



FACULTAD DE CIENCIAS  
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS

---

---

TRAZAS RELATIVAS DE MARKOV EN EL  
ÁLGEBRA DE YOKONUMA-HECKE

---

---

POR

NELSON DÍAZ GONZÁLEZ

TESIS PRESENTADA PARA OPTAR AL GRADO DE LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

SEMINARIO GUIADO POR

DR. MARCELO FLORES HENRÍQUEZ

VALPARAÍSO  
ENERO DE 2018

(...) Y le enseña un papel en el que están escritos nombres de sabios, filósofos, pensadores, seguidos de una cifra: Kant, 80; Newton, 85; Hume, 65; Rousseau, 66; Schopenhauer, 72; Spinoza, 45; Descartes, 54; Leibitz, 70; y otros muchos, seguidos de su cifra.

– ¿Sabes lo que es esto? Los años que vivieron, hijo, los años que vivieron estos grandes pensadores, para sacar el promedio y hallar mi vida probable. ¿Ves estos papeles de este otro cajón? Proyectos de obras. Yo me decía: «Hasta que las lleve a cabo no me muero». ¡Y no poder tener fe... no poder tener fe en mi inmortalidad! ¿Por qué no he de ser yo el primer hombre que no se muera? ¿Es acaso una necesidad metafísica la muerte?

*Miguel de Unamuno,  
Amor y Pedagogía, 1905.*

# Agradecimientos

Curioso ejercicio el de agradecer por este asunto. A mi entender, estas líneas deben ser aprovechadas en mostrar gratitud por cuestiones de mucha mayor trascendencia y relevancia, estando el logro del objetivo que representa este escrito contenido en tales cuestiones.

En principio sin ustedes, *los míos*, yo no soy; sin el caso de que existan como tales es imposible que yo lo haga en mi forma actual, por tanto, todos quienes dentro de la categoría de *los míos* encuentran asidero son parte de la consumación de esta tarea de años de sacrificios, de desvelos, decepciones y aciertos. Toda una vorágine la travesía de «llegar a ser alguien», igual de vertiginosa que la certeza que tengo de que tal tarea haya sido efectivamente satisfecha; hoy en día es más patente en mí la condición de ser menos alguien que cuando la inocencia iluminaba mis ojos, encandilándome mucho más que ahora y este serpenteante camino recién se asomaba en el horizonte.

Mamita, papá, mamá, tío, hermana, hermana, lía, familia toda. Ustedes son, mucho más de lo que yo puedo siquiera aspirar a ser, los portadores de este rótulo con el que la sociedad me embiste. Mucho más de ustedes que mío es este escrito, este compilado de un poco de lo que he aprendido todos estos años, que tienen ahora en sus manos. Sin ustedes yo no soy yo, sin su aire no respiro, sin los vastos manantiales que su cariño me ofrece el desierto me invadiría, sin las hondas y fértiles raíces que ustedes han esparcido por la vida mis ramas y hojas no asomarían en busca de sol. Ustedes son mi principio y fin, son la tierra y son yo, tanto como yo ustedes. No puedo expresar en palabras cuánto les amo, cuánto les valoro y cuánto les agradezco. Quizás este impedimento se deba a que tales magnitudes permanecen en la inefable inconmesurabilidad.

Felipe, Panchito, Astete, Cangri, Gigi, Basti, Mariana, Peter, Mona, Paulina, amigos. Qué difícil es abrir los brazos y ofrecer la primavera propia para los otros. Tanto es el miedo que por el diferente nos invade, que nuestras substancias han de permanecer ocultas bajo un manto de frialdad, de egoísmo y mansedumbre al poder. De ustedes y con ustedes he aprendido las mejores formas de rebelión a la dominación, los modos más radicales de escapar, aunque sea por un suspiro, de la total captura de la vida y la libertad en la que estamos sumidos. De su recuerdo nace la evocación de hermosos momentos junto a ustedes, como los de aquellas caminatas dominadas por los aires más puros de nuestros cerros, traídos por los vientos marinos que a su paso arropan tiránicamente a las hojas en danza infinita, bocanadas de mar de Valparaíso aglutinadas en nuestros pulmones; de las rocas más filosas, como aquellas que se pasan los

milenios desafiando al osado a que monte sobre sus hombros: antes otros, hoy nosotros; de poderosas mentes de hombres y mujeres dedicando la vida a la liberación del bios, fabricantes de telepatías genéticas portadoras de libertad absoluta, guardadas celosamente a través de los tiempos en lo más nuclear de nuestra especie humana. Ustedes son de infinitas formas rebeldía, y por eso les amo.

A mis maestros, en particular a Flores, Juyumaya y Roa: el primero por mostrar gran confianza en mis capacidades y proponerme este hermoso objeto de estudio, el segundo por ser fuente de gran admiración y ser precisamente el arquitecto de gran parte de tal objeto, y el tercero por ser un docente excepcional, siempre desafiante al intelecto de sus educandos. Mis mentores, quienes con la paciencia del campesino labraron la tierra de la que dispongo; a ellos, quienes del enseñar, del estudiar y del crear todavía más que conocer hacen forma de vida, les agradezco por cruzarse en mi camino y entregarme tanto.

A ti, que te me escurres por entre los dedos, te emplazo: con fervoroso deseo espero saber si me dejarás beber de la fuente de materia gris que esconden tus ojos y de la luz que se asoma desde dentro de tu seno. A ti, cuyo fulgor pardo de debajo de los párpados me esquiva. A ti, te pregunto, ¿de los perfumes de tu espalda no quisieras regalarme?. Tú.

La medida de lo que debo a los míos es mayor que  $\left( \sum_{x \in \mathbb{R}} \#(\mathbb{R} \setminus \{x\}) \right)^{\#(\mathbb{R})}$ .

*Villa Hermosa*  
22 de diciembre de 2017

# Índice general

Introducción	6
<b>I Preliminares</b>	<b>12</b>
<b>1. Nudos y Trenzas</b>	<b>13</b>
1.1. Nudos . . . . .	13
1.1.1. Conceptos elementales . . . . .	13
1.1.2. Equivalencia de nudos y diagramas . . . . .	14
1.2. Trenzas . . . . .	19
1.2.1. Conceptos elementales . . . . .	19
1.2.2. Trenzas Geométricas . . . . .	22
1.3. Correspondencia entre nudos y trenzas . . . . .	28
<b>2. La receta de Jones</b>	<b>32</b>
2.1. Álgebra de Hecke . . . . .	32
2.2. Álgebra de Temperley-Lieb . . . . .	37
<b>II La receta de Jones en el Álgebra de Yokonuma-Hecke</b>	<b>42</b>
<b>3. Álgebra de Yokonuma-Hecke</b>	<b>43</b>
3.1. Grupo de Trenzas Framizadas . . . . .	44
3.2. Álgebra de Yokonuma-Hecke . . . . .	49
3.3. Una base para $Y_{d,n}$ . . . . .	51
<b>4. Invariante polinomial</b>	<b>61</b>
4.1. Trazas relativas de Markov sobre $Y_{d,n}$ . . . . .	62
4.2. La $E$ -condición . . . . .	70
4.3. Soluciones del $E$ -sistema . . . . .	74
4.4. Construcción de la Invariante Polinomial . . . . .	77
<b>Apéndices</b>	<b>80</b>

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	5
<b>A. Grupos Libres y Presentaciones</b>	<b>80</b>
A.1. Conceptos elementales . . . . .	80
A.2. Presentación del Producto Semi-Directo . . . . .	81
<b>B. Grupos de Coxeter</b>	<b>84</b>
B.1. Conceptos elementales . . . . .	84
B.2. La función largo . . . . .	86

# Introducción

A pesar de que el título de este trabajo parece ocultarlo, la motivación para los temas que aquí se tratan yace en la Teoría de Nudos, cuyos objetos de estudio fundamentales son los nudos matemáticos y links (enlaces). Dado un homeomorfismo  $f$  de la circunferencia unitaria  $S^1$  en  $\mathbb{R}^3$ , entenderemos como un nudo a la imagen de  $f$ , mientras que a un link como una unión disjunta de nudos. El problema fundamental de esta teoría, que permanece hasta nuestros días abierto, es el de la clasificación de nudos por isotopía (Ver Sección 1.1). Una aproximación a la resolución del problema la aporta la construcción de invariantes de nudos y links, donde por invariante entendemos a una función  $X$  desde el conjunto de todos los links  $\mathcal{L}$  en un conjunto **Obj** de objetos conocidos y comparables, tal que si dos enlaces son isotópicos, entonces sus respectivas imágenes por  $X$  son iguales.

Los teoremas de Alexander (1932) y Markov (1935) establecen una estrecha vinculación entre los links y las trenzas, las cuales conforman el grupo  $B_n$  de Artin (ver [3] y Sección 1.2 de este trabajo), ya que a través de la clausura de una trenza se obtiene un link (ver Sección 1.3). En particular, el teorema de Markov establece que las clausuras de dos trenzas serán links equivalentes si y solo si tales trenzas están relacionadas bajo ciertas operaciones, denominadas movimientos de Markov. A partir de esta vinculación es natural pensar en representaciones de grupos de trenzas o deformaciones de éstos para construir invariantes polinomiales de links. El grupo de  $n$ -trenzas  $B_n$  tiene la siguiente presentación, debida a E. Artin:

$$B_n = \left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \left| \begin{array}{l} \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i ; \quad \text{si } |i - j| > 1 \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \end{array} \right. \right\rangle$$

Después de los grandes resultados de Alexander y Markov, salvo contadas excepciones, la teoría de nudos padeció varias décadas de escasos avances. Hasta que en 1985 Vaughan Jones, matemático neozelandés, dio a conocer en [13] una nueva invariante polinomial de links, denominada el *Polinomio de Jones*. El procedimiento ideado para su construcción se denomina *la receta de Jones* y tal descubrimiento le valió la medalla Fields en 1990.

El mecanismo consiste aproximadamente en lo siguiente: a partir de la correspondencia entre trenzas y enlaces, podemos pensar en representaciones de grupos de trenzas para obtener una invariante polinomial de links. Esta invariante se construye a partir de una función traza, desde cierta álgebra (de tipo Hecke, por ejemplo) en las funciones racionales bajo ciertos parámetros, esta función se denomina traza de Markov. La

prueba de que tal función es admitida en el álgebra supone la demostración de una base dicha álgebra como espacio vectorial, lo cual se realiza usualmente empleando representaciones tensoriales o elementos de grupos de Coxeter. La invariante polinomial se construye a partir de la compuesta de la representación del grupo de trenzas con la traza de Markov, luego de someter a esta compuesta a un proceso de re-escalación y normalización. El primero de estos consiste en la determinación de condiciones de modo tal que la compuesta respete los movimientos de Markov; el segundo proceso se lleva a cabo con el propósito de que la compuesta evaluada en el nudo trivial (el círculo) resulte el polinomio constante 1. Estos procesos son necesarios para obtener una invariante polinomial de links.

Jones empleó por primera vez este método en [13], representando el grupo de trenzas  $B_n$  sobre el álgebra de Temperley Lieb  $TL_n(\lambda)$ , un cociente del álgebra de Hecke  $H_n(u)$  de tipo A, donde  $\lambda$  y  $u$  son indeterminadas en  $\mathbb{C}$ . La razón para usar estas álgebras será de inmediato comprendida por el lector observando sus respectivas presentaciones:

$$H_n(u) = \left\langle 1, g_1, \dots, g_{n-1} \left| \begin{array}{l} g_i g_j = g_j g_i \quad \text{si } |i - j| > 1 \\ g_i g_{i+1} g_i = g_{i+1} g_i g_{i+1} \\ g_i^2 = 1 + (u - u^{-1}) g_i \end{array} \right. \right\rangle$$

$$TL_n(\lambda) = \left\langle 1, e_1, \dots, e_{n-1} \left| \begin{array}{l} e_i^2 = e_i \\ e_i e_j = e_j e_i \quad \text{si } |i - j| > 1 \\ e_i e_{i+1} e_i = \lambda e_i \end{array} \right. \right\rangle$$

Podemos notar que ambas álgebras poseen relaciones similares a las del grupo  $B_n$ . Cabe señalar que  $H_n(u)$  se considera con una presentación alternativa para probar que  $TL_n$  es un cociente de esta. El álgebra  $TL_n(\lambda)$  admite una representación del grupo de trenzas, permitiendo a partir de su traza de Markov la construcción del polinomio (1-variable) de Jones. En el caso de  $H_n(u)$ , el polinomio obtenido es el polinomio 2-variable HOMFLY-PT, el cual es una generalización del polinomio de Jones. Estas funciones polinomiales se evalúan en la clausura de una trenza, por tanto, en una palabra en los generadores de  $B_n$ , la cual vía representación es mapeada a un elemento en el álgebra ( $H_n(u)$ , por ejemplo). La traza de Markov es una función  $\mathbb{C}$ -lineal desde el álgebra de Hecke en las  $\mathbb{C}$ -funciones racionales bajo ciertos parámetros, de otro modo, es la función encargada de asignar a cada elemento del álgebra un polinomio (ver Capítulo 2 y para más detalles [14]). Para poder evaluar un link en la traza, basta hallar la clausura de la trenza a la cual el link es isotópico, consecuentemente, cada enlace debe estar asociado al menos a una clausura de alguna trenza, lo cual está garantizado por el teorema de Alexander (ver Sección 1.3).

El lector podrá preguntarse: ¿cómo se relaciona esto con el título del presente escrito? Primeramente, ha de mencionarse que el álgebra de Yokonuma-Hecke  $Y_{d,n}(u)$  (también denotada por  $Y_{d,n}$  o simplemente  $Y_n$  si  $d$  es claro) es una generalización del álgebra de Hecke de tipo A, surgida en contextos de grupos de Chevalley y definida por T. Yokonuma en [20]. Considerando el hecho de que el álgebra de Hecke puede ser entendida como un cociente de la  $\mathbb{C}$ -álgebra de grupo de  $B_n$ , por el ideal generado por las relaciones cuadráticas  $g_i^2 = 1 + (u - u^{-1})g_i$ , el álgebra de Yokonuma-Hecke es un cociente de la

$\mathbb{C}$ -álgebra del grupo de trenzas framizadas  $\mathcal{F}_{d,n} := C_d^n \rtimes B_n$ , donde  $C_d$  es el grupo cíclico de orden  $d$ , así, haciendo  $d = 1$  tenemos que  $\mathcal{F}_{d,n} = B_n$ . El *divisor* del último de los cocientes ya mencionados es el ideal generado por otro tipo de relaciones cuadráticas que incorporan los generadores de  $C_d^n$ .

Para definir la presentación de  $Y_{d,n}(u)$  debemos tener en cuenta la presentación de  $\mathcal{F}_{d,n}$ , dada por los generadores  $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}, t_1, \dots, t_n$  y las relaciones

$$\begin{aligned} \sigma_i \sigma_j &= \sigma_j \sigma_i && \text{para } |i - j| > 1, \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i &= \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \\ t_i^d &= 1, \\ t_i t_j &= t_j t_i && \text{para todo } i, j, \\ \sigma_i t_j &= t_{s_i(j)} \sigma_i. \end{aligned}$$

Esta presentación corresponde al producto semi-directo entre el grupo de trenzas  $B_n$   $C_d^n$ . Una explicación más elaborada se puede hallar en el Apéndice A.

Definiendo los siguientes elementos en  $\mathbb{C}\mathcal{F}_{d,n}$

$$e_i := \frac{1}{d} \sum_{r=0}^{d-1} t_i^r t_{i+1}^{-r} \quad (1 \leq i \leq n-1),$$

podemos retomar lo anteriormente mencionado para esclarecer que el *divisor* en el cociente correspondiente a  $Y_{d,n}(u)$  es el ideal bilátero generado por las expresiones cuadráticas

$$\sigma_i^2 - 1 - (u - u^{-1})e_i \sigma_i \quad (1 \leq i \leq n-1),$$

siendo  $Y_{d,n}(u)$  el álgebra definida por la presentación con generadores  $1, g_1, \dots, g_{n-1}, t_1, \dots, t_n$  y relaciones

$$\begin{aligned} g_i g_j &= g_j g_i && \text{si } |i - j| > 1, \\ g_i g_{i+1} g_i &= g_{i+1} g_i g_{i+1}, \\ t_i t_j &= t_j t_i, \\ t_i^d &= 1, \\ t_j \sigma_i &= \sigma_i t_{s_i(j)}, \\ g_i^2 &= 1 + (u - u^{-1})e_i g_i. \end{aligned}$$

En el Capítulo 3 de este texto el lector encontrará una explicación y descripción de la estructura del grupo de trenzas framizadas y su relación con el álgebra de Yokonuma-Hecke.

El tema principal de este texto es la construcción de la traza de Markov en  $Y_{d,n}(u)$ , cuya existencia fue probada por Juyumaya en [15, Teorema 12] en el año 2004. En tal oportunidad el autor demostró la existencia de la traza a través de un isomorfismo de bi-módulos que involucraba elementos tensoriales, mientras que aquí se utiliza el método

de trazas relativas para probar el mismo resultado, empleado por Chlouveraki y Poulain d'Andecy en [6], así como otros autores en publicaciones anteriores. En este escrito los matemáticos mencionados construyen la traza de Markov para otros tipos de álgebras de Yokonuma-Hecke a través de funciones denominadas trazas relativas, que satisfacen las propiedades de la traza de Markov en cada nivel  $n$  (en alusión al  $n$  de  $Y_{d,n}$ ). En nuestro caso, las trazas relativas las constituyen funciones lineales  $\text{tr}_n : Y_n \rightarrow Y_{n-1}$ , definidas en una base hallada para  $Y_{d,n}$ . La función del Teorema 12 de [15] se define como la familia de todas las respectivas compuestas de trazas relativas. El teorema al que se hace alusión es el siguiente:

**Teorema** (Juyumaya, 2004). Sean  $z$  una indeterminada en  $\mathbb{C}$ , y sean  $X_i$ ,  $0 \leq i \leq d-1$  parámetros en  $u$  y  $z$ , con  $X_0 := 1$ . La familia  $\text{Tr} := \{\text{Tr}_n\}_{n \geq 1}$  es una traza de Markov en  $Y_\infty := \bigcup_{n \geq 1} Y_{d,n}$ . Es decir, para todo  $n \geq 1$  y todo  $x, y \in Y_{d,n}$  se tiene que

- a)  $\text{Tr}(1) = 1$ ,
- b)  $\text{Tr}(xg_n) = z\text{Tr}(x)$ ,
- c)  $\text{Tr}(xt_{n+1}^a) = X_a\text{Tr}(x)$ ,
- d)  $\text{Tr}(xy) = \text{Tr}(yx)$ .

Para toda esta construcción el lector debe dirigirse a las secciones 3.2 y 4.1. El teorema anterior corresponde al Teorema 4.4 en este escrito.

En este punto, el título seleccionado para este trabajo cobra sentido: nuestro objetivo es probar la existencia de la traza de Markov sobre el álgebra de Yokonuma-Hecke a través del método de trazas relativas. Lo siguiente viene a finalizar la construcción de la invariante polinomial, para lo cual debemos iniciar un proceso de re-escalación y normalización de la compuesta entre la representación de  $\mathcal{F}_{d,n}$  y la traza de  $Y_{d,n}$ , de tal modo que esta compuesta respete el segundo movimiento de Markov. Que aquello se satisfaga se traduce en la proposición

$$\text{Tr}(\alpha e_n) = \text{Tr}(\alpha)\text{Tr}(e_n), \quad (1)$$

donde  $\text{Tr} : Y_\infty \rightarrow \mathbb{C}(u, z)$  es la traza de Markov y  $\alpha \in Y_n$ . Con el afán de buscar condiciones necesarias para que la ecuación (1) se satisfaga, se obtiene que los parámetros de la traza deben cumplir un sistema no lineal de ecuaciones en  $\mathbb{C}$ , el cual es denominado  $E$ -sistema. La invariante construida en este proceso es la primera y única en su tipo que no se re-escala trivialmente.

La solución del  $E$ -sistema fue obtenida por P. Gerardín, y está contenida en el apéndice de [16], trabajo en el cual Juyumaya y Lambropoulou construyen a partir de esta solución la invariante polinomial sobre el álgebra de Yokonuma-Hecke.

En resumen, en el Capítulo 1 se podrán encontrar: los conceptos elementales de la teoría de nudos, las ideas de diagramas e invariantes y el problema fundamental de esta

teoría (Sección 1.1); los conceptos elementales de la teoría de trenzas, la estructura del grupo  $B_n$ , y su interpretación geométricas (Sección 1.2); en último lugar, las principales definiciones y los resultados que garantizan la correspondencia entre nudos y trenzas, entre ellos, los teoremas de Alexander y Markov y las clausuras de trenzas (Sección 1.3).

En el Capítulo 2 se aborda fundamentalmente la receta de Jones, explicitando los principales y prístinos ejemplos de su aplicación: tanto en el álgebra de Hecke (Sección 2.1) como en el álgebra de Temperley-Lieb (Sección 2.2). Cabe señalar que en ambos casos se muestra tangencialmente la construcción de la respectiva invariante polinomial. Este capítulo y el anterior poseen un carácter preliminar, conformando la primera parte de este trabajo.

La Parte II contiene dos capítulos y suministra lo necesario para exhibir la aplicación de la receta de Jones al álgebra de Yokonuma-Hecke. El Capítulo 3 comienza a abordar la estructura de esta álgebra, para lo cual expone los conceptos y propiedades básicas asociadas al grupo de trenzas framizadas  $\mathcal{F}_{d,n}$ , su respectiva interpretación geométrica y la correspondencia entre trenzas framizadas y links framizados, con resultados análogos a sus pares no framizados (Sección 3.1). Seguido de aquello, el capítulo continúa con una descripción de la estructura del álgebra de Yokonuma-Hecke (Sección 3.2), para luego dar paso a la prueba de una cierta base para  $Y_{d,n}(u)$  que permitirá la construcción de las trazas relativas (Sección 3.3).

El Capítulo 4 contiene la parte restante del proceso ya mencionado, correspondiente a la prueba de la traza, la re-escalación de la compuesta y la definición de la invariante. En la Sección 4.1 están contenidas las trazas relativas y todo lo involucrado en la prueba de la existencia de la traza de Markov sobre  $Y_{d,n}$ ; en la Sección 4.2 buscamos las condiciones necesarias para que se cumpla el segundo movimiento de Markov, lo cual se traduce en la  $E$ -condición; la tercera sección del capítulo aborda la solución general del  $E$ -sistema, presentada originalmente en un apéndice de Gérardin en [16]; la última Sección 4.4 finaliza con la re-escalación y normalización de modo tal que la compuesta de la representación de  $\mathcal{F}_{d,n}$  y la traza de Markov defina una invariante de links framizados orientados.

Los apéndices se han organizado en dos secciones: una primera de grupos libres y presentaciones, en la que se explicita la relación entre  $B_n$  y  $S_n$  y se construye la presentación del producto semi-directo de dos grupos con sus respectivas presentaciones (Apéndice A); y una segunda de grupos de Coxeter, en la que se exponen los conceptos más básicos y las principales definiciones necesarias para introducir la función largo, la cual es empleada en el estudio de ciertas representaciones del grupo de trenzas sobre álgebras de endomorfismos. Los grupos de trenzas, a pesar de no constituir grupos de Coxeter, están relacionados de modo natural con éstos, pues solo es necesario agregar una relación cuadrática a las presentaciones de los grupos de trenzas para que se conviertan en grupos de Coxeter (Apéndice B).

En último lugar, debemos señalar las siguientes observaciones alusivas a cuestiones misceláneas de este trabajo:

- Las presentaciones de  $H_n(u)$  y de  $Y_{d,n}(u)$  se consideran con una versión simplificada de la relación cuadrática. En el caso de  $Y_{d,n}$ , esta presentación fue introducida por Chlouveraki y Poulain d'Andecy en [5], permitiendo reemplazar la relación cuadrática original  $\tilde{g}_i^2 = 1 + (q - 1)e_i + (q - 1)e_i\tilde{g}_i$  (utilizada, entre otros, en [15, 16]) por  $g_i^2 = 1 + (u - u^{-1})e_i g_i$ , donde  $q := u^2$  y  $\tilde{g}_i := g_i + (u - 1)e_i g_i$ . Este cambio implica también una modificación en los elementos inversos de los generadores  $g_i$ .
- Gran parte de los resultados en torno a  $Y_n$  han sido extraídos de [15], publicación en la cual se consideran los subíndices de los generadores de  $\mathcal{F}_{d,n}$  desde 0 a  $n - 1$ , mientras que en este trabajo tales enteros se consideran desde 1 a  $n$ . Esto transforma levemente los elementos  $e_i$  y algunas demostraciones, no obstante, los resultados continúan siendo equivalentes.
- A pesar de no contener resultados originales, son novedosos en el siguiente sentido: lo expuesto en este texto, en particular lo relacionado con la prueba de la traza de Markov empleando trazas relativas, no está hecho antes en publicación alguna para el álgebra de Yokonuma-Hecke de tipo A, aunque puede ser concluido de la construcciones de Chlouveraki y Poulain d'Andecy [6] y Flores, Juyumaya y Lambropoulou [9]. Asimismo, en publicaciones recientes como [1] de 2016, Aicardi y Juyumaya utilizan este método para probar que el álgebra Braids and Ties soporta una traza de Markov, así como Flores, et ál; lo emplean en [9] para el mismo fin en el álgebra Yokonuma-Hecke de tipo B.

**Parte I**  
**Preliminares**

# Capítulo 1

## Nudos y Trenzas

En este capítulo, en su primera Sección, se presentarán los conceptos básicos de la Teoría de Nudos, así como el problema fundamental de dicha teoría: la clasificación de nudos, el cual a la fecha permanece irresoluto. En la Sección 2 nos adentraremos en el estudio del grupo de trenzas y su interpretación geométrica, dando cuenta de la extrapolación de varios conceptos de la Teoría de Nudos a la Teoría de Trenzas. En la Sección 3 abordaremos la equivalencia existente entre los nudos y las trenzas a través de los teoremas de Alexander y Markov. Éstos últimos son la clave en un estudio puramente algebraico de la Teoría de Nudos. Ello ha sido posibilitado justamente por la potente estructura del grupo de trenzas y su estrecha relación con una gran variedad de estructuras algebraicas, tales como las álgebras de tipo Hecke.

### 1.1. Nudos

#### 1.1.1. Conceptos elementales

Intuitivamente, podemos construir un nudo como sigue: tomemos un trozo de cuerda, realicemos en ella un nudo cualquiera (incluido el no hacer nudo alguno), y luego unamos los extremos de la cuerda de tal modo que no sea posible identificar el punto de la unión; de otro modo, esta unión es tal que la cuerda se vuelve continua (digamos, sin cortes); más formalmente, un nudo es una curva cerrada simple en  $\mathbb{R}^3$ . Con el rigor que merece todo objeto matemático, podemos definir un nudo como sigue:

**Definición 1.1.** Sea  $K \subseteq \mathbb{R}^3$ , se dice que  $K$  es un nudo si existe un homomorfismo de la circunferencia unitaria  $S^1$  en  $\mathbb{R}^3$  cuya imagen es precisamente  $K$ .

**Ejemplo 1.1.** Algunos nudos notables

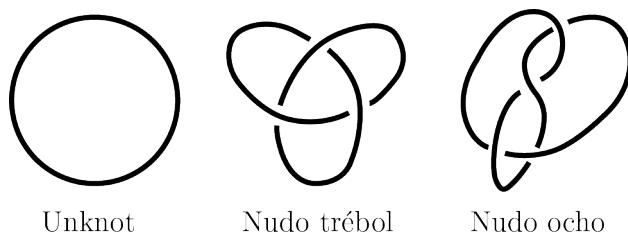


Figura 1.1

**Definición 1.2.** Un link (enlace) es una unión disjunta de nudos. De otro modo, es la imagen por una función continua e inyectiva

$$f : \bigsqcup_{i=1}^m S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^3,$$

donde  $m$  corresponde al número de componentes del link. Al conjunto de todos los links lo denotaremos por  $\mathcal{L}$ .

Note que un nudo es un link con una única componente. En la imagen de la izquierda de la Figura 1.2 se encuentra el Hopf-link, un link de dos componentes; a la derecha, los *anillos de Borromeo*, enlace de tres componentes poseedores de una curiosa propiedad<sup>1</sup>.

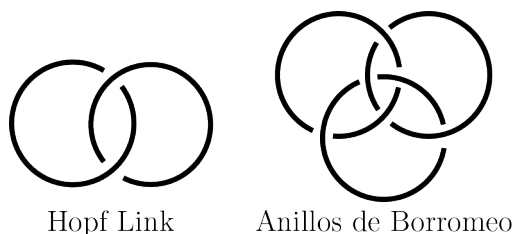


Figura 1.2

### 1.1.2. Equivalencia de nudos y diagramas

**Definición 1.3.** Una isotopía de  $\mathbb{R}^3$  en  $\mathbb{R}^3$  es una familia continua de homeomorfismos  $\{F_s : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid s \in I\}$  tal que  $F_0 = \text{Id} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  e  $I = [0, 1]$ . Una isotopía  $\{F_s\}_{s \in I}$  de  $\mathbb{R}^3$  se dice que es una isotopía de  $K$  en  $K'$  si  $F_1(K) = K'$ .

Diremos que  $K$  y  $K'$  son isotópicos si existe una isotopía de  $K$  en  $K'$ , lo cual denotaremos por  $K \approx K'$ .

**Ejemplo 1.2.** Todos los nudos en la imagen son isotópicos.

<sup>1</sup>Su nombre proviene de la familia noble italiana de apellido *Borromi*, la cual utilizó estos anillos como su principal emblema. La propiedad que los hace tan característicos es que al quitar uno de los tres componentes los otros dos se liberan, formando el 2-enlace trivial. En la historia, esta figura se ha utilizado para simbolizar la fuerza de la unidad, como por ejemplo en la Trinidad Cristiana.

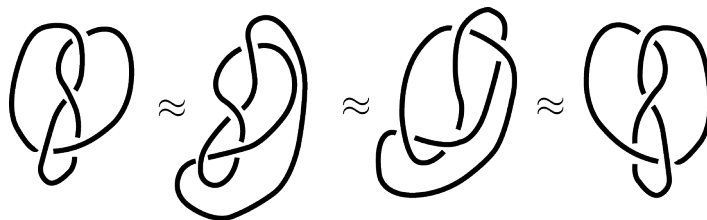


Figura 1.3

De acuerdo con la definición anterior, dos nudos (links)  $K$  y  $K'$  son isotópicos si existe una isotopía de  $K$  en  $K'$ , lo cual denotaremos por  $K \approx K'$ . No es difícil verificar que la relación por isotopía es una relación de equivalencia [17, Sección 2.1].

