FACULTAD DE CIENCIAS INSTITUTO DE MATEMÁTICAS

IMPLEMENTACIÓN DE UN MODELO PARA LA INSTRUCCIÓN Y EL APRENDIZAJE DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMATICOS CON ENUNCIADO VERBAL

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE PROFESOR DE MATEMÁTICA CON MENCIÓN EN DIDÁCTICA Y AL GRADO DE LICENCIADO EN EDUCACIÓN

Integrante: Gianni Paolo Dagnino Bahamondes

Profesor Guía: Dra. Carolina Guerrero Ortiz

Valparaíso 2018

Agradecimientos

Dedico esta tesis a mi hija Amanda y a mi pareja Antonia, por su amor y apoyo en este proceso de investigación.

En segundo lugar, a mis padres Agustín e Isabel, quienes son mis pilares y motivación para nunca rendirme y realizar las cosas con cariño y dedicación.

Por último, a mi mentora Dra. Carolina Guerrero, por su constancia y paciencia en inculcarme los conocimientos necesarios en este proceso de tesis, así como también la motivación y confianza para ser cada vez mejor profesional.

INDICE

Resumen

En la solución de problemas matemáticos, más concretamente en problemas de enunciado verbal, se presenta la necesidad de transitar entre los lenguajes natural y matemáticos, elementos constituyentes en la resolución de este tipo de problemas. Tal aspecto requiere un enfoque de alfabetización de todo el texto y una conciencia de los componentes matemáticos implícitos en él. En esta investigación, se presenta un estudio de los procesos de solución de problemas matemáticos cuyas soluciones dependen de una transición entre una situación lingüística por un lado y una estructura matemática abstracta por el otro. Esto conlleva la necesidad de tratar los problemas bajo un enfoque de alfabetización, es decir, saber leer y representar. Por este motivo, se analizan los resultados de implementar un modelo de enseñanza y aprendizaje que fue puesto a prueba. Este modelo considera un proceso interactivo de múltiples fases, que permiten decodificar el texto, en elementos matemático por medio de símbolos y gráficos. Esto lleva a un entendimiento sobre el contenido subyacente, el contexto, transferencia a un modelo matemático, y las relaciones entre la situación lingüística y el modelo matemático apropiado. Este modelo de enseñanza fue puesto a prueba como un caso de estudio por dos investigadores israelíes en estudiantes de diferentes niveles. El grupo participante de estudiantes demostró una mejora en su compresión matemática usando este modelo. Por lo tanto, con base en los resultados positivos que reportaron los investigadores, en este trabajo se implementó dicho modelo de enseñanza en un curso con 6 estudiantes de tal nivel educativo.

Abstract

In the solving of mathematical problems, more specifically in mathematical word problems, there is a need to travel between natural and mathematical languages, constituent elements in the resolution of this type of problems. Such an aspect requires a literacy approach to the whole text and an awareness of the mathematical components implicit in it. In this investigation, a study of the mathematical problem-solving processes is presented whose solutions depend on a transition between a linguistic situation on the one hand and an abstract mathematical structure on the other. This implies the need to address the problems under a literacy approach, i.e., know how to read and represent. For this reason, the results of implementing a teaching and learning model that was put to the test are analyzed. This model considers an interactive process of multiple phases, that allow to decode the text, in mathematical elements by means of symbols and graphics. This leads to an understanding about the underlying content, the context, transfer to a mathematical model, and the relationships between the linguistic situation and the appropriate mathematical model. This teaching model was put to the test as a case study by two Israeli researchers in students of different levels. The participant group of students demonstrated an improvement in their mathematical compression using this model. Thus, based on the positive results reported by the researchers, in this work, this teaching model was implemented in a course with 6 students of such educational level.

INTRODUCCIÓN

Este trabajo se focaliza en resolución de problemas matemáticos, los cuales se relacionan con los procesos de enseñanza – aprendizaje a través de la implementación de un método de resolución de problemas de enunciado verbal.

Esta área matemática es hoy en día uno de los temas más relevantes en la educación, el cual exige que las personas se adapten permanentemente a variadas situaciones, respondiendo de forma estratégica y con cierto grado de pertinencia a la situación planteada.

Teniendo en cuenta la importancia de la resolución de problemas como herramienta educativa, se deben tener presente los fundamentos, justificaciones, alcances y perspectivas asociados, con el objetivo de alcanzar los beneficios del desarrollo de esta habilidad.

El presente estudio corresponde a una investigación descriptiva, con referencia a la utilización de un método de instrucción para la resolución de problemas de enunciado verbal.

Cabe señalar que la mayoría de los docentes tiene pocas o ninguna oportunidad de trabajar en resolución de problemas en sus programas de formación universitaria, así como tampoco en el trabajo de campo dentro de las aulas públicas. Esto debido a que las condiciones en la que se encuentran, ofrecen pocas posibilidades para que los estudiantes desarrollen capacidades para resolver problemas de manera que el profesor termina sucumbiendo al error común que existe en la comunidad docente de entregar la solución o dejando de lado los procesos de guía para los estudiantes en la resolución del problema.

La primera parte, el capítulo 1, presenta la contextualización y justificación de la investigación, con una breve descripción general de los diferentes métodos de resolución de problemas existentes hoy en día. Además, se plantean los objetivos generales y específicos del estudio.

En el capítulo dos, se presenta el antecedente teórico, el cual contiene los fundamentos y conceptos que respaldan el accionar metodológico en materia de resolución de problemas matemáticos de enunciado verbal.

En el capítulo tres, se presentan los elementos metodológicos que guiaron el estudio, entre ellos, al grupo participante y el proceso de evaluación *pre-test* realizado al comienzo del año escolar, y el *post-test* utilizado posteriormente. Luego, se muestra el plan de trabajo diseñado en tres fases (diagnostico, ejecución y evaluación). En cada una de ellas se especifican las metas, estrategias, actividades de enseñanza-aprendizaje, objetivos de aprendizaje y la respectiva evaluación. Se presenta la matriz de diagnóstico que presenta área, indicadores evaluativos, fuentes de información, instrumentos y modos de aplicación.

Posteriormente, en el capítulo cuatro, se presenta el análisis, descripción e interpretación de los procesos de solución de dos estudiantes asociados al desarrollo de la habilidad de resolución de problemas. Luego se dan a conocer las fortalezas y debilidades evidenciadas por dos estudiantes y se realiza un análisis de las respuestas a nivel grupal. Para comprender el impacto de la implementación del método de instrucción se contrastan las respuestas de las participantes obtenidas en el *pre-test* y *post-test.*

Finalmente, se exponen las conclusiones obtenidas de este estudio, se especifica la bibliografía utilizada en el proceso, y se incluyen los anexos relativos al diseño y ejecución del proyecto.

Capítulo 1

ANTECEDENTES

En el actual escenario educativo chileno, una de las mayores preocupaciones tanto a nivel ministerial, como escolar, es el aprendizaje de la matemática. Los resultados obtenidos en las evaluaciones internacionales y nacionales como PISA y SIMCE (Ministerio de educación, 2012) en los últimos años, demuestran el bajo rendimiento de nuestros estudiantes. Las instituciones educacionales, en su esfuerzo por revertir tal situación, plantean en sus proyectos educativos una serie de competencias que los estudiantes deben desarrollar, las cuales deben estar contempladas en la planificación y accionar docente, considerando los programas de estudio de los diferentes niveles de enseñanza, para desarrollar destrezas y habilidades necesarias para el aprendizaje de los contenidos.

En las últimas décadas, uno de los ámbitos de las matemáticas que ha tomado mayor relevancia a nivel internacional es la resolución de problemas, y toda la serie de habilidades y competencias que se requiere para su adecuado aprendizaje. En la comunidad educativa, existe plena conciencia de que estas habilidades favorecen a los estudiantes en su formación integral y les brida herramientas para enfrentar situaciones de diversa índole. La resolución de problemas, es una competencia fundamental que los estudiantes deben adquirir en su paso por la educación, donde su preparación para la aplicación de conocimientos y habilidades matemáticas aprendidas, en situaciones reales del mundo, merece un espacio importante (Zanocco, 2006). Así, la resolución de problemas como metodología de enseñanza de las matemáticas, potencia las competencias y desarrolla habilidades en los estudiantes; además permite formar personas capaces de desarrollar un pensamiento crítico, enfrentar conflictos y resolver problemas.

En el inicio del estudio de la disciplina en el ámbito escolar, se presentan varias dificultades para la mayoría de los estudiantes, que en parte son producidas por la carencia de habilidades matemáticas debido a la enseñanza tradicional. Las habilidades que los estudiantes deberían desarrollar, se pueden clasificar según la siguiente tabla (Tambychika & Subahan, 2010):

CUADRO 1

Habilidades y competencias

HABILIDAD	COMPETENCIA
Numéricas	Números, tablas y principios matemáticos.
Aritméticas	Exactitud y algoritmos en el procedimiento de trabajo matemático y computacional.
Información	Experiencia para conectar información a un concepto, funcionamiento y experiencia, así como la experiencia para transferir información y transformar problemas en oraciones matemáticas.
Lingüística	Términos y relevancia de la información matemática.
Espacial-visual	Visualizar conceptos matemáticos, manipular formas geométricas y espacios de manera significativa.

Nota: Recuperado de "*Students' Difficulties in Mathematics Problem-Solving: What do they Say*?, (2010)"

En el proceso de resolución de problemas con enunciado verbal, se evidencia la dificultad que tienen los estudiantes para representar y designar los objetos matemáticos implicados en el texto. Dichas dificultades, tales como hacer conexiones, manipular información y establecer oraciones matemáticas, pueden ser producidas por debilidades en la comprensión de la información proporcionada por el texto.

La comprensión conceptual y el conocimiento procedimental son esenciales para las habilidades en la resolución de problemas (Geary 2004, citado por Tambychika & Subahan, 2010).

Por otro lado, la comprensión del lenguaje y las habilidades viso-espaciales también son importantes para interpretar y manipular la información de manera efectiva. Sin embargo, esto implica establecer una conexión entre el problema y su representación, el cual es un desafío muy grande para los estudiantes. Debilidades en la habilidad visual-espacial pueden causar dificultades para diferenciar, relacionar y organizar la información.

En el ámbito lingüístico, la comprensión de los términos es relevante, ya que, si esto no se logra, pueden surgir dificultades en la comprensión del lenguaje matemático. Estas carencias pueden causar obstáculos para comprender el objetivo del problema, afectando la capacidad de resolver el mismo. Es por ello, que el lenguaje y las habilidades viso espaciales ayudan a interpretar y manipular la información de manera efectiva (Geary, 2004, citado por Tambychika & Subahan, 2010)

Además, las debilidades en la comprensión de los conceptos y la falta de conocimiento estratégico, generan dificultades para la resolución de problemas. Al respecto se encontró que los estudiantes que presentaban debilidades en la comprensión conceptual, carecían de habilidades aritméticas y procedimentales (Tay Lay Heong, 2005, citado por Tambychika & Subahan, 2010)

En otro contexto, las principales habilidades cognitivas del aprendizaje que pueden causar dificultades en matemáticas, son la capacidad de memorizar y recordar hechos que están relacionados. Así, el no memorizar y recordar hechos y procedimientos numéricos, causa problemas en la mayoría de los estudiantes. Estas habilidades influyen indirectamente en la competencia de las habilidades matemáticas que son cruciales en la capacidad de resolver problemas. Por supuesto, además de memorizar se debe desarrollar la habilidad en los estudiantes para comprender la razón del desarrollo de determinada actividad matemática (Tambychik & Subahan, 2010).

Otro aspecto relevante, es la capacidad de concentración de los estudiantes. Estudios consideran que no es tan buena como la capacidad de usar la lógica. Pueden tener muchas cosas en qué pensar en que les impida perseverar en la búsqueda de la solución a un problema. Cualquier obstáculo en cualquier nivel podría generar dificultades en el proceso de resolución de problemas (Tambychik & Subahan, 2010).

A las dificultades producidas por la debilidad en la adquisición de habilidades matemáticas, mencionadas anteriormente, se añade una serie de fallas en las habilidades cognitivas de aprendizaje:

- Dominio incompleto de los números.
- Incapacidad para conectar aspectos conceptuales de Matemática.
- Ineficiencia para transferir conocimiento.
- Dificultad para hacer conexión significativa entre información.
- Incompetencia para transformar información matemáticamente.
- Dominio incompleto de términos matemáticos.
- Comprensión incompleta de lenguaje matemático.

Al resolver problemas matemáticos que se presentan en forma escrita, los estudiantes se enfrentan a dos clases de lenguajes, lenguaje natural y lenguaje matemático (1970, citado por Ilany y Margolin, 2010), que requieren de una comprensión conceptual y un conocimiento procedimental, habilidades esenciales en resolución de problemas (2004, citado por

Tambychik & Subahan, 2010). Por otro lado, para Hernando (2009) «*las matemáticas no sólo tienen su propio lenguaje, sino que son en sí mismas un lenguaje, puesto que comprenden, entre otras cosas, un conjunto de símbolos semióticos de representación conceptual*». Por consiguiente, el lenguaje matemático es un lenguaje de símbolos, conceptos, definiciones y teoremas, y necesita ser aprendido desde los primeros años de educación. Dicho lenguaje, no se desarrolla naturalmente como el lenguaje natural. En consecuencia, el lenguaje matemático se debe aprender a reconocer, por ejemplo, números como objetos, uno a uno sus propiedades similares y diferentes. De ese modo, el estudiante percibe los números como signos mediante los cuales es posible hacer cálculos y realizar diversas manipulaciones (Ilany y Margolin, 2010).

Debido a que la Matemática es un sistema de signos y símbolos, donde el actual sistema educativo falla al desarrollar estos conocimientos en los estudiantes, cada vez es más difícil la transformación del lenguaje natural al matemático y viceversa (Marquina, Moreno y Acevedo 2013). Dichas dificultades pueden tener diversos orígenes, como las mencionadas anteriormente, las cuales provocan una serie de barreras a la hora de procesar la información en la aplicación de algún contenido a un contexto determinado. El grado de abstracción que presenta esta disciplina, la densidad de los contenidos, así como la incertidumbre creadas por las nuevas concepciones del rigor y de lo que es un problema en Matemática, conlleva un considerable aumento en las exigencias en cuanto al conocimiento y las habilidades de tipo matemático de los estudiantes (Núñez, Valdés y Solana, 2001).

En el proceso de solución de problemas matemáticos, el estudiante debe transitar por diferentes etapas, iniciando en la compresión del problema (lingüístico y matemático) para dar paso a niveles de mayor complejidad, resolución y validación de la solución. La mayor dificultad para los estudiantes se encuentra en las primeras etapas, lectura y comprensión del texto, que involucra la transformación del lenguaje natural al lenguaje matemático, para lo cual, es indispensable que determinen con precisión los datos otorgados (relevantes para la solución) por el problema matemático (Marquina, Moreno y Acevedo, 2013). Sin embargo, la realidad nos dice que estos procesos no se trabajan de forma explícita y sistemática en las clases de matemáticas, y que los estudiantes al traducir del lenguaje natural al lenguaje algebraico, no logran identificar con propiedad las cantidades conocidas (datos) o desconocidas (incógnitas), como también las operaciones que se deben realizar entre esas cantidades (Marquina, Moreno y Acevedo, 2013). Asimismo, se ha verificado que, aún para aquellos estudiantes que tienen dominio en la teoría, el problema radica en determinar e interpretar datos explícitos e implícitos que son expresados en lenguaje común, generando dificultades en la construcción de una expresión en lenguaje matemático que determine una posible solución al problema (Greer, 1997). Sin la habilidad de transferencia de información, al estudiante se le dificulta poder entender y hacer una conexión efectiva de la información suministrada en el enunciado por los problemas matemáticos (Tambychik & Subahan, 2010).

En la resolución de problemas, el estudiante debe ser capaz de argumentar, generalizar y validar correctamente sus procedimientos en un tiempo determinado, producto de la adecuada traducción del lenguaje natural al lenguaje matemático. Para ello, debe considerar las diferentes situaciones del problema (contexto lingüístico y matemático), caracterizar estas situaciones de forma que puedan ayudarle a decidir qué acciones debe tomar (identificar palabras clave que le lleven a los datos relevantes y a la utilización de operaciones), y aplicar los operadores para cambiar de una situación a otra. Sin embargo, tales acciones son obstaculizadas por métodos docentes orientados a la solución de problemas en forma algorítmica. Por ejemplo, responder 100 preguntas en 50 minutos, limitándote el tiempo para razonar de forma adecuada (1995, citado por Brian Greer, 1997).

En nuestro país, la planificación educacional está estructurada para abordar diversos contenidos de matemáticas, no obstante, los contenidos mínimos obligatorios componen un gran número de exigencias que obligan a los docentes a buscar estrategias para darle cumplimiento a los programas de estudios, lo cual requiere que los estudiantes apliquen e integren variados conceptos matemáticos y habilidades durante el proceso de dar solución a problemas que sin ser enseñados o llevados a la práctica, impide de manera adecuada el desarrollo de estas actividades y la construcción del conocimiento matemático necesario.

En resolución de problemas, se identifican orientaciones estándares para los diferentes niveles de la Educación Media General (ver cuadro 2), en los cuales se señala que los estudiantes deben aprender a seleccionar información, realizar inferencias, organizar la información, representar la información, utilizar lenguaje disciplinario, fundamentar respuestas, elaborar estrategias de solución, evaluar y argumentar la solución (Ministerio de Educación, 2012).

CUADRO 2

Indicadores de aprendizaje y su progresión 4to medio

INDICADOR	CUARTO MEDIO
Selecciona información	Seleccionan la información explícita e implícita del enunciado y/o datos complementarios al texto, que es basal y fundamental para resolver el problema.
Realiza inferencias	Realizan inferencias con profundidad y autonomía a partir de la información implícita del texto.
Organiza la información	Producen nueva información a partir de la organización de la información fundamental del texto.
Representa la información	Representan y modelan la información utilizando un amplio repertorio de estrategias, combinándolas y/o modificándolas traduciendo a más de un registro, en el contexto de la disciplina.
Utiliza lenguaje disciplinario	Reconocen significados del lenguaje de la disciplina y expresan respuestas utilizando el lenguaje formal y disciplinario del nivel.
Fundamenta posibles respuestas	Fundamentan posibles respuestas con autonomía y flexibilidad, para resolver un amplio repertorio de problemas con lenguaje disciplinario.
Elabora estrategias de solución	Elaboran estrategias pertinentes de resolución, utilizando lenguaje disciplinario.
Evalúa y argumenta la respuesta	Evalúan y argumentan la mejor respuesta al problema planteado, a través de una secuencia lógica de argumentos.

Nota: Recuperado de "*Orientaciones e Instrumentos de Evaluación Diagnóstica, Intermedia y Final en Resolución de Problemas 4O años de Educación Media" (2012)".*

Existe la noción en el cuerpo docente, que los problemas de enunciado verbal son una mera aplicación de los conceptos aprendidos y, por consiguiente, los estudiantes tienden a situar su atención en aspectos irrelevantes para la solución del problema. No es de extrañar que los estudiantes operen los números del enunciado sin haber visto el contexto del problema. Aquello debido a que la instrucción que el estudiante ha recibido, se centra en la operación, sin tomar en cuenta la situación lingüística y matemática del enunciado.

Para algunos investigadores, es evidente que la cultura del aula (y de la escuela en general) experimentada por los estudiantes, es uno de los factores que potencian dichos obstáculos (Greer, 1997). Esto, provoca en los estudiantes un desarrollo inapropiado, alejándolos de habilidades tan importantes para la matemática y la vida diaria como lo es la resolución de problemas. Dado lo anterior, cabe preguntarse, ¿de qué manera los distintos modos de proceder actuales de los docentes, afectan o contribuyen al desarrollo de la habilidad de los estudiantes para resolver problemas?

Las actuales metodologías de enseñanza que reciben los estudiantes, revelan una serie de fenómenos. Uno de ellos, es la inercia conductual, producto del acomodo inconsciente a reglas establecidas, empobreciendo las capacidades y reduciendo las posibilidades de éxito que el estudiante pueda obtener. De igual modo, hay fenómenos cuyo origen no es necesariamente racional, y que las metodologías no toman en cuenta. Tales procesos, así como los procesos emocionales que pueden experimentar los estudiantes a la hora de dar solución a un problema, perjudican el éxito que puede tener en la búsqueda de una respuesta. Igualmente, hay fenómenos que tienen un componente cognitivo. Estas actitudes suponen una aplicación desequilibrada de capacidades empleadas en la solución del problema. Por último, a nivel sociocultural, existen en el ambiente escolar y académico, conjuntos de maneras de pensar, creencias e ideas que influyen en el accionar pedagógico y/o en los resultados de los estudiantes. Estas creencias pueden provocar deficiencias en habilidades matemáticas y habilidades cognitivas dificultando su aprendizaje (Tambychik & Subahan, 2010).

Con el objetivo de evitar tales deficiencias y desarrollar habilidades matemáticas en los estudiantes, se han propuesto cambios en la educación chilena. Tales cambios, como las reformas al Curriculum Educacional, hasta el momento no muestran éxito alguno (Ministerio de educación, 2012). Investigadores y docentes observan y cuestionan los resultados de las evaluaciones, surgiendo así, reflexiones y nuevos paradigmas que pretenden dar un nuevo sentido y objetivo a esta disciplina mediante una Educación Matemática que considere nuevas metodologías para favorecer una formación integral en las personas.

Autores como Ilany y Margolin (2010) definen la resolución de problema como, *«la implementación de una secuencia de operaciones por medio de la cual se logra algún objetivo final»* (p.139).

Tal objetivo puede resultar difícil de alcanzar, debido a que el proceso de resolver un problema no necesariamente tiene solución inmediata, por lo cual el éxito depende de los conocimientos y habilidades previas que posea el estudiante para buscar diferentes caminos de solución.

Se busca que la resolución de problemas no sólo culmine en una práctica docente al finalizar alguna explicación o contenido, sino que constituya el proceso medular de la enseñanza de las matemáticas, permitiendo al estudiante construir sus propias herramientas para el desarrollo de su conocimiento matemático. Tal metodología, plantea un cambio en las estrategias y roles del saber, permitiendo que tanto el estudiante como el docente tengan una participación activa y relevante en la solución de determinados problemas.

En resolución de problemas, el aprendizaje de los estudiantes no sólo debe basarse en aprender definiciones y teoremas matemáticos para reconocer su aplicación a ciertos ejercicios, más bien, el estudiante debe construir un vínculo entre el lenguaje matemático, en el cual es necesario ver los componentes matemáticos, y el lenguaje natural, que exige la alfabetización textual en su conjunto. Es decir, elaborar una conexión entre los componentes matemáticos y los componentes literales que presenta el problema en su enunciado (Ilany y Margolin 2010).

La acción docente es esencial dentro del proceso de enseñanza ya que es una guía para el estudiante, que genera, mediante interacciones significativas entre el estudiante y su entorno en el contexto de actividades auténticas, representaciones de situaciones que describen una realidad que está conectada al mundo de los estudiantes y, a los mismos profesores, en la escuela y en la comunidad. Así, el docente se convierte en un agente que promueve el descubrimiento del conocimiento mediante dichas actividades, donde su gestión favorece los procesos de regulación en los distintos momentos y facilita la interacción entre los estudiantes durante el proceso (Morera, et al, 2012).

Dentro de las acciones docentes que se pueden realizar, con el fin de establecer un vínculo entre el lenguaje natural y el lenguaje matemático, diferentes investigadores proponen diversos métodos para el desarrollo de habilidades de resolución de problemas con enunciado verbal. Sin embargo, para que estas metodologías tengan algún impacto positivo en la población, se debe fomentar en el estudiante el desarrollo de habilidades de tipo metacognitivo que les permita, por ejemplo, la autorregulación, la identificación de dificultades y la superación de ellas. Para ello, es necesario que los docentes manifiesten a sus estudiantes, la importancia del desarrollo de habilidades, dentro de la actividad matemática en el aula y en el entorno de su aprendizaje escolar. Es decir, cuando la reflexión sobre la acción propia en resolución de problemas se vuelve habitual, examinando a fondo los propios procesos mentales, generamos una amplia gama de experiencias, provocando en los estudiantes un proceso de resolución más ágil, claro y riguroso. Según Fernández (1995), «*en resolución de problemas es esencial hacer consciente al alumno de los procedimientos mentales que ha seguido para hacer un problema (p. 54)*». De ese modo, los estudiantes, paulatinamente, en términos de metacognición, generan competencias de resolución de problemas.

Ahora bien, ¿cuál(es) práctica(s) matemáticas son las que mejor predisponen al trabajo de la traducción del lenguaje natural al lenguaje matemático? Existen varios modelos de resolución de problemas. En el siguiente cuadro se muestran algunos (Cuadro 3 y 4):

CUADRO 3

Modelos de resolución de problemas

Pólya (1981)	*Krulick & Rudnick (1996)*	*Zalina (2005)*
4 fases de jerarquía	5 fases de jerarquía	3 fases de jerarquía
i) Entendiendo el problema. ii) Planificando. iii) Construir un plan. iv) Confirmación de la respuesta.	i) Leyendo y pensando. ii) Analizando y planificando. iii) Organizando una estrategia. iv) Obteniendo la respuesta. Confirmando la respuesta.	i) Entendiendo el problema. ii) Resolver el problema. Indicando la respuesta.

Nota: Recuperado de “*Students Difficulties in Mathematics Problem-Solving: What do they say*? *(2010)”.*

CUADRO 4

Modelos de resolución de problemas

Poincaré (1908)	*John Dewey (1910)*	*Graham Wallas (1926)*
3 fases de jerarquía	5 fases de jerarquía	4 fases de jerarquía
i) Un período de trabajo consciente. ii) Un período de trabajo inconsciente. **iii)** Un segundo período de trabajo consciente.	i) Experimentar una dificultad. ii) Definir la dificultad. iii) Generar una solución posible. iv) Probar la solución razonando. Verificar la solución.	i) Preparación o recolección de información e intentos preliminares. ii) Incubación o dejar el problema de lado, descansar. iii) Iluminación o aparición de la idea clave para la solución. iv) Verificación, se prueba la solución.

Nota: Recuperado de “*Students Difficulties in Mathematics Problem-Solving: What do they say*? *(2010)”.*

En relación con lo anterior, esta investigación, se adaptó un proceso de resolución de problemas de nueve fases propuesto por Ilany y Margolin (2010). Tal proceso consiste en:

CUADRO 5

Modelos de resolución de problemas

Ilany y Margolin (2010)
9 fases de jerarquía
i) Lectura del problema. ii) Comprensión de la situación lingüística. iii) Comprensión de la situación matemática. iv) Relación entre la situación lingüística y matemática. v) Generación de ideas para la solución. vi) Selección de ideas. vii) Construcción de un modelo. viii) Búsqueda de la solución. ix) Control.

Nota: Recuperado de Ilany y Margolin (2010) en su artículo “*Language and Mathematics: Bridging between Natural Language and mathematical Language in Solving Problems in Mathematics”*

La teoría de resolución de problemas planteada por los autores Ilany y Margolin (2010), funciona como una metodología que favorece la comprensión y el entendimiento, además de potenciar el desarrollo de competencias en los estudiantes de educación general. Los resultados descritos en este trabajo, son producto de la aplicación de esta metodología que favorece procesos de pensamiento complejo que, internalizados en el estudiante, contribuye a la conceptualización de los estudiantes. Por tal razón, se seleccionó el presente modelo siendo flexible para los diferentes contextos de poblaciones de estudiantes, y respecto a la naturaleza de los problemas, además, considera las diferencias entre el lenguaje natural y matemático, y la posibilidad de transitar de un lenguaje a otro.

Es preciso señalar que, los investigadores mencionados, son maestros de Matemática y Lingüística en colegios de Israel, quienes tras evidenciar dificultades en los estudiantes para resolver problemas con enunciado verbal (producto de la incomprensión del texto literal y matemáticamente), dieron paso a la construcción de una herramienta para superar las brechas entre las Matemáticas y la Lingüística. Los investigadores comenzaron por una serie de entrevistas a los estudiantes para detallar cuáles eran las dificultades para resolver problemas, construyendo luego un modelo de instrucción de nueve etapas. En varios casos, un tercer docente que enseña Matemática, participó en el proceso de deliberación hasta que se llegó a un acuerdo. Después de la construcción del modelo, fue validado por seis expertos en Matemática y Educación Matemática. El modelo de nueve etapas fue implementando con treintaicuatro estudiantes-maestros especializados en enseñanza de las matemáticas en un seminario de maestros en un colegio en Israel. Posteriormente el modelo se utilizó con tres estudiantes: un estudiante de escuela primaria, un estudiante de secundaria y un estudiante universitario. Los datos que reportan los investigadores, fueron tomados de una actividad, en que se pidió a los estudiantes participantes que respondieran una serie de problemas planteados en dos test y en etapas: primero respondieron sin ninguna instrucción y luego se realizó una prueba con este modelo de instrucción Ilany, Margolin, 2010), lo cual generó una investigación para identificar las posibles causas o factores que intervienen y dificultan la transformación del lenguaje natural al lenguaje matemático.

