

# Proceso de Cox Temporal con Proceso de Intensidad Folded-Normal



**Candidato a Doctor: Luis M. Riquelme Q.**

**Profesora Guía: Dra. Orietta Nicolis**

*Trabajo de tesis para la obtención del grado de Doctor en Estadística*

Martes 28 de Agosto de 2018

# Índice general

<b>1. Proceso de Cox</b>	<b>4</b>
1.1. Proceso de Poisson Homogéneo . . . . .	4
1.2. Proceso de Poisson No Homogéneo . . . . .	11
1.3. Proceso de Cox . . . . .	18
<b>2. Ley o Distribución Folded Normal</b>	<b>26</b>
2.1. Construcción del Modelo . . . . .	26
2.2. Esperanza y Varianza . . . . .	28
<b>3. Proceso de Cox con Intensidad Folded Normal</b>	<b>33</b>
3.1. Definición del Proceso . . . . .	33
3.2. Propiedades del Proceso de Intensidad . . . . .	34
3.3. Propiedades del Proceso de Cox con Intensidad Folded Normal . . . . .	38
3.3.1. Densidad del Proceso. . . . .	38
3.3.2. Momentos de primer y segundo orden del Proceso. . . . .	39
3.4. Simulación del Proceso de Cox con Proceso Intensidad Folded Normal	45
<b>A. Principales Notaciones Utilizadas</b>	<b>52</b>
<b>B. Programa R para Simular un Proceso de Cox con Intensidad Folded Normal</b>	<b>55</b>
B.1. Caso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ familia de variables aleatorias independientes y con ley común $N(\mu, \sigma^2)$ . . . . .	55
B.2. Caso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ tal que $m_Z(t) = 0$ y $k_Z(t, s) = \sigma^2 e^{-\beta t-s }$ . . . . .	56

## Resumen

En el presente trabajo, estudiaremos el caso de un Proceso de Cox con intensidad Folded Normal, en el cual el proceso de intensidad  $\{\Lambda(t) : t \geq 0\}$  es tal que, para cada  $t$ :

$$\Lambda(t) = |Z(t)|$$

Donde  $\{Z(t) : t \geq 0\}$  es un Proceso Gaussiano estacionario, con valor medio  $\mu$  y función de covarianza  $k(h)$ , tal que  $k(0) = \sigma^2$ . Esto tendrá como consecuencia inmediata que

$$\Lambda(t) \sim \text{FN}(\mu, \sigma^2)$$

Nos ocuparemos en esta ocasión de dos casos particulares: Cuando el proceso  $\{Z(t) : t \geq 0\}$  constituye una familia de variables aleatorias independientes y con una ley común  $N(0, 1)$ , y el caso en que  $\{Z(t) : t \geq 0\}$  es un proceso estacionario de segundo orden, con una función de covarianza de tipo exponencial. Observaremos que en estos casos, las propiedades del proceso gaussiano  $\{Z(t) : t \geq 0\}$  son traspasadas naturalmente al proceso intensidad  $\{\Lambda(t) : t \geq 0\}$  y que se obtienen resultados bastante tratables desde el punto de vista analítico para el proceso de conteo  $\{N(t) : t \geq 0\}$ .

Finalmente, presentaremos algunas simulaciones para apreciar que tipo de fenómenos de conteo pueden ser modelados por estos casos del Proceso de Cox con Intensidad Folded-Normal.

# Introducción

En 1955, Cox [1] presenta el caso de un proceso puntual, el cual es definido como una extensión del Proceso de Poisson, ampliamente estudiado en la literatura, por ejemplo, Sheldon M. Ross [21], Barry James [19], Cox & Miller [25], Emanuel Parzen [26], Yuri A. Rozanov [29], entre otros. La principal característica de este proceso, es que es un proceso puntual donde la intensidad en sí misma es un proceso estocástico, tal que condicional a cada realización, o trayectoria de éste, el proceso puntual es un Proceso de Poisson no homogéneo con intensidad dada justamente por ésta. Es decir, siguiendo la definición dada por Diggle, Moraga, Rowlingson & Taylor en [3], podemos decir entonces que el Proceso puntual  $\{N(t) : t \geq 0\}$  es un Proceso de Cox, con Proceso de Intensidad  $\{\Lambda(t) : t \geq 0\}$ , si:

- $\{\Lambda(t) : t \geq 0\}$  es un proceso estocástico de valores no negativos.
- Condicional a la realización de una trayectoria  $\Lambda(t) = \lambda(t)$ , el proceso  $\{N(t) : t \geq 0\}$  es un Proceso de Poisson no homogéneo, con intensidad  $\lambda(t)$

En 1998, Møller, Syversveen and Waagepetersen [10], introdujeron la clase de Procesos Log-Gaussianos, los que básicamente se construyen de la siguiente forma:

- Se considera  $\{Z(t) : t \geq 0\}$  un Proceso Gaussiano.
- Se define, para cada  $t \geq 0$ ,  $\Lambda(t) = e^{Z(t)}$ , y de esta forma entonces, para cada  $t \geq 0$ , se verifica que  $\Lambda(t)$  sigue una ley Log-Normal, con los parámetros correspondientes a la ley gaussiana de  $Z(t)$ .

Es decir, se utiliza la función de enlace  $g(z) = e^z$ , para obtener un proceso de valores positivos a partir de un Proceso Gaussiano.

Utilizando esta clase de Procesos, Diggle, Moraga, Rowlingson & Taylor [3] en 2013, presentan el Proceso de Cox con Proceso de Intensidad Log-Normal.

Ahora bien, en 2017, Christian J. Walder & Adrian N. Bishop [11], presentan el Proceso de Cox con Proceso de Intensidad Gamma, haciendo una construcción análoga a la realizada en [10], pero cambiando la función de enlace que permite obtener un proceso positivo a partir de un Proceso Gaussiano. En este caso ellos utilizan la siguiente construcción:

- Se considera  $\{Z(t) : t \geq 0\}$  un Proceso Gaussiano.
- Se define, para cada  $t \geq 0$ ,  $\Lambda(t) = \frac{1}{2} \cdot Z^2(t)$ , y de esta forma entonces, para cada  $t \geq 0$ , se verifica que  $\Lambda(t)$  sigue una Ley Gamma.

Este caso es mencionado también por Møller, Syversveen and Waagepetersen [10], tal como señalan Walder & Bishop en el citado artículo, para el caso particular de un proceso de media 0, obteniendo el Proceso de Cox con Intensidad Chi-Cuadrado (Que es, como sabemos, un caso particular de Gamma).

Las propiedades de la función de enlace  $g(z) = \frac{1}{2}z^2$ , según señalan esta mismos autores, son ampliamente estudiadas por S. Flaxman, Y.W. Teh & D. Sejdinovic [9].

Por otra parte, en 2009, Ryan P. Adams, Iain Murray & David J. C. MacKay [15] estudian también una función de enlace, dada por  $g(z) = \lambda^*(1 + e^{-z})^{-1}$ .

Es decir, en general estamos interesados en estudiar funciones del tipo:

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ z &\mapsto g(z) \end{aligned} \tag{1}$$

Que nos permitan obtener un proceso de valores positivos a partir de un Proceso Gaussiano.

En 1961, Leone, F.C., Nelson, L.S. & Nottingham, R.B. [6] presentan la Ley o Distribución Folded-Normal, la que simplemente se construye de la siguiente forma:

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow Y = |X| \sim \text{FN}(\mu, \sigma^2) \tag{2}$$

Naturalmente, un caso particular de ésta lo constituye la Ley Half-Normal, construida como:

$$X \sim N(0, \sigma^2) \Rightarrow Y = |X| \sim \text{HN}(\sigma^2) \tag{3}$$

Es decir,

$$Y \sim \text{FN}(0, \sigma^2) \Leftrightarrow Y \sim \text{HN}(\sigma^2)$$

Las propiedades de esta ley de probabilidad, son ampliamente estudiadas en artículo reciente de 2014, por Michail Tsagris, Christina Beneki & Hossein Hassani [2].

Por otra parte, en 2001, Psarakis, S. & Panaretos, J. [7] presentan una extensión a la Folded Normal Bivariada y en 2013, Ashis Kumar Chakraborty & Moutushi Chatterjee [5], presentan una extensión a la Folded Normal Multivariada.

Basándonos entonces en el resultado de la ecuación (2.1) y en las características de la función de enlace definida en la ecuación (1), es que nosotros proponemos el Proceso de Cox con Proceso de Intensidad Folded Normal, construido de la siguiente forma:

- Se considera  $\{Z(t) : t \geq 0\}$  un Proceso Gaussiano estacionario.
- Se define, para cada  $t \geq 0$ ,  $\Lambda(t) = |Z(t)|$ , es decir, trabajaremos con la función de enlace  $g(z) = |z|$  que claramente verifica lo requerido en la ecuación (1), y de esta forma entonces, para cada  $t \geq 0$ , se verifica que  $\Lambda(t)$  sigue una Ley Folded Normal.

De esta forma, obtendremos un proceso puntual  $\{N(t) : t \geq 0\}$ , que será un Proceso de Cox con Intensidad Folded Normal.

# Capítulo 1

## Proceso de Cox

### 1.1. Proceso de Poisson Homogéneo

El Proceso de Poisson homogéneo, o simplemente Proceso de Poisson, ha sido ampliamente estudiado en la literatura, por ejemplo por los autores: Sheldon M. Ross [21], Barry James [19], Cox & Miller [25], Emanuel Parzen [26], Yuri A. Rozanov [29], entre otros. Este proceso puede ser definido de diversas formas; una posible manera es la siguiente:

**Definición 1.1.1** Sea  $\{N(t) : t \geq 0\}$  un proceso estocástico en tiempo continuo y con espacio de estados  $E = \mathbb{N}_0$ . Diremos que éste es un Proceso de Poisson, si verifica las siguientes propiedades:

**PPH 1**  $N(0) = 0$

**PPH 2** Si  $[a, b] \cap [c, d] = \emptyset$  entonces  $N(b) - N(a) \perp N(d) - N(c)$ , i.e, el proceso posee incrementos independientes.

**PPH 3**  $N(t+h) - N(t) \stackrel{\mathcal{L}}{=} N(s+h) - N(s)$ , i.e, el proceso posee incrementos estacionarios.

**PPH 4**  $N(t) - N(s) \sim Po(\lambda \cdot [t - s])$ , para todo  $0 \leq s < t$ .

**PPH 5**  $\mathbb{P}(N(t + \Delta t) - N(t) \geq 2) \approx 0$  cuando  $\Delta t \approx 0$ . Intuitivamente, esta propiedad se interpreta como que los eventos en un Proceso de Poisson no pueden ocurrir simultáneamente, es decir, en intervalos muy pequeños de tiempo, puede ocurrir a lo más un evento.

Ahora bien, de 1 y 4, es inmediato que:

$$\mathbb{P}(N(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k \cdot e^{-\lambda t}}{k!} \cdot I_{\mathbb{N}_0}(k) \quad (1.1)$$

Es decir, para cada  $t > 0$ , se verifica que  $X \sim Po(\lambda t)$ .

**Proposición 1.1.1** Sea  $\{N(t) : t \geq 0\}$  un Proceso de Poisson Homogéneo, entonces se verifica que, para  $0 < s < t$ :

$$N(s) | N(t) = n \sim Bin\left(n, \frac{s}{t}\right)$$

**En efecto:**

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N(s) = k | N(t) = n) &= \frac{\mathbb{P}(N(s) = k, N(t) = n)}{\mathbb{P}(N(t) = n)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(N(s) = k, N(t) - N(s) = n - k)}{\mathbb{P}(N(t) = n)}\end{aligned}$$

Y usando que el proceso posee incrementos independientes y estacionarios, obtenemos que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N(s) = k | N(t) = n) &= \frac{\mathbb{P}(N(s) = k) \cdot \mathbb{P}(N(t) - N(s) = n - k)}{\mathbb{P}(N(t) = n)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(N(s) = k) \cdot \mathbb{P}(N(t - s) = n - k)}{\mathbb{P}(N(t) = n)} \\ &= \frac{(\lambda s)^k \cdot e^{-\lambda s}}{s!} \cdot \frac{(\lambda[t - s])^{n-k} \cdot e^{-\lambda[t-s]}}{(n - k)!} \cdot \frac{n!}{(\lambda t)^n \cdot e^{-\lambda t}} \\ &= \binom{n}{k} \left(\frac{s}{t}\right)^k \left(\frac{t - s}{t}\right)^{n-k}\end{aligned}$$

Desde donde se concluye entonces que:

$$\mathbb{P}(N(s) = k | N(t) = n) = \binom{n}{k} \left(\frac{s}{t}\right)^k \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{n-k} I_{\{0,1,\dots,n\}}(k)$$

Con lo cual, queda demostrado que  $N(s) | N(t) = n \sim \text{Bin}\left(n, \frac{s}{t}\right)$ .

La proposición anterior, puede ser generalizada de forma inmediata, como mostramos a continuación.

**Proposición 1.1.2** *Sea  $\{N(t) : t \geq 0\}$  un Proceso de Poisson Homogéneo, entonces para  $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m < t$ , se verifica que:*

$$(N(t_1), N(t_2) - N(t_1), \dots, N(t_m) - N(t_{m-1})) | N(t) = n \sim \text{Mult}\left(n, \frac{t_1}{t}, \frac{t_2 - t_1}{t}, \dots, \frac{t_m - t_{m-1}}{t}\right)$$

**En efecto:**

$$\begin{aligned}&\frac{\mathbb{P}(N(t_1) = k_1, N(t_2) - N(t_1) = k_2, \dots, N(t_m) - N(t_{m-1}) = k_m | N(t) = n)}{\mathbb{P}(N(t_1) = k_1, N(t_2) - N(t_1) = k_2, \dots, N(t_m) - N(t_{m-1}) = k_m, N(t) = n)} \\ &= \frac{\mathbb{P}\left(N(t_1) = k_1, N(t_2) - N(t_1) = k_2, \dots, N(t_m) - N(t_{m-1}) = k_m, N(t) - N(t_m) = n - \sum_{j=1}^m k_j\right)}{\mathbb{P}(N(t) = n)}\end{aligned}$$

Y usando nuevamente los incrementos independientes y estacionarios del proceso, tendremos que:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(N(t_1) = k_1, N(t_2) - N(t_1) = k_2, \dots, N(t_m) - N(t_{m-1}) = k_m | N(t) = n) \\
&= \frac{\prod_{j=1}^m \mathbb{P}(N(t_j) - N(t_{j-1}) = k_j) \cdot \mathbb{P}\left(N(t) - N(t_m) = n - \sum_{j=1}^m k_j\right)}{\mathbb{P}(N(t) = n)} \\
&= \frac{\prod_{j=1}^m \mathbb{P}(N(t_j - t_{j-1}) = k_j) \cdot \mathbb{P}\left(N(t - t_m) = n - \sum_{j=1}^m k_j\right)}{\mathbb{P}(N(t) = n)} \\
&= \prod_{j=1}^m \frac{[\lambda \cdot (t_j - t_{j-1})]^{k_j} e^{-\lambda \cdot (t_j - t_{j-1})}}{k_j!} \cdot \frac{[\lambda \cdot (t - t_m)]^{n - \sum_{j=1}^m k_j} e^{-\lambda \cdot (t - t_m)}}{\left(n - \sum_{j=1}^m k_j\right)!} \cdot \frac{n!}{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}} \\
&= \frac{n!}{k_1! \cdot \dots \cdot k_m! \left(n - \sum_{j=1}^m k_j\right)!} \cdot \left(\frac{t_1}{t}\right)^{k_1} \dots \left(\frac{t_m - t_{m-1}}{t}\right)^{k_m} \cdot \left(\frac{t - t_m}{t}\right)^{n - \sum_{j=1}^m k_j}
\end{aligned}$$

De esta forma entonces,

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(N(t_1) = k_1, N(t_2) - N(t_1) = k_2, \dots, N(t_m) - N(t_{m-1}) = k_m | N(t) = n) \\
&= \frac{n!}{k_1! \cdot \dots \cdot k_m! \left(n - \sum_{j=1}^m k_j\right)!} \cdot \left(\frac{t_1}{t}\right)^{k_1} \dots \left(\frac{t_m - t_{m-1}}{t}\right)^{k_m} \cdot \left(1 - \sum_{j=1}^m \frac{t_j - t_{j-1}}{t}\right)^{n - \sum_{j=1}^m k_j} \\
& \cdot I_C(k_1, \dots, k_m)
\end{aligned}$$

Donde  $C = \left\{ (k_1, \dots, k_m) \in \mathbb{N}_0^m : 0 \leq k_j \leq n, j = 1, \dots, m \wedge \sum_{j=1}^m k_j \leq n \right\}$  Con lo cual queda demostrado que:

$$(N(t_1), N(t_2) - N(t_1), \dots, N(t_m) - N(t_{m-1})) | N(t) = n \sim \text{Mult}\left(n, \frac{t_1}{t}, \frac{t_2 - t_1}{t}, \dots, \frac{t_m - t_{m-1}}{t}\right)$$

**Proposición 1.1.3** Sea  $\{N(t) : t \geq 0\}$  un Proceso de Poisson Homogéneo, entonces:

1.  $m_N(t) = \mathbb{E}[N(t)] = \lambda \cdot t$
2.  $v_N(t) = \mathbb{V}[N(t)] = \lambda \cdot t$
3.  $k_N(t, s) = \mathbf{C}[N(t), N(s)] = \lambda \cdot \text{mín}\{t, s\}$

**En efecto** Los resultados de la función de valor medio y de varianza, son inmediatos del hecho que  $N(t) \sim \text{Po}(\lambda t)$ <sup>1</sup>, en tanto, para la covarianza se puede dar la siguiente

<sup>1</sup>Es un hecho conocido que si  $X \sim \text{Po}(\alpha)$  entonces  $\mathbb{E}[X] = \mathbb{V}[X] = \alpha$ , ver por ejemplo [26], [21], [19], [18], [29].

demostración: Supongamos en primer lugar que  $t > s$ , entonces:

$$\begin{aligned}
 k_N(t, s) &= \mathbf{C}[N(t), N(s)] \\
 &= \mathbf{C}[N(t) - N(s) + N(s), N(s)] \\
 &= \mathbf{C}[N(t) - N(s), N(s)] + \mathbf{C}[N(s), N(s)] \\
 &= \lambda s
 \end{aligned}$$

Ya que, por incrementos independientes  $\mathbf{C}[N(t) - N(s), N(s)] = 0$  y por otra parte,  $\mathbf{C}[N(s), N(s)] = \mathbb{V}[N(s)] = \lambda s$ .

De esta forma, si suponemos ahora que  $t < s$ , será inmediato que  $k_N(t, s) = \lambda t$ , y por ende, concluimos que:

$$k_N(t, s) = \mathbf{C}[N(t), N(s)] = \lambda \cdot \text{mín}\{t, s\}$$

Como queríamos demostrar.

