



Universidad de Valparaíso

Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas

**Diseño de una propuesta metodológica de enseñanza basada
en un juego fundamentado en metáforas y geometría para el
tratamiento de la unidad de transformaciones isométricas del
NM1.**

Memoria para optar al Título Profesional de Profesor de Matemáticas
Mención Computación.

Presentada por:

Álvaro Aravena Donoso.

Profesor Guía: Jairo Navarrete Ulloa.

Valparaíso, Agosto de 2012.

Índice General

	Página.
Dedicatoria.....	08
Agradecimientos.....	09
Resumen.....	10
Abstract.....	11
Introducción.....	12
Capítulo I: Justificación y Objetivos.....	15
1.1 Utilidad Metodológica.....	15
1.2 La Geometría en el curriculum.....	15
1.3 Aprendizajes esperados	17
1.4 Desarrollo del Pensamiento Geométrico.....	18
1.5 Problemas en Matemáticas.....	20
1.6 Objetivos.....	22
1.6.1 Objetivo General.....	22
1.6.2 Objetivos Específicos.....	22
Capítulo II: Antecedentes.....	23
2.1 Proyecto Metáforas.....	23
Capítulo III: Marco teórico.....	26
3.1 Ciencia cognitiva de las Matemáticas.....	26
3.2 Teoría Experiencialista de la Metáfora de Lakoff y Johnson.....	27
3.3 Diferencias entre la metáfora vista desde la perspectiva cognitivista con la concepción clásica de la metáfora.....	28
3.4 Metáforas y Pensamiento matemático.....	28
3.5 Características del uso de Metáfora.....	29
3.6 Tipos de Metáforas.....	30
3.6.1 Metáforas Orientacionales.....	30
3.6.2 Metáforas Ontológicas.....	30
3.6.3 Metáforas estructurales.....	30

3.7 Metáforas Conceptuales.....	31
3.7.1 Grounding Metáforas.....	31
3.7.2 Linking Metáforas.....	31
3.8 Aprendizaje Significativo.....	32
3.8.1 Diferencia entre el Aprendizaje Significativo con el Aprendizaje Memorístico.....	33
3.8.2 Características del aprendizaje Significativo.....	33
3.8.3 Ventajas del Aprendizaje Significativo.....	34
3.9 Aprendizaje Colaborativo.....	35
3.9.1 Características para que el Aprendizaje Colaborativo sea eficaz...	35
3.9.2 Roles del docente en el aprendizaje colaborativo.....	36
3.9.3 Profesor como diseñador Instruccional.....	36
3.9.4 Profesor como mediador cognitivo.....	37
3.9.5 Profesor como instructor.....	38
Capítulo IV: Teoría Matemática.....	39
4.1 Plano cartesiano.....	39
4.1.1 Coordenadas Cartesianas.....	40
4.2 Vectores.....	40
4.2.1 Operaciones con vectores.....	41
4.2.1.1 Igualdad entre vectores.....	41
4.2.1.2 Suma de vectores.....	41
4.2.1.3 Resta de vectores.....	42
4.2.1.4 Producto escalar.....	43
4.2.1.5 Producto Punto.....	43
4.2.2 Propiedades de los vectores.....	44
4.3 Transformaciones Isométricas.....	44
4.3.1 Simetría Axial.....	44
4.3.1.1 Simetría axial en un sistema de coordenadas vista de forma vectorial.....	45
4.3.1.2 Casos particulares de simetría axial.....	46
4.3.1.2.1 Simetría con respecto al eje de las abscisas (eje x)....	46

4.3.1.2.2 Simetría con respecto al eje de las ordenadas (eje y).....	47
4.3.2 Simetría Puntual.....	48
4.3.2.1 Simetría central o puntual vista de modo vectorial.....	48
4.3.2.2 Método para realizar una simetría puntual de forma vectorial.....	48
4.3.3 Traslación.....	49
4.3.3.1 Traslación vista de forma vectorial.....	49
4.3.4 Rotación.....	50
4.3.4.1 Rotación en un sistema de coordenadas vista de forma vectorial.....	51
4.3.4.2 Casos particulares de una Rotación.....	52
4.3.4.2.1 Rotación en 90° con centro en el origen.....	52
4.3.4.2.2 Rotación en 180° con centro en el origen	52
4.3.4.2.3 Rotación en 270° con centro en el origen.....	53
4.3.4.2.4 Rotación en 360° con centro en el origen.....	53
Capítulo V: Metodología.....	54
5.1 Procedimientos realizados en el diseño de la propuesta.....	54
5.2 Procedimientos realizados en la aplicación de la propuesta.....	55
5.3 Procedimientos realizados en la recopilación de información.....	56
Capítulo VI: Diseño de la Propuesta metodológica	57
6.1 Características del tablero.....	57
6.1.1 Trampas y obstáculos en el juego.....	58
6.1.1.1 Los Piratas.....	58
6.1.1.2 Triángulo de las Bermuda.....	58
6.2 Dispositivos de Apoyo.....	59
6.2.1 Dispositivo de posición.....	59
6.2.2 Dispositivo de Simetría axial.....	60
6.2.3 Dispositivo de traslación.....	61
6.2.4 Dispositivo de Rotación.....	62
6.3 Tarjetas.....	63
6.3.1 Simetría Axial.....	63

6.3.2 Traslación.....	63
6.3.3 Rotación.....	63
6.4 Bases del juego, Reglamento del juego e Introducción del juego.....	64
Capítulo VII: Aplicación y comentarios obtenidos de la propuesta metodológica.....	65
7.1 Aplicación de la propuesta metodológica.....	65
7.2 Comentarios obtenidos de la aplicación de la propuesta metodológica por parte de los estudiantes y profesor del subsector	66
7.2.1 Aspectos Positivos del juego detectados por los estudiantes.....	66
7.2.2 Aspectos Negativos del juego señalados por los estudiantes.....	67
7.2.3 Aspectos positivos detectados por el profesor del subsector de Matemática de la aplicación y diseño del juego.....	67
7.2.4 Aspectos negativos observados por el profesor del subsector de matemática en la aplicación y diseño del juego.....	68
Conclusiones.....	69
Referencias Bibliográficas.....	71
Anexo A: Complementos del Juego.....	75
A.1 Introducción al juego.....	75
A.2 Bases del juego.....	78
A.3 Reglamento del juego.....	85
Anexo B: Imágenes del Prototipo de juego.....	87
Anexo C: Cuestionario sobre las apreciaciones del juego.....	90

Índice de Figuras

	Página
Figura 1: “Niveles de logros en ensayo Universia 2010”	21
Figura 2: “Niveles de logros obtenidos por ejes temáticos ensayo Universia 2010” ...	21
Figura 3: “Hexágono de la ciencia Cognitiva”	27
Figura 4: “Comparación entre las metáforas vistas de un modo clásico y la teoría cognitivista”	28
Figura 5: “Plano Cartesiano”	39
Figura 6: “Coordenadas en un plano”	40
Figura 7: “Ejemplos de vectores”	41
Figura 8: Suma de Vectores: “Método Paralelogramo”	42
Figura 9: Suma de vectores: “Método del Triángulo”	42
Figura 10: “Representación gráfica de resta de vectores”	42
Figura 11: “Representación gráfica del Producto escalar”	43
Figura 12: “Demostración vectorial de Simetría Axial”	45
Figura 13: “Simetría con respecto al eje de las abscisas”	47
Figura 14: “Simetría con respecto al eje de las ordenadas”	48
Figura 15: “Ejemplo de simetría Puntual”	49
Figura 16: “Ejemplo de Traslación”	50
Figura 17: “Ejemplo de una Rotación”	50
Figura 18: “Demostración Vectorial de una Rotación”	51
Figura 19: “Piratas”	58
Figura 20: “Triangulo de la Bermuda”	58

Figura 21: “ <i>Dispositivo de Posición</i> ”	59
Figura 22: “ <i>Dispositivo de Simetría Axial</i> ”	60
Figura 23: “ <i>Dispositivo de Traslación</i> ”	61
Figura 24: “ <i>Dispositivo de Rotación</i> ”	62

Dedicatoria

Dedicada a mis Padres y a mi
querida abuela, Elia, por ser
ejemplos de esfuerzo y
superación en mi vida y
enseñarme a ser perseverante
y a cumplir mis metas ante
cualquier adversidad.

Agradecimientos

A Dios por entregarme las fuerzas, la salud y la sabiduría necesaria para terminar con éxito esta etapa de mi vida.

A mis padres María Donoso Q. y Álvaro Aravena G. quienes me entregaron siempre palabras de aliento para continuar adelante y no rendirme jamás.

Al profesor Sr. Jairo Navarrete por haber guiado este trabajo con sabiduría y rigurosidad.

A todos los profesores de la Carrera de Matemáticas que fueron parte de mi desarrollo educativo y estimularon en mí, el interés y la motivación de continuar adelante con esta noble carrera.

A todos mis compañeros de carrera en especial a Álvaro Bustos, un amigo incondicional y a todos mis amigos de la carrera que fueron pilares indiscutibles durante todos estos años de estudio, esfuerzo y dedicación.

Y un agradecimiento especial a la mujer que en el último tiempo ha estado a mi lado apoyándome y entregándome las fuerzas necesarias para terminar con este trabajo Carla Tapia mi compañera de vida.

A todos muchas gracias...

Resumen

Es importante destacar las grandes inversiones que ha realizado el gobierno de Chile en educación los últimos años: en infraestructura, el aumento de las redes de computación escolar e internet, los diferentes programas de capacitación para profesores y los mecanismos de evaluación de alumnos y profesores, todas estas mejoras han permitido que Chile haya aumentado en 39 puntos en la última medición internacional PISA (de 410 a 449) en el año 2009 respecto del año 2006 y sea el mejor evaluado de América latina. Así lo reconoce la Organización para la Cooperación y Desarrollo Económico quedando Chile ubicado en el lugar 44 de las 65 naciones evaluadas, lo que es un indicio que se está mejorando en materia educacional pero que sin embargo queda mucho por realizar.(Perich, 2004)

Por otra parte, en el mundo entero se reconoce la importancia que tiene la geometría en el desarrollo personal y cognitivo de los estudiantes, por lo que se transforma en una necesidad hacer intervenciones y aportes en esta área de la matemática, que muchas veces pasa desapercibida por los estudiantes y profesores de la especialidad.

En esta tesis de pregrado se presenta el diseño de una propuesta metodológica de la enseñanza, cuyo recurso principal es la elaboración de un prototipo de juego basado en Metáforas y geometría para la enseñanza de la unidad de transformaciones isométricas del NM1.

Abstract

It is worth highlighting the large investments made by the Chilean government in education in recent years: in infrastructure, the increase of the networks of school and Internet computation, the different programs of training, the teachers and students mechanisms of evaluation, all this progress have allowed that Chile has increased in 39 points in the last PISA international measurement (from 410 to 449) in the year 2009 in relation to 2006 and it is the best evaluated in Latin America. Thus it is recognized by the Organization for the Cooperation and Economic Development being Chile located in the place 44 of 65 evaluated nations, which is an indication that it is upgrading in educational matter however, there is much to be done. (Perich, 2004)

On the other hand, in the entire world its recognizes the importance that geometry has in the student's personal and cognitive development, therefore, it becomes into a need to do interventions and contributions in this area of the mathematics, which it is often unnoticed for the students and teachers of the speciality.

In this pregrade thesis it is presented the design of an educational methodological approach, which its main resource is to make a game's prototype based on metaphors and geometry for teaching Isometric Transformations in NM1.

Introducción

De pequeños, las primeras interacciones que se tienen con el entorno en el que crece un ser humano son en el campo de la geometría, específicamente con el reconocimiento y manipulación de formas geométricas. Basta solamente observar que los primeros elementos con los que interactúa un niño en la etapa inicial de su vida como lo son juguetes u otros objetos geométricos son de carácter didáctico y están orientados a comprender formas en el espacio.

En etapas posteriores, específicamente en aquellas coincidentes con los primeros años de enseñanza media la geometría es más teórica y menos práctica, provocando a veces en los alumnos un quiebre entre los conocimientos previos con los nuevos, por lo que se hace difícil para los estudiantes la comprensión de los nuevos conceptos matemáticos.

Al observar los resultados obtenidos por los estudiantes chilenos en pruebas de conocimientos y habilidades en el subsector de matemática, tras su paso por la enseñanza básica y media, queda establecido que aún faltan algunos aspectos por mejorar. Así lo demuestra el informe del análisis de la prueba “PISA¹ 2009” en el que países miembros de la OCDE² se pusieron a prueba, entre ellos Chile, el cual en comparación a la medición realizada en el año 2006 aumentó en 39 puntos y sea el mejor evaluado de América latina. Sin embargo, estos resultados no son suficientes, aun Chile esta por debajo del promedio establecido por la OCDE, que es 496 puntos y a la vez muy distante del país que obtuvo el primer lugar que alcanzó 600 puntos. (OCDE, 2009)

¹ PISA: Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos de la OCDE, tiene por objeto evaluar hasta qué punto los alumnos cercanos al final de la educación obligatoria han adquirido algunos de los conocimientos y habilidades necesarios para la participación plena en la sociedad del saber.

² La OCDE es una organización multinacional, cuyo objetivo es convocar a los países desarrollados o en vías de desarrollo a compartir políticas y prácticas que fomenten el desarrollo económico y bienestar de la población.

En base a los antecedentes anteriores lo que pretende este trabajo es dar a conocer una propuesta metodológica basada en el diseño de un prototipo de juego fundamentado en Metáforas, que permita a los estudiantes tener un acercamiento a las transformaciones isométricas, específicamente; simetría axial, traslación y rotación, aprovechando algunas de las habilidades, que poseen los estudiantes para acercarlos a la geometría, estimulando a aquellos cuyos intereses se acerca más a la aplicación, modelación o a los desafíos de esta disciplina, brindándoles oportunidades a cada estudiante de lograr sus aprendizajes.

La estructura del presente informe está dada por capítulos y ordenados de la siguiente manera: justificación y objetivos, antecedentes, seguido del marco teórico, luego la teoría Matemática, metodología, diseño de la propuesta didáctica, diseño del juego, aplicación del juego, conclusiones, bibliografía y por último anexos.

En el capítulo: “Justificación y objetivos” se dan a conocer las razones por la cual es necesario elaborar la propuesta metodológica junto al objetivo general y objetivos específicos.

En los “Antecedentes”, se presenta un proyecto dirigido por Roberto Araya investigador asociado del Centro de Investigación Avanzada en Educación de la Universidad de Chile, el cual consiste en entregar estrategias y herramientas para la enseñanza de las matemáticas basada en Metáforas y juegos el cual ha tenido notables resultados a nivel nacional e internacional.

En el capítulo: “Marco Teórico”, se realizará una revisión bibliográfica en torno al tema de investigación. En una primera parte se da una introducción a la ciencia cognitiva de las matemáticas, puesto que es la base para realizar un trabajo con metáforas. Luego se hace un referente de los trabajos realizados por Lakoff y Johnson, sobre la importancia cognitiva que tiene el uso de Metáforas, sus funciones, los tipos de Metáforas existentes y como estas son capaces de desarrollar el pensamiento matemático. Dentro de este mismo capítulo, se aborda la teoría del aprendizaje significativo desarrollado por Ausubel y las diferencias que tiene este con el aprendizaje memorístico. Por otra parte, se toman los postulados desarrollados por Vigotsky, Johnson D. y Johnson R., entre otros del Aprendizaje Colaborativo y el rol que cumple el profesor en este.

En el siguiente capítulo: “Teoría Matemática”, se describen todos los conceptos matemáticos, definiciones y demostraciones necesarias que el profesor de matemática debiera manejar para el tratamiento de la unidad de las transformaciones isométricas.

En el capítulo: “Metodología”, se describen los diferentes lineamientos y secuencias de trabajo que se siguieron para abarcar los objetivos específicos.

En el capítulo: “Diseño del Juego”, se analiza el prototipo de juego con todos sus componentes: las características del tablero, las tarjetas, los dispositivos de apoyo y sus funciones y de qué manera estos se relacionan con los contenidos matemáticos, las reglas del juego, la introducción al juego y las instrucciones de uso para los estudiantes.

En el capítulo siguiente: “Aplicación del juego y comentarios obtenidos de la propuesta metodológica”, se describe una pequeña experiencia que realizaron un grupo de estudiantes de primero medio con el prototipo de juego y luego se describen las diferentes apreciaciones que se obtuvieron por parte de los estudiantes respecto del juego y su aplicación. Más las observaciones realizadas por el profesor del subsector de matemática.

Por último se expondrán las conclusiones de este trabajo, dirigidas hacia la propuesta metodológica creada.

