Universidad de Valparaíso
CHILE

UNIVERSIDAD DE VALPARAÍSO CHILE

Facultad de ciencias

Instituto de Matemática IMUV

MODELO DEPREDADOR PRESA CON FUNCIÓN LOGÍSTICA GENERAL Y MEMORIA CON JOROBA

TESIS PARA EL GRADO DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICA

JORGE ANDRES SAAVEDRA GARRIDO

2018

MODELO DEPREDADOR PRESA CON FUNCIÓN LOGÍSTICA GENERAL Y MEMORIA CON JOROBA

Decano:
Juan Kuznar Hammarstrand

Directora Instituto de Matemáticas:
Amalia Pizarro Madariaga

Profesor Guía:
Rodrigo Castro Marín
Director del Magíster en Matemática

Facultad de ciencias
Instituto de Matemática IMUV

2018

Agradecimientos

A mis padres, Hugo y Elizabeth, por los valores inculcados, la comprensión y apoyo para alcanzar mis metas.

A mi abuelita Bernarda, que siempre confió en mí y me dio aliento para terminar este proceso.

A mi abuelito Jorge, hermana Monserrat, primo Jorge y tío Mario que siempre me acompañan donde quiera que vaya.

A mis hermanos Hugo y Anais por hacerme la vida más feliz.

Al Profesor Rodrigo Castro el cual, a pesar de sus múltiples ocupaciones, ha hecho posible que concluya esta tesis de forma satisfactoria, gracias por sus cartas de recomendación, las que me han ayudado a postular a diversos programas.

Al Profesor Raúl Fierro y Amalia Pizarro por confiar en mí, entregando cartas de recomendación para postular a diversos programas.

Al Profesor Eduardo Stange, por su rigurosidad, ya que me ayudo a pulirme como profesional.

Sinceramente a todos, muchas gracias.

Facultad de ciencias
Instituto de Matemática IMUV

Índice general

1. CONCEPTOS BÁSICOS **3**

1.1. Definiciones preliminares 4

1.2. **Ecuaciones diferenciales lineales** 7

1.2.1. **Sistemas bidimensionales simples** 11

1.3. **Teoría local de sistemas no lineales** 23

1.3.1. Sillas, Nodos, Focos y Centros para sistemas no lineales 29

1.4. Teorema de la variedad estable 35

1.5. Órbitas periódicas y ciclos limites 43

2. TEORIA DE BIFURCACIONES **50**

2.1. Estabilidad estructural y Teorema de Peixoto 51

2.2. Bifurcación en puntos de equilibrios no hiperbólicos 55

2.3. Bifurcación Hopf 63

3. UN MODELO DEPREDADOR-PRESA CON MEMORIA **69**

3.1. Dinámica de la población 69

3.1.1. Dos especies interactuando. Depredador y presa 71

3.2. Sistema predador presa 74

3.2.1. Una generalización de la Familia de Farkas 74

Introducción

La depredación es un tipo de interacción biológica de una especie animal (depredador) que caza a otro individuo (presa) para subsistir. Esta interacción entre depredadores y presas evolucionando en el tiempo fue modelada matemáticamente por Lotka (1924) y Volterra (1931), realizando uno de los grandes avances en la dinámica de la población, propuestos de un principio por Thomas Malthus (1798) y Verhulst (1838), así el modelo depredador presa ha desempeñado un rol importante en el estudio de muchas poblaciones donde aparece una relación entre ellos, siendo unos de los temas dominantes e interesantes dentro de la ecología. Expuesto esto, el enfoque y objetivo de esta tesis, es mejorar el sistema propuesto por Farkas (1988), generalizando la ecuación logística, donde afirmamos que se mantiene una bifurcación del tipo Hopf, esto significa, entre otras cosas, que dicho modelo presenta soluciones periódicas. Para entender esto, introducimos conceptos básicos de la teoría de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales y no lineales (locales), siendo capaces de identificar su comportamiento cualitativo utilizando ciertas herramientas que facilitaran su estudio. Posteriormente introducimos el concepto de bifurcación, dando ejemplos de algunos casos interesantes, entre ellos la del tipo Hopf. Por último, veremos de forma general como se modelo el sistema depredador-presa, partiendo con el concepto de "dinámica de la población" y como fue mejorando hasta llegar al sistema generalizado que proponemos nosotros.

Capítulo 1

CONCEPTOS BÁSICOS

Un sistema dinámico hace referencia a un espacio de estados donde la formula o "regla" que se describe va evolucionando mientras transcurre el tiempo. El estudio de estos sistemas generalmente es de forma cualitativa, donde se analiza como varia su comportamiento de manera que se pueda describir su evolución y en el mejor de los casos predecirla, su representación geométrica se lleva a cabo en un espacio llamado "espacio de fase" en el que cada punto define un estado. Surgen, entonces, con naturalidad en virtualmente todas las áreas de la ciencia, como pueden serlo la biología, química o física, un claro ejemplo que trataremos con mayor profundidad en el tercer capítulo, es el sistema predador presa, el cual trata de analizar la interacción en el tiempo de dos especies dependiendo de diversos factores como, ambientales, mortalidad de ambas especies, tasa de depredación, periodo de gestación del predador, entre otros, así veremos que al perturbar dichos factores puede tener como consecuencias que ambas especies lleguen a la extinción, una de ellas sea plaga o ambas convivan de forma equilibrada. Como vemos existen sistemas dinámicos que pueden cambiar su estructura cualitativa al producir una pequeña perturbación en sus parámetros, causando un cambio brusco en su comportamiento, cuando esto ocurre diremos que estamos bajo una bifurcación, esto se puede apreciar a diario en campos como la economía, meteorología, sistemas de potencias de campos eléctricos, etc., así al modelar dichos fenómenos, la teoría de bifurcación estudia para que valores de los parámetros del sistema se producen cambios cualitativos importantes en la dinámica del mismo, un ejemplo es el atractor de Lorenz, estudiado por Edward Lorenz en 1963, el cual modela un sistema dinámico que ayude a la predicción del clima el cual se torna caótico haciendo ciertas perturbaciones.

1.1. Definiciones preliminares

Definición 1 *Sea X un subconjunto abierto y conexo de $\mathbb{R}^n$, entonces la función $\varphi : \mathbb{R}\times X \longrightarrow X$ es llamada sistema dinámico o flujo si cumple:*

1. *$\varphi \in C^1$ y para cualquier $t \in \mathbb{R}$ fijo, la función $\varphi_t := \varphi(t, \cdot)$ es un difiomorfismo en X (φ_t es biyectiva, con inversa al menos de clase C^1).*

2. *φ_0 es la identidad, es decir, $\varphi_0(x) = \varphi(0, x) = x$ para todo $x \in X$.*

3. *$\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s}$, es decir, $\varphi(t, \varphi(s, x)) = \varphi(t + s, x)$ para todo $x \in X$ y $s, t \in \mathbb{R}$.*

Ejemplo 2 *La función $\varphi : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, dada por $\varphi(t, x) = e^{tA}x$, donde $A \in M_n(\mathbb{R})$, verifica las siguientes propiedades:*

1. *φ_t es un difiomorfismo de clase C^1, para todo $t \in \mathbb{R}$.*

2. *$\varphi_0(x) = e^{0A}x = x$.*

3.

$$\begin{aligned}\varphi(t, \varphi(s, x)) &= \varphi(t, e^{sA}x)\\ &= e^{tA}e^{sA}x\\ &= e^{(t+s)A}x\\ &= \varphi(t + s, x)\end{aligned}$$

Observación 3 *Notemos que todo sistema dinámico induce una ecuación diferencial, pues dado un flujo φ_t definimos la función $f : X \longrightarrow X$, tal que $f(x) = \frac{d}{dt}\varphi_t(x)$, si $x : I \longrightarrow X$ es dado por $x(t) = \varphi_t(x)$ tenemos que*

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.1}$$

tiene como solución el flujo φ_t. Diremos que los sistemas de la forma $\dot{x} = f(t, x)$ son no autónomos y los sistema de la forma $\dot{x} = f(x)$ son autónomos.

La solución de (1.1) la denotaremos por $\varphi : I \longrightarrow X$, donde I es un intervalo y

$$\dot{\varphi}(t) = f(\varphi(t)),$$

al grafico de esta solución lo llamaremos curva integral, la trayectoria u órbita de φ es la curva en $X \subseteq \mathbb{R}^n$ que pasa por el punto $p \in X$, es $\gamma_p = \{\varphi(t,p), t \in I_p\}$, con I_p intervalo. Es fácil probar que $q \in \gamma_p$ si y solo si $\gamma_q = \gamma_p$, de hecho

$$q = \varphi(t,p) \quad y \quad \varphi(t,q) = \varphi(t+\tau,p)$$

con $I_p - \tau = I_q$.

A la familia de todas las soluciones la llamaremos diagrama o retrato de fase.

Ejemplo 4 *Consideremos el sistema*

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = -x.$$

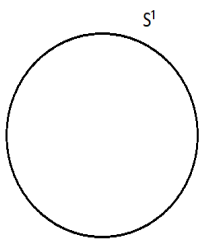
La solución que pasa por el punto $(0,1)$ es

$$(x(t), y(t)) = (\cos t, -\sin t),$$

cuya curva integral es dada por

$$graf(\varphi) = \{(t,(x,y)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 : x(t) = \cos t,\ y(t) = -\sin t,\ t \in \mathbb{R}\}.$$

La trayectoria u órbita en dicho punto es simplemente S^1



Trayectoria del sistema.

El diagrama o retrato de fase es

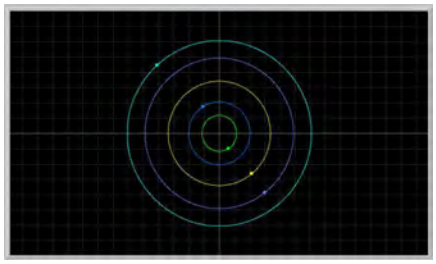


Diagrama de fase del sistema.

Definición 5 *Un punto $x_0 \in X \subseteq \mathbb{R}^n$, se dice punto de equilibrio o singular del sistema (1.1), si para alguna solución se cumple que $\varphi_t(x_0) = x_0$, para todo $t \in \mathbb{R}$, o bien, $f(x_0) = 0$.*

Una solución $\varphi_t(x)$ de (1.1) es llamada periódica, de periodo p, con $p > 0$, si $\varphi_{t+p}(x) = \varphi_t(x)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

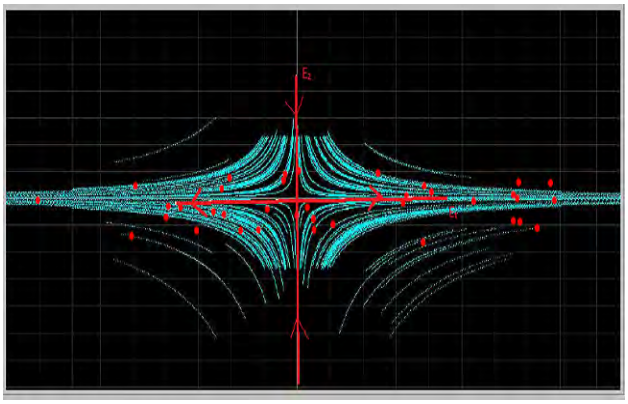
Definición 6 *Sea X un subconjunto abierto y conexo del espacio $\mathbb{R}^n$ y $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un espacio vectorial de clase C^k, $k \geq 1$. Sea $\varphi(t) = \varphi(t, p)$ una curva integral de f pasando por el punto p. Se define los conjuntos*

$$\omega(p) = \{q \in X : \exists\ t_n \text{ con } t_n \to \infty \text{ y } \varphi(t_n) \to q, \text{ cuando } n \to \infty\}$$
$$\alpha(p) = \{q \in X : \exists\ t_n \text{ con } t_n \to -\infty \text{ y } \varphi(t_n) \to q, \text{ cuando } n \to -\infty\},$$

ellos son llamados $\omega-$limites y $\alpha-$limites de p respectivamente.

Ejemplo 7 *1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un campo C^∞ dado por $f(x, y) = (x, -y)$, el flujo de f es*

representado por la figura en $\mathbb{R}^2$, *recibiendo el nombre de silla.*



silla

Note que si $p = 0$, $\alpha(p) = \omega(p) = \{0\}$,

sí $p \in E_1 - \{0\}$, $\omega(p) = \phi \quad y \quad \alpha(p) = \{0\}$,

sí $p \in E_2 - \{0\}$, $\omega(p) = \{0\} \quad y \quad \alpha(p) = \phi$,

sí $p \in E_1 \cup E_2$, $\omega(p) = \alpha(p) = \phi$. *donde* E_1 *y* E_2 *son los ejes coordenados* x *e* y *respectivamente.*

2. *Si* $\varphi(t) = \varphi(t, p)$ *es una órbita periódica de periodo* τ. *Entonces*

$$\omega(p) = \gamma_p = \{\varphi(t, p) : 0 \leq t \leq \tau\} = \alpha(p).$$

De hecho, si $q \in \gamma_p$,*tal que* $\varphi(t') = q$ *con* $t' \in [0, \tau]$ *y si definimos la sucesión* $t_n = t' + n\tau$, *tenemos que* $t_n \to \infty$, *cuando* $n \to \infty$ *y* $\varphi(t_n) = \varphi(t' + n\tau, p) = \varphi(t') = q$. *Para probar que* $\gamma_p = \alpha(p)$ *basta definir* $t_n = t' - n\tau$.

1.2. Ecuaciones diferenciales lineales

En este capítulo nos limitaremos a establecer las propiedades generales de las soluciones de las ecuaciones diferenciales lineales. En la sección posterior, relacionaremos con precisión las propiedades de ecuaciones diferenciales no lineales con las órbitas de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales. Para esto será fundamental el estudio de los sistemas lineales hiperbólicos,

es decir, que la parte real de los valores propios de la matriz asociada al sistema sean distinta de cero.

Sea I un intervalo y a_{ij}, b_j funciones continuas en I, con $i, j = 1, 2, ..., n$, donde sus variables son reales o complejas.

Consideremos un sistema de n ecuaciones de la forma

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}(t)x_1 + ... + a_{1n}(t)x_n + b_1(t) \qquad (1.2) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}(t)x_1 + ... + a_{nn}(t)x_n + b_n(t) \end{aligned}$$

que es denotado abreviadamente por $\dot{x} = \sum a_{ij}(t)x_j + b_j(t)$, $i = 1, 2, ..., n$.

La ecuación matricial

$$\dot{x} = A(t)x + b(t), \qquad (1.3)$$

donde $A(t) = (a_{ij}(t))$ es una matriz $n \times n$ cuyos elementos son $a_{ij}(t)$ y $b(t) = (b_j(t))$ es un vector columna de n entradas, es equivalente al sistema (1.2). Si $b_j(t) = 0$, al sistema (1.3) lo llamaremos lineal homogéneo. Cuando $A(t) = A$ diremos que

$$\dot{x} = Ax \qquad (1.4)$$

es un sistema lineal homogéneo con coeficientes constantes.

