FACULTAD DE CIENCIAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS

DIFEOMORFISMOS DEL CÍRCULO Y TEOREMA DE DENJOY

MEMORIA DE TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE LICENCIADO EN MATEMÁTICAS.

PARTICIPANTE : ANGELO SAAVEDRA HERRERA
PROFESOR GUÍA : DR. GERARDO HONORATO GUTIÉRREZ

VALPARAÍSO (2017)

Índice general

Introducción

El objetivo principal de este trabajo es hacer un estudio detallado de diversos tópicos relacionados con el número de rotación de homeomorfismos y difeomorfismos del círculo unitario S^1 que preservan orientación. En particular, estudiamos de dichas funciones las diferentes propiedades conforme a si este número es racional o irracional y a partir estudiaremos el comportamiento de sus órbitas. Por otro lado, también estudiaremos las sucesiones partes fraccionarias de un número en el intervalo $[0, 1)$. Veremos que cuando este número es irracional entonces estan equidistribuidas en todo el intervalo $[0, 1)$.

A continuación describiremos brevemente cada capítulo de esta tesis.

En el Capítulo 1 comenzaremos con definiciones generales de la teoría de Sistemas Dinámicos, algunos resultados básicos y ejemplos donde se aplican estas definiciones. Luego estudiaremos la función rotación en el círculo unitario. Denotaremos por R_α a la rotación de puntos del círculo en un ángulo $2\pi\alpha$ y veremos que conforme a si este número α es racional o irracional las propiedades de la rotación son bastante diversas. Luego introduciremos la noción de conjugación topológica, que es una relación de equivalencia que nos permitirá clasificar homeomorfismos del círculo. Después definiremos lo que es un levantamiento de un homeomorfismo de S^1 y a partir de esto introducimos el concepto de grado una función.

En el Capítulo 2 introduciremos el concepto de número de rotación y sus propiedades, que nos servirá para clasificar homeomorfismos del círculo. Un resultado importante de este capítulo es que un homeomorfismo tiene número de rotación racional si y solo si tiene puntos periódicos. También estudiaremos algunas propiedades del número de rotación, veremos que es invariante sobre conjugaciones topológicas que preservan orientación y que visto como una función el número de rotación es continua con la topología uniforme.

En el Capítulo 3 estudiaremos los posibles comportamientos de las órbitas bajo homeomorfismos del Círculo. Primero estudiaremos el caso cuando el número de rotación es racional: probaremos que sus órbitas tiene el mismo comportamiento de las rotaciones con el mismo número de rotación, también veremos que en presencia de órbitas periódicas entonces todo punto es asintótico a órbitas periódicas. Despues veremos el caso irracional: probaremos que todo homeomorfismo es semiconjugado a una rotación y esto nos llevará finalmente a una clasificación de homeomorfismos del círculo. Este resultado es conocido como el Teorema de Clasificación de Poincaré.

En el Capítulo 4 probaremos el Teorema de Denjoy que dice que si un difeomorfismo de clase C^1 y derivada de variación acotada con número de rotación irracional τ , entonces es topológicamente conjugada a la rotación R_τ. También veremos que no necesariamente dos difeomorfismos con el mismo número de rotación son topológicamente conjugados a través del contraejemplo de Denjoy.

En el Capítulo 5 estudiaremos la sucesión de partes fraccionales de los múltiplos de un número irracional. El teorema de Kronecker dice que los términos de esta sucesión se dispersan por todo el intervalo $[0, 1)$. Sin embargo no habla acerca de la naturaleza de tal dispersión. Por ejemplo, ¿es posible afirmar que los términos de la sucesión aparezcan más frecuentemente en una parte del intervalo que en otra? El objetivo del Teorema de Hermann Weyl (1909-1910) es dar una respuesta parcial a esta pregunta.

Capítulo 1

Conceptos generales y el Círculo

En esta sección comenzaremos con definiciones generales de la teoría de sistemas dinámicos y algunos resultados básicos. Luego, se introducirá la manera en como es estudiada la circunferencia y el número de rotación, pieza fundamental de todos los resultados importantes de este trabajo.

1.1. Conceptos preliminares

Definición 1.1.1. Sea X un espacio métrico compacto. Un *sistema dinámico discreto* en X es una función continua $F : \mathbb{Z} \times X \to X$ tal que

1. $F(0, \cdot) = \mathrm{Id}$
2. $F(n, F(m, x)) = F(n + m, x) \quad \forall n, m \in \mathbb{Z}, \forall x \in X.$

Si para cada $n \in \mathbb{Z}$ definimos la función $F_n : X \to X$ por $F_n(x) = F(n, x)$. Entonces tenemos que

$$F_n \circ F_m = F_{n+m}.$$

Denotaremos por f^n a una función f iterada n veces, es decir

$$f^n = f \circ f \circ \cdots \circ f.$$

En particular, tenemos que $f = F_1$ es un homeomorfismo (su inversa f^{-1}, es F_{-1}) y se cumple que $f^n = F_n$.

Sea $f : X \to X$ una función continua. Definimos la *órbita* de un punto $x \in X$ bajo f como el conjunto formado por las iteradas positivas y negativas de x. La denotaremos por $\mathcal{O}_f(x)$, es decir

$$\mathcal{O}_f(x) := \{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}\}.$$

De igual forma, definimos la *semiórbita positiva* de $x \in X$ por el conjunto

$$\mathcal{O}_{f^+}(x) := \{f^n(x) : n \geq 0\}$$

y la *semiórbita negativa* de $x \in X$ por el conjunto

$$\mathcal{O}_{f^-}(x) := \{f^n(x) : n < 0\}.$$

A saber, la órbita de un punto puede ser expresada como la unión disjunta de su semiórbita positiva y su semiórbita negativa.

Definición 1.1.2. Si un punto $x \in X$ es tal que $f(x) = x$, diremos que x es un *punto fijo*. Denotaremos por $\text{Fix}(f)$ al conjunto de todos los puntos fijos de f.

Definición 1.1.3. Sea X es un espacio topológico, $f : X \to X$ y p un punto fijo de f. Si para un punto $x \in X$, $f^n(x) \to p$ cuando $n \to \infty$, entonces diremos que x es *(positivamente) asintótico* a p. Si f es invertible y $f^{-n} \to p$ cuando $n \to \infty$ entonces diremos que x es *negativamente asintótico* a p. A veces, en ambos casos decimos que x es *convergente por iteradas.*

En la siguiente proposición mostraremos una consecuencia de comportamiento asintótico como en la definición. Consideraremos una función continua e invertible de variable real. Veremos que en presencia de comportamiento asintótico, toda órbita converge a algún punto fijo.

Proposición 1.1.4. *Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo cerrado y $f : I \to I$ una función continua y no-decreciente, entonces todo $x \in I$ es asintótico a un punto fijo de f. Si f es creciente (por lo tanto invertible) entonces todo $x \in I$ o bién es fijo o bién es positivamente (negativamente) asintótico a puntos fijos adyacentes.*

Demostración. Probemos primero que $\text{Fix}(f)$ es no vacío. Sea $I = [c, d]$, si $f(c) = c$ o $f(d) = d$ entonces $\text{Fix}(f)$ es no vacío. Supongamos que $f(c) > c$ y $f(d) < d$. Consideremos la función continua $g : I \to I$ dada por $g(x) := f(x) - x$. Entonces tenemos que

$$g(d) = f(d) - d < 0 < f(c) - c = g(c).$$

De esta manera, por el Teorema del Valor intermedio existe $x \in I$ tal que $g(x) = 0$, esto es, $f(x) = x$. Así tenemos que $\text{Fix}(f)$ es no vacío.

También, $\text{Fix}(f)$ es cerrado. En efecto, si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión definida en $\text{Fix}(f)$ convergente a algún punto $x \in I$. Luego por la continuidad de f tenemos que

$$f(x) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

Por lo tanto $x \in \text{Fix}(f)$ y así $\text{Fix}(f)$ es cerrado.

Si $\text{Fix}(f) = I$ el resultado de la Proposición es evidente. Ahora en otro caso consideremos $x \in I \setminus \text{Fix}(f)$ y sea (a, b) el intervalo abierto maximal contenido en $I \setminus \text{Fix}(f)$ que contiene a x. Como f es no-decreciente tenemos que $f(a, b) \subseteq [a, b]$ y que por Teorema del Valor Intermedio $f - Id$ no cambia de signo en (a, b). Supongamos que $f(y) > y$ para todo $y \in (a, b)$ (el caso en que $f(y) < y$ es análogo). Luego, por continuidad de f, tenemos que $\{f^n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ define una sucesión no-decreciente acotada por b, por lo tanto converge a algún punto $x_0 \in (a, b]$. Pero como f es continua se sigue que

$$f(x_0) = f\left(\lim_{n\to\infty} f^n(x)\right) = \lim_{n\to\infty} f(f^n(x)) = \lim_{n\to\infty} f^{n+1}(x) = x_0.$$

Luego $x_0 \in \text{Fix}(f)$ y por lo tanto $x_0 = b$. Por otro lado, notamos que para el caso en que $f(y) < y$ para todo $y \in (a, b)$, de manera análoga, se obtiene que $f^n(x) \to a$ para todo $x \in (a, b)$ cuando $n \to \infty$.

En caso en que f es creciente el signo de $f^{-1} - Id$ en (a, b) es opuesto al de $f - Id$, luego todo $x \in (a, b)$ es positivamente o negativamente asintótico a los extremos de $[a, b]$. □

Definición 1.1.5. Sea $x \in X$ tal que $f^q(x) = x$ para algún entero $q \geq 1$. Entonces x es llamado *punto periódico* de f. Denotaremos por $\mathrm{Per}(f)$ al conjunto de todos los puntos periódicos de f. Si q es el menor entero positivo tal que $f^q(x) = x$ entonces diremos que x es un punto *q-periódico* o de periodo q. En particular, si $q = 1$, entonces $f(x) = x$, o sea, x es un punto fijo de f.

Definición 1.1.6. Para una función $f : X \to X$ se define $P_n(f)$ como el número de puntos periódicos de f de periodo n, esto es, el número de puntos fijos para f^n.

Ejemplo 1.1.7. Se define el conjunto del *círculo unitario* por $S^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Consideraremos la siguiente función no invertible $E_2 : S^1 \to S^1$ definida por $E_2(z) := z^2$. Luego tenemos que $P_n(E_2) = 2^n - 1$. En efecto, si $E_2^n(z) = z$ entonces $z^{2^n} = z$, y $z^{2^n-1} = 1$. De esta forma toda raíz de la unidad de orden $2^n - 1$ es un punto periódico de E_2 de periodo n. Así, como estas raíces son exactamente $2^n - 1$ se concluye que $P_n(E_2) = 2^n - 1$.

A continuación daremos dos definiciones generales de la dinámica topológica para así hacer un estudio de la órbitas de un punto bajo una función continua.

Definición 1.1.8. Sea X un espacio métrico compacto y sea $f : X \to X$ una función continua. La función f es llamada *topológicamente transitiva* si existe un punto $x \in X$ tal que su órbita es densa en X.

Definición 1.1.9. Sea X un espacio métrico compacto y sea $f : X \to X$ una función continua. La función f es llamada *minimal* si la órbita de cada punto $x \in X$ es densa en X.

Notemos que si una función es minimal entonces es también topológicamente transitiva. El Teorema 1.1.11 nos dará una caracterización de una función minimal. Antes veremos la definición de un conjunto invariante bajo una función.

Definición 1.1.10. Diremos que un subconjunto $E \subseteq X$ es *totalmente invariante* bajo f si $f(E) = E$.

Teorema 1.1.11. *Para un homeomorfismo $f : X \to X$ de un espacio métrico compacto, las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. *f es minimal*
2. *Los únicos subconjuntos cerrados E de X totalmente invariantes son $\emptyset$ y X.*
3. *Si U es un abierto distinto de vacío de X se tiene que $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} f^n(U) = X$.*

Demostración. (1) $\Longrightarrow$ (2) Supongamos que f es minimal y sea E un cerrado distinto de vacío y $f(E) = E$. Si $x \in E$ entonces $\mathcal{O}_f(x) \subseteq E$ y por definición de minimalidad $X = \overline{\mathcal{O}_f(x)} \subseteq E$, por lo tanto $X = E$.
(2) $\Longrightarrow$ (3) Sea U un abierto no vacío, entonces $E = X \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} f^n(U)$ es cerrado y además, $f(E) = E$ pues

$$f(E) = f\left(X \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} f^n(U)\right) = X \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} f^{n+1}(U) = X \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} f^n(U) = E.$$

Luego como $E \neq X$ entonces E es vacío.
(3) $\Longrightarrow$ (1) Sea $x \in X$ y sea U un subconjunto abierto no vacío de X. Por (3) se tiene que $x \in f^n(U)$ para algún $n \in \mathbb{Z}$, luego $f^{-n}(x) \in U$ y por tanto $\mathcal{O}_f(x)$ es densa en X. $\square$

Teorema 1.1.12. *Sea X un espacio métrico localmente compacto y separable. Entonces f es topológicamente transitiva si y solo si dados $U, V \subset X$ abiertos no vacíos existe $N \in \mathbb{Z}$ tal que $f^N(U) \cap V \neq \emptyset$.*

Demostración. Supongamos que f es topológicamente transitiva y sea $x \in X$ tal que $\overline{\mathcal{O}_f(x)} = X$. En particular, tenemos que $f^n(x) \in U$ y $f^m(x) \in V$ para enteros m, n con $m \leq n$. Consecuentemente $f^{m-n}(U) \cup V \neq \emptyset$.

Ahora supongamos la condición de intersección se cumple. Sea $\{U_1, U_2, ...\}$ una base numerable de abiertos de X (es decir, para todo $x \in X$ y para todo abierto U existe n tal que $x \in U_n \subset U$). Esto nos permite escoger U_1 de tal manera que $\overline{U_1}$ es compacto. Para probar la transitividad construiremos una órbita que intersecte todos los abiertos U_n. Por hipótesis, existe $N_1 \in \mathbb{Z}$ tal que $f^{N_1}(U) \cup U_2 \neq \emptyset$. Sea V_1 un abierto no vacío tal que $\overline{V_1} \subset U_1 \cap f^{N_1}(U_2)$. Evidentemente V_1 es compacto. De la misma manera, existe $N_2 \in \mathbb{Z}$ tal que $f^{N_2}(U) \cup U_3 \neq \emptyset$. Nuevamente, tomamos un abierto V_2 tal que $\overline{V_2} \subset V_1 \cap f^{-N_2}(U_3)$. Por inducción, construímos una sucesión de abiertos V_n tales que $\overline{V_{n+1}} \subset V_n \cap f^{-N_{n+1}}(U_{n+2})$. Luego la intersección

$$V = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{V_n} = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$$

es no vacía porque los conjuntos $\overline{V_n}$ son compactos. Por lo tanto, si $x \in V$ entonces $f^{N_{n-1}}(x) \in U_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Definición 1.1.13. El ω-límite de un punto $x \in X$ es un conjunto

$$\omega(x) := \{y \in X : f^{n_i}(x) \to y\}$$

para alguna sucesión creciente de números $\{n_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, esto es, $\omega(x)$ es el conjunto de puntos de acumulación de la órbita de x. De la misma manera, si f es invertible podemos definir el conjunto α-límite como

$$\alpha(x) := \{y \in X : f^{-n_i}(x) \to y\}$$

para alguna sucesión creciente de números $\{n_i\}_{i \in \mathbb{N}}$.

Equivalentemente, podemos decir que los conjuntos ω-límite y α-límite de un punto x son respectivamente:

$$\omega(x) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\bigcup_{i \leq n} f^i(x)} \quad \text{y} \quad \alpha(x) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\bigcup_{i \leq n} f^{-i}(x)}.$$

Definición 1.1.14. Diremos que un punto $x \in X$ es *no-errante* con respecto a la función $f : X \to X$ si para cualquier vecindad U de x existe $N > 0$ tal que $f^N(U) \cap U \neq \emptyset$. El conjunto de todos los puntos no-errantes de f es denotado por $NW(f)$.

Definición 1.1.15. Sea $f : X \to X$ un homeomorfismo de un espacio métrico (X, d). Se dice que un punto $x \in X$ es *homoclínico* a un punto $y \in X$ si

$$\lim_{|n| \to \infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0.$$

Se dice que un punto $x \in X$ es *heteroclínico* a los puntos $y_1, y_2 \in X$ si

$$\lim_{n \to \infty} d(f^n(x), f^n(y_1)) = \lim_{n \to -\infty} d(f^n(x), f^n(y_2)) = 0.$$

1.2. Rotaciones del círculo

Para el círculo vamos a utilizar la notación multiplicativa que es la representación del círculo unitario como subconjunto del plano complejo

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{e^{2\pi i\varphi} : \varphi \in \mathbb{R}\}$$

o bien, la notación aditiva

$$S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$

que es el grupo cociente del grupo aditivo $\mathbb{R}$ módulo el subgrupo $\mathbb{Z}$, esto es, el intervalo $[0, 1)$ de $\mathbb{R}$. La siguiente función

$$e^{2\pi i\varphi} \to \varphi$$

establece un isomorfismo entre estas dos representaciones. Este isomorfismo está ilustrado en la Figura 1.1. Denotaremos por R_α la rotación en un ángulo $2\pi\alpha$. En notación multiplicativa

$$R_\alpha(z) = z_0 z \text{ con } z_0 = e^{2\pi i\alpha}.$$

Además, en notación aditiva tenemos

$$R_\alpha(x) = x + \alpha \pmod 1.$$

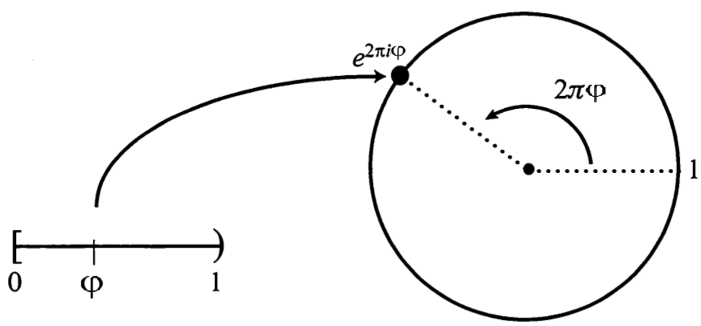


Figura 1.1: Identificamos el punto $\varphi \in [0, 1)$ con el punto $e^{2\pi i\varphi} \in S^1$.

Notemos que la colección $\{R_\alpha : \alpha \in [0, 1)\}$ es un grupo conmutativo con la composición como operación. El elemento inverso esta dado por $R_\alpha^{-1}(x) = R_{-\alpha}(x)$ y además R_0 es la función identidad. Las iteradas de las rotaciones son

$$R_\alpha^n(z) = R_{n\alpha}(z) = z_0^n z \quad \text{o bien} \quad R_\alpha^n(x) = x + n\alpha \pmod 1$$

pues para $z = e^{2\pi i\varphi} \in S^1$ tenemos que

$$\begin{aligned} R_\alpha^n(z) &= R_\alpha^{n-k}(e^{2\pi i(k\alpha+\varphi)}) \text{ para } 1 \leq k \leq n \\ &= (e^{2\pi i\alpha})^n e^{2\pi i\varphi} \\ &= z_0^n z. \end{aligned}$$

Por otro lado, para $x \in S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ tenemos que

$$\begin{aligned} R_\alpha^n(x) &= R_\alpha^{n-k}(x + k\alpha \text{ (mod1)}) \text{ para } 1 \leq k \leq n \\ &= x + n\alpha \text{ (mod1)}. \end{aligned}$$

Para considerar al círculo como un espacio métrico debemos dotarlo de una función distancia. Si consideramos $S^1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ entonces el círculo hereda la distancia usual de $\mathbb{R}^2$. Por otro lado, el círculo también hereda una distancia de $\mathbb{R}$:

$$d(x,y) = \text{mín}\{d_{\mathbb{R}}(x+n, y+m) : n, m \in \mathbb{Z}\}$$

Podemos pensar esta distancia como la medida del arco menor que une dos puntos de S^1. Luego tenemos la siguiente proposición:

Proposición 1.2.1. *R_α es una isometría.*

Demostración. Sean $x, y \in S^1$. En efecto,

$$\begin{aligned} d(R_\alpha(x), R_\alpha(y)) &= \text{mín}\{d_{\mathbb{R}}(R_\alpha(x)+n, R_\alpha(y)+m) : n, m \in \mathbb{Z}\} \\ &= \text{mín}\{d_{\mathbb{R}}(x+\alpha+n, y+\alpha+m) : n, m \in \mathbb{Z}\} \\ &= \text{mín}\{d_{\mathbb{R}}(x+n, y+m) : n, m \in \mathbb{Z}\} \\ &= d(x,y) \end{aligned}$$

□

Una distinción crucial aparece cuando α es número racional o cuando α es un número irracional. En el primer caso, escribimos $\alpha = p/q$, donde p y q son primos relativos. Entonces se verifica que R_α^q es la función identidad,

$$R_\alpha^q(z) = z_0^q z = z$$

luego R_α después de q iteradas se repite sobre si misma.

