Tradición Excelencia Innovación

Universidad de Valparaíso
Departamento de Matemáticas

Presentaciones

Tesis presentada por **Diego A. Arcis**
Para optar al grado de Licenciado en Matemáticas

Profesor Guía: Dr. Jesús Juyumaya

Valparaíso, 2010

Comisión Examinadora:

- ✓ Dr. Jesús Juyumaya (Universidad de Valparaíso)
- ✓ Mg. Miguel Cerda (Universidad de Valparaíso)
- ✓ Dr. Roberto Johnson (Pontificia Universidad Católica de Valparaíso)

---

http://www.arcisd.tk/

arcis.d@gmail.com

Índice de notaciones

Símbolo	Significado
e	Elemento Neutro.
e_G	Elemento Neutro de G.
$\widehat{e}_G$	Función nula sobre G.
i_A^B	Inclusión de A en B.
$F(A, B)$	Funciones de A en B.
$\mathrm{Hom}(A, B)$	Homomorfismos de A en B.
$\mathrm{Aut}(A, B)$	Automorfismos de A en B.
$\overline{A}$	Clausura Normal de A.
$L(X)$	Grupo Libre generado por X.
$L_c(X)$	Palabras Cíclicas Reducidas sobre X.
$\mathrm{rg}(G)$	Rango del grupo G.
$\ell(g)$	Longitud de la palabra g.
$C(a)$	Centralizador de $\{a\}$.
$[\,a\,]$	Representante de la Clase de a.
$\left\langle A \;\; ; \;\; B \right\rangle$	Presentación de $L(A)/\overline{B}$.
$[A, B]$	Conjunto Conmutador entre A y B.
$<_G$	Relación de Orden en G.
$A \in (PS)$	Propiedad de Schreier en A.
id_G	Función Identidad en G.
$T_R^{(\pm)}$, $T_G^{(\pm)}$	Transformaciones de Tietze.
C_n	Grupo Cíclico de orden n.
S_n	Grupo Simétrico de orden $n!$.
X_n	Conjunto de Transposiciones $s_i = (i\ i+1)$.
Z_n	Conjunto de Transposiciones $z_i = (1\ i)$.

Símbolo	Significado
D_n	Grupo Diédrico de orden $2n$.
A_n	Grupo Alternador de orden $n!/2$.
H_n	Grupo de Heisenberg de tamaño n.
U_n	Grupo Unipotente de tamaño n.
B_n	Grupo de Trenzas de n-cuerdas.
P_n	Grupo de Trenzas Puras de n-cuerdas.
L_k	Subgrupo de B_n que fija las cuerdas con etiqueta mayor o igual a k al proyectar en S_n.
gen(G)	Cantidad de generadores del grupo G.

Introducción

Esta tesis se desarrolla en el área de Presentaciones de Grupos, es decir, estudiaremos la teoría de los Grupos mediante sus generadores y relaciones. El principal objetivo de este trabajo es: introducir, comprender y ejemplificar la noción de presentación de grupo. La Teoría de Presentaciones de Grupos no solo tiene motivaciones algebraicas, sino también Geométricas y Topológicas, por ejemplo aparecen en teoría de Grafos, Grupos Fundamentales, Complejos Simpliciales, etc. Una de las primeras Presentaciones de Grupo mediante generadores y relaciones fue determinada por el matemático irlandés William Rowan Hamilton en 1856, para el grupo Icosaédrico $\mathsf{A}_5 \times \mathbb{Z}_2$. Sin embargo, el primer estudio sistemático de esta teoría fue iniciado por el matemático alemán Walter von Dyck (estudiante de Felix Klein) en la década de 1880. von Dyck es reconocido como uno de los iniciadores de la Teoría Combinatoria de Grupos.

A continuación paso a describir brevemente cada capítulo de la tesis.

En el Capítulo 1, introduciremos la noción de Grupo Libre y sus propiedades. Demostraremos, en particular, que dado cualquier conjunto X, es posible construir un grupo libre, denotado $\mathsf{L}(\mathsf{X})$, el cual es llamado grupo libre sobre X. El grupo $\mathsf{L}(\mathsf{X})$ tiene como característica principal, que no existen relaciones no triviales de elementos de X. Una consecuencia importante en la Teoría de Presentaciones, es que todo grupo es isomorfo a un cociente de algún grupo libre, es decir, si G es un grupo, existen X un conjunto y un subgrupo normal N de $\mathsf{L}(\mathsf{X})$ de modo que:

$$\mathsf{G} \simeq \mathsf{L}(\mathsf{X})/\mathsf{N}. \qquad \text{(ver Corolario 1.1)}$$

En el año 1921 el matemático danés Jakob Nielsen demuestra que todo subgrupo de un grupo libre de rango finito, también es de rango finito. Más aún, en el año 1927 el matemático austriaco Otto Schreier, prueba que si G es un grupo libre de rango t y H es un subgrupo de índice s, entonces:

$$\mathrm{rg}(\mathsf{H}) = (\mathsf{t}-1)\mathsf{s}+1. \qquad \text{(ver Teorema 1.20)}$$

este resultado es estudiado en el Capítulo 1, y es conocido como el Teorema de Nielsen-Schreier (ver [**Joh97**]).

El Capítulo 2, tiene como un objetivo definir el concepto de Presentación de Grupo y enunciar tipos y métodos para determinar la presentación de un grupo dado. Para comenzar es fundamental recordar que todo grupo G se puede mirar como el cociente de un grupo libre, es decir, $\mathsf{G} \simeq \mathsf{L}(\mathsf{X})/\,\overline{\mathsf{R}}$, donde $\overline{\mathsf{R}}$ denota la clausura normal de R en $\mathsf{L}(\mathsf{X})$. Cada vez que tengamos este isomorfismo diremos que G tiene una presentación con generadores X y relaciones R, denotaremos dicha presentación por:

$$\Big\langle \; \mathsf{X} \;\; ; \;\; \mathsf{R} \; \Big\rangle .$$

Continuamos demostrando que todo grupo tiene una presentación por generadores y relaciones. Así, en adelante podremos considerar cualquier grupo definido mediante una presentación (esto nos permite estudiar de que manera actúan los Homomorfismos de Grupos sobre sus presentaciones respectivas). Luego podremos demostrar el test de Sustitución. El cual nos permite extender una función definida sólo sobre los generadores de un grupo a un homomorfismo definido sobre todo el grupo. El test de Sustitución será de mucha utilidad en el resto de este trabajo, por ejemplo para determinar una presentación de un producto directo de grupos, ésto es: si consideramos dos grupos con generadores X, Y y relaciones R, S respectivamente, una presentación para el producto directo de estos grupos será:

$$\Big\langle \; \mathsf{X}, \mathsf{Y} \;\; ; \;\; \mathsf{R}, \mathsf{S}, [\mathsf{X}, \mathsf{Y}] \; \Big\rangle .$$

En el año 1908, el matemático austriaco Heinrich Franz Friedrich Tietze, introdujo lo que llamaremos Transformaciones de Tietze, éstas son de gran utilidad para reducir la cantidad de generadores y/o relaciones que definen un grupo. Luego, en particular puede servir para decidir cuando dos grupos son isomorfos. Las Transformaciones de Tietze es una manipulación algorítmica de los generadores y relaciones de una presentación, las cuales actuarán de manera invariante sobre ellas, es decir, si G es un grupo y T una transformación de Tietze, entonces $\mathsf{T}(\mathsf{G}) \simeq \mathsf{G}$.

Veremos que existen distintas maneras para determinar una presentación de un grupo. Entre éstas se encuentra la forma directa, la cual muchas veces no es de mayor utilidad, ya que, en general, no es trivial determinar un conjunto generador y un sistema de relaciones para un grupo dado. Sin embargo, existen otros métodos, derivados de los estudios de Nielsen, Schreier y el matemático alemán Kurt Werner Friedrich Reidemeister. Éste último ideó un método para determinar una presentación de los subgrupos de algún grupo con presentación conocida. Éste método es conocido como el método de Reidemeister-Schreier y es estudiado en la sección 3. Para finalizar el capítulo 2, estudiaremos cómo calcular una presentación de una extensión de grupos, esto entrega como consecuencia un método para determinar una presentación para un producto semi-directo de grupos, éste método es muy útil en el capítulo siguiente para calcular presentaciones de grupos de matrices.

En el Capítulo 3, calcularemos presentaciones de algunos grupos conocidos. Para comenzar estudiaremos el grupo S_n y probaremos de modo directo que este grupo tiene una presentación con generadores $s_1, \ldots, s_{n-1}$ y relaciones s_i^2, $(s_i s_{i+1})^3$ y $(s_i s_j)^2$ cuando $|i-j| \geqslant 2$, esta presentación es conocida como Presentación de Coxeter de S_n (ver Proposición 3.4). Además, utilizando transformaciones de Tietze, veremos que S_n puede también ser presentado solamente con los generadores s_1 y $s = s_1 \cdots s_{n-1}$. Nótese que ésta presentación no se encuentra en la bibliografía estándar. También aplicaremos el método de Reidemeister-Schreier para determinar una presentación del grupo de permutaciones pares A_n (ver Teorema 3.2). Finalmente determinaremos presentaciones de los grupos de matrices: Grupo de Heisenberg H_n y Grupo Unipotente U_n sobre cuerpos finitos. Para esto notemos que H_n y U_n pueden ser definidos inductivamente a partir de H_{n-1} y U_{n-1}, respectivamente. Luego aplicaremos el método de extensiones, en el caso de un producto semi-directo, para determinar una presentación de H_n y U_n (ver Teoremas 3.5 y 3.9).

El Capítulo 4, esencialmente, determina una Presentación para el subgrupo de Trenzas Puras P_n, basándose en el texto de Murasugi, K., Kurpita B. L., *A Study of Braids* , Kluwer Acad Pub., 1999. Aunque este capítulo podría ser una sección más del capítulo anterior, será realizado aparte por su complejidad y extensión. Comenzaremos definiendo el grupo de Trenzas Clásicas B_n mediante la presentación de Artin, y luego el grupo de Trenzas Puras como el núcleo de la proyección canónica $\pi : B_n \to S_n$. La idea para determinar esta presentación, es definir un subgrupo, denotado L_k, de B_n, el cual al proyectar sobre S_n (mediante π), fija las cuerdas $k, k+1 \ldots, n$. Además, tenemos:

$$P_1 = L_1 \leqslant L_2 \leqslant \cdots \leqslant L_n \leqslant B_n.$$

Así, de un modo inductivo, calcularemos una presentación de L_1. Primero aplicaremos el método de Reidemeister-Schreier para encontrar una presentación del grupo L_n mediante B_n, ésta nos permitirá determinar por el mismo método, una presentación para el grupo L_{n-1} a partir de la presentación de L_n. Habiendo encontrado estas presentaciones, es posible generalizar una presentación para $L_1 = P_n$, la cual viene dada por los siguientes generadores $\tau_{i,j}$ definidos como sigue:

$$\tau_{j,k} = \sigma_{k-1}\sigma_{k-2}\cdots\sigma_{j+1}\sigma_j^2\sigma_{j+1}^{-1}\cdots\sigma_{k-2}^{-1}\sigma_{k-1}^{-1}, \quad 1 \leqslant j < k \leqslant n,$$

y las siguientes relaciones:

$$\begin{cases} (A) & \tau_{r,s}\tau_{i,j} = \tau_{i,j}\tau_{r,s} & ; \; 1 \leqslant r < s < j \leqslant n, \text{ o } 1 \leqslant r < s < j \leqslant n, \\ (B) & \tau_{r,s}\tau_{r,j}\tau_{r,s}^{-1} = \tau_{s,j}^{-1}\tau_{r,j}^{-1}\tau_{s,j} & ; \; 1 \leqslant r < s < j \leqslant n, \\ (C) & \tau_{r,s}\tau_{s,j}\tau_{r,s}^{-1} = \tau_{s,j}^{-1}\tau_{r,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{r,j}\tau_{s,j} & ; \; 1 \leqslant r < s < j \leqslant n, \\ (D) & \tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i} = \tau_{r,i}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j} & ; \; 1 \leqslant r < s < i < j \leqslant n. \end{cases}$$

No es difícil probar que los elementos $\tau_{i,j}$ generan el grupo P_n. Lo que haremos luego, será asumir las relaciones $(A), (B), (C)$ y (D), y demostrar, nuevamente mediante Reidemeister-Schreier, que toda relación obtenida de L_k en L_{k+1}, es consecuencia de éstas relaciones. Los cálculos de todas la relaciones de este capítulo serán explicitados en el Apéndice A. Cabe destacar que en la bibliografía estándar fue imposible encontrar una demostración detallada de la presentación de P_n.

El presente trabajo de tesis es parte del proyecto FONDECYT[1] 1085002, el autor fue financiado parcialmente por este proyecto. Además se utilizaron normas ISO[2] 690, 690-2 para citas y referencias bibliográficas.

[1] FONDECYT: Fondo Nacional de Desarrollo Científico y Tecnológico.

[2] ISO: International Organization for Standardization.

Índice general

Capítulo 1

Grupos Libres

1. Preliminares

Anotaremos e_G el neutro del grupo G. Para simplificar notación y si no hay peligro de confusión, anotaremos simplemente por e el elemento e_G.

1.1. Generado y Clausura Normal.

Proposición 1.1. *Sea* G *un grupo y* $\{H_i\}_{i\in I}$ *una familia de subgrupos de* G*, entonces* $\bigcap_{i\in I} H_i$ *es un subgrupo de* G*.*

Demostración. Es claro que $e_G = e_{H_i}$ para todo $i \in I$, por lo tanto $\bigcap_{i\in I} H_i$ es no vacío. Si $a, b \in \bigcap_{i\in I} H_i$ entonces $a, b \in H_i$ para todo $i \in I$, luego $ab, b^{-1} \in H_i$ para todo $i \in I$. Por lo tanto $\bigcap_{i\in I} H_i$ es un subgrupo de G. $\square$

Definición 1.1. *Sean* G *un grupo y* X *un subconjunto no vacío de* G*. Se define el generado por* X*, el cual se denota* $\left\langle\ X\ \right\rangle$*, de la siguiente forma:*

$$\left\langle\ X\ \right\rangle := \bigcap_{H\in\mathcal{F}} H, \quad \textit{donde} \quad \mathcal{F} := \left\{\ H \leqslant G \quad ; \quad X \subseteq H\ \right\}.$$

Notación 1.1. Sea X un conjunto no vacío

- Si X es finito definido por extensión $X = \left\{\ x_1, x_2, \ldots, x_n\ \right\}$, anotamos:

$$\left\langle\ X\ \right\rangle = \left\langle \left\{\ x_1, x_2, \ldots, x_n\ \right\} \right\rangle = \left\langle\ x_1, x_2, \ldots, x_n\ \right\rangle$$

- Si X es definido por comprensión $X = \left\{\ x \in U \quad ; \quad p(x)\ \right\}$, anotamos:

$$\left\langle\ X\ \right\rangle = \left\langle \left\{\ x \in U \quad ; \quad p(x)\ \right\} \right\rangle = \left\langle\ x \in U \quad ; \quad p(x)\ \right\rangle,$$

donde U es un conjunto y p una función proposicional en U.

Claramente se tienen las siguientes propiedades:

Propiedades 1.1.

1. $\langle X\rangle \leqslant G$.
2. *Si* $X \subseteq H \leqslant G$ *entonces* $\langle X\rangle \subseteq H$.
3. *Si* $X \leqslant G$ *entonces* $\langle X\rangle = X$.

Proposición 1.2. $\Big\langle\ X\ \Big\rangle$ *es el subgrupo mas pequeño de* G *que contiene a* X.

Demostración. Supongamos que existe un subgrupo K, tal que $X \subseteq K \subset \langle X\rangle \leqslant G$. Como $K \in \mathcal{F}$ entonces $\langle X\rangle = \bigcap_{H\in\mathcal{F}} H \subset K$. Por lo tanto $\langle X\rangle = K$. $\square$

Proposición 1.3. *Sean* G *un grupo y* X *un subconjunto no vacío de* G. *Entonces*

$$\Big\langle\ X\ \Big\rangle = \left\{\ \prod_{i=1}^{n} x_i^{q_i} \quad ; \quad x_i \in X,\ q_i = \pm 1,\ n \in \mathbb{N}\ \right\}. \tag{1.1}$$

Demostración. $\subset$) Sea K el conjunto en (1.1). Es claro que $X \subset K$, entonces $K \neq \emptyset$. Además dados $a, b \in K$ de la siguiente forma:

$$a := \prod_{i=1}^{n} x_i^{q_i}, \quad b := \prod_{j=1}^{m} y_j^{p_j}, \tag{1.2}$$

entonces

$$ab^{-1} = x_1^{q_1} \cdots x_n^{q_n} y_m^{-p_m} \cdots y_1^{-p_1} \in K.$$

Por lo tanto K es un subgrupo que contiene a X, luego $\langle X\rangle \subset K$.

$\supset$) Sea $a \in K$ definido como en (1.2). Como $x_1, \ldots, x_n \in X$, entonces a pertenece a cualquier subgrupo que contenga a X, luego $a \in \langle X\rangle$. Esto demuestra la proposición. $\square$

Observación 1.1. Si $X = \emptyset$, se conviene que $\Big\langle\ X\ \Big\rangle = \{e\}$.

Definición 1.2. *Sean* G *un grupo y* S *un subconjunto no vacío de* G. *Se define la clausura normal de* S *en* G, *la cual se denota* $\overline{S}$, *como sigue:*

$$\overline{S} := \bigcap_{N\in\mathcal{G}} N, \quad \textit{donde} \quad \mathcal{G} := \left\{\ N \trianglelefteq G \quad ; \quad S \subseteq N\ \right\}. \tag{1.3}$$

Proposición 1.4. $\overline{S}$ *es el subgrupo normal de* G *mas pequeño que contiene al conjunto* S.

Demostración. Supongamos que existe un subgrupo normal K de G tal que $S \subseteq K \subset \overline{S} \trianglelefteq G$. Como $K \in \mathcal{G}$ entonces $\overline{S} = \bigcap_{N \in \mathcal{G}} N \subset K$. Por lo tanto $\overline{S} = K$. $\square$

Proposición 1.5. *Sean* G *un grupo,* $S \subseteq G$ *y* $N \trianglelefteq G$. *Si* $N = \langle S \rangle$, *entonces* $N = \overline{S}$.

Demostración. Como S genera a N entonces $S \subseteq N$, luego $N \in \mathcal{G}$. Por lo tanto

$$N = \Big\langle \ S \ \Big\rangle = \bigcap_{H \in \mathcal{F}} H \subseteq \bigcap_{H \in \mathcal{G}} H = \overline{S} \subseteq N.$$

Esto demuestra que $N = \overline{S}$. $\square$

Proposición 1.6. *Sean* G *un grupo y* S *un subconjunto no vacío de* G. *Entonces*

$$\overline{S} = \Big\langle \ gsg^{-1} \quad ; \quad g \in G, \ s \in S \ \Big\rangle. \tag{1.4}$$

Demostración. Sea X el conjunto de elementos gsg^{-1} y H el grupo generado por X.

$\subset$) Es claro que $S \subset X \subset H$. Demostremos que H es normal en G. Sea $h \in H$, por Proposición 1.3 sabemos que h se escribe como

$$h = g_1 s_1^{q_1} g_1^{-1} \cdots g_n s_n^{q_n} g_n^{-1},$$

donde $g_i \in G$, $s_i \in S$, $q_i = \pm 1$, $n \in \mathbb{N}$, $i = 1, \ldots, n$. Entonces, para todo $g \in G$ se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} ghg^{-1} &= gg_1 s_1^{q_1} g_1^{-1} g_2 s_2^{q_2} g_2^{-1} \cdots g_n s_n^{q_n} g_n^{-1} g^{-1}, \\ &= gg_1 s_1^{q_1} g_1^{-1} g^{-1} g g_2 s_2^{q_2} g_2^{-1} g^{-1} \cdots g g_n s_n^{q_n} g_n^{-1} g^{-1}, \\ &= (gg_1) s_1^{q_1} (gg_1)^{-1} (gg_2) s_2^{q_2} (gg_2)^{-1} \cdots (gg_n) s_n^{q_n} (gg_n)^{-1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $ghg^{-1} \in H$, así H es normal en G y contiene a S, luego $H \in \mathcal{G}$. Por Proposición 1.4, se sigue que $\overline{S} \subset H$.

$\supset$) Como $S \subset N$ para todo $N \in \mathcal{G}$, se tiene que $X \subset \overline{S}$, ya que $gsg^{-1} \in N$, para todo $g \in G$, todo $s \in S$ y todo $N \in \mathcal{G}$. Por Proposición 1.2, entonces $X \subset H \subset \overline{S}$. $\square$

Lema 1.1. *Sean* G *un grupo y* X, Y *dos subconjuntos de* G*, de modo que* $X \subseteq Y \subseteq G$*, entonces* $\overline{X} \subseteq \overline{Y}$*.*

Demostración. Sea $a \in \overline{X}$, entonces $a = \prod gxg^{-1}$, donde $g \in G$ y $x \in X$. Como $X \subseteq Y \subseteq \overline{Y}$, se tiene $x = \prod hyh^{-1}$, con $h \in G$ e $y \in Y$. Luego,

$$\begin{aligned} a &= \prod gxg^{-1}, \\ &= \prod g \left(\prod hyh^{-1}\right) g^{-1}, \\ &= \prod kyk^{-1}, \end{aligned}$$

donde $k \in G$. Por lo tanto $a \in \overline{Y}$. $\square$

1.2. Torsión, Transversales y Subgrupos Notables.

Definición 1.3. *Un grupo* G *se dice libre de torsión si el único elemento de orden finito es el neutro. Es decir, si* $g^n = e$*, con* $n \neq 0$*, entonces* $g = e$*.*

Ejemplo 1.1. $\mathbb{R}_+^\times$ es un grupo libre de torsión, ya que dado $a \in \mathbb{R}_+^\times$ y $n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$, tal que $a^n = e$ entonces $a = 1$.

Ejemplo 1.2. El grupo $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}$ es un grupo infinito que no es libre de torsión, ya que $n(1,0) = (0,0)$, pero $(1,0) \neq (0,0)$.

Definición 1.4. *Sean* G *un grupo y* H *un subgrupo de* G *fijo. Llamaremos transversal derecho o simplemente transversal de* H *en* G*, a un sistema de representantes de las clases derechas de* G *según* H*.*

Sea U *un transversal de* G *según* H*, si* $u \in G$*, anotamos*

$$[u] := Hu \cap U,$$

al representante de la clase Hu *en* U*, el cual no necesariamente es el mismo* u*.*

Definición 1.5. *Sea* G *un grupo. Para cada par* $g, h \in \mathsf{G}$ *se define el conmutador de* g *con* h*, denotado* $[g, h]$*, como el elemento* $ghg^{-1}h^{-1}$*. Dados* S *y* T *dos subconjuntos no vacíos de* G*, se define el conjunto conmutador* $[\mathsf{S}, \mathsf{T}]$ *de* S *con* T *como sigue:*

$$[\mathsf{S}, \mathsf{T}] := \left\{ \ [s, t] \quad ; \quad s \in \mathsf{S},\ t \in \mathsf{T} \ \right\}.$$

El subgrupo conmutador de G *viene dado de la siguiente manera:*

$$\mathsf{G}' := \left\langle \ [g, h] \quad ; \quad g, h \in \mathsf{G} \ \right\rangle = \left\langle \ [\mathsf{G}, \mathsf{G}] \ \right\rangle.$$

Si $\mathsf{H} \leqslant \mathsf{G}$*, el siguiente conjunto* $\mathsf{C}(\mathsf{S}, \mathsf{H})$ *es llamado centralizador de* S *en* H

$$\mathsf{C}(\mathsf{S}, \mathsf{H}) := \left\{ \ h \in \mathsf{H} \quad ; \quad sh = hs,\ \forall s \in \mathsf{S} \ \right\}.$$

Si $\mathsf{H} = \mathsf{G}$ *anotamos* $\mathsf{C}(\mathsf{S})$ *al conjunto centralizador de* S *en* G*. El centro de* G*, denotado* $\mathsf{Z}(\mathsf{G})$*, es el centralizador de* G *en si mismo. Es decir* $\mathsf{Z}(\mathsf{G}) = \mathsf{C}(\mathsf{G})$*.*

Observación 1.2. Nótese que si g conmuta con h equivale a $[g, h] = e$. Por lo tanto:

$$\mathsf{G} \text{ es un grupo abeliano} \quad \Leftrightarrow \quad \mathsf{G}' = \{e\} \quad \Leftrightarrow \quad \mathsf{Z}(\mathsf{G}) = \mathsf{G}.$$

1.3. Producto Directo y Semi-Directo.

Definición 1.6 (Producto Directo Externo)**.** *Sean* H, K *grupos. El producto cartesiano* $\mathsf{H} \times \mathsf{K}$ *tiene estructura de grupo con el siguiente producto*

$$(h_1, k_1)(h_2, h_2) = (h_1h_2, k_1k_2), \qquad (h_1, h_2 \in \mathsf{H},\ k_1, k_2 \in \mathsf{K}.)$$

Este grupo es llamado producto directo externo de H *con* K*.*

Definición 1.7 (Producto Directo Interno)**.** *Si* H, K *son subgrupos normales de* G *tal que* $\mathsf{H} \cap \mathsf{K} = \{e\}$ *y* $\mathsf{G} = \mathsf{HK}$*, se dice que* G *es producto directo interno de* H *con* K*.*

Nótese que si G es un producto directo de H con K, entonces $G \simeq H \times K$, mediante la aplicación que envía $(h,k) \mapsto hk$. Por esto, en adelante hablaremos simplemente de producto directo.

Definición 1.8 (Producto Semi-Directo)**.** *Diremos que* G *es un producto semi-directo de* H *con* K*, denotado* $H \rtimes K$ *(resp.* $H \ltimes K$*), si*

1. $H \trianglelefteq G$ *(resp.* $K \trianglelefteq G$*).*
2. $G = HK$*.*
3. $H \cap K = \{e\}$*.*

A continuación, dado dos grupos H, K y φ un homomorfismo de K en $\mathrm{Aut}(H)$. Estudiaremos como construir un grupo que sea producto semi-directo de H con K.

Definición 1.9. *Sean* H, K *grupos y sea* $\varphi : K \to \mathrm{Aut}(H)$ *un homomorfismo. Para todo* $k \in K$ *denotamos* $\varphi_k = \varphi(k)$*. Sobre el producto cartesiano* $H \times K$ *definimos el siguiente producto:*

$$(h_1, k_1)(h_2, k_2) = (h_1\varphi_{k_1}(h_2), k_1k_2). \tag{1.5}$$

Lema 1.2. $H \times K$ *con el producto en* (1.5) *tiene estructura de grupo.*

Demostración. Sean $h_1, h_2, h_3 \in H$ y $k_1, k_2, k_3 \in K$, entonces

$$\begin{aligned}
((h_1,k_1)(h_2,k_2))(h_3,k_3) &= (h_1\varphi_{k_1}(h_2), k_1k_2)(h_3,k_3),\\
&= (h_1\varphi_{k_1}(h_2)\varphi_{k_1k_2}h_3, k_1k_2k_3),\\
&= (h_1\varphi_{k_1}(h_2)\varphi_{k_1}(\varphi_{k_2}(h_3)), k_1k_2k_3),\\
&= (h_1\varphi_{k_1}(h_2\varphi_{k_2}(h_3)), k_1k_2k_3),\\
&= (h_1,k_1)(h_2\varphi_{k_2}(k_3), k_2k_3),\\
&= (h_1,k_1)((h_2,k_2)(h_3,k_3)).
\end{aligned}$$

Es claro que $e_{H\times K} = (e_H, e_K)$ ya que

$$(h,k)(e_H, e_K) = (h\varphi_k(e_H), ke_K) = (h,k)$$

y

$$(e_H, e_K)(h, k) = (e_H\varphi_{e_K}(h), ke_K) = (h, k).$$

Por último $(h, k)^{-1} = (\varphi_{k^{-1}}(h^{-1}), k^{-1})$, pues

$$(h, k)(\varphi_{k^{-1}}(h^{-1}), k^{-1}) = (h\varphi_k(\varphi_{k^{-1}}(h^{-1})), kk^{-1}) = (e_H, e_K)$$

y

$$(\varphi_{k^{-1}}(h^{-1}), k^{-1})(h, k) = (\varphi_{k^{-1}}(h^{-1})\varphi_k(h), k^{-1}k) = (e_H, e_K).$$

Esto demuestra que el producto en (1.5) da estructura de grupo al conjunto $H \times K$. □

Sea G el grupo que define el Lema 1.2. Tenemos el siguiente teorema:

Teorema 1.3 (Producto Semi-Directo)**.** $G = (H \times \{e_K\}) \rtimes (\{e_H\} \times K)$.

Demostración. Es claro que

$$(H \times \{e_K\}) \cap (\{e_H\} \times K) = \{(e_H, e_K)\} = \{e_{H\times K}\},$$

y también $G = H \times K = (H \times \{e_K\})(\{e_H\} \times K)$, ya que

$$(h, e_K)(e_H, k) = (h\varphi_{e_K}(e_H), e_K k) = (h, k) \in H \times K.$$

Basta demostrar que $(H \times \{e_K\}) \trianglelefteq H \times K = G$. Para esto tenemos:

$$\begin{aligned} (h_1, k)(h_2, e_K)(h_1, k)^{-1} &= (h_1\varphi_k(h_2), ke_K)(\varphi_{k^{-1}}(h_1^{-1}), k^{-1}), \\ &= (h_1\varphi_k(h_2)\varphi_k(\varphi_{k^{-1}}(h_1^{-1})), kk^{-1}), \\ &= (h_1\varphi_k(h_2)h_1^{-1}, e_K) \in H \times \{e_K\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $G = (H \times \{e_K\}) \rtimes (\{e_H\} \times K)$. □

Tenemos que el grupo H es isomorfo naturalmente con el subgrupo $H\times\{e_K\}$ de G, mediante $(h, e_K) \mapsto h$, análogamente para K con $\{e_H\} \times K$. Así, H y K pueden ser mirados como subgrupos de G y por lo tanto decimos que G es un producto semi-directo de H con K

$$G \simeq H \rtimes K. \tag{1.6}$$

Notación 1.2. Denotaremos por $H \rtimes_\varphi K$ la descomposición en producto semi-directo del Teorema 1.3.

La siguiente proposición demuestra que todo producto semi-directo puede ser construido como en el Teorema 1.3. Es decir, todo producto semi-directo $H \rtimes K$ induce un homomorfismo $\varphi : K \to \mathrm{Aut}(H)$, $\varphi_k(h) := khk^{-1}$, mediante el cual puede ser construido, donde $\varphi(k)(h) =: \varphi_k(h)$.

Proposición 1.7. *La siguiente aplicación es un isomorfismo*

$$\begin{array}{rccc} \psi : & H \rtimes_\varphi K & \to & H \rtimes K \\ & (h,k) & \mapsto & hk \end{array}$$

para todo $h \in H$ *y todo* $k \in K$.

Demostración. Sean $h_1, h_2 \in H$ y $k_1, k_2 \in K$ entonces

$$\begin{aligned} \psi((h_1,k_1)(h_2,k_2)) &= \psi(h_1\varphi_{k_1}(h_2), k_1k_2), \\ &= \psi(h_1\varphi_{k_1}(h_2), k_1k_2), \\ &= \psi(h_1k_1h_2k_1^{-1}, k_1k_2), \\ &= h_1k_1h_2k_2, \\ &= \psi(h_1,k_1)\psi(h_2,k_2). \end{aligned}$$

Por lo tanto ψ es un homomorfismo. Es claro que ψ es epiyectiva. Además es inyectiva ya que, si $\psi(h,k) = e_{H \rtimes K}$ entonces $(h,k) = (e_H, e_K) = e_{H \rtimes_\varphi K}$, pues $H \cap K = \{e_{H \rtimes_\varphi K}\}$. Por lo tanto $G \simeq H \rtimes_\varphi K \simeq H \rtimes K$. $\square$

Ejemplo 1.3. El grupo Diédrico D_n de simetrías de un n-ágono regular es producto semi-directo, mediante φ, de los grupos cíclicos

$$C_n \simeq \left\{ \ e, r, \ldots, r^{n-1} \ \right\}, \quad \text{con} \quad C_2 \simeq \left\{ \ e, s \ \right\},$$

donde $\varphi_s(r) = r^{-1}$.

1.4. Relaciones de Orden.

Definición 1.10. *Un orden parcial (estricto) sobre un conjunto* S *es una relación binaria* $<_S$ *(menor que) en* $S \times S$ *que cumple con las siguientes propiedades:*

1. *Para todo* $s \in S$, $s \not<_S s$ *(irreflexividad).*
2. *Si* $r <_S s$ *y* $s <_S t$, *entonces* $s <_S t$ *(transitividad).*

Se dice que $<_S$ *es un orden total (estricto) sobre* S *si además cumple con:*

3. *Para todo* $s, t \in S$, $s \not<_S t$ *o* $s = t$ *o* $t \not<_S s$ *(ley de tricotomía).*

Definición 1.11. *Diremos que* S *es un conjunto bien ordenado o que* $<_S$ *es un buen-orden sobre* S. *Si* $<_S$ *es un orden total y además cada subconjunto no vacío de* S *tiene un elemento minimal.*

Ejemplo 1.4. $\mathbb{Z}_+$ con el orden usual, es un conjunto bien ordenado.

1.5. Sucesiones Exactas.

Definición 1.12. *Sean* $\{A_i\}_{i=0}^{n}$ *una familia de grupos y* $\{\varphi_i\}_{i=0}^{n-1}$ *una familia de homomorfismos, tal que*

$$\varphi_i : A_i \to A_{i+1}, \quad (i = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Diremos que el siguiente diagrama:

$$(A_\varphi): \quad A_0 \xrightarrow{\varphi_0} A_1 \xrightarrow{\varphi_1} A_2 \xrightarrow{\varphi_2} \cdots \xrightarrow{\varphi_{n-2}} A_{n-1} \xrightarrow{\varphi_{n-1}} A_n$$

es una sucesión exacta de grupos, si $\mathrm{Im}(\varphi_i) = \mathrm{Ker}(\varphi_{i+1})$ *para todo* $i = 0, 1, \ldots, n-2$. *Si* $n = 4$, $A_0 = \{e_{A_0}\}$ *y* $A_4 = \{e_{A_4}\}$, *diremos que* (A_φ) *es una sucesión exacta corta de grupos:*

$$\{e_{A_0}\} \xrightarrow{\varphi_0} A_1 \xrightarrow{\varphi_1} A_2 \xrightarrow{\varphi_2} A_3 \xrightarrow{\varphi_3} \{e_{A_4}\}\ .$$

Lema 1.4 (de los cinco). *Sean* $\{A_i\}_{i=0}^{4}$, $\{B_i\}_{i=0}^{4}$ *dos familias de grupos y* $\{\alpha_j\}_{j=0}^{3}$, $\{\beta_j\}_{j=0}^{3}$ *dos familias de homomorfismos, de modo que* $(A_\alpha), (B_\beta)$ *son* *sucesiones exactas de grupos. Sea* $\varphi_k : A_k \to B_k$ *un homomorfismo, para* $k = 0, 1, 2, 3, 4$*. Consideremos el siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
A_0 \arrow[r, "\alpha_0"] \arrow[d, "\varphi_0"] & A_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\varphi_1"] & A_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "\varphi_2"] & A_3 \arrow[r, "\alpha_3"] \arrow[d, "\varphi_3"] & A_4 \arrow[d, "\varphi_4"] \\
B_0 \arrow[r, "\beta_0"'] & B_1 \arrow[r, "\beta_1"'] & B_2 \arrow[r, "\beta_2"'] & B_3 \arrow[r, "\beta_3"'] & B_4
\end{tikzcd}$$

Si φ_i *es un isomorfismo y* $\beta_i\varphi_i = \varphi_{i+1}\alpha_i$ *para todo* $i = 0, 1, 3, 4$*, entonces* φ_2 *es también un isomorfismo.*

Demostración. Sea $a_2 \in \mathrm{Ker}(\varphi_2)$, esto es $\varphi_2(a_2) = e_{B_2}$. Aplicamos β_2,

$$\varphi_3(\alpha_2(a_2)) = \beta_2(\varphi_2(a_2)) = \beta_2(e_{B_2}) = e_{B_3}.$$

Como φ_3 es un monomorfismo, entonces $\alpha_2(a_2) = e_{A_3}$, $a_2 \in \mathrm{Ker}(\alpha_2) = \mathrm{Im}(\alpha_1)$, luego existe $a_1 \in A_1$ tal que $\alpha_1(a_1) = a_2$. Aplicando φ_2,

$$\beta_1(\varphi_1(a_1)) = \varphi_2(\alpha_1(a_1)) = \varphi_2(a_2) = e_{B_2}.$$

Por lo tanto $\varphi_1(a_1) \in \mathrm{Ker}(\beta_1) = \mathrm{Im}(\beta_0)$, es decir, existe $b_0 \in B_0$ tal que $\varphi_1(a_1) = \beta_0(b_0)$. Como φ_1 es epiyectiva, $\mathrm{Im}(\varphi_0) = B_0$, entonces existe $a_0 \in A_0$ tal que $b_0 = \varphi_0(a_0)$, así obtenemos lo siguiente

$$\varphi_1(a_1) = \beta_0(b_0) = \beta_0(\varphi_0(a_0)) = \varphi_1(\alpha_0(a_0)).$$

Como φ_1 es inyectiva, $a_1 = \alpha_0(a_0) \in \mathrm{Im}(\alpha_0) = \mathrm{Ker}(\alpha_1)$, esto es

$$a_2 = \alpha_1(a_1) = e_{A_2}, \quad (\mathrm{Ker}(\varphi_2) = \{e_{A_2}\}).$$

Por lo tanto φ_2 es un monomorfismo. Sea $b_2 \in B_2$, entonces $\beta_2(b_2) \in B_3$, como φ_3 es epimorfismo, existe $a_3 \in A_3$ tal que $\beta_2(b_2) = \varphi_3(a_3) \in \mathrm{Im}(\beta_2) = \mathrm{Ker}(\beta_3)$, es decir $\varphi_4(\alpha_3(a_3)) = \beta_3(\varphi_3(a_3)) = e_{B_4}$. Pero φ_4 es un monomorfismo, entonces $\alpha_3(a_3) = e_{A_4}$, luego $a_3 \in \mathrm{Ker}(\alpha_3) = \mathrm{Im}(\alpha_2)$, por lo que existe $a_2 \in A_2$ con $\alpha_2(a_2) = a_3$. Aplicando φ_3 se obtiene

$$\beta_2(\varphi_2(a_2)) = \varphi_3(\alpha_2(a_2)) = \varphi_3(a_3) = \beta_2(b_2) \quad /(\beta_2(\varphi_2(a_2)))^{-1},$$

$$\beta_2(b_2)(\beta_2(\varphi_2(a_2)))^{-1} = \beta_2(b_2(\varphi_2(a_2))^{-1}) = e_{B_3}.$$

Por lo tanto $b_2(\varphi_2(a_2))^{-1} \in \mathrm{Ker}(\beta_2) = \mathrm{Im}(\beta_1)$, luego, existe $b_1 \in B_1$ tal que $b_2(\varphi_2(a_2))^{-1} = \beta_1(b_1)$. Como φ_1 es un epimorfismo, existe $a_1 \in A_1$ de modo que $b_1 = \varphi_1(a_1)$, obteniendo

$$b_2(\varphi_2(a_2))^{-1} = \beta_1(b_1) = \varphi_2(\alpha_1(a_1)), \quad /\varphi_2(a_2),$$

$$b_2 = \varphi_2(\alpha_1(a_1)a_2) \in \mathrm{Im}(\varphi_2).$$

Luego $B_3 = \mathrm{Im}(\varphi_2)$. Así, φ_2 es un epimorfismo y por lo tanto un isomorfismo. □

Lema 1.5. *Sean* G, H *grupos tal que* $H \leqslant G$ *y* $|G| < \infty$*. Si* $f : G \to H$ *es un epimorfismo y* $|G| = |H|$*, entonces* f *es un isomorfismo.*

Demostración. Basta probar que f es inyectiva. Supongamos que existen $g_1, g_2 \in G$ distintos, tales que $f(g_1) = f(g_2)$, entonces $|G| = |H| - 1$ lo cual no puede ser. Por lo tanto f es ún isomorfismo. □

2. Grupos Libres

Definición 1.13. *Sea* G *un grupo y* X *un subconjunto no vacío de* G*. Diremos que* G *es un grupo libre sobre* X*, si para todo grupo* H *y toda aplicación* $\varphi : X \to H$ *existe un único homomorfismo* $\widehat{\varphi} : G \to H$ *tal que* $\widehat{\varphi} \circ \iota_X^G = \varphi$*.*

En un diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, hook, "\iota_X^G"] \arrow[d, "\varphi"'] & G \arrow[dl, dashed, "\widehat{\varphi}"] \\
H &
\end{tikzcd}$$

El conjunto X *se dice una base de* G*.*

Ejemplo 1.5. $(\mathbb{Z}, +)$ es un grupo libre sobre $X = \{1\}$. En efecto, dado un grupo H y una aplicación $\varphi : X \to H$. Existe un único homomorfismo $\widehat{\varphi} : \mathbb{Z} \to H$, $\widehat{\varphi}(n) := \varphi(1)^n$. Claramente $\widehat{\varphi} \circ \iota_X^{\mathbb{Z}} = \varphi$.

Sean G, H grupos y X un subconjunto no vacío de G. Definamos la siguiente aplicación:

$$\rho : \mathrm{Hom}(G, H) \to F(X, H), \quad \rho(f) := f \circ \iota_X^G \qquad (f \in \mathrm{Hom}(G, H)).$$

Tenemos el siguiente lema:

Lema 1.6. *G es libre sobre X, si y sólo sí, ρ es biyectiva.*

Demostración.

$\Rightarrow$) Sea $\varphi : X \to H$. Como G es libre, existe un único homomorfismo $\widehat{\varphi} : G \to H$ de modo que $\varphi = \widehat{\varphi} \circ \iota_X^G$. Así, $\rho(\widehat{\varphi}) = \varphi$, es decir ρ es epiyectiva. Veamos que ρ es inyectiva. Si $\varphi_1, \varphi_2 : G \to H$ son homomorfismos tales que,

$$\varphi_1 \circ \iota_X^G = \rho(\varphi_1) = \rho(\varphi_2) = \varphi_2 \circ \iota_X^G,$$

entonces existen $\psi_1, \psi_2 : G \to H$ homomorfismos (con $\psi_1 = \psi_2$), las respectivas extensiones de $\rho(\varphi_1)$ y $\rho(\varphi_2)$, pero φ_1 y φ_2 también los son, luego por unicidad $\varphi_1 = \psi_1 = \psi_2 = \varphi_2$. Por lo tanto ρ es biyectiva.

$\Leftarrow$) Sea $\varphi : X \to H$. Como ρ es epiyectiva, existe un homomorfismo $\widehat{\varphi} : G \to H$ tal que $\rho\left(\widehat{\varphi}\right) = \widehat{\varphi} \circ \iota_X^G = \varphi$. Supongamos que existe un homomorfismo $\psi : G \to H$ tal que $\rho(\psi) = \psi \circ \iota_X^G = \varphi$, entonces $\rho\left(\widehat{\varphi}\right) = \rho(\psi)$, como ρ es inyectiva $\widehat{\varphi} = \psi$. Así G es libre sobre X. $\square$

Lema 1.7. *Si G es libre sobre X, entonces X genera a G.*

Demostración. Sea $H = \left\langle\ X\ \right\rangle$, demostraremos que $G = H$. Como G es libre sobre X existe una única extensión $\widehat{\iota}_X^H$ de ι_X^H. Así $\widehat{\iota}_X^H \circ \iota_H^G$ es una extensión de $\iota_X^H \circ \iota_H^G = \iota_X^G$, pero id_G también lo es. Por unicidad se sigue que $\widehat{\iota}_X^H \circ \iota_H^G = \mathrm{id}_G$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "\iota_X^G"] \arrow[d, hook, "\iota_X^H"'] & G \arrow[d, "\mathrm{id}_G"] \arrow[dl, "\widehat{\iota}_X^H"] \\ H \arrow[r, hook, "\iota_H^G"'] & G \end{tikzcd}$$

Entonces, $G = \mathrm{Im}(\mathrm{id}_G) = \mathrm{Im}\left(\widehat{\iota}^{\,H}_X \circ \iota^G_H\right) = \mathrm{Im}\left(\widehat{\iota}^{\,H}_X\right) \subseteq H$, pues $H \subseteq G$. Por lo tanto $G = H$. $\square$

La siguiente proposición demuestra que existen tantos grupos libres, módulo isomorfismo, como cantidad de cardinalidades podamos considerar para su respectiva base.

Proposición 1.8. *Sean G_1 y G_2 grupos libres sobre los conjuntos finitos X_1 y X_2 respectivamente. Entonces*

$$G_1 \simeq G_2, \quad \textit{si y sólo sí,} \quad |X_1| = |X_2|.$$

Demostración. $\Rightarrow$) Sea $H = \mathbb{Z}_2$. Por Lema 1.6, sabemos que ρ_i es una biyección, para $i = 1, 2$

$$\rho_i : \mathrm{Hom}(G_i, H) \to F(X_i, H), \quad (i = 1, 2),$$

ya que G_1 y G_2 son libres sobre X_1 y X_2 respectivamente. Como $G_1 \simeq G_2$, entonces

$$|\mathrm{Hom}(G_1, H)| = |\mathrm{Hom}(G_2, H)|\,.$$

Por lo tanto

$$|H|^{|X_1|} = |F(X_1, H)| = |\mathrm{Hom}(G_1, H)| = |\mathrm{Hom}(G_2, H)| = |F(X_2, H)| = |H|^{|X_2|},$$

ya que ρ_i es una biyección, luego

$$2^{|X_1|} = |H|^{|X_1|} = |H|^{|X_2|} = 2^{|X_2|}.$$

Aplicando logaritmo a cada lado de la igualdad, obtenemos que $|X_1| = |X_2|$.

$\Leftarrow$) Si $|X_1| = |X_2|$ existe una biyección $\mu : X_1 \to X_2$. Sean $\varphi_1 : G_2 \to G_1$ y $\varphi_2 : G_1 \to G_2$ las extensiones de $\iota^{G_1}_{X_1} \circ \mu^{-1}$ y $\iota^{G_2}_{X_2} \circ \mu$ respectivamente.

$$\begin{tikzcd}
X_2 \arrow[r, hook, "\iota^{G_2}_{X_2}"] \arrow[d, "\mu^{-1}"'] & G_2 \arrow[d, "\varphi_1"] \\
X_1 \arrow[r, hook, "\iota^{G_1}_{X_1}"'] & G_1
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r, hook, "\iota^{G_1}_{X_1}"] \arrow[d, "\mu"'] & G_1 \arrow[d, "\varphi_2"] \\
X_2 \arrow[r, hook, "\iota^{G_2}_{X_2}"'] & G_2
\end{tikzcd}$$

Como $\varphi_2 \circ \iota_{X_1}^{G_1} = \iota_{X_2}^{G_2} \circ \mu = \mu$ y $\varphi_1 \circ \iota_{X_2}^{G_2} = \iota_{X_1}^{G_1} \circ \mu^{-1} = \mu^{-1}$, para todo $x_1 \in X_1$ y todo $x_2 \in X_2$ tenemos:

$$(\varphi_1 \circ \varphi_2)(x_1) = \varphi_1(\mu(x_1)) = \mu^{-1}(\mu(x_1)) = x_1$$

y

$$(\varphi_2 \circ \varphi_1)(x_2) = \varphi_2(\mu^{-1}(x_2)) = \mu(\mu^{-1}(x_2)) = x_2.$$

Luego, $\varphi_1 \circ \varphi_2$ extiende a $\iota_{X_1}^{G_1}$ y $\varphi_2 \circ \varphi_1$ extiende a $\iota_{X_2}^{G_2}$. Pero también id_{G_1} extiende a $\iota_{X_2}^{G_2}$ y id_{G_2} extiende a $\iota_{X_1}^{G_1}$. Así, por unicidad $\varphi_1 \circ \varphi_2 = \mathrm{id}_{G_1}$ y $\varphi_2 \circ \varphi_1 = \mathrm{id}_{G_2}$. Por lo tanto $\varphi_2 = \varphi_1^{-1}$. En consecuencia φ_1 es un isomorfismo. □

3. Construcción de $L(X)$

A continuación probaremos la existencia de grupos libres, mostrando como construirlos a partir de un conjunto no vacío.

Definición 1.14. *Sea X un conjunto no vacío. En correspondencia biyectiva con X, construimos $X^{-1} := \left\{ x^{-1} \;\; ; \;\; x \in X \right\}$ de modo que $X \cap X^{-1} = \emptyset$. En este momento x^{-1} es solo una etiqueta asignada a x.*

Además, sea $e \notin X \cup X^{-1}$, llamado elemento neutro.

Una palabra en $X \cup X^{-1} \cup \{e\}$ o simplemente en X es una sucesión

$$g := \{x_i^{q_i}\}_{i \in \mathbb{N}\setminus\{0\}} := (x_1^{q_1}, x_2^{q_2}, x_3^{q_3} \ldots), \qquad (x_i \in X,\ q_i = \pm 1,\ i \in \mathbb{N}\setminus\{0\}).$$

Tal que existe $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, de manera que $x_j = e$ para todo $j > n$.

$$g = (x_1^{q_1}, x_2^{q_2}, \ldots, x_n^{q_n}, e, e, e, \ldots).$$

Definición 1.15. *Una palabra se dice reducida si para todo $i \in \mathbb{N}$, x_i^{+1} no está próximo a su asociado x_i^{-1}, es decir $x_{i+1}^{q_{i+1}} \neq x_i^{-q_i}$.*

Luego, una palabra reducida se puede escribir de la siguiente forma

$$g := \prod_{i=1}^{n} x_i^{q_i} = x_1^{q_1} x_2^{q_2} x_3^{q_3} \cdots x_n^{q_n} \quad (x_i \in X,\ q_i := \pm 1,\ i = 1, 2, \ldots n).$$

Nótese que los i'es no son necesariamente distintos.

Definición 1.16. *Diremos que una palabra reducida* g *tiene longitud* n*, denotado* $\ell(g)$*, si es de la forma* $g = x_1^{q_1} \cdots x_n^{q_n}$*, donde* $q_i := \pm 1$*.*

Definición 1.17. *Sean* g_1, g_2 *dos palabras reducidas*

$$g_1 := x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}, \qquad g_2 := y_1^{b_1} \cdots y_m^{b_m}.$$

Se define el producto de g_1 *con* g_2 *como sigue*

$$g_1 g_2 := x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} y_1^{b_1} \cdots y_m^{b_m}.$$

Cancelando los elementos asociados próximos. Más precisamente, supongamos que $n \leqslant m$ *y* k *es el mayor entero* $(0 \leqslant k \leqslant n)$ *tal que* $x_{n-j}^{a_{n-j}} = y_{j+1}^{-b_{j+1}}$ *para todo* $j = 0, 1, \dots, k-1$*. Entonces*

$$g_1 g_2 := \begin{cases} x_1^{a_1} \cdots x_{n-k}^{a_{n-k}} y_{k+1}^{b_{k+1}} \cdots y_m^{b_m} & \textit{si } k < n; \\ y_{n+1}^{b_{n+1}} \cdots y_m^{b_m} & \textit{si } k = n < m; \\ e & \textit{si } k = n = m, \end{cases}$$

Análogamente para $m \leqslant n$*.*

Ejemplo 1.6. Sea $X := \left\{ a, b \right\}$ un conjunto. Las siguientes son palabras reducidas en X

$$aaaa, \quad b^{-1}ab^{-1}a^{-1}, \quad b^{-1}ab^{-1}aaa.$$

Teorema 1.8. *Con el producto anterior, el conjunto de palabras reducidas en* X *es un grupo.*

Demostración. Sea $\widehat{e} = (e, e, e, \dots)$ la palabra vacía, de modo que $\ell(\widehat{e}) = 0$. En efecto $\widehat{e}$ es el neutro, ya que

$$g\,\widehat{e} = (x_1^{q_1} \cdots x_n^{q_n})\,\widehat{e} = x_1^{q_1} \cdots x_n^{q_n} = \widehat{e}\,(x_1^{q_1} \cdots x_n^{q_n}) = \widehat{e}\,g = g.$$

En lo que sigue anotaremos la palabra vacía $\widehat{e}$ simplemente por e.

Tenemos: $x^{+1}x^{-1} = e$ y si $g = x_1^{q_1} \cdots x_n^{q_n}$ entonces $g^{-1} = x_n^{-q_n} \cdots x_1^{-q_1}$.

Sean g_1, g_2, g_3 palabras reducidas, si $g_j = e$ para algún $j = 1, 2, 3$, entonces obviamente $g_1(g_2g_3) = (g_1g_2)g_3$. Supongamos ahora que $g_j \neq e$ para cada $j = 1, 2, 3$.

Sean $g_1 := x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$, $g_3 := z_1^{d_1} \cdots z_k^{d_k}$ y $\ell(g_2) = 1$, es decir $g_2 := y^b \in X \cup X^{-1}$ $(b = \pm 1)$. Si $x_n^{a_n} \neq y^{-b} \neq z_1^{d_1}$, entonces

$$\left(x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}\right)\left(y^b\left(z_1^{d_1} \cdots z_k^{d_k}\right)\right) = \left(\left(x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}\right)y^b\right)\left(z_1^{d_1} \cdots z_k^{d_k}\right).$$

Igualmente ocurre si $x_n^{a_n} = y^{-b} \neq z_1^{d_1}$ o $x_n^{a_n} \neq y^{-b} = z_1^{d_1}$ ya que solo tenemos cancelación por un lado.

Ahora, si $x_n^{a_n} = y^{-b} = z_1^{d_1}$, entonces

$$\left(x_1^{a_1} \cdots x_{n-1}^{a_{n-1}} y^{-b}\right)\left(y^b\left(y^{-b} z_2^{d_2} \cdots z_k^{d_k}\right)\right) = x_1^{a_1} \cdots x_{n-1}^{a_{n-1}} y^{-b} z_2^{d_2} \cdots z_k^{d_k}$$

y

$$\left(\left(x_1^{a_1} \cdots x_{n-1}^{a_{n-1}} y^{-b}\right)y^b\right)\left(y^{-b} z_2^{d_2} \cdots z_k^{d_k}\right) = x_1^{a_1} \cdots x_{n-1}^{a_{n-1}} y^{-b} z_2^{d_2} \cdots z_k^{d_k}.$$

Supongamos válida la asociatividad para $2 \leqslant \ell(g_2) < n$. Si $g_2 := y_1^{b_1} \cdots y_{m-1}^{b_{m-1}} y_m^{b_m}$ es palabra reducida entonces $g_2' = y_1^{b_1} \cdots y_{m-1}^{b_{m-1}}$ también lo es, además tenemos $\ell(g_2') < \ell(g_2)$ y $g_2 = g_2' y_m^{b_m}$. Luego,

$$g_1\left(g_2'\left(y_m^{b_m} g_3\right)\right) = \left(g_1 g_2'\right)\left(y_m^{b_m} g_3\right) = \left(\left(g_1 g_2'\right) y_m^{b_m}\right) g_3,$$

$$g_1\left(\left(g_2' y_m^{b_m}\right) g_3\right) = g_1\left(g_2'\left(y_m^{b_m} g_3\right)\right) = \left(\left(g_1 g_2'\right) y_m^{b_m}\right) g_3 = \left(g_1\left(g_2' y_m^{b_m}\right)\right) g_3.$$

Por lo tanto

$$g_1(g_2g_3) = g_1\left(\left(g_2' y_m^{b_m}\right) g_3\right) = \left(g_1\left(g_2' y_m^{b_m}\right)\right) g_3 = (g_1g_2)g_3.$$

En resumen, hemos demostrado que el conjunto de palabras reducidas es un grupo. □

Definición 1.18. *El grupo construido en el* Teorema 1.8 *se llama grupo libre sobre* X*, y se denota* $L(X)$*. El cardinal de* X *se llama rango de* $L(X)$*, el cual denotamos* $r(L(X))$*.*

Ejemplo 1.7. *Si* $\mathsf{X}=\left\{\ (1,0),(0,1)\ \right\}$. *El grupo libre generado por* X *es*

$$\mathsf{L}(\mathsf{X})=\left\{\ (n,m)\quad ;\quad n,m\in\mathbb{Z}\ \right\}=\mathbb{Z}*\mathbb{Z}.$$

Este es llamado producto libre de $\mathbb{Z}$ *con* $\mathbb{Z}$*.*

Teorema 1.9. $\mathsf{L}(\mathsf{X})$ *es libre sobre* X*.*

Demostración. Sea G un grupo y una aplicación $\varphi:\mathsf{X}\to\mathsf{G}$, definimos $\widehat{\varphi}:\mathsf{L}(\mathsf{X})\to\mathsf{G}$ como sigue

$$\widehat{\varphi}(x_1^{q_1}x_2^{q_2}\cdots x_n^{q_n}):=\varphi(x_1)^{q_1}\varphi(x_2)^{q_2}\cdots\varphi(x_n)^{q_n},\quad\text{con}\quad\widehat{\varphi}(e)=e.$$

Es claro que $\widehat{\varphi}$ está bien definida ya que φ lo es. Además si $g_1,g_2\in\mathsf{L}(\mathsf{X})$ entonces

$$g_1g_2=(x_1^{a_1}\cdots x_n^{a_n})(y_1^{b_1}\cdots y_n^{b_m})=x_1^{a_1}\cdots x_n^{a_n}y_1^{b_1}\cdots y_n^{b_m}.$$

Aplicando $\widehat{\varphi}$ en cada lado de la igualdad obtenemos

$$\begin{aligned}\widehat{\varphi}(g_1g_2)&=\varphi(x_1)^{a_1}\cdots\varphi(x_n)^{a_n}\varphi(y_1)^{b_1}\cdots\varphi(y_n)^{b_m}\\&=(\varphi(x_1)^{a_1}\cdots\varphi(x_n)^{a_n})\left(\varphi(y_1)^{b_1}\cdots\varphi(y_n)^{b_m}\right)\\&=\widehat{\varphi}(g_1)\widehat{\varphi}(g_2).\end{aligned}$$

Luego $\widehat{\varphi}$ es un homomorfismo de $\mathsf{L}(\mathsf{X})$ en G.

Sea $\psi:\mathsf{L}(\mathsf{X})\to\mathsf{G}$ un homomorfismo, tal que $\psi\circ\iota_{\mathsf{X}}^{\mathsf{G}}=\varphi$. Tenemos

$$\psi(x)=\psi(\iota_{\mathsf{X}}^{\mathsf{G}}(x))=\varphi(x)=\widehat{\varphi}(\iota_{\mathsf{X}}^{\mathsf{G}}(x))=\widehat{\varphi}(x)\quad(x\in\mathsf{X}).$$

Entonces

$$\psi\left(x_1^{q_1}\cdots x_n^{q_n}\right)=\psi(x_1)^{q_1}\cdots\psi(x_n)^{q_n}=\widehat{\varphi}(x_1)^{q_1}\cdots\widehat{\varphi}(x_n)^{q_n}=\widehat{\varphi}\left(x_1^{q_1}\cdots x_n^{q_n}\right).$$

Por lo tanto $\psi=\widehat{\varphi}$.

$$\begin{tikzcd} \mathsf{X} \arrow[r, hook, "\iota_{\mathsf{X}}^{\mathsf{L}(\mathsf{X})}"] \arrow[d, "\varphi"'] & \mathsf{L}(\mathsf{X}) \arrow[dl, dashed, "\widehat{\varphi}"] \\ \mathsf{G} & \end{tikzcd}$$

□

Observación 1.3. Nótese $x \in X$ es mirado dentro de $L(X)$ mediante $\iota_X^{L(X)}(x)$.

Observación 1.4. Como $L(X)$ es un grupo, con neutro e y $x^q x^{-q} = e$, entonces $(x^q)^{-1} = x^{-q}$ $(x^q \in X \cup X^{-1})$.

Corolario 1.1. *Para todo grupo* G *existe un conjunto no vacío* X *y un grupo* K *tal que* $G \simeq L(X)/K$. *Es decir, todo grupo es el cociente de un grupo libre.*

DEMOSTRACIÓN. Sea X un subconjunto generador de G. Construimos el grupo libre $L(X)$ generado por X. Por Teorema 1.9 existe un homomorfismo $\widehat{\iota}_X^G : L(X) \to G$ que extiende a ι_X^G.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "\iota_X^{L(X)}"] \arrow[d, hook, "\iota_X^G"'] & L(X) \arrow[dl, dashed, "\widehat{\iota}_X^G"] \\ G & \end{tikzcd}$$

Sea $g \in G$ entonces $g = x_1^{q_1} x_2^{q_2} \cdots x_n^{q_n}$, donde $x_i \in X, q_i \in \mathbb{Z}, i = 1, 2, \ldots, n$, ya que X es un conjunto generador de G. Además, para todo $x \in X \subseteq G$, $x = \iota_X^G(x)$. Luego

$$g = \iota_X^G(x_1)^{q_1} \cdots \iota_X^G(x_n)^{q_n} = \widehat{\iota}_X^G\left(\iota_X^{L(X)}(x_1)\right)^{q_1} \cdots \widehat{\iota}_X^G\left(\iota_X^{L(X)}(x_n)\right)^{q_n}.$$

Como $\widehat{\iota}_X^G$ es un homomorfismo de $L(X)$ en G y $\iota_X^{L(X)}(x_i) \in L(X)$, entonces:

$$\eta_g := \iota_X^{L(X)}(x_1)^{q_1}, \iota_X^{L(X)}(x_2)^{q_2} \cdots \iota_X^{L(X)}(x_n)^{q_n} \in L(X).$$

Así,

$$g = \widehat{\iota}_X^G\left(\iota_X^{L(X)}(x_1)^{q_1} \iota_X^{L(X)}(x_2)^{q_2} \cdots \iota_X^{L(X)}(x_n)^{q_n}\right) = \widehat{\iota}_X^G(\eta_g) \quad (\eta_g \in L(X)).$$

Por lo tanto $G = \mathrm{Img}\left(\widehat{\iota}_X^G\right)$. En consecuencia del primer teorema del isomorfismo obtenemos

$$L(X)/K \simeq G,$$

donde $K = \mathrm{Ker}\left(\widehat{\iota}_X^G\right)$. $\square$

Observación 1.5. Nótese que X no necesariamente debe estar contenido en G. En efecto, basta tomar Y un conjunto de símbolos con la misma cardinalidad o en correspondencia biyectiva con X, y $K' := \text{Ker}\left(\widehat{\jmath}_Y^G\right)$, donde $\jmath_Y^G$ es la composición de ι_Y^G con la aplicación que a cada elemento de Y le asocia un único elemento en X. Así tendremos:

$$L(Y)/K' \simeq L(X)/K \simeq G.$$

Corolario 1.2. *Todo grupo finitamente generado es cociente de un grupo libre de rango finito.*

Demostración. Sea G un grupo y X un subconjunto generador de G tal que $|X| < \infty$. Por Corolario 1.1 sabemos que

$$L(X)/K \simeq G, \qquad r(L(X)) < \infty.$$

Esto concluye la demostración. □

Lema 1.10. $\widehat{\iota}_X^G : L(X) \to G$ *es un isomorfismo, si y sólo sí*

1. X *genera a* G.
2. $g \in L(X)$ *tal que* $\ell(g) > 0$, *implica que* $g \neq e$.

Demostración. $\Leftarrow$) Sea $g \in G$, por (1) sabemos que

$$g := x_1^{q_1} \cdots x_n^{q_n}, \qquad (n \in \mathbb{N},\, x_i \in X,\, q_i \in \mathbb{Z},\, i = 1, \ldots, n),$$

entonces,

$$\widehat{\iota}_X^G(x_1^{q_1} \cdots x_n^{q_n}) = \iota_X^G(x_1)^{q_1} \cdots \iota_X^G(x_n)^{q_n} = x_1^{q_1} \cdots x_n^{q_n} = g.$$

Por lo tanto $\widehat{\iota}_X^G$ es epiyectiva.

Si $h := y_1 \cdots y_n \in \text{Ker}(\widehat{\iota}_X^G)$, entonces

$$\widehat{\iota}_X^G(h) = y_1 \cdots y_n = e.$$

Por (2) del lema, se tiene $\ell(h) = 0$. Por lo tanto $h = e$. Luego $\widehat{\iota}_X^G$ es biyectiva.

$\Rightarrow$) Como $\widehat{\iota}_X^G$ es epiyectiva, para todo $g \in G$, existe $x_1 \cdots x_m \in L(X)$ con $m \in \mathbb{N}$ y $x_i \in X \cup X^{-1}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, de modo que

$$\widehat{\iota}_X^G(x_1 \cdots x_m) = \iota_X^G(x_1) \cdots \iota_X^G(x_m) = x_1 \cdots x_m = g.$$

Por lo tanto $\Big\langle\ X\ \Big\rangle = G$.

Es claro que, si $g = e$, entonces $\ell(g) = 0$, pues g es la palabra vacía. $\square$

Proposición 1.9. G *es un grupo libre sobre* X *si y sólo sí*

1. X *genera a* G.
2. $g \in L(X)$ *tal que* $\ell(g) > 0$*, implica* $g \neq e$.

Demostración. Por Lema 1.10 basta demostrar que G es libre sobre X si y sólo sí, $\widehat{\iota}_X^G : L(X) \to G$ es una biyección.

$\Rightarrow$) Sean $\widehat{\iota}_X^G, \widehat{\iota}_X^{L(X)}$ las extensiones de $\iota_X^G, \iota_X^{L(X)}$ respectivamente. En un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
G & X \arrow[l, hook', "\iota_X^G"'] \arrow[r, hook, "\iota_X^G"] \arrow[d, hook, "\iota_X^{L(X)}"] & G \arrow[dl, dashed, "\widehat{\iota}_X^{L(X)}"] \\
& L(X) \arrow[ul, dashed, "\widehat{\iota}_X^G"] &
\end{tikzcd}$$

Sea $g \in G$. Como G es libre sobre X, por Lema 1.7 se tiene

$$g := x_1 \cdots x_n, \qquad (x_i \in X \cup X^{-1},\ i = 1, 2, \ldots, n).$$

Entonces

$$(\widehat{\iota}_X^G \circ \widehat{\iota}_X^{L(X)})(x_1 \cdots x_n) = \widehat{\iota}_X^G((\iota_X^{L(X)}(x_1) \cdots \iota_X^{L(X)}(x_n)) = \iota_X^G(x_1) \cdots \iota_X^G(x_n) = g,$$

y

$$(\widehat{\iota}_X^{L(X)} \circ \widehat{\iota}_X^G)(x_1 \cdots x_n) = \widehat{\iota}_X^{L(X)}((\iota_X^G(x_1) \cdots \iota_X^G(x_n)) = \iota_X^{L(X)}(x_1) \cdots \iota_X^{L(X)}(x_n) = g.$$

Luego $\widehat{\iota}_X^{L(X)} = \widehat{\iota}_X^{G\ -1}$, por lo tanto $\widehat{\iota}_X^G$ es biyectiva.

$\Leftarrow$) Como $\widehat{\iota}_X^G$ es biyectiva, es un isomorfismo, entonces $G \simeq L(X)$, por lo tanto G es libre ya que $L(X)$ lo és. Esto concluye la demostración. $\square$

3.1. Propiedades de $L(X)$.

Definición 1.19. *Sea* g *una palabra reducida*

$$g := x_1 x_2 \cdots x_n, \qquad (x_i \in X \cup X^{-1},\ i = 1, 2, \ldots, n),$$

Diremos que g *es una palabra cíclica reducida, si* $x_n \neq x_1^{-1}$*. Anotaremos por* $L_c(X)$ *al subconjunto de palabras cíclicas reducidas en* X *de* $L(X)$*.*

Observación 1.6. Sea $g = x_1 \cdots x_n \in L(X)$ y $t \in \mathbb{N}$ de manera que $x_{n-r} = x_{r+1}^{-1}$ para todo $r = 0, 1, \ldots, t-1$. Entonces:

$$\begin{aligned} g^2 &= (x_1 \cdots x_n)(x_1 \cdots x_n), \\ &= (x_1 \cdots x_{n-t}) e\, (x_{t+1} \cdots x_n), \\ &= x_1 \cdots x_{n-t} x_{t+1} \cdots x_n. \end{aligned}$$

Luego $\ell(g^2) = 2\ell(g) - 2t = 2(\ell(g) - t) = 2(n - t)$. Nótese además que

$$g \in L_c(X), \quad \text{si y sólo sí}, \quad t = 0.$$

Por lo tanto si $g \in L_c(X)$ entonces:

$$\ell(g^2) = \ell(g)^2.$$

Lema 1.11. *Sea* $g \in L(X)$ *y* $t > 0$ *tal que* $\ell(g) = n$ *y* $\ell(g^2) = 2(n-t)$*. Entonces* $t \leqslant n/2$*.*

Demostración. Si $n = 2k+1$. Entonces $t \leqslant k = (n-1)/2$, pues si $t > k$ se tendría en $r = k$, lo siguiente:

$$\left(x_{n-k}^{-1} = x_{k+1}\right) \Leftrightarrow \left(x_{2k+1-k}^{-1} = x_{k+1}\right) \Leftrightarrow \left(x_{k+1}^{-1} = x_{k+1}\right) \Leftrightarrow \left(x_{k+1}^{2} = e\,\right),$$

lo cual es una contradicción ya que $L(X)$ es libre (Observación 1.6).

Si $n = 2k$. Entonces $t \leqslant k = n/2$, ya que $t > k$ implica que

$$\left(x_{k+1}^{-1} = x_{n-k}\right) \Leftrightarrow \left(x_{k+1}^{-1} = x_{2k-k}\right) \Leftrightarrow \left(x_{k+1}^{-1} = x_{k}\right) \quad \text{en } r = k.$$

Esto contradice el hecho que $g \in L(X)$. Por lo tanto $t \leqslant (n-1)/2 < n/2$. □

Proposición 1.10. *Sea* $g \in L(X)$. *Para todo* $s \in \mathbb{N}$ *existe* $\mu \in L(X)$ *tal que*

$$g^s = \mu^{-1}\widetilde{g}^{\,s}\mu, \quad \textit{para algún} \quad \widetilde{g} \in L_c(X).$$

Demostración. Utilicemos inducción sobre s. Sea $g := x_1 \cdots x_n$ de modo que

$$g^2 = x_1 \cdots x_{n-t} x_{t+1} \cdots x_n \quad (0 \leqslant t \leqslant n/2),$$

es decir $x_{n-r} = x_{r+1}^{-1}$ para todo $r < t$. Definamos μ y $\widetilde{g}$ como sigue:

$$\mu^{-1} := x_1 \cdots x_t = x_n^{-1} \cdots x_{n-t+1}^{-1} = (x_{n-t+1} \cdots x_n)^{-1},$$

$$\widetilde{g} := x_{t+1} \cdots x_{n-t}.$$

Entonces,

$$g = (x_1 \cdots x_t)(x_{t+1} \cdots x_{n-t})(x_{n-t+1} \cdots x_n) = \mu^{-1}\widetilde{g}\mu.$$

Es claro que $\widetilde{g} \in L_c(X)$ ya que $x_{n-t} \neq x_{t+1}^{-1}$. Supongamos ahora que

$$g^{s-1} = \mu^{-1}\widetilde{g}^{s-1}\mu,$$

entonces,

$$g^s = g^{s-1}g = (\mu^{-1}\widetilde{g}^{\,s-1}\mu)g = (\mu^{-1}\widetilde{g}^{\,s-1}\mu)(\mu^{-1}\widetilde{g}\mu) = \mu^{-1}\widetilde{g}^{\,s-1}\widetilde{g}\mu = \mu^{-1}\widetilde{g}^{\,s}\mu.$$

Tenemos $\widetilde{g}^{\,s} \in L_c(X)$ pues $x_{n-t} \neq x_{t+1}^{-1}$. Así, cada palabra reducida es el conjugado de una palabra cíclica reducida. □

Observación 1.7. Notar que $X, X^{-1} \subset L_c(X)$. También si $g \in L_c(X)$ entonces $g^s \in L_c(X)$ para todo $s \in \mathbb{N}$.

Además, como $\ell(\mu) = \ell(\mu^{-1}) = t$ y $\ell(\widetilde{g}^s) = s\,\ell(\widetilde{g})$ ya que $\widetilde{g} \in L_c(X)$. Entonces

$$\ell(g^s) = \ell(\widetilde{g}^s) + 2t = s\,\ell(\widetilde{g}) + 2t > (s-1)\ell(\widetilde{g}) + 2t = \ell(g^{s-1}). \tag{1.7}$$

Proposición 1.11. $L(X)$ *es un grupo libre de torsión.*

Demostración. Sea $e \neq g \in L(X)$, pongamos $g := x_1 \cdots x_n \in L(X)$. Supongamos que existe $s \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ tal que $g^s = e$. Luego

$$g^s = \underbrace{(x_1 \cdots x_n)(x_1 \cdots x_n) \cdots (x_1 \cdots x_n)}_{s\text{-veces}} = e.$$

Por Proposición 1.10, existe $\widetilde{g} \in L_c(X)$ y $\mu \in L(X)$ de manera que

$$g^s = \mu^{-1}\widetilde{g}^s\mu = e,$$

donde $\ell(\widetilde{g}) = \ell(x_{t-1} \cdots x_{n-t}) = n - t - (t-1) + 1 = n - 2t$. Pero,

$$\ell(e) = 0 = \ell(g^s) > \ell(g^{s-1}) > \cdots > \ell(g^1) = \ell(g) \geqslant 0.$$

Por lo tanto

$$\ell(g^s) = \ell(g^{s-1}) = \cdots = \ell(g^1) = \ell(g) = 0.$$

Entonces $0 = \ell(g^s) = \ell(g) = \ell(\mu^{-1}\widetilde{g}\mu) = n - 2t + 2t = n$. Luego $\ell(g) = 0$, es decir $g = e$. $\square$

Lema 1.12. *Sean* $g_1, g_2 \in L(X)$ *tales que* $g_1g_2 = g_2g_1$. *Entonces existen* $g \in L(X)$ *y* $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}$ *de modo que*

$$g_1 = g^{\lambda_1}, \qquad g_2 = g^{\lambda_2}.$$

Demostración. Sean $m, n \in \mathbb{N}$ tales que:

$$g_1 = x_1x_1 \cdots x_n, \qquad g_2 = y_1y_2 \cdots y_m.$$

Aplicaremos inducción sobre $\ell := n + m$. Es claro que si $\ell = 1$, entonces n o m es cero. Si $n = 0$ (análogamente para $m = 0$), tenemos que:

$$g_1 = g_2^0 = e, \qquad g_2 = g_2^1, \qquad (g := g_2 \in L(X)).$$

Supongamos que para todo $\lambda < \ell$, existen $g \in L(X)$ y $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}$ tales que:

$$g_1 = g^{\lambda_1}, \qquad g_2 = g^{\lambda_2}.$$

Además, sin pérdida de generalidad, supongamos que $n \leqslant m$. Sabemos que

$$g_1g_2 = x_1 \cdots x_{n-t}y_{t+1} \cdots y_m = y_1 \cdots y_{m-t}x_{t+1} \cdots x_n = g_2g_1, \tag{1.8}$$

lo cual es equivalente a tener,

$$g_1 = g_2 g_1 g_2^{-1} = g_2^{-1} g_1 g_2, \qquad g_2 = g_1 g_2 g_1^{-1} = g_1^{-1} g_2 g_1.$$

Distingamos tres casos:

Caso 1: Si $t = 0$. Por (1.8) tenemos que

$$x_1 \cdots x_n y_1 \cdots y_m = y_1 \cdots y_m x_1 \cdots x_n,$$

entonces $x_i = y_i$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$. Cancelando obtenemos:

$$g_2 = y_1 \cdots y_m = y_{n+1} \cdots y_m x_1 \cdots x_n = h g_1,$$

donde $h := y_{n+1} \cdots y_m$. Luego se deduce que:

$$h g_1 = g_2 = g_1 g_2 g_1^{-1} = g_1 (h g_1) g_1^{-1} = g_1 h$$

y

$$\ell(h) = \ell(g_2 g_1^{-1}) = m - n < m.$$

Tomando $\lambda := n + (m - n)$ se tiene $\lambda < \ell = n + m$. Por lo tanto, usando hipótesis inductiva, existen $g \in L(X)$ y $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}$ tales que

$$g_1 = g^{\lambda_1}, \qquad h = g^{\lambda_2}.$$

Así,

$$g_1 = g^{\lambda_1}, \qquad g_2 = h g_1 = g^{\lambda_2} g^{\lambda_1} = g^{\lambda_2 + \lambda_1}.$$

Caso 2: Si $t = n$. Por (1.8) tenemos que:

$$y_{n+1} \cdots y_m = y_1 \cdots y_{m-n},$$

es decir $y_i = x_{n-i+1}^{-1}$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Reemplazando en (1.8) obtenemos lo siguiente:

$$\begin{array}{rcl} g_1 g_2 & = & x_1 \cdots x_n y_1 \cdots y_m, \\ & = & x_1 \cdots x_n (y_1 \cdots y_n) y_{n+1} \cdots y_m \\ & = & x_1 \cdots x_n (x_n^{-1} \cdots x_1^{-1}) y_{n+1} \cdots y_m \\ & = & x_1 \cdots x_n (x_1 \cdots x_n)^{-1} y_{n+1} \cdots y_m \\ & = & y_{n+1} \cdots y_m =: w \\ & = & g_2 g_1 \end{array} .$$

Entonces $g_2 = w g_1^{-1}$, donde $\ell(w) = \ell(g_2) - n = m - n < m$. Es decir:

$$\lambda := (m - n) + n < m + n = \ell.$$

Además,

$$w g_1^{-1} = g_2 = g_1^{-1} g_2 g_1 = g_1^{-1} w g_1^{-1} g_1 = g_1^{-1} w.$$

Luego existen $g \in L(X)$ y $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}$ tales que

$$g_1^{-1} = g^{\lambda_1}, \qquad w = g^{\lambda_2},$$

esto es

$$g_1 = g^{-\lambda_1}, \qquad g_2 = w g_1 = g^{\lambda_2} g^{-\lambda_1} = g^{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

Caso 3: Si $0 < t < n$. Por (1.8) tenemos

$$g_1 g_2 = x_1 \cdots x_{n-t} y_{t+1} \cdots y_m = y_1 \cdots y_{m-t} x_{t+1} \cdots x_n = g_2 g_1,$$

esto implica lo siguiente:

$$x_1 = y_1, \qquad y_m = x_n, \qquad x_n = y_1^{-1}, \qquad y_m = x_1^{-1}.$$

Por lo tanto

$$g_1 = x_1 \cdots x_n = x_1 (x_2 \cdots x_{n-1}) x_1^{-1} = x_1 u_1 x_1^{-1}$$

y

$$g_2 = y_1 \cdots y_n = x_1 (y_2 \cdots y_{m-1}) x_1^{-1} = x_1 u_2 x_1^{-1},$$

donde $u_1 := x_2 \cdots x_{n-1}$ y $u_2 := y_n \cdots y_{m-1}$. Además

$$\begin{aligned} g_1g_2 &= (x_1u_1x_1^{-1})(x_1u_2x_1^{-1}) = (x_1u_2x_1^{-1})(x_1u_1x_1^{-1}) = g_2g_1 \\ g_1g_2 &= x_1u_1u_2x_1^{-1} = x_1u_2u_1x_1^{-1} = g_2g_1 \\ x_1u_1u_2x_1^{-1} &= x_1u_2u_1x_1^{-1} \qquad / x_1 \\ x_1u_1u_2 &= x_1u_2u_1 \qquad / x_1^{-1} \\ u_1u_2 &= u_2u_1. \end{aligned}$$

Como $\lambda := \ell(u_1) + \ell(u_2) = (n-2) + (m-2) < n + m = \ell$, existen $g \in L(X)$ y $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}$ de modo que

$$u_1 = u^{\lambda_1}, \qquad u_2 = u^{\lambda_2},$$

es decir

$$x_1u_1x_1^{-1} = x_1u^{\lambda_1}x_1^{-1} = (x_1ux_1^{-1})^{\lambda_1}, \qquad x_1u_2x_1^{-1} = x_1u^{\lambda_2}x_1^{-1} = (x_1ux_1^{-1})^{\lambda_2}.$$

Así obtenemos lo siguiente:

$$g_1 = x_1u_1x_1^{-1} = g^{\lambda_1}, \qquad g_2 = x_1u_2x_1^{-1} = g^{\lambda_2},$$

donde $g := x_1ux_1^{-1}$. Esto concluye la demostración. □

Proposición 1.12. *Sea G un grupo libre.*

1. *Si $g_1, g_2 \in G$ tales que $g_1^n = g_2^n$ $(n \in \mathbb{N}\backslash\{0\})$, entonces $g_1 = g_2$.*
2. *Si $g \in G$, entonces* $\left|\left\{ h \in G \;\; ; \;\; h^n = g, \text{ para algún } n \in \mathbb{N} \right\}\right| < \infty$.