Capítulo I:

Justificación y Objetivos

En la actualidad, no se debe dejar en un segundo plano la enseñanza de la geometría, pues se relaciona de forma directa con la vida de un ser humano y con todo aquello que lo rodea y además, permite desarrollar el pensamiento geométrico en los estudiantes brindándoles nuevas herramientas para su aprendizaje. Lo que conlleva a que innumerables docentes e investigadores sientan la necesidad de hacer un aporte en esta área de las matemáticas, que muchas veces pasa desapercibida por los estudiantes y profesores de la especialidad.

1.1 Utilidad Metodológica

La elaboración de la propuesta metodológica responde a las necesidades de crear e innovar en la enseñanza de la geometría en particular en la unidad de transformaciones isométricas que se estudia en el NM1.

Se persigue entregar el diseño de una propuesta de enseñanza-aprendizaje en el área de la matemática cuya recurso principal es un prototipo de juego basado en Metáforas y geometría que se pueda aplicar a estudiantes de primer año de enseñanza media, que cumpla y respete con todas las definiciones involucradas en esta unidad y que su reproducción sea de bajo costo.

1.2 La Geometría en el Curriculum

La geometría es parte fundamental en la formación matemática, así lo expresan una serie de investigadores:

“La notable importancia histórica de la geometría en el pasado, en particular como un prototipo de una teoría axiomática, es de tal manera reconocida universalmente que no requiere más comentarios. Sobre ello, en el siglo pasado y específicamente durante las últimas décadas como aseveró Jean Dieudonné en el ICME 4” (Berkeley, 1980).

“Considero que la matemática y en particular la geometría pueden hacer grandes aportes al propósito de mejorar y enriquecer en nuestros estudiantes las representaciones que hacen del mundo que los rodea.” (Enrique, 2010).

Jaume Domenech Larraz, en una publicación realizada entrega 5 perspectivas distintas de la importancia de la geometría en el currículum.

- *“La Geometría como un método para las representaciones visuales de conceptos y procesos de otras áreas en matemáticas y en otras ciencias; por ejemplo gráficas y teoría de gráficas, diagramas de varias clases, histogramas.*
- *La Geometría como un punto de encuentro entre matemáticas como una teoría y matemáticas como una fuente de modelos.*
- *La Geometría como una manera de pensar y entender y, en un nivel más alto, como una teoría formal.*
- *La Geometría como un ejemplo paradigmático para la enseñanza del razonamiento deductivo.*
- *La Geometría como una herramienta en aplicaciones, tanto tradicionales como innovadoras. Estas últimas incluyen por ejemplo, gráficas por computadora, procesamiento y manipulación de imágenes, reconocimiento de patrones, robótica, investigación de operaciones.” (Domenech, 2001).*

En Chile, el estudio de la geometría está presente desde muy temprana edad, con el reconocimiento y manipulación de formas geométricas, y se extiende por todos los niveles de enseñanza básica y media, permitiendo a los estudiantes desarrollar el pensamiento espacial, lo que es un pilar fundamental para la construcción del pensamiento matemático.(Lastra, 2010)

El ministerio de educación a través de los planes y programas presentados para cada nivel de enseñanza, plantea que:

“una tarea importante a desarrollar en la geometría es la de proporcionar a los niños y niñas un conjunto de experiencias que les permitan reconocer la diversidad de formas de los objetos que les rodean, establecer relaciones entre ellas y considerar las formas geométricas como simplificaciones de las formas que se encuentran en el entorno.”

Además, el ministerio de educación de Chile exige para el NM1 que los contenidos mínimos obligatorios que debe saber un estudiante son los siguientes:

- *“Traslaciones, simetrías y rotaciones de figuras planas. Construcción de figuras por traslación, por simetría y por rotación en 60, 90, 120 y 180 grados. Traslación y simetrías de figuras en sistemas de coordenadas.*
- *Análisis de la posibilidad de embaldosar el plano con algunos polígonos. Aplicaciones de las transformaciones geométricas en las artes, por ejemplo, M.C. Escher.*
- *Clasificación de triángulos y cuadriláteros considerando sus ejes y centros de simetría.*
- *Uso de regla y compás; de escuadra y transportador; manejo de un programa computacional que permita dibujar y transformar figuras geométricas.”* (Mineduc, 2004).

1.3 Aprendizajes esperados

Según el ministerio de educación de Chile al finalizar la unidad de transformaciones isométricas, se espera que los estudiantes sean capaces de lograr los siguientes aprendizajes:

1. Comprender la Simetría, Rotación y Traslación de figuras planas como una función que se aplica a todos los puntos del plano cartesiano y en particular para los puntos de una figura cualquiera.
2. Identificar y representar vectores en el plano cartesiano y representar la adición, sustracción y multiplicación de un vector por un escalar.
3. Relacionar los desplazamientos que se realizan en el juego con los tres ejes temáticos: simetrías, traslaciones y rotaciones.
4. Aplicar composición de funciones para realizar transformaciones isométricas en el plano cartesiano.
5. Comprender que las transformaciones isométricas no alteran las dimensiones de una figura plana.
6. Describir los cambios que se observan entre una figura y su imagen por traslación, rotación o simetría.
7. Describir patrones que se observan en la aplicación de simetrías, rotaciones y traslaciones a figuras en el plano cartesiano.
8. Comprender que las transformaciones isométricas afectan a todos los puntos del plano y en particular aquellos puntos que son partes de una figura plana.

1.4 Desarrollo del pensamiento Geométrico

Así como en la aritmética o el álgebra permiten desarrollar ciertas habilidades como: contar, calcular, operar, etc. para el pensamiento algebraico, también la geometría permite desarrollar otras habilidades en los estudiantes.

Entre las habilidades que se pueden desarrollar con el pensamiento geométrico están:

- *“Concepción del espacio.*
- *Orientación espacial.*
- *Pensamiento espacial.*

- *Habilidad para la percepción visual.*
- *Constancia de la percepción.*
- *Percepción de la situación espacial.*
- *Percepción de relaciones espaciales.”* (Díaz & Escobar, 2006).

La geometría es parte esencial de las matemáticas en las que se pueden trabajar y desarrollar otras habilidades que no se logran con el álgebra o la aritmética, entregando oportunidades, también a aquellos estudiantes que tienen dificultades con el pensamiento algebraico.

A pesar de que se tiene conciencia de los grandes aportes que se pueden lograr al desarrollar el pensamiento geométrico, en Chile, la geometría suele ocupar un lugar secundario dentro de la enseñanza de las matemáticas, incluso en los planes y programas propuestos por el MINEDUC³ se observa que las unidades de geometría siempre están separadas del resto de las unidades y desplazada para el final de los programas para cada nivel de estudio.

Un análisis realizado Perich (2004) de los resultados obtenidos en la prueba TIMSS⁴ que mide las habilidades y conocimientos de estudiantes de diferentes países.

“...sobre el nivel de logro de nuestros estudiantes en matemática, la conclusión es frustrante: 0% de alumnos en nivel avanzado, 3% en nivel alto, 12% intermedio, 26% bajo y 59% nivel inferior, (3.762 estudiantes de los 6.377 que rindieron la prueba), siendo estos últimos los alumnos que muestran un conocimiento inferior al mínimo que permite describir la prueba TIMSS.” (Perich, 2004).

Luego expresa:

“No sorprende ni es nueva la conclusión de la poca preparación que tienen los profesores en la sub-área de Geometría y que redundará en un bajo rendimiento por parte de los estudiantes. En mi opinión esta falencia, tiene dos causas principales: la escasa formación de los profesores en esta área por parte de las universidades,

³ Ministerio de educación de Chile

⁴ Estudio Internacional de Tendencias en Matemáticas y Ciencias

considerando que la mayoría de los que hoy ejercen estudiaron bajo el alero de la matemática moderna, la cual no consideraba la geometría elemental como un contenido fundamental a enseñar y el “olvido” que sufrió el segundo ciclo básico en este período de implementación de la Reforma Educacional, mientras nos inundábamos de proyectos referentes al primer ciclo de educación básica y algunos de educación media.” (Perich, 2004).

Además otro análisis realizado por académicos de Preuniversitario UC a los resultados de ensayo Universia⁵ PSU 2010, aplicados a más de 10.000 jóvenes chilenos en el mes de diciembre, en cinco regiones del país, arrojó que en matemáticas la mayor dificultad se presenta en geometría.

Este ensayo masivo fue realizado por Universia y Preuniversitario Interactivo UC en las ciudades de Santiago, La Serena, Talca, Concepción y Temuco, siendo el tercero que se aplica desde 2008. (Universia, 2010).

Los resultados que se presentan a continuación han sido citados textualmente para evidenciar y transparentar la información solicitada.

1.5 Problemas en Matemáticas

Niveles de logro en % de respuestas correctas en las habilidades contenidas en la prueba de Matemática.

Habilidades	% Buenas	% Malas	% Omitidas
Reconocimiento	38	33	29
Comprensión	36	25	39
Aplicación -Análisis -	32	22	46 Síntesis - Evaluación

Figura 1: “Niveles de logros en ensayo Universia 2010”

“Según los resultados del ensayo, lo más preocupante es que los jóvenes no manejan habilidades de análisis, síntesis y evaluación, donde tuvieron un 32% de logro y la mayor omisión: 46%. “Si un problema de Matemática no puede analizarse o

⁵ Se anuncia como: “La universidad de universidades”. Portal sobre universidades en España y Latinoamérica. Incluye información y noticias sobre universidades, estudios, becas, bibliotecas, empleo.

evaluarse correctamente, es prácticamente imposible tener éxito en la resolución de ejercicios que involucran esta habilidad”, comenta el director de Preuniversitario UC Juan Arturo López.” (Universia, 2010).

Niveles de logro en % de respuestas correctas en los ejes temáticos contenidos en la prueba de Matemática.

Ejes Temáticos	%Buenas	% Malas	% Omitidas
Números y Proporcionalidad	56	19	25
Álgebra y Funciones	38	25	37
Geometría	24	23	53
Probabilidad y Estadística	24	32	44

Figura 2: “Niveles de logros obtenidos por ejes temáticos ensayo Universia 2010”

Si observamos el análisis del ensayo por ejes temáticos de matemática, en geometría es donde los estudiantes tienen el mayor porcentaje de preguntas omitidas 53% y cometen un gran número de equivocaciones en las preguntas de geometría 23% y en promedio un 24% de logro. (Universia, 2010)

De toda la información vista anteriormente surge la inquietud y la intención de realizar un pequeño aporte, pues existe un gran número de estudiantes que difícilmente pueden llegar a la geometría formal por la manera que muchos profesores lo vienen haciendo, dándoles: definiciones, teoremas, demostraciones, etc. para que las memoricen y apliquen.

Por ello, es que este trabajo sugiere una propuesta metodológica de enseñanza cuyo principal recurso es un juego basado en “Metáforas y Geometría” para la enseñanza de los conceptos de simetría, rotación y traslación, de la unidad de transformaciones isométricas que se estudia en el primer año de enseñanza media.

La propuesta metodológica que se sugiere en esta tesis de pregrado persigue ser vista como:

Un pequeño aporte para la enseñanza de la unidad de transformaciones isométricas de NM1, ya que se estudian los conceptos matemáticos de esta unidad de una manera dinámica y accesible a todo estudiante y en donde ellos pueden generar nuevas estrategias de aprendizaje.

1.6 Objetivos

1.6.1 Objetivo General

Diseño y creación de una metodología de enseñanza para la unidad de transformaciones isométricas en el NM1, cuyo principal componente sea un juego diseñado en base al uso y aplicación de Metáforas.

1.6.2 Objetivos Específicos

1. Diseñar un juego que cumpla los requisitos exigidos dentro del marco curricular y los planes de estudio del NM1. Dicho diseño debe considerar los aportes de la Ciencia Cognitiva de las Matemáticas y las teorías del uso de Metáforas para la enseñanza de las matemática.
2. Aplicación del juego a un grupo de estudiantes del NM1.
3. Recopilar apreciaciones por parte de los estudiantes respecto del juego y su aplicación.

Capítulo II:

Antecedentes

2.1 Proyecto Metáforas

Dirigido por Roberto Araya, investigador asociado del Centro de Investigación Avanzada en Educación de la Universidad de Chile (CIAE). El proyecto Metáforas consiste en entregar estrategias y herramientas para la enseñanza de las matemáticas basada en metáforas, el cual ha logrado muy buenos resultados en el aprendizaje de los estudiantes.

La primera aplicación del proyecto Metáfora contó con la participación de 240 estudiantes de 10 colegios de diferentes regiones de Chile y niveles socio-económicos diferentes. En tal experiencia se puede sugerir que el uso de metáforas podría tener una influencia positiva en el aprendizaje de los estudiantes. (Araya, 2010)

Por ejemplo, en este mismo artículo se muestra que los estudiantes que usualmente obtienen notas inferiores a 5,1 en matemáticas lograron subir sus calificaciones e incluso alcanzar a sus compañeros que habitualmente obtienen mejores calificaciones. Cuando los buenos estudiantes usaron la estrategia de metáforas, lograron resultados aún mejores. (Araya, 2010)

Para acabar con el rechazo que tienen, en su mayoría, los estudiantes chilenos hacia las matemáticas es fundamental que los profesores manejen y sean expertos en sus materias de enseñanza y puedan explicarla utilizando métodos más lúdicos y con apoyo de herramientas digitales. (Araya, 2010)

Roberto Araya explica que: *“La gracia de los juegos es que los niños se involucran desde la emoción y ponen todas sus energías en ganar, sin darse cuenta de que aprenden.”* (Araya, 2010)

Las metáforas ayudan a comprender y a motivar a los estudiantes en el subsector de matemática, permite adquirir con mayor facilidad los contenidos mínimos obligatorios (CMO).

En este mismo artículo, Fidel Oteiza, Director de Comenius- USACH⁶, argumenta:

“... Decir que los estudiantes son malos para las matemáticas porque no son buenos para sacar cuentas es una visión muy reducida. Lo importante es reconocer la capacidad de cada niño y hacerlo avanzar tanto como pueda, porque siempre se puede...”

En el mismo artículo Fidel Oteiza plantea que las tecnologías y los juegos que habitualmente utiliza un niño, deben ser percibidos como recursos aliados por los profesores al momento de motivar y desarrollar el pensamiento matemático en los estudiantes.

“La idea central es que la matemática es abstracta y las metáforas vienen a ser una suerte de andamiaje que prepara al alumno para este tipo de conocimiento. Lo que estamos haciendo es tomar ciertas ideas de países del Oriente que tienen todo perfectamente planificado para enseñar las matemáticas con ciertas estrategias y tecnología de punta y hoy, estamos haciendo torneos online haciendo jugar a miles de niños de una vez, lo que los entretiene y les da un desafío. Además, estamos promoviendo cursos de capacitación a los profesores en esta línea”. (Araya, 2010).

En una entrevista realizada por Pamela Carrasco, Periodista del diario El Mercurio, con fecha lunes 4 de Mayo del 2009, se publicó la opinión de cuatro destacados académicos en relación con la enseñanza de la Matemática:

- Roberto Araya, Director del Proyecto Estrategias y Herramientas para la Enseñanza de la Matemática Basadas en Metáforas señala: *“La gente cree que en las matemáticas solo se tratan de manejar los contenidos y ser hábil, pero para aprender matemáticas hay que practicar y estar motivado”.*

⁶ USACH: Universidad de Santiago de Chile

- *Sergio Hojman, director del centro CREA, expresa: “Internet y otras tecnologías hacen que lo que pase fuera del colegio sea más entretenido que lo que pasa adentro. El desafío es mostrar las matemáticas de forma más atractiva y actual.” (Carrasco, 2009)*
- *Fidel Oteiza, Director de centro Comenius- USACH, dice: “Los juegos son una linda entrada al conocimiento de las matemáticas. Y lo interesante es que no solo intervienen la cabeza, sino que entran en juego la picardía, la competencia y el cuerpo entero.” (Carrasco, 2009)*
- *Victoria Marshall, directora pedagógica de E-mat, señala: “Lamentablemente los adultos hemos acostumbrado a los niños a pensar que el juego no es para aprender que para aprender no se puede jugar y eso en la práctica no es así.” (Carrasco, 2009)*

Hoy en día el proyecto Metáforas se encuentra organizando el cuarto torneo online para estudiantes de todo el país. El primero se realizó en 28 de noviembre de 2008 y contó con la participación de 500 alumnos de 3° a 6° año básico. El segundo torneo se realizó el 24 de abril de este 2009 y participaron 3.500 alumnos de 3° a 8° año básico, en el tercero cerca de 6500 estudiantes y para este cuarto torneo se espera que estas cifras aumenten considerablemente y contará con la participación de estudiantes de Latinoamérica.

