



Facultad de Ciencias - Instituto de Estadística
Carrera de Ingeniería en Estadística

Índices de capacidad de procesos para distribuciones no normales

Trabajo de titulación presentado por
Gonzalo Andrés Oyanedel Muñoz
Para optar al grado de Licenciado en Estadística
y al título de Ingeniero Estadístico

Profesor guía
Dr. Víctor Leiva
Profesor guía co-referente
Dr.(C) Carolina Marchant

Valparaíso, Chile
Marzo, 2014

Agradecimientos

En primer lugar agradezco a Dios por darme la vida, salud y oportunidad de convertirme en un profesional. Por entregarme las ganas de salir adelante, pese a los obstáculos que se han presentado durante este proceso.

Agradezco a mi familia, en especial a mi mamá, por los grandes sacrificios que han realizado, brindándome la posibilidad de acceder a la educación superior, entregándome su aliento en los momentos difíciles y palabras sabias acorde a las situaciones.

Junto con ello doy gracias a mi esposa y a su familia, por apoyarme siempre en todo sentido. Gracias Daniela por tu paciencia, comprensión y por ayudarme con la redacción, ahora puedo decir que esta tesis lleva mucho de ti, agradezco que estés siempre a mi lado.

Finalmente, agradezco infinitamente a mi profesor guía el Dr. Víctor Leiva y a la profesora guía co-referente Carolina Marchant por haber confiado en mi persona, por la paciencia y por la dirección de este trabajo, pues sin su apoyo y supervisión nada de esto sería posible.

Abreviaturas y simbología

A continuación se presentan las abreviaturas que se utilizan a lo largo de este trabajo

BS	Birnbaum-Saunders.
BSE	Birnbaum-Saunders de mezclas de escalas normales.
BSG	Birnbaum-Saunders generalizada.
BSNC	Birnbaum-Saunders normal contaminada.
BSSL	Birnbaum-Saunders slash.
BS-t	Birnbaum-Saunders-t-Student.
C_p	ICP cuando la media concide con el centro de los límites de especificación.
C_{pk}	ICP para procesos no centrados en el valor nominal.
C_{pu}	ICP para límites de especificación superior.
C_{pl}	ICP para límites de especificación inferior.
DE	Desviación estándar.
EM	Esperanza y maximización.
FDP	Función de densidad de probabilidad.
FDA	Función de densidad acumulativa.
f_T	FDP de T .
FC	Función cuantil.
IC	Intervalo de confianza.
ICP	Índice de capacidad de proceso.
LEI	Límite de especificación inferior.
LES	Límite de especificación superior.
LITN	Límite inferior de tolerancia natural.
LSTN	Límite superior de tolerancia natural.
LTN	Límite de tolerancia natural.
MEN	Distribuciones simétricas de mezclas de escalas normales.

ϕ	FDP de la distribución normal estándar.
Φ	FDA de la distribución normal estándar.
R_T	Función de confiabilidad.
h_T	Función de riesgo.
VM	Verosimilitud máxima.
VA	Variable aleatoria.

Resumen

Los índices de capacidad de procesos (ICPs) son una importante herramienta utilizada por las empresas para determinar la calidad de sus productos, describiendo si un proceso será capaz de producir dentro de los límites de especificación establecidos previamente por éstas. Tales índices han sido desarrollados para procesos cuya característica de calidad de interés se distribuye según la ley normal. Sin embargo, en la práctica, muchas de estas características no siguen una distribución normal. En este caso, el uso de ICPs no modificados conduce a resultados erróneos. Para solucionar este problema, se han propuesto transformaciones de datos o el uso de índices adaptados para distribuciones no normales. Muchas veces, las empresas se encuentran interesadas en estudiar la calidad de un producto a través del tiempo, lo que es conocido como confiabilidad. En tal caso, no es siempre posible contar con datos completos de la característica de calidad de interés, encontrándonos con datos censurados. Una distribución no normal asimétrica que ha alcanzado gran popularidad en los últimos años es la distribución Birnbaum-Saunders (BS). Esta distribución posee sesgo positivo y permite describir el tiempo total que transcurre hasta que el desarrollo y crecimiento de una grieta dominante, producida por un tipo de daño acumulativo, sobrepasa un umbral y causa una falla por fractura. La distribución BS ha sido satisfactoriamente utilizada en el área de confiabilidad. Basados en la relación existente entre la distribución normal y la distribución BS, es posible obtener una clase general de distribuciones BS generada desde modelos simétricos de mezclas de escalas de normales (MEN), las que se denominan distribuciones BS de mezclas de escalas de normales (BSE). Los objetivos principales de este trabajo son proponer, desarrollar e implementar ICPs basados en distribuciones no normales con datos censurados y no censurados, específicamente se propone una metodología basada en la distribución BSE. Los procedimientos desarrollados en este trabajo son implementados en el software R-project; ver www.R-project.org.

Índice general

Abreviaturas y simbología	2
Resumen	4
Objetivos	7
Revisión bibliográfica	8
1. Preliminares	10
1.1. Descripción general de índices de capacidad de procesos	10
1.1.1. Análisis de capacidad de procesos	10
1.1.2. Índices de capacidad de procesos	12
1.1.3. Índices de capacidad de procesos normales	12
1.1.4. ICP bajo normalidad	13
1.2. Datos censurados	13
1.2.1. Tipos de censura	14
1.2.2. Estimación de máxima verosimilitud para datos censurados	14
1.3. Distribución Birnbaum-Saunders	15
1.3.1. Método de verosimilitud máxima	17
1.4. Distribución Birnbaum-Saunders generalizada	18
1.4.1. Método de verosimilitud máxima con datos censurados	19
1.5. Distribución de mezclas de escalas de normales	20
1.5.1. Caracterización de la distribución BS de mezclas de escala	21
1.5.2. Distribución BS normal contaminada	22
1.5.3. Distribución BS slash	23
1.5.4. Distribución BS t-Student	23
1.5.5. Estimación MV a través del algoritmo EM	24

2. Índice de capacidad de procesos para distribuciones no normales	26
2.1. Introducción	26
2.1.1. Una revisión breve de los distintos enfoques	26
2.1.2. Índices de capacidad de proceso para la distribución Weibull	31
2.1.3. Índice de capacidad de procesos para la distribución BS	33
3. Índice de capacidad de procesos para la distribución BSE	35
3.1. Introducción	35
3.2. Distribución Birnbaum-Saunders mezcla de escala de normales	36
3.2.1. Estimación de VM vía algoritmo EM para la distribución BSE	36
3.3. ICP para la distribución BSE	39
3.4. Estimación e inferencia paramétrica para ICP BSE	39
3.4.1. Intervalo de confianza para los ICP BSE	40
3.4.2. Test de hipótesis para los ICP BSE	40
3.4.3. Intervalo de confianza no paramétrico para el ICP BSE	40
4. Aplicación de los ICPs basados en la distribución BSE	42
4.1. El problema	42
4.2. Análisis de datos	44
4.3. Elección del mejor modelo	44
5. Conclusión	47
Bibliografía	47

Objetivos

Los objetivos de este trabajo se presentan a continuación:

Objetivo general

Desarrollar índices de capacidad de procesos basados en distribuciones no normales.

Objetivos específicos

- (i) Proponer ICPs basados en distribuciones no normales.
- (ii) Implementar los ICPs para la distribución Birnbaum-Saunders escala de normales.
- (iii) Aplicar los ICP propuestos a datos reales y/o simulados.

Revisión bibliográfica

Por una parte, Birnbaum & Saunders (1968) presentaron la derivación de una distribución con sesgo positivo, la que muestra que la fatiga de materiales se debe al desarrollo y crecimiento de una grieta dominante. Ellos demostraron que esta distribución, llamada BS, se relaciona con la distribución normal. Birnbaum & Saunders (1969b) derivaron estimadores de verosimilitud máxima (VM) de los parámetros de esta distribución. Ng, Kundu & Balakrishnan (2006), por su parte, desarrollaron un estimador de VM basado en muestras censuradas de tipo II para la distribución BS. Díaz-García & Leiva (2005) propusieron una nueva familia de distribuciones generadas a partir de distribuciones simétricas, haciendo la curtosis más flexible en comparación a la distribución BS generada desde el modelo normal. Esta nueva familia de modelos es conocida como distribución Birnbaum-Saunders generalizada (BSG). Balakrishnan et al. (2009) presentaron una clase más general de distribuciones BS generada desde modelos simétricos de mezclas de escalas de normales (MEN), denominada distribución BSE. Barros, Paula & Leiva (2009) implementaron un paquete en el software R-project para la distribución BSG. Este paquete contiene, entre otras cosas, una función para la estimación de parámetros mediante el método de VM con datos censurados. Barros et al. (2014) propusieron pruebas de bondad de ajuste basadas en las distribuciones BS para el análisis de datos censurados de tipo II. Por otra parte, Somerville & Montgomery (1996) reportaron que el uso de los ICPs normales en vez de los no normales generan resultados poco confiables y engañosos acerca del desempeño de un proceso. Una alternativa para resolver el problema de la no normalidad de los datos es aplicar transformaciones, de tal manera que los datos resultantes sean normales. Leiva et al. (2009) mencionaron que el uso de transformaciones no apropiadas reduce la potencia del estudio. Una forma alternativa es modelar los datos mediante una distribución no normal apropiada. Clement (1989) planteó un método para obtener ICPs basados en distribuciones no normales para (i) cuando la media coincide con el centro de los límites de especificación, denominados índices centrados, y (ii) para cuando no coincide, llamados índices no centrados. Estos nuevos ICPs son basados en las curvas del sistema de Pearson y requieren del cálculo de los percentiles de las distribuciones no normales. Pearn & Chen (1997) realizaron una generalización de los ICPs centrados para distribuciones no normales y aplicaron estos índices en la fabricación de condensadores electrolíticos. Liu & Chen (2006) propusieron el uso de la distribución Burr XII en los ICPs del tipo Clements. Valdiviezo & Fermín (2010) presentaron ICPs

para las distribuciones gamma, lognormal, Weibull y Pareto generalizada, utilizando el método de Clements. Tang & Than (1999) realizaron un estudio comparativo de ICPs basados en las distribuciones lognormal y Weibull, utilizando el límite de especificación superior (LES) para el método de Clements, de la varianza ponderada y de las transformaciones de Box-Cox y de Johnson. Recientemente, Leiva et al. (2014) desarrollaron e implementaron ICPs para datos que se distribuyen BS. No existen estudios de análisis de capacidad de procesos para cuando la característica de calidad se distribuye BSE y tampoco con datos censurados.

Preliminares

En este capítulo se dan a conocer aspectos y definiciones básicas de análisis de capacidad de procesos y de datos censurados. También se entrega una breve caracterización de las distribuciones BS, BSG y BSE.

1.1 Descripción general de índices de capacidad de procesos

1.1.1 Análisis de capacidad de procesos

Para indagar en el análisis de capacidad de procesos, es necesario conocer las siguientes definiciones.

Definición 1.1.1 (Capacidad de proceso). Es una propiedad medible de un proceso que puede calcularse por medio de ICPs, específicamente, corresponde a la amplitud del proceso de producir productos dentro de los límites de especificación impuestos por la empresa.

El análisis de capacidad de procesos es una parte fundamental para el control de calidad de un producto y tiene como objetivos:

- Ayudar a modificar o rediseñar el proceso.
- Ayudar a especificar los requerimientos que debe cumplir el equipo y/o maquinarias.
- Ayudar a seleccionar mejores proveedores.

- Predecir si el producto cumple con las expectativas de los clientes.
- Permitir reducir la variabilidad de un proceso de manufactura.

El análisis de la capacidad de procesos es una técnica que tiene aplicación en muchas etapas del proceso productivo, incluyendo el diseño del producto, la búsqueda de proveedores, la planeación de la producción y la manufactura misma. La capacidad o aptitud de un proceso se refiere a su uniformidad y es la variabilidad del proceso que mide la uniformidad del rendimiento. Se puede considerar la variabilidad de dos maneras, (a) instantánea, es decir, los datos son recolectados durante un periodo suficientemente corto de tiempo o (b) en el transcurso del tiempo, de modo que los datos son recolectados en un periodo suficientemente largo de tiempo. La calidad de un producto, esta determinada directamente por la variabilidad del proceso, según Shewart existen dos clases de causas de variabilidad. (i) Causas comunes, corresponden aquellas que son parte permanente del proceso y su suma determina la capacidad de éste, la idea para estas causas es disminuir al máximo sus efectos, y (ii) causas asignables, son aquellas que intervienen en un determinado momento y producen una variación muy grande en el proceso. El objetivo principal es identificarlas y eliminarlas. Reducir la variación debido a causas comunes es complejo por su dificultad y costo, mientras que eliminar la variación de las causas asignables suele ser más sencillo y económico. Entre las diferentes causas que influyen la variabilidad, tenemos:

Causas comunes:

- Diferente grado de habilidad de los operarios.
- Características del material (dureza, espesor, diámetro, etc.) dentro de las tolerancias admitidas por las especificaciones.
- Maquinaria con diferentes grados de precisión, ya sea por distinta calidad o por desajustes internos dentro de lo tolerado.

Causas asignables:

- Desgaste excesivo de las maquinarias y herramientas.
- Fallas humanas.
- Material fuera de especificación.

Para realizar un análisis de capacidad de proceso, éste debe encontrarse bajo control estadístico. Un estudio de capacidad de proceso requiere el conocimiento o la estimación de la distribución de la característica de calidad estudiada.

Diversas herramientas estadísticas son útiles en el análisis de control de calidad, por ejemplo, el histograma ayuda a la estimación empírica de la capacidad del proceso, el diagrama de probabilidad permite determinar la forma, el centro y la dispersión de la distribución, y las cartas de control ayudan a observar el comportamiento a través del tiempo de medidas asociadas a alguna característica de calidad de interés.

1.1.2 Índices de capacidad de procesos

Los ICPs proporcionan una medida que nos permite evaluar si un proceso es capaz de producir dentro de los límites de especificación de las características de calidad de interés. El objetivo de estos límites es establecer un patrón para obtener productos uniformes y, por lo tanto, de calidad similar. Para procesos que se encuentran en un estado de control estadístico, una comparación de la variación entre seis desviaciones estándar (6σ) y los límites de tolerancia permite un cálculo rápido del porcentaje de unidades defectuosas.

Para una variable aleatoria (VA) T que representa la característica de calidad que se pretende controlar, donde la variabilidad de T determina el nivel de calidad de un producto, el ICP es definido como

$$\text{ICP} = \frac{\text{Rango de especificación}}{\text{Rango de variabilidad}}.$$

Los resultados posibles de ICP son: (1) $\text{ICP} > 1$, indica que el proceso es capaz, pues prácticamente todos los artículos que produzca estarán dentro de las tolerancias requeridas, (2) $\text{ICP} = 1$, indica que el proceso debe ser vigilado, pues pequeños cambios pueden ocasionar cantidades elevadas de productos defectuosos y (3) $\text{ICP} < 1$, indica que el proceso no es capaz de producir dentro de las especificaciones.