Proposición 1.2.2. *Si α es irracional entonces la rotación R_α es minimal.*

Demostración. Sea $A \subset S^1$ la clausura de una órbita de uno de sus puntos. Supongamos que dicha órbita no es densa. Entonces $S^1 \backslash A$ es un abierto invariante distinto de vacío que consiste de intervalos disjuntos. Sea I el mas largo de estos intervalos (o escogemos alguno de los mas largos si son varios). Como la rotación preserva el largo de los intervalos (R_α es una isometría), las iteradas $R_\alpha^n(I)$ no se superponen. En otro caso $S^1 \backslash A$ debería contener un intervalo mas largo que I. Ahora, como α es irracional, ninguna de las iteradas de I puede coincidir, pues se tendía entonces que un punto final x de una iterada de I debería volverse sobre sí mismo y tendriamos $x + k\alpha = x$ (mod 1) con $k\alpha = l$ un entero y luego $\alpha = l/k$, lo que contradice el hecho que α es irracional. Luego los intervalos $R_\alpha^n(I)$ son todos de igual largo y todos disjuntos, pero esto es imposible pues el círculo tiene largo finito y la suma de los largos de estos intervalos disjuntos no pueden exceder el largo del círculo. □

1.3. Conjugaciones topológicas y factores

Para clasificar sistemas dinámicos, necesitaremos la noción de equivalencia.

Definición 1.3.1. Sea $r \geq 0$. Dos funciones de clase C^r, $f : M \to M$ y $g : N \to N$ son *topológicamente conjugadas* si existe un homeomorfismo $h : M \to N$ tal que $f = h^{-1} \circ g \circ h$.

Notemos que si x es un punto fijo de f conjugada a g por h, entonces

$$h(x) = (h \circ f)(x) = (g \circ h)(x) = g(h(x)).$$

Luego $h(x)$ es un punto fijo de g. Así, h lleva de conjunto de puntos fijos de f en conjunto de puntos fijos de g. Como h es un homeomorfismo, este preserva todas las propiedades topológicas del conjunto $\mathrm{Fix}(f)$ al conjunto $\mathrm{Fix}(g)$.

Definición 1.3.2. Decimos que dos funciones de clase C^r, $f : M \to M$ y $g : N \to N$ son C^m *equivalentes* o C^m *conjugadas*, $(m \leq r)$, si existe un difeomorfismo de clase C^m; $h : M \to N$, tal que

$$f = h^{-1} \circ g \circ h.$$

La existencia de tal h es referida como una *conjugación* (*suave*).

Proposición 1.3.3. *Si f es topológicamente conjugada a g por el homeomorfismo h, entonces f^n es topológicamente conjugada a g^n por el homeomorfismo h para todo $n \in \mathbb{N}$ (y para todo $n \in \mathbb{Z}$ si f es invertible).*

Demostración. Basta observar que

$$h^{-1} \circ f^n \circ h = (h^{-1} \circ f \circ h)^n = g^n.$$

Además, si f y g son invertibles entonces tomando las inversas tenemos que $f^{-1} = h^{-1} \circ g^{-1} \circ h$, y por lo tanto la proposición vale para todo $n \in \mathbb{Z}$. □

En tanto, el recíproco de esta proposición no es verdadero. Por ejemplo, $f(x) = x + \frac{1}{2}$ (mod 1) y $g(x) = x$ son tales que $f^2(x) = g^2(x)$. Pero g posee una infinidad de puntos fijos y f no posee puntos fijos.

Proposición 1.3.4. *Si $f : M \to M$ es topológicamente conjugada a $g : N \to N$ por un homeomorfismo h y f es topológicamente transitiva entonces g es topológicamente transitiva. Consecuentemente, si f es minimal entonces g es minimal.*

Demostración. Primero probaremos que el homeomorfismo h lleva órbitas densas en órbitas densas. En efecto, sea D un conjunto denso en M. Entonces dado $a \in M$ existe una sucesión $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset D$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$. Por continuidad de h tenemos que $\lim\limits_{n\to\infty} h(u_n) = h(a)$.

Sea $b \in N$ tal que $a = h^{-1}(b)$. Por lo que acabamos de ver, existe una sucesión en $h(D)$ que converge a $h(a) = b$. Por lo tanto, $h(D)$ es denso en N.

Sea x un punto de una órbita densa $\mathcal{O}_f(x)$. Luego,

$$h(\mathcal{O}_f(x)) = \{h(f^n(x)) : n \in \mathbb{N}\} = \{g^n(h(x)) : n \in \mathbb{N}\}$$

es denso en N. Por lo tanto, $h(x)$ es un punto de una órbita densa para g. □

Definición 1.3.5. Una función $g : N \to N$ es un *factor (o factor topológico)* de $f : M \to M$ si existe una función continua y sobreyectiva $h : M \to N$ tal que $h \circ f = g \circ h$. La función h es llamada *semiconjugación*.

Notemos que si una semiconjugación es invertible entonces es una conjugación topológica. Luego el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & M \arrow[d, "h"] \\ N \arrow[r, "g"'] & N \end{tikzcd}$$

1.4. Clasificación topológica

Si el círculo unitario es visto como $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, es práctico pensarlo como el intervalo $[0, 1]$ con los puntos 0 y 1 identificados. Esto nos lleva a una representacion para el gráfico de funciones $S^1 \to S^1$. Estas funciones son representadas en un cuadrado de lado 1 $(\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z})$. Para que el gráfico de una función represente una función continua, este debe intersectar al eje vertical $x = 0$ en la misma coordenada horizontal en cual intersecta al eje vertical $x = 1$, e intersectar en el eje horizontal $y = 0$ en la misma coordenada vertical en el cual intersecta al eje horizontal $y = 1$. Esto está ilustrado en la Figura 1.2.

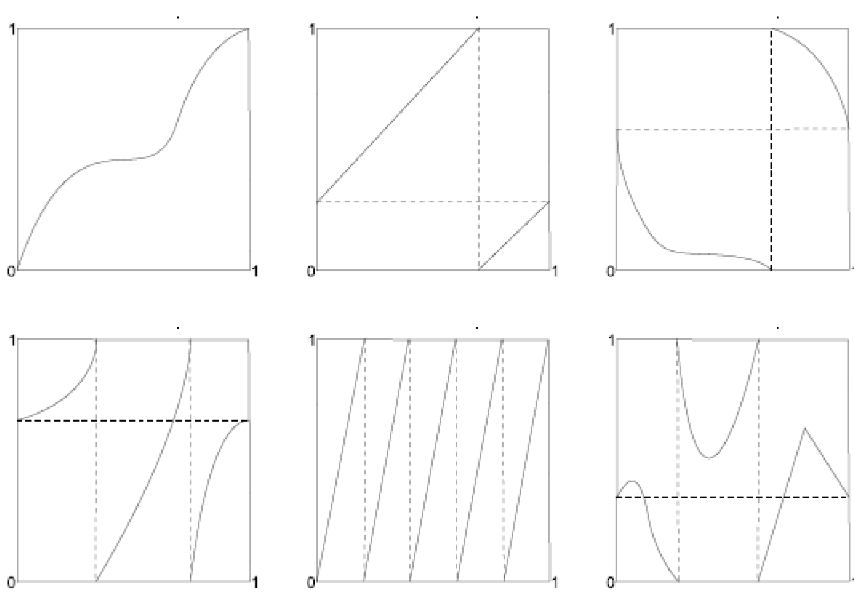


Figura 1.2:

En lo que sigue denotaremos por $[x]$ a la *parte entera* de un número real x. O sea, $[x] = \max\{m \in \mathbb{Z} : m \leq x\}$. Definimos la *proyección natural* como la función

$$\pi : \mathbb{R} \to S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$

que está dada por $\pi(x) = x \pmod 1$. Podemos interpretar π como la parte fraccionaria de x. A continuación mostraremos algunas propiedades de esta función. En adelante, denotaremos $[x]$ como la parte entera de x, es decir, $[x] := \text{máx}\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$.

Proposición 1.4.1. *Dados $x, y \in \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{Z}$ entonces:*

1. $\pi(x) = \pi(y)$ *si y solo si* $x - y \in \mathbb{Z}$.
2. $\pi(x) = \pi(x + k)$.

Demostración. 1) Supongamos que $\pi(x) = \pi(y)$. Entonces $x - [x] = y - [y]$ y luego $x - y = [x] - [y] \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto $x - y \in \mathbb{Z}$. Ahora supongamos que $x - y \in \mathbb{Z}$, observemos que

$$\pi(x) - \pi(y) = x - [x] - y + [y]$$

y entonces $\pi(x) - \pi(y) \in (-1, 1) \cap \mathbb{Z} = \{0\}$. Por lo tanto, $\pi(x) = \pi(y)$.
2)Notemos que

$$x + k = (\pi(x) + [x]) + k = \pi(x) + ([x] + k)$$

y como $\pi(x) \in [0, 1)$ y $[x] + k \in \mathbb{Z}$ entonces $\pi(x + k) = \pi(x)$. □

Definición 1.4.2. Sea $f : S^1 \to S^1$ un homeomorfismo. Consideremos la proyección natural

$$\pi : \mathbb{R} \to S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$

dada por $\pi(x) = x \pmod 1$. Se llama *levantamiento* de f a cualquier homeomorfismo $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisface

$$f \circ \pi = \pi \circ F$$

El siguiente diagrama ilustra la igualdad.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "\pi"] \\
S^1 \arrow[r, "f"'] & S^1
\end{tikzcd}$$

También diremos que f *preserva orientación* si cualquiera de sus levantamientos F es una función estrictamente creciente. Un levantamiento de f nunca es único pues para cada $k \in \mathbb{Z}$ tenemos que,

$$\begin{aligned}
\pi \circ (F + k) &= \pi \circ F + \pi \circ k \\
&= \pi \circ F \\
&= f \circ \pi
\end{aligned}$$

por lo que $F + k$ también es un levantamiento de f. Además se tiene que si F y G son levantamientos de f y g respectivamente, entonces $F \circ G$ es un levantamiento de $f \circ g$. Consecuentemente, F^n es un levantamiento de f^n para todo $n \in \mathbb{N}$.

Lema 1.4.3. *Sea $f : S^1 \to S^1$ una función continua arbitraria. Consideramos la proyección natural $\pi : \mathbb{R} \to S^1$ donde $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ y un levantamiento F de f. Entonces, $F(x + 1) - F(x)$ es un entero que es independiente de x y del levantamiento.*

Demostración. En efecto, $\pi(F(x+1)) = f(\pi(x+1)) = f(\pi(x)) = \pi(F(x))$ por tanto se sigue que $F(x+1) - F(x)$ es un entero. Si consideramos la aplicación $h : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ dada por $h(x) = F(x+1) - F(x)$ entonces por ser h continua su imágen es un conjunto conexo de $\mathbb{Z}$ y por tanto h es una función constante, así $F(x+1) - F(x)$ es independiente de x. Ahora supongamos que $\widetilde{F}$ es otro levantamiento de f, entonces $\pi(\widetilde{F}(x)) = f(\pi(x)) = \pi(F(x))$, luego $\widetilde{F} - F$ es una función continua de valor entero y por tanto constante, así entonces $\widetilde{F}(x+1) - F(x+1) = \widetilde{F}(x) - F(x)$ y por lo tanto, $\widetilde{F}(x+1) - \widetilde{F}(x) = F(x+1) - F(x)$. □

Definición 1.4.4. Si $f : S^1 \to S^1$ y F es un levantamiento de f entonces $F(x+1) - F(x)$ es llamado el *grado* de f y es denotado por $\deg(f)$.

El grado de una función continua nos dice cuantas "vueltas" dá la imagen alrededor del círculo. Siendo así, en caso de tener un homeomorfismo, tenemos que $\deg(f) = \pm 1$ (por ser invertible). Luego, vale que:

1. $F(x+1) = F(x) + 1$.
2. $F^n(x+1) = F^n(x) + 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. (se verifica por inducción)

Ejemplo 1.4.5. Se define la *función de expansión lineal* $E_m : S^1 \to S^1$ por $E_m(x) = mx$ (mod 1) donde $m \in \mathbb{Z}$ y $|m| \geq 1$. Un levantamiento de E_m está dado por la función $\tilde{E}_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $\tilde{E}_m(x) = mx$. Luego se sigue inmediatamente que $\deg(E_m) = m$.

Ahora recordemos que la *topología uniforme* o *topología C^0* está definida en el espacio de las funciones continuas $f : S^1 \to S^1$, ella es la topología inducida por la métrica

$$\|f\|_{C^0} = \text{máx}\{|f(x)| : x \in S^1\}.$$

Lema 1.4.6. *El grado es continuo y por tanto localmente constante en la C^0 topología (uniforme).*

Demostración. Sea $g : S^1 \to S^1$ uniformemente cercana a f. En particular podemos asumir que $\text{dist}(g(x), f(x)) < 1/4$ para todo $x \in S^1$. Sean F y G levantamientos respectivos de f y g, con $|F(0) - G(0)| < 1/4$, y sea también $\varphi(x) = G(x) - F(x)$. Debemos probar que $\deg(f) = \deg(g)$. En efecto, para $x \in [0, 1]$ tenemos que

$$\begin{aligned} G(x+1) - \varphi(x+1) &= F(x+1) \\ &= F(x) + \deg(f) \\ &= G(x) + \deg(f) - \varphi(x) \\ &= G(x+1) + \deg(f) - \deg(g) - \varphi(x). \end{aligned}$$

Luego $\deg(f) - \deg(g) \equiv \varphi(x+1) - \varphi(x)$. Pero dado que $\text{dist}(f(x), g(x)) < 1/4$ y que $|F(0) - G(0)| < 1/4$ implica que $|\varphi(x)| < 1/4$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Luego $|\varphi(x+1) - \varphi(x)| < 1/2$, pero como $|\varphi(x+1) - \varphi(x)| \in \mathbb{Z}$ entonces tenemos que $\varphi(x+1) - \varphi(x) = 0$, esto implica que $\deg(f) = \deg(g)$. □

1.5. Un estudio de la teoría del grado

En esta parte estudiaremos un poco mas el concepto de grado de una aplicación del círculo. Primero es importante conocer la siguiente definición.

Definición 1.5.1. Si f y g son funciones continuas del espacio X al espacio Y, decimos que f es *homotópica* a g si existe una aplicación continua $F : X \times [0,1] \to Y$ tal que

$$F(x,0) = f(x) \quad \text{y} \quad F(x,1) = g(x)$$

para cada $x \in X$. La aplicación F se conoce como *homotopía* entre f y g. Si g es una función constante decimos que f es *homotópicamente nula*.

El hecho en que dos funciones son homotópicas es una relación de equivalencia, para este resultado puede consultarse la página 368 del libro *Topología* de J. Munkres, ver [3] .

Proposición 1.5.2. *deg(f) es un invariante homotópico completo, esto es, deg(f)=deg(g) sí y solo sí f y g son homotópicas.*

Demostración. Supongamos que f y g son homotópicas, luego por el Lema 1.4.6 se sigue que $deg(f) = deg(g)$. Recíprocamente supongamos que $\deg(f) = \deg(g)$, como la relación de homotopía es de equivalencia demostraremos que si $\deg(f) = k$ entonces f es homotópica a la transformación de expansión lineal E_k. En efecto, sea $\deg(f) = k$, sea F un levantamiento de f y sea $F_t(x) := (1-t)F(x) + tkx$. Luego F_t define una homotopía entre F y $k \cdot Id$ y además,

$$\begin{aligned} F_t(x+1) &= (1-t)F(x+1) + tk(x+1) \\ &= (1-t)(F(x)+k) + tk(x+1) \\ &= (1-t)F(x) + (1-t)k + tkx + tk \\ &= F_t(x) + k. \end{aligned}$$

Esto implica que si $\pi(x) = \pi(y)$ entonces $\pi(F_t(x)) = \pi(F_t(y))$, por lo tanto F_t proyecta una homotopía entre f y E_k en S^1. ☐

Lema 1.5.3. *Sea $f : S^1 \to S^1$ una función continua de grado m, $m \neq 1$. Entonces f posee un levantamiento con un punto fijo $p \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.*

Demostración. Sea F un levantamiento de f y sea $G(t) = F(t) - t$. Como

$$G(1/2) - G(-1/2) = F(1/2) - F(-1/2) - 1 = m - 1$$

existe a lo menos un entero k entre $G(-1/2)$ y $G(1/2)$. Luego por Teorema del Valor Intermedio existe $p \in [-1/2, 1/2]$ tal que $G(p) = k$. Así, reemplazando F por $F - k$ obtenemos el levantamiento en que $F(p) = p$. ☐

Proposición 1.5.4. *deg($f \circ g$) =deg(f)·deg(g).*

Demostración. Si $\deg(f) = k$ y $\deg(g) = l$ y sean F y G levantamientos de f y g respectivamente. Sabemos que $F \circ G$ es levantamiento de $f \circ g$, luego

$$(F \circ G)(x+1) = F(G(x)+l) = F(G(x)) + kl$$

y así entonces $F(G(x+1)) - F(G(x)) = kl$. Por lo tanto, $\deg(f \circ g) = kl$. ☐

Corolario 1.5.5. $\deg(f^n) = (\deg(f))^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ahora para funciones del círculo queremos explorar las posibilidades de obtener órbitas periódicas a partir del grado de la función. Sea $P_n(f)$ como en la Definición 1.1.6, esto es, $P_n(f) := \mathrm{CardFix}(f^n)$, de donde $\mathrm{Fix}(f^n)$ es el conjunto de los puntos fijos de f^n entonces tenemos la siguiente proposición.

Proposición 1.5.6. *$P_n(f) \geq |(deg(f))^n - 1|$ para cualquier función continua $f : S^1 \to S^1$.*

Demostración. Primero probaremos para $n = 1$. En efecto, sea $f : S^1 \to S^1$ continua de grado k, buscaremos $|k-1|$ puntos fijos para f. Observemos que por el Teorema del Valor Intermedio la ecuación $F(y) - y = 0 \pmod 1$ tiene $|k-1|$ soluciones en $[0, 1)$, como $F(1) - 1 = F(0) - 0 + k - 1$, entonces cualquier punto fijo vía proyección de F es un punto fijo de f.

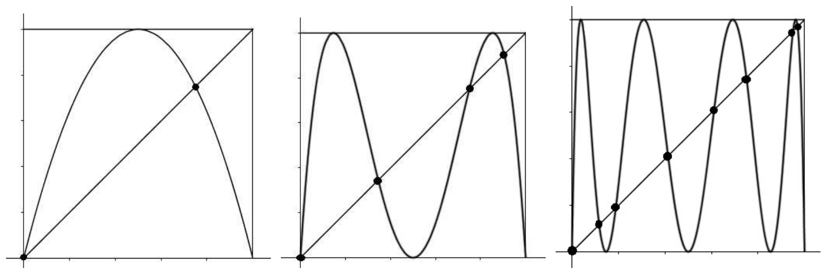
Por otra parte, para verificar para $n > 1$, notamos que

$$P_n(f) = P_1(f^n) \geq |\deg(f^n) - 1| = |(\deg(f))^n - 1|.$$

$\square$

Esta estimación a menudo nos da un gran número de puntos periódicos, pero en algunos casos este número se puede predecir como en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.5.7. La función $f_4 : [0, 1] \to [0, 1]$ dada por $x \to 4x(1 - x)$ de la familia cuadrática induce una transformación f en S^1 de grado cero (su imagen no alcanza a dar una vuelta). Por otro lado es fácil ver que $P_n(f_4) = 2^n$ dibujando inductivamente las funciones f^n y calculando el número de estos puntos de las intersecciones con la diagonal.



(a) Gráfico de f_4 (b) Gráfico de f_4^2 (c) Gráfico de f_4^3

Figura 1.3: Gráficos de las primeras iteradas de f en $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Capítulo 2

Homeomorfismos del círculo

En esta sección daremos la definición de Número de Rotación. Esta definición fue introducida por Poincaré (1885). El probó que el número de rotación de un homeomorfismo es irracional si y solo este homeomorfismo no tiene puntos periódicos, y más aun, que un homeomorfismo con número de rotación irracional es semiconjugada a una rotación del circulo con el mismo número de rotación.

2.1. Número de rotación

Proposición 2.1.1. *Sea $f : S^1 \to S^1$ un homeomorfismo que preserva la orientación y $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un levantamiento de f. Entonces*

$$\tau(F) := \lim_{|n|\to\infty} \frac{1}{n}(F^n(x) - x)$$

existe para todo $x \in \mathbb{R}$. $\tau(F)$ es independiente de x y bien definida hasta un entero, esto es, si F_1 y F_2 son dos levantamientos de f entonces $\tau(F_1) - \tau(F_2) = F_1 - F_2 \in \mathbb{Z}$. Si f tiene un punto periódico entonces $\tau(F)$ es racional.

Esta proposición justifica la siguiente definición:

Definición 2.1.2. $\tau(f) := \pi(\tau(F)) = \tau(F) \pmod 1$ es llamado el *número de rotación* de f. Notamos que el número de rotación es un número real en el intervalo $[0, 1)$.

