Universidad de Valparaíso
Facultad de Ciencias
Instituto de Matemáticas

La Homología de Khovanov y su relación con el polinomio de Jones

Por

Rodrigo Villegas Galaz

Tesis presentada para optar al grado de Licenciado en Matemáticas

Seminario guiado por

Dr. Marcelo Flores Henríquez

VALPARAÍSO
ENERO 2019

Agradecimientos

Siempre vi lejano el momento en que tuviese que agradecer a esas personas que me ayudaron y acompañaron a lo largo de este camino. Siendo sincero lo considero una tarea no muy fácil de realizar. Es por eso que espero en estas lineas expresar de la mejor manera el aprecio y gratitud que siento por cada una de estas personas.

En primer lugar, mencionar que es gracias a ustedes que me he convertido en quien soy. Cada uno de que aquí tienen lugar, forman parte importante en el proceso que culmina con esta tarea, la cual considero es el primer paso en mi vida académica.

Mamá, papá, hermanita, ustedes fueron los primeros maestros, aquellas personas que siempre llenas de paciencia y cariño me enseñaron a crecer. Con sinceridad y desde lo más profundo de mi, confirmo que son todo lo que he podido pedir de una familia. Es gracias a su apoyo y entendimiento en cada una de mis decisiones que me encuentro aquí en estos momentos, siendo ustedes mi mayor motivación para haber concluido esta etapa.

Jaime, Juanito, Pablo, Concha, Pauli, Tito, Max, Juanana, Feña, Mandi, Nelson, Nacho, Tita, Cristopher, Cesar, mis amigos. Debido al miedo que nos invade muchas veces, es difícil dejar que una persona, en ocasiones tan distinta a nosotros, entre en nuestra vida y sea un verdadero aporte a esta, es por esto que los considero parte importante de este proceso. Ustedes me enseñaron a que debo

estar dispuesto a conocer a la gente antes de juzgar y cerrarme a ellos. Me han ayudado, me han marcado y se han vuelto parte importante en este camino. Ustedes son con los cuales pasaba la mayoría de mi tiempo y con los cuales disfruté mucho. Por todas esas conversaciones, consejos que recibí alguna vez de su parte, todas esas enseñanzas que me dejaron, muchas veces sin que ustedes los supieran, todas esas salidas al "Roma", para echar la talla, despejarse y compartir, por todo eso y mucho más, gracias.

Gracias también a los profesores Castro, Jiménez y Juyumaya, los que en muchas ocasiones me aconsejaron y recibieron de la mejor manera cada vez que tenía dudas. En ellos no tan sólo vi la destreza matemática, tan importante en esta área, sino también, esas ganas de transmitir conocimiento y enseñar, las cuales hicieron grata cada clase que tuve con ustedes y así despertaron en mi ganas para continuar este camino.

Como olvidar a mi profesor guía, el profesor Marcelo Flores, quien gracias a sus consejos y dedicación me ayudó a finalizar este trabajo y por ser también el impulsor y generador de los conocimientos aquí adquiridos, por mostrarme esta linda área y confiar en mi.

Índice general

Introducción **5**

I Preliminares 9

1. Introducción a la Teoria de Nudos **10**

1.1. Nudos 10

1.1.1. Conceptos básicos 10

1.6.1. Equivalencia de nudos 12

1.19. Polinomio de Jones y el bracket de Kauffman 16

1.19.1. Bracket de Kauffman 16

1.36.1. Polinomio de Jones 27

2. Álgebra Homológica **31**

2.1. Categorías 31

2.10.1. Diagramas cúbicos 34

2.14. Álgebra homológica 35

2.14.1. Diagramas 35

2.16.1. Complejos de cadenas 36

2.30.1. Complejo de cocadenas 40

2.36.1. Cono de funciones 42

2.38.1. Espacios vectoriales $\mathbb{Z}$-graduados 43

2.48.1. Homología sobre espacios vectoriales graduados 46

II Homología de Khovanov 49

3. Construcción de la Homología 50

3.1. Escenario previo 50

3.1.1. El $\mathbb{K}$-espacio vectorial $\mathbb{Z}$-graduado 51

3.1.2. Operación Flatten 51

3.3. Bracket de Khovanov 53

3.22. La homología de Khovanov 69

3.29. Relación con el Polinomio de Jones 70

3.34. Una sucesión exacta larga 74

4. Invarianza bajo movimientos de Reidemeister 78

4.2. Invarianza bajo primer movimiento de Reidemeister 79

4.3. Invarianza bajo segundo movimiento de Reidemeister 83

4.4. Invarianza bajo tercer movimiento de Reidemeister 88

Introducción

A pesar de la contemporaneidad del concepto de nudo como objeto matemático y como objetos físicos, los nudos son elementos que forman parte de la historia de la humanidad desde tiempos prehistóricos. Es particularmente interesante como aparecen en el arte, en esculturas y pinturas, así como simbolizando una religión. Hoy en día sigue existiendo un uso cotidiano de los nudos: los famosos nudos marineros, nudos en costura y bisutería, además de su uso como objeto cotidiano.

Aunque la gente ha utilizado nudos desde los albores de nuestra existencia, los inicios de la teoría de nudos se remontan al inicio del siglo XIX, momento en que algunos físicos se preguntaban sobre la naturaleza de los átomos. Lord Kelvin uno de los principales físicos de ese tiempo, propuso en 1867 la idea de que los átomos eran vortices tubulares de eter anudados. Gracias al respaldo de Maxwell, la teoría de Kelvin fue desarrollada durante casi 20 años. P. G. Tait, colaborador de Kelvin, se encargó del estudio extensivo y de la clasificación de los nudos. Tait enumeró a los nudos en términos del número de cruces de las proyecciones planas y también hizo algunos descubrimientos empíricos los cuales han sido llamados desde entonces las "Conjeturas de Tait". Después de que la teoría de Kelvin fue descartada como teoría atómica, el estudio de los nudos se convirtió en una rama de las matemáticas puras. Actualmente el problema fundamental que aborda la teoría de nudos es la clasificación de nudos mediante isotopía. Decimos que dos nudos son isotópicos si podemos llegar de un nudo a otro mediante deformaciones continuas. A pesar del gran esfuerzo realizado por los topólogos en el siglo XX, el problema de clasificación junto con las conjeturas de Tait parecían resistirse a

todo intento por resolverse. Una manera muy efectiva de abordar el problema de la clasificación de nudos es mediante la construcción de invariantes, las cuales son funciones desde el conjunto de todos los nudos, a un conjunto de objetos conocidos (**Obj**). No fue hasta que en 1985 Vaughan Jones, matemático neozelandés, mediante el estudio de una representación particular del grupo de trenzas sobre el álgebra de Temperley-Lieb, y aplicando lo que hoy conocemos como la receta de Jones, dio a conocer una nueva invariante polinomial la cual revolucionó la teoría de nudos.

En año 2000, Mikhail Khovanov en busca de un invariante de nudos más fuerte que el polinomio de Jones construye una invariante, hoy llamada homología de Khovanov, la cual es publicada en su artículo original titulado "A categorication of Jones polynomial"[9]. Esta es la primera invariante de este tipo y se considera una de las primeras categorificaciones en la teoría de nudos. En este proceso de categorificación, Khovanov descubre una teoría de homologías la cual es una invariante de links con excelentes propiedades, de las cuales una de las principales es el hecho que codifica el polinomio de Jones.
Posterior a la publicación del artículo original de Khovanov, Dror Bar-Natan escribe un artículo en el cual explica de una forma más amigable la homología de Khovanov. Es aquí donde en un ejemplo, se muestra por primera vez que la homología de Khovanov es más fuerte que el polinomio de Jones.
Es desde aquí que han surgido algunas propiedades importantes de la homología de Khovanov. En particular Kronheimer y Mrowka en [10], demostraron que la homología de Khovanov detecta no nudos. Es decir, la homología de Khovanov asociada al no nudo es propia de él, lo que implica que si tenemos otro link con esta homología entonces necesariamente este es link es el no nudo.A pesar de esto, como el lector podrá apreciar a lo largo de este trabajo, una de las desventajas que tiene esta invariante es el hecho de que calcularla es complicado y laborioso.
Actualmente la homología de Khovanov tiene una gran importancia en física teórica, especialmente en teoría de cuerdas, pues esta entrega una interpretación física

cuatro dimensional de un nudo.

En este trabajo introduciremos la homología de Khovanov de un link. Si bien existe una literatura respecto a este tema, aquí asumimos una menor cantidad de conocimientos previos para su construcción. En el primer capítulo enunciamos definiciones y propiedades básicas de la teoría de nudos (Sección 1.1) junto con la construcción del polinomio bracket de Kauffman y una forma de definir el polinomio de Jones en función de este (Sección 1.19). Permitiendo de esta forma al lector familiarizarse con términos y notación utilizada a lo largo de este trabajo.
En el Capítulo 2 se abordan conceptos fundamentales del álgebra homológica, tales como: categorías, complejos de cadenas, homología, cadenas homotópicas y cono de una función, por nombrar algunas. Cabe señalar, que dado que la homología de Khovanov se basa en una teoría de homología, tanto este capítulo como el anterior son indispensables para entender los posteriores.

La segunda parte está conformada por dos capítulos y entrega lo necesario para entender la homología de Khovanov, la cual relaciona teoría de homolgías con teoría de Nudos.
En el Capítulo tres comenzamos la construcción de espacios y funciones que formarán el complejo de cadenas el cual utilizaremos para definir la homología asociada a un link. A continuación presentamos la relación que existe entre ésta homología y el polinomio de Jones. Finalmente, se construye una sucesión exacta larga la cual sirve como una categorificación de las relaciones que se tienen en la construcción original del polinomio de Jones [6].
El Capítulo 4 contiene la prueba del teorema fundamental en el cual se sustenta este trabajo, es decir, que la homología construida es en efecto un invariante de links. Para esto probaremos que la homología de Khovanov es invariante bajo los tres movimientos de Reidemeister utilizando herramientas del álgebra homológica. Este no es el método que utiliza Khovanov originalmente, sin embargo esto sirve como una verificación de la invarianza de la homología de Khovanov.

Parte I

Preliminares

Capítulo 1

Introducción a la Teoria de Nudos

Este capítulo está divido en dos secciones. Para comenzar se presentan conceptos básicos de la teoría de nudos, así como el problema fundamental de dicha teoría, el cual hasta la fecha sigue abierto. En la segunda sección introducimos la construcción del bracket de Kauffman, el cual es usado para definir el polinomio de Jones como suma de estados. Aunque esta forma del polinomio de Jones no es estándar, es de gran ayuda para trabajar posteriormente con la homología de Khovanov.

1.1. Nudos

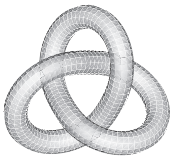
1.1.1. Conceptos básicos

De modo intuitivo, un nudo se puede construir de la siguiente manera: tomamos un trozo de cuerda, realizamos cruces en ella como queramos, luego unimos los extremos de la cuerda de tal modo que no podamos identificar el punto de unión. En otras palabras un nudo es una curva cerrada simple en $\mathbb{R}^3$. Formalmente, tenemos la siguiente definición.

Definición 1.2 *Se dice que $K \subset \mathbb{R}^3$ es un nudo, si existe un homeomorfismo de la circunferencia unitaria S^1 en $\mathbb{R}^3$ cuya imagen es K.*

Ejemplo 1.3

Unknot


Nudo trébol

Nudo ocho

Figura 1.1:

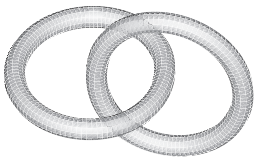
Definición 1.4 *Un Link (o enlace) es una colección finita de nudos que no se intersectan entre sí. De otro modo es la unión disjunta de nudos, es decir, es la imagen por una función continua e inyectiva*

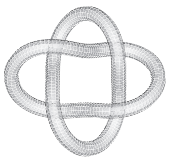
$$f : \coprod_{i=0}^{m} S^1 \to \mathbb{R}^3$$

donde $\boldsymbol{m}$ *denota la cantidad de componentes del link. Al conjunto de todos los links lo denotaremos por* $\mathcal{L}$*.*

Observación 1.5 *Por supuesto, un link de 1-componente (m=1) es un nudo. Notar que un link no trivial puede tener componentes individuales que no están anudados.*

Ejemplo 1.6


Hopf Link


4_1^2

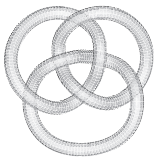

Anillos de Borromeo

Figura 1.2:

A la izquierda de la Figura 1.2 se encuentra el Hopf-link, un link de dos componentes; en el centro un link[1] de dos componentes y cuatro cruces, y a la derecha los anillos de Borromeo, link de tres componentes.

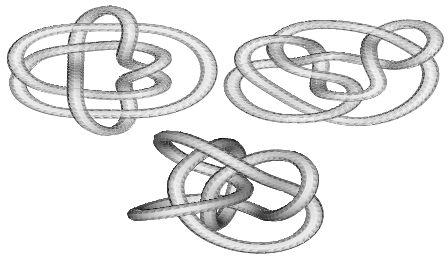
[1]Podremos apreciar que este link aparecerá en reiteradas ocaciones a lo largo de esta tesis.

1.6.1. Equivalencia de nudos

Definición 1.7 *Una isotopía de* $\mathbb{R}^3$ *en* $\mathbb{R}^3$ *es una familia continua de homeomorfismos* $\{F_s : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 | s \in I\}$ *tal que* $F_0 = Id : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *e* $I = [0, 1]$.

Definición 1.8 *Sean* K *y* K' *dos links. Se dice que* K *es isotópico con* K'*, si existe una isotopía* $\{F_s\}_{s\in I}$ *de* $\mathbb{R}^3$ *tal que* $F_1(K) = K'$.

Ejemplo 1.9 *Los nudos en la siguiente imagen son isotópicos.*



De acuerdo con la definición anterior, dos nudos (links) K, K' son isotópicos si existe una isotopía de K a K'. No es difícil el verificar que la relación por isotopía es una relación de equivalencia.

Comenzaremos entonces a estudiar el problema fundamental de la Teoría de Nudos, es decir, determinar la equivalencia por isotopía entre nudos y links.
Para esto, es conveniente trasladar el problema de $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^2$, proyectando los nudos o links en el plano, teniendo especial cuidado con la posición de las cuerdas en la proyección mediante un etiquetado especial.

Definición 1.10 *Sea* $K \subset \mathbb{R}^3$ *un link. El diagrama o proyección del link* K*, que denotaremos* $\mathcal{D}_K$*, se construye como sigue:*

(i) A K *le asociamos una proyección planar, en la cual los únicos cruces admitidos son los dobles puntos como en la siguiente figura:*

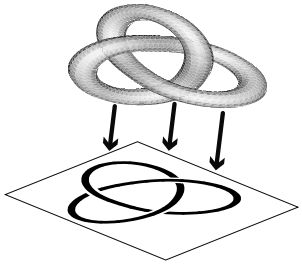
Para tal efecto se debe acomodar la posición de la proyección hasta lograr lo deseado.

(ii) A cada cruce se le asocia alguna de las siguientes configuraciones:

Dependiendo de la forma del cruce en el nudo que se ha proyectado, es decir identificando la cuerda que pasa por encima con una línea continua y la de debajo con una línea cortada.

Un nudo o link se dice *manso* si tiene una cantidad finita de dobles puntos o cruces; en caso contrario, diremos que el nudo es *salvaje*. En lo que sigue, sólo trataremos con nudos y links mansos.

Ejemplo 1.11 *El nudo trébol proyectándose en el plano XY.*



Cuando hablamos de *equivalencia* de links, nos estamos refiriendo indistintamente a la existencia de una isotopía entre ellos. En otras palabras, equivalencia e isotopía entre links significan lo mismo. Introduciremos ahora una importante definición para diagramas de links.

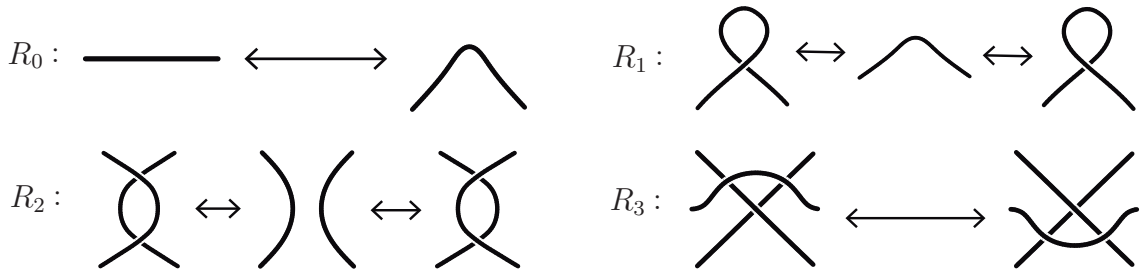
Definición 1.12 *Sea K un nudo (link). Denotaremos por K* su reflejado, el cual es el nudo (link) obtenido a partir de invertir la configuración de los cruces es decir, intercambiar la cuerda que pasa por* `encima` *y la que pasa por* `debajo`[2]

Ejemplo 1.13 *El nudo trébol no es isotópico a su reflejado*[3].

Figura 1.3: Nudo trébol y su reflejado

Se puede observar que podemos obtener dos nudos no equivalentes de cambiar mínimamente su diagrama, de lo cual surge un problema: ¿qué características deben poseer dos diagramas de links para que representen dos links equivalentes?. Dicha característica es la equivalencia bajo Movimientos de Reidemeister, debida al teorema postulado por el matemático alemán Kurt Reidemeister en 1927.

Definición 1.14 *Los siguientes movimientos, reservados para diagramas de nudos o links, se denominan Movimientos de Reidemeister:*



donde R_0 corresponde a la isotopía en $\mathbb{R}^2$.

[2]En estricto rigor, los diagramas de nudos y links son objetos en dos dimensiones, por lo cual las nociones de `encima` y `debajo` no tendrían cabida. Se subentenderá que hacemos referencia a la forma de los cruces de link antes de ser proyectado

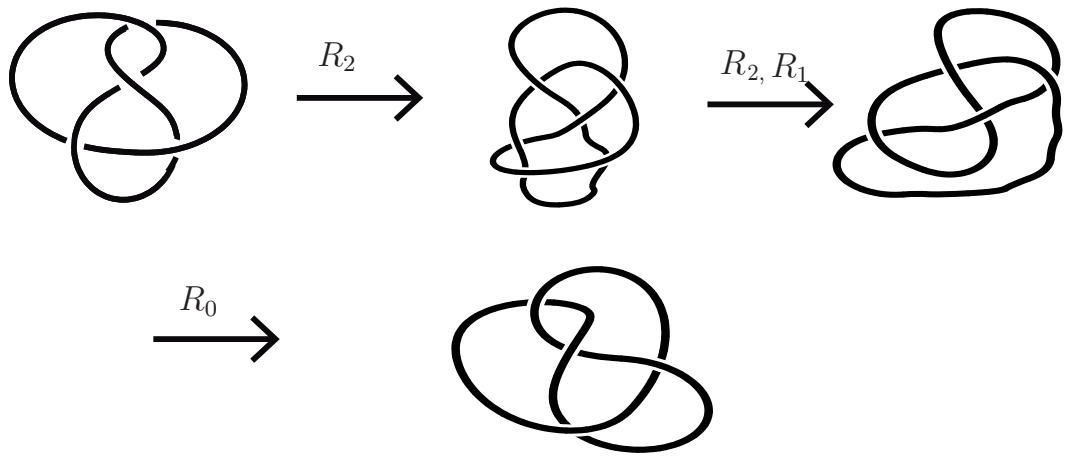
[3]En 1914 M. Dehn dio una prueba de la no equivalencia entre el nudo Trebol y su reflejado, la cual usa herramientas puramente topológicas. En 1985 V. Jones dio la construcción de una nueva invariante (ver definición 1.17) polinomial denominada el polinomio de Jones, el cual da una solución. a este hecho.

Diremos que dos diagramas son R-isotópicos, si y sólo si, podemos obtener uno del otro por medio de una secuencia finita de Movimientos de Reidemeister.

Teorema 1.15 *(Reidemeister, 1927). Sean $\mathcal{D}_L$ y $\mathcal{D}_{L'}$ los diagramas de los links L y L′ respectivamente. Entonces, L es isotópico a L', si y sólo si $\mathcal{D}_L$ es R-isotópico con $\mathcal{D}_{L'}$*

Con este importante teorema, es posible trasladar el problema de la clasificación de nudos y links en $\mathbb{R}^3$ a sus respectivos diagramas en $\mathbb{R}^2$. Sin embargo, esto no necesariamente implica una simplificación del problema, pues en general no es sencillo hallar una sucesión de Movimientos de Reidemeister que transforme un nudo en otro.

Ejemplo 1.16



Una manera de proseguir con la tarea de la clasificación de nudos por isotopía es mediante la construcción de invariantes sobre $\mathcal{L}$.

Definición 1.17 *Un invariante X sobre $\mathcal{L}$ es una función de $\mathcal{L}$ en algún conjunto de objetos conocidos **Obj**, comparables entre sí, tal que:*

$$K \approx K' \Rightarrow X(K) = X(K')$$

Note que si $X(K) = X(K')$ no necesariamente se concluye que $K \approx K'$. De hecho, de la implicancia anterior es más utilizado su contrarecíproco: si $X(K) \neq X(K')$ entonces $K \not\approx K'$.