Capítulo III:

Marco Teórico

En este capítulo se presenta los fundamentos teóricos que sustentan esta propuesta metodológica para la enseñanza de la unidad de transformaciones isométricas. Esta propuesta se fundamenta en el trabajo; “Ciencia cognitiva de la Matemáticas” propuesto por Lakoff y Núñez. Enfocado principalmente en “metáforas y juegos”. Además, la propuesta metodológica adoptará ciertas características del Aprendizaje colaborativo, constructivismo y fundamentos para lograr un aprendizaje significativo.

Hoy en día el gran desafío que tiene la educación, específicamente las matemáticas, es enseñar para comprender dado que hay casi un consenso de que los estudiantes, principalmente los de colegios municipales no están entendiendo lo que supuestamente aprenden.

3.1 Ciencia cognitiva de las Matemáticas

La mayor parte del uso que le damos a nuestro cerebro está dedicado a la visión, al movimiento, la comprensión espacial, relaciones interpersonales, la coordinación, las emociones, al lenguaje y al razonamiento cotidiano.

La ciencia cognitiva no tiene una sola definición. La podemos describir como la disciplina que se conforma por las diversas áreas que estudian el conocimiento humano, entre ellas están: la filosofía, la lingüística, la antropología, neurología, informática, psicología. (Vasco, 1993)

Se conforma así el llamado "Hexágono de la ciencia cognitiva" con los aportes de estas seis disciplinas. (Vasco, 1993)

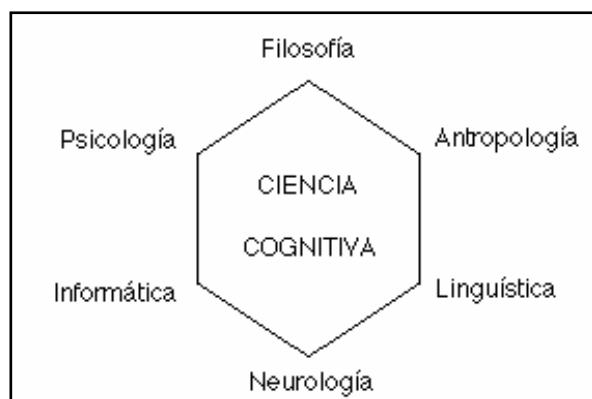


Figura 3: “Hexágono de la ciencia Cognitiva”

Las matemáticas, como las conocemos han sido creadas por los propios seres humanos por lo que están limitadas y estructuradas por el cerebro y la capacidad mental que este posee.

3.2 Teoría Experiencialista de la Metáfora de Lakoff y Núñez.

Es en esta teoría en la que se basa el prototipo de juego que se presenta en este trabajo. La cual gira en torno a la importancia que tiene el cuerpo sobre la mente, según esta teoría el origen de las matemáticas está ligada a la forma en que nos relacionamos con nuestro entorno y entendemos las cosas abstractas en términos de conocimientos concretos que tiene un sujeto gracias al papel mediador que cumple una metáfora.

La relevancia que puede lograr el pensamiento metafórico en la construcción del significado de los objetos matemáticos es reconocida por un gran número de investigadores en didáctica de las matemáticas y es el núcleo en que se sustenta una teoría sobre las matemáticas propuesta por Lakoff y Núñez en el 2000, llamada “Ciencia cognitiva de las matemáticas.” (Font, V. & Acevedo J., 2003)

Esta teoría, “Ciencia cognitiva de las matemáticas”, tiene como objetivo:

“...Estudiar, de manera empírica y multidisciplinar, las ideas matemáticas de las personas como una materia científica. Esta teoría está basada en la importancia que tiene el cuerpo sobre la mente y en los recientes hallazgos en lingüística cognitiva.” (Font, V. & Acevedo J., 2003)

Estos autores, Lakoff y Núñez sostienen que:

“... el origen de las estructuras matemáticas que construyen las personas, hay que buscarlos en los procesos cognoscitivos cotidianos, como son los esquemas de las imágenes y el pensamiento metafórico, puesto que, dichos procesos permiten explicar como la construcción de los objetos matemáticos está sostenida por la manera de como nuestro cuerpo se relaciona con los objetos de la vida cotidiana...”. (Font, V. & Acevedo J., 2003)

3.3 Diferencias entre la perspectiva clásica de una metáfora con la metáfora vista desde la perspectiva cognitivista.

La siguiente tabla, creada por (Massimino, s/f) muestra de modo general las diferencias existentes entre las metáforas vistas de un modo clásico y la teoría cognitivista.

	Enfoque clásico ("Retórica clásica")	Teoría cognitiva
1	Adorno del lenguaje: una mera cuestión estética	Tiene que ver con el conocimiento del mundo
2	Analiza sólo las metáforas únicas, originales, poéticas e individuales.	Analiza las metáforas en el lenguaje cotidiano
3	La metáfora era un fenómeno discreto, poco frecuente, vistoso como todo adorno sobre todo por su carácter inusual	Las metáforas invaden todo tipo de discurso, porque son mucho los terrenos donde el cerebro humano debe recurrir a la operación de metaforizar, y a partir de allí la metáfora se puede observar de manera reiterada e incluso aparecer en formas inesperadas.

Figura 4: "Comparación entre las metáforas vistas de un modo clásico y la teoría cognitivista."

3.4 Metáforas y Pensamiento matemático

Aunque es difícil darse cuenta, las representaciones que puede tener un ser humano de su entorno están siempre influenciadas por las Metáforas, la mayoría de las veces de una manera inconsciente.

La gran mayoría de los seres humanos conceptualizan cosas abstractas en términos de cosas concretas, este es el objetivo que persigue el uso de una Metáfora: crear un puente entre un dominio de partida trasladando una serie de características y estructuras de este dominio para facilitar la comprensión de un dominio de llegada.

Según Acevedo y Font (2003), *“Las metáforas se caracterizan por crear un puente conceptual entre un dominio de partida y un dominio de llegada que permite proyectar propiedades del dominio de partida en el de llegada.”*

Según esta idea, la esencia de las matemáticas y el aprendizaje significativo de estas hay que conseguirlas utilizando los conocimientos concretos que tiene cada sujeto para lograr el aprendizaje de definiciones, axiomas, fórmulas o demostraciones formales, que muchas veces son difíciles de comprender por los estudiantes.

3.5 Características del uso de metáforas

- Las metáforas permiten proyectar propiedades del dominio de partida en el de llegada.
- Las metáforas solo dejan ver algunos de los aspectos del dominio de llegada que no engloba su totalidad.
- Las metáforas permiten mostrar solamente el objeto que se quiere evidenciar y ocultar otros aspectos los cuales no influyen o no son necesarios para un aprendizaje.
- Otra de las características que cumple la metáfora es la de: *“conectar diferentes sentidos y, por tanto, ampliar el significado que tiene para una persona un determinado objeto matemático”*. (Font, V. y Acevedo, J.,2003)

3.6 Tipos de Metáforas

Lakoff y Johnson sostienen que las Metáforas no tienen solamente un sentido únicamente lingüístico sino también conceptual. Y se ha logrado hacer una estructuración de los tipos de metáforas conceptuales existentes. (Acevedo, 2007)

En el libro: "*Metáforas de la vida cotidiana*" (1980), Lakoff y Johnson presentan tres tipos de Metáforas Conceptuales utilizadas comúnmente en el lenguaje o discurso del profesor de matemáticas:

3.6.1 Metáforas Orientacionales:

Este tipo de metáforas hace relación a la orientación espacial: arriba/fuera, delante/atrás, profundo/ superficial, central/ periférico.

Como ejemplo, observemos las siguientes metáforas:

- La simplificación es dividir **arriba** y **abajo** por el mismo número.
- Los números negativos están **abajo** del cero. (Acevedo, 2007).

3.6.2 Metáforas Ontológicas:

Esta metáfora tiene que ver cuando un fenómeno se ve como una sustancia, un recipiente, una persona (Acevedo, 2007).

Como ejemplo, observemos las siguientes metáforas:

- Cuando dividimos y preguntamos cuantas veces **cabe** un número en otro.
- **Metemos** este número en el paréntesis.
- Cuando factorizamos **sale** este número del paréntesis.

3.6.3 Metáforas estructurales

Hace referencia en que una actividad o una experiencia se estructuran en términos de otra (Acevedo, 2007). Como ejemplo, observemos las siguientes metáforas:

- Dos rectas se topan en el origen
- Si dos rectas no se chocan son paralelas

Cuando utilizamos el término metáforas conceptuales, lo hacemos para referirnos a estos tres tipos de metáforas.

3.7 Metáforas Conceptuales

Por otro lado Lakoff y Núñez (2000), en el área de las matemáticas, describen dos tipos de metáforas conceptuales:

3.7.1 Grounding Metáforas:

Grounding Metáforas o “Conectadas a tierra”, estas metáforas son aquellas que tienen su dominio de partida dentro de las matemáticas pero su dominio de llegadas fuera de ellas.

Por ejemplo:

- *“Una función es una máquina*
- *los puntos son objetos*
- *las clases son contenedores*
- *etc.”* (Acevedo, 2007).

3.7.2 Linking Metáforas:

Linking metáforas o “De enlaces”, tienen su dominio de partida y de llegada en las mismas matemáticas.

Por ejemplo:

- Los números reales son puntos de una recta.
- Una Traslación es la suma de dos vectores.

3.8 Aprendizaje Significativo

Ausubel (1963), en su teoría, alude al concepto de “Aprendizaje significativo” para distinguirlo del repetitivo o memorístico, señala que el aprendizaje de los estudiantes depende de cómo la estructura cognitiva previa que estos poseen se relaciona con la nueva información, formándose una especie de puente cognitivo en el que se pasa de un conocimiento menos elaborado a un conocimiento más elaborado.

Es esta también la idea fundamental de la teoría de Metáforas propuesta por Lakoff y Núñez.

Hay que saber que una “estructura cognitiva” se refiere al conjunto de ideas y conceptos que un individuo posee en un campo de conocimiento determinado.

En el proceso de orientación del aprendizaje es de vital importancia conocer la estructura cognitiva del alumno, no solo se refiere a saber la cantidad de información que posee, sino que cuáles son los conceptos o preposiciones que maneja.

Ausubel definió tres condiciones básicas para que se produzca el aprendizaje significativo:

- Los materiales de enseñanza deben estar estructurados lógicamente con una jerarquía conceptual, situándose en la parte superior los más generales, inclusivos y poco diferenciados.
- Que se organice la enseñanza respetando la estructura cognitiva del alumno, es decir sus conocimientos previos y sus estilos de aprendizaje.
- Que el diseño de toda actividad motive a los estudiantes para aprender.

Además, plantea que: *“El aprendizaje significativo ocurre cuando una nueva información, se conecta con un concepto relevante (subsunsor), pre-existente en la estructura cognitiva del estudiante. Esto implica que las nuevas ideas, conceptos o proposiciones pueden ser aprendidas significativamente en la medida que otras ideas,*

conceptos o proposiciones hayan sido aprendidas adecuadamente bien, claras y que estén disponibles en la estructura cognitiva del individuo.”(Ausubel, 1963).

Hay que hacer énfasis en que el aprendizaje significativo no solo se logra con la simple conexión de la información existente en la estructura cognitiva del aprendiz con la información nueva, sino que el aprendizaje significativo involucra la modificación y evolución de la nueva información, así como de la estructura cognitiva envuelta en el aprendizaje.

3.8.1 Diferencia entre el Aprendizaje Significativo con el Aprendizaje Memorístico.

Según Ausubel, existe aprendizaje significativo cuando se relacionan intencionadamente material que es potencialmente significativo con las ideas establecidas y pertinentes de la estructura cognitiva. De esta manera se puede utilizar con eficacia los conocimientos previos en la adquisición de nuevos conocimientos, que a su vez, permiten nuevos aprendizajes.

“El aprendizaje significativo sería el resultado de la interacción entre los conocimientos del que aprende con los nuevos contenidos que va aprender.” (Ausubel, Novak y Hanesian, 1983).

En cambio el aprendizaje memorístico ocurre cuando el aprendiz no relaciona la nueva información con la ya existente en su estructura cognitiva. Por lo que los nuevos conocimientos se aprenden de manera vaga, aislada y sin relación entre sí por lo que no contribuyen al aprendizaje posterior y más bien lo dificultan.

3.8.2 Características del aprendizaje Significativo:

Ausubel plantea que las características del aprendizaje significativo son:

- *“Los nuevos conocimientos se incorporan en forma sustantiva en la estructura cognitiva del alumno.”*
- *“Esto se logra gracias a un esfuerzo deliberado del alumno por relacionar los nuevos conocimientos con sus conocimientos previos.”*

- *“Todo lo anterior es producto de una implicación afectiva del alumno, es decir, el alumno quiere aprender aquello que se le presenta porque lo considera valioso.”* (Dávila, s/f).

3.8.3 Ventajas del Aprendizaje Significativo

Ausubel en (Dávila, s/f), plantea algunas ventajas del aprendizaje significativo:

- *“Produce una retención más duradera de la información”.* Dado que la nueva información se relaciona con los conocimientos antiguos.
- *“Facilita el adquirir nuevos conocimientos relacionados con los anteriormente adquiridos de forma significativa, ya que al estar claros en la estructura cognitiva se facilita la retención del nuevo contenido.”* (Dávila, s/f). Acortando los tiempos de aprendizaje y Permitiendo que los estudiantes puedan aprender otros conceptos.
- *“La nueva información al ser relacionada con la anterior, es guardada en la memoria a largo plazo.”* Por lo que se conserva mucho más tiempo en la estructura cognitiva del alumno.
- *“Es activo, pues depende de la asimilación de las actividades de aprendizaje por parte del alumno.”* Es decir, como los conocimientos previos y los nuevos se organizan en la estructura cognitiva.
- *“El alumno no realiza un esfuerzo para integrar los nuevos conocimientos con sus conocimientos previos.”* Por lo que el estudiante estará más motivado y las clases serán más agradables para él. (Dávila, s/f).

Lamentablemente y a pesar de las ventajas que se mencionan anteriormente del aprendizaje significativo, muchos estudiantes chilenos prefieren aprender de forma memorística pues obtienen mejores resultados a corto plazo, como por ejemplo: En los instrumentos de evaluación. Esto se debe a que muchos profesores evalúan a sus

estudiantes con instrumentos que se relacionan con la adquisición de información y no si hay una comprensión de los contenidos.

3.9 Aprendizaje Colaborativo

El aprendizaje colaborativo es un término genérico utilizado para referirse a un grupo de procedimientos de enseñanza que parte de la organización de pequeños grupos mixtos y heterogéneos donde los alumnos trabajan conjuntamente de forma coordinada entre sí para resolver tareas académicas y profundizar en su propio aprendizaje.

En el aprendizaje colaborativo el alumno construye el conocimiento en conjunto con el apoyo de sus pares, donde el rol del docente es el de mediador. Esto se logra según Barros & Verdejo (2001) por medio de una actividad social, pues el aprendizaje se da a través de la interacción entre alumnos, compartiendo conocimiento y experiencias entre ellos.

"En un escenario colaborativo, los estudiantes intercambian sus ideas para coordinarse en la consecución de unos objetivos compartidos. Cuando surgen dilemas en el trabajo, la combinación de su actividad con la comunicación es lo que conduce al aprendizaje." (Vigotsky, 1978).

En un ambiente de aprendizaje colaborativo cada estudiante es regulador de su propio aprendizaje, es decir, avanza según su ritmo y habilidades, siendo apoyado por sus pares y a la vez aportando hacia ellos, generando así un proceso de retroalimentación. (Calzadilla, s/f).

3.9.1 Características para que el Aprendizaje Colaborativo sea eficaz

Johnson D. y Johnson (1999) define cinco características para que el aprendizaje colaborativo sea eficaz:

1. Interdependencia positiva: Se refiere a las condiciones de organización y de funcionamiento que deben darse al interior de cada grupo.
2. Interacción estimuladora: Se relaciona con facilitar el éxito del otro por parte de los propios integrantes del grupo, se produce durante el proceso de aprendizaje, cuando los estudiantes comparten sus conocimientos y discuten los diferentes puntos de vista.
3. Exigibilidad personal: Cada miembro del grupo debe ser capaz de aportar su conocimiento al grupo y de aprender lo que sus compañeros le aporten, con él.
4. Habilidades interpersonales y de grupo: se refiere a la capacidad que tenga cada estudiante para tomar decisiones para el grupo, organizar el trabajo.
5. Autoanálisis del grupo: El grupo debe autoanalizarse para saber si su trabajo está siendo efectivo, si logran los objetivos y si se está trabajando en el ambiente adecuado. Esto permite que los miembros del grupo fortalezcan sus habilidades de trabajo y fomenta el compromiso.