1.1.3 Índices de capacidad de procesos normales

Se acostumbra a considerar un ancho de seis desviaciones estándar (6σ) de la característica de calidad del producto como medida de la capacidad del proceso. En Figura 1.1 se presenta un proceso para el cual la característica de calidad tiene distribución normal, con media μ y DE σ . Los límites de tolerancia natural (LTN) inferior y superior del proceso se definen a continuación,

$$\text{LITN} = \mu - 3\sigma \text{ y } \text{LSTN} = \mu + 3\sigma.$$

Para una distribución normal, los LTN incluyen el 99.73 % de la variabilidad, es decir sólo el 0.27 % de los productos fabricados en el proceso caerán fuera de los LTN. De ahí, se debe tener en cuenta lo siguiente:

- El 0.27 % productos fuera de los LTN corresponden a 2700 artículos disconformes por millón.
- Si la distribución de la característica la calidad de interés del proceso no es normal, entonces el porcentaje de artículos que cae fuera de los LTN puede diferir considerablemente de 0.27 %.

Suponga que una VA T se distribuye normalmente con media μ y varianza σ , ambas conocidas. La media muestral \bar{t} y la varianza muestral S^2 pueden calcularse a partir de una muestra aleatoria de n observaciones. Un procedimiento lógico para estimar los LTN consiste en reemplazar μ por \bar{t} y σ por S .

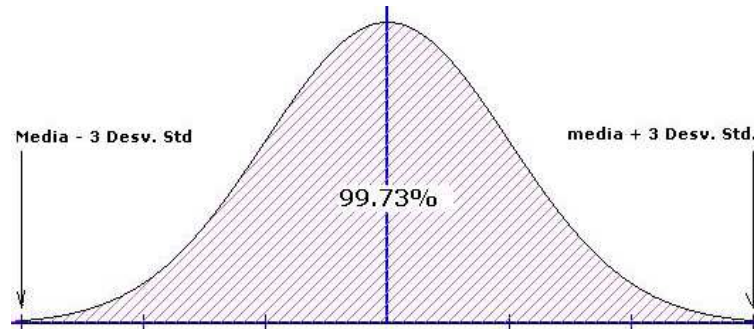


Figura 1.1: LTN de la distribución normal

1.1.4 ICP bajo normalidad

Son estudios que se efectúan para obtener información temprana sobre el comportamiento de un nuevo o antiguo proceso con relación a los requerimientos del cliente y para determinar si una máquina es capaz de producir dentro de las especificaciones.

Para una VA T que representa la característica de calidad de interés, con $T \sim N(\mu, \sigma^2)$. Dado el límite de especificación inferior (LEI) y de especificación superior (LES), los ICPs se definen de la siguiente forma

- ICP centrado en los límites de especificación:

$$C_p = \frac{LES - LEI}{6\sigma}.$$

- ICP para el LES:

$$C_{pu} = \frac{LES - \mu}{3\sigma}.$$

- ICP para el LEI:

$$C_{pl} = \frac{\mu - LEI}{3\sigma}.$$

- ICP no centrado en los límite de especificación:

$$C_{pk} = \min \{C_{pu}, C_{pl}\}.$$

Suponga que μ y σ se estiman para muestras de tamaño n , la media muestral y la desviación estándar muestral están dadas por $\hat{\mu} = \bar{t} = [1/n] \sum_{i=1}^n t_i$ y $\hat{\sigma} = s = [1/n] \sum_{i=1}^n [t_i - \bar{t}]^2$, respectivamente.

1.2 Datos censurados

En esta Sección, se presentan algunos aspectos relacionados con los tipos de censura y la estimación con datos censurados.

1.2.1 Tipos de censura

Suponga primero que n unidades se eligen al azar en una población de interés. Entonces, para estas unidades, se respeta el tiempo de vida o sobrevivencia durante un periodo limitado. Si para las n unidades, el tiempo de vida se observa plenamente al final del estudio, la muestra se llama sin censura. Sin embargo, si para algunas unidades sólo se conoce un límite inferior o límite superior de vida útil al final del estudio, la muestra se denomina censurada.

1.2.1.1 Censura tipo I

En este caso, la duración del suceso se observa en un momento fijo, $t = t_0$. Todas las unidades sobre los análisis se observan a partir de un momento $t = 0$ hasta que la prueba termina en $t = t_0$. Al final del experimento se obtiene el fracaso de las unidades muestrales y fallas antes de $t = t_0$ y el tiempo de supervivencia de aquellas unidades que tienen aún vida en tiempo $t = t_0$.

Este régimen se conoce como censura tipo I y censura la cantidad de observaciones en una VA, r , con $r \leq n$. En resumen, se tienen $[n - r]$ unidades que cuentan con vida a tiempo $t = t_0$ que pasan a ser los datos censurados.

1.2.1.2 Censura tipo II

La censura tipo II surge cuando se puede fijar la cantidad de unidades que se desea que fallen, por ejemplo, un número r , con $1 < r \leq n$. Por lo tanto, se puede asegurar que r unidades tienen la característica de interés, es decir, la muerte o el fracaso al final de la prueba. De modo que $[n - r]$ unidades cuentan con vida a tiempo T_r . Una desventaja de la censura tipo II es que el tiempo para detener el experimento es una VA y por lo tanto no se puede saber cuándo la prueba finalizará.

1.2.1.3 Censura aleatoria

Supóngase que n unidades idénticas se están incorporando a la prueba en diferentes instantes de tiempo y que el experimento se lleva a cabo desde $t = 0$ a $t = t_0$. Así, el tiempo de censura de la i -ésima unidad, por ejemplo S_i , para $i = 1, 2, \dots, n$ es una VA. La censura puede ocurrir sin que el investigador ejerza algún control sobre el estudio.

1.2.2 Estimación de máxima verosimilitud para datos censurados

Considere T_1, \dots, T_n una muestra aleatoria de tamaño n . Asumiendo independencia, la función de verosimilitud se construye mediante

$$L(\vartheta) = \left[\prod_{i \in L} F(t_i) \right] \left[\prod_{i \in I} [F(t_i) - F(t_{i-1})] \right] \left[\prod_{i \in C} [1 - F(t_i)] \right] \left[\prod_{i \in D} f_T(t_i) \right].$$

donde $L(\vartheta; t_i) = L_i$ para la i -ésima observación, con $i = 1, \dots, n$ y ϑ es el vector de parámetros desconocidos.

Los datos analizados en los estudios de confiabilidad suelen ser censurados. A continuación se presentan definiciones de datos con censura a la izquierda, por intervalos y a la derecha.

Definición 1.2.1 (Censura a la izquierda). Si la i -ésima unidad, para $i = 1, \dots, n$, ha fallado antes de la primera inspección (t_1), es decir, la vida útil está dada por el intervalo $[0, t_1]$, entonces se dice que esta unidad está censurada por la izquierda y la probabilidad de la observación está dada por

$$L_i = \int_0^{t_i} f_T(t)dt = F_T(t_i) - F_T(0) = F_T(t_i).$$

Definición 1.2.2 (Censura por intervalos). Si la i -ésima unidad ha fallado en el intervalo $[t_{i-1}, t_i]$, para $i = 1, \dots, n$, entonces se dice que la unidad está censurada en un intervalo y la probabilidad de la observación está dada por

$$L_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} f_T(t)dt = F_T(t_i) - F_T(t_{i-1}).$$

Definición 1.2.3 (Censura a la derecha). Si la i -ésima unidad no ha fallado cuando la inspección final se lleva a cabo, es decir, su vida útil es el intervalo $[t_i, \infty]$, para $i = 1, \dots, n$, entonces se dice la unidad está censurada a la derecha y la probabilidad de la observación está dada por

$$L_i = \int_{t_i}^{\infty} f_T(t)dt = F_T(\infty) - F_T(t_i) = 1 - F_T(t_i).$$

1.3 Distribución Birnbaum-Saunders

Una VA T con distribución BS posee dos parámetros, uno de forma $\alpha > 0$ y otro de escala $\beta > 0$, además β es un parámetro de posición pues corresponde a la mediana. Esto se denota por $T \sim \text{BS}(\alpha, \beta)$. La VA BS está definida en términos de otra VA Z con distribución normal estándar, mediante

$$T = \beta \left[\frac{\alpha Z}{2} + \sqrt{\frac{\alpha Z}{2} + 1} \right]^2,$$

donde Z se representa en términos de T , mediante

$$Z = \frac{1}{\alpha} \left[\sqrt{\frac{T}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{T}} \right] \sim \text{N}(0, 1).$$

La función de densidad de probabilidad (FDP) de T está dada por

$$f_T(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{1}{2\alpha^2} \left[\frac{t}{\beta} + \frac{\beta}{t} - 2 \right] \right) \frac{t^{-\frac{3}{2}} [t + \beta]}{2\alpha\sqrt{\beta}}, \quad t > 0, \alpha > 0, \beta > 0.$$

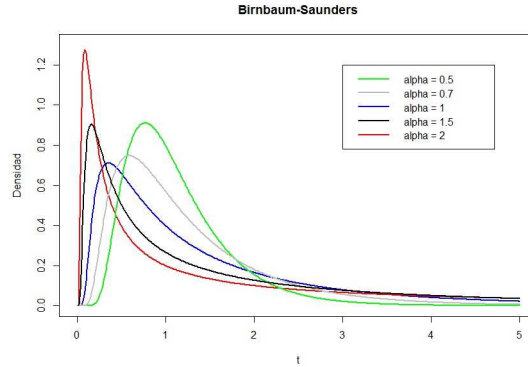


Figura 1.2: FDP de $T \sim BS(\alpha, \beta = 1,0)$

La Figura 1.2 muestra el comportamiento de la FDP de la distribución BS para algunos valores del parámetro de forma α . Note que a medida que α decrece, la FDP es aproximadamente simétrica. Considerando que β es un parámetro de escala y posición, la forma de la FDP no cambia al variar este parámetro.

La función de distribución acumulativa (FDA) de T está dada por

$$F_T(t) = P(T \leq t) = \Phi \left(\frac{1}{\alpha} \left[\sqrt{\frac{t}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{t}} \right] \right), \quad t > 0,$$

donde $\Phi(\cdot)$ corresponde a la FDA de $Z \sim N(0,1)$. El p -ésimo percentil de la distribución BS está dada por

$$t(p) = F_T^{-1} = \beta \left[\frac{\alpha z_p}{2} + \sqrt{\left[\frac{\alpha z_p}{2} \right]^2 + 1} \right]^2, \quad 0 < p < 1, \quad (1.1)$$

donde z_p es el p -ésimo percentil de $Z \sim N(0,1)$. Así, si $p = 0.5$, entonces $t(0,5) = \beta$, con lo cual el parámetro de escala β es también la mediana de la distribución.

La función de confiabilidad y riesgo de la distribución BS están dadas respectivamente por

$$R_T(t) = P(T > t) = 1 - \Phi(a_t) = \Phi(-a_t) \quad \text{y} \quad h_T(t) = \frac{\phi(a_t) A_t}{\Phi(-a_t)}, \quad t > 0,$$

donde

$$a_t = \frac{1}{\alpha} \left[\sqrt{\frac{t}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{t}} \right] \quad \text{y} \quad A_t = \frac{t^{-3/2} [t + \beta]}{2\alpha\sqrt{\beta}}. \quad (1.2)$$

La esperanza y la varianza de $T \sim BS(\alpha, \beta)$ están dadas respectivamente por

$$E[T] = \frac{\beta}{2} [2 + \alpha^2] \quad \text{y} \quad \text{Var}[T] = \frac{\beta^2}{4} [5\alpha^4 + 4\alpha^2].$$

Los momentos negativos de la distribución BS pueden ser obtenidos basándose en las propiedades de proporcionalidad y reciprocidad. Si $T \sim \text{BS}(\alpha, \beta)$ entonces T/β y β/T tienen la misma distribución, esto es

$$\frac{T}{\beta} \stackrel{d}{=} \frac{\beta}{T} \sim \text{BS}(\alpha, 1). \quad (1.3)$$

Así, basándose en (1.3), se tiene que

$$\mathbf{E}[T^{-n}] = \frac{\mathbf{E}[T^n]}{\beta^{2n}}.$$

Por otra parte, si T tiene una distribución BS con parámetros α y β y ya que $1/T$ tiene también una distribución BS con los correspondientes parámetros α y $1/\beta$, respectivamente, entonces se tiene que

$$\mathbf{E}[1/T] = \frac{1}{2\beta} [\alpha^2 + 2] \quad \text{y} \quad \text{Var}[1/T] = \frac{1}{4\beta} [5\alpha^4 + 4\alpha^2].$$

1.3.1 Método de verosimilitud máxima

Se considera que T_1, \dots, T_n en una muestra aleatoria de tamaño n , donde $T_i \sim \text{BS}(\alpha, \beta)$, para $i = 1, \dots, n$. La función de log-verosimilitud para α y β está dada por

$$\ell(\alpha, \beta) \propto \frac{n}{\alpha^2} - n \log(\alpha) - \frac{n}{2} \log(\beta) + \sum_{i=1}^n \left\{ \log(t_i + \beta) - \frac{1}{2\alpha^2} \left[\frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} \right] \right\}. \quad (1.4)$$

Derivando (1.4) respecto a los parámetros α y β , se obtienen respectivamente

$$\frac{\partial \ell(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} = -\frac{2n}{\alpha^3} - \frac{n}{\alpha} \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{1}{\alpha^3} \left[\frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} \right] \right\} \quad \text{y} \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial \ell(\alpha, \beta)}{\partial \beta} = -\frac{n}{2\beta} + \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{1}{t_i + \beta} \right\} + \frac{1}{2\alpha^2} \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{t_i}{\beta^2} - \frac{1}{t_i} \right\}. \quad (1.6)$$

Al igualar las ecuaciones de log-verosimilitud dadas por (1.5) y (1.6) a cero, se obtiene

$$\hat{\alpha}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{t_i}{\hat{\beta}} + \frac{\hat{\beta}}{t_i} \right\} - 2 \quad \text{y} \quad (1.7)$$

$$\hat{\alpha}^2 = \frac{2\hat{\alpha}^2 \hat{\beta}}{n} \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{1}{t_i + \hat{\beta}} \right\} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{t_i}{\hat{\beta}} - \frac{\hat{\beta}}{t_i} \right\}. \quad (1.8)$$

Sea la media aritmética y armónica de un conjunto de número positivos, t_1, \dots, t_n , dadas respectivamente por

$$s = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i \quad \text{y} \quad r = \frac{1}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1/t_i}.$$

Considere una función de media armónica dada por $K(x) = n / \sum_{i=1}^n \{1/(x + t_i)\}$, para $x > 0$. Sustituyendo s , r y $K(x)$ en (1.7) y (1.8), se obtiene

$$\hat{\alpha}^2 = \frac{s}{\hat{\beta}} - \frac{\hat{\beta}}{r} + \frac{2\hat{\alpha}^2\hat{\beta}}{K(\hat{\beta})} \quad \text{y} \quad (1.9)$$

$$\frac{\hat{\beta}}{r} = 1 + \frac{\hat{\alpha}^2\hat{\beta}}{K(\hat{\beta})}. \quad (1.10)$$

Sustituyendo (1.9) en (1.10), se obtiene $\hat{\beta}K(\hat{\beta})/r = K(\hat{\beta}) + \hat{\beta} [s/\hat{\beta} + \hat{\beta}/r - 2]$, de modo que $\hat{\beta}^2 - \hat{\beta} [2r - K(\hat{\beta})] + r [s + K(\hat{\beta})] = 0$. Ahora, tomando $g(x) = x^2 - x[2r - k(x)]$, se tiene que el estimador de VM de β , $\hat{\beta}$, es la solución de $g(x) = 0$. El estimador $\hat{\alpha}$ de VM de α , queda en términos de $\hat{\beta}$ mediante

$$\hat{\alpha} = \left[s/\hat{\beta} + \hat{\beta}/r - 2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

mientras que $\hat{\beta}$ debe obtenerse usando un método numérico iterativo.

