Universidad de Valparaíso

CHILE

Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas

Caracterización de los razonamientos deductivos involucrados en las argumentaciones relativas a ángulos del centro e inscritos en una circunferencia contenidos en textos escolares de Segundo Año Medio y comprensión de los estudiantes de ese nivel en la lectura de las demostraciones desarrolladas en los textos usados por ellos

Memoria para optar al Título Profesional de Profesor de Matemática
Mención Didáctica

Presentada por:

Álvaro Bustos Rubilar
Álvaro Campusano González

Profesora Guía: Gladys González Cornejo

Valparaíso, **Diciembre 2011**

Tabla de Contenidos **Pág.**

1. Introducción 5

1.1 Objetivos de Investigación. 8

1.1.1 Objetivo General. 8

1.1.2 Objetivos Específicos. 8

2. Marco Teórico. 9

2.1 ¿Qué es demostrar en Matemática?. 9

2.2 Razonamiento. 11

2.3 Sobre el Razonamiento Deductivo. 16

2.4 Rol de la figura en Geometría. 17

2.5 Fundamentos Matemáticos. 20

3. Metodología. 27

3.1 Diseño y Contexto de la Investigación. 27

3.2 El Análisis de Textos . . . 27

3.2.1 Selección de los Textos Escolares. 27

3.2.2 Pauta utilizada en el Análisis de Textos 29

3.3 Diseño del cuestionario de actividades propuestas a los estudiantes . 31

3.3.1 Selección de los Estudiante 31

3.4 Procedimientos realizados en la aplicación del cuestionario de actividades y lectura por parte de los estudiantes de las demostraciones presentadas en los textos 32

4. Análisis de Textos 34

4.1 Texto Santillana: Edición Especial para el Ministerio de Educación . 34

4.1.1 Demostraciones del Teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia. 34

4.1.2 Actividades Propuestas. 48
4.2 Texto Santillana 88
4.2.1 Demostraciones del Teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia. 88
4.2.2 Actividades Propuestas 101
4.3 Texto Ediciones SM. 197
4.3.1 Demostración del Teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia. 197
4.3.2 Actividades Propuestas 205
4.4 Texto Mare Nostrum. 249
4.4.1 Demostración del Teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia. 249
Actividades Propuestas 256

5. Diseño del cuestionario de actividades propuestas a los estudiantes . 309

5.1 Selección de las actividades propuestas a los estudiantes . . 309
5.2 Selección de las actividades del texto Santillana: Edición Especial para el Ministerio de Educación 309
5.3 Selección de las actividades del texto Santillana . . . 313

6. Estudio de las producciones de las actividades propuestas a los estudiantes 319

6.1 Producciones del grupo de estudiante que usa el texto Santillana: Edición Especial para el Ministerio de Educación . . . 320
6.1.1 Estudio de las producciones del par de estudiantes de buen rendimiento 321
6.1.2 Estudio de las producciones del par de estudiantes de rendimiento medio 331
6.2 Producciones del grupo de estudiantes que usa el Texto Santillana 338
6.2.1 Estudio de las producciones del par de estudiantes de buen

rendimiento 338
6.2.2 Estudio de las producciones del par de estudiantes de rendimiento medio 357

7. Comprensión de los estudiantes en la lectura de demostraciones desarrolladas en los textos referentes al Teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia 367

7.1 Grupo de estudiantes que usa el texto Santillana: Edición Especial para el Ministerio de Educación 367
7.1.1 Par de estudiantes de buen rendimiento 367
7.1.2 Par de estudiantes de rendimiento medio. . . . 376
7.2 Grupo de estudiantes que usa el texto Santillana. . . . 383
7.2.1 Par de estudiantes de buen rendimiento. . . . 383
7.2.2 Par de estudiantes de rendimiento medio . . . 389

8. Conclusiones 394

9. Referencias Bibliográficas 401

Apéndice A Cuestionario de actividades propuestas a los estudiantes.

Apéndice B Diálogos de las producciones del cuestionario de actividades propuestas a los estudiantes.

Apéndice C Demostraciones del teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia expuestas a los estudiantes para su lectura.

Apéndice D Diálogos producidos por los estudiantes durante la lectura de las demostraciones desarrolladas en los textos referentes al teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia.

1. Introducción

Los resultados logrados por los estudiantes chilenos en pruebas de nivel nacional e internacional han reflejado insuficiencias en el aprendizaje de la matemática. Según el informe “Resultados Nacionales SIMCE 2008”, el puntaje promedio nacional en matemáticas fue de 250 puntos, dándose los puntajes más destacables en el grupo socioeconómico alto, correspondientes a establecimientos particulares pagados, 323 puntos, 254 en particulares subvencionaos y 231 en establecimientos municipales.

Además, cabe destacar que en una de las preguntas de desarrollo, la número 6 del “Informe de Resultados para Docentes y Directivos 2008”, formulada en la prueba SIMCE 2008, donde se espera verificar si el alumno domina los criterios de congruencia junto con el teorema de Pitágoras aplicándolos a una figura geométrica compuesta. El estudiante, en una primera etapa para abordad la pregunta, debe aplicar el teorema de Pitágoras y posteriormente, en una segunda etapa, algún criterio de congruencia de triángulos. Requiriendo un razonamiento por parte del alumno entre cada una de las fases del desarrollo del ejercicio. A nivel nacional, solo un 2% de los estudiantes respondió correctamente a la pregunta y un 25% obtuvo una respuesta parcialmente correcta, mientras que un 70% contesto en forma errada y un 3% omitió la pregunta.

En la misma línea, el informe “PISA 2006: Rendimiento de estudiantes de 15 años en Ciencias, Lectura y Matemáticas”, promovida por la OCDE (Organización para la Cooperación y Desarrollo Económico) arrojo resultados similares a lo obtenidos en el SIMCE 2008, que demuestra a nivel internacional el bajo rendimiento en el sector de matemática, situado por debajo de la enseñanza de las ciencias y la lectura. Estos revelan que Chile se encuentra por debajo del promedio internacional (498 puntos), obteniendo un puntaje de 411 puntos. De un total de 57 países participantes, 42 obtuvieron un puntaje significativamente superior a Chile, nueve por debajo y cinco un puntaje similar.

Cabe destacar que la prueba PISA también arrojo resultados respecto a la brecha socioeconómica y cultural de los estudiantes chilenos, pues aquellos estudiantes pertenecientes a un nivel socioeconómico y cultural alto obtuvieron mejores resultados (498 puntos promedio) en comparación con el nivel socioeconómico y cultural bajo (355 puntos promedio).

Los resultados de la prueba PISA revelan que los estudiantes chilenos sólo son capaces de resolver problemas en contextos familiares. En los cuales la información se da de manera explícita. Pueden obtener información y llevar a cabo sólo procedimientos rutinarios. (PISA 2006: Rendimiento de estudiantes de 15 años en Ciencias, Lectura y Matemáticas)

Ante los bajos resultados obtenidos, en pruebas nacionales e internacionales, las autoridades educativas del país han propuesto diversas medidas para dar una solución. Generan recursos para apoyar a los profesores en su gestión docente (Marco Curricular, Mapas de progreso, entrega de textos escolares) con la finalidad de fortalecer y mejorar el aprendizaje en matemática.

En el Marco Curricular el razonamiento matemático se aborda en forma transversal en los cuatro ejes; Números, Álgebra, Geometría y Datos y Azar. El cual se da a través del desarrollo de habilidades como; la formulación de conjeturas, formulación de argumentos y manejo de diversas formas para verificar la validez de una conjetura o un procedimiento.

En los Mapas de Progreso del Aprendizaje al igual que en el Marco Curricular se trata el razonamiento matemático como una dimensión transversal, pues éste, está descrito como objetivo de aprendizaje en los cuatro Mapas de progreso correspondientes al sector de matemática; Números y Operaciones, Álgebra, Geometría y Datos y Azar.

En el mapa Números y Operaciones está presente involucrando habilidades relacionadas con la selección, aplicación y evaluación de estrategias para la resolución de problemas, argumentando y comunicando estrategias y resultados. En Álgebra mediante la descripción de regularidades numéricas, la descripción y modelamiento de situaciones fenómeno, argumentando la validez de proposiciones utilizando herramientas matemáticas. En Geometría se presenta en la formulación o refutación de conjeturas, así como en la capacidad de resolver problemas geométricos y demostrar teoremas argumentando sobre sus procedimientos y resultados. Por último, en el Mapa Datos y Azar se involucran habilidades para reconocer patrones, formular conjeturas y preguntas pertinentes, argumentando si las respuestas a las preguntas formuladas son validas y responden a dichas conjeturas. Cabe destacar que en los cuatro Mapas de Progreso del sector de matemáticas está presente la argumentación en el razonamiento, dimensión transversal como se menciono anteriormente.

Por otra parte en el documento "Requerimientos Técnicos Textos Escolares 2012" para la elaboración de textos escolares entregados por el Ministerio de Educación, se solicita que en estos debe estar presente en forma transversal el razonamiento matemático en el desarrollo y tratamiento de los distintos contenidos indicados en los niveles establecidos por el Marco Curricular.

Dado el énfasis que da el Ministerio de Educación en la entrega de textos escolares para el apoyo en el aprendizaje de matemática consideramos relevante investigar la forma en que estos contribuyen al desarrollo de habilidades que involucran razonamiento matemático por parte de los estudiantes y en las argumentaciones que estos sean capaces de dar en diferentes contextos. En atención a lo anterior se plantean las siguientes interrogantes:

1. ¿Qué tipos de razonamiento involucran las demostraciones y actividades contenidas en textos escolares?

2. ¿Los estudiantes siguen comprensivamente paso a paso las demostraciones desarrolladas en textos escolares usados por ellos? Y ¿Pueden realizar en forma autónoma demostraciones o actividades de validación propuestas en ellos?

1.1 Objetivos de investigación

1.1.1 Objetivo General

Caracterizar los razonamientos deductivos involucrados en las argumentaciones relativas a ángulos del centro e inscritos en una circunferencia contenidos en textos escolares de Segundo Año Medio e indagar si estudiantes de ese nivel los siguen comprensivamente.

1.1.2 Objetivos Específicos

1. Analizar textos escolares utilizados en el tratamiento del ángulo del centro e inscrito en una circunferencia en Segundo Año Medio con el propósito de caracterizar los razonamientos deductivos explícitos en ellos y los involucrados en actividades propuestas al estudiante.

2. Diseñar y aplicar un cuestionario que permita revelar información sobre las argumentaciones deductivas de estudiantes de Segundo Año Medio, al confrontar situaciones relativas a relaciones métricas entre ángulos inscritos y ángulos del centro de una circunferencia.

3. Estudiar las producciones obtenidas de los estudiantes al aplicar el cuestionario.

4. Indagar si estudiantes participes en la investigación siguen comprensivamente paso a paso las demostraciones relativas a ángulos del centro e inscritos en una circunferencia contenidas en textos escolares usados por ellos.

2. Marco Teórico

Cuando se reflexiona respecto al proceso de enseñanza-aprendizaje de la Educación Matemática, una de las mayores complejidades con las que se encuentra, son las demostraciones. Autores como Balacheff y Duval han desarrollado teorías que han ayudado a esclarecer el significado de *"Demostrar en Matemática"*.

A partir de las visiones planteadas por autores como Balacheff y Duval, se abordaran los conceptos de demostración, argumentación y razonamiento, con el objetivo de identificar que elementos los hacen parecidos y en qué se diferencian. Seguido a esto, se mostraran diversos tipos y funciones de la demostración, con el fin de ampliar el concepto que tradicionalmente se tiene de esta, específicamente la "Demostración en Geometría".

2.1 ¿Qué es demostrar en matemática?

Según Crespo, R. (2005), Balacheff aborda la demostración a partir de una explicación, la cual, desde ideas primitivas conduce a una prueba y posteriormente a la demostración. Para Balacheff (1982), una explicación es un discurso que pretende hacer inteligible el carácter de verdad de alguna proposición con la finalidad de convencerse uno mismo o a otros. Según Balacheff (1982) una prueba consiste en un conjunto de explicaciones aceptadas sobre alguna proposición, las cuales están respaldadas por alguna comunidad en algún momento dado. (Crespo, 2005)

Se debe tener en cuenta que tanto la explicación y la prueba que nos define Balacheff (1982), pueden variar en el tiempo y lugar en el que se hayan aceptado, tanto para una persona como para alguna comunidad que las respalde. Cuando surge el debate acerca de la veracidad de alguna prueba es necesaria la demostración. Para Balacheff (1982) una demostración posee una validación de carácter universal, independiente de la comunidad y discurso que pueda respaldar a alguna explicación o prueba. Este sostiene que una demostración se logra a través de un conjunto de reglas bien definidas ligadas unas con otras por medio de un proceso de deducción. (Crespo, 2005)

Balacheff (1982), hace mención al razonamiento, recalcando que es la habilidad de relacionar información para obtener nueva información, es decir, en el ámbito demostrativo sería tomar premisas validadas, relacionarlas, y concluir en alguna nueva premisa también de carácter valido. (Crespo, 2005)

Duval (1999), relaciona la demostración con la argumentación. Para este, la argumentación consiste en defender el carácter de verdad de alguna proposición. Distinto al de explicación, pues según Duval, la explicación es de carácter descriptivo de algún dato, fenómeno o resultado. (Crespo, 2005)

Duval (1999) indica que una argumentación no siempre puede ser considerada como una demostración, pues ello depende de la validez y orden lógico de los enunciados que se hayan utilizado en su composición. Este enfatiza que hay veces en que se puede argumentar sobre proposiciones falsas. Es por esto, que si una argumentación posee criterios de validez mediante un razonamiento valido, la argumentación puede ser considerada como una demostración. (Crespo, 2005)

El concepto de razonamiento valido, para Duval (1999) está relacionado con el de razonamiento deductivo. Es decir, es un concepto que se guía netamente por una secuencia de pasos lógicos. Ambos autores, Balacheff y Duval, mencionan en sus apartados al razonamiento como la habilidad para enlazar entre premisas mediante una secuencia de pasos lógicos validos para lograr una demostración. Dándole vital importancia al razonamiento en el proceso de deducción que se lleva a cabo en una demostración.

Según Crespo (2005) tanto Balacheff como Duval tienen coincidencias cuando se refieren a la demostración. "*Para ellos, una demostración es una secuencia de enunciados organizados según reglas determinadas.*" (Crespo, 2005, p. 40) Esto es, con la finalidad de validar en forma universal e irrefutable alguna proposición independiente del contexto en el que se trate. De ahí que la demostración, en el proceso enseñanza-aprendizaje sea tan importante, debido principalmente a que esta no es solo un aprendizaje propio de la disciplina matemática.

2.2 Razonamiento

Previo a realizar un análisis funcional del razonamiento es necesario tener en cuenta la estructura y sentido de una proposición. En matemática, según la Real Academia Española (2010), se entiende por proposición a todo enunciado cuya verdad está demostrada o se pretende demostrar. El sentido de una proposición no queda determinado por el contenido semántico de esta, más bien, el sentido depende tanto de su valor epistémico como de su valor lógico o de verdad. (Duval, 2004)

El valor epistémico, según Duval (2004), se refiere al grado de aceptación que tenga una persona respecto a sus conocimientos previos, experiencias o creencias referentes a la proposición. Duval lo define como "*el grado de fiabilidad que posee lo que se enuncia en la proposición*" (2004, p.193), pues, este puede ser verosímil, inverosímil, evidente, plausible o posible, etc. Por consiguiente, el valor epistémico de una proposición puede ser diferente para distintas personas.

El valor lógico o de verdad hace referencia a si la proposición es verdadera o falsa, a diferencia del valor epistémico, éste es determinado por medio de procedimiento validos específicos y confiables. Los dos grandes procedimiento considerados para determinar el valor de verdad de una proposición son la percepción y lo relativo al razonamiento; la primera, puede ser inmediata o bien sometida a experimentos para así ser probada, mientras que la segunda, según Duval, "*puede estar situada deductivamente en una serie de proposiciones, donde las proposiciones anteriores tienen un valor de verdad*" (2004, p.194), esto es, tomando proposiciones que ya poseen un valor lógico de verdad y relacionándolas en forma deductiva.

El valor epistémico o lógico de una proposición puede ser explicitado, según Russell y Carnap en Duval (2004), esto se puede dar a través de las llamadas actitudes proposicionales mediante frases como "yo creo que…", "se admite que…", "estoy seguro que…", "es evidente que…", "es imposible que" puede ser explicitado el valor epistémico que una persona tenga respecto a alguna proposición dada. Mientras que frases como: "es cierto que…", "es falso que…", "aún no se ha demostrado que…", explicitan el valor lógico o de verdad de una proposición.

Una proposición, además de poseer sentido, también tiene estatus, esto es, según Duval (2004) "*lo que determina su lugar en la organización discursiva de un conjunto de proposiciones*" (p. 197), en matemática el estatus de una proposición puede ser: axioma, teorema, definición, regla, hipótesis, etc. En la misma línea afirma que una proposición no puede estar enunciada en un marco teórico (conjunto de estatus teóricos) sin que tome algún estatus. Además, éste sostiene que un paso de razonamiento se caracteriza por un conjunto de estatus operatorios (premisa, tercer-enunciado). Según este "*el razonamiento es el pasaje de las premisas a la conclusión*" (2004, p. 197). Tal pasaje se lleva a cabo mediante una tercera proposición, la cual pertenece al cuerpo del marco teórico.

Respecto al razonamiento matemático, Duval (2004) sostiene que una proposición posee doble estatus; teórico y operatorio. El primero, del cual se pueden obtener los medios necesarios para lograr demostrar o probar la veracidad de la proposición. El segundo hace referencia al paso del razonamiento, respecto a la movilidad de las proposiciones. Duval dice que "*el estatus teórico de una proposición determina su estatus operatorio posible para un paso de razonamiento, e induce un valor epistémico propio independiente del valor inducido por la comprensión del contenido de la proposición*" (2004, p. 198), el valor epistémico propio del cual se habla es el valor epistémico teórico. Mientras que el otro es el valor epistémico semántico de una proposición. Visto de otra forma, cuando se enuncia una proposición en un marco teórico, el valor epistémico teórico predomina o suplanta al valor epistémico semántico. Logrando así la modificación del sentido de la proposición.

Según Duval (2004) el gran problema que presentan los alumnos, es que para ellos hay un solo valor epistémico, el cual surge de la comprensión semántica de la proposición, y este valor será aun mas fuerte si existe alguna figura que acompañe a la proposición. En consecuencia, los alumnos asocian el valor epistémico semántico de la proposición con su valor de verdad.

Respecto a lo dicho anteriormente, Duval (2004) enfatiza en cómo lograr la convicción del sujeto respecto al cambio del sentido de una proposición. Este plantea tres fases (antes, durante y después) en la transformación del sentido que un sujeto tenga sobre una proposición a través de un razonamiento valido, realizado por el mismo sujeto. Es decir, lograr que el valor epistémico teórico predomine sobre el valor epistémico semántico que posea un sujeto de una proposición.

Fase 1 (antes):

Una proposición enunciada en un estatus teórico de conjetura o pregunta tiene un valor epistémico teórico asociado a su valor lógico o de verdad. En otras palabras, si un sujeto no sabe diferenciar entre el valor epistémico semántico y el teórico de una proposición, su exigencia por determinar el valor de verdad de la proposición será nula, pues, éste al guiarse por el contenido semántico de la proposición lo más probable que no considere necesario la demostración ya que esta le parecerá obvia, o evidente, Duval (2004) afirma al respecto que "*el reconocimiento del valor verdadero para una proposición elimina la exigencia de su prueba*" (p. 201) , lo que conlleva a que no exista razonamiento por parte del sujeto. Considerando lo anterior, cuando se enuncie una proposición, el sujeto debe tener claridad respecto a las diferencias entre el valor epistémico semántico, inducido por el contenido de la proposición, y su valor epistémico teórico asociado al estatus teórico de esta. (Duval, 2004)

Fase 2 (Durante): "*La organización de las proposiciones en pasos de deducción se hace según su estatus operatorio, el cual es determinado por el estatus teórico*." (Duval, 2004, p. 202)

Por consiguiente, según Duval (2004), el pasaje entre las premisas de una proposición hacia su conclusión se lleva a cabo por medio de un tercer enunciado, mediante un proceso de extracción. La extracción es la deducción que se realiza a partir del tercer enunciado, permitiendo al sujeto llegar a una conclusión y así obtener el valor epistémico teórico apodíctico de la proposición. (Duval, 2004)

Ejemplo de lo anterior se puede observar en el esquema 2.1. Un estudiante para llegar de las premisas a la conclusión utiliza como tercer enunciado el teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia, en este ha de verificar las premisas de las cuales dispone, para luego, extraer desde el tercer enunciado la conclusión.

TERCER ENUNCIADO

Si un ángulo inscrito y un ángulo del centro de una circunferencia subtienden el mismo arco. Entonces, la medida del ángulo del centro será el doble de la medida del ángulo inscrito.

PREMISAS

(1) $\sphericalangle ACB$, ángulo inscrito que subtiende el arco$\widehat{AB}$.
(2) $\sphericalangle AOB$, ángulo del centro que subtiende el arco $\widehat{AB}$.
(3) $\sphericalangle ACB$y $\sphericalangle AOB$ subtienden el mismo arco, el arco $\widehat{AB}$.

CONCLUSION

La medida del $\sphericalangle AOB$ es el doble de la medida del $\sphericalangle ACB$.

Esquema 2.1: Proceso que caracteriza el pasaje que un estudiante realiza para llegar desde las premisas a la conclusión por medio de un tercer enunciado.

Duval (2004), enfatiza en que es importante la diferenciación entre los pasos de razonamiento centrados en el estatus operatorio de una proposición con los centrados en el contenido de esta. Si un sujeto centra sus razonamientos en el contenido de la proposición, el sentido de ésta no tomara un valor apodíctico para el sujeto, ya que los pasos realizados no corresponden a una deducción, sino más bien a los de una argumentación.

Fase 3 (Después): "*Lo que produce un razonamiento valido no es la verdad de la conclusión sino su necesidad*" (Duval, 2004, p. 202)

Con esto Duval (2004) quiere decir que el razonamiento que se lleva a cabo en el pasaje del valor epistémico semántico (de lo evidente) al valor epistémico teórico (a lo apodíctico) no solo demuestra, sino más bien, ha de realizar un acto de convencimiento en el sujeto que realiza el razonamiento. Dicho de otra forma, cuando a un sujeto se le enuncia una proposición en un marco teórico, este ha de tener la necesidad de convencimiento de tal proposición y no la de demostrar por demostrar.

Duval (2004) sostiene en que hay veces en que se enuncian proposiciones en las cuales no queda claro lo que quieren decir. En tales casos, el sujeto acepta el valor lógico basado en la confianza de quien enuncia la proposición, independiente de que realice los pasos lógicos correspondientes para determinar el valor de verdad. En consecuencia, tales pasos realizados no se perciben como justificaciones para el sujeto, dándole, según Duval (2004), una aceptación totalmente neutra a la proposición.

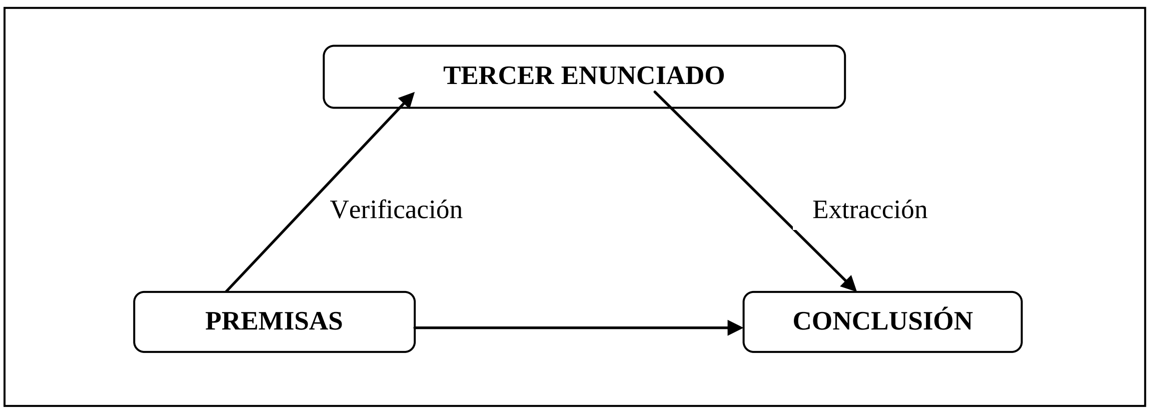
Cuando una proposición no es enunciada en un contexto teórico, esta carecerá de un estatus teórico, en consecuencia, el estatus operatorio no estará fijado previamente. En tales casos, el razonamiento se ha de centrar en el contenido semántico. Este tipo de razonamiento es denominado argumentación.

Según Duval (2004) la naturaleza de la argumentación tiene como propósito modificar el grado de convicción que tenga un sujeto respecto a alguna proposición, pudiendo esta ser aceptada o rechazada. Dicho de otra forma, el propósito de la argumentación es hacer cambiar el valor epistémico semántico de una proposición. Duval indica dos factores en el proceso de la argumentación: "*el 'peso' de los argumentos desarrollados y el valor epistémico semántico que se quiere hacer reconocer (Duval, 1992)*" (Duval, 2004, p.204). Se ha de tener en cuenta que la modificación del valor epistémico semántico de una proposición no modifica su valor de verdad, pues la argumentación solo busca convencer y no probar.

Según Duval (2004) el razonamiento es la forma discursiva orientada hacia un enunciado-objetivo con la finalidad de lograr modificar el valor epistémico semántico y teórico que una proposición tenga en un determinado contexto de conocimiento o medio social. Por consiguiente, se puede modificar el valor de verdad de una proposición cuando se dan condiciones particulares en la organización discursiva.

2.3 Sobre el Razonamiento Deductivo

Existen varias formas de razonamiento, (deductivo, por el absurdo, silogismo clásico, argumentación, etc.), pero la presente investigación solo se centrará en el razonamiento deductivo y las argumentaciones que este involucra. El razonamiento deductivo también llamado modus ponens (Esquema 2.1), consiste en la extracción de una conclusión a partir de un tercer enunciado, transformando la conclusión en premisa para un nuevo paso de razonamiento, esto quiere decir que en un razonamiento deductivo está compuesto por pasos de razonamiento o pasos de deducción del IV tipo, siguiendo la clasificación que Duval (2004) les da a los distintos pasos de razonamiento posibles en la expansión discursiva de una o varias proposiciones.



Esquema 2.1: Organización de un paso de razonamiento de tipo modus ponens (Tipo IV). El tercer enunciado corresponde al estatus teórico de la proposición (definición, propiedad, axioma o teorema). Las premisas son las proposiciones antecedentes que se deben verificar en el tercer enunciado y la conclusión, la proposición consecuente, la cual se debe extraer del tercer enunciado.

Duval (2004) sostiene que un paso de deducción, en el cual se utiliza un tercer enunciado teórico, está compuesto por dos partes funcionalmente distintas: Proposición (es) antecedente (es), la cual se debe verificar, y una proposición consecuente, la cual se ha de extraer luego de verificar las premisas en el tercer enunciado. En otras palabras, un paso de deducción con estatus operatorio y recurso a un tercer enunciado (paso de deducción del IV tipo según Duval) consta de dos operaciones: una de verificación de las premisas y otra de extracción de una conclusión a partir del tercer enunciado. Hay que hacer notar que cuando en una proposición una de las premisas coincide con una de las proposiciones del tercer enunciado, el paso de deducción es inmediato y de carácter algorítmico. Además, hay que señalar que Duval (2004) ocupa el término encadenamiento de los pasos de razonamiento, cuando la conclusión del primer paso se retoma como premisa para el siguiente paso de razonamiento.

2.4 Rol de la figura en Geometría

La figura cumple un papel esencial en el desarrollo y representación de problemas geométricos. En muchas ocasiones permiten conseguir estrategias para la resolución de problemas en geometría. La acción para lograr la solución o respuesta de un problema en geometría involucra la actividad de coordinar los pasos de razonamiento y visualización.
Esta última se puede definir como la acción por la cual se realiza un traspaso de ciertos conceptos, objetos, representaciones, procesos a una representación visual o viceversa. Sin embargo, se debe considerar que el proceso de visualización no es realizado de la misma forma por los sujetos en la resolución de problemas, es decir, la representación mental de un dibujo en una actividad geométrica no será la misma para cada individuo ya que existen distintas afirmaciones matemáticas involucradas que harán variar estas acciones tales como: las propiedades, teoremas, definiciones, relaciones etc. En este sentido una figura se pude representar mediante configuraciones geométricas que están compuestas de otras figuras más simples (subconfiguraciones) las cuales también están directamente relacionadas a distintas aserciones matemáticas. Torregrosa G. y Quesada H. (2007).

En la misma línea, los individuos pueden realizar distintas acciones sobre una configuración específica las cuales pueden tener diferentes alcances en la resolución de un problema geométrico, por lo tanto es importante considerar otro concepto que está directamente ligado al proceso de visualización, la aprehensión. Torregrosa G. y Quesada H. (2007).

La aprehensión corresponde a la capacidad que tiene un individuo para captar la forma de las cosas sin afirmar ni negar. En el mismo sentido es importante destacar la acción de transferencia que está implicada directamente en el proceso de visualización.

Ya que al incluir características de este concepto podemos obtener distintas formas de aprehender, es decir, ver la figura matemáticamente. Torregrosa G. y Quesada H. (2007).

Según Duval (1998), un dibujo nos permite ver figuras en distintas dimensiones, y pueden representar a diversas figuras (mesa, escalera, silla etc.). Pero también podemos ver configuraciones como triángulos, cuadrados, rectángulos, circunferencias etc. Cuyas propiedades dan paso a la intervención de las matemáticas. De aquí, que Duval (1998) distingue tres tipos de aprehensión las cuales son: Aprehensión perceptiva, Aprehensión discursiva, Aprehensión operativa, las cuales se definen a continuación según Torregrosa G. y Quesada H. (2007, pp. 10 - 11).

Aprehensión perceptiva

La aprehensión perceptiva se caracteriza como la identificación simple de una configuración. Es la primera en ser usada a lo largo de toda la etapa educativa y también la primera que aparece en el desarrollo cognitivo del alumno. Torregrosa G. y Quesada H. (2007)

Aprehensión discursiva

Según Torregrosa G. y Quesada H. (2007), se llama aprehensión discursiva a la acción cognitiva que produce una asociación de la configuración identificada con afirmaciones matemáticas (definiciones, teoremas, axiomas). Tal vínculo puede realizarse de dos maneras, según las direcciones de la transferencia realizada, a la que se le denomina cambio de anclaje:

a) ***Del anclaje visual al anclaje discursivo:*** "Proceso mediante el cual se relaciona la configuración de un dibujo a una afirmación matemática". Barreto J. (2008)

b) ***Del anclaje discursivo al anclaje visual:*** "Se refiere al proceso de relacionar una determinada afirmación matemática a una configuración de un dibujo". Barreto. J. (2008)

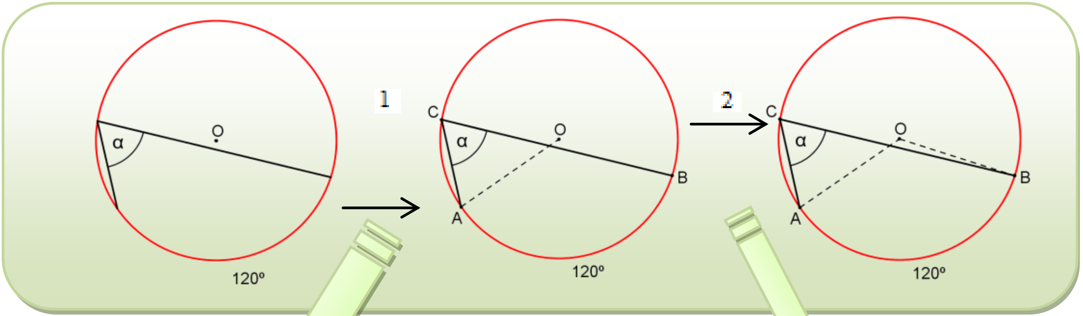
Aprehensión operativa

Torregrosa G. y Quesada H. (2007) sostienen que la aprehensión operativa se produce cuando el sujeto lleva a cabo alguna modificación a la configuración inicial para resolver un problema geométrico. Este cambio puede ser de dos tipos:

a) ***Aprehensión operativa de cambio figural:*** "Cuando a la configuración inicial se le añaden (quitan) nuevos elementos geométricos (nuevas subconfiguraciones)" Barreto J. (2008).

b) ***Aprehensión operativa de reconfiguración:*** "Es cuando las subconfiguraciones iníciales se manipulan como las piezas de un puzzle". Barreto J. (2008).

Lo expuesto anteriormente se puede observar en el esquema 2.2. Donde el estudiante modifica la figura inicial, En primer lugar le asigna letras a la figura para mejorar su comprensión y posteriormente traza los segmentos AO y BO es decir, realiza una aprehensión operativa de cambio figural. Posteriormente para registrar las distintas afirmaciones debe realizar un cambio de anclaje visual a discursivo. Mediante una aprehensión discursiva.



APREHENSION OPERATIVA DE CAMBIO FIGURAL

(1) Se traza el segmento AO.
(2) Se traza el segmento BO.

APREHENSION DISCURSIVA

(a) El $\sphericalangle ACB$ es un ángulo inscrito que subtiende al arco $\overset{\frown}{AB}$.
(b) El $\sphericalangle AOB$ es un ángulo del centro que subtiende al arco $\overset{\frown}{AB}$.
…..

Esquema 2.2: Proceso que ejemplifica las distintas modificaciones y discursos que realiza el alumno respecto a la figura.

2.5 Fundamentos Matemáticos

El teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia afirma que el "*ángulo del centro mide el doble del ángulo inscrito que subtiende el mismo arco*".

Existen tres situaciones en las cuales está presente el Teorema del ángulo del centro e inscrito de una circunferencia. Dos de estas, es cuando el centro de la circunferencia se encuentra al interior o exterior de la región limitada por los lados del ángulo inscrito. La restante es cuando el centro de la circunferencia esta sobre uno de los lados del ángulo inscrito.

Hay que hacer notar que para la clasificación de las situaciones en las cuales está presente el teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia se ha optado por seguir el mismo orden en que las presentan los textos escolares a analizar. A continuación se detalla cada uno de los casos.

Primer caso del teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia

El centro de la circunferencia está en el interior de la región limitada por los lados del ángulo inscrito.

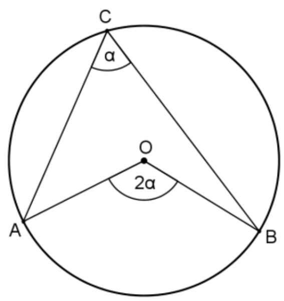


Figura 3.40

Demostración:

Hipótesis:
- $\sphericalangle ACB$, ángulo inscrito de la circunferencia.
- $\sphericalangle AOB$, ángulo del centro de la circunferencia.
- $\sphericalangle ACB$ y $\sphericalangle AOB$ subtienden el mismo arco, el arco AB.

Tesis: $med\sphericalangle AOB = 2 \cdot med\sphericalangle ACB$

1. Se traza el diámetro de la circunferencia que para por el vértice C. (Figura 3.41)

2. La intersección del diámetro con la circunferencia determina el punto D. (Figura 3.41)

3. Al trazar el diámetro se forman los triángulos AOC y BOC. (Figura 3.41)

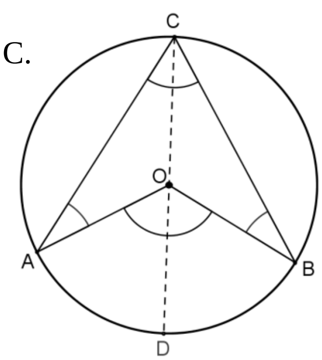


Figura 3.41

4. Como los lados del ΔAOC, $\overline{OA}$ y $\overline{OC}$, son radios de la circunferencia, estos son congruentes. Es decir, el ΔAOC tiene dos lados congruentes. Por lo tanto es un triángulo isósceles de base $\overline{AC}$.

5. Como los lados del ΔBOC, $\overline{OB}$ y $\overline{OC}$, son radios de la circunferencia, estos son congruentes. Es decir, el ΔBOC tiene dos lados congruentes. Por lo tanto es un triángulo isósceles de base $\overline{BC}$.

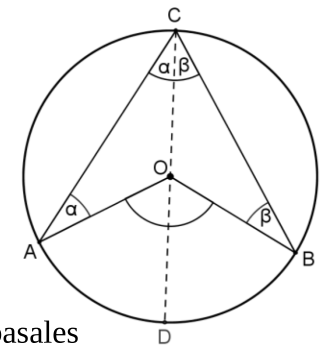


Figura 3.42

6. Sean α y β la medida de los ángulos ACO y BCO respectivamente.

7. Los ángulos ACO y OAC son congruentes, ya que estos son ángulos basales del triángulo isósceles AOC. (Figura 3.42)

8. Los ángulos BCO y OBC son congruentes, ya que estos son ángulos basales del triángulo isósceles BOC. (Figura 3.42)

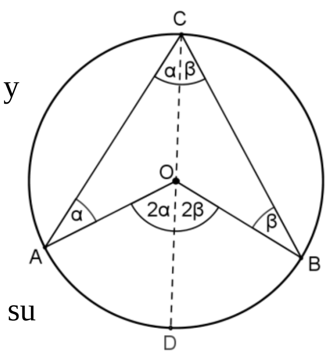


Figura 3.43

9. La $med\sphericalangle AOD = 2\alpha$, ya que el $\sphericalangle AOD$ es un ángulo exterior del ΔAOC y su medida es igual a la suma de las medidas de los ángulos interiores del ΔAOC no adyacentes al $\sphericalangle AOD$. (Figura 3.43)

10. La $med\sphericalangle DOB = 2\beta$, ya que el $\sphericalangle DOB$ es un ángulo exterior del ΔBOC y su medida es igual a la suma de las medidas de los ángulos interiores del ΔBOC no adyacentes al $\sphericalangle DOB$. (Figura 3.43)
11. La medida del ángulo inscrito ACB es $\alpha + \beta$. (Figura 3.43)

12. La medida del ángulo del centro AOB es $2\alpha + 2\beta$. (Figura 3.43)

$$med\sphericalangle AOB = 2\alpha + 2\beta$$

$$med\sphericalangle AOB = 2(\alpha + \beta)$$

$$med\sphericalangle AOB = 2 \cdot med\sphericalangle ACB$$

Por lo tanto, la $med\sphericalangle AOB = 2 \cdot med\sphericalangle ACB$.

Segundo caso del teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia

El centro de la circunferencia se encuentra al exterior de la región limitada por los lados del ángulo inscrito.

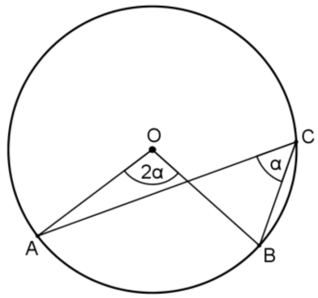


Figura 3.44

Demostración:

Hipótesis: - $\sphericalangle ACB$, ángulo inscrito de la circunferencia.

- $\sphericalangle AOB$, ángulo del centro de la circunferencia.
- $\sphericalangle ACB$ y $\sphericalangle AOB$ subtienden el mismo arco, el arco AB.

Tesis: $med\sphericalangle AOB = 2 \cdot med\sphericalangle ACB$

1. Se traza el radio OC de la circunferencia. (Figura 3.45)

2. Al trazar el radio OC se forman los triángulos BOC y AOC. (Figura 3.45)

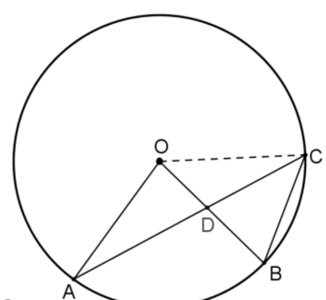


Figura 3.45

3. Como los lados del ΔBOC, $\overline{OB}$ y $\overline{OC}$, son radios de la circunferencia, estos son congruentes. Es decir, el ΔBOC tiene dos lados congruentes. Por lo tanto es un triángulo isósceles de base $\overline{BC}$.

4. Como los lados del ΔAOC, $\overline{OA}$ y $\overline{OC}$, son radios de la circunferencia, estos son congruentes. Es decir, el ΔAOC tiene dos lados congruentes. Por lo tanto es un triángulo isósceles de base $\overline{AC}$.

5. Sean α y β las medidas de los ángulos ACB y OCA respectivamente. (Figura 3.46)

$$med\sphericalangle ACB = \alpha \qquad \text{y} \qquad med\sphericalangle OCA = \beta$$

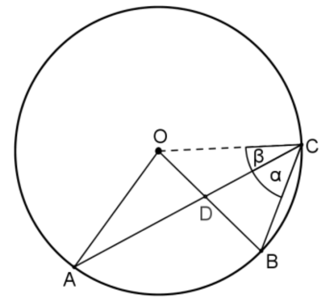


Figura 3.46

6. Los ángulos OCA y CAO son congruentes, ya que estos son ángulos basales del triángulo isósceles AOC. (Figura 3.47).

$$med\sphericalangle OCA = med\sphericalangle CAO = \beta$$

7. La $med\sphericalangle OCB = \alpha + \beta$ (Figura 3.47)

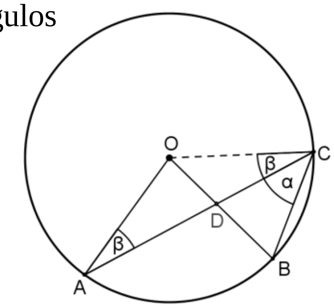


Figura 3.47

8. Los ángulos OCB y OBC son congruentes, ya que estos son ángulos basales del triángulo isósceles BOC. (Figura 3.48).

$$med\sphericalangle OCB = med\sphericalangle OBC = \alpha + \beta$$

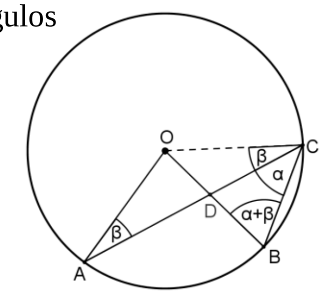


Figura 3.48

9. La $med\sphericalangle CDO = 2\alpha + \beta$, ya que el $\sphericalangle CDO$ es un ángulo exterior del ΔBDC y su medida es igual a la suma de las medidas de los ángulos interiores del ΔBDC no adyacentes al $\sphericalangle CDO$. (Figura 3.49)

10. El ángulo CDO es también un ángulo exterior del ΔAOD. (Figura 3.49)

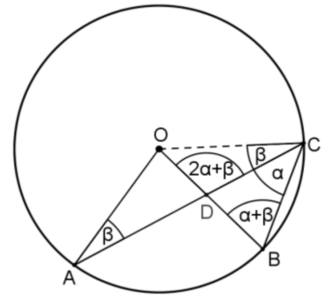


Figura 3.49

11. Como el $\sphericalangle CDO$ es un ángulo exterior del ΔAOD su medida es igual a la suma de las medidas de los ángulos interiores del triángulo AOD no adyacentes al $\sphericalangle CDO$.

$$med\sphericalangle AOB + med\sphericalangle CAO = med\sphericalangle CDO$$

$$med\sphericalangle AOB + \beta = 2\alpha + \beta$$

$$med\sphericalangle AOB = 2\alpha$$

$$med\sphericalangle AOB = 2 \cdot med\sphericalangle ACB$$

Por lo tanto, la $med\sphericalangle AOB = 2 \cdot med\sphericalangle ACB$.

Tercer caso del teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia

El centro de la circunferencia se encuentra sobre uno de los lados del ángulo inscrito.

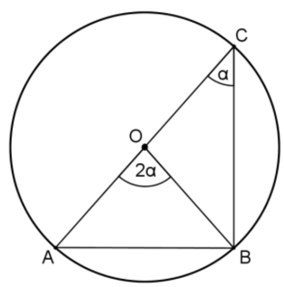


Figura 3.50

Demostración:

Hipótesis: - $\sphericalangle ACB$, ángulo inscrito de la circunferencia.
- $\sphericalangle AOB$, ángulo del centro de la circunferencia.
- $\sphericalangle ACB$ y $\sphericalangle AOB$ subtienden el mismo arco, el arco AB.

Tesis: $med\sphericalangle AOB = 2 \cdot med\sphericalangle ACB$

1. Como los lados del ΔBOC, $\overline{OB}$ y $\overline{OC}$, son radios de la circunferencia, estos son congruentes. Es decir, el ΔBOC tiene dos lados congruentes. Por lo tanto es isósceles de base $\overline{BC}$. (Figura 3.51)

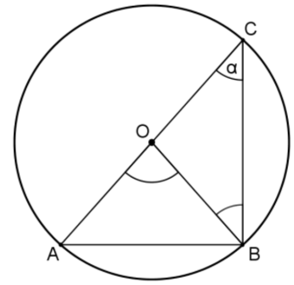


Figura 3.51

2. Sea α la medida del ángulo ACB. (Figura 3.51)

3. Los ángulos ACB y CBO son congruentes, ya que estos son ángulos basales del triángulo isósceles BOC. (Figura 3.52).

$$med\sphericalangle ACB = med\sphericalangle CBO = \alpha$$

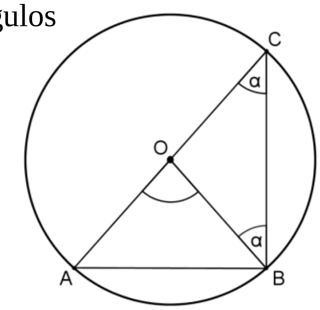


Figura 3.52

4. Como el $\sphericalangle AOB$ es un ángulo exterior del ΔBOC, su medida es igual a la suma de las medidas de los ángulos interiores del ΔBOC no adyacentes al $\sphericalangle AOB$. (Figura 3.53)

$$med\sphericalangle AOB = med\sphericalangle ACB + med\sphericalangle CBO$$

$$med\sphericalangle AOB = \alpha + \alpha$$

$$med\sphericalangle AOB = 2\alpha$$

$$med\sphericalangle AOB = 2 \cdot med\sphericalangle ACB$$

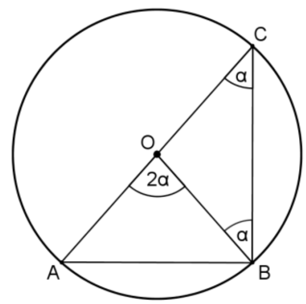


Figura 3.53

Por lo tanto, la $med\sphericalangle AOB = 2 \cdot med\sphericalangle ACB$.

3. Metodología

3.1 Diseño y Contexto de la Investigación

La investigación tiene un diseño cualitativo de estudio de casos-tipo y esta se enmarca en el nivel de Segundo Año de Educación Media, específicamente en el Teorema de ángulos inscritos y del centro de una circunferencia, contenido tratado en la unidad de ángulos en la circunferencia. En esta se han considerado los textos utilizados por los estudiantes del nivel, con la finalidad de tratar de caracterizar los razonamientos que hay en las demostraciones expuestas y actividades propuestas en estos. Además de caracterizar los razonamientos que los alumnos dan cuando resuelven las actividades propuestas por los textos junto con indagar si estos comprenden la lectura de las demostraciones desarrolladas en los textos escolares usados por ellos.

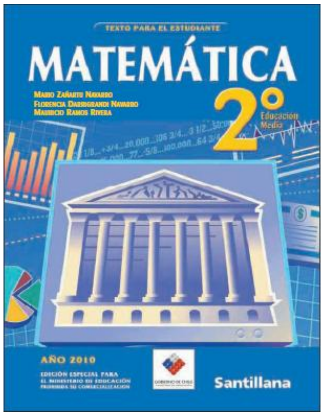
3.2 El Análisis de Textos

3.2.1 Selección de los Textos Escolares

Para determinar que textos escolares analizar, se realizo un sondeo en los establecimientos que imparten enseñanza media en las Comunas de Valparaíso, Viña del Mar y Quilpué. Con la finalidad de determinar los textos utilizados en la asignatura de Matemática en Segundo Año Medio de los distintos establecimientos de las comunas antes mencionadas.

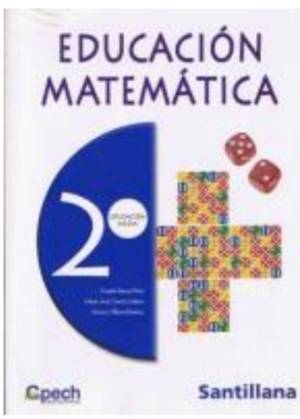
Los procedimientos para el sondeo, fueron comunicarse vía Mail, telefónica o personalmente con cada Unidad Técnica Pedagógica de los establecimientos de tales comunas. Además, se averiguo vía telefónica en las principales librerías regionales que libros correspondientes a Educación Matemática de Segundo Año Medio del subsector de matemática, se encuentran a la venta en sus respectivos catálogos.

Los textos escolares seleccionados para analizar son los siguientes:



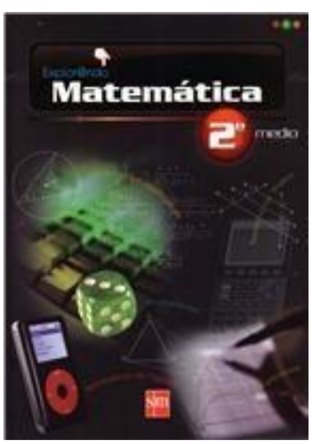
Texto: Matemática – 2º Educación Media
Edición: Edición Especial para el Ministerio de Educación
Año: 2010
Autores:
- Mario Zañartu Navarro
- Florencia Darrigrandi Navarro
- Mauricio Ramos Rivera

Editorial: Santillana
Páginas: 190 – 193



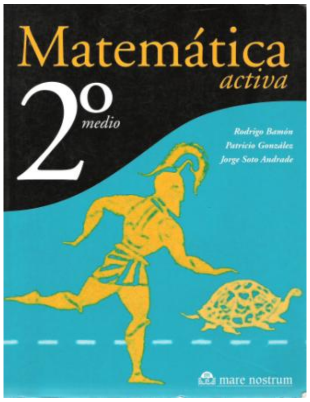
Texto: Educación Matemática – 2º Educación Media
Edición: Santillana
Año: 2005
Autores:
- Ángela Baeza Peña
- María José García Zattera
- Marcia Villena Ramírez

Editorial: Santillana
Páginas: 200 – 204



Texto: Explorando - Matemática 2º Medio
Edición: 2007 – Ediciones SM Chile S.A.
Año: 2007
Autores:
- María Victoria Martinez Videla
- Mauricio Aguilar Baeza
- Viviana López Fúster
- Pedro Marchant Olea

Editorial: SM
Páginas: 196 – 197



Texto: Matemática Activa 2º Medio

Edición: Mare Nostrum Ediciones

Año: Sin fecha

Autores:
- Rodrigo Bamón
- Patricio González
- Jorge Soto Andrade

Editorial: Mare Nostrum

Páginas: 162 – 170

3.2.2 Pauta utilizada en el Análisis de Textos

La pauta para el análisis de textos se construyo en base a los razonamientos que se desean caracterizar. Tanto en las demostraciones como en las actividades propuestas por el texto. Considerando los conocimientos previos que envuelve cada situación, el tipo, paso y cantidad de pasos de razonamiento. También se determina el rol que cumple la figura en cada una de las actividades enunciadas y propuestas en este, junto con el caso del teorema que se ha de utilizar para resolver el ejercicio. Además, de un apartado de observaciones referentes al desarrollo de la actividad.

A continuación (Cuadro 3.1) se detalla la pauta utilizada en el análisis para cada una de las demostraciones expuestas y actividades propuestas de los textos analizados.

<table>
<tr><td colspan="2">Enunciado:

- Corresponde al enunciado de la actividad que propone el texto.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Desarrollo de la actividad (o demostración)</td></tr>
<tr><td>Imágenes que acompañan la secuencia de afirmaciones del desarrollo.

- Corresponde a la secuencia de figuras que acompaña el desarrollo del ejercicio.</td><td>Secuencia de afirmaciones del desarrollo

- Afirmaciones que se dan en el desarrollo. Las cuales se presentan en forma numerada.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Análisis de la secuencia de afirmaciones del desarrollo del ejercicio (o demostración)

- Corresponde al análisis realizado a cada uno de las afirmaciones dadas en el desarrollo, caracterizando los pasos de razonamientos que se identifiquen en estas. Para la caracterización de los pasos de razonamiento véase esquema 2.1 del apartado 2.3.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Conocimientos Específicos:

- Conocimientos específicos necesarios que requiere el estudiante para el desarrollo de la actividad o comprensión de la lectura de la demostración.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Rol de la Figura

- Corresponde al rol que cumple la figura en cada una de las afirmaciones en el desarrollo de la actividad o demostración.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Pasos de Razonamiento

- Tipo de pasos de razonamiento identificados en la secuencia de afirmaciones.</td></tr>
<tr><td>Cantidad de pasos de razonamiento

- Cuantificación de los pasos de razonamiento identificados en el análisis de la secuencia de afirmaciones de la actividad o demostración.</td><td>Caso del teorema

- Corresponde a la identificación de los casos del teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia utilizados en el desarrollo de la actividad. Los casos son los considerados en el apartado 2.5.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Observaciones

- Observaciones generales de la actividad o demostración en caso que lo amerite.</td></tr>
</table>

Cuadro 3.1: Pauta utilizada para analizar las actividades propuestas de los textos escolares junto con las demostraciones desarrolladas que estos presentan.

Cabe hacer notar que la secuencia de afirmaciones del desarrollo de las actividades se baso en el marco conceptual de cada texto, pues, el desarrollo de estas es el desarrollo esperado del estudiante en base al marco conceptual del texto.

3.3 Diseño del cuestionario de actividades propuestas a los estudiantes

Para la confección del cuestionario de actividades propuestas a los estudiantes se seleccionó un conjunto de actividades de los textos escolares que los alumnos utilizan. Lo anterior, se llevo a cabo según los resultados obtenidos en el análisis de textos, referente a la cantidad de pasos de razonamientos necesarios que el estudiante debe realizar para desarrollar las distintas actividades planteadas.

3.3.1 Selección de los estudiantes

Los estudiantes escogidos para realizar la indagación corresponden a una muestra de casos-tipos. Esta, según Hernández, R. (2006), se utiliza en investigaciones exploratorias donde lo que interesa es la calidad y riqueza de la información más que la cantidad.

Para la selección de los estudiantes, se consideraron dos establecimientos de enseñanza media, donde uno de estos ocupa el texto Santillana y el otro utiliza el texto Santillana: Edición Especial para el Ministerio de Educación. Posteriormente se escogieron los alumnos bajo los siguientes criterios:

- Escoger a los dos estudiantes con promedio más alto en la asignatura de Matemáticas en todo el nivel de Segundo Año Medio del establecimiento.

- Escoger a dos alumnos que tengan un rendimiento medio, es decir, que su promedio de notas en la asignatura este próximo al promedio general de matemática de su curso. Además, en la selección de estos, se considero la opinión del profesor titular del establecimiento que dicta la asignatura, para esto, el docente considero los siguientes criterios:

Estudiantes que:

- Participen en clases.
- Asistan regularmente a clases.
- Presenten habilidades para trabajar en grupo o en parejas.

En total se seleccionaron dos grupos de estudiantes, compuesto por cuatro alumnos cada uno. El primer grupo correspondiente a estudiantes que utilizan el texto Santilla: Edición Especial para el Ministerio de Educación. Mientras que el segundo corresponde a aquellos alumnos que usan el texto Santillana.

Cabe destacar que para cautelar la privacidad de los estudiantes que participaron en la investigación se realizo un cambio de nombres para referirse a estos en el presente informe.

3.4 Procedimientos realizados en la aplicación del cuestionario de actividades y lectura por parte de los estudiantes de las demostraciones presentadas en los textos escolares

La modalidad de trabajo utilizada en la aplicación de cuestionario de actividades y lectura de las demostraciones para ambos grupos de estudiantes fue la siguiente:

1. Se formaron dos parejas por grupo, una de buen rendimiento y otra de rendimiento medio.

2. Dado que cada texto utilizado por los distintos grupos de estudiantes expone un resumen del teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia previo a

las actividades propuestas, se le entrego a cada pareja una hoja con dicho resumen para que estas la tuviesen al momento de realizar las actividades.

3. A continuación, a cada pareja de estudiantes se le entrego las actividades para que las desarrollaran.

4. Luego de terminar de desarrollar las actividades, se les entrego a cada pareja una hoja, la cual contenía la demostración desarrollada por el texto del teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia para ver si siguen en forma comprensiva la lectura de esta.

4. Análisis de Textos

En este capítulo se abordara el estudio de los textos seleccionados para analizar. La organización del capitulo es por texto, es decir, se tratara el análisis de cada uno de estos en forma independiente. Realizando comentarios y observaciones apoyadas por tablas resumen referentes a la caracterización de los pasos de razonamientos presentes en las demostraciones y actividades propuestas obtenidas al término del análisis de cada uno de los textos.

4.1 Texto Santillana: Edición Especial para el Ministerio de Educación

El análisis del texto se ha estructurado en dos partes. La primera corresponde al análisis de las demostraciones expuestas por el texto. La segunda, referente a las actividades propuestas al alumno. En ambos casos se comentara sobre el tipo de razonamiento presente, conocimientos especidicos, rol de la figura y observaciones generales referentes al tratamiento del contenido que presenta el texto.

4.1.1 Demostración del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia

El texto presenta en un apartado, un cuadro de recuerdo, en el cual esta la propiedad; la medida de un ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de las medidas de los dos ángulos interiores no adyacentes a él. Esto, con la finalidad de que el alumno recuerde dicha propiedad para comprender los pasos de las demostraciones que se le expondrán.

Antes de exponer las demostraciones, el texto propone una breve actividad experimental acompañada de dos figuras, donde cada una representa el primer y segundo caso del teorema respectivamente. Se realizan una serie de preguntas al alumno, con la intención de que este concluya la relación que existe entre el ángulo inscrito y del centro de una circunferencia que subtienden el mismo arco. Para esto, el estudiante ha de medir con transportador los ángulos inscritos y del centro de cada figura, y así, posteriormente conjeturar y debatir junto a sus compañeros sobre tales conjeturas.

Posterior a la actividad, el texto identifica el ángulo del centro e inscrito en cada figura. Dando el enunciado del teorema para comenzar la exposición de la demostración. A continuación se detalla el análisis de las demostraciones expuestas por el texto como lectura para el estudiante. Correspondientes al primer y segundo caso del teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia.

Demostración del primer caso del teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia

"*El centro de la circunferencia se encuentra al interior de la región limitada por los lados del ángulo inscrito*"

Enunciado

El ángulo inscrito mide la mitad de la medida del correspondiente ángulo del centro.

Desarrollo de la demostración

La secuencia de afirmaciones del desarrollo de la demostración es complementada con la Figura 4.1

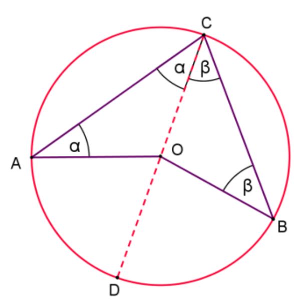


Figura 4.1

Secuencia de afirmaciones del desarrollo de la demostración

1. Se dibuja el diámetro CD.

2. Se forman dos triángulos isósceles como en el dibujo.

3. Sean α y β los ángulos basales en cada uno de estos triángulos.

4. Los ángulos exteriores, esto es, $\sphericalangle AOD$ del ΔAOC y $\sphericalangle DOB$ del ΔBOC miden 2α y 2β respectivamente.

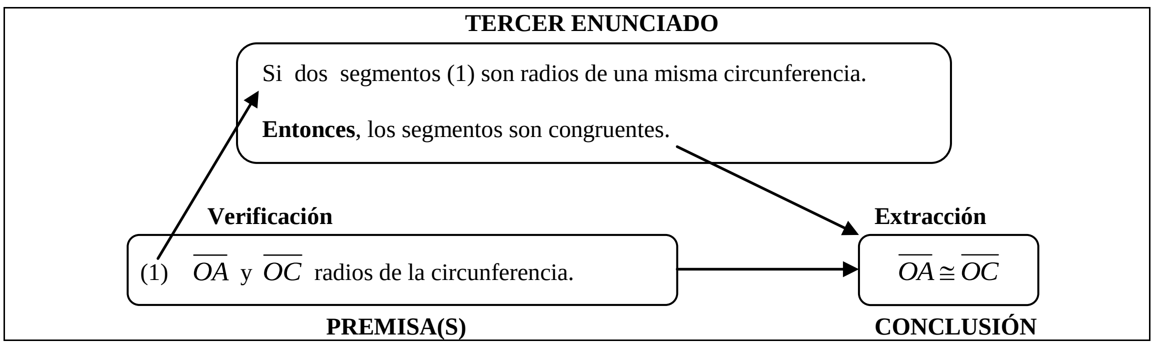
5. De la imagen, se concluye claramente que:

$$\sphericalangle AOB = \sphericalangle AOD + \sphericalangle DOB = 2\alpha + 2\beta = 2\cdot(\alpha+\beta) = 2\cdot \sphericalangle ACB$$

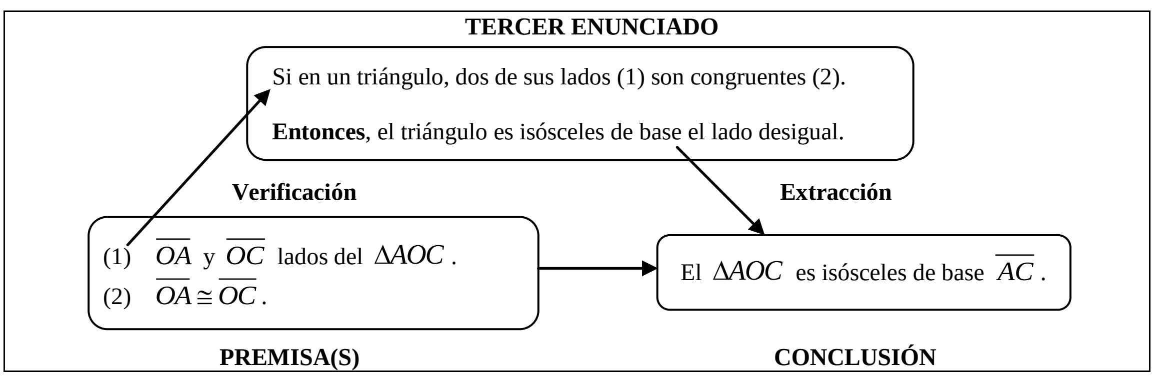
Análisis de la secuencia de afirmaciones de la demostración

- **Afirmación 1:** El diámetro se construye para descomponer la figura, de modo de poder considerar dos sub-casos.

- **Afirmación 2:** La obtención de esta afirmación se justifica realizando cuatro pasos de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus ponens). (Esquema 4.1)



(a) *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que los segmentos OA y OC son congruentes.*



(b) *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que el triángulo AOC es Isósceles de base AC.*

TERCER ENUNCIADO

Si dos segmentos (1) son radios de una misma circunferencia.

Entonces, los segmentos son congruentes.

Verificación | **Extracción**

(1) $\overline{OB}$ y $\overline{OC}$ radios de la circunferencia. → $\overline{OB} \cong \overline{OC}$

PREMISA(S) | **CONCLUSIÓN**

(c) *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que los segmentos OB y OC son congruentes.*

TERCER ENUNCIADO

Si en un triángulo, dos de sus lados (1) son congruentes (2).

Entonces, el triángulo es isósceles de base el lado desigual.

Verificación | **Extracción**

(1) $\overline{OB}$ y $\overline{OC}$ lados del ΔBOC .
(2) $\overline{OB} \cong \overline{OC}$.

→ El ΔBOC es isósceles de base $\overline{BC}$.

PREMISA(S) | **CONCLUSIÓN**

(d) *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que el triángulo BOC es Isósceles de base BC.*

Esquema 4.1

- **Afirmación 3:** La identificación de los ángulos basales en los triángulos isósceles respectivos se justifica realizando dos pasos de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus ponens). (Esquema 4.2)

TERCER ENUNCIADO

Si $\sphericalangle\alpha$ y $\sphericalangle\beta$ son ángulos basales (1 y 2) de un triángulo isósceles.

Entonces, la medida del $\sphericalangle\alpha$ es igual a la medida del $\sphericalangle\beta$.

Verificación | **Extracción**

(1) $\sphericalangle OAC$, ángulo basal del triángulo isósceles AOC.
(2) $\sphericalangle OCA$, ángulo basal del triángulo isósceles AOC.

→ La $med\sphericalangle OAC = med\sphericalangle OCA$

PREMISA(S) | **CONCLUSIÓN**

(a) *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que los ángulos basales del triángulo isósceles AOC son congruentes.*

TERCER ENUNCIADO

Si $\measuredangle\alpha$ y $\measuredangle\beta$ son ángulos basales (1 y 2) de un triángulo isósceles.

Entonces, la medida del $\measuredangle\alpha$ es igual a la medida del $\measuredangle\beta$.

Verificación **Extracción**

(1) $\measuredangle OBC$, ángulo basal del triángulo isósceles BOC.
(2) $\measuredangle OCB$, ángulo basal del triángulo isósceles BOC.

La $med\measuredangle OBC = med\measuredangle OCB$

PREMISA(S) **CONCLUSIÓN**

(b) *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que los ángulos basales del triángulo isósceles BOC son congruentes.*

Esquema 4.2

- **Afirmación 4:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus ponens). (Esquema 4.3)

TERCER ENUNCIADO

Si en un triángulo, γ es ángulo exterior (1) de un triángulo, α y β ángulos interiores no adyacentes al $\measuredangle\gamma$.

Entonces, la medida del $\measuredangle\gamma$ es igual a la suma de las medidas de los ángulos α y β .

Verificación **Extracción**

(1) $\measuredangle AOD$, ángulo exterior del ΔAOC .
(2) $\measuredangle OAC$ y $\measuredangle OCA$, ángulos interiores del ΔAOC

$med\measuredangle AOD = med\measuredangle OAC + med\measuredangle OCA$

PREMISA(S) **CONCLUSIÓN**

(a) *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para determinar la medida del ángulo exterior AOD.*

TERCER ENUNCIADO

Si en un triángulo, γ es ángulo exterior (1) de un triángulo, α y β ángulos interiores no adyacentes al $\measuredangle\gamma$.

Entonces, la medida del $\measuredangle\gamma$ es igual a la suma de las medidas de los ángulos α y β .

Verificación **Extracción**

(1) $\measuredangle BOD$, ángulo exterior del ΔBOC .
(2) $\measuredangle OBC$ y $\measuredangle OCB$, ángulos interiores del ΔBOC

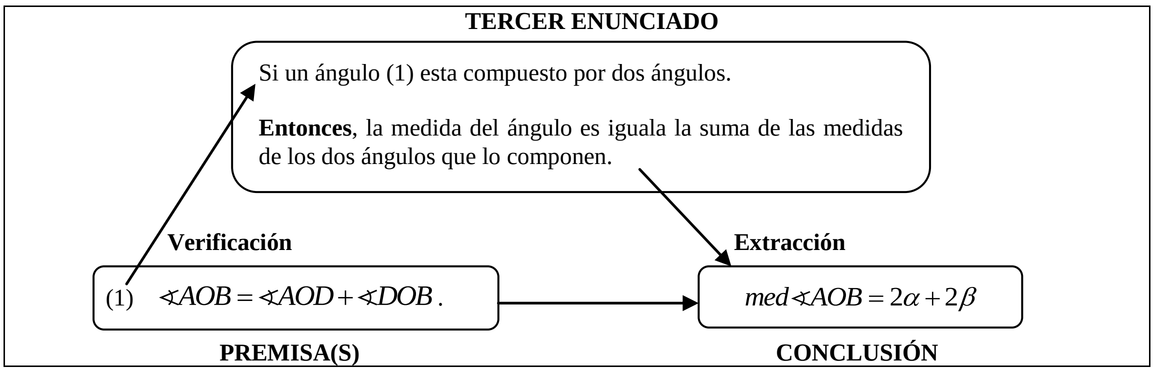
$med\measuredangle BOD = med\measuredangle OBC + med\measuredangle OCB$

PREMISA(S) **CONCLUSIÓN**

(b) *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para determinar la medida del ángulo exterior OBC.*

Esquema 4.3

- **Afirmación 5:** Como la medida del ángulo AOB esta compuesta por la suma de las medidas de los ángulos AOD y BOD, se formula la igualdad que relaciona sus medidas para determinar la relación entre la suma de los ángulos $\sphericalangle AOD$, $\sphericalangle DOB$ y la del ángulo inscrito ACB. Lo anterior se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus ponens). (Esquema 4.4)



Esquema 4.4: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para determinar la medida del ángulo AOB.*

Conocimientos específicos:

- Congruencia de trazos (Afirmación 2)
- Definición de Triángulo Isósceles (Afirmación 2)
- Propiedad: Los ángulos basales del triángulo isósceles son congruentes. (Afirmación 3)
- Teorema: la medida del ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de las medidas de los dos ángulos interiores no adyacentes. (Afirmación 4)
- La medida del todo es igual a la suma de las medidas de sus partes. (Afirmación 5)

Rol de la figura:

- En la afirmación 1 existe una aprehensión operativa de cambio figural.
- De la afirmación 2 a la 5 se presenta una aprehensión discursiva, donde predomina el cambio de anclaje visual a discursivo.

Pasos de Razonamiento:

- El paso de razonamiento es de *encadenamiento por reutilización*, donde cada uno de los razonamientos que componen el encadenamiento son razonamientos deductivos (Modus Ponens).

Cantidad de pasos de razonamiento:	**Caso del teorema:**
- 9 pasos.	- Primer caso.

Observaciones generales:

1. La demostración incluye dos demostraciones, las cuales se realizan en paralelo. (Afirmación 1)

2. Se realizan dos o más pasos en uno, omitiendo pasos fundamentales, pudiendo provocar que el estudiante se pierda en la lectura de la demostración, o deje de comprender los pasos que se dan en su desarrollo. (Afirmaciones 2, 3 y 4)

3. Se identifican objetos geométricos con sus medidas, en el caso de los ángulos. Se presenta una confusión de notación. (Afirmación 5)

4. El teorema se demuestra sobre un dibujo que representa un caso particular. (Figura 4.1)

5. La demostración es realizada por el texto, solo se expone al estudiante.

Demostración del segundo caso del teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia

"*El centro de la circunferencia se encuentra al exterior de la región limitada por los lados del ángulo inscrito.*"

Previo a la exposición de le demostración del segundo caso, el texto menciona al estudiante que para realizar la demostración en este caso, no se puede hacer de la misma forma que la demostración anterior.

Enunciado

El ángulo inscrito mide la mitad de la medida del correspondiente ángulo del centro.

Desarrollo de la demostración

La secuencia de afirmaciones del desarrollo de la demostración es complementada con la Figura 4.2

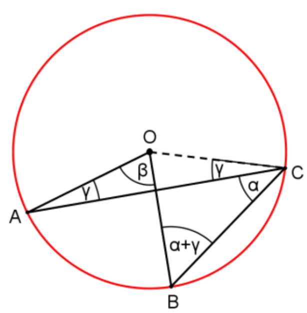


Figura 4.2

Secuencia de afirmaciones del desarrollo de la demostración

1. Se traza el segmento OC, como muestra la figura.
2. Observa que $\sphericalangle ACB = \sphericalangle BCO - \sphericalangle ACO$
3. Por lo tanto,

$$\sphericalangle BOC = 180^{o} - 2(\alpha + \gamma)$$

4. Por otro lado, en el ΔAOC , se tiene la relación:

$$2\gamma + \beta + 180^{o} - 2\alpha - 2\gamma = 180^{o}$$

5. De donde se obtiene la relación $\beta = 2\alpha$, es decir,

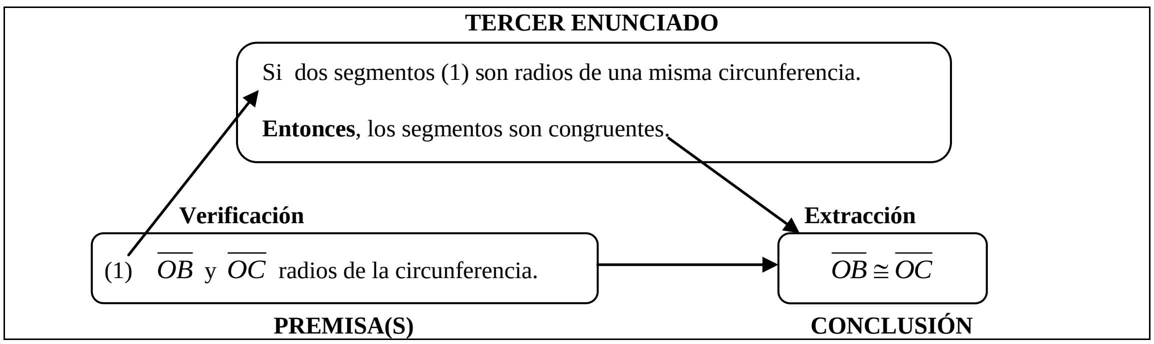
$$\sphericalangle AOB = 2 \cdot \sphericalangle ACB$$

Análisis de la secuencia de afirmaciones de la demostración

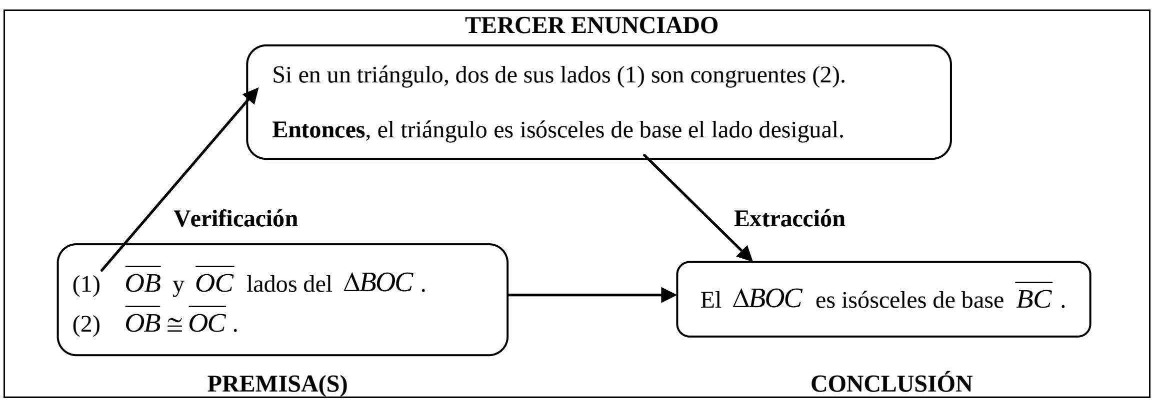
- **Afirmación 1:** Se traza el segmento OC para formar el triángulo BCO.

- **Afirmación 2:** Se expresa la medida del $\measuredangle ACB$ en términos de las medidas de los ángulos BCO y ACO.

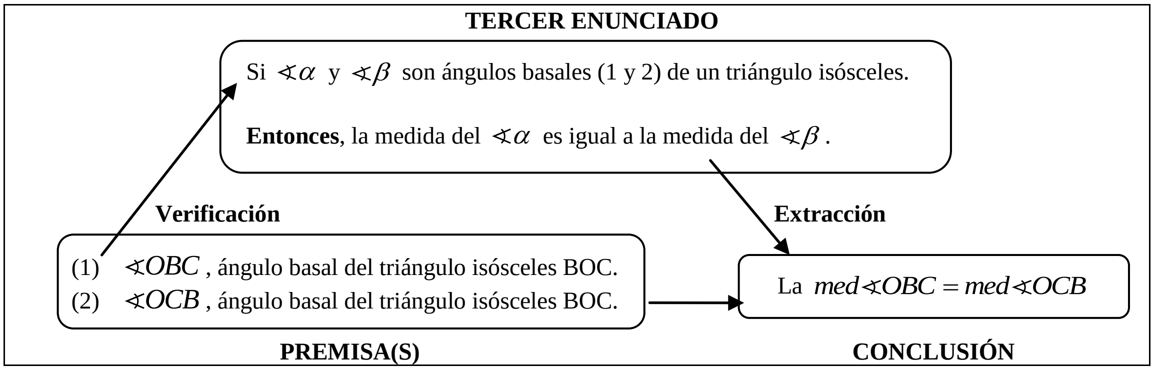
- **Afirmación 3:** Se expresa la medida del $\measuredangle BOC$ en términos de α y γ, a partir de los datos obtenidos en el paso anterior, $\measuredangle ACB = \measuredangle BCO - \measuredangle ACO$. Formulando la igualdad que relaciona las medidas de los ángulos interiores del ΔBOC. La formulación de la igualdad se justifica realizando cuatro pasos de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus ponens). (Esquema 4.5)



(a) *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que los segmentos OB y OC son congruentes.*



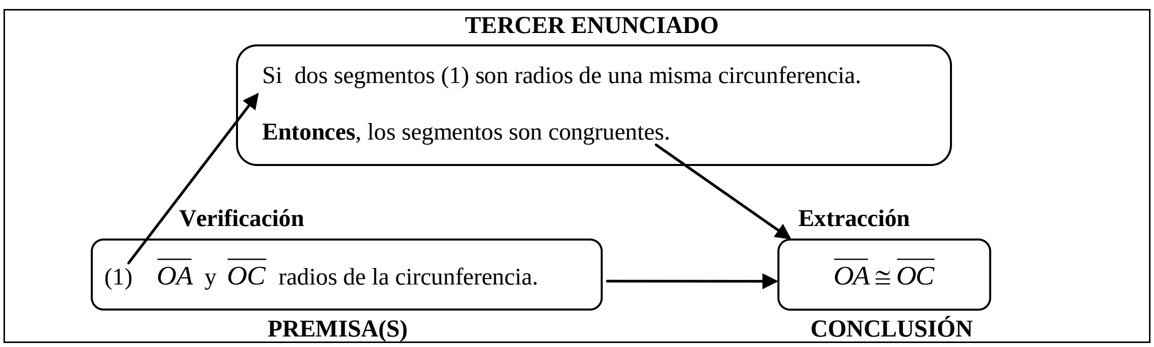
(b) *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que el triángulo BOC es Isósceles de base BC.*



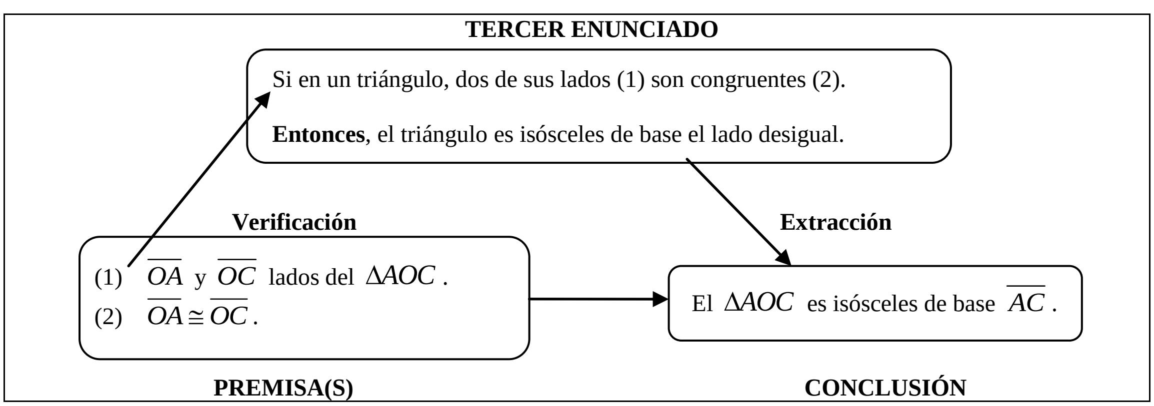
(c) *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que los ángulos basales del triángulo isósceles BOC son congruentes.*

Esquema 4.5

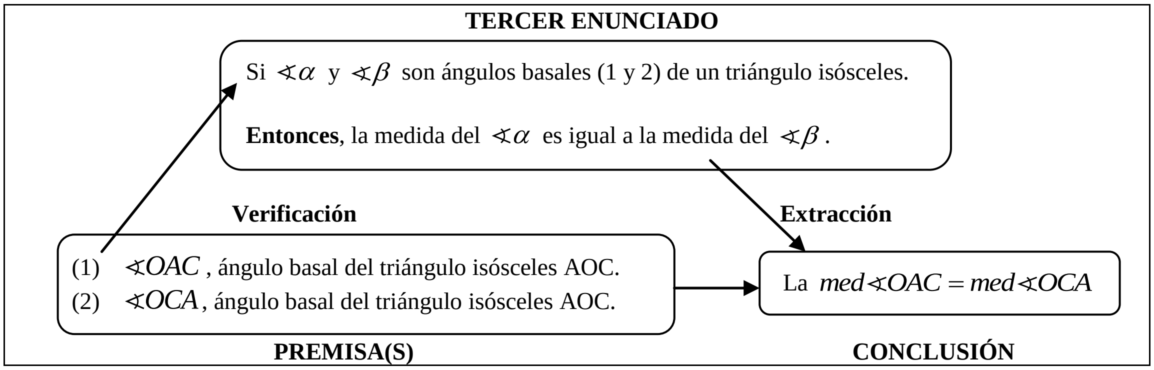
- **Afirmación 4:** Se formula la igualdad que relaciona las medidas de los ángulos interiores del triángulo ΔAOC. La formulación de la igualdad se justifica realizando cuatro pasos de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus ponens). (Esquema 4.6)



(a) *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que los segmentos OA y OC son congruentes.*



(b) *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que el triángulo AOC es Isósceles de base AC.*



(c) *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que los ángulos basales del triángulo isósceles AOC son congruentes.*

Esquema 4.6

- **Afirmación 5:** Al despejar β en la igualdad $2\gamma + \beta + 180^o - 2\alpha - 2\gamma = 180^o$, formulada en el paso anterior, se obtiene la relación con la cual se puede concluir que la medida del ángulo inscrito en una circunferencia, es la mitad de la medida del ángulo del centro, si ambos ángulos subtienden el mismo arco.

<table>
<tr><td colspan="2">Conocimientos específicos:

- La medida del todo es igual a la suma de las medidas de sus partes. (Afirmación 2)
- Congruencia de trazos (Afirmaciones 3 y 4)
- Definición de Triángulo Isósceles (Afirmaciones 3 y 4)
- Propiedad: Los ángulos basales del triángulo isósceles son congruentes. (Afirmaciones 3 y 4)
- Propiedad: La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180º. (Afirmación 4)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Rol de la figura:

- En la afirmación 1 existe una aprehensión operativa de cambio figural.
- De la afirmación 2 a la afirmación 5 se presenta una aprehensión discursiva donde predomina el cambio de anclaje visual a discursivo.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Pasos de Razonamiento:

- El paso de razonamiento es de encadenamiento por reutilización, donde cada uno de los razonamientos que componen el encadenamiento son razonamientos deductivos (Modus Ponens).</td></tr>
<tr><td>Cantidad de pasos de razonamiento:

- 6 pasos.</td><td>Caso del teorema:

- Segundo caso.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Observaciones generales

1. La demostración es realizada por el texto, solo se expone al estudiante.

2. Se omiten pasos fundamentales, pudiendo provocar que el estudiante se pierda en la lectura de la demostración o deje de comprender su desarrollo. (Afirmaciones 3 y 4)

3. En la mayoría de las afirmaciones se identifican objetos geométricos con sus medidas, en el caso de los ángulos. Se presenta una confusión de notación.

4. El teorema se demuestra sobre un dibujo que representa un caso particular. (Figura 4.2)</td></tr>
</table>

El texto sólo expone las demostraciones del primer y segundo caso del Teorema. El tercer caso no es tratado. A continuación se detalla la cantidad de pasos de razonamiento junto con el tipo de pasos de razonamientos que se dan en cada una de las demostraciones. (Tabla 4.1)

DEMOSTRACIÓN	CANTIDAD DE PASOS DE RAZONAMIENTO	TIPO DE PASO DE RAZONAMIENTO
Primer caso	9 pasos	Modus Ponens
Segundo caso	6 pasos	Modus Ponens
Tercer caso	No se trata	No se trata

Tabla 4.1: Cantidad de pasos de razonamientos y tipos de pasos de razonamientos que justifican las demostraciones expuestas en el Texto Santillana: Edición Especial para el Ministerio de Educación.

Como se observa en la Tabla 4.1, la forma de razonamiento presente en las demostraciones expuestas por el texto, es el razonamiento deductivo con pasos de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus ponens)

La demostración del primer caso incluye dos demostraciones, las cuales se realizan en paralelo. Esto implica que se realicen dos veces los mismos pasos de razonamiento. Hecho por el cual la cantidad de pasos de razonamientos es mayor que la demostración del segundo caso.

Ambas demostraciones son realizadas por el texto, sólo se exponen al estudiante. Además, en estas se omiten pasos fundamentales, pudiendo provocar que el estudiante deje de comprender la lectura y no entienda los pasos que justifican su desarrollo.

El texto presenta una confusión de notación al identificar constantemente objetos geométricos con sus medidas, caso recurrente es el de identificar los ángulos con sus medidas. Ambas demostraciones se trabajan sobre una figura como un caso particular. En estas se utiliza un solo dibujo para cada caso y no un dibujo aparte que acompañe a las principales afirmaciones del desarrollo.

Al desarrollar toda una demostración sobre un mismo dibujo, se da mayoritariamente una aprehensión discursiva donde predomina el cambio de anclaje visual a discursivo. Es decir, existe un abuso del dibujo, ya que no hay énfasis en las subconfiguraciones para cada afirmación del desarrollo de la demostración. Lo cual provoca confusiones para la comprensión de esta, debido a que no se logra una coordinación entre la aprehensión operativa y discursiva. Dicho de otra forma, no se logra visualizar la relación de cada discurso matemático con las distintas modificaciones que se realizan a la figura. En esta misma línea, es importante destacar que cada paso de razonamiento está directamente relacionado con los distintos procesos de visualización en el desarrollo de la actividad. A continuación, en la tabla 4.2, se presenta un resumen con la cantidad de afirmaciones en las cuales se presentan las aprehensiones operativas y discursivas.

DEMOSTRACIÓN	APREHENSION DISCURSIVA	APREHENSION OPERATIVA
Primer caso	4 Afirmaciones	1 Afirmación
Segundo Caso	4 Afirmaciones	1 Afirmación
Tercer Caso	No se trata	No se trata

Tabla 4.2: Resumen correspondiente al rol de la figura en las demostraciones expuestas en el Texto Santillana Edición Especial para el Ministerio de Educación.

En cuanto a los conocimientos previoos necesarios que el estudiante requiere para comprender la lectura de las demostraciones. El texto no ayuda ni prepara al alumno previo a estas. Sólo menciona la propiedad en un apartado, *que la medida de un ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de las medidas de los dos ángulos interiores no adyacentes a él*. No trata la definición de triángulo isósceles ni sus propiedades, conocimientos fundamentales para que el estudiante entienda la demostración expuesta.

4.1.2 Actividades Propuestas

Las actividades propuestas por el texto son 4 tipos de tareas. La primera consiste en nueve ejercicios en los cuales el estudiante debe calcular la medida de algún ángulo solicitado. En las tareas restantes, a diferencia de la anterior, para resolverlas se requiere de la utilización de conocimientos específicos por parte del alumno. También en estas se debe calcular la medida de un ángulo. En total son 12 ejercicios propuestos, todos acompañados de una figura.

A continuación se presenta el desarrollo de las actividades propuestas por el texto. Analizando cada una de las afirmaciones que se dan en la secuencia del desarrollo. Logrando así una caracterización de los pasos de razonamiento que se realizan en estas. Además de identificar el rol que cumple la figura en la resolución del ejercicio.

Actividad 1 Letra a

Enunciado

Calcular el valor del ángulo.

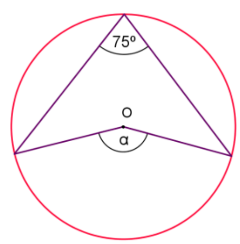


Figura 4.3

Desarrollo de la actividad esperado del estudiante

Se han asignado rótulos a los vértices de la figura para una mejor comprensión del desarrollo. (Figura 4.4)

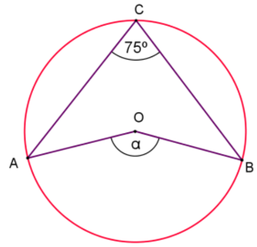


Figura 4.4

Secuencia de afirmaciones del desarrollo

1. El $\sphericalangle ACB$ es un ángulo inscrito que subtiende al arco $\overset{\frown}{AB}$.
2. El $\sphericalangle AOB$ es un ángulo del centro que subtiende al arco $\overset{\frown}{AB}$.
3. El $\sphericalangle ACB$ y el $\sphericalangle AOB$ subtienden el mismo arco,

el arco $\widehat{AB}$.

4. Por teorema, la $med\measuredangle AOB$ es el doble de la $med\measuredangle ACB$.

$$med\measuredangle AOB = 2\cdot 75^{\circ}$$
$$med\measuredangle AOB = 150^{\circ}$$

Por lo tanto, el valor de α es 150°.

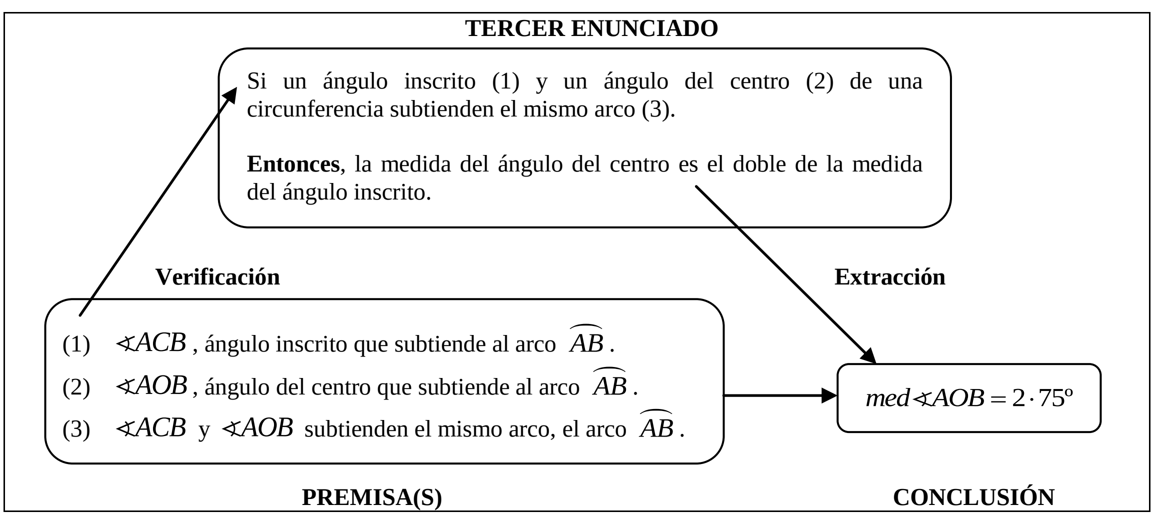
Análisis de la secuencia de afirmaciones del desarrollo del ejercicio

- **Afirmación 1:** Se extrae información sobre el $\measuredangle ACB$, inscrito en la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.4)

- **Afirmación 2:** Se extrae información sobre el $\measuredangle AOB$, del centro de la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.4)

- **Afirmación 3:** Se relacionan los ángulos obtenidos en las afirmaciones 1 y 2.

- **Afirmación 4:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus ponens). (Esquema 4.7)



Esquema 4.7: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para determinar la medida del ángulo del centro AOB.*

Conocimientos específicos: - No son necesarios	
Rol de la figura: - Al comienzo se presenta una *aprehensión operativa de cambio figural.* - En todas las afirmaciones se realiza una *aprehensión discursiva*. Donde el sentido de la transferencia predomina un cambio de anclaje de *visual a discursivo.*	
Pasos de Razonamiento: - Modus Ponens.	
Cantidad de pasos de razonamiento: - 1 paso.	**Caso(s) del teorema:** - Primer caso.
Observaciones generales 1. El ejercicio requiere una aplicación inmediata del teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia para ser resuelto.	

Actividad 1 Letra b

Enunciado

Calcula el valor del ángulo α .

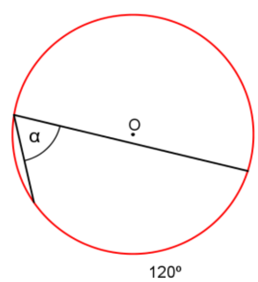


Figura 4.5

Desarrollo de la actividad esperado del estudiante

Se han asignado rótulos a los vértices de la figura para una mejor comprensión del desarrollo. (Figura 4.6)

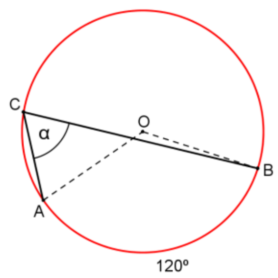


Figura 4.6

Secuencia de afirmaciones del desarrollo

1. El $\sphericalangle ACB$ es un ángulo inscrito que subtiende al arco $\widehat{AB}$.
2. Unir mediante una línea el punto A con el centro O, formando el segmento $\overline{AO}$. (Figura 4.6)
3. Unir mediante una línea el punto B con el centro O, formando el segmento $\overline{BO}$.(Figura 4.6)
4. El $\sphericalangle AOB$ es un ángulo del centro que subtiende al arco $\widehat{AB}$.
5. La $med\sphericalangle AOB = med\widehat{AB}$ *

$$med\sphericalangle AOB = 120º$$

6. El $\sphericalangle ACB$ y el $\sphericalangle AOB$ subtienden el mismo arco, el arco $\widehat{AB}$.
7. Por teorema, la $med\sphericalangle ACB$ es la mitad de la $med\sphericalangle AOB$.

$$med\sphericalangle ACB = \frac{1}{2} \cdot 120º$$
$$med\sphericalangle ACB = 60º$$

Por lo tanto, el valor de α es $60º$.

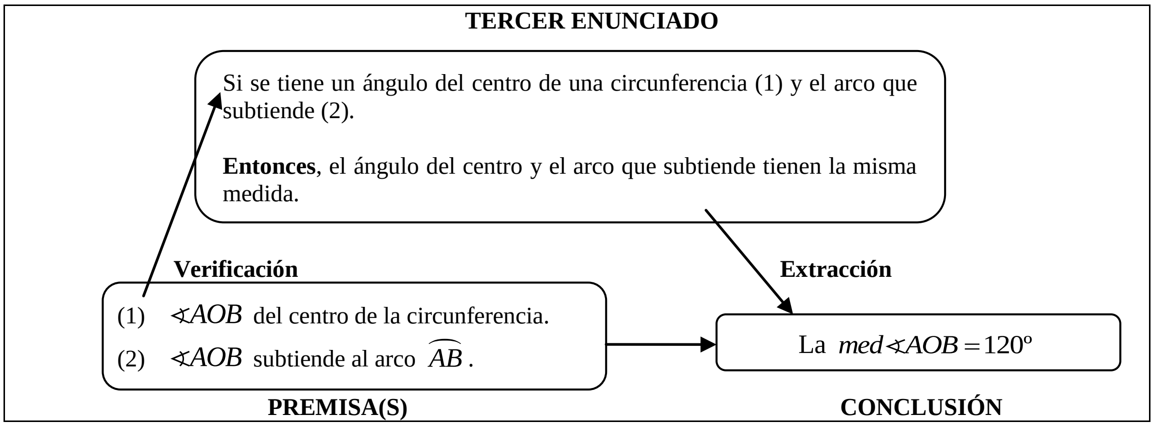
Análisis de la secuencia de afirmaciones del desarrollo del ejercicio

- **Afirmación 1:** Se extrae información sobre el $\sphericalangle ACB$, inscrito en la circunferencia presente en dibujo. (Figura 4.6)
- **Afirmación 2:** Se construye el segmento $\overline{AO}$ para formar el $\sphericalangle AOB$, del centro de la circunferencia. (Figura 4.6)
- **Afirmación 3:** Se construye el segmento $\overline{BO}$ para formar el $\sphericalangle AOB$, del centro de la circunferencia. (Figura 4.6)

* Paso realizado en base al marco conceptual del texto.

- **Afirmación 4:** Se extrae información sobre el $\sphericalangle AOB$, del centro de la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.6)

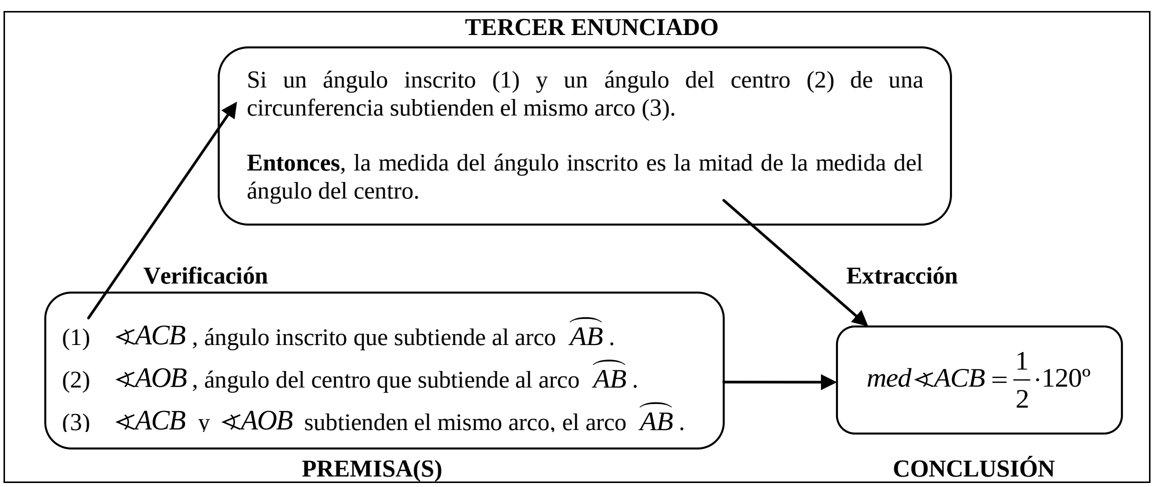
- **Afirmación 5:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus ponens). (Esquema 4.8)



Esquema 4.8: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para determinar la medida del ángulo AOB.*

- **Afirmación 6:** Se relacionan los ángulos obtenidos en las afirmaciones 1 y 4.

- **Afirmación 7:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus ponens). (Esquema 4.9)



Esquema 4.9: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para determinar la medida del ángulo inscrito ACB.*

Conocimientos específicos: - No son necesarios.	
Rol de la figura: - Al principio del desarrollo y en las afirmaciones 2 y 3 se presenta una *aprehensión operativa de cambio figural*. - En la afirmación 1 y en las afirmaciones 4 a 7 existe una *aprehensión discursiva* donde el sentido de la transferencia va de un *anclaje visual a uno discursivo.*	
Pasos de Razonamiento: - Modus Ponens.	
Cantidad de pasos de razonamiento: - 2 pasos.	**Caso(s) del teorema:** - Segundo caso.
Observaciones generales 1. El texto presenta una confusión conceptual en la figura que acompaña al enunciado del ejercicio, pues en este se indica que la longitud del arco AB mide 120º. En el contexto del mismo se refiere a que la medida del ángulo del centro es igual a la medida del arco que subtiende. 2. El estudiante debe construir el ángulo del centro de la circunferencia para posteriormente aplicar el teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia.	

Actividad 1 Letra c

Enunciado

Calcular el valor del ángulo.

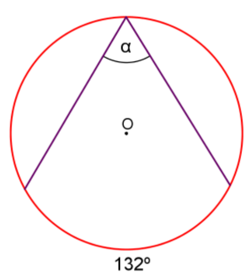


Figura 4.7

Desarrollo de la actividad esperado del estudiante

Se han asignado rótulos a los vértices de la figura para una mejor comprensión del desarrollo. (Figura 4.8)

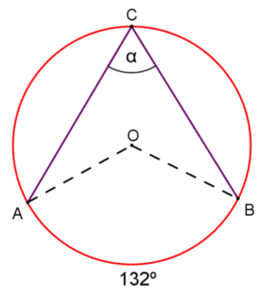


Figura 4.8

Secuencia de afirmaciones del desarrollo

1. El $\sphericalangle ACB$ es un ángulo inscrito que subtiende al arco $\overset{\frown}{AB}$.
2. Unir mediante una línea el punto A con el centro O, formando el segmento $\overline{AO}$. (Figura 4.8)
3. Unir mediante una línea el punto B con el centro O, formando el segmento $\overline{BO}$. (Figura 4.8)
4. El $\sphericalangle AOB$ es un ángulo del centro que subtiende al arco $\overset{\frown}{AB}$.
5. La $med\sphericalangle AOB = med\overset{\frown}{AB}$.*

$$med\sphericalangle AOB = 132^{\circ}$$

6. El $\sphericalangle ACB$ y el $\sphericalangle AOB$ subtienden el mismo arco, el arco $\overset{\frown}{AB}$.
7. Por teorema, la $med\sphericalangle ACB$ es la mitad de la $med\sphericalangle AOB$.

$$med\sphericalangle ACB = \frac{1}{2}\cdot 132^{\circ}$$
$$med\sphericalangle ACB = 66^{\circ}$$

Por lo tanto, el valor de α es 66°.

Análisis de la secuencia de afirmaciones del desarrollo del ejercicio

- **Afirmación 1:** Se extrae información sobre el $\sphericalangle ACB$, inscrito en la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.8)

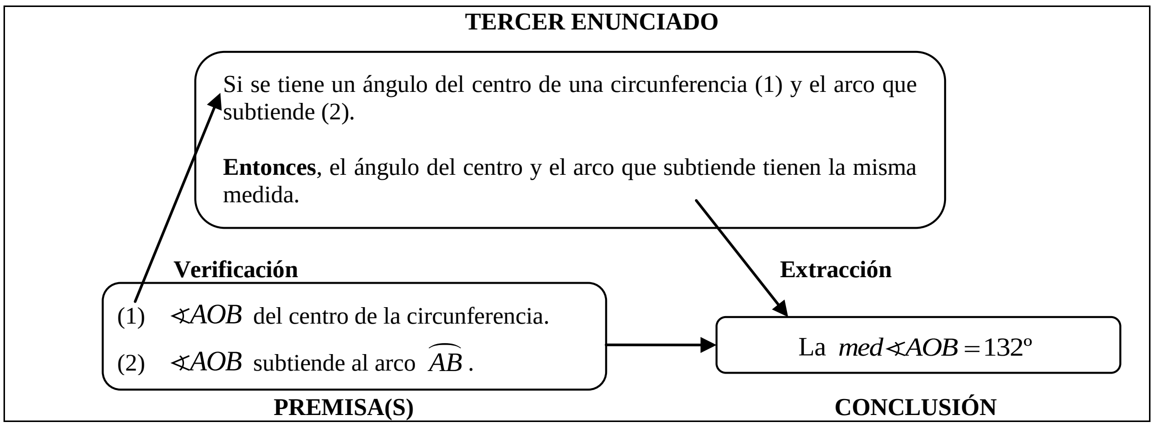
- **Afirmación 2:** Se construye el segmento $\overline{AO}$ para formar el $\sphericalangle AOB$, del centro de la circunferencia. (Figura 4.8)

- **Afirmación 3:** Se construye el segmento $\overline{BO}$ para formar el $\sphericalangle AOB$, del centro de la circunferencia. (Figura 4.8)

* Paso realizado en base al marco conceptual del texto.

- **Afirmación 4:** Se extrae información sobre el $\sphericalangle AOB$, del centro de la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.8)

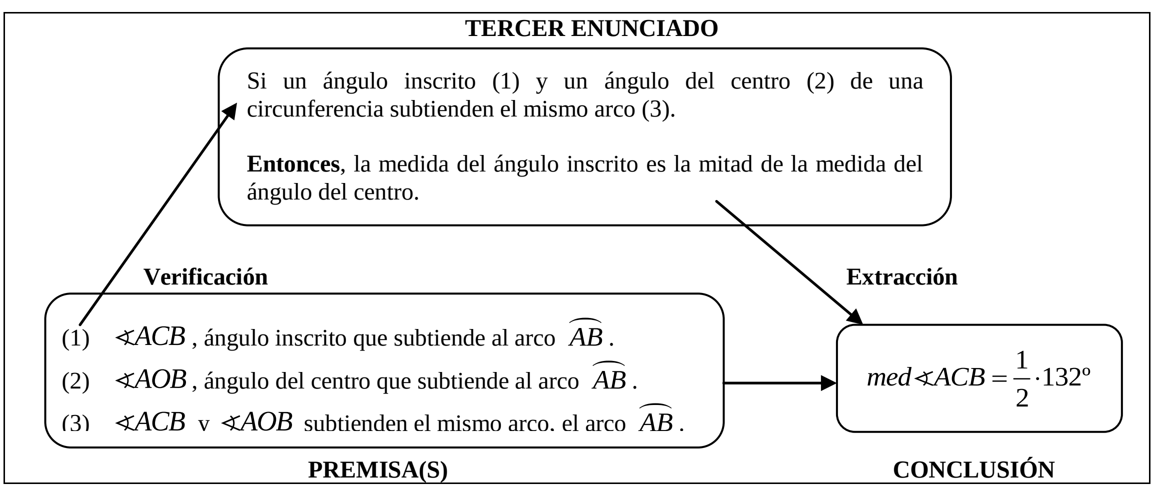
- **Afirmación 5:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus ponens). (Esquema 4.10)



Esquema 4.10: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para determinar la medida del ángulo AOB.*

- **Afirmación 6:** Se relacionan los ángulos obtenidos en las afirmaciones 1 y 4.

- **Afirmación 7:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus ponens). (Esquema 4.11)



Esquema 4.11: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para determinar la medida del ángulo inscrito ACB.*

Conocimientos específicos:

- No son necesarios.

Rol de la figura:

- En las afirmaciones 2 y 3 se presenta una *aprehensión operativa de cambio figural*.
- En la afirmación 1 y en las afirmaciones 4 a 7 predomina una *aprehensión discursiva* en la que el sentido de la transferencia va de un *anclaje visual a uno discursivo*.

Pasos de Razonamiento:

- Modus Ponens.

Cantidad de pasos de razonamiento:	Caso(s) del teorema:
- 2 pasos.	- Primer caso.

Observaciones generales

1. El texto presenta una confusión conceptual en la figura que acompaña al enunciado del ejercicio, pues en este se indica que la longitud del arco AB mide 132º. En el contexto del mismo se refiere a que la medida del ángulo del centro es igual a la medida del arco que subtiende.

2. El estudiante debe construir el ángulo del centro de la circunferencia para posteriormente aplicar el teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia.

Actividad 1 Letra d

Enunciado

Calcular el valor del ángulo.

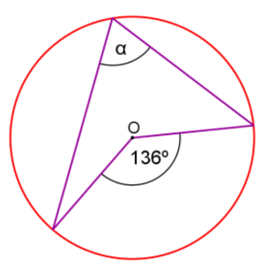


Figura 4.9

Desarrollo de la actividad esperado del estudiante

Se han asignado rótulos a los vértices de la figura para una mejor comprensión del desarrollo. (Figura 4.10)

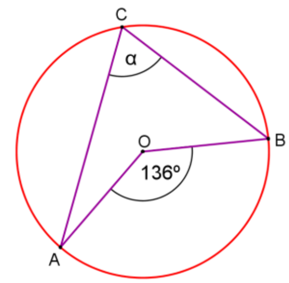


Figura 4.10

Secuencia de afirmaciones del desarrollo

1. El $\sphericalangle ACB$ es un ángulo inscrito que subtiende al arco $\overset{\frown}{AB}$.

2. El $\sphericalangle AOB$ es un ángulo del centro que subtiende al arco $\overset{\frown}{AB}$.

3. El $\sphericalangle ACB$ y el $\sphericalangle AOB$ subtienden el mismo arco, el arco $\overset{\frown}{AB}$.

4. Por teorema, la $med\sphericalangle ACB$ es la mitad de la $med\sphericalangle AOB$.

$$med\sphericalangle ACB = \frac{1}{2}\cdot 136^{\circ}$$
$$med\sphericalangle ACB = 68^{\circ}$$

Por lo tanto, el valor de α es 68°.

Análisis de la secuencia de afirmaciones del desarrollo del ejercicio.

- **Afirmación 1:** Se extrae información sobre el $\sphericalangle ACB$, inscrito en la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.10)

- **Afirmación 2:** Se extrae información sobre el $\sphericalangle AOB$, del centro de la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.10)

- **Afirmación 3:** Se relacionan los ángulos obtenidos en las afirmaciones 1 y 2.

- **Afirmación 4:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus ponens). (Esquema 4.12)

TERCER ENUNCIADO

Si un ángulo inscrito (1) y un ángulo del centro (2) de una circunferencia subtienden el mismo arco (3).

Entonces, la medida del ángulo inscrito es la mitad de la medida del ángulo del centro.

Verificación **Extracción**

(1) $\sphericalangle ACB$, ángulo inscrito que subtiende al arco $\widehat{AB}$.

(2) $\sphericalangle AOB$, ángulo del centro que subtiende al arco $\widehat{AB}$.

(3) $\sphericalangle ACB$ y $\sphericalangle AOB$ subtienden el mismo arco, el arco $\widehat{AB}$.

$$med\sphericalangle ACB = \frac{1}{2}\cdot 136º$$

PREMISA(S) **CONCLUSIÓN**

Esquema 4.12: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para determinar la medida del ángulo inscrito ACB.*

<table>
<tr><td colspan="2">Conocimientos específicos:

- No son necesarios.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Rol de la figura:

- Al principio del desarrollo se presenta una aprehensión operativa de cambio figural.
- En las afirmaciones 1 a 4 predomina una aprehensión discursiva, donde el traspaso va de un anclaje visual a uno discursivo.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Pasos de Razonamiento:

- Modus Ponens.</td></tr>
<tr><td>Cantidad de pasos de razonamiento:

- 1 paso.</td><td>Caso(s) del teorema:

- Primer caso.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Observaciones generales

1. El ejercicio requiere una aplicación inmediata del teorema del ángulo inscrito y de centro de una circunferencia para ser resuelto.</td></tr>
</table>

Actividad 1 Letra e

Enunciado

Calcular el valor del ángulo.

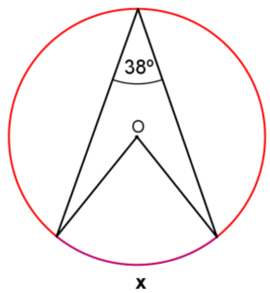


Figura 4.11

Desarrollo de la actividad esperado del estudiante

Se han asignado rótulos a los vértices de la figura para una mejor comprensión del desarrollo. (Figura 4.12)

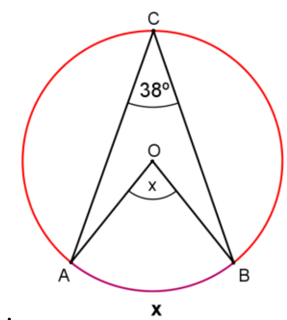


Figura 4.12

Secuencia de afirmaciones del desarrollo

1. El $\sphericalangle ACB$ es un ángulo inscrito que subtiende al arco $\overset{\frown}{AB}$.
2. El $\sphericalangle AOB$ es un ángulo del centro que subtiende al arco $\overset{\frown}{AB}$.
3. El $\sphericalangle ACB$ y el $\sphericalangle AOB$ subtienden el mismo arco, el arco $\overset{\frown}{AB}$.
4. Por teorema, la $med\sphericalangle AOB$ es el doble de la $med\sphericalangle ACB$.

$$med\sphericalangle AOB = 2 \cdot 38^{\circ}$$
$$med\sphericalangle AOB = 76^{\circ}$$

5. La $med\sphericalangle AOB = med\,\overset{\frown}{AB}$. (Figura 4.12) *

$$med\,\overset{\frown}{AB} = 76^{\circ}$$

Por lo tanto, el valor de x es 76°.

* Paso realizado en base al marco conceptual del texto.

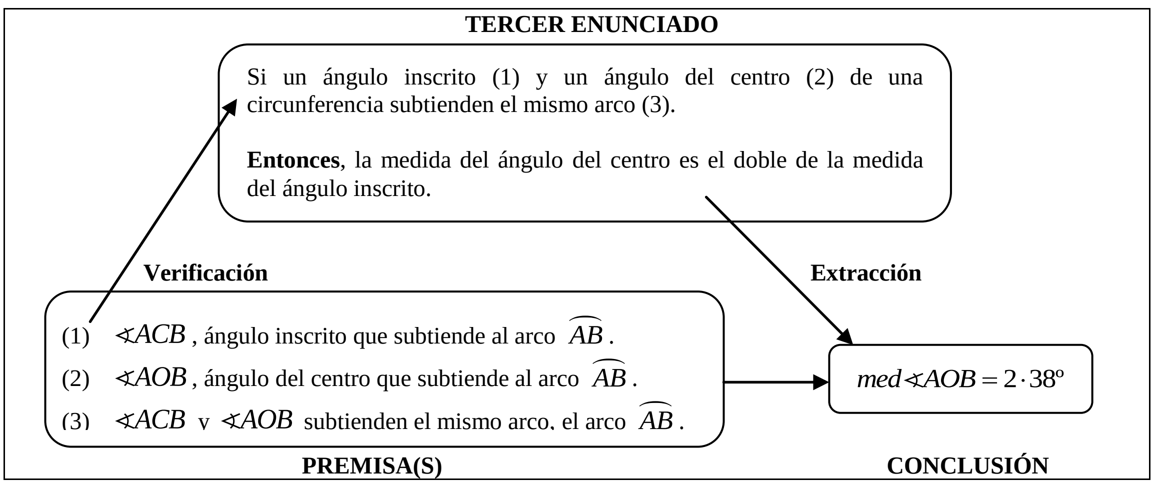
Análisis de la secuencia de afirmaciones del desarrollo del ejercicio

- **Afirmación 1:** Se extrae información sobre el $\sphericalangle ACB$, inscrito en la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.12)

- **Afirmación 2:** Se extrae información sobre el $\sphericalangle AOB$, del centro de la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.12)

- **Afirmación 3:** Se relacionan los ángulos obtenidos en las afirmaciones 1 y 2.

- **Afirmación 4:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.13)



Esquema 4.13: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para determinar la medida del ángulo del centro AOB.*

- **Afirmación 5:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus ponens). (Esquema 4.14)

TERCER ENUNCIADO

Si se tiene un ángulo del centro de una circunferencia (1) y el arco que subtiende (2).

Entonces, el ángulo del centro y el arco que subtiende tienen la misma medida.

Verificación **Extracción**

(1) $\sphericalangle AOB$ del centro de la circunferencia.
(2) $\sphericalangle AOB$ subtiende al arco $\overset{\frown}{AB}$.

La $med\sphericalangle AOB = x$

PREMISA(S) **CONCLUSIÓN**

Esquema 4.14: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para determinar la medida del ángulo AOB.*

Conocimientos específicos: - No son necesarios.	
Rol de la figura: - Al principio del desarrollo se presenta una *aprehensión operativa de cambio figural.* - En las afirmaciones 1 a 5 predomina una *aprehensión discursiva* donde el cambio va de un *anclaje visual a uno discursivo.*	
Pasos de Razonamiento: - Modus Ponens.	
Cantidad de pasos de razonamiento: - 2 pasos.	**Caso(s) del teorema:** - Primer caso.
Observaciones generales 1. El texto presenta una confusión conceptual en la figura que acompaña al enunciado del ejercicio, pues en esta se indica que la longitud del arco AB mide x. En el contexto del mismo se refiere a que la medida del ángulo del centro es igual a la medida del arco que subtiende.	

Actividad 1 Letra f

Enunciado

Calcular el valor de los ángulos.

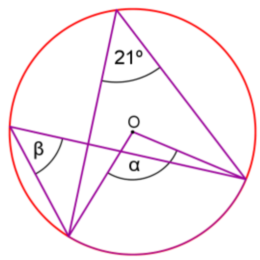


Figura 4.13

Desarrollo de la actividad esperado del estudiante

Se han asignado rótulos a los vértices de la figura para una mejor comprensión del desarrollo. (Figura 4.14)

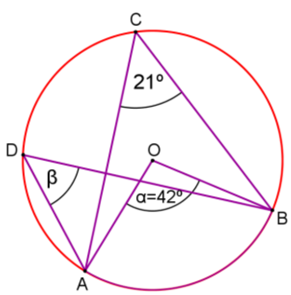


Figura 4.14

Secuencia de afirmaciones del desarrollo

1. El $\measuredangle ACB$ es un ángulo inscrito que subtiende al arco $\overset{\frown}{AB}$.
2. El $\measuredangle AOB$ es un ángulo del centro que subtiende al arco $\overset{\frown}{AB}$.
3. El $\measuredangle ACB$ y el $\measuredangle AOB$ subtienden el mismo arco, el arco $\overset{\frown}{AB}$.
4. Por teorema, la $med\measuredangle AOB$ es el doble de la $med\measuredangle ACB$.

$$med\measuredangle AOB = 2 \cdot 21^{\circ}$$
$$med\measuredangle AOB = 42^{\circ}$$

Por lo tanto, el valor de α es 42°.

