

Diciembre 2018. Valparaíso, Chile.

Agradecimientos

Agradecimientos a mi madre y a mi padre por estar cuando más los necesitaba, a mi dos hermanas que me apoyaron y dieron ánimos cuando más me hacía falta.

También agradezco a mi profesora guía la Dra Orietta Nicolis, por guiarme, orientarme y entregarme todo el material académico que necesite en este último paso. A los profesionales de centro sismológico nacional que me orientaron en materia sismología. Agradezco al profesorado del Instituto de Estadística de la Universidad de Valparaíso por brindarme el conocimiento necesario en todo este período académico.

A mis familiares y amigos, que en el diario vivir me brindaron confianza y fuerza para lograr mis metas.

Resumen

Chile es un país altamente sísmico debido a su ubicación bajo tres grandes placas tectónicas (Nazca, Sudamericana y Antártica). Dentro del territorio nacional existen múltiples fallas las cuales provocan una gran cantidad de movimientos telúricos de diferentes intensidades. Estos movimientos dependiendo de su potencia pueden provocar varios tipos de desastres, como lo son los deslizamientos de tierra, daño a construcciones, rompimiento, deformación y desplazamiento de la corteza terrestre. Uno de los últimos terremotos ocurridos en el territorio nacional, fue el de 16 de Septiembre del año 2015 en la región de Coquimbo en las coordenadas 71.741°W y 31.637°S a una profundidad de 23 km, al noreste de Los Vilos, con una intensidad de $8,5^{\circ}$ en la escala de Richter. Este terremoto pudo sentirse en las regiones de Atacama, Coquimbo y Valparaíso comprendiendo un territorio total de $132.625,7 \text{ km}^2$.

Este trabajo consistió en estudiar el desplazamiento de la corteza terrestre a través de datos generados en GPS con técnicas geostadísticas en los períodos influenciado por el terremoto en estas tres regiones. El desarrollo de esta investigación consiste en diferentes etapas, partiendo desde la recopilación de bibliografía, formulación de los objetivos, revisión de temas geodésicos y geostaísticos, elaboración de mapas de predicción y análisis del desplazamiento de la corteza terrestre.

Se recolectaron datos de 29 estaciones de GPS, en las regiones de Atacama, Coquimbo y Valparaíso para estudiar el desplazamiento de la corteza terrestre en tres períodos diferentes (Pre-Sísmico, Sísmico y Post-Sísmico), se realizaron los variogramas y correspondientes ajustes de modelos en esta variable, para su posterior aplicación a la predicción espacial a través del método del kriging.

Este método puede ser utilizado como una aproximación rápida para entender el desplazamiento de la corteza terrestre en una zona influenciada por algún terremoto.

Los resultados mostraron que para el período Pre-Sísmico hubo un desplazamiento casi

imperceptible de la corteza terrestre en la zona antes descrita. Esto cambia con el evento del terremoto del 16 de Septiembre, llegado a un desplazamiento máximo de 2,5 m al noroeste del epicentro. Posterior al terremoto, el desplazamiento se sigue dando en el mismo lugar del período Sísmico, pero con una menor intensidad y abarcando más territorio.

Palabra claves: Geodesia, Geostatística, Terremoto, Kriging, GPS.

Índice general

Resumen	3
Índice general	5
Índice de figuras	7
1. Introducción	10
1.1. Introducción	10
1.1.1. Objetivo general	12
1.1.2. Objetivos específicos	12
1.1.3. Hipótesis	12
1.2. Sismicidad	12
1.3. Sistema de Posicionamiento Global (GPS)	14
1.4. Geodesia	17
1.4.1. Problemas que resuelve la Geodesia	17
1.5. Sistema WGS-84	19
1.6. Transformación de coordenadas	20
1.7. Fórmulas de desplazamiento	21
2. Metodología Geostadística	23
2.1. Introducción a la Geostadística	23
2.2. Estadística Espacial	23
2.3. Variable Regionalizada	24
2.3.1. Datos Geostadísticos	24
2.3.2. Enmallados	24
2.3.3. Patrones Espaciales	24
2.4. Momentos de una variable regionalizada	24

2.5.	Estacionariedad	25
2.6.	Estacionaridad de segundo orden	25
2.7.	Estacionaridad débil o intríntrica	26
2.8.	Isotropía	26
2.9.	Variograma	26
2.9.1.	Modelos teóricos del Semivariograma	27
2.9.2.	Modelo Esférico	28
2.9.3.	Modelo Exponencial	28
2.9.4.	Modelo Gaussiano	29
2.9.5.	Modelo Matern	29
2.9.6.	Modelo de independencia (Pepita puro)	29
2.10.	Kriging	30
2.10.1.	Kriging Simple	31
2.10.2.	Kriging Ordinario	34
2.10.3.	Kriging Universal	39
3.	Aplicación	43
3.1.	Método de aplicación para la predicción espacial	43
3.2.	Variables desplazamiento de la corteza terrestre	44
3.3.	Predicción de valores faltantes	47
3.4.	Análisis exploratorio espacial	50
3.5.	Estadística espacial	59
3.5.1.	Selección del modelo al variograma	59
3.6.	Variograma e Isotropía	61
3.6.1.	Realización del Kriging	67
3.7.	Conclusión	76

Índice de figuras

1.1.	Representación de la zona de subducción, Poblete (2017)	13
1.2.	Fotografías de estructuras dañadas en localidades de la Región de Coquimbo tomadas en enero de 2016. a) Iglesia de Monte Patria, b) derrumbe de vivienda en Illapel, c) y d) viviendas contiguas en Combarbalá de adobe, con y sin daños, respectivamente, Fernández, Pastén, Ruiz, & Leyton (2017)	14
1.3.	Red satelital en la órbita de la Tierra, Instituto Geográfico Agustín Codazzi (2007)	15
1.4.	Coordenadas de la estación de GPS LSCH, ubicada en La Serena en el año 2015	16
1.5.	Geodíe , Elipsoide y la superficie terrestre.	18
1.6.	Sistema de Coordenadas WGS-84, NIMA (2000)	20
2.1.	Parámetros del variograma expresados en un modelo	28
2.2.	Comparación de los modelos Matern, Exponencia, Esférico, Gaussiano y Pe-pita Puro, respecto a una escala simulada de 0 a 1.	30
2.3.	Kriging Simple y Varianza del Kriging Simple (izquierda y derecha), confeccionado en base al modelo de variograma de los datos del paquete <code>gstat</code> , <code>data(meuse)</code>	34
2.4.	Kriging Ordinario y Varianza del Kriging Ordinario (izquierda y derecha), confeccionado en base al modelo de variograma de los datos del paquete <code>gstat</code> , <code>data(meuse)</code>	39
2.5.	Kriging Universal y Varianza del Kriging Universal (izquierda y derecha), confeccionado en base al modelo de variograma de los datos del paquete <code>gstat</code> , <code>data(meuse)</code>	42
3.1.	Mapa visualización descarga de conjunto de datos.	45
3.2.	Plataforma de descarga de los conjuntos de datos. Fuente Elaboración propia	45

3.3. Serie de la Latitud, Longitud y Altura de la estación EMAT	47
3.4. Comparación de las estaciones BTO1 y CMBA respecto a la latitud, longitud y altura de la estación EMAT	48
3.5. Serie de la latitud, longitud y altura estimadas de la estación EMAT	49
3.6. Series de tiempo con respecto a las estaciones, coordenadas y regiones. El color azul representa la región de Atacama, rojo a Coquimbo y verde a Valparaíso.	50
3.7. Boxplots respecto a sus coordenadas, estaciones y regiones. El color azul representa la región de Atacama, rojo a Coquimbo y verde a Valparaíso.	52
3.8. Plataforma de transformación de coordenadas (Flecha negra coordenadas de entrada y flecha roja coordenadas de salida)	53
3.9. Distribución de las estaciones de GPS en las regiones de Atacama, Coquimbo y Valparaíso, visualizado en Googlemaps y R-project.	54
3.10. Histogramas para las variables en el período Pre-Sísmico.	56
3.11. Histogramas para las variables en el período Sísmico.	57
3.12. Histogramas para las variables en el período Post-Sísmico.	58
3.13. Estructura del Variograma usando Covarianza Matern en el período Pre-sísmico para: <i>a</i>)Desplazamiento, <i>b</i>)Desplazamiento longitud y <i>c</i>)Desplazamiento latitud	61
3.14. Cálculo de la Istropía con estructura del variograma usando Covarianza Matern en el período Pre-sísmico para: <i>a</i>) Desplazamiento, <i>b</i>) Desplazamiento longitud y <i>c</i>) Desplazamiento latitud	62
3.15. Estructura del Variograma usando Covarianza Matern en el período Sísmico para: <i>a</i>)Desplazamiento , <i>b</i>)Desplazamiento longitud y <i>c</i>)Desplazamiento latitud	63
3.16. Cálculo de la Istropía con estructura del variograma usando Covarianza Matern en el período Sísmico para: <i>a</i>) Desplazamiento, <i>b</i>) Desplazamiento longitud y <i>c</i>) Desplazamiento latitud.	64
3.17. Estructura del Variograma usando Covarianza Matern en el período Post-sísmico para: <i>a</i>)Desplazamiento, <i>b</i>)Desplazamiento longitud y <i>c</i>)Desplazamiento latitud	65
3.18. Cálculo de la Istropía con estructura del variograma usando Covarianza Matern en el período Post-sísmico para: <i>a</i>) Desplazamiento, <i>b</i>) Desplazamiento longitud y <i>c</i>) Desplazamiento latitud.	66

3.19. Kriging ordinario del desplazamiento en el período Pre-sísmico (izquierda). Varianza del Kriging ordinario del desplazamiento en el período Pre-sísmico (derecha).	67
3.20. Kriging ordinario del desplazamiento de la longitud en el período Pre-sísmico (izquierda). Varianza del Kriging ordinario del desplazamiento de la longitud en el período Pre-sísmico (derecha).	68
3.21. Kriging universal del desplazamiento en el período Sísmico (izquierda). Va- rianza del Kriging universal del desplazamiento en el período Sísmico(derecha). 69	
3.22. Kriging universal del desplazamiento de la longitud en el período Sísmico (izquierda). Varianza del Kriging universal del desplazamiento de la longitud en el período Sísmico(derecha).	70
3.23. Kriging universal del desplazamiento de la latitud en el período Sísmico (iz- quierda). Varianza del Kriging universal del desplazamiento de la latitud en el período Sísmico(derecha).	71
3.24. Kriging universal del desplazamiento en el período Post-sísmico (izquierda). Varianza del Kriging universal del desplazamiento en el período Post-sísmico (derecha).	72
3.25. Kriging universal del desplazamiento de la longitud en el período Post-sísmico (izquierda). Varianza del Kriging universal del desplazamiento de la longitud en el período Post-sísmico(derecha).	73
3.26. Kriging universal del desplazamiento de la latitud en el período Post-sísmico (izquierda). Varianza del Kriging universal del desplazamiento de la latitud en el período Post-sísmico(derecha).	74
3.27. Kriging universal del desplazamiento en el período Sísmico <i>a</i>). Cambios ho- rizontales en la costa y en el interior del continente asociados al terremoto del 16 de septiembre de 2015. El color rojo intenso sería del orden de 2m de desplazamiento hacia el oeste. Barrientos,(2015) <i>b</i>).	75

Capítulo 1

Introducción

1.1. Introducción

Debido a su ubicación, Chile es un país con constante actividad sísmica. Dentro del territorio existe una gran variedad de fallas, las cuales causan una alta cantidad de movimientos telúricos con diferentes intensidades. Estos movimientos dependiendo de su fuerza pueden provocar diferentes tipos de desastres, como lo son los deslizamientos de tierra, daño a construcciones, rompimiento, deformación y desplazamiento de la corteza terrestre.

Medir el movimiento y desplazamiento de la corteza terrestre a sido un desafío clave para entender la tectónica de las placas. Los sismómetros realizan la función de medir la magnitud del terremoto, pero a pesar de todo, los investigadores necesitan datos no sólo sobre los desplazamientos finales, sino también de los cambios continuos, crecientes y casi indetectable causado por los movimientos tectónico. Stenmark,(2014).

El GPS (Global Positioning System) viene a suplir muchas de estas necesidades, ya que éste permite estudiar en una línea continua de tiempo las variaciones de las coordenadas de un sitio en específico.

Se han realizado estudios del movimiento de la corteza terrestre a través de datos procesados en GPS en investigaciones, como Samsudin et al.(2014), donde se estudian los desplazamiento de la corteza en los cinturones tectónicos de Malasia entre los años 2005 y 2010, a través de datos generados por GPS, los que dan evidencia de que esta herramienta es sensible y efectiva para el estudio de los movimientos de corteza.

Existen otros métodos para medir la deformación y el desplazamiento de la corteza terrestre en terremotos a través de satélites de GPS e InSAR (Interferometric synthetic

aperture radar). Algunas de estas investigaciones es la que han llevado a cabo Wang (2010), utilizando estos métodos con satélites para el estudio de los efectos postsísmicos del terremoto de Antofagasta en el año 1995.

En este trabajo se estudiara el desplazamiento de la corteza terrestre a través de métodos geostatísticos en datos procesado en GPS, donde se tomará de referencia los libros de Cressie (1993), Giraldo (2002) y Diggle & Ribeiro (2007) relacionados con la estadística espacial. Para realizar los cálculos geostatístico se ocupara el programa R-project. En el libro de Bivand, Pebesma & Gómez(2004) aparecen una gran variedad de métodos geostatísticos aplicados en este programa, los cuales serán utilizados en el presente trabajo.

De todos modos, las investigaciones para medir el desplazamiento de la corteza terrestre, utilizando métodos geostatísticos con datos procesados en GPS, han sido muy poco abordados. Una de estas investigaciones es llevada a cabo por Poyraz & Güral(2007), ocupando filtros de Kalman para datos de GPS y su posterior utilización del métodos geostatísticos del kriging, para medir la deformación de la corteza terrestre influenciado por el terremoto de Mármara el 17 de agosto del año 1999.

Debido a esto, el presente proyecto ocupa una metodología poco utilizada y a la vez rápida a diferencia de otros métodos más complejos como el satélite InSAR.

Este trabajo está dividido en tres partes. En la primera parte, **Introducción**, la cual inicia con la explicación de los conceptos básicos para entender la formulación del problema, se introducirá a temas de la sismica, la geodésia, sistema de coordenadas, funcionamiento del GPS, transformacioón de coordenadas y formulas de aplicación.

En la segunda parte, **Metodología Geostatística**, comienza describiendo los conceptos de la Estadística espacial, los autores que se pueden destacar son Cressie (1993) y Giraldo (2002). El objetivo principal de este capítulo es describir las herramientas geostatísticas que se van a utilizar para hacer la predicción espacial.

En la tercera parte, se realizara la aplicación de la predicción de la corteza terrestre en los datos recolectado de las regiones de Atacama, Coquimbo y Valparaíso para el terremoto ocurrido en el año 2015. El objetivo es presentar los variogramas y mapas de predicción espacial, mostrando cuanto se puede predecir del desplazamiento. Finalmente se presentara una **Conclusión** con los resultados más importantes.

1.1.1. Objetivo general

Estimar a través de datos procesados en GPS el desplazamiento de la corteza terrestre en las regiones de Atacama, Coquimbo y Valparaíso en diferentes períodos.

1.1.2. Objetivos específicos

1. Estimar el variograma de los datos del desplazamiento de la corteza terrestre en un cierto período, utilizando los datos de estaciones de GPS.
2. Predecir espacialmente mediante la técnica del kriging, en puntos donde no existen estaciones de GPS, ocupando las estimaciones del punto anterior.
3. Evaluar el desplazamiento pre y post sísmico de las longitudes y las latitudes.

1.1.3. Hipótesis

1. Se supone que el desplazamiento sea una variable regionalizada con distribución gaussiana, sea continua en el espacio y que siga un proceso Gaussiano.
2. Se supone que los datos de desplazamiento tengan correlación espacial modelable con una función paramétrica (por ejemplo, Exponencial, Esférico, Gaussiana, etc).
3. Se supone que se pueda formular un modelo geostadístico de kriging para estimar el desplazamiento de la corteza terrestre donde las estaciones de GPS no están disponibles.

1.2. Sismicidad

Un terremoto es un evento telúrico que sucede cuando la superficie de la Tierra tiembla debido a la liberación de energía tras el movimiento de grandes bloques de corteza denominadas *placas*, a lo largo de una *falla*. Las fallas son rompimientos de la corteza que pueden tener cientos de kilómetros. Algunas de las fallas en el territorio chileno son:

1. Falla de Atacama
2. Falla de Pichilemu



Figura 1.2: Fotografías de estructuras dañadas en localidades de la Región de Coquimbo tomadas en enero de 2016. a) Iglesia de Monte Patria, b) derrumbe de vivienda en Illapel, c) y d) viviendas contiguas en Combarbalá de adobe, con y sin daños, respectivamente, Fernández, Pastén, Ruiz, & Leyton (2017)

En la Figura 1.2 se muestran fotografías de estructuras dañadas por el terremoto del año 2015, en diferentes ciudades de la región de Coquimbo.

1.3. Sistema de Posicionamiento Global (GPS)

Los avances tecnológicos han ayudado al estudio de la deformación y el desplazamiento de la corteza. Los expertos han encontrado en el sistema satelital GPS (Global Positioning System) una herramienta útil para el estudio de la deformación y desplazamiento de la corteza terrestre.

El GPS es uno de los avances más importantes tecnológicos de las últimas décadas, diseñado inicialmente como una herramienta militar para la estimación precisa de posición, velocidad y tiempo de un objeto o zona. En la actualidad también se utiliza en múltiples aplicaciones civiles. El GPS ocupa conjuntamente una red de ordenadores con una constelación de 24 satélites alrededor de la órbita de la Tierra, para determinar por medio de una triangulación el tiempo, la latitud, longitud y altura de cualquier objetivo en la superficie terrestre.



Figura 1.3: Red satelital en la órbita de la Tierra, Instituto Geográfico Agustín Codazzi (2007)

En la Figura 1.3 se observa una representación de la red satelital que orbita la Tierra.

Medir el movimiento de las placas entre si es un desafío clave para entender la tectónica de estas. Los sismómetros cumplen la función de medir la magnitud del terremoto, sin embargo los investigadores necesitan datos, no sólo sobre el desplazamiento resultante, sino también de los cambios continuos, incrementables y casi indetectables causado por los movimientos tectónicos. Stenmark,(2014)

El GPS indica con precisión cuanto se mueve el terreno durante el sismo. Para que un receptor de GPS proporcione información útil sobre las ondas sísmicas, los movimientos del terremoto deben ser de una magnitud mayor a 6° en la escala de Richter.

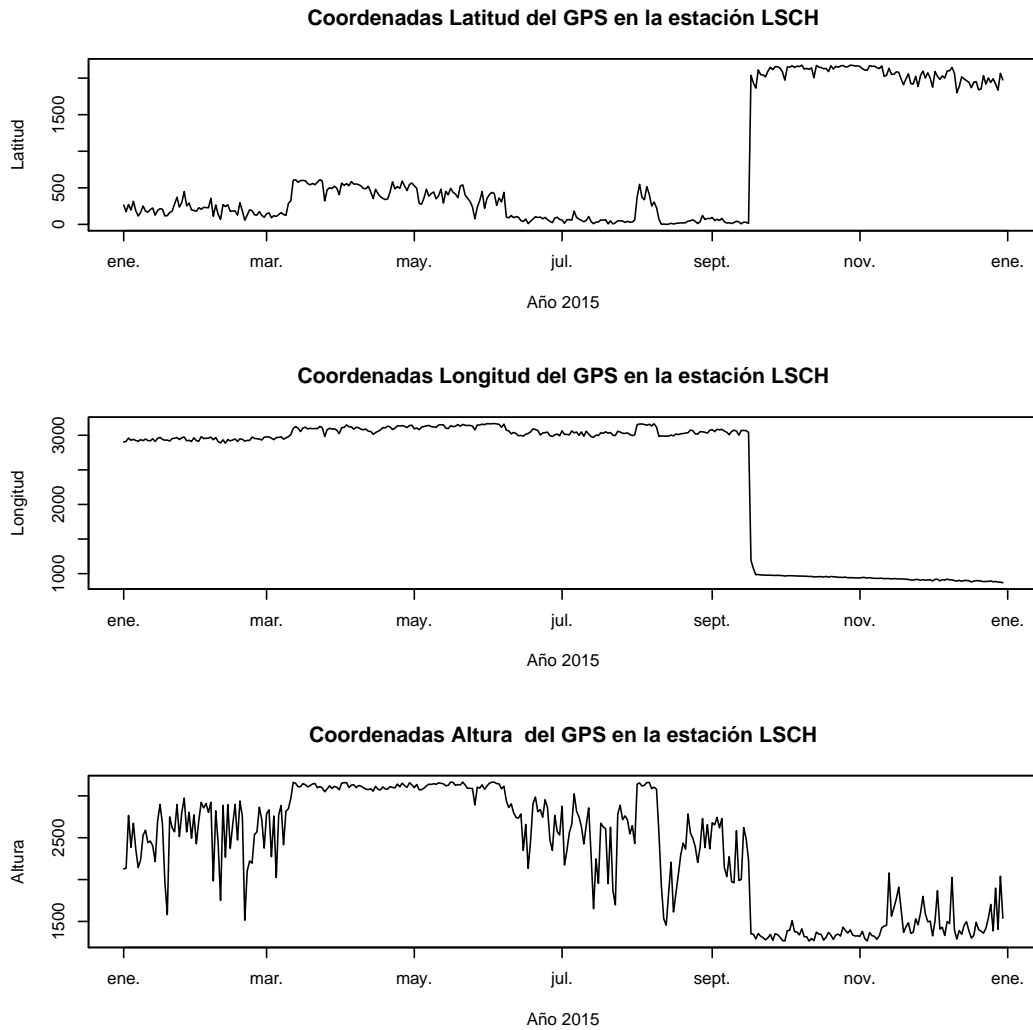


Figura 1.4: Coordenadas de la estación de GPS LSCH, ubicada en La Serena en el año 2015

En la Figura 1.4 se puede observar una serie de tiempo respecto a una estación de GPS ubicada en la ciudad de La Serena, en la región de Coquimbo en el año 2015. A través de la serie podemos distinguir que el GPS identifica la latitud, longitud y altura a través del tiempo.