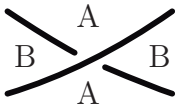
Observación 1.18 *Para probar que una función X sobre $\mathcal{L}$ es un invariante de nudos, es necesario y suficiente probar que es invariante bajo Movimientos de Reidemeister*

1.19. Polinomio de Jones y el bracket de Kauffman

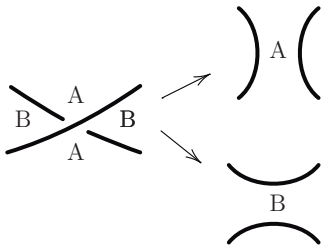
1.19.1. Bracket de Kauffman

Sea $K \subset \mathbb{R}^2$ un nudo. Consideremos un cruce en K y asignemos a este cruce marcas A y B como sigue. Consideremos la linea continua del cruce e imaginemos que rotamos en sentido anti-horario:

Luego, a la región barrida por la rotación le asignamos la marca A, y a las otras le asignamos la marca B, es decir:

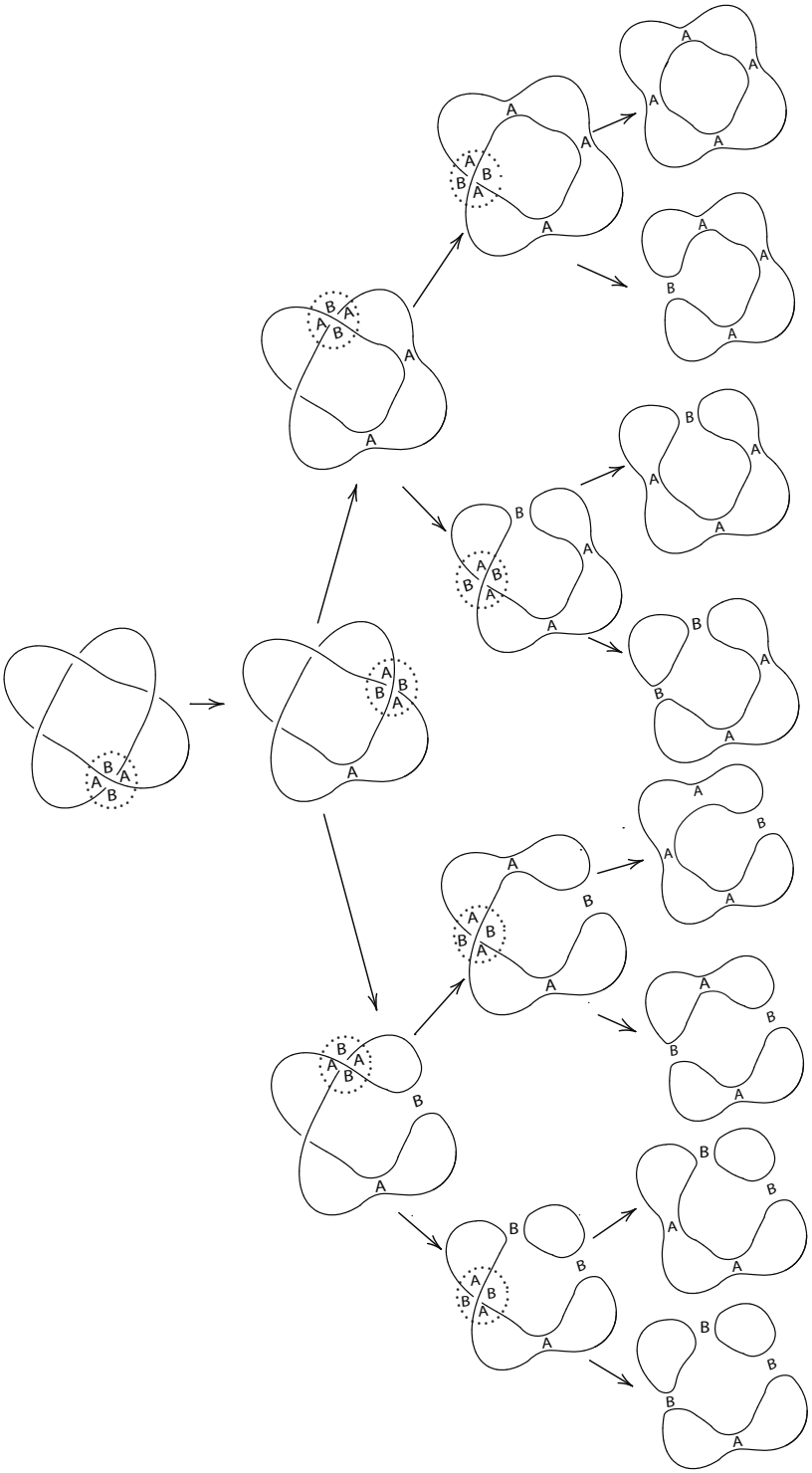


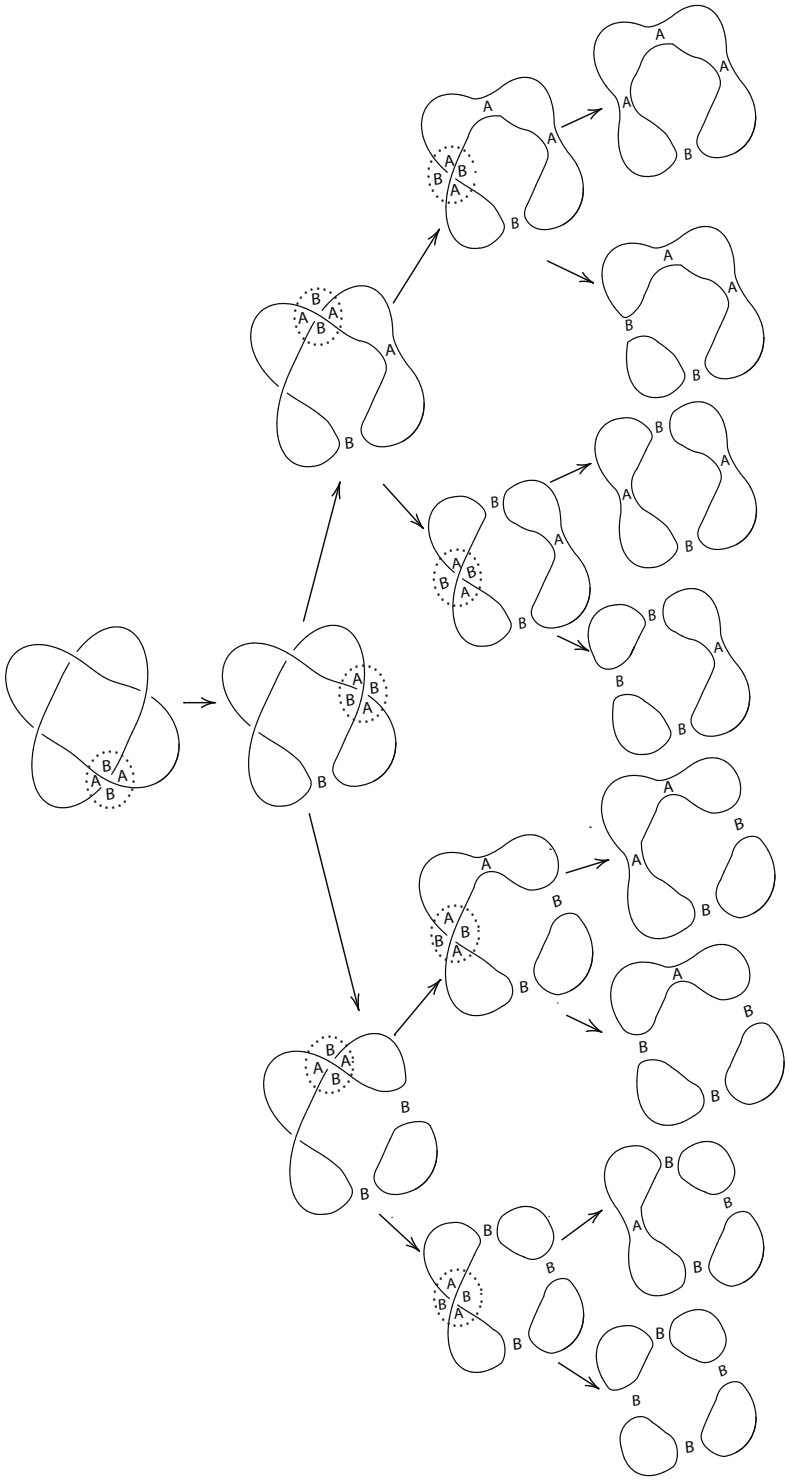
Ahora, este cruce con marcas lo descompondremos de dos maneras distintas



Si aplicamos esta receta a cada cruce de K, obtendremos un conjunto de nonudos con marcas A y B.

Ejemplo 1.20 *Apliquemos el procedimiento al Link* $4_{2,1}$.


A
B


A
B

Definición 1.21 *Sea K un nudo.*

1. *Un smoothing*[4] *de K es cuando un cruce $\diagdown\!\!\diagup$ en K es cambiado, ya sea por $)($ o $\asymp$. En lo que sigue, llamaremos 0-smoothing y 1-smoothing a $)($ y $\asymp$ respectivamente.*

2. *Los estados de un nudo (link), ocurren cuando cambiamos todos los cruces del nudo por un smoothing con sus respectivas marcas. Denotaremos* $\mathrm{Es}(K)$ *el conjunto de todos los estados de K.*

3. *Sea $\sigma \in \mathrm{Es}(K)$. El producto conmutativo de las marcas de σ, es llamado efecto de σ en K y el cual denotaremos por $\langle K, \sigma \rangle$.*

4. *Sea $\sigma \in \mathrm{Es}(K)$ un estado de n componentes. Se define $||\sigma||$ como sigue.*

$$||\sigma|| := n - 1$$

Observación 1.22 *Sea K un nudo que tiene n cruces, entonces notemos que, por un argumento combinatorio, la cantidad de estados de K es 2^n.*

En lo que sigue consideraremos el anillo de polinomios $\mathbb{Z}[A, B, z]$.

Definición 1.23 *Sea K un nudo. El polinomio bracket de K, el cual denotaremos por $\langle K \rangle$ se define como sigue.*

$$\langle K \rangle := \sum_{\sigma \in \mathrm{Es}(K)} \langle K, \sigma \rangle z^{||\sigma||} \in \mathbb{Z}[A, B, z]$$

Además por convención:

$$\langle \bigcirc \rangle = 1$$

Ejemplo 1.24 *Consideremos el Ejemplo 1.20 para calcular el polinomio de bracket del link 4_1^2. Entonces tenemos:*

[4] La traducción sería suavizado. Sólo por gusto personal usaré vocablo en inglés.

$\langle$ $\rangle$ $=A^4z + A^3B + A^3B + A^2B^2z + A^3B + A^2B^2z + A^2 + B^2z + AB^3z^2$
$+A^3B + A^2B^2z + A^2B^2z + AB^3z + A^2B^2z + AB^3z^2 + AB^3z^2 + B^4z^3$
$=A^4z + 4A^3B + 6A^2B^2z^2 + 4AB^3z^2 + B^4z^3$

es decir

$\langle$ $\rangle = A^4z + 4A^3B + 6A^2B^2z^2 + 4AB^3z^2 + B^4z^3$

Notación 1 *Sean*

$$K\diagup\!\diagdown\ ,\quad K\diagdown\!\diagup\ ,\quad K)(\ ,\quad K\asymp$$

los diagramas de un nudo, los cuales son idénticos fuera de un pequeño disco, mientras que dentro de él se ven como muestra la Figura 1.5.

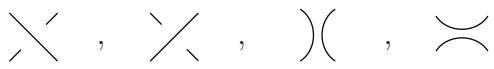


Figura 1.4:

Lema 1.25 *Sea K un nudo, entonces*

1. $\langle K \coprod \bigcirc\rangle = z\langle K\rangle$. *En particular* $\langle \bigcirc^n\rangle = z^{n-1}$.
2. $\langle \diagup\!\diagdown\rangle = A\langle\,)(\,\rangle + B\langle \asymp\rangle$
3. $\langle \diagdown\!\diagup\rangle = B\langle\,)(\,\rangle + A\langle \asymp\rangle$

Demostración.

1. Nótese que

$$\begin{aligned}\mathrm{Es}(K \coprod \bigcirc) =& \{\sigma \coprod \bigcirc : \sigma \in \mathrm{Es}(K)\}\\ =& \mathrm{Es}(K) \coprod \mathrm{Es}(\bigcirc)\\ =& \mathrm{Es}(K) \coprod \{\bigcirc\}\end{aligned}$$

Además si $\sigma \in \mathrm{Es}(K \coprod \bigcirc)$ entonces

$$\langle K \coprod \bigcirc, \sigma \rangle = \langle K, \sigma \rangle$$

Entonces tenemos

$$\begin{aligned}
\langle K \coprod \bigcirc \rangle &= \sum_{\sigma \in \mathrm{Es}(K \coprod \bigcirc)} \langle K \coprod \bigcirc, \sigma \rangle z^{||\sigma||} \\
&= \sum_{\sigma \in \mathrm{Es}(K) \coprod \{\bigcirc\}} \langle K, \sigma \rangle z^{||\sigma||} \\
&= \sum_{\rho \in \mathrm{Es}(K)} \langle K, \rho \rangle z^{||\rho||+1} \\
&= z\Big(\sum_{\rho \in \mathrm{Es}(K)} \langle K, \rho \rangle z^{||\rho||} \Big) \\
&= z\langle K \rangle
\end{aligned}$$

2. Para la segunda parte notemos

$$\mathrm{Es}(\diagdown\!\diagup) = \mathrm{Es}(K \diagdown\!\diagup) = \mathrm{Es}(K)\,()\coprod \mathrm{Es}(K \asymp)$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\langle \diagdown\!\diagup \rangle &= \sum_{\sigma \in \mathrm{Es}(\diagdown\!\diagup)} \langle \diagdown\!\diagup, \sigma \rangle z^{||\sigma||} \\
&= \sum_{\sigma \in \mathrm{Es}(K)\,()} \langle K\,(\,, \sigma \rangle z^{||\sigma||} + \sum_{\sigma \in \mathrm{Es}(K \asymp)} \langle K \asymp, \sigma \rangle z^{||\sigma||} \\
&= A\Big(\sum_{\sigma \in \mathrm{Es}(K)\,()} \langle K\,(\,, \sigma \rangle z^{||\sigma||} \Big) + B\Big(\sum_{\sigma \in \mathrm{Es}(K \asymp)} \langle K \asymp, \sigma \rangle z^{||\sigma||} \Big) \\
&= A\langle\,()\,(\,\rangle + B\langle \asymp \rangle
\end{aligned}$$

Es decir

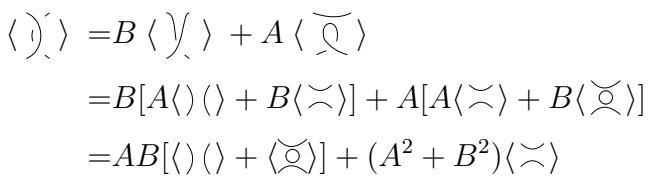
$$\langle \diagdown\!\diagup \rangle = A\langle\,()\,(\,\rangle + B\langle \asymp \rangle$$

3. La prueba se sigue de manera análoga a lo hecho en 2.

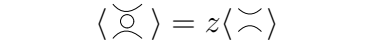
■

Definición 1.26 *Un invariante que respeta R_0, R_2 y R_3 se llama invariante de isotopía regular*

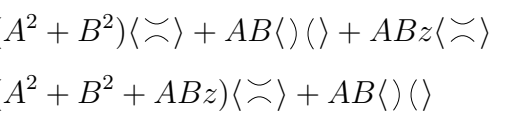
A continuación encontraremos condiciones sobre los parametros A, B y z, de tal modo que el polinomio bracket se convierta en un invariante de isotopía regular.



Además, por la primera parte del Lema 1.25 tenemos



Luego



Es decir que tenemos invarianza R_2, si y sólo si

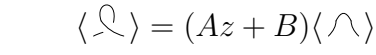
$$\begin{cases} A^2 + B^2 + ABz = 0 \\ \\ A^2 + B^2 + ABz = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} B = A^{-1} \\ \\ z = -A^2 - A^{-2} \end{cases} \tag{1.1}$$

Además se tienen los siguientes resultados:

Lema 1.27 *Si el polinomio bracket es invariante bajo el movimiento R_2, entonces, también lo es bajo el movimiento R_3.*

Teorema 1.28

1.



2.

$$\langle \; \rangle = (A + Bz)\langle \; \rangle$$

En particular, con las elecciones (1.1) tenemos

1.

$$\langle \; \rangle = -A^3\langle \; \rangle$$

2.

$$\langle \; \rangle = -A^{-3}\langle \; \rangle$$

Desde ahora en adelante consideraremos las condiciones en (1.1) sobre A, B y z. Así el polinomio de Bracket es un invariante de isotopía regular.

Definición 1.29 *Un link se dice orientado, si a cada componente se le asigna una orientación indicada por una flecha*

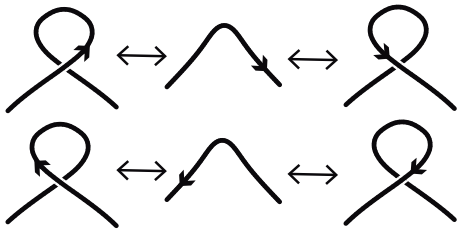
De esta manera, cada cruce tiene una de la siguientes posibilidades.

Las marcas +1 y −1 se llaman signo del cruce.

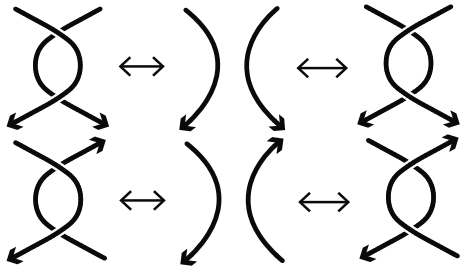
Definición 1.30 *Dado un nudo orientado K definimos n_+ y n_- como el número de cruces positivos y negativos de K, respectivamente.*

Dos links orientados se dicen R-isotípicos si uno de ellos puede ser llevado en otro mediante un R-movimiento de Reidemeister orientado, es decir:

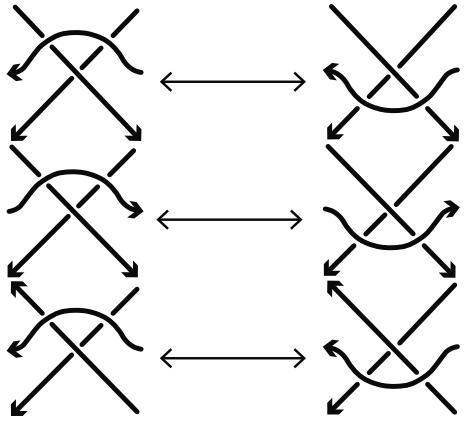
R_1 :



R_2 :



R_3 :



etcetera...

Definición 1.31 *La torsión de un link orientado K se denota $\omega(K)$ y se define por:*

$$\omega(K) := \sum \varepsilon(c)$$

donde c recorre los cruces del link y $\varepsilon(c)$ es el signo del cruce ***c****.*

Ejemplo 1.32

$\omega($ $) = 3$; $\omega($ $) = -3$

$\omega($ $) = 2$; $\omega($ $) = -2$

Observación 1.33 *Si K es un link orientado, entonces*

$$\omega(K^*) = -\omega(K)$$

lo cual se deduce inmediatamente de la definición de reflejado de un nudo.

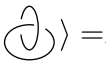
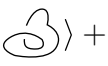
Teorema 1.34 *La torsión es un invariante de isotopía regular, es decir, respeta los movimientos R_0, R_2 y R_3*

Teorema 1.35 *Sea K un nudo orientado, entonces el polinomio*

$$f_K(A) = (-A^3)^{-\omega(K)}\langle K\rangle \in \mathbb{Z}[A, A^{-1}]$$

es un invariante de nudos.

Ejemplo 1.36 *Determinemos el $f_K(A)$*

$\langle$  $\rangle$ $= A\langle$  $\rangle + A^{-1}\langle$ $\rangle$

$= (-A^4 - A^{-4})$

1.36.1. Polinomio de Jones

En 1985 Vaughan Jones mediante el estudio de una representación particular del grupo de trenzas sobre el álgebra de Temperley-Lieb y aplicando lo que hoy conocemos como la receta de Jones, dio a conocer una nueva invariante polinomial.

También podemos escribir el polinomio de Jones en función del polinomio de bracket como sigue:

$$V_k(t) = f_k(t^{-1/4})$$

Consideremos la versión no normalizada del bracket de Kauffman dada por las siguientes relaciones:

(i) $\langle$ $\rangle = -A^2 - A^{-2}$

(ii) $\langle K \coprod$ $\rangle = (-A^2 - A^{-2})\langle K\rangle$

(iii) $\langle$ $\rangle = A\langle$ $\rangle + A^{-1}\langle$ $\rangle$

El objetivo principal de este trabajo es introducir la "homología de Khovanov"asociada a un link, la cual tiene una estrecha relación con el polinomio de Jones. Con este fin, en lo que sigue, utilizaremos la versión no normalizada del polinomio de Jones, ya que de esta forma se visualiza de manera más clara su

relación con la homología de Khovanov. El polinomio de Jones no normalizado se obtiene de la siguiente forma.

Sea $c(K)$ el número de cruces en el diagrama K. Definamos el bracket de Kauffman mejorado $\langle K\rangle_*$ de fijar:

$$\langle K\rangle_* := A^{-c(K)}\langle K\rangle$$

y reemplazar:

$$A^2 \longmapsto -q^{-1}$$

Así este polinomio respeta las siguientes relaciones:

$$\langle \diagup\!\!\diagdown \rangle_* = \langle \rangle\, \langle \rangle_* - q\langle \asymp \rangle_*$$

$$\langle \bigcirc \rangle_* = (q + q^{-1})$$

Es conveniente utilizar esta versión del bracket para la construcción de la homología de Khovanov descrita en Capítulo 3. En lo que sigue nos referiremos a los smoothings etiquetados con q (A^{-1} en la construcción anterior o B por la original) por 1-smoothings.

Cataloguemos ahora el comportamiento del bracket de Kauffman mejorado el cual usaremos más adelante para la re escritura del polinomio de Jones.

Definición 1.37 *El bracket de Kauffman mejorado de un nudo K, escrito $\langle K\rangle_*$, es un polinomio de Laurent en la variable q con coeficientes en $\mathbb{Z}$. El cual satisface las siguientes relaciones.*

Kf1 $\langle \emptyset \rangle_* = 1$

Kf2 $\langle K \coprod \bigcirc \rangle_* = (q + q^{-1})\langle K\rangle_*$

Kf3 $\langle \diagup\!\!\diagdown \rangle_* = \langle \rangle\, \langle \rangle_* - q\langle \asymp \rangle_*$

Aquí $\emptyset$ denota el link vacío

Observación 1.38 *La relación **Kf1**, define el bracket de Kauffman del nudo vacío. La siguiente relación, **Kf2**, da de una forma explícita el bracket de la unión disjunta de un no nudo y K, en función del bracket $\langle K\rangle_*$. La tercera relación, **Kf3**, describe el comportamiento del bracket de un nudo K en términos de los nudos que se obtienen a partir de K con un cruce menos.*

*Utilizando **Kf1** y **Kf2** obtenemos que:*

$$\langle \bigcirc^k \rangle_* = (q + q^{-1})^k$$

donde $\bigcirc^k$ es la unión disjunta de k no nudos.
Con esta nueva forma de ver el bracket de Kauffman podemos re-escribir el polinomio de Jones como sigue:

Teorema 1.39 *Sea K un nudo orientado, entonces, el polinomio de Jones no normalizado en función del bracket de Kauffman mejorado queda expresado de la siguiente forma.*

$$\hat{J}_K = (-1)^{n_-} q^{n_+ - 2n_-} \langle K\rangle_*$$

.

Demostración. Primero notemos que $\omega(K) = n_+ - n_-$ y $c(K) = n_+ + n_-$, y por lo tanto $\omega(K) = c(K) - 2n_-$. Luego tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
\hat{J}_K =& (-A^3)^{-\omega(K)} \langle K\rangle \\
=& A^{-\omega(K)} (-A^2)^{-\omega(K)} \langle K\rangle \\
=& (-A^2)^{-\omega(K)} (A^2)^{n_-} \underbrace{A^{-c(K)} \langle K\rangle}_{\langle K\rangle_*} \\
=& (-A^2)^{-\omega(K)} (A^2)^{n_-} \langle K\rangle_* \\
=& (q^{-1})^{-n_+ + n_-} (-q^{-1})^{n_-} \langle K\rangle_* \\
=& (-1)^{n_-} q^{n_+ - 2n_-} \langle K\rangle_*
\end{aligned}$$

■

Notación 2 *En lo que sigue, sin riesgo de confusión el $\langle K \rangle_*$ será denotado simplemente por $\langle K \rangle$.*

Observación 1.40 *Podemos construir esta versión del bracket de manera análoga a la original usando el concepto de estados mejorados. Decimos un estado mejorado s, es aquel estado en el cual cada uno de sus componentes está etiquetado con 1 o -1.*
Se tiene que la expresión de esta versión del bracket en función de los estados mejorados es la siguiente:

$$\langle K \rangle = \sum_s (-1)^{i(s)} q^{j(s)}$$

donde $i(s)$ es el número de 1-smoothing en s y $j(s) = i(s) - \lambda(s)$, donde $\lambda(s)$ es el número de círculos etiquetados con 1 menos el número de círculos etiquetados con -1.
En particular $\langle \bigcirc \rangle = q + q^{-1}$.