5. El $\measuredangle ADB$ es un ángulo inscrito que subtiende al arco $\overset{\frown}{AB}$.
6. El $\measuredangle ADB$ y el $\measuredangle AOB$ subtienden el mismo arco, el arco $\overset{\frown}{AB}$.
7. Por teorema, la $med\measuredangle ADB$ es la mitad de la $med\measuredangle AOB$.

$$med\measuredangle ADB = \frac{1}{2} \cdot 42^{\circ}$$

$$med\sphericalangle ADB = 21^{\circ}$$

Por lo tanto, el valor de β es 21°.

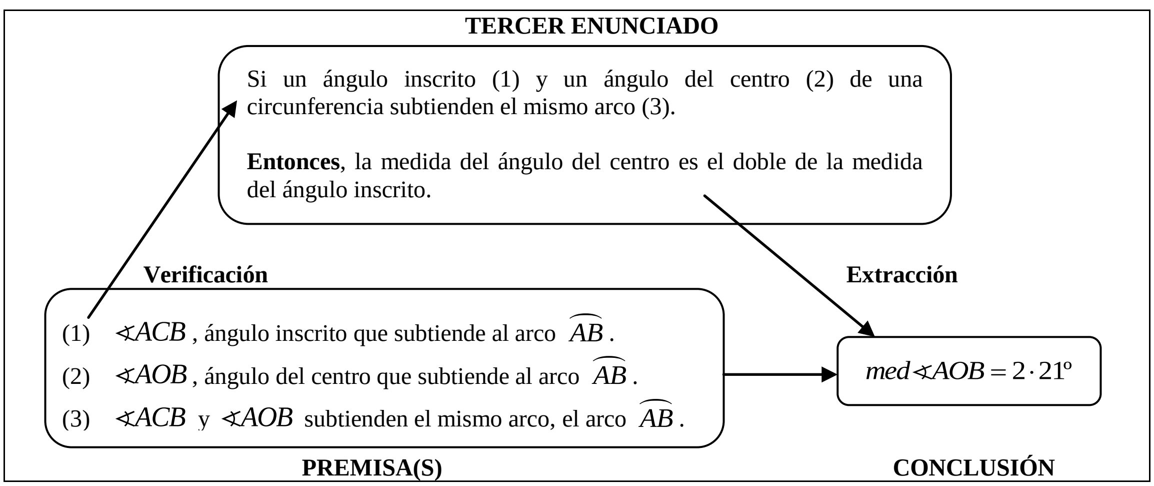
Análisis de la secuencia de afirmaciones del desarrollo del ejercicio

- **Afirmación 1:** Se extrae información sobre el $\sphericalangle ACB$, inscrito en la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.14).

- **Afirmación 2:** Se extrae información sobre el $\sphericalangle AOB$, del centro de la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.14)

- **Afirmación 3:** Se relacionan los ángulos obtenidos en las afirmaciones 1 y 2.

- **Afirmación 4:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus ponens). (Esquema 4.15)



Esquema 4.15: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para determinar la medida del ángulo del centro AOB.*

- **Afirmación 5:** Se extrae información sobre el $\sphericalangle ADB$, inscrito en la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.14)

- **Afirmación 6:** Se relacionan los ángulos obtenidos en las afirmaciones 2 y 5.

- **Afirmación 7:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus ponens). (Esquema 4.16)

TERCER ENUNCIADO

Si un ángulo inscrito (1) y un ángulo del centro (2) de una circunferencia subtienden el mismo arco (3).

Entonces, la medida del ángulo inscrito es la mitad de la medida del ángulo del centro.

Verificación **Extracción**

(1) $\sphericalangle ADB$, ángulo inscrito que subtiende al arco $\overparen{AB}$.
(2) $\sphericalangle AOB$, ángulo del centro que subtiende al arco $\overparen{AB}$.
(3) $\sphericalangle ADB$ y $\sphericalangle AOB$ subtienden el mismo arco, el arco $\overparen{AB}$.

$$med\sphericalangle ADB = \frac{1}{2} \cdot 42º$$

PREMISA(S) **CONCLUSIÓN**

Esquema 4.16: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para determinar la medida del ángulo inscrito ADB.*

Conocimientos específicos:

- No son necesarios.

Rol de la figura:

- Al comienzo del desarrollo se presenta una *aprehensión operativa de cambio figural.*
- En las afirmaciones 1 a 7 predomina una *aprehensión discursiva,* donde el cambio va de un *anclaje visual a uno discursivo.*

Pasos de Razonamiento:

- Modus Ponens.

Cantidad de pasos de razonamiento:	**Caso(s) del teorema:**
- 2 pasos.	- Primer y segundo caso.

Observaciones generales

1. El estudiante debe aplicar el teorema dos veces. La primera, para determinar la medida del ángulo del centro (caso 1 del teorema), La segunda, lo debe aplicar para determinar la medida del ángulo inscrito (caso 2 del teorema).

Actividad 1 Letra g

Enunciado

Calcular el valor de los ángulos.

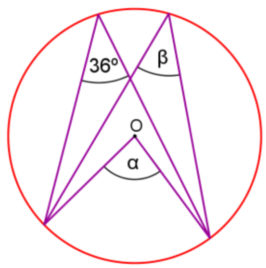


Figura 4.15

Desarrollo de la actividad esperado del estudiante

Se han asignado rótulos a los vértices de la figura para una mejor comprensión del desarrollo. (Figura 4.16)

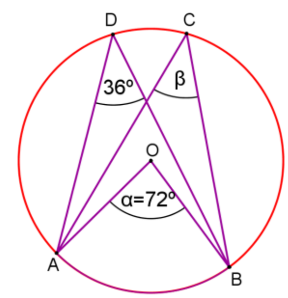


Figura 4.16

Secuencia de afirmaciones del desarrollo

1. El $\measuredangle ADB$ es un ángulo inscrito que subtiende al arco $\overset{\frown}{AB}$.

2. El $\measuredangle AOB$ es un ángulo del centro que subtiende al arco $\overset{\frown}{AB}$.

3. El $\measuredangle ADB$ y el $\measuredangle AOB$ subtienden el mismo arco, el arco $\overset{\frown}{AB}$.

4. Por teorema, la $med\measuredangle AOB$ es el doble de la $med\measuredangle ADB$.

$$med\measuredangle ADB = 2 \cdot 36^{\circ}$$
$$med\measuredangle ADB = 72^{\circ}$$

Por lo tanto, el valor de α es 72°.

5. El $\measuredangle ACB$ es un ángulo inscrito que subtiende al arco $\overset{\frown}{AB}$.

6. El $\measuredangle ACB$ y el $\measuredangle AOB$ subtienden el mismo arco, el arco $\overset{\frown}{AB}$.

7. Por teorema, la $med\measuredangle ACB$ es la mitad de la $med\measuredangle AOB$.

$$med\measuredangle ACB = \frac{1}{2} \cdot 72^{\circ}$$

$$med\sphericalangle ACB = 36^{\circ}$$

Por lo tanto, el valor de β es 36°.

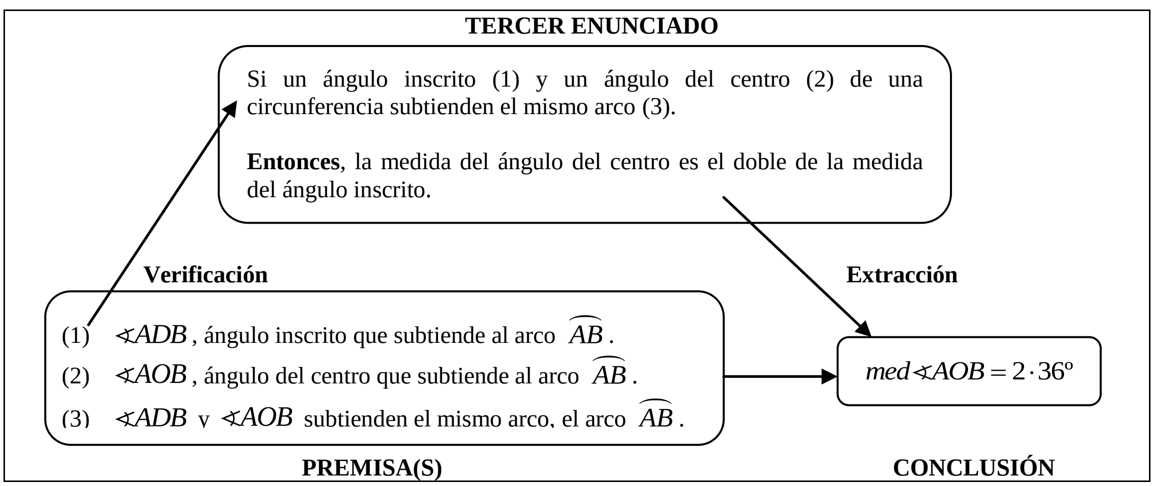
Análisis de la secuencia de afirmaciones del desarrollo del ejercicio

- **Afirmación 1:** Se extrae información sobre el $\sphericalangle ADB$, inscrito en la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.16)

- **Afirmación 2:** Se extrae información sobre el $\sphericalangle AOB$, del centro de la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.16)

- **Afirmación 3:** Se relacionan los ángulos obtenidos en las afirmaciones 1 y 2.

- **Afirmación 4:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus ponens). (Esquema 4.17)



Esquema 4.17: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para determinar la medida del ángulo del centro AOB.*

- **Afirmación 5:** Se extrae información sobre el $\sphericalangle ACB$, inscrito en la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.16)

- **Afirmación 6:** Se relacionan los ángulos obtenidos en las afirmaciones 2 y 5.

- **Afirmación 7:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus ponens). (Esquema 4.18)

TERCER ENUNCIADO

Si un ángulo inscrito (1) y un ángulo del centro (2) de una circunferencia subtienden el mismo arco(3).

Entonces, la medida del ángulo inscrito es la mitad de la medida del ángulo del centro.

Verificación **Extracción**

(1) $\sphericalangle ACB$, ángulo inscrito que subtiende al arco $\overset{\frown}{AB}$.

(2) $\sphericalangle AOB$, ángulo del centro que subtiende al arco $\overset{\frown}{AB}$.

(3) $\sphericalangle ACB$ y $\sphericalangle AOB$ subtienden el mismo arco, el arco $\overset{\frown}{AB}$.

$$med \sphericalangle ACB = \frac{1}{2} \cdot 36º$$

PREMISA(S) **CONCLUSIÓN**

Esquema 4.18: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para determinar la medida del ángulo inscrito ACB.*

<table>
<tr><td colspan="2">Conocimientos específicos:

- No son necesarios.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Rol de la figura:

- Al principio del desarrollo se presenta una aprehensión operativa de cambio figural.
- En las afirmaciones 1 a 7 predomina una aprehensión discursiva donde el cambio va de un anclaje visual a uno discursivo.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Pasos de Razonamiento:

- Modus Ponens.</td></tr>
<tr><td>Cantidad de pasos de razonamiento:

- 2 pasos.</td><td>Caso(s) del teorema:

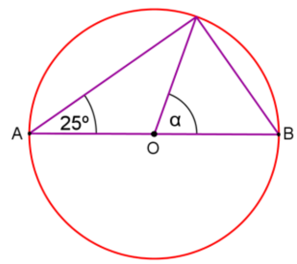
- Primer caso.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Observaciones generales

1. El estudiante debe aplicar el teorema dos veces. La primera, para determinar la medida del ángulo del centro, La segunda, lo debe aplicar en forma inversa para determinar la medida del ángulo inscrito.</td></tr>
</table>

Actividad 1 Letra h

Enunciado

Calcular el valor del ángulo.

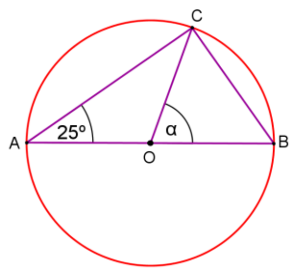


$\overline{AB}$ diámetro

Figura 4.17

Desarrollo de la actividad esperado del estudiante

Se han asignado rótulos a los vértices de la figura para una mejor comprensión del desarrollo. (Figura 4.18)



$\overline{AB}$ diámetro

Figura 4.18

Secuencia de afirmaciones del desarrollo

1. El $\sphericalangle BAC$ es un ángulo inscrito que subtiende al arco $\overset{\frown}{BC}$.
2. El $\sphericalangle BOC$ es un ángulo del centro que subtiende al arco $\overset{\frown}{BC}$.
3. El $\sphericalangle BAC$ y el $\sphericalangle BOC$ subtienden el mismo arco, el arco $\overset{\frown}{BC}$.
4. Por teorema, la $med\sphericalangle BOC$ es el doble de la $med\sphericalangle BAC$.

$$med\sphericalangle BOC = 2 \cdot 25^{\circ}$$
$$med\sphericalangle BOC = 50^{\circ}$$

Por lo tanto, el valor de α es 50°.

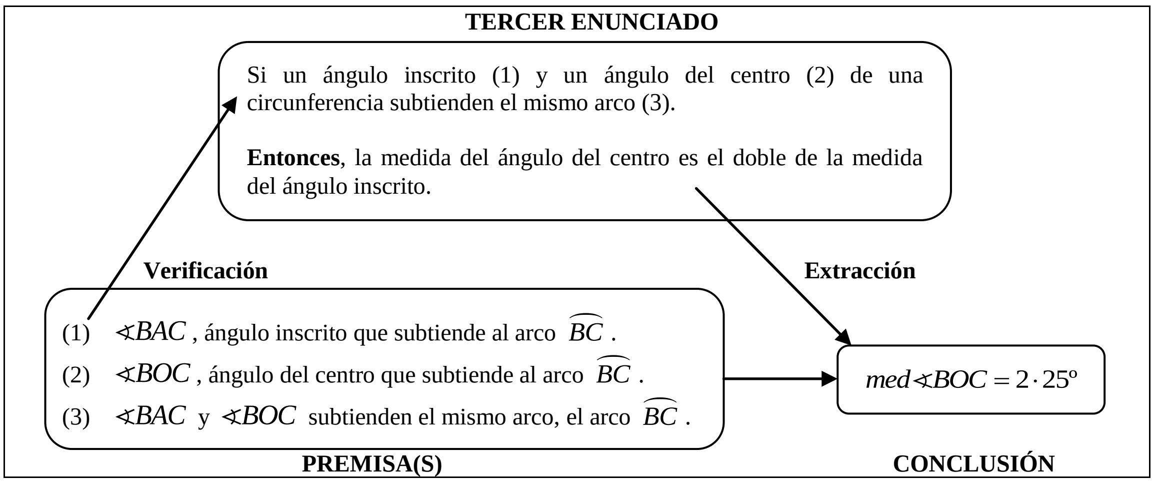
Análisis de la secuencia de afirmaciones del desarrollo del ejercicio

- **Afirmación 1:** Se extrae información sobre el $\sphericalangle BAC$, inscrito en la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.18)

- **Afirmación 2:** Se extrae información sobre el $\sphericalangle BOC$, del centro de la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.18)

- **Afirmación 3:** Se relacionan los ángulos obtenidos en las afirmaciones 1 y 2.

- **Afirmación 4:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus ponens). (Esquema 4.19)



Esquema 4.19: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para determinar la medida del ángulo del centro BOC.*

<table>
<tr><td colspan="2">Conocimientos específicos:

- No son necesarios.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Rol de la figura:

- Al principio del desarrollo se presenta una aprehensión operativa de cambio figural.
- En las afirmaciones 1 a 4 predomina una aprehensión discursiva donde el cambio va de un anclaje visual a uno discursivo.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Pasos de Razonamiento:

- Modus Ponens.</td></tr>
<tr><td>Cantidad de pasos de razonamiento:

- 1 paso.</td><td>Caso(s) del teorema:

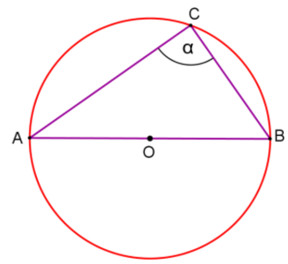
- Tercer caso.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Observaciones generales

1. El ejercicio requiere una aplicación inmediata del teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia para ser resuelto.</td></tr>
</table>

Actividad 1 Letra i

Enunciado

Calcular el valor del ángulo.

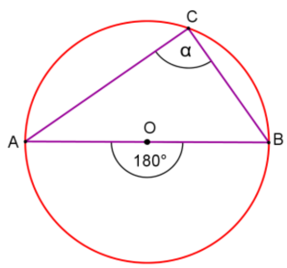


AB diámetro

Figura 4.19

Desarrollo de la actividad esperado del estudiante

Se han asignado rótulos a los vértices de la figura para una mejor comprensión del desarrollo. (Figura 4.20)



AB diámetro

Figura 4.20

Secuencia de afirmaciones del desarrollo

1. El $\sphericalangle ACB$ es un ángulo inscrito que subtiende al arco $\overset{\frown}{AB}$.
2. El $\sphericalangle AOB$ es un ángulo del centro que subtiende al arco $\overset{\frown}{AB}$.
3. Como $\overline{AB}$ es diámetro, la $med\sphericalangle AOB = 180^{\circ}$.
4. El $\sphericalangle ACB$ y el $\sphericalangle AOB$ subtienden el mismo arco, el arco $\overset{\frown}{AB}$.
5. Por teorema, la $med\sphericalangle ACB$ es la mitad de la $med\sphericalangle AOB$.

$$med\sphericalangle ACB = \frac{1}{2}\cdot 180^{\circ}$$
$$med\sphericalangle ACB = 90^{\circ}$$

Por lo tanto, el valor de α es 90°.

Análisis de la secuencia de afirmaciones del desarrollo del ejercicio

- **Afirmación 1:** Se extrae información sobre el $\sphericalangle ACB$, inscrito en la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.20)

- **Afirmación 2:** Se extrae información sobre el $\sphericalangle AOB$, del centro de la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.20)

- **Afirmación 3:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus ponens). (Esquema 4.20)

TERCER ENUNCIADO

Si los lados que forman un ángulo (1) del centro son parte de un diámetro (2) de circunferencia.

Entonces, el ángulo formado por dichos lados es extendido o llano, es decir, su medida es 180º.

Verificación

Extracción

(1) $\overline{AO}$ y $\overline{OB}$ lados del $\sphericalangle AOB$.

(2) $\overline{AO}$ y $\overline{OB}$ forman el diámetro AB.

La $med\sphericalangle AOB = 180^{\circ}$

PREMISA(S)

CONCLUSIÓN

Esquema 4.20: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para determinar la medida del ángulo AOB.*

- **Afirmación 4:** Se relacionan los ángulos obtenidos en las afirmaciones 1 y 2.

- **Afirmación 5:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus ponens). (Esquema 4.21)

TERCER ENUNCIADO

Si un ángulo inscrito (1) y un ángulo del centro (2) de una circunferencia subtienden el mismo arco (3).

Entonces, la medida del ángulo inscrito es la mitad de la medida del ángulo del centro.

Verificación

Extracción

(1) $\sphericalangle ACB$, ángulo inscrito que subtiende al arco $\overset{\frown}{AB}$.

(2) $\sphericalangle AOB$, ángulo del centro que subtiende al arco $\overset{\frown}{AB}$.

(3) $\sphericalangle ACB$ y $\sphericalangle AOB$ subtienden el mismo arco, el arco $\overset{\frown}{AB}$.

$med\sphericalangle ACB = \frac{1}{2}\cdot 180^{\circ}$

PREMISA(S)

CONCLUSIÓN

Esquema 4.21: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para determinar la medida del ángulo inscrito ACB.*

Conocimientos específicos:
- Ángulo extendido o llano. (Afirmación 3)

Rol de la figura:
- En las afirmaciones 1 a 5 predomina una *aprehensión discursiva* donde el cambio va de un *anclaje visual a uno discursivo.*

Pasos de Razonamiento:
- Modus Ponens.

Cantidad de pasos de razonamiento:	Caso(s) del teorema:
- 2 pasos.	- Primer caso.

Observaciones generales
1. El estudiante debe reconocer el ángulo del centro como un ángulo extendido que forma el diámetro de la circunferencia.

Actividad 2

Enunciado

En la circunferencia de centro O, los arcos BC, CD, DE, EF, FG, GH y HI son congruentes. Si el ángulo $BAI = 84^{o}$, determina la medida del ángulo COH.

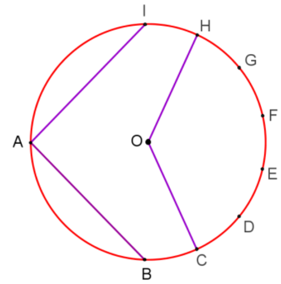
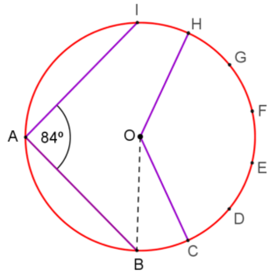


Figura 4.21

Desarrollo de la actividad esperado del estudiante

La secuencia de afirmaciones del desarrollo de la actividad será complementada con la Figura 4.22.

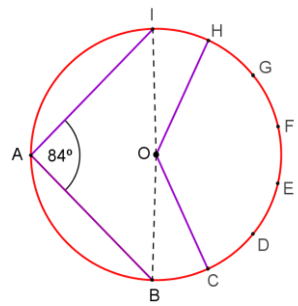


(a)

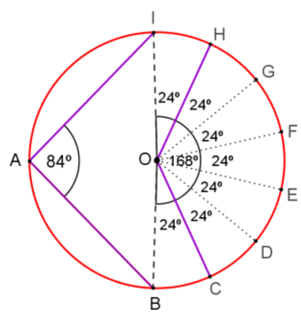
Secuencia de afirmaciones del desarrollo

1. El $\sphericalangle BAI$ es un ángulo inscrito que subtiende al arco $\overset{\frown}{BI}$.

2. Unir mediante una línea el punto B con el centro O, formando el segmento $\overline{BO}$. (Figura 4.22a)



(b)



(c)

Figura 4.22

3. Unir mediante una línea el punto I con el centro O, formando el segmento $\overline{IO}$. (Figura 4.22b)

4. $El \sphericalangle BOI$ es un ángulo del centro que subtiende al arco $\widehat{BI}$.

5. El $\sphericalangle BAI$ y el $\sphericalangle BOI$ subtienden el mismo arco, el arco $\widehat{BI}$.

6. Por teorema, la $med\sphericalangle BOI$ es el doble de la $med\sphericalangle BAI$.

$$med\sphericalangle BOI = 2\cdot 84^{\circ}$$
$$med\sphericalangle BOI = 168^{\circ}$$

7. Como $\widehat{BC}$, $\widehat{CD}$, $\widehat{DE}$, $\widehat{EF}$, $\widehat{FG}$, $\widehat{GH}$ y $\widehat{HI}$ son congruentes, los ángulos del centro que subtienden a cada uno de los arcos respectivos son congruentes.

   La medida de cada ángulo que subtiende a los arcos congruentes es.

$$med\sphericalangle BOI : 7$$
$$168^{\circ} : 7 = 24^{\circ}$$

   Por lo tanto, la medida de cada uno de los ángulos que subtienden a los arcos congruentes es 24º. (Figura 4.22c)

8. La $med\sphericalangle COH$ es la suma de los ángulos del centro que subtienden a los arcos CD, DE, EF, FG y GH.

   Por lo tanto, la $med\sphericalangle COH = 120^{\circ}$

Análisis de la secuencia de afirmaciones del desarrollo del ejercicio

- **Afirmación 1:** Se extrae información sobre el $\sphericalangle BAI$, inscrito en la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.22a)

- **Afirmación 2:** Se construye el segmento $\overline{BO}$ para formar el $\sphericalangle BOI$, del centro de la circunferencia. (Figura 4.22a)

- **Afirmación 3:** Se construye el segmento $\overline{IO}$ para formar el $\sphericalangle BOI$, del centro de la circunferencia. (Figura 4.22b)

- **Afirmación 4:** Se extrae información sobre el $\sphericalangle BOI$, del centro de la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.22b)

- **Afirmación 5:** Se relacionan los ángulos obtenidos en las afirmaciones 1 y 4.

- **Afirmación 6:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus ponens). (Esquema 4.22)

TERCER ENUNCIADO

Si un ángulo inscrito (1) y un ángulo del centro (2) de una circunferencia subtienden el mismo arco (3).

Entonces, la medida del ángulo del centro es el doble de la medida del ángulo inscrito.

Verificación

Extracción

(1) $\sphericalangle BAI$, ángulo inscrito que subtiende al arco $\overset{\frown}{BI}$.
(2) $\sphericalangle BOI$, ángulo del centro que subtiende al arco $\overset{\frown}{BI}$.
(3) $\sphericalangle BAI$ y $\sphericalangle BOI$ subtienden el mismo arco, el arco $\overset{\frown}{BI}$.

$med \sphericalangle BOI = 2 \cdot 84^{\circ}$

PREMISA(S)

CONCLUSIÓN

Esquema 4.22: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para determinar la medida del ángulo del centro BOI.*

- **Afirmación 7:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus ponens). (Esquema 4.23)

TERCER ENUNCIADO

Si dos o más arcos (1) de una circunferencia son congruentes.

Entonces, los ángulos del centro de la circunferencia que subtienden a dichos arcos también son congruentes.

Verificación

Extracción

(1) Los arcos BC, CD, DE, EF, FG, GH y HI son congruentes.

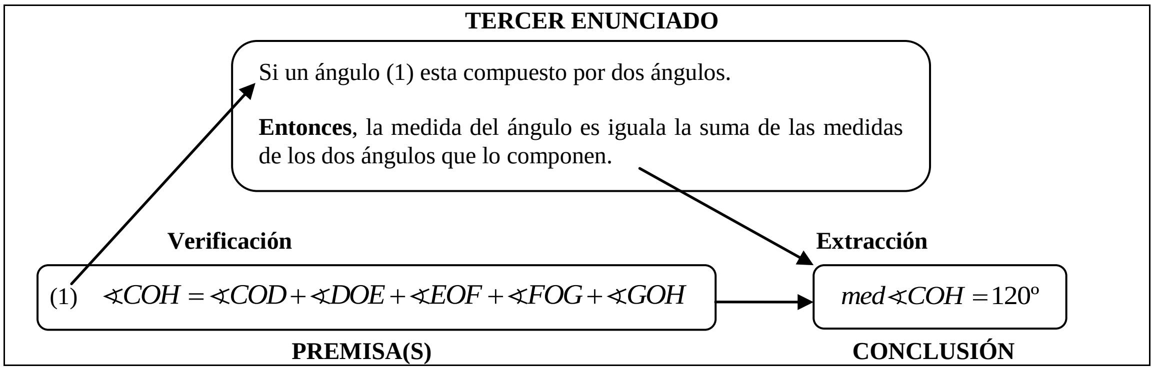
$\sphericalangle BOC \cong \sphericalangle COD \cong ... \cong \sphericalangle GOH \cong \sphericalangle HOI$

PREMISA(S)

CONCLUSIÓN

Esquema 4.23: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que los ángulos que subtienden a los arcos BC, CD, DE, EF, FG, GH y HI son congruentes.*

- **Afirmación 8:** Como la medida del $\sphericalangle COH$ esta compuesta por las suma de las medidas de los ángulos que subtienden a los arcos congruentes, se calcula su valor sumando las medidas de dichos ángulos. Lo anterior se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus ponens). (Esquema 4.24)



Esquema 4.24: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para determinar la medida del ángulo COH.*

Conocimientos específicos: - Proporcionalidad entre las medidas de ángulos del centro y longitud de los respectivos arcos. (Afirmación 7) - La medida del todo es igual a la suma de las medidas de sus partes. (Afirmación 8)	
Rol de la figura: - En la afirmación 1 y en las afirmaciones 4 a 8 se presenta una *aprehensión discursiva* donde predomina un *cambio de anclaje visual a discursivo*. - En las afirmaciones 2 a 3 existe una *aprehensión operativa de cambio figural*.	
Pasos de Razonamiento: - Modus Ponens.	
Cantidad de pasos de razonamiento: - 3 pasos.	**Caso(s) del teorema:** - Primer caso.
Observaciones generales 1. El estudiante debe construir el ángulo del centro de la circunferencia para posteriormente aplicar el teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia. Posterior a esto el estudiante debe utilizar la información del enunciado respecto a la congruencia de arcos. 2. La requiere de conocimientos especidícos por parte del estudiante para su desarrollo.	

Actividad 3

Enunciado

En la figura, AC es un arco de circunferencia de centro P, donde $\sphericalangle ACB = 45^{o}$. Determina qué tipo de triángulo es el ΔAPB.

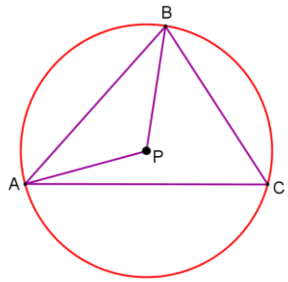
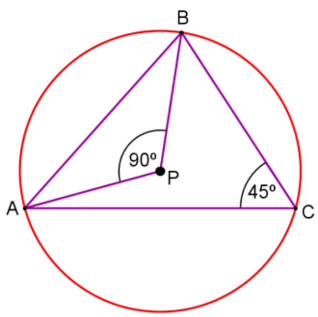


Figura 4.23

Desarrollo de la actividad esperado del estudiante

La secuencia de afirmaciones del desarrollo de la actividad será complementada con la Figura 4.24.



(b)

Figura 4.24

Secuencia de afirmaciones del desarrollo

1. El $\sphericalangle ACB$ es un ángulo inscrito que subtiende al arco $\overset{\frown}{BA}$.

2. El $\sphericalangle APB$ es un ángulo del centro que subtiende al arco $\overset{\frown}{BA}$.

3. El $\sphericalangle ACB$ y el $\sphericalangle APB$ subtienden el mismo arco, el arco $\overset{\frown}{BA}$.

4. Por teorema, la $med\sphericalangle APB$ es el doble de la $med\sphericalangle ACB$.

$$med\sphericalangle APB = 2\cdot 45^{o}$$
$$med\sphericalangle APB = 90^{o}$$

5. ΔAPB, es un triángulo rectángulo en P.

6. Como $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$ son radios,

$$\overline{PA} \cong \overline{PB}$$

7. ΔAPB, es un triángulo isósceles de base AB.

8. ΔAPB, es un triángulo isósceles rectángulo en P.

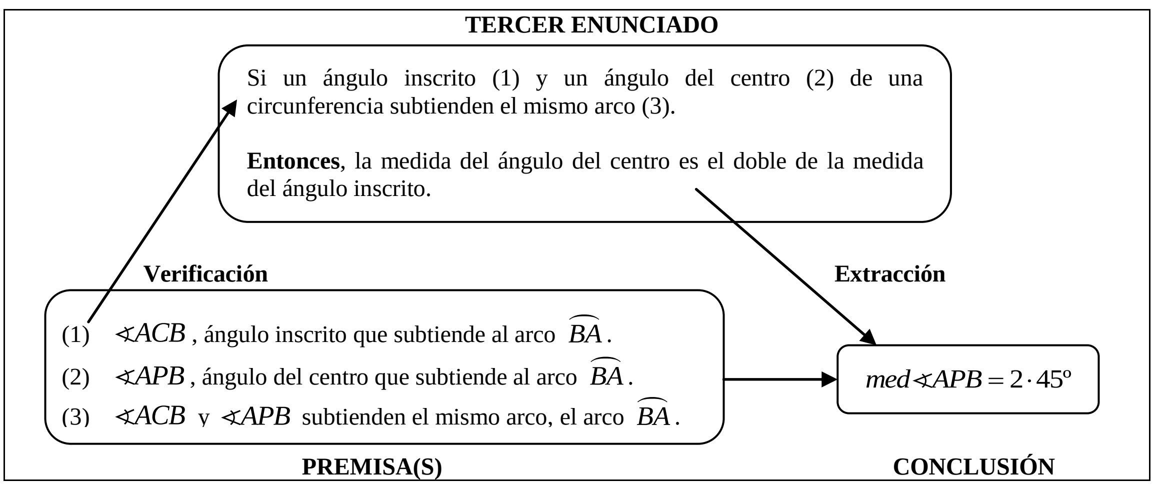
Análisis de la secuencia de afirmaciones del desarrollo del ejercicio

- **Afirmación 1:** Se extrae información sobre el $\measuredangle ACB$, inscrito en la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.24)

- **Afirmación 2:** Se extrae información sobre el $\measuredangle APB$, del centro de la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.24)

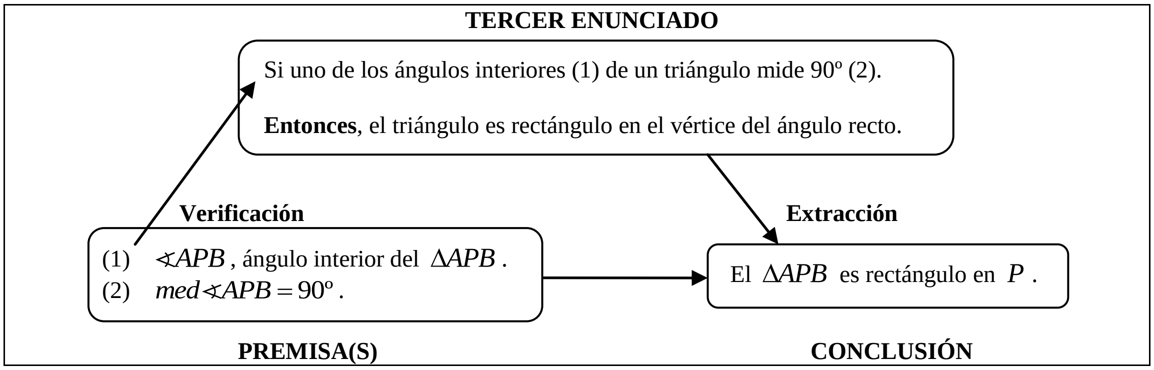
- **Afirmación 3:** Se relacionan los ángulos obtenidos en las afirmaciones 1 y 2.

- **Afirmación 4:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus ponens). (Esquema 4.25)



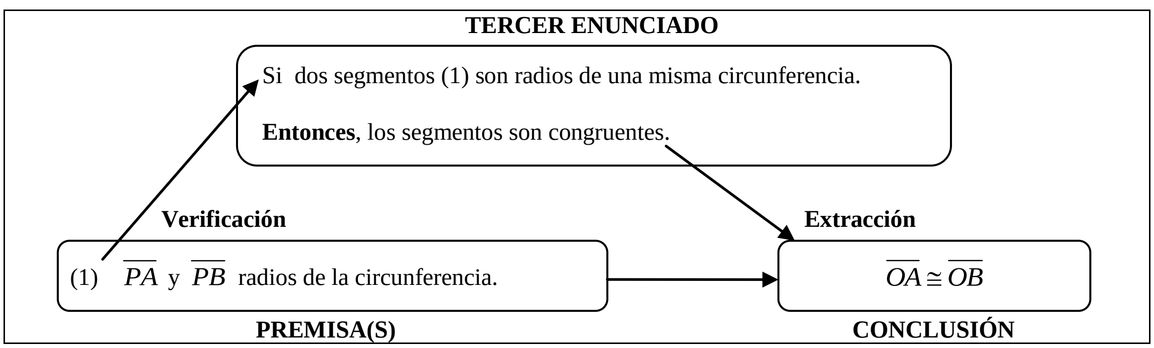
Esquema 4.25: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para determinar la medida del ángulo del centro APB.*

- **Afirmación 5:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus ponens). (Esquema 4.26)



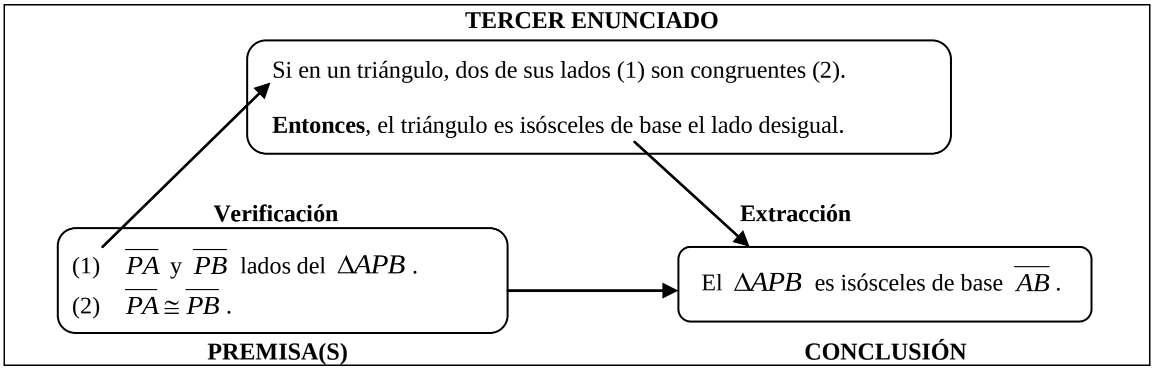
Esquema 4.26: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que el triángulo APB es rectángulo en P.*

- **Afirmación 6:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus ponens). (Esquema 4.27)



Esquema 4.27: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que los segmentos PA y PB son congruentes.*

- **Afirmación 7:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus ponens). (Esquema 4.28)



Esquema 4.28: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que el triángulo APB es Isósceles de base AB.*

- **Afirmación 8:** Se identifica al triángulo como un triángulo isósceles rectángulo según lo concluido en las afirmaciones 5 y 7.

Conocimientos específicos: - Definición de Triángulo Rectángulo. (Afirmación 5) - Congruencia de trazos. (Afirmación 6) - Definición de Triángulo Isósceles. (Afirmación 7)	
Rol de la figura: - En todas las afirmaciones predomina una *aprehensión discursiva*. En este caso, el sentido de la transferencia va de un *anclaje visual a uno discursivo*.	
Pasos de Razonamiento: - Modus Ponens.	
Cantidad de pasos de razonamiento: - 4 pasos.	**Caso(s) del teorema:** - Primer caso.
Observaciones generales 1. La actividad requiere de conocimientos especificos por parte del estudiante para su desarrollo.	

Actividad 4

Enunciado

En la figura, ABCDEF es un hexágono regular. Determina la medida de α .

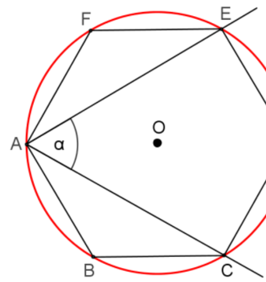


Figura 4.25

Desarrollo de la actividad esperado del estudiante

La secuencia de afirmaciones del desarrollo de la actividad será complementada con la Figura 4.26.

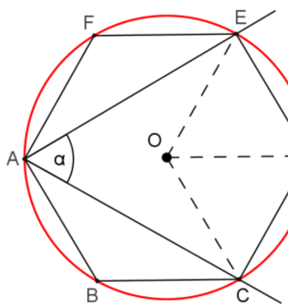


Figura 4.26

Secuencia de afirmaciones del desarrollo

1. Unir mediante una línea los vértices C, D y E con el centro O, formando los segmentos $\overline{CO}$, $\overline{DO}$ y $\overline{EO}$. (Figura 4.26)

2. Como $\overline{CO}$, $\overline{DO}$ y $\overline{EO}$ son radios de la circunferencia,

$$\overline{CO} \cong \overline{DO} \cong \overline{EO}$$

3. Se forman 2 triángulos isósceles de lados congruentes con bases los lados del hexágono regular.

4. Como ABCDEF es un hexágono regular, sus lados son congruentes.

$$\overline{CD} \cong \overline{DE}$$

5. La base de los dos triángulos es congruente, pues cada base es un lado del hexágono regular.

6. Por criterio LLL de congruencia de triángulos,

$$\Delta COD \cong \Delta DOE$$

7. Los ángulos del centro COD y DOE son congruentes

8. La medida de cada ángulo del centro es 60º pues estos forman un ángulo completo. (Figura 4.26b)

$$\frac{360º}{6} = 60º$$

9. El $\sphericalangle CAE$ es un ángulo inscrito que subtiende al arco $\overset{\frown}{CE}$.

10. El $\sphericalangle COE$ es un ángulo del centro que subtiende al arco $\overset{\frown}{CE}$.

11. La $med\sphericalangle COE$ es la suma de las medidas de los ángulos del centro que subtienden a los arcos CD y DE.

$$med\sphericalangle COE = 120º$$

12. El $\sphericalangle CAE$ y el $\sphericalangle COE$ subtienden el mismo arco, el arco $\overset{\frown}{CE}$.

13. Por teorema, la $med\sphericalangle CAE$ es la mitad de la $med\sphericalangle COE$.

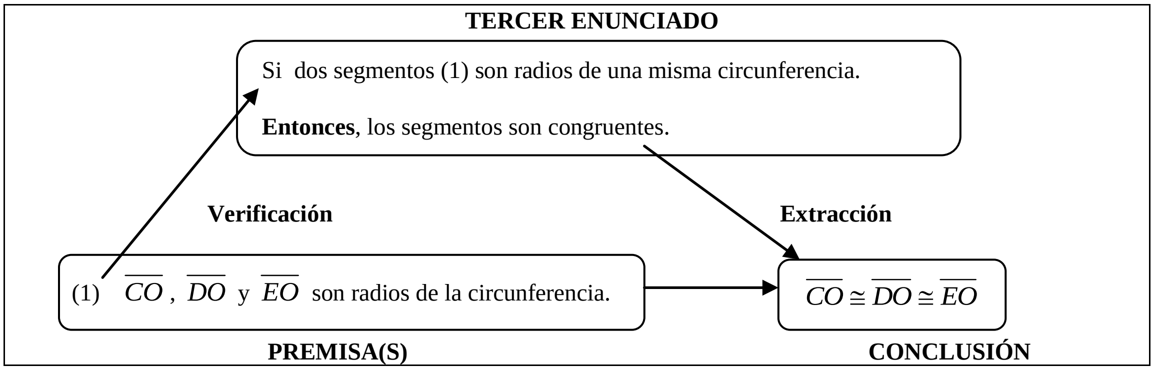
$$med\sphericalangle CAE = \frac{1}{2}\cdot 120º$$
$$med\sphericalangle CAE = 60º$$

Por lo tanto, la $med\sphericalangle CAE = 60º$.

Análisis de la secuencia de afirmaciones del desarrollo del ejercicio.

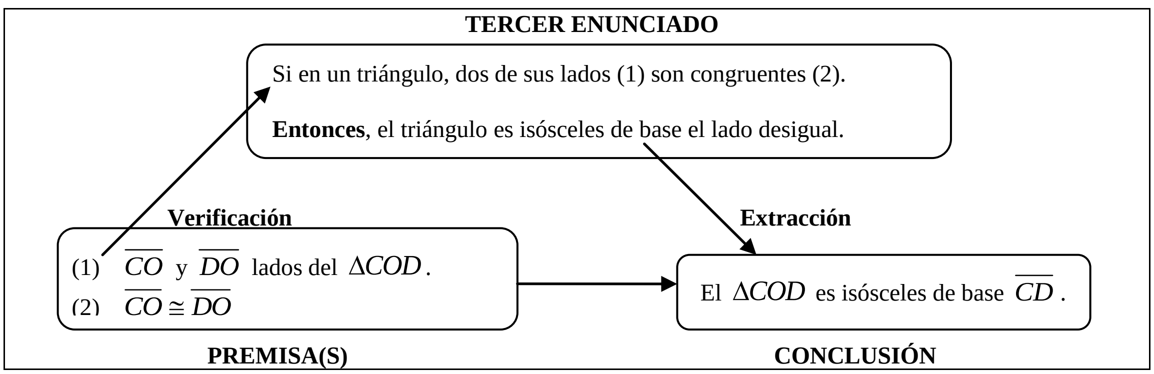
- **Afirmación 1:** Se construyen los segmentos $\overline{CO}$, $\overline{DO}$ y $\overline{EO}$ para formar los ángulos del centro COD y DOE.

- **Afirmación 2:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus ponens). (Esquema 4.29)

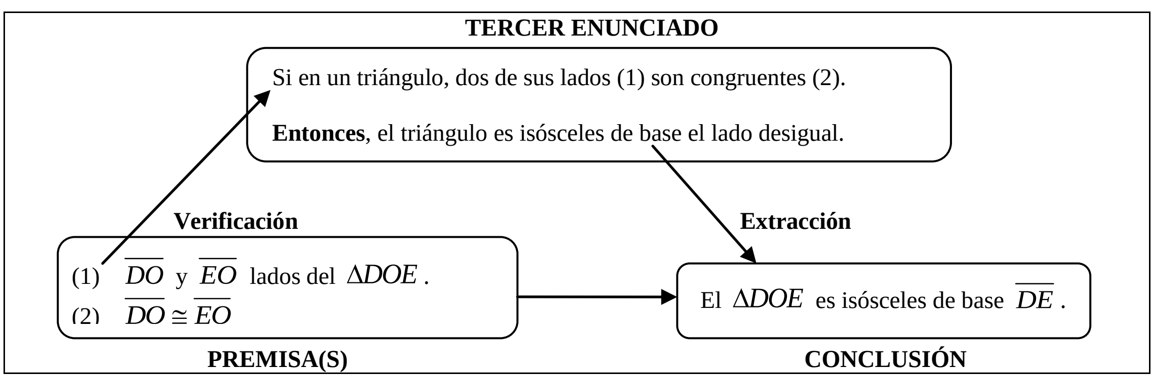


Esquema 4.29: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que los segmentos CO, DO y EO son congruentes.*

- **Afirmación 3:** Se justifica realizando dos veces un pasos de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus ponens). (Esquema 4.30)



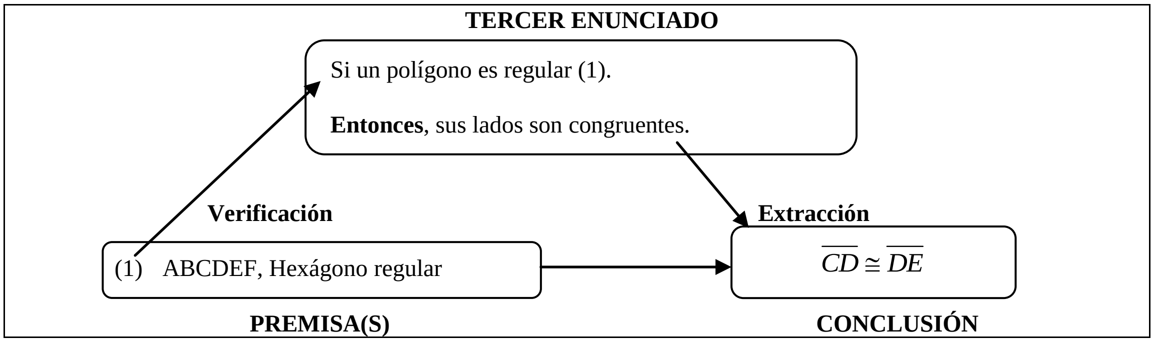
(a) *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que el triángulo COD es Isósceles de base CD.*



(b) *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que el triángulo DOE es Isósceles de base DE.*

Esquema 4.30

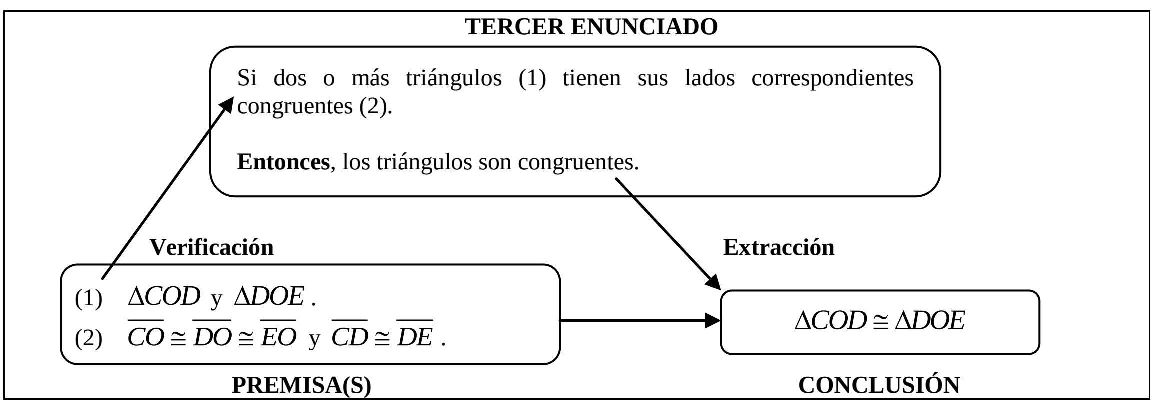
- **Afirmación 4:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus ponens). (Esquema 4.31)



***Esquema 4.31:** Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que los lados CD y DE del polígono regular ABCDEF son congruentes.*

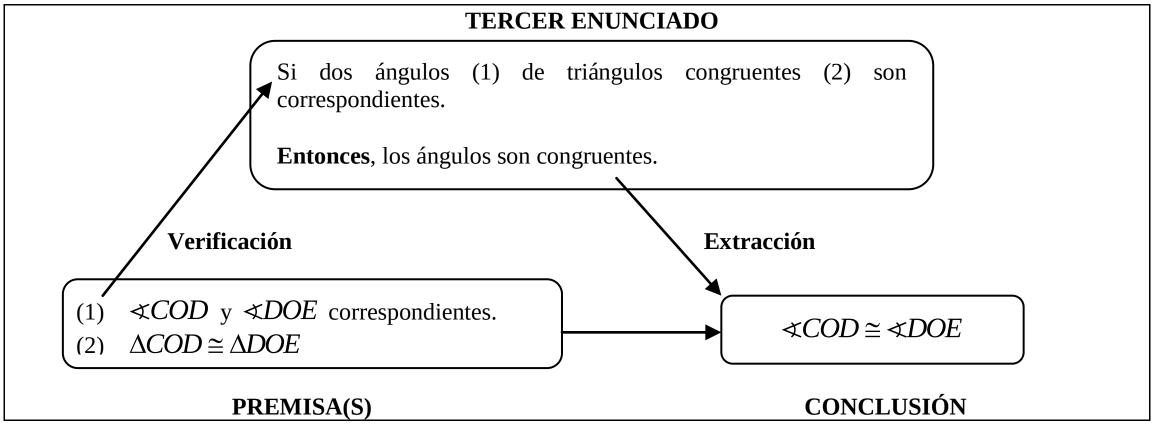
- **Afirmación 5:** En base a lo que se concluyo en la afirmación anterior, se determina que la base de los triángulos es congruente.

- **Afirmación 6:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus ponens). (Esquema 4.32)



***Esquema 4.32:** Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que los triángulos COD y DOE son congruentes.*

- **Afirmación 7:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus ponens). (Esquema 4.33)



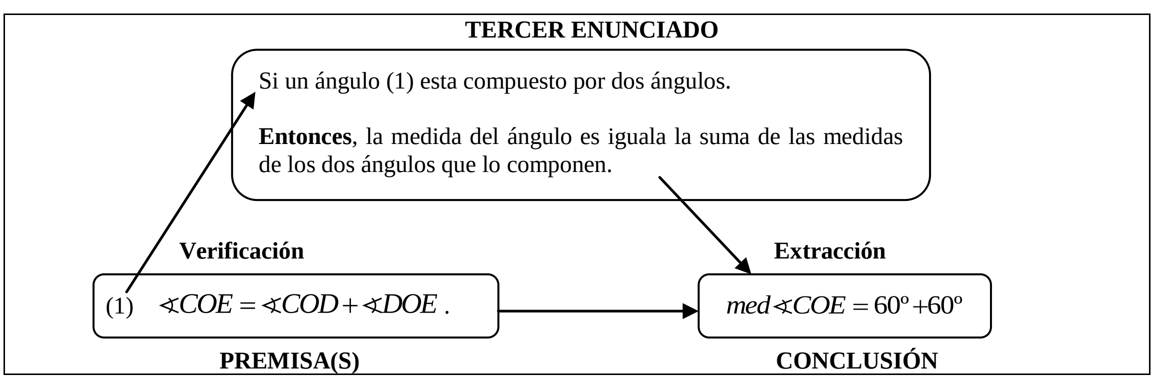
Esquema 4.33: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que los ángulos COD y DOE son congruentes.*

- **Afirmación 8:** Como la suma de las medidas de los ángulos AOB, BOC, COD, DOE, EOF y FOA resulta 360º, y además, estos son congruentes, se calcula la medida de cada ángulo.

- **Afirmación 9:** Se extrae información sobre el $\sphericalangle CAE$, inscrito en la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.26)

- **Afirmación 10:** Se extrae información sobre el $\sphericalangle COE$, del centro de la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.26)

- **Afirmación 11: S**e justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus ponens). (Esquema 4.34)



Esquema 4.34: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para determinar la medida del ángulo COE.*

- **Afirmación 12:** Se relacionan los ángulos obtenidos en las afirmaciones 9 y 10.

- **Afirmación 13:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus ponens). (Esquema 4.35)

TERCER ENUNCIADO

Si un ángulo inscrito (1) y un ángulo del centro (2) de una circunferencia subtienden el mismo arco (3).

Entonces, la medida del ángulo inscrito es la mitad de la medida del ángulo del centro.

Verificación **Extracción**

(1) $\sphericalangle CAE$, ángulo inscrito que subtiende al arco $\overset{\frown}{CE}$.

(2) $\sphericalangle COE$, ángulo del centro que subtiende al arco $\overset{\frown}{CE}$.

(3) $\sphericalangle CAE$ y $\sphericalangle COE$ subtienden el mismo arco, el arco $\overset{\frown}{CE}$.

$\longrightarrow$ $med \sphericalangle CAE = \frac{1}{2} \cdot 120º$

PREMISA(S) **CONCLUSIÓN**

Esquema 4.35: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para determinar la medida del ángulo inscrito CAE*.

Conocimientos específicos:

- Congruencia de trazos (Afirmaciones 2 y 5)
- Definición de Triángulo isósceles (Afirmación 3)
- Hexágono regular (Afirmación 4)
- Congruencia de triángulos (Afirmaciones 6 y 7)
- La medida del todo es igual a la suma de las medidas de sus partes. (Afirmaciones 8 y 11)

Rol de la figura:

- En las afirmación 1 existe una *aprehensión operativa de cambio figural*.
- En las afirmaciones 2 a 13 se presenta una *aprehensión discursiva* donde predomina un *cambio de anclaje visual a discursivo*.

Pasos de Razonamiento:

- Modus Ponens.

Cantidad de pasos de razonamiento:	**Caso(s) del teorema:**
- 8 pasos.	- Primer caso.

Observaciones generales

1. La actividad se requiere de conocimientos específicos por parte del estudiante para su desarrollo.

A continuación en la tabla 4.3 se detalla la cantidad de pasos de razonamiento, tipos de razonamiento y caso del teorema que se deben utilizar para el desarrollo de cada una de las actividades propuestas del texto.

EJERCICIOS	CASO DEL TEOREMA	CANTIDAD DE PASOS DE RAZONAMIENTO	TIPO DE PASO DE RAZONAMIENTO
1a	Caso 1	1 paso	Modus Ponens
1b	Caso 2	2 pasos	Modus Ponens
1c	Caso 1	2 pasos	Modus Ponens
1d	Caso 1	1 paso	Modus Ponens
1e	Caso 1	2 pasos	Modus Ponens
1f	Caso 1 y 2	2 pasos	Modus Ponens
1g	Caso 1	2 pasos	Modus Ponens
1h	Caso 3	1 paso	Modus Ponens
1i	Caso 1	2 pasos	Modus Ponens
2	Caso 1	3 pasos	Modus Ponens
3	Caso 1	4 pasos	Modus Ponens
4	Caso 1	8 pasos	Modus Ponens

Tabla 4.3: Cantidad de pasos de razonamientos y tipos de pasos de razonamientos que justifican las afirmaciones del desarrollo de las actividades propuestas en el texto Santillana Edición: Especial para el Ministerio de Educación.

Como se observa en la tabla 4.3, el tipo de razonamiento presente en las actividades son pasos de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens)

Las actividades, el texto no las propone en forma organizada según el caso del teorema que se deba aplicar para cada ejercicio o la cantidad de pasos de razonamiento que se deban realizar en la resolución de estas. Es decir, comienza con un ejercicio en el cual se debe aplicar en forma directa el primer caso del teorema. Realizando un paso de razonamiento en su desarrollo. Luego, en el siguiente ejercicio se aplica el segundo caso del teorema y se realizan dos pasos de razonamiento. Incrementando los pasos de razonamiento en comparación con el primer ejercicio. Sin embargo, el ejercicio 1d para ser resuelto se debe aplicar el primer caso del teorema, realizando un paso de razonamiento. Esto evidencia que las actividades propuestas por el texto no están organizadas según la cantidad de pasos de razonamiento o caso del teorema que se deba aplicar. Además, solo un ejercicio requiere la aplicación de los dos primeros casos del teorema para ser resuelto.

De los 12 ejercicios propuestos, solo dos involucran conocimientos especificos en su desarrollo. Esto conlleva a que la mayoría de los ejercicios para ser resueltos sea necesario realizar uno o dos pasos de razonamientos.

Cabe hacer notar que el texto presenta una confusión conceptual, pues este señala la longitud de un arco en grados. En el contexto del mismo quiere decir que la medida del ángulo del centro de una circunferencia es igual a la medida del arco que subtiende.

La mayoría de los ejercicios consiste en calcular la medida de un ángulo, salvo la actividad número 3, la cual consiste en determinar el tipo de triangulo presente en un dibujo. El texto no propone actividades en las que se solicite al estudiante demostrar.

Respecto al rol de la figura en el desarrollo de cada una de las actividades propuestas, se presenta un resumen en la tabla 4.4.

EJERCICIO	APREHENSION DISCURSIVA	APREHENSION OPERATIVA
1a	4 Afirmaciones	Al comienzo del desarrollo
1b	5 Afirmaciones	2 Afirmaciones y Al comienzo del desarrollo
1c	5 Afirmaciones	2 Afirmaciones y Al comienzo del desarrollo
1d	4 Afirmaciones	Al comienzo del desarrollo
1e	5 Afirmaciones	Al comienzo del desarrollo
1f	7 Afirmaciones	Al comienzo del desarrollo
1g	7 Afirmaciones	Al comienzo del desarrollo
1h	4 Afirmaciones	Al comienzo del desarrollo
1i	5 Afirmaciones	Al comienzo del desarrollo
2	6 Afirmaciones	2 Afirmaciones
3	8 Afirmaciones	No se presenta
4	12 Afirmaciones	1 Afirmación

Tabla 4.4: Resumen correspondiente al rol de la figura en las actividades propuestas en el Texto Santillana Edición Especial para el Ministerio de Educación.

Se desprende de la tabla 4.4 que solo 4 ejercicios requieren de una Aprehensión operativa en una afirmación o más. Es decir, en estos ejercicios el estudiante debe realizar una construcción de algún elemento geométrico extra para poder ser resueltos.

4.2 Texto Santillana

El análisis del texto se ha organizado en cinco secciones. La primera correspondiente al análisis de las demostraciones expuestas por el texto de los casos del Teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia. Las restantes, tratan de las actividades, las cuales serán presentadas según la pagina del texto. En ambos casos se comentara sobre el tipo de razonamiento presente, conocimientos especificos, rol de la figura y observaciones generales referentes al tratamiento del contenido que presenta el texto.

4.2.1 Demostración del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia

Previo a exponer la demostración, el texto propone al estudiante una actividad experimental. La cual consiste en medir con un transportador el ángulo inscrito y del centro de una circunferencia en un dibujo que representa una situación particular. Luego se le solicita al alumno que dibuje una figura similar a la que midió anteriormente, para volver a medir el ángulo inscrito y del centro. Posteriormente, se realizan preguntas al estudiante sobre la relación que existe entre la medida del ángulo inscrito y del centro de la circunferencia. Los resultados que estos obtengan los deben discutir con sus compañeros, con la finalidad de lograr conjeturar sobre la relación que hay entre las medidas de los ángulos inscritos y del centro de una circunferencia.

A continuación se detalla el análisis de las demostraciones expuestas por el texto como lectura para el estudiante. Correspondientes al primer y segundo caso del teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia.

Demostración del primer caso del teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia

"*El centro de la circunferencia se encuentra al interior de la región limitada por los lados del ángulo inscrito*"

Enunciado

Hipótesis: $\overline{OA} \cong \overline{OC} \cong \overline{OB}$

Tesis: $\sphericalangle AOB = 2\sphericalangle ACB$

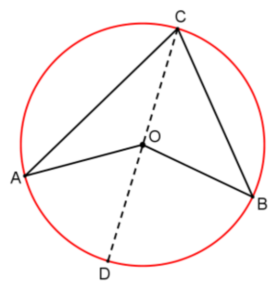


Figura 4.27

Desarrollo de la demostración

La secuencia de afirmaciones del desarrollo de la demostración es complementada con la Figura 4.28

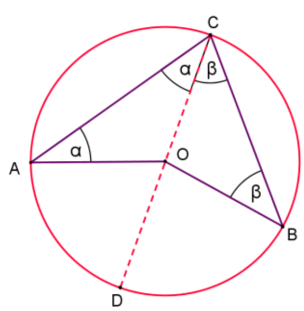


Figura 4.28

Secuencia de afirmaciones del desarrollo de la demostración

1. El ΔOAC es isósceles pues $\overline{OA} \cong \overline{OC}$ por hipótesis.

   $$\therefore \sphericalangle OAC \cong \sphericalangle OCA$$

   Llamaremos a estos ángulos α .

2. El ΔOBC es isósceles pues $\overline{OB} \cong \overline{OC}$ por hipótesis.

   $$\therefore \sphericalangle OBC \cong \sphericalangle OCB$$

   Llamaremos a estos ángulos β .

3. $\sphericalangle AOD = 2\alpha$ por ser ángulos exteriores en el triángulo ΔOAC .

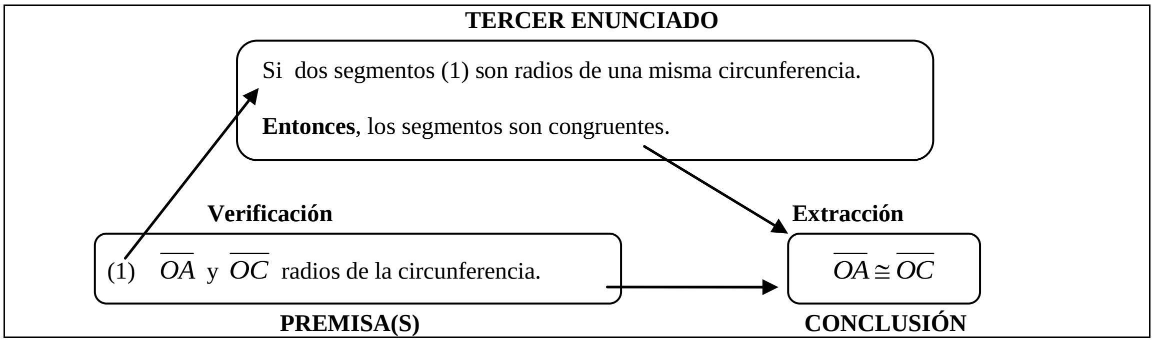
4. $\sphericalangle BOD = 2\beta$ por ser ángulo exterior en el triángulo ΔOBC .

5. Es evidente que $\sphericalangle AOB = 2\alpha + 2\beta$.

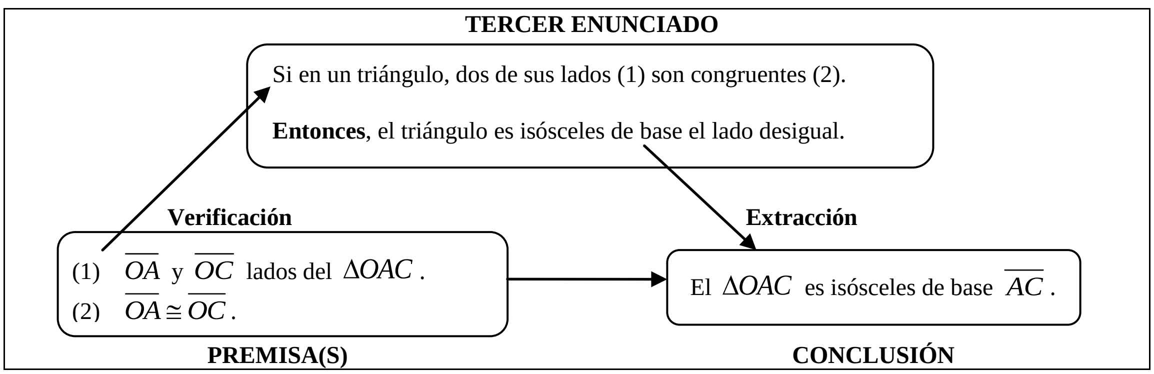
   $$\therefore \sphericalangle AOB = 2(\alpha + \beta)$$
   $$\sphericalangle AOB = 2\sphericalangle ACB$$

Análisis de la secuencia de afirmaciones de la demostración

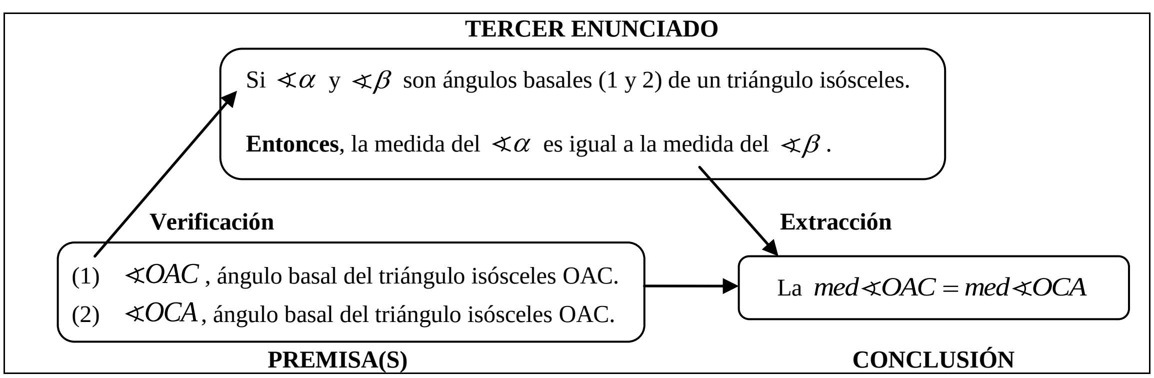
- **Afirmación 1:** Se justifica realizando tres pasos de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.36)



(a) *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que los segmentos OA y OC son congruentes.*



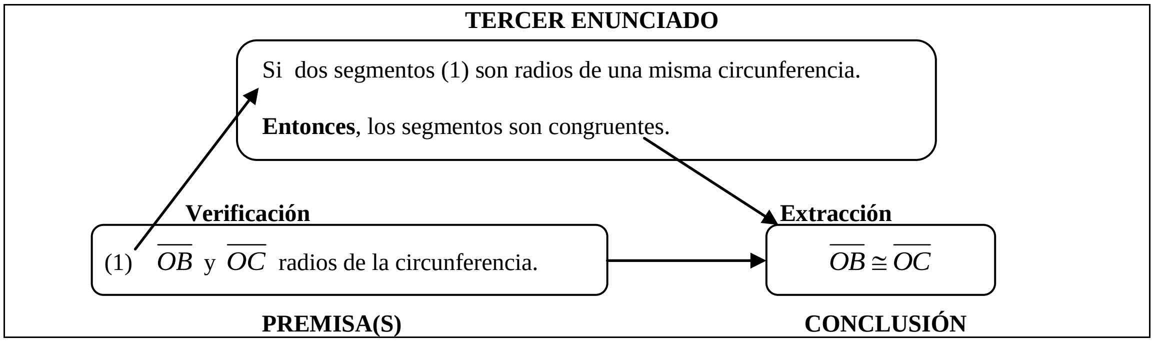
(b) *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que el triángulo OAC es Isósceles de base AC.*



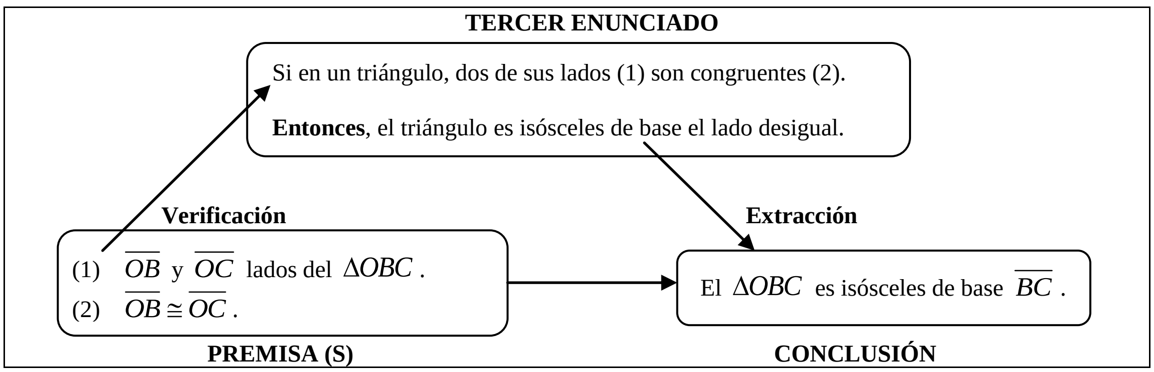
(c) *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que los ángulos basales del triángulo isósceles OAC son congruentes.*

Esquema 4.36

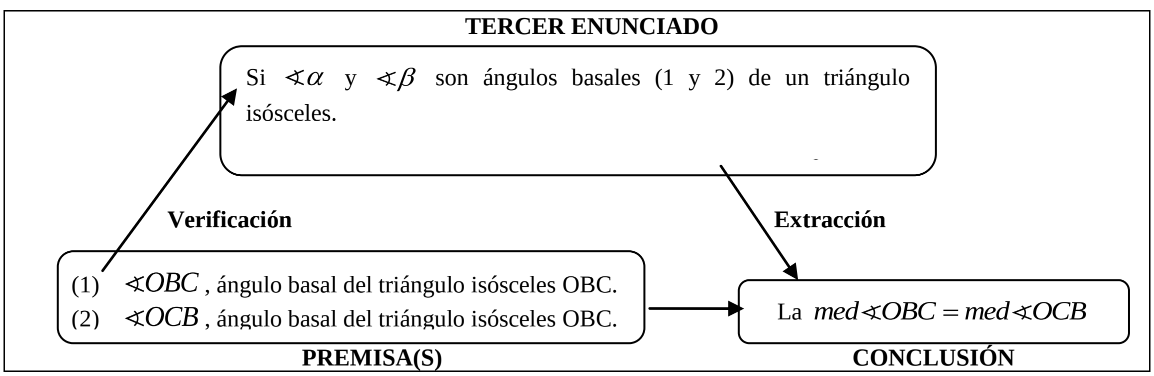
- **Afirmación 2:** Se justifica realizando tres pasos de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.37)



(a) *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que los segmentos OB y OC son congruentes.*



(b) *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que el triángulo OBC es Isósceles de base BC.*



(c) *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que los ángulos basales del triángulo isósceles OBC son congruentes.*

Esquema 4.37

- **Afirmación 3:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.38)

TERCER ENUNCIADO

Si en un triángulo, γ es ángulo exterior (1) de un triángulo, α y β ángulos interiores no adyacentes (2) al $\measuredangle\gamma$.

Entonces, la medida del $\measuredangle\gamma$ es igual a la suma de las medidas de los ángulos α y β.

Verificación **Extracción**

(1) $\measuredangle AOD$, ángulo exterior del ΔOAC.
(2) $\measuredangle OAC$ y $\measuredangle OCA$, ángulos interiores del ΔOAC

$med\measuredangle AOD = med\measuredangle OAC + med\measuredangle OCA$

PREMISA(S) **CONCLUSIÓN**

Esquema 4.38: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para determinar la medida del ángulo exterior AOD.*

- **Afirmación 4:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.39)

TERCER ENUNCIADO

Si en un triángulo, γ es ángulo exterior (1) de un triángulo, α y β ángulos interiores no adyacentes (2) al $\measuredangle\gamma$.

Entonces, la medida del $\measuredangle\gamma$ es igual a la suma de las medidas de los ángulos α y β.

Verificación **Extracción**

(1) $\measuredangle BOD$, ángulo exterior del ΔOBC.
(2) $\measuredangle OBC$ y $\measuredangle OCB$, ángulos interiores del ΔOBC.

$med\measuredangle BOD = med\measuredangle OBC + med\measuredangle OCB$

PREMISA(S) **CONCLUSIÓN**

Esquema 4.39: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para determinar la medida del ángulo exterior BOD.*

- **Afirmación 5:** Como la medida del ángulo AOB esta compuesta por la suma de las medidas de los ángulos AOD y BOD, se formula la igualdad que relaciona sus medidas para determinar la relación entre la suma de los ángulos $\measuredangle AOD$, $\measuredangle DOB$ y la del ángulo inscrito ACB. Lo anterior se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.40)

TERCER ENUNCIADO

Si un ángulo (1) esta compuesto por dos ángulos.

Entonces, la medida del ángulo es iguala la suma de las medidas de los dos ángulos que lo componen.

Verificación **Extracción**

(1) $\sphericalangle AOB = \sphericalangle AOD + \sphericalangle DOB$.

$med \sphericalangle AOB = 2\alpha + 2\beta$

PREMISA(S) **CONCLUSIÓN**

Esquema 4.40: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para determinar la medida del ángulo AOB.*

Conocimientos específicos:

- Congruencia de trazos (Afirmación 1)
- Definición de Triángulo Isósceles (Afirmación 1)
- Propiedad sobre ángulos basales del triángulo isósceles. (Afirmación 1)
- Teorema: la medida del ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de las medidas de los dos ángulos interiores no adyacentes. (Afirmaciones 3 y 4)
- La medida del todo es igual a la suma de las medidas de sus partes. (Afirmación 5)

Rol de la figura:

- En todas las afirmaciones predomina una *aprehensión discursiva* donde el sentido de la transferencia va de *un anclaje visual a uno discursivo.*

Pasos de Razonamiento:

- El paso de razonamiento es de *encadenamiento por reutilización*, donde cada uno de los razonamientos que componen el encadenamiento son razonamientos deductivos (Modus ponens).

Cantidad de pasos de razonamiento:	**Caso del teorema:**
- 9 pasos.	- Primer caso.

Observaciones generales

1. La demostración incluye dos demostraciones, las cuales se realizan en paralelo.
2. En las afirmaciones 1 y 2 se realizan los mismos tipos de razonamiento.
3. Se realizan tres pasos en uno, omitiendo pasos fundamentales, pudiendo provocar que el estudiante se pierda en la lectura de la demostración, o deje de comprender los pasos que se dan en su desarrollo. (Afirmaciones 1 y 2)
4. Se identifican objetos geométricos con sus medidas, en el caso de los ángulos. Se presenta una confusión de notación. (Afirmaciones 3, 4 y 5)
5. El teorema se demuestra sobre un dibujo que representa un caso particular. (Figura 4.28)
6. La demostración es realizada por el texto, solo se le expone al estudiante.

Demostración del segundo caso del teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia

"*El centro de la circunferencia se encuentra al exterior de la región limitada por los lados del ángulo inscrito.*"

Al igual que en el caso anterior, el texto propone al estudiante una actividad exploratoria, en la cual debe medir nuevamente con un transportador el ángulo inscrito y del centro en un dibujo que representa el segundo caso de teorema, Posteriormente, el alumno debe realizar un dibujo similar al anterior para medir nuevamente el ángulo inscrito y del centro de la circunferencia. Los resultados que este obtenga en la medición de los ángulos los debe debatir con sus compañeros, con la finalidad de concluir que en este nuevo caso se sigue dando la relación de que la medida del ángulo inscrito es la mitad de la medida del ángulo del centro. Hay que hacer notar que en la actividad el texto no menciona al arco que los ángulos subtienden como condición para el dibujo que debe realizar el alumno.

Enunciado

Hipótesis: $\overline{OA} \cong \overline{OB} \cong \overline{OC}$

Tesis: $\sphericalangle AOB = 2\sphericalangle ACB$

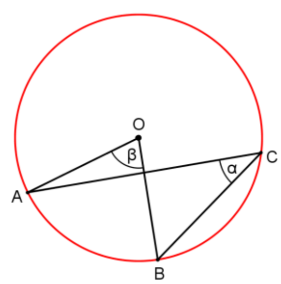
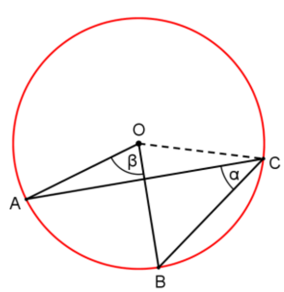


Figura 4.29

Desarrollo de la demostración

La secuencia de afirmaciones del desarrollo de la demostración es complementada con la Figura 4.30



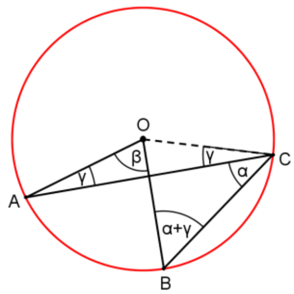
(a)

Secuencia de afirmaciones del desarrollo de la demostración

1. El ΔOAC es isósceles pues $\overline{OA} \cong \overline{OC}$ por hipótesis.

$$\therefore \sphericalangle OAC \cong OCA$$

Llamaremos a estos ángulos γ.



(b)

Figura 4.30

2. El ΔOBC es isósceles pues $\overline{OB} \cong \overline{OC}$ por hipótesis.

$$\therefore \measuredangle OCB \cong OBC$$

3. Pero $\measuredangle OCB = \alpha + \gamma$

$$\therefore \measuredangle OBC = \alpha + \gamma$$

4. En el ΔOBC se tiene:

$$\measuredangle BOC + \measuredangle OCB + \measuredangle CBO = 180^{o}$$
$$\measuredangle BOC + \gamma + \alpha + \alpha + \gamma = 180^{o}$$

5. Despejando:

$$\measuredangle BOC = 180^{o} - 2\alpha - 2\gamma$$

6. En ΔAOC se tiene:

$$\measuredangle OCA + \measuredangle OAC + \measuredangle AOC = 180^{o}$$

$$\measuredangle OCA + \measuredangle OAC + \measuredangle AOB + \measuredangle BOC = 180^{o}$$

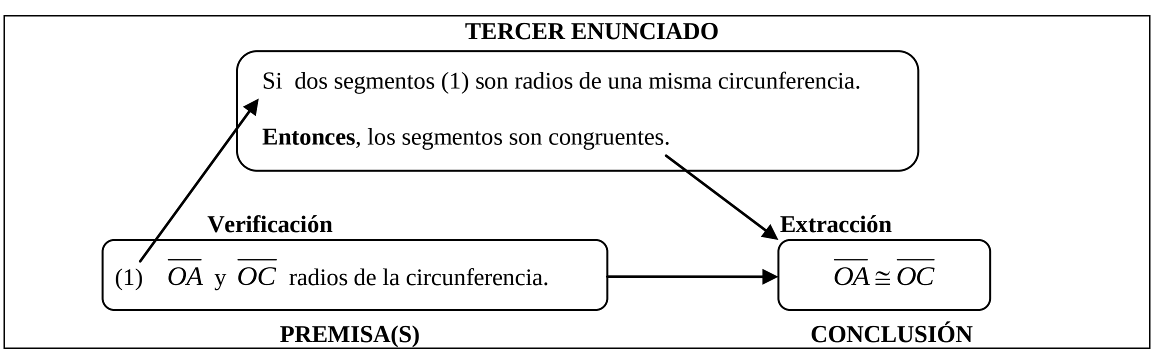
$$\gamma + \gamma + \beta + 180^{o} - 2\alpha - 2\gamma = 180$$

$$\beta - 2\alpha = 0$$

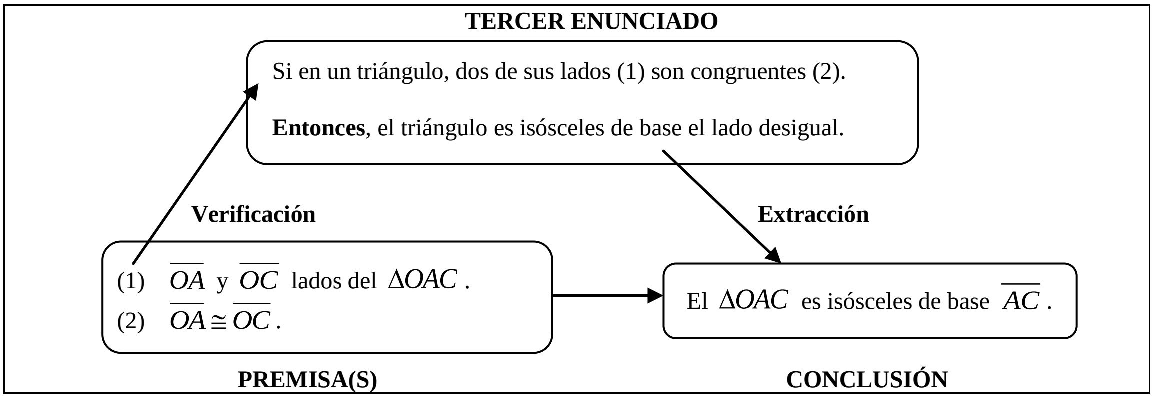
$$\therefore \beta = 2\alpha$$

Análisis de la secuencia de afirmaciones de la demostración

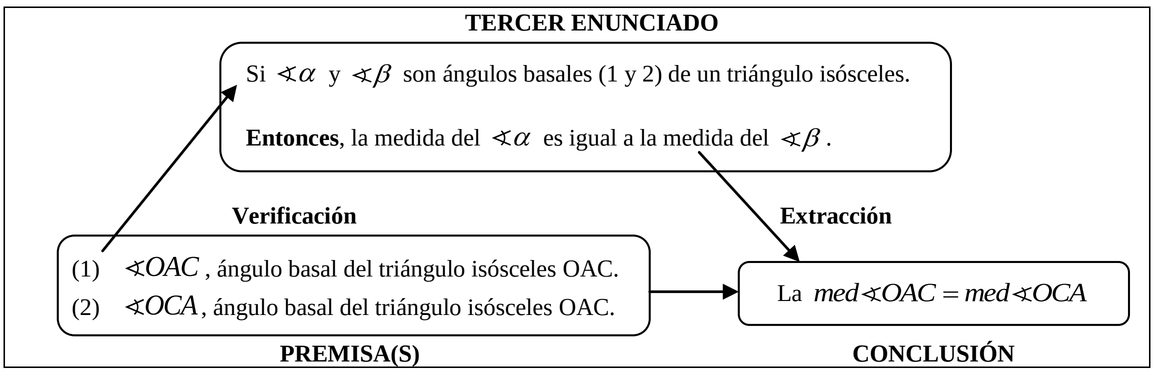
- **Afirmación 1:** Se justifica realizando tres pasos de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.41)



(a) *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que los segmentos OA y OC son congruentes.*



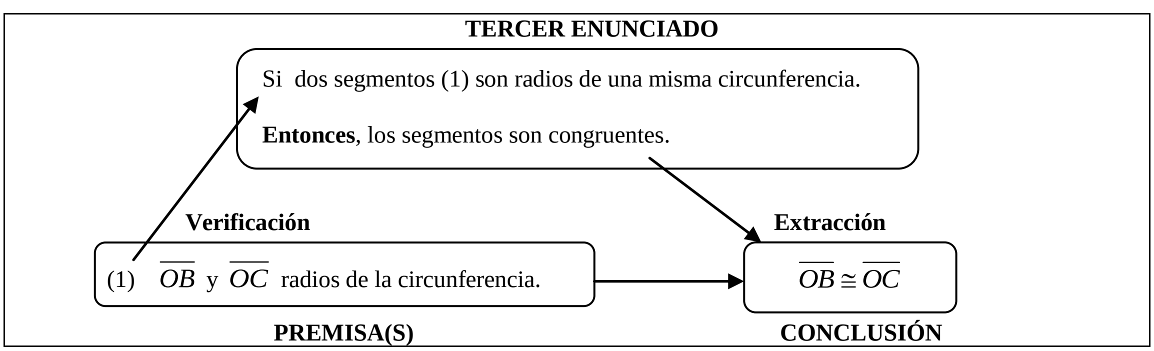
(b) *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que el triángulo OAC es Isósceles de base AC.*



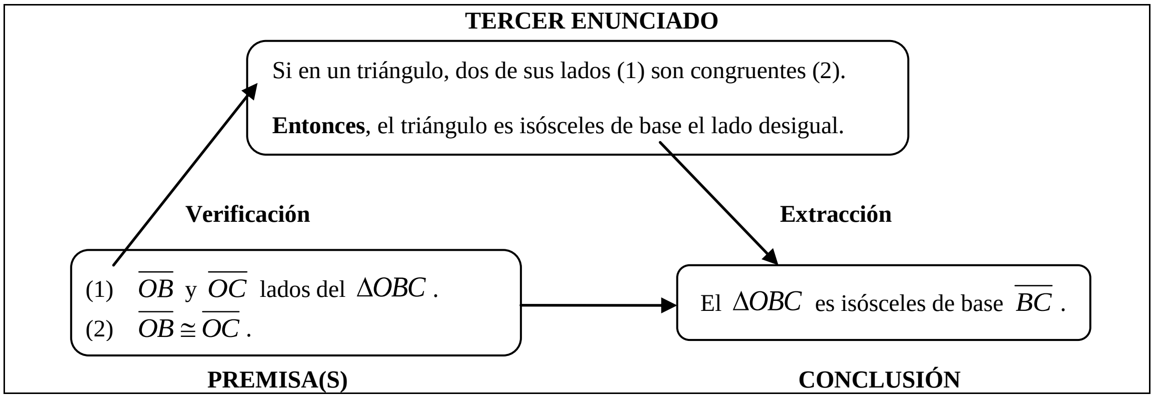
(c) *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que los ángulos basales del triángulo isósceles OAC son congruentes.*

Esquema 4.41

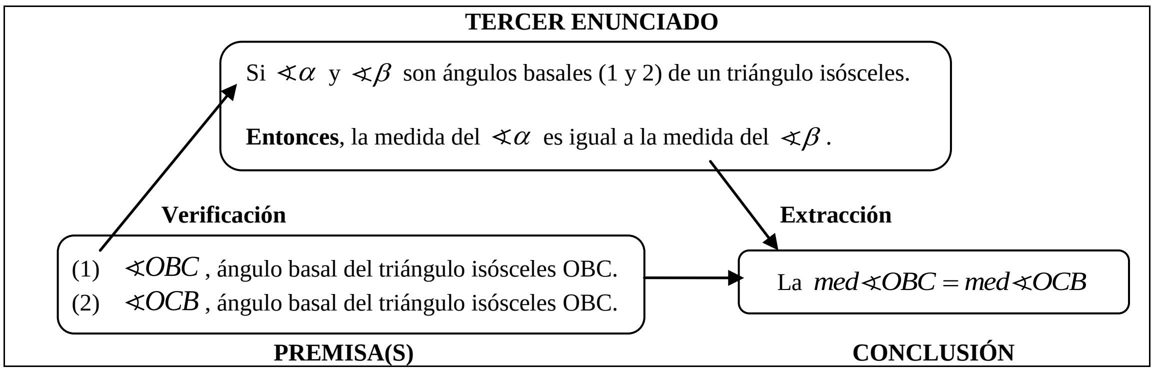
- **Afirmación 2:** Se justifica realizando tres pasos de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.42)



(a) *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que los segmentos OB y OC son congruentes.*



(b) *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que el triángulo OBC es Isósceles de base BC.*



(c) *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que los ángulos basales del triángulo isósceles OBC son congruentes.*

Esquema 4.42

- **Afirmación 3:** Como la medida del ángulo ACB esta compuesta por la suma de las medidas de los ángulos ACB y OCA, se expresa la medida del $\sphericalangle ACB$ en función de α y γ.

- **Afirmación 4:** Como la suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo es 180º, se formula la igualdad que relaciona los ángulos del ΔOBC para determinar la medida del $\sphericalangle BOC$ en función de α y γ.

- **Afirmación 5:** Se obtiene la medida del $\sphericalangle BOC$ en función de α y γ.

- **Afirmación 6:** Como la suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo es 180º, se formula la igualdad que relaciona los ángulos del ΔAOC para determinar la relación entre las medidas de los ángulos AOC y ACB.

<table>
<tr><td colspan="2">Conocimientos específicos:

- Congruencia de trazos. (Afirmaciones 1 y 2)
- Definición de Triángulo Isósceles. (Afirmaciones 1 y 2)
- Propiedad sobre ángulos basales del triángulo isósceles. (Afirmaciones 1 y 2)
- La medida del todo es igual a la suma de las medidas de sus partes. (Afirmación 3)
- Propiedad: La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180º. (Afirmaciones 4 y 6)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Rol de la figura:

- En la afirmación 1 se presenta una aprehensión discursiva donde existe un cambio de anclaje visual a discursivo. También se puede visualizar una aprehensión operativa de cambio figural.
- En las afirmaciones 1 a 6 predomina una aprehensión discursiva donde el traspaso de la información va de un anclaje visual a uno discursivo.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Pasos de Razonamiento:

- El paso de razonamiento es de encadenamiento por reutilización, donde cada uno de los razonamientos que componen el encadenamiento son razonamientos deductivos (Modus ponens).</td></tr>
<tr><td>Cantidad de pasos de razonamiento:

- 6 pasos.</td><td>Caso del teorema:

- Segundo caso.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Observaciones generales

1. La demostración es realizada por el texto, solo se le expone al alumno.

2. Se omiten pasos fundamentales, pudiendo provocar que el estudiante se pierda en la demostración o deje de comprender su desarrollo. (Afirmaciones 1 y 2)

3. En todos los pasos se igualan objetos geométricos con las medidas de los ángulos. Se presenta una confusión de notación.

4. El teorema se demuestra sobre un dibujo que representa un caso particular. (Figura 4.30)</td></tr>
</table>

El texto solo expone las demostraciones de dos casos del Teorema. Proponiendo como actividad al alumno el tercer caso, el cual se analizara en la sección de actividades propuestas. Ambos casos son realizados por el texto, sólo se exponen al estudiante. En el primer caso, se tratan dos demostraciones en paralelo cuando se descompone la figura trazando un diámetro de la circunferencia. A continuación, en la tabla 4.5 se detalla la cantidad de pasos de razonamiento junto con el tipo de pasos de razonamiento que justifica el desarrollo de la demostración para cada caso del teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia.

DEMOSTRACIÓN	CANTIDAD DE PASOS DE RAZONAMIENTO	TIPO DE PASO DE RAZONAMIENTO
Primer caso	9 pasos	Modus Ponens
Segundo caso	6 pasos	Modus Ponens
Tercer caso	No se trata	No se trata

Tabla 4.5: Cantidad de pasos de razonamientos y tipos de pasos de razonamientos que justifican las demostraciones expuestas en el Texto Santillana.

Se puede observar en la tabla 4.5 que la demostración del segundo caso consta de más pasos de razonamiento en su desarrollo. Esto se debe a las dos demostraciones que se realizan en paralelo en el primer caso. Conllevando que se repitan los pasos de razonamiento. El tipo de paso de razonamiento presente en cada demostración es el paso por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus ponens).

El texto presenta una confusión de notación, ya que se identifican objetos geométricos con su medida, sobre todo cuando se trata de ángulos. Estas omiten afirmaciones fundamentales en el desarrollo pudiendo causar que el estudiante deje de comprender en la lectura. Limitándose solamente a leerla sin lograr comprender las justificaciones para cada afirmación.

En ambos casos, en el desarrollo se da un abuso del dibujo. En el primero se puede observar que no se le da énfasis al dibujo, enfocándose más en el discurso matemático. Esto se ve al momento de observar que el diámetro CD de la circunferencia ya se encuentra trazado en el dibujo y en ningún momento se afirma que se realizo tal subconfiguración. En el segundo caso se presentan dos dibujos, lo cual permite al estudiante distinguir el elemento geométrico que se agrega a la figura inicial para realizar la demostración. Sin embargo, en ningún momento se explicita que se realiza cierta subconfiguración.

Es importante señalar que la coordinación de las aprehensiones operativas y discursivas facilitaría al alumno la comprensión de la demostración a medida que se realizan las distintas afirmaciones matemáticas.

A continuación se presenta un resumen (tabla 4.6) donde se exponen la cantidad de afirmaciones en los cuales se identifica la Aprehensión Operativa y la Aprehensión Discursiva en el desarrollo de las demostraciones.

DEMOSTRACIÓN	**APREHENSION DISCURSIVA**	**APREHENSION OPERATIVA**
Primer caso	5 Afirmaciones	0 Afirmación
Segundo Caso	6 Afirmaciones	0 Afirmación
Tercer Caso	No se trata	No se trata

Tabla 4.6: Resumen correspondiente al rol de la figura en las demostraciones expuestas en el Texto Santillana.

En la tabla 4.6 se puede observar que en el primer caso no se presenta ninguna afirmación donde se lleve a cabo una aprehensión operativa, es decir, donde se agregue o quite algún elemento geométrico. Situación contraria se da en el segundo caso, pero no se afirma dicha modificación a la configuración inicial. En ambos casos la aprehensión discursiva predomina en el desarrollo de las demostraciones.

Con respecto a los conocimientos espacificos que el estudiante requiere para comprender las demostraciones, estos no se abordan con anterioridad a la exposición de la demostración. Pudiendo provocar dificultad en la comprensión del alumno, ya que este no podría realizar algunos pasos de razonamiento si no sabe los que es un triángulo isósceles por ejemplo.

4.2.2 Actividades Propuestas

El análisis de las actividades propuestas del Texto Santillana será presentado por pagina del texto, Es decir, se analizaran en una primera instancia las actividades de la página 201, luego las de las 202, 203 y 204. Esto, debido a la organización de estas en el texto, pues cada página propone actividades referentes a algún caso o situación particular del teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia.

A continuación se presenta el desarrollo de cada una de las actividades propuestas por el texto. Analizando las afirmaciones que se dan en la secuencia del desarrollo y caracterizando los pasos de razonamiento que se realizan en estas. Además de identificar el rol que cumple la figura en la resolución del ejercicio. Junto con la identificación de conocimientos específicos necesarios para realizar la actividad.

Actividades propuestas de la página 201

Las actividades correspondientes a esta página del texto están organizadas en ocho tipos de tareas. La primera consiste en determinar la medida de algún ángulo en tres ejercicios ordenados alfabéticamente. En los restantes, también se ha de calcular la medida de un ángulo solicitado, salvo una demostración que se le propone al estudiante para que este la desarrolle.

Actividad 1 Letra a

Enunciado

Calcular el valor del ángulo.

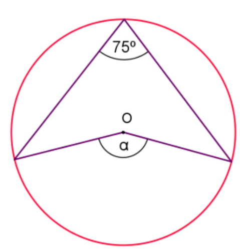


Figura 4.31

Desarrollo de la actividad esperado del estudiante

Se han asignado rótulos a los vértices de la figura para una mejor comprensión del desarrollo. (Figura 4.32)

.

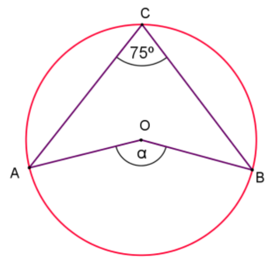


Figura 4.32

Secuencia de afirmaciones del desarrollo

1. El $\sphericalangle ACB$ es un ángulo inscrito que subtiende al arco $\overset{\frown}{AB}$.

2. El $\sphericalangle AOB$ es un ángulo del centro que subtiende al arco $\overset{\frown}{AB}$.

3. El $\sphericalangle ACB$ y el $\sphericalangle AOB$ subtienden el mismo arco, el arco $\overset{\frown}{AB}$.

4. Por teorema, la $med\sphericalangle AOB$ es el doble de la $med\sphericalangle ACB$.

$$med\sphericalangle AOB = 2 \cdot 75^{\circ}$$
$$med\sphericalangle AOB = 150^{\circ}$$

Por lo tanto, el valor de α es 50º.

Análisis de la secuencia de afirmaciones del desarrollo del ejercicio

- **Afirmación 1:** Se extrae información sobre el $\sphericalangle ACB$, inscrito en la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.32)

- **Afirmación 2:** Se extrae información sobre el $\sphericalangle AOB$, del centro de la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.32)

- **Afirmación 3:** Se relacionan los ángulos obtenidos en las afirmaciones 1 y 2.

- **Afirmación 4:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.43)

TERCER ENUNCIADO

Si un ángulo inscrito (1) y un ángulo del centro (2) de una circunferencia subtienden el mismo arco (3).

Entonces, la medida del ángulo del centro es el doble de la medida del ángulo inscrito.

Verificación **Extracción**

(1) $\sphericalangle ACB$, ángulo inscrito que subtiende al arco $\overset{\frown}{AB}$.

(2) $\sphericalangle AOB$, ángulo del centro que subtiende al arco $\overset{\frown}{AB}$.

(3) $\sphericalangle ACB$ y $\sphericalangle AOB$ subtienden el mismo arco, el arco $\overset{\frown}{AB}$.

$med\sphericalangle AOB = 2 \cdot 75º$

PREMISA(S) **CONCLUSIÓN**

Esquema 4.43: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para determinar la medida del ángulo del centro AOB.*

<table>
<tr><td colspan="2">Conocimientos específicos:

- No son necesarios</td></tr>
<tr><td colspan="2">Rol de la figura:

- Al comienzo se presenta una aprehensión operativa de cambio figural.
- En todas las afirmaciones se realiza una aprehensión discursiva. Donde el sentido de la transferencia predomina un cambio de anclaje de visual a discursivo.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Pasos de Razonamiento:

- Modus Ponens.</td></tr>
<tr><td>Cantidad de pasos de razonamiento:

- 1 paso.</td><td>Caso(s) del teorema:

- Primer caso.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Observaciones generales

1. El ejercicio requiere una aplicación inmediata del teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia para ser resuelto.</td></tr>
</table>

Actividad 1 Letra b

Enunciado

Calcular el valor del ángulo.

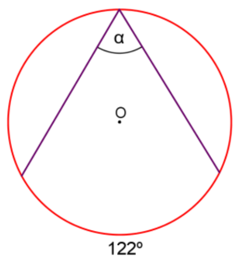


Figura 4.33

Desarrollo de la actividad esperado del estudiante

Se han asignado rótulos a los vértices de la figura para una mejor comprensión del desarrollo. (Figura 4.34)

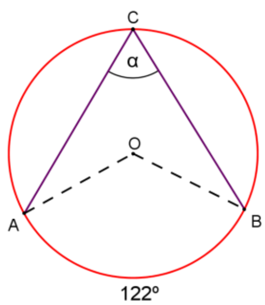


Figura 4.34

Secuencia de afirmaciones del desarrollo

1. El $\sphericalangle ACB$ es un ángulo inscrito que subtiende al arco $\overset{\frown}{AB}$.

2. Unir mediante una línea el punto A con el centro O, formando el segmento $\overline{AO}$. (Figura 4.34)

3. Unir mediante una línea el punto B con el centro O, formando el segmento $\overline{BO}$. (Figura 4.34)

4. El $\sphericalangle AOB$ es un ángulo del centro que subtiende al arco $\overset{\frown}{AB}$.

5. La $med\sphericalangle AOB = med\overset{\frown}{AB}$.*

$$med\sphericalangle AOB = 122^{o}$$

6. El $\sphericalangle ACB$ y el $\sphericalangle AOB$ subtienden el mismo arco, el arco $\overset{\frown}{AB}$.

7. Por teorema, la $med\sphericalangle ACB$ es la mitad de la $med\sphericalangle AOB$.

$$med\sphericalangle ACB = \frac{1}{2}\cdot 122^{o}$$
$$med\sphericalangle ACB = 61^{o}$$

Por lo tanto, el valor de α es 61º.

* Paso realizado en base al marco conceptual del texto.

Análisis de la secuencia de afirmaciones del desarrollo del ejercicio.

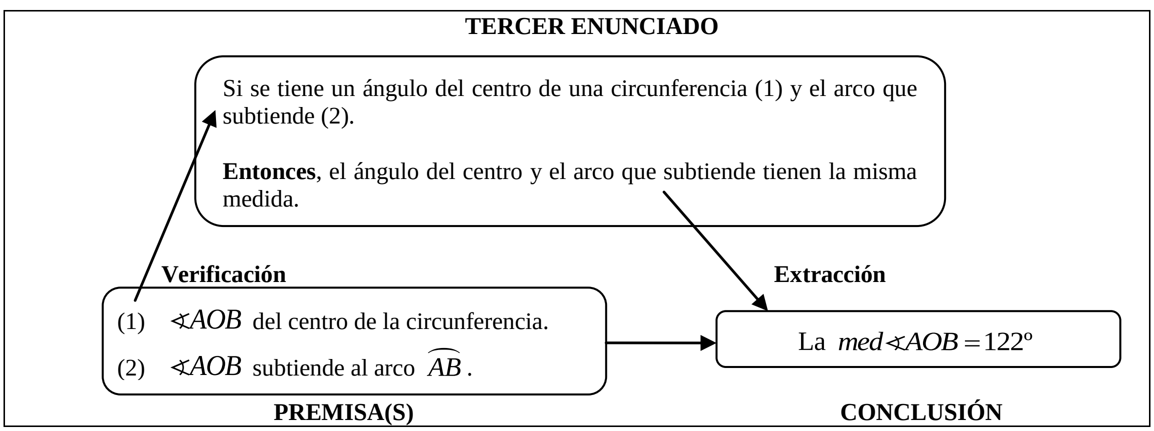
- **Afirmación 1:** Se extrae información sobre el $\sphericalangle ACB$, inscrito en la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.33)

- **Afirmación 2:** Se construye el segmento $\overline{AO}$ para formar el $\sphericalangle AOB$, del centro de la circunferencia. (Figura 4.34)

- **Afirmación 3:** Se construye el segmento $\overline{BO}$ para formar el $\sphericalangle AOB$, del centro de la circunferencia. (Figura 4.34)

- **Afirmación 4:** Se extrae información sobre el $\sphericalangle AOB$, del centro de la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.34)

- **Afirmación 5:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.44)



Esquema 4.44: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para determinar la medida del ángulo AOB.*

- **Afirmación 6:** Se relacionan los ángulos obtenidos en las afirmaciones 3 y 4.

- **Afirmación 7:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.45)

TERCER ENUNCIADO

Si un ángulo inscrito (1) y un ángulo del centro (2) de una circunferencia subtienden el mismo arco (3).

Entonces, la medida del ángulo inscrito es la mitad de la medida del ángulo del centro.

Verificación **Extracción**

(1) $\sphericalangle ACB$, ángulo inscrito que subtiende al arco $\overset{\frown}{AB}$.

(2) $\sphericalangle AOB$, ángulo del centro que subtiende al arco $\overset{\frown}{AB}$.

(3) $\sphericalangle ACB$ y $\sphericalangle AOB$ subtienden el mismo arco, el arco $\overset{\frown}{AB}$.

$$med\sphericalangle ACB = \frac{1}{2} \cdot 122^{o}$$

PREMISA(S) **CONCLUSIÓN**

Esquema 4.45: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para determinar la medida del ángulo inscrito ACB.*

<table>
<tr><td colspan="2">Conocimientos específicos:

- No son necesarios.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Rol de la figura:

- En las afirmaciones 2 y 3 se presenta una aprehensión operativa de cambio figural.
- En la afirmación 1 y en las afirmaciones 4 a 7 predomina una aprehensión discursiva en la que el sentido de la transferencia va de un anclaje visual a uno discursivo.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Pasos de Razonamiento:

- Modus Ponens.</td></tr>
<tr><td>Cantidad de pasos de razonamiento:

- 2 pasos.</td><td>Caso(s) del teorema:

- Primer caso.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Observaciones generales

1. El texto presenta una confusión de concepto en la figura que acompaña al enunciado del ejercicio, pues en este se indica que la longitud del arco AB mide 132º. En el contexto del mismo se refiere a que la medida del ángulo del centro es igual a la medida del arco que subtiende.

2. El estudiante debe construir el ángulo del centro de la circunferencia para posteriormente aplicar el teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia.</td></tr>
</table>

Actividad 1 Letra c

Enunciado

Calcular el valor del ángulo.

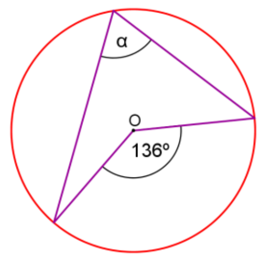


Figura 4.35

Desarrollo de la actividad esperado del estudiante

Se han asignado rótulos a los vértices de la figura para una mejor comprensión del desarrollo. (Figura 4.36)

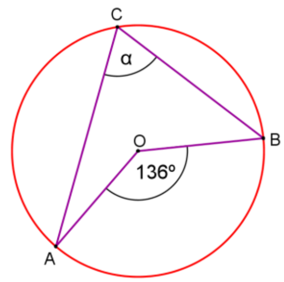


Figura 4.36

Secuencia de afirmaciones del desarrollo

1. El $\measuredangle ACB$ es un ángulo inscrito que subtiende al arco $\overset{\frown}{AB}$.
2. El $\measuredangle AOB$ es un ángulo del centro que subtiende al arco $\overset{\frown}{AB}$.
3. El $\measuredangle ACB$ y el $\measuredangle AOB$ subtienden el mismo arco, el arco $\overset{\frown}{AB}$.
4. Por teorema, la $med\measuredangle ACB$ es la mitad de la $med\measuredangle AOB$.

$$med\measuredangle ACB = \frac{1}{2}\cdot 136^{o}$$
$$med\measuredangle ACB = 68^{o}$$

Por lo tanto, la medida de α es 68º.

Análisis de la secuencia de afirmaciones del desarrollo del ejercicio.

- **Afirmación 1:** Se extrae información sobre el $\measuredangle ACB$, inscrito en la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.36)
- **Afirmación 2:** Se extrae información sobre el $\measuredangle AOB$, del centro de la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.36)

- **Afirmación 3:** Se relacionan los ángulos obtenidos en las afirmaciones 1 y 2.

- **Afirmación 4:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.46)

TERCER ENUNCIADO

Si un ángulo inscrito (1) y un ángulo del centro (2) de una circunferencia subtienden el mismo arco (3).

Entonces, la medida del ángulo inscrito es la mitad de la medida del ángulo del centro.

Verificación | **Extracción**

(1) $\sphericalangle ACB$, ángulo inscrito que subtiende al arco $\overset{\frown}{AB}$.

(2) $\sphericalangle AOB$, ángulo del centro que subtiende al arco $\overset{\frown}{AB}$.

(3) $\sphericalangle ACB$ y $\sphericalangle AOB$ subtienden el mismo arco, el arco $\overset{\frown}{AB}$.

$$med \sphericalangle ACB = \frac{1}{2} \cdot 136º$$

PREMISA(S) | **CONCLUSIÓN**

Esquema 4.46: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para determinar la medida del ángulo inscrito ACB.*

Conocimientos específicos: - No son necesarios.	
Rol de la figura: - Al principio del desarrollo se presenta *una aprehensión operativa de cambio figural.* - En las afirmaciones 1 a 4 predomina una *aprehensión discursiva*, donde el traspaso va de un *anclaje visual a uno discursivo.*	
Pasos de Razonamiento: - Modus Ponens.	
Cantidad de pasos de razonamiento: - 1 paso.	**Caso(s) del teorema:** - Primer caso.
Observaciones generales 1. El ejercicio requiere una aplicación inmediata del teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia para ser resuelto.	

Actividad 2

Enunciado

En la figura $\beta = 36^{\circ}$. ¿Cuánto miden α y γ?

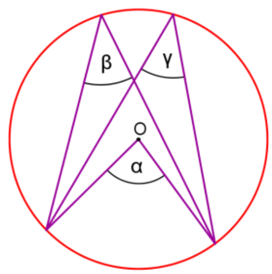
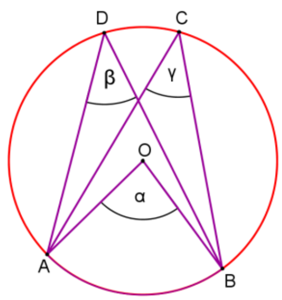


Figura 4.37

Desarrollo de la actividad esperado del estudiante

Se han asignado rótulos a los vértices de la figura para una mejor comprensión del desarrollo. (Figura 4.38)



(b)

Figura 4.38

Secuencia de afirmaciones del desarrollo

1. El $\sphericalangle ADB$ es un ángulo inscrito que subtiende al arco $\overset{\frown}{AB}$.
2. El $\sphericalangle AOB$ es un ángulo del centro que subtiende al arco $\overset{\frown}{AB}$.
3. El $\sphericalangle ADB$ y el $\sphericalangle AOB$ subtienden el mismo arco, el arco $\overset{\frown}{AB}$.
4. Por teorema, la $med\sphericalangle AOB$ es el doble de la $med\sphericalangle ADB$.

$$med\sphericalangle ADB = 2 \cdot 36^{\circ}$$
$$med\sphericalangle ADB = 72^{\circ}$$

   Por lo tanto, la medida de α es 72º.

5. El $\sphericalangle ACB$ es un ángulo inscrito que subtiende al arco $\overset{\frown}{AB}$.
6. El $\sphericalangle ACB$ y el $\sphericalangle AOB$ subtienden el mismo arco, el arco $\overset{\frown}{AB}$.
7. Por teorema, la $med\sphericalangle ACB$ es la mitad de la $med\sphericalangle AOB$.

$$med\sphericalangle ACB = \frac{1}{2}\cdot 72^{\circ}$$
$$med\sphericalangle ACB = 36^{\circ}$$

Por lo tanto, la medida de γ es 36º.

Análisis de la secuencia de afirmaciones del desarrollo del ejercicio

- **Afirmación 1:** Se extrae información sobre el $\sphericalangle ADB$, inscrito en la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.38)

- **Afirmación 2:** Se extrae información sobre el $\sphericalangle AOB$, del centro de la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.38)

- **Afirmación 3:** Se relacionan los ángulos obtenidos en las afirmaciones 1 y 2.

- **Afirmación 4:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.47)

TERCER ENUNCIADO

Si un ángulo inscrito (1) y un ángulo del centro (2) de una circunferencia subtienden el mismo arco (3).

Entonces, la medida del ángulo del centro es el doble de la medida del ángulo inscrito.

Verificación **Extracción**

(1) $\sphericalangle ADB$, ángulo inscrito que subtiende al arco $\overset{\frown}{AB}$.
(2) $\sphericalangle AOB$, ángulo del centro que subtiende al arco $\overset{\frown}{AB}$.
(3) $\sphericalangle ADB$ y $\sphericalangle AOB$ subtienden el mismo arco, el arco $\overset{\frown}{AB}$.

$med\sphericalangle AOB = 2\cdot 36^{\circ}$

PREMISA(S) **CONCLUSIÓN**

Esquema 4.47: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para determinar la medida del ángulo del centro AOB.*

- **Afirmación 5:** Se extrae información sobre el $\sphericalangle ACB$, inscrito en la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.38)

- **Afirmación 6:** Se relacionan los ángulos obtenidos en las afirmaciones 2 y 5.

- **Afirmación 7:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.48)

TERCER ENUNCIADO

Si un ángulo inscrito (1) y un ángulo del centro (2) de una circunferencia subtienden el mismo arco (3).

Entonces, la medida del ángulo inscrito es la mitad de la medida del ángulo del centro.

Verificación **Extracción**

(1) $\sphericalangle ACB$, ángulo inscrito que subtiende al arco $\overset{\frown}{AB}$.

(2) $\sphericalangle AOB$, ángulo del centro que subtiende al arco $\overset{\frown}{AB}$.

(3) $\sphericalangle ACB$ y $\sphericalangle AOB$ subtienden el mismo arco, el arco $\overset{\frown}{AB}$.

$$med\sphericalangle ACB = \frac{1}{2}\cdot 36º$$

PREMISA(S) **CONCLUSIÓN**

Esquema 4.48: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para determinar la medida del ángulo inscrito ACB.*

Conocimientos específicos: - No son necesarios.	
Rol de la figura: - Al inicio del desarrollo se presenta una *aprehensión operativa de cambio figural.* - En todas las afirmaciones predomina una *aprehensión discursiva*, donde el traspaso va de un *anclaje visual a uno discursivo.*	
Pasos de Razonamiento: - Modus Ponens.	
Cantidad de pasos de razonamiento: - 2 pasos.	**Caso(s) del teorema:** - Primer caso.
Observaciones generales 1. El estudiante debe aplicar el teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia dos veces. La primera, para determinar la medida del ángulo del centro. La segunda, lo debe para determinar la medida del ángulo inscrito.	

Actividad 3

Enunciado

En la circunferencia de la figura, $\overline{AB}$ es diámetro y O es el centro; $\alpha = 25^{\text{o}}$. ¿Cuánto mide β ?

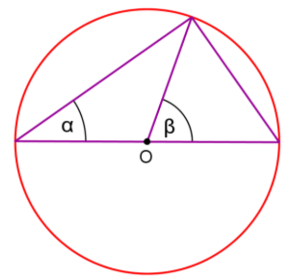


Figura 4.39

Desarrollo de la actividad esperado del estudiante

Se han asignado rótulos a los vértices de la figura para una mejor comprensión del desarrollo. (Figura 4.40)

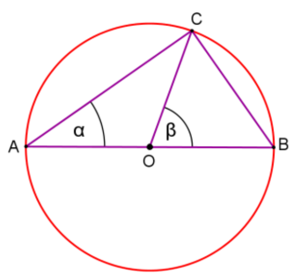


Figura 4.40

Secuencia de afirmaciones del desarrollo

1. El $\sphericalangle BAC$ es un ángulo inscrito que subtiende al arco $\overset{\frown}{BC}$.

2. El $\sphericalangle BOC$ es un ángulo del centro que subtiende al arco $\overset{\frown}{BC}$.

3. El $\sphericalangle BAC$ y el $\sphericalangle BOC$ subtienden el mismo arco, el arco $\overset{\frown}{BC}$.

4. Por teorema, la $med\sphericalangle BOC$ es el doble de la $med\sphericalangle BAC$.

$$med\sphericalangle BOC = 2 \cdot 25^{\text{o}}$$
$$med\sphericalangle BOC = 50^{\text{o}}$$

Por lo tanto, la medida de α es 50º.

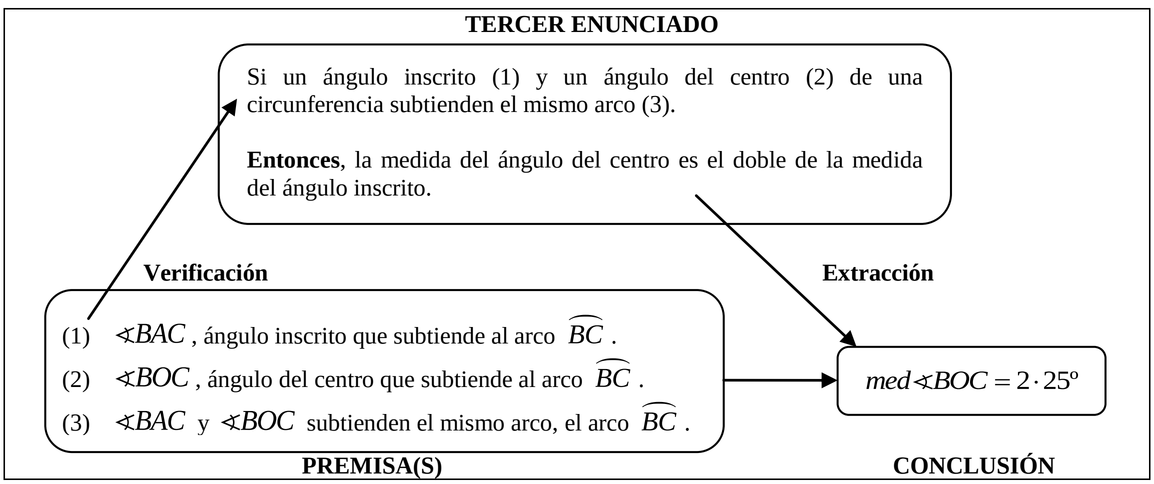
Análisis de la secuencia de afirmaciones del desarrollo del ejercicio.

- **Afirmación 1:** Se extrae información sobre el $\sphericalangle BAC$, inscrito en la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.40)

- **Afirmación 2:** Se extrae información sobre el $\sphericalangle BOC$, del centro de la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.40)

- **Afirmación 3:** Se relacionan los ángulos obtenidos en las afirmaciones 1 y 2.