En el presente trabajo se buscó un método que ayudase a determinar qué elementos actúan al momento de procesar la información suministrada por un problema matemático que, expresado en lenguaje natural, permita determinar las palabras clave (incógnitas) y la información relevante que conllevará a la elaboración de una estrategia para la posible solución al problema matemático. Se analizan los registros utilizados por el estudiante a la hora de designar objetos en la actividad cognitiva de conversión entre enunciados y las expresiones simbólicas correspondientes. Además, se proponen algunas acciones que contribuyan a la solución o, al menos, a la disminución de la problemática. En relación con la implementación del método de instrucción descrito (Ilany y Margolin, 2010), la siguiente pregunta de investigación guía este trabajo:

> *¿Cómo impacta el método de instrucción para la resolución de problemas con enunciado en las habilidades de estudiantes de enseñanza media general chileno?*

Objetivos de investigación.

- **Objetivo general**

  - Describir los efectos de la implementación de un método de instrucción que favorece la transición de lenguaje natural al lenguaje matemático en problemas de enunciado verbal. Se consideran estudiantes de Enseñanza Media General en Chile.

- **Objetivos específicos**

  - Diseñar la metodología para la implementación del método de instrucción.

  - Evaluar el impacto del método de instrucción.

  - Formular recomendaciones sobre los efectos del método de instrucción.

Capítulo 2

MARCO CONCEPTUAL

Puesto que, el propósito de esta investigación es indagar en el efecto de la práctica de un método de instrucción en resolución de problemas de enunciado verbal con estudiantes de Enseñanza Media General para favorecer la traducción del lenguaje natural al lenguaje matemático, se precisa saber qué procesos constituyen el funcionamiento de la óptima transición del lenguaje verbal al matemático que están implicados en la resolución de problemas, aunque mucho de lo que se diga acerca de este concepto, podría ser aplicable en otros campos.

Para la caracterización del concepto de transición, se analizó, entre otros, los planteamientos de Ilany y Margolin (2010) en su artículo "*Language and Mathematics: Bridging between Natural Language and mathematical Language in Solving Problems in Mathematics"* (Lenguaje y matemáticas: Un puente entre el lenguaje natural y el lenguaje de las matemáticas en resolución de problemas).

Atendiendo a las relaciones semánticas subyacentes de los problemas que se verán en este estudio, dichos autores mencionan que todo problema que incluya alguna especie de texto o enunciado, debe definirse como un problema verbal. Por lo tanto, se implementó el método propuesto en este trabajo, con dos tipos de problemas matemáticos: uno, acompañado por una historia de fondo[1] descrita por un texto, y otro con un enunciado, pero no acompañado de una historia de fondo. Para los autores, un problema matemático con las siguientes propiedades, es un problema verbal incluso cuando no está acompañado por una historia de fondo, es decir, constituye una unidad textual coherente en términos de contenido y lenguaje; tiene límites claros, se utiliza para la comunicación, contiene dos idiomas diferentes mezclados juntos: el lenguaje natural y el lenguaje matemático (Ilany y Margolin, 2010).

En cuanto a la transición planteada en forma general, pero teniendo en cuenta que estos autores se mueven en campos diferentes, las matemáticas y la lingüística, Ilany y Margolin (2010) nos mencionan que, dentro de los diversos procesos cognitivos que el concepto de resolución de problemas abarca, la representación es un área importante, donde poco se conoce sobre la relación entre la comprensión interna y su representación externa. De ahí, la importancia de que el estudiante sea capaz de transferir información proporcionada entre dos representaciones semióticas y los componentes básicos de cada lenguaje, producto de la comprensión adecuada del problema. En la presente investigación, tal destreza fue puesta a prueba con los problemas que fueron resueltos por los estudiantes.

[1] Cuando mencionamos a historia de fondo nos referimos a un texto con en algún contexto determinado.

Elementos del lenguaje natural.

Para Ilany y Margolin (2010), la manera de funcionamiento del lenguaje natural es claramente distinta al lenguaje matemático. Tal funcionamiento, guarda aspectos en relación con la evolución de un hecho, fenómeno o circunstancia a través del tiempo, es decir, las interpretaciones que ocurren están en acuerdo a un marco o período de tiempo, que dependen de las relaciones reciprocas que se establezcan con el ambiente (Ilany y Margolin, 2010). Los autores lo denominan "*sincronicidad de campo*".

En los primeros niveles de la instrucción, precisamente en el proceso de lectura, se debe percibir al problema matemático como una unidad textual[2], clasificándose en tres clases: enunciado (unidad mínima de enunciación), párrafo (unidad intermedia integrante de textos) y texto (monólogo o diálogo, que es la unidad superior de comunicación). Cada una de estas unidades se reconoce por su autonomía semántica[3]. Por otro lado, en el ámbito propio del lenguaje, teniendo en cuenta lo anterior, para comprender el problema hay que considerar que el conjunto del texto da significado a sus partes (palabras y oraciones), y cada parte del texto aporta significado al conjunto (Ilany y Margolin, 2010). Es decir, se debe considerar la circunstancia en la que fue producido o para la cual fue producido el texto (en forma oral o escrita). Podemos entender entonces, que la circunstancia lleva elementos implícitos como: lugar, ambiente o marco en el que el texto se da a conocer. Por lo tanto, al comprender y dar solución a un problema, todo aquello se pone en ejercicio. Sin embargo, la circunstancia está condicionada por las intenciones, las finalidades, las expectativas y las funciones que el productor del texto problema posea o pretenda lograr en su acto comunicativo.

Las unidades lingüísticas del texto funcionan como signos que tienen su objeto y su significado o idea en el mundo exterior, además están conectados a otros fundamentos en el texto, de modo que sus significados surgen de la forma en que los componentes lingüísticos están organizados en el mismo (sintaxis).

Ilany y Margolin, complementan la idea ampliando el concepto de traducción referido a elementos propios de cada lenguaje, estableciendo una comparación entre ambos. Las operaciones matemáticas son fundamentales para el entendimiento del lenguaje matemático, sin embargo, la percepción de la estructura textual es un proceso por el cual se pueden identificar componentes textuales[4] y realizar diferentes procedimientos lógicos (Ilany y Margolin, 2010). Es decir, en primer lugar, para la comprensión del enunciado, el lenguaje natural exige una *alfabetización textual* para el texto en su conjunto.

[2] Por unidad textual, se entiende como una unidad lingüística mayor que una oración (Ilany y Margolin, 2010)

[3] Semántica se refiere a los aspectos del significado, sentido o interpretación de signos lingüísticos como símbolos, palabras, expresiones o representaciones formales.

[4] Componentes textuales: los elementos contextuales presentes en el texto reciben el nombre de contexto de situación y éste se halla constituido por tres áreas, a saber: campo, modo y roles.

Por otro lado, la unidad de texto, esto es, los distintos tipos de enunciados de cada problema que se verán, describen o representan a las diversas situaciones de la vida diaria. El objetivo de tal descripción, es dar expresión a la estructura lógica que dicta una determinada operación aritmética, donde el conflicto se genera a partir de la necesidad de comprender las palabras claves u oraciones descritas en lenguaje natural, y establecer operaciones aritméticas expresadas en lenguaje matemático en torno a ellas (Ilany y Margolin, 2010).

En ese sentido, el lenguaje es tan multidimensional que no podemos pensarlo en una instancia. Producto de lo anterior, Ilany y Margolin, (2010) mencionan que, por un lado, en el lenguaje natural existen diferencias entre la estructura superficial[5] y la estructura profunda[6] de la expresión, y por otro, existen declaraciones ambiguas que derivan de palabras ambiguas y hay una riqueza de lenguaje. Esta riqueza del lenguaje deriva de la diversidad de sustantivos y palabras, verbos y adjetivos, elementos básicos en la estructura del lenguaje. Por otro lado, en la sintaxis[7] del lenguaje natural, el orden de las palabras determina el significado. En consecuencia, el análisis e interpretación del lenguaje natural implica la comprensión en diferentes ámbitos como la sintáctica, semántica y pragmática del discurso (Ilany y Margolin, 2010).

Elementos del lenguaje matemático.

Para tomar en cuenta los fenómenos que fueron mencionados anteriormente, es necesario considerar, al igual que los autores citados, al lenguaje matemático como un sistema de elementos propios como símbolos, conceptos, definiciones y axiomas. Por tal razón, es crucial el estudio de la relación entre el lenguaje matemático, como sistema, y el lenguaje natural. Los signos y símbolos que se utilizan en Matemática no son todos de naturaleza lingüística, lo que hace aconsejable ser enseñado a los estudiantes, debido a que no es un lenguaje que se desarrolla naturalmente (Ilany y Margolin, 2010). Sin embargo, al poner énfasis en los signos individuales o de orígenes distintos, se puede ignorar el hecho crucial de que no hay signos aislados en ningún texto (sean matemáticos o no).

Es común, para una descripción del lenguaje en el que los textos matemáticos se escriben, distinguir entre dos subconjuntos de signos: uno que consiste en signos concebidos como estrictamente matemáticos y otro que consiste en signos presentados en algún lenguaje específico. Es importante considerar el sistema de signos como un todo, y aquel responsable del significado de los textos. Así, lo que debe describirse como matemático es el sistema, y no los símbolos. Por lo tanto, el lenguaje matemático debe entenderse como sistema matemático de

[5] La estructura superficial es la forma según la cual se presenta la oración, al ser dicha o escrita.
[6] La estructura profunda soporta o contienen el significado de la oración.

[7] Sintaxis: modo de combinarse y ordenarse las palabras y las expresiones dentro del discurso.

signos y no un sistema de signos matemáticos, ya que lo que es de naturaleza matemática es su propio lenguaje y no sólo los signos individuales. Así, lo que interesa para el desarrollo de la educación Matemática, es estudiar las características de estos sistemas de signos (matemáticos), que se deben no sólo al hecho de que son un sistema de signos, sino que precisamente a que estructuran un lenguaje propio.

En cuanto a la sintaxis del lenguaje matemático, se incluyen listas de símbolos, reglas de configuración para construir patrones de lenguaje, axiomas, un sistema deductivo y teoremas. Para Ilany y Margolin (2010), los términos y símbolos matemáticos deben definirse sin ambigüedad. Del mismo modo, toda afirmación en lenguaje matemático es también inequívoca o sin ambigüedad. Cada patrón matemático tiene una estructura profunda que está determinada por las reglas de operación. Cada definición de un concepto matemático es el resultado de un proceso complejo, asimismo, cada uno contiene conceptos adicionales que también deben ser definidos. Todos los teoremas matemáticos en todas las ramas de la Matemática, se caracterizan por el hecho de que se derivan lógicamente, deductivamente y consistentemente de un sistema de teoremas elementales - axiomas.

Por otro lado, en el lenguaje matemático, para cada estructura de superficie hay una estructura profunda, todas las declaraciones son sin ambigüedades, y hay una escasez de lenguaje que se expresa en el hecho de que sólo hay un tipo de sustantivo, números, funciones, etc., y que hay dos signos de relacionales -igualdad y desigualdad (1998, citado por Ilany y Margolin, 2010).

En consecuencia, la estructura del lenguaje matemático es estricta, aunque con ciertas licencias, a diferencia de la estructura del lenguaje natural, por ende, se genera un gran conflicto al utilizar el lenguaje natural en los problemas matemáticos.

El proceso de interpretación del lenguaje natural al lenguaje matemático.

Se debe tener en cuenta la propuesta de Ilany y Margolin (2010), quienes hacen un estudio de la actividad de conversión de lenguajes implicados en resolución de problemas con enunciado verbal, en donde se describen aspectos como: comprensión del enunciado, extracción de información y palabras claves, descripción de la situación problemática y relación entre componentes lingüísticos y componentes matemáticos. Tal como estos autores señalan, para establecer una relación entre el lenguaje natural y el lenguaje matemático, es necesario guiar, tanto al remitente como al destinatario, hacia una alfabetización matemático-lingüística. En el presente trabajo, es necesario tener en cuenta los procesos y niveles que proponen dichos autores para el desarrollo de los problemas escritos en lengua natural.

En este proceso, podemos identificar dos partes involucradas: el remitente y el destinatario. Tales elementos están involucrados en el proceso comunicativo, ya sea en el habla, señales o en algún otro medio como un texto.

Todos los textos, como proceso comunicativo bidireccional, buscan a un receptor o destinatario (ver figura 1). Es posible que muchos autores no determinen a alguien específico, sin embargo, todo texto requiere un destinatario, dejándole el trabajo al lector. El identificar el destinatario ayuda a comprender las intenciones del remitente e interpretar su significado.

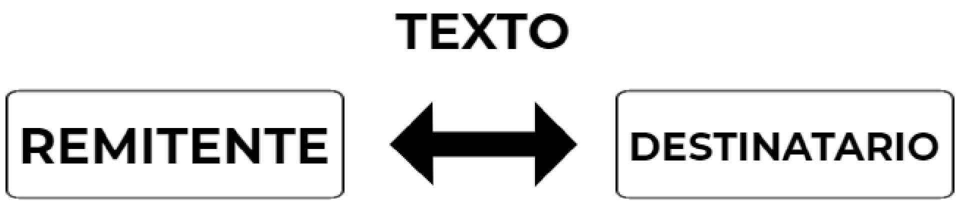


FIGURA 1. Elementos que intervienen en la comunicación de un texto.

Un remitente es cualquier individuo que desee compartir una idea o un concepto, transmitir alguna información o expresar algún sentimiento con otras personas. Dependiendo de lo que se quiera enviar, el remitente seleccionará ciertos símbolos para componer un mensaje y transmitirlo. Para establecer un óptimo proceso comunicativo, el remitente debe tener las siguientes consideraciones (Ilany y Margolin, 2010):

- Suministrar información fácilmente accesible y aceptable.
- Considerar el significado del texto como producto de las interacciones entre el esquema del remitente y las deducciones, y de los esquemas del remitente y sus conclusiones.

Por lo tanto, el remitente, mediante la elaboración de un mensaje o medio para comunicar alguna situación o cosa, transmite teniendo en cuenta las consideraciones anteriormente descritas, los contenidos a un destinatario, el cual analiza la información recogida y la reelabora según sus propias experiencias partiendo desde sus esquemas previos, puesto que le servirán para sintetizar la información recibida.

Antes de cualquier elaboración de un problema, un punto importante que menciona Ilany y Margolin (2010) es que el remitente antes de producir textos, debe determinar suposiciones precisas acerca del conocimiento y capacidad deductiva del destinatario, tomando precauciones ante posibles obstáculos que perturben la comprensión.

Por otro lado, tenemos al destinatario, siendo su función extraer el significado completo del texto. Para Ilany y Margolin (2010), el proceso de creación del significado, se realiza en diferentes capas del texto: sintáctica, semántica y pragmática.

En muchos problemas con enunciado verbal, existe información explícita e implícita donde, para extraer toda la información necesaria, ésta debe ser llenada con la información que falta, no obstante, no necesariamente se encuentra en el texto, es decir, existe información que se puede derivar por medios matemáticos sobre la base de la información explícita. Dicho de otra manera, para extraer todos los datos relevantes y no relevantes del problema, el estudiante debe identificar la información en el texto en tres instancias (Ilany y Margolin, 2010):

- La conexión adyacente y literaria (co-texto) es la conexión formada dentro de las unidades lingüísticas adyacentes.

- La conexión pragmática circunstancial (contexto) incluye diferentes componentes como la identidad del remitente y el destinatario, el tiempo y el lugar del discurso, las intenciones del remitente, y el medio de comunicación.

- La conexión con el universo del discurso que es en realidad la conexión que se forma entre el texto y él, se basa en nuestro conocimiento previo de la materia en particular.

En el proceso de lectura y extracción de información por parte del destinatario, ocurre una interacción entre los esquemas del lector (o solucionador, en este caso) y los esquemas del texto (enunciado del problema en donde se encuentran los esquemas del remitente), la cual requiere un esfuerzo tanto comunicativo como cognitivo. El esfuerzo comunicativo se expresa mediante la identificación de la situación descrita, y el esfuerzo cognitivo se expresa por la composición del problema a partir de lo nuevo, mientras se combina en su interior el modelo matemático (Ilany y Margolin, 2010).

En ese contexto, la transición del lenguaje natural y el lenguaje matemático, requiere la conexión de dos diferentes aspectos del problema. En primer lugar, la situación lingüística y luego las estructuras abstractas. Dicha transición se puede llevar a cabo de las siguientes formas:

- Por la traducción de la situación lingüística en estructuras abstractas.
- Por la organización de la unidad de contenido matemático.

En esta investigación, se toma en cuenta el enfoque dado por los investigadores, implementando la interacción entre estos dos métodos, mediante un modelo para la instrucción y el aprendizaje de la solución de problemas con enunciado verbal en Matemática.

Método de instrucción.

Para favorecer la correspondencia entre el lenguaje natural y el lenguaje matemático en la solución de problemas con enunciado verbal, los autores mencionados en los cuales se basa esta investigación, desarrollaron un modelo de instrucción para la solución de problemas matemáticos. Dicho instrumento nació de la necesidad de disminuir las dificultades que surgían al comprender el texto literalmente y matemáticamente. Para ello, era necesario superar las brechas existentes entre la Matemática y la Lingüística.

Ilany y Margolin utilizaron dicho instrumento para orientar la comprensión de texto, identificación y extracción de datos, relación entre lenguajes y análisis del enunciado con la utilización de herramientas como esquemas conceptuales, cuestionarios, tablas de cantidades, problemas similares o diagramas espaciales. También propusieron algunas preguntas guía como ayuda para la solución de este tipo de problemas.

La idea de dichos autores, se puede dividir en tres fases: planteamiento de la problemática, matematización del problema y contextualización de la solución. La mayor dificultad para los estudiantes se encuentra en la primera fase, donde podemos incluir los primeros cuatro niveles de resolución (ver tabla 1, 2 y 3). En el lado izquierdo se muestra los niveles y en el lado derecho las directrices que deben seguirse para orientar al estudiante en la reflexión hacia la solución del problema.

Tabla 1

Primera fase del método de instrucción

NIVEL	DIRECTRICES
Comprensión de la situación lingüística	*i) ¿Son todas las palabras claras?* *ii) ¿Son todas las oraciones claras?* *iii) ¿Cuáles son las palabras clave?* *iv) ¿Entiendo las palabras clave?* *v) ¿Cuál es la pregunta?* *vi) ¿Entiendo la pregunta?* *vii) ¿Cómo puedo describir el problema con mis propias palabras?*
Comprensión de la situación matemática	*i) ¿Cuál es mi relación con el tema matemático del problema?* *ii) ¿Hay alguna dificultad en el problema?* *iii) ¿Todos los datos están claros?* *iv) ¿Hay datos implícitos en el problema?* *v) ¿Hay datos superfluos?* *vi) ¿Entiendo la conexión entre los datos de la pregunta?* *vii) ¿Es posible demostrar el problema en casos particulares?*
Relación de la situación lingüística con la situación matemática	*i) ¿Los nombres de la pregunta vuelven a aparecer en una unidad más general?* *ii) ¿Las conectivas que aparecen en la pregunta se relacionan con diferentes tamaños matemáticos?* *iii) ¿Hay pistas literales en el problema que son ciertas palabras que ayudan como una pista para elegir la operación aritmética requerida para resolver el problema?* *iv) ¿Es posible demostrar el problema mediante una imagen, una tabla, un diagrama o un gráfico?*

Nota: Recuperado de Ilany y Margolin (2010) en su artículo "*Language and Mathematics: Bridging between Natural Language and mathematical Language in Solving Problems in Mathematics"*

En esta primera fase, se define como un proceso de identificación de los componentes implicados en cada lenguaje a través de la lectura temprana del enunciado del problema, es decir, desde las palabras individuales, pasando por las oraciones, hasta completar el texto. El objetivo de la lectura en esta fase, es una exposición al significado, donde la ubicación de dicho significado es encontrada por el estudiante en el propio texto. Asimismo, Ilany y Margolin (2010) mencionan que esta fase es la interacción entre quien produce el texto y quien lo lee, siendo aquel proceso de lectura, una combinación de conocimientos matemáticos con los esquemas del texto.

En ese mismo sentido, extraen a través de la búsqueda multidireccional, aspectos relevantes para la solución. En otras palabras, la identificación de los hechos conocidos y las condiciones lógico-matemáticas del problema, las conexiones y relaciones entre los datos matemáticos y el análisis lógico del problema, constituyen un papel preponderante en la comprensión temprana de la situación matemática y lingüística del problema. Sabiendo que, la pregunta apunta en la dirección de la expresión que queremos encontrar, cabe señalar que en esta fase ocurren acciones fundamentales como la extracción y el análisis de la información literal (*pistas literales*, que son las palabras que apoyan para elegir las operaciones aritméticas necesarias para resolver el problema) con el propósito de trasformar dicha información, en un ejercicio matemático o una ecuación algebraica.

Tabla 2

Segunda fase del método de instrucción

NIVEL	DIRECTRICES
Generar ideas para una solución	*i)* *¿Es el problema único?* *ii)* *¿He encontrado problemas similares?* *iii)* *¿Es posible construir un esquema para resolver el problema sobre la base de la experiencia pasada?*
Proceso de selección de ideas	*i)* *¿La idea ayuda a resolver la pregunta?* *ii)* *¿Cómo ayuda la idea a resolver la pregunta?*
Construcción de un modelo matemático	*i)* *¿Qué voy a hacer como primera etapa para resolver el problema?* *ii)* *¿Sé cómo resolver el problema y construir un modelo matemático apropiado?* *iii)* *¿Qué modelo matemático debo utilizar para resolver el problema?*

Nota: Recuperado de Ilany y Margolin (2010) en su artículo "*Language and Mathematics: Bridging between Natural Language and mathematical Language in Solving Problems in Mathematics"*

El objetivo de la segunda fase es el planteamiento y elección adecuada de un método, una idea o un paso para encontrar la solución. Para lograr dicho objetivo, el estudiante debe conocer estrategias de resolución de problemas (existen variadas estrategias generales y estrategias específicas para diferentes tipos de problemas), planteadas por el docente en la enseñanza de los contenidos. Es decir, en la adquisición de esquemas[8], el alumno conoce nuevos casos y actúa sobre ellos de acuerdo con sus esquemas previos conectados a la misma materia (Ilany y Margolin, 2010)

En la segunda fase se define el problema y la situación que describe, es decir, matematizar el fenómeno o describir la matemática de todo el fenómeno. A partir de aquello, se construyen representaciones en lenguaje matemático que expresen un determinado ejercicio o una ecuación (modelo), comprendiendo las relaciones y las condiciones relativas al problema, para luego utilizar el modelo matemático planteado por el resolutor. Sin embargo, se hace necesario comprobar si se trata de una solución única o si existe otra solución posible; el estudiante debe ser capaz de encontrar todas las soluciones posibles.

Tabla 3
Tercera fase del método de instrucción

NIVEL	DIRECTRICES
Control	*i)* *¿La solución tiene sentido?* *ii)* *¿Es la solución adecuada a la situación lingüística?* *iii)* *¿Es la solución apropiada para la situación matemática?* *iv)* *¿El modelo matemático que he usado encaja en el problema?*

Nota: Recuperado de Ilany y Margolin (2010) en su artículo "*Language and Mathematics: Bridging between Natural Language and mathematical Language in Solving Problems in Mathematics"*

La tercera fase es la más importante dentro del método de instrucción. Al verificar que la solución al problema es adecuada para el contexto, se puede comprobar si la solución es eficiente, resolviendo el problema de manera diferente, favoreciendo así el análisis crítico sobre ellos mismos. Bat-Sheva Ilany y Bruria Margolin (2010) esquematizan el método de instrucción de nueve niveles en la figura 1.

[8] Un esquema es una representación mental caracterizada por una red interna fija de relaciones que se crea en un alto nivel de abstracción o generalización y sirve como una plantilla que se utiliza para aclarar eventos específicos (1983, 1992, citado por Ilany y Margolin, 2010).

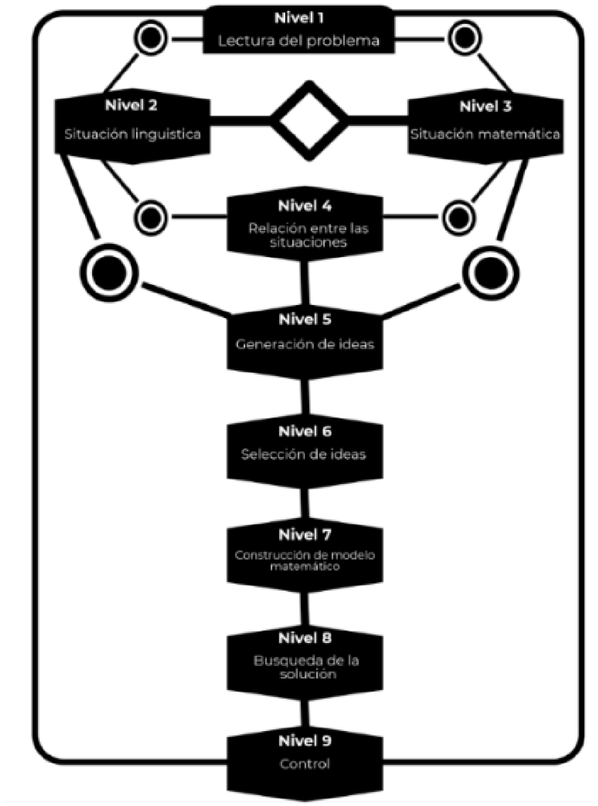


Figura 2. Recuperado de: Language and Mathematics: Bridging between Natural Language and mathematical Language in Solving Problems in Mathematics. Ilany y Margolin (2010)

Capítulo 3

METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN

Dado que la importancia de la resolución de problemas radica en el hecho de que ofrece a los estudiantes oportunidades para establecer conexiones y nuevos esquemas entre los distintos elementos que integra y promueve el desarrollo de habilidades asociados al pensamiento matemático (abstracción, análisis y síntesis), es que este estudio consideró a la Educación Pública como punto de partida debido a que reúne a la mitad de la matrícula escolar y a las serias dificultades que se han presentado en las últimas décadas por el deterioro de la calidad de la enseñanza, presentando una vía alternativa a las metodologías tradicionales. En el nivel de Educación Media, la mayoría de los problemas que se encuentran en los textos, y disponibles para los estudiantes, tienen una solución numérica con significado de la vida real, por tanto, se hace necesario entender la situación descrita en ellos. En los siguientes niveles de estudio, en la Educación Media, los estudiantes tienen que lidiar con problemas que no necesariamente tienen una solución numérica, por ende, tendrán que usar álgebra para resolverlos (Ilany, Margolin, 2010).

Por tal razón, en la implementación del instrumento, se tuvieron presentes las declaraciones de Ilany y Margolin (2010) donde señalan que, este modelo de enseñanza se transforma en un proceso generador de pensamientos complejos cuando se entiende e internaliza completamente. Asimismo, el conocimiento de los procesos meta-cognitivos en los estudiantes, ayuda en la resolución de problemas y mejora la capacidad de alcanzar metas.

Este capítulo describe el método utilizado para poder realizar la investigación, dentro de la cual se contempla la realización de tres fases. La primera, consideró un instrumento *pre-test* para los estudiantes, el cual evaluó las habilidades de resolución de problemas en los alumnos. En la fase dos, se implementó el método de instrucción, que constó de clases introductorias implementadas en las aulas del establecimiento en horarios extraordinarios con sus respectivos problemas guía y con la utilización de hojas de trabajo, enfocada en desarrollar la herramienta aplicada en esta investigación. Finalmente, en la fase tres se tomó una prueba control de evaluación, donde los estudiantes debían utilizar el método aprendido. Para finalizar se contrastan los resultados de la fase I y la fase III.

Diseño de investigación.