**Proposición 1.1.4** *Sea  $\{N(t) : t \geq 0\}$  un Proceso de Poisson Homogéneo, y sea  $S_k =$  Tiempo transcurrido hasta el  $k$ -ésimo evento, entonces:*

$$S_k \sim \text{Gam}(k, \lambda)$$

**En efecto:**

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(S_k > s) &= \mathbb{P}(N(s) \leq k - 1) \\
 &= \sum_{j=0}^{k-1} \mathbb{P}(N(s) = j) \\
 &= \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(\lambda s)^j e^{-\lambda s}}{j!}
 \end{aligned}$$

Desde donde se concluye entonces que:

$$F_{S_k}(s) = 1 - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(\lambda s)^j e^{-\lambda s}}{j!}$$

Y por ende,

$$\begin{aligned}
 f_{S_k}(s) &= - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{d}{ds} \frac{(\lambda s)^j e^{-\lambda s}}{j!} \\
 &= - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\lambda j (\lambda s)^{j-1} e^{-\lambda s} - \lambda (\lambda s)^j e^{-\lambda s}}{j!} \\
 &= \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\lambda (\lambda s)^j e^{-\lambda s}}{j!} - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\lambda j (\lambda s)^{j-1} e^{-\lambda s}}{j!} \\
 &= \lambda e^{-\lambda s} + \sum_{j=1}^{k-1} \left[ \frac{\lambda (\lambda s)^j e^{-\lambda s}}{j!} - \frac{\lambda j (\lambda s)^{j-1} e^{-\lambda s}}{j!} \right]
 \end{aligned}$$

Es decir,

$$f_{S_k}(s) = \lambda e^{-\lambda s} + \lambda \sum_{j=1}^{k-1} \left[ \frac{(\lambda s)^j e^{-\lambda s}}{j!} - \frac{(\lambda s)^{j-1} e^{-\lambda s}}{(j-1)!} \right]$$

Y en virtud de la propiedad del reloj

$$\begin{aligned} f_{S_k}(s) &= \lambda e^{-\lambda s} + \lambda \frac{(\lambda s)^{k-1} e^{-\lambda s}}{(k-1)!} - \lambda e^{-\lambda s} \\ &= \frac{\lambda^k}{(k-1)!} s^{k-1} e^{-\lambda s} \end{aligned}$$

Con lo cual

$$f_{S_k}(s) = \frac{\lambda^k}{\Gamma(k)} s^{k-1} e^{-\lambda s} I_{\mathbb{R}^+}(s)$$

Y por ende, hemos demostrado que  $S_k \sim \text{Gam}(k, \lambda)$ .

**Proposición 1.1.5** *Sea  $\{N(t) : t \geq 0\}$  un Proceso de Poisson Homogéneo, y sea  $T_k =$  Tiempo transcurrido entre el evento  $k$  y el evento  $k - 1$ , entonces:*

$$T_1, T_2, \dots \stackrel{ilc}{\sim} \text{Exp}(\lambda)$$

**En efecto** Una discusión sobre este resultado puede ser consultado por ejemplo en [26], [29], [21], [22] y [30]. Para efectos de ilustrar el razonamiento que sigue la demostración, probaremos los casos de  $T_1$  y  $T_2$ .

- $\mathbb{P}(T_1 > t) = \mathbb{P}(N(t) = 0)$

De esta forma entonces,

$$\begin{aligned} 1 - F_{T_1}(t) &= \frac{(\lambda t)^0 e^{-\lambda t}}{0!} \\ &= e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

Con lo cual,

$$f_{T_1}(t) = \lambda e^{-\lambda t} I_{\mathbb{R}^+}(t)$$

Y es inmediato entonces que:

$$T_1 \sim \text{Exp}(\lambda)$$

- En base al Teorema de Probabilidad Total, los incrementos estacionarios e independientes del Proceso de Poisson, y al resultado obtenido en el ítem

anterior, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T_2 > t) &= \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(T_2 > t | T_1 = s) dF_{T_1}(s) \\
&= \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(N(t+s) - N(s) = 0 | N(s) = 1) dF_{T_1}(s) \\
&= \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(N(t+s) - N(s) = 0) dF_{T_1}(s) \\
&= \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(N(t) = 0) dF_{T_1}(s) \\
&= \mathbb{P}(N(t) = 0) \int_0^{+\infty} dF_{T_1}(s) \\
&= e^{-\lambda t}
\end{aligned}$$

Desde donde se concluye que  $T_2 \sim \text{Exp}(\lambda)$  y además que  $T_1 \perp T_2$ , y por lo tanto

$$T_1, T_2 \stackrel{ilc}{\sim} \text{Exp}(\lambda)$$

**Observación 1.1.1** *Utilizando la proposición 1.1.5:*

- *Se puede dar una demostración alternativa de la proposición, por cuanto claramente*

$$S_k = \sum_{j=1}^k T_j$$

*Y entonces la ley de  $S_k$ , corresponderá a la ley de la suma de  $k$  variables aleatorias independientes y con una ley común  $\text{Exp}(\lambda)$ , lo que sabemos corresponde a una  $\text{Gam}(k, \lambda)$ .*

- *Se puede determinar la ley de probabilidad de la variable aleatoria  $W_{k,m} =$  Tiempo transcurrido entre el  $k$ -ésimo y el  $m$ -ésimo evento del proceso, por cuanto, claramente:*

$$W_{k,m} = S_m - S_k = \sum_{j=k+1}^m T_j$$

*Y por ende, la ley de  $W_{k,m}$  corresponderá a la ley de la suma de  $m - k$  variables aleatorias independientes y con una ley común  $\text{Exp}(\lambda)$ , lo que sabemos corresponde a una  $\text{Gam}(m - k, \lambda)$ .*

- *Se puede establecer un algoritmo de simulación de un Proceso de Poisson. Básicamente la idea consiste en escoger un tiempo  $T$  fijo, y luego simular tiempos exponenciales de forma independiente de forma que su suma no exceda  $t$ . Dichos tiempos corresponderán a los tiempos de ocurrencia de cada uno de los  $k$  eventos simulados, donde  $k$  será la cantidad de tiempos simulados hasta justo antes que su suma exceda  $T$ . En [22] se puede encontrar este algoritmo con todo detalle.*

**Proposición 1.1.6** Sea  $\{N(t) : t \geq 0\}$  un Proceso de Poisson Homogéneo, y sea  $T_1$  como fue definido en la proposición 1.1.5, entonces:

$$T_1|N(s) = 1 \sim U(0, s)$$

**En efecto:** Si consideremos  $0 < t < s$  y usamos los incrementos estacionarios e independientes del Proceso de Poisson, tenemos que:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_1 > t|N(s) = 1) &= \frac{\mathbb{P}(T_1 > t, N(s) = 1)}{\mathbb{P}(N(s) = 1)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(N(t) = 0, N(s) = 1)}{\mathbb{P}(N(s) = 1)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(N(t) = 0, N(s) - N(t) = 1)}{\mathbb{P}(N(s) = 1)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(N(t) = 0) \cdot \mathbb{P}(N(s-t) = 1)}{\mathbb{P}(N(s) = 1)} \\ &= \frac{e^{-\lambda t} \cdot \lambda(s-t) \cdot e^{-\lambda(s-t)}}{\lambda s \cdot e^{-\lambda s}} \end{aligned}$$

Y concluimos por lo tanto que

$$\mathbb{P}(T_1 > t|N(s) = 1) = \frac{s-t}{s} = 1 - \frac{t}{s}$$

Lo que implica que

$$\mathbb{P}(T_1 \leq t|N(s) = 1) = \frac{t}{s}$$

Y como además, claramente

- $\mathbb{P}(T_1 \leq t|N(s) = 1) = 0$  si  $t < 0$
- $\mathbb{P}(T_1 \leq t|N(s) = 1) = 1$  si  $t \geq s$

Obtenemos que:

$$F_{T_1|N(s)=1}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \frac{t}{s} & \text{si } 0 \leq t < s \\ 1 & \text{si } t \geq s \end{cases}$$

Y podemos concluir que  $T_1|N(s) = 1 \sim U(0, s)$ .

**Observación 1.1.2** La proposición 1.2.7 puede ser generalizada, en el sentido que si consideramos  $T_1, \dots, T_k$  como tiempos no ordenados, entonces:

$$T_1, \dots, T_k|N(t) = k \stackrel{ilc}{\sim} U(0, t)$$

Y por ende

$$f_{T_1, \dots, T_k|N(t)=k}(t_1, \dots, t_n) = \frac{1}{t^k} \cdot I_{[0,t]^n}(t_1, \dots, t_n)$$

Ahora bien, si consideramos los tiempos ordenados, entonces se verifica que:

$$f_{T_1, \dots, T_k | N(t)=k}(t_1, \dots, t_n) = \frac{k!}{t^k} \cdot I_C(t_1, \dots, t_n)$$

Donde  $C = \{(t_1, \dots, t_k) \in \mathbb{R}^k : 0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq t\}$  Una discusión detallada de este resultado, con la respectiva demostración, puede ser consultada por ejemplo en [26].

**Observación 1.1.3** El resultado discutido en la observación 1.1.2, nos da un método alternativo al mencionado en la observación 1.1.1, para simular un Proceso de Poisson homogéneo. Básicamente, éste consiste en generar un valor de una variable aleatoria  $Po(\lambda t)$ , y en función del valor obtenido, digamos  $k$ , generar  $k$  variables aleatorias uniformes e independientes con ley común  $U(0, t)$ . Una discusión de este algoritmo puede ser encontrado por ejemplo en [22].

## 1.2. Proceso de Poisson No Homogéneo

El Proceso de Poisson no homogéneo, es una extensión natural del Proceso de Poisson, él cual también ha sido ampliamente estudiado en la literatura, por ejemplo por los autores: Sheldon M. Ross [21], Cox & Miller [25], Emanuel Parzen [26], Yuri A. Rozanov [29], entre otros. Este proceso mantiene prácticamente inalterable las propiedades del Proceso de Poisson homogéneo, salvo que ahora la identidad del proceso es una función del tiempo, y por ende, ya no posee incrementos estacionarios; una posible manera de definirlo es la siguiente:

**Definición 1.2.1** Sea  $\{N(t) : t \geq 0\}$  un proceso estocástico en tiempo continuo y con espacio de estados  $E = \mathbb{N}_0$ . Diremos que éste es un Proceso de Poisson no homogéneo, si verifica las siguientes propiedades:

**PPNH 1**  $N(0) = 0$

**PPNH 2** Si  $]a, b] \cap ]c, d] = \emptyset$  entonces  $N(b) - N(a) \perp N(d) - N(c)$ , i.e, el proceso posee incrementos independientes.

**PPNH 3**  $N(t) - N(s) \sim Po(m(t) - m(s))$ , para todo  $0 \leq s < t$ . Donde

$$m(t) = \int_0^t \lambda(u) du$$

Y  $\lambda(t)$  es la intensidad del proceso en cada instante  $t$ .

**PPNH 4**  $\mathbb{P}(N(t + \Delta t) - N(t) \geq 2) \approx 0$  cuando  $\Delta t \approx 0$ . Intuitivamente, esta propiedad se interpreta como que los eventos en un Proceso de Poisson no pueden ocurrir simultáneamente, es decir, en intervalos muy pequeños de tiempo, puede ocurrir a lo más un evento.

Ahora bien, de 1, 2 y 3, es inmediato que:

$$\mathbb{P}(N(t) = k) = \frac{[m(t)]^k \cdot e^{-m(t)}}{k!} \cdot I_{\mathbb{N}_0}(k) \quad (1.2)$$

Es decir, para cada  $t > 0$ , se verifica que  $X \sim \text{Po}(m(t))$ .

**Proposición 1.2.1** *Sea  $\{N(t) : t \geq 0\}$  un Proceso de Poisson no homogéneo, entonces se verifica que, para  $0 < s < t$ :*

$$N(s)|N(t) = n \sim \text{Bin}\left(n, \frac{m(s)}{m(t)}\right)$$

**En efecto:**

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N(s) = k | N(t) = n) &= \frac{\mathbb{P}(N(s) = k, N(t) = n)}{\mathbb{P}(N(t) = n)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(N(s) = k, N(t) - N(s) = n - k)}{\mathbb{P}(N(t) = n)} \end{aligned}$$

Y usando que el proceso posee incrementos independientes, obtenemos que:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N(s) = k | N(t) = n) &= \frac{\mathbb{P}(N(s) = k) \cdot \mathbb{P}(N(t) - N(s) = n - k)}{\mathbb{P}(N(t) = n)} \\ &= \frac{[m(s)]^k \cdot e^{-m(s)}}{s!} \cdot \frac{[m(t) - m(s)]^{n-k} \cdot e^{-[m(t)-m(s)]}}{(n-k)!} \cdot \frac{n!}{[m(t)]^n \cdot e^{-m(t)}} \\ &= \binom{n}{k} \left(\frac{m(s)}{m(t)}\right)^k \left(\frac{m(t) - m(s)}{m(t)}\right)^{n-k} \end{aligned}$$

Desde donde se concluye entonces que:

$$\mathbb{P}(N(s) = k | N(t) = n) = \binom{n}{k} \left(\frac{m(s)}{m(t)}\right)^k \left(1 - \frac{m(s)}{m(t)}\right)^{n-k} I_{\{0,1,\dots,n\}}(k)$$

Con lo cual, queda demostrado que  $N(s)|N(t) = n \sim \text{Bin}\left(n, \frac{m(s)}{m(t)}\right)$ .

La proposición anterior, puede ser generalizada de forma inmediata, como mostramos a continuación.

**Proposición 1.2.2** *Sea  $\{N(t) : t \geq 0\}$  un Proceso de Poisson no homogéneo, entonces para  $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_p < t$ , se verifica que:*

$$(N(t_1), N(t_2) - N(t_1), \dots, N(t_p) - N(t_{p-1})) | N(t) = n \sim \text{Mult}\left(n, \frac{m(t_1)}{m(t)}, \frac{m(t_2) - m(t_1)}{m(t)}, \dots, \frac{m(t_p) - m(t_{p-1})}{m(t)}\right)$$

**En efecto:**

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(N(t_1) = k_1, N(t_2) - N(t_1) = k_2, \dots, N(t_p) - N(t_{p-1}) = k_p | N(t) = n) \\ &= \frac{\mathbb{P}(N(t_1) = k_1, N(t_2) - N(t_1) = k_2, \dots, N(t_p) - N(t_{p-1}) = k_p, N(t) = n)}{\mathbb{P}(N(t) = n)} \\ &= \frac{\mathbb{P}\left(N(t_1) = k_1, N(t_2) - N(t_1) = k_2, \dots, N(t_p) - N(t_{p-1}) = k_p, N(t) - N(t_p) = n - \sum_{j=1}^p k_j\right)}{\mathbb{P}(N(t) = n)} \end{aligned}$$

Y usando nuevamente los incrementos independientes del proceso, tendremos que:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(N(t_1) = k_1, N(t_2) - N(t_1) = k_2, \dots, N(t_p) - N(t_{p-1}) = k_p | N(t) = n) \\
&= \frac{\prod_{j=1}^m \mathbb{P}(N(t_j) - N(t_{j-1}) = k_j) \cdot \mathbb{P}\left(N(t) - N(t_p) = n - \sum_{j=1}^p k_j\right)}{\mathbb{P}(N(t) = n)} \\
&= \prod_{j=1}^m \frac{[m(t_j) - m(t_{j-1})]^{k_j} e^{-[m(t_j) - m(t_{j-1})]}}{k_j!} \cdot \frac{[m(t) - m(t_p)]^{n - \sum_{j=1}^p k_j} e^{-[m(t) - m(t_p)]}}{\left(n - \sum_{j=1}^p k_j\right)!} \cdot \frac{n!}{[m(t)]^n e^{-m(t)}} \\
&= \frac{n!}{k_1! \cdot \dots \cdot k_p! \left(n - \sum_{j=1}^p k_j\right)!} \cdot \left(\frac{m(t_1)}{m(t)}\right)^{k_1} \dots \left(\frac{m(t_p) - m(t_{p-1})}{t}\right)^{k_p} \cdot \left(\frac{m(t) - m(t_p)}{t}\right)^{n - \sum_{j=1}^p k_j}
\end{aligned}$$

De esta forma entonces,

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(N(t_1) = k_1, N(t_2) - N(t_1) = k_2, \dots, N(t_p) - N(t_{p-1}) = k_p | N(t) = n) \\
&= \frac{n!}{k_1! \cdot \dots \cdot k_p! \left(n - \sum_{j=1}^p k_j\right)!} \cdot \left(\frac{m(t_1)}{m(t)}\right)^{k_1} \dots \left(\frac{m(t_p) - m(t_{p-1})}{m(t)}\right)^{k_p} \cdot \left(1 - \sum_{j=1}^p \frac{m(t_j) - m(t_{j-1})}{m(t)}\right)^{n - \sum_{j=1}^p k_j} \\
&\quad \cdot I_C(k_1, \dots, k_p)
\end{aligned}$$

Donde  $C = \left\{ (k_1, \dots, k_p) \in \mathbb{N}_0^p : 0 \leq k_j \leq n, j = 1, \dots, p \wedge \sum_{j=1}^p k_j \leq n \right\}$  Con lo cual queda demostrado que:

$$(N(t_1), N(t_2) - N(t_1), \dots, N(t_p) - N(t_{p-1})) | N(t) = n \sim \text{Mult} \left( n, \frac{m(t_1)}{m(t)}, \frac{m(t_2) - m(t_1)}{m(t)}, \dots, \frac{m(t_p) - m(t_{p-1})}{m(t)} \right)$$

**Proposición 1.2.3** Sea  $\{N(t) : t \geq 0\}$  un Proceso de Poisson no homogéneo, entonces:

1.  $m_N(t) = \mathbb{E}[N(t)] = m(t)$
2.  $v_N(t) = \mathbb{V}[N(t)] = m(t)$
3.  $k_N(t, s) = \mathbf{C}[N(t), N(s)] = \min\{m(t), m(s)\}$

**En efecto** Los resultados de la función de valor medio y de varianza, son inmediatos del hecho que  $N(t) \sim \text{Po}(\lambda t)$ , en tanto, para la covarianza se puede dar la siguiente

demostración: Supongamos en primer lugar que  $t > s$ , entonces:

$$\begin{aligned}
k_N(t, s) &= \mathbf{C}[N(t), N(s)] \\
&= \mathbf{C}[N(t) - N(s) + N(s), N(s)] \\
&= \mathbf{C}[N(t) - N(s), N(s)] + \mathbf{C}[N(s), N(s)] \\
&= m(s)
\end{aligned}$$

Ya que, por incrementos independientes  $\mathbf{C}[N(t) - N(s), N(s)] = 0$  y por otra parte,  $\mathbf{C}[N(s), N(s)] = \mathbb{V}[N(s)] = m(s)$ .

De esta forma, si suponemos ahora que  $t < s$ , será inmediato que  $k_N(t, s) = m(t)$ , y por ende, concluimos que:

$$k_N(t, s) = \mathbf{C}[N(t), N(s)] = \min\{m(t), m(s)\}$$

Como queríamos demostrar.