Demostración de la Proposición 2.1.1

1) $\tau(F)$ es independiente de x: Como f es un homeomorfismo que preserva orientación, tenemos que $\deg(f) = 1$, o sea; $F(x+1) = F(x)+1$. Sean $x, y \in [0, 1)$ luego tenemos que $|F(y)-F(x)| < 1$, en consecuencia

$$|\frac{1}{n}|F^n(x) - x| - \frac{1}{n}|F^n(y) - y|| \leq \frac{1}{n}(|F^n(x) - F^n(y)| + |x - y|) \leq \frac{2}{n}$$

pues $|F^n(x) - F^n(y)| < 1$ cuando $|x - y| < 1$ y por lo tanto el número de rotación de x e y coinciden.

2) Existencia: Dado $x \in \mathbb{R}$ y sean $x_n = F^n(x)$, $a_n := x_n - x$, $k := [a_n]$. Entonces

$$\begin{aligned} a_{m+n} &= F^{m+n}(x) - x \\ &= F^m(x_n) - x \\ &= (F^m(x+k) - (x+k)) + (x_n - x) + (F^m(x_n) - F^m(x+k)) \\ &\quad -(x_n - x - k) \\ &= (x_m - x) + (x_n - x) + (F^m(x_n) - F^m(x+k)) - (x_n - x - k) \\ &\leq a_m + a_n + 1 \end{aligned}$$

pues $F^m(x) - F^m(y) \leq 1$ cuando $x - y \leq 1$ y tenemos que

$$0 \leq x_n - x - k = a_n - [a_n] \leq 1.$$

Por otro lado tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{n} &= \frac{1}{n}(F^n(x) - x) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}(F^{i+1}(x) - F^i(x)) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}(F(x_i) - x_i) \\ &\geq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\min_{0\leq y\leq 1}(F(y) - y) = \min_{0\leq y\leq 1}(F(y) - y). \end{aligned}$$

Como

$$F(x+1) - (x+1) = F(x) + 1 - (x+1) = F(x) - x$$

entonces $F - Id$ es 1-periódica. Luego a_n/n está acotada inferiormente y por lema 2.1.3 (ver apéndice) se prueba que el límite de a_n/n existe. Ahora probaremos que $\tau(F)$ está bien definida hasta un entero. Notemos primero que $\tau(F+k) = \tau(F)+k$ para $k \in \mathbb{Z}$. En efecto, demostraremos por inducción que

$$(F+k)^n(x) = F^n(x) + nk.$$

Para $n = 1$ el resultado es obvio. Supondremos válido para n y probaremos para $n+1$, en efecto,

$$\begin{aligned} (F+k)^{n+1}(x) &= (F+k)(F+k)^n(x) \\ &= (F+k)(F^n(x) + nk) \\ &= F(F^n(x) + nk) + k \\ &= F^{n+1}(x) + nk + k \\ &= F^{n+1}(x) + (n+1)k \end{aligned}$$

y en consecuencia

$$\begin{aligned}
\tau(F+k) &= \lim_{|n|\to\infty} \frac{1}{n}((F+k)^n(x)-x) \\
&= \lim_{|n|\to\infty} \frac{1}{n}(F^n(x)+nk-x) \\
&= \lim_{|n|\to\infty} \frac{1}{n}(F^n(x)-x)+k \\
&= \tau(F)+k
\end{aligned}$$

Recordamos que cualquier levantamiento F_1 de f es de la forma $F_1 = F_2 + k$ para algún $k \in \mathbb{Z}$, y por tanto se sigue que

$$\tau(F_1) - \tau(F_2) = k \in \mathbb{Z}.$$

Ahora supongamos que f tiene un punto periódico de periodo q, es decir, existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $f^q(\pi(x)) = \pi(x)$. Se verifica que

$$\pi \circ F^q = f^q \circ \pi.$$

Por lo tanto, $\pi(F^q(x)) = f^q(\pi(x)) = \pi(x)$, o sea, que tenemos que $F^q(x) = x + p$ para algún $p \in \mathbb{Z}$. Luego si $m \in \mathbb{N}$ tenemos

$$\begin{aligned}
\tau(F) &= \lim_{m\to\infty} \frac{1}{mq}(F^{mq}(x)-x) \\
&= \lim_{m\to\infty} \frac{1}{mq}\sum_{i=0}^{m-1}(F^q(F^{iq}(x))-F^{iq}(x)) \\
&= \lim_{m\to\infty} \frac{mp}{mq} = \frac{p}{q}.
\end{aligned}$$

Luego $\tau(F) = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ y así concluímos la demostración de la Proposición 2.1.1.

□

Ejemplo 2.1.3. Consideramos la rotación $R_\alpha : S^1 \to S^1$ dada por

$$R_\alpha(x) = x + \alpha \pmod 1.$$

Cualquier levantamiento $\tilde{R_\alpha} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es de la forma

$$\tilde{R_\alpha}(x) = x + \alpha + k$$

para algún $k \in \mathbb{Z}$, es decir, una traslación de x por $\alpha + k$ para algún $k \in \mathbb{Z}$. El número de rotación en este caso sería

$$\begin{aligned}
\tau(R_\alpha) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(\tilde{R}^n_\alpha(x)-x) \pmod 1 \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(x+n\alpha+nk-x) \pmod 1 = \alpha.
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.1.4. Sea $f : S^1 \to S^1$ continua y sea F un levantamiento de f. Entonces $\tau(R_\alpha \circ f) = \tau(f) + \alpha$. En efecto, usando el ejemplo anterior tenemos que

$$\begin{aligned}
\tau(R_\alpha \circ f) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}((\tilde{R}_\alpha \circ F)^n(x) - x)) \pmod 1 \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(F^n(x) + n\alpha + nk - x) \pmod 1 \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(F^n(x) - x) + \alpha + k \pmod 1 \\
&= \tau(f) + \alpha.
\end{aligned}$$

Proposición 2.1.5. *El número de rotación es invariante por conjugaciones topológicas.*

Demostración. Sean f y h homeomorfismos de S^1 que preservan orientación y sean F y H levantamientos de f y h respectivamente. Entonces se verifica que H^{-1} es levantamiento de h^{-1} y que $H \circ F \circ H^{-1}$ es levantamiento de $h \circ f \circ h^{-1}$. En efecto,

$$\pi \circ H^{-1} = h^{-1} \circ h \circ \pi \circ H^{-1} = h^{-1} \circ \pi \circ H \circ H^{-1} = h^{-1} \circ \pi$$

$$\pi(H \circ F \circ H^{-1}) = h \circ \pi \circ F \circ H^{-1} = h \circ f \circ \pi \circ H^{-1} = (h \circ f \circ h^{-1})\pi.$$

Luego, para todo $x \in \mathbb{R}$ se cumple lo siguiente

$$\frac{(H \circ F \circ H^{-1})^n(x) - x}{n} = \frac{(H \circ F^n \circ H^{-1})(x) - x}{n}$$

$$= \frac{H(F^n \circ H^{-1}(x)) - (F^n \circ H^{-1})(x)}{n} + \frac{(F^n \circ H^{-1})(x) - H^{-1}(x)}{n} + \frac{H^{-1}(x) - x}{n}.$$

Como los numeradores del primer y tercer término de la ultima expresión están acotados y son indepedientes de n, podemos concluir que,

$$\tau(h \circ f \circ h^{-1}) = \lim_{n\to\infty} \frac{(H \circ F \circ H^{-1})^n(x) - x}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{F^n(x) - x}{n} = \tau(f).$$

$\square$

Probamos anteriormente que si existe un punto periódico entonces el número de rotación es racional (Proposición 2.1.1). Ahora probaremos el recíproco.

Proposición 2.1.6. *Sea f un homeomorfismo que preserva orientación de S^1. Entonces $\tau(f)$ es racional, si y solo si f tiene un punto periódico.*

Demostración. Supongamos que $\tau(f) = p/q \in \mathbb{Q}$. Entonces según la definición de τ,

$$\tau(f^m) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}((F^m)^n(x) - x) = m \lim_{n\to\infty} \frac{1}{mn}(F^{mn}(x) - x) = m\tau(f) \pmod 1$$

Se sigue que $\tau(f^q) = 0$. Luego es suficiente probar que si $\tau(f) = 0$ entonces f tiene un punto fijo.

Supongamos que f no tiene puntos fijos y sea F el levantamiento tal que
$F(0) \in [0,1)$. Entonces $F(x) - x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ para todo $x \in \mathbb{R}$ pues, de lo contrario $F(x) - x \in \mathbb{Z}$ y entonces tendriamos,

$$\begin{aligned} \pi(F(x) - x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \pi(F(x)) = \pi(x) \\ &\Leftrightarrow \quad f(\pi(x)) = \pi(x) \end{aligned}$$

lo que significa que $\pi(x)$ sería punto fijo de f. Por lo tanto, se tiene que

$$F(x) - x \in (n, n+1)$$

para algún $n \in \mathbb{Z}$, pero $F(0) - 0 = F(0) \in [0,1)$ y así se tiene necesariamente que

$$0 < F(x) - x < 1.$$

Como $F - \mathrm{Id}$ es continua entonces en $[0,1]$ se alcanza un mínimo y un máximo y por tanto, existe un $\delta > 0$ tal que

$$0 < \delta \leq F(x) - x \leq 1 - \delta < 1$$

Por periodicidad de $F - \mathrm{Id}$ esta estimación se tiene para todo $x \in \mathbb{R}$. En particular nosotros podemos tomar $x = F^i(0)$ y sumanto desde $i = 0$ hasta $i = n - 1$ obtenemos

$$n\delta \leq F^n(0) \leq n(1 - \delta)$$

o bien

$$\delta \leq \frac{F^n(0)}{n} \leq 1 - \delta.$$

Se concluye así que

$$\tau(f) = \lim_{n\to\infty} \frac{f^n(0)}{n} \neq 0$$

lo cual es una contradicción pues suponemos que $\tau(f) = 0$. Por lo tanto, f tiene un punto fijo y en consecuencia f tiene un punto q-periódico. □

Esta última proposición nos será muy útil en adelante, en particular, el hecho que en que si $\tau(f)$ es irracional entonces f no tiene puntos periódicos y viceversa.

Proposición 2.1.7. *Sea $f : S^1 \to S^1$ un homeomorfismo que preserva orientación con número de rotación racional. Entonces todas las orbitas periódicas tienen el mismo periodo.*

Demostración. Si $\tau(f) = p/q$, donde p y q son enteros relativamente primos. Vamos a probar que para cualquier punto periódico $\pi(x)$ existe un levantamiento F de f tal que $F^q(x) = x + p$. Si $\pi(x)$ es periódico y F es levantamiento entonces $F^r(x) = x + s$ para algún $r, s \in \mathbb{Z}$, luego se verifica que $F^{nr}(x) - x = ns$ y entonces

$$k + \frac{p}{q} = \tau(F) = \lim_{n\to\infty} \frac{F^{nr}(x) - x}{nr} = \lim_{n\to\infty} \frac{ns}{nr} = \frac{s}{r}.$$

Podemos escoger F tal que $k = 0$ y entonces tenemos que $s = mp$ y $r = mq$ para algún entero m. Luego se verifica por inducción que si $F^q - p > x$ entonces $F^{mq}(x) - mp > x$. O sea,

$$F^r(x) - s = F^{mq}(x) - mp > x$$

lo que es imposible. Así, se tiene que $F^q(x) - p \leq x$. Analogamente se prueba que si $F^q(x) - p < x$ entonces $F^{mq}(x) - mp = F^r(x) - s < x$ lo que también es imposible por lo que $F^q(x) - p \geq x$. Por lo tanto, $F^q(x) - p = x$ y concluímos que todas las órbitas periódicas tienen el mismo periodo q. □

2.2. Estabilidad sobre perturbaciones

Los siguientes resultados consideran la estabilidad o la inestabilidad del número de rotación cuando este es racional o irracional. La definición de número de rotación sugiere además que esta es monótona: Si $F_1 > F_2$ entonces $\tau(F_1) \geq \tau(F_2)$. Esto lleva a la siguiente terminología:

Definición 2.2.1. Definimos un ordenamiento $\prec$ en la colección de homeomorfismos del círculo que preservan orientación como sigue: Si $f_0 : S^1 \to S^1$ y $f_1 : S^1 \to S^1$ son tales que

$$f_0(x) + f_1(x) \neq 0 \text{ para todo } x \in S^1,$$

construiremos una homotopía lineal $f_t : S^1 \to S^1$ entre f_0 y f_1 con $t \in [0,1]$ por

$$f_t = \frac{tf_0 + (1-t)f_1}{\|tf_0 + (1-t)f_1\|}.$$

Levantando esta homotopía obtenemos F_0 y F_1, que son los levantamientos de f_0 y f_1 respectivamente. Decimos que $f_0 \prec f_1$ si $F_0(x) < F_1(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Notamos que este ordenamiento "$\prec$"no es transitivo. La definición de rotación lo implica inmediatamente

Proposición 2.2.2. *$\tau(\cdot)$ es monótona: Si $f_0 \prec f_1$ entonces $\tau(f_0) \leq \tau(f_1)$ si los representantes de τ son escogidos vía levantamientos compatibles.*

Observación 2.2.3. En particular si $\{f_t\}$ es una familia de homeomorfismos del círculo que preservan la orientación tal que $f_t(x)$ es creciente en t para todo $x \in \mathbb{R}$ entonces $\tau(f_t)$ es no decreciente en t.

Para valores irracionales el número de rotación es estrictamente creciente:

Proposición 2.2.4. *Si $f_1 \prec f_2$ y $\tau(f_1) \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ entonces $\tau(f_1) < \tau(f_2)$.*

Demostración. Sean F_1 y F_2 levantamientos como en la definición de "$\prec$", entonces se cumple que $F_2(x) - F_1(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, por continuidad y periodicidad de $F_2 - F_1$ se tiene que $F_2(x) - F_1(x) > \delta$ para algún $\delta > 0$ y todo $x \in \mathbb{R}$. Si tomamos $p/q \in \mathbb{Q}$ tal que

$$p/q - \delta/q < \tau(F_1) < p/q$$

entonces existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $F_1^q(x_0) - x_0 > p - \delta$. En otro caso, se tendría que

$$\begin{aligned}
\tau(F_1) &= \lim_{n\to\infty} \frac{F_1^q(x) - x}{nq} \\
&= \frac{1}{nq}\sum_{i=0}^{n-1}(F_1^q(F_1^{iq}(x)) - F_1^{iq}(x)) \\
&\leq \frac{1}{nq}\sum_{i=0}^{n-1}(p - \delta + F_1^{iq} - F_1^{iq}) = p/q - \delta/q
\end{aligned}$$

una vez que

$$\begin{aligned} F_2^q(x_0) &= F_2(F_2^{q-1}(x_0)) \\ &> F_1(F_2^{q-1}(x_0)) + \delta \\ &> F_1(F_1^{q-1}(x_0)) + \delta \\ &= F_1^q(x_0) + \delta > x_0 + p \end{aligned}$$

Luego tenemos dos hipótesis, que $F_2^q(x) > x + p$ para todo $x \in \mathbb{R}$ o que $F_2^q(x_1) = x_1 + p$ para algún $x_1 \in \mathbb{R}$. En ambos casos tenemos que $\tau(F_1) < p/q \leq \tau(F_2)$ y por lo tanto, $\tau(f_1) < \tau(f_2)$. $\square$

Proposición 2.2.5. *$\tau(\cdot)$ es continua en la C^0-topología.*

Demostración. Mostraremos que dado un homeomorfismo $f : S^1 \to S^1$ que preserva orientación, cualquiera sea $\delta > 0$, existe un $\epsilon > 0$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}$ tenemos que,

$$\|f(x) - g(x)\|_{C^0} < \epsilon \implies |\tau(f) - \tau(g)| < \delta$$

donde cada $g : S^1 \to S^1$ es un homeomorfismo que preserva orientación. Sea $\tau = \tau(f)$ y sean p/q, $r/s \in \mathbb{Q}$ tales que

$$r/s < \tau < p/q.$$

Luego escogemos un levantamiento F de f tal que

$$-1 \leq F^q(x) - x - p \leq 0$$

para algún $x \in \mathbb{R}$. Notemos que $F^q(x) < x + p$, pues de lo contrario, $F^q(x) = x + p$, para algún $x \in \mathbb{R}$, entonces f tendría un punto q-periódico y así $\tau(f) = p/q$. La función $F^q - Id$ alcanza un máximo pues es continua y periódica. Por lo tanto, existe $\delta > 0$ tal que

$$F^q(x) < x + p - \delta$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Sea $\epsilon > 0$ y sea $g : S^1 \to S^1$ un homeomorfismo que preserva orientación con $\|f - g\|_{C^0} < \epsilon$. Sea G un levantamiento de g. Notamos que G puede ser escogido de modo que

$$|F(x) - G(x)| < \epsilon$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Así, para un ϵ suficientemente pequeño tenemos que

$$G^q(x) < x + p - \delta$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Consecuentemente obtenemos que $\tau(g) < p/q$ $\square$

Proposición 2.2.6. *Sea $f : S^1 \to S^1$ un homeomorfismo que preserva orientación con número de rotación racional $\tau(f) = p/q$ y puntos no-periódicos. Entonces todas las perturbaciones suficientemente cercanas $\overline{f}$ con $\overline{f} \prec f$ o bién todas las perturbaciones suficientemente cercanas $\overline{f}$ con $f \prec \overline{f}$ tienen número de rotación p/q.*

Demostración. Como f tiene puntos que no son periódicos, entonces existen puntos $x \in \mathbb{R}$ tales que $f^q(\pi(x)) \neq \pi(x)$ y luego así para un levantamiento F de f existen también puntos $x \in \mathbb{R}$ tales que $F^q(x) - p \neq x$. De esta forma $F^q - Id - p$ no es identicamente nula y tiene ceros pues f tiene número de rotación racional. Supongamos que existe $x \in \mathbb{R}$ tal que

$$F^q(x) - x - p > 0.$$

Entonces para cualquier perturbación $\overline{f}$ suficiente cercana $\overline{f} \prec f$ vemos que

$$\overline{F}^q(x) - x - p > 0$$

donde $\overline{F}$ es un levantamiento de $\overline{f}$. Como $\overline{F}^q - Id$ es continua y periódica existe $\delta > 0$ tal que

$$\overline{F}^q(x) - x - p - \delta > 0$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Procediendo de forma análoga a la demostración de la Proposición 2.2.4. obtenemos que $\tau(\overline{f}) \geq p/q$. Así, si $\overline{f} \prec f$, tenemos que $\overline{F}(x) \leq F(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y luego

$$\tau(\overline{f}) \leq \tau(f) = p/q.$$

Por lo tanto $\tau(\overline{f}) = p/q$. Análogamente se prueba para perturbaciones $\overline{f}$ en que $f \prec \overline{f}$. □

Definición 2.2.7. Una función continua y monótona $\phi : S^1 \to \mathbb{R}$ es llamada *escalera del diablo* si existe una familia $\{I_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de subintervalos abiertos y disjuntos de $[0, 1]$ con unión densa tal que ϕ obtiene distintos valores cosntantes en estos subintervalos.

Proposición 2.2.8. *Sea $\{f_t\}_{t \in [0,1]}$ una familia continua y monótona de homeomorfismos del círculo que preservan orientación tal que $\tau : t \to \tau(f_t)$ es no-constante. Si existe un conjuto denso $S \subset \mathbb{Q}$ tal que ninguna función f_t es topológicamente conjugada a una rotación R_α con $\alpha \in \mathbb{Q}$, entonces τ es una escalera del diablo.*

Demostración. Por las Proposiciones 2.2.2 y 2.2.5 tenemos que τ es monótona y continua. De la Proposición 2.2.6 se sigue que $\tau^{-1}(S)$ es una unión disjunta de intervalos cerrados de largo positivo. Falta verificar que $\tau^{-1}(S)$ es denso. En efecto, podemos asumir (agrandadando S si es necesario), que $\tau(f_t) = p/q \in \mathbb{Q} \setminus S$. Entonces f_t es topológicamente conjugada a una rotación $R_{p/q}$. Así la Proposición 2.2.4 implica que τ es estríctamente monótona en los puntos $t \in \tau^{-1}([0, 1] \setminus S)$: El número de rotación es estríctamente creciente cuando toma valores irracionales y cuando las funciones del círculo conjugan con rotaciones racionales. Luego para $t \in [0, 1) \setminus \tau^{-1}(S)$ y $\epsilon > 0$ tenemos que $\tau(t) \neq \tau(t + \epsilon)$ y por tanto por la densidad de S, la continuidad de τ y por el Teorema del Valor Intermedio existe $t_1 \in \tau^{-1} \cap [t, t+\epsilon]$. Con un similar argumento para el caso $t = 1$ se completa la demostración. □

Para concluir observamos que los resultados de esta sección depende de la monoticidad y la continuidad de f, pero no de la invertibilidad. Luego es suficiente asumir que $f : S^1 \to S^1$ es una función continua que preserva orientación de grado uno, esto es, tiene un levantamiento F que no es decreciente.

Capítulo 3

La clasificación de Poincaré

En esta sección daremos una descripción completa de los posibles comportamientos de las órbitas para homeomorfismos del círculo. En particular, daremos una descripción de homeomorfismos del círculo mediante semiconjugaciones monótonas.

3.1. Número de rotación racional

La siguiente proposición dice que las órbitas de un homeomorfismo del círculo que preserva orientación se comportan de la misma manera que las órbitas de una rotación del círculo con el mismo número de rotación.