Este trabajo se realizó en cinco sesiones de una hora y treinta minutos (90 minutos) para los estudiantes. Del total, la primera sesión (fase I), fue destinada al *pre-test* para evaluar las habilidades de los estudiantes con respecto a la resolución de problemas. Posteriormente (fase II), se realizaron tres sesiones con la misma cantidad de tiempo, separadas por una semana cada una para la enseñanza y aprendizaje del método de instrucción. Al terminar (fase III), se realizó el *post-test* para evaluar las habilidades adquiridas y el impacto que tuvo el método de instrucción en los estudiantes.

El propósito de este estudio fenomenológico es describir y analizar el impacto de la implementación de un método de instrucción para la resolución de problemas con enunciado verbal en estudiantes de Enseñanza Media General en una Institución Publica de alto índice de vulnerabilidad. Como instrumento de recolección de datos se utilizó una prueba de diagnóstico y una prueba control (Sampieri, Fernández y Baptista, 2014).

Debido a que se pretende describir los procedimientos de solución y estrategias de las personas, donde el ***foco de interés*** está abierto y puede ser modificado con la finalidad de permitir la inclusión de otros aportes importantes, es que este estudio toma un carácter exploratorio donde la investigación y los resultados pretenden dar descripción y explicación a un fenómeno. Sin embargo, dicha descripción no puede ser generalizada debido a que ésta refleja los significados, métodos y condiciones de un grupo específico.

En este tipo de investigación, los sujetos seleccionados no los ha formado el investigador, sólo trabaja con ellos para evaluar los efectos de la implementación del método de instrucción. Asimismo, el objetivo de esta investigación es explorar, describir y significar realidades complejas y cotidianas, con un tamaño de población relativamente pequeña, a través de la revisión y contraste de los métodos utilizados en la solución de los estudiantes en el *pre-test y post-test*.

Participantes.

La investigación se realizó teniendo como sujetos participantes, a un grupo de estudiantes de Educación Media General del periodo académico 2018-2019, en el primer lapso de evaluación (semestre I); se seleccionó este período por ser el más amplio dentro del sistema educativo chileno en lo que a tiempo se refiere, permitiendo obtener mayor información por parte de los estudiantes y docentes. Los estudiantes seleccionados, pertenecen a la Institución Pública Liceo Técnico Profesional Mannheim (LTPM) con un alto índice de estudiantes con vulnerabilidad o de escasos recursos. El grupo de estudiantes estuvo conformado por un total de seis alumnos, lo cuales, eran cursantes de 4[to] año de Educación Media General, con edades que fluctuaban entre los diecisiete y diecinueve años.

El nivel académico de los estudiantes seleccionados es variado. En el curso donde se extrajo el grupo participante, el promedio de notas de la asignatura de Matemática era regular, con promedios que bordean la nota *5,0* (cinco puntos cero), siendo el curso con mejor promedio en dicha disciplina. Sin embargo, en el desarrollo de la implementación, se evidenció que algunos estudiantes mostraron gran habilidad para las matemáticas, como otros fueron el caso contrario. No obstante, el nivel en general del establecimiento educacional es bajo. Cabe resaltar que, todos los estudiantes participaron en las clases donde se implementó el método de instrucción, y desarrollaron los problemas de enunciado verbal con las estrategias y esquemas que previamente tenían.

En el desarrollo de las tres fases de la implementación, los estudiantes trabajaron de manera individual, a excepción de la fase II donde los alumnos fueron guiados por medio de problemas guía y una presentación por el profesor investigador, con la finalidad de la enseñanza y aprendizaje de la resolución de problemas a través del método de instrucción.

Si bien, en un principio se seleccionaron ocho estudiantes del curso 4[to] medio eléctrico[9] de enseñanza técnico profesional, para el final del proceso se escogieron los trabajos hechos por seis alumnos debido a que aportaban mayor información al estudio. De aquí en adelante, nos referiremos a dichos estudiantes como: $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5\ y\ E_6$.

El propósito de considerar esta muestra, era evidenciar las estrategias aprendidas por su paso en la Educación Media General chilena, visualizando los modos de proceder y las dificultades que tienen estos estudiantes en la resolución de problemas de enunciado verbal, en los que se puede utilizar expresiones algebraicas, equivalencias, ecuaciones de primer grado y sistema lineal de ecuaciones con dos incógnitas.

Debido al bajo rendimiento de los establecimientos educacionales municipales en Chile, es que se decidió tomar a estos participantes para observar el impacto del método de instrucción en sus modos de proceder en los ejercicios matemáticos y favorecer así, una alfabetización óptima del lenguaje de la disciplina.

[9] Mención de especialidad que eligen los estudiantes pertenecientes a un colegio técnico profesional.

Planificación de la implementación.

El estudio se realizó en tres fases: fase diagnóstica, fase práctica y fase control. En la fase diagnóstica se implementó un *pre-test* con el grupo final de participantes con el objetivo de determinar qué habilidades de resolución de problemas han desarrollado en su paso por la educación. Luego, en cada sesión de la fase práctica, se les entregó a los alumnos problemas guías, donde trabajaron de manera individual. El proceso de intervención del docente en esta fase, se realizó a través de preguntas guías para direccionar el proceso del aprendizaje de la estrategia que propone el método de instrucción, considerando el paso por cada nivel que compone dicho método. Posteriormente, en la fase de control, se implementó un *post-test* en el horario normal de clases de Matemática, dónde se analizó el desempeño de los alumnos participantes con el propósito de explorar sus avances, logros y dificultades en el proceso de construcción de la habilidad de resolver problemas de enunciado verbal.

En la siguiente tabla se resume las fases que guían este estudio:

Tabla 4
Organización de la implementación

ETAPA	ACTIVIDADES	TIEMPO
Fase I	Se implementa el *pre-test* (ANEXO I), con el cual se identifican las habilidades que deberían tener los estudiantes para la resolución de problemas.	1 hora y 30 min.
Fase II	Se aborda la resolución de problemas de combinación (problema de las ruedas de los triciclos y coches), búsqueda de una expresión (problema de los profesores y los estudiantes) y alcance (problema de los autos que se encuentran). Mediante el apoyo de plataformas como Power Point y Desmos, se explicó el método de instrucción. La manera de proceder se describe en el ANEXO II. Dicho modulo se realizó en 3 clases.	4 horas y 30 min.
Fase III	Los estudiantes ponen en práctica las habilidades propuestas por el método de instrucción y adquiridas en la fase anterior. Se implementa el *post-test* con problemas similares a los problemas propuestos en la fase II y *pre-test*, con un ligero cambio de contexto (ANEXO III).	1 hora y 30 min.

Fase práctica: metodología de las sesiones de trabajo.

La fase II o fase práctica, se inició con la distribución de los problemas guías y la hoja de trabajo. Cada semana se les presentó un problema con enunciado verbal cuya lectura y comprensión se realizó individualmente para luego proceder, en un ambiente de discusión y reflexión, con los niveles que propone el método de instrucción de los autores *Ilany y Margolin (2010).* El grupo de trabajo constaba de seis estudiantes; en cada sesión se plantearon situaciones problemas, procurando que con los problemas planteados se fueran desarrollando, de forma gradual y paulatinamente, habilidades de extracción de información relevante, relaciones, construcción de modelos, solución y validación de resultados. El papel del profesor, en general, consistió en guiar la reflexión de los estudiantes mediante preguntas dirigidas para que el paso por cada nivel se realizara satisfactoriamente. La evidencia del trabajo de los participantes en esta fase, se registró a través del siguiente instrumento:

- Hoja de trabajo: en la sesión de trabajo se les entregaron tres hojas donde, en cada una de ellas, iba planteado un problema del tipo: alcance, combinación y de búsqueda de una expresión algebraica. Tales problemas, generaron en cada uno de los alumnos, un ambiente propio de discusión y reflexión. Las justificaciones y conclusiones respectivas, quedaron registrados en sus hojas de trabajo. Con esta actividad se pretendía desarrollar habilidades específicas que llevarían al grupo paulatinamente a lograr la traducción del lenguaje natural al lenguaje matemático, a través del método de instrucción. Cada guía se desarrolló en tres clases.

Posterior a que los estudiantes resolvieran los problemas, se realizó una síntesis explicando el uso del método de instrucción para la solución de problemas con enunciado verbal, en los problemas que resolvieron anteriormente. Se describieron los objetivos básicos que tiene el método de instrucción: identificar palabras clave, representar variables, establecer relaciones entre palabras clave, construcción de un modelo, búsqueda de la solución y validación de la solución con respecto al modelo, al contexto matemático y lingüístico del problema; como también, los diferentes niveles que deben transitar. Luego, se presentó el desarrollo de la solución del caso de "el problema de los estudiantes y profesores" (presentado y registrado en la investigación de Ilany, Margolin, 2010) y el problema del "encuentro entre automóviles".

Fue importante que, en el transcurso de la solución de un determinado problema, el estudiante transitará por todas las fases del método de instrucción para favorecer el completo análisis de la respuesta.

La hoja que contenía los problemas guía, se estructuró en dos partes: la primera referida a las instrucciones específicas para la adecuada realización, y la segunda donde se plantean los tres diferentes problemas que guardan relación con el *pre-test y post-test.* Los nombres de los problemas fueron los siguientes:

- El problema "encuentro de los automóviles".
- El problema de "combinación de ruedas".
- El problema de "los profesores y estudiantes".

A manera de ejemplo, se presenta a continuación el problema de los automóviles desarrollado en la fase práctica, para la descripción y explicación del método de instrucción y con el que se pretendía favorecer las habilidades para identificar palabras clave, definir variables, establecer relaciones entre datos, construir un modelo apropiado, búsqueda de la solución y validación de la solución. El tipo de enunciado se refiere a un problema de alcance.

Problema "encuentro de automóviles"

"Un automóvil parte del punto A con una velocidad uniforme de 40 km/h hacia otro punto B. Dos horas después sale de A hacia B otro automóvil con velocidad uniforme de 60 km/h. Dígase, ¿cuánto tiempo tardarán en encontrarse?"

Para permitirnos solucionar el problema, utilizaremos todos los niveles del método.

i) Lectura del problema

En el primer paso, se pide al estudiante que lea el problema.

ii) Comprensión de la situación lingüística

En esta etapa, se pide identificar las palabras claves del problema, marcándolas en el enunciado y transcribiéndolas al papel:

- Punto A.
- Velocidad Uniforme.
- Punto B.
- Tiempo.
- Encontrarse.
- Dos horas después.

iii) Comprensión de la situación matemática

Posteriormente, el estudiante debe entender el significado de las palabras clave, donde se procede con la comprensión del contexto matemático y a lo que refieren los significados de las palabras consideradas.

En la descripción del enunciado del problema, se pide encontrar el momento (tiempo en horas) en el cual el segundo automóvil, que salió dos horas más tarde, encuentra al primer automóvil que partió desde la misma posición inicial. El tiempo requerido es con respecto al segundo automóvil y se deben establecer dos ecuaciones: la primera, referida al automóvil "C_1" y segundo, referida al automóvil "C_2".

Para lo anterior, el estudiante debe comprender el concepto de "encuentro o alcance", entendiéndose que, para que dos objetos se encuentren, sus posiciones deben ser las mismas. Por lo tanto, al establecer las ecuaciones de las posiciones de cada automóvil, se deben igualar. Para establecer las ecuaciones, primero debemos tener claro los datos que nos entrega el enunciado:

- $40\ km/h$.
- $60\ km/h$.
- Velocidad Uniforme = aceleración nula.
- Dos horas más tarde.

  Si T es el tiempo en horas del automóvil "C_1", entonces T-2 es el tiempo del automóvil "C_2".

Por otro lado, para tener un plano más general del problema, es a veces necesario construir tablas, gráficos o esquemas. El estudiante puede particularizar el problema de manera aleatoria o sistemática, identificando regularidades.

La siguiente tabla muestra el tiempo transcurrido y los kilómetros que son recorridos.

Tabla 5

Kilómetros recorridos por unidad de tiempo

Tiempo (horas)	Distancia automóvil $\boldsymbol{C_1}$	Distancia automóvil $\boldsymbol{C_2}$
0	0	0
1	40	0
2	80	0
3	120	60
…	…	…

iv) Relación de la situación matemática con la situación lingüística

En esta etapa, el estudiante necesita procesar la información verbal para transformarla en un ejercicio matemático (ecuación(es)). Para la transición, los esquemas[10] del estudiante

[10] Los esquemas son representaciones a nivel cognitivo, donde se caracterizan por ser una red interna flexible de relaciones a nivel abstracto o de generalización, y sirve como una herramienta que se utiliza para aclarar eventos específicos.

deben integrarse a los esquemas sobre el texto. Las siguientes expresiones corresponden a las ecuaciones de los automóviles "C_1" y "C_2":

Tabla 6

Expresiones algebraicas de los automóviles

	Automóvil $\boldsymbol{C_1}$	Automóvil $\boldsymbol{C_2}$
Expresión matemática	$d_1 = v_1 t$	$d_2 = v_2(t-2)$

Es posible demostrar la problemática a través de un gráfico (ver ilustración 1) y dar explicación al comportamiento de los automóviles según como sea la gráfica. En este caso, se puede preguntar a los estudiantes cosas del tipo:

a) ¿Qué condiciones deben cumplir las dos rectas para que sea un encuentro?
b) ¿Qué indican las pendientes de las rectas?
c) ¿Dónde se encontrarán?
d) ¿Cuán lejos del punto A se encontrarán?
e) Etc.

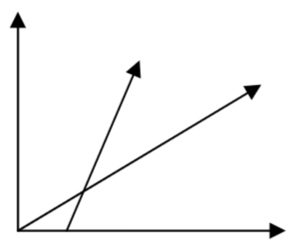


Figura 3. kilómetros vs tiempo de automóvil C_1 y C_2

v) Generación de ideas

Para resolver este problema, es necesario preguntar a los estudiantes si han visto problemas similares. La siguiente tabla muestra el tipo de expresión que se puede considerar a la hora de dar solución al problema.

Tabla 7

Expresiones algebraicas

IDEA	EXPRESIÓN
1	$d_1 = v_1 t$
2	$v_1 > v_2$
3	$d_2 = v_2 t$
4	$v_2 > v_1$
5	$d_1 = v_1(t-2)$
6	$d_2 = v_2(t-2)$
7	$d_1 = v_1(t+2)$
8	$d_2 = v_2(t+2)$

Se sabe que la condición que debe cumplir es que las posiciones deben ser las mismas. Además, la velocidad del automóvil "C_2", que comienza su marcha con un retraso de dos horas con respecto al primer automóvil, es mayor a la velocidad del automóvil "C_1". Entonces:

$$d_1 = d_2$$
$$v_2 > v_1$$

vi) Selección de ideas relevantes para la solución del problema

Continuando con la solución, en esta etapa es necesario comprobar si las ideas que se plantean sobre el problema, son relevantes para la correcta solución de éste o si ayudan a resolver. Se consideran las siguientes expresiones.

a) $d_1 = d_2$
b) $v_2 > v_1$
c) $d_1 = v_1(t + 2)$
d) $d_2 = v_2 t$

vii) Construcción de modelo matemático

Al seleccionar las ideas, el estudiante necesita entender la situación planteada, la representación correcta del problema y la correcta comprensión de las conexiones entre los elementos de información presentados en el enunciado. Como el encuentro se produce a la misma distancia desde el punto de partida, entonces tenemos:

$$d_1 = d_2$$
$$v_1(t + 2) = v_2 t$$
$$v_1 t + 2v_1 = v_2 t$$
$$2v_1 = v_2 t - v_1 t$$
$$2v_1 = t(v_2 - v_1)$$
$$t = \frac{2v_1}{v_2 - v_1}$$

viii) Búsqueda de la solución

En este caso, el resultado del problema es numérico, por lo que la solución es:

$$t = \frac{2(40\,km/h)}{60\,km/h - 40\,km/h}$$

Solución

$$t = 4\ horas$$

ix) Control o validación de la situación

Aquí, la solución es cuatro horas, que se demora en encontrar el automóvil "C_2" al automóvil "C_1". Por lo tanto, la solución es coherente con las situaciones matemáticas y lingüísticas del problema. Se puede comprobar la respuesta construyendo una tabla de valores (ver tabla M5).

Tabla 8

Posición de los automóviles por unidad de tiempo

Tiempo (horas)	Posición del automóvil $\boldsymbol{C_1}$	Posición del automóvil $\boldsymbol{C_2}$
0	0	0
1	40	0
2	80	0
3	120	60
4	160	120
5	200	180
6	240	240

Se puede establecer un último paso para identificar regularidades y optimizar los tiempos de resolución de los problemas del tipo "encuentro". Para esto, se establece la siguiente regla propuesta en este problema por Palarea y Socas (1995):

$$t_{encuentro} = \frac{(ventaja)(velocidad\ menor)}{(velocidad\ mayor - velocidad\ menor)} \tag{1}$$

Instrumentos de recogida de datos.

El tipo de instrumento utilizado, estuvo en función de cada una de las etapas en que se realizó el estudio. A continuación, se describen los instrumentos *pre-test* y *post-test*, utilizados en las fases I y fase III respectivamente.

Descripción de Pre-test

En esta fase se pretende determinar las habilidades de resolución de problemas, propuestas por el MINEDUC, que han adquirido los estudiantes de Educación Media General de un establecimiento de carácter público.

Para tal efecto, se elaboró una prueba específica, conformada por una primera parte referida a los datos personales e instrucciones generales y específicas de la prueba. En segundo lugar, correspondiente al tema de estudio, se incluyeron tres problemas conformados por cinco incisos, para ser respondidos mediante el método de resolución. Estos problemas, se encuentran orientados a evaluar y observar las dificultades que tienen los estudiantes a la hora de aplicar habilidades específicas, estas se describen en la tabla 9. Se hace referencia al reactivo 1a, para indicar al inciso "a" del problema 1. De los tres reactivos, cuatro incisos se resolvían mediante algebra (Alg) y uno mediante simple aritmética (Art). Se utiliza tal distinción de tal manera para claisificar el tipo de procedimiento de solución. Se presenta a continuación, el número del problema y la letra del inciso y la clasificación de cada reactivo por área de dominio:

Tabla 9

Clasificación de los reactivos

PROBLEMA	1	2	3		
Inciso	a	a	a	b	c
Área	Alg	Art	Alg	Alg	Alg

La prueba específica fue validada en su contenido, a través del juicio de la Doctora y Profesora guía de la presente investigación, y por parte de docentes del establecimiento donde se implementó el instrumento. En el transcurso de la planificación para la investigación, se realizaron correcciones a la muestra, elaborando así, un modelo (ANEXO I y III) acorde a los conocimientos y objetivos previstos en este estudio.

La siguiente tabla muestra los indicadores y las habilidades a evaluar que tuvieron la prueba *pre-test* y *post-test*:

Tabla 10

Indicadores de evaluación

INDICADOR	OBJETIVO
Palabras clave	Identificación de palabras relevantes y no relevantes dentro del contexto del enunciado, para la comprensión lingüística del problema.
Variables	Identificación de los datos explícitos e implícitos del problema para la comprensión de la situación matemática del problema.
Relaciones	Planteamiento de relaciones entre las palabras clave, datos y alguna operación matemática que ayude a construir expresiones matemáticas, y posteriormente un modelo matemático.
Modelo	Construcción matemática que represente la situación descrita por el enunciado del problema.
Solución	Búsqueda de respuestas a la situación matemática del problema.
Validación	Comprobación de resultados coherentes con la situación matemática y lingüística del problema.

Descripción de Post-test

Esta fase se diseñó en base al *pre-test*, los aspectos básicos considerados en el método y la implementación de éste. La fase III tiene como propósito validar el impacto del método de instrucción, a partir del desarrollo de habilidades anteriormente descritas que, según la teoría que fundamenta este estudio, se deben desarrollar en la educación del sujeto.

La recolección de datos se realizó cuando los estudiantes respondieron el *post-test* de manera individual, orientada a la utilización del método propuesto para generar una actividad metacognitiva en el alumno.

Se expondrán a continuación los enunciados de los problemas y en la tabla 11 se describe con detalle de los procedimientos a considerar por parte de los estudiantes y las soluciones expertas de los problemas PC1, PC2 y PC3 ligados al *post-test* (fase III).

Problema PC1:

Juan encontró trabajo y gana $30.000 pesos semanales. Seis semanas más tarde Pedro encontró trabajo y gana $45.000 pesos a la semana. ¿Cuántas semanas tardará Pedro en obtener unos ingresos idénticos a los de Juan?

Problema PC2:

Escribe una ecuación, usando la variable X, que representa la siguiente afirmación: "En esta universidad un cuarto del número de estudiantes, que se redujo en 5, son estudiantes de matemáticas".

Problema PC3:

Juan y Samuel salieron de cacería al campo y encontraron patos y conejos en su camino. Si se sabe que ambos juntaron 21 cabezas y 54 patas.

a) ¿Cuántos conejos y patos había?
b) ¿Es posible que Samuel se haya llevado tantos conejos como juan? Si es así ¿Cuántos se llevaron cada uno?
c) Si Juan se hubiese llevado el doble de patos de lo que se llevó en conejos, ¿Cuántos conejos tendría cada uno?

Tabla 11

soluciones esperadas

PREGUNTA	DESCRIPCIÓN	SOLUCIÓN
PC1	*El estudiante debe considerar incógnitas como datos y operaciones combinadas: resta, multiplicación y división. Además, hacer la correlación entre los problemas de alcance vistos anteriormente e identificar la regla existente entre éstos.*	$T_{alcance} = \frac{6 \cdot S_{Juan}}{S_{Pedro} - S_{juan}}$ $T_{alcance} = \frac{6 \cdot 30.000}{45.000 - 30.000}$ $T_{alcance} = 12\ semanas$
PC2	*El estudiante debe encontrar la expresión que refiere a la cantidad de estudiantes y la reducción que se le hizo. Para lograrlo, el solucionador debe entender que, en este ejercicio, la estructura superficial, es decir, la forma en cómo se presenta la oración expresada en la afirmación, representa dos estructuras profundas o significados.* *Por lo tanto, en la primera, el cuarto de estudiantes en el colegio se ve reducido en 5. Mientras que, en la segunda expresión, el cuarto fue de todos los estudiantes en la universidad, y*	*Expresión 1* = $\frac{x}{4} - 5$ *Expresión 2* = $\frac{x-5}{4}$

<table>
<tr><td></td><td>sólo entonces el número se redujo en 5.</td><td></td></tr>
<tr><td>PC3</td><td>Los estudiantes deben comprender la combinación de palabras existentes y la comprensión de la estructura lógica del enunciado del problema.

En este problema, por medio de una tabla de valores, se evidenciará(n) la(s) combinación(es) que particularicen el problema. Esto le dará al estudiante un amplio conocimiento acerca de la naturaleza del problema, así como el planteo de las condiciones del problema “si se sabe que ambos juntaron 21 cabezas y 54 patas”, en forma de ecuaciones para poder resolver el sistema de ecuaciones.</td><td>a) 6 conejos y 15 patos
b) 3 conejos cada uno
c) Se plantea el siguiente recuadro:
<table><tr><th></th><th>C onejos</th><th>Pa tos</th></tr><tr><td>uan</td><td>X</td><td>2X</td></tr><tr><td>edro</td><td>X</td><td>Y</td></tr></table>
De ahí, se resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:
$$\left.\begin{aligned} x+y&=21\\ 4x+2y&=54\end{aligned}\right]$$
$$\left.\begin{aligned} (x+2x)+(x+y)&=21\\ \big(4x+2(2x)\big)+(4x+2y)&=54\end{aligned}\right]$$
$$\left.\begin{aligned} 4x+y&=21\\ 12x+2y&=54\end{aligned}\right]$$
$$\left.\begin{aligned} -8x-2y&=-42\\ 12x+2y&=54\end{aligned}\right]$$
$$x=3$$
Juan y Pedro tendrían 3 conejos cada uno.</td></tr>
</table>

Metodología de Análisis de datos.

Este estudio estableció un marco comparativo para la medición del impacto que tiene la implementación del método de instrucción. Este marco comparativo, se basa en el trabajo gradual en los métodos de solución de problemas de enunciado verbal, utilizando los instrumentos *pre-test* y *post-test*. Así, se logra observar el contraste entre los indicadores de evaluación (ver tabla 10).

En la fase I (*pre-test*) se realizó un análisis cualitativo. El propósito o interés, es conocer si los estudiantes han o no desarrollado ciertas habilidades de resolución de problemas. Previamente a la implementación del método, analizando las respuestas, se buscó identificar si se manifestaba una traducción del lenguaje natural al lenguaje matemático, así como la presencia de las habilidades necesarias para la resolución de problemas de enunciado verbal, anteriormente mencionadas.

Dado que, antes de la implementación del método de instrucción, el grupo de estudiantes ya se encontraba familiarizado con estrategias de resolución de problemas, la atención se centró en aspectos como: las diferentes estrategias de resolución, los recursos matemáticos utilizados en sus argumentos, las diversas representaciones utilizadas para la comprensión del problema, la comunicación de sus ideas y resultados, así como el proceso de validación de los mismos.

Ante las respuestas de los estudiantes al *post-test*, se realiza un análisis de tipo cualitativo con el objetivo de identificar evidencias de las habilidades que incorporaron a sus esquemas mentales de conocimiento, de acuerdo a la implementación del método. Los alumnos utilizaron las estrategias construidas gracias a los problemas vistos en la fase II, como medio para desarrollar habilidades que extraigan el significado existente entre las unidades textuales (palabras, oraciones y texto) y las estructuras matemáticas ocultas en el enunciado (teoremas, axiomas, contenido, etc.).

Para el análisis de cada problema, se mostrará en un cuadro comparativo lo realizado por los estudiantes, enfatizando en los puntos en común de los problemas del *pre-test* con sus similares del *post-test*, como evidencia de que se ha desarrollado la habilidad esperada. Se destacan, a su vez, las principales dificultades que se presentaron en la búsqueda de las soluciones.

Por cuestión de espacio, se mostrará sólo el análisis en profundidad de uno de los problemas planteados en el *pre-test* y el problema similar que le corresponde en el *post-test*. A continuación, se describe la solución del problema tres del *pre-test* y la solución del problema tres del *pos-test*, señalando los aspectos relevantes en la solución de un problema, los cuales serán considerados para la evaluación del impacto del método de instrucción. También se hace un análisis global de todas las experiencias, con el fin de establecer conclusiones y tener un panorama más amplio de los logros alcanzados.

En este proceso de análisis, se contrastan las experiencias adquiridas de los estudiantes con la literatura, sirviendo aquello de soporte teórico, orientando la fase de *pre-test*, implementación y *post-test*, desde la selección de problemas, la presentación de estos al grupo de estudiantes, hasta la forma en que serían resueltos. Los procesos de implementación y análisis se orientaron por el siguiente eje:

- La propuesta de Ilany y Margolin (2010), proporcionó los elementos teóricos sobre los elementos que componen el lenguaje natural y el lenguaje matemático, cómo debe ser abordado por los estudiantes, las conexiones entre estos lenguajes y posteriormente la traducción de un lenguaje a otro, como actividad fundamental en la resolución de problemas. Dichos elementos, sirvieron de pauta para la selección de problemas de manera sistemática y con propósitos bien definidos. Las habilidades que se pretenden desarrollar están implícitas en el método de instrucción.

A manera de ejemplificar el análisis de datos, en la siguiente sección se realiza el análisis experto del *problema del perro y la liebre* (PD1) correspondiente al *pre-test* y el *problema de los sueldos* (PC1) del post-*test*. Posteriormente se mostrará el análisis del problema del *paseo en la granja* (PD3) del *pre-test* y el problema de *los hermanos cazadores* (PC3) del *post-test*.

Problema PD1 presentado en el Pre-test

El problema del perro y la liebre

Una liebre se halla delante de un perro, el cual la persigue; se encuentra 150 pasos por delante de él y mientras la liebre da 6 pasos, el perro da 10. Pido, ¿cuántos pasos habrá dado el perro cuando coja la liebre?

Este problema es algebraico y considera varias operaciones combinadas en el desarrollo de su solución. Al dar solución al problema, en la búsqueda de la respuesta establecemos cuales son los datos y las incógnitas. En los problemas físicos como este, es necesario considerar a incógnitas como si fueran datos y operar formalmente con ellos, para establecer así, alguna expresión matemática como una *ecuación*, que contenga tanto a datos como incógnitas. En esta clase de ejercicios, podemos evidenciar una regla existente para resolver problemas de dos objetos que se persiguen (Paradés y Malet 1989, citado por Paralea y Socas, 1995).