- **Afirmación 4:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.49)



Esquema 4.49: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para determinar la medida del ángulo del centro BOC.*

Conocimientos específicos: - No son necesarios.	
Rol de la figura: - Al inicio del desarrollo se presenta una *aprehensión operativa de cambio figural.*. - En todas las afirmaciones predomina una *aprehensión discursiva*, donde el traspaso va de un *anclaje visual a uno discursivo.*	
Pasos de Razonamiento: - Modus Ponens.	
Cantidad de pasos de razonamiento: - 1 paso.	**Caso(s) del teorema:** - Tercer caso.
Observaciones generales 1. La figura que presenta el texto en la actividad no presenta los rotulos a los que se refiere el enunciado. 2. El ejercicio requiere una aplicación inmediata del teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia para ser resuelto.	

Actividad 4

Enunciado

Demuestra que en el caso de la figura, $\beta = 2\alpha$.

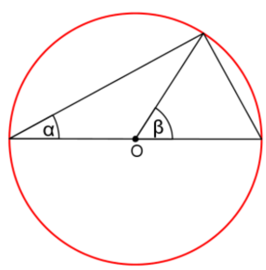


Figura 4.41

Desarrollo de la actividad esperado del estudiante

Se han asignado rótulos a los vértices de la figura para una mejor comprensión del desarrollo. (Figura 4.42)

Secuencia de afirmaciones del desarrollo

1. Como $\overline{OA}$ y $\overline{OC}$ son radios de la circunferencia,

$$\overline{OA} \cong \overline{OC} .$$

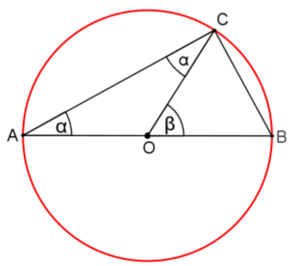


Figura 4.42

2. El ΔAOC es isósceles de base $\overline{AC}$.

3. La medida del ángulo OAC es igual a la medida del ángulo OCA.

$$med\sphericalangle OAC = med\sphericalangle OCA$$

4. El $\sphericalangle BOC$, es un ángulo exterior del ΔAOC.

5. La medida del $\sphericalangle BOC$ es igual a la suma de las medidas de los ángulos interiores no adyacentes del ΔAOC.

$$med\sphericalangle BOC = med\sphericalangle OAC + med\sphericalangle OCA$$
$$\beta = \alpha + \alpha$$
$$\beta = 2\alpha$$

Por lo tanto, $\beta = 2\alpha$.

Análisis de la secuencia de afirmaciones del desarrollo del ejercicio.

- **Afirmación 1:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.50)

TERCER ENUNCIADO

Si dos segmentos (1) son radios de una misma circunferencia.

Entonces, los segmentos son congruentes.

Verificación

Extracción

(1) $\overline{OA}$ y $\overline{OC}$ radios de la circunferencia.

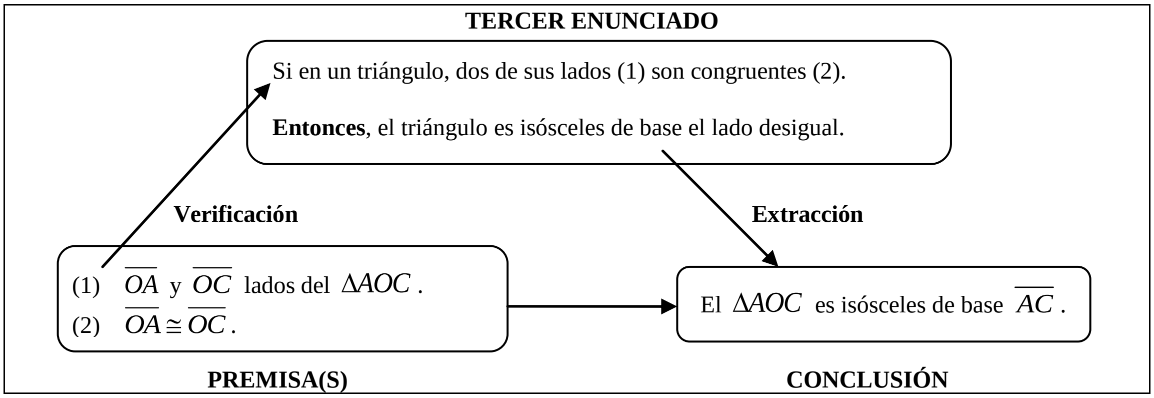
$\overline{OA} \cong \overline{OC}$

PREMISA(S)

CONCLUSIÓN

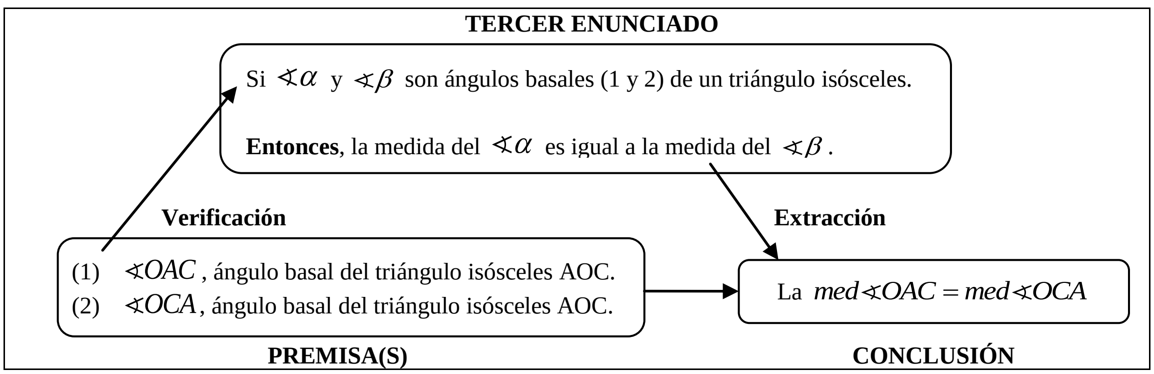
Esquema 4.50: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que los segmentos OA y OC son congruentes.*

- **Afirmación 2:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.51)



Esquema 4.51: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que el triángulo AOC es Isósceles de base AC.*

- **Afirmación 3:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.52)



Esquema 4.52: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que los ángulos basales del triángulo isósceles AOC son congruentes.*

- **Afirmación 4:** Se identifica el ángulo exterior BOC del triángulo AOC.

- **Afirmación 5:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.53)

TERCER ENUNCIADO

Si en un triángulo, γ es ángulo exterior (1) de un triángulo, α y β ángulos interiores no adyacentes al $\sphericalangle\gamma$.

Entonces, la medida del $\sphericalangle\gamma$ es igual a la suma de las medidas de los ángulos α y β

Verificación **Extracción**

(1) $\sphericalangle BOC$, ángulo exterior del ΔAOC.
(2) $\sphericalangle OAC$ y $\sphericalangle OCA$, ángulos interiores del ΔAOC

$med\sphericalangle BOC = med\sphericalangle OAC + med\sphericalangle OCA$

PREMISA(S) **CONCLUSIÓN**

Esquema 4.53: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para determinar la medida del ángulo exterior BOC.*

<table>
<tr><td colspan="2">Conocimientos específicos:

- Congruencia de trazos. (Afirmación 1)
- Definición de Triángulo Isósceles. (Afirmación 2)
- Propiedad sobre ángulos basales del triángulo isósceles. (Afirmación 3)
- Teorema: la medida del ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de las medidas de los dos ángulos interiores no adyacentes. (Afirmaciones 5)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Rol de la figura:

- Al inicio del desarrollo se presenta una aprehensión operativa de cambio figural.
- En todas las afirmaciones del desarrollo predomina una aprehensión discursiva, donde el traspaso va de un anclaje visual a uno discursivo.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Pasos de Razonamiento:

- Modus Ponens.</td></tr>
<tr><td>Cantidad de pasos de razonamiento:

- 4 pasos.</td><td>Caso(s) del teorema:

- Tercer caso.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Observaciones generales

1. La demostración se trata de un caso particular del teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia, pues esta se centra solamente en la figura que acompaña el enunciado.</td></tr>
</table>

Actividad 5

Enunciado

Calcula el valor del arco α en la siguiente figura.

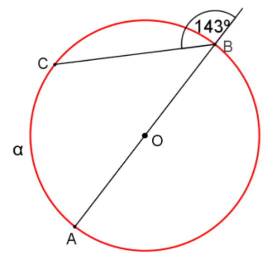


Figura 4.43

Desarrollo de la actividad esperado del estudiante

La secuencia de afirmaciones del desarrollo de la actividad será complementada con la Figura 4.44

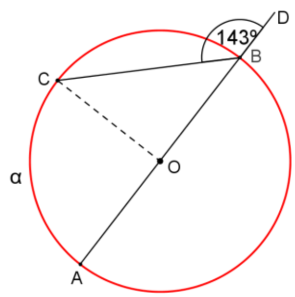


Figura 4.44

Secuencia de afirmaciones del desarrollo

1. Unir mediante una línea el punto C con el centro O, formando el segmento $\overline{CO}$. (Figura 4.44)

2. El $\sphericalangle ABC$ es el suplemento del ángulo de 143°.

$$med\sphericalangle ABC = 180^{\circ} - 143^{\circ}$$
$$med\sphericalangle ABC = 37^{\circ}$$

3. El $\sphericalangle ABC$ es un ángulo inscrito que subtiende al arco $\overset{\frown}{CA}$.

4. El $\sphericalangle AOC$ es un ángulo del centro que subtiende al arco $\overset{\frown}{CA}$.

5. El $\sphericalangle ABC$ y el $\sphericalangle AOC$ subtienden el mismo arco, el arco $\overset{\frown}{CA}$.

6. Por teorema, la $med\sphericalangle AOC$ es el doble de la $med\sphericalangle ABC$.

$$\alpha = 2 \cdot 37^{\circ}$$
$$\alpha = 74^{\circ}$$

7. La $med\overset{\frown}{CA} = med\sphericalangle AOC$ *

$$med\overset{\frown}{CA} = 74^{\circ}$$

Por lo tanto, el valor de α es 74º.

* Paso realizado en base al marco conceptual del texto.

Análisis de la secuencia de afirmaciones del desarrollo del ejercicio.

- **Afirmación 1:** Se construye el segmento $\overline{CO}$ para formar el $\sphericalangle AOC$, del centro de la circunferencia. (Figura 4.44)

- **Afirmación 2:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.54)

TERCER ENUNCIADO

Si dos ángulos tienen un lado en común (1), y además, el lado restante de ambos ángulos (2) pertenece a un mismo segmento, trazo o recta (3).

Entonces, los ángulos son suplementarios, es decir, sus respectivas medidas suman 180º

Verificación

Extracción

(1) $\overline{BC}$, lado común del $\sphericalangle ABC$ y $\sphericalangle DBC$.
(2) $\overline{BA}$ y $\overline{BD}$, lados de los ángulos ABC y DBC respectivamente.
(3) $\overline{BA}$ y $\overline{BD}$ están sobre un mismo segmento, el $\overline{AD}$

$med \sphericalangle ABC = 180º - 143º$

PREMISA(S)

CONCLUSIÓN

Esquema 4.54: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para determinar la medida del ángulo ABC.*

- **Afirmación 3:** Se extrae información sobre el $\sphericalangle ABC$, inscrito en la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.44)

- **Afirmación 4:** Se extrae información sobre el $\sphericalangle AOC$, del centro de la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.44)

- **Afirmación 5:** Se relacionan los ángulos obtenidos en las afirmaciones 3 y 4.

- **Afirmación 6:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.55)

TERCER ENUNCIADO

Si un ángulo inscrito (1) y un ángulo del centro (2) de una circunferencia subtienden el mismo arco (3).

Entonces, la medida del ángulo del centro es el doble de la medida del ángulo inscrito.

Verificación **Extracción**

(1) $\sphericalangle ABC$, ángulo inscrito que subtiende al arco $\overset{\frown}{CA}$.

(2) $\sphericalangle AOC$, ángulo del centro que subtiende al arco $\overset{\frown}{CA}$.

(3) $\sphericalangle ABC$ y $\sphericalangle AOC$ subtienden el mismo arco, el arco $\overset{\frown}{CA}$.

$med \sphericalangle AOC = 2 \cdot 37^{o}$

PREMISA(S) **CONCLUSIÓN**

Esquema 4.55: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para determinar la medida del ángulo del centro AOC.*

- **Afirmación 7:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.56)

TERCER ENUNCIADO

Si se tiene un ángulo del centro de una circunferencia (1) y el arco que subtiende (2).

Entonces, el ángulo del centro y el arco que subtiende tienen la misma medida.

Verificación **Extracción**

(1) $\sphericalangle AOC$ del centro de la circunferencia.

(2) $\sphericalangle AOC$ subtiende al arco $\overset{\frown}{CA}$.

La $med\overset{\frown}{CA} = 74^{o}$

PREMISA(S) **CONCLUSIÓN**

Esquema 4.56: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para determinar la medida del arco CA.*

Conocimientos específicos: - Ángulos suplementarios. (Afirmación 2)	
Rol de la figura: - En la afirmación 1 se presenta una *aprehensión operativa de cambio figural.* - En la afirmación 2 se presenta una *aprehensión discursiva, donde el traspaso va de un anclaje visual a discursivo.* - En las afirmaciones 3 a 7 predomina una *aprehensión discursiva*, donde el traspaso va de un *anclaje visual a uno discursivo.*	
Pasos de Razonamiento: - Modus Ponens.	
Cantidad de pasos de razonamiento: - 3 pasos.	**Caso(s) del teorema:** - Tercer caso.
Observaciones generales 1. El texto presenta una confusión de concepto en la figura que acompaña al enunciado del ejercicio, pues en este se indica que la longitud del arco CA mide α . En el contexto del mismo se refiere a que la medida del ángulo del centro es igual a la medida del arco que subtiende.	

Actividad 6

Enunciado

Calcula la medida del ángulo inscrito $\sphericalangle ACB$ en la siguiente figura.

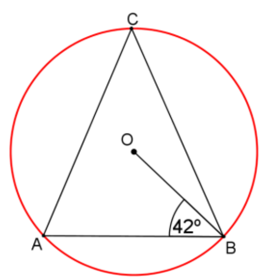


Figura 4.45

Desarrollo de la actividad esperado del estudiante

La secuencia de afirmaciones del desarrollo de la actividad será complementada con la Figura 4.46

Secuencia de afirmaciones del desarrollo

1. Unir mediante una línea el punto A con el centro O, formando el segmento $\overline{OA}$. (Figura 4.46)

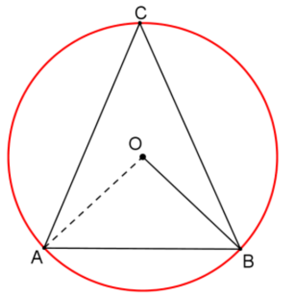


Figura 4.46

2. Como $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ son radios de la circunferencia,

$$\overline{OA} \cong \overline{OB}.$$

3. El ΔAOB es isósceles de base $\overline{AB}$.

4. El $\measuredangle ABO$ es congruente con el $\measuredangle OAB$.

$$med\measuredangle OAB = 42^{\circ}$$

5. La $med\measuredangle AOB = 96^{\circ}$, pues

$$med\measuredangle AOB + 42^{\circ} + 42^{\circ} = 180^{\circ}$$
$$med\measuredangle AOB + 84^{\circ} = 180^{\circ}$$
$$med\measuredangle AOB = 96^{\circ}$$

6. El $\measuredangle ACB$ es un ángulo inscrito que subtiende al arco $\overset{\frown}{AB}$.

7. El $\measuredangle AOB$ es un ángulo del centro que subtiende al arco $\overset{\frown}{AB}$.

8. El $\measuredangle ACB$ y el $\measuredangle AOB$ subtienden el mismo arco, el arco $\overset{\frown}{AB}$.

9. Por teorema, la $med\measuredangle ACB$ es la mitad de la $med\measuredangle AOB$.

$$med\measuredangle ACB = \frac{1}{2} \cdot 96^{\circ}$$
$$med\measuredangle ACB = 48^{\circ}$$

Por lo tanto, la $med\measuredangle ACB = 48^{\circ}$

Análisis de la secuencia de afirmaciones del desarrollo del ejercicio

- **Afirmación 1:** Se construye el segmento $\overline{OA}$ para formar el $\measuredangle AOB$, del centro de la circunferencia. (Figura 4.46)

- **Afirmación 2:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.57)

TERCER ENUNCIADO

Si dos segmentos (1) son radios de una misma circunferencia.

Entonces, los segmentos son congruentes.

Verificación **Extracción**

(1) $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ radios de la circunferencia. → $\overline{OA} \cong \overline{OB}$

PREMISA(S) **CONCLUSIÓN**

Esquema 4.57: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que los segmentos OA y OB son congruentes.*

- **Afirmación 3:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.58)

TERCER ENUNCIADO

Si en un triángulo, dos de sus lados (1) son congruentes (2).

Entonces, el triángulo es isósceles de base el lado desigual.

Verificación **Extracción**

(1) $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ lados del ΔAOB.
(2) $\overline{OA} \cong \overline{OB}$.

→ El ΔAOB es isósceles de base $\overline{AB}$.

PREMISA(S) **CONCLUSIÓN**

Esquema 4.58: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que el triángulo AOB es Isósceles de base AB.*

- **Afirmación 4:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.59)

TERCER ENUNCIADO

Si $\measuredangle\alpha$ y $\measuredangle\beta$ son ángulos basales (1 y 2) de un triángulo isósceles.

Entonces, la medida del $\measuredangle\alpha$ es igual a la medida del $\measuredangle\beta$.

Verificación **Extracción**

(1) $\measuredangle ABO$, ángulo basal del triángulo isósceles AOB.
(2) $\measuredangle OAB$, ángulo basal del triángulo isósceles AOB.

→ La $med\measuredangle ABO = med\measuredangle OAB$

PREMISA(S) **CONCLUSIÓN**

Esquema 4.59: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que los ángulos basales del triángulo isósceles AOB son congruentes.*

- **Afirmación 5:** Se formula la igualdad que relaciona las medidas de los ángulos interiores del triángulo ΔAOB para determinar la medida del $\sphericalangle AOB$.

- **Afirmación 6:** Se extrae información sobre el $\sphericalangle ACB$, inscrito en la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.46)

- **Afirmación 7:** Se extrae información sobre el $\sphericalangle AOB$, del centro de la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.46)

- **Afirmación 8:** Se relacionan los ángulos obtenidos en las afirmaciones 6 y 7.

- **Afirmación 9:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.60)

TERCER ENUNCIADO

Si un ángulo inscrito (1) y un ángulo del centro (2) de una circunferencia subtienden el mismo arco (3).

Entonces, la medida del ángulo inscrito es la mitad de la medida del ángulo del centro.

Verificación **Extracción**

(1) $\sphericalangle ACB$, ángulo inscrito que subtiende al arco $\overset{\frown}{AB}$.

(2) $\sphericalangle AOB$, ángulo del centro que subtiende al arco $\overset{\frown}{AB}$.

(3) $\sphericalangle ACB$ y $\sphericalangle AOB$ subtienden el mismo arco, el arco $\overset{\frown}{AB}$.

$$med\sphericalangle ACB = \frac{1}{2}\cdot 96º$$

PREMISA(S) **CONCLUSIÓN**

Esquema 4.60: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para determinar la medida del ángulo inscrito ACB.*

Conocimientos específicos:
- Congruencia de trazos. (Afirmación 2) - Definición del triángulo isósceles. (Afirmación 3) - Propiedad de los ángulos basales de un triángulo isósceles. (Afirmación 4) - Propiedad: La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180º. (Afirmación 5)
Rol de la figura: - Al principio del desarrollo y en el paso 1 se presenta una *aprehensión operativa de cambio figural.* - En las afirmaciones 2 a 9 predomina una *aprehensión discursiva*, donde el traspaso va de *un anclaje visual a uno discursivo.*
Pasos de Razonamiento: - Modus Ponens.

Cantidad de pasos de razonamiento:	**Caso(s) del teorema:**
- 4 pasos.	- Primer caso.

Observaciones generales
1. El estudiante debe construir el ángulo del centro de la circunferencia para posteriormente aplicar propiedades del triángulo isósceles y luego el teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia.

Actividad 7

Enunciado

Calcula la medida del ángulo α en el cuadrilátero de la figura, siendo O el centro de la circunferencia.

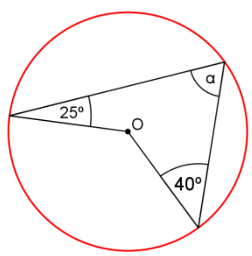


Figura 4.47

Desarrollo de la actividad esperado del estudiante

Se han asignado rótulos a los vértices de la figura para una mejor comprensión del desarrollo. (Figura 4.48)

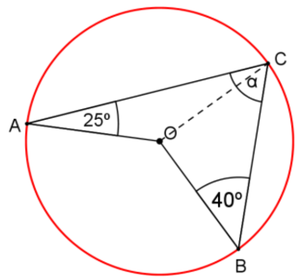


Figura 4.48

Secuencia de afirmaciones del desarrollo

1. Unir mediante una línea el punto C con el centro O, formando el segmento $\overline{OC}$. (Figura 4.48)

2. Como $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ y $\overline{OC}$ son radios de la circunferencia,

$$\overline{OA} \cong \overline{OB} \cong \overline{OC}$$

3. El ΔAOC es isósceles de base $\overline{AC}$.

4. El ΔBOC es isósceles de base $\overline{BC}$.

5. El $\sphericalangle ACO$ es congruente con el $\sphericalangle OAC$.

$$med\sphericalangle ACO = 25º$$

6. El $\sphericalangle BCO$ es congruente con el $\sphericalangle OBC$.

$$med\sphericalangle BCO = 40º$$

7. La $med\sphericalangle ACB$ es igual a la suma de las medidas de los ángulos ACO y BCO.

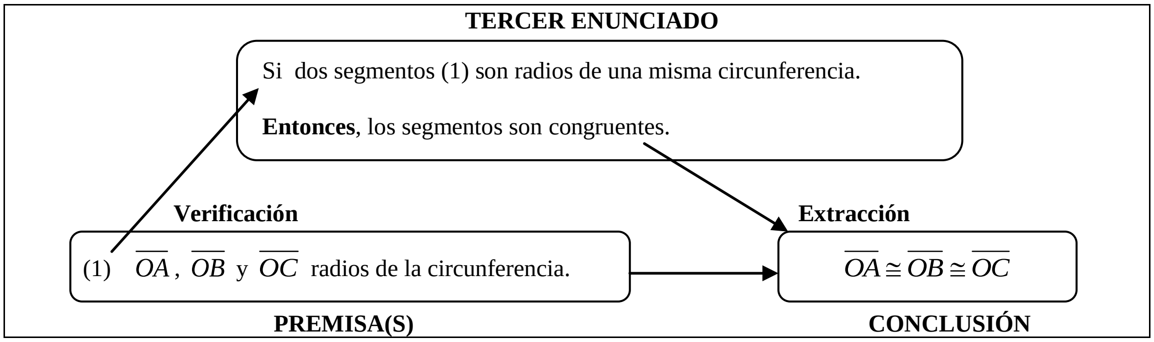
$$med\sphericalangle ACB = med\sphericalangle ACO + med\sphericalangle OCB$$
$$med\sphericalangle ACB = 25º + 40º$$
$$med\sphericalangle ACB = 65º$$

Por lo tanto, la medida de α es 65º.

Análisis de la secuencia de afirmaciones del desarrollo del ejercicio.

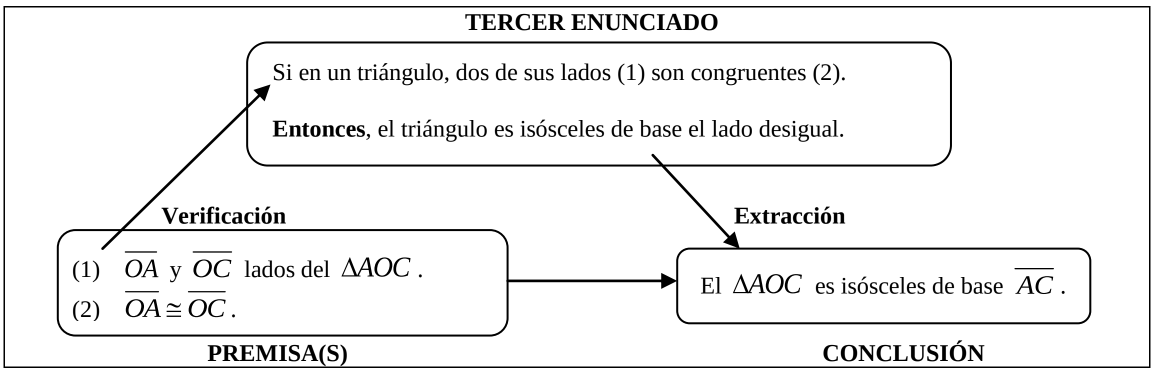
- **Afirmación 1:** Se construye el segmento $\overline{OC}$ para formar los triángulos isósceles AOC y BOC. (Figura 4.48)

- **Afirmación 2:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.61)



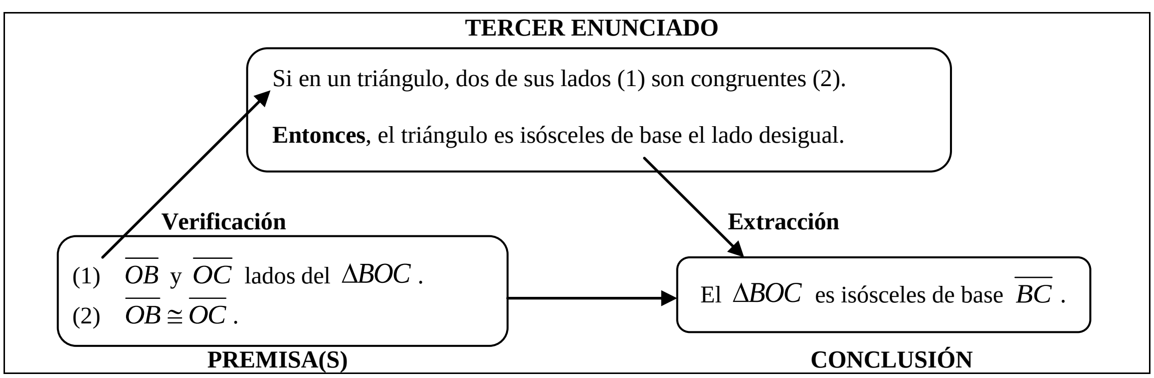
Esquema 4.61: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que los segmentos OA, OB y OC son congruentes.*

- **Afirmación 3:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.62)



Esquema 4.62: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que el triángulo AOC es Isósceles de base AC.*

- **Afirmación 4:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.63)



Esquema 4.63: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que el triángulo BOC es Isósceles de base BC.*

- **Afirmación 5:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.64)

TERCER ENUNCIADO

Si $\sphericalangle\alpha$ y $\sphericalangle\beta$ son ángulos basales (1 y 2) de un triángulo isósceles.

Entonces, la medida del $\sphericalangle\alpha$ es igual a la medida del $\sphericalangle\beta$.

Verificación **Extracción**

(1) $\sphericalangle ACO$, ángulo basal del triángulo isósceles AOC.
(2) $\sphericalangle OAC$, ángulo basal del triángulo isósceles AOC.

La $med\sphericalangle ACO = med\sphericalangle OCA$

PREMISA(S) **CONCLUSIÓN**

Esquema 4.64: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que los ángulos basales del triángulo isósceles AOC son congruentes.*

- **Afirmación 6:** Se realiza un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.65)

TERCER ENUNCIADO

Si $\sphericalangle\alpha$ y $\sphericalangle\beta$ son ángulos basales (1 y 2) de un triángulo isósceles.

Entonces, la medida del $\sphericalangle\alpha$ es igual a la medida del $\sphericalangle\beta$.

Verificación **Extracción**

(1) $\sphericalangle BCO$, ángulo basal del triángulo isósceles BOC.
(2) $\sphericalangle OBC$, ángulo basal del triángulo isósceles BOC.

La $med\sphericalangle BCO = med\sphericalangle OBC$

PREMISA(S) **CONCLUSIÓN**

Esquema 4.65: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que los ángulos basales del triángulo isósceles BOC son congruentes.*

- **Afirmación 7:** Se expresa la medida del $\sphericalangle ACB$ en términos de la medida de los ángulo ACO y BCO. Formulando la igualdad que relaciona sus medidas.

Conocimientos específicos:
- Congruencia de trazos. (Afirmación 2) - Definición del triángulo isósceles. (Afirmaciones 3 y 4) - Propiedad de los ángulos basales de un triángulo isósceles. (Afirmaciones 5 y 6) - La medida del todo es igual a la suma de las medidas de sus partes. (Afirmación 7)
Rol de la figura:
- Al comienzo del desarrollo y en la afirmación 1 se presenta una *aprehensión operativa de cambio figural.* - En las afirmaciones 2 a 7 predomina una *aprehensión discursiva*, donde el traspaso va de *un anclaje visual a uno discursivo.*
Pasos de Razonamiento:
- Modus Ponens.

Cantidad de pasos de razonamiento:	**Caso(s) del teorema:**
- 5 pasos.	- No es necesario.

Observaciones generales
1. Para resolver el ejercicio no es necesario aplicar el teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia.

Actividad 8

Enunciado

El triángulo inscrito en esta circunferencia es equilátero, siendo O el centro de la circunferencia. ¿Cuánto mide $\sphericalangle AOB$?

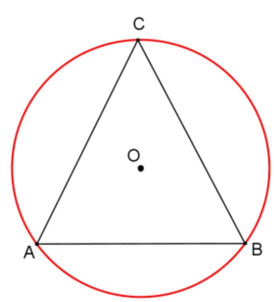


Figura 4.49

Desarrollo de la actividad esperado del estudiante

La secuencia de afirmaciones del desarrollo de la actividad será complementada con la Figura 4.50

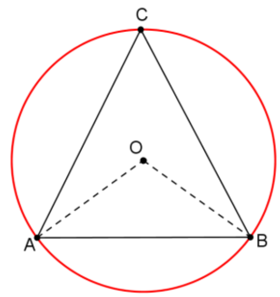


Figura 4.50

Secuencia de afirmaciones del desarrollo

1. Como ΔABC es equilátero, todos sus ángulos interiores miden 60º.

2. Unir mediante una línea el punto A con el centro O, formando el segmento $\overline{OA}$. (Figura 4.50)

3. Unir mediante una línea el punto B con el centro O, formando el segmento $\overline{BO}$. (Figura 4.50)

4. El $\sphericalangle ACB$ es un ángulo inscrito que subtiende al arco $\overline{AB}$.

5. El $\sphericalangle AOB$ es un ángulo del centro que subtiende al arco $\overset{\frown}{AB}$.

6. El $\sphericalangle ACB$ y el $\sphericalangle AOB$ subtienden el mismo arco, el arco $\overset{\frown}{AB}$.

7. Por teorema, la $med\sphericalangle AOB$ es el doble de la $med\sphericalangle ACB$.

$$med\sphericalangle AOB = 2 \cdot 60^{\circ}$$
$$med\sphericalangle AOB = 120^{\circ}$$

Por lo tanto, la $med\sphericalangle AOB = 120^{\circ}$.

Análisis de la secuencia de afirmaciones del desarrollo del ejercicio

- **Afirmación 1:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.66)

TERCER ENUNCIADO

Si un triángulo es equilátero (1).

Entonces, sus ángulos interiores son congruentes.

Verificación

Extracción

(1) El ΔABC es equilátero.

$mes\sphericalangle ABC = mes\sphericalangle BCA = mes\sphericalangle CAB = 60^{\circ}$

PREMISA(S)

CONCLUSIÓN

Esquema 4.66: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para determinar la medida de los ángulos ABC, ACB y BAC del triángulo ABC.*

- **Afirmación 2:** Se construye el segmento $\overline{OA}$ para formar el $\sphericalangle AOB$, del centro de la circunferencia. (Figura 4.50)

- **Afirmación 3:** Se construye el segmento $\overline{OB}$ para formar el $\sphericalangle AOB$, del centro de la circunferencia. (Figura 4.50)

- **Afirmación 4:** Se extrae información sobre el $\sphericalangle ACB$, inscrito en la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.50)

- **Afirmación 5:** Se extrae información sobre el $\sphericalangle AOB$, del centro de la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.50)

- **Afirmación 6:** Se relacionan los ángulos obtenidos en las afirmaciones 4 y 5.

- **Afirmación 7** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.67)

TERCER ENUNCIADO

Si un ángulo inscrito (1) y un ángulo del centro (2) de una circunferencia subtienden el mismo arco (3).

Entonces, la medida del ángulo del centro es el doble de la medida del ángulo inscrito.

Verificación — **Extracción**

(1) $\sphericalangle ACB$, ángulo inscrito que subtiende al arco $\overset{\frown}{AB}$.

(2) $\sphericalangle AOB$, ángulo del centro que subtiende al arco $\overset{\frown}{AB}$.

(3) $\sphericalangle ACB$ y $\sphericalangle AOB$ subtienden el mismo arco, el arco $\overset{\frown}{AB}$.

$med \sphericalangle AOB = 2 \cdot 60º$

PREMISA(S) — **CONCLUSIÓN**

Esquema 4.67: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para determinar la medida del ángulo del centro AOB.*

Conocimientos específicos:	
- Propiedad de los ángulos interiores de un triángulo equilátero. (Afirmación 1)	
Rol de la figura:	
- En las afirmaciones 1 y 2 se presenta una *aprehensión operativa de cambio figural.* - En las afirmaciones 3 a 7 predomina una *aprehensión discursiva*, donde la transferencia va de *un anclaje visual a uno discursivo.*	
Pasos de Razonamiento:	
- Modus Ponens.	
Cantidad de pasos de razonamiento: - 2 pasos.	**Caso(s) del teorema:** - Primer caso.
Observaciones generales	
1. El estudiante debe utilizar propiedades del triángulo equilátero para posteriormente aplicar el teorema del ángulo del centro e inscrito en una circunferencia.	

A continuación se detalla en la tabla 4.7 la cantidad de pasos de razonamiento, tipos de razonamiento y caso del teorema que se utiliza en el desarrollo de cada una de las actividades propuestas de la página 201 del texto Santillana.

EJERCICIOS	CASO DEL TEOREMA	CANTIDAD DE PASOS DE RAZONAMIENTO	TIPO DE PASO DE RAZONAMIENTO
1a	Caso 1	1 paso	Modus Ponens
1b	Caso 1	2 pasos	Modus Ponens
1c	Caso 1	1 paso	Modus Ponens
2	Caso 1	2 pasos	Modus Ponens
3	Caso 3	1 paso	Modus Ponens
4	Caso 3	4 pasos	Modus Ponens
5	Caso 3	3 pasos	Modus Ponens
6	Caso 1	4 pasos	Modus Ponens
7	No es necesario	5 pasos	Modus Ponens
8	Caso 1	2 pasos	Modus Ponens

Tabla 4.7: Cantidad de pasos de razonamientos y tipos de pasos de razonamientos que justifican las afirmaciones del desarrollo de las actividades propuestas en el texto Santillana correspondiente a la página 201.

Se observa en la tabla 4.7 que la mayoría de las actividades son de aplicación del primer caso del teorema. La organización de las actividades no esta dada según la cantidad de pasos de razonamiento que se deben realizar para desarrollarla. Dicho de otra forma, estas no tienen un orden según la dificultad de cada ejercicio. Además se extrae de la tabla 4.7 que el tipo de razonamiento presente en todas las actividades es el razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens).

Cabe destacar que uno de los ejercicios propuestos de la página 201 no es necesario aplicar el teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia para ser resuelto. Aun así, es una de las actividades que presenta más cantidad de pasos de razonamientos según la tabla 4.7. Es importante resaltar, que cinco ejercicios de los 9 propuestos requieren de conocimientos específicos por parte del alumno para ser resueltos. En estas actividades es en las que se presenta mayor cantidad de pasos de razonamientos en el desarrollo. Además, uno de estos es una demostración, específicamente la demostración del tercer caso de teorema, al cual el texto no se refiere.

Hay que tener en cuenta que el texto también presenta una confusión de notación, en este se señala la longitud de un arco en grados. En el contexto del mismo se refiere a que la medida del ángulo del centro de una circunferencia es igual a la medida del arco que subtiende.

Respecto al rol de la figura, en 8 ejercicios se lleva a cabo al menos una aprehensión operativa, es decir, se modifica la configuración inicial para posteriormente realizar una afirmación de ese procedimiento. Esto se puede observar en la tabla 4.8.

EJERCICIO	APREHENSION DISCURSIVA	APREHENSION OPERATIVA
1a	4 Afirmaciones	Al comienzo del desarrollo
1b	5 Afirmaciones	2 Afirmaciones y al comienzo del desarrollo
1c	4 Afirmaciones	Al comienzo del desarrollo
2	7 Afirmaciones	Al comienzo del desarrollo
3	4 Afirmaciones	Al comienzo del desarrollo
4	5 Afirmaciones	Al comienzo del desarrollo
5	6 Afirmaciones	1 Afirmación y al comienzo del desarrollo
6	8 Afirmaciones	1 Afirmación y al comienzo del desarrollo
7	6 Afirmaciones	1 Afirmación y al comienzo del desarrollo
8	5 Afirmaciones	2 Afirmaciones

Tabla 4.8: Resumen correspondiente al rol de la figura en las actividades propuestas en el Texto Santillana correspondientes a la página 201.

También es importante destacar que en 5 ejercicios se deben agregar más de un elemento geométrico, es decir, realizar una aprehensión operativa de cambio figural en coordinación con la aprehensión discursiva, la cual predomina en todos los ejercicios.

Actividades Propuestas de la Página 202.

Las actividades correspondientes a la página 202 son tres ejercicios ordenados alfabéticamente, donde cada uno de ellos esta acompañado por una figura. En estos se debe calcular la medida de un ángulo solicitado. A continuación se presenta el desarrollo de cada una estas. Analizando las afirmaciones que se dan en la secuencia del desarrollo y caracterizando los pasos de razonamiento que las justifican. Además de identificar el rol que cumple la figura en la resolución del ejercicio junto con los conocimientos específicos necesarios para desarrollar la actividad.

Actividad 1 Letra a

Enunciado

Calcula el valor del ángulo pedido en cada caso.

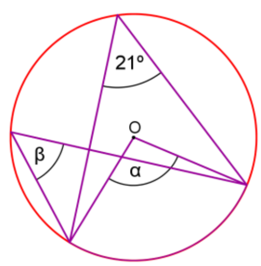


Figura 4.51

Desarrollo de la actividad esperado del estudiante

Se han asignado rótulos a los vértices de la figura para una mejor comprensión del desarrollo. (Figura 4.52)

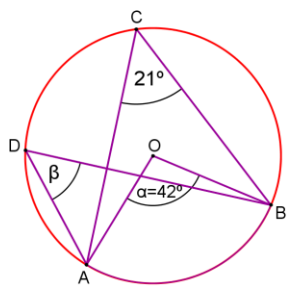


Figura 4.52

Secuencia de afirmaciones del desarrollo

1. El $\sphericalangle ACB$ es un ángulo inscrito que subtiende al arco $\overset{\frown}{AB}$.
2. El $\sphericalangle AOB$ es un ángulo del centro que subtiende al arco $\overset{\frown}{AB}$.
3. El $\sphericalangle ACB$ y el $\sphericalangle AOB$ subtienden el mismo arco, el arco $\overset{\frown}{AB}$.
4. Por teorema, la $med\sphericalangle AOB$ es el doble de la $med\sphericalangle ACB$.

$$med\sphericalangle AOB = 2 \cdot 21^{\circ}$$
$$med\sphericalangle AOB = 42^{\circ}$$

Por lo tanto, el valor de α es 42°.

5. El $\sphericalangle ADB$ es un ángulo inscrito que subtiende al arco $\overset{\frown}{AB}$.
6. El $\sphericalangle ADB$ y el $\sphericalangle AOB$ subtienden el mismo arco, el arco $\overset{\frown}{AB}$.
7. Por teorema, la $med\sphericalangle ADB$ es la mitad de la $med\sphericalangle AOB$.

$$med\sphericalangle ADB = \frac{1}{2} \cdot 42^{\circ}$$
$$med\sphericalangle ADB = 21^{\circ}$$

Por lo tanto, el valor de β es 21°.

Análisis de la secuencia de afirmaciones del desarrollo del ejercicio.

- **Afirmación 1:** Se extrae información sobre el $\sphericalangle ACB$, inscrito en la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.52).

- **Afirmación 2:** Se extrae información sobre el $\sphericalangle AOB$, del centro de la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.52)

- **Afirmación 3:** Se relacionan los ángulos obtenidos en las afirmaciones 1 y 2.

- **Afirmación 4:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.68)

TERCER ENUNCIADO

Si un ángulo inscrito (1) y un ángulo del centro (2) de una circunferencia subtienden el mismo arco (3).

Entonces, la medida del ángulo del centro es el doble de la medida del ángulo inscrito.

Verificación | **Extracción**

(1) $\sphericalangle ACB$, ángulo inscrito que subtiende al arco $\overset{\frown}{AB}$.

(2) $\sphericalangle AOB$, ángulo del centro que subtiende al arco $\overset{\frown}{AB}$.

(3) $\sphericalangle ACB$ y $\sphericalangle AOB$ subtienden el mismo arco, el arco $\overset{\frown}{AB}$.

$med \sphericalangle AOB = 2 \cdot 21^{\circ}$

PREMISA(S) | **CONCLUSIÓN**

Esquema 4.68: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para determinar la medida del ángulo del centro AOB.*

- **Afirmación 5:** Se extrae información sobre el $\sphericalangle ADB$, inscrito en la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.52)

- **Afirmación 6:** Se relacionan los ángulos obtenidos en las afirmaciones 2 y 5.

- **Afirmación 7:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.69)

TERCER ENUNCIADO

Si un ángulo inscrito (1) y un ángulo del centro (2) de una circunferencia subtienden el mismo arco (3).

Entonces, la medida del ángulo inscrito es la mitad de la medida del ángulo del centro.

Verificación | **Extracción**

(1) $\sphericalangle ADB$, ángulo inscrito que subtiende al arco $\overset{\frown}{AB}$.

(2) $\sphericalangle AOB$, ángulo del centro que subtiende al arco $\overset{\frown}{AB}$.

(3) $\sphericalangle ADB$ y $\sphericalangle AOB$ subtienden el mismo arco, el arco $\overset{\frown}{AB}$.

$med \sphericalangle ADB = \frac{1}{2} \cdot 42^{\circ}$

PREMISA(S) | **CONCLUSIÓN**

Esquema 4.69: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para determinar la medida del ángulo inscrito ADB.*

Conocimientos específicos:

- No son necesarios.

Rol de la figura:

- Al comienzo del desarrollo se presenta una *aprehensión operativa de cambio figural.*
- En las afirmaciones 1 a 7 predomina una *aprehensión discursiva,* donde el cambio va de un *anclaje visual a uno discursivo.*

Pasos de Razonamiento:

- Modus Ponens.

Cantidad de pasos de razonamiento:	**Caso(s) del teorema:**
- 2 pasos.	- Primer y segundo caso.

Observaciones generales

1. El estudiante debe aplicar el teorema dos veces. La primera, para determinar la medida del ángulo del centro (caso 1 del teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia), y la segunda, lo debe aplicar para determinar la medida del ángulo inscrito a partir de la meida del ángulo del centro (caso 2 del teorema).

Actividad 1 Letra b

Enunciado

Calcula el valor del ángulo α .

$\overset{\frown}{AB} = 120º$

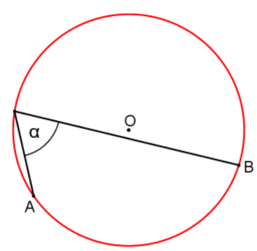


Figura 4.53

Desarrollo de la actividad esperado del estudiante

Se han asignado rótulos a los vértices de la figura para una mejor comprensión del desarrollo. (Figura 4.54)

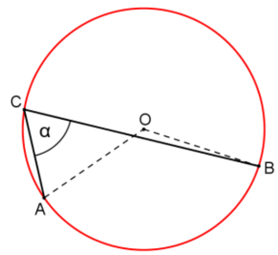


Figura 4.54

Secuencia de afirmaciones del desarrollo

1. Unir mediante una línea el punto A con el centro O, formando el segmento $\overline{AO}$. (Figura 4.54)
2. Unir mediante una línea el punto B con el centro O, formando el segmento $\overline{BO}$.(Figura 4.54)
3. El $\sphericalangle ACB$ es un ángulo inscrito que subtiende al arco $\overset{\frown}{AB}$.
4. El $\sphericalangle AOB$ es un ángulo del centro que subtiende al arco $\overset{\frown}{AB}$.
5. La $med\sphericalangle AOB = med\overset{\frown}{AB}$ *

$$med\sphericalangle AOB = 120^{o}$$

6. El $\sphericalangle ACB$ y el $\sphericalangle AOB$ subtienden el mismo arco, el arco $\overset{\frown}{AB}$.
7. Por teorema, la $med\sphericalangle ACB$ es la mitad de la $med\sphericalangle AOB$.

$$med\sphericalangle ACB = \frac{1}{2}\cdot 120^{o}$$
$$med\sphericalangle ACB = 60^{o}$$

Por lo tanto, el valor de α es 60°.

Análisis de la secuencia de afirmaciones del desarrollo del ejercicio

- **Afirmación 1:** Se construye el segmento $\overline{AO}$ para formar el $\sphericalangle AOB$, del centro de la circunferencia. (Figura 4.54)

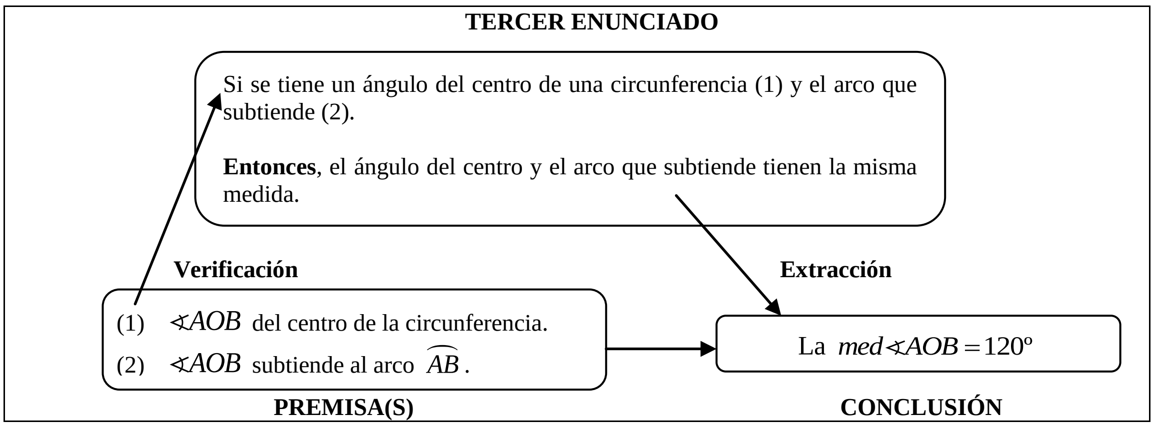
- **Afirmación 2:** Se construye el segmento $\overline{BO}$ para formar el $\sphericalangle AOB$, del centro de la circunferencia. (Figura 4.54)

- **Afirmación 3:** Se extrae información sobre el $\sphericalangle ACB$, inscrito en la circunferencia presente en dibujo. (Figura 4.54)

* Paso realizado en base al marco conceptual del texto.

- **Afirmación 4:** Se extrae información sobre el $\sphericalangle AOB$, del centro de la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.54)

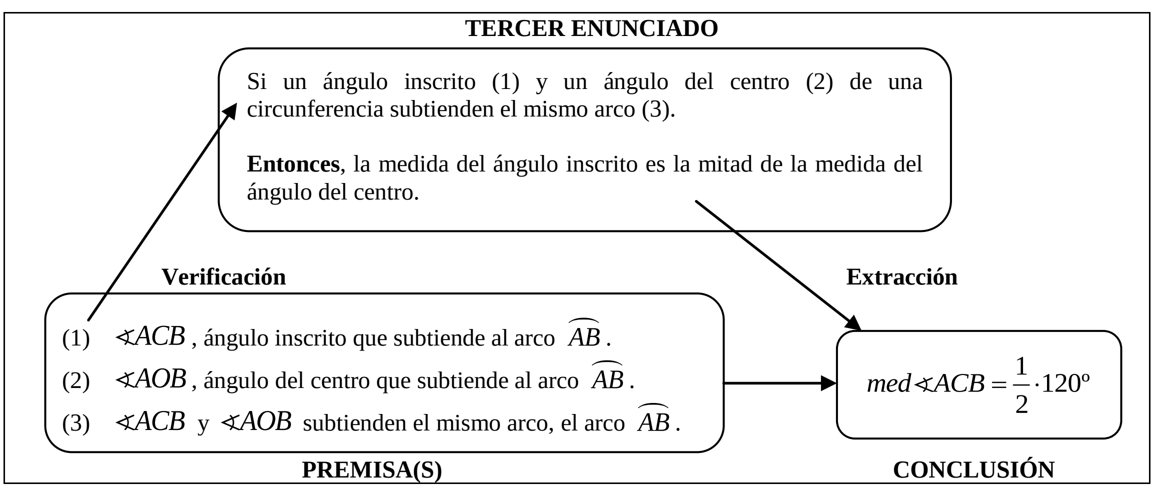
- **Afirmación 5:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.70)



***Esquema 4.70:** Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para determinar la medida del ángulo AOB.*

- **Afirmación 6:** Se relacionan los ángulos obtenidos en las afirmaciones 3 y 4.

- **Afirmación 7:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.71)



***Esquema 4.71:** Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para determinar la medida del ángulo inscrito ACB.*

Conocimientos específicos: - No son necesarios.	
Rol de la figura: - Al principio del Desarrollo, en las afirmaciones 1 y 2 se presenta una *aprehensión operativa de cambio figural*. - En las afirmaciones 3 a 7 existe una *aprehensión discursiva* donde el sentido de la transferencia va de un *anclaje visual a uno discursivo.*	
Pasos de Razonamiento: - Modus Ponens.	
Cantidad de pasos de razonamiento: - 2 pasos.	**Caso(s) del teorema:** - Segundo caso.
Observaciones generales 1. El texto presenta una confusión de concepto en la figura que acompaña al enunciado del ejercicio, pues en este se indica que la longitud del arco AB mide 120º. En el contexto del mismo se refiere a que la medida del ángulo del centro es igual a la medida del arco que subtiende. 2. El estudiante debe construir el ángulo del centro de la circunferencia para posteriormente aplicar el teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia.	

Actividad 1 Letra C

Enunciado

Calcula el valor del ángulo α .

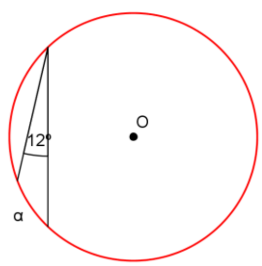


Figura 4.55

Desarrollo de la actividad esperado del estudiante

Se han asignado rótulos a los vértices de la figura para una mejor comprensión del desarrollo. (Figura 4.56)

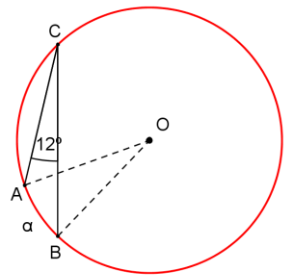


Figura 4.56

Secuencia de afirmaciones del desarrollo

1. Unir mediante una línea el punto A con el centro O, formando el segmento $\overline{AO}$. (Figura 4.56)
2. Unir mediante una línea el punto B con el centro O, formando el segmento $\overline{BO}$. (Figura 4.56)
3. El $\sphericalangle ACB$ es un ángulo inscrito que subtiende al arco $\widehat{AB}$.
4. El $\sphericalangle AOB$ es un ángulo del centro que subtiende al arco $\widehat{AB}$.
5. El $\sphericalangle ACB$ y el $\sphericalangle AOB$ subtienden el mismo arco, el arco $\widehat{AB}$.
6. Por teorema, la $med\sphericalangle AOB$ es el doble de la $med\sphericalangle ACB$.

$$med\sphericalangle AOB = 2 \cdot 12^{o}$$
$$med\sphericalangle AOB = 24^{o}$$

7. La $med\,\widehat{AB} = med\sphericalangle AOB$ *

$$med\,\widehat{AB} = 24^{o}$$

Por lo tanto, el valor de α es 24°.

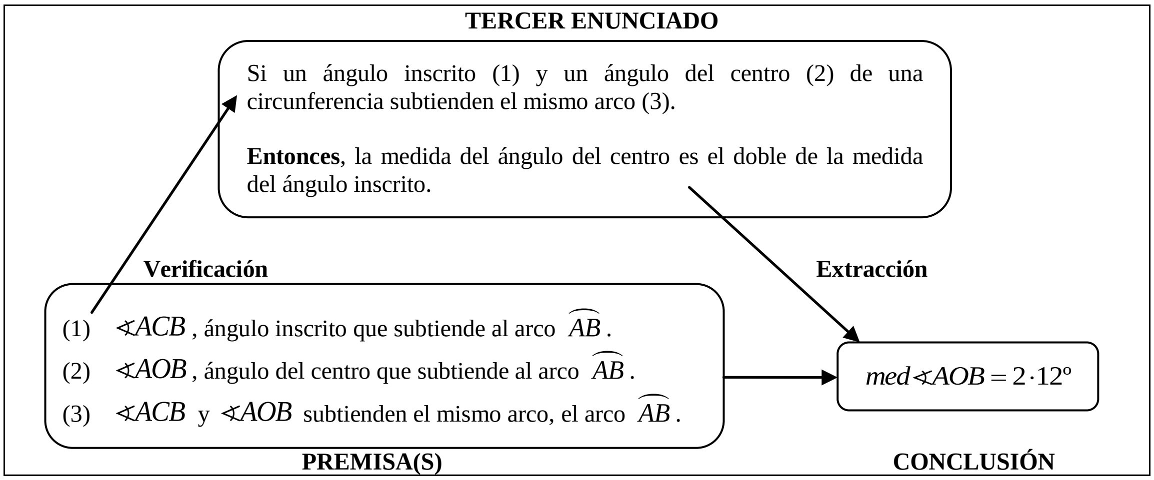
Análisis de la secuencia de afirmaciones del desarrollo del ejercicio

- **Afirmación 1:** Se construye el segmento $\overline{AO}$ para formar el $\sphericalangle AOB$, del centro de la circunferencia. (Figura 4.56)
- **Afirmación 2:** Se construye el segmento $\overline{BO}$ para formar el $\sphericalangle AOB$, del centro de la circunferencia. (Figura 4.56)
- **Afirmación 3:** Se extrae información sobre el $\sphericalangle ACB$, inscrito en la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.56)
- **Afirmación 4:** Se extrae información sobre el $\sphericalangle AOB$, del centro de la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.56)

* Paso realizado en base al marco conceptual del texto.

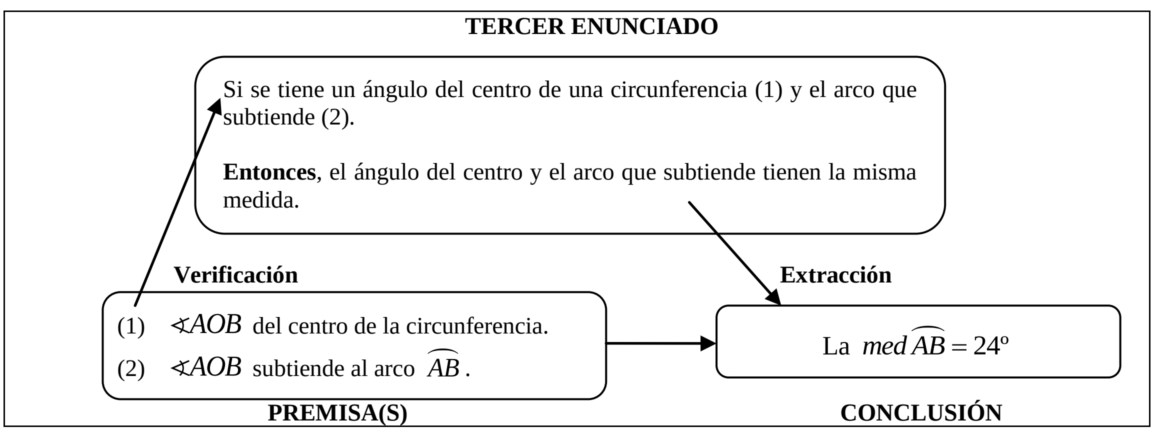
- **Afirmación 5:** Se relacionan los ángulos obtenidos en las afirmaciones 3 y 4.

- **Afirmación 6:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.72)



Esquema 4.72: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para determinar la medida del ángulo del centro AOB.*

- **Afirmación 7:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.73)



Esquema 4.73: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para determinar la medida del ángulo AOB.*

Conocimientos específicos:

- No son necesarios.

Rol de la figura:

- Al principio del desarrollo y en las afirmaciones 1 y 2 se presenta una *aprehensión operativa de cambio figural.*
- En las afirmaciones 3 a 7 predomina una *aprehensión discursiva*, donde el sentido de la transferencia va de *un anclaje visual a uno discursivo.*

Pasos de Razonamiento:

- Modus Ponens.

Cantidad de pasos de razonamiento:

- 2 pasos.

Caso(s) del teorema:

- Segundo caso.

Observaciones generales

1. El texto presenta una confusión de concepto en la figura que acompaña al enunciado del ejercicio, pues en este se solicita calcular α , y en la figura se señala a este como la longitud del arco AB. En el contexto del mismo se refiere a que la medida del ángulo del centro es igual a la medida del arco que subtiende.

2. El estudiante debe construir el ángulo del centro de la circunferencia para posteriormente aplicar el teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia.

A continuación en la tabla 4.9 se detalla la cantidad de pasos de razonamiento, tipos de razonamiento y caso del teorema que se utiliza en el desarrollo de cada una de las actividades propuestas de la página 202 del texto.

EJERCICIOS	CASO DEL TEOREMA	CANTIDAD DE PASOS DE RAZONAMIENTO	TIPO DE PASO DE RAZONAMIENTO
1a	Caso 1 y 2	2 pasos	Modus Ponens
1b	Caso 2	2 pasos	Modus Ponens
1c	Caso 2	2 pasos	Modus Ponens

Tabla 4.9: Cantidad de pasos de razonamientos y tipos de pasos de razonamientos que justifican las afirmaciones del desarrollo de las actividades propuestas en el texto Santillana correspondiente a la página 202.

Se observa en la tabla 4.9 que todas las actividades son de aplicación del segundo caso del teorema. La primera actividad también requiere de la aplicación del primer caso para ser resuelta. La cantidad de pasos de razonamiento es la misma para todos lo ejercicios. Además, el tipo de razonamiento presente en todas las actividades es el razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens).

Por otra parte, en los ejercicios de esta página también se presenta una confusión de notación respecto a la medida de un arco, en el texto se señala tal longitud en grados. En el contexto del mismo se refiere a que la medida del ángulo del centro de una circunferencia es igual a la medida del arco que subtiende.

A continuación, en la tabla 4.10 se presenta un resumen de la cantidad de afirmaciones donde se identifican la Aprehensión Operativa y la Aprehensión Discursiva en el desarrollo de las actividades.

EJERCICIO	APREHENSION DISCURSIVA	APREHENSION OPERATIVA
1a	7 Afirmaciones	Al comienzo del desarrollo
1b	5 Afirmaciones	2 Afirmaciones y al comienzo del desarrollo
1c	5 Afirmaciones	2 Afirmaciones y al comienzo del desarrollo

Tabla 4.10: Resumen correspondiente al rol de la figura en las actividades propuestas en el Texto Santillana correspondientes a la página 202.

En la tabla anterior, dos ejercicios presentan una aprehensión operativa de cambio figural. Es decir, el estudiante debe agregar o quitar un elemento geométrico para resolver el ejercicio. Solamente en un ejercicio se realiza una aprehensión operativa. Siendo más frecuente la presencia de aprehensiones discursivas.

Las actividades no requieren de conocimientos específicos por parte del estudiante para ser resueltas.

Actividades propuestas de la Página 203

Los ejercicios de la página 203 corresponden a 3 tareas de aplicación y cuatro actividades de demostraciones para que el estudiante realice. En la primera de estas, se le guía al estudiante por medio de preguntas para que logre desarrollarla. Las tres restantes, el alumno las ha de realizar en forma autónoma.

A continuación se presenta el desarrollo de cada una de las actividades. Analizando las afirmaciones que se dan en la secuencia del desarrollo y caracterizando los pasos de razonamiento que las justifican. Además de identificar el rol que cumple la figura en la resolución del ejercicio junto con los conocimientos específicos necesarios para desarrollar la actividad.

Actividad 1

Enunciado

Demuestra que el ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del ángulo del centro que subtiende el mismo arco siendo el ángulo inscrito obtuso.

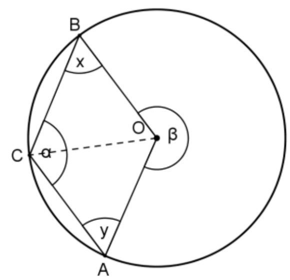


Figura 4.57

Para realizar la demostración puedes ayudarte con la figura y con las siguientes preguntas.

a. ¿Qué triángulos son isósceles?
b. ¿Qué ángulos son congruentes a x e y?
c. ¿A qué es equivalente α ?
d. ¿Cuánto miden los ángulos $\sphericalangle BOC$ y $\sphericalangle AOC$?
e. ¿Qué amplitud tiene β ?

Desarrollo de la actividad esperado del estudiante

La secuencia de afirmaciones del desarrollo de la actividad será complementada con la Figura 4.58

Secuencia de afirmaciones del desarrollo

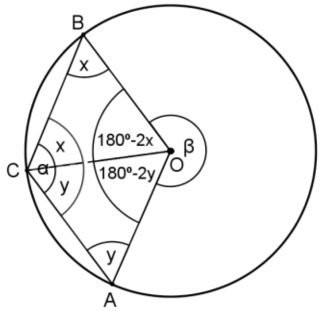


Figura 4.58

1. Como $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ y $\overline{OC}$ son radios,

$$\overline{OA} \cong \overline{OB} \cong \overline{OC}$$

2. El ΔBOC es isósceles de base $\overline{BC}$.

3. El ΔAOC es isósceles de base $\overline{AC}$.

4. El $\sphericalangle OCB$ es congruente con el $\sphericalangle CBO$.

$$med\sphericalangle OCB = x$$

5. El $\sphericalangle OAC$ es congruente con el $\sphericalangle ACO$.

$$med\sphericalangle ACO = y$$

6. La $med\sphericalangle ACB$ es igual a la suma de las medidas de los ángulo OCB y ACO.

$$med\sphericalangle ACB = med\sphericalangle OCB + med\sphericalangle ACO$$
$$med\sphericalangle ACB = x + y$$

Por lo tanto, la medida de α es $x + y$.

7. Sumando los ángulos interiores del ΔBOC.

$$med\sphericalangle OCB + med\sphericalangle CBO + med\sphericalangle BOC = 180º$$
$$x + x + med\sphericalangle BOC = 180º$$
$$2x + med\sphericalangle BOC = 180º$$
$$med\sphericalangle BOC = 180º - 2x$$

8. Sumando los ángulos interiores del ΔAOC.

$$med\sphericalangle OAC + med\sphericalangle ACO + med\sphericalangle AOC = 180º$$
$$y + y + med\sphericalangle AOC = 180º$$
$$2y + med\sphericalangle AOC = 180º$$
$$med\sphericalangle AOC = 180º - 2y$$

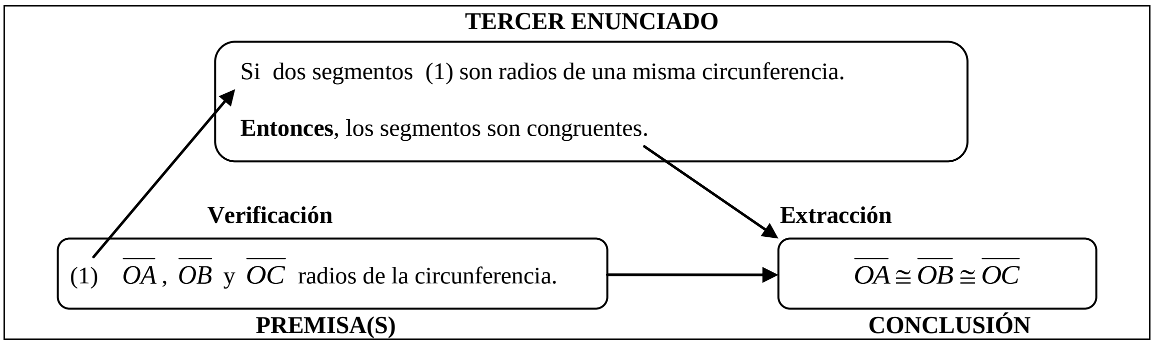
9. La $med\sphericalangle BOC$ con la $med\sphericalangle AOC$ y la $med\sphericalangle AOB$ forman un ángulo completo,

$$med\sphericalangle BOC + med\sphericalangle AOC + med\sphericalangle AOB = 360º$$
$$180º - 2x + 180º - 2y + med\sphericalangle AOB = 360º$$
$$360º - 2x - 2y + med\sphericalangle AOB = 360º$$
$$-2x - 2y + med\sphericalangle AOB = 0$$
$$med\sphericalangle AOB = 2x + 2y$$
$$med\sphericalangle AOB = 2(x + y)$$
$$med\sphericalangle AOB = 2med\sphericalangle ACB$$

Por lo tanto, la medida de β es 2α .

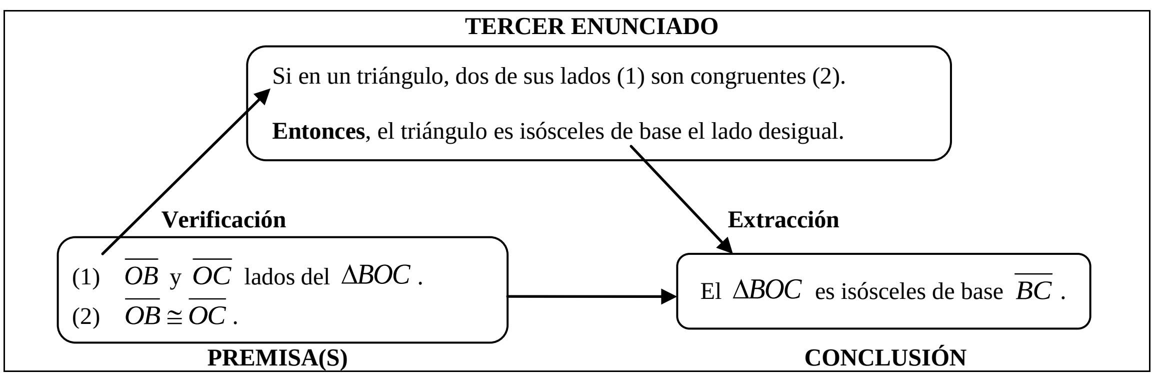
Análisis de la secuencia de afirmaciones del desarrollo del ejercicio

- **Afirmación 1:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.74)



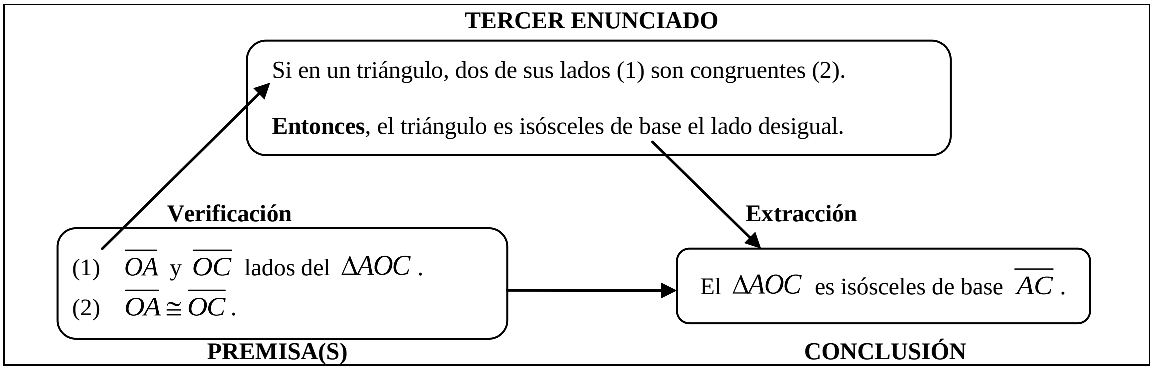
Esquema 4.74: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que los segmentos OA, OB, y OC son congruentes.*

- **Afirmación 2:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.75)



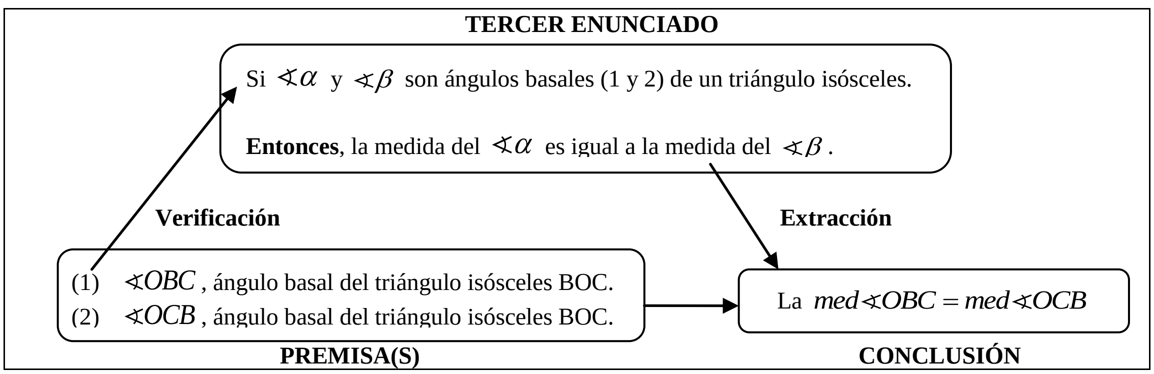
Esquema 4.75: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que el triángulo BOC es Isósceles de base BC.*

- **Afirmación 3:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.76)



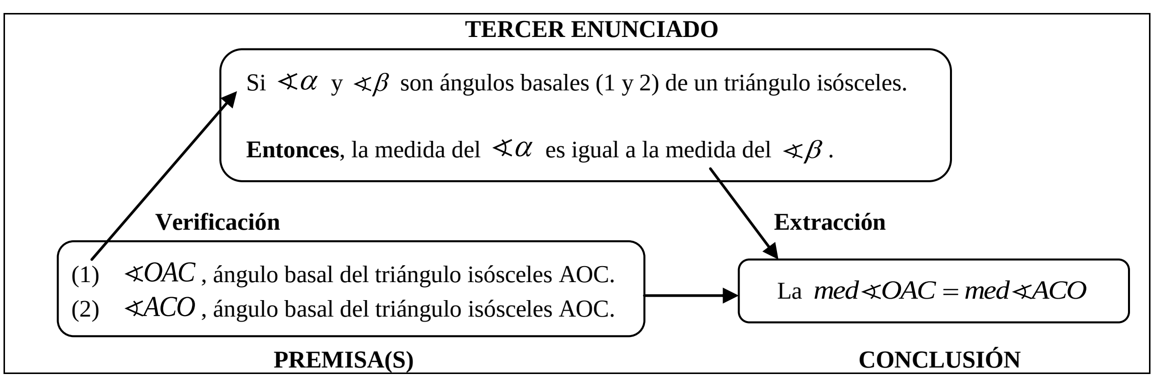
Esquema 4.76: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que el triángulo AOC es Isósceles de base AC.*

- **Afirmación 4:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.77)



Esquema 4.77: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que los ángulos basales del triángulo isósceles BOC son congruentes.*

- **Afirmación 5:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.78)



Esquema 4.78: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que los ángulos basales del triángulo isósceles AOC son congruentes.*

- **Afirmación 6:** Como la suma de las medidas de los ángulos OCB y ACO es igual a la medida del ángulo ACB, se calcula su valor en términos de x e y.

- **Afirmación 7:** Como la suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo es 180º, se formula la igualdad que relaciona las medidas de los ángulos interiores del triángulo ΔBOC.

- **Afirmación 8:** Como la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180º. se formula la igualdad que relaciona las medidas de los ángulos interiores del triángulo ΔAOC.

- **Afirmación 9:** Dado que los ángulos BOC, AOC y AOB forman un ángulo completo, se formula la igualdad que relaciona las medidas de dichos ángulos para determinar la medida del ángulo AOB en función de las medidas de lo ángulos BOC y AOC.

<table>
<tr><td colspan="2">Conocimientos específicos:

- Congruencia de trazos. (Afirmación 1)
- Definición de triángulo Isósceles. (Afirmación 2 y 3)
- Propiedad sobre ángulos basales del triángulo isósceles. (Afirmaciones 4 y 5)
- La medida del todo es igual a la suma de las medidas de sus partes. (Afirmación 6)
- Propiedad: La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180º. (Afirmación 7 y 8)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Rol de la figura:

- Al principio del desarrollo se presenta una aprehensión operativa de cambio figural.
- En las afirmaciones 1 a 9 predomina una aprehensión discursiva, donde el sentido de la transferencia va de un anclaje visual a uno discursivo.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Pasos de Razonamiento:

- Modus Ponens.</td></tr>
<tr><td>Cantidad de pasos de razonamiento:

- 5 pasos.</td><td>Caso(s) del teorema:

- Primer caso.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Observaciones generales

1. La demostración es guiada por el texto, por medio de preguntas hacia el estudiante, para que este pueda desarrollarla.

2. Se identifican objetos geométricos con sus medidas, en el caso de los ángulos. Se presenta una confusión de notación. (Afirmación)</td></tr>
</table>

Actividad 2 Letra a

Enunciado

Calcula la medida de ángulo α .

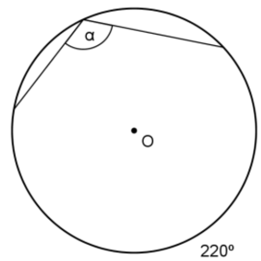


Figura 4.59

Desarrollo de la actividad esperado del estudiante

Se han asignado rótulos a los vértices de la figura para una mejor comprensión del desarrollo. (Figura 4.60)

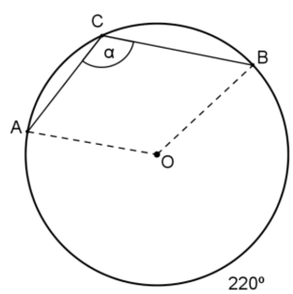


Figura 4.60

Secuencia de afirmaciones del desarrollo

1. Unir mediante una línea el punto A con el centro O, formando el segmento $\overline{AO}$. (Figura 4.60)
2. Unir mediante una línea el punto A con el centro O, formando el segmento $\overline{BO}$. (Figura 4.60)
3. El $\sphericalangle ACB$ es un ángulo inscrito que subtiende al arco $\overset{\frown}{AB}$.
4. El $\sphericalangle AOB$ es un ángulo del centro que subtiende al arco $\overset{\frown}{AB}$.
5. La $med\sphericalangle AOB = med\overset{\frown}{AB}$ *

   $$med\sphericalangle AOB = 220º$$

6. El $\sphericalangle ACB$ y el $\sphericalangle AOB$ subtienden el mismo arco, el arco $\overset{\frown}{AB}$.
7. Por teorema, la $med\sphericalangle ACB$ es la mitad de la $med\sphericalangle AOB$.

   $$med\sphericalangle ACB = \frac{1}{2}\cdot 220º$$
   $$med\sphericalangle ACB = 110º$$

   Por lo tanto, la medida de α es $110º$.

* Paso realizado en base al marco conceptual del texto.

Análisis de la secuencia de afirmaciones del desarrollo del ejercicio

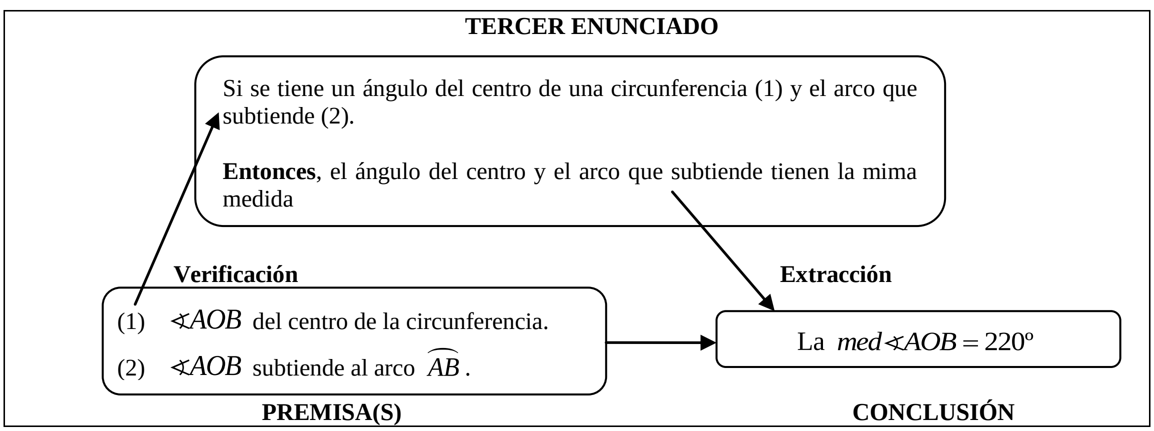
- **Afirmación 1:** Se construye el segmento $\overline{AO}$ para formar el $\sphericalangle AOB$, del centro de la circunferencia. (Figura 4.60)

- **Afirmación 2:** Se construye el segmento $\overline{BO}$ para formar el $\sphericalangle AOB$, del centro de la circunferencia. (Figura 4.60)

- **Afirmación 3:** Se extrae información sobre el $\sphericalangle ACB$, inscrito en la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.60)

- **Afirmación 4:** Se extrae información sobre el $\sphericalangle AOB$, del centro de la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.60)

- **Afirmación 5:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.79)



Esquema 4.79: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para determinar la medida del ángulo AOB.*

- **Afirmación 6:** Se relacionan los ángulos obtenidos en las afirmaciones 3 y 4.

- **Afirmación 7:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.80)

TERCER ENUNCIADO

Si un ángulo inscrito (1) y un ángulo del centro (2) de una circunferencia subtienden el mismo arco (3).

Entonces, la medida del ángulo inscrito es la mitad de la medida del ángulo del centro.

Verificación **Extracción**

(1) $\measuredangle ACB$, ángulo inscrito que subtiende al arco $\overset{\frown}{AB}$.

(2) $\measuredangle AOB$, ángulo del centro que subtiende al arco $\overset{\frown}{AB}$.

(3) $\measuredangle ACB$ y $\measuredangle AOB$ subtienden el mismo arco, el arco $\overset{\frown}{AB}$.

$$med\measuredangle ACB = \frac{1}{2} \cdot 220º$$

PREMISA(S) **CONCLUSIÓN**

Esquema 4.80: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para determinar la medida del ángulo inscrito ACB.*

Conocimientos específicos: - No son necesarios.	
Rol de la figura: - Al comienzo del desarrollo y en las afirmaciones 1 y 2 se presenta una *aprehensión operativa de cambio figural.* - En las afirmaciones 3 a 7 predomina una *aprehensión discursiva*, donde el traspaso va de *un anclaje visual a uno discursivo.*	
Pasos de Razonamiento: - Modus Ponens.	
Cantidad de pasos de razonamiento: - 2 pasos.	**Caso(s) del teorema:** - Primer caso.
Observaciones generales 1. El texto presenta una confusión de concepto en la figura que acompaña al enunciado del ejercicio, pues en este se indica que la longitud del arco AB mide 220º. En el contexto del mismo se refiere a que la medida del ángulo del centro es igual a la medida del arco que subtiende. 2. El estudiante debe construir el ángulo del centro, además de notar que este es un ángulo obtuso.	

Actividad 2 Letra b

Enunciado

Calcula la medida del ángulo α .

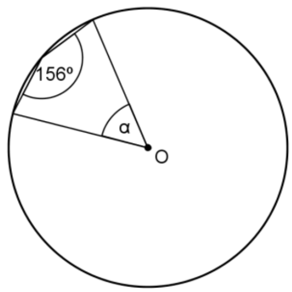


Figura 4.61

Desarrollo de la actividad esperado del estudiante

Se han asignado rótulos a los vértices de la figura para una mejor comprensión del desarrollo. (Figura 4.62)

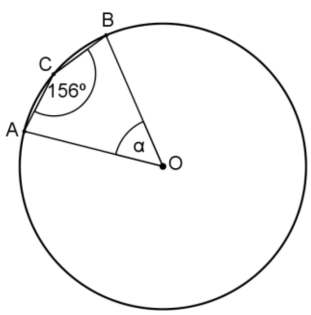


Figura 4.62

Secuencia de afirmaciones del desarrollo

1. El $\sphericalangle ACB$ es un ángulo inscrito que subtiende al arco $\overparen{AB}$.

2. El $\sphericalangle AOB$ es un ángulo del centro que subtiende al arco $\overparen{AB}$.

3. El $\sphericalangle ACB$ y el $\sphericalangle AOB$ subtienden el mismo arco, el arco $\overparen{AB}$.
4. Por teorema, la $med\sphericalangle AOB$ es el doble de la $med\sphericalangle ACB$.

$$med\sphericalangle AOB = 2 \cdot 156º$$
$$med\sphericalangle AOB = 312º$$

5. Como la $med\sphericalangle BOA$ con la $med\sphericalangle AOB$ forman un ángulo completo,

$$med\sphericalangle BOA + med\sphericalangle AOB = 360º$$
$$med\sphericalangle BOA + 312º = 360º$$
$$med\sphericalangle BOA = 48º$$

Por lo tanto, la medida de α es $48º$.

Análisis de la secuencia de afirmaciones del desarrollo del ejercicio

- **Afirmación 1:** Se extrae información sobre el $\sphericalangle ACB$, inscrito en la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.62)

- **Afirmación 2:** Se extrae información sobre el $\sphericalangle AOB$, del centro de la circunferencia presente en la figura. (Figura 4.62)

- **Afirmación 3:** Se relacionan los ángulos obtenidos en las afirmaciones 1 y 2.

- **Afirmación 4:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.81)

TERCER ENUNCIADO

Si un ángulo inscrito (1) y un ángulo del centro (2) de una circunferencia subtienden el mismo arco (3).

Entonces, la medida del ángulo del centro es el doble de la medida del ángulo inscrito.

Verificación

Extracción

(1) $\sphericalangle ACB$, ángulo inscrito que subtiende al arco $\overset{\frown}{AB}$.

(2) $\sphericalangle AOB$, ángulo del centro que subtiende al arco $\overset{\frown}{AB}$.

(3) $\sphericalangle ACB$ y $\sphericalangle AOB$ subtienden el mismo arco, el arco $\overset{\frown}{AB}$.

$med\sphericalangle AOB = 2 \cdot 156^{o}$

PREMISA(S) **CONCLUSIÓN**

Esquema 4.81: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para determinar la medida del ángulo del centro AOB.*

- **Afirmación 5:** Dado que los ángulos BOC y AOB forman un ángulo completo. Se formula la igualdad que relaciona las medidas de dichos ángulos para determinar la medida del ángulo BOA en función de la medida del ángulo AOB.

<table>
<tr><td colspan="2">Conocimientos específicos:

- No son necesarios.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Rol de la figura:

- Al comienzo del desarrollo se presenta una aprehensión operativa de cambio figural.
- En las afirmaciones 1 a 5 predomina una aprehensión discursiva, donde el traspaso va de un anclaje visual a uno discursivo.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Pasos de Razonamiento:

- Modus Ponens.</td></tr>
<tr><td>Cantidad de pasos de razonamiento:

- 1 pasos.</td><td>Caso(s) del teorema:

- Primer caso.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Observaciones generales

1. El estudiante debe notar que el ángulo del centro es un ángulo obtuso para posteriormente aplicar el teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia.</td></tr>
</table>

Actividad 2 Letra c

Enunciado

Calcula la medida del ángulo β .

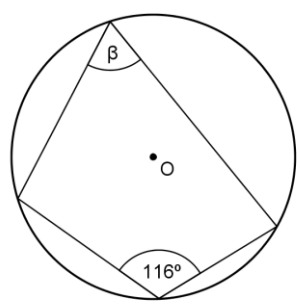


Figura 4.63

Desarrollo de la actividad esperado del estudiante

Se han asignado rótulos a los vértices de la figura para una mejor comprensión del desarrollo. (Figura 4.64)

Secuencia de afirmaciones del desarrollo

1. Unir mediante una línea el punto B con el centro O, formando el segmento $\overline{BO}$. (Figura 4.64)

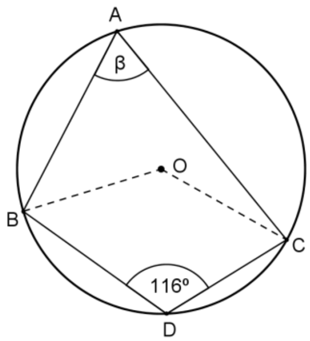


Figura 4.64

2. Unir mediante una línea el punto C con el centro O, formando el segmento $\overline{CO}$. (Figura 4.64)

3. El $\sphericalangle CDB$ es un ángulo inscrito que subtiende al arco $\overset{\frown}{CB}$.

4. El $\sphericalangle COB$ es un ángulo del centro que subtiende al arco $\overset{\frown}{CB}$.

5. El $\sphericalangle CDB$ y el $\sphericalangle COB$ subtienden el mismo arco, el arco $\overset{\frown}{CB}$.

6. Por teorema, la $med\sphericalangle COB$ es el doble de la $med\sphericalangle CDB$.

$$med\sphericalangle COB = 2\cdot 116^{\circ}$$
$$med\sphericalangle COB = 232^{\circ}$$

7. Como la $med\sphericalangle COB$ con la $med\sphericalangle BOC$ forman un ángulo completo,

$$med\sphericalangle BOC + med\sphericalangle COB = 360^{\circ}$$
$$med\sphericalangle BOC + 232^{\circ} = 360^{\circ}$$
$$med\sphericalangle BOC = 128^{\circ}$$

8. El $\sphericalangle BAC$ es un ángulo inscrito que subtiende al arco $\overset{\frown}{BC}$.

9. El $\sphericalangle BOC$ es un ángulo del centro que subtiende al arco $\overset{\frown}{BC}$.

10. El $\sphericalangle BAC$ y el $\sphericalangle BOC$ subtienden el mismo arco, el arco $\overset{\frown}{BC}$.

11. Por teorema, la $med\sphericalangle BAC$ es la mitad de la $med\sphericalangle BOC$.

$$med\sphericalangle BAC = \frac{1}{2}\cdot 128^{\circ}$$
$$med\sphericalangle BAC = 64^{\circ}$$

Por lo tanto, la medida de β es 64°.

Análisis de la secuencia de afirmaciones del desarrollo del ejercicio

- **Afirmación 1:** Se construye el segmento $\overline{BO}$ para formar el $\sphericalangle COB$, del centro de la circunferencia. (Figura 4.64)

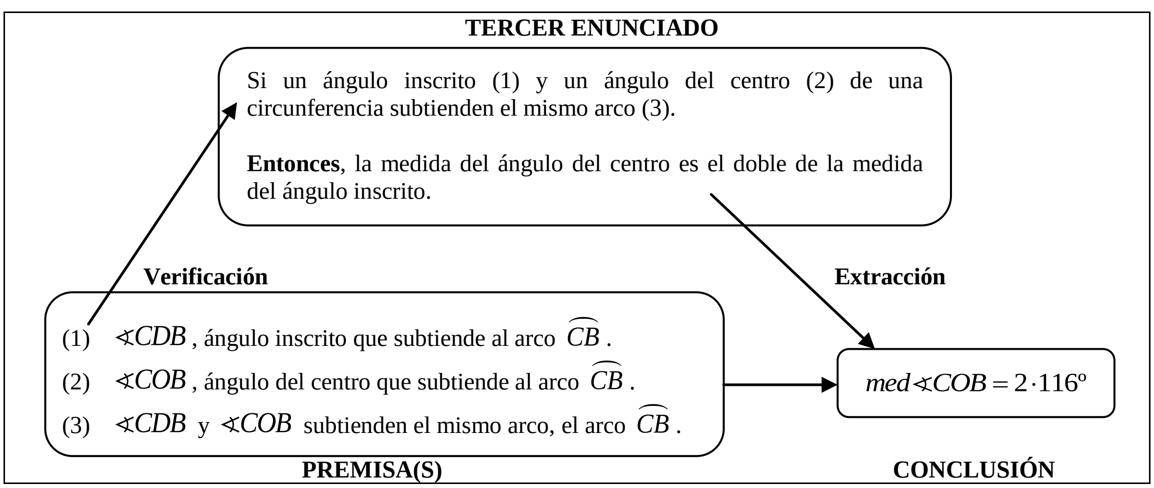
- **Afirmación 2:** Se construye el segmento $\overline{CO}$ para formar el $\sphericalangle COB$, del centro de la circunferencia. (Figura 4.64)

- **Afirmación 3:** Se extrae información sobre el $\sphericalangle CDB$, inscrito en la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.64)

- **Afirmación 4:** Se extrae información sobre el $\sphericalangle COB$, del centro de la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.64)

- **Afirmación 5:** Se relacionan los ángulos obtenidos en las afirmaciones 3 y 4.

- **Afirmación 6:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.82)



Esquema 4.82: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para determinar la medida del ángulo del centro COB.*

- **Afirmación 7:** Dado que los ángulos COB y BOC forman un ángulo completo. Se formula la igualdad que relaciona las medidas de dichos ángulos para determinar la medida del ángulo BOC en función de la medida del ángulo COB.

- **Afirmación 8:** Se extrae información sobre el $\sphericalangle BAC$, inscrito en la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.64)

- **Afirmación 9:** Se extrae información sobre el $\sphericalangle BOC$, del centro de la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.64)

- **Afirmación 10:** Se relacionan los ángulos obtenidos en las afirmaciones 8 y 9.

- **Afirmación 11:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.83)

TERCER ENUNCIADO

Si un ángulo inscrito (1) y un ángulo del centro (2) de una circunferencia subtienden el mismo arco (3).

Entonces, la medida del ángulo inscrito es la mitad de la medida del ángulo del centro.

Verificación

Extracción

(1) $\sphericalangle BAC$, ángulo inscrito que subtiende al arco $\overset{\frown}{BC}$.

(2) $\sphericalangle BOC$, ángulo del centro que subtiende al arco $\overset{\frown}{BC}$.

(3) $\sphericalangle BAC$ y $\sphericalangle BOC$ subtienden el mismo arco, el arco $\overset{\frown}{BC}$.

$$med\sphericalangle BAC = \frac{1}{2}\cdot 128º$$

PREMISA(S)

CONCLUSIÓN

Esquema 4.83: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para determinar la medida del ángulo inscrito BAC.*

Conocimientos específicos:

- No son necesarios.

Rol de la figura:

- Al comienzo del desarrollo y en las afirmaciones 1 y 2 se presenta una *aprehensión operativa de cambio figural.*
- En las afirmaciones 3 a 11 predomina una *aprehensión discursiva*, donde el sentido de la transferencia va de *un anclaje visual a uno discursivo.*

Pasos de Razonamiento:

- Modus Ponens.

Cantidad de pasos de razonamiento:	**Caso(s) del teorema:**
- 2 pasos.	- Primer caso.

Observaciones generales

1. El estudiante debe notar que el ángulo COB, del centro, es un ángulo obtuso para posteriormente aplicar el teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia.

Actividad 3

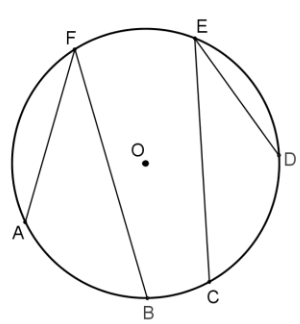
Enunciado

Demuestra que si dos arcos son congruentes los ángulos inscritos que los subtienden son iguales.

Desarrollo de la actividad esperado del estudiante

La secuencia de afirmaciones del desarrollo de la actividad será complementada con la Figura 4.65

Hipótesis: $\overset{\frown}{AB} \cong \overset{\frown}{CD}$
Tesis: $med\sphericalangle AFB = med\sphericalangle CED$



(a)

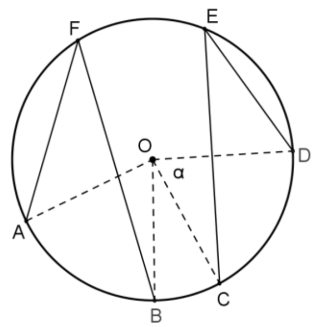
Secuencia de afirmaciones del desarrollo

1. Unir mediante una línea el punto A con el centro O, formando el segmento $\overline{AO}$. (4.65b)

2. Unir mediante una línea el punto B con el centro O, formando el segmento $\overline{BO}$. (Figura 4.65b)

3. Unir mediante una línea el punto C con el centro O, formando el segmento $\overline{CO}$. (Figura 4.65b)

4. Unir mediante una línea el punto D con el centro O, formando el segmento $\overline{DO}$. (Figura 4.65b)



(b)

Figura 4.65

5. El $\measuredangle AOB$ es un ángulo del centro que subtiende al arco $\overset{\frown}{AB}$.

6. El $\measuredangle COD$ es un ángulo del centro que subtiende al arco $\overset{\frown}{CD}$.

7. Como $\overset{\frown}{AB} \cong \overset{\frown}{CD}$ por hipótesis, los ángulos AOB y COD del centro que subtienden a los arcos respectivos son también congruentes.

8. Sea α la medida del $\measuredangle AOB$.

$$med\measuredangle AOB = med\measuredangle COD = \alpha$$

9. El $\measuredangle AFB$ es un ángulo inscrito que subtiende al arco $\overset{\frown}{AB}$.

10. El $\measuredangle AFB$ y el $\measuredangle AOB$ subtienden el mismo arco, el arco $\overset{\frown}{AB}$.

11. Por teorema, la $med\measuredangle AFB$ es la mitad de la $med\measuredangle AOB$.

$$med\measuredangle AFB = \frac{1}{2} \cdot \alpha$$

$$med\measuredangle AFB = \frac{\alpha}{2}$$

12. El $\measuredangle CED$ es un ángulo inscrito que subtiende al arco $\overset{\frown}{CD}$.

13. El $\measuredangle CED$ y el $\measuredangle COD$ subtienden el mismo arco, el arco $\overset{\frown}{CD}$.

14. Por teorema, la $med\measuredangle CED$ es la mitad de la $med\measuredangle COD$.

$$med\measuredangle CED = \frac{1}{2} \cdot \alpha^{o}$$

$$med\measuredangle CED = \frac{\alpha}{2}$$

Por lo tanto, la $med\measuredangle AFB = med\measuredangle CED = \dfrac{\alpha}{2}$.

Análisis de la secuencia de afirmaciones del desarrollo del ejercicio

- **Afirmación 1:** Se construye el segmento $\overline{AO}$ para formar el $\sphericalangle AOB$, del centro de la circunferencia. (Figura 4.65b)

- **Afirmación 2:** Se construye el segmento $\overline{BO}$ para formar el $\sphericalangle AOB$, del centro de la circunferencia. (Figura 4.65b)

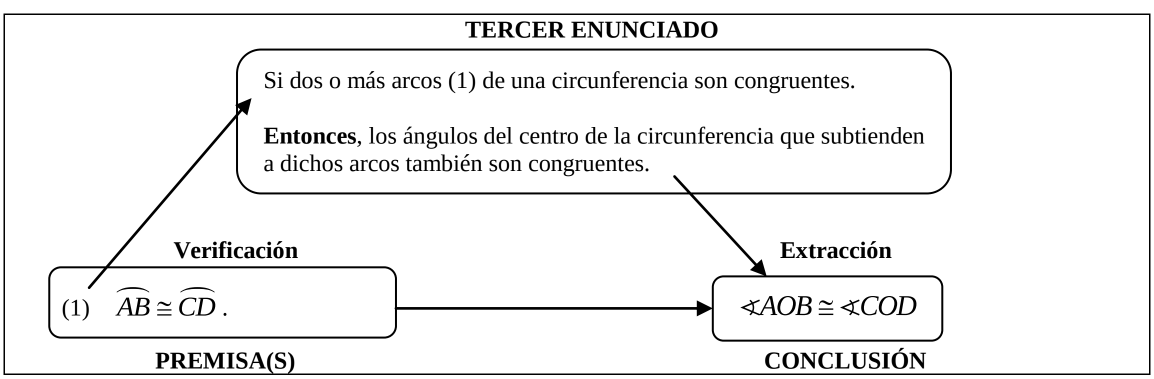
- **Afirmación 3:** Se construye el segmento $\overline{CO}$ para formar el $\sphericalangle COD$, del centro de la circunferencia. (Figura 4.65b)

- **Afirmación 4:** Se construye el segmento $\overline{DO}$ para formar el $\sphericalangle COD$, del centro de la circunferencia. (Figura 4.65b)

- **Afirmación 5:** Se extrae información sobre el $\sphericalangle AOB$, del centro de la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.65b)

- **Afirmación 6:** Se extrae información sobre el $\sphericalangle COD$, del centro de la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.65b)

- **Afirmación 7:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus ponens). (Esquema 4.84)



Esquema 4.84: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que los ángulos que subtienden a los arcos AB y CD son congruentes.*

- **Afirmación 8:** Se asigna una medida alfa cualquiera al ángulo AOB, del centro de la circunferencia.

- **Afirmación 9:** Se extrae información sobre el $\sphericalangle AFB$, inscrito en la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.65b)

- **Afirmación 10:** Se relacionan los ángulos obtenidos en las afirmaciones 5 y 9.

- **Afirmación 11:** Se justifica realizan un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.85)

TERCER ENUNCIADO

Si un ángulo inscrito (1) y un ángulo del centro (2) de una circunferencia subtienden el mismo arco (3).

Entonces, la medida del ángulo inscrito es la mitad de la medida del ángulo del centro.

Verificación

Extracción

(1) $\sphericalangle AFB$, ángulo inscrito que subtiende al arco $\overset{\frown}{AB}$.

(2) $\sphericalangle AOB$, ángulo del centro que subtiende al arco $\overset{\frown}{AB}$.

(3) $\sphericalangle AFB$ y $\sphericalangle AOB$ subtienden el mismo arco, el arco $\overset{\frown}{AB}$.

$$med\sphericalangle AFB = \frac{1}{2}\cdot\alpha$$

PREMISA(S)

CONCLUSIÓN

Esquema 4.85: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para determinar la medida del ángulo inscrito AFB.*

- **Afirmación 12:** Se extrae información sobre el $\sphericalangle CED$, inscrito en la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.65b)

- **Afirmación 13:** Se relacionan los ángulos obtenidos en las afirmaciones 6 y 12.

- **Afirmación 15:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.86)

TERCER ENUNCIADO

Si un ángulo inscrito (1) y un ángulo del centro (2) de una circunferencia subtienden el mismo arco (3).

Entonces, la medida del ángulo inscrito es la mitad de la medida del ángulo del centro.

Verificación

Extracción

(1) $\measuredangle CED$, ángulo inscrito que subtiende al arco $\overset{\frown}{CD}$.

(2) $\measuredangle COD$, ángulo del centro que subtiende al arco $\overset{\frown}{CD}$.

(3) $\measuredangle CED$ y $\measuredangle COD$ subtienden el mismo arco, el arco $\overset{\frown}{CD}$.

$$med\measuredangle CED = \frac{1}{2}\cdot\alpha$$

PREMISA(S) **CONCLUSIÓN**

Esquema 4.86: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para determinar la medida del ángulo inscrito CED.*

Conocimientos específicos: - Proporcionalidad entre las medidas de ángulos del centro y longitud de los respectivos arcos. (Afirmación 7)	
Rol de la figura: - En las afirmaciones 1 a 4 se presenta una *aprehensión operativa de cambio figural.* - En las afirmaciones 5 a 15 predomina una *aprehensión discursiva*, donde el sentido de la transferencia va de *un anclaje visual a uno discursivo.*	
Pasos de Razonamiento: - Modus Ponens.	
Cantidad de pasos de razonamiento: - 3 pasos.	**Caso(s) del teorema:** - Cualquier caso.
Observaciones generales 1. EL estudiante puede utilizar cualquiera de los casos del teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia para desarrollar la demostración.	

Actividad 4

Enunciado

¿Cómo podrías demostrar que todos los ángulos inscritos que subtienden un mismo arco son congruentes?

Desarrollo de la actividad esperado del estudiante

La secuencia de afirmaciones del desarrollo de la actividad será complementada con la Figura 4.66

Hipótesis: $\sphericalangle AEB$, $\sphericalangle ADB$ y $\sphericalangle ACB$ son ángulos inscritos que subtienden el mismo arco, al arco $\overset{\frown}{AB}$.

Tesis: $\sphericalangle AEB \cong \sphericalangle ADB \cong \sphericalangle ACB$

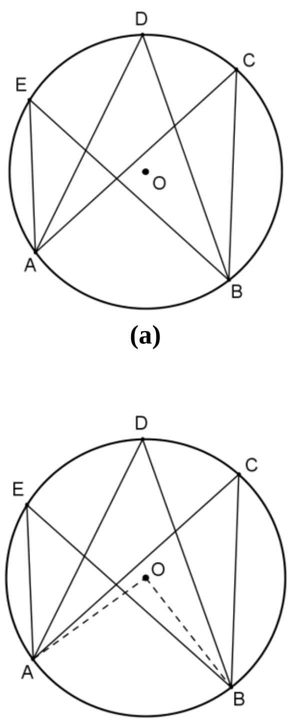


Figura 4.66

Secuencia de afirmaciones del desarrollo

1. Unir mediante una línea el punto A con el centro O, formando el segmento $\overline{AO}$. (Figura 4.66b)

2. Unir mediante una línea el punto B con el centro O, formando el segmento $\overline{BO}$. (Figura 4.66b)

3. El $\sphericalangle AOB$ es un ángulo del centro que subtiende al arco $\overset{\frown}{AB}$.

4. Sea $\alpha = med\sphericalangle AOB$.

5. Los ángulos AEB, ADB y ACB, por hipótesis, son ángulos inscritos que subtienden al mismo arco, el arco $\overset{\frown}{AB}$.

6. Por teorema, las medidas de los ángulos AEB, ADB y ACB son iguales a la mitad de la $med\sphericalangle AOB$.

$$med\sphericalangle AEB = \frac{\alpha}{2},\ med\sphericalangle ADB = \frac{\alpha}{2},\ med\sphericalangle ACB = \frac{\alpha}{2}$$

Por lo tanto los ángulos AEB, ADB y ACB son congruentes, pues, estos tienen la misma medida.

Análisis de la secuencia de afirmaciones del desarrollo del ejercicio

- **Afirmación 1:** Se construye el segmento $\overline{AO}$ para formar el $\sphericalangle AOB$, del centro de la circunferencia. (Figura 4.66b)

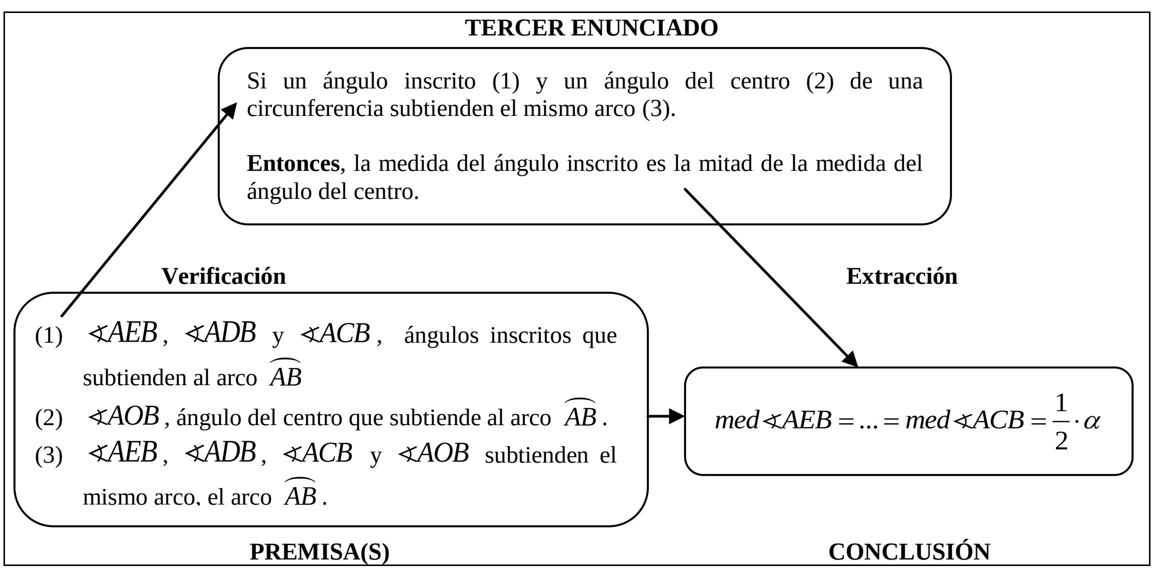
- **Afirmación 2:** Se construye el segmento $\overline{BO}$ para formar el $\sphericalangle AOB$, del centro de la circunferencia. (Figura 4.66b)

- **Afirmación 3:** Se extrae información sobre el $\sphericalangle AOB$, del centro de la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.66b)

- **Afirmación 4:** Se asigna una medida α cualquiera al ángulo AOB, del centro de la circunferencia presente en eldibujo. (Figura 4.66b)

- **Afirmación 5:** Se extrae información sobre los ángulos AEB, ADB y ACB, inscritos en la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.66b)

- **Afirmación 6:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.87)



Esquema 4.87: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para determinar la medida de los ángulos inscritos AEB, ADB y ACB.*

Conocimientos específicos: - No son necesarios.	
Rol de la figura: - En las afirmaciones 1 y 2 se presenta una *aprehensión operativa de cambio figural.* - En las afirmaciones 3 a 6 predomina una *aprehensión discursiva*, donde el sentido de la transferencia va de *un anclaje visual a uno discursivo*	
Pasos de Razonamiento: - Modus Ponens.	
Cantidad de pasos de razonamiento: - 1 paso.	**Caso(s) del teorema:** - Cualquier caso.
Observaciones generales 1. EL estudiante puede utilizar cualquiera de los casos del teorema para desarrollar la demostración.	

Actividad 5

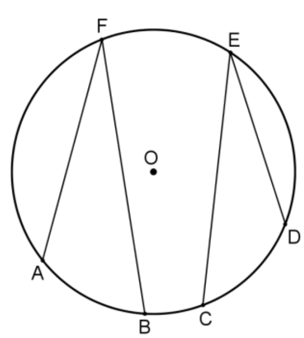
Enunciado
¿Qué datos te ayudarían a comprobar que si dos ángulos inscritos son congruentes; los arcos subtendidos por ellos también lo son.

Desarrollo de la actividad esperado del estudiante

La secuencia de afirmaciones del desarrollo de la actividad será complementada con la Figura 4.67

Hipótesis: $\sphericalangle AFB \cong \sphericalangle CED$

Tesis: $\overset{\frown}{AB} \cong \overset{\frown}{CD}$



(a)

Secuencia de afirmaciones del desarrollo

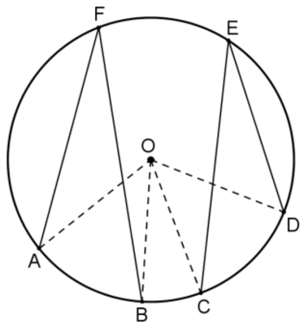
1. El $\sphericalangle AFB$ es un ángulo inscrito que subtiende al arco $\overset{\frown}{AB}$. (Figura 4.67a)

2. El $\sphericalangle CED$ es un ángulo inscrito que subtiende al arco $\overset{\frown}{CD}$. (Figura 4.67a)

3. Como los ángulos AFB y CED son congruentes, por hipótesis, sea

$$\alpha = med\sphericalangle AFB = med\sphericalangle CED$$

4. Unir mediante una línea el punto A con el centro O, formando el segmento $\overline{AO}$. (Figura 4.67b)



(b)

Figura 4.67

5. Unir mediante una línea el punto B con el centro O, formando el segmento $\overline{BO}$. (Figura 4.67b)

6. El $\measuredangle AOB$ es un ángulo del centro que subtiende al arco $\widehat{AB}$.

7. El $\measuredangle AOB$ y el $\measuredangle AFB$ subtienden el mismo arco, el arco $\widehat{AB}$.

8. Por teorema, la $med\measuredangle AOB$ es el doble de la $med\measuredangle AFB$.

$$med\measuredangle AOB = 2 \cdot med\measuredangle AFB$$
$$med\measuredangle AOB = 2 \cdot \alpha$$

   Por lo tanto, la $med\measuredangle AOB = 2\alpha$

9. Unir mediante una línea el punto C con el centro O, formando el segmento $\overline{CO}$. (Figura 4.67b)

10. Unir mediante una línea el punto D con el centro O, formando el segmento $\overline{DO}$. (Figura 4.67b)

11. El $\measuredangle COD$ es un ángulo del centro que subtiende al arco $\widehat{CD}$.

12. El $\measuredangle COD$ y el $\measuredangle CED$ subtienden el mismo arco, el arco $\widehat{CD}$.

13. Por teorema, la $med\measuredangle COD$ es el doble de la $med\measuredangle CED$.

$$med\measuredangle COD = 2 \cdot med\measuredangle CED$$
$$med\measuredangle COD = 2 \cdot \alpha$$

    Por lo tanto, la $med\measuredangle AOB = med\measuredangle COD = 2\alpha$.

14. Como $\measuredangle AOB \cong \measuredangle COD$, los arcos AB y Cd correspondientes son también congruentes.

    Por lo tanto $\widehat{AB} \cong \widehat{CD}$.

Análisis de la secuencia de afirmaciones del desarrollo del ejercicio

- **Afirmación 1:** Se extrae información sobre el $\measuredangle AFB$, inscrito en la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.67a)

- **Afirmación 2:** Se extrae información sobre el $\sphericalangle CED$, inscrito en la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.67a)

- **Afirmación 3:** Se asigna una medida α cualquiera a los ángulos AFB y CED.

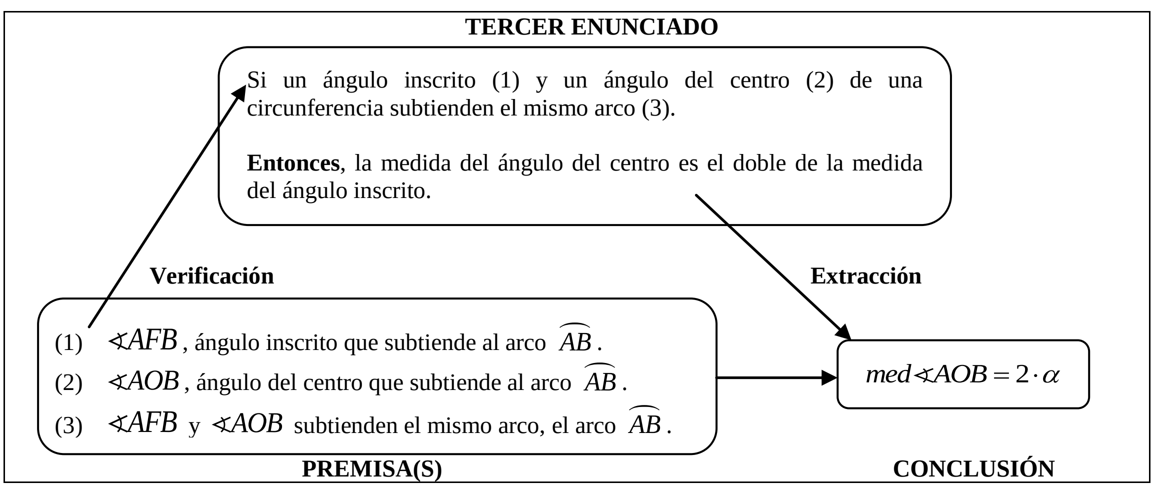
- **Afirmación 4:** Se construye el segmento $\overline{AO}$ para formar el $\sphericalangle AOB$, del centro de la circunferencia. (Figura 4.67b)

- **Afirmación 5:** Se construye el segmento $\overline{BO}$ para formar el $\sphericalangle AOB$, del centro de la circunferencia. (Figura 4.67b)

- **Afirmación 6:** Se extrae información sobre el $\sphericalangle AOB$, del centro de la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.67b)

- **Afirmación 7:** Se relacionan los ángulos obtenidos en las afirmaciones 1 y 6.

- **Afirmación 8:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.88)



Esquema 4.88: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para determinar la medida del ángulo del centro AOB.*

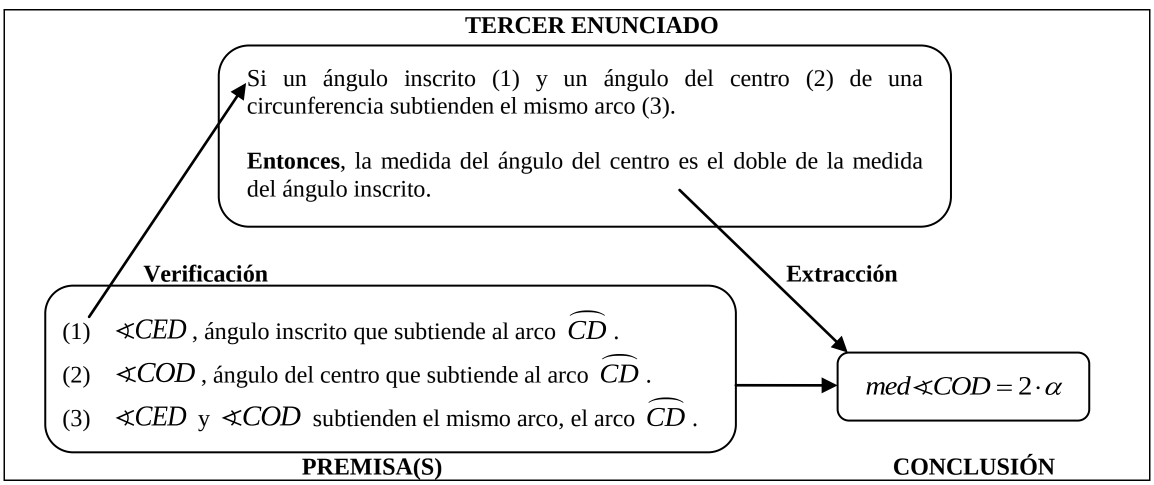
- **Afirmación 9:** Se construye el segmento $\overline{CO}$ para formar el $\measuredangle COD$, del centro de la circunferencia. (Figura 4.67b)

- **Afirmación 10:** Se construye el segmento $\overline{DO}$ para formar el $\measuredangle COD$, del centro de la circunferencia. (Figura 4.67b)

- **Afirmación 11:** Se extrae información sobre el $\measuredangle COD$, del centro de la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.67b)

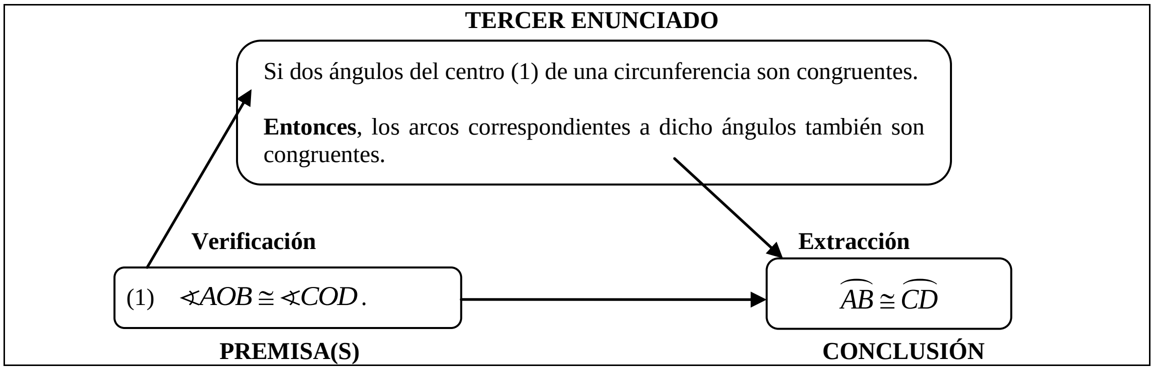
- **Afirmación 12:** Se relacionan los ángulos obtenidos en las afirmaciones 2 y 11.