Demostración. Demostremos la primera afirmación. Por Proposición 1.10, existen palabras cíclicas reducidas $\widetilde{g}_1, \widetilde{g}_2$ tales que:

$$g_1^n = \mu_1^{-1}\widetilde{g}_1^n\mu_1, \qquad g_2^n = \mu_2^{-1}\widetilde{g}_2^n\mu_2,$$

con $\ell(\mu_1) =: r_1$ y $\ell(\mu_2) =: r_2$. Por Observación 1.7,

$$n\ell(\widetilde{g}_1) + 2r_1 = \ell(g_1^n) = \ell(g_2^n) = n\ell(\widetilde{g}_2) + 2r_2,$$

y

$$2n\ell(\widetilde{g}_1) + 2r_1 = \ell(g_1^{2n}) = \ell((g_1^n)^2) = \ell((g_2^n)^2) = \ell(g_2^{2n}) = 2n\ell(\widetilde{g}_2) + 2r_2.$$

Se tiene luego el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} n(\ell(\widetilde{g}_1)-\ell(\widetilde{g}_2))+2(r_1-r_2)=0 \\ 2n(\ell(\widetilde{g}_1)-\ell(\widetilde{g}_2))+2(r_1-r_2)=0 \end{aligned}\right\}.$$

Obtenemos del sistema $n(\ell(\widetilde{g}_1)-\ell(\widetilde{g}_2))=0$ ($n\neq 0$) y en consecuencia $4(r_1-r_2)=0$, entonces $\ell(\widetilde{g}_1)=\ell(\widetilde{g}_2)=:\ell$ y $r_1=r_2=:r$. También se tiene que:

$$y_1\cdots y_p=y=\mu_1^{-1}\widetilde{g}_1^n\mu_1=g_1^n=g_2^n=\mu_2^{-1}\widetilde{g}_2^n\mu_2=z=z_1\cdots z_p,$$

donde $p=n\ell+2r$. Entonces $\ell(y)=\ell(z)$ e $y_i=z_i$ para todo $i=1,2,\ldots,p$, por lo tanto:

$$\mu_1^{-1}=y_1\cdots y_r=z_1\cdots z_r=\mu_2^{-1},$$

$$\mu_1=y_{p-r+1}\cdots y_p=z_{p-r+1}\cdots z_p=\mu_2,$$

$$\widetilde{g}_1^n=y_{r+1}\cdots y_{p-r}=z_{r+1}\cdots z_{p-r}=\widetilde{g}_2^n.$$

Como $\widetilde{g}_1$ y $\widetilde{g}_2$ son palabras cíclicas reducidas, digamos

$$\widetilde{g}_1:=s_1\cdots s_{k_1},\qquad \widetilde{g}_2:=r_1\cdots r_{k_2}.$$

Entonces,

$$\widetilde{g}_1^n=\underbrace{\widetilde{g}_1\cdots\widetilde{g}_1}_{n-\text{veces}}=(s_1\cdots s_{k_1})^n=(r_1\cdots r_{k_2})^n=\underbrace{\widetilde{g}_2\cdots\widetilde{g}_2}_{n-\text{veces}}=\widetilde{g}_2^n,$$

donde $nk_1=nk_2=p$. Así $\widetilde{g}_1=\widetilde{g}_2$, por lo tanto

$$g_1=\mu_1^{-1}\widetilde{g}_1\mu_1=\mu_2^{-1}\widetilde{g}_2\mu_2=g_2.$$

Procedamos ahora a demostrar la segunda afirmación de la proposición. Sea $h\in G$ tal que $h^n=g$ para algún $n\in\mathbb{N}$. Por Proposición 1.11, si $g=e$, entonces debe tenerse $h=e$. Ahora si $g\neq e$, entonces

$$\ell(g)=\ell(h^n)=\ell(\mu^{-1}\widetilde{h}^n\mu)=n\ell(\widetilde{h})+2\ell(\mu).$$

Luego $n\leqslant\ell(g)=:\ell<\infty$, es decir $n\in\{1,2,\ldots,\ell\}$, por lo tanto

$$\left|\left\{\ n\in\mathbb{N}\ \ ;\ \ h^n=g\ \right\}\right|<\infty.$$

Además por (1), si $h^n = g$, entonces h es único. Así:

$$\left|\left\{ h \in G \quad ; \quad h^n = g, \text{ para algún } n \in \mathbb{N} \right\}\right| \leqslant \ell < \infty.$$

$\square$

Lema 1.13. *Sean* $g_1, g_2 \in L(X)$ *tales que* $g_1^r g_2^s = g_2^s g_1^r$, *para* $r, s \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. *Entonces existen* $g \in L(X)$ *y* $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}$ *tales que*

$$g_1 = g^{\lambda_1}, \qquad g_2 = g^{\lambda_2}.$$

Demostración. Sabemos que

$$g_1^r g_2^s = g_2^s g_1^r, \quad \text{si y sólo sí,} \quad (g_1)^r = g_1^r = g_2^s g_1^r g_2^{-s} = (g_2^s g_1 g_2^{-s})^r.$$

Entonces:

$$g_1 = g_2^s g_1 g_2^{-s}, \quad \text{si y sólo sí,} \quad (g_2)^s = g_2^s = g_1 g_2^s g_1^{-1} = (g_1 g_2 g_1^{-1})^s.$$

Así $g_1 g_2 = g_2 g_1$. Por Lema 1.12 existen $g \in L(X)$ y $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}$ tal que

$$g_1 = g^{\lambda_1}, \qquad g_2 = g^{\lambda_2}.$$

Esto concluye la demostración. $\square$

Definición 1.20. *En* $L(X)\backslash\{e\}$, *se define la siguiente relación:*

$$g_1 \sim_c g_2, \quad \textit{si y sólo sí,} \quad g_1 g_2 = g_2 g_1, \quad (g_1, g_2 \in L(X)). \tag{1.9}$$

Proposición 1.13. $\sim_c$ *es una relación de equivalencia.*

Demostración. Es claro que $\sim_c$ es refleja. La simetría resulta del hecho que $=$ lo és. Sean $g_1, g_2, g_3 \in L(X)\backslash\{e\}$. Si $g_1 g_2 = g_2 g_1$ y $g_2 g_3 = g_3 g_2$, por Lema 1.12 existen $u_1, u_2 \in L(X)$ y $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ de modo que

$$g_1 = u_1^{\alpha_1}, \qquad g_2 = u_1^{\alpha_2}, \qquad g_2 = u_2^{\alpha_3}, \qquad g_3 = u_2^{\alpha_4}.$$

Como $u_1^{\alpha_2} u_2^{\alpha_3} = g_2^2 = u_2^{\alpha_3} u_1^{\alpha_2}$, por Lema 1.13 existen $h \in L(X)$ y $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{Z}$ de manera que

$$u_1 = h^{\beta_1}, \qquad u_2 = h^{\beta_2}.$$

Por lo tanto:

$$g_1 = h^{\alpha_1\beta_1}, \qquad g_3 = h^{\alpha_4\beta_2}.$$

Entonces $g_1g_3 = h^{\alpha_1\beta_1+\alpha_4\beta_2} = h^{\alpha_4\beta_2+\alpha_1\beta_1} = g_3g_1$. Luego $\sim_c$ es transitiva.

Así, $\sim_c$ es una relación de equivalencia. □

Observación 1.8. Note que para todo $g \in L(X)\backslash\{e\}$, la clase, mediante la relación de equivalencia en (1.9), es justamente $C(g)$ el centralizador de $\{g\}$ en $L(X)$.

Teorema 1.14. *Para todo* $g \in L(X)\backslash\{e\}$*,* $C(g)$ *es un grupo cíclico infinito.*

Demostración. Para todo $g \in L(X)\backslash\{e\}$, se tiene que $g \in C(g)$. Por Proposición 1.11 se tiene además que $|g| = \infty$, por lo tanto $|C(g)| = \infty$.

Sean $g_m, u \in C(g)$, con $e \neq g_m$ de longitud mínima. Como $C(g)$ es abeliano, entonces $g_m u = u g_m$. Por Lema 1.12, existe $w \in L(X)$ y $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Z}$ de manera que

$$g_m = w^{\alpha_1}, \qquad u = w^{\alpha_2}. \tag{1.10}$$

Como $u = w^{\alpha_2} \in C(g)$ entonces $gw^{\alpha_2} = w^{\alpha_2}g$. Por Lema 1.13, $gw = wg$.

Además:

$$\begin{aligned} \ell(g_m) &= \ell(w^{\alpha_1}), \\ &= |\alpha_1|\ell(\widetilde{w}) + 2t, \\ &= (|\alpha_1| - 1)\ell(\widetilde{w}) + (\ell(\widetilde{w}) + 2t), \\ &= (|\alpha_1| - 1)\ell(\widetilde{w}) + \ell(w), \end{aligned}$$

donde $w^{\alpha_1} = \mu\widetilde{w}^{\alpha_1}\mu^{-1}$ y $\ell(\mu) = t$, con $|\alpha_1| \neq 0$ pues $g_m \neq e$. Como $w \in C(g)$ y $\ell(g_m)$ es de longitud mínima, se sigue que $|\alpha_1| = 1$. Por lo tanto $u = g_m^{\alpha_2}$. Luego $C(g) = \left\langle \; g_m \; \right\rangle \simeq \mathbb{Z}$ es un grupo cíclico infinito. □

3.2. Buen orden de $L(X)$.

Definición 1.21 (Orden de $L(X)$)**.** *Sea* $<_X$ *una relación de buen-orden sobre* $X \cup X^{-1}$ *y sean* $g_1, g_2 \in L(X)$ *como sigue:*

$$g_1 := x_1 \cdots x_r, \qquad g_2 := y_1 \cdots y_s.$$

Se define una relación sobre $\mathsf{L}(\mathsf{X})$*, denotada* $<_{\mathsf{L}(\mathsf{X})}$*, de la siguiente manera:*

$$g_1 <_{\mathsf{L}(\mathsf{X})} g_2, \quad \textit{si y sólo sí,} \quad r < s, \quad \textit{o bien} \quad r = s \quad \textit{y} \quad x_m <_{\mathsf{X}} y_m,$$

donde $m := \min\left\{ \ i \ \ ; \ \ x_i \neq y_i \ \right\}$.

Proposición 1.14. $\mathsf{L}(\mathsf{X})$ *es un conjunto bien ordenado mediante* $<_{\mathsf{L}(\mathsf{X})}$*.*

Demostración. Sean $g_1, g_2, g_3 \in \mathsf{L}(\mathsf{X})$ como sigue

$$g_1 := x_1 \cdots x_r, \qquad g_2 := y_1 \cdots y_s, \qquad g_3 := z_1 \cdots z_t.$$

Es claro que $g_1 \not<_{\mathsf{L}(\mathsf{X})} g_1$ ya que $r \not< r$ y $x_j \not<_{\mathsf{X}} x_j$ para todo $j = 1, 2, \ldots, r$.

Si $g_1 <_{\mathsf{L}(\mathsf{X})} g_2$ y $g_2 <_{\mathsf{L}(\mathsf{X})} g_3$, se tienen cuatro posibilidades:

1. Si $r < s < t$, por transitividad en $\mathbb{N}$, entonces $r < s$, luego $g_1 <_{\mathsf{L}(\mathsf{X})} g_3$.
2. Si $r < s = t$, entonces $r < t$ por lo tanto $g_1 <_{\mathsf{L}(\mathsf{X})} g_3$.
3. Si $r = s < t$, entonces $r < t$ por lo tanto $g_1 <_{\mathsf{L}(\mathsf{X})} g_3$.
4. Si $r = s = t$, existen $m, n \in \mathbb{N}$ tal que $x_m <_{\mathsf{X}} y_m$ y $y_n <_{\mathsf{X}} z_n$, donde

$$m := \min\left\{ \ i \ \ ; \ \ x_i \neq y_i \ \right\}, \quad n = \min\left\{ \ i \ \ ; \ \ y_i \neq z_i \ \right\}.$$

Distingamos tres casos:

a) Si $n < m$, entonces $x_n = y_n <_{\mathsf{X}} z_n$ $(x_n <_{\mathsf{X}} z_n)$, si existe $k < n$ tal que $z_k <_{\mathsf{X}} x_k = y_k$ $(z_k <_{\mathsf{X}} y_k)$, es una contradicción, por lo tanto $n = \min\left\{ \ i \ \ ; \ \ x_i \neq z_i \ \right\}$. Luego $g_1 <_{\mathsf{L}(\mathsf{X})} g_3$.

b) Si $m = n$, entonces $x_m <_{\mathsf{X}} y_m <_{\mathsf{X}} z_m$ $(x_m <_{\mathsf{X}} z_m)$, si existe $k < m$ tal que $z_k <_{\mathsf{X}} x_k = y_k$ $(z_k <_{\mathsf{X}} y_k)$ es una contradicción, por lo tanto $n = m = \min\left\{ \ i \ \ ; \ \ x_i \neq z_i \ \right\}$. Luego $g_1 <_{\mathsf{L}(\mathsf{X})} g_3$.

c) Si $m < n$, entonces $x_m <_{\mathsf{X}} y_m = z_m$ $(x_m <_{\mathsf{X}} z_m)$, si existe $k < m$ tal que $z_k <_{\mathsf{X}} x_k = y_k$ $(z_k <_{\mathsf{X}} y_k)$ es una contradicción, por lo tanto $m = \min\left\{ \ i \ \ ; \ \ x_i \neq z_i \ \right\}$. Luego $g_1 <_{\mathsf{L}(\mathsf{X})} g_3$.

Es claro que $<_{\mathsf{L}(\mathsf{X})}$ cumple la ley de tricotomía, ya que $r < s$ o bien $s < r$, implican $g_1 <_{\mathsf{L}(\mathsf{X})} g_2$ o $g_2 <_{\mathsf{L}(\mathsf{X})} g_1$. Ahora, si $r = s$ y $x_i = y_i$ para todo $i = 1, 2, \ldots, r = s$, entonces $g_1 = g_2$. Además, como $\ell(e) = 0$, entonces $e = \min L(X)$. Por lo tanto $L(X)$ es un conjunto bien ordenado. □

Para simplificar notaciones, $<_X$ y $<_{L(X)}$ serán denotadas simplemente por $<$.

Lema 1.15. *Sean* $g_1, g_2 \in L(X)$, *donde* $g_1 := x_1 \cdots x_n$ $(n > 1)$. *Entonces*

$$g_2 < x_1 \cdots x_{n-1}, \quad \textit{implica que} \quad g_2 x_n < g_1.$$

Demostración. Sea $k := \ell(g_2)$ y $g_2 < x_1 \cdots x_{n-1}$. Se tienen dos casos:

1. Si $\ell(g_2) < n - 1$, entonces $\ell(g_2 x_n) < n = \ell(g_1)$, por lo tanto $g_2 x_n < g_1$.
2. Si $\ell(g_2) = n-1$, existe $r = \min\left\{ \ i \leqslant n-1 \ ; \ y_i < x_i \ \right\}$ tal que $y_r < x_r$, donde $g_2 := y_1 \cdots y_{n-1}$. Así, podemos escribir

$$g_2 = y_1 \cdots y_{n-1} = x_1 \cdots x_{r-1} y_r \cdots y_{n-1} < x_1 \cdots x_r \cdots x_{n-1}.$$

Si $y_{n-1} = x_n^{-1}$ entonces $\ell(g_2 x_n) = n - 2 < n = \ell(g_1)$, luego $g_2 x_n < g_1$. Si $y_{n-1} \neq x_n^{-1}$, como $y_r < x_r$, entonces

$$x_1 \cdots x_{r-1} y_r \cdots y_{n-1} x_n < x_1 \cdots x_{r-1} x_r \cdots x_{n-1} x_n = g_1.$$

Por lo tanto $g_2 x_n < g_1$.

□

4. Teorema de Nielsen-Schreier

En esta sección definiremos los conceptos necesarios para demostrar el Teorema de Nielsen-Schreier los cuales, además servirán para aplicar el método de Reidemesiter-Schreier en el capítulo siguiente.

4.1. Transversal de Schreier.

Definición 1.22. *Sea* S *un subconjunto no vacío de* $L(X)$. *Diremos que* S *tiene la Propiedad de Schreier (o que es un conjunto de Schreier), denotado* $S \in (PS)$, *si contiene al segmento inicial de todos sus elementos, es decir, si:*

$$x_1 \cdots x_n \in S, \quad \textit{entonces}, \quad x_1 \cdots x_{n-1} \in S, \qquad (n \geqslant 1).$$

Un transversal de H *en* $L(X)$ *que además tiene la propiedad de Schreier, se dice un transversal de Schreier de* H *en* $L(X)$.

Observación 1.9. *Nótese que* e *está en todo conjunto de Schreier.*

Lema 1.16. *Todo subgrupo de* $L(X)$ *tiene un tranversal de Schreier.*

Demostración. Sea H un subgrupo de $L(X)$ y U el conjunto formado por los elementos minimales con respecto a $<$ de cada clase en $L(X)/H$. Veamos que $U \in (PS)$. Supongamos que $g := x_1 \cdots x_n \in U$ de modo que $x_1 \cdots x_{n-1} \notin U$, y sea $h_x := \text{mín}(Hx_1 \cdots x_{n-1})$. Por Lema 1.15, si $h_x < x_1 \cdots x_{n-1}$, entonces $h_x x_n < g$. Como $h_x \in Hx_1 \cdots x_{n-1}$, entonces $Hh_x = Hx_1 \cdots x_{n-1}$. Multiplicando por Hx_n obtenemos:

$$Hh_x x_n = Hh_x Hx_n = Hx_1 \cdots x_{n-1} Hx_n = Hx_1 \cdots x_n = Hg.$$

Así, $h_x x_n \in Hg$ y $h_x x_n < g$. Por lo tanto $g \neq \text{mín}(Hg)$, luego $g \notin U$. Lo cual es una contradicción. Por lo tanto U es un transversal de Schreier para H. $\square$

Ejemplo 1.8. Sea $X := \left\{ a, b \right\}$ un conjunto y $R := \left\{ a^3, b^3 \right\} \subset L(X)$. Definamos G de la siguiente manera

$$G := L(X)/\overline{R}.$$

Es claro que G es un grupo, ya que $\overline{R} \trianglelefteq L(X)$. Sabemos que G/G' es un grupo abeliano. Es fácil ver que una palabra g en X es de la forma

$$g := a^{q_1} b^{t_1} a^{q_2} b^{t_2} \cdots a^{q_n} b^{t_n}, \qquad (q_i, t_j \in \mathbb{Z},\ i, j := 1, \ldots, n).$$

Entonces, al tomar la clase en G' obtenemos:

$$G'g = G'a^{q_1} b^{t_1} a^{q_2} b^{t_2} \cdots a^{q_n} b^{t_n} = G'a^r b^s, \quad \text{donde} \quad r := \sum_{i=1}^{n} q_i \quad \text{y} \quad s := \sum_{j=1}^{n} t_j.$$

Pero $r, s \in \{0, 1, 2\}$, lo que nos permite definir el siguiente transversal:

$$U := \left\{ e, a, a^2, b, b^2, ab, ab^2, a^2 b, a^2 b^2 \right\}.$$

Es claro que U es un transversal de Schreier para G' en G.

Propiedades 1.2. *Sean* X *un conjunto no vacío,* H *un subgrupo de* $L(X)$ *y* U *un transversal para* H *en* $L(X)$*. Entonces, para todo* $g \in L(X)$*,* $u \in U$*, y* $x \in X \cup X^{-1}$ *se tiene lo siguiente:*

1. $[\,[\,g\,]\,] = [\,g\,]$.
2. $Hg = H[\,g\,]$.
3. $[\,g\,] = g$*, si y sólo sí,* $g \in U$.
4. $Hu = H[\,ux\,]x^{-1}$.
5. $[\,[\,ux\,]x^{-1}\,] = u$.

Demostración.

1. Como $[\,g\,] \in U$ y $|H[\,g\,] \cap U| = 1$, entonces $[\,[\,g\,]\,] = H[\,g\,] \cap U = [\,g\,]$.
2. Como $[\,g\,] = Hg \cap U$, entonces $[\,g\,] \in Hg$, luego $Hg = H[\,g\,]$.
3. $\Rightarrow$) $g = [\,g\,] = Hg \cap U \subset U$, entonces $g \in U$.
   $\Leftarrow$) Como $g, [\,g\,] \in Hg \cap U$ y $|Hg \cap U| = 1$, entonces $g = [\,g\,]$.
4. De (2) sabemos que $Hux = H[\,ux\,]$, multiplicando por Hx^{-1} obtenemos:
$$Hu = Huxx^{-1} = HuxHx^{-1} = H[\,ux\,]Hx^{-1} = H[\,ux\,]x^{-1}.$$
5. Por (4), $[\,ux\,]x^{-1} \in Hu$, luego $[\,[\,ux\,]x^{-1}\,], u \in Hu \cap U$ y $|Hu \cap U| = 1$, por lo tanto $[\,[\,ux\,]x^{-1}\,] = u$.

□

4.2. Generadores de Schreier.

Lema 1.17. *Sea* U *un transversal para* $L(X)$ *según* H *tal que* $e \in U$*. Entonces, el siguiente conjunto* X_H *genera a* H

$$X_H := \left\{\ ux[\,ux\,]^{-1} \quad ; \quad u \in U, x \in X \cup X^{-1}\ \right\}.$$

Demostración. Por Propiedades 1.2.2, para todo $u \in U$ y todo $x \in X \cup X^{-1}$, se tiene que $Hux = H[\,ux\,]$, es decir $ux[\,ux\,]^{-1} \in H$, por lo tanto $X_H \subseteq H$.

Sea $h := x_1 \cdots x_n \in H$, con $x_i \in X \cup X^{-1}$, para todo $i = 1, 2, \ldots, n$. Definamos la siguiente sucesión:

$$\{u_k\}_{k=1}^{n+1}, \qquad u_1 := e \qquad \text{y} \qquad u_{i+1} := [\,u_i x_i\,] \in U.$$

Además,

$$h_i := u_i x_i u_{i+1}^{-1} = u_i x_i [\,u_i x_i\,]^{-1} \in X_H, \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Ahora tenemos:

$$\begin{aligned} h_1 h_2 \cdots h_n &= u_1 x_1 [\,u_1 x_1\,]^{-1} u_2 x_2 [\,u_2 x_2\,]^{-1} \cdots u_n x_n [\,u_n x_n\,]^{-1} \\ &= u_1 x_1 u_2^{-1} u_2 x_2 u_3^{-1} \cdots u_{n-1} x_{n-1} u_n^{-1} u_n x_n u_{n+1}^{-1} \\ &= u_1 x_1 x_2 \cdots x_n u_{n+1}^{-1} \\ &= e\, h\, u_{n+1}^{-1} \\ &= h\, u_{n+1}^{-1}. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Como $h_i \in H$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$, entonces $\widehat{h} := h_1 h_2 \cdots h_n \in H$, por lo tanto $\widehat{h}^{-1} h = u_{n+1} \in H$. Como $u_{n+1} = [\,u_n x_n\,] \in U$, entonces $u_{n+1} \in H \cap U$, pero $H \cap U = He \cap U = \{e\}$ (ya que $e \in U$), luego $u_{n+1}^{-1} = e$. De (1.11) tenemos que

$$h = h\, e = h\, u_{n+1}^{-1} = h_1 h_2 \cdots h_n.$$

Por lo tanto $H = \left\langle\; X_H \;\right\rangle$. $\square$

Ejemplo 1.9. Continuando con el Ejemplo 1.8 construimos la tabla de elementos $ux[ux]^{-1}$ ($x \in X \cup X^{-1}$, $u \in U$) como sigue

$ux[ux]^{-1}$	a	b	a^{-1}	b^{-1}
e	e	e	e	e
a	e	e	e	e
a^2	e	e	e	e
b	bab^2a^2	e	ba^2b^2a	e
b^2	b^2aba^2	e	b^2a^2ba	e
ab	$abab^2a$	e	aba^2b^2	e
ab^2	ab^2aba	e	ab^2a^2b	e
a^2b	a^2bab^2	e	$a^2ba^2b^2a^2$	e
a^2b^2	a^2b^2ab	e	$a^2b^2a^2ba^2$	e

(1.12)

Notar que para construir la tabla, sabiendo que $a^{\pm 2} = a^{\mp 1}$ y $b^{\pm 2} = b^{\mp 1}$, se debe tener en cuenta que:

$$\begin{array}{lll} ba^{-1}G' = a^2bG', & abaG' = a^2bG', & aba^{-1}G' = bG', \\ ab^2a^{-1}G' = b^2G', & a^2ba^{-1}G' = abG', & ab^2aG' = a^2b^2G', \\ a^2baG' = bG', & a^2b^2aG' = b^2G', & a^2b^2a^{-1}G' = ab^2G' \end{array}$$

Luego el conjunto de generadores de Schreier para G' es:

$$X_{G'} := \left\{ \ (b, a^{\pm 1}), (b^2, a^{\pm 1}), (ab, a^{\pm 1}), (ab^2, a^{\pm 1}), (a^2b, a^{\pm 1}), (a^2b^2, a^{\pm 1}) \ \right\},$$

donde cada par (u, x) representa el elemento $ux[ux]^{-1}$.

Por Propiedades 1.2.3, notemos que:

$$ux[ux]^{-1} = e, \quad \text{si y sólo sí}, \quad ux \in U. \tag{1.13}$$

El siguiente lema demuestra que todo elemento no trivial en X_H tiene su inverso en el mismo X_H. Más aún, si $g = ux[ux]^{-1}$ con $u \in U$ y $x \in X^{\pm}$, entonces $g^{-1} = vy[vy]^{-1}$ para algún $v \in U$ e $y \in X^{\mp}$. Esto y (1.13) nos induce a definir los siguientes conjuntos:

$$\mathsf{Y}_\mathsf{H} := \left\{ \; ux[\,ux\,]^{-1} \quad ; \quad u \in \mathsf{U}, x \in \mathsf{X}, ux \notin \mathsf{U} \; \right\},$$

$$\widehat{\mathsf{Y}}_\mathsf{H} := \left\{ \; ux[\,ux\,]^{-1} \quad ; \quad u \in \mathsf{U}, x \in \mathsf{X}^{-1}, ux \notin \mathsf{U} \; \right\}.$$

Lema 1.18 (Descomposición de X_H)**.** $\widehat{\mathsf{Y}}_\mathsf{H} = \mathsf{Y}_\mathsf{H}^{-1}$. *Además:*

$$\mathsf{X}_\mathsf{H}\backslash\{e\} = \mathsf{Y}_\mathsf{H} \,\dot\cup\, \mathsf{Y}_\mathsf{H}^{-1}.$$

Demostración. Sea $u \in \mathsf{U}$ y $x \in \mathsf{X}^{-1}$, entonces, por Propiedades 1.2.5

$$(ux[\,ux\,]^{-1})^{-1} = [\,ux\,]x^{-1}u^{-1} = [\,ux\,]x^{-1}[\,[ux]x^{-1}\,]^{-1} \in \mathsf{Y}_\mathsf{H} \quad (x^{-1} \in \mathsf{X}).$$

Tomando inversos obtenemos $ux[\,ux\,]^{-1} = ([\,ux\,]x^{-1}[\,[ux]x^{-1}\,]^{-1})^{-1} \in \mathsf{Y}_\mathsf{H}^{-1}$, por lo tanto $\widehat{\mathsf{Y}}_\mathsf{H} \subset \mathsf{Y}_\mathsf{H}^{-1}$. Análogamente si $x \in \mathsf{X}$, entonces $\mathsf{Y}_\mathsf{H}^{-1} \subset \widehat{\mathsf{Y}}_\mathsf{H}$, por lo tanto $\widehat{\mathsf{Y}}_\mathsf{H} = \mathsf{Y}_\mathsf{H}^{-1}$. Es claro que $\mathsf{Y}_\mathsf{H}, \mathsf{Y}_\mathsf{H}^{-1} \subset \mathsf{X}_\mathsf{H}\backslash\{e\}$, es decir:

$$\mathsf{Y}_\mathsf{H} \,\dot\cup\, \mathsf{Y}_\mathsf{H}^{-1} \subset \left\{ \; ux[\,ux\,]^{-1} \quad ; \quad u \in \mathsf{U}, x \in \mathsf{X} \,\dot\cup\, \mathsf{X}^{-1}, ux \notin \mathsf{U} \; \right\} = \mathsf{X}_\mathsf{H}\backslash\{e\}.$$

Ahora, si $k := ux[\,ux\,] \in \mathsf{X}_\mathsf{H}\backslash\{e\}$, entonces $x \in \mathsf{X} \,\dot\cup\, \mathsf{X}^{-1}$, por lo tanto $k \in \mathsf{Y}_\mathsf{H} \,\dot\cup\, \mathsf{Y}_\mathsf{H}^{-1}$. Por lo tanto $\mathsf{X}_\mathsf{H}\backslash\{e\} = \mathsf{Y}_\mathsf{H} \,\dot\cup\, \mathsf{Y}_\mathsf{H}^{-1}$. $\square$

Lema 1.19 (Reducción)**.** *Dados* $t_1, t_2 \in \mathsf{Y}_\mathsf{H} \,\dot\cup\, \mathsf{Y}_\mathsf{H}^{-1}$ *tales que*

$$t_1 := ux[\,ux\,]^{-1}, \quad t_2 := vy[\,vy\,]^{-1}, \qquad (u, v \in \mathsf{U},\; x, y \in \mathsf{X} \cup \mathsf{X}^{-1}).$$

Entonces existe $g \in \mathsf{L}(\mathsf{X})$ *de manera que*

$$t := x[\,ux\,]^{-1}vy \;=\; xgy,$$

excepto cuando $v = [\,ux\,],\; y = x^{-1},\; u = [\,vy\,]$.

Demostración. Sean $[\,ux\,] := z_1 \cdots z_n$ y $v := w_1 \cdots w_m$. Si $w_m = y^{-1}$, entonces

$$vy = w_1 \cdots w_{m-1} \in \mathsf{U},$$

ya que $U \in (PS)$ y $w_1 \cdots w_m \in U$. Luego $vy = [\,vy\,]$, por lo tanto $t_2 = e$, lo cual no puede ser. Entonces $w_m \neq y^{-1}$. De igual modo, si $z_n = x$, por Propiedades 1.2.5, se tiene:

$$\begin{aligned} ux &= [\,[\,ux\,]x^{-1}\,]x, \\ &= [\,z_1 \cdots z_n x^{-1}\,]x, \\ &= [\,z_1 \cdots z_{n-1}\,]z_n, \\ &= z_1 \cdots z_{n-1} z_n = z_1 \cdots z_n, \\ &= [\,ux\,], \end{aligned}$$

ya que $U \in (PS)$ y $z_1 \cdots z_n \in U$, por lo tanto $t_1 = e$, lo cual no puede ser. Luego $z_n \neq x$. Así hemos demostrado que vy conserva el elemento y al final, y $x[\,ux\,]^{-1}$ conserva el término x al inicio. Por lo tanto basta estudiar las cancelaciones de x e y con $[\,ux\,]^{-1}v$.

Supongamos que el término $[\,ux\,]^{-1}v$ no finaliza con y, es decir, existe $t \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $[\,ux\,] = vyz_t \cdots z_n$. Como $U \in (PS)$, y vy es un segmento inicial de $[\,ux\,] \in U$, entonces $vy \in U$ lo cual es una contradicción ya que $t_2 \neq e$. Análogamente supongamos que el término $x[\,ux\,]^{-1}v$ no comienza con x, es decir, existe $s \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $v = [\,ux\,]x^{-1}w_s \cdots w_m$. Como $U \in (PS)$, entonces $[\,ux\,]x^{-1} \in U$ ya que es segmento inicial de v. Esto último y Propiedades 1.2.3. y 1.2.4. implican que

$$ux = [\,[\,ux\,]x^{-1}\,]x = [\,ux\,]x^{-1}x = [\,ux\,].$$

Lo cual es nuevamente una contradicción, pues $t_1 \neq e$. Por lo tanto

$$t = xgy, \quad \left([\,ux\,]^{-1}v =: g \in L(X)\right).$$

Esto demuestra que x e y no pueden cancelarse.

En el caso que $y = x^{-1}$ y $v = [\,ux\,]$, por Propiedades 1.2.4., se tiene:

$$[\,vy\,] = [\,[\,ux\,]y\,] = [\,[\,ux\,]x^{-1}\,] = u,$$

es decir,

$$t = x[\,ux\,]^{-1}vy = xv^{-1}vx^{-1} = e.$$

Esto concluye la demostración. □

4.3. Teorema de Nielsen-Schreier.

La demostración del siguiente teorema requiere conceptos básicos de teoría de Grafos, para esto se recomienda ver [**Bon76**].

Teorema 1.20. *Sea* G *un grupo libre y* H *un subgrupo de* G*, entonces* H *es libre. Es más, si* $[G : H] = s < \infty$ *y* $r(G) = t < \infty$*, entonces*

$$r(H) = (t-1)s + 1.$$

Demostración. Sean G libre sobre el conjunto X. Por Lema 1.16, Lema 1.17 y Lema 1.18, existe U transversal de Schreier para H en G, donde $X_H = Y_H \dot{\cup} Y_H^{-1} \cup \{e\}$ genera a H.

Sea $h \in H$ definido como sigue:

$$h := t_1 t_2 \cdots t_n, \quad t_i := u_i x_i [u_i x_i]^{-1} \in X_H \backslash \{e\} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

De modo que, si existen $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tales que,

$$x_j = x_i^{-1}, \qquad u_i = [u_j x_j], \qquad u_j = [u_i x_i],$$

entonces $i \neq j+1$ y $j \neq i+1$, es decir no pueden ser elementos adyacentes, ya que h es reducida. Por Lema 1.19 existen $g_{i,i+1} \in L(X)$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n-1$, tales que:

$$\begin{aligned} h &= u_1 x_1 [u_1 x_1]^{-1} u_2 x_2 [u_2 x_2]^{-1} \cdots u_{n-1} x_{n-1} [u_{n-1} x_{n-1}]^{-1} u_n x_n [u_n x_n]^{-1}, \\ &= u_1 x_1 g_{1,2} x_2 g_{2,3} x_3 \cdots x_{n-2} g_{n-2,n-1} x_{n-1} g_{n-1,n} x_n [u_n x_n]^{-1}. \end{aligned}$$

Como h contiene todos los elementos x_i, entonces $\ell(h) \geqslant n$. Es claro que si $n \geqslant 1$, entonces $h \neq e$, por Proposición 1.9, H es un grupo libre sobre Y_H.

Además,

$$r(H) = |Y_H| = \left| \left\{ \; ux[ux]^{-1} \quad ; \quad u \in U, x \in X, ux \notin U \; \right\} \right|.$$

Esto es,

$$r(H) = |X||U| - p = r(G)|G/H| - p = ts - p,$$

donde $p := |P|$, con $P := \Big\{ \ (u, x, w) \in U \times X \times U \quad ; \quad ux = w \ \Big\}$.

Sea T un grafo con s vértices etiquetados por los elementos de U (con posibles repeticiones), de modo que, existe una arista con dirección de u a w etiquetada por x, si y sólo sí, $ux = w$, donde $u, w \in U$ y $x \in X$.

$$u \xrightarrow{x} w \ .$$

Notar que las aristas de T están en correspondencia biunívoca con los elementos de P, ya que:

$$u \xrightarrow{x} w \qquad \leftrightsquigarrow \qquad ux = w.$$

Como $U \in (PS)$, para todo $u := x_1 \cdots x_n \in U$, tenemos:

$$e \xrightarrow{x_1} x_1 \xrightarrow{x_2} x_1x_2 \xrightarrow{x_3} x_1x_2x_3 \xrightarrow{x_4} \cdots \xrightarrow{x_n} x_1x_2\cdots x_n \ .$$

Por lo tanto T es un grafo conexo, ya que e es segmento inicial de u para todo $u \in U$. Supongamos que T tiene un circuito, es decir, existen $u_1, \ldots, u_t \in U$ y $x_1 \cdots x_t \in X$ tales que:

$$u_ix_i = u_{i+1}, \quad (i = 1, 2, \ldots t-1), \quad \text{y} \quad u_tx_t = u_1, \quad \text{para algún } t < |U| = s,$$

$$\begin{tikzcd} u_1 \arrow[r, "x_1"] & u_2 \arrow[r, "x_2"] & \cdots \arrow[r, "x_{t-2}"] & u_{t-1} \arrow[r, "x_{t-1}"] & u_t \arrow[llll, bend left, "x_t"] \end{tikzcd} \ .$$

Reemplazando obtenemos:

$$u_1x_1x_2\cdots x_t = u_2x_2x_3\cdots x_1 = \cdots = u_{t-1}x_{t-1}x_t = u_tx_t = u_1,$$

cancelando u_1 en cada extremo, se tiene

$$x_1x_2\cdots x_t = e.$$

Lo cual es una contradicción ya que G es libre (sin relaciones). Como T es un grafo planar conexo, por fórmula de Euler [1], sabemos que

$$v - a + r = 2, \tag{1.14}$$

[1] ver BONDY, J.A and MURTY, U.S.R. Planar Graphs. En su: Graph Theory with Applications, Great Britain: The Macmillan Press Ltd., 1976. pp. 143.

donde, v, a y r son, la cantidad de vértices, aristas y regiones respectivas, formadas por el grafo T. En nuestro caso

$$v := |U| = s, \quad a := p, \quad r := 1, \text{ (la región exterior)},$$

ya que T no tiene circuitos. Luego, por (1.14) tenemos:

$$s - p + 1 = 2, \quad \text{si y sólo si,} \quad p = s + 1 - 2 = s - 1.$$

Por lo tanto $r(H) = ts - p = ts - (s-1) = ts - s + 1 = (t-1)s + 1$. □

Corolario 1.3. *Sean* H *un subgrupo de índice infinito en* $L(X)$ *y* N *un subgrupo normal no trivial de* $L(X)$*, tal que* $N \subseteq H$*. Entonces* $r(H) = \infty$*.*

DEMOSTRACIÓN. Sea U un transversal de Schreier para $L(X)$ según H y sea $v \in N\backslash\{e\}$ tal que $v := x_1 \cdots x_n$ ($x_i \in X \cup X^{-1}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $n \in \mathbb{N}$). Entonces para todo $u \in U$, como $uvu^{-1} \in N \subset H$ se tiene

$$Huvu^{-1} = H, \quad \text{si y solo si} \quad Huv = Hu.$$

Por lo tanto $[uv] = [u] = u \neq uv$, pues $u \in U$ y $v \neq e$, por esto $uv \notin U$. Sea $k := \min\left\{ 1 \leqslant t \leqslant n \quad ; \quad u(x_1 \cdots x_t) \notin U,\ u_t := u(x_1 \cdots x_{t-1}) \in U \right\}$ (notar que k siempre existe, ya que $ue \in U$ y $u(x_1 \cdots x_n) = uv \notin U$). Como $u_k \in U$, le asociamos el generador de Schreier $u_k x_k [u_k x_k]^{-1}$ de H. Esto nos permite considerar la función que envía $u \mapsto k$ y le asocia el respectivo generador. Como U es infinito, $n < \infty$ y k siempre existe, entonces, al menos algún $k_0 \in \{1, \ldots n\}$ tiene pre-imagen infinita, esto es, existe $W \subset U$ infinito tal que para todo $w \in W$, el generador de Schreier asociado es $w_{k_0} x_{k_0} [w_{k_0} x_{k_0}]^{-1}$. Además W se inyecta en Y_H, pues por Lema 1.19 tenemos:

$$\begin{aligned} w_{k_0} x_{k_0} [w_{k_0} x_{k_0}]^{-1} &= w'_{k_0} x_{k_0} [w'_{k_0} x_{k_0}]^{-1} \\ w_{k_0} x_{k_0} [w_{k_0} x_{k_0}]^{-1} [w'_{k_0} x_{k_0}] {x_{k_0}}^{-1} {w'_{k_0}}^{-1} &= e \\ w_{k_0} {w'_{k_0}}^{-1} &= e \\ w_{k_0} &= w'_{k_0}, \end{aligned}$$

entonces $w = w'$. Por lo tanto $\infty = |W| \leqslant |U| = |Y_H| = r(H) = \infty$. □

Capítulo 2

Presentaciones

1. Presentaciones

Sean X un conjunto no vacío y R un subconjunto de $L(X)$. Sea G un grupo isomorfo a $L(X)/\overline{R}$, mediante un isomorfismo $\psi : L(X)/\overline{R} \to G$. Como $L(X)$ es libre sobre X se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "\iota_X^{L(X)}"] \arrow[d, "\jmath_X^G"'] & L(X) \arrow[dl, dashed, "\hat{\jmath}_X^G"] \\ G & \end{tikzcd}$$

donde $\jmath_X^G$ es la aplicación que envía $x \mapsto \psi(x\overline{R})$.

Claramente el siguiente conjunto $\widehat{X}$ es un sistema de generadores de G.

$$\widehat{X} := \left\{ \ \jmath_X^G(x) \quad ; \quad x \in X \ \right\} = \left\{ \ a \in G \quad ; \quad a = \jmath_X^G(x), x \in X \ \right\}.$$

Para cada palabra $g := x_1^{q_1} \cdots x_n^{q_n}$ en $\overline{R}$ tenemos la siguiente igualdad en G

$$\hat{\jmath}_X^G(g) = a_1^{q_1} a_2^{q_2} \cdots a_n^{q_n} = e, \tag{2.1}$$

donde $a_i = \jmath_X^G(x_i)$.

Definición 2.1.

1. *La igualdad en* (2.1) *es llamada una relación entre elementos de* $\widehat{X}$ *y* G.
2. *Una relación* $\hat{\jmath}_X^G(g) = e$ *se dice trivial, si existe* $s \in L(X)$ *tal que* $ss^{-1} = g$.
3. *El conjunto* $\widehat{R}$ *constituido por todas las relaciones no triviales entre elementos de* $\widehat{X}$ *y* G *se llama sistema de relaciones de* G.

$$\widehat{R} := \left\{ \ \hat{\jmath}_X^G(g) = e \quad ; \quad g \in \overline{R} \ \right\}.$$

Por Corolario 1.1, sabemos que todo grupo es cociente de un grupo libre. Luego, por lo anterior, todo grupo G queda completamente determinado por un sistema de generadores y un sistema de relaciones. Más precisamente, siguiendo la discusión anterior, los conjuntos $\widehat{\mathsf{X}}$ y $\widehat{\mathsf{R}}$ se definen a partir de X y R respectivamente, luego basta conocer estos últimos para definir G. Más aún, como $\overline{\mathsf{R}}$ es generado por conjugados de R en $\mathsf{L}(\mathsf{X})$, entonces G queda completamente determinado, por un conjunto de generadores X y un conjunto de relaciones $\left\{ r = e \;\; ; \;\; r \in \mathsf{R} \right\}$ correspondiente a elementos de R.

Notación 2.1. En adelante, toda relación $r = e$ la anotaremos simplemente r. Diremos que R es el conjunto de relaciones que determina G.

Definición 2.2. *Si* $\mathsf{G} \simeq \mathsf{L}(\mathsf{X})/\,\overline{\mathsf{R}}$*, diremos que* G *tiene la presentación*

$$\left\langle \mathsf{X} \;\; ; \;\; \mathsf{R} \right\rangle. \tag{2.2}$$

Se conviene escribir $\mathsf{G} \simeq \left\langle \mathsf{X} \;\; ; \;\; \mathsf{R} \right\rangle$ *o bien* $\mathsf{G} = \left\langle \mathsf{X} \;\; ; \;\; \mathsf{R} \right\rangle$ *cuando* $\mathsf{X} \subseteq \mathsf{G}$*. En caso que* X *y* R *sean conjuntos finitos, se dice que* G *es finitamente presentado.*

Observación 2.1. Sea G presentado como en (2.2). Recordemos que X es cualquier conjunto no vacío de objetos y el conjunto R se compone de palabras en X, denotado a veces $\mathsf{R}(\mathsf{X})$. Por lo tanto, si Y es un conjunto no vacío tal que $|\mathsf{X}| = |\mathsf{Y}|$, entonces G también puede ser presentado con generadores Y y relaciones $\mathsf{R}(\mathsf{Y})$. Es decir, una presentación, es un objeto abstracto que determina G mediante generadores y relaciones.

Lema 2.1. *La extensión* $\widehat{\jmath}^{\mathsf{G}}_{\mathsf{X}} : \mathsf{L}(\mathsf{X}) \to \mathsf{G}$ *de* $\jmath^{\mathsf{G}}_{\mathsf{X}}$ *es un epimorfismo.*

Demostración. Basta notar que $\widehat{\jmath}^{\mathsf{G}}_{\mathsf{X}}$ es la composición del isomorfismo ψ con la proyección canónica de $\mathsf{L}(\mathsf{X})$ sobre $\mathsf{L}(\mathsf{X})/\,\overline{\mathsf{R}}$. □

Nótese que, si $\mathsf{X} \subseteq \mathsf{G}$ entonces $\jmath^{\mathsf{G}}_{\mathsf{X}} = \iota^{\mathsf{G}}_{\mathsf{X}}$ y por lo tanto $\mathsf{G} = \left\langle \mathsf{X} \;\; ; \;\; \mathsf{R} \right\rangle$. Entonces en particular $\iota^{\mathsf{G}}_{\mathsf{X}}$ es un epimorfismo.

Proposición 2.1. *Todo grupo tiene una presentación, y cada grupo finito es finitamente presentado.*

Demostración. Sea G un grupo y X un subconjunto generador de G. Por Teorema 1.9 y Lema 2.1, existe $\widehat{\iota}_X^G : L(X) \to G$ un epimorfismo que extiende a ι_X^G. Luego, $G \simeq L(X)/N$ con $N = \mathrm{Ker}\left(\widehat{\iota}_X^G\right)$ $(\overline{N} = N)$. Por lo tanto G tiene la siguiente presentación

$$G = \Big\langle\ X \quad ; \quad N\ \Big\rangle.$$

Además, si G tiene orden finito, digamos n, entonces X también, digamos m. Por lo tanto N también es finito. Como $N \leqslant L(X)$, por Teorema 1.20 (Nielsen-Schreier), existe $Y_N =: R \subset L(X)$ finito tal que $\langle R \rangle = \overline{R} = N$, esto es:

$$r(N) = |R| = (n-1)m + 1 < \infty.$$

Por lo tanto G es finitamente presentado:

$$G = \Big\langle\ X \quad ; \quad R\ \Big\rangle.$$

Esto concluye la demostración. □

La Proposición 2.1 nos permite suponer que $X \subseteq G$, en consecuencia tenemos $\widehat{\jmath}_X^G = \widehat{\iota}_X^G$. En efecto, si G tiene una presentación con generadores Y y relaciones $R(Y)$, existe $X \subset G$ y una biyección $f : X \to Y$ tal que:

$$G = \Big\langle\ X \quad ; \quad R(X)\ \Big\rangle \simeq \Big\langle\ Y \quad ; \quad R(Y)\ \Big\rangle.$$

Ejemplo 2.1.

1. $L(X) = \Big\langle\ X \quad ; \quad \Big\rangle = \Big\langle\ X\ \Big\rangle$, el grupo libre de rango $|X|$.
2. $\Big\langle\ a, b \quad ; \quad a^n, b^2, (ba)^2\ \Big\rangle \simeq D_n$, el grupo Diédrico de orden $2n$.
3. $\Big\langle\ x \quad ; \quad x^n\ \Big\rangle \simeq \mathbb{Z}_n$, el grupo Cíclico de orden n.

Definición 2.3 (Producto Libre)**.** *Sean* G *y* H *definidos mediante las siguientes presentaciones*

$$G = \Big\langle\ X \quad ; \quad R_1\ \Big\rangle \qquad y \qquad H = \Big\langle\ Y \quad ; \quad R_2\ \Big\rangle.$$

Se define el producto libre de G *con* H*, denotado* $\mathsf{G} * \mathsf{H}$*, mediante la siguiente presentación*

$$\mathsf{G} * \mathsf{H} = \Big\langle\ \mathsf{X}, \mathsf{Y} \quad ; \quad \mathsf{R}_1, \mathsf{R}_2\ \Big\rangle.$$

1.1. Homomorfismos Inducidos.

Lema 2.2. *Sean* G, H *y* K *grupos, con los siguientes homomorfismos:*

$$\varphi_1 : \mathsf{K} \to \mathsf{G}, \qquad \varphi_2 : \mathsf{K} \to \mathsf{H},$$

tales que $\mathrm{Im}(\varphi_1) = \mathsf{G}$ *y* $\mathrm{Ker}(\varphi_1) \subseteq \mathrm{Ker}(\varphi_2)$*. Entonces existe un homomorfismo* $\widetilde{\varphi} : \mathsf{G} \to \mathsf{H}$*, tal que* $\varphi \circ \varphi_1 = \varphi_2$*.*

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{K} \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "\varphi_2"'] & \mathsf{G} \arrow[dl, dashed, "\varphi"] \\
\mathsf{H} &
\end{tikzcd}$$

Demostración. Sea $\mathsf{g} \in \mathsf{G}$. Como $\mathrm{Im}(\varphi_1) = \mathsf{G}$, escogemos $\mathsf{k} \in \mathsf{K}$ tal que $\varphi_1(\mathsf{k}) = \mathsf{g}$. Sea $\varphi : \mathsf{G} \to \mathsf{H}$, tal que $\varphi(\mathsf{g}) := \varphi_2(\mathsf{k})$.

Veamos que φ está bien definido. Si k' es otro elemento de K tal que $\varphi_1(\mathsf{k}') = \mathsf{g}$, debemos ver que $\varphi_2(\mathsf{k}') = \varphi_2(\mathsf{k})$. Como $\varphi_1(\mathsf{k}') = \varphi_1(\mathsf{k}) = \mathsf{g}$, se sigue que $\varphi_1(\mathsf{k}'\mathsf{k}^{-1}) = \mathsf{e}$. Entonces $\mathsf{k}'\mathsf{k}^{-1} \in \mathrm{Ker}(\varphi_1) \subseteq \mathrm{Ker}(\varphi_2)$, luego

$$\varphi_2(\mathsf{k}'\mathsf{k}^{-1}) = \varphi_2(\mathsf{k}')\varphi_2(\mathsf{k})^{-1} = \mathsf{e}.$$

Por lo tanto φ está bien definido.

Sean $\mathsf{g}_1 = \varphi_1(\mathsf{k}_1)$, $\mathsf{g}_2 = \varphi_1(\mathsf{k}_2) \in \mathsf{G}$, $(\mathsf{k}_1, \mathsf{k}_2 \in \mathsf{K})$. Como φ_1 es un homomorfismo, $\varphi_1(\mathsf{k}_1\mathsf{k}_2) = \mathsf{g}_1\mathsf{g}_2$. Tenemos

$$\varphi(\mathsf{g}_1\mathsf{g}_2) = \varphi_2(\mathsf{k}_1\mathsf{k}_2) = \varphi_2(\mathsf{k}_1)\varphi_2(\mathsf{k}_2) = \varphi(\mathsf{g}_1)\varphi(\mathsf{g}_2).$$

Por lo tanto φ es un homomorfismo de G en H.

Es claro además que para todo $\mathsf{k} \in \mathsf{K}$, $\varphi(\varphi_1(\mathsf{k})) = \varphi_2(\mathsf{k})$. Esto concluye la demostración. □

Teorema 2.3 (von Dyck). *Sea* X *un conjunto no vacío,* $R_1, R_2 \subset L(X)$ *tales que* $R_1 \subset R_2$. *Sean* G *y* H *definidos como sigue*

$$G = \left\langle\ X \quad ; \quad R_1\ \right\rangle, \qquad H = \left\langle\ X \quad ; \quad R_2\ \right\rangle.$$

Entonces, existe un epimorfismo $\varphi_G^H : G \to H$*, tal que* $\mathrm{Ker}(\varphi_G^H) = \widehat{\iota}_X^G(\overline{R_2 \backslash R_1})$ *y* $\varphi_G^H(x) = x$*, para todo* $x \in X$.

Demostración. Notemos por Lema 1.1 que $R_1 \subseteq R_2$ implica que $\overline{R}_1 \subseteq \overline{R}_2$. Por Teorema 1.9 y Lema 2.1, existen $\widehat{\iota}_X^G : L(X) \to G$ y $\widehat{\iota}_X^H : L(X) \to H$ epimorfismos que extienden a ι_X^G y ι_X^H respectivamente, donde $\mathrm{Ker}\left(\widehat{\iota}_X^G\right) = \overline{R}_1 \subseteq \overline{R}_2 = \mathrm{Ker}\left(\widehat{\iota}_X^H\right)$. Por Lema 2.2, existe un homomorfismo $\varphi_G^H : G \to H$ de modo que $\varphi_G^H \circ \widehat{\iota}_X^G = \widehat{\iota}_X^H$.

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[rr, bend left, "\varphi_G^H"] & X \arrow[l, hook', "\iota_X^G"'] \arrow[r, hook, "\iota_X^H"] \arrow[d, hook] & H \\
& L(X) \arrow[ul, dashed, "\widehat{\iota}_X^G"] \arrow[ur, dashed, "\widehat{\iota}_X^H"'] &
\end{tikzcd}$$

Como $\widehat{\iota}_X^H$ es un epimorfismo, dado $h \in H$ existe $w \in L(X)$ tal que $\widehat{\iota}_X^H(w) = h$. Luego existe $g := \widehat{\iota}_X^G(w) \in G$ tal que $\varphi_G^H(g) = \varphi_G^H(\widehat{\iota}_X^G(w)) = \widehat{\iota}_X^H(w) = h$, y además $x = \widehat{\iota}_X^H(x) = \varphi_G^H(\widehat{\iota}_X^G(x)) = \varphi_G^H(x)$ para todo $x \in X$.

Como $\varphi_G^H \circ \widehat{\iota}_X^G = \widehat{\iota}_X^H$, se sigue que:

$$g \in \mathrm{Ker}(\widehat{\iota}_X^H), \quad \text{si y sólo sí,} \quad \widehat{\iota}_X^G(g) \in \mathrm{Ker}(\varphi_G^H).$$

Por lo tanto

$$\mathrm{Ker}\left(\varphi_G^H\right) = \widehat{\iota}_X^G\left(\mathrm{Ker}\left(\widehat{\iota}_X^H\right)\right) = \widehat{\iota}_X^G\left(\overline{R}_2\right) = \widehat{\iota}_X^G\left(\overline{R_2 \backslash R_1}\right),$$

ya que $\widehat{\iota}_X^G(\overline{R}_1) = e$ y $R_1 \subseteq R_2$. $\square$

Nótese que $\widehat{\iota}_X^G(g r_1 g^{-1}) = e$, para todo $g \in L(X)$ y todo $r_1 \in R_1$.

Corolario 2.1. *Sea* X *un conjunto no vacío y* $\mathsf{R}_1, \mathsf{R}_2 \subset \mathsf{L}(\mathsf{X})$ *tales que* $\mathsf{R}_1 \subset \mathsf{R}_2$. *Sean* G *y* H *definidos como sigue*

$$\mathsf{G} = \left\langle \ \mathsf{X} \quad ; \quad \mathsf{R}_1 \ \right\rangle, \qquad \mathsf{H} = \left\langle \ \mathsf{X} \quad ; \quad \mathsf{R}_2 \ \right\rangle.$$

Entonces H *es isomorfo a un cociente de* G.

Demostración. Sean $\mathsf{G} \simeq \mathsf{L}(\mathsf{X})/\overline{\mathsf{R}}_1$ y $\mathsf{H} \simeq \mathsf{L}(\mathsf{X})/\overline{\mathsf{R}}_2$. Dado que $\mathsf{R}_1 \subseteq \mathsf{R}_2$ se tiene $\overline{\mathsf{R}}_1 \subseteq \overline{\mathsf{R}}_2$, en consecuencia del tercer teorema del isomorfismo:

$$\mathsf{H} \simeq \mathsf{L}(\mathsf{X})/\overline{\mathsf{R}}_2 \simeq \left(\mathsf{L}(\mathsf{X})/\overline{\mathsf{R}}_1\right) / \left(\mathsf{K}_2/\overline{\mathsf{R}}_1\right) \simeq \mathsf{G}/(\overline{\mathsf{R}}_2/\overline{\mathsf{R}}_1) \simeq \mathsf{G}/\mathsf{T},$$

donde $\mathsf{T} := \overline{\mathsf{R}}_2/\overline{\mathsf{R}}_1$. Así H es un cociente de G. □

Proposición 2.2 (Sustitución)**.** *Sean* $\mathsf{G} = \left\langle \ \mathsf{X} \quad ; \quad \mathsf{R} \ \right\rangle$ *y* H *grupos, y una función* $\varphi : \mathsf{X} \to \mathsf{H}$. *Entonces, existe un homomorfismo* $\widetilde{\varphi} : \mathsf{G} \to \mathsf{H}$ *que extiende a* φ, *si y sólo sí, toda relación:*

$$x_1^{q_1} \cdots x_t^{q_t} = e, \quad \textit{implica que,} \quad \varphi(x_1)^{q_1} \cdots \varphi(x_t)^{q_t} = e,$$

donde $x_i \in \mathsf{X}$, $q_i := \pm 1$, $i = 1, 2, \ldots, t$.

Demostración. Como $\mathsf{L}(\mathsf{X})$ es libre, existen $\widehat{\varphi} : \mathsf{L}(\mathsf{X}) \to \mathsf{H}$ y $\widehat{\iota}_{\mathsf{X}}^{\mathsf{G}}$, homomorfismos que extienden a φ y $\iota_{\mathsf{X}}^{\mathsf{G}}$ respectivamente.

$\Rightarrow$) Supongamos que existe $\widetilde{\varphi} : \mathsf{G} \to \mathsf{H}$ que extiende a φ. En un diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{X} \arrow[r, hook, "\iota_{\mathsf{X}}^{\mathsf{L}(\mathsf{X})}"] \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[dr, bend right=70, "\iota_{\mathsf{X}}^{\mathsf{G}}"'] & \mathsf{L}(\mathsf{X}) \arrow[dl, dashed, "\widehat{\varphi}"] \arrow[d, dashed, "\widehat{\iota}_{\mathsf{X}}^{\mathsf{G}}"] \\
\mathsf{H} & \mathsf{G} \arrow[l, dotted, "\widetilde{\varphi}"]
\end{tikzcd}$$

Sea $r := x_1^{q_1} \cdots x_t^{q_t} \in \mathsf{L}(\mathsf{X})$ ($x_i \in \mathsf{X} \cup \mathsf{X}^{-1}$, $q_i := \pm 1$, $i = 1, \ldots, t$), tal que

$$x_1^{q_1} \cdots x_t^{q_t} = \iota_{\mathsf{X}}^{\mathsf{G}}(x_1)^{q_1} \cdots \iota_{\mathsf{X}}^{\mathsf{G}}(x_t)^{q_t} = \widehat{\iota}_{\mathsf{X}}^{\mathsf{G}}(r) = e.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\varphi(x_1)^{q_1}\cdots\varphi(x_t)^{q_t} &= \widetilde{\varphi}(x_1)^{q_1}\cdots\widetilde{\varphi}(x_t)^{q_t},\\ &= \widetilde{\varphi}(x_1^{q_1}\cdots x_t^{q_t}),\\ &= \widetilde{\varphi}(e),\\ &= e.\end{aligned}$$

$\Leftarrow$) Supongamos que

$$x_1^{q_1}\cdots x_t^{q_t}=e,\quad \text{implica que,}\quad \varphi(x_1)^{q_1}\cdots\varphi(x_t)^{q_t}=e.$$

Sea $w := x_1\cdots x_n \in \mathrm{Ker}\left(\widehat{\iota}_X^G\right)$, es decir, $\widehat{\iota}_X^G(w)=\iota(x_1)\cdots\iota(x_n)=x_1\cdots x_n=e$. Por hipótesis, $\widehat{\varphi}(w)=\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)=e$. Por lo tanto $\mathrm{Ker}(\widehat{\iota}_X^G)\subseteq \mathrm{Ker}(\widehat{\varphi})$. Luego, por Lema 2.2, existe un homomorfismo $\widetilde{\varphi}: G\to H$, tal que $\widetilde{\varphi}\circ\widehat{\iota}_X^G=\widehat{\varphi}$. Además, dado $x\in X$ se tiene

$$\widetilde{\varphi}(x)=\widetilde{\varphi}(\widetilde{\iota}_X^G(x))=\widetilde{\varphi}(\iota_X^G(x))=\widehat{\varphi}(x)=\varphi(x).$$

Por lo tanto $\widetilde{\varphi}$ es un homomorfismo de G en H que extiende a φ. □

Observación 2.2. Claramente $\widetilde{\varphi}$ es única, ya que $\widehat{\varphi}$ y $\widehat{\iota}_X^G$ lo son. Además, $\widetilde{\varphi}$ es epiyectiva, si y sólo sí, H es generado por $\varphi(X)$. En efecto, si $h\in H$ es tal que $h=\widetilde{\varphi}(g)$ para algún $g\in G$, entonces:

$$h=\widetilde{\varphi}(g)=\widetilde{\varphi}(\widehat{\iota}_X^G(k))=\widehat{\varphi}(k)=\widehat{\varphi}(x_1^{q_1})\cdots\widehat{\varphi}(x_r^{q_r})=\varphi(x_1)^{q_1}\cdots\varphi(x_r)^{q_r}.$$

1.2. Producto Directo.

Proposición 2.3 (Producto directo)**.** *Sean G y H grupos definidos mediante las siguientes presentaciones:*

$$G=\left\langle\ X\ \ ;\ \ R_1\ \right\rangle,\qquad H=\left\langle\ Y\ \ ;\ \ R_2\ \right\rangle.$$

Entonces $G\times H$ es presentado como sigue

$$G\times H\simeq\left\langle\ X,Y\ \ ;\ \ R_1,R_2,[X,Y]\ \right\rangle. \tag{2.3}$$

Demostración. Sea F el grupo con la presentación en (2.3). Sean r y s relaciones en G y H respectivamente

$$r := x_1, \dots, x_r = e, \qquad s := y_1, \dots, y_s = e.$$

Es decir,

$$x_1 \cdots x_r R_1 = R_1 \qquad \text{y} \qquad y_1 \cdots y_s R_2 = R_2.$$

Como $R_1, R_2 \subset R_1 \cup R_2 \cup [X, Y]$ se tiene:

$$\iota_X^F(x_1) \cdots \iota_X^F(x_r) R_1 \cup R_2 \cup [X, Y] = x_1 \cdots x_r R_1 \cup R_2 \cup [X, Y] = R_1 \cup R_2 \cup [X, Y],$$

y

$$\iota_Y^F(y_1) \cdots \iota_Y^F(y_s) R_1 \cup R_2 \cup [X, Y] = y_1 \cdots y_s (X \cup Y \cup [X, Y]) = R_1 \cup R_2 \cup [X, Y].$$

Por lo tanto,

$$\iota_X^F(x_1) \cdots \iota_X^F(x_r) = e \qquad \text{y} \qquad \iota_Y^F(y_1) \cdots \iota_Y^F(y_s) = e.$$

Luego, por Proposición 2.2 existen homomorfismos $\widetilde{\iota}_X^F : G \to F$ y $\widetilde{\iota}_Y^F : H \to F$ que extienden a ι_X^F y ι_Y^F respectivamente.

Observemos ahora que:

$$\iota_X^F(x)\iota_Y^F(y)\iota_X^F(x^{-1})\iota_Y^F(y^{-1}) = xyx^{-1}y^{-1} = e, \tag{2.4}$$

para todo $x \in X$ y todo $y \in Y$.

A continuación construimos $\varphi : G \times H \to F$ tal que $\varphi(g, h) := \widetilde{\iota}_X^F(g)\widetilde{\iota}_Y^F(h)$. Veamos que φ es un isomorfismo:

Sean $x_1, x_2 \in X$, $y_1, y_2 \in Y$, usando (2.4) se tiene

$$\begin{aligned}
\varphi\left((x_1, y_1)(x_2, y_2)\right) &= \varphi(x_1x_2, y_1y_2),\\
&= \widetilde{\iota}_X^F(x_1x_2)\widetilde{\iota}_Y^F(y_1y_2),\\
&= \iota_X^F(x_1)\iota_X^F(x_2)\iota_Y^F(y_1)\iota_Y^F(y_2),\\
&= \iota_X^F(x_1)\iota_Y^F(y_1)\iota_X^F(x_2)\iota_Y^F(y_2),\\
&= \widetilde{\iota}_X^F(x_1y_1)\widetilde{\iota}_X^F(x_2y_2),\\
&= \varphi(x_1y_1)\varphi(x_2y_2).
\end{aligned}$$

Como $G\times H$ es generado por $X\times Y$, entonces $\varphi((g_1,h_1)(g_2,h_2)) = \varphi(g_1,h_1)\varphi(g_2,h_2)$ para todo $g_1, g_2 \in G$ y todo $h_1, h_2 \in H$. Por lo tanto φ es un homomorfismo.

Sea $\psi : X \cup Y \to G \times H$ tal que para todo $x \in X$ e $y \in Y$

$$\psi(x) := (x, e_H) \quad \text{y} \quad \psi(y) := (e_G, y).$$

Por Proposición 2.2 existe un homomorfismo $\widetilde{\psi} : F \to G \times H$. Además, para todo $x \in X$ e $y \in Y$ se tiene los siguiente

$$(\varphi \circ \psi)(x) = \varphi(x, e_H) = \widetilde{\iota}^{F}_{X}(x) = x,$$

$$(\varphi \circ \psi)(y) = \varphi(e_G, y) = \widetilde{\iota}^{F}_{Y}(y) = y,$$

y

$$(\psi \circ \varphi)(x, y) = \psi(\widetilde{\iota}^{F}_{X}(x)\widetilde{\iota}^{F}_{Y}(y)) = \psi(xy) = \psi(x)\psi(y) = (x, e_H)(e_G, y) = (x, y).$$

Luego $\psi = \varphi^{-1}$. Por lo tanto φ es un isomorfismo. □

Corolario 2.2. *Sea* G *un grupo con la siguiente presentación*

$$G = \Big\langle \; X \quad ; \quad R \; \Big\rangle .$$

Entonces para todo $m \in \mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$ *existen conjuntos* X_i, R_i, $(i = 1, \ldots, m)$, *de modo que* G^m *tiene la siguiente presentación*

$$G^m \simeq \Big\langle \; \bigcup_{i=1}^{m} X_i \quad ; \quad \bigcup_{i=1}^{m} R_i, \bigcup_{k=2}^{m} \Big[\bigcup_{j=1}^{k-1} X_j, X_k \Big] \; \Big\rangle . \tag{2.5}$$

Demostración. Definamos para cada $i \leqslant m$ los conjuntos X_i y R_i de la siguiente manera:

$$X_i := \underbrace{\{e\} \times \cdots \times \{e\}}_{(i-1)-\text{veces}} \times X \times \underbrace{\{e\} \times \cdots \times \{e\}}_{(m-i)-\text{veces}}, \quad x_i := (e, \ldots e, x, e, \ldots, e),$$

$$R_i := \underbrace{\{e\} \times \cdots \times \{e\}}_{(i-1)-\text{veces}} \times R \times \underbrace{\{e\} \times \cdots \times \{e\}}_{(m-i)-\text{veces}}, \quad r_i := (e, \ldots e, r, e, \ldots, e),$$

donde $x \in X$ y $r \in R$. Es claro existen que correspondencias biyectivas entre los elementos de X y X_i mediante $x \mapsto x_i$ ($x \in X$, $i \leqslant m$), y entre los elementos de R y R_i mediante $r \mapsto r_i$ ($r \in R$, $i \leqslant m$). Así, para todo $i \leqslant m$ se tiene

$$G_i := \left\langle \; X_i \quad ; \quad R_i \; \right\rangle \simeq \left\langle \; X \quad ; \quad R \; \right\rangle = G.$$

Por lo tanto $H := G_1 \times \cdots \times G_m \simeq G \times \cdots \times G = G^m$. Luego, basta probar que H es presentado como en (2.5), para esto ocuparemos inducción sobre m mediante el metodo de la Proposición 2.3. Si $m = 2$, tenemos que

$$G_1 \times G_2 \simeq \left\langle \; X_1, X_2 \quad ; \quad R_1, R_2, [X_1, X_2] \; \right\rangle.$$

Ahora, supongamos válido el enunciado para $m - 1$, esto es

$$G_1 \times \cdots \times G_{m-1} \simeq \left\langle \; \bigcup_{i=1}^{m-1} X_i \quad ; \quad \bigcup_{i=1}^{m-1} R_i, \bigcup_{k=2}^{m-1} \left[\bigcup_{j=1}^{k-1} X_j, X_k \right] \; \right\rangle,$$

como $H = (G_1 \times \cdots \times G_{m-1}) \times G_m$, por Proposición 2.3 se tiene que

$$\begin{aligned} H &\simeq \left\langle \; \bigcup_{i=1}^{m-1} X_i, X_m \;;\; \bigcup_{i=1}^{m-1} R_i, R_m, \bigcup_{k=2}^{m-1} \left[\bigcup_{j=1}^{k-1} X_j, X_k \right], \left[\bigcup_{t=1}^{m-1} X_t, X_m \right] \; \right\rangle, \\ &\simeq \left\langle \; \bigcup_{i=1}^{m} X_i \quad ; \quad \bigcup_{i=1}^{m} R_i, \bigcup_{k=2}^{m} \left[\bigcup_{j=1}^{k-1} X_j, X_k \right] \; \right\rangle, \\ &\simeq G^m. \end{aligned}$$

Esto prueba que G^m es presentado como en (2.5). $\square$

Ejemplo 2.2. Si $G := C_n = \left\langle \; c \quad ; \quad c^n \; \right\rangle$, entonces

$$C_n^2 \simeq \left\langle \; (c, e), (e, c) \quad ; \quad (c^n, e), (e, c^n), [(c, e), (e, c)] \; \right\rangle.$$

En general,

$$C_n^m \simeq \left\langle \; c_1, c_2, \ldots, c_m \quad ; \quad c_1^n, c_2^n, \ldots, c_m^n, \bigcup_{k=2}^{m} \left[\bigcup_{i=1}^{k-1} \{c_i\}, c_k \right] \; \right\rangle. \tag{2.6}$$

1.3. Transformaciones de Tietze.

En esta subsección estudiaremos un método para manipular los generadores y relaciones de una presentación, de modo que ésta manipulación sea invariante módulo isomorfismos de grupo.

Proposición 2.4. *Sean* $G = \left\langle\ X\ \ ;\ \ R\ \right\rangle$, $h \in L(X)$ *y* $r \in \overline{R} \backslash R$. *Si* $y \notin X$, *entonces existen isomorfismos:*

$$\widetilde{\iota}_X^C : G \to C := \left\langle\ X\ \ ;\ \ R, r\ \right\rangle, \qquad \widetilde{\iota}_X^D : G \to D := \left\langle\ X, y\ \ ;\ \ R, y^{-1}h\ \right\rangle,$$

que extienden a ι_X^C *y* ι_X^D *respectivamente.*

Demostración. Sea $x_1 \cdots x_t = e$. Como $R \subset R \cup \{r\}$ y $R \subset R \cup \{y^{-1}h\}$ tenemos

$$\iota_X^C(x_1) \cdots \iota_X^C(x_t) = x_1 \cdots x_t = e, \quad \text{y} \quad \iota_X^D(x_1) \cdots \iota_X^D(x_t) = x_1 \cdots x_t = e.$$

Por Proposición 2.2 existen homomorfismos $\widetilde{\iota}_X^C : G \to C$ y $\widetilde{\iota}_X^D : G \to D$ que extienden a ι_X^C y ι_X^D respectivamente.

Sean $\varphi_C : X \to G$ y $\varphi_D : X \cup \{y\} \to G$, tal que $\varphi_C(x) = \varphi_D(x) = x$ para todo $x \in X$, y además $\varphi_D(y) := h \in G$. Ahora, si $x_1 \cdots x_r = e$, $y_1 \cdots y_s = e$, y $h = z_1 \cdots z_q$, es claro que:

$$\varphi_C(x_1) \cdots \varphi_C(x_r) = x_1 \cdots x_r = e, \qquad r\overline{R} = \overline{R} \quad (r \in \overline{R} \backslash R),$$

$$\varphi_D(y_1) \cdots \varphi_D(y_s) = y_1 \cdots y_s = e,$$

y

$$\varphi_D(y^{-1})\varphi_D(z_1) \cdots \varphi_D(z_q) = h^{-1}z_1 \cdots z_q = h^{-1}h = e.$$

Luego, por Proposición 2.2 existen homomorfismos $\widetilde{\varphi}_C : C \to G$ y $\widetilde{\varphi}_D : D \to G$ que extienden a φ_C y φ_D respectivamente.

Sean $g := x_1 \cdots x_{u_g} \in G$, $c := y_1 \cdots y_{u_c} \in C$, y $d := z_1 \cdots y \cdots z_{u_d} \in D$, entonces:

$$(\widetilde{\varphi}_C \circ \widetilde{\iota}_X^C)(x_1 \cdots x_{u_g}) = \widetilde{\varphi}_C(\iota_X^C(x_1) \cdots \iota_X^C(x_{u_g})) = x_1 \cdots x_{u_g} = g,$$

$$(\widetilde{\varphi}_D \circ \widetilde{\iota}^D_X)(x_1 \cdots x_{u_g}) = \widetilde{\varphi}_D(\iota^D_X(x_1) \cdots \iota^D_X(x_{u_g})) = x_1 \cdots x_{u_g} = g,$$

$$(\widetilde{\iota}^C_X \circ \widetilde{\varphi}_C)(y_1 \cdots y_{u_c}) = \iota^C_X(y_1) \cdots \iota^C_X(y_{u_c}) = y_1 \cdots y_{u_c} = c,$$

y

$$(\widetilde{\iota}^D_X \circ \widetilde{\varphi}_D)(z_1 \cdots y \cdots z_{u_d}) = \iota^D_X(z_1) \cdots \widetilde{\iota}^D_X(h) \cdots \iota^D_X(z_{u_d}) = z_1 \cdots y \cdots z_{u_d} = d.$$

Por lo tanto $\widetilde{\varphi}_C$ es la inversa de ${\widetilde{\iota}^C_X}^{-1}$ y $\widetilde{\varphi}_D$ es la inversa de ${\widetilde{\iota}^D_X}^{-1}$. Así ${\widetilde{\iota}^C_X}^{-1}$ y ${\widetilde{\iota}^D_X}^{-1}$ son isomorfismos. □

Los isomorfismos de la Proposición 2.4 entregan cuatro maneras para, a partir de una presentación $\left\langle\ X_1 \ ; \ R_1\ \right\rangle$ de G, obtener otra presentación $\left\langle\ X_2 \ ; \ R_2\ \right\rangle$ de G. Éstas se llaman Transformaciones de Tietze, las cuales se denotarán $T^{(+)}_R$, $T^{(-)}_R$, $T^{(+)}_G$ y $T^{(-)}_G$; y se definen de la siguiente forma:

Fijemos $G := \left\langle\ X_1 \ ; \ R_1\ \right\rangle$, entonces:

$\left(T^{(+)}_R\right)$ Sea $r \in \overline{R}_1 \backslash R_1$, es decir $r := r_1 \cdots r_k \notin R_1$, con $r_i \in R_1$ para todo $i = 1, 2, \dots, k$, entonces:

$$T^{(+)}_R(G) := T^{(+)}_{R_{(r)}}\left(\left\langle\ X_1 \ ; \ R_1\ \right\rangle\right) := \left\langle\ X_1 \ ; \ R_1, r\ \right\rangle \simeq G,$$

haciendo $X_2 := X_1$ y $R_2 := R_1 \cup \{r\}$.

$\left(T^{(-)}_R\right)$ Sea $r \in R_1 \cap \overline{R_1 \backslash \{r\}}$, es decir $r := r_1 \cdots r_k \in R_1$, con $r_i \in R_1 \backslash \{r\}$ para todo $i = 1, 2, \dots, k$, entonces:

$$T^{(-)}_R(G) := T^{(-)}_{R_{(r)}}\left(\left\langle\ X_1 \ ; \ R_1\ \right\rangle\right) := \left\langle\ X_1 \ ; \ R_1 \backslash \{r\}\ \right\rangle \simeq G,$$

haciendo $X_2 := X_1$ y $R_2 := R_1 \backslash \{r\}$.

$\left(T^{(+)}_G\right)$ Sea $y \notin X$ y $h \in \mathrm{L}(X)$, entonces:

$$T^{(+)}_G(G) := T^{(+)}_{G_{(y,h)}}\left(\left\langle\ X_1 \ ; \ R_1\ \right\rangle\right) := \left\langle\ X_1, y \ ; \ R_1, y = h\ \right\rangle \simeq G,$$

haciendo $X_2 := X_1 \cup \{y\}$, $R_2 := R_1 \cup \{y^{-1}h\}$ e $y := h$.

$\left(T^{(-)}_G\right)$ Sea $y \in X$ y $h \in L(X \backslash \{y\})$, entonces:

$$T^{(-)}_G(G) := T^{(-)}_{G_{(y,h)}}\left(\left\langle\ X_1 \ ; \ R_1\ \right\rangle\right) := \left\langle\ X_1 \backslash \{y\} \ ; \ R_1 \backslash \{y^{-1}h\}\ \right\rangle \simeq G,$$

donde $y^{-1}h$ es el único elemento en R_1 que involucra a y, esto es $X_2 := X_1 \backslash \{y\}$ y $R_2 := R_1 \backslash \{y^{-1}h\}$.

Ejemplo 2.3. Por (3.5) sabemos que S_3 tiene la presentación de Coxeter

$$S_3 = \left\langle \ s_1, s_2 \quad ; \quad s_1^2, s_2^2, (s_1 s_2)^3 \ \right\rangle \quad \text{con} \quad s_1 := (1\ 2) \ \text{ y } \ s_2 := (2\ 3),$$

aplicando $T := T^{(-)}_{G_{(s_2, s_1 s)}} \circ T^{(-)}_{R_{(s_2^2)}} \circ T^{(+)}_{R_{((s_1 s)^2)}} \circ T^{(-)}_{R_{((s_1 s_2)^3)}} \circ T^{(+)}_{R_{(s^3)}} \circ T^{(+)}_{G_{(s, s_1 s_2)}}$ obtenemos la siguiente presentación:

$$T(S_3) := \left\langle \ s_1, s \quad ; \quad s_1^2, s^3, (s_1 s)^2 \ \right\rangle \simeq S_3, \quad \text{donde} \quad s := (1\ 2\ 3).$$

La siguiente tabla explica como obtener $T(S_3)$ en sus seis etapas. En la primera linea agregamos el generador s, utilizando la transformación $T^{(+)}_G$, donde $h = s_1 s_2$. En la segunda linea agregamos la relación $s^3 = e$, y así podemos eliminar $(s_1 s_2)^3$. Luego, $s = s_1 s_2$ y s_2^2 nos permite agregar la relación $(s_1 s)^2$ mediante $T^{(+)}_R$, y así eliminar s_2^2 en la sexta linea. Por último, resta solo una relación que involucra a s_2, reescribiendo y utilizando la transformación $T^{(-)}_G$, eliminamos la relación $s_1 s = s_2$ y el generador s_2, donde $h = s_1 s$.

S_3	s_1	s_2		s_1^2	s_2^2	$(s_1 s_2)^3$			
$T^{(+)}_{G_{(s, s_1 s_2)}}$	s_1	s_2	s	s_1^2	s_2^2	$(s_1 s_2)^3$	$s = s_1 s_2$		
$T^{(+)}_{R_{(s^3)}}$	s_1	s_2	s	s_1^2	s_2^2	$(s_1 s_2)^3$	$s = s_1 s_2$	s^3	
$T^{(-)}_{R_{((s_1 s_2)^3)}}$	s_1	s_2	s	s_1^2	s_2^2		$s = s_1 s_2$	s^3	
$T^{(+)}_{R_{((s_1 s)^2)}}$	s_1	s_2	s	s_1^2	s_2^2		$s = s_1 s_2$	s^3	$(s_1 s)^2$
$--$	s_1	s_2	s	s_1^2	s_2^2		$s_1 s = s_2$	s^3	$(s_1 s)^2$
$T^{(-)}_{R_{(s_2^2)}}$	s_1	s_2	s	s_1^2			$s_1 s = s_2$	s^3	$(s_1 s)^2$
$--$	s_1	s_2	s	s_1^2			$s_2^{-1} s_1 s$	s^3	$(s_1 s)^2$
$T^{(-)}_{G_{(s_2, s_1 s)}}$	s_1		s	s_1^2				s^3	$(s_1 s)^2$

Así, por Proposición 2.4, la presentación de Coxeter y $T(S_3)$ son equivalentes.

Ejemplo 2.4. Sea G un grupo definido por la siguiente presentación

$$G = \left\langle \ a, b, c, d \quad ; \quad abc^{-1}, bcd^{-1}, cda^{-1}, dab^{-1} \ \right\rangle. \tag{2.7}$$

Mediante una secuencia finita de transformaciones de Tietze, demostraremos que $\mathsf{G} \simeq \mathsf{C}_5$. Primero notar que (2.7) es equivalente a:

$$\left\langle\ a, b, c, d \quad ; \quad ab = c, bc = d, cd = a, da = b\ \right\rangle.$$

La siguiente tabla muestra detalladamente como, mediante transformaciones de Tietze, el grupo G presentado en (2.7) es el grupo cíclico C_5.

G	a	b	c	d	$ab=c$	$bc=d$	$cd=a$	$da=b$				
$\mathsf{T}_\mathsf{R}^{(+)}$	a	b	c	d	$ab=c$	$bc=d$	$cd=a$	$da=b$	$b^{-1}=d$			
$\mathsf{T}_\mathsf{R}^{(-)}$	a	b	c	d		$bc=d$	$cd=a$	$da=b$	$b^{-1}=d$			
$\mathsf{T}_\mathsf{R}^{(+)}$	a	b	c	d		$bc=d$	$cd=a$	$da=b$	$b^{-1}=d$	$c^{-1}=a$		
$\mathsf{T}_\mathsf{R}^{(-)}$	a	b	c	d		$bc=d$	$cd=a$		$b^{-1}=d$	$c^{-1}=a$		
$\mathsf{T}_\mathsf{R}^{(-)}$	a	b	c	d		$bc=d$	$cd=a$		$b^{-1}=d$	$c^{-1}=a$	$c^2=b$	
$\mathsf{T}_\mathsf{R}^{(-)}$	a	b	c	d		$bc=d$	$cd=a$		$b^{-1}=d$		$c^2=b$	
$\mathsf{T}_\mathsf{G}^{(-)}$		b	c	d		$bc=d$			$b^{-1}=d$		$c^2=b$	
$\mathsf{T}_\mathsf{R}^{(+)}$		b	c	d		$bc=d$			$b^{-1}=d$		$c^2=b$	c^5
$\mathsf{T}_\mathsf{R}^{(-)}$		b	c	d		$bc=d$					$c^2=b$	c^5
$\mathsf{T}_\mathsf{G}^{(-)}$		b	c								$c^2=b$	c^5
$\mathsf{T}_\mathsf{G}^{(-)}$			c									c^5

Teorema 2.4. *Sea* G *un grupo y sean* $\left\langle\ \mathsf{X}_1 \quad ; \quad \mathsf{R}_1\ \right\rangle$, $\left\langle\ \mathsf{X}_2 \quad ; \quad \mathsf{R}_2\ \right\rangle$ *dos presentaciones finitas de* G*. Entonces, existen* $t_1, \ldots, t_n \in \left\{\ \mathsf{T}_\mathsf{R}^{(+)}, \mathsf{T}_\mathsf{R}^{(-)}, \mathsf{T}_\mathsf{G}^{(+)}, \mathsf{T}_\mathsf{G}^{(-)}\ \right\}$ $(n < \infty)$*, de manera que*

$$\left\langle\ \mathsf{X}_2 \quad ; \quad \mathsf{R}_2\ \right\rangle = t_n\left(t_{n-1}\left(\cdots\left(t_2\left(t_1\left(\left\langle\ \mathsf{X}_1 \quad ; \quad \mathsf{R}_1\ \right\rangle\right)\right)\right)\cdots\right)\right).$$

Es decir, dadas dos presentaciones arbitrarias finitas de un grupo, una de ellas puede ser llevada en la otra mediante una secuencia finita de Transformaciones de Tietze.

Demostración. Como $\mathsf{R}_1 \subset \mathsf{L}(\mathsf{X}_1)$ y $\mathsf{R}_2 \subset \mathsf{L}(\mathsf{X}_2)$, anotamos ambas presentaciones como sigue:

$$\mathsf{G}_1 := \left\langle\ \mathsf{X}_1 \quad ; \quad \mathsf{R}_1(\mathsf{X}_1)\ \right\rangle \simeq \mathsf{G}, \qquad \mathsf{G}_2 := \left\langle\ \mathsf{X}_2 \quad ; \quad \mathsf{R}_2(\mathsf{X}_2)\ \right\rangle \simeq \mathsf{G}.$$

Anotemos también $X_1 = X_1(X_2)$ y $X_2 = X_2(X_1)$ cada conjunto generador reescrito en términos del otro. Ahora aplicamos transformaciones de Tietze (por bloques) en la tabla a continuación, donde $X_i^{\mp}(X_j)$ denota $X_i = X_i(X_j)$ $(i, j = 1, 2)$

G	X_1		$R_1(X_1)$					
$T_G^{(+)}$	X_1	X_2	$R_1(X_1)$	$X_2^{\mp}(X_1)$				
$T_R^{(+)}$	X_1	X_2	$R_1(X_1)$	$X_2^{\mp}(X_1)$	$X_1^{\mp}(X_2)$			
$T_R^{(+)}$	X_1	X_2	$R_1(X_1)$	$X_2^{\mp}(X_1)$	$X_1^{\mp}(X_2)$	$R_1(X_1(X_2))$		
$T_R^{(-)}$	X_1	X_2		$X_2^{\mp}(X_1)$	$X_1^{\mp}(X_2)$	$R_1(X_1(X_2))$		
$T_R^{(+)}$	X_1	X_2		$X_2^{\mp}(X_1)$	$X_1^{\mp}(X_2)$	$R_1(X_1(X_2))$	$X_2^{\mp}(X_1(X_2))$	
$T_R^{(-)}$	X_1	X_2			$X_1^{\mp}(X_2)$	$R_1(X_1(X_2))$	$X_2^{\mp}(X_1(X_2))$	
$T_G^{(-)}$		X_2				$R_1(X_1(X_2))$	$X_2^{\mp}(X_1(X_2))$	
$T_R^{(+)}$		X_2				$R_1(X_1(X_2))$	$X_2^{\mp}(X_1(X_2))$	$R_2(X_2)$
$T_R^{(-)}$		X_2						$R_2(X_2)$

Por Proposición 2.4, las presentaciones G_1 y G_2 son equivalentes mediante transformaciones de Tietze. $\square$

2. Cálculo de Presentaciones

Dado un grupo G. Un problema fundamental es encontrar una presentación para G, es decir, conocer los generadores y relaciones que determinan el grupo. En teoría, bastaría encontrar X un conjunto de generadores y R un conjunto de relaciones suficientes para definir G, esto es:

$$H := \left\langle \; X \quad ; \quad R \; \right\rangle = L(X)/\overline{R}.$$

La parte más difícil se basa en encontrar la cantidad justa de relaciones, ya que estas harán variar la cantidad de elementos en $\overline{R}$ y así la cantidad de elementos no triviales en G. Para esto utilizaremos el homomorfismo $\widetilde{\varphi}$ definido en la Proposición 2.2, de tal forma que, si hemos encontrado la cantidad necesaria de relaciones, entonces $G \simeq H$ mediante $\widetilde{\varphi}$ y por lo tanto ambos grupos tendrán presentaciones equivalentes, habiendo encontrado una presentación de G.