**Proposición 1.2.4** *Sea  $\{N(t) : t \geq 0\}$  un Proceso de Poisson no homogéneo, y sea  $S_k =$  Tiempo transcurrido hasta el  $k$ -ésimo evento, entonces:*

$$f_{S_k}(s) = \frac{\lambda(s)[m(s)]^{k-1}e^{-m(s)}}{(k-1)!}I_{\mathbb{R}^+}(s)$$

**En efecto:**

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_k > s) &= \mathbb{P}(N(s) \leq k-1) \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} \mathbb{P}(N(s) = j) \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} \frac{[m(s)]^j e^{-m(s)}}{j!}
\end{aligned}$$

Desde donde se concluye entonces que:

$$F_{S_k}(s) = 1 - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{[m(s)]^j e^{-m(s)}}{j!}$$

Y por ende,

$$\begin{aligned}
f_{S_k}(s) &= - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{d}{ds} \frac{[m(s)]^j e^{-m(s)}}{j!} \\
&= - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\lambda(s)j[m(s)]^{j-1}e^{-m(s)} - \lambda(s)[m(s)]^j e^{-m(s)}}{j!} \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\lambda(s)[m(s)]^j e^{-m(s)}}{j!} - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\lambda(s)j[m(s)]^{j-1}e^{-m(s)}}{j!} \\
&= \lambda(s)e^{-m(s)} + \sum_{j=1}^{k-1} \left[ \frac{\lambda(s)[m(s)]^j e^{-m(s)}}{j!} - \frac{\lambda(s)j[m(s)]^{j-1}e^{-m(s)}}{j!} \right]
\end{aligned}$$

Es decir,

$$f_{S_k}(s) = \lambda(s)e^{-m(s)} + \lambda(s)e^{-m(s)} \sum_{j=1}^{k-1} \left[ \frac{[m(s)]^j}{j!} - \frac{[m(s)]^{j-1}}{(j-1)!} \right]$$

Y en virtud de la propiedad del reloj

$$\begin{aligned} f_{S_k}(s) &= \lambda(s)e^{-m(s)} + \lambda(s) \frac{[m(s)]^{k-1} e^{-m(s)}}{(k-1)!} - \lambda(s)e^{-m(s)} \\ &= \lambda(s) \frac{[m(s)]^{k-1} e^{-m(s)}}{(k-1)!} \end{aligned}$$

Con lo cual

$$f_{S_k}(s) = \frac{\lambda(s)[m(s)]^{k-1} e^{-m(s)}}{(k-1)!} I_{\mathbb{R}^+}(s)$$

Como queríamos demostrar.

**Proposición 1.2.5** Sea  $\{N(t) : t \geq 0\}$  un Proceso de Poisson no homogéneo, y sean:

- $T_1 =$  Tiempo transcurrido hasta el primer evento.
- $T_2 =$  Tiempo transcurrido entre el primer y el segundo evento.

Entonces:

1.  $f_{T_1}(t) = \lambda(t)e^{-m(t)} I_{\mathbb{R}^+}(t)$
2.  $f_{T_2|T_1=s}(t) = \lambda(t+s)e^{-[m(t+s)-m(s)]} I_{\mathbb{R}^+}(t)$
3.  $f_{T_2}(t) = \int_0^{+\infty} \lambda(s)\lambda(t+s)e^{-m(t+s)} ds$

**En efecto**

1.  $\mathbb{P}(T_1 > t) = \mathbb{P}(N(t) = 0)$

De esta forma entonces,

$$\begin{aligned} 1 - F_{T_1}(t) &= \frac{[m(t)]^0 e^{-m(t)}}{0!} \\ &= e^{-m(t)} \end{aligned}$$

Con lo cual,

$$f_{T_1}(t) = \lambda(t)e^{-m(t)} I_{\mathbb{R}^+}(t)$$

2. Notemos que

$$\mathbb{P}(T_2 > t | T_1 = s) = \mathbb{P}(N(t+s) - N(s) = 0 | N(s) = 1)$$

Y entonces, en virtud de los incrementos independientes,

$$\mathbb{P}(T_2 > t | T_1 = s) = \mathbb{P}(N(t+s) - N(s) = 0)$$

Desde donde concluimos que:

$$F_{T_2|T_1=s}(t) = 1 - \frac{[m(t+s) - m(s)]^0 e^{-[m(t+s)-m(s)]}}{0!} = 1 - e^{-[m(t+s)-m(s)]}$$

Con lo cual, efectivamente:

$$f_{T_2|T_1=s}(t) = \lambda(t+s)e^{-[m(t+s)-m(s)]}I_{\mathbb{R}^+}(t)$$

3. En base al Teorema de Probabilidad Total y al resultado obtenido en los ítemes anteriores, tenemos que:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_2 > t) &= \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(T_2 > t | T_1 = s) dF_{T_1}(s) \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-[m(t+s)-m(s)]} dF_{T_1}(s) \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-[m(t+s)-m(s)]} \lambda(s) e^{-m(s)} ds \\ &= \int_0^{+\infty} \lambda(s) e^{-m(t+s)} ds \end{aligned}$$

Luego, bajo las condiciones de regularidad necesarias, i.e, la intercambiabilidad entre derivada e integral, obtenemos que:

$$\begin{aligned} f_{T_2}(t) &= -\frac{d}{dt} \int_0^{+\infty} \lambda(s) e^{-m(t+s)} ds \\ &= -\int_0^{+\infty} \frac{d}{dt} \lambda(s) e^{-m(t+s)} ds \\ &= \int_0^{+\infty} \lambda(s) \lambda(t+s) e^{-m(t+s)} ds \end{aligned}$$

Como queríamos demostrar.

**Observación 1.2.1** *Notemos que a diferencia del caso homogéneo, el resultado obtenido en la proposición 1.2.5 nos muestra que:*

- $T_1 \stackrel{\mathcal{L}}{\neq} T_2$
- $T_1 \not\perp T_2$

*Desde ahí entonces, se concluye en forma inmediata que si  $T_k =$  Tiempo transcurrido entre el evento  $k$  y el evento  $k - 1$ , entonces la familia de variables aleatorias  $\{T_1, T_2, T_3, \dots\}$  ya no constituye una familia de variables aleatorias independientes y con una ley de probabilidad común.*

**Proposición 1.2.6** Sea  $\{N(t) : t \geq 0\}$  un Proceso de Poisson no homogéneo, y sea  $T_k =$  Tiempo transcurrido entre el evento  $k$  y el evento  $k - 1$ , entonces:

$$f_{T_k}(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\lambda(s)\lambda(t+s)[m(s)]^{k-2}e^{-m(t+s)}}{(k-2)!} ds$$

**En efecto:**

En virtud del Teorema de Probabilidad Total, los incrementos independientes del Proceso de Poisson no homogéneo, y usando el resultado obtenido en la proposición 1.2.4 tenemos que:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_k > t) &= \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(T_k > t | S_{k-1} = s) dF_{S_{k-1}}(s) \\ &= \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(N(t+s) - N(s) = 0 | N(s) = k-1) dF_{S_{k-1}}(s) \\ &= \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(N(t+s) - N(s) = 0) dF_{S_{k-1}}(s) \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-[m(t+s)-m(s)]} \cdot \frac{\lambda(s)[m(s)]^{k-2}e^{-m(s)}}{(k-2)!} ds \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\lambda(s)[m(s)]^{k-2}e^{-m(t+s)}}{(k-2)!} ds \end{aligned}$$

Luego, bajo las condiciones de regularidad necesarias, i.e, la intercambiabilidad entre derivada e integral, obtenemos que:

$$\begin{aligned} f_{T_k}(t) &= -\frac{d}{dt} \int_0^{+\infty} \frac{\lambda(s)[m(s)]^{k-2}e^{-m(t+s)}}{(k-2)!} ds \\ &= -\int_0^{+\infty} \frac{d}{dt} \frac{\lambda(s)[m(s)]^{k-2}e^{-m(t+s)}}{(k-2)!} ds \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\lambda(s)\lambda(t+s)[m(s)]^{k-2}e^{-m(t+s)}}{(k-2)!} ds \end{aligned}$$

Como queríamos demostrar.

**Proposición 1.2.7** Sea  $\{N(t) : t \geq 0\}$  un Proceso de Poisson no homogéneo, y sea  $T_1$  como fue definido en la proposición 1.2.5, entonces:

$$f_{T_1|N(s)=1} = \frac{\lambda(t)}{m(s)} I_{[0,s]}(t)$$

**En efecto:** Si consideremos  $0 < t < s$  y usamos los incrementos independientes del Proceso de Poisson no homogéneo, tenemos que:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_1 > t | N(s) = 1) &= \frac{\mathbb{P}(T_1 > t, N(s) = 1)}{\mathbb{P}(N(s) = 1)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(N(t) = 0, N(s) = 1)}{\mathbb{P}(N(s) = 1)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(N(t) = 0, N(s) - N(t) = 1)}{\mathbb{P}(N(s) = 1)} \\ &= \frac{e^{-m(t)} \cdot [m(s) - m(t)] \cdot e^{-[m(s)-m(t)]}}{m(s) \cdot e^{-m(s)}} \end{aligned}$$

Y concluimos por lo tanto que

$$\mathbb{P}(T_1 > t | N(s) = 1) = \frac{m(s) - m(t)}{m(s)} = 1 - \frac{m(t)}{m(s)}$$

Lo que implica que

$$\mathbb{P}(T_1 \leq t | N(s) = 1) = \frac{m(t)}{m(s)}$$

Y como además, claramente

- $\mathbb{P}(T_1 \leq t | N(s) = 1) = 0$  si  $t < 0$
- $\mathbb{P}(T_1 \leq t | N(s) = 1) = 1$  si  $t \geq s$

Obtenemos que:

$$F_{T_1 | N(s)=1}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \frac{m(t)}{m(s)} & \text{si } 0 \leq t < s \\ 1 & \text{si } t \geq s \end{cases}$$

Y podemos concluir que  $f_{T_1 | N(s)=1} = \frac{\lambda(t)}{m(s)} I_{]0,s]}(t)$ .

**Proposición 1.2.8** *Sea  $\{X(t) : t \geq 0\}$  un Proceso de Poisson homogéneo de intensidad  $\lambda$ , y supongamos que, independiente de los eventos anteriores, un evento que ocurre en el instante  $t$  se cuenta con probabilidad  $p(t)$ . Entonces, si  $\{N(t) : t \geq 0\}$  es el proceso de los eventos contados, él es un Proceso de Poisson no homogéneo con intensidad  $\lambda(t) = \lambda \cdot p(t)$ .*

La discusión de la demostración puede ser encontrada en [22].

**Observación 1.2.2** *El resultado presentado en la proposición 1.2.8, nos da un método para simular un Proceso de Poisson no homogéneo. Una discusión de este algoritmo puede ser encontrado por ejemplo en [22]. Básicamente, consiste en generar valores de tiempo de un Proceso de Poisson homogéneo  $\{X(t) : t \geq 0\}$  con intensidad  $\lambda$ , y mediante un mecanismo de aceptación rechazo, en función de la probabilidad  $p(t) = \frac{\lambda(t)}{\lambda}$ , generar los valores de un Proceso de Poisson no homogéneo  $\{N(t) : t \geq 0\}$  con intensidad  $\lambda(t)$ .*

### 1.3. Proceso de Cox

Una siguiente etapa natural de generalización del Proceso de Poisson, es asumir que ahora éste ya no sólo es un proceso no homogéneo en el tiempo, sino que además es un proceso cuya intensidad no sólo es función del tiempo, sino también función del azar, es decir, que su función de intensidad es en sí misma una función aleatoria,

es decir, una función del tipo  $\Lambda = \Lambda(t, \omega)$ , o equivalentemente, que la intensidad en sí misma es un proceso estocástico del tipo  $\{\Lambda(t) : t \geq 0\}$ .

Es en 1955 que Cox [1] presenta el caso de este proceso puntual, como una extensión del Proceso de Poisson, cuya principal característica, como ya dijimos, es que es un proceso puntual donde la intensidad en sí misma es un proceso estocástico, tal que condicional a cada realización, o trayectoria de éste, el proceso puntual es un Proceso de Poisson no homogéneo con intensidad dada justamente por ésta. Podemos dar entonces la siguiente definición dada por Diggle, Moraga, Rowlingson & Taylor [3].

**Definición 1.3.1** *El Proceso puntual  $\{N(t) : t \geq 0\}$  es un Proceso de Cox, con Proceso de Intensidad  $\{\Lambda(t) : t \geq 0\}$ , si:*

- $\{\Lambda(t) : t \geq 0\}$  es un proceso estocástico de valores no negativos.
- Condicional a la realización de una trayectoria  $\Lambda(t) = \lambda(t)$ , el proceso  $\{N(t) : t \geq 0\}$  es un Proceso de Poisson no homogéneo, con intensidad  $\lambda(t)$

**Observación 1.3.1** *El Proceso de Cox presentado en la definición 1.3.1, recibe también el nombre de Proceso de Poisson doblemente estocástico o Proceso de Poisson condicionado.*

**Observación 1.3.2** *Existe una definición alternativa para el Proceso de Cox a la presentada en la definición 1.3.1, que es dada por Serfozo [32] y puede ser encontrada una discusión sobre ella en [23]. Básicamente, define el Proceso de Cox como un proceso de Poisson donde su función de valor medio es un proceso estocástico en sí mismo, es decir, donde  $\{N(t) : t \geq 0\}$  es un Proceso de Poisson no homogéneo, con Proceso de valor medio  $\{M(t) : t \geq 0\}$ .*

En general, no es simple obtener la densidad  $f_{N(t)}(k) = \mathbb{P}(N(t) = k)$ , no obstante, se puede dar al menos una solución formal a este problema. En virtud del Teorema de Probabilidad Total:

$$\mathbb{P}(N(t) = k) = \int_{\mathbf{\Lambda}} \mathbb{P}(N(t) = k | \Lambda(t) = \lambda(t)) d\mathbb{P}_{\mathbf{\Lambda}}(\lambda(t)) \quad (1.3)$$

Con  $\mathbf{\Lambda} = \{\Lambda(t) : t \geq 0\}$  y donde la integral debe ser evaluada sobre todas las posibles trayectorias del proceso intensidad  $\{\Lambda(t) : t \geq 0\}$  y con respecto a su ley infinito dimensional, según señalan, por ejemplo, Diggle, Moraga, Rowlingson & Taylor [3].

Ahora bien, podemos notar que la ecuación (1.3), puede ser reescrita como:

$$\mathbb{P}(N(t) = k) = \mathbb{E} [\mathbb{P}(N(t) = k | \Lambda(t))] \quad (1.4)$$

Y entonces, haciendo:

$$M(t) = \int_0^t \Lambda(s) ds \quad (1.5)$$

Y usando el hecho que, condicional a cualquier trayectoria del proceso intensidad  $\{\Lambda(t) : t \geq 0\}$  el proceso  $\{N(t) : t \geq 0\}$  es un Proceso de Poisson no homogéneo, tenemos que:

$$\mathbb{P}(N(t) = k) = \mathbb{E} \left[ \frac{[M(t)]^k e^{-M(t)}}{k!} \right] \quad (1.6)$$

**Observación 1.3.3** En general, la obtención de la densidad de  $N = \{N(t) : t \geq 0\}$  es un problema muy difícil, sino prácticamente imposible, de abordar analíticamente, salvo en casos muy particulares. Un par de ejemplos interesantes de esta situación pueden ser encontrados en la tesis doctoral de Paula Rodriguez Bouzas [23].

**Ejemplo 1.3.1** Otro ejemplo interesante, se obtiene cuando el proceso intensidad es tal que  $\Lambda(t, \omega) = \Lambda(\omega)$ , i.e, es una variable aleatoria constante en el tiempo, es decir, la intensidad a lo largo del tiempo es la misma variable aleatoria. Notemos que este caso no es de todas formas un Proceso de Poisson homogéneo. Consideremos el caso particular en que  $\Lambda \sim \text{Gam}(k, \mu)$ . En tal caso

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N(t) = j) &= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{P}(N(t) = j | \Lambda = \lambda) dF_{\Lambda}(\lambda) \\
&= \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(N(t) = j | \Lambda = \lambda) f_{\Lambda}(\lambda) d\lambda \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda t)^j e^{-\lambda t}}{j!} I_{\mathbb{N}_0}(j) \cdot \frac{\mu^k}{\Gamma(k)} \lambda^{k-1} e^{-\mu \lambda} I_{\mathbb{R}^+}(\lambda) d\lambda \\
&= \frac{t^j}{j!} I_{\mathbb{N}_0}(j) \cdot \frac{\mu^k}{\Gamma(k)} \int_0^{+\infty} \lambda^{j+k-1} e^{-(\mu+t)\lambda} I_{\mathbb{R}^+}(\lambda) d\lambda
\end{aligned}$$

Evidentemente, el integrando en la última ecuación, corresponde al núcleo de una densidad gama, con parámetros  $j + k$  y  $\mu + t$ , por lo que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N(t) = j) &= \frac{t^j}{j!} I_{\mathbb{N}_0}(j) \cdot \frac{\mu^k}{\Gamma(k)} \int_0^{+\infty} \lambda^{j+k-1} e^{-(\mu+t)\lambda} I_{\mathbb{R}^+}(\lambda) d\lambda \\
&= \frac{t^j}{j!} I_{\mathbb{N}_0}(j) \cdot \frac{\mu^k}{\Gamma(k)} \frac{\Gamma(j+k)}{(\mu+t)^{j+k}} \\
&= \frac{\Gamma(j+k)}{j! \Gamma(k)} \frac{t^j \mu^k}{(\mu+t)^{j+k}} I_{\mathbb{N}_0}(j) \\
&= \frac{\Gamma(j+k)}{j! \Gamma(k)} \frac{t^j}{(\mu+t)^j} \frac{\mu^k}{(\mu+t)^k} I_{\mathbb{N}_0}(j)
\end{aligned}$$

Desde donde se concluye entonces que

$$\mathbb{P}(N(t) = j) = \frac{\Gamma(j+k)}{j! \Gamma(k)} \left( \frac{\mu}{\mu+t} \right)^k \left( 1 - \frac{\mu}{\mu+t} \right)^j I_{\mathbb{N}_0}(j)$$

Y por ende

$$N(t) \sim BN \left( k, \frac{\mu}{\mu+t} \right) \tag{1.7}$$

**Observación 1.3.4** El proceso presentado en el ejemplo 1.3.1 cuyas leyes finito dimensionales están dadas por la ecuación (1.7) recibe el nombre de Proceso Binomial Negativo, y justamente una forma de construirlo es la ilustrada de este ejemplo.