3.9.2 Roles del docente en el aprendizaje colaborativo

Collasos, Guerrero, & Vergara (2008) recomiendan que en el aprendizaje colaborativo el docente ha de cambiar sus roles en el proceso de enseñanza – aprendizaje. Este debe ser mediador cognitivo, instructor y diseñador Instruccional. Además este no se debe regir solo por una única forma de evaluación.

3.9.3 Profesor como diseñador Instruccional

El docente debe definir las condiciones iniciales de trabajo. Debe tener en claro los objetivos a seguir, escoger en forma clara la unidad temática que se va a trabajar, teniendo en cuenta los contenidos mínimos que los alumnos requieren para la ejecución de la actividad. También debe tener definido la forma en cómo se evaluará dicha unidad. Además, el docente ha de estar monitoreando permanentemente el aprendizaje de los estudiantes en la sala de clases. Según Collasos y otros (2008) para generar un buen ambiente de aprendizaje, en el diseño instruccional se han de seguir ciertos lineamientos:

- Acciones Pre-instruccional.
- Definir los objetivos.
- Definir el tamaño del grupo.
- Definir la composición del grupo.
- Definir la distribución del salón.
- Definir los materiales de trabajo.
- Dividir el tópico en subtareas.
- Lluvia de ideas respecto al tópico. (¿Qué se conoce? ¿Qué información se necesita conocer? ¿Cómo y dónde llevarla a cabo para resolver el problema?).

3.9.4 Profesor como mediador cognitivo

A los estudiantes se les deben hacer preguntas para verificar el conocimiento si han adquirido el conocimiento. Al respecto Collasos y otros (2008) afirman que esto se logra a través de preguntas como ¿por qué?, ¿Qué significa? ¿Cómo sabes que es cierto? Tales preguntas no solo deben ser dirigidas por el profesor, sino que también han de darse entre los pares.

El docente como mediador cognitivo debe evitar inducir o dar información a los estudiantes para que lleguen a la respuesta. Solo ha de propiciar la retroalimentación entregando la información necesaria para guiar al estudiante en su aprendizaje.

“Uno de los principios básicos del mediador cognitivo es dar la suficiente ayuda al estudiante cuando la necesite, ni mucha ni poca, de tal forma que el estudiante mantenga cierta responsabilidad para su propio aprendizaje.” (Collasos y otros, 2008)

3.9.5 Profesor como instructor

Collasos y otros (2008) afirman que muchos estudiantes, en general los más brillantes, presentan resistencia a trabajar en forma colaborativa. *“Los estudiantes no saben cómo interactuar instintivamente con otras personas”* (pág. 3). El profesor en su calidad de instructor ha de desarrollar y reforzar en sus estudiantes habilidades sociales, trabajo en equipo y la resolución de problemas para lograr un trabajo colaborativo eficiente. Para llevar un monitoreo y cerciorarse de que los educandos están practicando tales habilidades, Johnson (1993) plantea un modelo de 3 pasos:

- Chequear si los estudiantes están trabajando juntos.
- Chequear si los estudiantes están haciendo el trabajo bien.
- Observar y dar retroalimentación.

Por lo que se refiere a la evaluación, Collasos et al. (2008) proponen tres tipos de evaluación que se han de llevar a cabo durante el proceso de enseñanza aprendizaje. Esta deben ser Diagnóstica, Formativa y Sumativa.

- La primera para medir el nivel de conocimientos y habilidades que presenta el estudiante al inicio del proceso educativo.
- La segunda para monitorear el avance de estos en cuanto a sus logros.
- La tercera para medir el nivel de aprendizajes final de los estudiantes.

Capítulo IV:

Teoría Matemática

4.1 Plano cartesiano:

Para poder fijar figuras o puntos en el espacio o en un plano hace falta relacionarla con un sistema de referencia. Para geometría en dos dimensiones es usual utilizar el producto $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ como sistema de referencia. En este caso se llama plano cartesiano y está definido como el producto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ que es el conjunto de todos los pares ordenados (a, b) donde $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$.

El plano cartesiano se forma a partir de dos rectas numéricas perpendiculares entre sí, que se cortan en un punto llamado origen o el par ordenado $(0,0)$, dividiendo el plano en cuatro partes o cuadrantes (primer, segundo, tercero y cuarto cuadrante) como aparece en la figura siguiente.

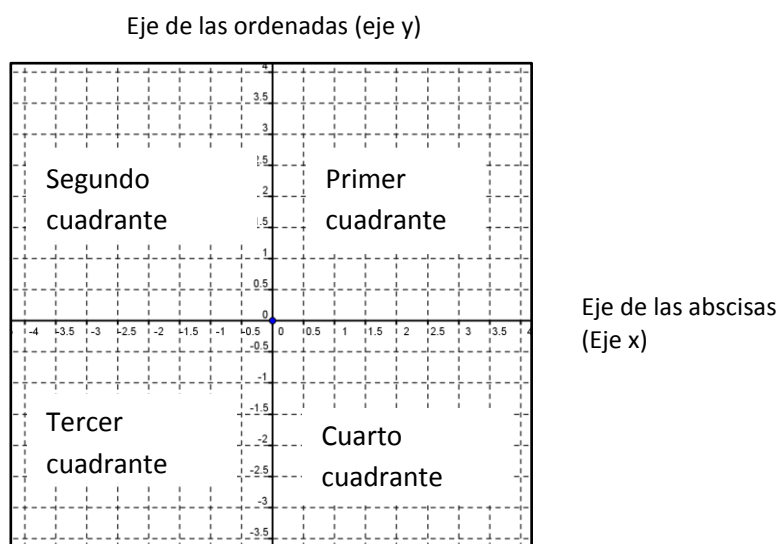


Figura 5: "Plano Cartesiano"

- En el primer cuadrante se ubican todos los vectores $\vec{v} = (a, b)$ con $a, b \in \mathbb{R}^+$.
- En el segundo cuadrante se ubican todos los vectores $\vec{v} = (a, b)$ con $a \in \mathbb{R}^-$ y $b \in \mathbb{R}^+$.
- En el tercer cuadrante se ubican todos los vectores $\vec{v} = (a, b)$ con $a, b \in \mathbb{R}^-$.
- En el cuarto cuadrante se ubican todos los vectores $\vec{v} = (a, b)$ con $a \in \mathbb{R}^+$ y $b \in \mathbb{R}^-$.

4.1.1 Coordenadas Cartesianas

Las coordenadas cartesianas son elementos $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ se relacionan con puntos de un plano definido por dos rectas perpendiculares que pasa por la coordenada a en el eje de las abscisa y la coordenada b en el eje de las ordenadas.

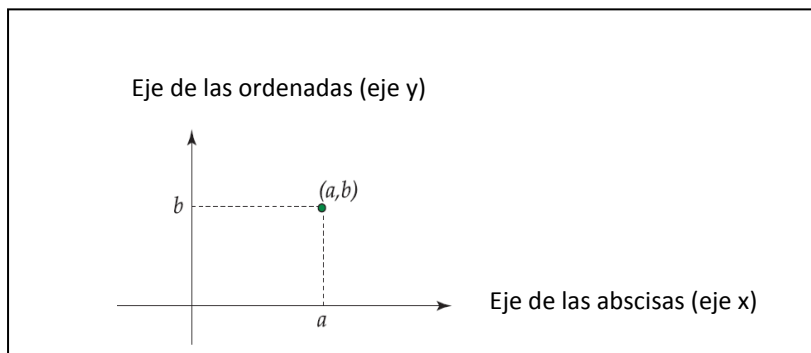


Figura 6: "Coordenadas en un plano"

4.2 Vectores

Los vectores son puntos del plano cartesiano que se representan con letras minúsculas con una flecha arriba tales como $\vec{v}: (v_1, v_2)$, donde v_1 es la componente en el eje de las abscisas y v_2 es la componente en el eje de las ordenadas. En el contexto de los vectores, los números reales (\mathbb{R}) reciben el nombre de escalares.

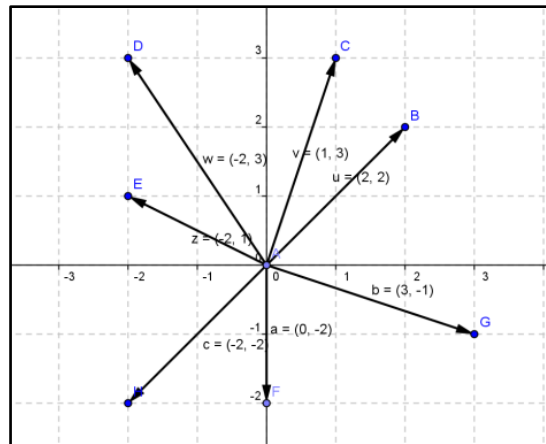


Figura 7: "Ejemplos de vectores"

4.2.1 Operaciones con vectores

Como este trabajo se basa en los contenidos de transformaciones isométricas para un plano de \mathbb{R}^2 las operaciones que a continuación se describen estarán definidas para vectores de este tipo de planos.

4.2.1.1 Igualdad entre vectores

Dos vectores son iguales si tienen el mismo orden y las mismas componentes.

Sean los vectores:

$\vec{v} = (v_1, v_2)$, $\vec{w} = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$. Entonces decimos que:

$$\vec{v} = \vec{w} \text{ si y solo si } v_1 = w_1, v_2 = w_2$$

4.2.1.2 Suma de vectores

Sean los vectores $\vec{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ y $\vec{w} = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$, entonces la suma de vectores viene dada por la suma de cada uno de sus componentes:

$$\vec{v} + \vec{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2) \in \mathbb{R}^2$$

Gráficamente podemos representar la suma de vectores así:

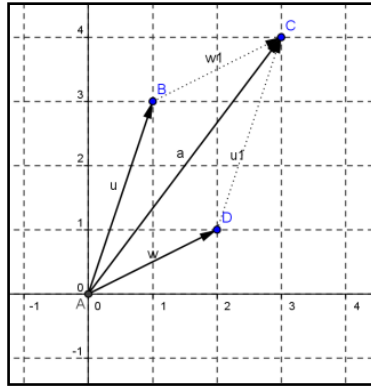


Figura 8: "Método Paralelogramo"

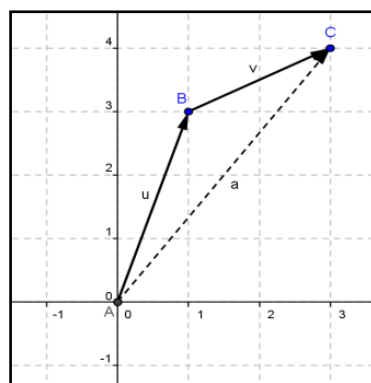


Figura 9: "Método del Triángulo"

4.2.1.3 Resta de vectores

Sean los vectores $\vec{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ y $\vec{w} = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$, entonces la resta de vectores viene dada por:

$$\vec{v} - \vec{w} = (v_1 - w_1, v_2 - w_2) \in \mathbb{R}^2$$

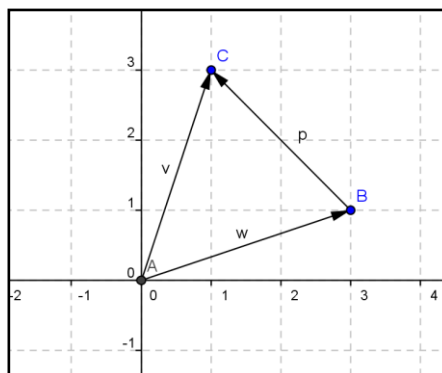


Figura 10: "Representación gráfica de resta de vectores"

4.2.1.4 Producto escalar

El producto escalar corresponde al producto entre un número real k y un vector. Consideremos el vector $\vec{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ y el escalar $k \in \mathbb{R}$, entonces:

$$k \cdot \vec{v} = (k \cdot v_1, k \cdot v_2)$$

El producto escalar provoca una prolongación del vector. Por ejemplo: Sea $\vec{v} = (1,2)$ y $k=2$ entonces el producto escalar es igual es $2 \cdot \vec{v} = (2 \cdot 1, 2 \cdot 2) = (2,4)$

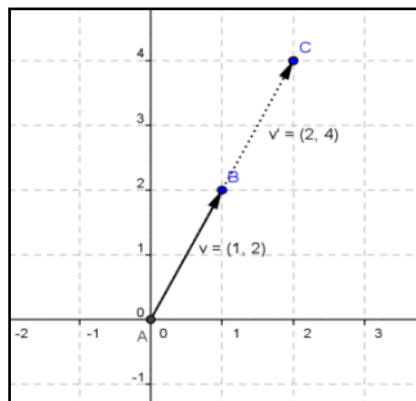


Figura 11: "Representación grafica del Producto escalar"

4.2.1.5 Producto Punto

El producto punto es el producto entre dos vectores que entrega como resultado un escalar. Consideremos los vectores $\vec{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ y $\vec{w} = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$ el producto punto se define de la siguiente manera:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2 \in \mathbb{R}$$

Observación: No existe la propiedad asociativa con el producto pues $\vec{v} \cdot (\vec{w} \cdot \vec{u})$ no tiene sentido puesto que $(\vec{w} \cdot \vec{u})$ es un número real.

4.2.2 Propiedades de los vectores

Consideremos los vectores $\vec{v}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^2$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces:

- $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$
- $\vec{v} + -\vec{v} = \vec{0}$
- $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$
- $\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$
- $(\vec{v} + \vec{w}) + \vec{u} = \vec{v} + (\vec{w} + \vec{u})$
- $\alpha \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \alpha\vec{v} + \alpha\vec{w}$
- $(\alpha + \beta) \cdot \vec{v} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{v}$
- $(\alpha\beta) \cdot \vec{v} = \alpha(\beta\vec{v})$

4.3 Transformaciones Isométricas

4.3.1 Simetría Axial

La simetría axial corresponde a una función que toma un vector en el plano cartesiano respecto de a una recta llamado eje de simetría, en la cual, a cada vector le corresponde un vector imagen y cumplen las siguientes condiciones:

- La distancia del vector al eje de simetría es la misma distancia que hay del vector imagen al eje de simetría.
- El segmento que une los vectores es perpendicular al eje de simetría.

4.3.1.1 Simetría Axial en un Sistema de Coordenadas vista de forma vectorial

Definamos el eje de simetría como la recta $l: y = x \tan \frac{\alpha}{2}$, donde $\frac{\alpha}{2}$ es el ángulo que se forma entre la recta l y el eje de las abscisas, por lo que la simetría axial respecto l esta dado por la función que se describe a continuación:

$$S_l: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\vec{v}: (v_1, v_2) \longrightarrow \vec{v}': (v_1 \cos \alpha + v_2 \operatorname{sen} \alpha, v_1 \operatorname{sen} \alpha - v_2 \cos \alpha)$$

Demostración:

Sea e_1, e_2 los vectores unitarios de \mathbb{R}^2 y $l: y = x \tan \frac{\alpha}{2}$,

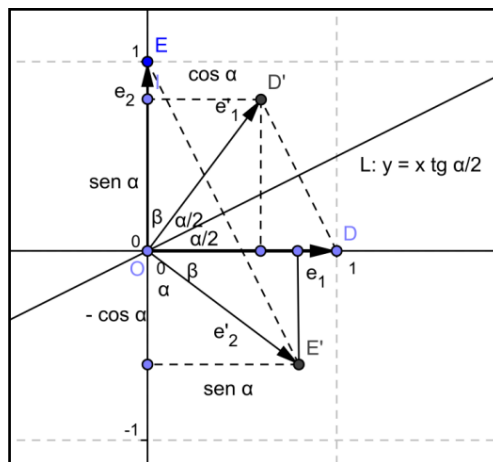


Figura 12: "Demostración vectorial de Simetría Axial"

Determinamos las componentes de vector imagen:

$$\vec{e}'_1: (\cos \alpha, \operatorname{sen} \alpha)$$

$$\vec{e}'_2: (\operatorname{sen} \alpha, -\cos \alpha)$$

$$[S_l]_B = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \operatorname{sen} \alpha \\ \operatorname{sen} \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$[\vec{v}']_B = [S_l]_B \cdot [\vec{v}]_B$$

Donde: $\begin{pmatrix} \vec{e}'_1 \\ \vec{e}'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \operatorname{sen} \alpha \\ \operatorname{sen} \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \overrightarrow{e'_1} \\ \overrightarrow{e'_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha \\ x \operatorname{sen} \alpha - y \cos \alpha \end{pmatrix}$$

Entonces: $\vec{v}' = (\overrightarrow{e'_1}, \overrightarrow{e'_2}) = (x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha, x \operatorname{sen} \alpha - y \cos \alpha)$

Importante:

Cabe señalar, que una Simetría con respecto a un eje cualquiera puede ser vista como la composición de funciones: una simetría a un eje que pasa por el origen, compuesta con una traslación de vectores.