Notemos que φ es solución de (1.3) si $\dot{\varphi}(t) = A(t)\varphi(t) + b(t)$, luego por existencia y unicidad de soluciones, para todo $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$ existe un único $\varphi(t) = \varphi(t, (t_0, x_0))$ definido en I tal que $\varphi(t_0) = x_0$, es más

$$\varphi(t) = x_0 + \int [(A(s)\varphi(t) + b(s)]ds.$$

Definición 8 *Una matriz $\Phi(t)$ de orden $n \times n$ cuyas columnas forman una base para el espacio de soluciones de (1.4), se llama matriz fundamental de (1.4).*

Observación 9 *Si $\Phi(t)$ es una matriz fundamental del sistema (1.4), entonces la solución*

$\varphi(t,(t_0,x_0))$ de (1.3) tal que $\varphi(t,(t_0,x_0))=x_0$ es dada por

$$\varphi(t,(t_0,x_0))=\Phi(t)\left[\Phi^{-1}(t_0)x_0+\int_0^t\Phi^{-1}(s)b(s)ds\right].$$

*En particular $\varphi(t,(t_0,x_0))=\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0$ en el caso homogéneo; al producto $\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)$ lo denotaremos por e^{At}, ver [**?**]*

Lema 10 *La matriz fundamental satisface*

1. $e^{A0}=I_0$ *y* $\frac{d}{dt}e^{At}=Ae^{At}$.

2. $(e^{At})^{-1}=e^{-At}$.

3. $e^{(t+s)A}=e^{At}e^{As}$.

4. $e^{At}=\sum\frac{(At)^k}{k!}$.

*Para la demostración ver [**?**]*

Ejemplo 11 *Consideremos el sistema lineal con coeficientes reales*

$$\dot{x}_1=x_2$$
$$\dot{x}_2=-x_1$$

y $(x_1(0),x_2(0))=x_0$, *entonces tenemos que* $A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$, *y su solución es* $\varphi(t,x_0)=e^{At}x_0$.

Ahora calculemos la matriz fundamental

$$A^0=Id_2,\quad A^1=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},\quad A^2=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix},\quad A^3=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\quad y\quad A^4=Id_2$$

luego su matriz fundamental es

$$\begin{aligned} e^{At} &= \sum \frac{(At)^n}{n!} = Id_2 + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \frac{A^3t^3}{3!} + \frac{A^4t^4}{4!} + ... \\ &= \begin{pmatrix} 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - .... & t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - .... \\ -t + \frac{t^3}{3!} - \frac{t^5}{5!} + ... & 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + ... \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

por lo tanto, la solución es

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix}$$

Ejemplo 12 *Consideremos el sistema*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha x + \beta y \\ \dot{y} &= -\beta x + \alpha y, \end{aligned}$$

en este caso $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$ *y*

$$e^{tA} = e^{t\alpha} \begin{pmatrix} \cos t\beta & \sin t\alpha \\ -\sin t\alpha & \cos t\beta \end{pmatrix}$$

donde

$$\varphi_1(t) = e^{\alpha t}(\cos t\beta, -\sin t\beta) \quad y \quad \varphi_2(t) = e^{\alpha t}(\sin t\beta, \cos t\beta).$$

Proposition 13 *Sean* C, A *y* $B \in M_n(\mathbb{R})$, *entonces:*

1. *Si* $BC = CA$, *entonces* $e^{tB}C = Ce^{tA}$
2. *Si* $AB = BA$, *entonces para todo* $t \in \mathbb{R}$

$$e^{tA}B = Be^{tA} \quad y \quad e^{tA}e^{tB} = e^{t(A+B)}$$

Dem.

1. Es fácil probar, usando inducción que $B^kC = CA^k$ para todo k, entonces

$$e^{tB}C = (\sum \frac{(Bt)^k}{k!})C = \sum \frac{(B^kC)t^k}{k!} = \sum \frac{(CA^k)t^k}{k!} = C\sum \frac{A^kt^k}{k!} = Ce^{At}$$

2. Por (1) $e^{tA}B = Be^{tA}$, por otra parte tenemos que $e^{tA}e^{tB}$ y $e^{t(A+B)}$ son soluciones de la ecuación $\dot{x} = (A+B)x$, de hecho por *lema (10)*

$$\frac{d}{dt}(e^{tA}e^{tB}) = Ae^{tA}e^{tB} + e^{tA}Be^{tB} = Ae^{tA}e^{tB} + Be^{tA}e^{tB} = (A+B)e^{tA}e^{tB}$$

■

Lema 14 *Sea A una matriz compleja (respectivamente real). Si λ es su valor propio complejo (respectivamente real) de A y v su vector propio correspondiente, entonces $\varphi(t) = e^{\lambda t}v$ es una solución del sistema $\dot{x} = Ax$.*

1.2.1. Sistemas bidimensionales simples

En esta sección haremos un breve estudio de los sistemas de ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes, los cuales quedan completamente determinados por el signo de los valores propios asociados a la matriz del sistema.

Consideremos el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{aligned} \tag{1.5}$$

con $a_{ij} \in \mathbb{R}$ y $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ o equivalentemente

$$\dot{x} = Ax \quad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad y \quad \det(A) \neq 0.$$

La condición $\det(A) \neq 0$ implica que el origen es el único punto donde A se anula, es decir, el único punto fijo del flujo $\varphi(t, x) = e^{tA}x$.

Sabemos que el polinomio característico de A es

$$P(\lambda) = \lambda^2 - (traza\ A)\lambda + \det A$$

y sus valores propios son

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{traza\ A \pm \sqrt{(traza\ A)^2 - \det A}}{2}$$

Dado esto distinguimos los siguientes casos:

a) Los valores propios λ_1, λ_2 de A son reales y distintos.

b) Los valores propios son complejos conjugados, $\lambda_1, \bar{\lambda}_1$ con $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$.

c) Los valores propios son reales e iguales, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$.

Caso a.

Sean v_1, v_2 vectores propios correspondientes a los valores propios λ_1, λ_2. Denotaremos por E_1, E_2 las rectas generadas por estos vectores. Luego toda solución puede ser escrita en la forma

$$\varphi(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2, \text{ con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

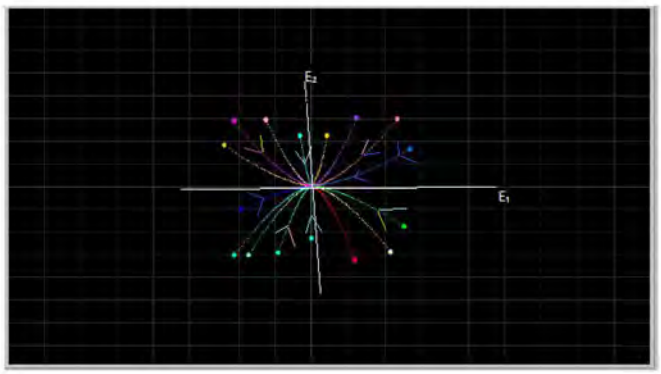
1. $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$.

   Toda trayectoria tiende a cero, cuando $t \to +\infty$; excepto el origen que permanece fijo y toda trayectoria tiende a ∞, cuando $t \to -\infty$. Si $c_1 \neq 0$ tenemos que la recta tangente a la trayectoria tiende a E_1, cuando $t \to \infty$.

   De hecho si $t \to \infty$

   $$\frac{c_2 e^{\lambda_2 t}}{c_1 e^{\lambda_1 t}} = \frac{c_1}{c_2} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} \to 0,$$

   pues $\lambda_2 - \lambda_1 < 0$. Si $c_1 = 0$ las soluciones son semirrectas de E_2.



Nodo estable

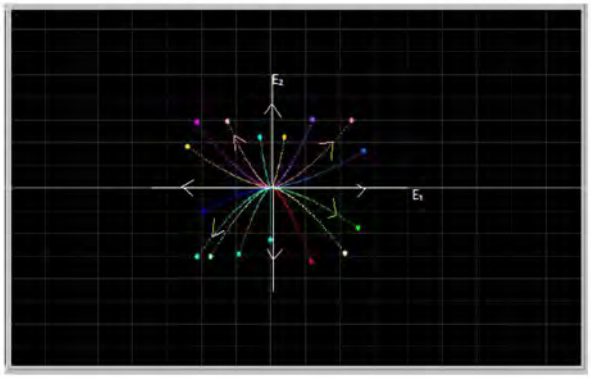
2. $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$.

   Toda trayectoria tiende a cero, cuando $t \to -\infty$; excepto el origen que permanece fijo y toda trayectoria tiende a ∞, cuando $t \to \infty$. Si $c_1 \neq 0$ tenemos que la recta tangente a la trayectoria tiende a E_1, cuando $t \to \infty$.

   De hecho si $t \to -\infty$

$$\frac{c_2 e^{\lambda_2 t}}{c_1 e^{\lambda_1 t}} = \frac{c_1}{c_2} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} \to 0,$$

   pues $\lambda_2 - \lambda_1 > 0$.

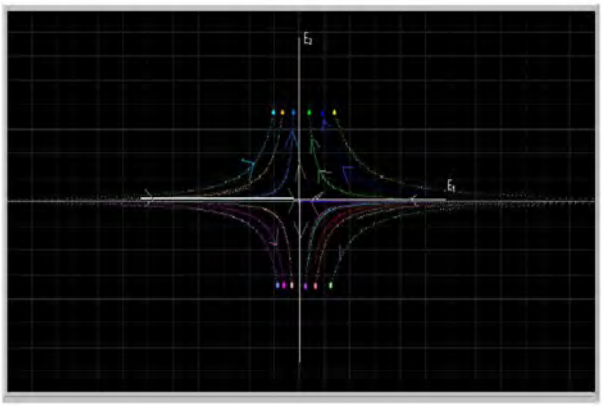


Nodo inestable

3. $\lambda_2 > 0 > \lambda_1$, *(silla)*

   Las trayectorias que pasan por los puntos de $E_1 (c_2 = 0)$ (o de E_2 con $c_1 = 0$) permanecen en las rectas y tienden a cero cuando $t \to +\infty$ (o $t \to -\infty$). Si c_1, $c_2 \neq 0$, las curvas

soluciones tienden para ∞, cuando $t \to \pm\infty$. La componente E_1 $(resp.E_2)$ tiende a cero (resp. $+\infty$), cuando $t \to +\infty$, cuando $t \to +\infty$, E_2 $(resp.\ E_1)$ tiende a cero (resp. ∞).



Silla

Caso b.

En este caso toda solución de $\dot{x} = Ax$ puede ser escrita como

$$\varphi(t) = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t),$$

con

$$\varphi_1(t) = e^{\alpha t}[\cos(t\beta)v_1 - \sin(t\beta)v_2] \quad y \quad \varphi_2(t) = e^{\alpha t}[\sin(t\beta)v_1 + \cos(t\beta)v_2],$$

donde v_1, v_2 son vectores propios correspondientes a sus valores propios, así:

1. $\alpha = 0$, *(centro)*

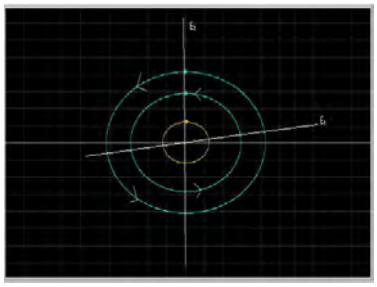
   Todas las soluciones, excepto la solución nula son elipses y el ángulo entre $\varphi(t)$ y E_1 tiende a ∞ cuando $t \to \infty$.

2. $\alpha < 0$, *(foco atractor)*

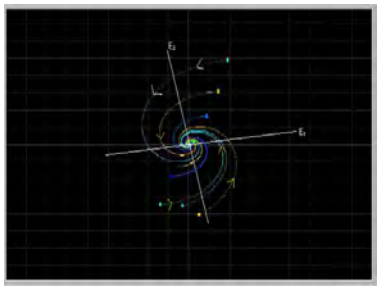
   Toda solución tiende a cero en forma espiral en torno al origen cuando $t \to +\infty$, es decir, $|\varphi(t)| \to 0$ y el ángulo entre $\varphi(t)$ y E_1 tienden a $+\infty$ o $-\infty$ según el signo de β.

3. $\alpha > 0$, (foco inestable)

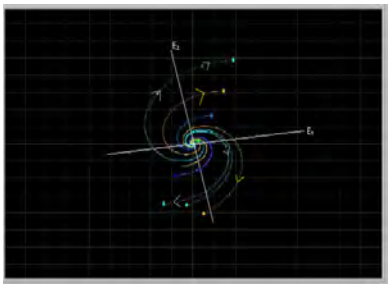
Toda solución tiende a cero en forma espiral entorno al origen cuando $t \to -\infty$ siguiendo el razonamiento anterior.



Centro



Foco atractor



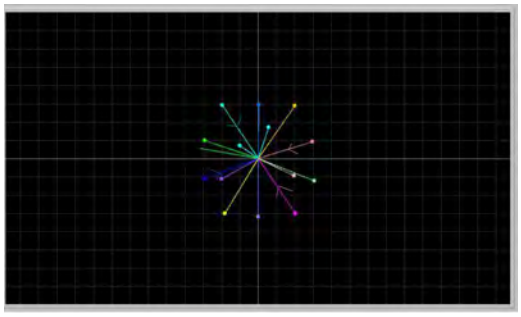
Foco repulsor

Caso c.

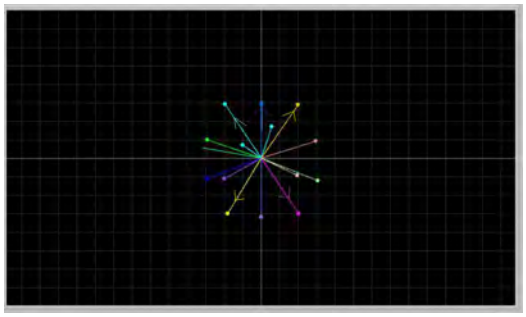
1. Cuando el núcleo de $A - \lambda I_2$ es bidimensional, es decir, λ tiene vectores propios v_1, v_2 linealmente independientes cuya solución del sistema $\dot{x} = Ax$ puede ser escrita como

$$\varphi(t) = e^{\lambda t}(c_1 v_1 + c_2 v_2),$$

todas las órbitas, excepto la solución nula son semirrectas.