Proposición 3.1.1. *Sea $f : S^1 \to S^1$ un homeomorfismo que preserva orientación con número de rotación racional $\tau(f) = p/q$. Supongamos que p y q son primos relativos y sea $\overline{x} \in S^1$ tal que $f^q(\overline{x}) = \overline{x}$. Entonces el ordenamiento de $\{\overline{x}, f(\overline{x}), f^2(\overline{x}), ..., f^{q-1}(\overline{x})\}$ en S^1 es el mismo que $\left\{0, \frac{p}{q}, \frac{2p}{q}, ..., \frac{(q-1)p}{q}\right\}$ en S^1. En particular las órbitas periódicas inducen intervalos en S^1 que son permutadas por f.*

Demostración. Sea F un levantamiento de f tal que $F^q(x) = x + p$ para $x \in \pi^{-1}(\{\overline{x}\})$. Esto es posible de hacer, pues, por la Proposición 2.1.1. tenemos que

$$\pi(F^q(x)) = f^q\pi(x) = f^q(\overline{x}) = \overline{x}$$

y entonces $F^q(x) \in \pi^{-1}(\{\overline{x}\}))$ y por lo tanto $F^q(x) = x + p$. Definimos el siguiente conjunto, $A := \pi^{-1}\{\overline{x}, f(\overline{x}), f^2(\overline{x}), ..., f^{q-1}(\overline{x})\}$, este conjunto define una partición de $[x, x + p]$ en $p \cdot q$ intervalos. Al mismo tiempo el intervalo $[x, x + p]$ es particionado en los intervalos $[x, F(x)], [F(x), F^2(x)], ..., [F^{q-1}(x), F^q(x)]$. Como F es una biyección entre cualquier par de estos intervalos adyacentes de la partición y preserva A, cada intervalo $[F^i(x), F^{i+1}(x)]$ contiene exactamente $p + 1$ puntos de A. Ahora dados $k, r \in \mathbb{Z}$ tales que el punto vecino derecho de x en A es $x_1 = F^k(x) - r$ definimos $\overline{F} = F^k - r$. Como $\overline{F}$ es creciente en $\mathbb{R}$ y preserva A, entonces $x_1 = \overline{F}(x)$ es el vecino derecho mas cercano de x en A y $[x, F(x)]$ es dividido por A en p subintervalos probando que $\overline{F}^p(x) = F(x)$. En consecuencia, $f^{kp}(\overline{x}) = f(\overline{x})$ donde k es el único número entre 0 y $q-1$ tal que $kp \equiv 1 \pmod 1$. Por lo tanto la órbita sigue el ordenamiento $(\overline{x}, f^k(\overline{x}), f^{2k}(\overline{x}), ..., f^{(q-1)k}(\overline{x}))$.

Ahora sea $R_{\frac{p}{q}}$ la rotación de ángulo $\frac{p}{q}$. Tenemos que $\pi\left\{0, \dfrac{p}{q}, ..., \dfrac{p(q-1)}{q}\right\}$ es una órbita periódica y está ordenada como $\left(0, \dfrac{kp}{q}, \dfrac{2kp}{q}, ..., \dfrac{(q-1)kp}{q}\right)$, que es el mismo orden para f lo que concluye la prueba. □

La siguiente proposición afirma que para homeomorfismos del círculo con número de rotación racional todas las órbitas no periódicas son asintóticas a las órbitas periódicas. Esto lleva a una clasificación de las posibles órbitas con número de rotación racional.

Proposición 3.1.2. *Sea $f : S^1 \to S^1$ un homeomorfismo que preserva orientación con número de rotación racional $\tau(f) = p/q \in \mathbb{Q}$. Entonces hay dos posibles tipos de órbitas no periódicas para f:*

1. *Si f tiene solo una órbita periódica entonces todo punto es heteroclínico bajo f^q a dos puntos de la órbita periódica. Estos puntos son diferentes si el periodo es mayor que uno.*

2. *Si f tiene más de una órbita periódica entonces cada punto no periódico es heteroclínico sobre f^q a dos puntos en diferentes órbitas periódicas.*

Demostración. Sea $x_0 \in S^1$ tal que $f^q(x_0) = x_0$. Notamos primero que f^q puede ser identificado con un homeomorfismo de $S^1 \backslash \{x_0\}$, o equivalentemente podemos escoger un punto $z \in \pi^{-1}(x_0)$ y restringir el levantamiento $F^q(\cdot) - p$ de f a $[z, z+1]$. Luego el resultado se sigue de la Proposición 1.1.8. aplicado a este intervalo, excepto la ultima parte de (2), donde las dos órbitas en cuestión son diferentes. Si existe un intervalo $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ tal que los puntos a y b son ceros adyacentes de la función $F^q - Id - p$ y se proyectan en la misma órbita periódica, entonces f tiene una sola órbita periódica, pues si $\pi(a) = x \in S^1$, $\pi(b) = f^k(x) \in S^1$ entonces $\bigcup_{n=0}^{q-1} f^{nk}\pi(a, b)$ es un recubrimiento del complemento de $\{f^n(x)\}_{n=0}^{q-1}$ en S^1 y no contiene puntos periódicos. Por invarianza $f^{nq}\pi(a, b)$ no lo hace ambas. □

Señalamos que no son solo puntos no-periódicos los que individualmente son asintóticos a puntos periódicos, pero que este comportamiento es coherente para iteradas de puntos bajo f. Así que para un punto no-periódico x los puntos $x, f(x), f^2(x), ..., f^{q-1}(x)$ son todos positivamente asintóticos a correspondientes iteradas $y, f(y), f^2(y), ..., f^{q-1}(y)$ de un punto periódico y ellos son movidos en la misma dirección. Esto se sigue inmediatamente de la monoticidad.

Proposición 3.1.3. *Si $I \in \mathbb{R}$ es un intervalo en que sus extremos son ceros consecutivos de la función $F^q - Id - p$ entonces esta función tiene el mismo signo en el interior de I y $F(I)$.*

Demostración. Si $(F^q - Id - p)(x) > 0$ para $x \in I$ entonces $F^q - Id - p$ es creciente en el extremo izquierdo de I. Como F es monótona entonces $(F^q - Id - p) \circ F$ es creciente en el extremo izquierdo de $F(I)$ y por lo tanto $(F^q - Id - p)(x) > 0$ para $x \in F(I)$.

El caso negativo es similar. □

3.2. Número de rotación irracional

El primer paso hacia una clasificación en este caso es probar que las órbitas de una función del círculo f con número de rotación $\tau(f) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ están clasificados como aquellos para la rotación $R_{\tau(f)}$ por $\tau(f)$.

Proposición 3.2.1. *Sea $f : S^1 \to S^1$ un homeomorfismo que preserva orientación y F un levantamiento con número de rotación $\tau = \tau(F) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Entonces para $n_1, n_2, m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ y $x \in \mathbb{R}$*

$$n_1\tau + m_1 < n_2\tau + m_2 \quad \text{sí y solo sí} \quad F^{n_1}(x) + m_1 < F^{n_2}(x) + m_2 \tag{3.2.1}$$

Demostración. Definimos $p(x) := F^{n_1}(x) + m_1 - F^{n_2}(x) - m_2$. Notamos que $p(x)$ no cambia de signo (y por lo tanto la segunda desigualdad en la proposición 3.2.1 es independiente de x). En efecto, por continuidad, un cambio de signo implica la existencia de $z \in \mathbb{R}$ en que $F^{n_1}(z) - F^{n_2}(z) + m_1 - m_2 = 0$, entonces $F^{n_1}(z) - F^{n_2}(z) \in \mathbb{Z}$ y así z proyecta un punto periódico en el circulo, lo cual es imposible pues $\tau(F)$ es irracional.

Supongamos que $F^{n_1}(x) + m_1 < F^{n_2}(x) + m_2$. En particular, para $x = 0$ tenemos que $F^{n_1}(0) + m_1 < F^{n_2}(0) + m_2$. Si hacemos $y = F^{n_2}(0)$ tenemos que

$$F^{n_1-n_2}(y) < y + m_2 - m_1$$

Esta última desigualdad vale para todo $y \in \mathbb{R}$, en particular vale para $y = 0$ y para $y = F^{n_1-n_2}(0)$, de donde

$$F^{n_1-n_2}(0) < m_2 - m_1$$

y además de las últimas dos desigualdades obtenemos que

$$F^{2(n_1-n_2)}(0) < (m_2 - m_1) + F^{n_1-n_2}(0) < 2(m_2 - m_1)$$

Luego se sigue por inducción que $F^{n(n_1-n_2)}(0) < n(m_2 - m_1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Si $n_1 - n_2 > 0$ se sigue que

$$\tau = \lim_{n\to\infty} \frac{F^{n(n_1-n_2)}(0)}{n(n_1-n_2)} < \lim_{n\to\infty} \frac{n(m_2-m_1)}{n(n_1-n_2)} = \frac{m_2-m_1}{n_1-n_2}$$

(esta desigualdad es estricta pues τ es irracional). En consecuencia

$$n_1\tau + m_1 < n_2\tau + m_2.$$

Similarmente se prueba que $F^{n_1}(x) + m_1 > F^{n_2} + m_2$ implica que $n_1\tau + m_1 > n_2\tau + m_2$ concluyendo así la demostración. □

La Proposición anterior tiene cierta semejanza con el resultado anterior acerca del caso de número de rotación racional en que sus órbitas periódicas están ordenadas de misma manera que la correspondiente rotación. Para un número de rotación racional se determina que las órbitas son asintóticas a las órbitas periódicas. Esto motiva el estudio de los comportamientos asintóticos de las órbitas para homeomorfismo con número de rotación irracional.

Lema 3.2.2. *Sea $f : S^1 \to S^1$ un homeomorfismo que preserva orientación con número de rotación irracional. Entonces para $x \in S^1$ y para distintos enteros $m > n$, toda semiórbita intersecta al intervalo cerrado $I = [f^m(x), f^n(x)] \subseteq S^1$.*

Observación 3.2.3. Para dos puntos distintos de S^1 hay exactamente dos intervalos distintos de S^1 en que sus extremos son estos puntos. El lema vale para las dos elecciones. Dado que $\tau(f)$ es irracional entonces x es no-periódico e I no consta de un solo punto.

Demostración. Consideremos la semiórbita positiva $\{f^k(x)\}_{k\in\mathbb{Z}^+}$. La demostración para semiórbitas negativas es igual. Luego es suficiente probar que $S^1 \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} f^{-k}(I)$.

Se definen los intervalos $I_k := f^{-k(n-m)}(I)$. Notamos que los intervalos consecutivos son contiguos pues tienen de punto común uno de sus extremos. En consecuencia, si $S^1 \neq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k$ entonces la sucesión de puntos extremos converge a algún $z \in S^1$. Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} z &= \lim_{k\to\infty} f^{-k(n-m)}(f^m(x)) = \lim_{k\to\infty} f^{-(k+1)(n-m)}(f^m(x)) \\ &= \lim_{k\to\infty} f^{n-m} f^{-k(n-m)}(f^m(x)) = f^{n-m} \lim_{k\to\infty} f^{-k(n-m)}(f^m(x)) \\ &= f^{n-m}(z) \end{aligned}$$

y así z es periódico lo cual contradice el hecho que $\tau(f)$ es irracional. □

Ahora mostraremos como es la estructura de las órbitas de las funciones cuando su número de rotación es irracional. Veremos que en este caso todas las órbitas son densas o todas las órbitas son asintóticas a un conjunto de Cantor (Ver Apéndice). En la siguiente definición daremos una caracterización un conjunto de Cantor.

Definición 3.2.4. Diremos que un conjunto $K \subset S^1$ es un *conjunto de Cantor* si satisface:

1. K es compacto.
2. K es perfecto.
3. K es totalmente disconexo.

Recordemos que un espacio topológico de dice que es *totalmente disconexo* si sus únicos subconjuntos conexos son los formados por un solo punto. Un *conjunto perfecto* es un subconjunto cerrado tal que todos sus puntos son puntos de acumulación. Por último recordemos también que un conjunto se dice *nunca denso* si el interior de su clausura es vacío.

Proposición 3.2.5. *Sea $f : S^1 \to S^1$ un homeomorfismo que preserva orientación y con número de rotación irracional. Entonces para todos $x, y \in S^1$, $x \neq y$, se tiene que $\omega(x) = \omega(y)$ y además $E := \omega(x)$ es todo S^1 o es perfecto y nunca denso.*

Demostración. Por demostrar que $\omega(x) = \omega(y)$ para todos $x, y \in S^1$. Sea $z \in \omega(x)$, entonces existe una sucesión creciente l_n en $\mathbb{N}$ tal que $\lim_{n\to\infty} f^{l_n}(x) = z$. Si $y \in S^1$ entonces por el Lema 3.2.2 existe $k_m \in \mathbb{N}$ tal que $f^{k_m}(y) \in I_m := [f^{l_m}(x), f^{l_{m+1}}(x)]$, por lo tanto $\lim_{m\to\infty} f^{k_m}(y) = z$ y así $z \in \omega(y)$. Por lo tanto $\omega(x) \subset \omega(y)$ para todo $x, y \in S^1$ y por simetría $\omega(x) = \omega(y)$ para todo $x, y \in S^1$.

Ahora probaremos que $E := \omega(x)$ o es igual a S^1 o es nunca denso. Afirmamos que E es el único conjunto cerrado e invariante por f. En efecto, sea $A \subset S^1$ cerrado, no-vacío e invariante por f. Si $x \in A$ entonces $\{f^k(x)\}_{k\in\mathbb{Z}} \subset A$. Además,como A es cerrado, $E = \omega(x) \subset A$. Por lo tanto, los únicos conjuntos cerrados e invariantes de E son $\emptyset$ y E.

Como la frontera de E, esto es, $\partial E = \overline{E} \cap \overline{S^1 \setminus E}$, es un subconjunto cerrado e invariante de E, entonces $\partial E = \emptyset$ o $\partial E = E$. Si $\partial E = \emptyset$ entonces $E = S^1$. Si $\partial E = E$ entonces E es nunca denso.

Por ultimo probaremos que E es perfecto. Sabemos que E es cerrado, falta probar que todo punto de E es un punto de acumulación de E. Sea $x \in E = \omega(x)$, luego existe una sucesión creciente k_n tal que $\lim\limits_{n\to\infty} f^{k_n}(x) = x$. Como $\tau(f) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ no existen órbitas periódicas y luego $f^{k_n}(x) \neq x$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto x es punto de acumulación de E pues $f^{k_n}(x) \in E$ por invarianza. $\square$

La proposición anterior muestra que la estructura de las órbitas de funciones con número de rotación irracional es muy diferente de aquellas de las funciones con número de rotación racional. Mientras que en el caso racional todas las órbitas o son periódicas o son asintóticas a órbitas periódicas, en el caso irracional las órbitas o son todas densas o todas son asintóticas a un conjunto de Cantor. A medida que se profundiza nuestra comprensión veremos como se amplía esta diferencia y volvemos al problema de la conjugación: ¿Cuando un homeomorfismo del círculo es equivalente a una rotación? En el caso de número de rotación racional es evidente que casi nunca es el caso: como todas la órbitas periódicas de una rotación racional tienen el mismo periodo, cualquier cambio de coordenadas producira de nuevo una función con solo órbitas periódicas (es una función tal que $f^q = Id$).

Este contraste está ausente en el caso de homeomorfismos con número de rotación irracional y existe una intima conexión con las rotaciones irracionales.

Lema 3.2.6. *Sea $f : S^1 \to S^1$ un homeomorfismo que preserva orientación con número de rotación $\tau = \tau(f)$ irracional. Entonces existe una transformación continua, monótona y sobreyectiva $h : S^1 \to S^1$ tal que $h \circ f = R_{\tau(f)} \circ h$.*

Demostración. Sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un levantamiento de f y dado $x \in \mathbb{R}$. Definimos el conjunto

$$B := \{F^n(x) + m\}_{n,m\in\mathbb{Z}}$$

que es el levantamiento total de la órbita de $\pi(x)$. Sea $H : B \to \mathbb{R}$ una función definida por $H(F^n(x)+m) = n\tau + m$. Por la Proposición 3.2.1 tenemos que H es monótona. Además, $H(B)$ es denso en $\mathbb{R}$ porque τ es irracional (Ver Proposición 1.2.2). Por lo tanto, tenemos también que la sucesión dada por $n \to n\tau + m \pmod 1$, con $n \in \mathbb{Z}$, es densa en S^1.

Sea $\tilde{R}_\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ el levantamiento de R_τ dado por $\tilde{R}_\tau(x) = x + \tau$. Entonces

$$(H \circ F)(F^n(x) + m) = H(F^{n+1}(x) + m) = (n+1)\tau + m$$

$$(\tilde{R}_\tau \circ H)(F^n(x) + m) = \tilde{R}_\tau(n\tau + m) = (n+1)\tau + m$$

por tanto se cumple que $H \circ F = \tilde{R}_\tau \circ H$ en B.

Ahora mostraremos que H tiene una extensión continua a $\overline{B}$. En efecto, sea $y \in \overline{B}$, entonces existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en B tal que $y = \lim_{n\to\infty} x_n$. Necesitamos verificar que

$$H(y) = \lim_{n\to\infty} H(x_n)$$

existe para cada $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y es independiente de la elección de la sucesión que se aproxima a y. Como H es monótona, existen límites a la izquierda y derecha, debemos verificar que estos límites son iguales. Si suponemos por absurdo, que son diferentes, entonces $\mathbb{R}\setminus H(B)$ contendría un intervalo, lo que contradeciría la densidad de $H(B)$ en $\mathbb{R}$. Por lo tanto, $H(y)$ define una extensión continua de H a $\overline{B}$.

Como H es continua en B y $H(B)$ es denso en $\mathbb{R}$ concluímos que $H : \overline{B} \to \mathbb{R}$ es sobreyectiva. Siendo también monótona podemos extender H a $\mathbb{R}$, extensíon que como veremos es continua y monótona. Si hacemos $H \equiv c$ en cada intervalo maximal de $R \setminus \overline{B}$, donde c es el valor que toma H en los extremos de dichos intervalos (los valores que toma H en los extremos del intervalo son iguales pues H es monótona y sobreyectiva). Luego obtenemos una función $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, monótona y sobreyectiva tal que

$$H \circ F = \tilde{R}_\tau \circ H.$$

Observemos que para $z = F^n(x) + m \in B$ tenemos que

$$\begin{aligned} H(z+1) &= H(F^n(x) + m + 1) \\ &= n\tau + m + 1 \\ &= H(z) + 1 \end{aligned}$$

y así por tanto existe $h : S^1 \to S^1$ continua, monótona y sobreyectiva tal que

$$h \circ f = R_\tau \circ h$$

obtenida por $h(\pi(x)) = \pi(H(x))$ para $x \in \mathbb{R}$. □

Teorema 3.2.7. (Clasificación de Poincaré) *Sea $f : S^1 \to S^1$ un homeomorfismo que preserva orientación con número de rotación irracional.*

1. *Si f es topológicamente transitiva entonces f es topológicamente conjugada a la rotación $R_{\tau(f)}$.*

2. *Si f no es topológicamente transitiva entonces f tiene a la rotación $R_{\tau(f)}$ como factor topológico vía una función monótona, continua y no invertible $h : S^1 \to S^1$.*

Demostración. Si suponemos que f es transitiva entonces usamos la misma contrucción de la demostración del Lema 3.2.6 para obtener la función $H : \overline{B} \to \mathbb{R}$ continua y monótona. Una vez que una órbita de un punto $x \in S^1$ es densa entonces tenemos que $\overline{B} = \mathbb{R}$ y luego la función $h : S^1 \to S^1$ construida anteriormente es ahora un homeomorfismo. Si f no es transitiva el resultado es inmeditato del Lema 3.2.6. □

Observación 3.2.8. Como $\overline{B}$ proyecta la clausura de la órbita de $\pi(x)$ que contiene a $E = \omega(\pi(x))$ y si escogemos $x \in \pi^{-1}(E)$ obetenmos que $\pi(\overline{B}) = E$. En el caso transitivo $\overline{B} = \mathbb{R}$ y $E = S^1$, pero en el caso no transitivo encontramos que si $x \in \pi^{-1}(E)$ entonces $\pi(\overline{B}) = E$ es un conjunto de Cantor. Consecuentemente en el caso de una semiconjugación las dinámicas en el conjunto de Cantor es casi conjugada a una rotación irracional $R_{\tau(f)}$: Si dos extremos de cualquier intervalo complementario son identificados entonces h se convierte en una biyección entre el espacio de indentificación $E/\sim$ y S^1 y conjuga $f|_{E/\sim}$ con $R_{\tau(f)}$. Todas las órbitas de f en E son densas en E (por definición de E). Por otro lado la construcción de $E = \omega(x)$ lleva a que todos los puntos fuera de E son atraidos a E en ambos sentidos positivo y negativo, porque las iteradas de un punto deben permanecer dentro de los intervalos complementarios de E y el largo de estos tienden a cero.

A la inversa, podemos pensar que una función no transitiva que se obtiene de una rotación irracional por la "explosión" de algunas órbitas de intervalos en que la unión forman el complemento de E. Estos intervalos complementarios son permutados como los puntos de una órbita por una rotación irracional. Todos los puntos interiores en estos intervalos son errantes pues ellos permanecen dentro de estos intervalos en que sus imágenes son todas disjuntas.