4.3.1.2 Casos particulares de simetría axial

4.3.1.2.1 Simetría con respecto al eje de las abscisas (eje x)

Si tomamos el eje de las abscisas como el eje de simetría, entonces, el ángulo de inclinación de la recta es $\alpha = 0$ por lo cual la matriz asociada es: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow (x', y') = (x, -y)$$

$$(x, y) \quad \longrightarrow \quad (x, -y)$$

Entonces $y = 0$ el conjunto de los puntos fijos es el eje x, por lo que se define la simetría axial respecto al eje de las abscisas (eje x) como la función que se describe a continuación:

$$S_x: \mathbb{R}^2 \quad \longrightarrow \quad \mathbb{R}^2$$

$$\vec{v}: (x, y) \quad \longrightarrow \quad \vec{v}': (x, -y)$$

Gráficamente tenemos que:

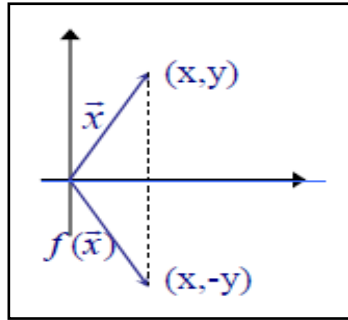


Figura 13: "Simetría con respecto al eje de las abscisas"

4.3.1.2.2 Simetría con respecto al eje de las ordenadas (eje y)

Si se toma el eje de las ordenadas como el eje de simetría, entonces, el ángulo de inclinación de la recta es $\alpha = \pi$ por lo cual la matriz asociada es: $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow (x', y') = (-x, y)$$

$$(x, y) \longrightarrow (-x, y)$$

Entonces $x=0$ por lo que el conjunto de los puntos fijos es el eje y, entonces podemos definir la simetría axial respecto al eje de las ordenadas (eje y) como la función que se describe a continuación:

$$S_x: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\vec{v}: (x, y) \longrightarrow \vec{v}': (-x, y)$$

Gráficamente tenemos que:

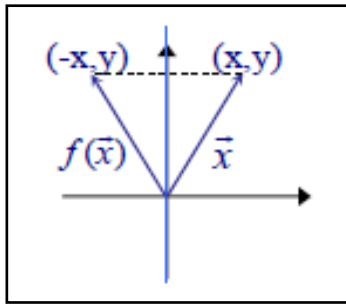


Figura 14: "Simetría con respecto al eje de las ordenadas"

4.3.2 Simetría Puntual

4.3.2.1 Simetría Central o Puntual vista de modo vectorial

Se puede definir la simetría central o puntual como la función S_p que toma un vector \vec{v} y lo transforma en el vector \vec{v}' mediante la función:

$$S_p: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\vec{v} = (x, y) \longrightarrow \vec{v}' = (-x, -y)$$

4.3.2.2 Método para realizar una Simetría Puntual de forma vectorial

Para realizar una simetría puntual de un punto p del plano se debe formar un sistema de coordenadas con origen en el punto de simetría. Luego describir el vector \vec{v} cuyo origen está en el punto de simetría y el punto p determinando las componentes del vector.

Una vez determinada las componentes del vector \vec{v} , el siguiente paso es multiplicar este vector \vec{v} por -1 y el vector resultante será \vec{v}' , para finalizar dibujar a partir del punto de simetría el vector \vec{v}' , determinando así el punto simétrico del punto p .

Por ejemplo:

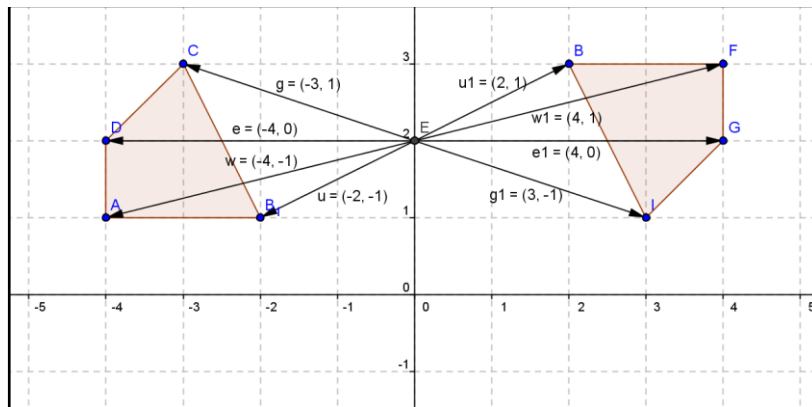


Figura 15: "Ejemplo de simetría Puntual"

Vectores que definen la figura

Vectores que definen la figura reflejada

S_p

$\vec{u} = (-2, -1)$	\longrightarrow	$\vec{u1} = (2,1)$
$\vec{w} = (-4, -1)$	\longrightarrow	$\vec{w1} = (4,1)$
$\vec{e} = (-4, 0)$	\longrightarrow	$\vec{e1} = (4, 0)$
$\vec{g} = (-3,1)$	\longrightarrow	$\vec{g1} = (3, -1)$

4.3.3 Traslación

4.3.3.1 Traslación vista de forma vectorial

Una **traslación** es una función que desliza o mueve un plano, con respecto a un vector.

La traslación vista de forma vectorial se define por la función que suma dos vectores; el vector que define los puntos de la figura y el vector traslación.

Sea $\vec{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ el vector traslación y sea $\vec{w} = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$, entonces una traslación viene dado por la función:

$$T_{\vec{v}} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\vec{w} \longrightarrow \vec{v} + \vec{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2) \in \mathbb{R}^2$$

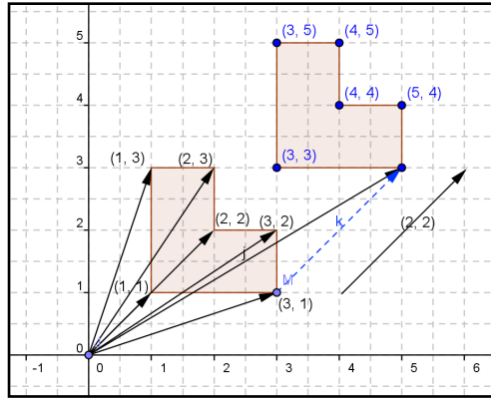


Figura 16: “Ejemplo de Traslación”

4.3.4 Rotación

Una rotación es una función, la cual hace girar un plano en torno a un punto fijo, llamado centro de rotación, en un determinado ángulo, llamado ángulo de rotación y sentido de giro que puede ser positivo (en sentido contrario a las agujas del reloj) o negativo (en sentido de las agujas del reloj).

Importante:

- Cuando no se indica el sentido de rotación se supone que es anti horario de lo contrario se indica.
- Tener en cuenta que las rotaciones de centro P y ángulo α la anotaremos $R_{(P,\alpha)}$

O: Centro de rotación.

α : Ángulo de rotación (Positivo).

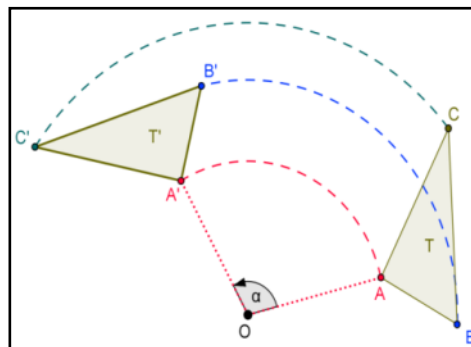


Figura 17: “Ejemplo de una Rotación”

4.3.4.1 Rotación en un sistema de coordenadas vista de forma vectorial

Una rotación viene dada por la función $R_{(P,\alpha)}$ que toma un vector $\vec{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ y gira en un ángulo α con centro en el origen

$$R_{(P,\alpha)} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\vec{v} \longrightarrow (v_1 \cos \alpha - v_2 \operatorname{sen} \alpha, v_1 \operatorname{sen} \alpha + v_2 \cos \alpha)$$

Demostración:

Sea e_1, e_2 los vectores unitarios de \mathbb{R}^2 y α el ángulo, entonces:

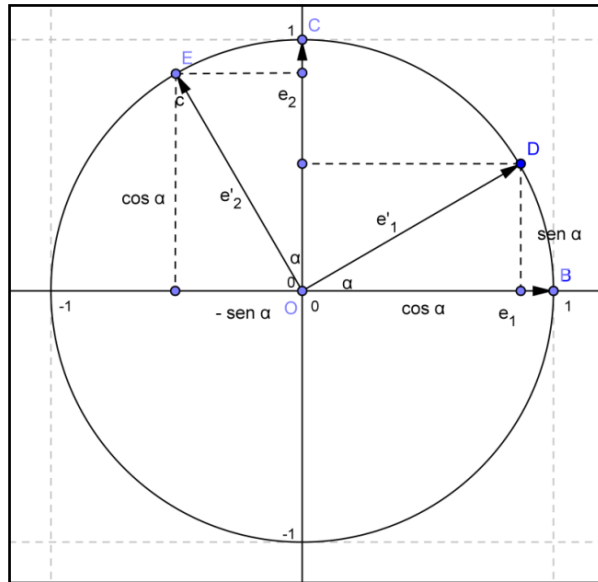


Figura 18: "Demostración Vectorial de una Rotación"

De la figura se puede determinar las componentes del vector imagen:

$$\vec{e}'_1 : (\cos \alpha, \operatorname{sen} \alpha)$$

$$\vec{e}'_2 : (\operatorname{sen} \alpha, -\cos \alpha)$$

$$[R_{(\alpha,0)}]_B = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha \\ \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$[\vec{v}']_B = [S_I]_B \cdot [\vec{v}]_B$$

Donde: $\begin{pmatrix} \vec{e}'_1 \\ \vec{e}'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \text{sen } \alpha \\ \text{sen } \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \vec{e}'_1 \\ \vec{e}'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos \alpha + y \text{sen } \alpha \\ x \text{sen } \alpha - y \cos \alpha \end{pmatrix}$$

Entonces: $\vec{v}' = (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2) = (x \cos \alpha + y \text{sen } \alpha, x \text{sen } \alpha - y \cos \alpha)$

4.3.4.2 Casos particulares de una Rotación

4.3.4.2.1 Rotación en 90° con centro en el origen.

Se define como la función:

$$\begin{array}{ccc} R_{(\vec{v}, 90^\circ)}: \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \vec{v}: (v_1, v_2) & \longrightarrow & \vec{v}': (-v_2, v_1) \end{array}$$

4.3.4.2.2 Rotación en 180° con centro en el origen.

Una rotación de 180° con centro en el origen se define por la función:

$$\begin{array}{ccc} R_{(\vec{v}, 180^\circ)}: \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \vec{v}: (v_1, v_2) & \longrightarrow & \vec{v}': (-v_1, -v_2) \end{array}$$

Esta rotación es similar a una simetría central respecto al origen.

4.3.4.2.3 Rotación en 270° con centro en el origen.

Una rotación de 270° con centro en el origen se define por la función:

$$\begin{aligned} R_{(\vec{v}, 270^\circ)}: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \vec{v}: (v_1, v_2) &\longrightarrow \vec{v}': (v_2, -v_1) \end{aligned}$$

Al aplicar una rotación en 270° con centro en el origen a un vector $\vec{P}: (a, b)$ cualquiera de plano cartesiano, su imagen será el vector $\vec{P}': (b, -a)$.

4.3.4.2.4 Rotación en 360° con centro en el origen

Una rotación de 360° con centro en el origen, se define por la función:

$$\begin{aligned} R_{(\vec{v}, 360^\circ)}: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \vec{v}: (v_1, v_2) &\longrightarrow \vec{v}': (v_1, v_2) \end{aligned}$$

Al aplicar una rotación de 360° con centro en el origen a un vector $\vec{P}: (a, b)$ cualquiera de plano cartesiano, su imagen será el vector $\vec{P}': (a, b)$ (las componentes son las mismas).

Importante:

Una rotación con centro en cualquier punto del plano, puede ser obtenida mediante la composición de funciones: una rotación con centro en el origen compuesto con una traslación de vectores.

Capítulo V:

Metodología

La propuesta metodológica se enmarca en primer año de enseñanza media en el subsector de matemática específicamente en el tratamiento de la unidad de transformaciones isométricas. Seleccionando a un grupo de estudiantes de ese nivel a los cuales se les aplicará la metodología propuesta para recopilar los comentarios y sugerencias que estos realicen hacia la propuesta diseñada.

5.1 Procedimientos realizados en el diseño de la propuesta

El primer paso fue identificar dentro del curriculum de enseñanza de las matemáticas, los contenidos educativos en los cuales los estudiantes presentan mayores dificultades, entre ellos geometría, específicamente las transformaciones isométricas.

El paso siguiente fue abrir una discusión para determinar de qué manera relacionar los conceptos matemáticos de transformaciones isométricas con conceptos más concretos o de la vida cotidiana de un estudiante mediante el uso de Metáforas y como se expone anteriormente una buena opción es mediante juegos, el cual requiera: algunas habilidades de los estudiantes, que los motive y les permita tener un acercamiento a los contenidos matemáticos involucrados.

Se estudiaron una serie de modelos, que después de varias discusiones se logró llegar a un diseño de juego, en formato de tablero de mesa, cuya dinámica es competir por conseguir la mayor cantidad de banderas que se encuentran en las islas dibujadas en el tablero.

5.2 Procedimientos realizados en la aplicación de la propuesta

El juego de tablero diseñado en este trabajo se aplicó a estudiantes de primero medio del liceo José Manuel Borgoño Núñez de la comuna de Petorca, en la quinta región. Este establecimiento educacional cuenta con tres primeros medios (1ºA, 1ºB y 1ºC) equivalentes y homogéneos entre sí, de estos cursos y por disponibilidad se seleccionó a 4 alumnos para la aplicación del juego:

Los estudiantes que fueron escogidos para la aplicación de dicha propuesta corresponden a una muestra de casos-tipos. Según Hernández, R. (2006), se utilizan en investigaciones exploratorias en la cual lo que realmente interesa es la calidad y riqueza de la información más que la cantidad.

Para la selección de los estudiantes se sugirieron los siguientes criterios al profesor del subsector de matemática:

- Por calificaciones obtenidas en el primer semestre del año 2011:
 - Muy buenos, Alumnos con promedio en matemática entre 7,0 y 6,0
 - Bueno, cuyo promedio en matemática se encuentra entre 5,9 y 5,0
 - Suficientes, Alumnos cuyo promedio en matemática se encuentra entre 4,9 y 4,0.
- Los alumnos seleccionados deberán tener una asistencia regular a las clases de matemáticas.
- Se escogieron alumnos que presentan buena, regular y mala disciplina dentro del establecimiento.
- Alumnos que presenten disponibilidad a realizar trabajos de forma colaborativa.

Es importante aclarar que para cuidar la privacidad de los estudiantes que participaron en la investigación, dado que se trata de menores de edad, se reservó la identidad de estos y se realizó un cambio de nombres para referirse a ellos en el presente informe.

En base a los criterios antes mencionados, los estudiantes seleccionados para la aplicación de dicho juego fueron:

- 1° B Josefina Díaz
- 1° B Pamela González
- 1° B Erick Valenzuela
- 1° B Hernán Bruna

Los promedios obtenidos por estos estudiantes en el subsector de matemáticas durante el primer semestre del año 2011 fueron: 5,6 5,1 6,4 y 4,7 respectivamente.

Para la aplicación del juego:

- Lo primero fue dar una explicación de forma oral de lo que trataba el juego, de como este se jugaba y como se utilizan cada uno de los dispositivos del juego.
- Lo siguiente fue a cada estudiante se les entregó las instrucciones y bases del juego por escrito y en este mismo momento los estudiantes tuvieron la oportunidad de manipular todos los componentes del juego y aclarar las eventuales inquietudes que surgieran de su uso antes de comenzar con la aplicación.
- Posteriormente se realizó una partida de 5 minutos de manera demostrativa para luego jugarlo de forma definitiva.

5.3 Procedimientos realizados en la recopilación de la información

Inmediatamente a la aplicación del juego, al grupo de estudiantes se les solicitó una entrevista para obtener tanto las apreciaciones tanto positivas como negativas del diseño y aplicación del juego.

Además, se solicita al profesor del subsector de matemática que contribuya con comentarios y observaciones realizadas al diseño del juego y su aplicación.

Capítulo VI:

Diseño de la propuesta metodológica

Este capítulo da a conocer el diseño y los componentes que conforman la metodología de enseñanza propuesta en este trabajo.

A continuación se describe la dinámica del juego. El objetivo es que los jugadores aprendan a transformar los vectores de un plano representados en un tablero, mediante el uso de transformaciones isométricas. De esta manera se pretende, familiarizar a los estudiantes con las ideas de simetría axial, traslación y rotación.