Resumamos lo anterior en un método que tiene los siguientes tres pasos:

1. Encontrar X un conjunto de generadores para G.
2. Encontrar R un conjunto de relaciones suficientes para definir G.
3. Demostrar que $\widetilde{\varphi} : H \to G$ es un isomorfismo.

Por Lema 1.5, notemos que, si $|G| < \infty$ basta ver que $\widetilde{\varphi}$ es inyectiva, demostrando que $|G| = |H|$, pues $\widetilde{\varphi}$ ya es un epimorfismo.

Ejemplo 2.5. Sea C_2 el grupo cíclico de orden 2. Encontremos una presentación para el grupo de Klein $V := C_2 \times C_2$. Sabemos que este grupo tiene la presentación

$$C_2 := \left\langle \; c \quad ; \quad c^2 \; \right\rangle = \left\{ \; e, c \; \right\}.$$

Nótese que mediante la Proposición 2.3 (Producto directo), calcular una presentación de V es bastante sencillo, sin embargo, encontraremos una presentación de V usando el método recién descrito.

Sea $(a, b) \in C_2 \times C_2 = V$, $(a, b \in C_2)$, es claro que:

$$(a,b) = (a,e)(e,b) = \begin{cases} (e,e)(e,e) = (e,e), & a = b = e \\ (c,e)(e,e) = (c,e), & a = c,\ b = e \\ (e,e)(e,c) = (e,c), & a = e,\ b = c \\ (c,e)(e,c) = (c,c), & a = b = c \end{cases}$$

Por lo tanto $X := \left\{ \; (c, e)\,,\ (e, c) \; \right\}$ es un conjunto generador de V. Por otra parte es fácil ver que

$$\begin{aligned} (c,e)^2 = (c,e)(c,e) = (c^2,e) = (e,e), \\ (e,c)^2 = (e,c)(e,c) = (e,c^2) = (e,e), \\ (c,e)(e,c)(c,e)^{-1}(e,c)^{-1} = (c,e)(e,c)(c,e)(e,c) = (c^2,c^2) = (e,e). \end{aligned} \tag{2.8}$$

Consideremos $R := \left\{ \; (c, e)^2, (e, c)^2, [(c, e), (e, c)] \; \right\}$ un sistema de relaciones suficiente para definir $H := \left\langle \; X \quad ; \quad R \; \right\rangle$ con los generadores y relaciones encontradas.

Consideremos $\varphi := \iota_X^V : X \to V$, es claro que toda relación en H lo es en V, luego por Proposición 2.2 existe un homomorfismo $\widetilde{\varphi} = \widetilde{\iota}_X^V : H \to V$ el cual extiende a ι_X^V, que más aún es un epimorfismo (por definición de ι_X^V). Sea $h \in \mathrm{Ker}(\widetilde{\varphi}) \subseteq H$, entonces $h := x_1 \cdots x_n$ ($x_i \in X \cup X^{-1}, i = 1, \ldots, n$), aplicando $\widetilde{\varphi}$ obtenemos

$$e = \widetilde{\varphi}(h) = \widetilde{\varphi}(x_1 \cdots x_n) = \widetilde{\varphi}(x_1) \cdots \widetilde{\varphi}(x_n) = \iota_X^V(x_1) \cdots \iota_X^V(x_n) = x_1 \cdots x_n = h,$$

por lo tanto $\mathrm{Ker}(\widetilde{\varphi}) = \{e\}$, así $\widetilde{\varphi}$ es un isomorfismo. Luego, $V = C_2 \times C_2$ tiene la misma presentación de H.

Ejemplo 2.6. Encontremos una presentación para el grupo de Heisenberg H_3 con entradas en el anillo de enteros $\mathbb{Z}$. Este grupo se define como sigue.

$$H_3 := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_3 \\ 0 & 1 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Z} \right\} \subset \mathsf{GL}_3(\mathbb{Z}).$$

Anotaremos todo elemento $h \in H_3$ de la siguiente forma:

$$[a_1, a_2, a_3] := \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_3 \\ 0 & 1 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = h \in H_3.$$

Luego, $H_3 := \left\{ [a_1, a_2, a_3] \quad ; \quad a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Z} \right\}$. Sean $h_1, h_2, h_3 \in H_3$ definidos de la siguiente forma

$$h_1 := [1, 0, 0], \quad h_2 := [0, 1, 0], \quad h_3 := [0, 0, 1].$$

Es claro que para todo $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z}$, se tiene:

$$h_1^{n_1} := [n_1, 0, 0], \quad h_2^{n_2} := [0, n_2, 0], \quad h_3^{n_3} := [0, 0, n_3].$$

Luego, cada elemento $h \in H_3$ se puede escribir de la siguiente manera

$$h = h_1^{n_1} h_2^{n_2} h_3^{n_3} = [n_1, n_2, n_3 + n_1 n_2].$$

Por lo tanto $X := \left\{ h_1, h_2, h_3 \right\}$ es un conjunto generador de H_3. Por otra parte las siguientes relaciones son válidas en H_3

$$[h_1, h_2] = h_3, \qquad [h_3, h_1] = [h_3, h_2] = I_3. \tag{2.9}$$

Sea el grupo $G := \left\langle \ Y \ ; \ R \ \right\rangle$, donde $Y := \left\{k_1, k_2, k_3\right\}$ es un conjunto de símbolos y $R := \left\{r_1, r_2, r_3\right\}$ de manera que

$$r_1 := [k_1, k_2]k_3^{-1}, \quad r_2 := [k_3, k_1], \quad r_3 := [k_3, k_2].$$

Sea $\varphi : Y \to H_3$ definida por $\varphi(k_i) := h_i$ para $i = 1, 2, 3$. Por (2.9) y Proposición 2.2, existe $\widetilde{\varphi} : G \to H_3$, el cual es un epimorfismo, ya que:

$$[n_1, n_2, n_3 + n_1n_2] = h_1^{n_1}h_2^{n_2}h_3^{n_3} = \varphi(k_1)^{n_1}\varphi(k_2)^{n_2}\varphi(k_3)^{n_3} = \widetilde{\varphi}(k_1^{n_1}k_2^{n_2}k_3^{n_3}).$$

Sea $L := \left\{ \ k_1^{n_1}k_2^{n_2}k_3^{n_3} \ ; \ n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z} \ \right\} \subseteq G$ y $h := k_1^{n_1}k_2^{n_2}k_3^{n_3}$ un elemento cualquiera en L, entonces:

$$hk_3^{\pm 1} = k_1^{n_1}k_2^{n_2}k_3^{n_3}k_3^{\pm 1} = k_1^{n_1}k_2^{n_2}k_3^{n_3 \pm 1} \in L,$$

$$hk_2^{\pm 1} = k_1^{n_1}k_2^{n_2}k_3^{n_3}k_2^{\pm 1} = k_1^{n_1}k_2^{n_2 \pm 1}k_3^{n_3} \in L, \quad \text{por } r_3.$$

De la definición de r_3 y r_1 sabemos que:

$$k_1k_2k_1^{-1}k_2^{-1} = k_3, \quad \text{si y sólo sí}, \quad k_1^{-1}k_2k_1 = k_2k_3^{-1}.$$

Similarmente, de la definición de r_3 se tiene:

$$k_1k_2k_1^{-1}k_2^{-1} = k_3, \quad \text{si y sólo sí}, \quad k_1k_2k_1^{-1} = k_2k_3.$$

Entonces para todo $n \in \mathbb{Z}$

$$(k_1^{-1}k_2k_1)^n = k_1^{-1}k_2^nk_1 = k_2^nk_3^{-n} = (k_2k_3^{-1})^n, \quad \text{por } r_3, \tag{2.10}$$

y

$$k_1k_2^nk_1^{-1} = k_2^nk_3^n, \quad \text{por } r_3, \tag{2.11}$$

respectivamente. Luego,

$$\begin{aligned}
hk_1^{\pm 1} &= k_1^{n_1}k_2^{n_2}k_3^{n_3}k_1^{\pm 1}, \\
&= k_1^{n_1}k_2^{n_2}k_1^{\pm 1}k_3^{n_3}, \quad \text{por } r_1, \\
&= k_1^{n_1 \pm 1}k_1^{\mp 1}k_2^{n_2}k_1^{\pm 1}k_3^{n_3}, \\
&= k_1^{n_1 \pm 1}(k_1^{\mp 1}k_2^{n_2}k_1^{\pm 1})k_3^{n_3}, \\
&= k_1^{n_1 \pm 1}(k_2^{n_2}k_3^{\mp n_2})k_3^{n_3}, \quad \text{por (2.10) y (2.11)}, \\
&= k_1^{n_1 \pm 1}k_2^{n_2}k_3^{n_3 \mp n_2} \in L.
\end{aligned}$$

Esto demuestra que $Lk_i^{\pm 1} \leqslant L$ para $i = 1, 2, 3$, es decir $Lk \leqslant L$ para todo $k \in Y \cup Y^{-1}$.

Sea $t \in \langle Y \rangle$, si $\ell(t) = 1$, entonces $t \in Y$ por lo tanto $Lt \subseteq L$. Supongamos que $t = k_{i_1}^{q_1}k_{i_2}^{q_2}\cdots k_{i_m}^{q_m}$ ($m \in \mathbb{N}$, $K_{i_i} \in Y$, $q_j = \pm 1$, $i, j = 1, 2, \ldots, m$) y $L(k_{i_1}^{q_1}k_{i_2}^{q_2}\cdots k_{i_{m-1}}^{q_{m-1}}) \leqslant L$. Todo elemento en $L(k_{i_1}^{q_1}k_{i_2}^{q_2}\cdots k_{i_{m-1}}^{q_{m-1}})$ es de la forma $h = k_1^{n_1}k_2^{n_2}k_3^{n_3}$, como $K_{i_m}^{q_m} \in Y$, entonces $hk_{i_m}^{q_m} \in L$, luego $Lt \subseteq L$. Además, $e = k_1^0k_2^0k_3^0 \in L$, entonces $t = et \in Lt \subseteq L$, así $t \in L$. Por lo tanto

$$G \subseteq \langle Y \rangle \subseteq L, \qquad (G = L).$$

Ahora, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
k_1^{n_1}k_2^{n_2}k_3^{n_3} &\neq k_1^{m_1}k_2^{m_2}k_3^{m_3}, \\
k_1^{n_1}k_2^{n_2}k_3^{n_3}k_3^{-m_3}k_2^{-m_2}k_1^{-m_1} &\neq e \quad /\widetilde{\varphi}, \\
\widetilde{\varphi}(k_1^{n_1}k_2^{n_2}k_3^{n_3}k_3^{-m_3}k_2^{-m_2}k_1^{-m_1}) &\neq \widetilde{\varphi}(e), \\
\widetilde{\varphi}(k_1)^{n_1}\widetilde{\varphi}(k_2)^{n_2}\widetilde{\varphi}(k_3)^{n_3}\widetilde{\varphi}(k_3)^{-m_3}\widetilde{\varphi}(k_2)^{-m_2}\widetilde{\varphi}(k_1)^{-m_1} &\neq I_3, \\
\varphi(k_1)^{n_1}\varphi(k_2)^{n_2}\varphi(k_3)^{n_3}\varphi(k_3)^{-m_3}\varphi(k_2)^{-m_2}\varphi(k_1)^{-m_1} &\neq I_3, \\
h_1^{n_1}h_2^{n_2}h_3^{n_3}h_3^{-m_3}h_2^{-m_2}h_1^{-m_1} &\neq I_3, \\
h_1^{n_1}h_2^{n_2}h_3^{n_3} &\neq h_1^{m_1}h_2^{m_2}h_3^{m_3}.
\end{aligned}$$

Luego $\widetilde{\varphi}(k_1^{n_1}k_2^{n_2}k_3^{n_3}) \neq \widetilde{\varphi}(k_1^{m_1}k_2^{m_2}k_3^{m_3})$. Por lo tanto $\widetilde{\varphi}$ es inyectiva y así un isomorfismo. Esto es $G \simeq H_3$, tomando $k_i := h_i$ para $i = 1, 2, 3$ obtenemos la siguiente presentación de H_3

$$H_3 = \left\langle \; X \quad ; \quad R \; \right\rangle = \left\langle \; h_1, h_2, h_3 \quad ; \quad [h_1, h_2]h_3^{-1}, [h_3, h_1], [h_3, h_2] \; \right\rangle. \qquad (2.12)$$

3. El Método de Reidemeister-Schreier

Sea G un grupo con una presentación conocida y H un subgrupo de G. Un problema a estudiar es encontrar una presentación de H a partir de la presentación conocida de G. Directamente esto puede ser bastante engorroso, sin embargo, el método de Reidemeister-Schreier nos muestra cómo encontrar una presentación del subgrupo H.

Nuestro principal objetivo es demostrar el Teorema 2.6, el cual nos muestra cómo determinar una presentación de H.

En lo que sigue suponemos que $\mathsf{G} = \left\langle\ \mathsf{X} \ ; \ \mathsf{R}\ \right\rangle$.

Lema 2.5. *Sea* H *un subgrupo de* G *de modo que* $\overline{\mathsf{R}} \subseteq \mathsf{H}$. *Entonces,* $\overline{\mathsf{R}}$ *es también la clausura normal en* H *del siguiente conjunto:*

$$\widehat{\mathsf{R}} := \left\{\ uru^{-1} \ ; \ u \in \mathsf{U},\, r \in \mathsf{R}\ \right\},$$

donde U *es un transversal de* $\mathsf{L}(\mathsf{X})$ *según* H.

Demostración. Por Proposición 1.6 sabemos que $\overline{\mathsf{R}}$ es generado por el conjunto $\left\{\ grg^{-1} \ ; \ g \in \mathsf{G},\, r \in \mathsf{R}\ \right\}$. Además, como U es un transversal, se tiene que:

$$\mathsf{G} = \bigcup_{u \in \mathsf{U}} \mathsf{H}u.$$

Entonces, para todo $g \in \mathsf{G}$, existe $u \in \mathsf{U}$ y $h \in \mathsf{H}$ tal que $g = hu$. Luego $\overline{\mathsf{R}}$ es generado por el siguiente conjunto:

$$\left\{\ (hu)r(hu)^{-1} \ ; \ u \in \mathsf{U},\, r \in \mathsf{R},\, h \in \mathsf{H}\ \right\}.$$

Por lo tanto, la clausura normal de $\widehat{\mathsf{R}}$ en H es:

$$\left\langle \left\{\ h(uru^{-1})h^{-1} \ ; \ u \in \mathsf{U},\, h \in \mathsf{H},\, r \in \mathsf{R}\ \right\} \right\rangle = \overline{\mathsf{R}}.$$

Esto concluye la demostración. $\square$

Teorema 2.6. *Con las notaciones del* Lema 2.5*, el subgrupo* H *de* G *tiene la siguiente presentación:*

$$\left\langle \ \mathsf{Y_H} \quad ; \quad \widehat{\mathsf{R}} \ \right\rangle.$$

Demostración. Por Lema 1.18, sabemos que $\mathsf{Y_H}$ genera a H, luego supongamos que $\mathsf{H} = \left\langle \ \mathsf{Y_H} \quad ; \quad \mathsf{R} \ \right\rangle$ es decir $\mathsf{H} \simeq \mathsf{L}(\mathsf{Y_H})/\overline{\mathsf{R}}$. Como $\overline{\mathsf{R}} \subseteq \mathsf{H} \subseteq \mathsf{G}$, entonces por Lema 2.5, $\overline{\mathsf{R}}$ es la clausura normal de $\widehat{\mathsf{R}}$ en H. Por lo tanto

$$\mathsf{H} = \left\langle \ \mathsf{Y_H} \quad ; \quad \widehat{\mathsf{R}} \ \right\rangle.$$

Esto concluye la demostración. □

Corolario 2.3. *Sea* H *un subgrupo de* G *tal que* $[\mathsf{G} : \mathsf{H}] < \infty$*. Si* G *es finitamente presentado, entonces* H *también lo es.*

Demostración. Como $\mathsf{G} = \left\langle \ \mathsf{X} \quad ; \quad \mathsf{R} \ \right\rangle$, por Teorema 2.6, sabemos que $\mathsf{H} = \left\langle \ \mathsf{Y_H} \quad ; \quad \widehat{\mathsf{R}} \ \right\rangle$. Recordemos además que

$$\mathsf{Y_H} = \left\{ \ ux[ux]^{-1} \quad ; \quad u \in \mathsf{U},\ x \in \mathsf{X} \ \right\}$$

y

$$\widehat{\mathsf{R}} := \left\{ \ uru^{-1} \quad ; \quad u \in \mathsf{U},\ r \in \mathsf{R} \ \right\}.$$

Como $[\mathsf{G} : \mathsf{H}] = |\mathsf{U}|, |\mathsf{X}|$ y $|\mathsf{R}|$ son finitos, entonces $|\mathsf{Y_H}|, |\widehat{\mathsf{R}}| < \infty$. Por lo tanto H es finitamente presentado. □

El método de Reidemeister-Schreier puede resumirse en cuatro pasos:

1. Encontrar U transversal de Schreier para H en G.
2. Encontrar $\mathsf{Y_H}$ un sistema de generadores de H.
3. Definir $\widehat{\mathsf{R}} := \widehat{\mathsf{R}}(\mathsf{X})$ un conjunto de relaciones para H como en Teorema 2.6.
4. Redefinir $\widehat{\mathsf{R}} := \widehat{\mathsf{R}}(\mathsf{Y_H})$ como sistema de relaciones para H en $\mathsf{Y_H}$.

3.1. Proceso de Reescritura de Reidemeister-Schreier.

El Lema 2.5 determina la forma que deben tener las relaciones del subgrupo H, es decir, conjugados uru^{-1} de elementos de R por elementos de U. Sin embargo, en la práctica, no es fácil explicitar estas relaciones en término de los generadores de H, de la forma $ux[ux]^{-1}$ de Y_H. A continuación veremos una manera de reescribir éstas relaciones dentro de H.

Observación 2.3. *Si* $H \leqslant G = \left\langle X \;\; ; \;\; R \right\rangle$ *y* U *un transversal de Schreier para* G *según* H*. Entonces, para todo* $x_i \in X \cup X^{-1}$*,* $i = 1, \ldots, t$*, y todo* $u \in U$ *se tiene lo siguiente:*

$$[ux_i]^{-1} \in U, \qquad [[ux_i]x_j] = [ux_ix_j] \qquad 1 \leqslant i, j \leqslant t,$$

en general,

$$[[[ux_1]x_2] \cdots x_{t-1}]x_t] = [ux_1x_2 \cdots x_t] \tag{2.13}$$

Proposición 2.5. *Sea* $H \leqslant G = \left\langle X \;\; ; \;\; R \right\rangle$ *y* U *un transversal de Schreier para* G *según* H*. Entonces, para todo* $r \in R$ *y* $u \in U$ ($uru^{-1} \in \widehat{R}$) *tal que* $\ell(r) = n$*, existen* $y_1, \ldots, y_n \in Y_H$ *tal que* $uru^{-1} = y_1 \cdots y_n$*.*

Demostración. Utilizando la Observación 2.3, procedemos como en (1.11). Supongamos que $\ell(r) = n$, es decir, $r = x_1 \cdots x_n$, con $x_i \in X \cup X^{-1}$, para $i = 1, \ldots, n$. Entonces:

$$\begin{aligned}
uru^{-1} &= ux_1x_2 \cdots x_nu^{-1}, \\
&= ux_1[ux_1]^{-1}[ux_1]x_2 \cdots x_nu^{-1}, \\
&= ux_1[ux_1]^{-1}[ux_1]x_2[[ux_1]x_2]^{-1}[[ux_1]x_2] \cdots [[[ux_1]x_2] \cdots]x_n]^{-1}, \\
&= ux_1[ux_1]^{-1}[ux_1]x_2[ux_1x_2]^{-1}[ux_1x_2] \cdots [ux_1x_2 \cdots x_n]^{-1}, \\
&= u_1x_1u_2^{-1}u_2x_2u_3^{-1}u_3x_3 \cdots u_nx_nu_{n+1}^{-1}, \\
&= y_1y_2 \cdots y_n,
\end{aligned} \tag{2.14}$$

donde,

$$u_1 := u, \qquad u_i := [ux_1 \cdots x_{i-1}], \qquad y_j := u_jx_j[u_jx_j]^{-1},$$

para $i = 2, \ldots, n$ y $j = 1, \ldots, n$. Esto demuestra la proposición. $\square$

Esta forma de escribir las relaciones de H en (2.14) es llamada "Proceso de reescritura de Reidemeister-Schreier".

3.2. Ejemplos A_4 y P_3.

Ejemplo 2.7. En particular por (3.5) conocemos la presentación de Coxeter para el grupo S_4 la cual viene dada de la siguiente manera:

$$\left\langle \; s_1, s_2, s_3 \quad ; \quad s_1^2, s_2^2, s_3^2, (s_1s_2)^3, (s_2s_3)^3, (s_1s_3)^2 \; \right\rangle, \tag{2.15}$$

donde $X_4 := \left\{ \; s_1, s_2s_3 \; \right\}$ y $R_4 := \left\{ \; s_1^2, s_2^2, s_3^2, (s_1s_2)^3, (s_2s_3)^3, (s_1s_3)^2 \; \right\}$.

Aplicaremos el método de Reidemeister-Schreier para el subgrupo alternador A_4 de S_4. Sabemos que $[S_4 : A_4] = 2$, más aún

$$S_4/A_4 \simeq C_2.$$

Tenemos que si $s_i \notin A_4$, entonces $A_4s_i \neq A_4 = A_4e$. Luego $U_i := \{e, s_i\}$ es una transversal de Schreier para A_4 en S_4. Tomaremos el transversal U_1 ($i = 1$). Nótese que $A_4s_i = A_4s_j$ y $A_4s_is_j = A_4$ ($i, j = 1, 2, 3$).

El siguiente paso es explicitar el conjunto $Y_4 := Y_{A_4}$ de generadores para A_4, el cual está definido como sigue:

$$Y_4 := \left\{ \; ux[ux]^{-1} \quad ; \quad u \in U_1, \, x \in X_4 \cup X_4^{-1} \; \right\}.$$

Como $s_i = s_i^{-1}$ ($i = 1, 2, 3$), basta estudiar Y_4 sobre X_4. Para esto aplicaremos los Lemas 1.17 y 1.18 en la siguiente tabla:

$U_1 \times X_4$	s_1	s_2	s_3
e	e	$s_2s_1^{-1}$	$s_3s_1^{-1}$
s_1	s_1^2	s_1s_2	s_1s_3

(2.16)

Para encontrar un conjunto de relaciones para A_4 ocuparemos el Lema 2.5. Sea $\widehat{R}$ el conjunto definido en Lema 2.5. Más precisamente:

$$\widehat{R} := \widehat{R}_4 := \left\{ \; uru^{-1} \quad ; \quad u \in U_1, \, r \in R_4 \; \right\}.$$

Explicitemos este conjunto mediante la tabla siguiente

$U_1 \times R_4$	s_1^2	s_2^2	s_3^2	$(s_1s_2)^3$	$(s_2s_3)^3$	$s_1^{-1}s_3^{-1}s_1s_3$
e	s_1^2	s_2^2	s_3^2	$(s_1s_2)^3$	$(s_2s_3)^3$	$s_1^{-1}s_1^{-1}s_1s_3$
s_1	s_1^2	$s_2s_2^2s_1^{-1}$	$s_1s_3^2s_1^{-1}$	$s_1(s_1s_2)^3s_1^{-1}$	$s_1(s_2s_3)^3s_1^{-1}$	$s_3^{-1}s_1s_3s_1^{-1}$

Por lo tanto se tiene

$$Y_4 \cup \{e\} = \left\{ \ e, s_2s_1^{-1}, s_3s_1^{-1}, s_1^2, s_1s_2, s_1s_3 \ \right\}$$

y

$$\widehat{R}_4 = R_4 \cup \left\{ \ s_1s_2^2s_1^{-1}, s_1s_3^2s_1^{-1}, s_1(s_1s_2)^3s_1^{-1}, s_1(s_2s_3)^3s_1^{-1}, s_3^{-1}s_1s_3s_1^{-1} \ \right\}.$$

Por último debemos reescribir $\widehat{R}_4$ en términos de Y_4, para esto redefinimos los elementos de $Y_4 \cup \{e\}$ que aparecen en la tabla (2.16) como sigue:

$$\left\{ \ y_1 := e,\ y_2 := s_2s_1^{-1},\ y_3 := s_3s_1^{-1},\ y_4 := s_1^2,\ y_5 := s_1s_2,\ y_6 := s_1s_3 \ \right\}.$$

Entonces podemos escribir los elementos de $\widehat{R}_4$ de la siguiente forma:

$r_1 := y_4$	$r_2 := y_2y_5$	$r_3 := y_3y_6$	$r_4 := y_5^3$	$r_5 := (y_2y_6)^3$
$r_6 := y_6y_4^{-1}y_3^{-1}$	$r_7 := y_5y_2$	$r_8 := y_6y_3$	$r_9 := (y_4y_2)^3$	$r_{10} := (y_5y_3)^3$
$r_{11} := y_6^{-1}y_4y_3$	$r_{12} := y_4$			

Por lo tanto,

$$\widehat{R}(Y_4) := \left\{ \begin{array}{c} y_4,\ y_2y_5,\ y_3y_6,\ y_5^3,\ (y_2y_6)^3,\ y_6y_4^{-1}y_3^{-1}, \\ y_5y_2,\ y_6y_3,\ (y_4y_2)^3,\ (y_5y_3)^3,\ y_6^{-1}y_4y_3,\ y_4 \end{array} \right\}.$$

Así, obtenemos que A_4 es presentado por

$$\left\langle \ y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4,\ y_5,\ y_6 \ \ ; \ \ r_1,\ r_2,\ r_3,\ r_4,\ r_5,\ r_6,\ r_7,\ r_8,\ r_9,\ r_{10},\ r_{11},\ r_{12} \ \right\rangle.$$

Ahora, como $r_1 = r_{12} = y_4 = s_1^2 = e = y_1$, entonces

$$A_4 = \left\langle \ y_2,\ y_3,\ y_5,\ y_6 \ \ ; \ \ r_2,\ r_3,\ r_4,\ r_5,\ r_6,\ r_7,\ r_8,\ r_9,\ r_{10},\ r_{11} \ \right\rangle,$$

además,

$$r_6 = y_6y_4^{-1}y_3^{-1} = y_6ey_3^{-1} = y_6y_3^{-1}, \quad r_9 = (y_4y_2)^3 = (ey_2)^3 = y_2^3,$$

y

$$r_{11} = y_6^{-1} y_4 y_3 = y_6^{-1} e y_3 = y_6^{-1} y_3.$$

Por lo tanto

$$A_4 = \left\langle \ y_2, y_3, y_5, y_6 \quad ; \quad \begin{array}{c} y_2y_5,\ y_3y_6,\ y_5^3,\ (y_2y_6)^3,\ y_6y_3^{-1} \\ y_5y_2,\ y_6y_3,\ y_2^3,\ (y_5y_3)^3,\ y_6^{-1}y_3 \end{array} \ \right\rangle.$$

Pero $y_5 = y_2^{-1}$ e $y_3 = y_6^{-1}$, entonces la presentación anterior se puede reducir a:

$$A_4 = \left\langle \ y_3, y_5 \quad ; \quad \begin{array}{c} y_5^3,\ (y_5^{-1}y_3^{-1})^3 \\ (y_5y_3)^3,\ y_3^2 \end{array} \ \right\rangle.$$

Ahora

$$(y_5y_3)^3 = e, \quad \text{si y sólo sí,} \quad s_1^{-1}(y_5y_3)^3 s_1 = s_1^{-1}s_1 = e,$$

y por otra parte

$$s_1^{-1}(s_1s_2s_3s_1^{-1})^3 s_1 = s_1^{-1}s_1(s_2s_3)^3 s_1^{-1}s_1 = (s_2s_3)^3 = (s_2s_1^{-1}s_1s_3)^3 = (y_2y_6)^3.$$

Así obtenemos que

$$s_1^{-1}(y_5y_3)^3 s_1 = s_1^{-1}(s_1s_2s_3s_1^{-1})^3 s_1 = (y_2y_6)^3 = (y_5^{-1}y_3^{-1}) = e.$$

Por lo tanto, hemos encontrado una presentación para A_4 a partir de la presentación de Coxeter del grupo simétrico S_4. Resumiendo:

$$A_4 = \left\langle \ y_5, y_3 \quad ; \quad y_5^3, y_3^2, (y_5y_3)^3 \ \right\rangle \simeq \left\langle \ a, b \quad ; \quad a^3,\ b^2,\ (ab)^3 \ \right\rangle. \tag{2.17}$$

En la subsección 3.1.1.4, usando el método de Reidemeister-Schreier determinaremos en general una presentación de A_n a partir de la presentación de Coxeter de S_n.

Ejemplo 2.8. Sea B_3 el grupo de trenzas (3-cuerdas) presentado como sigue:

$$B_3 := \left\langle \ \sigma_1, \sigma_2 \quad ; \quad \sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2 \ \right\rangle,$$

con $X := \left\{ \ \sigma_1, \sigma_2 \ \right\}$ y sea $\pi : B_3 \to S_3$ la proyección natural (epimorfismo) tal que $\pi(\sigma_i) = s_i$ $(i := 1, 2)$, anotamos $P_3 := \mathrm{Ker}(\pi) \trianglelefteq B_3$ el subgrupo de trenzas puras de B_3. Utilizaremos el método de Reidemeister-Schreier para calcular una presentación de este grupo. Como π es un epimorfismo se tiene

$$B_3/P_3 \simeq S_3 = \left\{ \, e, s_1, s_2, s_1s_2, s_2s_1, s_1s_2s_1 \, \right\},$$

luego, es claro que $U := \left\{ \, e, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_1\sigma_2, \sigma_2\sigma_1, \sigma_1\sigma_2\sigma_1 \, \right\}$ es un transversal de Schreier para P_3 en B_3. A continuación encontraremos X_{P_3} posteriormente Y_{P_3} el conjunto generador de P_3 de elementos de la forma $ux[ux]^{-1}$ ($x \in X$, $u \in U$)

$U \times X$	σ_1	σ_2	σ_1^{-1}	σ_2^{-1}
e	e	e	σ_1^{-2}	σ_2^{-2}
σ_1	σ_1^2	e	e	$\sigma_1(\sigma_1\sigma_2^2)^{-1}$
σ_2	e	σ_2^2	$\sigma_2\sigma_1^{-2}\sigma_2$	e
$\sigma_1\sigma_2$	e	$\sigma_1\sigma_2^2\sigma_1^{-1}$	$\sigma_1\sigma_2(\sigma_1\sigma_2\sigma_1^2)^{-1}$	e
$\sigma_2\sigma_1$	$\sigma_2\sigma_1^2\sigma_2^{-1}$	$\sigma_2\sigma_1\sigma_2(\sigma_1\sigma_2\sigma_1)^{-1}$	e	$\sigma_2\sigma_1(\sigma_1\sigma_2)^{-2}$
$\sigma_1\sigma_2\sigma_1$	$\sigma_1\sigma_2\sigma_1^2(\sigma_1\sigma_2)^{-1}$	$(\sigma_1\sigma_2)^2\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}$	e	$\sigma_1\sigma_2\sigma_1(\sigma_2\sigma_1\sigma_2)^{-1}$

Así tenemos que Y_{P_3} es definido como sigue:

$$\left\{ \begin{array}{c} \tau_1 := \sigma_1^2, \tau_2 := \sigma_2^2, \tau_3 := \sigma_1\sigma_2^2\sigma_1^{-1}, \tau_4 := \sigma_2\sigma_1^2\sigma_2^{-1}, \tau_5 := \sigma_1\sigma_2\sigma_1^2(\sigma_1\sigma_2)^{-1}, \\ \tau_6 := (\sigma_1\sigma_2)^2(\sigma_2\sigma_1)^{-1}, \tau_7 := \sigma_2\sigma_1\sigma_2(\sigma_1\sigma_2\sigma_1)^{-1} \end{array} \right\},$$

Como en Lema 2.5 construimos la tabla de elementos uru^{-1} ($u \in U$, $r := \sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}$) como sigue:

$U \times \{r\}$	$\sigma_1\sigma_2\sigma_1(\sigma_2\sigma_1\sigma_2)^{-1}$
e	$\sigma_1\sigma_2\sigma_1(\sigma_2\sigma_1\sigma_2)^{-1}$
σ_1	$\sigma_1^2\sigma_2\sigma_1(\sigma_1\sigma_2)^{-2}$
σ_2	$(\sigma_2\sigma_1)^2(\sigma_2^2\sigma_1\sigma_2)^{-1}$
$\sigma_1\sigma_2$	$(\sigma_1\sigma_2)^2\sigma_1(\sigma_1\sigma_2^2\sigma_1\sigma_2)^{-1}$
$\sigma_2\sigma_1$	$\sigma_2\sigma_1^2\sigma_2\sigma_1((\sigma_2\sigma_1)^2\sigma_2)^{-1}$
$\sigma_1\sigma_2\sigma_1$	$\sigma_1\sigma_2\sigma_1^2\sigma_2\sigma_1((\sigma_1\sigma_2)^2\sigma_1\sigma_2)^{-1}$

Entonces $\widehat{R} := \left\{ \; r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6 \; \right\}$, donde

$$
\begin{aligned}
r_1 &:= \sigma_1\sigma_2\sigma_1(\sigma_2\sigma_1\sigma_2)^{-1}, & r_4 &:= (\sigma_1\sigma_2)^2\sigma_1(\sigma_1\sigma_2^2\sigma_1\sigma_2)^{-1},\\
r_2 &:= \sigma_1^2\sigma_2\sigma_1(\sigma_1\sigma_2)^{-2}, & r_5 &:= \sigma_2\sigma_1^2\sigma_2\sigma_1((\sigma_2\sigma_1)^2\sigma_2)^{-1},\\
r_3 &:= (\sigma_2\sigma_1)^2(\sigma_2^2\sigma_1\sigma_2)^{-1}, & r_6 &:= \sigma_1\sigma_2\sigma_1^2\sigma_2\sigma_1((\sigma_1\sigma_2)^2\sigma_1\sigma_2)^{-1}.
\end{aligned}
$$

Usando los elementos de Y_{P_3} se obtiene $\widehat{R}(Y_{P_3})$ de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
r_1 &= \tau_7^{-1}, & r_2 &= \tau_1\tau_6^{-1}, & r_3 &= \tau_7\tau_5\tau_2^{-1},\\
r_4 &= \tau_6\tau_4(\tau_3\tau_1)^{-1} & r_5 &= \tau_4\tau_2(\tau_7\tau_5\tau_3)^{-1} & r_6 &= \tau_5\tau_3\tau_1(\tau_6\tau_4\tau_2)^{-1},
\end{aligned}
$$

además ocupando r se tiene que $\tau_7 = e$, entonces

$$
\begin{aligned}
r_1 &= e, & r_2 &= \tau_1\tau_6^{-1}, & r_3 &= \tau_5\tau_2^{-1},\\
r_4 &= \tau_6\tau_4(\tau_3\tau_1)^{-1} & r_5 &= \tau_4\tau_2(\tau_5\tau_3)^{-1} & r_6 &= \tau_5\tau_3\tau_1(\tau_6\tau_4\tau_2)^{-1}.
\end{aligned}
$$

Por r_2 y r_3 tenemos que $\tau_1 = \tau_6$ y $\tau_5 = \tau_2$ en P_3, en consecuencia,

$$
\tau_1\tau_4 = \tau_3\tau_1, \qquad \tau_4\tau_2 = \tau_2\tau_3, \qquad \tau_2\tau_3\tau_1 = \tau_1\tau_4\tau_2,
$$

luego $\widehat{R}(Y_{P_3}) := \left\{ \; \tau_3\tau_2\tau_1(\tau_2\tau_3\tau_1)^{-1}, \; \tau_1\tau_2\tau_3(\tau_2\tau_3\tau_1)^{-1} \; \right\}$. Por lo tanto P_3 tiene la siguiente presentación:

$$
P_3 = \left\langle \; \tau_1, \tau_2, \tau_3 \quad ; \quad \tau_3\tau_2\tau_1(\tau_2\tau_3\tau_1)^{-1}, \tau_1\tau_2\tau_3(\tau_2\tau_3\tau_1)^{-1} \; \right\rangle,
$$

equivalentemente,

$$
\begin{aligned}
P_3 &= \left\langle \; \tau_1, \tau_2, \tau_3 \quad ; \quad \tau_1\tau_2\tau_3 = \tau_2\tau_3\tau_1 = \tau_3\tau_2\tau_1 \; \right\rangle\\
&\simeq \left\langle \; a, b, c \quad ; \quad abc = bca = cba \; \right\rangle.
\end{aligned}
$$

Observación 2.4. Nótese que curiosamente la cantidad de generadores de P_3 es mayor que en B_3 siendo que $P_3 \leqslant B_3$. Recordar que el teorema de Nielsen-Schreier no refiere ninguna restricción para el rango de los subgrupos.

4. Extensiones de Grupo

Definición 2.4. *Sean* G *y* A *grupos. Diremos que un grupo* $\widehat{\mathsf{G}}$ *es una extensión de* G *por* A*, si existe un subgrupo normal* N *de* $\widehat{\mathsf{G}}$ *tal que*

$$\mathsf{A} \simeq \mathsf{N}, \quad \widehat{\mathsf{G}}/\mathsf{N} \simeq \mathsf{G}. \tag{2.18}$$

Lema 2.7. *Si* $\widehat{\mathsf{G}}$ *es una extensión de* G *por* A*, entonces:*

1. *Existe un monomorfismo* $\varphi : \mathsf{A} \to \widehat{\mathsf{G}}$ *de manera que* $\widehat{\mathsf{G}}$ *es una extensión de* H *por* A*, donde* $\mathsf{H} := \widehat{\mathsf{G}}/\mathrm{Im}(\varphi)$.
2. *Existe un epimorfismo* $\psi : \widehat{\mathsf{G}} \to \mathsf{G}$ *de manera que* $\widehat{\mathsf{G}}$ *es una extensión de* G *por* $\mathrm{Ker}(\psi)$.
3. *El siguiente diagrama es una sucesión exacta corta de grupos:*

$$\{e\} \xrightarrow{\iota^{\mathsf{A}}_{\{e\}}} \mathsf{A} \xrightarrow{\varphi} \widehat{\mathsf{G}} \xrightarrow{\psi} \mathsf{G} \xrightarrow{\widehat{e}_{\mathsf{G}}} \{e\}, \tag{2.19}$$

Demostración. Supongamos que $\widehat{\mathsf{G}}$ una extensión de G por A, y denotemos por f_1 y f_2 los isomorfismos respectivos que definen (2.18), es decir:

$$f_1 : \mathsf{A} \to \mathsf{N}, \qquad f_2 : \widehat{\mathsf{G}}/\mathsf{N} \to \mathsf{G}.$$

1. Sea φ la composición de $\iota^{\widehat{\mathsf{G}}}_{\mathsf{N}}$ con f_1, es decir, $\iota^{\widehat{\mathsf{G}}}_{\mathsf{N}} \circ f_1 =: \varphi : \mathsf{A} \to \widehat{\mathsf{G}}$, claramente φ es un monomorfismo, pues f_1 y $\iota^{\widehat{\mathsf{G}}}_{\mathsf{N}}$ lo són. Por primer teorema del isomorfismo tenemos que $\mathsf{A}/\mathrm{Ker}(\varphi) \simeq \mathrm{Im}(\varphi)$, luego, como φ es un monomorfismo, se tiene $\mathsf{A} \simeq \mathrm{Im}(\varphi)$, resumiendo:

$$\widehat{\mathsf{G}} \supseteq \mathrm{Im}(\varphi) \simeq \mathsf{A}/\mathrm{Ker}(\varphi) \simeq \mathsf{A} \simeq \mathsf{N} \trianglelefteq \widehat{\mathsf{G}},$$

por lo tanto $\widehat{\mathsf{G}}$ es una extensión de H por A, ya que

$$\mathsf{A} \simeq \mathrm{Im}(\varphi) \trianglelefteq \widehat{\mathsf{G}}, \qquad \widehat{\mathsf{G}}/\mathrm{Im}(\varphi) = \mathsf{H}. \tag{2.20}$$

2. Sea ψ la composición de f_2 con la proyección canónica π de $\widehat{\mathsf{G}}$ sobre $\widehat{\mathsf{G}}/\mathsf{N}$, es decir, $f_2 \circ \pi =: \psi : \widehat{\mathsf{G}} \to \mathsf{G}$, claramente ψ es un epimorfismo, pues f_2 y π lo són. Por primer teorema del isomorfismo tenemos que

$\widehat{G}/\mathrm{Ker}(\psi) \simeq \mathrm{Im}(\psi)$, además, como φ es un epimorfismo $\mathrm{Im}(\varphi) = G$, resumiendo:

$$\widehat{G}/\mathrm{Ker}(\psi) \simeq \mathrm{Im}(\psi) = G \simeq \widehat{G}/N, \qquad N \trianglelefteq \widehat{G}$$

por lo tanto $\widehat{G}$ es una extensión de G por $\mathrm{Ker}(\varphi)$, ya que

$$\mathrm{Ker}(\psi) \simeq N, \qquad \widehat{G}/N \simeq G. \tag{2.21}$$

3. Como φ es un monomorfismo y ψ un epimorfismo, es claro que

$$\mathrm{Im}(\iota^{A}_{\{e\}}) = \{e\} = \mathrm{Ker}(\varphi), \qquad \mathrm{Im}(\psi) = G = \mathrm{Ker}(\widehat{e}_G),$$

además,

$$\mathrm{Im}(\varphi) = N = \mathrm{Ker}(\psi).$$

Por lo tanto, el diagrama en (2.19) es una sucesión exacta corta de grupos.

$\square$

4.1. Presentación de Extensiones.

En lo que sigue utilizamos las notaciones empleadas en el Lema 2.7. Consideremos además, la sucesión exacta corta de grupos en (2.19).

Sea $\widehat{G}$ una extensión de G por A, con las siguientes presentaciones:

$$G := \Big\langle\ X_G \quad ; \quad R_G\ \Big\rangle, \qquad A := \Big\langle\ X_A \quad ; \quad R_A\ \Big\rangle.$$

Para todo $y \in X_A$ se define $\varphi_A : X_A \to \widehat{G}$, tal que $\varphi_A(y) := \varphi(y)$, luego, para toda palabra $a = y_1 \cdots y_n$ en X_A, se define el elemento $\widetilde{a}$ de la siguiente manera:

$$\widetilde{a} := \varphi_A(y_1) \cdots \varphi_A(y_n), \quad \left(y_i \in X_A \cup X_A^{-1},\ i = 1, \ldots, n\right).$$

Esto nos permite definir los siguientes conjuntos:

$$\widetilde{X}_A := \Big\{\ \widetilde{y} \in \widehat{G} \quad ; \quad y \in X_A\ \Big\}, \qquad \widetilde{R}_A := \Big\{\ \widetilde{s} \in L(\widetilde{X}_A) \quad ; \quad s \in R_A \subset L(X_A)\ \Big\},$$

nótese que para todo $y \in X_A$, $\widetilde{y} = \varphi_A(y) = \varphi(y)$.

Como ψ es un epimorfismo, para todo $x \in X_G$ existe $\widetilde{x} \in \widehat{G}$ tal que $\psi(\widetilde{x}) = x$, luego, para toda palabra $v = x_1 \cdots x_m$ en X_G se define el elemento $\widetilde{v}$ como sigue:

$$\widetilde{v} := \widetilde{x}_1 \cdots \widetilde{x}_m, \qquad \left(x_j \in X_G \cup X_G^{-1}, j = 1, 2, \ldots, m\right),$$

es decir $v = \psi(\widetilde{x}_1) \cdots \psi(\widetilde{x}_m)$. Esto nos permite definir el siguente conjunto:

$$\widetilde{X}_G := \left\{ \ \widetilde{x} \in \widehat{G} \quad ; \quad x \in X_G \ \right\}.$$

Ahora, para todo relación $r = x_1 \cdots x_s$ en R_G se define el elemento $\widetilde{r}$ como sigue:

$$\widetilde{r} := \widetilde{x}_1 \cdots \widetilde{x}_s, \quad \left(x_i \in X_G \cup X_G^{-1},\ i = 1, 2, \ldots, s\right), \tag{2.22}$$

además, que para todo $r \in R_G$, el elemento $\widetilde{r} \in \text{Ker}(\psi)$, pues

$$\psi(\widetilde{r}) = \psi(\widetilde{x}_1 \cdots \widetilde{x}_s) = \psi(\widetilde{x}_1) \cdots \psi(\widetilde{x}_s) = x_1 \cdots x_s = r = e, \quad (\text{en } G)$$

por lo tanto $\widetilde{r} \in \text{Im}(\varphi)$ $(= \text{Ker}(\psi))$. Es importante destacar también, que $\text{Im}(\varphi)$ está generado por $\widetilde{X}_A$, en efecto, si $\widehat{g} \in \text{Im}(\varphi)$, existe $a = y_1 \cdots y_n \in A$ tal que

$$\widehat{g} = \varphi(a) = \varphi(y_1 \cdots y_n) = \varphi(y_1) \cdots \varphi(y_n) = \widetilde{y}_1 \cdots \widetilde{y}_n, \qquad (y_i \in X_A \cup X_A^{-1}).$$

Por lo tanto, el elemento $\widetilde{r}$ en (2.22) también puede ser escrito como una palabra en $\widetilde{X}_A$, denotado v_r, es decir

$$\widetilde{r} = \widetilde{y}_1 \cdots \widetilde{y}_t =: v_r, \quad (y_i \in X_A,\ i = 1, 2, \ldots, t). \tag{2.23}$$

Esto nos permite definir el siguiente conjunto:

$$\widetilde{R}_G := \left\{ \ \widetilde{r} v_r^{-1} \in L(\widetilde{X}_G) L(\widetilde{X}_A) \quad ; \quad r \in R_G \subset L(X_G) \ \right\}.$$

Finalmente, como $\text{Im}(\varphi) \trianglelefteq \widehat{G}$, entonces para todo $\widetilde{x} \in \widetilde{X}_G \subset \widehat{G}$ y todo $\widetilde{y} \in \widetilde{X}_A \subset \text{Im}(\varphi)$, el conjugado $\widetilde{x}\widetilde{y}\widetilde{x}^{-1} \in \text{Im}(\varphi)$, osea es una palabra, denotada $w_{x,y}$, en $\widetilde{X}_A$, es decir

$$\widetilde{x}\widetilde{y}\widetilde{x}^{-1} = \widetilde{y}_1 \cdots \widetilde{y}_k =: w_{x,y}, \quad \left(y_i \in X_A \cup X_A^{-1},\ i = 1, 2, \ldots, k\right),$$

lo que nos permite definir el siguiente conjunto:

$$R := \left\{ \ \widetilde{x}\widetilde{y}\widetilde{x}^{-1} w_{x,y}^{-1} \quad ; \quad y \in X_A,\ x \in X_G \ \right\}.$$

Con las definiciones anteriores estamos preparados para enunciar la Proposición 2.6 que nos muestra como encontrar una presentación de alguna extensión $\widehat{G}$ de un grupo G. En particular, determinaremos una presentación de un grupo que es un producto semi-directo.

Proposición 2.6. *Sea* $\widehat{G}$ *una extensión de* G *por* A. *Entonces* $\widehat{G}$ *tiene la siguiente presentación:*

$$\left\langle \ \widetilde{X}_G, \widetilde{X}_A \quad ; \quad \widetilde{R}_G, \widetilde{R}_A, R \ \right\rangle. \tag{2.24}$$

Demostración. Sea D el grupo en (2.24). Como $\widetilde{X}_G, \widetilde{X}_A \subset \widehat{G}$, para todo $x \in X_G$ y todo $y \in X_A$ se define $\mu : \widetilde{X}_G \cup \widetilde{X}_A \to \widehat{G}$ tal que

$$\mu(\widetilde{x}) := \widetilde{x}, \quad (\widetilde{x} \in \widetilde{X}_G), \qquad \mu(\widetilde{y}) := \widetilde{y}, \quad (\widetilde{y} \in \widetilde{X}_A).$$

Consideremos las siguientes relaciones:

$$\widetilde{r}v_r^{-1} \in \widetilde{R}_G, \qquad \widetilde{y}_1 \cdots \widetilde{y}_n \in \widetilde{R}_A, \qquad \widetilde{x}\widetilde{y}\widetilde{x}^{-1}w_{x,y}^{-1} \in R,$$

entonces,

$$\mu(\widetilde{y}_1) \cdots \mu(\widetilde{y}_n) = \widetilde{y}_1 \cdots \widetilde{y}_n = \varphi(y_1) \cdots \varphi(y_n) = \varphi(y_1 \cdots y_n) = \varphi(e) = e,$$

$$\mu(\widetilde{x}_1) \cdots \mu(\widetilde{x}_s)\mu(\widetilde{y_k})^{-1} \cdots \mu(\widetilde{y}_1)^{-1} = \widetilde{x}_1 \cdots \widetilde{x}_s v_x^{-1} = v_x v_x^{-1} = e,$$

$$\mu(\widetilde{x})\mu(\widetilde{y})\mu(\widetilde{x})^{-1}\mu(\widetilde{y}_k)^{-1} \cdots \mu(\widetilde{y}_1)^{-1} = \widetilde{x}\widetilde{y}\widetilde{x}^{-1}w_{x,y}^{-1} = w_{x,y}w_{x,y}^{-1} = e.$$

Por Proposición 2.2, existe un homomorfismo $\widetilde{\mu} : D \to \widehat{G}$ que extiende a μ.

Sea $T := \langle \widetilde{X}_A \rangle \leqslant \mathrm{Im}(\varphi)$. La restricción de $\widetilde{\mu}$ a T induce un homomorfismo $\mu_1 : T \to \mathrm{Im}(\varphi) \simeq A$ de modo que $\mu_1(\widetilde{y}) := y$, $(y \in X_A)$, claramente μ_1 es un isomorfismo ya que todas las relaciones R_A de A se encuentran en T, reemplazando cada $y \in X_A$ por $\widetilde{y} \in \widetilde{X}_A$.

Por la presencia del conjunto de relaciones R en D sabemos que $T \trianglelefteq D$, además como $\widetilde{\mu}(T) \leqslant \mathrm{Im}(\varphi)$, luego, $\widetilde{\mu}$ induce un homomorfismo $\mu_2 : D/T \to \widetilde{G}/\mathrm{Im}(\varphi) \simeq G$ de modo que $\mu_2(T\widetilde{x}) := x$, claramente μ_2 es un isomorfismo, ya que las relaciones R_G de G se encuentran en D/T, reemplazando cada x por $T\widetilde{x}$.

Tenemos ahora el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\{e\} \arrow[r, "\iota_T^T"] \arrow[d, "\widehat{e}_A"] & T \arrow[r, "\iota_T^D"] \arrow[d, "\mu_1"] & D \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\widetilde{\mu}"] & D\backslash T \arrow[r, "\widehat{e}_{D\backslash T}"] \arrow[d, "\mu_2"] & \{e\} \arrow[d, "\widehat{e}_G"] \\
\{e\} \arrow[r, "\iota_A^A"'] & A \arrow[r, "\varphi"'] & \widehat{G} \arrow[r, "\psi"'] & G \arrow[r, "e"'] & \{e\}
\end{tikzcd}$$

Por Lema 1.4, $\widetilde{\mu}$ es un isomorfismo, es decir $\widehat{G} \simeq D$. Por lo tanto $\widehat{G}$ es presentado como en (2.24). □

4.2. Producto Semi-Directo.

Corolario 2.4. *Sean* G *y* A *grupos presentados de la siguiente manera:*

$$G = \Big\langle\ X_G \quad ; \quad R_G\ \Big\rangle, A = \Big\langle\ X_A \quad ; \quad R_A\ \Big\rangle,$$

y sea $\alpha : G \to \mathrm{Aut}(A)$ *un homomorfismo. Denotemos* $(\alpha(x))(y) := v_{x,y} \in L(X_A)$ $(x \in X_G,\ y \in X_A)$*. Entonces el producto semi-directo* $A \rtimes_\alpha G$ *tiene la siguiente presentación*

$$A \rtimes_\alpha G = \Big\langle\ X_G, X_A \quad ; \quad R_G, R_A, R_{G,A}\ \Big\rangle, \tag{2.25}$$

donde $R_{G,A} := \Big\{\ xyx^{-1}v_{x,y}^{-1} \quad ; \quad x \in X_G,\ y \in X_A\ \Big\}$.

Demostración. Sea $\widehat{G} := A \rtimes_\alpha G$, luego:

$$A \trianglelefteq \widehat{G}, \quad \widehat{G} = A \cdot G, \quad A \cap G = \{e\}.$$

Sea $A' := \Big\{\ (a, e) \quad ; \quad a \in A\ \Big\} \simeq A \trianglelefteq \widehat{G}$, luego $\widehat{G}/A' \simeq \widehat{G}/A \simeq (A \cdot G)/A \simeq G'$, donde $G' := \Big\{\ (e, g) \quad ; \quad g \in G\ \Big\} \simeq G$. Así obtenemos

$$\widehat{G} \trianglerighteq A' \simeq A, \quad \widehat{G}/A' \simeq G' \simeq G.$$

Por lo tanto $\widehat{G}$ es una extensión de G por A. Por Proposición 2.6, $\widehat{G}$ tiene la siguiente presentación

$$\Big\langle\ \widetilde{X}_G, \widetilde{X}_A \quad ; \quad \widetilde{R}_G, \widetilde{R}_A, R\ \Big\rangle.$$

Con las siguientes biyecciones:

$$X_A \to \widetilde{X}_A, \quad \text{tal que} \quad y \mapsto (y, e) =: \widetilde{y}, \tag{2.26}$$

$$X_G \to \widetilde{X}_G, \quad \text{tal que} \quad x \mapsto (e, x) =: \widetilde{x}, \tag{2.27}$$

donde $\widetilde{X}_A := \left\{ (y, e) \;\; ; \;\; y \in X_A \right\}$ y $\widetilde{X}_G := \left\{ (e, x) \;\; ; \;\; y \in X_A \right\}$. Se sigue de (2.26) que la asignación de $R_A \to \widetilde{R}_A$ que envía $y_1 \cdots y_m \mapsto \widetilde{y}_1 \cdots \widetilde{y}_m$ ($y_1 \cdots y_m \in R_A$, $y_i \in X_A$, $i = 1, \ldots, m$) es una biyección, ya que

$$\widetilde{s} = \widetilde{y}_1 \cdots \widetilde{y}_m = (y_1, e) \cdots (y_m, e) = (y_1 \alpha(e)(y_2) \cdots \alpha(e)(y_m), e) = (s, e).$$

También la asignación de $R_G \to \widetilde{R}_G$ que envía $r \mapsto \widetilde{r} v_r^{-1}$, $r \in R_G$ es una biyección, pues si $\widetilde{r} v_r^{-1} = (e, x_1) \cdots (e, x_n) v_r^{-1} = (e, x_1 \cdots x_n) v_r^{-1} \in \widetilde{R}_G$ existe $r := x_1 \cdots x_n \in R_G$ tal que $r \mapsto \widetilde{r} v_r^{-1}$. Además, si $\widetilde{r}_1 v_{r_1}^{-1} = \widetilde{r}_2 v_{r_2}^{-1}$ entonces $r_1 \mapsto \widetilde{r}_2 v_{r_2}^{-1} = (e, r_2) v_{r_2}^{-1}$ luego por (2.27), $r_1 = r_2$. Es claro que $w_{xy} \leftrightarrow v_{xy}$ es una correspondencia biyectiva, por lo tanto la asignación de $R \to R_{G,A}$ tal que $xyx^{-1} w_{xy}^{-1} \mapsto xyx^{-1} v_{xy}^{-1}$ es una biyección. Luego

$$\widehat{G} = \left\langle \; \widetilde{X}_G, \widetilde{X}_A \;\; ; \;\; \widetilde{R}_G, \widetilde{R}_A, R \; \right\rangle \simeq \left\langle \; X_G, X_A \;\; ; \;\; R_G, R_A, R_{G,A} \; \right\rangle.$$

Por lo tanto $A \rtimes_\alpha G$ es presentado como en (2.25). □

Corolario 2.5. *Sea $\widehat{G}$ una extensión de G por A. Si G y A son finitamente presentados, entonces $\widehat{G}$ también lo és.*

Demostración. Si $G := \left\langle \; X_G \;\; ; \;\; R_G \; \right\rangle$ y $A := \left\langle \; X_A \;\; ; \;\; R_A \; \right\rangle$, por Proposición 2.6, la extensión tiene la siguiente presentación

$$\widehat{G} = \left\langle \; \widetilde{X}_G, \widetilde{X}_A \;\; ; \;\; \widetilde{R}_G, \widetilde{R}_A, R \; \right\rangle,$$

y supongamos $|X_G|, |X_A|, |R_G|, |R_A| < \infty$, entonces

$$\left|\widetilde{X}_G\right| = |X_G| < \infty, \quad \left|\widetilde{X}_A\right| = |X_A| < \infty,$$

y

$$\left|\widetilde{R}_G\right| = |R_A| < \infty, \quad \left|\widetilde{R}_A\right| = |R_A| < \infty, \quad |R| = |X_G||X_A|.$$

Por lo tanto $\widehat{G}$ es finitamente presentado. □

Ejemplo 2.9. Como se dijo en el Ejemplo 1.3, el grupo Diédrico D_n de simetrías de un n-ágono regular es producto semi-directo de los siguientes grupos cíclicos:

$$C_n = \left\langle\ a \ ; \ a^n\ \right\rangle, \quad \text{con} \quad C_2 = \left\langle\ b \ ; \ b^2\ \right\rangle.$$

Tenemos:

$$\begin{aligned}(e,b)(a,e)(e,b)^{-1} &= (\varphi_b(a),b)(\varphi_b^{-1}(e),b^{-1})\\ &= (a^{-1},b)(e,b^{-1})\\ &= (a^{-1}\varphi_b(e),bb^{-1})\\ &= (a^{-1},e).\end{aligned}$$

Luego,

$$bab = a^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad abab = aa^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad (ab)^2 = e,$$

por lo tanto $D_n \simeq \left\langle\ a, b \ ; \ a^n, b^2, (ab)^2\ \right\rangle$.

Corolario 2.6. *Sean* G, H *grupos con* $H \leqslant G$ *tal que* $[G : H] < \infty$*. Si* H *es finitamente presentado, entonces* G *también lo es.*

Demostración. Sea $G/H := \left\{\ Hu_1, Hu_2, \ldots, Hu_n\ \right\}$ $(n < \infty)$, entonces

$$\left|\left\{\ u_1Hu_1^{-1}, u_2Hu_2^{-1} \ldots, u_nHu_n^{-1}\ \right\}\right| < \infty,$$

y además

$$\left[G : u_iHu_i^{-1}\right] = |G|/|u_iHu_i^{-1}| = |G|/|H| = [G : H] < \infty, \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Sea $N := \bigcap_{i=1}^n \left(u_iHu_i^{-1}\right)$, si $n \in N$, entonces $n \in uHu^{-1}$ para todo $u \in G$, si $u \in H \subseteq G$ entonces $n \in uHu^{-1} = H$, así $N \leqslant H$, además $|N| = |\bigcap_{i=1}^n \left(u_iHu_i^{-1}\right)| \leqslant |u_iHu_i^{-1}| = |H| = |G|/[G : H] < \infty$, por lo tanto $|H|/|N| = [H, N] < \infty$. Como H es finitamente presentado, entonces N también los és, por Corolario 2.3. Además por Proposición 2.1 G/N es finitamente presentado. Por otra parte $\widehat{G} := G$ es una extensión de $K := G/N$ por $L := N$, ya que

$$N \simeq L, \quad \widehat{G}/N \simeq K,$$

luego por Corolarios 2.4 y 2.5, $\widehat{G} = G$ es finitamente presentado. $\square$

Capítulo 3

Presentaciones de Grupos

1. Grupo Simétrico (S_n)

En lo que sigue S_n denota el grupo simétrico de n símbolos, es decir S_n es el conjunto Biy$\{1, 2, \ldots, n\}$ con la operación compuesta de funciones.

1.1. Generadores.

Definición 3.1. *Sea* $n \geqslant 2$. *Para todo* $i = 1, 2, \ldots, n-1$ *se define* $s_i :=$ $(i\; i+1)$ *la transposición que cambia la posición* i *con* $i+1$. *Anotaremos el conjunto de transposiciones* s_i *por* X_n. *De igual modo definimos* $z_i := (1\; i)$ *la transposición que cambia la posición* 1 *con* i *para todo* $i = 1, 2, \ldots n$. *El conjunto de transposiciones* z_i *lo anotaremos por* Z_n.

Nótese que $s_i^{-1} = s_i$, $z_j^{-1} = z_j$ y que $s_1 = z_2$.

Proposición 3.1. *El conjunto de transposiciones* X_n *genera a* S_n $(n \geqslant 2)$.

Demostración. Sabemos que todo $s \in S_n$ es un producto de ciclos, es decir:

$$s = (x_1\; x_2\; \cdots\; x_q) = (x_1\; x_2)(x_2\; x_3)\cdots(x_{q-1}\; x_q).$$

Por lo tanto, el conjunto $\widetilde{X}_n$ es un conjunto generador de S_n, donde

$$\widetilde{X}_n := \left\{\; (r\; t) \quad ; \quad 1 \leqslant r, t \leqslant n \;\right\}$$

Es claro que para todo $r, t \in \{1, 2, \ldots, n\}$ se tiene lo siguiente

$$(r\; t) = s_r s_{r+1} s_{r+2} \cdots s_{t-3} s_{t-2} s_{t-1} s_{t-2} s_{t-3} \cdots s_{r+2} s_{r+1} s_r.$$

Luego, se sigue que X_n es un conjunto generador de S_n. $\square$

Proposición 3.2. *El conjunto de transposiciones* Z_n *genera a* S_n $(n \geqslant 2)$.

Demostración. Ocuparemos inducción sobre n. Si $n = 2$ el caso es trivial. Supongamos válida la proposición para $n - 1 \geqslant 2$. Luego, todo $z' \in S_{n-1}$ se escribe como $z_{i_1} z_{i_2} \cdots z_{i_m}$ con $i_j \in \{2, 3, \ldots, n-1\}$, para todo $j = 1, 2, \ldots, m$. Sea $s \in S_n$ tal que $s(n) = m$ para algún $m \in \{1, \ldots, n\}$, y sea $z := z_n z_m s$, es claro que $z(n) = n$, por lo tanto $z \in S_{n-1}$. Entonces $z = z_{i_1} z_{i_2} \cdots z_{i_t}$ con $i_j \in \{2, 3, \ldots, n-1\}$, para todo $j = 1, 2, \ldots, t$, así

$$z_{i_1} z_{i_2} \cdots z_{i_t} = z_n z_m s \quad \Leftrightarrow \quad s = z_m z_n z_{i_1} z_{i_2} \cdots z_{i_t},$$

Por lo tanto Z_n genera a S_n. □

Proposición 3.3. *El conjunto formado por* $s_1 := (1\ 2)$ *y* $s := (1\ 2\ \cdots\ n)$ *genera a* S_n*, para todo* $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$*.*

Demostración. Basta probar que s_i $(i > 1)$ se escribe como un producto de los elementos s, s_1. Demostraremos que para todo $i > 1$, se tiene $s_{i+1} = s^i s_1 s^{-i}$. Usaremos inducción sobre i.

Para $i = 1$ es claro que

$$s_2 = (2\,3) = (1\ \cdots\ n)(1\,2)(n\ \cdots\ 1) = (1\ \cdots\ n)(1\,2)(1\ \cdots\ n)^{-1} = s s_1 s^{-1}.$$

Supongamos que $s_i = s^{i-1} s_1 s^{-i+1}$. Conjugando por s obtenemos

$$\begin{aligned} s_{i+1} &= (i+1\ i+2), \\ &= (1\ \cdots\ n)(i\ i+1)(n\ \cdots\ 1), \\ &= s s_i s^{-1}, \\ &= s s^{i-1} s_1 s^{-i+1} s^{-1}, \\ &= s^i s_1 s^{-i}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\{s, s_1\}$ genera a S_n. □

1.2. Presentación de Coxeter.

En esta subsección estudiaremos una presentación de S_n que tenga como generadores el conjunto de transposiciones X_n las cuales particularmenre son reflexiones, ésta será llamada presentación de Coxeter de S_n.

Definición 3.2. *Sean* $Y_n := \left\{ \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{n-1} \right\}$ *un conjunto de símbolos y* R_n^1, R_n^2, R_n^2 *definidos como sigue:*

$$\begin{aligned} R_n^1 &:= \left\{ \tau_i^2 \quad ; \quad 1 \leqslant i \leqslant n-1 \right\}, \\ R_n^2 &:= \left\{ (\tau_i \tau_{i+1})^3 \quad ; \quad 1 \leqslant i \leqslant n-2 \right\}, \\ R_n^3 &:= \left\{ [\tau_i, \tau_j] \quad ; \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n-1, \; |i-j| \geqslant 2 \right\}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

donde como es usual $[\tau_i, \tau_j]$ *denota el conjunto conmutador de* τ_i *con* τ_j.

Sean G_n *y* H *grupos, dados por las siguientes presentaciones:*

$$G_n = \left\langle \; Y_n \quad ; \quad R_n \; \right\rangle \quad y \quad H = \left\langle \; Y_n \backslash \{\tau_{n-1}\} \; \right\rangle \leqslant G_n, \tag{3.2}$$

donde $R_n := R_n^1 \cup R_n^2 \cup R_n^3$. *Además, se define la sucesión* $\{\delta_i\}_{i=0}^{n-1}$ *mediante:*

$$\delta_0 := e, \qquad \delta_i := \tau_{n-1}\tau_{n-2} \cdots \tau_{n-i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{3.3}$$

y definimos el subconjunto $A := \left\{ \; h\delta_i \quad ; \quad h \in H, \; i = 0, 1, \ldots, n-1 \; \right\} \subset G_n$.

Lema 3.1. $A\tau_j^{\pm 1} \subseteq A$, *para todo* $j = 1, 2, \ldots, n-1$.

Demostración. Consideremos el producto $(h\delta_i)\tau_j$ $(h\delta_i \in A, \; \tau_j \in Y_n)$. Tenemos seis casos:

Caso 1: Si $i = 0$ y $j < n-1$, entonces $h\delta_i\tau_j = h\delta_0\tau_j = he_{G_n}\tau_j = h\tau_j \in H$ ya que $j < n-1$, pero $H = He = H\delta_0 \subset A$, luego $h\delta_i\tau_j \in A$.

Caso 2: Si $i = 0$ y $j = n-1$, entonces $h\delta_i\tau_j = h\tau_{n-1} = h\delta_1 \in H\delta_1 \subset A$.

Caso 3: Si $i > 0$ y $j > n-i$, entonces

$$\begin{aligned} h\delta_i\tau_j &= h(\tau_{n-1} \cdots \tau_{j+1}\tau_j\tau_{j-1}\tau_{j-1} \cdots \tau_{n-i})\tau_j, \\ &= h\tau_{n-1} \cdots \tau_{j+1}(\tau_j\tau_{j-1}\tau_j)\tau_{j-1} \cdots \tau_{n-i}, \quad \text{por } R_n^3, \\ &= h\tau_{n-1} \cdots \tau_{j+1}(\tau_{j-1}\tau_j\tau_{j-1})\tau_{j-1} \cdots \tau_{n-i}, \quad \text{por } R_n^2 \text{ y } R_n^1, \\ &= (h\tau_{j-1})\tau_{n-1} \cdots \tau_{n-i}, \quad \text{por } R_n^3, \\ &= (h\tau_{j-1})\delta_i \in H\delta_i \subseteq A. \end{aligned}$$

Caso 4: Si $i > 0$ y $j = n - i$, entonces

$$\begin{aligned} h\delta_i\tau_j &= h\tau_{n-1}\cdots\tau_{n-i}^2, \\ &= h\tau_{n-1}\cdots\tau_{n-i+1}, \quad \text{por } R_n^1, \\ &= h\delta_{i-1} \in H\delta_{i-1} \subseteq A. \end{aligned}$$

Caso 5: Si $i > 0$ y $j = n - i - 1$, entonces

$$h\delta_i\tau_j = h\tau_{n-1}\cdots\tau_{n-i}\tau_{n-(i+1)} = h\delta_{i+1} \in H\delta_{i+1} \subseteq A.$$

Caso 6: Si $i > 0$ y $j < n - i - 1$, entonces por relaciones en R_n^3 tenemos:

$$h\delta_i\tau_j = h\tau_{n-1}\cdots\tau_{n-i+1}\tau_{n-i}\tau_j = h\tau_j\tau_{n-1}\cdots\tau_{n-i} = h\tau_j\delta_i \in H\delta_i \subseteq A.$$

Esto prueba que $h\delta_i\tau_j \in A$ para todo $h \in H$, todo $i = 0, 1, \ldots, n-1$ y todo $j = 1, 2, \ldots, n-1$, es decir, $A\tau_j \subseteq A$, luego por relaciones en R_n^1 se tiene lo siguiente:

$$A\tau_j^{-1} = A\tau_j \subseteq A \quad (j = 1, 2, \ldots, n-1), \tag{3.4}$$

lo cual concluye la demostración. □

Corolario 3.1. $G_n = A$.

Demostración. Por definición, es claro que $A \subseteq G_n$. Dado $\tau \in G_n$, probaremos por inducción sobre $\ell(\tau)$ que $G_n \subseteq A$.

Si $\ell(\tau) = 1$ entonces $\tau \in Y_n \dot{\cup} Y_n^{-1}$. Por (3.4), $A\tau \subseteq A$.

Supongamos $\ell(\tau) = m > 1$ con $\tau := \tau_{i_1}\cdots\tau_{i_m}$ ($\tau_{i_j} \in Y_n \dot{\cup} Y_n^{-1}$, $j = 1, \ldots, m$), y $A(\tau_{i_1}\cdots\tau_{i_{m-1}}) \subseteq A$, luego, para todo $t \in A(\tau_{i_1}\cdots\tau_{i_{m-1}})$, $t := h\delta_i$ para algún $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Pero $\tau_{i_m} \in Y_n \dot{\cup} Y_n^{-1}$, entonces por Lema 3.1, $t\tau_{i_m} = h\delta_i\tau_{i_m} \in A$, es decir $A\tau \subseteq A$ para todo $\tau \in G_n \backslash (Y_n \dot{\cup} Y_n^{-1})$. Como $e \in H$, $e\delta_0 = e \in A$, entonces $\tau = e\tau \in A\tau \subseteq A$ para todo $\tau \in G_n$. Así, $G_n \subseteq A$, por lo tanto $G_n = A$. □

Notese que $A = H \cdot \left\{ \delta_i \;\;;\;\; 1 \leqslant i \leqslant n-1 \right\}$ por definición, es decir el grupo G_n es producto de elementos en H y en la sucesión dada por (3.3). Esto prueba que $|G_n| = n|H|$.

Proposición 3.4. S_n *tiene la siguiente presentación* ($n \geqslant 2$).

$$\left\langle \; s_1, s_2, \ldots, s_{n-1} \quad ; \quad (s_i)^2,\ (s_i s_{i+1})^3,\ [s_i, s_j],\ |i-j| \geqslant 2 \; \right\rangle \tag{3.5}$$

Esta presentación de S_n es conocida como la Presentación de Coxeter de S_n.

Demostración. Sea $e = (1)$. Por Proposición 3.1, X_n genera a S_n, además, es claro que en X_n son válidas las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} &s_i^2 = e, \quad (1 \leqslant i \leqslant n-1),\\ &(s_i s_{i+1})^3 = e, \quad (1 \leqslant i \leqslant n-2),\\ &s_i s_j = s_j s_i, \quad (1 \leqslant i, j \leqslant n-1,\ |i-j| \geqslant 2). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Sea $\varphi : Y_n \to S_n$, tal que $\varphi(\tau_i) := s_i$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Por (3.1), (3.6) y Proposición 2.2, existe un homomorfismo $\widetilde{\varphi} : G_n \to S_n$. Es claro que $\widetilde{\varphi}$ es un epimorfismo, pues, dado $s \in S_n$, existe $t \in \mathbb{N}$ de modo que $s := s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_t}$ con $i_j \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, para todo $j = 1, 2, \ldots, t$. Luego, existe $\tau_{i_1}\tau_{i_2}\cdots\tau_{i_t} \in G_n$ tal que

$$\widetilde{\varphi}(\tau_{i_1}\tau_{i_2}\cdots\tau_{i_t}) = \varphi(\tau_{i_1})\varphi(\tau_{i_2})\cdots\varphi(\tau_{i_t}) = s_{i_1}s_{i_2}\cdots s_{i_t} = s.$$

Como $\widetilde{\varphi}$ es un epimorfismo, $|G_n| \geqslant |S_n| = n!$. Ahora probaremos por inducción sobre n que $|G_n| \leqslant n!$.

Si $n = 1$, entonces $G_n = \{e\}$ de orden $1 \leqslant 1!$.

Supongamos que $n \geqslant 2$ y $|G_{n-1}| \leqslant (n-1)!$. Sea $\psi : Y_{n-1} \to G_n$ tal que $\psi(\tau_i) = \tau_i$, por Proposición 2.2, existe un homomorfismo $\widetilde{\psi} : G_{n-1} \to G_n$ que extiende a ψ, es claro además que $\mathrm{Im}(\psi) = H$. Luego, por Corolario 3.1 se tiene:

$$|G_n| = |H|n = |G_{n-1}|n \leqslant (n-1)!n = n!,$$

así $\widetilde{\varphi}$ es un isomorfismo.

Tomando $\tau_i := s_i$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n-1$ obtenemos la presentación dada en (3.5). $\square$

Corolario 3.2. *Sea* $s := s_1 \cdots s_{n-1}$ ($n \in \mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$), *entonces* $s^n = e$.

DEMOSTRACIÓN. Para $n = 2$, entonces $s = s_1$, luego $s^2 = s_1^2 = e$. Supongamos válido el Corolario para $n-1$, esto es $s^{n-1} = (s_1 \cdots s_{n-2})^{n-1} = e$.

Ocupando las relaciones en (3.5) se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
s^n &= (s_1 \cdots s_{n-1})^n, \\
&= (s_1 \cdots s_{n-1})(s_1 \cdots s_{n-1})(s_1 \cdots s_{n-1})^{n-2}, \\
&= (s_1 \cdots s_{n-2})s_{n-1}(s_1 \cdots s_{n-3})s_{n-2}s_{n-1}(s_1 \cdots s_{n-1})^{n-2}, \\
&= (s_1 \cdots s_{n-2})(s_1 \cdots s_{n-3})(s_{n-1}s_{n-2}s_{n-1})(s_1 \cdots s_{n-1})^{n-2}, \\
&= (s_1 \cdots s_{n-2})(s_1 \cdots s_{n-3}s_{n-2})(s_{n-1}s_{n-2})(s_1 \cdots s_{n-1})^{n-2}, \\
&= (s_1 \cdots s_{n-2})^2(s_{n-1}s_{n-2})(s_1 \cdots s_{n-1})^{n-2}, \\
&= (s_1 \cdots s_{n-2})^2(s_{n-1}s_{n-2})(s_1 \cdots s_{n-1})(s_1 \cdots s_{n-1})^{n-3}, \\
&= (s_1 \cdots s_{n-2})^2(s_{n-1}s_{n-2})(s_1 \cdots s_{n-4})s_{n-3}s_{n-2}s_{n-1}(s_1 \cdots s_{n-1})^{n-3}, \\
&= (s_1 \cdots s_{n-2})^2(s_1 \cdots s_{n-4})s_{n-1}(s_{n-2}s_{n-3}s_{n-2})s_{n-1}(s_1 \cdots s_{n-1})^{n-3}, \\
&= (s_1 \cdots s_{n-2})^2(s_1 \cdots s_{n-4})(s_{n-1}s_{n-3})s_{n-2}(s_{n-3}s_{n-1})(s_1 \cdots s_{n-1})^{n-3}, \\
&= (s_1 \cdots s_{n-2})^2(s_1 \cdots s_{n-4})s_{n-3}(s_{n-1}s_{n-2}s_{n-1})s_{n-3}(s_1 \cdots s_{n-1})^{n-3}, \\
&= (s_1 \cdots s_{n-2})^2(s_1 \cdots s_{n-4}s_{n-3}s_{n-2})s_{n-1}s_{n-2}s_{n-3}(s_1 \cdots s_{n-1})^{n-3}, \\
&= (s_1 \cdots s_{n-2})^3(s_{n-1}s_{n-2}s_{n-3})(s_1 \cdots s_{n-1})^{n-3}, \\
&\vdots \\
&= (s_1 \cdots s_{n-2})^i(s_{n-1} \cdots s_{n-i})(s_1 \cdots s_{n-1})^{n-i}, \\
&\vdots \\
&= (s_1 \cdots s_{n-2})^{n-1}(s_{n-1} \cdots s_{n-n-1})(s_1 \cdots s_{n-1})^{n-n-1}, \\
&= (s_1 \cdots s_{n-2})^{n-1}(s_{n-1} \cdots s_1)(s_1 \cdots s_{n-1}), \\
&= (s_1 \cdots s_{n-2})^{n-1}(s_1 \cdots s_{n-1})^{-1}(s_1 \cdots s_{n-1}), \\
&= e.
\end{aligned}$$

Esto prueba que $s^n = e$. □

1.3. Otras Presentaciones de S_n.

Por Proposición 3.3 sabemos que el conjunto formado por s_1 y $s = s_1 \cdots s_{n-1}$ también es un sistema de generadores para S_n, los cuales inducen otra presentación de S_n. En teoría, del mismo modo que en el Ejemplo 2.3, mediante transformaciones de Tietze (por bloques) podemos encontrar una presentación de S_n con generadores s_1 y s. Más precisamente se tiene la siguiente proposición:

Proposición 3.5. S_n *tiene la siguiente presentación.*

$$\left\langle \; s_1, s \quad ; \quad \begin{matrix} s_i(s_1,s)^2, (s_i(s_1,s)s_{i+1}(s_1,s))^3, (s_i(s_1,s)s_j(s_1,s))^2 \\ s^{-1}s_1s_2(s_1,s)\cdots s_{n-1}(s_1,s), \;\; |i-j| \geqslant 2 \end{matrix} \; \right\rangle, \tag{3.7}$$

donde $s_i(s_1,s)$ *denota la permutación* s_i *escrita en término de los generadores* s_1 *y* s *para todo* $i = 1, \ldots, n-1$.

Demostración. Pongamos $t_i := s_i(s_1,s)$ para cada i. Nótese que $s_1 = t_1$. En la siguiente tabla probaremos que (3.5) es equivalente a (3.7) aplicando la siguiente compuesta de transformaciones de Tietze:

$$T_G^{(-)} \circ T_R^{(-)} \circ T_R^{(+)} \circ T_R^{(-)} \circ T_R^{(+)} \circ T_R^{(+)} \circ T_G^{(+)}.$$

S_n	s_1	$s_2,\ldots,s_{n-1}$		s_i^2	$(s_is_{i+1})^3$	$(s_is_j)^2$		
$T_G^{(+)}$	s_1	$s_2,\ldots,s_{n-1}$	s	s_i^2	$(s_is_{i+1})^3$	$(s_is_j)^2$	$s = s_1\cdots s_{n-1}$	
$T_R^{(+)}$	s_1	$s_2,\ldots,s_{n-1}$	s	s_i^2	$(s_is_{i+1})^3$	$(s_is_j)^2$	$s = s_1\cdots s_{n-1}$	$s_i = t_i$
$T_R^{(+)}$	s_1	$s_2,\ldots,s_{n-1}$	s	s_i^2	$(s_is_{i+1})^3$	$(s_is_j)^2$	$s = s_1\cdots s_{n-1}$	$s_i = t_i$
				t_i^2	$(t_it_{i+1})^3$	$(t_it_j)^2$		
$T_R^{(-)}$	s_1	$s_2,\ldots,s_{n-1}$	s				$s = s_1\cdots s_{n-1}$	$s_i = t_i$
				t_i^2	$(t_it_{i+1})^3$	$(t_it_j)^2$		
$T_R^{(+)}$	s_1	$s_2,\ldots,s_{n-1}$	s				$s = s_1\cdots s_{n-1}$	$s_i = t_i$
				t_i^2	$(t_it_{i+1})^3$	$(t_it_j)^2$	$s = s_1t_2\cdots t_{n-1}$	
$T_R^{(-)}$	s_1	$s_2,\ldots,s_{n-1}$	s					$s_i = t_i$
				t_i^2	$(t_it_{i+1})^3$	$(t_it_j)^2$	$s = s_1t_2\cdots t_{n-1}$	
$T_G^{(-)}$	s_1		s					
				t_i^2	$(t_it_{i+1})^3$	$(t_it_j)^2$	$s = s_1t_2\cdots t_{n-1}$	

Por lo tanto S_n es también presentado como en (3.7). $\square$

Nótese que la proposición anterior demuestra únicamente que S_n tiene una presentación con generadores s y s_1, no necesariamente con el sistema de relaciones reducido.