1.4 Distribución Birnbaum-Saunders generalizada

Sea T una VA que mide la característica de calidad de interés. La distribución BSG es definida en términos de otra VA con distribución simétrica de la recta real, denotada por $Z \sim S(g)$, mediante

$$T = \frac{\beta}{4} \left[\alpha Z + \sqrt{\alpha^2 Z^2 + 4} \right]^2.$$

Así, T sigue una distribución BSG con parámetro de forma $\alpha > 0$, y de escala $\beta > 0$, denotado por $T \sim \text{BSG}(\alpha, \beta; g)$ y Z se representa en términos de T mediante

$$Z = \frac{1}{\alpha} \left[\sqrt{T/\beta} - \sqrt{\beta/T} \right] \sim S(g).$$

Note que $\int_0^\infty g(u)du = 1/c$, donde c es una constante normalizadora de la FDP de Z dada por $f_Z(z) = cg(z^2)$ y g es la función generadora de la FDP de una distribución simétrica en \mathbb{R} .

La FDP de $T \sim \text{BSG}(\alpha, \beta; g)$ está dada por

$$f_T(t) = cg \left(\frac{1}{\alpha^2} \left[\frac{t}{\beta} + \frac{\beta}{t} - 2 \right] \right) \frac{t^{-3/2}[t + \beta]}{[2\alpha\sqrt{\beta}]}, \quad t > 0.$$

La FDA de $T \sim \text{BSG}(\alpha, \beta; g)$ está dada por

$$F_T(t) = F_Z(a_t), \quad t > 0,$$

donde a_t está dada en la Ecuación (1.2) y A_t corresponde a la derivada de a_t con respecto a t .

Las funciones de confiabilidad y de riesgo de la distribución BSG están dadas por

$$R_T(t) = 1 - F_Z(a_t) = F_Z(-a_t) \quad \text{y} \quad h_T(t) = \frac{f_Z(a_t) A_t}{F_Z(-a_t)}, \quad t > 0,$$

respectivamente. El p -ésimo percentil de T está dado por

$$t(p) = \frac{\beta}{4} \left[\alpha z_p + \sqrt{\alpha^2 z_p^2 + 4} \right]^2, \quad 0 < p \leq 1,$$

donde z_p es el p -ésimo percentil de $Z \sim S(g)$. Así, si $p = 0.5$, entonces $t(0.5) = \beta$, con lo cual el parámetro de escala β es también la mediana de la distribución. La esperanza, la varianza y el coeficiente de variación (CV) de $T \sim \text{BSG}(\alpha, \beta; g)$ están dadas por

$$E[T] = \frac{\beta}{2} [2 + w_1 \alpha^2], \quad \text{Var}[T] = \frac{\beta^2 \alpha^2}{4} [4w_1 + [2w_2 - w_1^2] \alpha^2] \quad \text{y}$$

$$\gamma[T] = \frac{\alpha [4w_1 + [2w_2 - w_1^2] \alpha^2]^{\frac{1}{2}}}{2 + w_1 \alpha^2},$$

donde $w_k = E[W^k]$ y $W \sim G\chi^2(1; g)$, con w_k siendo el k -ésimo momento de la distribución BSG.

Los momentos negativos de la distribución BSG pueden ser obtenidos basandose en β/T y T/β tienen la misma distribución, es decir,

$$\frac{\beta}{T} \stackrel{d}{=} \frac{T}{\beta} \sim \text{BSG}(\alpha, 1; g).$$

Por lo tanto,

$$E[T^{-k}] = \frac{E[T^k]}{\beta^{2k}}.$$

1.4.1 Método de verosimilitud máxima con datos censurados

Sea T_1, \dots, T_n una muestra aleatoria de tamaño n . Para estimar los parámetros de la distribución BSG con datos censurados a la derecha, la función de verosimilitud para $\vartheta = [\alpha, \beta]^T$ de una VA $T \sim \text{BSG}(\alpha, \beta; g)$ está dada por

$$\ell(\vartheta) \propto \sum_{i \in D} \log(f_T(t_i)) + \sum_{i \in C} \log(R_T(t_i)), \quad (1.11)$$

donde $f_T(\cdot)$, $R_T(\cdot)$ representan la FDP y la función de confiabilidad de T , respectivamente. D denota los datos sin censura y C los con censura. Así, la función (1.11) es valida para censura tipo I, tipo II y aleatoria para $T \sim \text{BSG}(\alpha, \beta; g)$, dada por

$$\ell(\vartheta) = -r \log(\alpha) - \frac{r}{2} \log(\beta) + \sum_{i=1}^r \log(t_i + \beta) + \sum_{i=1}^r \log(g(a_i^2)) + [n - r] \log(F_Z(-a_t)), \quad (1.12)$$

donde $F_Z(\cdot)$ es la FDA de $Z \sim S(g)$.

Derivando (1.12) respecto a los parámetros α y β , se obtiene respetivamente

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ell}{\partial \alpha} &= -\frac{r}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^3} \sum_{i=1}^r v_i \left[\frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2 \right] + \frac{2[n-r]}{\alpha} \frac{[t_r - \beta]}{[t_r + \beta] t_r} h_T(t_r) \quad \text{y} \\ \frac{\partial \ell}{\partial \beta} &= -\frac{r}{2\beta} + \sum_{i=1}^r [t_i + \beta]^{-1} - \frac{1}{2\alpha^2} \sum_{i=1}^r v_i \left[\frac{1}{t_i} - \frac{t_i}{\beta^2} \right] + \frac{[n-r] t_r}{\beta} h_T(t_r),\end{aligned}$$

donde $h_T(\cdot)$ es la función de riesgo de T y $v_i = -2w_g(a_i^2)$ con $w_g(a_i^2) = \frac{g'(a_i^2)}{g(a_i^2)}$ para $i = 1, \dots, n$. Por lo tanto, mediante la resolución de $\frac{\partial \ell}{\partial \beta} = 0$ y $\frac{\partial \ell}{\partial \alpha} = 0$, se obtiene

$$\begin{aligned}\hat{\alpha} &= \left[\frac{1}{r} \sum_{i=1}^r v_i \left[\frac{t_i}{\hat{\beta}} + \frac{\hat{\beta}}{t_i} - 2 \right] + \frac{2[n-r] \hat{\alpha}^2}{r} \frac{[t_r - \hat{\beta}]}{[t_r + \hat{\beta}]} t_r h_T(t_r) \right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{quady} \\ \hat{\beta} &= \frac{\sum_{i=1}^r v_i t_i / [2\hat{\alpha}^2]}{\sum_{i=1}^r v_i / [2\hat{\alpha}^2 t_i] - \sum_{i=1}^r 1 / [t_i + \hat{\beta}] + r / [2\hat{\beta}] - [(n-r) / \hat{\beta}] t_r h_T(t_r)}.\end{aligned}$$

1.5 Distribución de mezclas de escalas de normales

La familia de distribuciones simétricas de mezclas de escala de normales (MEN) ha recibido una gran atención en los últimos años; ver Balakrishnan et al. (2009). Esta familia proporciona un grupo de distribuciones con colas pesadas, es decir, con grados de curtosis altos, que se utilizan con frecuencia en el campo del modelamiento robusto de datos simétricos.

Una VA Y sigue un modelo MEN si está relacionada a la distribución normal a través de la siguiente representación estocástica

$$Y = \mu + \sqrt{g(U)}X, \quad (1.13)$$

donde $X \sim N(0, \sigma^2)$, U es una VA positiva independiente de la variable aleatoria X con FDA $H(\cdot, \nu)$, $g(U)$ es una función positiva de U y ν es un escalar o vector de parámetros indexados a la distribución de U . Note que cuando $g(U) = \frac{1}{U}$ en la Ecuación (1.13), la distribución de Y se reduce a una distribución normal-independiente. Luego, cuando $g(U) = U$ en la Ecuación (1.13) la distribución de Y se reduce a la distribución MEN.

Una VA Y tiene distribución MEN con parámetro de posición $\mu \in \mathbb{R}$ y de escala $\sigma^2 > 0$, si la FDP tiene la forma

$$\phi_{\text{MEN}}(y) = \int_0^\infty \phi(y | \mu, g(u)\sigma^2) dH(u), \quad (1.14)$$

donde $\phi(\cdot | \mu, g(\cdot)\sigma^2)$ es la FDP de la distribución normal estándar con media μ y varianza $g(\cdot)\sigma^2$ y $H(\cdot)$ es la FDA de U introducida en Ecuación (1.13) indexada por el vector de parámetros ν . Para una VA Y con FDP dada en la Ecuación (1.14) se usa la notación $Y \sim \text{MEN}(\mu, \sigma^2; H)$. Cuando $\mu = 0$ y $\sigma^2 = 1$ se usa la notación $Y \sim \text{MEN}(H)$.

1.5.1 Caracterización de la distribución BS de mezclas de escala

La VA T sigue una distribución BS y está relacionada con el modelo normal a través de la representación estocástica

$$T = \frac{\beta}{4} \left[\alpha Z + \sqrt{[\alpha Z]^2 + 4} \right]^2, \quad (1.15)$$

donde $Z \sim N(0, 1)$, además, $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ son los parámetros de forma y escala de la distribución BS, respectivamente, denotado por $T \sim \text{BS}(\alpha, \beta)$. Así en la Ecuación (1.15) la VA Z puede ser estocásticamente representada en términos de T como

$$Z = \frac{1}{\alpha} \left[\sqrt{\frac{T}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{T}} \right].$$

De una manera análoga, si se considera la representación estocástica

$$T = \frac{\beta}{4} \left[\alpha \sqrt{g(U)} Z + \sqrt{[\alpha \sqrt{g(U)} Z]^2 + 4} \right]^2, \quad (1.16)$$

donde $Y = \sqrt{g(U)} Z \sim \text{MEN}(H)$, con $Z \sim N(0, 1)$, entonces la VA T sigue un modelo llamado distribución BSE, denotado por $T \sim \text{BSE}(\alpha, \beta; H)$.

Sea $T \sim \text{BSE}(\alpha, \beta; H)$. Entonces, la FDP de T está dada por

$$f_T(t) = \phi_{\text{MEN}}(a_t; 0, 1, H) A_t, \quad t > 0, \alpha > 0, \beta > 0, \quad (1.17)$$

donde $\phi(\cdot)$ es la FDP dada en Ecuación (1.14), con $\mu = 0$ y $\sigma^2 = 1$ y a_t está dado en la Ecuación (1.2).

Sea $T \sim \text{BSE}(\alpha, \beta; H)$. Entonces,

- $cT \sim \text{BSE}(\alpha, c\beta; H)$, con $c > 0$, $1/T \sim \text{BSE}(\alpha, 1/\beta; H)$.
- Si la VA $g(u)$ dada en la Ecuación (1.13) tiene momentos finitos de todo orden, entonces el momento de orden k de T está dado por

$$\text{E}[T^k] = \beta^k \sum_{i=0}^k \binom{2k}{2i} \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} w_{k+j-i} \left[\frac{\alpha}{2} \right]^{2[k+j-1]}, \quad k = 1, 2, \dots$$

donde $w_r = \text{E}[\{g(U)\}^r]$. Los momentos negativos de T se pueden obtener por el hecho de que β/T y T/β tienen la misma distribución. En consecuencia, se obtiene $\text{E}[T^{-k}] = \text{E}[T^k] / \beta^{2k}$, para $k = 1, 2, \dots$

La esperanza, varianza y coeficiente de variación de T están dados, respectivamente por

$$\text{E}[T] = \frac{\beta}{2} [2 + w_1 \alpha^2], \quad \text{Var}[T] = \frac{\beta^2 \alpha^2}{4} [4w_1 + [2w_2 - w_1^2] \alpha^2] \quad \text{y}$$

$$\gamma[T] = \frac{\alpha [4w_1 + [2w_2 - w_1^2] \alpha^2]^{\frac{1}{2}}}{2 + w_1 \alpha^2}.$$

Sea $T \sim \text{BSE}(\alpha, \beta; H)$. Entonces,

- i) La VA T dado $U = u$ que se denota por $T|(U = u)$ sigue la distribución BS denotado por $T|(U = u) \sim \text{BS}(\sqrt{g(u)}\alpha, \beta)$.
- ii) La FDP de la VA $U|(T = t)$ está dado por

$$h_{U|T}(u | t) = \frac{\phi(a_t | 0, g(u))h_U(u)}{\phi_{\text{MEN}}(a_t)}, \quad u > 0. \quad (1.18)$$

- iii) Los momentos de la VA $U|T$ están dados por

$$\mathbb{E}[[g(U)]^d | T = t] = \frac{1}{\phi_{\text{MEN}}(a_t)} \int_0^\infty [g(U)]^{d-\frac{1}{2}} \phi\left(\frac{a_t}{\sqrt{g(u)}}\right) dH(u), \quad d \in \mathbb{R}.$$

A continuación, se consideran algunos casos especiales de la familia de distribuciones BSE. Estos se obtienen de la representación estocástica dada en la Ecuación (1.16), con $g(U) = 1/U$ y U con un PDF conocida. Además, a partir (1.18), la distribución condicional de $U|(T = t)$ es entregada para todos estos casos especiales.

1.5.2 Distribución BS normal contaminada

Como es bien conocido, los modelos normales contaminados se pueden utilizar para describir los datos simétricos con observaciones outliers, donde uno de los parámetros representa el porcentaje de los valores atípicos, mientras que el otro puede ser interpretado como un factor de escala. La distribución normal contaminada puede ser utilizada para la generación de una distribución de BS, llamada distribución BS normal contaminada (BSNC). Este modelo puede ser utilizado para describir datos no negativos sesgadas positivamente en la presencia de observaciones atípicas.