Más adelante haremos la construcción completa de tal homeomorfismo. La clasificación topológica completa de los homeomorfismos del círculo con un número de rotación irracional τ es dada por una colección finita o contable de órbitas de la rotación R_τ módulo una translación simultanea de todas estas órbitas. Naturalmente todas estas órbitas son "explosión" bajo la semiconjugación del Lema 3.2.6.

3.3. Tipos de órbitas

En S^1 un punto puede tener seis diferentes tipos de órbitas bajo transformaciones, tres casos para funciones con número de rotación racionales y tres casos para funciones con número de rotación irracionales. Llamaremos a una órbita $\mathcal{O}$ *homoclínica* respecto de un conjunto invariante $S \subset S^1 \setminus \mathcal{O}$ si $\alpha(x) = \omega(x) = S$ para cualquier $x \in \mathcal{O}$. Similarmente $\mathcal{O}$ es *heteroclínica* a dos conjuntos invariantes disjuntos S_1 y S_2 si $\mathcal{O}$ es disjunta de cada uno de ellos y $\alpha(x) = S_1$, $\omega(x) = S_2$ para $x \in \mathcal{O}$.

Luego obtenemos la lista de posibles órbitas ilustradas en la siguiente tabla. Notamos que en nuestra descripción en el caso de número de rotación racional, así como nuestra notación, no es estándar en la literatura.

Número de rotación $p/q \in \mathbb{Q}$	Número de rotación $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
$\mathrm{I}_{\frac{p}{q}}$: Órbita periódica con el mismo periodo como $R_{\frac{p}{q}}$ y ordenada de la misma forma como una órbita de $R_{\frac{p}{q}}$.	I_α : Una órbita densa en S^1 tal que es ordenada de la misma forma que una órbita de R_α (como son los dos siguientes casos).
$\mathrm{II}_{\frac{p}{q}}$: Una órbita homoclínica: Se aproxima a una órbita periódica dada cuando $n \to +\infty$ y cuando $n \to -\infty$.	II_α : Una órbita densa en un conjunto de Cantor.
$\mathrm{III}_{\frac{p}{q}}$: Una órbita heteroclínica: Se aproxima a dos diferentes órbitas periódicas cuando $n \to +\infty$ y cuando $n \to -\infty$ (esto sucede cuando hay mas de una órbita periódica).	III_α : Una órbita homoclínica a un conjunto de Cantor.

Cuadro 3.1: Clasificación de Poincaré.

Capítulo 4

Difeomorfismos del círculo

En esta sección concluiremos nuestro estudio de difeomorfismos del círculo con una pregunta que nos podemos hacer: si dos difeomorfismos tienen el mismo número de rotación, ¿son entonces topológicamente conjugadas? Arnaud Denjoy encontró un ejemplo en 1930 donde esto no sucede, conocido como el contraejemplo de Denjoy. Básicamente construye a partir de una rotación irracional en el círculo, otra función del círculo, reemplazando la órbita entera de un punto por una unión numerable de intervalos. Por otro lado, en el Teorema que lleva su nombre, demostró que si un difeomorfismo de clase C^1 y derivada de variación acotada (ver Definicion 4.1.1) tiene número de rotación irracional τ , entonces es topológicamente conjugado a la rotación R_τ.

4.1. El teorema de Denjoy

En esta parte conoceremos el Teorema probado por Arnaud Denjoy [1](1932). La demostración que presentamos ahora es la que aparece en el libro de A. Katok y B. Hasselblatt, ver [2].

Definición 4.1.1. Consideremos una partición de $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ dada por $0 \leq x_1 \leq ... \leq x_n \leq 1$. Diremos que $g : S^1 \to \mathbb{R}$ es una función de *variación acotada* si su variación total:

$$\mathrm{Var}(g) := \sup_{0 \leq x_0 \leq ... \leq x_n \leq 1} \sum_{k=0}^{n-1} |g(x_k) - g(x_{k+1})|$$

es finita.

Ejemplo 4.1.2. Toda función lipschitziana y por tanto toda función continua diferenciable es de variación acotada.

Teorema 4.1.3. (Teorema de Denjoy) *Un difeomorfismo de clase C^1, $f : S^1 \to S^1$ con número de rotación $\tau(f) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ y derivada de variación acotada es transitivo y por tanto topológicamente conjugado a una rotación $R_{\tau(f)}$.*

Para la demostración del Teorema de Denjoy necesitaremos de los tres siguientes lemas.

Lema 4.1.4. *Si $f : S^1 \to S^1$ es un homeomorfismo con número de rotación irracional, entonces para $x_0 \in S^1$ existen infinitos $n \in \mathbb{N}$ tal que los intervalos $f^k((x_0, f^{-n}(x_0)))$ son disjuntos para $0 \leq k < n$.*

Demostración. Sea $I = (x_0, f^{-n}(x_0))$. Una vez que $f^k(I) = (f^k(x_0), f^{k-n}(x_0))$, basta probar que existen infinitos $n \in \mathbb{N}$ tales que $f^k(x_0) \notin I$ para $0 < k < n$.

Como f es o bien conjugada o semiconjugada a la rotación irracional $R_{\tau(f)}$, entonces la órbita de x_0 está ordenada de la misma forma que una órbita de un punto por la acción de $R_{\tau(f)}$. Luego podemos verificar que el enunciado del lema depende del ordenamiento de la órbita de x_0, o sea, necesitamos que sea válida la siguiente propiedad: $f^k(x_0)$ no está entre x_0 y $f^{-n}(x_0)$ para $0 \leq k \leq n$. Una vez que la órbita de x_0 es densa para la rotación $R_{\tau(f)}$, existen infinitos $n \in \mathbb{N}$ para la rotación $R_{\tau(f)}$ y por tanto también para el homeomorfismo f en que se verifica el enunciado. □

Lema 4.1.5. *Sea $X = S^1$ o $X = [0,1]$ e $Y \subset X$. Supongamos que $f : X \to X$ es tal que $f|_Y$ es de clase C^1 con f' es de variación acotada y que $|f'|$ es acotada lejos de 0 en Y. Sea $V < \infty$ la variación de $\varphi : x \to \log|f'(x)|$. Si $I \subset Y$ es un intervalo tal que $I, f(I), ..., f^n(I)$ son intervalos disjuntos dos a dos en Y y que $x, y \in I$ entonces*

$$\exp(-V) \leq \frac{|(f^n)'(x)|}{|(f^n)'(y)|} \leq \exp(V).$$

Demostración. Transformando sucesivamente, obtenemos que

$$\begin{aligned}
V &\geq \sum_{k=0}^{n-1} |\varphi(f^k(x)) - \varphi(f^k(y))| \\
&\geq \left| \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(f^k(x)) - \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(f^k(y)) \right| \\
&= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \log|f'(f^k(x))| - \sum_{k=0}^{n-1} \log|f'(f^k(y))| \right| \\
&= \left| \log\left(\prod_{k=0}^{n-1} |f'(f^k(x))| \right) - \log\left(\prod_{k=0}^{n-1} |f'(f^k(y))| \right) \right| \\
&= \left| \log\left(\frac{\prod_{k=0}^{n-1} |f'(f^k(x))|}{\prod_{k=0}^{n-1} |f'(f^k(y))|} \right) \right| = \left| \log\left(\frac{|(f^n)'(x)|}{|(f^n)'(y)|} \right) \right|
\end{aligned}$$

la ultima igualdad se sigue por la identidad

$$\prod_{k=0}^{n-1} |f'(f^k(x))| = |(f^n)'(x)|$$

que se verifica mediante el uso de la regla de la cadena. Luego tenemos que

$$-V \leq \left| \log\left(\frac{|(f^n)'(x)|}{|(f^n)'(y)|} \right) \right| \leq V$$

y luego aplicando la función exponencial obtenemos que

$$\exp(-V) \leq \frac{|(f^n)'(x)|}{|(f^n)'(y)|} \leq \exp(V)$$

□

Lema 4.1.6. *Si f no es conjugada a una rotación, I es un intervalo en el complemento de $E = \omega(x)$, $x_0 \in I$ y n como en el Lema 4.1.4 entonces*

$$\exp(-V) \leq (f^n)'(x) \cdot (f^{-n})'(x) \leq \exp(V)$$

para todo $x \in I$.

Demostración. Como todo $x \in I$ tiene la misma imagen bajo una semiconjugación, la colección de $n \in \mathbb{N}$ obtenida en el Lema 4.1.4 no depende de $x \in I$. Luego podemos aplicar el Lema 4.1.5 a $I = (x, f^{-n}(x))$ con $y = f^{-n}(x)$ para obtener

$$\exp(-V) \leq (f^n)'(x) \cdot (f^{-n})'(x) \leq \exp(V).$$

□

Demostración del Teorema 4.1.3

Supongamos que f no es conjugada a una rotación (y por lo tanto tampoco topológicamente transitiva). Por la Proposición 3.2.5 asumimos que $\omega(0)$ es perfecto y nunca denso. Entonces $S^1 \setminus \omega(0)$ es unión disjunta de intervalos abiertos. Sea I uno de estos intervalos, notamos que por el Lema 4.1.4 todas sus imágenes y preimágenes por acción de f son disjuntas dos a dos. Por otro lado, si la función $l(I)$ indica el largo del intervalo I, por el Lema 4.1.6 y el siguiente resultado básico:

$$a + b \geq \text{máx}(a, b) \geq \sqrt{a \cdot b}$$

con $a, b \geq 0$, tenemos que

$$\begin{aligned}
l(f^n(I)) + l(f^{-n}(I)) &= \int_I (f^n)'(x)dx + \int_I (f^{-n})'(x)dx \\
&= \int_I [(f^n)'(x) + (f^{-n})'(x)]dx \\
&\geq \int_I \sqrt{(f^n)'(x) \cdot (f^{-n})'(x)}dx \\
&\geq \int_I \sqrt{\exp(-V)}dx \\
&= l(I) \cdot e^{-V/2}
\end{aligned}$$

para infinitos $n \in \mathbb{N}$. Esto contradice el hecho que $\sum_{i=-\infty}^{\infty} l(f^i(I)) \leq \infty$. Por lo tanto concluímos que f es topológicamente transitiva y por lo tanto topológicamente conjugada a la rotación $R_{\tau(f)}$.

□

La principal idea detrás de los argumentos usados anteriormente es que se puede obtener el control de las derivadas de las iteradas de f controlando las imágenes de los intervalos en S^1. Esto puede ser controlado considerando los n para que las primeras n imágenes de un cierto intervalo sean disjuntas. Esto es consecuencia de que f es de variación es acotada, lo que nos dá una estimación fuerte para las derivadas de estas iteradas.

4.2. El Contraejemplo de Denjoy

La construcción de este contraejemplo aparece en el libro de Brin M. y Stuck. G, ver [4].

Proposición 4.2.1. (CONTRAEJEMPLO DE DENJOY) *Dado un número irracional τ y un número $\alpha \in (0,1)$, existe un difeomorfismo $f : S^1 \to S^1$ no transitivo de clase C^1 con derivada α-Hölder y número de rotación $\tau(f) = \tau$.*

Demostración. Para construir el difeomorfismo comenzaremos considerando la rotación irracional R_τ de S^1 y sustituir los puntos de una órbita dada por intervalos cuya unión tienen medida de Lebesgue 1. Recordemos que si $\tau(f) = \tau$ entonces para cualquier punto $x \in S^1$, la órbita de x bajo f está ordenada de la misma manera que cualquier órbita de la rotación R_τ, es decir:

$$f^k(x) < f^l(x) < f^m(x) \text{ si y solo si } R_\tau^k(x) < R_\tau^l(x) < R_\tau^m(x)$$

como desigualdades escritas en relación al ordenamiento de $[0,1) \subset S^1$ que hereda de $\mathbb{R}$.

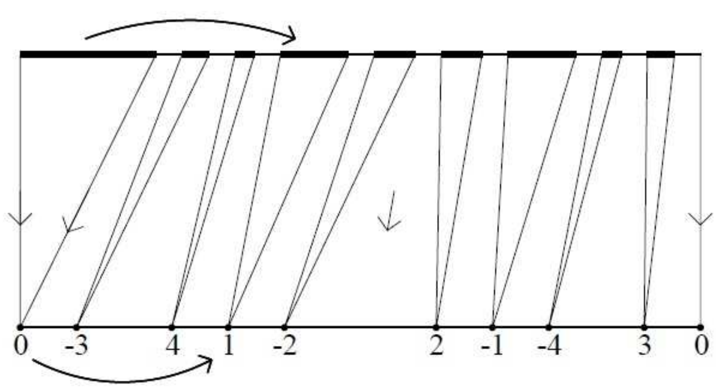


Figura 4.1: La linea inferior, representa el círculo $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Los puntos son transladados por la rotación irracional R_τ. Cada etiqueta n en la linea inferior, que son los puntos $n\tau \pmod 1$, corresponden a los intervalos $I_{n\tau}$ de largo l_n de la linea superior, que también representa al círculo $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Tenemos que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} l_n = 1$. La función f de la linea superior que envia los intervalos $I_{n\tau}$ en los intervalos $I_{(n+1)\tau}$ es semiconjugada a la rotación R_τ de la linea inferior.

Ahora fijemos un punto $x_0 \in S^1$ y para cada $n \in \mathbb{Z}$ denotamos por $x_n = R_\tau^n(x_0)$ a los puntos de su órbita. Reemplazamos cada punto x_n por un intervalo $I_n := [a_n, b_n]$ de largo $l_n = b_n - a_n$.

Escogemos largos $l_n > 0$ tales que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} l_n = 1$. Definimos los extremos del intervalo $I_n = [a_n, b_n]$ por las fórmulas $a_n = a(x_n)$ y $b_n = b(x_n)$, donde

$$a(x) = \sum_{\{k\in\mathbb{N}:x_k<x\}} l_k \quad , \quad b(x) = \sum_{\{k\in\mathbb{N}:x_k\leq x\}} l_k$$

para cada $x \in [0,1)$. Luego el intervalo $[a(x), b(x)]$ es de largo $l_n > 0$ si $x = x_n$. Ahora tomemos $m, n \in \mathbb{N}$ distintos y entonces como R_τ es una rotación irracional tenemos que $x_n \neq x_m$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $x_n < x_m$. De acuerdo con la definición de a_n y b_n tenemos que

$$a_n < b_n < a_m < b_m$$

pues en caso contrario, se tendría que $b_n = a_m$ que es equivalente a que el intervalo (x_n, x_m) no posee puntos de la órbita de x_0, lo cual no puede ser porque la rotación R_τ es minimal (Lema 1.2.2). Por lo tanto, los intervalos I_n son disjunto dos a dos. Como $\sum_{n\in\mathbb{Z}} l_n = 1$ entonces

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} I_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mu(I_n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} l_n = 1$$

donde μ es la medida de Lebesgue.

Para construir el difeomorfismo $f : S^1 \to S^1$ de clase C^1 consideramos una función continua y positiva $g : S^1 \to \mathbb{R}$ con

$$\int_0^1 g(x)dx = 1$$

y definimos f como la primitiva de g. Consideramos entonces

$$g(x) = \begin{cases} 1 + \dfrac{6(l_{n+1} - l_n)}{l_n^3}(b_n - x)(x - a_n) & \text{si} \quad x \in I_n \text{ para algún } n \in \mathbb{Z} \\ 1 & \text{si} \quad x \in S^1 \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} I_n \end{cases}$$

Observemos que $g(a_n) = g(b_n) = 1$ y que

$$\begin{aligned} \int_{a_n}^{b_n} g(x)dx &= \int_{a_n}^{b_n} \left(1 + \frac{6(l_{n+1} - l_n)}{l_n^3}(b_n - x)(x - a_n)\right) dx \\ &= b_n - a_n + \frac{6(l_{n+1} - l_n)}{l_n^3}\frac{(b_n - a_n)^3}{6} \\ &= l_n + \frac{(l_{n+1} - l_n)}{l_n^3} l_n^3 = l_{n+1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $f(I_n) = I_{n+1}$. Verificamos ahora que las constantes l_n pueden ser elegidas de modo que g sea una función continua. Para esto debemos probar que el supremo y el ínfimo de $g|_{I_n}$ convergen a 1 cuando $n \to \pm\infty$. Notemos primero que la expresión $h(x) := (b_n - x)(x - a_n)$ alcanza su máximo en el punto $x = (a_n + b_n)/2$ y luego se obtiene que

$$h(x) = (b_n - x)(x - a_n) \leq h\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) = \left(\frac{b_n - a_n}{2}\right)^2 = \left(\frac{l_n}{2}\right)^2.$$

Supongamos que $n \geq 0$, luego $|n| = n$ y $l_{n+1} - l_n > 0$ pues $\{l_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es estríctamente decreciente y obtenemos

$$1 \geq g(x) \geq 1 + \frac{6(l_{n+1} - l_n)}{l_n^3}\left(\frac{l_n}{2}\right)^2 = \frac{3l_{n+1} - l_n}{2l_n}.$$

Por otro lado, si $n < 0$ entonces $|n| = -n$ y $l_{n+1} - l_n < 0$ pues $\{l_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es estríctamente decreciente y vemos que

$$1 \leq g(x) \leq 1 + \frac{6(l_{n+1} - l_n)}{l_n^3}\left(\frac{l_n}{2}\right)^2 = \frac{3l_{n+1} - l_n}{2l_n}.$$

Así, por el Teorema del Sandwich, podemos escoger $l_n > 0$ de modo que

$$\lim_{n\to\pm\infty} \frac{3l_{n+1} - l_n}{2l_n} = 1.$$

Luego, el supremo y el ínfimo de $g|_{I_n}$ convergen a 1 cuando $n \to \pm\infty$, por tanto, g es continua.

Ahora mostraremos que adicionalmente podemos escoger largos l_n de modo que f tenga derivada de α-Hölder, es decir, que para cualquier $x, y \in S^1$ se cumple que

$$|f'(x) - f'(y)| \leq M|x - y|^\alpha$$

para alguna constante $M > 0$. Sabemos que $f' = g$ y que g es una función continua. Como $g(x) = 1$ para $x \in S^1 \setminus \bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} I_n$ basta probar que para todo $n \in \mathbb{Z}$ y para $x, y \in I_n$

$$|g(x) - g(y)| \leq M|x - y|^\alpha$$

En efecto, dados $x, y \in I_n$

$$\begin{aligned}
|g(x) - g(y)| &= 6\left|\frac{l_{n+1} - l_n}{l_n^3}\right| |(b_n - x)(x - a_n) - (b_n - y)(y - a_n)| \\
&= 6\left|\frac{l_{n+1} - l_n}{l_n^3}\right| |(b_n - x - y + a_n)(x - y)| \\
&= 6\left|\frac{l_{n+1} - l_n}{l_n^3}\right| |b_n - x - y + a_n||x - y|^{1-\alpha}|x - y|^\alpha
\end{aligned}$$

como $|b_n - x - y + a_n| \leq 2l_n$ y $|x - y| \leq l_n$ entonces

$$\begin{aligned}
|g(x) - g(y)| &\leq 6\left|\frac{l_{n+1} - l_n}{l_n^3}\right| 2l_n l_n^{1-\alpha}|x - y|^\alpha \\
&= 12\frac{|l_{n+1} - l_n|}{l_n^{1+\alpha}}|x - y|^\alpha.
\end{aligned}$$

Así, escogiendo l_n de modo que

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} \frac{|l_{n+1} - l_n|}{l_n^{1+\alpha}} < \infty,$$

la función g es α-Hölder continua.

En particular, podemos considerar la sucesión:

$$l_n = \frac{c}{(|n|+1)^{\frac{1}{\alpha}}} \quad \text{con} \quad c = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(|n|+1)^{\frac{1}{\alpha}}} \right)^{-1}.$$

Luego c es una constante elegida tal que $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} l_n = 1$. De esta forma se verifican las siguientes condiciones:

1. $l_n \in (0,1)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ y que $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} l_n = 1$.
2. l_n decrece estrictamente con $|n|$.
3. $\lim\limits_{n\to\pm\infty} \dfrac{3l_{n+1} - l_n}{2l_n} = 1$ y que $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \dfrac{|l_{n+1} - l_n|}{l_n^{1+\alpha}} < \infty$.

Vemos que 1. y 2. son inmediatas. Para probar 3. notemos primero que

$$\lim_{n\to\pm\infty} \frac{3l_{n+1} - l_n}{2l_n} = \frac{3}{2} \lim_{n\to\pm\infty} \frac{l_{n+1}}{l_n} - \frac{1}{2} = 1.$$

Además, para $n > 0$ tenemos que

$$\frac{|l_{n+1} - l_n|}{l_n^{1+\alpha}} = \frac{1}{c^\alpha} \frac{(n+1)}{(n+2)^{\frac{1}{\alpha}}} \cdot [(n+2)^{\frac{1}{\alpha}} - (n+1)^{\frac{1}{\alpha}}].$$

Como

$$\begin{aligned} (n+2)^{\frac{1}{\alpha}} &= ((n+1)+1)^{\frac{1}{\alpha}} \\ &= (n+1)^{\frac{1}{\alpha}} + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha}(n+1)^{\frac{1}{\alpha}-1} + O((n+1)^{\frac{1}{\alpha}-2}) \end{aligned}$$

obtenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \frac{|l_{n+1} - l_n|}{l_n^{1+\alpha}} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{c^\alpha} \frac{n+1}{(n+2)^{\frac{1}{\alpha}}} \frac{1}{\alpha}(n+1)^{\frac{1}{\alpha}-1} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\alpha c^\alpha} \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \\ &= \frac{1}{\alpha c^\alpha} < \infty. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{|l_{n+1} - l_n|}{l_n^{1+\alpha}} < \infty$$

De fomar análoga se puede tratar el caso en que $n < 0$ y se concluye que

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}^-} \frac{|l_{n+1} - l_n|}{l_n^{1+\alpha}} < \infty.$$

Por lo tanto, queda probado 3.