Este tipo de problemas, pueden ser traducidos a simples operaciones aritméticas mediante la utilización de métodos alternativos propuestos por Puig y Cerdán (para mayor información ver: "*Sistemas de representación en la resolución de problemas algebraicos", 1995*) como el de *análisis-síntesis,* sin embargo, Paradés y Malet (1989) argumentan que puede existir dificultades al expresar el problema en términos aritméticos.

En primera instancia, se extraen las palabras clave existentes en el enunciado para otorgar significado al problema. Tales palabras son (ver tabla 12):

Tabla 12

Extracción de palabras clave del problema PD1

ACCIÓN	ELEMENTOS
Identificación de palabra clave	Liebre, perro, persigue, 150 pasos, delante, 6 pasos, 10 pasos, coja la liebre.

Luego de la identificación de todas las palabras clave que posteriormente nos servirá como pistas literales para saber con qué información disponemos, procedemos a definir la información que es necesaria hallar para la solución del problema, es decir, diferenciar la información explícita de la implícita.

Tabla 13

definición de variables

DATOS IMPLÍCITOS	DATOS EXPLÍCITOS
- Posición en el tiempo. - Encuentro.	- Ventaja: 150 pasos. - Pasos del conejo: 6. - Pasos del perro: 10.

Luego de obtener los datos conocidos (cantidad de pasos del conejo (6), cantidad de pasos del perro (10) y la posición inicial del conejo con respecto al perro (150 pasos delante de él)), es necesario identificar las incógnitas, para así establecer las relaciones correspondientes entre toda esa información recopilada, y llegar a una expresión que nos ayude a resolver el problema. Para ello, es debido entender la situación matemática del problema, considerando las variables *posición y tiempo.*

Si bien, la relación que encontramos se refiere a que la *posición* depende de la *velocidad* y el *tiempo,* la dificultad existente en este ejercicio recae al establecer la relación entre los conceptos de *velocidad* y *razón*. Es por eso, que el contexto del problema, pareciera ser un ejercicio netamente matemático, pero se puede interpretar como un ejercicio físico de encuentro.

Posterior a la identificación de datos, variables, preguntas y al contexto del problema, podemos entender éste a través de la particularización. Para aquello, debemos darnos algunos casos particulares para observar qué es lo que sucede:

Tabla 14
Casos particulares

TIEMPO	PASOS DE LA LIEBRE	PASOS DEL PERRO
0	150	0
1	156	10
2	162	20
3	168	30
…	…	…

El objetivo es poder llegar a una expresión algebraica como una ecuación que nos facilite el trabajo, identificando los hechos conocidos y las condiciones lógico-matemáticas del problema. Así, las conexiones y relaciones entre los datos matemáticos y el análisis lógico del problema, nos proporcionarán un panorama más amplio de lo que se requiere hacer.

Que el perro persiga al conejo quiere decir que, en algún punto en el espacio, éste alcanzará al conejo, pero, ¿cuáles son las condiciones para que aquello ocurra? ¿En qué momento el perro logra alcanzar al conejo? Para ello, debemos considerar la ventaja que tiene el conejo con respecto al perro. Dicha ventaja, se considera cuando el enunciado menciona que el conejo "*se encuentra 150 pasos por delante de él".* Partes del enunciado logran evidenciar pistas literales como "*adelante"* o *mientras"*, las cuales nos ayudan a establecer operaciones aritméticas en pro a la construcción de un modelo matemático coherente con el contexto.

Por otro lado, para que exista alcance, las posiciones de los objetos deben ser las mismas. Además, la condición que debe existir, es que el objeto B vaya más rápido o en una razón más alta que la del objeto A. En este caso, la razón del perro es mayor que la del conejo, es decir, da cuatro pasos más que la liebre. Así, bajo tales condiciones existirá alcance.

El siguiente diagrama, proporcionado por Paradés y Malet (1989) señala la representación en forma de esquema de la expresión final. En ella, existen componentes explícitos y componentes implícitos que sirven de unión entre las estructuras simples, y una componente desconocida que hay que hallar. Lo anterior ayuda a demostrar el problema:

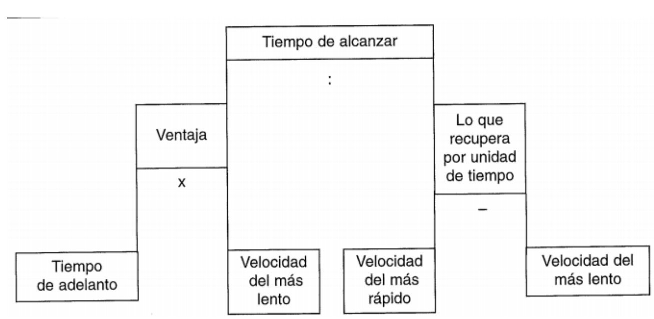


Figura 4: modelo para solución de problemas de encuentro

Gracias al diagrama 1, (Paradés y Malet, 1989). Luego, podemos establecer nuestro modelo y encontrar la solución:

$$t_{encuentro} = \frac{(ventaja)(velocidad\ del\ más\ lento)}{(velocidad\ del\ más\ rapido - velocidad\ del\ más\ lento)}$$

Tal como se presentó anteriormente (1), esta expresión puede ser usada para dar solución al problema planteado. Luego, la solución de la expresión da como resultado doscientos veinticinco (225) pasos. Para validar dicha solución, podemos construir una tabla general para tener una idea general del problema y comprobar mediante instancias especificas (ver tabla 15) que ciertamente a esa cantidad de pasos, el perro logra alcanzar al conejo.

TABLA 15
tiempo de alcance del perro al conejo

TIEMPO	PASOS DE LA LIEBRE	PASOS DEL PERRO
0	150	0
1	156	10
2	162	20
3	168	30
4	174	40
5	180	50
…	…	…
32	342	320
33	348	330
34	354	340
35	360	350
36	366	360
37	372	370
38	378	380

Problema PC1 presentado en el Post-test

El problema de los sueldos

Juan encontró trabajo y gana $30.000 pesos semanales. Seis semanas más tarde, Pedro encontró trabajo y gana $45.000 pesos a la semana. ¿Cuántas semanas tardará Pedro en obtener unos ingresos idénticos a los de Juan?

La estructura del problema es el similar al problema de *la liebre y el perro* y el *encuentro de los automóviles*. Conociendo las estrategias utilizadas en los problemas anteriormente mencionados, podemos simplificar en gran medida el desarrollo de la solución.

Identificando palabras clave, se logra ubicar elementos como: *$30.000, semanales, seis semanas más tarde, $45.000, a la semana, tardará* e *idénticos*. El problema, nos pide encontrar el momento en que Pedro logra alcanzar la misma cantidad de dinero que Juan, en términos de semanas. Ahora bien, este problema verbal tiene una serie de dificultades para desencadenar un procesamiento que nos permita su resolución.

Para tener una idea más general del problema, podemos dividir la información en datos conocidos y desconocidos, y demostrar el problema con instancias más específicas (ver tabla 16). Los datos que nos entrega el problema, son los ingresos de *Juan* y *Pedro*, junto con el tiempo que separa dichos ingresos, es decir, la *ventaja* que Juan lleva sobre Pedro (seis semanas). En otras palabras, Juan lleva una ventaja de seis semanas con un ingreso acumulado de $180.000 pesos, mientras que Pedro aún no obtiene ingresos. Por otro lado, tenemos información oculta que es necesario completar para la resolución del problema y poder llegar al objetivo de encontrar en qué semana Pedro logra acumular los ingresos de Juan.

Tabla 16
Ingresos de Juan y Pedro en semanas

SEMANAS	JUAN	PEDRO
6	$180.000	0
7	$210.000	$45.000
8	$240.000	$90.000
9	$270.000	$135.000
…	…	…

El siguiente paso, es convertir el problema en un ejercicio matemático que nos ayude a encontrar la solución. Para ello, nos debemos enfocar en la estructura sintáctica y semántica del problema.

Tomando en cuenta las pistas literales ("*seis semanas más tarde", "semanales"*) que entrega el enunciado, y ayudándonos a establecer operaciones (*"suma" y "producto"*) entre los datos, podemos establecer las relaciones correspondientes entre éstos. En primer lugar, existe una equivalencia entre Juan y Pedro. Considerando que la pregunta del problema se refiere al encuentro de Pedro sobre Juan, podemos establecer las siguientes expresiones:

$$S_p = (t_{semanas}) \times (\$45.000)$$
$$S_J = (t_{semanas} + 6) \times (\$30.000)$$

En segundo lugar, el problema exige encontrar en qué momento Pedro alcanza a Juan. Por tanto, debemos tomar en cuenta las unidades (*"semanas"*) que infiere el enunciado y sus respectivas relaciones. Así, para que Pedro alcance a Juan, los sueldos deben ser los mismos, es decir $S_p = S_J$. Igualando ecuaciones:

$$(t_{semanas}) \times (\$45.000) = \ (t_{semanas} + 6) \times (\$30.000)$$
$$(t_{semanas} \times (\$45.000) = \ (\$30.000 \ \times t_{semanas} + 6 \times \$30.000)$$

Despejando $t_{semanas}$ obtenemos:

$$t_{semanas} = \frac{6 \times \$30.000}{\$45.000 - \$30.000}$$

Luego,

$$t_{semanas} = 12 \ semanas$$

Se observa que el modelo (1), se repite para los problemas de encuentro PD1 y PC1:

$$t_{encuentro} = \frac{(ventaja)(velocidad\ del\ más\ lento)}{(velocidad\ del\ más\ rapido - velocidad\ del\ más\ lento)}$$

En la validación de dicha solución, podemos construir una tabla general y comprobar que ciertamente a esa altura en semanas, Pedro logra alcanzar los ingresos de Juan.

Tabla 17

Ingresos de Juan y Pedro en semanas

SEMANAS	JUAN	PEDRO
0	0	0
1	\$30.000	0
2	\$60.000	0
3	\$90.000	0
4	\$120.000	0
5	\$150.000	0
6	\$180.000	0
7	\$210.000	\$45.000
8	\$240.000	\$90.000
9	\$270.000	\$135.000
…	…	…
16	\$480.000	\$450.000
17	\$510.000	\$495.000
18	\$540.000	\$540.000

La siguiente tabla muestra la comparación entre los ejercicios vistos en el *pre-test* y *post-test*, respectivamente:

Tabla 18

Comparación de reactivos de los problemas PD1 y PC1

Reactivo	PD3	PC3
$1a$, $\mathbf{1a'}$	$t_{encuentro} = \frac{150 \cdot 6}{10 - 6}$ $t_{encuentro} = 225\ pasos$	$t_{encuentro} = \frac{6 \cdot 30.000}{45.000 - 30.000}$ $t_{encuentro} = 12\ semanas$

Problema PD3 presentado en el Pre-test

Este tipo de problema abierto con enunciado verbal se refiere a una situación problemática, donde el contexto se entrega de forma parcial en el texto, la formulación es implícita para los estudiantes y las soluciones pueden ser variadas (Conejo y Ortega, 2013). En dicho problema, el malentendido del significado literal, puede causar un malentendido del problema matemático, comprendiendo el problema como "*combinación*" (Ilany, Margolin, 2010). Tal fenómeno, fue investigado por Hershkovitz y Nesher en 2005, utilizado como ejemplo para la enseñanza mediante esquemas de los casos más generalizados. Sin embargo, en el presente trabajo, el problema propuesto fue adaptado para la ocasión.

El "problema del paseo en la granja"

Antonia visitó una granja y en ella vio vacas y pollos. No pudo recordar cuántas de cada especie había allí, pero recordó que el guía decía que tenían un total de 100 piernas.

a) ¿Cuántas vacas y cuántos pollos había ahí?,
b) ¿Es posible tener el mismo número de cabezas para vacas y pollos?
c) ¿Es posible tener un número impar de pollos?

En la tabla 19, se presenta el problema junto a los reactivos designados con el número correspondiente al problema y una letra correspondiente a la pregunta.

Tabla 19

Reactivos problemas PD3 del pre-test

PROBLEMA	DESIGNACIÓN	INCISO
PD3	$3a$	¿Cuántas vacas y cuántos pollos había ahí?

	$3b$	¿Es posible tener el mismo número de cabezas para las vacas y los pollos?
	$3c$	¿Es posible tener un número impar de pollos?

La solución y desarrollo del problema matemático, descrito anteriormente, se centra en comprender las combinaciones de las palabras y la estructura lógica de todo el texto. Para interpretar el problema, se requiere más que el dominio del idioma. Así, el estudiante debe hacer una transición entre los lenguajes implicados (Ilany y Margolin, 2010, p. 140), y por medio de las herramientas que el método de instrucción le brindó, lograr transitar por los diferentes niveles que el método propone para resolver el problema.

Para la respuesta al reactivo $3a$, existe más de una solución (Hershkovitz y Nesher, 2005). La dificultad radica en interpretar y descubrir todas las respuestas posibles. Para ello, el sujeto debe construir un espacio del mismo que le permita considerar las diferentes situaciones del problema y/o sub-problemáticas existentes, caracterizando estas situaciones de forma que puedan ayudar al estudiante a decidir lo que debe hacer, aplicando operadores para cambiar una situación en otra.

En primer lugar, se deberá transitar por una lectura comprensiva, donde en dicha instancia, nos exponemos al contexto. Tal proceso de lectura, es un proceso acumulativo desde las unidades más pequeñas (palabras) hasta las unidades más grandes (texto) (Ilany y Margolin, 2010). Luego, al comprender la situación lingüística, se obtiene un plano general de la problemática existente.

Se identifican las palabras claves y la(s) pregunta(s), según existan, de acuerdo al enunciado. Dicha acción se establece en el siguiente recuadro:

Tabla 20
Palabras clave

ACCIÓN	ELEMENTO
Identificación de palabra clave	Pollo, vaca, total, patas, mismo número, número impar, mínimo, máximo.

Posteriormente, en la búsqueda de los datos y la comprensión del contexto matemático, la información puede aparecer de forma explícita o implícita según el tipo de problema planteado (Ilany y Margolin, 2010).

Para entender la matemática del problema, es necesario examinar los datos, la pregunta y tener dominio del tema en cuestión (Ilany y Margolin, 2010). Cuando traducimos el lenguaje natural al lenguaje matemático, precisamos en establecer la escritura simbólica de las condiciones establecidas en el enunciado, como también, la escritura de las ecuaciones correspondientes, utilizando los símbolos algebraicos con sus operaciones respectivas. Esto se muestra en la siguiente tabla:

Tabla 21
Identificación de variables

DATOS IMPLÍCITOS	DATOS EXPLÍCITOS
- 1V = 4 patas - 1P = 2 patas	- 4V+2P=100 patas

Ahora bien, podemos establecer las variables y un caso particular a través de la siguiente tabla:

Tabla 22
soluciones esperadas

VACAS (V)	POLLOS (P)	TOTAL, DE PATAS
1	48	$4(1) + 2(48) = 100$

Durante la resolución, se puede contemplar el conjunto de solución a una misma cuestión, que pueden considerarse como aceptables para el problema.

En la relación de las variables y datos, es necesario procesar las palabras clave, con el propósito de convertir la información en un ejercicio que implique contenido matemático, es decir, se deben identificar las pistas literales que el enunciado del problema entrega que refieran a una operación matemática.

La propuesta de Nesher (2014) en "*The role of schemes in solving word problems",* plantea una parte del proceso de solución basado en la utilización de esquemas para el entendimiento y solución de problemas generales. Así, para las vacas podemos realizar el siguiente diagrama:

En el diagrama 2, podemos evidenciar el cuantificador 4, unido a través de una operación al sustantivo "vacas". El producto de aquella operación da como resultado el total de piernas para las vacas. Tal información nos servirá para establecer el total de piernas de ambos animales.

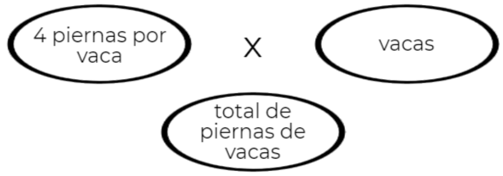


Figura 5. Totales de piernas de vacas.

Por otro lado, para los pollos podemos proceder de la misma manera:

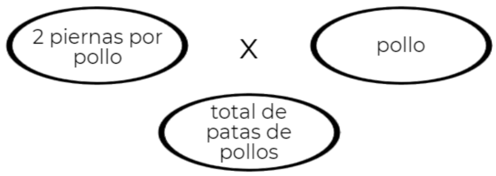


Figura 6. Totales de piernas de pollo.

Por lo tanto, teniendo el total de patas de pollos y de vacas, podemos establecer el siguiente diagrama y establecer una expresión algebraica:

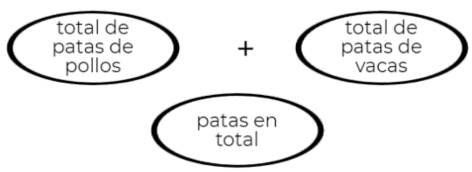


Figura 7. totales de patas de los animales.

Asimismo, a través de una tabla de valores (tabla 23), podemos ver las regularidades que ocurren al momento de solucionar el problema y las operaciones correspondientes para la construcción de un modelo matemático.

Tabla 23

Conjunto de soluciones mostrando el número de vacas y pollos

VACAS	POLLOS	TOTAL, DE PATAS
1	48	$4(1) + 2(48) = 100$
2	46	$4(2) + 2(46) = 100$
3	44	$4(3) + 2(44) = 100$
4	42	$4(4) + 2(42) = 100$
5	40	$4(5) + 2(40) = 100$
6	38	$4(6) + 2(38) = 100$
7	36	$4(7) + 2(36) = 100$
8	34	$4(8) + 2(34) = 100$
9	32	$4(9) + 2(32) = 100$
10	30	$4(10) + 2(30) = 100$
11	28	$4(11) + 2(28) = 100$
12	26	$4(12) + 2(26) = 100$
13	24	$4(13) + 2(24) = 100$

14	22	$4(14) + 2(22) = 100$
15	20	$4(15) + 2(20) = 100$
16	18	$4(16) + 2(18) = 100$
17	16	$4(17) + 2(16) = 100$
18	14	$4(18) + 2(14) = 100$
19	12	$4(19) + 2(12) = 100$
20	10	$4(20) + 2(10) = 100$
21	8	$4(21) + 2(9) = 100$
22	6	$4(22) + 2(6) = 100$
23	4	$4(23) + 2(4) = 100$

Para proceder con la construcción de un modelo matemático coherente con el contexto del problema, es necesario analizar el problema de diferentes maneras, logrando así, identificar la problemática antes de intentar su solución. Como podemos evidenciar en la tabla 23 en conjunto con los diagramas 2, 3 y 4, se puede apreciar la siguiente expresión:

$$4x + 2y = 100 \rightarrow 2x + y = 50$$

"x" Representa el número de vacas e "y" el número de pollos. En consecuencia, se construye una ecuación modelo que representa la situación planteada. Luego, sólo basta encontrar la solución a los reactivos.

Para el reactivo $3a$, tenemos que la solución es amplia y general, ya que poseemos veintitrés tipos de soluciones que satisfacen la ecuación. Además, podemos establecer un número máximo y mínimo para cada animal, y por ende, establecer cualquier combinación de vacas y pollos que esté dentro de los intervalos (para pollos $[4,48]$ y para vacas $[1, 23]$).

Para el reactivo $3b$, debemos encontrar una combinación de animales que refiera a una misma cantidad de vacas y pollos, pero que cumplan con la condición dada (cuatro patas para las vacas y dos patas para los pollos y que sumados, siempre dé como resultado un total de 100 patas). Para ello, se hace necesario comprender qué pide la pregunta, ya que es ella la que establece las relaciones y la directriz entre variables.

Tabla 24

Descripción de reactivo 3b

REACTIVO	DESCRIPCIÓN	EXPRESIÓN
¿Es posible tener el mismo número de cabezas para las vacas y los pollos?	Sea "x" el número de vacas e "y" el número de pollos, donde $x, y \in Z$. Las palabras "mismo número" nos indican una relación de equivalencia. Así como, damos por hecho que por cada cabeza existe un animal.	$x = y$

Al ser un cuantificador de existencia, es necesario identificar el mismo número de cabezas para ambos animales a través de la combinación de las dos condiciones que se entregan: la del enunciado y la de la pregunta. Es decir, establecer la relación entre dos expresiones algebraicas dadas.

$$\left.\begin{array}{r} 2x + y = 50 \\ x = y \end{array}\right]$$

Al resolver el sistema de ecuación planteado, la expresión resultado es $x = \frac{50}{3}$. Para analizar la estructura superficial y profunda de dicho producto, debemos tener en cuenta las condiciones del enunciado y la pregunta. En la estructura superficial, vemos que el problema tiene un resultado objetivo y fácil de obtener, sin embargo, al validar la respuesta, evidenciamos que el dominio de la variable x está en el conjunto de los enteros. Entonces, como x es una cantidad entera y el resultado es racional, vemos que se produce una contradicción, dando resultado que no es posible tener el mismo número de vacas y pollos.

En el reactivo $3c$, nuevamente poseemos un cuantificador de existencia donde se nos pide encontrar *un número impar de pollos.* Para ello, tenemos varias posibilidades, donde debemos expresar matemáticamente, la cantidad de pollo.

Tabla 25

Descripción reactivo 3c

REACTIVO	DESCRIPCIÓN	EXPRESIÓN
¿Es posible tener un número impar de pollos?	Sea “x” el número de vacas e “$y = 2k + 1$” el número de pollos, donde $x, y, k \in Z$. La palabra “impar” nos indica una cantidad desigual de pollos y vacas. También, sabemos que por cada tipo de animal existe un número en concreto (entero).	$2x + 2k + 1 = 50$ $2x + 2k = 49$ $x + k = \frac{49}{2}$

En este reactivo, se debe tener un buen dominio conceptual de las operaciones y resultados que se obtienen. La estructura superficial de la expresión $x + k = \frac{49}{2}$ nos indica que una cantidad de vacas sumadas con un número impar de pollos equivalen a los $\frac{49}{2}$, lo cual, es válido. Sin embargo, si analizamos la estructura profunda de dicha expresión, es decir, el significado, nos encontramos con una contradicción. Si tomamos en cuenta la definición del dominio de las variables x, y, k, vemos que el producto de la operación no puede suceder dentro del contexto del problema, ya que, tanto el número de vacas y pollos representan cantidades enteras.

Problema PC3 presentado en el Post-test

La estructura de este problema es similar al PD3, como se observa, los reactivos (3a → 3a’), (3b → 3b’) y (3c → 3c’) se refieren a un mismo propósito, sin embargo, el contexto es diferente. Además cuenta con un enunciado verbal abierto, donde el contexto se entrega de forma parcial en el texto, la formulación es implícita y las soluciones pueden ser variadas en alguno de sus reactivos.

El “problema de los hermanos cazadores”

Juan y Samuel salieron de cacería al campo y encontraron patos y conejos en su camino. Si se sabe que ambos juntaron 21 cabezas y 54 patas.

a) ¿Cuántos conejos y patos había?
b) ¿Es posible que Samuel se haya llevado tantos conejos como juan? Si es así ¿Cuántos se llevaron cada uno?
c) Si Juan se hubiese llevado el doble de patos de lo que se llevó en conejos, ¿Cuántos conejos tendría cada uno?

Tabla 26

Reactivos de problema PC3

PROBLEMA	DESIGNACIÓN	INCISO
PC3	$3a$	¿Cuántos conejos y patos había?
	$3b$	¿Es posible que Samuel se haya llevado tantos conejos como Juan? Si es así ¿Cuántos se llevaron cada uno?
	$3c$	Si Juan se hubiese llevado el doble de patos de lo que se llevó en conejos, ¿Cuántos conejos tendría cada uno?

Al radicarse la dificultad en poder interpretar y descubrir todas las respuestas posibles, se hace necesario construir un espacio para su solución que permita considerar las diferentes situaciones del problema, caracterizándolas de forma que se pueda decidir lo que debe hacer, aplicar operadores para cambiar una situación en otra y validar su respuesta.

Para la extracción de información, se tiene la siguiente tabla:

Tabla 27

Palabras clave

ACCIÓN	ELEMENTO
Identificación de palabra clave	Patos, conejos, cabezas, patas, tantos conejos como, doble.

En la posterior búsqueda de los datos, obtenemos la siguiente información explícita e implícita (ver tabla 28), donde la letra C se refiere a concejos y la letra P refiere a patos.

Tabla 28

Hechos y condiciones del problema

DATOS IMPLÍCITOS	DATOS EXPLÍCITOS
- 1C = 4 patas - 1P = 2 patas - 4C+2P = 54 patas	- C+P=21 cabezas

Luego, se pueden establecer las variables e identificar uno o más casos particulares, tomando el número de correspondiente a cada animal y el respectivo número de cabezas y patas que le corresponde.

Tabla 29

Casos particulares posibles

CONEJOS (C)	PATOS (P)	TOTAL, DE CABEZAS Y PATAS
1	20	$1 + 20 = 21$ $4 + 40 = 44$
2	19	$2 + 19 = 21$ $8 + 38 = 46$
3	18	$3 + 18 = 21$ $12 + 36 = 48$
4	17	$4 + 17 = 21$ $16 + 34 = 50$
5	16	$5 + 16 = 21$ $20 + 32 = 52$
6	15	$6 + 15 = 21$ $24 + 30 = 54$
7	14	$7 + 14 = 21$ $28 + 28 = 56$
8	13	$8 + 13 = 21$ $32 + 26 = 58$
9	12	$9 + 12 = 21$ $36 + 24 = 60$
10	11	$10 + 11 = 21$ $40 + 22 = 62$
11	10	$11 + 10 = 21$ $44 + 20 = 64$
12	9	$12 + 9 = 21$ $48 + 18 = 66$
13	8	$13 + 8 = 21$ $52 + 16 = 68$
14	7	$14 + 7 = 21$ $56 + 14 = 70$
15	6	$15 + 6 = 21$ $60 + 12 = 72$
16	5	$16 + 5 = 21$ $64 + 10 = 74$
17	4	$17 + 4 = 21$ $68 + 8 = 76$
18	3	$18 + 3 = 21$ $72 + 6 = 78$
19	2	$19 + 2 = 21$ $76 + 4 = 80$
20	1	$20 + 1 = 21$ $80 + 2 = 82$

Durante la resolución, y a través de una tabla de casos, se puede contemplar una única solución exacta aceptada para el problema, cumpliendo con las dos condiciones establecidas en el enunciado. Tal caso es:

$$C + P = 21$$
$$4C + 2P = 54$$
$$con\ C = 6\ y\ P = 15$$

En la relación de las variables y datos, es necesario procesar las palabras clave, con el propósito de convertir la información en un ejercicio que implique contenido matemático, y observar qué es lo que cambia, cómo cambia y qué conexión tiene con los demás elementos. Por tanto, se hace necesario identificar las pistas literales que el enunciado del problema entrega, ayudados por una tabla o esquema que establezca una operación matemática.

En la siguiente tabla (tabla 30) se resumen las soluciones para cada problema y se organizan de acuerdo a la comparación que se realizará.

Tabla 30

Comparación de reactivos de problema PD3 y PC3

REACTIVO	PD3	PC3
$\boldsymbol{3a}, \boldsymbol{3a'}$	$4x + 2y = 100$	$\left.\begin{matrix} x + y = 21 \\ 4x + 2y = 54 \end{matrix}\right\rvert$ $\left.\begin{matrix} x + y = 21 \\ 2x + y = 27 \end{matrix}\right\rvert$ $x = 6$ $y = 15$
$\boldsymbol{3b}, \boldsymbol{3b'}$	$\left.\begin{matrix} 4x + 2y = 100 \\ x = y \end{matrix}\right\rvert$ $4x + 2x = 100$ $6x = 100$ $3x = 50$ $x = \frac{50}{3}$ Como necesitamos un resultado entero ($x \in Z$) y 50 no es divisible por 3, no es posible encontrar una combinación en los enteros donde haya la misma cantidad	$\left.\begin{matrix} x + y = 21 \\ 4x + 2y = 54 \end{matrix}\right\rvert$ $\left.\begin{matrix} (x + y) + (x + y) = 21 \\ (4x + 2y) + (4x + 2y) = 54 \end{matrix}\right\rvert$ $\left.\begin{matrix} 2x + 2y = 21 \\ 8x + 4y = 54 \end{matrix}\right\rvert$ $\left.\begin{matrix} 2x + 2y = 21 \\ 4x + 2y = 27 \end{matrix}\right\rvert$ $-2x = -6$ $x = 3$

	de pollos y vacas.	
$3c$, $\boldsymbol{3c'}$	Podemos proceder de dos modos distintos: Modo 1: $4x + 2y = 100$ $2x + y = 50$ Como 2x es siempre par, y 50 es par, entonces, "y" es par, por lo tanto, "y" no puede ser impar. Modo 2: Supongamos que, $y = 2k + 1$, entonces: $2x + 2k + 1 = 50$ $2(x + k) = 49$ $x + k = \frac{49}{2}$ Como $x, k \in Z$, entonces la ecuación no tiene solución.	$\left.\begin{matrix} x + y = 21 \\ 4x + 2y = 54 \end{matrix}\right\rvert$ $\left.\begin{matrix} (x + 2x) + (x + y) = 21 \\ \big(4x + 2(2x)\big) + (4x + 2y) = 54 \end{matrix}\right\rvert$ $\left.\begin{matrix} 4x + y = 21 \\ 12x + 2y = 54 \end{matrix}\right\rvert$ $\left.\begin{matrix} 4x + y = 21 \\ 6x + y = 27 \end{matrix}\right\rvert$ $-2x = -6$ $x = 3$

Hasta aquí se ha descrito con detalle las soluciones de los problemas PD1, PC1, PD3 y PC3. Por cuestión de espacio no se describe con tanto detalle el proceso de solución para los problemas PD2 y PC2 presentados en los instrumentos *pre-test y post-test.* Sin embargo, se muestra en la siguiente la tabla (ver tabla 31), los detalles para su solución y la comparación de las soluciones entre los problemas planteados originalmente y su similar.