Capítulo 2

Álgebra Homológica

Para poder hablar de *Homología de Khovanov* y demostrar que este es un invariante de nudos, necesitamos algunas herramientas del álgebra homológica. En este capítulo recordaremos conceptos y resultados básicos de álgebra homológica. Los cuales serán de utilidad en los próximos capítulos.

2.1. Categorías

Una categoría es un sistema de objetos relacionados, los cuales no viven aislados, sino que existe una noción de función entre ellos que los une. Las categorías son en sí mismas un objeto matemático y es por lo mismo formalizamos esta idea con la siguiente definición.

Definición 2.2 *Una categoría $\mathscr{A}$ consiste de:*

- *Una colección de* ***objetos****, denotada por ob($\mathscr{A}$).*
- *Para cada A, $B \in \mathrm{ob}(\mathscr{A})$, una colección de* ***funciones, flechas*** *o* ***morfismos*** *de A a B, denotada por $\hom_{\mathscr{A}}(A, B)$.*
- *Para cada A, B, $C \in \mathrm{ob}(\mathscr{A})$, una función*

$$\begin{array}{ccc} \hom_{\mathscr{A}}(B,C) \times \hom_{\mathscr{A}}(A,B) & \longrightarrow & \hom_{\mathscr{A}}(A,C) \\ (g, f) & \mapsto & g \circ f \end{array}$$

- *Para todo* $A \in \mathrm{ob}(\mathscr{A})$*, un elemento* $1_A \hom_{\mathscr{A}}(A, A)$*, llamado elemento* ***identidad****, tal que dado* $f \in \hom_{\mathscr{A}}(A, B)$ *se cumple*

$$f \circ 1_A = f = 1_B \circ f.$$

- *Dado* $f \in \hom_{\mathscr{A}}(A, B)$*,* $g \in \hom_{\mathscr{A}}(B, C)$ *y* $h \in \hom_{\mathscr{A}}(C, D)$*, entonces*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Notación 3 *Por simplicidad escribiremos:*

(i) $A \in \mathscr{A}$*, en lugar de* $A \in \mathrm{ob}(\mathscr{A})$*,*

(ii) $f \in \hom(A, B)$*, en lugar de* $f \in \hom_{\mathscr{A}}(A, B)$*,*

(iii) gf*, en lugar de* $g \circ f$*.*

Ejemplo 2.3 *(a) La categoría* ***Set*** *cuyos objetos son conjuntos, y sus morfismos corresponden exactamente a las funciones entre conjuntos.*

(b) Sea R *un anillo. Denotamos por* R***-MOD****, la categoría cuyos objetos son los* R*-módulos (izquierdos), y los morfismos son homomorfismos de* R*-módulos (izquierdos). Análogamente se pueden definir la categoría* ***Ring, Grp****,* $\mathbf{Vect_k}$*, los cuales son la categoría de los anillos, grupos y espacios vectoriales sobre algún cuerpo* k*, respectivamente.*

(c) Sea (P,$\preceq$*) un conjunto parcialmente ordenado (poset). Definimos la categoría asociada al poset P, denotada por* $\mathcal{P}$*, como la categoría cuyos objetos son exactamente los subconjuntos* P *(*$\mathrm{ob}(\mathcal{P}) = P$*) y dados dos objetos* A*,* B *diremos que existe un morfismo desde* A *a* B *si y sólo si,* $A \preceq B$*.*

Definición 2.4 *Si* $\mathscr{A}$ *es una categoría. Podemos definir* $\mathscr{A}^{op}$ *como sigue:*

$$\mathrm{ob}(\mathscr{A}^{op}) = \mathrm{ob}(\mathscr{A}).$$

Dado $A, B \in \mathscr{A}^{op}$

$$\hom_{\mathscr{A}^{op}}(B, A) = \hom_{\mathscr{A}}(A, B).$$

Definición 2.5 *Sean $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ categorías. Un funtor $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ consiste en:*

- *Una función:*

$$\begin{aligned} \mathrm{ob}(\mathscr{A}) &\longrightarrow \mathrm{ob}(\mathscr{B}) \\ A &\mapsto F(A) \end{aligned}$$

- *Para cada $A, B \in \mathscr{A}$, una función:*

$$\begin{aligned} \hom_{\mathscr{A}}(A, B) &\longrightarrow \hom_{\mathscr{B}}(F(A), F(B)) \\ f &\mapsto F(f) \end{aligned}$$

Cumpliendo los siguientes axiomas:

- *$F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$, para $f \in \hom(B, C)$, $g \in \hom(A, B)$,*
- *$F(1_A) = 1_{F(A)}$, para todo $A \in \mathscr{A}$.*

Ejemplo 2.6 *Funtor Olvido.*
Definimos $F : Grp \to Set$ como sigue: $F(G)$ es el conjunto que define el grupo G. De la misma forma; dado $f : G \to H$ un homomorfismo, $F(f) = f$ es la función definida entre conjuntos $F(G)$ y $F(H)$.

Observación 2.7 *El funtor anterior se puede definir de forma análoga para las categorías **Ring** y $\mathbf{Vect_k}$.*

El siguiente ejemplo de un funtor, es uno de los más conocido en Topología algebraica debido a su relevancia.

Ejemplo 2.8 *Sea $\mathbf{Top}_*$ la categoría de los espacios topológicos equipada con un punto base, cuyos morfismos son las funciones continuas que preservan el punto base. Hay un funtor $\pi_1 : Top_* \to Grp$, asignando a cada espacio X con punto base x_0 el grupo fundamental $\pi_1(X, x_0)$*

Definición 2.9 *Sean $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ dos categorías, un funtor contravariante de $\mathscr{A}$ en $\mathscr{B}$, es un funtor*

$$F : \mathscr{A}^{op} \to \mathscr{B}$$

Ejemplo 2.10 *Sea R un anillo conmutativo y sea W un R-módulo izquierdo fijo. La función $f : U \to V$ induce una función:*

$$f^* : \mathrm{Hom}_R(V, W) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(U, W)$$

definida en $g \in \mathrm{Hom}_R(V, W)$ por tomar $f^*(g) = g \circ f$.
Esto define un funtor

$$\begin{aligned} ()^*\mathrm{Hom}_R(-, W) : (\mathrm{R-MOD})^{op} &\longrightarrow \mathrm{R-MOD} \\ V \quad &\mapsto \quad \mathrm{Hom}_R(V, W) \end{aligned}$$

2.10.1. Diagramas cúbicos

Definición 2.11 *Un diagrama en una categoría $\mathcal{C}$ es un funtor F definido desde la categoría $\mathcal{I}$ asociada a un poset, a $\mathcal{C}$. A la categoría $\mathcal{I}$ la llamaremos categoría de indexación.*

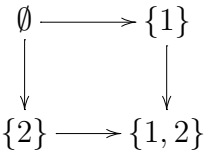
La categoría $\mathcal{I}$ sirve para indexar la imagen de F de una manera que captura la forma de la imagen de F. Los diagramas que nos interesan son los diagramas cúbicos. La categoría de indexación que usaremos exclusivamente son poset de subconjuntos de $\{1, 2 \ldots, n\}$.

Definición 2.12 *Sea $\underline{n} = \{1, 2, \ldots, \}$. Entonces la categoría de indexación cúbica $\mathcal{P}(\underline{n})$ es la categoría con los subconjuntos de $\underline{n}$ como objetos y las inclusiones como morfismos.*

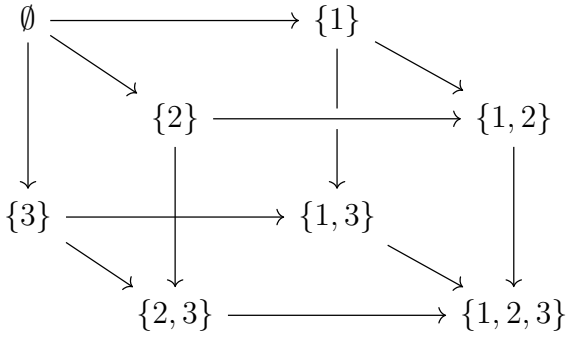
Ejemplo 2.13 *Graficamente $\mathcal{P}(\underline{1})$ es*

$$\emptyset \longrightarrow \{1\}$$

y $\mathcal{P}(\underline{2})$ *es*



y $\mathcal{P}(\underline{3})$ *es*



2.14. Álgebra homológica

Sea R un anillo conmutativo y R-MOD la categoría de los R-módulos izquierdos.

2.14.1. Diagramas

Definición 2.15 *Una cadena de R-módulos y R-funciones lineales*

$$\cdots \to A_{i+1} \xrightarrow{a_{i+1}} A_i \xrightarrow{a_i} A_{i-1} \to \cdots$$

(i) Es exacta en A_i*, si* $\mathrm{Im}(a_{i+1}) = \ker(a_i)$

(ii) Es exacta, si es exacta para cada A_i

El lenguaje de sucesiones exactas es una manera conveniente para hablar de una variedad de situaciones algebraicas:

(1) La cadena $0 \to A \xrightarrow{a} B$ es exacta $\iff$ a es inyectiva.

(2) La cadena $B \xrightarrow{b} C \to 0$ es exacta $\iff$ b es epiyectiva.

(3) La cadena $0 \to A \xrightarrow{a} B \xrightarrow{b} C \to 0$ es exacta $\iff$ a es inyectiva, b es epiyectiva y b induce un isomorfismo entre el cokernel de a con C

(4) Sea $A \xrightarrow{a} B \xrightarrow{b} C \xrightarrow{c} D$ exacta. Entonces son equivalentes:

$$a \text{ es epiyectiva} \iff b \text{ es cero} \iff c \text{ es inyectiva}$$

Observación 2.16 *Una sucesión exacta que es de la forma (3) es llamada* ***sucesión exacta corta****.*
En ocasiones ocurre que en sucesiones exactas largas cada tres morfismos se tiene la propiedad (1) (o (2), (3)) por lo que las sucesiones pueden descomponerse dentro de sucesiones exactas cortas

2.16.1. Complejos de cadenas

Definición 2.17 *Una sucesión $C_\bullet = (C_n, \partial_n | n \in \mathbb{Z})$ de módulos C_n y homomorfismos $\partial_n : C_n \to C_{n-1}$, llamados* ***operadores borde*** *o* ***diferenciales****, se dice que es un complejo de cadena, si para cada $n \in \mathbb{Z}$ se cumple la relación $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$. Diremos que el complejo de cadenas es acotado si la cantidad de espacios no triviales es finita.*

Asociamos a un complejo de cadena $C_\bullet$ los módulos:

$$Z_n = Z_n(C_\bullet) = \ker(\partial_n : C_n \to C_{n-1})$$
$$B_n = B_n(C_\bullet) = \mathrm{Im}(\partial_{n+1} : C_{n+1} \to C_n)$$
$$H_n = H_n(C_\bullet) = Z_n / B_n$$

Llamaremos a C_n (Z_n, B_n) el módulo de **n-cadenas (n-ciclos, n-bordes)** y a H_n el n-ésimo **módulo de homología** del complejo de cadena. A menudo, en el caso particular $R = \mathbb{Z}$, hablamos de grupos de homología.

Observación 2.18 *La relación borde $\partial_{n-1}\partial_n = 0$ implica que $B_n \subset Z_n$, y por lo tanto H_n se puede definir.*

Definición 2.19 *Sea $C_\bullet = (C_n, c_n)$ y $D_\bullet = (D_n, d_n)$ dos complejos de cadenas. Una función de cadena $f_\bullet : C_\bullet \to D_\bullet$ es una familia de homomorfismos $f_n : C_n \to D_n$ los cuales satisfacen la regla de conmutación: $d_n \circ f_n = f_{n-1} \circ c_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Es decir cada parte del siguiente diagrama conmuta.*

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_{n+1} & \xrightarrow{c_{n+1}} & C_n & \xrightarrow{c_n} & C_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow{\scriptstyle f_{n+1}} & & \downarrow{\scriptstyle f_n} & & \downarrow{\scriptstyle f_{n-1}} & & \\ \cdots & \longrightarrow & D_{n+1} & \xrightarrow[d_{n+1}]{} & D_n & \xrightarrow[d_n]{} & D_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Una función de cadena induce (por restricción y paso a los factores de grupo) morfismos entre los ciclos, bordes y grupos de homología:

$$Z_n(f_\bullet) : Z_n(C_\bullet) \to Z_n(D_\bullet)$$
$$B_n(f_\bullet) : B_n(C_\bullet) \to B_n(D_\bullet)$$
$$f_* = H_n(f_\bullet) : H_n(C_\bullet) \to H_n(D_\bullet).$$

Definición 2.20 *Sean $C_\bullet = (C_n, c_n)$ y $D_\bullet = (D_n, d_n)$ dos complejos de cadenas y sea $f_\bullet : C_\bullet \to D_\bullet$ una función de cadena, decimos que $f_\bullet$ es un quasi-isomorfismo si los morfismos inducidos $f_* : H_n(C_\bullet) \to H_n(D_\bullet)$ son isomorfismos en los módulos (grupos) de homología para todo n.*

Teorema 2.21 *Los complejos de cadenas sobre un R-módulo y sus funciones de cadena, con la composición natural forman una categoría* $\mathbf{Chain}_R$.

Observación 2.22 *La categoría R-**MOD** es una sub-categoría de* $\mathbf{Chain}_R$ *pensando un R-módulo M del modo*

$$M \sim (\ldots \to \{0\} \longrightarrow C_0 = M \longrightarrow \{0\} \to \ldots)$$

Definición 2.23 *Una sucesión exacta (corta) de complejos de cadena*

$$0 \to C' \xrightarrow{f} C \xrightarrow{g} C'' \to 0$$

consiste de funciones de cadena f y g tal que $0 \to C'_n \xrightarrow{f_n} C_n \xrightarrow{g_n} C''_n \to 0$ es exacta para cada n.

Además de los morfismos inducidos $H_n(f)$ y $H_n(g)$, podemos definir un **morfismo de conexión** $\partial_n : H_n(C'') \to H_{n-1}(C')$, también llamado **operador borde**, el cual es inducido por la correspondencia $f_{n-1} \circ d_n \circ g_n^{-1}$

$$\begin{array}{ccc} & & C_n \xrightarrow{g_n} C''_n \ni z'' \\ & & \downarrow{\scriptstyle d_n} \\ z' \in C'_{n-1} & \xrightarrow{f_{n-1}} & C_{n-1} \end{array}$$

Lema 2.24 *El mapeo $z'' \to z'$ descrito anteriormente induce un homomorfismo bien definido $\partial_n : H_n(C'') \to H_{n-1}(C')$*

Demostración. Primero veamos esta asignación tiene sentido.
Para un ciclo $z'' \in C''_n$ con pre-imagen z bajo g_n la relación $(g_{n-1} \circ d_n)(z) = (d''_n \circ g_n)(z'') = 0$ y la exactitud muestra que existe z' con $d_n(z) = f_{n-1}(z')$.

Notemos que localmente tenemos el siguiente diagrama.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\cdots & \longrightarrow & C'_{n+1} & \xrightarrow{d'_{n+1}} & C'_n & \xrightarrow{d'_n} & C'_{n-1} & \xrightarrow{d'_{n-1}} & C'_{n-2} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle f_{n+1}} & & \downarrow{\scriptstyle f_n} & & \downarrow{\scriptstyle f_{n-1}} & & \downarrow{\scriptstyle f_{n-2}} & & \\
\cdots & \longrightarrow & C_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}} & C_n & \xrightarrow{d_n} & C_{n-1} & \xrightarrow{d_{n-1}} & C_{n-2} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle g_{n+1}} & & \downarrow{\scriptstyle g_n} & & \downarrow{\scriptstyle g_{n-1}} & & \downarrow{\scriptstyle g_{n-2}} & & \\
\cdots & \longrightarrow & C''_{n+1} & \xrightarrow{d''_{n+1}} & C''_n & \xrightarrow{d''_n} & C''_{n-1} & \xrightarrow{d''_{n-1}} & C''_{n-2} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

Ahora, de la relación $f_{n-2}d'_{n-1}z' = d_{n-1}f_{n-1}z' = d_{n-1}d_nz = 0$ y de la inyectividad de f_{n-2} demostramos que z' es un ciclo. Si elegimos cualquier otra pre-imagen $z + f_n w'$ de z'', entonces tenemos que reemplazar z' por $z' + d'_n w'$, entonces la clase de homología de z' esta bien definida. Por último, si cambiamos z'' por un borde, podemos reemplazar z por la suma de un borde y por lo tanto $d_n z$ no cambia. ■

Hay un teorema bastante útil en teoría de homología cuando consideramos sucesiones exactas cortas de complejos de cadenas.

Teorema 2.25 *Considerando la siguiente sucesión exacta de complejos de cadena:*

$$0 \to A_* \xrightarrow{f_*} B_* \xrightarrow{g_*} C_* \to 0$$

Entonces existe un R-homomorfismo $\partial_n : H_n(C) \to H_{n-1}(A)$ tal que, los grupos de homología bajo las funciones inducidas forman una sucesión exacta larga como sigue.

$$\cdots \to H_{n+1}(C_*) \xrightarrow{\partial_{n-1}} H_n(A_*) \xrightarrow{\overline{f_n}} H_n(B_*) \xrightarrow{\overline{g_n}} H_n(C_*) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A_*) \to \cdots$$

Demostración. Ver detalles en [5] ■

Definición 2.26 *Sean $f, g : C = (C_n, c_n) \to D = (D_n, d_n)$ funciones de cadena. Una homotopía de cadenas desde f a g es una sucesión $s_n : C_n \to D_{n+1}$ de homomorfismos los cuales satisfacen*

$$d_{n+1} \circ s_n + s_{n-1} \circ c_n = g_n - f_n.$$

Esta definición tiene dos explicaciones. Primero, uno puede definir una "homotopía de cadenas"de forma análoga a la definición topológica mediante el uso de los complejos de cadena análogo del intervalo unidad; segundo, esto codifica la relación borde de una homotopía geométrica.

Definición 2.27 *Sean f, g funciones de cadena, diremos que f y g son homotópicas o cadena homotópicas. Si existe una homotopía de cadenas desde f a g, denotaremos esto por $s : f \backsimeq g$.*

No es difícil probar que la "homotopía de cadenas"es una relación de equivalencia sobre el conjunto de funciones de cadenas $C \to D$. También tenemos que la homotopía de cadenas es compatible con la composición, al igual que con la homotopía de funciones continuas.

Proposición 2.28 *Funciones de cadena homotópicas inducen el mismo homomorfismo entre los grupos de homología.*

Definición 2.29 *Sea $C_\bullet$ un complejo de cadenas acotado de módulos finitamente generados. Definimos la característica de Euler de $C_\bullet$ como:*

$$\chi(C_\bullet) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} (-1)^k \dim H_k(C_\bullet)$$

Teorema 2.30 *La característica de Euler es un invariante de homotopía.*

Demostración. Sean $C_\bullet$ y $D_\bullet$ dos complejos de cadenas. Supongamos que $H_n(C_\bullet) \cong H_n(D_\bullet)$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Luego, como las funciones de cadena inducen un isomorfismo entre los módulos de homología, tememos $\dim H_n(C_\bullet) = \dim H_n(D_\bullet)$ para todo n. Por lo tanto se concluye $\chi(C_\bullet) = \chi(D_\bullet)$. ■

2.30.1. Complejo de cocadenas

Comenzaremos ahora con la construcción de una nueva estructura a partir de la idea de complejo de cadenas.

Sea $C_\bullet = (C_n, \partial_n | n \in \mathbb{Z})$ un complejo de cadena de R-módulos. Aplicamos el funtor[1] $\mathrm{Hom}_R(-, R)$ a $C_\bullet$ y obtenemos un complejo de cocadena $C^\bullet = (C^n, \delta^n)$ de R-módulos con $C^n = \mathrm{Hom}_R(C_n, R)$ y la función R-lineal:

$$\delta^n : C^n = \mathrm{Hom}_R(C_n, R) \to \mathrm{Hom}_R(C_{n+1}, R) = C^{n+1}$$

definida por $\delta^n(\varphi) = (-1)^{n+1}\varphi \circ \partial_{n+1}$, para $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(C_n, R)$. Esta construcción nos permite establecer la siguiente definición:

Definición 2.31 *Un complejo de cocadena $C^\bullet = (C^n, \delta^n | n \in \mathbb{Z})$ es una familia de módulos C^n, junto con homomorfismo $\delta^n : C^n \to C^{n+1}$ llamado* ***operadores de coborde*** *o* ***difirenciales***[2]*, tal que $\delta^{n+1} \circ \delta^n = 0$.*

[1] Definido en el ejemplo **2.10**.

[2] Un importante complejo de cadena surge desde formas diferenciales. Entonces uno no debería usar la terminología "co" aquí.

Al igual que en un complejo de cadena, podemos asociar a un complejo de cocadena $C^\bullet$ los módulos:

$$Z^n = Z^n(C^\bullet) = \ker(\delta^n)$$
$$B^n = B^n(C^\bullet) = \mathrm{Im}(\delta^{n-1})$$
$$H^n = H^n(C^\bullet) = Z^n/B^n$$

y llamaremos C^n, Z^n, B^n los módulos de **cocadenas, cociclos, cobordes** y a H^n el n-ésimo **módulo de cohomología** o simplemente la cohomología del complejo de cocadena.

Observación 2.32 *Dado un complejo de cocadenas, podemos definir* $C_n := C^{-n}$ *y* $\delta_n := \delta^{-n}$. *Luego se obtiene de forma natural un complejo de cadenas* $C_\bullet$ *donde* $H^{-n}(C^\bullet) = H_n(C_\bullet)$.

Ejemplo 2.33 *Consideremos el siguiente complejo de cocadena* $M^\bullet$ *de* $\mathbb{Z}$*-módulos*

$$M^i = \begin{cases} \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} & : i \geq 0 \\ 0 & : i < 0 \end{cases}$$

Con los siguientes diferenciales.

$$d^i(x) = \begin{cases} d^i(x) = 4x & : i \geq 0 \\ d^i(x) = 0 & : i < 0 \end{cases}$$

Luego, tenemos la siguiente situación

$$\cdots \to 0 \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \xrightarrow{4} \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \xrightarrow{4} \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \to \cdots$$

Es fácil probar que (M^i, d^i) *es un complejo de cocadenas. En efecto, para* $i \leq 0$ *es directo, y para* $i > 0$ *se concluye que* $\mathrm{Im}(4) = \{0, 4\}$ *y* $\ker(4) = \{0, 2, 4, 6\}$.