Proposición 3.6. S_n *tiene la siguiente presentación:*

$$\left\langle \begin{array}{ccc} s_1, s & ; & \begin{array}{c} s_1^2,\ [s_1,s]^3,\ \left[s^{j-i}, s_1\right]^2,\ (s_1 s)^{n-1}, \\ s^n,\ |i-j| \geqslant 2, \quad 1 \leqslant i,j \leqslant n-1 \end{array} \end{array} \right\rangle. \tag{3.8}$$

Demostración. Para demostrar la proposición utilicemos el Corolario 3.2 y transformaciones de Tietze de manera informal. Por (3.7) se tiene que:

$$S_n \simeq \left\langle \begin{array}{ccc} s_1, s & ; & \begin{array}{c} t_i^2, (t_i t_{i+1})^3, (t_i t_j)^2 \\ s^{-1} t_1 t_2 \cdots t_{n-1}, \quad |i-j| \geqslant 2 \end{array} \end{array} \right\rangle. \tag{3.9}$$

Utilizando la Proposición 3.3 sabemos que para todo $i = 2, 3, \ldots, n-1$ se tiene $t_i := s^{i-1} s_1 s^{-i+1}$, luego obtenemos lo siguiente:

$$t_i^2 = (s^{i-1} s_1 s^{-i+1})^2 = s^{i-1} s_1^2 s^{-i+1}, \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned} s^{-1} t_1 t_2 \cdots t_{n-1} &= s^{-1} s_1 (s s_1 s^{-1})(s^2 s_1 s^{-2})(s^3 s_1 s^{-3}) \cdots (s^{n-2} s_1 s^{-n+2}), \\ &= s^{-1} s_1 s s_1 s s_1 s s_1 \cdots s s_1 s^{2-n}, \\ &= s^{-1} (s_1 s)(s_1 s)(s_1 s)(s_1 s) \cdots (s_1 s) s^{-n+1}, \\ &= s^{-1} (s_1 s)^{n-1} s^{-n+1}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned} (t_i t_{i+1})^3 &= (s^{i-1} s_1 s s_1 s^{-i})^3, \\ &= s^{i-1} s_1 s s_1 s^{-i} s^{i-1} s_1 s s_1 s^{-i} s^{i-1} s_1 s s_1 s^{-i}, \\ &= s^{i-1} s_1 s s_1 s^{-1} s_1 s s_1 s^{-1} s_1 s s_1 s^{-i}, \\ &= s^{i-1} (s_1 s s_1 s^{-1})(s_1 s s_1 s^{-1})(s_1 s s_1 s^{-1}) s^{-i+1}, \\ &= s^{i-1} (s_1 s s_1 s^{-1})^3 s^{-i+1}, \end{aligned} \tag{3.12}$$

Nótese que las relaciones en (3.10), (3.11) y (3.12) son respectivamente equivalentes en (3.13), (3.14) y (3.15) de la siguiente manera:

$$s^{i-1} s_1^2 s^{-i+1} = e \quad \Leftrightarrow \quad s_1^2 = s^{1-i} s^{i-1} = e, \tag{3.13}$$

$$s^{-1} (s_1 s)^{n-1} s^{-n+1} = e \quad \Leftrightarrow \quad (s_1 s)^{n-1} = s s^{n-1} = s^n = e, \tag{3.14}$$

$$
\begin{aligned}
s^{i-1}(s_1ss_1s^{-1})^3s^{-i+1}=e \ &\Leftrightarrow \ (s_1ss_1s^{-1})^3=s^{1-i}s^{i-1}=e\\
&\Leftrightarrow \ [s_1,s]^3=e
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

Además,

$$
\begin{aligned}
(t_it_j)^2 &= (s^{i-1}s_1s^{j-i}s_1s^{-j+1})^2,\\
&= s^{i-1}s_1s^{j-i}s_1s^{-j+1}s^{i-1}s_1s^{j-i}s_1s^{-j+1},\\
&= s^{i-1}s_1s^{j-i}s_1(s^{-j+1}s^{i-1})s_1s^{j-i}s_1s^{-j+1},\\
&= s^{i-1}s_1s^{j-i}s_1s^{i-j}s_1s^{j-i}s_1s^{-j+1},
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

luego, por (3.16) se tiene que

$$
\begin{aligned}
s^{i-1}s_1s^{j-i}s_1s^{i-j}s_1s^{j-i}s_1s^{-j+1} &= e\\
s_1s^{j-i}s_1s^{i-j}s_1s^{j-i}s_1 &= s^{1-i}s^{j-1}\\
s_1s^{j-i}s_1s^{i-j}s_1s^{j-i}s_1 &= s^{j-i}\\
s^{j-i}s_1s^{i-j}s_1s^{j-i} &= s_1s^{j-i}s_1\\
s^{j-i}(s_1s^{i-j}s_1)s^{j-i} &= (s_1s^{i-j}s_1)^{-1}\\
s^{j-i}(s_1s^{i-j}s_1)s^{j-i}(s_1s^{i-j}s_1) &= e\\
(s^{j-i}(s_1s^{i-j}s_1))^2 &= e\\
(s^{j-i}s_1(s^{j-i})^{-1}s_1^{-1})^2 &= e\\
\left[s^{j-i},s_1\right]^2 &= e
\end{aligned}
$$

Por último debemos agregar la relación $s^n=e$ del Corolario 3.2 , ya que esta fue utilizada para determinar las relaciones anteriores.

Reemplazando en (3.9) se obtiene la presentación en (3.8) para S_n. □

1.4. Subgrupo Alternador (A_n).

En lo que sigue, A_n denota el subgrupo de permutaciones pares de S_n, también conocido como grupo alternador.

Mediante el método de Reidemeister-Schreier generalizaremos el Ejemplo 2.7 para calcular una presentación del subgrupo A_n. Para esto utilicemos la presentación de Coxeter de S_n, determinada en la Proposición 3.4.

Tenemos el siguiente teorema:

Teorema 3.2. A_n *tiene la siguiente presentación.*

$$\left\langle \; y_1, \ldots, y_{k-1}, y_{k+1}, \ldots, y_{n-1} \quad ; \quad \begin{array}{c} y_k^3, y_j^2, (y_i y_{i+1})^3 \\ (y_i y_j)^2, \ |k-j|, |i-j| \geqslant 2 \end{array} \; \right\rangle. \tag{3.17}$$

Demostración. Sabemos que para todo $s_k \in X_n$ con $1 \leqslant k \leqslant n-1$, $s_k \notin A_n$, luego $A_n s_k \neq A_n = A_n e$. Como $[S_n : A_n] = |S_n/A_n| = 2$, entonces $U_k := \left\{ e, s_k \right\}$ es un transversal de Schreier de A_n en S_n que denotaremos simplemente U. Observemos que $A_n s_k = A_n s_i$ y $A_n s_k s_i = A_n$ para todos $k, i = 1, 2, \ldots, n-1$. Ahora debemos explicitar el conjunto de generadores Y_{A_n} de A_n que denotaremos simplemente Y_n, el cual es definido como sigue:

$$Y_n := \left\{ \; ux\,[\,ux\,]^{-1} \quad ; \quad u \in U,\, x \in X_n,\, ux \notin U \; \right\}.$$

Para esto fijemos $1 \leqslant k \leqslant n-1$ y notemos que

$$es_i[\,es_i\,]^{-1} = s_i s_k^{-1}, \qquad s_k s_i[\,s_k s_i\,]^{-1} = s_k s_i e = s_k s_i, \qquad (i = 1, \ldots, n-1)$$

lo que nos permite construir la siguiente tabla:

$U \times X_n$	s_1	s_2	s_3	$\cdots$	s_k	$\cdots$	s_{n-1}
e	$s_1 s_k^{-1}$	$s_2 s_k^{-1}$	$s_3 s_k^{-1}$	$\cdots$	e	$\cdots$	$s_{n-1} s_k^{-1}$
s_k	$s_k s_1$	$s_k s_2$	$s_k s_3$	$\cdots$	e	$\cdots$	$s_k s_{n-1}$

Por lo tanto se tiene $Y_n(k) := Y_1 \cup Y_2$ el que seguimos anotando Y_n, donde

$$Y_1 := \left\{ \; y_i := s_i s_k^{-1} \quad ; \quad i := 1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n-1 \; \right\},$$

e

$$Y_2 := \left\{ \; z_i := s_k s_i \quad ; \quad i := 1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n-1 \; \right\}.$$

Para continuar calculemos el conjunto de relaciones $\widehat{R}$ compuesto por los elementos conjugados uru^{-1} con $u \in U$ y $r \in R_n$, mediante la siguiente tabla:

$U_\times R_n$	s_i^2	$(s_i s_{i+1})^3$	$(s_i s_j)^2$
e	s_i^2	$(s_i s_{i+1})^3$	$(s_i s_j)^2$
s_k	$s_k s_i^2 s_k^{-1}$	$s_k (s_i s_{i+1})^3 s_k^{-1}$	$s_k (s_i s_j)^2 s_k^{-1}$

Luego, el conjunto de relaciones viene dado por $\widehat{R}(k) := \bigcup_{i=1}^{6} R_n^i$ el que seguiremos anotando $\widehat{R}$, donde R_n^1, R_n^2 y R_n^3 son definidos en (3.1) y

$$R_n^4 := \left\{ \; s_k s_i^2 s_k^{-1} \quad ; \quad i := 1, \ldots, n-1 \; \right\},$$

$$R_n^5 := \left\{ \; s_k (s_i s_j)^2 s_k^{-1} \quad ; \quad i, j := 1, \ldots, n-1, \, |i-j| \geqslant 2 \; \right\},$$

$$R_n^6 := \left\{ \; s_k (s_i s_{i+1})^3 s_k^{-1} \quad ; \quad i := 1, \ldots, n-2 \; \right\}.$$

Como $y_i = s_i s_k^{-1}$ y $z_i = s_k s_i$, se tiene entonces:

$$s_i^2 = (y_i s_k)(s_k^{-1} z_i) = y_i z_i, \quad (s_i s_j)^2 = ((y_i s_k)(s_k^{-1} z_j))^2 = (y_i z_j)^2,$$

$$(s_i s_{i+1})^3 = ((y_i s_k)(s_k^{-1} z_{i+1}))^3 = (y_i z_{i+1})^3,$$

$$s_k s_i^2 s_k^{-1} = (s_k s_i)(s_i s_k^{-1}) = z_i y_i,$$

$$s_k (s_i s_j)^2 s_k^{-1} = s_k s_i s_j s_i s_j s_k = s_k s_i s_j (s_k^{-1} s_k) s_i s_j s_k^{-1} = (z_i y_j)^2,$$

$$s_k (s_i s_{i+1})^3 s_k^{-1} = s_k s_i s_{i+1} (s_k^{-1} s_k) s_i s_{i+1} (s_k^{-1} s_k) s_i s_{i+1} s_k^{-1} = (z_i y_{i+1})^3.$$

Así, el conjunto de relaciones en Y_n es definido como $\widehat{R}(Y_n) := \bigcup_{i=1}^{6} R_i$, donde

$$R_1 := \left\{ \; y_i z_i \quad ; \quad i = 1, \ldots, n-1 \; \right\},$$

$$R_2 := \left\{ \; (y_i z_j)^2 \quad ; \quad i, j = 1, \ldots, n-1 \; |i-j| \geqslant 2 \; \right\},$$

$$R_3 := \left\{ \; (y_i z_{i+1})^3 \quad ; \quad i = 1, \ldots, n-2, \; \right\}, \quad R_4 := \left\{ \; z_i y_i \quad ; \quad i = 1, \ldots, n-1 \; \right\},$$

$$R_5 := \left\{ \; (z_i y_j)^2 \quad ; \quad i, j = 1, \ldots, n-1, \, |i-j| \geqslant 2 \; \right\},$$

$$R_6 := \left\{ \; (z_i y_{i+1})^3 \quad ; \quad i = 1, \ldots, n-2 \; \right\}.$$

Nótese que $y_k z_k = (s_k s_k^{-1})(s_k s_k) = e s_k^2 = s_k^2$, por esto se tiene $s_k^2 \in \widehat{R}$, además, por relaciones en R_1 sabemos que $z_i = y_i^{-1}$ para todo $i = 1, \ldots, n-1$. Por lo tanto $R_1 = R_4 = \{e\}$ y basta tomar $Y_n = Y_1$. Reemplazando z_i por y_i^{-1} obtenemos:

$$R_2 = \left\{ \; (y_i y_j^{-1})^2 \quad ; \quad i, j = 1, \ldots, n-1 \; |i-j| \geqslant 2 \; \right\},$$

$$R_3 = \left\{ \; (y_i y_{i+1}^{-1})^3 \quad ; \quad i = 1, \ldots, n-2, \; \right\},$$

$$R_5 = \left\{ \; (y_i^{-1} y_j)^2 \quad ; \quad i, j = 1, \ldots, n-1, \, |i-j| \geqslant 2 \; \right\},$$

$$R_6 = \left\{ \ (y_i^{-1}y_{i+1})^3 \quad ; \quad i = 1, \ldots, n-2 \ \right\},$$

pero R_6 se obtiene a partir de R_3, ya que

$$\begin{aligned}
(y_i y_{i+1}^{-1})^3 &= e \\
y_i y_{i+1}^{-1} y_i y_{i+1}^{-1} y_i y_{i+1}^{-1} &= e \\
e &= y_{i+1} y_i^{-1} y_{i+1} y_i^{-1} y_{i+1} y_i^{-1} \\
e &= y_{i+1} (y_i^{-1} y_{i+1})^2 y_i^{-1} \\
y_i &= y_{i+1} (y_i^{-1} y_{i+1})^2 \\
y_i (y_i^{-1} y_{i+1}) &= y_{i+1} (y_i^{-1} y_{i+1})^3 \\
y_{i+1}^{-1} y_i (y_i^{-1} y_{i+1}) &= (y_i^{-1} y_{i+1})^3 \\
e &= (y_i^{-1} y_{i+1})^3,
\end{aligned}$$

y R_5 se obtiene a partir de R_2, pues

$$\begin{aligned}
(y_i y_j^{-1})^2 &= e \\
y_i y_j^{-1} y_i y_j^{-1} &= e \\
e &= y_j (y_i^{-1} y_j) y_i^{-1} \\
y_i (y_i^{-1} y_j) &= y_j (y_i^{-1} y_j)^2 \\
y_j^{-1} y_i (y_i^{-1} y_j) &= (y_i^{-1} y_j)^2 \\
e &= (y_i^{-1} y_j)^2.
\end{aligned}$$

Así, obtenemos que $\widehat{R} = R_2 \cup R_3$ y en consecuencia la siguiente presentación:

$$A_n = \left\langle \ Y_1 \quad ; \quad R_2, R_3 \ \right\rangle.$$

Por último notemos que $y_k = s_k s_k^{-1} = e$, reemplazando k por i en R_2 y R_3 respectivamente, tenemos

$$\begin{aligned}
(y_k y_j^{-1})^2 &= e & \qquad (y_k y_{k+1}^{-1})^3 &= e \\
(y_j^{-1})^2 &= e & (y_{k+1}^{-1})^3 &= e \\
e &= (y_j^{-1})^{-2} & e &= (y_{k+1}^{-1})^{-3} \\
e &= (y_j)^2, & e &= (y_{k+1})^3,
\end{aligned}$$

para todo $j = 1, \ldots, k-2, k+2, \ldots, n-1$.

Por lo tanto A_n es presentado como en (3.17). $\square$

2. Grupo de Heisenberg (H_n)

En lo que sigue, K denota el cuerpo finito F_p, donde p es un número primo.

El grupo de Heisenberg $H_n \leqslant U_n$ ($n \geqslant 3$) sobre K se define como sigue:

$$H_n := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & I_{n-2} & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\; ; \;\; a \in M_{1,n-2}(K),\, b \in K,\, c \in M_{n-2,1}(K) \right\},$$

donde "0" denota la matríz nula en su respectiva dimensión.

Nótese que $H_1 = \{1\}$ y $H_2 \simeq K$.

Anotemos cada $h \in H_n$ como $[a, b, c]$, donde

$$h = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & I_{n-2} & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.18}$$

Luego, dados $h_1, h_2 \in H_n$, donde

$$h_1 := [a_1, b_1, c_1], \quad h_2 := [a_2, b_2, c_2],$$

el producto $h_1 h_2$ en H_n corresponde a: $[a_1 + a_2, b_1 + b_2 + a_1 c_2, c_1 + c_2]$. En efecto,

$$\begin{aligned} h_1 h_2 &= [a_1, b_1, c_1] \cdot [a_2, b_2, c_2], \\ &= \begin{pmatrix} 1 & a_1 & b_1 \\ 0 & I_{n-2} & c_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a_2 & b_2 \\ 0 & I_{n-2} & c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a_1 + a_2 & b_1 + b_2 + a_1 c_2 \\ 0 & I_{n-2} & c_1 + c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= [a_1 + a_2, b_1 + b_2 + a_1 c_2, c_1 + c_2]. \end{aligned}$$

Note además que:

$$[a, b, c]^{-1} = [-a, ac - b, -c], \qquad [a, b, c] = [a, 0, 0][0, b, c].$$

2.1. Descomposición en Producto Semi-Directo.

Consideremos los siguientes conjuntos A y B de H_n:

$$A := \left\{ [a, 0, 0] \;\; ; \;\; a \in K^{n-2} \right\}, \quad B := \left\{ [0, b, c] \;\; ; \;\; b \in K,\, c^t \in K^{n-2} \right\}.$$

Es claro que A y B son subgrupos de H_n, ya que

$$[a_1, 0, 0][a_2, 0, 0]^{-1} = [a_1 - a_2, 0, 0] \in A$$

y

$$[0, b_1, c_1][0, b_2, c_2]^{-1} = [0, b_1 - b_2, c_1 - c_2] \in B.$$

Lema 3.3. $H_n = B \rtimes A$.

Demostración. Nótese que $[a, b, c] = [0, b, c][a, 0, 0]$ y además $[a, 0, 0] = [0, b, c]$ implica que $a = b = c = 0$, por lo tanto $H_n = AB$ y $A \cap B = \{I_n\}$. Basta probar que $B \trianglelefteq H_n$. Sean $g \in B$ y $h \in H$ definidos como sigue

$$g := [0, g_2, g_3], \quad h := [h_1, h_2, h_3],$$

entonces,

$$\begin{aligned} hgh^{-1} &= [h_1, h_2, h_3][0, g_2, g_3][-h_1, h_1h_3 - h_2, -h_3], \\ &= [h_1, h_2 + g_2 + h_1g_3, h_3 + g_3][-h_1, h_1h_3 - h_2, -h_3], \\ &= [0, g_2 + h_1g_3, g_3 - h_2] \in B. \end{aligned}$$

Por lo tanto $H_n = B \rtimes A$. □

Lema 3.4. *Para todo* $n \in \mathbb{N}\backslash\{0, 1, 2\}$

1. $A \simeq (K, +)^{n-2}$.
2. $B \simeq (K, +)^{n-1}$.
3. $H_n \simeq K^{n-1} \rtimes K^{n-2}$.

Demostración.

1. Sea $\alpha : A \to K^{n-2}$ que envía $[a, 0, 0] \mapsto a$. Es claro que α es una función biyectiva. Así, basta probar que α es un homomorfismo:

$$\alpha([a_1, 0, 0][a_2, 0, 0]) = \alpha([a_1 + a_2, 0, 0]) = a_1 + a_2,$$

por lo tanto α es un isomorfismo. Luego $A \simeq K^{n-2}$.

2. Sea $\beta : B \to K^{n-1}$ que envía $[0,b,c] \mapsto (c,b)$. Nótese que

$$[0,b_1,c_1][0,b_2,c_2] \quad \Leftrightarrow \quad b_1 = b_2, \quad c_1 = c_2 \quad \Leftrightarrow \quad (c_1,b_1) = (c_2,b_2),$$

además, dado $x := (x_1 \ldots, x_{n-1}) \in K^{n-1}$ se tiene

$$\beta([0, x_{n-1}, (x_1, \ldots, x_{n-2})]) = (x_1, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1}) = x.$$

Por lo tanto β es bien definida y biyectiva, probemos ahora que es un homomorfismo

$$\beta([0, b_1+b_2, c_1+c_2]) = (c_1+c_2, b_1+b_2) = (c_1,b_1) + (c_2,b_2).$$

Esto prueba que $B \simeq K^{n-1}$ ya que β es un isomorfismo.
3. Por (1) y (2) obtenemos que $H_n = A \ltimes B \simeq K^{n-2} \ltimes K^{n-1}$.

$\square$

Como K es un cuerpo finito, conocemos su presentación como grupo cíclico $(K,+)$, luego mediante la descomposición anterior (Lema 3.4.3.) podemos calcular una presentación de H_n utilizando los Corolarios 2.2 y 2.4.

2.2. Presentación de H_3.

Por Lema 3.4 tenemos que $H_3 \simeq K^2 \rtimes K$, donde $K = F_p = \left\langle \; c \;\; ; \;\; c^p \; \right\rangle$ para algún p primo, por Proposición 2.3 obtenemos

$$K^2 = \left\langle \; a, b \;\; ; \;\; a^p, b^p, [a,b] \; \right\rangle.$$

Como $A \simeq K \simeq \mathbb{Z}_p$ podemos escribir los generadores a, b, c como sigue

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ya que $\mathsf{K}^2 \trianglelefteq \mathsf{H}_3$ consideremos los siguiente conjugados

$$\mathsf{cac}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathsf{a},$$
$$\mathsf{cbc}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathsf{ab}.$$

Luego, por Corolario 2.4 se tiene la siguiente presentación

$$\mathsf{H}_3 = \left\langle \ \mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c} \quad ; \quad \mathsf{a}^\mathsf{p}, \mathsf{b}^\mathsf{p}, \mathsf{c}^\mathsf{p}, [\mathsf{a}, \mathsf{b}], [\mathsf{c}, \mathsf{a}], [\mathsf{c}, \mathsf{b}]\mathsf{a}^{-1} \ \right\rangle. \tag{3.19}$$

Observación 3.1. Si K es ahora el anillo $\mathbb{Z}$, las relaciones $\mathsf{a}^\mathsf{p}, \mathsf{b}^\mathsf{p}, \mathsf{c}^\mathsf{p}$ no aparecen y obtenemos la presentación encontrada en el Ejemplo 2.6 calculada de forma directa.

2.3. Caso General.

Sea $\mathsf{K} = \mathsf{F}_\mathsf{p}$ presentado como antes, por Corolario 2.2 podemos ver que K^{n-1} y K^{n-2} son presentados de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathsf{K}^{n-2} &= \left\langle \ \mathsf{c}_i \quad ; \quad \mathsf{c}_i^\mathsf{p}, \ [\mathsf{c}_j, \mathsf{c}_k], \ {}_{\substack{1\leqslant i\leqslant n-2 \\ 1\leqslant j<k\leqslant n-2}} \ \right\rangle, \\ &\simeq \left\langle \ \mathsf{a}_i \quad ; \quad \mathsf{a}_i^\mathsf{p}, \ [\mathsf{a}_j, \mathsf{a}_k], \ {}_{\substack{1\leqslant i\leqslant n-2 \\ 1\leqslant j<k\leqslant n-2}} \ \right\rangle \simeq \mathsf{A}, \\ \mathsf{K}^{n-1} &= \left\langle \ \mathsf{c}_i \quad ; \quad \mathsf{c}_i^\mathsf{p}, \ [\mathsf{c}_j, \mathsf{c}_k], \ {}_{\substack{1\leqslant i\leqslant n-1 \\ 1\leqslant j<k\leqslant n-1}} \ \right\rangle, \\ &\simeq \left\langle \ \mathsf{b}_i \quad ; \quad \mathsf{b}_i^\mathsf{p}, \ [\mathsf{b}_j, \mathsf{b}_k], \ {}_{\substack{1\leqslant i\leqslant n-1 \\ 1\leqslant j<k\leqslant n-1}} \ \right\rangle \simeq \mathsf{B}. \end{aligned}$$

Como $\mathsf{K} \simeq \mathbb{Z}_\mathsf{p}$, escribimos los generadores $\mathsf{a}_i, \mathsf{b}_j$ como sigue

$$\mathsf{a}_i = \begin{pmatrix} 1 & 1_i & 0 \\ 0 & I_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{b}_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & I_{n-2} & 1_j \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{b}_{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & I_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donde $i, j = 1, \ldots, n-2$, $1_i, 1_j^t \in \mathsf{K}^{n-2}$ tal que

$$1_i := (\underbrace{0, \ldots, 0}_{(i-1)-\text{veces}}, 1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{(n-1-i)-\text{veces}}), \quad 1_j := (\underbrace{0, \ldots, 0}_{(j-1)-\text{veces}}, 1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{(n-2-j)-\text{veces}})^t.$$

Consideremos los conjugados

$$a_i b_j a_i^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1_i & 0 \\ 0 & I_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & I_{n-2} & 1_j \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1_i & 0 \\ 0 & I_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1_i 1_j \\ 0 & I_{n-2} & 1_j \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nótese que $1_i 1_j = \begin{cases} 0 & ; \ i \neq j \\ 1 & ; \ i = j \end{cases}$, por lo tanto

$$a_i b_j a_i^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & I_{n-2} & 1_j \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = b_j, \qquad a_i b_i a_i^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & I_{n-2} & 1_i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = b_{n-1} b_i.$$

Además

$$a_i b_j a_i^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1_i & 0 \\ 0 & I_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & I_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1_i & 0 \\ 0 & I_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1_i 1_j \\ 0 & I_{n-2} & 1_j \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Así, obtenemos las siguientes relaciones

$$a_i b_j a_i^{-1} b_j^{-1} = e, \quad a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1} b_{n-1}^{-1} = e, \quad a_i b_{n-1} a_i^{-1} b_{n-1}^{-1} = e.$$

Definamos los conjuntos X, R, S como a continuación

$$X := \left\{ \ a_i, \ b_j \ \ ; \ \ \substack{1 \leqslant i \leqslant n-2 \\ 1 \leqslant j \leqslant n-1} \right\},$$

$$R := \left\{ \ a_i^p, \ [a_j, a_k] \ \ ; \ \ \substack{1 \leqslant i \leqslant n-2 \\ 1 \leqslant j < k \leqslant n-2} \right\} \cup \left\{ \ b_i^p, \ [b_j, b_k] \ \ ; \ \ \substack{1 \leqslant i \leqslant n-1 \\ 1 \leqslant j < k \leqslant n-1} \right\},$$

$$S := \left\{ \ [a_i, b_i] b_{n-1}^{-1}, \ [a_j, b_k] \ \ ; \ \ \substack{1 \leqslant i,j \leqslant n-2, \ (j \neq k) \\ 1 \leqslant k \leqslant n-1} \right\}.$$

Luego, por Corolario 2.4, obtenemos el siguiente teorema:

Teorema 3.5. $H_n = \left\langle \ X \ \ ; \ \ R, S \ \right\rangle.$

3. Grupo Unipotente (U_n)

Sea U_n el grupo de matrices triangulares superiores con coeficientes en K, denominado grupo Unipotente, este es definido de la siguiente manera:

$$U_n := \left\{ \begin{pmatrix} u_{n-2} & (a_i) & (b_j) \\ 0 & 1 & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{matrix} (a_i), (b_j) \in M_{(n-2)\times 1}(K) \\ u_{n-2} \in U_{n-2},\ b_{n-1} \in K \end{matrix} \right\},$$

donde "0" representa la matriz nula en su respectiva dimensión. Nótese que $U_m = H_m$ $(m = 1, 2, 3)$, además si $|K| = q$, entonces $|U_n| = q^{n(n-1)/2}$.

Consideremos $A, B \subset U_n$ definidos como sigue:

$$A := \left\{ \begin{pmatrix} u_{n-2} & (a_i) & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in U_n \quad ; \quad u_{n-2} \in U_{n-2},\ a_i \in K \right\},$$

$$\text{y} \qquad B := \left\{ \begin{pmatrix} I_{n-2} & 0 & (b_j) \\ 0 & 1 & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in U_n \quad ; \quad b_j, b_{n-1} \in K \right\}.$$

3.1. Descomposición en Producto Semi-Directo.

Lema 3.6. $U_n := B \rtimes A$.

Demostración. Primero probaremos que $A, B \leqslant U_n$. Sean $g_1, g_2 \in A$ definidos como sigue

$$g_1 := \begin{pmatrix} u_{n-2} & (a_i) & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g_2 := \begin{pmatrix} v_{n-2} & (c_i) & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donde $u_{n-2}, v_{n-2} \in U_{n-2}$, $a_i, c_i \in K$. Y sean $g_3, g_4 \in B$ de la siguiente forma

$$g_3 := \begin{pmatrix} I_{n-2} & 0 & (b_j) \\ 0 & 1 & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g_4 := \begin{pmatrix} I_{n-2} & 0 & (d_j) \\ 0 & 1 & d_{n-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Además notemos que

$$g_2^{-1} := \begin{pmatrix} v_{n-2}^{-1} & -v_{n-2}^{-1}(c_i) & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g_4^{-1} := \begin{pmatrix} I_{n-2} & 0 & -(d_j) \\ 0 & 1 & -d_{n-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego, $g_1 g_2^{-1}, g_3, g_4^{-1} \in U_n$ ya que

$$g_1 g_2^{-1} = \begin{pmatrix} u_{n-2}v_{n-2}^{-1} & -u_{n-2}v_{n-2}^{-1}(c_i) + (a_i) & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{y} \qquad g_3 g_4^{-1} = \begin{pmatrix} I_{n-2} & 0 & (b_j - d_j) \\ 0 & 1 & b_{n-1} - d_{n-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto $A, B \leqslant U_n$. Probemos que $B \trianglelefteq U_n$, sean $u \in U_n$ y $g \in B$ tales que

$$u := \begin{pmatrix} u_{n-2} & (a_i) & (b_j) \\ 0 & 1 & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad g := \begin{pmatrix} I_{n-2} & 0 & (d_j) \\ 0 & 1 & d_{n-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donde $u_{n-2} \in U_{n-2}$, $b_j, d_j, b_{n-1}, d_{n-1} \in K$. Entonces

$$ug = \begin{pmatrix} u_{n-2} & (a_i) & u_{n-2}(d_j) + (a_i)d_{n-1} + (b_j) \\ 0 & 1 & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{y}$$

$$u^{-1} = \begin{pmatrix} u_{n-2}^{-1} & -u_{n-2}^{-1}(a_i) & u_{n-2}^{-1}(a_i)b_{n-1} - u_{n-2}^{-1}(b_j) \\ 0 & 1 & -b_{n-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

como $u_{n-2}^{-1}((a_i)b_{n-1} -^{-1} (b_j)) \in M_{(n-2)\times 1}(K)$ entonces

$$ugu^{-1} = \begin{pmatrix} I_{n-2} & 0 & u_{n-2}^{-1}(a_i)b_{n-1} - u_{n-2}^{-1}(b_j) \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in B.$$

Por lo tanto $B \trianglelefteq U_n$. Dados $(a_i), (b_j) \in M_{(n-2)\times 1}(K)$ y $b_{n-1} \in K$

$$\begin{pmatrix} u_{n-2} & (a_i) & (b_j) \\ 0 & 1 & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{n-2} & 0 & (b_j) \\ 0 & 1 & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n-2} & (a_i) & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

luego $U_n = B \cdot A$. Por último nótese que $A \cap B = \emptyset$ ya que, si $u \in A \cap B$, entonces

$$\begin{pmatrix} I_{n-2} & 0 & (b_j) \\ 0 & 1 & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = u = \begin{pmatrix} u_{n-2} & (a_i) & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

luego $u_{n-2} = I_{n-2}$, $(a_i) = 0$, $(b_j) = 0$, $a_{n-1} = 0$, por lo tanto $u = I_n$. Así hemos probado que $U_n = B \rtimes A$. $\square$

Lema 3.7. *Para todo* $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$

1. $A \simeq U_{n-1}$.
2. $B \simeq (K^{n-1}, +)$.
3. $U_n \simeq K^{n-1} \rtimes U_{n-1}$.

Demostración.

1. Sea $\alpha : B \to U_{n-1}$ definida por:

$$\alpha\left(\begin{pmatrix} u_{n-2} & (a_i) & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} u_{n-2} & (a_i) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in U_{n-1},$$

donde $u_{n-2} \in U_{n-2}$ y $(a_i) \in M_{(n-2)\times 1}$. Sean $u_{n-2}, v_{n-2} \in U_{n-2}$ y $(a_i), (c_i) \in M_{(n-2)\times 1}$ tal que $u_{n-2} = v_{n-2}$ y $a_i = c_i$ para todo $i = 1, \ldots, n-2$, entonces

$$g_1 := \begin{pmatrix} u_{n-2} & (a_i) & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{n-2} & (c_i) & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =: g_2, \tag{3.20}$$

$$\alpha(g_1) = \begin{pmatrix} u_{n-2} & (a_i) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{n-2} & (c_i) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \alpha(g_2). \tag{3.21}$$

Se ve claramente que (3.20) es equivalente con (3.21), Por lo tanto α es bien definida e inyectiva, ya que solo depende de los elementos definidos anteriormente, por lo mismo α es epiyectiva. Probemos que α es un homomorfismo

$$\alpha(g_1 g_2) = \begin{pmatrix} u_{n-2}v_{n-2} & u_{n-2}(c_i) + (a_i) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n-2} & (a_i) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_{n-2} & (c_i) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego α es un isomorfismo. Así $\mathsf{A} \simeq \mathsf{U}_{n-1}$.

2. Sea $\beta : \mathsf{K}^{n-1} \to \mathsf{B}$ tal que, para todo $(b_1, \ldots, b_{n-1})^t \in \mathsf{K}^{n-1}$ se define

$$\alpha\left(\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} I_{n-2} & 0 & (b_j) \\ 0 & 1 & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{con} \quad (b_j) := \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{n-2} \end{pmatrix}.$$

Como la definición de β depende únicamente de b_j $(j = 1, \ldots, n-1)$, por el mismo argumento anterior β es bien definida y biyectiva. Probemos que β es un homomorfismo:

$$\begin{aligned} \beta\left(\begin{pmatrix} b_1 + d_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} + d_{n-1} \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} I_{n-2} & 0 & (b_j + d_j) \\ 0 & 1 & b_{n-1} + d_{n-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} I_{n-2} & 0 & (b_j) \\ 0 & 1 & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{n-2} & 0 & (d_j) \\ 0 & 1 & d_{n-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por lo tanto β es un isomorfismo. Así $\mathsf{B} \simeq \mathsf{K}^{n-1}$.

3. Por Lema 3.6, (1) y (2) se tiene que $\mathsf{U}_n = \mathsf{B} \rtimes \mathsf{A} \simeq \mathsf{K}^{n-1} \rtimes \mathsf{U}_{n-1}$.

□

Observación 3.2. Note que, por Lema 3.7.3, podemos obtener una descomposición generalizada de U_n de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathsf{U}_n &\simeq \mathsf{K}^{n-1} \rtimes \mathsf{U}_{n-1}, \\ &\simeq \mathsf{K}^{n-1} \rtimes (\mathsf{K}^{n-2} \rtimes (\cdots \rtimes (\mathsf{K}^3 \rtimes \mathsf{U}_3))), \\ &\simeq \mathsf{K}^{n-1} \rtimes (\mathsf{K}^{n-2} \rtimes (\cdots \rtimes (\mathsf{K}^3 \rtimes \mathsf{H}_3))), \\ &\simeq \mathsf{K}^{n-1} \rtimes (\mathsf{K}^{n-2} \rtimes (\cdots \rtimes (\mathsf{K}^3 \rtimes (\mathsf{K}^2 \rtimes \mathsf{H}_2)))), \\ &\simeq \mathsf{K}^{n-1} \rtimes (\mathsf{K}^{n-2} \rtimes (\cdots \rtimes (\mathsf{K}^3 \rtimes (\mathsf{K}^2 \rtimes \mathsf{K})))). \end{aligned} \tag{3.22}$$

Así, mediante el método para calcular presentaciones de un producto semi-directo (Corolario 2.4), podemos calcular una presentación de U_n conociendo la presentación de $\mathsf{U}_3 = \mathsf{H}_3$. Más aún, como $\mathsf{H}_2 \simeq \mathsf{K}$ basta conocer la presentación de $(\mathsf{K}, +)$ la cual en nuestro caso (finito) es sencilla.

3.2. Presentación de U_4 y U_5.

A modo de ejemplo estudiaremos los casos $n = 4, 5$ para luego determinar, el Teorema 3.9, una presentación de U_n para todo $n \in \mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$. Los casos $n = 4, 5$ serán de utilidad para demostrar el Teorema 3.9, el cual se demuestra por inducción sobre n.

Por Lema 3.7.3., $\mathsf{U}_4 \simeq \mathsf{K}^3 \rtimes \mathsf{U}_3$, también sabemos que U_3 es presentado como en (3.19) y por Corolario 2.2, K^3 tiene la presentación que sigue:

$$\mathsf{K}^3 \simeq \Big\langle\ x, y, z \quad ; \quad x^p, y^p, z^p, [x, y], [x, z], [y, z]\ \Big\rangle .$$

Digamos $R := \Big\{\ x^p, y^p, z^p, [x, y], [x, z], [y, z]\ \Big\}$. Como $\mathsf{K} = \mathsf{F}_p \simeq \mathbb{Z}_p$ podemos considerar los generadores de K^3 y U_3 de forma matricial

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nótar que al conjugar cada uno de los elementos x, y, z por cada a, b, c obtenemos las siguientes relaciones

$$\begin{array}{lll} axa^{-1} = x, & aya^{-1} = xy, & aza^{-1} = z, \\ bxb^{-1} = x, & byb^{-1} = y, & bzb^{-1} = xz, \\ cxc^{-1} = x, & cyc^{-1} = y, & czc^{-1} = yz. \end{array} \tag{3.23}$$

Denotemos por S el conjunto de elementos en (3.23). Luego, usando Corolario 2.4, el grupo U_4 tiene la siguiente presentación:

$$\mathsf{U}_4 \simeq \Big\langle\ a, b, c, x, y, z \quad ; \quad a^p, b^p, c^p, [a, b], [c, a], [c, b]a^{-1}, R, S\ \Big\rangle . \tag{3.24}$$

Digamos $V := \Big\{\ a^p, b^p, c^p, [a, b], [c, a], [c, b]a^{-1}, R, S\ \Big\}$.

Como $\mathsf{U}_5 \simeq \mathsf{K}^4 \rtimes \mathsf{U}_4$, podemos encontrar una presentación de U_5 ocupando (3.24). Para esto consideremos cada v_i $(i = 1, \ldots, 6)$ como una matriz de 5×5

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$v_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad v_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad v_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nuevamente por Corolario 2.2, se sigue que K^4 es presentado como sigue:

$$\begin{aligned} \mathsf{K}^4 &\simeq \left\langle\ k_1, k_2, k_3, k_4 \quad ; \quad \begin{matrix} k_1^p, k_2^p, k_3^p, k_4^p.[k_1, k_2], [k_1, k_3], \\ [k_2, k_3], [k_1, k_4], [k_2, k_4], [k_3, k_4] \end{matrix} \ \right\rangle, \\ &\simeq \left\langle\ k_1, k_2, k_3, k_4 \quad ; \quad k_1^p, k_2^p, k_3^p, k_4^p, [k_i, k_j],\ 1 \leqslant i < j \leqslant 4 \ \right\rangle. \end{aligned}$$

y también consideremos cada k_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ de forma matricial

$$k_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad k_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$k_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad k_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Al conjugar los generadores $u_i k_j u_i^{-1}$ obtenemos las siguientes relaciones

$$\begin{array}{llll}
u_1k_1u_1^{-1}=k_1, & u_1k_2u_1^{-1}=k_1k_2, & u_1k_3u_1^{-1}=k_3, & u_1k_4u_1=k_4,\\
u_2k_1u_2^{-1}=k_1, & u_2k_2u_2^{-1}=k_2, & u_2k_3u_2^{-1}=k_1k_3, & u_2k_4u_2=k_4,\\
u_3k_1u_3^{-1}=k_1, & u_3k_2u_3^{-1}=k_2, & u_3k_3u_3^{-1}=k_2k_3, & u_3k_4u_3=k_4,\\
u_4k_1u_4^{-1}=k_1, & u_4k_2u_4^{-1}=k_2, & u_4k_3u_4^{-1}=k_3, & u_4k_4u_4=k_1k_4,\\
u_5k_1u_5^{-1}=k_1, & u_5k_2u_5^{-1}=k_2, & u_5k_3u_5^{-1}=k_3, & u_5k_4u_5=k_2k_4,\\
u_6k_1u_6^{-1}=k_1, & u_6k_2u_6^{-1}=k_2, & u_6k_3u_6^{-1}=k_3, & u_6k_4u_6=k_3k_4.
\end{array} \tag{3.25}$$

Sea T el conjunto de relaciones en (3.25) y sean

$$R := \left\{ \begin{array}{c} v_1^p, v_2^p, v_3^p, [v_1,v_5]v_4^{-1}, [v_2,v_6]v_4^{-1}, [v_3,v_6]v_5^{-1}, [v_3,v_2]v_1^{-1}, \\ [v_1,v_2],[v_1,v_3],[v_1,v_4],[v_1,v_6],[v_2,v_4],[v_2,v_5],[v_3,v_4],[v_3,v_5] \end{array} \right\},$$

y

$$S := \left\{ \begin{array}{c} k_1^p, k_2^p, k_3^p, k_4^p, [k_1,k_2],[k_1,k_3], \\ [k_2,k_3],[k_1,k_4],[k_2,k_4],[k_3,k_4] \end{array} \right\}.$$

Luego, por Corolario 2.4, obtenemos la siguiente presentación

$$U_5 = \left\langle \; v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6,k_1,k_2,k_3,k_4 \quad ; \quad R,S,T,V \; \right\rangle. \tag{3.26}$$

3.3. Caso General.

Lema 3.8. U_n *puede ser generado por* $n(n-1)/2$ *elementos.*

Demostración. Anotemos gen(G) la cantidad de generadores de cualquier grupo G. Por Lema 3.7.3. sabemos que $U_n \simeq K^{n-1} \rtimes U_{n-1}$, luego por Corolario 2.4, $\text{gen}(U_n) = \text{gen}(U_{n-1}) + \text{gen}(K^{n-1})$. Sabemos que $K = F_p$, entonces por Corolario 2.2, $\text{gen}(K^{n-1}) = n-1$. Recordando la descomposición en Observación 3.2 aplicaremos inducción sobre n para probar el lema. Sabemos que $U_1 = \{e\}$ y $U_2 \simeq K = F_p$ por lo tanto

$$\text{gen}(U_1) = 0 = \frac{1(1-1)}{2}, \quad (n=1), \quad \text{gen}(U_2) = 1 = \frac{2(2-1)}{2}, \quad (n=2).$$

Supongamos que $\text{gen}(U_{n-1}) = (n-1)(n-2)/2$ entonces

$$\text{gen}(U_n) = \frac{(n-1)(n-2)}{2} + (n-1) = \frac{n^2-n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

$\square$

Proposición 3.7. *Sean los grupos* K^{n-1} *y* U_{n-1} *presentados como sigue:*

$$K^{n-1} = \left\langle\ y_i \quad ; \quad y_i^p, [y_j, y_k],\ {\scriptstyle 1\leqslant i\leqslant n-1 \atop 1\leqslant j<k\leqslant n-1}\ \right\rangle,$$

$$U_{n-1} = \left\langle\ X_{n-1} \quad ; \quad R_{n-1}\ \right\rangle,$$

donde $X_{n-1} := \left\{\ x_i \quad ; \quad 1 \leqslant i \leqslant (n-1)(n-2)/2\ \right\}$.

Entonces, el conjunto V_n *de elementos conjugados* $x_i y_j x_i^{-1}$ *es igual al siguiente subconjunto de* K^{n-1}

$$\left\{\ [a_{i,j}, y_k], [a_{i,j}, y_j]y_i^{-1} \quad ; \quad {\scriptstyle 1\leqslant i<j\leqslant n-1 \atop 1\leqslant k\leqslant n-1,\ (j\neq k)}\ \right\}. \tag{3.27}$$

Demostración. Para comenzar consideremos la siguiente matriz de dimensión $n-1$. Nótese que la cantidad de elementos $a_{i,j}$ sobre la diagonal es igual a la cantidad de ceros bajo la diagonal

$$a := \begin{pmatrix} 1 & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n-1} \\ 0 & 1 & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_{n-2,n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.28}$$

Como a tiene $(n-1)^2$-elementos y su diagonal $(n-1)$-elementos, entonces la cantidad de ceros es:

$$\left|\left\{\ a_{i,j} \quad ; \quad 1 \leqslant i < j \leqslant n-1\ \right\}\right| = \frac{((n-1)^2 - (n-1))}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2},$$

que es la misma cantidad de elementos de X_{n-1}, por lo tanto podemos presentar U_{n-1} con generadores $a_{i,j}$ $(1 \leqslant i < j \leqslant n-1)$. Como $K = F_p \simeq \mathbb{Z}_p$, por Lema 3.6 podemos considerar los elementos generadores $a_{i,j}$ e y_i de la siguiente manera:

$$a_{i,j} := \begin{pmatrix} q_{i,j} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad y_i := \begin{pmatrix} I_{n-1} & 1_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donde $q_{i,j}$ es igual a la matríz identidad de dimensión $n-1$ salvo que en la posición (i,j) tiene un 1, y $1_i := (\underbrace{0,\dots,0}_{(i-1)-\text{veces}}, 1, \underbrace{0,\dots,0}_{(n-1-i)-\text{veces}})^t$. Con lo anterior podemos calcular los elementos conjugados $a_{i,j}y_k a_{i,j}^{-1}$ como sigue

$$a_{i,j}y_k a_{i,j}^{-1} = \begin{pmatrix} q_{i,j} & q_{i,j}1_k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{i,j}^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{n-1} & q_{i,j}1_k \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donde $q_{i,j}1_k = 1_k$ si $j \neq k$ y es igual a $1_i + 1_j$ en caso contrario.

Por lo tanto se tiene lo siguiente:

$$a_{i,j}y_k a_{i,j}^{-1} = \begin{pmatrix} I_{n-1} & 1_k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = y_k, \quad a_{i,j}y_j a_{i,j}^{-1} = \begin{pmatrix} I_{n-1} & 1_i + 1_j \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = y_i y_j.$$

Tenemos las relaciones

$$a_{i,j}y_k a_{i,j}^{-1} y_k^{-1} = e, \qquad a_{i,j}y_j a_{i,j}^{-1} y_j^{-1} y_i^{-1} = e.$$

Esto concluye la demostración. □

Por Corolario 2.2 sabemos que $K^m = \left\langle \; Y_m \quad ; \quad T_m \; \right\rangle$, donde

$$Y_m := \left\{ \; y_1, \dots, y_m \; \right\}, \quad T_m := \left\{ \; y_i^p, \; [y_j, y_k] \quad ; \quad {}_{1 \leqslant j < k \leqslant n}^{1 \leqslant i \leqslant n,} \; \right\}. \tag{3.29}$$

Además, $U_2 \simeq K = \left\langle \; Y_1 \quad ; \quad T_1 \; \right\rangle$. Utilizando la descomposición de U_n en la Observación 3.2 podemos determinar una presentación para U_n.

Más precisamente:

Teorema 3.9. U_n *tiene la siguiente presentación.*

$$\left\langle \; Y_1, \dots, Y_{n-1} \quad ; \quad T_1, \dots, T_{n-1}, V_3, \dots, V_n \; \right\rangle.$$

Demostración. Para probar el teorema ocuparemos inducción sobre n ya que particularmente conocemos los casos $n = 1, 2, 3, 4$. Primero es necesario notar que $V_1 = V_2 = \emptyset$, esto es claro al intentar construir la matriz en (3.28). Los casos triviales son U_1 y U_2, ocupando la presentación de U_3 en (3.19) se tiene

$$\begin{aligned}
\mathsf{U}_3 &\simeq \Big\langle\ a, b, c \quad ; \quad a^p, b^p, c^p, [a,b], [c,a], [c,b]a^{-1}\ \Big\rangle, \\
&\simeq \Big\langle\ y_1, y_2, a_{1,2} \quad ; \quad y_1^p, y_2^p, a_{1,2}^p, [y_1,y_2], [a_{1,2},y_1], [a_{1,2},y_2]y_1^{-1}\ \Big\rangle, \\
&= \Big\langle\ a_{1,2}, \mathsf{Y}_2 \quad ; \quad a_{1,2}^p, \mathsf{T}_2, \mathsf{V}_3\ \Big\rangle, \\
&= \Big\langle\ \mathsf{Y}_1, \mathsf{Y}_2 \quad ; \quad \mathsf{T}_1, \mathsf{T}_2, \mathsf{V}_3\ \Big\rangle,
\end{aligned}$$

ya que $\mathsf{U}_2 \simeq \mathsf{K} = \Big\langle\ y_1 \quad ; \quad y_1^p\ \Big\rangle \simeq \Big\langle\ a_{1,2} \quad ; \quad a_{1,2}^p\ \Big\rangle$ y

$$\mathsf{T}_2 = \Big\{\ y_1^p, y_2^p, [y_1,y_2]\ \Big\}, \quad \mathsf{V}_3 = \Big\{\ [a_{1,2},y_1], [a_{1,2},y_2]y_1{}^{-1}\ \Big\}.$$

Para $n = 4$ utilicemos la presentación en (3.24) como sigue

$$\begin{aligned}
\mathsf{U}_4 &\simeq \Big\langle\ a, b, c, x, y, z \quad ; \quad a^p, b^p, c^p, [a,b], [c,a], [c,b]a^{-1}, \mathsf{R}, \mathsf{S}\ \Big\rangle, \\
&\simeq \Big\langle\ \mathsf{Y}_1, \mathsf{Y}_2, \mathsf{Y}_3 \quad ; \quad \mathsf{T}_1, \mathsf{T}_2, \mathsf{T}_3, \mathsf{V}_3, \mathsf{V}_4\ \Big\rangle,
\end{aligned}$$

donde $\mathsf{T}_3 = \mathsf{R}$, $\mathsf{V}_4 = \mathsf{S}$, y

$$\begin{array}{lll}
\mathsf{Y}_1 = \Big\{\ c\ \Big\}, & \mathsf{Y}_2 = \Big\{\ a, b\ \Big\}, & \mathsf{Y}_3 = \Big\{\ x, y, z\ \Big\}, \\
\mathsf{V}_3 = \Big\{\ [c,a], [c,b]a^{-1}\ \Big\}, & \mathsf{T}_1 = \Big\{\ c^p\ \Big\}, & \mathsf{T}_2 = \Big\{\ a^p, b^p, [a,b]\ \Big\}.
\end{array}$$

Nótese que al definir los conjuntos $\mathsf{Y}_i, \mathsf{T}_i, \mathsf{V}_j$ basta tomar conjuntos en correspondencia biyectiva. Ahora supongamos válido el teorema hasta $n-1$ y probaremos para n. Por Lema 3.7 sabemos que $\mathsf{U}_n \simeq \mathsf{K}^{n-1} \rtimes \mathsf{U}_{n-1}$, además respectivamente por Corolario 2.2 e hipótesis inductiva se tiene

$$\mathsf{K}^{n-1} \simeq \Big\langle\ \mathsf{Y}_{n-1} \quad ; \quad \mathsf{T}_{n-1}\ \Big\rangle,$$

$$\mathsf{U}_{n-1} \simeq \Big\langle\ \mathsf{Y}_1, \ldots, \mathsf{Y}_{n-2} \quad ; \quad \mathsf{T}_1, \ldots, \mathsf{T}_{n-2}, \mathsf{V}_1, \ldots, \mathsf{V}_{n-1}\ \Big\rangle.$$

Así, por Corolario 2.4 se obtiene que

$$\begin{aligned}
U_n &\simeq K^{n-1} \rtimes U_{n-1}, \\
&\simeq \left\langle \; Y_1, \ldots, Y_{n-2}, Y_{n-1} \quad ; \quad T_1, \ldots, T_{n-2}, T_{n-1}, V_1, \ldots, V_{n-1}, V_n \; \right\rangle, \\
&= \left\langle \; Y_1, \ldots, Y_{n-1} \quad ; \quad T_1, \ldots, T_{n-1}, V_1, \ldots, V_n \; \right\rangle.
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Notar que $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n-1} Y_k = \left\{ \; a_{i,j} \quad ; \quad 1 \leqslant i < j \leqslant n \; \right\}$. Esto concluye la demostración.

□

Capítulo 4

Grupo de Trenzas Puras (P_n)

1. Trenzas

1.1. Grupo de Trenzas (B_n).

Definición 4.1. *Sea n un entero positivo. Denotemos por B_n el grupo de trenzas de n-cuerdas. Es decir, B_n es el grupo presentado con generadores*

$$\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}, \tag{4.1}$$

y las relaciones

$$\begin{cases} \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i & ; \quad i, j = 1, \ldots, n-1, |i-j| > 1, \\ \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} & ; \quad i = 1, \ldots, n-2. \end{cases} \tag{4.2}$$

Éstas relaciones son llamadas relaciones de trenzas.

Se conviene que $B_1 := \{e\}$.

Observación 4.1. Nótese que B_2 es un grupo cíclico infinito isomorfo a $\mathbb{Z}$ y B_n no es conmutativo para $n \geqslant 3$.

Proposición 4.1. *La siguiente aplicación es un epimorfismo de grupos*

$$\pi : B_n \to S_n, \quad \pi(\sigma_i) := s_i, \qquad (i = 1, \ldots, n-1). \tag{4.3}$$

El cual se llama epimorfismo canónico de B_n en S_n.

Demostración. Sea X el conjunto de generadores σ_i de B_n. Definamos la aplicación $\varphi : X \to S_n$, tal que $\varphi(\sigma_i) := s_i$. Nótese que al aplicar φ a cada σ_i en las relaciones de trenzas, obtenemos relaciones en la presentación de Coxeter de

S_n. Por Proposición 2.2 existe $\widetilde{\varphi} : B_n \to S_n$, denotada π, que extiende a φ, esto es $\pi \circ \widehat{\iota}_X^{B_n} \circ \iota_X^{L(X)} = \varphi$ $(\pi_{|_X} = \varphi)$. En un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, hook, "\iota_X^{L(X)}"] \arrow[d, "\varphi"] \arrow[dr, bend right=60, "\iota_X^{B_n}"'] & L(X) \arrow[dl, dashed, "\widehat{\varphi}"] \arrow[d, dashed, "\widehat{\iota}_X^{B_n}"] \\
S_n & B_n \arrow[l, dotted, "\pi"]
\end{tikzcd}$$

Sea $s_{i_1} \cdots s_{i_m} \in S_n$, existe $\sigma_{i_1} \cdots \sigma_{i_m} \in B_n$ tal que

$$\pi(\sigma_{i_1} \cdots \sigma_{i_m}) = \pi(\sigma_{i_1}) \cdots \pi(\sigma_{i_m}) = \varphi(\sigma_{i_1}) \cdots \varphi(\sigma_{i_m}) = s_{i_1} \cdots s_{i_m}.$$

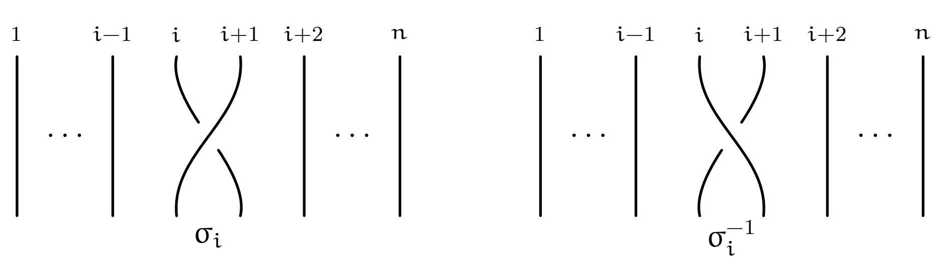
Esto demuestra que π es un epimorfismo. □

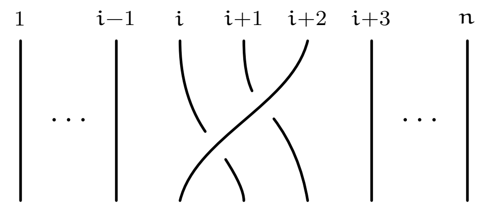
Definición 4.2. *El homomorfismo* π *definido en* (4.3) *se llama proyección de* B_n *en* S_n.

Mediante la Proposición 2.2 es fácil ver que la aplicación de B_n en B_{n+1} que envía $\sigma_i \mapsto \sigma_i$ es un monomorfismo de grupos. Esta es llamada inclusión natural y se denota ι. Así, tenemos la siguiente cadena de inclusiones de grupos:

$$B_1 \subset B_2 \subset \cdots \subset B_k \subset B_{k+1} \subset \cdots \tag{4.4}$$

Geométricamente podemos representar cada σ_i, respectivamente σ_i^{-1}, mediante el siguiente diagrama:





$$\sigma_{i+1}\sigma_i$$

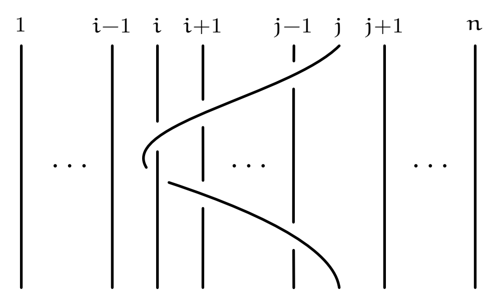
Para obtener más información acerca de la construcción geométrica de B_n se recomienda ver [**Kas08**] y [**Kur99**].

1.2. Grupo de Trenzas Puras (P_n).

Definición 4.3. *El grupo de trenzas puras de* n*-cuerdas, denotado* P_n*, es el núcleo de la proyección* π *de* B_n *en* S_n*, en* (4.3)*, esto es:*

$$P_n := \mathrm{Ker}(\pi) = \left\{ \ \beta \in B_n \quad ; \quad \pi(\beta) = e \ \right\}.$$

Los elementos de P_n son llamados trenzas puras y pueden ser representados geométricamente como las trenzas en que cada cuerda con inicio en el lugar i termina en el mismo lugar i, para todo $i = 1, \dots, n$. A continuación un ejemplo de trenza pura:



$$\sigma_{j-1}\sigma_{j-2}\cdots\sigma_{i+1}\sigma_i^2\sigma_{i+1}^{-1}\cdots\sigma_{j-2}^{-1}\sigma_{j-1}^{-1} \tag{4.5}$$

Este elemento se denota $\tau_{i,j}$, posteriormente veremos que los elementos $\tau_{i,j}$ forman un sistema de generadores del grupo de Trenzas Puras.

Nótese que P_n es un subgrupo normal de B_n. Además:

$$B_n/P_n \simeq S_n, \qquad [B_n : P_n] = n!.$$

Esto nos permitirá determinar un transversal de Schreier para B_n según P_n, el cual será usado para calcular una presentación para P_n, según el método de Reidemeister-Schreier.

2. Una Presentación del Grupo de Trenzas Puras

En lo que sigue estudiaremos como determinar una presentación para el grupo de Trenzas Puras P_n guiados por el trabajo realizado por Kunio Murasugi y Bohdan I. Kurpita. Para esto comencemos definiendo un conjunto (grupo), denotado L_n, el cual nos permitirá calcular inductivamente esta presentación.

Definición 4.4. *Para todo* $1 \leqslant k \leqslant n$ *se define el siguiente conjunto:*

$$L_k := \left\{ \ \beta \in B_n \quad ; \quad \pi(\beta)(i) = i, \ k \leqslant i \leqslant n \ \right\}. \tag{4.6}$$

Lema 4.1. L_k *es un grupo, más aún* $L_k \leqslant L_{k+1}$.

Demostración. Es claro que $L_k \neq \emptyset$, ya que $e \in L_k$. Consideremos $\beta_1, \beta_2 \in L_k$, como $\pi(\beta_1)(i) = \pi(\beta_2)(i) = i$ para todo $i = k, \dots, n$, entonces:

$$\pi(\beta_1\beta_2^{-1})(i) = \pi(\beta_1)(\pi(\beta_2)^{-1}(i)) = \pi(\beta_1)(i) = i.$$

Luego $L_k \leqslant B_n$, es claro además que $L_k \subset L_{k+1}$, por lo tanto $L_k \leqslant L_{k+1}$. □

2.1. Presentación de L_n.

A continuación calcularemos una presentación del grupo L_n, para luego, mediante esta misma, determinar una presentación del grupo L_{n-1}.

Lema 4.2.

1. $[B_n : L_n] = n$.
2. *Los siguientes elementos* u_i, *forman un transversal de Schreier para* B_n *según* L_n

$$u_i := \sigma_{n-1}\sigma_{n-2}\cdots\sigma_{n-i+1}, \qquad (1 \leqslant i \leqslant n). \tag{4.7}$$

Demostración. Consideremos $\beta_1, \beta_2 \in B_n$entonces::

$$\begin{aligned} \beta_1 L_n = \beta_2 L_n \quad &\Leftrightarrow \quad \beta_1\beta_2^{-1} \in L_n, \\ &\Leftrightarrow \quad \pi(\beta_1\beta_2^{-1})(n) = n, \\ &\Leftrightarrow \quad \pi(\beta_1)(n) = \pi(\beta_2)(n). \end{aligned}$$

Como $\pi(\beta_1)(n)$ se encuentra entre 1 y n, entonces $[B_n : L_n] = n$.

Llamemos U el conjunto de elementos en (4.7). Notemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\pi(u_i) &= \pi(\sigma_{n-1}\sigma_{n-2}\cdots\sigma_{n-i+1}),\\
&= s_{n-1}s_{n-2}\cdots s_{n-i+1},\\
&= (n-1\ n)(n-2\ n-1)\cdots(n-i+1\ n-i+2),\\
&= (n\ n-1)(n-1\ n-2)\cdots(n-i+2\ n-i+1),\\
&= (n\ n-i+1).
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\pi(u_i)(n) = n-i+1$, como $1 \leqslant i \leqslant n$ entonces $1 \leqslant n-i+1 \leqslant n$. Luego, U es un sistema de representantes de L_n en B_n. Es claro que $U \in (PS)$, además $u_1 = e$. Así, U es un transversal de Schreier para B_n según L_n. $\square$

Con lo anterior tenemos todos los ingredientes para determinar una presentación del subgrupo L_n mediante el método de Reidemeister-Schreier. Primero calcularemos un sistema de generadores para L_n según B_n, es decir, calcularemos los elementos $u\sigma_i^{\pm1}[u\sigma_i^{\pm1}]^{-1}$ del Lema 1.17, donde $u \in U$ e $i = 1, \ldots, n-1$.

Lema 4.3. *El subgrupo* L_n *es generado por los siguientes elementos:*

$$\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-2}, \quad a_1, \ldots, a_{n-1}, \tag{4.8}$$

donde

$$a_j := (\sigma_{n-1}\cdots\sigma_{j+1})\sigma_j^2(\sigma_{j+1}^{-1}\cdots\sigma_{n-1}^{-1}), \qquad (1 \leqslant j \leqslant n-1). \tag{4.9}$$

Demostración. Calculemos primero los representantes de clase $[u_i\sigma_j]$, nótese antes que $\pi(\sigma_j)(n) \neq n$, si y sólo sí, $j \neq n-1$.

Distingamos cuatro casos:

Caso 1: Si $j < n-i$. Como $i \geqslant 1$ entonces $j \neq n-1$, tenemos:

$$\begin{aligned}
\pi\left(u_i\sigma_j^{\pm1}\right)(n) &= \pi\left(\sigma_{n-1}\sigma_{n-2}\cdots\sigma_{n-i+1}\sigma_j^{\pm1}\right)(n),\\
&= (s_{n-1}s_{n-2}\cdots s_{n-i+1}s_j)(n),\\
&= (s_{n-1}s_{n-2}\cdots s_{n-i+1})((s_j)(n)),\\
&= (s_{n-1}s_{n-2}\cdots s_{n-i+1})(n),\\
&= n-i+1.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\left[u_i\sigma_j^{\pm 1}\right] = u_i = \sigma_{n-1}\sigma_{n-2}\cdots\sigma_{n-i+1}$.

Caso 2: Si $j > n-i+1$. Notar que $|(j-1)-(n-i+1)| \geqslant 2$, tenemos:

$$
\begin{aligned}
\pi\left(u_i\sigma_j^{\pm 1}\right)(n) &= \pi\left(\sigma_{n-1}\sigma_{n-2}\cdots\sigma_{n-i+1}\sigma_j^{\pm 1}\right)(n),\\
&= (s_{n-1}s_{n-2}\cdots s_{n-i+1}s_j)(n),\\
&= (s_{n-1}s_{n-2}\cdots s_j s_{j-1} s_j\cdots s_{n-i+1})(n),\\
&= (s_{n-1}s_{n-2}\cdots s_{j-1} s_j s_{j-1}\cdots s_{n-i+1})(n),\\
&= (s_{j-1}s_{n-1}s_{n-2}\cdots s_{n-i+1})(n),\\
&= s_{j-1}(n-i+1),\\
&= n-i+1.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $\left[u_i\sigma_j^{\pm 1}\right] = u_i = \sigma_{n-1}\sigma_{n-2}\cdots\sigma_{n-i+1}$.

Caso 3: Si $j = n-i$, entonces:

$$
\begin{aligned}
\pi\left(u_i\sigma_j^{\pm 1}\right)(n) &= \pi\left(\sigma_{n-1}\sigma_{n-2}\cdots\sigma_{n-i+1}\sigma_j^{\pm 1}\right)(n),\\
&= \pi\left(\sigma_{n-1}\sigma_{n-2}\cdots\sigma_{n-i+1}\sigma_{n-i}^{\pm 1}\right)(n),\\
&= \pi\left(\sigma_{n-1}\sigma_{n-2}\cdots\sigma_{n-i+1}\sigma_{n-(i+1)+1}^{\pm 1}\right)(n),\\
&= (s_{n-1}s_{n-2}\cdots s_{n-i+1}s_{n-(i+1)+1})(n),\\
&= n-(i+1)+1,\\
&= j.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $\left[u_i\sigma_j^{\pm 1}\right] = u_{i+1} = u_{n-j+1} = \sigma_{n-1}\sigma_{n-2}\cdots\sigma_{j+1}\sigma_j$.

Caso 4: Si $j = n-i+1$, entonces

$$
\begin{aligned}
\pi\left(u_i\sigma_j^{\pm 1}\right)(n) &= \pi\left(\sigma_{n-1}\sigma_{n-2}\cdots\sigma_{n-i+1}\sigma_j^{\pm 1}\right)(n),\\
&= \pi\left(\sigma_{n-1}\sigma_{n-2}\cdots\sigma_{n-i+1}\sigma_{n-i+1}^{\pm 1}\right)(n),\\
&= (s_{n-1}s_{n-2}\cdots s_{n-i+1}s_{n-i+1})(n),\\
&= (s_{n-1}s_{n-2}\cdots s_{n-i+2})(n),\\
&= (s_{n-1}s_{n-2}\cdots s_{n-(i-1)+1})(n),\\
&= n-i+2,\\
&= j+1.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $\left[u_i\sigma_j^{\pm 1}\right] = u_{i-1} = u_{n-j} = \sigma_{n-1}\sigma_{n-2}\cdots\sigma_{j+1}$.

Luego, los representantes de clase son:

$$\left[\, u_i\sigma_j^{\pm 1} \,\right] = \begin{cases} u_i = \sigma_{n-1}\cdots\sigma_{n-i+1} & ; \quad j < n-i, \text{ o } j > n-i+1, \\ u_{i+1} = \sigma_{n-1}\cdots\sigma_j & ; \quad j = n-i, \\ u_{i-1} = \sigma_{n-1}\cdots\sigma_{j+1} & ; \quad j = n-i+1. \end{cases} \tag{4.10}$$

Calculemos ahora el sistema de generadores para L_n en cuatro posibles casos:

Caso 1: Si $j < n-i$, entonces:

$$\begin{aligned} u_i\sigma_j^{\pm 1}\left[\, u_i\sigma_j^{\pm 1} \,\right]^{-1} &= \sigma_{n-1}\sigma_{n-2}\cdots\sigma_{n-i+1}\sigma_j^{\pm 1}\sigma_{n-i+1}^{-1}\cdots\sigma_{n-2}^{-1}\sigma_{n-1}^{-1}, \\ &= \sigma_j^{\pm 1}\sigma_{n-1}\sigma_{n-2}\cdots\sigma_{n-i+1}\sigma_{n-i+1}^{-1}\cdots\sigma_{n-2}^{-1}\sigma_{n-1}^{-1}, \\ &= \sigma_j^{\pm 1}. \end{aligned}$$

Caso 2: Si $j > n-i+1$, entonces:

$$\begin{aligned} u_i\sigma_j^{\pm 1}\left[\, u_i\sigma_j^{\pm 1} \,\right]^{-1} &= \sigma_{n-1}\sigma_{n-2}\cdots\sigma_{n-i+1}\sigma_j^{\pm 1}\sigma_{n-i+1}^{-1}\cdots\sigma_{n-2}^{-1}\sigma_{n-1}^{-1}, \\ &= \sigma_{n-1}\sigma_{n-2}\cdots\sigma_j\sigma_{j-1}\sigma_j^{\pm 1}\cdots\sigma_{n-i+1}\sigma_{n-i+1}^{-1}\cdots\sigma_{n-2}^{-1}\sigma_{n-1}^{-1}, \\ &= \sigma_{n-1}\sigma_{n-2}\cdots\sigma_{j-1}^{\pm 1}\sigma_j\sigma_{j-1}\cdots\sigma_{n-i+1}\sigma_{n-i+1}^{-1}\cdots\sigma_{n-2}^{-1}\sigma_{n-1}^{-1}, \\ &= \sigma_{j-1}^{\pm 1}\sigma_{n-1}\sigma_{n-2}\cdots\sigma_{n-i+1}\sigma_{n-i+1}^{-1}\cdots\sigma_{n-2}^{-1}\sigma_{n-1}^{-1}, \\ &= \sigma_{j-1}^{\pm 1}. \end{aligned}$$

Caso 3: Si $j = n-i$, entonces:

$$\begin{aligned} u_i\sigma_j\left[\, u_i\sigma_j \,\right]^{-1} &= \sigma_{n-1}\sigma_{n-2}\cdots\sigma_{n-i+1}\sigma_j\sigma_j^{-1}\sigma_{j+1}^{-1}\cdots\sigma_{n-2}^{-1}\sigma_{n-1}^{-1}, \\ &= \sigma_{n-1}\sigma_{n-2}\cdots\sigma_{j+1}\sigma_j\sigma_j^{-1}\sigma_{j+1}^{-1}\cdots\sigma_{n-2}^{-1}\sigma_{n-1}^{-1}, \\ &= e. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_i\sigma_j^{-1}\left[\, u_i\sigma_j^{-1} \,\right]^{-1} &= \sigma_{n-1}\sigma_{n-2}\cdots\sigma_{n-i+1}\sigma_j^{-1}\sigma_j^{-1}\sigma_{j+1}^{-1}\cdots\sigma_{n-2}^{-1}\sigma_{n-1}^{-1}, \\ &= \sigma_{n-1}\sigma_{n-2}\cdots\sigma_{j+1}\sigma_j^{-2}\sigma_{j+1}^{-1}\cdots\sigma_{n-2}^{-1}\sigma_{n-1}^{-1}, \\ &= a_j^{-1}. \end{aligned}$$

Caso 4: Si $j = n-i+1$, entonces:

$$\begin{aligned} u_i\sigma_j\left[\, u_i\sigma_j \,\right]^{-1} &= \sigma_{n-1}\sigma_{n-2}\cdots\sigma_{n-i+1}\sigma_j\sigma_{j+1}^{-1}\cdots\sigma_{n-2}^{-1}\sigma_{n-1}^{-1}, \\ &= \sigma_{n-1}\sigma_{n-2}\cdots\sigma_{j+1}\sigma_j\sigma_j\sigma_{j+1}^{-1}\cdots\sigma_{n-2}^{-1}\sigma_{n-1}^{-1}, \\ &= (\sigma_{n-1}\sigma_{n-2}\cdots\sigma_{j+1})\sigma_j^2(\sigma_{j+1}^{-1}\cdots\sigma_{n-2}^{-1}\sigma_{n-1}^{-1}), \\ &= a_j. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_i\sigma_j^{-1}\left[u_i\sigma_j^{-1}\right]^{-1} &= \sigma_{n-1}\sigma_{n-2}\cdots\sigma_{n-i+1}\sigma_j^{-1}\sigma_{j+1}^{-1}\cdots\sigma_{n-2}^{-1}\sigma_{n-1}^{-1}, \\ &= \sigma_{n-1}\sigma_{n-2}\cdots\sigma_{j+1}\sigma_j\sigma_j^{-1}\sigma_{j+1}^{-1}\cdots\sigma_{n-2}^{-1}\sigma_{n-1}^{-1}, \\ &= e. \end{aligned}$$

Por lo tanto L_n es generado por los siguientes elementos:

$$u_i\sigma_j\left[u_i\sigma_j\right]^{-1} = \begin{cases} \sigma_j & ; \quad j < n-i, \\ \sigma_{j-1} & ; \quad j > n-i+1, \\ e & ; \quad j = n-i, \\ a_j & ; \quad j = n-i+1. \end{cases} \tag{4.11}$$

$$u_i\sigma_j^{-1}\left[u_i\sigma_j^{-1}\right]^{-1} = \begin{cases} \sigma_j^{-1} & ; \quad j < n-i, \\ \sigma_{j-1}^{-1} & ; \quad j > n-i+1, \\ a_j^{-1} & ; \quad j = n-i, \\ e & ; \quad j = n-i+1. \end{cases} \tag{4.12}$$

Como $1 \leqslant i \leqslant n$, entonces

$$0 \leqslant n-i \leqslant n-1, \qquad 1 \leqslant n-i+1 \leqslant n.$$

Luego, por Lema 1.18, los elementos en (4.11), generan a L_n, estos son:

$$\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-2}, \quad a_1, \ldots, a_{n-1}.$$

Esto demuestra el lema. □

Por Lema 4.3 sabemos que L_n está generado por los elementos σ_i y a_j. Luego, para determinar una presentación de L_n, basta encontrar el conjunto de relaciones R en (4.14), utilizando el método de Reidemeister Schreier. Así, debemos calcular los elementos uru^{-1} del Corolario 2.3, con $u \in U$ y r variando en las relaciones de B_n. Tenemos el siguiente teorema:

Teorema 4.4. *El grupo L_n tiene la siguiente presentación:*

$$L_n = \left\langle\ \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-2}, a_1, \ldots, a_{n-1} \quad ; \quad R\ \right\rangle, \tag{4.13}$$

donde R *viene dado por las siguientes relaciones:*

$$\begin{cases} (1) & \sigma_j\sigma_k = \sigma_k\sigma_j & ; \quad |j-k|>1, \\ (2) & \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} & ; \quad i=1,\dots,n-3, \\ (3) & \sigma_i a_j \sigma_i^{-1} = a_j & ; \quad j\neq i, i+1, \\ (4) & \sigma_i a_i \sigma_i^{-1} = a_{i+1} & ; \quad i=1,\dots,n-2, \\ (5) & \sigma_i a_{i+1}\sigma_i^{-1} = a_{i+1}^{-1}a_i a_{i+1} & ; \quad i=1,\dots,n-2. \end{cases} \tag{4.14}$$

DEMOSTRACIÓN. (ver Apéndice A) □

Observación 4.2. Nótese que tenemos la siguiente cadena de inclusiones:

$$B_n \supset L_n \supset L_{n-1} \supset \cdots \supset L_{k+1} \supset L_k \supset \cdots \supset L_2 \supset L_1 = P_n,$$

además $L_1 = L_2 = P_n$.

Nuestro objetivo principal es determinar una presentación para el grupo de Trenzas Puras P_n. Por lo tanto, a continuación calcularemos una presentación del grupo L_{n-1}, de esta manera podremos generalizar inductivamente, como son los generadores y relaciones para cualquier k entre 1 y n. En particular, determinaremos una presentación para $L_1 = P_1$.

2.2. Presentación de L_{n-1}.

Antes de comenzar a calcular una presentación de L_{n-1}, estudiemos en general, cual es el índice y de que forma es un transversal de Schreier para L_{k+1} según L_k.

Lema 4.5.

1. $[L_{k+1} : L_k] = k$, *para todo* $k = 1, \dots, n-1$.
2. *Lo siguientes elementos* $w_{k,i}$ *forman un transversal de Schreier para* L_{k+1} *según* L_k.

$$w_{k,i} := \sigma_{k-1}\sigma_{k-2}\cdots\sigma_i, \quad w_{k,k} := e, \qquad (1 \leqslant i \leqslant k). \tag{4.15}$$

DEMOSTRACIÓN. Veamos la primera afirmación. Consideremos $\beta_1, \beta_2 \in L_{k+1}$, entonces:

$$\begin{aligned} \beta_1 L_k = \beta_2 L_k \quad &\Leftrightarrow \quad \pi(\beta_1\beta_2^{-1})(k) = k, \\ &\Leftrightarrow \quad \pi(\beta_1)(k) = \pi(\beta_2)(k). \end{aligned}$$

Como $\pi(\beta_1)(t) = t$ para todo $k < t \leqslant n$, se tiene $1 \leqslant \pi(\beta_1) \leqslant k$, por lo tanto $[L_{k+1} : L_k] = k$.

Para demostrar la segunda afirmación notemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \pi(w_{k,i}) &= \pi(\sigma_{k-1}\sigma_{k-2}\cdots\sigma_i), \\ &= \pi(\sigma_{k-1})\pi(\sigma_{k-2})\cdots\pi(\sigma_i), \\ &= s_{k-1}s_{k-2}\cdots s_i, \\ &= (k-1\ k)(k-2\ k-1)\cdots(i\ i+1), \\ &= (k\ k-1)(k-1\ k-2)\cdots(i+1\ i), \\ &= (k\ i). \end{aligned}$$

Es claro ahora que los elementos $w_{k,i}$ forman un transversal de Schreier para L_{k+1} según L_k. Luego el lema queda demostrado. $\square$

Definición 4.5. *Para* $1 \leqslant i < j \leqslant n$ *se define el siguiente elemento:*

$$\tau_{i,j} := (\sigma_{j-1}\sigma_{j-2}\cdots\sigma_{i+1})\sigma_i^2(\sigma_{i+1}^{-1}\cdots\sigma_{j-2}^{-1}\sigma_{j-1}^{-1}). \tag{4.16}$$

Por convención $\tau_{j,j} := e$.

Observación 4.3. Para todo $i = 1, \ldots, n-1$ se tiene:

$$w_{n,i} = u_{n-i+1}, \qquad \tau_{i,n} = a_i.$$

El siguiente es un lema técnico, el cual nos ayudará en el resto de este capítulo.

Lema 4.6. *Tenemos:*

1. *Si* $1 \leqslant r < s < i < j \leqslant n$ *o* $1 \leqslant r < i < j < s \leqslant n$, *entonces:*

$$\tau_{i,j}^{\pm 1}\tau_{r,s}^{\pm 1} = \tau_{r,s}^{\pm 1}\tau_{i,j}^{\pm 1}. \tag{4.17}$$

2. *Si* $1 \leqslant r < i < s < j \leqslant n$, *entonces:*

$$\sigma_{s-1}\sigma_{s-2}\cdots\sigma_r\tau_{i,j}^{\pm 1}\sigma_r^{-1}\cdots\sigma_{s-2}^{-1}\sigma_{s-1}^{-1} = \tau_{s,j}^{-1}\tau_{i-1,j}^{\pm 1}\tau_{s,j}. \tag{4.18}$$

3. *Si* $1 \leqslant i < k < j \leqslant n$, *entonces:*

$$\sigma_{k-1}\sigma_{k-2}\cdots\sigma_i\tau_{i,j}^{\pm 1}\sigma_i^{-1}\cdots\sigma_{k-2}^{-1}\sigma_{k-1}^{-1} = \tau_{k,j}^{\pm 1}. \tag{4.19}$$

4. *Si* $1 \leqslant i < t < k < j \leqslant n$, *entonces:*

$$\sigma_{k-1}\sigma_{k-2}\cdots\sigma_t\tau_{i,j}^{\pm1}\sigma_t^{-1}\cdots\sigma_{k-2}^{-1}\sigma_{k-1}^{-1} = \tau_{i,j}^{\pm1}. \tag{4.20}$$

Demostración.