Problema de los postres (PD2)

Escribe una ecuación utilizando la variable C y S para representar el siguiente enunciado: "En el restaurante Mindy's, por cada cuatro personas que pidieron Cheesecake, hay cinco personas que ordenaron Strudel". Deje C para representar el número de Cheesecake y S para representar el número de Strudels.

Problemas de los estudiantes y profesores (PC2)

Escribe una ecuación, usando la variable X, que representa la siguiente afirmación: "En esta universidad un cuarto del número de estudiantes, que se redujo en 5, son estudiantes de matemáticas".

Tabla 31

Comparación de reactivos de los problemas PD2 y PC2

INDICADOR	PD2	PC2
$\boldsymbol{Palabras\ clave}$	cada cuatro, Cheesecake, hay cinco, Strudel	un cuarto, del, número de estudiantes, se redujo en 5
$\boldsymbol{Variable}$	Cheesecake y Strudel	número de estudiantes
$Expresiones\ \boldsymbol{algebraicas}$	$4C = 5S$	$\frac{x}{4} - 5$ o $\frac{x-5}{4}$

Capítulo 4

ANÁLISIS DE DATOS

En el presente capítulo, se expondrán y analizarán las respuestas de los estudiantes a los problemas presentados en el pre-test y post-test. Se utilizarán seis categorías de medición que, en líneas generales, corresponden a los aspectos relevantes que considera la implementación del método de instrucción.

En primer lugar, se presenta el análisis de las respuestas por los alumnos E_3 y E_6 obtenidas al resolver los problemas *PD1* y *PD3* correspondiente al *pre-test*. Luego, se presenta el análisis de las respuestas obtenidas según los tipos de estrategias que utilizaron para resolver los problemas *PC1* y *PC3* (correspondiente a los problemas que se presentaron en la fase de *post-test*). Después de seguir la propuesta de implementación del método de instrucción, finalmente se presentan los resultados generales de los alumnos participantes de la implementación del método.

El análisis del resultado del aprendizaje, se realiza a partir de la corrección de las pruebas *pre-test* y *post-test*. Tal corrección se ha efectuado con los análisis descritos anteriormente de los problemas en la que se detallan los aspectos relevantes de cada problema según los indicadores de evaluación.

Análisis de datos.

Teniendo en cuenta el documento de Ilany y Margolin (2010), quienes muestran un análisis de resolución de problemas matemáticos de enunciado verbal, se realizará la descripción y posterior análisis de los problemas *PD1, PD3, PC1* y *PC3.*

Ilany y Margolin, propusieron en su análisis de los problemas, dividir en nueve niveles el proceso de solución (ver Figura 2) Tales etapas, se utilizaron para tener una idea de los posibles pasos que han de llevar a cabo los estudiantes para resolver un problema, como los propuestos en la fase II, que guardan relación entre los problemas del *pre-test* y *post-test*.

En este estudio, los nueve niveles se agrupan en seis categorías que responden a los criterios que se evaluarán: *identificación de palabras claves,* correspondientes a los niveles I y II; *definición de variables*, correspondiente al nivel III; e*stablecer relaciones entre datos,* correspondientes a los niveles IV, V, VI; *construcción de un modelo,* correspondiente al nivel VII; *búsqueda de una solución,* correspondiente al nivel VIII; y *validación de la respuesta,* correspondiente al nivel IX.

Por otro lado, en el mismo estudio, se mencionan las características de cuatro problemas seleccionados anteriormente. Tales problemas, se encuentran acompañados por una historia o enunciado de fondo, constituyendo una unidad textual coherente en términos de contenido y lenguaje, con límites claros para su uso en la comunicación, y constituido por dos idiomas diferentes mezclados: el lenguaje natural y el lenguaje matemático (Ilany y Margolin, 2010). Dichos problemas, se diferencian por tipo y elementos estructurales (contexto, formulación, soluciones y método).

Para los autores, el resolver problemas de enunciado verbal, es un acto de comunicación que exige un enfoque de alfabetización hacia el destinatario y una claridad por parte del remitente. En primer lugar, el *texto* o *enunciado*, se compone de *unidades lingüísticas* las cuales constituyen una *estructura semántica*[11]. En segundo lugar, para el destinatario, el proceso de alfabetización consiste en identificar y analizar las partes constitutivas de un texto. Es decir, debe tener presente los aspectos lingüísticos importantes para la interpretación. Tales aspectos refieren a las funciones de la *forma* (¿cómo es el texto?), las palabras (¿cuáles son los elementos relevantes?) y oraciones (¿qué relaciones existen entre los elementos?). En otras palabras, el destinatario debe tener consciencia de los símbolos y la sintaxis que presenta el texto para poder llegar a realizar diferentes operaciones lógicas (Ilany y Margolin, 2010). Tal proceso puede revelar el contenido oculto a través, por ejemplo, de símbolos o gráficos, decodificando el lenguaje natural en estructuras abstractas.

Análisis de los casos E_3 y E_6.

Con todo lo anterior, y recordando que contamos con seis participantes, en esta sección se analiza en detalle el trabajo de sólo dos de ellos, E_3 y E_6, quienes resolvieron con mayor detalle y claridad los problemas planteados en el *pre-test* y *pos-test.* Además, se ilustran los criterios de corrección con algunos ejemplos.

El foco de estos problemas está en la comprensión de las combinaciones de palabras y la comprensión de la estructura lógica de todo el texto. Para llegar a comprender los siguientes problemas, se requiere más que el dominio de la lengua: se necesita aprender a construir un cuerpo significativo de conocimiento a partir de la información presentada en la(s) pregunta(s), incluyendo datos y un esquema de solución. Es decir, se necesita establecer una relación entre el lenguaje natural y el lenguaje matemático (Ilany y Margolin, 2010).

La siguiente tabla (tabla 32), muestra los problemas *PD3 y PC3*, problemas matemáticos para los cuales hay una necesidad de transición del lenguaje natural al lenguaje matemático, y que son presentados en el *pre-test* y *post-test*, donde se analizarán a continuación:

[11] Consiste en aquellos elementos y relaciones que se derivan directamente del propio texto, sin añadir nada que no esté explícitamente especificado en el texto.

Tabla 32

Problemas PD3 y PC3

Pre-test (problema original)	Post-test (símil)
Problema PD3 Antonia visitó una granja y en ella vio vacas y pollos. No pudo recordar cuántas de cada especie había allí, pero recordó que el guía decía que tenían un total de 100 patas. a) ¿Cuántas vacas y cuántos pollos había ahí? b) ¿Es posible tener el mismo número de cabezas para vacas y pollos? c) ¿Es posible tener un número impar de pollos?	**Problema PC3** Juan y Samuel salieron de cacería al campo y encontraron patos y conejos en su camino. Si se sabe que ambos juntaron 21 cabezas y 54 patas. d) ¿Cuántos conejos y patos había? e) ¿Es posible que Samuel se haya llevado tantos conejos como juan? Si es así ¿Cuántos se llevaron cada uno? f) Si Juan se hubiese llevado el doble de patos de lo que se llevó en conejos, ¿Cuántos conejos tendría cada uno?

Análisis de la producción del estudiante E_6 al resolver los problemas PD3 y PC3.

En la siguiente sección, se muestra el análisis de las categorías, anteriormente mencionadas, según el desarrollo proporcionado por el estudiante E_6 en la fase del *pre-test* de acuerdo al problema *PD3*.

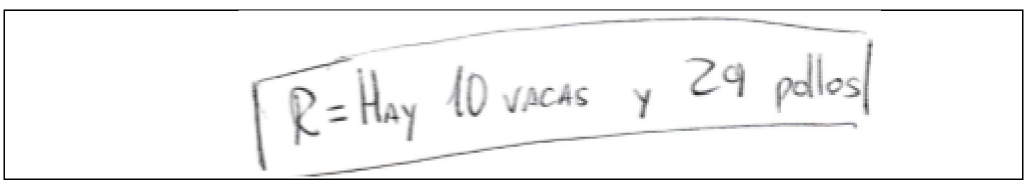


Imagen 1 Respuesta del estudiante E_6 a la pregunta 3a

En la imagen 1, el estudiante asigna valores particulares a las variables ***vacas*** y ***pollos,*** estableciendo equivalencias entre el número de patas y el número de animales (ver imagen 2), movilizando propiedades y operaciones adecuadas no explicitadas en el enunciado. Además, muestra consciencia de las condiciones lógico-matemáticas del texto, es decir, la suma de las patas de ambos animales debe ser 100, el total de patas de vacas son cuatro veces la cantidad de vacas y mismo razonamiento para los pollos. Según el lenguaje natural, los *pollos* estuvieron representados por la palabra "pollos", la operación aritmética fue representada por la multiplicación, y finalmente, el número total de patas fue representado por un cuantificador y un sustantivo (patas), por tanto $29 \cdot \ pollos \ = \ 60 \ patas$. Mismo caso para las vacas. Sin embargo, el estudiante comete errores operacionales de carácter aritmético al multiplicar $29 \cdot 2 = 58$. El cuantificador 29 aparece junto al sustantivo (pollos) y la igualdad en la ecuación matemática no es considerada.

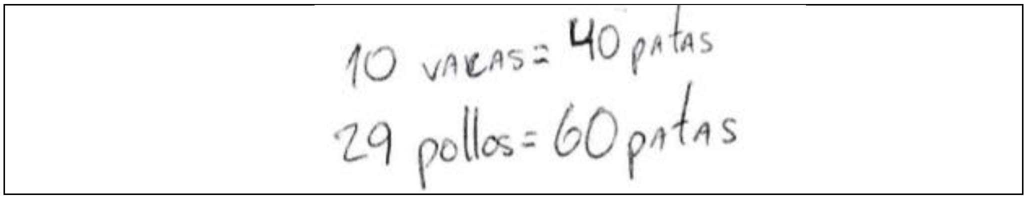


Imagen 2 Operaciones del estudiante E_6 para dar respuesta a la pregunta 3a

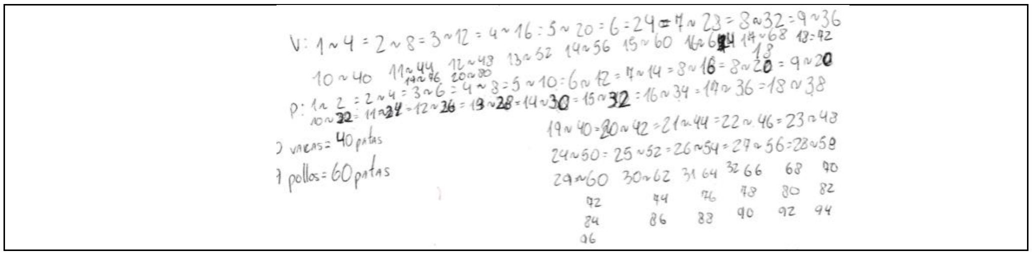


Imagen 3 Estrategia del estudiante E_6 para dar respuesta a la pregunta 3b y 3c

En la imagen 3, el estudiante realiza un registro sistemático de valores particulares al asignar la cantidad de animales y su relación con el número de patas. No obstante, si bien en el lenguaje natural realiza una asignación abstracta (“v” para vacas y “p” para pollos), no identifica de manera consciente y no registra de forma concreta las variables implicadas. Dicha característica, puede provenir de la falta de dominio algebraico, al no lograr traducir el evento descrito en lenguaje natural a operaciones aritméticas con términos algebraicos representando una expresión general para la situación dada.

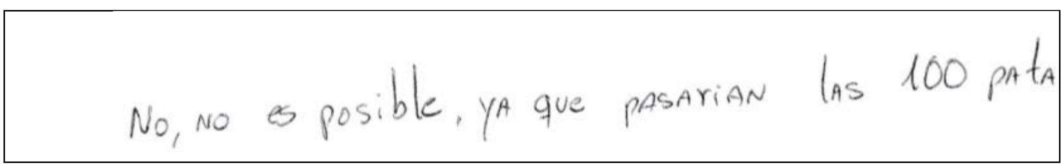


Imagen 4 Respuesta del estudiante E_6 a la pregunta 3b

En la imagen 4, da respuesta al inciso 3b y valida su respuesta en forma literal, considerando las condiciones que plantea el enunciado del problema. Sin embargo, si bien su respuesta es correcta, no demuestra en lenguaje matemático la solución al inciso 3b. Esto se debe a que el estudiante no pudo construir una expresión general algebraica y utilizar propiedades algebraicas para llegar a la solución.

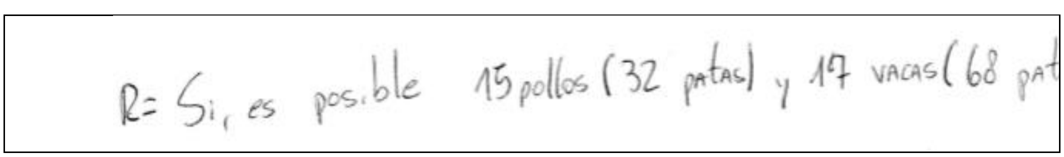


Imagen 5 Respuesta del estudiante E_6 a la pregunta 3c

En la imagen 5, el estudiante vuelve a cometer errores operacionales de carácter aritmético al multiplicar $15 \cdot pollos = 32\, patas$. El cuantificador 15 aparece junto al sustantivo (pollos) y nuevamente la igualdad en la ecuación matemática no es considerada. Este error puede ocurrir ante la necesidad de dar un resultado numérico. El estudiante trata de encontrar una operación, e intenta resolver el problema mediante ensayo y error; comprueba diferentes soluciones posibles utilizando los números dados e ignorando la situación; intenta dar soluciones según las operaciones aritméticas (Ilany y Margolin, 2010).

A continuación, se muestra el análisis de las categorías, según el desarrollo proporcionado por el estudiante E_6 en la fase del *post-test*, de acuerdo al problema *PC3*.

En la imagen 6, el estudiante busca e identifica información relevante dentro de los diferentes elementos que existen en el enunciado del problema, seleccionando las palabras clave, anotando los datos del enunciado, para luego representar nombrándolas en la hoja de trabajo.

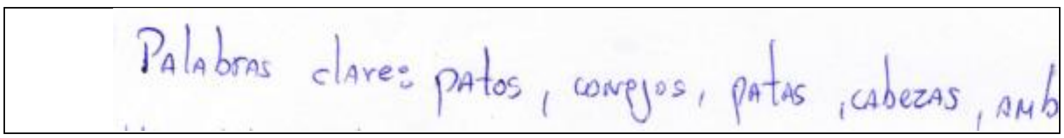


Imagen 6 Registro de palabras clave del estudiante E_6

En la imagen 7, el estudiante asigna variables correctamente, una para cada animal. Para el lenguaje natural, los patos y conejos estuvieron representados por “P” y “C”; al relacionarlas con el número de patas, la operación aritmética fue representada por la multiplicación.

Imagen 7 Asignación de variables del estudiante E_6

En la imagen 9, se evidencia una estructuración del problema en expresiones algebraicas básicas, buscando y estableciendo relaciones entre los diferentes elementos y las condiciones del problema. Aquellas, se ven reflejadas por el estudiante a través de sustantivos con sus respectivos cuantificadores: el cuantificador 2 para la variable “P” y el cuantificador 4 para la variable C (ver imagen 8). Las operaciones fueron representadas por la multiplicación y suma.

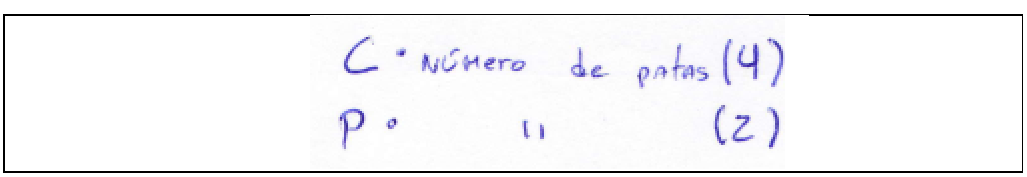
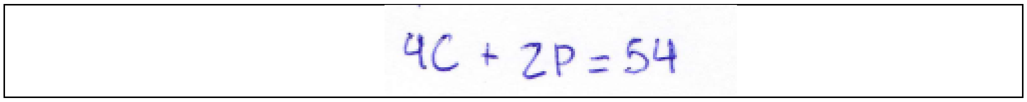


Imagen 8 Representación algebraica del lenguaje natural del estudiante E_6

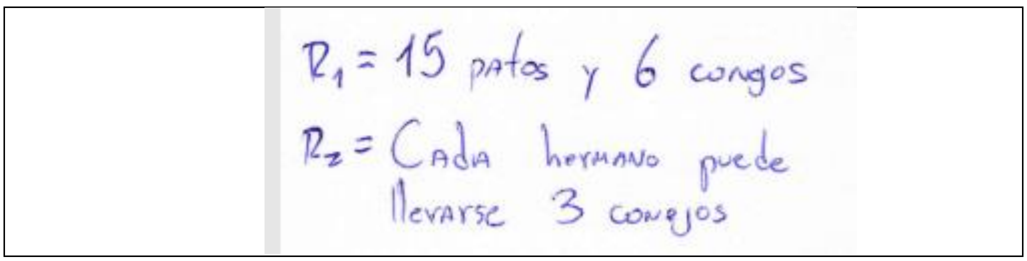
El alumno organiza el proceso de resolución del problema mediante la construcción de ecuaciones o relaciones de equivalencia entre variables, datos y las condiciones del problema. Explora así, posibles caminos para resolver el problema y organiza los datos o las acciones que realizará para la resolución de éste.



$$4C + 2P = 54$$

Imagen 9 Modelo matemático a la situación del estudiante E_6

En la imagen 10, el alumno realiza una serie de acciones y de procedimientos matemáticos para resolver el problema: ejecuta operaciones aritméticas, realiza cálculos e identifica un aceptable que cumple con la condición.

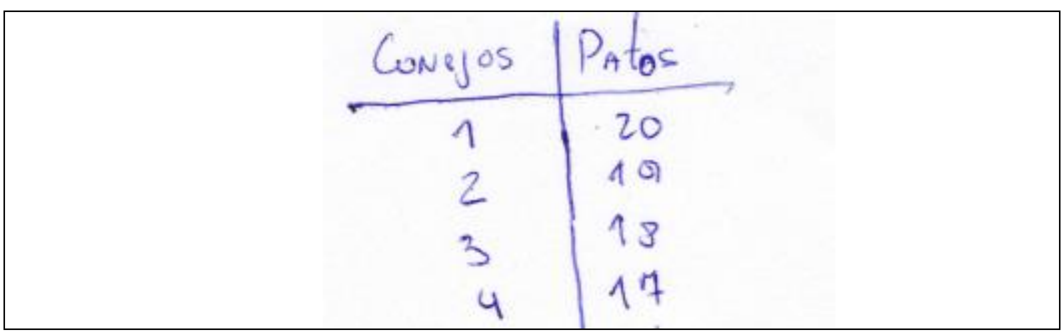


R_1 = 15 patos y 6 congos

R_2 = Cada hermano puede llevarse 3 conejos

Imagen 10 Respuesta del estudiante E_6 a las preguntas 3a’, 3b’ y 3c’

El alumno realiza acciones para controlar los resultados que va obteniendo y detectar posibles errores: utiliza tablas para representar casos posibles de manera sistemática, comprobándolos con procedimientos utilizados y los cálculos matemáticos realizados.



Conejos	Patos
1	20
2	19
3	18
4	17

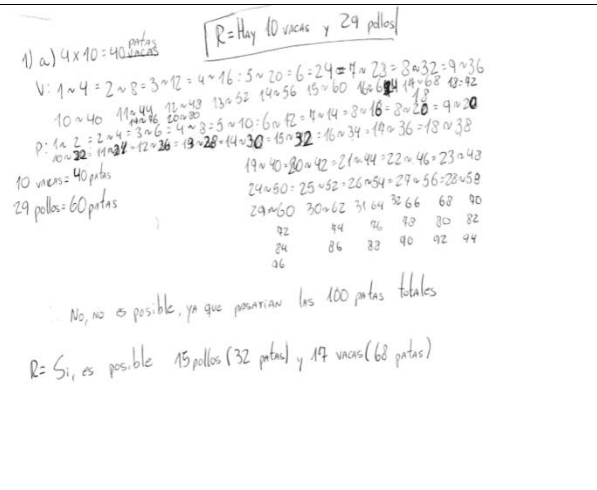
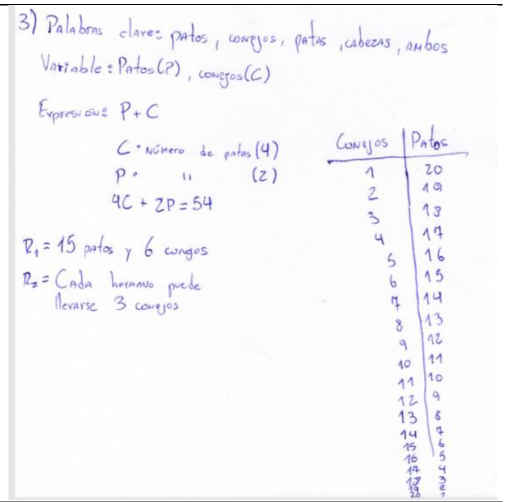
Imagen 11 Validación del estudiante E_6 a las preguntas 3a’, 3b’ y 3c’

Análisis de la evolución de las respuestas del estudiante E_6 al resolver los problemas PD3 (pre-test) y PC3 (post-test).

En esta sección, se analiza la evolución que tienen las respuestas del estudiante E_6 gracias a la implementación del método de instrucción. En la tabla 33 se muestran las respuestas a los incisos de ambos problemas. Para más detalle en la imagen, ver Anexo IV.

Tabla 33

Producción E_6 al resolver los problemas PD3 y PC3

Pre-test	Post-test
 R= Hay 10 vacas y 29 pollos 1) a) 4x10=40 patas vacas 10 vacas= 40 patas 29 pollos= 60 patas No, no es posible, ya que pasarían los 100 patas totales R= Si, es posible 15 pollos (32 patas) y 17 vacas (68 patas)	 3) Palabras claves: patos, conejos, patas, cabezas, ambos Variable: Patos (P), conejos (C) Expresiones P+C C: número de patas (4) P: " (2) 4C + 2P = 54 R1 = 15 patos y 6 conejos R2 = Cada hermano puede llevarse 3 conejos Conejos | Patos: 1 20, 2 19, 3 18, 4 17, 5 16, 6 15, 7 14, 8 13, 9 12, 10 11, 11 10, 12 9, 13 8, 14 7, 15 6, 16 5, 17 4, 18 3, 19 2, 20 1

La dificultad que enfrenta el estudiante en los problemas PD3 y PC3, es poder determinar el proceso de generalización de la situación y la búsqueda de todas las posibles alternativas o soluciones a las preguntas que se puedan generar. En los reactivos, el estudiante debe explorar conceptos como variable y relación funcional, apoyado en el uso de términos algebraicos para la identificación de una ley general, representando expresiones dadas en lenguaje natural.

Para el problema PD3, uno de los obstáculos fue que el alumno propuso valores específicos para las incógnitas, pero requería tener presente qué tipo de solución se esperaba y si cumplía con la condición de que el resultado fuera entero. El estudiante lográ realizar y establecer operaciones básicas y relaciones, a través de la particularización[12], en las soluciones a la pregunta 3a del problema PD3 presentado en el *pre-test*. No obstante, dicha acción es valiosa en la búsqueda temprana de una solución, pero se espera que los estudiantes lleguen a una

[12] Consiste simplemente en concentrar nuestra atención en algunos ejemplos para entender de mejor manera el significado de la pregunta. Los ejemplos elegidos deben ser casos particulares de una situación más general que se plantea en el problema, y en un principio no nos resolverían el problema mismo. (Rafael Conde Caballero, Yolanda Conde Caballero, 2005)

respuesta más general, a través del planteamiento de conjeturas, justificación y comparación usando elementos matemáticos o contenidos vistos previamente.

En cambio, al dar respuesta al reactivo 3a' del problema PC3 presentado en el *post-test*, se evidencia que el estudiante realiza una extracción de palabras clave y una adecuada definición de datos y variables presentadas sobre el enunciado que se encuentran de manera implícita. Logra así, utilizar términos algebraicos (letras como objetos), asignándoles letras **"p"** y **"c"** en sustitución de las palabras *patos* y *conejos*, respectivamente.

$$cantidad\ de\ conejos \ \rightarrow\ C$$
$$cantidad\ de\ patos \rightarrow\ P$$

El estudiante considera datos y condiciones establecidos en las preguntas o reactivos como si fueran entes separados del texto, olvidando que existen relaciones entre los datos entregados por el enunciado y las preguntas. En otras palabras, el estudiante se queda con la información que le parece más relevante del enunciado, no tomando en cuenta el resto de información que pueda existir.

Una de las acciones registradas en el *pre-test,* es el cierre de las operaciones ante la necesidad de dar un resultado numérico aceptable que cumpla la o las condiciones del problema, sin verificar si es acorde al contexto y al texto del problema. Tal acción, evidenció la incapacidad del estudiante de encontrar las pistas literales, impidiendo identificar variables, asignar letras y conexiones entre lenguaje natural y el lenguaje matemático de manera concreta en su desarrollo. Sin embargo, utilizó el lenguaje literal o tablas, como ayuda para exponer condiciones de carácter variable, sin llegar a la generalización[13] para dar respuesta a la pregunta 3b y 3c del problema *PD3*.

La teoría nos menciona que la trasformación de la información literal a sustantivos y cuantificadores numéricos, ayuda a la elección de una operación aritmética, pero en el *pre-test* el alumno no clarifica aseveraciones importantes del enunciado, como que *existen 4 veces más piernas que el número de vacas, e igualmente respecto a los pollos*. Así, para lograr establecer una transición del lenguaje natural al matemático, se debe entender el contenido implícito para convertir el problema en un ejercicio matemático y llegar a la generalización. Ejemplo de aquello, es lo siguiente:

$$4 \cdot x = cantidad\ de\ patas\ de\ vacas$$

$$2 \cdot y = cantidad\ de\ patas\ de\ pollos$$

[13] Son el soporte de la matemática y comienza cuando se intuye un esquema general subyacente. (Rafael Conde Caballero, Yolanda Conde Caballero, 2005)

Donde el factor 4 y 2 se refieren a la cantidad de patas de cada animal y "x" a la cantidad de vacas e "y" a la cantidad de pollos. Es decir, existen 4 veces más patas de vacas que vacas y el doble de patas de pollos que pollos.

Por lo tanto:

$$\underset{total\ de\ patas\ de\ vacas}{4x} + \underset{total\ de\ patas\ de\ pollos}{2y} = total\ de\ patas\ de\ animales$$

En el desarrollo de la solución del problema PC3, se observa que el alumno utiliza diferentes conectivos que se relacionan con tamaños matemáticos[14] para representar información implícita del problema, por ejemplo: **"4x"** y **"2y"**. No obstante, se debe tener cuidado en el hecho de que cuando el alumno escribe tal expresión, entienda que no se refiere a la existencia de **4 conejos,** sino más bien, a 4 veces el número de conejos; mismo caso para los patos. Este hecho, si no se clarifica, puede ser causante de errores en el entendimiento del problema. Posteriormente, identifica las condiciones lógico-matemáticas del problema como: *el total de animales es 21* y *la cantidad de patas en total es 54.* El alumno entiende que, la palabra "*ambos"* es una pista literal que denota *suma* de ambas especies de animales que llevan los hermanos. En el caso del total de patas, existe una combinación de operaciones debido a que existen 4 veces la cantidad de conejos, lo que refiere la operación de *producto,* aplicando el mismo razonamiento para los patos. Ambas combinaciones de operaciones, terminan con el símbolo de una situación de equilibrio ("=") que se debe dar en el caso de las patas y los animales.