El módulo de cohomología para este complejo es:

$$H^i(M^\bullet) = \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & : i > 0 \\ \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} & : i = 0 \\ 0 & : i < 0 \end{cases}$$

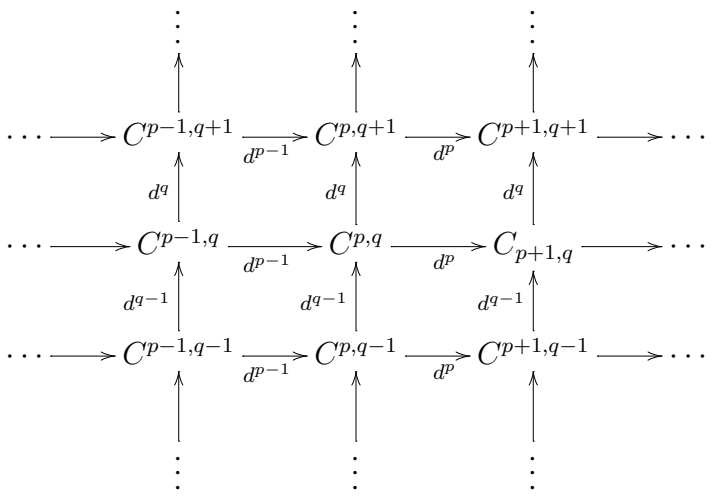
Desde ahora y por todo lo que resta de este trabajo usaremos simplemente la palabra complejo (cocomplejo) para referirnos a complejo de cadena (cocadena).

Definición 2.34 *Sea $s \in \mathbb{Z}$ y sea $C^\bullet = (C^i, d^i)_{i\in\mathbb{Z}}$ un cocomplejo. El operdador "cambio de altura" denotado, $\cdot[s]$, define un nuevo cocomplejo $C^\bullet[s]$ como sigue:*

$$C^r[s] := C^{r-s}.$$

Definición 2.35 *Un bi-complejo, es una colección de módulos $\{C^{p,q}\}_{p,q\in\mathbb{Z}}$ y funciones $d^p : C^{p,*} \to C^{p+1,*}$ y $d^q : C^{*,q} \to C^{*,q+1}$, tal que, $d^{p+1} \circ d^p = d^{q+1} \circ d^q = d^{q+1} \circ d^p + d^{p+1} \circ d^q = 0$.*

Se puede vizualizar como el siguiente enrejado:



Observación 2.36 *Notemos que $\{d^p\}_{p\in\mathbb{Z}}$ y $\{d^q\}_{q\in\mathbb{Z}}$, no necesariamente son funciones de cadena, ya que no conmutan con diferenciales.*

2.36.1. Cono de funciones

Introduciremos el concepto de cono de una función de cadena entre complejos, el cual utilizaremos en el Capítulo 4, para demostrar que la homología de Khovanov es una invariante.

Definición 2.37 *Sea $f^* : C^\bullet \to D^\bullet$ una función de cadena. El cono de funciones, denotado Cone(f^*) es el complejo $C^\bullet \oplus D^\bullet[-1]$ cuyo n-ésimo diferencial d está definido como:*

$$d(c,d) := (d_C(c), f(c) - d_D(d)), \quad \text{para cada } c \in C^n,\ d \in D^{n-1}$$

donde d_C, d_D son los diferenciales en $C^\bullet$ y $D^\bullet$ respectivamente y el signo negativo denota el inverso aditivo.

Ya que los elementos de Cone(f^*) pueden ser escritos como pares ordenados, sus diferenciales pueden ser escritos como matrices de la siguiente manera.

$$\begin{pmatrix} d_C^{n+1} & 0 \\ f^{n+1} & -d_D^n \end{pmatrix}$$

Observación 2.38 *Notemos que la composición de estas funciones R-lineales puede ser representada como multiplicación de matrices.*

Recordemos que $d_D^n f^n = f^{n+1} d_C^n$ para cada n, ya que f^* es una función de cadena por lo tanto el cono de funciones es de hecho un cocomplejo, ya que:

$$\begin{pmatrix} d_C^{n+1} & 0 \\ f^{n+1} & -d_D^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_C^n & 0 \\ f^n & -d_D^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_C^{n+1} d_C^n & 0 \\ f^{n+1} d_C^n - d_D^n f^n & d_D^n d_D^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.38.1. Espacios vectoriales $\mathbb{Z}$-graduados

Durante todo el siguiente capítulo trabajaremos con espacios vectoriales graduados (espacios vectoriales con alguna estructura adicional). A continuación, introducimos este concepto junto con algunas de sus principales propiedades.

Definición 2.39 *Una familia $A_* = (A_n | n \in \mathbb{Z})$ de espacios vectoriales[3] sobre cierto cuerpo $\mathbb{K}$, es llamada un espacio vectorial $\mathbb{Z}$-graduado. Llamaremos a A_n la componente de grado o dimensión n.*

[3]Esta definición se puede extender de manera natural a módulos sobre cierto anillo R.

Observación 2.40 *De manera equivalente podemos considerar $A = \oplus_{n\in\mathbb{Z}} A_n$ Diremos entonces que los elementos de A_n en A son homogeneos de grado n.*

Ejemplo 2.41 *Si $\mathbb{K}[x, y]$ es el anillo de polinomios en dos indeterminadas x, y, entonces el polinomio homogeneo de grado n, está descrito por $x^i y^{n-i}$; $0 \leq i \leq n$.*

Definición 2.42 *Sean A_* y B_* dos espacios vectoriales $\mathbb{Z}$-graduados. Un morfismo de grado k entre A_* y B_* es una familia de homomorfismos $f_n : A_n \to B_{n+k}$.*

Definición 2.43 *Consideremos los espacios vectoriales $A = \oplus_{n\in\mathbb{Z}} A_n$ y $A' = \oplus_{n\in\mathbb{Z}} A'_n$. La suma directa de A con A' es el espacio vectorial $\mathbb{Z}$-graduado definido como sigue.*

$$(A \oplus A')_n := (A_n \oplus A'_n).$$

Definición 2.44 *Sean $A = \oplus_{n\in\mathbb{Z}} A_n$ y $A' = \oplus_{n\in\mathbb{Z}} A'_n$ dos espacios vectoriales $\mathbb{Z}$-graduados. El producto tensorial de A con A' es el espacio vectorial $\mathbb{Z}$-graduado definido para todas las $\mathbb{Z}$-graduaciones k por:*

$$(A \otimes A')_k := \bigoplus_{i+j=k} (A_i \otimes A'_j).$$

Para $m \in \mathbb{N}$, la m-ésima potencia tensorial del espacio vectorial $\mathbb{Z}$-graduado A está denotada $A^{\otimes m}$

$$A^{\otimes m} := \underbrace{A \otimes A \otimes \ldots \otimes A}_{m}$$

Desde ahora en adelante y por todo lo que resta de este trabajo, cada vez que nos refiramos a espacios vectoriales graduados, será con una $\mathbb{Z}$-graduación.

Definición 2.45 *Sea $W = \oplus_{n\in\mathbb{Z}} W_n$ un espacio vectorial graduado. La dimensión graduada de W, denotada $q\dim(W)$, es la serie de potencias:*

$$q\dim(W) = q\dim(\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} W_n) := \sum_n q^n \dim(W_n).$$

Definición 2.46 *Sea $l \in \mathbb{Z}$. Sea $W = \oplus_{k\in\mathbb{Z}} W_k$. El operador "cambio de grado", denotado por $\cdot\{l\}$, define un nuevo espacio vectorial como sigue:*

$$W\{l\}_k := W_{k-l}.$$

Observación 2.47 *Si l es positivo, el operador $\cdot\{l\}$ "cambia"el espacio vectorial graduado "subiendo ", en dirección positiva, l lugares.*

Proposición 2.48 *Consideremos los espacios vectoriales graduados W y W', entonces:*

1. $q\dim(W \oplus W') = q\dim(W) + q\dim(W')$
2. $q\dim(W \otimes W') = q\dim(W) \cdot q\dim(W')$
3. $q\dim(W\{l\}) = q^l \cdot q\dim(W)$.

Demostración. Sólo probaremos (3.), dado que (1.) y (2.) se obtienen directamente de su definición.

3. Debemos demostrar que la función cambio $\cdot\{l\}$ modifica también la q-dimensión por q^l.

$$\begin{aligned} q\dim(W\{l\}) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} q^k \dim(W\{l\}_k) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} q^k \dim(W_{k-l}) \\ &= q^l \sum_{k\in\mathbb{Z}} q^{k-l} \dim(W_{k-l}) \\ &= q^l \sum_{\substack{j\in\mathbb{Z} \\ j=k-l}} q^j \dim(W_j) \\ &= q^l q\dim W \end{aligned}$$

■

2.48.1. Homología sobre espacios vectoriales graduados

Trasladaremos algunas definiciones sobre homología al contexto de espacios vectoriales graduados. Consideremos un complejo $W_\bullet = \{W_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ donde W_i es un espacio vectorial para todo i.

Observación 2.49 *En este contexto, los diferenciales de complejos son transformaciones $\mathbb{K}$-lineales graduadas de grado cero.*

Definición 2.50 *Sea U un espacio vectorial y sea W^* un cocomplejo de espacios vectoriales graduados. El producto tensorial $U \otimes W^*$ queda definido por el siguiente cocomplejo de espacios vectoriales graduados como sigue. El espacio vectorial graduado en grado homológico i es $\{U \otimes W^i\}$.*

Observación 2.51 *Si d^i es el i-ésimo diferencial de W^*, entonces el i-ésimo diferencial de $U \otimes (W^*)$ es $id_U \otimes d^i$. Este es un cocomplejo bien definido pues $(id_U \otimes d^{i+1}) \circ (id_U \otimes d^i) = (id_U id_U) \otimes (d^{i+1}d^i) = id_U \otimes 0 = 0$.*

Ahora daremos la definición de un concepto bastante útil para que en el siguiente capítulp podamos ver la relación entre la homología de Khovanov y el polinomio de Jones.

Definición 2.52 *Definimos la Característica graduada de Euler, χ_q, de un complejo acotado de espacios vectoriales graduados $W^\bullet$ es la suma alternante de las dimensiones graduados de la homología de espacios vectoriales graduados*

$$\chi_q(W_\bullet) := \sum_i (-1)^i q \dim H_i(W_\bullet).$$

Proposición 2.53 *Sea $C_\bullet$ un complejo acotado de espacios vectoriales graduados finitamente generados con diferenciales de grado cero. Entonces tenemos:*

$$\chi_q(C_\bullet) = \sum_i (-1)^i q \dim(C_i).$$

Demostración. *Consideremos un complejo acotado de espacios vectoriales finitamente generados. Por definición, sabemos que existe un* $r \in \mathbb{Z}$ *tal que* $C_i = 0$ *para* $i < 0$ *y* $i > r$*. Además se tiene que* $\dim(C_i) = \dim(\ker d_i) + \dim(\operatorname{Im} d_i)$ *y que* $\dim(H_i(C_\bullet)) = \dim(\ker d_i) - \dim(\operatorname{Im} d_{i-1})$ *los cuales son finitos, por lo que substituyendo en la característica graduada de Euler de* $C_\bullet$*.*

$$\begin{aligned}
\chi(C_\bullet) &= \sum_i (-1)^i \dim H_i(C_\bullet) \\
&= \sum_i (-1)^i \dim(\ker d_i / \operatorname{Im} d_{i+1}) \\
&= \sum_i (-1)^i (\dim(\ker d_i) - \dim(\operatorname{Im} d_{i+1})) \\
&= \dim(\ker d_0) - \dim(\operatorname{Im} d_1) - (\dim(\ker d_1) - \dim(\operatorname{Im} d_2)) + \cdots \\
&\qquad\qquad \pm (\dim(\ker d_r) - \dim(\operatorname{Im} d_{r+1})) \\
&= \dim(C_0) - \dim(C_1) + \cdots \pm \dim(C_r) \\
&= \sum_i (-1)^i \dim(C_i).
\end{aligned}$$

Con esto sólo hemos demostrado la proposición para el caso de espacios vectoriales, ahora veamos el caso de espacios vectoriales graduados. Supongamos que $C_\bullet$ *es un complejo de espacios vectoriales graduados, entonces la igualdad anterior se mantiene para cada q-graduación del espacio vectorial,* C_j*. Así la siguiente*

igualdad completa la demostración.

$$\begin{aligned}
\chi_q(C_\bullet) &= \sum_i (-1)^i q \dim H_i(C_\bullet) \\
&= \sum_i (-1)^i (\sum_j q^j \dim(H_i(C_\bullet)_j)) \\
&= \sum_j q^j (\sum_i (-1)^i \dim(H_i(C_\bullet)_j)) \\
&= \sum_j q^j (\sum_i (-1)^i \dim(C_i)_j) \\
&= \sum_i (-1)^i (\sum_j q^j \dim(C_i)_j) \\
&= \sum_i (-1)^i q \dim(C_i).
\end{aligned}$$

■

Parte II

Homología de Khovanov

Capítulo 3

Construcción de la Homología

En este capítulo introduciremos el principal objeto de estudio de este trabajo, la Homología de Khovanov, la cual resulta ser un invariante de links.

Comenzaremos este capítulo definiendo el bracket de Khovanov, el cual asocia un cocomplejo a un diagrama de link dado. Éste satisfacé relaciones análogas al bracket de Kauffman, pero en el contexto de cocomplejos de espacios vectoriales graduados. Al igual que el bracket de Kauffman, el bracket de Khovanov no es una invariante en sí misma. Análogamente, luego de asignarle una orientación al diagrama y hacer ciertos "cambios" convenientes, se obtiene el cocomplejo de Khovanov. El cual resulta ser un invariante de links, es decir, para dos links equivalentes los cocomplejos obtenidos de la construcción son quasi-isomorfos.

3.1. Escenario previo

En lo que sigue, por simplicidad, todos los espacios vectoriales graduados se considerarán sobre un cuerpo arbitrario[1] $\mathbb{K}$.
A continuación introduciremos algunas definiciones y construcciones necesarias para describir el bracket de Khovanov.

[1]En particular, si consideramos el cocomplejo de Khovanov sobre el cuerpo $\mathbb{Q}$, encontramos que el polinomio de Jones es la característica de Euler de este complejo.

3.1.1. El $\mathbb{K}$-espacio vectorial $\mathbb{Z}$-graduado

Sea V el espacio vectorial graduado generado por los elementos v_+ y v_-, cuyos grados son 1 y -1 respectivamente. Es decir, de modo más formal, tenemos que $V = (V_i)_{i\in\mathbb{Z}}$, donde:

$$V_i := \begin{cases} \text{vect}_{\mathbb{K}}\{v_+\} & : i = +1 \\ \text{vect}_{\mathbb{K}}\{v_-\} & : i = -1 \\ 0 & : \text{otro caso} \end{cases}$$

En otras palabras tenemos que,

$$V = \mathbb{K}_{-1} \oplus \mathbb{K}_{+1}.$$

En lo que sigue de este capítulo, cada vez que hagamos mención al espacio vectorial graduado V, será refiriéndonos a éste. Notar también que la dimensión graduada de V está dada por $q + q^{-1}$, es decir, $\text{qdim}(V) = q + q^{-1}$.

3.1.2. Operación Flatten

A continuación describiremos una operación, la cual toma un complejo de cadena, el cual está formado a su vez por complejos, formando un nuevo complejo de cadena.

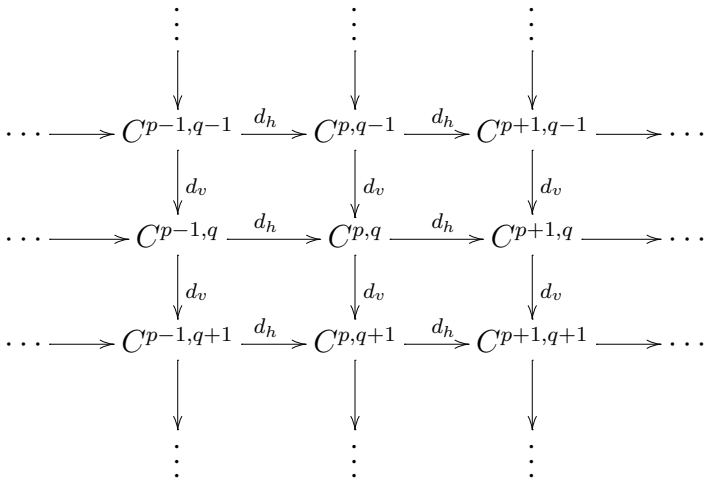
Sea $C^* = (C^p)^*_{p\in\mathbb{Z}}$ un complejo, tal que C^p es un complejo, para todo $p \in \mathbb{Z}$. Luego, las diferenciales de este complejo, son funciones de cadena, y por lo tanto se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} (C^p)^q & \xrightarrow{f^{p,q}} & (C^{p+1})^q \\ {\scriptstyle d^{p,q}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle d^{p+1,q}} \\ (C^p)^{q+1} & \xrightarrow[f^{p,q+1}]{} & (C^{p+1})^{q+1} \end{array}$$

Además, se tiene $d^{p,q+1}d^{p,q} = f^{p+1,q}f^{p,q} = 0$.

Teniendo esto en consideración, podemos formar un bi-complejo $\{C^{p,q}\}_{p,q\in\mathbb{Z}}$, del complejo inicial, incluyendo signos menos en los diferenciales para lograr que cada cuadrado anti-conmute. Específicamente, la componente $C^{p,q}$ es el objeto $(C^p)^q$ en la notación anterior.

Los diferenciales en $(C^p)^*$ están dados al tomar las funciones verticales $\{d_v := d^{p,q} : C^{p,q} \to C^{p,q+1}\}_{p,q\in\mathbb{Z}}$ y tomamos las funciones horizontales $\{d_h : C^{p,q} \to C^{p+1,q}\}_{p,q\in\mathbb{Z}}$ definidas por $(-1)^q(f^p)^q$. Entonces localmente tenemos el siguiente diagrama.



Es fácil probar que cada cuadrado del diagrama anterior anti-conmuta. En efecto, el cambio de signo en d_h implica que:

$$\begin{aligned} d_v^{p+1,q} \circ d_h^{p,q} =& d_v^{p+1,q} \circ (-1)^q f^{p,q} \\ =& (-1)^q f^{p,q+1} \circ d_v^{p,q} \\ =& (-1)^q (-1)^{-(q+1)} d_h^{p,q+1} \circ d_v^{p,q} \\ =& - d_h^{p,q+1} \circ d_v^{p,q} \end{aligned}$$

Con esto hemos formado un bi-complejo. A continuación definiremos la operación flatten, la cual nos entrega otro complejo.

Definición 3.2 *Sea $\{C^{p,q}\}$ el bi-complejo construido anteriormente. La operación*

flatten

$$\mathcal{F}[\cdots \to (C^p)^* \xrightarrow{(f^p)^*} (C^{p+1})^* \to \cdots]$$

define un nuevo complejo de cadenas, cuyas componentes son las sumas directas de las diagonales de $\{C^{p,q}\}$*, tomadas hacia abajo de derecha a izquierda. Así, la n-ésima componente es*

$$\bigoplus_{p+q=n} C^{p,q}$$

y sus diferenciales vienen dados por

$$d^n := \sum_{p+q=n} (d_v^{p,q} + d_h^{p,q})$$

3.3. Bracket de Khovanov

En esta sección daremos inicio a la construcción del bracket de Khovanov de un link, el cual es un complejo de cadenas formado por espacios vectoriales graduados. Además, como mencionamos al comienzo de este capítulo, para cada una de las relaciones **Kf1, Kf2, Kf3** tenemos un análogo.
Comenzaremos describiendo las tres relaciones que queremos que el bracket de Khovanov satisfaga. Luego, definiremos los espacios vectoriales graduado en cada grado junto con sus diferenciales para formar el complejo de cadenas. Finalmente demostraremos que estas definiciones satisfacen las tres relaciones del bracket de Khovanov.

El bracket Khovanov del diagrama de un link D, denotado $[\![D]\!]$, es un cocomplejo de espacios vectoriales graduados, el cual satisface las siguientes tres condiciones.

Kh1 $[\![\emptyset]\!]=0 \to \mathbb{K} \to 0$

Kh2 $[\![\bigcirc \coprod D]\!]=V\otimes[\![D]\!]$

Kh3 $[\![\diagup\!\diagdown]\!] = \mathcal{F}(0^* \to [\![)\,(]\!] \to [\![\asymp]\!]\{1\} \to 0^*)$

Observación 3.4 *En ocasiones nos referiremos al cocomplejo $[\![\cdot]\!]$ con el superindice $[\![\cdot]\!]^*$ y al espacio vectorial graduado en grado homológico r será denotado por $[\![\cdot]\!]^r$*

La propiedad **Kh1** establece que el bracket de Khovanov del nudo vacío es el complejo que es sólo no trivial en el grado 0, donde el espacio vectorial graduado es simplemente $\mathbb{K}$ en q-grado 0. **Kh2** define el comportamiento del bracket de la unión disjunta de un no nudo y D como el producto tensorial de $V \otimes [\![D]\!]$, explicado en el Definición 2.50

Por último, **Kh3**, relaciona el bracket de Khovanov del diagrama D con el bracket de Khovanov de sus smoothings. Explícitamente, supongamos D es el diagrama de link con $n > 0$ cruces. Luego escojamos un cruce en D al cual nos referiremos como el i-ésimo cruce. Sean D_0 y D_1 identicos a D pero con un 0-smoothing y un 1-smoothing en el i-ésimo cruce respectivamente, entonces dentro de la operación Flatten en **Kh3**, existe una función entre cocomplejos la cual es descrita por el siguiente diagrama.

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & [\![D_0]\!]^{i-1} & \longrightarrow & [\![D_0]\!]^{i} & \longrightarrow & [\![D_0]\!]^{i+1} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow & \overset{\oplus}{\swarrow} & \downarrow & \overset{\oplus}{\swarrow} & \downarrow & & \\
\cdots & \longrightarrow & [\![D_1]\!]^{i-1}\{1\} & \longrightarrow & [\![D_1]\!]^{i}\{1\} & \longrightarrow & [\![D_1]\!]^{i+1}\{1\} & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

En la fila superior se encuentra en el grado 0 y la fila inferior en el grado 1, y estas son las únicas filas no triviales del diagrama.

Por lo tanto el i-ésimo espacio vectorial graduado en el cocomplejo será el espacio vectorial $[\![D]\!]^i \oplus [\![D]\!]^{i-1}\{1\}$, tal como muestra la linea diagonal punteada.