El juego está creado para que se enfrenten dos equipos. Cada equipo debe estar compuesto por 2 o 3 jugadores, además de un árbitro o mediador que resuelva las eventuales discusiones que se podrían generar en una partida.

El tablero de juego representa un conjunto de islas y trampas. El objetivo del juego es capturar la mayor cantidad de banderas que se encuentran en cada una de las islas que aparecen en el mapa. Para esto, los participantes deben utilizar los dispositivos de apoyo para poder moverse de forma correcta y estos a su vez están diseñados para dejar en evidencia los conceptos matemáticos: simetría axial, rotaciones y traslaciones.

6.1 Características del tablero

El tablero del juego es de forma rectangular, cuyas dimensiones son 40 cm de ancho y 60 cm de largo, en él está representado un mapa, donde se encuentran

representadas 37 islas y 13 trampas (triángulos de Las Bermuda y piratas)⁷. Sobre este mapa, a unos 5 milímetros de altura se ubica una superficie transparente la cual facilita la realización de los movimientos de los dispositivos en el mapa. Esta superficie transparente permite fijar el dispositivo de posición que contiene la ubicación de los jugadores en el plano, para luego realizar el movimiento sobre el mapa.

6.1.1 Sobre las trampas y obstáculos en el tablero

A continuación se describe las trampas y obstáculos que los jugadores deberán superar o usar de manera estratégica para obtener ventaja respecto al oponente.

6.1.1.1 Los Piratas:



Figura 19: “Piratas”

Este símbolo hace referencia a los Piratas, estos históricamente fueron conocidos por ser los ladrones de los mares. Si la posición de alguno de los jugadores queda sobre este símbolo, el grupo debe devolver una de las banderas previamente conseguidas al juego y además perder una jugada.

Importante: (Si el jugador que cae en este símbolo no tiene banderas este símbolo no tiene efecto).

6.1.1.2 Triángulo de las Bermudas:

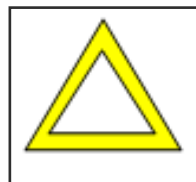


Figura 20: “triángulo de las bermuda”

⁷ Ver Anexos B: “Imágenes del Prototipo de juego” página 88.

Este símbolo hace referencia al famoso triángulo de las bermudas, Si la marca de alguno de los equipos hecha en el dispositivo de posición queda sobre este símbolo debe entregar a sus oponentes una de las banderas capturadas y perder una jugada.

Importante: (Si no tienes banderas este símbolo no tiene efecto)

6.2 Dispositivos de apoyo

Los dispositivos de apoyo son recursos físicos del juego, representan planos y están hechos de material plástico transparente de forma circular para permitir que estos se puedan mover libremente en el plano superpuesto al mapa.

Cada dispositivo tiene características propias, que dependen exclusivamente, del movimiento que se desea realizar.

Sugerencia:

Los detalles de uso de cada uno de los dispositivos estan explicados en los videos que se encuentran adjuntos con el tablero.

6.2.1 Dispositivo de Posición

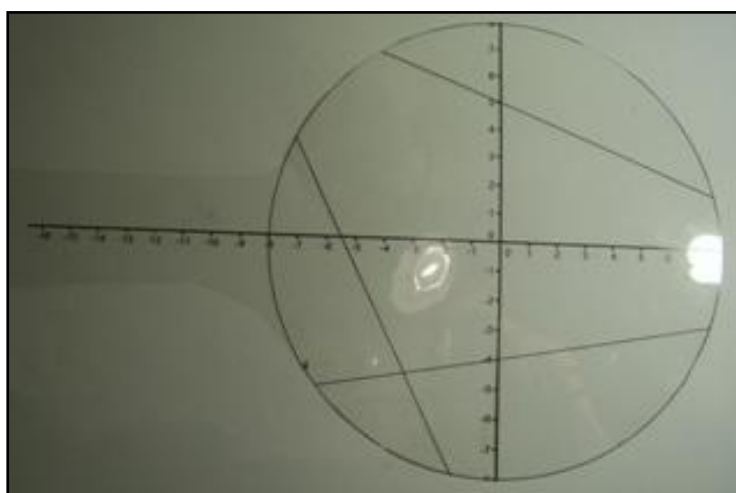


Figura 21: "Dispositivo de Posición"

En este dispositivo los participantes deben escoger (marcar con una x) la ubicación en el plano.

Este dispositivo se ubica por sobre la superficie transparente superpuesta en el mapa y cuando se desea realizar algunos de los movimientos, se inserta el dispositivo entre la ranura de 5 milímetros que queda entre la superficie transparente y el mapa, haciendo coincidir los ejes de coordenadas de ambos dispositivo y luego el dispositivo de posición de mueve según el interés de los jugadores.

6.2.2 Dispositivo de Simetría Axial

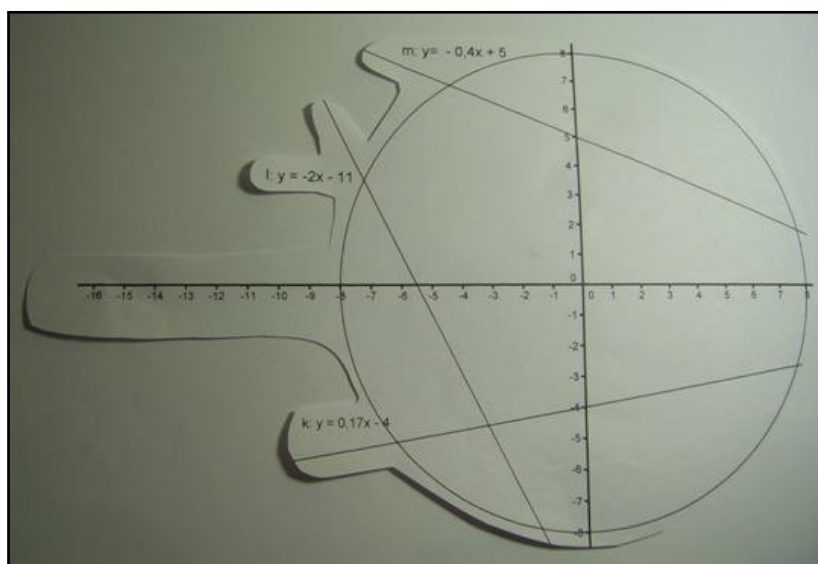


Figura 22: "Dispositivo de Simetría Axial"

Como se puede ver en la figura 22, en este dispositivo se han dibujado los ejes de coordenadas y tres rectas con sus respectivas ecuaciones, para que los estudiantes puedan identificar y relacionar la gráfica de una recta con su respectiva ecuación.

El criterio que se utilizó para la selección de las tres rectas que aparecen en este dispositivo fue que sus gráficas mantienen una cierta distancia del origen, lo que permite, que al realizar una reflexión del plano respecto a una de éstas rectas, el desplazamiento de los jugadores en el juego es mayor.

¿Cómo se Utiliza?

Una vez que los jugadores han escogido la recta para realizar la simetría axial, este dispositivo se inserta en la ranura haciendo coincidir los ejes de coordenadas de este dispositivo con el dispositivo de posición. Luego de esto los jugadores pueden realizar el movimiento seleccionado al dispositivo de posición.

6.2.3 Dispositivo de Traslación

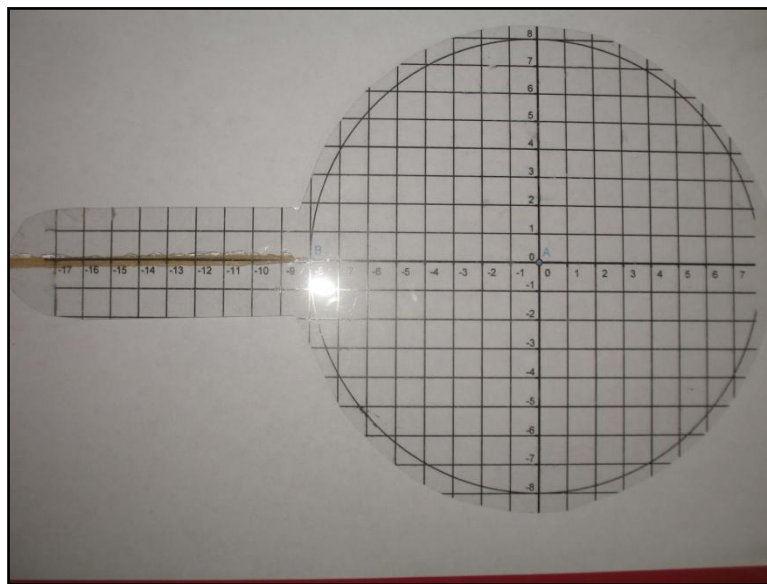


Figura 23: “Dispositivo de Traslación”

El dispositivo de traslación está hecho del mismo material y forma que el resto de los dispositivos. La principal característica de este dispositivo es que está cuadrículado con el objetivo de poder trasladar el plano.

Es importante aclarar a los jugadores que este dispositivo permite escoger vectores que están dentro de una circunferencia con centro en el origen y 8 unidades de radio. Además, restringidas a que las componentes del vector deben ser números enteros.

¿Cómo se Utiliza?

De la misma manera que se explicó anteriormente, este dispositivo se inserta en la ranura que queda entre el mapa y la superficie transparente haciendo coincidir los ejes de coordenadas de este dispositivo con el dispositivo de posición. Luego de esto los

jugadores pueden realizar la traslación del dispositivo de posición respecto del vector seleccionado.

6.2.4 Dispositivo de Rotación

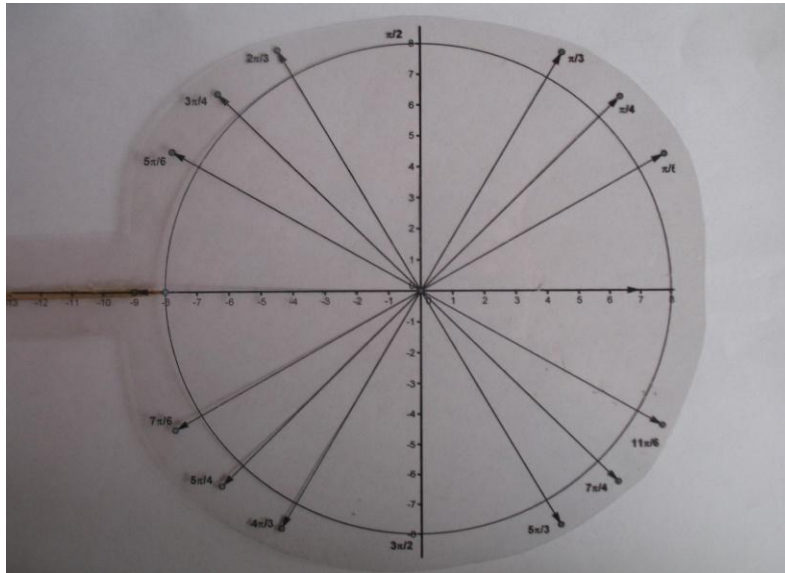


Figura 24: “Dispositivo de Rotación”

El dispositivo de Rotación, también con forma circular y hecho con el mismo material transparente que el resto de los dispositivos, nos permite realizar rotaciones del dispositivo de posición con centro en el origen y en cualquiera de los ángulos que se describen en este dispositivo.

Los jugadores puede escoger el ángulo que ellos creen es el más conveniente para poder capturar una de las banderas. Los ángulos están establecidos y solo puede hacer una rotación con respecto a los siguientes ángulos:

$$\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \pi, \frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{4}, \frac{11\pi}{6}$$

Escritos en grados: 30°, 45°, 60°, 90°, 120°, 135°, 150°, 180°, 210°, 225°, 240°, 270°, 300°, 315°, 330°.

6.3 Tarjetas

En el juego existe un mazo de tarjetas, en las que condicionan el tipo de movimiento que puede realizar un jugador, estos movimientos pueden ser simetría axial, traslaciones o rotaciones.

Al comienzo de la partida, los jugadores deben tomar tres tarjetas del mazo y en cada jugada debe escoger una de estas tres tarjetas que tienen en su poder para realizar el movimiento.

Por cada jugada que se realice, los jugadores pueden tomar de una a tres tarjetas si lo desean, la idea es mantener tres cartas como máximo en las manos. Por ejemplo: si un jugador tiene solo una tarjeta en su poder este tiene la libertad de tomar hasta dos tarjetas, si tiene dos puede tomar una, etc.

Existen tres tipos de tarjetas:

6.3.1 Simetría Axial:

La tarjeta en las cuales aparece Simetría Axial, los jugadores deben anotar una de las ecuaciones de la recta o ejes de coordenadas que aparecen en el dispositivo de simetría axial para realizar la reflexión respecto a esa recta o eje seleccionado.

6.3.2 Traslación:

En este caso debes anotar en la tarjeta el vector con respecto al cual desean hacer el desplazamiento.

Importante: (tener en cuenta que los vectores que puede escoger deben estar dentro de los parámetros del dispositivo de posición).

6.3.3 Rotación:

Para el caso que la tarjeta diga Rotaciones el estudiante debe escoger el ángulo de rotación y anotarlo en la tarjeta y luego se realiza la rotación del dispositivo de posición con centro en el origen y en el ángulo que desees.

Una vez que cada equipo haya escrito los datos que solicita cada carta estas se colocan boca abajo sobre el tablero y se dan vueltas al mismo tiempo. Una vez realizado este proceso se procede con el movimiento del dispositivo de posición.

6.4 Bases del juego, Reglamento del juego e Introducción del juego.

Para que los jugadores tengan un acercamiento al juego se creó una introducción y un reglamento de este.

Además se han creado una serie de filmaciones en las cuales se explica cómo utilizar los dispositivos, las tarjetas y un ejemplo de cómo se realiza una jugada en el juego.

Todo este material se encuentra anexo al final de este escrito.

Capítulo VII:

Aplicación y comentarios obtenidos de la propuesta metodológica.

7.1 Aplicación de la propuesta Metodológica

La aplicación del juego se llevo a cabo en dependencias del liceo José Manuel Borgoño Núñez de la comuna de Petorca, la cual contó con la participación de un grupo de cuatro estudiantes previamente seleccionados y con la presencia del profesor del subsector de matemática.

Lo primero fue dar una explicación de manera oral de lo que trataba la propuesta metodológica, el nombre que recibía cada componente físico del juego y como estos se utilizaban.

Luego de esto se entregó el reglamento y bases del juego para que fuesen leídos por cada estudiante y se entrego un tiempo breveo para que resolvieran las eventuales dudas que podrían aparecer luego de esta lectura.

Además se exhibió a los jugadores un material audio visual en el que se mostraba las características del tablero, ejemplos de cómo utilizar cada uno de los dispositivos del juego.

La aplicación del juego consistió en una partida cronometrada de 20 minutos, el grupo que alcanzara la mayor cantidad de banderas era el ganador.

La aplicación se realizó con completa normalidad y fuera del horario de clases.

Luego de transcurrido estos 20 minutos, los estudiantes y el profesor del subsector de matemática fueron expuestos a una encuesta en la que debían entregar las

apreciaciones positivas y negativas que surgieron durante la aplicación del juego y diseño de este.

7.2 Comentarios obtenidos de la aplicación de la propuesta metodológica por parte de los estudiantes y profesor del subsector

A continuación se describen las diferentes opiniones entregadas por los estudiantes que se sometieron al experimento del juego. Estas son diversas y fueron escritas de manera textual:

7.2.1 Aspectos Positivos del juego detectados por los estudiantes.

- “El juego es entretenido.”
- “No es difícil de aprender a jugar.”
- “Fácil de crear y utilizar.”
- “Las instrucciones y reglas del juego eran fáciles de aprender.”
- “Los dispositivos del juego no eran difíciles de ocupar.”
- “Las indicaciones de las tarjetas no eran difíciles de entender.”
- “El juego genera competición entre ambos equipos.”
- “Se da un juego en equipo.”
- “El juego nos permitió elaborar estrategias para poder capturar la mayor cantidad de banderas.”
- “Pudimos observar que el juego se relaciona con las transformaciones isométricas.”
- “Se aprende fácilmente los conceptos de Simetría, Traslación y Rotación.”
- “El juego es apto para todo tipo de niño.”
- “Sirve como ejercicio mental.”

7.2.2 Aspectos Negativos del juego señalados por los estudiantes.

- “En dos ocasiones se nos hizo difícil llegar a algunas partes del plano por que los dispositivos eran demasiado cortos, sin embargo eso lo pudimos superar fácilmente.”
- “Como se trata de un juego de competencia, sería bueno que tuviese un premio para el ganador.”
- “Jugamos una partida de 20 minutos, tal vez si fuese el doble de tiempo sería mucho mejor.”
- “Era complicado transportar o mover el tablero.”