Ahora la función $f : \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} I_n \to \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} I_n$ es tal que $f(I_n) = f(I_{n+1})$ y está dada por

$$f(a_k + x) = a_{k+1} + \int_0^x g(t)dt.$$

Por la construcción de f tenemos que es un difeomorfismo de clase C^1. Verificaremos por inducción que $f^n(a_0) = a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Evidentemente $f(a_0) = a_1$. Ahora supongamos que $f^n(a_0) = a_n$, luego

$$f^{n+1}(a_0) = f(f^n(a_0)) = f(a_n) = a_{n+1}.$$

Se obtiene así que

$$\omega(a_0) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\{a_k : k \geq n\}} = S^1 \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} (a_n, b_n)$$

con $m(\omega(a_o)) = 0$. Ya que f tiene número de rotación irracional, entonces por la Proposición 3.2.5, o todas las órbitas son densas o todas tiene como ω-límite a un conjunto de Cantor. Pero de lo ultimo se sigue que no hay órbitas densas. Por tanto, por el Teorema de la Clasificación de Poincare f no es topológicamente conjugada a la rotación R_τ y f es un difeomorfismo no transitivo. $\square$

Capítulo 5

El Teorema de Weyl

En este capítulo estudiaremos la sucesión que consiste de las partes fraccionarias de los multiplos de un número α. El resultado del matemático alemán Leopold kronecker (1823-1891) dice que si el número α es irracional entonces la sucesión de partes fraccionarias de la sucesíon $\alpha, 2\alpha, 3\alpha, ...$ es densa en $[0,1)$. El resultado de Kronecker está estudiado de manera mas refinada en el Teorema de Weyl, que dice que para un número irracional α la sucesión correspondiente esta "uniformemente distribuida" en todo el intervalo $[0,1)$.

5.1. Parte fraccional de un número real.

Definición 5.1.1. Sea α un número real, denotaremos su parte entera por $int(\alpha)$ que se define como el mayor entero que es menor o igual a α. Definimos la *parte fraccional* de α por:

$$frac(\alpha) = \alpha - int(\alpha).$$

Dado un número α, entonces los números $frac(\alpha),\ frac(2\alpha),\ frac(3\alpha), ...$ pertenecen al intervalo $[0,1)$. Nuestro objetivo es entender como esta sucesión está distribuida en $[0,1)$. Luego es natural pensar que esta respuesta depende del número α. Vemos que si α es racional entonces hay solo un número finito de términos de la sucesión y estos estan distribuidos en un estricto y determinado orden. Cuando α es irracional, todos los términos de esta sucesión son distintos, y ellos se extienden de manera uniforme en todo el intervalo $[0,1)$.

Luego para estudiar la sucesión $\{frac(n\alpha)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es suficiente asumir que el número α pertenece al intervalo $[0,1)$. Luego para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$\begin{aligned} frac(n\alpha) &= n\alpha - \ int(n\alpha) \\ &= n \cdot frac(\alpha) - n \cdot int(\alpha) - \ int(n\alpha) \\ &= frac(n \cdot frac(\alpha)) + \ int(n \cdot frac(\alpha)) - n \cdot int(\alpha) - \ int(n\alpha). \end{aligned}$$

Esto implica que $frac(n\alpha) - \ frac(n \cdot frac(\alpha))$ es un entero en $(-1,1)$ y por lo tanto es igual a 0. Luego $frac(n\alpha) = \ frac(n \cdot frac(\alpha))$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y por lo tanto las sucesiones $\{frac(n\alpha)\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{\ frac(n \cdot frac(\alpha))\}_{n\in\mathbb{N}}$ son iguales y así podremos asumir que $\alpha \in [0,1)$.

Otra manera de estudiar los términos de la sucesión $\{frac(n\alpha)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es identificándolos con una sucesión $z, z^2, z^3, ...$ de números complejos en el círculo unitario S^1 por medio del isomorfismo de $[0,1)$ en S^1 dado por $\mathit{frac}(\alpha) \to e^{2\pi i\alpha}$. Observemos que si $\alpha \in \mathbb{R}$ tenemos que

$$e^{2\pi i\alpha} = e^{2\pi i(\mathit{frac}(\alpha)+\mathit{int}(\alpha))} = e^{2\pi i\cdot \mathit{frac}(\alpha)}.$$

Ahora, haciendo $z = e^{2\pi i\alpha}$ entonces tenemos que para todo $n \in \mathbb{N}$ el argumento de z^n es $2\pi \cdot \mathit{frac}(\alpha)$. Luego, estudiar como esta distribuida la sucesión $\{\mathit{frac}(n\alpha)\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $[0,1)$ es equivalente a estudiar como se distribuye la sucesión $z, z^2, z^3, ...$ en S^1.

Proposición 5.1.2. *Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Sean $\gamma \in [0,1)$ y $m \in \mathbb{Z}$ tales que $\alpha = \gamma + m$. Entonces $\gamma = \mathit{frac}(\alpha)$ y $m = \mathit{int}(\alpha)$.*

Demostración. Tenemos que

$$\mathit{frac}(\alpha) + \ \mathit{int}(\alpha) = \alpha = \gamma + m.$$

Entonces $\mathit{frac}(\alpha) - \gamma = m - \ \mathit{int}(\alpha)$. Pero como $\mathit{frac}(\alpha) - \gamma \in (-1,1)$ y $m - \ \mathit{int}(\alpha) \in \mathbb{Z}$ entonces

$$\mathit{frac}(\alpha) - \gamma = m - \ \mathit{int}(\alpha) \in \mathbb{Z} \cap (-1,1) = \{0\}.$$

Por lo tanto, $\mathit{frac}(\alpha) = \gamma$ y $\mathit{int}(\alpha) = m$. □

La siguiente Proposición es análoga a la Proposición 1.4.1.

Proposición 5.1.3. *Sea $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $m \in \mathbb{Z}$ entonces:*

1. *$\mathit{frac}(\alpha) = \mathit{frac}(\beta)$ si y solo si $\alpha - \beta \in \mathbb{Z}$.*
2. *$\mathit{frac}(\alpha + m) = \mathit{frac}(\alpha)$.*

Dependiendo si el número α es racional o irracional la sucesión $\{\mathit{frac}(n\alpha)\}_{n\in\mathbb{N}}$ adopta diferentes propiedades. Una propiedad distintiva de estas sucesiones es la siguiente:

Definición 5.1.4. Una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es *periódica* si existe $r \in \mathbb{N}$ tal que

$$x_{n+r} = x_n \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

En particular, si una sucesión es periódica de r términos, entonces su comportamiento se replicará cada r términos.

Proposición 5.1.5. *El número α es racional si y solo si la sucesión $\{\mathit{frac}(n\alpha)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es periódica y en tal caso, $\mathit{frac}(n\alpha) = 0$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Dicho de otra forma α es irracional si y solo si la sucesión $\{\mathit{frac}(n\alpha)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es no periódica. Además, cuando α es irrracional, todos lo términos de la sucesión $\{\mathit{frac}(n\alpha)\}_{n\in\mathbb{N}}$ son distintos.*

Demostración. Sea $\alpha \in \mathbb{Q}$, $\alpha = \frac{p}{q}$ con $p \in \mathbb{Z}$ y $q \in \mathbb{N}$. Denotaremos por $x_n = \ \mathit{frac}(n\alpha)$. Entonces, usando (3) de la Proposición 5.2.3 tenemos que

$$\begin{aligned} x_{n+q} &= \mathit{frac}((n+q)\alpha) = \mathit{frac}\left((n+q)\tfrac{p}{q}\right) = \mathit{frac}\left(\tfrac{nq}{p} + p\right) \\ &= \mathit{frac}\left(\tfrac{np}{q}\right) = \mathit{frac}(n\alpha) = x_n. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\{frac(n\alpha)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión periódica. Vemos también que $0 = x_q = frac(n\alpha)$. Ahora supongamos que α es irracional y asumiremos que hay dos términos iguales. Sean $m, n \in \mathbb{N}$ con $m \neq n$ tal que $frac(m\alpha) = frac(n\alpha)$. Usando (2) de la Proposición 5.2.3 existe $s \in \mathbb{Z}$ tal que $m\alpha - n\alpha = s$. Pero esto implica que $\alpha = \dfrac{s}{m-n}$ lo que contradice el hecho que α es irracional. Por lo tanto, si α es irracional, entonces los terminos de la sucesión $\{frac(n\alpha)\}_{n\in\mathbb{N}}$ son distintos, y luego no es periódica. □

La siguiente Proposición es útil en lo que concierne a la distribución en el intervalo $[0, 1)$ de las partes fraccionarias de los múltiplos de un número real.

Proposición 5.1.6. *Sea $n \in \mathbb{N}$ y sean $x_1, x_2, ..., x_{n+1}$ $n + 1$ puntos en $[0, 1)$. Entonces existen $i, j \in \{1, 2, ..., n + 1\}$ tales que $i \neq j$ y $|x_i - x_j| < 1/n$.*

Demostración. Consideremos la siguiente partición de $[0, 1)$ en n intervalos:

$$\left[0, \frac{1}{n}\right), \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right), ..., \left[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}\right), ..., \left[\frac{n-2}{n-1}, \frac{n-1}{n}\right), \left[\frac{n-1}{n}, 1\right)$$

Luego, por el Principio del Palomar (Ver apéndice) existen $i, j \in \{1, 2, ..., n+1\}$ tales que $i \neq j$ y ambos puntos x_i y x_j pertenecen a un mismo intervalo de la partición. Por otro lado cada uno de estos intervalos es de largo $1/n$. Por lo tanto, $|x_i - x_j| < 1/n$. □

5.2. El teorema de Kronecker

Vimos anteriormente que cuando α es irracional entonces todos los términos de la sucesión $\{frac(n\alpha)\}_{n\in\mathbb{N}}$ son distintos y comprenden todo el intervalo $[0, 1)$. Es natural entonces preguntarnos: ¿cómo estos términos están distribuidos en $[0, 1)$? Podría ocurrir que los términos se agrupen en una parte del intervalo en vez de otra, luego daría la apariencia de un proceso no aleatorio. El Teorema de Kronecker, muestra que cuando α es irracional, los términos de la sucesión $\{frac(n\alpha)\}_{n\in\mathbb{N}}$ son propagados en todo el intervalo, y todo subintervalo abierto distinto del vacío contiene términos de esta sucesión. La demostración que presentamos ahora es la que aparece en el libro de R. Nillsen, ver [7].

Teorema 5.2.1. *(*Teorema de Kronecker*) Sea $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Entonces para cada subintervalo abierto y no vacío U de $[0, 1]$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $frac(m\alpha) \in U$.*

Idea de la demostración del Teorema de Kronecker. Es suficiente probar lo siguiente: Para cada $x \in [0, 1)$, y cada $\epsilon > 0$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $|x - frac(m\alpha)| < \epsilon$. Observemos que si $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, los términos de la sucesión $\{frac(n\alpha)\}_{n\in\mathbb{N}}$ son distintos. Si $0 < \epsilon < 1$ es dado, empleando el Principio del Palomar deducimos hay distintos términos de la sucesión cuya separación es menor que ϵ. Esto nos permite mostrar que existen $j, k \in \mathbb{N}$ donde $j > k$ tal que $|frac(j\alpha) - frac(k\alpha)| < \epsilon$. Ponemos $l = j - k$ y consideramos cuando $frac(j\alpha) > frac(k\alpha)$. Las propiedades de la función fraccionaria dice que podemos tener $0 < frac(l\alpha) < \epsilon$. Si ponemos $m = rl$, deducimos que $|x - frac(m\alpha)| < \epsilon$. En el caso en que $frac(k\alpha) > frac(j\alpha)$, aplicamos un argumento similar pero tomamos $1 - x$ en vez de x. En ambos casos, deducimos que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $|x - frac(m\alpha)| < \epsilon$ y obtenemos el resultado.

El Teorema de Kronecker tiene una interpretación en el círculo y dice: *Si $z \in S^1$ y z es una raiz de la unidad, y si U es un arco abierto distinto de vacío de S^1, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $z^n \in U$.* Antes de demostrar el Teorema de Kronecker demostraremos dos Lemas.

Lema 5.2.2. *Sea $0 < \beta < \epsilon < 1$ y $x \in [0,1]$. Entonces existe $r \in \mathbb{N}$ con $r\beta < 1$ tal que $|x - r\beta| < \epsilon$.*

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande para que $n\beta < 1$. Entonces $n\beta < 1 \leq (n+1)\beta$ y luego tenemos

$$[0,1] = [0,\beta) \cup [\beta, 2\beta) \cup [2\beta, 3\beta) \cup ... \cup [(n-1)\beta, n\beta) \cup [n\beta, 1].$$

Luego si $x \in [0,1]$, entonces x pertenece al intervalo $[n\beta, 1]$ o a algún intervalo del tipo $[(j-1)\beta, j\beta)$ con $j \in \{1, 2, ..., n\}$. Como estos intervalos son de largo a lo más β , y cada intervalo tiene un extremo de la forma $j\beta$, entonces existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $r\beta < 1$ y $|x - r\beta| \leq \beta < \epsilon$ como es requerido. ☐

Lema 5.2.3. *1. Sea $\gamma \in \mathbb{R}$ y sea $n \in \mathbb{N}$ tal que n frac$(\gamma) < 1$. Entonces $n \cdot$frac$(\gamma) =$ frac$(n\gamma)$.*

2. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Si frac$(\alpha) >$ frac(β), entonces frac$(\alpha - \beta) =$ frac$(\alpha) -$ frac(β).

3. Si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ entonces frac$(-\alpha) = 1 -$ frac(α).

Demostración. 1) Como $0 \leq n$ $\mathit{frac}(\gamma) < 1$ tenemos que

$$n \cdot \mathit{frac}(\gamma) = \mathit{frac}(n\ \mathit{frac}(\gamma)) = \mathit{frac}(n\gamma - n\ \mathit{int}(\gamma)) = \mathit{frac}(n\gamma)$$

2) Observamos que

$$\begin{aligned} \mathit{frac}(\alpha - \beta) &= \alpha - \beta - \mathit{int}(\alpha - \beta) \\ &= \mathit{frac}(\alpha) + \mathrm{int}(\beta) - \mathit{frac}(\beta) - \mathit{int}(\beta) - \mathit{int}(\alpha - \beta) \\ &= (\mathit{frac}(\alpha) - \mathit{frac}(\beta)) + (\mathit{int}(\alpha) - \mathit{int}(\beta) - \mathit{int}(\alpha - \beta)) \end{aligned}$$

luego como $\mathit{frac}(\alpha) > \mathit{frac}(\beta)$ entonces $\mathit{frac}(\alpha) - \mathit{frac}(\beta) \in [0,1)$ y tenemos que $\mathit{frac}(\alpha - \beta)$ es la suma de una número $\mathit{frac}(\alpha) - \mathit{frac}(\beta) \in [0,1)$ y un entero. Por lo tanto,

$$\mathit{frac}(\alpha - \beta) = \mathit{frac}(\alpha) - \mathit{frac}(\beta).$$

3)

$$\begin{aligned} &\alpha = \mathit{frac}(\alpha) + \mathit{int}(\alpha) \\ &\Longrightarrow -\alpha = -\mathit{frac}(\alpha) - \mathit{int}(\alpha) \\ &\Longrightarrow -\alpha = (1 - \mathit{frac}(\alpha)) + (-\mathit{int}(\alpha) - 1) \end{aligned}$$

☐

Demostración del Teorema 5.2.1

Vamos a demostrar que dado $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, para todo $x \in [0,1]$ y para todo $\epsilon > 0$ existen $m \in \mathbb{N}$ tal que $|x - \mathit{frac}(m\alpha)| < \epsilon$. En efecto, sea $x \in [0,1]$, $0 < \epsilon < 1$ y $r \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{r} < \epsilon$. Si α es un irracional, observemos que si $j, k \in \mathbb{N}$ y $j \neq k$ entonces por Proposición 5.1.5 $\mathit{frac}(j\alpha) \neq \mathit{frac}(k\alpha)$. Por esto, los puntos $\mathit{frac}(\alpha)$, $\mathit{frac}(2\alpha), ...,$ $\mathit{frac}((r+1)\alpha)$ son $r+1$ puntos distintos en $[0,1]$. Así, por la Proposición 5.1.6 existen $j, k \in \{1, 2, ..., r+1\}$ distintos tales que

$$| \mathit{frac}(j\alpha) - \mathit{frac}(k\alpha)| < \frac{1}{r} < \epsilon.$$

Podemos asumir sin pérdida de generalidad que $j > k$. Hacemos $l = j - k$. Ahora consideremos dos posibles casos.

Caso 1. $\mathit{frac}(j\alpha) - \mathit{frac}(k\alpha) > 0$.

Aplicando el ítem (2) del Lema 5.2.3 tenemos que

$$\begin{aligned} 0 < \mathit{frac}(l\alpha) &= \mathit{frac}(j\alpha - k\alpha) \\ &= \mathit{frac}(j\alpha) - \mathit{frac}(k\alpha) \\ &= |\mathit{frac}(j\alpha) - \mathit{frac}(k\alpha)| < \epsilon. \end{aligned}$$

Luego tenemos que $0 < \mathit{frac}(l\alpha) < \epsilon$. En seguida aplicamos el Lema 5.2.2 con $\beta = \mathit{frac}(l\alpha)$ y deducimos que existe $r \in \mathbb{N}$ con $r\ \mathit{frac}(l\alpha) < 1$ y

$$|x - r\ \mathit{frac}(l\alpha)| < \epsilon. \tag{5.2.1}$$

Así, por el ítem (1) del Lema 5.2.3 tenemos que

$$r\ \mathit{frac}(l\alpha) = \mathit{frac}(rl\alpha).$$

De esta forma, usando el ítem (3) del Lema 5.2.3, ponemos $m = rl$ y usamos 5.2.1 y tenemos

$$|x - \mathit{frac}(m\alpha)| = |x - \mathit{frac}(rl\alpha)| = |x - r\ \mathit{frac}(l\alpha)| < \epsilon.$$

Caso 2. $\mathit{frac}(j\alpha) - \mathit{frac}(k\alpha) < 0$.

Aplicando el ítem (2) del Lema 5.2.3 tenemos que

$$\begin{aligned} 0 < \mathit{frac}(-l\alpha) &= \mathit{frac}(k\alpha - j\alpha) \\ &= \mathit{frac}(k\alpha) - \mathit{frac}(j\alpha) \\ &= |\mathit{frac}(k\alpha) - \mathit{frac}(j\alpha)| < \epsilon. \end{aligned}$$

Luego tenemos que $0 < \mathit{frac}(-l\alpha) < \epsilon$. En seguida aplicamos el Lema 5.2.2 con $\beta = \mathit{frac}(-l\alpha)$ y para $1 - x$ en lugar de x. Así deducimos que existe $r \in \mathbb{N}$ con $r\ \mathit{frac}(-l\alpha) < 1$ y

$$|1 - x - r\ \mathit{frac}(-l\alpha)| < \epsilon, \tag{5.2.2}$$

y como $r\ \mathit{frac}(-l\alpha) < 1$, por el ítem (1) del Lema 5.2.3, tenemos que

$$r\ \mathit{frac}(-l\alpha) = \mathit{frac}(-rl\alpha).$$

De esta forma, usando el ítem (3) del Lema 5.2.3, ponemos $m = rl$ y usamos 5.2.1 y tenemos

$$\begin{aligned} |x - \mathit{frac}(m\alpha)| &= |1 - x - 1 + \mathit{frac}(rl\alpha)| \\ &= |1 - x - \mathit{frac}(-rl\alpha)| \\ &= |1 - x - r\ \mathit{frac}(l\alpha)| < \epsilon. \end{aligned}$$

Así se concluye la demostración del Teorema de Kronecker.

□

El Teorema de Kronecker puede ser enunciado de muchas formas. En la demostración vimos que si α es irracional entonces para todo $x \in [0,1)$ y todo $\epsilon > 0$, existe un elemento $m \in \mathbb{N}$ tal que $|x - \mathit{frac}(m\alpha)| < \epsilon$. Ahora, recordemos que una sucesión es llamada *densa* en $[0,1)$ si tiene la propiedad que para todo $x \in [0,1)$ y todo $\epsilon > 0$, existe un elemento y en la sucesión tal que $|x - y| < \epsilon$. Luego, cuando α es irracional, el Teorema de Kronecker nos dice que la sucesión de términos $\mathit{frac}(\alpha),\ \mathit{frac}(2\alpha), ...$ es densa en $[0,1)$. Es sabido que cuando α es racional entonces la sucesión $\mathit{frac}(\alpha),\ \mathit{frac}(2\alpha), ...$ tiene solo un número finito de términos. Luego por el Teorema de Kronecker un número real α es irracional si y solo si la sucesión es densa en $[0,1]$.