Además, de las tres reglas, se tiene que el complejo $[\![\cdot]\!]$ sólo será no trivial en los grados homológicos $0 \leq i \leq n$. Por lo que podemos reescribir el espacio vectorial graduado del cocomplejo $[\![D]\!]$ como sigue.

$$[\![D]\!]^i = \begin{cases} [\![D_0]\!]^i & : i = 0 \\ [\![D_0]\!]^i \oplus [\![D_1]\!]^{i-1}\{1\} & : 0 < i < n \\ [\![D_1]\!]^{i-1}\{1\} & : i = n \end{cases}$$

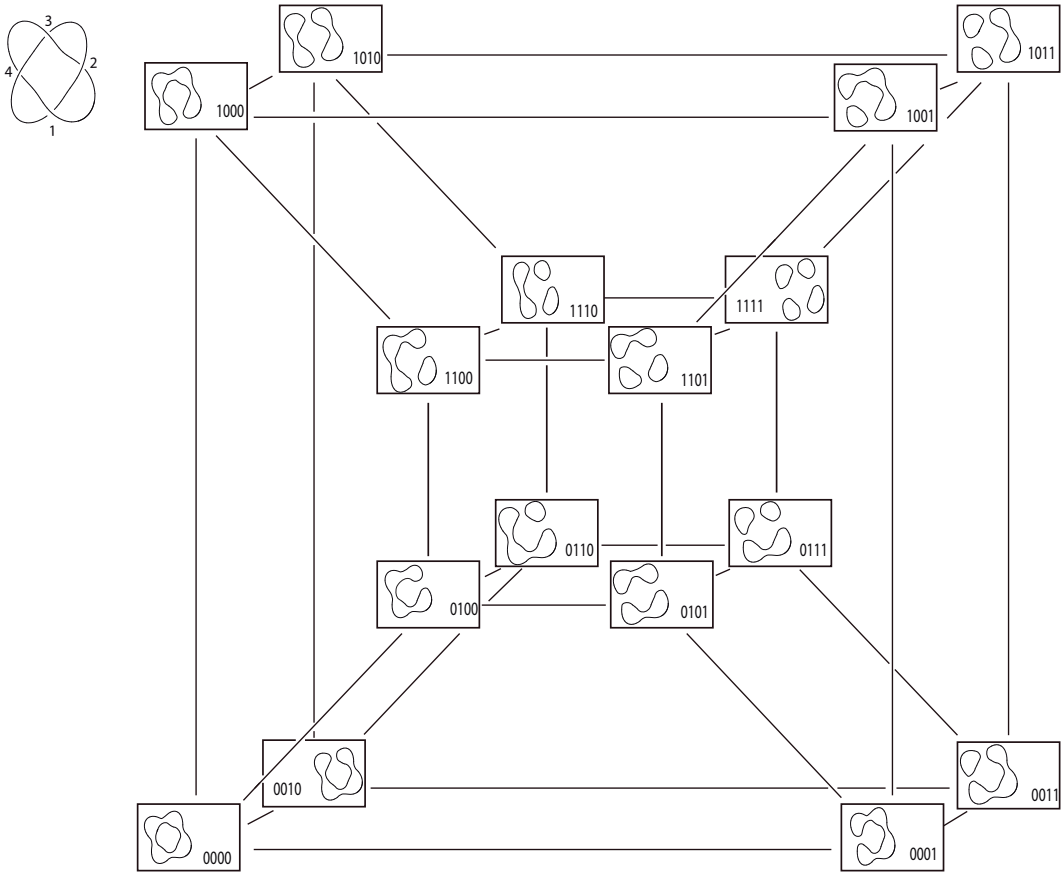
Observación 3.5 *Notemos que gracias a* ***Kh1*** *y* ***Kh2****, podemos deducir el bracket de Khovanov de la unión disjunta de k no nudos.*

$$[\![k \text{ no nudos disjuntos}]\!] = 0 \to V^{\otimes k} \to 0$$

Al igual que el bracket de Kauffmann, el bracket de Khovanov de un link D también es construido desde los estados de D. Sea D un link con n cruces, los cuales están ordenados arbitrariamente. Luego, cada estado de D puede ser indexado con una cadena $\alpha \in \{0,1\}^n$. Además, cada cadena puede ser asociada a un vértice del cubo n-dimensional mencionado en la Sección 2.10.1. En otras palabras, existe biyección entre los estados de D y los elementos $\alpha \in \{0,1\}^n$.

Observación 3.6 *Esta correspondencia es "natural"en el sentido de que una vez ordenados los cruces del link, entonces el i-ésimo elemento en α corresponde al smoothing hecho en el i-ésimo cruce.*

Ejemplo 3.7 *Diagrama cúbico asociado al link* 4_1^2



Como se definió en el Capítulo 1, el estado de un link D, es un diagrama en el cual todos los cruces del link fueron reemplazados por un smoothing, y por lo tanto es una colección de k no nudos disjuntos en el plano. Más explícitamente, el estado de D asociado a α, denotado S_α, se obtiene de la siguiente forma
Supongamos que el i-ésimo elemento en α es ε, entonces el i-ésimo cruce en D es reemplazado por un ε-smoothing, donde $\varepsilon = 0, 1$.

Definición 3.8 *Sea D un link y sea S_α un estado de D. Definimos el espacio vectorial graduado V_α asociado al estado S_α por:*

$$V_\alpha := V^{\otimes k_\alpha}\{r_\alpha\},$$

donde k_α es el número de componentes en S_α y $r_\alpha = |\alpha|$ es el número de 1-smoothings de S_α.

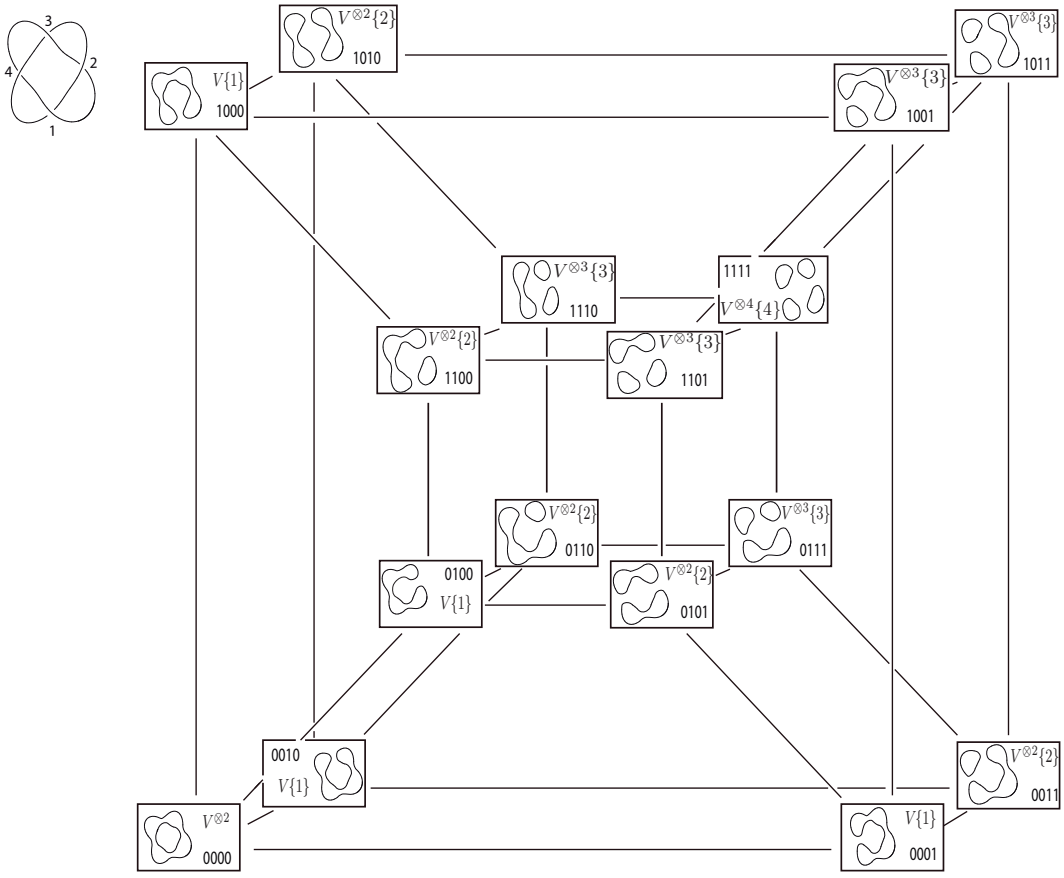
A continuación definiremos los espacios vectoriales graduados que conformarán el bracket de Khovanov el cual denotamos $[\![\cdot]\!]$. Luego, una vez definidos los diferenciales y ver que en efecto $[\![\cdot]\!]$ es un cocomplejo, demostraremos que este bracket de Khovanov satisface las relaciones **Kh1, Kh2** y **Kh3**.

Definición 3.9 *Sea D un link con n cruces el cual ordenamos arbitrariamente, y sea $\alpha \in \{0,1\}^n$. El espacio vectorial graduado en el grado r del bracket de Khovanov, $[\![D]\!]$, esta definido por la siguiente suma directa.*

$$[\![D]\!]^r = \bigoplus_{r_\alpha = r} V^{\otimes k_\alpha}\{r_\alpha\}. \tag{3.1}$$

Notar que $[\![D]\!]^r = 0$, para $r < 0$ y $r > n$. Por tanto, el bracket de Khovanov es un complejo acotado.

Ejemplo 3.10 *Bracket de Khovanov del link 4_1^2*



Tenemos

$$[\![\ ]\!] = [\![\ ]\!]^0 \to [\![\ ]\!]^1 \to [\![\ ]\!]^2 \to [\![\ ]\!]^3 \to [\![\ ]\!]^4$$

donde

$$[\![\ ]\!]^0 = V^{\otimes 2}, \quad [\![\ ]\!]^1 = \bigoplus_{i=1}^{4} V\{1\}, \quad [\![\ ]\!]^2 = \bigoplus_{i=1}^{6} V^{\otimes 2}\{2\},$$

$$[\![\ ]\!]^3 = \bigoplus_{i=1}^{4} V^{\otimes 3}\{3\}, \quad [\![\ ]\!]^4 = V^{\otimes 4}\{4\}.$$

Lema 3.11 *El espacio vectorial graduado en el grado r del bracket de Khovanov, $[\![D]\!]$, es independiente del orden que le demos a los cruces del diagrama de nudo D.*

Demostración. Sea $\sigma : \{0,1\}^n \to \{0,1\}^n$ una permutación sobre n elementos, la cual reorganiza los cruces. Observemos que $|\alpha| = |\sigma(\alpha)|$, entonces la altura no ha cambiado, aunque el smoothing S_α no necesariamente es el mismo que $S_{\sigma(\alpha)}$. Considerando la cadena $\alpha' = \sigma(\alpha)$, luego el smoothing $S_{\alpha'} = S_{\sigma(\alpha)}$, y entonces $k_{\alpha'} = k_{\sigma(\alpha)}$. Por lo tanto, una permutación sólo cambiará el orden en la suma directa

$$\bigoplus_{r_\alpha = r} V^{\otimes k_\alpha} r_\alpha,$$

para cada r, ya que, $\{\alpha : |\alpha| = r\} = \{\sigma(\alpha) : |\alpha| = r\}$. ■

Observación 3.12 *Notemos que aún no hemos definido una forma para ordenar los V_α en la suma directa anterior, entonces de alguna manera hemos definido el bracket de Khovanov salvo "forma de ordenar esta suma directa".*

Al comienzo de esta sección mencionamos que existe una biyección entre los vértices de un cubo n-dimensional y los espacios asociados a cada estado. Por lo cual antes de continuar, revisaremos más detalladamente el cubo n-dimensional.

3.12.0.1. Las aristas de cubo n-dimensional de smoothings

Sean $\alpha, \alpha' \in \{0,1\}^n$ tal que α y α' difieren exactamente un lugar, al cual no referimos como el i-ésimo cruces, luego sin pérdida de generalidad se tiene que $|\alpha| + 1 = |\alpha'|$. Sea $\zeta \in \{0,1,\star\}^n$, tal que ζ es lo mismo que de α y α' en todos lados excepto en el i-ésimo cruce (donde α y α' difieren) el cual es reemplazado con $\star$. Nos referiremos a este cruce en D como el i-ésimo cruce. En un cubo n-dimensional, hay exactamente una arista entre α y α', la cual denotaremos ζ como acabamos de definir. Todas las aristas en el cubo son de esta forma.

Para cada arísta ζ, definimos una función lineal graduada $d_\zeta : V_\alpha \to V_{\alpha'}$ entre espacios vectoriales graduados. En ocasiones diremos cubo de smoothings para referiremos al cubo de espacios vectoriales graduados asociado a cada estado.

Cada función d_ζ es una función lineal graduada entre los dos estados que solo afecta a los círculos que "interceptan"el i-ésimo cruce. En otras palabras, sean α y α' y S_α , $S_{\alpha'}$ sus respectivos estados, las dos cuerdas del i-ésimo cruce serán parte de un círculo o dos círculos, dependiendo si aplicamos un 0-smoothing o un 1-smoothing respectivamente (Ver Figura 3.1).

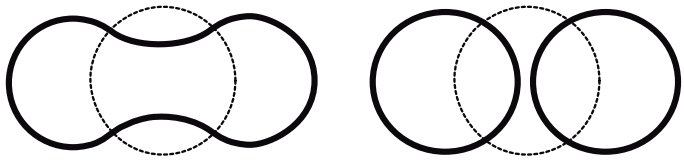


Figura 3.1:

Por lo tanto, S_α y $S_{\alpha'}$ difieren exactamente por un círculo, luego d_ζ mandará estos dos círculos a uno, o viceversa. Queremos que d_ζ sea la identidad en el resto de los círculos. Cada círculo será representado por V en el complejo, entonces estas funciones son equivalentes a encontrar funciones lineales graduadas que envían $V \otimes V \to V$ y $V \to V \otimes V$.

Además, requerimos que d_ζ sea una función de grado 0 (recordando que esto significa que la q-graduación de un elemento homogéneo no cambiará d_ζ). Primero debemos tener en cuenta el q-cambio de cada complejo. La función $d_\zeta : V_\alpha \to V_{\alpha'}$ envía $V^{\otimes k_\alpha}\{r_\alpha\} \to V^{\otimes k_{\alpha'}}\{r_{\alpha'}\}$, como $r_{\alpha'} = r_\alpha + 1$. Por lo tanto, requerimos que las funciones $V \otimes V \to V$ y $V \to V \otimes V$ sean de grado homogéneo -1 (respecto de la q-graduación).

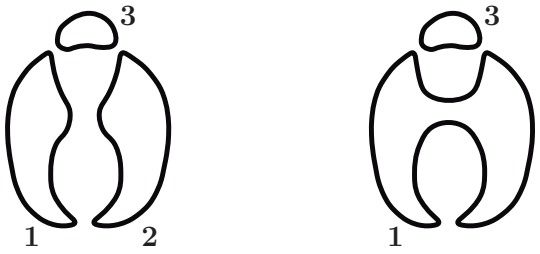
Estas funciones, conocidas como m y Δ están definidas sobre los generadores de V y $V \otimes V$ como sigue:

$$\begin{array}{ll} m : V \otimes V \to V & \Delta : V \to V \otimes V \\ v_+ \otimes v_+ \to v_+ & v_+ \to v_+ \otimes v_- + v_- \otimes v_+ \\ v_+ \otimes v_- \to v_- & v_- \to v_- \otimes v_- \\ v_- \otimes v_+ \to v_- & \\ v_- \otimes v_- \to 0 & \end{array}$$

Note que estas funciones son homogéneas de grado -1, ver [9, Proposición 1]. Por supuesto S_α y $S_{\alpha'}$ serán los mismos excepto en los círculos que son parte de i-ésimo cruce. Queremos que estos círculos no sean afectados por la función lineal graduada. Así la función $d_\zeta : V_\alpha \to V_{\alpha'}$ actuará como la identidad sobre los otros círculos en S_α y localmente como m o Δ, dependiendo del caso.

Observación 3.13 *Sea $\tau : V \otimes V \to V \otimes V$ la función twist, $\tau(a \otimes b) = b \otimes a$. Observemos que ya no hay un orden natural de los círculos de S_α (o el producto tensorial de los círculos $V^{\otimes k}$), esto fuerza a que m y Δ conmuten ($m\tau = m$) y co-conmuten ($\tau\Delta = \Delta$) respectivamente. Entonces $m(v_+ \otimes v_-) = m(v_- \otimes v_+)$ es forzado y $\Delta(v_+) = v_+ \otimes v_- + v_- \otimes v_+ = v_- \otimes v_+ + v_+ \otimes v_- = \tau(\Delta(v_+))$ también.*

Ejemplo 3.14 *La función $d_{0\star00}$ del Nudo ocho.*



Por conveniencia, etiquetamos los círculos en cada estado. Luego se observa que $d_{0\star00}$ no altera a V_3, pero envía $V_1 \otimes V_2 \to V_1$. Por lo que tenemos la "fusión" de dos círculos etiquetados por 1 y 2, lo cual ocurre por aplicar m_{12} donde el subíndice hace referencia a los círculos que se fusionarán. De forma similar id_3 es la función identidad sobre el círculo con la etiqueta 3. Por lo tanto, en este caso tenemos:

$$d_{0\star00} = m_{12} \otimes id_3$$

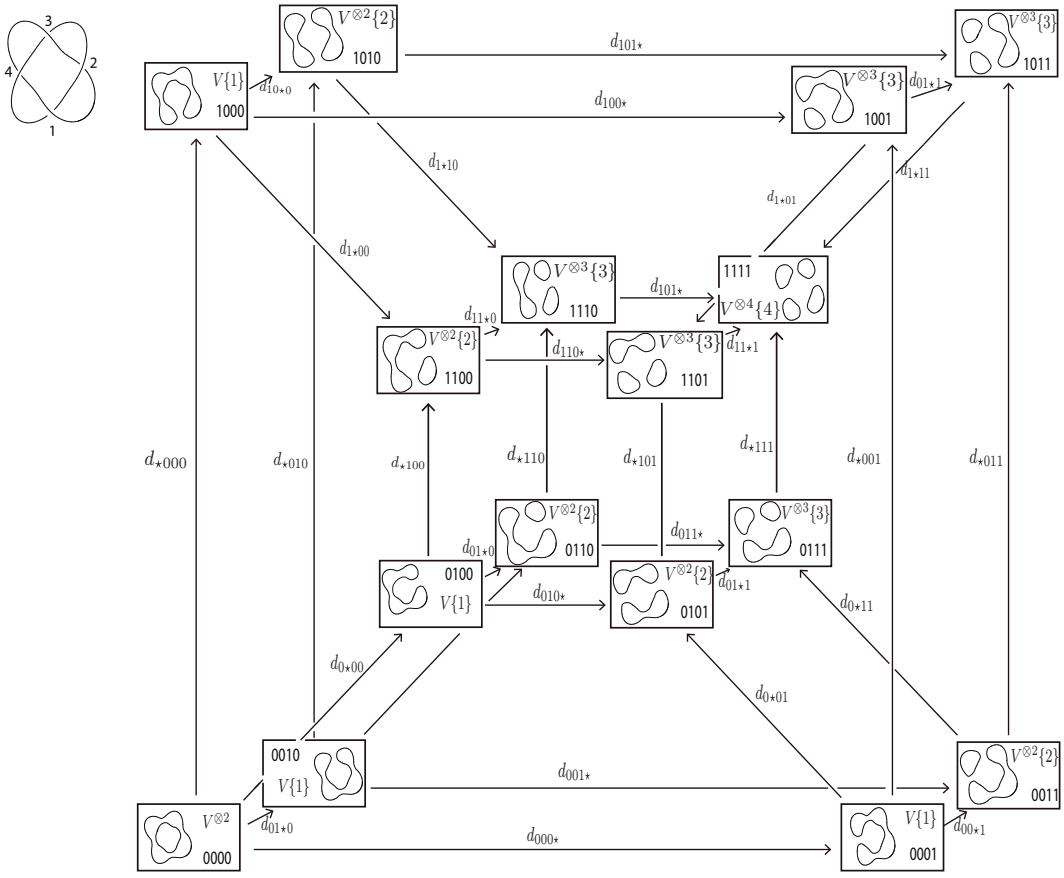
Definimos los diferenciales de este complejo como los las sumas de todas las aristas del cubo n-dimensional, salvo algunos signos que se incluyen por conveniencia. Formalmente tenemos.

Definición 3.15 *Sea Z_n la colección $\zeta \in \{0,1,\star\}^n$, donde ζ contiene exactamente una $\star$. Sea $s : \{0,1,\star\}^n \to \mathbb{Z}^{\geq 0}$ la función que envía cada cadena de $\{0,1,\star\}^n$ al número de $1_{s'}$ que hay a la izquierda de $\star$. El r-ésimo diferencial del complejo de Khovanov es como sigue:*

$$d^r := \sum_{\substack{|\zeta|=r \\ \zeta \in Z_n}} (-1)^{s(\zeta)} d_\zeta \tag{3.2}$$

donde $|\zeta|$ es la altura de ζ y es el número de $1'_s$ en ζ.

Ejemplo 3.16



Donde:

$$d^0 = \sum_{|\zeta|=0} (-1)^{s(\zeta)} d_\zeta, \quad d^1 = \sum_{|\zeta|=1} (-1)^{s(\zeta)} d_\zeta,$$

$$d^2 = \sum_{|\zeta|=2} (-1)^{s(\zeta)} d_\zeta, \quad d^3 = \sum_{|\zeta|=3} (-1)^{s(\zeta)} d_\zeta.$$

Observación 3.17 *Notemos que las funciones $\{d^r\}_{r\in\mathbb{Z}}$ junto con los espacios vistos en la Definición 3.9 forman una sucesión bien definida de espacios vectoriales graduados sobre el bracket de Khovanov. Por lo tanto, queda por demostrar que esta es de hecho un complejo, lo cual se concluirá del siguiente resultado.*

Lema 3.18 *Si las caras del cubo n-dimensional conmutan sin signo, entonces el bracket de Khaovanov es un cocomplejo.*

Demostración. Basta demostrar que $(-1)^{s(\zeta)}$ en la ecuación (3.2), asegura que en cada cara del cubo n-dimensional hay un número impar de signos menos. Por lo tanto, si cada cara conmuta sin los signos, entonces ellas anti-conmutaran con el signo.
Las cuatro arístas en una cara del cubo n-dimensional son de la forma $\alpha_1 \star \alpha_2 0 \alpha_3$, $\alpha_1 \star \alpha_2 1 \alpha_3$, $\alpha_1 0 \alpha_2 \star \alpha_3$, y $\alpha_1 1 \alpha_2 \star \alpha_3$, donde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \{0,1\}^n$. Luego
$s(\alpha_1 \star \alpha_2 0 \alpha_3) = s(\alpha_1 \star \alpha_2 1 \alpha_3)$ y $s(\alpha_1 0 \alpha_2 \star \alpha_3) + 1 = s(\alpha_1 1 \alpha_2 \star \alpha_3)$ ■
Luego, para demostrar que el bracket de Khovanov es de hecho un cocomplejo, basta probar que cada cara del cubo n-dimensional de smoothings conmuta, lo cual se sigue del siguiente teorema.

Teorema 3.19 *Cada cara del cubo n-dimensional de smoothings conmuta.*

Demostración. Para más detalles de esta demostración ver [5]. ■

Falta verificar que el bracket de Khovanov es invariante bajo el orden de los cruces. Ya hemos mencionado que los espacios del bracket de Khovanov son invariantes bajo ordenamiento de los cruces, pero falta por demostrar que el bracket de Khovanov es invariante salvo isomorfismo (como complejo) bajo ordenamiento de los cruces. Primero notemos que, en general, el cubo n-dimensional de dos diagramas de nudos ordenados de maneras diferentes, son el mismo antes de considerar el signo $(-1)^{s(\zeta)}$. Observemos que cada arista del cubo depende sólo de los vértices. Si uno permuta el orden de los cruces por σ, entonces la altura de α no cambia, $r_\alpha = r_{\sigma(\alpha)}$ (todavía hay el mismo número de 1-smoothings). Así, el diferencial d_ζ no cambia, sin embargo el signo $(-1)^{s(\zeta)}$ si cambia.