- **Afirmación 13:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.89)



Esquema 4.89: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para determinar la medida del ángulo del centro COD.*

- **Afirmación 14:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus ponens). (Esquema 4.90)



Esquema 4.90: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que losarcos arcos AB y CD son congruentes.*

<table>
<tr><td colspan="2">Conocimientos específicos:

- Congruencia de ángulos. (Afirmación 14)
- Proporcionalidad entre las medidas de ángulos del centro y longitud de los respectivos arcos. (Afirmación 14)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Rol de la figura:

- En las afirmaciones 4, 5, 9 y 10 se presenta una aprehensión operativa de cambio figural.
- En las afirmaciones 1 a 4, 6 a 8 y 11 a 14 predomina una aprehensión discursiva, donde el sentido de la transferencia va de un anclaje visual a uno discursivo.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Pasos de Razonamiento:

- Modus Ponens.</td></tr>
<tr><td>Cantidad de pasos de razonamiento:

- 3 pasos.</td><td>Caso(s) del teorema:

- Cualquier caso.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Observaciones generales

1. EL estudiante puede utilizar cualquiera de los casos del teorema para desarrollar la demostración.</td></tr>
</table>

A continuación, en la tabla 4.11, se detalla la cantidad de pasos de razonamiento, tipos de razonamiento y caso del teorema que se utiliza en el desarrollo de cada una de las actividades propuestas de la página 203 del textoa Santillana.

EJERCICIOS	CASO DEL TEOREMA	CANTIDAD DE PASOS DE RAZONAMIENTO	TIPO DE PASO DE RAZONAMIENTO
1	Caso 1	5 pasos	Modus Ponens
2a	Caso 1	2 pasos	Modus Ponens
2b	Caso 1	1 paso	Modus Ponens
2c	Caso 1	2 pasos	Modus Ponens
3	Cualquier caso	3 pasos	Modus Ponens
4	Cualquier caso	1 paso	Modus Ponens
5	Cualquier caso	3 pasos	Modus Ponens

Tabla 4.11: Cantidad de pasos de razonamientos y tipos de pasos de razonamientos que justifican las afirmaciones del desarrollo de las actividades propuestas en el texto Santillana correspondientes a la página 203.

Se observa en la tabla 4.11 que las primera cuatro actividades son de aplicación del primer caso del teorema y las restantes son demostraciones propuestas. En las primeras se trata la situación particular de cuando el ángulo del centro es obtuso. En las actividades restantes, el estudiante pude escoger que caso del teorema dibujar para desarrollar las demostraciones.

El tipo de razonamiento presente en las actividades de la página 203 es por paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus ponens). Las actividades no están organizadas según la cantidad de pasos de razonamiento. Lo que implica que las actividades no se presenten con una dificultad que vaya incrementándose a medida que se avanza en las actividades. Esto se puede ver al observar la tabla 4.11, donde el primer ejercicio es el que presenta más pasos de razonamientos en su desarrollo.

Es importante destacar que en esta página, de las siete actividades, 4 consisten en demostraciones. Además, son las que involucran más cantidad de pasos de razonamiento en su desarrollo.

La siguiente tabla desprende que en cada ejercicio se debe llevar a cabo al menos una aprehensión operativa de cambio figural para su desarrollo (tabla 4.12). En cuatro ejercicios se realiza más de una aprehensión operativa, es decir, se agrega un elemento geométrico que en coordinación con la aprehensión discursiva permite su resolución.

EJERCICIO	APREHENSION DISCURSIVA	APREHENSION OPERATIVA
1	9 Afirmaciones	Al comienzo del desarrollo
2a	5 Afirmaciones	2 Afirmaciones y Al comienzo del desarrollo
2b	5 Afirmaciones	Al comienzo del desarrollo
2c	9 Afirmaciones	2 Afirmaciones y Al comienzo del desarrollo
3	11 Afirmaciones	4 Afirmaciones
4	4 Afirmaciones	2 Afirmaciones
5	10 Afirmaciones	4 Afirmaciones

Tabla 4.12: Resumen correspondiente al rol de la figura en las actividades propuestas en el Texto Santillana correspondientes a la página 203.

Aunque a que la mayoría de las actividades son demostraciones, sólo dos de estas requieren conocimientos específicos para desarrollarlas. Además de presentar la mayor cantidad de pasos de razonamientos en sus desarrollos. Las restantes son demostraciones en las cuales se debe aplicar el Teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia.

Actividades propuestas de la Página 204

Las actividades correspondientes a la página 204 son ejercicios en los cuales se pretende que el alumno aplique el caso particular: que todo triángulo inscrito en una semicircunferencia es rectángulo. Son 3 actividades, donde la primera es una demostración y las restantes son de aplicación. Cabe destacar, que en los dos últimos ejercicios no se aplica el teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia para ser resueltos. Sino más bien, la finalidad de estos es activar conocimientos previos para el siguiente contenido a tratar por el texto referente a propiedades métricas en la circunferencia.

Actividad 1

Enunciado

Demuestra que todo ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto. Antes de comenzar la demostración plantea la tesis y la hipótesis.

Desarrollo de la actividad esperado del estudiante

La secuencia de afirmaciones del desarrollo de la actividad será complementada con la Figura 4.68

Hipótesis: ΔABC inscrito en una semicircunferencia.

Tesis: $med\sphericalangle ACB = 90º$

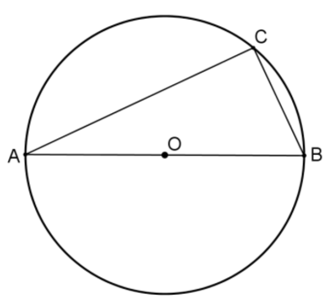


Figura 4.68

Secuencia de afirmaciones del desarrollo

1. El $\sphericalangle ACB$, por hipótesis, es un ángulo inscrito que subtiende al arco $\widehat{AB}$.
2. El $\sphericalangle AOB$ es un ángulo del centro que subtiende al arco $\widehat{AB}$.
3. Como AB es diámetro, la $med\sphericalangle AOB = 180º$.
4. El $\sphericalangle ACB$ y el $\sphericalangle AOB$ subtienden el mismo arco, el arco $\widehat{AB}$.
5. Por teorema, la $med\sphericalangle ACB$ es la mitad de la $med\sphericalangle AOB$.

$$med\sphericalangle ACB = \frac{1}{2}\cdot 180º$$
$$med\sphericalangle ACB = 90º$$

Por lo tanto, la $med\sphericalangle ACB = 90º$.

Análisis de la secuencia de afirmaciones del desarrollo del ejercicio

- **Afirmación 1:** Se extrae información sobre el $\sphericalangle ACB$, inscrito en la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.68)

- **Afirmación 2:** Se extrae información sobre el $\sphericalangle AOB$, del centro de la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.68)

- **Afirmación 3:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.91)

TERCER ENUNCIADO

Si los lados que forman un ángulo (1) del centro son parte de un diámetro (2) de circunferencia.

Entonces, el ángulo formado por dichos lados es extendido o llano, es decir, su medida es 180º.

Verificación

Extracción

(1) $\overline{AO}$ y $\overline{OB}$ lados del $\sphericalangle AOB$.

(2) $\overline{AO}$ y $\overline{OB}$ forman el diámetro AB.

La $med\sphericalangle AOB = 180º$

PREMISA(S)

CONCLUSIÓN

Esquema 4.91: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para determinar la medida del ángulo AOB.*

- **Afirmación 4:** Se relacionan los ángulos obtenidos en las afirmaciones 1 y 2.

- **Afirmación 5:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.92)

TERCER ENUNCIADO

Si un ángulo inscrito (1) y un ángulo del centro (2) de una circunferencia subtienden el mismo arco (3).

Entonces, la medida del ángulo inscrito es la mitad de la medida del ángulo del centro.

Verificación

Extracción

(1) $\sphericalangle ACB$, ángulo inscrito que subtiende al arco $\overset{\frown}{AB}$.

(2) $\sphericalangle AOB$, ángulo del centro que subtiende al arco $\overset{\frown}{AB}$.

(3) $\sphericalangle ACB$ y $\sphericalangle AOB$ subtienden el mismo arco, el arco $\overset{\frown}{AB}$.

$$med\sphericalangle ACB = \frac{1}{2} \cdot 180^{o}$$

PREMISA(S) **CONCLUSIÓN**

Esquema 4.92: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para determinar la medida del ángulo inscrito ACB.*

<table>
<tr><td colspan="2">Conocimientos específicos:

- Definición de ángulo extendido o llano y su medida de este. (Afirmación 3)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Rol de la figura:

- Al comienzo del desarrollo se presenta una aprehensión operativa de cambio figural.
- En las afirmaciones 1 a 5 predomina una aprehensión discursiva, donde el sentido de la transferencia va de un anclaje visual a uno discursivo.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Pasos de Razonamiento:

- Modus Ponens.</td></tr>
<tr><td>Cantidad de pasos de razonamiento:

- 2 pasos.</td><td>Caso(s) del teorema:

- Primer caso.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Observaciones generales

1. El estudiante debe reconocer el ángulo del centro como un ángulo extendido formado por el diámetro de la circunferencia.</td></tr>
</table>

Actividad 2 Letra a

Enunciado

Calcula la medida de x.

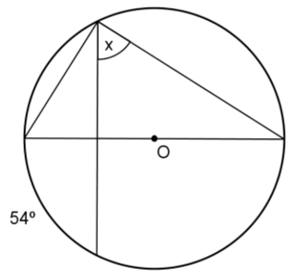


Figura 4.69

Desarrollo de la actividad esperado del estudiante

Se han asignado rótulos a los vértices de la figura para una mejor comprensión del desarrollo. (Figura 4.70)

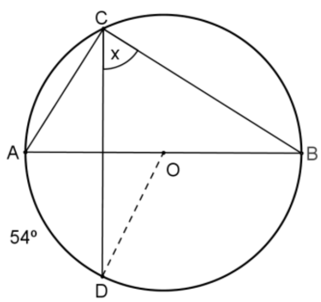


Figura 4.70

Secuencia de afirmaciones del desarrollo

1. Unir mediante una línea el punto D con el centro O, formando el segmento $\overline{DO}$. (Figura 4.70)

2. El $\measuredangle ACD$ es un ángulo inscrito que subtiende al arco $\overset{\frown}{AD}$.

3. El $\measuredangle AOD$ es un ángulo del centro que subtiende al arco $\overset{\frown}{AD}$.

4. La $med\measuredangle AOD = med\overset{\frown}{AD}$ *

$$med\measuredangle AOD = 54º$$

5. El $\measuredangle ACD$ y el $\measuredangle AOD$ subtienden el mismo arco, el arco $\overset{\frown}{AD}$.

6. Por teorema, la $med\measuredangle ACD$ es la mitad de la $med\measuredangle AOD$.

$$med\measuredangle ACD = \frac{1}{2}\cdot 54º$$
$$med\measuredangle ACD = 27º$$

Por lo tanto, la $med\measuredangle ACD = 27º$.

7. Como $\overline{AB}$ es diámetro de la circunferencia, el triángulo ABC es rectángulo en C. Por consiguiente,

* Paso realizado en base al marco conceptual del texto.

la $med\measuredangle ACB = 90º$.

8. Como $\measuredangle ACB$ es recto, y su medida esta compuesta por la suma de las medidas del $\measuredangle ACD$ y $\measuredangle DCB$,

$$med\measuredangle ACD + med\measuredangle DCB = 90º$$
$$24 + med\measuredangle DCB = 90º$$
$$med\measuredangle DCB = 90 - 24º$$
$$med\measuredangle DCB = 66º$$

Por lo tanto, la medida de x es $66°$.

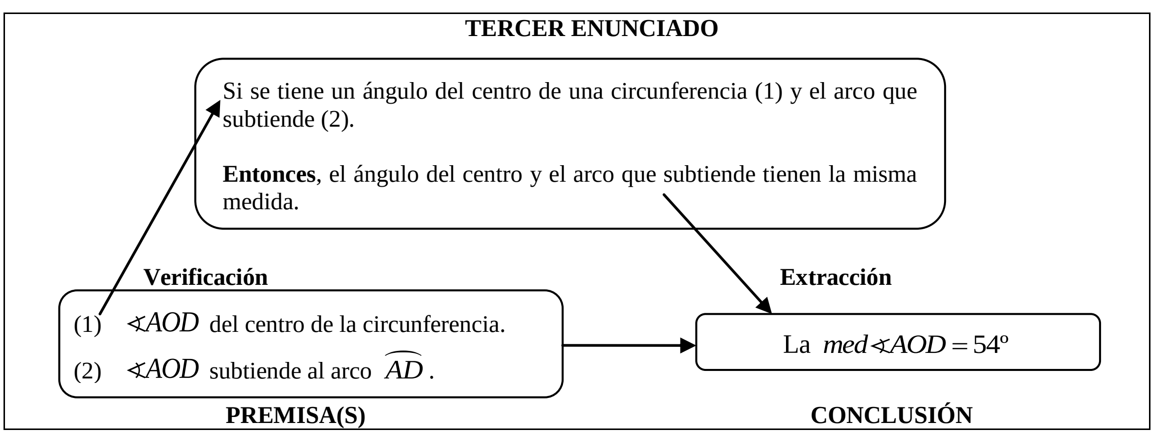
Análisis de la secuencia de afirmaciones de la demostración

- **Afirmación 1:** Se construye el segmento $\overline{DO}$ para formar el $\measuredangle AOD$, del centro de la circunferencia. (Figura 4.70)

- **Afirmación 2:** Se extrae información sobre el $\measuredangle ACD$, inscrito en la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.70)

- **Afirmación 3:** Se extrae información sobre el $\measuredangle AOD$, del centro de la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.70)

- **Afirmación 4:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.93)



Esquema 4.93: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para determinar la medida del ángulo AOD.*

- **Afirmación 5:** Se relacionan los ángulos obtenidos en las afirmaciones 2 y 3.

- **Afirmación 6:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.94)

TERCER ENUNCIADO

Si un ángulo inscrito (1) y un ángulo del centro (2) de una circunferencia subtienden el mismo arco (3).

Entonces, la medida del ángulo inscrito es la mitad de la medida del ángulo del centro.

Verificación **Extracción**

(1) $\sphericalangle ACD$, ángulo inscrito que subtiende al arco $\overset{\frown}{AD}$.

(2) $\sphericalangle AOD$, ángulo del centro que subtiende al arco $\overset{\frown}{AD}$.

(3) $\sphericalangle ACD$ y $\sphericalangle AOD$ subtienden el mismo arco, el arco $\overset{\frown}{AD}$.

$$med\sphericalangle ACD = \frac{1}{2}\cdot 54º$$

PREMISA(S) **CONCLUSIÓN**

Esquema 4.94: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para determinar a medida del ángulo inscrito ACD.*

- **Afirmación 7:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.95)

TERCER ENUNCIADO

Si un triángulo (1) está inscrito en una semicircunferencia.

Entonces, el triángulo es un triángulo rectángulo en el vértice del ángulo inscrito.

Verificación **Extracción**

(1) ΔABC, inscrito en la semicircunferencia de diámetro $\overline{AB}$.

El ΔABC es rectángulo en C.

PREMISA(S) **CONCLUSIÓN**

Esquema 4.95: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que el triángulo ABC es rectángulo en C.*

- **Afirmación 8:** Como las medidas de los ángulos ACD y DCB suman un ángulo de 90º. Se formula la igualdad que relaciona las medidas de dichos ángulos para determinar la medida del ángulo DCB en función de la medida del ángulo ACD.

Conocimientos específicos: - Definición de triángulo rectángulo. (Afirmación 7) - La suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo es 180º. (Afirmación 8)
Rol de la figura: - Al inicio del desarrollo y en la afirmación 1 se presenta una *aprehensión operativa de cambio figural*. - En las afirmaciones 2 a 8 predomina una *aprehensión discursiva*, donde el sentido de la transferencia va de *un anclaje visual a uno discursivo.*
Pasos de Razonamiento: - Modus Ponens.

Cantidad de pasos de razonamiento:	**Caso(s) del teorema:**
- 3 pasos.	- Segundo caso.

Observaciones generales 1. El estudiante debe construir el ángulo del centro de la circunferencia para posteriormente aplicar el teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia.

Actividad 2 Letra b

Enunciado

Calcula la medida de α

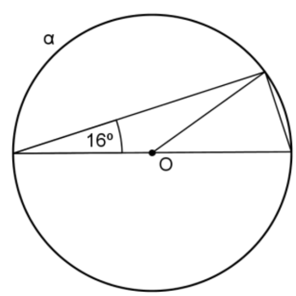


Figura 4.71

Desarrollo de la actividad esperado del estudiante

Se han asignado rótulos a los vértices de la figura para una mejor comprensión del desarrollo. (Figura 4.72)

Secuencia de afirmaciones del desarrollo

1. El $\measuredangle BAC$ es un ángulo inscrito que subtiende al arco $\overset{\frown}{BC}$.

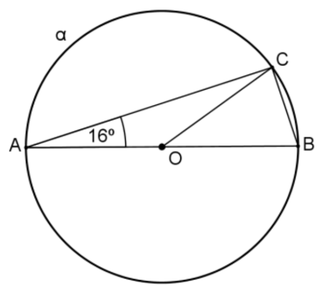


Figura 4.72

2. El $\sphericalangle BOC$ es un ángulo del centro que subtiende al arco $\overset{\frown}{BC}$.

3. El $\sphericalangle BAC$ y el $\sphericalangle BOC$ subtienden el mismo arco, el arco $\overset{\frown}{BC}$.

4. Por teorema, la $med\sphericalangle BOC$ es el doble de la $med\sphericalangle BAC$.

$$med\sphericalangle BOC = 2\cdot 16º$$
$$med\sphericalangle BOC = 32º$$

Por lo tanto, la $med\sphericalangle BOC = 32º$.

5. Como $\overline{AB}$ es diámetro, la medida del ángulo BOA es 180º.

6. Como la $med\sphericalangle BOA = 180º$, y su medida esta compuesta por la suma de las medidas de los ángulos BOC y COA.

$$med\sphericalangle BOC + med\sphericalangle COA = 180º$$
$$32 + med\sphericalangle COA = 180º$$
$$med\sphericalangle COA = 180º - 32º$$
$$med\sphericalangle COA = 148º$$

Por lo tanto, la $med\sphericalangle COA = 148º$.

7. La $med\overset{\frown}{CA} = med\sphericalangle COA$ *

$$med\sphericalangle\overset{\frown}{CA} = 148º$$

Por lo tanto, la medida de α es 148º.

Análisis de la secuencia de afirmaciones de la demostración

- **Afirmación 1:** Se extrae información sobre el $\sphericalangle BAC$, inscrito en la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.72)

- **Afirmación 2:** Se extrae información sobre el $\sphericalangle BOC$, del centro de la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.72)

- **Afirmación 3:** Se relacionan los ángulos obtenidos en las afirmaciones 1 y 2.

* Paso realizado en base al marco conceptual del texto.

- **Afirmación 4:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.96)

TERCER ENUNCIADO

Si un ángulo inscrito (1) y un ángulo del centro (2) de una circunferencia subtienden el mismo arco (3).

Entonces, la medida del ángulo del centro es el doble de la medida del ángulo inscrito.

Verificación **Extracción**

(1) $\sphericalangle BAC$, ángulo inscrito que subtiende al arco $\overset{\frown}{BC}$.

(2) $\sphericalangle BOC$, ángulo del centro que subtiende al arco $\overset{\frown}{BC}$.

(3) $\sphericalangle BAC$ y $\sphericalangle BOC$ subtienden el mismo arco, el arco $\overset{\frown}{BC}$.

$med\sphericalangle BOC = 2\cdot 16^{o}$

PREMISA(S) **CONCLUSIÓN**

Esquema 4.96: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para determinar la medida del ángulo del centro BOC.*

- **Afirmación 5:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.97)

TERCER ENUNCIADO

Si los lados que forman un ángulo (1) del centro son parte de un diámetro (2) de circunferencia.

Entonces, el ángulo formado por dichos lados es extendido o llano, es decir, su medida es 180º.

Verificación **Extracción**

(1) $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ lados del $\sphericalangle BOA$.

(2) $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ forman el diámetro AB.

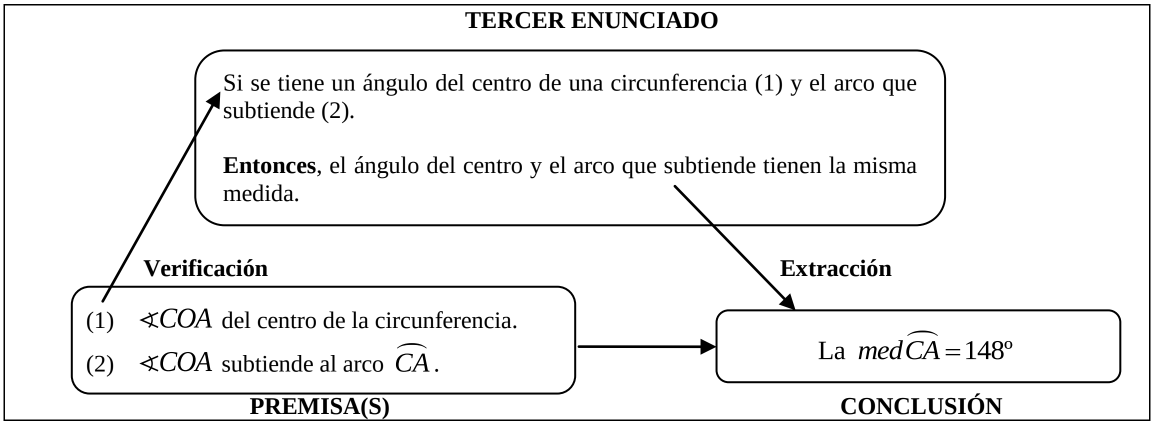
La $med\sphericalangle BOA = 180^{o}$

PREMISA(S) **CONCLUSIÓN**

Esquema 4.97: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para determinar la medida del ángulo BOA.*

- **Afirmación 6:** Como la suma de las medidas de los ángulos BOC y COA es 180º, se formula la igualdad que relaciona las medidas de dichos ángulos. Para determinar la medida del ángulo COA en función de la medida del ángulo BOC.

- **Afirmación 7:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.98)



Esquema 4.98: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para determinar la medida del arco CA.*

<table>
<tr><td colspan="2">Conocimientos específicos:

- Definición de ángulo extendido o llano y su medida. (Afirmación 6)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Rol de la figura:

- Al comienzo del desarrollo se presenta una aprehensión operativa de cambio figural.
- En las afirmaciones 1 a 7 predomina una aprehensión discursiva, donde el sentido de la transferencia va de un anclaje visual a uno discursivo</td></tr>
<tr><td colspan="2">Pasos de Razonamiento:

- Modus Ponens.</td></tr>
<tr><td>Cantidad de pasos de razonamiento:

- 3 pasos.</td><td>Caso(s) del teorema:

- Tercer caso.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Observaciones generales

1. El texto presenta una confusión de concepto en la figura que acompaña al enunciado del ejercicio, pues en este se solicita calcular α , y en la figura se señala a este como la longitud del arco AB. En el contexto del mismo se refiere a que la medida del ángulo del centro es igual a la medida del arco que subtiende.</td></tr>
</table>

Actividad 2 Letra c

Enunciado

Calcula la medida de α y β.

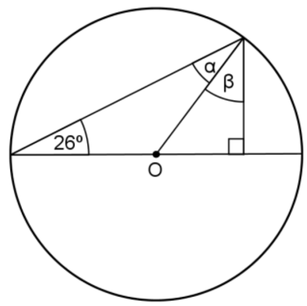


Figura 4.73

Desarrollo de la actividad esperado del estudiante

Se han asignado rótulos a los vértices de la figura para una mejor comprensión del desarrollo. (Figura 4.74)

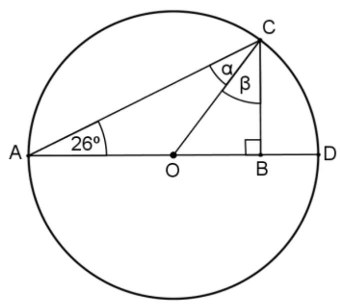


Figura 4.74

Secuencia de afirmaciones del desarrollo

1. El $\sphericalangle DAC$ es un ángulo inscrito que subtiende al arco $\overset{\frown}{DC}$.
2. El $\sphericalangle DOC$ es un ángulo del centro que subtiende al arco $\overset{\frown}{DC}$.
3. El $\sphericalangle DAC$ y el $\sphericalangle DOC$ subtienden el mismo arco, el arco $\overset{\frown}{DC}$.
4. Por teorema, la $med\sphericalangle DOC$ es el doble de la $med\sphericalangle DAC$.

$$med\sphericalangle DOC = 2 \cdot 26º$$
$$med\sphericalangle DOC = 52º$$

Por lo tanto, la $med\sphericalangle DOC = 52º$.

5. Como la $med\sphericalangle OCB$ con la $med\sphericalangle BOC$ y la $med\sphericalangle CBO$ suman 180º,

$$med\sphericalangle OCB + med\sphericalangle BOC + med\sphericalangle CBO = 180º$$
$$med\sphericalangle OCB + 52º + 90º = 180º$$
$$med\sphericalangle OCB = 180º - 142º$$
$$med\sphericalangle OCB = 38º$$

Por lo tanto, la medida de β es $38º$.

6. Como $\overline{OA}$ y $\overline{OC}$ son radios,

$$\overline{OA} \cong \overline{OC}$$

7. ΔAOC, es isósceles de base $\overline{AC}$, ya que $\overline{OA}$ y $\overline{OC}$ son congruentes.

8. La medida del $\sphericalangle OAC$ es igual a la medida del $\sphericalangle ACO$.

$$med \sphericalangle ACO = 26^{\circ}$$

Por lo tanto, la medida de α es 26°.

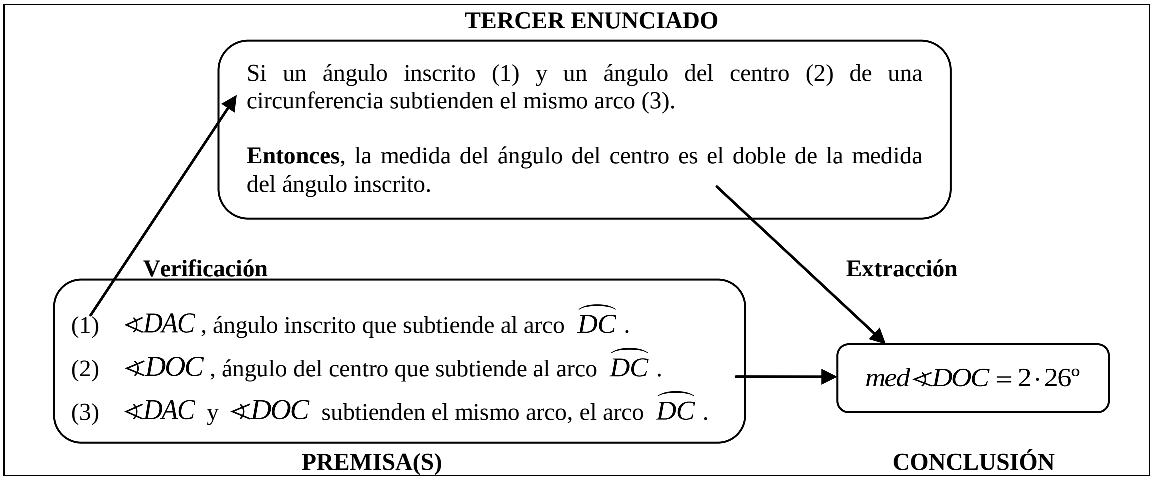
Análisis de la secuencia de afirmaciones del desarrollo del ejercicio

- **Afirmación 1:** Se extrae información sobre el $\sphericalangle DAC$, inscrito en la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.74)

- **Afirmación 2:** Se extrae información sobre el $\sphericalangle DOC$, del centro de la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.74)

- **Afirmación 3:** Se relacionan los ángulos obtenidos en las afirmaciones 1 y 2.

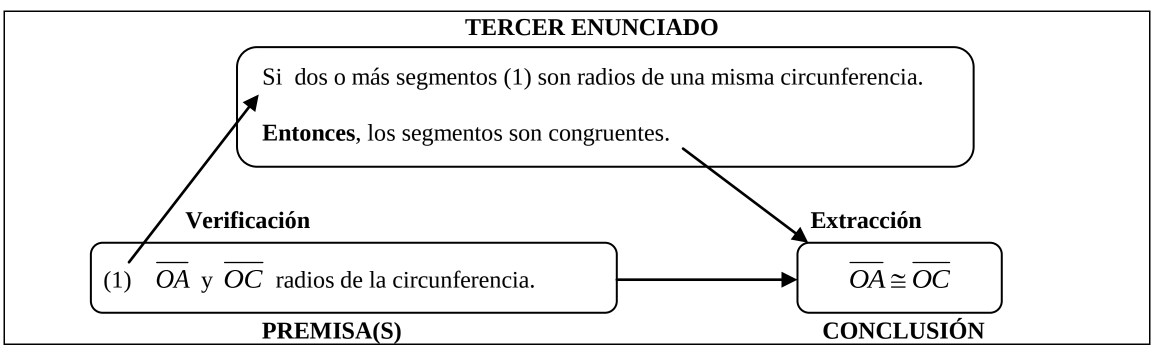
- **Afirmación 4:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.99)



Esquema 4.99: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para determinar la medida del ángulo del centro DOC.*

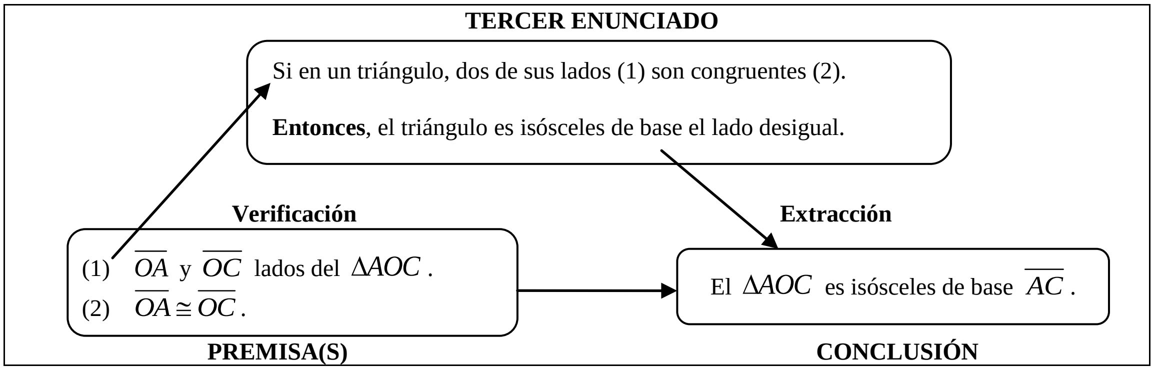
- **Afirmación 5:** Como la suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo es 180º, se formula la igualdad que relaciona las medidas de los ángulos interiores del ΔOBC para determinar la medida del ángulo OCB.

- **Afirmación 6:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.100)



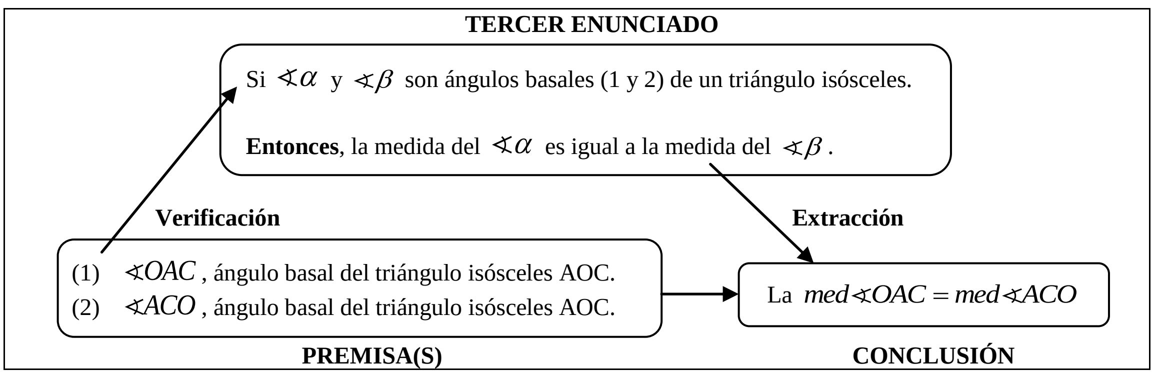
Esquema 4.100: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que los segmentos OA y OC son congruentes.*

- **Afirmación 7:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.102)



Esquema 4.101: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que el triángulo AOC es Isósceles de base AC.*

- **Afirmación 8:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.102)



Esquema 4.102: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que los ángulos basales del triángulo isósceles AOC son congruentes.*

Conocimientos específicos: - La medida del todo es igual a la suma de las medidas de sus partes. (Afirmación 5) - Congruencia de trazos. (Afirmación 6) - Triángulo Isósceles. (Afirmación 7) - Propiedad sobre ángulos basales del triángulo isósceles. *(*Afirmación 8*)*
Rol de la figura: - Al principio del desarrollo se presenta una *aprehensión operativa de cambio figural*. - En las afirmaciones 1 a 8 predomina una *aprehensión discursiva*, donde el sentido de la transferencia va de *un anclaje visual a uno discursivo*.
Pasos de Razonamiento: - Modus Ponens.

Cantidad de pasos de razonamiento:	**Caso(s) del teorema:**
- 4 pasos.	- Tercer caso.

Observaciones generales 1. El estudiante debe identificar triángulos isósceles y no confundir al triángulo ABC de la figura con un triángulo rectángulo.

Actividad 2 Letra d

Enunciado

Calcula la medida de OA.

$$AB = 10cm$$
$$BC = 24cm$$

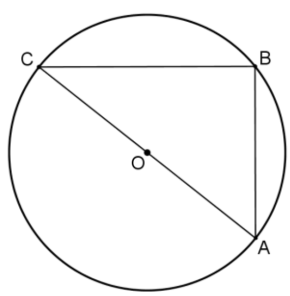


Figura 4.75

Desarrollo de la actividad esperado del estudiante

La secuencia de afirmaciones del desarrollo de la actividad será complementada con la Figura 4.76

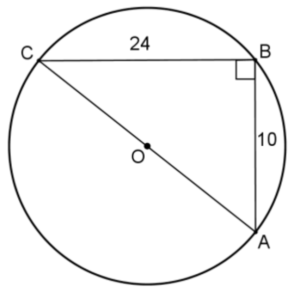


Figura 4.76

Secuencia de afirmaciones del desarrollo

1. Como $\overline{AC}$ es diámetro de la circunferencia, el triángulo ABC es rectángulo en B. Por consiguiente, la $med\sphericalangle ABC = 90º$

2. Como el triángulo ABC es rectángulo,

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2$$
$$10^2 + 24^2 = \overline{AC}^2$$
$$676 = \overline{AC}^2$$
$$\sqrt{676} = \overline{AC}$$
$$26 = \overline{AC}$$

Por lo tanto el diámetro de la circunferencia, correspondiente al segmento AC es $26cm$.

3. OA y OC son radios de la circunferencia, y estos forman el diámetro AC.

$$\overline{OA} \cong \overline{OC}$$

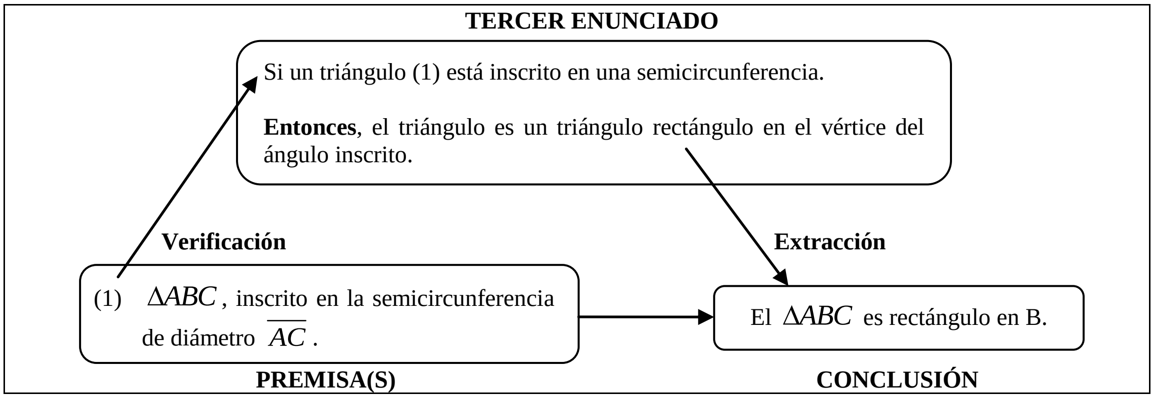
4. Como $\overline{AC}$ es igual a $\overline{OA}$ + $\overline{OC}$,

$$\overline{OA} + \overline{OA} = \overline{AC}$$
$$\overline{OA} + \overline{OA} = 26$$
$$2\overline{OA} = 26$$
$$\overline{OA} = 13$$

Por lo tanto, el segmento OA mide 13cm.

Análisis de la secuencia de afirmaciones del desarrollo del ejercicio

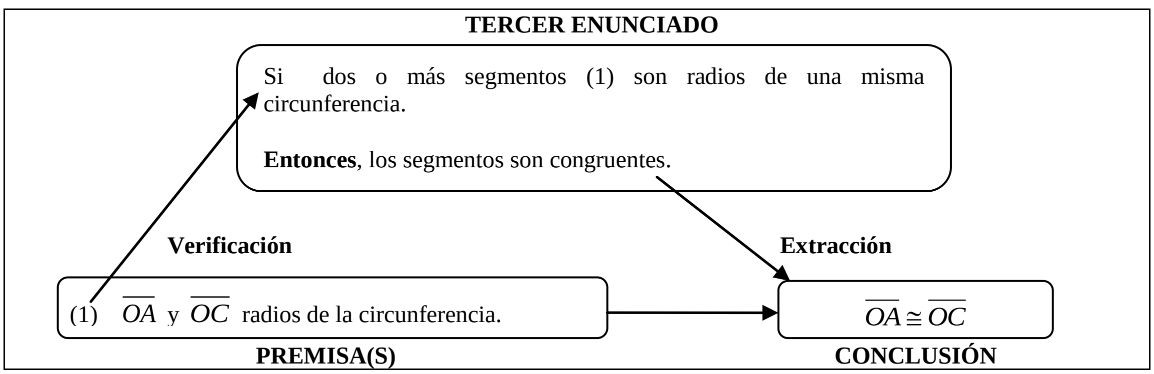
- **Afirmación 1:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.103)



Esquema 4.103: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que el triángulo ABC es rectángulo en B.*

- **Afirmación 2:** Se calcula la medida del segmento AC utilizando el teorema de Pitágoras.

- **Afirmación 3:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.104)



Esquema 4.104: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que los segmentos OA y OC son congruentes.*

- **Afirmación 4:** Como los segmentos OA y OC forman al segmento AC, se formula la igualdad que relaciona sus medidas. Para determinar la medida del segmento OA.

Conocimientos específicos:

- Definición de triángulo rectángulo. (Afirmación 1)
- Teorema de Pitágoras (Afirmación 2)
- Congruencia de trazos. (Afirmación 3)
- La medida del todo es igual a la suma de las medidas de sus partes. (Afirmación 4)

Rol de la figura:

- Al principio del desarrollo se presenta una *aprehensión operativa de cambio figural*.
- En las afirmaciones 1 a 4 predomina una *aprehensión discursiva*, donde el sentido de la transferencia va de *un anclaje visual a uno discursivo*

Pasos de Razonamiento:

- Modus Ponens.

Cantidad de pasos de razonamiento:	**Caso(s) del teorema:**
- 2 pasos.	- No es necesario.

Observaciones generales

1. Para resolver el ejercicio no es necesario aplicar el teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia.

Actividad 3

Enunciado

El triángulo AOC de la figura es equilátero. Calcula el perímetro y el área del triángulo ABC en términos de r .

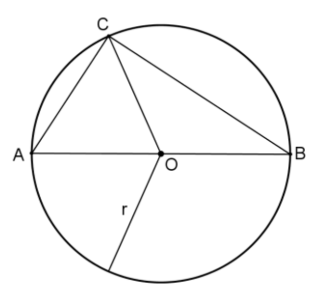


Figura 4.77

Desarrollo de la actividad esperado del estudiante

La secuencia de afirmaciones del desarrollo de la actividad será complementada con la Figura 4.78

Secuencia de afirmaciones del desarrollo

1. Como $\overline{AB}$ es diámetro de la circunferencia, el triángulo ABC es rectángulo en C.

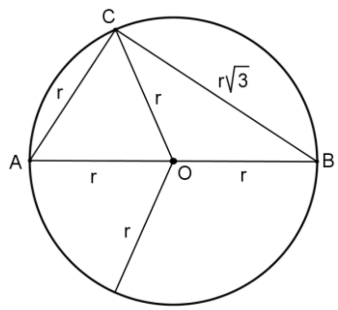


Figura 4.78

2. $\overline{AC} \cong \overline{AO} \cong \overline{OC}$, pues el ΔAOC es equilátero.

$$\overline{AC} = \overline{AO} = \overline{OC} = r$$

3. Como el triángulo ABC es rectángulo,

$$\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2$$
$$r^2 + \overline{BC}^2 = (2r)^2$$
$$r^2 + \overline{BC}^2 = 4r^2$$
$$\overline{BC} = \sqrt{3r^2}$$
$$\overline{BC} = r\sqrt{3}$$

Por lo tanto, el segmento BC mide $r\sqrt{3}cm$.

4. El perímetro del triángulo es

$$Perímetro = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC}$$
$$Perímetro = 2r + r\sqrt{3} + r$$
$$Perímetro = 3r + r\sqrt{3}$$

Por lo tanto, el Perímetro del ΔABC es $3r + r\sqrt{3}$.

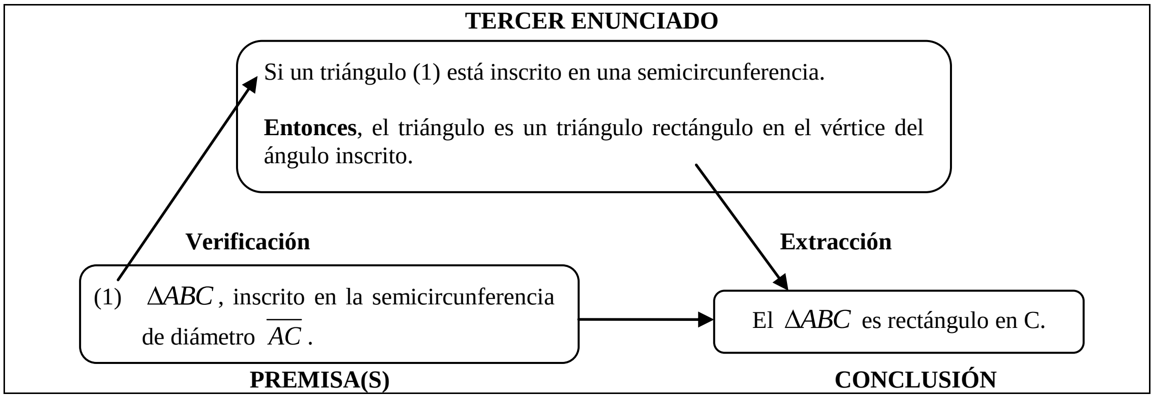
5. El área del triángulo rectángulo es

$$Área = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{CB}}{2}$$
$$Área = \frac{r \cdot r\sqrt{3}}{2}$$
$$Área = \frac{r^2\sqrt{3}}{2}$$

Por lo tanto, el área del ΔABC es $\frac{r^2\sqrt{3}}{2}cm^2$.

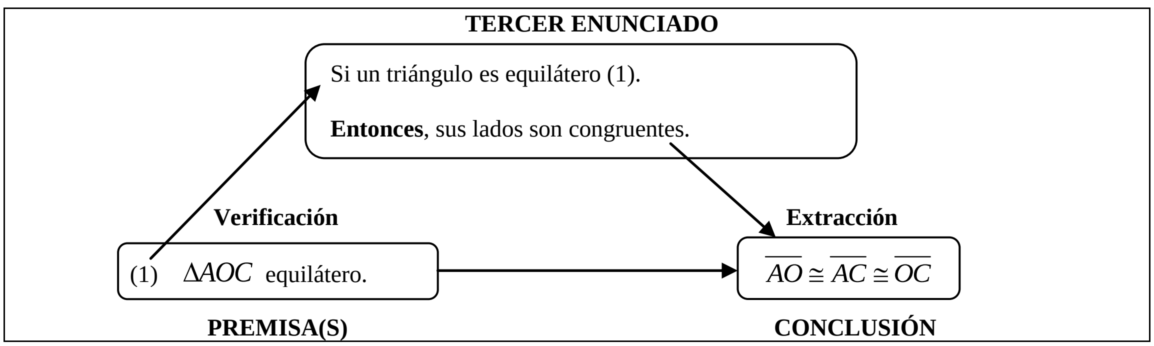
Análisis de la secuencia de afirmaciones del desarrollo del ejercicio

- **Afirmación 1:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.105)



Esquema 4.105: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que el triángulo ABC es rectángulo en C.*

- **Afirmación 2:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.106)



Esquema 4.106: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que los lados del triángulo equilátero AOC son congruentes.*

- **Afirmación 3:** Se calcula la medida del segmento AB utilizando el teorema de Pitágoras.

- **Afirmación 4:** Se calcula el perímetro del triángulo rectángulo ABC.

- **Afirmación 5:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.107)

TERCER ENUNCIADO

Si un triángulo es rectángulo (1).

Entonces, el área del triángulo es igual al semiproducto de sus catetos.

Verificación

Extracción

(1) ΔAOB rectángulo en C.

$$Área = \frac{r \cdot r\sqrt{3}}{2}$$

PREMISA(S)

CONCLUSIÓN

Esquema 4.107: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para determinar el área del triángulo rectángulo ABC.*

Conocimientos específicos:

- Definición de triángulo rectángulo. (Afirmación 1)
- Definición de triángulo equilátero. (Afirmación 2)
- Teorema de Pitágoras. (Afirmación 3)
- Área de un triángulo rectángulo en términos de las longitudes de los catetos. (Afirmación 4)

Rol de la figura:

- Al principio del desarrollo se presenta una *aprehensión operativa de cambio figural.*
- En las afirmaciones 1 a 5 predomina una *aprehensión discursiva*, donde el sentido de la transferencia va de *un anclaje visual a uno discursivo.*

Pasos de Razonamiento:

- Modus Ponens.

Cantidad de pasos de razonamiento:	**Caso(s) del teorema:**
- 3 pasos.	- No es necesario.

Observaciones generales

1. Para resolver el ejercicio no es necesario aplicar el teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia.

A continuación se detalla en la tabla 4.13 la cantidad de pasos de razonamiento, tipos de razonamiento y caso del teorema que se utiliza en el desarrollo de cada una de las actividades propuestas de la página 204 del texto.

EJERCICIOS	**CASO DEL TEOREMA**	**CANTIDAD DE PASOS DE RAZONAMIENTO**	**TIPO DE PASO DE RAZONAMIENTO**
1	Caso 1	2 pasos	Modus Ponens
2a	Caso 2	3 pasos	Modus Ponens
2b	Caso 3	3 pasos	Modus Ponens
2c	Caso 3	4 pasos	Modus Ponens
2d	No es necesario	2 pasos	Modus Ponens
3	No es necesario	3 pasos	Modus Ponens

Tabla 4.13: Cantidad de pasos de razonamientos y tipos de pasos de razonamientos que justifican las afirmaciones del desarrollo de las actividades propuestas en el texto Santillana correspondiente a la página 204.

Se observa en la tabla 4.13 que en las actividades de la página 204 se encuentran ejercicios para aplicar los tres casos del teorema. Además estos no tienen un orden según la dificultad, ya que no están organizados según la cantidad de pasos de razonamiento. El tipo de paso de razonamiento presente en todas las actividades es de tipo modus ponens.

Vale decir, que el texto continua presentando una confusión de notación al señalar la longitud de un arco en grados. En el contexto del mismo se refiere a que la medida del ángulo del centro de una circunferencia es igual a la medida del arco que subtiende.

Todas las actividades requieren de conocimientos específicos por parte del alumno para ser resueltas.

Todas las actividades de la página 204 presentan solo una aprehensión operativa, es decir, los alumnos realizan una sola modificación a la configuración inicial de cada ejercicio para su resolución. (Véase tabla 4.14)

EJERCICIO	APREHENSION DISCURSIVA	APREHENSION OPERATIVA
1	5 Afirmaciones	Al comienzo del desarrollo
2a	7 Afirmaciones	Al comienzo del desarrollo
2b	7 Afirmaciones	Al comienzo del desarrollo
2c	8 Afirmaciones	Al comienzo del desarrollo
2d	4 Afirmaciones	Al comienzo del desarrollo
3	5 Afirmaciones	Al comienzo del desarrollo

Tabla 4.14: Resumen correspondiente al rol de la figura en las actividades propuestas en el Texto Santillana correspondientes a la página 204.

A modo general, es importante destacar que para el desarrollo de cada ejercicio que propone el texto se debe realizar al menos una aprehensión operativa de cambio figural. Esta tiene una mayor frecuencia principalmente al comienzo de cada actividad. Siendo 11 los ejercicios que se les debe agregar más de un elemento geométrico para su desarrollo. Para los cuales se requiere una mayor coordinación entre la aprehensión operativa y la aprehensión discursiva. En el mismo sentido, esta última es la que predomina en las afirmaciones matemáticas que se realizan para cada ejercicio.

4.3 Texto Ediciones SM

La organización de la presentación del análisis de este texto es similar a la de los anteriores. En una primera parte se analizarán las demostraciones expuestas por el texto y a continuación las actividades propuestas. Luego se presentan observaciones generales sobre el análisis de las demostraciones y actividades contenidas en este.

4.3.1 Demostración del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia

A continuación se expone la demostración expuesta por el texto como lectura para el estudiante. Correspondientes al primer caso del teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia. Los casos restantes no son mencionados en el texto.

Hay que hacer notar, que el texto no propone actividad de introducción para el teorema antes de exponer la demostración.

Demostración del primer caso del teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia

"*El centro de la circunferencia se encuentra al interior de la región limitada por los lados del ángulo inscrito*"

Enunciado

En una circunferencia, la medida del ángulo del centro es el doble de la medida del ángulo inscrito que subtiende el mismo arco que el

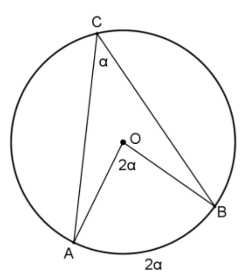


Figura 4.79

Desarrollo de la demostración

La secuencia de afirmaciones del desarrollo de la demostración es complementada con la Figura 4.80

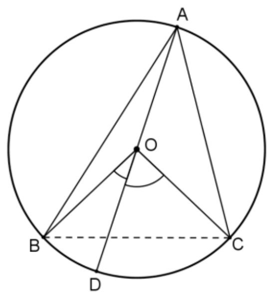


Figura 4.80

Secuencia de afirmaciones del desarrollo de la demostración

1. $\overline{AD}$ diámetro de la circunferencia.
2. $\overset{\frown}{BC}$ común a $\angle BAC$ y $\angle BOC$.
3. $\alpha = \angle OBC = \angle OCB$, ya que ΔOBC es isósceles.
4. $\beta = \angle OAC = \angle OCA$, ya que ΔOAC es isósceles.
5. $\gamma = \angle OBA = \angle OAB$, ya que ΔOBA es isósceles.
6. En el ΔOBC, el ángulo del centro $\angle BOC = 180º - 2\alpha$.
7. Análogamente, $\angle AOC = 180º - 2\beta$
8. y $\angle AOB = 180 - 2\gamma$.
9. El ángulo completo de vértice O será igual a:

$$\angle BOC + \angle AOC + \angle AOB = 360º$$

10. Reemplazando se tiene que:

$$180º - 2\alpha + 180º - 2\beta + 180º - 2\gamma = 360º$$
$$2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 180º$$
$$\beta + \gamma = \frac{180º - 2\alpha}{2}$$

11. Pero $\beta + \gamma = \angle BAC$,

por lo tanto

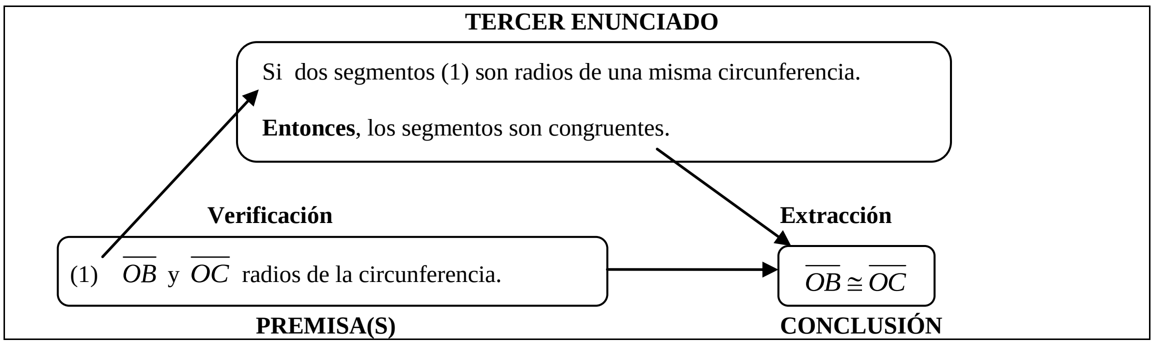
$$\angle BAC = \frac{\angle BOC}{2}$$

Análisis de la secuencia de afirmaciones de la demostración

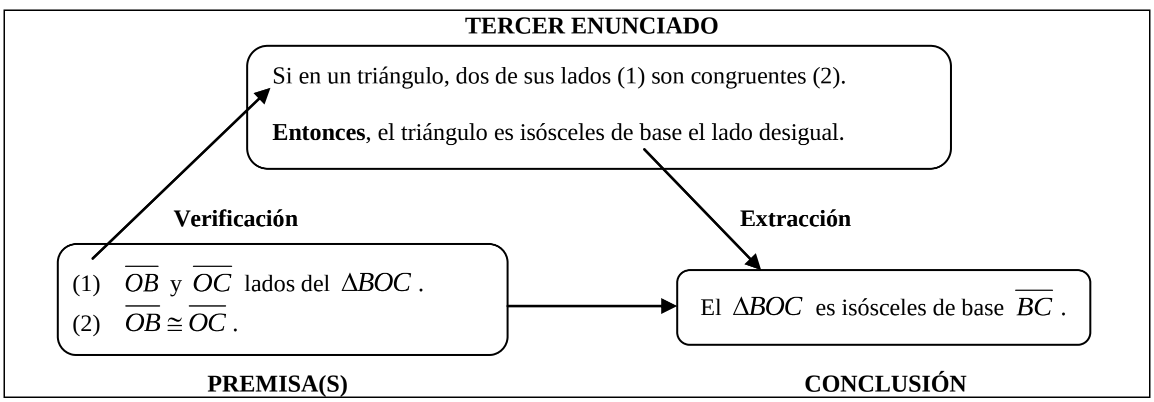
- **Afirmación 1:** El diámetro se construye para formar los triángulos isósceles OAC y OBA.

- **Afirmación 2:** Se extrae información sobre el $\widehat{BC}$, el cual subtiende a los ángulos BAC y BOC.

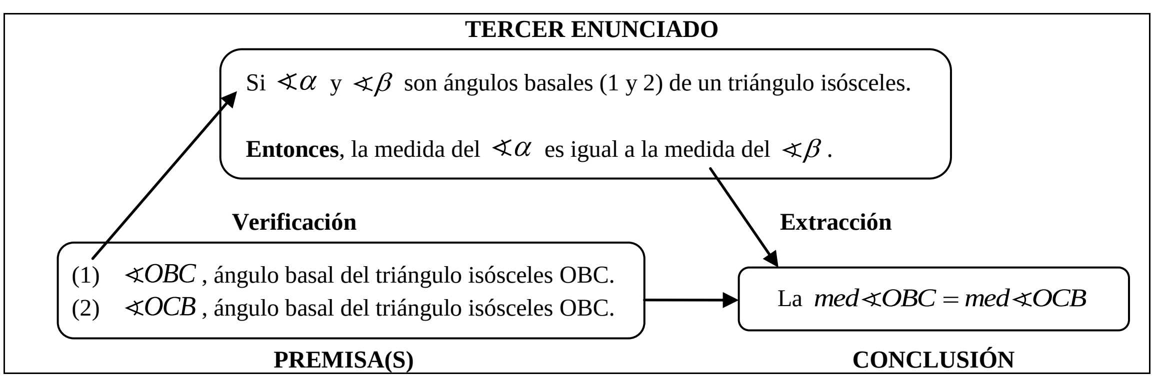
- **Afirmación 3:** Se justifica realizando tres pasos de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.108)



(a) *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que los segmentos OB y OC son congruentes.*



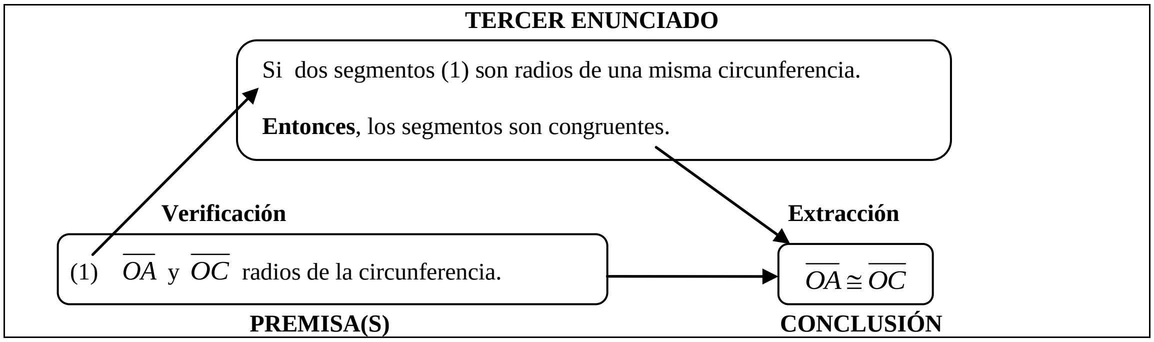
(b) *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que el triángulo BOC es Isósceles de base BC.*



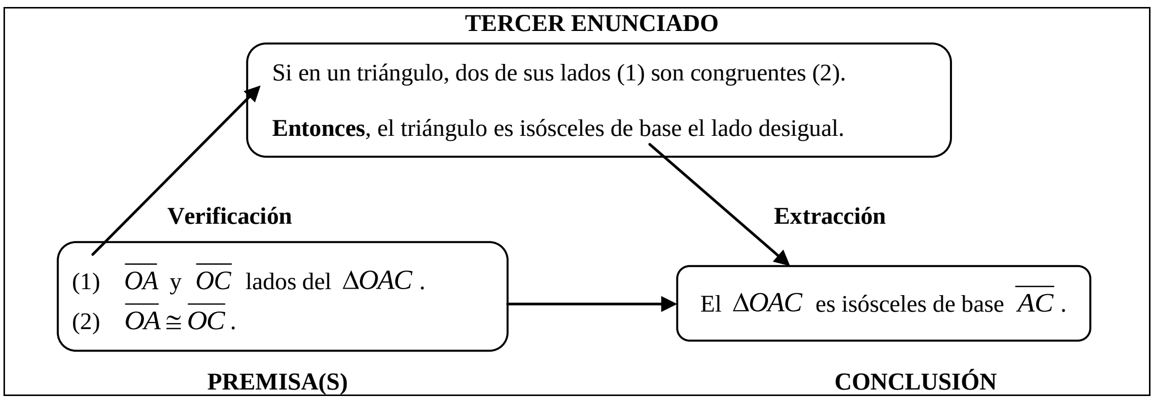
(c) *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que los ángulos basales del triángulo isósceles OBC son congruentes.*

Esquema 4.108

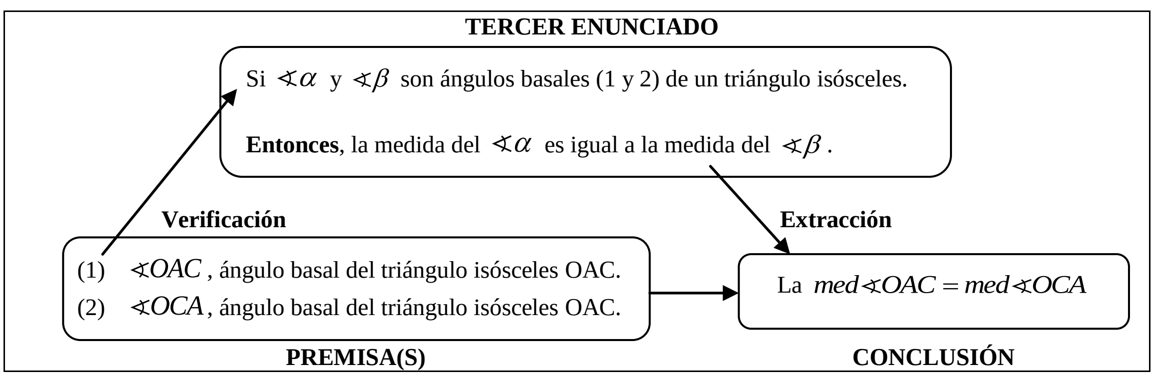
- **Afirmación 4:** Se justifica realizando tres pasos de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.109)



(a) *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que los segmentos OA y OC son congruentes.*



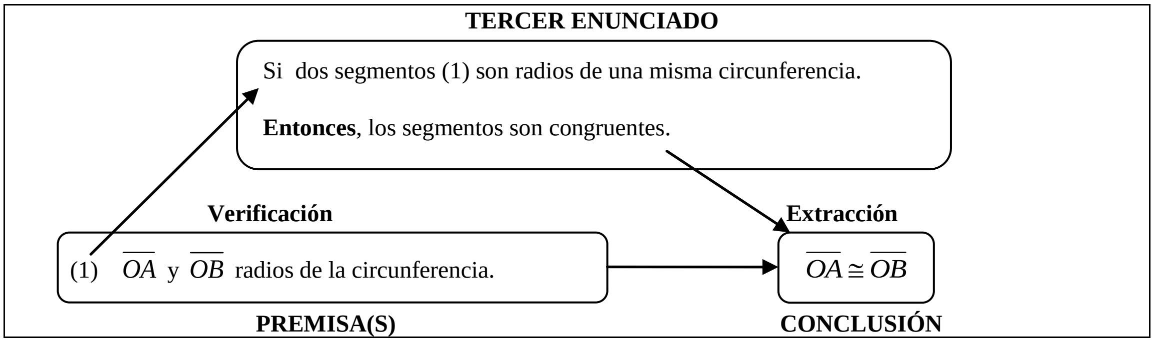
(b) *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que el triángulo OAC es Isósceles de base AC.*



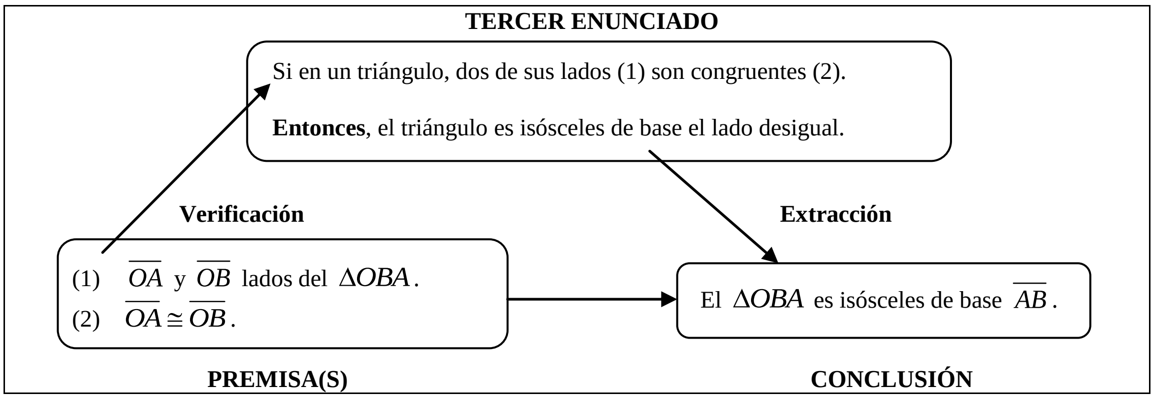
(c) *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que los ángulos basales del triángulo isósceles OAC son congruentes.*

Esquema 4.109

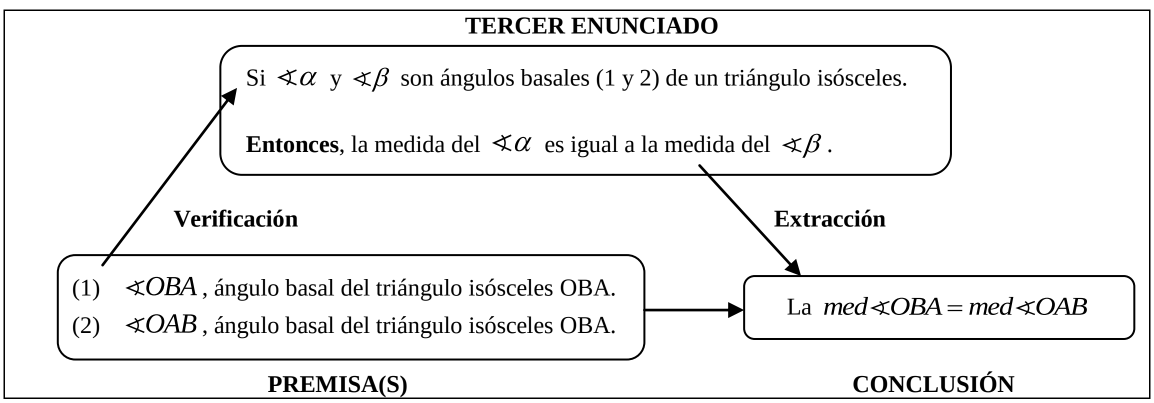
- **Afirmación 5:** Se justifica realizando tres pasos de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.110)



(a) *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que los segmentos OA y OB son congruentes.*



(b) *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que el triángulo OBA es Isósceles de base AB.*



(c) *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que los ángulos basales del triángulo isósceles OBA son congruentes.*

Esquema 4.110

- **Afirmación 6:** Se formula la igualdad que relaciona las medidas de los ángulos interiores del triángulo ΔOBC. Para expresar la medida del ángulo BOC en términos de alfa.

- **Afirmación 7:** Se formula la igualdad que relaciona las medidas de los ángulos interiores del triángulo ΔOAC . Para expresar la medida del ángulo AOC en términos de beta.

- **Afirmación 8:** Se formula la igualdad que relaciona las medidas de los ángulos interiores del triángulo ΔOBA. Para expresar la medida del ángulo AOB en términos de Gamma.

- **Afirmación 9:** Se formula la igualdad que relaciona las medidas de los ángulos que componen ángulo completo del centro de la circunferencia.

- **Afirmación 10:** Se expresa la medida ángulo completo del vértice O en función de alfa.

- **Afirmación 11:** Se relaciona la medida del ángulo inscrito BAC con la medida del ángulo del centro BOC.

Conocimientos específicos: - Congruencia de trazos (Afirmaciones 1, 2 y 3) - Definición de Triángulo Isósceles (Afirmaciones 1, 2 y 3) - Propiedad sobre ángulos basales del triángulo isósceles. (Afirmaciones 1, 2 y 3) - Propiedad: La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180º. (Afirmaciones 6, 7 y 8) - Definición de Ángulo completo. (Afirmación 9) - La medida del todo es igual a la suma de las medidas de sus partes. (Afirmación 9)	
Rol de la figura: - En las afirmaciones 1 al 11 predomina una *aprehensión discursiva* donde el sentido de la transferencia va de *un anclaje visual a uno discursivo.*	
Pasos de Razonamiento: - El paso de razonamiento es de *encadenamiento por reutilización*, donde cada uno de los razonamientos que componen el encadenamiento son razonamientos deductivos (Modus Ponens).	
Cantidad de pasos de razonamiento: - 9 pasos.	**Caso del teorema:** - Primer caso.
Observaciones generales 1. La demostración es realizada por el texto, sólo se le expone al alumno. 2. Se realizan tres pasos en uno, omitiendo pasos fundamentales, pudiendo provocar que el estudiante se pierda en la demostración, o deje de comprender los pasos que se dan en su desarrollo. (Afirmaciones 3, 4 y 5) 3. Se efectúan 3 pasos de razonamiento distintos en la demostración, lo cuales se realizan 3 veces cada uno. (Afirmaciones 3, 4 y 5) 4. En el desarrollo de la demostración se identifican objetos geométricos con sus medidas en el caso de los ángulos. Se presenta una confusión de notación.	

A continuación en la tabla 4.15 se detalla la cantidad de pasos de razonamiento y tipos de razonamiento presentes en las demostraciones expuestas por el texto Ediciones SM.

DEMOSTRACIÓN	CANTIDAD DE PASOS DE RAZONAMIENTO	TIPO DE PASO DE RAZONAMIENTO
Primer caso	9 pasos	Modus Ponens
Segundo caso	No se trata	No se trata
Tercer caso	No se trata	No se trata

Tabla 4.15: Cantidad de pasos de razonamientos y tipos de pasos de razonamientos que justifican las demostraciones expuestas en el Texto Ediciones SM.

Al observar la tabla 4.15, el tipo de pasos de razonamiento presentes en la demostración es de modus ponens. La cantidad de pasos de razonamientos que justifican la demostración son 9 pasos. Aunque solo se realicen 3 pasos distintos, pues estos se repiten tres veces cada uno.

Como se menciono previo al análisis de la demostración, el texto no expone actividad de acercamiento al Teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia antes de exponer la demostración. Ni tampoco se consideran los conocimientos específicos que el estudiante requiere para entender las afirmaciones del desarrollo de esta.

A continuación, en la tabla 4.16, se expone la cantidad de aprehensiones discursiva y operativa que se presentan en cada una de las afirmaciones del desarrollo de la demostración.

DEMOSTRACIÓN	APREHENSION DISCURSIVA	APREHENSION OPERATIVA
Primer caso	11 Afirmaciones	0 Afirmaciones
Segundo Caso	No se trata	No se trata
Tercer Caso	No se trata	No se trata

Tabla 4.16: Resumen correspondiente al rol de la figura en las demostraciones expuestas en el Texto Ediciones SM.

Al observar la tabla 4.16, existe una descoordinación de los discursos matemáticos y los elementos geométricos que se agregan o quitan a la figura. Lo cual provoca que el alumno no logre comprender las afirmaciones que se llevan a cabo en el desarrollo de la demostración. Es importante mencionar que en el procedimiento se describe el diámetro AD, pero en ningún momento se afirma que se trazo tal elemento geométrico, así como también se realizan modificaciones a la configuración inicial, pero no se hacen aserciones sobre las subconfiguraciones que se llevan a cabo.

4.3.2 Actividades Propuestas

Las actividades propuestas por el texto se enmarcan en 2 tipos de tareas. La primera consiste en dos ejercicios propuestos, los cuales tienen como objetivo que el estudiante aplique la relación de proporcionalidad que entrega el texto en un recuadro como un Tips: "*Un ángulo del centro y el arco que subtiende tienen la misma medida*", es decir, el estudiante debe calcular la medida del ángulo del centro de una circunferencia a partir de la medida del arco que subtiende dicho ángulo.

En la segunda tarea, se proponen al estudiante 8 ejercicios ordenados alfabéticamente, cada uno de ellos acompañados por una figura. En estos, el estudiante debe calcular la medida de ángulo que solicite el enunciado, según sea el caso. Cabe destacar, que no en todos lo ejercicios es necesario aplicar el teorema del ángulo del inscrito y del centro de una circunferencia para poder resolverlos.

A continuación se presenta el desarrollo de cada una de las actividades propuestas por el texto. Analizando las afirmaciones que se dan en la secuencia del desarrollo y caracterizando los pasos de razonamiento que se realizan en este. Además de identificar el rol que cumple la figura y lo conocimientos específicos necesarios en la resolución de los ejercicios.

Actividad 1 Letra a

Enunciado

Si $\overset{\frown}{KE}$ es un noveno de la circunferencia, $\overset{\frown}{EF}$ un tercio, $\overset{\frown}{FH}$ es siete dieciochoavos y $\overset{\frown}{HK}$ un sexto, ¿cuál es la medida de $\angle FOK$ y $\angle EOH$?

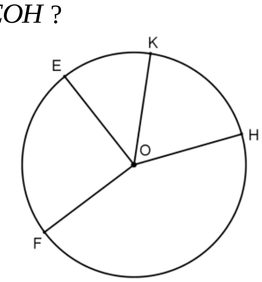


Figura 4.81

Desarrollo de la actividad esperado del estudiante

La secuencia de afirmaciones del desarrollo de la actividad será complementada con la Figura 4.82

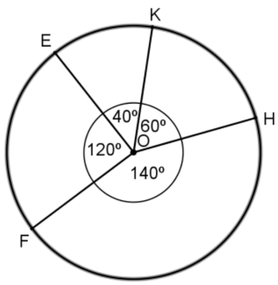


Figura 4.82

Secuencia de afirmaciones del desarrollo

1. Como $\widehat{KE}$ es un noveno de la circunferencia, la medida del ángulo del centro EOK es un noveno de 360º.

$$med\sphericalangle EOK = \frac{1}{9}\cdot 360º$$
$$med\sphericalangle EOK = 40º$$

2. Como $\widehat{EF}$ es un tercio de la circunferencia, la medida del ángulo del centro FOE es un tercio de 360º.

$$med\sphericalangle FOE = \frac{1}{3}\cdot 360º$$
$$med\sphericalangle FOE = 120º$$

3. Como $\widehat{FH}$ es un dieciochoavos de la circunferencia, la medida del ángulo del centro FOH es un dieciochoavos de 360º.

$$med\sphericalangle FOH = \frac{7}{18}\cdot 360º$$
$$med\sphericalangle FOH = 140º$$

4. Como $\widehat{HK}$ es un sexto de la circunferencia, la medida del ángulo del centro KOH es un sexto de 360º.

$$med\sphericalangle KOH = \frac{1}{6}\cdot 360º$$
$$med\sphericalangle KOH = 60º$$

5. La medida del $\sphericalangle FOK$ es igual a la suma de las medidas de los ángulos FOE y EOK.

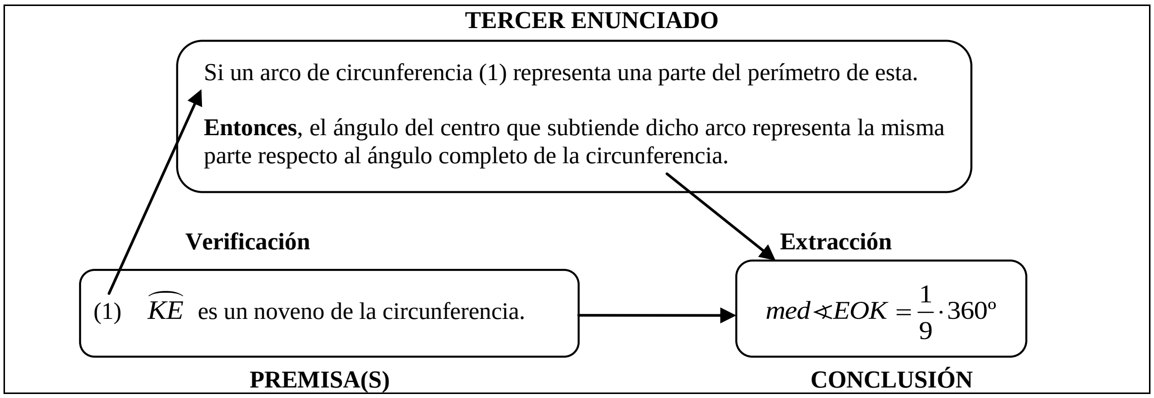
$$med\sphericalangle FOK = med\sphericalangle FOE + med\sphericalangle EOK$$
$$med\sphericalangle FOK = 160º$$

6. La medida del $\sphericalangle EOH$ es igual a la suma de las medidas de los ángulos EOK y KOH.

$$med\sphericalangle EOH = med\sphericalangle EOK + med\sphericalangle KOH$$
$$med\sphericalangle EOH = 100º$$

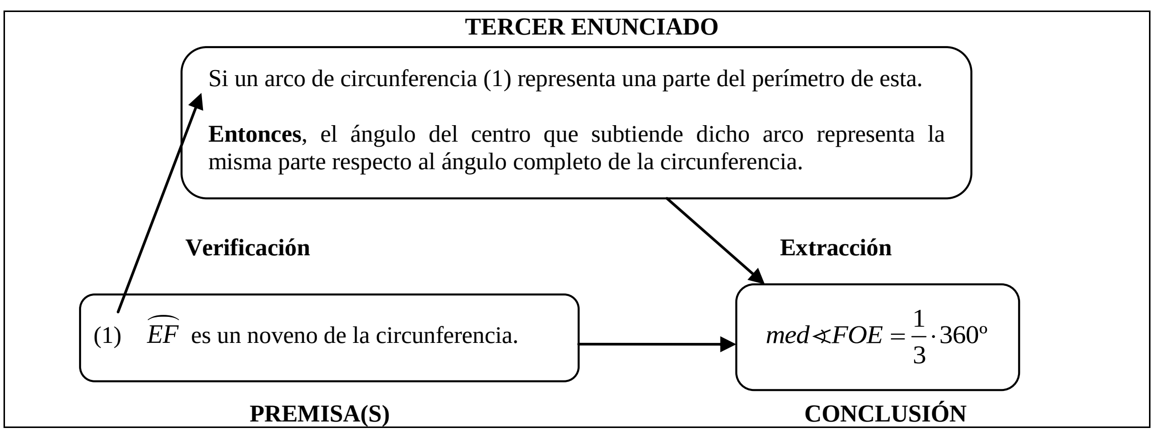
Análisis de la secuencia de afirmaciones del desarrollo del ejercicio

- **Afirmación 1:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.111)



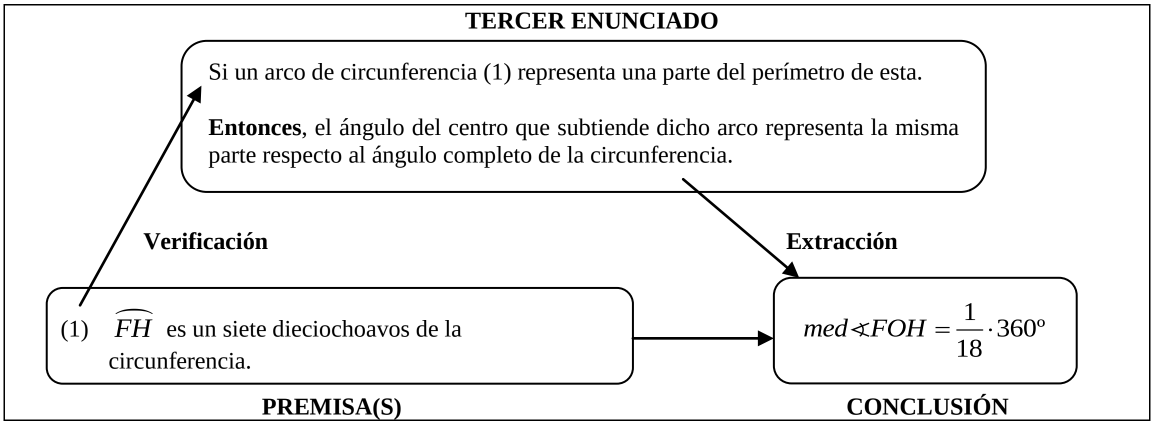
Esquema 4.111: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para determinar la medida del ángulo del centro EOK.*

- **Afirmación 2:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.112)



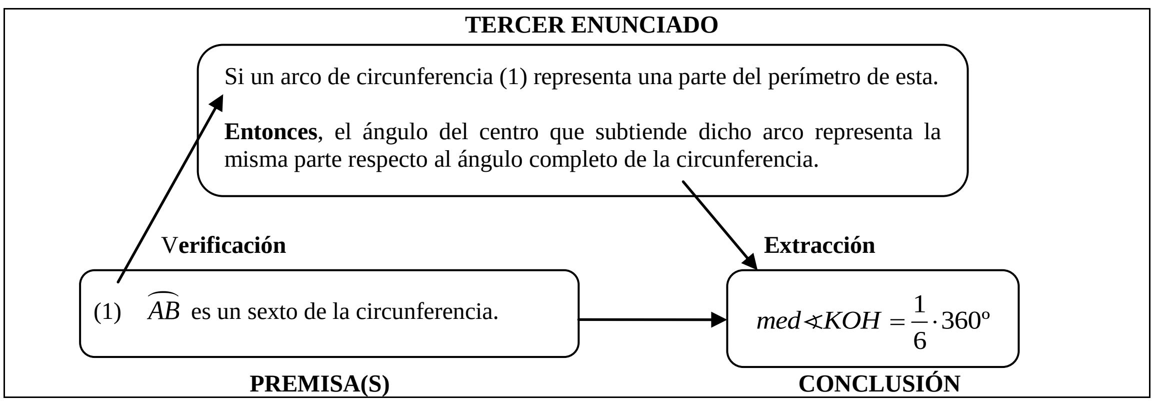
Esquema 4.112: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para determinar la medida del ángulo del centro FOE.*

- **Afirmación 3:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.113)



Esquema 4.113: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para determinar la medida del ángulo del centro FOH.*

- **Afirmación 4:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.114)



Esquema 4.114: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para determinar la medida del ángulo del centro KOH.*

- **Afirmación 5:** Se expresa la medida del ángulo FOK en términos de las medidas de los ángulos FOE y EOK.

- **Afirmación 6:** Se expresa la medida del ángulo EOH en términos de las medidas de los ángulos EOK y KOH.

Conocimientos específicos:	
- La medida del todo es igual a la suma de las medidas de sus partes. (Afirmaciones 5 y 6) - Proporcionalidad entre las medidas de ángulos del centro y longitud de los respectivos arcos. (Afirmaciones 1, 2 3 y 4)	
Rol de la figura: - En las afirmaciones 1 a 6 predomina una *aprehensión discursiva* donde el sentido de la transferencia va de *un anclaje visual a uno discursivo.*	
Pasos de Razonamiento: - Modus Ponens.	
Cantidad de pasos de razonamiento: - 4 pasos.	**Caso(s) del teorema:** - No se utiliza.
Observaciones generales 1. El ejercicio se resuelve utilizando un mismo paso de razonamiento reiteradas veces. 2. El ejercicio no requiere aplicación del Teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia para ser resuelto. 3. La finalidad del ejercicio es que el estudiante practique la relación de proporcionalidad que se le señala como TIPS en el texto: "*Un ángulo del centro y el arco que subtiende tienen la misma medida*".	

Actividad 1 Letra b

Enunciado

Si $\overline{AB}$ es diámetro y $\overset{\frown}{BA}$ se divide en cuatro arcos congruentes, ¿cuál es la medida del arco CA y DE? ¿Cuál es la medida de $\angle BOC$ y $\angle EOB$?

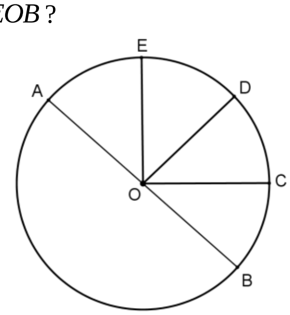


Figura 4.83

Desarrollo de la actividad esperado del estudiante

La secuencia de afirmaciones del desarrollo de la actividad será complementada con la Figura 4.84

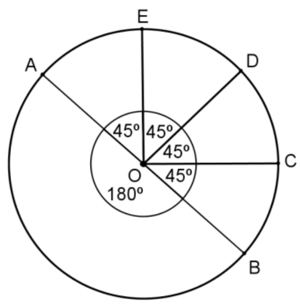


Figura 4.84

Secuencia de afirmaciones del desarrollo

1. Como $\overline{AB}$ es diámetro, la medida del ángulo BOA es 180º.

2. La $med\,\widehat{BA} = med\sphericalangle BOA$ *

$$med\,\widehat{BA} = 180^{\circ}$$

3. Como $\widehat{BC}$, $\widehat{CD}$, $\widehat{DE}$ y $\widehat{EA}$ son congruentes, la medida de los arcos es el cociente entre la medida del $\widehat{BA}$ y la cantidad de arcos congruentes.

$$med\,\widehat{BA} : 4$$
$$180^{\circ} : 4 = 45^{\circ}$$

4. Por lo tanto $med\,\widehat{DE} = 45^{\circ}$ *

5. La medida del $\widehat{CA}$ es igual a la suma de las medidas de los $\widehat{CD}$, $\widehat{DE}$ y $\widehat{EA}$.*

$$med\,\widehat{CA} = med\,\widehat{CD} + med\,\widehat{DE} + med\,\widehat{EA}$$
$$med\,\widehat{CA} = 45^{\circ} + 45^{\circ} + 45^{\circ}$$
$$med\,\widehat{CA} = 135^{\circ}$$

Por lo tanto la $med\,\widehat{CA} = 135^{\circ}$.

6. Como $\widehat{BC}$, $\widehat{CD}$, $\widehat{DE}$ y $\widehat{EA}$ son congruentes, los ángulos del centro que subtienden a cada uno de los arcos respectivos son congruentes.

La medida de cada ángulo que subtiende a los arcos congruentes es.

$$med\sphericalangle BOA : 4$$
$$180^{\circ} : 4 = 45^{\circ}$$

Por lo tanto la $med\sphericalangle BOC = 45^{\circ}$

7. La $med\sphericalangle EOB$ es igual a la suma de las medidas de los ángulos EOA y AOB.

$$med\sphericalangle EOB = med\sphericalangle EOA + med\sphericalangle AOB$$
$$med\sphericalangle EOB = 45^{\circ} + 180^{\circ}$$
$$med\sphericalangle EOB = 225^{\circ}$$

Por lo tanto, la $med\sphericalangle EOB = 225^{\circ}$.

*Paso realizado en base al marco conceptual del texto.

Análisis de la secuencia de afirmaciones del desarrollo del ejercicio

- **Afirmación 1:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.115)

TERCER ENUNCIADO

Si los lados que forman un ángulo del centro (1) son parte de un diámetro (2) de circunferencia.

Entonces, el ángulo formado por dichos lados es extendido o llano, es decir, su medida es 180º.

Verificación **Extracción**

(1) $\overline{AO}$ y $\overline{OB}$ lados del $\sphericalangle BOA$.
(2) $\overline{AO}$ y $\overline{OB}$ forman el diámetro AB.

La $med\sphericalangle BOA = 180º$

PREMISA(S) **CONCLUSIÓN**

Esquema 4.115: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para determinar la medida del ángulo BOA.*

- **Afirmación 2:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.116)

TERCER ENUNCIADO

Si se tiene un ángulo del centro de una circunferencia (1) y el arco que subtiende (2).

Entonces, el ángulo del centro y el arco que subtiende tienen la misma medida.

Verificación **Extracción**

(1) $\sphericalangle AOB$ del centro de la circunferencia.
(2) $\sphericalangle AOB$ subtiende al arco $\overset{\frown}{AB}$.

La $med\,\overset{\frown}{BA} = 180º$

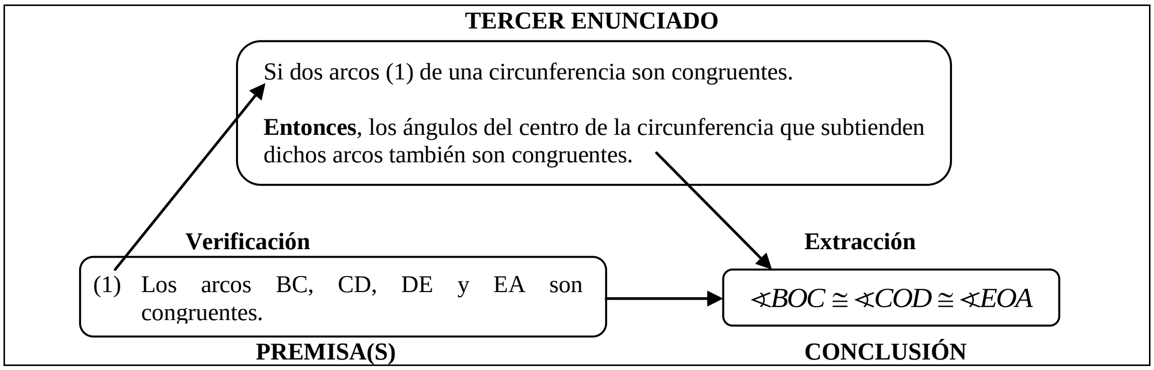
PREMISA(S) **CONCLUSIÓN**

Esquema 4.116: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para determinar la medida del arco BA.*

- **Afirmación 3:** Se calcula la medida de los arcos congruentes utilizando afirmación anterior.

- **Afirmación 4:** Se expresa la medida del arco CA en términos de las medidas de los arcos CD, DE y EA.

- **Afirmación 5:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.117)



Esquema 4.117: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que los ángulos que subtienden a los arcos BC, CD, DE, EA son congruentes.*

- **Afirmación 6:** Se expresa la medida del ángulo EOB en términos de las medidas de los ángulos EOA y AOB.

Conocimientos específicos: - Congruencia de arcos de circunferencia. (Afirmaciones 3 y 5) - La medida del todo es igual a la suma de las medidas de sus partes. (Afirmaciones 3 y 5) - Proporcionalidad entre las medidas de ángulos del centro y longitud de los respectivos arcos. (Afirmaciones 2 y 5)
Rol de la figura: - En las afirmaciones 1 a 6 predomina una *aprehensión discursiva* donde el sentido de la transferencia va de *un anclaje visual a uno discursivo.*
Pasos de Razonamiento: - Modus Ponens.

Cantidad de pasos de razonamiento: - 3 pasos.	**Caso(s) del teorema:** - No se utiliza.

Observaciones generales 1. El ejercicio no requiere aplicación del Teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia para ser resuelto. 2. La finalidad del ejercicio es que el estudiante practique la relación de proporcionalidad que se le señala como TIPS en el texto: ”*Un ángulo del centro y el arco que subtiende tienen la misma medida*”.

Actividad 2 Letra a

Enunciado

Si $\overline{AB}$ es diámetro, ¿cuál es la medida del $\angle ACB$?

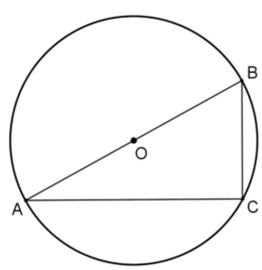


Figura 4.85

Desarrollo de la actividad esperado del estudiante

La secuencia de afirmaciones del desarrollo de la actividad será complementada con la Figura 4.86

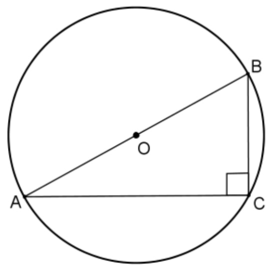


Figura 4.86

Secuencia de afirmaciones del desarrollo

1. El ΔACB, es un triángulo inscrito en la semicircunferencia de diámetro $\overline{AB}$.

2. Como $\overline{AB}$ es diámetro de la circunferencia, el triángulo ACB es rectángulo en C. Por consiguiente la $med\measuredangle ACB = 90º$

   Por lo tanto, la $med\measuredangle ACB = 90º$.

Análisis de la secuencia de afirmaciones del desarrollo del ejercicio

- **Afirmación 1:** Se extrae información sobre el ΔACB, inscrito en la semicircunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.86)

- **Afirmación 2:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.118)

TERCER ENUNCIADO

Si un triángulo (1) está inscrito en una semicircunferencia.

Entonces, el triángulo es un triángulo rectángulo en el vértice del ángulo inscrito.

Verificación

Extracción

(1) ΔACB, inscrito en la semicircunferencia de diámetro $\overline{AB}$.

El ΔACB es rectángulo en C.

PREMISA(S)

CONCLUSIÓN

Esquema 4.118: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que el triángulo ACB es rectángulo en C.*

Conocimientos específicos: - Definición de Triángulo rectángulo. (Afirmación 2)
Rol de la figura: - En las afirmaciones 1 a 2 predomina una *aprehensión discursiva* donde el sentido de la transferencia va de *un anclaje visual a uno discursivo.*
Pasos de Razonamiento: - Modus Ponens.

Cantidad de pasos de razonamiento:	**Caso(s) del teorema:**
- 1 paso.	- No es necesario.

Observaciones generales 1. El ejercicio no requiere aplicación del Teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia para ser resuelto. 2. La finalidad del ejercicio es que el estudiante practique la propiedad que se le señala como TIPS en el texto: "*Todo triángulo inscrito en una semicircunferencia es* ***rectángulo***".

Actividad 2 Letra b

Enunciado

Si $\widehat{XY} = 50^{\circ}$, ¿cuál es la medida del $\angle XZY$?

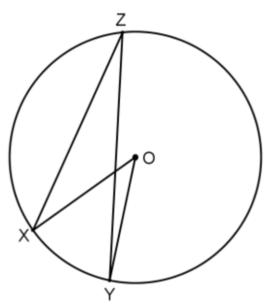


Figura 4.87

Desarrollo de la actividad esperado del estudiante

La secuencia de afirmaciones del desarrollo de la actividad será complementada con la Figura 4.88

Secuencia de afirmaciones del desarrollo

1. El $\sphericalangle XZY$ es un ángulo inscrito que subtiende al arco $\widehat{XY}$.

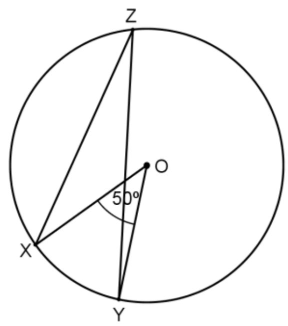


Figura 4.88

2. El $\sphericalangle XOY$ es un ángulo del centro que subtiende al arco $\overparen{XY}$.

3. La $med\sphericalangle XOY = med\,\overparen{XY}$ *

$$med\sphericalangle XOY = 50º$$

4. El $\sphericalangle XZY$ y el $\sphericalangle XOY$ subtienden el mismo arco, el arco $\overparen{XY}$.
5. Por teorema, la $med\sphericalangle XZY$ es la mitad de la $med\sphericalangle XOY$.

$$med\sphericalangle XZY = \frac{1}{2}\cdot 50º$$
$$med\sphericalangle XZY = 25º$$

Por lo tanto, la $med\sphericalangle XZY = 25º$.

Análisis de la secuencia de afirmaciones del desarrollo del ejercicio

- **Afirmación 1:** Se extrae información sobre el $\sphericalangle XZY$, inscrito en la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.88)

- **Afirmación 2:** Se extrae información sobre el $\sphericalangle XOY$, del centro de la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.88)

- **Afirmación 3:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.119)

*Paso realizado en base al marco conceptual del texto.

TERCER ENUNCIADO

Si se tiene un ángulo del centro de una circunferencia (1) y el arco que subtiende (2).

Entonces, el ángulo del centro y el arco que subtiende tienen la misma medida.

Verificación

Extracción

(1) $\sphericalangle XOY$ del centro de la circunferencia.

(2) $\sphericalangle XOY$ subtiende al arco $\overset{\frown}{XY}$.

La $med \sphericalangle XOY = 50º$

PREMISA(S)

CONCLUSIÓN

Esquema 4.119: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para determinar la medida del ángulo XOY.*

- **Afirmación 4:** Se relacionan los ángulos obtenidos en las afirmaciones 1 y 2.

- **Afirmación 5:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.120)

TERCER ENUNCIADO

Si un ángulo inscrito (1) y un ángulo del centro (2) de una circunferencia subtienden el mismo arco (3).

Entonces, la medida del ángulo inscrito es la mitad de la medida del ángulo del centro.

Verificación

Extracción

(1) $\sphericalangle XZY$, ángulo inscrito que subtiende al arco $\overset{\frown}{XY}$.

(2) $\sphericalangle XOY$, ángulo del centro que subtiende al arco $\overset{\frown}{XY}$.

(3) $\sphericalangle XZY$ y $\sphericalangle XOY$ subtienden el mismo arco, el arco $\overset{\frown}{XY}$.

$med \sphericalangle XZY = \frac{1}{2} \cdot 50º$

PREMISA(S)

CONCLUSIÓN

Esquema 4.120: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para determinar la medida del ángulo inscrito XZY.*

Conocimientos específicos: - Proporcionalidad entre las medidas de ángulos del centro y longitud de los respectivos arcos. (Afirmación 3)	
Rol de la figura: - En las afirmaciones 1 a 5 predomina una *aprehensión discursiva* donde el sentido de la transferencia va de *un anclaje visual a uno discursivo.*	
Pasos de Razonamiento: - Modus Ponens.	
Cantidad de pasos de razonamiento: - 2 pasos.	**Caso(s) del teorema:** - Segundo caso.
Observaciones generales 1. El texto presenta una confusión de concepto en el enunciado del ejercicio, pues en este se indica que la longitud del arco XY mide 50º. En el contexto del mismo se refiere a que la medida del ángulo del centro es igual a la medida del arco que subtiende.	

Actividad 2 Letra c

Enunciado

Si $\overline{PQ}$ es diámetro y $\widehat{QM} = 80^\circ$, ¿cuál es la medida de $\angle PMO$?

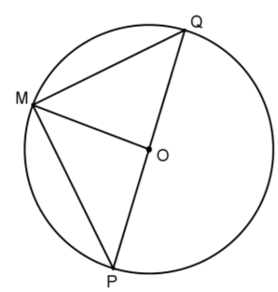


Figura 4.89

Desarrollo de la actividad esperado del estudiante

La secuencia de afirmaciones del desarrollo de la actividad será complementada con la Figura 4.90

Secuencia de afirmaciones del desarrollo

1. El ΔPMQ, es un triángulo inscrito en la semicircunferencia de diámetro $\overline{PQ}$.

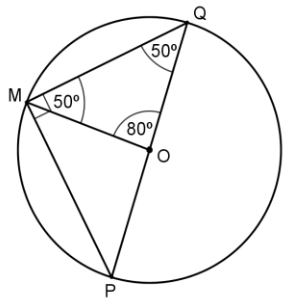


Figura 4.90

2. Como $\overline{PQ}$ es diámetro de la circunferencia, el triángulo PMQ es rectángulo en M. Por consiguiente, la $med\measuredangle PMQ = 90º$

3. Como $\overline{OM}$ y $\overline{OQ}$ son radios de la circunferencia,

$$\overline{OM} \cong \overline{OQ}$$

4. El ΔMOQ es isósceles de base $\overline{MQ}$, ya que $\overline{OM}$ y $\overline{OQ}$ son congruentes.

5. La medida del ángulo OMQ es igual a la medida del ángulo MQO.

6. La $med\measuredangle MOQ = med\widehat{MQ}$ *

$$med\measuredangle MOQ = 80º$$

7. Como la $med\measuredangle OMQ$ es igual a la $med\measuredangle MQO$,

$$2 \cdot med\measuredangle OMQ + med\measuredangle OMQ = 180º$$
$$2 \cdot med\measuredangle OMQ + 80º = 180º$$
$$med\measuredangle OMQ = 50º$$

8. Como $\measuredangle PMQ$ es recto, y su medida esta compuesta por la suma de las medidas de $\measuredangle PMQ$ y $\measuredangle OMQ$,

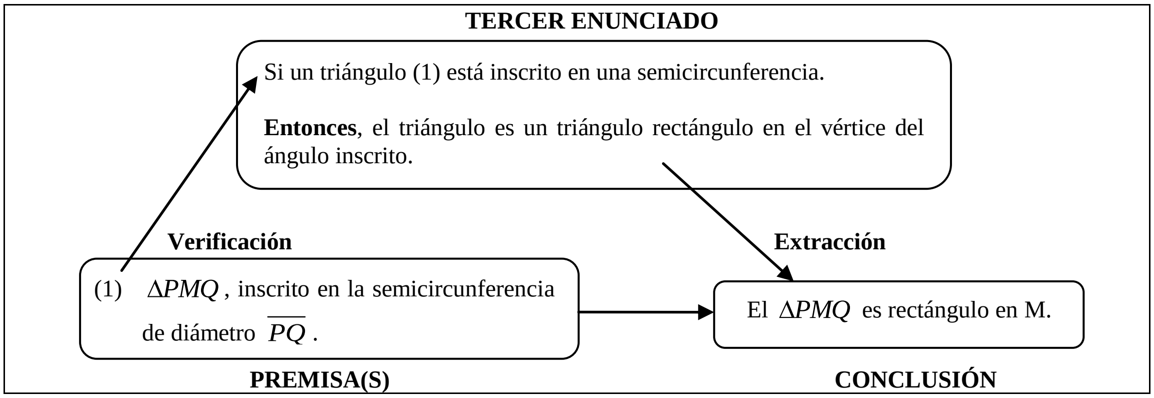
$$med\measuredangle PMO + med\measuredangle OMQ = 90º$$
$$med\measuredangle PMO + 50º = 90º$$
$$med\measuredangle PMO = 40º$$

Análisis de la secuencia de afirmaciones del desarrollo del ejercicio

- **Afirmación 1:** Se extrae información sobre el ΔPMQ, inscrito en la semicircunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.90)

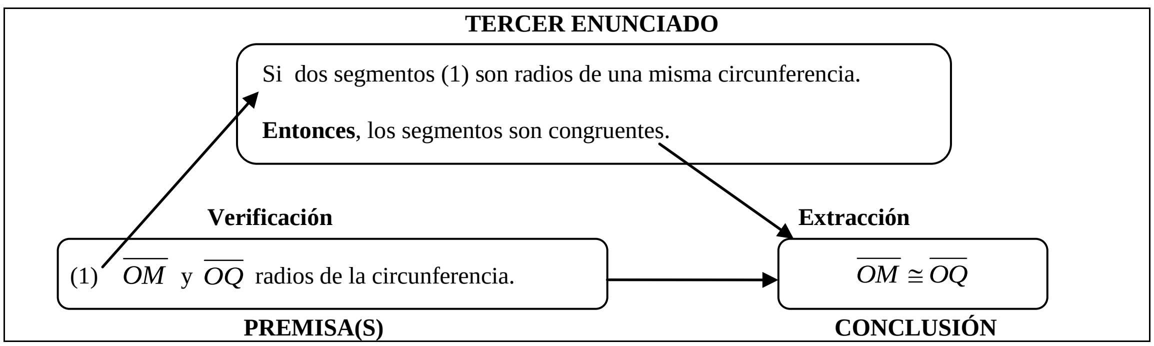
- **Afirmación 2:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.121)

*Paso realizado en base al marco conceptual del texto.



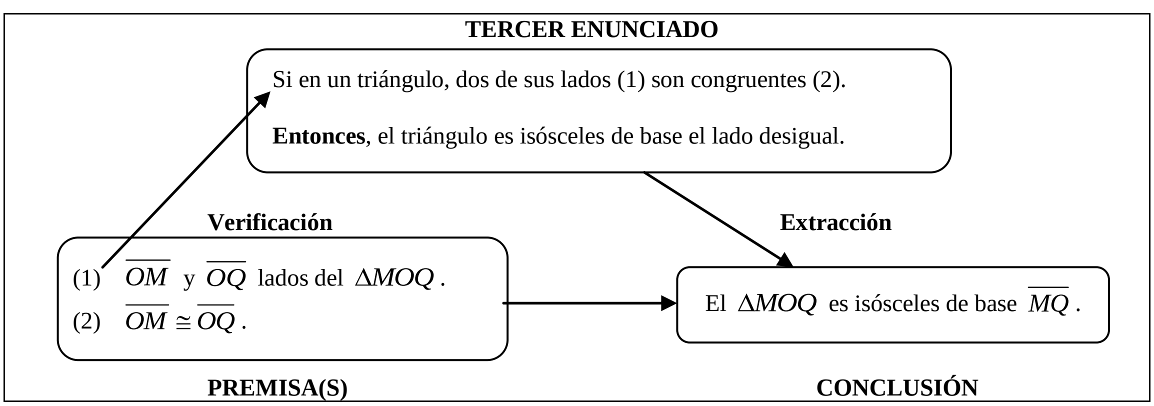
Esquema 4.121: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que el triángulo PMQ es rectángulo en M.*

- **Afirmación 3:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.122)



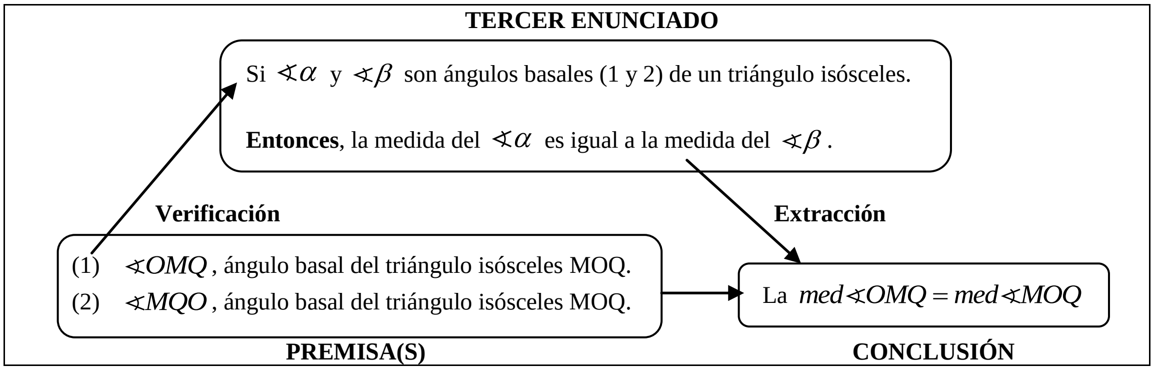
Esquema 4.122: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que los segmentos OM y OQ son congruentes.*

- **Afirmación 4:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.123)



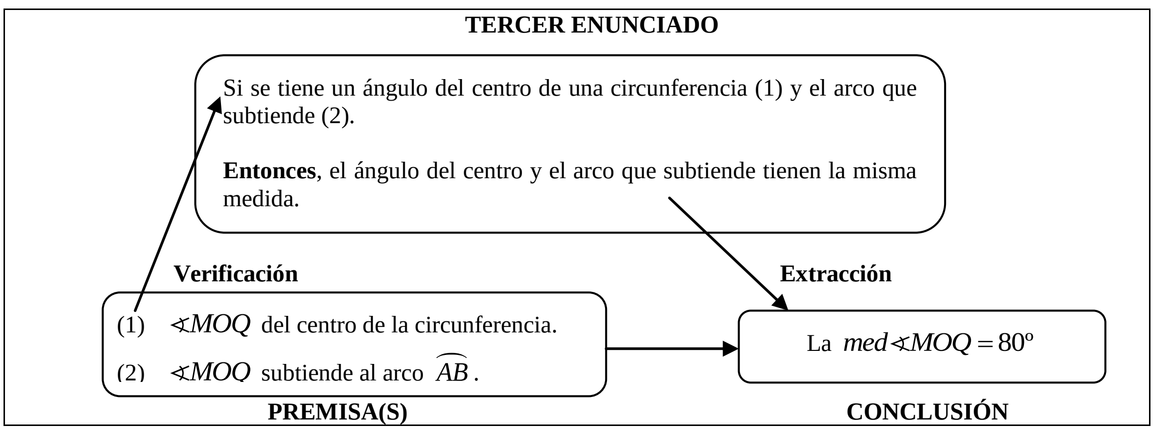
Esquema 4.123: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que el triángulo MOQ es Isósceles de base MQ.*

- **Afirmación 5:** Se realiza un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.124)



Esquema 4.124: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que los ángulos basales del triángulo isósceles MOQ son congruentes.*

- **Afirmación 6:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.125)



Esquema 4.125: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para determinar la medida del ángulo del centro MOQ.*

- **Afirmación 7:** Como la suma de las medidas de los ángulos interiores de un triàngulo es 180º, se formula la igualdad que relaciona las medidas de los ángulos interiores del ΔMOQ para determinarla medida del ángulo OMQ en términos de la medida del ángulo MQO.

- **Afirmación 8:** Como las medidas de los ángulos PMQ y OMQ suman un ángulo de 90º. Se formula la igualdad que relaciona las medidas de dichos ángulos para determinar la medida del ángulo PMO en función de la medida del ángulo OMQ.

Conocimientos específicos: - Congruencia de trazos. (Afirmación 3) - Definición de Triángulo Rectángulo (Afirmación 2) - Definición de Triángulo Isósceles. (Afirmación 4) - Propiedad sobre ángulos basales del triángulo isósceles. (Afirmación 5) - Proporcionalidad entre las medidas de ángulos del centro y longitud de los respectivos arcos. (Afirmación 6) - Propiedad: La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180º. (Afirmación 7) - La medida del todo es igual a la suma de las medidas de sus partes. (Afirmación 8)	
Rol de la figura: - En las afirmaciones 1 a 8 predomina una *aprehensión discursiva* donde el sentido de la transferencia va de *un anclaje visual a uno discursivo.*	
Pasos de Razonamiento: - Modus Ponens.	
Cantidad de pasos de razonamiento: - 5 pasos.	**Caso(s) del teorema:** - No es necesario.
Observaciones generales 1. El ejercicio no requiere aplicación del Teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia para ser resuelto. 2. La finalidad del ejercicio es que el estudiante practique la propiedad que se le señala como TIPS en el texto: ”*Todo triángulo inscrito en una semicircunferencia es **rectángulo***”. 3. El texto presenta una confusión de concepto en el enunciado del ejercicio, pues en este se indica que la longitud del arco QM mide 80º. En el contexto del mismo se refiere a que la medida del ángulo del centro es igual a la medida del arco que subtiende.	

Actividad 2 Letra d

Enunciado

Si $\widehat{EA}=15º$, ¿cuál es la medida de $\angle EDA+\angle ECA+\angle EBA$?

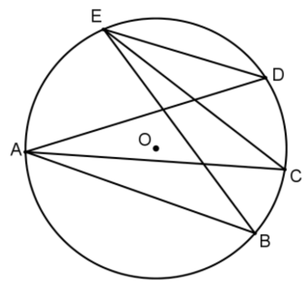


Figura 4.91

Desarrollo de la actividad esperado del estudiante

La secuencia de afirmaciones del desarrollo de la actividad será complementada con la Figura 4.92

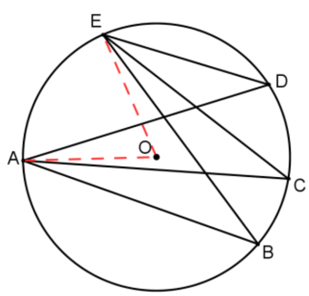


Figura 4.92

Secuencia de afirmaciones del desarrollo

1. Unir mediante una línea el punto A con el centro O, formando el segmento $\overline{AO}$. (Figura 4.92)

2. Unir mediante una línea el punto E con el centro O, formando el segmento $\overline{EO}$. (Figura 4.92)

3. El $\sphericalangle EOA$ es un ángulo del centro que subtiende al arco $\widehat{EA}$.

4. La $med\sphericalangle EOA = med\widehat{AE}$ *

$$med\sphericalangle EOA = 15º$$

5. El $\sphericalangle EDA$ es un ángulo inscrito que subtiende al arco $\widehat{EA}$.

6. El $\sphericalangle EOA$ y el $\sphericalangle EDA$ subtienden el mismo arco, el arco $\widehat{EA}$.

7. Por teorema, la $med\sphericalangle EDA$ es la mitad de la $med\sphericalangle EOA$.

$$med\sphericalangle EDA = \frac{1}{2}\cdot 15º$$
$$med\sphericalangle EDA = 7,5º$$

*Paso realizado en base al marco conceptual del texto.

8. El $\sphericalangle ECA$ es un ángulo inscrito que subtiende al arco $\overset{\frown}{EA}$.

9. El $\sphericalangle EOA$ y el $\sphericalangle ECA$ subtienden el mismo arco, el arco $\overset{\frown}{EA}$.

10. Por teorema, la $med\sphericalangle ECA$ es la mitad de la $med\sphericalangle EOA$.

$$med\sphericalangle ECA = \frac{1}{2}\cdot 15^{o}$$
$$med\sphericalangle ECA = 7,5^{o}$$

11. El $\sphericalangle EBA$ es un ángulo inscrito que subtiende al arco $\overset{\frown}{EA}$.

12. El $\sphericalangle EOA$ y el $\sphericalangle EBA$ subtienden el mismo arco, el arco $\overset{\frown}{EA}$.

13. Por teorema, la $med\sphericalangle EBA$ es la mitad de la $med\sphericalangle EOA$.

$$med\sphericalangle EBA = \frac{1}{2}\cdot 15^{o}$$
$$med\sphericalangle EBA = 7,5^{o}$$

14. La suma de las medidas de los $\sphericalangle EDA$, $\sphericalangle ECA$ y $\sphericalangle EBA$ es:

$$med\sphericalangle EDA + med\sphericalangle ECA + med\sphericalangle EBA$$
$$7,5+7,5+7,5=22,5$$

Análisis de la secuencia de afirmaciones del desarrollo del ejercicio

- **Afirmación 1:** Se construye el segmento $\overline{AO}$ para formar el $\sphericalangle AOB$, del centro de la circunferencia. (Figura 4.92)

- **Afirmación 2:** Se construye el segmento $\overline{EO}$ para formar el $\sphericalangle EOA$, del centro de la circunferencia. (Figura 4.92)

- **Afirmación 3:** Se extrae información sobre el $\sphericalangle EOA$, del centro de la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.92)

- **Afirmación 4:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.126)

TERCER ENUNCIADO

Si se tiene un ángulo del centro de una circunferencia (1) y el arco que subtiende (2).

Entonces, el ángulo del centro y el arco que subtiende tienen la misma medida.

Verificación

Extracción

(1) $\sphericalangle EOA$ del centro de la circunferencia.

(2) $\sphericalangle EOA$ subtiende al arco $\overset{\frown}{EA}$.

La $med \sphericalangle EOA = 15º$

PREMISA(S)

CONCLUSIÓN

Esquema 4.126: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para determinar la medida del ángulo EOA.*

- **Afirmación 5:** Se extrae información sobre el $\sphericalangle EDA$, inscrito en la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.92)

- **Afirmación 6:** Se relacionan los ángulos obtenidos en las afirmaciones 3 y 5.

- **Afirmación 7:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.127)

TERCER ENUNCIADO

Si un ángulo inscrito (1) y un ángulo del centro (2) de una circunferencia subtienden el mismo arco (3).

Entonces, la medida del ángulo inscrito es la mitad de la medida del ángulo del centro.

Verificación

Extracción

(1) $\sphericalangle EDA$, ángulo inscrito que subtiende al arco $\overset{\frown}{EA}$.

(2) $\sphericalangle EOA$, ángulo del centro que subtiende al arco $\overset{\frown}{EA}$.

(3) $\sphericalangle EDA$ y $\sphericalangle EOA$ subtienden el mismo arco, el arco $\overset{\frown}{EA}$.

$med \sphericalangle EDA = \frac{1}{2} \cdot 15º$

PREMISA(S)

CONCLUSIÓN

Esquema 4.127: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para determinar la medida del ángulo inscrito EDA.*

- **Afirmación 8:** Se extrae información sobre el $\sphericalangle ECA$, inscrito en la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.92)

- **Afirmación 9:** Se relacionan los ángulos obtenidos en las afirmaciones 3 y 8.

- **Afirmación 10:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.128)

TERCER ENUNCIADO

Si un ángulo inscrito (1) y un ángulo del centro (2) de una circunferencia subtienden el mismo arco (3).

Entonces, la medida del ángulo inscrito es la mitad de la medida del ángulo del centro.

Verificación **Extracción**

(1) $\sphericalangle ECA$, ángulo inscrito que subtiende al arco $\overset{\frown}{EA}$.

(2) $\sphericalangle EOA$, ángulo del centro que subtiende al arco $\overset{\frown}{EA}$.

(3) $\sphericalangle ECA$ y $\sphericalangle EOA$ subtienden el mismo arco, el arco $\overset{\frown}{EA}$.

$$med \sphericalangle ECA = \frac{1}{2} \cdot 15º$$

PREMISA(S) **CONCLUSIÓN**

Esquema 4.128: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para determinar la medida del ángulo inscrito ECA.*

- **Afirmación 11:** Se extrae información sobre el $\sphericalangle EBA$, inscrito en la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.92)

- **Afirmación 12:** Se relacionan los ángulos obtenidos en las afirmaciones 3 y 11.

- **Afirmación 13:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.129)

TERCER ENUNCIADO

Si un ángulo inscrito (1) y un ángulo del centro (2) de una circunferencia subtienden el mismo arco (3).

Entonces, la medida del ángulo inscrito es la mitad de la medida del ángulo del centro.

Verificación

Extracción

(1) $\sphericalangle EBA$, ángulo inscrito que subtiende al arco $\widehat{EA}$.

(2) $\sphericalangle EOA$, ángulo del centro que subtiende al arco $\widehat{EA}$.

(3) $\sphericalangle EBA$ y $\sphericalangle EOA$ subtienden el mismo arco, el arco $\widehat{EA}$.

$$med\sphericalangle EBA = \frac{1}{2}\cdot 15^{\circ}$$

PREMISA(S)

CONCLUSIÓN

Esquema 4.129: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para determinar la medida del ángulo inscrito EBA.*

- **Afirmación 14:** Se calcula la suma de las medidas de los ángulos solicitada en el enunciado del ejercicio.