1.4. Geodesia

La Geodesia es una ciencia que desde la antigüedad se ha dedicado al estudio de la medida y forma del globo terráqueo, adaptándose a las necesidades de la época para aplicarse a problemas prácticos, como son la confección de mapas nacionales e internacionales o la preparación de cartas náuticas. La Geodesia se define brevemente como la ciencia que resuelve los problemas relacionados con la figura y dimensiones de la Tierra (Corchete, 2009).

1.4.1. Problemas que resuelve la Geodesia

1. Determinación del tipo de superficie matemática que representa la figura de la Tierra.
2. Determinación astronómicas de las latitudes y longitudes terrestres.
3. Observación de satélites artificiales.
4. Elaboración de métodos e instrumentos para la ejecución de mediciones y observaciones de alta precisión.
5. Desarrollo de métodos topográficos con los que se estudia detalladamente la forma de la superficie terrestre.
6. Levantamiento cartográfico de grandes territorios, es decir, representaciones de la superficie terrestre sobre un plano.

A través de los servicios científicos de la Asociación Internacional de Geodesia, ha sido posible materializar sobre la superficie terrestre sistemas de referencia geocéntricos, en los cuales el ajuste entre *Elipsoide* y *Geoide* se plantean a nivel global. (Huerta, Mangiaterra, & Noguera, 2005).

Definición 1.1 El Geoide es la superficie teórica de la Tierra. Esta superficie no es uniforme, si no que presenta una serie de irregularidades, causado por las diferentes composiciones minerales al interior de la tierra y de sus distintas densidades. Esto implica que para cada punto de la superficie terrestre exista una distancia distinta desde el centro de la tierra al punto del Geoide. (Coppel, 2001)

Definición 1.2 El Elipsoide es un elemento de representación de la Tierra con una figura tridimensional que se crea a partir de una elipse de dos dimensiones. Como se sabe,

la Tierra no es redonda, ya que es achatada en los polos y no existe modelo matemático que represente toda la superficie terrestre. (Coppel,2001)

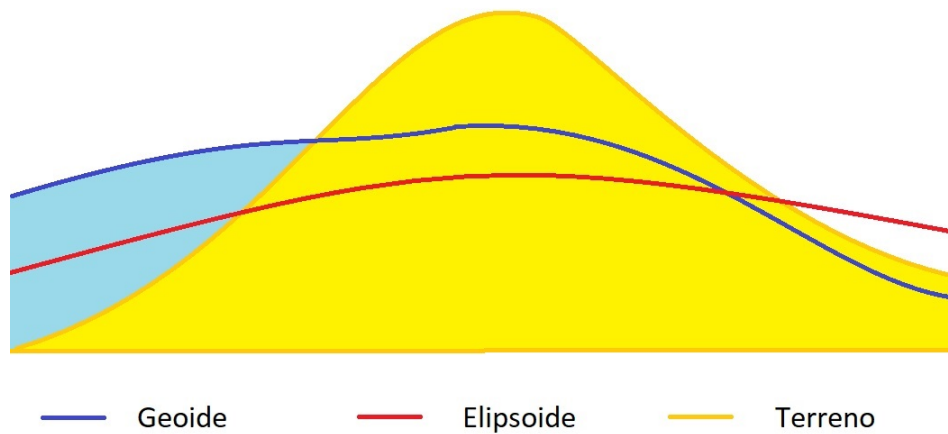


Figura 1.5: Geodie , Elipsoide y la superficie terrestre.

En la Figura 5 se observan el contraste entre el Geoide, el Elipsoide y la corteza terrestre.

Definición 1.3 El *Datum* es el punto tangente al Elipsoide y al Geoide, donde ambos son coincidentes. Definido el Datum, ya se puede elaborar la cartografía de cada lugar, pues se tienen los parámetros de referencia que relacionan el punto de origen del Geoide y del Elipsoide con su localización geográfica, así como la dirección del sistema. (Coppel, 2001).

Existen diferentes tipos de Datum, algunos de estos son:

1. WGS-84 (World Geodetic System 1984): se utiliza de manera universal para todo el planeta. Es el que utiliza el GPS por defecto.
2. NAD 27 (North American Datum of 1927) y NAD83 (North American Datum of 1983): se utiliza en América del Norte.
3. PSAD56 (Provisional South American Datum of 1956): se utiliza en Sudamérica.

1.5. Sistema WGS-84

El WGS-84 es un sistema de coordenadas geográficas mundial, que permite localizar cualquier punto de la Tierra por medio de tres unidades dadas, este es un modelo estándar para uso en la cartografía, geodesia y navegación. Cuenta con coordenadas de la Tierra, conforme a un elipsoide y un geoide que define el nivel del mar nominal. El origen de coordenadas de WGS-84 está ubicado en el centro de la masa de la Tierra. Se estima que el margen de error es menos de $2cm$, NIMA (2000).

El sistema de referencia WGS-84 está definido por los siguientes parámetros :

1. Origen: Centro de masa de la Tierra
2. Sistema de ejes coordenados
 - a) Eje Z: dirección del polo de referencia
 - b) Eje X: intersección del meridiano
 - c) Eje Y: eje perpendicular a los dos puntos anteriores.
3. Elipsoide WGS-84: elipsoide de revolución definido por los parámetros:
 - a) Semieje mayor $a = 6.378,137m$
 - b) Semieje menor $b = 6.356.752,3142m$
 - c) Achatamiento $f = 1/298,25$
4. Constante de Gravitación Terrestre
 - a) $GM = 3,986004418 \cdot 10^{14}m^3/s^2$
5. Velocidad angular $\omega = 7,292115 \cdot 10^{-5}rad/s$
6. Coeficiente de forma dinámica $J2 = -484,16685 \cdot 10^{-6}$

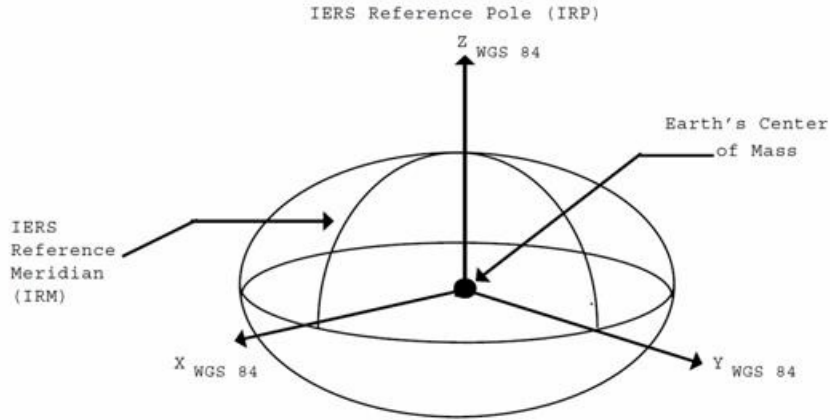


Figura 1.6: Sistema de Coordenadas WGS-84, NIMA (2000)

En la Figura 1.6 se puede ver la representación gráfica de los parámetros más importantes explicados anteriormente, del sistema de coordenadas WGS-84.

1.6. Transformación de coordenadas

Se encontrará la necesidad de convertir coordenadas geodésicas de distintos datum, a un único datum. Este problema puede surgir cuando se trabaja en un sistema de referencia distinto a los que se utilizan habitualmente. Corchete (2009).

Entonces, será necesario convertir las coordenadas geodésicas (ϕ, λ, h) en coordenadas cartesianas (x, y, z) . Para ello, podemos recurrir a una suma vectorial.

$$\vec{r} = \vec{r}_Q + h\vec{N} \quad (1.1)$$

Donde los vectores están dados por Cid & Ferrer (1997)

$$\vec{r}_Q = (\rho_N \cos(\phi) \cos(\lambda), \rho_N \cos(\phi) \sin(\lambda), (1 - e^2) \rho_N \sin(\phi)) \quad (1.2)$$

$$\vec{N} = (\cos(\phi) \cos(\lambda), \cos(\phi) \sin(\lambda), \sin(\phi)) \quad (1.3)$$

Siendo.

$$\rho_N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \phi}} \quad e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$$

El valor del semieje menor b puede calcularse fácilmente, pues son siempre conocidos los valores del semieje mayor a y del achatamiento del elipsoide de referencia f , teniendo entonces que:

$$f = \frac{a-b}{a} \Rightarrow b = a - af.$$

En consecuencia podemos escribir las ecuaciones

$$\begin{aligned} x &= (\rho_N + h)\cos(\phi)\cos(\lambda) \\ y &= (\rho_N + h)\cos(\phi)\sen(\lambda) \\ z &= ((1 - e^2)\rho_N + h)\sen(\phi) \end{aligned} \tag{1.4}$$

Que nos permiten convertir las coordenadas geodésicas (ϕ, λ, h) en coordenadas cartesianas (x, y, z) .

Para realizar estas transformaciones se puede recurrir a paginas web como:

<http://www.apsalin.com/convert-cartesian-to-geodetic.aspx>.

1.7. Fórmulas de desplazamiento

Se define el desplazamiento en el caso bidimensional como una cantidad vectorial. Para referirnos al desplazamiento de un objeto debemos especificar cuanto se desplazó y en que dirección lo hizo.

$$\vec{d}_{21} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1) \tag{1.5}$$

El desplazamiento entre los tiempos t_1 y t_2 está dado por la ecuación (1.5), la cual es obtenida simplemente a partir de la resta de los dos vectores posición evaluados en los instantes involucrados. Cadíz, Hevia & Reyes.(2013)

Para calcular cuanto se deslaza un punto a otro, Lehmann,(1965) define la distancia entre $P1 = (x_1, y_1)$ y $P2 = (x_2, y_2)$ como:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{1.6}$$

Para calcular el desplazamiento de la longitud, se decidió modificar una parte de la fórmula de Lehmann, aplicándole un valor absoluto a la primera diferencia de puntos. Esto para denotar cuanto fue el desplazamiento total de la longitud entre estos puntos:

$$\Delta x = |x_2 - x_1| \tag{1.7}$$

Para calcular el desplazamiento de la latitud, se procederá de igual forma como en el caso de la longitud, modificando una parte de la fórmula de Lehmann, aplicándole un valor absoluto a la segunda diferencia de puntos. Esto para denotar cuanto fue el desplazamiento total de la latitud entre estos puntos:

$$\Delta y = |y_2 - y_1| \tag{1.8}$$

Capítulo 2

Metodología Geostatística

2.1. Introducción a la Geostatística

El estudio de los fenómenos con correlación espacial, por medio de los métodos geostatísticos, surgió a partir de los años sesenta, especialmente con el propósito de predecir variables en sitios no muestreados. Una primera aproximación a la solución de este problema fue dada por el geólogo Daniel Gerhardus Krige que propuso una variante del método de medias móviles. En los años posteriores la teoría fue perfeccionándose, ampliando su campo de validez. Aunque la aplicación de la herramienta geostatística es bastante reciente, son innumerables las aplicaciones que se puede utilizar en estudios ambientales, Giraldo (2002)

El desarrollo del presente capítulo tiene como mayor referencia a Cressie (1993), Matheron & Blondel(1962), Giraldo (2002), y Diggle & Ribeiro (2007), en el cual sus textos muestran detalladamente cada paso para un completo análisis espacial de los datos.

2.2. Estadística Espacial

El término Estadística Espacial se utiliza para describir una amplia gama de modelos estadísticos, métodos de estimación y análisis de datos georreferenciados. Dentro de la estadística espacial, el término geostatística se refiere a modelos y métodos que reúnen ciertas características. Los datos espaciales pueden ser continuos o discretos, agrupados espacialmente o ser puntos en el espacio, sus ubicaciones pueden ser regulares o irregulares, como pueden ser contínuas en el espacio o un conjunto discreto. Se dice que la estadística espacial trata de un proceso estocástico $\{S(x) : x \in D\}$ donde $x \in D^d$ representa una ubicación en

el espacio euclidiano d -dimensional y $S(x)$ es una variable medida en la ubicación x , a la vez x puede cambiar sobre el conjunto de $D \subset R^d$.

2.3. Variable Regionalizada

La variable regionalizada se puede describir como un proceso estocástico con dominio contenido en el espacio euclidiano d -dimensional $R^d \{S(x) : x \in D \subset R^d\}$ si $d = 2$, $S(x)$ se le puede relacionar una variable medida en un punto x . En conclusión $S(x)$ es una medición de una variable aleatoria en un punto x de una región.

Cressie (1993) ilustra los tipos de problemas que pueden ser abordados en diferentes dominios de D

2.3.1. Datos Geostatísticos

Las ubicaciones x son elegidas a juicio del investigador y proviene de un conjunto D continuo, el investigador puede hacer selección de puntos en el espacio a conveniencia o pueden ser seleccionados bajo algún tipo de muestreo probabilístico.

2.3.2. Enmallados

Las ubicaciones pueden ser regular o irregularmente distribuidas en el espacio D , este a su vez es un conjunto discreto y son seleccionados por el investigador.

2.3.3. Patrones Espaciales

Las ubicaciones x pertenecen a un conjunto D que puede ser continuo o discreto y la selección de estos no puede ser realizada por el investigador.

2.4. Momentos de una variable regionalizada

Sea $\{S(x) : x \in D \subset R^d\}$ un proceso estocástico que define a la variable regionalizada. Para cualquier n punto x_1, x_2, \dots, x_n el vector aleatorio $\vec{S}(x) = [S(x_1), S(x_2), \dots, S(x_n)]^t$ está definido por su función de distribución conjunta

$$F [s_1, s_2, \dots, s_n] = P [S(x_1) \leq s_1, S(x_2) \leq s_2, \dots, S(x_n) \leq s_n]$$

Calculadas las densidades marginales univariadas y bivariadas se pueden establecer los siguientes momentos:

1. $E(S(x_i)) = \mu(x_i)$
2. $V(S(x_i)) = E[S(x_i) - \mu(x_i)]^2 = \sigma_i^2$
3. $Cov(S(x_i), S(x_j)) = E[S(x_i) - \mu(x_i)][S(x_j) - \mu(x_j)]$
4. $\gamma(S(x_i), S(x_j)) = \frac{1}{2}E[S(x_i) - \mu(x_i)]^2$

2.5. Estacionariedad

La variable regionalizada es estrictamente estacionaria o fuertemente estacionaria si su función conjunta no cambia respecto a un vector de traslación h , en otras palabras el vector aleatorio $\vec{S}(x) = [S(x_1), S(x_2), \dots, S(x_n)]^t$ es idéntico al vector

$\vec{S}(x) = [S(x_1 + h), S(x_2 + h), \dots, S(x_n + h)]^t$ para cualquier h . La estacionariedad también puede definirse de la siguiente forma:

2.6. Estacionaridad de segundo orden

Sea $\{S(x) : x \in D \subset R^d\}$ una variable regionalizada definida en un dominio D contenido en R^d , se dice que $S(x)$ es estacionario de segundo orden si cumple:

1. $E(S(x)) = \mu$

El valor esperado de la variable medida es finita y constante para todo punto en el dominio.

2. $Cov[S(x), S(x + h)] < \infty$

Para toda pareja de $\{S(x), S(x + h)\}$, la covarianza existe y es una función única del vector de separación h

2.7. Estacionareidad débil o intríntrica

Se dice que $S(x)$ cumple con el supuesto de estacionareidad débil si cumple:

1. $S(x)$ tiene esperanza finita y constante para todo los puntos del dominio D . Lo que significa que la esperanza de los incrementos es cero.

$$E[S(x+h) - S(x)] = 0$$

2. Para un vector de traslación h , la varianza del incremento está definida y es una función única de la distancia.

$$V[S(x+h) - S(x)] = E[S(x+h) - S(x)]^2 = 2\gamma(h)$$

2.8. Isotropía

Si una variable regionalizada es estacionaria fuerte entonces también será estacionaria débil. En la estadística espacial existe una amplia variedad de direcciones y por lo tanto se debe asumir que en todas, el fenómeno es estacionario. Cuando la esperanza de la variable no es la misma en todas las direcciones o cuando la covarianza o correlación entre los datos dependa de la dirección en la que se calcula, se dice que en el fenómeno no existirá estacionariedad. En cambio si la correlación entre los datos no depende de la dirección en que se calcula, se dice que el fenómeno es *isotrópico*, en caso contrario se hablará de *anisotropía*.

La isotropía es estudiada a través del cálculo de función de autocovarianza o de semivarianza para varias direcciones. Si estas direcciones tienen formas considerablemente distintas, puede ser que no exista el fenómeno de isotropía.

2.9. Variograma

La primera etapa en el desarrollo de un análisis geostadístico es la determinación de la dependencia espacial entre los datos medidos de una variable, para realizar esto, se ocupará la función del variograma y el semivariograma.

$$\begin{aligned} 2\gamma(h) &= V(S(x+h) - S(x)) \\ &= E(S(x+h) - S(x))^2 \end{aligned}$$

La mitad del variograma $\gamma(h)$, se conoce como la función de semivarianza o semivariograma y caracteriza las propiedades de dependencia espacial del proceso. El semivariograma experimental se define como:

$$\gamma(h) = \frac{\sum (S(x+h) - S(x))^2}{2n}$$

$S(x)$ es la variable medida en el sitio x , $S(x+h)$ es un valor separado a través de la distancia h y n es el número de parejas que se encuentran separadas por esta distancia. En la práctica, debido a las irregularidades del muestreo, las distancias entre cada sitio se toman en intervalos de distancia $\{(0, h], (h, 2h], (2h, 3h], \dots\}$. El semivariograma experimental corresponde a una distancia promedio entre parejas de sitios dentro de cada intervalo, y no a una distancia h específica.

2.9.1. Modelos teóricos del Semivariograma

Para el cálculo del semivariograma se hace necesario el ajuste de modelos que generalicen lo observado en el semivariograma para cualquier distancia, existen diversos modelos a los que se le puede ajustar como una curva a los datos. Todos estos modelos tienen tres parámetros en común, los cuales son:

Pepita

Se denota por τ^2 y representa la discontinuidad puntual inicial del semivariograma. Esto puede ser debido a errores de medición de la variable.

Meseta

Es la cota superior del semivariograma. La meseta puede ser finita o infinita. Las mesetas que tiene meseta finita cumplen con la hipótesis de estacionariedad fuerte. La meseta se denota por σ^2 o por $\tau^2 + \sigma^2$ cuando la pepita es diferente a cero.

Rango

El rango es la distancia a partir de la cual las observaciones son independientes. El rango es la distancia donde el semivariograma alcanza un 95 % de la meseta y se representa por ϕ .