Nodo impropio atractor



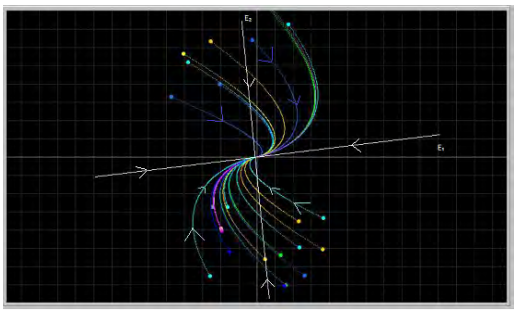
Nodo impropio repulsor

2. El núcleo de $A - \lambda I = E_1$ es unidimensional.

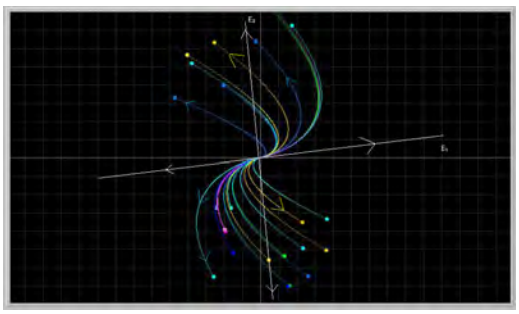
Sea v un generador de E_1 y w un vector no colineal con v. La matriz del operador $x \to Ax$ en la base $\{v, w\}$ es de la forma

$$\begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \text{ con } \alpha \neq 0$$

donde $\varphi(t) = e^{\lambda t}[(c_1 + tc_2)v_1 + c_2 v_2]$ es solución de $\dot{x} = Ax$. Si $\lambda < 0$ las trayectorias tienden a cero de lo contrario tienden a ∞, ver [**?**].



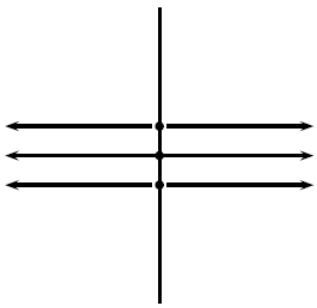
Nodo de una tangente estable



Nodo de una tangente inestable

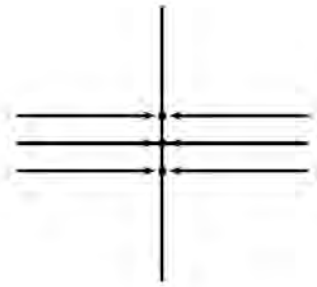
Observación 15 *Cuando el* $\det A = 0$, *tenemos los siguientes casos:*

1. $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, *Si* $\lambda > 0$, *tenemos un valor propio positivo y otro cero. Los conjuntos* $\alpha-$*límites de todas las órbitas negativas son puntos de equilibrio.*



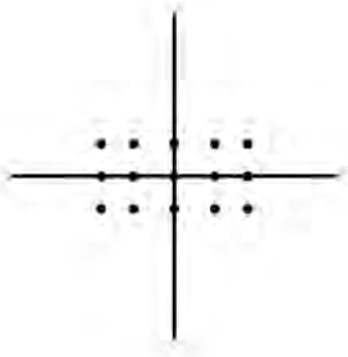
Trayectorias en el plano de fase

2. $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, *Si* $\lambda < 0$, *tenemos un valor propio negativo y otro cero. Los conjuntos* $\omega-$*límite de todas las orbitas positivas son puntos de equilibrio.*



Trayectorias en el plano de fase

3. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, *matriz cero. Todo punto es de equilibrio y él es su propia órbita.*



Trayectorias en el plano de fase

Teorema 16 *(Teorema fundamental para sistemas lineales) Sea* A *una matriz de orden* $n \times n$. *Entonces para* $x_0 \in \mathbb{R}^n$, *el problema de valor inicial (P.V.I)*

$$\dot{x} = Ax$$

$$x(0) = x_0$$

tiene una única solución dada por

$$x(t) = e^{At}x_0$$

Dem. *Si* $x(t) = e^{At}x_0$, entonces por lema (10), $\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}e^{At}x_0 = Ae^{At}x_0 = Ax(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ con $x(0) = x_0$, así $x(t) = e^{At}x_0$ es una solución.

Ahora veamos que está solución es única. Sea $x(t)$ una solución cualquiera del P.V.I. y sea $y(t) = e^{-At}x(t)$, luego

$$\begin{aligned}\dot{y}(t) &= -Ae^{-At}x(t) + e^{-At}\dot{x}(t)\\ &= -Ae^{-At}x(t) + e^{-At}Ax(t)\\ &= 0,\end{aligned}$$

así $y(t)$ es constante, ahora si $t = 0$ tenemos que $y(t) = x_0$, lo que implica que cualquier solución del P.V.I. está dada por

$$x(t) = e^{At}y(t) = e^{At}x_0.$$

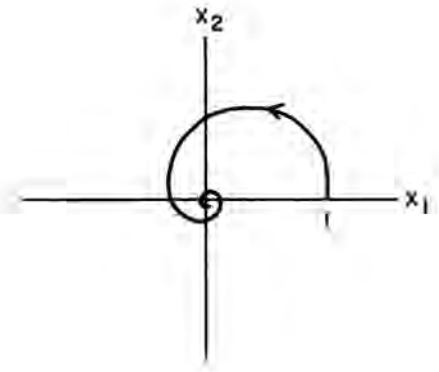
■

Ejemplo 17 *Resolvamos el problema del valor inicial*

$$\dot{x} = Ax \text{ con } x(0) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \text{ para } \quad A = \begin{pmatrix}-2 & -1\\ 1 & -2\end{pmatrix}.$$

Los valores propios de A *son* $\lambda_1 = -2 + i$ *y* $\lambda_2 = -2 - i$*, y su solución es dada por*

$$x(t) \;=\; e^{At}x_0 \;=\; e^{-2t}\begin{pmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \;=\; e^{-2t}\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}$$



Foco atractor

El siguiente teorema nos entrega otro método para hacer un estudio cualitativo a sistemas bidimensionales simples mediante la traza y el determinante.

Teorema 18 *Sean* $\delta = \det A$ *y* $\tau = traza(A)$ *y consideremos el sistema lineal (1.5), si:*

a. $\delta < 0$*, entonces (1.5) tiene una silla en el origen.*

b. $\delta > 0$ *y* $\tau^2 - 4\delta \geq 0$*, entonces (1.5) tiene un nodo en el origen; éste es estable si* $\tau < 0$ *e inestable si* $\tau > 0$*.*

c. $\delta > 0$*,* $\tau^2 - 4\delta < 0$ *y* $\tau \neq 0$*, entonces (1.5) tiene un foco en el origen; éste es estable si* $\tau < 0$ *e inestable si* $\tau > 0$*.*

d. $\delta > 0$ *y* $\tau = 0$*, entonces (1.5) tiene un centro en el origen.*

*Para la demostración ver [***?***].*

Como hemos visto, el comportamiento de las trayectorias de un sistema en $\mathbb{R}^n$ se ven atraídas, repelidas o su dinámica es periódica alrededor de un punto crítico, teniendo en cuenta esto, surge la siguiente definición.

Definición 19 *Consideremos el sistema*

$$\dot{x} = Ax \tag{1.6}$$

donde $A \in M_n(\mathbb{R})$ *y* $w_j = u_j + iv_j$ *son los vectores propios de la matriz* A *correspondiente a los valores propios* $\lambda_j = a_j + ib_j$ *y sea*

$$B = \{u_1, ..., u_k, u_{k+1}, v_{k+1}, ..., u_m, v_m\}$$

una base de $\mathbb{R}^n$ $(n = 2m - k)$. *Definimos los subespacios estables, inestables y central respectivamente por*

$$E^s = \langle u_j, v_j / a_j < 0 \rangle$$
$$E^u = \langle u_j, v_j / a_j > 0 \rangle$$
$$E^c = \langle u_j, v_j / a_j = 0 \rangle .$$

El sistema (1.6) se llama hiperbólico si todos los valores propios de A *tienen parte real diferente de cero.*

Definición 20 *Un subespacio* E *de* $\mathbb{R}^n$ *es llamado invariante con respecto al flujo*

$$e^{At} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

sí para todo $x \in E$, $e^{At}x$ *pertenece a* E *para todo* $t \in \mathbb{R}$.

Observación 21 *Es fácil probar que los subespacios* E^s, E^u *y* E^c *son invariantes con respecto al flujo, ver [?], esto implica que un punto, distinto al equilibrio, no puede pertenecer a dos subespacios al mismo tiempo.*

Teorema 22 *Sea* A *una matriz real de orden* $n \times n$. *Entonces*

$$\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u \oplus E^c$$

donde E^s, E^u *y* E^c *son los subespacios estable, inestables y central definidos anteriormente; más aún* E^s, E^u *y* E^c *son invariantes con respecto al flujo* e^{At} *de* $\dot{x} = Ax$.

Para la demostración ver [?]

Ejemplo 23 *Consideremos el sistema* $\dot{x} = Ax$ *donde*

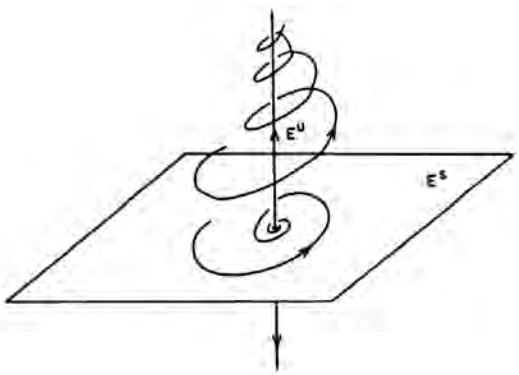
$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ con } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Los valores propios de la matriz A *son* $\lambda_1 = -2 + i$, $\lambda_2 = -2 - i$ *y* $\lambda = 3$, *con sus respectivos vectores propios*

$$v_1 = (0,1,0)^T + i(1,0,0)^T,\ v_2 = (0,1,0)^T - i(1,0,0)^T,\ v_3 = (0,0,1)^T,$$

luego tenemos que

$$E^s = \left\langle (0,1,0)^T, (1,0,0)^T \right\rangle \text{ y } E^u = \left\langle (0,0,1)^T \right\rangle.$$



Espacios estables e inestables respecto al sistema

Ejemplo 24 *Consideremos el sistema* $\dot{x} = Ax$, *donde*

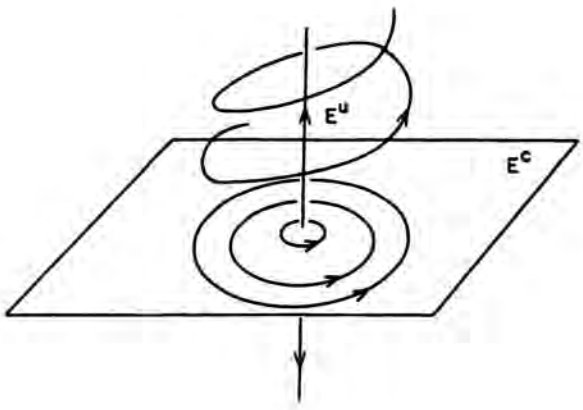
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Los valores propios son $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$ *y* $\lambda_3 = 2$, *con sus respectivos vectores propios*

$$v_1 = (0,1,0)^T + i(1,0,0)^T,\ v_2 = (0,1,0)^T - i(1,0,0)^T,\ v_3 = (0,0,1),$$

luego tenemos que

$$E^c = \left\langle (0,1,0)^T, (1,0,0)^T \right\rangle \simeq \mathbb{R}^2 \text{ y } E^u = \left\langle (0,0,1)^T \right\rangle \simeq \mathbb{R}.$$

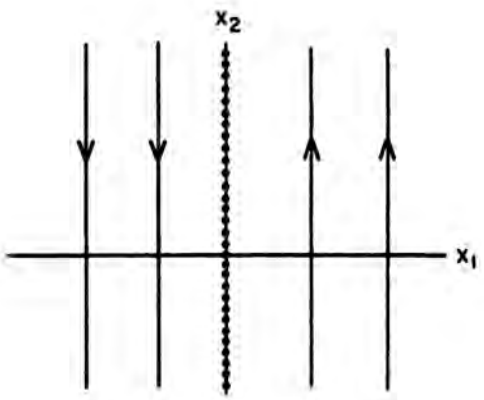


Espacios central e inestables respecto al sistema

Ejemplo 25 *Consideremos el sistema* $\dot{x} = Ax$ *con*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

con valores propios $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ *y* $v_1 = (0,1)^T$, $v_2 = (1,0\ )^T$ *sus respectivos vectores propios. Así tenemos que* $E^c = \mathbb{R}^2$.



Espacio central respecto al sistema

1.3. Teoría local de sistemas no lineales

En éste capítulo, comenzaremos nuestro estudio de sistemas no lineales de ecuaciones diferenciales autónomas

$$\dot{x} = f(x), \tag{1.7}$$

donde $f : E \longrightarrow \mathbb{R}^n$ y E es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$. Determinaremos sus puntos de equilibrio y describiremos el comportamiento cerca de ellos.

Recordemos que un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ es llamado punto de equilibrio o punto crítico de (1.7), si $f(x_0) = 0$ y es hiperbólico si ninguno de los valores propios de la matriz $Df(x_0)$ tiene parte real cero. El sistema

$$\dot{x} = Ax, \tag{1.8}$$

con la matriz $A = Df(x_0)$ es llamada la linealización de (1.7) en x_0. Linealizar un sistema en un punto de equilibrio hiperbólico nos ayudara a estudiar el comportamiento del flujo en un sistema lineal equivalente como lo veremos posteriormente, de hecho si $x_0 = 0$ es un punto de equilibrio de (1.7), entonces $f(0) = 0$ y por teorema de Taylor

$$f(\mathbf{x}) = Df(0)\mathbf{x} + \frac{1}{2}D^2f(0)(\mathbf{x},\mathbf{x}) + \cdots\cdot.$$

Se sigue que el campo vectorial $Df(0)\mathbf{x}$ es una buena aproximación del campo no necesariamente lineal $f(\mathbf{x})$ cerca de $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Definición 26 *Un punto de equilibrio x_0 de (1.7) es llamado sumidero si todos los valores propios de la matriz $Df(x_0)$ tienen parte real negativa; éste es llamado fuente si todos los valores propios de $Df(x_0)$ tienen parte real positiva; y este es llamado una silla, si al menos tiene un valor propio con parte real positiva y un valor propio con parte real negativa.*

Ejemplo 27 *Consideremos el sistema (1.7) con*

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_1^2 - x_2^2 - 1 \\ 2x_2 \end{pmatrix},$$

claramente $(1,0)^T$ *y* $(-1,0)^T$, *son los únicos puntos de equilibrios de (1.7), por otra parte*

$$Df(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 & -2x_2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

entonces

$$Df(1,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } Df(-1,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

así, tenemos que $(1,0)^T$ *es un nodo inestable y* $(-1,0)^T$ *es una silla.*

Definición 28 *Dos sistemas autónomos* $\dot{x} = f(x)$ *y* $\dot{x} = g(x)$ *se dicen topológicamente equivalentes en una vecindad del origen o tienen la misma estructura cualitativa cerca del origen, si existen vecindades* U *y* V *conteniendo al origen y un homeomorfismo* $H : U \longrightarrow V$, *que transforma órbitas de* $\dot{x} = f(x)$ *en órbitas de* $\dot{x} = g(x)$ *conservando su sentido (orientación), es decir*

$$H(e^{At}\mathbf{x}) = e^{Bt}H(\mathbf{x}) \text{ para todo } t \in \mathbb{R} \text{ y } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Por otra parte diremos que existe una conjugación topológica, si se preserva la parametrización por tiempo, es decir, si el flujo en U *recorre cierta distancia en un tiempo* t, *en* V *recorrerá la misma distancia en el mismo periodo.*

Observación 29 *Note que si dos flujos son topológicamente conjugados, entonces también son topológicamente equivalentes, pero dos flujos equivalentes que difieran en la parametrización del tiempo, no podrán ser conjugados. Así en la equivalencia, el homeomorfismo preserva la orientación de las curvas solución, pero no necesariamente la parametrización del tiempo. Esto hace que la clasificación de los flujos bajo equivalencias tengan un sentido más "dinámico".*

El siguiente teorema nos garantiza la existencia de una conjugación topológica entre un sistema no lineal con su linealización en vecindades pequeñas alrededor de un punto de equilibrio hiperbólico.