El problema fundamental de la Teoría de Nudos puede ahora ser descrito en términos más precisos: se quiere determinar la equivalencia por isotopía entre nudos y links. El ilustre físico y matemático británico William Thomson, más conocido como Lord Kelvin, impulsado por la idea de que el modelo del átomo era el de un nudo matemático con vértices rodeados de éter, postulaba que la clasificación de todos los nudos posibles permitiría explicar cómo los átomos absorben y emiten luz. Ello motivó al físico-matemático escocés Peter Tait, junto a Kelvin, a trabajar varios años en la confección de una clasificación de nudos. Dichos resultados fueron recopilados en lo que se denomina la tabla de nudos, la cual tipifica todos los nudos posibles con una cierta cantidad de cruces, de la cual se presenta una porción en la Figura 1.5.

Para comenzar a estudiar la clasificación de nudos o links, es deseable trasladar el problema de  $\mathbb{R}^3$  a  $\mathbb{R}^2$ . Para ello proyectaremos los nudos o links en un plano, guardando cuidado con la posición de las cuerdas en la proyección mediante un etiquetado especial.

**Definición 1.4.** Sea  $K \subset \mathbb{R}^3$  un link. El diagrama del link  $K$ , que denotaremos por  $\mathcal{D}_K$ , se construye como sigue:

- (i) A  $K$  le asociamos una proyección planar, en la cual los únicos cruces admitidos son los dobles puntos como en la siguiente figura:

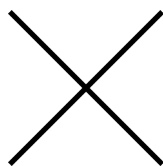


Figura 1.4

Para tal efecto se debe acomodar la posición de la proyección hasta lograr lo deseado.

- (ii) A cada cruce se le debe asignar alguna de las siguientes configuraciones:

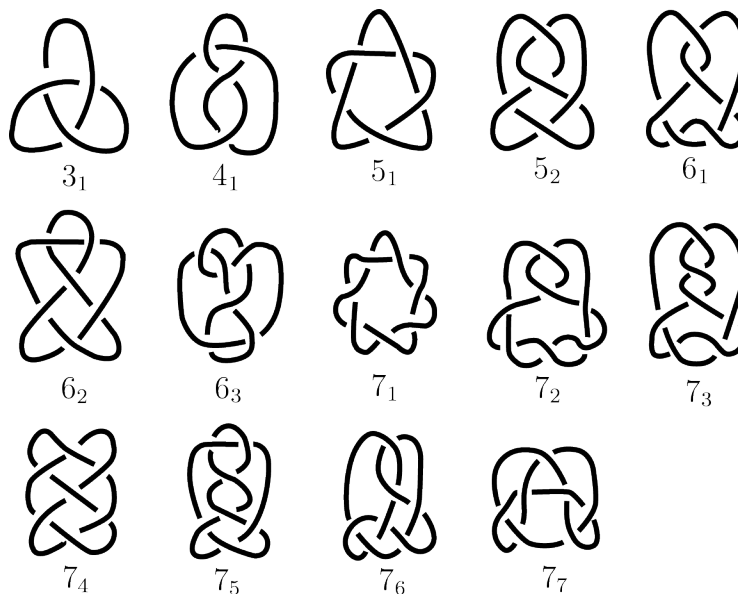


Figura 1.5: La tabla de nudos hasta 7 cruces

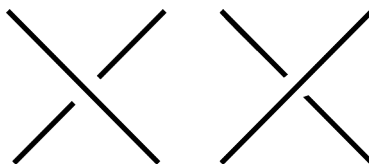


Figura 1.6

Dependiendo de la forma del cruce en el nudo que se ha proyectado, en el sentido de identificar la cuerda que pasa por encima con una línea continua y la de debajo con una línea cortada.

Un nudo o link se dice *manso* si tiene una cantidad finita de dobles puntos o cruces; en caso contrario, diremos que el nudo es *salvaje*. En lo que sigue, trataremos solo con nudos y links mansos.

**Ejemplo 1.3.** El nudo trébol proyectándose en el plano  $XY$

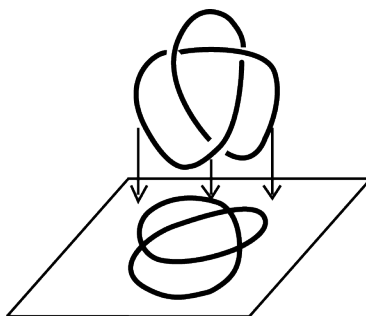


Figura 1.7

Al hablar de la *equivalencia* de dos nudos o enlaces, nos estamos refiriendo indistintamente a la existencia de isotopía entre ellos, en otras palabras, equivalencia o isotopía entre links significan lo mismo. Introduciremos ahora una importante definición para diagramas de links.

**Definición 1.5.** Sea  $K$  un nudo (link). Denotaremos por  $K^*$  su reflejado, el cual es el nudo (link) obtenido a partir de cambiar la configuración de los cruces, en el sentido de invertir la cuerda que pasa por *encima* y la que pasa por *debajo*<sup>2</sup>.

**Ejemplo 1.4.** El nudo trébol no es isotópico al nudo trébol reflejado<sup>3</sup>.

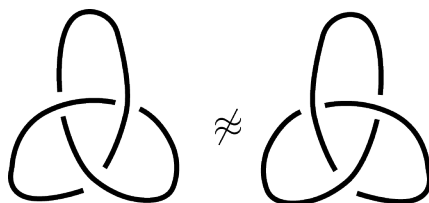


Figura 1.8: Nudo trébol y su reflejado

El lector puede fácilmente notar que basta cambiar en un mínimo sentido la forma en que se proyecta un link para que su diagrama se transforme, de lo cual surge un problema fundamental: ¿qué característica deben poseer dos diagramas de links para que representen dos links equivalentes?. Dicha característica es la equivalencia por Movimientos de Reidemeister, debida al Teorema homónimo postulado por el matemático alemán Kurt Reidemeister en 1927.

**Definición 1.6.** Los siguientes movimientos, reservados para diagramas de nudos o links, se denominan Movimientos de Reidemeister:

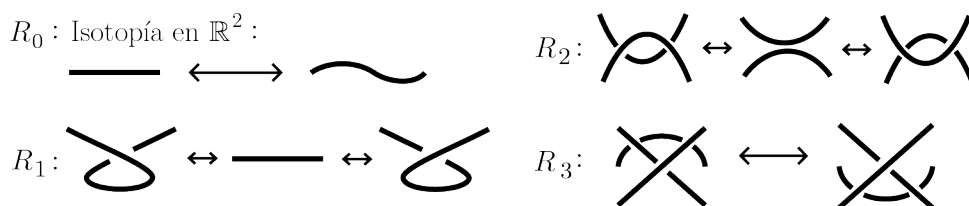


Figura 1.9: Movimientos de Reidemeister para links

<sup>2</sup>En estricto rigor, los diagramas de nudos y links son objetos en dos dimensiones, por lo cual las nociones de *encima* y *debajo* no tendrían cabida. Se subentenderá que nos referimos a la forma de los cruces del link antes de ser proyectado.

<sup>3</sup>Durante décadas no se conoció invariante (ver Definición 1.8) alguna que diferenciara al nudo trébol de su reflejado, de modo que su equivalencia había quedado sin resolver. En 1985 V. Jones postuló en [13] la construcción de una nueva invariante polinomial denominada el polinomio de Jones, a través de representaciones del Grupo de Trenzas (ver Sección 2 de este capítulo) sobre el álgebra de Hecke (ver Capítulo 2 para más detalles)

Diremos que dos diagramas son  $R$ -isotópicos si y solo si uno de ellos se obtiene a partir del otro mediante una secuencia finita de Movimientos de Reidemeister. En la Figura 1.10 se pueden ver nudos  $R$ -isotópicos, con los  $R$ -movimientos explícitamente empleados.

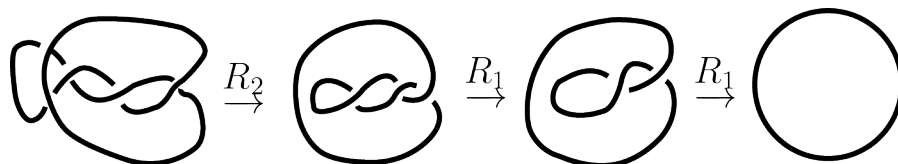


Figura 1.10: El diagrama inicial es  $R$ -isotópico al diagrama del nudo trivial.

**Teorema 1.1** (Reidemeister, 1927). Sean  $\mathcal{D}_L$  y  $\mathcal{D}_{L'}$  los diagramas de los links  $L$  y  $L'$  respectivamente. Entonces,  $L$  es isotópico a  $L'$  si y solo si  $\mathcal{D}_L$  es  $R$ -isotópico con  $\mathcal{D}_{L'}$ .

Con este importante teorema en mano, es posible trasladar el problema de la clasificación de nudos y links en  $\mathbb{R}^3$  a sus respectivos diagramas en  $\mathbb{R}^2$ . Sin embargo, esto no necesariamente implica una simplificación del problema, pues en general no es sencillo hallar una sucesión de movimientos de Reidemeister que transforme un nudo en otro. Por ejemplo, los nudos de la Figura 1.11 se consideraron equivalentes durante años, hasta que en 1973 Perko probó lo contrario.

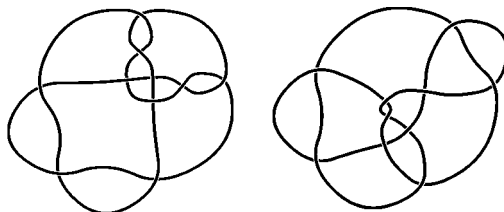


Figura 1.11: El par de Perko.

Siempre y cuando ello no induzca error alguno, llamaremos nudo (link) al diagrama  $\mathcal{D}_K$  de  $K \subset \mathbb{R}^3$  y lo denotaremos de igual modo.

**Ejemplo 1.5.** Retomaremos lo presentado en el ejemplo 2, a saber, la equivalencia entre el nudo 8 y su reflejado explicitando en esta ocasión los  $R$ -movimientos utilizados.

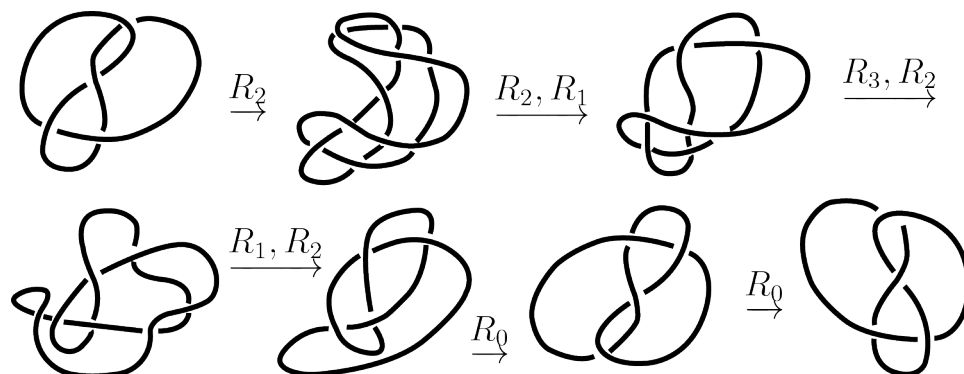


Figura 1.12: El nudo 8 es equivalente a su reflejado.

Un modo de proseguir con la tarea de la clasificación de nudos por isotopía, es estudiar la isotopía por medio de la construcción de invariantes en  $\mathcal{L}$ .

**Definición 1.7.** Una invariante  $X$  sobre  $\mathcal{L}$  es una función de  $\mathcal{L}$  en algún conjunto **Obj** de objetos conocidos, comparables entre sí, tal que

$$K \approx K' \implies X(K) = X(K')$$

Note que si  $X(K) = X(K')$  no necesariamente se concluye que  $K \approx K'$ . De hecho, de la implicancia anterior es más utilizado su contrarrecíproco: si  $X(K) \neq X(K')$  entonces  $K \not\approx K'$ . Un ejemplo de ello es el nudo trébol y su reflejado, los cuales evaluados en el polinomio de Jones arrojan imágenes distintas (ver Sección 2.2).

La razón por la cual el problema de la clasificación de nudos continúa abierto es precisamente porque las invariantes fabricadas no son inyectivas, es decir, existen familias de nudos no isotópicos a las cuales una invariante les asigna el mismo objeto.

## 1.2. Trenzas

### 1.2.1. Conceptos elementales

En esta sección presentaremos un conjunto de objetos que resulta esencial en nuestro propósito. Se trata de las *trenzas*, las cuales guardan una estrecha relación con los nudos y links. A diferencia de estos últimos, las trenzas poseen una potente estructura algebraica, dado que mediante una operación definida geoméricamente forman un grupo. Estudiaremos primero la estructura del grupo de trenzas para luego dar paso a su interpretación geométrica. Las nociones de diagrama y  $R$ -movimientos son también extrapolables al contexto de trenzas.

La idea es trasladar problemas de la Teoría de Nudos, cuyos objetos elementales (nudos y links) no poseen estructura algebraica conocida, hacia el Grupo de Trenzas y otros conjuntos derivados de este. La estructura de grupo de las trenzas juega un rol clave en la construcción de invariantes polinomiales para nudos y links, las cuales son de interés sustancial en este trabajo.

**Definición 1.8.** Sea  $n$  un entero positivo. Definimos el Grupo de Trenzas de  $n$  cuerdas, denotado por  $B_n$ , como sigue:

$$B_n = \left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \left| \begin{array}{l} \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i ; \quad \text{si } |i - j| > 1 \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \end{array} \right. \right\rangle.$$

Las relaciones de la presentación son denominadas *Relaciones de Trenzas*. La presentación anterior es conocida como *Presentación de Artin* de  $B_n$ , pues fue él quien la postuló en 1925 [3].

**Ejemplo 1.6.** Note que  $B_1 = \{1\}$  es el grupo trivial.  $B_2$  no tiene relaciones y posee un solo generador, es decir,  $B_2$  es el grupo libre generado por un solo elemento, el cual es isomorfo a  $\mathbb{Z}$ .

**Ejemplo 1.7.**  $B_3$  es el grupo de trenzas más pequeño no conmutativo. Note que este grupo está generado por los elementos  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ , con la única relación  $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2$ .

Debemos observar que si  $n \geq 1$ , entonces  $B_n$  es un grupo infinito. Además,  $B_i$  puede ser entendido naturalmente como un subgrupo de  $B_{i+1}$  para todo  $i$ . Por lo cual tenemos la siguiente cadena de inclusiones u homomorfismos inyectivos:

$$\{1\} = B_1 \hookrightarrow B_2 \hookrightarrow \dots \hookrightarrow B_i \hookrightarrow B_{i+1} \hookrightarrow \dots$$

Esto proviene del hecho que los  $i - 1$  generadores de  $B_i$ ,  $\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}$ ; están incluidos en  $B_{i+1}$ , así como las mismas relaciones de  $B_i$  se satisfacen en  $B_{i+1}$ . A continuación veremos algunas propiedades básicas del grupo  $B_n$ , las cuales serán utilizadas con posterioridad en el transcurso de este trabajo.

**Proposición 1.2.** Para todo  $i$  se cumple que

- a)  $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i^{-1} = \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i \sigma_{i+1}$ ,
- b)  $\sigma_i \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i^{-1} = \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i^{-1} \sigma_{i+1}$ ,
- c)  $\sigma_i^{-1} \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}^{-1}$ ,
- d)  $\sigma_i^{-1} \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i^{-1} \sigma_{i+1}^{-1}$ .

*Demostración.* Probaremos solamente a), pues las otras tres demostraciones son análogas.

A partir de la relación de trenzas podemos obtener a) como sigue:

$$\begin{aligned} \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i &= \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \\ \sigma_i \sigma_{i+1} &= \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i^{-1} \\ \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i \sigma_{i+1} &= \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i^{-1}. \end{aligned}$$

□

En atención a cuestiones relativas a la estructura algebraica de  $B_n$  y su estrecha relación con las invariantes de nudos, presentaremos una vinculación entre el Grupo de Trenzas y el Grupo Simétrico. Se sabe que el grupo simétrico  $S_n$  tiene presentación

$$S_n = \left\langle s_1, s_2, \dots, s_{n-1} \left| \begin{array}{l} s_i s_j = s_j s_i ; \quad \text{si } |i - j| > 1 \\ s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1} \\ s_i^2 = 1 \end{array} \right. \right\rangle.$$

Donde  $s_i = (i, i + 1)$  es la transposición que envía  $i$  en  $i + 1$  y vice-versa.

Así, para  $s_1, \dots, s_{n-1}$  se satisfacen todas las condiciones del Corolario A.3 (ver Apéndice A). De allí que podemos concluir que existe un único homomorfismo  $\pi_n$  de  $B_n$  en  $S_n$  tal que  $\pi_n(\sigma_i) = s_i$  para todo  $i \in \{1, 2, \dots, n - 1\}$ .

Al ser  $S = \{s_1, s_2, \dots, s_{n-1}\}$  un conjunto generador de  $S_n$ , se tiene que  $\pi_n$  es un homomorfismo epiyectivo.

**Corolario 1.3.**  $B_n$  no conmuta para  $n \geq 3$

*Demostración.* Supongamos que  $B_n$  es conmutativo, es decir,  $\sigma_1 \sigma_2 = \sigma_2 \sigma_1$ . Así, se obtiene que

$$s_1 s_2 = \pi_n(\sigma_1 \sigma_2) = \pi_n(\sigma_2 \sigma_1) = s_2 s_1,$$

lo cual es contradictorio, ya que sabemos que  $s_1 s_2 \neq s_2 s_1$ . □

Con el propósito de ser utilizada en cuestiones posteriores relativas a trenzas, definiremos la función exponente.

**Definición 1.9.** Sea  $n \geq 1$ . La función exponente,  $\exp : B_n \rightarrow \mathbb{Z}$  se define como sigue:

$$\exp(\sigma) := \sum_{j=1}^r \alpha_j,$$

donde  $\sigma = \sigma_{i_1}^{\alpha_1} \sigma_{i_2}^{\alpha_2} \dots \sigma_{i_r}^{\alpha_r}$

**Proposición 1.4.** La función exponente es un homomorfismo sobreyectivo.

*Demostración.* Sean  $\sigma = \sigma_{i_1}^{\alpha_1} \sigma_{i_2}^{\alpha_2} \dots \sigma_{i_r}^{\alpha_r}$  y  $\rho = \sigma_{j_1}^{\beta_1} \sigma_{j_2}^{\beta_2} \dots \sigma_{j_s}^{\beta_s}$ .

Luego, haciendo

$$\gamma_K = \begin{cases} \alpha_k & \text{si } 1 \leq k \leq r \\ \beta_{k-r} & \text{si } r + 1 \leq k \leq r + s \end{cases},$$

tenemos que

$$\begin{aligned}
 \exp(\sigma\rho) &= \sum_{k=1}^{r+s} \gamma_k \\
 &= \sum_{k=1}^r \gamma_k + \sum_{k=r+1}^{r+s} \gamma_k \\
 &= \sum_{k=1}^r \alpha_k + \sum_{k=r+1}^{r+s} \beta_{k-r} \\
 &= \sum_{k=1}^r \alpha_k + \sum_{k=1}^s \beta_k \\
 &= \exp(\sigma) + \exp(\rho)
 \end{aligned}$$

es decir

$$\exp(\sigma\rho) = \exp(\sigma) + \exp(\rho)$$

lo cual prueba que  $\exp : B_n \rightarrow \mathbb{Z}$  es un homomorfismo. Más aún, dado  $a \in \mathbb{Z}$  se tiene que

$$\exp(\sigma_1^a) = a,$$

luego  $\exp$  es un homomorfismo epiyectivo.  $\square$

### 1.2.2. Trenzas Geométricas

Como mencionamos en el inicio de esta sección,  $B_n$  y toda su estructura goza de una interpretación geométrica. En adelante, denotaremos por  $I$  al intervalo  $[0, 1]$ .

**Definición 1.10.** Fijemos  $P_i = (i, 0, 1)$  y  $Q_i = (i, 0, 0)$  puntos en el espacio  $\mathbb{R}^3$ , donde  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Una  $n$ -trenza geométrica es un conjunto de arcos simples orientados  $a_1, a_2, \dots, a_n$  tales que  $a_i$  conecta  $Q_i$  con  $P_{\pi(i)}$ , donde  $\pi \in S_n$ , tal que se cumplen las siguientes condiciones:

- ( i ) Cada arco de la  $n$ -trenza geométrica intersecta en un solo punto al plano  $z = t$ , para todo  $t \in I$ .
- ( ii ) Para todo  $t \in I$ , los arcos  $a_1, a_2, \dots, a_n$  intersectan al plano  $z = t$  en  $n$  puntos distintos.

Las dos condiciones anteriores pueden ser interpretadas, en términos geométricos, como que las  $n$  cuerdas *no se devuelven, no se intersectan ni se estancan*.

**Ejemplo 1.8.** Representación gráfica de dos trenzas geométricas. A la izquierda, una 4-trenza; a la derecha, una 3-trenza.

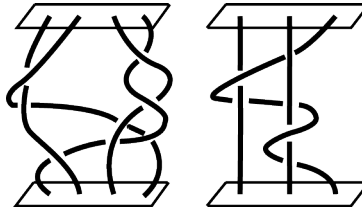


Figura 1.13

De un modo análogo que con los nudos, diremos que dos  $n$ -trenzas geométricas  $b_1$  y  $b_2$  son isotópicas si y solo si podemos obtener  $b_1$  a partir de una deformación continua de  $b_2$ . En términos formales tenemos la siguiente definición:

**Definición 1.11.** Diremos que dos  $n$ -trenzas geométricas  $b_1$  y  $b_2$  son isotópicas si existe una función continua  $F : b_1 \times I \rightarrow \mathbb{R}^2 \times I$  tal que para todo  $s \in I$ , la función  $F_s : b_1 \rightarrow \mathbb{R}^2 \times I$  dada por  $F_s(x) = F(x, s)$  para todo  $s \in b_1$ , es una inclusión cuya imagen es una  $n$ -trenza geométrica, donde  $F_0 := \text{Id}_{b_1}$  y  $F_1(b_1) = b_2$ . De otro modo, la función  $F$  y la familia  $\{F_s\}_{s \in I}$  es llamada isotopía de  $b_1 = F_0(b_1)$  en  $b_2 = F_1(b_1)$ .

Note que esta definición es perfectamente extrapolable a la dada para isotopías de links.

**Proposición 1.5.** La relación  $\approx$  por isotopía de  $n$ -trenzas geométricas es una relación de equivalencia.

*Demostración.* Considerando la isotopía  $F_s = \text{Id}_b$  para todo  $s \in I$ , se tiene entonces que la familia  $\{F_s\}_{s \in I}$  o la función  $F : b \times I \rightarrow \mathbb{R}^2 \times I$  es una isotopía de  $b$  en  $b$ , de lo cual  $b \approx b$ .

Ahora bien, si  $b_1$  y  $b_2$  son dos  $n$ -trenzas geométricas tales que  $b_1 \approx b_2$ , entonces existe una isotopía  $F$  que mapea  $b_1$  en  $b_2$ .

Definamos para todo  $x \in b_2$  y  $s \in I$  la función

$$G(x, s) := F(F_1^{-1}(x), 1 - s),$$

la cual es una isotopía de  $b_2$  en  $b_1$ , esto porque

$$\begin{aligned} G_0(b_2) &= F_1(b_1) = b_2 \quad y \\ G_1(b_2) &= F_0(b_1) = b_1 \end{aligned}$$

Es decir,  $b_2 \approx b_1$ . Por lo tanto,  $\approx$  es simétrica.

Por último, si  $b_1$ ,  $b_2$  y  $b_3$  son tres  $n$ -trenzas geométricas tales que  $b_1 \approx b_2$  y  $b_2 \approx b_3$ , entonces existen isotopías  $F$  y  $G$  que deforman  $b_1$  en  $b_2$  y  $b_2$  en  $b_3$  respectivamente.

Para todo  $x \in b_1$  y  $s \in I$ , definamos la función  $H$  como sigue:

$$H(x, s) := \begin{cases} F(x, 2s) & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ G(F_1(x), 2s - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases},$$

la cual es una isotopía de  $b_1$  en  $b_3$ , puesto que

$$H_0(b_1) = F_0(b_1) = b_1 \quad \text{y} \quad H_1(b_1) = G_1(b_2) = b_3.$$

De lo cual  $b_1 \approx b_3$  y, consecuentemente,  $\approx$  es transitiva. Teniendo así que  $\approx$  es una relación de equivalencia.  $\square$

A partir de este resultado podemos construir el conjunto de las clases de equivalencia por isotopía. A cada clase de equivalencia se le denomina trenza geométrica de  $n$  cuerdas. El conjunto de clases de equivalencia será denotado por  $\mathcal{B}_n$ .

**Definición 1.12.** Para una  $n$ -trenza  $b$ , definiremos su diagrama  $\mathcal{D}_b$  como sigue:

- ( i ) Proyectamos la  $n$ -trenza geométrica  $b$  en el plano  $\mathbb{R} \times \{0\} \times I$ , el cual identificaremos por  $\mathbb{R} \times I$ .
- ( ii ) Cada punto de  $\mathcal{D}_b \subset \mathbb{R} \times I$  pertenece a lo más a dos cuerdas. Esto quiere decir que los únicos cruces admitidos son los dobles puntos.
- ( iii ) Representaremos gráficamente los dobles puntos del siguiente modo: la cuerda que pasa por debajo debe identificarse con una línea cortada cerca de la intersección; la que pasa por encima la identificaremos con una línea continua.

**Ejemplo 1.9.** Diagrama de una 4-trenza

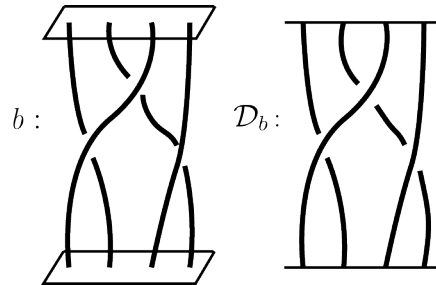


Figura 1.14

**Definición 1.13.** Al igual que para diagramas de links, se definen las siguientes isotopías de diagramas de trenzas denominadas Movimientos de Reidemeister  $R_0$ ,  $R_1$  y  $R_2$  dados por:

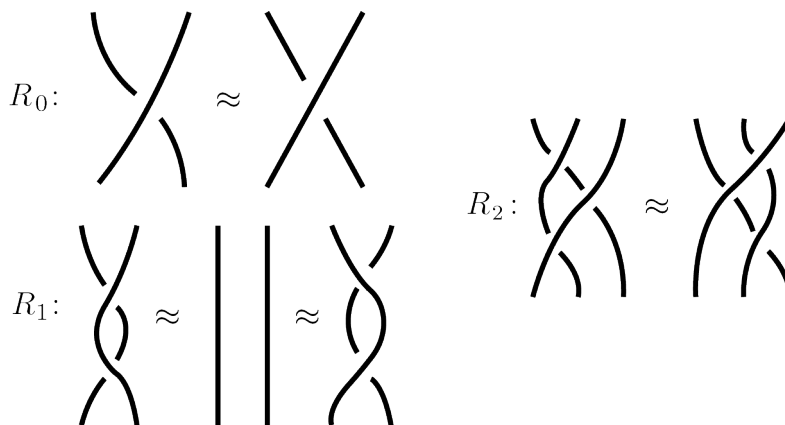
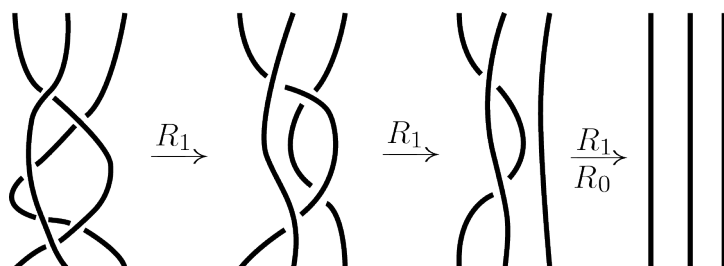


Figura 1.15

**Definición 1.14.** Diremos que dos diagramas de trenzas son  $R$ -isotópicos si y solo si uno puede ser obtenido a partir de una aplicación de finitos Movimientos de Reidemeister sobre el otro.

**Teorema 1.6.** Dos diagramas de trenzas representan la misma trenza geométrica si y solo si son  $R$ -isotópicos [17, Teorema 1.6].

**Ejemplo 1.10.** Las siguientes trenzas son isotópicas. Se explicitan aquí los movimientos realizados para obtener una a partir de la otra.



Como nuestro objetivo es justamente probar que  $B_n$  tiene interpretación geométrica, debemos definir un producto entre  $n$ -trenzas para luego extenderlo naturalmente a la partición  $\mathcal{B}_n$ .

**Definición 1.15.** Dadas dos  $n$ -trenzas geométricas  $b_1, b_2 \subset \mathbb{R}^2 \times I$ , definimos el *producto por concatenación* de  $b_1$  con  $b_2$  como sigue:

$$b_1 b_2 := \begin{cases} (x, y, 2t) \in b_1 & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (x, y, 2t - 1) \in b_2 & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

De modo intuitivo, este producto reduce a la mitad del tiempo que se recorren  $b_1$  y  $b_2$ , para luego copiar  $b_2$  bajo  $b_1$ .