<table>
<tr><td colspan="2">Conocimientos específicos:

- No son necesarios.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Rol de la figura:

- En las afirmaciones 1 2 se presenta una aprehensión operativa de cambio figural.
- En las afirmaciones 3 a 14 predomina una aprehensión discursiva donde el sentido de la transferencia va de un anclaje visual a uno discursivo.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Pasos de Razonamiento:

- Modus Ponens.</td></tr>
<tr><td>Cantidad de pasos de razonamiento:

- 4 pasos.</td><td>Caso(s) del teorema:

- Primer y segundo caso.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Observaciones generales

1. La dificultad del ejercicio radica en que el estudiante debe construir el ángulo del centro de la circunferencia para posteriormente aplicar el teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia.

2. Se realiza un mismo paso de razonamiento tres veces.

3. El texto presenta una confusión de notación en el enunciado del ejercicio, pues, en este se indica que la longitud del arco EA mide 15º. En el contexto del mismo se refiere a que la medida del ángulo del centro es igual a la medida del arco que subtiende.</td></tr>
</table>

Actividad 2 Letra e

Enunciado

¿Cuál es la medida del $\angle HOK$?

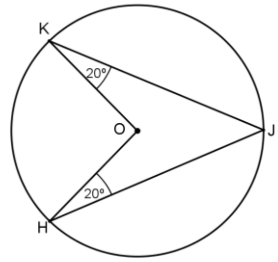


Figura 4.93

Desarrollo de la actividad esperado del estudiante

La secuencia de afirmaciones del desarrollo de la actividad será complementada con la Figura 4.94

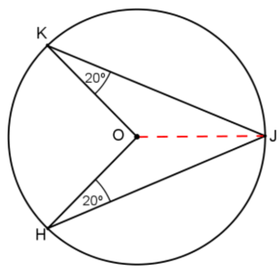


Figura 4.94

Secuencia de afirmaciones del desarrollo

1. Unir mediante una línea el punto J con el centro O, formando el segmento $\overline{OJ}$. (Figura 4.94)

2. Como $\overline{OJ}$, $\overline{OH}$ y $\overline{OK}$ son radios de la circunferencia,

$$\overline{OJ} \cong \overline{OH} \cong \overline{OK}$$

3. El ΔKOJ es isósceles de base $\overline{JK}$, ya que $\overline{OJ}$ y $\overline{OK}$ son congruentes.

4. El ΔHOJ es isósceles de base $\overline{JH}$, ya que $\overline{OJ}$ y $\overline{OH}$ son congruentes.

5. La medida del ángulo OJK es igual a la medida del ángulo OKJ.

$$med\sphericalangle OJK = med\sphericalangle OKJ = 20º$$

6. La medida del ángulo OJH es igual a la medida del ángulo OHJ.

$$med\sphericalangle OJH = med\sphericalangle OHJ = 20º$$

7. La $med\sphericalangle HJK$ es igual a la suma de las medidas de los ángulos OJK y OHJ.

$$med\sphericalangle HJK = med\sphericalangle OJK + med\sphericalangle OJH$$
$$med\sphericalangle HJK = 20º + 20º$$

$$med\sphericalangle HJK = 40^{o}$$

8. El $\sphericalangle HJK$ es un ángulo inscrito que subtiende al arco $\overset{\frown}{KH}$.
9. El $\sphericalangle HOK$ es un ángulo del centro que subtiende al arco $\overset{\frown}{KH}$.
10. El $\sphericalangle HJK$ y el $\sphericalangle HOK$ subtienden el mismo arco, el arco $\overset{\frown}{KH}$.
11. Por teorema, la $med\sphericalangle HOK$ es el doble de la $med\sphericalangle HJK$.

$$med\sphericalangle HOK = 2 \cdot 40^{o}$$
$$med\sphericalangle HOK = 80^{o}$$

Por lo tanto, la $med\sphericalangle HOK = 80^{o}$.

Análisis de la secuencia de afirmaciones de la demostración

- **Afirmación 1:** Se construye el segmento $\overline{OJ}$ para formar los triángulos KOJ y HOJ. (Figura 4.94)

- **Afirmación 2:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.130)

TERCER ENUNCIADO

Si dos segmentos (1) son radios de una misma circunferencia.

Entonces, los segmentos son congruentes.

Verificación

Extracción

(1) $\overline{OH}$, $\overline{OJ}$ y $\overline{OK}$ radios de la circunferencia.

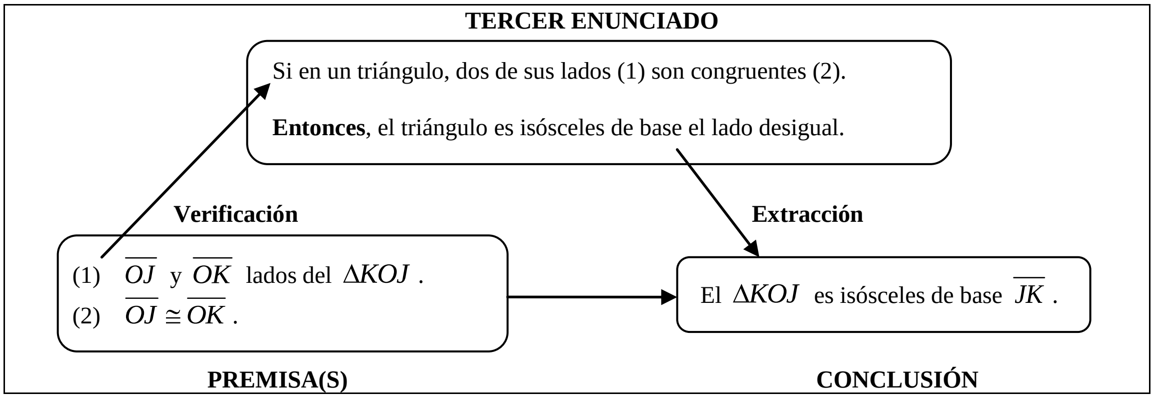
$\overline{OH} \cong \overline{OJ} \cong \overline{OK}$

PREMISA(S)

CONCLUSIÓN

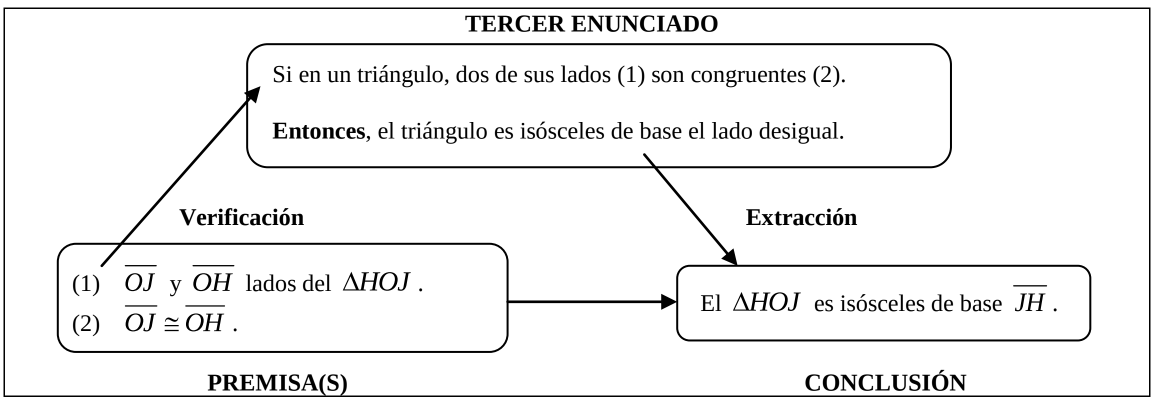
Esquema 4.130: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que los segmentos OH, OJ y OK son congruentes.*

- **Afirmación 3:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.131)



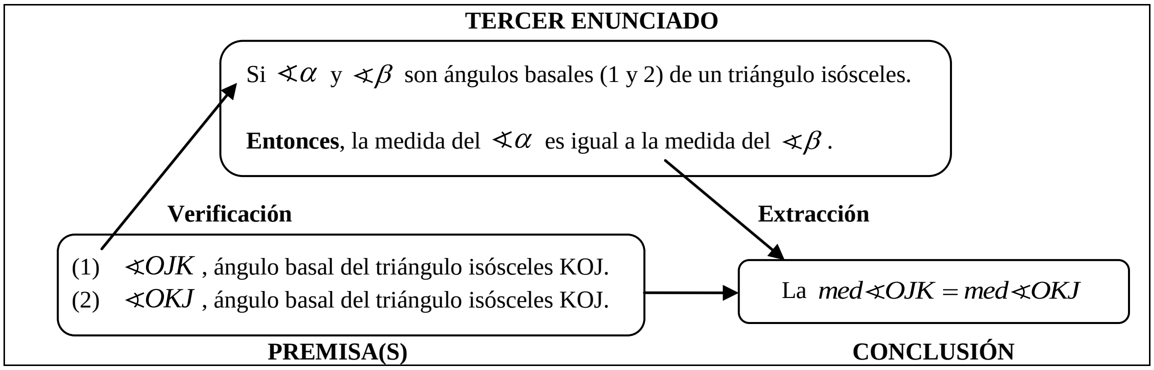
Esquema 4.131: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que el triángulo KOJ es Isósceles de base JK.*

- **Afirmación 4:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.132)



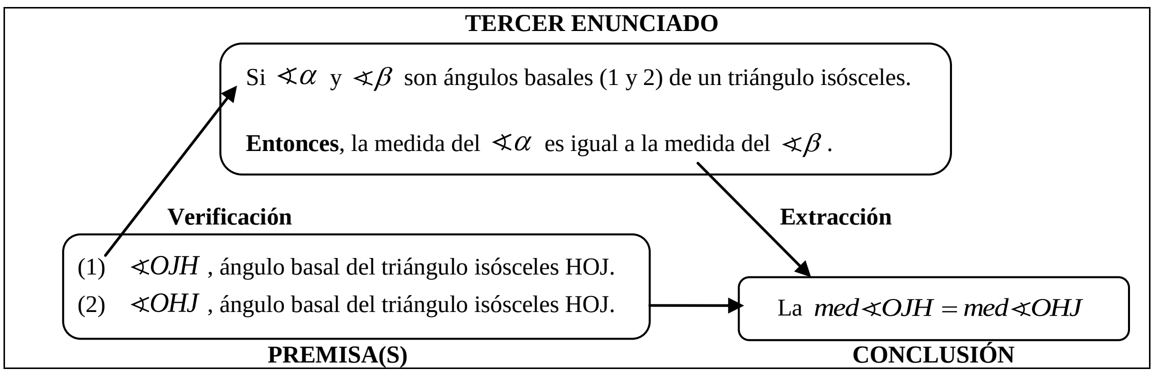
Esquema 4.132: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que el triángulo HOJ es Isósceles de base JH.*

- **Afirmación 5:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.133)



Esquema 4.133: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que los ángulos basales del triángulo isósceles KOJ son congruentes.*

- **Afirmación 6:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.134)



Esquema 4.134: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que los ángulos basales del triángulo isósceles HOJ son congruentes.*

- **Afirmación 7:** Se expresa la medida del ángulo HJK en términos de las medidas de los ángulos OJK y OJH.

- **Afirmación 8:** Se extrae información sobre el $\sphericalangle HJK$, inscrito en la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.94)

- **Afirmación 9:** Se extrae información sobre el $\sphericalangle HOK$, del centro de la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.94)

- **Afirmación 10:** Se relacionan los ángulos obtenidos en las afirmaciones 8 y 9.

- **Afirmación 11:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.135)

TERCER ENUNCIADO

Si un ángulo inscrito (1) y un ángulo del centro (2) de una circunferencia subtienden el mismo arco (3).

Entonces, la medida del ángulo del centro es el doble de la medida del ángulo inscrito.

Verificación **Extracción**

(1) $\sphericalangle HJK$, ángulo inscrito que subtiende al arco $\overset{\frown}{KH}$.

(2) $\sphericalangle HOK$, ángulo del centro que subtiende al arco $\overset{\frown}{KH}$.

(3) $\sphericalangle HJK$ y $\sphericalangle HOK$ subtienden el mismo arco, el arco $\overset{\frown}{KH}$.

$med \sphericalangle HOK = 2 \cdot 40º$

PREMISA(S) **CONCLUSIÓN**

Esquema 4.135: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para determinar la medida del ángulo del centro HOK.*

Conocimientos específicos:

- Congruencia de trazos. (Afirmación 2)
- Definición de Triángulo Isósceles. (Afirmaciones 3 y 4)
- Propiedad sobre ángulos basales del triángulo isósceles. (Afirmaciones 5 y 6)
- La medida del todo es igual a la suma de las medidas de sus partes. (Afirmación 7)

Rol de la figura:

- En la afirmación 1 se presenta una *aprehensión operativa de cambio figural*.
- En las afirmaciones 2 a 11 predomina una *aprehensión discursiva* donde el sentido de la transferencia va de *un anclaje visual a uno discursivo.*

Pasos de Razonamiento:

- Modus Ponens.

Cantidad de pasos de razonamiento:	**Caso(s) del teorema:**
- 6 pasos.	- Primer caso.

Observaciones generales

1. El estudiante debe descomponer la figura en triángulos isósceles para posteriormente aplicar el teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia.

Actividad 2 Letra f

Enunciado

Si $\angle ACB = 30º$ y $\overset{\frown}{AB}$ es la mitad de $\overset{\frown}{DA}$, ¿cuál es la medida del $\angle DEA$?

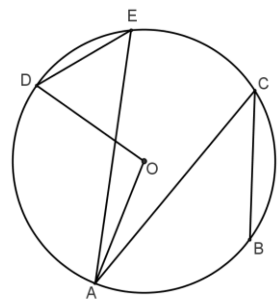


Figura 4.95

Desarrollo de la actividad esperado del estudiante

La secuencia de afirmaciones del desarrollo de la actividad será complementada con la Figura 4.96

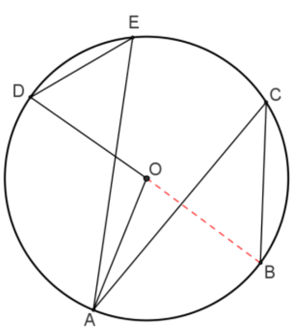


Figura 4.96

Secuencia de afirmaciones del desarrollo

1. Unir mediante una línea el punto B con el centro O, formando el segmento $\overline{BO}$. (Figura 4.96)

2. El $\sphericalangle ACB$ es un ángulo inscrito que subtiende al arco $\overset{\frown}{AB}$.

3. El $\sphericalangle AOB$ es un ángulo del centro que subtiende al arco $\overset{\frown}{AB}$.

4. El $\sphericalangle ACB$ y el $\sphericalangle AOB$ subtienden el mismo arco, el arco $\overset{\frown}{AB}$.

5. Por teorema, la $med\sphericalangle AOB$ es el doble de la $med\sphericalangle ACB$.

$$med\sphericalangle AOB = 2 \cdot med\sphericalangle ACB$$
$$med\sphericalangle AOB = 2 \cdot 30º$$
$$med\sphericalangle AOB = 60º$$

6. El $\sphericalangle DOA$ es un ángulo del centro que subtiende al arco $\overset{\frown}{DA}$.

7. Como $\overset{\frown}{AB}$ es la mitad de $\overset{\frown}{DA}$, la

$$med\sphericalangle AOB = \frac{1}{2} med\sphericalangle DOA$$

$$120^{\circ} = med\sphericalangle DOA$$

8. El $\sphericalangle DEA$ es un ángulo inscrito que subtiende al arco $\overset{\frown}{DA}$.
9. El $\sphericalangle DOA$ y el $\sphericalangle DEA$ subtienden el mismo arco, el arco $\overset{\frown}{DA}$.
10. Por teorema, la $\sphericalangle DEA$ es la mitad de la medida del $\sphericalangle DOA$.

$$med\sphericalangle DEA = \frac{1}{2} \cdot med\sphericalangle DOA$$
$$med\sphericalangle DEA = \frac{1}{2} \cdot 120^{\circ}$$
$$med\sphericalangle DEA = 60^{\circ}$$

Por lo tanto la $med\sphericalangle DFA = 60^{\circ}$.

Análisis de la secuencia de afirmaciones del desarrollo del ejercicio

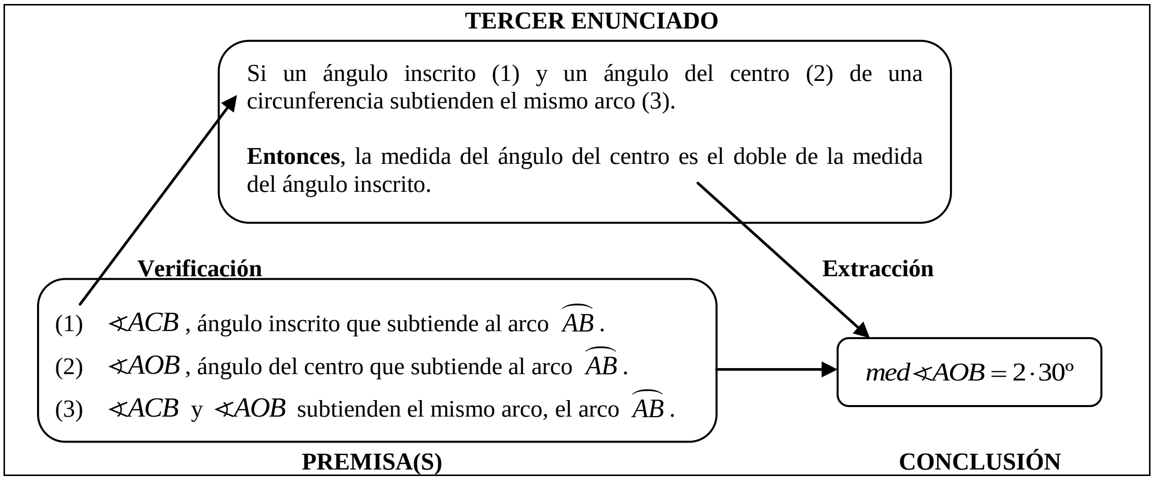
- **Afirmación 1:** Se construye el segmento $\overline{BO}$ para formar el $\sphericalangle AOB$, del centro de la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.96)

- **Afirmación 2:** Se extrae información sobre el $\sphericalangle ACB$, inscrito en la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.96)

- **Afirmación 3:** Se extrae información sobre el $\sphericalangle AOB$, del centro de la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.96)

- **Afirmación 4:** Se relacionan los ángulos obtenidos en las afirmaciones 2 y 3.

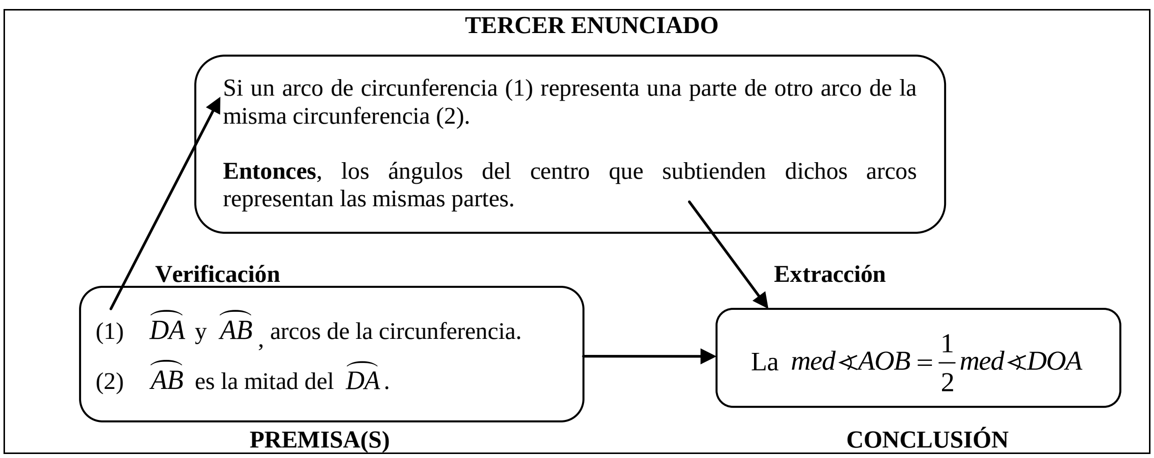
- **Afirmación 5:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.136)



Esquema 4.136: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para determinar la medida del ángulo del centro AOB.*

- **Afirmación 6:** Se extrae información sobre el $\measuredangle DOA$, del centro de la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.96)

- **Afirmación 7:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.137)



Esquema 4.137: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para determinar la medida del ángulo del centro DOA.*

- **Afirmación 8:** Se extrae información sobre el $\measuredangle DEA$, inscrito en la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.96)

- **Afirmación 9:** Se relacionan los ángulos obtenidos en las afirmaciones 6 y 8.

- **Afirmación 10:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.138)

TERCER ENUNCIADO

Si un ángulo inscrito (1) y un ángulo del centro (2) de una circunferencia subtienden el mismo arco (3).

Entonces, la medida del ángulo inscrito es la mitad de la medida del ángulo del centro.

Verificación **Extracción**

(1) $\sphericalangle DEA$, ángulo inscrito que subtiende al arco $\overset{\frown}{DA}$.

(2) $\sphericalangle DOA$, ángulo del centro que subtiende al arco $\overset{\frown}{DA}$.

(3) $\sphericalangle DEA$ y $\sphericalangle DOA$ subtienden el mismo arco, el arco $\overset{\frown}{DA}$.

$$med \sphericalangle DEA = \frac{1}{2} \cdot 120^{o}$$

PREMISA(S) **CONCLUSIÓN**

Esquema 4.138: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para determinar la medida del ángulo inscrito DEA.*

<table>
<tr><td colspan="2">Conocimientos específicos:

- Proporcionalidad entre las medidas de ángulos del centro y longitud de los respectivos arcos. (Afirmación 7)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Rol de la figura:

- En la afirmación 1 se presenta una aprehensión operativa de cambio figural.
- En las afirmaciones 2 a 12 predomina una aprehensión discursiva donde el sentido de la transferencia va de un anclaje visual a uno discursivo.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Pasos de Razonamiento:

- Modus Ponens.</td></tr>
<tr><td>Cantidad de pasos de razonamiento:

- 3 pasos.</td><td>Caso(s) del teorema:

- Segundo caso.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Observaciones generales

1. El estudiante debe construir el ángulo del centro de la circunferencia para posteriormente aplicar el teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia. Además, se ha de aplicar la propiedad que enuncia el texto “Un ángulo del centro y el arco que subtiende tienen la misma medida”.</td></tr>
</table>

Actividad 2 Letra g

Enunciado

Si $\widehat{KM} = 100º$, ¿cuál es la medida del $\angle OMN$?

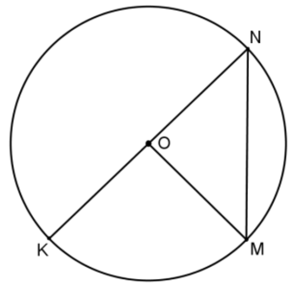


Figura 4.97

Desarrollo de la actividad esperado del estudiante

La secuencia de afirmaciones del desarrollo de la actividad será complementada con la Figura 4.98

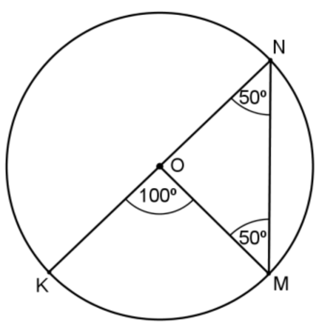


Figura 4.98

Secuencia de afirmaciones del desarrollo

1. El $\sphericalangle KOM$ es un ángulo del centro que subtiende al arco $\widehat{KM}$.

2. La $med\sphericalangle KOM = med\,\widehat{KM}$.*

$$med\sphericalangle KOM = 100º .$$

3. El $\sphericalangle KNM$ es un ángulo inscrito que subtiende al arco $\widehat{KM}$.

4. El $\sphericalangle KOM$ y el $\sphericalangle KNM$ subtienden el mismo arco, el arco $\widehat{KM}$.

5. Por teorema, la $med\sphericalangle KNM$ es mitad de la $med\sphericalangle KOM$.

$$med\sphericalangle KNM = \frac{1}{2}\cdot 100º$$
$$med\sphericalangle KNM = 50º$$

6. Como $\overline{OM}$ y $\overline{ON}$ son radios de la circunferencia,

$$\overline{OM} \cong \overline{ON}$$

7. El ΔMON es isósceles de base $\overline{MN}$, ya que $\overline{ON}$ y $\overline{OM}$ son congruentes.

*Paso realizado en base al marco conceptual del texto.

8. La medida del $\sphericalangle ONM$ es igual a la medida del $\sphericalangle OMN$.

$$med\sphericalangle OMN = med\sphericalangle ONM$$
$$med\sphericalangle OMN = 50^{\circ}$$

Por lo tanto, la $med\sphericalangle OMN = 50^{\circ}$.

Análisis de la secuencia de afirmaciones del desarrollo del ejercicio

- **Afirmación 1:** Se extrae información sobre el $\sphericalangle KOM$, del centro de la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.98)

- **Afirmación 2:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.139)

TERCER ENUNCIADO

Si se tiene un ángulo del centro de una circunferencia (1) y el arco que subtiende (2).

Entonces, el ángulo del centro y el arco que subtiende tienen la misma medida.

Verificación

Extracción

(1) $\sphericalangle KOM$ del centro de la circunferencia.

(2) $\sphericalangle KOM$ subtiende al arco $\overset{\frown}{KM}$.

La $med\sphericalangle KOM = 100^{\circ}$

PREMISA(S)

CONCLUSIÓN

Esquema 4.139: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para determinar la medida del ángulo KOM.*

- **Afirmación 3:** Se extrae información sobre el $\sphericalangle KNM$, inscrito en la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.98)

- **Afirmación 4:** Se relacionan los ángulos obtenidos en las afirmaciones 1 y 3.

- **Afirmación 5:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.140)

TERCER ENUNCIADO

Si un ángulo inscrito (1) y un ángulo del centro (2) de una circunferencia subtienden el mismo arco (3).

Entonces, la medida del ángulo inscrito es la mitad de la medida del ángulo del centro.

Verificación

Extracción

(1) $\measuredangle KNM$, ángulo inscrito que subtiende al arco $\overset{\frown}{KM}$.

(2) $\measuredangle KOM$, ángulo del centro que subtiende al arco $\overset{\frown}{KM}$.

(3) $\measuredangle KNM$ y $\measuredangle KOM$ subtienden el mismo arco, el arco $\overset{\frown}{KM}$.

$$med\measuredangle KNM = \frac{1}{2}\cdot 100º$$

PREMISA(S) **CONCLUSIÓN**

Esquema 4.140: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para determinar la medida del ángulo inscrito KNM.*

- **Afirmación 6:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.141)

TERCER ENUNCIADO

Si dos o más segmentos (1) son radios de una misma circunferencia.

Entonces, los segmentos son congruentes.

Verificación

Extracción

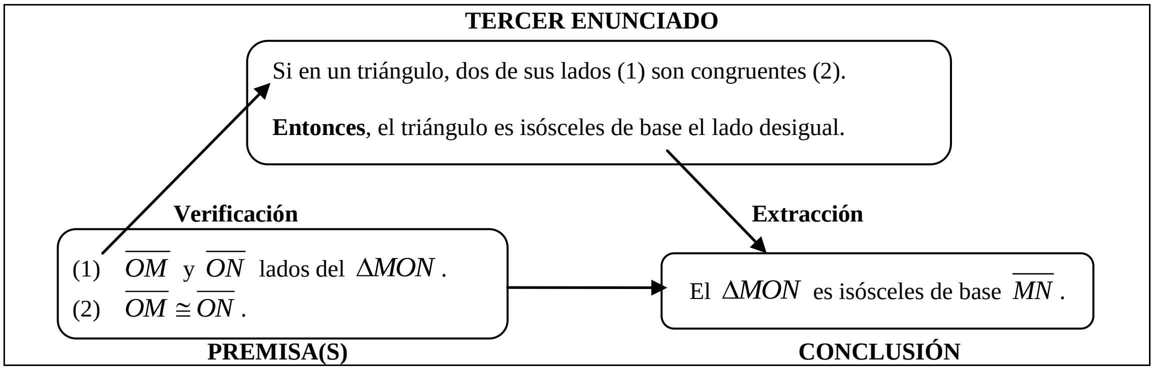
(1) $\overline{OM}$ y $\overline{ON}$ radios de la circunferencia.

$$\overline{OM} \cong \overline{ON}$$

PREMISA(S) **CONCLUSIÓN**

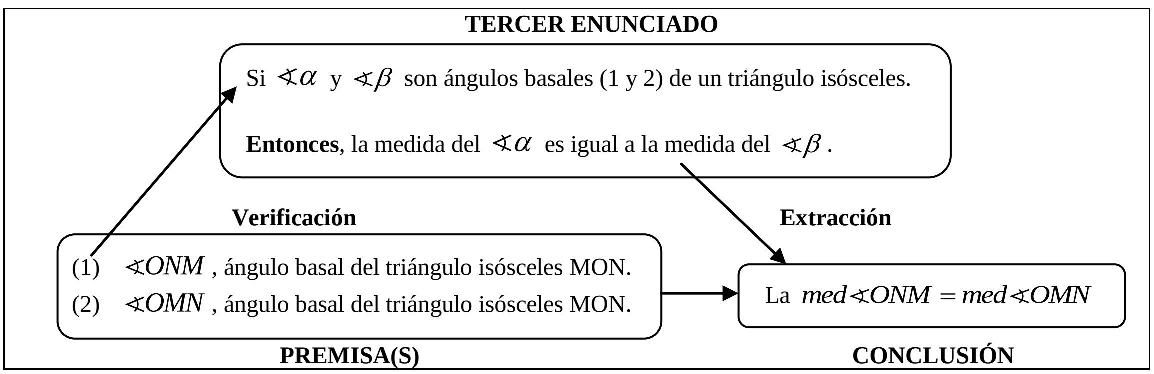
Esquema 4.141: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que los segmentos OM y ON son congruentes.*

- **Afirmación 7:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.142)



Esquema 4.142: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que el triángulo MON es Isósceles de base MN.*

- **Afirmación 8:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.143)



Esquema 4.143: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que los ángulos basales del triángulo isósceles MON son congruentes.*

Conocimientos específicos: - Congruencia de trazos. (Afirmación 6) - Definición de Triángulo Isósceles. (Afirmación 7) - Propiedad sobre ángulos basales del triángulo isósceles. (Afirmación 8)	
Rol de la figura: - En las afirmaciones 1 a 8 predomina una *aprehensión discursiva* donde el sentido de la transferencia va de *un anclaje visual a uno discursivo.*	
Pasos de Razonamiento: - Modus Ponens.	
Cantidad de pasos de razonamiento: - 5 pasos.	**Caso(s) del teorema:** - Tercer caso.
Observaciones generales 1. La dificultad del ejercicio radica en que el estudiante debe reconocer el triángulo isósceles en la figura para determinar la medida del ángulo solicitado.	

Actividad 2 Letra h

Enunciado

Si $\angle ABD = 40º$ y $\overset{\frown}{AC}$ es la cuarta parte de $\overset{\frown}{AD}$, ¿cuál es la medida del $\angle CED$?

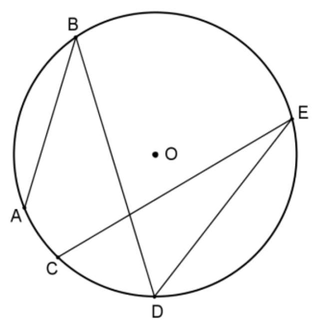


Figura 4.99

Desarrollo de la actividad esperado del estudiante

La secuencia de afirmaciones del desarrollo de la actividad será complementada con la Figura 4.100

Secuencia de afirmaciones del desarrollo

1. Unir mediante una línea el punto A con el centro O, formando el segmento $\overline{AO}$. (Figura 4.100)

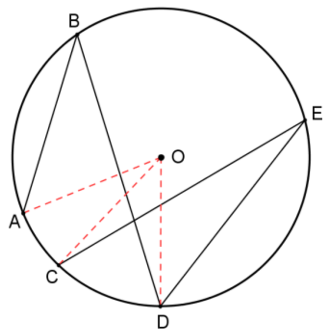


Figura 4.100

2. Unir mediante una línea el punto D con el centro O, formando el segmento $\overline{DO}$. (Figura 4.100)

3. El $\sphericalangle AOD$ es un ángulo del centro que subtiende al arco $\overset{\frown}{AD}$.

4. El $\sphericalangle ABD$ es un ángulo inscrito que subtiende al arco $\overset{\frown}{AD}$.

5. El $\sphericalangle AOD$ y el $\sphericalangle ABD$ subtienden el mismo arco, el arco $\overset{\frown}{AD}$.

6. Por teorema, la $med\sphericalangle AOD$ es el doble de la $med\sphericalangle ABD$.

$$med\sphericalangle AOD = 2\cdot 40^{o}$$
$$med\sphericalangle AOD = 80^{o}$$

7. Unir mediante una línea el punto C con el centro O, formando el segmento $\overline{CO}$. (Figura 2.29)

8. El $\sphericalangle AOC$ es un ángulo del centro que subtiende al arco $\overset{\frown}{AC}$.

9. Como $\overset{\frown}{AC}$ es la cuarta parte de $\overset{\frown}{AD}$, la

$$med\sphericalangle AOC = \frac{1}{4} med\sphericalangle AOD$$
$$med\sphericalangle AOC = 20^{o}$$

10. El $\sphericalangle COD$ es un ángulo del centro que subtiende al arco $\overset{\frown}{CD}$.

11. La $med\sphericalangle COD = med\sphericalangle AOD - med\sphericalangle AOC$

$$med\sphericalangle COD = 80^{o} - 20^{o}$$
$$med\sphericalangle COD = 60^{o}$$

12. El $\sphericalangle CED$ es un ángulo inscrito que subtiende al arco $\overset{\frown}{CD}$.

13. El $\sphericalangle CED$ y el $\sphericalangle COD$ subtienden el mismo arco, el arco $\overset{\frown}{CD}$.

14. Por teorema, la $med\sphericalangle CED$ es mitad de la $med\sphericalangle COD$.

$$med\sphericalangle CED = \frac{1}{2}\cdot 60^{o}$$

$$med\measuredangle CED = 30º$$

Por lo tanto la $med\measuredangle CED = 30º$.

Análisis de la secuencia de afirmaciones del desarrollo del ejercicio

- **Afirmación 1:** Se construye el segmento $\overline{AO}$ para formar el $\measuredangle AOD$, el centro de la circunferencia. (Figura 4.100)

- **Afirmación 2:** Se construye el segmento $\overline{DO}$ para formar el $\measuredangle AOD$, del centro de la circunferencia. (Figura 4.100)

- **Afirmación 3:** Se extrae información sobre el $\measuredangle AOD$, del centro de la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.100)

- **Afirmación 4:** Se extrae información sobre el $\measuredangle ABD$, inscrito en la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.100)

- **Afirmación 5:** Se relacionan los ángulos obtenidos en las afirmaciones 3 y 4.

- **Afirmación 6:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.144)

TERCER ENUNCIADO

Si un ángulo inscrito (1) y un ángulo del centro (2) de una circunferencia subtienden el mismo arco (3).

Entonces, la medida del ángulo del centro es el doble de la medida del ángulo inscrito.

Verificación

Extracción

(1) $\measuredangle ABD$, ángulo inscrito que subtiende al arco $\overset{\frown}{AD}$.

(2) $\measuredangle AOD$, ángulo del centro que subtiende al arco $\overset{\frown}{AD}$.

(3) $\measuredangle ABD$ y $\measuredangle AOD$ subtienden el mismo arco, el arco $\overset{\frown}{AD}$.

$med\measuredangle AOD = 2 \cdot 40^{o}$

PREMISA(S) **CONCLUSIÓN**

Esquema 4.144: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para determinar la medida del ángulo del centro AOD.*

- **Afirmación 7:** Se construye el segmento $\overline{CO}$ para formar el $\measuredangle COD$, del centro de la circunferencia. (Figura 4.100)

- **Afirmación 8:** Se extrae información sobre el $\measuredangle AOC$, del centro de la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.100)

- **Afirmación 9:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.145)

TERCER ENUNCIADO

Si un arco de circunferencia (1) representa una parte de otro arco de la misma circunferencia (2).

Entonces, los ángulos del centro que subtienden dichos arcos representan las mismas partes.

Verificación

Extracción

(1) $\overset{\frown}{AC}$ y $\overset{\frown}{AD}$, arcos de la circunferencia.

(2) $\overset{\frown}{AC}$ es la cuarta parte del $\overset{\frown}{AD}$.

La $med\measuredangle AOC = \frac{1}{4} med\measuredangle AOD$

PREMISA(S) **CONCLUSIÓN**

Esquema 4.145: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para determinar la medida del ángulo del centro AOC.*

- **Afirmación 10:** Se extrae información sobre el $\sphericalangle COD$, del centro de la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.100)

- **Afirmación 11:** Se determina la medida del ángulo del centro COD a partir de la información obtenida en las afirmaciones 6 y 9.

- **Afirmación 12:** Se extrae información sobre el $\sphericalangle CED$, inscrito en la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.100)

- **Afirmación 13:** Se relacionan los ángulos obtenidos en las afirmaciones 11 y 13.

- **Afirmación 14:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.146)

TERCER ENUNCIADO

Si un ángulo inscrito (1) y un ángulo del centro (2) de una circunferencia subtienden el mismo arco (3).

Entonces, la medida del ángulo inscrito es la mitad de la medida del ángulo del centro.

Verificación

Extracción

(1) $\sphericalangle CED$, ángulo inscrito que subtiende al arco $\overset{\frown}{CD}$.

(2) $\sphericalangle COD$, ángulo del centro que subtiende al arco $\overset{\frown}{CD}$.

(3) $\sphericalangle CED$ y $\sphericalangle COD$ subtienden el mismo arco, el arco $\overset{\frown}{CD}$.

$$med\sphericalangle CED = \frac{1}{2}\cdot 60^{o}$$

PREMISA(S)

CONCLUSIÓN

Esquema 4.146: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para determinar la medida del ángulo inscrito CED.*

Conocimientos específicos: - Proporcionalidad entre las medidas de ángulos del centro y longitud de los respectivos arcos. (Afirmación 9) - La medida del todo es igual a la suma de las medidas de sus partes. (Afirmación 11).	
Rol de la figura: - En las afirmaciones 1, 2 y 7 se presenta una *aprehensión operativa de cambio figural*. - En las afirmaciones 3 a 6 y 8 a 14 predomina una *aprehensión discursiva* donde el sentido de la transferencia va de *un anclaje visual a uno discursivo.*	
Pasos de Razonamiento: - Modus Ponens.	
Cantidad de pasos de razonamiento: - 3 pasos.	**Caso(s) del teorema:** - Segundo caso.
Observaciones generales 1. El estudiante debe construir ángulos del centro para aplicar el teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia.	

A continuación, en la tabla 4.17, se detalla la cantidad de pasos de razonamiento, tipos de razonamiento y caso del teorema que se deben utilizar para el desarrollo de cada una de las actividades propuestas del texto.

EJERCICIOS	CASO DEL TEOREMA	CANTIDAD DE PASOS DE RAZONAMIENTO	TIPO DE PASO DE RAZONAMIENTO
1a	No es necesario	4 pasos	Modus Ponens
1b	No es necesario	3 pasos	Modus Ponens
2a	No es necesario	1 paso	Modus Ponens
2b	Caso 2	2 pasos	Modus Ponens
2c	No es necesario	5 pasos	Modus Ponens
2d	Caso 1 y 2	4 pasos	Modus Ponens
2e	Caso 1	6 pasos	Modus Ponens
2f	Caso 2	3 pasos	Modus Ponens
2g	Caso 3	5 pasos	Modus Ponens
2h	Caso 2	3 pasos	Modus Ponens

Tabla 4.17: Cantidad de pasos de razonamientos y tipos de pasos de razonamientos que justifican las afirmaciones del desarrollo de las actividades propuestas en el texto Ediciones SM.

Según la tabla 4.17 el tipo de paso de razonamiento es de Tipo modus ponens. Además las actividades no están ordenadas según la cantidad de pasos de razonamiento. La mayoría de estas presenta cuatro o más pasos de razonamiento en el desarrollo, pese a que sólo seis de los diez ejercicios requieren de una aplicación del teorema de ángulo inscrito y del centro de una circunferencia para ser resuelto.

Solamente tres actividades de las diez que propone el texto no requieren de conocimientos específicos para ser resueltas por el alumno. Lo que conlleva a una mayor cantidad de pasos de razonamiento en las restantes.

Es importante destacar, que el texto presenta una confusión de notación, pues en este se señala la medida de un arco en grados. En el contexto del mismo se refiere a la propiedad que este menciona como tips: "*la medida del ángulo del centro es igual a la del arco que subtiende*".

Respecto al rol de la figura, la tabla 4.18, muestra un resumen de la cantidad de afirmaciones donde se identifica la Aprehensión Operativa y Discursiva en el desarrollo de las actividades.

EJERCICIO	APREHENSION DISCURSIVA	APREHENSION OPERATIVA
1a	6 Afirmaciones	0 Afirmaciones
1b	6 Afirmaciones	0 Afirmaciones
2a	2 Afirmaciones	0 Afirmaciones
2b	5 Afirmaciones	0 Afirmaciones
2c	8 Afirmaciones	0 Afirmaciones
2d	11 Afirmaciones	2 Afirmaciones
2e	10 Afirmaciones	1 Afirmaciones
2f	9 Afirmaciones	1 Afirmaciones
2g	8 Afirmaciones	0 Afirmaciones
2h	11 Afirmaciones	3 Afirmaciones

Tabla 4.18: Resumen correspondiente al rol de la figura en las actividades propuestas en el texto Ediciones SM.

Como se observa en la tabla 4.18, en la mayoría de las actividades predomina la aprehensión discursiva en las afirmaciones que se realizan en su desarrollo. En sólo 4 ejercicios el estudiante requiere realizar una construcción de un elemento geométrico. En esta misma línea, es importante señalar que no siempre una actividad va a requerir que se le agregue o quite algún elemento geométrico.

4.4 Texto Mare Nostrum

4.4.1 Demostración del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia

El texto inicia el tratamiento del contenido con una actividad exploratoria, en la cual se solicita al estudiante que dibuje y mida varios ángulos inscritos de una circunferencia que subtienden el mismo arco. A continuación el alumno debe medir un ángulo del centro, el cual subtiende el mismo arco que los ángulos inscritos medidos anteriormente. El objetivo de la actividad es que los estudiantes conjeturen respecto a la relación que se da entre la medida del ángulo del centro y los ángulos inscritos que subtienden el mismo arco.

Posteriormente, el texto muestra un ejercicio resuelto de un caso particular sobre la relación que conjeturaron los estudiantes en la actividad anterior. Luego, se enuncia el teorema de ángulos inscritos y del centro de una circunferencia para dar paso a la demostración del primer caso.

Demostracion del primer caso del teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia

"*El centro de la circunferencia se encuentra al interior de la región limitada por los lados del ángulo inscrito*"

Enunciado

En toda circunferencia, la medida de un ángulo inscrito es igual a la mitad de la medida del ángulo del centro que abarca el mismo arco.

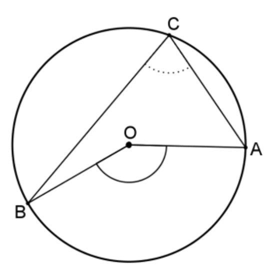


Figura 4.101

Desarrollo de la demostración

La secuencia de afirmaciones del desarrollo de la demostración es complementada con la Figura 4.102

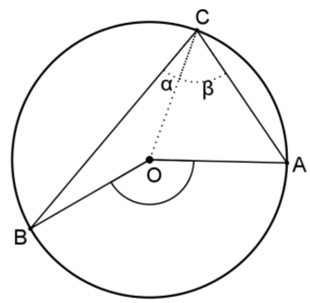


Figura 4.102

Secuencia de afirmaciones del desarrollo de la demostración

1. Dibujamos el radio CO y digamos que

$$\sphericalangle OCB = \alpha \ , \ \sphericalangle OCA = \beta$$

2. ΔOCB y ΔOCA son isósceles. (*Por hipótesis, A, B y C están en la circunferencia de centro O*)

3. $\sphericalangle OBC = \alpha$. (*Los ángulos basales de un triángulo isósceles son congruentes*)

4. $\sphericalangle OAC = \beta$. (*Misma razón que en 2*)

5. $\sphericalangle COB = 180º - 2\alpha$. (*Los ángulos interiores de un triángulo suman 180º*)

6. $\sphericalangle COA = 180º - 2\beta$. (*Misma razón que en 5*)

7. $\sphericalangle COB + \sphericalangle COA = 360º - 2(\beta + \alpha)$.(*Sumamos ambos miembros de 4 y de 5*)

8. $\sphericalangle COB + \sphericalangle COA = 360º - \sphericalangle AOB$. (*El ángulo completo tiene 360º*)

9. $360º - 2(\beta + \alpha) = 360º - \sphericalangle AOB$. (*Pasos 7 y87*)

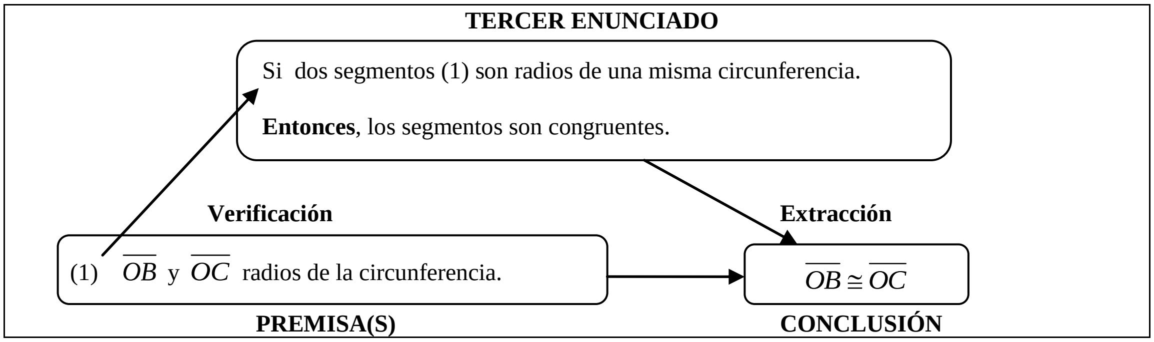
10. $\sphericalangle AOB = 2(\beta + \alpha)$. (*Simplificación del paso 9*)

11. $\sphericalangle AOB = 2\sphericalangle ACB$. (*Paso 9 y* $\beta + \alpha = \sphericalangle ACB$)

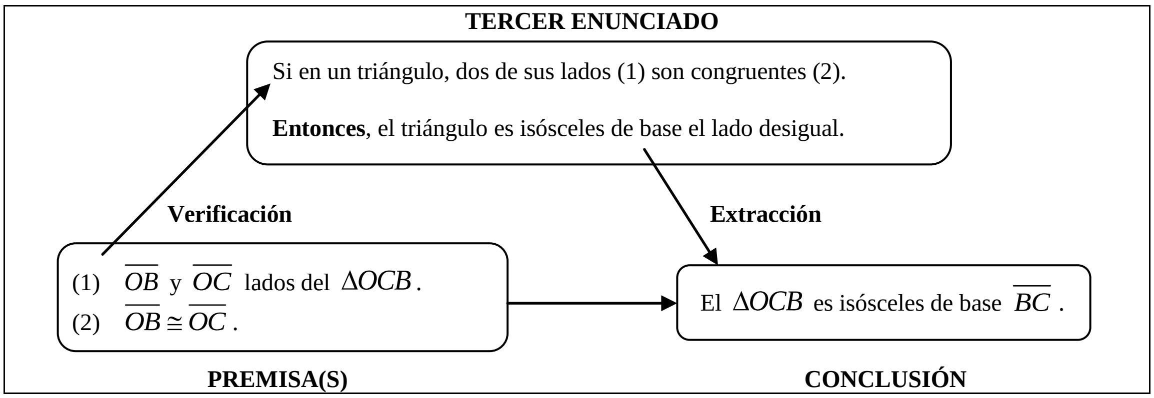
Análisis de la secuencia de afirmaciones de la demostración

- **Afirmación 1:** El radio CO se construye para formar los triángulos isósceles OAC y OBA. Además se asigna una medida alfa cualquiera y una medida beta cualquiera a los ángulos OCB y OCA respectivamente.

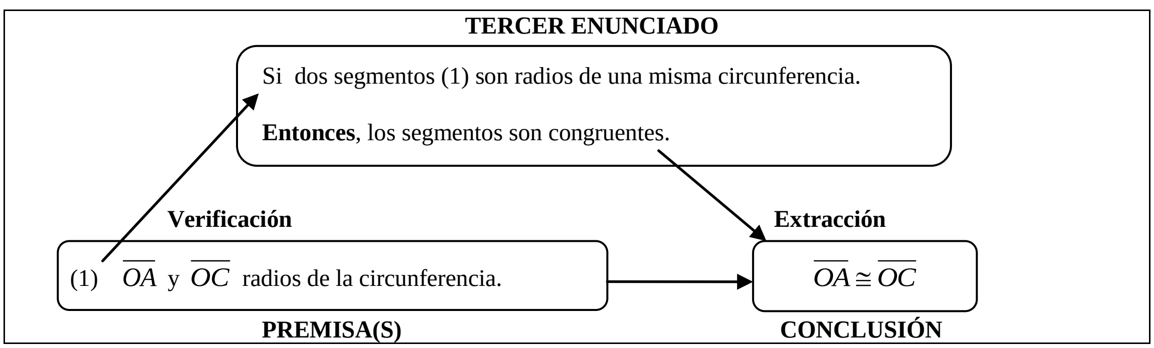
- **Afirmación 2:** Se justifica realizando dos pasos de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens) para cada uno de los triángulos. (Esquema 4.147)



(a) *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que los segmentos OB y OC son congruentes.*



(b) *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que el triángulo OCB es Isósceles de base BC.*



(c) *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que los segmentos OA y OC son congruentes.*

TERCER ENUNCIADO

Si en un triángulo, dos de sus lados (1) son congruentes (2).

Entonces, el triángulo es isósceles de base el lado desigual.

Verificación **Extracción**

(1) $\overline{OA}$ y $\overline{OC}$ lados del ΔOCA.
(2) $\overline{OA} \cong \overline{OC}$.

El ΔOCA es isósceles de base $\overline{AC}$.

PREMISA(S) **CONCLUSIÓN**

(d) *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que el triángulo OCA es Isósceles de base AC.*

Esquema 4.147

- **Afirmación 3:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.148)

TERCER ENUNCIADO

Si $\measuredangle\alpha$ y $\measuredangle\beta$ son ángulos basales (1 y 2) de un triángulo isósceles.

Entonces, la medida del $\measuredangle\alpha$ es igual a la medida del $\measuredangle\beta$.

Verificación **Extracción**

(1) $\measuredangle OBC$, ángulo basal del triángulo isósceles OCB.
(2) $\measuredangle OCB$, ángulo basal del triángulo isósceles OCB.

La $med\measuredangle OBC = med\measuredangle OCB$

PREMISA(S) **CONCLUSIÓN**

Esquema 4.148: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que los ángulos basales del triángulo isósceles OCB son congruentes.*

- **Afirmación 4:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.149)

TERCER ENUNCIADO

Si $\sphericalangle\alpha$ y $\sphericalangle\beta$ son ángulos basales (1 y 2) de un triángulo isósceles.

Entonces, la medida del $\sphericalangle\alpha$ es igual a la medida del $\sphericalangle\beta$.

Verificación

Extracción

(1) $\sphericalangle OCA$, ángulo basal del triángulo isósceles OCA.

(2) $\sphericalangle OAC$, ángulo basal del triángulo isósceles OCA.

La $med\sphericalangle OCA = med\sphericalangle OAC$

PREMISA(S)

CONCLUSIÓN

Esquema 4.149: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que los ángulos basales del triángulo isósceles OCA son congruentes.*

- **Afirmación 5:** Se formula la igualdad que relaciona las medidas de los ángulos interiores del triángulo ΔOCB. Para expresar la medida del ángulo COB en términos de alfa.

- **Afirmación 6:** Se formula la igualdad que relaciona las medidas de los ángulos interiores del triángulo ΔOCA. Para expresar la medida del ángulo COA en términos de beta.

- **Afirmación 7:** Se formula la igualdad que relaciona las medidas de los ángulos COB y COA en términos de alfa y beta. Sumando lo obtenido en las afirmaciones 5 y 6.

- **Afirmación 8:** Se formula la igualdad que relaciona las medidas de los ángulos COB y COA en términos del ángulo completo del centro de la circunferencia y el ángulo AOB.

- **Afirmación 9:** Se relacionan mediante una igualdad los ángulos obtenidos en las afirmaciones 7 y 8.

- **Afirmación 10:** Se expresa en términos de alfa y beta la medida del ángulo AOB.

- **Afirmación 11:** Se relaciona la medida del ángulo del centro AOB con la medida del ángulo inscrito ACB.

Conocimientos específicos:	
- Congruencia de trazos (Afirmación 2) - Definición de Triángulo Isósceles (Afirmación 2) - Propiedad sobre ángulos basales del triángulo isósceles. (Afirmaciones 3 y 4) - Propiedad: La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180º. (Afirmaciones 5 y 6) - Definición de Ángulo completo. (Afirmaciones 7, 8 y 9) - La medida del todo es igual a la suma de las medidas de sus partes. (Afirmación 7)	
Rol de la figura: - En la afirmación 1 se presenta una *aprehensión operativa de cambio figural.* - En las afirmaciones 2 a 11 predomina una *aprehensión discursiva* donde el sentido de la transferencia va de *un anclaje visual a uno discursivo.*	
Pasos de Razonamiento: - El paso de razonamiento es de *encadenamiento por reutilización*, donde cada uno de los razonamientos que componen el encadenamiento son razonamientos deductivos (Modus Ponens).	
Cantidad de pasos de razonamiento: - 6 pasos.	**Caso del teorema:** - Primer caso.
Observaciones generales 1. La demostración es realizada por el texto, sólo se expone al estudiante. 2. Se realizan dos pasos en uno, omitiendo pasos fundamentales, pudiendo provocar que el estudiante se pierda en la lectura de la demostración, o deje de comprender los pasos que se dan en su desarrollo. (Afirmación 2) 3. En el desarrollo de la demostración se identifican objetos geométricos con sus medidas en el caso de los ángulos. Se presenta una confusión de notación. 4. Cada una de las afirmaciones de la demostración, el texto las acompaña con una breve justificación. (letras cursivas)	

A continuación, en la tabla 4.19 se detalla la cantidad de pasos de razonamiento y tipos de razonamiento presentes en las demostraciones expuestas por el texto Mare Nostrum.

DEMOSTRACIÓN	CANTIDAD DE PASOS DE RAZONAMIENTO	TIPO DE PASO DE RAZONAMIENTO
Primer caso	6 pasos	Modus Ponens
Segundo caso	No se trata	No se trata
Tercer caso	No se trata	No se trata

Tabla 4.19: Cantidad de pasos de razonamientos y tipos de pasos de razonamientos que justifican las demostraciones expuestas en el Texto Mare Nostrum.

Al observar la tabla 4.19, el tipo de pasos de razonamiento presentes en la demostración es de tipo modus ponens. La cantidad de pasos de razonamientos que justifican la demostración es de 6 pasos. La demostración presenta solamente tres pasos de razonamiento distintos, donde cada uno de estos se realiza dos veces.

La demostración también es expuesta por el texto, pero este justifica cada uno de las afirmaciones del desarrollo. Por otro lado, el texto también presenta una confusión de notación, pues este identifica objetos geométricos con sus medidas.

A continuación, en la tabla 4.20 se expone un resumen sobre el número de afirmaciones en las cuales se identifica la aprehensión operativa y la aprehensión discursiva en el desarrollo de la demostración.

DEMOSTRACIÓN	APREHENSION DISCURSIVA	APREHENSION OPERATIVA
Primer caso	10 Afirmaciones	1 Afirmaciones
Segundo Caso	No se trata	No se trata
Tercer Caso	No se trata	No se trata

Tabla 4.20: Resumen correspondiente al rol de la figura en las demostraciones expuestas por el Texto Mare Nostrum.

En el desarrollo de la demostración se lleva a cabo una aprehensión operativa, es decir se agrega un elemento geométrico y se realiza la afirmación de dicho procedimiento. Logrando la coordinación de las dos aprehensiones, permitiendo una mejor comprensión del desarrollo de la demostración.

4.4.2 Actividades Propuestas

El texto propone al alumno 10 tipos de tareas, de las cuales, cinco son actividades donde se solicita calcular la medida de algún ángulo. Dos son ejercicios contextualizados de aplicación del teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia. Las actividades restantes son demostraciones, de las cuales dos corresponden al segundo y tercer caso del teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia. Cabe hacer notar, que solamente en una de las actividades, el enunciado no es acompañado con una figura.

A continuación se presenta el desarrollo de cada una de las actividades propuestas por el texto. Analizando las afirmaciones que se dan en la secuencia del desarrollo y caracterizando los pasos de razonamiento que se realizan en estas. Además de identificar el rol que cumple la figura en la resolución del ejercicio. Junto con la identificación de conocimientos conocimientos necesarios para realizar la actividad.

Demostracion del segundo caso del teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia

"*El centro de la circunferencia se encuentra al exterior de la región limitada por los lados del ángulo inscrito*"

Enunciado

En toda circunferencia, la medida de un ángulo inscrito es igual a la mitad de la medida del ángulo del centro que abarca el mismo arco.

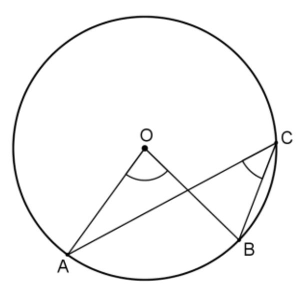
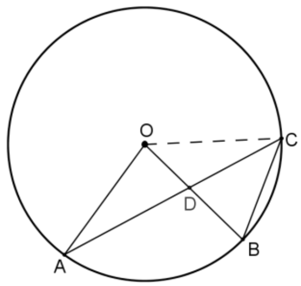


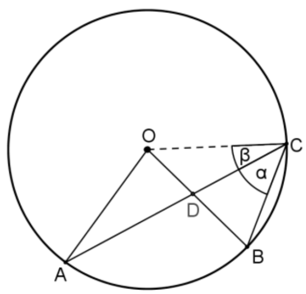
Figura 4.103

Desarrollo de la demostración esperado por el estudiante

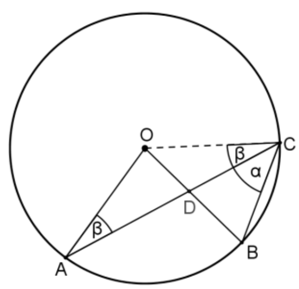
La secuencia de afirmaciones del desarrollo de la demostración será complementada con la Figura 4.104



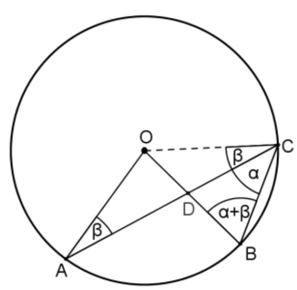
(a)



(b)



(c)



(d)

Secuencia de afirmaciones del desarrollo de la demostración

1. Unir mediante una línea el punto C con el centro O, formando el segmento $\overline{OC}$. (Figura 4.104a)

2. Como $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ y $\overline{OC}$ son radios de la circunferencia,

$$\overline{OA} \cong \overline{OB} \cong \overline{OC}$$

3. El ΔBOC es isósceles de base $\overline{BC}$.

4. El ΔAOC es isósceles de base $\overline{AC}$.

5. Sean α y β las medidas de los ACB y OCA respectivamente. (Figura 4.104b)

$$med\sphericalangle ACB = \alpha \quad \text{y} \quad med\sphericalangle OCA = \beta$$

6. El $\sphericalangle OCA$ es congruente con el $\sphericalangle CAO$. (Figura 4.104c)

$$med\sphericalangle OCA = med\sphericalangle CAO = \beta$$

7. La $med\sphericalangle OCB = \alpha + \beta$. (Figura 4.104c)

8. El $\sphericalangle OCB$ es congruente con el $\sphericalangle OBC$. (Figura 4.104d)

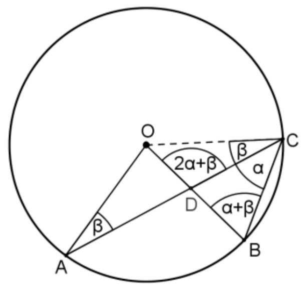
$$med\sphericalangle OCB = med\sphericalangle OBC = \alpha + \beta$$

9. La $med\sphericalangle CDO = 2\alpha + \beta$. (Figura 4.104e)

10. Como $\sphericalangle CDO$ es un ángulo exterior del ΔAOD,

$$med\sphericalangle AOB + med\sphericalangle CAO = med\sphericalangle CDO$$
$$med\sphericalangle AOB + \beta = 2\alpha + \beta$$
$$med\sphericalangle AOB = 2\alpha$$
$$med\sphericalangle AOB = 2 \cdot med\sphericalangle ACB$$

Por lo tanto, la $med\sphericalangle AOB = 2 \cdot med\sphericalangle ACB$.



(d)

Figura 4.104

Análisis de la secuencia de afirmaciones de la demostración

- **Afirmación 1:** Se traza el radio OC para formar los triángulos isósceles BOC y AOC. (Figura 4.104a)

- **Afirmación 2:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.150)

TERCER ENUNCIADO

Si dos segmentos (1) son radios de una misma circunferencia.

Entonces, los segmentos son congruentes.

Verificación

Extracción

(1) $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ y $\overline{OC}$ radios de la circunferencia.

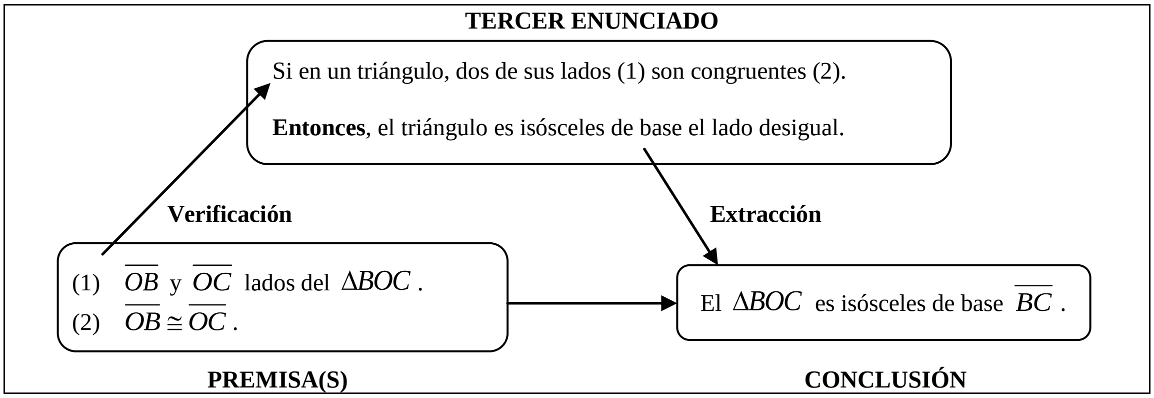
$\overline{OA} \cong \overline{OB} \cong \overline{OC}$

PREMISA(S)

CONCLUSIÓN

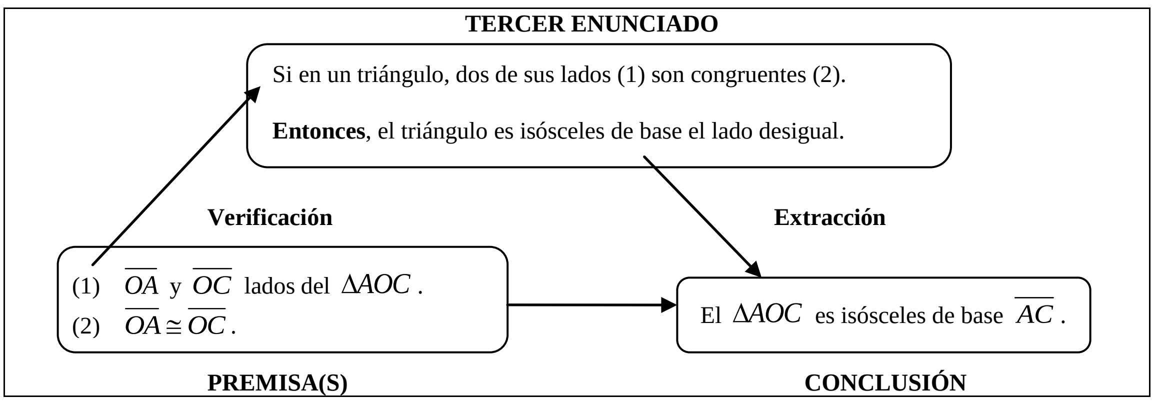
Esquema 4.150: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que los segmentos OA, OB y OC son congruentes.*

- **Afirmación 3:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.151)



Esquema 4.151: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que el triángulo BOC es Isósceles de base BC.*

- **Afirmación 4:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.152)



Esquema 4.152: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que el triángulo AOC es Isósceles de base AC.*

- **Afirmación 5:** Se asigna una medida alfa y beta cualquiera a los ángulos ACB y OCA respectivamente. (Figura 4.104b)

- **Afirmación 6:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.153)

TERCER ENUNCIADO

Si $\measuredangle\alpha$ y $\measuredangle\beta$ son ángulos basales (1 y 2) de un triángulo isósceles.

Entonces, la medida del $\measuredangle\alpha$ es igual a la medida del $\measuredangle\beta$.

Verificación **Extracción**

(1) $\measuredangle OCA$, ángulo basal del triángulo isósceles AOC.
(2) $\measuredangle CAO$, ángulo basal del triángulo isósceles AOC.

La $med\measuredangle OCA = med\measuredangle CAO$

PREMISA(S) **CONCLUSIÓN**

Esquema 4.153: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que los ángulos basales del triángulo isósceles AOC son congruentes.*

- **Afirmación 7:** Se extrae información sobre el $\measuredangle OCB$, inscrito en la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.104c)

- **Afirmación 8:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.154)

TERCER ENUNCIADO

Si $\measuredangle\alpha$ y $\measuredangle\beta$ son ángulos basales (1 y 2) de un triángulo isósceles.

Entonces, la medida del $\measuredangle\alpha$ es igual a la medida del $\measuredangle\beta$.

Verificación **Extracción**

(1) $\measuredangle OCB$, ángulo basal del triángulo isósceles BOC.
(2) $\measuredangle OBC$, ángulo basal del triángulo isósceles BOC.

La $med\measuredangle OCB = med\measuredangle OBC$

PREMISA(S) **CONCLUSIÓN**

Esquema 4.154: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que los ángulos basales del triángulo isósceles BOC son congruentes.*

- **Afirmación 9:** Como el $\measuredangle CDO$ es un ángulo exterior del ΔBDC, su medida es igual a la suma de las medidas de los ángulos interiores del ΔBDC no adyacentes al $\measuredangle CDO$.

- **Afirmación 10:** Como la $\measuredangle CDO$ es un ángulo exterior del ΔAOD, su medida es igual a la suma de las medidas de los ángulos interiores del ΔAOD no adyacentes al $\measuredangle CDO$.

Conocimientos específicos:

- Congruencia de trazos (Afirmación 2)
- Definición de Triángulo Isósceles (Afirmaciones 3 y 4)
- Propiedad sobre ángulos basales del triángulo isósceles. (Afirmaciones 6 y 8)
- La medida del todo es igual a la suma de las medidas de sus partes. (Afirmación 7)
- Propiedad: La medida de un ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de las medidas de los ángulos interiores no adyacentes. (Afirmaciones 9 y 10)

Rol de la figura:

- En la afirmación 1 se presenta una *aprehensión operativa de cambio figural.*
- En las afirmaciones 2 a 10 predomina una *aprehensión discursiva* donde el sentido de la transferencia va de *un anclaje visual a uno discursivo.*

Pasos de Razonamiento:

- El paso de razonamiento es de *encadenamiento por reutilización*, donde cada uno de los razonamientos que componen el encadenamiento son razonamientos deductivos (Modus Ponens).

Cantidad de pasos de razonamiento:	**Caso del teorema:**
- 5 pasos.	- Segundo caso.

Observaciones generales

1. Para que el estudiante logre desarrollar la demostración ha de trazar nuevos elementos geométricos sobre la figura y aplicar conocimientos previos.

Demostracion del tercer caso del teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia

"*El centro de la circunferencia se encuentra sobre uno de los lados del ángulo inscrito*"

Enunciado

En toda circunferencia, la medida de un ángulo inscrito es igual a la mitad de la medida del ángulo del centro que abarca el mismo arco.

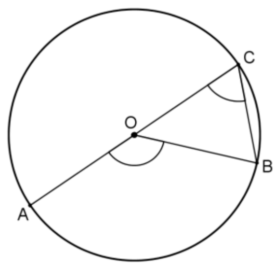
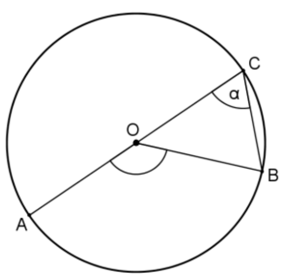


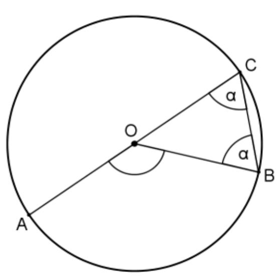
Figura 4.105

Desarrollo de la demostración esperado por el estudiante

La secuencia de afirmaciones del desarrollo de la demostración será complementada con la Figura 4.106.



(a)



(b)

Figura 4.106

Secuencia de afirmaciones del desarrollo de la demostración

1. Como $\overline{OB}$ y $\overline{OC}$ son radios de la circunferencia,

$$\overline{OB} \cong \overline{OC}$$

2. El ΔBOC es isósceles de base $\overline{BC}$.

3. Sea α la medida del $\sphericalangle ACB$. (Figura 4.106a)

$$med\sphericalangle ACB = \alpha$$

4. El $\sphericalangle ACB$ es congruente con el $\sphericalangle CBO$. (Figura 4.106b)

$$med\sphericalangle ACB = med\sphericalangle CBO = \alpha$$

5. Como $\sphericalangle AOB$ es un ángulo exterior del ΔBOC ,

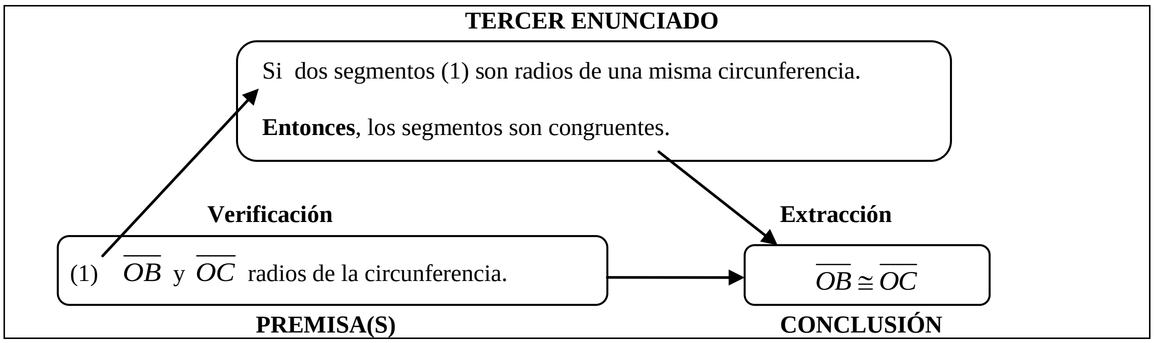
$$med\sphericalangle AOB = med\sphericalangle ACB + med\sphericalangle CBO$$
$$med\sphericalangle AOB = \alpha + \alpha$$
$$med\sphericalangle AOB = 2\alpha$$

$$med\sphericalangle AOB = 2 \cdot med\sphericalangle ACB$$

Por lo tanto, la $med\sphericalangle AOB = 2 \cdot med\sphericalangle ACB$.

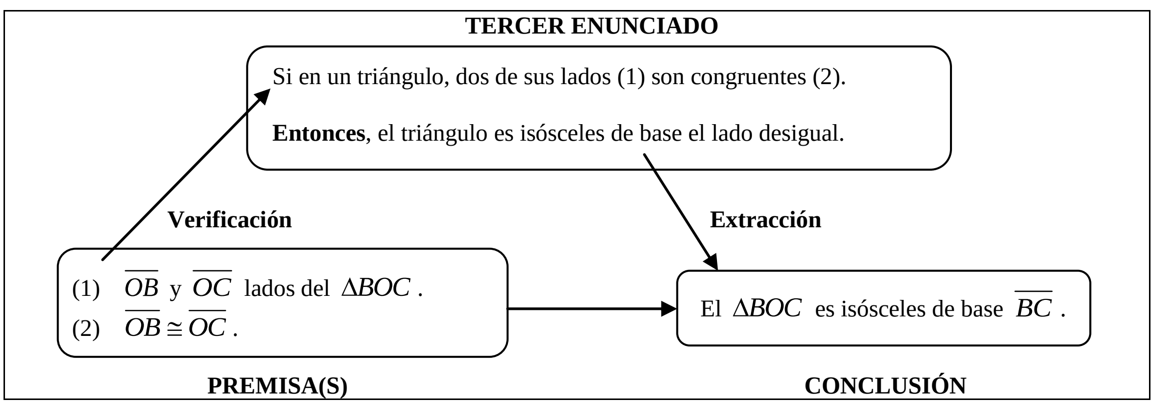
Análisis de la secuencia de afirmaciones de la demostración

- **Afirmación 1:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.155)



Esquema 4.155: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que los segmentos OB y OC son congruentes.*

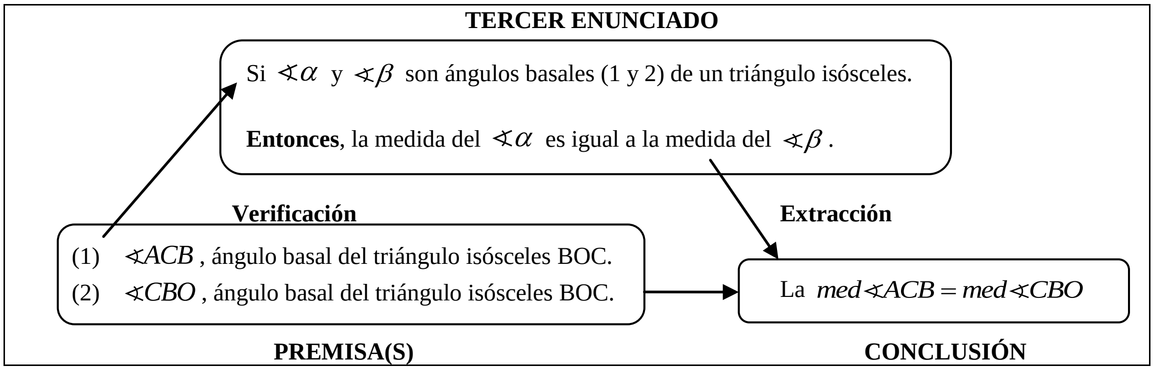
- **Afirmación 2:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.156)



Esquema 4.156: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que el triángulo BOC es Isósceles de base BC.*

- **Afirmación 3:** Se asigna una medida alfa cualquiera al $\sphericalangle ACB$. (Figura 106a)

- **Afirmación 4:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.157)



Esquema 4.157: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que los ángulos basales del triángulo isósceles BOC son congruentes.*

- **Afirmación 5:** Como la $\sphericalangle AOB$ es un ángulo exterior del $\triangle BOC$, su medida es igual a la suma de las medidas de los ángulos interiores del $\triangle BOC$ no adyacentes al $\sphericalangle AOB$.

Conocimientos específicos: - Congruencia de trazos (Afirmación 1) - Definición de Triángulo Isósceles (Afirmación 2) - Propiedad sobre ángulos basales del triángulo isósceles. (Afirmación 4) - Propiedad: La medida de un ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de las medidas de los ángulos interiores no adyacentes. (Afirmación 5)	
Rol de la figura: - En todas las afirmaciones predomina una *aprehensión discursiva* donde el sentido de la transferencia va de *un anclaje visual a uno discursivo.*	
Pasos de Razonamiento: - El paso de razonamiento es de *encadenamiento por reutilización*, donde cada uno de los razonamientos que componen el encadenamiento son razonamientos deductivos (Modus Ponens).	
Cantidad de pasos de razonamiento: - 3 pasos.	**Caso del teorema:** - Tercer Caso.
Observaciones generales 1. Para que el estudiante desarrolle la demostración ha de aplicar conocimientos previos.	

Actividad 1

Enunciado

¿Cuánto mide $\measuredangle BDC$?

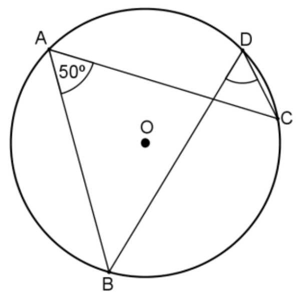


Figura 4.107

Desarrollo de la actividad esperado del estudiante

La secuencia de afirmaciones del desarrollo de la actividad será complementada con la Figura 4.108

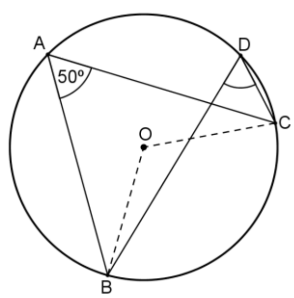


Figura 4.108

Secuencia de afirmaciones del desarrollo

1. Unir mediante una línea el punto B con el centro O, formando el segmento $\overline{BO}$. (Figura 4.108)

2. Unir mediante una línea el punto C con el centro O, formando el segmento $\overline{CO}$. (Figura 4.108)

3. El $\measuredangle BAC$ es un ángulo inscrito que subtiende al arco $\overparen{BC}$.

4. El $\measuredangle BOC$ es un ángulo del centro que subtiende al arco $\overparen{BC}$.

5. El $\measuredangle BAC$ y el $\measuredangle BOC$ subtienden el mismo arco, el arco $\overparen{BC}$.

6. Por teorema, la $med\measuredangle BOC$ es el doble de la $med\measuredangle BAC$.

$$med\measuredangle BOC = 2 \cdot 50º$$
$$med\measuredangle BOC = 100º$$

Por lo tanto, la $med\measuredangle BOC = 100º$

7. El $\measuredangle BDC$ es un ángulo inscrito que subtiende al arco $\overparen{BC}$.

8. El $\measuredangle BDC$ y el $\measuredangle BOC$ subtienden el mismo arco, el

arco $\overset{\frown}{BC}$.

9. Por teorema, la $med\sphericalangle BDC$ es la mitad de la $med\sphericalangle BOC$.

$$med\sphericalangle BDC = \frac{1}{2}\cdot 100^{\circ}$$
$$med\sphericalangle BDC = 50^{\circ}$$

Por lo tanto, la $med\sphericalangle BDC = 50^{\circ}$.

Análisis de la secuencia de afirmaciones del desarrollo del ejercicio

- **Afirmación 1:** Se construye el segmento $\overline{BO}$ para formar el $\sphericalangle BOC$ del centro de la circunferencia. (Figura 4.108)

- **Afirmación 2:** Se construye el segmento $\overline{CO}$ para formar el $\sphericalangle BOC$ del centro de la circunferencia. (Figura 4.108)

- **Afirmación 3:** Se extrae información sobre el $\sphericalangle BAC$, inscrito en la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.108)

- **Afirmación 4:** Se extrae información sobre el $\sphericalangle BOC$, del centro de la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.108)

- **Afirmación 5:** Se relacionan los ángulos obtenidos en las afirmaciones 3 y 4.

- **Afirmación 6:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.158)

TERCER ENUNCIADO

Si un ángulo inscrito (1) y un ángulo del centro (2) de una circunferencia subtienden el mismo arco (3).

Entonces, la medida del ángulo del centro es el doble de la medida del ángulo inscrito.

Verificación — **Extracción**

(1) $\sphericalangle BAC$, ángulo inscrito que subtiende al arco $\overset{\frown}{BC}$.

(2) $\sphericalangle BOC$, ángulo del centro que subtiende al arco $\overset{\frown}{BC}$.

(3) $\sphericalangle BAC$ y $\sphericalangle BOC$ subtienden el mismo arco, el arco $\overset{\frown}{BC}$.

$med\sphericalangle BOC = 2 \cdot 50º$

PREMISA(S) — **CONCLUSIÓN**

Esquema 4.158: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para determinar la medida del ángulo del centro BOC.*

- **Afirmación 7:** Se extrae información sobre el $\sphericalangle BDC$, inscrito en la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 2.108)

- **Afirmación 8:** Se relacionan los ángulos obtenidos en las afirmaciones 4 y 7.

- **Afirmación 9:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.159)

TERCER ENUNCIADO

Si un ángulo inscrito (1) y un ángulo del centro (2) de una circunferencia subtienden el mismo arco (3).

Entonces, la medida del ángulo inscrito es la mitad de la medida del ángulo del centro.

Verificación — **Extracción**

(1) $\sphericalangle BDC$, ángulo inscrito que subtiende al arco $\overset{\frown}{BC}$.

(2) $\sphericalangle BOC$, ángulo del centro que subtiende al arco $\overset{\frown}{BC}$.

(3) $\sphericalangle BDC$ y $\sphericalangle BOC$ subtienden el mismo arco, el arco $\overset{\frown}{BC}$.

$med\sphericalangle BDC = \frac{1}{2} \cdot 100º$

PREMISA(S) — **CONCLUSIÓN**

Esquema 4.159: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para determinar la medida del ángulo inscrito BDC.*

Conocimientos específicos:

- No son necesarios.

Rol de la figura:

- En las afirmaciones 1 a 2 se presenta una *aprehensión operativa de cambio figural.*
- En las afirmaciones 3 a 9 predomina una *aprehensión discursiva* donde el sentido de la transferencia va de *un anclaje visual a uno discursivo.*

Pasos de Razonamiento:

- Modus Ponens.

Cantidad de pasos de razonamiento:	**Caso(s) del teorema:**
- 2 pasos.	- Primer y segundo caso.

Observaciones generales

1. El estudiante debe construir el ángulo del centro y posteriormente aplicar el teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia.

2. El teorema se debe aplicar dos veces. La primera, para determinar la medida del ángulo del centro a partir de la medida del ángulo inscrito. La segunda, para determinar la medida del ángulo inscrito a partir de la medida del ángulo del centro.

Actividad 2

Enunciado

¿Cuánto mide $\sphericalangle BAD$?

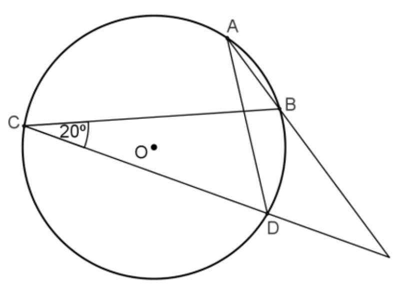


Figura 4.109

Desarrollo de la actividad esperado del estudiante

La secuencia de afirmaciones del desarrollo de la actividad será complementada con la Figura 4.110

Secuencia de afirmaciones del desarrollo

1. Unir mediante una línea el punto D con el centro O, formando el segmento $\overline{DO}$. (Figura 4.110)

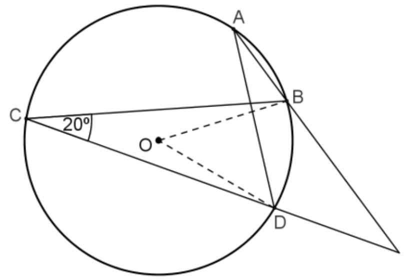


Figura 4.110

2. Unir mediante una línea el punto B con el centro O, formando el segmento $\overline{BO}$. (Figura 4.110)

3. El $\sphericalangle DCB$ es un ángulo inscrito que subtiende al arco $\overset{\frown}{DB}$.

4. El $\sphericalangle DOB$ es un ángulo del centro que subtiende al arco $\overset{\frown}{DB}$.

5. El $\sphericalangle DCB$ y el $\sphericalangle DOB$ subtienden el mismo arco, el arco $\overset{\frown}{DB}$.

6. Por teorema, la $med\sphericalangle DOB$ es el doble de la $med\sphericalangle DCB$.

$$med\sphericalangle DOB = 2 \cdot 20º$$
$$med\sphericalangle DOB = 40º$$

   Por lo tanto, la $med\sphericalangle DOB = 40º$

7. El $\sphericalangle DAB$ es un ángulo inscrito que subtiende al arco $\overset{\frown}{DB}$.

8. El $\sphericalangle DAB$ y el $\sphericalangle DOB$ subtienden el mismo arco, el arco $\overset{\frown}{DB}$.

9. Por teorema, la $med\sphericalangle DAB$ es la mitad de la $med\sphericalangle DOB$.

$$med\sphericalangle DAB = \frac{1}{2} \cdot 40º$$
$$med\sphericalangle DAB = 20º$$

   Por lo tanto, la $med\sphericalangle DAB = 20º$.

Análisis de la secuencia de afirmaciones del desarrollo del ejercicio

- **Afirmación 1:** Se construye el segmento $\overline{DO}$ para formar el $\sphericalangle DOB$ del centro de la circunferencia. (Figura 4.110)

- **Afirmación 2:** Se construye el segmento $\overline{BO}$ para formar el $\sphericalangle DOB$ del centro de la circunferencia. (Figura 4.110)

- **Afirmación 3:** Se extrae información sobre el $\sphericalangle DCB$, inscrito en la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.110)

- **Afirmación 4:** Se extrae información sobre el $\sphericalangle DOB$, del centro de la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.110)

- **Afirmación 5:** Se relacionan los ángulos obtenidos en las afirmaciones 3 y 4.

- **Afirmación 6:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.160)

TERCER ENUNCIADO

Si un ángulo inscrito (1) y un ángulo del centro (2) de una circunferencia subtienden el mismo arco (3).

Entonces, la medida del ángulo del centro es el doble de la medida del ángulo inscrito.

Verificación

Extracción

(1) $\sphericalangle DCB$, ángulo inscrito que subtiende al arco $\overset{\frown}{DB}$.
(2) $\sphericalangle DOB$, ángulo del centro que subtiende al arco $\overset{\frown}{DB}$.
(3) $\sphericalangle DCB$ y $\sphericalangle DOB$ subtienden el mismo arco, el arco $\overset{\frown}{DB}$.

$med\sphericalangle DOB = 2 \cdot 20º$

PREMISA(S) **CONCLUSIÓN**

Esquema 4.160: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para determinar la medida del ángulo del centro DOB.*

- **Afirmación 7:** Se extrae información sobre el $\sphericalangle DAB$, inscrito en la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.110)

- **Afirmación 8:** Se relacionan los ángulos obtenidos en las afirmaciones 4 y 7.

- **Afirmación 9:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.161)

TERCER ENUNCIADO

Si un ángulo inscrito (1) y un ángulo del centro (2) de una circunferencia subtienden el mismo arco (3).

Entonces, la medida del ángulo inscrito es la mitad de la medida del ángulo del centro.

Verificación

Extracción

(1) $\sphericalangle DAB$, ángulo inscrito que subtiende al arco $\overset{\frown}{DB}$.

(2) $\sphericalangle DOB$, ángulo del centro que subtiende al arco $\overset{\frown}{DB}$.

(3) $\sphericalangle DAB$ y $\sphericalangle DOB$ subtienden el mismo arco, el arco $\overset{\frown}{DB}$.

$$med\sphericalangle DAB = \frac{1}{2} \cdot 40^{o}$$

PREMISA(S)

CONCLUSIÓN

Esquema 4.161: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para determinar la medida del ángulo inscrito DAB.*

Conocimientos específicos: - No son necesarios.	
Rol de la figura: - En las afirmaciones 1 a 2 se presenta una *aprehensión operativa de cambio figural.* - En las afirmaciones 3 a 9 predomina una *aprehensión discursiva* donde el sentido de la transferencia va de *un anclaje visual a uno discursivo.*	
Pasos de Razonamiento: - Modus Ponens.	
Cantidad de pasos de razonamiento: - 2 pasos.	**Caso(s) del teorema:** - Primer y segundo caso.
Observaciones generales 1. El estudiante debe construir el ángulo del centro y posteriormente aplicar el teorema del ángulo inscrito y delcentro de una circunferencia. 2. El teorema se debe aplicar dos veces. La primera, para determinar la medida del ángulo del centro a partir de la medida del ángulo inscrito, la segunda, para determinar la medida del ángulo inscrito a partir de la medida del ángulo del centro.	

Actividad 3 Letra a

Enunciado

Calcula la medida del ángulo x.

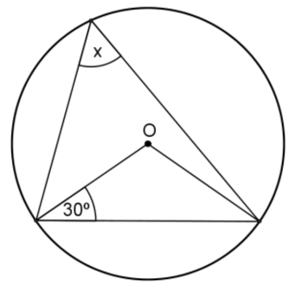


Figura 4.111

Desarrollo de la actividad esperado del estudiante

Se han asignado rótulos a los vértices de la figura para una mejor comprensión del desarrollo. (Figura 4.112)

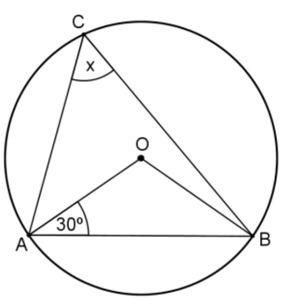


Figura 4.112

Secuencia de afirmaciones del desarrollo

1. Como $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ son radios de la circunferencia,

$$\overline{OA} \cong \overline{OB}.$$

2. El ΔAOB es isósceles de base $\overline{AB}$.
3. El $\sphericalangle ABO$ es congruente con el $\sphericalangle OAB$.

$$med\sphericalangle ABO = med\sphericalangle OAB = 30º$$

4. La $med\sphericalangle AOB = 120º$, pues

$$med\sphericalangle AOB + 30º + 30º = 180º$$
$$med\sphericalangle AOB + 60º = 180º$$
$$med\sphericalangle AOB = 120º$$

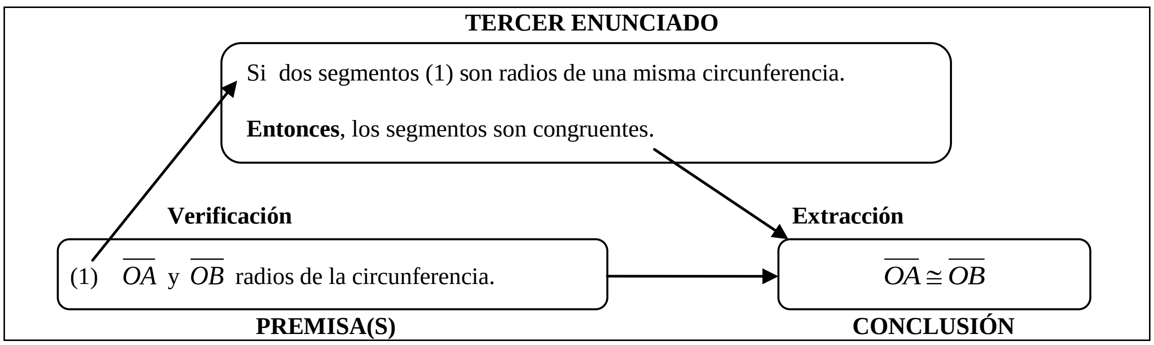
5. El $\sphericalangle ACB$ es un ángulo inscrito que subtiende al arco $\overset{\frown}{AB}$.
6. El $\sphericalangle AOB$ es un ángulo del centro que subtiende al arco $\overset{\frown}{AB}$.
7. El $\sphericalangle ACB$ y el $\sphericalangle AOB$ subtienden el mismo arco, el arco $\overset{\frown}{AB}$.
8. Por teorema, la $med\sphericalangle ACB$ es la mitad de la $med\sphericalangle AOB$.

$$med\sphericalangle ACB=\frac{1}{2}\cdot 120^{o}$$
$$med\sphericalangle ACB=60^{o}$$

Por lo tanto, la medida de x es 60^{o}

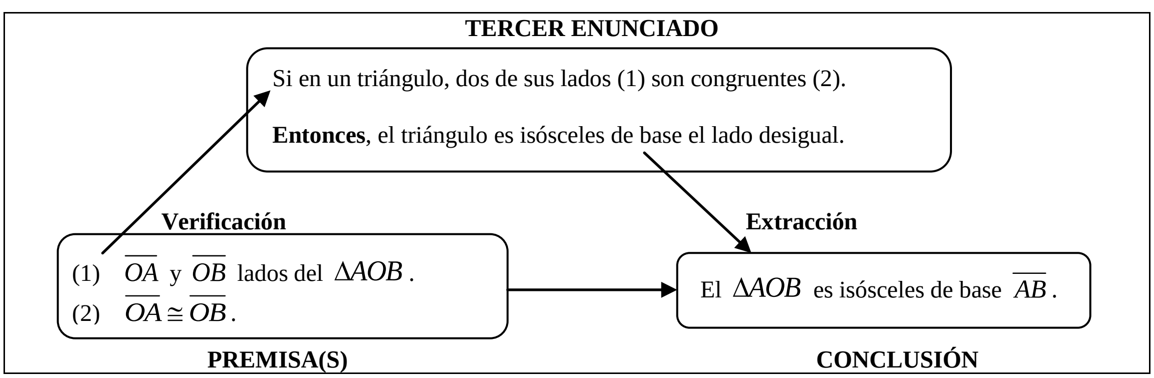
Análisis de la secuencia de afirmaciones del desarrollo del ejercicio

- **Afirmación 1:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.162)



Esquema 4.162: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que los segmentos OA y OB son congruentes.*

- **Afirmación 2:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.163)



Esquema 4.163: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que el triángulo AOB es Isósceles de base AB.*

- **Afirmación 3:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.164)

TERCER ENUNCIADO

Si $\sphericalangle\alpha$ y $\sphericalangle\beta$ son ángulos basales (1 y 2) de un triángulo isósceles.

Entonces, la medida del $\sphericalangle\alpha$ es igual a la medida del $\sphericalangle\beta$.

Verificación

Extracción

(1) $\sphericalangle ABO$, ángulo basal del triángulo isósceles AOB.
(2) $\sphericalangle OAB$, ángulo basal del triángulo isósceles AOB.

La $med\sphericalangle ABO = med\sphericalangle OAB$

PREMISA(S)

CONCLUSIÓN

Esquema 4.164: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que los ángulos basales del triángulo isósceles AOB son congruentes.*

- **Afirmación 4:** Se formula la igualdad que relaciona las medidas de los ángulos interiores del ΔAOB para determinar la medida del $\sphericalangle AOB$.

- **Afirmación 5:** Se extrae información sobre el $\sphericalangle ACB$, inscrito en la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.112)

- **Afirmación 6:** Se extrae información sobre el $\sphericalangle AOB$, del centro de la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.112)

- **Afirmación 7:** Se relacionan los ángulos obtenidos en las afirmaciones 5 y 6.

- **Afirmación 8:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.165)

TERCER ENUNCIADO

Si un ángulo inscrito (1) y un ángulo del centro (2) de una circunferencia subtienden el mismo arco (3).

Entonces, la medida del ángulo inscrito es la mitad de la medida del ángulo del centro.

Verificación **Extracción**

(1) $\sphericalangle ACB$, ángulo inscrito que subtiende al arco $\overset{\frown}{AB}$.

(2) $\sphericalangle AOB$, ángulo del centro que subtiende al arco $\overset{\frown}{AB}$.

(3) $\sphericalangle ACB$ y $\sphericalangle AOB$ subtienden el mismo arco, el arco $\overset{\frown}{AB}$.

$$med \sphericalangle ACB = \frac{1}{2} \cdot 120^{\circ}$$

PREMISA(S) **CONCLUSIÓN**

Esquema 4.165: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para determinar la medida del ángulo inscrito ACB.*

Conocimientos específicos:

- Congruencia de trazos. (Afirmación 1)
- Definición del triángulo isósceles. (Afirmación 2)
- Propiedad de los ángulos basales de un triángulo isósceles. (Afirmación 3)
- Propiedad: La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180º. (Afirmación 4)

Rol de la figura:

- Al comienzo del desarrollo se presenta una *aprehensión operativa de cambio figural.*
- En las afirmaciones 1 a 8 predomina una *aprehensión discursiva* donde el sentido de la transferencia va de *un anclaje visual a uno discursivo.*

Pasos de Razonamiento:

- Modus Ponens.

Cantidad de pasos de razonamiento:	**Caso(s) del teorema:**
- 4 pasos.	- Primer caso.

Observaciones generales

1. El estudiante debe reconocer en la figura el triángulo isósceles para determinar el ángulo del centro de la circunferencia y posteriormente aplicar el Teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia.

Actividad 3 Letra b

Enunciado

Calcula la medida del ángulo x.

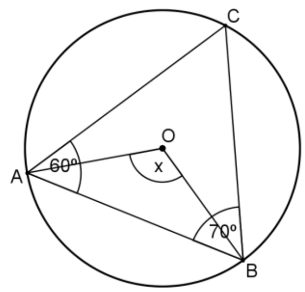


Figura 4.113

Desarrollo de la actividad esperado del estudiante

La secuencia de afirmaciones del desarrollo de la actividad será complementada con la Figura 4.114.

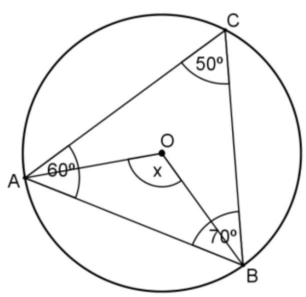


Figura 4.114

Secuencia de afirmaciones del desarrollo

1. La $med\sphericalangle ACB = 50º$, pues

$$med\sphericalangle ACB + med\sphericalangle BAC + med\sphericalangle ABC = 180º$$
$$med\sphericalangle ACB + 60º + 70º = 180º$$
$$med\sphericalangle ACB + 130º = 180º$$
$$med\sphericalangle ACB = 50º$$

2. El $\sphericalangle ACB$ es un ángulo inscrito que subtiende al arco $\overset{\frown}{AB}$.

3. El $\sphericalangle AOB$ es un ángulo del centro que subtiende al arco $\overset{\frown}{AB}$.

4. El $\sphericalangle ACB$ y el $\sphericalangle AOB$ subtienden el mismo arco, el arco $\overset{\frown}{AB}$.

5. Por teorema, la $med\sphericalangle AOB$ es el doble de la $med\sphericalangle ACB$.

$$med\sphericalangle AOB = 2 \cdot med\sphericalangle ACB$$
$$med\sphericalangle AOB = 2 \cdot 50º$$
$$med\sphericalangle AOB = 100º$$

Por lo tanto, la medida de x es 100º.

Análisis de la secuencia de afirmaciones del desarrollo del ejercicio

- **Afirmación 1:** Se formula la igualdad que relaciona las medidas de los ángulos interiores del ΔABC para determinar la medida del $\sphericalangle ACB$.

- **Afirmación 2:** Se extrae información sobre el $\sphericalangle ACB$, inscrito en la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.114)

- **Afirmación 3:** Se extrae información sobre el $\sphericalangle AOB$, del centro de la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.114)

- **Afirmación 4:** Se relacionan los ángulos obtenidos en las afirmaciones 2 y 3.

- **Afirmación 5:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.166)

TERCER ENUNCIADO

Si un ángulo inscrito (1) y un ángulo del centro (2) de una circunferencia subtienden el mismo arco (3).

Entonces, la medida del ángulo del centro es el doble de la medida del ángulo inscrito.

Verificación

Extracción

(1) $\sphericalangle ACB$, ángulo inscrito que subtiende al arco $\overset{\frown}{AB}$.

(2) $\sphericalangle AOB$, ángulo del centro que subtiende al arco $\overset{\frown}{AB}$.

(3) $\sphericalangle ACB$ y $\sphericalangle AOB$ subtienden el mismo arco, el arco $\overset{\frown}{AB}$.

$med\sphericalangle AOB = 2 \cdot 50^{\circ}$

PREMISA(S)

CONCLUSIÓN

Esquema 4.166: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para determinar la medida del ángulo del centro AOB.*

Conocimientos específicos: - Propiedad: La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180º. (Afirmación 1)	
Rol de la figura: - En todas las afirmaciones predomina una *aprehensión discursiva* donde el sentido de la transferencia va de *un anclaje visual a uno discursivo.*	
Pasos de Razonamiento: - Modus Ponens.	
Cantidad de pasos de razonamiento: - 1 paso.	**Caso(s) del teorema:** - Primer caso.
Observaciones generales 1. El estudiante debe determinar la medida del ángulo inscrito y posteriormente aplicar el Teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia para determinar la medida del ángulo del centro.	

Actividad 3 Letra c

Enunciado

Calcula la medida del ángulo x.

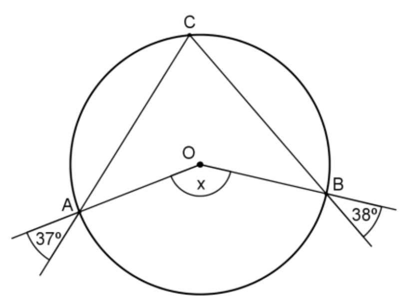


Figura 4.115

Desarrollo de la actividad esperado del estudiante

La secuencia de afirmaciones del desarrollo de la actividad será complementada con la Figura 4.116

Secuencia de afirmaciones del desarrollo

1. Unir mediante una línea el punto C con el centro O, formando el segmento $\overline{OC}$. (Figura 4.116)

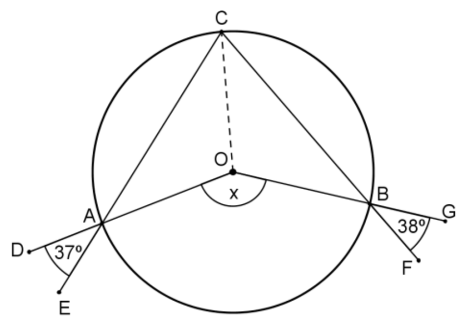


Figura 4.116

2. La medida del ángulo OAC es igual a la medida del ángulo DAE.

$$med\sphericalangle OAC = med\sphericalangle DAE = 37º$$

3. La medida del ángulo OBC es igual a la medida del ángulo FBG.

$$med\sphericalangle OBC = med\sphericalangle FBG = 38º$$

4. Como $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ y $\overline{OC}$ son radios de la circunferencia,

$$\overline{OA} \cong \overline{OB} \cong \overline{OC}$$

5. El ΔAOC es isósceles de base $\overline{AC}$, ya que $\overline{OA}$ y $\overline{OC}$ son congruentes.

6. El ΔBOC es isósceles de base $\overline{BC}$, ya que $\overline{OB}$ y $\overline{OC}$ son congruentes.

7. La medida del ángulo OAC es igual a la medida del ángulo ACO.

$$med\sphericalangle OAC = med\sphericalangle ACO = 37º$$

8. La medida del ángulo OBC es igual a la medida del ángulo OCB.

$$med\sphericalangle OBC = med\sphericalangle OCB = 38º$$

9. La $med\sphericalangle ACB$ es igual a la suma de las medidas de los ángulos ACO y OCB.

$$med\sphericalangle ACB = med\sphericalangle ACO + med\sphericalangle OCB$$
$$med\sphericalangle ACB = 37º + 38º$$
$$med\sphericalangle ACB = 75º$$

10. El $\sphericalangle ACB$ es un ángulo inscrito que subtiende al arco $\overset{\frown}{AB}$.

11. El $\sphericalangle AOB$ es un ángulo del centro que subtiende al arco $\overset{\frown}{AB}$.

12. El $\sphericalangle ACB$ y el $\sphericalangle AOB$ subtienden el mismo arco, el arco $\overset{\frown}{AB}$.

13. Por teorema, la $med\sphericalangle AOB$ es el doble de la $med\sphericalangle ACB$.

$$med\sphericalangle AOB = 2 \cdot 75º$$

$$med\sphericalangle AOB = 150^{\circ}$$

Por lo tanto, la medida de x es 150°.

Análisis de la secuencia de afirmaciones del desarrollo del ejercicio

- **Afirmación 1:** Se construye el segmento $\overline{OC}$ para formar los triángulos AOB y BOC. (Figura 4.116)

- **Afirmación 2:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.167)

TERCER ENUNCIADO

Si dos ángulos son opuestos por un vértice.

Entonces, los ángulos tienen la mima medida.

Verificación **Extracción**

(1) $\sphericalangle OAC$ y $\sphericalangle DAE$ son opuestos por el vértice A. → $med\sphericalangle OAC = med\sphericalangle DAE$

PREMISA(S) **CONCLUSIÓN**

Esquema 4.167: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que los ángulos DAE y OAC tienen la misma medida.*

- **Afirmación 3:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.168)

TERCER ENUNCIADO

Si dos ángulos son opuestos por un vértice.

Entonces, los ángulos tienen la mima medida.

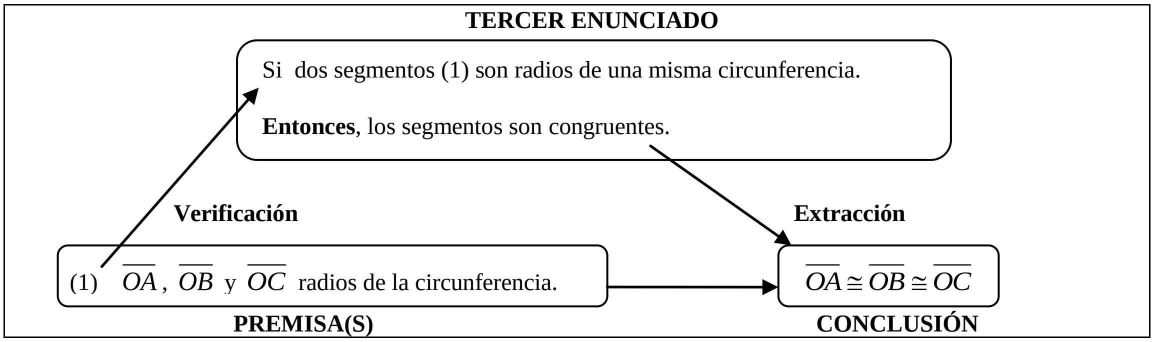
Verificación **Extracción**

(1) $\sphericalangle OBC$ y $\sphericalangle FBG$ son opuestos por el vértice A. → $med\sphericalangle OBC = med\sphericalangle FBG$

PREMISA(S) **CONCLUSIÓN**

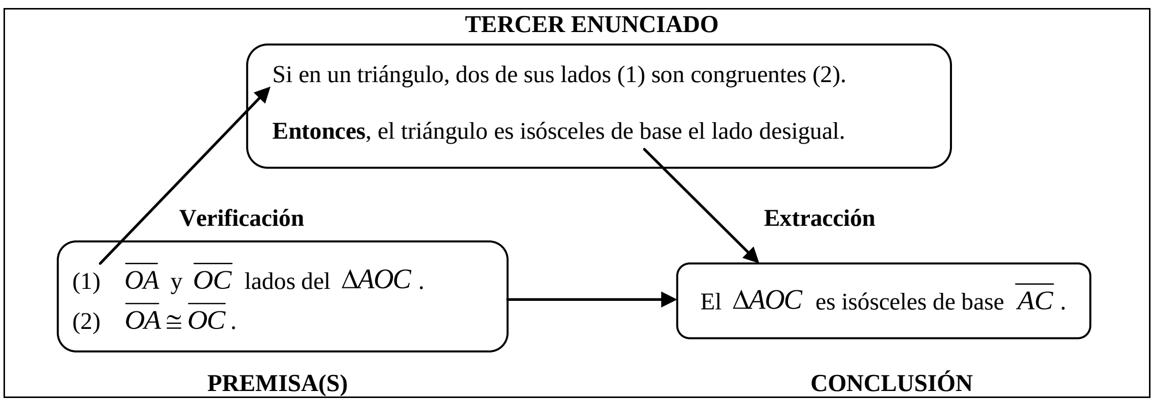
Esquema 4.168: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que los ángulos OBC y FBG tienen la misma medida.*

- **Afirmación 4:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.169)



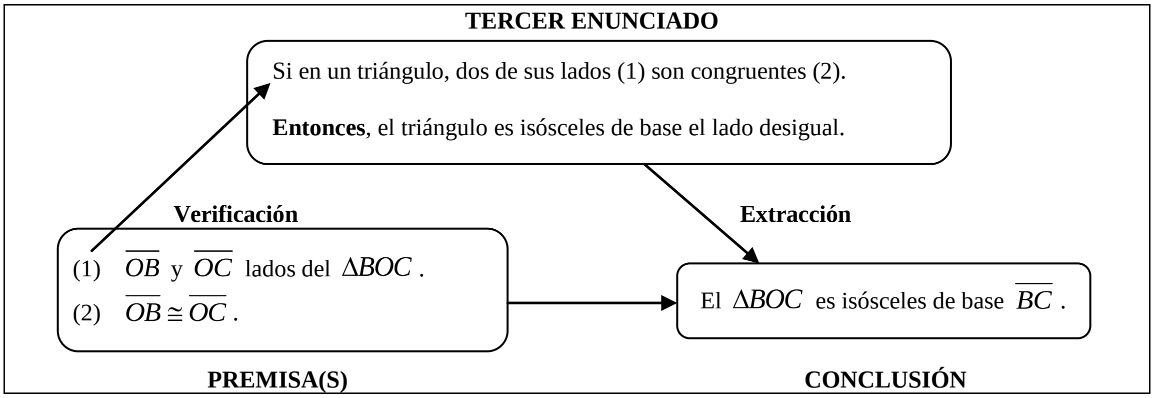
Esquema 4.169: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que los segmentos OA, OB y OC son congruentes.*

- **Afirmación 5:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.170)



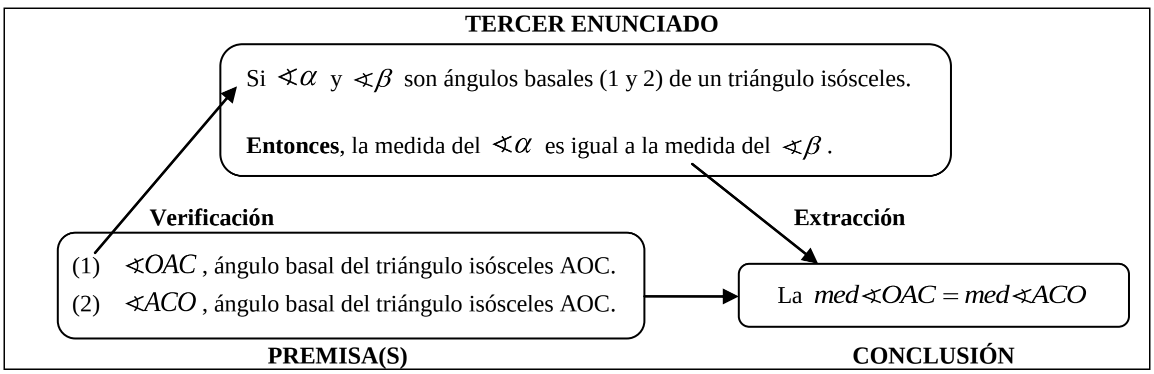
Esquema 4.170: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que el triángulo AOC es Isósceles de base AC.*

- **Afirmación 6:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.171)



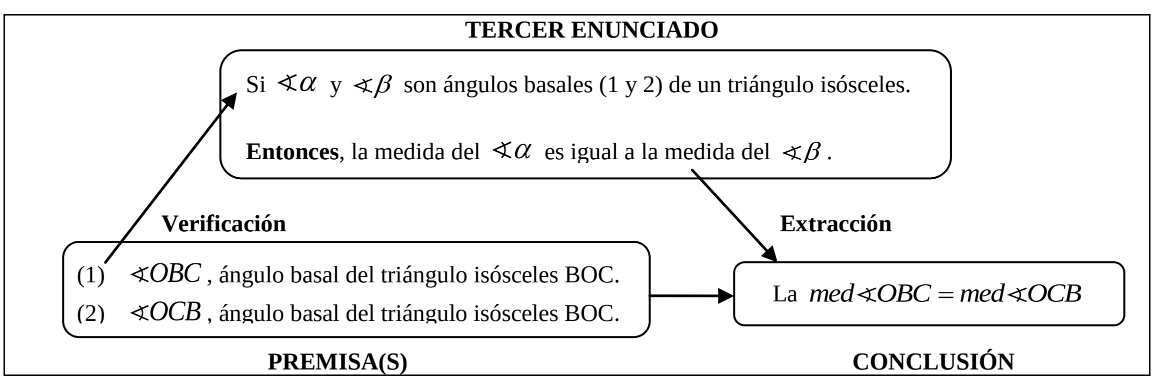
Esquema 4.171: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que el triángulo BOC es Isósceles de base BC.*

- **Afirmación 7:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.172)



Esquema 4.172: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que los ángulos basales del triángulo isósceles AOC son congruentes.*

- **Afirmación 8:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.173)



Esquema 4.173: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que los ángulos basales del triángulo isósceles BOC son congruentes.*

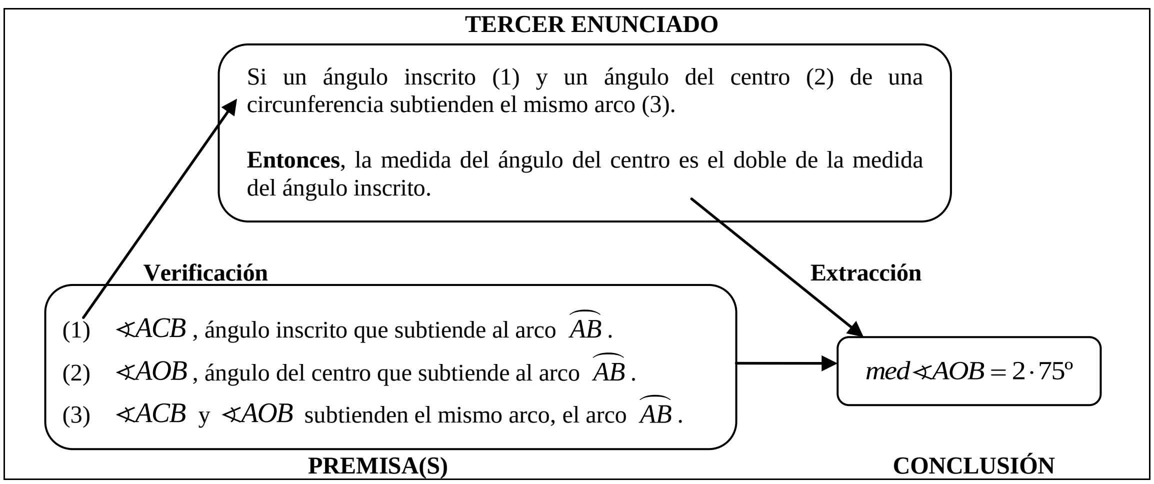
- **Afirmación 9:** Se expresa la medida del ángulo ACB en términos de las medidas de los ángulos ACO y OCB.

- **Afirmación 10:** Se extrae información sobre el $\sphericalangle ACB$, inscrito en la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.116)

- **Afirmación 11:** Se extrae información sobre el $\sphericalangle AOB$, del centro de la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.116)

- **Afirmación 12:** Se relacionan los ángulos obtenidos en las afirmaciones 10 y 11.

- **Afirmación 13:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.174)



Esquema 4.174: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para determinar la medida del ángulo del centro AOB.*

Conocimientos específicos:

- Congruencia de trazos. (Afirmación 4)
- Definición de Triángulo Isósceles. (Afirmaciones 5 y 6)
- Propiedad sobre ángulos basales del triángulo isósceles. (Afirmaciones 7 y 8)
- La medida del todo es igual a la suma de las medidas de sus partes. (Afirmación 9)

Rol de la figura:

- En la afirmación 1 se presenta una *aprehensión operativa de cambio figural.*
- En las afirmaciones 2 a 13 predomina una *aprehensión discursiva* donde el sentido de la transferencia va de *un anclaje visual a uno discursivo.*

Pasos de Razonamiento:

- Modus Ponens.

Cantidad de pasos de razonamiento:	**Caso(s) del teorema:**
- 8 pasos.	- Primer caso.

Observaciones generales

1. El estudiante debe trazar un radio para formar triángulos isósceles para determinar la medida del ángulo inscrito y posteriormente aplicar el Teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia para determinar la medida del ángulo del centro.

Actividad 4

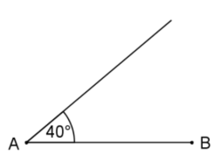
Enunciado

Dibuja el arco capaz de un ángulo de 50º con una cuerda de 3 cm.