**Proposición 1.3.1** Sea  $\{N(t) : t \geq 0\}$  un Proceso de Cox con Proceso Intensidad  $\{\Lambda(t) : t \geq 0\}$  y con Proceso de Valor Medio  $\{M(t) : t \geq 0\}$ , definido en la ecuación (1.5), entonces se verifica que:

1.  $\mathbb{E}[N(t)] = \mathbb{E}[M(t)]$
2.  $\mathbb{V}[N(t)] = \mathbb{V}[M(t)] + \mathbb{E}[M(t)]$
3.  $\mathbf{C}[N(t), N(s)] = \mathbf{C}[M(t), M(s)] + \mathbb{E}[M(\min\{t, s\})]$

**En efecto:**

1. Notemos que:

$$\mathbb{E}[N(t)] = \mathbb{E}(\mathbb{E}[N(t)|\Lambda(t)])$$

Y como, condicional a cualquier trayectoria del proceso, se verifica que:

$$N(t)|\Lambda(t) = \lambda(t) \sim \text{Po}(m(t))$$

Con  $m(t) = \int_0^t \lambda(s)ds$ , tenemos que entonces:

$$\mathbb{E}[N(t)|\Lambda(t)] = M(t)$$

Con  $M(t)$  definido en la ecuación (1.5). Y por ende,

$$\mathbb{E}[N(t)] = \mathbb{E}[M(t)]$$

2. Notemos que:

$$\mathbb{V}[N(t)] = \mathbb{E}(\mathbb{V}[N(t)|\Lambda(t)]) + \mathbb{V}(\mathbb{E}[N(t)|\Lambda(t)])$$

Y como, condicional a cualquier trayectoria del proceso, se verifica que:

$$N(t)|\Lambda(t) = \lambda(t) \sim \text{Po}(m(t))$$

Con  $m(t) = \int_0^t \lambda(s)ds$ , tenemos que entonces:

$$\mathbb{E}[N(t)|\Lambda(t)] = \mathbb{V}[N(t)|\Lambda(t)] = M(t)$$

Con  $M(t)$  definido en la ecuación (1.5). Y por ende,

$$\mathbb{V}[N(t)] = \mathbb{E}[M(t)] + \mathbb{V}[M(t)]$$

3. Notemos que:

$$\mathbf{C}[N(t), N(s)] = \mathbb{E}[N(t) \cdot N(s)] - \mathbb{E}[N(t)] \cdot \mathbb{E}[N(s)]$$

Y usando el resultado probado para la esperanza, tenemos entonces que:

$$\mathbf{C}[N(t), N(s)] = \mathbb{E}[N(t) \cdot N(s)] - \mathbb{E}[M(t)] \cdot \mathbb{E}[M(s)]$$

Por otra parte

$$\mathbb{E}[N(t) \cdot N(s)] = \mathbb{E}(\mathbb{E}[N(t) \cdot N(s)|\Lambda(t)])$$

Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $t < s$ , entonces, tenemos que:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\mathbb{E}[N(t) \cdot N(s)|\Lambda(t)]) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}[N(t) \cdot (N(t) + [N(s) - N(t)])|\Lambda(t)]) \\ &= \mathbb{E}(\mathbb{E}[N^2(t)|\Lambda(t)] + \mathbb{E}[N(t) \cdot [N(s) - N(t)|\Lambda(t)]) \end{aligned}$$

Y usando el hecho que condicional a cualquier trayectoria del proceso, se verifica que:

$$N(t)|\Lambda(t) = \lambda(t) \sim \text{Po}(m(t))$$

En virtud de los incrementos independientes del Proceso de Poisson no homogéneo, tenemos que:

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}[N(t) \cdot N(s)|\Lambda(t)]) = \mathbb{E}(\mathbb{E}[N^2(t)|\Lambda(t)] + \mathbb{E}[N(t)|\Lambda(t)] \cdot \mathbb{E}[N(s) - N(t)|\Lambda(t)])$$

Con lo cual obtenemos que:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\mathbb{E}[N(t) \cdot N(s)|\Lambda(t)]) &= \mathbb{E}(M(t) + M^2(t) + M(t) \cdot [M(s) - M(t)]) \\ &= \mathbb{E}(M(t) + M^2(t) + M(t)M(s) - M^2(t)) \\ &= \mathbb{E}[M(t)] + \mathbb{E}[M(t)M(s)] \end{aligned}$$

Y de esta forma entonces, tenemos que para  $t < s$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{C}[N(t), N(s)] &= \mathbb{E}[M(t)] + \mathbb{E}[M(t) \cdot M(s)] - \mathbb{E}[M(t)] \cdot \mathbb{E}[M(s)] \\ &= \mathbb{E}[M(t)] + \mathbf{C}[M(t), M(s)] \end{aligned}$$

Resultando inmediato que, para  $t > s$ :

$$\mathbf{C}[N(t), N(s)] = \mathbb{E}[M(s)] + \mathbf{C}[M(t), M(s)]$$

Desde donde concluimos entonces que:

$$\mathbf{C}[N(t), N(s)] = \mathbf{C}[M(t), M(s)] + \mathbb{E}[M(\min\{t, s\})]$$

Como queríamos demostrar.

**Observación 1.3.5** 1. Una demostración alternativa para la media y la varianza, basada en funciones características, puede encontrarse en P. Rodriguez B.[23].

2. Un resultado un poco más general, válido en conjuntos medibles, incluso en  $\mathbb{R}^p$ , será presentado en la sección 3.3.2. Dicho resultado se encuentra discutido en el trabajo de Jesper Møller & Rasmus. P. Waagepetersen [28].

**Proposición 1.3.2** Sea  $\{N(t) : t \geq 0\}$  un Proceso de Cox con Proceso Intensidad  $\{\Lambda(t) : t \geq 0\}$  y con Proceso de Valor Medio  $\{M(t) : t \geq 0\}$ , definido en la ecuación (1.5), y definamos  $T_1 =$  Tiempo transcurrido hasta el primer evento. Entonces se verifica que:

$$\mathbb{P}(T_1 > t) = \varphi_{M(t)}(i)$$

Donde  $\varphi_{M(t)}$  denota la función característica de  $M(t)$  en cada instante  $t$ , i.e,

$$\varphi_{M(t)}(u) = \mathbb{E}[e^{i \cdot u \cdot M(t)}]$$

**En efecto**

En virtud de la ecuación (1.6), tenemos que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T_1 > t) &= \mathbb{P}(N(t) = 0) \\
&= \mathbb{E} \left[ \frac{[M(t)]^0 e^{-M(t)}}{0!} \right] \\
&= \mathbb{E} [e^{-M(t)}] \\
&= \mathbb{E} [e^{i^2 \cdot M(t)}] \\
&= \varphi_{M(t)}(i)
\end{aligned}$$

**Proposición 1.3.3** Sea  $\{N(t) : t \geq 0\}$  un Proceso de Cox con Proceso Intensidad  $\{\Lambda(t) : t \geq 0\}$  y con Proceso de Valor Medio  $\{M(t) : t \geq 0\}$ , definido en la ecuación (1.5), y definamos  $S_k =$  Tiempo transcurrido hasta el  $k$ -ésimo evento. Entonces se verifica que:

$$\mathbb{P}(S_k > s) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j!} \varphi_{M(t)-j \ln M(t)}(i)$$

**En efecto**

En virtud de la ecuación (1.6), tenemos que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_k > s) &= \mathbb{P}(N(t) \leq k-1) \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} \mathbb{P}(N(t) = j) \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} \mathbb{E} \left[ \frac{[M(t)]^j e^{-M(t)}}{j!} \right] \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j!} \cdot \mathbb{E} ([M(t)]^j e^{-M(t)}) \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j!} \cdot \mathbb{E} (e^{-[M(t)-j \ln M(t)]}) \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j!} \cdot \mathbb{E} (e^{i^2 [M(t)-j \ln M(t)]}) \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j!} \varphi_{M(t)-j \ln M(t)}(i)
\end{aligned}$$

**Observación 1.3.6** Otra forma de presentar los resultados de las proposiciones 1.3.2 y 1.3.3 es simplemente como:

- $\mathbb{P}(T_1 > t) = \mathbb{E} [e^{-M(t)}]$
- $\mathbb{P}(S_k > s) = \mathbb{E} \left[ e^{-M(t)} \sum_{j=1}^{k-1} \frac{[M(t)]^j}{j!} \right]$

Respectivamente.

**Ejemplo 1.3.2** Nuevamente, tal como con la densidad de  $N(t)$ , el determinar la densidad de  $T_1$  y  $S_k$  puede tornarse bastante complejo, sin embargo, un ejemplo sencillo que permite obtener resultados cerrados analíticamente, es la continuación del ejemplo 1.3.1.

- Para el caso de  $T_1$ :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_1 > t) &= \mathbb{P}(N(t) = 0) \\ &= \frac{\Gamma(0+k)}{0!\Gamma(k)} \left(\frac{\mu}{\mu+t}\right)^k \left(1 - \frac{\mu}{\mu+t}\right)^0 I_{\mathbb{N}_0}(0) \\ &= \left(\frac{\mu}{\mu+t}\right)^k\end{aligned}$$

Es decir, para  $t \geq 0$

$$\mathbb{P}(T_1 > t) = \left(\frac{\mu}{\mu+t}\right)^k$$

Desde donde es inmediato que

$$F_{T_1}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 - \left(\frac{\mu}{\mu+t}\right)^k & t \geq 0. \end{cases}$$

Y por ende,

$$f_{T_1}(t) = \frac{k\mu^k}{(\mu+t)^{k+1}} I_{\mathbb{R}^+}(t)$$

Sea  $W = \mu + T_1$  Entonces es evidente que,

$$\begin{aligned}f_W(w) &= f_{T_1}(w - \mu) \\ &= \frac{k\mu^k}{w^{k+1}} I_{[\mu, +\infty[}(t)\end{aligned}$$

Desde donde se concluye que  $W = \mu + T_1 \sim \text{Par}(k, \mu)$ .

- Para el caso de  $S_j$ :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_j > s) &= \mathbb{P}(N(s) \leq j-1) \\ &= \sum_{x=0}^{j-1} \mathbb{P}(N(s) = x) \\ &= \sum_{x=0}^{j-1} \frac{\Gamma(x+k)}{x!\Gamma(k)} \left(\frac{\mu}{\mu+s}\right)^k \left(1 - \frac{\mu}{\mu+s}\right)^x\end{aligned}$$

Por lo que, para  $s \geq 0$

$$\begin{aligned}
f_{S_j}(s) &= -\frac{d}{ds} \sum_{x=0}^{j-1} \frac{\Gamma(x+k)}{x!\Gamma(k)} \left(\frac{\mu}{\mu+s}\right)^k \left(1 - \frac{\mu}{\mu+s}\right)^x \\
&= -\sum_{x=0}^{j-1} \frac{\Gamma(x+k)}{x!\Gamma(k)} \mu^k \frac{d}{dw} s^x (\mu+s)^{-(k+x)} \\
&= -\sum_{x=0}^{j-1} \frac{\Gamma(x+k)}{x!\Gamma(k)} \mu^k [xs^{x-1}(\mu+s)^{-(k+x)} - s^x(k+x)(\mu+s)^{-(k+x+1)}] \\
&= \sum_{x=0}^{j-1} \frac{\Gamma(x+k)}{x!\Gamma(k)} \mu^k [s^x(k+x)(\mu+s)^{-(k+x+1)} - xs^{x-1}(\mu+s)^{-(k+x)}]
\end{aligned}$$

Ahora bien, dejando fuera el primer término y usando la propiedad telescópica, obtenemos que:

$$\begin{aligned}
&= k\mu^k(\mu+s)^{-(k+1)} \\
&+ \sum_{x=1}^{j-1} \frac{\Gamma(x+k)}{x!\Gamma(k)} \mu^k [s^x(k+x)(\mu+s)^{-(k+x+1)} - xs^{x-1}(\mu+s)^{-(k+x)}] \\
&= \frac{k\mu^k}{(\mu+s)^{k+1}} \\
&+ \sum_{x=1}^{j-1} \frac{\mu^k}{\Gamma(k)} \left[ \frac{s^x}{x!} \Gamma(k+x+1)(\mu+s)^{-(k+x+1)} - \frac{s^{x-1}}{(x-1)!} \Gamma(x+k)(\mu+s)^{-(k+x)} \right] \\
&= \frac{k\mu^k |S|}{(\mu+s)^{k+1}} + \frac{\mu^k}{\Gamma(k)} \left[ \frac{s^{j-1}}{(j-1)!} \Gamma(k+j)(\mu+s)^{-(k+j)} - (\mu+s)^{-k-1} \Gamma(k+1) \right] \\
&= \frac{k\mu^k}{(\mu+s)^{k+1}} + \frac{\mu^k}{\Gamma(k)} \cdot \frac{s^{j-1}}{(j-1)!} \Gamma(k+j)(\mu+s)^{-(k+j)} - \frac{\mu^k}{\Gamma(k)} \cdot \frac{\Gamma(k+1)}{(\mu+s)^{k+1}} \\
&= \frac{\mu^k}{\Gamma(k)} \cdot \frac{s^{j-1}}{(j-1)!} \Gamma(k+j)(\mu+s)^{-(k+j)}
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$f_{S_j}(s) = \frac{\mu^k}{\Gamma(k)} \cdot \frac{s^{j-1}}{(j-1)!} \Gamma(k+j)(\mu+s)^{-(k+j)} I_{\mathbb{R}^+}(s)$$

# Capítulo 2

## Ley o Distribución Folded Normal

### 2.1. Construcción del Modelo

En 1961, Leone, F.C., Nelson, L.S. & Nottingham, R.B. [6] presentan la Ley o Distribución Folded-Normal, la que simplemente se construye de la siguiente forma:

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow Y = |X| \sim \text{FN}(\mu, \sigma^2) \quad (2.1)$$

A partir de ahí, resulta inmediato que la densidad de  $Y$  está dada por:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= f_X(y) + f_X(-y) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} I_{\mathbb{R}^+}(y) + \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(-y-\mu)^2}{2\sigma^2}} I_{\mathbb{R}^-}(-y) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} I_{\mathbb{R}^+}(y) + \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y+\mu)^2}{2\sigma^2}} I_{\mathbb{R}^+}(y) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \left[ e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(y+\mu)^2}{2\sigma^2}} \right] I_{\mathbb{R}^+}(y) \end{aligned}$$

Es decir,  $Y \sim \text{FN}(\mu, \sigma^2)$  si y sólo sí:

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \left[ e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(y+\mu)^2}{2\sigma^2}} \right] I_{\mathbb{R}^+}(y) \quad (2.2)$$

N.L. Johnson [34] propone una forma alternativa para esta densidad, la cual es:

$$f_Y(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi\sigma^2}} e^{-\frac{y^2+\mu^2}{2\sigma^2}} \cosh\left(\frac{\mu y}{\sigma^2}\right) I_{\mathbb{R}^+}(y) \quad (2.3)$$

Ya que evidentemente:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \left[ e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(y+\mu)^2}{2\sigma^2}} \right] I_{\mathbb{R}^+}(y) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \left[ e^{-\frac{y^2-2y\mu+\mu^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{y^2+2y\mu+\mu^2}{2\sigma^2}} \right] I_{\mathbb{R}^+}(y) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{y^2+\mu^2}{2\sigma^2}} \left[ e^{\frac{y\mu}{\sigma^2}} + e^{-\frac{y\mu}{\sigma^2}} \right] I_{\mathbb{R}^+}(y) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi\sigma^2}} e^{-\frac{y^2+\mu^2}{2\sigma^2}} \cosh\left(\frac{\mu y}{\sigma^2}\right) I_{\mathbb{R}^+}(y) \end{aligned}$$

A partir de la representación de la ecuación (2.3), Michail Tsagris, Christina Beneki & Hossein Hassani [2] proponer usar la expansión en Serie de Taylor para  $\cosh^1$  y obtener así una tercera representación, Dada por:

$$f_Y(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi\sigma^2}} e^{-\frac{y^2+\mu^2}{2\sigma^2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\mu y)^{2n}}{(2n)!\sigma^{2n}} I_{\mathbb{R}^+}(y) \quad (2.4)$$

**Observación 2.1.1** Naturalmente, un caso particular de esta ley, lo constituye la Ley Half-Normal, construida como:

$$X \sim N(0, \sigma^2) \Rightarrow Y = |X| \sim HN(\sigma^2) \quad (2.5)$$

Cuya densidad está dada por

$$f_Y(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} I_{\mathbb{R}^+}(y) \quad (2.6)$$

Es decir,

$$Y \sim FN(0, \sigma^2) \Leftrightarrow Y \sim HN(\sigma^2)$$

**Proposición 2.1.1** Sea  $Y \sim FN(\mu, \sigma^2)$ , entonces:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ \frac{1}{2} \left[ \operatorname{erf}\left(\frac{y-\mu}{\sigma\sqrt{2}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{y+\mu}{\sigma\sqrt{2}}\right) \right] & y \geq 0. \end{cases}$$

Donde,  $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$ .

**En efecto:**

Es claro que para  $y < 0$ , se verifica que  $F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = 0$ . Por otra parte, para  $y \geq 0$ .

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \int_{-\infty}^y f_Y(w) dw \\ &= \int_0^y \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \left[ e^{-\frac{(w-\mu)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(w+\mu)^2}{2\sigma^2}} \right] \right) dw \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \left( \int_0^y e^{-\frac{(w-\mu)^2}{2\sigma^2}} dw + \int_0^y e^{-\frac{(w+\mu)^2}{2\sigma^2}} dw \right) \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>En dicho artículo, [2], hay un error, por cuanto ellos utilizan la expansión  $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n}}{(2n)!}$  la cual en realidad corresponde a la expansión del coseno circular, y no del hipérbolico, ver por ejemplo G. Bobadilla & R. Labarca [35]. Es decir, las representaciones correctas son:

- $\cos \theta = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n}}{(2n)!}$
- $\cosh \theta = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\theta^{2n}}{(2n)!}$

En el presente trabajo presentamos la representación de la densidad en la ecuación 2.3 corrigiendo dicho error

Ahora bien, en la primera integral podemos hacer el cambio de variable  $t = \frac{w - \mu}{\sigma\sqrt{2}}$  y en la segunda  $t = \frac{w + \mu}{\sigma\sqrt{2}}$  y obtendremos que:

$$\begin{aligned}
F_Y(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \sigma\sqrt{2} \left( \int_{\frac{-\mu}{\sigma\sqrt{2}}}^{\frac{y-\mu}{\sigma\sqrt{2}}} e^{-t^2} dt + \int_{\frac{\mu}{\sigma\sqrt{2}}}^{\frac{y+\mu}{\sigma\sqrt{2}}} e^{-t^2} dt \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( \int_0^{\frac{y-\mu}{\sigma\sqrt{2}}} e^{-t^2} dt + \int_{\frac{-\mu}{\sigma\sqrt{2}}}^0 e^{-t^2} dt + \int_0^{\frac{y+\mu}{\sigma\sqrt{2}}} e^{-t^2} dt + \int_{\frac{\mu}{\sigma\sqrt{2}}}^0 e^{-t^2} dt \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[ \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf} \left( \frac{y-\mu}{\sigma\sqrt{2}} \right) + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf} \left( \frac{y-\mu}{\sigma\sqrt{2}} \right) + \int_{\frac{-\mu}{\sigma\sqrt{2}}}^0 e^{-t^2} dt + \int_{\frac{\mu}{\sigma\sqrt{2}}}^0 e^{-t^2} dt \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[ \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf} \left( \frac{y-\mu}{\sigma\sqrt{2}} \right) + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf} \left( \frac{y-\mu}{\sigma\sqrt{2}} \right) + \int_{\frac{-\mu}{\sigma\sqrt{2}}}^0 e^{-t^2} dt - \int_0^{\frac{\mu}{\sigma\sqrt{2}}} e^{-t^2} dt \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{y-\mu}{\sigma\sqrt{2}} \right) + \operatorname{erf} \left( \frac{y+\mu}{\sigma\sqrt{2}} \right) \right]
\end{aligned}$$

Como queríamos demostrar.

## 2.2. Esperanza y Varianza

**Proposición 2.2.1** Sea  $X \sim FN(\mu, \sigma^2)$ , entonces:

$$\mathbb{E}[X] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma \cdot e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} + \mu \cdot \left[ 1 - 2\Phi \left( -\frac{\mu}{\sigma} \right) \right].$$

Donde  $\Phi(z) = \mathbb{P}(Z \leq z)$  para  $Z \sim N(0, 1)$ .