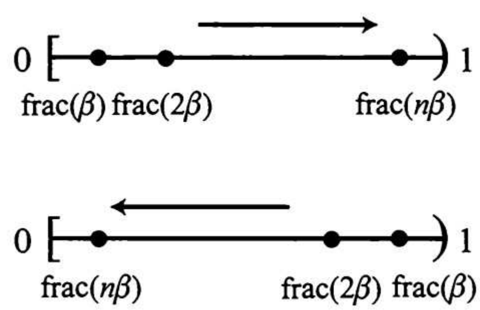


Figura 5.1:

5.3. El teorema de Weyl

Anteriormente en el Teorema de Kronecker demostramos que la sucesión de las partes fraccionarias de los múltiplos de un número están distribuidos en todo el intervalo $[0,1)$. Sin embargo, el Teorema de Kronecker no dice nada acerca de la naturaleza de esta distribución. Una pista de lo que sucede viene dado por la siguiente observación: cuando el número $\mathit{frac}(l\beta)$ es cercano a 0 en $[0,1)$, entonces los términos $\mathit{frac}(l\beta),\ \mathit{frac}(2l\beta), ...$ se incrementan en iguales cantidades (ver Figura 5.1)., mientras que si $\mathit{frac}(l\beta)$ es cercano a 1 en $[0,1)$, los términos $\mathit{frac}(l\beta),\ \mathit{frac}(2l\beta), ...$ decrecen en igual cantidad (ver Figura 5.1). Cada uno de estos periodos de crecimiento y decrecimiento viene dados por una tasa fija, mientras que en los últimos periodos, pareciera que la subsucesión $\mathit{frac}(l\beta),\ \mathit{frac}(2l\beta), ...$ puede ser "uniformemente distribuida" o extendida en todo el intervalo. En efecto, vemos que la proporción de los términos de la sucesión original $\mathit{frac}(\beta),\ \mathit{frac}(2\beta),\ \mathit{frac}(3\beta), ...$ que pertenecen a un subintervalo J, obteniendo como la proporción de los primeros n términos que pertenecen a J y haciendo que n tienda a infinito, es igual al largo $\mu(J)$ del subintervalo J. El siguiente resultado es probado por Hemann Weyl en 1909-10.

Teorema 5.3.1. (Teorema de Weyl) *Sea $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$. Entonces la sucesión $\mathit{frac}(\alpha)$, $\mathit{frac}(2\alpha)$, $\mathit{frac}(3\alpha), ...$ está distribuida en $[0,1)$ de tal manera que para cualquier subintervalo J de $[0,1)$, la proporción de los primeros n términos de esta sucesión que pertenecen a J tiene un límite cuando $n \to \infty$, y este límite es $\mu(J)$ (μ es la medida de Lebesgue).*

Ahora daremos una formulación mas técnica del Teorema de Weyl. Primero daremos la siguiente definición:

Definición 5.3.2. Una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $[0,1)$ es *uniformemente distribuida* si para todo subintervalo J de $[0,1)$ tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \#\{j : 1 \leq j \leq n \ \text{ y } x_j \in J\} = \mu(J).$$

Luego, el Teorema de Weyl puede enunciarse de la siguiente manera: *la sucesión de partes fraccionarias de los múltiplos de un número irracional son uniformemente distribuidos en* $[0,1)$. Si definimos el siguiente conjunto:

$$A(\alpha, J, n) := \{j \in \mathbb{N} : 1 \leq j \leq n \text{ y } \mathit{frac}(j\alpha) \in J\}$$

entonces la proporción de los primeros n términos de la sucesión $\mathit{frac}(\alpha)$,$\mathit{frac}(2\alpha)$,$\mathit{frac}(3\alpha), ...$ que pertenecen a J está dada por $\#A(\alpha, J, n)/n$. Luego, el Teorema de Weyl es equivalente a establecer que para todo número irracional α y para todo subintervalo $J \subseteq [0,1)$ se cumple que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\#A(\alpha, J, n)}{n} = \mu(J). \tag{5.3.1}$$

Notamos que este teorema es un refinamiento del teorema de Kronecker. El teorema de Kronecker es equivalente a decir que para un subintervalo J de $[0,1)$ con $\mu(J) > 0$ y un número irracional α entonces

$$\lim_{n\to\infty} \#A(\alpha, J, n) = \infty$$

y es claramente una implicancia de 5.3.1. Sin embargo, para probar el Teorema de Weyl necesitaremos del Teorema de Kronecker, pero este último no puede ser deducido del primero.

Ahora observemos que, en particular, existen dos intervalos en que el Teorema de Weyl es claramente cierto. Supongamos que J es el intervalo vacío $\emptyset$. En este caso, $A(\alpha, \emptyset, n) = \emptyset$ y por tanto $\#A(\alpha, \emptyset, n) = 0$. Luego

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\#A(\alpha, \emptyset, n)}{n} = 0 = \mu(\emptyset).$$

Otro caso trivial es cuando J es todo $[0,1)$. Como $\mathit{frac}(j\alpha) \in [0,1)$ para todo $j \in \mathbb{N}$, tenemos que $A(\alpha, [0,1), n) = \{1, 2, ..., n\}$. Por lo tanto, $\#A(\alpha, [0,1), n) = n$ y luego

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\#A(\alpha, [0,1), n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n} = 1 = \mu([0,1)).$$

En el caso mas general, la principal idea es probar la siguiente Proposición:

Proposición 5.3.3. *Para subintervalos J y K de $[0,1)$ donde $\mu(J)$ y $\mu(K)$ son sus respectivas medidas, con $0 < \mu(J), \mu(K) < 1$ entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\#A(\alpha, J, n)}{\#A(\alpha, K, n)} = \frac{\mu(J)}{\mu(K)}.$$

Supongamos que hemos probado la Proposición anterior. Consideremos los intervalos $[0, 1/2)$ y $[1/2, 1)$ de $[0, 1)$. Estos subintervalos forman una unión disjunta de $[0, 1)$. Luego se sigue que

$$\{1, 2, ..., n\} = A(\alpha, [0, 1), n) = A(\alpha, [0, 1/2), n) \cup A(\alpha, [1/2, 1), n)$$

y esta es también una unión disjunta. Ahora consideremos la cantidad de elementos en estos conjuntos

$$n = \#A(\alpha, [0, 1), n) = \#A(\alpha, [0, 1/2), n) + \#A(\alpha, [1/2, 1), n).$$

Luego para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\frac{n}{\#A(\alpha, [0, 1/2), n)} = 1 + \frac{\#A(\alpha, [1/2, 1), n)}{\#A(\alpha, [0, 1/2), n)}. \tag{5.3.2}$$

Ahora, sabemos que los intervalos $[0, 1/2)$ y $[1/2, 1)$ miden $1/2$. Pero por otro lado, si la Proposición 5.3.3 es verdadera, por la ecuación 5.3.2 tenemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\#A(\alpha, [0, 1/2), n)} &= 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{\#A(\alpha, [1/2, 1), n)}{\#A(\alpha, [0, 1/2), n)} \\
&= 1 + \frac{1/2}{1/2} \\
&= 2
\end{aligned}$$

obteniendo así que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\#A(\alpha, [0, 1/2), n)}{n} = \frac{1}{2} = \mu([0, 1/2)).$$

Esto muestra que la fórmula 5.3.1 es verdadera para el intervalo $[0, 1/2)$. Mas aún, para probar el Teorema Teorema de Weyl debemos usar la Proposición 5.3.3 y demostrar que vale para cualquier intervalo J tal que $0 < \mu(J) < 1$. Luego de nuestra últimas afirmaciones se sigue que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\#A(\alpha, J, n)}{n} &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\#A(\alpha, J, n)}{\#A(\alpha, [0, 1/2), n)} \cdot \frac{\#A(\alpha, [0, 1/2), n)}{n} \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\#A(\alpha, J, n)}{\#A(\alpha, [0, 1/2), n)} \right) \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\#A(\alpha, [0, 1/2), n)}{n} \right) \\
&= \frac{\mu(J)}{\mu([0, 1/2))} \cdot \frac{1}{2} \\
&= \frac{\mu(J)}{1/2} \cdot \frac{1}{2} = \mu(J).
\end{aligned}$$

Esto prueba que la ecuación 5.3.1 vale para todo intervalo J de $[0, 1)$. Luego, si probamos la Proposición 5.3.3, como lo haremos mas adelante, se sigue el teorema de Weyl. Esto lo haremos en la siguiente subsección.

Ahora intentaremos dar una visión mas general. Consideremos dos subintervalos J y K de igual medida de la siguiente forma

$$J = [\, \mathit{frac}(p\alpha), a) \quad K = [\, \mathit{frac}(q\alpha), b)$$

con $p, q \in \mathbb{N}$. Como los extremos izquierdos de estos subintervalos son términos de la sucesión $\{\, \mathit{frac}(n\alpha)\}_{n\in\mathbb{N}}$ una comparación entre el número de elementos de $A(\alpha, J, n)$ y el número de elementos en $A(\alpha, K, n)$ nos permite probar que

$$|\#A(\alpha, J, n) - \#A(\alpha, K, n)| \leq |p - q|.$$

Pero el Teorema de Kronecker nos dice que $\lim\limits_{n\to\infty} \#A(\alpha, K, n) = \infty$ y se sigue que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\#A(\alpha, J, n)}{\#A(\alpha, K, n)} = 1.$$

Luego la Proposición 5.3.3 queda establecida para intervalos del tipo descrito anteriormente. En el caso general, aproximamos un intervalo general por intervalos que son como J y K dados anteriormente. El hecho de que la Proposición 5.3.3 vale para los intervalos usados para el procedimiento de aproximación permite deducir que para todos los intervalos $J, K \subseteq [0, 1)$ con $\mu(k) > 0$ se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\#A(n, J, \alpha)}{\#A(n, K, \alpha)} = \frac{\mu(J)}{\mu(K)},$$

y como vimos anteriormente se sigue el Teorema de Weyl.

5.4. Demostración del Teorema de Weyl

La demostración del Teorema de Weyl que presentaremos aparece en el libro de Nillsen R. ver [7]. Se usará un metodo de aproximación por un tipo particular de pequeños intervalos. A continuación definiremos lo que es un arco, que es un subconjunto de $[0, 1)$.

Definición 5.4.1. Un subconjunto J de $[0, 1]$ es llamado *arco* si existen $a, b \in [0, 1]$ tales que si $a \leq b$ entonces $J = [a, b)$, o bién, si $a > b$ entonces $J = [0, b) \cup [a, 1)$. En cada caso, el arco J es denotado por $[a, b)$ y luego

$$[a, b) = \begin{cases} [a, b) & \text{si} \quad a \leq b \\ [0, b) \cup [a, 1) & \text{si} \quad a > b. \end{cases}$$

Notemos que en el primer caso, $\mu(J) = b - a$. En el segundo caso J es unión de dos intervalos disjuntos y $\mu(J) = 1 + b - a$. Notemos que según la definición anterior para $0 < a \leq 1$ tenemos que $[a, 0) = [a, 1)$.

Definición 5.4.2. Definimos la *translación* de un punto x por α en $[0, 1)$ como

$$\tau_\alpha(x) = \mathit{frac}(x + \alpha).$$

En el caso en que $\alpha \in [0, 1)$ es conveniente plantear la translación de la siguiente manera,

$$\tau_\alpha(x) = \begin{cases} x + \alpha & \text{si} \quad 0 \leq x 1 - \alpha \\ x + \alpha - 1 & \text{si} \quad 1 - \alpha \leq x < 1 \end{cases}$$

La definición de translación de un punto en el intervalo $[0, 1)$ desde el punto de vista geométrico es equivalente a la rotación R_α en S^1 y cumple las mismas propiedades.

Lema 5.4.3. *Sean $J = [a, b)$ y $K = [c, d)$ arcos de igual largo. Entonces $\tau_{c-a}(J) = K$.*

Lema 5.4.4. *Sea $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Sean J, K arcos de $[0, 1)$ de igual largo y positivo tales que*

$$J = [\ frac(p\alpha), a), \quad K = [\ frac(q\alpha), b)$$

donde $p, q \in \mathbb{N}$ y $a, b \in [0, 1)$. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\#A(\alpha, J, n)}{\#A(\alpha, K, n)} = 1.$$

Demostración. Si $p = q$ entonces $J = K$ y el resultado del Lema es inmediato. Supongamos entonces que $p \neq q$, luego $p > q$ ó $p < q$. Podemos asumir que $p > q$, luego ponemos $r = q-p \in \mathbb{N}$. Sea $\tau(x) :=\ frac(q\alpha - p\alpha + x)$. Luego por el Lema 5.4.3 se tiene que $x \in J$ si y solo si $\tau(x) \in K$. Así, usando el hecho que $frac(x + frac(y)) =\ frac(x + y)$ se sigue que

$$\begin{aligned} j \in A(\alpha, J, n) &\Leftrightarrow\ frac(j\alpha) \in J \quad \text{para algún } 1 \leq j \leq n \\ &\Leftrightarrow\ \tau(\ frac(j\alpha)) \in K \quad \text{para algún } 1 \leq j \leq n \\ &\Leftrightarrow\ frac(q\alpha - p\alpha +\ frac(j\alpha)) \in K \quad \text{para algún } 1 \leq j \leq n \\ &\Leftrightarrow\ frac((q - p + j)\alpha) \in K \quad \text{para algún } 1 \leq j \leq n \\ &\Leftrightarrow\ frac((j + r)\alpha) \in K \quad \text{para algún } 1 \leq j \leq n. \end{aligned}$$

En consecuencia, si $j \in A(\alpha, J, n)$ y $1 \leq j \leq n - r$, entonces $j + r \in A(\alpha, K, n)$ y luego

$$\#\{j : j \in A(\alpha, J, n) \text{ y } 1 \leq j \leq n - r\} \leq \#A(\alpha, K, n)$$

Luego la definición de $A(\alpha, J, n)$ asegura que el conjunto $\{j \in A(\alpha, J, n) \text{ y } 1 \leq j \leq n - r\}$ tiene al menos $\#A(\alpha, J, n) - r$ elementos, y se sigue que

$$\#A(\alpha, J, n) - r \leq \#A(\alpha, K, n).$$

Por otro lado, podemos deducir que

$$\begin{aligned} l \in A(\alpha, K, n) \text{ y } r < l \leq n &\Rightarrow\ frac(l\alpha) \in K \text{ y } r < l \leq n \\ &\Rightarrow\ frac(((l - r) + r)\alpha) \in K \text{ y } 1 \leq l - r \leq n - r < n \\ &\Rightarrow\ l - r \in A(\alpha, J, n) \end{aligned}$$

y luego,

$$\#\{l : l \in A(\alpha, K, n) \text{ y } r < l \leq n\} \leq \#A(\alpha, J, n).$$

Pero $\{l \in A(\alpha, K, n) \text{ y } r < l \leq n\}$ tiene al menos $\#A(\alpha, K, n) - r$ elementos, luego deducimos que

$$\#A(\alpha, K, n) - r \leq \#A(\alpha, J, n)).$$

Por lo tanto, obtenemos que

$$|\#A(\alpha, J, n) - \#A(\alpha, K, n)| \leq r,$$

y esto implica que

$$\left|1 - \frac{\#A(\alpha, J, n)}{\#A(\alpha, K, n)}\right| \leq \frac{r}{\#A(\alpha, K, n).}$$

Luego, como el Teorema de Kronecker afirma que

$$\lim_{n\to\infty} \#A(\alpha, K, n) = \infty,$$

obtenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\#A(\alpha, J, n)}{\#A(\alpha, K, n)} = 1$$

que es lo requerido. □

Lema 5.4.5. *Sea β un número tal que $0 < \beta < 1$ y sea $p \in \mathbb{N}$. Entonces el arco*

$$[\ \mathit{frac}(p\beta),\ \mathit{frac}(p+1)\beta)$$

es de largo β.

Demostración. En efecto,

$$\mathit{frac}(\ \mathit{frac}((p+1)\beta) -\ \mathit{frac}(p\beta)) = \mathit{frac}[(p+1)\beta - p\beta -\ \mathrm{int}((p+1)\beta +\ \mathrm{int}(p\beta)] = \mathit{frac}(\beta) = \beta$$

□

Lema 5.4.6. *Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces para todos $j, n \in \mathbb{N}$ se cumple que $\mathit{frac}(n\ \mathit{frac}(j\alpha)) = \mathit{frac}(nj\alpha)$.*

Demostración.

$$\mathit{frac}(n\ \mathit{frac}(j\alpha)) = \mathit{frac}(nj\alpha - n\ \mathrm{int}(j\alpha)) =\ \mathit{frac}(nj\alpha)$$

□

Lema 5.4.7. *Sean J y K subconjuntos de $[0, 1)$ y $n \in \mathbb{N}$. Entonces son ciertas la siguientes afirmaciones:*

1. $J \subseteq K \implies A(\alpha, J, n) \subseteq A(\alpha, K, n)$
2. $J \cap K = \emptyset \implies A(\alpha, J \cup K, n) = A(\alpha, J, n) \cup A(\alpha, K, n)$
3. $A(\alpha, [0, 1), n) = \{1, 2, ..., n\}$.

Demostración. Las afirmaciones son inmediatas de la definición de $A(\alpha, J, n)$. □

Demostración de la proposición 5.3.3.
Recordemos que esta Proposición sostiene que para α irracional, si dados dos subintervalos J, K de $[0, 1)$, con $0 < \mu(J)$ y $\mu(K) < 1$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\#A(\alpha, J, n)}{\#A(\alpha, K, n)} = \frac{\mu(J)}{\mu(K)}.$$

Sea $\epsilon > 0$, $k \in \mathbb{N}$ y $\beta := frac(k\alpha)$. Luego notemos que β es irracional, mayor que cero y entonces existen únicos $r, s \in \mathbb{N}$ tales que

$$r - 1 \leq \frac{\mu(J)}{\beta} < r \quad \text{y} \quad s - 1 \leq \frac{\mu(K)}{\beta} < s. \tag{5.4.1}$$

Esto implica que:

$$\mu(J) < r\beta, \ \frac{1}{\mu(K)} \leq \frac{1}{(s-1)\beta}, \ \mu(J) \geq (r-1)\beta \ \text{ y } \ \frac{1}{\mu(K)} > \frac{1}{s\beta}.$$

Observemos que cuanto menor es β, mayor es r y s. El teorema de Kronecker nos permite escoger k de manera que β sea tan pequeño como deseamos. Luego,

$$r > \frac{1+\mu(J)}{1-\mu(J)}, \quad s > \frac{1+\mu(K)}{1-\mu(K)}$$

$$1 - \epsilon < \left(1 - \frac{1}{s}\right)\left(\frac{1-1/r}{1+1/s}\right)^2 \quad \text{y} \quad \left(\frac{1}{1-1/r}\right)\left(\frac{1+1/r}{1-1/s}\right)^2 < 1 + \epsilon$$

Esto dice que $r, s > 1$. Los números r y s son escogidos de manera conveniente para hacer verdaderas ciertas desigualdades, que apareceran en nuestros cálculos. Notemos que

$$\left(1 - \frac{1}{s}\right)\frac{\mu(J)}{\mu(K)} = \frac{s-1}{s} \cdot \frac{\mu(J)}{\mu(K)} < \frac{s-1}{s} \cdot \frac{r\beta}{(s-1)\beta} = \frac{r}{s}$$

y

$$\left(\frac{1}{1-1/r}\right)\frac{\mu(J)}{\mu(K)} = \frac{r}{r-1} \cdot \frac{\mu(J)}{\mu(K)} > \frac{r}{r-1} \cdot \frac{(r-1)\beta}{s\beta} = \frac{r}{s}$$

por lo tanto

$$\left(1 - \frac{1}{s}\right)\frac{\mu(J)}{\mu(K)} < \frac{r}{s} < \left(\frac{1}{1-1/r}\right)\frac{\mu(J)}{\mu(K)}.$$

La idea es hacer una aproximación a cada uno de estos intervalos J y K por dentro y por fuera por medio de una unión disjunta de intervalos de largo β. El procedimiento es el mismo para cada intervalo. Discutiremos en detalle solo para J. La idea está ilustrada en la Figura 5.2.