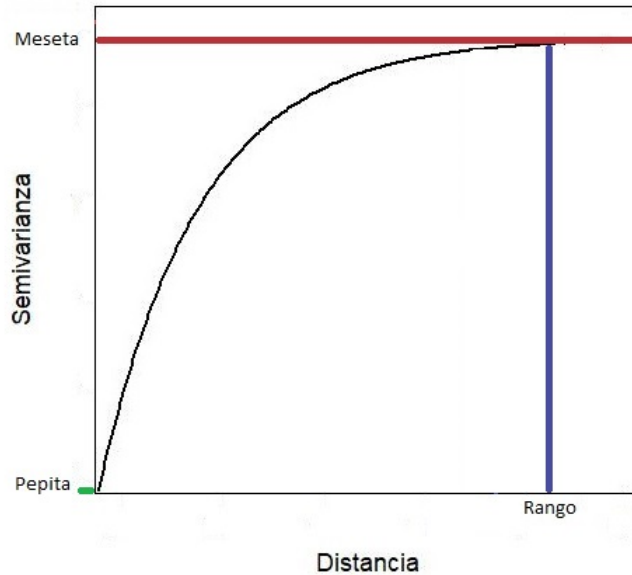


Figura 2.1: Parámetros del variograma expresados en un modelo

En la Figura 2.1 se observan gráficamente la ubicación de los parámetros del semivariograma (Pepita, Meseta y Rango)

2.9.2. Modelo Esférico

Este modelo es ampliamente utilizado, es una expresión polinomial simple, en su forma representada en la Figura 2.1, se puede observar un crecimiento casi lineal y después a una cierta distancia obtiene una estabilización . Un modelo con estructura de correlación esférica espacial, tiene la siguiente forma.

$$\gamma(h) \begin{cases} \tau^2 + \sigma^2 & \text{si } h \geq \frac{1}{\phi} \\ \sigma^2 \left[\frac{3}{2}\frac{h}{\phi} + \frac{1}{2}\left(\frac{h}{\phi}\right)^3 \right] & \text{si } 0 < h < \frac{1}{\phi} \\ 0 & \text{si } h = 0 \end{cases}$$

2.9.3. Modelo Exponencial

El modelo exponencial a diferencia del modelo esférico crece inicialmente más rápido y después se estabiliza de forma asintótica. El valor del rango es igual a la distancia para la

cual el semivariograma toma un valor del 95 % de la meseta. Su expresión matemática es la siguiente:

$$\gamma(h) \begin{cases} \tau^2 + \sigma^2(1 - \exp(-\phi \cdot h)) & \text{si } h > 0 \\ \tau^2 + \sigma^2 & \text{si } h = 0 \end{cases}$$

2.9.4. Modelo Gaussiano

Este modelo presenta un comportamiento parabólico en el origen, después al igual que en el modelo exponencial se alcanza la meseta de forma asintótica. El modelo gaussiano tiene la siguiente fórmula:

$$\gamma(h) \begin{cases} \tau^2 + \sigma^2(1 - \exp(-\phi^2 \cdot h^2)) & \text{si } h > 0 \\ 0 & \text{si } h = 0 \end{cases}$$

2.9.5. Modelo Matern

Esta clase de modelos fue originalmente sugerida por Matern (1960). Sus elementos son ; $\nu > 0$, que denota la suavidad del proceso, ϕ es el parámetro de escala espacial, $\Gamma(\nu)$ es la función gamma usual, K_ν es la función de Bessel modificada por escala ν . El modelo se define como :

$$\gamma(h) \begin{cases} \tau^2 + \sigma^2 \left[1 - \frac{2\sqrt{\nu}h\phi}{2^{\nu-1}\Gamma(\nu)} K_\nu(2\sqrt{\nu}h\phi) \right] & \text{si } h > 0 \\ \tau^2 & \text{si } h = 0 \end{cases}$$

2.9.6. Modelo de independencia (Pepita puro)

Este modelo indica la carencia de correlación espacial entre las observaciones de una variable espacial. Es común sumar este modelo a otro modelo teórico del semivariograma. Su expresión matemática es:

$$\gamma(h) \begin{cases} 0 & \text{si } h = 0 \\ \tau^2 & \text{si } h \geq 0 \end{cases}$$

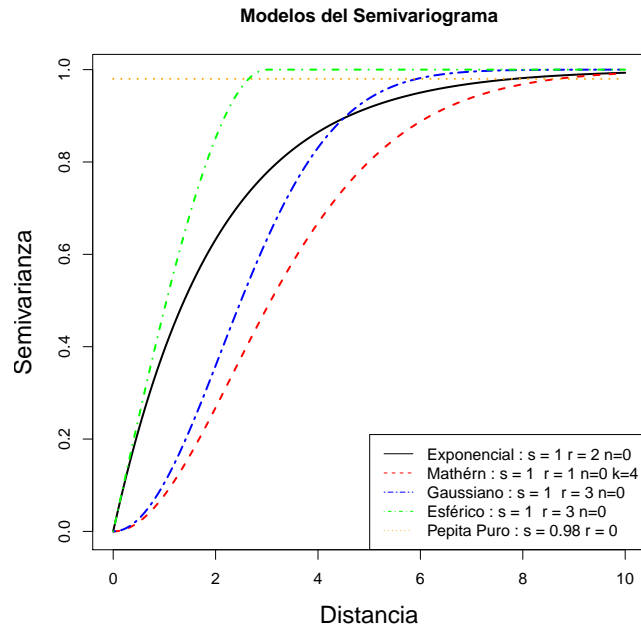


Figura 2.2: Comparación de los modelos Matern, Exponencia, Esférico, Gaussiano y Pepita Puro, respecto a una escala simulada de 0 a 1.

En la Figura 2.2 podemos observar los modelos explicados anteriormente en un gráfico de semivariograma, esto para comparar sus diferentes comportamientos calculados con parámetros iguales (exceptuando el modelo de Pepita Puro).

2.10. Kriging

La palabra *kriging* es sinónimo de "predicción óptima", esto se refiere a hacer inferencia sobre valores no observados del proceso $S(x)$. El nombre proviene del geólogo sudafricano Daniel Gerhardus Krige, cuyos trabajos en la predicción realizado en las reservas de oro en los años 50's , suele considerarse como pionero en los métodos de interpolación espacial. A principios este método era muy básico y través del tiempo ha ido evolucionando hasta llegar a los modelos que conocemos en la actualidad. Kriging encierra un conjunto de métodos de predicción espacial que se basa en la minimización del error cuadrático medio de predicción. En la siguiente tabla se hace una presentación de estos.

Tipo de predictor	Nombre	Propiedades
Lineal	Simple Ordinario Universal	Óptimos si existe normalidad multivariada Independiente de la distribución son los mejores predictores lineales insesgados
No Lineal	Indicador Probabilístico Disyuntivo	Son predictores óptimos.

2.10.1. Kriging Simple

Se asume un modelo del tipo:

$$S(x) = \mu + \epsilon(x) \quad x \in D, \mu \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \mu \text{ es conocido.}$$

$$\text{Con } E(\epsilon(x)) = 0 \quad \text{y} \quad E[S(x)] = \mu$$

El predictor de la variable de interés del sitio x_0 donde no hay información esta dado por:

$$\hat{S}(x_0) = \mu + \hat{\epsilon}(x_0)$$

Donde $\hat{\epsilon}(x_0)$ corresponde a la predicción del error aleatorio del sitio x_0 . Despejando la ecuación anterior $\hat{\epsilon}(x_0) = \hat{S}(x_0) - \mu$. El predictor del error aleatorio se define por:

$$\hat{\epsilon}(x_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \epsilon(x_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i (S(x_i) - \mu).$$

Donde λ_i son pesos asignados a la variable que deben ser estimados. El predictor de la variable de estudio esta dado por:

$$\hat{S}(x_0) = \mu + \left[\sum_{i=1}^n \lambda_i (S(x_i) - \mu) \right] = \mu + \sum_{i=1}^n \lambda_i \epsilon(x_i)$$

El predictor es insesgado si:

$$E(\hat{S}(x_0)) = E(S(x_0)) = \mu$$

Luego el predictor será insesgado cuando

$$E(\hat{\epsilon}(x_0)) = 0$$

$$E(\hat{\epsilon}(x_0)) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \epsilon(x_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(0) = 0.$$

La estimación de los pesos del método del *Kriging Simple*, se obtiene de tal forma que se minimice $V(\hat{\epsilon}(x_0) - \epsilon(x_0))$.

Denominaremos a

$$V(\hat{\epsilon}(x_0) - \epsilon(x_0)) = \sigma_k^2$$

Entonces

$$\begin{aligned} \sigma_k^2 &= E(\hat{\epsilon}(x_0) - \epsilon(x_0))^2 \\ &= E\left(\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \epsilon(x_i)\right) - \epsilon(x_0)\right)^2 \\ &= E\left[\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \epsilon(x_i)\right)\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j \epsilon(x_j)\right) - 2E\left(\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \epsilon(x_i)\right)\epsilon(x_0)\right) + E(\epsilon(x_0))^2\right] \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j E(\epsilon(x_i)\epsilon(x_j)) - 2 \sum_{i=1}^n \lambda_i E(\epsilon(x_i)\epsilon(x_0)) + E(\epsilon(x_0))^2 \end{aligned}$$

Usando:

1. $E(\epsilon(x_0)) = 0$
2. $E(\epsilon(x_i)\epsilon(x_j)) = Cov(\epsilon(x_i), \epsilon(x_j)) = C_{ij}$
3. $E(\epsilon(x_0))^2 = \sigma^2$

Entonces

$$\sigma_k^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j C_{ij} - 2 \sum_{i=1}^n \lambda_i C_{j_0} + \sigma^2 \quad (2.1)$$

Derivando respecto λ_1 se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_k^2}{\partial \lambda_1} &= \frac{\partial}{\partial \lambda_1} \left(\lambda_1^2 C_{11} + 2\lambda_1 \sum_{j=2}^n \lambda_j C_{1j} + \sum_{i=2}^n \sum_{j=2}^n \lambda_i \lambda_j C_{ij} - 2\lambda_1 C_{10} - 2 \sum_{i=1}^n \lambda_i C_{i0} + \sigma^2 \right) \\ &= 2\lambda_1 C_{11} + 2 \sum_{j=2}^n \lambda_j C_{1j} - 2C_{10} \\ &= 2 \sum_{j=1}^n \lambda_j C_{1j} - 2C_{10} \end{aligned}$$

Igualando a cero.

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j C_{1j} = C_{10}$$

Generalizando, para cualquier $i, i = 1, 2, \dots, n$ se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_j} = \sum_{j=1}^n \lambda_j C_{ij} = C_{i0} \quad (2.2)$$

Con las n ecuaciones resultantes se construye la siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{10} \\ C_{20} \\ \vdots \\ C_{n0} \end{pmatrix}$$

$$C_{ij} \cdot \lambda = C_{i0}$$

Por lo cual los pesos que minimizan el error de predicción se determina mediante la función de covariograma a través de:

$$\lambda = C_{ij}^{-1} \cdot C_{i0}$$

Varianza del Kriging Simple

Se tiene de (2,1) que:

$$\sigma_k^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j C_{ij} - 2 \sum_{i=1}^n \lambda_i C_{i0} + \sigma^2$$

$$\sigma_k^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i \sum_{j=1}^n \lambda_j C_{ij} - 2 \sum_{i=1}^n \lambda_i C_{i0} + \sigma^2$$

reemplazando (2,2) en (2,1)

$$\sigma_k^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i C_{i0} - 2 \sum_{i=1}^n \lambda_i C_{i0} + \sigma^2$$

$$\sigma_k^2 = \sigma^2 - \sum_{i=1}^n \lambda_i C_{i0}$$

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{\cdot n} \lambda_i C_{i0}$$

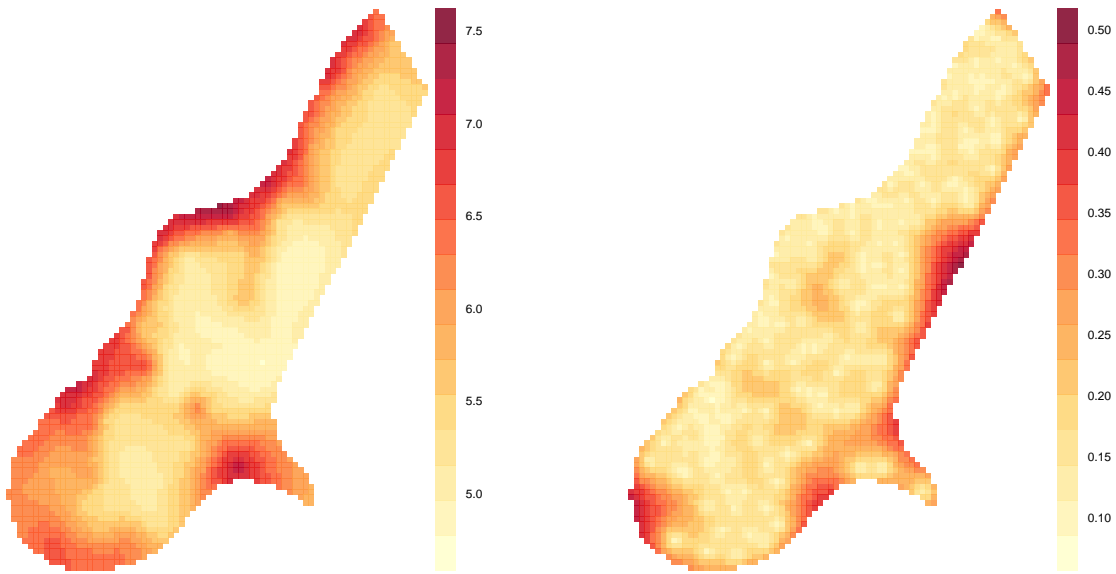


Figura 2.3: Kriging Simple y Varianza del Kriging Simple (izquierda y derecha), confeccionado en base al modelo de variograma de los datos del paquete `gstat`, `data(meuse)`.

En la Figura 2.3 se muestra un ejemplo del método de predicción Kriging Simple y su varianza, usando la librería `gstat` de R. Se utilizó los datos de `data(meuse)`, que corresponde a la concentración de Zinc en el río Meuse ubicado en los países bajos. Las concentraciones más grandes son medidas en lugares cercanos al río, Pebesma (2004).

2.10.2. Kriging Ordinario

El *Kriging Ordinario* se refiere a la predicción espacial bajo los siguientes supuestos:

A partir de un modelo:

$$S(x) = \mu + \delta(x) \quad x \in D, \mu \in \mathbb{R} \text{ y } \mu \text{ es desconocido.}$$

Donde.

$$\delta(x) = \eta(x) + \epsilon(x)$$

1. $\eta(x)$ Es un proceso de media cero, intrínsecamente estacionario, cuyo rango de variograma existe.
2. $\epsilon(x)$ Es un proceso de ruido blanco de media cero. Se llama a $\epsilon(\cdot)$ a la pepita (error de medida) o ruido.

Se desea predecir $S(x_0)$ en el punto x_0 donde no hubo medición. En estas circunstancias, el método de *Kriging Ordinario* propone que este valor puede calcularse a través de la siguiente combinación lineal.

$$\hat{S}(x_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i S(x_i)$$

Donde los λ_i son pesos de los valores originales. Estos pesos se calculan en función de los datos obtenidos y el punto donde se va a hacer la correspondiente predicción. La suma de estos pesos debe llegar a uno, para que la esperanza del predictor sea igual a la esperanza de la variable.

Las propiedades de insesgamiento se expresan a través de:

$$E(\hat{S}(x_0)) = E(S(x_0))$$

A sumiendo que el proceso es estacionario de media μ (desconocido) y utilizando las propiedades de valor esperado, se demuestra que la suma de las ponderaciones debe ser igual uno.

$$\begin{aligned} E\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i S(x_i)\right) &= \mu \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i E(S(x_i)) &= \mu \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i \mu &= \mu \\ \mu \sum_{i=1}^n \lambda_i &= \mu \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i &= 1 \end{aligned}$$

Se dice que $\hat{S}(x_0)$ es el mejor predictor lineal en este caso, los pesos se obtienen de tal manera que minimice la varianza del error de predicción, es decir que minimice la expresión.

$$V(\widehat{S}(x_0) - S(x_0)) \quad \text{sujeto a} \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i$$

Se tiene que

$$V(\widehat{S}(x_0) - S(x_0)) = V(\widehat{S}(x_0)) - Cov(\widehat{S}(x_0), S(x_0)) + V(S(x_0))$$

De la ecuación anterior se obtiene que lo siguiente:

$$V(\widehat{S}(x_0)) = V \left[\sum_{i=1}^n \lambda_i S(x_i) \right] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j Cov(S(x_i), S(x_j))$$

Para simplificar cálculos se usara la siguiente notación:

$$Cov(S(x_i), S(x_j)) = C_{ij} \quad \text{y} \quad V[S(x_0)] = \sigma^2$$

De lo anterior

$$\begin{aligned} Cov(\widehat{S}(x_0), S(x_0)) &= Cov\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i S(x_i), S(x_0)\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i Cov(S(x_i), S(x_0)) = \sum_{i=1}^n \lambda_i C_{i0} \end{aligned}$$

Reemplazando se tiene que:

$$V \left[\widehat{S}(x_0) - S(x_0) \right] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j C_{ij} - 2 \sum_{i=1}^n \lambda_i C_{i0} + \sigma^2 \quad (2.3)$$

Luego se debe minimizar la función anterior sujeta a la restricción $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$. Este problema se resuelve mediante el método de multiplicadores de Lagrange de la siguiente manera:

$$\sigma_k^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j C_{ij} - 2 \sum_{i=1}^n \lambda_i C_{i0} + \sigma^2 + \underbrace{2\phi}_{\text{Multiplicador de Lagrange}} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i - 1 \right)}_0$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_k^2}{\partial \lambda_1} &= \frac{\partial \left[\left(\lambda_1^2 C_{11} + 2\lambda_1 \sum_{j=2}^n \lambda_j C_{1j} + \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j C_{ij} \right) - 2 \sum_{i=1}^n \lambda_i C_{i0} + 2\mu \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i - 1 \right) \right]}{\partial \lambda_1} \\
&= \left(2\lambda_1 C_{11} + 2 \sum_{j=2}^n \lambda_j C_{1j} \right) - 2C_{10} + 2\phi \\
&= 2 \sum_{j=1}^n \lambda_j C_{ij} - 2C_{10} + 2\phi = 0 \\
&\quad \sum_{j=1}^n \lambda_j C_{1j} + \phi = C_{10}
\end{aligned} \tag{2.4}$$

De manera análoga se determinan las derivadas con respecto a $\lambda_2, \dots, \lambda_n$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_k^2}{\partial \lambda_2} &= 2 \sum_{j=1}^n \lambda_j C_{2j} - 2C_{20} + 2\phi = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^n \lambda_j C_{2j} + \phi = C_{20} \\
&\quad \vdots
\end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial \sigma_k^2}{\partial \lambda_n} = 2 \sum_{j=1}^n \lambda_j C_{nj} - 2C_{n0} + 2\phi = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^n \lambda_j C_{nj} + \phi = C_{n0} \tag{2.6}$$

por último derivamos con respecto a ϕ

$$\frac{\partial \sigma_k^2}{\partial \phi} = 2 \sum_{i=1}^n \lambda_i - 2 = 0 \rightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \tag{2.7}$$

De (2,4)(2,5)(2,6) y (2,7) resulta un sistema de $(n+1)$ ecuaciones con $(n+1)$ incógnitas que matricialmente se escriben como.

$$\begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1n} & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ C_{n1} & \cdots & C_{n1} & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{10} \\ \vdots \\ C_{n0} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C_{ij} \cdot \lambda = C_{i0}$$

Por lo cual los pesos que minimizan el erro de predicción se determina mediante la función de covariograma a través de:

$$\lambda = C_{ij}^{-1} \cdot C_{i0}$$

Varianza del Kriging Ordinario

Multiplicando (2,4)(2,5) y (2,6) por λ_i se obtiene:

$$\lambda_i \left(\sum_{j=1}^n \lambda_j C_{ij} + \phi \right) = \lambda_i C_{i0} \quad \forall i, i = 1, 2, \dots, n$$

Sumando las n ecuaciones

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \lambda_i \sum_{j=1}^n \lambda_j C_{ij} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \phi &= \sum_{i=1}^n \lambda_i C_{i0} \\ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j C_{ij} &= \sum_{i=1}^n \lambda_i C_{i0} - \sum_{i=1}^n \lambda_i \phi \end{aligned}$$

Sustituyendo la expresión anterior en (2,3)

$$\sigma_k^2 = \sigma^2 + \sum_{i=1}^n \lambda_i C_{i0} - \sum_{i=1}^n \lambda_i \phi - 2 \sum_{i=1}^n \lambda_i C_{i0}$$

$$\sigma_k^2 = \sigma^2 - \sum_{i=1}^n \lambda_i C_{i0} - \phi \tag{2.8}$$

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i C_{i0} + \phi$$

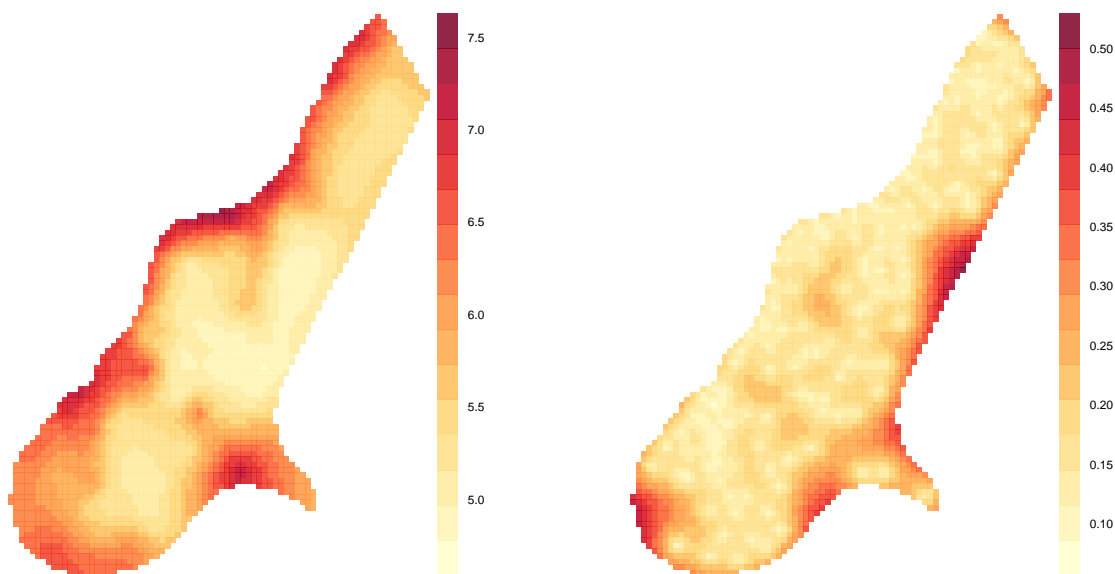


Figura 2.4: Kriging Ordinario y Varianza del Kriging Ordinario (izquierda y derecha), confeccionado en base al modelo de variograma de los datos del paquete `gstat`, `data(meuse)`.