**Ejemplo 1.11.** El producto de las dos 4–trenzas  $b_1$  y  $b_2$

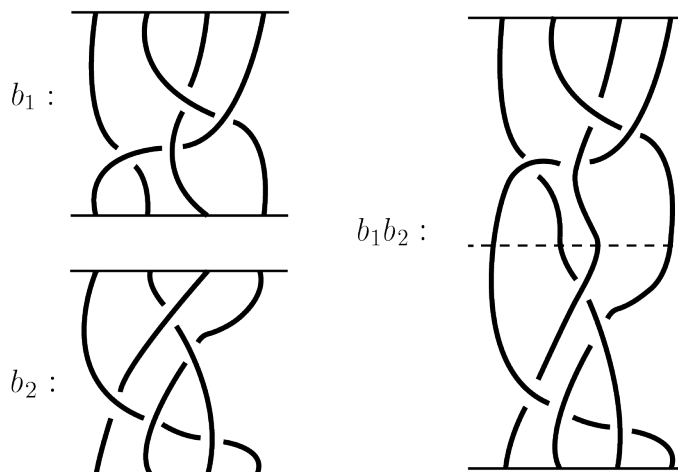


Figura 1.16

Habiendo ya esclarecido el modo en que se operan dos trenzas geométricas, podemos definir el producto en  $\mathcal{B}_n$ . Si  $[b_1], [b_2] \in \mathcal{B}_n$ , entonces definimos el producto de  $[b_1]$  y  $[b_2]$  como

$$[b_1][b_2] := [b_1 \cdot b_2],$$

donde  $b_1 \cdot b_2$  es el producto por concatenación entre  $b_1$  y  $b_2$ . Haremos un pequeño alto en nuestro camino para dar cuenta de una definición utilizada en la demostración de la estructura de grupo de  $\mathcal{B}_n$ . De manera análoga con los nudos, dada una trenza definiremos su reflejada como aquella que se obtiene reflejando la trenza original con respecto al plano  $XY$ .

**Ejemplo 1.12.** La 4–trenza geométrica  $b$  y su reflejada

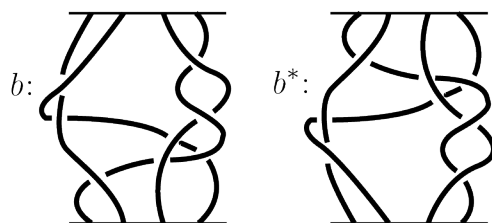


Figura 1.17

**Proposición 1.7.**  $\mathcal{B}_n$  es un grupo con el producto definido entre clases de equivalencia.

**Observación 1.1.** En efecto, el elemento del grupo está dado por el de la Figura 1.18:

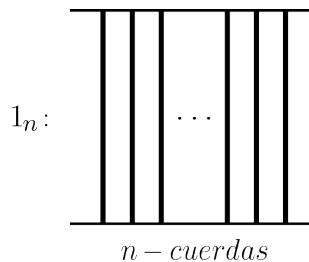


Figura 1.18: El neutro de  $\mathcal{B}_n$

Mientras que el elemento inverso:

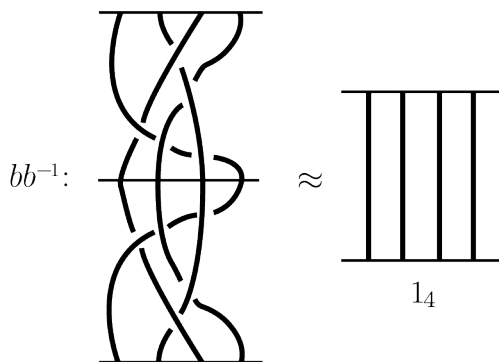


Figura 1.19: Una trenza *multiplicada* con su reflejada.

Toda vez que no haya riesgo de confusión, denotaremos a los elementos de  $\mathcal{B}_n$  simplemente por  $b$  en vez de  $[b]$  y los llamaremos  $n$ -trenzas. Ello viene motivado por el teorema que sucede a la siguiente definición.

**Definición 1.16.** Llamaremos  $n$ -trenzas elementales a las  $n$ -trenzas de la forma

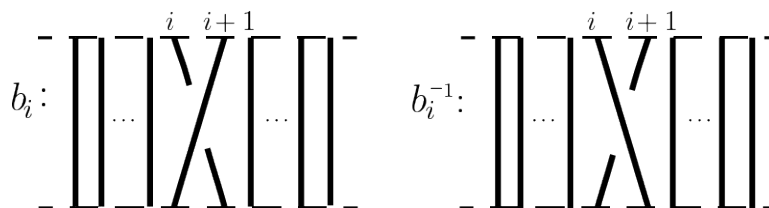


Figura 1.20: La cuerda  $i + 1$  *sobre/debajo* de la cuerda  $i$

**Teorema 1.8.**  $\mathcal{B}_n$  satisface las relaciones de trenzas y está generado por las  $n - 1$  trenzas elementales. En otras palabras

$$\mathcal{B}_n = \left\langle b_1, \dots, b_{n-1} \mid \begin{array}{l} b_i b_j = b_j b_i ; \quad \text{si } |i - j| > 1 \\ b_i b_{i+1} b_i = b_{i+1} b_i b_{i+1} \end{array} \right\rangle \simeq B_n$$

La demostración fue resuelta por matemático austriaco Emil Artin en 1925 [3]<sup>4</sup>.

**Observación 1.2.** No es difícil probar que los elementos  $b_1, \dots, b_{n-1}$  generan a  $\mathcal{B}_n$ . De hecho, dada una trenza  $b \in \mathcal{B}_n$ , podemos aislar sus cruces utilizando deformaciones continuas, como en el siguiente ejemplo:

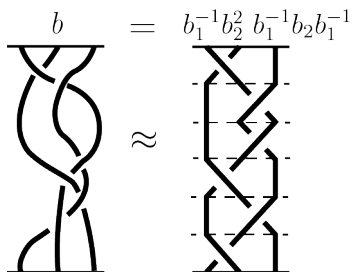


Figura 1.21

### 1.3. Correspondencia entre nudos y trenzas

Existe una correspondencia entre el conjunto de todos los links  $\mathcal{L}$  y los grupos de trenzas  $B_n$ , la cual estudiaremos a partir de los resultados de Andrei Markov II y James Wadell Alexander. La correspondencia entre estos objetos es una de las cuestiones más fundamentales en el proceso de construcción de invariantes polinomiales para links a través de la receta de Jones.

**Definición 1.17.** La clausura de una trenza  $\beta \in B_n$  es el link  $\widehat{\beta}$  que se obtiene a partir de conectar a través de arcos los puntos finales e iniciales de  $\beta$ .

**Ejemplo 1.13.** La clausura de la trenza  $\sigma_2^{-1} \sigma_3 \sigma_2^{-1} \sigma_1^{-1}$  es equivalente al Hopf-Link.

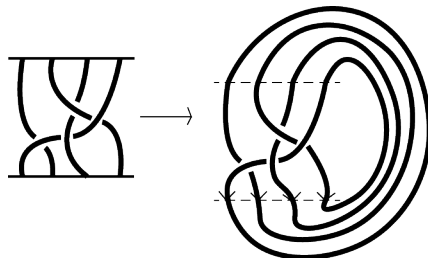


Figura 1.22

**Observación 1.3.** Note que la clausura de una trenza es considerada con orientación, generalmente asignada desde el nivel superior hasta el nivel inferior. Consideraremos

<sup>4</sup>El trabajo de la cita corresponde a uno elaborado por Artin en 1947 con el propósito de probar varios resultados del grupo de trenzas con mayor rigor que en su escrito de 1925, además de cambiar el idioma alemán, con el este último fue escrito originalmente, por el idioma inglés.

sin pérdida de generalidad links orientados, pues asignar alguna orientación a cada componente del link siempre es posible.

**Definición 1.18.** Definimos  $B_\infty$  como la unión de todos los grupos de trenzas, es decir

$$B_\infty := \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$$

Si consideramos la función  $\widehat{\cdot} : B_\infty \rightarrow \mathcal{L}$  tal que  $\beta \mapsto \widehat{\beta}$ , lo consecuente es preguntarse respecto a la naturaleza de  $\widehat{\cdot}$ . De otro modo, nos preguntamos si es posible hallar, para todo link  $L$ , una trenza tal que su clausura resulte  $L$  (epiyectividad), así como si la función es inyectiva. En 1932 el matemático estadounidense J. Alexander probó que  $\widehat{\cdot}$  es sobreyectiva, lo cual de modo más preciso podemos expresar en el siguiente teorema.

**Teorema 1.9** (Alexander, 1932). Todo link orientado es isotópico a la clausura de una trenza<sup>5</sup>.

*Demostración.* Sea  $\mathcal{D}_L$  el diagrama de un link  $L$ , sin pérdida de generalidad podemos considerar a  $L$  como poligonal y orientado. Tomemos un punto  $O$  en el plano  $P$  del diagrama tal que el punto no pertenezca a las aristas y no coincida con los vértices del diagrama de  $L$ . Diremos que  $L$  está *trenzado alrededor de  $O$*  si cada arista de  $L$  es visible desde  $O$  con orientación anti-horaria. Llamaremos a cualquier arista con estas propiedades como *positiva*, el resto serán llamadas *negativas*.

Si existe un punto  $O$  tal que nuestro diagrama está trezado alrededor de  $O$ , entonces la afirmación del teorema de Alexander se vuelve completamente clara: solo debemos cortar el diagrama a lo largo de un rayo desde  $O$  y luego *enderezar* el diagrama.

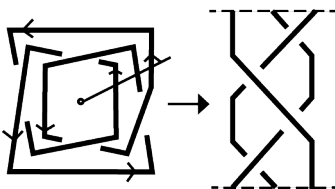


Figura 1.23

Por tanto, en orden a probar el caso general del teorema, debemos reconstruir nuestro diagrama de link arbitrario de modo tal que obtengamos un diagrama trezado alrededor de algún punto  $O$ .

Primero, fijemos un punto  $O$ . Ahora, usaremos el *truco de Alexander* como sigue. Consideremos una arista negativa  $AB$  de nuestro link poligonal y hallemos algún punto  $C$  en el plano de proyección  $P$  tal que el triángulo  $ABC$  contenga a  $O$ . Entonces reemplazamos  $AB$  por  $AC$  y  $BC$ . Ambas aristas serán evidentemente positivas. Debemos usar

<sup>5</sup>Para una demostración del teorema empleando el mismo algoritmo pero para links en  $\mathbb{R}^3$  ver [17, Teorema 2.3].

esta operación hasta que obtengamos un diagrama trenzado alrededor de  $O$ , como en la Figura 1.24.

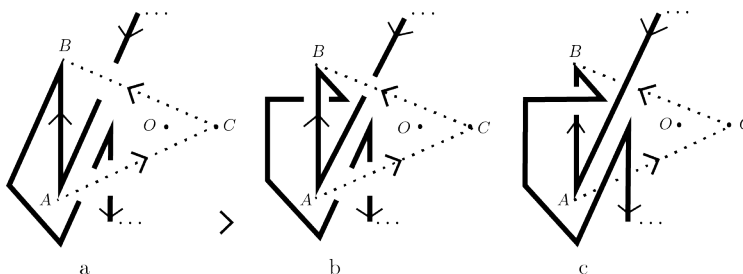


Figura 1.24: Truco de Alexander

Describiremos con más detalle la operación. En el caso en que la arista negativa  $AB$  no contenga cruces, el truco de Alexander puede ser directamente empleado, ver Figura 1.24 a.

Lo mismo puede ser hecho en el caso de que  $AB$  contenga solo cruces que están por sobre otra arista, ver Figura 1.24 b. En este caso, uno puede dividir la arista  $AB$  en dos aristas y pasarlas por sobre  $O$ .

Finalmente, si  $AB$  contiene solo cruces por debajo de otra arista, entonces uno puede realizar la construcción por debajo, como se muestra en la Figura 1.24 c.  $\square$

Dadas dos trenzas isotópicas es evidente que sus respectivas clausuras son isotópicas, no obstante, es posible hallar trenzas no isotópicas cuyas clausuras resultan links equivalentes por isotopía. De otro modo, la función  $\hat{\phantom{x}}$  no es inyectiva.

**Ejemplo 1.14.** El elemento  $\sigma_1 \in B_1$  y la 3-trenza  $\sigma_1\sigma_2$  corresponden a trenzas no isotópicas cuyas clausuras sí lo son.

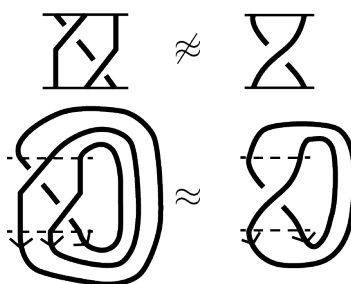


Figura 1.25

Sin embargo, es posible establecer una relación entre las trenzas que al ser clausuradas resultan el mismo link.

**Definición 1.19.** Sea  $\alpha, \beta \in B_n$ . En  $B_\infty$  definimos las siguientes operaciones denominadas Movimientos de Markov:

- a) La operación  $M_1$  transforma  $\alpha$  en la  $n$ -trenza  $\beta\alpha\beta^{-1}$ .
- b) La operación  $M_2$  transforma  $\alpha$  en la  $(n + 1)$ -trenza  $\alpha\sigma_n$  ó  $\alpha\sigma_n^{-1}$

**Definición 1.20.** Dadas  $\alpha, \beta \in B_\infty$ . Decimos que  $\beta$  es Markov equivalente (o  $M$ -equivalente) con  $\alpha$ , si y solo si  $\alpha$  puede ser obtenida a partir de  $\beta$  aplicando una secuencia finita de movimientos de Markov, incluidos sus respectivos inversos. Escribiremos  $\beta \sim_M \alpha$  para denotar que  $\alpha$  y  $\beta$  son Markov equivalentes.

**Proposición 1.10.**  $\sim_M$  es una relación de equivalencia en  $B_\infty$ .

*Demostración.* Sean  $\beta, \beta' \in B_n$ ,  $\beta \xrightarrow{M_1} 1_n\beta 1_n = \beta$ , por lo cual  $\sim_M$  claramente es refleja.

Ahora si suponemos que  $\beta \sim_M \beta'$ , entonces existe una sucesión de movimientos de Markov que envían  $\beta$  en  $\beta'$ . Así, utilizando los inversos de estos podemos enviar  $\beta'$  en  $\beta$ , teniendo que  $\beta' \sim_M \beta$ .

De modo análogo tenemos que  $\sim_M$  es transitiva. □

**Teorema 1.11** (Markov, 1935). Sean  $L_1$  y  $L_2$  los links obtenidos respectivamente a partir de las clausuras de las trenzas  $\beta_1$  y  $\beta_2$ . Entonces los links  $L_1$  y  $L_2$  son isotópicos si y solo si las trenzas  $\beta_1$  y  $\beta_2$  son Markov equivalentes.

El Teorema de Markov nos permite aseverar que existe una correspondencia bi-unívoca entre el conjunto de todos los links  $\mathcal{L}$  y el conjunto cociente  $B_\infty / \sim_M$ . A partir de este hecho tan relevante podemos concluir que para obtener una invariante de links, basta construir una función  $X : B_\infty \rightarrow \mathbf{Obj}$  constante en las clases de equivalencias determinadas por los movimientos de Markov, es decir que  $X(\alpha) = X(\beta)$  si  $\alpha \sim_M \beta$ .

En concordancia con lo precedente, se recurre a representaciones del grupo de trenzas  $B_n$  para la construcción de invariantes. Esto motiva el estudio de álgebras de tipo Hecke, las cuales generalmente admiten de modo natural una representación del grupo de trenzas o deformaciones de este (como productos semi-directos u otros). Este procedimiento para la fabricación de invariantes polinomiales vía representaciones de algún grupo de trenzas se conoce como la receta de Jones.

# Capítulo 2

## La receta de Jones

Las invariantes polinomiales para links construidas a través de la receta de Jones son el principal objeto de estudio de este trabajo. Nos interesa en particular aquella definida sobre el álgebra de Yokonuma-Hecke  $Y_{d,n}(u)$  y cuya construcción será abordada en la parte dos. En este capítulo, el lector podrá encontrar dos ejemplos concretos de la utilización de la receta de Jones. Por el carácter preliminar del presente apartado, las demostraciones serán usualmente omitidas, pues en el próximo capítulo veremos en detalle el uso de la receta de Jones aplicada al álgebra de Yokonuma-Hecke, la cual como ya se dijo generaliza al álgebra de Hecke. Para mayor profundidad acerca el caso clásico se sugiere dirigirse a [13], en donde Jones originalmente anuncia el empleo de la receta sobre el álgebra de Temperley-Lieb, cociente del álgebra de Hecke  $H_n(u)$  (ver sección 2). En el caso de la aplicación de la receta a  $H_n(u)$ , algunos resultados de [14] son exhibidos en la sección uno, en donde se muestra la construcción del polinomio HOMFLY-PT.

El descubrimiento del polinomio de Jones, y más enfáticamente su procedimiento de construcción, acabaron por abrir todo un nuevo campo de investigación en torno a la teoría de nudos. La idea, que le valió a su creador la medalla Fields en 1990, parte con la aplicación de una función traza, usualmente vinculada a álgebras de Von Neumann, sobre el álgebra de Temperley-Lieb. Un año después de tal suceso, surge simultánea y paralelamente desde dos grupos de matemáticos la definición de una invariante polinomial sobre el álgebra de Hecke. Desde allí en adelante, numerosos y fértiles campos de estudio se han abierto en torno a la teoría de nudos, permaneciendo hasta el día de hoy una gran cantidad de problemas abiertos. Para mayor referencia al respecto se recomienda ver [19], Apéndice D.

### 2.1. Álgebra de Hecke

**Definición 2.1.** Sea  $u$  una indeterminada sobre  $\mathbb{C}$ . El *álgebra de Hecke* de tipo  $A$ , denotada por  $H_n(u)$ , es la  $\mathbb{C}(u)$ -álgebra definida por la presentación con generadores

$1, g_1, \dots, g_{n-1}$  y relaciones

$$\begin{aligned} g_i g_j &= g_j g_i && \text{si } |i - j| > 1, \\ g_i g_{i+1} g_i &= g_{i+1} g_i g_{i+1}, \\ g_i^2 &= 1 + (u - u^{-1})g_i. \end{aligned}$$

**Observación 2.1.** Note que las dos primeras son precisamente las relaciones de trenzas de  $B_n$ , la tercera es denominada relación cuadrática o relación de Hecke. Si tomamos  $u = 1$  entonces  $g_1^2 = 1$ , de lo cual se concluye que  $H_n(1) = \mathbb{C}S_n$ . De este hecho podemos entender al álgebra de Hecke como una  $u$ -deformación de la  $\mathbb{C}$ -álgebra de grupo de  $S_n$ . Más precisamente,  $H_n(u)$  puede ser considerada como el cociente de la  $\mathbb{C}$ -álgebra de grupo de  $B_n$  por el ideal generado por las relaciones cuadráticas. De otro modo, nos referimos al ideal bilátero generado por las expresiones

$$g_i^2 - 1 - (u - u^{-1})g_i.$$

Por otro lado, como mencionamos en la introducción de este trabajo hemos considerado la presentación de  $H_n(u)$  con una versión simplificada de la relación cuadrática, originalmente dada por

$$\tilde{g}_i^2 = q + (q - 1)g_i,$$

donde  $q := u^2$  y  $\tilde{g}_i := g_i + u g_i$  [5].

De la relación cuadrática podemos aseverar que cada  $g_i$  es invertible, puesto que

$$\begin{aligned} g_i^2 &= 1 + (u - u^{-1})g_i \\ g_i(g_i - (u - u^{-1})) &= 1, \end{aligned}$$

con lo cual  $g_i^{-1} = g_i - (u - u^{-1})$ . Si consideráramos la relación cuadrática original de la observación anterior, entonces la expresión para  $g_i^{-1}$  sería diferente en el siguiente sentido:

$$\tilde{g}_i^{-1} = q^{-1}\tilde{g}_i + q^{-1} - 1.$$

**Definición 2.2.** Las palabras normales en  $H_n(u)$  son aquellas de la forma  $v_1 \cdots v_n$ , donde  $v_i \in R_i$  y

$$R_1 := \{1\} \quad \text{y en general} \quad R_i := \{1, g_{i-1}v \mid v \in R_{i-1}\}$$

Así, por ejemplo, en  $H_3(u)$  el conjunto de palabras normales es

$$\begin{aligned} &\{1, g_1, g_2, g_1 g_2, g_2 g_1, g_1 g_2 g_1\}, \quad \text{dado que} \\ &R_1 = \{1\}, R_2 = \{1, g_1\} \text{ y } R_3 = \{1, g_2, g_2 g_1\}. \end{aligned}$$

Se tiene también que  $|R_k| = k$ , pues  $R_k = \{1, g_{k-1} \cdots g_r \mid 1 \leq r \leq k-1\}$ .

**Proposición 2.1.** Toda palabra en los generadores de  $H_n(u)$  puede ser escrita en combinación lineal de palabras con a lo más una aparición de  $g_{n-1}$ .

**Proposición 2.2.**  $H_n(u)$  está  $\mathbb{C}$ -linealmente generado por el conjunto de las palabras normales.

*Demostración.* Omitiremos la demostración, pues se puede concluir de lo realizado en la Proposición 3.9 del próximo capítulo.  $\square$

Con el fin de probar la independencia lineal del conjunto de palabras normales, introducimos los siguientes elementos en  $\text{End}(\mathbb{C}S_n)$ .

**Definición 2.3.** Para cada  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  definimos los endomorfismos  $\lambda_i \in \text{End}(\mathbb{C}S_n)$  como sigue

$$\lambda_i(\pi) := \begin{cases} s_i\pi & \text{si } \ell(\pi) < \ell(s_i\pi) \\ s_i\pi + (u - u^{-1})\pi & \text{si } \ell(\pi) > \ell(s_i\pi) \end{cases},$$

$$\rho_i(\pi) := \begin{cases} \pi s_i & \text{si } \ell(\pi) < \ell(\pi s_i) \\ \pi s_i + (u - u^{-1})\pi & \text{si } \ell(\pi) > \ell(\pi s_i) \end{cases}.$$

Donde  $\pi \in S_n$  y  $\ell$  es la función largo de  $S_n$  (Ver Apéndice B).

**Lema 2.3.** Para todo  $1 \leq i, j \leq n-1$  se tiene que

$$\lambda_i \rho_j = \rho_j \lambda_i.$$

**Lema 2.4.** Los endomorfismos  $\lambda_i$  satisfacen las relaciones del álgebra de Hecke para todo  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ , es decir

$$\begin{aligned} \lambda_i \lambda_j &= \lambda_j \lambda_i & \text{si } |i - j| > 1 \\ \lambda_i \lambda_{i+1} \lambda_i &= \lambda_{i+1} \lambda_i \lambda_{i+1} \\ \lambda_i^2 &= 1 + (u - u^{-1})\lambda_i. \end{aligned}$$

Como los endomorfismos  $\lambda_i$  satisfacen las relaciones del álgebra de Hecke tenemos, en analogía con la construcción del Apéndice A para grupos, las proposiciones 2.5 y 2.6 que se muestran a continuación.

**Proposición 2.5.** La función  $g_i \mapsto \lambda_i$  define un homomorfismo de álgebras  $\lambda$  de  $H_n(u)$  en  $\text{End}(\mathbb{C}S_n)$ .

**Proposición 2.6.** El homomorfismo  $\lambda$  definido en la proposición anterior induce la función  $\mathbb{C}$ -lineal  $\Lambda : H_n(u) \rightarrow \mathbb{C}S_n$  que viene dada por  $\Lambda(g_i) = \lambda_i(1) = s_i$ , por lo cual  $\Lambda$  mapea una palabra normal de  $H_n(u)$  en una palabra normal de  $S_n^1$ . De esto se concluye la siguiente proposición.

**Proposición 2.7.** El conjunto de todas las palabras normales de  $H_n(u)$  es linealmente independiente.

---

<sup>1</sup>Ya que su estructura es análoga a  $H_n(u)$ , se recomienda al lector ver la Sección 3.1 para las palabras normales de  $S_n$ , considerando  $d = 1$ .

Por las proposiciones anteriores se concluye el siguiente teorema.

**Teorema 2.8.** El conjunto de todas las palabras normales de  $H_n(u)$  constituye una  $\mathbb{C}$ -base de  $H_n(u)$ , luego  $\dim_{\mathbb{C}} H_n(u) = n!$ .

Note que para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $H_n(u)$  puede ser entendida como una subálgebra de  $H_{n+1}(u)$ , generando la siguiente cadena de inclusiones:

$$\mathbb{C} = H_0(u) \hookrightarrow H_1(u) \hookrightarrow H_2(u) \hookrightarrow \dots$$

Con todos estos resultados clásicos hallados en  $H_n(u)$ , principalmente extraídos de [14], estamos en condiciones de enunciar la existencia de una traza de Markov sobre el álgebra de Hecke, para luego aplicar la receta de Jones.

La traza de Markov sobre  $H_n(u)$  recibe el nombre de traza de Markov-Ocneanu (o simplemente traza de Ocneanu) y constituye una función  $\mathbb{C}$ -lineal sobre el conjunto  $H_{\infty}(u) := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} H_n(u)$  con ciertas propiedades. Más precisamente, la traza de Ocneanu es una familia de trazas, las cuales se definen inductivamente sobre  $H_n(u)$  para todo  $n \geq 1$ .

**Teorema 2.9.** Sea  $z$  una indeterminada sobre  $\mathbb{C}$ . Para todo  $n \in \mathbb{N}$  existe una función  $\mathbb{C}$ -lineal  $\text{tr}_n : H_n(u) \rightarrow \mathbb{C}(u, z)$ , la cual satisface que para todo  $X, Y \in H_n(u)$  y todo  $n \in \mathbb{N}$

- a)  $\text{tr}_n(1) = 1$ ,
- b)  $\text{tr}_n(XY) = \text{tr}_n(YX)$ ,
- c)  $\text{tr}_{n+1}(Xg_n) = z\text{tr}_n(X)$ .

**Definición 2.4.** La familia  $\text{Tr} := \{\text{tr}_n\}_{n \leq 1}$ ,  $\text{Tr} : H_{\infty}(u) \rightarrow \mathbb{C}$  es llamada traza de Markov-Ocneanu sobre el álgebra  $H_n(u)$ .

Así, tenemos el siguiente diagrama de funciones:

$$B_n \xrightarrow{\pi} H_n(u) \xrightarrow{\text{Tr}} \mathbb{C}$$

donde  $\pi(\sigma_i) = g_i$ . Dado que  $\pi$  es un homomorfismo y  $\text{Tr}(XY) = \text{Tr}(YX)$ , se sigue que  $\text{Tr} \circ \pi$  respeta el movimiento de Markov  $M_1$ , es decir, para todo  $\alpha, \beta \in B_n$

$$(\text{Tr} \circ \pi)(\beta\alpha\beta^{-1}) = (\text{Tr} \circ \pi)(\alpha).$$

No obstante,  $\text{Tr} \circ \pi$  no respeta el segundo movimiento de Markov, por lo cual, necesitamos re-escalar y normalizar el homomorfismo  $\pi$  para obtener una invariante polinomial de links.

Sea  $\pi_L : B_n \rightarrow H_n(u)$  el homomorfismo definido por  $\pi_L(\sigma_i) := Lg_i$ , donde  $L \in \mathbb{C}$  es el parámetro de re-escalación a determinar. Luego, deseamos que

$$(\text{Tr} \circ \pi_L)(\sigma_n) = (\text{Tr} \circ \pi_L)(\sigma_n^{-1}),$$

de allí que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(Lg_n) &= \mathrm{Tr}(L^{-1}g_n^{-1}) \\
L\mathrm{Tr}(g_n) &= L^{-1}\mathrm{Tr}(g_n^{-1}) \\
L^2z &= \mathrm{Tr}(g_n - (u - u^{-1})) \\
L^2z &= z - (u - u^{-1}) \\
L^2 &= \frac{z - (u - u^{-1})}{z} \\
L &= \sqrt{\lambda},
\end{aligned}$$

donde  $\lambda = \frac{z - (u - u^{-1})}{z}$ . Tenemos así la representación  $\pi_\lambda$  de  $B_n$  dada por  $\pi_\lambda(\sigma_i) = \sqrt{\lambda}g_i \in H_n(u)$ . Asimismo, requerimos que la composición resulte igual a 1 evaluada en el nudo trivial, el cual es isotópico a la clausura de la trenza  $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_{n-1}$ . De este modo

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr} \circ \pi_\lambda(\hat{\sigma}) &= \mathrm{Tr}(\sqrt{\lambda}^{n-1} \sigma_1 \cdots \sigma_{n-1}) \\
&= \sqrt{\lambda}^{n-1} z^{n-1}.
\end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned}
\lambda &= \frac{z - (u - u^{-1})}{z} \\
\lambda z &= z - (u - u^{-1}) \\
z(1 - \lambda) &= u - u^{-1} \\
z &= \frac{u - u^{-1}}{1 - \lambda}
\end{aligned}$$

Entonces, si queremos que  $\mathrm{Tr} \circ \pi_\lambda(\hat{\alpha}) = 1$  debemos definir la invariante polinomial como el polinomio en las variables  $\lambda$  y  $u$

$$H_{\hat{\beta}}(\lambda, u) := \left( \frac{1 - \lambda}{(u - u^{-1})\sqrt{\lambda}} \right)^{n-1} (\mathrm{Tr} \circ \pi_\lambda)(\beta), \quad \text{con } \beta \in B_n.$$

Considerando que para todo  $\beta \in B_n$  se tiene que  $\pi_\lambda(\beta) = (\sqrt{\lambda})^{\exp(\alpha)} \pi(\alpha)$ , y definiendo

$$\Delta := \frac{1 - \lambda}{(u - u^{-1})\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{z\sqrt{\lambda}},$$

podemos re-escribir el polinomio anterior como sigue:

**Definición 2.5.** Sea  $\beta \in B_n$ . El polinomio HOMFLY-PT<sup>2</sup> es el polinomio 2-variable  $H_{\hat{\beta}}(\lambda, u)$  de  $\mathbb{C}(\lambda, u)$  definido por:

$$H_{\hat{\beta}}(\lambda, u) := \Delta^{n-1}(\sqrt{\lambda})^{\exp(\beta)}(\text{Tr} \circ \pi)(\alpha).$$

**Teorema 2.10.** El polinomio HOMFLY-PT es una invariante de links.

**Observación 2.2.** Si consideramos la presentación de  $H_n(u)$  con la relación cuadrática original, entonces el polinomio de HOMFLY-PT obtenido varía en el sentido de que el *escalar* que multiplica a la compuesta  $\text{Tr} \circ \pi_\lambda$  resulta ligeramente distinto. No obstante, ambas invariantes son equivalentes.

## 2.2. Álgebra de Temperley-Lieb

El álgebra de Temperley-Lieb fue definida por H. Temperley y E. Lieb en 1971 en contextos de mecánica estadística. La receta de Jones fue aplicada por primera vez sobre esta álgebra en 1984 por Jones en [13], construyendo la invariante polinomial denominada polinomio de Jones. Este procedimiento se relaciona intrínsecamente con la sección anterior ya que el álgebra de Temperley-Lieb puede ser entendida como un cociente del álgebra de Hecke.