Considere el caso cuando $T \sim \text{BSE}(\alpha, \beta; H)$, con $H(u; \nu)$ es la FDA de la VA U y $\nu = (\nu; \gamma)^T$. Entonces, $H(u; \nu)$ tiene asociada una FDP dada por

$$h_U(u; \nu, \gamma) = \nu \mathbb{I}_{\{\gamma\}}(u) + [1 - \nu] \mathbb{I}_{\{1\}}(u), \quad u > 0, 0 < \nu < 1, 0 < \gamma < 1,$$

donde $\mathbb{I}_A(\cdot)$ representa la función indicatriz del conjunto A . Así, desde Ecuaciones (1.14) y (1.17), la FDP de T está dada por

$$f_T(t) = [\nu \sqrt{\gamma} \phi(\sqrt{\gamma} a_t) + [1 - \nu] \phi(a_t)] \frac{t^{-\frac{3}{2}} [t + \beta]}{2\alpha \sqrt{\beta}}, \quad t > 0,$$

con $\alpha > 0, \beta > 0, 0 < \nu < 1$ y $0 < \gamma < 1$, donde $\phi(\cdot)$ es la FDP de la distribución normal estándar.

La FDP de $U|(T = t)$ está dada por $h_{U|T}(u|t) = \nu p(t, u) \mathbb{I}_{\{\gamma\}}(u) + [1 - \nu] p(t, u) \mathbb{I}_{\{1\}}(u)$, con

$$p(t, u) = \frac{\sqrt{u} \exp\left(-\frac{ua_t^2}{2}\right)}{\nu \sqrt{\gamma} \exp\left(-\frac{\gamma a_t^2}{2}\right) + [1 + \nu] \exp\left(-\frac{a_t^2}{2}\right)}.$$

Por lo tanto,

$$E[U | (T = t)] = \frac{1 - \nu + \nu\gamma^{\frac{3}{2}} \exp\left(\frac{[1-\gamma]a_t^2}{2}\right)}{1 - \nu + \nu\gamma^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{[1-\gamma]a_t}{2}\right)}.$$

1.5.3 Distribución BS slash

La distribución slash presenta colas más pesadas que la distribución normal. Además, cuando su parámetro de forma converge hasta el infinito esta distribución se aproxima a la normal. Al igual que en el caso de la distribución BSNC, el modelo slash puede ser utilizado para la generación de una distribución de BS, llamada distribución BS slash (BSSL).

Sea $T \sim \text{BSE}(\alpha, \beta; H)$, con $H(u; \nu)$ la FDA de la VA $U \sim \text{Beta}(\nu, 1)$, tal que, $H(u; \nu)$ tiene FDP de la forma

$$h_U(u) = \nu u^{\nu-1}, \quad 0 < u < 1, \quad (1.19)$$

Así, desde las Ecuaciones (1.14), (1.17) y (1.19). La FDP de la VA T está dada por

$$f_T(t) = \left[\nu \int_0^1 u^{\nu-1} \phi\left(a_t | 0, \frac{1}{u}\right) du \right] \frac{t^{-\frac{3}{2}} [t + \beta]}{2\alpha\sqrt{\beta}}, \quad t > 0, \alpha > 0, \beta > 0, \nu > 0. \quad (1.20)$$

El modelo con FDP dado en la Ecuación (1.20) es llamado distribución BSSL. En este caso, $U|(T = t) \sim \text{Gamma}(1/2 + \nu, a_t^2/2)\mathbb{I}_{[0,1]}$ y

$$E[U | T] = \left[\frac{1 + 2\nu}{a_t^2} \right] \frac{P_1\left(\frac{1}{2} + \nu + 1, \frac{a_t^2}{2}\right)}{P_1\left(\frac{1}{2} + \nu, \frac{a_t^2}{2}\right)},$$

donde $P_x(a, b)$ denota la FDA de la distribución Gamma (a, b) evaluada en x .

1.5.4 Distribución BS t-Student

La distribución t -Student ha sido usada como una alternativa a la distribución normal para obtener modelamientos robustos. Casos particulares del modelo t son la distribución Cauchy cuando $\nu = 1$ y la distribución normal cuando $\nu \rightarrow \infty$. En forma similar, la distribución BS- t puede ser usada para modelamientos robustos en relación a la distribución BS. Considere el caso cuando $T \sim \text{BSE}(\alpha, \beta; H)$, donde H es la FDA de la VA $U \sim \text{Gamma}(\nu/2, \nu/2)$. Así, desde Ecuaciones (1.14) y (1.17) se tiene que la VA T tiene FDP dada por

$$f_T(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\sqrt{\nu}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left[1 + \frac{1}{\nu\alpha^2} \left\{ \frac{t}{\beta} + \frac{\beta}{t} - 2 \right\} \right]^{-\frac{\nu+1}{2}} \frac{t^{-\frac{3}{2}} [t + \beta]}{2\alpha\sqrt{\beta}}, \quad t > 0, \quad (1.21)$$

donde $\alpha > 0, \beta > 0$ y $\nu > 0$. El modelo con FDP dado en la Ecuación (1.21) es la distribución BS- t . En este caso, se tiene $U|(T = t) \sim \text{Gamma}([\nu + 1]/2, [\nu + a_t^2]/2)$. Por lo tanto,

$$E[U | (T = t)] = \frac{\nu + 1}{\nu + a_t^2}.$$

1.5.5 Estimación MV a través del algoritmo EM

El algoritmo EM es una herramienta popular de estimación vía verosimilitud máxima para modelos con datos incompletos cuando requieren procedimientos iterativos. Específicamente, $\mathbf{t}=[t_1, \dots, t_n]^T$ y $\mathbf{u}=[u_1, \dots, u_n]^T$ denotan las observaciones y los datos perdidos, respectivamente. Los datos completos $\mathbf{t}_c = [\mathbf{t}^T, \mathbf{u}^T]^T$ corresponden a los datos originales \mathbf{t} aumentado con \mathbf{u} .

Sea T_1, \dots, T_n una muestra aleatoria de tamaño n , desde $T \sim \text{BSE}(\alpha, \beta, H)$. El vector de parámetros es $\boldsymbol{\vartheta} = [\alpha, \beta]^T$. Sean $\ell_c(\boldsymbol{\vartheta}|\mathbf{t}_c)$ la log-verosimilitud con datos completos y $Q(\boldsymbol{\vartheta}|\hat{\boldsymbol{\vartheta}}) = E[\ell_c(\boldsymbol{\vartheta}|\mathbf{t}_c)|t, \hat{\boldsymbol{\vartheta}}]$ su valor esperado con $\boldsymbol{\vartheta} \in \Theta \equiv \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$. Cada iteración del algoritmo EM implica dos pasos, el paso-E y el paso-M, que se define como:

Paso-E. Calcular $Q(\boldsymbol{\vartheta}|\boldsymbol{\vartheta}^{(r)})$ como una función ϑ ;

Paso-M. Encontrar $\boldsymbol{\vartheta}^{(r+1)}$ de tal manera que $Q(\boldsymbol{\vartheta}^{(r+1)}|\boldsymbol{\vartheta}^{(r)}) = \max_{\boldsymbol{\vartheta} \in \Theta} Q(\boldsymbol{\vartheta}|\boldsymbol{\vartheta}^{(r)})$. Note que la expresión definida arriba puede ser escrita como

$$T_i | (U_i = u_i) \stackrel{\text{ind}}{\sim} \text{BS}(\sqrt{g(u_i)}\alpha, \beta), \quad (1.22)$$

$$U_i \stackrel{\text{ind}}{\sim} h_U(u_i), \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.23)$$

todos independientes.

Se asume que el vector de parámetros ν es conocido. Un valor óptimo para ν puede ser elegido usando el criterio de información de Schwartz. Luego, bajo la representación jerárquica dada en Ecuaciones (1.22) y (1.23) se deduce que la función de log-verosimilitud completa asociada con $\mathbf{t}_c = [t^T, u^T]^T$ está dado por

$$\ell_c(\boldsymbol{\vartheta} | \mathbf{t}_c) \propto -n \log(\alpha) - \frac{n}{2} \log(\beta) - \frac{1}{2\alpha^2} \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{1}{g(u_i)} \left[\frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2 \right] \right\} + \sum_{i=1}^n \log(t_i + \beta).$$

Haciendo $\hat{u}_i = E[1/g(u_i)|t_i, \boldsymbol{\vartheta} = \hat{\boldsymbol{\vartheta}}]$, se deduce que la esperanza condicional de la función de log-verosimilitud completa tiene la forma

$$Q(\boldsymbol{\vartheta} | \hat{\boldsymbol{\vartheta}}) \propto -n \log(\alpha) - \frac{n}{2} \log(\beta) - \frac{1}{2\alpha^2} \sum_{i=1}^n \left\{ \hat{u}_i \left[\frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2 \right] \right\} + \sum_{i=1}^n \log(t_i + \beta). \quad (1.24)$$

Luego, se tiene el siguiente algoritmo:

Paso-E. Dado $\boldsymbol{\vartheta} = \hat{\boldsymbol{\vartheta}}$, calcular \hat{u}_i , para $i = 1, \dots, n$.

Paso-M. Actualizar $\hat{\boldsymbol{\vartheta}}$ maximizado $Q(\boldsymbol{\vartheta}|\hat{\boldsymbol{\vartheta}})$ según lo dado en Ecuación (1.24) sobre $\boldsymbol{\vartheta}$, que lleva a los siguiente expresiones en forma cerrada:

$$\hat{\sigma}^2 = \left[\frac{S_u}{\hat{\beta}} + \frac{\hat{\beta}}{R_u} - 2\bar{u} \right] \text{ y } 0 = \hat{\beta}^2 - \hat{\beta} \left[K(\hat{\beta}) + 2\bar{u}R_u \right] + R_u \left[\bar{u}K(\hat{\beta}) + S_u \right],$$

donde

$$\bar{u} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{u}_i, \quad S_u = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{u}_i t_i, \quad R_u = \frac{1}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\hat{u}_i}{t_i}} \text{ y } K(x) = \frac{1}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{x+t_i}}.$$

Note que, si $g(u) = 1$ las ecuaciones del paso-M se reducen a las ecuaciones obtenidas asumiendo el modelo BS. Los valores de partida útiles necesarios para implementar el algoritmo EM pueden ser las estimaciones de VM de los parámetros de la distribución BS.

Índice de capacidad de procesos para distribuciones no normales

En este capítulo se presentan distintas técnicas y enfoques para abordar procesos cuyas características de calidad no siguen una distribución normal.

2.1 Introducción

Los ICPs han sido ampliamente investigados como un medio para resumir el desempeño del proceso en relación con un conjunto de límites de especificación, donde el uso adecuado de los ICPs se basa en varios supuestos. Uno de los más esenciales es que el proceso de seguimiento se supone estable y la características de calidad de interés normal. En la industria, existen muchos procesos de manufactura donde la variabilidad del proceso no se puede describir por una distribución normal.

Somerville & Montgomery (1996) indicaron que el uso de ICPs normales en vez de no normales, genera resultados erróneos. Ellos sugirieron que no se deben utilizar los métodos convencionales para el cálculo de los ICPs debido a que éstos producirían resultados engañosos acerca del desempeño del proceso.

2.1.1 Una revisión breve de los distintos enfoques

A continuación se presenta un resumen de diferentes métodos para la medición de los ICPs, que aparecen en la literatura, cuando no existe normalidad en el proceso bajo estudio.

2.1.1.1 Enfoque de Clement

Clement (1989) propuso un nuevo método para el cálculo de los estimadores C_p y C_{pk} , que utiliza los percentiles, $t_{0.00135}$, $t_{0.5}$ y $t_{0.99865}$, de la familia de curvas de Pearson para proporcionar estimaciones más exactas. Estas modificaciones de C_p y C_{pk} son atractivas, ya que no requieren una transformación matemática de los datos.

Los estimadores de Clement para C_p y C_{pk} , independientes de una distribución específica se obtienen mediante sustitución de 6σ por $U_p - L_p$ donde U_p es el percentil 99.865 y L_p es el percentil 0.135.

Clement (1989) utilizó estimadores de asimetría (β_3) y curtosis (β_4) sobre la base de los tercer y cuarto momentos, respectivamente, que son poco fiables para tamaños de muestra pequeñas. Pearn & Chen (1995) consideraron una modificación para sustituir σ por $[U_p - L_p]/6$. Así los nuevos estimadores de Clements son

$$C'_p = \frac{LES - LEI}{U_p - L_p},$$

$$C'_{pk} = \min \left\{ \frac{LES - M}{[U_p - L_p]/2}, \frac{M - LEI}{[U_p - L_p]/2} \right\}.$$

2.1.1.2 Método percentil de Burr

Burr (1942) propuso una distribución llamada “Distribución Burr XII”. La FDP de una VA X con distribución Burr XII está dada por

$$f(x|c, k) = \begin{cases} ckx^{c-1} [1 + x^c]^{-[k+1]}, & \text{si } x \geq 0, c \geq 1, k \geq 1; \\ 0, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

donde, c y k representa los coeficientes de asimetría y la kurtosis de la distribución Burr respectivamente.

Liu & Chen (2006) introdujeron una modificación del método de Clements. Esta consiste en sustituir los percentiles por otros apropiados obtenidos por la distribución de Burr. El método de los percentiles de Burr se resume en los siguientes pasos

1. Se estima la media \bar{x} , DE s , coeficiente de asimetría y de curtosis del conjunto de datos, mediante

$$\beta_3 = \frac{n}{[n-1][n-2]} \sum_i \left[\frac{x_i - \bar{x}}{s} \right]^3 \quad \text{y}$$

$$\beta_4 = \frac{n[n+1]}{[n-1][n-2][n-3]} \sum_i \left[\frac{x_i - \bar{x}}{s} \right]^4 - \frac{3[n+1]^2}{[n-2][n-3]}.$$

2. Se calculan los momentos de asimetría y curtosis usando la distribución Burr mediante

$$c = \frac{[n-2]}{\sqrt{n[n-1]}}\beta_3 \quad \text{y}$$

$$k = \frac{[n-2][n-3]}{[n^2-1]}\beta_4 + \frac{3[n-1]}{[n+1]}.$$

3. Considerando los parámetros c y k se obtienen los percentiles estandarizados 0.00135, 0.5 y 0.99865 de la distribución Burr XII, denotados como $z_{0.00135}$, $z_{0.5}$ y $z_{0.99865}$, respectivamente.