1. Si $1 \leqslant r < s < i < j \leqslant n$, entonces

$$r < r+1 < \cdots < s-1 < s < i < i+1 < \cdots < j-1 < j.$$

Notemos que para $r+1 \leqslant a \leqslant s-1$ y $i+1 \leqslant b \leqslant j-1$, se tiene

$$|a-b| \geqslant 3, \quad |a-i| \geqslant 2, \quad |r-b| \geqslant 3, \quad |r-i| \geqslant 2.$$

Así, se obtiene lo requerido.

$$\begin{aligned}
\tau_{i,j}^{\pm1}\tau_{r,s}^{\pm1} &= (\sigma_{j-1}\cdots\sigma_{i+1})\sigma_i^{\pm2}(\sigma_{i+1}^{-1}\cdots\sigma_{j-1}^{-1})(\sigma_{s-1}\cdots\sigma_{r+1})\sigma_r^{\pm2}(\sigma_{r+1}^{-1}\cdots\sigma_{s-1}^{-1}),\\
&= (\sigma_{s-1}\cdots\sigma_{r+1})\sigma_r^{\pm2}(\sigma_{r+1}^{-1}\cdots\sigma_{s-1}^{-1})(\sigma_{j-1}\cdots\sigma_{i+1})\sigma_i^{\pm2}(\sigma_{i+1}^{-1}\cdots\sigma_{j-1}^{-1}),\\
&= \tau_{r,s}^{\pm1}\tau_{i,j}^{\pm1}.
\end{aligned}$$

Si $1 \leqslant r < i < j < s \leqslant n$. Notemos que para todo $i \leqslant k \leqslant j-1$ se tiene

$$\begin{aligned}
\tau_{r,s}^{\pm1}\sigma_k^{\pm1} &= (\sigma_{s-1}\cdots\sigma_{r+1})\sigma_r^{\pm2}(\sigma_{r+1}^{-1}\cdots\sigma_{s-1}^{-1})\sigma_k^{\pm1},\\
&= (\sigma_{s-1}\cdots\sigma_{r+1})\sigma_r^{\pm2}(\sigma_{r+1}^{-1}\cdots\sigma_k^{-1}\sigma_{k+1}^{-1}\sigma_k^{\pm1}\cdots\sigma_{s-1}^{-1}),\\
&= (\sigma_{s-1}\cdots\sigma_{r+1})\sigma_r^{\pm2}(\sigma_{r+1}^{-1}\cdots\sigma_{k+1}^{\pm1}\sigma_k^{-1}\sigma_{k+1}^{-1}\cdots\sigma_{s-1}^{-1}),\\
&= (\sigma_{s-1}\cdots\sigma_{k+1}\sigma_k\sigma_{k+1}^{\pm1}\cdots\sigma_{r+1})\sigma_r^{\pm2}(\sigma_{r+1}^{-1}\cdots\sigma_{s-1}^{-1}),\\
&= (\sigma_{s-1}\cdots\sigma_k^{\pm1}\sigma_{k+1}\sigma_k\cdots\sigma_{r+1})\sigma_r^{\pm2}(\sigma_{r+1}^{-1}\cdots\sigma_{s-1}^{-1}),\\
&= \sigma_k^{\pm1}(\sigma_{s-1}\cdots\sigma_{r+1})\sigma_r^{\pm2}(\sigma_{r+1}^{-1}\cdots\sigma_{s-1}^{-1}),\\
&= \sigma_k^{\pm1}\tau_{r,s}^{\pm1}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\tau_{r,s}^{\pm1}\tau_{i,j}^{\pm1} &= (\sigma_{s-1}\cdots\sigma_{r+1})\sigma_r^{\pm2}(\sigma_{r+1}^{-1}\cdots\sigma_{s-1}^{-1})(\sigma_{j-1}\cdots\sigma_{i+1})\sigma_i^{\pm2}(\sigma_{i+1}^{-1}\cdots\sigma_{j-1}^{-1}),\\
&= (\sigma_{j-1}\cdots\sigma_{i+1})\sigma_i^{\pm2}(\sigma_{i+1}^{-1}\cdots\sigma_{j-1}^{-1})(\sigma_{s-1}\cdots\sigma_{r+1})\sigma_r^{\pm2}(\sigma_{r+1}^{-1}\cdots\sigma_{s-1}^{-1}),\\
&= \tau_{i,j}^{\pm1}\tau_{r,s}^{\pm1}.
\end{aligned}$$

2. Si $1 \leqslant r < i < s < j \leqslant n$, entonces:

$$
\begin{aligned}
\tau_{s,j}^{-1}\tau_{i-1,j}^{\pm 1}\tau_{s,j} &= (\sigma_{j-1}\cdots\sigma_{s+1})\sigma_s^{-2}(\sigma_{s+1}^{-1}\cdots\sigma_{j-1}^{-1})(\sigma_{j-1}\cdots\sigma_i)\sigma_{i-1}^{\pm 2}(\sigma_i^{-1}\cdots\sigma_{j-1}^{-1})\\
&\quad (\sigma_{j-1}\cdots\sigma_{s+1})\sigma_s^{2}(\sigma_{s+1}^{-1}\cdots\sigma_{j-1}^{-1}),\\
&= (\sigma_{j-1}\cdots\sigma_{s+1})\sigma_s^{-1}(\sigma_{s-1}\cdots\sigma_i)\sigma_{i-1}^{\pm 2}(\sigma_i^{-1}\cdots\sigma_{s-1}^{-1})\sigma_s(\sigma_{s+1}^{-1}\cdots\sigma_{j-1}^{-1}),\\
&= (\sigma_{j-1}\cdots\sigma_{s+1})\sigma_s^{-1}(\sigma_{s-1}\cdots\sigma_i)\sigma_{i-1}^{\pm 1}(\sigma_s\cdots\sigma_r\sigma_r^{-1}\cdots\sigma_s^{-1})\sigma_{i-1}^{\pm 1}\\
&\quad (\sigma_i^{-1}\cdots\sigma_{s-1}^{-1})\sigma_s(\sigma_{s+1}^{-1}\cdots\sigma_{j-1}^{-1}),\\
&= (\sigma_{j-1}\cdots\sigma_{s+1})\sigma_s^{-1}(\sigma_{s-1}\cdots\sigma_i)(\sigma_s\cdots\sigma_{i-1}^{\pm 1}\sigma_i\sigma_{i-1}\cdots\sigma_r\sigma_r^{-1}\cdots\\
&\quad \sigma_{i-1}^{-1}\sigma_i^{-1}\sigma_{i-1}^{\pm 1}\cdots\sigma_s^{-1})(\sigma_i^{-1}\cdots\sigma_{s-1}^{-1})\sigma_s(\sigma_{s+1}^{-1}\cdots\sigma_{j-1}^{-1}),\\
&= (\sigma_{j-1}\cdots\sigma_{s+1})\sigma_s^{-1}(\sigma_{s-1}\cdots\sigma_i)(\sigma_s\cdots\sigma_i\sigma_{i-1}\sigma_i^{\pm 1}\cdots\sigma_r\sigma_r^{-1}\cdots\\
&\quad \sigma_i^{\pm 1}\sigma_{i-1}^{-1}\sigma_i^{-1}\cdots\sigma_s^{-1})(\sigma_i^{-1}\cdots\sigma_{s-1}^{-1})\sigma_s(\sigma_{s+1}^{-1}\cdots\sigma_{j-1}^{-1}),\\
&= (\sigma_{j-1}\cdots\sigma_{s+1})\sigma_s^{-1}(\sigma_{s-1}\cdots\sigma_i)(\sigma_s\cdots\sigma_r\sigma_i^{\pm 2}\sigma_r^{-1}\cdots\sigma_s^{-1})\\
&\quad (\sigma_i^{-1}\cdots\sigma_{s-1}^{-1})\sigma_s(\sigma_{s+1}^{-1}\cdots\sigma_{j-1}^{-1}),\\
&= (\sigma_{j-1}\cdots\sigma_{s+1})\sigma_s^{-1}(\sigma_{s-1}\cdots\sigma_{i+1})(\sigma_s\cdots\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i\cdots\sigma_r\sigma_i^{\pm 2}\sigma_r^{-1}\\
&\quad \cdots\sigma_i^{-1}\sigma_{i+1}^{-1}\sigma_i^{-1}\cdots\sigma_s^{-1})(\sigma_i^{-1}\cdots\sigma_{s-1}^{-1})\sigma_s(\sigma_{s+1}^{-1}\cdots\sigma_{j-1}^{-1}),\\
&= (\sigma_{j-1}\cdots\sigma_{s+1})\sigma_s^{-1}(\sigma_{s-1}\cdots\sigma_{i+1})(\sigma_s\cdots\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}\cdots\sigma_r\sigma_i^{\pm 2}\sigma_r^{-1}\\
&\quad \cdots\sigma_{i+1}^{-1}\sigma_i^{-1}\sigma_{i+1}^{-1}\cdots\sigma_s^{-1})(\sigma_i^{-1}\cdots\sigma_{s-1}^{-1})\sigma_s(\sigma_{s+1}^{-1}\cdots\sigma_{j-1}^{-1}),\\
&= (\sigma_{j-1}\cdots\sigma_{s+1})\sigma_s^{-1}(\sigma_{s-1}\cdots\sigma_{i+1})(\sigma_s\cdots\sigma_{i+1}\sigma_i\cdots\sigma_r\sigma_{i+1}\sigma_i^{\pm 2}\\
&\quad \sigma_{i+1}^{-1}\sigma_r^{-1}\cdots\sigma_i^{-1}\sigma_{i+1}^{-1}\cdots\sigma_s^{-1})(\sigma_i^{-1}\cdots\sigma_{s-1}^{-1})\sigma_s(\sigma_{s+1}^{-1}\cdots\sigma_{j-1}^{-1}),\\
&\vdots\\
&= (\sigma_{j-1}\cdots\sigma_{s+1})\sigma_s^{-1}\sigma_{s-1}\sigma_s\sigma_{s-1}\sigma_{s-2}\cdots\sigma_r(\sigma_{s-1}\cdots\sigma_{i+1})\sigma_i^{\pm 2}\\
&\quad (\sigma_{i+1}^{-1}\cdots\sigma_{s-1}^{-1})\sigma_r^{-1}\cdots\sigma_{s-2}^{-1}\sigma_{s-1}^{-1}\sigma_s^{-1}\sigma_{s-1}^{-1}\sigma_s(\sigma_{s+1}^{-1}\cdots\sigma_{j-1}^{-1}),\\
&= (\sigma_{j-1}\cdots\sigma_{s+1})\sigma_s^{-1}\sigma_s\sigma_{s-1}\sigma_s\sigma_{s-2}\cdots\sigma_r(\sigma_{s-1}\cdots\sigma_{i+1})\sigma_i^{\pm 2}\\
&\quad (\sigma_{i+1}^{-1}\cdots\sigma_{s-1}^{-1})\sigma_r^{-1}\cdots\sigma_{s-2}^{-1}\sigma_s^{-1}\sigma_{s-1}^{-1}\sigma_s^{-1}\sigma_s(\sigma_{s+1}^{-1}\cdots\sigma_{j-1}^{-1}),\\
&= (\sigma_{j-1}\cdots\sigma_{s+1})\sigma_s^{-1}\sigma_s\sigma_{s-1}\sigma_{s-2}\cdots\sigma_r(\sigma_s\cdots\sigma_{i+1})\sigma_i^{\pm 2}\\
&\quad (\sigma_{i+1}^{-1}\cdots\sigma_s^{-1})\sigma_r^{-1}\cdots\sigma_{s-2}^{-1}\sigma_{s-1}^{-1}\sigma_s^{-1}\sigma_s(\sigma_{s+1}^{-1}\cdots\sigma_{j-1}^{-1}),\\
&= (\sigma_{j-1}\cdots\sigma_{s+1})\sigma_{s-1}\sigma_{s-2}\cdots\sigma_r(\sigma_s\cdots\sigma_{i+1})\sigma_i^{\pm 2}(\sigma_{i+1}^{-1}\cdots\sigma_s^{-1})\\
&\quad \sigma_r^{-1}\cdots\sigma_{s-2}^{-1}\sigma_{s-1}^{-1}(\sigma_s^{-1}\cdots\sigma_{j-1}^{-1}),\\
&= \sigma_{s-1}\cdots\sigma_r(\sigma_{j-1}\cdots\sigma_{i+1})\sigma_i^{\pm 2}(\sigma_{i+1}^{-1}\cdots\sigma_{j-1}^{-1})\sigma_r^{-1}\cdots\sigma_{s-1}^{-1},\\
&= \sigma_{s-1}\sigma_{s-2}\cdots\sigma_r\tau_{i,j}^{\pm 1}\sigma_r^{-1}\cdots\sigma_{s-2}^{-1}\sigma_{s-1}^{-1}.
\end{aligned}
$$

3. Si $1 \leqslant i < k < j \leqslant n$, entonces:

$$
\begin{aligned}
\tau_{k,j}^{\pm 1} &= (\sigma_{j-1}\cdots\sigma_{k+1})\sigma_k^{\pm 2}(\sigma_{k+1}^{-1}\cdots\sigma_{j-1}^{-1}),\\
&= (\sigma_{j-1}\cdots\sigma_{k+1})\sigma_k^{\pm 1}(\sigma_{k-1}\sigma_k\sigma_k^{-1}\sigma_{k-1}^{-1})\sigma_k^{\pm 1}(\sigma_{k+1}^{-1}\cdots\sigma_{j-1}^{-1}),\\
&= (\sigma_{j-1}\cdots\sigma_{k+1})\sigma_{k-1}\sigma_k\sigma_{k-1}^{\pm 1}\sigma_{k-1}^{\pm 1}\sigma_k^{-1}\sigma_{k-1}^{-1}(\sigma_{k+1}^{-1}\cdots\sigma_{j-1}^{-1}),\\
&= (\sigma_{j-1}\cdots\sigma_{k+1})\sigma_{k-1}\sigma_k\sigma_{k-1}^{\pm 1}(\sigma_{k-2}\sigma_{k-1}\sigma_{k-1}^{-1}\sigma_{k-2}^{-1})\sigma_{k-1}^{\pm 1}\sigma_k^{-1}\sigma_{k-1}^{-1}\\
&\quad (\sigma_{k+1}^{-1}\cdots\sigma_{j-1}^{-1}),\\
&= (\sigma_{j-1}\cdots\sigma_{k+1})\sigma_{k-1}\sigma_k\sigma_{k-2}\sigma_{k-1}\sigma_{k-2}^{\pm 1}\sigma_{k-2}^{\pm 1}\sigma_{k-1}^{-1}\sigma_{k-2}^{-1}\sigma_k^{-1}\sigma_{k-1}^{-1}\\
&\quad (\sigma_{k+1}^{-1}\cdots\sigma_{j-1}^{-1}),\\
&= (\sigma_{j-1}\cdots\sigma_{k+1})(\sigma_{k-1}\sigma_{k-2})(\sigma_k\sigma_{k-1})\sigma_{k-2}^{\pm 1}\sigma_{k-2}^{\pm 1}(\sigma_{k-1}^{-1}\sigma_k^{-1})(\sigma_{k-2}^{-1}\sigma_{k-1}^{-1})\\
&\quad (\sigma_{k+1}^{-1}\cdots\sigma_{j-1}^{-1}),\\
&= (\sigma_{j-1}\cdots\sigma_{k+1})(\sigma_{k-1}\sigma_{k-2})(\sigma_k\sigma_{k-1})\sigma_{k-2}^{\pm 1}(\sigma_{k-3}\sigma_{k-2}\sigma_{k-2}^{-1}\sigma_{k-3}^{-1})\sigma_{k-2}^{\pm 1}\\
&\quad (\sigma_{k-1}^{-1}\sigma_k^{-1})(\sigma_{k-2}^{-1}\sigma_{k-1}^{-1})(\sigma_{k+1}^{-1}\cdots\sigma_{j-1}^{-1}),\\
&= (\sigma_{j-1}\cdots\sigma_{k+1})(\sigma_{k-1}\sigma_{k-2})(\sigma_k\sigma_{k-1})\sigma_{k-3}\sigma_{k-2}\sigma_{k-3}^{\pm 1}\sigma_{k-3}^{\pm 1}\sigma_{k-2}^{-1}\sigma_{k-3}^{-1}\\
&\quad (\sigma_{k-1}^{-1}\sigma_k^{-1})(\sigma_{k-2}^{-1}\sigma_{k-1}^{-1})(\sigma_{k+1}^{-1}\cdots\sigma_{j-1}^{-1}),\\
&= (\sigma_{j-1}\cdots\sigma_{k+1})(\sigma_{k-1}\sigma_{k-2}\sigma_{k-3})(\sigma_k\sigma_{k-1}\sigma_{k-2})\sigma_{k-3}^{\pm 1}\sigma_{k-3}^{\pm 1}(\sigma_{k-2}^{-1}\sigma_{k-1}^{-1}\sigma_k^{-1})\\
&\quad (\sigma_{k-3}^{-1}\sigma_{k-2}^{-1}\sigma_{k-1}^{-1})(\sigma_{k+1}^{-1}\cdots\sigma_{j-1}^{-1}),\\
&\ \vdots\\
&= (\sigma_{j-1}\cdots\sigma_{k+1})\sigma_{k-1}\cdots\sigma_{i+1}(\sigma_k\cdots\sigma_{i+2})\sigma_{i+1}^{\pm 1}\sigma_{i+1}^{\pm 1}(\sigma_{i+2}^{-1}\cdots\sigma_k^{-1})\\
&\quad \sigma_{i+1}^{-1}\cdots\sigma_{k-1}^{-1}(\sigma_{k+1}^{-1}\cdots\sigma_{j-1}^{-1}),\\
&= (\sigma_{j-1}\cdots\sigma_{k+1})\sigma_{k-1}\cdots\sigma_{i+1}(\sigma_k\cdots\sigma_{i+2})\sigma_{i+1}^{\pm 1}(\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_{i+1}^{-1}\sigma_i^{-1})\sigma_{i+1}^{\pm 1}\\
&\quad (\sigma_{i+2}\cdots\sigma_k^{-1})\sigma_{i+1}^{-1}\cdots\sigma_{k-1}^{-1}(\sigma_{k+1}^{-1}\cdots\sigma_{j-1}^{-1}),\\
&= (\sigma_{j-1}\cdots\sigma_{k+1})\sigma_{k-1}\cdots\sigma_{i+1}(\sigma_k\cdots\sigma_i\sigma_{i+1})\sigma_i^{\pm 1}\sigma_i^{\pm 1}(\sigma_{i+1}^{-1}\sigma_i^{-1}\cdots\sigma_k^{-1})\\
&\quad \sigma_{i+1}^{-1}\cdots\sigma_{k-1}^{-1}(\sigma_{k+1}^{-1}\cdots\sigma_{j-1}^{-1}),\\
&= (\sigma_{j-1}\cdots\sigma_{k+1})\sigma_{k-1}\cdots\sigma_{i+1}\sigma_i(\sigma_k\cdots\sigma_{i+1})\sigma_i^{\pm 1}\sigma_i^{\pm 1}(\sigma_{i+1}^{-1}\cdots\sigma_k^{-1})\\
&\quad \sigma_i^{-1}\sigma_{i+1}^{-1}\cdots\sigma_{k-1}^{-1}(\sigma_{k+1}^{-1}\cdots\sigma_{j-1}^{-1}),\\
&= (\sigma_{j-1}\cdots\sigma_{k+1})\sigma_{k-1}\cdots\sigma_i(\sigma_k\cdots\sigma_{i+1})\sigma_i^{\pm 2}(\sigma_{i+1}^{-1}\cdots\sigma_k^{-1})\sigma_i^{-1}\cdots\sigma_{k-1}^{-1}\\
&\quad (\sigma_{k+1}^{-1}\cdots\sigma_{j-1}^{-1}),\\
&= \sigma_{k-1}\cdots\sigma_i(\sigma_{j-1}\cdots\sigma_{k-1}\cdots\sigma_{i+1})\sigma_i^{\pm 2}(\sigma_{i+1}^{-1}\cdots\sigma_{k-1}^{-1}\cdots\sigma_{j-1}^{-1})\sigma_i^{-1}\cdots\sigma_{k-1}^{-1},\\
&= \sigma_{k-1}\sigma_{k-2}\cdots\sigma_i\tau_{i,j}^{\pm 1}\sigma_i^{-1}\cdots\sigma_{k-2}^{-1}\sigma_{k-1}^{-1}.
\end{aligned}
$$

4. Si $1 \leqslant i < t < k < j \leqslant n$, entonces:

$$
\begin{aligned}
\tau_{i,j}^{\pm1} &= (\sigma_{j-1}\cdots\sigma_{i+1})\sigma_i^{\pm2}(\sigma_{i+1}^{-1}\cdots\sigma_{j-1}^{-1}),\\
&= (\sigma_{j-1}\cdots\sigma_{i+1})\sigma_i^{\pm1}(\sigma_k\cdots\sigma_{t+1}\sigma_{t+1}^{-1}\cdots\sigma_k^{-1})\sigma_i^{\pm1}(\sigma_{i+1}^{-1}\cdots\sigma_{j-1}^{-1}),\\
&= (\sigma_{j-1}\cdots\sigma_{i+1})\sigma_k\cdots\sigma_{t+1}\sigma_i^{\pm2}\sigma_{t+1}^{-1}\cdots\sigma_k^{-1}(\sigma_{i+1}^{-1}\cdots\sigma_{j-1}^{-1}),\\
&= (\sigma_{j-1}\cdots\sigma_k\sigma_{k-1}\sigma_k\cdots\sigma_{i+1})\sigma_{k-1}\cdots\sigma_{t+1}\sigma_i^{\pm2}\sigma_{t+1}^{-1}\cdots\sigma_{k-1}^{-1}\\
&\quad(\sigma_{i+1}^{-1}\cdots\sigma_k^{-1}\sigma_{k-1}^{-1}\sigma_k^{-1}\cdots\sigma_{j-1}^{-1}),\\
&= (\sigma_{j-1}\cdots\sigma_{k-1}\sigma_k\sigma_{k-1}\cdots\sigma_{i+1})\sigma_{k-1}\cdots\sigma_{t+1}\sigma_i^{\pm2}\sigma_{t+1}^{-1}\cdots\sigma_{k-1}^{-1}\\
&\quad(\sigma_{i+1}^{-1}\cdots\sigma_{k-1}^{-1}\sigma_k^{-1}\sigma_{k-1}^{-1}\cdots\sigma_{j-1}^{-1}),\\
&= \sigma_{k-1}(\sigma_{j-1}\cdots\sigma_{i+1})\sigma_{k-1}\cdots\sigma_{t+1}\sigma_i^{\pm2}\sigma_{t+1}^{-1}\cdots\sigma_{k-1}^{-1}(\sigma_{i+1}^{-1}\cdots\sigma_{j-1}^{-1})\sigma_{k-1}^{-1},\\
&= \sigma_{k-1}(\sigma_{j-1}\cdots\sigma_{k-1}\sigma_{k-2}\sigma_{k-1}\cdots\sigma_{i+1})\sigma_{k-2}\cdots\sigma_{t+1}\sigma_i^{\pm2}\sigma_{t+1}^{-1}\cdots\sigma_{k-2}^{-1}\\
&\quad(\sigma_{i+1}^{-1}\cdots\sigma_{k-1}^{-1}\sigma_{k-2}^{-1}\sigma_{k-1}^{-1}\cdots\sigma_{j-1}^{-1})\sigma_{k-1}^{-1},\\
&= \sigma_{k-1}(\sigma_{j-1}\cdots\sigma_{k-2}\sigma_{k-1}\sigma_{k-2}\cdots\sigma_{i+1})\sigma_{k-2}\cdots\sigma_{t+1}\sigma_i^{\pm2}\sigma_{t+1}^{-1}\cdots\sigma_{k-2}^{-1}\\
&\quad(\sigma_{i+1}^{-1}\cdots\sigma_{k-2}^{-1}\sigma_{k-1}^{-1}\sigma_{k-2}^{-1}\cdots\sigma_{j-1}^{-1})\sigma_{k-1}^{-1},\\
&= \sigma_{k-1}\sigma_{k-2}(\sigma_{j-1}\cdots\sigma_{i+1})\sigma_{k-2}\cdots\sigma_{t+1}\sigma_i^{\pm2}\sigma_{t+1}^{-1}\cdots\sigma_{k-2}^{-1}(\sigma_{i+1}^{-1}\cdots\sigma_{j-1}^{-1})\\
&\quad\sigma_{k-2}^{-1}\sigma_{k-1}^{-1},\\
&\ \ \vdots\\
&= \sigma_{k-1}\cdots\sigma_{t+1}(\sigma_{j-1}\cdots\sigma_{i+1})\sigma_{t+1}\sigma_i^{\pm2}\sigma_{t+1}^{-1}(\sigma_{i+1}^{-1}\cdots\sigma_{j-1}^{-1})\sigma_{t+1}^{-1}\cdots\sigma_{k-1}^{-1},\\
&= \sigma_{k-1}\cdots\sigma_{t+1}(\sigma_{j-1}\cdots\sigma_{t+1}\sigma_t\sigma_{t+1}\cdots\sigma_{i+1})\sigma_i^{\pm2}\\
&\quad(\sigma_{i+1}^{-1}\cdots\sigma_{t+1}^{-1}\sigma_t^{-1}\sigma_{t+1}^{-1}\cdots\sigma_{j-1}^{-1})\sigma_{t+1}^{-1}\cdots\sigma_{k-1}^{-1},\\
&= \sigma_{k-1}\cdots\sigma_{t+1}(\sigma_{j-1}\cdots\sigma_t\sigma_{t+1}\sigma_t\cdots\sigma_{i+1})\sigma_i^{\pm2}\\
&\quad(\sigma_{i+1}^{-1}\cdots\sigma_t^{-1}\sigma_{t+1}^{-1}\sigma_t^{-1}\cdots\sigma_{j-1}^{-1})\sigma_{t+1}^{-1}\cdots\sigma_{k-1}^{-1},\\
&= \sigma_{k-1}\sigma_{k-2}\cdots\sigma_t(\sigma_{j-1}\cdots\sigma_{i+1})\sigma_i^{\pm2}(\sigma_{i+1}^{-1}\cdots\sigma_{j-1}^{-1})\sigma_t^{-1}\cdots\sigma_{k-2}^{-1}\sigma_{k-1}^{-1},\\
&= \sigma_{k-1}\sigma_{k-2}\cdots\sigma_t\tau_{i,j}^{\pm1}\sigma_t^{-1}\cdots\sigma_{k-2}^{-1}\sigma_{k-1}^{-1}.
\end{aligned}
$$

Esto concluye la demostración. □

Nuevamente, mediante el método de Reidemeister-Schreier, determinaremos una presentación del L_{n-1}. Por Lema 4.5 sabemos que los elementos $w_{n-1,i}$ forman un transversal de Schreier para L_n según L_{n-1}, recordemos además que $a_j = \tau_{j,n}$ para todo $j = 1, \ldots, n-1$. En el lema que sigue calcularemos los representantes de clase $[w_{n-1,i}\sigma_j^{\pm1}]$, utilizando el Lema 4.6.

Lema 4.7. *Los representantes de clases para* L_n *según* L_{n-1} *son los elementos* $\left[w_{n-1,i}\tau_{j,n}^{\pm 1}\right] = w_{n-1,i}$ *y* $\left[w_{n-1,i}\sigma_j^{\pm 1}\right]$*, donde*

$$\left[w_{n-1,i}\sigma_j^{\pm 1}\right] = \begin{cases} \sigma_{n-2}\cdots\sigma_i & ; \quad j < i-1 \text{ o } i < j, \\ \sigma_{n-2}\cdots\sigma_{i-1} & ; \quad i-1 = j, \\ \sigma_{n-2}\cdots\sigma_{i+1} & ; \quad i = j. \end{cases}$$

Demostración. Recordemos que $\pi(w_{n-1,i})(n-1) = i$.

Para los generadores σ_j distingamos cuatro casos:

Caso 1: Si $j < i-1$, entonces:

$$\begin{aligned} \pi(w_{n-1,i}\sigma_j^{\pm 1})(n-1) &= \pi(\sigma_{n-2}\cdots\sigma_i\sigma_j^{\pm 1})(n-1), \\ &= (s_{n-2}\cdots s_i s_j)(n-1), \\ &= (s_{n-2}\cdots s_i)s_j(n-1), \\ &= (s_{n-2}\cdots s_i)(n-1), \\ &= i. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\left[w_{n-1,i}\sigma_j^{\pm 1}\right] = w_{n-1,i} = \sigma_{n-2}\cdots\sigma_i$.

Caso 2: Si $i < j$, entonces:

$$\begin{aligned} \pi(w_{n-1,i}\sigma_j^{\pm 1})(n-1) &= \pi(\sigma_{n-2}\cdots\sigma_j\cdots\sigma_i\sigma_j^{\pm 1})(n-1), \\ &= (s_{n-2}\cdots s_j\cdots s_i s_j)(n-1), \\ &= (s_{n-2}\cdots s_j s_{j-1} s_j\cdots s_i)(n-1), \\ &= (s_{n-2}\cdots s_{j-1} s_j s_{j-1}\cdots s_i)(n-1), \\ &= (s_{j-1}s_{n-2}\cdots s_j s_{j-1}\cdots s_i)(n-1), \\ &= s_{j-1}(s_{n-2}\cdots s_i)(n-1), \\ &= s_{j-1}(i), \\ &= i, \end{aligned}$$

ya que $j-1 < n-2$. Por lo tanto $\left[w_{n-1,i}\sigma_j^{\pm 1}\right] = w_{n-1,i} = \sigma_{n-2}\cdots\sigma_i$.

Caso 3: Si $i-1=j$, entonces:

$$\begin{aligned}\pi(w_{n-1,i}\sigma_j^{\pm1})(n-1) &= \pi(\sigma_{n-2}\cdots\sigma_j\cdots\sigma_i\sigma_j^{\pm1})(n-1),\\ &= (s_{n-2}\cdots s_j\cdots s_i s_j)(n-1),\\ &= (s_{n-2}\cdots s_j\cdots s_i s_{i-1})(n-1),\\ &= i-1.\end{aligned}$$

Por lo tanto $\left[w_{n-1,i}\sigma_j^{\pm1}\right] = w_{n-1,i-1} = \sigma_{n-2}\cdots\sigma_{i-1}$.

Caso 4: Si $i=j$, entonces:

$$\begin{aligned}\pi(w_{n-1,i}\sigma_j^{\pm1})(n-1) &= \pi(\sigma_{n-2}\cdots\sigma_j\cdots\sigma_i\sigma_j^{\pm1})(n-1),\\ &= (s_{n-2}\cdots s_j\cdots s_i s_j)(n-1),\\ &= (s_{n-2}\cdots s_j\cdots s_i s_i)(n-1),\\ &= (s_{n-2}\cdots s_j\cdots s_{i+1} s_i^2)(n-1),\\ &= (s_{n-2}\cdots s_j\cdots s_{i+1})(n-1),\\ &= i+1.\end{aligned}$$

Por lo tanto $\left[w_{n-1,i}\sigma_j^{\pm1}\right] = w_{n-1,i+1} = \sigma_{n-2}\cdots\sigma_{i+1}$.

Para el generador $\tau_{j,n}$ $(=a_j)$ notemos lo siguiente:

$$\pi(\tau_{j,n}^{\pm1}) = s_{n-1}\cdots s_{j+1}s_j^2 s_{j+1}^{-1}\cdots s_{n-1}^{-1} = e,$$

luego,

$$\pi(w_{n-1,i}\tau_{j,n}^{\pm1})(n-1) = (s_{n-2}\cdots s_i)(n-1) = i.$$

Por lo tanto $\left[w_{n-1,i}\tau_{j,n}^{\pm1}\right] = w_{n-1,i} = \sigma_{n-2}\cdots\sigma_i$. □

Calculemos ahora, mediante el siguiente lema, un sistema de generadores para el grupo L_{n-1}, para esto utilicemos el Lema 1.17, es decir, debemos encontrar los elementos $w_{n-1,i}x^{\pm1}[w_{n-1,i}x^{\pm1}]^{-1}$ con x variando en los generadores de L_n.

Lema 4.8. *El grupo* L_{n-1} *es generado por los siguientes elementos:*

$$\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_{n-3},\quad \tau_{1,n-1},\ldots,\tau_{n-2,n-1},\quad \tau_{1,n},\tau_{2,n},\ldots,\tau_{n-1,n} \tag{4.21}$$

Demostración. Para $i=1,\ldots,n-1$ y $j=1,\ldots,n-2$ distingamos siete casos.

Caso 1: Si $j < i-1$, entonces:

$$\begin{aligned}
w_{n-1,i}\sigma_j^{\pm1}\left[w_{n-1,i}\sigma_j^{\pm1}\right]^{-1} &= \sigma_{n-2}\cdots\sigma_i\sigma_j^{\pm1}\sigma_i^{-1}\cdots\sigma_{n-2}^{-1},\\
&= \sigma_j^{\pm1}\sigma_{n-2}\cdots\sigma_i\sigma_i^{-1}\cdots\sigma_{n-2}^{-1},\\
&= \sigma_j^{\pm1}.
\end{aligned}$$

Caso 2: Si $i < j$, entonces:

$$\begin{aligned}
w_{n-1,i}\sigma_j^{\pm1}\left[w_{n-1,i}\sigma_j^{\pm1}\right]^{-1} &= \sigma_{n-2}\cdots\sigma_i\sigma_j^{\pm1}\sigma_i^{-1}\cdots\sigma_{n-2}^{-1},\\
&= \sigma_{n-2}\cdots\sigma_j\sigma_{j-1}\sigma_j^{\pm1}\cdots\sigma_i\sigma_i^{-1}\cdots\sigma_{n-2}^{-1},\\
&= \sigma_{n-2}\cdots\sigma_{j-1}^{\pm1}\sigma_j\sigma_{j-1}\cdots\sigma_i\sigma_i^{-1}\cdots\sigma_{n-2}^{-1},\\
&= \sigma_{j-1}^{\pm1}\sigma_{n-2}\cdots\sigma_i\sigma_i^{-1}\cdots\sigma_{n-2}^{-1},\\
&= \sigma_{j-1}^{\pm1}.
\end{aligned}$$

Caso 3: Si $i-1 = j$, entonces:

$$\begin{aligned}
w_{n-1,i}\sigma_j\left[w_{n-1,i}\sigma_j\right]^{-1} &= \sigma_{n-2}\cdots\sigma_i\sigma_j\sigma_{i-1}^{-1}\cdots\sigma_{n-2}^{-1},\\
&= \sigma_{n-2}\cdots\sigma_i\sigma_j\sigma_j^{-1}\cdots\sigma_{n-2}^{-1},\\
&= e.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_{n-1,i}\sigma_j^{-1}\left[w_{n-1,i}\sigma_j^{-1}\right]^{-1} &= \sigma_{n-2}\cdots\sigma_i\sigma_j^{-1}\sigma_{i-1}^{-1}\cdots\sigma_{n-2}^{-1},\\
&= \sigma_{n-2}\cdots\sigma_i\sigma_{i-1}^{-1}\sigma_{i-1}^{-1}\cdots\sigma_{n-2}^{-1},\\
&= \sigma_{n-2}\cdots\sigma_i\sigma_{i-1}^{-2}\sigma_i^{-1}\cdots\sigma_{n-2}^{-1},\\
&= \tau_{j,n-1}^{-1}.
\end{aligned}$$

Caso 4: Si $i = j$, entonces

$$\begin{aligned}
w_{n-1,i}\sigma_j\left[w_{n-1,i}\sigma_j\right]^{-1} &= \sigma_{n-2}\cdots\sigma_i\sigma_j\sigma_{i+1}^{-1}\cdots\sigma_{n-2}^{-1},\\
&= \sigma_{n-2}\cdots\sigma_{i+1}\sigma_i^2\sigma_{i+1}^{-1}\cdots\sigma_{n-2}^{-1},\\
&= \sigma_{n-2}\cdots\sigma_{j+1}\sigma_j^2\sigma_{j+1}^{-1}\cdots\sigma_{n-2}^{-1},\\
&= \tau_{j,n-1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_{n-1,i}\sigma_j^{-1}\left[w_{n-1,i}\sigma_j^{-1}\right]^{-1} &= \sigma_{n-2}\cdots\sigma_i\sigma_j^{-1}\sigma_{i+1}^{-1}\cdots\sigma_{n-2}^{-1},\\
&= \sigma_{n-2}\cdots\sigma_i\sigma_i^{-1}\sigma_{i+1}^{-1}\cdots\sigma_{n-2}^{-1},\\
&= \sigma_{n-2}\cdots\sigma_{i+1}\sigma_{i+1}^{-1}\cdots\sigma_{n-2}^{-1},\\
&= e.
\end{aligned}$$

Utilicemos el Lema 4.6 para determinar los generadores restantes. Como $a_j = \tau_{j,n}$, para $i, j = 1, \ldots, n-1$ se tiene:

Caso 5: Si $j < i$. Notemos que $1 < j < i \leqslant (n-1) < n \leqslant n$. Este caso se divide en dos:

Caso 5.1: Si $i \neq n-1$, por (4.20) tenemos:

$$\begin{aligned} w_{n-1,i}\tau_{j,n}^{\pm 1}\left[w_{n-1,i}\tau_{j,n}^{\pm 1}\right]^{-1} &= \sigma_{n-2}\cdots\sigma_i\tau_{j,n}^{\pm 1}\sigma_i^{-1}\cdots\sigma_{n-2}^{-1}, \\ &= \sigma_{(n-1)-1}\cdots\sigma_i\tau_{j,n}^{\pm 1}\sigma_i^{-1}\cdots\sigma_{(n-1)-1}^{-1}, \\ &= \tau_{j,n}^{\pm 1}. \end{aligned}$$

Caso 5.2: Si $i = n-1$, entonces:

$$\begin{aligned} w_{n-1,i}\tau_{j,n}^{\pm 1}\left[w_{n-1,i}\tau_{j,n}^{\pm 1}\right]^{-1} &= w_{n-1,i}\tau_{j,n}^{\pm 1}w_{n-1,i}^{-1}, \\ &= w_{n-1,n-1}\tau_{j,n}^{\pm 1}w_{n-1,n-1}^{-1}, \\ &= \tau_{j,n}^{\pm 1}. \end{aligned}$$

Caso 6: Si $j = i$. Notemos que $1 \leqslant j \leqslant (n-1) < n \leqslant n$. Este caso se divide en dos:

Caso 6.1: Si $j \neq n-1$, por (4.19) tenemos:

$$\begin{aligned} w_{n-1,i}\tau_{j,n}^{\pm 1}\left[w_{n-1,i}\tau_{j,n}^{\pm 1}\right]^{-1} &= \sigma_{n-2}\cdots\sigma_i\tau_{j,n}^{\pm 1}\sigma_i^{-1}\cdots\sigma_{n-2}^{-1}, \\ &= \sigma_{(n-1)-1}\cdots\sigma_j\tau_{j,n}^{\pm 1}\sigma_j^{-1}\cdots\sigma_{(n-1)-1}^{-1}, \\ &= \tau_{n-1,n}^{\pm 1}. \end{aligned}$$

Caso 6.2: Si $j = n-1$, entonces:

$$\begin{aligned} w_{n-1,i}\tau_{j,n}^{\pm 1}\left[w_{n-1,i}\tau_{j,n}^{\pm 1}\right]^{-1} &= w_{n-1,i}\tau_{j,n}^{\pm 1}w_{n-1,i}^{-1}, \\ &= w_{n-1,j}\tau_{j,n}^{\pm 1}w_{n-1,j}^{-1}, \\ &= w_{n-1,n-1}\tau_{j,n}^{\pm 1}w_{n-1,n-1}^{-1}, \\ &= \tau_{j,n}^{\pm 1}, \\ &= \tau_{n-1,n}^{\pm 1}. \end{aligned}$$

Caso 7: Si $j > i$. Notemos que $1 \leqslant i < j \leqslant (n-1) < n \leqslant n$.

Caso 7.1: Si $j \neq n-1$, por (4.18) tenemos:

$$\begin{aligned} w_{n-1,i}\tau_{j,n}^{\pm 1}\left[w_{n-1,i}\tau_{j,n}^{\pm 1}\right]^{-1} &= \sigma_{n-2}\cdots\sigma_i\tau_{j,n}^{\pm 1}\sigma_i^{-1}\cdots\sigma_{n-2}^{-1},\\ &= \sigma_{(n-1)-1}\cdots\sigma_i\tau_{j,n}^{\pm 1}\sigma_i^{-1}\cdots\sigma_{(n-1)-1}^{-1},\\ &= \tau_{n-1,n}^{-1}\tau_{j-1,n}^{\pm 1}\tau_{n-1,n}. \end{aligned}$$

Caso 7.2: Si $j = n-1$, entonces:

$$\begin{aligned} w_{n-1,i}\tau_{j,n}^{\pm 1}\left[w_{n-1,i}\tau_{j,n}^{\pm 1}\right]^{-1} &= w_{n-1,i}\tau_{n-1,n}^{\pm 1}\left[w_{n-1,i}\tau_{n-1,n}^{\pm 1}\right]^{-1},\\ &= \sigma_{n-2}\cdots\sigma_i\tau_{n-1,n}^{\pm 1}\left[w_{n-1,i}\tau_{n-1,n}\right]^{-1},\\ &= \sigma_{n-2}\cdots\sigma_i\sigma_{n-1}^{\pm 2}\sigma_i^{-1}\cdots\sigma_{n-2}^{-1},\\ &= \sigma_{n-2}\sigma_{n-1}^{\pm 2}\sigma_{n-3}\cdots\sigma_i\sigma_i^{-1}\cdots\sigma_{n-3}^{-1}\sigma_{n-2}^{-1},\\ &= \sigma_{n-2}\sigma_{n-1}^{\pm 2}\sigma_{n-2}^{-1},\\ &= \sigma_{n-1}^{-1}\sigma_{n-2}^{\pm 2}\sigma_{n-1},\\ &= \sigma_{n-1}^{-2}\sigma_{n-1}\sigma_{n-2}^{\pm 2}\sigma_{n-1}^{-1}\sigma_{n-1}^{2},\\ &= \tau_{n-1,n}^{-1}\sigma_{n-1}\sigma_{n-2}^{\pm 2}\sigma_{n-1}^{-1}\tau_{n-1,n},\\ &= \tau_{n-1,n}^{-1}\tau_{n-2,n}^{\pm 1}\tau_{n-1,n},\\ &= \tau_{n-1,n}^{-1}\tau_{(n-1)-1,n}^{\pm 1}\tau_{n-1,n},\\ &= \tau_{n-1,n}^{-1}\tau_{j-1,n}^{\pm 1}\tau_{n-1,n}. \end{aligned}$$

Por lo tanto los elementos generadores para L_{n-1} son:

$$w_{n-1,i}\sigma_j\left[w_{n-1,i}\sigma_j\right]^{-1} = \begin{cases} \sigma_j & ;\ j < i-1,\\ \sigma_{j-1} & ;\ i < j,\\ e & ;\ i-1 = j,\\ \tau_{j,n-1} & ;\ i = j, \end{cases} \tag{4.22}$$

$$w_{n-1,i}\sigma_j^{-1}\left[w_{n-1,i}\sigma_j^{-1}\right]^{-1} = \begin{cases} \sigma_j^{-1} & ;\ j < i-1,\\ \sigma_{j-1}^{-1} & ;\ i < j,\\ \tau_{j,n-1}^{-1} & ;\ i-1 = j,\\ e & ;\ i = j, \end{cases} \tag{4.23}$$

y

$$w_{n-1,i}\tau_{j,n}^{\pm 1}\left[w_{n-1,i}\tau_{j,n}^{\pm 1}\right]^{-1} = \begin{cases} \tau_{j,n}^{\pm 1} & ;\ j < i,\\ \tau_{n-1,n}^{\pm 1} & ;\ j = i,\\ \tau_{n-1,n}^{-1}\tau_{j-1,n}^{\pm 1}\tau_{n-1,n} & ;\ j > i. \end{cases} \tag{4.24}$$

De (4.22) obtenemos los siguientes generadores para L_{n-1}

$$\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-3}, \quad \tau_{1,n-1}, \tau_{2,n-1}, \ldots, \tau_{n-2,n-1}.$$

Nótese además que los elementos del caso 7 son productos de elementos en los casos 5 y 6. Luego de (4.24) obtenemos los siguientes generadores:

$$\tau_{1,n}, \tau_{2,n}, \ldots, \tau_{n-1,n}.$$

Por Lema 1.18, concluye la demostración. □

Ahora solo resta calcular el conjunto de relaciones que definen L_{n-1}. Para esto, utilizando los generadores encontrados en Lema 4.8, basta reescribir los conjugados $w_{n-1,i} r w_{n-1,i}^{-1}$ para $i = 1 \cdots n-1$, en término de los generadores en (4.21), donde $r \in R$, el conjunto de relaciones en (4.14) para L_n.

Comencemos agrupando las relaciones de L_n del siguiente modo:

$$(\mathrm{I})_n \quad \begin{cases} (1) & \sigma_i\sigma_k = \sigma_k\sigma_i & ; \quad i,k = 1,\ldots,n-2,\ |i-k| \geqslant 2, \\ (2) & \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} & ; \quad i = 1,\ldots,n-2, \end{cases}$$

$$(\mathrm{II})_n \quad \begin{cases} (1) & \sigma_i\tau_{k,n}\sigma_i^{-1} = \tau_{k,n} & ; \quad i = 1,\ldots,n-2,\ k = 1,\ldots,n-1, \\ & & \quad\ \ k \neq i, i+1, \\ (2) & \sigma_i\tau_{i,n}\sigma_i^{-1} = \tau_{i+1,n} & ; \quad i = 1,\ldots,n-2, \\ (3) & \sigma_i\tau_{i+1,n}\sigma_i^{-1} = \tau_{i+1,n}^{-1}\tau_{i,n}\tau_{i+1,n} & ; \quad i = 1,\ldots,n-2, \end{cases} \tag{4.25}$$

donde $\tau_{i,n} = a_i$.

En las Proposiciones 4.2 - 4.6 que siguen, calcularemos un conjunto de relaciones para L_{n-1}, es decir encontraremos las relaciones producidas por R en L_n, según la agrupación realizada en (4.25), mediante el método de Reidemeister-Schreier.

Proposición 4.2. $(\mathrm{I})_n(1)$ *produce las siguientes relaciones:*

$$\begin{cases} (1) & \sigma_j\sigma_k = \sigma_k\sigma_j & ; \quad 1 \leqslant j < k \leqslant n-3,\ |k-j| \geqslant 2, \\ (2) & \sigma_j\tau_{k,n-1}\sigma_j^{-1} = \tau_{k,n-1} & ; \quad 1 \leqslant j \leqslant n-3,\ 1 \leqslant k \leqslant n-2,\ k \neq j, j+1, \end{cases} \tag{4.26}$$

en L_{n-1}.

DEMOSTRACIÓN. (ver Apéndice A) □

Proposición 4.3. $(\mathrm{I})_n(2)$ *produce las siguientes relaciones:*

$$\begin{cases} (1) & \sigma_j\sigma_{j+1}\sigma_j = \sigma_{j+1}\sigma_j\sigma_{j+1} & ; & 1 \leqslant j \leqslant n-4, \\ (2) & \sigma_j\tau_{j,n-1}\sigma_j^{-1} = \tau_{j+1,n-1} & ; & 1 \leqslant j \leqslant n-3, \\ (3) & \sigma_j\tau_{j+1,n-1}\sigma_j^{-1} = \tau_{j+1,n-1}^{-1}\tau_{j,n-1}\tau_{j+1,n-1} & ; & 1 \leqslant j \leqslant n-3, \end{cases} \tag{4.27}$$

en L_{n-1}.

DEMOSTRACIÓN. (ver Apéndice A) □

Proposición 4.4. $(\mathrm{II})_n(1)$ *produce las siguientes relaciones:*

$$\begin{cases} (1) & \sigma_j\tau_{k,n}\sigma_j^{-1} = \tau_{k,n} & ; & 1 \leqslant j \leqslant n-3, \\ & & & 1 \leqslant k \leqslant n-1,\ k \neq j, j+1, \\ (2) & \tau_{j,n-1}\tau_{k,n} = \tau_{k,n}\tau_{j,n-1} & ; & 1 \leqslant k < j \leqslant n-2, \\ (3) & \tau_{j,n-1}\tau_{n-1,n}^{-1}\tau_{k,n}\tau_{n-1,n}\tau_{j,n-1}^{-1} = \tau_{n-1,n}^{-1}\tau_{k,n}\tau_{n-1,n} & ; & 1 \leqslant j \leqslant n-2, \\ & & & 1 \leqslant k \leqslant n-1,\ j < k. \end{cases} \tag{4.28}$$

en L_{n-1}.

DEMOSTRACIÓN. (ver Apéndice A) □

Proposición 4.5. $(\mathrm{II})_n(2)$ *produce las siguientes relaciones:*

$$\begin{cases} (1) & \sigma_j\tau_{j,n}\sigma_j^{-1} = \tau_{j+1,n} & ; & j = 1, \ldots, n-3, \\ (2) & \tau_{j,n-1}\tau_{j,n}\tau_{j,n-1}^{-1} = \tau_{n-1,n}^{-1}\tau_{j,n}\tau_{n-1,n} & ; & j = 1, \ldots, n-2. \end{cases} \tag{4.29}$$

en L_{n-1}.

DEMOSTRACIÓN. (ver Apéndice A) □

Proposición 4.6. $(\mathrm{II})_n(3)$ *produce las siguientes relaciones:*

$$\begin{cases} (1) & \sigma_j\tau_{j+1,n}\sigma_j^{-1} = \tau_{j+1,n}^{-1}\tau_{j,n}\tau_{j+1,n} & ; & 1 \leqslant j \leqslant n-3, \\ (2) & \tau_{j,n-1}\tau_{n-1,n}\tau_{j,n-1}^{-1} = \tau_{n-1,n}^{-1}\tau_{j,n}^{-1}\tau_{n-1,n}\tau_{j,n}\tau_{n-1,n} & ; & j = 1, \ldots, n-2. \end{cases} \tag{4.30}$$

en L_{n-1}.

DEMOSTRACIÓN. (ver Apéndice A) □

El siguiente Teorema es consecuencia directa de Lema 4.8 y las Proposiciones 4.2, 4.3, 4.4, 4.5 y 4.6. Éstas definen los generadores y relaciones que presentan al subgrupo L_{n-1}.

Teorema 4.9. *El grupo* L_{n-1} *tiene una presentación con generadores:*

$$\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-3}, \tau_{1,n-1}, \tau_{2,n-1}, \dots, \tau_{n-2,n-1}, \tau_{1,n}, \tau_{2,n}, \dots, \tau_{n-1,n},$$

y las siguientes relaciones:

$(\mathrm{I})_{n-1}$: *(relaciones clásicas)*

(1) $\sigma_j\sigma_k = \sigma_k\sigma_j, \quad 1 \leqslant j < k \leqslant n-3,\ |j-k| \geqslant 2.$

(2) $\sigma_j\sigma_{j+1}\sigma_j = \sigma_{j+1}\sigma_j\sigma_{j+1}, \quad j = 1, 2, \dots, n-4.$

$(\mathrm{II})_{n-1}$:

(1) $\sigma_j\tau_{k,n}\sigma_j^{-1} = \tau_{k,n}, \quad 1 \leqslant j \leqslant n-3,\ 1 \leqslant k \leqslant n-1,\ k \neq j, j+1.$

(2) $\sigma_j\tau_{k,n-1}\sigma_j^{-1} = \tau_{k,n-1}, \quad 1 \leqslant j \leqslant n-3,\ 1 \leqslant k \leqslant n-2,\ k \neq j, j+1.$

$(\mathrm{III})_{n-1}$:

(1) $\sigma_j\tau_{j,n}\sigma_j^{-1} = \sigma_{j+1,n}, \quad 1 \leqslant j \leqslant n-3.$

(2) $\sigma_j\tau_{j,n-1}\sigma_j^{-1} = \sigma_{j+1,n-1}, \quad 1 \leqslant j \leqslant n-3.$

$(\mathrm{IV})_{n-1}$:

(1) $\sigma_j\tau_{j+1,n}\sigma_j^{-1} = \tau_{j+1,n}^{-1}\tau_{j,n}\tau_{j+1,n}, \quad 1 \leqslant j \leqslant n-3.$

(2) $\sigma_j\tau_{j+1,n-1}\sigma_j^{-1} = \tau_{j+1,n-1}^{-1}\tau_{j,n-1}\tau_{j+1,n-1}, \quad 1 \leqslant j \leqslant n-3.$

$(\mathrm{V})_{n-1}$:

(1) $\tau_{j,n-1}\tau_{k,n} = \tau_{k,n}\tau_{j,n-1}, \quad 1 \leqslant k < j \leqslant n-2.$

$(\mathrm{VI})_{n-1}$:

(1) $\tau_{j,n-1}\tau_{j,n}\tau_{j,n-1}^{-1} = \tau_{n-1,n}^{-1}\tau_{j,n}\tau_{n-1,n}, \quad j = 1, 2, \dots, n-2.$

$(\mathrm{VII})_{n-1}$:

(1) $\tau_{j,n-1}\tau_{n-1,n}\tau_{j,n-1}^{-1} = \tau_{n-1,n}^{-1}\tau_{j,n}^{-1}\tau_{n-1,n}\tau_{j,n}\tau_{n-1,n}, \quad j = 1, 2, \dots, n{-}2.$

$(\mathrm{VIII})_{n-1}$:

(1) $\tau_{n-1,n}^{-1}\tau_{k,n}\tau_{n-1,n}\tau_{j,n-1} = \tau_{j,n-1}\tau_{n-1,n}^{-1}\tau_{k,n}\tau_{n-1,n}, \quad 1 \leqslant j \leqslant n-2,\ 1 \leqslant k \leqslant n-1,\ j < k.$

La presentación anterior de L_{n-1} nos permite en principio obtener los primeros resultados e intuir como es una presentación del grupo L_k para todo k. Esto nos permitirá, en particular, conocer una presentación de $L_1 = P_n$.

A continuación estudiemos el caso general.

2.3. Caso Principal P_n.

Si observamos las relaciones de L_{n-1} en el Teorema 4.9, cabe destacar que éstas pueden ser divididas en dos tipos: el primer conjunto de relaciones entre $(\mathrm{I})_{n-1}$ y $(\mathrm{IV})_{n-1}$ que involucra los generadores σ_i y $\tau_{j,k}$; el otro conjunto de relaciones entre $(\mathrm{V})_{n-1}$ y $(\mathrm{VIII})_{n-1}$ que involucra únicamente los elementos $\tau_{j,k}$. Sabemos también que cada σ_i no es un elemento en P_n, por esto, basta estudiar solo el segundo conjunto de relaciones, ya que el anterior desaparece cuando $k = 1$.

A continuación enunciaremos el teorema principal de esta sección, el cual determina una presentación para el grupo de Trenzas Puras P_n.

Teorema 4.10. *El grupo de n-trenzas puras P_n tiene una presentación con generadores:*

$$\tau_{j,k} = \sigma_{k-1}\sigma_{k-2}\cdots\sigma_{j+1}\sigma_j^2\sigma_{j+1}^{-1}\cdots\sigma_{k-2}^{-1}\sigma_{k-1}^{-1}, \quad 1 \leqslant j < k \leqslant n, \tag{4.31}$$

y las siguientes relaciones:

$$\begin{cases} (\mathrm{A}) & \tau_{r,s}\tau_{i,j} = \tau_{i,j}\tau_{r,s} & ; & 1 \leqslant r < s < j \leqslant n, \ \ o\ \ 1 \leqslant r < s < j \leqslant n, \\ (\mathrm{B}) & \tau_{r,s}\tau_{r,j}\tau_{r,s}^{-1} = \tau_{s,j}^{-1}\tau_{r,j}^{-1}\tau_{s,j} & ; & 1 \leqslant r < s < j \leqslant n, \\ (\mathrm{C}) & \tau_{r,s}\tau_{s,j}\tau_{r,s}^{-1} = \tau_{s,j}^{-1}\tau_{r,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{r,j}\tau_{s,j} & ; & 1 \leqslant r < s < j \leqslant n, \\ (\mathrm{D}) & \tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i} = \tau_{r,i}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j} & ; & 1 \leqslant r < s < i < j \leqslant n. \end{cases} \tag{4.32}$$

2.3.1. Demostración del Teorema 4.10.

El grupo L_k es definido para todo k entre 1 y n, por lo tanto, podemos escribir L_k como L_{n-s}, donde $0 \leqslant s < n$. Para demostrar el teorema utilizaremos una vez más el método de Reidemeister-Schreier, aplicando inducción sobre s, ya que por los Teoremas 4.4 y 4.9 conocemos los casos $s = 0, 1$.

Para comenzar encontraremos un sistema de generadores para L_k (respectivamente P_n), donde $0 \leqslant k \leqslant n-2$. Luego, asumiendo que las relaciones de L_{k+1} son consecuencia de (4.32), probaremos que todas las relaciones producidas por L_{k+1} para L_k son consecuencia de las relaciones (A), (B), (C) y (D). Esto demostrará el Teorema 4.10.

Asumiendo las relaciones en (4.32), tenemos el siguiente lema:

Lema 4.11. *Sea la relación:*

$$(E): \quad \tau_{r,i}\tau_{s,j}\tau_{r,i}^{-1} = \left[\tau_{i,j}^{-1}, \tau_{r,j}^{-1}\right] \tau_{s,j} \left[\tau_{i,j}^{-1}, \tau_{r,j}^{-1}\right], \quad 1 \leqslant r < s < i < j \leqslant n.$$

Entonces (D) *y* (E) *son equivalentes.*

Demostración. Tenemos

$$\begin{array}{rcl}
\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i} & = & \tau_{r,i}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j} \\
\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j} & = & \tau_{r,i}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1} \\
\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j} & = & (\tau_{r,i}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{r,i}^{-1})(\tau_{r,i}\tau_{s,j}\tau_{r,i}^{-1})(\tau_{r,i}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}) \\
(\tau_{r,i}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1})\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}(\tau_{r,i}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{r,i}^{-1}) & = & (\tau_{r,i}\tau_{s,j}\tau_{r,i}^{-1}) \\
 & (C) & \\
(\tau_{i,j}^{-1}\tau_{r,j}^{-1}\tau_{i,j}\tau_{r,j}\tau_{i,j})\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j} & = & (\tau_{r,i}\tau_{s,j}\tau_{r,i}^{-1}) \\
(\tau_{i,j}^{-1}\tau_{r,j}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{r,j}\tau_{i,j}) & & \\
\left[\tau_{i,j}^{-1}, \tau_{r,j}^{-1}\right] \tau_{s,j} \left[\tau_{i,j}^{-1}, \tau_{r,j}^{-1}\right] & = & \tau_{r,i}\tau_{s,j}\tau_{r,i}^{-1}
\end{array}$$

Esto demuestra el lema. $\square$

Las Proposiciones 4.2 hasta 4.6 muestran que para cada paso de L_{k+1} a L_k, las relaciones $(\mathrm{I})_n$ hasta $(\mathrm{IV})_n$ producen el mismo tipo de relaciones entre $(\mathrm{I})_{n-1}$ y $(\mathrm{VIII})_{n-1}$. Por lo tanto, para demostrar el teorema es necesario ver que las relaciones $(\mathrm{V})_{k+1}$ hasta $(\mathrm{VIII})_{k+1}$ en L_{k+1}, no producen relaciones adicionales (de distinto tipo) además de $(\mathrm{V})_k$, $(\mathrm{VI})_k$, $(\mathrm{VII})_k$ y $(\mathrm{VIII})_k$, las cuales ya han sido obtenidas de $(\mathrm{I})_{k+1}$, $(\mathrm{II})_{k+1}$, $(\mathrm{III})_{k+1}$ y $(\mathrm{IV})_{k+1}$.

Proposición 4.7. L_k *es generado por los elementos* $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{k-2}$*, junto con los siguientes elementos:*

$$\begin{array}{c} \tau_{1,k}, \tau_{2,k}, \ldots, \tau_{k-1,k}, \\ \tau_{1,k+1}, \tau_{2,k+1}, \ldots, \tau_{k,k+1}, \\ \tau_{1,k+2}, \tau_{2,k+2}, \ldots, \tau_{k+1,k+2}, \\ \vdots \\ \tau_{1,n-1}, \tau_{2,n-1}, \ldots, \tau_{n-2,n-1}, \\ \tau_{1,n}, \tau_{2,n}, \ldots, \tau_{n-1,n}. \end{array} \tag{4.33}$$

Demostración. Por Lemas 4.3 y 4.8, la proposición se cumple para $s = 0, 1$. Supongamos ahora válido para $L_{k+1} = L_{n-(n-k-1)}$, $(s = n - k - 1)$. Es decir, supongamos que L_{k+1} es generado por:

$$\begin{array}{c} \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{k-1}, \\ \tau_{1,k+1}, \tau_{2,k+1}, \ldots, \tau_{k,k+1}, \\ \vdots \\ \tau_{1,n}, \tau_{2,n}, \ldots, \tau_{n-1,n}. \end{array} \tag{4.34}$$

Por Lema 4.5 sabemos que los elementos $w_{k,i}$ con $1 \leqslant i \leqslant k$, forman un transversal de Schreier para L_k en L_{k+1}. Luego del mismo modo que en Lema 4.7, los representantes de clase $[\,w_{k,i}\sigma_j^{\pm 1}\,]$ y $[\,w_{k,i}\tau_{r,s}^{\pm 1}\,]$ son:

$$[\,w_{k,i}\sigma_j^{\pm 1}\,] = \begin{cases} w_{k,i} = \sigma_{n-2}\cdots\sigma_i & ; \quad j < i-1 \text{ o } i < j, \\ w_{k,i-1} = \sigma_{n-2}\cdots\sigma_{i-1} & ; \quad j = i-1, \\ w_{k,i+1} = \sigma_{n-2}\cdots\sigma_{i+1} & ; \quad i = j, \end{cases} \qquad [\,w_{k,i}\tau_{r,s}^{\pm 1}\,] = w_{k,i}.$$

donde, $i = 1, \ldots, k$, $j = 1, \ldots, k-1$, $1 \leqslant r < s$ y $k+1 \leqslant s \leqslant n$.

Nuevamente, como en Lema 4.8, los elementos generadores son:

$$w_{k,i}\sigma_j\,[\,w_{k,i}\sigma_j\,]^{-1} = \begin{cases} \sigma_j & ; \quad j < i-1, \\ \sigma_{j-1} & ; \quad i < j, \\ e & ; \quad i-1 = j, \\ \tau_{j,k} & ; \quad i = j, \end{cases} \tag{4.35}$$

$$w_{k,i}\sigma_j^{-1}\left[w_{k,i}\sigma_j^{-1}\right]^{-1}=\begin{cases}\sigma_j^{-1} & ;\quad j<i-1,\\ \sigma_{j-1}^{-1} & ;\quad i<j,\\ \tau_{j,k}^{-1} & ;\quad i-1=j,\\ e & ;\quad i=j,\end{cases}$$

y

$$w_{k,i}\tau_{r,s}^{\pm1}\left[w_{k,i}\tau_{r,s}^{\pm1}\right]^{-1}=\begin{cases}\tau_{r,s}^{\pm1} & ;\quad r<i,\ s\geqslant k+1,\\ \tau_{k,s}^{\pm1} & ;\quad r=i,\ s\geqslant k+1,\\ \tau_{k,s}^{-1}\tau_{r-1,s}^{\pm1}\tau_{k,s} & ;\quad r>i,\ s\geqslant k+1.\end{cases}\tag{4.36}$$

De (4.35) obtenemos $\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_{k-2},\tau_{1,k},\tau_{2,k},\ldots,\tau_{k-1,k}$ y de (4.36) los elementos $\tau_{r,s}$ con $s\geqslant k+1$ y $1\leqslant r\leqslant s$. Esto demuestra la proposición. □

Nótese que los generadores en (4.35) eliminan el generador σ_{k-1} y agregan los elementos $\tau_{r,k}$ faltantes para L_k, los cuales no aparecen en L_{k+1}. Como $P_n=L_1$, el siguiente corolario es consecuencia directa de la proposición anterior.

Corolario 4.1. P_n *es generado por los siguientes elementos:*

$$\tau_{j,k}=\sigma_{k-1}\sigma_{k-2}\cdots\sigma_{j+1}\sigma_j^2\sigma_{j+1}^{-1}\cdots\sigma_{k-2}^{-1}\sigma_{k-1}^{-1},\quad 1\leqslant j<k\leqslant n.\tag{4.37}$$

Para encontrar en principio una presentación de L_k, consideremos L_{k+1} generado por los elementos en (4.34).

El siguiente lema demuestra que cada generador $\tau_{r,s}$ en L_{k+1} no produce otro tipo al conjugar por los elementos del transversal de Schreier $w_{k,p}$ de generadores en las relaciones L_k.

Lema 4.12. *Sea* $p=1,2,\ldots,k$*, entonces:*

Caso 1: *Si* $r<k$*, se tiene:*

(1) $w_{k,p}\tau_{r,s}w_{k,p}^{-1}=\tau_{r,s}$; $r<p\leqslant k<s$,

(2) $w_{k,p}\tau_{r,s}w_{k,p}^{-1}=\tau_{k,s}$; $r=p\leqslant k<s$,

(3) $w_{k,p}\tau_{r,s}w_{k,p}^{-1}=\tau_{k,s}^{-1}\tau_{r-1,s}\tau_{k,s}$; $p<r<k<s$.

Caso 2: *Si* $r=k$*, se tiene:*

(1) $w_{k,p}\tau_{r,s}w_{k,p}^{-1}=\tau_{k,s}^{-1}\tau_{k-1,s}\tau_{k,s}$.

Caso 3: *Si* $r > k$*, se tiene:*

$$(1) \quad w_{k,p}\tau_{r,s}w_{k,p}^{-1} = \tau_{r,s},$$

donde $w_{k,p}\tau_{r,s}w_{k,p}^{-1} = w_{k,p}\tau_{r,s}[w_{k,p}\tau_{r,s}]^{-1}$.

Demostración. Para hacer la demostración utilizaremos el Lema 4.6 distinguiendo cuatro casos:

Caso 1: Si $r < k$, se tiene:

Caso 1.1: Si $r < p \leqslant k < s$, entonces:

Caso 1.1.1: Si $p < k$. Por Lema 4.6.4, tenemos:

$$\begin{aligned} w_{k,p}\tau_{r,s}w_{k,p}^{-1} &= \sigma_{k-1}\cdots\sigma_p\tau_{r,s}\sigma_p^{-1}\cdots\sigma_{k-1}^{-1}, \\ &= \tau_{r,s}. \end{aligned}$$

Caso 1.1.2: Si $p = k$, tenemos:

$$\begin{aligned} w_{k,p}\tau_{r,s}w_{k,p}^{-1} &= w_{k,k}\tau_{r,s}w_{k,k}^{-1}, \\ &= \tau_{r,s}. \end{aligned}$$

Caso 1.2: Si $r = p \leqslant k < s$, entonces:

Caso 1.2.1: Si $p < k$. Por Lema 4.6.3, tenemos:

$$\begin{aligned} w_{k,p}\tau_{r,s}w_{k,p}^{-1} &= \sigma_{k-1}\cdots\sigma_p\tau_{r,s}\sigma_p^{-1}\cdots\sigma_{k-1}^{-1}, \\ &= \tau_{k,s}. \end{aligned}$$

Caso 1.2.2: Si $p = k$, tenemos:

$$\begin{aligned} w_{k,p}\tau_{r,s}w_{k,p}^{-1} &= w_{k,k}\tau_{r,s}w_{k,k}^{-1}, \\ &= \tau_{r,s}, \\ &= \tau_{k,s}. \end{aligned}$$

Caso 1.3: Si $p < r < k < s$. Por Lema 4.6.2, entonces:

$$\begin{aligned} w_{k,p}\tau_{r,s}w_{k,p}^{-1} &= \sigma_{k-1}\cdots\sigma_p\tau_{r,s}\sigma_p^{-1}\cdots\sigma_{k-1}^{-1}, \\ &= \tau_{k,s}^{-1}\tau_{r-1,s}\tau_{k,s}. \end{aligned}$$

Caso 2: Si $r = k$. Por (4.36), se tiene:

$$\begin{aligned} w_{k,p}\tau_{r,s}w_{k,p}^{-1} &= \sigma_{k-1}\cdots\sigma_p\tau_{r,s}\sigma_p^{-1}\cdots\sigma_{k-1}^{-1}, \\ &= \tau_{k,s}^{-1}\tau_{r-1,s}\tau_{k,s}. \end{aligned}$$

Caso 3: Si $r > k$, se tiene:

$$\begin{aligned} w_{k,p}\tau_{r,s}w_{k,p}^{-1} &= \sigma_{k-1}\cdots\sigma_p\tau_{r,s}\sigma_p^{-1}\cdots\sigma_{k-1}^{-1}, \\ &= \tau_{r,s}\sigma_{k-1}\cdots\sigma_p\sigma_p^{-1}\cdots\sigma_{k-1}^{-1}, \\ &= \tau_{r,s}. \end{aligned}$$

Esto demuestra el lema. $\square$

En lo que sigue utilizaremos $\boxed{}$ para encerrar la palabra que estaremos manipulando.

Lema 4.13. *Consideremos las relaciones* $(A), (B), (C)$ *y* (D), *entonces:*

$$\begin{cases} (1) & \tau_{k,s}^{-1}\tau_{t,s}\tau_{k,s}\tau_{k,j} = \tau_{k,j}\tau_{k,s}^{-1}\tau_{t,s}\tau_{k,s} & ; \quad 1 \leqslant t < k < s < j \leqslant n, \\ (2) & \tau_{k,j}^{-1}\tau_{t,j}\tau_{k,j}\tau_{k,s}^{-1}\tau_{m,s}\tau_{k,s} = \tau_{k,s}^{-1}\tau_{m,s}\tau_{k,s}\tau_{k,j}^{-1}\tau_{t,j}\tau_{k,j} & ; \quad 1 \leqslant t < m < k < s < j \leqslant n, \\ (3) & \tau_{r,j}\tau_{k,j}\tau_{r,k} = \tau_{r,k}\tau_{r,j}\tau_{k,j} & ; \quad 1 \leqslant r < k < j \leqslant n. \end{cases} \tag{4.38}$$

DEMOSTRACIÓN.
Para $1 \leqslant t < k < s < j \leqslant n$ tenemos:

$$\begin{aligned} & (1) \\ \tau_{k,j}\tau_{k,s}^{-1}\tau_{t,s}\tau_{k,s} &= \tau_{k,s}^{-1}\tau_{t,s}\tau_{k,s}\tau_{k,j} \\ \tau_{k,s}\tau_{k,j}\tau_{k,s}^{-1} &= \tau_{t,s}\boxed{\tau_{k,s}\tau_{k,j}\tau_{k,s}^{-1}}\tau_{t,s}^{-1} \\ & (B) \\ \tau_{s,j}^{-1}\tau_{k,j}\tau_{s,j} &= \tau_{t,s}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{k,j}\tau_{s,j}\tau_{t,s}^{-1} \\ \tau_{s,j}^{-1}\tau_{k,j}\tau_{s,j}\tau_{t,s} &= \tau_{t,s}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{k,j}\tau_{s,j} \\ & (D). \end{aligned}$$

Para $1 \leqslant t < m < k < s < j \leqslant n$ tenemos:

$$\begin{array}{rcl}
 & (2) & \\
\tau_{k,j}^{-1}\tau_{t,j}\tau_{k,j}\tau_{k,s}^{-1}\tau_{m,s}\tau_{k,s} & = & \tau_{k,s}^{-1}\tau_{m,s}\tau_{k,s}\tau_{k,j}^{-1}\tau_{t,j}\tau_{k,j} \\
 & (B) & \\
\tau_{t,k}\tau_{t,j}\tau_{t,k}^{-1}\boxed{\tau_{k,s}^{-1}\tau_{m,s}\tau_{k,s}} & = & \boxed{\tau_{k,s}^{-1}\tau_{m,s}\tau_{k,s}}\tau_{t,k}\tau_{t,j}\tau_{t,k}^{-1} \\
 & (D) & \\
\tau_{t,k}\tau_{t,j}\tau_{k,s}^{-1}\tau_{m,s}\tau_{k,s}\tau_{t,k}^{-1} & = & \tau_{t,k}\tau_{k,s}^{-1}\tau_{m,s}\tau_{k,s}\tau_{t,j}\tau_{t,k}^{-1} \\
\tau_{t,j}\tau_{k,s}^{-1}\tau_{m,s}\tau_{k,s} & = & \tau_{k,s}^{-1}\tau_{m,s}\tau_{k,s}\tau_{t,j} \\
\tau_{t,j}\tau_{k,s}^{-1}\tau_{m,s}\tau_{k,s}\tau_{t,j}^{-1} & = & \tau_{k,s}^{-1}\tau_{m,s}\tau_{k,s} \\
 & (A) & \\
\tau_{t,j}\tau_{t,j}^{-1}\tau_{k,s}^{-1}\tau_{m,s}\tau_{k,s} & = & \tau_{k,s}^{-1}\tau_{m,s}\tau_{k,s} \\
\tau_{k,s}^{-1}\tau_{m,s}\tau_{k,s} & = & \tau_{k,s}^{-1}\tau_{m,s}\tau_{k,s}.
\end{array}$$

Para $1 \leqslant r < k < j \leqslant n$ tenemos:

$$\begin{array}{rcl}
 & (3) & \\
\tau_{r,k}\tau_{r,j}\tau_{k,j} & = & \tau_{r,j}\tau_{k,j}\tau_{r,k} \\
\tau_{r,k}\tau_{r,j}\tau_{k,j}\tau_{r,k}^{-1} & = & \tau_{r,j}\tau_{k,j} \\
\boxed{\tau_{r,k}\tau_{r,j}\tau_{r,k}^{-1}}\,\boxed{\tau_{r,k}\tau_{k,j}\tau_{r,k}^{-1}} & = & \tau_{r,j}\tau_{k,j} \\
 & (B)\,(C) & \\
\tau_{k,j}^{-1}\tau_{r,j}\tau_{k,j}\tau_{k,j}^{-1}\tau_{r,j}^{-1}\tau_{k,j}\tau_{r,j}\tau_{k,j} & = & \tau_{r,j}\tau_{k,j} \\
\tau_{r,j}\tau_{k,j} & = & \tau_{r,j}\tau_{k,j}.
\end{array}$$

□

A continuación veremos que las relaciones producidas por $(V)_{k+1}$ hasta $(VIII)_{k+1}$ para L_k, son consecuencia de las relaciones (A), (B), (C) y (D). Para esto calcularemos las conjugados $w_{k,p} r w_{k,p}^{-1}$ con r en las relaciones de L_{k+1}, reescribiendo en los generadores de L_k, del mismo modo que se hizo anteriormente para los casos $k = n, n-1$.

Proposición 4.8. *Las relaciones producidas por* $\tau_{r,s}\tau_{i,j}\tau_{r,s}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}$ *en* L_k*, son consecuencia de* (4.32).

Demostración. (ver Apéndice A) □

Observación 4.4. Las relaciones producidas por $(V)_{k+1}$ son:

Caso 1: $r < k < s$

$$\begin{cases} (1) & \tau_{r,s}\tau_{i,j} = \tau_{i,j}\tau_{r,s} & ; \quad p > r, \\ (2) & \tau_{k,s}\tau_{i,j} = \tau_{i,j}\tau_{k,s} & ; \quad p = r, \\ (3) & (\tau_{k,s}^{-1}\tau_{r-1,s}\tau_{k,s})\tau_{i,j} = \tau_{i,j}(\tau_{k,s}^{-1}\tau_{r-1,s}\tau_{k,s}) & ; \quad i < p, \\ (4) & (\tau_{k,s}^{-1}\tau_{r-1,s}\tau_{k,s})\tau_{k,j} = \tau_{k,j}(\tau_{k,s}^{-1}\tau_{r-1,s}\tau_{k,s}) & ; \quad i = p, \\ (5) & (\tau_{k,j}^{-1}\tau_{i-1,j}\tau_{k,j})(\tau_{k,s}^{-1}\tau_{r-1,s}\tau_{k,s}) = (\tau_{k,s}^{-1}\tau_{r-1,s}\tau_{k,s})(\tau_{k,j}^{-1}\tau_{i-1,j}\tau_{k,j}) & ; \quad p < i. \end{cases}$$

Caso 2: $r = k$

$$\begin{cases} (1) & (\tau_{k,s}^{-1}\tau_{k-1,s}\tau_{k,s})(\tau_{k,j}^{-1}\tau_{i-1,j}\tau_{k,j}) = (\tau_{k,j}^{-1}\tau_{i-1,j}\tau_{k,j})(\tau_{k,s}^{-1}\tau_{k-1,s}\tau_{k,s}) & ; \quad i < p < r, \\ (2) & (\tau_{k,s}^{-1}\tau_{k-1,s}\tau_{k,s})\tau_{k,j} = \tau_{k,j}(\tau_{k,s}^{-1}\tau_{k-1,s}\tau_{k,s}) & ; \quad i = p, \\ (3) & (\tau_{k,s}^{-1}\tau_{k-1,s}\tau_{k,s})\tau_{i,j} = \tau_{i,j}(\tau_{k,s}^{-1}\tau_{k-1,s}\tau_{k,s}) & ; \quad p < i. \end{cases}$$

Caso 3: $i < k < r$

$$\begin{cases} (1) & \tau_{r,s}\tau_{i,j} = \tau_{i,j}\tau_{r,s} & ; \quad i < p, \\ (2) & \tau_{r,s}\tau_{k,j} = \tau_{k,j}\tau_{r,s} & ; \quad i = p, \\ (3) & \tau_{r,s}(\tau_{k,j}^{-1}\tau_{i-1,j}\tau_{k,j}) = (\tau_{k,j}^{-1}\tau_{i-1,j}\tau_{k,j})\tau_{r,s} & ; \quad p < i. \end{cases}$$

Caso 4: $k = i$

$$(1) \quad \tau_{r,s}(\tau_{i,j}^{-1}\tau_{i-1,j}\tau_{i,j}) = (\tau_{i,j}^{-1}\tau_{i-1,j}\tau_{i,j})\tau_{r,s}.$$

Caso 5: $k < i$

$$(1) \quad \tau_{r,s}\tau_{i,j} = \tau_{i,j}\tau_{r,s}.$$

Nótese que las relaciones anteriores son del tipo de $(V)_k$ - $(VIII)_k$.

Proposición 4.9. *Las relaciones producidas por* $\tau_{r,s}\tau_{r,j}\tau_{r,s}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{r,j}^{-1}\tau_{s,j}$ *en* L_k, *son consecuencia de* (4.32).

Demostración. (ver Apéndice A) □

Observación 4.5. Las relaciones producidas por $(VI)_{k+1}$ son:

Caso 1: $r < k < s < j$

$$\begin{cases} (1) & \tau_{r,s}\tau_{r,j}\tau_{r,s}^{-1} = \tau_{s,j}^{-1}\tau_{r,j}\tau_{s,j} & ; \quad r < p \leqslant k, \\ (2) & \tau_{k,s}\tau_{k,j}\tau_{k,s}^{-1} = \tau_{s,j}^{-1}\tau_{k,j}\tau_{s,j} & ; \quad r = p, \\ (3) & \tau_{k,s}^{-1}\tau_{r-1,s}\tau_{k,s}\tau_{k,j}^{-1}\tau_{r-1,j}\tau_{k,j}\tau_{k,s}^{-1}\tau_{r-1,s}^{-1}\tau_{k,s} = \tau_{s,j}^{-1}\tau_{k,j}^{-1}\tau_{r-1,j}\tau_{k,j}\tau_{s,j} & ; \quad p < r. \end{cases}$$

Caso 2: $r = k$

$$(1) \quad \tau_{k,s}^{-1}\tau_{k-1,s}\tau_{k,s}\tau_{k,j}^{-1}\tau_{k-1,j}\tau_{k,j}\tau_{k,s}^{-1}\tau_{k-1,s}^{-1}\tau_{k,s} = \tau_{s,j}^{-1}\tau_{k,j}^{-1}\tau_{k-1,j}\tau_{k,j}\tau_{s,j}.$$

Caso 3: $k < r$

$$(1) \quad \tau_{r,s}\tau_{r,j}\tau_{r,s}^{-1} = \tau_{s,j}^{-1}\tau_{r,j}\tau_{s,j}.$$

Proposición 4.10. *Las relaciones producidas por* $\tau_{r,s}\tau_{s,j}\tau_{r,s}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{r,j}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{r,j}\tau_{s,j}$ *en* L_k*, son consecuencia de* (4.32).

Demostración. (ver Apéndice A) □

Observación 4.6. Las relaciones producidas por $(\mathrm{VII})_{k+1}$ son:

Caso 1: $r < k < s < j$

$$\begin{cases} (1) & \tau_{r,s}\tau_{s,j}\tau_{r,s}^{-1} = \tau_{s,j}^{-1}\tau_{r,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{r,j}\tau_{s,j} & ; \quad r < p \leqslant k, \\ (2) & \tau_{k,s}\tau_{s,j}\tau_{k,s}^{-1} = \tau_{s,j}^{-1}\tau_{k,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{k,j}\tau_{s,j} & ; \quad p = r, \\ (3) & \tau_{k,s}^{-1}\tau_{r-1,s}\tau_{k,s}\tau_{s,j}\tau_{k,s}^{-1}\tau_{r-1,s}^{-1}\tau_{k,s} = \tau_{s,j}^{-1}\tau_{k,j}^{-1}\tau_{r-1,j}^{-1}\tau_{k,j}\tau_{s,j}\tau_{k,j}^{-1}\tau_{r-1,j}\tau_{k,j}\tau_{s,j} & ; \quad p < r. \end{cases}$$

Caso 2: $r = k$

$$(1) \quad \tau_{k,s}^{-1}\tau_{k-1,s}\tau_{k,s}\tau_{s,j}\tau_{k,s}^{-1}\tau_{k-1,s}^{-1}\tau_{k,s} = \tau_{s,j}^{-1}\tau_{k,s}^{-1}\tau_{k-1,s}^{-1}\tau_{k,s}\tau_{s,j}\tau_{k,s}^{-1}\tau_{k-1,s}\tau_{k,s}\tau_{s,j}.$$

Caso 3: $k < r$

$$(1) \quad \tau_{r,s}\tau_{s,j}\tau_{r,s}^{-1} = \tau_{s,j}^{-1}\tau_{r,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{r,j}\tau_{s,j}.$$

Proposición 4.11. *Las relaciones producidas por* $\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}$ *en* L_k*, son consecuencia de* (4.32).

Demostración. (ver Apéndice A) □

Observación 4.7. Las relaciones producidas por $(\mathrm{VIII})_{k+1}$ son:

Caso 1: $s < k < i$

$$\begin{cases} (1) & \tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}^{-1} = \tau_{i,j}\tau_{r,i}\tau_{i,j}^{-1} & ; \quad s < p < k, \\ (2) & (\tau_{i,j}^{-1}\tau_{k,j}\tau_{i,j})\tau_{r,i} = \tau_{r,i}(\tau_{i,j}^{-1}\tau_{k,j}\tau_{i,j}) & ; \quad p = s, \\ (3) & (\tau_{i,j}^{-1}\tau_{k,j}^{-1}\tau_{s-1,j}\tau_{k,j}\tau_{i,j})\tau_{r,i} = \tau_{r,i}(\tau_{i,j}^{-1}\tau_{k,j}^{-1}\tau_{s-1,j}\tau_{k,j}\tau_{i,j}) & ; \quad r < p < s, \\ (4) & (\tau_{i,j}^{-1}\tau_{k,j}^{-1}\tau_{s-1,j}\tau_{k,j}\tau_{i,j})\tau_{k,i} = \tau_{r,i}(\tau_{i,j}^{-1}\tau_{k,j}^{-1}\tau_{s-1,j}\tau_{k,j}\tau_{i,j}) & ; \quad p = r \\ (5) & (\tau_{i,j}^{-1}\tau_{k,j}^{-1}\tau_{s-1,j}\tau_{k,j}\tau_{i,j})(\tau_{k,i}^{-1}\tau_{r-1,i}\tau_{k,i}) = (\tau_{k,i}^{-1}\tau_{r-1,i}\tau_{k,i}) & ; \quad p < r. \\ & (\tau_{i,j}^{-1}\tau_{k,j}^{-1}\tau_{s-1,j}\tau_{k,j}\tau_{i,j}). & \end{cases}$$

Caso 2: $k = s$

$$\begin{cases} (1) & (\tau_{i,j}^{-1}\tau_{k,j}^{-1}\tau_{k-1,j}\tau_{k,j}\tau_{i,j})\tau_{r,i} = \tau_{r,i}(\tau_{i,j}^{-1}\tau_{k,j}^{-1}\tau_{k-1,j}\tau_{k,j}\tau_{i,j}) & ; \quad r < p < s, \\ (2) & (\tau_{i,j}^{-1}\tau_{k,j}^{-1}\tau_{k-1,j}\tau_{k,j}\tau_{i,j})\tau_{k,i} = \tau_{k,i}(\tau_{i,j}^{-1}\tau_{k,j}^{-1}\tau_{k-1,j}\tau_{k,j}\tau_{i,j}) & ; \quad p = r, \\ (3) & (\tau_{i,j}^{-1}\tau_{k,j}^{-1}\tau_{k-1,j}\tau_{k,j}\tau_{i,j})(\tau_{k,i}^{-1}\tau_{r-1,i}\tau_{k,i}) = (\tau_{k,i}^{-1}\tau_{r-1,i}\tau_{k,i}) & ; \quad p < r. \\ & (\tau_{i,j}^{-1}\tau_{k,j}^{-1}\tau_{k-1,j}\tau_{k,j}\tau_{i,j}) & \end{cases}$$

Caso 3: $r < k < s$

$$\begin{cases} (1) & (\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j})\tau_{r,i} = \tau_{r,i}(\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}) & ; \quad r < p, \\ (2) & (\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j})\tau_{k,i} = \tau_{k,i}(\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}) & ; \quad r = p, \\ (3) & (\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j})(\tau_{k,i}^{-1}\tau_{r-1,i}\tau_{k,i}) = (\tau_{k,i}^{-1}\tau_{r-1,i}\tau_{k,i})(\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}) & ; \quad p < r. \end{cases}$$

Caso 4: $k = r$

$$(1) \quad (\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j})(\tau_{k,i}^{-1}\tau_{k-1,i}\tau_{k,i}) = (\tau_{k,i}^{-1}\tau_{k-1,i}\tau_{k,i})(\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}).$$

Caso 5: $k < r$

$$(1) \quad (\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j})\tau_{r,i} = \tau_{r,i}(\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}).$$

Las Proposiciones 4.8, 4.9, 4.10 y 4.11 demuestran inductivamente, que las relaciones de L_k (en particular de P_n) son del mismo tipo que las anteriores. Más aún, éstas relaciones son consecuencia de las relaciones (A), (B), (C) y (D). Esto demuestra el Teorema 4.10.

$\blacksquare$

Hemos demostrado que el grupo de Trenzas Puras P_n tiene una presentación con los elementos generadores en (4.31) y las relaciones en (4.32).

Apéndice A: Cálculo de Relaciones

El cálculo de relaciones en este apéndice se hará utilizando el proceso de reescritura de Reidemeister-Schreier.

Demostración (Teorema 4.4).
Para comenzar, calculemos el conjugado $u_i\sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}\sigma_k^{-1}u_i^{-1}$ reescribiéndolo en los generadores de L_n dados en (4.11) y (4.12). Definamos los siguientes elementos:

$$\begin{aligned}
b_1 &:= u_i\sigma_j[\,u_i\sigma_j\,]^{-1},\\
b_2 &:= [\,u_i\sigma_j\,]\sigma_k[\,u_i\sigma_j\sigma_k\,]^{-1},\\
b_3 &:= [\,u_i\sigma_j\sigma_k\,]\sigma_j^{-1}[\,u_i\sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}\,]^{-1},\\
b_4 &:= [\,u_i\sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}\,]\sigma_k^{-1}[\,u_i\sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}\sigma_k^{-1}\,]^{-1}.
\end{aligned} \tag{4.39}$$

Nótese que los elementos en (4.39) son generadores de L_n y

$$u_i\sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}\sigma_k^{-1}u_i^{-1} = b_1b_2b_3b_4.$$

Utilizando (4.10), (4.11) y (4.12) reconoceremos cual generador representa cada elemento en (4.39). Para esto distingamos los siguientes ocho casos:

Caso 1: $j = n - i$. Entonces $b_1 = e$.

Caso 1.1: $k \leqslant n - i - 2$. Tenemos:

Como $k \leqslant n - i - 2 < n - i - 1 = n - (i + 1)$, entonces

$$\begin{aligned}
b_2 &= [\,u_i\sigma_j\,]\sigma_k[\,u_i\sigma_j\sigma_k\,]^{-1},\\
&= u_{i+1}\sigma_k[\,u_{i+1}\sigma_k\,]^{-1},\\
&= \sigma_k.
\end{aligned}$$

Como $j = n - i = n - (i+1) + 1$ entonces $j + 1 = n - i + 1$, luego

$$\begin{aligned} b_3 &= [u_i\sigma_j\sigma_k]\sigma_j^{-1}[u_i\sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}]^{-1}, \\ &= [u_{i+1}\sigma_k]\sigma_j^{-1}[[u_{i+1}\sigma_k]\sigma_j^{-1}]^{-1}, \\ &= u_{i+1}\sigma_j^{-1}[u_{i+1}\sigma_j^{-1}]^{-1}, \\ &= e. \end{aligned}$$

Como $k \leqslant n - i - 2 = n - i$, entonces

$$\begin{aligned} b_4 &= [u_i\sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}]\sigma_k^{-1}[u_i\sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}\sigma_k^{-1}]^{-1}, \\ &= [u_{i+1}\sigma_j^{-1}]\sigma_k^{-1}[[u_{i+1}\sigma_j^{-1}]\sigma_k^{-1}]^{-1}, \\ &= u_i\sigma_k^{-1}[u_i\sigma_k^{-1}]^{-1}, \\ &= \sigma_k^{-1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $u_i\sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}\sigma_k^{-1}u_i^{-1} = e\sigma_k e\sigma_k^{-1} = e$.