En la Figura 2.4 se muestra un ejemplo del método de predicción Kriging Ordinario y su varianza, usando la librería `gstat` de R. Se utilizó los datos de `data(meuse)`, que corresponde a la concentración de Zinc en el río Meuse ubicado en los países bajos. Las concentraciones más grandes son medidas en lugares cercanos al río, Pebesma (2004).

2.10.3. Kriging Universal

En este caso se asume que los datos presentan un tipo de tendencia. Para tratar este tipo de variables es frecuente descomponer $S(x)$ de la siguiente manera:

$$S(x) = \mu(x) + \epsilon(x)$$

con

$$E(\epsilon(x)) = 0 \text{ y } V(\epsilon(x)) = \sigma^2 \text{ y por consiguiente } E(S(x)) = \mu(x)$$

La tendencia puede expresarse mediante:

$$\mu(x) = \sum_{l=1}^p a_l f_l(x)$$

Donde las funciones $f_l(x)$ son conocidas y p es el número de términos empleados para ajustar $\mu(x)$.

El predictor del *Kriging Universal* se define como

$$\hat{S}(x_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i S(x_i)$$

Esto será insesgado si

$$\begin{aligned} E(\hat{S}(x_0)) &= \mu(x_0) \\ E\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i S(x_i)\right) &= \mu(x_0) \\ \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \mu(x_i)\right) &= \mu(x_0) \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i \left(\sum_{l=1}^p a_l f_l(x_i)\right) &= \sum_{l=1}^p a_l f_l(x_0) \\ \sum_{l=1}^p a_l \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i f_l(x_i)\right) &= \sum_{l=1}^p a_l f_l(x_0) \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i f_l(x_i) &= f_l(x_0) \end{aligned}$$

La obtención de los pesos del *Kriging Universal*, es análogo a otros métodos del *kriging*, se realiza de tal forma que la varianza del error de predicción sea mínima

$$\begin{aligned} V(\hat{S}(x_0) - S(x_0)) &= E(\hat{S}(x_0) - S(x_0))^2 = E\left(\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i (\mu(x_i) - \epsilon(x_i))\right) - (\mu(x_0) - \epsilon(x_0))\right)^2 \\ &= E\left[\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \mu(x_i) - \mu(x_0)\right) + \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \epsilon(x_i) - \epsilon(x_0)\right)\right]^2 \\ &= E\sum_{i=1}^n \lambda_i \epsilon(x_i) - \epsilon(x_0))^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j E(\epsilon(x_i) \epsilon(x_j)) - 2 \sum_{i=1}^n \lambda_i E(\epsilon(x_i) \epsilon(x_0)) + E(\epsilon(x_0))^2 \end{aligned}$$

Usando

1. $C_{ij} = Cov(\epsilon(x_i), \epsilon(x_j))$

2. $\sigma^2 = E(\epsilon(x_0))^2$

Se tiene

$$V(\hat{S}(x_0) - S(x_0)) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j C_{ij} - 2 \sum_{i=1}^n \lambda_i C_{i0} + \sigma^2$$

Luego incluyendo la restricción dada por la condición de insesgamiento, se minimiza:

$$\sigma_{ku}^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j C_{ij} - 2 \sum_{i=1}^n \lambda_i C_{i0} + \sigma^2 + \sum_{l=1}^p \phi_l \left[\sum_{i=1}^n \lambda_i f_l(x_i) - f_l(x_0) \right]$$

En términos de la función de semivarianza

$$\sigma_{ku}^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j \gamma_{ij} - 2 \sum_{i=1}^n \lambda_i \gamma_{i0} + \sum_{l=1}^p \phi_l \left[\sum_{i=1}^n \lambda_i f_l(x_i) - f_l(x_0) \right]$$

Derivando la expresión anterior respecto a $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$ e igualando a cero las correspondientes derivadas se obtiene las siguiente ecuaciones.

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j \gamma_{ij} + \sum_{l=1}^p \phi_l f_l(x_i) = \gamma_{i0} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j f_l(x_j) = f_l(x_0) \quad j = 1, 2, \dots, p$$

En términos matriciales

$$\begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1n} & f_{11} & \cdots & f_{p1} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2n} & f_{12} & \cdots & f_{p2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \cdots & \gamma_{nn} & f_{1n} & \cdots & f_{pn} \\ f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{p1} & f_{p2} & \cdots & f_{pn} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \\ \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{10} \\ \gamma_{20} \\ \vdots \\ \gamma_{n0} \\ f_{10} \\ \vdots \\ f_{p0} \end{pmatrix}$$

Donde $f_{lj} = f_l(x_j)$ es la l -ésima función en el punto j -ésimo. La varianza de predicción del *Kriging Universal* está dada por.

$$\sigma_{ku}^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i \gamma_{i0} + \sum_{l=1}^p \phi_l f_l(x_0)$$

Si $p = 0$ y $f_l(x) = 1$, el sistema de ecuaciones del *Kriging Universal* y la varianza de predicción coinciden con las del *Kriging Ordinario*. En este caso se puede decir que el *Kriging Ordinario* es un caso particular del *Kriging Universal*.

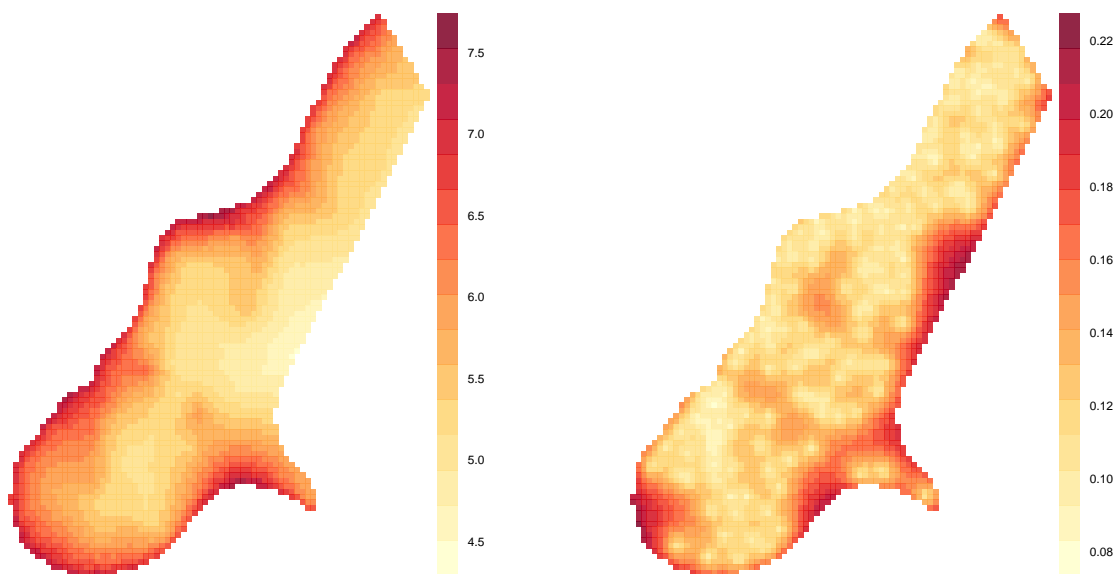


Figura 2.5: Kriging Universal y Varianza del Kriging Universal (izquierda y derecha), confeccionado en base al modelo de variograma de los datos del paquete `gstat`, `data(meuse)`.

En la Figura 2.5 se muestra un ejemplo del método de predicción Kriging Universal y su varianza, usando la librería `gstat` de R. Se utilizó los datos de `data(meuse)`, que corresponde a la concentración de Zinc en el río Meuse ubicado en los países bajos. Las concentraciones más grandes son medidas en lugares cercanos al río, Pebesma (2004).

Capítulo 3

Aplicación

3.1. Método de aplicación para la predicción espacial

En esta sección se detalla cada etapa para efectuar la predicción espacial del desplazamiento de la corteza terrestre en lugares no muestreados.

1. *Selección de fechas por períodos*
2. *Ajustar un modelo Matern al Variograma*
3. *Asumir un modelo para la realización del Kriging del tipo $S(x) = \mu + \epsilon(x)$*
4. *Estimar estadísticas de interés (Media, desviación estandar , predicción , min ,max)*

3.2. Variables desplazamiento de la corteza terrestre

Las variables espaciales en estudio son:

1. $S_1(x)$: Distancia (1,6)
2. $S_2(x)$: Desplazamiento de la longitud (1,7)
3. $S_3(x)$: Desplazamiento de la latitud (1,8)

Se ocupará la fórmula (1,6) para calcular el desplazamiento de la corteza terrestre. Se evaluarán los desplazamientos de la longitud y latitud a través de las fórmulas (1,7)(1,8)

Los datos fueron recolectados mediante el Sistema de Posicionamiento Global también conocido como GPS. El sitio de estudio involucrara tres regiones de Chile, las cuales son Atacama, Coquimbo y Valparaíso, con una superficie total del $132.625,7 \text{ km}^2$, donde se pudieron recolectar 29 estaciones de GPS. Los conjuntos de datos se obtuvieron de la página web de la Universidad de Nevada

http://geodesy.unr.edu/NGLStationPages/gpsnetmap/GPSNetMap_MAG.html

El interés de estas regiones se debe a uno de los últimos terremotos ocurridos en el país el 16 de septiembre del año 2015, con epicentro en el mar en las coordenadas (3113'S, 7128'O), a 37 kilómetros del noroeste de Los Vilos, con una magnitud de 8,5° en la escala de Richter.

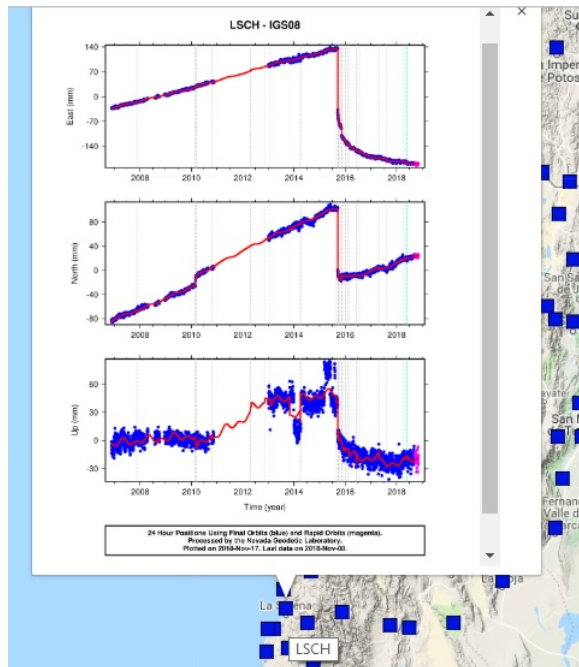


Figura 3.1: Mapa visualización descarga de conjunto de datos.

Station ID : LSCH

Station operator information:
from RINEX headers

Data processed by:
Geoffrey Blewitt, Nevada Geodetic Lab.

Latitude: -29.908
Longitude: -71.246
Height: 78.831 meters

Time Series Data (ascii text)	
24 Hour Final Solutions	
IGS08	env xyz
24 Hour Rapid Solutions	
FID (~IGS08)	env
env readme	xyz readme
QA files	ftp link
Rapid 5 Minute Solutions Available Next Day (8-32 hr. latency)	
env	ftp link

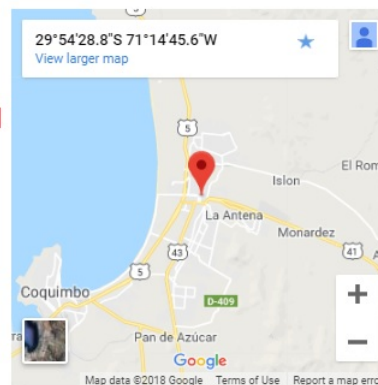


Figura 3.2: Plataforma de descarga de los conjuntos de datos. Fuente Elaboración propia

En la Figura 3.1 se llega a *Googlemaps* a través de la pagina mencionada anteriormente. En esta página se observará una infinidad de estaciones de GPS. Para descargar las estaciones de interés, será necesario hacer click en los cuadros azules, donde se mostrará un resumen de las coordenadas de latitud, longitud y altura de la respectiva estación. Luego para acceder al conjunto de datos sera necesario hacer click en la pantalla de resumen de datos, esto direccionará a otra pagina que se visualiza en la Figura 3.2. Aquí se deberá hacer click en la flecha roja para acceder de forma concreta al conjunto de datos.

3.3. Predicción de valores faltantes

Se presentó una serie de problemas con la estación EMAT, debido a que comenzó a perder datos a finales de agosto y a recuperar datos a principio de octubre para su latitud, longitud y altura.

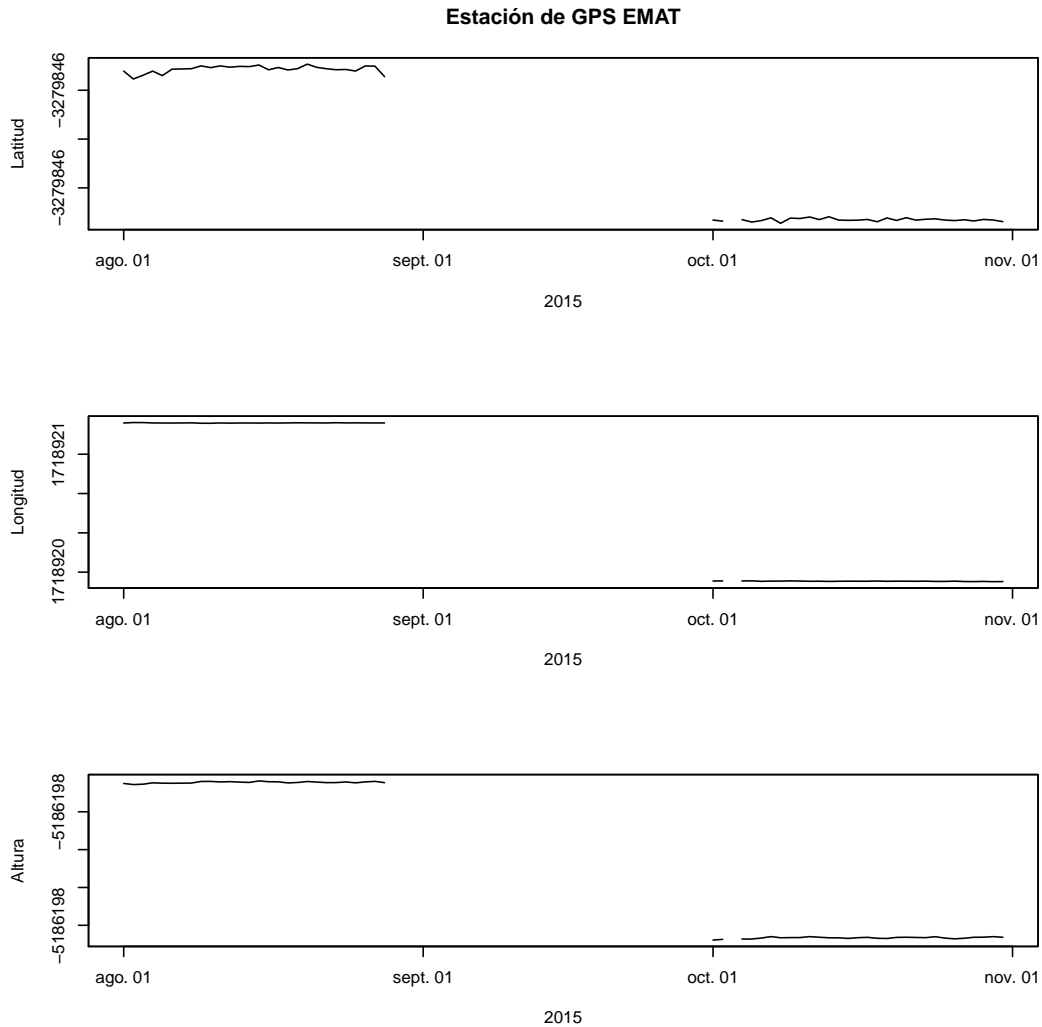


Figura 3.3: Serie de la Latitud, Longitud y Altura de la estación EMAT

En la Figura 3.3 se visualiza que hace falta información importante de la influencia del terremoto. Otro factor que influye es la ubicación, ya que EMAT esta en una zona cercana al epicentro. Por lo cual se decidió predecir sus valores faltantes.

Para realizar esto se llevaron a la misma escala de la estación EMAT ,a estaciones que tuvieran un comportamiento similar y que reflejaran la discontinuidad de la serie en influencia por el terremoto.

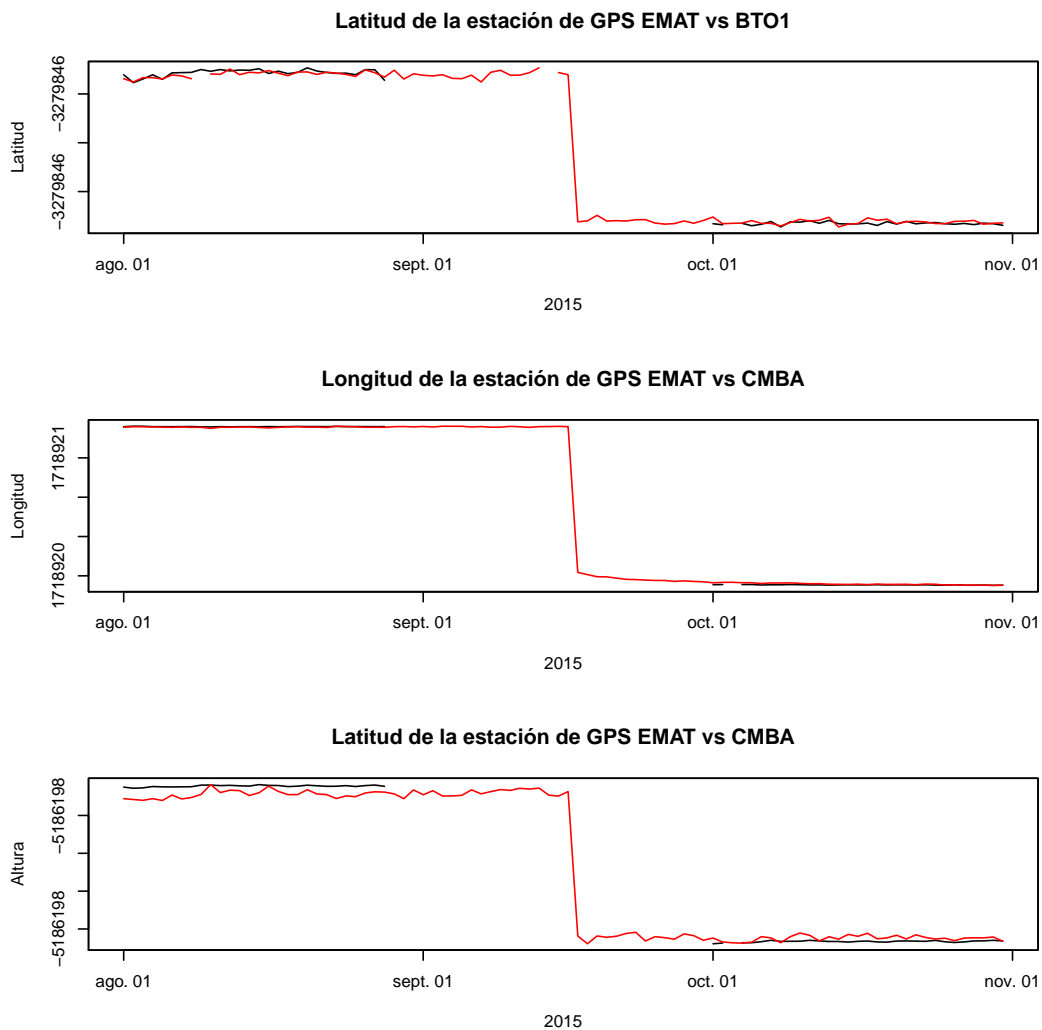


Figura 3.4: Comparación de las estaciones BTO1 y CMBA respecto a la latitud, longitud y altura de la estación EMAT

En la Figura 3.4 se observan que la estación que converge con la latitud de EMAT fue BTO1, para el caso de la longitud y la altura fue CMBA.