7.2.3 Aspectos positivos detectados por el profesor del subsector de Matemática de la aplicación y diseño del juego.

- Por lo observado durante la aplicación del juego la partida se desarrollo con completa normalidad.
- Cada jugada demoraba entre 4 a 5 minutos en realizarse.
- A los estudiantes no se les hizo para nada difícil aprender a jugar, por el contrario se vio a un grupo de estudiantes muy entusiastas y motivados por querer saber de qué se trataba y como aprender a jugarlo.
- Los estudiantes no presentaron mayores dificultades en entender las bases y reglamentos del juego.
- Luego de que los estudiantes leyeron los anexos del juego como lo son el reglamento y las instrucciones de este, no tuvieron mayores dificultades en la aplicación y en el uso de los componentes del juego.
- Además se pudo observar que ambos equipos realizaban conversaciones y generaban debate de cuál sería el mejor movimiento a realizar para alcanzar alguna de las banderas.

- Al comienzo y durante toda la jugada, los estudiantes se observaron muy interesados en el juego y motivados por querer ganar.
- Los estudiantes no tuvieron mayores dificultades para desplazarse por el tablero haciendo uso de los dispositivos del juego.
- Sin duda que esta propuesta, específicamente el juego, puede transformarse en un gran aliado al momento de estudiar la unidad de transformaciones isométricas.

7.2.4 Aspectos negativos observados por el profesor del subsector de matemática en la aplicación y diseño del juego.

- Sucedió solo un problema técnico con los dispositivos del juego que fácilmente se pudo superar, uno de ellos fue que en dos ocasiones los dispositivos quedaban demasiado cortos, no logrando alcanzar al dispositivo de posición. Sin embargo en cosa de segundos se pudo superar el problema. Lo que se hizo fue alargar unos cuantos centímetros cada dispositivo.
- Es importante incluir en las bases del juego la participación de un árbitro y así evitar discusiones entre ambos equipos.
- Por último la presentación y los materiales que se utilizaron para la elaboración de este prototipo de juego son peligros de manejar como lo es un vidrio, sin embargo esto es corregible. Lo que evaluamos y lo que es realmente importante es que el juego funcione correctamente y que logre el objetivo principal que es que los estudiantes comprendan las transformaciones isométricas.

Conclusiones

Con los antecedentes bibliográficos recopilados en este escrito se puede afirmar que la enseñanza de la geometría es parte fundamental de las matemáticas y del desarrollo cognitivo de un ser humano, que muchas veces queda relegada a un segundo plano por los profesores del subsector de matemáticas, dando lugar a replantearse los métodos y contenidos de enseñanza de las matemáticas específicamente en el área de la geometría.

La propuesta sugerida en este trabajo no persigue desechar o criticar los métodos tradicionales de enseñanza. Por el contrario, el presente trabajo sugiere un camino para desarrollar nuevas estrategias didácticas, interactivas e innovadoras que potencien los métodos de enseñanza ya conocidos. Además sugiere la forma de ampliar la gama de herramientas para los profesores del subsector de matemáticas.

Lo que se logró con este trabajo es la elaboración del diseño de una propuesta metodológica de la enseñanza, cuyo recurso principal es la elaboración de un prototipo de juego basado en metáforas y geometría para la enseñanza de la unidad de transformaciones isométricas del NM1 bajo los requerimientos solicitados por el Ministerio de Educación de Chile para el tratamiento de esta unidad.

Se logró la creación de un diseño de una propuesta de enseñanza, cuyo núcleo se basa en la elaboración de un juego de tablero cimentado en los principios de la teoría del aprendizaje significativo propuesta por Ausubel y de la teoría del uso de metáforas en educación propuesta por Lakoff y Núñez.

El uso de metáforas es un recurso potente pero lamentablemente la gran mayoría de profesores de Chile la desconocen o a veces utilizan este recurso sin estar concientes de ello. Lo que esta teoría propone es que la esencia de las matemáticas hay que buscarlas en las ideas personales concretas que posee cada sujeto y no en definiciones,

axiomas, fórmulas o en demostraciones formales, que son muchas veces difíciles de comprender por los estudiantes.

Para el diseño del juego se tomaron en consideración elementos de: ciencia cognitiva, la teoría Lakoff y Núñez sobre el uso de metáforas en educación, y ciencia de la educación; la teoría del aprendizaje significativo propuesta por Ausubel, los principios del aprendizaje colaborativo de Vigotsky.

Para el desarrollo de la actividad fundamental de esta propuesta se creó el prototipo de un juego para introducir los conceptos de transformaciones isométricas. Una encuesta hecha a los estudiantes que desarrollaron dicha actividad sugiere que el juego captura la atención y que es percibido como entretenido.

La propuesta de enseñanza y principalmente con el desarrollo del juego lo que pretende conseguir es dominar habilidades como: el manejar imágenes mentales, reconocer patrones, desarrollar por sobre todo el pensamiento geométrico y con ello también desarrollar el pensamiento matemático.

Con la aplicación del juego a un grupo de estudiantes de primer año de enseñanza media se pudo obtener algunas apreciaciones positivas y negativas por parte de este grupo de estudiantes y algunos comentarios provenientes del profesor del subsector de matemática. Entre las apreciaciones obtenidos por parte de los estudiantes estos sugieren que el juego es fácil de aprender, que es percibido como entretenido, que captura la atención de los jugadores y hace un acercamiento importante a los conceptos matemáticos a estudiar en la unidad de transformaciones isométricas. Según los comentarios realizados por el profesor del subsector de matemáticas la propuesta, específicamente el juego, puede ser percibida como un buen aliado para el tratamiento de la unidad de transformaciones isométricas.

Sin duda que en el diseño de esta propuesta metodológica aun quedan bastante aspectos por mejorar, pero es claro que puede llegar a convertirse en un potente recurso didáctico para el estudio de la unidad de transformaciones isométricas del NM1.

Referencias Bibliográficas

- Acevedo, J. (2007). “*Fenómeno relacionado con el uso de metáfora en el discurso del profesor. El caso de la grafica de funciones.*” Universidad de Barcelona, obtenido en: Diciembre 08, 2010. [En línea]. Disponible en: http://www.tesisenxarxa.net/TESIS_UB/TDX-15109085142//02.JIANCAP2.pdf
- Acevedo, J. y Font, V. (2003). “*Análisis de las metáforas utilizadas en un proceso de instrucción sobre representación de gráficas funcionales.*”. [En línea]. Obtenido en Diciembre 03, 2010, de: http://www.webpersonal.net/vfont/Acevedo_Font.pdf
- Araya, R. (2010). “*Proyecto metáforas*”. Obtenido en: Octubre 12, 2010. [En línea]. Obtenido en <http://www.metaforas.cl>.
- Barros, B y Verdejo, M. (2001). “*Entornos para la realización de actividades de aprendizaje colaborativo a distancia.*” Revista Iberoamericana de Inteligencia Artificial, obtenido en Diciembre 12, 2010, [En línea]. 39 - 49. Disponible en: <http://cabrillo.lsi.uned.es:8080/ae pia/Uploads/12/122.pdf>.
- Calzadilla, M. (S/F). “*Aprendizaje colaborativo y tecnologías de la información y la comunicación.*” Revista Iberoamericana de la Educación. Obtenido en: octubre13, 2010. [En línea]. En: <http://www.rieoei.org/deloslectores/322Calzadilla.pdf>
- Canadilla, J. (2008). “*GeoGebra en el aula de matemáticas*”. Ponencia presentada en el Congreso Nacional Internet en el Aula, España. Obtenido en: Octubre 15, 2010. [En línea]. Disponible en <http://www.slideshare.net/Internetenelaula/josep-lluis-caadilla-lpez-de-coca-geogebra-en-el-aula-de-matematicas>.
- Carrasco, P. (2009). “*Profesores provistos de tecnologías, juegos y casos cotidianos enseñan mejor matemáticas.*” Fuente: Diario El Mercurio, [en línea], disponible en <http://diario.elmercurio.cl/detalle/index.asp?id={1f55f564-44b4-46eb-a787-6e8cd16deaac}>

- Collazos, A; Guerrero, L; Vergara, A. (2008). “*Aprendizaje colaborativo: un cambio en el rol del profesor*”. Universidad Autónoma Metropolitana. Obtenido en: Octubre 20, 2010. [En línea]. Disponible en: http://docencia.izt.uam.mx/sgpe/files/users/virtuami/file/Apren_colaborativo_nuevos_rols.pdf.
- Dávila, S. (s/f). “*El aprendizaje significativo. Esa extraña expresión (utilizada por todos y comprendida por pocos)*” Obtenido en diciembre 16, 2010. [En línea]. Disponible en: http://depa.pquim.unam.mx/amyd/archivero/ausubelaprendizaje_significativo1677.pdf.
- Díaz, N; Escobar, S. (2006). “*Articulación de actividades didácticas con algunos aspectos históricos de la cultura y matemática maya en el desarrollo del pensamiento espacial y sistemas geométrico del grado séptimo.*” Universidad de Nariño. Obtenido en diciembre 05, 2010. [En línea]. Disponible en: <http://www.etnomatematica.org/trabgrado/mayas.pdf>
- Díaz, H. “*La perspectiva cognitivista*”. Mariana di Stefano, coord. *Metáforas en uso*. Buenos Aires: Biblos, 2006. 41-60. Obtenido en Noviembre 05, 2010. [En línea] Disponible en: http://www.centro-de-semiotica.com.ar/Massimino-La_metafora.htm
- Domenech, J, (2001). “*Perspectives en l’Ensenyament de la Geometria pel segle XXI*” Documento de discusión para un estudio ICMI, obtenido en Diciembre 20, 2010. [En línea]. Disponible en: <http://www.euclides.org/menu/articles/article2.htm>
- Enrique, A. (2010). “*Foro Nacional de la calidad educativa 2010, estrategia didáctica para la enseñanza de la geometría en educación básica primaria*”, obtenido en Diciembre 17, 2010. [En línea], disponible en: <http://foronacional2010.ning.com/profiles/blogs/estrategia-didactica-para-la>
- Espina, P. (2006). “*GeoGebra. Números.64*”. Obtenido en Noviembre 28, 2010. [En línea], Disponible en: <http://www.sinewton.org/numeros/numeros/64/ideas03.pdf>

- Font, V. y Acevedo, J. (2003). *“Fenómenos relacionados con el uso de metáforas en el discurso del profesor. El caso de las gráficas de las funciones”*. Departamento de Didáctica de las CCEE y de la Matemática, Universidad de Barcelona. Obtenido en enero 09, de 2011. [En línea], en: <http://www.webpersonal.net/vfont/201044.pdf>
- Hernández, R.; Fernández, C.; Baptista, P. (1998). *“Metodología de la investigación”*, Editorial McGraw—Hill. Obtenido en: septiembre 20, 2010. [En línea]. Disponible en: <http://gerenciasocial.net/libros/IMSDH/MI2000.pdf>
- Johnson, D., Johnson, R. y Johnson E. (1999). *“Los nuevos círculos del aprendizaje: la cooperación en el aula y la escuela.”* Argentina: Editorial Aique. Obtenido Diciembre 11, de 2010. [En línea]. Disponible en: http://www.cbc.uba.ar/noti/jornada_iep/AEE_Johnson.pdf
- Lastra, S. (2010). *“La formación del pensamiento matemático del niño de 0 a 4 años”*. Universidad de Chile, Santiago. Obtenido Abril 30, de 2012. [En Línea]. Disponible es: http://www.ucentral.cl/prontus_ucentral/site/artic/20100108/asocfile/20100108171215/lastra.pdf
- Mineduc (2004). *“Programa de Estudio, Primer Año Medio, Matemáticas, Unidad de Currículum y Evaluación”*, ISBN 956-7405-75-1 Ministerio de Educación, República de Chile, Segunda Edición 2004. Obtenido Noviembre 08, de 2010. [En línea]. Disponible en: <http://www.educarchile.cl/Userfiles/P0001%5CFile%5C Matematicaspm.pdf>
- Lakoff G. y Núñez R. (2000). *“Where Mathematics Comes From: Embodied Arithmetic: The Grounding Metaphors”*. Obtenido Diciembre 11, 2010. Documento entregado por profesor guía Jairo Navarrete.
- OCDE, 2009. *“Resumen de resultados PISA 2009, Chile”*, Obtenido en Enero 05 de 2011. [En línea]. Disponible en: <http://www.simce.cl/fileadmin/Documentosyarchivos>

SIMCE/evaluacionesinter/pisa_2009/Resumen_Resultados_PISA_2009_Chile.pdf

Perich D. (2004). “*TIMSS: ¿PROBLEMAS?...SOLUCIONES*”, Obtenido en Diciembre 03 2010, Obtenido Diciembre 11, de 2010. [En línea]. Disponible en: http://www.sectormatematica.cl/articulos/TIMSS_perich.pdf,

Rechimont E., Ferreyra N., Parodi C., Scarimbolo M. & Pedro I. (2007). “*GeoGebra en la Resolución de un Problema.*” Ponencia presentada en el V Congreso sobre Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora. Costa Rica. Obtenido Diciembre 14, de 2010. [En línea]. Disponible en: <http://www.cidse.itcr.ac.cr/ciemac/5toCIEMAC/Ponencias/GEOGEBRAenlaresoluciondeunproblema.pdf>

Universia, (2010). “*Geometría y síntesis complican a los estudiantes que rendirán la PSU.*” Obtenido en enero 03, de 2011. [En línea]. Disponible en: <http://noticias.universia.cl/en-portada/noticia/2010/10/03/529966/geometria-sintesis-complican-estudiantes-rendiran-psu.pdf>.

Vasco, C. (1993). “*La metáfora del cerebro como computador en la ciencia cognitiva.*” Proyecto SIIIE, Colombia, obtenido el 05, Diciembre 2010. [En línea]. Disponible en: http://www.colombiaaprende.edu.co/html/mediateca/1607/articles127657_archivo.pdf.

Vigotsky, L. (1978). “*Mind in society: The development of higher psychological processes.*” Cambridge MA: Harvard University. En Barros, B; Verdejo, M. (2001). “*Entornos para la realización de actividades de aprendizaje colaborativo a distancia*”. Revista Iberoamericana de Inteligencia Artificial, 12, 39 - 49. Obtenido Diciembre 04, de 2010. [En línea]. Disponible en: <http://cabrillo.lsi.uned.es:8080/aepia/Uploads/12/122.pdf>.

Anexos A: Complementos del Juego

A.1 Introducción al juego

Después del descubrimiento de América, realizado por Cristóbal Colon en 1492. La corona española y la corona Inglesa han iniciado una lucha a muerte por conseguir ser el imperio más poderoso del mundo. Para conseguir este objetivo, te encomendaron expandir sus territorios hasta los confines más remotos del mundo y destruir a cualquiera que te impida cumplir con tu objetivo.

Cada uno de los grupos representa a una de estas coronas por lo que deberás ser astuto y muy rápido para moverte y conseguir la mayor cantidad de banderas que se encuentran en cada isla del mapa.

A continuación se describen las trampas y obstáculos que encontraras en este viaje.

Triángulo de las Bermudas



El Triángulo de las Bermudas, también conocido como el Triángulo del Diablo y el Limbo de los Perdidos, está situado entre las Islas Bermudas, Puerto Rico y Melbourne (Florida).

En este famoso Triángulo han ocurrido muchas desapariciones misteriosas de buques, aviones y personas. Uno de los incidentes más raro y uno de los más conocidos, es el de Helen Cascio, experta piloto, quien pilotaba su "Cessna 172" y se aproximaba a la isla. La torre de control le iba facilitando las instrucciones. Después de conectar varias veces, en una de ellas, Helen no respondió, aunque el canal de la radio estaba abierto. Los operadores de la torre escucharon a la piloto decirle a su único pasajero:

"he debido hacer una falsa maniobra. Esta debería ser Turco, pero ahí no hay nada. No hay aeropuerto. No hay casas. No hay nada..."

Los controladores continuaron, frenéticamente, intentando entrar en contacto con la piloto, pero Helen no los oía. Posteriormente recibieron la que sería su última frase: "¿No hay manera de salir de esto?".

Otra de las historias famosas ocurrió en diciembre de 1945, cuando cinco bombarderos de la Armada de los Estados Unidos desapareció mientras estaba haciendo ejercicios de entrenamiento.

Nunca se encontró la menor huella de estos aviones, pilotos o pasajeros, y con los años, cientos de barcos y aviones han desaparecido en esta área del Océano Atlántico.