Desarrollo de la actividad esperado del estudiante

La secuencia de afirmaciones del desarrollo de la actividad será complementada con la Figura 4.117

(a)



(b)

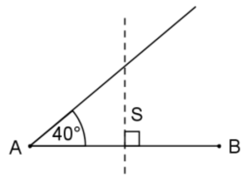
Secuencia de afirmaciones de la construcción

1. Se traza la cuerda AB de longitud 3 cm. (Figura 4.117a)
2. Con vértice A sobre la cuerda AB se dibuja el un ángulo de medida 90º menos 50º. (Figura 4.117b)
3. Se traza la simetral S de la cuerda AB. (Figura 4.117c)
4. La intersección “O” entre la simetral S y el lado

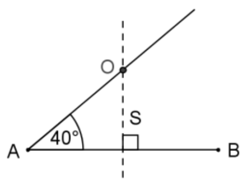
superior del ángulo de 40º es el centro del arco capaz buscado. (Figura 4.117d)

5. Se traza el arco de BA de centro O y radio OA. (Figura 4.117e)

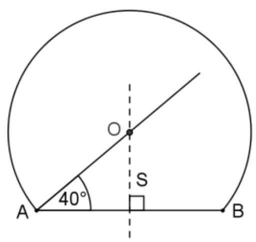
6. El arco BA es el arco capaz de un ángulo de 50º con cuerda de 3 cm. (Figura 4.117e)



(c)



(d)



(e)

Figura 4.117

Los pasos de razonamiento que justifican la construcción del arco capaz son aquellos que se deben realizar para demostrar que el arco construido corresponde al arco capaz de segmento de un ángulo de 50º con cuerda 3 cm.

Enunciado

Pruebe que el arco BA es el arco capaz de un ángulo de 50º con cuerda AB de 3cm.

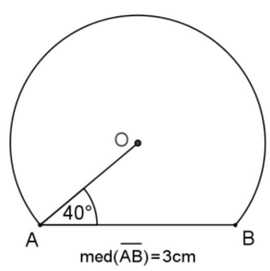
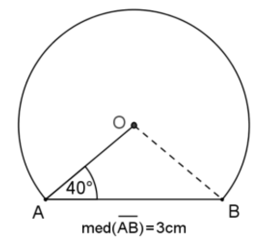


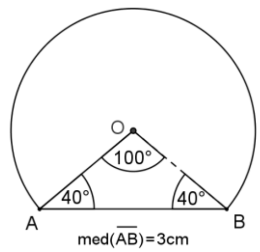
Figura 4.118

Desarrollo de la demostración esperada del estudiante

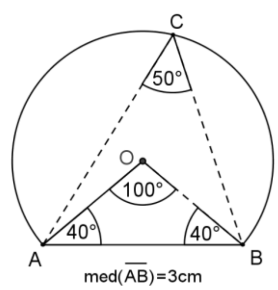
La secuencia de afirmaciones del desarrollo de la demostración será complementada con la Figura 4.119



(a)



(b)



(c)

Figura 4.119

Secuencia de afirmaciones del desarrollo

1. Unir mediante una línea el punto B con el centro O, formando el segmento $\overline{OB}$. (Figura 4.119a)

2. Como $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ son radios de la circunferencia,

$$\overline{OA} \cong \overline{OB}.$$

3. El ΔAOB es isósceles de base $\overline{AB}$.

4. El $\sphericalangle BAO$ es congruente con el $\sphericalangle OBA$.

$$med\sphericalangle BAO = med\sphericalangle OBA = 40º$$

5. La $med\sphericalangle AOB = 100º$, pues (Figura 4.119 b)

$$\begin{gathered} med\sphericalangle AOB + 40º + 40º = 180º \\ med\sphericalangle AOB + 80º = 180º \\ med\sphericalangle AOB = 100º \end{gathered}$$

6. Se construye un ángulo inscrito cualquiera que subtienda al arco AB. (Figura 4.119c)

7. El $\sphericalangle AOB$ es un ángulo del centro que subtiende al arco $\overset{\frown}{AB}$.

8. El $\sphericalangle ACB$ y el $\sphericalangle AOB$ subtienden el mismo arco, el arco $\overset{\frown}{AB}$.

9. Por teorema, la $med\sphericalangle ACB$ es la mitad de la $med\sphericalangle AOB$.

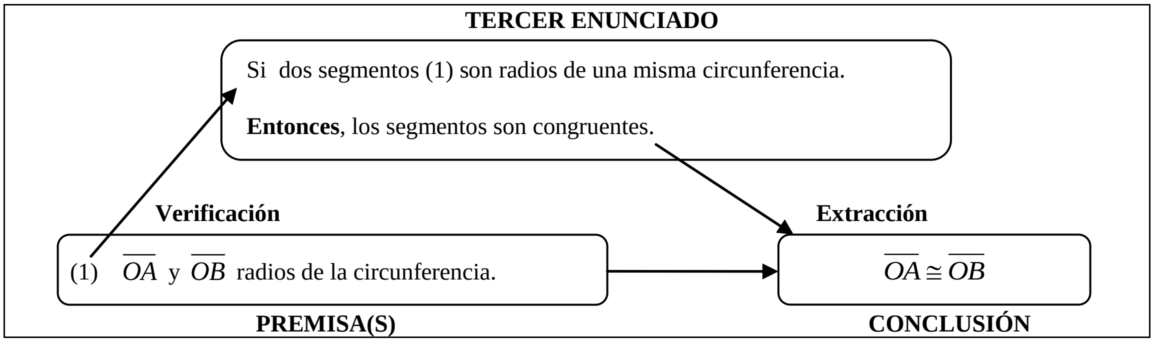
$$\begin{gathered} med\sphericalangle ACB = \frac{1}{2} \cdot 96º \\ med\sphericalangle ACB = 48º \end{gathered}$$

Por lo tanto, el arco BA es el arco capaz de un ángulo de 50º con cuerda de AB de 3cm.

Análisis de la secuencia de afirmaciones de la demostración

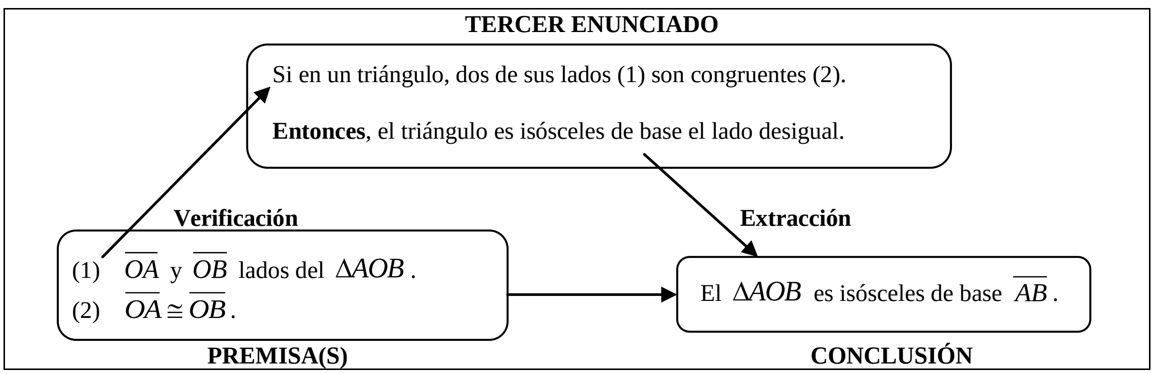
- **Afirmación 1:** Se construye el segmento $\overline{OB}$ para formar el triángulo AOB. (Figura 4.119a)

- **Afirmación 2:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.175)



***Esquema 4.175:** Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que los segmentos OA y OB son congruentes.*

- **Afirmación 3:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.176)



***Esquema 4.176:** Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que el triángulo AOB es Isósceles de base AB.*

- **Afirmación 4:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.177)

TERCER ENUNCIADO

Si $\sphericalangle\alpha$ y $\sphericalangle\beta$ son ángulos basales (1 y 2) de un triángulo isósceles.

Entonces, la medida del $\sphericalangle\alpha$ es igual a la medida del $\sphericalangle\beta$.

Verificación **Extracción**

(1) $\sphericalangle BAO$, ángulo basal del triángulo isósceles AOB.
(2) $\sphericalangle OBA$, ángulo basal del triángulo isósceles AOB.

La $med\sphericalangle BAO = med\sphericalangle OBA$

PREMISA(S) **CONCLUSIÓN**

Esquema 4.177: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que los ángulos basales del triángulo isósceles AOB son congruentes.*

- **Afirmación 5:** Se formula la igualdad que relaciona las medidas de los ángulos interiores del triángulo ΔAOB para determinar la medida del $\sphericalangle AOB$.

- **Afirmación 6:** Se construye el ángulo inscrito ACB que subtiende al arco BA. (Figura 4.119c)

- **Afirmación 7:** Se extrae información sobre el $\sphericalangle AOB$, del centro de la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.119c)

- **Afirmación 8:** Se relacionan los ángulos obtenidos en las afirmaciones 6 y 7.

- **Afirmación 9:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.178)

TERCER ENUNCIADO

Si un ángulo inscrito (1) y un ángulo del centro (2) de una circunferencia subtienden el mismo arco (3).

Entonces, la medida del ángulo inscrito es la mitad de la medida del ángulo del centro.

Verificación **Extracción**

(1) $\sphericalangle ACB$, ángulo inscrito que subtiende al arco $\overset{\frown}{AB}$.

(2) $\sphericalangle AOB$, ángulo del centro que subtiende al arco $\overset{\frown}{AB}$.

(3) $\sphericalangle ACB$ y $\sphericalangle AOB$ subtienden el mismo arco, el arco $\overset{\frown}{AB}$.

$$med\sphericalangle ACB = \frac{1}{2}\cdot 100º$$

PREMISA(S) **CONCLUSIÓN**

Esquema 4.178: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para determinar la medida del ángulo inscrito ACB.*

<table>
<tr><td colspan="2">Conocimientos específicos:

- Congruencia de trazos (Afirmación 2)
- Definición de Triángulo Isósceles (Afirmación 3)
- Propiedad: Los ángulos basales del triángulo isósceles son congruentes. (Afirmación 4)
- Propiedad: La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180º. (Afirmación 5)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Rol de la figura:

- En las afirmaciones 1 y 6 se presenta una aprehensión operativa de cambio figural.
- En las afirmaciones 2 a 5 y 7 a 9 se presenta una aprehensión discursiva, donde predomina el cambio de anclaje visual a discursivo.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Pasos de Razonamiento:

- Modus Ponens.</td></tr>
<tr><td>Cantidad de pasos de razonamiento:

- 4 pasos.</td><td>Caso(s) del teorema:

- Cualquier caso.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Observaciones generales

1. El estudiante debe construir el triángulo isósceles para posteiormente aplicar el teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia y asi logar realizar la demostración.</td></tr>
</table>

Actividad 5

Enunciado

AB y CD son curdas paralelas. Calcula $\sphericalangle DAB$ y $\sphericalangle CQD$.

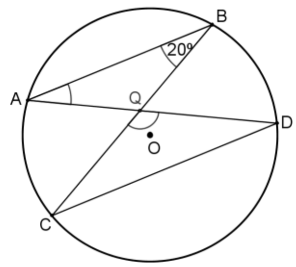
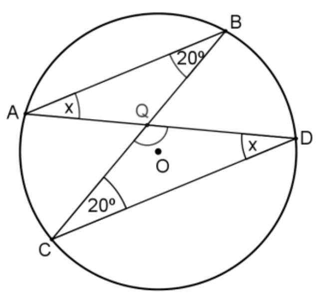


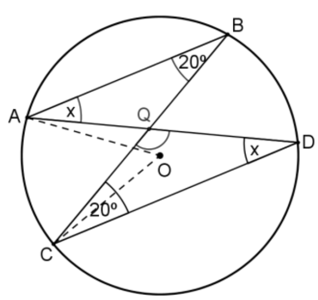
Figura 4.120

Desarrollo de la actividad esperado del estudiante

La secuencia de afirmaciones del desarrollo de la actividad será complementada con la Figura 4.121



(a)



(b)

Figura 4.121

Secuencia de afirmaciones del desarrollo

1. Como AD y CD son paralelas,

   $med\sphericalangle DAB = med\sphericalangle ADC = x$ (Figura 4.121a)

2. Como AD y CD son paralelas,

   $med\sphericalangle ABC = med\sphericalangle DCB = 20^{\circ}$ (Figura 4.121a)

3. Unir mediante una línea el punto A con el centro Q, formando el segmento $\overline{QA}$. (Figura 4.121b)

4. Unir mediante una línea el punto C con el centro Q, formando el segmento $\overline{QC}$. (Figura 4.121b)

5. El $\sphericalangle ABC$ es un ángulo inscrito que subtiende al arco $\widehat{AC}$.

6. El $\sphericalangle AQC$ es un ángulo del centro que subtiende al arco $\widehat{AC}$.

7. El $\sphericalangle ABC$ y el $\sphericalangle AQC$ subtienden el mismo arco, el arco $\widehat{AC}$.

8. Por teorema, la $med\sphericalangle AQC$ es el doble de la $med\sphericalangle ABC$.

$$med\sphericalangle AQC = 2 \cdot 20^{\circ}$$
$$med\sphericalangle AQC = 40^{\circ}$$

Por lo tanto, la $med\sphericalangle AQC = 40^{\circ}$.

9. El $\sphericalangle ADC$ es un ángulo inscrito que subtiende al arco $\overset{\frown}{AC}$.

10. El $\sphericalangle ADC$ y el $\sphericalangle AQC$ subtienden el mismo arco, el arco $\overset{\frown}{AC}$.

11. Por teorema, la $med\sphericalangle ADC$ es la mitad de la $med\sphericalangle AQC$.

$$med\sphericalangle ADC = \frac{1}{2} \cdot 40^{\circ}$$
$$med\sphericalangle ADC = 20^{\circ}$$

Por lo tanto, la $med\sphericalangle DAB = 20^{\circ} = med\sphericalangle DAB$.

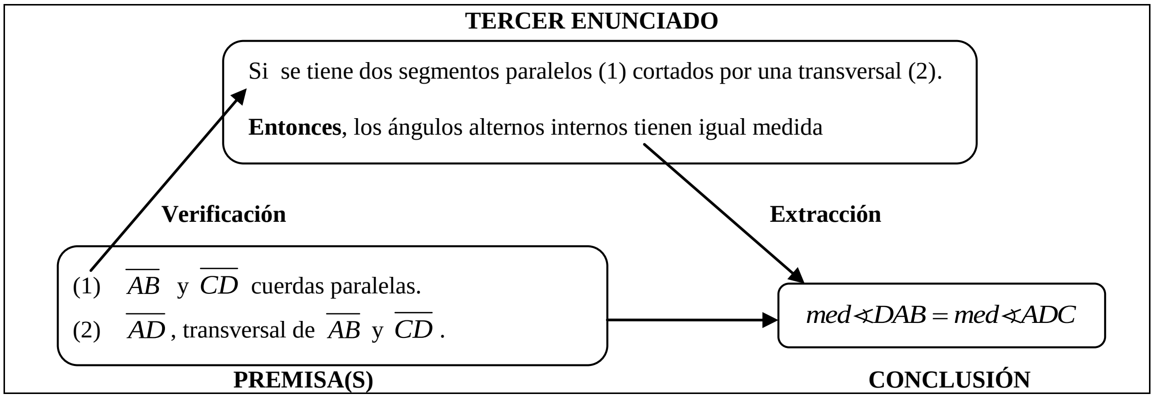
12. La $med\sphericalangle CQD = 140^{\circ}$, pues

$$med\sphericalangle CQD + med\sphericalangle DCQ + med\sphericalangle QDC = 180^{\circ}$$
$$med\sphericalangle CQD + 20^{\circ} + 20^{\circ} = 180^{\circ}$$
$$med\sphericalangle CQD + 40^{\circ} = 180^{\circ}$$
$$med\sphericalangle CQD = 140^{\circ}$$

Por lo tanto, la $med\sphericalangle CQD = 140^{\circ}$.

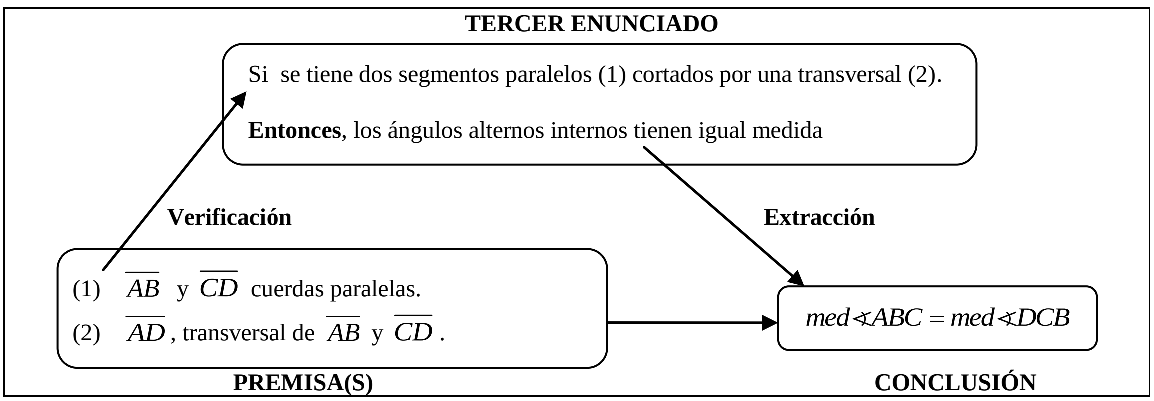
Análisis de la secuencia de afirmaciones del desarrollo del ejercicio

- **Afirmación 1:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.179)



Esquema 4.179: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que los ángulos DAB y ADC tienen igual medida.*

- **Afirmación 2:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.180)



Esquema 4.180: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para concluir que los ángulos ABC y DCB tienen igual medida.*

- **Afirmación 3:** Se construye el segmento $\overline{OA}$ para formar el $\sphericalangle AOC$ del centro de la circunferencia. (Figura 4.121b)

- **Afirmación 4:** Se construye el segmento $\overline{OC}$ para formar el $\sphericalangle AOC$ del centro de la circunferencia. (Figura 4.121b)

- **Afirmación 5:** Se extrae información sobre el $\sphericalangle ABC$, inscrito en la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.121b)

- **Afirmación 6:** Se extrae información sobre el $\sphericalangle AOC$, del centro de la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.121b)

- **Afirmación 7:** Se relacionan los ángulos obtenidos en las afirmaciones 5 y 6.

- **Afirmación 8:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.181)

TERCER ENUNCIADO

Si un ángulo inscrito (1) y un ángulo del centro (2) de una circunferencia subtienden el mismo arco (3).

Entonces, la medida del ángulo del centro es el doble de la medida del ángulo inscrito.

Verificación

Extracción

(1) $\sphericalangle ABC$, ángulo inscrito que subtiende al arco $\overset{\frown}{AC}$.

(2) $\sphericalangle AQC$, ángulo del centro que subtiende al arco $\overset{\frown}{AC}$.

(3) $\sphericalangle ABC$ y $\sphericalangle AQC$ subtienden el mismo arco, el arco $\overset{\frown}{AC}$.

$med\sphericalangle AQC = 2\cdot 20^{\circ}$

PREMISA(S)

CONCLUSIÓN

Esquema 4.181: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para determinar la medida del ángulo del centro AQC.*

- **Afirmación 9:** Se extrae información sobre el $\sphericalangle ADC$, inscrito en la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.121b)

- **Afirmación 10:** Se relacionan los ángulos obtenidos en las afirmaciones 6 y 9.

- **Afirmación 11:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.182)

TERCER ENUNCIADO

Si un ángulo inscrito (1) y un ángulo del centro (2) de una circunferencia subtienden el mismo arco (3).

Entonces, la medida del ángulo inscrito es la mitad de la medida del ángulo del centro.

Verificación **Extracción**

(1) $\sphericalangle ADC$, ángulo inscrito que subtiende al arco $\overset{\frown}{AC}$.

(2) $\sphericalangle AQC$, ángulo del centro que subtiende al arco $\overset{\frown}{AC}$.

(3) $\sphericalangle ADC$ y $\sphericalangle AQC$ subtienden el mismo arco, el arco $\overset{\frown}{AC}$.

$$med\sphericalangle AQC = \frac{1}{2}\cdot 40º$$

PREMISA(S) **CONCLUSIÓN**

Esquema 4.182: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para determinar la medida del ángulo inscrito AQC.*

- **Afirmación 12:** Se formula la igualdad que relaciona las medidas de los ángulos interiores del ΔCQD para determinar la medida del $\sphericalangle CQD$.

<table>
<tr><td colspan="2">Conocimientos específicos:

- Definición de segmentos paralelos. (Afirmación 1)
- Definición de transversal. (Afirmaciones 1)
- Teorema sobre ángulos formados por paralelas cortadas por una transversal. (Afirmación 1)
- Propiedad: La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180º. (Afirmación 1)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Rol de la figura:

- En las afirmaciones 1 a 2 predomina una aprehensión discursiva donde el sentido de la transferencia va de un anclaje visual a uno discursivo.
- En las afirmaciones 3 a 4 se presenta una aprehensión operativa de cambio figural.
- En las afirmaciones 5 a 12 predomina una aprehensión discursiva donde el sentido de la transferencia va de un anclaje visual a uno discursivo.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Pasos de Razonamiento:

- Modus Ponens.</td></tr>
<tr><td>Cantidad de pasos de razonamiento:

- 4 pasos.</td><td>Caso(s) del teorema:

- Primer y segundo caso.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Observaciones generales

1. El estudiante debe construir el ángulo del centro. Además, debe aplicar propiedades de ángulos y posteriormente aplicar el Teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia.</td></tr>
</table>

Actividad 6

Enunciado

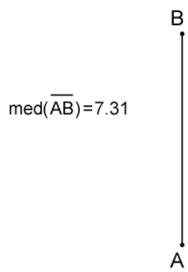
La portería reglamentaria de futbol tiene un ancho de 8 yardas (1 yarda = 91,44 cm. aproximadamente).

El punto penal está sobre la simetral de la raya de gol, a 12 yardas del punto medio de ésta.

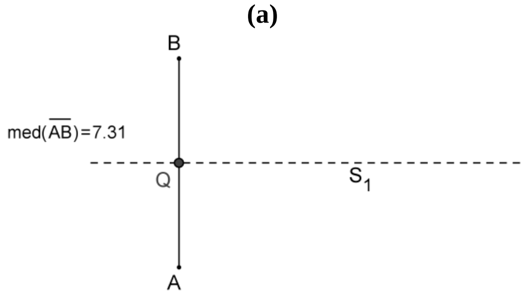
Comenzando desde el punto penal, dibuja el arco capaz del ángulo de visión de la portería (a escala 1:100). Supón que el portero está parado en el punto medio de la raya de gol. ¿Según tu dibujo a escala, a qué distancia aproximadamente del portero está el centro del arco capaz que trazaste? ¿Cuál punto de este arco capaz es el más lejano del portero? ¿Qué radio tiene el arco capaz?

Desarrollo de la actividad esperado del estudiante

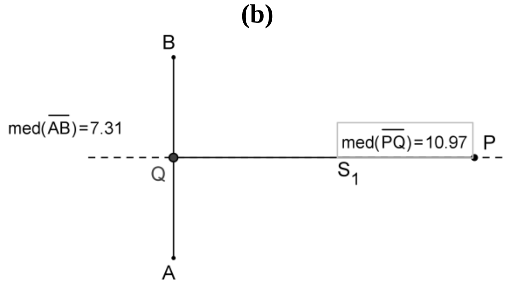
La secuencia de afirmaciones del desarrollo de la actividad será complementada con la Figura 4.122



(a)



(b)



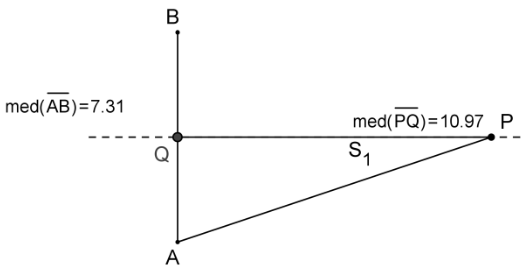
(c)

Secuencia de afirmaciones del desarrollo

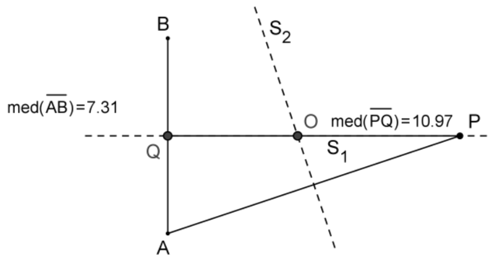
1. Sea AB la cuerda que representa la raya de gol. (Figura 4.122a)
2. Se traza S_1, simetral de la raya de Gol. (Figura 4.122b)
3. Sea Q el punto que representa al portero. (Figura 4.122c)
4. Sea P el punto penal. (Figura 4.122c)
5. Se traza segmento AP, la cuerda de la circunferencia que contiene al arco capas. (Figura 4.122d)
6. Se traza S_2, simetral de la cuerda AP. (Figura 4.122e)
7. La intersección de S_1 con S_2 determina el centro de la circunferencia. (Figura 4.122e)
8. Se traza la circunferencia de centro O y que pasa por el vértice A. (Figura 4.122f)
9. El arco capaz es el arco AB. (Figura 4.122g)
10. La distancia entre el portero y el centro del arco capaz es 4.88 cm. (Figura 4.122g)

$$\overline{QO} = 4.88cm.$$

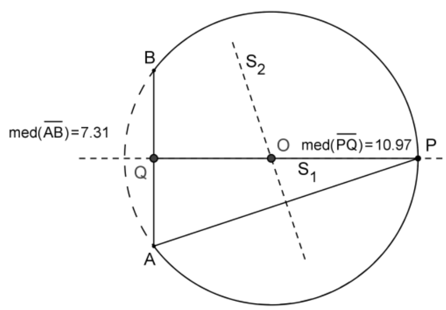
11. El punto del arco capaz más lejano del portero



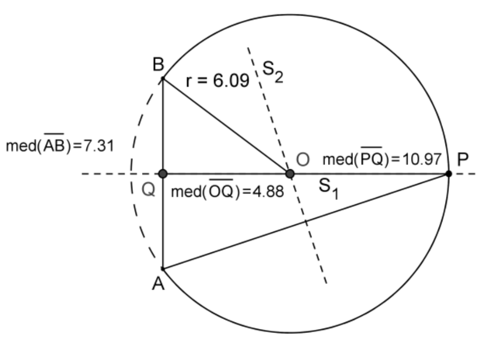
(d)



(e)



(f)



(g)

Figura 4.122

es el punto penal P. (Figura 4.122g)

12. Se traza el radio OB cuya medida es 6.09. (Figura 4.122g)

$$r = 6.09$$

Los pasos de razonamiento que justifican el desarrollo del ejercicio con aquellos que demuestran que las medidas de los ángulos que subtienden el arco BA son todas iguales

Enunciado

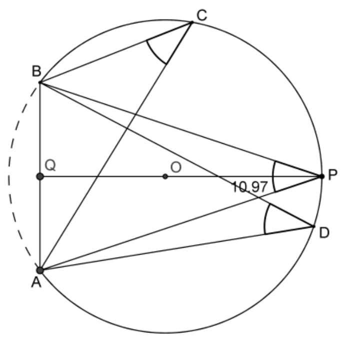
Demostrar que todos los ángulos inscritos que subtienden un mismo arco son congruentes.

Desarrollo de la actividad esperado del estudiante

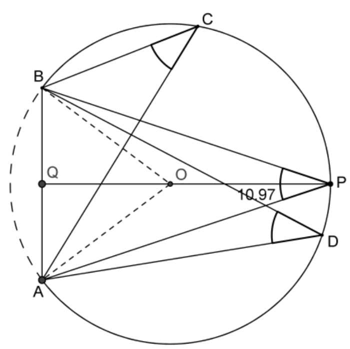
La secuencia de afirmaciones del desarrollo de la actividad será complementada con la Figura 4.123

Hipótesis: $\sphericalangle BCA$, $\sphericalangle BPA$ y $\sphericalangle BDA$ son ángulos inscritos que subtienden el mismo arco, al arco $\overset{\frown}{BA}$.

Tesis: $\sphericalangle BCA \cong \sphericalangle BPA \cong \sphericalangle BDA$



(a)



(b)

Figura 4.123

Secuencia de afirmaciones del desarrollo

1. Sea $\alpha = med\,\overset{\frown}{BA}$.
2. Los ángulos BCA, BPA y BDA, por hipótesis, son ángulos inscritos que subtienden al mismo arco, el arco $\overset{\frown}{BA}$.
3. Unir mediante una línea el punto A con el centro O, formando el segmento $\overline{AO}$. (Figura 4.123b)
4. Unir mediante una línea el punto B con el centro O, formando el segmento $\overline{BO}$. (Figura 4.123b)
5. El $\sphericalangle BOA$ es un ángulo del centro que subtiende al arco $\overset{\frown}{BA}$.
6. La $med\sphericalangle BOA = med\,\overset{\frown}{BA}$

$$med\sphericalangle BOA = \alpha$$

7. Los ángulo BCA, BPA, BDA y el $\sphericalangle BOA$ subtienden el mismo arco, el arco $\overset{\frown}{BA}$.
8. Por teorema, las medidas de los ángulos BCA, BPA y BDA son iguales a la mitad de la $med\sphericalangle BOA$.

$$med\sphericalangle BCA = \frac{\alpha}{2},\ med\sphericalangle BPA = \frac{\alpha}{2},\ med\sphericalangle BDA = \frac{\alpha}{2}$$

Por lo tanto los ángulos BCA, BPA y BDA son congruentes, pues, estos tienen la misma medida.

Análisis de la secuencia de afirmaciones del desarrollo del ejercicio

- **Afirmación 1:** Se asigna una medida α cualquiera al arco BA.

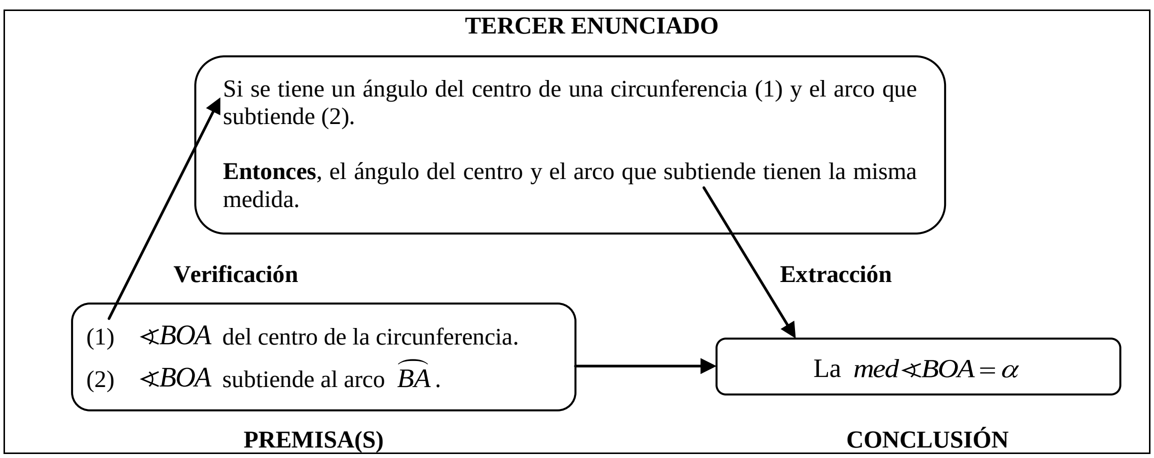
- **Afirmación 2:** Se extrae información sobre los ángulos AEB, BPA y BDA, inscritos en la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.123b)

- **Afirmación 3:** Se construye el segmento $\overline{AO}$ para formar el $\sphericalangle BOA$, del centro de la circunferencia. (Figura 4.123b)

- **Afirmación 4:** Se construye el segmento $\overline{BO}$ para formar el $\sphericalangle BOA$, del centro de la circunferencia. (Figura 4.123b)

- **Afirmación 5:** Se extrae información sobre el $\sphericalangle BOA$, del centro de la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.123b)

- **Afirmación 6:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.183)



Esquema 4.183: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para determinar la medida del ángulo BOA.*

- **Afirmación 7:** Se relacionan los ángulos obtenidos en las afirmaciones 2 y 6.

- **Afirmación 8:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.184)

TERCER ENUNCIADO

Si un ángulo inscrito (1) y un ángulo del centro (2) de una circunferencia subtienden el mismo arco (3).

Entonces, la medida del ángulo inscrito es la mitad de la medida del ángulo del centro.

Verificación **Extracción**

(1) $\sphericalangle BCA$, $\sphericalangle BPA$ y $\sphericalangle BDA$, ángulos inscritos que subtienden al arco $\widehat{BA}$.
(2) $\sphericalangle BOA$, ángulo del centro que subtiende al arco $\widehat{BA}$
(3) $\sphericalangle BCA$, $\sphericalangle BPA$, $\sphericalangle BDA$ y $\sphericalangle BOA$ subtienden el mismo arco, el arco $\widehat{BA}$.

$$med\sphericalangle BCA = ... = med\sphericalangle BDA = \frac{1}{2}\cdot\alpha$$

PREMISA(S) **CONCLUSIÓN**

Esquema 4.184: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para determinar la medida de los ángulos inscritos BCA, BPA y BDA.*

Conocimientos específicos: - No son necesarios.	
Rol de la figura: - En las afirmaciones 1 y 2 se presenta una *aprehensión discursiva*, donde el traspaso va de un *anclaje visual a discursivo*. - En las afirmaciones 3 y 4 se presenta una *aprehensión operativa de cambio figural.* - En las afirmaciones 5 a 8 predomina una *aprehensión discursiva*, donde el sentido de la transferencia va de *un anclaje visual a uno discursivo*	
Pasos de Razonamiento: - Modus Ponens.	
Cantidad de pasos de razonamiento: - 2 pasos.	**Caso(s) del teorema:** - Cualquier caso.
Observaciones generales 1. En la demostración desarrollada anteriormente se utilizan los 3 casos del teorema del ángulo inscrito y delcentro de una circunferencia. Sin embargo, eL estudiante puede tomar cualquiera de los casos del teorema para desarrollar la demostración, es más, la puede realizr utilizando un único caso.	

Actividad 7

Enunciado

Calcula $\sphericalangle AOB$ en la siguiente figura.

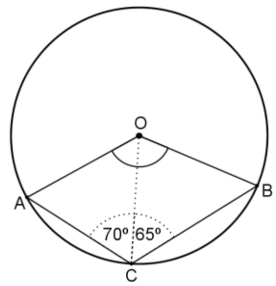


Figura 4.124

Desarrollo de la actividad esperado del estudiante

La secuencia de afirmaciones del desarrollo de la actividad será complementada con la Figura 4.125

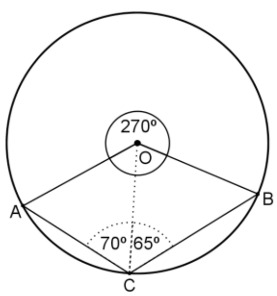


Figura 4.125

Secuencia de afirmaciones del desarrollo

1. El $\sphericalangle ACB$ es un ángulo inscrito que subtiende al arco $\overset{\frown}{BA}$.

2. La $med\sphericalangle ACB$ es igual a la suma de las medidas de los ángulos OCA y BOC.

$$med\sphericalangle ACB = med\sphericalangle OCA + med\sphericalangle BOC$$
$$med\sphericalangle ACB = 70º + 65º$$
$$med\sphericalangle ACB = 135º$$

3. El $\sphericalangle BOA$ es un ángulo del centro que subtiende al arco $\overset{\frown}{BA}$.

4. El $\sphericalangle ACB$ y el $\sphericalangle BOA$ subtienden el mismo arco, el arco $\overset{\frown}{BA}$.

5. Por teorema, la $med\sphericalangle BOA$ es el doble de la $med\sphericalangle ACB$.

$$med\sphericalangle BOA = 2\cdot 135º$$
$$med\sphericalangle BOA = 270º$$

6. Como la $med\sphericalangle AOB$ con la $med\sphericalangle BOA$ forman un ángulo completo,

$$med\sphericalangle AOB + med\sphericalangle BOA = 360º$$
$$med\sphericalangle AOB + 270º = 360º$$
$$med\sphericalangle AOB = 90º$$

Por lo tanto, la $med\sphericalangle AOB = 90º$.

Análisis de la secuencia de afirmaciones del desarrollo del ejercicio

- **Afirmación 1:** Se extrae información sobre el $\sphericalangle ACB$, inscrito en la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.125)

- **Afirmación 2:** Se expresa la medida del ángulo ACB en términos de las medidas de los ángulos OCA y BOC.

- **Afirmación 3:** Se extrae información sobre el $\sphericalangle BOA$, del centro de la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.125)

- **Afirmación 4:** Se relacionan los ángulos obtenidos en las afirmaciones 1 y 3.

- **Afirmación 5:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.185)

TERCER ENUNCIADO

Si un ángulo inscrito (1) y un ángulo del centro (2) de una circunferencia subtienden el mismo arco (3).

Entonces, la medida del ángulo del centro es el doble de la medida del ángulo inscrito.

Verificación

Extracción

(1) $\sphericalangle ACB$, ángulo inscrito que subtiende al arco $\widehat{BA}$.

(2) $\sphericalangle BOA$, ángulo del centro que subtiende al arco $\widehat{BA}$.

(3) $\sphericalangle ACB$ y $\sphericalangle BOA$ subtienden el mismo arco, el arco $\widehat{BA}$.

$med\sphericalangle BOA = 2 \cdot 135º$

PREMISA(S) **CONCLUSIÓN**

Esquema 4.185: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para determinar la medida del ángulo del centro BOA.*

- **Afirmación 7:** Dado que los ángulos AOB y BOA forman un ángulo completo. Se formula la igualdad que relaciona las medidas de dichos ángulos para determinar la medida del ángulo AOB en función de la medida del ángulo BOA.

Conocimientos específicos: - La medida del todo es igual a la suma de las medidas de sus partes. (Afirmación 2)	
Rol de la figura: - En todas las afirmaciones predomina una *aprehensión discursiva* donde el sentido de la transferencia va de un *anclaje visual a uno discursivo*.	
Pasos de Razonamiento: - Modus Ponens.	
Cantidad de pasos de razonamiento: - 1 paso.	**Caso(s) del teorema:** - Primer caso.
Observaciones generales 1. El estudiante debe notar que el ángulo BOA, del centro, es un ángulo obtuso.	

Actividad 8

Enunciado

Demuestra que la suma de las medidas de los ángulos de un cuadrilátero convexo inscrito en una circunferencia es 180º.

Demuestra: $\sphericalangle ACB + \sphericalangle ADB = 180^{o}$

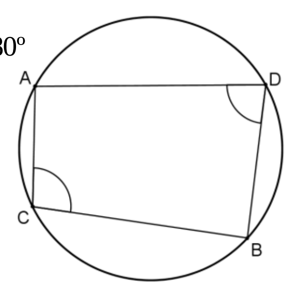
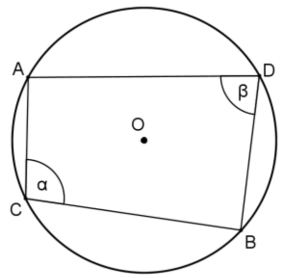


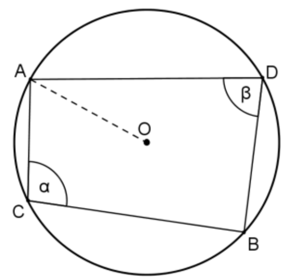
Figura 4.126

Desarrollo de la actividad esperado del estudiante

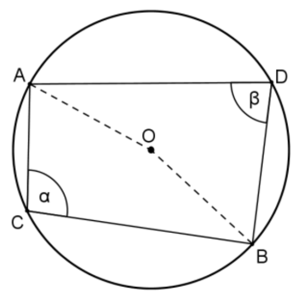
La secuencia de afirmaciones del desarrollo de la actividad será complementada con la Figura 4.127



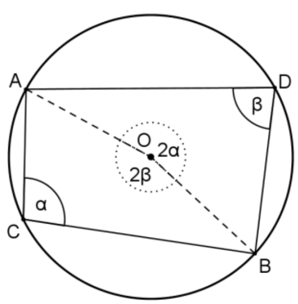
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 2.27

Secuencia de afirmaciones del desarrollo

1. Sea dibuja el punto O, el centro de la circunferencia. (Figura 4.127a)

2. Sea α la medida del ángulo BCA y β la medida del ángulo ADB. (Figura 4.127a)

3. Unir mediante una línea el punto A con el centro O, formando el segmento $\overline{AO}$. (Figura 4.127b)

4. Unir mediante una línea el punto B con el centro O, formando el segmento $\overline{BO}$.(Figura 4.127c)

5. El $\sphericalangle ACB$ es un ángulo inscrito que subtiende al arco $\overset{\frown}{BA}$.

6. El $\sphericalangle BOA$ es un ángulo del centro que subtiende al arco $\overset{\frown}{BA}$.

7. El $\sphericalangle ACB$ y el $\sphericalangle BOA$ subtienden el mismo arco, el arco $\overset{\frown}{BA}$.

8. Por teorema, la $med\sphericalangle BOA$ es el doble de la $med\sphericalangle ACB$. (Figura 4.127d)

$$med\sphericalangle BOA = 2\cdot\alpha$$
$$med\sphericalangle BOA = 2\alpha$$

9. El $\sphericalangle ADB$ es un ángulo inscrito que subtiende al arco $\overset{\frown}{AB}$.

10. El $\sphericalangle AOB$ es un ángulo del centro que subtiende al arco $\overset{\frown}{AB}$.

11. El $\sphericalangle ADB$ y el $\sphericalangle AOB$ subtienden el mismo arco, el arco $\overset{\frown}{AB}$.

12. Por teorema, la $med\sphericalangle AOB$ es el doble de la $med\sphericalangle ADB$. (Figura 4.123d)

$$med\sphericalangle AOB = 2\cdot\beta$$
$$med\sphericalangle AOB = 2\beta$$

13. Como la $med\sphericalangle ACB$ con la $med\sphericalangle AOB$ forman un ángulo completo,

$$med\sphericalangle BOA + med\sphericalangle AOB = 360^{\circ}$$
$$2\alpha + 2\beta = 360^{\circ}$$
$$2(\alpha+\beta) = 360^{\circ}$$

$$\alpha + \beta = 180º$$

Por lo tanto, la $med\sphericalangle ACB + med\sphericalangle ADB = 180º$.

Análisis de la secuencia de afirmaciones del desarrollo del ejercicio

- **Afirmación 1:** Se ubica el centro de la circunferencia para constuir ángulops del centro. (Figura 4.127a)

- **Afirmación 2:** Se asigna una medida α y β cualquiera a los ángulos BCA y ADB respectivamente. (Figura 4.127a)

- **Afirmación 3:** Se construye el segmento $\overline{AO}$ para formar los ángulos BOA y AOB, del centro de la circunferencia. (Figura 4.127b)

- **Afirmación 4:** Se construye el segmento $\overline{BO}$ para formar los ángulos BOA y AOB, del centro de la circunferencia. (Figura 4.127c)

- **Afirmación 5:** Se extrae información sobre el $\sphericalangle ACB$, inscrito en la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.127c)

- **Afirmación 6:** Se extrae información sobre el $\sphericalangle BOA$, del centro de la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.127c)

- **Afirmación 7:** Se relacionan los ángulos obtenidos en las afirmaciones 5 y 6.

- **Afirmación 8:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.186)

TERCER ENUNCIADO

Si un ángulo inscrito (1) y un ángulo del centro (2) de una circunferencia subtienden el mismo arco (3).

Entonces, la medida del ángulo del centro es el doble de la medida del ángulo inscrito.

Verificación

Extracción

(1) $\sphericalangle ACB$, ángulo inscrito que subtiende al arco $\overset{\frown}{BA}$.

(2) $\sphericalangle BOA$, ángulo del centro que subtiende al arco $\overset{\frown}{BA}$.

(3) $\sphericalangle ACB$ y $\sphericalangle BOA$ subtienden el mismo arco, el arco $\overset{\frown}{BA}$.

$med \sphericalangle BOA = 2 \cdot \alpha$

PREMISA(S)

CONCLUSIÓN

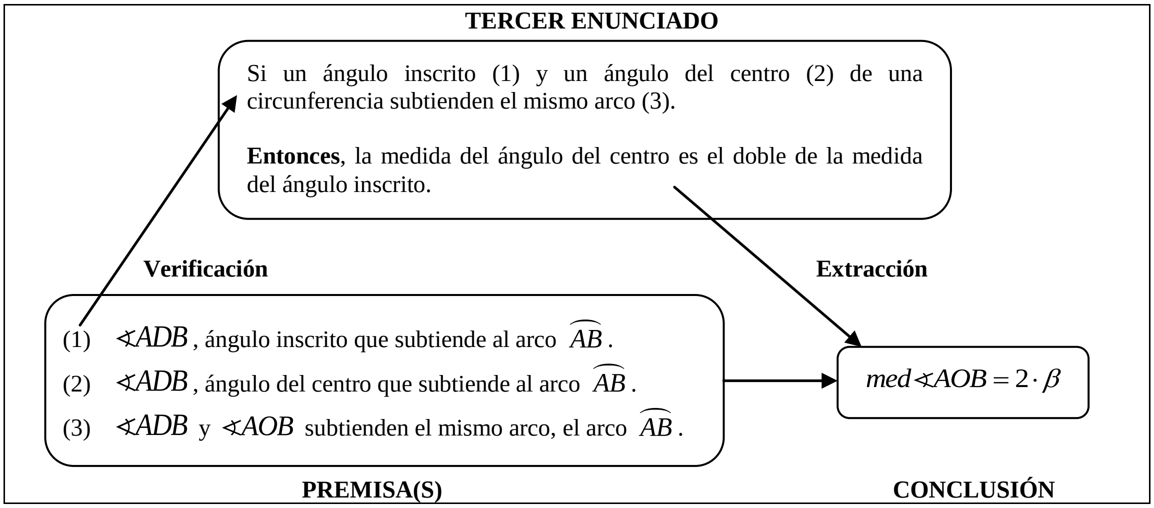
Esquema 4.186: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para determinar la medida del ángulo del centro BOA.*

- **Afirmación 9:** Se extrae información sobre el $\sphericalangle ADB$, inscrito en la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.127c)

- **Afirmación 10:** Se extrae información sobre el $\sphericalangle AOB$, del centro de la circunferencia presente en el dibujo. (Figura 4.127c)

- **Afirmación 11:** Se relacionan los ángulos obtenidos en las afirmaciones 9 y 10.

- **Afirmación 12:** Se justifica realizando un paso de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus Ponens). (Esquema 4.187)



Esquema 4.187: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado para determinar la medida del ángulo del centro AOB.*

- **Afirmación 13:** Dado que los ángulos BOA y AOB forman un ángulo completo. Se formula la igualdad que relaciona las medidas de dichos ángulos.

<table>
<tr><td colspan="2">Conocimientos específicos:
- Definición de Cuadrilatero Convexo. (Enunciado de la actividad)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Rol de la figura:
- En las afirmaciones 1 a 2 predomina una aprehensión discursiva donde el sentido de la transferencia va de un anclaje visual a uno discursivo.
- En las afirmaciones 3 a 4 se presenta una aprehensión operativa de cambio figural.
- En las afirmaciones 5 a 13 predomina una aprehensión discursiva donde el sentido de la transferencia va de un anclaje visual a uno discursivo.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Pasos de Razonamiento:
- Modus Ponens.</td></tr>
<tr><td>Cantidad de pasos de razonamiento:
- 2 pasos.</td><td>Caso(s) del teorema:
- Primer caso.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Observaciones generales
1. El estudiante debe construir el ángulo del centro y posteriormente aplicar el Teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia.
2. El estudiante debe notar que el ángulo COB, del centro, es un ángulo obtuso para posteriormente aplicar el teorema.</td></tr>
</table>

A continuación, en la tabla 4.19, se detalla la cantidad de pasos de razonamiento, tipos de razonamiento y caso del teorema que se deben utilizar para el desarrollo de cada una de las actividades propuestas del texto.

EJERCICIOS	CASO DEL TEOREMA	CANTIDAD DE PASOS DE RAZONAMIENTO	TIPO DE PASO DE RAZONAMIENTO
Demostración segundo caso	Caso 2	5 pasos	Modus Ponens
Demostración tercer caso	Caso 3	3 pasos	Modus Ponens
1	Caso 1 y 2	2 pasos	Modus Ponens
2	Caso 1 y 2	2 pasos	Modus Ponens
3a	Caso 1	4 pasos	Modus Ponens
3b	Caso 1	1 paso	Modus Ponens
3c	Caso 1	8 pasos	Modus Ponens
4	Cualquier caso	4 pasos	Modus Ponens
5	Caso 1 y 2	4 pasos	Modus Ponens
6	Cualquier caso	2 pasos	Modus Ponens
7	Caso 1	1 pasos	Modus Ponens
8	Caso 1	2 pasos	Modus Ponens

Tabla 4.19: Cantidad de pasos de razonamientos y tipos de pasos de razonamientos que justifican las afirmaciones del desarrollo de las actividades propuestas por el texto Mare Nostrum.

De la tabla 4.19 se extrae que el tipo de pasos de razonamiento es de tipo modus ponens. Además, las actividades no están ordenadas según los pasos de razonamiento. La mitad de los ejercicios presenta más de 4 pasos de razonamientos en su desarrollo. La mayoría de estos son de aplicación del primer caso del teorema, solo 3 corresponden al segundo caso.

Nueve de las doce actividades que propone el texto requieren de conocimientos específicos para ser resueltas por el alumno. Esto conlleva a que en el desarrollo de los ejercicios se presente una mayor cantidad de pasos de razonamiento.

Respecto al rol de la figura, la tabla 4.20, muestra un resumen de la cantidad de afirmaciones donde se identifica la Aprehensión Operativa y Discursiva en el desarrollo de las actividades.

EJERCICIO	APREHENSION DISCURSIVA	APREHENSION OPERATIVA
Demostracion segundo caso	9 Afirmaciones	1 Afirmación
Demostración tercer caso	5 Afirmaciones	0 Afirmaciones
1	7 Afirmaciones	2 Afirmaciones
2	7 Afirmaciones	2 Afirmaciones
3a	8 Afirmaciones	Al comienzo del desarrollo
3b	5 Afirmaciones	0 Afirmaciones
3c	10 Afirmaciones	1 Afirmación
4	7 Afirmaciones	2 Afirmaciones
5	10 Afirmaciones	2 Afirmaciones
6	6 Afirmaciones	2 Afirmaciones
7	1 Afirmación	0 Afirmaciones
8	11 Afirmaciones	2 Afirmaciones

Tabla 4.20: Resumen correspondiente al rol de la figura en las actividades propuestas por el texto Mare Nostrum.

Se desprende de la tabla antes expuesta, que para siete actividades se tuvo que realizar más de una aprehensión operativa de cambio figural. Es decir, el estudiante debiese agregar un elemento geométrico para su resolución. En las actividades 4 y 6 se requirió una coordinación más exhaustiva de las aprehensiones operativa y discursiva. Esyo es, que para realizar las distintas afirmaciones se requería constantemente de una modificación de la configuración inicial acompañado de un discurso matemático para su correcto procedimiento.

5. Diseño del cuestionario de actividades propuestas a los estudiantes

5.1 Selección de las actividades propuestas a los estudiantes

Las actividades seleccionadas se extrajeron de los textos usados por los estudiantes, considerando la cantidad de pasos de razonamientos que estas involucran en su desarrollo junto con el caso del teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia que se requiere aplicar para su resolución. El orden en cómo se propusieron las actividades a los estudiantes fue en forma graduada según la cantidad de pasos de razonamientos.

5.2 Selección de las actividades del texto Santillana: Edición Especial para el Ministerio de Educación

Del texto Santillana: Edición Especial para el Ministerio de Educación se seleccionaron 4 actividades (Véase apéndice A), la tabla 3.1 detalla la cantidad de pasos de razonamientos y casos del Teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia que se debe utilizar para su resolución.

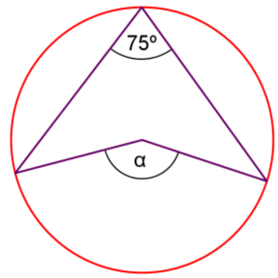
ACTIVIDAD	CASO DEL TEOREMA	CANTIDAD DE PASOS DE RAZONAMIENTO
Actividad 1	Primer Caso	1 Paso
Actividad 2	Segundo Caso	2 Pasos
Actividad 3	Primer y Segundo Caso	2 Pasos
Actividad 4	Primer Caso	4 Pasos

Tabla 5.1: Organización de las actividades propuestas al grupo de estudiantes que usa el texto Santillana: Edición Especial para el Ministerio de Educación.

A continuación se presenta el análisis a priori de las actividades propuestas al grupo de estudiantes que usa el texto Santillana: Edición Especial para el Ministerio de Educación.

Análisis a priori actividad 1

Calcular el valor del ángulo pedido.



Primer escenario: Los estudiantes no comprenden el teorema, lo cual es un impedimento para resolver el problema propuesto, ya que no consiguen asociar lo expuesto referente al teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia con lo que se logra visualizar en la figura y lo que se les pide.

Segundo escenario: Los estudiantes presentan dificultades con el teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia. Estos formulan la igualdad $2 \cdot 75° = \alpha$, pero no logran formular la igualdad $75° = \frac{\alpha}{2}$, lo cual les impide resolver el problema.

Tercer escenario: Los estudiantes identifican los ángulos del centro e inscrito en la figura. Luego, argumentan y justifican que el ángulo del centro corresponde al doble de la medida del ángulo inscrito. Aplican el teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia para obtener la medida del respectivo ángulo inscrito.

Análisis a priori actividad 2

Primer escenario: Los estudiantes no comprenden el teorema, lo cual es un impedimento para resolver el problema propuesto, ya que no consiguen asociar lo expuesto referente al teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia con loque se logra visualizar en la figura y lo que se les pide.

Segundo escenario: Los estudiantes no trazan los segmentos correspondientes, radios de la circunferencia en este caso, para formar el ángulo del centro y posteriormente asociar la medida del arco con la medida del ángulo del centro.

Tercer escenario: Los estudiantes no asocian la medida del arco con la medida del ángulo del centro, ya que, el texto afirma que el ángulo del centro tiene igual medida que el arco que subtiende.

Cuarto escenario: Los estudiantes identifican el ángulo inscrito y luego trazan los segmentos correspondientes a radios de la circunferencia formando el ángulo del centro. Por consiguiente, justifican de acuerdo a lo estudiado en el texto, que el ángulo del centro tiene igual medida que el arco que subtiende. Luego, aplican el teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia para obtener la medida del ángulo inscrito correspondiente.

Análisis a priori actividad 3

Primer escenario: Los estudiantes no comprenden el teorema, lo cual es un impedimento para resolver el problema propuesto, ya que no consiguen asociar lo expuesto referente al teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia con lo que se logra visualizar en la figura y lo que se les pide.

Segundo Escenario: Los estudiantes no recuerdan la propiedad que dice: “Todos los ángulos inscritos que subtienden el mismo arco son congruentes”, no logrando resolver la actividad**.**

Tercer escenario: Los estudiantes presentan dificultades con el teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia. Estos formulan la igualdad $2med(\beta) = med(\alpha)$, pero no formulan la igualdad $med(\beta) = \frac{med(\alpha)}{2}$. Lo cual les impide resolver el problema.

Cuarto escenario: Los estudiantes identifican el ángulo del centro de medida alfa y los ángulos inscritos de medida beta y 21º, luego para obtener el valor de beta justifican que los ángulos inscritos subtienden el mismo arco, por lo tanto tienen igual medida. Argumentan que el ángulo del centro mide el doble del ángulo inscrito aplicando el teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia para obtener el valor de alfa.

Análisis a priori actividad 4

Primer escenario: Los estudiantes no comprenden el teorema, lo cual es un impedimento para resolver el problema propuesto, ya que no consiguen asociar lo expuesto referente al teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia con lo que se logra visualizar en la figura y lo que se les pide.

Segundo escenario: Los estudiantes forman el ángulo del centro, pero no consideran la expresión como una igualdad. Guiándose exclusivamente por la definición del teorema: El ángulo del centro corresponde al doble del ángulo inscrito que subtiende el mismo arco $2med(\beta) = med(\alpha)$. Pero no deducen que al ser una igualdad, el ángulo inscrito corresponde a la mitad del ángulo del centro $med(\beta) = \frac{med(\alpha)}{2}$, lo cual les impide resolver el problema.

Cuarto escenario: Los estudiantes aplican el teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia para obtener la medida del ángulo APB. Pero no relacionan los radios de la circunferencia con el triángulo que se forma. Concluyendo que se trata solamente de un triángulo rectángulo.

Quinto escenario: Los estudiantes identifican los ángulos del centro e inscrito en la circunferencia. Posteriormente, justifican y aplican el Teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia para obtener la medida del ángulo APB. Por consiguiente, argumentan que existe un triángulo de dos lados congruentes y uno desigual. Lo que les permite concluir que el triángulo que se forma es isósceles. Luego, reconocen el ángulo APB como recto, concluyendo que el triángulo APB es un triángulo isósceles rectángulo.

5.3 Selección de actividades del texto Santillana

Del texto Santillana se seleccionaron 6 actividades (Véase apéndice A), la tabla 3.2 detalla la cantidad de pasos de razonamientos y caso del Teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia que se debe utilizar para su resolución.

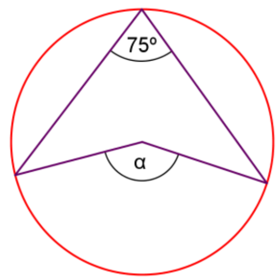
EJERCICIOS	CASO DEL TEOREMA	CANTIDAD DE PASOS DE RAZONAMIENTO
Actividad 1	Primer Caso	1 Paso
Actividad 2	Primer Caso	2 Pasos
Actividad 3	Primer y Segundo Caso	2 Pasos
Actividad 4	Segundo Caso	3 Pasos
Actividad 5	Primer Caso	4 Pasos
Actividad 6	Tercer Caso	4 Pasos

Tabla 5.2: Organización de las actividades propuestas al grupo de estudiantes que usa el texto Santillana

A continuación se presenta el análisis a priori de las actividades propuestas al grupo de estudiantes que usa el texto Santillana.

Análisis a priori actividad 1

Calcular el valor del ángulo pedido.



Primer escenario: Los estudiantes no comprenden el teorema, lo cual es un impedimento para resolver el problema propuesto, ya que no consiguen asociar lo expuesto referente al teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia con lo que se logra visualizar en la figura y lo que se les pide.

Segundo escenario: Los estudiantes presentan dificultades con el teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia. Estos formulan la igualdad $2 \cdot 75° = \alpha$, pero no logran formular la igualdad $75° = \frac{\alpha}{2}$, lo cual les impide resolver el problema.

Tercer escenario: Los estudiantes identifican los ángulos del centro e inscrito en la figura. Luego, argumentan y justifican que el ángulo del centro corresponde al doble de la medida del ángulo inscrito. Aplican el teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia para obtener la medida del respectivo ángulo inscrito.

Análisis a priori actividad 2

Primer escenario: Los estudiantes no comprenden el teorema, lo cual es un impedimento para resolver el problema propuesto, ya que no consiguen asociar lo expuesto referente al teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia con lo que se logra visualizar en la figura y lo que se les pide.

Segundo escenario: Los estudiantes no trazan el segmento correspondiente al radio de la circunferencia para formar el ángulo del centro y posteriormente asociar la medida del arco con la medida del ángulo del centro.

Tercer escenario: Los estudiantes forman el ángulo del centro, pero presentan dificultades con el teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia. Ya que formulan la igualdad $2 \cdot \alpha = 122°$, pero no formulan la igualdad $\alpha = \frac{122°}{2}$, lo cual les impide resolver el problema.

Cuarto escenario: Los estudiantes no asocian la medida del arco con la medida del ángulo del centro.

Quinto escenario: Los estudiantes comprenden y visualizan lo que se expone. Permitiéndoles resolver el problema sin mayor dificultad.

Análisis a priori actividad 3

Primer escenario: Los estudiantes no comprenden el teorema, lo cual es un impedimento para resolver el problema propuesto, ya que no consiguen asociar lo expuesto referente al teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia con lo que se logra visualizar en la figura y lo que se les pide.

Segundo Escenario: Los estudiantes no recuerdan la propiedad que dice: "Todos los ángulos inscritos que subtienden el mismo arco son congruentes", no logrando resolver el problema.

Tercer escenario: Los estudiantes no consideran la expresión como una igualdad, guiándose exclusivamente por la definición del teorema: El ángulo del centro corresponde al doble del ángulo inscrito que subtiende el mismo arco, $2med(\beta) = med(\alpha)$. Pero no deducen que al ser una igualdad, el ángulo inscrito corresponde a la mitad del ángulo del centro $med(\beta) = \frac{med(\alpha)}{2}$, lo cual les impide resolver el problema.

Cuarto escenario: Los estudiantes identifican el ángulo del centro de medida alfa y los ángulos inscritos de medida beta y 21º, luego para obtener el valor de beta justifican que los ángulos inscritos subtienden el mismo arco, por lo tanto tienen igual medida. Argumentan que el ángulo del centro mide el doble del ángulo inscrito aplicando el teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia para obtener el valor de alfa.

Análisis a priori actividad 4

Primer escenario: Los estudiantes no comprenden el teorema, lo cual es un impedimento para resolver el problema propuesto, ya que no consiguen asociar lo expuesto referente al teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia con lo que se logra visualizar en la figura y lo que se les pide.

Segundo escenario: Los estudiantes no trazan el segmento correspondiente al radio de la circunferencia para formar el ángulo del centro que subtiende al arco de medida 54°.

Tercer escenario: Los estudiantes consideran la existencia de un ángulo recto sin justificar (Figura 3.1). Lo cual conduce al alumno a un resultado erróneo.

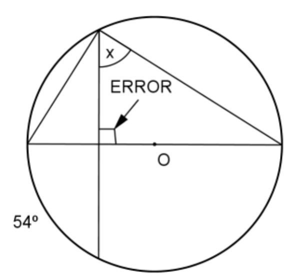


Figura 3.1

Cuarto escenario: Los estudiantes trazan el segmento para formar el ángulo del centro que subtiende al arco de medida 54°. Identifican el ángulo inscrito ACD que subtiende el mismo arco que el ángulo del centro AOD. Luego, asocian la medida del ángulo del centro AOD con la medida del $\overparen{AD}$. Posteriormente reconocen al $\triangle ABC$ cómo rectángulo en C, obteniendo la medida del ángulo DCB. (Figura 3.2)

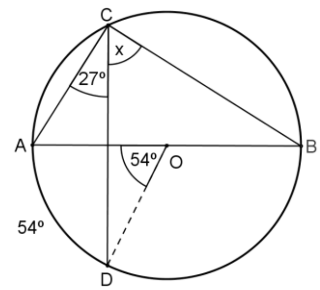


Figura 3.2

Quinto escenario: Los estudiantes trazan el segmento para formar el ángulo del centro. Reconocen al $\measuredangle DOB$ cómo ángulo del centro que subtiende el mismo arco que el ángulo inscrito DCB. Luego, como el $\sphericalangle AOD$ es el suplemento del $\measuredangle DOB$ obtienen la medida del $\measuredangle DOB$. Posteriormente, aplican el teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia obteniendo la medida del $\sphericalangle DCB$.

Análisis a priori actividad 5

Primer escenario: Los estudiantes no comprenden el teorema, lo cual es un impedimento para resolver el problema propuesto, ya que, no consiguen asociar lo expuesto referente al teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia con lo que se logra visualizar en la figura y lo que se les pide.

Segundo escenario: Los estudiantes no trazan el segmento correspondiente al radio $\overline{AO}$ de la circunferencia para formar el ángulo del centro AOB.

Tercer escenario: Los estudiantes trazan el segmento $\overline{AO}$ para formar el ángulo del centro AOD, pero no logran visualizar el triángulo isósceles que se forma, lo cual produce un efecto bucle y no les permite resolver el problema.

Análisis a priori actividad 6

Primer escenario: Los estudiantes no comprenden el teorema, lo cual es un impedimento para resolver el problema propuesto, ya que, no consiguen asociar lo expuesto referente al teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia con lo que se logra visualizar en la figura y lo que se les pide.

Segundo escenario: Los estudiantes le asignan valores a las medidas α y β. Por lo tanto, solamente exploran y aplican el teorema.

Tercer Escenario: Los estudiantes visualizan el triángulo isósceles AOC, lo cual les permite obtener la medida del $\sphericalangle ACO$ (Figura 3.3). Posteriormente, aplican el teorema que dice que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180º, obteniendo la medida del $\sphericalangle AOC$ .Luego como $\sphericalangle BOC$ es suplemento del $\sphericalangle AOC$, determinan que $\beta = 2\alpha$.

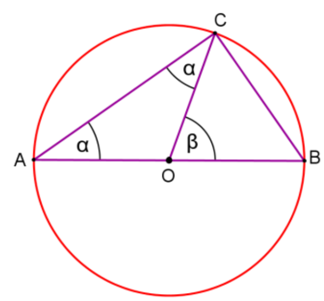


Figura 3.3

6. Estudio de las producciones de las actividades propuestas a los estudiantes

6.1 Producciones del grupo de estudiantes que usa el texto Santillana: Edición Especial para el Ministerio de Educación.

Las siguientes actividades corresponden a las realizadas por alumnas del Liceo Municipal que utiliza el texto Santillana: Edición Especial para el Ministerio de Educación. Las actividades presentadas a las estudiantes fueron extraídas del texto antes mencionado. Estas corresponden a los ejercicios propuestos referentes al contenido del teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia.

Previo a presentar las actividades a las alumnas, se les entrego una hoja, en la cual estaba el resumen que el texto expone referente al teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia.

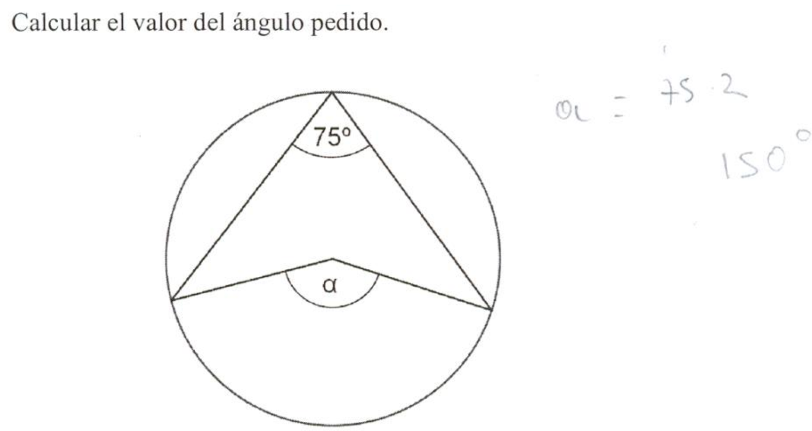
Se han identificando y caracterizado aquellos pasos de razonamiento que las estudiantes hayan hecho durante la secuencia de afirmaciones que estas van dando en el desarrollo de cada ejercicio.

La presentación de las actividades se ha organizado en estudiantes de buen rendimiento y rendimiento medio. Las primeras corresponden a las realizadas por las dos estudiantes que poseen mejor rendimiento en el subsector de matemática. Mientras que las segundas, son dos alumnas que presentan un rendimiento medio en el subsector de matemática.

6.1.1 Estudio de las producciones del par de estudiantes de buen rendimiento

Las siguientes actividades corresponden a las desarrolladas por las dos alumnas que poseen mejor rendimiento en el subsector de matemática del establecimiento.

Actividad 1



Las estudiantes, al ver la figura que acompaña al enunciado del ejercicio, inmediatamente afirman que "*alfa es 75 por 2*". Cuando se les pregunto cómo llegaron a esa conclusión, estas responden:

Camila:	-	*Porque el ángulo del centro.*
Ambas:	-	*Mide el doble del inscrito.*

Luego, al preguntarles si el resultado que obtuvieron es solo porque hay un ángulo inscrito y uno del centro en la circunferencia, estas respondieron que sí.

Las alumnas identifican, en la figura, que α corresponde a un ángulo del centro y 75º a un ángulo inscrito en la circunferencia, pero no explicitan que estos subtienden el mismo arco. Realizan un paso de razonamiento utilizando las premisas ángulo del centro y ángulo inscrito. (Esquema 6.1)

TERCER ENUNCIADO

Si en una circunferencia hay un ángulo inscrito (1) y un ángulo del centro (2).

Entonces, la medida del ángulo del centro es el doble de la medida del ángulo inscrito.

Verificación

Extracción

(1) El que mide 75º es inscrito.
(2) El ángulo α es un ángulo del centro.

$\alpha = 2 \cdot 75^{\circ}$

PREMISA(S)

CONCLUSIÓN

Esquema 6.1: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado por las estudiantes para determinar la medida del ángulo del centro AOB.*

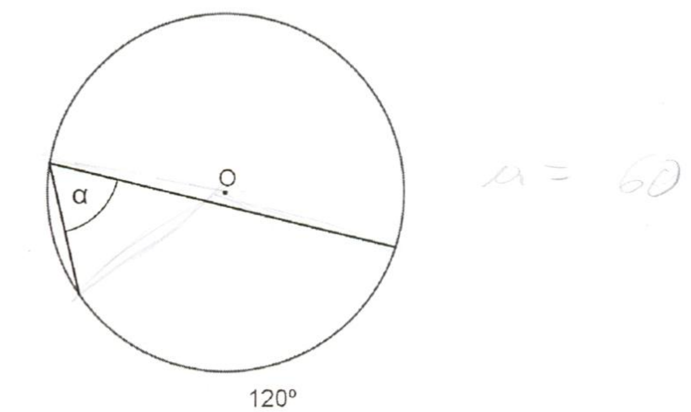
Observaciones

Cabe destacar, que al momento de proponer el ejercicio a las estudiantes, estas no leyeron el enunciado, prestando inmediata atención a la figura. Interpretando la medida de α como la incógnita. Es decir, al ver una letra en la figura, estas asumen que es una incógnita.

Las alumnas realizan un paso de razonamiento, concluyendo solamente con dos premisas. No Aplican el teorema en forma rigurosa aplicando las tres premisas que este involucra. (Véase Esquema 4.7, pág. 49).

Actividad 2

Calcular el valor del ángulo pedido.



Al comenzar la actividad, una de las alumnas escribe en la hoja, sin leer el enunciado, que alfa es igual a 60º. Inmediatamente su compañera afirma que no hay ángulo inscrito en la figura, diciendo:

Camila: - *Porque este no pasa por el centro.* (Señalando en la figura al ángulo inscrito)

La alumna da a entender que para la existencia de un ángulo inscrito, uno de sus lados debe pasar por el centro de la circunferencia. Esto evidencia la confusión que presenta al distinguir entre ángulo inscrito y del centro de una circunferencia.

Al preguntarles por qué alfa mide 60º, una de ellas responde (la que dijo que alfa mide 60º) y su compañera no acepta la respuesta, produciéndose el siguiente dialogo:

Profesor: - *¿Por qué mide 60º?*
Sofía: - *Es inscrito*
Camila: - *No, porque no pasa por el centro.*
Sofía: - *Ahh.* (Aceptando lo que dice Camila y borrando lo que había escrito en la hoja)

Las estudiantes no identifican el ángulo inscrito presente en la figura, una de ellas sostiene que no hay ángulo inscrito, convenciendo a su compañera de tal hecho.

A continuación, una de las estudiantes comienza a buscar el ángulo del centro, señalando en la figura un arco, desde el vértice del ángulo inscrito hasta el extremo de lado mayor del ángulo inscrito, en sentido horario. Esta sostiene que su medida es 180º. Asumiendo que el lado de mayor longitud del ángulo inscrito forma un ángulo del centro, y que su medida es de 180º, lo cual es falso, debido a que tal lado no pasa por el centro de la circunferencia.

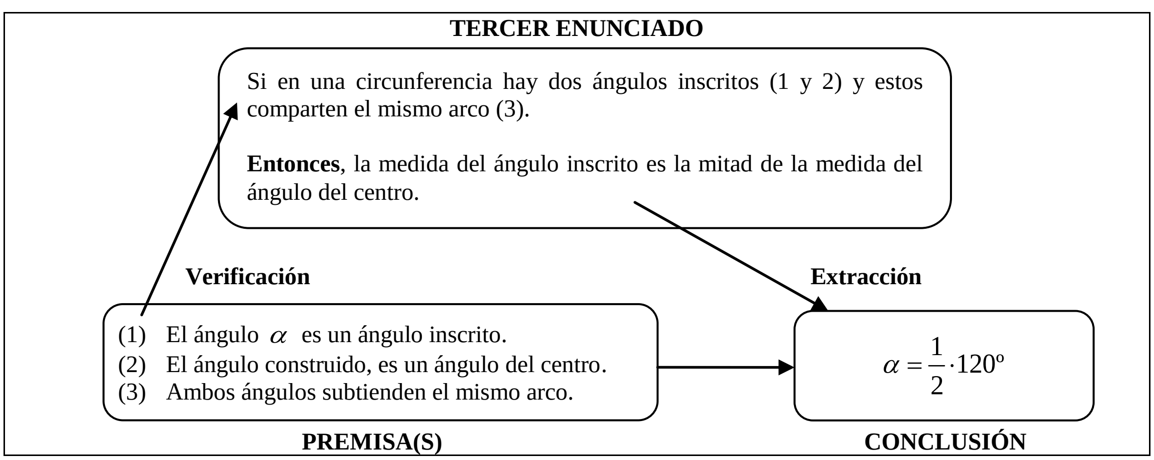
Como las alumnas no logran dar una justificación valida a sus afirmaciones, se les pregunta si se podría formar un ángulo del centro en la figura, y una de ellas responde:

Sofía: - *Igual, si lo formáramos así.* (trazando segmentos desde los extremos de los lados del ángulo inscrito hacia el centro de la circunferencia, formando un ángulo del centro)

Posterior a formar el ángulo del centro, una de ellas reafirma que la medida de alfa es 60. Identificando en la figura el ángulo inscrito y del centro de la circunferencia. Además, sostiene que los ángulos subtienden el mismo arco. Concluyendo:

Sofia: - *Entonces seria 60, porque es la mitad del centro.*

Cuando la estudiante justifica, realiza un paso de razonamiento (Esquema 6.2) aplicando el Teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia



Esquema 6.2: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado por una de las estudiantes para determinar la medida del ángulo inscrito.*

Observaciones

Al momento de proponer el ejercicio a las estudiantes, estas no leen el enunciado, prestando inmediata atención a la figura. Interpretando la medida de α como la incógnita. Es decir, al ver una letra en la figura, estas asumen que es una incógnita.

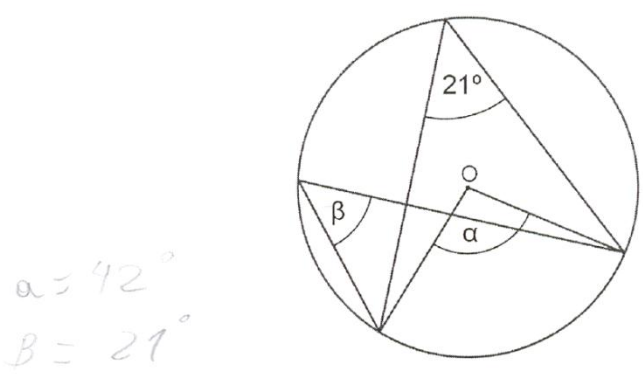
Ambas estudiantes tratan de identificar en la figura el ángulo inscrito y del centro de la circunferencia. Con la finalidad de justificar que alfa mide 60º, pero estas se confunden al tratar de reconocer dichos ángulos.

Las alumnas responden en forma correcta lo que el enunciado solicita, pese a que no lo leyeron, pero cuando se les pide justificar la respuesta, estas no son capaces de hacerlo. Sin la intervención del profesor no hubiesen logrado construir el ángulo del centro para posteriormente aplicar el teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia.

Hay que hacer notar, que solo una de las estudiantes realiza el paso de razonamiento. Su compañera presenta confusión, durante el desarrollo de la actividad, para reconocer el ángulo inscrito y del centro de la circunferencia presente en la figura.

Actividad 3

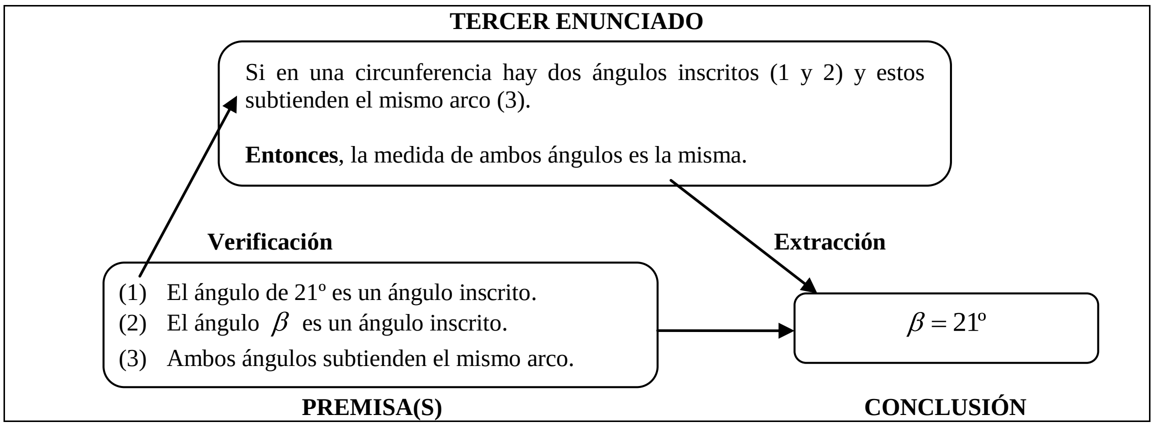
Calcular el valor del ángulo pedido.



Las alumnas señalan inmediatamente que beta mide 21º. Cuando se les solicita que justifiquen, una de ellas, señala:

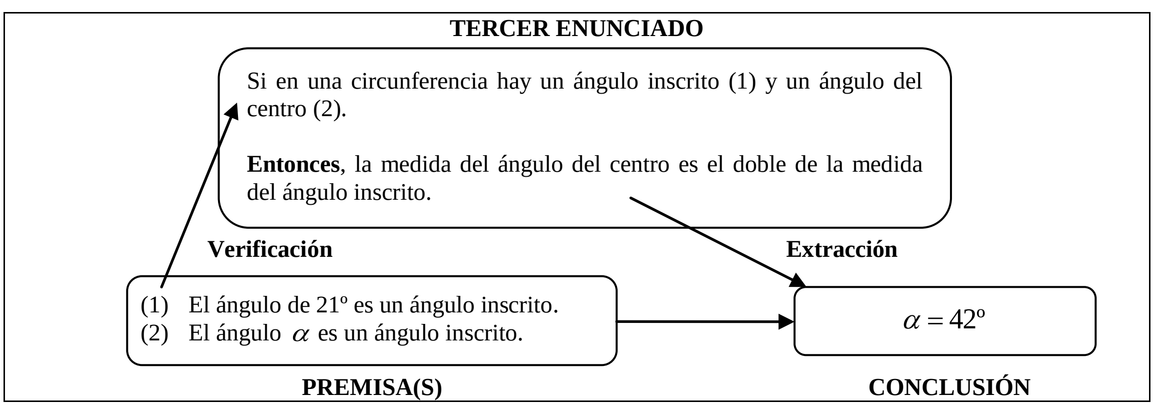
Sofía: - *Porque los subtiende el mismo arco y son los dos inscritos.* (Señalando en la figura al ángulo de 21º y al ángulo beta)

Mediante la justificación dada, las estudiantes realizan un paso de razonamiento para determinar la medida de beta. (Esquema 6.3)



Esquema 6.3: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado por las estudiantes para determinar la medida de beta.*

A continuación, las alumnas sostienen que alfa es el doble de 21º porque es un ángulo del centro. Determinando así la medida de alfa y beta. Realizan un paso de razonamiento solamente con dos premisas (Esquema 6.4), las de ángulo inscrito y del centro de la circunferencia, no explicitando el hecho de que estos subtiendan el mismo arco.



Esquema 6.4: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado por las estudiantes para determinar la medida de alfa.*

Observaciones

Para la obtención de la medida de beta, las estudiantes no aplican el Teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia. Estas dan a entender que lo obtienen a parir de la propiedad ángulos inscritos que subtienden el mismo arco son congruentes. Pese a lo anterior, las alumnas realizan un paso de razonamiento (Esquema 6.3).

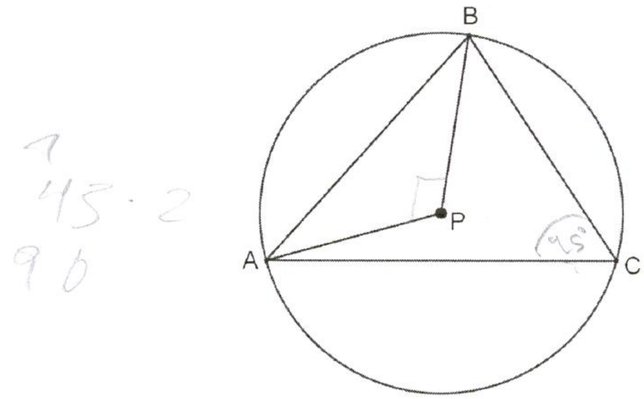
Justifican la obtención de la medida de alfa realizando un paso de razonamiento, concluyendo solamente con dos premisas. No aplican el Teorema en forma rigurosa aplicando las tres premisas que este involucra (Véase Esquema 4.7, pág. 49).

Aplican el teorema solo una vez, para determinar el ángulo del centro a partir del ángulo inscrito, pero no son capaces de volver a aplicarlo para determinar la medida del ángulo inscrito a partir de la medida del ángulo del centro de la circunferencia.

Cabe destacar, que las estudiantes relacionan los ángulos inscritos cuando afirman que estos subtienden el mismo arco. Sin embargo, no hacen lo mismo cuando aplican el Teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia para determinar la medida de alfa.

Actividad 4

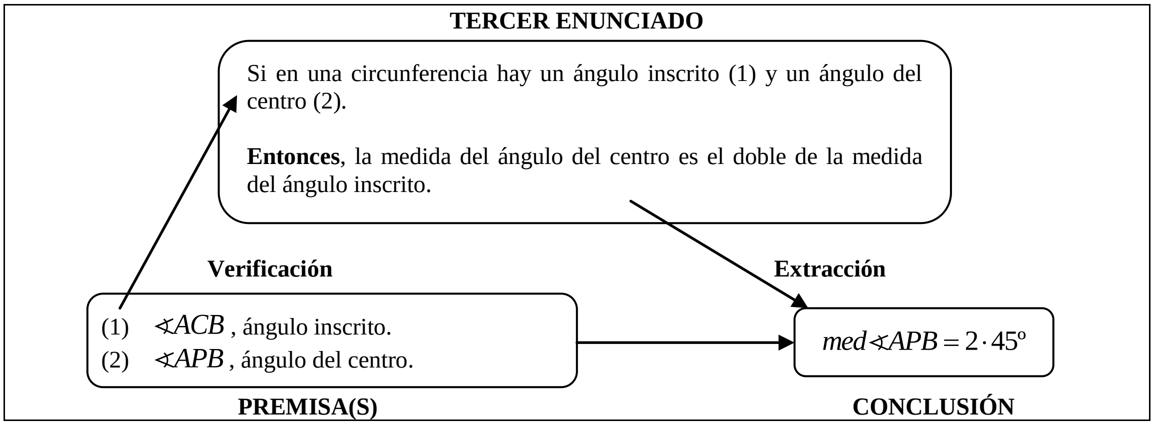
En la figura, AC es un arco de circunferencia de centro P, donde $\sphericalangle ACB = 45^{\circ}$.
Determina qué tipo de triángulo es el ΔAPB.



Las alumnas identifican en la figura la medida del ángulo ACB al que se refiere el enunciado:

Camila: - *Este vale 45.* (Señalando en la figura al ángulo ACB)
Sofía: - *A… C... B.* (Señalado en la figura al ángulo ACB, reafirmando lo que dice Camila)
Camila: - *Este* (marcando el ángulo ACB de la figura)
Sofía: - *Si.*

Ambas estudiantes reconocen el ángulo inscrito y del centro de la circunferencia, pero no los relacionan. En ningún momento expresan que estos comparten el mismo arco. Realizan un paso de razonamiento utilizando solamente dos premisas, ángulo del centro y ángulo inscrito para determinar la medida del ángulo del centro APB. (Esquema 6.5)



Esquema 6.5: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado por las estudiantes para determinar la medida del ángulo del centro APB.*

Una de las estudiantes reconoce el triángulo APB como un triángulo rectángulo. Mientras que la otra sostiene que es un triángulo Isósceles. Comenzando a debatir entre ellas.

Sofía: - *Es un rectángulo.*
Camila: - *Es un isósceles.*
Sofía: - *No, porque el triángulo rectángulo es el que tiene un ángulo de 90 grados.*
Profesor: - *¿Y el triángulo isósceles?*
Sofía: - *Dos lados miden lo mismo*
Profesor: - *¿Y se da eso ahí?*
Sofía: - *Si.*
Camila: - *¿Donde se da qué?*
Profesor: - *¿Qué tenga dos lados iguales?*
Camila: - *Esos son iguales ¿O no?* (Señalando los segmentos AP y PB de la figura)
Camila: - *Yo los veo iguales.*
Sofía: - *No parece rectángulo pero se supone que es.*
Camila: - *Ah no, entonces, ¿qué es?*
Sofía: - *Rectángulo.*
Camila: - *Escaleno*
Sofía: - *No, escaleno son todos los lados distintos.*
Camila: - *Mm...*
Sofía: - *Todos los ángulos distintos.*
Profesor: - *¿Y el rectángulo cuándo es así?*
Sofía: - *El rectángulo cuando tiene tod... Un lado de 90 grados es rectángulo.*
Profesor: - *¿Un lado de 90 grados?*
Sofía: - *Un ángulo de 90 grados.*
Profesor: - *¿Y donde estaría el ángulo de 90 grados?*

Sofía:	-	*Aquí.* (Marcando el ángulo APB como un ángulo de 90 grados)

La estudiante que sostiene que el triángulo APB es isósceles no da una justificación valida. Su argumentación esta basada en la intuición de lo que ve en la figura y no en las propiedades de los lados. Al solicitarle que justifique, esta responde:

Camila:	-	*Esos son iguales ¿O no?* (Señalando los segmentos AP y PB de la figura)
Camila:	-	*Yo los veo iguales.*

Esto indica que la alumna no logra identificar los lados del triángulo como radios de la circunferencia. Ni relacionar los radios con los lados del triángulo para concluir que este es un isósceles. Como no da una justificación valida, esta no realiza ningún paso de razonamiento.

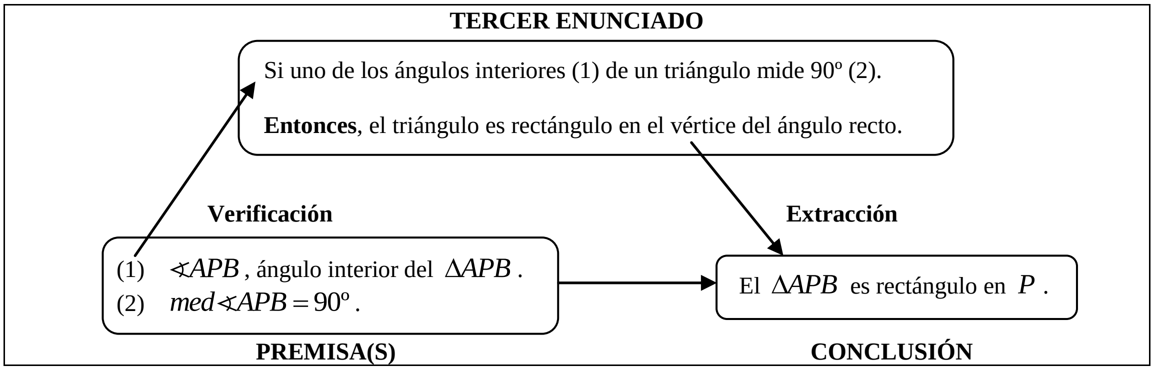
La alumna que afirma que el triángulo APB es un triángulo rectángulo, cuando se le solicita justificar, esta argumenta diciendo:

Sofía:	-	*El rectángulo cuando tiene tod... Un lado de 90 grados es rectángulo.*
Profesor:	-	*¿Un lado de 90 grados?*
Sofía:	-	*Un ángulo de 90 grados.*
Profesor:	-	*¿Y donde estaría el ángulo de 90 grados?*
Sofía:	-	*Aquí.* (Marcando el ángulo APB como un ángulo de 90 grados)

Además, durante la discusión que mantiene con su compañera la alumna deja entrever que sus afirmaciones no están basadas en la intuición como las de su compañera al decir:

Sofía:	-	*No parece rectángulo pero se supone que es.*

La alumna, en su justificación, realiza un paso de razonamiento para concluir que el triángulo es rectángulo. (Esquema 6.6)



Esquema 6.6: *Paso de razonamiento de tipo IV realizado por una de las estudiantes para concluir que el triángulo APB es rectángulo en P.*

Observaciones

Las alumnas realizan un paso de razonamiento, concluyendo solamente con dos premisas para determinar la medida del ángulo del centro APB. No Aplican el teorema en forma rigurosa aplicando las tres premisas que este involucra (Véase Esquema 4.25, pág. 77).

Solo una de las estudiantes logra realizar un paso de razonamiento para concluir que el triángulo es rectángulo (Esquema 6.6).

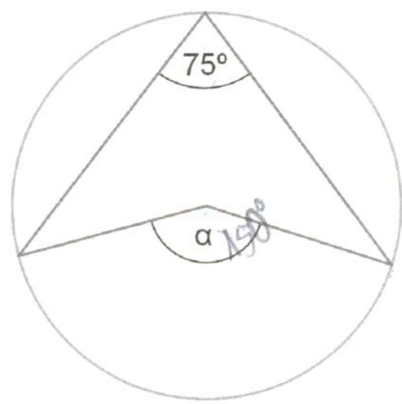
Pese a que identifican al triángulo como rectángulo e isósceles no logran concluir que este puede ser rectángulo isósceles. Solo lo ven como rectángulo o isósceles.

6.1.2 Estudio de las producciones del par de estudiantes de rendimiento medio

Las siguientes actividades corresponden a las desarrolladas por las dos alumnas que poseen rendimiento regular en el subsector de matemática del establecimiento.

Actividad 1

Calcular el valor del ángulo pedido.



Las alumnas señalan que el ángulo de 75º es la mitad del ángulo del centro. Al solicitarles que justifiquen, una de ellas responde:

Paloma: - *Porque se supone que si el ángulo del centro y el ángulo inscrito subtienden el mismo arco, que seria ese* (Señalando al arco que subtienden ambos ángulos). *Ese* (indicando en la figura a alfa) *seria lo mismo que el arco* (indicando en la figura al arco que subtiende el ángulo del centro), *y ese* (señalando al ángulo de 75º) *seria la mitad de ese* (indicando al ángulo alfa).

Posteriormente, una de ellas escribe en la hoja la medida de alfa. Las estudiantes realizan un paso de razonamiento (Esquema 6.7) para determinar la medida de alfa.

TERCER ENUNCIADO

Si un ángulo inscrito (1) y un ángulo del centro (2) de una circunferencia subtienden el mismo arco (3).

Entonces, la medida del ángulo del centro es el doble de la medida del ángulo inscrito.

Verificación **Extracción**

(1) El ángulo que mide 75º es inscrito.
(2) El ángulo α es un ángulo del centro.
(3) El ángulo inscrito y el ángulo del centro subtienden el mismo arco.

$\alpha = 2 \cdot 75º$

PREMISA(S) **CONCLUSIÓN**

Esquema 6.7: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado por las alumnas para determinar la medida del ángulo del centro.*

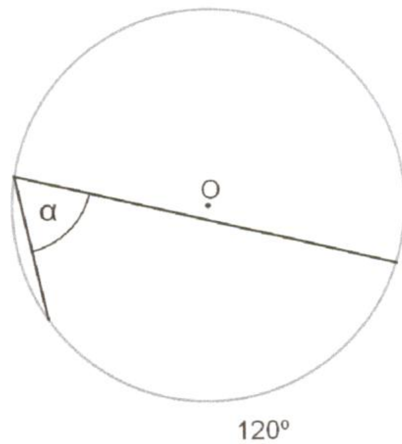
Observaciones

Las estudiantes no tienen problemas al identificar el ángulo inscrito y del centro de la circunferencia. Además relacionan los ángulos con el arco que subtienden. A continuación, realizan un paso de razonamiento (Esquema 6.7) determinando la medida de alfa.

Hay que tener en cuenta, que las alumnas se apoyaron en el resumen que se les entrego previamente para desarrollar el ejercicio.

Actividad 2

Calcular el valor del ángulo pedido.



Al proponer el ejercicio a las alumnas, estas leen el enunciado y observan un par de minutos la figura, una de ellas posa el lápiz sobre la circunferencia tratando de buscar el ángulo del centro. La otra estudiante sostiene no saber cómo hacer el ejercicio mediante la siguiente afirmación.

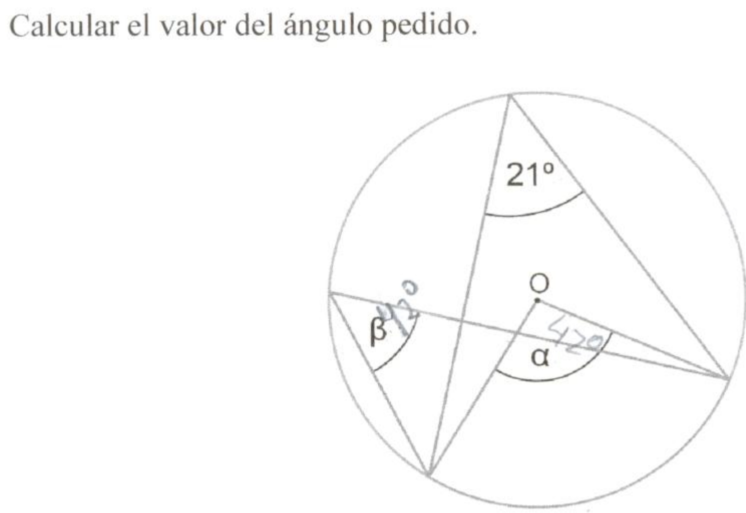
Francisca: - *No, yo no se como hacer ese.*

Observaciones

Las dos estudiantes no logran identificar el ángulo inscrito ni tampoco construir el ángulo del centro, para aplicar el teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia. No prestaron demasiada atención en la figura a la medida del arco que se señala como 120º. Solo trataban de buscar el ángulo del centro.

No realizan pasos de razonamiento.

Actividad 3



Las estudiantes sostienen que el ángulo de 21º es la mitad de la medida del ángulo alfa y que la medida de beta es igual a 42. Al solicitarles que justifiquen por que beta mide 42, estas dicen:

Paloma: - *Porque se supone que el beta vendría midiendo lo mismo que alfa porque comparten el mismo arco.*

Francisca: - *Se supone que este es el arco.* (señalando en la figura al arco que subtienden lo ángulos)

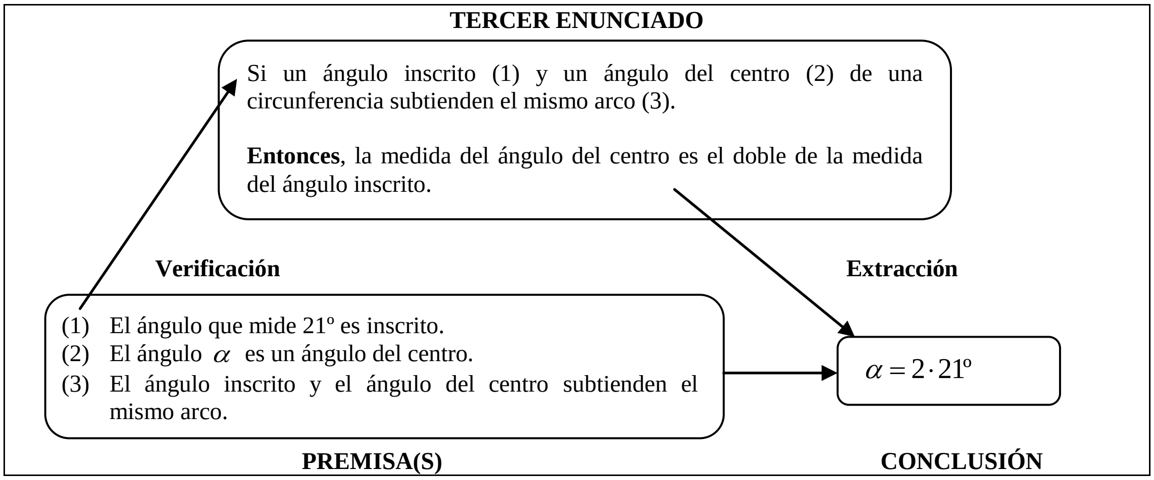
Ambas dan una justificación que no es valida, ya que estas relacionan los ángulos diciendo que subtienden el mismo arco, pero no aplican el teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia. Estas concluyen, que si los dos ángulos inscritos subtienden el mismo arco, las medidas de estos serán congruentes.

Al preguntarles, ¿por qué alfa mide 42?, Responden

Paloma: - *El alfa es el doble de 21 porque alfa es el ángulo del centro.*

Paloma: - *Y si el arco de alfa es 42, que se supone que se sacaría por lógica, porque el 21 seria la mitad del alfa* (señalando en la figura al ángulo alfa) *y el alfa seria lo mismo que el arco.* (Señalando en la figura al arco que subtiende el ángulo del centro alfa)

Estas dan una respuesta válida, la cual evidencia que realizaron un paso de razonamiento (Esquema 6.8) para obtener la medida del ángulo del centro. No obstante, las estudiantes no se apoyan en el teorema para justificar, sino que lo ven como algo lógico.



Esquema 6.8: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado por las alumnas para determinar la medida del ángulo de alfa.*

Al preguntarles nuevamente, ¿por qué beta mediría 42?, esperando que esta vez apliquen el teorema del ángulo inscrito y del centro de la circunferencia en su justificación, continúan sosteniendo la misma respuesta dada anteriormente:

Profesor: - *¿Por qué beta mediría 42?*
Ambas: - *Po que tiene el mismo arco que alfa.*

Observaciones

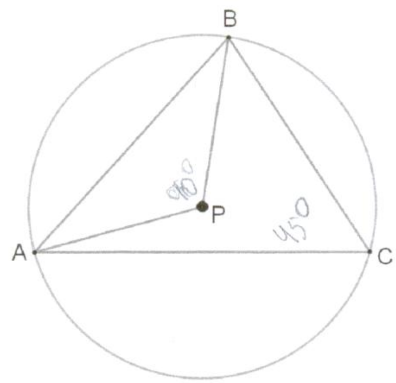
Solamente aplican el teorema para la obtención del ángulo del centro a partir de la medida del ángulo inscrito, no logran aplicarlo en forma inversa, es decir, determinar la medida del ángulo inscrito a partir de la medida del ángulo del centro.

Estas realizan un paso de razonamiento (Esquema 6.8) para determinar la medida del alfa.

En ningún momento vieron el ángulo beta como un ángulo inscrito, solo se limitaron a observar y comentar que este comparte el mismo arco que el ángulo del centro.

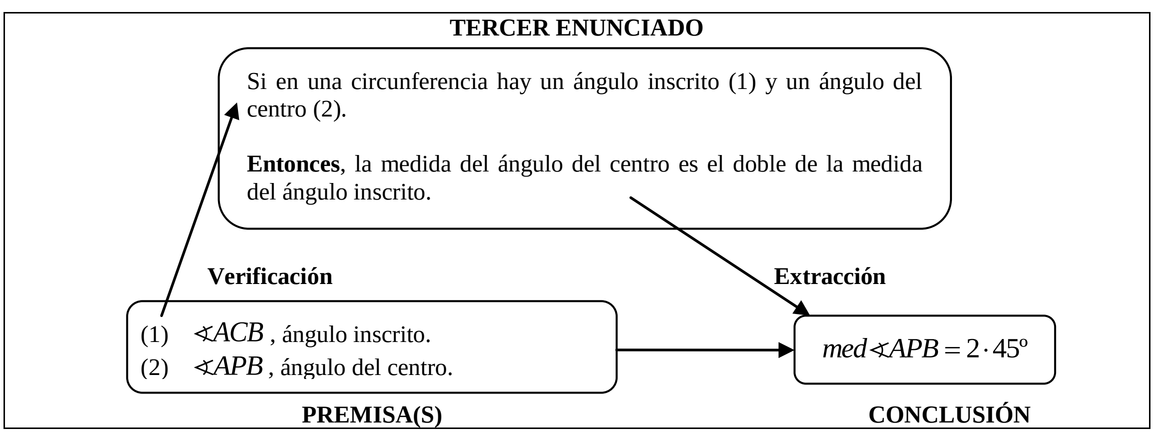
Actividad 4

En la figura, AC es un arco de circunferencia de centro P, donde $\sphericalangle ACB = 45º$.
Determina qué tipo de triángulo es el ΔAPB.



Una de las estudiantes escribe en la figura la medida del ángulo ACB, dada en el enunciado. A continuación, determinan la medida del ángulo del centro APB, escribiendo en la figura que este mide 90º.

Las estudiantes identifican el ángulo del centro e inscrito en la circunferencia, pero no explicitan el hecho de que ambos subtienden el mismo arco, realizan un paso de razonamiento utilizando dos premisas, ángulo del centro y ángulo inscrito, para calcular la medida del ángulo APB. (Esquema 6.9)



Esquema 6.9: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado por las estudiantes para determinar la medida del ángulo del centro APB.*

Al consultarles, ¿qué tipos de triángulos conocen?, una de ellas responde:

Paloma: - *Isósceles, escaleno y equilátero.*

La alumna dice los nombres de los triángulos según la clasificación de sus lados, solo los mencionan. No explica las propiedades que los diferencian. Posterior a la respuesta, permanecen en silencio, sin poder determinar que tipo de triángulo es APB.

Observaciones

A medida que leen el enunciado, van señalando en la figura los datos que se le entregan. Solo determinan la medida del ángulo del centro realizando un paso de razonamiento con dos premisas (Esquema 6.9). No logran identificar el triángulo rectángulo que se forma, ni tampoco el triángulo isósceles, pese a que lo nombran cuando se les consulta sobre los tipos de triángulos que conocen.

6.2 Producciones del grupo de estudiantes que usa el texto Santillana

Las siguientes actividades corresponden a las realizadas por alumnos del Colegio Particular que utiliza el texto Santillana. Las actividades presentadas a los estudiantes fueron extraídas del texto antes mencionado. Estas corresponden a los ejercicios propuestos referentes al contenido del teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia.

Previo a presentar las actividades a los alumnos, se les entrego una hoja, en la cual estaba el resumen que el texto expone referente al teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia.

Se han identificando y caracterizado aquellos pasos de razonamiento que los estudiantes hayan hecho durante la secuencia de afirmaciones que estas van dando en el desarrollo de cada ejercicio.

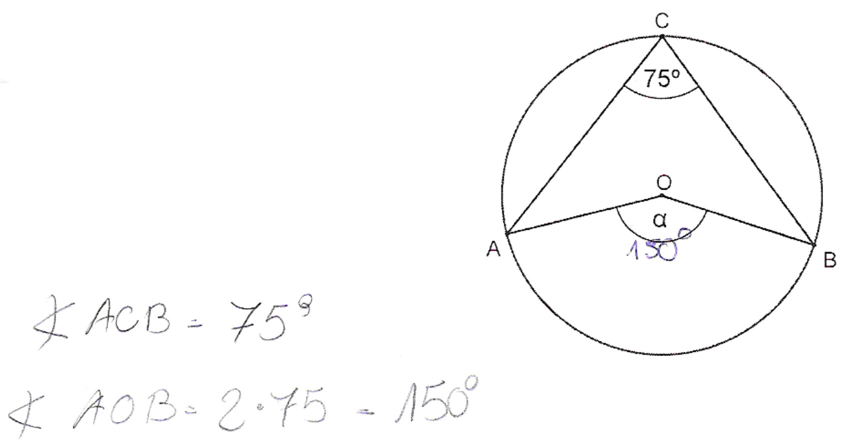
La presentación de las actividades se ha organizado en estudiantes de buen rendimiento y rendimiento medio. Los primeros corresponden a las realizadas por los dos estudiantes que poseen mejor rendimiento en el subsector de matemática. Mientras que las segundas, son dos alumnos que presentan un rendimiento medio en el subsector de matemática.

6.2.1 Estudio de las producciones del par de estudiantes de buen rendimiento

Las siguientes actividades corresponden a las desarrolladas por los dos alumnos que poseen mejor rendimiento en el subsector de matemática del establecimiento.

Actividad 1

Calcular la medida de α en la siguiente figura.

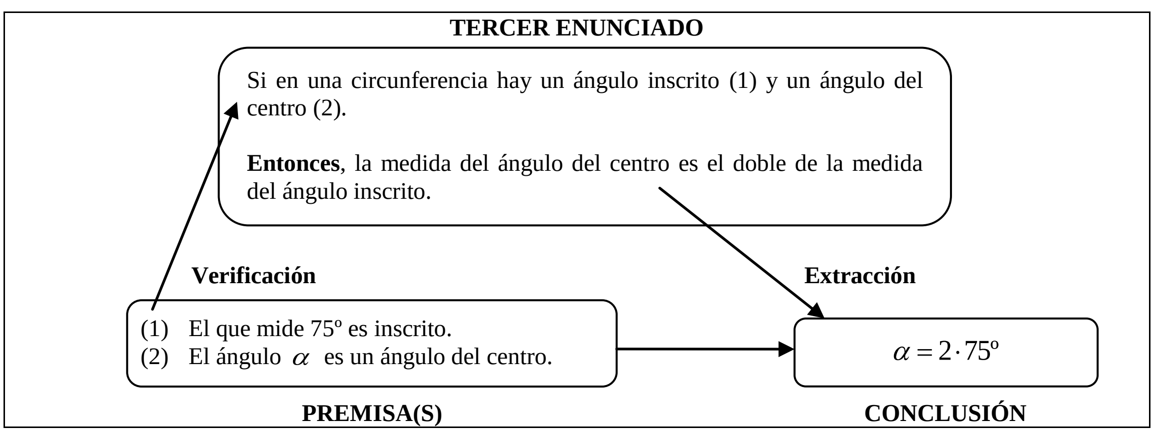


Uno de los alumnos inmediatamente después de leer el enunciado escribe sobre la figura que el ángulo del centro es 150º, cuando deben justificar, estos dicen:

Marcos: - *El ángulo del centro siempre es el doble del ángulo inscrito.* (Apoyando lo que ha hecho su compañero)

Esteban: - *Esa es la explicación…*

En su justificación se deja entrever que realizan un paso de razonamiento concluyendo solamente con dos premisas de tres. (Esquema 6.10)



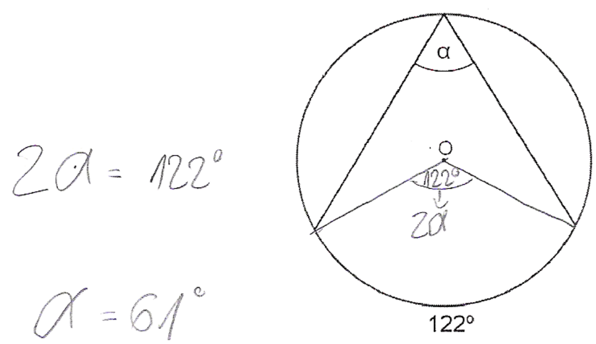
Esquema 6.10: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado por los estudiantes para determinar la medida del ángulo del centro AOB.*

Observaciones

En la justificación que estos dan, se evidencia que no aplican el teorema en forma rigurosa. Estos concluyen con dos las tres premisas que este requiere para ser aplicado, la de ángulo inscrito y ángulo del centro. No explicitan la información de que ambos ángulos subtienden el mismo arco.

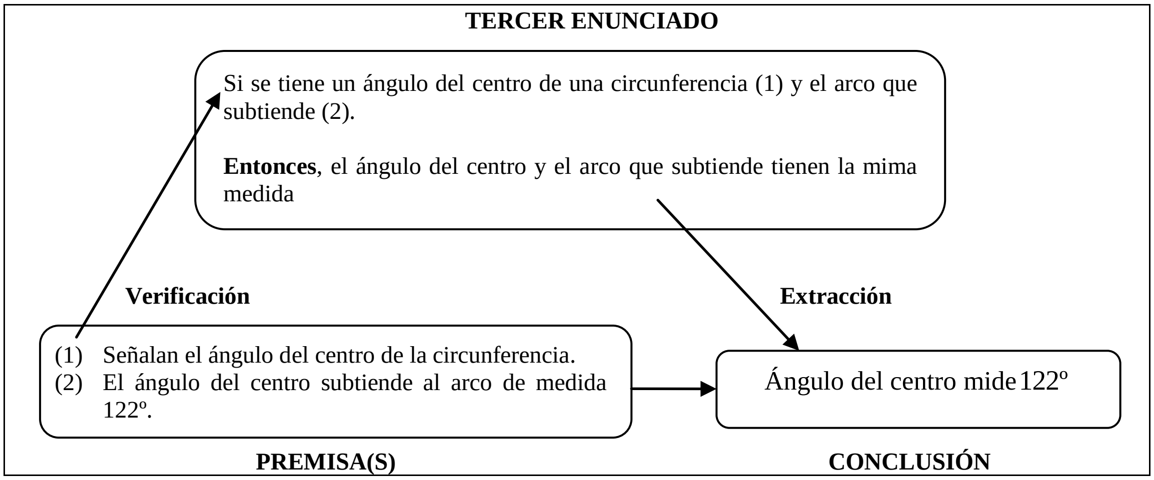
Actividad 2

Calcular la medida de α en la siguiente figura.



Los estudiantes, mediante el trazado de dos radios de la circunferencia forman el ángulo del centro que subtiende el arco de medida 122º. Esto comprueba que los alumnos saben que para lograr aplicar el Teorema necesitan del ángulo del centro y de un ángulo inscrito.

Luego, escriben sobre la figura, en el ángulo del centro que construyeron, la medida de 122º. Esto evidencia que realizaron un paso de razonamiento (Esquema 6.11) al igualar la medida del ángulo del centro con la del arco que subtiende

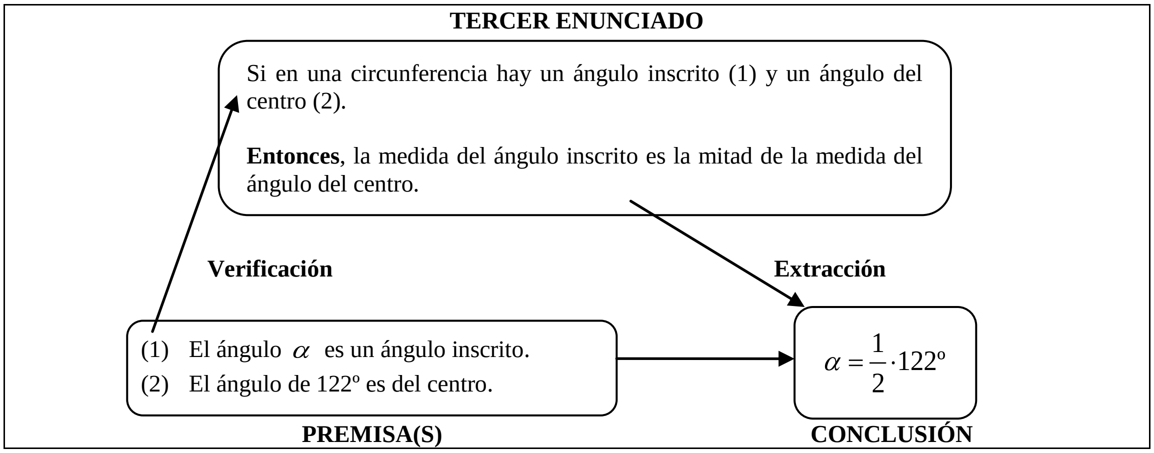


Esquema 6.11: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado por los estudiantes para determinar la medida del ángulo del centro.*

Posteriormente, para calcular la medida de alfa, estos dicen que la medida del ángulo del centro es dos veces la medida del ángulo inscrito, lo cual se evidencia en el siguiente dialogo:

Esteban:	-	*Así que "a"* (refiriéndose a la medida del ángulo alfa) *es igual a 122 partido en dos.*
Esteban:	-	61, ¿cuánto me dijiste?, ¿61?
Marcos:	-	*Pero pone dos "a" igual 61, entonces ahí pasai el dos abajo y… O sea.*

Estos, para determinar la medida de alfa nuevamente realizan un paso de razonamiento (Esquema 6.12). Utilizan dos premisas para concluir, la de ángulo inscrito y del centro solamente.



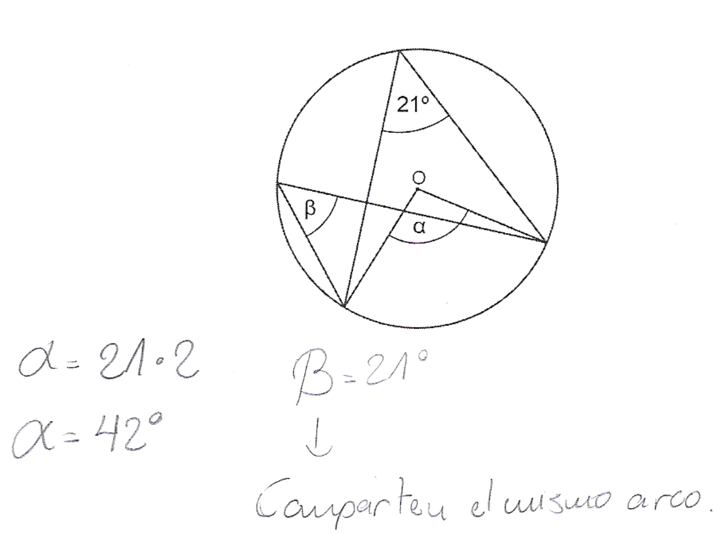
Esquema 6.12: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado por los estudiantes para determinar la medida de alfa.*

Observaciones

Los estudiantes desarrollan el ejercicio realizando dos pasos de razonamiento. En uno donde uno de ellos solamente utilizan dos de tres premisas para concluir. Es decir, no aplican el teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia en forma rigurosa. Puede ser que estos no expliciten la información de que ambos ángulos subtienden el mismo arco en su justificación.

Actividad 3

Calcular la medida de α en la siguiente figura.



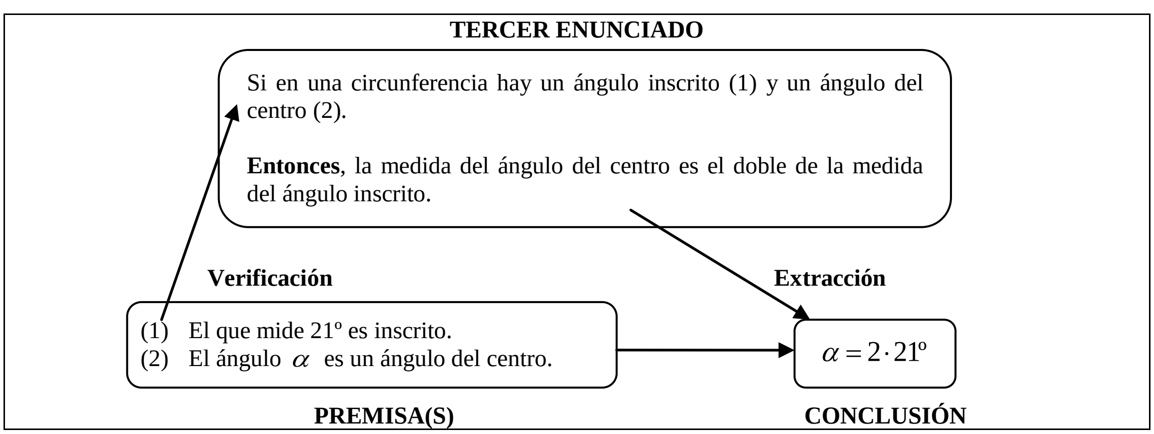
Al leer el enunciado, uno de los estudiantes inmediatamente afirma que la medida de alfa es 42. Luego, este comenta sobre como determinar la medida de beta, citando a un teorema que sostiene nunca haber visto, esto se observa en los siguientes diálogos:

Marcos: - *Aquí teni que sacar otro teorema más que nunca vimos.*
Marcos: - *¿Por qué?*
Esteban: - *¿ah?*
Marcos: - *Si es lo mismo que esto* (indicando el ángulo inscrito de medida 21º)*, sólo que está diciendo otra cosa* (refiriéndose al otro ángulo inscrito de medida β).