Teorema 30 *(Hartman-Grobman) Sea* $f : E \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *de clase* C^1 *y* x_0 *un punto de equilibrio hiperbólico de (1.7). Entonces existen vecindades* U *de* x_0 *y* V *de* $0 \in \mathbb{R}^n$, *tal que* $f\ |_U$ *es topológicamente conjugado a* $Df\ (x_0)|_V$.

*Para su demostración ver [**?**]*

Definición 31 *Sea φ_t el flujo de la ecuación diferencial (1.7) definida para todo $t \in \mathbb{R}$. Un punto de equilibrio x_0 de (1.7) es estable si, para todo $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que para todo $x \in N_\delta(x_0)$, donde $N_\delta(x_0)$ es una vecindad de x_0 y $t \geq 0$ tenemos que*

$$\varphi_t(x) \in N_\epsilon(x_0).$$

El punto de equilibrio es inestable si no es estable y x_0 es asintóticamente estable si es estable y si existe un $\delta > 0$ tal que para todo $x \in N_\delta(x_0)$ tenemos que

$$\lim \varphi_t(x) = x_0.$$

Observación 32 *Si todos los valores propios de la linealización $A = Df(x_0)$ tienen parte real negativa, entonces el punto de equilibrio x_0 es asintóticamente estable, ahora si x_0 es un punto de equilibrio estable de (1.7), ningún valor propio de $Df(x_0)$ tiene parte real positiva, así podemos ver que los puntos de equilibrios estables que no son asintóticamente estables, pueden solo ocurrir en puntos de equilibrios que no son hiperbólicos. Pero la pregunta, ¿cuándo un punto de equilibrio no hiperbólico puede ser estable, asintóticamente estable o inestable?, es un poco más delicada. Un método útil, el cual describiremos a continuación, responde en algunos casos esta pregunta, dicho método fue desarrollado por Liapunov en 1892 como tesis doctoral.*

Definición 33 *Si x_0 es un punto de equilibrio estable de (1.7), entonces el conjunto*

$$A(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n / \lim \|\varphi(t, x) - x_0\| = 0\}$$

se llama cuenca o dominio de atracción de x_0.

Notemos que si x_0 e y_0 son dos puntos de equilibrio de (1.7), entonces es claro que $A(x_0) \cap A(y_0) \neq \Phi$.

Definición 34 *Consideremos la función $V : \mathbb{R}^+ \times U \longrightarrow \mathbb{R}$, donde U es un subconjunto abierto y conexo de $\mathbb{R}^n$ con $0 \in U$ y asumamos que $V \in C^1$. Diremos que V es semi-definida positiva*

si $V(t,x) \geq 0$, *para todo* $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times U$. *Diremos que* V *es definida positiva, si existe* $W \in C^0(U,\mathbb{R})$, *tal que para todo* $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times U$, *con* $x \neq 0$, $V(t,x) \geq W(x) > 0$ *y* $V(t,0) = W(0) = 0$.

Ejemplo 35 *La función* $V(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2$ *es definida positiva,* $V(x_1,x_2) = (x_1+x_2)^2$ *es semi-definida positiva y* $V(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$ *es indefinida.*

Definición 36 *Sea* E *un subconjunto de* $\mathbb{R}^n$, *si* $f \in C^1(E)$, $V \in C^1(E)$ *y* φ_t *es el flujo de (1.7), entonces para* $x \in E$, *la derivada de la función* $V(x)$ *a lo largo de la solución* $\varphi_t(x)$ *es*

$$\dot{V}_{(1.7)}(x) = \frac{d}{dt} V(\varphi_t(x))|_{t=0} = DV(x)f(x).$$

Teorema 37 *(Liapunov) Sea* E *un subconjunto abierto de* $\mathbb{R}^n$ *conteniendo a* x_0. *Supongamos que* $f \in C^1(E)$ *y que* $f(x_0) = 0$, *supongamos además que existe una función real* $V(x_0) = 0$ *y* $V(x) > 0$ *para todo* $x \neq x_0$, *entonces:*

a. *Si* $\dot{V}_{(1.7)}(x) \leq 0$, *para todo* $x \in E$, x_0 *es estable;*

b. *Si* $\dot{V}_{(1.7)}(x) < 0$, *para todo* $x \in E$, x_0 *es asintóticamente estable;*

c. *Si* $\dot{V}_{(1.7)}(x) > 0$, *para algún* x *en cualquier vecindad abierta de* E, x_0 *es inestable.*

Observación 38 *Si* $\dot{V}_{(1.7)}(x) = 0$ *para todo* $x \in E$, *entonces las trayectorias de (1.7) se encuentran sobre las superficies de* $\mathbb{R}^n$(*o curvas en* $\mathbb{R}^2$) *definidas por*

$$V(x) = c.$$

Ejemplo 39 *Consideremos el sistema*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2^3 \\ \dot{x}_2 &= x_1^3. \end{aligned} \tag{1.9}$$

El origen es un punto de equilibrio no hiperbólico y

$$V(x) = x_1^4 + x_2^4$$

es una función de Liapunov para este sistema, de hecho

$$\dot{V}_{(1.9)}(x) = 4x_1^3\dot{x}_1 + 4x_2^3\dot{x}_2 = 0$$

por lo tanto las curvas solución se encuentran sobre las curvas cerradas

$$x_1^4 + x_2^4 = c^2.$$

Así el origen es un punto de equilibrio estable del sistema, que no es asintóticamente estable. Notemos que la linealización del sistema no nos habría dado esta información ya que $Df(0) = 0$, *por lo que sus valores propios son cero.*

Ejemplo 40 *Consideremos el sistema*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -2x_2 + x_2x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_1x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_1x_2. \end{aligned} \tag{1.10}$$

es claro que el origen es un punto de equilibrio para este sistema y

$$Df(0) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donde $Df(0)$ *tiene como valores propios* $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \bar{\lambda}_3 = 2i$, *es decir,* $x_0 = 0$ *es un punto de equilibrio no hiperbólico. Usaremos el método de Liapunov para estudiar la estabilidad del sistema. ¿Pero cómo encontramos una función de Liapunov adecuada?. Supongamos que la función de Liapunov es de la forma*

$$V(x) = c_1x_1^2 + c_2x_2^2 + c_3x_3^2$$

con constantes c_1, c_2 *y* c_3. *Calculando* $\dot{V}(x) = DV(x)f(x)$, *encontramos*

$$\frac{1}{2}\dot{V}_{(1.10)}(x) = (c_1 - c_2 + c_3)x_1x_2x_3 + (-2c_1 + c_2)x_1x_2.$$

Por lo tanto si $c_2 = 2c_1$ *y* $c_3 = c_1$, *tenemos que* $V(x) > 0$ *para todo* $x \neq x_0$ *y* $\dot{V}(x) = 0$, *para todo* $x \in \mathbb{R}^3$ *y por teorema anterior* $x_0 = 0$ *es estable. Más aún, eligiendo* $c_1 = c_3 = 1$ *y* $c_2 = 2$, *vemos que las trayectorias del sistema se encuentran sobre el elipsoide* $x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 = c^2$.

Sabemos que todo sumidero es asintóticamente estable. Sin embargo, como mostraremos en el siguiente ejemplo, no todo punto de equilibrio asintóticamente estable es un sumidero.

Ejemplo 41 *Consideremos el sistema*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -2x_2 + x_2x_3 - x_1^3 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_1x_3 - x_2^3 \\ \dot{x}_3 &= x_1x_2 - x_3^3 \end{aligned} \tag{1.11}$$

y consideremos

$$V(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2,$$

que es definida positiva, además

$$\dot{V}_{(1.11)} = -2(x_1^4 + 2x_2^4 + x_3^4) < 0$$

para $x \neq 0$. *Por lo tanto, por teorema anterior, el origen es asintóticamente estable, pero este no es un sumidero, pues los valores propios de su linealización son* $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{2}$ *y* $\lambda_3 = 0$.

Un polinomio se dice estable si todas sus raíces tienen parte real negativa. Una matriz cuadrada se dice estable si todos sus valores propios tienen parte real negativa por lo que ella es estable si su polinomio característico es estable. Ahora veremos un criterios para la estabilidad de un polinomio el cual será utilizado en el tercer capítulo en nuestro resultado principal. Consideremos un polinomio de grado n

$$p(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots\cdots\cdots + a_1\lambda + a_0,$$

donde $a_n \neq 0$.

Teorema 42 *Si el polinomio p es estable, entonces todos sus coeficientes son positivos.*

Teorema 43 *Asumamos que todos los coeficientes a_k del polinomio p son positivos, y consideremos la siguiente matriz, llamada matriz de Hurwitz*

$$H_p = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdots\cdots & 0 \\ . & . & . & . & \cdots\cdots & . \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & a_{2n-4} & \cdots\cdots & a_n \end{pmatrix},$$

donde $a_k = 0$, si $k > n$; el polinomio es estable si y sólo si todos los menores principales de H_p son positivos, es decir,

$$\Delta_2 = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{pmatrix} > 0, ..., \Delta_{n-1} > 0,$$

donde Δ_{n-1} es el menor principal de la última fila.

1.3.1. Sillas, Nodos, Focos y Centros para sistemas no lineales

Sea

$$\dot{x} = Ax \tag{1.12}$$

un sistema lineal con $x \in \mathbb{R}^2$ y

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.13}$$

un sistema no lineal. Decimos que (1.13) tiene una silla, sumidero o fuente en un punto de equilibrio hiperbólico x_0, si la parte lineal de f en x_0 tiene valores propios con parte real positiva y negativa, solo con parte lineal negativa o solo tiene parte real positiva, respectivamente.

En esta sección definiremos el concepto de silla topológica y veremos que bajo una hipótesis más fuerte para f, se mantienen ciertas características con respecto a su sistema linealizado.

Comencemos introduciendo coordenadas polares (r, θ) y reescribamos el sistema (1.13).

Supongamos que tenemos el sistema en $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= P(x,y) \\ \dot{y} &= Q(x,y). \end{aligned} \tag{1.14}$$

Sí $r^2 = x^2 + y^2$ y $\theta = \tan^{-1}(\frac{y}{x})$, entonces

$$r\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y}$$

y

$$r^2\dot{\theta} = x\dot{y} - y\dot{x}.$$

Se sigue que para $r > 0$, el sistema no lineal (1.14) puede ser escrito en coordenadas polares como

$$\begin{aligned} \dot{r} &= P(r\cos\theta, r\sin\theta)\cos\theta + Q(r\cos\theta, r\sin\theta)\sin\theta \\ r\dot{\theta} &= Q(r\cos\theta, r\sin\theta)\cos\theta - P(r\cos\theta, r\sin\theta)\sin\theta. \end{aligned} \tag{1.15}$$

El origen es llamado centro para el sistema no lineal (1.13) si existe un $\delta > 0$ tal que para toda curva solución de (1.13) en una vecindad $N_\delta(0)\backslash\{0\}$, es una curva cerrada con el origen en su interior.

Definición 44 *El origen es llamado un centro-foco para (1.13), si existe una sucesión de curvas cerradas γ_n con γ_{n+1} en el interior de γ_n tal que $\gamma_n \to 0$ cuando $n \to \infty$ y cada trayectoria entre γ_n y γ_{n+1} espira hacia γ_n o γ_{n+1} cuando $t \to \pm\infty$.*

Definición 45 *Sean $r(t, r_0, \theta_0)$ y $\theta(t, r_0, \theta_0)$ las soluciones del sistema no lineal (1.15) con $r(0) = r_0$ y $\theta(0) = \theta_0 \in \mathbb{R}$. Decimos que el origen es un foco estable para (1.13), si existe un $\delta > 0$ tal que $0 < r_0 < \delta$, $r(t, r_0, \theta_0) \to 0$ y $|\theta(t, r_0, \theta_0)| \to \infty$ cuando $t \to \infty$. Es llamado foco inestable si $r(t, r_0, \theta_0) \to 0$ y $|\theta(t, r_0, \theta_0)| \to \infty$, cuando $t \to -\infty$.*

Observación 46 *El origen es llamado nodo estable para (1.13), si existe un $\delta > 0$ tal que $0 < r_0 < \delta$ y $\theta_0 \in \mathbb{R}$, $r(t, r_0, \theta_0) \to 0$ cuando $t \to \infty$ y el $\lim_{t\to\infty} \theta(t, r_0, \theta_0)$ existe. El origen es*

llamado nodo inestable si $r(t, r_0, \theta_0) \to 0$ *cuando* $t \to -\infty$ *y el* $\lim_{t\to-\infty} \theta(t, r_0, \theta_0)$ *existe para todo* $r_0 \in (0, \delta)$ *y* $\theta_0 \in \mathbb{R}$.

Definición 47 *El origen es una silla topológica para (1.13), si existen dos trayectorias* γ_1 *y* γ_2 *que tienden a* 0 *cuando* $t \to \infty$, *dos trayectorias* γ_3 *y* γ_4 *que se aproximan a* 0 *cuando* $t \to -\infty$ *y existe un* $\delta > 0$ *tal que todas las otras trayectorias comienzan en la vecindad del origen* $N_\delta(0)\backslash\{0\}$ *y salen de ella cuando* $t \to \pm\infty$.