Este hito tiene un carácter significativo en la historia de la teoría de nudos por varios motivos. Un hecho notable es que el polinomio de Jones logró un modo mucho más eficiente para diferenciar links no isotópicos, Un caso emblemático es el del nudo trébol y su reflejado, pues por medio de cirugía de Dehn ya se conocía de la no equivalencia de estos nudos, pero este constituía un procedimiento muy engorroso de aplicar.

Existen otras invariantes polinomiales de links originalmente no construidas con la receta de Jones, sino que incorporando elementos combinatorios y relaciones Skein [19, Capítulo 5] como el polinomio de Kauffman, el cual a pesar de no ser comparable con HOMFLY-PT junto a este último generalizan al polinomio de Jones. Estas invariantes no son comparables entre sí dado que difieren en los links que son capaces de distinguir y los que no. Otra invariante de links no construida mediante el mecanismo empleado por Jones es el denominado polinomio de Alexander, elaborada utilizando elementos algebraicos ligados con propiedades topológicas de los links tales como el grupo fundamental. No obstante la condición de estas invariantes (de ser elaboradas mediante procedimientos distintos al de la receta de Jones), resultados de las últimas décadas han logrado identificar la respectivas álgebras que admiten la construcción de estas

---

<sup>2</sup>La sigla HOMFLY se debe a las iniciales de sus descubridores: Hoste, Ocneanu, Millett, Freyd, Lickorish y Yetter, mientras que la PT es por los polacos Przytycki y Traczyk, quienes realizaron el hallazgo casi simultáneamente y de modo independiente. Los resultados del primer grupo fueron publicados en [10], en la revista *Bulletin of the American Mathematical Society*, mientras que los del segundo grupo (los polacos causantes de la "PT") fueron anunciados en una publicación que no interactuó con la primera, a causa del contexto de la Guerra Fría. Por este motivo, algunos artículos más añosos referencian al polinomio HOMFLY-PT simplemente por HOMFLY.

invariantes mediante el método de Jones. La BMW-álgebra es la correspondiente al polinomio de Kauffman, por ejemplo, mientras que el polinomio de Alexander se liga con las denominadas álgebras de Rook [4].

En esta sección, introduciremos el álgebra de Temperley-Lieb por medio de la siguiente definición:

**Definición 2.6.** Sea  $\lambda$  una indeterminada sobre  $\mathbb{C}$ . El álgebra de Temperley-Lieb de tipo A, denotado por  $\text{TL}_n(\lambda)$ , es el álgebra con generadores  $1, e_1, \dots, e_{n-1}$  sujetos a las relaciones

$$\begin{aligned} e_i^2 &= e_i, \\ e_i e_j &= e_j e_i \quad \text{si } |i - j| > 1, \\ e_i e_{i+1} e_i &= \lambda e_i \quad \text{si } |i - j| = 1. \end{aligned}$$

A continuación, mostraremos que el álgebra  $\text{TL}_n(\lambda)$  puede ser entendida como un cociente del álgebra de Hecke, utilizando para tal efecto la presentación de  $H_n(u)$  con la relación cuadrática original. Denotaremos a esta última por  $H_n(q)$  para efectos de diferenciarla de la presentación usada en este trabajo con parámetro  $u$ , y a sus  $n - 1$  generadores los identificaremos con  $\tilde{g}_i$ .

Definamos  $h_i \in H_n(q)$  por  $h_i := \frac{1}{q+1}(\tilde{g}_i + 1)$ , así tenemos que

$$\tilde{g}_i = (q + 1)h_i - 1$$

**Proposición 2.11.** El álgebra de Hecke tiene una presentación con generadores  $h_1, \dots, h_{n-1}$  sujetos a relaciones

$$\begin{aligned} h_i^2 &= h_i, \\ h_i h_j &= h_j h_i \quad \text{si } |i - j| > 1, \\ h_i h_{i+1} h_i - \eta h_i &= h_{i+1} h_i h_{i+1} - \eta h_{i+1}, \end{aligned}$$

donde  $\eta = \frac{q}{(q+1)^2}$ .

**Corolario 2.12.**  $\text{TL}_n(\lambda)$  es un cociente de  $H_n(q)$ . Más precisamente

$$\text{TL}_n(\lambda) \cong H_n(\eta)/J(\eta)$$

donde  $J(\eta)$  es el ideal generado por las expresiones

$$h_i h_{i+1} h_i - \eta h_i$$

**Teorema 2.13.** Sea  $\text{TL}_\infty(\eta) := \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} \text{TL}_n(\eta)$ . Entonces, existe una función  $\mathbb{C}$ -lineal  $\text{Tr} : \text{TL}_\infty \rightarrow \mathbb{C}$  compatible con la inclusión  $i : \text{TL}_n(\eta) \rightarrow \text{TL}_{n+1}(\eta)$ , tal que para todo  $a, b \in \text{TL}_n = \text{TL}_n(\eta)$  se tiene que

a)  $\text{Tr}(1) = 1,$

$$\text{b) } \text{Tr}(ab) = \text{Tr}(ba),$$

$$\text{c) } \text{Tr}(ae_n) = \eta \text{Tr}(a).$$

Consideremos ahora la función  $\rho : B_n \rightarrow \text{TL}_n(\eta)$  dada por  $\rho(\sigma_i) = (q+1)e_i$ , donde  $\eta = \frac{q}{(q+1)^2}$ . Se verifica sencillamente que  $\rho$  es una representación de  $B_n$  en  $\text{TL}_n(\eta)$ , por lo cual tenemos la siguiente función compuesta de  $B_n$  en  $\mathbb{C}$ :

$$B_n \xrightarrow{\rho} \text{TL}_n(\eta) \xrightarrow{\text{Tr}} \mathbb{C}.$$

La composición  $\text{Tr} \circ \rho$  respeta el primer movimiento de Markov, pero no el segundo, por lo cual es necesario un proceso de re-escalación y normalización, al igual que con el polinomio HOMFLY-PT sobre  $H_n(u)$ . Consideramos la representación

$$\begin{aligned} \rho_\theta : B_n &\longrightarrow \text{TL}_n(\eta) \\ \sigma_i &\longmapsto \theta((q+1)e_i - 1) \end{aligned} ,$$

donde  $\theta$  es el parámetro de re-escalación a determinar. Debemos tener que

$$\text{Tr} \circ \rho_\theta(\sigma_n) = \text{Tr} \circ \rho_\theta(\sigma_n^{-1}),$$

por lo cual tenemos la siguiente cadena de igualdades:

$$\begin{aligned} \theta \text{Tr}((q+1)e_n - 1) &= \theta^{-1} \text{Tr}((q^{-1} + 1)e_n - 1) \\ \theta^2((q+1)\text{Tr}(e_n) - 1) &= (q^{-1} + 1)\text{Tr}(e_n) - 1 \\ \theta^2((q+1)\eta - 1) &= (q^{-1} + 1)\eta - 1 \\ \theta^2 &= \frac{(q^{-1} + 1)\eta - 1}{(q+1)\eta - 1}. \end{aligned}$$

Pero  $\eta = \frac{q}{(q+1)^2}$ , por lo cual

$$\begin{aligned} \theta^2 &= \frac{\frac{(q+1)q}{q(q+1)^2} - 1}{\frac{(q+1)q}{(q+1)^2} - 1} \\ &= \frac{1 - q - 1}{q + 1} \\ &= \frac{q + 1}{q - q - 1} \\ &= \frac{q + 1}{q + 1} \\ &= q. \end{aligned}$$

De esto se concluye que  $\theta = \sqrt{q}$  y que el siguiente polinomio en  $q$  depende solo de  $\hat{\alpha}$  para  $\alpha \in B_n$ .

**Definición 2.7.** Sea  $\alpha \in B_n$ . El siguiente polinomio 1-variable se denomina polinomio de Jones.

$$V_{\hat{\alpha}}(q) := \left( -\sqrt{q} - \frac{1}{\sqrt{q}} \right)^{n-1} \sqrt{q}^{\exp(\alpha)} (\text{Tr} \circ \rho)(\alpha).$$

**Teorema 2.14.** El polinomio de Jones es una invariante de links.

**Ejemplo 2.1.** Calcularemos el polinomio que  $V$  asigna al nudo Trébol y su reflejado. El primero, que denotaremos  $T$ , viene dado por la clausura de la 2-trenza  $\sigma_1^3$ .

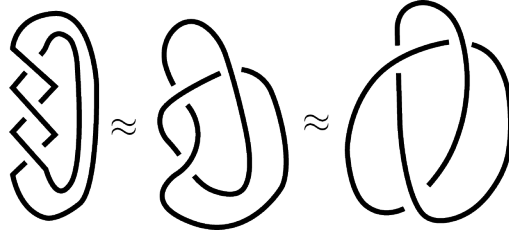


Figura 2.1

Así, el polinomio de Jones de  $T$  es

$$\begin{aligned} V_T(q) &= \left( -\sqrt{q} - \frac{1}{\sqrt{q}} \right) \sqrt{q}^3 (\text{Tr} \circ \rho)(\sigma_1^3) \\ &= (-q^2 - q) \text{Tr}(((q+1)e_1 - 1)^3) \\ &= (-q^2 - q) \text{Tr}((q+1)^3 e_1^3 - 3(q+1)^2 e_1 + 3(q+1)e_1 - 1) \\ &= (-q^2 - q) [(q+1)(q+1)^2 - 3q - 3 + 3] \eta - 1) \\ &= (-q^2 - q)((q+1)(q^2 - q + 1) \frac{q}{(q+1)^2} - 1) \\ &= -q(q+1) \frac{q^3 - q^2 - 1}{q+1} \\ &= -q^4 + q^3 + q. \end{aligned}$$

Por otro lado, el nudo Trébol reflejado  $T^*$  viene dado por la clausura de la 2-trenza  $\sigma_1^{-3}$ . Un cálculo nos muestra que

$$\text{Tr} \circ \rho(\sigma_1^3) = \frac{q^{-2} - q^{-1} - q}{q+1},$$

por lo cual

$$\begin{aligned} V_{T^*}(q) &= \left( -\sqrt{q} - \frac{1}{\sqrt{q}} \right) \sqrt{q}^{-3} \frac{q^{-2} - q^{-1} - q}{q+1} \\ &= - \left( \frac{q+1}{q^2} \right) \left( \frac{q^{-2} - q^{-1} - q}{q+1} \right) \\ &= -(q^{-4} - q^{-3} - q^{-1}), \end{aligned}$$

es decir,

$$V_{T^*} = q^{-3} - q^{-4} + q^{-1}.$$

De este ejemplo podemos ver que

$$V_T(q) \neq V_{T^*}(q),$$

de lo cual podemos concluir lo mismo afirmado en la Figura 1.4. En general tenemos la siguiente proposición:

**Proposición 2.15.** Dado  $L \in \mathcal{L}$  tenemos que

$$V_L(q) = V_{L^*}(q^{-1}).$$

**Observación 2.3.** En el mismo sentido que con HOMFLY-PT, los polinomios de Jones obtenidos con cualquiera de las dos presentaciones del álgebra de Hecke de tipo A son equivalentes. Además, como ya mencionamos, el polinomio HOMFLY-PT generaliza al de Jones. Esto dado que, considerando que HOMFLY-PT está parametrizado por  $\lambda$  y  $u$ , si tomamos la restricción  $\lambda = u$  entonces obtenemos el polinomio de Jones. Un cambio de variable permite obtener también este último a partir del polinomio de Kauffman.

En la parte siguiente, en la que abordaremos la aplicación de la receta de Jones al álgebra de Yokonuma-Hecke, veremos que existe también una modificación en la relación cuadrática que interviene en la transformación de la invariante polinomial, obteniendo dos invariantes no equivalentes.

## Parte II

# La receta de Jones en el Álgebra de Yokonuma-Hecke

# Capítulo 3

## Álgebra de Yokonuma-Hecke

Como ya se observó en el Capítulo 2 de este trabajo, usando el procedimiento empleado por Jones en 1984 (la receta de Jones), se pueden construir invariantes polinomiales para links mediante representaciones del grupo de trenzas. Es un requisito necesario para aquello, que la estructura algebraica sobre la cual se está realizando la representación de  $B_n$  soporte una traza de Markov, lo cual permite la fabricación del polinomio. Un ejemplo es la traza de Ocneanu sobre  $H_n(u)$ .

En 2004, J. Juyumaya logró demostrar la existencia de una traza de Markov sobre el álgebra de Yokonuma-Hecke [15]. Este paso fue decisivo para la posterior elaboración de la correspondiente invariante polinomial [16, 1] a partir de la aplicación de la receta al par  $(Y_{d,n}(u), \text{Tr})$ .

La comprensión de la estructura de esta álgebra debe incorporar un estudio del grupo de trenzas framizadas  $\mathcal{F}_{d,n}$ , el cual se define como el producto semi-directo entre  $(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^n$  y  $B_n$ . Al igual que  $B_n$ ,  $\mathcal{F}_{d,n}$  también tiene interpretación geométrica: una trenza framizada, de modo similar al caso clásico, corresponde a una trenza geométrica con un elemento en  $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$  asignado a cada cuerda, además de que su clausura resulta un link framizado, que corresponde a un link con un entero módulo  $d$  asignado en cada uno de sus componentes. Esta interpretación geométrica tiene sus propias versiones de los teoremas de Reidemeister, Alexander y Markov.

El presente capítulo consta de tres secciones: la Sección 3.1 describe la estructura del grupo de trenzas framizadas, su interpretación geométrica y los resultados al caso clásico del par  $(H_n(u), \text{Tr})$ ; la Sección 3.2 muestra la estructura de  $Y_{d,n}(u)$ , su presentación y algunos lemas; la Sección 3.3 incorpora la demostración de una base para el álgebra de Yokonuma-Hecke (proceso análogo al efectuado en  $H_n(u)$ ). Tal base es empleada posteriormente en la definición de una familia de trazas relativas para  $Y_{d,n}(u)$

### 3.1. Grupo de Trenzas Framizadas

Sea  $B_n$  el grupo de trenzas con  $n$  cuerdas, el cual como ya vimos tiene la presentación de Artin. Sea  $C_d$  el grupo cíclico de  $d$  elementos, cuya presentación viene dada por

$$C_d = \langle t \mid t^d = 1 \rangle$$

Sea  $C_d^n := C_d \times \cdots \times C_d$  ( $n$  veces). Si definimos como  $c_i = (1, \dots, 1, t, 1, \dots, 1) \in C_d^n$ , donde  $t$  está en la posición  $i$ , podemos presentar al grupo  $C_d^n$  como sigue

$$C_d^n = \langle c_1, \dots, c_n \mid c_i^d = 1; \quad c_i c_j = c_j c_i \quad \text{para todo } i, j \rangle$$

Por lo visto en el capítulo 1, sabemos que el grupo de trenzas  $B_n$  goza de una proyección natural sobre el grupo simétrico  $S_n$ , la cual está dada por

$$\sigma_i \longmapsto s_i = (i, i + 1)$$

Usando esta proyección se obtiene que  $B_n$  actúa naturalmente sobre las entradas de las  $n$ -uplas de  $C_d^n$ . Dada esta acción de grupo podemos construir un homomorfismo de  $B_n$  en  $\text{Aut}(C_d^n)$  para luego definir el producto semi-directo entre  $C_d^n$  y  $B_n$ , denotado por  $C_d^n \rtimes B_n$  (ver Apéndice A).

**Definición 3.1.** Se define al grupo de trenzas framizadas módulo  $d$ , denotado por  $\mathcal{F}_{d,n}$ , como el producto semi-directo entre  $C_d^n$  y  $B_n$ . Análogamente el grupo de trenzas framizadas  $\mathcal{F}_n$  se define como el producto semi-directo entre  $\mathbb{Z}^n$  y  $B_n$ , es decir, puede ser considerado como  $\mathcal{F}_{\infty,n}$ .

$\mathcal{F}_{d,n}$  recibe el nombre de grupo de trenzas framizadas *módulo*  $d$  en alusión a  $C_d \simeq \mathbb{Z}_d$ , el grupo de los enteros módulo  $d$ . En el caso de  $\mathcal{F}_n$ , nuevamente la acción de  $B_n$  sobre  $C^n$  viene dada por  $\sigma(r_1, \dots, r_n) = (r_{s(1)}, \dots, r_{s(n)})$ , donde  $\sigma \mapsto s \in S_n$ .

**Observación 3.1.** Note que se cumple particularmente que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{1,n} &= C_1^n \rtimes B_n = B_n \\ \mathcal{F}_{d,1} &= C_d^1 \rtimes B_1 = C_d \end{aligned}$$

Además se tiene

$$\begin{aligned} \iota : C_d^n &\longrightarrow \mathcal{F}_{d,n} \quad \text{y} \\ \pi : \mathcal{F}_{d,n} &\longrightarrow B_n, \end{aligned}$$

donde  $\iota$  es una inclusión de  $C_d^n$  en  $\mathcal{F}_{d,n}$  y  $\pi$  viene dada por el mapeo  $\sigma_i \mapsto \sigma_i$  y  $t_j \mapsto 1$ . De otro modo se tiene:

$$\{1\} \rightarrow C_d^n \xrightarrow{\iota} \mathcal{F}_{d,n} \xrightarrow{\pi} B_n \rightarrow \{1\} \quad (3.1)$$

Definamos  $t_i \in \mathcal{F}_{d,n}$  por  $\iota(c_i) = (c_i, 1)$  donde  $c_i \in C_d^n$  para  $i > 1$ ; identifiquemos también al elemento  $\pi^{-1}(\sigma) = (1, \sigma) \in \mathcal{F}_{d,n}$  por  $\sigma$ . Con estas dos configuraciones y las funciones expresadas en (3.1) se tiene que  $\mathcal{F}_{d,n}$  está presentado por los generadores  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$  de  $B_n$  y los  $t_1, t_2, \dots, t_n$  de  $C_d^n$ ; y cumple con las relaciones de  $B_n$  para los  $\sigma_i$

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad \text{para } |i - j| > 1 \quad (3.2)$$

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \quad (3.3)$$

las relaciones de  $C_d^n$  para los  $t_k$

$$t^d = 1 \quad (3.4)$$

$$t_i t_j = t_j t_i \quad \text{para todo } i, j, \quad (3.5)$$

y las siguientes relaciones mixtas

$$\sigma_i t_j = t_{\sigma_i(j)} \sigma_i. \quad (3.6)$$

La relación (3.4) es la única en que difieren los grupos  $\mathcal{F}_n$  y  $\mathcal{F}_{d,n}$ , pues en  $\mathcal{F}_n$  no existe.

**Observación 3.2.** Note que los elementos  $t_i$ , para  $i \neq 1$ , se pueden obtener como conjugados de  $t_1$ , luego existe una presentación alternativa para  $\mathcal{F}_{d,n}$  con un conjunto mínimo de generadores  $t_1 = t, \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ , sujetos a las relaciones de  $B_n$  para los  $\sigma_i$ , además de las siguientes:

$$\begin{aligned} t^d &= 1 \\ \sigma_i t &= t \sigma_i \quad \text{para } i > 1 \\ \sigma_i \cdots \sigma_1 t \sigma_1^{-1} \cdots \sigma_i^{-1} &= \sigma_i^{-1} \cdots \sigma_1^{-1} t \sigma_1 \cdots \sigma_i \\ t \sigma_1 t \sigma_1^{-1} &= \sigma_1 t \sigma_1^{-1} t \end{aligned}$$

Esta presentación fue usada por Juyumaya en [15], aunque optaremos por la presentación original de la definición, pues ella explicita de modo natural la acción de  $\sigma_i$  en  $t_j$ , además de simplificar varios cálculos.

De la relación (3.6) se puede concluir que

$$\sigma_i t_j \sigma_i^{-1} = t_{\sigma_i(j)},$$

de allí que si  $m \in \mathbb{N}$ , entonces

$$\begin{aligned} \sigma_i t_j^m &= \sigma_i t_j t_j^{m-1} \\ &= t_{\sigma_i(j)} \sigma_i t_j^{m-1} \\ &= t_{\sigma_i(j)}^2 \sigma_i t_j^{m-2}. \end{aligned}$$

Iterando obtenemos, para todo  $m$  tal que  $1 \leq m \leq d-1$ , que

$$\sigma_i t_j^m = t_{\sigma_i(j)}^m \sigma_i.$$

Consecuentemente, dado  $\sigma \in B_n$ ,  $\sigma = \sigma_{i_1} \cdots \sigma_{i_r}$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \sigma_i t_j^m &= \sigma_{i_1} \cdots \sigma_{i_r} t_j^m \\ &= \sigma_{i_1} \cdots \sigma_{i_{r-1}} t_{\sigma_{i_r}(j)}^m \sigma_{i_r} \\ &= \sigma_{i_1} \cdots \sigma_{i_{r-2}} t_{\sigma_{i_{r-1}} \sigma_{i_r}(j)}^m \sigma_{i_{r-1}} \sigma_{i_r}. \end{aligned}$$

Iterando obtenemos

$$\begin{aligned} \sigma t_j^m &= t_{\sigma_{i_1} \cdots \sigma_{i_r}(j)}^m \sigma_{i_1} \cdots \sigma_{i_r} \\ \sigma t_j^m &= t_{\sigma(j)}^m \sigma. \end{aligned}$$

Así, hemos probado el siguiente resultado.

**Lema 3.1.** Dado  $m \in \mathbb{N}$  y  $\sigma \in B_n$  se cumple para todo  $i$  que

$$\sigma t_i^m = t_{\sigma(i)}^m \sigma.$$

**Observación 3.3.** Si tomamos un elemento  $\beta \in \mathcal{F}_{d,n}$  (ó en  $\mathcal{F}_n$ ), entonces  $\beta$  siempre puede ser escrito como una palabra de la forma  $t_1^{r_1} \cdots t_n^{r_n} \alpha$ , con  $\alpha \in B_n$ . En efecto, usando la relación mixta de  $\mathcal{F}_{d,n}$ , siempre es posible mover los elementos de  $B_n$  hacia la derecha, dejando una palabra en los  $t_i$ 's hacia la izquierda. Adicionalmente, los  $t_i$ 's siempre conmutan, por lo cual esta palabra en los  $t_i$ 's siempre puede escribirse como  $t_1^{r_1} \cdots t_n^{r_n}$  para algunos  $r_k$ . De este modo, dado cualquier elemento en  $\mathcal{F}_{d,n}$  siempre podrá ser escrito de la forma  $t_1^{r_1} \cdots t_n^{r_n} \alpha$ . Aquí los elementos  $r_k$  se denominan *framings*, y por lo recientemente visto son siempre identificables para cualquier elemento de  $\mathcal{F}_{d,n}$  (ó  $\mathcal{F}_n$ ) por medio de esta configuración.

Bajo esta notación el producto y el inverso en  $\mathcal{F}_n$  vienen dados como sigue

$$\begin{aligned} (t_1^{r_1} \cdots t_n^{r_n} \alpha)(t_1^{s_1} \cdots t_n^{s_n} \beta) &= t_1^{r_1+s_{\alpha^{-1}(1)}} \cdots t_n^{r_n+s_{\alpha^{-1}(n)}} \alpha \beta \\ (t_1^{r_1} \cdots t_n^{r_n} \alpha)^{-1} &= t_1^{-r_{\alpha(1)}} t_2^{-r_{\alpha(2)}} \cdots t_n^{-r_{\alpha(n)}} \alpha^{-1} \end{aligned}$$

De modo geométrico, el producto de las trenzas framizadas viene dado por el producto usual de trenzas con los framings sumados manteniendo la correspondencia entre cuerdas asignadas por la permutación asociada a la trenza. A continuación un ejemplo particular.

**Ejemplo 3.1.** El producto de dos trenzas framizadas

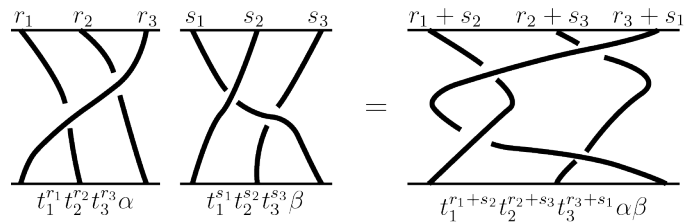


Figura 3.1

Las nociones de equivalencia por isotopía y diagramas de trenzas y movimientos de Reidemeister del caso clásico son aplicables análogamente para trenzas framizadas. El teorema homónimo sigue siendo válido también en este caso.

En ánimo de lograr una correspondencia entre links framizados y trenzas framizadas, con el objetivo de construir una invariante polinomial para links framizados sobre el álgebra de Yokonuma-Hecke, continuaremos con la definición de clausura de una trenza framizada y enunciaremos las versiones de los teoremas de Alexander y Markov para estos objetos.

Dada una trenza framizada  $\alpha \in \mathcal{F}_n$ , se tiene que su clausura  $\widehat{\alpha}$  es un link orientado framizado. El framing del correspondiente link es obtenido sumando los framings de todas cuerdas que forman esa componente. A continuación un ejemplo:

**Ejemplo 3.2.** La clausura del elemento  $t_1^{r_1} t_2^{r_2} t_r^{r_3} \alpha \in \mathcal{F}_3$

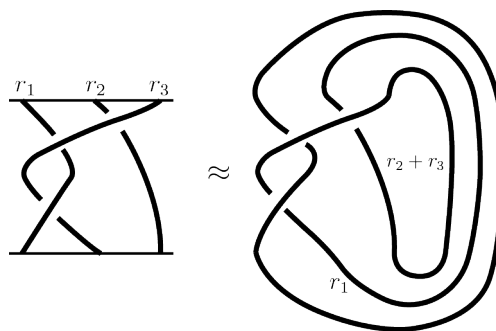


Figura 3.2: Note que el link tiene dos componentes

Así tenemos los siguientes resultados análogos al caso clásico.

**Teorema 3.2** (Alexander para trenzas framizadas). Todo link framizado orientado es isotópico a la clausura de una trenza framizada.

**Definición 3.2.** Sea  $\alpha \in \mathcal{F}_n$ . Definimos las siguientes relaciones

- i)  $\alpha$  está relacionada con  $\beta\alpha\beta^{-1}$ , donde  $\beta$  es cualquier elemento de  $\mathcal{F}_n$

ii)  $\alpha$  está relacionada con  $\alpha\sigma_n$  y con  $\alpha\sigma_n^{-1}$

Al igual que en el caso clásico no es difícil ( ver Proposición 1.10) verificar que esta relación es de equivalencia. Diremos que dos trenzas framizadas serán Markov-equivalentes si y solo si pertenecen a la misma clase de equivalencia por las relaciones anteriores.

**Teorema 3.3** (Ko y Smolinsky, 1992). Sean  $\alpha, \beta \in \mathcal{F}_n$ ,  $\hat{\alpha}$  y  $\hat{\beta}$  son dos links orientados framizados isotópicos si y solo si  $\alpha$  y  $\beta$  son Markov-equivalentes [18, Lema 1].

**Observación 3.4.** Podemos hacer una extrapolación de  $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_{\infty, n}$  hacia  $S_{\infty, n} = C^n \rtimes S_n$  y de  $\mathcal{F}_{d, n}$  hacia  $S_{d, n} = C_d^n \rtimes S_n$ , donde  $S_n$  es el grupo simétrico de  $n$  elementos.  $S_{\infty, n}$  y  $S_{d, n}$  son conocidos como las versiones finitas del grupo de trenzas framizadas y de trenzas framizadas módulo  $d$  respectivamente. Además, las presentaciones de  $S_{\infty, n}$  y de  $S_{d, n}$  se obtienen a partir de agregar las relaciones a las presentaciones de  $\mathcal{F}_n$  y  $\mathcal{F}_{d, n}$  respectivamente. Usando esta presentación se puede probar que cualquier elemento de  $S_{d, n}$  puede ser escrito de la forma

$$w_1 \cdots w_n, \quad (3.7)$$

donde  $P_1 := \{t^m \mid 0 \leq m \leq d-1\}$ ,  $w_i \in P_1$  y  $P_i := \{1, t_i^m, s_i w \mid w \in P_{i-1}, 1 \leq m \leq d-1\}$  ( $2 \leq i \leq n$ ). Ver [15, Remark 2]. Las palabras de la forma  $w_1 \cdots w_n$  de  $S_{d, n}$  se conocen como palabras normales o monomios estándar.

Retomando la idea de la función largo  $\ell$  de  $S_n$ , el grupo de Coxeter de tipo A (ver Apéndice B), podemos extender  $\ell$  a una función largo  $\ell'$  de  $S_{d, n}$  tomando en consideración la siguiente configuración:  $\ell'(ts_i) = \ell(s_i) = 1$  para todo  $t \in C_d^n$ . Con el fin de simplificar la notación usaremos  $\ell$  en vez de  $\ell'$  para el grupo  $S_{d, n}$ . De allí procede el siguiente lema:

**Lema 3.4.** Para cualquier  $s_j, s_i, g \in S_{d, n}$  tal que  $\ell(s_j g s_i) = \ell(g)$  y  $\ell(s_j g) = \ell(g s_i)$  se tiene que  $s_j g = g s_i$ . Equivalentemente,  $s_j g s_i = g$ .

*Demostración.* Note que los elementos de  $C_d^n$  no tienen incidencia en  $\ell$ , luego sin pérdida de generalidad podemos suponer  $g = s_{i_1} \cdots s_{i_r} \in S_{d, n}$  reducida. Hay dos posibilidades:

- a)  $\ell(s_j g) > \ell(g)$ . Entonces  $\ell(g) = \ell((s_j g) s_i) < \ell(s_j g)$ , por tanto la Propiedad de Intercambio aplica para el par  $s_j g, s_i$ . Obtenemos que  $s_j g = g' s_i$ , donde  $g' = s_j s_{i_1} \cdots \widehat{s_{i_k}} \cdots s_{i_r}$  o bien  $g' = g$ . La primera alternativa es imposible, ya que implicaría que  $g = s_j (g' s_i) = s_{i_1} \cdots \widehat{s_{i_k}} \cdots s_{i_r} s_i$ , forzando que  $g s_i = s_{i_1} \cdots \widehat{s_{i_k}} \cdots s_{i_r}$  de largo menor que  $g$ , lo cual es contrario a la hipótesis  $\ell(g s_i) = \ell(s_j g) > \ell(g)$ . Por tanto  $g' = g$  y  $s_j g = g s_i$ .
- b)  $\ell(s_j g) < \ell(g) = \ell(s_j (s_j g))$ . Observe que la hipótesis del lema se satisface ahora para  $s_j g$  en lugar de  $g$ , entonces aplicamos el resultado del lema en el caso a) para  $s_j g$ . Concluimos que  $s_j (s_j g) = (s_j g) s_i$ , es decir  $g = s_j g s_i$ .