Se utilizó el método de la regresión lineal para predecir la latitud, longitud y altura de

la estación EMAT, con respecto a las estaciones BTO1 y CMBA. El modelo utilizado fue:

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

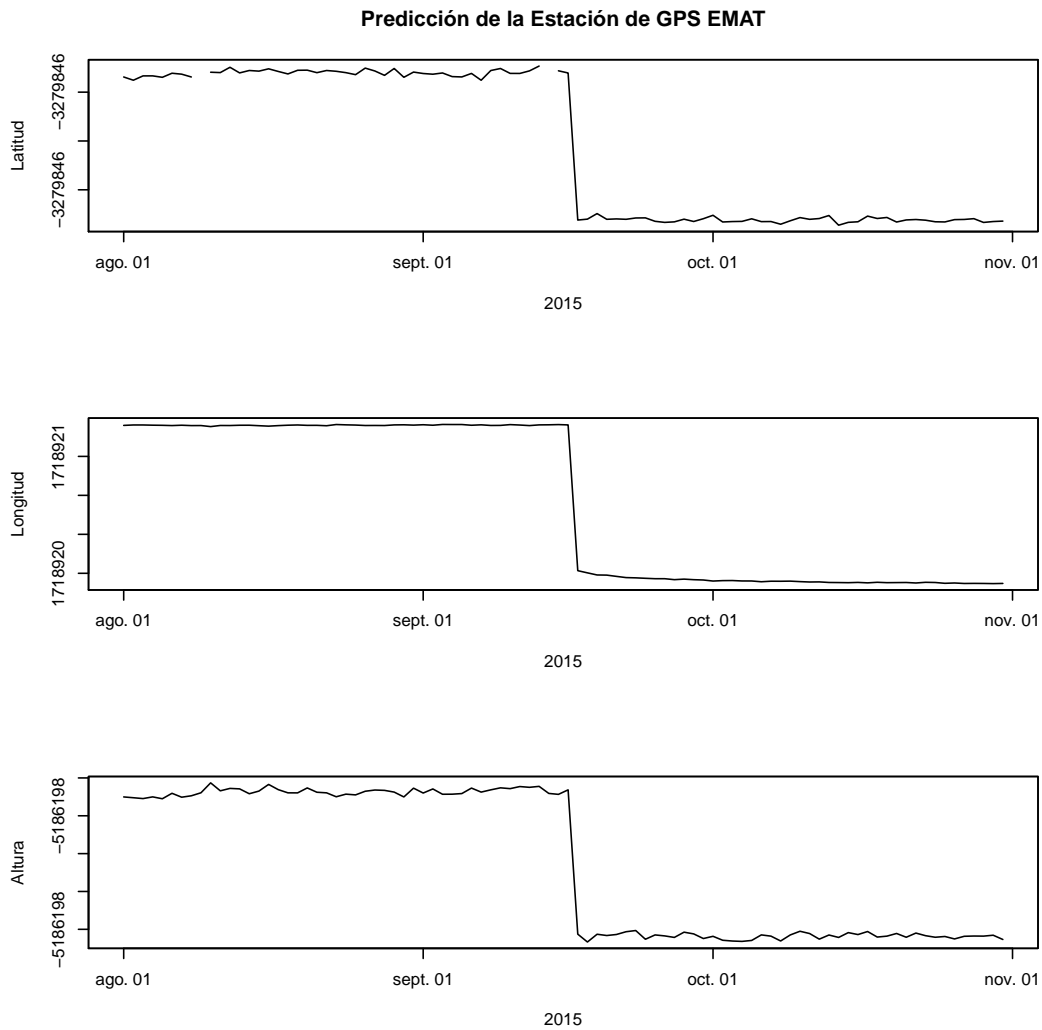


Figura 3.5: Serie de la latitud, longitud y altura estimadas de la estación EMAT

En la Figura 3.5 se pudo observar la estación EMAT con datos imputados utilizando el método de la regresión lineal, arreglando de esta forma el problema de valores faltantes en esta estación.

3.4. Análisis exploratorio espacial

En esta sección se realizará la acotación de las fechas de estudio, a través de la visualización de las series de tiempo en estaciones de GPS y boxplots en las tres regiones.

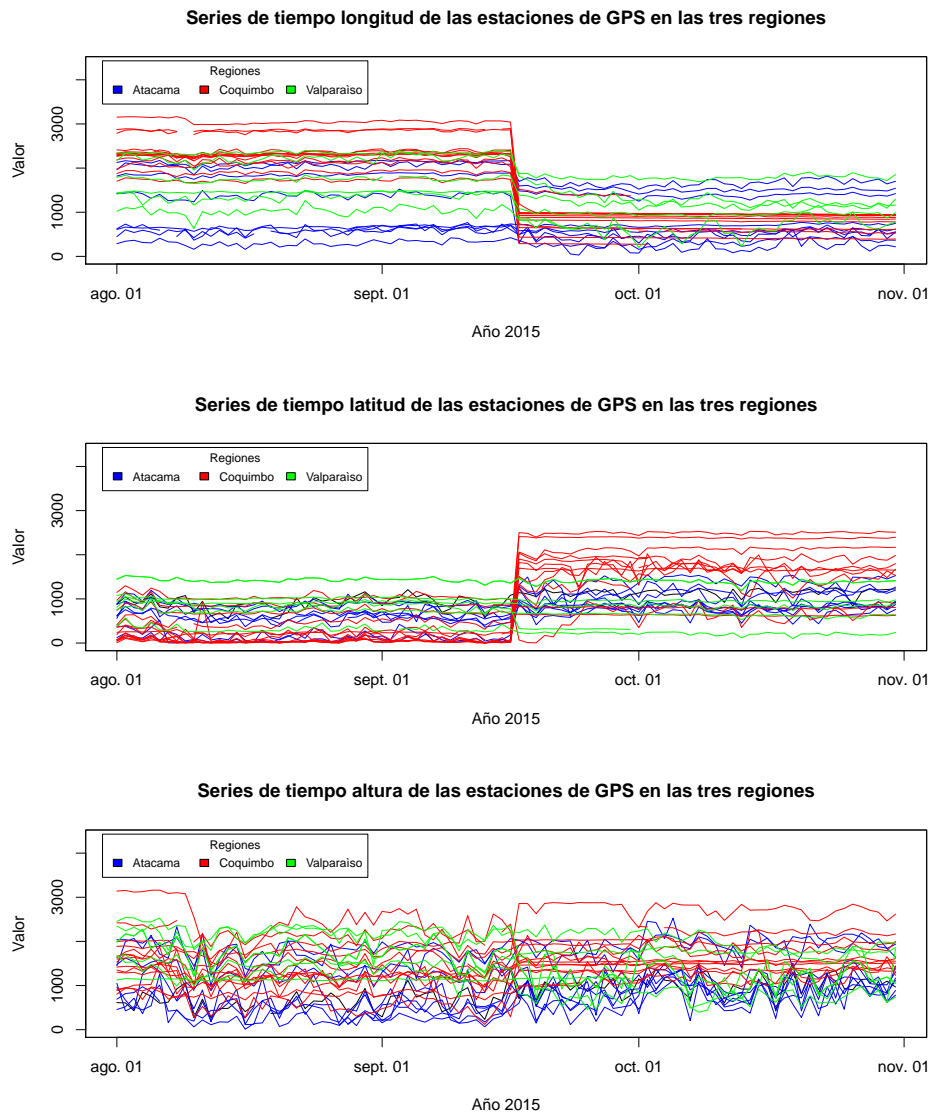


Figura 3.6: Series de tiempo con respecto a las estaciones, coordenadas y regiones. El color azul representa la región de Atacama, rojo a Coquimbo y verde a Valparaíso.

Región	N°	Estación
Atacama	1	BN03
	2	CMPN
	3	CRZL
	4	MRCG
	5	PAZU
	6	TAM3
	7	TRST
	8	UDAT
	9	VAL3
Coquimbo	10	BN17
	11	BTO1
	12	CMBA
	13	CNBA
	14	EMAT
	15	JUNT
	16	TOLO
	17	LSCH
	18	LVI1
	19	OVLL
	20	PEDR
	21	SLMC
	22	PFRJ
	23	SILL
Valparaíso	24	BN05
	25	CER1
	26	LNDS
	27	RCSD
	28	VALN
	29	ZAPA

Tabla 3.1: Regiones y números de estaciones de GPS

En el Tabla 3.1 se visualiza las regiones con sus respectivas estaciones y sus correspondientes números.

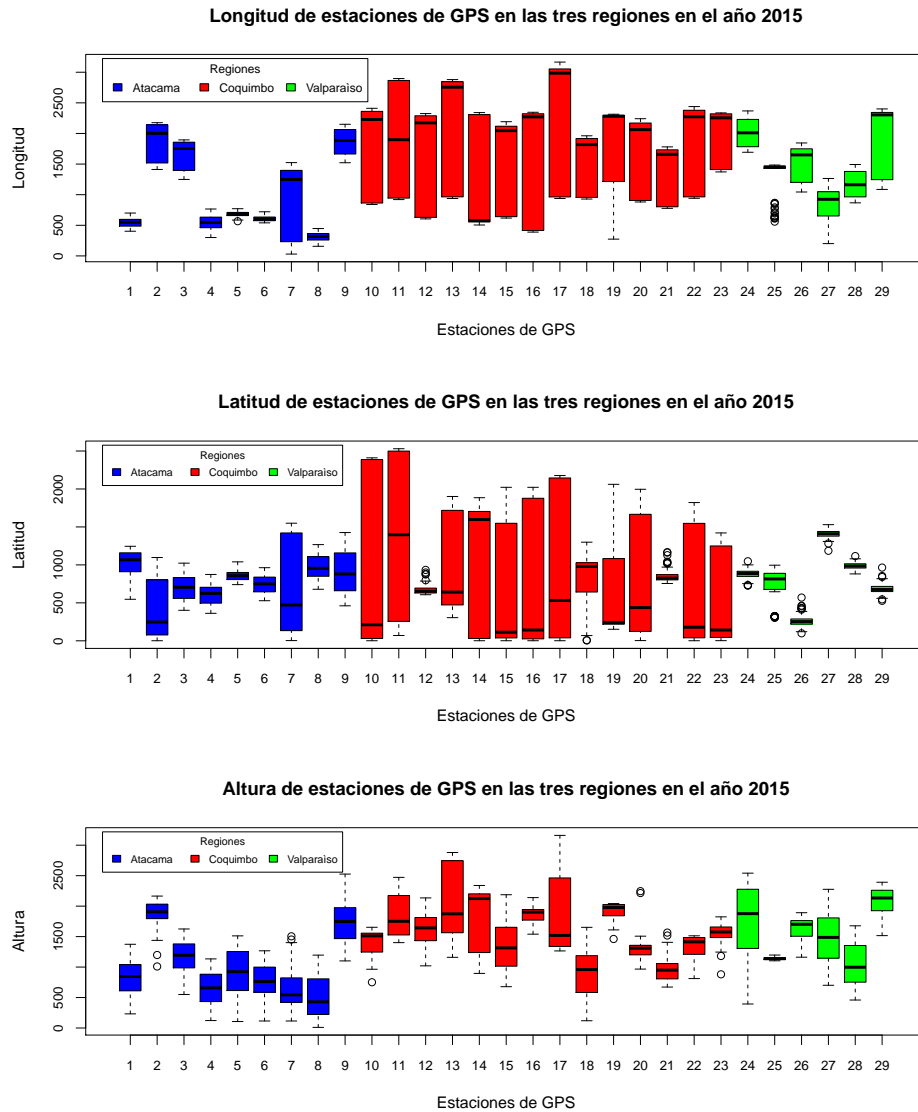


Figura 3.7: Boxplots respecto a sus coordenadas, estaciones y regiones. El color azul representa la región de Atacama, rojo a Coquimbo y verde a Valparaíso.

Observando la Figura 3.6, en las series podemos distinguir una alteración de las coordenadas latitud y longitud en el tiempo, más específicamente a mediados de Septiembre. En la Figura 3.7 los boxplot de las coordenadas latitud y longitud, se visualiza una gran cantidad de datos atípicos en muchas de las estaciones de GPS. De esta forma podemos distinguir tres períodos importantes:

1. Pre sísmico : 1 de Septiembre y 15 de Septiembre
2. Sísmico : 15 de Septiembre y 18 de Septiembre
3. Post sísmico: 18 de Septiembre y 30 de Septiembre

Como se mencionó en la metodología, los datos de GPS vienen en un formato de coordenadas geodesicas WGS-84, por lo cual se tienen que realizar transformaciones de coordenadas WGS-84 a grados decimales. Para esto utilizaremos la página <http://www.apsalin.com/convert-cartesian-to-geodetic.aspx>.

Ellipsoid

WGS 84 - World Geodetic System 1984

Cartesian Coordinate

X, m:

Y, m:

Z, m:

Results Format Options

Decimal Degrees Minutes Seconds

Convert

Geodetic Coordinate

Latitude:

Longitude:

Geodetic height, m:

Decimal Degrees Minutes Seconds

Figura 3.8: Plataforma de transformación de coordenadas (Flecha negra coordenadas de entrada y flecha roja coordenadas de salida)

En la Figura 3.8 se muestra la plataforma de la página mencionada anteriormente, donde se realizará la transformación para cada una de las estaciones de GPS respecto al período Pre-Sísmico, Sísmico y Post-Sísmico. En la flecha negra se deben colocar las correspondientes coordenadas en formato WGS-84. Luego de hacer click en *Convert*, saldrán los valores transformados en la flecha roja. Estos datos serán lo que se utilizarán para la manipulación de la Estadística espacial.

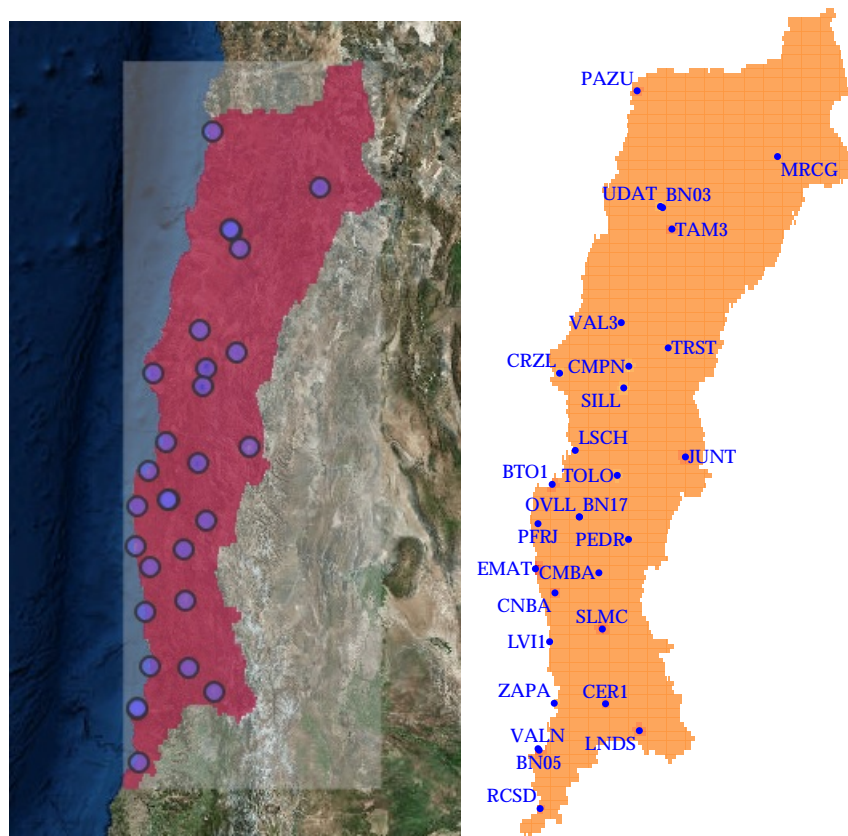


Figura 3.9: Distribución de las estaciones de GPS en las regiones de Atacama, Coquimbo y Valparaíso, visualizado en Googlemaps y R-project.

En la Figura 3.9 se muestra la primera visualización de las 29 estaciones de GPS, distribuidas en las regiones de Atacama, Coquimbo y Valparaíso en Googlemaps y R-project.

A continuación se mostrarán las primeras estadísticas de resumen. Se procederá a ocupar las fórmulas de desplazamiento de las coordenadas. Para que los resultado sean representados en metros, se les multiplicará a las variables medidas por $\frac{2 \cdot \pi \cdot 371000}{360}$, ya que esta multiplicación

transformas los grados decimales a su respectiva representación en metros.

Medida	n	Media	Desv. Est	Mediana	Mínimo	Máximo	1° Cuart	3° Cuart
$S_1(x)$	29	0,0036	0,0014	0.0034	0,0014	0.0078	0,0028	0,0043
$S_2(x)$	29	0,0018	0,0013	0.0014	0,0003	0.0064	0,0009	0,0025
$S_3(x)$	29	0,0028	0,0012	0.0030	0,003	0.0061	0,0021	0,0036

Tabla 3.2: Estadísticas descriptivas para el período Pre sísmico.

En la Tabla 3.2, en base a las 29 estaciones se puede obtener un desplazamiento promedio en el período Pre-Sísmico de 0,0036 m con una dispersión de 0,0014 m respecto a la media. El 50 % de los datos se acumula en la cantidad de 0,0034 m. Los valores extremos fluctúan entre 0,0014 y 0,0078 m como mínimo y máximo respectivamente. A demás podemos notar que el desplazamiento de la latitud es levemente más fuerte que el de la longitud por una diferencia de 0,01 m en sus medias.

Medida	n	Media	Desv. Est	Mediana	Mínimo	Máximo	1° Cuart	3° Cuart
$S_1(x)$	29	0,0406	0,6036	0,0600	0,0036	2,3921	0,0117	0,5934
$S_2(x)$	29	0,3980	0,6017	0,0561	0,0032	2,3914	0,0113	0,5571
$S_3(x)$	29	0,0605	0,0763	0,0243	0,0001	0,2331	0.0033	0,1009

Tabla 3.3: Estadísticas Descriptivas para el período Sísmico.

En la Tabla 3.3 se muestra el período Sísmico, donde hubo un desplazamiento de 0,0406 m promedio con una dispersión respecto a la media de 0,6036 m. El 50 % de los datos se acumulan hasta los 0,060 m y los valores extremos fluctúan entre 0,0036 y 2,3921 m como mínimo y máximo respectivamente, esto entrega información de la presencia de datos atípicos. Observando el desplazamiento de la latitud y la longitud , a diferencia del período Pre-sísmico , la longitud en este caso toma más importancia debido a que su media es de 0,3980 m, a diferencia que el de la latitud, que apenas tiene una media de 0,0605 m.

Medida	n	Media	Desv. Est	Mediana	Mínimo	Máximo	1° Cuart	3° Cuart
$S_1(x)$	29	0,0276	0,0269	0,0156	0,0018	0,0979	0,0052	0,0448
$S_2(x)$	29	0,0266	0,0265	0,0155	0,0011	0,0950	0,0041	0,0444
$S_3(x)$	29	0.0033	0,0060	0,0033	0,0010	0,0236	0,0019	0,0085

Tabla 3.4: Estadísticas Descriptivas para el período Post-sísmico.

La Tabla 3.4 muestra el período Post-Sísmico, donde hubo un desplazamiento promedio de 0,0276 m con una dispersión de 0,0269 m respecto a la media. El 50 % de los datos tuvo un desplazamiento hasta 0,0156 m y sus valores extremos fluctuaron entre 0,0018 y 0,0979 m como mínimo y máximo respectivamente, se puede decir de que la potencia del período Post-Sísmico bajo considerablemente respecto al período Sísmico, sin embargo el desplazamiento sigue siendo más fuerte que en el período Pre-Sísmico. El comportamiento del desplazamiento de la longitud respecto a la latitud sigue siendo similar al período Sísmico. La longitud es un poco más potente que la latitud, con una diferencia de 0,0233 m respecto a su media a favor de la Longitud.

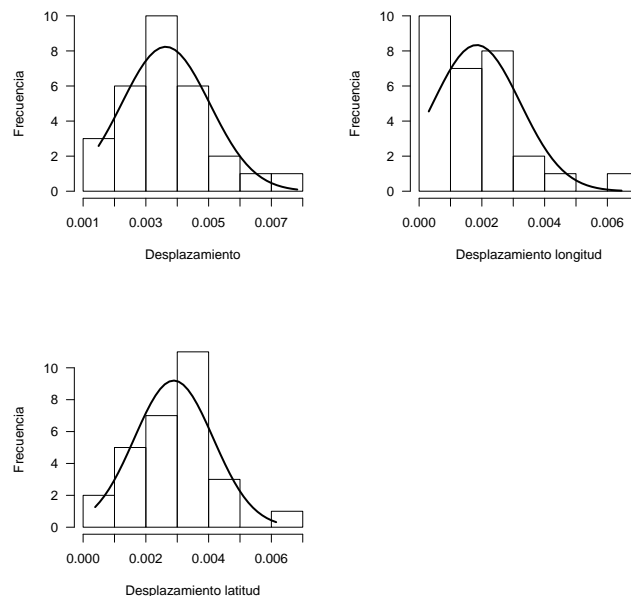


Figura 3.10: Histogramas para las variables en el período Pre-Sísmico.