Proposición 3.20 *El bracket de Khovanov como se define en Definición 3.9 y la Definición 3.15 es invariante del orden de los cruces (salvo isomorfismo).*

Como habíamos adelantado al comienzo, demostraremos que el bracket de Khovanov tal como lo hemos definido satisface las relaciones **Kh1, Kh2** y **Kh3**. La siguiente proposición y demostración es análoga a probar que el bracket de

Kauffman esta bien definido, pero sólo comprobaremos que los espacios del cocomplejo satisface las tres relaciones. Esto refuerza el hecho de que el bracket de Khovanov esta construido de una manera análoga al bracket de Kauffman. De hecho, como el bracket de Kauffman, las relaciones **Kh1, Kh2** y **Kh3** define espacios únicos del complejo (salvo isomorfismo). Lo que hace que las cosas sean más confusas en estas definiciones son las funciones de cadena del cocomplejo. Ellas satisfacen las tres relaciones **Kh1, Kh2** y **Kh3**, pero las tres relaciones no definen funciones de cadena únicas del bracket de Khovanov.

Teorema 3.21 *Sea D el diagrama de un nudo. El complejo de cadena $[\![D]\!]$ con el r-ésimo espacio vectorial graduado como lo definimos en Definición 3.9, y los diferenciales como definimos en Definición 3.15 satisfacen las tres relaciones de Khovanov **Kh1, Kh2** y **Kh3**.*

Demostración. Recordemos que para cada $\mathbb{K}$-espacio vectorial W, fijamos por convención que $W^{\otimes 0} = \mathbb{K}$. Consideremos el link vacío, $\emptyset$. Entonces por definición, tendremos el siguiente bracket de Khovanov del link vacío.

$$[\![\emptyset]\!] := [\cdots \to 0 \to V^{\otimes 0} \to 0 \to \cdots]$$

Por lo tanto, ya que $V^{\otimes 0} = \mathbb{K}$, **Kh1** se satisface.

Ahora procederemos a demostrar que se satisface **Kh2**. Consideremos el diagrama de nudo D y un no nudo $\bigcirc$. Sea S_α un estado de D. Entonces el estado de $D \coprod \bigcirc$ correspondiente a α es $S_\alpha \coprod \bigcirc$. Por lo tanto, si es k_α el número de círculos en S_α, entonces $k_\alpha + 1$ será el número de círculos en $S_\alpha \coprod \bigcirc$. Además si tenemos que del estado de D es r_α entonces esta será la misma altura del correspondiente estado de $S \coprod \bigcirc$. Por lo tanto, por todo lo anterior tendremos la siguiente igualdad para

todo r.

$$\begin{aligned}[\![D \coprod \bigcirc]\!]^r &= \bigoplus_{r_\alpha = r} V^{\otimes(k_\alpha+1)}\{r_\alpha\} \\ &= \bigoplus_{r_\alpha = r} V \otimes V^{k_\alpha}\{r_\alpha\} \\ &= V \otimes (\bigoplus_{r_\alpha = r} V^{\otimes k_\alpha}\{r_\alpha\}) \\ &= V \otimes [\![D]\!]\end{aligned}$$

Los sumando de los diferenciales actúan como la identidad sobre todos los círculos que no son parte de los cruces en los cuales se está trabajando. Por lo tanto su d_ζ es el r-ésimo diferencial de $[\![D]\!]$, tendremos el r-ésimo diferencial de de $[\![D \coprod \bigcirc]\!]$ es $d_\zeta \otimes id_V$ como queríamos.

Para la demostración de **Kh3** procederemos por inducción sobre el número de cruces del diagrama de nudo D. Si D no tiene cruces y l componentes entonces $[\![D]\!]$ esta formado por los siguientes espacios

$$[\![D]\!]^r = \begin{cases} V^{\otimes l} & : r = 0 \\ 0 & : r \neq 0 \end{cases}$$

Supongamos que la proposición se cumple para una proyección de un nudo con $n = k$ cruces. Entonces vamos a demostrar que una proyección con $n = k + 1$ satisface **Kh3**.

Sea D el diagrama de un nudo con $k + 1$ cruces con una numeración arbitraria de sus cruces. Escojamos el i-ésimo cruces de D. Sean D_0 y D_1 los mismos diagramas que D pero con un 0-smoothing y 1-smoothing en el i-ésimo cruce respectivamente. Necesitamos demostrar que $[\![D]\!]$ como definimos satisface la relación **Kh3**, esto es $[\![D]\!] = \mathcal{F}[0 \to [\![D_0]\!] \to [\![D_1]\!]\{1\} \to 0]$.

Comenzaremos demostrando que los espacios de $[\![D]\!]$ satisfacen **Kh3**. Entonces, mostraremos que los espacios del complejo. $[\![D]\!]$ son como siguen:

$$[\![D]\!]^r = \begin{cases} [\![D_0]\!]^r & : r = 0 \\ [\![D_0]\!]^r \oplus [\![D_1]\!]^{r-1}\{1\} & : 0 < r < k+1 \\ [\![D_1]\!]^{r-1}\{1\} & : r = k+1 \end{cases}$$

Antes de comenzar introduciremos una notación conveniente.

Para $1 \leq j \leq k$, sea α_j el j-ésimo elemento de la cadena $\alpha \in \{0,1\}^k$. Para algún $\alpha \in \{0,1\}^{k-1}$, tomemos α^0 y α^1 como representantes de un elemento de $\{0,1\}^k$ tal que el i-ésimo elemento en la cadena α^0 es 0 y $(\alpha^0)_{j<i} = \alpha_j$ y $(\alpha^0)_{j>i} = \alpha_{j-1}$. De forma similar el i-ésimo elemento en la cadena α^1 es 1 y satisface $(\alpha^1)_{j<i} = \alpha_j$ y $(\alpha^1)_{j>i} = \alpha_{j-1}$. Denotemos tambien k^0_α el número de círculos de D_0 con smoothing α y k^1_α el número de círculos en D_1. Así tenemos que $k^0_\alpha = k_{\alpha^0}$ y$k^1_\alpha = k_{\alpha^1}$. Notemos que r_α depende sólo de α y no del estado en sí mismo y que $r_{\alpha^0} = r_\alpha = r_{\alpha^1} - 1$. Por lo que:

$$\begin{aligned}
[\![D]\!]^r &:= \bigoplus_{\substack{r_\alpha = r \\ \alpha \in \{0,1\}^{k+1}}} V^{\otimes k_\alpha}\{r_\alpha\} \\
&= \Big(\bigoplus_{\substack{r_{\alpha^0} = r \\ \alpha^0 \in \{0,1\}^{k+1}}} V^{\otimes k_{\alpha^0}}\{r_{\alpha^0}\}\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{\substack{r_{\alpha^1} = r \\ \alpha^1 \in \{0,1\}^{k+1}}} V^{\otimes k_{\alpha^1}}\{r_{\alpha^1}\}\Big) \\
&= \Big(\bigoplus_{\substack{r_{\alpha^0} = r \\ \alpha^0 \in \{0,1\}^{k+1}}} V^{\otimes k_{\alpha^0}}\{r_{\alpha^0}\}\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{\substack{r_{\alpha^1} - 1 = r-1 \\ \alpha^1 \in \{0,1\}^{k+1}}} (V^{\otimes k_{\alpha^1}}\{r_{\alpha^1} - 1\}\{1\})\Big) \\
&= \Big(\bigoplus_{\substack{r_{\alpha^0} = r \\ \alpha^0 \in \{0,1\}^{k}}} V^{\otimes k^0_\alpha}\{r_\alpha\}\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{\substack{r_{\alpha^1} = r-1 \\ \alpha^1 \in \{0,1\}^{k}}} (V^{\otimes k^1_\alpha}\{r_\alpha\}\{1\} \\
&= [\![D_0]\!]^r \oplus [\![D_1]\!]^{r-1}\{1\}.
\end{aligned}$$

La segunda igualdad es porque $\{\alpha^0 : \alpha \in \{0,1\}^k\} \cup \{\alpha^1 : \alpha \in \{0,1\}^k\} = \{0,1\}^{k+1}$ y $\{\alpha^0 : \alpha \in \{0,1\}^k\} \cap \{\alpha^1 : \alpha \in \{0,1\}^k\} = \emptyset$. El trabajo anterior es suficiente para decir que los espacios definidos en Definición 3.9 satisfacen **Kh3**.

Finalmente demostremos que los diferenciales de $[\![D]\!]$ también satisfarán **Kh3**, lo cual demostraremos por inducción sobre el número de cruces de D. Supongamos que D tiene n=1 cruces, entonces hay un 0-smoothing, S_0 y un 1-smoothing S_1 de D. Sea k_i el número de círculos de S_i, $i \in \{0,1\}$. Entonces el (único no trivial) diferencial es definido por uno de los siguientes: $m \otimes id_{V^{(\otimes k_0 - 2)}}$ o

$\Delta \otimes id_{V^{(\otimes k_0-1)}}$. Este es también el único diferencial del bi-complejo costruido desde $[0 \to [\![D_0]\!] \to [\![D_1]\!]\{1\} \to 0]$, y el único sumando de este diferencial. Ya que el dominio es $[\![D_0]\!]^0$, $(-1)^0 = 1$ entonces no hay signo menos, como requeríamos.

Ahora, por inducción consideremos un diagrama de nudo D con $n = k+1$ cruces. Sean D_0 y D_1 los smoothings de D los cuales difieren sólo en el $(k+1)$-ésimo cruce. Por definición, sabemos que el r-ésimo diferencial de $[\![D_0]\!]$ y $[\![D_1]\!]$ es $\sum_{|\zeta|=r}(-1)^{s(\zeta)}d_\zeta$ con $\zeta \in Z_k$.
Aunque, en la notación respecto a los smoothings de D, estos se convierten en $\sum_{|\zeta 0|=r}(-1)^{s(\zeta 0)}d_{\zeta 0}$ y $\sum_{|\zeta 1|=r}(-1)^{s(\zeta 1)}d_{\zeta 1}$ respectivamente. Note que $s(\zeta) = s(\zeta 0) = s(\zeta 1)$. Ahora veamos los diferenciales correspondientes al cruce $(k+1)$, el cual queremos mostar que se forman del bi-complejo que viene a continuación. Es decir, queremos mostrar que $d^i = \sum_{p+q=i}(d_v^{p,q} + d_h^{p,q})$.

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & [\![D_0]\!]^{r-1} & \longrightarrow & [\![D_0]\!]^{r} & \longrightarrow & [\![D_0]\!]^{r+1} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \sum_{|\alpha|=r-1} d_{\alpha\star}} & & \downarrow{\scriptstyle \sum_{|\alpha|=r} d_{\alpha\star}} & & \downarrow{\scriptstyle \sum_{|\alpha|=r+1} d_{\alpha\star}} & & \\
\cdots & \longrightarrow & [\![D_1]\!]^{r-1}\{1\} & \longrightarrow & [\![D_1]\!]^{r}\{1\} & \longrightarrow & [\![D_1]\!]^{r+1}\{1\} & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

Por lo tanto, el r-ésimo diferencial de $[\![D]\!]$ puede ser escrito como sigue:

$$\begin{aligned}
d^r &= \sum_{\substack{|\zeta|=r \\ \zeta \in Z_{k+1}}} (-1)^{s(\zeta)} d_\zeta \\
&= \sum_{\substack{|\zeta|=r \\ \zeta \in Z_k}} (-1)^{s(\zeta 0)} d_{\zeta 0} + \sum_{\substack{|\zeta|=r-1 \\ \zeta \in Z_k}} (-1)^{s(\zeta 1)} d_{\zeta 1} + \sum_{\substack{|\alpha|=r \\ \alpha \in \{0,1\}^k}} (-1)^{|\alpha|} d_{\alpha\star} \\
&= d_0^r + d_1^{r-1} + \sum_{\substack{|\alpha|=r \\ \alpha \in \{0,1\}^k}} (-1)^{|\alpha|} d_{\alpha\star}.
\end{aligned}$$

La segunda igualdad se obtiene por los siguientes hechos: $\{\zeta 0 : \zeta \in Z_k\} \cup \{\zeta 1 : \zeta \in Z_k\} \cup \{\alpha\star : \alpha \in \{0,1\}^k\} = Z_{k+1}$ y $\{\zeta 0 : \zeta \in Z_k\} \cap \{\zeta 1 : \zeta \in Z_k\} \cap \{\alpha\star : \alpha \in \{0,1\}^k\} = \emptyset$. La última suma es exactamente el r-ésimo diferencial como se define a partir de un bi-complejo de la forma anterior, comor queríamos. ■

3.22. La homología de Khovanov

Definición 3.23 *Sea D el diagrama de un nudo orientado con n_+ cruces positivos y n_- cruces negativos.*

1. *El cocomplejo de Khovanov $\mathcal{C}^*(D)$ se define como sigue.*

$$\mathcal{C}^*(D) := [\![D]\!][-n_-]\{n_+ - 2n_-\}$$

2. *El r-ésimo módulo de homología de Khovanov, denotado $Kh^r(D)$, es la homología del cocomplejo $\mathcal{C}^*(D)$.*

Notación 4 *Consideremos el r-ésimo espacio vectorial del cocomplejo de Khovanov, $\mathcal{C}^r(D)$. El espacio vectorial en q-grado m de $\mathcal{C}^r(D)$ es denotado $\mathcal{C}^r_m(D)$. De manera similar, el espacio vectorial en q-grado m del r-ésimo módulo de homología del cocomplejo de Khovanov es denotado $Kh^r_m(D)$. Entonces tenemos*

$$Kh^r(D) = \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} Kh^r_m(D)$$

Observación 3.24 *Esto sigue la notación estándar, tanto del grado homológico de un cocomplejo y la q*dim *de espacios vectoriales graduados.*
Además, notar que a pesar de en esta sección hemos utilizado $\mathbb{K}$-espacios vectoriales $\mathbb{Z}$-graduados, todo puede ser generalizado a R-módulos $\mathbb{Z}$-graduados[2], donde R es un anillo conmutativo con unidad.

Definición 3.25 *Sea D un link orientado. El polinomio graduado de Poincaré asociado al complejo $\mathcal{C}^*(D)$ en la variable t, denotado $Kh(D)$, queda definido como sigue*

$$Kh(D) := \sum_r t^r q \dim Kh^r(D)$$

Finalmente, enunciamos la propiedad fundamental de la homología de Khovanov.

[2]De hecho artículo original de Khovanov, la definición está hecha considerando el anillo de polinomios $\mathbb{Z}[x]$.

Teorema 3.26 *(Khovanov 2000) La homología de Khovanov es un invariante de links.*

Demostración. El lector podrá ver los detalles de la demostración de este teorema en el Capítulo 4. ■

Teorema 3.27 *Sea D un link orientado. Las dimensiones graduadas de los módulos de homología $Kh^r(D)$ son invariantes de nudos.*

Corolario 3.28 *El polinomio Kh(D) en las variables t y q, es un invariante de links.*

Antes de concluir esta sección, observemos que para $t = -1$ obtenemos la característica graduada de Euler de la homología de Khovanov.

3.29. Relación con el Polinomio de Jones

A continuación veremos la relación que existe entre el polinomio de Jones y la homología de Khovanov.

Esta relación y por la que se dice que la homología es una categorización del polinomio de Jones viene dada por la siguiente proposición.

Proposición 3.30 *El polinomio de Jones no normalizado es la característica graduada de Euler de la homología de Khovanov de un nudo orientado D.*

Demostración. Sabemos de la Proposición 2.52 que la característica graduada de Euler de un espacio vectorial graduado finitamente generado C^* es igual a la suma alternante de las dimensiones graduadas del complejo C^*. También, recordemos que el polinomio de Jones dado por el Teorema 1.41 es $\hat{J}(D) = (-1)^{n_-} q^{n_+ 2n_-} \langle D \rangle$.

Usando las propiedades de $q\dim$, las siguientes igualdades se mantienen .

$$\begin{aligned} q\dim([\![D]\!]^r) =& q\dim(\bigoplus_{r_\alpha=r} V_\alpha) \\ =& \sum_{r_\alpha=r} q\dim(V^{\otimes k_\alpha}\{r_\alpha\}) \\ =& \sum_{r_\alpha=r} q^{r_\alpha} q\dim(V^{\otimes k_\alpha}) \\ =& \sum_{r_\alpha=r} q^{r_\alpha}(q\dim V)^{k_\alpha} \\ =& \sum_{r_\alpha=r} q^{r_\alpha}(q+q^{-1})^{k_\alpha}. \end{aligned}$$

Debemos considerar también el cambio $\cdot[-n_-]\{n_+-2n_-\}$. Recordemos que $q\dim(W\{l\}) = q^l q\dim W$. Notar que el cambio $[n_-]$ no afecta la q-dimensión, pero afecta el exponente de (-1) en la característica de Euler moviendo $i \mapsto i+n_-$. Por lo tanto, tenemos lo siguiente.

$$\begin{aligned} q\dim(\mathcal{C}^r(D)) =& q\dim([\![D]\!]^r[-n_-]\{n_+-2n_-\}) \\ =& q^{n_+-2n_-} q\dim([\![D]\!]^{r+n_-}). \end{aligned}$$

Por lo tanto, sumando sobre todo r, encontramos la caracteristica graduada de Euler de $\mathcal{C}(D)$.

$$\begin{aligned} \chi_q(\mathcal{C}^*(D)) :=& \sum_j (-1)^j q\dim(\mathcal{C}^j(D)) \\ =& \sum_j (-1)^j q^{n_+-2n_-} q\dim([\![D]\!]^{j+n_-}) \\ =& \sum_i (-1)^{i-n_-} q^{n_+-2n_-} q\dim([\![D]\!]^i) \\ =& (-1)^{n_-} q^{n_+-2n_-} \sum_i (-1)^i (\sum_{r_\alpha=i} q^{r_\alpha}(q+q^{-1})^{k_\alpha}) \\ =& (-1)^{n_-} q^{n_+-2n_-} \sum_{\alpha\in\{0,1\}^n} (-1)^{r_\alpha}(q^{r_\alpha}(q+q^{-1})^{k_\alpha}) \\ =& (-1)^{n_-} q^{n_+-2n_-} \langle D\rangle. \end{aligned}$$

La cuarta igualdad es sumando sobre todos los $\alpha \in \{0,1\}^n$. En otras palabras,

$\cup_{i\in\mathbb{Z}}\{\alpha \in \{0,1\}^n : r_\alpha = i\} = \{0,1\}^n$. Notemos que la última linea es el polinomio de Jones no normalizado de D como queríamos. (Ver Observación 1.42) ■

Ejemplo 3.31 *Calculemos el polinomio de Jones de* *, usando la homología de Khovanov*

Primero denotemos por $D =$

Sabemos por definición que $C^*(D) = [\![D]\!][n_-]\{n_+ - 2n_-\}$. *Podemos observar que* $(n_+, n_-) = (0, 4)$, *entonces tendrémos* $C^*(D) = [\![D]\!][4]\{-8\}$. *Luego por Ejemplo 3.10, tenemos :*

$$[\![D]\!] = (\,[\![D]\!]^0 \to [\![D]\!]^1 \to [\![D]\!]^2 \to [\![D]\!]^3 \to [\![D]\!]^4\,)$$

donde: $[\![D]\!]^0 = V^{\otimes 2}$, $[\![D]\!]^1 = \bigoplus_{i=1}^4 V\{1\}$, $[\![D]\!]^2 = \bigoplus_{i=1}^6 V^{\otimes 2}\{2\}$,
$[\![D]\!]^3 = \bigoplus_{i=1}^4 V^{\otimes 3}\{3\}$, $[\![D]\!]^4 = V^{\otimes 4}\{4\}$.
Entonces,

$$\chi_q(C^*(D)) = \sum_{j=0}^{4} q\dim(C^j(D)$$

Por lo tanto basta determinar la $q\dim$ *de cada espacio.*

$$\begin{aligned}
q\dim([\![D]\!]^0) =& (q+q^{-1})^2\\
q\dim([\![D]\!]^1) =& -4q(q+q^{-1})\\
q\dim([\![D]\!]^2) =& 6q^2(q+q^{-1})^2\\
q\dim([\![D]\!]^3) =& -4q^3(q+q^{-1})^3\\
q\dim([\![D]\!]^4) =& q^4(q+q^{-1})^4
\end{aligned}$$

Sumando y multiplicando por $(-1)^4q^{-8}$ *para conseguir la dimensión de la homología, obtenemos que:*

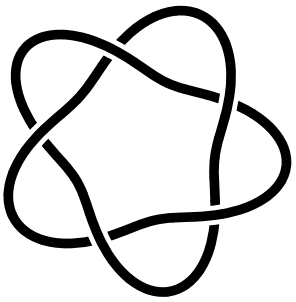
$$\chi_q(D) = \frac{(q+1)^4(q^3+q+q)^2}{q^2} = \hat{J}(D).$$

Observación 3.32 *1. La homología de Khovanov es un invariante mucho más fuerte que el polinomio de Jones. Hemos demostrado que la homología de Khovanov codifica el polinomio de Jones, por lo tanto si dos nudos tienen la*

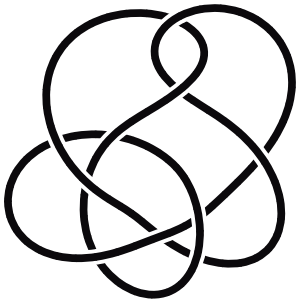
misma homología de Khovanov, entonces ellos tendrán el mismo polinomio de Jones.

2. *Además, una propiedad atractiva de la homología de Khovanov es que es un detector de no-nudos. Esto es, que si D es diagrama de un nudo que tiene la misma homología de Khovanov que el no-nudo, entonces el diagrama de nudo D es el no-nudo. En cambio, aún se desconoce si el polinomio de Jones tiene la capacidad de detectar no-nudos para nudos con una sola componente.*

Ejemplo 3.33 *Los siguientes nudos tienen el mismo polinomio de Jones, sin embargo, los modulos de homología de Khovanov son distintos.*



Nudo 5_1



Nudo 10_{132}

Tenemos que su polinomio de Jones no normalizado es:

$$\hat{J}_{10_{132}}(q) = q^{-3} + q^{-5} + q^{-7} - q^{-15} = \hat{J}_{5_1}$$

Mientras que sus polinomios graduados de Poincaré asociado a la sus complejos son:

$$\begin{aligned} Kh(5_1) &= q^{-15}t^{-5} + q^{-11}t^{-4} + q^{-11}t^{-3} + q^{-7}t^{-2} + q^{-5} + q^{-3} \\ Kh(10_{132}) &= q^{-15}t{-}7 + q^{-11}t^{-6} + q^{-11}t^{-5} + (q^{-9} + q^{-7})t^{-4} + \\ &= +(q^{-9} + q^{-3})t^{-4} + 2q^{-5} + q^{-2} + q^{-1}t^{-1} + q^{-3} + q^{-1} \end{aligned}$$

3.34. Una sucesión exacta larga

Una buena característica de atribuir un cocomplejo a cada diagrama de nudos, es que uno puede usar propiedades del álgebra homológica . En particular, construimos una sucesión exacta corta de cocomplejos, y usando Teorema 2.25 construimos una sucesión exacta larga de espacios vectoriales graduados. La finalidad de construir esta sucesión exacta larga, es debido a que esta es la categorización de las relaciones skein del polinomio de Jones. En este caso, cada sucesión exacta larga esta basada sobre un cruce particular de un nudo, y en la siguiente proposición usaremos un cruce positivo. La sucesión exacta corta de un cruce negativo puede ser obtenida de forma similar modificando algunos indices.