□

## 3.2. Álgebra de Yokonuma-Hecke

En esta sección estudiaremos la estructura del álgebra de Yokonuma-Hecke. Queremos, en primera instancia, dar cuenta de la presentación del álgebra, para lo cual requerimos la siguiente definición.

**Definición 3.3.** Sea  $d \in \mathbb{N}$  y  $\mathbb{C}\mathcal{F}_{d,n}$  el álgebra de grupo de  $\mathcal{F}_{d,n}$ . Definimos los siguientes elementos en  $\mathbb{C}\mathcal{F}_{d,n}$

$$e_i := \frac{1}{d} \sum_{r=0}^{d-1} t_i^r t_{i+1}^{d-r} \quad (i \leq i \leq n-1).l$$

**Lema 3.5.** Para todo  $i$  se tiene que

- a)  $\sigma_i e_i = e_i \sigma_i$ ,
- b)  $e^2 = e_i$ .

*Demostración.* Para probar a)

$$\begin{aligned} \sigma_i e_i &= \sigma_i \frac{1}{d} \sum_{r=0}^{d-1} t_i^r t_{i+1}^{d-r} \\ &= \frac{1}{d} \sum_{r=0}^{d-1} \sigma_i t_i^r t_{i+1}^{d-r} \\ &= \frac{1}{d} \sum_{r=0}^{d-1} t_{i+1}^r \sigma_i t_i^{d-r} \\ &= \frac{1}{d} \sum_{r=0}^{d-1} t_{i+1}^r t_i^{d-r} \sigma_i \\ &= \frac{1}{d} \sum_{r=0}^{d-1} t_i^{d-r} t_{i+1}^r \sigma_i \end{aligned}$$

Si  $u = d - r$  entonces  $r = d - u$ , así

$$\begin{aligned} \sigma_i e_i &= \frac{1}{d} \sum_{r=0}^{d-1} t_i^u t_{i+1}^{d-u} \\ &= e_i \sigma_i. \end{aligned}$$

Para probar b) note primero que si  $r_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $0 \leq r_0 \leq d-1$  entonces

$$t_i^{r_0} t_{i+1}^{d-r_0} e_i = t_i^{r_0} t_{i+1}^{d-r_0} \frac{1}{d} \sum_{r=0}^{d-1} t_i^r t_{i+1}^{d-r} = \frac{1}{d} \sum_{r=0}^{d-1} t_i^{r+r_0} t_{i+1}^{2d-r-r_0} = e_i.$$

Esto porque las expresiones  $r + r_0$  y  $2d - r - r_0$  recorren todos los elementos de  $C_d$  (recordar que  $t_i^d = 1$ ). Así, para cada uno de los  $d$  sumandos de  $e_i$  se cumple lo anterior, de lo cual

$$\begin{aligned} e_i^2 &= \left( \frac{1}{d} \sum_{r=0}^{d-1} t_i^r t_{i+1}^{d-r} \right) e_i \\ &= \frac{1}{d} \underbrace{(e_i + e_i + \cdots + e_i)}_{d\text{-veces}} \\ &= e_i \end{aligned}$$

□

**Definición 3.4.** Sean  $d \in \mathbb{N}$  y  $u$  una indeterminada en  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ . El álgebra de Yokonuma-Hecke de tipo A, denotada por  $Y_{d,n}(u)$  ( $Y_{d,n}$  o simplemente  $Y_n$ ), está definido como el cociente de  $\mathbb{C}\mathcal{F}_{d,n}$  por el ideal bilátero generado por las expresiones cuadráticas

$$\sigma_i^2 - 1 - (u - u^{-1})e_i\sigma_i \quad (1 \leq i \leq n-1)$$

Denotaremos por  $g_i$  al elemento en el álgebra  $Y_{d,n}$  correspondiente con  $\sigma_i$  en  $\mathbb{C}\mathcal{F}_{d,n}$  y mantendremos la notación para los  $t_j$ . Por tanto, el álgebra  $Y_{d,n}$  con parámetro  $u$  está definida por la presentación con generadores  $1, g_1, \dots, g_{n-1}, t_1, \dots, t_n$  sujetos a las relaciones

$$\begin{aligned} g_i g_j &= g_j g_i & |i - j| > 1 \\ g_i g_{i+1} g_i &= g_{i+1} g_i g_{i+1} \\ t_i t_j &= t_j t_i \\ t_i^d &= 1 \\ t_j \sigma_i &= \sigma_i t_{s_i(j)} \\ g_i^2 &= 1 + (u - u^{-1})e_i g_i. \end{aligned}$$

**Observación 3.5.** Todo elemento  $g_i \in Y_{d,n}(u)$  es invertible y su inverso está dado por

$$g_i^{-1} = g_i - (u - u^{-1})e_i$$

Más aún, la inclusión natural  $\mathcal{F}_{d,n} \subseteq \mathcal{F}_{d,n+1}$  induce la siguiente cadena de álgebras:

$$\mathbb{C} \subseteq Y_{d,1} \subseteq \cdots \subseteq Y_{d,n} \subseteq Y_{d,n+1} \subseteq \cdots$$

Note que si  $d = 1$  entonces  $Y_{1,n}(u) = H_n(u)$ . De otro modo, el álgebra de Hecke es un caso particular del álgebra de Yokonuma-Hecke. En efecto, si consideramos  $d = 1$ , entonces  $e_i = 1$ , de lo cual las expresiones cuadráticas de  $Y_{d,n}$  coinciden con las de  $H_n(u)$ .

A continuación enunciaremos un lema para elementos en  $S_{d,n}$  que incorpora elementos análogos del grupo de Coxeter  $S_n$ .

**Lema 3.6.** Para cualquier  $s_i, s_j, g \in S_{d,n}$  tales que  $\ell(s_j g s_i) = \ell(g)$  y  $\ell(s_j g) = \ell(g s_i)$  se tiene que:

- a)  $s_j g e_i = e_j g s_i$ ,
- b)  $g e_i = e_j g$ .

*Demostración.* Ver [15, Lema 5]. □

### 3.3. Una base para $Y_{d,n}$

Estamos en condiciones de probar una de las proposiciones más importantes de este trabajo, a saber, que un conjunto particular de elementos de  $Y_{d,n}$ , denominado el conjunto de palabras normales, constituye una base para esta álgebra. Este resultado fue, como varios otros de los ya expuestos, probado por Juyumaya en [15] con el propósito de demostrar la existencia de una traza de Markov en  $Y_{d,n}$ .

**Lema 3.7.** Para todo  $i$  se cumple que:

- a)  $g_i e_i = e_i g_i = \frac{1}{d} \sum_{r=0}^{d-1} t_i^r g_i t_i^{d-r}$
- b)  $t_{n+1}$  conmuta con todo elemento de  $Y_{d,n}$

*Demostración.*

$$\begin{aligned} g_i e_i &= g_i \frac{1}{d} \sum_{r=0}^{d-1} t_i^r t_{i+1}^{d-r} = \frac{1}{d} \sum_{r=0}^{d-1} g_i t_i^r t_{i+1}^{d-r} = \frac{1}{d} \sum_{r=0}^{d-1} t_{i+1}^r g_i t_{i+1}^{d-r} \\ &= \frac{1}{d} \sum_{r=0}^{d-1} t_{i+1}^r t_i^{d-r} g_i = \frac{1}{d} \sum_{r=0}^{d-1} t_i^{d-r} t_{i+1}^r g_i = e_i g_i. \end{aligned}$$

Además, note que

$$g_i e_i = e_i g_i = \frac{1}{d} \sum_{r=0}^{d-1} t_i^r t_{i+1}^{d-r} g_i = \frac{1}{d} \sum_{r=0}^{d-1} t_i^r g_i t_i^{d-r},$$

teniendo así a).

Por otro lado,  $t_{n+1}$  conmuta con todos los  $t_i$  de  $Y_{d,n}$ . Más aún, la relación  $g_i t_j = t_{s_i(j)} g_i$  permite aseverar que para cualquier  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  se tiene que  $g_i t_{n+1} = t_{n+1} g_i$ , pues aquí la acción de  $s_i \in S_n$  no surte efecto alguno sobre  $n+1$ . Por esto  $t_{n+1}$  conmuta con todo elemento de  $Y_{d,n}$ , concluyendo la demostración. □

**Proposición 3.8.** Todos los elementos de  $Y_{d,n}$  pueden ser escritos como combinación lineal de palabras en los generadores en las cuales aparece a lo más un  $\alpha_n \in \{g_{n-1}, t_n^m \mid 1 \leq m \leq d-1\}$ .

*Demostración.* La prueba será realizada por inducción, y basta realizarla para palabras en los generadores.

Para  $n = 2$ , los únicos generadores son  $t_1, t_2$  y  $g_1$ . De la relación  $g_1^2 = 1 + (u - u^{-1})e_1g_1$  se puede descomponer cualquier potencia de  $g_1$  en combinación lineal palabras en  $e_1g_1$ , pero del Lema 3.7 se deduce que  $e_1g_1$  es una palabra que contiene solamente a  $\alpha_2 = g_1$ . Se sabe que  $g_1t_2^m = t_1^m g_1$ , así que nuevamente solo aparece un  $\alpha'_2 = g_1$ , análogamente con  $t_2^m g_1$ . De esto se concluye que la afirmación es cierta para  $n = 2$ .

Supongamos ahora la proposición para todo  $k \leq n$ . Sea  $M \in Y_{d,n+1}$  una palabra en los generadores, probaremos que  $M$  es combinación lineal de palabras que tienen a lo más un  $\alpha_{n+1} \in \{g_n, t_{n+1}^m \mid 1 \leq m \leq d-1\}$ . Supongamos que en  $M$  aparecen dos elementos  $\alpha_n$  del conjunto anterior, no necesariamente iguales, entonces podemos reescribir  $M = M_1\alpha_{n+1}M_2\alpha'_{n+1}M_3$ , donde  $M_1, M_2$  y  $M_3$  pertenecen a  $Y_{d,n}$ . Luego, por hipótesis de inducción,  $M_2$  es una palabra que tiene a lo más un  $\alpha_n$ .

Si en  $M_2$  no aparece ningún  $\alpha_n$ , entonces  $\alpha_{n+1}$  conmuta con  $M_2$ , de lo cual  $M = M_1M_2\alpha_{n+1}\alpha'_{n+1}M_3$ . Si  $\alpha_{n+1} = \alpha'_{n+1} = t_{n+1}^m$ , entonces la afirmación es verdadera. Si en cambio,  $\alpha_{n+1} = \alpha'_{n+1} = g_n$  entonces

$$\begin{aligned} M &= M_1M_2g_n^2M_3 \\ &= M_1M_2(1 + (u - u^{-1})e_n g_n)M_3 \\ &= M_1M_2M_3 + (u - u^{-1})e_n g_n M_3 \\ &= M_1M_2M_3 + (u - u^{-1})\frac{1}{d} \sum_{r=0}^{d-1} t_n^r g_n t_n^{d-r} M_3 \quad (\text{Lema 3.7}). \end{aligned}$$

Finalmente, si  $\alpha_{n+1} = g_n$  y  $\alpha'_{n+1} = t_{n+1}^m$  o vice-versa solo basta aplicar la relación  $g_n t_{n+1}^m = t_n^m g_n$  para ambos casos. Así,  $M$  es combinación lineal de palabras que contienen a lo más un  $\alpha_{n+1} = g_n$ .

Por otro lado, si en  $M_2$  aparece exactamente un  $\alpha_n$ , se puede reescribir  $M$  como  $M'_1\alpha_{n+1}\alpha_n\alpha'_{n+1}M'_2$ , donde  $M'_1$  y  $M'_2$  son palabras en  $Y_{d,n}$ . Así, solo basta probar que la expresión  $\alpha_{n+1}\alpha_n\alpha'_{n+1}$  es combinación lineal de palabras en las cuales aparece a lo más un  $\alpha_{n+1}$ , en cuyo caso diremos que la palabra es reducida. Consecuentemente, debemos probar que las siguientes palabras son reducidas:

- |                                     |   |
|-------------------------------------|---|
| i) $g_n g_{n-1} g_n$ ,              | v) $g_n g_{n-1} t_{n+1}^m$ ,                    |
| ii) $g_n t_n^m g_n$ ,               | vi) $g_n t_n^{m_1} t_{n+1}^{m_2}$ ,             |
| iii) $t_{n+1}^m g_{n-1} g_n$ ,      | vii) $t_{n+1}^{m_1} g_{n-1} t_{n+1}^{m_2}$ ,    |
| iv) $t_{n+1}^{m_1} t_n^{m_2} g_n$ , | viii) $t_{n+1}^{m_1} t_n^{m_2} t_{n+1}^{m_3}$ . |

Donde  $m, m_1, m_2, m_3 \in \{1, \dots, d-1\}$ . Las pruebas de cada caso respectivo son las siguientes:

- i)  $g_n g_{n-1} g_n = g_{n-1} g_n g_{n-1}$  por la relación de trenza, reduciendo la palabra.

- iii)  $t_{n+1}^m g_{n-1} g_n = g_{n-1} t_{n+1}^m g_n = g_{n-1} g_n t_n^m.$
- iv)  $t_{n+1}^{m_1} t_n^{m_2} g_n = t_n^{m_2} t_{n+1}^{m_1} g_n = t_n^{m_2} g_n t_n^{m_1}.$
- v)  $g_n g_{n-1} t_{n+1}^m = g_n t_{n+1}^m g_{n-1} = t_n^m g_n g_{n-1}.$
- vi)  $g_n t_n^{m_1} t_{n+1}^{m_2} = g_n t_{n+1}^{m_2} t_n^{m_1} = t_n^{m_2} g_n t_n^{m_1}.$
- vii)  $t_{n+1}^{m_1} g_{n-1} t_{n+1}^{m_2} = g_{n-1} t_{n+1}^{m_1+m_2}.$
- viii)  $t_{n+1}^{m_1} t_n^{m_2} t_{n+1}^{m_3} = t_{n+1}^{m_1+m_3} t_n^{m_2}.$

En el caso de ii) considere

$$\begin{aligned}
 g_n t_n^m g_n &= t_{n+1}^m g_n^2 = t_{n+1}^m (1 - (u - u^{-1})e_n g_n) \\
 &= t_{n+1}^m - t_{n+1}^m (u - u^{-1})e_n g_n \\
 &= t_{n+1}^m - (u - u^{-1})t_{n+1}^m \frac{1}{d} \sum_{r=0}^{d-1} t_n^r t_{n+1}^{d-r} g_n \\
 &= t_{n+1}^m - (u - u^{-1}) \frac{1}{d} \sum_{r=0}^{d-1} t_n^r t_{n+1}^{d+m-r} g_n \\
 &= t_{n+1}^m - (u - u^{-1}) \frac{1}{d} \sum_{r=0}^{d-1} t_n^r g_n t_n^{d+m-r},
 \end{aligned}$$

reduciendo  $g_n t_n^m g_n$  y concluyendo así que cualquier palabra en  $Y_{d,n}$  puede ser reducida, para todo  $n \in \mathbb{N}$ .  $\square$

Lo siguiente viene a demostrar que  $Y_{d,n}$  admite una base formada por las palabras normales.

**Definición 3.5.** Definimos recursivamente los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned}
 R_1 &:= \{t_1^m \mid 0 \leq m \leq d-1\} \quad y \\
 R_i &:= \{t_i^m, g_{n-1} v \mid v \in R_{i-1}, 0 \leq m \leq d-1\} \quad (2 \leq i \leq n)
 \end{aligned}$$

Las *palabras normales* de  $Y_{d,n}$  son las palabras de la forma

$$v_1 v_2 \cdots v_n,$$

donde  $v_i \in R_i$

Así, por ejemplo, si  $d = 3$  entonces

$$\begin{aligned}
 R_1 &= \{1, t_1, t_1^2\} \\
 R_2 &= \{1, t_2, t_2^2, g_1, g_1 t_1, g_1 t_1^2\} \\
 R_3 &= \{1, t_3, t_3^2, g_2, g_2 t_2, g_2 t_2^2, g_2 g_1, g_2 g_1 t_1, g_2 g_1 t_1^2\}
 \end{aligned}$$

y así sucesivamente.

**Proposición 3.9.**  $Y_{d,n}$  está linealmente generado por las palabras normales.

*Demostración.* La afirmación es válida para  $n = 1$ . Esto porque  $Y_{d,n}(u) = \mathbb{C}C_d$ , luego toda palabra de  $\mathbb{C}C_d$  es normal de modo trivial.

Supongamos la afirmación para todo  $k \leq n$ . Por la proposición anterior el álgebra  $Y_{d,n+1}$  está linealmente generada por las palabras de la forma

$$\text{i) } M_1 \qquad \text{ii) } M_2 t_{n+1}^m M_3 \qquad \text{iii) } M_4 g_n M_5,$$

donde cada  $M_i$  es una palabra en  $Y_{d,n}$ .

Luego basta probar que las palabras ii) y iii) son combinación lineal de palabras normales.

Hagamos  $M_3 = v_1 \cdots v_n$ , donde  $v_i \in R_i$ . Entonces en ii) se tiene que

$$\begin{aligned} M_2 t_{n+1}^m M_3 &= M_2 t_{n+1}^m v_1 \cdots v_n \\ &= M_2 v_1 \cdots v_{n-1} t_{n+1}^m v_n. \end{aligned}$$

Si  $v_n = t_n^{m'}$ , entonces

$$\begin{aligned} M_2 t_{n+1}^m M_3 &= M_2 v_1 \cdots v_{n-1} t_{n+1}^m t_n^{m'} \\ &= M_2 v_1 \cdots v_{n-1} t_n^{m'} t_{n+1}^m \\ &= M_2 v_1 \cdots v_n t_{n+1}^m, \end{aligned}$$

la cual es una palabra normal en  $Y_{d,n}$

Si  $v_n = g_{n-1} v'_{n-1}$ , donde  $v'_{n-1} \in R_{n-1}$  se tiene que

$$\begin{aligned} M_2 t_{n+1}^m M_3 &= M_2 v_1 \cdots v_{n-1} t_{n+1}^m g_{n-1} v'_{n-1} \\ &= M_2 v_1 \cdots v_{n-1} g_{n-1} t_{n+1}^m v'_{n-1} \\ &= (M_2 v_1 \cdots v_{n-1} g_{n-1} v'_{n-1}) t_{n+1}^m \end{aligned}$$

Como  $M_2, v_1, \cdots, v_{n-1}, g_{n-1} v'_{n-1} \in Y_{d,n}$ , por hipótesis de inducción se tiene que la palabra anterior es combinación lineal de palabras normales.

Si  $M_5 = v_1 \cdots v_n$ , donde  $v_i \in R_i$ , entonces en iii) tenemos que

$$\begin{aligned} M_4 g_n M_5 &= M_4 g_n v_1 \cdots v_n \\ &= (M_4 v_1 \cdots v_{n-1}) g_n v_n \end{aligned}$$

Del hecho que  $g_n v_n \in R_{n+1}$  y aplicando la hipótesis de inducción a la expresión en paréntesis, se obtiene una palabra normal en  $Y_{d,n}$ .  $\square$

Para concluir que las palabras normales son efectivamente una base para  $Y_n$ , resta probar que ellas constituyen un conjunto  $\mathbb{C}$ -linealmente independiente. Para ello acudiremos a una construcción análoga a la de un álgebra genérica a partir de un grupo de Coxeter [11, Secciones 7.1 a 7.3], aunque considerando al grupo  $S_{d,n}$ . A partir de

esta construcción se definen ciertos endomorfismos  $\lambda_w$  y  $\rho_w$  de  $\mathbb{C}S_{d,n}$ , parametrizados por los generadores  $w \in S_{d,n}$  y se prueba que ellos conmutan entre sí, lo cual es esencial para demostrar en particular que los elementos  $\lambda_w$  cumplen las relaciones de  $Y_n$ . Así, dado el homomorfismo de  $\mathbb{C}$ -álgebras  $w \mapsto \lambda_w$  de  $Y_{d,n}$  en  $\text{End}(\mathbb{C}S_{d,n})$ , la prueba de la independencia lineal es completamente natural a partir de una extrapolación del Corolario A.3 para éstas dos  $\mathbb{C}$ -álgebras.

**Definición 3.6.** Para cualquier  $t \in C_d^n$  podemos definir los endomorfismos de  $\mathbb{C}S_{d,n}$   $\rho_t$  y  $\lambda_t$  como las homotecias  $\lambda_t(g) := tg$  y  $\rho_t(g) := gt$ . Para  $g_i \in Y_{d,n}$  definimos los endomorfismos de  $\mathbb{C}S_{d,n}$

$$\lambda_{g_i}(g) := \begin{cases} s_i g & \text{para } \ell(s_i g) > \ell(g) \\ s_i g + (u - u^{-1})e_i g & \text{para } \ell(s_i g) < \ell(g) \end{cases},$$

$$\rho_{g_i}(g) := \begin{cases} g s_i & \text{para } \ell(g s_i) > \ell(g) \\ g s_i + (u - u^{-1})g e_i & \text{para } \ell(g s_i) < \ell(g) \end{cases}.$$

Para iniciar la demostración de la independencia lineal de las palabras normales construiremos una representación del grupo de trenzas framizadas en el álgebra de Yokonuma-Hecke usando los endomorfismos anteriores. Para esto requerimos de los lemas que se presentan a continuación.

**Lema 3.10.** Los endomorfismos  $\lambda_{g_j}$  y  $\rho_{g_i}$  conmutan para todo  $i, j$

*Demostración.* Para los elementos  $\lambda_{g_j}$  y  $\rho_{g_i}$  tenemos los siguientes casos, de acuerdo a los distintos largos de  $g, s_j g, g s_i$  y  $s_j g s_i$  :

i)  $\ell(g) < \ell(g s_i) = \ell(s_j g) < \ell(s_j g s_i)$

$$\lambda_{g_j} \rho_{g_i}(g) = \lambda_{g_j}(g s_i) = (s_j g) s_i = \rho_{g_i}(s_j g) = \rho_{g_i} \lambda_{g_j}(g)$$

ii)  $\ell(s_j g) < \ell(g) < \ell(g s_i) < \ell(s_j g s_i)$

Este caso no es posible, puesto que la cadena  $\ell(s_j g) < \ell(g) < \ell(g s_i) < \ell(s_j g s_i)$  y la Proposición B.2 implican las siguientes igualdades:  $\ell(s_j g) = \ell(g) - 1$ ,  $\ell(g) = \ell(g s_i) - 1$  y  $\ell(g s_i) = \ell(s_j g s_i) - 1$ . Como  $\ell(s_j g) < \ell((s_j g) s_i)$  entonces  $\ell(s_j g) = \ell(s_j g s_i) - 1$ , es decir  $\ell(s_j g) = \ell(g s_i)$ , lo cual es contradictorio.

iii)  $\ell(s_j g) < \ell(s_j g s_i) = \ell(g) < \ell(g s_i)$

$$\lambda_{g_j} \rho_{g_i}(g) = \lambda_{g_j}(g s_i) = s_j g s_i + (u - u^{-1})e_j g s_i$$

$$\rho_{g_i} \lambda_{g_j}(g) = \rho_{g_i}(s_j g + (u - u^{-1})e_j g) = s_j g s_i + (u - u^{-1})e_j g s_i$$

iv)  $\ell(s_j g s_i) < \ell(g) < \ell(g s_i) = \ell(s_j g)$

$$\lambda_{g_j} \rho_{g_i}(g) = \lambda_{g_j}(g s_i) = s_j g s_i + (u - u^{-1})\underline{e_j g s_i}$$

$$\rho_{g_i} \lambda_{g_j}(g) = \rho_{g_i}(s_j g) = s_j g s_i + (u - u^{-1})\underline{s_j g e_i}$$

En virtud del Lema 3.4,  $s_j g = g s_i$ , y por el Lema 3.6  $e_j(g s_i) = (g s_i)e_i = s_j g e_i$ , así que las expresiones subrayadas son iguales.

$$\text{v) } \ell(gs_i) < \ell(g) = \ell(s_jgs_i) < \ell(s_jg)$$

$$\begin{aligned} \lambda_{g_j}\rho_{g_i}(g) &= \lambda_{g_j}(gs_i + (u - u^{-1})ge_i) = s_jgs_i + (u - u^{-1})s_jge_i \\ \rho_{g_i}\lambda_{g_j}(g) &= \rho_{g_i}(s_jg) = s_jgs_i + (u - u^{-1})s_jge_i \end{aligned}$$

$$\text{vi) } \ell(s_jg) = \ell(gs_i) < \ell(g) = \ell(s_jgs_i)$$

$$\begin{aligned} \lambda_{g_j}\rho_{g_i}(g) &= \lambda_{g_j}(gs_i + (u - u^{-1})ge_i) = \underline{s_jgs_i} + (u - u^{-1})(s_jge_i + (u - u^{-1})e_jge_i) \\ \rho_{g_i}\lambda_{g_j}(g) &= \rho_{g_i}(s_jg + (u - u^{-1})e_jg) = s_jgs_i + (u - u^{-1})(\underline{e_jgs_i} + (u - u^{-1})e_jge_i) \end{aligned}$$

Nuevamente por lemas 3.4 y 3.6 las expresiones subrayadas son iguales.

$$\text{vii) } \ell(s_jgs_i) < \ell(gs_i) < \ell(g) < \ell(s_jg)$$

Este caso no es posible por lo siguiente: la cadena  $\ell(s_jgs_i) < \ell(gs_i) < \ell(g) < \ell(s_jg)$  y la Proposición B.2 permite las siguientes igualdades:  $\ell(s_jgs_i) = \ell(gs_i) - 1$ ,  $\ell(gs_i) = \ell(g) - 1$  y  $\ell(g) = \ell(s_jg) - 1$ ; pero como  $\ell((s_jg)s_i) < \ell(s_jg)$  entonces  $\ell(s_jgs_i) = \ell(s_jg) - 1$ , así que  $\ell(s_jgs_i) = \ell(g)$ , lo cual es contradictorio.

$$\text{viii) } \ell(s_jgs_i) < \ell(s_jg) = \ell(gs_i) < \ell(g)$$

$$\begin{aligned} \lambda_{g_j}\rho_{g_i}(g) &= \lambda_{g_j}(gs_i + (u - u^{-1})ge_i) \\ &= s_jgs_i + (u - u^{-1})e_jgs_i + (u - u^{-1})(s_jge_i + (u - u^{-1})e_jge_i) \\ &= s_jgs_i + (u - u^{-1})(e_jgs_i + s_jge_i) + (u - u^{-1})^2e_jge_i \\ \rho_{g_i}\lambda_{g_j}(g) &= \rho_{g_i}(s_jg + (u - u^{-1})e_jg) \\ &= s_jgs_i + (u - u^{-1})s_jge_i + (u - u^{-1})(e_jgs_i + (u - u^{-1})e_jge_i) \\ &= s_jgs_i + (u - u^{-1})(s_jge_i + e_jgs_i) + (u - u^{-1})^2e_jge_i \end{aligned}$$

Por lo anterior tenemos que  $\lambda_{g_j}\rho_{g_i} = \rho_{g_i}\lambda_{g_j}$  para todo  $i, j$ . □

**Lema 3.11.** Los endomorfismos  $\lambda_{g_i}$  y  $\lambda_{t_j}$  satisfacen las relaciones del álgebra de Yokonuma-Hecke.

*Demostración.* Probaremos primero las relaciones de  $C_d^n$  para  $\lambda_{t_i}$ . Sea  $g \in S_{d,n}$

$$\lambda_{t_i}^d(g) = \underbrace{\lambda_{t_i} \cdots \lambda_{t_i}}_{d\text{-veces}}(g) = t_i^d g = 1 \cdot g = \text{Id}(g),$$

luego  $\lambda_{t_i}^d = 1$ . Por otro lado,

$$\lambda_{t_i}\lambda_{t_j}(g) = \lambda_{t_i}(t_jg) = t_it_jg = t_jt_i g = \lambda_{t_j}\lambda_{t_i}(g)$$

así que  $\lambda_{t_i}\lambda_{t_j} = \lambda_{t_j}\lambda_{t_i}$  para todo  $i, j$ . En el caso de la relación mixta proveniente del producto semi-directo, es decir,  $t_i g_j = g_j t_{s_j(i)}$  tenemos dos casos:

1.- Si  $\ell(s_j g) > \ell(g)$  y  $\ell(t_{s_j(i)} g) = \ell(g) < \ell(s_j t_{s_j(i)} g) = \ell(s_j g)$  tenemos

$$\lambda_{t_i} \lambda_{g_j}(g) = \lambda_{t_i}(s_j g) = t_i s_j g = s_j t_{s_j(i)} g = \lambda_{g_j} \lambda_{t_{s_j(i)}}(g)$$

de lo cual  $\lambda_{t_i} \lambda_{g_j} = \lambda_{g_j} \lambda_{t_{s_j(i)}}$

2.- Si  $\ell(s_j g) < \ell(g)$  y  $\ell(s_j t_i g) = \ell(s_j g) < \ell(g) = \ell(t_i g)$  tenemos

$$\lambda_{t_i} \lambda_{g_j}(g) = \lambda_{t_i}(s_j g + (u - u^{-1})e_j g) = t_i s_j g + (u - u^{-1})\underline{t_i e_j g}$$

mientras que

$$\begin{aligned} \lambda_{g_j} \lambda_{t_{s_j(i)}}(g) &= \lambda_{g_j}(t_{s_j(i)} g) = s_j t_{s_j(i)} g + (u - u^{-1})e_j t_{s_j(i)} g \\ &= t_{s_j^2(i)} s_j g + (u - u^{-1})e_j t_{s_j(i)} g \\ &= t_i s_j g + (u - u^{-1})\underline{t_{s_j(i)} g} \end{aligned}$$

De lo anterior basta probar que los elementos subrayados son iguales para que  $\lambda_{t_i} \lambda_{g_j} = \lambda_{g_j} \lambda_{t_{s_j(i)}}$  para todo  $i, j$ . En efecto, si  $j \neq i$  y  $j \neq i - 1$  entonces  $s_j(i) = i$ , de lo cual

$$e_j t_{s_j(i)} = e_j t_i = \frac{1}{d} \sum_{r=0}^{d-1} t_j^r t_{j+1}^{-r} t_i = t_i \frac{1}{d} \sum_{r=0}^{d-1} t_j^r t_{j+1}^{-r} = t_i e_j.$$

Si en cambio  $j = i$ , entonces

$$\begin{aligned} e_j t_{s_j(i)} &= e_i t_{i+1} = \frac{1}{d} \sum_{r=0}^{d-1} t_i^r t_{i+1}^{-r} t_{i+1} \\ &= \frac{1}{d} \sum_{r=0}^{d-1} t_i^r t_{i+1}^{1-r} \\ &= t_i \frac{1}{d} \sum_{r=0}^{d-1} t_j^{r-1} t_{j+1}^{1-r} \\ &= t_i \frac{1}{d} \sum_{u=0}^{d-1} t_j^u t_{j+1}^{-u} \quad (u = r - 1) \\ &= t_i e_i = t_i e_j. \end{aligned}$$

Si, en último lugar  $j = i - 1$ , entonces

$$\begin{aligned}
 e_j t_{s_j(i)} &= e_{i-1} t_{i-1} = \frac{1}{d} \sum_{r=0}^{d-1} t_{i-1}^r t_i^{-r} t_{i-1} \\
 &= t_i \frac{1}{d} \sum_{r=0}^{d-1} t_{i-1}^{r+1} t_i^{-r-1} \\
 &= t_i \frac{1}{d} \sum_{u=0}^{d-1} t_{i-1}^u t_i^{-u} \quad (u = r + 1) \\
 &= t_i e_{i-1} = t_i e_j.
 \end{aligned}$$

Luego  $\lambda_{t_i} \lambda_{g_j} = \lambda_{g_j} \lambda_{t_{s_j(i)}}$  para todo  $i, j$ .