Ejemplo 48 *Escribamos el sistema*

$$\dot{x} = -y - xy$$
$$\dot{y} = x + x^2$$

en coordenadas polares. Para $r > 0$ *tenemos*

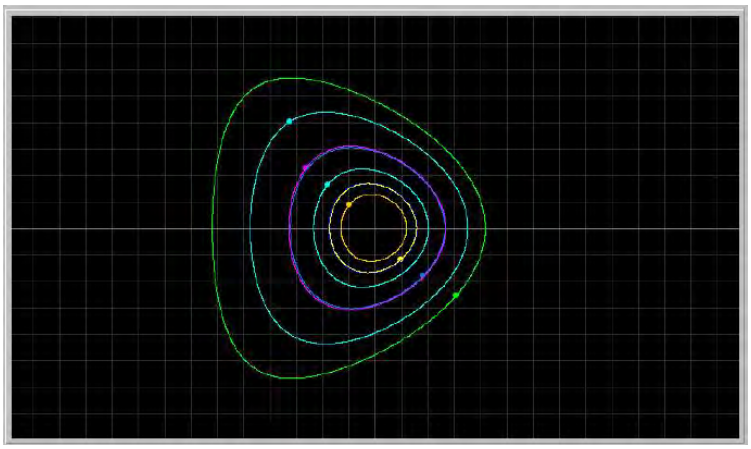
$$\dot{r} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{r} = \frac{-xy - x^2y + xy + x^2y}{r} = 0$$

y

$$\dot{\theta} = \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{r^2} = \frac{x^2 + x^3 + y^2 + xy^2}{r^2} = 1 + x > 0,$$

para $x > -1$. *Así, a lo largo de cualquier trayectoria de este sistema en el semi-plano* $x > -1$, $r(t)$ *es constante y* $\theta(t)$ *crece sin límite cuando* $t \to \infty$. *Luego el origen es un centro para el*

sistema no lineal.



centro

Ejemplo 49 *Consideremos el sistema*

$$\dot{x} = -y - x^3 - xy^2$$
$$\dot{y} = x - y^3 - x^2 y$$

en coordenadas polares, para $r > 0$*, tenemos*

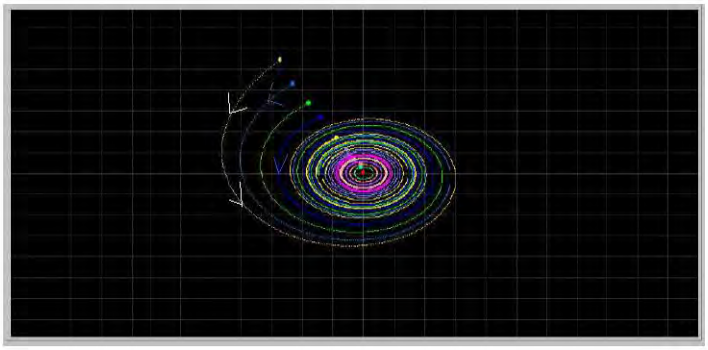
$$\dot{r} = -r^3$$

y

$$\dot{\theta} = 1.$$

Así, $r(t) = r_0(1 + 2r_0^2 t)^{\frac{-1}{2}}$ *para* $t > \frac{-1}{2r_0^2}$ *y* $\theta(t) = \theta_0 + t$ *donde* $r(0) = r_0$*, por lo que* $r(t) \to 0$ *y* $|\theta(t)| \to \infty$ *cuando* $t \to \infty$*, luego el origen es llamado un foco estable para este sistema no*

lineal.



Foco estable

Ejemplo 50 *Consideremos el sistema*

$$\dot{x} = -y + x^3 + xy^2$$
$$\dot{y} = x + y^3 + x^2 y$$

en este caso, tenemos para $r > 0$

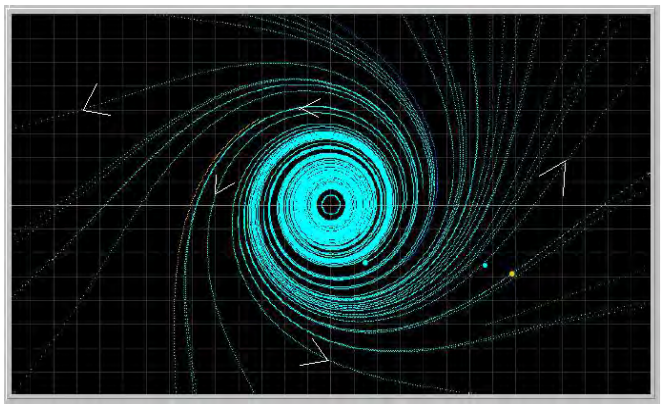
$$\dot{r} = r^3$$

y

$$\dot{\theta} = 1.$$

Así, $r(t) = r_0(1 - 2r_0^2 t)^{\frac{1}{2}}$ *para* $t < \frac{1}{2r_0^2}$ *y* $\theta(t) = \theta_0 + t$, *donde* $r(0) = r_0$, *por lo que* $r(t) \to 0$ *y* $|\theta(t)| \to \infty$ *cuando* $t \to -\infty$, *luego el origen es llamado un foco inestable para este sistema no*

lineal.



Foco inestable

Ejemplo 51 *Consideremos el sistema*

$$\dot{x} = -x - \frac{y}{\ln\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$\dot{y} = -y + \frac{x}{\ln\sqrt{x^2+y^2}},$$

para $x^2 + y^2 \neq 0$ *y definimos* $f(0) = 0$. *En coordenadas polares tenemos*

$$\dot{r} = -r$$
$$\dot{\theta} = \frac{1}{\ln r}.$$

Así, $r(t) = r_0 e^{-t}$ *y* $\theta(t) = \theta_0 - \ln(1 - \frac{t}{\ln r_0})$, *donde* $r\,(0) = r_0$, *por lo que para* $r_0 < 1$, $r(t) \to 0$ *y* $|\theta(t)| \to \infty$ *cuando* $t \to \infty$, *luego de acuerdo a la definición(45)el origen es un foco estable para el sistema no lineal; sin embargo este es un nodo propio estable para el sistema linealizado, ya que sus valores propios son negativos.*

Observación 52 *Como vimos en el ejemplo anterior, el comportamiento alrededor del origen para el sistema no lineal cambia al linealizarlo, no así, su estabilidad. Dado esto, surge el siguiente resultado, que demuestra que bajo una hipótesis más fuerte, su comportamiento persiste bajo la adición de términos no lineales.*

Teorema 53 *Sea E un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^2$ conteniendo al origen y sea $f \in C^2(E)$. Supongamos que el origen es un punto crítico hiperbólico de (1.13). Entonces el origen es un nodo estable (o inestable) para el sistema lineal (1.13) si y soló si éste es un nodo estable (o inestable) para el sistema no lineal (1.12) con $A = Df(0)$. Por otra parte el origen es un foco estable (o inestable) para (1.13) si y sólo si es un foco estable (o inestable) para (1.12) con $A = Df(0)$.*

Teorema 54 *Sea E un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^2$ conteniendo al origen y sea $f \in C^1(E)$ con $f(0) = 0$. Supongamos que el origen es un centro para el sistema lineal (1.12) con $A = Df(0)$. Entonces el origen es o bien un centro, centro-foco o un foco para el sistema no lineal (1.13).*

1.4. Teorema de la variedad estable

El teorema de la variedad estable es uno de los resultados más importantes de la teoría cualitativa local de ecuaciones diferenciales ordinarias. El teorema muestra que cerca de un punto de equilibrio hiperbólico x_0, el sistema no lineal

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.16}$$

tiene variedades estables e inestables S y U, pudiendo una de ellas ser vacía, tangentes en x_0 a los subespacios E^s y E^u del sistema linealizado

$$\dot{x} = Ax \tag{1.17}$$

donde $A = Df(x_0)$. Más aún, S y U son de la misma dimensión que E^s y E^u, ahora si φ_t es el flujo del sistema no lineal (1.16), entonces S y U son invariantes positivamente y negativamente bajo φ_t respectivamente y satisfacen

$$\lim_{t\to\infty} \varphi_t(c) = x_0, \text{ para todo } c \in S$$

y

$$\lim_{t\to-\infty} \varphi_t(c) = x_0, \text{ para todo } c \in U.$$

Definición 55 *Una variedad diferenciable n-dimensional, M (o una variedad de clase C^k), es un espacio métrico conexo, el cual puede ser cubierto por conjuntos abiertos $\{U_\alpha\}$, es decir, $M = \bigcup_\alpha U_\alpha$, tal que*

1. *Para todo α en un conjunto de índices I, existe un homeomorfismo*

$$h_\alpha : U_\alpha \longrightarrow B = \{x \in \mathbb{R}^n / \, \|x\| < 1\}.$$

2. *Si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \phi$,$\alpha \neq \beta$, entonces $h_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ y $h_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ son subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ y la función*

$$h = h_\alpha \circ h_\beta^{-1} : h_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow h_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

es diferenciable (o de clase C^k) y para todo $x \in h_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$, es decir, el determinante del Jacobiano $\det Dh(x) \neq 0$.

Teorema 56 *(Teorema de la variedad estable) Sea E un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ conteniendo al origen, sea $f \in C^1(E)$ y φ_t el flujo del sistema no lineal (1.16). Supongamos que $f(0) = 0$ y que $Df(0)$ tiene k valores propios con parte real negativa y $n - k$ con parte real positiva. Entonces existe una variedad diferenciable k-dimensional S tangente al subespacio estable E^s del sistema lineal (1.17) en 0 tal que para todo $t \geq 0$, $\varphi_t(S) \subset S$ y para todo $x_0 \in S$*

$$\lim_{t \to \infty} \varphi_t(x_0) = 0;$$

y existe una variedad $(n-k)$-dimensional U tangente al subespacio inestable E^u de (1.17) en 0 tal que para todo $t \leq 0$, $\varphi_t(U) \subset U$ y para todo $x_0 \in U$

$$\lim_{t \to -\infty} \varphi_t(x_0) = 0.$$

Ejemplo 57 *Consideremos el sistema*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + x_1^2 \\ \dot{x}_3 &= x_3 + x_1^2. \end{aligned}$$

El único punto de equilibrio está en el origen y la matriz de su linealización es

$$A = Df(0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

cuyos valores propios son $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -1$ *y* $\lambda_3 = 1$ *y sus respectivos vectores propios* $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 0)$ *y* $v_3 = (0, 0, 1)$, *así los subespacios estable e inestables* E^s *y* E^u *son tangentes al plano* x_1x_2 *y el eje* x_3 *respectivamente.*

Si $x(0) = c$, *con* $c = (c_1, c_2, c_3)$, *una solución explicita del sistema es*

$$\begin{aligned} x_1(t) &= c_1 e^{-t} \\ x_2(t) &= c_2 e^{-t} + c_1^2(e^{-t} - e^{-2t}) \\ x_3(t) &= c_3 e^{t} + \frac{c_1^2}{3}(e^{t} - e^{-2t}). \end{aligned}$$

Es fácil observar que, el $\lim_{t\to\infty} \varphi_t(c) = 0$ *si y solo si* $c_3 + \frac{c_1^2}{3} = 0$. *Así,*

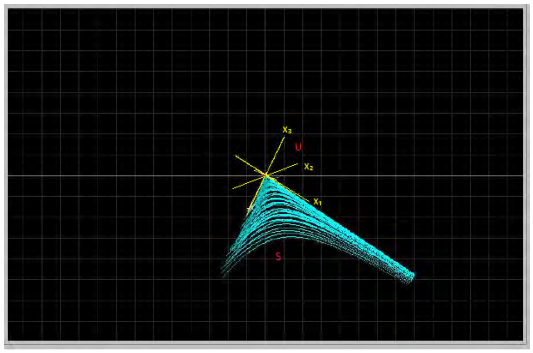
$$S = \{c \in \mathbb{R}^3; c_3 = \frac{-c_1^2}{3}\}.$$

Similarmente, el $\lim_{t\to-\infty} \varphi_t(c) = 0$ *si y solo si* $c_1 = c_2 = 0$ *y por lo tanto*

$$U = \{c \in \mathbb{R}^3; c_1 = c_2 = 0\}.$$

Notemos que la superficie S *es tangente a* E^s, *es decir, al plano* x_1x_2 *en el origen y que*

$U = E^u$.



Variedades estables e inestables

Las variedades S y U son definidas en una vecindad del origen, es decir, localmente, ahora daremos una definición global de estas variedades, en una vecindad de 0.

Definición 58 *Sea φ_t el flujo del sistema no lineal (1.16). Las variedades globales estables e inestables de (1.16) en 0 están definidas por*

$$W^s(0) = \bigcup_{t\leq 0}\varphi_t(S)$$

y

$$W^u(0) = \bigcup_{t\geq 0}\varphi_t(S)$$

respectivamente. Tenemos que las variedades estables e inestables global $W^s(\mathbf{0})$ y $W^u(\mathbf{0})$ son únicas e invariantes con respecto al flujo φ_t; más aún para todo $x \in W^s(0)$, $\lim_{t\to\infty}\varphi_t(x) = 0$ y para todo $x \in W^u(0)$, $\lim_{t\to-\infty}\varphi_t(x) = 0$.

Por otra parte, en una pequeña vecindad, N, de un punto crítico hiperbólico en el origen, las variedades estables e inestables S y U de (1.16) en el origen están dadas por

$$S = \{x \in N; \varphi_t(x) \to 0 \text{ cuando } t \to \infty \text{ y } \varphi_t(x) \in N \text{ para todo } t \geq 0\}$$

y

$$U = \{x \in N; \varphi_t(x) \to 0 \text{ cuando } t \to -\infty \text{ y } \varphi_t(x) \in N \text{ para todo } t \leq 0\}.$$

Teorema 59 *(Teorema de la variedad central). Sea $f \in C^r(E)$ donde E es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ conteniendo al origen y $r \geq 1$. Supongamos que $f(0) = 0$ y que $Df(0)$ tiene k*

valores propios con parte real negativa, j con parte real positiva y $m = n - k - j$ con parte real cero. Entonces existe una m-variedad central $W^c(\mathbf{0})$ de clase C^r tangente al subespacio central E^c de (1.17) en $\mathbf{0}$, una variedad estable k-dimensional $W^s(\mathbf{0})$ de clase C^r tangente al subespacio estable E^s de (1.17) en $\mathbf{0}$ y existe una variedad inestable j-dimensional $W^u(\mathbf{0})$ de clase C^r tangente al subespacio inestable E^u de (1.17) en $\mathbf{0}$; más aún $W^c(\mathbf{0})$, $W^s(\mathbf{0})$ y $W^u(\mathbf{0})$ son invariantes bajo el flujo φ_t de (1.16).

El teorema de Hartman-Grobman, resuelve completamente el problema de determinar la estabilidad y comportamiento cualitativo en una vecindad de un punto crítico hiperbólico de un sistema no lineal. Con el teorema precedente, mostraremos que el comportamiento cualitativo en una vecindad de un punto crítico no hiperbólico x_0 del sistema no lineal (1.16), con $x \in \mathbb{R}^n$ es determinado por el comportamiento sobre la variedad central cerca de x_0.

Notemos que si $f \in C^1(E)$, $f(0) = 0$ y $Df(0) = diag[C, P, Q]$, donde C tiene c valores propios con parte real cero, P tiene s valores propios con parte real negativa y Q tiene u valores propios con parte real positiva, entonces el sistema (1.16) puede ser escrito de forma diagonal

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Cx + F(x, y, z) \\ \dot{y} &= Py + G(x, y, z) \\ \dot{z} &= Qz + H(x, y, z). \end{aligned} \tag{1.18}$$

con $(x, y, z) \in \mathbb{R}^c \times \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^u$, $F(0) = G(0) = H(0) = \mathbf{0}$, y $DF(0) = DG(0) = DH(0) = \mathbf{0}$. Se sigue que la variedad central local de (1.18) en $\mathbf{0}$ es

$$W^c_{loc}(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^c \times \mathbb{R}^s; y = h(x) \text{ para } ||x|| < \delta\} \tag{1.19}$$

para algún $\delta > 0$, donde $h \in C^r(N_\delta(0))$, $h(0) = 0$, y $Dh(0) = 0$ ya que $W^c(0)$ es tangente al subespacio

$$E^c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^c \times \mathbb{R}^s; y = 0\}$$

en el origen.