**En efecto:**

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \int_0^{+\infty} x dF_X(x) \\
&= \int_0^{+\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \left[ e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(x+\mu)^2}{2\sigma^2}} \right] dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \left[ \int_0^{+\infty} x e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx + \int_0^{+\infty} x e^{-\frac{(x+\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \right]
\end{aligned}$$

Ahora bien, en la primera integral podemos hacer el cambio de variable  $t = \frac{x - \mu}{\sigma\sqrt{2}}$  y en la segunda  $t = \frac{x + \mu}{\sigma\sqrt{2}}$  y obtendremos que:

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \left[ \int_{\frac{-\mu}{\sigma\sqrt{2}}}^{+\infty} (t\sigma\sqrt{2} + \mu) e^{-t^2} \sigma\sqrt{2} dt + \int_{\frac{\mu}{\sigma\sqrt{2}}}^{+\infty} (t\sigma\sqrt{2} - \mu) e^{-t^2} \sigma\sqrt{2} dt \right]$$

Notemos ahora lo siguiente:

- Para la primera integral, tenemos que:

$$\int_{\frac{-\mu}{\sigma\sqrt{2}}}^{+\infty} (t\sigma\sqrt{2} + \mu)e^{-t^2} \sigma\sqrt{2} dt = 2\sigma^2 \int_{\frac{-\mu}{\sigma\sqrt{2}}}^{+\infty} te^{-t^2} dt + \mu\sigma\sqrt{2} \int_{\frac{-\mu}{\sigma\sqrt{2}}}^{+\infty} e^{-t^2} dt$$

Si en el primer término hacemos  $w = t^2$  y en el segundo  $t = \frac{v}{\sqrt{2}}$ , obtendremos que:

$$\begin{aligned} \int_{\frac{-\mu}{\sigma\sqrt{2}}}^{+\infty} (t\sigma\sqrt{2} + \mu)e^{-t^2} \sigma\sqrt{2} dt &= \sigma^2 \int_{\frac{\mu^2}{2\sigma^2}}^{+\infty} e^{-w} dw + \mu\sigma \int_{\frac{-\mu}{\sigma}}^{+\infty} e^{-\frac{v^2}{2}} dv \\ &= \sigma^2 e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} + \sqrt{2\pi}\mu\sigma \left[1 - \Phi\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right)\right] \end{aligned}$$

Por cuanto la integral del primer término corresponde a  $\mathbb{P}\left(\xi > \frac{\mu^2}{2\sigma^2}\right)$ , con  $\xi \sim \text{Exp}(1)$ , en tanto que la integral del segundo término corresponde a  $\sqrt{2\pi} \cdot \mathbb{P}\left(Z > -\frac{\mu}{\sigma}\right)$ , con  $Z \sim N(0, 1)$ .

- Para la segunda integral, tenemos que:

$$\int_{\frac{\mu}{\sigma\sqrt{2}}}^{+\infty} (t\sigma\sqrt{2} - \mu)e^{-t^2} \sigma\sqrt{2} dt = 2\sigma^2 \int_{\frac{\mu}{\sigma\sqrt{2}}}^{+\infty} te^{-t^2} dt - \mu\sigma\sqrt{2} \int_{\frac{\mu}{\sigma\sqrt{2}}}^{+\infty} e^{-t^2} dt$$

Si en el primer término hacemos  $w = t^2$  y en el segundo  $t = \frac{v}{\sqrt{2}}$ , obtendremos que:

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\mu}{\sigma\sqrt{2}}}^{+\infty} (t\sigma\sqrt{2} - \mu)e^{-t^2} \sigma\sqrt{2} dt &= \sigma^2 \int_{\frac{\mu^2}{2\sigma^2}}^{+\infty} e^{-w} dw - \mu\sigma \int_{\frac{\mu}{\sigma}}^{+\infty} e^{-\frac{v^2}{2}} dv \\ &= \sigma^2 e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} - \sqrt{2\pi}\mu\sigma \left[1 - \Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)\right] \end{aligned}$$

Por cuanto la integral del primer término corresponde a  $\mathbb{P}\left(\xi > \frac{\mu^2}{2\sigma^2}\right)$ , con  $\xi \sim \text{Exp}(1)$ , en tanto que la integral del segundo término corresponde a  $\sqrt{2\pi} \cdot \mathbb{P}\left(Z > \frac{\mu}{\sigma}\right)$ , con  $Z \sim N(0, 1)$ .

De esta forma entonces,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} \cdot \left( \sigma^2 e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} + \sqrt{2\pi}\mu\sigma \left[1 - \Phi\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right)\right] + \sigma^2 e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} - \sqrt{2\pi}\mu\sigma \left[1 - \Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)\right] \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} \cdot \left( 2\sigma^2 e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} + \sqrt{2\pi}\mu\sigma \left[1 - \Phi\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right)\right] - \sqrt{2\pi}\mu\sigma \Phi\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} \cdot \left[ 2\sigma^2 e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} + \sqrt{2\pi}\mu\sigma - 2\sqrt{2\pi}\mu\sigma \Phi\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right) \right] \end{aligned}$$

Con lo cual,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \left[ 2\sigma^2 e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} + \sqrt{2\pi}\mu\sigma \left( 1 - 2\Phi\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right) \right) \right] \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} + \mu \left( 1 - 2\Phi\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right) \right)\end{aligned}$$

Como queríamos demostrar.

**Proposición 2.2.2** Sea  $X \sim FN(\mu, \sigma^2)$ , entonces:

$$\mathbb{V}[X] = \mu^2 + \sigma^2 - \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma \cdot e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} + \mu \cdot \left[ 1 - 2\Phi\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right) \right] \right\}^2$$

**En efecto:**

$$\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}^2[X]$$

Y claramente:

- De la proposición 2.2.1:

$$\mathbb{E}^2[X] = \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma \cdot e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} + \mu \cdot \left[ 1 - 2\Phi\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right) \right] \right\}^2$$

- Sea  $W \sim N(\mu, \sigma^2)$ 
  - Entonces claramente  $\mathbb{E}[W^2] = \mu^2 + \sigma^2$
  - De la ecuación (2.1) tenemos que entonces  $|W| \sim FN(\mu, \sigma^2)$
  - Y como  $\mathbb{E}[|W|^2] = \mathbb{E}[W^2] = \mu^2 + \sigma^2$ , sigue que la media cuadrática de una Folded Normal es  $\mu^2 + \sigma^2$

En base a lo anterior, tenemos entonces que efectivamente:

$$\mathbb{V}[X] = \mu^2 + \sigma^2 - \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma \cdot e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} + \mu \cdot \left[ 1 - 2\Phi\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right) \right] \right\}^2$$

Como queríamos demostrar.

**Observación 2.2.1** Para  $X \sim FN(\mu, \sigma^2)$ , es posible también determinar su moda y su mediana, i.e, al menos formalmente existen, por cuanto su densidad admite un valor  $m_0 = \operatorname{argmax} f_X(x)$ , y naturalmente entonces su moda es  $\mathbb{M}_o[X] = m_0$ ; y por otra parte, su función de distribución también admite un valor  $m : F_X(m) = \frac{1}{2}$  y naturalmente entonces su mediana es  $\mathbb{M}[X] = m$ . Sin embargo, no es posible determinar expresiones cerradas para las mismas:

- Para el caso de  $\mathbb{M}_o[X]$ , Tsagris, Beneki & Hassani [2], demuestran que es posible obtener la siguiente ecuación para determinar la moda mediante el Algoritmo de Punto Fijo:

$$m_0 = -\frac{\sigma^2}{2\mu} \ln \frac{\mu - m_0}{\mu + m_0}$$

- Para el caso de  $\mathbb{M}[X]$ , es posible explorar algún método numérico a partir de la igualdad

$$\frac{1}{2} \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{m - \mu}{\sigma\sqrt{2}} \right) + \operatorname{erf} \left( \frac{m + \mu}{\sigma\sqrt{2}} \right) \right] = \frac{1}{2}$$

O equivalentemente:

$$\operatorname{erf} \left( \frac{m - \mu}{\sigma\sqrt{2}} \right) + \operatorname{erf} \left( \frac{m + \mu}{\sigma\sqrt{2}} \right) = 1$$

- Una alternativa, es proceder por punto fijo, al igual que para la moda, y entonces obtener la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} \operatorname{erf} \left( \frac{m - \mu}{\sigma\sqrt{2}} \right) + \operatorname{erf} \left( \frac{m + \mu}{\sigma\sqrt{2}} \right) &= 1 \Leftrightarrow \\ \operatorname{erf} \left( \frac{m - \mu}{\sigma\sqrt{2}} \right) &= 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{m + \mu}{\sigma\sqrt{2}} \right) \Leftrightarrow \\ \frac{m - \mu}{\sigma\sqrt{2}} &= \operatorname{erf}^{-1} \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{m + \mu}{\sigma\sqrt{2}} \right) \right] \Leftrightarrow \\ m &= \mu + \sigma\sqrt{2} \cdot \operatorname{erf}^{-1} \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{m + \mu}{\sigma\sqrt{2}} \right) \right] \end{aligned}$$

Y entonces, a partir de la ecuación:

$$m = \mu + \sigma\sqrt{2} \cdot \operatorname{erf}^{-1} \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{m + \mu}{\sigma\sqrt{2}} \right) \right]$$

proceder por el método de punto fijo.

- Otra alternativa, es proceder por Newton-Raphson, usando el hecho que, en virtud del Teorema Fundamental del Cálculo [35], tenemos que:

$$\frac{d}{dx} \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$$

Y por ende, al resolver la ecuación:

$$\operatorname{erf} \left( \frac{m - \mu}{\sigma\sqrt{2}} \right) + \operatorname{erf} \left( \frac{m + \mu}{\sigma\sqrt{2}} \right) = 1$$

Podemos definir:

$$h(m) = \operatorname{erf} \left( \frac{m - \mu}{\sigma\sqrt{2}} \right) + \operatorname{erf} \left( \frac{m + \mu}{\sigma\sqrt{2}} \right) - 1$$

Y entonces, la mediana estará dada por el valor al que converja la sucesión  $\{m_k\}$  definida recursivamente como:

$$m_{k+1} = m_k - \frac{\operatorname{erf} \left( \frac{m_k - \mu}{\sigma\sqrt{2}} \right) + \operatorname{erf} \left( \frac{m_k + \mu}{\sigma\sqrt{2}} \right) - 1}{\frac{1}{\sigma\sqrt{2}} \left[ \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{m_k - \mu}{\sigma\sqrt{2}}\right)^2} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{m_k + \mu}{\sigma\sqrt{2}}\right)^2} \right]}$$

Para el caso  $\mu = 0$ , i.e, en el caso de la Half-Normal, existen sin embargo soluciones cerradas para la moda y la mediana:

**Proposición 2.2.3** Sea  $X \sim FN(0, \sigma^2)$ , i.e,  $X \sim HN(\sigma^2)$ , entonces:

1.  $\mathbb{M}_o[X] = 0$ .
2.  $\mathbb{M}[X] = \sigma\sqrt{2} \cdot \text{erf}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ .

**En efecto:**

1. En el caso en que  $X \sim HN(\sigma^2)$ , la densidad adopta la forma dada en la ecuación (2.6), y entonces:

$$f'_X(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi\sigma^2}} \cdot (-2x) \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

Por lo que  $f'_X(x) < 0$  para  $x \geq 0$ , lo que implica que  $f_X$  es estrictamente decreciente en  $\mathbb{R}_0^+$ , y por ende, su máximo lo alcanza en  $x = 0$ , es decir:

$$0 = \text{argmax } f_X(x) \Rightarrow \mathbb{M}_o[X] = 0$$

2. En el caso en que  $X \sim HN(\sigma^2)$ , su función de distribución adopta, para  $x \geq 0$ , la forma:

$$F_X(x) = \text{erf}\left(\frac{x}{\sigma\sqrt{2}}\right)$$

Luego, tenemos que:

$$\begin{aligned} F_X(m) &= \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\ \text{erf}\left(\frac{m}{\sigma\sqrt{2}}\right) &= \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\ \frac{m}{\sigma\sqrt{2}} &= \text{erf}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \\ m &= \sigma\sqrt{2} \cdot \text{erf}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

Lo que naturalmente implica entonces que  $\mathbb{M}[X] = \sigma\sqrt{2} \cdot \text{erf}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ , como queríamos demostrar.

# Capítulo 3

## Proceso de Cox con Intensidad Folded Normal

### 3.1. Definición del Proceso

Sean  $\{N(t) : t \geq 0\}$ ,  $\{Z(t) : t \geq 0\}$  y  $\{\Lambda(t) : t \geq 0\}$  tres procesos estocásticos tales que:

1.  $\{Z(t) : t \geq 0\}$  es un Proceso Gaussiano, tal que para cada colección de tiempos  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$  verifica que:

$$\begin{pmatrix} Z(t_1) \\ \vdots \\ Z(t_n) \end{pmatrix} \sim N_n(\mathbf{m}, \Sigma) \quad (3.1)$$

Donde:

- $\mathbf{m} = \begin{pmatrix} \mu \\ \vdots \\ \mu \end{pmatrix}$
- $\Sigma = (\sigma_{ij})$  tal que  $\sigma_{ij} = k_Z(t_i - t_j) = k_Z(h)$ , con  $h = |t_i - t_j|$  y donde  $k_Z(0) = \sigma^2$

Es decir,  $\{Z(t) : t \geq 0\}$  es un Proceso Gaussiano estacionario, en el que en particular se verifica que para todo  $t \geq 0$ :

$$Z(t) \sim N(\mu, \sigma^2) \quad (3.2)$$

2. El proceso de intensidad  $\{\Lambda(t) : t \geq 0\}$  es tal que, para cada  $t$ :

$$\Lambda(t) = |Z(t)| \quad (3.3)$$

Es decir, trabajaremos con la función de enlace  $g(z) = |z|$ , la cual obviamente verifica la definición presentada en la ecuación (1)

3.  $\{N(t) : t \geq 0\}$  es un Proceso de Cox [1], con Proceso de Intensidad dado por  $\{\Lambda(t) : t \geq 0\}$ .

Es decir, siguiendo a Diggle, Moraga, Rowlingson & Taylor [3], para cada trayectoria  $\lambda(t)$  del proceso  $\{\Lambda(t) : t \geq 0\}$ , El proceso  $\{N(t) : t \geq 0\}$  es un Proceso de Poisson no homogéneo de intensidad  $\lambda(t)$ .

## 3.2. Propiedades del Proceso de Intensidad

**Proposición 3.2.1** *El Proceso intensidad  $\{\Lambda(t) : t \geq 0\}$  verifica que.:*

$$\Lambda(t) \sim FN(\mu, \sigma^2)$$

**En efecto:**

1. De la ecuación (3.1), es inmediato que, para todo  $t$ :

$$Z(t) \sim N(\mu, \sigma^2)$$

2. De la definición de la ley del proceso, propuesta en la ecuación (3.3), una consecuencia inmediata, a partir de Leone, F.C., Nelson, L.S. & Nottingham, R.B. [6], es entonces que:

$$\Lambda(t) \sim FN(\mu, \sigma^2)$$

**Proposición 3.2.2** *El Proceso intensidad  $\{\Lambda(t) : t \geq 0\}$  verifica que:*

1. *Su función de valor medio está dada por:*

$$m_\Lambda(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma \cdot e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} + \mu \cdot \left[1 - 2\Phi\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right)\right]. \quad (3.4)$$

2. *Su función de varianza está dada por:*

$$v_\Lambda(t) = \mu^2 + \sigma^2 - \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma \cdot e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} + \mu \cdot \left[1 - 2\Phi\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right)\right] \right\}^2 \quad (3.5)$$

Donde en ambos casos,  $\Phi(\cdot)$  denota la función de distribución de una normal estándar.

**En efecto:** Es inmediato de la proposición 3.2.1, y siguiendo los resultados presentados por Michail Tsagris, Christina Beneki & Hossein Hassani [2], que:

1. Su función de valor medio es:

$$m_\Lambda(t) = \mathbb{E}[\Lambda(t)] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma \cdot e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} + \mu \cdot \left[1 - 2\Phi\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right)\right].$$

2. Su función de varianza es:

$$v_{\Lambda}(t) = \mathbb{V}[\Lambda(t)] = \mu^2 + \sigma^2 - \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma \cdot e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} + \mu \cdot \left[ 1 - 2\Phi\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right) \right] \right\}^2$$

Donde en ambos casos,  $\Phi(\cdot)$  denota la función de distribución de una normal estándar.

**Proposición 3.2.3** *El Proceso intensidad  $\{\Lambda(t) : t \geq 0\}$ , para el caso particular en que  $\mu = 0$ , verifica que:*

$$k_{\Lambda}(t, s) = \mathbf{C}[\Lambda(t), \Lambda(s)] = \frac{2}{\pi} \left[ \sqrt{\sigma^4 - k_Z^2(t-s)} + k_Z(t-s) \cdot \arcsen \frac{k_Z(t-s)}{\sigma^2} - \sigma^2 \right]$$

**En efecto:**

1. Para el caso  $\mu = 0$ , como comentábamos en la ecuación (2.5), tenemos que:

$$\Lambda(t) \sim \text{HN}(\sigma^2)$$

Y como consecuencia inmediata además de la proposición 3.2.2, tenemos que:

$$\mathbb{E}[\Lambda(t)] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma$$

2. Por otra parte, del hecho que  $\Lambda(t) = |Z(t)|$ , obtenemos que:

$$\begin{aligned} k_{\Lambda}(t, s) &= \mathbf{C}[\Lambda(t), \Lambda(s)] \\ &= \mathbf{C}(|Z(t)|, |Z(s)|) \\ &= \mathbb{E}[|Z(t)| \cdot |Z(s)|] - \mathbb{E}[|Z(t)|] \cdot \mathbb{E}[|Z(s)|] \\ &= \mathbb{E}[|Z(t) \cdot Z(s)|] - \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma \right\}^2 \end{aligned}$$

3. Consideremos ahora el siguiente resultado, cuya demostración puede encontrarse en Wenbo V. Li & Ang Wei [17]:

**Lema 3.2.1** *Si  $\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$  es un vector aleatorio gaussiano con vector de media  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  y tal que  $\mathbb{E}(Y_1^2) = \sigma_1^2$  y  $\mathbb{E}(Y_2^2) = \sigma_2^2$ , donde además  $\mathbb{E}(Y_1 Y_2) = \rho \sigma_1 \sigma_2$ , entonces:*

$$\mathbb{E}[|Y_1 Y_2|] = \frac{2\sigma_1 \sigma_2}{\pi} \left( \sqrt{1 - \rho^2} + \rho \cdot \arcsen \rho \right).$$

En base a éste, tenemos que, como para todo  $t \geq 0$ ,  $\mathbb{E}[Z(t)] = 0$  y  $\mathbb{V}[Z(t)] = \sigma^2$ , entonces:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|Z(t) \cdot Z(s)|] &= \frac{2\sigma^2}{\pi} \left[ \sqrt{1 - \left(\frac{k_Z(t-s)}{\sigma^2}\right)^2} + \frac{k_Z(t-s)}{\sigma^2} \cdot \arcsen \frac{k_Z(t-s)}{\sigma^2} \right] \\ &= \frac{2\sigma^2}{\pi} \left[ \sqrt{\frac{\sigma^4 - k_Z^2(t-s)}{\sigma^4}} + \frac{k_Z(t-s)}{\sigma^2} \cdot \arcsen \frac{k_Z(t-s)}{\sigma^2} \right] \\ &= \frac{2}{\pi} \left[ \sqrt{\sigma^4 - k_Z^2(t-s)} + k_Z(t-s) \cdot \arcsen \frac{k_Z(t-s)}{\sigma^2} \right]\end{aligned}$$

4. Luego, podemos concluir entonces que:

$$\begin{aligned}k_\Lambda(t, s) &= \frac{2}{\pi} \left[ \sqrt{\sigma^4 - k_Z^2(t-s)} + k_Z(t-s) \cdot \arcsen \frac{k_Z(t-s)}{\sigma^2} \right] - \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma \right\}^2 \\ &= \frac{2}{\pi} \left[ \sqrt{\sigma^4 - k_Z^2(t-s)} + k_Z(t-s) \cdot \arcsen \frac{k_Z(t-s)}{\sigma^2} \right] - \frac{2\sigma^2}{\pi} \\ &= \frac{2}{\pi} \left[ \sqrt{\sigma^4 - k_Z^2(t-s)} + k_Z(t-s) \cdot \arcsen \frac{k_Z(t-s)}{\sigma^2} - \sigma^2 \right]\end{aligned}$$

Como queríamos demostrar.