Observemos que existen intervalos disjuntos $J_1, J_2, ...J_{r+1}$ de $[0, 1)$ tales que son consecutivos entre ellos, cada uno es de largo β y

$$\bigcup_{j=2}^{r} J_j \subseteq J \subseteq \bigcup_{r=1}^{r+1} J_j.$$

Notemos que los intervalos $J_2, J_3, ..., J_r$ estan contenidos en J. Esto es consecuencia de la elección de r en la ecuación 5.4.1. Los arcos J_1 y J_{r+1} se salen de J, el primero de el extremos izquierdo de J, y el último del extremo derecho de J. Usando la irracionalidad de β y aplicando el Teorema de Kronecker se sigue del Lema 5.4.5 que existe $p \in \mathbb{N}$ tal que los arcos $J_1, J_2, ..., J_{r+1}$ pueden ser tomados como

$$J_j = [\ frac((p+j-1)\beta),\ frac((p+j)\beta) \quad j = 1, 2, ..., r+1. \tag{5.4.2}$$

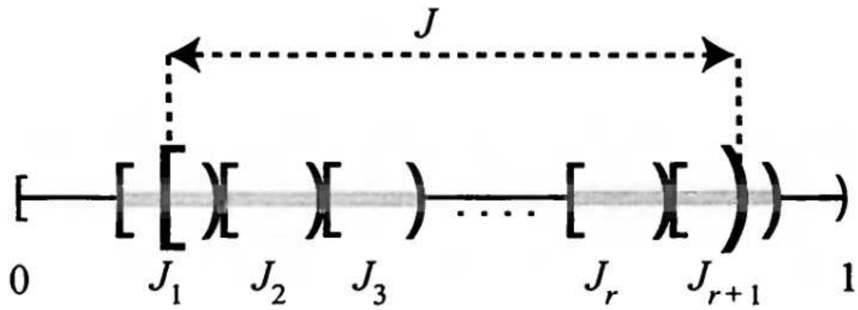


Figura 5.2:

Como $(r+1)\mu(J) < r-1$ tenemos que

$$(r+1)\beta = (r+1)\mu(J)\cdot\frac{\beta}{\mu(J)} < (r-1)\beta\mu(J)^{-1} = 1.$$

Luego el largo total de la unión de los intervalos $J_1, J_2, ..., J_{r+1}$ es a los más 1. Se sigue que estos intervalos son disjuntos dos a dos. Luego por la ecuación 5.4.1 y por (3) del Lema 5.4.7 tenemos que

$$\#A\left(\alpha, \bigcup_{j=2}^{r} J_j, n\right) \leq \#A(\alpha, J, n) \leq \#A\left(\alpha, \bigcup_{j=1}^{r+1} J_j, n\right).$$

Esto implica que

$$\sum_{j=2}^{r} \#A(\alpha, J_j, n) \leq \#A(\alpha, J, n) \leq \sum_{j=1}^{r+1} \#A(\alpha, J_j, n)$$

y así,

$$\#A(\alpha, J_1, n)\cdot\left(\sum_{j=2}^{r}\frac{\#A(\alpha, J_j, n)}{\#A(\alpha, J_1, n)}\right) \leq \#A(\alpha, J, n) \leq \#A(\alpha, j_1, n)\cdot\left(\sum_{j=1}^{r+1}\frac{\#A(\alpha, J_j, n)}{\#A(\alpha, J_1, n)}\right). \quad (5.4.3)$$

Como $\beta = \mathit{frac}(k\alpha)$, por Lema 5.4.6 y por la ecuación 5.4.2 tenemos

$$J_j = [\ \mathit{frac}((p+j-1)k\alpha),\ \mathit{frac}((p+j)k\alpha)) \quad \text{para } j = 1, 2, ..., r+1.$$

Por lo tanto, aplicamos el Lema 5.4.4 a los arcos de igual largo $J_1, J_2, ..., J_{r+1}$. Deducimos que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\#A(\alpha, J_j, n)}{\#A(\alpha, J_1, n)} = 1 \qquad \text{con } j = 1, 2, ..., r+1.$$

Por tanto, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todos los valores de j, $j = 1, 2, ..., r+1$, si $n > n_0$ entonces

$$1 - \frac{1}{r} < \frac{\#A(\alpha, J_j, n)}{\#A(\alpha, j_1, n)} < 1 + \frac{1}{r}.$$

Usando lo anterior, se sigue usando la desigualdad 5.4.3 que para todo $n > n_0$

$$(r-1)\left(1-\frac{1}{r}\right)\#A(\alpha, J_1, n) \leq \#A(\alpha, J, n) \leq (r+1)\left(1+\frac{1}{r}\right)\#A(\alpha, J_1, n).$$

Esto es, que para todo $n > n_0$

$$r\left(1-\frac{1}{r}\right)^2\#A(\alpha, J_1, n) \leq \#A(\alpha, J, n) \leq r\left(1+\frac{1}{r}\right)^2\#A(\alpha, J_1, n).$$

Ahora, usando exactamente el mismo argumento para K como lo fue usado en J, existe $q \in \mathbb{N}$ tal que si

$$K_j = [\ \mathit{frac}((q+j-1)\beta),\ \mathit{frac}((q+j)\beta)) \quad \text{para } j = 1, 2, ..., s+1$$

entonces

$$\bigcup_{j=2}^{s} K_j \subseteq K \subseteq \bigcup_{j=1}^{s+1} K_j,$$

donde $K_1, K_2, ..., k_{s+1}$ son elegidos de la misma manera que $J_1, J_2, ..., J_{r+1}$. Luego podemos encontrar n_0' tal que para todo $n > n_0'$ tenemos

$$s\left(1-\frac{1}{s}\right)^2\#A(\alpha, K_1, n) \leq \#A(\alpha, K, n) \leq s\left(1+\frac{1}{s}\right)^2\#A(\alpha, K_1, n).$$

Se sigue de las desigualdades anteriores que para $n > \text{máx}(n_0, n_0')$

$$\frac{r}{s}\left(\frac{1-1/r}{1+1/s}\right)^2\frac{\#A(\alpha, J_1, n)}{\#A(\alpha, k_1, n)} \leq \frac{\#A(\alpha, J, n)}{\#A(\alpha, K, n)} \leq \frac{r}{s}\left(\frac{1+1/r}{1-1/s}\right)^2\frac{\#A(\alpha, J_1, n)}{\#A(\alpha, K_1, n)}.$$

Luego, deducimos que para $n > \text{máx}(n_0, n_0')$,

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{1}{s}\right)\left(\frac{1-1/r}{1+1/s}\right)^2\frac{\mu(J)}{\mu(k)} \quad &\leq \quad \frac{|A(\alpha, K_1, n)|}{|A(\alpha, J_1, n)|}\cdot\frac{|A(\alpha, K_1, n)|}{|A(\alpha, J_1, n)|} \\ &\leq \quad \left(\frac{1}{1-1/r}\right)\left(\frac{1+1/r}{1-1/s}\right)^2\frac{\mu(J)}{\mu(k)}.\end{aligned}$$

Luego tenemos que para todo $n > \text{máx}(n_0, n_0')$,

$$1-\epsilon < \frac{\#A(\alpha, j, n)}{\#A(\alpha, K, n)}\cdot\frac{\#A(\alpha, K_1, n)}{\#A(\alpha, J_1, n)}\cdot\frac{\mu(K)}{\mu(J)} < 1+\epsilon.$$

Luego, por Teorema del Emparedado obtenemos

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\#A(\alpha, j, n)}{\#A(\alpha, K, n)}\cdot\frac{|A(\alpha, K_1, n)|}{|A(\alpha, J_1, n)|}\cdot\frac{\mu(K)}{\mu(J)} = 1$$

Luego, por la forma de los intervalos J_1 y K_1, aplicamos el Lema 5.4.4 para obtener

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\#A(\alpha, J_1, n)}{\#A(\alpha, K_1, n)} = 1$$

y por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\#A(\alpha, J, n)}{\#A(\alpha, K, n)} = \frac{\mu(J)}{\mu(K)}.$$

$\square$

Teorema 5.4.8. (TEOREMA DE WEYL (2)) *Sea $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ y J un subintervalo de $[0,1)$. Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\#\{j : 1 \leq j \leq n \ y \ \ frac(j\alpha) \in J\}}{n} = \mu(J).$$

Demostración. Si J es un conjunto singleton, si es vacío o si es todo $[0,1)$ entonces el resultado es claramente cierto. Supongamos que J es un subintervalos de $[0,1)$ con $0 < \mu(J) < 1$. Entonces aplicando la Proposición 5.3.3 tenemos

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\#A(\alpha, J, n)}{n} &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\#A(\alpha, J, n)}{\#A(\alpha, [0, 1/2), n)} \cdot \frac{\#A(\alpha, [0, 1/2), n)}{n} \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\#A(\alpha, J, n)}{\#A(\alpha, [0, 1/2), n)} \cdot \frac{\#A(\alpha, [0, 1/2), n)}{\#A(\alpha, [0, 1/2), n) + \#A(\alpha, [1/2, 1), n)} \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\#A(\alpha, J, n)}{\#A(\alpha, [0, 1/2), n)} \right) \\
&\quad \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1 + \#A(\alpha, [1/2, 1), n) \cdot (\#A(\alpha, [0, 1/2), n))^{-1}} \right) \\
&= \frac{\mu(J)}{\mu([0, 1/2))} \cdot \frac{1}{1 + \mu([1/2, 1)\mu([0, 1/2))^{-1}} \\
&= \frac{\mu(J)}{1/2} \cdot \frac{1}{1+1} = \mu(J).
\end{aligned}$$

$\square$

Capítulo 6

Apéndice

6.1. Lema de la subaditividad

Lema 6.1.1. *Si existen constantes $k \in \mathbb{N}$ y $L \in \mathbb{R}^+$ tales que para todos $m, n \in \mathbb{N}$ tenemos*

$$a_{m+n} \leq a_n + a_{m+k} + L$$

entonces existe el límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = inf\left\{\frac{a_n}{n} : n \geq 1\right\}.$$

Demostración. Notamos primero que si sustituimos m y n por k y m respectivamente tenemos que

$$a_{m+k} \leq a_m + a_{2k} + L$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} a_{m+n} &\leq a_m + a_n + a_{2k} + L \\ &= a_m + a_n + K \end{aligned}$$

donde $K = a_{2k} + L$. Luego, podemos asumir $k = 0$. Observemos que la sucesión $b_n = a_n + K$ satisface

$$b_{m+n} \leq b_m + b_n.$$

Para cada $n \geq 1$ el algoritmo de la división establece que $n = kl + r$ donde $k \leq 0$ y $0 \leq r \leq l-1$, tenemos entonces

$$b_n \leq b_{kl} + b_r \leq kb_l + b_r \leq kb_l + b,$$

donde $b = \sup_{0\leq r\leq l-1} b_r$. Así tenemos

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_n + K}{n} \leq \limsup_{k\to\infty} \frac{k(a_l + K) + b}{kl} \leq \frac{a_l + K}{l}$$

y por lo tanto

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} \leq \inf\left\{\frac{a_l}{l} : l \leq 1\right\} \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$$

que es los que se quería demostrar.

□

6.2. El conjunto de Cantor

Este conjunto es llamado así por ser introducido por George Cantor en 1883. El conjunto de Cantor Σ se define como el conjunto de las palabras infinitas en el alfabeto $\{0,1\}$, es decir, un elemento $\overline{x} \in \Sigma$ es de la forma

$$\overline{x} = x_1 x_2 .... x_n ...$$

donde $x_i \in \{0,1\}$, para cada $i \in \mathbb{N}$. Luego, cada una de estas palabras las podemos identificar con un elemento del producto cartesiano $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, de la siguiente forma

$$\overline{x} = x_1 x_2 ... x_n ... \to (x_1, x_2, ..., x_n, ...) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}.$$

Por lo tanto, denotaremos por $\Sigma = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ al conjunto de Cantor. La distancia entre dos puntos de Σ está definida por

$$d(\overline{x}, \overline{y}) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{3^j} |x_j - y_j|.$$

Existen muchas maneras de representar los números del intervalo $[0,1]$, una de ellas es mediante su expansión en potencias de 3. Cualquier número $r \in [0,1]$ lo podemos escribir de acuerdo a la siguiente fórmula:

$$r = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x_m}{3^m} \quad \text{con } x_m \in \{0,1,2\}.$$

Denotaremos esta sumatoria por $r = 0.x_1 x_2 x_3 \cdots x_n \cdots$, en la cual, cada dígito $x_m \in \{0,1,2\}$. Esta expresión es mas común utilizando potencias de 10 y la conocemos por expansión decimal de r. A pesar de ser muy útil, esta descripción presenta algunas ambiguedades, por ejemplo:

$$\frac{2}{3} = 0{,}200000... = 0{,}122222...$$

sin embargo, nos permite establecer un isomorfismo con el Conjunto de Cantor, definido anteriormente.

Denotaremos por $K \subset [0,1]$, el conjunto de números del intervalo $[0,1]$ definido a partir de la siguiente propiedad: $r \in K$ si y solo si el dígito 1 no está presente en su expansión ternaria, esto es,

$$\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_j}{3^j} \in [0,1] : x_j \neq 1 \text{ para todo } j \right\}.$$

Observemos que si nos restringimos al conjunto K no tendremos problemas con las etiquetas dobles. De esta forma, podemos definir la siguiente función invertible $h : \Sigma \to K$ por

$$h((x_j)) := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2 \cdot x_j}{3^j}$$

donde $\overline{x} = (x_j)_{j \in \mathbb{N}}$. Tenemos que h es continua y biyectiva. Por lo tanto, (Σ, d) y $(K, |\cdot|)$ son dos espacios homeomorfos.

Retrato del Conjunto de Cantor. El intervalo $[0,1]$ lo podemos dividir en tres intervalos, sean

$I_0 = \left[0, \frac{1}{3}\right]$, $I_1 = \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ y $I_2 = \left[\frac{2}{3}, 1\right]$ dichos intervalos. Salvo por los extremos del intervalo I_1, podemos afirmar que si $x \in I_1$ entonces

$$x = 0{,}1x_2x_3x_4...$$

Esto nos permite aproximarnos al conjunto K. De hecho, tenemos que $K \subset K_1 := I_0 \cup I_2$. Dicho de otra forma, $K_1 = [0,1] \setminus \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Ahora, a cada uno de estos intervalos podemos dividirlos en tres nuevamente a partir de puntos de la forma $\frac{p}{9}$, donde $1 \leq p \leq 8$,

$$\begin{aligned} I_0 &= I_{00} \cup I_{01} \cup I_{02} \\ I_2 &= I_{20} \cup I_{21} \cup I_{22} \end{aligned}$$

Aquí podemos afirmar que si $x \in I_{01} \cup I_{21}$ se cumple que

$$x = 0.x_1 1 x_3x_4x_5...$$

y $x_1 \neq 1$. Luego el conjunto $K_2 := I_{00} \cup I_{02} \cup I_{20} \cup I_{22}$ es una mejor aproximación al conjunto K y además $K \subset K_2$. Si a cada intervalo de K_1 lo dividimos en tres y retiramos el tercio del medio, obtenemos K_2. Repitiendo este procedimiento, para cada $n \in \mathbb{N}$, K_n es una unión de 2^n intervalos, acotados por los números de la forma $\frac{p}{3^n}$, con $1 \leq p \leq 3^n - 1$. Finalmente, el conjunto de Cantor es la intersección de los conjuntos K_n, es decir

$$K = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n.$$

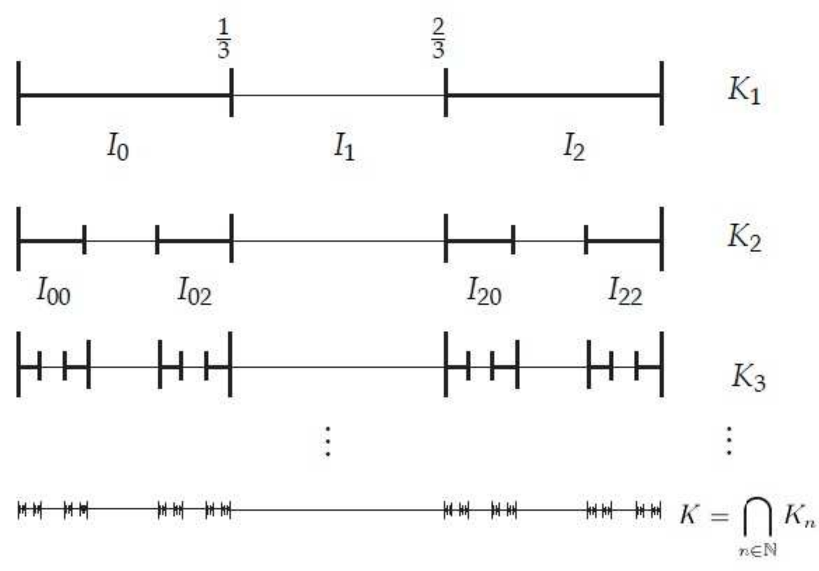


Figura 6.1: Se ilustran los primeros pasos en la construcción del Conjunto de Cantor.

A continuación probaremos algunas propiedades topológicas del conjunto de Cantor.

Proposición 6.2.1. *El conjunto de Cantor es un conjunto perfecto.*

Demostración. Probaremos que todos sus puntos son puntos de acumulación. Sea $x \in K$ y $\epsilon > 0$. Sea V una vecindad de x de radio ϵ, $V = B(x, \epsilon)$. Como el largo de K_i tiende a cero cuando i tiende a infinito, para i suficientemente grande, alguna componente de K_i que contiene a x está contenida en V.

Sea $y \in K$ distinto de x, que sea un elemento de tal componente (por ejemplo, alguno de sus extremos debe ser distinto de x). Entonces $y \in V$, y por lo tanto, x es punto de acumulación de K. $\square$

Un conjunto contenido en un espacio métrico es una *componente* o *componente conexa* si es un conjunto conexo maximal, es decir, no es subconjunto propio de otro conjunto conexo. Las componentes conexas forman una partición del espacio.

Proposición 6.2.2. *El conjunto de cantor es totalmente disconexo.*

Demostración. Consideremos los conjuntos K_n, que son uniones de 2^n intervalos, cada uno de largo $\left(\frac{1}{3}\right)^n$. Como $K \subset K_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, si K contiene un intervalo (a, b) entonces $(a, b) \subset K_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por lo que $K \subset I_{x_1x_2x_3....x_n}$ donde $x_i \in \{0, 2\}$. Pero como (a, b) es conexo entonces existe un único intervalo en K_n que lo contiene. Pero los conjuntos $I_{x_1x_2x_3...x_n}$ son de largo $\left(\frac{1}{3}\right)^n$ y este largo tiende a 0 cuando n tiende a infinito. De esta forma es claro que (a, b) no puede ser subconjunto de K. Como los únicos conexos de $\mathbb{R}$ son los intervalos y los puntos, las componetes conexas de K son puntos, por lo que K es totalmente disconexo. $\square$

Proposición 6.2.3. *El conjunto de Cantor es compacto.*

Demostración. Es consecuencia directa del Teorema de Heine-Borel, pues K es cerrado y acotado. $\square$

Teorema 6.2.4. *Dos espacios métricos compactos, perfectos y totalmente disconexo son homeomorfos.*

La demostración del Teorema anterior es clásica pero será omitida, puede consultarse la página 99 del libro *Topology* de J.G. Hocking y G.S. Young, ver [8]. Finalmente, el siguiente Corolario nos dará una clara caracterización de un conjunto de Cantor.

Corolario 6.2.5. Todo espacio métrico perfecto, totalmente disconexo y compacto es homeomorfo al conjunto de Cantor.

Demostración. Es consecuencia inmediata del Teorema 6.2.4. $\square$

6.3. Principio del Palomar

Supongamos que tenemos un cierto número de palomas y un número menor de palomares. Si todas las palomas se distribuyen en estos palomares, es ciertamente seguro que en algún palomar habrá más de una paloma. En este apéndice formalizaremos este principio en el siguiente Teorema.

Teorema 6.3.1. *Sea X un conjunto y sea $X_1, X_2, ..., X_n$ una partición finita de X. Asumiremos que $x_1, x_2, ...x_r$ son r puntos en X con $r > n$. Entonces existe $i \in \{1, 2, ..., n\}$ y $j, k \in \{1, 2, ..., r\}$ con $j \neq k$ tales que $x_j \in X_i$ y $x_k \in X_i$.*

Demostración. Observemos primero que si existen $j, k \in \{1, 2, ..., r\}$ tales que $x_j = x_j$ entonces el resultado es inmediato. Asumiremos que todos los puntos $x_1, x_2, ..., x_r$ son distintos. Luego, si cada uno de los conjuntos $X_1, X_2, ..., X_n$ contiene a lo mas un punto de la forma x_j para $j = 1, 2, ..., r$, el número total de puntos x_j es a lo mas n y luego $r \leq n$. Esto es una contradicción a nuestra suposición que $r > n$.

$\square$

Bibliografía

[1] Denjoy, A. (1932). *Sur les courbes definies par les équations différentielles à a la surface du tore*. Journal de Mathématiques Pures et Appliqués. , 11, 333-375.

[2] Katok, A. & Hasselblatt B. (1995). *Introduction to the modern theory of dynamical systems*. With a supplementary chapter by Katok and Leonardo Mendoza. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 54. Cambridge University Press, Cambridge.

[3] Munkres, J. (2002). *Topología*. 2ª edición. Pearson Educación S.A. Madrid. España.

[4] Brin, M & Stuck G. (2002). *Introduction to Dynamical Systems*. Cambridge University Press, Cambridge.

[5] Pelicano A. (2004). *Difeomorfismos da Circunferência e Número de Rotação*. Departamento de Matemática, Instituto Superior Técnico.

[6] Birkhoff, G. D. (1931). *Proof of the ergodic theorem*. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 17, 656-660.

[7] Nillsen R. (2010). *Randomness and Recurrence in Dynamical Systems*. The Carus Mathematical Monographs, 31. University of Wollogong, Australia.

[8] Hocking, J. & Young, G. (1961). *Topology*. London: Addyson-Wesley Publishing Company.