Teorema 60 *(Teorema de la variedad central local). Sea $f \in C^r(E)$, donde E es un subconjunto*

abierto de $\mathbb{R}^n$ *conteniendo al origen y* $r \geq 1$. *Supongamos que* $f(0) = 0$ *y que* $Df(0)$ *tiene* c *valores propios con parte real cero y* s *valores propios con parte real negativa, donde* $c + s = n$. *Entonces el sistema (1.16) puede ser escrito en forma diagonal como*

$$\dot{x} = Cx + F(x, y)$$
$$\dot{y} = Py + G(x, y),$$

donde $(x, y) \in \mathbb{R}^c \times \mathbb{R}^s$, C *es una matriz cuadrada que tiene* c *valores propios con parte real cero,* P *es una matriz cuadrada que tiene* s *valores propios con parte real negativa y* $F(0) = G(0) = \mathbf{0}$, $DF(0) = DG(0) = \mathbf{0}$; *más aún, existe un* $\delta > 0$ *y una función* $h \in C^r(N_\delta(0))$ *que define la variedad central (1.19) y satisface*

$$Dh(x)[Cx + F(x, h(x))] - Ph(x) - G(x, h(x)) = 0, \tag{1.20}$$

para $||x|| < \delta$; *y el flujo sobre la variedad central* $W^c(0)$ *es definido por el sistema de ecuaciones diferenciales*

$$\dot{x} = Cx + F(x, h(x)) \tag{1.21}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^c$ *con* $||x|| < \delta$.

Ejemplo 61 *Consideremos el siguiente sistema con* $c = s = 1$

$$\dot{x} = x^2 y - x^5$$
$$\dot{y} = -y + x^2,$$

en este caso, tenemos que $C = \mathbf{O}$, $P = [-1]$, $F(x, y) = x^2 y - x^5$ *y* $G(x, y) = x^2$. *Sustituyendo las funciones*

$$h(x) = ax^2 + bx^3 + O(x^4) \text{ y } Dh(x) = 2ax + 3bx^2 + O(x^3)$$

en la ecuación (1.20) obtenemos

$$(2ax + 3bx^2 + O(|x|^3))(ax^4 + bx^5 + O(|x|^6). - x^5) + ax^2 + bx^3 + O(x^4) - x^2 = 0$$
$$(a-1)x^2 + bx^3 + O(|x|^4) = 0,$$

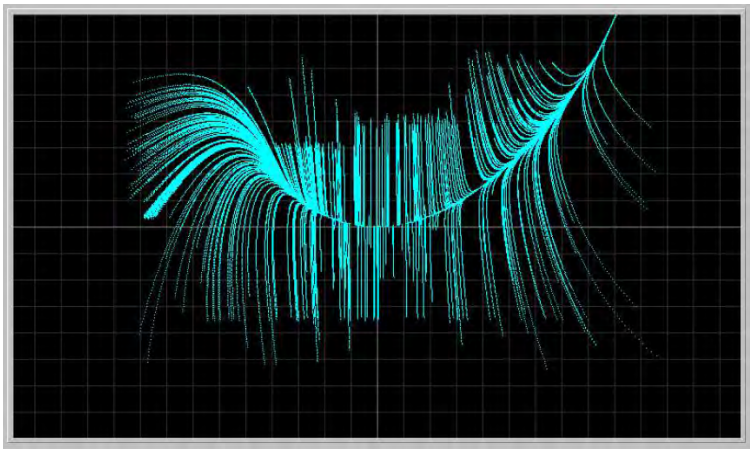
luego si $a - 1 = 0$, $b = 0$, $c = 0$..., *tenemos que*

$$h(x) = x^2 + O(|x|^5)$$

sustituyendo este resultado en la ecuación (1.21) tenemos que

$$\dot{x} = x^4 + O(|x|^5)$$

sobre la variedad central $W^c(0)$ *cerca del origen, así el retrato de fase muestra que el origen es una* silla-nodo *inestable.*



Silla nodo inestable

Ejemplo 62 *Consideremos el siguiente sistema con* $c = 2$ *y* $s = 1$

$$\dot{x}_1 = x_1 y - x_1 x_2^2$$
$$\dot{x}_2 = x_2 y - x_2 x_1^2$$
$$\dot{y} = -y + x_1^2 + x_2^2$$

tenemos que, $C = \mathbf{O}$, $P = [-1]$,

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} x_1 y - x_1 x_2^2 \\ x_2 y - x_2 x_1^2 \end{pmatrix} \text{ y } G(x,y) = x_1^2 + x_2^2.$$

sustituyendo las funciones

$$h(x) = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 + O(|x|^3)$$

y

$$Dh(x) = [2ax_1 + bx_2, bx_1 + 2cx_2] + O(|x|^2)$$

en la ecuación (1.20) obtenemos

$$\begin{aligned}
&(2ax_1 + bx_2)[x_1(ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2) - x_1x_2^2] \\
&+(bx_1 + 2cx_2)[x_2(ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2) - x_1x_2^2] \\
&+(ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2) - (x_1^2 + x_2^2) + O(|x|^3) \\
&= ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 - x_1^2 - x_2^2 + O(|x|^3) \\
&= x_1(a-1) + x_2(c-1) + bx_1x_2 + O(|x|^3) \\
&= 0
\end{aligned}$$

luego para todo x_1, x_2 *con* $||x|| < \delta$, *obtenemos* $a = 1, b = 0, c = 1$ *con los coeficientes de* $O(|x|^3)$ *iguales a cero. Así*

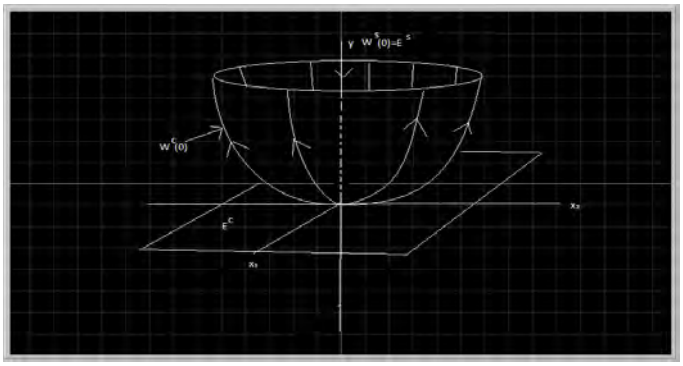
$$h(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + O(|x|^3).$$

Sustituyendo en la ecuación (1.21), tenemos

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_1^3 + O(|x|^4) \\
\dot{x}_2 &= x_2^3 + O(|x|^4),
\end{aligned}$$

sobre la variedad central $W^c(0)$ *cerca del origen. En coordenadas polares* $r\dot{r} = x_1^4 + x_2^4 + O(|x|^5) > 0$ *para* $0 < r < \delta$. *El retrato de fase cerca del origen lo podemos observar en siguiente figura,*

notemos que el origen es una silla topológica inestable.



Silla topológica

1.5. Órbitas periódicas y ciclos limites

En esta sección discutiremos órbitas periódicas y ciclos límites del sistema

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.22}$$

Definición 63 *Un ciclo u órbita periódica de (1.22) es cualquier curva solución cerrada de (1.22) diferente de un punto de equilibrio. Una órbita periódica* Γ *es llamada estable si para cada* $\varepsilon > 0$, *existe una vecindad* U *de* Γ *tal que para todo* $x \in U$, $d(\Gamma_x^+, \Gamma) < \varepsilon$; *es decir, si para todo* $x \in U$ *y* $t \geq 0$, $d(\varphi(t,x), \Gamma) < \varepsilon$. *Una órbita periódica* Γ *es llamada inestable si no es estable; y* Γ *es llamada asintóticamente estable si es estable y para todo* x *en alguna vecindad* U *de* Γ

$$\lim_{t\to\infty} d(\varphi(t,x), \Gamma) = 0.$$

Los ciclos del sistema (1.22) corresponden a soluciones periódicas de (1.22) ya que $\varphi(\cdot, x_0)$ *define una curva solución cerrada de (1.22), si y solo si para todo* $t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t+T, x_0) = \varphi(t, x_0)$ *para algún* $T > 0$. *El* T *minimal para el cual esta igualdad se mantiene, es llamado el periodo de la órbita periódica* $\varphi(\cdot, x_0)$.

Igual que los puntos de equilibrio, las órbitas periódicas tienen también variedades estables e inestables asociadas, de hecho si Γ es una órbita periódica y N una vecindad de Γ, las variedades

locales estable e inestables de Γ son dadas por

$$S(\Gamma) = \{x \in N/\ d(\varphi_t(x), \Gamma) \to 0 \text{ cuando } t \to \infty \text{ y } \varphi_t(x) \in N \text{ para todo } t \geq 0\ \}$$

y

$$U(\Gamma) = \{x \in N/\ d(\varphi_t(x), \Gamma) \to 0 \text{ cuando } t \to -\infty \text{ y } \varphi_t(x) \in N \text{ para todo } t \leq 0\ \}.$$

Las variedades estables e inestables globales de Γ son definidas por

$$W^s(\Gamma) = \bigcup_{t \leq 0} \varphi_t(S(\Gamma))$$

y

$$W^u(\Gamma) = \bigcup_{t \geq 0} \varphi_t(U(v)).$$

Ver [**?**].

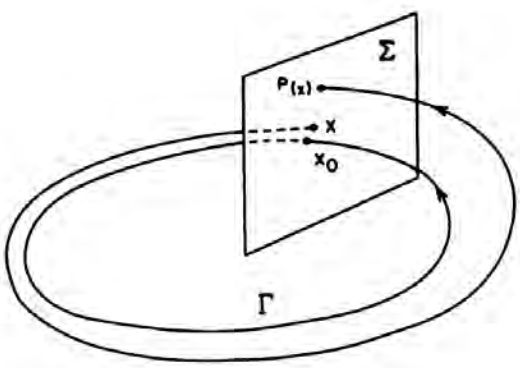
Consideremos órbitas periódicas de un sistema planar (1.22) con $x \in \mathbb{R}^2$.

Definición 64 *Un ciclo limite Γ de un sistema planar es un ciclo del sistema (1.22), el cual es un conjunto ω ó $\alpha-$limite de alguna trayectoria de (1.22) distinta de Γ. Si un ciclo Γ es el conjunto $\omega-$limite de toda trayectoria en alguna vecindad de Γ, entonces, Γ es llamado un ciclo $\omega-$limite o ciclo limite estable; si Γ es el conjunto $\alpha-$limite de toda trayectoria en alguna vecindad de Γ, entonces, Γ es llamado un ciclo $\alpha-$limite o ciclo limite inestable; y si Γ es el conjunto $\omega-$limite de una trayectoria distinta a Γ y el conjunto $\alpha-$limite de otra trayectoria distinta a Γ, entonces Γ es llamada ciclo limite semi-estable.*

El siguiente teorema muestra que un sistema planar analítico (1.22) con $f(x) \in \mathbb{R}^2$, no puede tener un número infinito de ciclos limites acumulándose en un punto crítico. Hemos de resaltar que cuando hablamos de un sistema planar analítico, nos referimos a que sus funciones son analíticas, es decir, a funciones que admiten en todos los puntos desarrollos locales en series de potencias.

Teorema 65 *(Dulac). En cualquier región limitada del plano, un sistema planar analítico (1.22) con $f(x)$ en $\mathbb{R}^2$, tiene a lo más un número finito de ciclos limites, en particular cualquier sistema polinomial tiene a lo más un número finito de ciclos limites en $\mathbb{R}^2$.*

Probablemente la herramienta mas básica para estudiar la estabilidad de órbitas periódicas es la función de Poincaré, definida por Henri Poincaré en 1881. Esta idea parte de observar que dada una órbita periódica Γ del sistema (1.22) a través del punto x_0 y dado un Σ hiperplano perpendicular a Γ en x_0, entonces para cualquier punto $x \in \Sigma$ suficientemente cerca de x_0, la solución de (1.22) a través de x en $t = 0$, $\varphi_t(x)$, cruzara Σ de nuevo en el punto $P(x)$ cerca de x_0. La función $x \to P(x)$ es llamada función de Poincaré.



Función de Poncairé

Teorema 66 *Sea E un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y sea $f \in C^1(E)$. Supongamos que $\varphi_t(x_0)$ es una solución periódica de (1.22) de periodo T y que el ciclo*

$$\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n / \ x = \varphi_t(x_0), \ 0 \leq t \leq T\}$$

está contenido en E. Sea Σ el hiperplano ortogonal de Γ en x_0; es decir

$$\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^n / (x - x_0) \cdot f(x_0) = 0\}.$$

Entonces existe un $\delta > 0$ y una única función $\tau(x)$, continuamente diferenciable definida en una vecindad $N_\delta(x_0)$, tal que $\tau(x_0) = T$ y $\varphi_{\tau(x)}(x) \in \Sigma$.

para la demostración ver [?]

Definición 67 *Sean Γ, Σ, δ y $\tau(x)$ definidos como en el teorema anterior. Entonces para $x \in N_\delta(x_0) \cap \Sigma$, la función*

$$P(x) = \varphi_{\tau(x)}(x)$$

es llamada función de Poincaré para Γ *en* x_0.

En un sistema planar, si trasladamos el origen al punto $x_0 \in \Gamma \cap \Sigma$, Σ pasara a través del origen. El punto $0 \in \Gamma \cap \Sigma$ divide Σ en dos segmentos abiertos Σ^+ y Σ^- donde Σ^+ se encuentra en el exterior de Γ. Sea $s \in \Sigma$, de acuerdo al teorema anterior, la función de Poincaré $P(s)$ se define para $|s| < \delta$ con $P(0) = 0$. En orden de ver como la estabilidad del ciclo Γ es determinado por $P'(0)$, introducimos la función desplazamiento

$$d(s) = P(s) - s.$$

Entonces $d(0) = 0$ y $d'(s) = P'(s) - 1$; note que el teorema del valor medio implica que para $|s| < \delta$

$$d(s) = d'(\sigma)s$$

para algún σ entre 0 y s. Como $d'(s)$ es continua, asumiendo que $d'(0) \neq 0$, el signo de $d'(s)$ será igual al signo de $d'(0)$ para $|s|$ suficientemente pequeño. Así, si $d'(0) < 0$ se sigue que $d(s) < 0$ para $s > 0$ y que $d(s) > 0$ para $s < 0$, es decir, el ciclo Γ es un ciclo limite estable. Similarmente, si $d'(0) > 0$, entonces Γ es un ciclo limite inestable. Lo anterior implica que si $P(0) = 0$ y $P'(0) < 1$, entonces Γ es un ciclo limite estable y si $P(0) = 0$ y $P'(0) > 1$, entonces Γ es un ciclo limite inestable. Así, la estabilidad de Γ es determinada por la derivada de la función de Poincaré.