**Observación 3.2.1** *Notemos entonces que, a partir de las proposiciones 3.2.2 y 3.2.3, es inmediato que para el caso  $\mu = 0$  el Proceso Intensidad  $\{\Lambda(t) : t \geq 0\}$  es un proceso estacionario de segundo orden. En particular, si hacemos  $t - s = h$  y escogemos la función de covarianza:*

$$k_Z(h) = \sigma^2 \cdot e^{-\beta|h|}; \quad h \in \mathbb{R}.$$

Tendremos que:

$$k_\Lambda(h) = \frac{2}{\pi} \left[ \sqrt{\sigma^4 - \sigma^4 \cdot e^{-2\beta|h|}} + \sigma^2 \cdot e^{-\beta|h|} \cdot \arcsen \frac{\sigma^2 \cdot e^{-\beta|h|}}{\sigma^2} - \sigma^2 \right]$$

O equivalentemente:

$$k_\Lambda(h) = \frac{2\sigma^2}{\pi} \left[ \sqrt{1 - e^{-2\beta|h|}} + e^{-\beta|h|} \cdot \arcsen e^{-\beta|h|} - 1 \right] \quad (3.6)$$

Éste será el primer caso particular que estudiaremos en este trabajo.

**Observación 3.2.2** *Notemos que si en la ecuación (3.6) hacemos  $h = 0$ , obtenemos:*

$$\begin{aligned}k_\Lambda(0) &= \frac{2\sigma^2}{\pi} \left[ \sqrt{1 - 1} + 1 \cdot \arcsen 1 - 1 \right] \\ &= \frac{2\sigma^2}{\pi} \left[ \frac{\pi}{2} - 1 \right] \\ &= \sigma^2 \cdot \frac{\pi - 2}{\pi}\end{aligned}$$

Y por otra parte, en la proposición 3.2.2, para el caso  $\mu = 0$ , obtenemos que:

$$\begin{aligned} v_{\Lambda}(0) &= \sigma^2 - \frac{2}{\pi}\sigma^2 \\ &= \sigma^2 \left[ 1 - \frac{2}{\pi} \right] \\ &= \sigma^2 \cdot \frac{\pi - 2}{\pi} \end{aligned}$$

Lo que muestra la coherencia del resultado obtenido y a la vez nos permite concluir, como síntesis de este caso particular  $\mu = 0$  y  $k_Z(h) = \sigma^2 \cdot e^{-\beta|h|}$ ;  $h \in \mathbb{R}$ , que el proceso  $\{\Lambda(t) : t \geq 0\}$  es tal que:

- Para cada  $t > 0$ ,  $\Lambda(t) \sim FN(0, \sigma^2) \equiv HN(\sigma^2)$
- $m_{\Lambda}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma$
- $v_{\Lambda}(t) = \sigma^2 \cdot \frac{\pi - 2}{\pi}$
- $k_{\Lambda}(h) = \frac{2\sigma^2}{\pi} \left[ \sqrt{1 - e^{-2\beta|h|}} + e^{-\beta|h|} \cdot \text{arc sen } e^{-\beta|h|} - 1 \right]$

**Proposición 3.2.4** El Proceso intensidad  $\{\Lambda(t) : t \geq 0\}$ , para el caso particular en que

$$k_Z(t, s) = \begin{cases} \sigma^2 & t = s \\ 0 & t \neq s. \end{cases}$$

Verifica que:

$$k_{\Lambda}(t, s) = \begin{cases} \mu^2 + \sigma^2 - \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma \cdot e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} + \mu \cdot \left[ 1 - 2\Phi\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right) \right] \right\}^2 & t = s \\ 0 & t \neq s. \end{cases}$$

**En efecto:**

1. Notemos en primer lugar, que bajo esta función de covarianza  $k_Z$ , podemos decir que el proceso  $Z(t) : t \geq 0$  es una familia de variables independientes y con una ley común  $N(\mu, \sigma^2)$ , por cuanto, en virtud de la ecuación (3.1) se deduce de inmediato que para cada  $t \geq 0$ ,  $Z(t) \sim N(\mu, \sigma^2)$  y por otra parte, como  $K_Z(t, s) = \mathbf{C}[Z(t), Z(s)] = 0$  si  $t \neq s$ , se deduce que  $Z(t) \perp Z(s)$  para cada  $t \neq s$ .
2. En segundo lugar, en virtud de la propiedad hereditaria de la independencia, discutida por ejemplo en [19], que establece que si  $U \perp V$  y  $f$  es una función medible, entonces  $f(U) \perp f(V)$ , concluimos, para  $f(\cdot) = |\cdot|$ , que:

$$\begin{aligned} t \neq s &\Rightarrow Z(t) \perp Z(s) \\ &\Rightarrow |Z(t)| \perp |Z(s)| \\ &\Rightarrow \Lambda(t) \perp \Lambda(s) \end{aligned}$$

Con lo cual, es inmediato que  $k_{\Lambda}(t, s) = 0$  si  $t \neq s$

3. Finalmente, para el caso  $t = s$

$$\begin{aligned}
k_{\Lambda}(t, s) &= k_{\Lambda}(t, t) \\
&= \mathbf{C}[\Lambda(t), \Lambda(t)] \\
&= \mathbb{V}[\Lambda(t)] \\
&= \mu^2 + \sigma^2 - \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma \cdot e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} + \mu \cdot \left[ 1 - 2\Phi\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right) \right] \right\}^2
\end{aligned}$$

Donde la última ecuación se obtiene directamente de la proposición 3.2.2.

**Observación 3.2.3** *Notemos entonces que, a partir de las proposiciones 3.2.2 y 3.2.4, es inmediato que para el caso  $k_Z(t, s) = \sigma^2 \cdot I_{\{t=s\}}$ , Donde  $I_A$  denota la función indicatriz, el Proceso Intensidad  $\{\Lambda(t) : t \geq 0\}$  es un proceso estacionario de segundo orden, más aún, es incluso estrictamente estacionario. En particular, si hacemos  $t - s = h$ , ésta puede ser escrita como  $k_Z(h) = \sigma^2 \cdot I_{\{0\}}(h)$  y la función de covarianza del Proceso Intensidad se reduce simplemente a:*

$$k_{\Lambda}(h) = \left( \mu^2 + \sigma^2 - \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma \cdot e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} + \mu \cdot \left[ 1 - 2\Phi\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right) \right] \right\}^2 \right) \cdot I_{\{0\}}(h) \quad (3.7)$$

Éste será el segundo caso particular que estudiaremos en este trabajo.

### 3.3. Propiedades del Proceso de Cox con Intensidad Folded Normal

#### 3.3.1. Densidad del Proceso.

Para el Proceso de Cox  $\{N(t) : t \geq 0\}$ , se verifica que:

$$\mathbb{P}(N(t) = n) = \mathbb{E}[\mathbb{P}(N(t) = n | \Lambda(t))] \quad (3.8)$$

Ahora bien, haciendo

$$M(t) = \int_0^t \Lambda(s) ds \quad (3.9)$$

Y usando el hecho que, condicional a cualquier trayectoria del proceso intensidad  $\{\Lambda(t) : t \geq 0\}$  el proceso  $\{N(t) : t \geq 0\}$  es un Proceso de Poisson no homogéneo, tenemos que:

$$\mathbb{P}(N(t) = n) = \mathbb{E} \left[ \frac{[M(t)]^n e^{-M(t)}}{n!} \right] \quad (3.10)$$

En nuestro caso particular, la ecuación 3.9 puede ser escrita como:

$$M(t) = \int_0^t |Z(s)| ds \quad (3.11)$$

Donde  $\{Z(s) : s \geq 0\}$  corresponde a uno de los dos procesos gaussianos que hemos considerado para construir el proceso de intensidad folded normal, es decir, en los

casos en que  $\{Z(s) : s \geq 0\}$  corresponde a una familia de variables independientes y con una ley común  $N(\mu, \sigma^2)$ , o bien en el que  $\{Z(s) : s \geq 0\}$  es un proceso gaussiano estacionario de media 0 y con función de covarianza  $k_Z(h) = \sigma^2 e^{-\beta|h|}$ .

Y por ende entonces, la ecuación 3.10 puede ser reescrita como:

$$\mathbb{P}(N(t) = n) = \frac{1}{n!} \cdot \mathbb{E} \left[ \left( \int_0^t |Z(s)| ds \right)^n \cdot \exp \left( - \int_0^t |Z(s)| ds \right) \right] \quad (3.12)$$

Bajo las condiciones ya descritas de  $\{Z(s) : s \geq 0\}$ .

Siguiendo a Parzen [26], podemos definir la integrales de la ecuación (3.11) como:

$$M(t) = \int_0^t |Z(s)| ds = \lim_{\substack{\text{máx} (t_k - t_{k-1}) \rightarrow 0 \\ k=1 \dots n}} \sum_{k=1}^n |Z(t_k)| \cdot (t_k - t_{k-1}) \quad (3.13)$$

Donde el límite considerado es, en este caso, un límite en media cuadrática. En particular, podemos escoger una equiparación tal que  $t_k - t_{k-1} = \Delta_n$  sea constante en  $k$ , pero dependa de  $n$ , y definir:

$$M(t) = \int_0^t |Z(s)| ds = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n |Z(t_k)| \cdot \Delta_n \quad (3.14)$$

Considerando nuevamente el límite tomado como un límite en media cuadrática.

### 3.3.2. Momentos de primer y segundo orden del Proceso.

Notemos que la ecuación (3.9), puede ser reescrita como:

$$M([0, t]) = \int_{[0, t]} \Lambda(s) ds \quad (3.15)$$

Y, más generalmente, para  $A \subset \mathbb{R}^+$ , podemos entonces escribir:

$$M(A) = \int_A \Lambda(s) ds \quad (3.16)$$

Jesper Møller & Rasmus. P. Waagepetersen [28], establecen que para intervalos  $A, B \subset \mathbb{R}^+$  acotados, se verifican las siguientes relaciones:

- Para la esperanza de  $\{N(t) : t \geq 0\}$  sobre  $A \subset \mathbb{R}^+$ :

$$\mathbb{E}[N(A)] = \mathbb{E}[M(A)] \quad (3.17)$$

- Para la varianza de  $\{N(t) : t \geq 0\}$  sobre  $A \subset \mathbb{R}^+$ :

$$\mathbb{V}[N(A)] = \mathbb{V}[M(A)] + \mathbb{E}[M(A)] \quad (3.18)$$

- Para la covarianza de  $\{N(t) : t \geq 0\}$  en  $A, B \subset \mathbb{R}^+$ :

$$\mathbf{C}[N(A), N(B)] = \mathbf{C}[M(A), M(B)] + \mathbb{E}[M(A \cap B)] \quad (3.19)$$

**Proposición 3.3.1** *Para el proceso de Cox  $\{N(t) : t \geq 0\}$  con proceso de intensidad Folded-Normal  $\{\Lambda(t) : t \geq 0\}$  construida en base al proceso gaussiano  $\{Z(t) : t \geq 0\}$ :*

1. Su función de valor medio está dada por:

$$m_N(t) = \mathbb{E} \left[ \int_0^t |Z(u)| du \right] \quad (3.20)$$

2. Su función de varianza está dada por:

$$v_N(t) = \mathbb{V} \left[ \int_0^t |Z(u)| du \right] + \mathbb{E} \left[ \int_0^t |Z(u)| du \right] \quad (3.21)$$

3. Su función de covarianza está dada por:

$$k_N(t, s) = \mathbf{C} \left[ \int_0^t |Z(u)| du, \int_0^t |Z(v)| dv \right] + \mathbb{E} \left[ \int_0^{\min\{s,t\}} |Z(u)| du \right] \quad (3.22)$$

**En efecto:**

Resulta inmediato, que si consideramos  $N(t) = N(]0, t])$ , las ecuaciones (3.17), (3.18) y (3.19), pueden ser reescritas como:

- $\mathbb{E}[N(]0, t]) = \mathbb{E}[M(]0, t])]$
- $\mathbb{V}[N(]0, t]) = \mathbb{V}[M(]0, t]) + \mathbb{E}[M(]0, t])]$
- $\mathbf{C}[N(]0, t]), N(]0, s])] = \mathbf{C}[M(]0, t]), M(]0, s])] + \mathbb{E}[M(]0, t] \cap ]0, s])]$

Y usando la expresión de la ecuación (3.15) y la integral equivalente a ella de la ecuación (3.11) más el hecho inmediato que  $]0, t] \cap ]0, s] = ]0, \min\{t, s\}]$  obtenemos que:

- $\mathbb{E}[N(]0, t]) = \mathbb{E} \left[ \int_0^t |Z(u)| du \right]$
- $\mathbb{V}[N(]0, t]) = \mathbb{V} \left[ \int_0^t |Z(u)| du \right] + \mathbb{E} \left[ \int_0^t |Z(u)| du \right]$
- $\mathbf{C}[N(]0, t]), N(]0, s])] = \mathbf{C} \left[ \int_0^t |Z(u)| du, \int_0^s |Z(v)| dv \right] + \mathbb{E} \left[ \int_0^{\min\{s,t\}} |Z(u)| du \right]$

**Observación 3.3.1** *Evidentemente, en virtud de la ecuación (3.9), los resultados de la proposición 3.3.1 pueden expresarse en términos directamente del proceso intensidad  $\{\Lambda(t) : t \geq 0\}$ , quedando de la forma:*

- $m_N(t) = \mathbb{E} \left[ \int_0^t \Lambda(u) du \right]$
- $v_N(t) = \mathbb{V} \left[ \int_0^t \Lambda(u) du \right] + \mathbb{E} \left[ \int_0^t \Lambda(u) du \right]$

$$\blacksquare k_N(t, s) = \mathbf{C} \left[ \int_0^t \Lambda(u) du, \int_0^s \Lambda(v) dv \right] + \mathbb{E} \left[ \int_0^{\min\{s,t\}} \Lambda(u) du \right]$$

Ahora bien, Parzen [26] propone en su libro el siguiente resultado, que puede ser estudiado en detalle también en el libro de M. Loève [30]:

**Lema 3.3.1** *Sea  $\{X(t) : t \geq 0\}$  un proceso estocástico de parámetro continuo con momentos segundos finitos, cuya función de valor medio  $m_X$  y función de covarianza  $k_X$  son funciones continuas. Entonces:*

- $\int_a^b X(t) dt$ , definida en la ecuación (3.13), está bien definida.
- $\mathbb{E} \left[ \int_a^b X(t) dt \right] = \int_a^b m_X(t) dt$
- $\mathbb{V} \left[ \int_a^b X(t) dt \right] = \int_a^b \int_a^b k_X(t, s) dt ds = 2 \int_a^b \int_a^t k_X(t, s) ds dt$
- $\mathbf{C} \left[ \int_a^b X(t) dt, \int_c^d X(s) ds \right] = \int_a^b \int_c^d k_X(t, s) ds dt$

Podemos establecer entonces los siguientes resultados:

**Proposición 3.3.2** *Para el proceso de Cox  $\{N(t) : t \geq 0\}$  con proceso de intensidad Folded-Normal  $\{\Lambda(t) : t \geq 0\}$  construida en base al proceso gaussiano  $\{Z(t) : t \geq 0\}$  con función de valor medio  $m_Z(t) = 0$  y con función de covarianza  $k_Z(t, s) = \sigma^2 e^{-\beta|t-s|}$ :*

1. Su función de valor medio está dada por:

$$m_N(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma t \quad (3.23)$$

2. Su función de varianza está dada por:

$$v_N(t) = D(t) + \frac{2\sigma^2 t^2}{\pi} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma t \quad (3.24)$$

Con

$$D(t) = \frac{2\sigma^2}{\pi} \int_0^t \int_0^t \left[ \sqrt{1 - e^{-2\beta|u-s|}} + e^{-\beta|u-s|} \cdot \arcsen e^{-\beta|u-s|} \right] dudv \quad (3.25)$$

3. Su función de covarianza está dada por:

$$k_N(t, s) = B(t, s) + \frac{2\sigma^2 t^2}{\pi} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma \min\{s, t\} \quad (3.26)$$

Con

$$B(t, s) = \frac{2\sigma^2}{\pi} \int_0^t \int_0^s \left[ \sqrt{1 - e^{-2\beta|u-v|}} + e^{-\beta|u-v|} \cdot \arcsen e^{-\beta|u-v|} \right] dudv \quad (3.27)$$

**En efecto:**

Siguiendo en los tres casos, el resultado del lema 3.3.1, tenemos que:

1. Para la función de valor medio, en virtud de la proposición 3.2.2 para el caso  $\mu = 0$ , se verifica que:

$$\begin{aligned}
m_N(t) &= \mathbb{E} \left[ \int_0^t \Lambda(u) du \right] \\
&= \int_0^t m_\Lambda(s) ds \\
&= \int_0^t \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma ds \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma t
\end{aligned}$$

2. Para la función de varianza, en virtud de la proposición 3.2.3 y de la función de valor medio determinada en el ítem anterior, se verifica que:

$$\begin{aligned}
v_N(t) &= \mathbb{V} \left[ \int_0^t \Lambda(u) du \right] + \mathbb{E} \left[ \int_0^t \Lambda(u) du \right]^2 \\
&= \int_0^t \int_0^t k_\Lambda(u, s) dud s + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma t \\
&= \int_0^t \int_0^t \frac{2\sigma^2}{\pi} \left[ \sqrt{1 - e^{-2\beta|u-s|}} + e^{-\beta|u-s|} \cdot \arcsen e^{-\beta|u-s|} - 1 \right] dud s + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma t \\
&= \frac{2\sigma^2}{\pi} \int_0^t \int_0^t \left[ \sqrt{1 - e^{-2\beta|u-s|}} + e^{-\beta|u-s|} \cdot \arcsen e^{-\beta|u-s|} \right] dud s \\
&\quad + \frac{2\sigma^2 t^2}{\pi} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma t \\
&= D(t) + \frac{2\sigma^2 t^2}{\pi} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma t
\end{aligned}$$

Con

$$D(t) = \frac{2\sigma^2}{\pi} \int_0^t \int_0^t \left[ \sqrt{1 - e^{-2\beta|u-s|}} + e^{-\beta|u-s|} \cdot \arcsen e^{-\beta|u-s|} \right] dud s$$

3. Para la función de covarianza, en virtud de la proposición 3.2.3 y de la función de valor medio, determinada en el primer ítem de esta proposición, se verifica

que:

$$\begin{aligned}
k_N(t, s) &= \mathbf{C} \left[ \int_0^t \Lambda(u) du, \int_0^s \Lambda(v) dv \right] + \mathbb{E} \left[ \int_0^{\min\{s, t\}} \Lambda(u) du \right] \\
&= \int_0^t \int_0^s k_\Lambda(u, v) dv du + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma \min\{s, t\} \\
&= \int_0^t \int_0^s \frac{2\sigma^2}{\pi} \left[ \sqrt{1 - e^{-2\beta|u-v|}} + e^{-\beta|u-v|} \cdot \arcsen e^{-\beta|u-v|} - 1 \right] dv du \\
&\quad + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma \min\{s, t\} \\
&= \frac{2\sigma^2}{\pi} \int_0^t \int_0^t \left[ \sqrt{1 - e^{-2\beta|u-v|}} + e^{-\beta|u-v|} \cdot \arcsen e^{-\beta|u-v|} \right] dv du \\
&\quad + \frac{2\sigma^2 ts}{\pi} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma \min\{s, t\} \\
&= B(t, s) + \frac{2\sigma^2 t^2}{\pi} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma \min\{s, t\}
\end{aligned}$$

Con

$$B(t, s) = \frac{2\sigma^2}{\pi} \int_0^t \int_0^s \left[ \sqrt{1 - e^{-2\beta|u-v|}} + e^{-\beta|u-v|} \cdot \arcsen e^{-\beta|u-v|} \right] dv du$$

**Observación 3.3.2** Naturalmente, la resolución de  $D(t)$  y  $B(t, s)$  presentadas en la proposición , puede ser abordada por métodos numéricos.