Observamos que, tras la implementación del método de instrucción, el alumno establece conexiones entre datos considerando las variables como una representación de una cantidad no determinada, es decir, de manera general. Asimismo, asigna cantidades clasificándolas, apoyándose en la construcción de una tabla, visualizando de mejor manera las relaciones que existen entre los elementos, destacando así, la habilidad de abstracción para la generalización del problema.

Por último, al tener el modelo acorde al problema, el estudiante busca y encuentra la solución a los reactivos. Entrega así, validez a su respuesta, demostrando y respaldando sus argumentos en la particularización, identificando casos que satisfacen las condiciones del enunciado, y determinando una expresión algebraica parar la generalización de la problemática.

[14] Los tamaños matemáticos se refieren a la cantidad de elementos ligados a operaciones matemáticas como el producto.

Análisis de la producción del estudiante E_3 al resolver los problemas PD1 y PC1.

El foco de estos problemas, está en la identificación de la estructura lógica de todo el texto. Para llegar a comprender, se requiere más que el dominio de la lengua: se necesita analizar el contexto del problema.

La siguiente tabla (tabla 34), muestra los problemas *PD1 y PC1*, donde también existe la necesidad de transición del lenguaje natural al lenguaje matemático, y que son presentados en el *pre-test* y *post-test*.

Tabla 34

Problemas PD1 y PC1

Pre-test (problema original)	Post-test (problema similar)
Problema PD1 Una liebre se halla delante de un perro, el cual la persigue; se encuentra 150 pasos por delante de él y mientras la liebre da 6 pasos, el perro da 10. Pido: ¿Cuántos pasos habrá dado el perro cuando coja la liebre?	**Problema PC1** Juan encontró trabajo y gana $30.000 pesos semanales. Seis semanas más tarde Pedro encontró trabajo y gana $45.000 pesos a la semana. ¿Cuántas semanas tardará Pedro en obtener unos ingresos idénticos a los de Juan?

En la siguiente sección, se muestra el análisis de las categorías según el desarrollo proporcionado por el estudiante E_3 en la fase del *pre-test*, de acuerdo al problema *PD1*:

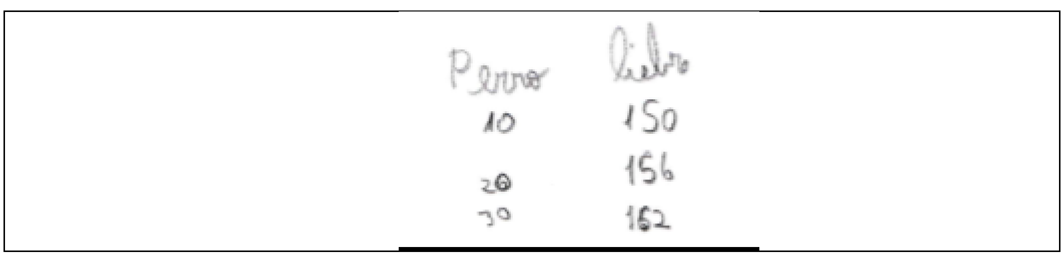


Imagen 12 Respuesta del estudiante E_6 a la pregunta 2a

En la imagen 12, se aprecia que el alumno anota algunos datos que el problema menciona, y representándolos de manera literal en la hoja de trabajo. Para el lenguaje natural, sólo existe mención de los datos relevantes sin asignación de alguna representación. El estudiante, asigna valores particulares a los datos ***perro*** y ***liebre***, estableciendo sumas iterativas entre el número de pasos de cada animal, sin embargo, no identifica información relevante en el texto.

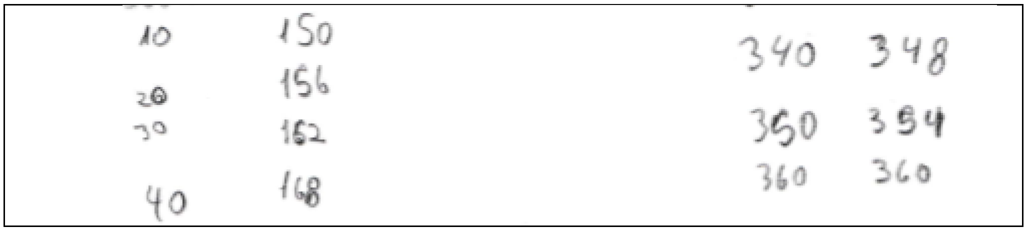


Imagen 13 Valores del estudiante E_3 a la pregunta 2a

En la imagen 13, el estudiante realiza un registro sistemático de valores particulares al asignar la cantidad de pasos. Si bien, en el lenguaje natural realiza una representación numérica de la condición inicial **(**“*se encuentra 150 pasos por delante de él y mientras la liebre da 6 pasos, el perro da 10*”), no logra diferenciar entre estas dos condiciones, es decir, representar la condición inicial en primera instancia (“*Una liebre se halla delante de un perro…se encuentra 150 pasos por delante de él”*) para luego, actuar sobre ella con la razón dada posteriormente (“…*mientras la liebre da 6 pasos, el perro da 10”*). Aquello, es producto de la incapacidad de establecer una conexión entre los lenguajes de manera correcta. El estudiante comete una falta a nivel sintáctico y semántico del problema, debido a las dificultades en la comprensión, la falta de herramientas para lograr dar respuesta al inciso 2a y la poca experiencia en problemas de este tipo.

Aquí se evidencia notablemente, una debilidad al traducir el evento descrito en lenguaje natural a operaciones aritméticas con términos algebraicos, para así representar una expresión general de la situación dada.

A continuación, se muestra el análisis de las categorías según el desarrollo proporcionado por el estudiante E_3 en la fase del p*ost-test*, de acuerdo al problema *PC1*.

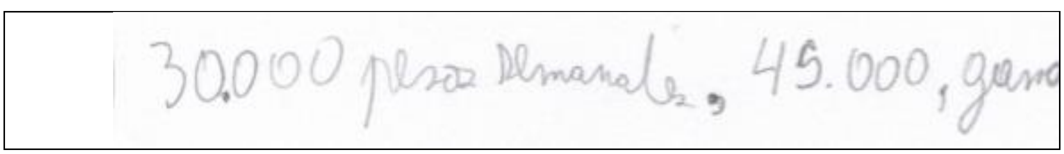


Imagen 14 Registro de palabras clave del estudiante E_3

En la imagen 14, se evidencia una selección de información entre los diferentes elementos, anotando los datos (palabras clave, datos) y las condiciones del problema.

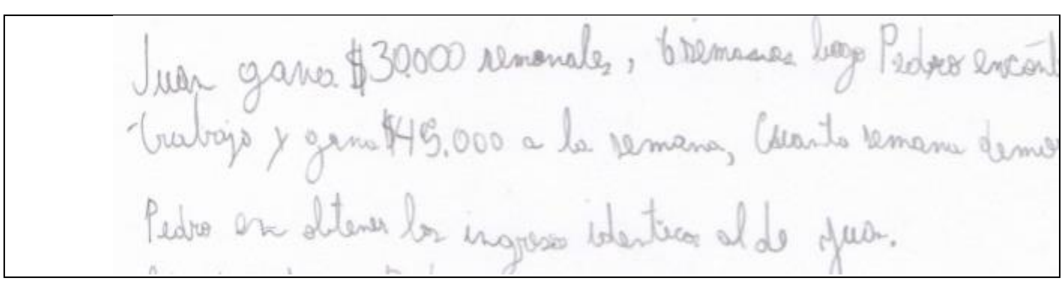


Imagen 15 Registro de descripción del problema por estudiante E_3

En la imagen 15, se aprecia como el estudiante describe el problema con sus propias palabras, anotando los datos que falta por encontrar, y el objetivo del inciso. No obstante, no asigna variables para cada persona. Más bien, para el lenguaje natural, Pedro y Juan estuvieron representados por sus respectivos nombres en el registro tabular producido.

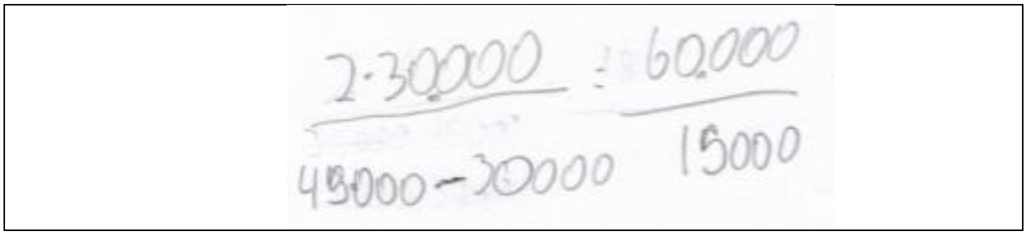
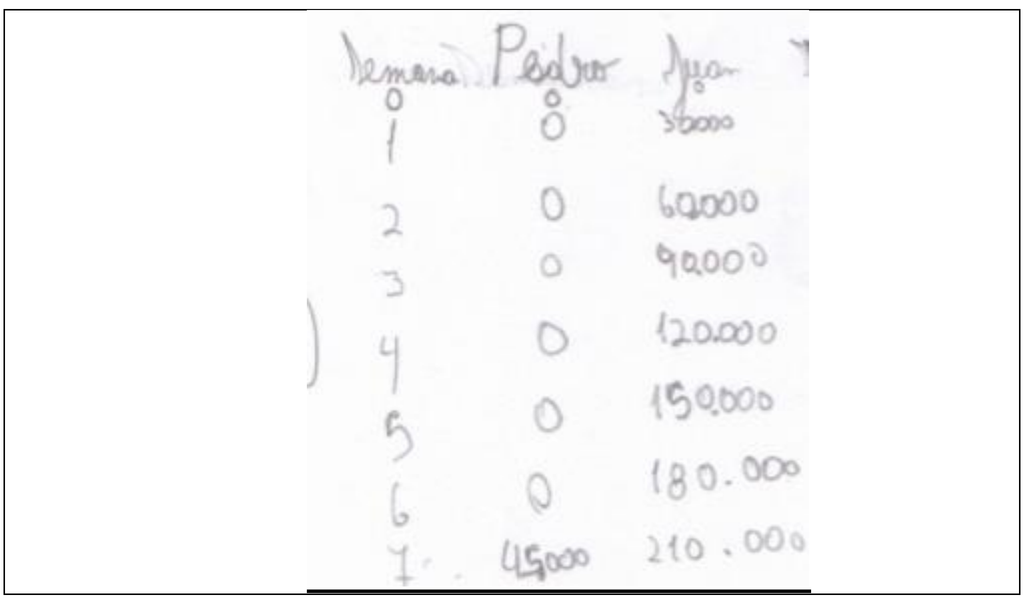


Imagen 16 Representación algebraica del lenguaje natural del estudiante E_3

Luego, en la imagen 16, el alumno organiza el proceso de resolución del problema, mediante la construcción de ecuaciones o relaciones de equivalencia entre datos conocidos del contexto del problema. Tal proceso, evidencia la incorporación de nuevos esquemas a su conjunto de conocimientos previos, ya que logra identificar la relación existente con problemas vistos en la fase II.



Semana	Pedro	Juan
0	0	
1	0	30000
2	0	60000
3	0	90000
4	0	120.000
5	0	150.000
6	0	180.000
7	45000	210.000

Imagen 17 Representación tabular del estudiante E_3

En la imagen 17, el alumno realiza una serie de acciones y de procedimientos matemáticos para resolver el problema: ejecuta operaciones aritméticas y realiza cálculos aislados. A diferencia del inciso 2a del *problema del perro y la liebre*, el estudiante logra establecer una conexión entre los lenguajes de manera correcta y no vuelve a cometer la falta sintáctica y semántica del problema.

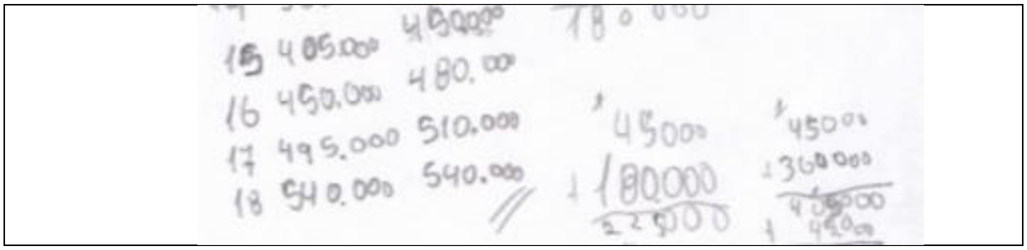


Imagen 18 Validación del estudiante E_3 a la pregunta 2a’

El estudiante verifica la solución obtenida a través de registros tabulares, sin embargo, no comprueba si la solución es aceptable para las situaciones matemáticas y lingüísticas que señala el problema.

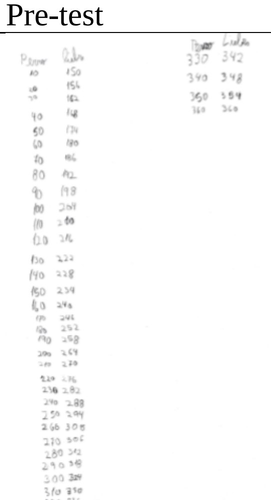
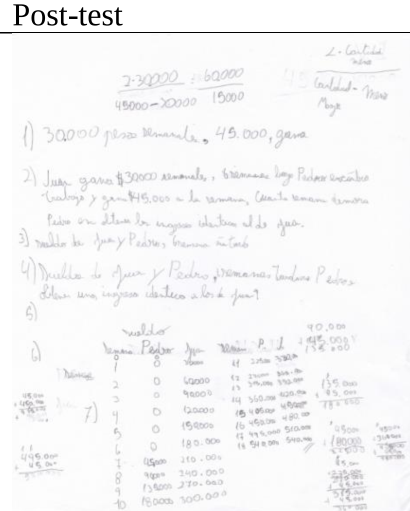
Se observa que, el alumno organiza el proceso de resolución del problema, mediante la construcción de tablas o relaciones entre la información entregada por los datos y las condiciones del problema. Se realizan acciones como: seleccionar una estrategia general del problema, explorar posibles caminos mediante el uso de tablas, cálculos numéricos para resolver el problema y establecer ecuaciones que relacionan a través de operaciones las cantidades antes vistas.

Análisis de la evolución de las respuestas del estudiante E_3 al resolver los problemas PD1 (pre-test) y PC1 (post-test).

La siguiente tabla presenta la producción del alumno E_3 entorno a los problemas *PD1* y *PC1*, donde se evidencia de mejor manera, las acciones y procedimientos matemáticos lingüísticos que utilizó el alumno.

Tabla 35

Producción E_3 de los problemas PD1 y PC1

Pre-test	Post-test
	

El objetivo de estos problemas, era la utilización de procedimientos de solución a través de la igualación de ecuaciones. Se pidió al estudiante particularizar el problema, escribiendo una serie de casos para evidenciar alguna regularidad, para luego, poder expresarla en forma de ejercicio matemático. El estudiante debía relacionar aspectos físicos como también datos relevantes, llegando así, a la construcción de un modelo matemático que generalizara la situación matemática.

En la respuesta de E_3 a la solución del reactivo $2a$ del problema PD1, el alumno utilizó herramientas básicas matemáticas (tablas). Si bien se evidencia que en la traducción del lenguaje natural al lenguaje matemático, establece operaciones básicas como *sumas* iteradas y relaciones entre las cantidades, erró al no considerar que el perro haya dado 10 pasos cuando el conejo está a los 150 pasos. No obstante, las relaciones y cálculos expresados por el alumno, reflejan un intento de la comprensión del contexto lingüístico del problema. El estudiante tuvo dificultades, producto del hecho de no comprender la situación lingüística, donde produjeron obstáculos en la identificación y extracción de palabras clave que ayudan como pistas para la argumentación de la solución del problema.

Al proponer relaciones entre cantidades, el estudiante alcanzó a enunciar, pero no logró construir un modelo adecuado para la situación matemática del problema. Eso debido a que no logró codificar los elementos lingüísticos en elementos matemáticos de manera eficiente, para así obtener nueva información. En el análisis de la frase "*se encuentra 150 pasos por delante de él y mientras la liebre da 6 pasos, el perro da 10*", se puede dividir dicha unidad lingüística en dos proposiciones. La primera referida a la *posición* de los animales, y la segunda referida a la *razón* entre los pasos del perro y conejo.

$$X_{Conejo} = X_{Perro} + 150$$

$$\frac{6}{10} = \frac{PASOS_{conejo}}{PASOS_{perro}}$$

El estudiante se queda sólo con las condiciones que le parece relevantes del enunciado, no teniendo en cuenta el resto. Por ende, debido a que no consideró toda la información existente, no logró llegar a la fase de abstracción respecto de la construcción y uso de un modelo que permita dar solución al problema, sin embargo, hizo aproximaciones a la generalización con la validación de su respuesta, pero cometiendo errores en las operaciones básicas que utiliza. Todo lo anterior le impidió llegar a la respuesta esperada.

En cambio, en el proceso de dar solución al inciso 2a', evidenciamos una transformación entorno a las estrategias utilizadas. El alumno logra, en primera instancia, identificar las partes esenciales y las relaciones lógicas implícitas en el enunciado. Además, resuelve el problema a partir de esquemas previos o experiencias pasadas al texto, reflexionando sobre el problema y elaborando posibles caminos para hallar la solución a éste. Asimismo, utiliza herramientas para comprobar los razonamientos que llevó a cabo en su desarrollo.

Análisis de datos general del grupo participante.

En esta sección, se muestra el análisis de los resultados de la fase I y II. En el *pre-test*, se presenta un análisis cualitativo que responde al propósito de la etapa. Por otra parte, en la fase III, se desarrolla un análisis cualitativo en donde los argumentos que evidencian cada alumno, conforman los datos que se recogieron de este estudio y que serán contrastados con los fundamentos teóricos que orientaron la presente fase.

Los resultados de la implementación del método de instrucción para la resolución de problemas con enunciado verbal, se especificarán en la siguiente sección, mostrando los avances y retrocesos para cada integrante del grupo participante. Para aquello, se utilizarán tablas comparativas y descripción de datos.

Análisis de pre-test

La evaluación correspondiente al *pre-test* de los estudiantes que respondieron, contiene temas relacionados con expresiones matemáticas, tales como: variable como incógnita[15], variable como relación funcional[16], ecuaciones con una o dos variables, sistemas de ecuaciones y expresiones algebraicas.

De la aplicación de la prueba objetiva, en los problemas planteados para la identificación de información relevante, construcción de expresiones algebraicas y elaboración de estrategias, mediante la transición del lenguaje natural al lenguaje matemático, se obtuvieron los resultados presentados en la tabla 36, que muestra por un lado los indicadores de evaluación y por otro lado los estudiantes que respondieron a cada uno de acuerdo a los problemas PD1, PD2 y PD3.

[15]Las variables como incógnitas: Cuando se usan para representar números (u otros objetos) uno de cuyos valores posibles hace verdadera una expresión. La incógnita interviene como un objeto matemático desconocido que se manipula como si fuera conocido (Godino, 2003).

[16]Las variables para expresar cantidades que varían conjuntamente o relación funcional: La relación de dependencia entre variables ocurre cuando el cambio en una variable determina el cambio en la otra (Godino, 2003).

Tabla 36

Comparación de reactivos de problema de la evaluación Pre-test

$\boldsymbol{Indicadores/Problemas}$	PD1	PD2	PD3
Identifica palabras clave	E_6	E_3, E_4, E_6	E_2, E_3, E_4, E_6
Clasifica datos y variables	E_3, E_5	E_3, E_4, E_6	E_2, E_4
Relaciona datos y variables con alguna operación o contenido	E_5, E_6	E_4, E_6	E_2, E_3, E_4, E_5, E_6
Establece algún método	E_3, E_6	E_3, E_4, E_6	E_2, E_3, E_4, E_5, E_6
Da solución al problema	E_5, E_6	E_4, E_6	E_2, E_3, E_4, E_5, E_6
Valida su respuesta	E_6		E_2, E_3, E_5

Para el problema *PD1*, uno de los seis estudiantes, logró identificar y mencionar palabras clave. Dos clasificaron variables y datos que, al establecer relaciones entre la información relevante del enunciado, los llevó a la construcción de un modelo matemático para la búsqueda de una solución, sin embargo, tan sólo un estudiante validó sus respuestas con respuestas coherentes a las situaciones implicadas.

Tabla 37

Resultados de problema PD1

Respuestas/reactivos	*1ª*
Correctas	0
Incorrectas	2
Incompletas	1
En blanco	3

Tres de los seis estudiantes respondieron usando alguna estrategia para dar solución al problema; los tres restantes, no respondieron al reactivo. La estrategia utilizada fue el uso de tablas y casos particulares, donde establecieron sumas de constantes iterativas hasta lograr la equidad de pasos. Al no utilizar letras y objetos que representen un número cualquiera, los estudiantes recurrieron a la aritmética para escribir uno o más casos particulares. Esto se debe a que, al no comprender el problema en su totalidad, no considerar la información relevante en el enunciado (producto de que los alumnos ven al problema como una colección de dato y no como una unidad textual), y además no tener un modelo matemático de la situación del cual apoyarse, contestaron de manera errada sin validar sus respuestas, llegando a soluciones de manera forzada.

En el problema *PD2*, tres estudiantes identificaron palabras clave, tres lograron clasificar variables y datos, dos establecieron relaciones entre la información del relevante del enunciado, sólo dos construyeron un modelo matemático para la solución, tres buscaron una solución acorde a su modelo, y ninguno pudo validar sus respuestas con respuestas coherentes a las situaciones del texto.

Tabla 38

Resultados de problema PD2

Respuestas/reactivos	*2ª*
Correctas	3
Incorrectas	1
Incompletas	1
En blanco	1

En el reactivo $2a$, el rendimiento mejoró un poco. El concepto de variable se evaluó en los alumnos mediante la solicitud al plantear una ecuación que representase una situación dada en lenguaje común, donde la dificultad estaba en comprender bien el juego de palabras que se formaba. Cinco de los seis estudiantes contestaron argumentando sus procedimientos, sin embargo, sólo tres estudiantes dieron una solución correcta. La principal dificultad encontrada es que los alumnos propusieron valores específicos para las variables (en algunos casos presentados de manera correcta), pero algunos de ellos no supieron expresar las regularidades que se encontraban. Asimismo, presentan dificultades a la hora de representar datos en forma algebraica como, por ejemplo, la letra **"x"**.

Para el problema *PD3*, cuatro de los estudiantes identificaron las palabras clave, dos clasificaron variables y datos, cinco establecieron relaciones entre la información del enunciado, la misma cantidad logró construir un modelo matemático para la solución al igual que buscaron una solución acorde a su modelo, pero sólo tres validaron sus respuestas con respuestas coherentes a las situaciones implicadas.

Tabla 39

Resultados de problema PD3

Respuestas/reactivos	*3a*	*3b*	*3c*
Correcta	5	5	4
Incorrecta	1	0	1
Incompleta	0	1	0
En blanco	0	0	1

Se evidencia que, la mayor parte del tiempo destinado a resolver problemas de la evaluación *pre-test*, fue designada al problema *PD3.* Aquel requería un nivel de abstracción complejo, ya que debían generalizar el problema para poder llegar a evidenciar las soluciones, a través de la construcción de un modelo matemático adecuado. El desempeño de los estudiantes fue aceptable considerando el hecho de que, en los reactivos del problema, casi en su totalidad, lograron una argumentación correcta.

Análisis Post-test

A continuación, se presenta la evaluación correspondiente a las respuestas del *post-test* de los estudiantes, que contiene temas relacionados a aspectos similares a los vistos en la evaluación *pre-test*.

De la aplicación del *pre-test*, en los problemas planteados para la identificación de información relevante, construcción de expresiones algebraicas y elaboración de estrategias, mediante la transición del lenguaje natural al lenguaje matemático, se obtuvieron los siguientes resultados.

Tabla 40

Comparación de reactivos de problema de la evaluación Post-test

Indicadores/Problemas	PC1	PC2	PC3
Identifica palabras clave	$E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6$	E_1, E_3, E_4, E_5, E_6	E_1, E_3 E_4, E_5, E_6
Clasifica datos y variables	E_1, E_2, E_4, E_6	E_1, E_3, E_4, E_5	E_1, E_3 E_5, E_6
Relaciona datos y variables con alguna operación o contenido	$E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6$	E_1, E_3, E_4, E_5, E_6	E_1, E_2 E_3, E_4 E_5, E_6
Establece algún método	$E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6$	E_1, E_3, E_5, E_6	$E_1, E_2,$ $E_3, E_4,$ E_5, E_6
Da solución al problema	$E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6$	E_1, E_3, E_4, E_5, E_6	$E_1, E_2,$ $E_3, E_4,$ E_5, E_6
Valida su respuesta	E_1, E_6	E_1, E_3, E_4, E_5, E_6	E_3, E_4, E_6

Para el problema *PC1*, todos los estudiantes lograron identificar y mencionar palabras clave, cuatro clasificaron variables y datos, todos establecieron relaciones entre la información relevante del enunciado, construyeron un modelo matemático para la búsqueda de una solución y buscaron una solución acorde a su modelo. Sólo dos estudiantes validaron sus respuestas con respuestas coherentes a las situaciones implicadas.

Tabla 41

Resultados de problema PC1

Respuestas/reactivos	*1a'*
Correctas	**2**
Incorrectas	**3**
Incompletas	**1**
En blanco	**0**

En comparación a su similar, *PD1*, se logra evidenciar una mejora en la actitud de resolver los problemas: los estudiantes se animan a exponer y argumentar sus ideas. El paso por las categorías favorece la comprensión lingüística y matemática que se debe tener del problema. Los estudiantes relacionan este problema con otros anteriormente vistos en la Fase I y II, explorando el contexto del problema, formulando y construyendo un modelo que se acerque a la situación descrita. Las principales dificultades encontradas en este caso, fueron factores ligados a la comprensión lingüística de la pregunta del texto, pues se sabe que la pregunta es un factor importante para tener presente ya que apunta en la dirección en la que debemos buscar. Ejemplo de ello, es que los estudiantes consideraron el encuentro respecto a Juan, cuando la respuesta correcta era con respecto a Pedro.

En el problema *PC2*, cinco de los estudiantes identificaron palabras clave, tres lograron clasificar tanto variables como datos y establecieron relaciones entre la información del relevante del enunciado, cuatro construyeron un modelo matemático para la solución, cinco buscaron una solución acorde a su modelo y validaron sus respuestas con respuestas coherentes a las situaciones del texto.

Tabla 42

Resultados de problema PC2

Respuestas/reactivos	*2a'*
Correctas	**5**
Incorrectas	**0**
Incompletas	**0**
En blanco	**1**

Para el problema *PD3*, cinco de los estudiantes identificaron las palabras clave, cuatro clasificaron variables y datos, todos establecieron relaciones entre la información del enunciado y lograron construir un modelo matemático para la solución. Sólo tres validaron sus respuestas con respuestas coherentes a las situaciones implicadas.

Se evidencia una mejora notable en la comprensión del enunciado del problema en cuestión. Este es un problema que relaciona tamaños de objetos que no está acompañado de una historia de fondo, además de contemplar un juego de palabras. En este reactivo, existen dos soluciones aceptables que los estudiantes deben averiguar. A pesar de la dificultad, los alumnos supieron comprender el problema de manera óptima en comparación con su similar en la evaluación *pre-test*.

Tabla 43

Resultados de problema PC3

Respuestas/reactivos	*3a'*	*3b'*	*3c'*
Correcta	6	4	3
Incorrecta	0	1	1
Incompleta	0	1	1
En blanco	0	0	1

Este problema es el similar al problema *PD3*, encontrado en el *pre-test*. Se les presentó una situación problemática de la vida real con una historia de fondo, relacionada con variables mediante una expresión lineal, en primera instancia, para el inciso a' y otros dos incisos que pudieron haber respondido utilizando o no el modelo construido en $1a'$. En este problema, se observa un equilibrio en torno al problema de las vacas y pollos en términos de resultados. En la tabla 43 se puede observar que los estudiantes, en la generalización, no tuvieron mayores problemas ya que supieron abstraerse de buena forma, construyendo un modelo adecuado para la situación problemática. Las dificultades encontradas, fueron en torno a la comprensión matemática y lingüística de algunos reactivos, lo cuales no encontraban validación alguna que fuese coherente a las situaciones.