Definición 68 *Sea* $P(s)$ *una función de Poincaré para el ciclo limite* γ *de un sistema planar analítico y sea*

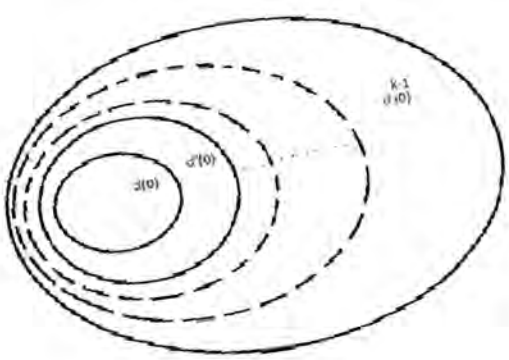
$$d(p) = P(s) - s$$

la función desplazamiento. Entonces si

$$d(0) = d'(0) = \cdots = d^{(k-1)}(0) = 0 \text{ y } d^{(k)}(0) \neq 0,$$

Γ *es llamado un ciclo limite múltiple de multiplicidad* k. *Si* $k = 1$, *entonces* Γ *es llamado un*

ciclo limite simple. En términos geométricos:



Ciclo limite múltiple de multiplicidad k

Observación 69 *Note que entre cada ciclo limite existen orbitas que se ven atraídas o repelidas por estos mismos.*

Teorema 70 *Sea E un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^2$ y $f = (f_1, f_2) : E \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un campo vectorial de clase C^1. Sea Γ una órbita periódica de f de periodo T y sea P la transformación de Poincaré definida en una sección transversal Σ en $s \in \Gamma$, entonces*

$$P(s) = \exp\left[\int_0^T \operatorname{div} f(\Gamma(t))dt\right].$$

donde $\operatorname{div} f(x) = D_1 f_1(x) + D_2 f_2(x)$. *En particular si* $\int_0^T \operatorname{div} f(\Gamma(t))dt < 0$, *entonces* Γ *es estable y si* $\int_0^T \operatorname{div} f(\Gamma(t))dt > 0$, Γ *es inestable.*

Si un sistema analítico no lineal tiene un punto de equilibrio aislado el cual es un centro para el sistema linealizado en este punto, puede ser trasladado; en virtud de esto podemos asumir sin pérdida de generalidad que el origen es un punto de equilibrio, y el sistema de coordenadas se puede transformar linealmente de tal manera que se expresa de la forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\omega y + f(x, y) \\ \dot{y} &= \omega x + g(x, y), \end{aligned} \tag{1.23}$$

donde $\omega > 0$ y f, g son analíticos en una vecindad del origen y contienen términos solo de grado dos y superior ver [29]. Eligiendo un término positivo $m \geq 3$ y considerando la función de Liapunov

$$F(x,y) = x^2 + y^2 + \sum_{k=3}^{m} F_k(x,y), \tag{1.24}$$

donde F_k es un polinomio homogéneo de grado $k = 3, 4, ..., m$. La derivada de F con respecto al sistema (1.23) es

$$\dot{F}(x,y) = 2xf(x,y) + 2yg(x,y) - \omega y\dot{F}_{3x}(x,y) + \omega x\dot{F}_{3y}(x,y) + \text{ términos de al menos orden 4,}$$

es decir, $\dot{F}$ comienza con términos de orden tres; escribiremos

$$\dot{F}(x,y) = \sum_{k=3}^{\infty} \tilde{F}_k(x,y),$$

donde $\tilde{F}_k$ es un polinomio homogéneo de grado $k = 3, 4, ...$

Teorema 71 *(Liapunov [1882]). Asumiendo que los F_k ($k = 3, ..., m-1$) han sido elegidos de tal manera que $\tilde{F}_3 = \tilde{F}_4 = \cdots\cdots \tilde{F}_{m-1} = 0$; si m es impar, entonces F_m puede ser determinado (únicamente) de tal manera que $\tilde{F}_m = 0$; si m es par, entonces F_m puede ser determinado por*

$$\tilde{F}_m(x,y) = G_m(x^2 + y^2)^{m/2},$$

donde $G_m \in \mathbb{R}$ esta únicamente determinado.

Observación 72 *Este teorema implica que una serie formal*

$$F(x,y) = x^2 + y^2 + \sum_{k=3}^{\infty} F_k(x,y) \tag{1.25}$$

puede ser determinada donde F_k es un polinomio homogéneo de grado $k = 3, 4, ..$ de manera que las derivadas de F con respecto al sistema (1.23) es

$$\dot{F}(x,y) = G_{2k}(x^2 + y^2)^k + \sum_{k=3}^{\infty} \tilde{F}_k(x,y).$$

Definición 73 *La constante G_{2k} es llamada el k-esimo coeficiente de Poincaré-Liapunov del punto de equilibrio* $(0,0)$; *si* $G_4 = \cdots = G_{2k} = 0$, *pero* $G_{2k+2} \neq 0$, *entonces el origen es llamado un punto espiral débil de orden k (si* $G_4 \neq 0$, *entonces este es un punto espiral débil de primer orden*).

Si el origen es un punto espiral débil de orden k, es decir, si el primer coeficiente de Poincaré-Liapunov que no desaparece es G_{2k+2}, entonces el procedimiento descrito en el teorema precedente puede ser terminado en $m = 2k+2$, sin necesidad de introducir una serie formal. En este caso procederemos a determinar una función de Liapunov (1.24), la cual es definida positivamente en una vecindad del origen cuya derivada con respecto al sistema es

$$\dot{F}(x,y) = G_{2k+2}(x^2+y^2)^{k+1} + \text{ términos de orden mayor.}$$

Note que si $G_{2k+2} < 0$, entonces el origen es asintóticamente estable; si $G_{2k+2} > 0$, entonces este es inestable, ahora si todos los coeficientes de Poincare- Liapunov son cero, $G_{2k} = 0$ $(k = 2, 3, ..)$, entonces el origen es un centro.

Capítulo 2

TEORIA DE BIFURCACIONES

En el capítulo anterior vimos conceptos básicos de la teoría local de sistemas no lineales de ecuaciones diferenciales

$$\dot{x} = f(x)$$

con $f \in C^1(E)$, donde E es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$. En este capítulo abordaremos la pregunta: ¿cómo es el comportamiento cualitativo de las soluciones de $\dot{x} = f(x)$, cuando cambiamos el campo vectorial por otro çercano?', para esto necesitamos definir formalmente lo que entenderemos por cercano.

Intuitivamente, si el comportamiento cualitativo no cambia al perturbar levemente el campo vectorial f, diremos que f es estructuralmente estable. La idea de estabilidad estructural se debe a Andronov y Pontryagin (1947), su trabajo sobre sistemas planares culmina con el teorema de Peixoto, el cual caracteriza completamente los campos vectoriales estructuralmente estables sobre un compacto y variedades dos dimensionales, desafortunadamente estos resultados no son generalizables para dimensiones superiores ($n \geq 3$).

Si el campo vectorial no es estructuralmente estable diremos que se produce una bifurcación la cual pertenece al conjunto (de bifurcaciones) que se encuentra en $C^1(E)$. La estructura cualitativa del conjunto solución o del retrato de fase global de $\dot{x} = f(x)$ cambia cuando el campo vectorial f pasa a través de un punto de bifurcación del conjunto $C^1(E)$. Estudiaremos

diversos tipos de bifurcaciones que ocurren en sistemas de clase C^1 de la forma

$$\dot{x} = f(x, \mu)$$

dependiendo del parámetro $\mu \in \mathbb{R}^n$

2.1. Estabilidad estructural y Teorema de Peixoto

En esta sección, presentaremos el concepto de sistemas dinámicos o campo vectorial estructuralmente estables y daremos condiciones necesarias y suficientes para que un campo vectorial f de clase C^1 sobre una variedad dos-dimensional compacta sea estructuralmente estable.

Definición 74 *Sea $f \in C^1(E)$, donde E es un subconjunto abierto y conexo de $\mathbb{R}^n$, entonces, la C^1-norma esta definida por*

$$\|f\|_1 = \sup_{x \in E} |f(x)| + \sup_{x \in E} \|Df(x)\| \tag{2.1}$$

donde $|\cdot|$ denota la norma Euclidiana sobre $\mathbb{R}^n$ y $\|\cdot\|$ la norma usual sobre la matriz $Df(x)$. Notemos que si K es un subconjunto compacto de E, entonces la C^1-norma de f sobre K es definida por

$$\|f\|_1 = \max_{x \in K} |f(x)| + \max_{x \in K} \|Df(x)\| < \infty, \tag{2.2}$$

esto es porque toda función continua alcanza su máximo y mínimo sobre un compacto.

Definición 75 *Sea E un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$. Un campo vectorial $f \in C^1(E)$ se dice estructuralmente estable si existe un $\varepsilon > 0$, tal que para todo $g \in C^1(E)$ con*

$$\|f - g\|_1 < \varepsilon,$$

f y g son topológicamente equivalentes sobre E, es decir, existe un homeomorfismo $H : E \longrightarrow E$, el cual envía trayectorias de

$$\dot{x} = f(x) \tag{2.3}$$

sobre las trayectorias de

$$\dot{x} = g(x), \tag{2.4}$$

preservando la orientación por tiempo y su estructura cualitativa. Si $f \in C^1(E)$ no es estructuralmente estable, entonces diremos que f es estructuralmente inestable.

Observación 76 *Para probar que un campo vectorial $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ no es estructuralmente estable sobre $\mathbb{R}^n$, es suficiente mostrar que f no lo es para un subconjunto compacto K de $\mathbb{R}^n$.*

El campo vectorial

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

sobre $\mathbb{R}^2$ no es estructuralmente estable sobre cualquier subconjunto compacto K de $\mathbb{R}^2$, conteniendo al origen en su interior. Para ver esto, sea K cualquier subconjunto compacto de $\mathbb{R}^2$ conteniendo al origen, $\|\cdot\|_1$ la C^1-norma sobre K y definamos el campo vectorial

$$g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y + \mu x \\ x + \mu y \end{pmatrix}.$$

Notemos que

$$Df(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } Dg(x) = \begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix},$$

luego

$$\|f(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x})\| = \left\| \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -y + \mu x \\ x + \mu y \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} -\mu x \\ -\mu y \end{pmatrix} \right\| = |\mu| \, \|\mathbf{x}\|$$

y

$$\|Df(\mathbf{x}) - Dg(\mathbf{x})\| = \left\| \begin{pmatrix} -\mu & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \right\| = \text{máx} \left\{ \left\| \begin{pmatrix} -\mu \\ 0 \end{pmatrix} \right\|, \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ \mu \end{pmatrix} \right\| \right\} = |\mu|$$

asi

$$\begin{aligned} \|f - g\|_1 &= \max_{x \in K} \{\|f(x) - g(x)\|\} + \max_{x \in K} \{\|Df(x) - Dg(x)\|\} \\ &= |\mu| \max_{x \in K} ||x|| + |\mu| \\ &= |\mu| (\max_{x \in K} ||x|| + 1) \end{aligned}$$

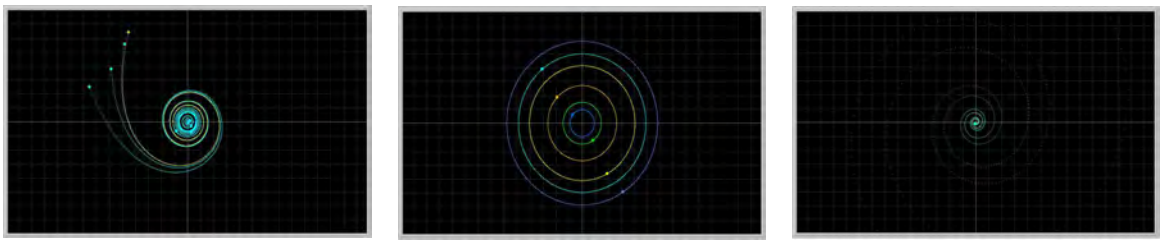
y si d es el diámetro de K, es decir

$$d = \max_{x,y \in K} |x - y|,$$

eligiendo $|\mu| = \frac{\varepsilon}{d+2}$, con $\varepsilon > 0$, observamos que

$$||f - g||_1 < \varepsilon.$$

Claramente f y g no so topológicamente equivalentes, luego f no es estructuralmente estable. El número $\mu = 0$ se le llama valor de bifurcación para el sistema $\dot{x} = g(x)$.



$\mu < 0$ $\mu = 0$ $\mu > 0$

Diagrama de fase para el sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$

Ejemplo 77 *El sistema*

$$\dot{x} = -y + x(x^2 + y^2 - 1)^2$$
$$\dot{y} = x + y(x^2 + y^2 - 1)^2$$

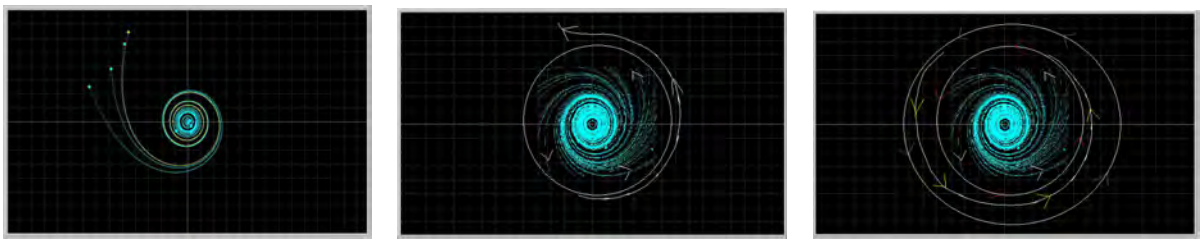
es estructuralmente inestable, consideremos el sistema

$$\dot{x} = -y + x[(x^2 + y^2 - 1)^2 - \mu]$$
$$\dot{y} = x + y[(x^2 + y^2 - 1)^2 - \mu],$$

escribiendo este sistema en coordenadas polares, tenemos

$$\dot{r} = r[(r^2 - 1)^2 - \mu]$$
$$\dot{\theta} = 1,$$

luego como vemos en el dibujo el valor de bifurcación $\mu = 0$.



$\mu < 0$ $\mu = 0$ $\mu > 0$

Antes de caracterizar sistemas estructuralmente estables, citaremos algunos resultados sobre persistencia de puntos de equilibrios hiperbólicos y orbitas periódicas.