4. Por último, se estiman los ICPs mediante

$$\hat{C}_p = \frac{LES - LEI}{U_p - L_p} \quad \text{y}$$

$$\hat{C}_{pk} = \text{Min} \left\{ \frac{LES - M}{M - L_p}, \frac{M - LEI}{M - U_p} \right\},$$

donde

$$U_p = \bar{x} + s_x z_{0.99865}, L_p = \bar{x} + s_x z_{0.00135} \text{ y } M = \bar{x} + s_x z_{0.50}.$$

2.1.1.3 Transformación Box-Cox

Box & Cox (1964) propusieron una familia de transformaciones para una variable de respuesta necesariamente positiva T . La transformación Box y Cox está dada por

$$T^\lambda = \begin{cases} \frac{T^\lambda + 1}{\lambda}, & \text{para } \lambda \neq 0; \\ \ln T, & \text{para } \lambda = 0. \end{cases}$$

Esta familia continua depende de un único parámetro λ , que se puede estimar por el método de VM. En primer lugar, se elige un valor λ y para el λ elegido se evalúa

$$L_{\max} = -\frac{1}{2} \log(\hat{\sigma}^2) + [\lambda + 1] \sum_{i=1}^n \log(T_i).$$

La estimación $\hat{\sigma}^2$ para un λ fijo es $\hat{\sigma} = S(\lambda)/n$, donde $S(\lambda)$ es la suma de cuadrados de residuos del análisis de la varianza de T^λ . Posteriormente se calcula $L_{\max}(\lambda)$ para varios valores de λ dentro de un rango, se grafica L_{\max} contra λ . El estimador de VM de λ se obtiene como el valor de λ que maximiza L_{\max} , λ^* . Cada uno de los valores de los límites de especificación de los datos de T son transformados a una variable normal usando la Ecuación anterior. Por lo tanto, las ICPs correspondientes pueden calcularse a partir de la media y la desviación estándar de los datos transformados.

2.1.1.4 Transformación de Johnson

Leiva et al. (2009) hacen referencia a la transformación de Johnson en la cual comentan que Johnson (1949) usó el método de traslación para generar distribuciones estadísticas que asumen una gran variabilidad de formas mediante el uso de la VA

$$Z = \nu + \delta \left(\frac{Y - \gamma}{\sigma} \right), \quad (2.1)$$

donde $Z \sim N(0, 1)$ y $g(\cdot)$ es una función monótona simple. Estas distribuciones tienen cuatro parámetros denotados por ν , δ , γ y σ , donde ν y δ corresponden a los parámetros de forma, y γ y σ son los parámetros de localización y de escala, respectivamente. Con base en la Ecuación (2.1), Johnson (1949) propuso considerar las siguientes variables:

$$g \left(\frac{Y - \gamma}{\sigma} \right) = \log \left(\frac{Y - \gamma}{\sigma} \right),$$

que se asocia con un modelo S_L de Johnson.

$$g \left(\frac{Y - \gamma}{\sigma} \right) = \log \left(\frac{Y - \gamma}{\sigma + \gamma - Y} \right),$$

que se asocia con un modelo S_B de Johnson.

$$\left(\frac{Y - \gamma}{\sigma} \right) = g \log \left(\frac{Y - \gamma}{\sigma} \right),$$

que se asocia con un modelo S_U de Johnson.

2.1.1.5 Método de la varianza ponderada

Choi & Bai (1996) han utilizado el método de la varianza ponderada para estimar los valores de los ICPs de acuerdo con el grado de asimetría de los datos de procesos no normales. Esta técnica calcula por separado las DEs por encima y por debajo de la media. El método utiliza a la probabilidad de la variable de proceso T , donde los ICPs esta definido como

$$C_p = \frac{LES - LEI}{6\sigma W_t} \quad y$$

$$C_{pk} = \left\{ \frac{LES - \mu}{3\sqrt{2P_t}\sigma}, \frac{\mu - LEI}{3\sqrt{2(1 - P_t)}\sigma} \right\},$$

donde $W_t = \sqrt{2} \max(\sqrt{P_t}, \sqrt{1 - P_t}) = \sqrt{1 + |1 - 2P_t|}$ y siendo $P_t = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(\bar{t} - t_i)$ donde $I(t) = 1$ para $t > 0$ y $I(t) = 0$ para $t < 0$.

2.1.1.6 Enfoque de Pearn & Chen

Pearn & Chen (1997) consideraron una generalización del índice $C_p(u, v)$ para procesos no normales, definida como $C_{Np}(u, v)$, adecuado para su aplicación a procesos con distribuciones arbitrarias. Hay que recordar que

$$C_p(u, v) = \frac{d - u |\mu - m|}{3\sqrt{\sigma^2 + v [\mu - T]^2}}.$$

Esta generalización puede ser definida como

$$C_{Np}(u, v) = \frac{d - u |M - m|}{3\sqrt{\left[\frac{F_{99.865} - F_{0.135}}{6}\right] + v [M - T]^2}},$$

aquí F_α es un percentil de la distribución subyacente, M es la mediana de la distribución, $m = [LES + LEI]/2$ es el punto medio entre los límites de especificación inferior y superior, μ y σ es la media y desviación estándar para un proceso, respectivamente, y $(u, v) \geq 0$. Ellos sustituyeron μ por la mediana del proceso, M , ya que la mediana es una medida robusta de la tendencia central de la media del proceso, sobre todo para distribuciones asimétricas con colas largas, y la DE del proceso por $[F_{99.865} - F_{0.135}]/6$, calculada a partir de los percentiles de distribución en la definición del índice original $C_p(u, v)$. La idea detrás de tales sustituciones es imitar las características de la distribución normal, para que la probabilidad de producir fuera de los límites $\mu \pm 3\sigma$ sea igual a 0.27 %, asegurando que cuando el valor calculado de $C_{Np} = 1$, para procesos centrados, la probabilidad de que el proceso esté fuera del intervalo de especificación (LES, LEI) es insignificamente pequeña. Ellos han considerado los valores de parámetros $(u, v) = (0, 0), (0, 1), (1, 0)$ y $(1, 1)$, y obtuvieron cuatro generalizaciones básicas para los índices C_p y C_{pk} con distribuciones no normales, las cuales están dadas por

$$C_{Np}(u, v) = \frac{LES - LEI}{F_{99.865} - F_{0.135}},$$

$$C_{Npk}(u, v) = \min \left\{ \frac{LES - M}{\left[\frac{F_{99.865} - F_{0.135}}{2}\right]}, \frac{M - LEI}{\left[\frac{F_{99.865} - F_{0.135}}{2}\right]} \right\}.$$

2.1.1.7 Enfoque de Hsu et al. (2008)

Hsu et al. (2008) propusieron emplear el método más común para modificar los ICPs en el caso no normal, que es la técnica de estimación de cuantiles. Análogo al caso normal, cuando el ancho del proceso natural está entre el percentil 0.135 y el percentil 99.865, los ICPs pueden ser redefinidos en términos de los cuantiles debido a la no normalidad. Así, en general, los índices C_p se pueden definir como

$$C_p = \frac{LES - LEI}{\text{punto sobre } 0.135 \% - \text{punto bajo } 0.135 \%} = \frac{LES - LEI}{U_p - L_p},$$

donde U_p es el percentil 99.865 y L_p es el percentil 0.135 de las observaciones, respectivamente. Estos puntos porcentuales se pueden obtener fácilmente. Dado que la mediana, M , es por lo general el valor central preferible para distribuciones sesgadas, los correspondientes C_{pu} y C_{pl} se definen como

$$C_{pu} = \frac{LES - M}{\text{punto sobre } 0.135 \% - M} = \frac{LES - M}{F_{0.99865} - M},$$

$$C_{pl} = \frac{M - LEI}{M - \text{punto bajo } 0.135 \%} = \frac{M - LEI}{M - F_{0.00135}}.$$

El índice C_{pk} está definido como

$$C_{pk} = \min \left\{ \frac{LES - M}{F_{0.99865} - M}, \frac{M - LEI}{M - F_{0.00135}} \right\}.$$

En el caso de no normalidad, es posible de encontrar una distribución de los datos que proporcione un ajuste más satisfactorio, esto puede ser probado por medio de pruebas de bondad de ajuste, se puede obtener medidas más precisas de los tres cuantiles en consideración.

2.1.2 Índices de capacidad de proceso para la distribución Weibull

Albing & Vannman (2007) propusieron y estudiaron una nueva clase de ICPs para el caso cuando hay un límite de especificación superior con un valor objetivo especificado previamente distinto, $T = 0$, y la característica de calidad de interés es sesgada, con la distribución de cola larga hacia la derecha. La propuesta de los índices, en función de dos parámetros τ y ν , es

$$C_{MA}(\tau, \nu) = \frac{LES}{\sqrt{t^2[1 - \tau] + \nu t^2(0,5)}}, \quad (2.2)$$

el parámetro τ debe tomar valores pequeños y ser elegido de una manera adecuada, por ejemplo $\tau=0.0027$. El parámetro $\nu > 0$ afecta a la sensibilidad del índice a la salida de la mediana del proceso desde el valor objetivo 0. Cuanto mayor sea el valor de ν más sensible será el índice a la salida de la mediana. El $t(\lambda)$ es el λ -ésimo cuantil de la distribución de la característica estudiada. El cuantil $t[1 - \tau]$ puede ser interpretado como una medida de dispersión cuando la distribución es cero con una cola superior larga, y $t(0.5)$ es una medida de localización.

La clase de índices dado en (2.2) poseen una serie de propiedades deseables. Para un valor dado de $C_{MA}(\tau, \nu)$ mayor o igual a 1, la probabilidad de no conformidad será menor o igual a τ . Por otra parte, esta clase de índices es sensible con respecto a las desviaciones de la mediana del valor objetivo.

Albing & Vannman (2007) consideraron dos estimadores diferentes, basados en estadísticos de orden de la clase de índices en (2.2) y derivados de las distribuciones asintóticas de estos dos estimadores. También presentaron un procedimiento de decisión basado en la clase prevista de los índices. Bajo estos supuestos, ellos se encontraron con que el procedimiento de decisión es útil

para distribuciones no muy sesgadas y de tamaño de muestras grandes. Sin embargo, cuando la distribución es muy sesgada y el tamaño de muestra es pequeño o moderado, se necesitan tomar en consideración otros enfoques.

A continuación se considera el índice dado en (2.2) y se considera en el caso en que la distribución es muy sesgada y el tamaño de la muestra es pequeño o moderado. Se estudia un estimador de $C_{MA}(\tau, v)$ dado en (2.2), donde los cuantiles estimados se expresan en función de los estimadores de VM de los parámetros de la distribución Weibull. Sobre la base de estos resultados, se presenta una regla de decisión y se determina la potencia de la prueba.

Ahora, suponga que la característica de calidad T tiene una FDA dada por

$$F_T(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ 1 - \exp\left(- (t/a)^b\right) & \text{si } t > 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

Se está interesado principalmente en una distribución altamente sesgada centrándose en el caso en que $b \leq 2$, dando lugar a valores de la asimetría

$$\gamma_1 = \frac{\Gamma(1 + 3/b) a^3 - 3\mu\sigma^2 - \mu^3}{\sigma^3} \geq 0,63,$$

donde Γ es la función gamma y $\mu = a\Gamma(1 + 1/b)$ y $\sigma = a\sqrt{\Gamma(1 + 2/b) - \Gamma^2(1 + 1/b)}$. El λ -ésimo cuantil de la distribución Weibull es

$$t(\lambda) = a[-\ln(1 - \lambda)]^{1/b}.$$

Por lo tanto, se puede expresar la clase de índices dados en (2.2) como

$$C_{MAW}(\tau, v) = \frac{LES}{a\sqrt{[\ln(1/\tau)]^{2/b} + v[\ln(2)]^{2/b}}}. \quad (2.4)$$

Albing & Vannman (2007) demostraron que para cualquier distribución, la probabilidad de no conformidad será menor o igual a τ , dado que $C_{MA}(\tau, v) = 1$. Sin embargo, cuando se conoce la distribución, como en el caso de los índices (2.4) se puede calcular la probabilidad exacta de no conformidad para la característica de calidad T . Usando (2.4) se puede expresar el parámetro de escala a mediante

$$a = \frac{LES}{C_{MAW}(\tau, v)\sqrt{[\ln(1/\tau)]^{2/b} + v[\ln(2)]^{2/b}}}. \quad (2.5)$$

Por lo tanto, en Ecuación (2.5), τ y v son los parámetros mientras que b es desconocido en la mayoría de los casos. Al reemplazar a de la Ecuación (2.5) en la Ecuación (2.3) se obtiene la probabilidad de no conformidad como

$$P(\text{NC}) = P(T > LES) = \exp\left(- (C_{MAW}(\tau, v)\sqrt{[\ln(1/\tau)]^{2/b} + v[\ln(2)]^{2/b}})^b\right).$$

2.1.3 Índice de capacidad de procesos para la distribución BS

Leiva et al. (2014) desarrollaron e implementaron ICP para la distribución BS comparando los límites de especificación con algún intervalo que cubra un alto porcentaje especificado, $1 - \rho$ de la distribución T , utilizando el método introducido por Clement (1989) para el cálculo de los estimadores de C_p y C_{pk} , el centro del proceso se estima por la mediana de $t(0.5)$, en lugar de utilizar la media, ya que la mediana es una medida de tendencia central robusta del proceso, en especial para las distribuciones de cola pesada sesgadas. Por lo tanto, los dos 3σ se estiman por $U_p - t(0.5)$ y $t(0.5) - L_p$; véase Johnson et al. (1994). Una modificación del método de Clements para obtener estimadores de C_p y C_{pk} fue abordado por Pearn & Chen (1995). Estiman los dos 3σ por $[U_p - L_p]/2$, por lo que los estimadores de C_p y C_{pk} se pueden escribir como

$$C'_p = \frac{LES - LEI}{t(p_2) - t(p_1)}, \quad C'_{pl} = \frac{2[t(0.5) - LEI]}{t(p_2) - t(p_1)}, \quad C'_{pu} = \frac{2[LES - t(0.5)]}{t(p_2) - t(p_1)} \text{ y } C'_{pk} = \min \{C'_{pl}, C'_{pu}\}, \quad (2.6)$$

donde $t(p_2) - t(p_1)$ se encarga de la no normalidad y/o asimetría de la distribución de T , con $t(p)$ siendo el p -ésimo percentil de la distribución de los datos.