Caso 1.2: $k \geqslant n - i + 2$. Tenemos:

Como $k \geqslant n - i + 2 > n - i = n - (i+1) + 1$, entonces

$$\begin{aligned} b_2 &= [u_i\sigma_j]\sigma_k[u_i\sigma_j\sigma_k]^{-1}, \\ &= u_{i+1}\sigma_k[u_{i+1}\sigma_k]^{-1}, \\ &= \sigma_{k-1}. \end{aligned}$$

Como $j = n - i = n - (i+1) + 1$ entonces $j + 1 = n - i + 1$, luego

$$\begin{aligned} b_3 &= [u_i\sigma_j\sigma_k]\sigma_j^{-1}[u_i\sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}]^{-1}, \\ &= [u_{i+1}\sigma_k]\sigma_j^{-1}[[u_{i+1}\sigma_k]\sigma_j^{-1}]^{-1}, \\ &= u_{i+1}\sigma_j^{-1}[u_{i+1}\sigma_j^{-1}]^{-1}, \\ &= e. \end{aligned}$$

Como $k \geqslant n - i + 2 = n - i + 1$, entonces

$$\begin{aligned} b_4 &= [u_i\sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}]\sigma_k^{-1}[u_i\sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}\sigma_k^{-1}]^{-1}, \\ &= [u_{i+1}\sigma_j^{-1}]\sigma_k^{-1}[[u_{i+1}\sigma_j^{-1}]\sigma_k^{-1}], \\ &= u_i\sigma_k^{-1}[u_i\sigma_k^{-1}]^{-1}, \\ &= \sigma_{k-1}^{-1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $u_i\sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}\sigma_k^{-1}u_i^{-1} = e\sigma_{k-1}e\sigma_{k-1}^{-1} = e$.

Caso 2: $k = n - i$. Entonces

Caso 2.1: $j \leqslant n - i - 2$. Tenemos:

Como $j \leqslant n - i - 2 < n - i$, entonces $b_1 = \sigma_j$.

Como $k = n - i$, se tiene

$$\begin{aligned} b_2 &= [u_i\sigma_j]\sigma_k[u_i\sigma_j\sigma_k]^{-1}, \\ &= u_i\sigma_k[u_i\sigma_k]^{-1}, \\ &= e. \end{aligned}$$

Como $j \leqslant n - i - 2 < n - i - 1 = n - (i + 1)$, entonces

$$\begin{aligned} b_3 &= [u_i\sigma_j\sigma_k]\sigma_j^{-1}[u_i\sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}]^{-1}, \\ &= [u_i\sigma_k]\sigma_j^{-1}[[u_i\sigma_k]\sigma_j^{-1}]^{-1}, \\ &= u_{i+1}\sigma_j^{-1}[u_{i+1}\sigma_j^{-1}]^{-1}, \\ &= \sigma_j^{-1}. \end{aligned}$$

Como, $k = n - i = n - (i + 1) + 1$, entonces

$$\begin{aligned} b_4 &= [u_i\sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}]\sigma_k^{-1}[u_i\sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}\sigma_k^{-1}]^{-1}, \\ &= [u_{i+1}\sigma_j^{-1}]\sigma_k^{-1}[[u_{i+1}\sigma_j^{-1}]\sigma_k^{-1}]^{-1}, \\ &= u_{i+1}\sigma_k^{-1}[u_{i+1}\sigma_k^{-1}]^{-1}, \\ &= e. \end{aligned}$$

Por lo tanto $u_i\sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}\sigma_k^{-1}u_i^{-1} = \sigma_j e \sigma_j^{-1} e = e$.

Caso 2.2: $j \geqslant n - i + 2$. Tenemos:

Como $j \geqslant n - i + 2 > n - i + 1$, entonces $b_1 = \sigma_{j-1}$.

Como $k = n - i$, se tiene

$$\begin{aligned} b_2 &= [u_i\sigma_j]\sigma_k[u_i\sigma_j\sigma_k]^{-1}, \\ &= u_i\sigma_k[u_i\sigma_k]^{-1}, \\ &= e. \end{aligned}$$

Como $j \geqslant n-i+2 > n-i = n-(i+1)+1$, entonces

$$\begin{aligned} b_3 &= [u_i\sigma_j\sigma_k]\sigma_j^{-1}[u_i\sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}]^{-1}, \\ &= [u_i\sigma_k]\sigma_j^{-1}[[u_i\sigma_k]\sigma_j^{-1}]^{-1}, \\ &= u_{i+1}\sigma_j^{-1}[u_{i+1}\sigma_j^{-1}]^{-1}, \\ &= \sigma_{j-1}^{-1}. \end{aligned}$$

Como, $k = n-i = n-(i+1)+1$, entonces

$$\begin{aligned} b_4 &= [u_i\sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}]\sigma_k^{-1}[u_i\sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}\sigma_k^{-1}]^{-1}, \\ &= [u_{i+1}\sigma_j^{-1}]\sigma_k^{-1}[[u_{i+1}\sigma_j^{-1}]\sigma_k^{-1}]^{-1}, \\ &= u_{i+1}\sigma_k^{-1}[u_{i+1}\sigma_k^{-1}]^{-1}, \\ &= e. \end{aligned}$$

Por lo tanto $u_i\sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}\sigma_k^{-1}u_i^{-1} = \sigma_{j-1}e\sigma_{j-1}^{-1}e = e$.

Caso 3: $j = n-i+1$. Entonces $b_1 = a_j$.

Caso 3.1: $k \leqslant n-i-1$. Tenemos:

Como $k \leqslant n-i-1 < n-i+1 = n-(i-1)$, entonces

$$\begin{aligned} b_2 &= [u_i\sigma_j]\sigma_k[u_i\sigma_j\sigma_k]^{-1}, \\ &= u_{i-1}\sigma_k[u_{i-1}\sigma_k]^{-1}, \\ &= \sigma_k. \end{aligned}$$

Como $j = n-i+1 = n-(i-1)$, entonces

$$\begin{aligned} b_3 &= [u_i\sigma_j\sigma_k]\sigma_j^{-1}[u_i\sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}]^{-1}, \\ &= [u_{i-1}\sigma_k]\sigma_j^{-1}[[u_{i-1}\sigma_k]\sigma_j^{-1}]^{-1}, \\ &= u_{i-1}\sigma_j^{-1}[u_{i-1}\sigma_j^{-1}]^{-1}, \\ &= a_j^{-1}. \end{aligned}$$

Como $k \leqslant n-i-1 < n-i$, entonces

$$\begin{aligned} b_4 &= [u_i\sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}]\sigma_k^{-1}[u_i\sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}\sigma_k^{-1}]^{-1}, \\ &= [u_i\sigma_j^{-1}]\sigma_k^{-1}[[u_i\sigma_j^{-1}]\sigma_k^{-1}]^{-1}, \\ &= u_i\sigma_k^{-1}[u_i\sigma_k^{-1}]^{-1}, \\ &= \sigma_k^{-1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $u_i\sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}\sigma_k^{-1}u_i^{-1} = a_j\sigma_k a_j^{-1}\sigma_k^{-1}$.

Caso 3.1: $k \geqslant n-i+3$. Tenemos:

Como $k \geqslant n-i+3 > n-i+2 = n-(i-1)+1$, entonces

$$\begin{aligned} b_2 &= [u_i\sigma_j]\sigma_k[u_i\sigma_j\sigma_k]^{-1}, \\ &= u_{i-1}\sigma_k[u_{i-1}\sigma_k]^{-1}, \\ &= \sigma_{k-1}. \end{aligned}$$

Como $j = n-i+1 = n-(i-1)$, entonces

$$\begin{aligned} b_3 &= [u_i\sigma_j\sigma_k]\sigma_j^{-1}[u_i\sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}]^{-1}, \\ &= [u_{i-1}\sigma_k]\sigma_j^{-1}[[u_{i-1}\sigma_k]\sigma_j^{-1}]^{-1}, \\ &= u_{i-1}\sigma_j^{-1}[u_{i-1}\sigma_j^{-1}]^{-1}, \\ &= a_j^{-1}. \end{aligned}$$

Como $k \geqslant n-i+3 > n-i+1$, entonces

$$\begin{aligned} b_4 &= [u_i\sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}]\sigma_k^{-1}[u_i\sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}\sigma_k^{-1}]^{-1}, \\ &= [u_{i-1}\sigma_j^{-1}]\sigma_k^{-1}[[u_{i-1}\sigma_j^{-1}]\sigma_k^{-1}]^{-1}, \\ &= u_i\sigma_k^{-1}[u_i\sigma_k^{-1}]^{-1}, \\ &= \sigma_{k-1}^{-1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $u_i\sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}\sigma_k^{-1}u_i^{-1} = a_j\sigma_{k-1}a_j^{-1}\sigma_{k-1}^{-1}$.

Caso 4: $k = n-i+1$. Entonces

Caso 4.1: $j \leqslant n-i-1$. Tenemos:

Como $j \leqslant n-i-1 < n-i$, entonces $b_1 = \sigma_j$.

Como $k = n-i+1$, se tiene

$$\begin{aligned} b_2 &= [u_i\sigma_j]\sigma_k[u_i\sigma_j\sigma_k]^{-1}, \\ &= u_i\sigma_k[u_i\sigma_k]^{-1}, \\ &= a_k, \end{aligned}$$

Como $j \leqslant n-i-1 < n-i+1 = n-(i-1)$, entonces

$$\begin{aligned} b_3 &= [u_i\sigma_j\sigma_k]\sigma_j^{-1}[u_i\sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}], \\ &= [u_i\sigma_k]\sigma_j^{-1}[[u_i\sigma_k]\sigma_j^{-1}], \\ &= u_{i-1}\sigma_j^{-1}[u_{i-1}\sigma_j^{-1}], \\ &= \sigma_j^{-1}. \end{aligned}$$

Como $k = n-i+1 = n-(i-1)$, entonces

$$\begin{aligned} b_4 &= [u_i\sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}]\sigma_k^{-1}[u_i\sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}\sigma_k^{-1}], \\ &= [u_{i-1}\sigma_j^{-1}]\sigma_k^{-1}[[u_{i-1}\sigma_j^{-1}]\sigma_k^{-1}], \\ &= u_{i-1}\sigma_k^{-1}[u_{i-1}\sigma_k^{-1}], \\ &= a_k^{-1}, \end{aligned}$$

Por lo tanto $u_i\sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}\sigma_k^{-1}u_i^{-1} = \sigma_j a_k \sigma_j^{-1} a_k^{-1}$.

Caso 4.2: $j \geqslant n-i+3$. Tenemos:

Como $j \geqslant n-i+3 > n-i+1$, entonces $b_1 = \sigma_{j-1}$.

Como $k = n-i+1$, se tiene

$$\begin{aligned} b_2 &= [u_i\sigma_j]\sigma_k[u_i\sigma_j\sigma_k]^{-1}, \\ &= u_i\sigma_k[u_i\sigma_k]^{-1}, \\ &= a_k, \end{aligned}$$

Como $j \geqslant n-i+3 > n-i+2 = n-(i-1)+1$, entonces

$$\begin{aligned} b_3 &= [u_i\sigma_j\sigma_k]\sigma_j^{-1}[u_i\sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}], \\ &= [u_i\sigma_k]\sigma_j^{-1}[[u_i\sigma_k]\sigma_j^{-1}], \\ &= u_{i-1}\sigma_j^{-1}[u_{i-1}\sigma_j^{-1}], \\ &= \sigma_{j-1}^{-1}. \end{aligned}$$

Como $k = n-i+1 = n-(i-1)$, entonces

$$\begin{aligned} b_4 &= [u_i\sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}]\sigma_k^{-1}[u_i\sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}\sigma_k^{-1}], \\ &= [u_{i-1}\sigma_j^{-1}]\sigma_k^{-1}[[u_{i-1}\sigma_j^{-1}]\sigma_k^{-1}], \\ &= u_{i-1}\sigma_k^{-1}[u_{i-1}\sigma_k^{-1}], \\ &= a_k^{-1}, \end{aligned}$$

Por lo tanto $u_i\sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}\sigma_k^{-1}u_i^{-1} = \sigma_{j-1}a_k\sigma_{j-1}^{-1}a_k^{-1}$.

Caso 5: $j < n - i$. Entonces $b_1 = \sigma_j$.

Caso 5.1: $k < n - i$. Tenemos:

$$\begin{aligned} b_2 &= [u_i\sigma_j]\sigma_k[u_i\sigma_j\sigma_k]^{-1}, \\ &= u_i\sigma_k[u_i\sigma_k]^{-1}, \\ &= \sigma_k. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_3 &= [u_i\sigma_j\sigma_k]\sigma_j^{-1}[u_i\sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}]^{-1}, \\ &= [u_i\sigma_k]\sigma_j^{-1}[[u_i\sigma_k]\sigma_j^{-1}], \\ &= u_i\sigma_j^{-1}[u_i\sigma_j^{-1}], \\ &= \sigma_j^{-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_4 &= [u_i\sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}]\sigma_k^{-1}[u_i\sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}\sigma_k^{-1}]^{-1}, \\ &= [u_i\sigma_j^{-1}]\sigma_k^{-1}[[u_i\sigma_j^{-1}]\sigma_k^{-1}], \\ &= u_i\sigma_k^{-1}[u_i\sigma_k^{-1}], \\ &= \sigma_k^{-1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $u_i\sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}\sigma_k^{-1}u_i^{-1} = \sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}\sigma_k^{-1}$.

Caso 5.2: $k > n - i + 1$. Tenemos:

$$\begin{aligned} b_2 &= [u_i\sigma_j]\sigma_k[u_i\sigma_j\sigma_k]^{-1}, \\ &= u_i\sigma_k[u_i\sigma_k]^{-1}, \\ &= \sigma_{k-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_3 &= [u_i\sigma_j\sigma_k]\sigma_j^{-1}[u_i\sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}]^{-1}, \\ &= [u_i\sigma_k]\sigma_j^{-1}[[u_i\sigma_k]\sigma_j^{-1}], \\ &= u_i\sigma_j^{-1}[u_i\sigma_j^{-1}], \\ &= \sigma_j^{-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_4 &= [u_i\sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}]\sigma_k^{-1}[u_i\sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}\sigma_k^{-1}]^{-1}, \\ &= [u_i\sigma_j^{-1}]\sigma_k^{-1}[[u_i\sigma_j^{-1}]\sigma_k^{-1}], \\ &= u_i\sigma_k^{-1}[u_i\sigma_k^{-1}], \\ &= \sigma_{k-1}^{-1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $u_i\sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}\sigma_k^{-1}u_i^{-1} = \sigma_j\sigma_{k-1}\sigma_j^{-1}\sigma_{k-1}^{-1}$.

Caso 6: $j > n - i + 1$. Entonces $b_1 = \sigma_{j-1}$.

Caso 6.1: $k < n - i$. Tenemos:

$$\begin{aligned} b_2 &= [u_i\sigma_j]\sigma_k[u_i\sigma_j\sigma_k]^{-1}, \\ &= u_i\sigma_k[u_i\sigma_k]^{-1}, \\ &= \sigma_k. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_3 &= [u_i\sigma_j\sigma_k]\sigma_j^{-1}[u_i\sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}]^{-1}, \\ &= [u_i\sigma_k]\sigma_j^{-1}[[u_i\sigma_k]\sigma_j^{-1}], \\ &= u_i\sigma_j^{-1}[u_i\sigma_j^{-1}], \\ &= \sigma_{j-1}^{-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_4 &= [u_i\sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}]\sigma_k^{-1}[u_i\sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}\sigma_k^{-1}]^{-1}, \\ &= [u_i\sigma_j^{-1}]\sigma_k^{-1}[[u_i\sigma_j^{-1}]\sigma_k^{-1}], \\ &= u_i\sigma_k^{-1}[u_i\sigma_k^{-1}], \\ &= \sigma_k^{-1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $u_i\sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}\sigma_k^{-1}u_i^{-1} = \sigma_{j-1}\sigma_k\sigma_{j-1}^{-1}\sigma_k^{-1}$.

Caso 6.2: $k > n - i + 1$. Tenemos:

$$\begin{aligned} b_2 &= [u_i\sigma_j]\sigma_k[u_i\sigma_j\sigma_k]^{-1}, \\ &= u_i\sigma_k[u_i\sigma_k]^{-1}, \\ &= \sigma_{k-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_3 &= [u_i\sigma_j\sigma_k]\sigma_j^{-1}[u_i\sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}]^{-1}, \\ &= [u_i\sigma_k]\sigma_j^{-1}[[u_i\sigma_k]\sigma_j^{-1}], \\ &= u_i\sigma_j^{-1}[u_i\sigma_j^{-1}], \\ &= \sigma_{j-1}^{-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_4 &= [u_i\sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}]\sigma_k^{-1}[u_i\sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}\sigma_k^{-1}]^{-1}, \\ &= [u_i\sigma_j^{-1}]\sigma_k^{-1}[[u_i\sigma_j^{-1}]\sigma_k^{-1}], \\ &= u_i\sigma_k^{-1}[u_i\sigma_k^{-1}], \\ &= \sigma_{k-1}^{-1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $u_i\sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}\sigma_k^{-1}u_i^{-1} = \sigma_{j-1}\sigma_{k-1}\sigma_{j-1}^{-1}\sigma_{k-1}^{-1}$.

Caso 7: $k < n - i$. Entonces

Caso 7.1: $j < n - i$. Tenemos:

$$b_1 = \sigma_j$$

$$\begin{aligned} b_2 &= [u_i\sigma_j]\sigma_k[u_i\sigma_j\sigma_k]^{-1}, \\ &= u_i\sigma_k[u_i\sigma_k]^{-1}, \\ &= \sigma_k. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_3 &= [u_i\sigma_j\sigma_k]\sigma_j^{-1}[u_i\sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}]^{-1}, \\ &= [u_i\sigma_k]\sigma_j^{-1}[[u_i\sigma_k]\sigma_j^{-1}], \\ &= u_i\sigma_j^{-1}[u_i\sigma_j^{-1}], \\ &= \sigma_j^{-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_4 &= [u_i\sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}]\sigma_k^{-1}[u_i\sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}\sigma_k^{-1}]^{-1}, \\ &= [u_i\sigma_j^{-1}]\sigma_k^{-1}[[u_i\sigma_j^{-1}]\sigma_k^{-1}], \\ &= u_i\sigma_k^{-1}[u_i\sigma_k^{-1}], \\ &= \sigma_k^{-1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $u_i\sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}\sigma_k^{-1}u_i^{-1} = \sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}\sigma_k^{-1}$.

Caso 7.2: $j > n - i + 1$. Tenemos:

$$b_1 = \sigma_{j-1}$$

$$\begin{aligned} b_2 &= [u_i\sigma_j]\sigma_k[u_i\sigma_j\sigma_k]^{-1}, \\ &= u_i\sigma_k[u_i\sigma_k]^{-1}, \\ &= \sigma_k. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_3 &= [u_i\sigma_j\sigma_k]\sigma_j^{-1}[u_i\sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}]^{-1}, \\ &= [u_i\sigma_k]\sigma_j^{-1}[[u_i\sigma_k]\sigma_j^{-1}], \\ &= u_i\sigma_j^{-1}[u_i\sigma_j^{-1}], \\ &= \sigma_{j-1}^{-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_4 &= [u_i\sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}]\sigma_k^{-1}[u_i\sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}\sigma_k^{-1}]^{-1}, \\ &= [u_i\sigma_j^{-1}]\sigma_k^{-1}[[u_i\sigma_j^{-1}]\sigma_k^{-1}], \\ &= u_i\sigma_k^{-1}[u_i\sigma_k^{-1}], \\ &= \sigma_k^{-1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $u_i\sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}\sigma_k^{-1}u_i^{-1} = \sigma_{j-1}\sigma_k\sigma_{j-1}^{-1}\sigma_k^{-1}$.

Caso 8: $k > n - i + 1$. Entonces

Caso 8.1: $j < n - i$. Tenemos:

$$b_1 = \sigma_j$$

$$\begin{aligned} b_2 &= [u_i\sigma_j]\sigma_k[u_i\sigma_j\sigma_k]^{-1}, \\ &= u_i\sigma_k[u_i\sigma_k]^{-1}, \\ &= \sigma_{k-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_3 &= [u_i\sigma_j\sigma_k]\sigma_j^{-1}[u_i\sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}]^{-1}, \\ &= [u_i\sigma_k]\sigma_j^{-1}[[u_i\sigma_k]\sigma_j^{-1}], \\ &= u_i\sigma_j^{-1}[u_i\sigma_j^{-1}], \\ &= \sigma_j^{-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_4 &= [u_i\sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}]\sigma_k^{-1}[u_i\sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}\sigma_k^{-1}]^{-1}, \\ &= [u_i\sigma_j^{-1}]\sigma_k^{-1}[[u_i\sigma_j^{-1}]\sigma_k^{-1}], \\ &= u_i\sigma_k^{-1}[u_i\sigma_k^{-1}], \\ &= \sigma_{k-1}^{-1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $u_i\sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}\sigma_k^{-1}u_i^{-1} = \sigma_j\sigma_{k-1}\sigma_j^{-1}\sigma_{k-1}^{-1}$.

Caso 8.2: $j > n - i + 1$. Tenemos:

$$b_1 = \sigma_{j-1}$$

$$\begin{aligned} b_2 &= [u_i\sigma_j]\sigma_k[u_i\sigma_j\sigma_k]^{-1}, \\ &= u_i\sigma_k[u_i\sigma_k]^{-1}, \\ &= \sigma_{k-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_3 &= [u_i\sigma_j\sigma_k]\sigma_j^{-1}[u_i\sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}]^{-1}, \\ &= [u_i\sigma_k]\sigma_j^{-1}[[u_i\sigma_k]\sigma_j^{-1}], \\ &= u_i\sigma_j^{-1}[u_i\sigma_j^{-1}], \\ &= \sigma_{j-1}^{-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_4 &= [u_i\sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}]\sigma_k^{-1}[u_i\sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}\sigma_k^{-1}]^{-1}, \\ &= [u_i\sigma_j^{-1}]\sigma_k^{-1}[[u_i\sigma_j^{-1}]\sigma_k^{-1}], \\ &= u_i\sigma_k^{-1}[u_i\sigma_k^{-1}], \\ &= \sigma_{k-1}^{-1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $u_i\sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}\sigma_k^{-1}u_i^{-1} = \sigma_{j-1}\sigma_{k-1}\sigma_{j-1}^{-1}\sigma_{k-1}^{-1}$.

Obtenemos los resultados a continuación:

$$\begin{array}{llll} a_j\sigma_k a_j^{-1}\sigma_k^{-1}, & {\scriptstyle j=n-i+1, \atop k\leqslant n-i-1,} & \sigma_j a_k\sigma_j^{-1}a_k^{-1}, & {\scriptstyle k=n-i+1, \atop j\leqslant n-i-1,} \\ a_j\sigma_{k-1}a_j^{-1}\sigma_{k-1}^{-1}, & {\scriptstyle j=n-i+1, \atop k\geqslant n-i+3,} & \sigma_{j-1}a_k\sigma_{j-1}^{-1}a_k^{-1}, & {\scriptstyle k=n-i+1, \atop j\geqslant n-i+3,} \\ \sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}\sigma_k^{-1}, & {\scriptstyle j<n-i, \atop k<n-i,} & \sigma_j\sigma_{k-1}\sigma_j^{-1}\sigma_{k-1}^{-1}, & {\scriptstyle j<n-i, \atop k>n-i+1,} \\ \sigma_{j-1}\sigma_k\sigma_{j-1}^{-1}\sigma_k^{-1}, & {\scriptstyle j>n-i+1, \atop k<n-i,} & \sigma_{j-1}\sigma_{k-1}\sigma_{j-1}^{-1}\sigma_{k-1}^{-1}, & {\scriptstyle j>n-i+1, \atop k>n-i+1.} \end{array}$$

Es fácil ver ambas relaciones en la primera y segunda línea son respectivamente equivalentes. Esto es

$$\begin{array}{llll} a_j\sigma_k a_j^{-1}\sigma_k^{-1}, & {\scriptstyle j=n-i+1, \atop k\leqslant n-i-1,} & a_j\sigma_{k-1}a_j^{-1}\sigma_{k-1}^{-1}, & {\scriptstyle j=n-i+1, \atop k\geqslant n-i+3,} \\ \sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}\sigma_k^{-1}, & {\scriptstyle j<n-i, \atop k<n-i,} & \sigma_j\sigma_{k-1}\sigma_j^{-1}\sigma_{k-1}^{-1}, & {\scriptstyle j<n-i, \atop k>n-i+1,} \\ \sigma_{j-1}\sigma_k\sigma_{j-1}^{-1}\sigma_k^{-1}, & {\scriptstyle j>n-i+1, \atop k<n-i,} & \sigma_{j-1}\sigma_{k-1}\sigma_{j-1}^{-1}\sigma_{k-1}^{-1}, & {\scriptstyle j>n-i+1, \atop k>n-i+1.} \end{array}$$

Así $\sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}\sigma_k^{-1}$ induce las siguientes relaciones en L_n

$$u_i\sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}\sigma_k^{-1}u_i^{-1} = \begin{cases} \sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}\sigma_k^{-1} & ; \quad {\scriptstyle |j-k|\geqslant 2, \atop 1\leqslant j,k\leqslant n-2,} \\ \sigma_j a_k\sigma_j^{-1}a_k^{-1} & ; \quad {\scriptstyle 1\leqslant j\leqslant n-2, \atop 1\leqslant k\leqslant n-1,\ |j-k|\geqslant 2.} \end{cases} \tag{4.40}$$

Para continuar, calculemos el conjugado $u_i\sigma_j\sigma_{j+1}\sigma_j\sigma_{j+1}^{-1}\sigma_j^{-1}\sigma_{j+1}^{-1}u_i^{-1}$ reescribiéndolo en los generadores de L_n dados en (4.11) y (4.12). Definamos los siguientes elementos:

$$\begin{aligned}
c_1 &:= u_i\sigma_j[u_i\sigma_j]^{-1},\\
c_2 &:= [u_i\sigma_j]\sigma_{j+1}[u_i\sigma_j\sigma_{j+1}]^{-1},\\
c_3 &:= [u_i\sigma_j\sigma_{j+1}]\sigma_j[u_i\sigma_j\sigma_{j+1}\sigma_j]^{-1},\\
c_4 &:= [u_i\sigma_j\sigma_{j+1}\sigma_j]\sigma_{j+1}^{-1}[u_i\sigma_j\sigma_{j+1}\sigma_j\sigma_{j+1}^{-1}]^{-1},\\
c_5 &:= [u_i\sigma_j\sigma_{j+1}\sigma_j\sigma_{j+1}^{-1}]\sigma_j^{-1}[u_i\sigma_j\sigma_{j+1}\sigma_j\sigma_{j+1}^{-1}\sigma_j^{-1}]^{-1},\\
c_6 &:= [u_i\sigma_j\sigma_{j+1}\sigma_j\sigma_{j+1}^{-1}\sigma_j^{-1}]\sigma_{j+1}^{-1}[u_i\sigma_j\sigma_{j+1}\sigma_j\sigma_{j+1}^{-1}\sigma_j^{-1}\sigma_{j+1}^{-1}]^{-1}.
\end{aligned} \tag{4.41}$$

Nótese que los elementos en (4.39) son generadores de L_n y

$$u_i\sigma_j\sigma_{j+1}\sigma_j\sigma_{j+1}^{-1}\sigma_j^{-1}\sigma_{j+1}^{-1}u_i^{-1} = c_1c_2c_3c_4c_5c_6.$$

Utilizando (4.10), (4.11) y (4.12) reconoceremos cual generador representa cada elemento en (4.41). Para esto distingamos cinco casos:

Caso 1: $j < n-i-1$. Entonces $c_1 = \sigma_j$.

Como $j+1 < n-i$, entonces

$$\begin{aligned}
c_2 &= [u_i\sigma_j]\sigma_{j+1}[u_i\sigma_j\sigma_{j+1}]^{-1},\\
&= u_i\sigma_{j+1}[u_i\sigma_{j+1}]^{-1},\\
&= \sigma_{j+1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_3 &= [u_i\sigma_j\sigma_{j+1}]\sigma_j[u_i\sigma_j\sigma_{j+1}\sigma_j]^{-1},\\
&= [u_i\sigma_{j+1}]\sigma_j[[u_i\sigma_{j+1}]\sigma_j]^{-1},\\
&= u_i\sigma_j[u_i\sigma_j]^{-1},\\
&= \sigma_j.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_4 &= [u_i\sigma_j\sigma_{j+1}\sigma_j]\sigma_{j+1}^{-1}[u_i\sigma_j\sigma_{j+1}\sigma_j\sigma_{j+1}^{-1}]^{-1},\\
&= [u_i\sigma_j]\sigma_{j+1}^{-1}[[u_i\sigma_j]\sigma_{j+1}^{-1}]^{-1},\\
&= u_i\sigma_{j+1}^{-1}[u_i\sigma_{j+1}^{-1}]^{-1},\\
&= \sigma_{j+1}^{-1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_5 &= [u_i\sigma_j\sigma_{j+1}\sigma_j\sigma_{j+1}^{-1}]\sigma_j^{-1}[u_i\sigma_j\sigma_{j+1}\sigma_j\sigma_{j+1}^{-1}\sigma_j^{-1}]^{-1},\\
&= [u_i\sigma_{j+1}^{-1}]\sigma_j^{-1}[[u_i\sigma_{j+1}^{-1}]\sigma_j^{-1}]^{-1},\\
&= u_i\sigma_j^{-1}[u_i\sigma_j^{-1}]^{-1},\\
&= \sigma_j^{-1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_6 &= [u_i\sigma_j\sigma_{j+1}\sigma_j\sigma_{j+1}^{-1}\sigma_j^{-1}]\sigma_{j+1}^{-1}[u_i\sigma_j\sigma_{j+1}\sigma_j\sigma_{j+1}^{-1}\sigma_j^{-1}\sigma_{j+1}^{-1}]^{-1},\\
&= [u_i\sigma_j^{-1}]\sigma_{j+1}^{-1}[[u_i\sigma_j^{-1}]\sigma_{j+1}^{-1}]^{-1},\\
&= u_i\sigma_{j+1}^{-1}[u_i\sigma_{j+1}^{-1}]^{-1},\\
&= \sigma_{j+1}^{-1}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $u_i\sigma_j\sigma_{j+1}\sigma_j\sigma_{j+1}^{-1}\sigma_j^{-1}\sigma_{j+1}^{-1}u_i^{-1} = \sigma_j\sigma_{j+1}\sigma_j\sigma_{j+1}^{-1}\sigma_j^{-1}\sigma_{j+1}^{-1}$

Caso 2: $j = n - i - 1$. Entonces $c_1 = \sigma_j$.

Como $j + 1 = n - i$, entonces

$$\begin{aligned}
c_2 &= [u_i\sigma_j]\sigma_{j+1}[u_i\sigma_j\sigma_{j+1}]^{-1},\\
&= u_i\sigma_{j+1}[u_i\sigma_{j+1}]^{-1},\\
&= e.
\end{aligned}$$

Como $j = n - i - 1 = n - (i + 1)$, entonces

$$\begin{aligned}
c_3 &= [u_i\sigma_j\sigma_{j+1}]\sigma_j[u_i\sigma_j\sigma_{j+1}\sigma_j]^{-1},\\
&= [u_i\sigma_{j+1}]\sigma_j[[u_i\sigma_{j+1}]\sigma_j]^{-1},\\
&= u_{i+1}\sigma_j[u_{i+1}\sigma_j]^{-1},\\
&= e.
\end{aligned}$$

Como $j + 1 = n - i = n - (i + 2) + 2 > n - (i + 2) + 1$, entonces

$$\begin{aligned}
c_4 &= [u_i\sigma_j\sigma_{j+1}\sigma_j]\sigma_{j+1}^{-1}[u_i\sigma_j\sigma_{j+1}\sigma_j\sigma_{j+1}^{-1}]^{-1},\\
&= [u_{i+1}\sigma_j]\sigma_{j+1}^{-1}[[u_{i+1}\sigma_j]\sigma_{j+1}^{-1}]^{-1},\\
&= u_{i+2}\sigma_{j+1}^{-1}[u_{i+2}\sigma_{j+1}^{-1}]^{-1},\\
&= \sigma_j^{-1}.
\end{aligned}$$

Como $j = n - i - 1 = n - (i+2) + 1$, entonces

$$\begin{aligned}
c_5 &= [u_i \sigma_j \sigma_{j+1} \sigma_j \sigma_{j+1}^{-1}] \sigma_j^{-1} [u_i \sigma_j \sigma_{j+1} \sigma_j \sigma_{j+1}^{-1} \sigma_j^{-1}]^{-1}, \\
&= [u_{i+2} \sigma_{j+1}^{-1}] \sigma_j^{-1} [[u_{i+2} \sigma_{j+1}^{-1}] \sigma_j^{-1}]^{-1}, \\
&= u_{i+2} \sigma_j^{-1} [u_{i+2} \sigma_j^{-1}]^{-1}, \\
&= e.
\end{aligned}$$

Como $j + 1 = n - i = n - (i+1) + 1$, entonces

$$\begin{aligned}
c_6 &= [u_i \sigma_j \sigma_{j+1} \sigma_j \sigma_{j+1}^{-1} \sigma_j^{-1}] \sigma_{j+1}^{-1} [u_i \sigma_j \sigma_{j+1} \sigma_j \sigma_{j+1}^{-1} \sigma_j^{-1} \sigma_{j+1}^{-1}]^{-1}, \\
&= [u_{i+2} \sigma_j^{-1}] \sigma_{j+1}^{-1} [[u_{i+2} \sigma_j^{-1}] \sigma_{j+1}^{-1}]^{-1}, \\
&= u_{i+1} \sigma_{j+1}^{-1} [u_{i+1} \sigma_{j+1}^{-1}]^{-1}, \\
&= e.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $u_i \sigma_j \sigma_{j+1} \sigma_j \sigma_{j+1}^{-1} \sigma_j^{-1} \sigma_{j+1}^{-1} u_i^{-1} = \sigma_j e e \sigma_j^{-1} e e = e$.

Caso 3: $j = n - i$. Entonces $c_1 = e$.

Como $j + 1 = n - i + 1 = n - (i+1) + 2 > n - (i+1) + 1$, entonces

$$\begin{aligned}
c_2 &= [u_i \sigma_j] \sigma_{j+1} [u_i \sigma_j \sigma_{j+1}]^{-1}, \\
&= u_{i+1} \sigma_{j+1} [u_{i+1} \sigma_{j+1}]^{-1}, \\
&= \sigma_j.
\end{aligned}$$

Como $j = n - i = n - (i+1) + 1$, entonces

$$\begin{aligned}
c_3 &= [u_i \sigma_j \sigma_{j+1}] \sigma_j [u_i \sigma_j \sigma_{j+1} \sigma_j]^{-1}, \\
&= [u_{i+1} \sigma_{j+1}] \sigma_j [[u_{i+1} \sigma_{j+1}] \sigma_j]^{-1}, \\
&= u_{i+1} \sigma_j [u_{i+1} \sigma_j]^{-1}, \\
&= a_j.
\end{aligned}$$

Como $j + 1 = n - i + 1$, entonces

$$\begin{aligned}
c_4 &= [u_i \sigma_j \sigma_{j+1} \sigma_j] \sigma_{j+1}^{-1} [u_i \sigma_j \sigma_{j+1} \sigma_j \sigma_{j+1}^{-1}]^{-1}, \\
&= [u_{i+1} \sigma_j] \sigma_{j+1}^{-1} [[u_{i+1} \sigma_j] \sigma_{j+1}^{-1}]^{-1}, \\
&= u_i \sigma_{j+1}^{-1} [u_i \sigma_{j+1}^{-1}]^{-1}, \\
&= e.
\end{aligned}$$

Como $j = n - i = n - (i-1) - 1 < n - (i-1)$, entonces

$$\begin{aligned} c_5 &= [u_i \sigma_j \sigma_{j+1} \sigma_j \sigma_{j+1}^{-1}] \sigma_j^{-1} [u_i \sigma_j \sigma_{j+1} \sigma_j \sigma_{j+1}^{-1} \sigma_j^{-1}]^{-1}, \\ &= [u_i \sigma_{j+1}^{-1}] \sigma_j^{-1} [[u_i \sigma_{j+1}^{-1}] \sigma_j^{-1}]^{-1}, \\ &= u_{i-1} \sigma_j^{-1} [u_{i-1} \sigma_j^{-1}]^{-1}, \\ &= \sigma_j^{-1}. \end{aligned}$$

Como $j + 1 = n - i + 1 = n - (i-1)$, entonces

$$\begin{aligned} c_6 &= [u_i \sigma_j \sigma_{j+1} \sigma_j \sigma_{j+1}^{-1} \sigma_j^{-1}] \sigma_{j+1}^{-1} [u_i \sigma_j \sigma_{j+1} \sigma_j \sigma_{j+1}^{-1} \sigma_j^{-1} \sigma_{j+1}^{-1}]^{-1}, \\ &= [u_{i-1} \sigma_j^{-1}] \sigma_{j+1}^{-1} [[u_{i-1} \sigma_j^{-1}] \sigma_{j+1}^{-1}]^{-1}, \\ &= u_{i-1} \sigma_{j+1}^{-1} [u_{i-1} \sigma_{j+1}^{-1}]^{-1}, \\ &= a_{j+1}^{-1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $u_i \sigma_j \sigma_{j+1} \sigma_j \sigma_{j+1}^{-1} \sigma_j^{-1} \sigma_{j+1}^{-1} u_i^{-1} = \sigma_j a_j \sigma_j^{-1} a_{j+1}^{-1}$.

Caso 4: $j = n - i + 1$. Entonces $c_1 = a_j$.

Como $j + 1 = n - i + 2 = n - (i-1) + 1$, entonces

$$\begin{aligned} c_2 &= [u_i \sigma_j] \sigma_{j+1} [u_i \sigma_j \sigma_{j+1}]^{-1}, \\ &= u_{i-1} \sigma_{j+1} [u_{i-1} \sigma_{j+1}]^{-1}, \\ &= a_{j+1}. \end{aligned}$$

Como $j = n - i + 1 = n - (i-2) - 1 < n - (i-2)$, entonces

$$\begin{aligned} c_3 &= [u_i \sigma_j \sigma_{j+1}] \sigma_j [u_i \sigma_j \sigma_{j+1} \sigma_j]^{-1}, \\ &= [u_{i-1} \sigma_{j+1}] \sigma_j [[u_{i-1} \sigma_{j+1}] \sigma_j]^{-1}, \\ &= u_{i-2} \sigma_j [u_{i-2} \sigma_j]^{-1}, \\ &= \sigma_j. \end{aligned}$$

Como $j + 1 = n - i + 2 = n - (i-2)$, entonces

$$\begin{aligned} c_4 &= [u_i \sigma_j \sigma_{j+1} \sigma_j] \sigma_{j+1}^{-1} [u_i \sigma_j \sigma_{j+1} \sigma_j \sigma_{j+1}^{-1}]^{-1}, \\ &= [u_{i-2} \sigma_j] \sigma_{j+1}^{-1} [[u_{i-2} \sigma_j] \sigma_{j+1}^{-1}]^{-1}, \\ &= u_{i-2} \sigma_{j+1}^{-1} [u_{i-2} \sigma_{j+1}^{-1}]^{-1}, \\ &= a_{j+1}^{-1}. \end{aligned}$$

Como $j = n - i + 1 = n - (i - 1)$, entonces

$$\begin{aligned}
c_5 &= [u_i \sigma_j \sigma_{j+1} \sigma_j \sigma_{j+1}^{-1}] \sigma_j^{-1} [u_i \sigma_j \sigma_{j+1} \sigma_j \sigma_{j+1}^{-1} \sigma_j^{-1}]^{-1}, \\
&= [u_{i-2} \sigma_{j+1}^{-1}] \sigma_j^{-1} [[u_{i-2} \sigma_{j+1}^{-1}] \sigma_j^{-1}]^{-1}, \\
&= u_{i-1} \sigma_j^{-1} [u_{i-1} \sigma_j^{-1}]^{-1}, \\
&= a_j^{-1}.
\end{aligned}$$

Como $j + 1 = n - i + 2 > n - i + 1$, entonces

$$\begin{aligned}
c_6 &= [u_i \sigma_j \sigma_{j+1} \sigma_j \sigma_{j+1}^{-1} \sigma_j^{-1}] \sigma_{j+1}^{-1} [u_i \sigma_j \sigma_{j+1} \sigma_j \sigma_{j+1}^{-1} \sigma_j^{-1} \sigma_{j+1}^{-1}]^{-1}, \\
&= [u_{i-1} \sigma_j^{-1}] \sigma_{j+1}^{-1} [[u_{i-1} \sigma_j^{-1}] \sigma_{j+1}^{-1}]^{-1}, \\
&= u_i \sigma_{j+1}^{-1} [u_i \sigma_{j+1}^{-1}]^{-1}, \\
&= \sigma_j^{-1}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $u_i \sigma_j \sigma_{j+1} \sigma_j \sigma_{j+1}^{-1} \sigma_j^{-1} \sigma_{j+1}^{-1} u_i^{-1} = a_j a_{j+1} \sigma_j a_{j+1}^{-1} a_j^{-1} \sigma_j^{-1}$.

Caso 5: $j > n - i + 1$. Entonces $c_1 = \sigma_{j-1}$.

Como $j + 1 > n - i + 2 > n - i + 1$, entonces

$$\begin{aligned}
c_2 &= [u_i \sigma_j] \sigma_{j+1} [u_i \sigma_j \sigma_{j+1}]^{-1}, \\
&= u_i \sigma_{j+1} [u_i \sigma_{j+1}]^{-1}, \\
&= \sigma_j.
\end{aligned}$$

Como $j > n - i + 1$, entonces

$$\begin{aligned}
c_3 &= [u_i \sigma_j \sigma_{j+1}] \sigma_j [u_i \sigma_j \sigma_{j+1} \sigma_j]^{-1}, \\
&= [u_i \sigma_{j+1}] \sigma_j [[u_i \sigma_{j+1}] \sigma_j]^{-1}, \\
&= u_i \sigma_j [u_i \sigma_j]^{-1}, \\
&= \sigma_{j-1}.
\end{aligned}$$

Como $j + 1 > n - i + 2 > n - i + 1$, entonces

$$\begin{aligned}
c_4 &= [u_i \sigma_j \sigma_{j+1} \sigma_j] \sigma_{j+1}^{-1} [u_i \sigma_j \sigma_{j+1} \sigma_j \sigma_{j+1}^{-1}]^{-1}, \\
&= [u_i \sigma_j] \sigma_{j+1}^{-1} [[u_i \sigma_j] \sigma_{j+1}^{-1}]^{-1}, \\
&= u_i \sigma_{j+1}^{-1} [u_i \sigma_{j+1}^{-1}]^{-1}, \\
&= \sigma_j^{-1}.
\end{aligned}$$

Como $j > n-i+1$, entonces

$$\begin{aligned} c_5 &= [u_i\sigma_j\sigma_{j+1}\sigma_j\sigma_{j+1}^{-1}]\sigma_j^{-1}[u_i\sigma_j\sigma_{j+1}\sigma_j\sigma_{j+1}^{-1}\sigma_j^{-1}]^{-1},\\ &= [u_i\sigma_{j+1}^{-1}]\sigma_j^{-1}[[u_i\sigma_{j+1}^{-1}]\sigma_j^{-1}]^{-1},\\ &= u_i\sigma_j^{-1}[u_i\sigma_j^{-1}]^{-1},\\ &= \sigma_{j-1}^{-1}. \end{aligned}$$

Como $j+1 > n-i+2 > n-i+1$, entonces

$$\begin{aligned} c_6 &= [u_i\sigma_j\sigma_{j+1}\sigma_j\sigma_{j+1}^{-1}\sigma_j^{-1}]\sigma_{j+1}^{-1}[u_i\sigma_j\sigma_{j+1}\sigma_j\sigma_{j+1}^{-1}\sigma_j^{-1}\sigma_{j+1}^{-1}]^{-1},\\ &= [u_i\sigma_j^{-1}]\sigma_{j+1}^{-1}[[u_i\sigma_j^{-1}]\sigma_{j+1}^{-1}]^{-1},\\ &= u_i\sigma_{j+1}^{-1}[u_i\sigma_{j+1}^{-1}]^{-1},\\ &= \sigma_j^{-1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $u_i\sigma_j\sigma_{j+1}\sigma_j\sigma_{j+1}^{-1}\sigma_j^{-1}\sigma_{j+1}^{-1}u_i^{-1} = \sigma_{j-1}\sigma_j\sigma_{j-1}\sigma_j^{-1}\sigma_{j-1}^{-1}\sigma_j^{-1}$.

Obtenemos los resultados a continuación:

$$\begin{array}{llll} \sigma_j\sigma_{j+1}\sigma_j\sigma_{j+1}^{-1}\sigma_j^{-1}\sigma_{j+1}^{-1}, & {\scriptstyle j<n-i-1,} & \sigma_j a_j\sigma_j^{-1}a_{j+1}^{-1}, & {\scriptstyle 1\leqslant j\leqslant n-2,}\\ a_j a_{j+1}\sigma_j\sigma_{j+1}^{-1}a_j^{-1}\sigma_j^{-1}, & {\scriptstyle 1\leqslant j\leqslant n-2,} & \sigma_{j-1}\sigma_j\sigma_{j-1}\sigma_j^{-1}\sigma_{j-1}^{-1}\sigma_j^{-1}, & {\scriptstyle 2\leqslant j\leqslant n-1}. \end{array}$$

Así $\sigma_j\sigma_{j+1}\sigma_j\sigma_{j+1}^{-1}\sigma_j^{-1}\sigma_{j+1}^{-1}$ induce las siguientes relaciones en L_n

$$u_i\sigma_j\sigma_{j+1}\sigma_j\sigma_{j+1}^{-1}\sigma_j^{-1}\sigma_{j+1}^{-1}u_i^{-1} = \begin{cases} \sigma_j\sigma_{j+1}\sigma_j\sigma_{j+1}^{-1}\sigma_j^{-1}\sigma_{j+1}^{-1} & ;\ 1\leqslant j\leqslant n-3,\\ \sigma_j a_j\sigma_j^{-1}a_{j+1}^{-1} & ;\ 1\leqslant j\leqslant n-2,\\ a_j a_{j+1}\sigma_j a_{j+1}^{-1}a_j^{-1}\sigma_j^{-1} & ;\ 1\leqslant j\leqslant n-2. \end{cases} \tag{4.42}$$

Utilizando la segunda relación en (4.42) notemos que:

$$\begin{aligned} a_j a_{j+1}\sigma_j a_{j+1}^{-1}a_j^{-1}\sigma_j^{-1} &= e,\\ a_{j+1}^{-1}a_j^{-1} &= \sigma_j^{-1}a_{j+1}^{-1}a_j^{-1}\sigma_j,\\ \sigma_j a_{j+1}^{-1}(a_j^{-1}\sigma_j^{-1}) &= a_{j+1}^{-1}a_j^{-1},\\ \sigma_j a_{j+1}^{-1}(\sigma_j^{-1}a_{j+1}^{-1}) &= a_{j+1}^{-1}a_j^{-1},\\ e &= \sigma_j a_{j+1}\sigma_j^{-1}a_{j+1}^{-1}a_j^{-1}a_{j+1}, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$u_i\sigma_j\sigma_{j+1}\sigma_j\sigma_{j+1}^{-1}\sigma_j^{-1}\sigma_{j+1}^{-1}u_i^{-1} = \begin{cases} \sigma_j\sigma_{j+1}\sigma_j\sigma_{j+1}^{-1}\sigma_j^{-1}\sigma_{j+1}^{-1} & ;\ 1\leqslant j\leqslant n-3,\\ \sigma_j a_j\sigma_j^{-1}a_{j+1}^{-1} & ;\ 1\leqslant j\leqslant n-2,\\ \sigma_j a_{j+1}\sigma_j^{-1}a_{j+1}^{-1}a_j^{-1}a_{j+1} & ;\ 1\leqslant j\leqslant n-2. \end{cases} \tag{4.43}$$

Sea R el conjunto de relaciones en (4.40) y (4.43). Esto demuestra el teorema. $\square$

Demostración (Proposición 4.2).

Del mismo modo que en Teorema 4.4, reescribiremos cada conjugado en los generadores de L_{n-1}.

Para calcular las relaciones definamos los siguientes elementos:

$$\begin{aligned} d_1 &:= w_{n-1,i}\sigma_j[w_{n-1,i}\sigma_j]^{-1}, \\ d_2 &:= [w_{n-1,i}\sigma_j]\sigma_k[w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_k]^{-1}, \\ d_3 &:= [w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_k]\sigma_j^{-1}[w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}]^{-1}, \\ d_4 &:= [w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}]\sigma_k^{-1}[w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}\sigma_k^{-1}]^{-1}. \end{aligned} \tag{4.44}$$

Notar que los elementos en (4.44) son generadores de L_{n-1}, además:

$$w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}\sigma_k^{-1}w_{n-1,i}^{-1} = d_1d_2d_3d_4.$$

Distingamos estos elementos en 4 casos:

Caso 1: Si $j < i-1$, se tiene:

$$d_1 = \sigma_j.$$

Caso 1.1: Si $k \leqslant j-2$, entonces, $k \leqslant i-3 < i-1$, luego:

$$\begin{aligned} d_2 &= [w_{n-1,i}\sigma_j]\sigma_k[[w_{n-1,i}\sigma_j]\sigma_k]^{-1}, \\ &= w_{n-1,i}\sigma_k[w_{n-1,i}\sigma_k]^{-1}, \\ &= \sigma_k. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_3 &= [w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_k]\sigma_j^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_k]\sigma_j^{-1}]^{-1}, \\ &= w_{n-1,i}\sigma_j^{-1}[w_{n-1,i}\sigma_j^{-1}]^{-1}, \\ &= \sigma_j^{-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_4 &= [w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}]\sigma_k^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}]\sigma_k^{-1}]^{-1}, \\ &= [w_{n-1,i}\sigma_j^{-1}]\sigma_k^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j^{-1}]\sigma_k^{-1}]^{-1}, \\ &= w_{n-1,i}\sigma_k^{-1}[w_{n-1,i}\sigma_k^{-1}]^{-1}, \\ &= \sigma_k^{-1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $d_1d_2d_3d_4 = \sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}\sigma_k^{-1}$.

Caso 1.2: Si $k \geqslant j+2$, entonces:

Caso 1.2.1: Si $k < i-1$, tenemos:

$$\begin{aligned} d_2 &= [w_{n-1,i}\sigma_j]\sigma_k[[w_{n-1,i}\sigma_j]\sigma_k]^{-1}, \\ &= w_{n-1,i}\sigma_k[w_{n-1,i}\sigma_k]^{-1}, \\ &= \sigma_k. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_3 &= [w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_k]\sigma_j^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_k]\sigma_j^{-1}]^{-1}, \\ &= [w_{n-1,i}\sigma_k]\sigma_j^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_k]\sigma_j^{-1}]^{-1}, \\ &= w_{n-1,i}\sigma_j^{-1}[w_{n-1,i}\sigma_j^{-1}]^{-1}, \\ &= \sigma_j^{-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_4 &= [w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}]\sigma_k^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}]\sigma_k^{-1}]^{-1}, \\ &= [w_{n-1,i}\sigma_j^{-1}]\sigma_k^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j^{-1}]\sigma_k^{-1}]^{-1}, \\ &= w_{n-1,i}\sigma_k^{-1}[w_{n-1,i}\sigma_k^{-1}]^{-1}, \\ &= \sigma_k^{-1} \end{aligned}$$

Por lo tanto $d_1d_2d_3d_4 = \sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}\sigma_k^{-1}$.

Caso 1.2.2: Si $k = i-1$, tenemos:

$$\begin{aligned} d_2 &= [w_{n-1,i}\sigma_j]\sigma_k[[w_{n-1,i}\sigma_j]\sigma_k]^{-1}, \\ &= w_{n-1,i}\sigma_k[w_{n-1,i}\sigma_k]^{-1}, \\ &= e. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_3 &= [w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_k]\sigma_j^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_k]\sigma_j^{-1}]^{-1}, \\ &= [w_{n-1,i}\sigma_k]\sigma_j^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_k]\sigma_j^{-1}]^{-1}, \\ &= w_{n-1,i-1}\sigma_j^{-1}[w_{n-1,i-1}\sigma_j^{-1}]^{-1}, \\ &= \sigma_j^{-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_4 &= [w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}]\sigma_k^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}]\sigma_k^{-1}]^{-1}, \\ &= [w_{n-1,i-1}\sigma_j^{-1}]\sigma_k^{-1}[[w_{n-1,i-1}\sigma_j^{-1}]\sigma_k^{-1}]^{-1}, \\ &= w_{n-1,i-1}\sigma_k^{-1}[w_{n-1,i-1}\sigma_k^{-1}]^{-1}, \\ &= e. \end{aligned}$$

Por lo tanto $d_1d_2d_3d_4 = \sigma_j e\sigma_j^{-1}e = e$.

Caso 1.2.3: Si $i = k$, tenemos:

$$\begin{aligned} d_2 &= [w_{n-1,i}\sigma_j]\sigma_k[[w_{n-1,i}\sigma_j]\sigma_k]^{-1}, \\ &= w_{n-1,i}\sigma_k[w_{n-1,i}\sigma_k]^{-1}, \\ &= \tau_{k,n-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_3 &= [w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_k]\sigma_j^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_k]\sigma_j^{-1}]^{-1}, \\ &= [w_{n-1,i}\sigma_k]\sigma_j^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_k]\sigma_j^{-1}]^{-1}, \\ &= w_{n-1,i+1}\sigma_j^{-1}[w_{n-1,i+1}\sigma_j^{-1}]^{-1}, \\ &= \sigma_j^{-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_4 &= [w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}]\sigma_k^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}]\sigma_k^{-1}]^{-1}, \\ &= [w_{n-1,i+1}\sigma_j^{-1}]\sigma_k^{-1}[[w_{n-1,i+1}\sigma_j^{-1}]\sigma_k^{-1}]^{-1}, \\ &= w_{n-1,i+1}\sigma_k^{-1}[w_{n-1,i+1}\sigma_k^{-1}]^{-1}, \\ &= \tau_{k,n-1}^{-1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $d_1d_2d_3d_4 = \sigma_j\tau_{k,n-1}\sigma_j^{-1}\tau_{k,n-1}^{-1}$.

Caso 1.2.4: Si $i < k$, tenemos:

$$\begin{aligned} d_2 &= [w_{n-1,i}\sigma_j]\sigma_k[[w_{n-1,i}\sigma_j]\sigma_k]^{-1}, \\ &= w_{n-1,i}\sigma_k[w_{n-1,i}\sigma_k]^{-1}, \\ &= \sigma_{k-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_3 &= [w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_k]\sigma_j^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_k]\sigma_j^{-1}]^{-1}, \\ &= [w_{n-1,i}\sigma_k]\sigma_j^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_k]\sigma_j^{-1}]^{-1}, \\ &= w_{n-1,i}\sigma_j^{-1}[w_{n-1,i}\sigma_j^{-1}]^{-1}, \\ &= \sigma_j^{-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_4 &= [w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}]\sigma_k^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}]\sigma_k^{-1}]^{-1}, \\ &= [w_{n-1,i}\sigma_j^{-1}]\sigma_k^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j^{-1}]\sigma_k^{-1}]^{-1}, \\ &= w_{n-1,i}\sigma_k^{-1}[w_{n-1,i}\sigma_k^{-1}]^{-1}, \\ &= \sigma_{k-1}^{-1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $d_1d_2d_3d_4 = \sigma_j\sigma_{k-1}\sigma_j^{-1}\sigma_{k-1}^{-1}$.

Caso 2: Si $i < j$, se tiene:

$$d_1 = \sigma_{j-1}.$$

Caso 2.1: Si $k \leqslant j-2$, entonces:

Caso 2.1.1: Si $k < i-1$, tenemos:

$$\begin{aligned} d_2 &= [w_{n-1,i}\sigma_j]\sigma_k[[w_{n-1,i}\sigma_j]\sigma_k]^{-1}, \\ &= w_{n-1,i}\sigma_k[w_{n-1,i}\sigma_k]^{-1}, \\ &= \sigma_k. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_3 &= [w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_k]\sigma_j^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_k]\sigma_j^{-1}]^{-1}, \\ &= [w_{n-1,i}\sigma_k]\sigma_j^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_k]\sigma_j^{-1}]^{-1}, \\ &= w_{n-1,i}\sigma_j^{-1}[w_{n-1,i}\sigma_j^{-1}]^{-1}, \\ &= \sigma_{j-1}^{-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_4 &= [w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}]\sigma_k^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}]\sigma_k^{-1}]^{-1}, \\ &= [w_{n-1,i}\sigma_j^{-1}]\sigma_k^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j^{-1}]\sigma_k^{-1}]^{-1}, \\ &= w_{n-1,i}\sigma_k^{-1}[w_{n-1,i}\sigma_k^{-1}]^{-1}, \\ &= \sigma_k^{-1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $d_1d_2d_3d_4 = \sigma_{j-1}\sigma_k\sigma_{j-1}^{-1}\sigma_k^{-1}$.

Caso 2.1.2: Si $k = i-1$, tenemos:

$$\begin{aligned} d_2 &= [w_{n-1,i}\sigma_j]\sigma_k[[w_{n-1,i}\sigma_j]\sigma_k]^{-1}, \\ &= w_{n-1,i}\sigma_k[w_{n-1,i}\sigma_k]^{-1}, \\ &= e. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_3 &= [w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_k]\sigma_j^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_k]\sigma_j^{-1}]^{-1}, \\ &= [w_{n-1,i}\sigma_k]\sigma_j^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_k]\sigma_j^{-1}]^{-1}, \\ &= w_{n-1,i-1}\sigma_j^{-1}[w_{n-1,i-1}\sigma_j^{-1}]^{-1}, \\ &= \sigma_{j-1}^{-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_4 &= [w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}]\sigma_k^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}]\sigma_k^{-1}]^{-1}, \\ &= [w_{n-1,i-1}\sigma_j^{-1}]\sigma_k^{-1}[[w_{n-1,i-1}\sigma_j^{-1}]\sigma_k^{-1}]^{-1}, \\ &= w_{n-1,i-1}\sigma_k^{-1}[w_{n-1,i-1}\sigma_k^{-1}]^{-1}, \\ &= e. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\sigma_{j-1}e\sigma_{j-1}^{-1}e = e$.

Caso 2.1.3: Si $k = i$, tenemos:

$$\begin{aligned} d_2 &= [w_{n-1,i}\sigma_j]\sigma_k[[w_{n-1,i}\sigma_j]\sigma_k]^{-1}, \\ &= w_{n-1,i}\sigma_k[w_{n-1,i}\sigma_k]^{-1}, \\ &= \tau_{k,n-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_3 &= [w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_k]\sigma_j^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_k]\sigma_j^{-1}]^{-1}, \\ &= [w_{n-1,i}\sigma_k]\sigma_j^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_k]\sigma_j^{-1}]^{-1}, \\ &= w_{n-1,i+1}\sigma_j^{-1}[w_{n-1,i+1}\sigma_j^{-1}]^{-1}, \\ &= \sigma_{j-1}^{-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_4 &= [w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}]\sigma_k^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}]\sigma_k^{-1}]^{-1}, \\ &= [w_{n-1,i+1}\sigma_j^{-1}]\sigma_k^{-1}[[w_{n-1,i+1}\sigma_j^{-1}]\sigma_k^{-1}]^{-1}, \\ &= w_{n-1,i+1}\sigma_k^{-1}[w_{n-1,i+1}\sigma_k^{-1}]^{-1}, \\ &= \tau_{k,n-1}^{-1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $d :_1 d_1d_2d_4 = \sigma_{j-1}\tau_{k,n-1}\sigma_{j-1}^{-1}\tau_{k,n-1}^{-1}$.

Caso 2.1.4: Si $k > i$, tenemos:

$$\begin{aligned} d_2 &= [w_{n-1,i}\sigma_j]\sigma_k[[w_{n-1,i}\sigma_j]\sigma_k]^{-1}, \\ &= w_{n-1,i}\sigma_k[w_{n-1,i}\sigma_k]^{-1}, \\ &= \sigma_{k-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_3 &= [w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_k]\sigma_j^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_k]\sigma_j^{-1}]^{-1}, \\ &= [w_{n-1,i}\sigma_k]\sigma_j^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_k]\sigma_j^{-1}]^{-1}, \\ &= w_{n-1,i}\sigma_j^{-1}[w_{n-1,i}\sigma_j^{-1}]^{-1}, \\ &= \sigma_{j-1}^{-1}. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
d_4 &= [w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}]\sigma_k^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}]\sigma_k^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{n-1,i}\sigma_j^{-1}]\sigma_k^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j^{-1}]\sigma_k^{-1}]^{-1},\\
&= w_{n-1,i}\sigma_k^{-1}[w_{n-1,i}\sigma_k^{-1}]^{-1},\\
&= \sigma_{k-1}^{-1}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $d_1d_2d_3d_4 = \sigma_{j-1}\sigma_{k-1}\sigma_{j-1}^{-1}\sigma_{k-1}^{-1}$.

Caso 2.2: Si $k \geqslant j+2$, entonces:

$$d_1 = \sigma_{j-1}.$$

$$
\begin{aligned}
d_2 &= [w_{n-1,i}\sigma_j]\sigma_k[[w_{n-1,i}\sigma_j]\sigma_k]^{-1},\\
&= w_{n-1,i}\sigma_k[w_{n-1,i}\sigma_k]^{-1},\\
&= \sigma_{k-1}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d_3 &= [w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_k]\sigma_j^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_k]\sigma_j^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{n-1,i}\sigma_k]\sigma_j^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_k]\sigma_j^{-1}]^{-1},\\
&= w_{n-1,i}\sigma_j^{-1}[w_{n-1,i}\sigma_j^{-1}]^{-1},\\
&= \sigma_{j-1}^{-1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d_4 &= [w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}]\sigma_k^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}]\sigma_k^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{n-1,i}\sigma_j^{-1}]\sigma_k^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j^{-1}]\sigma_k^{-1}]^{-1},\\
&= w_{n-1,i}\sigma_k^{-1}[w_{n-1,i}\sigma_k^{-1}]^{-1},\\
&= \sigma_{k-1}^{-1}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $d_1d_2d_3d_4 = \sigma_{j-1}\sigma_{k-1}\sigma_{j-1}^{-1}\sigma_{k-1}^{-1}$.

Caso 3: Si $j = i-1$, se tiene:

$$d_1 = e.$$

Caso 3.1: Si $k \leqslant j-2$, entonces:

$$
\begin{aligned}
d_2 &= [w_{n-1,i}\sigma_j]\sigma_k[[w_{n-1,i}\sigma_j]\sigma_k]^{-1},\\
&= w_{n-1,i-1}\sigma_k[w_{n-1,i-1}\sigma_k]^{-1},\\
&= \sigma_k.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d_3 &= [w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_k]\sigma_j^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_k]\sigma_j^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{n-1,i-1}\sigma_k]\sigma_j^{-1}[[w_{n-1,i-1}\sigma_k]\sigma_j^{-1}]^{-1},\\
&= w_{n-1,i-1}\sigma_j^{-1}[w_{n-1,i-1}\sigma_j^{-1}]^{-1},\\
&= e.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d_4 &= [w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}]\sigma_k^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}]\sigma_k^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{n-1,i-1}\sigma_j^{-1}]\sigma_k^{-1}[[w_{n-1,i-1}\sigma_j^{-1}]\sigma_k^{-1}]^{-1},\\
&= w_{n-1,i+1}\sigma_k^{-1}[w_{n-1,i+1}\sigma_k^{-1}]^{-1},\\
&= \sigma_k^{-1}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $d_1d_2d_3d_4 = e\sigma_k e\sigma_k^{-1} = e$.

Caso 3.2: Si $k \geqslant j+2$, entonces:

$$
\begin{aligned}
d_2 &= [w_{n-1,i}\sigma_j]\sigma_k[[w_{n-1,i}\sigma_j]\sigma_k]^{-1},\\
&= w_{n-1,i-1}\sigma_k[w_{n-1,i-1}\sigma_k]^{-1},\\
&= \sigma_{k-1}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d_3 &= [w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_k]\sigma_j^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_k]\sigma_j^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{n-1,i-1}\sigma_k]\sigma_j^{-1}[[w_{n-1,i-1}\sigma_k]\sigma_j^{-1}]^{-1},\\
&= w_{n-1,i-1}\sigma_j^{-1}[w_{n-1,i-1}\sigma_j^{-1}]^{-1},\\
&= e.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d_4 &= [w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}]\sigma_k^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}]\sigma_k^{-1}]^{-1},\\
&= w_{n-1,i}\sigma_k^{-1}[w_{n-1,i}\sigma_k^{-1}]^{-1},\\
&= \sigma_{k-1}^{-1}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $d_1d_2d_3d_4 = e\sigma_{k-1}e\sigma_{k-1}^{-1} = e$.

Caso 4: Si $j = i$, se tiene:

$$d_1 = \tau_{j,n-1}.$$

Caso 4.1: Si $k \leqslant j-2$, entonces:

$$
\begin{aligned}
d_2 &= [w_{n-1,i}\sigma_j]\sigma_k[[w_{n-1,i}\sigma_j]\sigma_k]^{-1},\\
&= w_{n-1,i+1}\sigma_k[w_{n-1,i+1}\sigma_k]^{-1},\\
&= \sigma_k.
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
d_3 &= [w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_k]\sigma_j^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_k]\sigma_j^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{n-1,i+1}\sigma_k]\sigma_j^{-1}[[w_{n-1,i+1}\sigma_k]\sigma_j^{-1}]^{-1},\\
&= w_{n-1,i}\sigma_j^{-1}[w_{n-1,i}\sigma_j^{-1}]^{-1},\\
&= \tau_{j,n-1}^{-1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_4 &= [w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}]\sigma_k^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}]\sigma_k^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{n-1,i}\sigma_j^{-1}]\sigma_k^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j^{-1}]\sigma_k^{-1}]^{-1},\\
&= w_{n-1,i+1}\sigma_k^{-1}[w_{n-1,i+1}\sigma_k^{-1}]^{-1},\\
&= \sigma_k^{-1}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $d_1d_2d_3d_4 = \tau_{j,n-1}\sigma_k\tau_{j,n-1}^{-1}\sigma_k^{-1}$.

Caso 4.2: Si $k \geqslant j+2$, entonces:

$$\begin{aligned}
d_2 &= [w_{n-1,i}\sigma_j]\sigma_k[[w_{n-1,i}\sigma_j]\sigma_k]^{-1},\\
&= w_{n-1,i+1}\sigma_k[w_{n-1,i+1}\sigma_k]^{-1},\\
&= \sigma_{k-1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_3 &= [w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_k]\sigma_j^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_k]\sigma_j^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{n-1,i+1}\sigma_k]\sigma_j^{-1}[[w_{n-1,i+1}\sigma_k]\sigma_j^{-1}]^{-1},\\
&= w_{n-1,i+1}\sigma_j^{-1}[w_{n-1,i+1}\sigma_j^{-1}]^{-1},\\
&= \tau_{j,n-1}^{-1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_4 &= [w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}]\sigma_k^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}]\sigma_k^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{n-1,i+1}\sigma_j^{-1}]\sigma_k^{-1}[[w_{n-1,i+1}\sigma_j^{-1}]\sigma_k^{-1}]^{-1},\\
&= w_{n-1,i}\sigma_k^{-1}[w_{n-1,i}\sigma_k^{-1}]^{-1},\\
&= \sigma_{k-1}^{-1}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $d_1d_2d_3d_4 = \tau_{j,n-1}\sigma_{k-1}\tau_{j,n-1}^{-1}\sigma_{k-1}^{-1}$.

Así obtenemos las siguientes relaciones:

$$\left\{\begin{array}{lll}
(1) & \sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}\sigma_k^{-1}=e & ;\ j<i-1,\ k\leqslant j-2,\\
(2) & \sigma_j\sigma_k\sigma_j^{-1}\sigma_k^{-1}=e & ;\ j<i-1,\ k\geqslant j+2,\ k<i-1,\\
(3) & \sigma_j\tau_{k,n-1}\sigma_j^{-1}\tau_{k,n-1}^{-1}=e & ;\ j<i-1,\ k\geqslant j+2,\ i=k,\\
(4) & \sigma_j\sigma_{k-1}\sigma_j^{-1}\sigma_{j-1}^{-1}=e & ;\ j<i-1,\ k\geqslant j+2,\ i<k,\\
(5) & \sigma_{j-1}\sigma_k\sigma_{j-1}^{-1}\sigma_k^{-1}=e & ;\ i<j,\ k\leqslant j-2,\ k<i-1,\\
(6) & \sigma_{j-1}\tau_{k,n-1}\sigma_{j-1}^{-1}\tau_{k,n-1}^{-1}=e & ;\ i<j,\ k\leqslant j-2,\ k=i,\\
(7) & \sigma_{j-1}\sigma_{k-1}\sigma_{j-1}^{-1}\sigma_{k-1}^{-1}=e & ;\ i<j,\ k\leqslant j-2,\ k>i,\\
(8) & \sigma_{j-1}\sigma_{k-1}\sigma_{j-1}^{-1}\sigma_{k-1}^{-1}=e & ;\ i<j,\ k\geqslant j+2,\\
(9) & \tau_{j,n-1}\sigma_k\tau_{j,n-1}^{-1}\sigma_k^{-1}=e & ;\ j=i,\ k\leqslant j-2,\\
(10) & \tau_{j,n-1}\sigma_{k-1}\tau_{j,n-1}^{-1}\sigma_{k-1}^{-1}=e & ;\ j=i,\ k\geqslant j+2.
\end{array}\right. \tag{4.45}$$

Uniendo los casos obtenemos las relaciones en (4.26). $\square$

Demostración (Proposición 4.3).

Calculemos las relaciones inducidas por $(\mathrm{I})_n(2)$ definiendo los siguientes elementos:

$$\begin{aligned}
f_1 &:= w_{n-1,i}\sigma_j[w_{n-1,i}\sigma_j]^{-1},\\
f_2 &:= [w_{n-1,i}\sigma_j]\sigma_{j+1}[w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_{j+1}]^{-1},\\
f_3 &:= [w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_{j+1}]\sigma_j[w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_{j+1}\sigma_j]^{-1},\\
f_4 &:= [w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_{j+1}\sigma_j]\sigma_{j+1}^{-1}[w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_{j+1}\sigma_j\sigma_{j+1}^{-1}]^{-1},\\
f_5 &:= [w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_{j+1}\sigma_j\sigma_{j+1}^{-1}]\sigma_j^{-1}[w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_{j+1}\sigma_j\sigma_{j+1}^{-1}\sigma_j^{-1}]^{-1},\\
f_6 &:= [w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_{j+1}\sigma_j\sigma_{j+1}^{-1}\sigma_j^{-1}]\sigma_{j+1}^{-1}[w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_{j+1}\sigma_j\sigma_{j+1}^{-1}\sigma_j^{-1}\sigma_{j+1}^{-1}]^{-1}.
\end{aligned} \tag{4.46}$$

Notar que los elementos en (4.46) son generadores de L_{n-1}, además:

$$w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_{j+1}\sigma_j\sigma_{j+1}^{-1}\sigma_j^{-1}\sigma_{j+1}^{-1}w_{n-1,i}^{-1}=f_1f_2f_3f_4f_5f_6.$$

Distingamos estos elementos en 4 casos:

Caso 1: Si $j<i-1$, se tiene:

$$f_1 = \sigma_j.$$

Caso 1.1: Si $j+1<i-1$, entonces:

$$\begin{aligned} f_2 &= [w_{n-1,i}\sigma_j]\sigma_{j+1}[[w_{n-1,i}\sigma_j]\sigma_{j+1}]^{-1},\\ &= w_{n-1,i}\sigma_{j+1}[w_{n-1,i}\sigma_{j+1}]^{-1},\\ &= \sigma_{j+1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_3 &= [w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_{j+1}]\sigma_j[[w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_{j+1}]\sigma_j]^{-1},\\ &= [w_{n-1,i}\sigma_{j+1}]\sigma_j[[w_{n-1,i}\sigma_{j+1}]\sigma_j]^{-1},\\ &= w_{n-1,i}\sigma_j[w_{n-1,i}\sigma_j]^{-1},\\ &= \sigma_j. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_4 &= [w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_{j+1}\sigma_j]\sigma_{j+1}^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_{j+1}\sigma_j]\sigma_{j+1}^{-1}]^{-1},\\ &= [w_{n-1,i}\sigma_j]\sigma_{j+1}^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j]\sigma_{j+1}^{-1}]^{-1},\\ &= w_{n-1,i}\sigma_{j+1}^{-1}[w_{n-1,i}\sigma_{j+1}^{-1}]^{-1},\\ &= \sigma_{j+1}^{-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_5 &= [w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_{j+1}\sigma_j\sigma_{j+1}^{-1}]\sigma_j^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_{j+1}\sigma_j\sigma_{j+1}^{-1}]\sigma_j^{-1}]^{-1},\\ &= [w_{n-1,i}\sigma_{j+1}^{-1}]\sigma_j^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_{j+1}^{-1}]\sigma_j^{-1}]^{-1},\\ &= w_{n-1,i}\sigma_j^{-1}[w_{n-1,i}\sigma_j^{-1}]^{-1},\\ &= \sigma_j^{-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_6 &= [w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_{j+1}\sigma_j\sigma_{j+1}^{-1}\sigma_j^{-1}]\sigma_{j+1}^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_{j+1}\sigma_j\sigma_{j+1}^{-1}\sigma_j^{-1}]\sigma_{j+1}^{-1}]^{-1},\\ &= [w_{n-1,i}\sigma_j^{-1}]\sigma_{j+1}^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j^{-1}]\sigma_{j+1}^{-1}]^{-1},\\ &= w_{n-1,i}\sigma_{j+1}^{-1}[w_{n-1,i}\sigma_{j+1}^{-1}]^{-1},\\ &= \sigma_{j+1}^{-1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $f_1f_2f_3f_4f_5f_6 = \sigma_j\sigma_{j+1}\sigma_j\sigma_{j+1}^{-1}\sigma_j^{-1}\sigma_{j+1}^{-1}$.

Caso 1.2: Si $j+1=i-1$, entonces:

$$\begin{aligned} f_2 &= [w_{n-1,i}\sigma_j]\sigma_{j+1}[[w_{n-1,i}\sigma_j]\sigma_{j+1}]^{-1},\\ &= w_{n-1,i}\sigma_{j+1}[w_{n-1,i}\sigma_{j+1}]^{-1},\\ &= e. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_3 &= [w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_{j+1}]\sigma_j[[w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_{j+1}]\sigma_j]^{-1},\\
&= [w_{n-1,i}\sigma_{j+1}]\sigma_j[[w_{n-1,i}\sigma_{j+1}]\sigma_j]^{-1},\\
&= w_{n-1,i-1}\sigma_j[w_{n-1,i-1}\sigma_j]^{-1},\\
&= e.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_4 &= [w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_{j+1}\sigma_j]\sigma_{j+1}^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_{j+1}\sigma_j]\sigma_{j+1}^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{n-1,i-1}\sigma_j]\sigma_{j+1}^{-1}[[w_{n-1,i-1}\sigma_j]\sigma_{j+1}^{-1}]^{-1},\\
&= w_{n-1,i-2}\sigma_{j+1}^{-1}[w_{n-1,i-2}\sigma_{j+1}^{-1}]^{-1},\\
&= \sigma_j^{-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_5 &= [w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_{j+1}\sigma_j\sigma_{j+1}^{-1}]\sigma_j^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_{j+1}\sigma_j\sigma_{j+1}^{-1}]\sigma_j^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{n-1,i-2}\sigma_{j+1}^{-1}]\sigma_j^{-1}[[w_{n-1,i-2}\sigma_{j+1}^{-1}]\sigma_j^{-1}]^{-1},\\
&= w_{n-1,i-2}\sigma_j^{-1}[w_{n-1,i-2}\sigma_j^{-1}]^{-1},\\
&= e.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_6 &= [w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_{j+1}\sigma_j\sigma_{j+1}^{-1}\sigma_j^{-1}]\sigma_{j+1}^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_{j+1}\sigma_j\sigma_{j+1}^{-1}\sigma_j^{-1}]\sigma_{j+1}^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{n-1,i-2}\sigma_j^{-1}]\sigma_{j+1}^{-1}[[w_{n-1,i-2}\sigma_j^{-1}]\sigma_{j+1}^{-1}]^{-1},\\
&= w_{n-1,i-1}\sigma_{j+1}^{-1}[w_{n-1,i-1}\sigma_{j+1}^{-1}]^{-1},\\
&= e.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $f_1f_2f_3f_4f_5f_6 = \sigma_j e\sigma_j^{-1}eee = e$.

Caso 2: Si $i < j$, se tiene:

$$f_1 = \sigma_{j-1}.$$

$$\begin{aligned}
f_2 &= [w_{n-1,i}\sigma_j]\sigma_{j+1}[[w_{n-1,i}\sigma_j]\sigma_{j+1}]^{-1},\\
&= w_{n-1,i}\sigma_{j+1}[w_{n-1,i}\sigma_{j+1}]^{-1},\\
&= \sigma_j.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_3 &= [w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_{j+1}]\sigma_j[[w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_{j+1}]\sigma_j]^{-1},\\
&= [w_{n-1,i}\sigma_{j+1}]\sigma_j[[w_{n-1,i}\sigma_{j+1}]\sigma_j]^{-1},\\
&= w_{n-1,i}\sigma_j[w_{n-1,i}\sigma_j]^{-1},\\
&= \sigma_{j-1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_4 &= [w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_{j+1}\sigma_j]\sigma_{j+1}^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_{j+1}\sigma_j]\sigma_{j+1}^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{n-1,i}\sigma_j]\sigma_{j+1}^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j]\sigma_{j+1}^{-1}]^{-1},\\
&= w_{n-1,i}\sigma_{j+1}^{-1}[w_{n-1,i}\sigma_{j+1}^{-1}]^{-1},\\
&= \sigma_j^{-1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_5 &= [w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_{j+1}\sigma_j\sigma_{j+1}^{-1}]\sigma_j^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_{j+1}\sigma_j\sigma_{j+1}^{-1}]\sigma_j^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{n-1,i}\sigma_{j+1}^{-1}]\sigma_j^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_{j+1}^{-1}]\sigma_j^{-1}]^{-1},\\
&= w_{n-1,i}\sigma_j^{-1}[w_{n-1,i}\sigma_j^{-1}]^{-1},\\
&= \sigma_{j-1}^{-1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_6 &= [w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_{j+1}\sigma_j\sigma_{j+1}^{-1}\sigma_j^{-1}]\sigma_{j+1}^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_{j+1}\sigma_j\sigma_{j+1}^{-1}\sigma_j^{-1}]\sigma_{j+1}^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{n-1,i}\sigma_j^{-1}]\sigma_{j+1}^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j^{-1}]\sigma_{j+1}^{-1}]^{-1},\\
&= w_{n-1,i}\sigma_{j+1}^{-1}[w_{n-1,i}\sigma_{j+1}^{-1}]^{-1},\\
&= \sigma_j^{-1}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $f_1f_2f_3f_4f_5f_6 = \sigma_{j-1}\sigma_j\sigma_{j-1}\sigma_j^{-1}\sigma_{j-1}^{-1}\sigma_j^{-1}$.

Caso 3: Si $i-1=j$, se tiene:

$$f_1 = e.$$

$$\begin{aligned}
f_2 &= [w_{n-1,i}\sigma_j]\sigma_{j+1}[[w_{n-1,i}\sigma_j]\sigma_{j+1}]^{-1},\\
&= w_{n-1,i-1}\sigma_{j+1}[w_{n-1,i-1}\sigma_{j+1}]^{-1},\\
&= \sigma_j.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_3 &= [w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_{j+1}]\sigma_j[[w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_{j+1}]\sigma_j]^{-1},\\
&= [w_{n-1,i-1}\sigma_{j+1}]\sigma_j[[w_{n-1,i-1}\sigma_{j+1}]\sigma_j]^{-1},\\
&= w_{n-1,i-1}\sigma_j[w_{n-1,i-1}\sigma_j]^{-1},\\
&= \tau_{j,n-1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_4 &= [w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_{j+1}\sigma_j]\sigma_{j+1}^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_{j+1}\sigma_j]\sigma_{j+1}^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{n-1,i-1}\sigma_j]\sigma_{j+1}^{-1}[[w_{n-1,i-1}\sigma_j]\sigma_{j+1}^{-1}]^{-1},\\
&= w_{n-1,i}\sigma_{j+1}^{-1}[w_{n-1,i}\sigma_{j+1}^{-1}]^{-1},\\
&= e.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_5 &= [w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_{j+1}\sigma_j\sigma_{j+1}^{-1}]\sigma_j^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_{j+1}\sigma_j\sigma_{j+1}^{-1}]\sigma_j^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{n-1,i}\sigma_{j+1}^{-1}]\sigma_j^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_{j+1}^{-1}]\sigma_j^{-1}]^{-1},\\
&= w_{n-1,i+1}\sigma_j^{-1}[w_{n-1,i+1}\sigma_j^{-1}]^{-1},\\
&= \sigma_j^{-1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_6 &= [w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_{j+1}\sigma_j\sigma_{j+1}^{-1}\sigma_j^{-1}]\sigma_{j+1}^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_{j+1}\sigma_j\sigma_{j+1}^{-1}\sigma_j^{-1}]\sigma_{j+1}^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{n-1,i+1}\sigma_j^{-1}]\sigma_{j+1}^{-1}[[w_{n-1,i+1}\sigma_j^{-1}]\sigma_{j+1}^{-1}]^{-1},\\
&= w_{n-1,i+1}\sigma_{j+1}^{-1}[w_{n-1,i+1}\sigma_{j+1}^{-1}]^{-1},\\
&= \tau_{j+1,n-1}^{-1}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $f_1f_2f_3f_4f_5f_6 = \sigma_j\tau_{j,n-1}\sigma_j^{-1}\tau_{j+1,n-1}^{-1}$.

Caso 4: Si $i = j$, se tiene:

$$f_1 = \tau_{j,n-1}.$$

$$\begin{aligned}
f_2 &= [w_{n-1,i}\sigma_j]\sigma_{j+1}[[w_{n-1,i}\sigma_j]\sigma_{j+1}]^{-1},\\
&= w_{n-1,i+1}\sigma_{j+1}[w_{n-1,i+1}\sigma_{j+1}]^{-1},\\
&= \tau_{j+1,n-1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_3 &= [w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_{j+1}]\sigma_j[[w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_{j+1}]\sigma_j]^{-1},\\
&= [w_{n-1,i+1}\sigma_{j+1}]\sigma_j[[w_{n-1,i+1}\sigma_{j+1}]\sigma_j]^{-1},\\
&= w_{n-1,i+2}\sigma_j[w_{n-1,i+2}\sigma_j]^{-1},\\
&= \sigma_j.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_4 &= [w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_{j+1}\sigma_j]\sigma_{j+1}^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_{j+1}\sigma_j]\sigma_{j+1}^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{n-1,i+2}\sigma_j]\sigma_{j+1}^{-1}[[w_{n-1,i+2}\sigma_j]\sigma_{j+1}^{-1}]^{-1},\\
&= w_{n-1,i+2}\sigma_{j+1}^{-1}[w_{n-1,i+2}\sigma_{j+1}^{-1}]^{-1},\\
&= \tau_{j+1,n-1}^{-1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_5 &= [w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_{j+1}\sigma_j\sigma_{j+1}^{-1}]\sigma_j^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_{j+1}\sigma_j\sigma_{j+1}^{-1}]\sigma_j^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{n-1,i+2}\sigma_{j+1}^{-1}]\sigma_j^{-1}[[w_{n-1,i+2}\sigma_{j+1}^{-1}]\sigma_j^{-1}]^{-1},\\
&= w_{n-1,i+1}\sigma_j^{-1}[w_{n-1,i+1}\sigma_j^{-1}]^{-1},\\
&= \tau_{j,n-1}^{-1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_6 &= [w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_{j+1}\sigma_j\sigma_{j+1}^{-1}\sigma_j^{-1}]\sigma_{j+1}^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j\sigma_{j+1}\sigma_j\sigma_{j+1}^{-1}\sigma_j^{-1}]\sigma_{j+1}^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{n-1,i+1}\sigma_j^{-1}]\sigma_{j+1}^{-1}[[w_{n-1,i+1}\sigma_j^{-1}]\sigma_{j+1}^{-1}]^{-1},\\
&= w_{n-1,i}\sigma_{j+1}^{-1}[w_{n-1,i}\sigma_{j+1}^{-1}]^{-1},\\
&= \sigma_j^{-1}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $f_1f_2f_3f_4f_5f_6 = \tau_{j,n-1}\tau_{j+1,n-1}\sigma_j\tau_{j+1,n-1}^{-1}\tau_{j,n-1}^{-1}\sigma_j^{-1}$.