Teorema 3.35 *Sea D el diagrama de un nudo orientado con un cruce positivo. Sea D_0 y D_1 los diagramas donde el cruce positivo esta reemplazado con un 0-smoothing o 1-smoothing respectivamente. Entonces hay una sucesión exacta larga de módulos de homología de Khovanov*

$$\cdots \to Kh^{i-c-1}_{j-3c-2}(D_1) \to Kh^{j}_{j}(D) \to Kh^{i}_{j-1}(D_0) \to Kh^{i-c}_{j-3c-2}(D_1) \to \cdots$$

donde c:=(número de cruces negativos en D_1)-(número de cruces negativos en D).

Demostración. La construcción de la sucesión exacta corta sigue de la construcción del bracket de Khovanov.

Supongamos que D es un diagrama de un nudo con n cruces, sea d^r_i el r-ésimo diferencial de $[\![D_i]\!]$. Recordemos que los espacios de $[\![D]\!]$ son como siguen.

$$[\![D]\!]^i = \begin{cases} [\![D_0]\!]^i & : i = 0 \\ [\![D_0]\!]^i \oplus [\![D_1]\!]^{i-1}\{1\} & : 0 < i < n \\ [\![D_1]\!]^{i-1}\{1\} & : i = n \end{cases}$$

Por lo tanto, $\mathcal{C}^r(D)$ puede ser escrito como una suma directa de $\mathcal{C}^r(D_0)$ y $\mathcal{C}^{r-1}(D_1)$ bajo algunos cambios en la graduación homológica y las q-graduaciones, lo que es

la parte más densa de esta demostración. Sin embargo construiremos una sucesión exacta corta de brackets.

Supongamos que $\iota^i : [\![D_1]\!]^{i-1}\{1\} \hookrightarrow [\![D_0]\!]^i \oplus [\![D_1]\!]^{i-1}\{1\}$ es una función de cadena inyectiva . Sólo necesitamos verificar que ι conmuta con los diferenciales. Esto puede observarse porque cada diferencial de $[\![D]\!]$ es una suma de las aristas de cubo n-dimensional reemplazando un 0-smoothing por un 1-smoothing. Por lo que la restricción al i-ésimo diferencial desde $[\![D_1]\!]^{i-1}\{1\}$ a $[\![D_0]\!]^i \oplus [\![D_1]\!]^{i-1}\{1\}$ es exactamente el i-ésimo diferencial del complejo $[\![D_1]\!]^{i-1}\{1\}$.

Supongamos que la proyección $\jmath^i : [\![D_0]\!]^i \oplus [\![D_1]\!]^{i-1}\{1\} \twoheadrightarrow [\![D_0]\!]^i$ es una función de cadena. Como antes esto puede observarse por una razón similar. También, es claro que la imagen de ι es exactamente el kernel de $\jmath$. Por lo tanto, tenemos la siguiente sucesión exacta de cocomplejo.

$$0^* \to [\![D_1]\!][1]\{1\} \hookrightarrow [\![D]\!] \twoheadrightarrow [\![D_0]\!] \to 0^*$$

Ya que las funciones entre espacios vectoriales graduados (funciones lineales graduadas) preservan graduación, sabemos que cuando restringimos a una q-graduación particular, obtenemos una sucesión exacta de espacios vectoriales. Por lo tanto, para todo (i, j) (donde i es el grado homológico y j es el q-grado), tenemos las siguientes sucesiones de espacios vectoriales.

$$0 \to [\![D_1]\!]^{i-1}_{j-1} \hookrightarrow [\![D]\!]^i_j \twoheadrightarrow [\![D_0]\!]^i_j \to 0 \tag{3.3}$$

De esta forma, alteramos los indices bajo la normalización $\cdot[-n_-]\{n_+ - 2n_-\}$ para encontrar una sucesión exacta corta de complejos de Khovanov de D, D_0, D_1.

Ya que la normalización del bracket de Khovanov depende de como es la orientación del nudo, debemos considerar por separado cuando el cruce en cuestión es positivo o negativo. Consideraremos el caso cuando el cruce es positivo.

En el caso del cruce positivo D_0 hereda la oriención de D

En cambio, para D_1, uno debe escoger arbitrariamente la orientación. Definamos

$c \in \mathbb{Z}$ como sigue.

$c =$ número de cruces negativos en D_1 - número de cruces negativos en D

Por lo tanto podemos encontrar un complejo de Khovanov de D, D_0 y D_1.

1. D tiene n_+ cruces positivos y n_- cruces negativos, entonces $\mathcal{C}^*(D) = [\![D]\!][-n_-]\{n_+ - 2n_-\}$.

2. D_0 tiene $n_+ - 1$ cruces positivos y n_- cruces negativos, entonces $\mathcal{C}^*(D_0) = [\![D_0]\!][-n_-]\{n_+ - 1 - 2n_-\}$.

3. D_1 tiene $(n_+ + n_-) - (c + n_-) - 1 = n_+ - c - 1$ cruces positivos y $c + n_-$ cruces negativos, entonces $(C)^*(D_1) = [\![D_1]\!][-(c + n_-)]\{n_+ - c - 1 - 2(c + n_-)\} = [\![D_1]\!][-c - n_-]\{n_+ - 2n_- - 3c - 1\}$.

Observemos también que $\mathcal{C}^i_j[a]\{b\} = \mathcal{C}^{i-a}_{j-b}$, entonces $\mathcal{C}^{i+a}_{j+b}[a]\{b\} = \mathcal{C}^i_j$.

Escribamos ahora cada uno de los espacios vectoriales graduados en el ecuacion 3.3 después del cambio $\cdot[-n_-]\{n_+ - 2n_-\}$.

$$\begin{aligned}[\![D_1]\!]^{i-1}_{j-1}[-n_-]\{n_+ - 2n_-\} =& [\![D_1]\!]^{i-c-1}_{j-1-3c-1}[-n_- - c]\{n_+ - 2n_- - 3c - 1\} \\ =& \mathcal{C}^{i-c-1}_{j-3c-2}(D_1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[\![D]\!]^i_j[-n_-]\{n_+ - 2n_-\} =& [\![D]\!]^i_j[-n_-]\{n_+ - 2n_-\} \\ =& \mathcal{C}^i_j(D)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[\![D_0]\!]^i_j[-n_-]\{n_+ - 2n_-\} =& [\![D_0]\!]^i_{j-1}[-n_-]\{n_+ - 2n_- - 1\} \\ =& \mathcal{C}^i_{j-1}(D_0)\end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos el siguiente complejo exacto de espacios vectoriales graduados.

$$0 \to \mathcal{C}^{i-c-1}_{j-3c-2}(D_1) \to \mathcal{C}^i_j(D) \to \mathcal{C}^i_{j-1}(D_0) \to 0$$

Ya que todas las funciones de cadena no son afectadas por los cambios, tenemos la siguiente sucesión exacta corta de complejo. Después de esto, aplicamos el Teorema 2.2.13 para conseguir una sucesión exacta larga de espacios vectoriales (no graduado[3]).

$$0_* \to \mathcal{C}^*_{j-3c-2}(D_1)[c+1] \to \mathcal{C}^*_j(D) \to \mathcal{C}^*_{j-1}(D_0) \to 0^*$$

Recordemos que el cambio homológico de los complejos también cambian la homología de una forma similar. Por lo tanto, esta sucesión exacta corta nos da una sucesión exacta larga de homologías de Khovanov para cada q-grado $j \in \mathbb{Z}$ como sigue:

$$\cdots \to \mathrm{Kh}^{i-c-1}_{j-3c-2} \to \mathrm{Kh}^i_j(D) \to \mathrm{Kh}^i_{j-i}(D_0) \to \mathrm{Kh}^{i-c}_{j-3c-2}(D_1) \to \cdots$$

Lo que completa esta demostración. ■

[3]Es suficiente para formar el espacio vectorial gradudo combinando los espacios vectoriales

Capítulo 4

Invarianza bajo movimientos de Reidemeister

En este capítulo, demostraremos la invarianza bajo movimientos de Reidemeister de la homología de Khovanov. Esta demostración sólo usa técnicas algebraicas para demostrar que dos complejos tienen la misma homología, es decir, son quasi-isomorfos.

Para demostrar Teorema 3.26 necesitamos estudiar el comportamiento de $[\![D]\!]$ bajo los tres movimientos de Reidemeister. Lo primero que necesitamos, es introducir el "Principio de cancelación"para complejos de cocadena.

Lema 4.1 *(**Principio de Cancelación.**)*
Sean $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ cocomplejos, donde $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ es un subcocomplejo.

1. *Si $\mathcal{C}'$ es acíclico, entonces $H^n(\mathcal{C}) \cong H^n(\mathcal{C}/\mathcal{C}')$ para cada n.*

2. *Si $\mathcal{C}/\mathcal{C}'$ es acíclico, entonces $H^n(\mathcal{C}) \cong H^n(\mathcal{C}')$ para cada n.*

4.2. Invarianza bajo primer movimiento de Reidemeister

Denotemos por D a , y D' a . La demostración para cuando tenemos la otra orientación es similar, sean también D_0 ( ) y D_1 ( ) el 0-smoothing y el 1-smoothing de D respectivamente. También sean n, n_+ y n_- el número de cruces, número de cruces positivos y número de cruces negativos de D respectivamente. Sin perdida de generalidad, podemos suponer que es el primer cruce y que el orden de los cruces de D_0 y D_1 es heredado de D.
Demostraremos que la homología de Khovanov de D y D' es la misma reescribiendo el bracket de Khovanov de D en términos de D_0 y D_1. Usaremos el Principio de Cancelación para encontrar un complejo más simple que es quasi-isomorfo a D y que también lo es a D'.

Demostración de invarianza de la homología de Khovanov bajo R_1: Comenzaremos demostrando que el bracket de Khovanov $[\![$ $]\!]$ puede ser reescrito como $\text{Cone}\left([\![\text{}]\!]^* \xrightarrow{\check{m}^*} [\![\text{}]\!]^{*-1}\right)$.

Sea d_0 y d_1 los diferenciales de $[\![$ $]\!]^*$ y $[\![$ $]\!]^{*-1}$ respectivamente, donde el superíndice denotará el grado del diferencial en sus respectivos complejos.
De Ecuación 3.2, el diferencial de $[\![$ $]\!]$ puede ser escrito como sigue.

$$\begin{aligned} d^r :=& \sum_{|\zeta|=r} (-1)^{s(\zeta)} d_\zeta \\ =& \sum_{|\zeta|=r} (-1)^{s(0\zeta)} d_{0\zeta} + \sum_{|\zeta|=r-1} (-1)^{s(1\zeta)} d_{1\zeta} + \sum_{|\alpha|=r} (-1)^{s(\star\alpha)} d_{\star\alpha} \\ =& d_0^r - d_1^{r-1} + \sum_{|\alpha|=r} d_{\star\alpha} \end{aligned}$$

Ya que $s(\star\alpha) = 0$ y $s(1\zeta) = s(\zeta) + 1$. Escribiendo $d^{r+1}d^r$ en términos de la función anterior. Se obtiene:

$$
\begin{aligned}
d^{r+1}d^r &= \left(d_0^{r+1} - d_1^r + \sum_{|\alpha|=r+1} d_{\star\alpha}\right)\left(d_0^r - d_1^{r-1} + \sum_{|\alpha|=r} d_{\star\alpha}\right) \\
&= d_0^{r+1}d_0^r + d_1^r d_1^{r-1} + \left(\sum_{|\alpha|=r+1} d_{\star\alpha}\right)\left(\sum_{|\alpha|=r} d_{\star\alpha}\right) + \left(\sum_{|\alpha|=r+1} d_{\star\alpha}\right) d_0^r - d_1^r \left(\sum_{|\alpha|=r} d_{\star\alpha}\right) \\
&= \left(\sum_{|\alpha|=r+1} d_{\star\alpha}\right) d_0^r - d_1^r \left(\sum_{|\alpha|=r} d_{\star\alpha}\right) = 0
\end{aligned}
$$

Por lo tanto se tiene que el siguiente diagrama conmuta.

$$
\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \longrightarrow & [\![D_0]\!]^{r-1} & \longrightarrow & [\![D_0]\!]^{r} & \longrightarrow & [\![D_0]\!]^{r} \longrightarrow \cdots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \sum_{|\alpha|=r-1} d_{\star\alpha}} & & \downarrow{\scriptstyle \sum_{|\alpha|=r} d_{\star\alpha}} & & \downarrow{\scriptstyle \sum_{|\alpha|=r+1} d_{\star\alpha}} \\
\cdots & \longrightarrow & [\![D_1]\!]^{r-1}\{1\} & \longrightarrow & [\![D_1]\!]^{r}\{1\} & \longrightarrow & [\![D_1]\!]^{r+1}\{1\} \longrightarrow \cdots
\end{array}
$$

Es decir, $\sum_r d_{\star\alpha}$ es una función de cadena. Notar que cada sumando de las funciones de cadena verticales son funciones desde un smoothing de a , y por lo tanto cada sumando es la función $m \otimes id$, donde m actúa sobre los dos círculos visto en . Denotamos la colección de estas funciones que forman el complejo por $\breve{m}^*$. Es decir, es la función la cual es la identidad sobre todos los círculos fuera de , y es m sobre los círculos vistos en . Primero demostraremos que el complejo $[\![$ $]\!]$ puede ser escrito como Cone($\breve{m}^*$).

Cada elemento de $[\![D]\!]^r$ puede ser escrito de forma única como suma de elementos $a \in [\![D_0]\!]^r$ y $b \in [\![D_1]\!]^{r-1}$, por **Kh3**. Por lo tanto, aplicando el diferencial de antes, $d^r(a+b) = d^r(a) + \breve{m}(a) - d^{r-1}(b)$.

Afirmación: $[\![$ $]\!]$ = Cone($[\![$ $]\!]^* \overset{\breve{m}^*}{\to} [\![$ $]\!]^{*-1}$), entonces cada $[\![$ $]\!]^r$ es la suma directa $[\![$ $]\!]^r \oplus [\![$ $]\!]^{r-1}$. Definiremos ahora los diferenciales en el contexto de esta suma directa (el heredado por el cono). Escribamos estos diferenciales como una matriz que actúa sobre los pares ordenados de la suma directa.

$$\begin{pmatrix} d_0^r & 0 \\ \breve{m}^r & -d_1^{r-1} \end{pmatrix}$$

Lo siguiente muestra que este diferencial es el mismo que en $[\![\smile]\!]$.

$$(a, b) \mapsto (d_0, \breve{m}(a) - d_1(b))$$

Recordemos que m es la "función fusión" $V \otimes V \to V$ y está definida sobre los generadores de $v \otimes V$ como sigue:

$$\begin{array}{rrcl} m: & v_+ \otimes v_+ & \mapsto & v_+ \\ v_+ \otimes v_-, & v_- \otimes v_+ & \mapsto & v_- \\ & v_- \otimes v_- & \mapsto & 0 \end{array}$$

Hagamos una pausa antes de proseguir para explicar notación. Como sabemos $[\![D]\!]$ es una suma directa sobre estados de D de productos tensoriales de V, donde un factor de este producto correspnde a cada círculo en algún estado dado. Tal producto tensorial puede ser visto como combinaciones lineales de estados marcados de D, donde cada círculo en algún estado de D esta marcado por algún elemento de V. Para $D = \smile$ todos los smoothings que tienen un círculo especial, aparecerán con el icono $\frown$. El subíndice v_+ en $[\![\frown]\!]_{v_+}$ significa "el subespacio de $[\![\frown]\!]$ en el cual el círculo especial está marcado con v_+".

Ahora consideremos el complejo $[\![\frown]\!]^*_{v_+} \oplus [\![\cap]\!]^{*-1}$ es claro que este es un subcomplejo de $[\![\frown]\!]^* \oplus [\![\cap]\!]^{*-1}$, pues los círculos en $\frown$ no son afectados por los diferenciales.

A continuación demostraremos que este complejo es acíclico. Para esto probaremos que cada *r-cociclo* de $[\![\frown]\!]^*_{v_+} \oplus [\![\cap]\!]^{*-1}$ es también un *r-coborde*. En otras palabras, demostraremos que si $(a, b) \in [\![\frown]\!]^r_{v_+} \oplus [\![\cap]\!]^{r-1}$, tal que

$$\begin{pmatrix} d_0^r & 0 \\ \breve{m}^r & -d_1^{r-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_0^r a \\ \breve{m}^r - d_1^{r-1} b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Entonces existe un $(a', b') \in [\![\asymp]\!]^{r-1}_{v_+} \oplus [\![\curlywedge]\!]^{r-2}$ tal que $a = d_0^{r-1}a'$ y $b = \breve{m}^{r-1}a - d_1^{r-2}b'$

Primero, demostremos que $\breve{m}^*$ es una biyección.
Veamos la epiyectividad. Sea $x \otimes x' \in V_\alpha \subset [\![\curlywedge]\!]^r$, donde x es el elemento de V que representa el círculo en $\curlywedge$ y x' representa el resto de círculos en el estado. Entonces $m \otimes id(v_+ \otimes x \otimes x') = x \otimes x'$, donde $v_+ \otimes x \in [\![\asymp]\!]^{r-1}_{v_+}$.Luego se tiene la epiyectividad.
Inyectividad. Si $m \otimes id(v_+ \otimes x \otimes x') = m \otimes id(v_+ \otimes y \otimes y')$, por definición se tiene directamente que $x \otimes x' = y \otimes y'$, luego $\breve{m}$ es inyectiva.
Por lo anterior tenemos que $\breve{m}^{r-1} : [\![\asymp]\!]^{r-1}_{v_+} \to [\![\curlywedge]\!]^{r-2}$ es una biyección, luego para todo $b \in [\![\curlywedge]\!]^{r-2}$, existe un $a' \in [\![\asymp]\!]^{r-1}_{v_+}$ tal que $\breve{m}(a') = b$. Por lo tanto, ya que (a, b) es un cociclo y $\breve{m}^*$ es una función de cadena, $\breve{m}a - \breve{m}d_0^{r-1}a' = \breve{m}a - d_1^{r-1}\breve{m}a' = 0$. Como $\breve{m}^r$ es inyectiva, y $\breve{m}(a - d_0^{r-1}a') = 0$, entonces $a = d_0^{r-1}a'$. Por lo tanto, $(a', 0) \in [\![\asymp]\!]^{r-1}_{v_+} \oplus [\![\curlywedge]\!]^{r-2}$, tenemos que $d((a', 0)) = (d_0^{r-1}a', \breve{m}a') = (a, b)$, luego se tiene que (a, b) es un coborde.

Observemos que aunque $\breve{m}^*$ es una biyección, esta no es un isomorfismo de módulos graduados, ya que tiene un q-cambio de -1. Es decir, si $\deg(x) = i$ para $x \in [\![\asymp]\!]^r$, entonces $\deg(\breve{m}^r(x)) = i - 1$

Con lo anterior sabemos que el subcomplejo $[\![\asymp]\!]^*_{v_+} \oplus [\![\curlywedge]\!]^{*-1}$ es acíclico, entonces aplicando el Principio de Cancelación:

$$\begin{aligned} H^r([\![\asymp]\!]^* \oplus [\![\curlywedge]\!]^{*-1}) \cong & H^r(([\![\asymp]\!]^* \oplus [\![\curlywedge]\!]^{*-1})/[\![\asymp]\!]^*_{v_+} \oplus [\![\curlywedge]\!]^{*-1}) \\ \cong & H^r([\![\asymp]\!]^r_{v_-}) \end{aligned}$$

Para todo r. En el segundo isomorfismo, todos los elementos de la forma $v_+ \otimes x$ son equivalentes a 0. Por lo tanto, todos los elementos son generados por elementos de la forma $v_- \otimes x$.

Falta por demostrar que $H^r([\![\asymp]\!]^*_{v_-}) \cong H^r([\![\wedge]\!]^*\{-1\})$ para todo r. Fácilmente se tiene que las homologías después del cambio por $\cdot[-n_-]\{n_+ - 2n_-\}$ también serán isomorfas y en ambos casos, esto nos dará el complejo de Khovanov de los respectivos nudos orientados, como $\wedge$ tiene un cruce positivo menos que $\asymp$, el que es ajustado por el q-cambio $\{-1\}$.

Consideremos el elemento $v_- \otimes x \in [\![\asymp]\!]^r_{v_-}$ y denotemos su q-grado por $k \in \mathbb{Z}$. consideremos el isomorfismo de espacios vectoriales dado por $v_- \otimes x \mapsto x$. Esta es una biyección, pero para demostrar que es un isomorfismo falta demostrar que no cambia el q-grado de los elementos. Si $\deg(v_- \otimes x) = k$, entonces $\deg(x) = k + 1$, pero por el q-cambio $\{-1\}$ que cambia todo en el módulo graduado "bajando "en 1, la q-dimensión de $x \in [\![\wedge]\!]^*\{-1\}$ es cambiada en -1. Así el cambio de x es ajustado adecuadamente.

Los diferenciales son identicos en $[\![\asymp]\!]^*_{v_-}$ y $[\![\wedge]\!]^*\{-1\}$, ya que la proyección de dos nudos son identicos fuera de esta sección y todos los diferenciales no son afectados por el círculo extra en $\asymp$. Esto significa que los cubos n-dimensionales son idénticos excepto en un círculo extra generado por v_- en $[\![\asymp]\!]_{v_-}$, el cual no es afectado por el diferencial.
Esto completa la demostración de que la homología de Khovanov de un link es invariante bajo R_1.

4.3. Invarianza bajo segundo movimiento de Reidemeister

Denotemos D la proyección un nudo con cruces como sigue, $)($ y denotemos D' la misma proyección pero reemplazando los cruces por $)($. Denotaremos las proyecciones de D cambiando los cruces en D por los respectivos smoothings de D con los subíndices respectivos de cada smoothing. Sin perdida de generalidad podemos suponer que el cruce superior en $)($ es el primer cruce de D y también

que el cruce inferior como el segundo cruce de D. En otras palabras, D_{00} denota , D_{01} denota ,D_{10} denota $)($ y D_{11} denota .

Demostración de invarianza de la homología de Khovanov bajo R_2: Comenzaremos introduciendo una nueva forma para escribir el cocomplejo de espacios vectoriales graduados $[\![D]\!]$ como un diagrama. Sea α un smoothing que resuelve cada cruce en D exceptuando los dos primeros. Sí $|\alpha| = r$, entonces el siguiente complejo representa todos los smoothings de D los cuales contienen a α. Estos son 00α, 01α, 10α y 11α.

$$\begin{array}{ccc} [\![\text{}]\!]^r\{1\} & \xrightarrow{m\otimes id_\alpha} & [\![\text{}]\!]^r\{2\} \\ {\scriptstyle \Delta\otimes id_\alpha}\uparrow & & {\scriptstyle d_{1\star\alpha}}\uparrow \\ [\![\text{}]\!]^r & \xrightarrow{d_{\star 0\alpha}} & [\![)(]\!]^r\{1\} \end{array}$$

$$[\![D]\!]$$

Estos diagramas se mantienen para todo $\alpha \in \{0,1\}^{n-2}$, además recordemos que de R_1 las funciones en el diagrama anterior formarán funciones de cadena en los brackets D_{00}, D_{01}, D_{10}, D_{11}.