**Proposición 3.3.3** Para el proceso de Cox  $\{N(t) : t \geq 0\}$  con proceso de intensidad *Folded-Normal*  $\{\Lambda(t) : t \geq 0\}$  construida en base al proceso gaussiano  $\{Z(t) : t \geq 0\}$  formado por una familia de variables aleatorias independientes y con ley común  $N(\mu, \sigma^2)$ :

1. Su función de valor medio está dada por:

$$m_N(t) = \left( \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma \cdot e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} + \mu \cdot \left[ 1 - 2\Phi \left( -\frac{\mu}{\sigma} \right) \right] \right) t \quad (3.28)$$

2. Su función de varianza está dada por:

$$v_N(t) = \left( \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma \cdot e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} + \mu \cdot \left[ 1 - 2\Phi \left( -\frac{\mu}{\sigma} \right) \right] \right)^2 t \quad (3.29)$$

3. Su función de covarianza está dada por:

$$k_N(t, s) = \left( \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma \cdot e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} + \mu \cdot \left[ 1 - 2\Phi \left( -\frac{\mu}{\sigma} \right) \right] \right) \cdot \min\{s, t\} \quad (3.30)$$

**En efecto:**

Siguiendo en los tres casos, el resultado del lema 3.3.1, tenemos que:

1. Para la función de valor medio, en virtud de la proposición 3.2.2, se verifica que:

$$\begin{aligned}
m_N(t) &= \mathbb{E} \left[ \int_0^t \Lambda(u) du \right] \\
&= \int_0^t m_\Lambda(s) ds \\
&= \int_0^t \left( \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma \cdot e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} + \mu \cdot \left[ 1 - 2\Phi \left( -\frac{\mu}{\sigma} \right) \right] \right) ds \\
&= \left( \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma \cdot e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} + \mu \cdot \left[ 1 - 2\Phi \left( -\frac{\mu}{\sigma} \right) \right] \right) t
\end{aligned}$$

2. Para la función de varianza, en virtud de la proposición 3.2.4 y de la función de valor medio determinada en el ítem anterior, se verifica que:

$$\begin{aligned}
v_N(t) &= \mathbb{V} \left[ \int_0^t \Lambda(u) du \right] + \mathbb{E} \left[ \int_0^t \Lambda(u) du \right] \\
&= \int_0^t \int_0^t k_\Lambda(u, s) dud s + \left( \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma \cdot e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} + \mu \cdot \left[ 1 - 2\Phi \left( -\frac{\mu}{\sigma} \right) \right] \right) t \\
&= \int_0^t \int_0^t \left( \mu^2 + \sigma^2 - \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma \cdot e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} + \mu \cdot \left[ 1 - 2\Phi \left( -\frac{\mu}{\sigma} \right) \right] \right\}^2 \right) \cdot I_{\{u=s\}} dud s \\
&\quad + \left( \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma \cdot e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} + \mu \cdot \left[ 1 - 2\Phi \left( -\frac{\mu}{\sigma} \right) \right] \right) t \\
&= 0 + \left( \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma \cdot e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} + \mu \cdot \left[ 1 - 2\Phi \left( -\frac{\mu}{\sigma} \right) \right] \right) t \\
&= \left( \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma \cdot e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} + \mu \cdot \left[ 1 - 2\Phi \left( -\frac{\mu}{\sigma} \right) \right] \right) t
\end{aligned}$$

**Observación 3.3.3** *En la integral de la covarianza, hemos utilizado el hecho que, al ser la función de covarianza en casi toda parte nula, y esto es, sólo es  $\sigma^2$  sobre el conjunto  $\{(t, s) \in \mathbb{R}^2 : t = s\}$ , el cual tiene medida de lebesgue 0 en  $\mathbb{R}^2$ , la validez del resultado del lema 3.3.1 no se ve afectada por dicha discontinuidad*

3. Para la función de covarianza, en virtud de la proposición 3.2.4 y de la función de valor medio, determinada en el primer ítem de esta proposición, se verifica

que:

$$\begin{aligned}
k_N(t, s) &= \mathbf{C} \left[ \int_0^t \Lambda(u) du, \int_0^s \Lambda(v) dv \right] + \mathbb{E} \left[ \int_0^{\min\{s, t\}} \Lambda(u) du \right] \\
&= \int_0^t \int_0^s k_\Lambda(u, v) dv du + \left( \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma \cdot e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} + \mu \cdot \left[ 1 - 2\Phi \left( -\frac{\mu}{\sigma} \right) \right] \right) \cdot \min\{s, t\} \\
&= \int_0^t \int_0^s \left( \mu^2 + \sigma^2 - \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma \cdot e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} + \mu \cdot \left[ 1 - 2\Phi \left( -\frac{\mu}{\sigma} \right) \right] \right\}^2 \right) \cdot I_{\{u=v\}} dv du \\
&\quad + \left( \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma \cdot e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} + \mu \cdot \left[ 1 - 2\Phi \left( -\frac{\mu}{\sigma} \right) \right] \right) \cdot \min\{s, t\} \\
&= 0 + \left( \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma \cdot e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} + \mu \cdot \left[ 1 - 2\Phi \left( -\frac{\mu}{\sigma} \right) \right] \right) \cdot \min\{s, t\} \\
&= \left( \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma \cdot e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} + \mu \cdot \left[ 1 - 2\Phi \left( -\frac{\mu}{\sigma} \right) \right] \right) \cdot \min\{s, t\}
\end{aligned}$$

Donde en la integral de la función de covarianza, hemos procedido nuevamente bajo el mismo supuesto de la observación 3.3.3

### 3.4. Simulación del Proceso de Cox con Proceso Intensidad Folded Normal

Una forma más o menos sencilla de simular un Proceso de Cox, consiste básicamente en simular un Proceso de Poisson no homogéneo, usando como función de intensidad una realización  $\{\lambda(t) : t \geq 0\}$  del campo aleatorio  $\{\Lambda(t) : t \geq 0\}$ , como sugiere Edith Gabriel [31].

Siguiendo, por ejemplo a Sheldon M. Ross [22], podemos entonces construir un algoritmo que simule un proceso de Poisson no homogéneo, usando básicamente el hecho que este proceso se puede generar mediante una selección aleatoria de los tiempos de un Proceso Poisson homogéneo de parámetro  $\lambda$ . La idea básicamente, es que si un evento de éste último ocurre en el instante  $t$  con probabilidad  $\frac{\lambda(t)}{t}$ , entonces el proceso de eventos contados, es un Proceso Poisson no homogéneo con función de intensidad  $\{\lambda(t) : t \geq 0\}$ , donde en particular nos restringimos a un horizonte de tiempo  $[0, T]$ .

El algoritmo, en términos generales, queda como:

**Paso 1** Iniciar  $t = 0$  e  $i = 0$

**Paso 2** Generar  $U_1, U_2 \sim U(0, 1)$

**Paso 3** Hacer  $t = t - \frac{1}{\lambda} \cdot \log(U_1)$ . Si  $t > T$ , terminar. Sino, ir a **Paso 4**

**Paso 4** Si  $U_2 \leq \frac{\lambda(t)}{t}$ , hacer  $i = i + 1$  y  $S(i) = t$ .

## Paso 5 Regresar al Paso 2.

Más detalles del mismo, así como un análisis y discusión más completos, pueden encontrarse en [22].

Nosotros hemos usado una versión adaptada de este algoritmo, reemplazando la función de intensidad por la realización del campo de intensidad Folded-Normal, según se sugiere en [31], e implementándolo en el software libre R<sup>1</sup>, hemos obtenido a modo de ilustración, las siguientes realizaciones del Proceso  $\{N(t) : t \geq 0\}$ , que han sido trabajados en un horizonte de tiempo  $[0, T] = [0, 15]$ , donde en las figuras 3.1, 3.2, 3.3 y 3.4 podemos observar trayectorias del Proceso de Cox, en el caso en que el Proceso Intensidad Folded Normal es una familia de variables con parámetro  $\mu = 0$  y estas están asociadas mediante una función de covarianza del tipo  $k_Z(h) = \sigma^2 e^{-\beta|h|}$ , según los parámetros que allí se indican; en tanto, en las figuras 3.5, 3.6, 3.7 y 3.8 podemos observar trayectorias del Proceso de Cox, en el caso en que el Proceso Intensidad es una familia de variables independientes y con ley común Folded Normal, para diferentes valores de  $\mu$  y  $\sigma^2$ , según se indican en las descripciones de los gráficos.

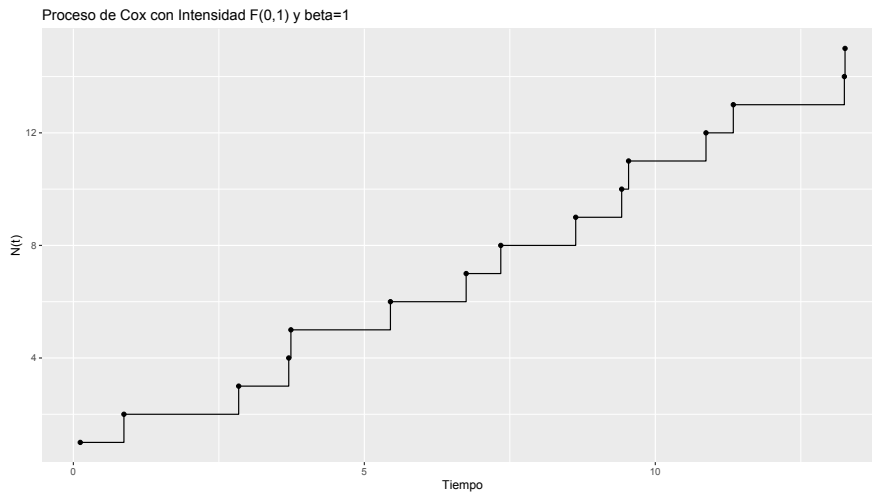


Figura 3.1: Simulación de un proceso de Cox con función de intensidad Folded Normal de parámetros  $\mu = 0$ ,  $\sigma^2 = 1$  y con función de covarianza  $k_Z(h) = e^{-|h|}$

<sup>1</sup>El código puede ser consultado en el apéndice B.

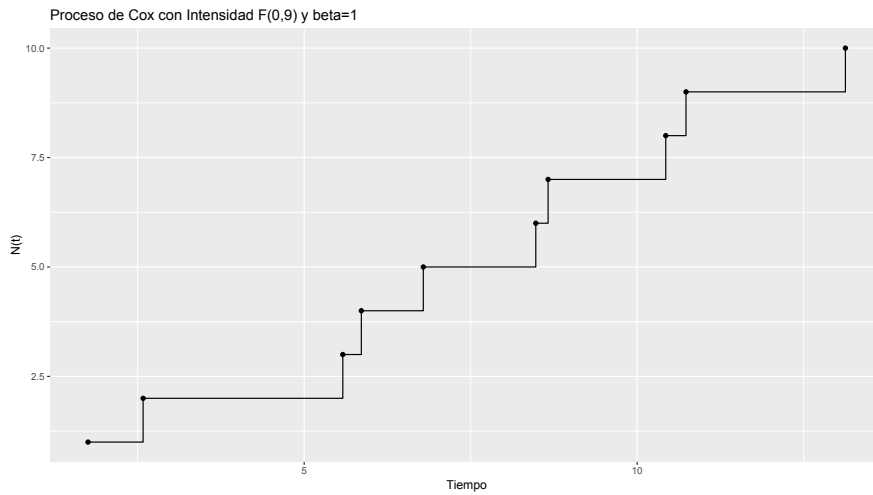


Figura 3.2: Simulación de un proceso de Cox con función de intensidad Folded Normal de parámetros  $\mu = 0$ ,  $\sigma^2 = 9$  y con función de covarianza  $k_Z(h) = 9e^{-|h|}$

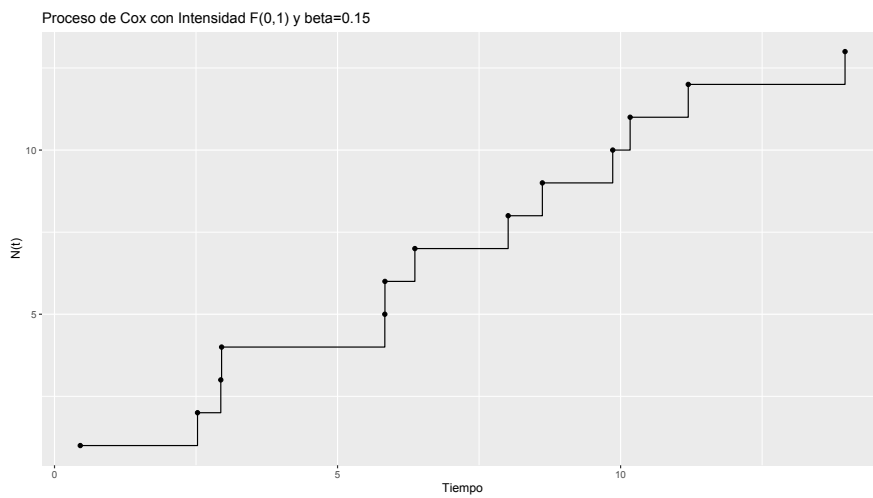


Figura 3.3: Simulación de un proceso de Cox con función de intensidad Folded Normal de parámetros  $\mu = 0$ ,  $\sigma^2 = 1$  y con función de covarianza  $k_Z(h) = e^{-0,15|h|}$

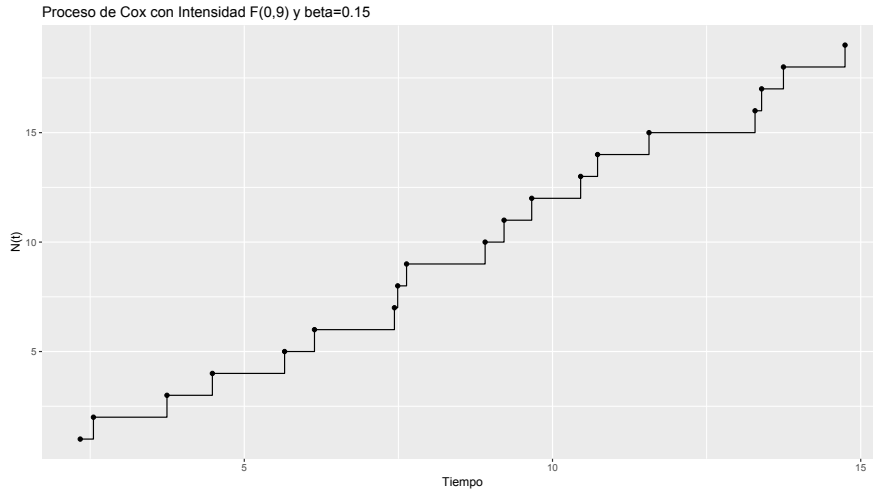


Figura 3.4: Simulación de un proceso de Cox con función de intensidad Folded Normal de parámetros  $\mu = 0$ ,  $\sigma^2 = 9$  y con función de covarianza  $k_Z(h) = 9e^{-0,15|h|}$

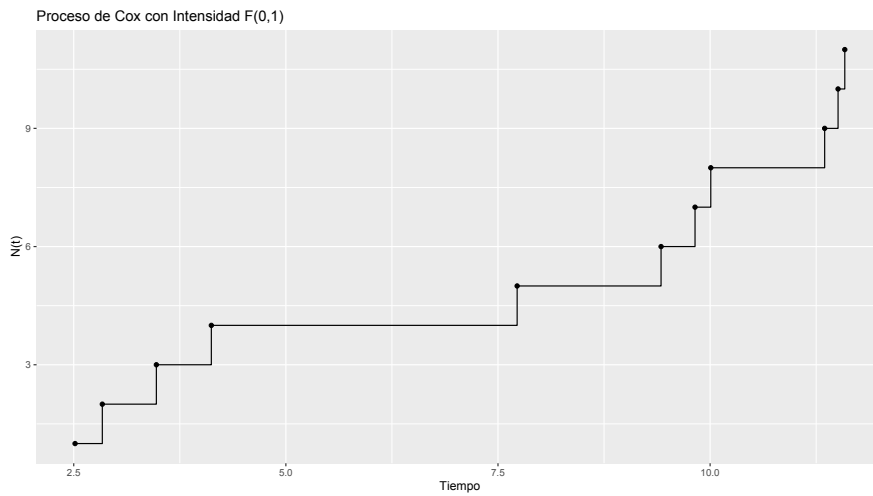


Figura 3.5: Simulación de un proceso de Cox con función de intensidad Folded Normal de parámetros  $\mu = 0$ ,  $\sigma^2 = 1$  y con función de covarianza  $k_Z(h) = I_{\{0\}}(h)$

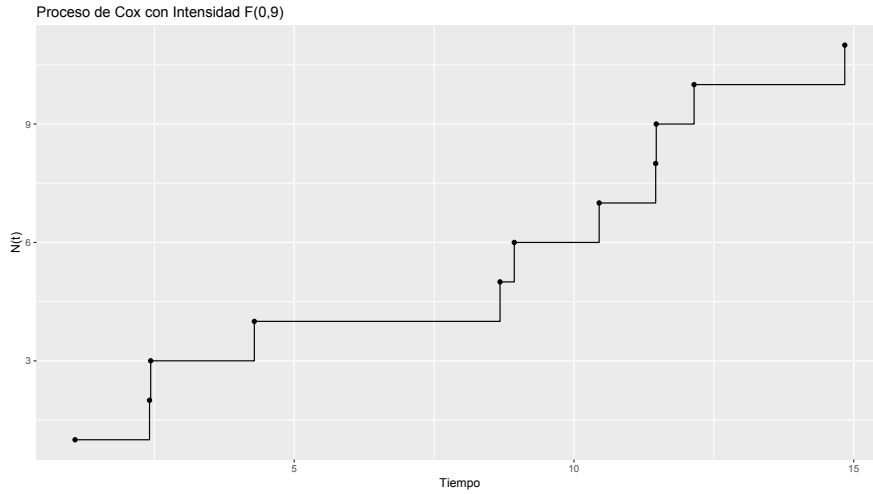


Figura 3.6: Simulación de un proceso de Cox con función de intensidad Folded Normal de parámetros  $\mu = 0$ ,  $\sigma^2 = 9$  y con función de covarianza  $k_Z(h) = 9 \cdot I_{\{0\}}(h)$