Capítulo 5

En el presente trabajo se analizó el impacto que tuvo el método de instrucción sobre estudiantes de Enseñanza Media General en un establecimiento municipal. En dicho método, los estudiantes procesaron el texto del problema en múltiples etapas, requiriendo de la interpretación de elementos lingüísticos y matemáticos, comprensión de los diferentes contextos del problema, de la construcción de un modelo matemático y comparación entre las diferentes situaciones que se presentan.

Este método, favorece procesos de pensamiento complejo cuando se internaliza completamente, contribuyendo a la conceptualización de los estudiantes. La consciencia por parte del resolutor, de los procesos meta-cognitivos, ayuda en la resolución de problemas y mejora la capacidad de alcanzar los objetivos propuestos (Ilany y Margolin, 2010). El modelo es flexible para los diferentes contextos de poblaciones de estudiantes, y respecto a la naturaleza de los problemas. Sin embargo, el método debe ser explicado a los alumnos sin obviar las diferencias entre el lenguaje natural y matemático, y la posibilidad de transitar de un lenguaje a otro.

En el contexto de la educación preuniversitaria, podemos observar que en la literatura se presentan dos tipos de problemas. En primera instancia, donde la solución es numérica y con significado de la vida real, y por lo tanto, hay una necesidad de entender la situación descrita. En segundo lugar, problemas donde no necesariamente se obtiene una solución numérica, por tanto, el uso del álgebra es pertinente para su resolución.

El trabajo graduado en métodos de solución de problemas de enunciado verbal, utilizando estrategias de problemas previos, permite a los estudiantes enfrentar problemas aún más complejos. Por otro lado, la adaptación del modelo para los diferentes estudiantes, permite a los docentes ayudar a cada estudiante según sus necesidades y foco de dificultad. Por tal razón, el uso reflexivo del modelo de instrucción, ayuda a los docentes tanto en su formación como en la práctica. La comprensión del modelo permitirá al profesor entender que, la conciencia metalingüística, sintáctica y semántica, son necesarias para resolver problemas en matemáticas. Además, la forma en que se redacta el problema y su correspondencia con la realidad, pueden afectar significativamente la capacidad de los estudiantes para resolver los problemas

Impacto en los estudiantes participantes

La presente investigación, en su primera etapa evidenció que los estudiantes enfrentaron dificultades en la resolución de problemas matemáticos debido a la debilidad en la adquisición de habilidades matemáticas críticas y en la comprensión de los enunciados de los problemas propuestos. Se observó que la habilidad para la construcción de algún modelo matemático es la que más problemas presentó para los estudiantes. Si bien demostraron otras habilidades matemáticas, no lograron hacer una conexión efectiva entre los elementos del enunciado, debido a la débil habilidad de transferencia de información.

En aspectos lingüísticos, la extracción de información y el dominio de la habilidad para realizar operaciones numéricas, inhibieron la eficacia del proceso de resolución de problemas. Estas carencias se pueden deber a la incertidumbre, confusión e inexactitud en la toma de decisiones y en la conexión que establecen entre la información que proporciona el texto del problema. Tal como señalan algunos autores, la calidad de las conexiones significativas en los problemas influye en la eficiencia de cada fase en la resolución de problemas.

En general, la mayoría de los estudiantes respondió de forma efectiva tras la implementación del método de instrucción. Sin embargo, cabe mencionar que aspectos de carácter cognitivo en el aprendizaje, como la capacidad de recordar, memorizar y percibir, influyeron en la eficacia de la resolución de problemas.

Con respecto a los objetivos generales planteados al comienzo de esta investigación, se considera que se cumplieron de forma satisfactoria. La implementación del método de instrucción permitió crear nuevas herramientas y estrategias de resolución de problemas de enunciado verbal en los estudiantes a través de la transición en las fases para favorecer la traducción del lenguaje natural al lenguaje matemático.

Lo anterior, permitió responder a la pregunta de investigación: *¿Cómo impacta el método de instrucción para la solución de problemas con enunciado en estudiantes de enseñanza media general chileno?*

En relación con la pregunta de investigación, se considera, con base a los resultados, que el efecto del método de instrucción fue positivo, permitiendo establecer un contraste y desarrollar en los estudiantes relaciones entre el lenguaje natural y matemático, identificando palabras clave, datos y variables y relaciones entre dichos elementos, esto se evidenció al contrastar los procesos de resolución mostrados en el pre - test y post - test. Los estudiantes pudieron explorar de forma visual (a través de la particularización) los comportamientos de los datos y, construir modelos matemáticos de acuerdo con el contexto de cada problema, a través de recursos matemáticos como tablas de valores, diagramas o figuras en las primeras fases del método de instrucción.

Con sustento en estos resultados, se sugiere que el método de instrucción sea aplicado como una metodología de enseñanza en las aulas de clases. Asimismo, ampliando el campo significativo, se sugiere considerar situaciones problemáticas tal como se utiliza dentro de la matemática realista. Sin embargo, cabe señalar que cuando hablamos de "situaciones realistas" se refiere a realizable o imaginable, partiendo de una situación ideal reconocibles en los estudiantes.

En otras palabras, para que los problemas sean significativos para el aprendizaje, se debe tener en cuenta que el contexto de problema depende en gran medida de la experiencia previa de los estudiantes y de sus capacidades para imaginarlo o visualizarlo.

Implementación en aula, pros y contras.

Al concebir la resolución de problemas como una metodología de enseñanza y aprendizaje, la práctica educativa se basa en la comprensión de información más que en el ejercicio de aplicación.

El enfoque de este método, sostiene un modo de entender la educación, basada en la comunicación y en la libertad de expresar ideas, sin embargo, su implementación no es fácil en la Educación Media General. El método exige hacer un trabajo en profundidad de la traducción en los dos sentidos (del natural al matemático y viceversa), entendiendo que la competencia matemática no se puede valorar sólo con las destrezas, sino con el dominio del uso del lenguaje.

Considerando tales dificultades, es posible sortearlas de una forma completamente distinta, a través de la utilización del instrumento de instrucción. Al trabajar de este modo, se capacita al estudiante para que en un futuro logre desarrollar con profundidad las formas de pensamiento matemático que se utilizan en resolución de problemas y en la vida diaria.

Los problemas matemáticos abiertos, dan al alumno la oportunidad de explorar una gama de posibilidades de solución, favoreciendo la flexibilidad de cuestionamientos y generalizaciones para lograr un completo aprendizaje. No obstante, los problemas por sí mismos, no provocan ningún impacto. Ante ello, los estudiantes caen frecuentemente en el fenómeno de selección y realización de operaciones aritméticas o algoritmos utilizando los datos del enunciado de manera mecánica y poco reflexiva, sin considerar las características y limitaciones de la situación real ni la valoración de la respuesta, es decir, si tiene o no sentido.

Por otro lado, es necesario desarrollar la competencia matemática en el aula mediante la interacción y discusión con sus pares para producir e interpretar diversos tipos de información, aplicándolas en situaciones idealizadas o simuladas de la vida cotidiana utilizando el razonamiento matemático para poder resolver problemas. Esto permite al estudiante hacerse consciente de los aspectos que le permite identificar y comprender el papel que desempeña el conocimiento matemático en su mundo circundante provocando un vínculo entre la realidad y la idealización.

Por tal razón, se deben seleccionar ambientes que ilustren, en cierto modo, la presencia de la matemática en la vida cotidiana, proponiendo problemas que incluyan situaciones idealizadas, con el objetivo de que los estudiantes identifiquen aspectos realistas orientados hacia la naturaleza de los modelos, herramientas y operaciones a utilizar para su resolución como a las características y el grado de exactitud de las respuestas a obtener.

Centrar la acción pedagógica en el desarrollo de competencias y habilidades, significa la utilización de la matemática como herramienta al servicio de un problema concreto, asimismo, supone integrar diversas áreas de conocimiento humano. No obstante, esto exige la utilización inteligente de dicha metodología, es decir, la relevancia de esta radica en la construcción de nuevos modelos explicativos y de organización de los conocimientos extra matemáticos.

Además, el carácter formativo de dicha metodología estimula la capacidad de explorar situaciones, identificar y resolver problemas, paralelamente, desarrolla actitudes para representar, comunicar o resolver situaciones.

Como efectos del método de instrucción, el estudiante puede ser capaz de representar, analizar críticamente, explicar y predecir hechos y situaciones, manteniendo un espíritu crítico y la capacidad de producir propuestas incorporando un seguimiento consciente de los procesos que se han producido en construcción de modelos matemáticos ligados a situaciones para favorecer el entendimiento y la comprensión de nuestra realidad.

Por consiguiente, es de gran importancia la gestión y el trabajo del docente, quien debe proporcionar situaciones claras y cercanas que guíen el proceso para el aprendizaje de la resolución del problema, enriqueciendo así, habilidades meta cognitivas que se desean fomentar considerando aspectos relevantes de la realidad. Además, cabe resaltar que, el énfasis debe recaer en la calidad de una gestión planificada, y no tanto en la cantidad de intervenciones del docente.

Conclusión.

El presente estudio, no pretende generalizar los resultados obtenidos a una población más amplia de la descrita, por tanto, los resultados no pueden ser concluyentes. Así, queda abierta la posibilidad de continuidad a esta investigación en el ámbito de la representación para poder responder a preguntas tales como: ¿cómo los estudiantes representan los conceptos matemáticos interna y externamente? ¿qué significados les asocian? ¿qué relaciones estructurales desarrollan? ¿cuáles representaciones tienen una mayor prioridad? ¿cómo conectan las diferentes representaciones de un mismo campo conceptual entre sí y que juego de interacciones se produce entre las representaciones internas y externas? ¿qué cambios se pueden producir dentro de un mismo sistema de representación? Además, se sugiere integrar el uso de tecnologías digitales en la construcción del conocimiento matemático y en la solución de situaciones de carácter real mediante la exploración del entorno subyacente de las escuelas y/o universidades.

Lo que se pretende es ofrecer una ayuda, tanto a los estudiantes como a los profesores, en la resolución de problemas matemáticos, a partir del tránsito del lenguaje natural al lenguaje matemático. Esto, con la finalidad de conocer metodologías que conduzcan a la resolución de problemas, tomando en cuenta el perfil de análisis e interpretación que tienen los estudiantes en esta tarea. Es decir, a contribuir en la exploración y difusión de métodos de resolución de problemas y su impacto en el aprendizaje en los estudiantes que los utilicen.

En primera instancia, se mencionaron los pasos que los estudiantes deben seguir para dar de manera satisfactoria, una solución válida a las situaciones problemáticas, y de esta forma obtener una noción más clara de la relación existente entre los lenguajes natural y matemático.

Luego se observó que, para los estudiantes de Educación Media General, la resolución de problemas presenta una dificultad enorme, comenzando desde la situación lingüística hasta la resolución matemática. Asimismo, se visualizan dificultades al manejar expresiones que involucran cuantificadores numéricos y sustantivos, acentuándose más aquélla al momento de dar paso a la construcción de modelos matemáticos.

El aclarar a los estudiantes sobre el uso apropiado de los lenguajes implicados, según el contexto donde se desenvuelva el contenido matemático, disminuye las dificultades al momento de la búsqueda de un modelo matemático para la solución de un problema.

Como docentes, se debe tener en cuenta que al resolver problemas los estudiantes pueden enfrentar dificultades en cualquier fase, tales como incomprensión del enunciado o extracción de información relevante entre otras. La comprensión de las dificultades que enfrentan los estudiantes en cualquier área y fase en particular es la estrategia para responder a este problema.

Con base en el entendimiento de los lenguajes implicados, se podría proporcionar una línea guía para los profesores y los investigadores para planificar mejores enfoques y métodos de enseñanza efectivos. No obstante, lo anterior exige un cambio a nivel de cultura de aula hacia un modelo que logre vincular el saber matemático informal de los estudiantes y la matemática formal. Asimismo, desde el punto de vista de la formación docente, se crea la necesidad de desarrollar cursos, seminario o capacitaciones de análisis crítico, diseño y aplicaciones de contextos desde el punto de vista de la lógica de lo cotidiano, el sentido común y el potencial de estas situaciones.

El desarrollo de instrumentos de diagnóstico, fases y enfoques son esenciales para ayudar a los estudiantes, lo que resulta en un proceso de enseñanza y aprendizaje en resolución de problemas más efectivo. Sin embargo, se necesitaban más investigaciones basadas en la capacidad de los estudiantes para desarrollar la habilidad para una mayor comprensión sobre este tema. Estos esfuerzos podrían ayudar a los estudiantes a motivarse para gestionar e intentar mejorar sus habilidades en la resolución de problemas matemáticos. La comprensión del problema, el conocimiento, las capacidades personales y el compromiso de los profesores son claves para ayudar al éxito de los estudiantes en la actualidad y en el futuro.

Reflexión pedagógica

La práctica docente representa un reto intelectual, una responsabilidad humana y un compromiso social de la mayor trascendencia para la formación de las nuevas generaciones, en vista a un mejor desarrollo del país.

La docencia es una actividad dinámica, reflexiva e interactiva entre el profesor y el estudiante, que conlleva un proceso instructivo y educativo. El generar una buena intervención pedagógica en el aula de clases, logra que el aprendizaje sea eficiente. Para ello, es importante que el docente, adquiera una actitud creativa, dispuesto a superar las limitaciones que el contexto le presente, generando respuestas que promuevan en el estudiante el desarrollo del conocimiento con sentido crítico, reflexivo, interdisciplinario y entendimientos perdurables.

Los principios y valores que posee el docente, el sentido de pertenencia y el grado de compromiso moral y ético, son esenciales para que el proceso de enseñanza sea efectivo. El rol del docente no se define solamente por su saber o sus competencias, sino esencialmente por aportar pautas de reflexión para pensar y actuar, considerando las relaciones entre el sujeto y el entorno social. El profesor, mediante su práctica, ha de cuestionarse y resolver desafíos de planeación e instrucción como: ¿Qué debemos enseñar?, ¿Qué vale la pena comprender?, ¿Cómo debemos enseñar para comprender?, ¿Cómo pueden conocer estudiantes y maestros lo que los estudiantes comprenden? y ¿cómo pueden desarrollar una comprensión más profunda?

La práctica docente tiene como objetivo primordial que los estudiantes comprendan lo enseñando, lo cuestionen, discutan y adapten para generar oportunidades de desarrollar su creatividad al buscar soluciones alternativas a los problemas, favoreciendo un pensamiento crítico y reflexivo ante los hechos y sucesos del acontecer diario.

BIBLIOGRAFIA

Bibliografía

- Cabrera R., Celia, Campistrous Pérez, Luis (1999), Estrategias de resolución de problemas en la escuela, *Revista Lationamericana de investigación en Matemaática Educativa [en linea]*. 2 (noviembre): [17 de abril de 2018] Disponible en http://www.redalyc.org:9081/home.oa?cid=12096084 ISSN 1665-2436

- Fernández J. (1995), Algunas contradicciones y dificultades de la resolución de problemas en el aula, *Revista SUMA*, 1995, 20, pp. 53-59.

- Gómez-Granell C. (1989), La adquisición del lenguaje matemático: Un difícil equilibrio entre el rigor y el significado, *CL&E*, 3-4, pp. 5-15.
- Greer B. (1997), Modelling reality in mathematics classroom: the case of word problems, *Learning and Instruction*, vol. 7, No. 4, pp. 293-307.

- Hernando H. (2009), El lenguaje verbal como instrumento matemático, *Educación y Educadores*, Vol. 12, No. 3, pp. 13-31.

- Hernández, Fernández, Baptista, (2014) "*Metodología de la investigación"*, 6ta edición.

- Ilany B-S, Margolin B (2010), Language and Mathematics: Bridging between Natural Language and mathematical Language in Solving Problems in Mathematics, *Creative Education*, Vol. 1, No. 3, pp. 138-148.

- García J. (2015), El lenguaje ordinario: la clave para el aprendizaje de las matemáticas basado en problemas, *Actualidades Investigativas en Educación*, Vol. 15, No. 1, pp. 1-24.

- Marquina, Moreno & Acevedo (2013), Transformación del lenguaje natural al lenguaje algebraico en educación media general, *EDUCERE-Investigación Arbitraria*, No 59, pp. 119-132.

- Nesher P. & Hershkovitz S. (2003). The role of schemes in solving word problems. *The Mathematics Educator*, Vol. 7, No. 2, pp. 1-24.

- Palarea M., Socas M. (1995), Sistemas de representación en resolución de problemas algebraicos, *SUMA*, 20, pp. 29-35.

- Tambychik T., Subahan T. (2010), “Students’ Difficulties in Mathematics Problem-Solving: What do they Say?”, *International Conference on Mathematics Education Research (ICMER), ELSEVIER*, pp. 142–151.

- Riffo B. (2016), Representaciones mentales en la comprensión del discurso: del significante lineal al modelo de situación, *Signos*, pp. 205-223.

- Zanocco P. (2006), La Matemática en el Programa “Aprendizaje Inicial de la lectura, escritura y Matemática” (AILEM). *Rev. Pensamiento Educativo*, Vol. 39, nº 2, 2006. pp. 137-152.

- *Creative Education*. (2010). Language and Mathematics: Bridging between Natural Language and mathematical Language in Solving Problems in Mathematics [Figura].

APÉNDICE

Anexos

ANEXO I: Instrumentos de evaluación Pre-test, Post test y hoja de trabajo estudiantil.

Facultad de ciencias
Escuela de Pedagogía en Matemáticas

Nombre: ____________________________ Fecha: ______

Prueba Objetiva dirigida a estudiantes de 4to año de Educación Media General a fin de evaluar los conocimientos relacionados con la transición del lenguaje natural al lenguaje matemático.

Instrucciones Generales:

A continuación, se presentan una serie de ítems, lea cuidadosamente cada uno de los enunciados, si tiene alguna duda pregunte de manera clara y precisa al profesor. Tienes 90 minutos (1 hora y media) para responder de manera acertada la mayor cantidad de ítems y de forma individual.

Instrucciones Específicas:

Son tres ítems de desarrollo. Para la resolución de la prueba, debe aplicar las estrategias que tenga sobre resolución de problemas, construyendo estrategias y relaciones que tengan sentido para la solución y contexto de los problemas. Es importante que des cualquier solución en el desarrollo de los problemas.

Problema 1:

Una liebre se halla delante de un perro, el cual la persigue; se encuentra 150 pasos por delante de él y mientras la liebre da 6 pasos, el perro da 10. Pido: ¿Cuántos pasos habrá dado el perro cuando coja la liebre?

Problema 2:

Escribe una ecuación utilizando la variable C y S para representar el siguiente enunciado:

"En el restaurante Mindy's, por cada cuatro personas que pidieron Cheesecake, hay cinco personas que ordenaron Strudel". Deje C para representar el número de Cheesecake y S para representar el número de Strudels.

Problema 3:

"Antonia visitó una granja y en ella vio vacas y pollos. No pudo recordar cuántas de cada especie había allí, pero recordó que el guía decía que tenían un total de 100 piernas".

a) ¿Cuántas vacas y pollos había allí?
b) ¿Es posible tener el mismo número de patas para las vacas y los pollos?
c) ¿Es posible tener un número impar de pollos?

Universidad de Valparaíso CHILE

Facultad de ciencias

Escuela de Pedagogía en Matemáticas

Nombre: ______________________________ Fecha: ______

Prueba Control dirigida a estudiantes de 4to año de Educación Media General a fin de evaluar los conocimientos relacionados con la transición del lenguaje natural al lenguaje matemático.

Instrucciones Generales:

A continuación se presentan una serie de ítems, lea cuidadosamente cada uno de los enunciados, si tiene alguna duda pregunte de manera clara y precisa al profesor. Tienes 90 minutos (1 hora y media) para responder de manera acertada la mayor cantidad de ítems y de forma individual.

Instrucciones Específicas:

Son tres ítems de desarrollo. Para la resolución de la prueba, debe aplicar los conocimientos que tenga sobre el método de instrucción estudiado en los módulos anteriores. Es importante que des cualquier solución en el desarrollo de los problemas, como también, que sigas las siguientes preguntas:

Problema 1:

Juan encontró trabajo y gana $30.000 pesos semanales. Seis semanas más tarde Pedro encontró trabajo y gana $45.000 pesos a la semana. ¿Cuántas semanas tardará Pedro en obtener unos ingresos idénticos a los de Juan?

Problema 2:

Escribe una ecuación, usando la variable X, que representa la siguiente afirmación: “En esta universidad un cuarto del número de estudiantes, que se redujo en 5, son estudiantes de matemáticas”.

Problema 3:

Juan y Samuel salieron de cacería al campo y encontraron patos y conejos en su camino. Si se sabe que ambos juntaron 21 cabezas y 54 patas.

g) ¿Cuántos conejos y patos había?
h) ¿Es posible que Samuel se haya llevado tantos conejos como juan? Si es así ¿Cuántos se llevaron cada uno?
i) Si Juan se hubiese llevado el doble de patos de lo que se llevó en conejos, ¿Cuántos conejos tendría cada uno?

Universidad de Valparaíso
CHILE

Facultad de ciencias
Escuela de Pedagogía en Matemáticas

Nombre: ______________________________ Fecha: ______

Hoja de trabajo y preguntas guías dirigidas a estudiantes de 4to año de Educación Media General a fin de introducir el método de instrucción y favorecer la transición del lenguaje natural al lenguaje matemático.

1. *Identifica y subraya los datos más relevantes. ¿Qué datos del enunciado son los más importantes?*

2. *Describe el problema con tus propias palabras: ¿Qué te pide el problema? ¿Qué tienes que encontrar? ¿Dónde tienes que llegar?*

3. *¿Qué datos conoces? Anótalos brevemente.*

4. *Anota los datos que tienes que encontrar para solucionar el problema e identifica la relación entre los datos en la pregunta.*

5. *Relaciona las pistas literales o palabras claves en el problema que ayuden a elegir la operación aritmética necesaria para resolver el problema.*

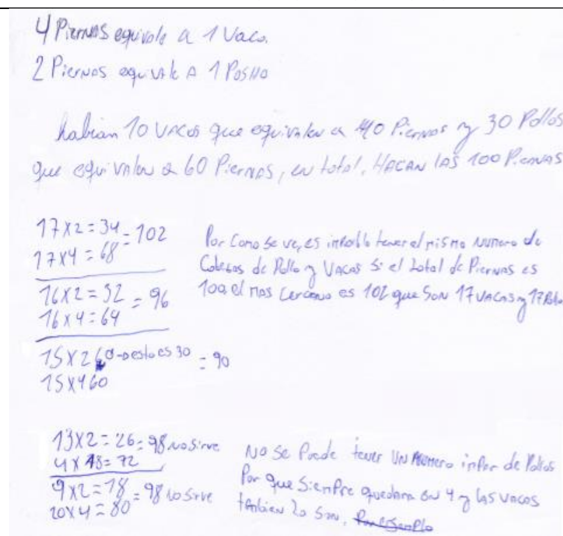
6. *Construye el modelo matemático*

7. *Encuentra la solución del problema*

8. *¿Cómo compruebas que la solución es correcta?*

ANEXO II: Producción de los estudiantes

Estudiante E_1:

PROBLEMA	PRODUCCIÓN ESTUDIANTE
PD1	 4 Piernas equivale a 1 Vaca. 2 Piernas equivale A 1 Posllo habian 10 VACAS que equivalen a 40 Piernas y 30 Pollos que equivalen a 60 Piernas, en total, HACAN LAS 100 Piernas 17X2=34 = 102 17X4 = 68 16X2 = 32 = 96 16X4=64 15X2 60 - desto es 30 = 90 15X4 60 Por Como se ve, es imposible tener el mismo numero de Cabezas de Pollo y Vacas si el total de Piernas es 100 el mas cercano es 102 que son 17 VACAS y 17 Pollos 13X2=26 = 98 no sirve 4 X 18= 72 9X2=18 = 98 lo sirve 20X4=80 No se Puede tener Un numero impar de Pollos Por que Siempre quedara en 4 y las vacas tambien lo son, ~~[illegible]~~
PD2	**NO REGISTRA**
PD3	**NO REGISTRA**

<table>
<tr><td>PC1</td><td>roblema 1)
Identificar Palabras Claves: Pesos, Semanas, trabajos, encuentro identicos, trabajan, identicos. Seis,
datos: $30 lucas, 45 luquitas, Seis de ventaja

datos implisitos: Tiempo de encuentro
datos explisitos: $45000, Seis semanas, $30000

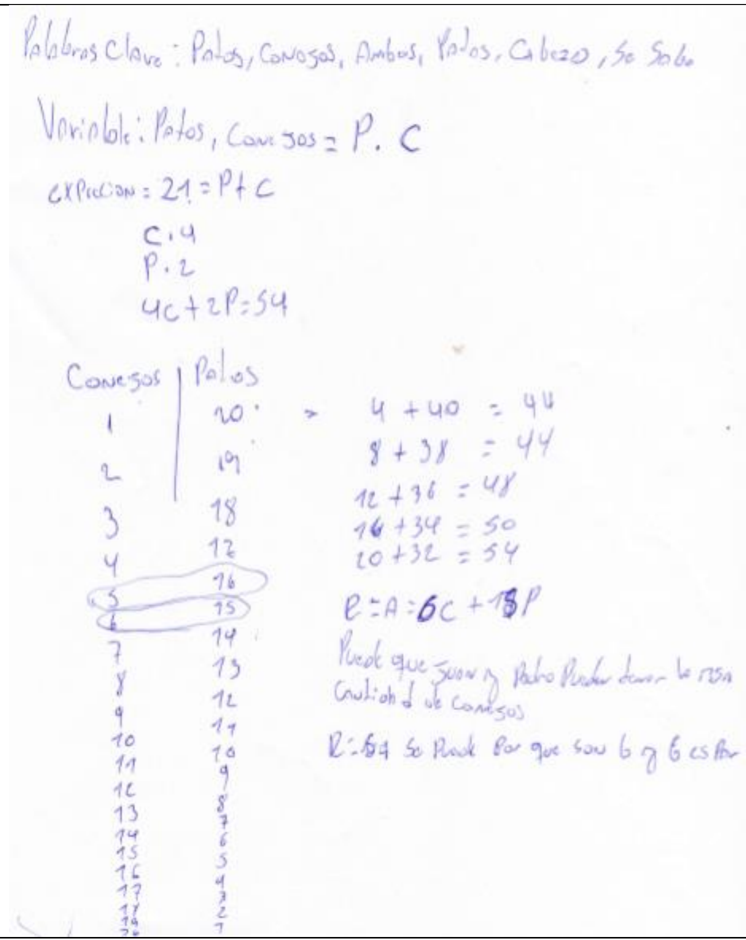
Pedro: A las 18, 18 tienen
Juan: Semanas los $90000

Tiempo de encuentro:
t = +6 semanas 130000 ÷ 15000
6 · 30000 = 180.000 ÷ 15000 = 12</td></tr>
<tr><td>PC2</td><td>Palabras Clave: Usando, Variable, ecuasion, afirmacion, un cuarto, estudiantes, se redujo

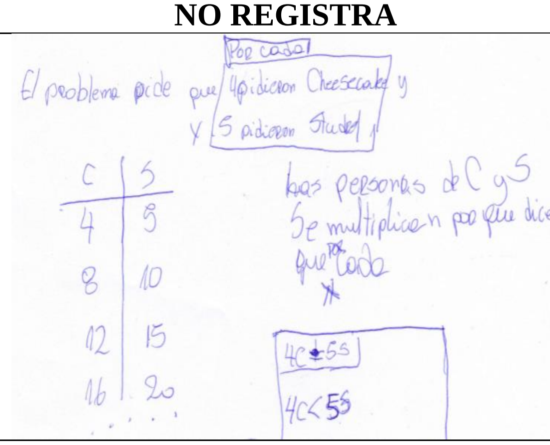
Variable:
datos = X, 5, 1/4

Operation: Se redujo 5, 1/4 fracción | −5

1/4 · X − 5
Por que un Cuarto de ellos Se redujeron, y ellos son X</td></tr>
</table>

PC3	

Estudiante E_2:

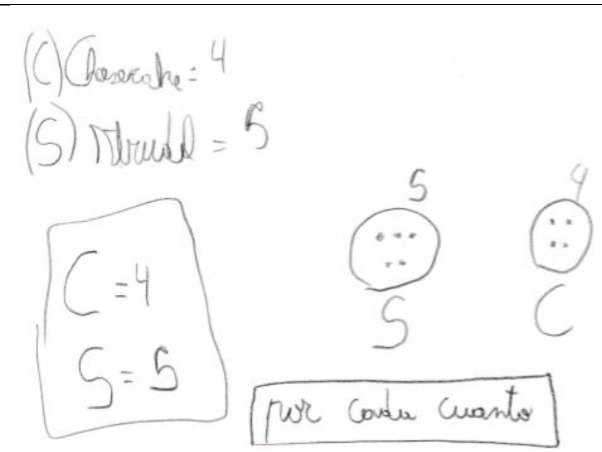
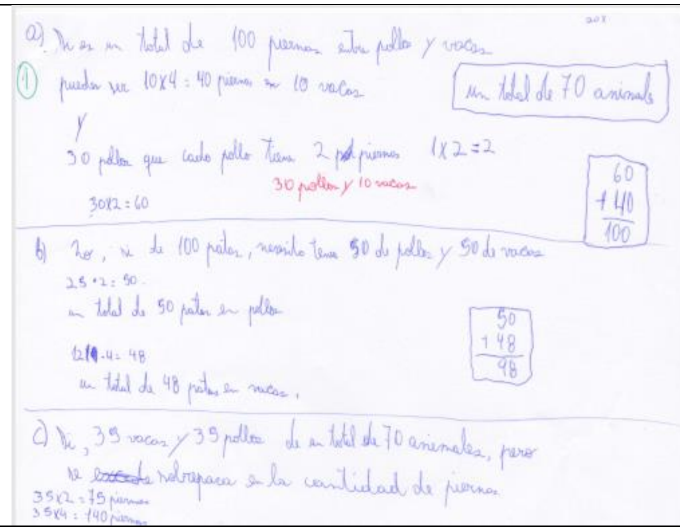
PROBLEMA	PRODUCCIÓN ESTUDIANTE
PD1	**NO REGISTRA**
PD2	

PD3	Problemo $y = 48$ pollos $x = 13$ vacas 1) Vaca = x Pollos = y total = 100 $\boxed{4x + 2y = 100}$ $4 + 2y = 100$ $2y = 100 - 4$ $2y = 96$ $y = \frac{96}{2}$ $\boxed{y = 48}$ $4x + 48 = 100$ $4x = 100 - 48$ $4x = 52$ $x = \frac{52}{4}$ $\boxed{x = 13}$ Habian 48 pollos y 13 vacas No es posible porque 4 no es divisor de dies ya que lo mas cercano $4 \times 12 = 48$ para las vacas y para los pollos $2 \times 50 = 25$ No es posible ya que me sobraria o me quedaria corto ya que las vacas tienen 4 patas y 2 los pollos No es posible ya que los pollos las patas son numeros pares
PC1	2) Cuanto tardara en que tenga los mismos ingresos de Juan Juan: 30 000 por Semana Pedro: 45 000 por Semana 15 000 de diferencia $t = \frac{2 \cdot S_J}{S_p - S_J}$ 30.000S = 45000P J = Juan P = Pedro S = Semanas Juan / Pedro 1 = 30000 / 1 0 2 = 60 000 / 2 0 3 = 90000 / 3 0 4 = 120 000 / 4 0 5 = 150 000 / 5 0 6 = 180 000 / 6 0 7 = 210000 / 7 = 45000 8 = 240000 / 8 = 90000 9 = 270.000 / 9 = 135 000 10 = 300.000 / 10 = 180.000 11 = 330.000 / 11 = 225.000 12 = 360.000 / 12 = 270000 13 = 390.000 / 13 = 315.000 14 = 420.000 / 14 = 360.000 15 = 450.000 / 15 = 405.000 16 = 480.000 / 16 = 450.000 17 = 510.000 / 17 = 495.000 18 = 540.000 / 18 = 540.000
PC2	$R = \frac{1}{4} x \cdot 5 = X$

PC3	21 Cabezas y 54 patas 1 = 20 2 = 19 3 18 4 17 5 16 6 15 7 14 8 13 9 12 10 11 11 10 12 9 13 8 14 7 15 6 a) 15 y 6 Patos Conejos b) 3 conejos Cada Uno c)

Estudiante E_3:

PROBLEMA	PRODUCCIÓN ESTUDIANTE
PD1	Perro [illegible] 10 150 20 156 30 162 40 168 50 174 60 180 70 186 80 192 90 198 100 204 110 210 120 216 130 222 140 228 150 234 160 240 170 246 180 252 190 258 200 264 210 270 220 276 230 282 240 288 250 294 260 300 270 306 280 312 290 318 300 324 310 330 320 336 Perro [illegible] 330 342 340 348 350 354 360 360

PD2	C = 4 S = 5 5 4 S C por cada cuanto
PD3	un total de 100 piernas entre pollos y vacas puede ser 10X4 = 40 piernas en 10 vacas un total de 70 animals y 30 pollos que cada pollo tiene 2 piernas 1X2=2 30 pollos y 10 vacas 30X2 = 60 60 +40 100 si de 100 patas, necesito tener 50 de pollos y 50 de vacas 25·2= 50 un total de 50 patas en pollos 12·4 = 48 un total de 48 patas en vacas, 50 +48 98 35 vacas y 35 pollos de un total de 70 animales, pero sobrepasa en la cantidad de piernas 35X2 = 75 piernas 35X4 = 140 piernas

<table>
<tr>
<td>PC1</td>
<td>Problema 2#

2 · Cantidad menor / Cantidad - Mayor menor

$\frac{2 \cdot 30000}{45000-30000} = \frac{60000}{15000}$

1) 30000 pesos semanales, 45.000, gana

2) Juan gana $30000 semanales, 6 semanas luego Pedro encontró trabajo y gana $45.000 a la semana, Cuanta semana demora Pedro en obtener los ingresos identicos al de Juan.
3) sueldo de Juan y Pedro, 6 semana tarda

4) Sueldo de Juan y Pedro, semanas tardara Pedro obtener unos ingresos identicos a los de Juan?
5)

6) sueldo
<table>
<tr><th>semana</th><th>Pedro</th><th>Juan</th><th>semana</th><th>P.</th><th>J.</th></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>30000</td><td>11</td><td>225000</td><td>330.000</td></tr>
<tr><td>2</td><td>0</td><td>60000</td><td>12</td><td>270000</td><td>360.000</td></tr>
<tr><td>3</td><td>0</td><td>90000</td><td>13</td><td>315.000</td><td>390.000</td></tr>
<tr><td>4</td><td>0</td><td>120000</td><td>14</td><td>360.000</td><td>420.000</td></tr>
<tr><td>5</td><td>0</td><td>150000</td><td>15</td><td>405.000</td><td>450.000</td></tr>
<tr><td>6</td><td>0</td><td>180.000</td><td>16</td><td>450.000</td><td>480.000</td></tr>
<tr><td>7</td><td>45000</td><td>210.000</td><td>17</td><td>495.000</td><td>510.000</td></tr>
<tr><td>8</td><td>90000</td><td>240.000</td><td>18</td><td>540.000</td><td>540.000</td></tr>
<tr><td>9</td><td>135000</td><td>270.000</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>10</td><td>180000</td><td>300.000</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
1 semana
7)

90.000 + 45.000 = 135.000
135.000 + 45.000 = 180.000
45.000 + 180.000 = 225.000
45.000 + 450.000 = 495.000
495.000 + 45.000</td>
</tr>
<tr>
<td>PC2</td>
<td>lema 2

$\frac{1}{4}$ del numero de estudiantes

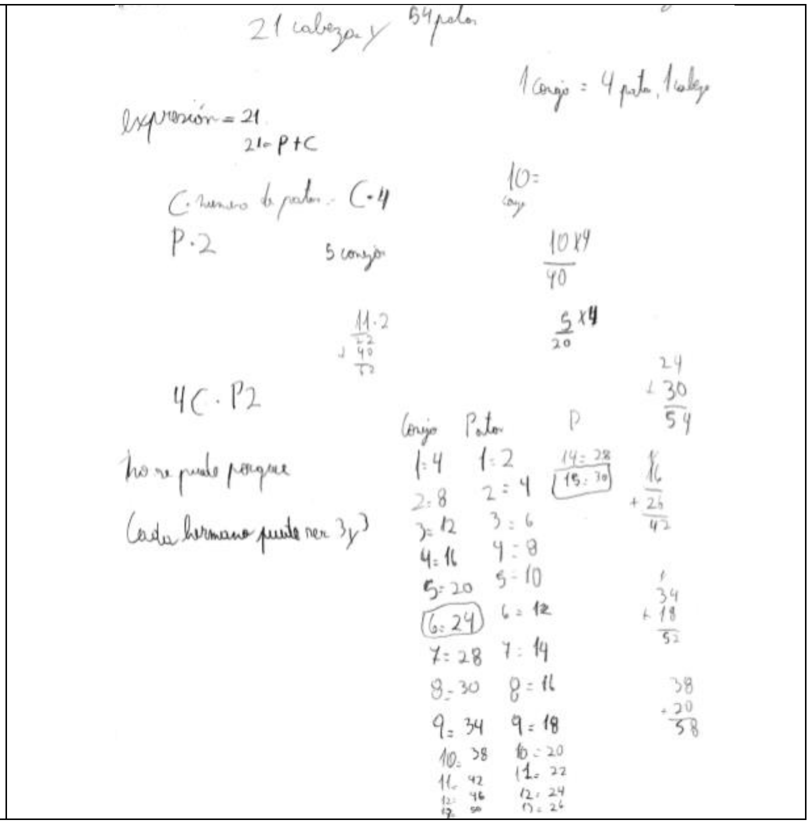
$\frac{X}{5} - 4$

ecuación
$\frac{1}{4} \cdot 5$ se reduce a 5

Datos
Variable x, se reduce, $\frac{1}{4}$

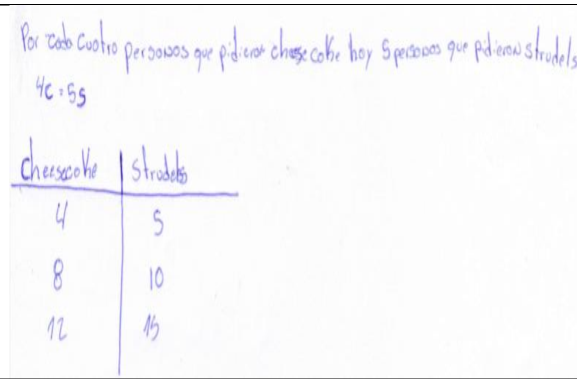
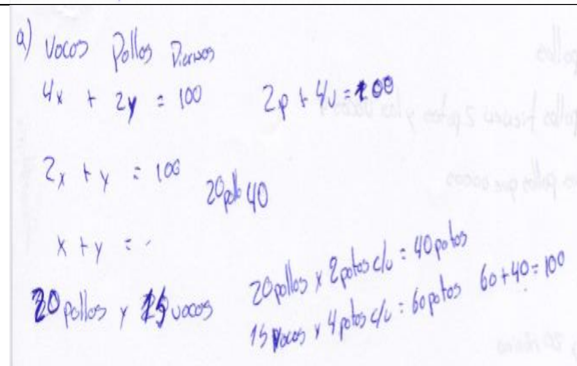
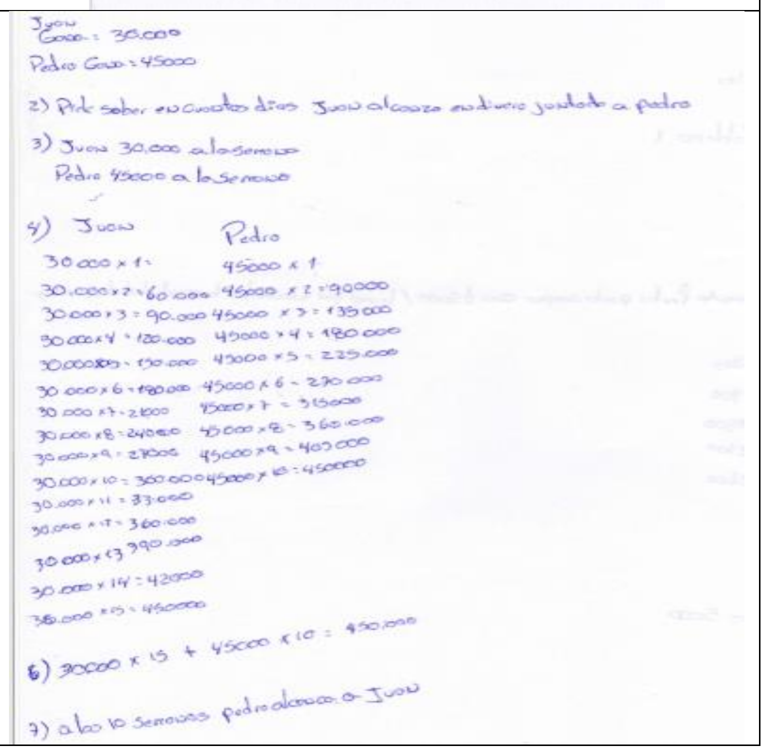
operaciones
se redujo 5, $\frac{1}{4}$ fracción

$\frac{1}{4} \cdot X - 5$</td>
</tr>
</table>

PC3	

Estudiante E_4:

PROBLEMA	PRODUCCIÓN ESTUDIANTE
PD1	**NO REGISTRA**

PD2		 Por cada cuatro personas que pidieron cheesecake hay 5 personas que pidieron strudels 4c : 5s Cheesecake | Strudels 4 | 5 8 | 10 12 | 15
PD3		 a) Vacas Pollos Patos 4x + 2y = 100 2p + 4v = 100 2x + y = 100 20 pollos 40 x + y = · 20 pollos y 15 vacas 20 pollos x 2 patas c/u = 40 patas 15 vacas x 4 patas c/u = 60 patas 60 + 40 = 100
PC1		 Juan Gana = 30.000 Pedro Gana = 45000 2) Pide saber en cuantos días Juan alcanza en dinero juntado a pedro 3) Juan 30.000 a la semana Pedro 45000 a la semana 4) Juan Pedro 30.000 x 1 = 45000 x 1 30.000 x 2 = 60.000 45000 x 2 = 90000 30.000 x 3 = 90.000 45000 x 3 = 135 000 30.000 x 4 = 120.000 45000 x 4 = 180 000 30.000 x 5 = 150.000 45000 x 5 = 225.000 30.000 x 6 = 180.000 45000 x 6 = 270.000 30.000 x 7 = 21000 45000 x 7 = 315000 30.000 x 8 = 240000 45000 x 8 = 360.000 30.000 x 9 = 27000 45000 x 9 = 405 000 30.000 x 10 = 300.000 45000 x 10 = 450000 30.000 x 11 = 33.000 30.000 x 12 = 360.000 30.000 x 13 390.000 30.000 x 14 = 42000 30.000 x 15 = 450000 6) 30000 x 15 + 45000 x 10 = 450.000 7) a las 10 semanas pedro alcanza a Juan

PC2	1) una ecuacion usado la variable x En esta universidad un cuarto del numero de estudiantes que se reduje en 5; son estudiantes de matematicas 2) me pide hacer una ecuacion con la variable X 3) Un cuarto del numero de estudiantes que se reduje en 5 6) ~~$1/4x = 5 = x$~~ ~~$X\ 1/4\ 5 = X$~~ $X \cdot \frac{1}{4} - 5$
PC3	Problema 21 cabezas encontraron patos y conejos 54 patas a) ~~13 conejos y 1 pato = 54~~ 15 patos + 6 conejos = 21 cabezas y 54 patas ~~12 y 3~~ b) si porque son 6 conejos entonces se llevaron 3 c/u c) Juan Pedro Patos Conejos Patos Conejos 6 3 9 3 tendria 3 conejos cada uno

Estudiante E_5:

PROBLEMA	PRODUCCIÓN ESTUDIANTE
PD1	**NO REGISTRA**

<table>
<tr>
<td>PD2</td>
<td>① Escribe una ecuación utilizando las variables C y S para representar el siguiente enunciado:

4 personas piden Cheesecake
5 personas piden Strudel
¿que hay que hacer?
Crear ecuación usando las variables C y S sabiendo que 4 piden Cheesecake y otras 5 piden Strudel.

$C < S = 4 < 5$</td>
</tr>
<tr>
<td>PD3</td>
<td>①
a) Vacas = 16   IIII $4\times4=16=16+16=32=32+32=64$
$4 \times 16 = 64$

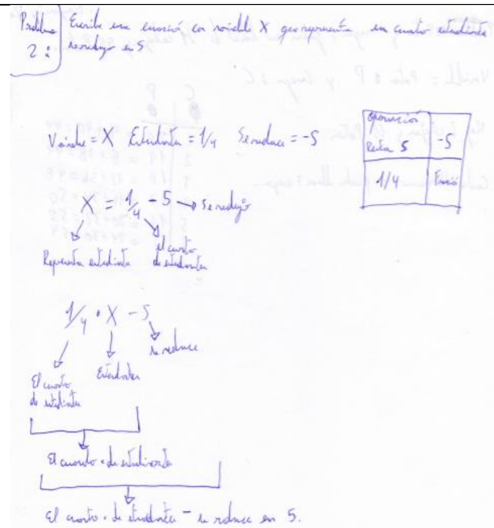
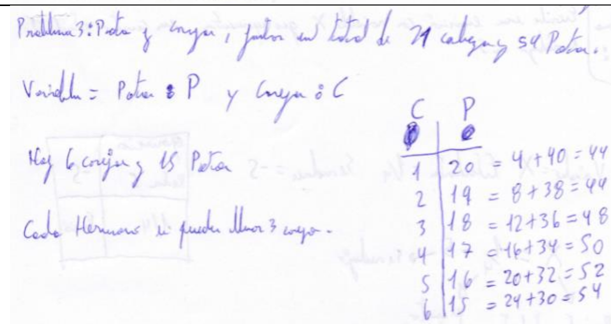
Pollos = 18 $2 \times 18 = 36$
$2\times10=20$ $2\times20=40=40-4=36$

No, ya que quedarían 16 patas y 17 vacas para dar con las 100 patas.

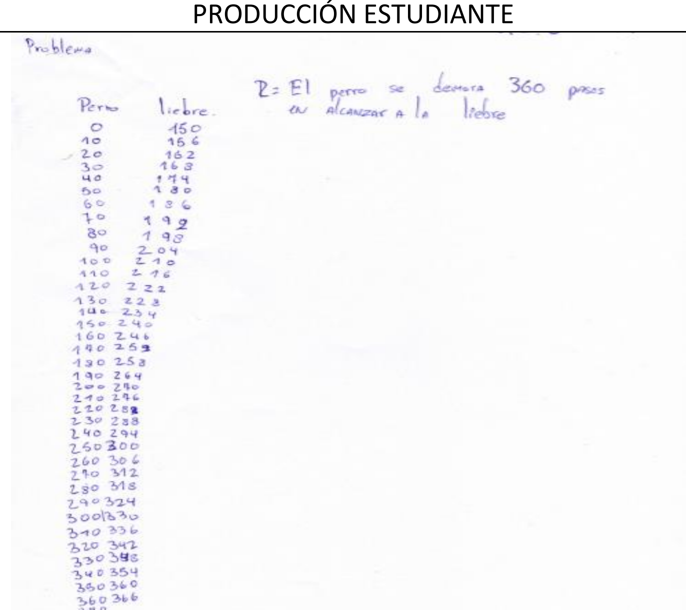
Sí, solamente si le faltan patas a dos vacas, quedarían 17 pollos.</td>
</tr>
<tr>
<td>PC1</td>
<td>Problema 1: Juan trabaja y gana 30.000$. Seis semanas después Pedro encontró trabajo, donde gana 45.000$. ¿Cuántas semanas tardará Pedro en igualar lo de Juan en sus semanas?
R= Juan gana 180.000$ en sus 6 semanas, y Pedro lo pudo igualar en 4 semanas los 180.000$

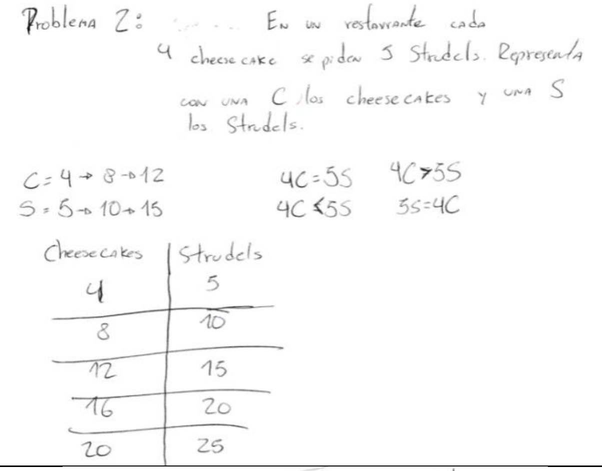
Datos: - Juan gana 30000$ y Pedro 45.000$
- en 6 semanas Juan gana 180.000. Pedro en 4 semanas gana 180.000$

<table>
<tr><th>JUAN</th><th>Pedro</th><th></th><th></th><th></th></tr>
<tr><td>30000</td><td>45.000</td><td>1 SEMANA</td><td rowspan="4">Pedro</td><td rowspan="6">Juan</td></tr>
<tr><td>60.000</td><td>90.000</td><td>2 SEMANA</td></tr>
<tr><td>90.000</td><td>135.000</td><td>3 SEMANA</td></tr>
<tr><td>120.000</td><td>180.000</td><td>4 SEMANA</td></tr>
<tr><td>150.000</td><td></td><td>5 SEMANA</td></tr>
<tr><td>180.000</td><td></td><td>6 SEMANA</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
</table>

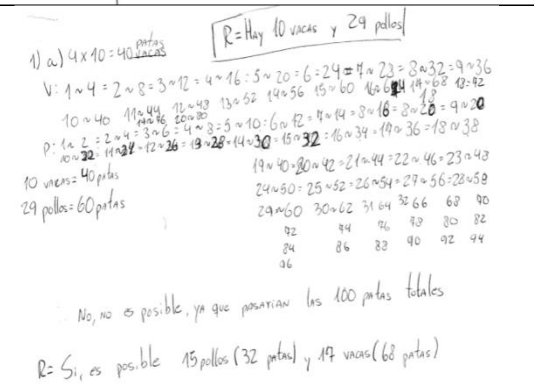
<table>
<tr><td>PC2</td><td>
</td></tr>
<tr><td>PC3</td><td>
</td></tr>
</table>

Estudiante E_6:

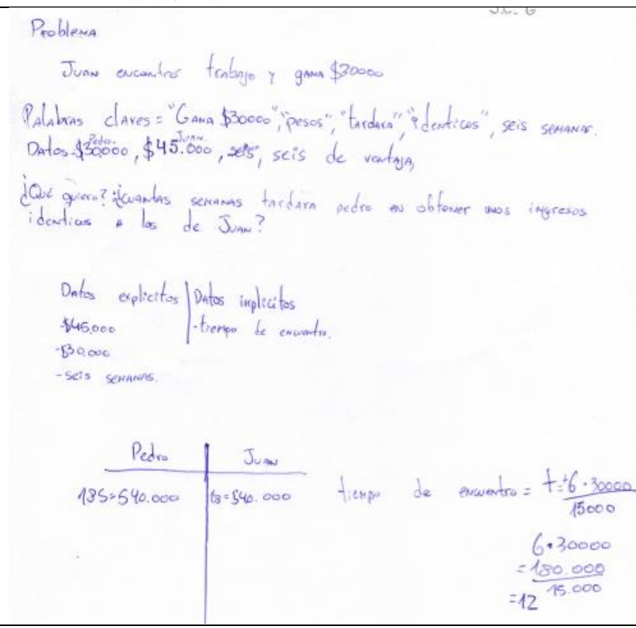
<table>
<tr><th>PROBLEMA</th><th>PRODUCCIÓN ESTUDIANTE</th></tr>
<tr><td>PD1</td><td>
</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>PD2</td><td>
Problema 2: En un restaurante cada 4 cheesecake se piden 5 Strudels. Representa con una C los cheesecakes y una S los Strudels.

C = 4 → 8 → 12   4C = 5S   4C > 5S
S = 5 → 10 → 15   4C < 5S   5S = 4C

Cheesecakes | Strudels
4 | 5
8 | 10
12 | 15
16 | 20
20 | 25</td></tr>
<tr><td>PD3</td><td>
R = Hay 10 vacas y 29 pollos
1) a) 4 x 10 = 40 patas vacas
V: 1 ~ 4 = 2 ~ 8 = 3 ~ 12 = 4 ~ 16 = 5 ~ 20 = 6 = 24 = 7 ~ 23 = 8 ~ 32 = 9 ~ 36   10 ~ 40   11 ~ 44   12 ~ 48   13 ~ 52   14 ~ 56   15 ~ 60   16 ~ 64   17 ~ 68   18 = 72
P: 1 ~ 2 = 2 ~ 4 = 3 ~ 6 = 4 ~ 8 = 5 ~ 10 = 6 ~ 12 = 7 ~ 14 = 8 ~ 16 = 8 ~ 20 = 9 ~ 20   10 ~ 22 = 11 ~ 24 = 12 ~ 26 = 13 ~ 28 = 14 ~ 30 = 15 ~ 32 = 16 ~ 34 = 17 ~ 36 = 18 ~ 38
19 ~ 40 = 20 ~ 42 = 21 ~ 44 = 22 ~ 46 = 23 ~ 48
24 ~ 50 = 25 ~ 52 = 26 ~ 54 = 27 ~ 56 = 28 ~ 58
29 ~ 60   30 ~ 62   31 64   32 66   68   70
72   74   76   78   80   82
84   86   88   90   92   94
96
10 vacas = 40 patas
29 pollos = 60 patas

No, no es posible, ya que pasarían las 100 patas totales

R = Si, es posible 15 pollos (32 patas) y 17 vacas (68 patas)</td></tr>
<tr><td>PC1</td><td>
Problema
Juan encontró trabajo y gana $30000
Palabras claves = "Gana $30000", "pesos", "tardara", "identicos", seis semanas.
Datos $30000 (Pedro), $45.000 (Juan), seis, seis de ventaja,
¿Que quiero? ¿cuantas semanas tardara pedro en obtener unos ingresos identicos a los de Juan?

Datos explicitos: $45.000 - $30.000 - seis semanas.
Datos implicitos: - tiempo de encuentro.

Pedro | Juan
18S = 540.000 | 12 = 540.000

tiempo de encuentro = $t = \frac{6 \cdot 30000}{15000}$
$6 \cdot 30000 = \frac{180.000}{15.000} = 12$</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>PC2</td>
<td>Palabra clave: Escribe, una, ecuación, variable, un cuarto, se redujo, estudiante,
Variable: X
Datos: X , 5 , 1/4
$\frac{1}{4} \cdot X - 5 =$
comprobación: porque la cantidad de estudiantes, 1/4 de ellos se redujo en 5.

<table><tr><td>Operaciones</td><td></td></tr><tr><td>restar
se redujo en 5</td><td>-5</td></tr><tr><td>1/4</td><td>Fracción
fracción</td></tr></table></td>
</tr>
<tr>
<td>PC3</td>
<td>3) Palabras clave: patos, conejos, patas, cabezas, ambos
Variable: Patos(P), conejos(C)
Expresión: P+C
C: número de patas (4)
P: " (2)
$4C + 2P = 54$
R_1 = 15 patos y 6 conejos
R_2 = Cada hermano puede llevarse 3 conejos

<table><tr><td>Conejos</td><td>Patos</td></tr><tr><td>1</td><td>20</td></tr><tr><td>2</td><td>19</td></tr><tr><td>3</td><td>18</td></tr><tr><td>4</td><td>17</td></tr><tr><td>5</td><td>16</td></tr><tr><td>6</td><td>15</td></tr><tr><td>7</td><td>14</td></tr><tr><td>8</td><td>13</td></tr><tr><td>9</td><td>12</td></tr><tr><td>10</td><td>11</td></tr><tr><td>11</td><td>10</td></tr><tr><td>12</td><td>9</td></tr><tr><td>13</td><td>8</td></tr><tr><td>14</td><td>7</td></tr><tr><td>15</td><td>6</td></tr><tr><td>16</td><td>5</td></tr><tr><td>17</td><td>4</td></tr><tr><td>18</td><td>3</td></tr><tr><td>19</td><td>2</td></tr><tr><td>20</td><td>1</td></tr></table></td>
</tr>
</table>