En la Figura 3.10 se puede observar los histogramas para las variables medidas en el período Pre-Sísmico, en el cual la distancia y desplazamiento de la latitud tiene una forma simétrica, a diferencia del desplazamiento de la longitud el cual se aproxima a una forma Gaussiana, a las variables de este período se les tendrá que ajustar un modelo del kriging ordinario.

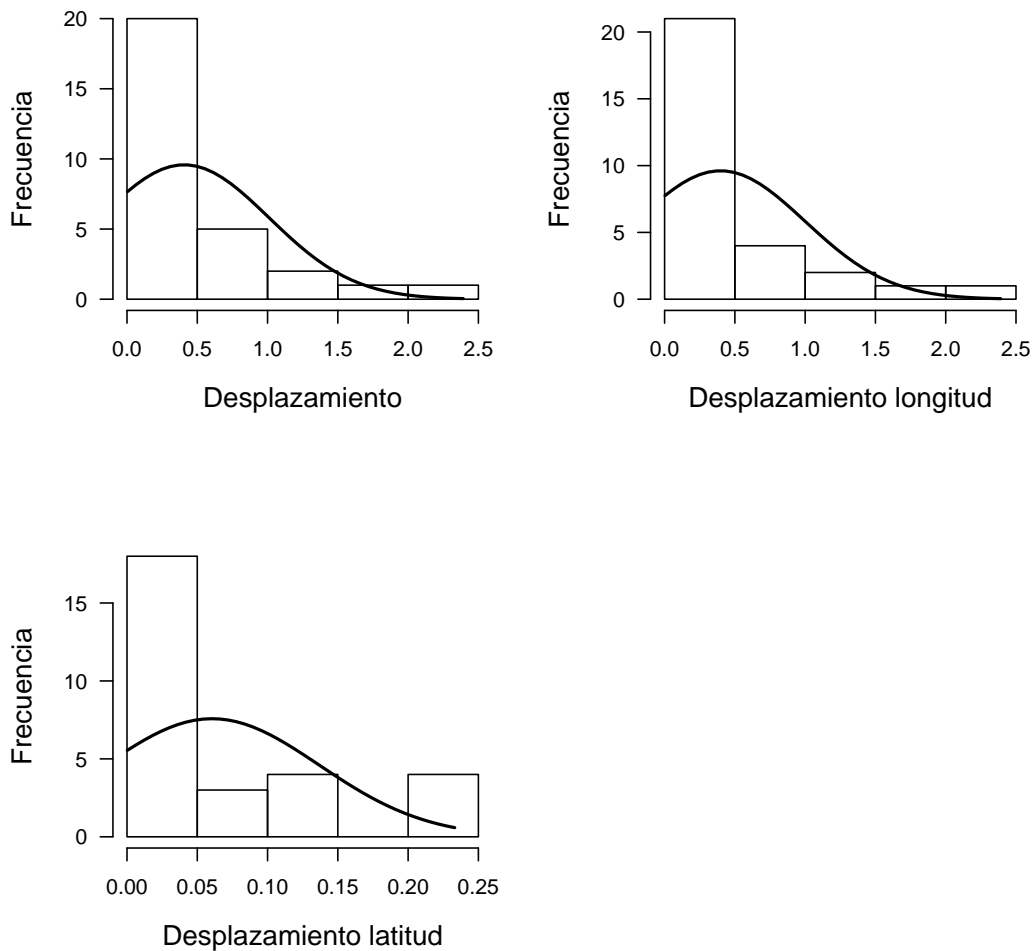


Figura 3.11: Histogramas para las variables en el período Sísmico.

En la Figura 3.11 se visualiza los histogramas para las variables medidas en el período Sísmico, las variables tiene una forma asimétrica, esto se puede deber a la presencia de datos atípicos, que corresponderían a estaciones de GPS con mayor influencia del terremoto, a las

variables de este período se les tendrá que ajustar un modelo del kriging universal, ya que en este caso se evidencia la parencia de una tendencia espacial.

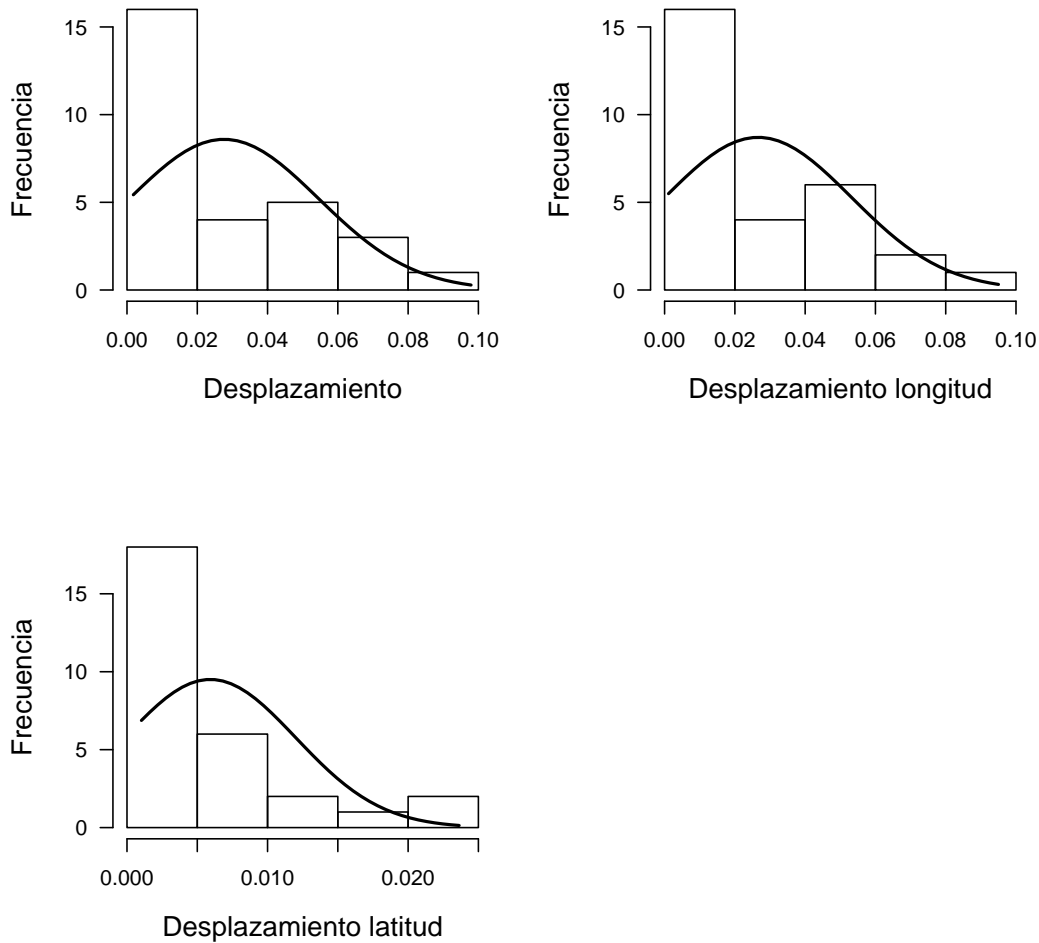


Figura 3.12: Histogramas para las variables en el período Post-Sísmico.

En la Figura 3.12 se observa los histogramas para las variables medidas en el período Post-Sísmico, las variables tiene una forma asimétrica, a las variables de este período se les tendrá que ajustar un modelo del kriging universal, ya que en este caso como en el período Sísmico se evidencia la parencia de una clara tendencia espacial.

3.5. Estadística espacial

A continuación llevaremos a aplicar las técnicas Geostadísticas vistas en capítulos anteriores(Cálculo del Variograma, estimación de modelos paramétrico , realización del Kriging).

3.5.1. Selección del modelo al variograma

Para la selección del mejor modelo del variograma usaremos el método de la validación cruzada así se evaluará su error cuadrático medio en todo los modelos descritos en este trabajo (Matern, Pepita puro, Exponencial, Esférico, Gaussiano). Se realizara este cálculo para cada variable y período en la siguientes tablas:

Variable	Mat	Nug	Exp	Sph	Gau
$S_1(x)$	0,00027	0,00026	0,00027	0,00027	0,00026
$S_2(x)$	0,00027	0,00026	0,00027	0,00027	0,00025
$S_3(x)$	0,00023	0,00023	0,00023	0,00023	0,00023

Tabla 3.5: RSME para diferentes modelos en el período Pre-Sísmico.

Variable	Mat	Nug	Exp	Sph	Gau
$S_1(x)$	0,03885	0,11408	0,03885	0,03865	0,03540
$S_2(x)$	0,03933	0,11371	0,03933	0,04388	0,03586
$S_3(x)$	0,00650	0,01442	0,00650	0,00809	0,00623

Tabla 3.6: RSME para diferentes modelos en el período Sísmico.

Variable	Mat	Nug	Exp	Sph	Gau
$S_1(x)$	0,00222	0,00508	0,00222	0,00224	0,00209
$S_2(x)$	0,00217	0,00502	0,00217	0,00217	0,00193
$S_3(x)$	0,00112	0,00114	0,00112	0,00127	0,00116

Tabla 3.7: RSME para diferentes modelos en el período Post-Sísmico.

En las Tablas 3.5, 3.6 y 3.7 se observa el calculo del RMSE en los modelos Matern, Pepita Puro, Exponencial y Gaussiano en las variable de los períodos descritos anteriormente, esto para averiguar cual modelo ajusta mejor. Los resultados para cada variable de los períodos convergieron en valores muy cercanos, por lo cual se decidió ocupar el modelo Matern con un coeficiente de diferenciabilidad del 0.5 en todas las ocasiones.

3.6. Variograma e Isotropía

Se calculará el variograma para las variables de todos los períodos y también en las direcciones de 0° , 45° , 90° y 135° con un modelos Matern, para identificar si existe la isotropía así asumir estacionariedad en los casos que lo amerite.

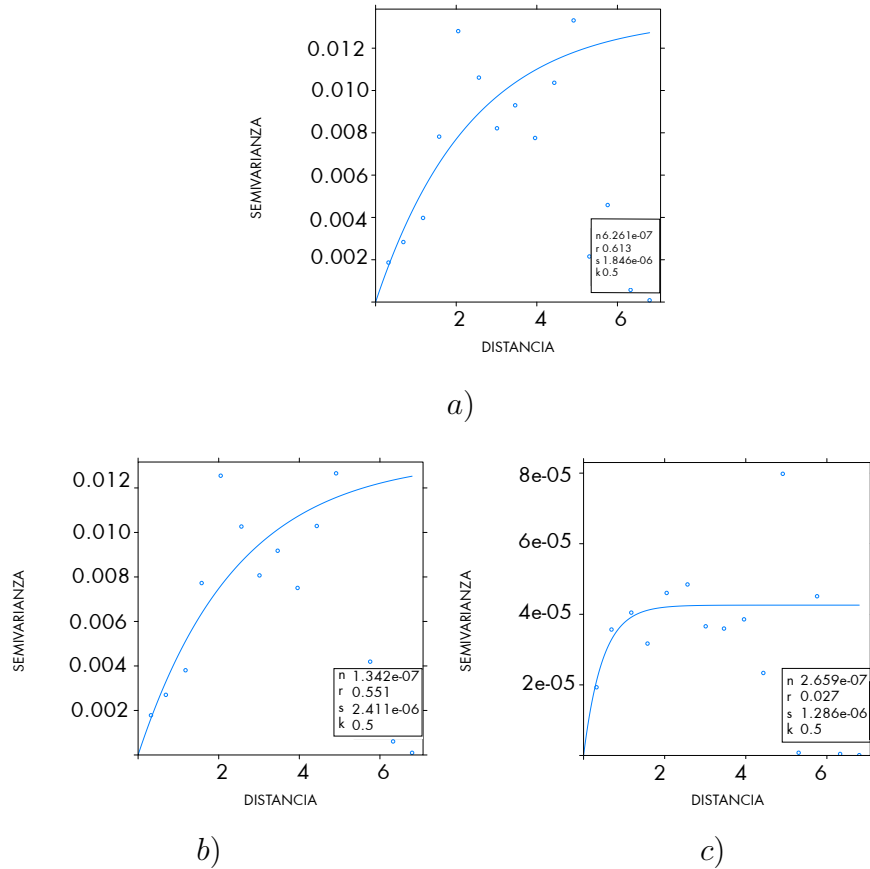
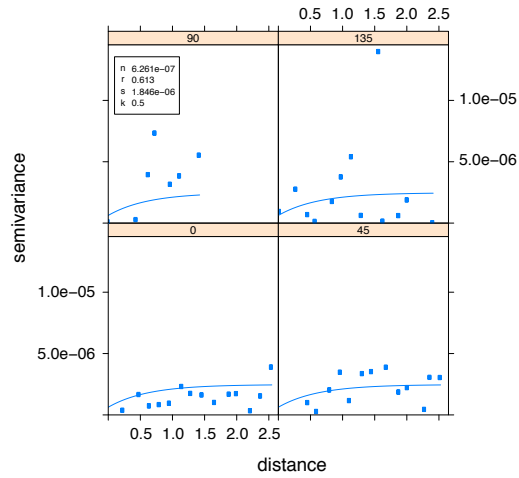
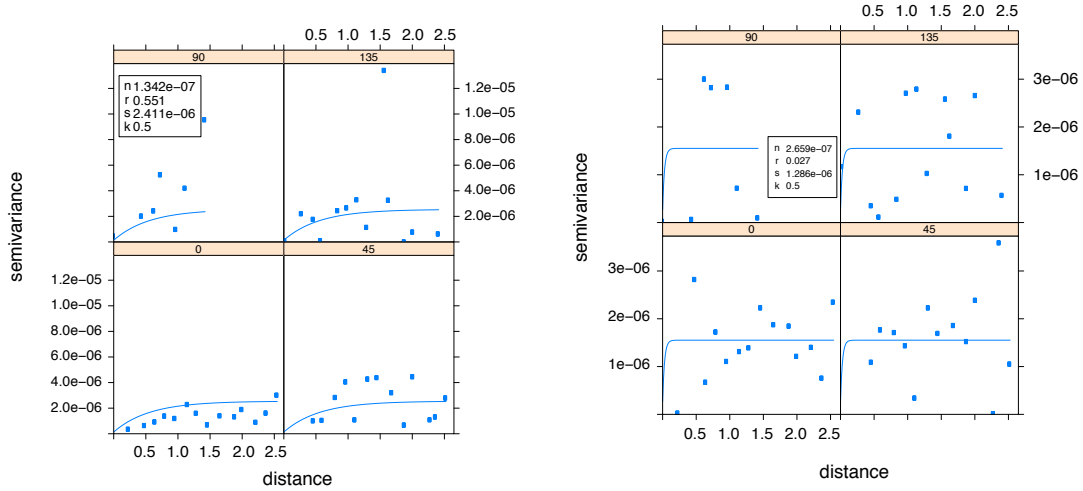


Figura 3.13: Estructura del Variograma usando Covarianza Matern en el período Pre-sísmico para: a)Desplazamiento, b)Desplazamiento longitud y c)Desplazamiento latitud .

En la Figura 3.13, se puede notar que en el período Pre-Sísmico a las variables desplazamiento y desplazamiento de longitud se les ajusto un modelo Matern con rangos de 2899 m y 2606 m respectivamente. Al desplazamiento de la latitud, se le ajusto este modelo con un rango de apenas 127 m, llegando a ser similar a un modelo de dependencia o Pepita Puro, mostrando así que existe poca correlación espacial entre los datos para esta variable.



a)

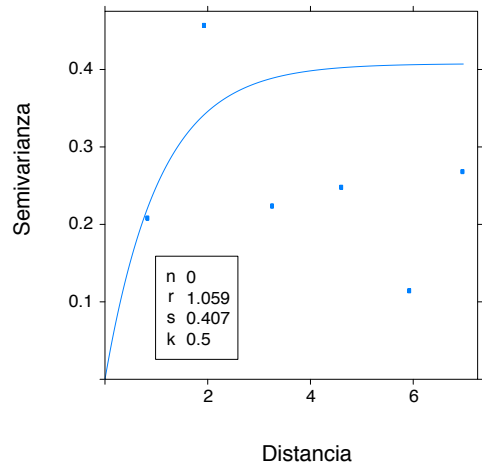


b)

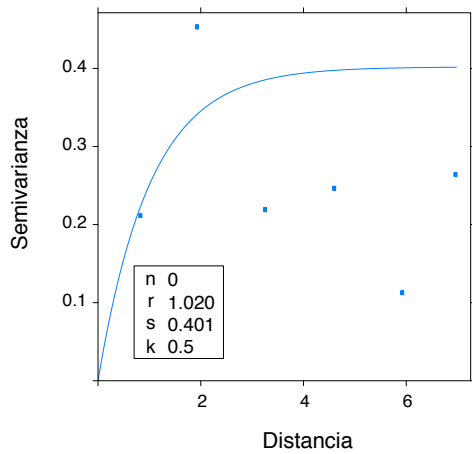
c)

Figura 3.14: Cálculo de la Istropía con estructura del variograma usando Covarianza Matern en el período Pre-sísmico para: a) Desplazamiento, b) Desplazamiento longitud y c) Desplazamiento latitud .

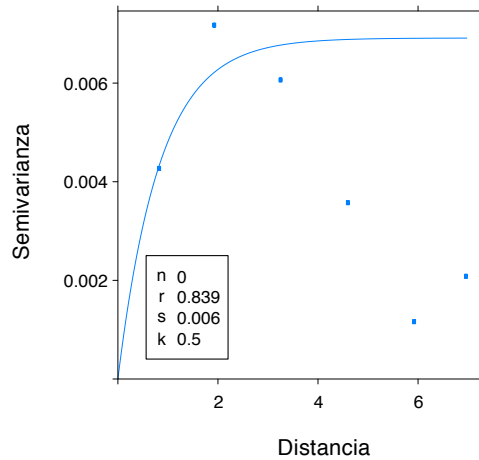
En la Figura 3.14 las formas del semivariograma respecto a las variables del período Pre-Sísmico no varían considerablemente en sus direcciones, así que podemos asumir Isotropía para cada variable de este período.



a)



b)

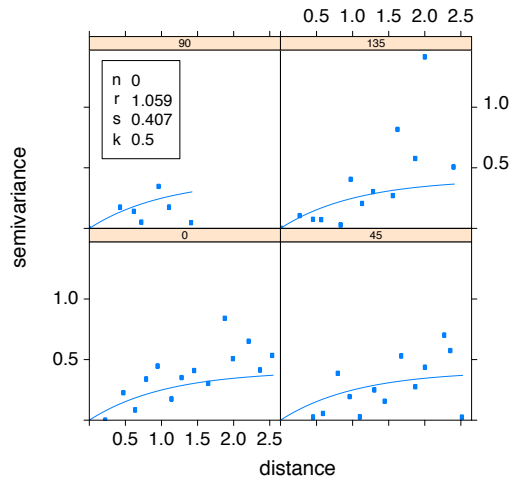


c)

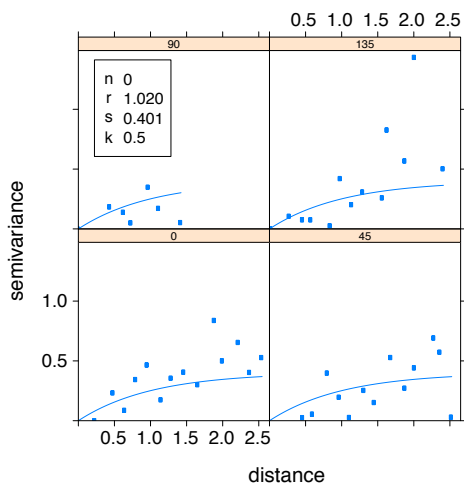
Figura 3.15: Estructura del Variograma usando Covarianza Matern en el período Sísmico para: a)Desplazamiento , b)Desplazamiento longitud y c)Desplazamiento latitud .