Así obtenemos las siguientes relaciones:

$$\begin{cases}
(1) & \sigma_j\sigma_{j+1}\sigma_j\sigma_{j+1}^{-1}\sigma_j^{-1}\sigma_{j+1}^{-1} = e & ; \ j < i-1,\ j+1 < i-1,\\
(2) & \sigma_{j-1}\sigma_j\sigma_{j-1}\sigma_j^{-1}\sigma_{j-1}^{-1}\sigma_j^{-1} = e & ; \ i < j,\\
(3) & \sigma_j\tau_{j,n-1}\sigma_j = \tau_{j+1,n-1} & ; \ i-1 = j,\\
(4) & \sigma_j\tau_{j,n-1}\tau_{j+1,n-1}\sigma_j^{-1} = \tau_{j,n-1}\tau_{j+1,n-1} & ; \ i = j.
\end{cases} \tag{4.47}$$

Utilizando (4.47)(3) notemos que:

$$\begin{aligned}
\sigma_j\tau_{j,n-1}\tau_{j+1,n-1}\sigma_j^{-1} &= \tau_{j,n-1}\tau_{j+1,n-1}\\
\sigma_j\tau_{j,n-1}\sigma_j^{-1}\sigma_j\tau_{j+1,n-1}\sigma_j^{-1} &= \tau_{j,n-1}\tau_{j+1,n-1}\\
\tau_{j+1,n-1}\sigma_j\tau_{j+1,n-1}\sigma_j^{-1} &= \tau_{j,n-1}\tau_{j+1,n-1}\\
\sigma_j\tau_{j+1,n-1}\sigma_j^{-1} &= \tau_{j+1,n-1}^{-1}\tau_{j,n-1}\tau_{j+1,n-1}
\end{aligned}$$

Luego tenemos

$$\begin{cases}
(1) & \sigma_j\sigma_{j+1}\sigma_j\sigma_{j+1}^{-1}\sigma_j^{-1}\sigma_{j+1}^{-1} = e & ; \ j < i-1,\ j+1 < i-1,\\
(2) & \sigma_{j-1}\sigma_j\sigma_{j-1}\sigma_j^{-1}\sigma_{j-1}^{-1}\sigma_j^{-1} = e & ; \ i < j,\\
(3) & \sigma_j\tau_{j,n-1}\sigma_j = \tau_{j+1,n-1} & ; \ i-1 = j,\\
(4) & \sigma_j\tau_{j+1,n-1}\sigma_j^{-1} = \tau_{j+1,n-1}^{-1}\tau_{j,n-1}\tau_{j+1,n-1} & ; \ i = j.
\end{cases} \tag{4.48}$$

Uniendo los casos obtenemos las relaciones en (4.27). □

Demostración (Proposición 4.4).

Calculemos las relaciones inducidas por $(II)_n(1)$ definiendo los siguientes elementos:

$$\begin{aligned}
g_1 &:= w_{n-1,i}\sigma_j[w_{n-1,i}\sigma_j]^{-1},\\
g_2 &:= [w_{n-1,i}\sigma_j]\tau_{k,n}[w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{k,n}]^{-1},\\
g_3 &:= [w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{k,n}]\sigma_j^{-1}[w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{k,n}\sigma_j^{-1}]^{-1},\\
g_4 &:= [w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{k,n}\sigma_j^{-1}]\tau_{k,n}^{-1}[w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{k,n}\sigma_j^{-1}\tau_{k,n}^{-1}]^{-1}.
\end{aligned} \tag{4.49}$$

Notar que los elementos en (4.49) son generadores de L_{n-1}, además:

$$w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{k,n}\sigma_j^{-1}\tau_{k,n}^{-1}w_{n-1,i}^{-1} = g_1g_2g_3g_4.$$

Distingamos estos elementos en 4 casos:

Caso 1: Si $j < i-1$, se tiene:

$$g_1 = \sigma_j.$$

Caso 1.1: Si $k \leqslant j-1$, entonces:

$$\begin{aligned} g_2 &= [w_{n-1,i}\sigma_j]\tau_{k,n}[[w_{n-1,i}\sigma_j]\tau_{k,n}]^{-1}, \\ &= w_{n-1,i}\tau_{k,n}[w_{n-1,i}\tau_{k,n}]^{-1}, \\ &= \tau_{k,n}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_3 &= [w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{k,n}]\sigma_j^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{k,n}]\sigma_j^{-1}]^{-1}, \\ &= [w_{n-1,i}\tau_{k,n}]\sigma_j^{-1}[[w_{n-1,i}\tau_{k,n}]\sigma_j^{-1}]^{-1}, \\ &= w_{n-1,i}\sigma_j^{-1}[w_{n-1,i}\sigma_j^{-1}]^{-1}, \\ &= \sigma_j^{-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_4 &= [w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{k,n}\sigma_j^{-1}]\tau_{k,n}^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{k,n}\sigma_j^{-1}]\tau_{k,n}^{-1}]^{-1}, \\ &= [w_{n-1,i}\sigma_j^{-1}]\tau_{k,n}^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j^{-1}]\tau_{k,n}^{-1}]^{-1}, \\ &= w_{n-1,i}\tau_{k,n}^{-1}[w_{n-1,i}\tau_{k,n}^{-1}]^{-1}, \\ &= \tau_{k,n}^{-1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $g_1g_2g_3g_4 = \sigma_j\tau_{k,n}\sigma_j^{-1}\tau_{k,n}^{-1}$.

Caso 1.2: Si $k \geqslant j+2$, entonces:

Caso 1.2.1: Si $k < i$, tenemos:

$$\begin{aligned} g_2 &= [w_{n-1,i}\sigma_j]\tau_{k,n}[[w_{n-1,i}\sigma_j]\tau_{k,n}]^{-1}, \\ &= w_{n-1,i}\tau_{k,n}[w_{n-1,i}\tau_{k,n}]^{-1}, \\ &= \tau_{k,n}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_3 &= [w_{n-1,i}\tau_{k,n}]\sigma_j^{-1}[[w_{n-1,i}\tau_{k,n}]\sigma_j^{-1}]^{-1}, \\ &= w_{n-1,i}\sigma_j^{-1}[w_{n-1,i}\sigma_j^{-1}]^{-1}, \\ &= \sigma_j^{-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_4 &= [w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{k,n}\sigma_j^{-1}]\tau_{k,n}^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{k,n}\sigma_j^{-1}]\tau_{k,n}^{-1}]^{-1}, \\ &= [w_{n-1,i}\sigma_j^{-1}]\tau_{k,n}^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j^{-1}]\tau_{k,n}^{-1}]^{-1}, \\ &= w_{n-1,i}\tau_{k,n}^{-1}[w_{n-1,i}\tau_{k,n}^{-1}]^{-1}, \\ &= \tau_{k,n}^{-1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $g_1g_2g_3g_4 = \sigma_j\tau_{k,n}\sigma_j^{-1}\tau_{k,n}^{-1}$.

Caso 1.2.2: Si $k = i$, tenemos:

$$\begin{aligned} g_2 &= [w_{n-1,i}\sigma_j]\tau_{k,n}[[w_{n-1,i}\sigma_j]\tau_{k,n}]^{-1}, \\ &= w_{n-1,i}\tau_{k,n}[w_{n-1,i}\tau_{k,n}]^{-1}, \\ &= \tau_{n-1,n}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_3 &= [w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{k,n}]\sigma_j^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{k,n}]\sigma_j^{-1}]^{-1}, \\ &= [w_{n-1,i}\tau_{k,n}]\sigma_j^{-1}[[w_{n-1,i}\tau_{k,n}]\sigma_j^{-1}]^{-1}, \\ &= w_{n-1,i}\sigma_j^{-1}[w_{n-1,i}\sigma_j^{-1}]^{-1}, \\ &= \sigma_j^{-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_4 &= [w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{k,n}\sigma_j^{-1}]\tau_{k,n}^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{k,n}\sigma_j^{-1}]\tau_{k,n}^{-1}]^{-1}, \\ &= [w_{n-1,i}\sigma_j^{-1}]\tau_{k,n}^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j^{-1}]\tau_{k,n}^{-1}]^{-1}, \\ &= w_{n-1,i}\tau_{k,n}^{-1}[w_{n-1,i}\tau_{k,n}^{-1}]^{-1}, \\ &= \tau_{n-1,n}^{-1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $g_1g_2g_3g_4 = \sigma_j\tau_{n-1,n}\sigma_j^{-1}\tau_{n-1,n}^{-1}$.

Caso 1.2.3: Si $k > i$, tenemos:

$$\begin{aligned} g_2 &= [w_{n-1,i}\sigma_j]\tau_{k,n}[[w_{n-1,i}\sigma_j]\tau_{k,n}]^{-1}, \\ &= w_{n-1,i}\tau_{k,n}[w_{n-1,i}\tau_{k,n}]^{-1}, \\ &= \tau_{n-1,n}^{-1}\tau_{k-1,n}\tau_{n-1,n}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_3 &= [w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{k,n}]\sigma_j^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{k,n}]\sigma_j^{-1}]^{-1}, \\ &= [w_{n-1,i}\tau_{k,n}]\sigma_j^{-1}[[w_{n-1,i}\tau_{k,n}]\sigma_j^{-1}]^{-1}, \\ &= w_{n-1,i}\sigma_j^{-1}[w_{n-1,i}\sigma_j^{-1}]^{-1}, \\ &= \sigma_j^{-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_4 &= [w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{k,n}\sigma_j^{-1}]\tau_{k,n}^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{k,n}\sigma_j^{-1}]\tau_{k,n}^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{n-1,i}\sigma_j^{-1}]\tau_{k,n}^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j^{-1}]\tau_{k,n}^{-1}]^{-1},\\
&= w_{n-1,i}\tau_{k,n}^{-1}[w_{n-1,i}\tau_{k,n}^{-1}]^{-1},\\
&= \tau_{n-1,n}^{-1}\tau_{k-1,n}^{-1}\tau_{n-1,n}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $g_1g_2g_3g_4 = \sigma_j\tau_{n-1,n}^{-1}\tau_{k-1,n}\tau_{n-1,n}\sigma_j^{-1}\tau_{n-1,n}^{-1}\tau_{k-1,n}^{-1}\tau_{n-1,n}$.

Caso 2: Si $i < j$, se tiene:

$$g_1 = \sigma_{j-1}.$$

Caso 2.1: Si $k \leqslant j-1$, entonces:

Caso 2.1.1: Si $k < i$, tenemos:

$$\begin{aligned}
g_2 &= [w_{n-1,i}\sigma_j]\tau_{k,n}[[w_{n-1,i}\sigma_j]\tau_{k,n}]^{-1},\\
&= w_{n-1,i}\tau_{k,n}[w_{n-1,i}\tau_{k,n}]^{-1},\\
&= \tau_{k,n}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_3 &= [w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{k,n}]\sigma_j^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{k,n}]\sigma_j^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{n-1,i}\tau_{k,n}]\sigma_j^{-1}[[w_{n-1,i}\tau_{k,n}]\sigma_j^{-1}]^{-1},\\
&= w_{n-1,i}\sigma_j^{-1}[w_{n-1,i}\sigma_j^{-1}]^{-1},\\
&= \sigma_{j-1}^{-1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_4 &= [w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{k,n}\sigma_j^{-1}]\tau_{k,n}^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{k,n}\sigma_j^{-1}]\tau_{k,n}^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{n-1,i}\sigma_j^{-1}]\tau_{k,n}^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j^{-1}]\tau_{k,n}^{-1}]^{-1},\\
&= w_{n-1,i}\tau_{k,n}^{-1}[w_{n-1,i}\tau_{k,n}^{-1}]^{-1},\\
&= \tau_{k,n}^{-1}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $g_1g_2g_3g_4 = \sigma_{j-1}\tau_{k,n}\sigma_{j-1}^{-1}\tau_{k,n}^{-1}$.

Caso 2.1.2: Si $k = i$, tenemos:

$$\begin{aligned}
g_2 &= [w_{n-1,i}\sigma_j]\tau_{k,n}[[w_{n-1,i}\sigma_j]\tau_{k,n}]^{-1},\\
&= w_{n-1,i}\tau_{k,n}[w_{n-1,i}\tau_{k,n}]^{-1},\\
&= \tau_{n-1,n}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_3 &= [w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{k,n}]\sigma_j^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{k,n}]\sigma_j^{-1}]^{-1}, \\ &= [w_{n-1,i}\tau_{k,n}]\sigma_j^{-1}[[w_{n-1,i}\tau_{k,n}]\sigma_j^{-1}]^{-1}, \\ &= w_{n-1,i}\sigma_j^{-1}[w_{n-1,i}\sigma_j^{-1}]^{-1}, \\ &= \sigma_{j-1}^{-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_4 &= [w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{k,n}\sigma_j^{-1}]\tau_{k,n}^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{k,n}\sigma_j^{-1}]\tau_{k,n}^{-1}]^{-1}, \\ &= [w_{n-1,i}\sigma_j^{-1}]\tau_{k,n}^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j^{-1}]\tau_{k,n}^{-1}]^{-1}, \\ &= w_{n-1,i}\tau_{k,n}^{-1}[w_{n-1,i}\tau_{k,n}^{-1}]^{-1}, \\ &= \tau_{n-1,n}^{-1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $g_1g_2g_3g_4 = \sigma_{j-1}\tau_{n-1,n}\sigma_{j-1}^{-1}\tau_{n-1,n}^{-1}$.

Caso 2.1.3: Si $k > i$, tenemos:

$$\begin{aligned} g_2 &= [w_{n-1,i}\sigma_j]\tau_{k,n}[[w_{n-1,i}\sigma_j]\tau_{k,n}]^{-1}, \\ &= w_{n-1,i}\tau_{k,n}[w_{n-1,i}\tau_{k,n}]^{-1}, \\ &= \tau_{n-1,n}^{-1}\tau_{k-1,n}\tau_{n-1,n}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_3 &= [w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{k,n}]\sigma_j^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{k,n}]\sigma_j^{-1}]^{-1}, \\ &= [w_{n-1,i}\tau_{k,n}]\sigma_j^{-1}[[w_{n-1,i}\tau_{k,n}]\sigma_j^{-1}]^{-1}, \\ &= w_{n-1,i}\sigma_j^{-1}[w_{n-1,i}\sigma_j^{-1}]^{-1}, \\ &= \sigma_{j-1}^{-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_4 &= [w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{k,n}\sigma_j^{-1}]\tau_{k,n}^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{k,n}\sigma_j^{-1}]\tau_{k,n}^{-1}]^{-1}, \\ &= [w_{n-1,i}\sigma_j^{-1}]\tau_{k,n}^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j^{-1}]\tau_{k,n}^{-1}]^{-1}, \\ &= w_{n-1,i}\tau_{k,n}^{-1}[w_{n-1,i}\tau_{k,n}^{-1}]^{-1}, \\ &= \tau_{n-1,n}^{-1}\tau_{k-1,n}^{-1}\tau_{n-1,n}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $g_1g_2g_3g_4 = \sigma_{j-1}\tau_{n-1,n}^{-1}\tau_{k-1,n}\tau_{n-1,n}\sigma_{j-1}^{-1}\tau_{n-1,n}^{-1}\tau_{k-1,n}^{-1}\tau_{n-1,n}$.

Caso 2.2: Si $k \geqslant j+2$, entonces:

$$\begin{aligned} g_2 &= [w_{n-1,i}\sigma_j]\tau_{k,n}[[w_{n-1,i}\sigma_j]\tau_{k,n}]^{-1}, \\ &= w_{n-1,i}\tau_{k,n}[w_{n-1,i}\tau_{k,n}]^{-1}, \\ &= \tau_{n-1,n}^{-1}\tau_{k-1,n}\tau_{n-1,n}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_3 &= [w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{k,n}]\sigma_j^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{k,n}]\sigma_j^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{n-1,i}\tau_{k,n}]\sigma_j^{-1}[[w_{n-1,i}\tau_{k,n}]\sigma_j^{-1}]^{-1},\\
&= w_{n-1,i}\sigma_j^{-1}[w_{n-1,i}\sigma_j^{-1}]^{-1},\\
&= \sigma_{j-1}^{-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_4 &= [w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{k,n}\sigma_j^{-1}]\tau_{k,n}^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{k,n}\sigma_j^{-1}]\tau_{k,n}^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{n-1,i}\sigma_j^{-1}]\tau_{k,n}^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j^{-1}]\tau_{k,n}^{-1}]^{-1},\\
&= w_{n-1,i}\tau_{k,n}^{-1}[w_{n-1,i}\tau_{k,n}^{-1}]^{-1},\\
&= \tau_{n-1,n}^{-1}\tau_{k-1,n}^{-1}\tau_{n-1,n}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $g_1g_2g_3g_4 = \sigma_{j-1}\tau_{n-1,n}^{-1}\tau_{k-1,n}\tau_{n-1,n}\sigma_{j-1}^{-1}\tau_{n-1,n}^{-1}\tau_{k-1,n}^{-1}\tau_{n-1,n}$.

Caso 3: Si $i-1=j$, se tiene:

$$g_1 = e.$$

Caso 3.1: Si $k \leqslant j-1$, entonces:

$$\begin{aligned}
g_2 &= [w_{n-1,i}\sigma_j]\tau_{k,n}[[w_{n-1,i}\sigma_j]\tau_{k,n}]^{-1},\\
&= w_{n-1,i-1}\tau_{k,n}[w_{n-1,i-1}\tau_{k,n}]^{-1},\\
&= \tau_{k,n}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_3 &= [w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{k,n}]\sigma_j^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{k,n}]\sigma_j^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{n-1,i-1}\tau_{k,n}]\sigma_j^{-1}[[w_{n-1,i-1}\tau_{k,n}]\sigma_j^{-1}]^{-1},\\
&= w_{n-1,i-1}\sigma_j^{-1}[w_{n-1,i-1}\sigma_j^{-1}]^{-1},\\
&= e.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_4 &= [w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{k,n}\sigma_j^{-1}]\tau_{k,n}^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{k,n}\sigma_j^{-1}]\tau_{k,n}^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{n-1,i-1}\sigma_j^{-1}]\tau_{k,n}^{-1}[[w_{n-1,i-1}\sigma_j^{-1}]\tau_{k,n}^{-1}]^{-1},\\
&= w_{n-1,i}\tau_{k,n}^{-1}[w_{n-1,i}\tau_{k,n}^{-1}]^{-1},\\
&= \tau_{k,n}^{-1}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $g_1g_2g_3g_4 = e\tau_{k,n}e\tau_{k,n}^{-1} = e$.

Caso 3.2: Si $k \geqslant j+2$, entonces:

$$\begin{aligned} g_2 &= [w_{n-1,i}\sigma_j]\tau_{k,n}[[w_{n-1,i}\sigma_j]\tau_{k,n}]^{-1}, \\ &= w_{n-1,i-1}\tau_{k,n}[w_{n-1,i-1}\tau_{k,n}]^{-1}, \\ &= \tau_{n-1,n}^{-1}\tau_{k-1,n}\tau_{n-1,n}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_3 &= [w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{k,n}]\sigma_j^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{k,n}]\sigma_j^{-1}]^{-1}, \\ &= [w_{n-1,i-1}\tau_{k,n}]\sigma_j^{-1}[[w_{n-1,i-1}\tau_{k,n}]\sigma_j^{-1}]^{-1}, \\ &= w_{n-1,i-1}\sigma_j^{-1}[w_{n-1,i-1}\sigma_j^{-1}]^{-1}, \\ &= e. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_4 &= [w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{k,n}\sigma_j^{-1}]\tau_{k,n}^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{k,n}\sigma_j^{-1}]\tau_{k,n}^{-1}]^{-1}, \\ &= [w_{n-1,i-1}\sigma_j^{-1}]\tau_{k,n}^{-1}[[w_{n-1,i-1}\sigma_j^{-1}]\tau_{k,n}^{-1}]^{-1}, \\ &= w_{n-1,i-2}\tau_{k,n}^{-1}[w_{n-1,i-2}\tau_{k,n}^{-1}]^{-1}, \\ &= \tau_{n-1,n}^{-1}\tau_{k-1,n}^{-1}\tau_{n-1,n}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $g_1g_2g_3g_4 = \tau_{n-1,n}^{-1}\tau_{k-1,n}\tau_{n-1,n}\tau_{n-1,n}^{-1}\tau_{k-1,n}^{-1}\tau_{n-1,n} = e$.

Caso 4: Si $i = j$, se tiene:

$$g_1 = \tau_{j,n-1}.$$

Caso 4.1: Si $k \leqslant j-1$, entonces:

$$\begin{aligned} g_2 &= [w_{n-1,i}\sigma_j]\tau_{k,n}[[w_{n-1,i}\sigma_j]\tau_{k,n}]^{-1}, \\ &= w_{n-1,i+1}\tau_{k,n}[w_{n-1,i+1}\tau_{k,n}]^{-1}, \\ &= \tau_{k,n}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_3 &= [w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{k,n}]\sigma_j^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{k,n}]\sigma_j^{-1}]^{-1}, \\ &= [w_{n-1,i+1}\tau_{k,n}]\sigma_j^{-1}[[w_{n-1,i+1}\tau_{k,n}]\sigma_j^{-1}]^{-1}, \\ &= w_{n-1,i+1}\sigma_j^{-1}[w_{n-1,i+1}\sigma_j^{-1}]^{-1}, \\ &= \tau_{j,n-1}^{-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_4 &= [w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{k,n}\sigma_j^{-1}]\tau_{k,n}^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{k,n}\sigma_j^{-1}]\tau_{k,n}^{-1}]^{-1}, \\ &= [w_{n-1,i+1}\sigma_j^{-1}]\tau_{k,n}^{-1}[[w_{n-1,i+1}\sigma_j^{-1}]\tau_{k,n}^{-1}]^{-1}, \\ &= w_{n-1,i}\tau_{k,n}^{-1}[w_{n-1,i}\tau_{k,n}^{-1}]^{-1}, \\ &= \tau_{k,n}^{-1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $g_1g_2g_3g_4 = \tau_{j,n-1}\tau_{k,n}\tau_{j,n-1}^{-1}\tau_{k,n}^{-1}$.

Caso 4.2: Si $k \geqslant j+2$, entonces:

$$\begin{aligned} g_2 &= [w_{n-1,i}\sigma_j]\tau_{k,n}[[w_{n-1,i}\sigma_j]\tau_{k,n}]^{-1},\\ &= w_{n-1,i+1}\tau_{k,n}[w_{n-1,i+1}\tau_{k,n}]^{-1},\\ &= \tau_{n-1,n}^{-1}\tau_{k-1,n}\tau_{n-1,n}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_3 &= [w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{k,n}]\sigma_j^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{k,n}]\sigma_j^{-1}]^{-1},\\ &= [w_{n-1,i+1}\tau_{k,n}]\sigma_j^{-1}[[w_{n-1,i+1}\tau_{k,n}]\sigma_j^{-1}]^{-1},\\ &= w_{n-1,i+1}\sigma_j^{-1}[w_{n-1,i+1}\sigma_j^{-1}]^{-1},\\ &= \tau_{j,n-1}^{-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_4 &= [w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{k,n}\sigma_j^{-1}]\tau_{k,n}^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{k,n}\sigma_j^{-1}]\tau_{k,n}^{-1}]^{-1},\\ &= [w_{n-1,i+1}\sigma_j^{-1}]\tau_{k,n}^{-1}[[w_{n-1,i+1}\sigma_j^{-1}]\tau_{k,n}^{-1}]^{-1},\\ &= w_{n-1,i}\tau_{k,n}^{-1}[w_{n-1,i}\tau_{k,n}^{-1}]^{-1},\\ &= \tau_{n-1,n}^{-1}\tau_{k-1,n}^{-1}\tau_{n-1,n}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $g_1g_2g_3g_4 = \tau_{j,n-1}\tau_{n-1,n}^{-1}\tau_{k-1,n}\tau_{n-1,n}\tau_{j,n-1}^{-1}\tau_{n-1,n}^{-1}\tau_{k-1,n}^{-1}\tau_{n-1,n}$.

Así obtenemos las siguientes relaciones:

$$\left\{\begin{array}{lcl} (1) & \sigma_j\tau_{k,n}\sigma_j^{-1} = \tau_{k,n} & ;\ j < i-1,\ k \leqslant j-1,\\ (2) & \sigma_j\tau_{k,n}\sigma_j^{-1} = \tau_{k,n} & ;\ j < i-1,\ k \geqslant j+2,\ k < i,\\ (3) & \sigma_j\tau_{n-1,n}\sigma_j^{-1} = \tau_{n-1,n} & ;\ j < i-1,\ k \geqslant j+2,\ k = i,\\ (4) & \sigma_j\tau_{n-1,n}^{-1}\tau_{k-1,n}\tau_{n-1,n}\sigma_j^{-1} = \tau_{n-1,n}^{-1}\tau_{k-1,n}\tau_{n-1,n} & ;\ j < i-1,\ k \geqslant j+2,\ k > i,\\ (5) & \sigma_{j-1}\tau_{k,n}\sigma_{j-1}^{-1} = \tau_{k,n} & ;\ i < j,\ k \leqslant j-1,\ k < i,\\ (6) & \sigma_{j-1}\tau_{n-1,n}\sigma_{j-1}^{-1} = \tau_{n-1,n} & ;\ i < j,\ k \leqslant j-1,\ k = i,\\ (7) & \sigma_{j-1}\tau_{n-1,n}^{-1}\tau_{k-1,n}\tau_{n-1,n}\sigma_{j-1}^{-1} = \tau_{n-1,n}^{-1}\tau_{k-1,n}\tau_{n-1,n} & ;\ i < j,\ k \leqslant j-1,\ k > i,\\ (8) & \sigma_{j-1}\tau_{n-1,n}^{-1}\tau_{k-1,n}\tau_{n-1,n}\sigma_{j-1}^{-1} = \tau_{n-1,n}^{-1}\tau_{k-1,n}\tau_{n-1,n} & ;\ i < j,\ k \geqslant j+1,\\ (9) & \tau_{j,n-1}\tau_{k,n} = \tau_{k,n}\tau_{j,n-1} & ;\ i = j,\ k \leqslant j-1,\\ (10) & \tau_{j,n-1}\tau_{n-1,n}^{-1}\tau_{k-1,n}\tau_{n-1,n}\tau_{j,n-1}^{-1} = \tau_{n-1,n}^{-1}\tau_{k-1,n}\tau_{n-1,n} & ;\ i = j,\ k \geqslant j+2. \end{array}\right. \tag{4.50}$$

Además,

$$\begin{aligned}
\sigma_j \tau_{n-1,n}^{-1} \tau_{k-1,n} \tau_{n-1,n} \sigma_j^{-1} &= \tau_{n-1,n}^{-1} \tau_{k-1,n} \tau_{n-1,n} \\
\sigma_j \tau_{n-1,n}^{-1} \tau_{k-1,n} \sigma_j^{-1} \sigma_j \tau_{n-1,n} \sigma_j^{-1} &= \tau_{n-1,n}^{-1} \tau_{k-1,n} \tau_{n-1,n} \\
\sigma_j \tau_{n-1,n}^{-1} \tau_{k-1,n} \sigma_j^{-1} \tau_{n-1,n} &= \tau_{n-1,n}^{-1} \tau_{k-1,n} \tau_{n-1,n} \\
\sigma_j \tau_{n-1,n}^{-1} \tau_{k-1,n} \sigma_j^{-1} &= \tau_{n-1,n}^{-1} \tau_{k-1,n} \\
\sigma_j \tau_{n-1,n}^{-1} \sigma_j^{-1} \sigma_j \tau_{k-1,n} \sigma_j^{-1} &= \tau_{n-1,n}^{-1} \tau_{k-1,n} \\
\tau_{n-1,n}^{-1} \sigma_j \tau_{k-1,n} \sigma_j^{-1} &= \tau_{n-1,n}^{-1} \tau_{k-1,n} \\
\sigma_j \tau_{k-1,n} \sigma_j^{-1} &= \tau_{k-1,n}.
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\sigma_{j-1} \tau_{n-1,n}^{-1} \tau_{k-1,n} \tau_{n-1,n} \sigma_{j-1}^{-1} &= \tau_{n-1,n}^{-1} \tau_{k-1,n} \tau_{n-1,n} \\
\sigma_{j-1} \tau_{n-1,n}^{-1} \tau_{k-1,n} \sigma_{j-1}^{-1} \sigma_{j-1} \tau_{n-1,n} \sigma_{j-1}^{-1} &= \tau_{n-1,n}^{-1} \tau_{k-1,n} \tau_{n-1,n} \\
\sigma_{j-1} \tau_{n-1,n}^{-1} \tau_{k-1,n} \sigma_{j-1}^{-1} \tau_{n-1,n} &= \tau_{n-1,n}^{-1} \tau_{k-1,n} \tau_{n-1,n} \\
\sigma_{j-1} \tau_{n-1,n}^{-1} \tau_{k-1,n} \sigma_{j-1}^{-1} &= \tau_{n-1,n}^{-1} \tau_{k-1,n} \\
\sigma_{j-1} \tau_{n-1,n}^{-1} \sigma_{j-1}^{-1} \sigma_{j-1} \tau_{k-1,n} \sigma_{j-1}^{-1} &= \tau_{n-1,n}^{-1} \tau_{k-1,n} \\
\tau_{n-1,n}^{-1} \sigma_{j-1} \tau_{k-1,n} \sigma_{j-1}^{-1} &= \tau_{n-1,n}^{-1} \tau_{k-1,n} \\
\sigma_{j-1} \tau_{k-1,n} \sigma_{j-1}^{-1} &= \tau_{k-1,n}.
\end{aligned}$$

Luego tenemos:

$$\left\{\begin{array}{llll}
(1) & \sigma_j \tau_{k,n} \sigma_j^{-1} = \tau_{k,n} & ; & j < i-1,\ k \leqslant j-1, \\
(2) & \sigma_j \tau_{k,n} \sigma_j^{-1} = \tau_{k,n} & ; & j < i-1,\ k \geqslant j+2,\ k < i, \\
(3) & \sigma_j \tau_{n-1,n} \sigma_j^{-1} = \tau_{n-1,n} & ; & j < i-1,\ k \geqslant j+2,\ k = i, \\
(4) & \sigma_j \tau_{k-1,n} \sigma_j^{-1} = \tau_{k-1,n} & ; & j < i-1,\ k \geqslant j+2,\ k > i, \\
(5) & \sigma_{j-1} \tau_{k,n} \sigma_{j-1}^{-1} = \tau_{k,n} & ; & i < j,\ k \leqslant j-1,\ k < i, \\
(6) & \sigma_{j-1} \tau_{n-1,n} \sigma_{j-1}^{-1} = \tau_{n-1,n} & ; & i < j,\ k \leqslant j-1,\ k = i, \\
(7) & \sigma_{j-1} \tau_{k-1,n} \sigma_{j-1}^{-1} = \tau_{k-1,n} & ; & i < j,\ k \leqslant j-1,\ k > i, \\
(8) & \sigma_{j-1} \tau_{k-1,n} \sigma_{j-1}^{-1} = \tau_{k-1,n} & ; & i < j,\ k \geqslant j+1, \\
(9) & \tau_{j,n-1} \tau_{k,n} = \tau_{k,n} \tau_{j,n-1} & ; & i = j,\ k \leqslant j-1, \\
(10) & \tau_{j,n-1} \tau_{n-1,n}^{-1} \tau_{k-1,n} \tau_{n-1,n} \tau_{j,n-1}^{-1} = \tau_{n-1,n}^{-1} \tau_{k-1,n} \tau_{n-1,n} & ; & i = j,\ k \geqslant j+2.
\end{array}\right. \tag{4.51}$$

Combinando los casos, se tienen las relaciones en (4.28). □

Demostración (Proposición 4.5).

Calculemos las relaciones inducidas por $(\mathrm{II})_n(2)$ definiendo los siguientes elementos:

$$\begin{aligned}
k_1 &:= w_{n-1,i}\sigma_j[w_{n-1,i}\sigma_j]^{-1},\\
k_2 &:= [w_{n-1,i}\sigma_j]\tau_{j,n}[w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{j,n}]^{-1},\\
k_3 &:= [w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{j,n}]\sigma_j^{-1}[w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{j,n}\sigma_j^{-1}]^{-1},\\
k_4 &:= [w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{j,n}\sigma_j^{-1}]\tau_{j+1,n}^{-1}[w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{j,n}\sigma_j^{-1}\tau_{j+1,n}^{-1}]^{-1}.
\end{aligned}\tag{4.52}$$

Notar que los elementos en (4.52) son generadores de L_{n-1}, además:

$$w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{j,n}\sigma_j^{-1}\tau_{j+1,n}^{-1}w_{n-1,i}^{-1} = k_1k_2k_3k_4.$$

Distingamos estos elementos en cuatro casos:

Caso 1: Si $j < i-1$, se tiene:

$$k_1 = \sigma_j.$$

$$\begin{aligned}
k_2 &= [w_{n-1,i}\sigma_j]\tau_{j,n}[[w_{n-1,i}\sigma_j]\tau_{j,n}]^{-1},\\
&= w_{n-1,i}\tau_{j,n}[w_{n-1,i}\tau_{j,n}]^{-1},\\
&= \tau_{j,n}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_3 &= [w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{j,n}]\sigma_j^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{j,n}]\sigma_j^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{n-1,i}\tau_{j,n}]\sigma_j^{-1}[[w_{n-1,i}\tau_{j,n}]\sigma_j^{-1}]^{-1},\\
&= w_{n-1,i}\sigma_j^{-1}[w_{n-1,i}\sigma_j^{-1}]^{-1},\\
&= \sigma_j^{-1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_4 &= [w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{j,n}\sigma_j^{-1}]\tau_{j+1,n}^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{j,n}\sigma_j^{-1}]\tau_{j+1,n}^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{n-1,i}\sigma_j^{-1}]\tau_{j+1,n}^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j^{-1}]\tau_{j+1,n}^{-1}]^{-1},\\
&= w_{n-1,i}\tau_{j+1,n}^{-1}[w_{n-1,i}\tau_{j+1,n}^{-1}]^{-1},\\
&= \tau_{j+1,n}^{-1}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $k_1k_2k_3k_4 = \sigma_j\tau_{j,n}\sigma_j^{-1}\tau_{j+1,n}^{-1}$.

Caso 2: Si $i < j$, se tiene:

$$k_1 = \sigma_{j-1}.$$

$$\begin{aligned}
k_2 &= [w_{n-1,i}\sigma_j]\tau_{j,n}[[w_{n-1,i}\sigma_j]\tau_{j,n}]^{-1},\\
&= w_{n-1,i}\tau_{j,n}[w_{n-1,i}\tau_{j,n}]^{-1},\\
&= \tau_{n-1,n}^{-1}\tau_{j-1,n}\tau_{n-1,n}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_3 &= [w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{j,n}]\sigma_j^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{j,n}]\sigma_j^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{n-1,i}\tau_{j,n}]\sigma_j^{-1}[[w_{n-1,i}\tau_{j,n}]\sigma_j^{-1}]^{-1},\\
&= w_{n-1,i}\sigma_j^{-1}[w_{n-1,i}\sigma_j^{-1}]^{-1},\\
&= \sigma_{j-1}^{-1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_4 &= [w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{j,n}\sigma_j^{-1}]\tau_{j+1,n}^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{j,n}\sigma_j^{-1}]\tau_{j+1,n}^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{n-1,i}\sigma_j^{-1}]\tau_{j+1,n}^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j^{-1}]\tau_{j+1,n}^{-1}]^{-1},\\
&= w_{n-1,i}\tau_{j+1,n}^{-1}[w_{n-1,i}\tau_{j+1,n}^{-1}]^{-1},\\
&= \tau_{n-1,n}^{-1}\tau_{j,n}^{-1}\tau_{n-1,n}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $k_1k_2k_3k_4 = \sigma_{j-1}\tau_{n-1,n}^{-1}\tau_{j-1,n}\tau_{n-1,n}\sigma_{j-1}^{-1}\tau_{n-1,n}^{-1}\tau_{j,n}^{-1}\tau_{n-1,n}$.

Caso 3: Si $j = i-1$, se tiene:

$$k_1 = e.$$

$$\begin{aligned}
k_2 &= [w_{n-1,i}\sigma_j]\tau_{j,n}[[w_{n-1,i}\sigma_j]\tau_{j,n}]^{-1},\\
&= w_{n-1,i-1}\tau_{j,n}[w_{n-1,i-1}\tau_{j,n}]^{-1},\\
&= \tau_{n-1,n}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_3 &= [w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{j,n}]\sigma_j^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{j,n}]\sigma_j^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{n-1,i-1}\tau_{j,n}]\sigma_j^{-1}[[w_{n-1,i-1}\tau_{j,n}]\sigma_j^{-1}]^{-1},\\
&= w_{n-1,i-1}\sigma_j^{-1}[w_{n-1,i-1}\sigma_j^{-1}]^{-1},\\
&= e.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_4 &= [w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{j,n}\sigma_j^{-1}]\tau_{j+1,n}^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{j,n}\sigma_j^{-1}]\tau_{j+1,n}^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{n-1,i-1}\sigma_j^{-1}]\tau_{j+1,n}^{-1}[[w_{n-1,i-1}\sigma_j^{-1}]\tau_{j+1,n}^{-1}]^{-1},\\
&= w_{n-1,i}\tau_{j+1,n}^{-1}[w_{n-1,i}\tau_{j+1,n}^{-1}]^{-1},\\
&= \tau_{n-1,n}^{-1}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $k_1k_2k_3k_4 = e\tau_{n-1,n}e\tau_{n-1,n}^{-1} = e$.

Caso 4: Si $j = i$, se tiene:

$$k_1 = \tau_{j,n-1}.$$

$$\begin{aligned} k_2 &= [w_{n-1,i}\sigma_j]\tau_{j,n}[[w_{n-1,i}\sigma_j]\tau_{j,n}]^{-1}, \\ &= w_{n-1,i+1}\tau_{j,n}[w_{n-1,i+1}\tau_{j,n}]^{-1}, \\ &= \tau_{j,n}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_3 &= [w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{j,n}]\sigma_j^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{j,n}]\sigma_j^{-1}]^{-1}, \\ &= [w_{n-1,i+1}\tau_{j,n}]\sigma_j^{-1}[[w_{n-1,i+1}\tau_{j,n}]\sigma_j^{-1}]^{-1}, \\ &= w_{n-1,i+1}\sigma_j^{-1}[w_{n-1,i+1}\sigma_j^{-1}]^{-1}, \\ &= \tau_{j,n-1}^{-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_4 &= [w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{j,n}\sigma_j^{-1}]\tau_{j+1,n}^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{j,n}\sigma_j^{-1}]\tau_{j+1,n}^{-1}]^{-1}, \\ &= [w_{n-1,i+1}\sigma_j^{-1}]\tau_{j+1,n}^{-1}[[w_{n-1,i+1}\sigma_j^{-1}]\tau_{j+1,n}^{-1}]^{-1}, \\ &= w_{n-1,i}\tau_{j+1,n}^{-1}[w_{n-1,i}\tau_{j+1,n}^{-1}]^{-1}, \\ &= \tau_{n-1,n}^{-1}\tau_{j,n}^{-1}\tau_{n-1,n}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $k_1k_2k_3k_4 = \tau_{j,n-1}\tau_{j,n}\tau_{j,n-1}^{-1}\tau_{n-1,n}^{-1}\tau_{j,n}^{-1}\tau_{n-1,n}$.

Así obtenemos las siguientes relaciones:

$$\left\{\begin{array}{lcl} (1) & \sigma_j\tau_{j,n}\sigma_j^{-1} = \tau_{j+1,n} & ; \quad j < i-1, \\ (2) & \sigma_{j-1}\tau_{n-1,n}^{-1}\tau_{j-1,n}\tau_{n-1,n}\sigma_{j-1}^{-1} = \tau_{n-1,n}^{-1}\tau_{j,n}\tau_{n-1,n} & ; \quad i < j, \\ (3) & \tau_{j,n-1}\tau_{j,n}\tau_{j,n-1}^{-1} = \tau_{n-1,n}^{-1}\tau_{j,n}\tau_{n-1,n} & ; \quad j = i. \end{array}\right. \tag{4.53}$$

Utilizando (4.28)(1) se tiene:

$$\begin{aligned} \sigma_{j-1}\tau_{n-1,n}^{-1}\tau_{j-1,n}\tau_{n-1,n}\sigma_{j-1}^{-1} &= \tau_{n-1,n}^{-1}\tau_{j,n}\tau_{n-1,n} \\ \sigma_{j-1}\tau_{n-1,n}^{-1}\tau_{j-1,n}\sigma_{j-1}^{-1}\sigma_{j-1}\tau_{n-1,n}\sigma_{j-1}^{-1} &= \tau_{n-1,n}^{-1}\tau_{j,n}\tau_{n-1,n} \\ \sigma_{j-1}\tau_{n-1,n}^{-1}\tau_{j-1,n}\sigma_{j-1}^{-1}\tau_{n-1,n} &= \tau_{n-1,n}^{-1}\tau_{j,n}\tau_{n-1,n} \\ \sigma_{j-1}\tau_{n-1,n}^{-1}\tau_{j-1,n}\sigma_{j-1}^{-1} &= \tau_{n-1,n}^{-1}\tau_{j,n} \\ \sigma_{j-1}\tau_{n-1,n}^{-1}\sigma_{j-1}^{-1}\sigma_{j-1}\tau_{j-1,n}\sigma_{j-1}^{-1} &= \tau_{n-1,n}^{-1}\tau_{j,n} \\ \tau_{n-1,n}^{-1}\sigma_{j-1}\tau_{j-1,n}\sigma_{j-1}^{-1} &= \tau_{n-1,n}^{-1}\tau_{j,n} \\ \sigma_{j-1}\tau_{j-1,n}\sigma_{j-1}^{-1} &= \tau_{j,n} \end{aligned}$$

Luego tenemos:

$$\begin{cases} (1) & \sigma_j\tau_{j,n}\sigma_j^{-1} = \tau_{j+1,n} & ; \quad j < i-1, \\ (2) & \sigma_{j-1}\tau_{j-1,n}\sigma_{j-1}^{-1} = \tau_{j,n} & ; \quad i < j, \\ (3) & \tau_{j,n-1}\tau_{j,n}\tau_{j,n-1}^{-1} = \tau_{n-1,n}^{-1}\tau_{j,n}\tau_{n-1,n} & ; \quad j = i. \end{cases} \tag{4.54}$$

Combinando los casos obtenemos las relaciones en (4.29). □

Demostración (Proposición 4.6).

Calculemos las relaciones inducidas por $(\mathrm{II})_n(3)$ definiendo los siguientes elementos:

$$\begin{aligned}
&t_1 := w_{n-1,i}\sigma_j[w_{n-1,i}\sigma_j]^{-1},\\
&t_2 := [w_{n-1,i}\sigma_j]\tau_{j+1,n}[w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{j+1,n}]^{-1},\\
&t_3 := [w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{j+1,n}]\sigma_j^{-1}[w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{j+1,n}\sigma_j^{-1}]^{-1},\\
&t_4 := [w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{j+1,n}\sigma_j^{-1}]\tau_{j+1,n}^{-1}[w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{j+1,n}\sigma_j^{-1}\tau_{j+1,n}^{-1}]^{-1},\\
&t_5 := [w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{j+1,n}\sigma_j^{-1}\tau_{j+1,n}^{-1}]\tau_{j,n}^{-1}[w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{j+1,n}\sigma_j^{-1}\tau_{j+1,n}^{-1}\tau_{j,n}^{-1}]^{-1},\\
&t_6 := [w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{j+1,n}\sigma_j^{-1}\tau_{j+1,n}^{-1}\tau_{j,n}^{-1}]\tau_{j+1,n}[w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{j+1,n}\sigma_j^{-1}\tau_{j+1,n}^{-1}\tau_{j,n}^{-1}\tau_{j+1,n}]^{-1}.
\end{aligned} \tag{4.55}$$

Notar que los elementos en (4.55) son generadores de L_{n-1}, además:

$$w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{j+1,n}\sigma_j^{-1}\tau_{j+1,n}^{-1}\tau_{j,n}^{-1}\tau_{j+1,n}w_{n-1,i}^{-1} = t_1t_2t_3t_4t_5t_6.$$

Distingamos estos elementos en cuatro casos:

Caso 1: Si $j < i-1$, se tiene:

$$t_1 = \sigma_j.$$

$$\begin{aligned}
t_2 &= [w_{n-1,i}\sigma_j]\tau_{j+1,n}[[w_{n-1,i}\sigma_j]\tau_{j+1,n}]^{-1},\\
&= w_{n-1,i}\tau_{j+1,n}[w_{n-1,i}\tau_{j+1,n}]^{-1},\\
&= \tau_{j+1,n}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t_3 &= [w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{j+1,n}]\sigma_j^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{j+1,n}]\sigma_j^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{n-1,i}\tau_{j+1,n}]\sigma_j^{-1}[[w_{n-1,i}\tau_{j+1,n}]\sigma_j^{-1}]^{-1},\\
&= w_{n-1,i}\sigma_j^{-1}[w_{n-1,i}\sigma_j^{-1}]^{-1},\\
&= \sigma_j^{-1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t_4 &= [w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{j+1,n}\sigma_j^{-1}]\tau_{j+1,n}^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{j+1,n}\sigma_j^{-1}]\tau_{j+1,n}^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{n-1,i}\sigma_j^{-1}]\tau_{j+1,n}^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j^{-1}]\tau_{j+1,n}^{-1}]^{-1},\\
&= w_{n-1,i}\tau_{j+1,n}^{-1}[w_{n-1,i}\tau_{j+1,n}^{-1}]^{-1},\\
&= \tau_{j+1,n}^{-1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t_5 &= [w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{j+1,n}\sigma_j^{-1}\tau_{j+1,n}^{-1}]\tau_{j,n}^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{j+1,n}\sigma_j^{-1}\tau_{j+1,n}^{-1}]\tau_{j,n}^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{n-1,i}\tau_{j+1,n}^{-1}]\tau_{j,n}^{-1}[[w_{n-1,i}\tau_{j+1,n}^{-1}]\tau_{j,n}^{-1}]^{-1},\\
&= w_{n-1,i}\tau_{j,n}^{-1}[w_{n-1,i}\tau_{j,n}^{-1}]^{-1},\\
&= \tau_{j,n}^{-1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t_6 &= [w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{j+1,n}\sigma_j^{-1}\tau_{j+1,n}^{-1}\tau_{j,n}^{-1}]\tau_{j+1,n}[[w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{j+1,n}\sigma_j^{-1}\tau_{j+1,n}^{-1}\tau_{j,n}^{-1}]\tau_{j+1,n}]^{-1},\\
&= [w_{n-1,i}\tau_{j,n}^{-1}]\tau_{j+1,n}[[w_{n-1,i}\tau_{j,n}^{-1}]\tau_{j+1,n}]^{-1},\\
&= w_{n-1,i}\tau_{j+1,n}[w_{n-1,i}\tau_{j+1,n}]^{-1},\\
&= \tau_{j+1,n}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $t_1t_2t_3t_4t_5t_6 = \sigma_j\tau_{j+1,n}\sigma_j^{-1}\tau_{j+1,n}^{-1}\tau_{j,n}^{-1}\tau_{j+1,n}$.

Caso 2: Si $j > i$, se tiene:

$$t_1 = \sigma_{j-1}.$$

$$\begin{aligned}
t_2 &= [w_{n-1,i}\sigma_j]\tau_{j+1,n}[[w_{n-1,i}\sigma_j]\tau_{j+1,n}]^{-1},\\
&= w_{n-1,i}\tau_{j+1,n}[w_{n-1,i}\tau_{j+1,n}]^{-1},\\
&= \tau_{n-1,n}^{-1}\tau_{j,n}\tau_{n-1,n}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t_3 &= [w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{j+1,n}]\sigma_j^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{j+1,n}]\sigma_j^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{n-1,i}\tau_{j+1,n}]\sigma_j^{-1}[[w_{n-1,i}\tau_{j+1,n}]\sigma_j^{-1}]^{-1},\\
&= w_{n-1,i}\sigma_j^{-1}[w_{n-1,i}\sigma_j^{-1}]^{-1},\\
&= \sigma_{j-1}^{-1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t_4 &= [w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{j+1,n}\sigma_j^{-1}]\tau_{j+1,n}^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{j+1,n}\sigma_j^{-1}]\tau_{j+1,n}^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{n-1,i}\sigma_j^{-1}]\tau_{j+1,n}^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j^{-1}]\tau_{j+1,n}^{-1}]^{-1},\\
&= w_{n-1,i}\tau_{j+1,n}^{-1}[w_{n-1,i}\tau_{j+1,n}^{-1}]^{-1},\\
&= \tau_{n-1,n}^{-1}\tau_{j,n}^{-1}\tau_{n-1,n}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_5 &= [w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{j+1,n}\sigma_j^{-1}\tau_{j+1,n}^{-1}]\tau_{j,n}^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{j+1,n}\sigma_j^{-1}\tau_{j+1,n}^{-1}]\tau_{j,n}^{-1}]^{-1}, \\ &= [w_{n-1,i}\tau_{j+1,n}^{-1}]\tau_{j,n}^{-1}[[w_{n-1,i}\tau_{j+1,n}^{-1}]\tau_{j,n}^{-1}]^{-1}, \\ &= w_{n-1,i}\tau_{j,n}^{-1}[w_{n-1,i}\tau_{j,n}^{-1}]^{-1}, \\ &= \tau_{n-1,n}^{-1}\tau_{j-1,n}^{-1}\tau_{n-1,n}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_6 &= [w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{j+1,n}\sigma_j^{-1}\tau_{j+1,n}^{-1}\tau_{j,n}^{-1}]\tau_{j+1,n}[[w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{j+1,n}\sigma_j^{-1}\tau_{j+1,n}^{-1}\tau_{j,n}^{-1}]\tau_{j+1,n}]^{-1}, \\ &= [w_{n-1,i}\tau_{j,n}^{-1}]\tau_{j+1,n}[[w_{n-1,i}\tau_{j,n}^{-1}]\tau_{j+1,n}]^{-1}, \\ &= w_{n-1,i}\tau_{j+1,n}[w_{n-1,i}\tau_{j+1,n}]^{-1}, \\ &= \tau_{n-1,n}^{-1}\tau_{j,n}\tau_{n-1,n}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $t_1t_2t_3t_4t_5t_6 = \sigma_{j-1}\tau_{n-1,n}^{-1}\tau_{j,n}\tau_{n-1,n}\sigma_{j-1}^{-1}\tau_{n-1,n}^{-1}\tau_{j,n}^{-1}\tau_{j-1,n}^{-1}\tau_{j,n}\tau_{n-1,n}$.

Caso 3: Si $j = i-1$, se tiene:

$$t_1 = e.$$

$$\begin{aligned} t_2 &= [w_{n-1,i}\sigma_j]\tau_{j+1,n}[[w_{n-1,i}\sigma_j]\tau_{j+1,n}]^{-1}, \\ &= w_{n-1,i-1}\tau_{j+1,n}[w_{n-1,i-1}\tau_{j+1,n}]^{-1}, \\ &= \tau_{n-1,n}^{-1}\tau_{j,n}\tau_{n-1,n}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_3 &= [w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{j+1,n}]\sigma_j^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{j+1,n}]\sigma_j^{-1}]^{-1}, \\ &= [w_{n-1,i-1}\tau_{j+1,n}]\sigma_j^{-1}[[w_{n-1,i-1}\tau_{j+1,n}]\sigma_j^{-1}]^{-1}, \\ &= w_{n-1,i-1}\sigma_j^{-1}[w_{n-1,i-1}\sigma_j^{-1}]^{-1}, \\ &= e. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_4 &= [w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{j+1,n}\sigma_j^{-1}]\tau_{j+1,n}^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{j+1,n}\sigma_j^{-1}]\tau_{j+1,n}^{-1}]^{-1}, \\ &= [w_{n-1,i-1}\sigma_j^{-1}]\tau_{j+1,n}^{-1}[[w_{n-1,i-1}\sigma_j^{-1}]\tau_{j+1,n}^{-1}]^{-1}, \\ &= w_{n-1,i}\tau_{j+1,n}^{-1}[w_{n-1,i}\tau_{j+1,n}^{-1}]^{-1}, \\ &= \tau_{n-1,n}^{-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_5 &= [w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{j+1,n}\sigma_j^{-1}\tau_{j+1,n}^{-1}]\tau_{j,n}^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{j+1,n}\sigma_j^{-1}\tau_{j+1,n}^{-1}]\tau_{j,n}^{-1}]^{-1}, \\ &= [w_{n-1,i}\tau_{j+1,n}^{-1}]\tau_{j,n}^{-1}[[w_{n-1,i}\tau_{j+1,n}^{-1}]\tau_{j,n}^{-1}]^{-1}, \\ &= w_{n-1,i}\tau_{j,n}^{-1}[w_{n-1,i}\tau_{j,n}^{-1}]^{-1}, \\ &= \tau_{j,n}^{-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_6 &= [w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{j+1,n}\sigma_j^{-1}\tau_{j+1,n}^{-1}\tau_{j,n}^{-1}]\tau_{j+1,n}[[w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{j+1,n}\sigma_j^{-1}\tau_{j+1,n}^{-1}\tau_{j,n}^{-1}]\tau_{j+1,n}]^{-1},\\ &= [w_{n-1,i}\tau_{j,n}^{-1}]\tau_{j+1,n}[[w_{n-1,i}\tau_{j,n}^{-1}]\tau_{j+1,n}]^{-1},\\ &= w_{n-1,i}\tau_{j+1,n}[w_{n-1,i}\tau_{j+1,n}]^{-1},\\ &= \tau_{n-1,n}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $t_1t_2t_3t_4t_5t_6 = \tau_{n-1,n}^{-1}\tau_{j,n}\tau_{n-1,n}\tau_{n-1,n}^{-1}\tau_{j,n}^{-1}\tau_{n-1,n} = e$.

Caso 4: Si $j = i$, se tiene:

$$t_1 = \tau_{j,n-1}.$$

$$\begin{aligned} t_2 &= [w_{n-1,i}\sigma_j]\tau_{j+1,n}[[w_{n-1,i}\sigma_j]\tau_{j+1,n}]^{-1},\\ &= w_{n-1,i+1}\tau_{j+1,n}[w_{n-1,i+1}\tau_{j+1,n}]^{-1},\\ &= \tau_{n-1,n}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_3 &= [w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{j+1,n}]\sigma_j^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{j+1,n}]\sigma_j^{-1}]^{-1},\\ &= [w_{n-1,i+1}\tau_{j+1,n}]\sigma_j^{-1}[[w_{n-1,i+1}\tau_{j+1,n}]\sigma_j^{-1}]^{-1},\\ &= w_{n-1,i+1}\sigma_j^{-1}[w_{n-1,i+1}\sigma_j^{-1}]^{-1},\\ &= \tau_{j,n-1}^{-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_4 &= [w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{j+1,n}\sigma_j^{-1}]\tau_{j+1,n}^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{j+1,n}\sigma_j^{-1}]\tau_{j+1,n}^{-1}]^{-1},\\ &= [w_{n-1,i+1}\sigma_j^{-1}]\tau_{j+1,n}^{-1}[[w_{n-1,i+1}\sigma_j^{-1}]\tau_{j+1,n}^{-1}]^{-1},\\ &= w_{n-1,i}\tau_{j+1,n}^{-1}[w_{n-1,i}\tau_{j+1,n}^{-1}]^{-1},\\ &= \tau_{n-1,n}^{-1}\tau_{j,n}^{-1}\tau_{n-1,n}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_5 &= [w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{j+1,n}\sigma_j^{-1}\tau_{j+1,n}^{-1}]\tau_{j,n}^{-1}[[w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{j+1,n}\sigma_j^{-1}\tau_{j+1,n}^{-1}]\tau_{j,n}^{-1}]^{-1},\\ &= [w_{n-1,i}\tau_{j+1,n}^{-1}]\tau_{j,n}^{-1}[[w_{n-1,i}\tau_{j+1,n}^{-1}]\tau_{j,n}^{-1}]^{-1},\\ &= w_{n-1,i}\tau_{j,n}^{-1}[w_{n-1,i}\tau_{j,n}^{-1}]^{-1},\\ &= \tau_{n-1,n}^{-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_6 &= [w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{j+1,n}\sigma_j^{-1}\tau_{j+1,n}^{-1}\tau_{j,n}^{-1}]\tau_{j+1,n}[[w_{n-1,i}\sigma_j\tau_{j+1,n}\sigma_j^{-1}\tau_{j+1,n}^{-1}\tau_{j,n}^{-1}]\tau_{j+1,n}]^{-1},\\ &= [w_{n-1,i}\tau_{j,n}^{-1}]\tau_{j+1,n}[[w_{n-1,i}\tau_{j,n}^{-1}]\tau_{j+1,n}]^{-1},\\ &= w_{n-1,i}\tau_{j+1,n}[w_{n-1,i}\tau_{j+1,n}]^{-1},\\ &= \tau_{n-1,n}^{-1}\tau_{j,n}\tau_{n-1,n}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $t_1t_2t_3t_4t_5t_6 = \tau_{j,n-1}\tau_{n-1,n}\tau_{j,n-1}^{-1}\tau_{n-1,n}^{-1}\tau_{j,n}^{-1}\tau_{n-1,n}^{-1}\tau_{j,n}\tau_{n-1,n}$.

Así obtenemos las siguientes relaciones:

$$\begin{cases} (1) & \sigma_j\tau_{j+1,n}\sigma_j^{-1} = \tau_{j+1,n}^{-1}\tau_{j,n}\tau_{j+1,n} & ; \quad j < i-1, \\ (2) & \sigma_{j-1}\tau_{n-1,n}^{-1}\tau_{j,n}\tau_{n-1,n}\sigma_{j-1}^{-1} = \tau_{n-1,n}^{-1}\tau_{j,n}^{-1}\tau_{j-1,n}\tau_{j,n}\tau_{n-1,n} & ; \quad j > i, \\ (3) & \tau_{j,n-1}\tau_{n-1,n}\tau_{j,n-1}^{-1} = \tau_{n-1,n}^{-1}\tau_{j,n}^{-1}\tau_{n-1,n}\tau_{j,n}\tau_{n-1,n} & ; \quad j = i. \end{cases} \tag{4.56}$$

Además, utilizando (4.28)(1) se tiene:

$$\begin{aligned} \sigma_{j-1}\tau_{n-1,n}^{-1}\tau_{j,n}\tau_{n-1,n}\sigma_{j-1}^{-1} &= \tau_{n-1,n}^{-1}\tau_{j,n}^{-1}\tau_{j-1,n}\tau_{j,n}\tau_{n-1,n} \\ \tau_{n-1,n}^{-1}\sigma_{j-1}\tau_{j,n}\sigma_{j-1}^{-1}\tau_{n-1,n} &= \tau_{n-1,n}^{-1}\tau_{j,n}^{-1}\tau_{j-1,n}\tau_{j,n}\tau_{n-1,n} \\ \sigma_{j-1}\tau_{j,n}\sigma_{j-1}^{-1} &= \tau_{j,n}^{-1}\tau_{j-1,n}\tau_{j,n} \end{aligned}$$

Luego tenemos:

$$\begin{cases} (1) & \sigma_j\tau_{j+1,n}\sigma_j^{-1} = \tau_{j+1,n}^{-1}\tau_{j,n}\tau_{j+1,n} & ; \quad j < i-1, \\ (2) & \sigma_{j-1}\tau_{j,n}\sigma_{j-1}^{-1} = \tau_{j,n}^{-1}\tau_{j-1,n}\tau_{j,n} & ; \quad j > i, \\ (3) & \tau_{j,n-1}\tau_{n-1,n}\tau_{j,n-1}^{-1} = \tau_{n-1,n}^{-1}\tau_{j,n}^{-1}\tau_{n-1,n}\tau_{j,n}\tau_{n-1,n} & ; \quad j = i. \end{cases} \tag{4.57}$$

Combinando los casos obtenemos las relaciones en (4.30). □

Demostración (Proposición 4.8).

Consideremos los siguientes elementos:

$$\begin{aligned} p_{1_1} &:= w_{k,p}\tau_{r,s}[w_{k,p}\tau_{r,s}]^{-1}, \\ p_{1_2} &:= [w_{k,p}\tau_{r,s}]\tau_{i,j}[w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{i,j}]^{-1}, \\ p_{1_3} &:= [w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{i,j}]\tau_{r,s}^{-1}[w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{i,j}\tau_{r,s}^{-1}]^{-1}, \\ p_{1_4} &:= [w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{i,j}\tau_{r,s}^{-1}]\tau_{i,j}^{-1}[w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{i,j}\tau_{r,s}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}]^{-1}. \end{aligned}$$

donde $i < r < s < j$. Notemos que

$$\tau_{r,s}\tau_{i,j}\tau_{r,s}^{-1}\tau_{i,j}^{-1} = p_{1_1}p_{1_2}p_{1_3}p_{1_4}.$$

Para $1 \leqslant r < s < j \leqslant n$ distingamos cinco casos:

Caso 1: Si $r < k < s$, se tiene:

Caso 1.1: Si $p > r$, entonces:

$$p_{1_1} = \tau_{r,s}.$$

$$\begin{aligned}
p_{1_2} &= [w_{k,p}\tau_{r,s}]\tau_{i,j}[[w_{k,p}\tau_{r,s}]\tau_{i,j}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{i,j}[w_{k,p}\tau_{i,j}]^{-1},\\
&= \tau_{i,j}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{1_3} &= [w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{i,j}]\tau_{r,s}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{i,j}]\tau_{r,s}^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{i,j}]\tau_{r,s}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{i,j}]\tau_{r,s}^{-1}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{r,s}^{-1}[w_{k,p}\tau_{r,s}^{-1}]^{-1},\\
&= \tau_{r,s}^{-1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{1_4} &= [w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{i,j}\tau_{r,s}^{-1}]\tau_{i,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{i,j}\tau_{r,s}^{-1}]\tau_{i,j}^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{r,s}^{-1}]\tau_{i,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,s}^{-1}]\tau_{i,j}^{-1}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}]^{-1},\\
&= \tau_{i,j}^{-1}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $d_{1_1}d_{1_2}d_{1_3}d_{1_4} = \tau_{r,s}\tau_{i,j}\tau_{r,s}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}$.

Caso 1.2: Si $p = r$, entonces:

$$p_{1_1} = \tau_{k,s}.$$

$$\begin{aligned}
p_{1_2} &= [w_{k,p}\tau_{r,s}]\tau_{i,j}[[w_{k,p}\tau_{r,s}]\tau_{i,j}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{i,j}[w_{k,p}\tau_{i,j}]^{-1},\\
&= \tau_{i,j}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{1_3} &= [w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{i,j}]\tau_{r,s}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{i,j}]\tau_{r,s}^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{i,j}]\tau_{r,s}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{i,j}]\tau_{r,s}^{-1}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{r,s}^{-1}[w_{k,p}\tau_{r,s}^{-1}]^{-1},\\
&= \tau_{k,s}^{-1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{1_4} &= [w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{i,j}\tau_{r,s}^{-1}]\tau_{i,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{i,j}\tau_{r,s}^{-1}]\tau_{i,j}^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{r,s}^{-1}]\tau_{i,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,s}^{-1}]\tau_{i,j}^{-1}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}]^{-1},\\
&= \tau_{i,j}^{-1}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $d_{1_1}d_{1_2}d_{1_3}d_{1_4} = \tau_{k,s}\tau_{i,j}\tau_{k,s}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}$.

Caso 1.3: Si $i < p < r$, entonces:

$$p_{1_1} = \tau_{k,s}^{-1}\tau_{r-1,s}\tau_{k,s}.$$

$$\begin{aligned} p_{1_2} &= [w_{k,p}\tau_{r,s}]\tau_{i,j}[[w_{k,p}\tau_{r,s}]\tau_{i,j}]^{-1}, \\ &= w_{k,p}\tau_{i,j}[w_{k,p}\tau_{i,j}]^{-1}, \\ &= \tau_{i,j}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{1_3} &= [w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{i,j}]\tau_{r,s}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{i,j}]\tau_{r,s}^{-1}]^{-1}, \\ &= [w_{k,p}\tau_{i,j}]\tau_{r,s}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{i,j}]\tau_{r,s}^{-1}]^{-1}, \\ &= w_{k,p}\tau_{r,s}^{-1}[w_{k,p}\tau_{r,s}^{-1}]^{-1}, \\ &= \tau_{k,s}^{-1}\tau_{r-1,s}^{-1}\tau_{k,s}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{1_4} &= [w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{i,j}\tau_{r,s}^{-1}]\tau_{i,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{i,j}\tau_{r,s}^{-1}]\tau_{i,j}^{-1}]^{-1}, \\ &= [w_{k,p}\tau_{r,s}^{-1}]\tau_{i,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,s}^{-1}]\tau_{i,j}^{-1}]^{-1}, \\ &= w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}]^{-1}, \\ &= \tau_{i,j}^{-1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $d_{1_1}d_{1_2}d_{1_3}d_{1_4} = \tau_{k,s}^{-1}\tau_{r-1,s}\tau_{k,s}\tau_{i,j}\tau_{k,s}^{-1}\tau_{r-1,s}^{-1}\tau_{k,s}\tau_{i,j}^{-1}$.

Caso 1.4: Si $i = p$, entonces:

$$p_{1_1} = \tau_{k,s}^{-1}\tau_{r-1,s}\tau_{k,s}.$$

$$\begin{aligned} p_{1_2} &= [w_{k,p}\tau_{r,s}]\tau_{i,j}[[w_{k,p}\tau_{r,s}]\tau_{i,j}]^{-1}, \\ &= w_{k,p}\tau_{i,j}[w_{k,p}\tau_{i,j}]^{-1}, \\ &= \tau_{k,j}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{1_3} &= [w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{i,j}]\tau_{r,s}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{i,j}]\tau_{r,s}^{-1}]^{-1}, \\ &= [w_{k,p}\tau_{i,j}]\tau_{r,s}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{i,j}]\tau_{r,s}^{-1}]^{-1}, \\ &= w_{k,p}\tau_{r,s}^{-1}[w_{k,p}\tau_{r,s}^{-1}]^{-1}, \\ &= \tau_{k,s}^{-1}\tau_{r-1,s}^{-1}\tau_{k,s}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{1_4} &= [w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{i,j}\tau_{r,s}^{-1}]\tau_{i,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{i,j}\tau_{r,s}^{-1}]\tau_{i,j}^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{r,s}^{-1}]\tau_{i,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,s}^{-1}]\tau_{i,j}^{-1}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}]^{-1},\\
&= \tau_{k,j}^{-1}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $d_{1_1}d_{1_2}d_{1_3}d_{1_4} = \tau_{k,s}^{-1}\tau_{r-1,s}\tau_{k,s}\tau_{k,j}\tau_{k,s}^{-1}\tau_{r-1,s}^{-1}\tau_{k,s}\tau_{k,j}^{-1}$.

Caso 1.5: Si $p < i$, entonces:

$$p_{1_1} = \tau_{k,s}^{-1}\tau_{r-1,s}\tau_{k,s}.$$

$$\begin{aligned}
p_{1_2} &= [w_{k,p}\tau_{r,s}]\tau_{i,j}[[w_{k,p}\tau_{r,s}]\tau_{i,j}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{i,j}[w_{k,p}\tau_{i,j}]^{-1},\\
&= \tau_{k,j}^{-1}\tau_{i-1,j}\tau_{k,j}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{1_3} &= [w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{i,j}]\tau_{r,s}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{i,j}]\tau_{r,s}^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{i,j}]\tau_{r,s}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{i,j}]\tau_{r,s}^{-1}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{r,s}^{-1}[w_{k,p}\tau_{r,s}^{-1}]^{-1},\\
&= \tau_{k,s}^{-1}\tau_{r-1,s}^{-1}\tau_{k,s}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{1_4} &= [w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{i,j}\tau_{r,s}^{-1}]\tau_{i,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{i,j}\tau_{r,s}^{-1}]\tau_{i,j}^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{r,s}^{-1}]\tau_{i,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,s}^{-1}]\tau_{i,j}^{-1}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}]^{-1},\\
&= \tau_{k,j}^{-1}\tau_{i-1,j}^{-1}\tau_{k,j}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $d_{1_1}d_{1_2}d_{1_3}d_{1_4} = \tau_{k,s}^{-1}\tau_{r-1,s}\tau_{k,s}\tau_{k,j}^{-1}\tau_{i-1,j}\tau_{k,j}\tau_{k,s}^{-1}\tau_{r-1,s}^{-1}$
$\tau_{k,s}\tau_{k,j}^{-1}\tau_{i-1,j}^{-1}\tau_{k,j}$.

Caso 2: Si $r = k$, se tiene:

Caso 2.1: Si $i < p < r$, entonces:

$$p_{1_1} = \tau_{k,s}^{-1}\tau_{k-1,s}\tau_{k,s}.$$

$$\begin{aligned}
p_{1_2} &= [w_{k,p}\tau_{r,s}]\tau_{i,j}[[w_{k,p}\tau_{r,s}]\tau_{i,j}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{i,j}[w_{k,p}\tau_{i,j}]^{-1},\\
&= \tau_{k,j}^{-1}\tau_{i-1,j}\tau_{k,j}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{1_3} &= [w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{i,j}]\tau_{r,s}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{i,j}]\tau_{r,s}^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{i,j}]\tau_{r,s}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{i,j}]\tau_{r,s}^{-1}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{r,s}^{-1}[w_{k,p}\tau_{r,s}^{-1}]^{-1},\\
&= \tau_{k,s}^{-1}\tau_{k-1,s}^{-1}\tau_{k,s}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{1_4} &= [w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{i,j}\tau_{r,s}^{-1}]\tau_{i,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{i,j}\tau_{r,s}^{-1}]\tau_{i,j}^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{r,s}^{-1}]\tau_{i,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,s}^{-1}]\tau_{i,j}^{-1}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}]^{-1},\\
&= \tau_{k,j}^{-1}\tau_{i-1,j}^{-1}\tau_{k,j}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $d_{1_1}d_{1_2}d_{1_3}d_{1_4} = \tau_{k,s}^{-1}\tau_{k-1,s}\tau_{k,s}\tau_{k,j}^{-1}\tau_{i-1,j}\tau_{k,j}\tau_{k,s}^{-1}\tau_{k-1,s}^{-1}\tau_{k,s}$ $\tau_{k,j}^{-1}\tau_{i-1,j}^{-1}\tau_{k,j}$.

Caso 2.2: Si $i = p$, entonces:

$$p_{1_1} = \tau_{k,s}^{-1}\tau_{k-1,s}\tau_{k,s}.$$

$$\begin{aligned}
p_{1_2} &= [w_{k,p}\tau_{r,s}]\tau_{i,j}[[w_{k,p}\tau_{r,s}]\tau_{i,j}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{i,j}[w_{k,p}\tau_{i,j}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{i,j}[w_{k,p}\tau_{i,j}]^{-1},\\
&= \tau_{k,j}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{1_3} &= [w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{i,j}]\tau_{r,s}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{i,j}]\tau_{r,s}^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{i,j}]\tau_{r,s}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{i,j}]\tau_{r,s}^{-1}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{r,s}^{-1}[w_{k,p}\tau_{r,s}^{-1}]^{-1},\\
&= \tau_{k,s}^{-1}\tau_{k-1,s}^{-1}\tau_{k,s}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{1_4} &= [w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{i,j}\tau_{r,s}^{-1}]\tau_{i,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{i,j}\tau_{r,s}^{-1}]\tau_{i,j}^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{r,s}^{-1}]\tau_{i,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,s}^{-1}]\tau_{i,j}^{-1}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}]^{-1},\\
&= \tau_{k,j}^{-1}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $d_{1_1}d_{1_2}d_{1_3}d_{1_4} = \tau_{k,s}^{-1}\tau_{r-1,s}\tau_{k,s}\tau_{k,j}\tau_{k,s}^{-1}\tau_{r-1,s}^{-1}\tau_{k,s}\tau_{k,j}^{-1}$.

Caso 2.3: Si $p < i$, entonces:

$$p_{1_1} = \tau_{k,s}^{-1}\tau_{k-1,s}\tau_{k,s}.$$

$$\begin{aligned} p_{1_2} &= [w_{k,p}\tau_{r,s}]\tau_{i,j}[[w_{k,p}\tau_{r,s}]\tau_{i,j}]^{-1}, \\ &= w_{k,p}\tau_{i,j}[w_{k,p}\tau_{i,j}]^{-1}, \\ &= \tau_{i,j}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{1_3} &= [w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{i,j}]\tau_{r,s}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{i,j}]\tau_{r,s}^{-1}]^{-1}, \\ &= [w_{k,p}\tau_{i,j}]\tau_{r,s}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{i,j}]\tau_{r,s}^{-1}]^{-1}, \\ &= w_{k,p}\tau_{r,s}^{-1}[w_{k,p}\tau_{r,s}^{-1}]^{-1}, \\ &= \tau_{k,s}^{-1}\tau_{k-1,s}^{-1}\tau_{k,s}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{1_4} &= [w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{i,j}\tau_{r,s}^{-1}]\tau_{i,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{i,j}\tau_{r,s}^{-1}]\tau_{i,j}^{-1}]^{-1}, \\ &= [w_{k,p}\tau_{r,s}^{-1}]\tau_{i,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,s}^{-1}]\tau_{i,j}^{-1}]^{-1}, \\ &= w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}]^{-1}, \\ &= \tau_{i,j}^{-1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $d_{1_1}d_{1_2}d_{1_3}d_{1_4} = \tau_{k,s}^{-1}\tau_{k-1,s}\tau_{k,s}\tau_{i,j}\tau_{k,s}^{-1}\tau_{k-1,s}^{-1}\tau_{k,s}\tau_{i,j}^{-1}$.

Caso 3: Si $i < k < r$, se tiene:ç

Caso 3.1: Si $i < p$, entonces:

$$p_{1_1} = \tau_{r,s}.$$

$$\begin{aligned} p_{1_2} &= [w_{k,p}\tau_{r,s}]\tau_{i,j}[[w_{k,p}\tau_{r,s}]\tau_{i,j}]^{-1}, \\ &= w_{k,p}\tau_{i,j}[w_{k,p}\tau_{i,j}]^{-1}, \\ &= \tau_{i,j}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{1_3} &= [w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{i,j}]\tau_{r,s}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{i,j}]\tau_{r,s}^{-1}]^{-1}, \\ &= [w_{k,p}\tau_{i,j}]\tau_{r,s}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{i,j}]\tau_{r,s}^{-1}]^{-1}, \\ &= w_{k,p}\tau_{r,s}^{-1}[w_{k,p}\tau_{r,s}^{-1}]^{-1}, \\ &= \tau_{r,s}^{-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{1_4} &= [w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{i,j}\tau_{r,s}^{-1}]\tau_{i,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{i,j}\tau_{r,s}^{-1}]\tau_{i,j}^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{r,s}^{-1}]\tau_{i,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,s}^{-1}]\tau_{i,j}^{-1}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}]^{-1},\\
&= \tau_{i,j}^{-1}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $d_{1_1}d_{1_2}d_{1_3}d_{1_4} = \tau_{r,s}\tau_{i,j}\tau_{r,s}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}$.

Caso 3.2: Si $i = p$, entonces:

$$p_{1_1} = \tau_{r,s}.$$

$$\begin{aligned}
p_{1_2} &= [w_{k,p}\tau_{r,s}]\tau_{i,j}[[w_{k,p}\tau_{r,s}]\tau_{i,j}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{i,j}[w_{k,p}\tau_{i,j}]^{-1},\\
&= \tau_{k,j}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{1_3} &= [w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{i,j}]\tau_{r,s}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{i,j}]\tau_{r,s}^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{i,j}]\tau_{r,s}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{i,j}]\tau_{r,s}^{-1}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{r,s}^{-1}[w_{k,p}\tau_{r,s}^{-1}]^{-1},\\
&= \tau_{r,s}^{-1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{1_4} &= [w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{i,j}\tau_{r,s}^{-1}]\tau_{i,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{i,j}\tau_{r,s}^{-1}]\tau_{i,j}^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{r,s}^{-1}]\tau_{i,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,s}^{-1}]\tau_{i,j}^{-1}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}]^{-1},\\
&= \tau_{i,j}^{-1}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $d_{1_1}d_{1_2}d_{1_3}d_{1_4} = \tau_{r,s}\tau_{k,j}\tau_{r,s}^{-1}\tau_{k,j}^{-1}$.

Caso 3.3: Si $p < i$, entonces:

$$p_{1_1} = \tau_{r,s}.$$

$$\begin{aligned}
p_{1_2} &= [w_{k,p}\tau_{r,s}]\tau_{i,j}[[w_{k,p}\tau_{r,s}]\tau_{i,j}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{i,j}[w_{k,p}\tau_{i,j}]^{-1},\\
&= \tau_{k,j}^{-1}\tau_{i-1,j}\tau_{k,j}.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
p_{1_3} &= [w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{i,j}]\tau_{r,s}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{i,j}]\tau_{r,s}^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{i,j}]\tau_{r,s}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{i,j}]\tau_{r,s}^{-1}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{r,s}^{-1}[w_{k,p}\tau_{r,s}^{-1}]^{-1},\\
&= \tau_{r,s}^{-1}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_{1_4} &= [w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{i,j}\tau_{r,s}^{-1}]\tau_{i,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{i,j}\tau_{r,s}^{-1}]\tau_{i,j}^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{r,s}^{-1}]\tau_{i,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,s}^{-1}]\tau_{i,j}^{-1}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}]^{-1},\\
&= \tau_{k,j}^{-1}\tau_{i-1,j}^{-1}\tau_{k,j}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $d_{1_1}d_{1_2}d_{1_3}d_{1_4} = \tau_{r,s}\tau_{k,j}^{-1}\tau_{i-1,j}\tau_{k,j}\tau_{r,s}^{-1}\tau_{k,j}^{-1}\tau_{i-1,j}^{-1}\tau_{k,j}$.

Caso 4: Si $k = i$, se tiene:

$$
p_{1_1} = \tau_{r,s}.
$$

$$
\begin{aligned}
p_{1_2} &= [w_{k,p}\tau_{r,s}]\tau_{i,j}[[w_{k,p}\tau_{r,s}]\tau_{i,j}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{i,j}[w_{k,p}\tau_{i,j}]^{-1},\\
&= \tau_{i,j}^{-1}\tau_{i-1,j}\tau_{i,j}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_{1_3} &= [w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{i,j}]\tau_{r,s}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{i,j}]\tau_{r,s}^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{i,j}]\tau_{r,s}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{i,j}]\tau_{r,s}^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{i,j}]\tau_{r,s}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{i,j}]\tau_{r,s}^{-1}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{r,s}^{-1}[w_{k,p}\tau_{r,s}^{-1}]^{-1},\\
&= \tau_{r,s}^{-1}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_{1_4} &= [w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{i,j}\tau_{r,s}^{-1}]\tau_{i,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{i,j}\tau_{r,s}^{-1}]\tau_{i,j}^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{r,s}^{-1}]\tau_{i,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,s}^{-1}]\tau_{i,j}^{-1}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}]^{-1},\\
&= \tau_{i,j}^{-1}\tau_{i-1,j}^{-1}\tau_{i,j}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $d_{1_1}d_{1_2}d_{1_3}d_{1_4} = \tau_{r,s}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{i-1,j}\tau_{i,j}\tau_{r,s}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{i-1,j}^{-1}\tau_{i,j}$.

Caso 5: Si $k < i$, se tiene:

$$
p_{1_1} = \tau_{r,s}.
$$

$$\begin{aligned} p_{1_2} &= [w_{k,p}\tau_{r,s}]\tau_{i,j}[[w_{k,p}\tau_{r,s}]\tau_{i,j}]^{-1}, \\ &= w_{k,p}\tau_{i,j}[w_{k,p}\tau_{i,j}]^{-1}, \\ &= \tau_{i,j}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{1_3} &= [w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{i,j}]\tau_{r,s}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{i,j}]\tau_{r,s}^{-1}]^{-1}, \\ &= [w_{k,p}\tau_{i,j}]\tau_{r,s}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{i,j}]\tau_{r,s}^{-1}]^{-1}, \\ &= w_{k,p}\tau_{r,s}^{-1}[w_{k,p}\tau_{r,s}^{-1}]^{-1}, \\ &= \tau_{r,s}^{-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{1_4} &= [w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{i,j}\tau_{r,s}^{-1}]\tau_{i,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{i,j}\tau_{r,s}^{-1}]\tau_{i,j}^{-1}]^{-1}, \\ &= [w_{k,p}\tau_{r,s}^{-1}]\tau_{i,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,s}^{-1}]\tau_{i,j}^{-1}]^{-1}, \\ &= w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}]^{-1}, \\ &= \tau_{i,j}^{-1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $d_{1_1}d_{1_2}d_{1_3}d_{1_4} = \tau_{r,s}\tau_{i,j}\tau_{r,s}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}$

Luego, obtenemos las siguientes relaciones:

Caso 1: $r < k < s$

$$\begin{cases} (1) & \tau_{r,s}\tau_{i,j} = \tau_{i,j}\tau_{r,s} & ; \quad p > r, \\ (2) & \tau_{k,s}\tau_{i,j} = \tau_{i,j}\tau_{k,s} & ; \quad p = r, \\ (3) & (\tau_{k,s}^{-1}\tau_{r-1,s}\tau_{k,s})\tau_{i,j} = \tau_{i,j}(\tau_{k,s}^{-1}\tau_{r-1,s}\tau_{k,s}) & ; \quad i < p, \\ (4) & (\tau_{k,s}^{-1}\tau_{r-1,s}\tau_{k,s})\tau_{k,j} = \tau_{k,j}(\tau_{k,s}^{-1}\tau_{r-1,s}\tau_{k,s}) & ; \quad i = p, \\ (5) & (\tau_{k,j}^{-1}\tau_{i-1,j}\tau_{k,j})(\tau_{k,s}^{-1}\tau_{r-1,s}\tau_{k,s}) = (\tau_{k,s}^{-1}\tau_{r-1,s}\tau_{k,s})(\tau_{k,j}^{-1}\tau_{i-1,j}\tau_{k,j}) & ; \quad p < i. \end{cases}$$

Las relaciones (1), (2) y (3) son consecuencia de (A), las relaciones (4) y (5) son consecuencia de Lema 4.13.1 y 4.13.2.

Caso 2: $r = k$

$$\begin{cases} (1) & (\tau_{k,s}^{-1}\tau_{k-1,s}\tau_{k,s})(\tau_{k,j}^{-1}\tau_{i-1,j}\tau_{k,j}) = (\tau_{k,j}^{-1}\tau_{i-1,j}\tau_{k,j})(\tau_{k,s}^{-1}\tau_{k-1,s}\tau_{k,s}) & ; \quad i < p < r, \\ (2) & (\tau_{k,s}^{-1}\tau_{k-1,s}\tau_{k,s})\tau_{k,j} = \tau_{k,j}(\tau_{k,s}^{-1}\tau_{k-1,s}\tau_{k,s}) & ; \quad i = p, \\ (3) & (\tau_{k,s}^{-1}\tau_{k-1,s}\tau_{k,s})\tau_{i,j} = \tau_{i,j}(\tau_{k,s}^{-1}\tau_{k-1,s}\tau_{k,s}) & ; \quad p < i. \end{cases}$$

La relación (1) es consecuencia de 4.13.2, la relación (2) es consecuencia de 4.13.1 y (3) es consecuencia de (A).