Para probar la relación cuadrática definimos

$$\lambda_{e_i} := \frac{1}{d} \sum_{r=0}^{d-1} \lambda_{t_i}^r \lambda_{t_{i+1}}^{-r}.$$

Como los  $\lambda_{t_i}$  conviven en  $\text{End}(\mathbb{C}S_{d,n})$  entonces los  $\lambda_{e_i}$  están bien definidos en esta misma  $\mathbb{C}$ -álgebra. Note además que  $e_i g = \lambda_{e_i}(g)$  por la definición de los endomorfismos  $\lambda_{t_i}$ , por tanto la afirmación a demostrar es  $\lambda_{g_i}^2 = 1 + (u - u^{-1})\lambda_{e_i} \lambda_{g_i}$ . Por último, si  $\ell(s_i g) > \ell(g)$  entonces  $\lambda_{e_i} \lambda_{g_i}(g) = \lambda_{e_i}(s_i g) = e_i s_i g = s_i e_i g = \lambda_{g_i} \lambda_{e_i}(g)$  por el Lema 3.7; en el otro caso, es decir, cuando  $\ell(s_i g) < \ell(g)$  tenemos que

$$\begin{aligned}
 \lambda_{e_i} \lambda_{g_i}(g) &= \lambda_{e_i}(s_i g + (u - u^{-1})e_i g) \\
 &= e_i s_i g + (u - u^{-1})e_i^2 g \\
 &= e_i s_i g + (u - u^{-1})e_i g \quad (\text{Lema 3.5}),
 \end{aligned}$$

mientras que

$$\begin{aligned}
 \lambda_{g_i} \lambda_{e_i}(g) &= \lambda_{g_i}(e_i g) = s_i e_i g + (u - u^{-1})e_i^2 g \\
 &= e_i s_i g + (u - u^{-1})e_i g \quad (\text{Lema 3.5 y Lema 3.7}).
 \end{aligned}$$

Probando así que  $\lambda_{e_i} \lambda_{g_i} = \lambda_{g_i} \lambda_{e_i}$  para todo  $i$ . En este escenario, para probar la relación cuadrática debemos considerar dos casos dados por los largos de  $g$  y  $s_i g$ .

1.- Si  $\ell(s_i g) > \ell(g)$  entonces  $\ell(g) = \ell(s_i s_i g) < \ell(s_i g)$ , de lo cual

$$\begin{aligned}
 \lambda_{g_i}^2(g) &= \lambda_{g_i}(\lambda_{g_i}(g)) = \lambda_{g_i}(s_i g) \\
 &= s_i(s_i g) + (u - u^{-1})e_i s_i g \\
 &= g + (u - u^{-1})e_i g_i g \\
 &= \text{Id}(g) + (u - u^{-1})\lambda_{e_i} \lambda_{g_i}(g),
 \end{aligned}$$

luego  $\lambda_{g_i}^2 = 1 + (u - u^{-1})\lambda_{e_i} \lambda_{g_i}$ .

2.- Si  $\ell(s_i g) < \ell(g)$  entonces  $\ell(g) = \ell(s_i(s_i g)) > \ell(s_i g)$ , así

$$\begin{aligned} \text{Id}(g) + (u - u^{-1})\lambda_{e_i}\lambda_{g_i}(g) &= \lambda_{g_i}(s_i g) + (u - u^{-1})\lambda_{g_i}\lambda_{e_i}(g) \\ &= \lambda_{g_i}(s_i g + (u - u^{-1})e_i g) \\ &= \lambda_{g_i}(\lambda_{g_i}(g)) \\ &= \lambda_{g_i}^2(g) \end{aligned}$$

Probando así que  $\lambda_{g_i}^2 = 1 + (u - u^{-1})\lambda_{e_i}\lambda_{g_i}$ .

Para las relaciones de trenzas consideraremos fuertemente el Lema 3.10, esto porque dada  $g = s_{i_1} \cdots s_{i_r} \in S_{d,n}$  una expresión reducida tenemos que  $\rho_{g_{i_r}} \rho_{g_{i_{r-1}}} \cdots \rho_{g_{i_1}}(1) = s_{i_1} \cdots s_{i_r} = g$ , haciendo  $\rho = \rho_{g_{i_1}} \cdots \rho_{g_{i_r}}$  y  $|i - j| > 1$  tenemos que

$$\begin{aligned} \lambda_{g_i}\lambda_{g_j}(g) &= \lambda_{g_i}\lambda_{g_j}\rho(1) \\ &= \rho\lambda_{g_i}\lambda_{g_j}(1) \quad (\text{Lema 3.10}) \\ &= \rho\lambda_{g_i}(s_j) \\ &= \rho(s_i s_j) \\ &= \rho(s_j s_i) \quad (\text{relación de trenza}) \\ &= \rho\lambda_{g_j}\lambda_{g_i}(1) \\ &= \lambda_{g_j}\lambda_{g_i}\rho(1) \\ &= \lambda_{g_j}\lambda_{g_i}(g), \end{aligned}$$

como se quería probar. En el caso de la otra relación de trenza tenemos que

$$\begin{aligned} \lambda_{g_i}\lambda_{g_{i+1}}\lambda_{g_i}(g) &= \lambda_{g_i}\lambda_{g_{i+1}}\lambda_{g_i}\rho(1) \\ &= \rho\lambda_{g_i}\lambda_{g_{i+1}}\lambda_{g_i}(1) \\ &= \rho(s_i s_{i+1} s_i) \\ &= \rho(s_{i+1} s_i s_{i+1}) \quad (\text{relación de trenza}) \\ &= \rho\lambda_{g_{i+1}}\lambda_{g_i}\lambda_{g_{i+1}}(1) \\ &= \lambda_{g_{i+1}}\lambda_{g_i}\lambda_{g_{i+1}}\rho(1) \\ &= \lambda_{g_{i+1}}\lambda_{g_i}\lambda_{g_{i+1}}(g), \end{aligned}$$

como se deseaba, concluyendo así la demostración.  $\square$

El proceso anterior es análogo al efectuado en el Corolario A.3 para un álgebra genérica asociada a un grupo de Coxeter (ver [11, Secciones 7.1 a 7.3]). Así, de forma similar obtenemos la siguiente proposición.

**Proposición 3.12.** La función  $\lambda : Y_{d,n} \longrightarrow \text{End}(\mathbb{C}S_{d,n})$  tal que  $g_i \longmapsto \lambda_{g_i}$  y  $t_i \longmapsto \lambda_{t_i}$  define un homomorfismo de  $\mathbb{C}$ -álgebras.

**Observación 3.6.** El hecho de que los homomorfismos  $\lambda_w$  y  $\rho_{w'}$  conmuten para cualquier generador  $w, w' \in Y_{d,n}$  permite probar que la función  $\lambda$  efectivamente constituye un homomorfismo de  $\mathbb{C}$ -álgebras, más aún, ésta induce una función  $\mathbb{C}$ -lineal  $\widehat{\lambda}$  dada por

$$\begin{aligned} \widehat{\lambda}: Y_{d,n}(u) &\longrightarrow \mathbb{C}S_{d,n} \\ g_i &\longmapsto \lambda_{g_i}(1) = s_i \\ t_i &\longmapsto \lambda_{t_i}(1) = t_i \end{aligned}$$

Así, si  $V = v_1 \cdots v_{n-1}$  es una palabra normal de  $Y_{d,n}$  entonces

$$\widehat{\lambda}(V) = w_1 \cdots w_{n-1} \in S_{d,n}, \quad (3.8)$$

como en la Ecuación (3.7).

**Proposición 3.13.** El conjunto de las palabras normales es una  $\mathbb{C}$ -base para,  $Y_{d,n}$ . Por tanto, la dimensión de  $Y_{d,n}$  es  $d^n n!$ .

*Demostración.* Supongamos que

$$\sum_{V \in A} \alpha_V V = 0,$$

donde  $A$  es el conjunto de palabras normales. Luego, aplicando  $\widehat{\lambda}$  y los resultados de la Observación 3.6 se obtiene

$$\begin{aligned} \sum_{V \in A} \widehat{\lambda}(\alpha_V V) &= 0 \\ \sum_W \alpha_W W &= 0, \end{aligned}$$

donde  $W$  recorre todas las palabras de la forma (3.8), es decir, recorre todos los elementos de  $S_{d,n}$ , los cuales por definición son linealmente independientes en  $\mathbb{C}S_{d,n}$ , por lo tanto, se obtiene  $\alpha_v = 0$  para todo  $v \in A$ , obteniendo así que las palabras normales de  $Y_{d,n}$  constituyen una base para esta álgebra.

Para la parte final de la proposición, note que al ser  $R_1 = \{1, t_1^m \mid 1 \leq m \leq d-1\}$  tenemos que  $|R_1| = d$ . Asimismo, al ser  $R_i = \{1, t_i^m, g_{n-1}v \mid v \in R_{i-1}, 1 \leq m \leq d-1\}$  se tiene que  $|R_i| = d + |R_{i-1}|$ . Para  $i = 2$ ,  $|R_i| = 2d$ , luego si suponemos que  $|R_k| = dk$  para todo  $k < n$ , entonces  $|R_n| = d + |R_{n-1}| = d + (n-1)d = dn$ , así que  $|R_n| = dn$ . Considerando que la base de  $Y_{d,n}$  es  $\{v_1 \cdots v_n \mid v_i \in R_i\}$  tenemos que  $v_1$  tiene  $d$  posibles elementos,  $v_2$  tiene  $2d$  posibilidades, etc. Así que la palabra

$$v_1 \cdots v_n$$

tiene  $d \cdot 2d \cdot 3d \cdots nd = d^n n!$  posibilidades, por tanto,  $\dim_{\mathbb{C}}(Y_{d,n}) = d^n n!$   $\square$

# Capítulo 4

## Invariante polinomial

Habiendo ya demostrado que las palabras normales son una  $\mathbb{C}$ -base para  $Y_{d,n}$  estamos en condiciones de probar la existencia de una traza de Markov en el álgebra de Yokonuma-Hecke. En cuanto a la receta de Jones, la demostración de la existencia de una traza de Markov sobre el álgebra es crucial para la construcción de la invariante polinomial de links. La demostración de este último resultado, efectuada por Juyumaya en [15], incorpora un isomorfismo de  $(Y_n, Y_n)$ -bimódulos de  $(Y_n \oplus \cdots \oplus Y_n) \oplus Y_n \otimes_{Y_{n-1}} Y_n$  con  $Y_{n+1}$ . En este capítulo exhibiremos el resultado más importante de este trabajo: la demostración de la existencia de la traza de Markov sobre  $Y_{d,n}(u)$ , por medio del método inductivo de trazas relativas utilizado en [1, Sección 4] para el álgebra Braids and Ties, en [9] para la framización del álgebra de Hecke de tipo B, y empleado antes en [6, Sección 5] por Chlouveraki y Poulain d'Andecy para las álgebras de Yokonuma-Hecke afín y ciclotómica.

El método consiste en la construcción de una familia de ciertas funciones lineales llamadas *trazas relativas* de  $Y_{d,n}$  en  $Y_{d,n-1}$ , asociada a la cadena de álgebras

$$\mathbb{C} \subseteq Y_{d,1} \subseteq \cdots \subseteq Y_{d,n} \subseteq Y_{d,n+1} \subseteq \cdots$$

La composición de todas estas funciones lineales es en efecto la traza de Markov que buscamos. Luego de demostrar esto, buscamos condiciones sobre los parámetros de la función traza, de modo que ésta compuesta con la representación natural de  $\mathcal{F}_{d,n}$  en  $Y_{d,n}$  sea efectivamente una invariante polinomial, es decir, que respete la equivalencia de Markov para trenzas framizadas. Las condiciones halladas se traducen en un sistema de ecuaciones que involucra los parámetros de la traza, el cual es denominado  $E$ -sistema, y cuya solución fue obtenida por Gérardin por medio de elementos del análisis de Fourier en grupos finitos, ver [16, Apéndice].

La primera sección de este capítulo contiene la prueba de la traza de Markov sobre  $Y_{d,n}$  utilizando las trazas relativas; la segunda aborda la  $E$ -condición necesaria para la re-escalación de la compuesta entre la traza y la representación, lo cual se traduce en un  $E$ -sistema de ecuaciones; la sección 3 contiene la solución general del  $E$ -sistema; la cuarta y última sección expone la construcción de la invariante polinomial.

## 4.1. Trazas relativas de Markov sobre $Y_{d,n}$

En lo que sigue, escribiremos  $Y_{d,n} = Y_n$  y definiremos

$$Y_\infty := \bigcup_{n \geq 0} Y_n,$$

donde por definición  $Y_0 = \mathbb{C}$ .

**Definición 4.1** (Trazas relativas). Sean  $z, X_0, \dots, X_{d-1}$  parámetros en  $\mathbb{C}(u, z)$  y  $v_1 \cdots v_n$  una palabra normal en la base de  $Y_n$ , definimos la traza relativa de  $Y_n$  en  $Y_{n-1}$  como la función

$$\mathrm{tr}_n(v_1 \cdots v_n) := \begin{cases} zv_1 \cdots v_{n-1} \widehat{v}_n & \text{si } v_n = g_{n-1} \cdots g_i t_i^a \\ X_a v_1 \cdots v_{n-1} & \text{si } v_n = t_n^a \end{cases}$$

donde  $\widehat{v}_n = g_{n-2} \cdots g_i t_i^a$ ,  $0 \leq a \leq d-1$  y  $X_0 := 1$ .

**Lema 4.1.** Para todo  $w \in Y_{n-1}$  se cumple que

$$\mathrm{tr}_n(wv_n) = \begin{cases} zw\widehat{v}_n & \text{si } v_n = g_{n-1} \cdots g_k t_k^a \\ X_a w & \text{si } v_n = t_n^a \end{cases}$$

*Demostración.* Como  $w \in Y_{n-1}$ , entonces  $w$  es combinación lineal de palabras normales

$$w_1 \cdots w_{n-1}$$

Así, al ser  $\mathrm{tr}_n$  una función  $\mathbb{C}$ -lineal, pues está definida en la base, tenemos que

$$\mathrm{tr}_n(wv_n) = \mathrm{tr}_n \left( \sum_{i=1}^r (w_{i,1} \cdots w_{i,n-1} v_n) \right) = \sum_{i=1}^r \mathrm{tr}_n(w_{i,1} \cdots w_{i,n-1}).$$

De allí que dependiendo de la composición de  $v_n$  se derivan dos casos:

Caso1:  $v_n = g_{n-1} \cdots g_k t_k^a$

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}_n(wv_n) &= \sum_{i=1}^r \mathrm{tr}_n(w_{i,1} \cdots w_{i,n-1} v_n) \\ &= \sum_{i=1}^r zw_{i,1} \cdots w_{i,n-1} \widehat{v}_n \\ &= z \left( \sum_{i=1}^r w_{i,1} \cdots w_{i,n-1} \right) \widehat{v}_n \\ &= zw\widehat{v}_n. \end{aligned}$$

Caso 2:  $v_n = t_n^a$

$$\begin{aligned}
 \operatorname{tr}_n(wv_n) &= \sum_{i=1}^r \operatorname{tr}_n(w_{i,1} \cdots w_{i,n-1} t_n^a) \\
 &= \sum_{i=1}^r X_a w_{i,1} \cdots w_{i,n-1} \\
 &= X_a \sum_{i=1}^r w_{i,1} \cdots w_{i,n-1} \\
 &= X_a w,
 \end{aligned}$$

concluyendo así la demostración. □

**Lema 4.2.** Sean  $a$  y  $b$  elementos de  $Y_{n-1}$  y  $x \in Y_n$ . Entonces se cumple que

- a)  $\operatorname{tr}_n(ax) = a \operatorname{tr}_n(x)$ ,
- b)  $\operatorname{tr}_n(xb) = \operatorname{tr}_n(x)b$ .

Consecuentemente, se tiene que  $\operatorname{tr}_n(axb) = a \operatorname{tr}_n(x)b$ .

*Demostración.* Por un procedimiento equivalente al de la demostración del lema anterior, sin pérdida de generalidad podemos escoger  $a$  como un elemento en la base, es decir, una palabra normal de la forma  $a_1 \cdots a_{n-1} \in Y_{n-1}$ , así como también podemos tomar  $x = x_1 \cdots x_n$  un elemento basal de  $Y_n$ . Entonces

$$\begin{aligned}
 \operatorname{tr}_n(ax) &= \operatorname{tr}_n((a_1 \cdots a_{n-1} x_1 \cdots x_{n-1}) x_n) \\
 &= \operatorname{tr}_n(a' x_n),
 \end{aligned}$$

donde  $a' \in Y_{n-1}$ . Así las hipótesis del lema anterior se cumplen y en concordancia con ello tenemos dos casos que dependen de la estructura de  $x_n$ .

Caso 1: Si  $x_n = g_{n-1} \cdots g_k t_k^a$  entonces

$$\begin{aligned}
 \operatorname{tr}_n(ax) &= \operatorname{tr}_n(a' x_n) = z a' \widehat{x_n} \\
 &= z a_1 \cdots a_{n-1} x_1 \cdots x_{n-1} \widehat{x_n} \\
 &= a_1 \cdots a_{n-1} (z x_1 \cdots x_{n-1} \widehat{x_n}) \\
 &= a \operatorname{tr}_n(x)
 \end{aligned}$$

Caso 2: Si  $x_n = t_n^a$  entonces

$$\operatorname{tr}_n(a' x_n) = X_a a' = X_a a_1 \cdots a_{n-1} x_1 \cdots x_{n-1} = a \operatorname{tr}_n(x)$$

Probando así la parte a) del lema. Ahora bien, para la parte b) nuevamente podemos tomar  $a = b = b_1 \cdots b_{n-1}$  un elemento en la base de  $Y_{n-1}$  y  $x$  como en la parte a), así

tenemos que  $\text{tr}_n(xb) = \text{tr}_n(x_1 \cdots x_n b_1 \cdots b_{n-1})$ , de lo cual se derivan dos casos parametrizados por la composición de  $x_n$ , a saber:

Caso 1: Si  $x_n = t_n^a$  entonces

$$\begin{aligned} \text{tr}_n(xb) &= \text{tr}_n(x_1 \cdots x_{n-1} t_n^a b_1 \cdots b_{n-1}) \\ &= \text{tr}_n(x_1 \cdots x_{n-1} b_1 \cdots b_{n-1} t_n^a) \\ &= X_a x_1 \cdots x_{n-1} b_1 \cdots b_{n-1} \\ &= \text{tr}_n(x)b. \end{aligned}$$

Caso 2: Si  $x_n = g_{n-1} \cdots g_i t_i^a$  entonces

$$\begin{aligned} \text{tr}_n(xb) &= \text{tr}_n(x_1 \cdots x_{n-1} g_{n-1} \cdots g_i t_i^a b_1 \cdots b_{n-1}) \\ &= \text{tr}_n(x_1 \cdots x_{n-1} g_{n-1} (g_{n-2} \cdots g_i t_i^a b_1 \cdots b_{n-1})), \end{aligned}$$

pero ahora la expresión  $g_{n-2} \cdots g_i t_i^a b_1 \cdots b_{n-1} \in Y_{n-1}$  es combinación lineal de palabras normales en  $Y_{n-1}$ , así que sin pérdida de generalidad (pues la traza relativa es lineal) podemos tomar  $g_{n-2} \cdots g_i t_i^a b_1 \cdots b_{n-1} = c_1 \cdots c_{n-1}$  un elemento basal. De allí que

$$\begin{aligned} \text{tr}_n(xb) &= \text{tr}_n(x_1 \cdots x_{n-1} g_{n-1} c_1 \cdots c_{n-1}) \\ &= \text{tr}_n(x_1 \cdots x_{n-1} c_1 \cdots c_{n-2} \underline{g_{n-1} c_{n-1}}). \end{aligned}$$

Sea cual fuere la estructura de  $c_{n-1}$ , la expresión subrayada en la ecuación anterior es necesariamente de la forma  $g_{n-1} g_{n-2} \cdots g_i t_i^a$ , de lo cual podemos aplicar el Lema 4.1 para  $w = x_1 \cdots x_{n-1} c_1 \cdots c_{n-2} \in Y_{n-1}$  y  $v_n = g_{n-1} c_{n-1}$ , pudiendo entonces concluir que

$$\begin{aligned} \text{tr}_n(xb) &= z x_1 \cdots x_{n-1} c_1 \cdots c_{n-2} \widehat{v}_n \\ &= z x_1 \cdots x_{n-1} c_1 \cdots c_{n-2} c_{n-1} \\ &= (z x_1 \cdots x_{n-1} g_{n-2} \cdots g_i t_i^a) b_1 \cdots b_{n-1} \\ &= \text{tr}_n(x)b, \end{aligned}$$

probando b) y concluyendo así la demostración, pues la última de las afirmaciones es sencillamente deducible de a) y b) simultáneamente.  $\square$

**Lema 4.3.** Sea  $x \in Y_n$ . Entonces

- a)  $\text{tr}_{n-1}(\text{tr}_n(xg_{n-1})) = \text{tr}_{n-1}(\text{tr}_n(g_{n-1}x))$ ,
- b)  $\text{tr}_n(xt_n) = \text{tr}_n(t_n x)$ .

*Demostración.* Nuevamente, dada la linealidad de  $\text{tr}_n$  tomaremos  $x$  un elemento basal de la forma  $x_1 \cdots x_n$ , teniendo así cuatro casos determinados por la condición de  $x_n$  y  $x_{n-1}$ . Más aún, si hacemos  $x = wx_{n-1}x_n$ , con  $w = x_1 \cdots x_{n-2} \in Y_{n-2}(u)$ , por el Lema 4.2 tenemos que  $\text{tr}_{n-1}(\text{tr}_n(xg_{n-1})) = w \text{tr}_{n-1}(\text{tr}_n(x_{n-1}x_n g_{n-1}))$  y  $\text{tr}_{n-1}(\text{tr}_n(g_{n-1}x)) =$

$w \operatorname{tr}_{n-1}(\operatorname{tr}_n(g_{n-1}x_{n-1}x_n))$ , por lo tanto, basta probar las proposiciones sin considerar  $w$ .

a) Caso 1:  $x_n = t_n^a$ ,  $x_{n-1} = t_{n-1}^b$

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}_{n-1}(\operatorname{tr}_n(t_{n-1}^b t_n^a g_{n-1})) &= \operatorname{tr}_{n-1}(\operatorname{tr}_n(t_{n-1}^b g_{n-1} t_{n-1}^a)) \\ &= \operatorname{tr}_{n-1}(z t_{n-1}^{a+b}) \\ \operatorname{tr}_{n-1}(\operatorname{tr}_n(g_{n-1} t_{n-1}^b t_n^a)) &= \operatorname{tr}_{n-1}(\operatorname{tr}_n(g_{n-1} t_n^a t_{n-1}^b)) \\ &= \operatorname{tr}_{n-1}(\operatorname{tr}_n(t_{n-1}^a g_{n-1} t_{n-1}^b)) \\ &= \operatorname{tr}_{n-1}(z t_{n-1}^{a+b}) \\ &= \operatorname{tr}_{n-1}(\operatorname{tr}_n(t_{n-1}^b t_n^a g_{n-1})) \end{aligned}$$

Caso 2:  $x_{n-1} = t_{n-1}^a$ ,  $x_n = g_{n-1} \cdots g_i t_i^b$  y  $w' = g_{n-3} \cdots g_i t_i^b \in Y_{n-2}$

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}_{n-1}(\operatorname{tr}_n(t_{n-1}^a g_{n-1} \cdots g_i t_i^b g_{n-1})) &= \operatorname{tr}_{n-1}(\operatorname{tr}_n(t_{n-1}^a g_{n-1} g_{n-2} g_{n-1})) w' \\ &= \operatorname{tr}_{n-1}(\operatorname{tr}_n(t_{n-1}^a g_{n-2} g_{n-1} g_{n-2})) w' \\ &= z \operatorname{tr}_{n-1}(t_{n-1}^a g_{n-2}^2) w' \\ &= z \operatorname{tr}_{n-1}(t_{n-1}^a + (u - u^{-1}) t_{n-1}^a e_{n-2} g_{n-2}) w' \\ &= z \operatorname{tr}_{n-1}(t_{n-1}^a) w' + z(u - u^{-1}) \operatorname{tr}_{n-1}(t_{n-1}^a e_{n-2} g_{n-2}) w' \\ &= z X_a w' + z(u - u^{-1}) \operatorname{tr}_{n-1}(t_{n-1}^a g_{n-2} e_{n-2}) w' \\ &= z X_a w' + z(u - u^{-1}) \operatorname{tr}_{n-1}(g_{n-2} t_{n-2}^a e_{n-2}) w' \\ &= z X_a w' + z(u - u^{-1}) \operatorname{tr}_{n-1} \left( g_{n-2} t_{n-2}^a \frac{1}{d} \sum_{r=0}^{d-1} t_{n-2}^r t_{n-1}^{-r} \right) w' \\ &= z X_a w' + z(u - u^{-1}) \frac{1}{d} \sum_{r=0}^{d-1} \operatorname{tr}_{n-1}(g_{n-2} t_{n-2}^a t_{n-2}^r t_{n-1}^{-r}) w' \\ &= z X_a w' + \frac{z(u - u^{-1})}{d} \sum_{r=0}^{d-1} \operatorname{tr}_{n-1}(t_{n-2}^{-r} g_{n-2} t_{n-2}^{a+r}) w' \\ &= z X_a w' + \frac{z^2(u - u^{-1})}{d} \sum_{r=0}^{d-1} t_{n-2}^{-r} t_{n-2}^{a+r} w' \\ &= z X_a w' + \frac{z^2(u - u^{-1})}{d} \sum_{r=0}^{d-1} t_{n-2}^a w' \\ &= z X_a w' + z^2(u - u^{-1}) t_{n-2}^a w'. \end{aligned}$$

Por otro lado, tenemos que

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}_{n-1}(\operatorname{tr}_n(g_{n-1} t_{n-1}^a g_{n-1} \cdots g_i t_i^b)) &= \operatorname{tr}_{n-1}(\operatorname{tr}_n(t_{n-1}^a g_{n-1}^2 g_{n-2})) w' \\ &= \operatorname{tr}_{n-1}(\operatorname{tr}_n(t_{n-1}^a g_{n-2} + (u - u^{-1}) t_{n-1}^a g_{n-1} e_{n-1} g_{n-2})) w' \\ &= \operatorname{tr}_{n-1}(X_a g_{n-2}) w' + (u - u^{-1}) \operatorname{tr}_{n-1}(\operatorname{tr}_n(g_{n-1} t_{n-1}^a e_{n-1} g_{n-2})) w' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= zX_a w' + \frac{(u - u^{-1})}{d} \sum_{r=0}^{d-1} \text{tr}_{n-1}(\text{tr}_n(g_{n-1}t_{n-1}^a t_{n-1}^r t_n^{-r} g_{n-2}))w' \\
 &= zX_a w' + \frac{(u - u^{-1})}{d} \sum_{r=0}^{d-1} \text{tr}_{n-1}(\text{tr}_n(t_{n-1}^{-r} g_{n-1} t_{n-1}^{a+r} g_{n-2}))w' \\
 &= zX_a w' + \frac{z(u - u^{-1})}{d} \sum_{r=0}^{d-1} \text{tr}_{n-1}(t_{n-1}^{-r} t_{n-1}^{a+r} g_{n-2})w' \\
 &= zX_a w' + \frac{z(u - u^{-1})}{d} \sum_{r=0}^{d-1} \text{tr}_{n-1}(t_{n-1}^a g_{n-2})w' \\
 &= zX_a w' + \frac{z(u - u^{-1})}{d} \sum_{r=0}^{d-1} \text{tr}_{n-1}(g_{n-2} t_{n-2}^a)w' \\
 &= zX_a w' + z^2(u - u^{-1})t_{n-2}^a w' \\
 &= \text{tr}_{n-1}(\text{tr}_n(t_{n-1}^a g_{n-1} \cdots g_i t_i^b g_{n-1}))
 \end{aligned}$$

Caso 3:  $x_n = t_n^a$  y  $x_{n-1} = g_{n-2} \cdots g_i t_i^b$

$$\begin{aligned}
 \text{tr}_{n-1}(\text{tr}_n(g_{n-2} \cdots g_i t_i^b t_n^a g_{n-1})) &= \text{tr}_{n-1}(\text{tr}_n(g_{n-2} \cdots g_i t_i^b g_{n-1} t_{n-1}^a)) \\
 &= z \text{tr}_{n-1}(g_{n-2} \cdots g_i t_i^b t_{n-1}^a) \\
 &= z \text{tr}_{n-1}(g_{n-2} t_{n-1}^a g_{n-3} \cdots g_i t_i^b) \\
 &= z \text{tr}_{n-1}(t_{n-2}^a g_{n-2} g_{n-3} \cdots g_i t_i^b) \\
 &= z^2 t_{n-2}^a g_{n-3} \cdots g_i t_i^b \\
 \text{tr}_{n-1}(\text{tr}_n(g_{n-1} g_{n-2} \cdots g_i t_i^b t_n^a)) &= \text{tr}_{n-1}(\text{tr}_n(t_{n-1}^a g_{n-1} g_{n-2} \cdots g_i t_i^b)) \\
 &= z \text{tr}_{n-1}(g_{n-2} t_{n-2}^a g_{n-3} \cdots g_i t_i^b) \\
 &= z^2 t_{n-2}^a g_{n-3} \cdots g_i t_i^b
 \end{aligned}$$