Considerando la FC de la distribución BS vista en Ecuación (1.1) y el ICP presentado en (2.6), se tiene que

$$C_p^{BS} = \frac{LES - LEI}{t(p_2) - t(p_1)} = \frac{LES - LEI}{\beta\alpha \left[z_2 \left[\frac{\alpha z_2}{2} + \sqrt{\left[\frac{\alpha z_2}{2} \right]^2 + 1} \right] - z_1 \left[\frac{\alpha z_1}{2} + \sqrt{\left[\frac{\alpha z_1}{2} \right]^2 + 1} \right] \right]}, \quad (2.7)$$

donde $z_1 = z_{p_1}$ y $z_2 = z_{p_2}$. Ahora, con el fin de comparar un producto con un LEI, se utiliza

$$C_{pl}^{BS} = \frac{2[\beta - LEI]}{t(p_2) - t(p_1)} = \frac{2[\beta - LEI]}{\beta\alpha \left[z_2 \left[\frac{\alpha z_2}{2} + \sqrt{\left[\frac{\alpha z_2}{2} \right]^2 + 1} \right] - z_1 \left[\frac{\alpha z_1}{2} + \sqrt{\left[\frac{\alpha z_1}{2} \right]^2 + 1} \right] \right]}. \quad (2.8)$$

Cuando interesa comparar un producto con un LES se obtiene

$$C_{pu}^{BS} = \frac{2[LES - \beta]}{t(p_2) - t(p_1)} = \frac{2[LES - \beta]}{\beta\alpha \left[z_2 \left[\frac{\alpha z_2}{2} + \sqrt{\left[\frac{\alpha z_2}{2} \right]^2 + 1} \right] - z_1 \left[\frac{\alpha z_1}{2} + \sqrt{\left[\frac{\alpha z_1}{2} \right]^2 + 1} \right] \right]}, \quad (2.9)$$

cuando la mediana se aleja del punto medio de los límites de especificación, se considera $C_{pk}^{BS} = \min \{C_{pl}^{BS}, C_{pu}^{BS}\}$, donde C_{pl}^{BS} y C_{pu}^{BS} dados en la Ecuaciones (2.8) y (2.9), respectivamente. Reescribiendo la Ecuación (2.7), se tiene

$$C_p^{BS} = \frac{LES - LEI}{t(p_2) - t(p_1)} = \frac{2[LES - LEI] / \beta}{\left[\alpha^2 z_2^2 + \alpha z_2 \sqrt{[\alpha z_2]^2 + 4} \right] - \left[\alpha^2 z_1^2 + \alpha z_1 \sqrt{[\alpha z_1]^2 + 4} \right]}. \quad (2.10)$$

Usando la propiedad de invarianza del estimador VM y la Ecuación (2.10), el estimador de el ICP es dado por

$$\widehat{C}_p^{BS} = \frac{LES - LEI}{t(p_2) - t(p_1)} = \frac{2 [LES - LEI] / \widehat{\beta}}{\left[\widehat{\alpha}^2 z_2^2 + \widehat{\alpha} z_2 \sqrt{[\widehat{\alpha} z_2]^2 + 4} \right] - \left[\widehat{\alpha}^2 z_1^2 + \widehat{\alpha} z_1 \sqrt{[\widehat{\alpha} z_1]^2 + 4} \right]},$$

donde $\widehat{\alpha}$ y $\widehat{\beta}$ son los estimadores VM de α y β , y z_1 y z_2 son los cuantiles de la distribución $N(0,1)$.

Índice de capacidad de procesos para la distribución BSE

En este capítulo se desarrollará un análisis de capacidad de proceso para cuando la distribución de los datos sigue un modelo BSE.

3.1 Introducción

Considerando la distribución BS que constituye un modelo asimétrico que ha recibido una gran atención en las últimas décadas pues posee atractivas propiedades y además se relaciona con la distribución normal. Así, estos aspectos de la distribución BS refuerzan la idea y el propósito de usar este modelo cuando se tienen datos con asimetría positiva y soporte no negativo. Basados en la relación existente entre la distribución normal y la distribución BS, es posible obtener una clase general de distribuciones BS generadas desde distribuciones MEN, las que se denominan BSE; ver Balakrishnan et al. (2009). Por lo tanto, el objetivo de este capítulo es desarrollar una metodología para el ICP basados en la distribución BSE con datos censurados y no censurados.

3.2 Distribución Birnbaum-Saunders mezcla de escala de normales

Una VA T que sigue una distribución BSE si se considera la representación estocástica

$$T = \beta \left[\frac{\alpha}{2} \frac{Z}{\sqrt{g(U)}} + \sqrt{\left[\frac{\alpha}{2} \frac{Z}{\sqrt{g(U)}} \right]^2 + 1} \right]^2,$$

donde $Y = Z/\sqrt{g(U)} \sim \text{MEN}(H)$, con $Z \sim \text{N}(0, 1)$, entonces la VA T sigue un modelo llamado distribución BSE, denotado por $T \sim \text{BSE}(\alpha, \beta; H)$, con FDP

$$f_T(t) = \phi_{\text{MEN}}(a_t; 0, 1, H)A_t, \quad t > 0, \alpha > 0, \beta > 0,$$

donde $\phi(\cdot)$ es la FDP dada en la Ecuación (1.14), con $\mu = 0$ y $\sigma^2 = 1$ y a_t está dado en la Ecuación (1.2). La FDA de $T \sim \text{BSE}(\alpha, \beta; H)$ es $F_{\text{BSE}}(t) = \Phi_{\text{MEN}}(a_t)$. Desde la FDA de la distribución BSE, se puede obtener la función cuantil de T como

$$t(p) = \frac{\beta}{4} \left[\alpha y_p + \sqrt{[\alpha y_p]^2 + 4} \right]^2, \quad \text{para } 0 < p < 1, \quad (3.1)$$

donde y_p es el p -ésimo percentil de la distribución MEN. Note que, $t(0,5) = \beta$, porque, debido a la simetría de las distribuciones MEN, el parámetro β es la mediana de la distribución BSE.

3.2.1 Estimación de VM vía algoritmo EM para la distribución BSE

Sea T_1, \dots, T_n una muestra aleatoria de tamaño n , desde $T \sim \text{BSE}(\alpha, \beta, H)$. El vector de parámetros es $\boldsymbol{\vartheta} = [\alpha, \beta]^T$. Sean $\ell_c(\boldsymbol{\vartheta} | \mathbf{t}_c)$ la log-verosimilitud con datos completos y $Q(\boldsymbol{\vartheta} | \hat{\boldsymbol{\vartheta}}) = \text{E}[\ell_c(\boldsymbol{\vartheta} | \mathbf{t}_c) | \mathbf{t}, \hat{\boldsymbol{\vartheta}}]$ su valor esperado con $\boldsymbol{\vartheta} \in \Theta \equiv \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, la función de log-verosimilitud completa está dada por

$$Q(\boldsymbol{\vartheta} | \hat{\boldsymbol{\vartheta}}) = c - n \log(\alpha) - \frac{n}{2} \log(\beta) - \frac{1}{2\alpha^2} \sum_{i=1}^n \hat{u}_i \left[\frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2 \right] + \sum_{i=1}^n \log(t_i + \beta), \quad (3.2)$$

derivando (3.2) con respecto a los parámetros α y β , se obtienen, respectivamente, mediante

$$\frac{\partial Q(\boldsymbol{\vartheta} | \hat{\boldsymbol{\vartheta}})}{\partial \alpha} = -\frac{n}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^3} \sum_{i=1}^n \hat{u}_i \left[\frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2 \right] \quad y \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial Q(\boldsymbol{\vartheta} | \hat{\boldsymbol{\vartheta}})}{\partial \beta} = -\frac{n}{2\beta} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{[t_i + \beta]} - \frac{1}{2\alpha^2} \sum_{i=1}^n \hat{u}_i \left[\frac{1}{t_i} - \frac{t_i}{\beta^2} \right], \quad (3.4)$$

donde $\hat{u}_i = \text{E}[1/g(U_i) | t_i, \boldsymbol{\vartheta} = \hat{\boldsymbol{\vartheta}}]$, para $i = 1, \dots, n$. Al igualar las derivadas de (3.3) y (3.4) a cero, se obtiene

$$\hat{\alpha}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{u}_i \left[\frac{t_i}{\hat{\beta}} + \frac{\hat{\beta}}{t_i} - 2 \right], \quad y \quad (3.5)$$

$$\hat{\alpha}^2 = \frac{2\hat{\alpha}^2 \hat{\beta}}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{[t_i + \hat{\beta}]} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{u}_i \left[\frac{t_i}{\hat{\beta}} - \frac{\hat{\beta}}{t_i} \right]. \quad (3.6)$$

Considerando la media aritmética, armónica y la función media armónica dada en Ecuación (1.25), se obtiene

$$\hat{\sigma}^2 = \left[\frac{S_u}{\hat{\beta}} + \frac{\hat{\beta}}{R_u} - 2\bar{u} \right] \text{ y } 0 = \hat{\beta}^2 - \hat{\beta} \left[K(\hat{\beta}) + 2\bar{u}R_u \right] + R_u \left[\bar{u}K(\hat{\beta}) + S_u \right].$$

La matriz de información de fisher es obtenida por $I(\vartheta) = E[-H]$. Aquí, H es la matriz hessiana dada por

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 Q(\vartheta)}{\partial \alpha^2} & \frac{\partial^2 Q(\vartheta)}{\partial \alpha \partial \beta} \\ \frac{\partial^2 Q(\vartheta)}{\partial \beta \partial \alpha} & \frac{\partial^2 Q(\vartheta)}{\partial \beta^2} \end{pmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Q(\vartheta)}{\partial \alpha^2} &= \frac{n}{\alpha^2} - \frac{3}{\alpha^4} \sum_{i=1}^n \hat{u}_i \left[\frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2 \right], \\ \frac{\partial^2 Q(\vartheta)}{\partial \alpha \partial \beta} &= \frac{1}{\alpha^3} \sum_{i=1}^n \hat{u}_i \left[\frac{1}{t_i} - \frac{t_i}{\beta^2} \right] \quad \text{y} \\ \frac{\partial^2 Q(\vartheta)}{\partial \beta^2} &= \frac{n}{2\beta^2} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{[t_i + \beta]^2} - \frac{1}{\alpha^2 \beta^3} \sum_{i=1}^n \hat{u}_i t_i. \end{aligned}$$

La matriz de información de Fisher para $\vartheta = (\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ esta dada por

$$I(\vartheta) = \begin{pmatrix} \frac{n}{\alpha^2} [3\hat{u}w_1 - 1] & 0 \\ 0 & \frac{n}{\beta^2} \left\{ \frac{\hat{u}w_1}{4} + \frac{\hat{u}}{\alpha^2} + P(\alpha) \right\} \end{pmatrix},$$

donde

$$P(\alpha) = 2 \int_0^\infty \left[\frac{1}{1 + h(\alpha t)} - \frac{1}{2} \right]^2 d\Phi(t), \quad (3.7)$$

con $h(y) = 1 + \frac{y^2}{2} + y \left[\frac{y^2}{4} + 1 \right]$.

Considerando $\hat{\vartheta} = [\hat{\alpha}, \hat{\beta}]$ el estimador de ϑ y la matriz de varianza-covarianza, dado por $\Sigma_{\hat{\vartheta}} = I(\vartheta)^{-1}$. La distribución asintótica de los estimadores de VM de $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ está dada por

$$\sqrt{n} \left[\begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \right] \sim \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\alpha^2}{n[3\hat{u}w_1 - 1]} & 0 \\ 0 & \frac{\beta^2}{n[\hat{u}w_1/4 + \hat{u}/\alpha^2 + P(\alpha)]} \end{pmatrix} \right). \quad (3.8)$$

Estimación de VM para datos censurados

Considere una muestra de tamaño n con $T \sim \text{BSE}(\alpha, \beta, H)$, con censura de tipo II a la derecha. Denote la parte observada (sin censura) de t_1, \dots, t_n por $t = [t_1, \dots, t_r]$ y las observaciones que faltan (censuradas) por $u = [u_{r+1}, \dots, u_n]$

$$L(\vartheta) = \left[\prod_{i=1}^r f_T(t_i)^{\delta_i} \right] \left[\prod_{i=r+1}^n [1 - F(t_i)]^{1-\delta_i} \right].$$

donde δ_i indica que el i -ésimo artículo ha fallado.

$$\delta_i = \begin{cases} 0 & t_i > t_r; \\ 1 & t_i \leq t_r. \end{cases}$$

para $i=1, \dots, n$, donde δ_i es una variable indicadora de censura y t_r es el tiempo de censura de la i -ésima unidad. La función de log-verosimilitud para datos censurados $\mathbf{t}_c = [t^T, u^T]^T$, está dado por

$$\begin{aligned} \ell_c(\boldsymbol{\vartheta} | \mathbf{t}_c) &= c - r \log(\alpha) - \frac{r}{2} \log(\beta) - \frac{1}{2\alpha^2} \sum_{i=1}^r \left\{ \frac{1}{g(u_i)} \left[\frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2 \right] \right\} + \sum_{i=1}^r \log(t_i + \beta) \\ &+ \sum_{i=r+1}^n \log(1 - \Phi_{\text{MEN}}(a_i)), \end{aligned}$$

donde $\Phi(\cdot)$ es la FDA de la distribución MEN. La función de log-verosimilitud esperada está dada por $Q(\boldsymbol{\vartheta} | \hat{\boldsymbol{\vartheta}}) = E[\ell_c(\boldsymbol{\vartheta} | t, u) | t, \hat{\boldsymbol{\vartheta}}]$

$$\begin{aligned} Q(\boldsymbol{\vartheta} | \hat{\boldsymbol{\vartheta}}) &= c - r \log(\alpha) - \frac{r}{2} \log(\beta) - \frac{1}{2\alpha^2} \sum_{i=1}^r \hat{u}_i \left[\frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2 \right] + \sum_{i=1}^r \log(t_i + \beta) \\ &+ \sum_{i=r+1}^n \log \int_{t_r}^{\infty} (\phi_{\text{MEN}}(a_t)) du, \end{aligned} \quad (3.9)$$

derivando (3.9) con respecto a los parámetros α y β , se obtienen, respectivamente

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q(\boldsymbol{\vartheta} | \hat{\boldsymbol{\vartheta}})}{\partial \alpha} &= -\frac{r}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^3} \sum_{i=1}^r \hat{u}_i \left[\frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2 \right] + \frac{2[n-r][t_r - \beta] \hat{u}_i}{\alpha [t_r + \beta] t_r} h_T(t_r) \quad \text{y} \\ \frac{\partial Q(\boldsymbol{\vartheta} | \hat{\boldsymbol{\vartheta}})}{\partial \beta} &= -\frac{r}{2\beta} + \sum_{i=1}^r \frac{1}{(t_i + \beta)} - \frac{1}{2\alpha^2} \sum_{i=1}^r \hat{u}_i \left[\frac{1}{t_i} - \frac{t_i}{\beta^2} \right] + \frac{[n-r]t_r}{\beta} \hat{u}_i h_T(t_r), \end{aligned}$$

de donde se tiene que $h_T(t)$ es la la tasa de fracaso de la distribución BSE dada por $h_T(t) = \phi_{\text{MEN}}(a_t) A_t / (1 - \Phi_{\text{MEN}})$. Al igualar las ecuaciones de log-verosimilitud a cero, se obtiene