A continuación, comienzan a dialogar sobre si hay que determinar beta o no, debido a que el enunciado no lo solicita. Produciéndose el siguiente dialogo:

Esteban: - *Teni que sacar el "a".* (indicando el ángulo de medida α), *el "a" es 42, el b no hay que sacarlo po.*
Marcos: - *No te piden el "b".*
Esteban: - *Porque no te preguntaron nunca el "b".*
Esteban: - *Ósea que… "a" es igual a 21 por dos.* (escribiendo sobre la hoja lo que dice)
Esteban: - *Sería eso nomas po.*

Para la obtención de la medida de alfa. Los estudiantes realizan un paso de razonamiento, utilizando dos premisas. La de ángulo inscrito y ángulo del centro solamente. (Esquema 6.13)



Esquema 6.13: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado por los estudiantes para determinar la medida del alfa.*

Esto evidencia que uno de los alumnos solamente responde lo que el enunciado le solicita. Cuando el profesor les pide que también calculen la medida de beta, estos responden:

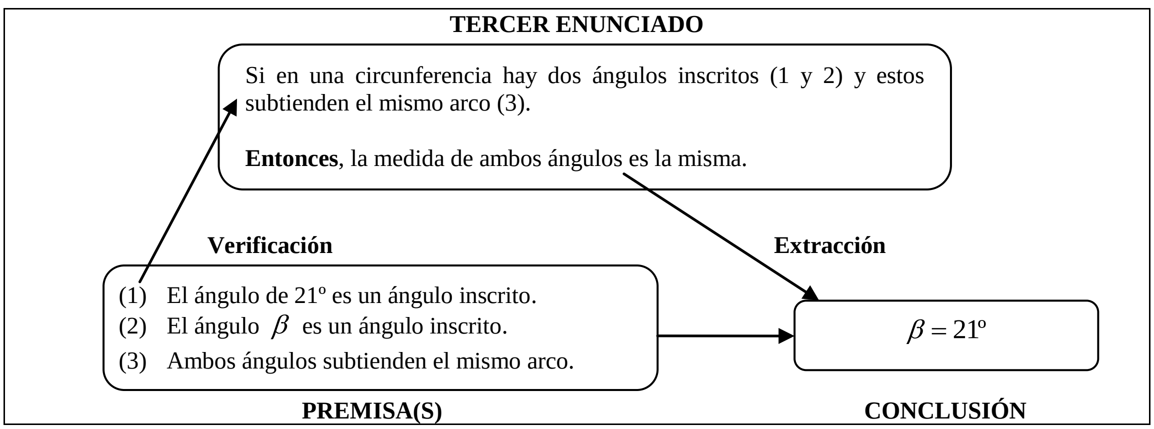
Esteban:	-	*Bueno.*
Esteban:	-	*Ya, pero como sacamos el beta.*
Marcos:	-	*No tengo idea*
Esteban:	-	*A ver.*
Marcos:	-	*Pero comparte esto, ¿o no?* (señalando el arco que subtienden lo ángulos)
Esteban:	-	*¿Ah?*
Esteban:	-	*No, no.*
Esteban:	-	*Ese es el mismo, pero ese es otro teorema, pero que nunca vimos, que era uno cuando no pasaba por el centro*
Marcos:	-	*Yo me imagino que es el mismo que este* (señalando en la figura el ángulo de 21º), *si comparten los puntos* (señalando en la figura el arco que subtienden los ángulos)
Esteban:	-	*¿Cuál?*
Marcos:	-	*Este* (señalando en la figura a beta) *debe ser lo mismo que este.* (señalando en la figura el ángulo de 21º).
Esteban:	-	*Si, igual puede ser*
Marcos:	-	*Aparte que se parecen.*
Esteban:	-	*Mm…*
Esteban:	-	*Me tinca, no sé donde escuche, que si comparten los mismos puntos, era el mismo.* (refiriéndose al arco que subtienden)
Esteban:	-	*¿O no?*
Esteban:	-	*Me tinca que mide 35.*

En el dialogo que se produce, se observa que los estudiantes no saben como determinar la medida de beta, estos no relacionan los ángulos inscrito y del centro para aplicar el teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia. Cuando dicen que no recuerdan el teorema para determinar beta, se refieren a la propiedad de que la medida de dos ángulos inscritos que subtiendan el mismo arco son iguales.

Se dejan llevar por la intuición, no justifican mediante propiedades por qué creen que beta mide 21º. Además, uno de los estudiantes sostiene que la medida podría ser 35º sin justificar su afirmación. Luego de esto, y notar que no logran determinar la medida de beta, el profesor interviene indicándoles que recuerden que se les entrego una hoja resumen en la cual se encuentra el teorema que requieren para resolver el ejercicio. Una vez que observan el resumen estos responden diciendo:

Esteban: - *Este* (señalando en la figura el ángulo de medida 21º) *también tiene el mismo arco.*
Esteban: - *Entonces ese* (señalando en la figura el ángulo de medida β) *también tiene que ser lo mismo.*
Profesor: - *¿Por qué?*
Esteban: - *Porque comparten los puntos* (se refieren a los puntos que forman el arco correspondiente) *y son el mismo arco* (se refieren a que comparten el mismo arco).
Marcos: - *Ah... y subtienden el mismo arco.*

Al observar los diálogos se puede concluir que realizan un paso de razonamiento (Esquema 6.14) para determinar la medida de beta.



Esquema 6.14: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado por las estudiantes para determinar la medida de beta.*

Observaciones

Los estudiantes realizan un paso de razonamiento con dos de tres premisas para determinar la medida de alfa. Estos no utilizan el teorema en forma rigurosa. Lo más probable es que ambos no expliciten la información de que los dos ángulos subtienden el mismo arco.

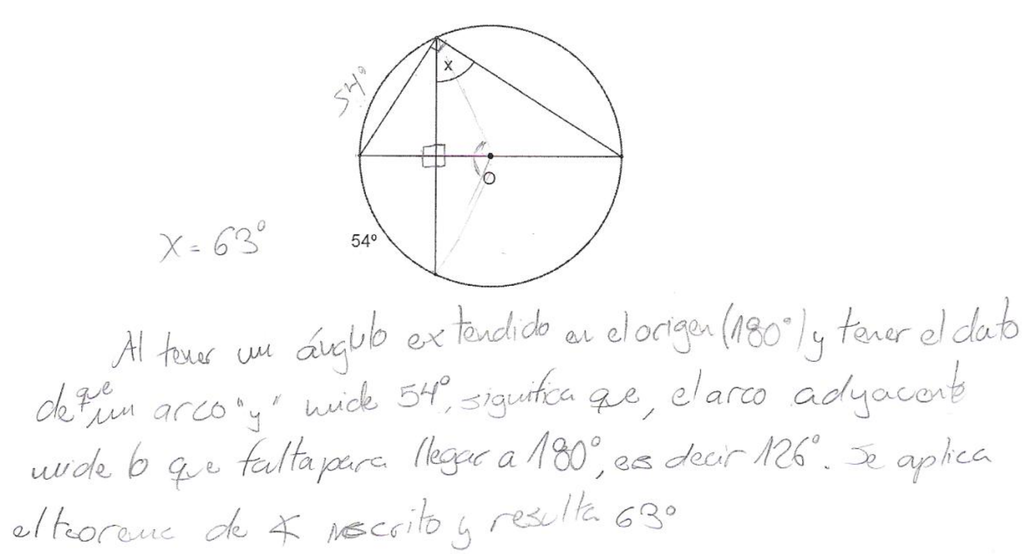
Presentan dificultades parea determinar la medida de beta, pues no son capaces de aplicar el teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia en forma inversa a como lo hicieron anteriormente. Es decir, determinando la medida del ángulo inscrito a partir de la medida del ángulo del centro.

Si el profesor no interviene, estos no habrían podido dar una justificación valida de por que la medida de beta es 42.

Cabe hacer notar, que como el enunciado de la actividad que propone el texto solo solicita el cálculo de la medida de alfa, los estudiantes no calculan la medida de beta. Solo dan respuesta a lo que el enunciado solicita.

Actividad 4

Calcula la medida de los elementos pedidos en cada una de estas figuras.



Los alumnos, luego de leer el enunciado, sostienen que la intersección de la cuerda con el diámetro de la circunferencia forman ángulos rectos, esto se observa en el siguiente dialogo:

Esteban: - *Este mide 90* (señalan el ángulo que se forma en la intersección con la cuerda y el diámetro de la circunferencia).

Esteban: - *No sé por qué me tinca que este* (señalando en la figura el ángulo CED) *mide 90 y este también.* (señalando en la figura el ángulo AED)

Marcos: - *A sipo.*

Esteban: - *Y ese también* (señalando en la figura el ángulo AEB), *y ese también* (señalando en la figura el ángulo BEC)

Estos se dejan llevar por la forma de la figura, pues, lo que afirman no los respaldan con ninguna propiedad. Posteriormente señalan en la figura que la medida de los ángulos ADE y EAD miden 45º cada uno:

Marcos: - *Este 45 y 45.*(señalando en la figura los ángulos ADE y EAD respectivamente)

Marcos: - *Necesitamos ahí uno más.* (señalando en la figura el ángulo ACD)

Marcos: - *Y aquí hay 45 y 45.* (señalando en la figura los ángulos ADE y EAD respectivamente)

Esto permite concluir que los estudiantes continúan guiándose por la forma de la figura, ya que, al asignar medidas iguales a dos ángulos del triángulo AED, estos tratan al triángulo AED como si fuese un triángulo es isósceles rectángulo, aunque no hayan explicitado tal información.

Luego, concluyen que en la figura hay dos arcos congruentes, de medida 54º, los arcos DA y AB.

Esteban: - *Y este arco* (señalando en la figura el arco DA) *es igual a este otro* (señalando en la figura el arco AB).

Marcos: - *Pero se supone que tenemos que ocupar esto* (indicando el arco de 54º).

Esteban: - *Sí, pero este* (señalando en la figura el arco de 54º) *es igual a este* (señalando en la figura el arco DA).

Marcos: - *Ah, Cierto.*

Esteban: - *Ese Mide 54.* (señalando en la figura el arco DA)

Esteban: - *Bueno, aunque igual no creo que nos sirva, pero…. Igual.*

Al observar los diálogos, ambos alumnos, para concluir que existen dos arcos congruentes, continúan guiándose por la forma de la figura, posteriormente comienzan a debatir de si realmente el arco DA mide 54º:

Esteban:	-	*Ósea que este también mide 54* (señalando en la figura el arco DA).
Marcos:	-	*¿Cuál?*
Esteban:	-	*O sea, que raro, porque no debería medir 54 de echo.* (señalando en la figura el arco DA).
Esteban:	-	*A no po si no no.. si si…no no no no…*
Marcos:	-	*No pueden medir los dos 54.*

Uno de los estudiantes manifiesta dudas respecto a lo que sostiene su compañero, pero aun así se convence sin tener una justificación de por medio de que la medida del arco DA es también 54º.

Luego, comienzan a desarrollar estrategias para determinar la medida de x, estrategias como la que se evidencia en el siguiente dialogo:

Marcos:	-	*Porque podríamos sacar ese* (señalando en la figura el ángulo inscrito ACD) *de ahí, no, sacamos este.* (señalando en la figura el ángulo inscrito ADE)
Esteban:	-	*O podemos cachar que este* (señalando en la figura el ángulo ADE) *mas este* (señalando en la figura el ángulo EDC), *O sea este* (señalando en la figura el ángulo ADE) *es lo que le falta para llegar a 90 es "x".*
Esteban:	-	*Si este mide 90.* (señalando en la figura el ángulo ADC)
Esteban:	-	*Mira, si este mide, ¿cuánto era?, 54.* (señalando en la figura el ángulo AOD)
Marcos:	-	*Si este* (señalando en la figura el ángulo DEA) *mide 90, este* (señalando en la figura el ángulo ADE) *debería medir 45.*
Marcos:	-	*No po' si este* (señalando en la figura el radio DO) *va para allá.* (hacia el centro de la circunferencia)
Marcos:	-	*No, tampoco, porque si va al medio, valen 60 todos.* (refiriéndose a los ángulos interiores del triángulo AOD)

Se extrae desde los diálogos, que uno de los alumnos en forma intuitiva sostiene que la medida del ángulo ADC es 90º, su afirmación es acertada, pero no justifica diciendo que esto se debe a que el triángulo ACD es un triángulo inscrito en una semicircunferencia.

En una nueva estrategia para determinar la medida de x uno de ellos sostiene:

Marcos:	-	*Si este* (señalando en la figura el ángulo DEA) *mide 90, este* (señalando en la figura el ángulo ADE) *debería medir 45.*
Marcos:	-	*No po' si este* (señalando en la figura el radio DO) *va para allá.* (hacia el centro de la circunferencia)
Marcos:	-	*No, tampoco, porque si va al medio, valen 60 todos.* (refiriéndose a los ángulos interiores del triángulo AOD)
Marcos:	-	*¿Y este no medirá 126?* (señalando el ángulo del centro BOC)
Esteban:	-	*¿Mm?*
Marcos:	-	*Este de acá, 126.* (señalando el ángulo del centro BOC)
Esteban:	-	*¿126?*
Esteban:	-	*No po, ¿porque mide 126?*
Marcos:	-	*No po' como que na' que ver.*
Esteban:	-	*No po' mm… ¡¡a ver!!*
Esteban:	-	*mmmm…. Es 126.*
Marcos:	-	*x es 63.*

El alumno realiza un procedimiento valido para la obtención de la medida de x. Sin embargo su compañero no comprende ni tampoco acepta lo que hizo, cuando este le consulta, por qué sostiene que "x" mide 26º, su compañero argumenta:

Marcos:	-	*Porque es la mitad que el ángulo del centro que es 126.*
Marcos:	-	*Porque es el resto para llegar a un ángulo extendido.*
Esteban:	-	*Ya, entonces, ¿por qué es 126?*
Marcos:	-	*Porque en el origen* (refiriéndose al principio del ejercicio) *se hace un ángulo extendido* (señalando en la figura el ángulo AOC) *y como te dan 54, teni que buscar en el ángulo extendido, para sacar lo que queda.* (refiriéndose al suplemento de 54)
Esteban:	-	*Si te da un diámetro, vay ha saber altiro que da 180. Porque pasa por la mitad.*
Marcos:	-	*Sí, porque es un ángulo extendido.*

En la justificación que el estudiante da a su compañero, se evidencia que este realizo dos pasos de razonamiento. El primero para concluir que la medida del ángulo del centro AOB es 54º (Esquema 6.15a). El segundo para determinar la medida de x (Esquema 6.15b)

TERCER ENUNCIADO

Si se tiene un ángulo del centro de una circunferencia (1) y el arco que subtiende (2).

Entonces, el ángulo del centro y el arco que subtiende tienen la mima medida

Verificación **Extracción**

(1) Señalan el ángulo del centro de la circunferencia.
(2) El ángulo del centro subtiende al arco de medida 54º.

Ángulo del centro mide 54º

PREMISA(S) **CONCLUSIÓN**

(a) *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado por los estudiantes para determinar la medida del ángulo del centro AOB.*

TERCER ENUNCIADO

Si en una circunferencia hay un ángulo inscrito (1) y un ángulo del centro (2).

Entonces, la medida del ángulo inscrito es la mitad de la medida del ángulo del centro.

Verificación **Extracción**

(1) El ángulo x es un ángulo inscrito.
(2) El ángulo de 126º es del centro.

$$x = \frac{1}{2} \cdot 126^{\circ}$$

PREMISA(S) **CONCLUSIÓN**

(b) *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado por los estudiantes para determinar la medida de x.*

Esquema 6.15

Observaciones

Los estudiantes se guían por la intuición, durante el desarrollo del ejercicio, al dejarse llevar por la forma de la figura y no por las propiedades de los elementos que la componen.

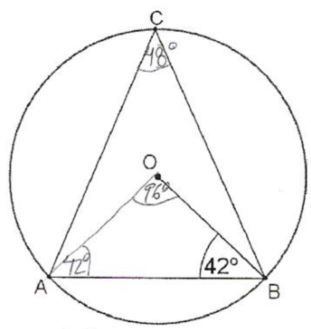
Estos realizan dos pasos de razonamiento, donde uno de ellos, nuevamente lo realizan utilizando dos premisas, la de ángulo inscrito y del centro solamente. Aunque durante el desarrollo sostuvieron que los ángulos subtienden el mismo arco.

Prueban diferentes estrategias para determinar la medida de x, cuando se dan cuenta que la estrategia escogida no funciona, estos vuelven a probar con otra hasta que dieron con una valida.

Es importante destacar, que una vez que los alumnos resuelven el ejercicio, escriben la justificación del desarrollo en la hoja.

Actividad 5

Calcula la medida del ángulo inscrito ACB en la siguiente figura.



Si se traza una línea que una el punto O con el punto A se formará un triángulo isosceles. $\overline{AO} = \overline{OB}$, por lo tanto el ángulo $\measuredangle ABO$ mide lo mismo que el ángulo $\measuredangle BAO$. Es decir 42°. Lo que falta para 180° es 96° y será el ángulo restante. El ángulo $\measuredangle ACB$ se convierte en el inscrito y medirá la mitad (48°).

Los estudiantes, al leer el enunciado, identifican en la figura el ángulo inscrito ACB. Luego, uno de ellos construye los radios OA y OB para formar el ángulo del centro AOB. Posteriormente, concluyen que el triángulo AOB es isósceles, y a continuación determinan el ángulo BAO. Para así obtener la medida del ángulo del centro AOB y aplicar el teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia. Lo descrito anteriormente queda evidenciado en los siguientes diálogos que estos sostienen:

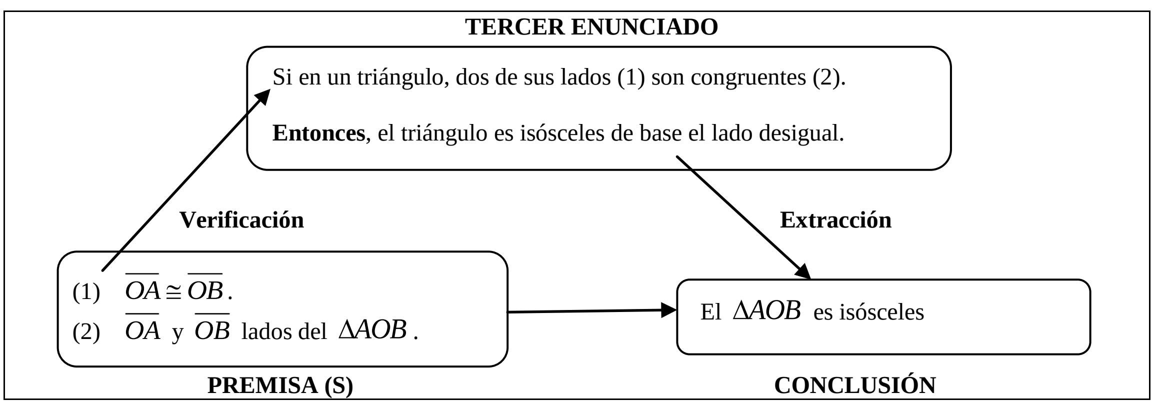
Esteban: - *Ah!, este* (refiriéndose al ejercicio) *es más fácil, porque haci una cuestión ahí* (trazando el radio OA) *y ese mide 42.* (señalando en la figura el ángulo BAO)

Marcos: - *Porque es isósceles.*

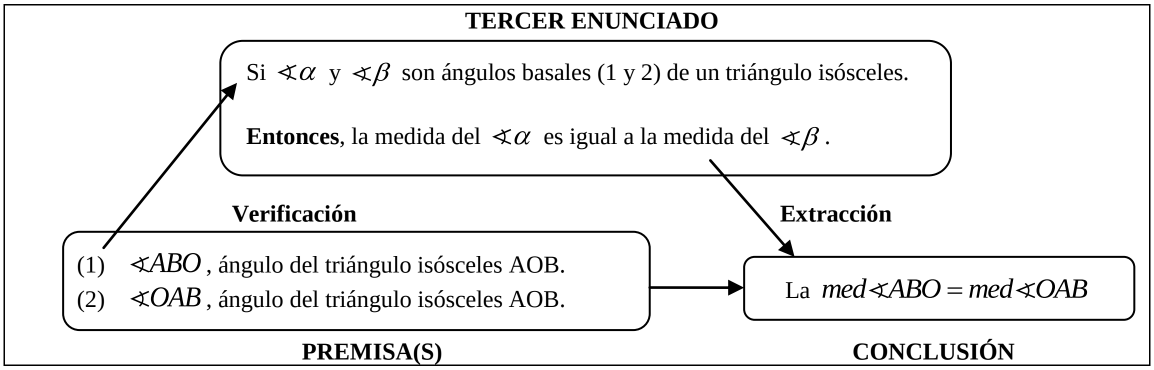
Esteban: - *Si po.*
Esteban: - *Y ese* (señalando en la figura el ángulo AOB) *después, lo que falta.* (refiriéndose a al suplemento de la medida del ángulo AOB)
Esteban: - *42 por dos, 84. 84… es 96.*
Marcos: - *Sipo 96*
Esteban: - *Y este es la mitad.* (señalando en la figura el ángulo inscrito ACB)
Marcos: - *La mitad*
Esteban: - *¿Cuánto es?*
Marcos: - *48.*

Estos, mediante el trazado de dos radios de la circunferencia forman el ángulo del centro. Comprobando que los alumnos saben que para lograr aplicar el Teorema necesitan del ángulo del centro y de un ángulo inscrito

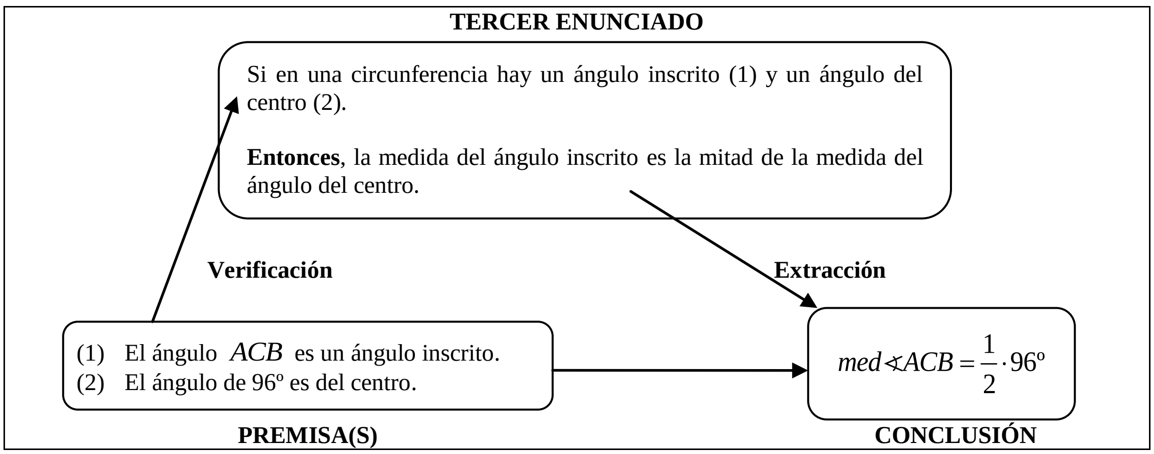
Se deja entrever que los alumnos realizan tres pasos de razonamiento. El primero, cuando concluyen que el triángulo AOB es isósceles (Esquema 6.16a). El segundo, para determinar la medida del ángulo BAC (Esquema 6.16b). Y el ultimo, se da cuando aplican el teorema del ángulo inscrito y delo centro de una circunferencia. (Esquema 6.16c)



(a) *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado por los estudiantes para concluir que el triángulo AOB es isósceles.*



(b) *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado por los estudiantes para concluir que los ángulos basales del triángulo isósceles AOB son congruentes.*



(c) *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado por los estudiantes para determinar la medida del ángulo ACB.*

Esquema 6.16

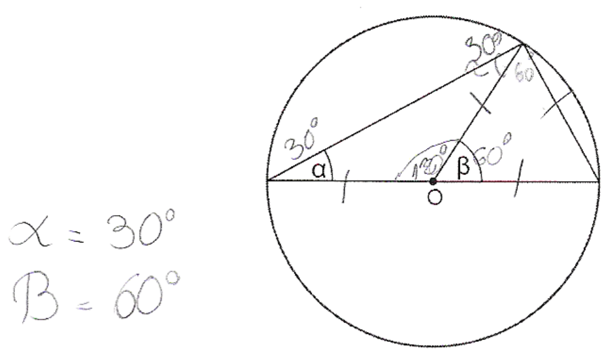
Observaciones

Cabe destacar que de los tres pasos de razonamiento que realizan los estudiantes. En todos no explicitan todas las premisas en sus diálogos, pero cuando escriben la justificación en la hoja, lo hacen para los dos primero.

Nuevamente no explicitan la información de que el ángulo inscrito con el del centro subtienden el mismo arco. Aplicando el teorema solamente con dos premisas de tres.

Actividad 6

Demuestra que en el caso de la figura $\beta = 2\alpha$.



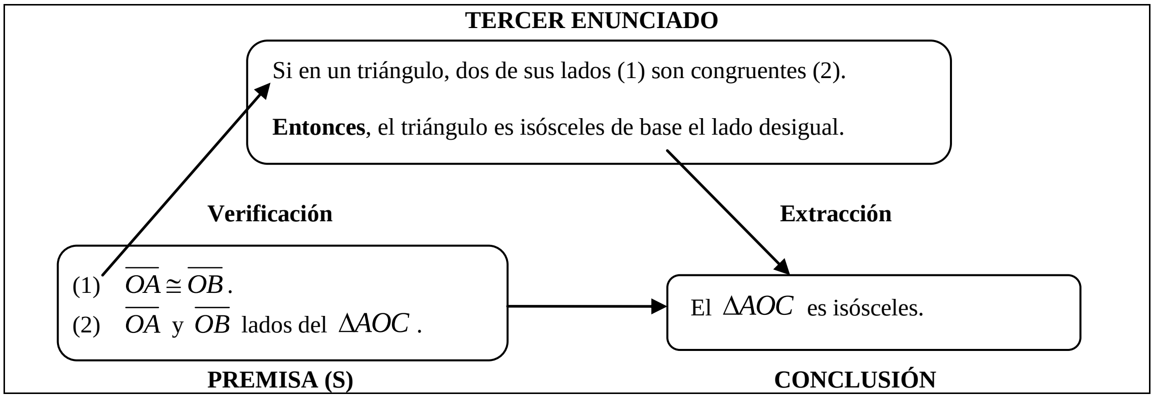
Al leer el enunciado, uno de ellos sostiene que el triángulo OBC es equilátero, y le asigna a beta la medida de 60º. Posteriormente, calcula la medida de alfa afirmando que su medida es 30º. Esto se observa en el siguiente dialogo que sostienen los estudiantes:

Marcos:	-	*Yo digo que este* (señalando en la figura el triángulo OBC) *es un equilátero. Este* (señalando en la figura el ángulo BOC) *mide 60 y este* (señalando en la figura el ángulo BAC) mide 30
Esteban:	-	*¿Cuál?*
Marcos:	-	*Este mide 60.* (señalando en la figura el ángulo del centro BOC)
Marcos:	-	*Y ese mediría 30.* (señalando en la figura el ángulo inscrito BAC)
Esteban:	-	*La cuestión es, si podi demostrar que es equilátero.*
Esteban:	-	*Bueno. Si, es equilátero.*
Marcos:	-	*Es que igual no te dan otro dato. Ósea, supongo que es así.*
Esteban:	-	*Si.*

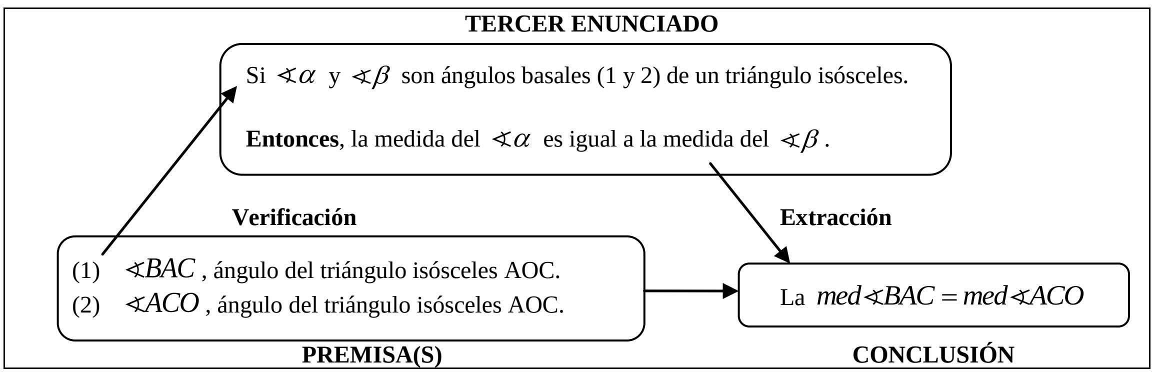
Uno de ellos, sostiene que se debe demostrar que el triángulo es equilátero, pero al no poder hacerlo acepta la argumentación que da su compañero.

Estos, dan dos justificaciones para la obtención de la medida de alfa. En la primera no utilizan el teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia, sino más bien, calculan el suplemento del ángulo BOC, y posteriormente sostienen en que el triángulo

AOC es un triángulo isósceles, asignándole a los ángulos basales del triángulo la medida de 30º. En esta realizan dos pasos de razonamiento (Esquema 6.17)



(a) *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado por los estudiantes para concluir que el triángulo AOC es Isósceles.*



(b) *Paso de razonamiento de tipo modus pones realizado por los estudiantes para concluir que los ángulos basales del triángulo isósceles AOC son congruentes.*

Esquema 6.17

La segunda justificación, la dan en forma ambigua, cuando uno de ellos sostiene

Marcos: - *Y este* (señalando en la figura el ángulo BAC), *es el inscrito de… el del centro.*

Esteban: - *Si.*

Estos, dejan entrever que la obtención de alfa se justifica por medio del teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia. Pese a que no lo hayan explicitado, estos realizan un paso de razonamiento (Esquema 6.18) cuando argumentan por qué alfa mide 30º.

TERCER ENUNCIADO

Si en una circunferencia hay un ángulo inscrito (1) y un ángulo del centro (2).

Entonces, la medida del ángulo inscrito es la mitad de la medida del ángulo del centro.

Verificación

Extracción

(1) El ángulo α es un ángulo inscrito.
(2) El ángulo de 60º es del centro.

$$med\sphericalangle ACB = \frac{1}{2}\cdot 60^{\circ}$$

PREMISA(S)

CONCLUSIÓN

Esquema 6.18: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado por los estudiantes para determinar la medida de alfa.*

Observaciones

Estos se guían por la figura al sostener que el triángulo OBC es equilátero y no por las propiedades que presentan sus elementos.

Realizan 3 pasos de razonamiento. Dos de ellos para justificar la medida de alfa por medio de una estrategia en la cual no se utiliza el Teorema de ángulo inscrito y del centro de una circunferencia. El tercer paso se da aplicando dicho teorema para la obtención de la medida de alfa.

En el desarrollo de la actividad solo se dedican a explorar asignándole valores a α y β. Sin embargo, es importante destacar que reconocen el triángulo isósceles, y a pesar de que le asignan valores a las medidas de los ángulos logran concluir para un caso particular.

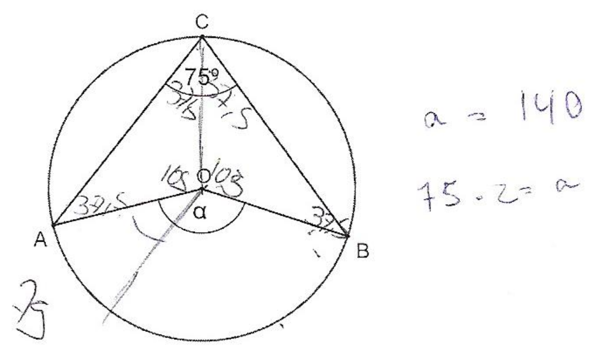
Los estudiantes solamente realizan una comprobación de lo que se les pide demostrar.

6.2.2 Estudio de las producciones del par de estudiantes de rendimiento medio

Las siguientes actividades corresponden a las desarrolladas por los dos alumnos que poseen un rendimiento medio en el subsector de matemática del establecimiento.

Actividad 1

Calcular la medida de α en la siguiente figura.



Los estudiantes realizan el ejercicio sin emitir comentarios sobre el desarrollo, estos escriben en la hoja que la medida de alfa es 75 por dos. Al calcular el producto estos dicen que es 140. Inmediatamente después de eso pasan al otro ejercicio sosteniendo que es muy fácil para detenerse en el.

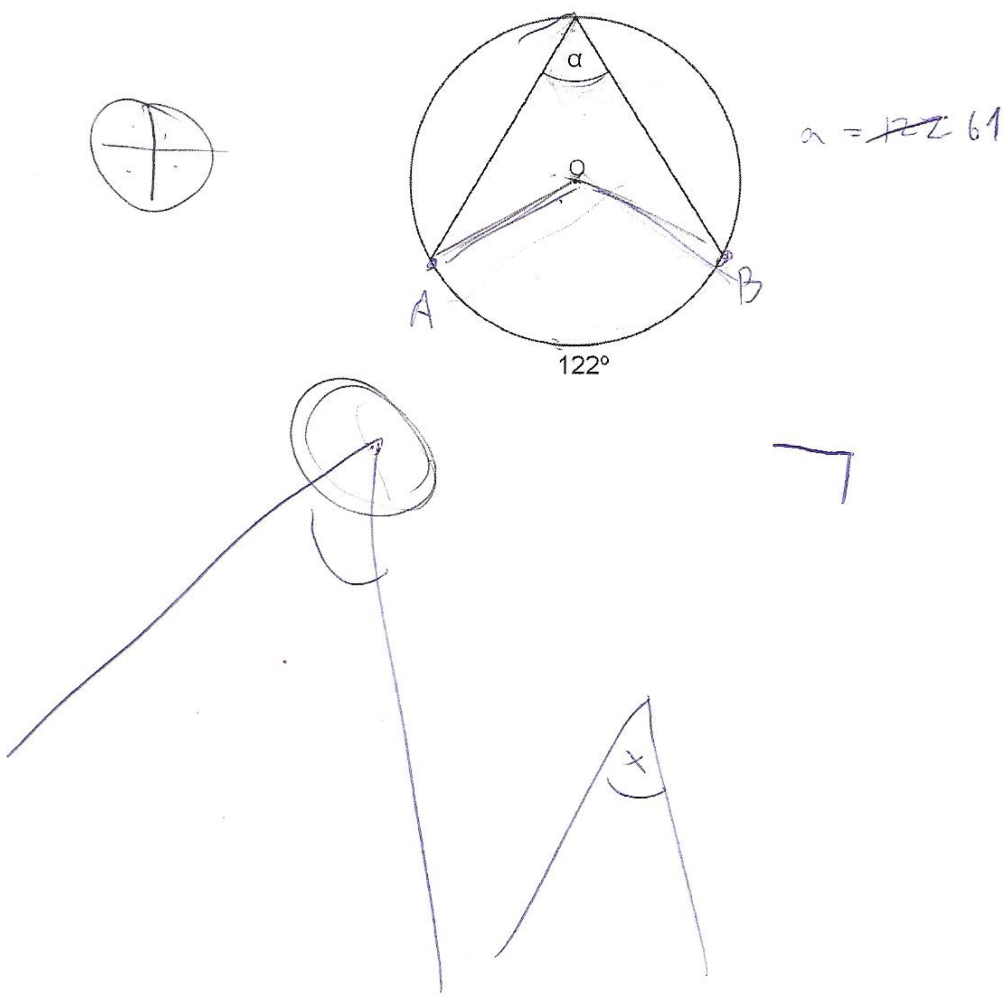
Los alumnos no explicitaron si reconocieron un ángulo inscrito o uno del centro en la figura. Lo que no permite concluir si estos realizaron un paso de razonamiento para la obtención de la medida del ángulo del centro.

Observaciones

Pese a que los estudiantes saben que para determinar la medida del ángulo del centro se debe multiplicar por dos la medida del ángulo inscrito, estos erraron en su respuesta, ya que al realizarlo en forma apurada para pasar a los siguientes ejercicios les provoco que se equivocaran en el resultado. Surgiendo la interrogante si verdaderamente realizaron un paso de razonamiento o lo hicieron como algo procedimental.

Actividad 2

Calcular la medida de α en la siguiente figura.



Uno de los alumnos, luego de leer el enunciado, traza los radios OA y OB formando el ángulo del centro AOB. Posteriormente afirma que la medida de alfa es 122º. Dándole la siguiente justificación a su compañero cuando este sostiene que la medida de alfa es 61º:

Felipe: - *Si 122.*
Diego: - *61.*
Diego: - *No, 61.*
Diego: - *A… no porque ese* (Señalando en la figura al ángulo inscrito)

es el ángulo, si 122 debería ser.

Felipe: - *Si, 122.*

Diego: - *Sipo, si ese es a* (señalando en la figura a alfa) *porque no hay rayas tiradas para allá.*

Felipe: - *Claro, esto* (Señalando en la figura al ángulo del centro) *sería el doble de eso.* (Señalando en la figura al ángulo inscrito)

Cuando se le consulta al estudiante, por que la medida de alfa es 122, este responde:

Felipe: - *Porque ese es un ángulo* (señalando en la figura al ángulo inscrito) *que en el fondo se va abriendo pero sigue siendo el mismo, con los mismos...*

Diego: - *Mismas medidas.*

Felipe: - *Vértices.*

Esto evidencia que el estudiante pese a que construyo el ángulo del centro no identifica los ángulos para aplicar el teorema. Este da a entender que alfa mide 122 porque la medida del arco es la misma que el ángulo que subtiende. Justificación errónea, pues esta propiedad es para el ángulo del centro y no el inscrito.

Luego de escuchar la justificación que da el alumno, su compañero le hace ver que esta mal en su argumentación, pues por medio de ejemplos visuales de que no es posible que el ángulo inscrito mida 122º ya que eso conllevaría a que el ángulo del centro midiese 244º, para el estudiante, visualmente es imposible que el ángulo del centro sea mayor que 180º. Luego de los ejemplos propuestos por su compañero el alumno desiste de su justificación, y su compañero sostiene que la medida del ángulo inscrito es 61 produciéndose el siguiente dialogo:

Diego: - *61*

Felipe: - *Pero es que... No.*

Diego: - *Yo te estoy diciendo por vista no más.*

Felipe: - *Según las reglas no po.*

Diego: - *Pero como no está ese ángulo cerrado* (señalando al ángulo del centro)

Felipe: - *Por vista, pero las vistas engañan.*

Felipe: - *Si es por... Mira, si es por eso, este ángulo* (señalando al ángulo inscrito) *sería menos de 90 grados*

Diego: - *Ya filo pasemos al siguiente.*

Felipe: - *Es 61.*

Los estudiantes aciertan en la respuesta, pero no logran justificar la forma en que la obtuvieron.

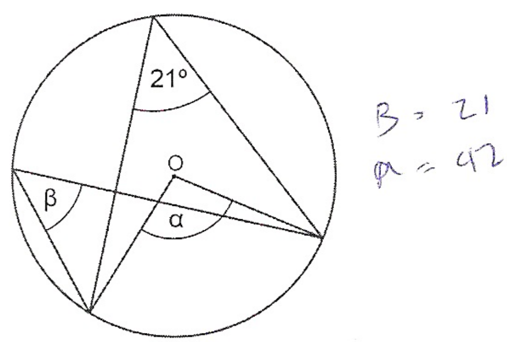
Observaciones

Los alumnos no realizan pasos de razonamiento al desarrollar la actividad. Uno de estos presenta una confusión al decir que la medida del arco es la misma que la del ángulo inscrito, propiedad que el libro trata, pero respecto al ángulo del centro.

Ninguno de los dos da argumentaciones validas en sus justificaciones, pues estos se respaldan en la forma de la figura y no en las propiedades de los elementos geométricos que la componen.

Actividad 3

Calcular la medida de α en la siguiente figura.

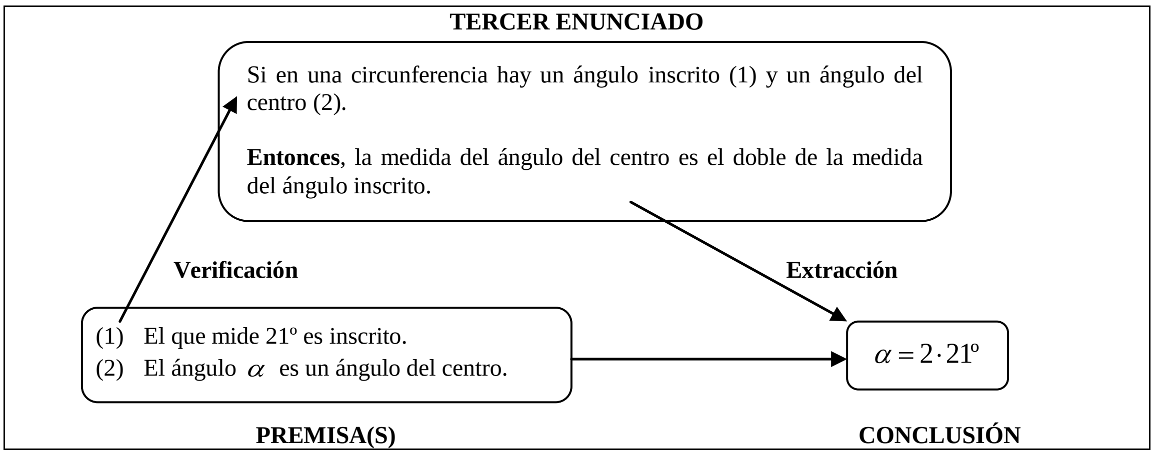


Inmediatamente uno de los estudiantes afirma que beta es 21 y alfa mide 42. Cuando su compañero pregunta por qué beta es 21 este responde:

Felipe: - *Sí, porque al abrir al final son los dos los mismos ángulos que están.* (indicando en la figura que los dos ángulos inscritos subtienden el mismo arco).

De la respuesta del alumno se puede concluir que este determina la medida de beta utilizando la propiedad que dice: si dos ángulos inscritos que subtienden el mismo arco, entonces sus medidas son congruentes.

Para determinar la medida de alfa debieron realizar un paso de razonamiento (Esquema 6.19) en el cual no explicitan las premisas, es decir, solamente señalan en la figura lo que van haciendo.



Esquema 6.19: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado por los estudiantes para determinar la medida del alfa.*

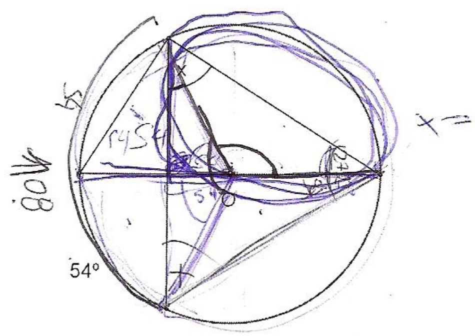
Observaciones

Los estudiantes no justifican como determinaron la medida de alfa, aunque eso no implica que estos no hayan realizado un paso de razonamiento para su obtención, pues simplemente no explicitaron lo que hicieron.

Cabe destacar que los estudiantes no le prestan importancia al ángulo del centro, sino más bien se concentran en los ángulos inscritos presentes en la figura para desarrollar la actividad.

Actividad 4

Calcula la medida de los elementos pedidos en cada una de estas figuras.



Luego de leer el enunciado, los alumnos sostienen que la intersección de la cuerda BD con el diámetro AC forma ángulos rectos, Al preguntarles, ¿Por qué?, estos se retractan y borran en la figura los ángulos que habían marcado, esto se evidencia en el siguiente dialogo:

Felipe: - *90, un triángulo.* (refiriéndose al triángulo que tiene el ángulo que marco como recto)

Profesor: - *¿Por qué mide 90º?*

Felipe: - *A no tiene porque medir 90* (borrando en la figura el ángulo recto que había hecho para la intersección del diámetro y la cuerda de la circunferencia)

Diego: - *No tiene lo... A no po, no tiene los cuadraditos.* (refiriendose a que no hay un ángulo recto marcado en la figura)

Esto evidencia que en una primera instancia los estudiantes se guiaron por la forma de la figura para dibujar ángulos rectos en la intersección de la cuerda BD y el diámetro AC.

Posteriormente, se centran en el arco de medida 54º, dibujando el ángulo del centro que subtiende dicho arco. Luego, construyen el ángulo inscrito ACB y determinan su medida:

Diego: - *Tiray esta línea pa acá.* (trazando la cuerda que une B con C)

Diego: - *Y es igual que si te dan este ejercicio* (indicando en la figura al ángulo del centro BOC). *Esto debería ser 24... 24... 27* (señalando al ángulo inscrito ACB).

Para determinar la medida del ángulo ACB el estudiante realiza un paso de razonamiento (Esquema 6.20). Cabe destacar que aunque los alumnos no mencionen que los ángulos subtienden el mismo arco. Estos al decir que comparten los mismo puntos explicitan que se da la tercera premisa para aplicar el teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia.

TERCER ENUNCIADO

Si en una circunferencia hay un ángulo inscrito (1) y un ángulo del centro (2).

Entonces, la medida del ángulo inscrito es la mitad de la medida del ángulo del centro.

Verificación **Extracción**

(1) El ángulo ACB es un ángulo inscrito.
(2) El ángulo de 54º es del centro.

$med\sphericalangle ACB = \frac{1}{2} \cdot 54^{\circ}$

PREMISA(S) **CONCLUSIÓN**

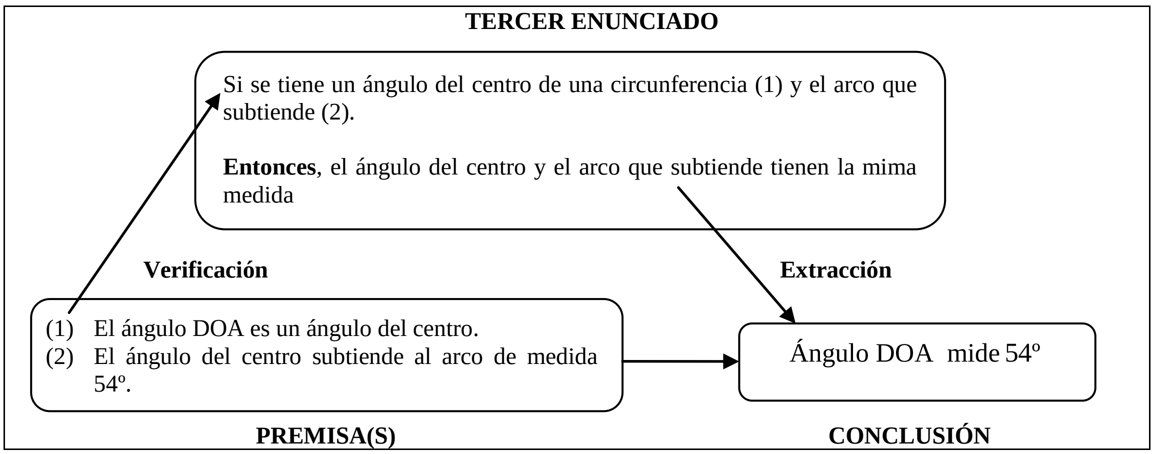
Esquema 6.20: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado por los estudiantes para determinar la medida del ángulo ACB.*

Luego de determinar la medida del ángulo ACB el estudiante sostiene que la medida del ángulo DCA es igual a la medida del ángulo ACB. Cuando su compañero le pregunta por qué, se produce el siguiente dialogo:

Diego:	-	*Y esos dos son iguales* (señalando en la figura a los ángulos DCA y ACB) *porque son una... Ahí teni una línea recta* (señalando en la figura la cuerda BD)
Felipe:	-	*No. no tienen porque ser iguales.*
Diego:	-	*Tienen por qué ser iguales*
Felipe:	-	*Pero si la línea esta así.* (señalando en la figura una rotación con centro C de la cuerda B en unos 30º aproximadamente)
Diego:	-	*Pero no está así.*
Felipe:	-	*Pero es que tu no sabi si esto es recto.* (señalando en la figura a la cuerda DB)
Diego:	-	*Pero es así, porque mira…*
Felipe:	-	*Yo sé que si esta línea* (señalando en la figura al diámetro AC) *por estar con la línea del centro es una línea que desde un lado son iguales, ¿no es cierto?* (tratando de decir que el diámetro AC es una línea recta)
Diego:	-	*ya...* (notándose dudoso sobre los argumentos que presenta su compañero)

El alumno para convencer a su compañero apela a la forma de la figura y no a las propiedades de los elementos que la componen. Su compañero termina aceptando la justificación pese a que es errónea.

Luego los estudiantes sostienen que la medida del arco DA es igual al medida del arco AB, respaldando sus conclusiones en la forma que presenta la figura. Construyendo el ángulo del centro DOA y posteriormente determinando su medida. Para determinar la medida del ángulo DOA estos realizan un paso de razonamiento (Esquema 6.21)



Esquema 6.21: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado por los estudiantes para determinar la medida del ángulo del centro DOA.*

Pese a que el paso de razonamiento lo han realizado en forma correcta, la estrategia que han ocupado hasta el momento para resolver la actividad, es errónea.

A continuación, los estudiantes vuelven a preguntarse si el ángulo AED, que se forma con la intersección del la cuerda BD y el diámetro mide 90º. Pero como el enunciado ni la figura señalan que es un ángulo recto, estos desisten.

Observaciones

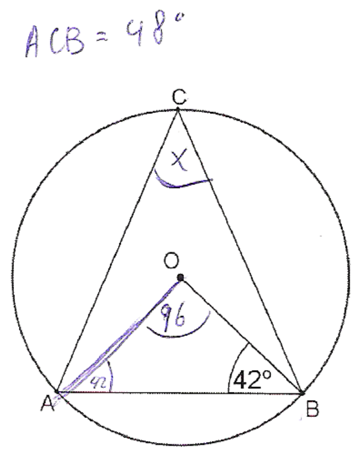
Los estudiantes se guían por la forma de la figura y no por las propiedades de los elementos que la componen.

Estos realizan dos pasos de razonamiento, el primero para determinar la medida de un ángulo inscrito y el segundo cuando concluyen que la medida del ángulo del centro es la misma que la del arco que subtiende. En este último paso de razonamiento, los estudiantes lo hacen cuando están abordando una estrategia errónea para resolver la actividad. Aun así, el paso de razonamiento esta realizado en forma correcta.

A modo de resumen, los estudiantes solo realizan un paso de razonamiento que les permite avanzar en forma valida en el desarrollo del ejercicio. Estos no logran dar con la respuesta, pues no son capaces de terminar la actividad.

Actividad 5

Calcula la medida del ángulo inscrito ACB en la siguiente figura.



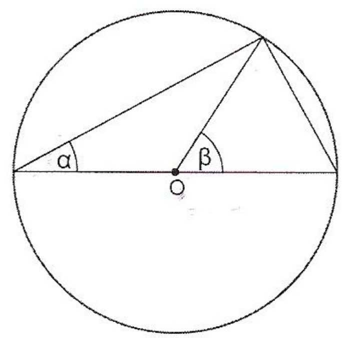
Los alumnos identifican en la figura el ángulo inscrito ACB, luego uno de ellos traza el radio OA, formando el ángulo del centro AOB. Posteriormente, este escribe en la figura que la medida del ángulo BAO es 42. Y a continuación determina la medida del ángulo del centro para aplicar el teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia para determinar la medida de x.

Observaciones.

Los estudiantes, al no emitir comentarios durante el desarrollo no se puede determinar si verdaderamente realizaron pasos de razonamiento o simplemente resolvieron la actividad en forma procedimental. Aún así los pasos de desarrollo que justifican sus respuestas están caracterizados en el capítulo 4 de análisis de textos.

Actividad 6

Demuestra que en el caso de la figura $\beta = 2\alpha$.



Uno de los alumnos identifica en la figura el ángulo del centro, luego el ángulo inscrito y dice lo siguiente:

Felipe: - *Y por regla, el ángulo inscrito...* (señalan do en la figura ángulo inscrito) *es la mitad, o sea el ángulo del centro es el doble de la mitad del ángulo inscrito.*

Esto evidencia que los estudiantes, no demuestran lo solicitado por el enunciado, estos aplican el teorema en su demostración.

Observaciones

Los estudiantes utilizan lo que se quiere demostrar para justificar sus afirmaciones. Cabe destacar que la actividad corresponde a la demostración del tercer caso del teorema.

7. Comprensión de los estudiantes en la lectura de las demostraciones desarrolladas en los textos referentes al Teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia

7.1 Grupo de estudiantes que usa el texto Santillana: Edición Especial para el Ministerio de Educación

Las siguientes demostraciones corresponden a las expuestas a estudiantes del Liceo Municipal que utiliza el texto Santillana, Edición especial para el Ministerio de Educación. Las demostraciones fueron extraídas del texto mencionado y estas corresponden a las demostraciones de los distintos casos que trata el texto referente al ángulo inscrito y del centro de una circunferencia.

Se han identificando y caracterizado aquellos pasos de razonamiento que las estudiantes realicen cada vez que justifiquen las afirmaciones expuestas en la secuencia del desarrollo de las demostraciones.

7.1.1 Par de estudiantes de buen rendimiento

El siguiente análisis corresponde a las demostraciones expuestas a las dos alumnas que poseen mejor rendimiento en el subsector de matemática del establecimiento que utiliza el texto Santillana Edición Especial para el Ministerio de Educación.

Lectura de la demostración del primer caso del teorema

"El centro de la circunferencia se encuentra al interior de la región limitada por los lados del ángulo inscrito"

Las estudiantes, al leer los tres primeros párrafos previos a la exposición de la demostración, identifican claramente en la figura lo que van leyendo, es decir, reconocen los ángulos del centro e inscrito a los cuales se refiere el texto, además indican el arco que estos subtienden.

En el tercer párrafo cuando el texto plantea la pregunta: *¿si esto ocurre siempre?* refiriéndose a que la medida del ángulo inscrito mide la mitad de la del centro. Las alumnas responden que sí. Justificando su afirmación diciendo:

Camila	-	*Este mide la mitad que el ángulo del centro.* (Ambos señalan en la figura que el ángulo ACB es la mitad del ángulo AOB)
Sofía:	-	*La mitad que eso* (señalando en la figura al ángulo ACB y apoyando lo que dice Camila)
Profesor:	-	*¿Por qué?*
Camila:	-	*Porque esto es un ángulo inscrito.* (Señalando el ángulo ACB)

Las estudiantes se refieren a que el ángulo inscrito mide la mitad del ángulo del centro. Estas utilizan el teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia para justificar la respuesta a la pregunta realizada por el profesor.

A continuación se expone el análisis de las argumentaciones que las alumnas sostienen al leer la secuencia de afirmaciones correspondientes a la demostración.

Para una mejor lectura, el análisis de la demostración se expondrá según las afirmaciones que esta contenga. Las cuales han sido detalladas y analizadas en el capítulo 4 correspondiente al Análisis de Textos. (Véase Capítulo 4, Texto Santillana: Edición especial para el Ministerio de Educación, pág. 35)

Secuencia de Afirmaciones de la Demostración

Afirmación 1: *Se dibuja el diámetro CD.*

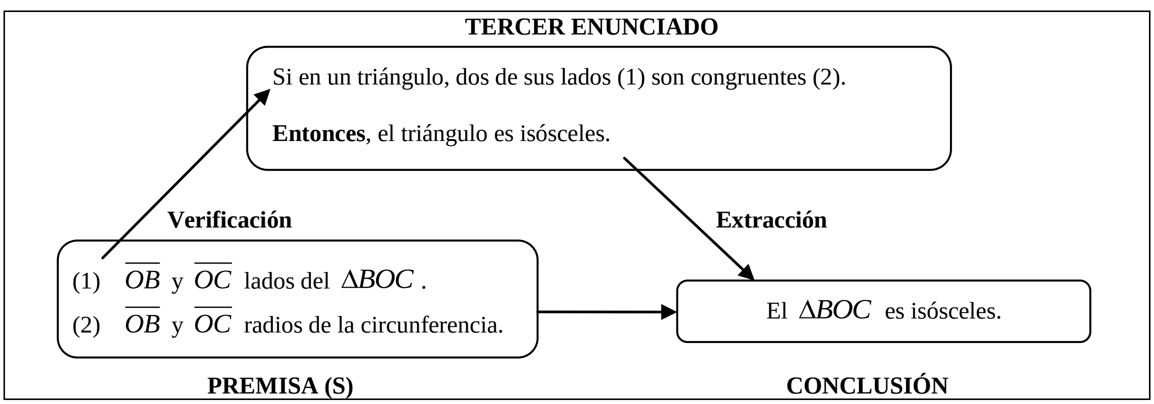
Las alumnas al leer la afirmación inmediatamente señalan en la figura el diámetro de la circunferencia.

Afirmación 2: *Se forman dos triángulos isósceles como en el dibujo.*

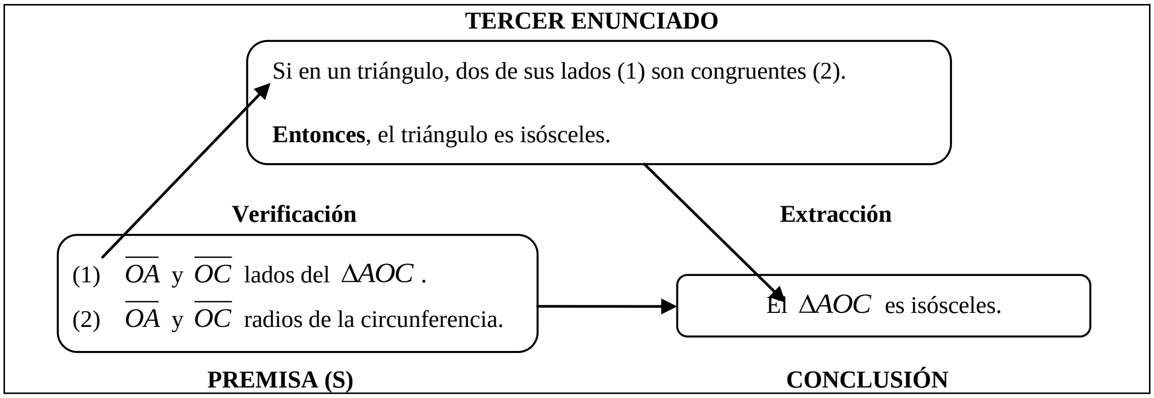
Las estudiantes identifican los dos triángulos isósceles en la figura. Uno de ellos justifica por qué son isósceles cuando dice:

> **Sofía:** - *Tienen el mismo radio.* (Señalando en la figura los segmentos OB, OC y OA)

Según lo que sostiene la alumna, se deja entrever que esta realizo dos pasos de razonamiento para justificar por qué los triángulos que se forman son isósceles. (Esquema 5.1)



(a) *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado por uno de los estudiantes para justificar que el triángulo BOC es Isósceles.*



(b) *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado por uno de los estudiantes para justificar que el triángulo AOC es Isósceles.*

Esquema 5.1

Es importante hacer notar, que la estudiante no se refiere a la congruencia de los radios. Sin embargo, se puede asumir que esta realiza los pasos de razonamiento y no explicito tal información.

Afirmación 3: *Sean α y β los ángulos basales en cada uno de estos triángulos.*

Las estudiantes identifican los ángulos basales en ambos triángulos. Cuando se les pregunta, ¿cuáles son los ángulos basales?, responden

Camila: - *La base* (señalando en la figura los ángulos basales del triángulo OBC)

Sofía: - *Y acá, estos tres.* (señalando en la figura los ángulos basales del triángulo AOC)

Pese a que una de las alumnas no explica con palabras cuales son los ángulos basales, esta si los señala en forma correcta en la figura.

Afirmación 4: *Los ángulos exteriores, esto es,* $\sphericalangle AOD$ *del* ΔAOC *y* $\sphericalangle DOB$ *del* ΔBOC *miden* 2α *y* 2β *respectivamente.*

A medida que van leyendo el párrafo correspondiente a la afirmación 4, estas señalan en la figura los ángulos y triángulos a los cuales se refiere el texto. Identifican claramente en la figura lo que dice el texto. Cuando se les pregunta por qué los ángulos AOD y DOB miden 2α y 2β respectivamente, responden:

Sofía: - *Porque son ángulos del centro.*
Camila: - *A ver, el triángulo AOC* (señalando al triángulo AOC en la figura) *y el ángulo DOB* (señalando en la figura al ángulo DOB), *ósea, ese triángulo* (apuntando al ángulo del centro AOB)
Camila: - *La medida de todos los ángulo de este triángulo, cierto*. (Señalando en la figura al triángulo AOC)
Camila: - *Y el ángulo, de este triángulo* (señalando el ángulo DOB de la figura), *del triángulo BOC* (señalando en la figura al triángulo BOC), *miden el doble de alfa y el doble de beta.*
Profesor: - *Ya, pero, ¿por qué mide el doble de alfa?*
Camila: - *No se.*
Sofía: - *Sera porque es la mitad de un ángulo inscrito.*

Al dar estas respuestas, las alumnas dejan en evidencia que no logran justificar que esto se debe a que la medida del ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de las medidas de los ángulos interiores no adyacentes. Vuelven nuevamente a justificar la afirmación con lo que se pretende demostrar, la tesis.

Afirmación 5: *De la imagen, se concluye claramente que:*

$$\sphericalangle AOB = \sphericalangle AOD + \sphericalangle DOB = 2\alpha + 2\beta = 2\cdot(\alpha+\beta) = 2\cdot\sphericalangle ACB$$

Al principio de la lectura, una de las alumnas no comprende la afirmación, y relaciona en forma errónea los ángulos de la figura con lo que dice el texto:

Camila: - *Ósea que este y este miden lo mismo.* (señalando los ángulos inscritos alfa y beta de la figura)

Camila: - *Si porque están partidos por la mitad.*
Sofía: - *Si.*
Camila: - *Miden lo mismo.*

Esta asociación errónea se debe a que la estudiante no comprende la igualdad que se expone. Ya que al leer $\sphericalangle AOB = \sphericalangle AOD + \sphericalangle DOB$, inmediatamente afirma que el ángulo AOB es igual al ángulo AOD señalando en la figura tal afirmación. Ésta, al continuar leyendo, afirma no entender lo que lee. Luego su compañera le corrige diciendo:

Sofía: - *AOB* (señalando en la figura al ángulo AOB) *es igual a AOD mas DOB porque son estos dos forman ese ángulo entero.* (Señalando en la figura, que los ángulos AOD y DOB forman al ángulo AOB)
Sofía: - *Y eso* (señalando en la figura al ángulos AOB), *es igual al doble de esto mas el doble de esto* (señalando en la figura, a los ángulo inscritos ACD y DCB) porque esto. ósea, esto (señalando en la figura al ángulo DCB) *es mas chico que esto* (señalando en la figura al ángulo DOB), *esto* (señalando en la figura al ángulo DCB) *es la mitad de esto* (señalando al ángulo DOB)

Cuando se les pregunta a las alumnas por que el ángulo DCB es la mitad del ángulo DOB, estas señalan:

Sofía: - *Porque es un ángulo inscrito.* (Señalando en la figura al ángulo DCB) *y este del centro* (señalando en la figura al ángulo AOD)

Nuevamente la alumna justifica una afirmación utilizando el teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia, el cual se pretende demostrar.

Luego, al continuar la lectura de la igualdad, estas van identificando en la figura los ángulos a los que se refiere el texto. Al terminar de leer se les pregunta a las estudiantes que entendieron, y estas responden explicando que el doble del ángulo ACB es igual al ángulo AOB porque ACB es un ángulo inscrito y AOB del centro de la circunferencia. Las alumnas utilizan la tesis de la demostración en su justificación.

Observaciones

A medida que van leyendo los párrafos de la demostración van reconociendo los objetos geométricos en la figura. Sin embargo, no logran dar justificaciones validas para las afirmaciones que se dan en el desarrollo de esta.

Utilizan reiteradas veces el Teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia para justificar las distintas afirmaciones que se presentan. Es decir, justifican las afirmaciones de la demostración utilizando aquello que se pretende demostrar, la tesis.

Las estudiantes siguen la lectura en forma descriptiva, es decir, reconocen los elementos geométricos a los que se refieren las afirmaciones de la demostración, pero no comprende la relación que tienen estos. Solamente una de las alumnas logra realizar un paso de razonamiento para justificar por qué se forman dos triángulos isósceles en la figura.

Lectura de la demostración del segundo caso del teorema

"El centro de la circunferencia se encuentra al exterior de la región limitada por los lados del ángulo inscrito."

Cuando las estudiantes leen el párrafo previo a la demostración del segundo caso, se les consulta: ¿Qué quiere decir que el ángulo inscrito no contenga al centro de la circunferencia? Estos no responden, solamente señalan en la figura al segmento AC que menciona el texto.

Cuando se les consulta si entienden lo que trata de decir el párrafo que leyeron, una de ellas responde que no, mientras la otra sostiene que "*algo*" refiriéndose al segmento OC de la figura.

A continuación se expone el análisis de las argumentaciones que las alumnas sostienen al leer la secuencia de afirmaciones correspondientes a la demostración.

Para una mejor lectura, el análisis de la demostración se expondrá según las afirmaciones que esta contenga. Las cuales han sido detalladas y analizadas en el capítulo 4 correspondiente al Análisis de Textos. (Véase Capítulo 4, Texto Santillana: Edición especial para el Ministerio de Educación, pág. 41)

Secuencia de Afirmaciones de la Demostración

Afirmación 1: *Se traza el segmento OC, como muestra la figura.*

Las estudiantes identifican inmediatamente en la figura el segmento AC, al cual hace referencia el texto.

Afirmación 2: *Observa que* $\sphericalangle ACB = \sphericalangle BCO - \sphericalangle ACO$

Las estudiantes identifican sin problemas, en la figura, los ángulos que menciona el texto, además se les pide explicar la igualdad y estas no presentan complicaciones para hacerlo.

Camila:	-	*Porque el ACB, a si me acuerdo* (señala en la figura al ángulo ACB). *Este es lo mismo* (señalando en la figura al ángulo OCB), *todo esto* (señalando en la figura al ángulo OCB)
Sofía:	-	*No. esto.* (Señalando en la figura al ángulo ACB)
Camila:	-	*No, esto, el... el a... el alfa.*
Profesor:	-	*Ya.*
Camila:	-	*Dice que es igual a BCO, BCO* (Señalando en la figura al ángulo BCO), *pero ahí no sería lo mismo. Hasta ahí no sería lo mismo porque tienen mas este ángulo.* (Señalando en la figura al ángulo OCA)
Sofía:	-	*Porque sería más.*
Profesor:	-	*Ya.*
Camila:	-	*Pero después te dice que menos ACO.* (Señala en la figura al ángulo ACO)
Sofía:	-	*Que sería el ángulo que sobra.*
Camila:	-	*Menos este* (señalando en la figura al ángulo ACO). *Y ahí quedaría este* (señalando en la figura al ángulo ACB)
Camila:	-	*Entonces sería lo mismo.*

Afirmación 3: *Por lo tanto,* $\sphericalangle BOC = 180º - 2(\alpha + \gamma)$

Identifican claramente en la figura los ángulos a los que hace referencia la igualdad. Pero no entienden de donde se formulo la relación. Una de ellas tratando de justificar dice:

Sofía: - *180 seria el ángulo centro completo, extendido y si le restamos los dobles de los ángulos inscritos, me daría cuando seria, el centro, ósea el ángulo BOC, que también es un ángulo centro.*

La alumna da una justificación errónea para la relación.

Afirmación 4: *Por otro lado, en el* $\triangle AOC$ *, se tiene la relación:*

$$2\gamma + \beta + 180º - 2\alpha - 2\gamma = 180º$$

Las estudiantes, a medida que van leyendo, indican en la figura los ángulos, pero al término de la lectura se preguntan: ¿Por qué? Luego permanecen en silencio. Estas no comprenden lo que quiere decir la igualdad. No son capaces de justificar las relaciones que se dan en ella.

Afirmación 5: *De donde se obtiene la relación* $\beta = 2\alpha$ *, es decir,* $\sphericalangle AOB = 2 \cdot \sphericalangle ACB$

Una de las estudiantes justifica esta afirmación diciendo:

Sofía: - *Porque este* (señalando en la figura el ángulo ACB) *es inscrito y el beta es centro.* (Señalando en la figura al ángulo beta AOB)

La alumna justifica la conclusión de la demostración utilizando el teorema. Estas no logran entender que es una conclusión, y no algo que requiere ser justificado.

Observaciones

Las alumnas logran en su mayoría señalar en la figura los ángulos que se mencionan en cada una de las afirmaciones. Sin embargo, no son capaces de comprenderlas, ni tampoco enlazan entre una afirmación y otra, simplemente consideran las afirmaciones como hechos aislados.

Utilizan reiteradas veces el Teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia para justificar las distintas afirmaciones que se presentan. Es decir, justifican las afirmaciones de la demostración utilizando aquello que se pretende demostrar, la tesis.

Las estudiantes siguen la lectura en forma descriptiva, reconociendo los elementos geométricos a los que se refieren las afirmaciones de la demostración, pero no comprenden la relación que tienen estos.

7.1.2 Par de estudiantes de rendimiento medio

El siguiente análisis corresponde a las demostraciones expuestas a las dos estudiantes que poseen un rendimiento medio en el subsector de matemática del establecimiento que utiliza el texto Santillana Edición Especial para el Ministerio de Educación.

Lectura de la demostración del primer caso del teorema

"El centro de la circunferencia se encuentra al interior de la región limitada por los lados del ángulo inscrito"

En los párrafos de introducción que presenta el texto previamente a exponer la demostración, las alumnas, a medida que van leyendo señalan en la figura los lugares geométricos que indica el texto.

Cuando el texto enuncia el teorema del ángulo inscrito y del centro de la circunferencia, se les consulta a las estudiantes si lo entienden y estas contestan:

Paloma: - *Dice que si subtienden el mismo arco el ángulo inscrito mediría la mitad del...*

Esto indica que las estudiantes comprenden el enunciado del teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia.

A continuación se expone el análisis de las argumentaciones que las alumnas sostienen al leer la secuencia de afirmaciones correspondientes a la demostración.

Para una mejor lectura, el análisis de la demostración se expondrá según las afirmaciones que esta contenga. Las cuales han sido detalladas y analizadas en el capítulo 4 correspondiente al Análisis de Textos. (Véase Capítulo 4, Texto Santillana: Edición especial para el Ministerio de Educación, pág. 35)

Secuencia de Afirmaciones de la Demostración

Afirmación 1: *Se dibuja el diámetro CD.*

Al preguntar a las alumnas, ¿cuál sería el diámetro? Estas lo señalan inmediatamente en la figura. Esto evidencia que las alumnas entienden lo que es un diámetro de circunferencia.

Afirmación 2: *Se forman dos triángulos isósceles como en el dibujo.*

Las estudiantes identifican en la figura los triángulos isósceles que se forman al trazar el diámetro. Sin embargo, cuando se les consulta, ¿por qué son isósceles?, estas no responden. Luego, al preguntarles: ¿Cuándo un triángulo es isósceles? Estas responden:

Profesor:	-	*¿Por qué son isósceles?*
Paloma:	-	*Por... Ahí me pillo.*
Profesor:	-	*¿Cuándo un triángulo es isósceles?*
Paloma:	-	*Cuando no todos sus lados son iguales o ¿Cuándo todos sus lados son iguales?*
Paloma:	-	*Tengo esa confusión entre los dos.*

Esto evidencia que las alumnas no saben la definición de triángulo isósceles. Entonces, cuando identifican a estos en la figura, no lo hacen justificando, sino mas bien, solo se limitan a indicar los dos triángulos presentes en la figura. No realizan pasos de razonamiento, ya que no logran justificar la afirmación.

Afirmación 3: *Sean α y β los ángulos basales en cada uno de estos triángulos.*

Identifican los ángulos basales en la figura, pero al consultarles ¿qué es un ángulo basal?, se produce el siguiente dialogo:

Profesor:	-	*¿Qué es un ángulo basal?*
Paloma:	-	*No se. (Moviendo la cabeza haciendo entrever que no sabe)*
Francisca:	-	*No. (Moviendo la cabeza haciendo entrever que no sabe)*
Profesor:	-	*¿Cuáles serían lo ángulos basales alfa y beta?*
Francisca:	-	*¿Podrían ser esos dos?* (Señalando en la figura los ángulos alfa y beta del ángulo inscrito ACB)

Las estudiantes desconocen la propiedad de ángulos basales de un triángulo isósceles. No logran justificar la afirmación. Por lo tanto, no realizan pasos de razonamiento.

Afirmación 4: *Los ángulos exteriores, esto es, $\sphericalangle AOD$ del $\triangle AOC$ y $\sphericalangle DOB$ del $\triangle BOC$ miden 2α y 2β respectivamente.*

Las alumnas señalan en la figura erróneamente, al ángulo COD como 2α y al ángulo DOC como 2β. Estas leen la afirmación del texto pero no logran identificar los ángulos a los cuales se hace referencia. Cuando señala en la figura, el estudiante da a entender que el doble de alfa más el doble de beta forman un ángulo completo.

Afirmación 5: *De la imagen, se concluye claramente que:*

$$\sphericalangle AOB = \sphericalangle AOD + \sphericalangle DOB = 2\alpha + 2\beta = 2\cdot(\alpha+\beta) = 2\cdot \sphericalangle ACB$$

Estas indican en la figura que el ángulo del centro AOB está compuesto por los ángulos, también del centro, AOD y DOB. Identifican en la figura los objetos geométricos a los que el texto hace referencia. Al solicitarles que expliquen la relación que se concluye en la afirmación, estas dicen:

Profesor: - *¿Qué pueden concluir en forma general de toda la línea?*
Paloma: - *Mm…*
Profesor: - *¿Qué significa que sea igual a dos por el ángulo ACB?*
Paloma: - *Que eso* (señalando en la figura al ángulo completo de la circunferencia) *sería lo mismo que multiplicar eso* (señalando en la figura al ángulo ACB) *todo ese ángulo.*

Observaciones

Las alumnas presentan complicación al identificar los objetos geométricos en la figura. Además, no manejan los conocimientos específicos necesarios para argumentar algunas afirmaciones. Al solicitar que las justifiquen, estas no son capaces de hacerlo. No realizan pasos de razonamiento durante la lectura de la demostración. Estas, siguen la lectura en forma descriptiva, es decir, reconocen los elementos geométricos a los que se refieren las afirmaciones de la demostración, pero no comprenden la relación que tienen estos. No enlazan las afirmaciones que se dan en la demostración.

Lectura de la demostración del segundo caso del teorema

"El centro de la circunferencia se encuentra al exterior de la región limitada por los lados del ángulo inscrito."

Al leer el párrafo que presenta el texto previo a la demostración, se le consulta a las alumnas si lo entienden o lo pueden explicar. Estas responden:

Profesor: - *¿Entienden lo que dice en el primer párrafo?*
Paloma: - *Algo...*
Francisca: - *Mueve la cabeza haciendo notar que no entiende.*

A continuación se expone el análisis de las argumentaciones que las alumnas sostienen al leer la secuencia de afirmaciones correspondientes a la demostración.

Para una mejor lectura, el análisis de la demostración se expondrá según las afirmaciones que esta contenga. Las cuales han sido detalladas y analizadas en el capítulo 4 correspondiente al Análisis de Textos. (Véase Capítulo 4, Texto Santillana: Edición especial para el Ministerio de Educación, pág. 41)

Secuencia de Afirmaciones de la Demostración

Afirmación 1: *Se traza el segmento OC, como muestra la figura.*

Las alumnas señalan en la figura el segmento OC.

Afirmación 2: *Observa que* $\sphericalangle ACB = \sphericalangle BCO - \sphericalangle ACO$

Al solicitar que expliquen la igualdad $\sphericalangle ACB = \sphericalangle BCO - \sphericalangle ACO$, estas identifican inmediatamente en la figura el ángulo ACB indicando que este es igual al ángulo BCO menos el ángulo AOC. En la identificación de este último ángulo, cometen un error, pues el que debieron indicar en la figura era el ángulo ACO y no el AOC. Esto evidencia que las estudiantes presentan problemas al identificar en la figura los objetos geométricos que menciona el texto.

Afirmación 3: *Por lo tanto,* $\sphericalangle BOC = 180^{\circ} - 2(\alpha + \gamma)$

Cuando se les solicita que justifiquen la relación $\sphericalangle BOC = 180^{\circ} - 2(\alpha + \gamma)$, estas solamente señalan en la figura lo que va diciendo el texto, no argumentan por qué se formulo dicha relación.

Paloma: - *El ángulo BOC, seria ese* (Señalando en la figura al ángulo BOC) *seria igual a 180 menos 2.*

Profesor: - *¿Por qué 180 menos 2?*

Paloma: - *Seria ahí, ¿o no?* (señalando en la figura un ángulo completo), *BOC, ahí seria 180* (Señalando en la figura al ángulo BOC) *y tendría que restarle eso* (señalando en la figura al ángulo OBC, alfa mas gama). *Seria dos más a, más y.*

Afirmación 4: *Por otro lado, en el* ΔAOC *, se tiene la relación:*

$$2\gamma+\beta+180^{\circ}-2\alpha-2\gamma=180^{\circ}$$

Una vez que leen la afirmación, se les consulta si entienden la relación y estas responden inmediatamente que no.

Profesor: - *¿Entienden de donde salió esa relación?*

Ambas: - *No.*

Afirmación 5: *De donde se obtiene la relación* $\beta=2\alpha$ *, es decir,* $\sphericalangle AOB=2\cdot\sphericalangle ACB$

Los estudiantes explican la afirmación, señalando en la figura que el ángulo del centro es el doble del ángulo inscrito, estos dicen:

Paloma: - *Que ese sería igual a dos a.* (Escribiendo en la figura 2 alfa en el ángulo del centro beta) *y ese ángulo* (señalando en la figura al ángulo AOB) *sería igual a dos por ese* (señalando en la figura al ángulo ACB, alfa)

Paloma: - *Multiplicar ese ángulo* (ángulo ACB) *por dos.*

Identifican en la figura lo que dice el enunciado, pero no ven la afirmación como una conclusión de los pasos anteriores.

Observaciones

La0s alumnas presentan complicaciones al identificar algunos objetos geométricos en la figura. No logran justificar las afirmaciones dadas en la demostración. No realizan pasos de razonamiento.

No enlazan las distintas afirmaciones que se dan en la demostración, siempre las ven como hechos independientes.

7.2 Grupo de estudiantes que usa el texto Santillana

Las siguientes demostraciones corresponden a las expuestas a estudiantes del Colegio Particular que utiliza el texto Santillana. Las demostraciones fueron extraídas del texto mencionado y estas corresponden a las demostraciones de los distintos casos que trata el texto referentes al ángulo del centro e inscrito de una circunferencia.

Se han identificando y caracterizado aquellos pasos de razonamiento que los estudiantes realicen cada vez que justifiquen las afirmaciones expuestas en la secuencia del desarrollo de las demostraciones.

7.2.1 Par de estudiantes de buen rendimiento

El siguiente análisis corresponde a las demostraciones expuestas a los dos alumnos que poseen mejor rendimiento en el subsector de matemática del establecimiento que utiliza el texto Santillana.

Lectura de la demostración del primer caso del teorema

"El centro de la circunferencia se encuentra al interior de la región limitada por los lados del ángulo inscrito"

Al ver la demostración los estudiantes creen que es una actividad más que deben resolver, produciéndose el siguiente diálogo entre ellos.

Marcos:	-	*¿Esto es lo mismo?* (Preguntando si es una actividad mas que debe resolver)
Esteban:	-	*En la figura... Ya.* (Lee el enunciado en voz baja)
Marcos:	-	*A ver espérate.*
Marcos:	-	*Ah, es equilátero.* (lo dice luego de leer la hipótesis)
Esteban:	-	*No.*
Esteban:	-	*No tenemos forma, así que no hacemos nada.*
Marcos:	-	*Te están explicando el teorema*

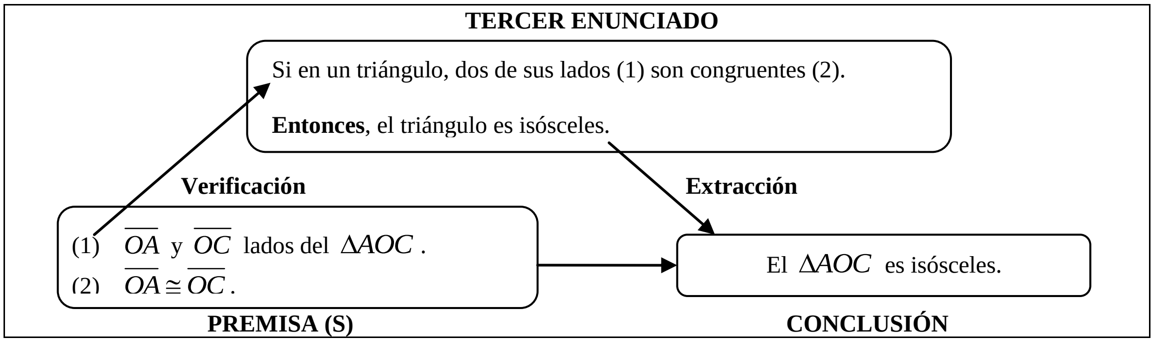
Uno de ellos, sostiene que no se puede hacer nada. Por otra parte , su compañero afirma que los triángulos presentes en la figura son equiláteros. Esto evidencia que el estudiante no comprende que es la demostración del teorema, dándose cuenta de aquello cuando se detiene a leer el primer párrafo de esta.

Luego de la conversación que establecen los estudiantes, el profesor interviene explicándoles que no es un ejercicio, sino que es la demostración del teorema. Posteriormente, Esteban comienza la lectura de la demostración tratando de explicar las justificaciones que se dan en esta, apoyado en algunos momento por su compañero.

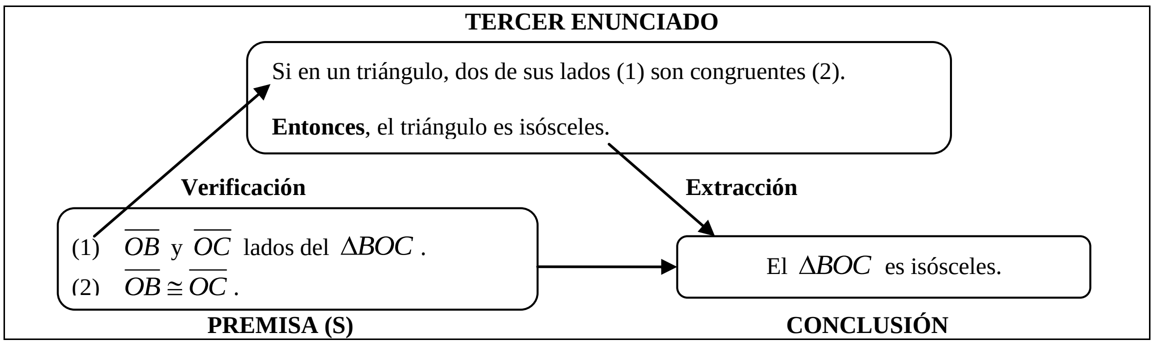
Al leer la hipótesis, estos van identificando en la figura los objetos geométricos a los que se refiere el texto, al preguntarles, ¿qué quiere decir esta?, sostienen:

Profesor:	-	*Ya. ¿Qué quiere decir con eso?*
Esteban:	-	*¿Mm...?*
Profesor:	-	*¿Qué OA sea congruente a OC y a OB?*
Esteban:	-	*Que miden lo mismo.*
Profesor:	-	*Ya.*
Esteban:	-	*Por lo tanto es un triángulo isósceles* (tachando los lados congruentes del triángulo AOC)
Profesor:	-	*¿Cuáles son los triángulos isósceles?*
Esteban:	-	*Los que tienen dos lados iguales y uno... distinto.*

El estudiante comprende el concepto de congruencia, entendiendo la hipótesis de la demostración, además este afirma que se forman triángulos isósceles en la figura. La justificación que da el alumno para concluir que los triángulos son isósceles se sustenta en dos pasos de razonamiento (Esquema 5.2)



(a) *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado por uno de los estudiantes para justificar que el triángulo AOC es Isósceles.*



(b) *Paso de razonamiento de tipo Modus Ponens realizado por uno de los estudiantes para justificar que el triángulo BOC es Isósceles.*

Esquema 5.2

Luego, su compañero, tratando de complementar la idea del alumno. Manifiesta claramente una confusión de notación al llamar los lados del triángulo isósceles como catetos e hipotenusa:

Marcos: - *cateto* (señalando en la figura al lado OA del triángulo OAC)
cateto (señalando en la figura al lado OC del triángulo OAC)
hipotenusa (señalando en la figura al lado AC del triángulo OAC)

Cuando leen la tesis en la demostración, estos identifican los objetos geométricos en la figura, señalando que los ángulos miden lo mismo. Uno de ellos sostiene:

Marcos: - *Ah, es lo mismo que... El inscrito con el del centro.*
Esteban: - *Si.*
Esteban: - *Pero si eso están explicando.*

Esto deja entrever que uno de los alumnos aun no comprende que es una demostración del teorema. Sin embargo, su compañero le aclara que le están explicando el teorema.

A continuación se expone el análisis de las argumentaciones que los alumnos sostienen al leer la secuencia de afirmaciones correspondientes a la demostración.

Para una mejor lectura, el análisis de la demostración se expondrá según las afirmaciones que esta contenga. Las cuales han sido detalladas y analizadas en el capítulo 4 correspondiente al Análisis de Textos. (Véase Capítulo 4, Texto Santillana, pág. 89)

Secuencia de Afirmaciones de la Demostración

Afirmación 1: *El* $\triangle OAC$ *es isósceles pues* $\overline{OA} \cong \overline{OC}$ *por hipótesis.*

$$\therefore \sphericalangle OAC \cong \sphericalangle OCA$$

Llamaremos a estos ángulos α.

Uno de los estudiantes, a medida que va leyendo la afirmación en el texto, va identificando los objetos geométricos en la figura. Sin dar una justificación de por qué los ángulos son congruentes. Cabe destacar que los estudiantes escriben en la figura la medida alfa en los ángulos basales del triángulo isósceles AOC.

Afirmación 2: *El* $\triangle OBC$ *es isósceles pues* $\overline{OB} \cong \overline{OC}$ *por hipótesis.*

$$\therefore \sphericalangle OBC \cong \sphericalangle OCB$$

Llamaremos a estos ángulos β.

Al igual que en la afirmación anterior, los alumnos no presentan dificultad para identificar en la figura los objetos geométricos que menciona el texto. Sin embargo, tampoco justifican por que los ángulos son congruentes. Estos escriben sobre la figura la medida beta en los ángulos basales del triángulo isósceles BOC.

Afirmación 3: $\sphericalangle AOD = 2\alpha$ *por ser ángulos exteriores en el triángulo* ΔOAC .

Afirmación 4: $\sphericalangle BOD = 2\beta$ *por ser ángulo exterior en el triángulo* ΔOBC .

Los estudiantes señalan en la figura los ángulos que miden 2α y 2β, cuando se les consulta, ¿por qué es dos alfa y dos beta? estos responden:

Esteban: - *Ahí sale, el ángulo AOD* (señala en la figura el ángulo AOD) es dos alfa por ser ángulo exterior del triángulo AO...

Esteban: - *Y. y si uno ve la otra figurita, esa la que teníamos denante* (refiriéndose a la figura del ejercicio anterior)

Esteban: - *Es como esta, como eso.* (señalando la figura de la ultima actividad que realizaron)

Esteban: - *Es lo mismo.*

Al leer los diálogos, se observa que uno de ellos se apoya en el texto para dar su respuesta, sin dar una justificación valida. Luego recurre a la figura de una de las actividades propuestas (Véase apéndice A: actividad 4 Texto Santillana) tratando de justificar con lo que se pretende demostrar, el teorema. Su compañero, también coincide en la respuesta al decir que es lo mismo. Refiriéndose a que el ángulo del centro es siempre el doble del inscrito.

Es importante destacar que por lo que afirman los estudiantes se puede concluir que estos no saben la propiedad de que la medida del ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de las medidas de los ángulos interiores no ad

Afirmación 4: *Es evidente que* $\sphericalangle AOB = 2\alpha + 2\beta$.

$$\therefore \sphericalangle AOB = 2(\alpha + \beta)$$

$$\sphericalangle AOB = 2\sphericalangle ACB$$

Al preguntarles si entienden ¿por qué? la medida del ángulo AOB es $2\alpha + 2\beta$, uno de ellos responde que sí. Sin dar una justificación que respalde su respuesta. Estos, explicitan que entre una línea y otra, hubo una factorización. Luego, en la línea final de la lectura, al consultarles, ¿por qué el $\sphericalangle AOB = 2\sphericalangle ACB$?, uno de ellos responde:

Esteban: - *Porque comparten el mismo arco.*

Nuevamente el estudiante deja entrever que justifica la afirmación utilizando el teorema que se pretende demostrar.

Observaciones

Los estudiantes no presentan dificultad en identificar en la figura los distintos objetos geométricos a los cuales hacen referencia las afirmaciones de la demostración. Sin embargo, estos no justifican tales afirmaciones. Llevan a cabo una lectura descriptiva. Además, estos no enlazan entre un paso y otro. Dicho de otra forma, leen una línea, la describen identificando en la figura lo que dice dicha línea pero no justifican las relaciones que se dan entre estas.

No comprenden lo que es una demostración, esto lo hacen ver, al inicio de la lectura y durante la lectura.

Justifican algunas afirmaciones utilizando el teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia, teorema que se está demostrando.

7.2.2 Par de estudiantes de rendimiento medio

El siguiente análisis corresponde a las demostraciones expuestas a los dos estudiantes que poseen un rendimiento medio en el subsector de matemática del establecimiento que utiliza el texto Santillana.

Lectura de la demostración del primer caso del teorema

"El centro de la circunferencia se encuentra al interior de la región limitada por los lados del ángulo inscrito"

Al leer la hipótesis y la tesis, los estudiantes identifican sin problemas en la figura los objetos geométricos a los cuales hace referencia el texto. Luego, uno de ellos realiza el siguiente comentario refiriéndose a la tesis:

Felipe: - *Y, esta bien porque es el ángulo del centro y el ángulo inscrito.*

El alumno justifica la tesis en su comentario cuando asume que esta bien porque el teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia lo dice. Sin notar que la tesis es lo que se va a demostrar. Pues este, la entiende como un hecho que ya es válido.

A continuación se expone el análisis de las argumentaciones que los alumnos sostienen al leer la secuencia de afirmaciones correspondientes a la demostración.

Para una mejor lectura, el análisis de la demostración se expondrá según las afirmaciones que esta contenga. Las cuales han sido detalladas y analizadas en el capítulo 4 correspondiente al Análisis de Textos. (Véase Capítulo 4, Texto Santillana, pág. 94)

Secuencia de Afirmaciones de la Demostración

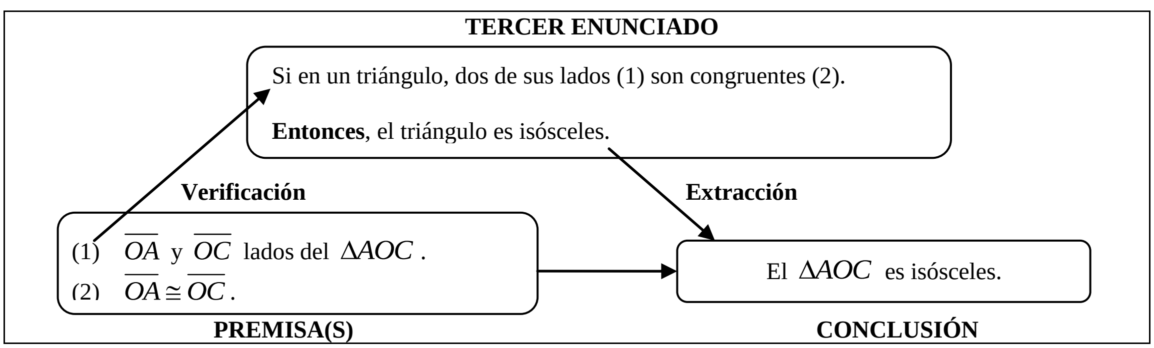
Afirmación 1: *El* $\triangle OAC$ *es isósceles pues* $\overline{OA} \cong \overline{OC}$ *por hipótesis.*

$$\therefore \measuredangle OAC \cong \measuredangle OCA$$

No presentan dificultad en reconocer en la figura los objetos geométricos que señala el texto, al preguntarles, ¿por qué el triángulo OAC es isósceles?, estos responden:

Felipe: - *Porque tiene los dos ángulos iguales.* (señalando en la figura los ángulos basales del triángulo AOC)
Diego: - *Si. porque como estos dos lados* (señalando en la figura los lados congruentes del triángulo AOC) *son iguales, obligatoriamente, gracias a esto, estos dos ángulos de aca* (señalando en la figura al ángulo OAC), *de aca* (señalando en la figura al ángulo OCA)
Felipe: - *Claro. tan trazados por dos líneas que son iguales.*

Estos justifican en forma correcta, al decir que tienen dos lados iguales, vale decir, que cuando uno de los alumnos justifica mencionando los ángulos del triángulo, señala en la figura los lados de este, da a entender que lo que quería decir era “lados” y no “ángulos”. Ambos estudiantes realizan un paso de razonamiento (Esquema 5.3) para concluir que el triángulo AOC es isósceles.



Esquema 5.3: *Paso de razonamiento de tipo Modus ponens realizado por uno de los estudiantes para justificar que el triángulo AOC es Isósceles.*

Afirmación 2: *El $\triangle OBC$ es isósceles pues $\overline{OB} \cong \overline{OC}$ por hipótesis.*

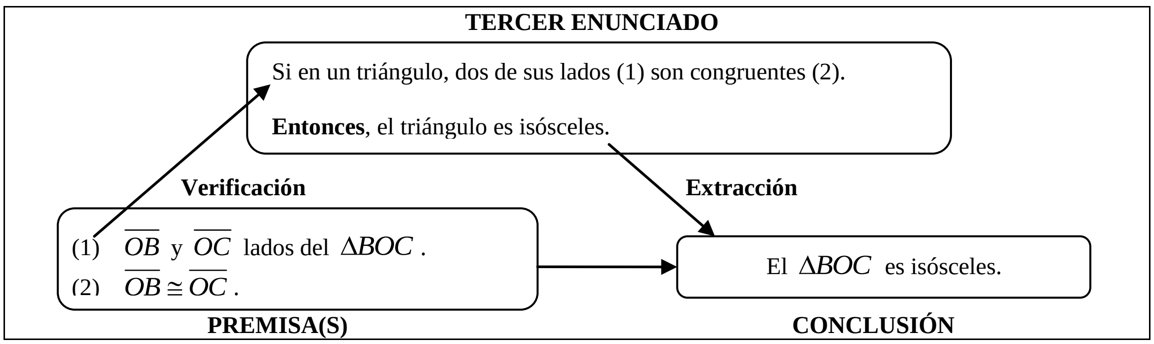
$$\therefore \measuredangle OBC \cong \measuredangle OCB$$

Llamaremos a estos ángulos β.

Al leer en el texto esta afirmación, uno de los estudiantes sostiene lo siguiente:

Diego: - *Es lo mismo que sale arriba, AOC es isósceles y AOB también.*

Esto evidencia que el alumno realiza un paso de razonamiento (Esquema 5.4), aunque no haya explicitado mediante una afirmación.



Esquema 5.4: *Paso de razonamiento de tipo modus ponens realizado por uno de los estudiantes para justificar que el triángulo BOC es Isósceles.*

Afirmación 3: $\sphericalangle AOD = 2\alpha$ *por ser ángulos exteriores en el triángulo* ΔOAC.

Los estudiantes no le prestan atención a esta línea en la lectura de la demostración.

Afirmación 4: $\sphericalangle BOD = 2\beta$ *por ser ángulo exterior en el triángulo* ΔOBC.

Los estudiantes no le prestan atención a esta línea en la lectura de la demostración.

Afirmación 4: *Es evidente que* $\sphericalangle AOB = 2\alpha + 2\beta$.

$$\therefore \sphericalangle AOB = 2(\alpha + \beta)$$

Cuando se les pregunta si entienden lo que están leyendo, refiriéndose a la última línea de la demostración. Estos no logran dar una respuesta inmediata, pues no comprenden la igualdad que presenta la demostración. Comienzan a identificar en la figura los ángulos alfa y beta. Además, no logran justificar de por qué los ángulos basales de los triángulos son iguales. Produciéndose el siguiente dialogo:

Felipe:	-	*Ya. Es que en el fondo son lo mismo porque OCA* (señalando en la figura al ángulo OCA) *y OAC* (señalando en la figura al ángulo OAC) *es lo mismo solo que dado vuelta pero en el fondo me esta explicando lo mismo.*
Felipe:	-	*Y ese seria alfa. Y beta seria...*
Diego:	-	*OBC y OCB. Lógica, porque dice lo mismo que arriba.* (refiriéndose a la afirmación que dice que los ángulos OAC y OCA son congruentes)
Felipe:	-	*Claro, los otros dos* (rayando sobre los lados de los triángulo OBC y OCB)

Uno de los alumnos logra identificar con un poco de dificultad en la figura los objetos geométricos que se refiere el texto, al no justificar de por qué los ángulos basales son congruentes, evidencian que no saben sobre la propiedad de ángulos basales del triángulo isósceles.

Posteriormente, uno de los alumnos afirma que entendió lo que dice la penúltima línea de la demostración, cuando se le pregunta ¿por qué el ángulo AOB es dos por alfa más beta?, este responde:

Felipe:	-	*Porque son iguales y me dan el resultado del ángulo... del ángulo inscrito* (marcando en la figura el ángulo inscrito).
Felipe:	-	*O sea, la suma de estos dos* (indicando en la demostración alfa mas beta) *me dan el ángulo inscrito.*
Felipe:	-	*Y el ángulo inscrito por dos vendría siendo el ángulo del centro.*
Felipe:	-	*Y ese vendría siendo el ángulo del centro que en el fondo es el ángulo AOB*
Felipe:	-	*Ya, y el otro me dice* (refiriéndose a la última línea de la demostración) *que AOB es dos ángulos de ACB.*
Felipe:	-	*ACB*, (señalando en la figura al ángulo ACB) *que vendría siendo el ángulo inscrito como dije antes. Vendría siendo.. dos veces ese ángulo es lo mismo que decir AOB. Que es el*

ángulo del centro.

De la respuesta del estudiante, se observa que este al leer la conclusión de la demostración la justifica con el mismo teorema.

Observaciones

Los estudiantes, en general, no presentan complicaciones para identificar los objetos geométricos a los que se refiere el texto, estos llevan una lectura descriptiva, Es decir, a medida que van leyendo, van indicando en la figura los objetos geométricos.

Los estudiantes ven cada afirmación como hechos aislados, no concluyen que una afirmación les permite obtener la afirmación siguiente. Dicho de otra forma, no enlazan las afirmaciones.

Estos justifican algunas afirmaciones utilizando la tesis de la demostración, el teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia. Solo ven la demostración como una lectura en la cual deben explicar los pasos si es que pueden, no entienden que es la generalización del teorema.

Cabe hacer notar, que en la lectura, estos se saltan algunas afirmaciones, no prestándoles atención.

8. Conclusiones

La forma de razonamiento presente en los desarrollos de las demostraciones que exponen los textos escolares corresponde a pasos de razonamiento por deducción con estatus teórico con tercer enunciado (Modus ponens en adelante). La cantidad de pasos de razonamiento presentes es similar para todos los textos. Todos los textos estudiados descomponen la demostración del teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia en casos. Tres de ellos presentan nueve pasos de razonamiento en el desarrollo de la demostración del primer caso del teorema. Siendo el texto Mare Nostrum el que presenta sólo seis pasos de razonamiento.

Dos de los textos realizan la misma versión en la exposición de la demostración correspondiente al primer caso del teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia, los textos Santillana y Santillana: Edición Especial para el Ministerio de Educación. Además, en ambos textos, para la demostración del primer caso, el desarrollo lo hacen realizando dos demostraciones en paralelo y omitiendo afirmaciones, dando dos o tres pasos en uno. Por otra parte, el texto Mare Nostrum, da una justificación a cada una de las afirmaciones que componen el desarrollo de la demostración. Pero aun así, omite pasos en su desarrollo.

Los únicos textos que exponen demostración del segundo caso son ambas ediciones Santillana. Al igual que en el primer caso, las demostraciones expuestas son las mismas para ambos. En estas se han identificado seis pasos de razonamientos modus ponens. Sin embargo el texto Mare Nostrum la plantea la demostración del segundo caso como tarea para el estudiante.

Hay que hacer notar que el texto Ediciones SM es el único que no propone una actividad exploratoria previa a la lectura de la demostración. Los demás textos plantean al estudiante una actividad previa a la demostración con la finalidad de que estos conjeturen la relación que se da entre el ángulo inscrito y del centro de una circunferencia. Además, la actividad exploratoria que propone el texto Mare Nostrum, se enmarca en la resolución de un problema contextualizado.

Es importante mencionar que todos los textos presentan una confusión de notación, estos identifican objetos geométricos con sus medidas. Este hecho es recurrente al identificar los ángulos de la circunferencia con sus medidas.

El tipo de razonamiento presente en las actividades propuestas de todos los textos escolares analizados en la investigación es del tipo modus ponens. En los ejercicios que estos proponen no se ve una organización según la cantidad de pasos de razonamiento que el estudiante requiera realizar en su desarrollo, ya que si uno de estos involucra un número determinado de pasos de razonamiento, el siguiente puede contener más o menos cantidad de pasos de razonamiento.

Las actividades del texto Santillana: Edición Especial para el Ministerio de Educación, en su mayoría son de aplicación directa del teorema del ángulo inscrito y del centro de la circunferencia, pues 10 de 12 actividades involucran uno o dos pasos de razonamientos en su desarrollo. Además, solamente cuatro actividades involucran conocimientos específicos, es decir, el estudiante requiere dominar conceptos vistos en cursos anteriores para resolver la actividad. Cabe destacar que se observo en todos los textos escolares analizados en la investigación que aquellas actividades que requieren de conocimientos específicos por parte del estudiante son la que involucran más cantidad de pasos de razonamiento en su desarrollo.

El texto Santillana es el único texto que organiza las actividades propuestas según el caso del teorema. Vale decir, que dicha organización no le permite al estudiante distinguir cual es el caso del teorema que debe aplicar para resolver una actividad ya que este sabe antes de leer el enunciado el caso del teorema que debe aplicar. El texto propone 26 ejercicios en total.

Por otra parte los textos Ediciones SM y Mare Nostrum presentan las actividades con mayor cantidad de pasos de razonamientos. En el primero, ocho de diez actividades, involucran más de dos pasos de razonamiento en su desarrollo, y solamente en seis de los diez ejercicios se requiere utilizar el teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia para ser resueltos, abarcando que el estudiante aplique los tres casos del teorema en el desarrollo de estos. Respecto a las actividades que propone el texto Mare Nostrum, todas están relacionadas con el teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia.

Solamente dos de los textos proponen tareas de demostración al estudiante, Santillana propone 5 actividades dentro de las cuales se encuentra el tercer caso del teorema y el texto Mare Nostrum deja como tarea para el estudiante las demostraciones de los casos dos y tres del teorema. Por otra parte los textos Santillana: Edición Especial para el Ministerio de Educación y Ediciones SM no plantean demostraciones como actividades propuestas a los estudiantes.

Cabe destacar que tres de los textos analizados presentan un error conceptual al señalar la longitud de un arco de circunferencia en grados, esto en el contexto de los mismos se refiere a la proporcionalidad existente entre la medida del ángulo del centro y la longitud del arco que subtiende. El texto Mare Nostrum es el único que no comete el error mencionado anteriormente.

Referente al estudio de las producciones de los estudiantes de las actividades propuestas, las cuales fueron extraídas de los textos que ellos usan, se observo en los alumnos que aplican el teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia en forma correcta, cuando en la figura se pueden identificar claramente las premisas necesarias para utilizar un tercer enunciado. Dado lo anterior, se refleja que los estudiantes solamente realizan deducciones de carácter algorítmico según señala Duval (2004). Caso contrario, es cuando las premisas no se pueden identificar en forma inmediata. Sobre todo cuando se requiere de un manejo de ciertos conocimientos específicos por parte del estudiante. Además, en ocasiones, no explicitan toda la información que justifica las afirmaciones que estos dan durante el desarrollo de la actividad. Dicho de otra forma, solamente dicen la conclusión del paso de razonamiento, lo que algunas veces causa la interrogante si verdaderamente están razonando.

Cuando al grupo de estudiantes que usa el texto Santillana se les propuso como actividad la demostración del tercer caso del teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia, la pareja que presentaba rendimiento medio justifico la relación aplicando el mismo teorema a demostrar. En cambio la pareja de buen rendimiento, les dio valores arbitrarios a las variables que representan las medidas de los ángulos, realizando únicamente una comprobación. Lo anterior evidencia que los estudiantes no logran diferenciar entre el valor epistémico semántico del teórico de la proposición, lo que conlleva a que consideren siempre como verdadera la proposición que se les solicita que demuestren. Esto se podría atribuir a que por lo general los docentes no proponen validar o estudiar la validez de alguna proposición falsa.

Hay que hacer notar, que en reiteradas ocasiones los estudiantes se dejan llevar por la forma de la figura. No ven esta como una representación de un objeto genérico, sino mas bien, se guían por lo que parece, pues estos argumentaban algunas de sus respuestas diciendo: se ve como, parece un; en vez de considerar las propiedades que puedan tener los elementos geométricos que la componen.

Se observo en el grupo de alumnos que usa el texto Santillana: Edición Especial para el Ministerio de Educación, que omiten la lectura del enunciado de las actividades y sólo se dedican a buscar valores a las variables que representan la medida de algún ángulo presente en la figura. Tal hecho se evidencia, por ejemplo, cuando un alumno al comenzar a resolver la actividad y escribir sobre la figura la información que le es entregada en el enunciado, su compañero le consulta de donde saco tales datos y este le hace ver que lo que ha hecho lo dice el enunciado.

Es importante resaltar que la escasez de conocimientos previos necesarios de los estudiantes, tanto para comprender la lectura de las demostraciones expuestas como para desarrollar las actividades propuestas se vio reflejado en todos los estudiantes participes en la investigación, ejemplo de lo anterior se observó cuando los estudiantes no sabían lo que es un triángulo. También se observo en los alumnos el mismo error conceptual en que caen tres de los textos, al medir la longitud de un arco en grados, junto con la confusión de notación al identificar los ángulos (objetos geométricos) con sus medidas. Tales hechos son consecuencia directa de los errores conceptuales y de notación que el texto maneja en el tratamiento de la unidad.

También se evidenció en ambos grupos de estudiantes a los cuales se les propuso actividades extraídas de los textos escolares que ellos usan en clases, que a medida que avanzaban en el desarrollo de las actividades, mayor dificultad les encontraban. Recordando que dichas actividades se les presentaron organizadas en forma ascendente según la cantidad de pasos de razonamientos. Por lo mismo, según lo observado en el análisis de textos escolares, al no estar organizadas las actividades propuestas según la cantidad de pasos de razonamientos puede conducir a los estudiantes a que se salten aquellas actividades que requieren más cantidad de pasos de razonamiento, centrándose solamente en las que son capaces de hacer en forma inmediata y que involucran uno o dos pasos de razonamiento, los cuales generalmente son de carácter algorítmico.

En definitiva, los textos que más propician el desarrollo de razonamientos algorítmicos son el texto Santillana y Santillana: Edición Especial para el Ministerio de Educación, pues estos proponen actividades, que en su mayoría son de aplicación directa del teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia, las que involucran dos o tres pasos de razonamientos. Sin embargo, el texto Santillana propone 6 demostraciones en las actividades propuestas. Caso contrario son los textos Ediciones SM y Mare Nostrum. Donde cada uno propone diez actividades de las cuales la mayoría involucran mas de dos pasos de razonamientos en sus desarrollos.

Respecto a la comprensión de los estudiantes en la lectura de las demostraciones expuestas por los textos, no se observaron diferencias notorias entre los alumnos que utilizan el texto Santillana Edición Especial para el Ministerio de Educación con aquellos que usan el texto Santillana.

Se observo en los estudiantes que la lectura la siguen en forma descriptiva. Es decir, estos no presentan dificultades en identificar en la figura los elementos geométricos que mencionan las afirmaciones de la demostración. Pero no comprenden la relación que se da entre tales elementos. Además, consideran las afirmaciones de estas como hechos aislados, pues no logran comprender que una afirmación lleva a la otra. Al no enlazar la secuencia de pasos lógicos que expone la demostración se evidencia que en la lectura de estas los alumnos no manifiestan la habilidad de razonar deductivamente. Lo que supone una escaza y a veces nula comprensión de la demostración por parte de estos. Hecho que se agrava aun más cuando se omiten afirmaciones en la secuencia del desarrollo de una demostración, lo cual quedo en evidencia al analizar las demostraciones expuestas por ambos textos escolares de la editorial Santillana.

Por otra parte, en la lectura de la demostración del segundo caso de teorema, los alumnos que utilizan el texto Santillana: Edición Espacial para el Ministerio de Educación, presentaron dificultades para identificar en la figura los objetos geométricos que mencionan las afirmaciones. Lo que conllevo a una nula comprensión de la demostración.

Durante la lectura se observo en forma recurrente que los alumnos justificaran algunas afirmaciones de la demostración utilizando el Teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia. Lo que evidencia que estos no entienden el sentido de demostrar. Pues no comprenden que la demostración es una validación de carácter universal a lo que ellos llaman regla, cuando se refieren al teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia. Además, uno de los factores que en ocasiones no les permitió a los estudiantes comprender las afirmaciones que presenta el desarrollo de las demostraciones, es la falta de conocimientos previos necesarios para la comprensión de estas. Pues estos no saben lo que es un triángulo isósceles o que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es siempre 180º.

Además, queda de manifiesto según lo observado en la indagación, que los alumnos no comprenden las demostraciones expuestas por los textos escolares ni tampoco son capaces de justificar las afirmaciones que dan cuando desarrollan las actividades propuestas en los textos usados por ellos.

En ambos grupos de estudiantes, surgió el comentario sobre las actividades que estaban realizando, pues estos sostuvieron que "*las habían trabajado en clases*". Tal hecho permite formular la interrogante sobre que es lo que sucede entre el texto escolar y el alumno, es decir, en la sala de clases, lugar gestionado por el profesor. Ya que si los estudiantes sostienen que realizaron las actividades en clases y un tiempo después estos no son capaces de resolverlas, refleja que estos no están desarrollando las habilidades de razonamiento matemático que propone el marco curricular. Entonces, seria de interés para el tema de investigación indagar en el quehacer pedagógico que el docente lleva a cabo en el aula. Para así dar respuesta al por qué los estudiantes no están desarrollando el razonamiento deductivo.

9. Referencias Bibliográficas

Baeza, A. García, M. Villena, M. (2005). *Educación Matemática - 2º Educación Media*. Santillana.

Bamón R. González, P. Soto, J. (s/f). *Matemática Activa 2º Medio*. Mare Nostrum.

Barreto J. (2008). Deducciones del Teorema de Pitágoras a lo largo de la historia como recurso didáctico en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática [Versión electrónica]. Número 69. Recuperado el 17 de Marzo de 2008, disponible en: http://www.sinewton.org/numeros/numeros/69/ideas_03.php

Crespo. C. (2005). El papel de las argumentaciones matemáticas en el discurso escolar. La estrategia de deducción por reducción al absurdo (Tesis de Maestra en Ciencias en Matemática Educativa, Instituto Politécnico Nacional). Consultado en Agosto, 05, 2010 en http://www.matedu.cicata.ipn.mx/tesis/maestria/crespo_2005.pdf

Duval, Raymond (2004). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Cali. Colombia: Universidad del Valle.

Mapas de Progreso del Aprendizaje. *Sector Matemática*. Gobierno de Chile. Ministerio de Educación.

Marco Curricular Matemática. Gobierno de Chile. Ministerio de Educación.

Martínez, M. Aguilar, M. López, V. Marchant, P. (2007). *Explorando - Matemática 2º Medio*. SM.

PISA (2006). *PISA 2006: Rendimientos de estudiantes de 15 años en Ciencias, Lectura y Matemática*, Ministerio de Educación. Chile

Real Academia Española (2010). Diccionario de la Lengua Española: Referencia Electrónica. Consultado 8 de Octubre, 2007 en http://www.rae.es/

Resultados Nacionales SIMCE 2008. Gobierno de Chile. Ministerio de Educación

Requerimientos Técnicos Textos Escolares 2012. Gobierno de Chile. Ministerio de Educación

Resultados para docentes y directivos SIMCE 2008. Gobierno de Chile. Ministerio de Educación.

Torregrosa G. y Quesada H. (2007). Coordinación de los proceso cognitivos en geometría. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Vol. 10, (2), pp. 275-300. México.

Zañartu, M. Darrigrandi, F. Ramos, M. (2010). *Matemática - 2º Educación Media* (Edición Especial para el Ministerio de Educación). Santillana.

APÉNDICE A:

Cuestionario de actividades propuestas a los estudiantes.

Contenidos **Pág.**

1. Actividades propuestas al grupo de estudiantes que usa el texto Santillana: Edición Especial para el Ministerio de Educación . . 3

Resumen 3
Actividad 1. 4
Actividad 2. 4
Actividad 3. 5
Actividad 4. 5

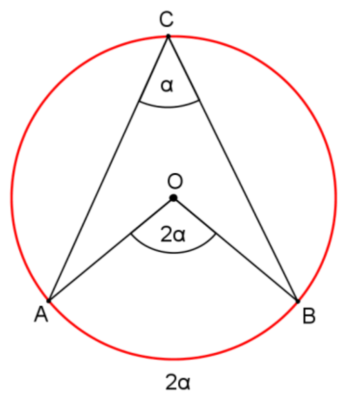
2. Actividades propuestas al grupo de estudiantes que usa el texto Santillana. 6

Resumen 6
Actividad 1. 6
Actividad 2. 7
Actividad 3. 7
Actividad 4. 8
Actividad 5. 8
Actividad 6. 9

1. Actividades propuestas al grupo de estudiantes que usa el texto Santillana: Edición Especial para el Ministerio de Educación

Resumen

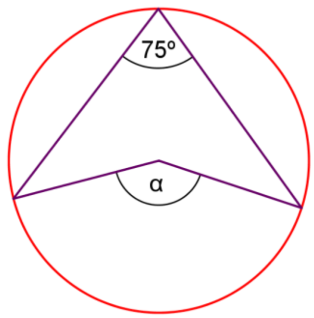
- Si un ángulo del centro y un ángulo inscrito subtienden el mismo arco de circunferencia, la medida del ángulo inscrito es la mitad de la medida del ángulo del centro.



- No depende de las medidas de otros ángulos.
- Esto se cumple tanto si el centro de la circunferencia está dentro o fuera del ángulo inscrito.
- Todo ángulo inscrito en una semicircunferencia es un ángulo recto.

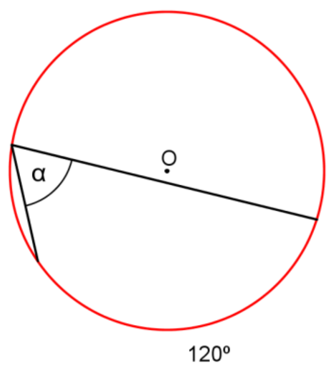
Actividad 1

Calcular el valor del ángulo pedido.



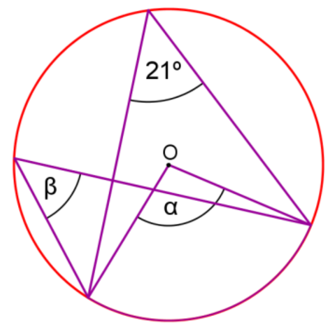
Actividad 2

Calcular el valor del ángulo pedido.



Actividad 3

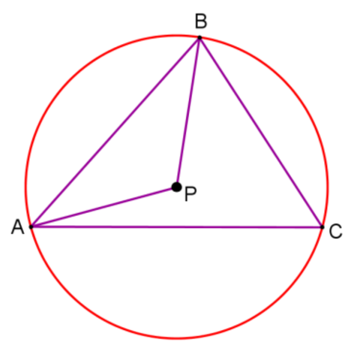
Calcular el valor del ángulo pedido.



Actividad 4

En la figura, AC es un arco de circunferencia de centro P, donde $\sphericalangle ACB = 45º$.

Determina qué tipo de triángulo es el $\triangle APB$.