Caso 4:  $x_{n-1} = g_{n-2} \cdots g_i t_i^a$ ,  $x_n = g_{n-1} \cdots g_j t_j^b$  y  $w' = g_{n-3} \cdots g_j t_j^b \in Y_{n-2}$

$$\begin{aligned}
 &\text{tr}_{n-1}(\text{tr}_n(g_{n-2} \cdots g_i t_i^a g_{n-1} \cdots g_j t_j^b g_{n-1})) \\
 &= \text{tr}_{n-1}(\text{tr}_n(g_{n-2} \cdots g_i t_i^a g_{n-1} g_{n-2} g_{n-1}))w' \\
 &= \text{tr}_{n-1}(\text{tr}_n(g_{n-2} \cdots g_i t_i^a g_{n-2} g_{n-1} g_{n-2}))w' \\
 &= z \text{tr}_{n-1}(g_{n-2} \cdots g_i t_i^a g_{n-2}^2)w' \\
 &= z \text{tr}_{n-1}(g_{n-2} \cdots g_i t_i^a)w' + z(u - u^{-1}) \text{tr}_{n-1}(g_{n-2} \cdots g_i t_i^a e_{n-2} g_{n-2})w' \\
 &= \underline{z^2 g_{n-3} \cdots g_i t_i^a w'} + z(u - u^{-1}) \text{tr}_{n-1}(g_{n-2} \cdots g_i t_i^a e_{n-2} g_{n-2})w'
 \end{aligned}$$

El primer sumando ya está resuelto, tomaremos el segundo por separado. Considerare-

mos  $i \leq n - 3$ , pues el caso en que  $i = n - 2$  es fácil de verificar.

$$\begin{aligned}
 & z(u - u^{-1})\text{tr}_{n-1}(g_{n-2} \cdots g_i t_i^a e_{n-2} g_{n-2}) w' \\
 &= z(u - u^{-1})\text{tr}_{n-1}(g_{n-2} g_{n-3} g_{n-2} g_{n-4} \cdots g_i t_i^a e_{n-2}) w' \\
 &= z(u - u^{-1})\text{tr}_{n-1}(g_{n-3} g_{n-2} g_{n-3} \cdots g_i t_i^a e_{n-2}) w' \\
 &= z \frac{(u - u^{-1})}{d} \sum_{r=0}^{d-1} \text{tr}_{n-1}(g_{n-3} g_{n-2} g_{n-3} \cdots g_i t_i^a t_{n-2}^r t_{n-1}^{-r}) w' \\
 &= z \frac{(u - u^{-1})}{d} \sum_{r=0}^{d-1} \text{tr}_{n-1}(g_{n-3} t_{n-2}^{-r} g_{n-2} g_{n-3} \cdots g_i t_i^a t_{n-2}^r) w' \\
 &= z^2 \frac{(u - u^{-1})}{d} \sum_{r=0}^{d-1} g_{n-3} t_{n-2}^{-r} g_{n-3} \cdots g_i t_i^a t_{n-2}^r w' \\
 &= z^2 \frac{(u - u^{-1})}{d} \sum_{r=0}^{d-1} t_{n-3}^{-r} g_{n-3} t_{n-3}^r g_{n-3} \cdots g_i t_i^a w' \\
 &= z^2 \frac{(u - u^{-1})}{d} \sum_{r=0}^{d-1} t_{n-3}^{-r} t_{n-2}^r g_{n-3}^2 g_{n-4} \cdots g_i t_i^a w'.
 \end{aligned}$$

Teniendo así que

$$\begin{aligned}
 & \text{tr}_{n-1}(\text{tr}_n(g_{n-2} \cdots g_i t_i^a g_{n-1} \cdots g_j t_j^b g_{n-1})) \\
 &= z^2 g_{n-3} \cdots g_i t_i^a w' + \frac{z^2(u - u^{-1})}{d} \sum_{r=0}^{d-1} t_{n-3}^{-r} t_{n-2}^r g_{n-3}^2 g_{n-4} \cdots g_i t_i^a w'.
 \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
 & \text{tr}_{n-1}(\text{tr}_n(g_{n-1} g_{n-2} \cdots g_i t_i^a g_{n-1} g_{n-2})) w' \\
 &= \text{tr}_{n-1}(\text{tr}_n(g_{n-1} g_{n-2} g_{n-1} g_{n-3} \cdots g_i t_i^a g_{n-2})) w' \\
 &= \text{tr}_{n-1}(\text{tr}_n(g_{n-2} g_{n-1} g_{n-2} g_{n-3} \cdots g_i t_i^a g_{n-2})) w' \\
 &= z \text{tr}_{n-1}(g_{n-2}^2 g_{n-3} \cdots g_i t_i^a g_{n-2}) w' \\
 &= z \text{tr}_{n-1}(g_{n-3} \cdots g_i t_i^a g_{n-2}) w' + z(u - u^{-1}) \text{tr}_{n-1}(e_{n-2} g_{n-2} g_{n-3} \cdots g_i t_i^a g_{n-2}) w' \\
 &= \underline{z^2 g_{n-3} \cdots g_i t_i^a w'} + z(u - u^{-1}) \text{tr}_{n-1}(e_{n-2} g_{n-2} g_{n-3} g_{n-2} g_{n-3} \cdots g_i t_i^a) w'
 \end{aligned}$$

Otra vez consideramos el segundo sumando aisladamente:

$$\begin{aligned}
 & z(u - u^{-1})\text{tr}_{n-1}(e_{n-2} g_{n-2} g_{n-3} g_{n-2} g_{n-3} \cdots g_i t_i^a) w' \\
 &= z(u - u^{-1})\text{tr}_{n-1}(e_{n-2} g_{n-3} g_{n-2} g_{n-3} g_{n-4} \cdots g_i t_i^a) w' \\
 &= \frac{z(u - u^{-1})}{d} \sum_{r=0}^{d-1} \text{tr}_{n-1}(t_{n-2}^r t_{n-1}^{-r} g_{n-3} g_{n-2} g_{n-3} \cdots g_i t_i^a) w'
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{z(u - u^{-1})}{d} \sum_{r=0}^{d-1} \text{tr}_{n-1}(t_{n-2}^r g_{n-3} g_{n-2} t_{n-2}^{-r} g_{n-3} \cdots g_i t_i^a) w' \\
&= \frac{z^2(u - u^{-1})}{d} \sum_{r=0}^{d-1} t_{n-2}^r g_{n-3} t_{n-2}^{-r} g_{n-3} \cdots g_i t_i^a w' \\
&= \frac{z^2(u - u^{-1})}{d} \sum_{r=0}^{d-1} t_{n-2}^r t_{n-3}^{-r} g_{n-3}^2 g_{n-4} \cdots g_i t_i^a w'
\end{aligned}$$

Teniendo así que

$$\begin{aligned}
&\text{tr}_{n-1}(\text{tr}_n(g_{n-1} g_{n-2} \cdots g_i t_i^a g_{n-1} \cdots g_j t_j^b)) \\
&= z^2 g_{n-3} \cdots g_i t_i^a w' + \frac{z^2(u - u^{-1})}{d} \sum_{r=0}^{d-1} t_{n-2}^r t_{n-3}^{-r} g_{n-3}^2 g_{n-4} \cdots g_i t_i^a w' \\
&= \text{tr}_{n-1}(\text{tr}_n(g_{n-2} \cdots g_i t_i^a g_{n-1} \cdots g_j t_j^b g_{n-1}))
\end{aligned}$$

b) Tomamos  $x = x_1 \cdots x_n$  un elemento basal y tenemos dos casos dados por la estructura de  $x_n$

Caso 1:  $x_n = t_n^a$

$$\begin{aligned}
\text{tr}_n(x t_n) &= \text{tr}_n(x_1 \cdots x_{n-1} t_n^a t_n) \\
&= \text{tr}_n(x_1 \cdots x_{n-1} t_n t_n^a) \\
&= \text{tr}_n(t_n x_1 \cdots x_{n-1} t_n^a) \\
&= \text{tr}_n(t_n x)
\end{aligned}$$

Caso 2:  $x_n = g_{n-1} \cdots g_i t_i^a$

$$\begin{aligned}
\text{tr}_n(x t_n) &= \text{tr}_n(x_1 \cdots x_{n-1} g_{n-1} \cdots g_i t_i^a t_n) \\
&= \text{tr}_n(x_1 \cdots x_{n-1} g_{n-1} t_n g_{n-2} \cdots g_i t_i^a) \\
&= \text{tr}_n(x_1 \cdots x_{n-1} t_{n-1} g_{n-1} \cdots g_i t_i^a) \\
&= z x_1 \cdots x_{n-1} t_{n-1} g_{n-2} \cdots g_i t_i^a \\
\text{tr}_n(t_n x) &= \text{tr}_n(t_n x_1 \cdots x_{n-1} g_{n-1} \cdots g_i t_i^a) \\
&= \text{tr}_n(x_1 \cdots x_{n-1} t_n g_{n-1} \cdots g_i t_i^a) \\
&= \text{tr}_n(x_1 \cdots x_{n-1} g_{n-1} t_{n-1} g_{n-2} \cdots g_i t_i^a) \\
&= z x_1 \cdots x_{n-1} t_{n-1} g_{n-2} \cdots g_i t_i^a \\
&= \text{tr}_n(x t_n)
\end{aligned}$$

Concluyendo la demostración. □

Considerando los lemas anteriores estamos en condiciones de definir la función  $\text{Tr}$  y probar el teorema que señala que dicha función constituye una traza de Markov sobre  $Y_\infty$ .

**Definición 4.2.** Se define  $\text{Tr}_n : Y_n \longrightarrow \mathbb{C}(u, z)$  inductivamente por

$$\begin{aligned}\text{Tr}_1 &:= \text{tr}_1 \\ \text{Tr}_n &:= \text{Tr}_{n-1} \circ \text{tr}_n\end{aligned}$$

**Teorema 4.4** (Juyumaya, 2004). La familia  $\text{Tr} := \{\text{Tr}_n\}_{n \geq 1}$  es una traza de Markov en  $\bigcup_{n \geq 1} Y_{d,n} = Y_\infty$ . Es decir, para todo  $n \geq 1$  y todo  $x, y \in Y_{d,n}$  se tiene que

- a)  $\text{Tr}_n(1) = 1$ ,
- b)  $\text{Tr}_{n+1}(xg_n) = z\text{Tr}_n(x)$ ,
- c)  $\text{Tr}_{n+1}(xt_{n+1}^a) = X_a\text{Tr}_n(x)$ ,
- d)  $\text{Tr}_n(xy) = \text{Tr}_n(yx)$ .

*Demostración.* a) En efecto, para todo  $n$  se tiene que  $\text{tr}_n(1) = \text{tr}_n(t_n^0) = X_0 = 1$ , así que  $\text{Tr}_n(1) = \text{tr}_1 \circ \cdots \circ \text{tr}_n(1) = 1$ ; b)  $\text{Tr}_{n+1}(xg_n) = \text{Tr}_n(\text{tr}_{n+1}(xg_n)) = \text{Tr}_n(zx) = z\text{Tr}_n(x)$ ; análogamente se prueba c). En cuanto a d), basta demostrar la proposición para  $x \in Y_n$  un elemento basal e  $y \in \{g_1 \cdots, g_{n-1}, t_1, \cdots, t_n\} = A$ , es decir, con  $y$  un generador del álgebra. En efecto, si se tiene que  $\text{Tr}_n(xg_i) = \text{Tr}_n(g_ix)$ ,  $\text{Tr}_n(xt_i) = \text{Tr}_n(t_ix)$ , y consideramos  $y$  una palabra en los generadores de  $Y_{d,n}$  luego iterando se obtiene  $\text{Tr}(xy) = \text{Tr}(yx)$ .

Sea entonces  $x$  un elemento basal de  $Y_n$ . Probaremos la afirmación por inducción sobre  $n$ . En efecto, para  $n = 1$  tenemos  $x \in Y_1$  y por el Lema 4.3 se cumple que

$$\text{Tr}_1(xt_1) = \text{tr}_1(xt_1) = \text{tr}_1(t_1x) = \text{Tr}_1(t_1x)$$

Si suponemos la afirmación para todo  $k < n$  entonces, si  $y \in A \setminus \{t_n, g_{n-1}\}$ :

$$\begin{aligned}\text{Tr}_n(xy) &= \text{tr}_1 \circ \cdots \circ \text{tr}_n(xy) \\ &= \text{tr}_1 \circ \cdots \circ \text{tr}_{n-1}(\text{tr}_n(xy)) \\ &= \text{tr}_1 \circ \cdots \circ \text{tr}_{n-1}(\text{tr}_n(x)y) && \text{(Lema 4.2)} \\ &= \text{tr}_1 \circ \cdots \circ \text{tr}_{n-1}(y\text{tr}_n(x)) && \text{(hipótesis de inducción)} \\ &= \text{tr}_1 \circ \cdots \circ \text{tr}_{n-1}(\text{tr}_n(yx)) \\ &= \text{Tr}_n(yx)\end{aligned}$$

Ahora bien, si  $y = g_{n-1}$  ó  $y = t_n$  entonces

$$\begin{aligned}\text{Tr}_n(xy) &= \text{tr}_1 \circ \cdots \circ \text{tr}_{n-1}(\text{tr}_n(xy)) \\ &= \text{tr}_1 \circ \cdots \circ \text{tr}_{n-1}(\text{tr}_n(yx)) && \text{(Lema 4.3)} \\ &= \text{Tr}_n(yx),\end{aligned}$$

concluyendo así la demostración. □

## 4.2. La $E$ -condición

La traza de Markov por sí sola no constituye una invariante polinomial de links framizados. Para construir la invariante, en atención a la receta de Jones [14] requerimos de una función que envíe un elemento del grupo de trenzas framizadas  $\mathcal{F}_{d,n}$  en  $Y_{d,n}$ , de tal modo que vía traza de Markov a dicho elemento le sea asignado su respectivo polinomio en  $\mathbb{C}(u, z)$ . De otro modo, una primera aproximación a la función que conformará la invariante polinomial vendrá dada por la composición  $\text{Tr} \circ \pi_L : \mathcal{F}_{d,n} \longrightarrow \mathbb{C}(u, z)$ , representada por el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{F}_{d,n} & \xrightarrow{\pi_L} & Y_{d,n} & \xrightarrow{\text{Tr}} & \mathbb{C}(u, z), \\ \sigma_i & \mapsto & Lg_i & & \\ t_i & \mapsto & t_i & & \end{array}$$

donde  $L$  será el parámetro de re-escalación a determinar. Explicamos mejor en el siguiente párrafo este hecho.

Para que la composición precedente constituya de modo efectivo una invariante polinomial de links framizados debe respetar los movimientos de Markov. El primer movimiento  $\alpha\beta \sim_M \beta\alpha$  por la proposición d) del Teorema 4.4 sí se satisface, quedando la tarea pendiente de definir condiciones sobre  $L$  de tal modo que se respete el segundo movimiento de Markov  $\alpha \sim \alpha\sigma_n^{\pm 1}$ . Esto se traduce en la siguiente ecuación:

$$\text{Tr} \circ \pi_L(\alpha\sigma_n) = \text{Tr} \circ \pi_L(\alpha\sigma_n^{-1}),$$

donde  $\alpha \in \mathcal{F}_n$ . Luego, al ser  $\pi_L(\sigma_n) = Lg_n$ , de la ecuación anterior se tiene

$$\begin{aligned} Lz\text{Tr}(\alpha) &= \text{Tr}(\alpha L^{-1}g_n^{-1}) \\ Lz\text{Tr}(\alpha) &= L^{-1}\text{Tr}((\alpha g_n) - (u - u^{-1})\alpha e_n) \\ L\text{Tr}(\alpha) &= L^{-1}(z\text{Tr}(\alpha) - (u - u^{-1})\text{Tr}(\alpha e_n)) \end{aligned}$$

Luego, para dividir por  $\text{Tr}(\alpha)$  como en el caso clásico, y poder dejar la ecuación anterior en términos de  $L, u$  y  $z$ , se debe poder factorizar  $\text{Tr}(\alpha e_n)$  como sigue

$$\text{Tr}(\alpha e_n) = \text{Tr}(\alpha)\text{Tr}(e_n). \quad (4.1)$$

Con esta propiedad podemos definir invariantes de links framizados usando el mismo método que en la definición del polinomio de Jones en [14]. Lamentablemente, no existe una fórmula explícita para  $\text{Tr}(\alpha e_n)$ , por lo cual, para que la ecuación (4.1) se satisfaga debemos definir condiciones sobre los  $X_i$  (ver [16, Secciones 3 y 4]). Así, debemos introducir los siguientes elementos:

$$\begin{aligned} E^{(m)} &:= \frac{1}{d} \sum_{k=0}^{d-1} X_{k+m} X_{-k} \quad y \\ e_n^{(m)} &:= \frac{1}{d} \sum_{k=0}^{d-1} t_n^{k+m} t_{n+1}^{-k} \end{aligned}$$

Note que  $e_n^{(0)} = e_n$  y que  $E^{(0)} = \text{Tr}(e_n)$ .

**Lema 4.5.** Sea  $\alpha = \alpha' t_n^k$ , donde  $\alpha' \in Y_{d,n-1}$ . Entonces

$$\mathrm{Tr}(\alpha e_n^{(m)}) = \frac{E^{(k+m)}}{X_k} \mathrm{Tr}(\alpha),$$

por lo cual  $\mathrm{Tr}(\alpha e_n) = \frac{E^{(k)}}{X_k} \mathrm{Tr}(\alpha)$ .

*Demostración.*

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(\alpha e_n^{(m)}) &= \mathrm{Tr} \left( \alpha \frac{1}{d} \sum_{r=0}^{d-1} t_n^{r+m} t_{n+1}^{-r} \right) \\ &= \frac{1}{d} \sum_{r=0}^{d-1} \mathrm{Tr}(\alpha' t_n^k t_n^{r+m} t_{n+1}^{-r}) \\ &= \frac{1}{d} \sum_{r=0}^{d-1} X_{-r} \mathrm{Tr}(\alpha' t_n^k t_n^{r+m}) \\ &= \frac{1}{d} \sum_{r=0}^{d-1} X_{-r} \mathrm{Tr}(\alpha' t_n^{k+r+m}) \\ &= \frac{1}{d} \sum_{r=0}^{d-1} X_{-r} X_{r+(m+k)} \mathrm{Tr}(\alpha') \\ &= E^{(m+k)} \mathrm{Tr}(\alpha'). \end{aligned}$$

Por otro lado,  $\mathrm{Tr}(\alpha) = \mathrm{Tr}(\alpha' t_n^k) = X_k \mathrm{Tr}(\alpha')$ , es decir,  $\mathrm{Tr}(\alpha') = \frac{\mathrm{Tr}(\alpha)}{X_k}$ ; reemplazando  $\mathrm{Tr}(\alpha')$  en la última igualdad se concluye la demostración.  $\square$

**Lema 4.6.** Sea  $\alpha = \alpha' g_{n-1} \cdots g_i t_i^a$ , con  $\alpha' \in Y_{n-1}$ . Entonces

$$\mathrm{Tr}(\alpha e_n) = z \mathrm{Tr}(x e_{n-1})$$

donde  $x = g_{n-2} \cdots g_i t_i^a \alpha'$ .

*Demostración.*

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(\alpha e_n) &= \frac{1}{d} \sum_{r=0}^{d-1} \mathrm{Tr}(\alpha' g_{n-1} \cdots g_i t_i^a t_n^r t_{n+1}^{-r}) \\ &= \frac{1}{d} \sum_{r=0}^{d-1} X_{-r} \mathrm{Tr}(\alpha' g_{n-1} \cdots g_i t_i^a t_n^r) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{d} \sum_{r=0}^{d-1} X_{-r} \operatorname{Tr}(\alpha' t_{n-1}^r g_{n-1} \cdots g_i t_i^a) \\
 &= z \frac{1}{d} \sum_{r=0}^{d-1} X_{-r} \operatorname{Tr}(\alpha' t_{n-1}^r g_{n-2} \cdots g_i t_i^a) \\
 &= z \frac{1}{d} \sum_{r=0}^{d-1} X_{-r} \operatorname{Tr}(g_{n-2} \cdots g_i t_i^a \alpha' t_{n-1}^r) \\
 &= z \frac{1}{d} \sum_{r=0}^{d-1} \operatorname{Tr}(g_{n-2} \cdots g_i t_i^a \alpha' t_{n-1}^r t_n^{-r}) \\
 &= z \operatorname{Tr}(g_{n-2} \cdots g_i t_i^a \alpha' e_{n-1}) \\
 &= z \operatorname{Tr}(x e_{n-1}).
 \end{aligned}$$

□

Los lemas anteriores motivan la generación de condiciones sobre los  $X_i$  de tal modo que permitan deducir la Ecuación (4.1), tales condiciones se traducen en un sistema de ecuaciones.

**Definición 4.3.** Se dice que los números complejos  $X_i$ , con  $0 < i \leq d-1$  cumplen la  $E$ -condición si satisfacen el siguiente  $E$ -sistema de ecuaciones no lineales en  $\mathbb{C}$ :

$$\begin{aligned}
 E^{(1)} &= X_1 E^{(0)} \\
 E^{(2)} &= X_2 E^{(0)} \\
 \vdots &\quad \quad \quad \vdots \\
 E^{(d-1)} &= X_{d-1} E^{(0)}
 \end{aligned}$$

Note que  $X_0 = 1$  y por tanto  $k = 0$  ya satisface la  $E$ -condición.

**Teorema 4.7** (Juyumaya y Lambropoulou, 2013). Si los parámetros  $X_0, \dots, X_{d-1}$  son soluciones del  $E$ -sistema, entonces para todo  $\alpha \in Y_{d,n}$ ,

$$\operatorname{Tr}(\alpha e_n) = \operatorname{Tr}(\alpha) \operatorname{Tr}(e_n).$$

*Demostración.* Basta tomar  $\alpha \in Y_n$  un elemento basal, derivándose así dos casos en función del elemento del nivel  $n$  de la palabra normal  $\alpha$ . La demostración procederá por inducción sobre  $n$ , de este modo, si  $n = 1$  entonces  $\alpha \in Y_1$  es de la forma  $\alpha = t_1^a$ , así que por el Lema 4.5 tenemos que

$$\operatorname{Tr}(\alpha e_1) = \operatorname{Tr}(t_1^a e_1) = \frac{E^{(a)}}{X_a} \operatorname{Tr}(t_1^a) = \frac{E^{(a)}}{X_a} X_a = E^{(a)}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
 \text{Tr}(\alpha)\text{Tr}(e_1) &= \frac{1}{d} \sum_{r=0}^{d-1} \text{Tr}(t_1^a) \text{Tr}(t_1^r t_2^{-r}) \\
 &= \frac{1}{d} \sum_{r=0}^{d-1} X_a X_{-r} \text{Tr}(t_1^r) \\
 &= X_a \frac{1}{d} \sum_{r=0}^{d-1} X_{-r} X_r \\
 &= X_a E^{(0)} \\
 &= E^{(a)} \quad (\text{por el } E\text{-sistema}).
 \end{aligned}$$

Ahora supongamos la afirmación para todo  $k \leq n-1$  y probémosla para  $n$ .

Caso 1:  $\alpha = \alpha' t_n^k$ , con  $\alpha' \in Y_{n-1}$ .

Por el Lema 4.5 tenemos que  $\text{Tr}(\alpha e_n) = \frac{E^{(k)}}{X_k} \text{Tr}(\alpha)$ , pero como los  $X_i$ 's son soluciones del  $E$ -sistema se tiene

$$\text{Tr}(\alpha e_n) = \frac{E^{(k)}}{X_k} \text{Tr}(\alpha) = \frac{X_k E^{(0)}}{X_k} \text{Tr}(\alpha) = E^{(0)} \text{Tr}(\alpha) = \text{Tr}(\alpha) \text{Tr}(e_n).$$

Caso 2:  $\alpha = \alpha' g_{n-1} \cdots g_i t_i^a$  y  $\alpha' \in Y_{n-1}$ .

$$\begin{aligned}
 \text{Tr}(\alpha e_n) &= z \text{Tr}(g_{n-2} \cdots g_i t_i^a \alpha' e_{n-1}) && (\text{Lema 4.6}) \\
 &= z \text{Tr}(g_{n-2} \cdots g_i t_i^a \alpha') \text{Tr}(e_{n-1}) && (\text{hip. inducción}) \\
 &= \text{Tr}(g_{n-1} \cdots g_i t_i^a \alpha') \text{Tr}(e_{n-1}) \\
 &= \text{Tr}(\alpha) \text{Tr}(e_{n-1}) \\
 &= \text{Tr}(\alpha) \text{Tr}(e_n).
 \end{aligned}$$

Note que

$$\text{Tr}(e_{n-1}) = \frac{1}{d} \sum_{r=0}^{d-1} \text{Tr}(t_{n-1}^r t_n^{-r}) = \frac{1}{d} \sum_{r=0}^{d-1} X_r X_{-r} = \frac{1}{d} \sum_{r=0}^{d-1} \text{Tr}(t_n^r t_{n+1}^{-r}) = \text{Tr}(e_n).$$

□

El proceso de modificación sobre la traza de modo tal que la composición  $\text{Tr} \circ \pi_L$  respete el segundo movimiento de Markov es parte de la aplicación de la receta de Jones, y recibe el nombre de re-escalación. Asimismo,  $\text{Tr} \circ \pi_L$  debe asignar al nudo trivial el polinomio constante 1, forzando de así un proceso denominado normalización. Antes de abordar esto último estudiaremos el conjunto de soluciones del  $E$ -sistema.

El  $E$ -sistema fue resuelto en por Gérardin (ver [16], Apéndice). Como podrá verse a continuación, este sistema de ecuaciones siempre tiene una solución no trivial, pues tenemos por ejemplo la solución cíclica

$$x_k = \zeta^k$$

donde  $\zeta$  es una  $d$ -ésima raíz primitiva de la unidad. En efecto

$$\begin{aligned} E^{(m)} &= \frac{1}{d} \sum_{r=0}^{d-1} x_{m+r} x_{-r} = \frac{1}{d} \sum_{r=0}^{d-1} \zeta^{m+r} \zeta^{-r} = \frac{1}{d} \sum_{r=0}^{d-1} \zeta^m = \zeta^m \quad \text{y} \\ E^{(0)} &= \frac{1}{d} \sum_{r=0}^{d-1} x_m x_{-r} = \frac{1}{d} \sum_{r=0}^{d-1} \zeta^r \zeta^{-r} = 1, \quad \text{por lo tanto} \\ x_m E^{(0)} &= E^{(m)}. \end{aligned}$$

### 4.3. Soluciones del $E$ -sistema

A continuación presentaremos el conjunto general de soluciones del  $E$ -sistema, en lo que sigue denotaremos por  $G$  a  $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ . Además definimos

$$L^2(G) := \{f : G \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ es función}\}.$$

Es sencillo probar que  $L^2(G)$  es un  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial con producto interno

$$\langle f, g \rangle := \sum_{x \in G} f(x) \overline{g(x)}.$$

La base canónica de  $L^2(G)$  está constituida por las funciones

$$\delta_a(b) := \begin{cases} 1 & \text{si } a = b \\ 0 & \text{si } a \neq b \end{cases}$$

En efecto, toda función  $f \in L^2(G)$  es de la forma

$$f = \sum_{a \in G} f(a) \delta_a.$$

**Definición 4.4.** El producto convolución en  $L^2(G)$  se define como sigue

$$(f * g)(x) := \sum_{y \in G} f(y) g(x - y).$$

Sean  $e_a : G \rightarrow \mathbb{C}$  los caracteres de  $G$ , es decir

$$e_a(x) = e^{\frac{2\pi i a x}{d}}$$

**Definición 4.5.** La transformada de Fourier se define como sigue:

$$F : L^2(G) \longrightarrow L^2(G) \\ f \longmapsto \widehat{f}, \quad \text{donde} \quad \widehat{f}(a) := \sum_{y \in G} f(y)e_a(-y)$$

**Proposición 4.8.** Para todo  $a \in G$  y todo  $f, g \in L^2(G)$ , la transformada de Fourier satisface las siguientes propiedades:

- a)  $\widehat{\delta}_a = e_{-a}$ ,
- b)  $\widehat{e}_a = d \cdot \delta_a$ ,
- c)  $\widehat{\widehat{f}}(a) = d \cdot f(-a)$ ,
- d)  $\widehat{f * g} = \widehat{f} \cdot \widehat{g}$ ,
- e)  $\widehat{fg} = d^{-1} \widehat{f} * \widehat{g}$ .