En la Figura 3.15 se observan los variogramas de las variables desplazamiento, desplazamiento de la longitud y desplazamiento latitud para el período Sísmicos, los cuales se le ajustaron bajo modelos Matern con rangos de 6857 m, 6604 m y 5432 m respectivamente

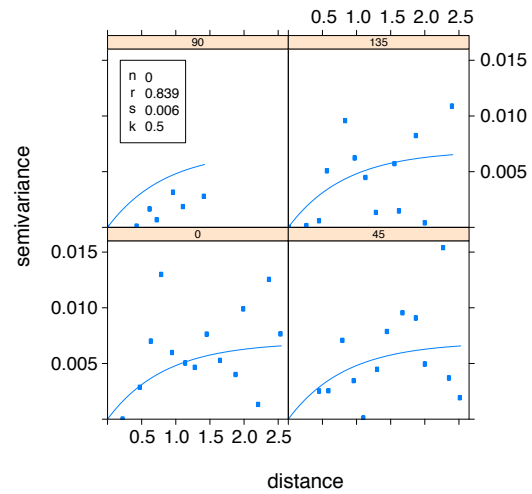
para cada variable. El rango de la variable desplazamiento de la latitud resulto ser menor a las otras dos variables de este período.



a)



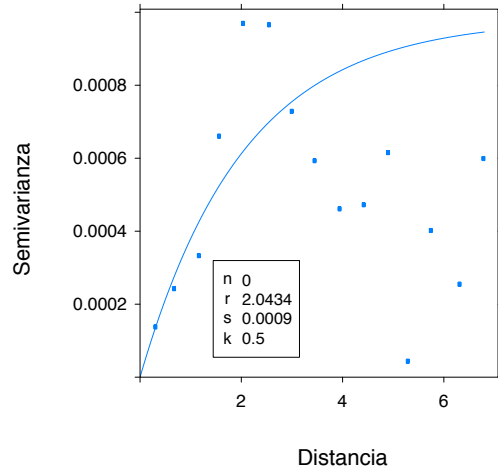
b)



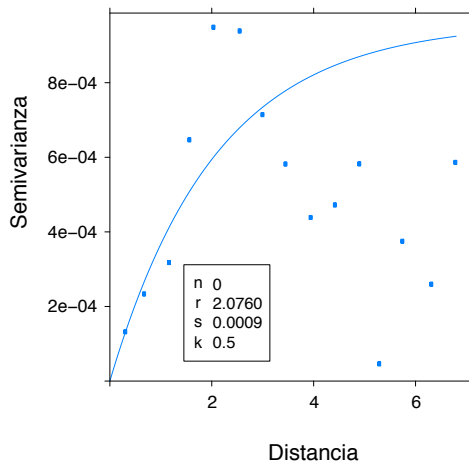
c)

Figura 3.16: Cálculo de la Istropía con estructura del variograma usando Covarianza Matern en el período Sísmico para: a) Desplazamiento, b) Desplazamiento longitud y c) Desplazamiento latitud.

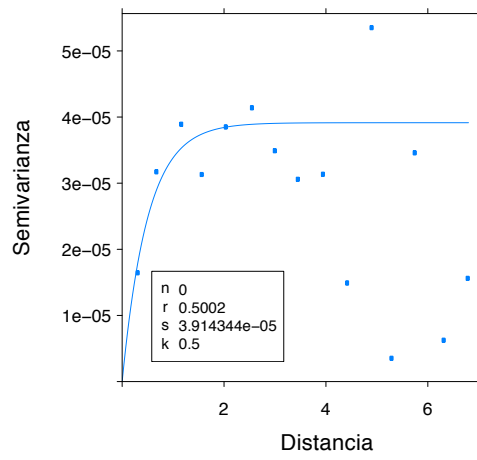
En la Figura 3.16 las formas del semivariograma respecto a las variables del período Sísmico no varían considerablemente en sus direcciones, así que podemos asumir Isotropía para cada variable de este período.



a)



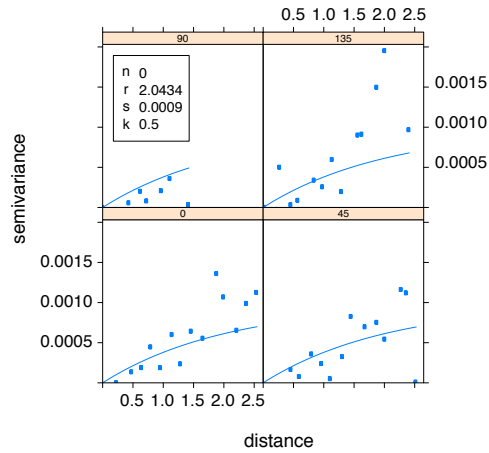
b)



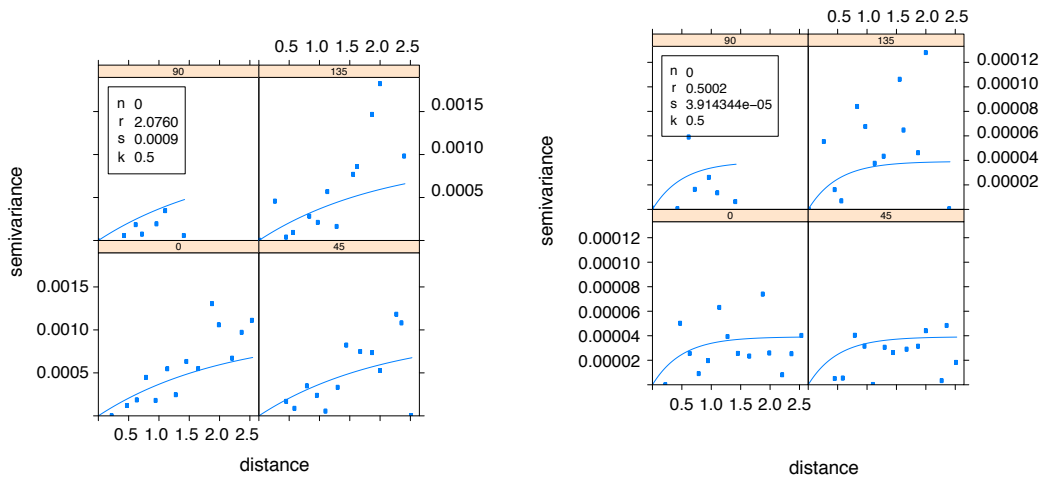
c)

Figura 3.17: Estructura del Variograma usando Covarianza Matern en el período Post-sísmico para: a)Desplazamiento, b)Desplazamiento longitud y c)Desplazamiento latitud .

En la Figura 3.17 se visualizan los ajustes de los modelos Matern a los variogramas del período Post-Sísmicos. En las variables desplazamiento y desplazamiento de la longitud se obtuvieron rangos de 13231 m y 13442 m respectivamente . Para el desplazamiento de la latitud se obtuvo un rango de 3238 m.



a)



b)

c)

Figura 3.18: Cálculo de la Istropía con estructura del variograma usando Covarianza Matern en el período Post-sísmico para: a) Desplazamiento, b) Desplazamiento longitud y c) Desplazamiento latitud.

En la Figura 3.18 las formas del semivariograma respecto a las variables del período Post-Sísmico no varían considerablemente en sus direcciones, así que podemos asumir Isotropía para cada variable de este período.

3.6.1. Realización del Kriging

Para realizar la predicción espacial de las variables medidas, se utilizará un modelo de Kriging ordinario para el período Pre-Sísmico, esto debido a que en los histogramas de las variables de este período (que se visualizan en la figura 3.10), tienen un comportamiento Gaussiano. Se ocupara el Kriging Universal para los períodos Sísmico y Post-Sísmico en las variables medidas ya que los histogramas de estas variables que se observan en las figuras 3.11 y 3.12 no tiene un comportamiento Gaussiano y notan una tendencia espacial.

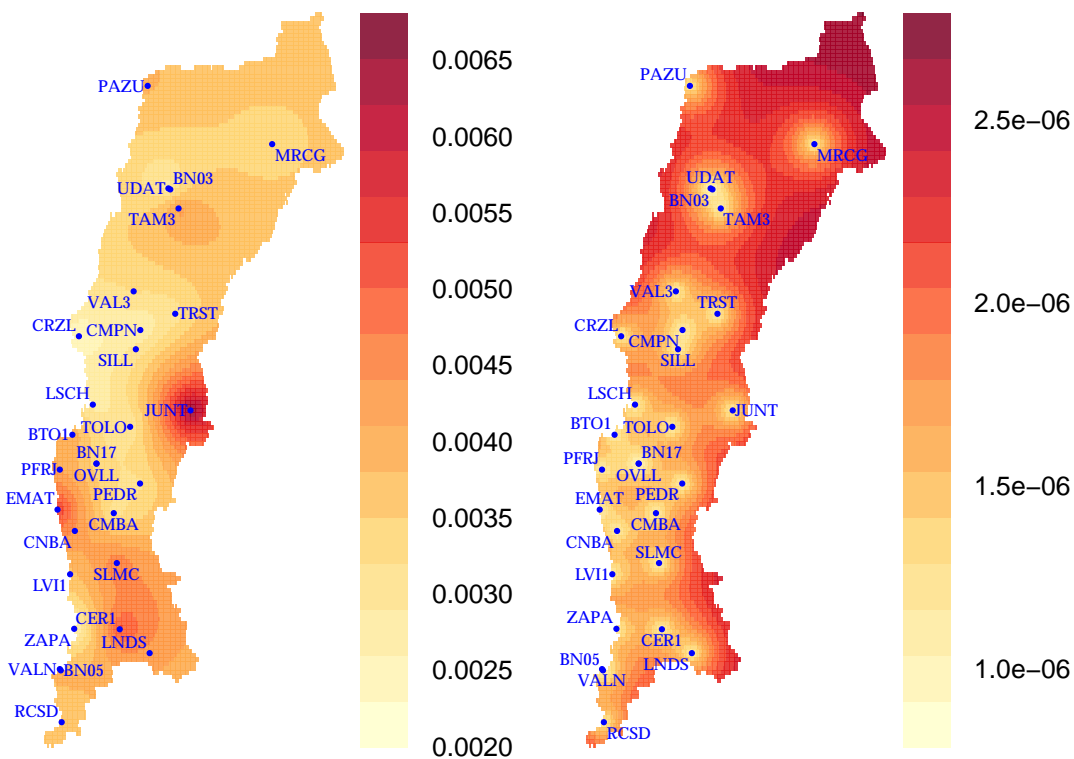


Figura 3.19: Kriging ordinario del desplazamiento en el período Pre-sísmico (izquierda). Varianza del Kriging ordinario del desplazamiento en el período Pre-sísmico (derecha).

En la Figura 3.19 se observa que el desplazamiento del período Pre-Sísmico, el cual se distribuyó por las tres regiones en las regiones de Atacama, Coquimbo y Valparaíso rondando entre los valores de 65 mm y 20 mm de desplazamiento. El desplazamiento se concentró en las estaciones JUNTA, EMAT y CER1. La varianza es alta en la parte Norte de la región de Atacama, y disminuye paulatinamente mientras llega a la región de Coquimbo.

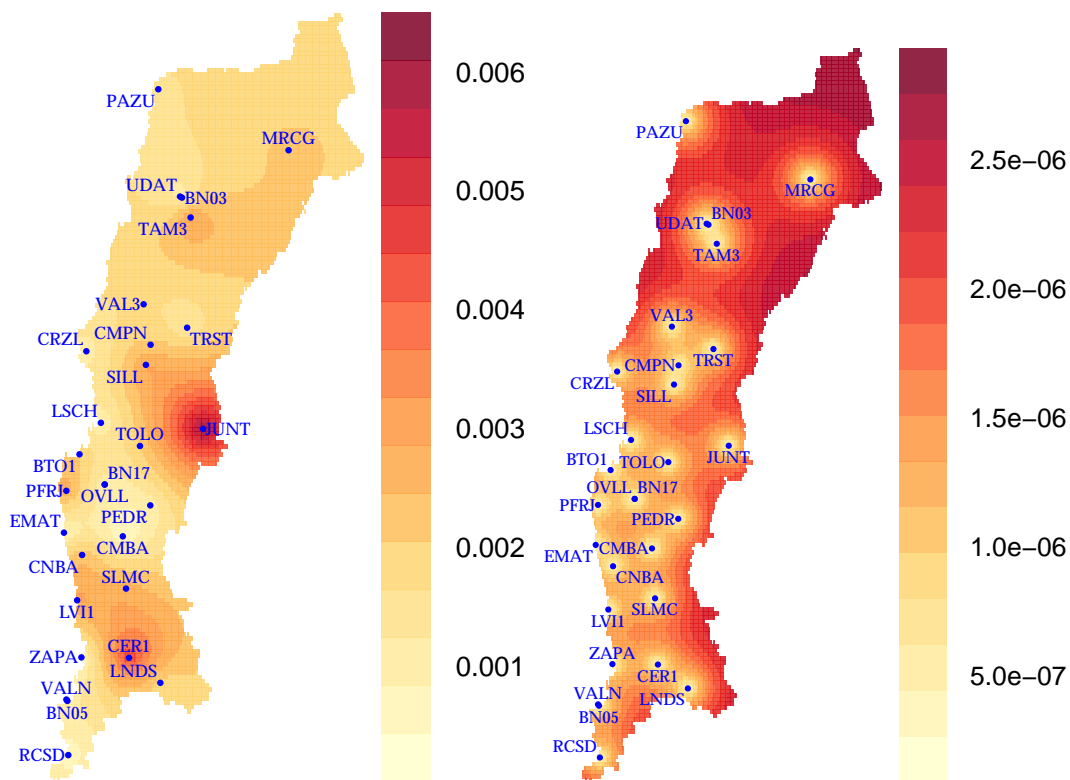


Figura 3.20: Kriging ordinario del desplazamiento de la longitud en el período Pre-sísmico (izquierda). Varianza del Kriging ordinario del desplazamiento de la longitud en el período Pre-sísmico (derecha).

En la Figura 3.20 se visualiza que el desplazamiento de la longitud del período Pre-Sísmico se da mayoritariamente en dos zonas que son representadas por las estaciones JUNTA y CER1, con intervalos de 60 mm y 20 mm de desplazamiento. A diferencia de la variable anterior, EMAT deja de tomar influencia para el desplazamiento de la longitud. La varianza aumenta donde las estaciones están más alejadas y disminuyen cuando las estaciones son más

cercanas. Recordemos que el modelo ajustado al variograma del desplazamiento de la latitud en el período Pre-Sísmico, resultó ser un modelo similar al Pepita Puro, por lo tanto no se le podrá ajustar ningún modelo del Kriging a esta variable.

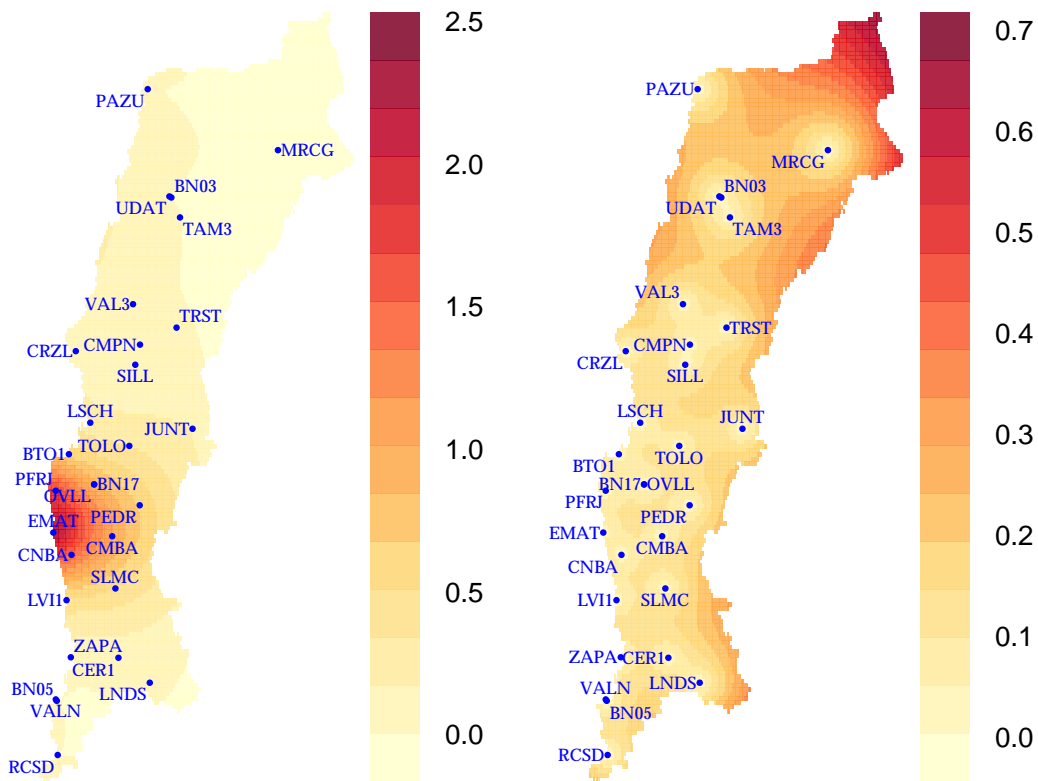


Figura 3.21: Kriging universal del desplazamiento en el período Sísmico (izquierda). Varianza del Kriging universal del desplazamiento en el período Sísmico(derecha).

En la Figura 3.21 se observa el desplazamiento para el período Sísmico, el cual tiene su mayor desplazamiento al noreste del epicentro, cercano a la estación EMAT con 2,5 m de desplazamiento, además se nota un desplazamiento de 50 cm por toda la costa de la región de Atacama. La varianza resulta ser casi constante para el terreno de influencia, esto va aumentando conforme se aleja de esta zona de mayor influencia.

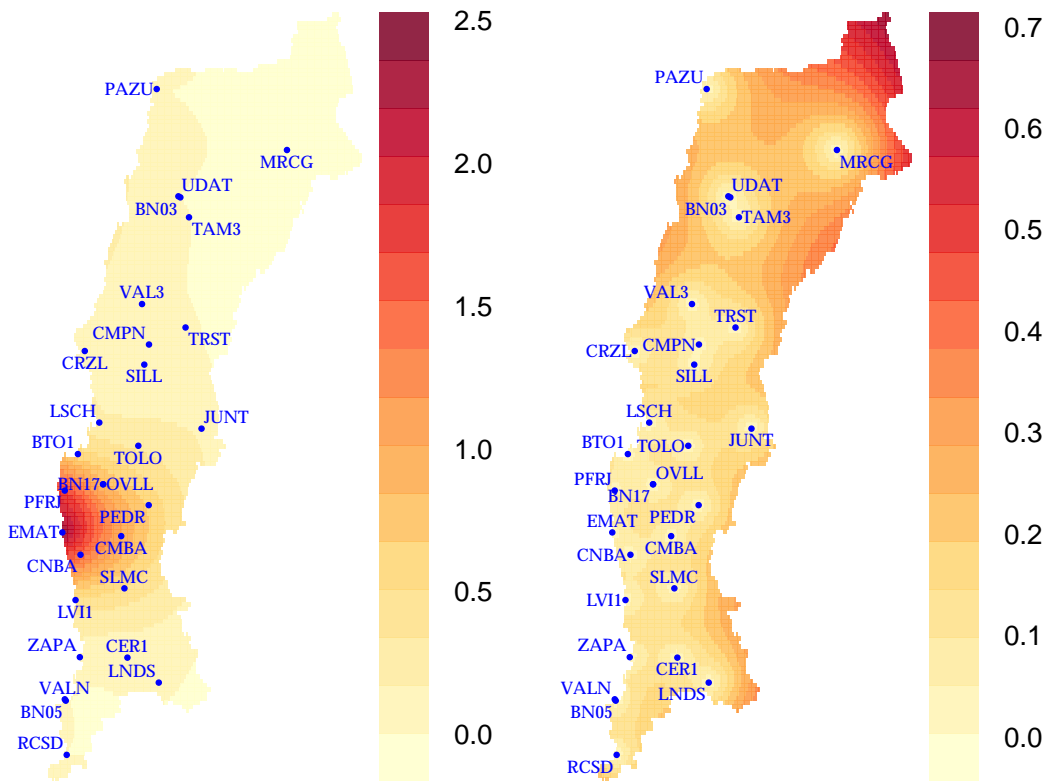


Figura 3.22: Kriging universal del desplazamiento de la longitud en el período Sísmico (izquierda). Varianza del Kriging universal del desplazamiento de la longitud en el período Sísmico(derecha).

La Figura 3.22 muestra el desplazamiento de la longitud en el período Sísmico, este resulta ser muy similar al caso de la distancia del desplazamiento del período Sísmico siendo su mayor desplazamiento de 2,5 m cerca de la estación EMAT y se nota un desplazamiento de 50 cm por toda la costa de la región de Atacama. La varianza resulta ser casi constante para el terreno de influencia, esto va aumentando conforme se aleja de esta zona de mayor influencia.