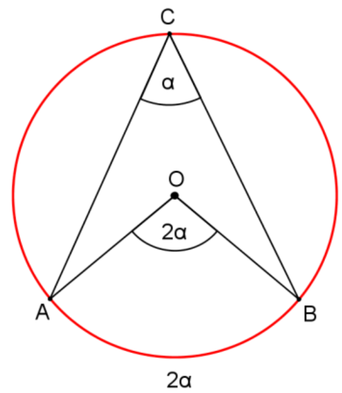


2. Actividades propuestas al grupo de estudiantes que usa el texto Santillana

Resumen

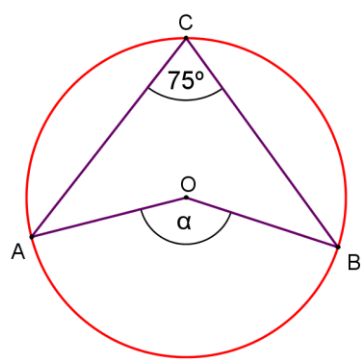
En toda circunferencia el ángulo del centro es el doble del ángulo inscrito que subtiende al mismo arco.

$\alpha =$ ángulo inscrito



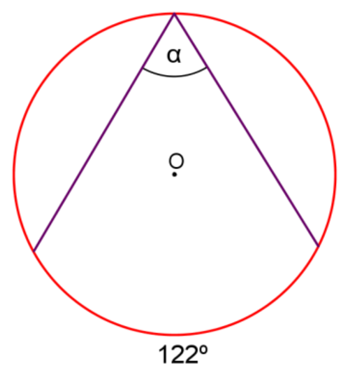
Actividad 1

Calcular la medida de α en la siguiente figura.



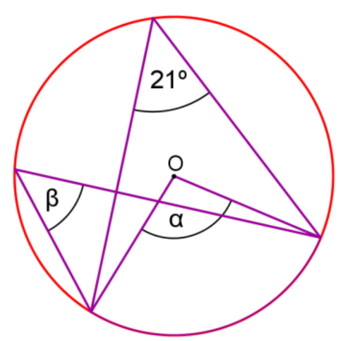
Actividad 2

Calcular la medida de α en la siguiente figura.



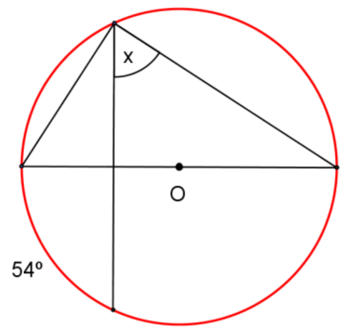
Actividad 3

Calcular la medida de α en la siguiente figura.



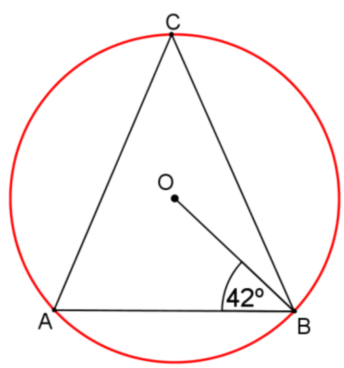
Actividad 4

Calcula la medida de los elementos pedidos en cada una de estas figuras.



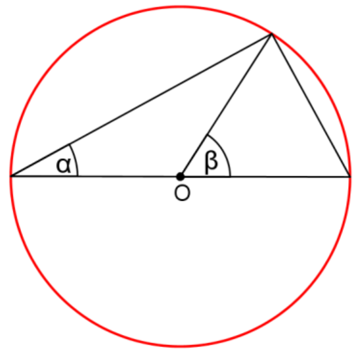
Actividad 5

Calcula la medida del ángulo inscrito ACB en la siguiente figura.



Actividad 6

Demuestra que en el caso de la figura, que $\beta = 2\alpha$.



APÉNDICE B:

Diálogos de las producciones del cuestionario de actividades propuestas a los estudiantes.

Contenidos **Pág.**

1. **Diálogos de las producciones del grupo de estudiantes que usa el texto Santillana: Edición Especial para el Ministerio de Educación** 3

   1.1 Diálogos de las producciones del par de estudiantes de buen rendimiento 3

   1.2 Diálogos de las producciones del par de estudiantes de rendimiento medio 7

2. **Diálogos de las producciones del grupo de estudiantes que usa el texto Santillana** 11

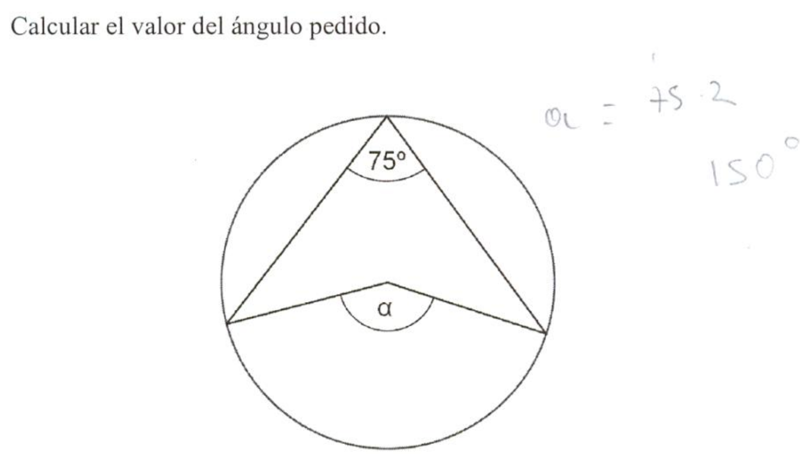
   2.1 Diálogos de las producciones del par de estudiantes de buen rendimiento 11

   2.2 Diálogos de las producciones del par de estudiantes de rendimiento medio 22

1. Diálogos de las producciones del grupo de estudiantes que usa el texto Santillana: Edición Especial para el Ministerio de Educación

1.1 Diálogos de las producciones del par de estudiantes de buen rendimiento

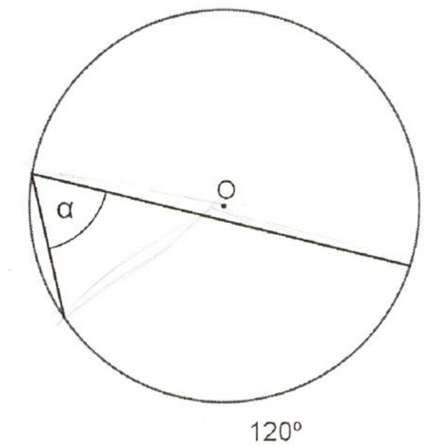
Actividad 1



ALUMNA	DIALOGO
Camila:	- *A es igual a 75 por 2.*
Sofía:	- *75 por dos.*
Camila:	- *Serian 10.*
Ambas:	- *Siete por dos, catorce*
Ambas:	- *Quince*
Ambas:	- *Serian*
Profesor:	- *¿Por que 75 por dos?*
Camila:	- *Porque el ángulo del centro*
Ambas:	- *Mide el doble del inscrito*
Profesor:	- *¿Solo por eso?*
Camila:	- *Si*
Sofía:	- *Si*
Ambas:	- *Risas*

Actividad 2

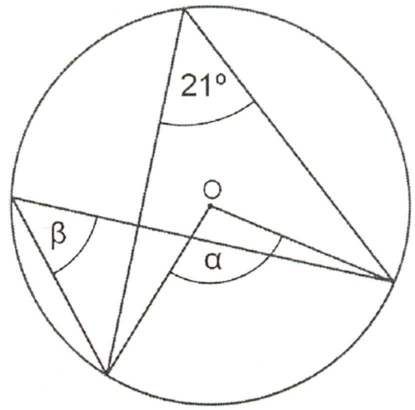
Calcular el valor del ángulo pedido.



ALUMNA	DIALOGO
Profesor:	- *Comiencen no mas, no se preocupen.*
Sofía:	- Escribe en la hoja que alfa es igual a 60.
Camila:	- *No hay ángulo inscrito*
Camila:	- *Porque este no pasa por el centro* (señalando en la figura al ángulo inscrito)
Profesor:	- *¿Por qué mide 60º?*
Sofía:	- *Es inscrito*
Camila:	- *No, porque no pasa por el centro.*
Sofía:	- *Ahh.* (aceptando lo que dice Camila y borrando lo que había escrito en la hoja)
Sofía:	- *El ángulo del centro mide 180 acá* (indicando en la figura un arco, desde el vértice del ángulo inscrito hasta el extremo de lado mayor en sentido horario)
Profesor:	- ¿Y se podría formar un ángulo del centro.?
Sofía:	- *Igual, si lo formáramos así* (trazando segmentos desde los extremos de los lados del ángulo inscrito hacia el centro de la circunferencia, formando un ángulo del centro)
Profesor:	- *Lo puede hacer*
Sofía:	- *Ahí si se ve.*
Sofía:	- *Mide 60.*
Camila:	- *Entonces el inscrito pasaría por acá* (señalando el lado de mayor longitud del ángulo inscrito)
Sofía:	- *No, pero están subtendiendo.. e.. subtiende el mismo arco, ese es el punto* (señalando en la figura al ángulo del centro)
Sofía:	- *Entonces seria 60, porque es la mitad del centro.*
Profesor:	- *Pasen al siguiente.*

Actividad 3

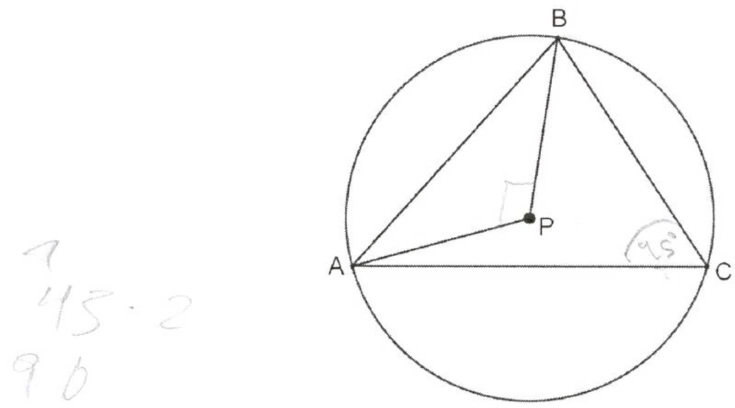
Calcular el valor del ángulo pedido.



ALUMNA	DIALOGO
Sofía:	- *La mitad, este* (Señalando en la figura a beta). La alumna quiere decir que beta es la mitad de alfa.
Camila:	- *Este mide 21 también.* (Señalando en la figura a beta)
Sofía:	- *Este mide 21* (señalando en la figura a beta) *y este mide el doble.* (Señalando en la figura a alfa)
Profesor:	- *¿Por qué mide 21?*
Camila:	- *Porque tienen el mismo arco*
Sofía:	- *Porque los subtiende el mismo arco y son los dos inscritos.* (Señalando en la figura al ángulo de 21º y al ángulo beta)
Camila:	- *ya…*
Sofía:	- *Y este es el doble, 42* (Camila señala en la figura al ángulo de 21º)
Ambas::	- *Comienzan a escribir los resultados de la hoja. Ambas alumnas escriben las respuestas alfa =42 y beta= 21.*

Actividad 4

En la figura, AC es un arco de circunferencia de centro P, donde $\sphericalangle ACB = 45^{\circ}$.
Determina qué tipo de triángulo es el ΔAPB.



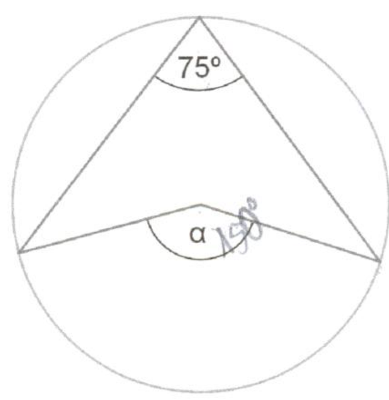
ALUMNA	DIALOGO
Ambas:	- *Sofía y Camila leen el enunciado.*
Camila:	- *Este vale 45.* (Señalando en la figura al ángulo ACB)
Sofía:	- *A… C... B.* (Señalado en la figura al ángulo ACB, reafirmando lo que dice Camila)
Camila:	- *Este* (marcando el ángulo ACB de la figura)
Sofía:	- *Si.*
Ambas:	- *¿Qué tipo de triángulo es APB?* (Sofía señala la figura mientras habla)
Sofía:	- *Es 45 por do son….*
Camila:	- *¿Qué tipo de triángulo?*
Camila:	- *Es isósceles.*
Sofía:	- *No, es rectángulo porque 45 y 45, es 90. Y si un ángulo mide 90.*
Camila:	- *A de veras.*
Sofía:	- *Tiene que ser rectángulo.*
Profesor:	- *Entonces qué tipo de triángulo es.*
Camila:	- *¿Pero que triángulo, de ángulo o de lado?* (Camila se refiere a la clasificación de los triángulo)
Profesor:	- *¿Puede ser de las dos?*
Sofía:	- *Es un rectángulo.*
Camila:	- *Es un isósceles.*
Sofía:	- *No, porque el triángulo rectángulo es el que tiene un ángulo de 90 grados.*
Profesor:	- *¿Y el triángulo isósceles?*
Sofía:	- *Dos lados miden lo mismo*
Profesor:	- *¿Y se da eso ahí?*
Sofía:	- *Si.*

Camila:	-	*¿Donde se da qué?*
Profesor:	-	*¿Qué tenga dos lados iguales?*
Camila:	-	*Esos son iguales ¿O no?* (Señalando los segmentos AP y PB de la figura)
Camila:	-	*Yo los veo iguales.*
Sofía:	-	*No parece rectángulo pero se supone que es.*
Camila:	-	*Ah no, entonces, ¿qué es?*
Sofía:	-	*Rectángulo.*
Camila:	-	*Escaleno*
Sofía:	-	*No, escaleno son todos los lados distintos.*
Camila:	-	*Mm...*
Sofía:	-	*Todos los ángulos distintos.*
Profesor:	-	*¿Y el rectángulo cuándo es así?*
Sofía:	-	*El rectángulo cuando tiene tod... Un lado de 90 grados es rectángulo.*
Profesor:	-	*¿Un lado de 90 grados?*
Sofía:	-	*Un ángulo de 90 grados.*
Profesor:	-	*¿Y donde estaría el ángulo de 90 grados?*
Sofía:	-	*Aquí.* (Marcando el ángulo APB como un ángulo de 90 grados)

1.2 Diálogos de las producciones del par de estudiantes de rendimiento medio

Actividad 1

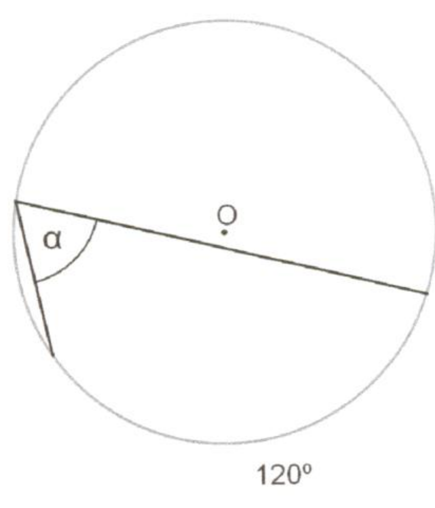
Calcular el valor del ángulo pedido.



ALUMNA	DIALOGO
Paloma:	- *Ósea ese* (señalando al ángulo de 75º)
Francisca:	- *75.*
Ambas:	- *Es la mitad de ese* (señalando al ángulo alfa)
Francisca:	- *¿O no?*
Paloma:	- *Sipo, ese* (señalando al ángulo 75º) *es la mitad de ese* (señalando al ángulo alfa)
Profesor:	- *¿Y por qué es la mitad de ese?*
Paloma:	- *Porque...*
Francisca:	- *Porque se supone que este.* (Señalando al ángulo de 75º)
Paloma:	- *Sipo.*
Ambas:	- *Risas.*
Paloma:	- *Ya. Porque se supone que si el ángulo del centro y el ángulo inscrito subtienden el mismo arco, que seria ese* (Señalando al arco que subtienden ambos ángulos)
Paloma:	- *Ese* (indicando en la figura al ángulo del centro alfa) *seria lo mismo que el arco* (indicando en la figura al arco que subtiende) *y ese* (indicando al arco) *seria la mitad de ese* (indicando al ángulo inscrito de 75º) *que es el doble de ese* (señalando al ángulo alfa)
Profesor:	- *Ya. ¿Y cuánto valdría alfa?*
Paloma:	- *150... era ¿cierto?*
Paloma:	- *150*
Profesor:	- *Escríbalo*
Paloma:	- Escribe el valor de alfa sobre la figura.
Paloma:	- *Entonces, eso.*
Profesor:	- *Siguiente.*

Actividad 2

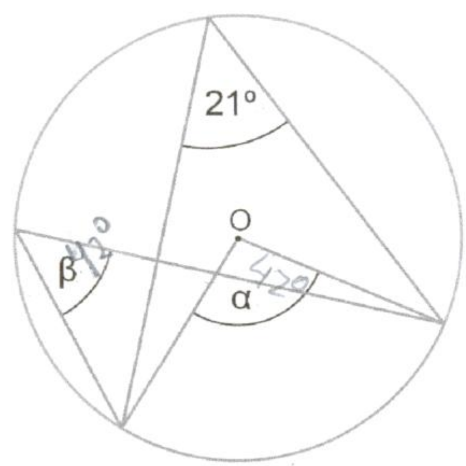
Calcular el valor del ángulo pedido.



ALUMNA	DIALOGO
Francisca:	- Lee el enunciado en voz alta
Francisca:	- *Se supone que...* (Posa el lápiz sobre la figura tratando de buscar el ángulo del centro)
Ambas:	- Las dos alumnas mueven la cabeza dando a entender que no saben como hacerlo
Francisca:	- *No, yo no se como hacer ese.*
Profesor:	- *Si no pueden pasen al siguiente.*

Actividad 3

Calcular el valor del ángulo pedido.

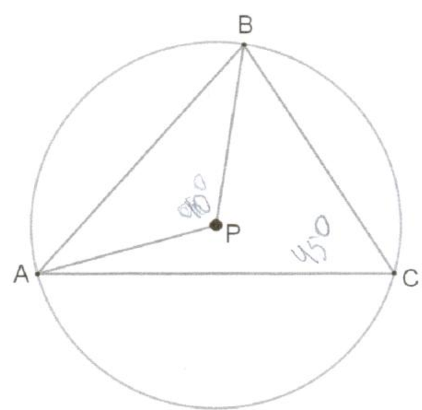


ALUMNA	DIALOGO
Paloma:	- *Ya. Ese* (indicando en la figura al ángulo de 21º) *es la mitad de ese* (indicando en la figura al ángulo del centro alfa) *y ese* (indicando en la figura al ángulo alfa) *es lo mismo que ese* (indicando en la figura al ángulo beta)
Paloma:	- *Seria cuarenta y dos* (indicando al ángulo alfa) *y…*
Ambas:	- *42* (señalando en la figura al ángulo beta)
Paloma:	- Escribe sobre la figura que beta vale 42.
Francisca:	- *¿Allá también o no?* (indicando en la figura al ángulo del centro alfa, queriendo decir que también debiese valer 42)
Profesor:	- ¿Por que el beta vale 42?
Paloma:	- Borra el 42 escrito sobre la figura en el ángulo beta y lo vuelve a escribir
Paloma:	- *Porque se supone que el beta vendría midiendo lo mismo que alfa porque comparten el mismo arco.*
Francisca:	- *Se supone que este es el arco.* (señalando en la figura al arco

	que subtienden lo ángulos)
Paloma:	- *Si.*
Profesor:	- *¿Y el alfa por que mide 42?*
Paloma:	- *El alfa es el doble de 21 porque alfa es el ángulo del centro.*
Profesor:	- *Ya.*
Paloma:	- *Y si el arco de alfa es 42, que se supone que se sacaría por lógica, porque el 21 seria la mitad del alfa* (señalando en la figura al ángulo alfa) *y el alfa seria lo mismo que el arco.* (Señalando en la figura al arco que subtiende el ángulo del centro alfa)
Profesor:	- *Entonces, ¿El beta mediría 42 también?*
Ambas:	- *Si*
Profesor:	- *¿Por que beta mediría 42?*
Ambas:	- *Por que tiene el mismo arco que alfa.*

Actividad 4

En la figura, AC es un arco de circunferencia de centro P, donde $\sphericalangle ACB = 45^{\circ}$.
Determina qué tipo de triángulo es el ΔAPB.



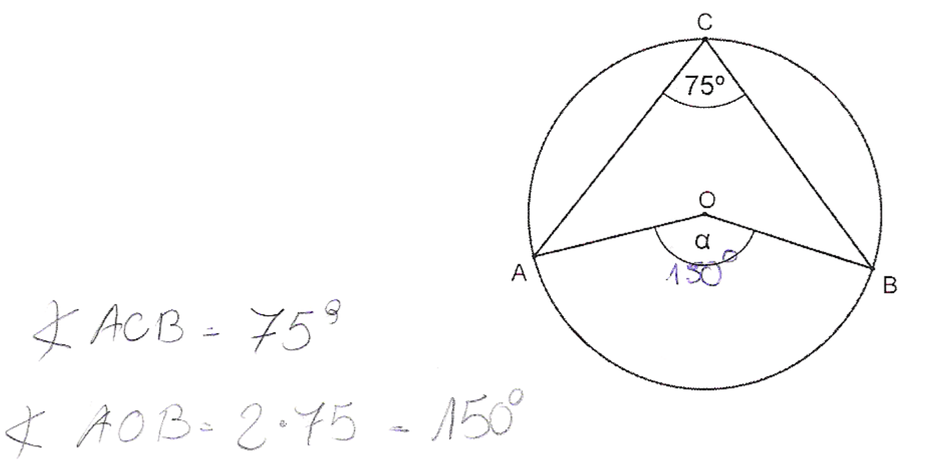
ALUMNA	DIALOGO
Paloma:	- *Ese es igual a 45. Escribe sobre la figura la medida del ángulo ACB.* (Información dada en el enunciado)
Paloma:	- Lee en voz alta: *Determine que tipo de triángulo es el APB.* - (Señala en la figura al triángulo APB)
Paloma:	- Escribe en la figura que la medida del ángulo APB es 90º.
Paloma:	- *Mm... Que tipo de triángulo.*
Paloma:	- *Me pillaste..*
Profesor:	- *¿Que tipo de triángulo seria el triángulo APB?*
Profesor:	- *¿Qué tipos de triángulos conocen?*
Paloma:	- *Isósceles, escaleno y equilátero.*

2. Diálogos de las producciones del grupo de estudiantes que usa el texto Santillana

2.1 Diálogos de las producciones del par de estudiantes de buen rendimiento

Actividad 1

Calcular la medida de α en la siguiente figura.

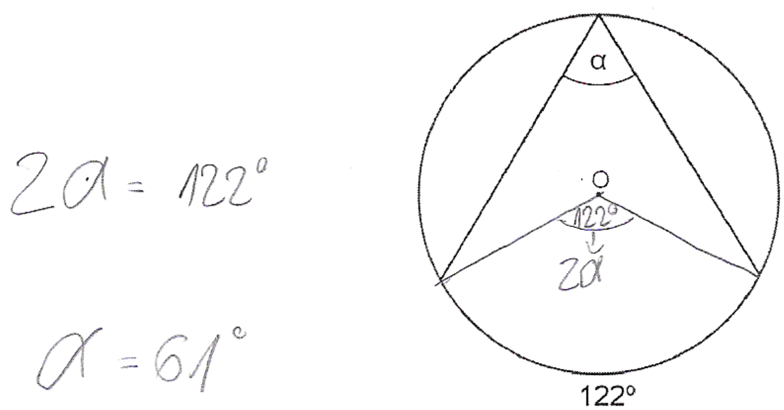


ALUMNO	DIALOGO
Esteban:	- Escribe sobre la figura que alfa mide 150º
Marcos:	- *El ángulo del centro siempre es el doble del ángulo inscrito.* (Apoyando lo que ha hecho su compañero)
Esteban:	- *Esa es la explicación…*
Marcos:	- *Ya, ahora en palabras, ¿o no?* (Le pregunta al profesor si lo debe escribir en la hoja)
Esteban:	- *Hay que explicarlo en palabras, ¿o no?* (Le pregunta al profesor si lo debe escribir en la hoja)
Esteban:	- *Lo ponemos en palabras o así nomas.* (Le pregunta al profesor si lo debe escribir en la hoja)
Profesor:	- *Si.*
Marcos:	- *Aplicamos el teorema, ¿o no?* (Le pregunta a su compañero)
Esteban:	- *Si.*
Marcos:	- Escribe sobre la hoja los procedimientos para determinar la medida de alfa
Esteban:	- *Podi explicar de otra forma, pero es como mas largo.*
Marcos:	- *Si eso es nomas po.*

Esteban:	- *De esa distancia de ahí* (señalando en la figura el radio OA), *es la misma que esa distancia de acá.* (señalando en la figura el radio OB)
Esteban:	- *Porque la parti por la mitad ahí* (señalando el centro de la circunferencia y el radio OA)*... por la mitad y el otro por la mitad* (señalando el radio OB).
Marcos:	- *Ha, la distancia del punto A al punto B.*
Esteban:	- Y ese (señalando en la figura el radio OA), ese (señalando en la figura el radio OB), ese (señalando en la figura el ángulo inscrito)... *Y la suma te da ciento cincuenta.* (refiriéndose a 150)

Actividad 2

Calcular la medida de α en la siguiente figura.

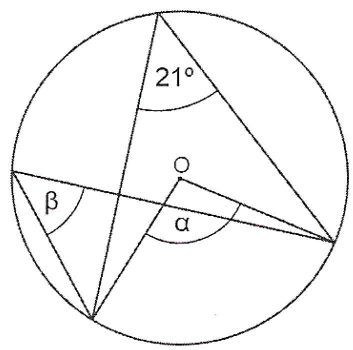


ALUMNO	DIALOGO
Marcos:	- *Agregamos una línea ahí y otro ahí* (Señalando en la figura que se deben trazar dos radios para formar el ángulo del centro que subtiende el arco de 122º).
Marcos:	- *Ha, ese ángulo* (señalando en la figura el ángulo del centro) *es el doble de ese.* (señalando en la figura el ángulo inscrito).
Marcos:	- *Ese* (señalando en la figura el ángulo inscrito) *mide 61.*
Esteban:	- *Ese es "a" medios* (señalan en la figura el ángulo inscrito), ósea, 122.
Esteban:	- *Ya.*
Esteban:	- *Y "a".*
Marcos:	- *61.*
Esteban:	- *es la mitad de 122.*
Esteban:	- *Así que "a"* (refiriéndose a la medida del ángulo alfa) *es igual a 122 partido en dos.*
Esteban:	- 61, ¿cuánto me dijiste?, ¿61?.

Marcos:	- *Pero pone dos "a" igual 61, entonces ahí pasai el dos abajo y… O sea.*
Esteban:	- Escribe sobre la hoja 2a =.
Esteban:	- *Este es igual a 122.*(señalando en la hoja lo que había escrito)
Marcos:	- *Por eso po, dos "a" es 122.*
Marcos:	- *Después pasai el dos abajo y a igual 122 partido en 2.*
Esteban:	- *Ya.*

Actividad 3

Calcular la medida de α en la siguiente figura.



$\alpha = 21 \cdot 2$

$\alpha = 42°$

$\beta = 21°$

↓

Comparten el mismo arco.

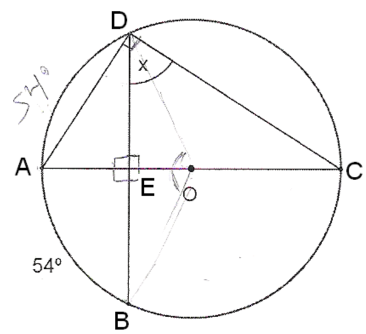
ALUMNO	DIALOGO
Esteban:	- *Lee el enunciado*
Marcos:	- *42.*(señalando en la figura a alfa)
Esteban:	- *No.*
Marcos:	- *Aquí teni que sacar otro teorema más que nunca vimos.*
Marcos:	- *¿Por qué?*
Esteban:	- *¿ah?*
Marcos:	- *Si es lo mismo que esto* (indicando el ángulo inscrito de medida 21º), *sólo que está diciendo otra cosa* (refiriéndose al otro ángulo inscrito de medida β).
Esteban:	- *Teni que sacar el "a".* (indicando el ángulo de medida α), *el "a" es 42, el b no hay que sacarlo po.*
Marcos:	- *No te piden el "b".*
Esteban:	- *Porque no te preguntaron nunca el "b".*
Esteban:	- *Ósea que… "a" es igual a 21 por dos.* (escribiendo sobre la hoja lo que dice)

Esteban:	-	*Sería eso nomas po.*
Profesor:	-	*Una consulta, disculpa, ¿por qué no consideran la medida de beta?*
Esteban:	-	*Porque ahí dice calcular la medida del ángulo "a" nomas, no pide el "b"*
Marcos:	-	*No el "b".*
Profesor:	-	*Calculen el beta.*
Esteban:	-	*Bueno.*
Esteban:	-	*Ya, pero como sacamos el beta.*
Marcos:	-	*No tengo idea*
Esteban:	-	*A ver.*
Ambos:	-	Murmuran…
Marcos:	-	*Pero comparte esto, ¿o no?* (señalando el arco que subtienden lo ángulos)
Esteban:	-	*¿Ah?*
Esteban:	-	*No, no.*
Esteban:	-	*Ese es el mismo, pero ese es otro teorema, pero que nunca vimos, que era uno cuando no pasaba por el centro*
Marcos:	-	*Yo me imagino que es el mismo que este* (señalando en la figura el ángulo de 21º)*, si comparten los puntos* (señalando en la figura el arco que subtienden los ángulos)
Esteban:	-	*¿Cuál?*
Marcos:	-	*Este* (señalando en la figura a beta) *debe ser lo mismo que este.* (señalando en la figura el ángulo de 21º).
Esteban:	-	*Si, igual puede ser*
Marcos:	-	*Aparte que se parecen.*
Esteban:	-	*Mm…*
Esteban:	-	*Me tinca, no sé donde escuche, que si comparten los mismos puntos, era el mismo.* (refiriéndose al arco que subtienden)
Esteban:	-	*¿O no?*
Esteban:	-	*Me tinca que mide 35.*
Profesor:	-	Interviene diciéndoles que observen la hoja resumen.
Ambos:	-	*Observan el resumen.*
Esteban:	-	*Este* (señalando en la figura el ángulo de medida 21º) *también tiene el mismo arco.*
Esteban:	-	*Entonces ese* (señalando en la figura el ángulo de medida β) *también tiene que ser lo mismo.*
Profesor:	-	*¿Por qué?*
Esteban:	-	*Porque comparten los puntos* (se refieren a los puntos que forman el arco correspondiente) *y son el mismo arco* (se refieren a que comparten el mismo arco).
Marcos:	-	*Ah... y subtienden el mismo arco.*
Esteban:	-	*Ya, esta listo.*

Actividad 4

En esta actividad se han asignado rótulos a los vértices de la figura para una mejor comprensión de los diálogos y análisis de la producción de los estudiantes. Se debe tener en cuenta que la actividad original propuesta al estudiante no incluye los rótulos mencionados anteriormente.

Calcula la medida de los elementos pedidos en cada una de estas figuras.



X = 63°

Al tener un ángulo extendido en el origen (180°) y tener el dato de que un arco "y" mide 54°, significa que, el arco adyacente mide lo que falta para llegar a 180°, es decir 126°. Se aplica el teorema de ∢ inscrito y resulta 63°

ALUMNO	DIALOGO
Esteban:	- *Este mide 90* (señalan el ángulo que se forma en la intersección con la cuerda y el diámetro de la circunferencia).
Esteban:	- *No sé por qué me tinca que este* (señalando en la figura el ángulo CED) *mide 90 y este también.* (señalando en la figura el ángulo AED)
Marcos:	- *A sipo.*
Esteban:	- *Y ese también* (señalando en la figura el ángulo AEB), *y ese también* (señalando en la figura el ángulo BEC)
Esteban:	- *Si, mide 90.*
Esteban:	- Lee en voz baja el enunciado de la actividad.
Esteban:	- *Ah, "x".*
Marcos:	- *Si.*
Esteban:	- *90, 90, 90* (señalando en la figura los ángulos rectos que

		marco anteriormente), *54* (señalando en la figura el arco de medida 54º)
Marcos:	-	*Ese lo he hecho antes. Pero no me acuerdo cuando.*
Marcos:	-	*Este 45 y 45.*(señalando en la figura los ángulos ADE y EAD respectivamente)
Marcos:	-	*Necesitamos ahí uno más.* (señalando en la figura el ángulo ACD)
Marcos:	-	*Y aquí hay 45 y 45.* (señalando en la figura los ángulos ADE y EAD respectivamente)
Esteban:	-	*Y es el mismo arco po.*(señalando en la figura el arco DA) 54º)
Marcos:	-	*¿Cómo?.*
Esteban:	-	*Y ese que teni ahí, tiene el mismo arco po.* (señalando en la figura el arco DA)
Marcos:	-	*¿Cómo?*
Esteban:	-	*O sea no es lo mismo pero lo comparten…*
Esteban:	-	*No, espérate, a ver.*
Marcos:	-	*Este es un ángulo recto po'* (señala en la figura el ángulo AED)
Esteban:	-	*Si.*
Marcos:	-	*Ya po, este es 45 y…*
Esteban:	-	*A, si po.*
Marcos:	-	*Mide 90* (señalando el ángulo AED) *y 45* (señalando el ángulo ADE) *y 45* (señalando el ángulo EAD)
Esteban:	-	*No, no.*
Marcos:	-	*¿Mm?*
Esteban:	-	*A, si tu lo vei ahí. Ese también es recto po.* (señalando en la figura el ángulo ADC)
Marcos:	-	*Ese también es recto po.* (respaldando lo que dice su compañero)
Esteban:	-	*Si po, es un ángulo recto*
Marcos:	-	*Si.*
Esteban:	-	*y está en la mitad.*(refiriéndose a que el ángulo de 90º está ubicado en la mitad de la cuerda BD)
Marcos:	-	*Ósea yo no lo veo en la mitad. Pero…*
Esteban:	-	*Si lo vei de abajo, no po.*
Esteban:	-	*Por eso te digo que si ese mide ahí….* (murmurando)
Esteban:	-	*Y este arco* (señalando en la figura el arco DA) *es igual a este otro* (señalando en la figura el arco AB).
Marcos:	-	*Pero se supone que tenemos que ocupar esto* (indicando el arco de 54º).
Esteban:	-	*Sí, pero este* (señalando en la figura el arco de 54º) *es igual a este* (señalando en la figura el arco DA).
Marcos:	-	*Ah, Cierto.*
Esteban:	-	*Ese Mide 54.* (señalando en la figura el arco DA)

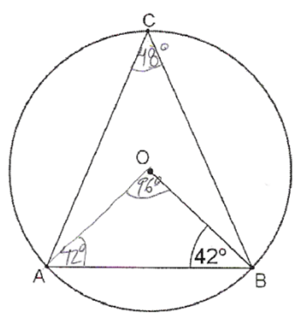
Esteban:	-	*Bueno, aunque igual no creo que nos sirva, pero…. Igual.*
Marcos:	-	*108.*
Esteban:	-	*Ha!! Como era el…*
Esteban:	-	*Cachay, yo tampoco me acuerdo que lo hayamos visto.*
Esteban:	-	*Pero deja pensar un poco...* (traza los radios OD y OB)
Marcos:	-	*En vola ese es 54.*
Esteban:	-	*Si po mira ' si lo vei ahí..* (girando la hoja para mostrarle a su compañero). *Es que yo lo veo como proporción po.*
Esteban:	-	*Ese es 108.*
Marcos:	-	*¿Mm?*
Esteban:	-	*Ese es 108.* (señalando el ángulo del centro DOB)
Esteban:	-	*Este mide 54.*
Esteban:	-	*Ya que ese ángulo de ahí mide 54* (señalando en la figura el arco AB), *entonces ese ángulo de ahí también mide 54* (señalando en la figura el arco AD)
Esteban:	-	*No po. Tendrías que darte… ah! no po, está bien.*
Esteban:	-	*54 y 54.* (señalando en la figura los arcos Da y AB respectivamente)
Marcos:	-	*Si po, si ese es 54.* (señalando en la figura el arco DA)
Esteban:	-	*Ya, y 54 más 90.*
Marcos:	-	*144.*
Esteban:	-	*y para llegar acá* (señalando en la figura el ángulo EDO) *cuanto es.* (Se refiere a cuánto falta para completar los 180º)
Marcos:	-	*¿Ah?*
Esteban:	-	*154, ¿cuánto dije?*
Marcos:	-	*144.*
Esteban:	-	*54 más 90*
Marcos:	-	*144.*
Esteban:	-	*¿Para llegar a 180?, te da 36.*
Marcos:	-	*36.*
Marcos:	-	*Por eso decía que este es 36* (señalando en la figura el ángulo EDO) *y este 54.* (señalando en la figura el ángulo AOD)
Esteban:	-	*Ósea que este mide 36.* (señalando en la figura el ángulo EDO).
Esteban:	-	*36, 54, 90.* (señalando en la figura los ángulos EDO, AOD y OED respectivamente)
Esteban:	-	*Ósea que este también mide 54* (señalando en la figura el arco DA).
Marcos:	-	*¿Cuál?*
Esteban:	-	*O sea, que raro, porque no debería medir 54 de echo.* (señalando en la figura el arco DA).
Esteban:	-	*A no po si no no.. si si…no no no no…*
Marcos:	-	*No pueden medir los dos 54.*
Marcos:	-	*Porque este mide 90.* (señalando en la figura el ángulo AED), *ese 36.*

Esteban:	-	*¿Cuál decís que mide 36?*
Marcos:	-	*El de la esquina de acá.* (señalando en la figura el ángulo EDO).
Marcos:	-	*Entonces es 54.*
Esteban:	-	*No po' si lo sacai ahí po' mira.* (señalando en la figura el triángulo EDO)
Marcos:	-	*Pero están pidiendo "x"*
Esteban:	-	*Si po.*
Esteban:	-	*Lo que si, lo podi sacar por parte*
Marcos:	-	*Porque podríamos sacar ese* (señalando en la figura el ángulo inscrito ACD) *de ahí, no, sacamos este.* (señalando en la figura el ángulo inscrito ADE)
Esteban:	-	*O podemos cachar que este* (señalando en la figura el ángulo ADE) *mas este* (señalando en la figura el ángulo EDC), *O sea este* (señalando en la figura el ángulo ADE) *es lo que le falta para llegar a 90 es "x".*
Esteban:	-	*Si este mide 90.* (señalando en la figura el ángulo ADC)
Esteban:	-	*Mira, si este mide, ¿cuánto era?, 54.* (señalando en la figura el ángulo AOD)
Marcos:	-	*Si este* (señalando en la figura el ángulo DEA) *mide 90, este* (señalando en la figura el ángulo ADE) *debería medir 45.*
Marcos:	-	*No po' si este* (señalando en la figura el radio DO) *va para allá.* (hacia el centro de la circunferencia)
Marcos:	-	*No, tampoco, porque si va al medio, valen 60 todos.* (refiriéndose a los ángulos interiores del triángulo AOD)
Marcos:	-	*¿Y este no medirá 126?* (señalando el ángulo del centro BOC)
Esteban:	-	*¿Mm?*
Marcos:	-	*Este de acá, 126.* (señalando el ángulo del centro BOC)
Esteban:	-	*¿126?*
Esteban:	-	*No po, ¿porque mide 126?*
Marcos:	-	*No po' como que na' que ver.*
Esteban:	-	*No po' mm… ¡¡a ver!!*
Esteban:	-	*mmmm…. Es 126.*
Marcos:	-	*x es 63.*
Esteban:	-	*Ya, ¿y porque decí que ese es 63?* (indicando el ángulo de medida x).
Marcos:	-	*Porque es la mitad que el ángulo del centro que es 126.*
Marcos:	-	*Porque es el resto para llegar a un ángulo extendido.*
Esteban:	-	*Ya, entonces, ¿por qué es 126?*
Marcos:	-	*Porque en el origen* (refiriéndose al principio del ejercicio) *se hace un ángulo extendido* (señalando en la figura el ángulo AOC) *y como te dan 54, teni que buscar en el ángulo extendido, para sacar lo que queda.* (refiriéndose al suplemento de 54)
Esteban:	-	*Si te da un diámetro, vay ha saber altiro que da 180. Porque pasa por la mitad.*

Marcos:	-	*Si, porque es un ángulo extendido.*
Esteban:	-	*Mm… Ya, entonces colocamos, díctame, tu me explicaste.*
Marcos:	-	*Ya, al tener un ángulo extendido en el origen.*
Marcos:	-	*Pone entre paréntesis 180.*
Marcos:	-	*y tener el dato de 54 y el arco no se cuanto significa.*
Esteban:	-	*Significa que el arco adyacente, ósea ese de ahí.* (señalando en la figura el arco DA)
Marcos:	-	*El ángulo restante… no sé, mm… el arco restante.*
Esteban:	-	*No es restante, el arco adyacente, que esta lado.*
Esteban:	-	*Pero también puede ser ese, pero se toma como ese.* (señalando en la figura el ángulo del centro AOD)
Esteban:	-	*Lo que falta para 180, pero en este caso sería ese de ahí.* (señalando en la figura el ángulo del centro BOC)
Esteban:	-	*Ósea pa acá y ese pa ya.* (señalando en la figura los ángulos AOB y BOC respectivamente)
Esteban:	-	*Ya.*
Esteban:	-	*Y eso es.*
Marcos:	-	*126*
Esteban:	-	*Ya, ¿ y que más?*
Marcos:	-	*Al tener el dato del ángulo del centro se podrá calcular el ángulo inscrito.*
Esteban:	-	*Aplicar el teorema.*
Marcos:	-	*Se podrá aplicar el teorema del ángulo inscrito.*

Actividad 5

Calcula la medida del ángulo inscrito ACB en la siguiente figura.

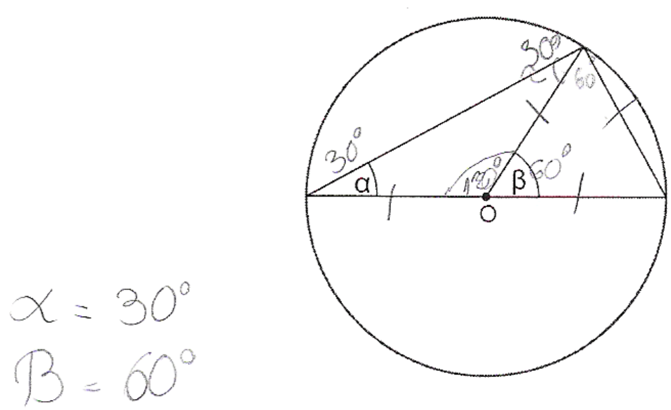


Si se traza una línea que una el punto O con el punto A se formará un triángulo isoceles. $\overline{AO} = \overline{OB}$, por lo tanto el ángulo ∡ABO mide lo mismo que el ángulo ∡BAO. Es decir 42°. Lo que falta para 180° es 96° y será el ángulo restante. El ángulo ∡ACB se convierte en el inscrito y medirá la mitad (48°).

ALUMNO	DIALOGO
Esteban:	- Lee el enunciado (señalando en la figura el ángulo inscrito ACB)
Esteban:	- *Ah!, este* (refiriéndose al ejercicio) *es más fácil, porque haci una cuestión ahí* (trazando el radio OA) *y ese mide 42.* (señalando en la figura el ángulo BAO)
Marcos:	- *Porque es isósceles.*
Esteban:	- *Si po.*
Esteban:	- *Y ese* (señalando en la figura el ángulo AOB) *después, lo que falta.* (refiriéndose a al suplemento de la medida del ángulo AOB)
Esteban:	- *42 por dos, 84. 84… es 96.*
Marcos:	- *Sipo 96*
Esteban:	- *Y este es la mitad.* (señalando en la figura el ángulo inscrito ACB)
Marcos:	- *La mitad*
Esteban:	- *¿Cuánto es?*
Marcos:	- *48.*
Esteban:	- *48.*
Esteban:	- *¿Eso también hay que explicarlo?* (refiriéndose a si debe escribir el desarrollo en la hoja)
Profesor:	- *Si.*
Esteban:	- Escribe sobre la hoja la argumentación del desarrollo del ejercicio.

Actividad 6

Demuestra que en el caso de la figura $\beta = 2\alpha$.



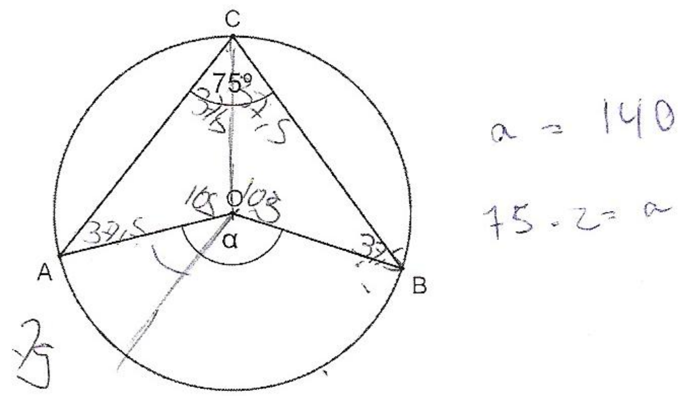
ALUMNO	DIALOGO
Marcos:	- *Este* (señalando en la figura el ángulo BOC) *es 60 y este*

		(señalando en la figura el ángulo BAC) mide 30.
Marcos:	-	*Yo digo que es 30 ese.* (señalando en la figura el ángulo BAC)
Marcos:	-	*Yo digo que este* (señalando en la figura el triángulo OBC) *es un equilátero. Este* (señalando en la figura el ángulo BOC) *mide 60 y este* (señalando en la figura el ángulo BAC) mide 30
Esteban:	-	*¿Cuál?*
Marcos:	-	*Este mide 60.* (señalando en la figura el ángulo del centro BOC)
Marcos:	-	*Y ese mediría 30.* (señalando en la figura el ángulo inscrito BAC)
Esteban:	-	*La cuestión es, si podi demostrar que es equilátero.*
Esteban:	-	*Bueno. Si, es equilátero.*
Marcos:	-	*Es que igual no te dan otro dato. Ósea, supongo que es así.*
Esteban:	-	*Si.*
Marcos:	-	*Ya, pongamos eso.*
Esteban:	-	*Ya, ese mide 60.* (señalando en la figura el ángulo BOC), *ese* (señalando en la figura el ángulo COA) *mide 120.*
Marcos:	-	*Si po.*
Esteban:	-	*Ya, y lo que falta seria 30* (señalando en la figura el ángulo BAC) *y 30* (señalando en la figura el ángulo ACO)
Marcos:	-	*120, 30 y 30.* (reafirmando lo que dice su compañero)
Esteban:	-	*Y este, es isósceles.* (señalando en la figura el triángulo AOC)
Marcos:	-	*Y este* (señalando en la figura el ángulo BAC), *es el inscrito de… el del centro.*
Esteban:	-	*Si.*
Esteban:	-	*Ya, ósea que…*
Marcos:	-	*"a" igual 30, "b" igual 60* (refiriéndose a alfa y beta respectivamente)
Esteban:	-	Escribe sobre la hoja lo que su compañero dijo
Esteban:	-	*Y colocamos que…*
Esteban:	-	*Ah, hagamos la cuestión ahí no mas. Si ahí se entiende.* (escribiendo 180 grados en el ángulo COA)
Marcos:	-	*No le pongay tanto…*
Esteban:	-	Tacha los radios OA y OC dando a entender que el triángulo AOC es isósceles)
Esteban:	-	Tacha todos los lados del triángulo OBC dando a entender que es un triángulo equilátero
Esteban:	-	*Emm.. Lo que falta seria 30.* (escribiendo 30 sobre los ángulos BAC y ACO)
Esteban:	-	*Eso no más.*
Marcos:	-	*Eso.*

2.2 Diálogos de las producciones del par de estudiantes de rendimiento medio

Actividad 1

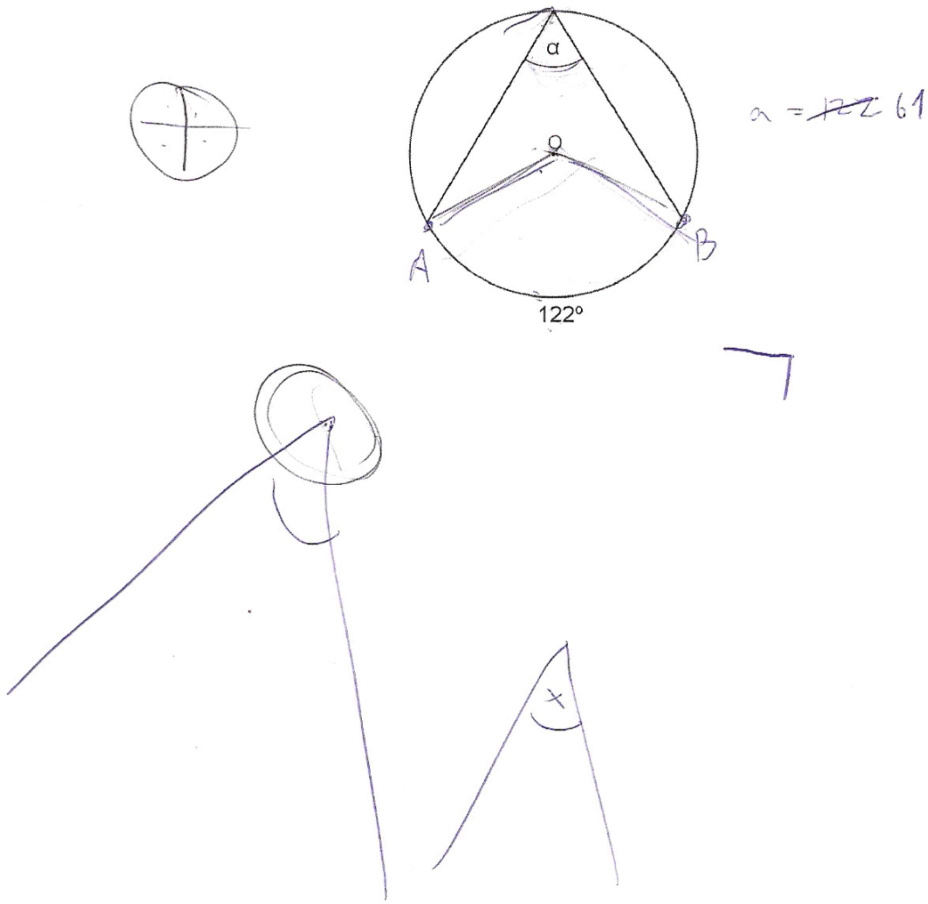
Calcular la medida de α en la siguiente figura.



La realizan sin emitir diálogos.

Actividad 2

Calcular la medida de α en la siguiente figura.



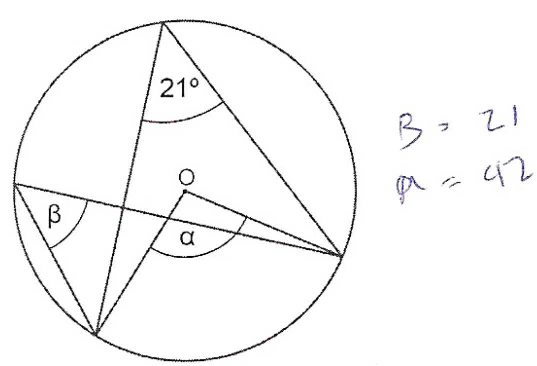
ALUMNO	DIALOGO
Felipe:	- *¿Partimos?*
Profesor:	- *Si*
Felipe:	- *Anotamos el resultado al lado cierto?*
Profesor:	- *Raya en la hoja no mas, no hay problemas.*
Diego:	- *Hagámoslo como lo haría la miss.*
Felipe:	- Lee el enunciado en voz baja.
Diego:	- *¿Qué sale?* (Refiriéndose al enunciado)
Diego:	- Lee el enunciando en voz alta
Felipe:	- Traza los radios OA y OB formando el ángulo del centro AOB.
Felipe:	- *122.*
Felipe:	- *Si 122.*
Diego:	- *61.*
Diego:	- *No, 61.*
Diego:	- *A… no porque ese* (Señalando en la figura al ángulo inscrito)

		es el ángulo, si 122 debería ser.
Felipe:	-	*Si, 122.*
Diego:	-	*Sipo, si ese es a* (señalando en la figura a alfa) *porque no hay rayas tiradas para allá.*
Felipe:	-	*Claro, esto* (Señalando en la figura al ángulo del centro) *sería el doble de eso.* (Señalando en la figura al ángulo inscrito)
Profesor:	-	*¿Por qué? ¿Cómo llegaste?*
Felipe:	-	*Porque ese es un ángulo* (señalando en la figura al ángulo inscrito) *que en el fondo se va abriendo pero sigue siendo el mismo, con los mismos...*
Diego:	-	*Mismas medidas.*
Felipe:	-	*Vértices.*
Profesor:	-	*Ya.*
Felipe:	-	*Entonces, en el fondo esto es un arco, ¿no cierto?* (Señalando en la figura al arco que subtiende a los ángulos), *en el fondo el arco termina siendo lo mismo que el ángulo interior* (Señalando en la figura al ángulo inscrito en la circunferencia)
Diego:	-	*Chelo, está mal. Porque si te fijas, solamente viendo el dibujo podi decir que está mal, porque eso no creo que sea 122º* (Señalando en la figura al ángulo inscrito)*, si la circunferencia tiene 360º. Por simple vista.*
Felipe:	-	*Pero es que es un ángulo, mira...*
Diego:	-	*Pero espérate, si te fijay en este* (Señalando en la figura al ángulo del centro) *es más probable que tenga 122º.*
Felipe:	-	*Pero cuando a ti te dan esto* (Dibuja en la hoja un ángulo, al cual le asigna la medida x) *y cuando te dan esto* (Dibujando en la hoja otro ángulo asignándole x a su medida) *y saca ese ángulo* (refiriéndose a x)*, es lo mismo, o sea no te fijay en las líneas porque al final es el mismo ángulo que se va abriendo.*
Diego:	-	*Te fijas en eso* (señalando el vértice en uno de los ángulos que dibujo su compañero).
Felipe:	-	*Pero el ángulo tú lo sacas según dos líneas.*
Diego:	-	*Sí, pero ya.*
Felipe:	-	El ángulo tú lo sacas entre dos líneas que se juntan y hacen un ángulo.
Diego:	-	*Si se, pero mira, según lo que tú me estay diciendo esa parte de ahí* (señalando en la figura al ángulo inscrito) *debería medir lo mismo que ahí* (señalando en la figura al arco que subtiende el ángulo inscrito) *¿cierto?*
Diego:	-	*Ahí, te cuadra que eso* (señalando al ángulo inscrito) *mida 122?, o eso* (señalando al ángulo del centro) *tenga 122º*
Felipe:	-	*No po, de hecho, esto* (señalando al ángulo del centro) *tiene 244.*
Diego:	-	*¿Tay seguro?*

Felipe:	- *Sipo, porque es el doble.*
Diego:	- Dibuja una circunferencia y la divide en cuatro partes iguales
Diego:	- *Cuantos ángulos tienen este* (señalando la circunferencia que dibujo) *en total, ahí, ese mas ese mas ese* (señalando las partes en las que dividió la circunferencia)
Felipe:	- *360.*
Diego:	- *Parte 360 en dos.*
Felipe:	- *180.*
Diego:	- *Eso* (señalando al ángulo del centro) *cuanto dijiste que era, 244*
Felipe:	- *Sipo, pero... Puta, ya entonces...*
Diego:	- *61*
Felipe:	- *Pero es que... No.*
Diego:	- *Yo te estoy diciendo por vista no más.*
Felipe:	- *Según las reglas no po.*
Diego:	- *Pero como no está ese ángulo cerrado* (señalando al ángulo del centro)
Felipe:	- *Por vista, pero las vistas engañan.*
Felipe:	- *Si es por... Mira, si es por eso, este ángulo* (señalando al ángulo inscrito) *sería menos de 90 grados*
Diego:	- *Ya filo pasemos al siguiente.*
Felipe:	- *Es 61.*

Actividad 3

Calcular la medida de α en la siguiente figura.



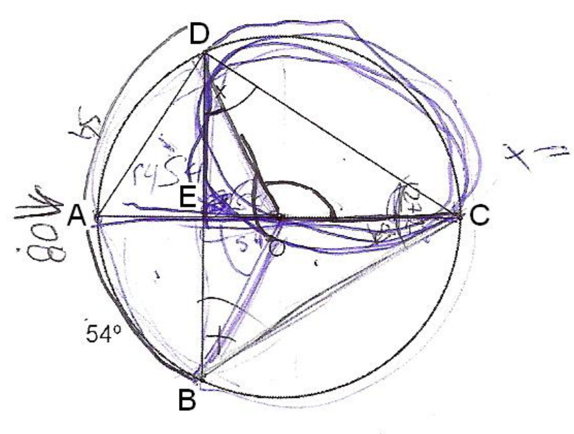
ALUMNO	DIALOGO
Diego:	- *Uh. Estos son Bacanes.*
Felipe:	- *Si.*
Felipe:	- *21.*
Diego:	- *Ya, pero espérate.*
Felipe:	- *Beta es 21º.* (indicando el ángulo inscrito y escribiendo beta igual 21)

Diego:	- *¿A dónde?*
Felipe:	- *Y alfa es 42º.* (refiriéndose al ángulo del centro y escribiendo alfa igual 42).
Diego:	- *¿Beta es 21?* (indicando el ángulo inscrito).
Felipe:	- *Sí, porque al abrir al final son los dos los mismos ángulos que están.* (indicando en la figura que los dos ángulos inscritos subtienden el mismo arco).
Diego:	- *Es que no había visto la wea, donde tenías la mano así po.* (refiriéndose a que su compañero tapaba con su mano la figura)
Felipe:	- Sin garabatos, nos están grabando.

Actividad 4

En esta actividad se han asignado rótulos a los vértices de la figura para una mejor comprensión de los diálogos y análisis de la producción de los estudiantes. Se debe tener en cuenta que la actividad original propuesta al estudiante no incluye los rótulos mencionados anteriormente.

Calcula la medida de los elementos pedidos en cada una de estas figuras.



ALUMNO	DIALOGO
Felipe:	- Lee el enunciado.
Felipe:	- *Me dice calcule la medida de los elementos.*
Felipe:	- *¿Qué elementos? x no mas.*
Profesor:	- *Si, x.*
Diego:	- *Ese es muy fácil.*
Felipe:	- Escribe sobre la hoja x =

Felipe:	-	Dibuja en la intersección de la cuerda BD y el diámetro AC de la circunferencia un ángulo recto.
Diego:	-	*90 90 90.* (apoyando lo que hace su compañero)
Felipe:	-	*90, un triángulo.* (refiriéndose al triángulo que tiene el ángulo que marco como recto)
Profesor:	-	*¿Por qué mide 90º?*
Felipe:	-	*A no tiene porque medir 90* (borrando en la figura el ángulo recto que había hecho para la intersección del diámetro y la cuerda de la circunferencia)
Diego:	-	*No tiene lo... A no po, no tiene los cuadraditos.* (refiriendose a que no hay un ángulo recto marcado en la figura)
Felipe:	-	*No, no lo tiene.*
Felipe:	-	*No lo tiene.*
Diego:	-	*Lo que podrías hacer, seria juntar esto de aca* (señalando en la figura el centro O de la circunferencia con el punto B con la intención de trazar un radio) *y decir que este es 54* (refiriéndose al ángulo del centro que subtiende al arco que mide 54º) *y después, con este punto de acá* (indicando en la figura el punto de intersección del diámetro AC y la cuerda BD de la circunferencia). *No po. Hay una forma de hacer eso.... sino que todavía no...*
Felipe:	-	Ah. Acá hay un 54 (señalando en la figura el arco que mide 54º)
Diego:	-	*Sipo.*
Felipe:	-	*No lo había visto. Ehmm...*
Felipe:	-	*Y 54 era igual... ¿54 son estos dos puntos no cierto?* (señalando en la figura al arco AB)
Diego:	-	*Esos dos*. (apoyando la afirmación de su compañero)
Felipe:	-	*Entonces, eso sería el ángulo del centro.* (dibujando el ángulo del centro AOB que subtiende al arco de 54º)
Felipe:	-	*Y... ¿Eso de que nos sirve?*
Felipe:	-	*Para saber que esto es 54.* (escribe en la figura, que el ángulo del centro AOB mide 54º)
Diego:	-	*Esa es la tontera.*
Felipe:	-	*Vamos rellenando con lo que sabemos*
Diego:	-	*Ese es 54* (señalando en la figura al ángulo del centro AOB)
Diego:	-	Traza una línea suave uniendo B con C formando el ángulo inscrito ACB
Diego:	-	*¿Cuánto era el de allá?* (señalando en la figura al ángulo inscrito ACB)
Felipe:	-	*El doble.*
Diego:	-	*No po, la mitad.*
Diego:	-	*Ese de ahí hasta ahí.* (señalando en la figura el ángulo inscrito ACB)
Diego:	-	*Pero es que ese no nos sirve. Estamos sacando lo de ahí* (indicando en la figura al ángulo ACB), *pero lo de ahí*

		(indicando en la figura al ángulo ACB) *mide lo mismo que lo de ahí.* (indicando en la figura al ángulo inscrito DCA)
Felipe:	-	*Mm...* (Notándose dudoso sobre lo que sostiene su compañero)
Diego:	-	*Si. Mira.*
Felipe:	-	*¿Ah?*
Diego:	-	*Tiray esta línea pa acá.* (trazando la cuerda que une B con C)
Diego:	-	*Y es igual que si te dan este ejercicio* (indicando en la figura al ángulo del centro BOC). *Esto debería ser 24... 24... 27* (señalando al ángulo inscrito ACB).
Diego:	-	*27. Entonces este de acá* (señalando en la figura al ángulo inscrito DCA) *mide 27.*
Felipe:	-	*¿Por qué?*
Diego:	-	*Porque mira, ¿hiciste eso cierto?* (señalando en la figura al ángulo inscrito ACB)
Felipe:	-	*Ya.*
Diego:	-	*Tay en los mismo puntos.* (refiriéndose a que los ángulos ACB y AOB subtienden el mismo arco)
Felipe:	-	*Acá, hay un ángulo inscrito* (señalando en la figura al ángulo del centro AOB)
Diego:	-	*Entonces ese mide la mitad* (señalando la región comprendida por los lados del ángulo inscrito ACB)
Diego:	-	*Y esos dos son iguales* (señalando en la figura a los ángulos DCA y ACB) *porque son una... Ahí teni una línea recta* (señalando en la figura la cuerda BD)
Felipe:	-	*No. no tienen porque ser iguales.*
Diego:	-	*Tienen por qué ser iguales*
Felipe:	-	*Pero si la línea esta así.* (señalando en la figura una rotación con centro C de la cuerda B en unos 30º aproximadamente)
Diego:	-	*Pero no está así.*
Felipe:	-	*Pero es que tu no sabi si esto es recto.* (señalando en la figura a la cuerda DB)
Diego:	-	*Pero es así, porque mira…*
Felipe:	-	*Yo sé que si esta línea* (señalando en la figura al diámetro AC) *por estar con la línea del centro es una línea que desde un lado son iguales, ¿no es cierto?* (tratando de decir que el diámetro AC es una línea recta)
Diego:	-	*ya...* (notándose dudoso sobre los argumentos que presenta su compañero)
Felipe:	-	*Entonces. Lo que yo haría sería decir que como este* (señalando al ángulo AOB) *es un ángulo del centro. Este* (señalando en la figura al ángulo del centro AOB) *es igual a este* (señalando en la figura al ángulo del centro DOA).
Felipe:	-	*¿Me entendí?*
Diego:	-	*Para que sea ese* (señalando en la figura al ángulo AOB) *igual a ese* (señalando en la figura al ángulo DOA), *esa línea*

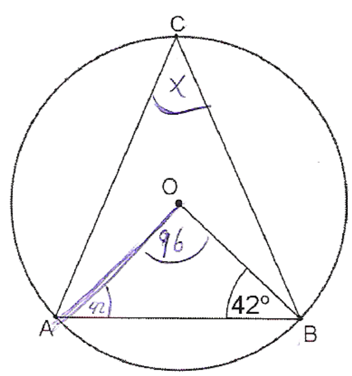
		(señalando en la figura a la cuerda BD) *tiene que ser igual, tiene que ser recta.*
Diego:	-	*Si es que esa línea es recta*, (señalando en la figura a la cuerda BD) *ese* (señalando en la figura al ángulo inscrito DCA) *va a ser 27.*
Felipe:	-	*No. No.*
Felipe:	-	*Sabiendo que esta línea pasa por el centro…* (señalando en la figura al diámetro AC)
Diego:	-	*¿Pero qué línea?*
Felipe:	-	*La línea del medio, esta* (señalando en la figura al diámetro AC)
Diego:	-	*Pero si esa línea esta pasando... Pero Chelo.* (refiriéndose a su compañero)
Felipe:	-	*Pasa por el centro no cierto.*
Diego:	-	*Escúchame, estamos diciendo lo mismo.*
Felipe:	-	*Ya.*
Diego:	-	*Tu estas diciendo que ese* (señalando en la figura al arco DA) *con ese* (señalando en la figura al arco AB) *son iguales, ¿cierto?*
Felipe:	-	*Si.*
Diego:	-	*Para que ese* (señalando en la figura al ángulo del centro DOA) *con ese* (señalando en la figura al ángulo del centro AOB) *sean iguales, esa línea tiene que ser recta.* (señalando en la figura a la cuerda BD de la circunferencia)
Diego:	-	*Porque o sino este (*refiriéndose a la región comprendida entre los lados del ángulo del centro AOB) *circulo seria mas grande que este* (refiriéndose a la región comprendida por los lados del ángulo del centro DOB*), no se, lo que sea.*
Diego:	-	*Y si es que esos* (señalando en la figura las regiones comprendidas por los lados de los ángulo AOB y ADB respectivamente) *son iguales, este* (señalando en la figura al ángulo inscrito ACB) *te va a dar 27, porque esa parte* (señalando en la figura al ángulo inscrito ACB) *mide lo mismo que eso.* (señalando en la figura al ángulo inscrito DCA)
Diego:	-	*Entonces, simplemente podemos decir que este* (escribiendo en la figura que el arco DA mide 54) *mide 54 si esos dos son iguales* (señalando en la figura a los ángulo del centro DOA y AOB)
Diego:	-	*Entonces, acá* (señalando en la figura a los ángulos inscritos DCA y ACB) *haríamos lo mismo y ahí* (señalando en la figura al ángulo inscrito DCA) *daría 27.*
Felipe:	-	*Ya, bueno.*
Felipe:	-	*Entonces, ¿Cuánto es x?*
Diego:	-	*Tenemos un valor.*
Diego:	-	*Sabemos que eso mide 180 grados, tiene 180 grados*

	(refiriéndose a las suma de las medidas de los ángulos interiores del triángulo DEC), *entonces tenemos que sacar...*
Felipe:	- *ah, ¿pero tu deci que este mide 27?* (señalando en la figura al ángulo inscrito DCA)
Diego:	- *Si.*
Felipe:	- Traza el radio OD, escribiendo en la figura que el ángulo del centro DOA mide 54º.
Diego:	- *Nos faltan 153 grados...*
Diego:	- *Ese no es, no es un. Esos que miden 90 grados, se me olvido el nombre.*
Felipe:	- *Ángulo de 90 grados* (indicando a su compañero la intersección entre el diámetro BD y la cuerda AC)
Diego:	- *De esos.*
Diego:	- *¿Es un ángulo de 90 grados?* (refiriéndose al ángulo que su compañero señala en la figura, el formado por la intersección entre la cuerda BD y el diámetro AC de la circunferencia)
Felipe:	- *No, porque no debería.*
Diego:	- *Es que en las pruebas siempre ponen eso.*
Felipe:	- *Si, no pero no, o sino no.*
Diego:	- *Para especificar los ángulos de 90 grados.*
Profesor:	- *Te refieres al triángulo inscrito en una semicircunferencia.*
Profesor:	- *¿Está el triángulo inscrito en una semicircunferencia?*
Felipe:	- *No, si fuese eso, nos diría.*
Felipe:	- *Hazme caso.*

Actividad 5

Calcula la medida del ángulo inscrito ACB en la siguiente figura.

ACB = 48°

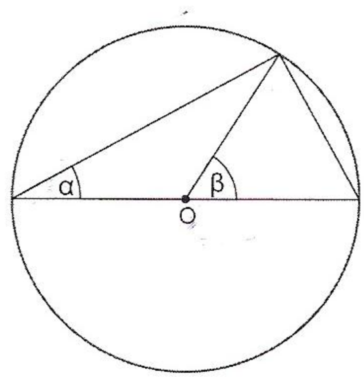


ALUMNO	DIALOGO
Felipe:	- Lee el enunciado e identifica en la figura el ángulo ACB.
Felipe:	- *Ese* (señalando en la figura al ángulo ACB) *es ACB.*

Felipe:	- Escribe una x en el ángulo ACB.
Felipe:	- Traza el radio OA.
Felipe:	- Escribe sobre la figura que el ángulo OAB es 42.
Felipe:	- Dibuja el ángulo del centro AOB.
Felipe:	- Escribe 96 en el ángulo del centro.
Felipe:	- *El ángulo del centro acá.* (señalando en la figura al ángulo del centro)
Felipe:	- *48.* (señalando en la figura al ángulo inscrito)

Actividad 6

Demuestra que en el caso de la figura $\beta = 2\alpha$.



ALUMNO	DIALOGO
Felipe:	- *Este* (señalando en la figura a beta) *es un ángulo del centro, ¿no cierto?*
Diego:	- *Mm.* (apoyando la afirmación de su compañero)
Felipe:	- *Y este* (señalando en la figura a alfa) *sería el ángulo inscrito.*
Diego:	- *Oh, Siempre el ángulo del centro...*
Felipe:	- *Y por regla, el ángulo inscrito...* (señalan do en la figura ángulo inscrito) *es la mitad, o sea el ángulo del centro es el doble de la mitad del ángulo inscrito.*
Felipe:	- *Lo escribo en otra parte o no. Nada.*
Profesor:	- *No, está bien.*

APÉNDICE C:

Demostraciones del teorema ángulo inscrito y del centro de una circunferencia expuestas a los estudiantes para su lectura.

Contenidos	Pág.

1. Demostraciones expuestas al grupo de estudiantes que usa el texto Santillana: Edición Especial para el Ministerio de Educación 3

1.1 Demostración del primer caso del teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia 3

1.2 Demostración del segundo caso del teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia 4

2. Demostraciones expuestas al grupo de estudiantes que usa el texto Santillana: Edición Especial para el Ministerio de Educación 5

2.1 Demostración del primer caso del teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia 5

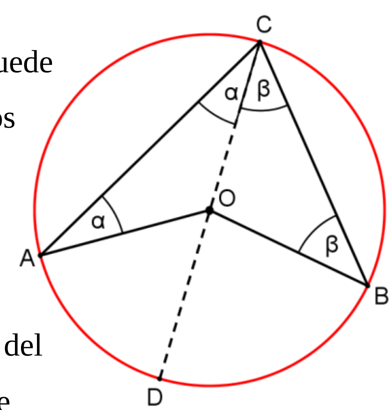
1. Demostraciones expuestas al grupo de estudiantes que usa el texto Santillana: Edición Especial para el Ministerio de Educación

1.1 Demostración del primer caso del teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia

En la figura, como el $\sphericalangle AOB$ tiene su vértice en el centro de la circunferencia, es un **ángulo del centro**. Además, subtiende al arco **AB**.

Por otro lado, el $\sphericalangle ACB$ tiene su vértice en la circunferencia, luego, es un **ángulo inscrito**. Observa que este ángulo también subtiende al arco **AB**.

Tal como se comprueba al medir cada ángulo, si subtienden el mismo arco, el ángulo inscrito mide la mitad de la medida del correspondiente ángulo del centro. La pregunta es si esto ocurre **siempre**.



Para realizar la demostración, en el primer caso, se puede dibujar el diámetro **CD**. Observa que se forman dos triángulos isósceles, como en el dibujo

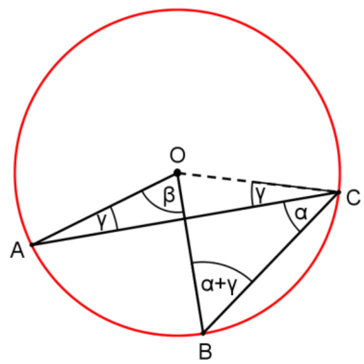
Sean α y β los ángulos basales en cada uno de estos triángulos. Luego, los ángulos exteriores, esto es, $\sphericalangle AOD$ del ΔAOC y $\sphericalangle DOB$ del ΔBOC miden 2α y 2β, respectivamente

De la imagen anterior, se concluye claramente que:

$$\sphericalangle AOB = \sphericalangle AOD + \sphericalangle DOB = 2\alpha + 2\beta = 2\cdot(\alpha+\beta) = 2\cdot\sphericalangle ACB$$

1.2 Demostración del segundo caso del teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia

En el caso de que el ángulo inscrito no contenga al centro de la circunferencia, no se puede justificar con la demostración vista anteriormente. Sin embargo, es posible usar una idea similar, trazando el segmento **OC**, como muestra la figura.



Observa que $\measuredangle ACB = \measuredangle BCO - \measuredangle ACO$ y, por lo tanto, $\measuredangle BOC = 180^{\circ} - 2(\alpha + \gamma)$.

Por otro lado, en $\measuredangle AOC$, se tiene la relación:

$$2\gamma + \beta + 180^{\circ} - 2\alpha - 2\gamma = 180^{\circ}$$

De donde se obtiene la relación $\beta = 2\alpha$, es decir, $\measuredangle AOB = 2 \cdot \measuredangle ACB$.

Por lo tanto, en esta situación también se concluye que la medida del ángulo inscrito en una circunferencia es la mitad de la medida del ángulo del centro, si ambos ángulos comparten al mismo arco.

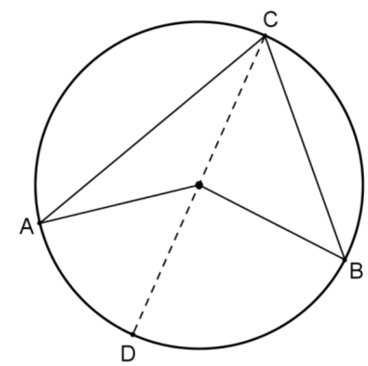
2. Demostración expuesta al grupo de estudiantes que usa el texto Santillana

2.1 Demostración del primer caso del teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia

En la figura, O es el centro de la circunferencia. Mide los ángulos $\sphericalangle AOB$ y $\sphericalangle ACB$.

Haz una figura similar en tu cuaderno. ¿Qué relación existe entre un ángulo inscrito y un ángulo del centro que subtiende el mismo arco? ¿Obtienen lo mismo tus compañeros y compañeras?

Veamos una demostración.



Hipótesis: $\overline{OA} \cong \overline{OC} \cong \overline{OB}$

Tesis: $\sphericalangle AOB \cong 2\sphericalangle ACB$

Demostración:

$\triangle OAC$ es isósceles pues $\overline{OA} \cong \overline{OC}$ por hipótesis.

$$\therefore \sphericalangle OAC \cong \sphericalangle OCA$$

Llamaremos a estos ángulos α .

$\triangle OBC$ es isósceles pues $\overline{OB} \cong \overline{OC}$ por hipótesis.

$$\therefore OBC \cong OCB$$

Llamaremos a estos ángulos β

$\sphericalangle AOD = 2\alpha$ por ser ángulos exteriores en el triángulo $\triangle OAC$.

$\sphericalangle BOD = 2\beta$ por ser ángulo exterior en el triángulo $\triangle OBC$.

Es evidente que $\sphericalangle AOB = 2\alpha + 2\beta$

$$\therefore \sphericalangle AOB = 2(\alpha + \beta)$$
$$\sphericalangle AOB = 2\sphericalangle ACB$$

APÉNDICE D:

Diálogos producidos por los estudiantes durante la lectura de las demostraciones desarrolladas en los textos referentes al Teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia.

Contenidos **Pág.**

1. **Diálogos producidos por el grupo de estudiantes que usa el texto Santillana: Edición Especial para el Ministerio de Educación** 3

    1.1 Diálogos producidos por el par de estudiantes de buen rendimiento 3

    1.2 Diálogos producidos por el par de estudiantes de rendimiento medio 11

2. **Diálogos producidos por el grupo de estudiantes que usa el texto Santillana** 15

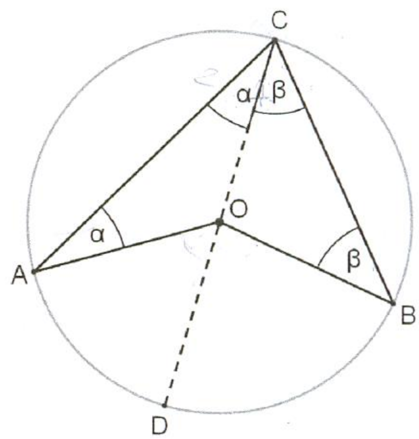
    2.1 Diálogos producidos por el par de estudiantes de buen rendimiento 15

    2.2 Diálogos producidos por el par de estudiantes de rendimiento medio 18

1. Diálogos producidos por el grupo de estudiantes que usa el texto Santillana: Edición Especial para el Ministerio de Educación

1.1 Diálogos producidos por el par de estudiantes de buen rendimiento

Demostración del primer Caso del teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia.



ALUMNA	DIALOGO
Profesor:	- *¿Me podrían explicar?, al ir leyendo, si ustedes lo van entendiendo.*
Camila:	- *Si.*
Profesor:	- *En la primera línea del primer párrafo.*
Camila:	- Lee: *En la figura como el ángulo AOB, o sea ese* (señala en la figura el ángulo AOB), *su vértice en el centro de la circunferencia* (señala en la figura el centro de la circunferencia), *en el centro, ahí está, el vértice es un ángulo del centro. Además subtiende el arco AB.*
Sofía:	- *AB.* (Señalando al arco AB, apoyando lo que dice Camila)
Profesor:	- *Ya.*
Profesor:	- *En el siguiente.*
Camila:	- Lee: *Por otro lado el ángulo ACB,* (señalando el ángulo ACB en la figura), *el ángulo ACB tienen su vértice en la circunferencia*. (Señalando el vértice C en la figura)
Camila:	- Lee: *Luego es un ángulo inscrito. Observa que este ángulo también subtiende al arco AB.*

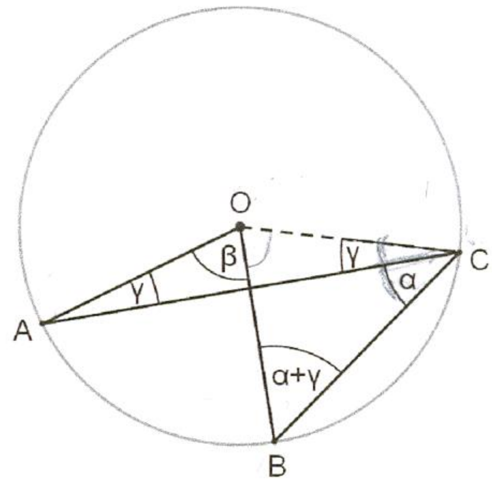
Sofía:	-	*AB.* (señalando el arco AB, respaldando lo que dice Camila)
Camila:	-	*Si.*
Camila:	-	Lee: *Tal como se comprueba al medir cada ángulo se subtienden el mismo arco.*
Camila:	-	Lee: *El ángulo inscrito mide la mitad de la medida del correspondiente ángulo del centro.*
Profesor:	-	*¿Cómo es eso?*
Camila:	-	*Este mide la mitad que el ángulo del centro.* (Señalando junto a Sofía en la figura que el ángulo ACB es la mitad del ángulo AOB)
Sofía:	-	*La mitad que eso* (señalando en la figura al ángulo ACB y apoyando lo que dice Camila)
Profesor:	-	*¿Por qué?*
Camila:	-	*Porque esto es un ángulo inscrito.* (Señalando el ángulo ACB)
Profesor:	-	*Ya, el siguiente.*
Camila:	-	Lee: *La pregunta es si esto ocurre siempre.*
Camila:	-	Lee: *Para realizar la demostración en el primer caso se puede dibujar el diámetro CD.* (Señalando en la figura el diámetro CD)
Camila:	-	Lee: *Observa que se forman dos triángulos isósceles como en el dibujo.*
Camila:	-	Lee: *Estos, triángulos isósceles.* (señalando los segmentos OC y OB en la figura)
Sofía:	-	*Tienen el mismo radio.* (Señalando en la figura los segmentos OB, OC y OA)
Profesor:	-	*Ya.*
Camila:	-	*Lee: Sean a, alfa y beta los ángulos basales en cada uno de estos.*
Camila:	-	*Lo ángulos basales.*
Profesor:	-	*¿Cuáles son los ángulos basales?*
Camila:	-	*La base* (señalando en la figura los ángulos basales del triángulo OBC)
Profesor:	-	*Mm...*
Sofía:	-	*Y acá, estos tres.* (señalando en la figura los ángulos basales del triángulo AOC)
Camila:	-	Lee: *Luego los ángulos exteriores, esto es ángulo AOD, ah, este* (señalando en la figura el ángulo AOD) *del triángulo AOC y ángulo DOB.*
Camila:	-	*El triángulo AOC* (Sofía señala el ángulo AOC de la figura) *y el ángulo DOB* (Sofía señala el ángulo DOB de la figura)
Sofía:	-	*DOB* (señalando en la figura al ángulo DOB, apoyando lo que dice Camila)
Camila:	-	Lee: *Miden el doble de alfa y el doble de beta.*
Profesor:	-	*¿Por qué el doble de alfa y el doble de beta?*
Sofía:	-	*Mm..*

Camila:	-	*El triángulo AOC.*
Sofía:	-	*Porque son ángulos del centro.*
Camila:	-	*A ver, el triángulo AOC* (señalando al triángulo AOC en la figura) *y el ángulo DOB* (señalando en la figura al ángulo DOB)*, ósea, ese triángulo* (apuntando al ángulo del centro AOB)
Camila:	-	*La medida de todos los ángulo de este triángulo, cierto*. (Señalando en la figura al triángulo AOC)
Camila:	-	*Y el ángulo, de este triángulo* (señalando el ángulo DOB de la figura)*, del triángulo BOC* (señalando en la figura al triángulo BOC)*, miden el doble de alfa y el doble de beta.*
Profesor:	-	*Ya, pero ¿por qué mide el doble de alfa?*
Camila:	-	*No se.*
Sofía:	-	*Sera porque es la mitad de un ángulo inscrito.*
Camila:	-	*Mm…*
Sofía:	-	*¿Sera?*
Profesor:	-	*Ya, ¿y...?*
Camila:	-	*No, es que lo divide el diámetro.* (Señalando al diámetro DC de la figura)
Camila:	-	*Parte los dos…*
Sofía:	-	*Los dos están en el mismo arco.*
Profesor:	-	*Ya y en la siguiente línea.*
Camila:	-	*De la imagen anterior, ¿esa?*
Profesor:	-	*Hmm.*
Camila:	-	*Se concluye claramente que ángulo AOB.*
Sofía:	-	*AOA.* (Señalando en la figura al ángulo AOB)
Camila:	-	*Es igual a AOD.*
Sofía:	-	*AOD.* (Señalando en la figura al ángulo AOD)
Camila:	-	*AOD.* (Señalando en la figura al ángulo AOD)
Camila:	-	*Ósea que este y este miden lo mismo.* (señalando los ángulos inscritos alfa y beta de la figura)
Camila:	-	*Si porque están partidos por la mitad.*
Sofía:	-	*Si.*
Camila:	-	*Miden lo mismo.*
Camila:	-	*Mas el ángulo DOB.*
Ambas:	-	Señalan en la figura el ángulo DOB.
Camila:	-	*Es igual al doble de alfa mas el doble de beta.* (Señalando en la figura los ángulos alfa y beta no inscritos)
Profesor:	-	*¿Entienden esa línea?, ¿Lo que se quiere decir ahí?*
Camila:	-	*Ahh. DOB* (señalando en la figura al ángulo DOB) *es igual al doble de este* (señalando al ángulo inscrito OCB) *y el doble de este* (señalando el ángulo ACD).
Camila:	-	*No. No entiendo.*
Sofía:	-	*AOB* (señalando en la figura al ángulo AOB) *es igual a AOD mas DOB porque son estos dos forman ese ángulo entero.*

		(Señalando en la figura, que los ángulos AOD y DOB forman al ángulo AOB)
Sofía:	-	*Y eso* (señalando en la figura al ángulos AOB), *es igual al doble de esto mas el doble de esto* (señalando en la figura, a los ángulo inscritos ACD y DCB) porque esto. ósea, esto (señalando en la figura al ángulo DCB) *es mas chico que esto* (señalando en la figura al ángulo DOB), *esto* (señalando en la figura al ángulo DCB) *es la mitad de esto* (señalando al ángulo DOB)
Profesor:	-	*¿Por qué es la mitad?*
Sofía:	-	*Porque es un ángulo inscrito.* (Señalando en la figura al ángulo DCB) *y este del centro* (señalando en la figura al ángulo AOD)
Profesor:	-	*Ya...*
Sofía:	-	*Y, alfa, el doble de alfa más beta. Es lo mismo, es igual a ACB.* (Señalando en la figura al ángulo ACB)
Sofía:	-	*No.*
Camila:	-	*Esta parte yo la entiendo* (señalando la última línea de la demostración), *hasta ahí la entiendo* (marcando hasta el segundo signo igual)
Sofía:	-	*No, sipo hasta ahí.* (señalando en la última línea de la demostración hasta antes del segundo signo igual)
Sofía:	-	*Hasta acá* (señalando en la última línea de la demostración hasta antes del tercer signo igual), *¿O no?*
Camila:	-	*Hasta ahí se entiende.* (Señalando en la última línea de la demostración hasta antes del segundo signo igual)
Sofía:	-	*Eh, ya bueno, eso, que es lo mismo que esto. Eso* (señalando en la figura al ángulo AOB) *es igual a...*
Camila:	-	*Eso más eso.* (señalando en la figura a los ángulo AOD y DOC)
Sofía:	-	*Ya, ah...*
Camila:	-	*Este ángulo más. Da lo mismo.*
Sofía:	-	*Este ángulo mas este ángulo* (señalando en la figura al ángulo AOD con el ángulo DOB) *es lo mismo que eso* (señalando en la última línea de la demostración al ángulo AOB)
Sofía:	-	*Por eso te digo, esto* (señalando en la figura al ángulo AOB) *es lo mismo que esto* (señalando en la última línea de la demostración a lo que esta después del segundo signo igual) *que es el doble de alfa, ya el doble de este* (señalando al ángulo ACD) *más el doble de este* (señalando en la figura al ángulo DCB).
Sofía:	-	*Como estos son la mitad* (señalando en la figura a los ángulos ACD y DCB) *de este* (señalando en la figura al ángulo AOB) *tienen que ser.*
Camila:	-	*El doble.*
Sofía:	-	*El doble*

Camila:	-	*Ah.*
Sofía:	-	*Y, a mas b.* (Señalando en la última línea de la demostración a lo que esta después del tercer signo igual)
Camila:	-	*A ver*
Profesor:	-	*mm...*
Camila:	-	*Ósea que la suma de esto.* (Señalando en la figura a los ángulos ACD y DCB)
Sofía:	-	*Es lo mismo.*
Camila:	-	*Por dos, es lo mismo que el doble de ACB, donde esta ACB* (busca al ángulo ACB en la figura), *ACB, ahí está* (señala en la figura al ángulo ACB). *A sipo es lo mismo.*
Ambas:	-	*Risas.*
Sofía:	-	*Y el AC... ¿Cuál otro?, AC...* (Señalando en la figura al ángulo ACB), *a sip.*
Sofía:	-	*Y ese es un ángulo inscrito.*
Sofía:	-	*El doble de ACB, Claro el doble de ACB* (señalando en la figura al ángulo ACB) *es lo mismo que...*
Camila:	-	*El doble que I: Que también de este* (señalando en la figura al ángulo AOB), *porque se supone que todos estos son iguales entre si.* (Señalando la ultima línea de la demostración)
Camila:	-	*Hm…*
Profesor:	-	*Bien.*

Demostración del segundo caso del teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia



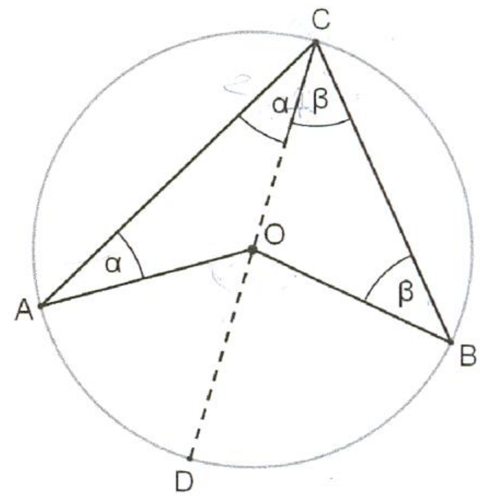
ALUMNA	DIALOGO
Camila:	- Lee el primer párrafo de la demostración del segundo caso.
Camila:	- Lee: *Observa que ángulo ACB.*
Ambas:	- *ACB.* (señalando en la figura al ángulo ACB)
Camila:	- *Es lo mismo que BCO* (no logra identificar el ángulo BCO en la figura)
Camila:	- *Es lo mismo.*
Sofía:	- *Menos, ah, es lo mismo que BCO* (señalando en la figura al ángulo BCO) *menos ACO* (señalando en la figura el ángulo ACO)
Camila:	- *ACO* (señalando en la figura al ángulo ACO, respaldando lo que dice Sofía)
Camila:	- *A, sipo.*
Profesor:	- *¿Cómo es eso? ¿Lo podrían explicar?*
Camila:	- *Porque el ACB, a si me acuerdo* (señala en la figura al ángulo ACB). *Este es lo mismo* (señalando en la figura al ángulo OCB), *todo esto* (señalando en la figura al ángulo OCB)
Sofía:	- *No. esto.* (Señalando en la figura al ángulo ACB)
Camila:	- *No, esto, el... el a... el alfa.*
Profesor:	- *Ya.*
Camila:	- *Dice que es igual a BCO, BCO* (Señalando en la figura al ángulo BCO), *pero ahí no sería lo mismo. Hasta ahí no sería lo mismo porque tienen mas este ángulo.* (Señalando en la figura al ángulo OCA)
Sofía:	- *Porque sería más.*
Profesor:	- *Ya.*
Camila:	- *Pero después te dice que menos ACO.* (Señala en la figura al ángulo ACO)

Sofía:	-	*Que sería el ángulo que sobra.*
Camila:	-	*Menos este* (señalando en la figura al ángulo ACO). *Y ahí quedaría este* (señalando en la figura al ángulo ACB)
Camila:	-	*Entonces sería lo mismo.*
Profesor:	-	Hm...
Camila:	-	*¿Entendí?*
Ambas:	-	*Risas.*
Camila:	-	*Y por lo tanto, BOC. BOC.* (Señalando en la figura al ángulo BOC)
Ambas:	-	*Es igual a 180.*
Sofía:	-	*Menos el doble de...*
Camila:	-	*El doble de a mas y.*
Sofía:	-	*180 menos...*
Profesor:	-	*¿Por qué eso?*
Camila:	-	*BOC, este* (señalando en la figura al ángulo BOC) *es igual a 180 menos el doble de esto.* (Señalando en la figura los ángulos OAC y ACO)
Sofía:	-	*El doble de esto.* (Señalando en la figura al ángulo BCO)
Camila:	-	*A más 5.*
Sofía:	-	*Este es y, y este es a.* (Señalando en la figura a los ángulos OAC y ACO)
Sofía:	-	*El doble de eso, porque 180.*
Camila:	-	*Porque ahí quedaría....*
Sofía:	-	*180 seria el ángulo centro completo, extendido y si le restamos los dobles de los ángulos inscritos, me daría cuando seria, el centro, ósea el ángulo BOC, que también es un ángulo centro.*
Profesor:	-	*¿Y en la siguiente línea?*
Camila:	-	*Por otro lado en AOC, ese, todo ese.* (Señalando en la figura el ángulo AOC)
Sofía:	-	*Si.*
Camila:	-	*Se tiene la relación, dos y mas b. ¿Donde están los círculos?*
Sofía:	-	*El doble de y...*
Camila:	-	*Más beta.*
Sofía:	-	*Más beta.*
Ambas:	-	*Más 180*
Camila:	-	*Menos el doble de alfa, menos el doble de y, es igual a 180.*
Camila:	-	*¿Por qué?*
Ambas:	-	*Risas.*
Camila:	-	*Porque eso daría 360 menos 180 es igual a 180.* (Señalando la antepenúltima línea de la demostración)
Ambas:	-	*Risas.*
Sofía:	-	*A ver, porque...*
Profesor:	-	*¿Y la siguiente línea?*
Camila:	-	*De donde se obtiene la relación beta es igual… No se. Beta*

		es igual a...
Sofía:	-	*El doble de a.*
Camila:	-	*Al doble de a.*
Sofía:	-	*Porque este* (señalando en la figura el ángulo ACB) *es inscrito y el beta es centro.* (Señalando en la figura al ángulo beta AOB)
Profesor:	-	*Ya, y lo último, ¿qué dice?*
Camila:	-	*Es decir, el ángulo AOB.*
Sofía:	-	*AOB.* (señalando en la figura al ángulo AOB), *es igual al doble de...*
Camila:	-	*ACB.*
Sofía:	-	*ACB.* (señalando en la figura el ángulo ACB)
Camila:	-	*Bien, también.*
Sofía:	-	*Por lo mismo, porque ACB es inscrito y subtiende el mismo arco* (señalando en la figura el arco AB) *que el centro, que b.*
Profesor:	-	*¿Y abajo?, el por lo tanto, ¿lo entienden?*
Camila:	-	*Lee la última línea de la demostración*
Camila:	-	*No.*

1.2 Diálogos producidos por el par de estudiantes de rendimiento medio

Demostración del primer Caso del teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia.

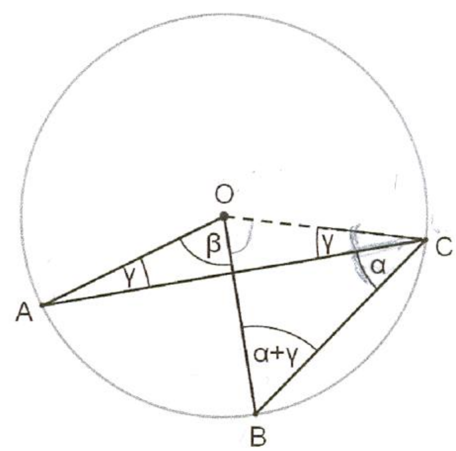


ALUMNA	DIALOGO
Profesor:	- *¿Cuál seria el ángulo AOB?*
Ambas:	- Señalan en la figura el ángulo AOB
Profesor:	- *Ya...*
Paloma:	- *Dice que...*
Francisca:	- *AOB*
Paloma:	- *Es un ángulo del centro y que tiene un vértice en el centro de la circunferencia, ósea tiene una línea que por decirlo de alguna manera lo dividiría en dos.*
Profesor:	- *Ya...*
Profesor:	- *¿Cuál es el ángulo ACB?*
Francisca:	- *¿Ahí o no?* (señalando con su lápiz en la figura el ángulo ACB)
Profesor:	- *Ya...*
Profesor:	- *¿Qué quiere decir que subtienda al arco AB?*
Paloma:	- *Que esta entre eso. Seria ese* (Señalando en la figura el vértice A) *y ese* (Señalando en la figura el vértice B) (Señala en la figura al arco AB)
Profesor:	- El siguiente párrafo.
Profesor:	- *¿Entienden lo que dice ahí?*
Paloma:	- *Dice que si subtienden el mismo arco el ángulo inscrito mediría la mitad del...*
Francisca:	- *Ángulo del centro.*

Paloma:	-	*Eso.*
Profesor:	-	*Ya.*
Profesor:	-	*¿Cuál seria el diámetro?*
Paloma:	-	Señala en la figura el diámetro CD.
Profesor:	-	*¿Cuáles serian lo triángulos isósceles que se forman?*
Ambas:	-	*Señalan en la figura los triángulos isósceles.*
Profesor:	-	*¿Por qué son isósceles?*
Paloma:	-	*Por... Ahí me pillo.*
Profesor:	-	*¿Cuándo un triángulo es isósceles?*
Paloma:	-	*Cuando no todos sus lados son iguales o ¿Cuándo todos sus lados son iguales?*
Paloma:	-	*Tengo esa confusión entre los dos.*
Profesor:	-	*Ya, el siguiente párrafo.*
Ambas:	-	Ambas leen el párrafo en voz baja
Profesor:	-	*¿Qué es un ángulo basal?*
Paloma:	-	*No se. (Moviendo la cabeza haciendo entrever que no sabe)*
Francisca:	-	*No. (Moviendo la cabeza haciendo entrever que no sabe)*
Profesor:	-	*¿Cuáles serían lo ángulos basales alfa y beta?*
Francisca:	-	*¿Podrían ser esos dos?* (Señalando en la figura los ángulos alfa y beta del ángulo inscrito ACB)
Profesor:	-	*Ya...*
Profesor:	-	*El siguiente párrafo donde dice: de la imagen anterior...*
Paloma:	-	*El ángulo AOB...*
Ambas:	-	*Es igual al ángulo AOD más el ángulo DOB.*
Profesor:	-	*Entienden lo que dice ahí.*
Paloma:	-	*Si, seria que ese* (señalando en la figura al ángulo del centro AOB) *seria igual a ese* (señalando en la figura al ángulo del centro AOD) *mas ese* (señalando en la figura al ángulo del centro DOB)
Profesor:	-	*Ya...*
Profesor:	-	*¿Y después?*
Paloma:	-	*Seria igual a dos a mas dos b*
Profesor:	-	*¿Por que dos a mas dos b?*
Francisca:	-	*¿Por estos o no?* (Señalando en la figura los ángulo alfa)
Paloma:	-	*En el... En las líneas anteriores decía que el ángulo AOD del triángulo AOC y el ángulo DOB del triángulo BOC miden dos a y dos b* (La alumna vuelve a leer el párrafo anterior)
Profesor:	-	*¿Podrías señalar en la figura donde están esos dos ángulos?*
Paloma:	-	*Señala en la figura al ángulo AOD*
Paloma:	-	*Ahí seria.* (Señalando nuevamente al ángulo AOD)
Profesor:	-	*¿Cuál seria ese, dos a o dos b?*
Paloma:	-	*Ah…, acá* (señalando en la figura al ángulo AOD)
Paloma:	-	*El ángulo AOD del triángulo AOC* (leyendo nuevamente el párrafo anterior)
Paloma:	-	*Seria así, ese* (dibujando en la figura el ángulo COD)

Paloma:	- *Y el ángulo DOB, que es el otro* (dibujando en la figura el ángulo DOC)
Paloma:	- *Ese mediría dos a* (escribiendo dos a sobre el ángulo COD de la figura) *y ese dos b* (Escribiendo dos b sobre el ángulo DOC de la figura)
Profesor:	- *Ya. Ahora volvamos a la última línea.*
Paloma:	- *Ya.*
Paloma:	- *Dos a mas dos b seria igual a dos por a mas b* (leyendo)
Profesor:	- *¿Cómo se llego a eso?*
Paloma:	- *Multiplicar el a y el b por dos.*
Profesor:	- *Ya.*
Paloma:	- *Y me daría el que dos es igual a, ósea dos por..*
Ambas:	- *El ángulo ACB.*
Profesor:	- *¿Qué pueden concluir en forma general de toda la línea?*
Paloma:	- *Mm...*
Profesor:	- *¿Qué significa que sea igual a dos por el ángulo ACB?*
Paloma:	- *Que eso* (señalando en la figura al ángulo completo de la circunferencia) *sería lo mismo que multiplicar eso* (señalando en la figura al ángulo ACB) *todo ese ángulo.*
Profesor:	- *Ya...*

Demostración del segundo caso del teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia



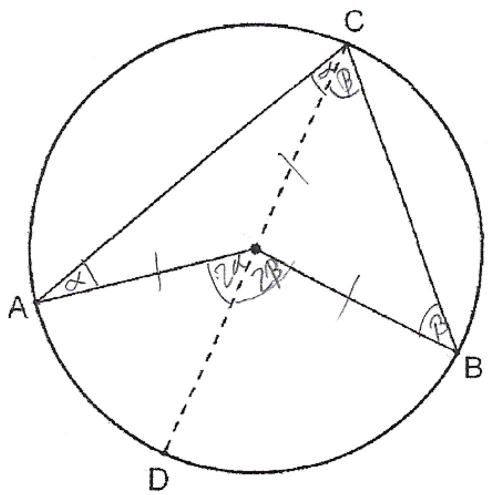
ALUMNA	DIALOGO
Profesor:	- *¿Entienden lo que dice en el primer párrafo?*
Paloma:	- *Algo...*
Francisca:	- *Mueve la cabeza haciendo notar que no entiende.*
Profesor:	- *En la primera línea abajo de la figura. Observa que...*
Ambas:	- Leen en voz baja.

Profesor:	-	*¿Que entienden de eso?*
Paloma:	-	*Que, ese ángulo* (señalando en la figura al ángulo OAC), *ese* (señalando en la figura al ángulo BCO)
Ambas:	-	*seria lo mismo que restar ese* (señalando en la figura al ángulo BCO) *menos ese* (señalando en la figura al ángulo AOC)
Profesor:	-	*Ya...*
Profesor:	-	*Luego...*
Paloma:	-	*El ángulo BOC, seria ese* (Señalando en la figura al ángulo BOC) *seria igual a 180 menos 2.*
Profesor:	-	*¿Por qué 180 menos 2?*
Paloma:	-	*Seria ahí, ¿o no?* (señalando en la figura un ángulo completo), *BOC, ahí seria 180* (Señalando en la figura al ángulo BOC) *y tendría que restarle eso* (señalando en la figura al ángulo OBC, alfa mas gama). *Seria dos más a, más y.*
Profesor:	-	*Ya. Luego dice por otro lado...*
Ambas:	-	Leen en voz baja el párrafo.
Profesor:	-	*¿Entienden de donde salió esa relación?*
Ambas:	-	*No.*
Profesor:	-	*Ya. En la siguiente línea, ¿Qué entienden de ahí?*
Ambas:	-	Leen en voz baja.
Paloma:	-	*Que ese seria igual a dos a.* (Escribiendo en la figura 2 alfa en el ángulo del centro beta) *y ese ángulo* (señalando en la figura al ángulo AOB) *seria igual a dos por ese* (señalando en la figura al ángulo ACB, alfa)
Paloma:	-	*Multiplicar ese ángulo* (ángulo ACB) *por dos.*
Profesor:	-	*Bien.*

2. Diálogos producidos por el grupo de estudiantes que usa el texto Santillana

2.1 Diálogos producidos por el par de estudiantes de buen rendimiento

Demostración del primer caso del teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia



ALUMNO	DIALOGO
Marcos:	- *¿Esto es lo mismo?* (Preguntando si es una actividad mas que debe resolver)
Esteban:	- *En la figura... Ya.* (Lee el enunciado en voz baja)
Marcos:	- *A ver espérate.*
Marcos:	- *Ah, es equilátero.* (lo dice luego de leer la hipótesis)
Esteban:	- *No.*
Esteban:	- *No tenemos forma, así que no hacemos nada.*
Marcos:	- *Te están explicando el teorema*
Profesor:	- *Ahí, les están demostrando el teorema*
Profesor:	- *Necesitamos saber si nos pueden justificar los pasos de la demostración par ver si ustedes la van entendiendo*
Esteban:	- *Ah, ya.*
Esteban:	- *Ya, ahí dice veamos una demostración.* (refiriéndose al texto de la demostración donde dice vemos una demostración)
Esteban:	- *El dalo OA, ese de ahí.* (señalando en la figura al radio OA)
Marcos:	- *Es igual...*

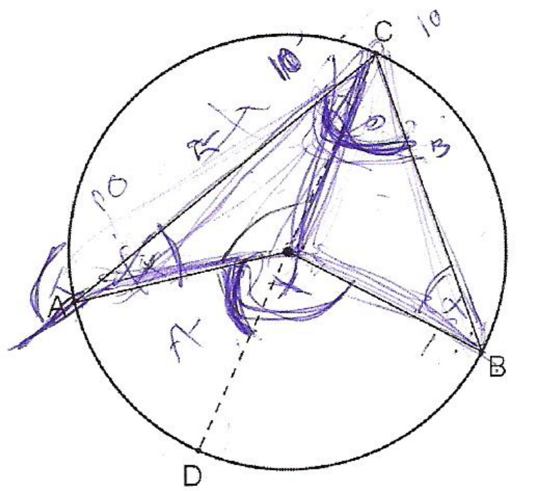
Esteban:	-	*OC.* (señalando en la figura al radio OC)
Esteban:	-	*Ya, ósea, que ese* (señalando en la figura al lado OA) *es con ese* (señalando en la figura al lado OC)
Profesor:	-	*Ya. ¿Qué quiere decir con eso?*
Esteban:	-	*¿Mm...?*
Profesor:	-	*¿Qué OA sea congruente a OC y a OB?*
Esteban:	-	*Que miden lo mismo.*
Profesor:	-	*Ya.*
Esteban:	-	*Por lo tanto es un triángulo isósceles* (tachando los lados congruentes del triángulo AOC)
Profesor:	-	*¿Cuáles son los triángulos isósceles?*
Esteban:	-	*Los que tienen dos lados iguales y uno... distinto.*
Marcos:	-	*cateto* (señalando en la figura al lado OA del triángulo OAC) *cateto* (señalando en la figura al lado OC del triángulo OAC) *hipotenusa* (señalando en la figura al lado AC del triángulo OAC)
Profesor:	-	*Ya.*
Esteban:	-	*Ya.*
Esteban:	-	*¿Y qué más?*
Esteban:	-	*A ver dice, emm...*
Esteban:	-	*Es congruente a OB, ósea que este* (tachando en la figura el radio OB) *también.*
Esteban:	-	*Por lo tanto los dos triángulos son isósceles*
Esteban:	-	*Dice que el ángulo AOB. A - O - B* (señalando en la figura al ángulo AOB) *es igual a dos ángulos, ósea, dos...*
Ambos:	-	*ACB.*
Esteban:	-	*O sea, dos de esto.* (señalando en la figura al ángulo inscrito ACB)
Marcos:	-	*Ah, es lo mismo que... El inscrito con el del centro.*
Esteban:	-	*Si.*
Esteban:	-	*Pero si eso están explicando.*
Esteban:	-	*Ya, entonces, el triángulo OAC* (señalando en la figura el triángulo OAC) *es isósceles.*
Esteban:	-	*Pues, por hipótesis OA* (señalando en la figura al radio OA) *es congruente a OC* (señalando en la figura al radio OC)
Esteban:	-	*Viste.*
Esteban:	-	*Llamaremos a estos ángulos...*
Esteban:	-	*Ya, ahí dice por lo tanto, el ángulo OAC. Ese ángulo* (señalando en la figura al ángulo OAC) *es congruente a OCA, ahí* (señala en la figura al ángulo OCA)
Esteban:	-	*Ya.*
Esteban:	-	*Llamaremos a este ángulo alfa.* (escribe alfa sobre la figura en los ángulos basales del triángulo OAC)
Esteban:	-	*Ya, dice*
Marcos:	-	*Es isósceles, podemos ver...*

Esteban:	-	*Ya, ósea que, ese... el triángulo OCB* (señalando en la figura al triángulo OCB) *es isósceles, pues OB. Ya.*
Esteban:	-	*Llamaremos a este ángulo beta.*
Esteban:	-	*Ya, o sea aquí, este* (señalando en la figura al ángulo OCB) *con este* (señalando en la figura al ángulo OBC) *es beta y ese es beta* (escribiendo beta en los ángulo basales del triángulo isósceles OBC)
Esteban:	-	*Ya. Y después dice que el ángulo AOB es igual a dos a por ser ángulos exteriores en el triángulo OAC.*
Esteban:	-	*Ya, entonces, el ángulo AOD... AOD... Ya.*
Esteban:	-	*Ese ángulo de ahí* (señalando en la figura al ángulo AOD), *es dos " a".*
Esteban:	-	*Ese mide dos "a"* (escribe dos alfa en el ángulo AOD)
Esteban:	-	*Ese es beta po. Ese también es dos "b".* (señalando en la figura al ángulo DOB)
Profesor:	-	*¿Por qué es dos alfa y dos beta?*
Esteban:	-	*Ahí sale, el ángulo AOD* (señala en la figura el ángulo AOD) es dos alfa por ser ángulo exterior del triángulo AO...
Esteban:	-	*Y. y si uno ve la otra figurita, esa la que teníamos denante* (refiriéndose a la figura del ejercicio anterior)
Esteban:	-	*Es como esta, como eso.* (señalando la figura de la ultima actividad que realizaron)
Marcos:	-	*Es lo mismo.*
Esteban:	-	*Si.*
Esteban:	-	*Ya. Y después dice, es evidente que...*
Marcos:	-	*AOB*
Esteban:	-	Escribe dos beta en el ángulo DOB.
Esteban:	-	*Que el ángulo AOB...*
Marcos:	-	*Es igual a dos alfa y dos beta.*
Esteban:	-	*señala en la figura el ángulo AOB.*
Esteban:	-	*Que es dos "a" más dos "b".*
Profesor:	-	*¿Entienden eso? ¿Qué AOB es igual "a" dos a mas dos "b" ?*
Esteban:	-	*Si.*
Profesor:	-	*Ya.*
Esteban:	-	*Dice, por lo tanto, el ángulo AOB es igual a dos "a" más "b".* (señalando el penúltimo paso de la demostración). *Factor izó.*
Esteban:	-	*Dice, el ángulo AOB es igual a dos ángulos ACB.* (señalando la ultima línea de la demostración)
Profesor:	-	*¿Por qué dos ACB?*
Esteban:	-	*Porque comparten el mismo arco.*
Profesor:	-	*Ya.*
Esteban:	-	*Por lo tanto, eso de ahí...* (señalando en la figura el ángulo OAC) *seria el ángulo AOB. Serian esos dos a. Este es el....*
Esteban:	-	*Este* (señalando en la figura al ángulo del centro AOD) *es el*

	doble de ese (señalando en la figura al ángulo inscrito ACD)
Esteban:	- *Lo mismo acá* (señalando en la figura a los ángulos DOB y DCB)
Profesor:	- *Ya.*
Esteban:	- *Y…*
Esteban:	- *Ahí quedo.*
Esteban:	- *Y eso po.*

2.2 Diálogos producidos por el par de estudiantes de rendimiento medio

Demostración del primer caso del teorema del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia



ALUMNO	DIALOGO
Ambos:	- Leen el enunciado en voz baja.
Profesor:	- *Necesitamos saber si ustedes comprenden los pasos.*
Felipe:	- *¿Acá?, o sea te voy diciendo lo que me va diciendo acá.* (señalando al texto de la demostración)
Profesor:	- *Claro, si la vas entendiendo.*
Felipe:	- *Ya, me esta diciendo que OA, o sea, del centro con A.* (señalando en la figura al radio OA)
Felipe:	- *Y, OC* (señalando en la figura al radio OC) *y OB* (señalando en la figura al radio OB) *que son, vendrían siendo estas tres líneas.* (señalando en la figura a los radios OA, OB y OC) *Me dice que son iguales.*
Felipe:	- *Entonces, la tesis seria que AOB, que sería esto,* (señalando en la figura al ángulo del centro AOB) *es igual a dos veces*

		ACB, que serian esas dos. (señalando en la figura a los lados del ángulo inscrito ACB)
Felipe:	-	*Y, esta bien porque es el ángulo del centro y el ángulo inscrito.*
Felipe:	-	*O sea, eso es la tesis.*
Felipe:	-	*Y la demostración seria que OAC es isósceles.*
Profesor:	-	*¿Por qué es isósceles?*
Felipe:	-	*OAC.* (señalando en la figura el triángulo OAC)
Diego:	-	*Deja leerlo primero.*
Felipe:	-	*Porque...*
Diego:	-	Lee en voz baja el la hipótesis y la tesis de la demostración
Felipe:	-	*Porque tiene los dos ángulos iguales.* (señalando en la figura los ángulos basales del triángulo AOC)
Diego:	-	*Si. porque como estos dos lados* (señalando en la figura los lados congruentes del triángulo AOC) *son iguales, obligatoriamente, gracias a esto, estos dos ángulos de aca* (señalando en la figura al ángulo OAC), *de aca* (señalando en la figura al ángulo OCA)
Felipe:	-	*Claro. tan trazados por dos líneas que son iguales.*
Felipe:	-	*Y OB* (señalando en la figura al radio OE) *es igual a OC* (señalando en la figura al radio OC)
Felipe:	-	*Y OBC* (señalando en la figura al ángulo OBC) *es igual a OCB* (señalando en la figura al ángulo OCB)
Diego:	-	*Es lo mismo que sale arriba, AOC es isósceles y AOB también.*
Felipe:	-	Lee la demostración hasta el final.
Profesor:	-	*¿Entiendes ese paso?* (refiriéndose a la conclusión de la demostración)
Felipe:	-	*Lo del final. Mm...*
Felipe:	-	*El ángulo es, es OBC.*
Diego:	-	*Alfa es AOC.*
Profesor:	-	*¿Cuáles serian los ángulos alfa? ¿Los podrías señalar en el dibujo?*
Felipe:	-	*El ángulo alfa es...Este* (señalando en la figura los ángulos basales del triángulo AOC)
Diego:	-	*Esos son los ángulos alfa, porque nos dicen que es... Esos.* (señalando en la figura a los ángulos basales del triángulo AOC)
Profesor:	-	*Escríbelos.*
Felipe:	-	*Este* (rayando sobre los lados del ángulo OCA) *y...*
Diego:	-	*OAC y... OCA.*
Felipe:	-	*O sea, en el fondo el triángulo me esta diciendo que son iguales* (refiriéndose a los ángulos basales del triángulo AOC)
Diego:	-	*Calmao, es que me enrede.*
Felipe:	-	*Es que... A no, no me dice que es igual* (señalando la

		afirmación de la demostración que dice que OAC es congruente con OCA)
Felipe:	-	*¿Qué es ese signo?* (señalando en la figura al símbolo de congruencia)
Profesor:	-	*Congruencia.*
Felipe:	-	*¿Qué significa?*
Profesor:	-	*Congruentes.*
Felipe:	-	*Ya. Es que en el fondo son lo mismo porque OCA* (señalando en la figura al ángulo OCA) *y OAC* (señalando en la figura al ángulo OAC) *es lo mismo solo que dado vuelta pero en el fondo me esta explicando lo mismo.*
Felipe:	-	*Y ese seria alfa. Y beta seria...*
Diego:	-	*OBC y OCB. Lógica, porque dice lo mismo que arriba.* (refiriéndose a la afirmación que dice que los ángulos OAC y OCA son congruentes)
Felipe:	-	*Claro, los otros dos* (rayando sobre los lados de los triángulo OBC y OCB)
Felipe:	-	*Si.*
Profesor:	-	*Ya.*
Felipe:	-	*Entonces, Mm…*
Diego:	-	*Pero, si me dicen el ángulo OAC, es ese ángulo, ¿cierto?* (señalando en la figura al ángulo OAC)
Diego:	-	*Porque ese es O, ese es A y ese es C* (señalando en la figura los vértices O, A y C)
Profesor:	-	*O – A – C.*
Diego:	-	*Los tres ángulos.* (refiriéndose a los vértices O, A y C)
Diego:	-	*Ese* (señalando en la figura al ángulo del centro AOC)
Profesor:	-	Señala en la figura el ángulo OAC.
Diego:	-	*El de A.* (Señalando en la figura el vértice A)
Profesor:	-	*Claro.*
Diego:	-	*A, ya entendi.*
Diego:	-	*Me esta diciendo que este ángulo* (marcando en la figura el ángulo del centro AOB) *vendría siendo igual a... igual a dos por a mas b. O sea, dos por alfa más beta.*
Profesor:	-	*¿Por qué dos por alfa mas beta?*
Felipe:	-	*Porque...*
Diego:	-	*Sacate un torpedo.*
Felipe:	-	*No, no.*
Felipe:	-	*Porque son iguales y me dan el resultado del ángulo... del ángulo inscrito* (marcando en la figura el ángulo inscrito).
Felipe:	-	*O sea, la suma de estos dos* (indicando en la demostración alfa mas beta) *me dan el ángulo inscrito.*
Felipe:	-	*Y el ángulo inscrito por dos vendría siendo el ángulo del centro.*
Felipe:	-	*Y ese vendría siendo el ángulo del centro que en el fondo es el ángulo AOB*

Felipe:	- *¿Está bien?*
Felipe:	- *Ya, y el otro me dice* (refiriéndose a la ultima línea de la demostración) *que AOB es dos ángulos de ACB.*
Felipe:	- *ACB,* (señalando en la figura al ángulo ACB) *que vendría siendo el ángulo inscrito como dije antes. Vendría siendo.. dos veces ese ángulo es lo mismo que decir AOB. Que es el ángulo del centro.*
Felipe:	- *Eso.*