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}^2 &= \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r \hat{u}_i \left[\frac{t_i}{\hat{\beta}} + \frac{\hat{\beta}}{t_i} - 2 \right] + \frac{2[n-r]\hat{\alpha}^2 [t_r - \hat{\beta}] \hat{u}_i}{r [t_r + \hat{\beta}] t_r} h_T(t_r) \quad \text{y} \\ \hat{\alpha}^2 &= \frac{2\hat{\beta}\hat{\alpha}^2}{r} \sum_{i=1}^r \frac{1}{t_i + \hat{\beta}} + \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r \hat{u}_i \left[\frac{t_i}{\hat{\beta}} - \frac{\hat{\beta}}{t_i} \right] + \frac{[n-r]\hat{\alpha}^2 t_r}{r} \hat{u}_i h_T(t_r). \end{aligned}$$

Así el estimador VM de α y β está dado por

$$\begin{aligned} \hat{\alpha} &= \left[\frac{1}{r} \sum_{i=1}^r \hat{u}_i \left[\frac{t_i}{\hat{\beta}} + \frac{\hat{\beta}}{t_i} - 2 \right] + \frac{2[n-r]\hat{\alpha}^2 [t_r - \hat{\beta}] \hat{u}_i}{r [t_r + \hat{\beta}] t_r} h_T(t_r) \right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{y} \\ \hat{\beta} &= \frac{\sum_{i=1}^r \hat{u}_i t_i / [2\hat{\alpha}^2]}{\sum_{i=1}^r \hat{u}_i / [2\hat{\alpha}^2 t_i] - \sum_{i=1}^r 1/[t_i + \hat{\beta}] + r/[2\hat{\beta}] - [(n-r)/\hat{\beta}] t_r h_T(t_r)}. \end{aligned}$$

3.3 ICP para la distribución BSE

Se sugiere un ICP para la distribución BSE comparando los límites de especificación con un rango que abarca un alto porcentaje especificado, $1 - \rho$, para la distribución de T . Considerando la función cuantil de la distribución BSE dada en la expresión (3.1) y los ICPs presentados en (2.6), se propone

$$C_p^{\text{BSE}} = \frac{\text{LES} - \text{LEI}}{t(p_2) - t(p_1)} = \frac{\text{LES} - \text{LEI}}{\beta\alpha \left[y_2 \left[\frac{\alpha y_2}{2} + \sqrt{\left[\frac{\alpha y_2}{2} \right]^2 + 1} \right] - y_1 \left[\frac{\alpha y_1}{2} + \sqrt{\left[\frac{\alpha y_1}{2} \right]^2 + 1} \right] \right]}, \quad (3.10)$$

donde $y_1 = y(p_1)$ y $y_2 = y(p_2)$ son los cuantiles p_1 -ésimo y $[1 - p_2]$ -ésimo de la distribución $\text{MEN} \sim (0, 1; H)$. Ahora, con el fin de comparar un producto con un LEI, se utiliza

$$C_{\text{pl}}^{\text{BSE}} = \frac{2[\beta - \text{LEI}]}{t(p_2) - t(p_1)} = \frac{2[\beta - \text{LEI}]}{\beta\alpha \left[y_2 \left[\frac{\alpha y_2}{2} + \sqrt{\left[\frac{\alpha y_2}{2} \right]^2 + 1} \right] - y_1 \left[\frac{\alpha y_1}{2} + \sqrt{\left[\frac{\alpha y_1}{2} \right]^2 + 1} \right] \right]}, \quad (3.11)$$

recordando β es la mediana de la distribución BSE. Además, se tiene

$$C_{\text{pu}}^{\text{BSE}} = \frac{2[\text{LES} - \beta]}{t(p_2) - t(p_1)} = \frac{2[\text{LES} - \beta]}{\beta\alpha \left[y_2 \left[\frac{\alpha y_2}{2} + \sqrt{\left[\frac{\alpha y_2}{2} \right]^2 + 1} \right] - y_1 \left[\frac{\alpha y_1}{2} + \sqrt{\left[\frac{\alpha y_1}{2} \right]^2 + 1} \right] \right]}, \quad (3.12)$$

cuando la mediana se aleja del punto medio de los límites de especificación, se considera

$C_{\text{pk}}^{\text{BSE}} = \min \{ C_{\text{pl}}^{\text{BSE}}, C_{\text{pu}}^{\text{BSE}} \}$, donde $C_{\text{pl}}^{\text{BSE}}$ y $C_{\text{pu}}^{\text{BSE}}$ se dan en la Ecuación (3.11) y (3.12), respectivamente. Reescribiendo la Ecuación (3.10), se tiene

$$C_p^{\text{BSE}} = \frac{\text{LES} - \text{LEI}}{t(p_2) - t(p_1)} = \frac{2 [\text{LES} - \text{LEI}] / \beta}{\left[\alpha^2 y_2^2 + \alpha y_2 \sqrt{[\alpha y_2]^2 + 4} \right] - \left[\alpha^2 y_1^2 + \alpha y_1 \sqrt{[\alpha y_1]^2 + 4} \right]}. \quad (3.13)$$

3.4 Estimación e inferencia paramétrica para ICP BSE

Considerando la Sección 3.2, la propiedad de invarianza de los estimadores VM y usando (3.13), un estimador del ICP para distribuciones BSE está dada por

$$\widehat{C}_p^{\text{BSE}} = \frac{\text{LES} - \text{LEI}}{t(p_2) - t(p_1)} = \frac{2 [\text{LES} - \text{LEI}] / \widehat{\beta}}{\left[\widehat{\alpha}^2 y_2^2 + \widehat{\alpha} y_2 \sqrt{[\widehat{\alpha} y_2]^2 + 4} \right] - \left[\widehat{\alpha}^2 y_1^2 + \widehat{\alpha} y_1 \sqrt{[\widehat{\alpha} y_1]^2 + 4} \right]}, \quad (3.14)$$

donde $\widehat{\alpha}$ y $\widehat{\beta}$ son los estimadores VM de α y β , e y_1 e y_2 son los cuantiles de la distribución MEN. Desde expresión (3.8), la distribución asintótica de $\widehat{C}_p^{\text{BSE}}$ es normal, dada por

$$\sqrt{n} \left[\widehat{C}_p^{\text{BSE}} - C_p^{\text{BSE}} \right] \xrightarrow{D} N \left(0, \text{Var} \left[\widehat{C}_p^{\text{BSE}} \right] \right), \quad \text{cuando} \quad n \rightarrow \infty, \quad (3.15)$$

donde lo visto en (3.15) denota convergencia en distribución y desde Ecuación (3.14) aplicando el método delta, se tiene

$$\begin{aligned} \text{Var} \left(\widehat{C}_p^{\text{BSE}} \right) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \alpha} \text{ICP}(\alpha, \beta) & \frac{\partial}{\partial \beta} \text{ICP}(\alpha, \beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\alpha^2}{n[3\widehat{u}w_1 - 1]} & 0 \\ 0 & \frac{\beta^2}{n[\widehat{u}w_1/4 + \widehat{u}/\alpha^2 + P(\alpha)]} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \alpha} \text{ICP}(\alpha, \beta) \\ \frac{\partial}{\partial \beta} \text{ICP}(\alpha, \beta) \end{pmatrix} \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \text{ICP}(\alpha, \beta) \right]^2 \frac{\alpha^2}{n[3\widehat{u}w_1 - 1]} + \left[\frac{\partial}{\partial \beta} \text{ICP}(\alpha, \beta) \right]^2 \frac{\beta^2}{n[\widehat{u}w_1/4 + \widehat{u}/\alpha^2 + P(\alpha)]}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

tal que $P(\alpha)$ está dado en (3.7) y

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} \text{ICP}(\alpha, \beta) &= - \frac{2\beta^{-1} [\text{LES} - \text{LEI}] 2\alpha y_2^2 + y_2 \sqrt{[\alpha y_2]^2 + 4} + \frac{y_2^3 \alpha^2}{\sqrt{[\alpha y_2]^2 + 4}} - 2\alpha y_1^2 - y_1 \sqrt{[\alpha y_1]^2 + 4} - \frac{y_1^3 \alpha^2}{\sqrt{[\alpha y_1]^2 + 4}}}{\alpha^2 y_2^2 + \alpha y_2 \sqrt{[\alpha y_2]^2 + 4} - \alpha^2 y_1^2 - \alpha y_1 \sqrt{[\alpha y_1]^2 + 4}}, \\ \frac{\partial}{\partial \beta} \text{ICP}(\alpha, \beta) &= \frac{2\beta^{-2} [\text{LES} - \text{LEI}]}{\alpha^2 y_2^2 + \alpha y_2 \sqrt{[\alpha y_2]^2 + 4} - \alpha^2 y_1^2 - \alpha y_1 \sqrt{[\alpha y_1]^2 + 4}}. \end{aligned}$$

3.4.1 Intervalo de confianza para los ICP BSE

Considerando (3.15), una aproximación $100 \times [1 - \alpha] \%$ para el intervalo de confianza del ICP BSE está dado por

$$\text{IC}_{100 \times [1 - \alpha] \%} (C_p^{\text{BSE}}) = \left[\widehat{C}_p^{\text{BSE}} \pm z_{(1 - \frac{\alpha}{2})} \widehat{\text{DE}}[\widehat{C}_p^{\text{BSE}}] \right],$$

donde $\widehat{\text{DE}}[\widehat{C}_p^{\text{BSE}}] = \sqrt{\text{Var} \left(\widehat{C}_p^{\text{BSE}} \right)}$.

3.4.2 Test de hipótesis para los ICP BSE

Considerando la hipótesis: $H_0 : C_p^{\text{BSE}} \leq C_0$ (el proceso no es capaz) versus $H_1 : C_p^{\text{BSE}} > C_0$ pueden ser contrastado con la estadística de prueba bajo H_0 propuesta por

$$W = \frac{[\widehat{C}_p^{\text{BSE}} - C_0]}{\widehat{\text{DE}}[\widehat{C}_p^{\text{BSE}}]} \sim N(0, 1),$$

donde C_0 representa un requisito de capacidad predeterminada.

3.4.3 Intervalo de confianza no paramétrico para el ICP BSE

Sea T_1, T_2, \dots, T_n una muestra aleatoria desde una distribución F , la muestra correspondiente de n VAs idéntica e independientemente distribuidas. La muestra $T_1^*, T_2^*, \dots, T_n^*$, es una muestra de tamaño n extraída con reemplazo de la muestra original. Aquí, se establece el número de replicaciones igual a B . Con el fin de calcular el IC para C_p^{BSE} , considere los métodos:

I) Método de aproximación normal bootstrap: La estimación de C_p^{BSE} dada en (3.13) basada en la j -ésimo muestra Bootstrap, $\widehat{C}_p^{\text{BSE}^*}(j)$, con $j = 1, \dots, B$. Se asume que la distribución de los $\widehat{C}_p^{\text{BSE}} - C_p^{\text{BSE}}$ es $N(0, [\widehat{\text{DE}}_{\widehat{C}_p^{\text{BSE}}}]^2)$. Así, un IC del $[1 - \alpha] \times 100\%$ para $C_p^{\text{BSE}^*}$ se puede obtener utilizando un método aproximación normal bootstrap como

$$\text{IC}_{[1-\alpha] \times 100\%}(C_p^{\text{BSE}}) = \left[\widehat{C}_p^{\text{BSE}} \pm z_{(1-\frac{\alpha}{2})} \widehat{\text{DE}}[\widehat{C}_p^{\text{BSE}^*}] \right],$$

donde $\widehat{C}_p^{\text{BSE}^*} = [1/B] \sum_{j=1}^B \widehat{C}_p^{\text{BSE}^*}(j)$. Debido $\text{DE}_{\widehat{C}_p^{\text{BSE}}}$ es desconocida, se puede estimar desde la muestra bootstrap como

$$\widehat{\text{DE}}_{\widehat{C}_p^{\text{BSE}}} = \sqrt{\frac{1}{B} \sum_{j=1}^B \left[\widehat{C}_p^{\text{BSE}^*}(j) - \widehat{C}_p^{\text{BSE}^*} \right]^2}.$$

II) Método cuantil bootstrap: Luego de obtener las réplicas en forma ascendente. Entonces, $C_p^{\text{BSE}^*}(B[\alpha/2])$ y $C_p^{\text{BSE}^*}(B[1 - \alpha/2])$ son los $[\alpha/2]$ -ésimo y $[1 - \alpha/2]$ -ésimo cuantiles de la distribución de $\widehat{C}_p^{\text{BSE}^*}(j)$, respectivamente. Por lo tanto, basado en este método, un IC de la $100 \times [1 - \alpha]\%$ está dada por

$$\text{IC}_{100 \times [1-\alpha]\%}(C_p^{\text{BSE}}) = \left[\widehat{C}_p^{\text{BSE}^*}(B[\alpha/2]), \widehat{C}_p^{\text{BSE}^*}(B[1 - \alpha/2]) \right].$$

Aplicación de los ICPs basados en la distribución BSE

Aquí se realizará la implementación de los ICPs vistos en el Capítulo 3 y un análisis de datos usando el software `R-Project`. Para ilustrar el desarrollo de los ICPs de datos provenientes desde una distribución BSE, se usan los datos provenientes de un estudio dirigido por los profesores Fernando Rojas y Víctor Leiva de la Universidad de Valparaíso, Chile. Para el análisis y simulación de datos, se utiliza el software `R-Project` y con la ayuda del paquete `bs 2.0` y el paquete `sbs`, los que se encuentran disponibles en el link <http://staff.deuv.cl/leiva/archivos/software>.

4.1 El problema

“La alimentación y nutrición de servicios” se define como una organización responsable de la preparación y/o distribución de alimentos en una forma científicamente planificada; ver Marambio et al. (2005). Estas preparaciones deben ser producidas de acuerdo a la orientación nutricional local e internacional regulada por diferentes organismos como la Organización para la Agricultura y la Alimentación de las Naciones Unidas (FAO), la Organización Mundial de la Salud (OMS) o de otros que los sustituyan, así como por el Ministerio de Salud del país correspondiente. Estas autoridades competentes deberán verificar tales reglamentos de auditoría, por ejemplo, (i) la suficiencia y la calidad nutricional de la dieta y (ii) los factores de corrección de las necesidades de energía para patologías (en caso de pacientes). En este contexto, es fundamental que los servicios de alimentación garanticen la contribución de ciertas variables nutricionales como de macronutrientes (hidratos de carbono, lípidos y proteínas), micronutrientes y fibra dietética, que son necesarios para el cuidado y/o restaurar la salud de las personas. Para controlar el proceso de producción de alimentos en estos servicios y garantizar el contenido nutricional, es posible trabajar con ICPs que consi-

deren distribuciones estadísticas apropiadas para detectar si se están respetando las cantidades de densidad de energía establecidas en la normativa; ver Tabla 4.1.

Tabla 4.1: Rangos para las recomendaciones nutricionales para los adultos.