*Demostración.* Dado  $x \in G$  tenemos:

- a)  $\delta_a(x) = \sum_{y \in G} \delta_a(y)e_x(-y) = \delta_a(a)e_x(-a) = e_x(-a) = e_{-a}(x)$
- b)  $\widehat{e}_a(x) = \sum_{y \in G} e_a(y)e_x(-y) = \sum_{y \in G} e^{\frac{2\pi i a y}{d}} e^{-\frac{2\pi i x y}{d}} = \sum_{y \in G} e^{\frac{2\pi i y(a-x)}{d}} = d \cdot \delta_a$
- c)  $\widehat{\widehat{f}}(x) = \sum_{y \in G} f(y)e_x(-y)$ , por lo cual

$$\begin{aligned} \widehat{\widehat{f}}(a) &= \sum_{x \in G} \widehat{f}(x)e_a(-x) = \sum_{x \in G} \left( \sum_{y \in G} f(y)e_x(-y) \right) e_a(-x) \\ &= \sum_{x \in G} \sum_{y \in G} f(y)e_x(-y)e_{-x}(a) = \sum_{x \in G} \sum_{y \in G} f(y)e^{-\frac{2\pi i x y}{d}} e^{-\frac{2\pi i x a}{d}} \\ &= \sum_{x \in G} \sum_{y \in G} f(y)e^{-\frac{2\pi i x(y+a)}{d}} = \sum_{x \in G} \sum_{y \in G} f(y)e_x(-y-a) \\ &= \sum_{y \in G} f(y) \left( \sum_{x \in G} e^{-\frac{2\pi i x(a+y)}{d}} \right) = \sum_{y \in G} f(y), \quad \text{si } y = -a \\ &= \sum_{y \in G} f(-a) = d \cdot f(-a) \end{aligned}$$

Mediante cambios de variables similares se pueden probar d) y e). □

Sean  $(X_0, \dots, X_{d-1})$  los parámetros de la traza en  $Y_n$ , fijamos  $X \in L^2(G)$  por

$$X : G \longrightarrow \mathbb{C} \\ k \longmapsto X_k$$

Note que si  $r = y - k$ , como  $G = \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$  se tiene

$$\begin{aligned} (X * X)(k) &= \sum_{y \in G} X(y)X(k - y) \\ &= \sum_{r \in G} X(r + k)X(-r) \quad (y = r + k) \\ &= \sum_{r \in G} X_{r+k}X_{-r} \\ &= E^{(k)}. \end{aligned}$$

Para todo  $k$  tal que  $0 \leq k \leq d - 1$ . Por lo tanto el  $E$ -sistema es equivalente a

$$(X * X)(k) = X_k(X * X)(0); \quad (0 \leq k \leq d - 1)$$

lo cual se traduce en la siguiente ecuación funcional:

$$X * X = (X * X)(0)X, \quad \text{pues } X_k = X(k).$$

Aplicando la transformada de Fourier se obtiene

$$\widehat{X}^2 = (X * X)(0)\widehat{X}. \quad (4.2)$$

**Definición 4.6.** Sea  $f \in L^2(f)$ , se define el soporte de  $f$  como sigue

$$\text{Supp}(\widehat{f}) := \{a \in G \mid \widehat{f}(a) \neq 0\} \subseteq G$$

Sabemos que  $\widehat{X} \neq 0$ , pues  $X(0) = X_0 = 1$ , así que de (4.2) se deduce que  $\widehat{X} = (X * X)(0) \neq 0$  para todo  $a \in \text{Supp}(\widehat{f})$ . Luego se tiene que

$$\widehat{X} = \sum_{a \in \text{Supp}(\widehat{X})} (X * X)(0)\delta_a$$

Definiendo  $S := \text{Supp}(\widehat{X})$ , de las propiedades b) y c) de la Proposición 4.8 concluimos de la ecuación anterior que

$$X = (X * X)(0) \frac{1}{d} \sum_{s \in S} (\widehat{X})e_s.$$

Como  $X(0) = 1$ , tenemos que  $(X * X)(0) \frac{1}{d} |S| = 1$ , con  $|S|$  la cardinalidad de  $S$ .

Finalmente, hemos probado que las soluciones del  $E$ -sistema son funciones  $X_T$  parametrizadas por los subconjuntos no vacíos de  $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$  como sigue

$$X_T = \frac{1}{|S|} \sum_{s \in S} e_s.$$

Note que si  $T = \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ , entonces la solución es la trivial  $\delta_0$ .

## 4.4. Construcción de la Invariante Polinomial

Teniendo en consideración las soluciones halladas para el  $E$ -sistema en la sección anterior, podemos proseguir con la receta de Jones sobre  $Y_{d,n}(u)$ , comenzando con la re-escalación de la compuesta  $\text{Tr} \circ \pi_L$ .

Sea  $d \in \mathbb{N}$  y sea  $x_S = \{x_1, \dots, x_{d-1}\}$  una solución del  $E$ -sistema parametrizada por el subconjunto no vacío  $S$  de  $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ . Entonces, usando el Teorema 4.7 podemos proceder con la factorización de  $\text{Tr}(\alpha e_n)$  como en (4.1). Tenemos que

$$\begin{aligned} \text{Tr}(Lg_n) &= \text{Tr}((Lg_n)^{-1}) \\ Lz &= \text{Tr}(L^{-1}(g_n - (u - u^{-1})e_n)) \\ Lz &= L^{-1}(z - (u - u^{-1})E_S) \quad (S \subseteq \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}) \\ L^2z &= z - (u - u^{-1})E_S \\ L^2 &= \frac{z - (u - u^{-1})E_S}{z} \\ L &= \sqrt{\frac{z - (u - u^{-1})E_S}{z}} = \sqrt{\lambda_S} \end{aligned}$$

donde  $\lambda_S = \frac{z - (u - u^{-1})E_S}{z}$  y  $E_S = \text{Tr}(e_n) = \frac{1}{|S|}$  [16, Sección 5].

Así, definiendo la función

$$\sigma_i \mapsto \sqrt{\lambda_S} g_i, \quad t_j^a \mapsto t_j^a,$$

se define una representación

$$\Lambda_{\lambda_S} : \mathcal{F}_{d,n} \longrightarrow Y_{d,n}(u).$$

Más aún, componiendo esta última con la proyección natural de  $\mathcal{F}_n$  en  $\mathcal{F}_{d,n}$ , la representación  $\Lambda_{\lambda_S}$  permite la definición de una representación de  $\mathcal{F}_n$  en  $Y_{d,n}(u)$ . Si para esta última mantenemos la misma notación  $\Lambda_{\lambda_S}$ , entonces se tiene que lo siguiente

**Definición 4.7.** Dada una solución del  $E$ -sistema parametrizada por un subconjunto no vacío  $S$  de  $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ , para cualquier trenza framizada  $\alpha \in \mathcal{F}_n$  definimos para su clausura  $\hat{\alpha}$  el siguiente polinomio 2-variable:

$$\Gamma_{d,S}(\hat{\alpha}) := \left( \frac{1}{z\sqrt{\lambda_S}} \right)^{n-1} (\text{Tr} \circ \Lambda_{\lambda_S})(\alpha)$$

**Observación 4.1.** Considerando la función exponente  $\exp$  en  $\mathcal{F}_{d,n}$  y denotamos

$$\Delta := \frac{1 - \lambda_S u}{\sqrt{\lambda_S}(u - 1)E^{(0)}} = \frac{1}{z\sqrt{\lambda_S}},$$

podemos escribir

$$\Gamma_{d,S}(\widehat{\alpha}) = \Delta^{n-1}(\sqrt{\lambda_S})^{\exp(\alpha)} \text{Tr}(\alpha),$$

donde  $\alpha$  en la expresión  $\text{Tr}(\alpha)$  es la imagen de la trenza framizada  $\alpha$  en  $Y_{d,n}$  bajo la función  $\sigma_i \mapsto g_i$  y  $t_j^a \mapsto t_j^a$ .

Hagamos  $\mathcal{L}$  el conjunto de todo los links framizados y sea  $\mathbb{C}(z, X_1, \dots, X_{d-1})$  el anillo de funciones racionales. Entonces tenemos el siguiente teorema:

**Teorema 4.9** (Juyumaya y Lambropoulou, 2013). Si el conjunto de los  $\{X_1, \dots, X_{d-1}\}$  de los parámetros de la traza satisface la  $E$ -condición, entonces la función  $\Gamma_{d,S}$  es una invariante bajo isotopía de links framizados (módulo  $d$ ) orientados.

$$\begin{aligned} \Gamma_{d,S} : \mathcal{L} &\longrightarrow \mathbb{C}(z, X_1, \dots, X_{d-1}) \\ \widehat{\alpha} &\longmapsto \Gamma_{d,S}(\widehat{\alpha}) \end{aligned}$$

*Demostración.* Por el Teorema de Alexander, cualquier link puede ser isotópicamente identificado con la clausura de una trenza. Entonces, por la versión framizada del Teorema de Markov, para demostrar que  $\Gamma_{d,S}$  es constante en la clase de isotopía del link framizado orientado  $\widehat{\alpha}$  para cualquier  $\alpha \in \cup_{n \geq 1} \mathcal{F}_n$ , es suficiente probar que en el nudo trivial  $\sigma_1 \cdots \sigma_{n-1}$ , al ser evaluado en  $\Gamma_{d,S}$  resulta igual a 1, y que para  $\alpha \in \mathcal{F}_n$

$$\Gamma_{d,S}(\widehat{\alpha}) = \Gamma_{d,S}(\widehat{\alpha\sigma_n}) = \Gamma_{d,S}(\widehat{\alpha g_n^{-1}}). \quad (4.3)$$

La primera igualdad se concluye de considerar el coeficiente  $\Delta^{n-1}$  de la observación anterior, mientras que la segunda viene de la re-escalación de la traza. En efecto, se tiene que

$$\begin{aligned} \Gamma_{d,S}(\widehat{\alpha\sigma_n}) &= \Delta^n \sqrt{\lambda_S}^{\exp(\alpha g_n)} \text{Tr}(\alpha g_n) = \Delta \sqrt{\lambda_S} z \Gamma_{d,S}(\widehat{\alpha}) \\ \Gamma_{d,S}(\widehat{\alpha\sigma_n^{-1}}) &= \Delta^n \sqrt{\lambda_S}^{\exp(\alpha g_n^{-1})} \text{Tr}(\alpha g_n^{-1}) = \Delta \sqrt{\lambda_S} z \Gamma_{d,S}(\widehat{\alpha}), \end{aligned}$$

ya que, sin pérdida de generalidad,  $\exp(\alpha g_n) = \exp(\alpha) + 1$  y  $\exp(\alpha g_n^{-1}) = \exp(\alpha) - 1$ . Como  $\Delta \sqrt{\lambda_S} z = 1$  se deduce (4.3). Por otro lado, si  $\beta = \sigma_1 \cdots \sigma_{n-1} \in \mathcal{F}_n$  entonces

$$\begin{aligned} \Gamma_{d,S}(\widehat{\beta}) &= \Delta^{n-1} (\sqrt{\lambda_S})^{n-1} \text{Tr}(g_1 \cdots g_{n-1}) \\ &= \Delta^{n-1} (\sqrt{\lambda_S})^{n-1} z^{n-1} \\ &= \left( \frac{1}{z \sqrt{\lambda_S}} \right)^{n-1} (\sqrt{\lambda_S})^{n-1} z^{n-1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Concluyendo la demostración. □

**Observación 4.2.** Como mencionamos en la introducción, hemos considerado la presentación del álgebra de Yokonuma-Hecke con una versión simplificada de la relación cuadrática (ver [5, Remark 1]). A diferencia de los polinomios de Jones y HOMFLY-PT, este cambio induce una invariante polinomial no equivalente a la que se obtiene al emplear la relación cuadrática clásica, pues esta última diferencia links que la primera no distingue (para más detalles ver [7]).

# Apéndices

# Apéndice A

## Grupos Libres y Presentaciones

### A.1. Conceptos elementales

**Definición A.1.** Sea  $X$  un conjunto no vacío,  $F = F(X)$  el grupo libre en  $X$  y  $R$  un subconjunto de  $F$ . Diremos que  $\overline{R}$  es la clausura normal de  $R$  en  $F$  si  $\overline{R}$  es el subgrupo normal de  $F$  más *pequeño* que contiene a  $R$ , es decir, si  $N \triangleq F$  y  $R \subset N$ , entonces  $\overline{R} = N$ .

**Definición A.2.** Sea  $G$  el grupo cociente  $F/N$ , con  $N = \overline{R}$ . Escribimos  $G = \langle X|R \rangle$  y le llamamos a esta expresión una presentación de  $G$ . Los elementos de  $X$  son llamados generadores, mientras que para todo  $r \in R$  tomaremos la ecuación  $r = e$ , con  $e$  el elemento neutro de  $G$ , y le llamaremos relación; en general, en  $\langle X|R \rangle$  se reemplazan los elementos de  $R$  por sus respectivas relaciones. Un grupo  $G$  se dice finitamente presentado si tiene una presentación con  $X$  y  $R$  conjuntos finitos.

**Proposición A.1.** Todo grupo tiene una presentación y todo grupo finito está finitamente presentado [12, Cap. 4, Prop. 1].

**Proposición A.2.** Sean  $F, G, H$  grupos tales que existen homomorfismos  $\nu : F \rightarrow G$  y  $\alpha : F \rightarrow H$  que satisfacen:

- i)  $\text{Im } \nu = G$
- ii)  $\ker \nu \subseteq \ker \alpha$

Entonces existe un único homomorfismo  $\phi : G \rightarrow H$  tal que  $\alpha = \phi \circ \nu$ .

*Demostración.* Dado un  $g \in G$ , escojamos un  $f \in F$  tal que  $\nu(f) = g$  y definamos

$\phi(g) = \alpha(g)$ . Tal  $f$  siempre existe porque  $\text{Im } \nu = G$  y  $\phi$  está bien definida. En efecto

$$\begin{aligned}
 \nu(f') = \nu(f) &\iff \nu(f')\nu(f)^{-1} = e \\
 &\iff \nu(f'f^{-1}) = e \\
 &\iff f'f^{-1} \in \ker \nu \\
 &\implies f'f^{-1} \in \ker \alpha ; \quad \text{pues } \ker \nu \subseteq \ker \alpha \\
 &\implies \alpha(f'f^{-1}) = e \\
 &\implies \alpha(f') = \alpha(f).
 \end{aligned}$$

Así que el valor de  $\alpha(f)$  no depende de la pre-imagen por  $\nu$  que escojamos de  $g$ , de lo cual, el valor de  $\phi(g)$  es también independiente de aquello. Probemos ahora que  $\phi$  es homomorfismo. Sean  $g, g' \in G$  y  $f, f' \in F$  tales que  $\nu(f) = g$  y  $\nu(f') = g'$ . Ya que  $\nu$  es homomorfismo,  $\nu(ff') = \nu(f)\nu(f') = gg'$  y

$$\begin{aligned}
 \phi(gg') &= \alpha(gg') \\
 &= \alpha(g)\alpha(g') \\
 &= \phi(g)\phi(g').
 \end{aligned}$$

Probando que  $\phi$  es un homomorfismo. □

**Corolario A.3.** Si  $g_1, g_2, \dots, g_{n-1}$  son elementos de un grupo  $G$  que satisfacen las relaciones de trenzas, entonces existe un único homomorfismo  $f$  de  $B_n$  en  $G$  tal que  $f(\sigma_i) = g_i$  para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$

*Demostración.* Si  $X = \{g_1, \dots, g_{n-1}\}$  y  $F(X)$  es el grupo libre generado por  $X$ , entonces haciendo  $\nu : F(X) \rightarrow F(X)/N \simeq B_n$  la proyección natural, con  $N$  el grupo generado por las relaciones de trenzas, y  $\alpha : F(X) \rightarrow G$  la inclusión, tenemos que  $\text{Im } \nu = F(X)/N$  y que  $N = \ker \nu \subseteq \ker \alpha$ , esto porque  $X$  satisface las relaciones de trenzas. De allí que existe, por la Proposición A.2, un único homomorfismo  $\phi : F(X)/N \rightarrow G$  tal que  $\phi \circ \nu = \alpha$ . Como  $\nu(g_i) = \bar{g}_i$  y por la demostración anterior  $\phi(\bar{g}_i) = \alpha(g_i) = g_i$ , se tiene que en  $B_n \simeq F(X)/N$ , salvo isomorfismo,  $\phi(\sigma_i) = g_i$  para todo  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  □

## A.2. Presentación del Producto Semi-Directo

Los resultados de esta sección, a menos que se indique lo contrario, han sido extraídos de [12, Cap. 6, Sec. 4]. De esta construcción participan tres ingredientes: un grupo  $G$ , un grupo  $A$  y un homomorfismo  $\alpha : G \rightarrow \text{Aut}A$ . La función  $\alpha$  determina una acción de  $G$  en  $A$  dada por

$$a^g := \alpha g(a), \quad a \in A, x \in G,$$

donde  $\alpha g(a)$  es la imagen de  $a$  por el automorfismo de  $A$  y  $\alpha g$ . Ya que  $\alpha$  es un homomorfismo,

$$(ab)^g = a^g b^g, a^e = a, \text{ y también } a^{gh} = (a^g)^h \tag{A.1}$$

para  $a, b \in A$ ;  $g, h \in G$  y  $e$  el elemento neutro de  $G$ .

Ahora consideremos el producto cartesiano  $K = G \times A$ , con la operación binaria

$$(g, a)(h, b) = (gh, a^h b).$$

Las propiedades de (A.1) garantizan que se cumple la estructura de grupo para esta operación: por ejemplo la identidad es  $(e, e)$  y el inverso viene dado por

$$(g, a)^{-1} = (g^{-1}, (a^{-1})^{g^{-1}}).$$

**Definición A.3.** El grupo  $K$  definido anteriormente se denomina el producto semi-directo de  $G$  y  $A$  (con respecto a  $\alpha$ ) y se denota por  $A \rtimes G$ .

Se puede verificar fácilmente que las funciones

$$\begin{array}{ccc} A & \rightarrow & K \\ a & \mapsto & (e, a) \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{ccc} G & \rightarrow & K \\ g & \mapsto & (g, e) \end{array}$$

constituyen homomorfismos, y es usual identificar  $A$  y  $G$  con sus imágenes en  $K$ . Entonces,  $A$  es un subgrupo normal de  $K$ , con *complemento*  $G$ , de otro modo

$$A \trianglelefteq K, \quad G \leq K, \quad A \cap G = \{(e, e)\} \quad \text{y} \quad GA = K. \quad (\text{A.2})$$

La razón para el nombre *producto semi-directo* es ahora clara: si  $\text{Im} \alpha = \{e\}$ , entonces la acción definida antes es trivial y, por lo tanto, la multiplicación en  $K$  es la multiplicación del producto directo  $G \times A$  (para detalles ver [12, sección 4.3]).

Escribiremos una presentación para  $K$  en términos de las presentaciones de  $A$  y  $G$  y de la función  $\alpha$  en la proposición que viene a continuación.

**Proposición A.4.** Sean  $G = \langle X | R \rangle$ ,  $A = \langle Y | S \rangle$  y  $\alpha : G \rightarrow \text{Aut} A$  un homomorfismo tal que  $x\alpha(y) = y^x$  es una palabra en  $Y^\pm$ , con  $x \in X$  e  $y \in Y$ . Entonces  $K = A \rtimes G$  tiene una presentación dada por

$$A \rtimes G = \langle X, Y \mid R, S, \{xyx^{-1}(x^y)^{-1} \mid x \in X, y \in Y\} \rangle$$

Ver Cap. 6, Corolario 1 en [12].

**Corolario A.5.** La presentación del grupo de trenzas framizadas  $\mathcal{F}_{d,n} = (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^n \rtimes B_n$  viene dada por los generadores  $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$  de  $B_n$ ;  $t_1, \dots, t_n$  de  $C_d^n$  sujetos a las relaciones

$$\begin{aligned} \sigma_i \sigma_j &= \sigma_j \sigma_i && \text{para } |i - j| > 1 \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i &= \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \\ t^d &= 1 \\ t_i t_j &= t_j t_i && \text{para todo } i, j \\ \sigma_i t_j &= t_{\sigma_i(j)} \sigma_i \end{aligned}$$

*Demostración.* Basta considerar las presentaciones de  $B_n$  y  $(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^n = C_d^n$  dadas por

$$B_n = \left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \left| \begin{array}{l} \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i ; \quad \text{si } |i - j| > 1 \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \end{array} \right. \right\rangle,$$

$$C_d^n = \left\langle t_1, \dots, t_n \left| \begin{array}{l} t_i^d = 1 \\ t_i t_j = t_j t_i \end{array} \right. \right\rangle,$$

y la acción de  $\sigma_i \in B_n$  en  $t_j \in C_d^n$  dada por

$$\sigma_i t_j = t_{s_i(j)} \sigma_i,$$

donde  $s_i$  es la transposición  $(i, i + 1) \in S_n$ , y luego aplicar la proposición anterior.  $\square$

# Apéndice B

## Grupos de Coxeter

La idea de estudiar los grupos de Coxeter en este trabajo viene motivada por el hecho de que  $S_n$  representa un grupo de Coxeter por excelencia, y como veremos, existe una estrecha relación entre el álgebra de Yokonuma-Hecke y este grupo dada por la siguiente cadena de funciones:

$$Y_{d,n} \longleftarrow \mathcal{F}_{d,n} \longleftarrow S_{d,n} \longleftarrow S_n$$

Gran parte de las demostraciones en esta sección serán omitidas, pues ahondar en ellas requiere la introducción de una batería de conceptos y resultados que no harán más que aletargar el propósito de este trabajo, y en particular de este apéndice, que no es otro que introducir la función largo en un grupo de Coxeter y algunas de sus propiedades. No obstante, para mayor profundidad se remite al autor a los excelentes trabajos de Humphreys [11] y Brenti y Björner [2].

### B.1. Conceptos elementales

**Definición B.1.** Definimos un *Sistema de Coxeter* como un par  $(W, S)$  consistente en un grupo  $W$  y un conjunto  $S \subset W$ , sujeto a las relaciones de la forma

$$(ss')^{m(s,s')} = 1 \tag{B.1}$$

donde  $m(s, s) = 1$  para todo  $s \in S$ ,  $m(s, s') = m(s', s) \geq 2$  para  $s \neq s'$  en  $S$ .

En el caso en que no haya relación para el par  $s, s'$ , adoptaremos la convención de que  $m(s, s') = \infty$ . Formalmente,  $W$  es el cociente  $F/N$ , donde  $F$  es un grupo libre en el conjunto  $S$  y  $N$  es el subgrupo normal generado por todos los elementos de la forma

$$(ss')^{m(s,s')}$$

Llamaremos a  $|S|$  el *rango* de  $(W, S)$ . Identificaremos con  $s \in W$  a la imagen canónica de  $s \in S$  en  $W$  siempre y cuando ello no despierte ambigüedades. Más aún, nos referiremos al propio  $W$  como un *Grupo de Coxeter* cuando la presentación es clara.

**Observación B.1.** Note que la función  $m : S \times S \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  puede ser interpretada como una matriz  $(a_{i,j})$ , cuya entrada  $(i, j)$  contiene al elemento  $m(s_i, s_j)$ . En tal caso aquella es denominada *matriz de Coxeter*.

Además, como  $m(s, s) = 1$  para todo  $s \in S$ , se tiene que en la presentación de  $W$  aparece siempre la relación  $s^2 = 1$  para todo  $s \in S$ , por lo que la matriz de Coxeter siempre contiene 1 en los coeficientes de la diagonal. Por su parte, la igualdad  $m(s, s') = m(s', s)$  implica que la matriz asociada al sistema  $(W, S)$  es simétrica. Asimismo la condición  $m(s, s') = n < \infty$  se traduce en la relación

$$ss's's \cdots = s's's's' \cdots ,$$

donde las palabras a ambos lados de la igualdad contienen  $m(s, s')$  elementos.

Equivalentemente,  $m$  puede ser representada mediante un *grafo (diagrama) de Coxeter* cuyo conjunto de vértices es  $S$  y cuyas aristas son conformadas por los pares  $\{s, s'\}$  tal que  $m(s, s') \geq 3$ . Las aristas con  $m(s, s') \geq 4$  son etiquetadas con ese número. Por ejemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{se representa mediante} \quad \begin{array}{ccc} \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ \\ s_1 & & s_3 & & s_2 \end{array}$$

4

Generando la presentación

$$\left\langle s_1, s_2, s_3 \mid \begin{array}{l} s_1^2 = s_2^2 = s_3^2 = 1; \quad s_1 s_3 s_1 = s_3 s_1 s_3 \\ s_2 s_3 s_2 s_3 = s_3 s_2 s_3 s_2 \end{array} \right\rangle$$

Si tenemos que  $m(s, s') = 2$ , ello induce la relación  $(ss')^2 = 1$ , es decir,  $ss' = s's$ . Es por esto que dos vértices distintos no están conectados mediante alguna arista en el grafo de Coxeter si y solo si tales elementos conmutan.

Lo anterior tiene asidero en la siguiente proposición, su demostración puede ser vista en [2, Teorema 1.1.2].

**Proposición B.1.** Salvo isomorfismo, existe una correspondencia uno a uno entre las matrices de Coxeter y los sistemas de Coxeter.

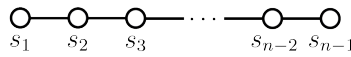
El ejemplo que más nos atañe al estudio de estos tipos de grupos, tal como fue mencionado, lo constituye el grupo simétrico de  $n$  elementos  $S_n$  [2, Sección 1.5]. En efecto,  $S_n$  está generado por las transposiciones  $s_i := (i, i + 1)$  ( $1 \leq i \leq n - 1$ ) y sujeto a las relaciones

$$\begin{aligned} s_i s_j &= s_j s_i && \text{si } |i - j| > 1, \\ s_i s_{i+1} s_i &= s_{i+1} s_i s_{i+1}, \\ s_i^2 &= 1. \end{aligned}$$

Así, si su matriz de Coxeter es  $m$ , entonces las relaciones anteriores se traducen en  $m(s_j, s_i) = 2$  si  $|i - j| > 1$ ,  $m(s_i, s_j) = 3$  si  $|i - j| = 1$  y  $m(s_i, s_i) = 1$  para todo  $i$ . Por tanto, se tiene que

$$m = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 & 2 & \cdots & 2 \\ & & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & 2 & \cdots & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

y su grafo de Coxeter viene dado por



Los grupos de Coxeter con este grafo de Coxeter se denominan de tipo A.

## B.2. La función largo

Dado un sistema de Coxeter  $(W, S)$ , sabemos que cada elemento  $w \in W$  puede ser escrito como producto de generadores

$$w = s_1 s_2 \cdots s_k, \quad s_i \in S$$

Esto motiva la definición de una función sobre  $W$  que arroje la cantidad minimal de generadores necesarios para escribir  $w$ .

**Definición B.2.** Sea  $(W, S)$  un sistema de Coxeter, sean  $s_i \in S$  y  $w \in W$ . Si  $w = s_1 s_2 \cdots s_k$  es tal que  $k$  es minimal respecto a todas las expresiones de este tipo para  $w$ , entonces diremos que  $k$  es el *largo* de  $w$ , denotado por  $\ell(w) = k$  y la palabra  $s_1 \cdots s_k$  se dice *reducida*.

A continuación algunas propiedades importantes que cumple la función largo [2, p.108].

**Proposición B.2.** Para todo  $w \in W$  se tiene que:

- i)  $\ell(sw) = \ell(w) \pm 1$ , para todo  $s \in S$ .
- ii)  $\ell(w^{-1}) = \ell(w)$

Para  $w = s_1 \cdots s_k \in W$  con  $s_i \in S$  usaremos la notación  $s_1 \cdots \widehat{s}_j \cdots s_k$  para referirnos a la expresión  $w$  pero sin el elemento  $s_j$ .

**Proposición B.3** (Propiedad de Intercambio (débil)). Sea  $w = s_1 s_2 \cdots s_r$  una expresión reducida y  $s \in S$ . Si  $\ell(sw) \leq \ell(w)$ , entonces  $sw = s_1 \cdots \widehat{s}_i \cdots s_r$  para algún  $i \in \{1, \dots, r\}$ . Ver [2, Teorema 1.4.3].

**Proposición B.4** (Propiedad de Borrado). Si  $w = s_1 s_2 \cdots s_k$  y  $\ell(w) < k$ , entonces  $w = s_1 \cdots \widehat{s}_i \cdots \widehat{s}_j \cdots s_k$  para algunos  $1 \leq i < j \leq k$ . Ver [2, Proposición 1.4.7].

**Proposición B.5** (Caracterización de Grupos de Coxeter). Sea  $W$  un grupo arbitrario y  $S \subseteq W$  un conjunto de generadores todos de orden 2. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

- i)  $(W, S)$  es un sistema de Coxeter.
- ii)  $(W, S)$  tiene la propiedad de intercambio.
- iii)  $(W, S)$  tiene la propiedad de borrado.

Ver [2, Sección 1.5].

# Referencias

- [1] F. Aicardi and J. Juyumaya. Markov trace on the algebra braids and ties. *Moscow Mathematical Journal*, 16(3):1–35, 2016.
- [2] Francesco Brenti (auth.) Anders Bjorner. *Combinatorics of Coxeter Groups*. Graduate Texts in Mathematics 231. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1 edition, 2005.
- [3] E. Artin. Theory of braids. *Annals of Mathematics*, 48(1):101–126, 1947.
- [4] S. Bigelow, E. Ramos, and R. Yi. The alexander and jones polynomials through representation of rook algebras. *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, 21(12):134 – 172, 2012.
- [5] M. Chlouveraki and L. Poulain d’Andecy. Representation theory of the yokonuma-hecke algebra. *Advances in Mathematics*, 259(2014):134 – 172.
- [6] M. Chlouveraki and L. Poulain d’Andecy. Markov traces on affine and cyclotomic yokonuma-hecke algebras. *International Mathematics Research Notices*, 2016(14):4167–4228, 2015.
- [7] M. Chlouveraki, J. Juyumaya, K. Karvounis, and S. Lambropoulou. Identifying invariants for classical knots and links from the yokonuma-hecke algebras. *arXiv:1505.06666v4[math.GT]*.
- [8] J. Espinoza. Grupos de trenzas e invariantes polinomiales de nudos. Tesis de Pregrado. Universidad de Valparaiso, 2010.
- [9] M. Flores, J. Juyumaya, and S. Lambropoulou. A framization of the hecke algebra of type b. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 222(4):778 – 806, 2018.
- [10] P. Freyd, D. Yetter, J. Hoste, W. Lickorish, K. Millett, and A. Ocneanu. A new polynomial invariant of knots and links. *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society*, 12(2):239 – 246, 1985.
- [11] J. E. Humphreys. *Reflection groups and Coxeter groups*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1992.

- [12] D. L. Johnson. *Presentations of groups*. Cambridge University Press, 2nd edition, 1997.
- [13] V.F.R. Jones. A polynomial invariant for knots via von neumann algebras. *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society*, 12(1):103–111, 1985.
- [14] V.F.R. Jones. Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials. *Annals of Mathematics*, 126:335–388, 1987.
- [15] J. Juyumaya. Markov trace on the yokonuma-hecke algebra. *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, 13(1):25–39, 2004.
- [16] J. Juyumaya and S. Lambropoulou. p-adic framed braids ii. *Advances in Mathematics*, 243(2013):149–191, 2013.
- [17] C. Kassel and V. Turaev. *Braid Groups*. Springer, 2008.
- [18] K. H. Ko and L. Smolinsky. The framed braid group and 3-manifolds. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 115(2):541–551, 1992.
- [19] V. Manturov. *Knot Theory*. Chapman and Hall/CRC, 2004.
- [20] T. Yokonuma. Sur la structure des anneaux de hecke d’un groupe de chevalley fini. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 264(1967):344 – 347.