Para nuestro propósito, demostraremos que los siguientes complejos son quasi-isomorfos. Los diagramas anteriores explican la normalización $[-n]\{n_+ - 2n_-\}$, ya que independiente de la orientación de las cuerdas, tiene exactamente un cruce negativo y un cruce positivo más que $)($. Por lo tanto sabemos que el cambio de D será $[-n_-]\{n_+ - 2n_-\}$, entonces el cambio de D' será $[-(n_- - 1)]\{(n_+ - 1) - 2(n_- - 1)\}$, el cual es lo mismo que $[n_-]\{n_+ - 2n_-\}[1]\{1\}$.

$$\begin{array}{ccc} [\![\text{}]\!]^*\{1\} & \xrightarrow{m} & [\![\text{}]\!]^*\{2\} \\ {\scriptstyle \Delta}\uparrow & & {\scriptstyle d_{1\star}}\uparrow \\ [\![\text{}]\!]^* & \xrightarrow{d_{\star 0}} & [\![)(]\!]^*\{1\} \end{array} \quad \cong \quad \begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & 0 \\ \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & [\![)(]\!]^*\{1\} \end{array}$$

$$[\![D]\!]^* \qquad\qquad [\![D']\!][1]\{1\}$$

Como mencionamos anteriormente, estos son funciones de complejos de la misma forma que $m : \asymp \to \wedge\{1\}$ lo fue en el primer movimiento de Reidemeister. El complejo a la derecha representa el bi-complejo[1]

$$\Big[\, [\![\asymp]\!]^* \to [\![\asymp]\!]^* \otimes [\![)\,(]\!]^*\{1\} \to [\![\asymp]\!]^*\{2\} \,\Big]$$

donde la primera función está representada por $\begin{pmatrix}\Delta\\ d_{\star 0}\end{pmatrix}$ y la segunda función está por $\begin{pmatrix} m & d_{1\star}\end{pmatrix}$.

En otras palabras los módulos del complejo son sumas directas de la diagonal de izquierda a derecha en sentido descendiente, con diferencial la suma de las funciones de sus sumando.

Recordemos que es equivalente escribir lo anterior como $[\![\,)\,(\,]\!]^* \cong [\![)\,(]\!]^{*-1}\{1\}$. Para mayor claridad los indices $*$ y en ocasiones los cambios $\{\cdot\}$ serán omitidos en estos diagramas Consideremos el siguiente subcomplejo de $[\![\,)\,(\,]\!]^*$.

$$\begin{array}{ccc} [\![\asymp]\!]_{v_+}\{1\} & \longrightarrow & [\![\asymp]\!]\{2\} \\ \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & 0 \end{array} \qquad \mathcal{C}'$$

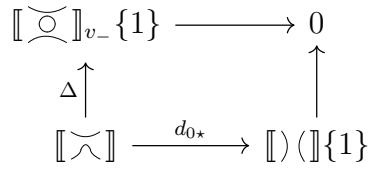
$$\subset$$

$$\begin{array}{ccc} [\![\asymp]\!]\{1\} & \xrightarrow{m} & [\![\asymp]\!]\{2\} \\ {\scriptstyle\Delta}\uparrow & & \uparrow \\ [\![\asymp]\!] & \longrightarrow & [\![)\,(]\!]\{1\} \end{array} \qquad \mathcal{C}$$

Convenientemente, hemos demostrado que el complejo $\mathcal{C}'$ a la izquierda (es identico salvo el cambio $\cdot[1]$) es acíclico en la en la demostración de R_1 y entonces por el *Principio de cancelación,* $\mathcal{C} \cong \mathcal{C}/\mathcal{C}'$.

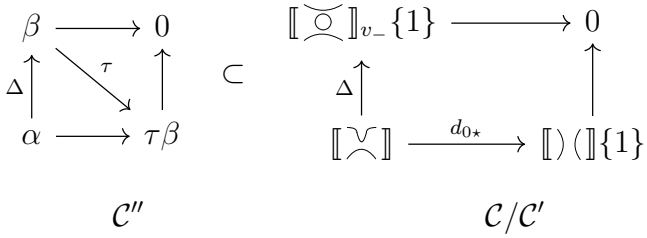
[1]Estamos aplicando la operación Flatten

El cociente $\mathcal{C}/\mathcal{C}'$ queda



Ahora, queremos encontrar un subcomplejo acíclo de $\mathcal{C}/\mathcal{C}'$, el cual llamaremos $\mathcal{C}''$. Sin pérdida de generalidad, dejemos que el primer elemento del producto tensorial represente el círculo en y el segundo elemento represente el resto de los círculos. Demostraremos que Δ en $\mathcal{C}/\mathcal{C}'$ es una función biyectiva. Si asignamos por v_+ al círculo de la derecha en D_{00}, $\Delta \otimes id(v_+ \otimes x) = (v_+ \otimes v_- + v_- \otimes v_+) \otimes x \sim v_- \otimes v_+ \otimes x$, ya que $v_+ \otimes v_- \otimes x = 0$ en el cociente del espacio vectorial graduado $[\![$ $]\!]^r_{v_-}$ para todo x. Entonces todo elemento de $[\![D_{00}]\!]$ es enviado al mismo pero, con v_- asignado al círculo dentro de D_{01}.

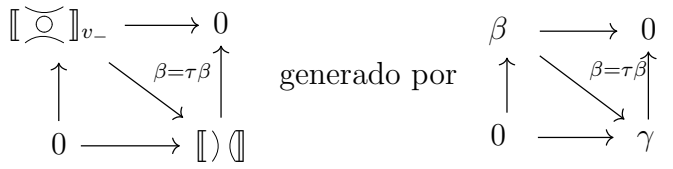
Como la función Δ es biyectiva, uno puede definir la función $\tau := d_{0\star}\Delta^{-1}$. Escribimos los elementos de $[\![$ $]\!]_{v_-} \oplus [\![\rangle(]\!]\{1\}$ como pares ordenados. El subcomplejo de este cocomplejo es la colección de elementos de la forma $(\beta, \tau\beta)$, donde β es cualquier elemento de $[\![$ $]\!]^r_{v_-}\{1\}$ para algún r.



Note que escribimos los elementos generadores del complejo en lugar del complejo mismo.

Afirmamos que $\mathcal{C}''$ es acíclico. La función de cadena está bien definida, ya que $d_{0\star}(\alpha) = \tau\Delta(\alpha)$, entonces $(\Delta(\alpha), d_{0\star}(\alpha)) = (\Delta\alpha, \tau(\Delta\alpha))$, el cual es un elemento en el complejo $\mathcal{C}''$. La asignación $\alpha \mapsto (\Delta\alpha, d_{0\star}\alpha)$ es una biyección, ya que

$\Delta : [\![D_{00}]\!]^* \to [\![D_{01}]\!]^*_{v_-}\{1\}$ lo es.
Ahora como uno hace un cociente por $\mathcal{C}''$, entonces todo elemento de $\mathcal{C}''$ va a cero. Por lo tanto $(\beta, \tau\beta) = 0$ para todo $\beta \in [\![D_{01}]\!]_{v_-}$. En otras palabras el cociente el cociente induce la equivalencia $(\beta, 0) \sim (0, -\tau\beta)$ para todo β. Llamemos a este complejo $\mathcal{C}_\tau$.



Cuando hablemos de este complejo siempre usaremos β para denotar un elemento de $[\![\,]\!]^r_{v_-}$ y γ para denotar un elemento de $[\![\,)(\,]\!]^r$.

Asumimos que los elementos de $[\![\,)(\,]\!]$ puede ser naturalmente incrustados dentro del cociente. Consideremos la inclusión $\iota : [\![\,)(\,]\!]^r \hookrightarrow C^r_\tau$ la cual envía $\gamma \mapsto (0, \gamma)$. Tomemos $\gamma_1, \gamma_2 \in [\![\,)(\,]\!]^r$ tal que $\iota(\gamma_1) = \iota(\gamma_2)$. Entonces $(0, \gamma_1 - \gamma_2) = (\beta, \tau\beta)$ para algún β y claramente $\beta = 0$, con lo que tenemos $\gamma_1 - \gamma_2 = \tau\beta = 0$ y por lo tanto son el mismo elemento de $[\![\,)(\,]\!]^r$.

$$\mathcal{C}_\tau := (\mathcal{C}/\mathcal{C}')/\mathcal{C}''$$

Hemos demostrado que lo anterior es una inyección. Sin embargo, queda por demostrar que esta inyección es un isomorfismo. Denotemos por $[\cdot]_\sim$ las clases de equivalencia de los elementos bajo este cociente. Queremos demostrar que esta inyección es también sobreyectiva y sólo necesitamos demostrar que todo elemento (β, γ) es equivalente a $(0, \gamma')$ para algún γ'. Esto se sigue si escogemos $\gamma' = \gamma - \tau\beta$, entonces $(\beta, \gamma) - (0, \gamma - \tau\beta) = (\beta, \tau\beta)$, el cual es un elemento de

$\{(\beta, \tau\beta) : \beta \in [\![\asymp]\!]^r\}$, como era requerido.
Esto demuestra la invarianza bajo R_2.

4.4. Invarianza bajo tercer movimiento de Reidemeister

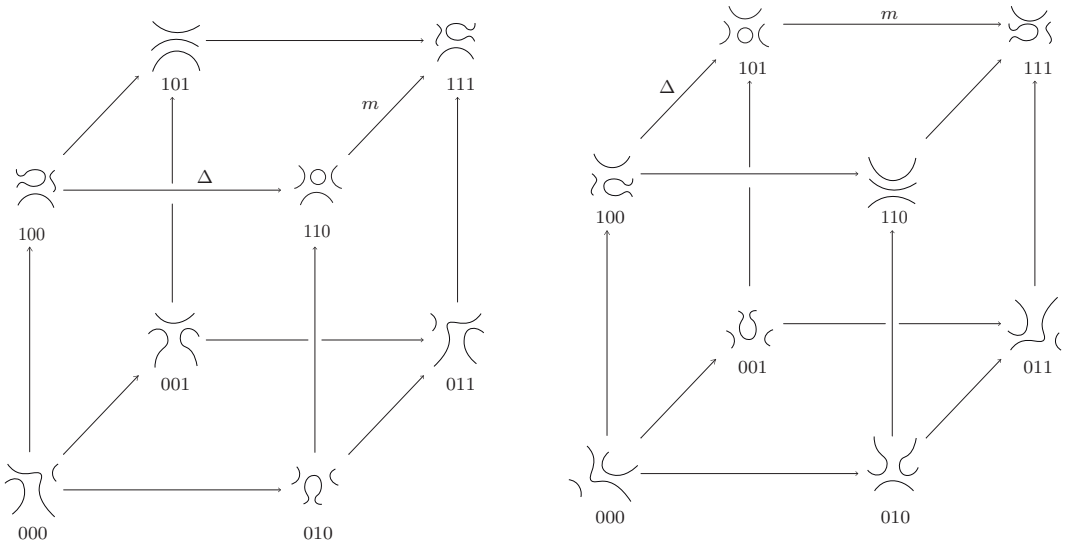
Demostración de invarianza de la homología de Khovanov bajor R_3: Consideremos D la proyección de un nudo orientado con una parte de la proyección que se ve $\nearrow\!\!\!\!\!\!\searrow$ y también consideremos una proyección idéntica pero reemplazando $\nearrow\!\!\!\!\!\!\searrow$ con $\searrow\!\!\!\!\!\!\nearrow$.

Estas proyecciones las denotaremos simplemente por $\nearrow\!\!\!\!\!\!\searrow$ y por $\searrow\!\!\!\!\!\!\nearrow$ y sus smoothings respectivamente. Para el tercer movimiento, queremos demostrar que el bracket de Khovanov de estas dos proyecciones son quasi-isomorfos.

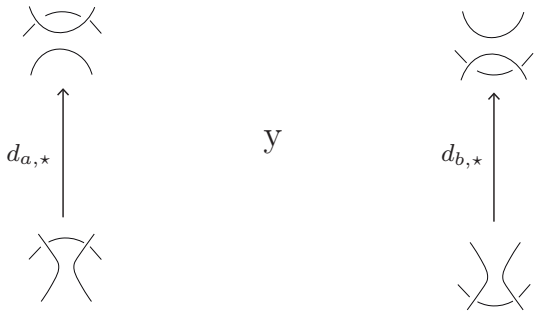
$$[\![\nearrow\!\!\!\!\!\!\searrow]\!] \cong [\![\searrow\!\!\!\!\!\!\nearrow]\!]$$

Esto es suficiente, porque no necesitamos considerar algún cambio, ya que no importa como orientemos las cuerdas en la proyección los dos nudos tienen el mismo número de cruces negativos y positivos. Por lo tanto, ambas proyecciones (orientadas) tienen el cambio $[-n_-]\{n_+ - 2n_-\}$

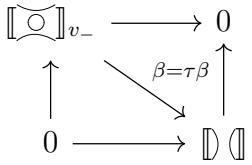
Como antes, ahora realizaremos el smothing en los cruces dibujados, que están ordenados como sigue. Cuando sea necesario, el subíndice "a"indicará cuando ocurra algo en el nudo de la izquierda ($\nearrow\!\!\!\!\!\!\searrow$) y "b"denotará cuando ocurra algo en el nudo de la derecha ($\searrow\!\!\!\!\!\!\nearrow$).



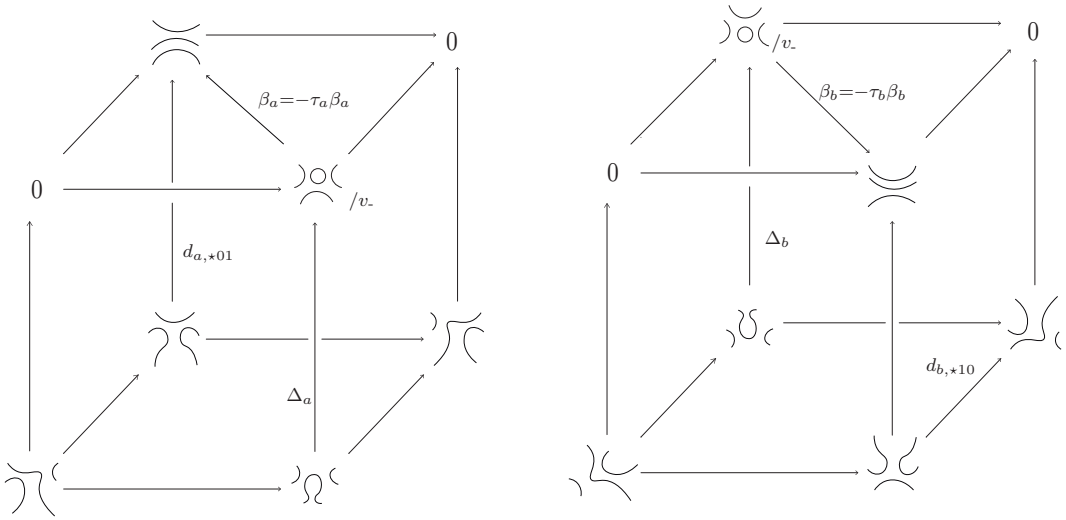
Observemos que no hemos incluido los q-cambios $\{\cdot\}$ y los brackets $[\![\cdot]\!]$, los que seguiremos omitiendo junto las etiquetas de cada smoothing. Otra forma de pensar lo anterior es como los complejos donde sólo el primer cruce es reemplazado por un smoothing.



Luego, uno reemplaza la cara superior del cubo usando el complejo $\mathcal{C}_\tau$ que construimos en la demostración de R_2 en la sección anterior. Esto es, que la cara superior es quasi-isomorfa al siguiente complejo cociente.



Más rigurosamente, encontramos el mismo subcomplejo y hacemos el mismo cociente del cubo de anterior por el complejo.



Ahora nos gustaría construir un isomorfismo entre estos dos complejos. El isomorfismo entre las caras inferiores es claro y el isomorfismo entre las caras superiores es solamente una transposición de las sumas directas. Recordemos que las caras superiores son isomorfas ya que ambas son isomorfas a $\asymp$. Para que este isomorfismo sobre los espacios (al que llamaremos Υ) sea también un isomorfismo de complejos, la única cosa que falta por demostrar es que las funciones verticales entre las caras conmutan con el isomorfismo Υ entre los cubos.

Sea Υ que actúa sobre la capa superior enviando la clase $[(0, \gamma_a)] \mapsto [(0, \gamma_b)]$. Para demostrar que este isomorfismo en los espacios conmuta con los diferenciales, debemos probar lo siguiente

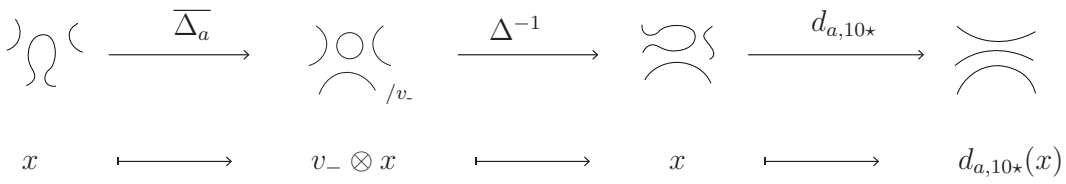
$$d_{a,\star 01} = \tau_b \Delta_b \qquad \text{y} \qquad d_{b,\star 10} = \tau_a \Delta_a \tag{4.1}$$

Donde $\Delta_a = d_{a,\star 10}$ y $\Delta_b = d_{b,\star 01}$. Queremos demostrar porque, diciendo que Υ es el isomorfismo, entonces necesitamos $\Upsilon d_{a,\star 01} = \Delta_b \Upsilon$ pero

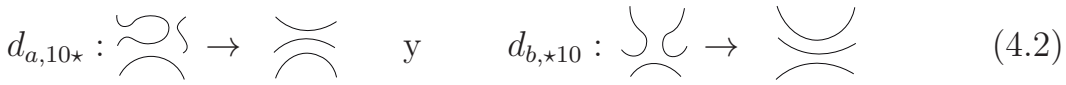
$$\mathrm{Im}(\Upsilon d_{a,\star 01}) \subseteq \asymp / \mathrm{Im}\tau_b \qquad \text{y} \qquad \mathrm{Im}(\Delta_b \Upsilon) \subseteq \widetilde{)\bigcirc(}/v_-$$

Entonces, consideraremos que las imágenes están bajo la relación de equivalencia $\beta \sim -\tau\beta$. Sí $\Upsilon d_{a,\star 01} = -\tau_b \Delta_b \Upsilon$, entonces esta funciones son iguales ya que $(\beta, 0) \sim (0, -\tau\beta)$ bajo la relación de equivalencia. Sí ignoramos Υ (lo que podemos hacer, ya que este es la identidad en sobre los espacios en los que está actuando en este caso) la ecuación es exactamente la que vemos en (4.1). Es similar para el segundo.

Ahora la tarea es demostrar que estas dos relaciones son equivalentes. Recordemos que, usando la notación de los diagramas, $\tau_a := d_{a,10\star}\Delta^{-1}$ donde Δ es la función $d_{a,1\star 0}$. Denotaremos la función Δ_a que enviada al espacio)○(por $\overline{\Delta_a}$. (Esto sólo significa $\overline{\Delta_a} = \phi \circ \Delta_a$, donde ϕ es hacer el cociente por v_+).



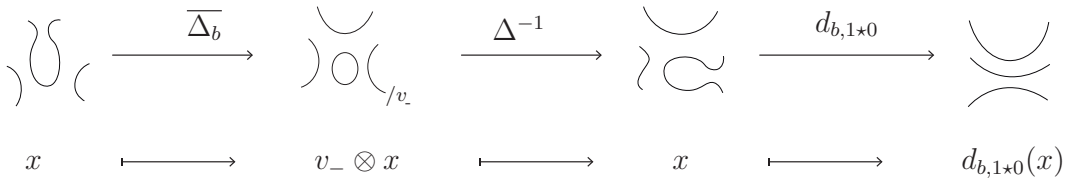
Recordemos Δ^{-1} de R_2. Es claro de las funciones anteriores que $\Delta^{-1}\overline{\Delta_a} = id$. Por lo tanto $\tau_a \Delta_a = d_{a,10\star}$. Observemos también que las aristas del cubo,



(4.2)

son el mismo re-ordenamiento de las dos cuerdas superiores y entonces son la misma función. Dado que el morfismo Υ es la identidad en la cara inferior del cubo, Υ conmuta con este lado del cubo como en la ecuación (4.1).

Respecto a la demostración de $d_{a,\star,01} = \tau_b \Delta_b$, esta es idéntica a la dada arriba. Recordemos que



lo que implica que $\Delta^{-1}\overline{\Delta_b} = id$ y entonces $\tau_b \Delta_b = d_{b,1\star 0}$. Por lo que, tenemos

Representan lo mismo. Por lo tanto, la homología de Khovanov es invariante bajo R_3. Esto concluye la demostración.

Observación 4.5 *Como se mencionó en la introducción esta no es la demostración presentada por Khovanov en su artículo original. Esto es debido a la complejidad de esta.*

Bibliografía

[1] Adhikari, M. R. *Basic Algebraic Topology and its Applications*. Springer, 2016.

[2] Bar-Natan, D. On khovanov's categorification of the jones polynomial. *Algebraic and Geometric Topology 2* (2002), 337–370.

[3] Diaz, N. Trazas relativas de markov en el álgebra de yokonuma-hecke. Master's thesis, Universidad de Valparaíso, 2018. Tesis de Licenciatura.

[4] Espinoza, J. Grupo de trenzas e invariantes polinomiales de nudos. Master's thesis, Universidad de Valparaíso, 2010. Tesis de Licenciatura.

[5] Gros, G. L. The khovanov homology of knots. Master's thesis, Victoria University of Wellington, 2015.

[6] Jones, V. F. R. A polynomial invariant for links via von Neumann algebras. *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society 12*, 1 (1985), 103–111.

[7] Kauffman, L. H. State models and the Jones polynomial. *Topology 26*, 3 (1987), 397–407.

[8] Kauffman, L. H. *Knot theory and its applications*. Contemp. Math., 670. Amer. Math. Soc., 2016, ch. An introduction to Khovanov homology, p. 105–139.

[9] Khovanov, M. A categorification of the jones polynomial. *Duke Math. J. 101*, 3 (2000), 359–426.

[10] Kronheimer, P. B., and Mrowka, T. S. Khovanov homology is an unknot-detector. *Math. Inst. Hautes Étude Sci. 113* (2011), 97–208.

[11] Lane, S. M. *Categories for the Working Mathematician*. Springer, 1998.

[12] Lickorish, W. B. R. *An Introduction to Knot Theory*. Springer-Verlag, 1997.

[13] tom Dieck, T. *Algebraic Topology*. EMS Textbook in Mathematics, 2010.

[14] Turner, P. Five Lectures on Khovanov Homology. *J. Knot Theory Ramifications 26*, 3 (2017), 41pp.

[15] Weibel, C. *Introduction to Homological Algebra*. Cambridge University Press, 1994.

[2] [9] [12] [5] [10] [7] [4] [6] [3] [8] [15] [1] [13] [14] [11]