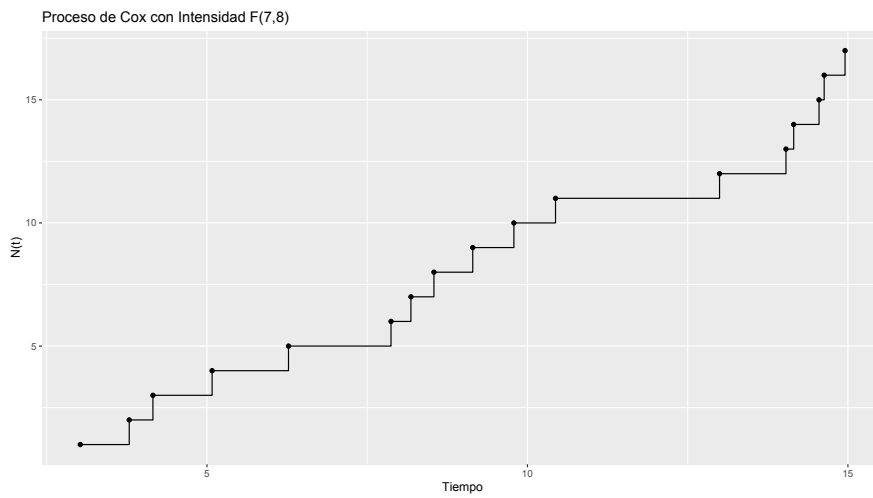


Figura 3.7: Simulación de un proceso de Cox con función de intensidad Folded Normal de parámetros  $\mu = 7$ ,  $\sigma^2 = 8$  y con función de covarianza  $k_Z(h) = 8 \cdot I_{\{0\}}(h)$

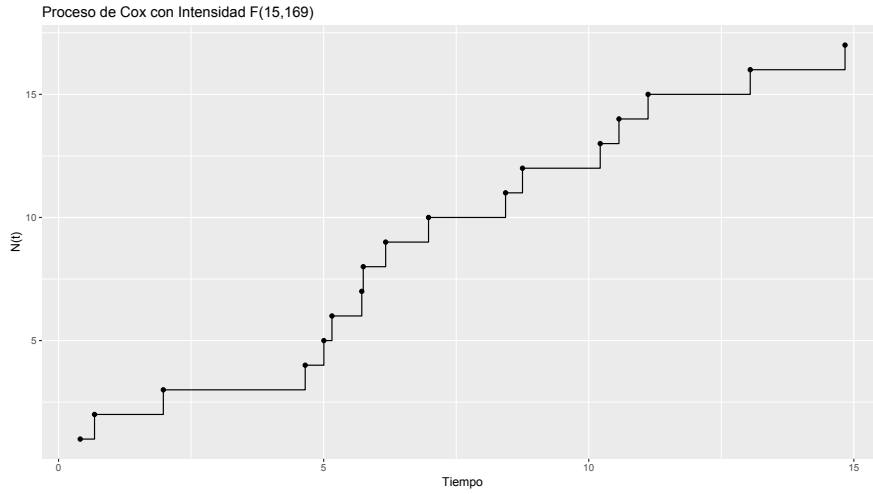


Figura 3.8: Simulación de un proceso de Cox con función de intensidad Folded Normal de parámetros  $\mu = 15$ ,  $\sigma^2 = 169$  y con función de covarianza  $k_Z(h) = 169 \cdot I_{\{0\}}(h)$

# Conclusiones y Futuros Trabajos

Los Procesos de Cox entregan una amplia gama de opciones para el modelado de procesos puntuales en el tiempo. El caso particular del Proceso de Cox con Intensidad Folded Normal, que presentamos en este trabajo, presenta la interesante característica de tener resultados bastante tratables analíticamente, y de poder adaptarse a diversas situaciones, en función de los valores de sus parámetros. En base a las simulaciones, observamos que se adapta de forma bastante aceptable, a procesos puntuales que se caractericen por tener una concentración de ocurrencias en un lapso determinado, y luego intervalos prolongados de ‘descanso’, donde no se observan “ocurrencias”. Se aprecia también que estos eventos que ocurren de forma agrupada, tienen una leve tendencia a repetir un cierto patrón. Por supuesto se necesita un conjunto mucho mayor de simulaciones en diferentes horizontes de tiempo para validar estas conclusiones.

Respecto de futuros trabajos, creemos que existen muchas posibilidades, algunas de estas son abordar este mismo proceso con diferentes funciones de covarianza, o estudiar la inferencia estadística sobre el mismo, por ejemplo mediante estimadores de momentos, o estimadores bayesianos y clásicos basados en la función de verosimilitud. Otra línea de trabajo muy interesante puede ser realizar la extensión de este proceso al espacio y al tiempo-espacio, y naturalmente a partir de ahí realizar inferencia clásica y bayesiana sobre el mismo.

Naturalmente también, es muy interesante estudiar que ocurre con este proceso si se incorporan covariables en los parámetros estudiados, las que sin duda son naturalmente inducidas dependiendo el área de aplicación en que este proceso sea utilizado. Nosotros consideramos que dada las características observadas en las simulaciones, es un proceso que puede resultar interesante, como ya decíamos, para modelar fenómenos que ocurran de forma que se presentan grandes descansos en el tiempo, pero que cuando ocurren, tienden a aparecer muchos eventos muy seguidos, para nuevamente dar cabida a un periodo de descanso, casos de este tipo pueden ser, por ejemplo, apariciones de focos de plagas, apariciones de incendios forestales, sismos, etc. Naturalmente validar la aplicabilidad de este modelo en esas áreas, es un interesantísimo futuro trabajo también.

# Apéndice A

## Principales Notaciones Utilizadas

1.  $I_C(x)$  denota la función indicatriz sobre el conjunto  $C$ , i.e:

$$I_C(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in C, \\ 0 & \text{si } x \notin C. \end{cases}$$

2.  $\mathbb{N}_r$  denota el conjunto de los números enteros  $\{r, r + 1, r + 2, \dots\}$ .

En particular:

- $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$  denota el conjunto de los Cardinales.
- $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$  denota el conjunto de los Naturales.

3.  $\mathbb{R}^+$  denota el conjunto de los reales positivos, i.e,  $\mathbb{R}^+ = ]0, +\infty[$ , en tanto  $\mathbb{R}_0^+ = [0, +\infty[$ .

4.  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  denota que la variable aleatoria  $X$  sigue una Ley Normal de parámetros  $\mu$  y  $\sigma^2$ .

Ademas, consideramos su densidad con respecto a la Medida de Lebesgue como:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} I_{\mathbb{R}}(x)$$

5.  $X \sim N_n(\mu, \Sigma)$  denota que el vector aleatorio  $X$  sigue una Ley Normal Multi-variada de dimensión  $n$  y con parámetros  $\mu$  y  $\Sigma$ .

Ademas, consideramos su densidad con respecto a la Medida de Lebesgue como:

$$f_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{|\Sigma|}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^t \Sigma^{-1} (x-\mu)} I_{\mathbb{R}^n \times 1}(x)$$

6.  $X \sim \text{FN}(\mu, \sigma^2)$  denota que la variable aleatoria  $X$  sigue una Ley Folded-Normal de parámetros  $\mu$  y  $\sigma^2$ .

Ademas, consideramos su densidad con respecto a la Medida de Lebesgue como:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \left[ e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(x+\mu)^2}{2\sigma^2}} \right] I_{\mathbb{R}^+}(x)$$

7.  $X \sim \text{HN}(\mu, \sigma^2)$  denota que la variable aleatoria  $X$  sigue una Ley Half-Normal de parámetro  $\sigma^2$ .

Ademas, consideramos su densidad con respecto a la Medida de Lebesgue como:

$$f_X(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \left[ e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \right] I_{\mathbb{R}^+}(x)$$

8.  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$  denota que la variable aleatoria  $X$  sigue una Ley Exponencial de parámetro  $\lambda$ .

Ademas, consideramos su densidad con respecto a la Medida de Lebesgue como:

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} I_{\mathbb{R}^+}(x)$$

9.  $X \sim \text{Gam}(k, \lambda)$  denota que la variable aleatoria  $X$  sigue una Ley Gamma de parámetros  $k, \lambda$ .

Ademas, consideramos su densidad con respecto a la Medida de Lebesgue como:

$$f_X(x) = \frac{\lambda^k}{\Gamma(k)} x^{k-1} e^{-\lambda x} I_{\mathbb{R}^+}(x)$$

10.  $X \sim \text{Par}(k, m)$  denota que la variable aleatoria  $X$  sigue una Ley Pareto de parámetros  $k, m$ .

Ademas, consideramos su densidad con respecto a la Medida de Lebesgue como:

$$f_X(x) = \frac{km^k}{x^{k+1}} I_{]m, +\infty[}(x)$$

11.  $X \sim \text{U}(a, b)$  denota que la variable aleatoria  $X$  sigue una Ley Uniforme de parámetros  $a, b$ .

Ademas, consideramos su densidad con respecto a la Medida de Lebesgue como:

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a} I_{]a, b[}(x)$$

12.  $X \sim \text{Po}(\lambda)$  denota que la variable aleatoria  $X$  sigue una Ley Poisson de parámetro  $\lambda$ .

Ademas, consideramos su densidad con respecto a la Medida de Conteo como:

$$f_X(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} I_{\mathbb{N}_0}(x)$$

13.  $X \sim \text{Bin}(n, p)$  denota que la variable aleatoria  $X$  sigue una Ley Binomial de parámetros  $n$  y  $p$ .

Ademas, consideramos su densidad con respecto a la Medida de Conteo como:

$$f_X(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} I_{\{0,1,\dots,n\}}(x)$$

14.  $X \sim \text{Mult}(n, p_1, \dots, p_d)$  denota que el vector aleatorio  $X$  sigue una Ley Multinomial de parámetros  $n, p_1, \dots, p_d$ .

Ademas, consideramos su densidad con respecto a la Medida de Conteo como:

$$f_X(x) = \frac{n!}{\prod_{k=1}^d x_k! \cdot \left(n - \sum_{k=1}^d x_k\right)!} \cdot \prod_{k=1}^d p_k^{x_k} \cdot \binom{n - \sum_{k=1}^d p_k}{n - \sum_{k=1}^d x_k} I_C(x)$$

Donde:

$$C = \left\{ x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : 0 \leq x_k \leq n, k = 1, \dots, d \wedge \sum_{k=1}^d x_k \leq n \right\}$$

15.  $X \sim \text{BN}(r, p)$  denota que la variable aleatoria  $X$  sigue una Ley Binomial Negativa de parámetros  $r$  y  $p$ .

Ademas, consideramos su densidad con respecto a la Medida de Conteo como:

$$f_X(x) = \frac{\Gamma(x+r)}{x! \Gamma(r)} p^r (1-p)^x I_{\mathbb{N}_0}(x)$$

En tanto, llamaremos Pascal, y denotamos  $X \sim \text{Pas}(r, p)$  al modelo de probabilidad con densidad con respecto a la medida de conteo:

$$f_X(x) = \binom{x-1}{r-1} p^r (1-p)^{x-r} I_{\mathbb{N}_r}(x)$$

Es decir, consideramos que si  $X \sim \text{BN}(r, p)$ , entonces ésta cuenta el número de fracasos hasta el  $r$ -ésimo éxito, en tanto que si  $X \sim \text{Pas}(r, p)$ , entonces ésta cuenta el número de ensayos hasta el  $r$ -ésimo éxito.

## Apéndice B

# Programa R para Simular un Proceso de Cox con Intensidad Folded Normal

**B.1. Caso  $\{Z(t) : t \geq 0\}$  familia de variables aleatorias independientes y con ley común  $N(\mu, \sigma^2)$**

```
t=0
i=0
j=0
T=15
lambda=1
Prel=25
S=matrix(0,nrow=1,ncol=Prel)
while(j<1)
{
t=t+rexp(1,lambda)
U=runif(1,0,1)
H=abs(rnorm(1,7,8))
K=H/lambda
if(U<K)
{
i=i+1
S[i]=t

if(t>T)
{
S[i]=0
j=1
}
}
N=0
for(i in 1:Prel)
```

```

{
if(S[i]>0)
{
N=N+1
}
}
F=matrix(0,nrow=1,ncol=N)
for(i in 1:N)
{
F[i]=S[i]
}
M=c(F)
library(ggplot2)
P=data.frame(x=c(M),y=c(1:N))
qplot(x,y,data=P,xlab="Tiempo",ylab="N(t)",main="Proceso de Cox con Intensi-
dad F(7,8)",geom=c("step","point"))

```

**B.2. Caso  $\{Z(t) : t \geq 0\}$  tal que  $m_Z(t) = 0$   
y  $k_Z(t, s) = \sigma^2 e^{-\beta|t-s|}$**

```

t=0
i=0
j=0
T=15
lambda=1
Prel=25
S=matrix(0,nrow=1,ncol=Prel)
while(j<1)
{
t=t+rexp(1,lambda)
i=i+1
S[i]=t
if(t>T)
{
S[i]=0
j=1
}
}
N=0
for(i in 1:Prel)
{
if(S[i]>0)
{
N=N+1
}
}

```

```

}
F=matrix(0,nrow=1,ncol=N)
for(i in 1:N)
{
F[i]=S[i]
}
v=1
beta=0.15
Sigma=matrix(0,nrow=N,ncol=N)
for(i in 1:N)
{
for(j in 1:N)
{
Sigma[i,j]=v*exp(-beta*abs(F[1,i]-F[1,j]))
}
}
C=t(chol(Sigma))
Z=matrix(0,nrow=N,ncol=1)
for(j in 1:N)
{
Z[j,1]=rnorm(1,0,1)
}
W=C %* %Z
G=matrix(0,nrow=1,ncol=N)
for(i in 1:N)
{
U=runif(1,0,1)
H=abs(W[i,1])
K=H/lambda
if(U<K)
{
G[i]=F[i]}
else{G[i]=0}
}
Sh=G[G>0]
Nh=length(Sh)
M=c(Sh)
library(ggplot2)
P=data.frame(x=c(M),y=c(1:Nh))
qplot(x,y,data=P,xlab="Tiempo",ylab="N(t)",main="Proceso de Cox con Intensi-
dad F(0,1) y beta=0.15",geom=c("step","point"))

```

# Bibliografía

- [1] Cox, D. R.: *Some statistical methods connected with series of events*. J. R. Stat. Soc. Ser. B Stat. Methodol. 17 129-157; discussion, 157-164. 1955.
- [2] Michail Tsagris, Christina Beneki & Hossein Hassani: *On the Folded Normal Distribution*. Mathematics, 2, 12-28; doi:10.3390/math2010012 2014.
- [3] Peter J. Diggle, Paula Moraga, Barry Rowlingson & Benjamin M. Taylor: *Spatial and Spatio-Temporal Log-Gaussian Cox Processes: Extending the Geostatistical Paradigm* Statistical Science 2013, Vol. 28, No. 4, 542-563.
- [4] José María Montero, Gema Fernández-Avilés & Jorge Mateu: *Spatial and Spatio-Temporal Geostatistical Modeling and Kriging* John Wiley & Sons, Ltd 2015.
- [5] Ashis Kumar Chakraborty & Moutushi Chatterjee: *On multivariate folded normal distribution*. Sankhyā: The Indian Journal of Statistics, Volume 75-B, Part 1, pp. 1-15 2013.
- [6] Leone, F.C., Nelson, L.S. & Nottingham, R.B.: *The folded normal distribution*. Technometrics,3, 543-550. 1961.
- [7] Psarakis, S. & Panaretos, J.: *On some bivariate extensions of the folded normal and the folded T distributions*. J. Appl. Statist. Sci., 10, 119-136. 2001.
- [8] D.J. Daley & D. Vere-Jones.: *An Introduction to the Theory of Point Processes, Volume I: Elementary Theory and Methods* . Second Edition, Springer. 2003.
- [9] S. Flaxman, Y.W. Teh & D. Sejdinovic.: *Poisson Intensity Estimation with Reproducing Kernels*. 2016.
- [10] Møller, J., Syversveen, A. R. & Waagepetersen, R. P. *Log Gaussian Cox processes*. Scand. J. Stat. 25 451-482. 1998.
- [11] Christian J. Walder & Adrian N. Bishop.: *Gamma Gaussian Cox Processes* . 2017.
- [12] Christian J. Walder & Adrian N. Bishop.: *Fast Bayesian Intensity Estimation for the Permanental Process*. 2017.
- [13] Seth Flaxman, Yee Whye Teh & Dino Sejdinovic.: *Poisson intensity estimation with reproducing kernels*. 2017.

- [14] Gonçalves, F. B. & D. Gamerman: *Exact Bayesian inference in spatiotemporal Cox processes driven by multivariate Gaussian processes*. Journal of the Royal Statistical Society, Series B. DOI: 10.1111/rssb.12237. 2017.
- [15] Ryan P. Adams, Iain Murray & David J. C. MacKay.: *Tractable nonparametric Bayesian inference in Poisson processes with gaussian process intensities*. In Léon Bottou and Michael Littman, editors, ICML, pages 9?16, Montreal, June 2009. 2009.
- [16] Ripley, B. D. : *The second-order analysis of stationary point processes*. J. Appl. Probab. 13 255?266. MR0402918. 1976.
- [17] Wenbo V. Li & Ang Wei : *Gaussian integrals involving absolute value functions*. IMS Collections High Dimensional Probability V: The Luminy Volume Vol. 5 (2009) 43?59 Institute of Mathematical Statistics. 2009.
- [18] Juan Kalemkerian : *Notas del curso de Introducción a la Probabilidad y Estadística* CMAT. Universidad de la República Montevideo, Uruguay. 2010.
- [19] Barry R. James : *Probabilidade: Um curso em nível intermediário* Instituto de Matemática Pura e Aplicada-CNPq. Projeto Euclides Rio de Janeiro, Brasil. 1981
- [20] Raymond Kan & Cesare Robotti : *On Moments of Folded and Truncated Multivariate Normal Distributions* 2017
- [21] Sheldon M. Ross: *Introduction to Probability Models* Academic Press, 8th Edition, 2003
- [22] Sheldon M. Ross: *Simulación* Prentice Hall, México 2da Edición 1999
- [23] Paula Rodriguez Bouzas: *Predicción con modelos estocásticos de tipo poissoniano* Tesis Doctoral, Departamento de Estadística e I.O, Facultad de Ciencias, Universidad de Granada. 2009
- [24] Paula Rodriguez Bouzas: *Proceso de Cox: Del Proceso de Poisson a generalizaciones del Proceso de Cox* EAE Editorial Academia Española. 2011
- [25] D. R. Cox & H. D. Miller: *The Theory of Stochastic Processes* Imperial College, London 1967
- [26] Emanuel Parzen: *Procesos Estocásticos* Holden Day inc San Francisco, USA. 1972.
- [27] Shinichiro Shirota & Alan. E. Gelfand: *Inference for log Gaussian Cox processes using an approximate marginal posterior* 2016.
- [28] Jesper Møller & Rasmus. P. Waagepetersen: *Statistical Inference for Cox Processes* To appear as a chapter in *Spatial Cluster Modelling*, eds. Andrew B. Lawson and Davis Denison, Chapman and Hall.
- [29] Yuri A. Rozanov: *Procesos Aleatorios* Editorial Mir, Moscú. 1973

- [30] M. Loève: *Probability Theory* 2nd Edition, Princeton, N. J.:Van Nostrand 1960
- [31] Edith Gabriel en collaboration avec Peter J Diggle et Barry Rowlingson: *Représentation, analyse et simulation de processus ponctuels spatio-temporels* Prentice Hall, México 1ères Rencontres R, Bordeaux 2012
- [32] R. F. Serfozo: *Conditional Poisson Processes* J. Appl. Prob. Vol 9. 288-302. 1972
- [33] R. C. Elandt: *The folded normal distribution: Two methods of estimating parameters from moments.* Technometrics 1961, 3, 551-562. 1961
- [34] N.L. Johnson: *The folded normal distribution: Accuracy of estimation by maximum likelihood.* Technometrics 1962, 4, 249-256. 1962
- [35] Gladys Bobadilla & Rafael Labarca: *Cálculo en una variable.* Editorial: Universidad de Santiago de Chile 2014