Importante:



En el juego debes tener cuidado con caer en este simbolo, por que si lo haces, debes entregar una de tus banderas a tu oponente y pierdes de hacer tu movimiento en la siguiente jugada. Y quien sabe si algún día te volvamos a ver Importante: (Si no tienes banderas pierdes solamente una jugada)

Piratas



El ojo parchado, el garfio en la mano, el pañuelo en la cabeza, la pata de palo, la bandera negra con la calavera, todos símbolos de aquellos personajes que navegaban por los siete mares robando y asaltando en busca de tesoros y riquezas, recibían el nombre de ¡Piratas!

El término “pirata” proviene del latín y significa “el que intenta fortuna”. Sus acciones estaban al margen de cualquier ley, eran ladrones de mar. Su estandarte era una bandera negra conocida como Jolly Roger, la cual era reconocida porque tenía una calavera.

Las calaveras y tibias fueron usadas como símbolo de muerte si la víctima no se entregaba. Estas banderas representaban los caprichos de sus capitanes, como los corazones rojos perforados de Edward Teach (Barbanegra), quien no tenía piedad ni misericordia con el enemigo, fue el pirata más cruel, audaz y afortunado que surcó los mares al norte de Cuba. Gran bebedor, decía tener pacto con Satanás y blasfemaba todo el día atemorizando a quien lo veía, pues era temido incluso por su tripulación. Cuenta la historia que donde había buques con mercancía, también había piratas dispuestos a tomarlos por la fuerza...



Importante: En el juego, tienes que saber que dónde este símbolo hay piratas por ende debes tener cuidado al moverte y evitar caer en este símbolo.

Por que si lo haces, te encontraras con piratas y te haran devolver una de tus banderas al juego. **(Si no tienes banderas este símbolo no tiene efecto).**



Suerte con tu conquista

Gana el equipo que consiga la mayor cantidad de banderas... Suerte.

A.2 Bases del juego:

Los Conquistadores

1. Objetivo del Juego: Este Juego tiene por objetivo capturar la mayor cantidad de banderas, las que se encuentran ubicadas en cada isla del tablero del juego, para poder llegar a ellas tendrán desplazarse aplicando los conceptos de transformaciones isométricas.

2. Diseño del Juego: El juego está creado para que se enfrenten dos equipos y cada equipo debe estar integrado por 2 o 3 jugadores.

3. Sobre las tarjetas

Las tarjetas indican el tipo de desplazamiento que deben realizar los jugadores. Existen tres tipos de tarjetas las que te dirán que movimiento hacer:

- **Simetría Axial:** Simetría Axial, debes anotar una de las ecuaciones de la recta que aparecen en el dispositivo de simetría axial para realizar la reflexión respecto a la recta seleccionada.
- **Rotación:** Para el caso de las rotaciones se realizan con centro en el origen y el estudiante debe escoger el ángulo de rotación y anotarlo en la tarjeta.
- **Traslación:** En este caso debes anotar en la tarjeta el vector con respecto al cual desean hacer el movimiento.

Importante: (tener en cuenta que los vectores que puede escoger deben estar dentro de los parámetros del dispositivo de posición)

¿Cómo utilizarlas?

Cada equipo debe escoger tres tarjetas y mantenerlas en su poder. Cuando comience la primera jugada cada equipo debe escoger una de las tres tarjetas que tienen en su poder y esta será, junta con la tarjeta que escoge el equipo contrario el movimiento a que se aplicara al dispositivo de posición. (Importante: Se aplica el movimiento del equipo que tiene el primer turno e inmediatamente después el movimiento que escogió el otro grupo) luego de esto

se observa en el dispositivo de posición cual de las marcas que sobre algunas de las islas. Lo mismo para el resto de las jugadas.

4. Trampas y obstáculos:

Existen algunas trampas y obstáculos que deberás superar, como:

Los Piratas:



Los Piratas se conocen por ser los ladrones de los mares, por lo tanto, si caes en esta marca deberás devolver una de tus banderas al juego.

Importante: (Si no tienes banderas este símbolo no tiene efecto).

Triángulo de las Bermuda:



Si caes en este símbolo debes entregar una de tus banderas a tu oponente y pierdes de hacer tu movimiento en la siguiente jugada. **Importante: (Si no tienes banderas solo pierdes de hacer tu movimiento en la siguiente jugada).**

5. Dispositivos de juego

Existen 4 dispositivos que el primero fija tu posición en el tablero y los otros tres te ayudarán a realizar los movimientos; Simetría Axial, Traslación y Rotación, con mayor precisión y evitar errores.

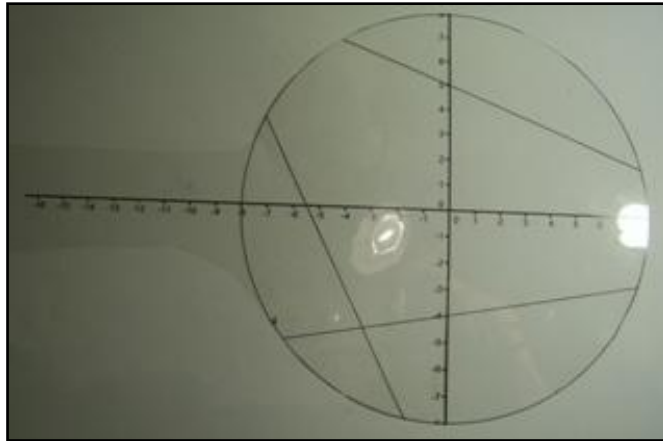
Los dispositivos tienen forma circular y hacen referencia al plano cartesiano, además, cada dispositivo cuenta con algunas características propias de cada movimiento.

Observemos:

Dispositivo de Posición

Es en este dispositivo donde debemos marcar nuestra posición, simplemente haciendo una x sobre este.

Este dispositivo es el plano superpuesto al que se le aplicará todos los movimientos.

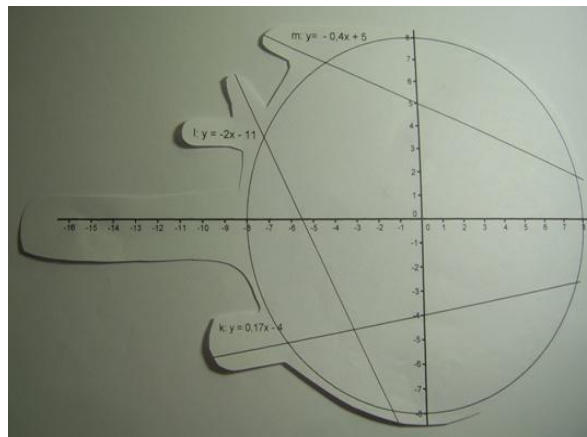


Dispositivo de Simetría Axial

Es exactamente igual al dispositivo de posición dado que ambos tienen las mismas rectas.

¿Cómo se utiliza?

Para realizar la simetría axial basta hacer coincidir las rectas y luego giramos el dispositivo de posición con respecto a la recta seleccionada.

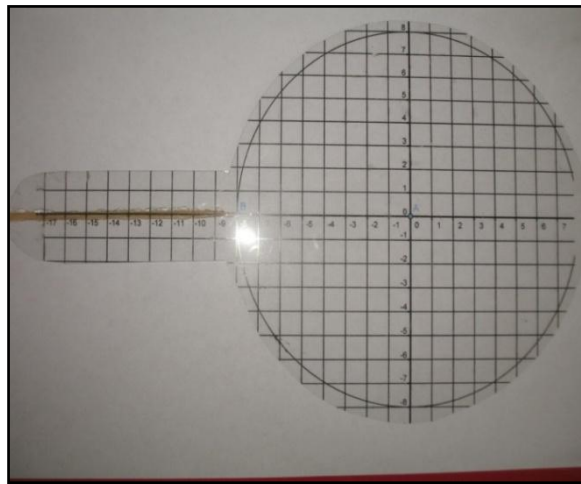


Dispositivo de Traslación:

A diferencia con el resto de los dispositivos este está cuadrículado para poder hacer la traslación de los planos.

¿Cómo se utiliza?

Cuando se desea aplicar una traslación al dispositivo de posición, el dispositivo de traslación se ubica por debajo del vidrio y se hace coincidir los ejes de ambos dispositivos, luego movemos el origen del dispositivo de posición al vector elegido para hacer la traslación.

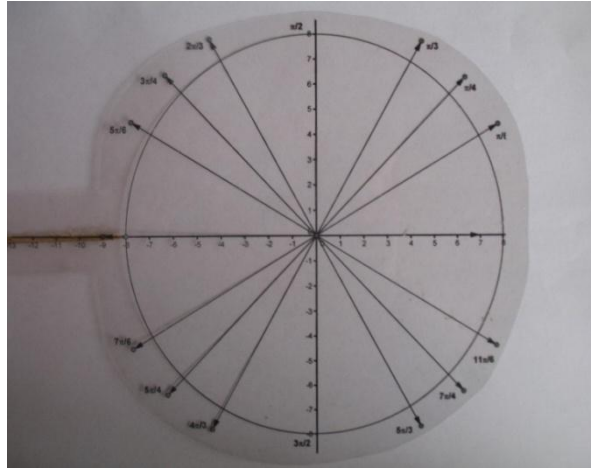


Dispositivo de Rotación:

Este dispositivo, también de forma circular, permite realizar la rotación del dispositivo de posición, con centro en el origen.

¿Cómo se utiliza?

Al igual que el anterior se ubica por debajo del vidrio y se hace coincidir los ejes de ambos dispositivos, luego fijamos el centro y hacemos girar el dispositivo de posición en el ángulo deseado.



¿Cómo se Juega?

1er Paso: De la Partida. Para saber quien parte ambos equipos deben lanzar los dados. El equipo que obtenga el número mayor parte con la primera jugada.

2do Paso: Una vez que se sepa cuál de los dos grupos comienza el juego, el grupo que ganó la partida debe marcar su posición en el dispositivo de posición con una X. (utiliza los marcadores disponibles en el juego) y luego hace lo mismo el otro grupo.

3er Paso: Una vez que ambos grupos hayan fijado su posición en el dispositivo, deben tomar 3 tarjetas del mazo (la elección es al azar, primero lo hace el ganador de la partida y luego el otro grupo) y mantenerla oculta, sin que tus oponentes sepan el contenido de ellas.

En cada tarjeta aparece el tipo de movimiento que puedes realizar, en el caso de que la tarjeta dice:

- Simetría Axial, debes anotar una de las ecuaciones de la recta que aparecen en el dispositivo de simetría axial para realizar la reflexión respecto a la recta seleccionada.
- Traslación, en este caso debes anotar en la tarjeta el vector con respecto al cual desean hacer el movimiento.

Importante: (tener en cuenta que los vectores que puede escoger deben estar dentro de los parámetros del dispositivo de posición)

- Rotaciones se realizan con centro en el origen y el estudiante debe escoger el ángulo de rotación y anotararlo en la tarjeta.

4to Paso: Ambos grupos, luego de escoger que movimiento realizan y anotar la información necesaria en la tarjeta. Luego, colocan la tarjeta boca abajo sobre la mesa y una vez que ambos grupos hayan puesto las tarjetas boca abajo, estas se dan vueltas de forma simultánea y se realizan los movimientos descritos en cada tarjeta, partiendo con la tarjeta del grupo ganador de la partida y luego con la tarjeta del otro grupo.

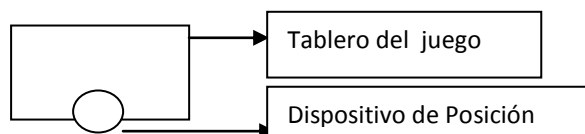
5to Paso: Una vez que se realicen ambos movimientos, revisar las nuevas posiciones conseguidas en el mapa. Si la nueva posición esta sobre una isla consigues la bandera de

esa isla, si caes en un triángulo de las Bermudas o en el símbolo de los piratas debes entregar una de tus banderas a tus oponentes.

6to Paso: La segunda jugada la comienza el grupo que había perdido la primera partida y así sucesivamente se van alternando la partida. Por cada jugado cada equipo tiene derecho a recoger una carta, manteniendo si lo desean tres cartas.

A.3 Reglamento del juego

1. Inicia la partida aquel grupo que obtenga el número mayor en el lanzamiento de los dados.
2. En la primera jugada, ambos grupos deben fijar su posición (con una x) en el dispositivo de posición, primero lo hace el ganador de la partida y luego el otro, que debe marcar su posición a una distancia de mínimo dos unidades de la marca hecha por el primer grupo. Una vez hechas ambas marcas no puede retractarse, para evitar conflictos entre los equipos.
3. Para comenzar el juego, el dispositivo de posición debe quedar ubicado en la parte inferior y centro del tablero.



4. En la primera jugada, ambos grupos recogen solamente tres cartas.
5. En el caso de que un grupo saque más de tres cartas, el equipo contrario le debe quitar una carta al azar.
6. Cada equipo escoge una carta, entre las cartas escogidas, la que más le sirve y completa con la información solicitada.
7. Una vez completada la información que solicita la tarjeta, esta es puesta boca abajo sobre el tablero.
8. Cuando se colocan las cartas boca abajo en el tablero, se dan ambas vueltas de forma simultánea y se comienza con el movimiento escogido por el ganador de la partida y de inmediato con el movimiento del otro equipo.
9. Para realizar correctamente los movimientos debes fijar el dispositivo de posición y el dispositivo de apoyo en los ejes de coordenadas.
10. En el caso de una Traslación solo puedes escoger vectores que están dentro de la circunferencia de centro en el origen y radio 8 y donde el vector $\vec{v} = (a, b)$, donde $a, b \in Z$
11. En el caso de una rotación, se hace con centro en el origen y en algunos de los ángulos marcados en el dispositivo de rotación.
12. Una vez que se realizan ambos movimientos se puede determinar la nueva posición de cada grupo. Si algunas de las marcas queda ubicada en alguna de las

islas, este gana de inmediato la bandera correspondiente a esta isla y si algunas de las marcas queda ubicada en alguno de los triángulos de las bermudas, este debe entregar, al oponente, una de las banderas conseguidas y pierde su movimiento en la siguiente jugada.

13. Si algunas de las marcas queda ubicada en alguno de los símbolos de los piratas este debe devolver una de las banderas conseguidas.
14. Los turnos de cada jugada son alternados.
15. Gana el grupo que consiga la mayor cantidad de banderas.

Anexo B: Imágenes del Prototipo de juego

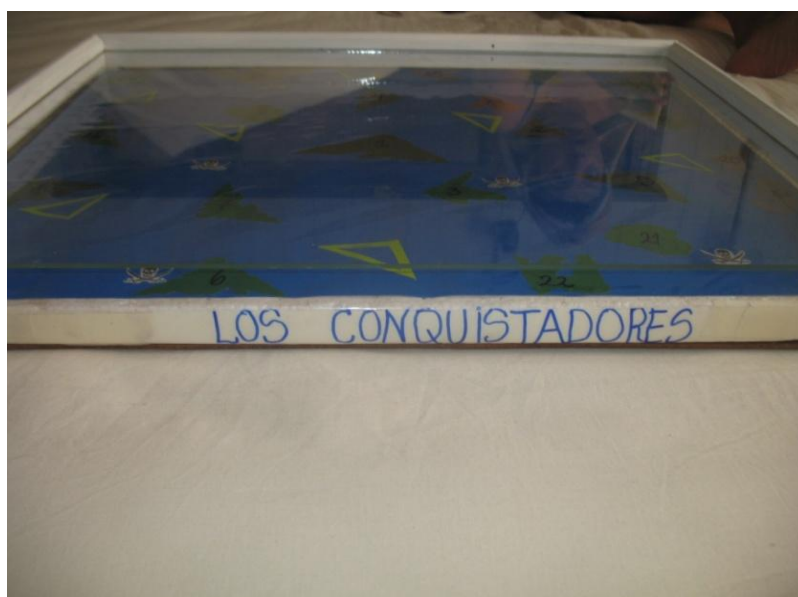
Estas son algunas imágenes referenciales del prototipo de juego diseñado en esta propuesta didáctica. Dejar claro que estas imágenes están sujetas a cambios pues el diseño del juego aun está en evolución.



*Figura 1:
"Imagen tablero de juego"*



*Figura 2:
"Imagen tablero de juego"*



*Figura 3:
"Imagen frontal del tablero de juego"*



*Figura 4:
"Imagen tablero de juego"*



Figura 5:
"Imagen superior del tablero de juego"



Figura 6:
"Imagen superior del tablero de juego"

Cuestionario sobre las apreciaciones del juego.

Nombre: _____ curso: _____

- 1. Describa al menos 3 aspectos o apreciaciones positivos del juego que acabas de utilizar.**

- 2. Nombre al menos 3 aspectos o apreciaciones negativas del juego que acabas de utilizar.**

- 3. ¿Crees que el juego te permite tener algún acercamiento a los conceptos: simetría Axial, rotación y traslación**

- 4. ¿Crees que puede utilizarse con fines educativos este juego?.**