Caso 3: $i < k < r$

$$\begin{cases} (1) & \tau_{r,s}\tau_{i,j} = \tau_{i,j}\tau_{r,s} & ; \quad i < p, \\ (2) & \tau_{r,s}\tau_{k,j} = \tau_{k,j}\tau_{r,s} & ; \quad i = p, \\ (3) & \tau_{r,s}(\tau_{k,j}^{-1}\tau_{i-1,j}\tau_{k,j}) = (\tau_{k,j}^{-1}\tau_{i-1,j}\tau_{k,j})\tau_{r,s} & ; \quad p < i. \end{cases}$$

Las relaciones (1), (2) y (3) son consecuencia de (A).

Caso 4: $k = i$

$$\begin{cases} (1) & \tau_{r,s}(\tau_{i,j}^{-1}\tau_{i-1,j}\tau_{i,j}) = (\tau_{i,j}^{-1}\tau_{i-1,j}\tau_{i,j})\tau_{r,s}. \end{cases}$$

Esta relación es consecuencia de (A).

Caso 5: $k < i$

$$\begin{cases} (1) & \tau_{r,s}\tau_{i,j} = \tau_{i,j}\tau_{r,s}. \end{cases}$$

Esta relación es consecuencia de (A).

El caso $r < s < i < j$ es análogo. Esto demuestra la proposición. □

Demostración (Proposición 4.9).

Consideremos los siguientes elementos:

$$\begin{aligned}
p_{2_1} &:= w_{k,p}\tau_{r,s}[w_{k,p}\tau_{r,s}]^{-1}, \\
p_{2_2} &:= [w_{k,p}\tau_{r,s}]\tau_{r,j}[w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{r,j}]^{-1}, \\
p_{2_3} &:= [w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{r,j}]\tau_{r,s}^{-1}[w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{r,j}\tau_{r,s}^{-1}]^{-1}, \\
p_{2_4} &:= [w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{r,j}\tau_{r,s}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}[w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{r,j}\tau_{r,s}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}]^{-1}, \\
p_{2_5} &:= [w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{r,j}\tau_{r,s}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{r,j}^{-1}[w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{r,j}\tau_{r,s}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{r,j}^{-1}]^{-1}, \\
p_{2_6} &:= [w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{r,j}\tau_{r,s}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{r,j}^{-1}]\tau_{s,j}[w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{r,j}\tau_{r,s}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{r,j}^{-1}\tau_{s,j}]^{-1}.
\end{aligned}$$

Notemos que

$$w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{r,j}\tau_{r,s}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{r,j}^{-1}\tau_{s,j}w_{k,p}^{-1} = p_{2_1}p_{2_2}p_{2_3}p_{2_4}p_{2_5}p_{2_6}.$$

Distingamos tres casos:

Caso 1: Si $r < k < s < j$, tenemos:

Caso 1.1: Si $r < p \leqslant k$, entonces:

$$p_{2_1} = \tau_{r,s}.$$

$$\begin{aligned} p_{2_2} &= [w_{k,p}\tau_{r,s}]\tau_{r,j}[[w_{k,p}\tau_{r,s}]\tau_{r,j}]^{-1}, \\ &= w_{k,p}\tau_{r,j}[w_{k,p}\tau_{r,j}]^{-1}, \\ &= \tau_{r,j}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{2_3} &= [w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{r,j}]\tau_{r,s}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{r,j}]\tau_{r,s}^{-1}]^{-1}, \\ &= [w_{k,p}\tau_{r,j}]\tau_{r,s}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,j}]\tau_{r,s}^{-1}]^{-1}, \\ &= w_{k,p}\tau_{r,s}^{-1}[w_{k,p}\tau_{r,s}^{-1}]^{-1}, \\ &= \tau_{r,s}^{-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{2_4} &= [w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{r,j}\tau_{r,s}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{r,j}\tau_{r,s}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}]^{-1}, \\ &= [w_{k,p}\tau_{r,s}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,s}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}]^{-1}, \\ &= w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}[w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}]^{-1}, \\ &= \tau_{s,j}^{-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{2_5} &= [w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{r,j}\tau_{r,s}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{r,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{r,j}\tau_{r,s}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{r,j}^{-1}]^{-1}, \\ &= [w_{k,p}\tau_{r,s}^{-1}]\tau_{r,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,s}^{-1}]\tau_{r,j}^{-1}]^{-1}, \\ &= w_{k,p}\tau_{r,j}^{-1}[w_{k,p}\tau_{r,j}^{-1}]^{-1}, \\ &= \tau_{r,j}^{-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{2_6} &= [w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{r,j}\tau_{r,s}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{r,j}^{-1}]\tau_{s,j}[[w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{r,j}\tau_{r,s}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{r,j}^{-1}]\tau_{s,j}]^{-1}, \\ &= [w_{k,p}\tau_{r,j}^{-1}]\tau_{s,j}[[w_{k,p}\tau_{r,j}^{-1}]\tau_{s,j}]^{-1}, \\ &= w_{k,p}\tau_{s,j}[w_{k,p}\tau_{s,j}]^{-1}, \\ &= \tau_{s,j}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $p_{2_1}p_{2_2}p_{2_3}p_{2_4}p_{2_5}p_{2_6} = \tau_{r,s}\tau_{r,j}\tau_{r,s}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{r,j}^{-1}\tau_{s,j}$.

Caso 1.2: Si $r = p$, entonces:

$$p_{2_1} = \tau_{k,s}.$$

$$\begin{aligned} p_{2_2} &= [w_{k,p}\tau_{r,s}]\tau_{r,j}[[w_{k,p}\tau_{r,s}]\tau_{r,j}]^{-1}, \\ &= w_{k,p}\tau_{r,j}[w_{k,p}\tau_{r,j}]^{-1}, \\ &= \tau_{k,j}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{2_3} &= [w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{r,j}]\tau_{r,s}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{r,j}]\tau_{r,s}^{-1}]^{-1},\\ &= [w_{k,p}\tau_{r,j}]\tau_{r,s}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,j}]\tau_{r,s}^{-1}]^{-1},\\ &= w_{k,p}\tau_{r,s}^{-1}[w_{k,p}\tau_{r,s}^{-1}]^{-1},\\ &= \tau_{r,s}^{-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{2_4} &= [w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{r,j}\tau_{r,s}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{r,j}\tau_{r,s}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}]^{-1},\\ &= [w_{k,p}\tau_{r,s}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,s}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}]^{-1},\\ &= w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}[w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}]^{-1},\\ &= \tau_{s,j}^{-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{2_5} &= [w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{r,j}\tau_{r,s}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{r,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{r,j}\tau_{r,s}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{r,j}^{-1}]^{-1},\\ &= [w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{r,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{r,j}^{-1}]^{-1},\\ &= w_{k,p}\tau_{r,j}^{-1}[w_{k,p}\tau_{r,j}^{-1}]^{-1},\\ &= \tau_{k,j}^{-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{2_6} &= [w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{r,j}\tau_{r,s}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{r,j}^{-1}]\tau_{s,j}[[w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{r,j}\tau_{r,s}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{r,j}^{-1}]\tau_{s,j}]^{-1},\\ &= [w_{k,p}\tau_{r,j}^{-1}]\tau_{s,j}[[w_{k,p}\tau_{r,j}^{-1}]\tau_{s,j}]^{-1},\\ &= w_{k,p}\tau_{s,j}[w_{k,p}\tau_{s,j}]^{-1},\\ &= \tau_{s,j}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $p_{2_1}p_{2_2}p_{2_3}p_{2_4}p_{2_5}p_{2_6} = \tau_{k,s}\tau_{k,j}\tau_{r,s}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{k,j}^{-1}\tau_{s,j}$.

Caso 1.3: Si $p < r$, entonces:

$$p_{2_1} = \tau_{k,s}^{-1}\tau_{r-1,s}\tau_{k,s}.$$

$$\begin{aligned} p_{2_2} &= [w_{k,p}\tau_{r,s}]\tau_{r,j}[[w_{k,p}\tau_{r,s}]\tau_{r,j}]^{-1},\\ &= w_{k,p}\tau_{r,j}[w_{k,p}\tau_{r,j}]^{-1},\\ &= \tau_{k,j}^{-1}\tau_{r-1,j}\tau_{k,j}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{2_3} &= [w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{r,j}]\tau_{r,s}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{r,j}]\tau_{r,s}^{-1}]^{-1},\\ &= [w_{k,p}\tau_{r,j}]\tau_{r,s}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,j}]\tau_{r,s}^{-1}]^{-1},\\ &= w_{k,p}\tau_{r,s}^{-1}[w_{k,p}\tau_{r,s}^{-1}]^{-1},\\ &= \tau_{k,s}^{-1}\tau_{r-1,s}\tau_{k,s}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{2_4} &= [w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{r,j}\tau_{r,s}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{r,j}\tau_{r,s}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}]^{-1}, \\ &= [w_{k,p}\tau_{r,s}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,s}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}]^{-1}, \\ &= w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}[w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}]^{-1}, \\ &= \tau_{s,j}^{-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{2_5} &= [w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{r,j}\tau_{r,s}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{r,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{r,j}\tau_{r,s}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{r,j}^{-1}]^{-1}, \\ &= [w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{r,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{r,j}^{-1}]^{-1}, \\ &= w_{k,p}\tau_{r,j}^{-1}[w_{k,p}\tau_{r,j}^{-1}]^{-1}, \\ &= \tau_{k,j}^{-1}\tau_{r-1,j}^{-1}\tau_{k,j}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{2_6} &= [w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{r,j}\tau_{r,s}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{r,j}^{-1}]\tau_{s,j}[[w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{r,j}\tau_{r,s}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{r,j}^{-1}]\tau_{s,j}]^{-1}, \\ &= [w_{k,p}\tau_{r,j}^{-1}]\tau_{s,j}[[w_{k,p}\tau_{r,j}^{-1}]\tau_{s,j}]^{-1}, \\ &= w_{k,p}\tau_{s,j}[w_{k,p}\tau_{s,j}]^{-1}, \\ &= \tau_{s,j}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $p_{2_1}p_{2_2}p_{2_3}p_{2_4}p_{2_5}p_{2_6} = \tau_{k,s}^{-1}\tau_{r-1,s}\tau_{k,s}\tau_{k,j}^{-1}\tau_{r-1,j}\tau_{k,j}\tau_{k,s}^{-1}\tau_{r-1,s}$ $\tau_{k,s}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{k,j}^{-1}\tau_{r-1,j}^{-1}\tau_{k,j}\tau_{s,j}$.

Caso 2: Si $r = k$, se tiene:

$$p_{2_1} = \tau_{k,s}^{-1}\tau_{r-1,s}\tau_{k,s}.$$

$$\begin{aligned} p_{2_2} &= [w_{k,p}\tau_{r,s}]\tau_{r,j}[[w_{k,p}\tau_{r,s}]\tau_{r,j}]^{-1}, \\ &= w_{k,p}\tau_{r,j}[w_{k,p}\tau_{r,j}]^{-1}, \\ &= \tau_{k,j}^{-1}\tau_{k-1,j}\tau_{k,j}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{2_3} &= [w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{r,j}]\tau_{r,s}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{r,j}]\tau_{r,s}^{-1}]^{-1}, \\ &= [w_{k,p}\tau_{r,j}]\tau_{r,s}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,j}]\tau_{r,s}^{-1}]^{-1}, \\ &= w_{k,p}\tau_{r,s}^{-1}[w_{k,p}\tau_{r,s}^{-1}]^{-1}, \\ &= \tau_{k,s}^{-1}\tau_{k-1,s}^{-1}\tau_{k,s}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{2_4} &= [w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{r,j}\tau_{r,s}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{r,j}\tau_{r,s}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}]^{-1}, \\ &= [w_{k,p}\tau_{r,s}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,s}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}]^{-1}, \\ &= w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}[w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}]^{-1}, \\ &= \tau_{s,j}^{-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{2_5} &= [w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{r,j}\tau_{r,s}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{r,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{r,j}\tau_{r,s}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{r,j}^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{r,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{r,j}^{-1}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{r,j}^{-1}[w_{k,p}\tau_{r,j}^{-1}]^{-1},\\
&= \tau_{k,j}^{-1}\tau_{r-1,j}^{-1}\tau_{k,j}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{2_6} &= [w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{r,j}\tau_{r,s}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{r,j}^{-1}]\tau_{s,j}[[w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{r,j}\tau_{r,s}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{r,j}^{-1}]\tau_{s,j}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{r,j}^{-1}]\tau_{s,j}[[w_{k,p}\tau_{r,j}^{-1}]\tau_{s,j}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{s,j}[w_{k,p}\tau_{s,j}]^{-1},\\
&= \tau_{s,j}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $p_{2_1}p_{2_2}p_{2_3}p_{2_4}p_{2_5}p_{2_6} = \tau_{k,s}^{-1}\tau_{r-1,s}\tau_{k,s}\tau_{k,j}^{-1}\tau_{k-1,j}\tau_{k,j}\tau_{k,s}^{-1}\tau_{k-1,s}^{-1}$
$\tau_{k,s}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{k,j}^{-1}\tau_{r-1,j}^{-1}\tau_{k,j}\tau_{s,j}$.

Caso 3: Si $k < r$, se tiene:

$$p_{2_1} = \tau_{r,s}.$$

$$\begin{aligned}
p_{2_2} &= [w_{k,p}\tau_{r,s}]\tau_{r,j}[[w_{k,p}\tau_{r,s}]\tau_{r,j}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{r,j}[w_{k,p}\tau_{r,j}]^{-1},\\
&= \tau_{r,j}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{2_3} &= [w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{r,j}]\tau_{r,s}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{r,j}]\tau_{r,s}^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{r,j}]\tau_{r,s}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,j}]\tau_{r,s}^{-1}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{r,s}^{-1}[w_{k,p}\tau_{r,s}^{-1}]^{-1},\\
&= \tau_{r,s}^{-1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{2_4} &= [w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{r,j}\tau_{r,s}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{r,j}\tau_{r,s}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{r,s}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,s}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}[w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}]^{-1},\\
&= \tau_{s,j}^{-1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{2_5} &= [w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{r,j}\tau_{r,s}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{r,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{r,j}\tau_{r,s}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{r,j}^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{r,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{r,j}^{-1}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{r,j}^{-1}[w_{k,p}\tau_{r,j}^{-1}]^{-1},\\
&= \tau_{r,j}^{-1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{2_6} &= [w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{r,j}\tau_{r,s}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{r,j}^{-1}]\tau_{s,j}[[w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{r,j}\tau_{r,s}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{r,j}^{-1}]\tau_{s,j}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{r,j}^{-1}]\tau_{s,j}[[w_{k,p}\tau_{r,j}^{-1}]\tau_{s,j}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{s,j}[w_{k,p}\tau_{s,j}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{s,j}[w_{k,p}\tau_{s,j}]^{-1},\\
&= \tau_{s,j}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $p_{2_1}p_{2_2}p_{2_3}p_{2_4}p_{2_5}p_{2_6} = \tau_{r,s}\tau_{r,j}\tau_{r,s}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{r,j}^{-1}\tau_{s,j}$.

Luego, obtenemos las siguientes relaciones:

Caso 1: $r < k < s < j$

$$\begin{cases}
(1) & \tau_{r,s}\tau_{r,j}\tau_{r,s}^{-1} = \tau_{s,j}^{-1}\tau_{r,j}\tau_{s,j} & ; \quad r < p \leqslant k,\\
(2) & \tau_{k,s}\tau_{k,j}\tau_{k,s}^{-1} = \tau_{s,j}^{-1}\tau_{k,j}\tau_{s,j} & ; \quad r = p,\\
(3) & \tau_{k,s}^{-1}\tau_{r-1,s}\tau_{k,s}\tau_{k,j}^{-1}\tau_{r-1,j}\tau_{k,j}\tau_{k,s}^{-1}\tau_{r-1,s}^{-1}\tau_{k,s} = \tau_{s,j}^{-1}\tau_{k,j}^{-1}\tau_{r-1,j}\tau_{k,j}\tau_{s,j} & ; \quad p < r.
\end{cases}$$

Las relaciones (1) y (2) son consecuencia de (B)

Caso 2: $r = k$

$$\begin{cases}
(1) \quad \tau_{k,s}^{-1}\tau_{k-1,s}\tau_{k,s}\tau_{k,j}^{-1}\tau_{k-1,j}\tau_{k,j}\tau_{k,s}^{-1}\tau_{k-1,s}^{-1}\tau_{k,s} = \tau_{s,j}^{-1}\tau_{k,j}^{-1}\tau_{k-1,j}\tau_{k,j}\tau_{s,j}.
\end{cases}$$

Caso 3: $k < r$

$$\begin{cases}
(1) \quad \tau_{r,s}\tau_{r,j}\tau_{r,s}^{-1} = \tau_{s,j}^{-1}\tau_{r,j}\tau_{s,j}.
\end{cases}$$

Esta relación es consecuencia de (B).

Basta demostrar ahora que las relaciones en Caso 1.(3) y Caso 2.(1) son consecuencia de (4.32). Como $r-1 < k$ en Caso 1.(3) y $k-1 < k$ en Caso 2.(1), consideremos ambos casos, tomando $t < k$ como $r-1$ o $k-1$, entonces:

Caso 1.(3)/Caso 2.(1):

$$\begin{aligned}
\boxed{\tau_{k,s}^{-1}\tau_{t,s}\tau_{k,s}}\,\boxed{\tau_{k,j}^{-1}\tau_{t,j}\tau_{k,j}}\,\boxed{\tau_{k,s}^{-1}\tau_{t,s}^{-1}\tau_{k,s}} &= \tau_{s,j}^{-1}\boxed{\tau_{k,j}^{-1}\tau_{t,j}\tau_{k,j}}\tau_{s,j} \\
&\quad (B) \\
\tau_{t,k}\tau_{t,s}\tau_{t,k}^{-1}\tau_{t,k}\tau_{t,j}\tau_{t,k}^{-1}\tau_{t,k}\tau_{t,s}^{-1}\tau_{t,k}^{-1} &= \boxed{\tau_{s,j}^{-1}\tau_{t,k}}\tau_{t,j}\boxed{\tau_{t,k}^{-1}\tau_{s,j}} \\
&\quad (A) \\
\tau_{t,k}\tau_{t,s}\tau_{t,j}\tau_{t,s}^{-1}\tau_{t,k}^{-1} &= \tau_{t,k}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{t,j}\tau_{s,j}\tau_{t,k}^{-1} \\
\tau_{t,s}\tau_{t,j}\tau_{t,s}^{-1} &= \tau_{s,j}^{-1}\tau_{t,j}\tau_{s,j} \\
&\quad (B).
\end{aligned}$$

Esto demuestra la proposición. □

Demostración (Proposición 4.10).

Consideremos los siguientes elementos:

$p_{3_1} := w_{k,p}\tau_{r,s}[w_{k,p}\tau_{r,s}]^{-1}$,

$p_{3_2} := [w_{k,p}\tau_{r,s}]\tau_{s,j}[w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{s,j}]^{-1}$,

$p_{3_3} := [w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{s,j}]\tau_{r,s}^{-1}[w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{s,j}\tau_{r,s}^{-1}]^{-1}$,

$p_{3_4} := [w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{s,j}\tau_{r,s}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}[w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{s,j}\tau_{r,s}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}]^{-1}$,

$p_{3_5} := [w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{s,j}\tau_{r,s}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{r,j}^{-1}[w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{s,j}\tau_{r,s}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{r,j}^{-1}]^{-1}$,

$p_{3_6} := [w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{s,j}\tau_{r,s}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{r,j}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}[w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{s,j}\tau_{r,s}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{r,j}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}]^{-1}$,

$p_{3_7} := [w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{s,j}\tau_{r,s}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{r,j}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{r,j}[w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{s,j}\tau_{r,s}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{r,j}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{r,j}]^{-1}$,

$p_{3_8} := [w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{s,j}\tau_{r,s}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{r,j}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{r,j}]\tau_{s,j}[w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{s,j}\tau_{r,s}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{r,j}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{r,j}\tau_{s,j}]^{-1}$.

Notemos que

$$w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{s,j}\tau_{r,s}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{r,j}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{r,j}\tau_{s,j}w_{k,p}^{-1} = p_{3_1}p_{3_2}p_{3_3}p_{3_4}p_{3_5}p_{3_6}p_{3_7}p_{3_8}.$$

Distingamos tres casos:

Caso 1: Si $r < k < s < j$, se tiene:

Caso 1.1: Si $r < p \leqslant k$, entonces:

$$p_{3_1} = \tau_{r,s}.$$

$$\begin{aligned}
p_{3_2} &= [w_{k,p}\tau_{r,s}]\tau_{s,j}[[w_{k,p}\tau_{r,s}]\tau_{s,j}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{s,j}[w_{k,p}\tau_{s,j}]^{-1},\\
&= \tau_{s,j}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{3_3} &= [w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{s,j}]\tau_{r,s}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{s,j}]\tau_{r,s}^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{s,j}]\tau_{r,s}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{s,j}]\tau_{r,s}^{-1}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{r,s}^{-1}[w_{k,p}\tau_{r,s}^{-1}]^{-1},\\
&= \tau_{r,s}^{-1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{3_4} &= [w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{s,j}\tau_{r,s}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{s,j}\tau_{r,s}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{r,s}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,s}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}[w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}]^{-1},\\
&= \tau_{s,j}^{-1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{3_5} &= [w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{s,j}\tau_{r,s}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{r,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{s,j}\tau_{r,s}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{r,j}^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{r,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{r,j}^{-1}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{r,j}^{-1}[w_{k,p}\tau_{r,j}^{-1}]^{-1},\\
&= \tau_{r,j}^{-1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{3_6} &= [w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{s,j}\tau_{r,s}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{r,j}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{s,j}\tau_{r,s}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{r,j}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{r,j}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,j}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}[w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}]^{-1},\\
&= \tau_{s,j}^{-1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{3_7} &= [w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{s,j}\tau_{r,s}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{r,j}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{r,j}[[w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{s,j}\tau_{r,s}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{r,j}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{r,j}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{r,j}[[w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{r,j}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{r,j}[w_{k,p}\tau_{r,j}]^{-1},\\
&= \tau_{r,j}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{3_8} &= [w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{s,j}\tau_{r,s}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{r,j}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{r,j}]\tau_{s,j}[[w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{s,j}\tau_{r,s}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{r,j}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{r,j}]\tau_{s,j}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{r,j}]\tau_{s,j}[[w_{k,p}\tau_{r,j}]\tau_{s,j}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{s,j}[w_{k,p}\tau_{s,j}]^{-1},\\
&= \tau_{s,j}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $p_{3_1}p_{3_2}p_{3_3}p_{3_4}p_{3_5}p_{3_6}p_{3_7}p_{3_8} = \tau_{r,s}\tau_{s,j}\tau_{r,s}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{r,j}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{r,j}\tau_{s,j}$.

Caso 1.2: Si $p = r$, entonces:

$$p_{3_1} = \tau_{k,s}.$$

$$\begin{aligned}
p_{3_2} &= [w_{k,p}\tau_{r,s}]\tau_{s,j}[[w_{k,p}\tau_{r,s}]\tau_{s,j}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{s,j}[w_{k,p}\tau_{s,j}]^{-1},\\
&= \tau_{s,j}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{3_3} &= [w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{s,j}]\tau_{r,s}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{s,j}]\tau_{r,s}^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{s,j}]\tau_{r,s}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{s,j}]\tau_{r,s}^{-1}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{r,s}^{-1}[w_{k,p}\tau_{r,s}^{-1}]^{-1},\\
&= \tau_{k,s}^{-1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{3_4} &= [w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{s,j}\tau_{r,s}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{s,j}\tau_{r,s}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{r,s}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,s}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}[w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}]^{-1},\\
&= \tau_{s,j}^{-1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{3_5} &= [w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{s,j}\tau_{r,s}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{r,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{s,j}\tau_{r,s}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{r,j}^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{r,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{r,j}^{-1}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{r,j}^{-1}[w_{k,p}\tau_{r,j}^{-1}]^{-1},\\
&= \tau_{k,j}^{-1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{3_6} &= [w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{s,j}\tau_{r,s}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{r,j}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{s,j}\tau_{r,s}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{r,j}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{r,j}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,j}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}[w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}]^{-1},\\
&= \tau_{s,j}^{-1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{3_7} &= [w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{s,j}\tau_{r,s}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{r,j}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{r,j}[[w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{s,j}\tau_{r,s}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{r,j}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{r,j}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{r,j}[[w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{r,j}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{r,j}[w_{k,p}\tau_{r,j}]^{-1},\\
&= \tau_{k,j}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{3_8} &= [w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{s,j}\tau_{r,s}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{r,j}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{r,j}]\tau_{s,j}[[w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{s,j}\tau_{r,s}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{r,j}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{r,j}]\tau_{s,j}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{r,j}]\tau_{s,j}[[w_{k,p}\tau_{r,j}]\tau_{s,j}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{s,j}[w_{k,p}\tau_{s,j}]^{-1},\\
&= \tau_{s,j}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $p_{3_1}p_{3_2}p_{3_3}p_{3_4}p_{3_5}p_{3_6}p_{3_7}p_{3_8} = \tau_{k,s}\tau_{s,j}\tau_{k,s}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{k,j}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{k,j}\tau_{s,j}$.

Caso 1.3: Si $p < r$, entonces:

$$p_{3_1} = \tau_{k,s}^{-1}\tau_{r-1,s}\tau_{k,s}.$$

$$\begin{aligned}
p_{3_2} &= [w_{k,p}\tau_{r,s}]\tau_{s,j}[[w_{k,p}\tau_{r,s}]\tau_{s,j}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{s,j}[w_{k,p}\tau_{s,j}]^{-1},\\
&= \tau_{s,j}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{3_3} &= [w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{s,j}]\tau_{r,s}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{s,j}]\tau_{r,s}^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{s,j}]\tau_{r,s}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{s,j}]\tau_{r,s}^{-1}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{r,s}^{-1}[w_{k,p}\tau_{r,s}^{-1}]^{-1},\\
&= \tau_{k,s}^{-1}\tau_{r-1,s}^{-1}\tau_{k,s}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{3_4} &= [w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{s,j}\tau_{r,s}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{s,j}\tau_{r,s}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{r,s}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,s}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}[w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}]^{-1},\\
&= \tau_{s,j}^{-1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{3_5} &= [w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{s,j}\tau_{r,s}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{r,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{s,j}\tau_{r,s}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{r,j}^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{r,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{r,j}^{-1}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{r,j}^{-1}[w_{k,p}\tau_{r,j}^{-1}]^{-1},\\
&= \tau_{k,j}^{-1}\tau_{r-1,j}\tau_{k,j}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{3_6} &= [w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{s,j}\tau_{r,s}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{r,j}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{s,j}\tau_{r,s}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{r,j}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{r,j}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,j}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}[w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}]^{-1},\\
&= \tau_{s,j}^{-1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{3_7} &= [w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{s,j}\tau_{r,s}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{r,j}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{r,j}[[w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{s,j}\tau_{r,s}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{r,j}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{r,j}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{r,j}[[w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{r,j}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{r,j}[w_{k,p}\tau_{r,j}]^{-1},\\
&= \tau_{k,j}^{-1}\tau_{r-1,j}^{-1}\tau_{k,j}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{3_8} &= [w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{s,j}\tau_{r,s}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{r,j}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{r,j}]\tau_{s,j}[[w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{s,j}\tau_{r,s}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{r,j}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{r,j}]\tau_{s,j}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{r,j}]\tau_{s,j}[[w_{k,p}\tau_{r,j}]\tau_{s,j}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{s,j}[w_{k,p}\tau_{s,j}]^{-1},\\
&= \tau_{s,j}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $p_{3_1}p_{3_2}p_{3_3}p_{3_4}p_{3_5}p_{3_6}p_{3_7}p_{3_8} = \tau_{k,s}^{-1}\tau_{r-1,s}\tau_{k,s}\tau_{s,j}\tau_{k,s}^{-1}\tau_{r-1,s}^{-1}\tau_{k,s}$ $\tau_{s,j}^{-1}\tau_{k,j}^{-1}\tau_{r-1,j}\tau_{k,j}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{k,j}^{-1}\tau_{r-1,j}^{-1}\tau_{k,j}\tau_{s,j}$.

Caso 2: Si $r = k$, se tiene:

$$p_{3_1} = \tau_{k,s}^{-1}\tau_{k-1,s}\tau_{k,s}.$$

$$\begin{aligned}
p_{3_2} &= [w_{k,p}\tau_{r,s}]\tau_{s,j}[[w_{k,p}\tau_{r,s}]\tau_{s,j}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{s,j}[w_{k,p}\tau_{s,j}]^{-1},\\
&= \tau_{s,j}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{3_3} &= [w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{s,j}]\tau_{r,s}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{s,j}]\tau_{r,s}^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{s,j}]\tau_{r,s}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{s,j}]\tau_{r,s}^{-1}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{r,s}^{-1}[w_{k,p}\tau_{r,s}^{-1}]^{-1},\\
&= \tau_{k,s}^{-1}\tau_{k-1,s}^{-1}\tau_{k,s}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{3_4} &= [w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{s,j}\tau_{r,s}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{s,j}\tau_{r,s}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{r,s}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,s}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}[w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}]^{-1},\\
&= \tau_{s,j}^{-1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{3_5} &= [w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{s,j}\tau_{r,s}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{r,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{s,j}\tau_{r,s}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{r,j}^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{r,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{r,j}^{-1}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{r,j}^{-1}[w_{k,p}\tau_{r,j}^{-1}]^{-1},\\
&= \tau_{k,s}^{-1}\tau_{k-1,s}\tau_{k,s}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{3_6} &= [w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{s,j}\tau_{r,s}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{r,j}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{s,j}\tau_{r,s}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{r,j}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{r,j}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,j}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}[w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}]^{-1},\\
&= \tau_{s,j}^{-1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{3_7} &= [w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{s,j}\tau_{r,s}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{r,j}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{r,j}[[w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{s,j}\tau_{r,s}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{r,j}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{r,j}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{r,j}[[w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{r,j}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{r,j}[w_{k,p}\tau_{r,j}]^{-1},\\
&= \tau_{k,s}^{-1}\tau_{k-1,s}^{-1}\tau_{k,s}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{3_8} &= [w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{s,j}\tau_{r,s}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{r,j}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{r,j}]\tau_{s,j}[[w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{s,j}\tau_{r,s}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{r,j}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{r,j}]\tau_{s,j}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{r,j}]\tau_{s,j}[[w_{k,p}\tau_{r,j}]\tau_{s,j}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{s,j}[w_{k,p}\tau_{s,j}]^{-1},\\
&= \tau_{s,j}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $p_{3_1}p_{3_2}p_{3_3}p_{3_4}p_{3_5}p_{3_6}p_{3_7}p_{3_8} = \tau_{k,s}^{-1}\tau_{k-1,s}\tau_{k,s}\tau_{s,j}\tau_{k,s}^{-1}\tau_{k-1,s}^{-1}\tau_{k,s}\tau_{s,j}^{-1}$ $\tau_{k,s}^{-1}\tau_{k-1,s}\tau_{k,s}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{k,s}^{-1}\tau_{k-1,s}^{-1}\tau_{k,s}\tau_{s,j}$.

Caso 3: Si $k < r$, se tiene:

$$p_{3_1} = \tau_{r,s}.$$

$$\begin{aligned}
p_{3_2} &= [w_{k,p}\tau_{r,s}]\tau_{s,j}[[w_{k,p}\tau_{r,s}]\tau_{s,j}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{s,j}[w_{k,p}\tau_{s,j}]^{-1},\\
&= \tau_{s,j}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{3_3} &= [w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{s,j}]\tau_{r,s}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{s,j}]\tau_{r,s}^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{s,j}]\tau_{r,s}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{s,j}]\tau_{r,s}^{-1}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{r,s}^{-1}[w_{k,p}\tau_{r,s}^{-1}]^{-1},\\
&= \tau_{r,s}^{-1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{3_4} &= [w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{s,j}\tau_{r,s}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{s,j}\tau_{r,s}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{r,s}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,s}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}[w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}]^{-1},\\
&= \tau_{s,j}^{-1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{3_5} &= [w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{s,j}\tau_{r,s}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{r,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{s,j}\tau_{r,s}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{r,j}^{-1}]^{-1}, \\ &= [w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{r,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{r,j}^{-1}]^{-1}, \\ &= w_{k,p}\tau_{r,j}^{-1}[w_{k,p}\tau_{r,j}^{-1}]^{-1}, \\ &= \tau_{r,j}^{-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{3_6} &= [w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{s,j}\tau_{r,s}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{r,j}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{s,j}\tau_{r,s}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{r,j}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}]^{-1}, \\ &= [w_{k,p}\tau_{r,j}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,j}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}]^{-1}, \\ &= w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}[w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}]^{-1}, \\ &= \tau_{s,j}^{-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{3_7} &= [w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{s,j}\tau_{r,s}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{r,j}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{r,j}[[w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{s,j}\tau_{r,s}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{r,j}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{r,j}]^{-1}, \\ &= [w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{r,j}[[w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{r,j}]^{-1}, \\ &= w_{k,p}\tau_{r,j}[w_{k,p}\tau_{r,j}]^{-1}, \\ &= \tau_{r,j}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{3_8} &= [w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{s,j}\tau_{r,s}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{r,j}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{r,j}]\tau_{s,j}[[w_{k,p}\tau_{r,s}\tau_{s,j}\tau_{r,s}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{r,j}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{r,j}]\tau_{s,j}]^{-1}, \\ &= [w_{k,p}\tau_{r,j}]\tau_{s,j}[[w_{k,p}\tau_{r,j}]\tau_{s,j}]^{-1}, \\ &= w_{k,p}\tau_{s,j}[w_{k,p}\tau_{s,j}]^{-1}, \\ &= \tau_{s,j}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $p_{3_1}p_{3_2}p_{3_3}p_{3_4}p_{3_5}p_{3_6}p_{3_7}p_{3_8} = \tau_{r,s}\tau_{s,j}\tau_{r,s}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{r,j}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{r,j}\tau_{s,j}$.

Luego, obtenemos las siguientes relaciones:

Caso 1: $r < k < s < j$

$$\begin{cases} (1) & \tau_{r,s}\tau_{s,j}\tau_{r,s}^{-1} = \tau_{s,j}^{-1}\tau_{r,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{r,j}\tau_{s,j} & ; \quad r < p \leqslant k, \\ (2) & \tau_{k,s}\tau_{s,j}\tau_{k,s}^{-1} = \tau_{s,j}^{-1}\tau_{k,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{k,j}\tau_{s,j} & ; \quad p = r, \\ (3) & \tau_{k,s}^{-1}\tau_{r-1,s}\tau_{k,s}\tau_{s,j}\tau_{k,s}^{-1}\tau_{r-1,s}^{-1}\tau_{k,s} = \tau_{s,j}^{-1}\tau_{k,j}^{-1}\tau_{r-1,j}^{-1}\tau_{k,j}\tau_{s,j}\tau_{k,j}^{-1}\tau_{r-1,j}\tau_{k,j}\tau_{s,j} & ; \quad p < r. \end{cases}$$

Las relaciones (1) y (2) son consecuencia de (C).

Caso 2: $r = k$

$$\begin{cases} (1) \quad \tau_{k,s}^{-1}\tau_{k-1,s}\tau_{k,s}\tau_{s,j}\tau_{k,s}^{-1}\tau_{k-1,s}^{-1}\tau_{k,s} = \tau_{s,j}^{-1}\tau_{k,s}^{-1}\tau_{k-1,s}^{-1}\tau_{k,s}\tau_{s,j}\tau_{k,s}^{-1}\tau_{k-1,s}\tau_{k,s}\tau_{s,j}. \end{cases}$$

Caso 3: $k < r$

$$\left\{ \begin{array}{ll} (1) & \tau_{r,s}\tau_{s,j}\tau_{r,s}^{-1} = \tau_{s,j}^{-1}\tau_{r,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{r,j}\tau_{s,j}. \end{array} \right.$$

Esta relación es consecuencia de (C).

Basta demostrar ahora que las relaciones en Caso 1.(3) y Caso 2.(1) son consecuencia (4.32). Para esto consideremos $t < k < s < j$, tenemos:

Caso 1.(3):

$$\begin{array}{rcl}
\boxed{\tau_{k,s}^{-1}\tau_{t,s}\tau_{k,s}}\tau_{s,j}\boxed{\tau_{k,s}^{-1}\tau_{t,s}^{-1}\tau_{k,s}} & = & \tau_{s,j}^{-1}\boxed{\tau_{k,j}^{-1}\tau_{t,j}^{-1}\tau_{k,j}}\tau_{s,j}\boxed{\tau_{k,j}^{-1}\tau_{t,j}\tau_{k,j}}\tau_{s,j} \\
 & (B) & \\
\tau_{t,k}\tau_{t,s}\boxed{\tau_{t,k}^{-1}\tau_{s,j}}\tau_{t,k}\tau_{t,s}^{-1}\tau_{t,k}^{-1} & = & \boxed{\tau_{s,j}^{-1}\tau_{t,k}}\tau_{t,j}^{-1}\tau_{t,k}^{-1}\boxed{\tau_{s,j}\tau_{t,k}}\tau_{t,j}\boxed{\tau_{t,k}^{-1}\tau_{s,j}} \\
 & (A) & \\
\tau_{t,k}\tau_{t,s}\tau_{s,j}\tau_{t,k}^{-1}\tau_{t,k}\tau_{t,s}^{-1}\tau_{t,k}^{-1} & = & \tau_{t,k}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{t,j}^{-1}\tau_{t,k}^{-1}\tau_{t,k}\tau_{s,j}\tau_{t,j}\tau_{s,j}\tau_{t,k}^{-1} \\
\tau_{t,s}\tau_{s,j}\tau_{t,s}^{-1} & = & \tau_{s,j}^{-1}\tau_{t,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{t,j}\tau_{s,j} \\
 & (C). &
\end{array}$$

Análogamente para Caso 2.(1). Esto demuestra la proposición. □

Demostración (Proposición 4.11).

Consideremos los siguientes elementos:

$p_{4_1} := w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}]^{-1}$,

$p_{4_2} := [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}]\tau_{s,j}[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}]^{-1}$,

$p_{4_3} := [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}]\tau_{i,j}[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}]^{-1}$,

$p_{4_4} := [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}]\tau_{r,i}^{-1}[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}]^{-1}$,

$p_{4_5} := [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}]\tau_{i,j}^{-1}[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}]^{-1}$,

$p_{4_6} := [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}]^{-1}$,

$p_{4_7} := [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{i,j}[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{i,j}]^{-1}$,

$p_{4_8} := [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{i,j}]\tau_{r,i}^{-1}[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}]^{-1}$.

Notemos que

$$w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}w_{k,p}^{-1} = p_{4_1}p_{4_2}p_{4_3}p_{4_4}p_{4_5}p_{4_6}p_{4_7}p_{4_8}.$$

Distingamos cinco casos:

Caso 1: Si $s < k < i$, se tiene:

Caso 1.1: Si $s < p < k$, entonces:

$$p_{4_1} = \tau_{i,j}^{-1}.$$

$$\begin{aligned} p_{4_2} &= [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}]\tau_{s,j}[[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}]\tau_{s,j}]^{-1}, \\ &= w_{k,p}\tau_{s,j}[w_{k,p}\tau_{s,j}]^{-1}, \\ &= \tau_{s,j}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{4_3} &= [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}]\tau_{i,j}[[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}]\tau_{i,j}]^{-1}, \\ &= [w_{k,p}\tau_{s,j}]\tau_{i,j}[[w_{k,p}\tau_{s,j}]\tau_{i,j}]^{-1}, \\ &= w_{k,p}\tau_{i,j}[w_{k,p}\tau_{i,j}]^{-1}, \\ &= \tau_{i,j}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{4_4} &= [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}]\tau_{r,i}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}]\tau_{r,i}^{-1}]^{-1}, \\ &= [w_{k,p}\tau_{i,j}]\tau_{r,i}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{i,j}]\tau_{r,i}^{-1}]^{-1}, \\ &= w_{k,p}\tau_{r,i}^{-1}[w_{k,p}\tau_{r,i}^{-1}]^{-1}, \\ &= \tau_{r,i}^{-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{4_5} &= [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}]\tau_{i,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}]\tau_{i,j}^{-1}]^{-1}, \\ &= [w_{k,p}\tau_{r,i}^{-1}]\tau_{i,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,i}^{-1}]\tau_{i,j}^{-1}]^{-1}, \\ &= w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}]^{-1}, \\ &= \tau_{i,j}^{-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{4_6} &= [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}]^{-1}, \\ &= [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}]^{-1}, \\ &= w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}[w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}]^{-1}, \\ &= \tau_{s,j}^{-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{4_7} &= [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{i,j}[[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{i,j}]^{-1}, \\ &= [w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{i,j}[[w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{i,j}]^{-1}, \\ &= w_{k,p}\tau_{i,j}[w_{k,p}\tau_{i,j}]^{-1}, \\ &= \tau_{i,j}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{4_8} &= [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{i,j}]\tau_{r,i}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{i,j}]\tau_{r,i}^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{i,j}]\tau_{r,i}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{i,j}]\tau_{r,i}^{-1}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{r,i}^{-1}[w_{k,p}\tau_{r,i}^{-1}]^{-1},\\
&= \tau_{r,i}^{-1}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $p_{4_1}p_{4_2}p_{4_3}p_{4_4}p_{4_5}p_{4_6}p_{4_7}p_{4_8} = \tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}$.

Caso 1.2: Si $p = s$, entonces:

$$p_{4_1} = \tau_{i,j}^{-1}.$$

$$\begin{aligned}
p_{4_2} &= [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}]\tau_{s,j}[[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}]\tau_{s,j}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{s,j}[w_{k,p}\tau_{s,j}]^{-1},\\
&= \tau_{k,j}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{4_3} &= [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}]\tau_{i,j}[[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}]\tau_{i,j}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{s,j}]\tau_{i,j}[[w_{k,p}\tau_{s,j}]\tau_{i,j}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{i,j}[w_{k,p}\tau_{i,j}]^{-1},\\
&= \tau_{i,j}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{4_4} &= [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}]\tau_{r,i}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}]\tau_{r,i}^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{i,j}]\tau_{r,i}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{i,j}]\tau_{r,i}^{-1}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{r,i}^{-1}[w_{k,p}\tau_{r,i}^{-1}]^{-1},\\
&= \tau_{r,i}^{-1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{4_5} &= [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}]\tau_{i,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}]\tau_{i,j}^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{r,i}^{-1}]\tau_{i,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,i}^{-1}]\tau_{i,j}^{-1}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}]^{-1},\\
&= \tau_{i,j}^{-1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{4_6} &= [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}[w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}]^{-1},\\
&= \tau_{k,j}^{-1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{4_7} &= [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{i,j}[[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{i,j}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{i,j}[[w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{i,j}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{i,j}[w_{k,p}\tau_{i,j}]^{-1},\\
&= \tau_{i,j}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{4_8} &= [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{i,j}]\tau_{r,i}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{i,j}]\tau_{r,i}^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{i,j}]\tau_{r,i}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{i,j}]\tau_{r,i}^{-1}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{r,i}^{-1}[w_{k,p}\tau_{r,i}^{-1}]^{-1},\\
&= \tau_{r,i}^{-1}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $p_{4_1}p_{4_2}p_{4_3}p_{4_4}p_{4_5}p_{4_6}p_{4_7}p_{4_8} = \tau_{i,j}^{-1}\tau_{k,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{k,j}^{-1}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}$.

Caso 1.3: Si $r < p < s$, entonces:

$$p_{4_1} = \tau_{i,j}^{-1}.$$

$$\begin{aligned}
p_{4_2} &= [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}]\tau_{s,j}[[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}]\tau_{s,j}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{s,j}[w_{k,p}\tau_{s,j}]^{-1},\\
&= \tau_{k,j}^{-1}\tau_{s-1,j}\tau_{k,j}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{4_3} &= [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}]\tau_{i,j}[[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}]\tau_{i,j}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{s,j}]\tau_{i,j}[[w_{k,p}\tau_{s,j}]\tau_{i,j}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{i,j}[w_{k,p}\tau_{i,j}]^{-1},\\
&= \tau_{i,j}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{4_4} &= [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}]\tau_{r,i}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}]\tau_{r,i}^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{i,j}]\tau_{r,i}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{i,j}]\tau_{r,i}^{-1}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{r,i}^{-1}[w_{k,p}\tau_{r,i}^{-1}]^{-1},\\
&= \tau_{k,i}^{-1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{4_5} &= [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}]\tau_{i,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}]\tau_{i,j}^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{r,i}^{-1}]\tau_{i,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,i}^{-1}]\tau_{i,j}^{-1}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}]^{-1},\\
&= \tau_{i,j}^{-1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{4_6} &= [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}[w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}]^{-1},\\
&= \tau_{k,j}^{-1}\tau_{s-1,j}^{-1}\tau_{k,j}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{4_7} &= [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{i,j}[[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{i,j}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{i,j}[[w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{i,j}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{i,j}[w_{k,p}\tau_{i,j}]^{-1},\\
&= \tau_{i,j}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{4_8} &= [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{i,j}]\tau_{r,i}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{i,j}]\tau_{r,i}^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{i,j}]\tau_{r,i}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{i,j}]\tau_{r,i}^{-1}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{r,i}^{-1}[w_{k,p}\tau_{r,i}^{-1}]^{-1},\\
&= \tau_{r,i}^{-1}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $p_{4_1}p_{4_2}p_{4_3}p_{4_4}p_{4_5}p_{4_6}p_{4_7}p_{4_8} = \tau_{i,j}^{-1}\tau_{k,j}^{-1}\tau_{s-1,j}\tau_{k,j}\tau_{i,j}\tau_{k,i}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{k,j}^{-1}$ $\tau_{s-1,j}^{-1}\tau_{k,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}$.

Caso 1.4: Si $p = r$, entonces:

$$p_{4_1} = \tau_{i,j}^{-1}.$$

$$\begin{aligned}
p_{4_2} &= [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}]\tau_{s,j}[[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}]\tau_{s,j}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{s,j}[w_{k,p}\tau_{s,j}]^{-1},\\
&= \tau_{k,j}^{-1}\tau_{s-1,j}\tau_{k,j}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{4_3} &= [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}]\tau_{i,j}[[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}]\tau_{i,j}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{s,j}]\tau_{i,j}[[w_{k,p}\tau_{s,j}]\tau_{i,j}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{i,j}[w_{k,p}\tau_{i,j}]^{-1},\\
&= \tau_{i,j}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{4_4} &= [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}]\tau_{r,i}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}]\tau_{r,i}^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{i,j}]\tau_{r,i}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{i,j}]\tau_{r,i}^{-1}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{r,i}^{-1}[w_{k,p}\tau_{r,i}^{-1}]^{-1},\\
&= \tau_{k,i}^{-1}.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
p_{4_5} &= [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}]\tau_{i,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}]\tau_{i,j}^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{r,i}^{-1}]\tau_{i,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,i}^{-1}]\tau_{i,j}^{-1}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}]^{-1},\\
&= \tau_{i,j}^{-1}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_{4_6} &= [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}[w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}]^{-1},\\
&= \tau_{k,j}^{-1}\tau_{s-1,j}^{-1}\tau_{k,j}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_{4_7} &= [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{i,j}[[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{i,j}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{i,j}[[w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{i,j}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{i,j}[w_{k,p}\tau_{i,j}]^{-1},\\
&= \tau_{i,j}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_{4_8} &= [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{i,j}]\tau_{r,i}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{i,j}]\tau_{r,i}^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{i,j}]\tau_{r,i}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{i,j}]\tau_{r,i}^{-1}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{r,i}^{-1}[w_{k,p}\tau_{r,i}^{-1}]^{-1},\\
&= \tau_{k,i}^{-1}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $p_{4_1}p_{4_2}p_{4_3}p_{4_4}p_{4_5}p_{4_6}p_{4_7}p_{4_8} = \tau_{i,j}^{-1}\tau_{k,j}^{-1}\tau_{s-1,j}\tau_{k,j}\tau_{i,j}\tau_{k,i}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{k,j}^{-1}$ $\tau_{s-1,j}^{-1}\tau_{k,j}\tau_{i,j}\tau_{k,i}^{-1}$.

Caso 1.5: Si $p < r$, entonces:

$$
p_{4_1} = \tau_{i,j}^{-1}.
$$

$$
\begin{aligned}
p_{4_2} &= [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}]\tau_{s,j}[[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}]\tau_{s,j}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{s,j}[w_{k,p}\tau_{s,j}]^{-1},\\
&= \tau_{k,j}^{-1}\tau_{s-1,j}\tau_{k,j}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_{4_3} &= [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}]\tau_{i,j}[[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}]\tau_{i,j}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{s,j}]\tau_{i,j}[[w_{k,p}\tau_{s,j}]\tau_{i,j}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{i,j}[w_{k,p}\tau_{i,j}]^{-1},\\
&= \tau_{i,j}.
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
p_{4_4} &= [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}]\tau_{r,i}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}]\tau_{r,i}^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{i,j}]\tau_{r,i}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{i,j}]\tau_{r,i}^{-1}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{r,i}^{-1}[w_{k,p}\tau_{r,i}^{-1}]^{-1},\\
&= \tau_{k,i}^{-1}\tau_{r-1,i}\tau_{k,i}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{4_5} &= [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}]\tau_{i,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}]\tau_{i,j}^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{r,i}^{-1}]\tau_{i,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,i}^{-1}]\tau_{i,j}^{-1}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}]^{-1},\\
&= \tau_{i,j}^{-1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{4_6} &= [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}[w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}]^{-1},\\
&= \tau_{k,j}^{-1}\tau_{k-1,j}^{-1}\tau_{k,j}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{4_7} &= [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{i,j}[[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{i,j}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{i,j}[[w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{i,j}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{i,j}[w_{k,p}\tau_{i,j}]^{-1},\\
&= \tau_{i,j}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{4_8} &= [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{i,j}]\tau_{r,i}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{i,j}]\tau_{r,i}^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{i,j}]\tau_{r,i}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{i,j}]\tau_{r,i}^{-1}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{r,i}^{-1}[w_{k,p}\tau_{r,i}^{-1}]^{-1},\\
&= \tau_{k,i}^{-1}\tau_{r-1,i}^{-1}\tau_{k,i}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $p_{4_1}p_{4_2}p_{4_3}p_{4_4}p_{4_5}p_{4_6}p_{4_7}p_{4_8} = \tau_{i,j}^{-1}\tau_{k,j}^{-1}\tau_{s-1,j}\tau_{k,j}\tau_{i,j}\tau_{k,i}^{-1}\tau_{r-1,i}\tau_{k,i}$ $\tau_{i,j}^{-1}\tau_{k,j}^{-1}\tau_{k-1,j}^{-1}\tau_{k,j}\tau_{i,j}\tau_{k,i}^{-1}\tau_{r-1,i}^{-1}\tau_{k,i}$.

Caso 2: Si $k = s$, se tiene:

Caso 2.1: Si $r < p < s$, entonces:

$$p_{4_1} = \tau_{i,j}^{-1}.$$

$$\begin{aligned}
p_{4_2} &= [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}]\tau_{s,j}[[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}]\tau_{s,j}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{s,j}[w_{k,p}\tau_{s,j}]^{-1},\\
&= \tau_{k,j}^{-1}\tau_{s-1,j}\tau_{k,j}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{4_3} &= [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}]\tau_{i,j}[[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}]\tau_{i,j}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{s,j}]\tau_{i,j}[[w_{k,p}\tau_{s,j}]\tau_{i,j}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{i,j}[w_{k,p}\tau_{i,j}]^{-1},\\
&= \tau_{i,j}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{4_4} &= [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}]\tau_{r,i}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}]\tau_{r,i}^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{i,j}]\tau_{r,i}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{i,j}]\tau_{r,i}^{-1}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{r,i}^{-1}[w_{k,p}\tau_{r,i}^{-1}]^{-1},\\
&= \tau_{r,i}^{-1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{4_5} &= [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}]\tau_{i,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}]\tau_{i,j}^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{r,i}^{-1}]\tau_{i,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,i}^{-1}]\tau_{i,j}^{-1}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}]^{-1},\\
&= \tau_{i,j}^{-1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{4_6} &= [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}[w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}]^{-1},\\
&= \tau_{k,j}^{-1}\tau_{s-1,j}^{-1}\tau_{k,j}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{4_7} &= [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{i,j}[[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{i,j}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{i,j}[[w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{i,j}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{i,j}[w_{k,p}\tau_{i,j}]^{-1},\\
&= \tau_{i,j}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{4_8} &= [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{i,j}]\tau_{r,i}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{i,j}]\tau_{r,i}^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{i,j}]\tau_{r,i}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{i,j}]\tau_{r,i}^{-1}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{r,i}^{-1}[w_{k,p}\tau_{r,i}^{-1}]^{-1},\\
&= \tau_{r,i}^{-1}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $p_{4_1}p_{4_2}p_{4_3}p_{4_4}p_{4_5}p_{4_6}p_{4_7}p_{4_8} = \tau_{i,j}^{-1}\tau_{k,j}^{-1}\tau_{s-1,j}\tau_{k,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{k,j}^{-1}$ $\tau_{s-1,j}^{-1}\tau_{k,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}$.

Caso 2.2: Si $p = r$, entonces:

$$p_{4_1} = \tau_{i,j}^{-1}.$$

$$\begin{aligned} p_{4_2} &= [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}]\tau_{s,j}[[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}]\tau_{s,j}]^{-1}, \\ &= w_{k,p}\tau_{s,j}[w_{k,p}\tau_{s,j}]^{-1}, \\ &= \tau_{k,j}^{-1}\tau_{k-1,j}\tau_{k,j}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{4_3} &= [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}]\tau_{i,j}[[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}]\tau_{i,j}]^{-1}, \\ &= [w_{k,p}\tau_{s,j}]\tau_{i,j}[[w_{k,p}\tau_{s,j}]\tau_{i,j}]^{-1}, \\ &= w_{k,p}\tau_{i,j}[w_{k,p}\tau_{i,j}]^{-1}, \\ &= \tau_{i,j}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{4_4} &= [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}]\tau_{r,i}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}]\tau_{r,i}^{-1}]^{-1}, \\ &= [w_{k,p}\tau_{i,j}]\tau_{r,i}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{i,j}]\tau_{r,i}^{-1}]^{-1}, \\ &= w_{k,p}\tau_{r,i}^{-1}[w_{k,p}\tau_{r,i}^{-1}]^{-1}, \\ &= \tau_{r,i}^{-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{4_5} &= [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}]\tau_{i,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}]\tau_{i,j}^{-1}]^{-1}, \\ &= [w_{k,p}\tau_{r,i}^{-1}]\tau_{i,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,i}^{-1}]\tau_{i,j}^{-1}]^{-1}, \\ &= w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}]^{-1}, \\ &= \tau_{i,j}^{-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{4_6} &= [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}]^{-1}, \\ &= [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}]^{-1}, \\ &= w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}[w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}]^{-1}, \\ &= \tau_{k,j}^{-1}\tau_{k-1,j}^{-1}\tau_{k,j}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{4_7} &= [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{i,j}[[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{i,j}]^{-1}, \\ &= [w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{i,j}[[w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{i,j}]^{-1}, \\ &= w_{k,p}\tau_{i,j}[w_{k,p}\tau_{i,j}]^{-1}, \\ &= \tau_{i,j}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{4_8} &= [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{i,j}]\tau_{r,i}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{i,j}]\tau_{r,i}^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{i,j}]\tau_{r,i}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{i,j}]\tau_{r,i}^{-1}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{r,i}^{-1}[w_{k,p}\tau_{r,i}^{-1}]^{-1},\\
&= \tau_{r,i}^{-1}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $p_{4_1}p_{4_2}p_{4_3}p_{4_4}p_{4_5}p_{4_6}p_{4_7}p_{4_8} = \tau_{i,j}^{-1}\tau_{k,j}^{-1}\tau_{k-1,j}\tau_{k,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{k,j}^{-1}$ $\tau_{k-1,j}^{-1}\tau_{k,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}$.

Caso 2.3: Si $p < r$, entonces:

$$p_{4_1} = \tau_{i,j}^{-1}.$$

$$\begin{aligned}
p_{4_2} &= [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}]\tau_{s,j}[[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}]\tau_{s,j}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{s,j}[w_{k,p}\tau_{s,j}]^{-1},\\
&= \tau_{k,j}^{-1}\tau_{k-1,j}\tau_{k,j}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{4_3} &= [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}]\tau_{i,j}[[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}]\tau_{i,j}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{s,j}]\tau_{i,j}[[w_{k,p}\tau_{s,j}]\tau_{i,j}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{i,j}[w_{k,p}\tau_{i,j}]^{-1},\\
&= \tau_{i,j}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{4_4} &= [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}]\tau_{r,i}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}]\tau_{r,i}^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{i,j}]\tau_{r,i}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{i,j}]\tau_{r,i}^{-1}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{r,i}^{-1}[w_{k,p}\tau_{r,i}^{-1}]^{-1},\\
&= \tau_{k,i}^{-1}\tau_{r-1,i}^{-1}\tau_{k,i}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{4_5} &= [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}]\tau_{i,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}]\tau_{i,j}^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{r,i}^{-1}]\tau_{i,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,i}^{-1}]\tau_{i,j}^{-1}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}]^{-1},\\
&= \tau_{i,j}^{-1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{4_6} &= [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}[w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}]^{-1},\\
&= \tau_{k,j}^{-1}\tau_{k-1,j}^{-1}\tau_{k,j}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{4_7} &= [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{i,j}[[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{i,j}]^{-1}, \\ &= [w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{i,j}[[w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{i,j}]^{-1}, \\ &= w_{k,p}\tau_{i,j}[w_{k,p}\tau_{i,j}]^{-1}, \\ &= \tau_{i,j}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{4_8} &= [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{i,j}]\tau_{r,i}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{i,j}]\tau_{r,i}^{-1}]^{-1}, \\ &= [w_{k,p}\tau_{i,j}]\tau_{r,i}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{i,j}]\tau_{r,i}^{-1}]^{-1}, \\ &= w_{k,p}\tau_{r,i}^{-1}[w_{k,p}\tau_{r,i}^{-1}]^{-1}, \\ &= \tau_{k,i}^{-1}\tau_{r-1,i}^{-1}\tau_{k,i}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $p_{4_1}p_{4_2}p_{4_3}p_{4_4}p_{4_5}p_{4_6}p_{4_7}p_{4_8} = \tau_{i,j}^{-1}\tau_{k,j}^{-1}\tau_{k-1,j}\tau_{k,j}\tau_{i,j}\tau_{k,i}^{-1}\tau_{r-1,i}^{-1}\tau_{k,i}$ $\tau_{i,j}^{-1}\tau_{k,j}^{-1}\tau_{k-1,j}^{-1}\tau_{k,j}\tau_{i,j}\tau_{k,i}^{-1}\tau_{r-1,i}^{-1}\tau_{k,i}$.

Caso 3: Si $r < k < s$, se tiene:

Caso 3.1: Si $r < p$, entonces:

$$p_{4_1} = \tau_{i,j}^{-1}.$$

$$\begin{aligned} p_{4_2} &= [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}]\tau_{s,j}[[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}]\tau_{s,j}]^{-1}, \\ &= w_{k,p}\tau_{s,j}[w_{k,p}\tau_{s,j}]^{-1}, \\ &= \tau_{s,j}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{4_3} &= [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}]\tau_{i,j}[[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}]\tau_{i,j}]^{-1}, \\ &= [w_{k,p}\tau_{s,j}]\tau_{i,j}[[w_{k,p}\tau_{s,j}]\tau_{i,j}]^{-1}, \\ &= w_{k,p}\tau_{i,j}[w_{k,p}\tau_{i,j}]^{-1}, \\ &= \tau_{i,j}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{4_4} &= [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}]\tau_{r,i}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}]\tau_{r,i}^{-1}]^{-1}, \\ &= [w_{k,p}\tau_{i,j}]\tau_{r,i}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{i,j}]\tau_{r,i}^{-1}]^{-1}, \\ &= w_{k,p}\tau_{r,i}^{-1}[w_{k,p}\tau_{r,i}^{-1}]^{-1}, \\ &= \tau_{r,i}^{-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{4_5} &= [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}]\tau_{i,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}]\tau_{i,j}^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{r,i}^{-1}]\tau_{i,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,i}^{-1}]\tau_{i,j}^{-1}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}]^{-1},\\
&= \tau_{i,j}^{-1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{4_6} &= [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}[w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}]^{-1},\\
&= \tau_{s,j}^{-1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{4_7} &= [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{i,j}[[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{i,j}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{i,j}[[w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{i,j}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{i,j}[w_{k,p}\tau_{i,j}]^{-1},\\
&= \tau_{i,j}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{4_8} &= [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{i,j}]\tau_{r,i}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{i,j}]\tau_{r,i}^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{i,j}]\tau_{r,i}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{i,j}]\tau_{r,i}^{-1}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{r,i}^{-1}[w_{k,p}\tau_{r,i}^{-1}]^{-1},\\
&= \tau_{r,i}^{-1}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $p_{4_1}p_{4_2}p_{4_3}p_{4_4}p_{4_5}p_{4_6}p_{4_7}p_{4_8} = \tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}$.

Caso 3.2: Si $r = p$, entonces:

$$p_{4_1} = \tau_{i,j}^{-1}.$$

$$\begin{aligned}
p_{4_2} &= [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}]\tau_{s,j}[[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}]\tau_{s,j}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{s,j}[w_{k,p}\tau_{s,j}]^{-1},\\
&= \tau_{s,j}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{4_3} &= [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}]\tau_{i,j}[[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}]\tau_{i,j}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{s,j}]\tau_{i,j}[[w_{k,p}\tau_{s,j}]\tau_{i,j}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{i,j}[w_{k,p}\tau_{i,j}]^{-1},\\
&= \tau_{i,j}.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
p_{4_4} &= [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}]\tau_{r,i}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}]\tau_{r,i}^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{i,j}]\tau_{r,i}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{i,j}]\tau_{r,i}^{-1}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{r,i}^{-1}[w_{k,p}\tau_{r,i}^{-1}]^{-1},\\
&= \tau_{k,i}^{-1}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_{4_5} &= [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}]\tau_{i,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}]\tau_{i,j}^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{r,i}^{-1}]\tau_{i,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,i}^{-1}]\tau_{i,j}^{-1}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}]^{-1},\\
&= \tau_{i,j}^{-1}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_{4_6} &= [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}[w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}]^{-1},\\
&= \tau_{s,j}^{-1}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_{4_7} &= [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{i,j}[[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{i,j}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{i,j}[[w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{i,j}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{i,j}[w_{k,p}\tau_{i,j}]^{-1},\\
&= \tau_{i,j}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_{4_8} &= [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{i,j}]\tau_{r,i}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{i,j}]\tau_{r,i}^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{i,j}]\tau_{r,i}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{i,j}]\tau_{r,i}^{-1}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{r,i}^{-1}[w_{k,p}\tau_{r,i}^{-1}]^{-1},\\
&= \tau_{k,i}^{-1}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $p_{4_1}p_{4_2}p_{4_3}p_{4_4}p_{4_5}p_{4_6}p_{4_7}p_{4_8} = \tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{k,i}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{i,j}\tau_{k,i}^{-1}$

Caso 3.3: Si $p < r$, entonces:

$$
p_{4_1} = \tau_{i,j}^{-1}.
$$

$$
\begin{aligned}
p_{4_2} &= [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}]\tau_{s,j}[[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}]\tau_{s,j}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{s,j}[w_{k,p}\tau_{s,j}]^{-1},\\
&= \tau_{s,j}.
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
p_{4_3} &= [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}]\tau_{i,j}[[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}]\tau_{i,j}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{s,j}]\tau_{i,j}[[w_{k,p}\tau_{s,j}]\tau_{i,j}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{i,j}[w_{k,p}\tau_{i,j}]^{-1},\\
&= \tau_{i,j}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{4_4} &= [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}]\tau_{r,i}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}]\tau_{r,i}^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{i,j}]\tau_{r,i}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{i,j}]\tau_{r,i}^{-1}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{r,i}^{-1}[w_{k,p}\tau_{r,i}^{-1}]^{-1},\\
&= \tau_{k,i}^{-1}\tau_{r-1,i}^{-1}\tau_{k,i}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{4_5} &= [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}]\tau_{i,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}]\tau_{i,j}^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{r,i}^{-1}]\tau_{i,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,i}^{-1}]\tau_{i,j}^{-1}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}]^{-1},\\
&= \tau_{i,j}^{-1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{4_6} &= [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}[w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}]^{-1},\\
&= \tau_{s,j}^{-1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{4_7} &= [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{i,j}[[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{i,j}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{i,j}[[w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{i,j}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{i,j}[w_{k,p}\tau_{i,j}]^{-1},\\
&= \tau_{i,j}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{4_8} &= [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{i,j}]\tau_{r,i}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{i,j}]\tau_{r,i}^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{i,j}]\tau_{r,i}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{i,j}]\tau_{r,i}^{-1}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{r,i}^{-1}[w_{k,p}\tau_{r,i}^{-1}]^{-1},\\
&= \tau_{k,i}^{-1}\tau_{r-1,i}^{-1}\tau_{k,i}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $p_{4_1}p_{4_2}p_{4_3}p_{4_4}p_{4_5}p_{4_6}p_{4_7}p_{4_8} = \tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{k,i}^{-1}\tau_{r-1,i}^{-1}\tau_{k,i}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}$ $\tau_{i,j}\tau_{k,i}^{-1}\tau_{r-1,i}^{-1}\tau_{k,i}$.

Caso 4: Si $k = r$, se tiene:

$$p_{4_1} = \tau_{i,j}^{-1}.$$

$$\begin{aligned} p_{4_2} &= [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}]\tau_{s,j}[[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}]\tau_{s,j}]^{-1}, \\ &= w_{k,p}\tau_{s,j}[w_{k,p}\tau_{s,j}]^{-1}, \\ &= \tau_{s,j}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{4_3} &= [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}]\tau_{i,j}[[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}]\tau_{i,j}]^{-1}, \\ &= [w_{k,p}\tau_{s,j}]\tau_{i,j}[[w_{k,p}\tau_{s,j}]\tau_{i,j}]^{-1}, \\ &= w_{k,p}\tau_{i,j}[w_{k,p}\tau_{i,j}]^{-1}, \\ &= \tau_{i,j}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{4_4} &= [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}]\tau_{r,i}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}]\tau_{r,i}^{-1}]^{-1}, \\ &= [w_{k,p}\tau_{i,j}]\tau_{r,i}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{i,j}]\tau_{r,i}^{-1}]^{-1}, \\ &= w_{k,p}\tau_{r,i}^{-1}[w_{k,p}\tau_{r,i}^{-1}]^{-1}, \\ &= \tau_{k,i}^{-1}\tau_{k-1,i}^{-1}\tau_{k,i}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{4_5} &= [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}]\tau_{i,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}]\tau_{i,j}^{-1}]^{-1}, \\ &= [w_{k,p}\tau_{r,i}^{-1}]\tau_{i,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,i}^{-1}]\tau_{i,j}^{-1}]^{-1}, \\ &= w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}]^{-1}, \\ &= \tau_{i,j}^{-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{4_6} &= [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}]^{-1}, \\ &= [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}]^{-1}, \\ &= w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}[w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}]^{-1}, \\ &= \tau_{s,j}^{-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{4_7} &= [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{i,j}[[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{i,j}]^{-1}, \\ &= [w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{i,j}[[w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{i,j}]^{-1}, \\ &= w_{k,p}\tau_{i,j}[w_{k,p}\tau_{i,j}]^{-1}, \\ &= \tau_{i,j}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{4_8} &= [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{i,j}]\tau_{r,i}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{i,j}]\tau_{r,i}^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{i,j}]\tau_{r,i}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{i,j}]\tau_{r,i}^{-1}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{r,i}^{-1}[w_{k,p}\tau_{r,i}^{-1}]^{-1},\\
&= \tau_{k,i}^{-1}\tau_{k-1,i}^{-1}\tau_{k,i}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $p_{4_1}p_{4_2}p_{4_3}p_{4_4}p_{4_5}p_{4_6}p_{4_7}p_{4_8} = \tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{k,i}^{-1}\tau_{k-1,i}^{-1}\tau_{k,i}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}$ $\tau_{i,j}\tau_{k,i}^{-1}\tau_{k-1,i}^{-1}\tau_{k,i}$.

Caso 5: Si $k < r$, se tiene:

$$p_{4_1} = \tau_{i,j}^{-1}.$$

$$\begin{aligned}
p_{4_2} &= [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}]\tau_{s,j}[[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}]\tau_{s,j}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{s,j}[w_{k,p}\tau_{s,j}]^{-1},\\
&= \tau_{s,j}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{4_3} &= [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}]\tau_{i,j}[[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}]\tau_{i,j}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{s,j}]\tau_{i,j}[[w_{k,p}\tau_{s,j}]\tau_{i,j}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{i,j}[w_{k,p}\tau_{i,j}]^{-1},\\
&= \tau_{i,j}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{4_4} &= [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}]\tau_{r,i}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}]\tau_{r,i}^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{i,j}]\tau_{r,i}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{i,j}]\tau_{r,i}^{-1}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{r,i}^{-1}[w_{k,p}\tau_{r,i}^{-1}]^{-1},\\
&= \tau_{r-1,i}^{-1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{4_5} &= [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}]\tau_{i,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}]\tau_{i,j}^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{r,i}^{-1}]\tau_{i,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{r,i}^{-1}]\tau_{i,j}^{-1}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}]^{-1},\\
&= \tau_{i,j}^{-1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{4_6} &= [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}]\tau_{s,j}^{-1}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}[w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}]^{-1},\\
&= \tau_{s,j}^{-1}.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
p_{4_7} &= [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{i,j}[[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{i,j}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{i,j}[[w_{k,p}\tau_{s,j}^{-1}]\tau_{i,j}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{i,j}[w_{k,p}\tau_{i,j}]^{-1},\\
&= \tau_{i,j}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_{4_8} &= [w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{i,j}]\tau_{r,i}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{i,j}]\tau_{r,i}^{-1}]^{-1},\\
&= [w_{k,p}\tau_{i,j}]\tau_{r,i}^{-1}[[w_{k,p}\tau_{i,j}]\tau_{r,i}^{-1}]^{-1},\\
&= w_{k,p}\tau_{r,i}^{-1}[w_{k,p}\tau_{r,i}^{-1}]^{-1},\\
&= \tau_{r,i}^{-1}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $p_{4_1}p_{4_2}p_{4_3}p_{4_4}p_{4_5}p_{4_6}p_{4_7}p_{4_8} = \tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r-1,i}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}^{-1}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}$.

Luego, obtenemos las siguientes relaciones:

Caso 1: $s < k < i$

$$
\begin{cases}
(1) & \tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{r,i}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}^{-1} = \tau_{i,j}\tau_{r,i}\tau_{i,j}^{-1} \quad ; \quad s < p < k,\\
(2) & (\tau_{i,j}^{-1}\tau_{k,j}\tau_{i,j})\tau_{r,i} = \tau_{r,i}(\tau_{i,j}^{-1}\tau_{k,j}\tau_{i,j}) \quad ; \quad p = s,\\
(3) & (\tau_{i,j}^{-1}\tau_{k,j}^{-1}\tau_{s-1.j}\tau_{k,j}\tau_{i,j})\tau_{r,i} = \tau_{r,i}(\tau_{i,j}^{-1}\tau_{k,j}^{-1}\tau_{s-1.j}\tau_{k,j}\tau_{i,j}) \quad ; \quad r < p < s,\\
(4) & (\tau_{i,j}^{-1}\tau_{k,j}^{-1}\tau_{s-1,j}\tau_{k,j}\tau_{i,j})\tau_{k,i} = \tau_{r,i}(\tau_{i,j}^{-1}\tau_{k,j}^{-1}\tau_{s-1.j}\tau_{k,j}\tau_{i,j}) \quad ; \quad p = r\\
(5) & (\tau_{i,j}^{-1}\tau_{k,j}^{-1}\tau_{s-1,j}\tau_{k,j}\tau_{i,j})(\tau_{k,i}^{-1}\tau_{r-1,i}\tau_{k,i}) = (\tau_{k,i}^{-1}\tau_{r-1,i}\tau_{k,i}) \quad ; \quad p < r.\\
 & \qquad (\tau_{i,j}^{-1}\tau_{k,j}^{-1}\tau_{s-1,j}\tau_{k,j}\tau_{i,j}).
\end{cases}
$$

Caso 2: $k = s$

$$
\begin{cases}
(1) & (\tau_{i,j}^{-1}\tau_{k,j}^{-1}\tau_{k-1,j}\tau_{k,j}\tau_{i,j})\tau_{r,i} = \tau_{r,i}(\tau_{i,j}^{-1}\tau_{k,j}^{-1}\tau_{k-1,j}\tau_{k,j}\tau_{i,j}) \quad ; \quad r < p < s,\\
(2) & (\tau_{i,j}^{-1}\tau_{k,j}^{-1}\tau_{k-1,j}\tau_{k,j}\tau_{i,j})\tau_{k,i} = \tau_{k,i}(\tau_{i,j}^{-1}\tau_{k,j}^{-1}\tau_{k-1,j}\tau_{k,j}\tau_{i,j}) \quad ; \quad p = r,\\
(3) & (\tau_{i,j}^{-1}\tau_{k,j}^{-1}\tau_{k-1,j}\tau_{k,j}\tau_{i,j})(\tau_{k,i}^{-1}\tau_{r-1,i}\tau_{k,i}) = (\tau_{k,i}^{-1}\tau_{r-1,i}\tau_{k,i}) \quad ; \quad p < r.\\
 & \qquad (\tau_{i,j}^{-1}\tau_{k,j}^{-1}\tau_{k-1,j}\tau_{k,j}\tau_{i,j})
\end{cases}
$$

Caso 3: $r < k < s$

$$
\begin{cases}
(1) & (\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j})\tau_{r,i} = \tau_{r,i}(\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}) \quad ; \quad r < p,\\
(2) & (\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j})\tau_{k,i} = \tau_{k,i}(\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}) \quad ; \quad r = p,\\
(3) & (\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j})(\tau_{k,i}^{-1}\tau_{r-1,i}\tau_{k,i}) = (\tau_{k,i}^{-1}\tau_{r-1,i}\tau_{k,i})(\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}) \quad ; \quad p < r.
\end{cases}
$$

Caso 4: $k = r$

$$
\begin{cases}
(1) & (\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j})(\tau_{k,i}^{-1}\tau_{k-1,i}\tau_{k,i}) = (\tau_{k,i}^{-1}\tau_{k-1,i}\tau_{k,i})(\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}).
\end{cases}
$$

Caso 5: $k < r$

$$\left\{ \begin{array}{ll} (1) & (\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j})\tau_{r,i} = \tau_{r,i}(\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}). \end{array} \right.$$

Para terminar la demostración basta ver que las siguientes relaciones son consecuencia de (4.32):

$$\left\{ \begin{array}{llll} (1) & (\tau_{i,j}^{-1}\tau_{k,j}^{-1}\tau_{m,j}\tau_{k,j}\tau_{i,j})\tau_{t,i} = \tau_{t,i}(\tau_{i,j}^{-1}\tau_{k,j}^{-1}\tau_{m,j}\tau_{k,j}\tau_{i,j}) & ; & t < m < k < i < j, \\ (2) & (\tau_{i,j}^{-1}\tau_{k,j}^{-1}\tau_{m,j}\tau_{k,j}\tau_{i,j})(\tau_{k,i}^{-1}\tau_{t,i}\tau_{k,i}) = (\tau_{k,i}^{-1}\tau_{t,i}\tau_{k,i}) & ; & t < m < k < i < j, \\ & \qquad (\tau_{i,j}^{-1}\tau_{k,j}^{-1}\tau_{m,j}\tau_{k,j}\tau_{i,j}) & & \\ (3) & (\tau_{i,j}^{-1}\tau_{k,j}^{-1}\tau_{m,j}\tau_{k,j}\tau_{i,j})\tau_{k,i} = \tau_{k,i}(\tau_{i,j}^{-1}\tau_{k,j}^{-1}\tau_{m,j}\tau_{k,j}\tau_{i,j}) & ; & m < k < i < j, \\ (4) & (\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j})(\tau_{k,i}^{-1}\tau_{t,i}\tau_{k,i}) = (\tau_{k,i}^{-1}\tau_{t,i}\tau_{k,i})(\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}) & ; & t < k < s < i < j. \end{array} \right. \tag{4.58}$$

Tenemos:

(4.58)(1):

$$\begin{aligned} \tau_{i,j}^{-1}\boxed{\tau_{k,j}^{-1}\tau_{m,j}\tau_{k,j}}\tau_{i,j}\tau_{t,i} &= \tau_{t,i}\tau_{i,j}^{-1}\boxed{\tau_{k,j}^{-1}\tau_{m,j}\tau_{k,j}}\tau_{i,j} \\ &(B) \\ \boxed{\tau_{i,j}^{-1}\tau_{m,k}}\tau_{m,j}\boxed{\tau_{m,k}^{-1}\tau_{i,j}\tau_{t,i}} &= \boxed{\tau_{t,i}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{m,k}}\tau_{m,j}\boxed{\tau_{m,k}^{-1}\tau_{i,j}} \\ &(A) \\ \tau_{m,k}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{m,j}\tau_{i,j}\tau_{t,i}\tau_{m,k}^{-1} &= \tau_{m,k}\tau_{t,i}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{m,j}\tau_{i,j}\tau_{m,k}^{-1} \\ (\tau_{i,j}^{-1}\tau_{m,j}\tau_{i,j})\tau_{t,i} &= \tau_{t,i}(\tau_{i,j}^{-1}\tau_{m,j}\tau_{i,j}) \\ &(D). \end{aligned}$$

(4.58)(2):

$$
\begin{array}{rcl}
\tau_{i,j}^{-1}\tau_{k,j}^{-1}\tau_{m,j}\tau_{k,j}\tau_{i,j}\boxed{\tau_{k,i}^{-1}\tau_{t,i}\tau_{k,i}} & = & \boxed{\tau_{k,i}^{-1}\tau_{t,i}\tau_{k,i}}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{k,j}^{-1}\tau_{m,j}\tau_{k,j}\tau_{i,j} \\
 & (B) & \\
\tau_{i,j}^{-1}\tau_{k,j}^{-1}\tau_{m,j}\tau_{k,j}\boxed{\tau_{i,j}\tau_{t,k}}\tau_{t,i}\tau_{t,k}^{-1} & = & \tau_{t,k}\tau_{t,i}\boxed{\tau_{t,k}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}}\tau_{k,j}^{-1}\tau_{m,j}\tau_{k,j}\tau_{i,j} \\
 & (A) & \\
\tau_{i,j}^{-1}\boxed{\tau_{k,j}^{-1}\tau_{m,j}\tau_{k,j}}\tau_{t,k}\tau_{i,j}\tau_{t,i}\tau_{t,k}^{-1} & = & \tau_{t,k}\tau_{t,i}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{t,k}^{-1}\boxed{\tau_{k,j}^{-1}\tau_{m,j}\tau_{k,j}}\tau_{i,j} \\
 & (D)(A) & \\
\boxed{\tau_{t,k}}\tau_{i,j}^{-1}\boxed{\tau_{k,j}^{-1}\tau_{m,j}\tau_{k,j}}\tau_{i,j}\tau_{t,i}\boxed{\tau_{t,k}^{-1}} & = & \boxed{\tau_{t,k}}\tau_{t,i}\tau_{i,j}^{-1}\boxed{\tau_{k,j}^{-1}\tau_{m,j}\tau_{k,j}}\tau_{i,j}\boxed{\tau_{t,k}^{-1}} \\
 & (B) & \\
\boxed{\tau_{i,j}^{-1}\tau_{m,k}}\tau_{m,j}\boxed{\tau_{m,k}^{-1}\tau_{i,j}\tau_{t,i}} & = & \boxed{\tau_{t,i}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{m,k}}\tau_{m,j}\boxed{\tau_{m,k}^{-1}\tau_{i,j}} \\
 & (A) & \\
\tau_{m,k}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{m,j}\tau_{i,j}\tau_{t,i}\tau_{m,k}^{-1} & = & \tau_{m,k}\tau_{t,i}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{m,j}\tau_{i,j}\tau_{m,k}^{-1} \\
\tau_{i,j}^{-1}\tau_{m,j}\tau_{i,j}\tau_{t,i} & = & \tau_{t,i}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{m,j}\tau_{i,j} \\
 & (D). &
\end{array}
$$

(4.58)(3):

$$
\begin{array}{rcl}
\tau_{i,j}^{-1}\tau_{k,j}^{-1}\tau_{m,j}\tau_{k,j}\boxed{\tau_{i,j}\tau_{k,i}} & = & \tau_{k,i}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{k,j}^{-1}\tau_{m,j}\tau_{k,j}\tau_{i,j} \\
 & (C) & \\
\tau_{i,j}^{-1}\tau_{k,j}^{-1}\tau_{m,j}\tau_{k,j}\tau_{k,i}^{-1}\boxed{\tau_{i,j}^{-1}\tau_{k,j}^{-1}\tau_{i,j}}\boxed{\tau_{k,j}\tau_{i,j}} & = & \boxed{\tau_{k,i}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{k,j}^{-1}}\tau_{m,j}\boxed{\tau_{k,j}\tau_{i,j}} \\
\tau_{i,j}^{-1}\tau_{k,j}^{-1}\tau_{m,j}\boxed{\tau_{k,j}\tau_{k,i}^{-1}\tau_{k,i}\tau_{k,j}^{-1}}\tau_{k,i}^{-1} & = & \tau_{i,j}^{-1}\tau_{k,j}^{-1}\tau_{k,i}^{-1}\tau_{m,j} \\
 & (B) & \text{Lema 4.13(3)} \\
\tau_{m,j}\tau_{k,i}^{-1} & = & \tau_{k,i}^{-1}\tau_{m,j} \\
 & (A). &
\end{array}
$$

(4.58)(4):

$$\begin{aligned}
\boxed{\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}}\,\tau_{k,i}^{-1}\tau_{t,i}\tau_{k,i} &= \tau_{k,i}^{-1}\tau_{t,i}\tau_{k,i}\,\boxed{\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}} \\
&\text{(D)} \\
\tau_{k,i}^{-1}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{t,i}\tau_{k,i} &= \tau_{k,i}^{-1}\tau_{t,i}\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}\tau_{k,i} \\
(\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j})\tau_{t,i} &= \tau_{t,i}(\tau_{i,j}^{-1}\tau_{s,j}\tau_{i,j}) \\
&\text{(D).}
\end{aligned}$$

$\square$

Índice alfabético

Bibliografía

[Bon76] BONDY, J.A and MURTY, U.S.R. Planar Graphs. En su: Graph Theory with Applications, Great Britain: The Macmillan Press Ltd., 1976. pp. 135-170.

[Gon06] GONZÁLEZ, Javier. Grupos de Heisenberg y Unipotente. Trabajo de graduación (Licenciatura en Matemáticas). Valparaíso: Departamento de Matemáticas, Universidad de Valparaíso, 2006. 142 p.

[Hun74] HUNGERFORD, Thomas W. Algebra. United States of América: Springer-Verlag New York Inc., 1974. 502 p.

[Joh80] JOHNSON, D. L. Topics in the Theory of Group Presentations. 1st. ed. Great Britain: Cambridge University Press England, 1980. 311 p.

[Joh97] JOHNSON, D. L. Presentations of Groups. 2nd. ed. United Kingdom: Cambridge University Press England, 1997. 216 p.

[Kas08] KASSEL, Christian and TURAEV, Vladimir. Braids and Braids Groups. En su: Braid Groups. New York: Springer Science+Business Media, LLC., 2008. pp. 1-46.

[Mag76] MAGNUS, W., KARRAS, A. and SOLITAR D. Combinatorial Group Theory: Presentations of Groups in Terms of Generators and Relations. 2nd. rev. ed. New York: Dover Publications, Inc., 1976. 444 p.

[Kur99] MURASUGI, K. and KURPITA, B. I. Word Problem. En su: A Study of Braids. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1999. pp. 31-56.

[Obr73] O'BRIEN, Horacio H. Propiedades Elementales. En su: Estructuras Algebráicas III (Grupos Finitos). Washington, D.C.: Departamento de Asuntos Científicos de la Secretaría General de la Organización de los Estados Americanos, 1973. pp. 1-22.