Macronutrientes	Energía (in %kcal)		Cantidad(in g)	
	LEI	LES	LEI	LES
Carbohidratos	50.00	60.00	300.00	360.00
Lípidos	25.00	30.00	66.67	80.00
Proteínas	12.00	16.00	72.00	96.00

Fuente FAO/WHO/UNU (1985)

Elías (1996) informó que la disponibilidad de proteínas en la dieta humana ha sido tradicionalmente baja en América Latina, debido a su alto precio, por lo que aumenta el costo de la preparación de alimentos. Por otra parte, es importante tener en cuenta que varias enfermedades se tratan con dietas restringidas en la cantidad de proteínas, que pueden alcanzar los límites inferiores de las contribuciones nutricionales con sólo el 5 % de la densidad de energía de este macronutriente, que pone el LEI de la cantidad de proteínas en 30 g, según Harris (2000). Bajo estas consideraciones, en función del número de pacientes que requieren este tipo de dieta, el intervalo de especificación para las proteínas podría variar. El servicio corresponde a una pequeña empresa, que se ocupa de mantener el proceso de producción de alimentos, el menú para los pacientes con dietas restringidas en la cantidad de proteínas, debe estar dentro de la especificación [30g, 96g], pero esta empresa no se ocupa de mantener un proceso de producción de alimentos que sea capaz de seguir el rango especificado por las normas internacionales; ver Tabla 4.1. Así, el objetivo del estudio de la industria alimentaria, es determinar la capacidad del proceso de producción de alimentos en un hospital chileno. La característica de calidad para monitorear es la cantidad de proteínas, con LEI = 30g y LES = 96g, con el fin de saber si esta característica del menú de la comida es de conformidad con las recomendaciones dietéticas establecidas.

En esta aplicación, la característica a monitorear es la cantidad de proteínas (en gramos) en la dieta restringida para pacientes adultos en el Hospital Carlos Van Buren de la ciudad de Valparaíso, Chile. Los datos fueron recolectados durante 27 semanas que abarca el período desde el 20-nov-2011 al 26-may-2012 (189 días) en un estudio dirigido por Fernando Rojas y Víctor Leiva de la Universidad de Valparaíso, Chile. Estos datos se muestran en Tabla 4.2.

Tabla 4.2: Observaciones de la cantidad de proteínas (grs) en la dieta restringida de los pacientes.

66.09	146.48	97.99	56.77	74.23	76.20	108.90	89.51	62.40	141.15
89.81	201.05	210.32	105.08	169.82	64.25	100.43	59.56	49.97	102.16
164.05	59.63	51.41	93.32	39.43	102.91	124.91	56.16	70.94	77.26
59.01	49.21	123.85	59.78	163.50	37.67	88.27	35.60	42.54	43.87
44.41	25.55	41.12	88.14	54.69	85.32	67.55	17.76	83.73	34.07
42.37	61.95	68.62	41.69	100.43	139.39	60.03	34.35	51.28	68.22
80.44									

4.2 Análisis de datos

Para implementar los ICPs para la distribución BSE, se debe primeramente hacer un análisis exploratorio de los datos por ejemplo utilizando la función `descriptiveSummary()`. A continuación, en Tabla 4.3, se presentan los resultados

Tabla 4.3: descripción de la cantidad de proteínas (en g) en los pacientes con dieta restringida.

Media	Mediana	DE	CV	CS	CC	Rango	Mín.	Máx	n
80.436	68.22	42.29	52.576	1.169	0.959	192.56	17.32	210.32	61

En tabla anterior, se puede observar que los pacientes con dieta restringida tienen una media de 80 g de proteína, con valores que están por debajo de las recomendaciones mínimas establecidas y pacientes que exceden por mucho la cantidad de proteínas recomendadas en las normas internacionales. El coeficiente de sesgo evidencia el uso de distribuciones sesgadas positivamente para modelar estos datos.

El histograma presentado en Figura 4.1 evidencia sesgo positivo. Además, desde el boxplot dado en esta misma figura, existen datos atípicos en la dieta restringida de los pacientes.

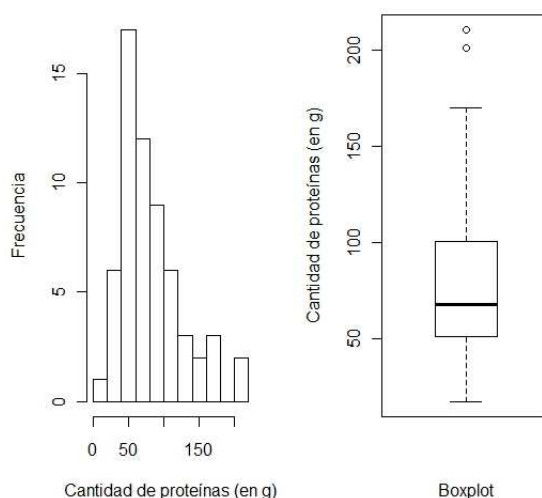


Figura 4.1: Histograma (izquierda) y boxplot (derecha) para la cantidad de proteínas en pacientes con dieta restringida.

4.3 Elección del mejor modelo

Con el fin de seleccionar el mejor modelo BSE que se ajuste a los datos, se ha utilizado la implementación de la metodología descrita en la Sección 1.5 en el paquete `sbs`. Algunos autores han sugerido fijar el parámetro ν asociado con la distribución de la VA U y asumir que es valor conocido. Para la estimación MV a través de EM-algoritmo en los modelos de la BSE, se ha implementado el comando `smnbsEstimation()`, que elige automáticamente la distribución que mejor ajusta el conjunto de datos entre la distribución BSNC, BSSL y BS- $t\nu$. Este comando también calcula las estimaciones de MV de los parámetros de modelos BSE por separado. Por ejemplo, en el caso de la distribución BS-t, el siguiente algoritmo EM puede ser utilizado para la estimación de sus parámetros:

(A1) Para $\nu = 1$ hasta $\nu = 100$:

(A11) Estimar los parámetros α y β del modelo BS- t (con ν fijo) considerando las estimaciones MV de α y β de la distribución BS como valores iniciales del procedimiento numérico.

(A12) Calcular la función de verosimilitud

(A2) Elegir el valor que maximiza la función de verosimilitud y luego considerar los estimadores MV de α y β correspondiente como resultados.

Tabla 4.4 muestra el mejor ajuste a los datos sobre el monitoreo de la cantidad de proteínas. Además, se entregan los estimaciones de los parámetros α y β del modelo BS- t , BSSL y BSNC. Utilizando el comando `smbseEstimation()` que selecciona el valor que maximiza la función de verosimilitud. Se observa que el mejor ajuste para la cantidad de proteínas en los pacientes con dieta restringida es realizado por la distribución BS t -Student.

Tabla 4.4: Estimación de parámetros y elección del mejor modelo.

Modelo	log verosimilitud	α	β	ν	γ
BS- t	-304.7005	0.5073131	70.91853	39	-
BSSL	-331.2600	0.7758012	70.93249	1	-
BSNC	-304.7321	0.513068	70.86945	0.01	0.6

Para apoyar la decisión obtenida al maximizar la función de verosimilitud, en Figura 4.2 se muestra un histograma con la FDP de la distribución estimada BS- t y un gráfico de probabilidad versus probabilidad (PP), este último realiza una comparación entre la FDA teórica BS- t y la FDA empírica del conjunto de datos. Después de este estudio de bondad de ajuste se concluye que los datos provienen de una distribución BS- t .

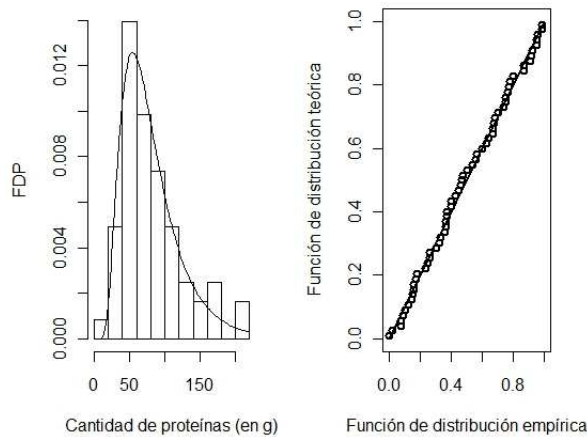


Figura 4.2: Histograma (izquierda) y gráfico PP (derecha) para la cantidad de proteínas en pacientes con dieta restringida.

Con la estimación de parámetros y la elección del mejor modelo para la cantidad de proteínas para pacientes con dieta restringida, se calculan los índices de capacidad de proceso basados en la distribución BS- t -Student. Tabla 4.5 muestra los LES y LEI, el valor estimado de \hat{C}_p^{BSE} y \hat{C}_{pk}^{BSE} .

Tabla 4.5: LEI, LES y los ICP basados en la distribución BSt -Student.

Modelo	LES	LEI	\hat{C}_p^{BSE}	\hat{C}_{pk}^{BSE}
$BS-t$	96g	30g	0.9960	0.1849

Entonces, el ICP obtenido desde los datos recolectados, correspondiente al monitoreo de la cantidad de proteínas en dietas restringidas para pacientes del hospital Carlos Van Buren es de 0.9960, luego se afirma que el menú de la empresa encargada debe ser vigilada y aún más es muy posible que no está siguiendo las recomendaciones dietéticas establecidas.

Conclusión

Los índices de capacidad de procesos son una herramienta que permite medir si una fábrica o una empresa es capaz de producir sus productos dentro de las especificaciones que ellos establecen, lo que se conoce como límites de especificación superior y límites de especificación inferior. Utilizar los ICPs bajo normalidad como adecuados e ignorar el efecto de distribuciones asimétricas, puede conducir a interpretaciones erróneas de la capacidad del proceso. Se tiene claro que los casos con distribuciones simétricas son comunes en situaciones prácticas, pero los casos con las distribuciones asimétricas ocurren también a menudo en la industria manufacturera. Debido a lo anterior, es que en este trabajo, se presentó la distribución BS su caracterización y sus propiedades. Además, se entregó una nueva derivación de esta distribución, denominada BS mezcla de escalas de normales, cuyos casos particulares son la distribución BSNC, BSSL y BS- t . Estas distribuciones mantienen las propiedades de las distribuciones de origen y además la estimación VM es facilitada por el algoritmo EM. Considerando lo planteado en el análisis realizado se ve que cuando los datos provienen de una BSE, el proceso debe ser vigilado y aún más es muy posible que no está siguiendo las recomendaciones dietéticas establecidas para pacientes del hospital Carlos Van Buren. La aplicación se realizó con la ayuda de los paquetes BS, BSG y SBS, implementadas en el software R-Project.

Bibliografía

- Albing, M., Vannman, K. (2007) Process capability indices for one-sided specification limits and skewed distributions. *Qual. Rel. Eng. Int.*, 23, 755-765.
- Barros, M., Paula, G.A., Leiva, V. (2009) An R implementation for generalized Birnbaum-Saunders distributions. *Comp. Stat. Data Anal.*, 53, 1511-1528.
- Barros, M., Leiva, V., Ospina, R., Tsuyuguchi, A. (2014) Goodness-of-fit tests for the Birnbaum-Saunders distribution with censored reliability data. *IEEE Trans. Rel.*, (in press).
- Balakrishnan, N., Leiva, V., Sanhueza, A., Vilca, F. (2009) Estimation in the Birnbaum-Saunders distribution based on scale-mixture of normals and the EM-algorithm. *Stat. Oper. Res. Trans.*, 33, 171-192.
- Birnbaum, Z.W., Saunders, S.C. (1969a) A new family of life distributions. *J. Appl. Prob.*, 6, 319-327.
- Birnbaum, Z.W., Saunders, S.C. (1969b) Estimation for a family of life distributions with applications to fatigue. *J. Appl. Prob.*, 6, 328-347.
- Box, G.E., Cox, D.R. (1964) An analysis of transformations. *J. Roy. Stat. Soc.*, 26, 211-246.
- Burr, I.W. (1942) Cumulative frequency distribution. *Ann. Math. Stat.*, 13, 215-232.
- Choi, I.S., Bai, D.S. (1996) Process capability indices for skewed populations. *Proc. 20th Int. Conf. Comp. Ind. Eng.*, 1211-1214.
- Clements, J. (1989) Process capability calculations for non-normal distribution, *Qual. Prog.*, 24(9), 95-100.
- Díaz-García, J.A., Leiva, V. (2005) A new family of life distributions based on elliptically contoured distributions. *J. Stat. Plan. Infer.*, 128, 445-457.
- Elías, L. (1996) *Concept and technology for elaboration and use of compound flour*. Bull. PanAmer. San. Bur. 121, 179-182.
- FAO/OMS/UNU. (1985) Requirement of energy and proteins. *Technical Report 724*. WHO, Ginebra.
- Harris, J.C. (2009) Psychosocial Care of Child and Family. In "Inborn Metabolic Disease". *J. Fernandes, J-M. Saubray, G. van den Berghe. 3rd Edition. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg*, pp. 63-73.
- Hsu et al. (2008) Capability adjustment for gamma process with mean shift consideration in implementing six sigma program. *Eur. J. Op. Res.* 119, 517-529.
- Johnson, N.L. (1949) System of frequency curve generated by methods of translation. *Biometrika*, 36, 149-176.

- Johnson, N.L., Kotz, S., Pearn, W.L.(1994) Flexible process capability indices. *Pak. J. Stat.*, 10, 23-31.
- Leiva, V., Sanhueza, A. Kelmansky, S., Martinez, E. (2009) On the glog-normal distribution and its association with the gene expression problem. *Comp. Stat. Data Anal.*, 53, 1613-1621.
- Leiva, V., Marchant, C., Saulo, H., Aslam, M., Rojas, F. (2014) Capability indices for Birnbaum-Saunders processes applied to electronic and food industries. *J. Appl. Stat.* (in press).
- Liu, P., Chen, F. (2006) Process capability analysis on non-normal process data using the Burr XII Distribution. *Int. J. Adv. Manuf. Tech.*, 27, 975-984.
- Marambio, M. Parker, M. Benavides, X. (2005) Food and nutrition service: technical regulation. *MINSAL*, Chile, 9 pág.
- Pearn, W.L., Chen, K.S. (1995) Estimating process capability indices for non-normal Pearson populations. *Qual. Rel. Eng. Int.*, 11, 386-388.
- Pearn, W. L., Chen, K.S. (1997) Capability indices for non-normal distributions with an application in electrolytic capacitor manufacturing. *Microelect. Rel.*, 37, 1853-1858.
- Ng, H.K.T., Kundu, D., Balakrishnan, N. (2006) Point and interval estimations for the two-parameter Birnbaum-Saunders distribution based on type II censored samples. *Comp. Stat. Data Anal.*, 50, 3222-3242.
- Somerville, S.E., Montgomery, D. (1996) Process capability indices and non-normal distributions. *Qual. Eng.*, 19, 305-316.
- Tang, L.C., Than, S.E. (1999) Computing process capability indices for non-normal data: A review and comparative study. *Qual. Reliab. Eng. Int.*, 15, 339-353.
- Valdiviezo, M., Fermín, J. (2010) Estudio comparativo de índices de capacidad de proceso con variables distribuidas no normales. *Ind. Data*, 13, 56-65.