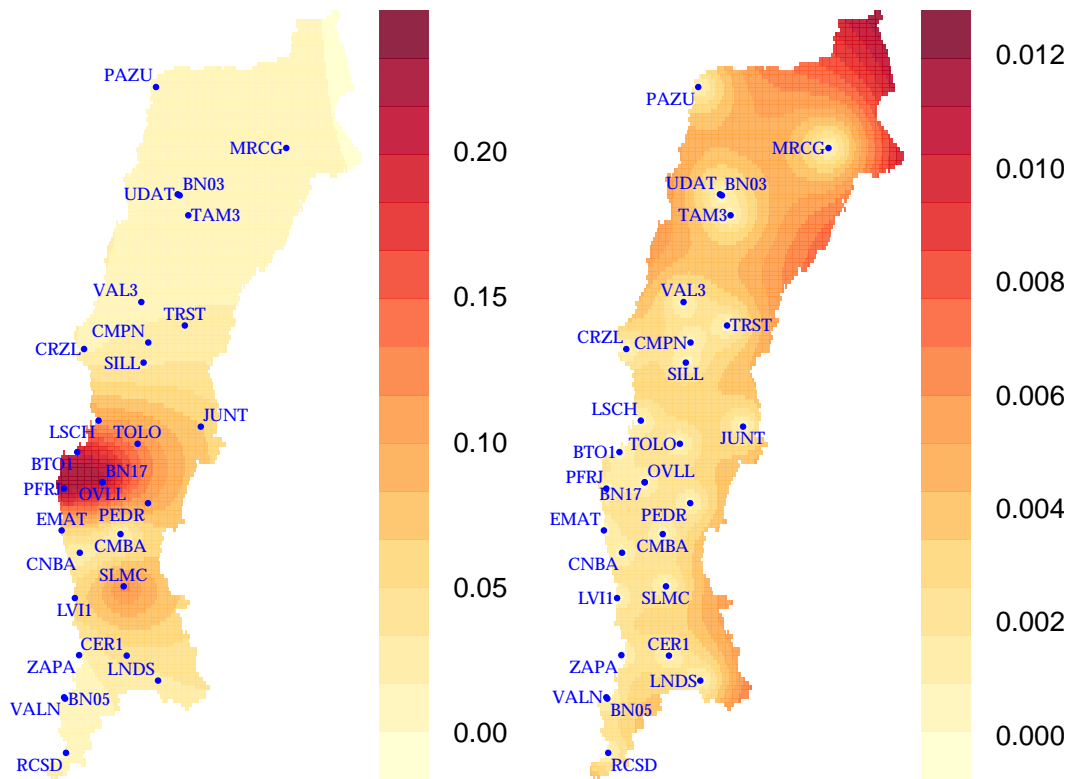


Figura 3.23: Kriging universal del desplazamiento de la latitud en el período Sísmico (izquierda). Varianza del Kriging universal del desplazamiento de la latitud en el período Sísmico(derecha).

En la Figura 3.23 se observa el desplazamiento de la latitud en el período Sísmico, este resulta ser diferente a los otros dos casos de este período. La cantidad del desplazamiento disminuye considerablemente, siendo su máximo cerca de la estación OVLL con un cantidad de 25 cm. Otra zona de influencia es un poco más al sur en la estación de SLMC con un desplazamiento de 5 cm. La varianza resulta ser casi constante para el terreno de influencia, esto va aumentando conforme se aleja de esta zona de mayor influencia.

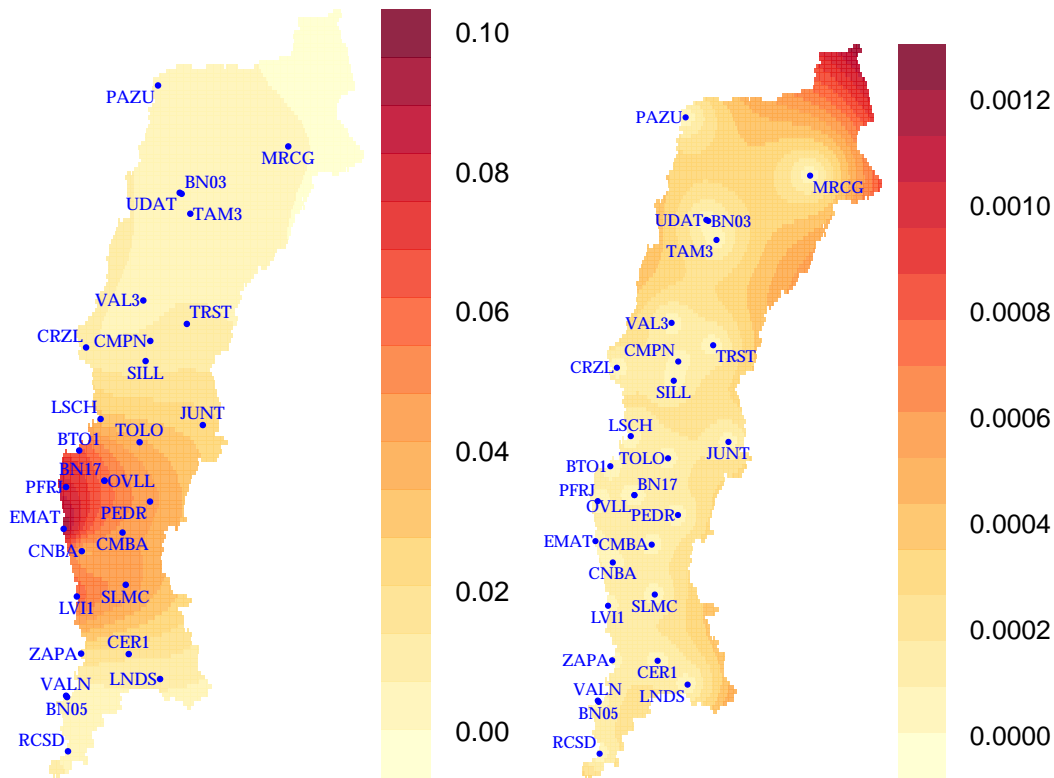


Figura 3.24: Kriging universal del desplazamiento en el período Post-sísmico (izquierda). Varianza del Kriging universal del desplazamiento en el período Post-sísmico (derecha).

La Figura 3.24 muestra la distancia del desplazamiento del período Post-Sísmico el cual disminuye con respecto al período anterior, llegando a su máximo desplazamiento de 10 cm, sin embargo sigue existiendo un mayor distancia de desplazamiento que en el período Pre-Sísmico. Las zonas de mayor desplazamiento son cercanas a las estaciones EMAT con 10 cm y LVI1 con 4cm de desplazamiento. La varianza tiende a ser pequeña en estaciones que son cercanas entre sí.

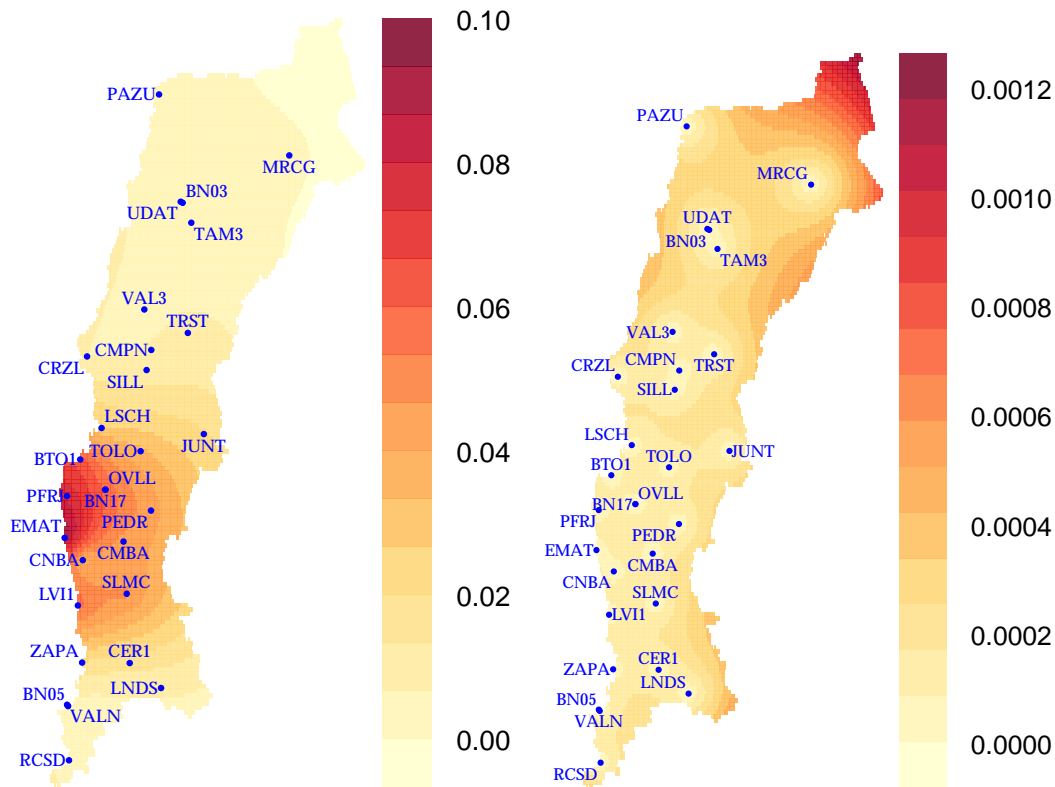


Figura 3.25: Kriging universal del desplazamiento de la longitud en el período Post-sísmico (izquierda). Varianza del Kriging universal del desplazamiento de la longitud en el período Post-sísmico(derecha).

En la Figura 3.25 se visualiza el desplazamiento de la longitud en el período Post-Sísmico, el cual no varía tanto respecto a la distancia del desplazamiento de este mismo período, llegando a su máximo desplazamiento de 10 cm en la estación EMAT. Sucede lo mismo con su varianza ya que tiende a ser pequeña en estaciones que son cercanas entre si.

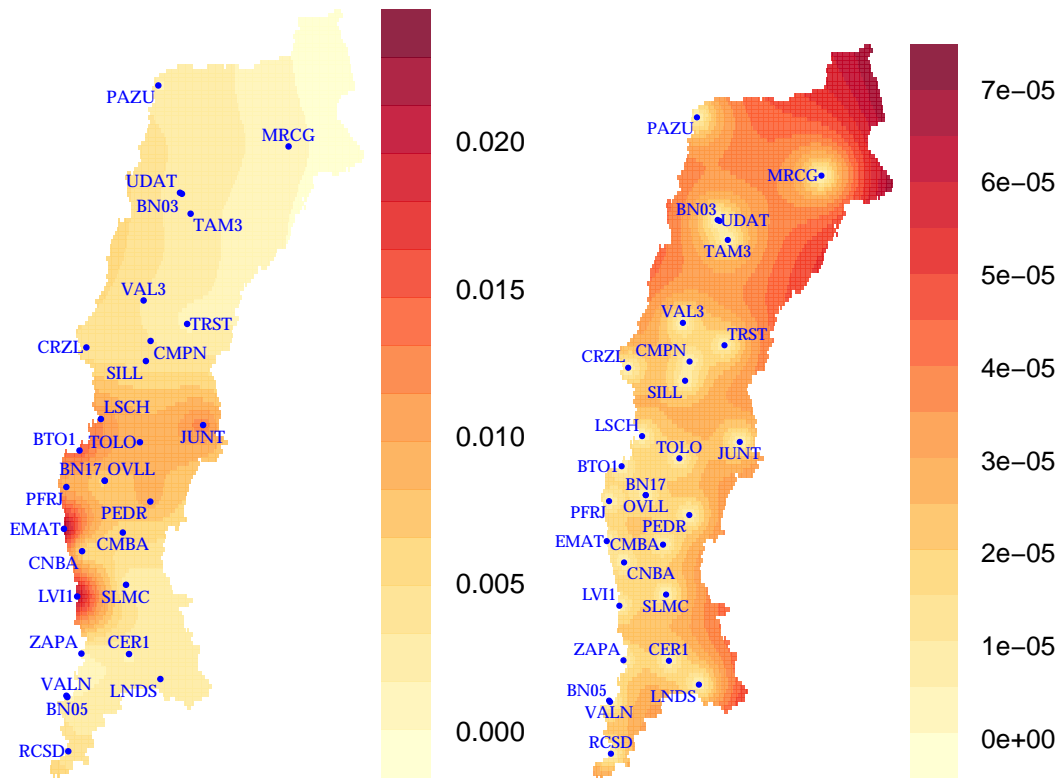


Figura 3.26: Kriging universal del desplazamiento de la latitud en el período Post-sísmico (izquierda). Varianza del Kriging universal del desplazamiento de la latitud en el período Post-sísmico(derecha).

En la Figura 3.26 se observa el desplazamiento de la latitud en el período Post-Sísmico, se puede notar que es la variable con menor desplazamiento de este período llegando a ser de 1 mm. A demás se observan dos zonas de mayor influencia cercanas a las estaciones EMAT y LVI1 con 2cm de desplazamiento. La varianza en esta variable es alta en toda la distribución de las regiones.

Finalmente se puede comparar el método realizado actualmente con el método del cálculo de los cambios horizontales en la costa y en el interior del continente a través del satélite InSAR.

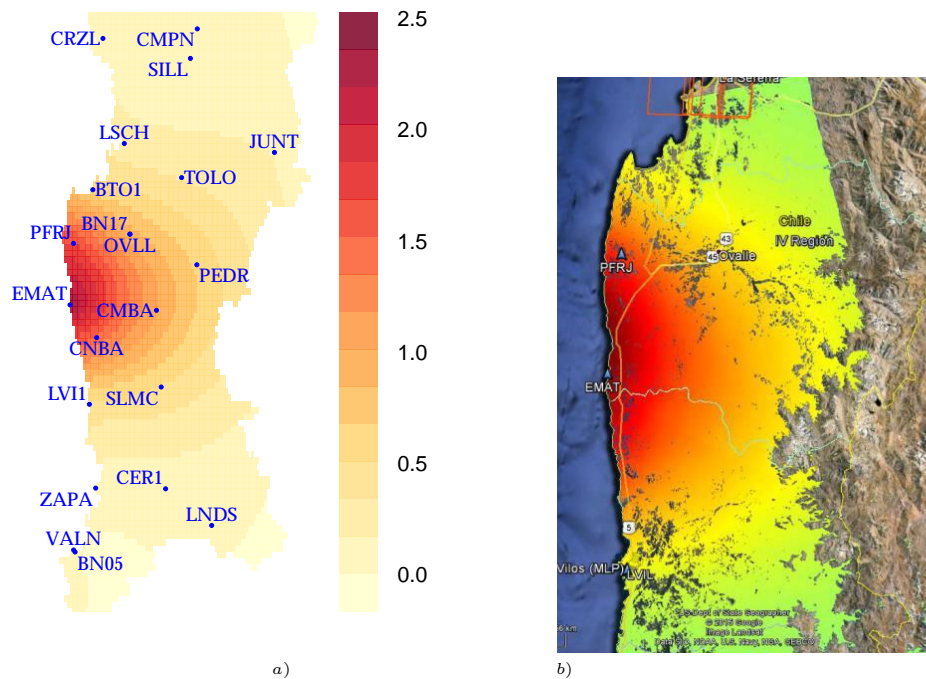


Figura 3.27: Kriging universal del desplazamiento en el período Sísmico a). Cambios horizontales en la costa y en el interior del continente asociados al terremoto del 16 de septiembre de 2015. El color rojo intenso sería del orden de 2m de desplazamiento hacia el oeste. Barrientos,(2015) b).

En la Figura 3.27 se muestra a la izquierda el desplazamiento de la corteza terrestre del período Sísmico a través del método del kriging y a la derecha el mapa del cambios horizontal en la costa y en el interior del continente a través del satélite InSAR, donde se puede comparar que el desplazamiento y los cambios horizontales son similares en la misma zona (observando las estaciones EMAT y PFRJ en los dos casos), con 2,5 m de desplazamiento en el kriging y 2m de desplazamiento en el satélite InSAR.

3.7. Conclusión

En el presente trabajo de titulación, se realizó un análisis del desplazamiento de la corteza influenciado por el terremoto del año 2015 a través de datos procesados en GPS en 29 estaciones ubicadas en las regiones de Atacama, Coquimbo y Valparaíso. En conclusión se pudo estimar el desplazamiento de la corteza terrestre en las tres regiones en diferentes períodos (Pre-Sísmico, Sísmico y Post-Sísmico). Se logro comprobar a través de la técnica del kriging, que en el período Pre-Sísmico hubo un desplazamiento máximo de la corteza terrestre de 65 mm el cual estuvo segmentado en tres estaciones (JUNT, EMAT y CER1). En el período Sísmico cambia drásticamente la situación, estimándose un desplazamiento máximo de 2,5 m al noroeste del epicentro, en la estación EMAT. Otras estaciones cercanas a estas son PFRJ, CNBA, CMBA, PEDR y OVLL, que tuvieron un comportamiento similar. Con respecto al último período el desplazamiento abarco más territorio, sin embargo bajo considerablemente su cantidad, con tan solo 10 cm de desplazamiento, al noroeste del epicentro en la estación EMAT.

Se pudo comprobar que el desplazamiento de la longitud es más pequeño que la latitud en el período Pre-Sísmico por tan solo milímetros, sin embargo no se pudo hacer un mapa de predicción para la latitud , debido a que se le ajusto un modelo Mathérn con un rango muy pequeño, pareciéndose a un modelo de Pepita puro, esto provoco que no se lograra ajustar un modelo del kriging .

En le período Sísmico, la longitud toma una clara relevancia desplazándose 2.5 m en la estación EMAT, al noroeste del epicentro. La latitud tuvo su desplazamiento más al norte de la estación EMAT en la estación PFRJ, sin embargo a pesar de que aumento su desplazamiento a 25 cm y se realizo un mapa de predicción , no pudo compararse con el desplazamiento de la longitud de este período.

Finalmente para el período Post-Sísmico, el desplazamiento de la longitud tiene un comportamiento similar al del perido Sísmico, pero con una menor intensidad y a al vez abarcando más territorio, llegando a desplazarse 10 cm en la estación EMAT. El desplazamiento de la latitud en este caso se distribuyo más segmentado cerca de la zona de influencia.

Bibliografía

1. Barrientos, S. (19 octubre 2015). *Informe Técnico Terremoto Illapel 16 Septiembre 2015*. Recuperado de http://www.csn.uchile.cl/wp-content/uploads/2015/10/Informe_Tecnico_terremoto_Illapel.pdf
2. Bivand, R., Pebesma, E. & Gómez, V. (2008). *Applied Spatial Data Analysis with R*. New York. Springer.
3. Cadiz, F., Hevia, S.A. & Reyes, S.A. (2013). *Mecánica Clásica*. Santiago: Universidad Católica de Chile.
4. Cid, R., & Ferrer, S. (1997). *Geodesia Geométrica, Física y por Satélites*. Instituto Geográfico Nacional. Ministerio de Fomento.
5. Cressie, N. (1993). *Statistics for spatial data*. New York: John Wiley.
6. Corchete, V. (2009). *Geodesia Geométrica y Geodesia Física: Objetivo y Aplicaciones*. Almería: Universidad de Almería.
7. Coppel, I. A. (2001). *El Datum*. Valladolid: Universidad de Valladolid.
8. Diggle, P., & Ribeiro, P. (2007). *Model-Based Geostatistics*. New York: Springer.
9. Eduardo, H., Aldo, M. & Gustavo, N. (2005). *GPS Posicionamiento satelital*. Rosario: UNR.
10. Fernández, J., Pastén, C., Ruiz, S., & Leyton, F. (2017). *Estudio de efectos de sitio en la Región de Coquimbo durante el terremoto de Illapel Mw 8.3 de 2015*. Obras y Proyectos 21, 20-28.

11. Giraldo, R. (2002). *Introducción a la Geostatística. Teoría y aplicación*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.
12. Huerta, E., Mangiaterra, A. & Noguera, G. (2005). *GPS Posicionamiento Satelital*. Rosario: UNR.
13. Instituto Geográfico Agustín Codazzi. (2007). *Mejora de los sistemas de cartografía del territorio colombiano*. Bogotá: IGAC.
14. Lehmann, C.H.(Ed.)(1965). *Geometría Analítica*. Mexico: Unión Tipográfica Editorial Hispano-Americana.
15. Matheron, G. & Blondel, F.(1962). *Traité de géostatistique appliquée*. Paris: Technip.
16. Muñoz, A. (2009). *Geodesia y cartografía: Fundamentos de los sistemas de información geográfica*. España: Universitat Oberta de Catalunya.
17. NIMA. (2000). *Department of Defense World Geodetic System 1984*.(informe técnico 8350.2).Virginia:NIMA
18. Poyraz, F. Güral, E.(2007). *Integration of theoretical and the empirical deformations by KALMAN-Filtering in the North Anatolia Fault Zone, Nat. Hazards Earth Syst. Sci.*, 7, 683-693, Recuperado de (<https://doi.org/10.5194/nhess-7-683-2007>).
19. Samsudin, A., Shafie, N., Ramli, S.H., Harun, A.R., Ibrahim., Yaacob, W. Z. & Mohamad, K.R. (2014). *Application of GPS data for earth crustal study: Malaysian case study. Electronic Journal of Geotechnical Engineering*.19.1089-1100.
Recuperado de (https://www.researchgate.net/publication/287592364_Application_of_GPS_data_for_earth_crustal_study_Malaysian_case_study)
20. Stenmark, J. (30 de abril de 2014). *Precise to a fault: How GPS revolutionized seismic research*. Recuperado de <https://www.earthmagazine.org/article/precise-fault-how-gps-revolutionized-seismic-research>
21. UNAVCO. (4 de noviembre de 2017). *GPS Earthquakes*. Recuperado de <https://spotlight.unavco.org/how-gps-works/gps-and-tectonics/gps-and-earthquakes.html>

22. UNAVCO. (4 de noviembre de 2017). *GPS and Tectonics*. Recuperado de <https://spotlight.unavco.org/how-gps-works/gps-and-tectonics/gps-and-tectonics.html>
23. Wang, L. (2010). *Analysis of Postseismic Processes: Afterslip, Viscoelastic Relaxation and Aftershocks*. (Tesis doctoral). Institute of Geology, Mineralogy and Geophysics, Germany.