Teorema 78 *Sea* $f \in C^1(E)$ *donde* E *es un subconjunto abierto de* $\mathbb{R}^n$ *conteniendo un punto de equilibrio hiperbólico* x_0 *de (2.3). Entonces para cualquier* $\varepsilon > 0$, *existe un* $\delta > 0$, *tal que para todo* $g \in C^1(E)$ *con*

$$||f - g||_1 < \delta$$

existe un $y_0 \in N_\varepsilon(x_0)$, *tal que* y_0 *es un punto crítico hiperbólico de (2.4), más aún,* $Df(x_0)$ *y* $Dg(y_0)$ *tienen el mismo número de valores propios con parte real negativa (y positiva).*

Teorema 79 *Sea* $f \in C^1(E)$ *donde* E *es un subconjunto abierto de* $\mathbb{R}^n$ *conteniendo una órbita periódica* γ *de (2.3). Entonces para cualquier* $\varepsilon > 0$, *existe un* $\delta > 0$, *tal que, para todo* $g \in C^1(E)$ *con*

$$||f - g||_1 < \delta$$

existe una órbita periódica γ' *de (2.4)contenida en* $N_\varepsilon(\delta)$, *más aún, las variedades estables* $W^s(\gamma)$, $W^s(\gamma')$ *y las variedades inestables* $W^u(\gamma)$ *y* $W^u(\gamma')$, *tienen las mismas dimensiones.*

Otro resultado importante para sistemas n-dimensionales, es que cualquier sistema lineal

$$\dot{x} = Ax,$$

donde la matriz A no tiene valores propios con parte real cero, es estructuralmente estable en $\mathbb{R}^n$.

Definición 80 *Un punto $x \in E$(o $x \in K$) es un punto no errante del flujo φ_t de (2.3), si para cualquier vecindad U de x y para cualquier $T > 0$, existe un $t > T$, tal que*

$$\varphi_t(U) \cap U \neq \phi.$$

El conjunto no errante Ω del flujo φ_t, es el conjunto de todos los puntos no errantes de φ_t $\in E$(o en K). Un punto $x \in E \backslash \Omega$ (o $K \backslash \Omega$) es llamado punto errante de φ_t.

Note que los puntos de equilibrio y los puntos sobre orbitas periódicas son no errantes.

Ahora comenzaremos con el teorema de Peixoto's, probado en 1962, el cual caracteriza completamente la estabilidad estructural sobre una variedad diferenciable dos-dimensional compacta.

Teorema 81 *(Peixoto) Sea f un campo de vectores de clase C^1 sobre una variedad diferenciable dos-dimensional compacta K. Entonces f es estructuralmente estable sobre K si y solo si*

i) El número de puntos críticos y ciclos limites es finito y cada uno es hiperbólico.

ii) No existen trayectorias que conecten puntos de silla.

iii) El conjunto no errante Ω consiste solo de puntos críticos y ciclos limites.

2.2. Bifurcación en puntos de equilibrios no hiperbólicos

Comenzaremos esta sección mencionando que el comportamiento cualitativo del conjunto solución de un sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mu) \tag{2.5}$$

dependiendo de un parámetro $\mu \in \mathbb{R}$, que cambia cuando el campo vectorial f pasa por un punto del conjunto de bifurcación o cuando el parámetro μ varia atravesando un valor de bifurcación μ_0. Un valor μ_0 del parámetro μ en la ecuación (2.5) para el cual el campo de vectores $f(\mathbf{x}, \mu_0)$ es estructuralmente inestable, es llamado valor de bifurcación. Asumiremos en esta sección que $f \in C^1(E, J)$, donde E es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y J un intervalo de $\mathbb{R}$.

Comenzaremos nuestro estudio de bifurcaciones con ejemplos que ocurren es sistemas dinámicos de una dimensión

$$\dot{x} = f(x, \mu)$$

con $x \in \mathbb{R}$ y $\mu \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 82 *Consideremos el sistema*

$$\dot{x} = \mu - x^2.$$

Para $\mu > 0$ existe dos puntos críticos, $x = \pm\sqrt{\mu}$, donde $Df(x, \mu) = -2x$ y $Df(\pm\sqrt{\mu}, \mu) = \mp 2\sqrt{\mu}$, notemos que el punto crítico $x = \sqrt{\mu}$ es estable, mientras que $x = -\sqrt{\mu}$ es inestable. Para $\mu = 0$, existe solo un punto crítico en $x = 0$ y este no es hiperbólico pues $Df(0, 0) = 0$, luego el campo vectorial $f(x) = -x^2$ es estructuralmente inestable y $\mu = 0$ es el valor de bifurcación. Para $\mu < 0$ no existen puntos críticos. Por otra parte para $\mu > 0$ las variedades estables e inestables son dadas por $W^s(\sqrt{\mu}) = (-\sqrt{\mu}, \infty)$ y $W^u(-\sqrt{\mu}) = (-\infty, \sqrt{\mu})$. Si $\mu = 0$ la variedad central es dada por $W^c(0) = (-\infty, \infty)$. La curva $\mu - x^2 = 0$ determina la posición de los puntos críticos del sistema. Como vemos en la figura, una curva solida es usada para indicar una familia de puntos críticos estables, mientras que una curva discontinua es usada para indicar una familia de puntos críticos inestables, a esto le llamaremos diagrama de bifurcación.

La bifurcación recién expuesta se le llama bifurcación ensilladura-nodo.

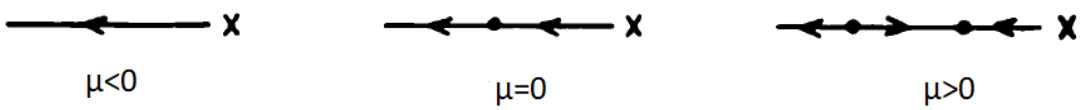


Diagrama de fase

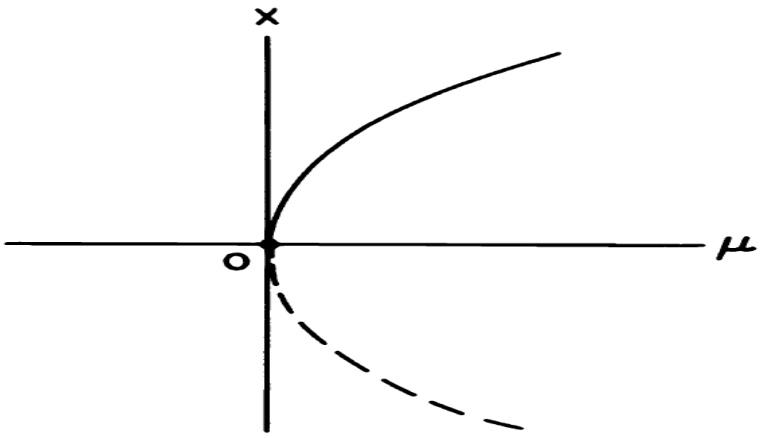


Diagrama de bifurcación para la bifurcación ensilladura-nodo.

Ejemplo 83 *consideremos el sistema*

$$\dot{x} = \mu x - x^2$$

Los puntos críticos son $x = 0$ *y* $x = \mu$. *Para* $\mu = 0$ *existe un solo punto crítico en* $x = 0$ *y este es no hiperbólico, pues* $Df(0,0) = 0$; *el campo vectorial* $f(x) = -x^2$ *es estructuralmente inestable y* $\mu = 0$ *es el valor de bifurcación, pues con* $\mu \neq 0$ *existen dos puntos de equilibrio y*

con $\mu = 0$ existe uno. A este tipo de bifurcación se le llama bifurcación transcritica.

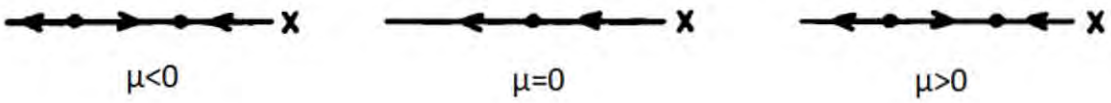


Diagrama de fase

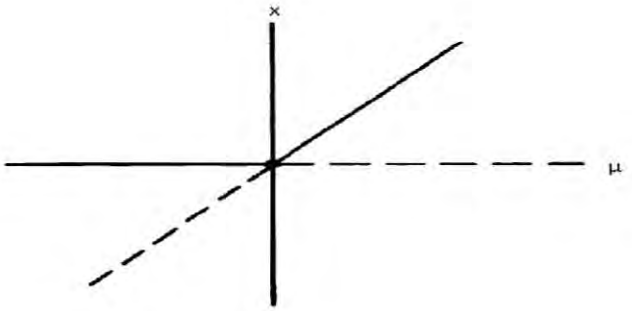


Diagrama de bifurcación para la bifurcación transcritica.

Ejemplo 84 *Consideremos el sistema*

$$\dot{x} = \mu x - x^3$$

Para $\mu > 0$, existen puntos críticos en $x = 0$ y $x = \pm\sqrt{\mu}$. Para $\mu \leq 0$, $x = 0$ es el único punto crítico. Para $\mu = 0$ hay un punto crítico no hiperbólico $x = 0$ pues $Df(0, 0) = 0$. Luego el campo vectorial $f(x) = x^3$ es estructuralmente inestable y $\mu = 0$ es el valor de bifurcación. Para $\mu < 0$ tenemos que $W^s(0) = (-\infty, \infty)$, sin embargo, para $\mu = 0$, $W^s(0) = \phi$ y $W^c(0) = (-\infty, \infty)$.

Este tipo de bifurcación es llamada bifurcación Pitchfork.

Diagrama de fase.

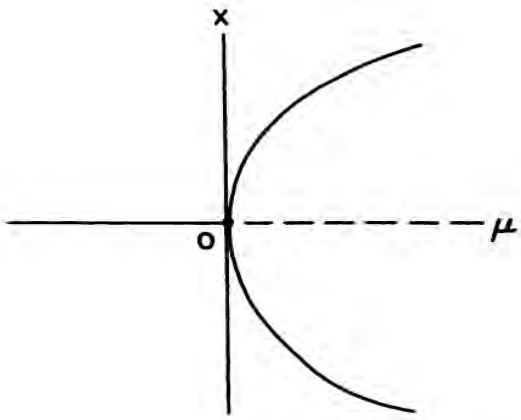


Diagrama de bifurcación para la bifurcación de Pitchfork.

Las bifurcaciones de los ejemplos anteriores ilustran los tipos de bifurcaciones más importantes que ocurren en el sistema de una dimensión, ciertamente existen muchas otras que son posibles en sistemas de una dimensión.

Teorema 85 *(Sotomayor) Supongamos que* $f(x_0, \mu_0) = 0$ *y que la matriz* $A = Df(x_0, \mu_0)$ *de orden* $n \times n$*, tiene un valor propio simple* $\lambda = 0$ *con su respectivo vector propio* $\mathbf{v}$ *y que* A^T *tiene un vector propio asociado* $\mathbf{w}$ *correspondiente al valor propio* $\lambda = 0$*. Mas aun, supongamos que* A *tiene* k *valores propios con parte real negativa y* $(n - k - 1)$ *valores propios con parte real positiva, tal que satisfacen las siguientes condiciones*

$$\mathbf{w}^T f_\mu(x_0, \mu_0) \neq 0, \ \ \mathbf{w}^T [D^2 f(x_0, \mu_0)(\mathbf{v}, \mathbf{v})] \neq 0. \tag{2.6}$$

Entonces existe una curva suave de putos críticos de (2.5) en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ *pasando por* (x_0, μ_0) *y tangente al hiperplano* $\mathbb{R} \times \{\mu_0\}$. *Dependiendo del signo de la expresión en (2.6), no hay puntos de equilibrios en (2.5) cerca de* x_0 *cuando* $\mu < \mu_0$(*o cuando* $\mu > \mu_0$) *y existen dos puntos de equilibrios de (2.5) cerca de* x_0 *cuando* $\mu > \mu_0$(*o cuando* $\mu < \mu_0$). *Los dos puntos de equilibrios de (2.5) cerca de* x_0 *son hiperbólicos y tienen variedades estables de dimensión* k *y* $k+1$ *respectivamente, es decir, el sistema (2.5) experimenta una bifurcación ensilladura-nodo en el punto de equilibrio* x_0 *cuando el parámetro* μ *pasa por el valor de bifurcación* $\mu = \mu_0$.

Si la condición (2.6) es cambiada a

$$\begin{aligned} \mathbf{w}^T f_\mu(x_0, \mu_0) &= 0, \\ \mathbf{w}^T [Df_\mu(x_0, \mu_0)\mathbf{v}] &\neq 0 \ y \\ \mathbf{w}^T [D^2 f(x_0, \mu_0)(\mathbf{v}, \mathbf{v})] &\neq 0. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Entonces el sistema(2.5) experimenta una bifurcación transcritica en el punto de equilibrio x_0 *cuando el parámetro* μ *pasa por el valor de bifurcación* $\mu = \mu_0$.

Ahora si la condición (2.6) es cambiada a

$$\begin{aligned} \mathbf{w}^T f_\mu(x_0, \mu_0) = 0, \ \mathbf{w}^T [Df_\mu(x_0, \mu_0)\mathbf{v}] &\neq 0, \\ \mathbf{w}^T [D^2 f(x_0, \mu_0)(\mathbf{v}, \mathbf{v})] = 0 \ y \ \mathbf{w}^T [D^3 f(x_0, \mu_0)(\mathbf{v}, \mathbf{v}, \mathbf{v})] &\neq 0. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Entonces el sistema (2.5) es una bifurcación pitchfork en el punto de equilibrio x_0 *cuando el parámetro* μ *pasa por el valor de bifurcación* $\mu = \mu_0$.

Ejemplo 86 *Consideremos el sistema planar*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu - x^2 \\ \dot{y} &= -y. \end{aligned}$$

En este sistema el valor de bifurcación es $\mu_0 = 0$ *y de acuerdo a las notaciones del teorema anterior, tenemos*

$$A = Df(\mathbf{0}, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = A^T \ y \ f_\mu(0,0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

con valores propios $\lambda_1 = 0$ *y* $\lambda_2 = -1$*, luego el vector propio respecto a* λ_1 *es* $\mathbf{v} = \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *(*$\mathbf{w}$ *es el vector propio de* A^T *respecto a* λ_1 *), de esta manera,*

$$\mathbf{w}^T f_\mu(\mathbf{0}, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

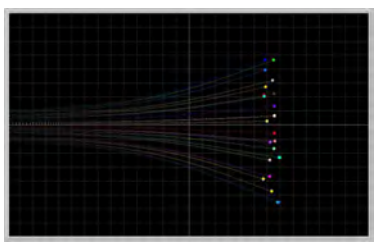
y

$$D^2 f(\mathbf{x},\mu)(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} -2x \\ 0 \end{pmatrix}$$

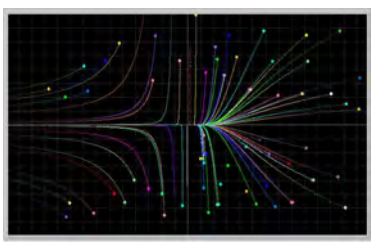
$$D^2 f(\mathbf{x},\mu)(\mathbf{v},\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$D^{\mathbf{2}} f(\mathbf{0},0)(\mathbf{v},\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

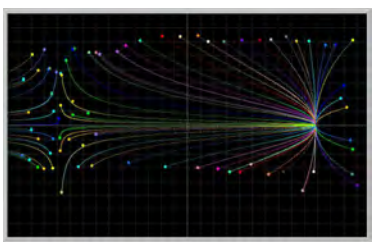
así $\mathbf{w}^T[D^2 f(\mathbf{0}, 0)(\mathbf{v}, \mathbf{v})] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = -2$*. Por teorema anterior existe una bifurcación ensilladura-nodo en el punto crítico no hiperbólico* $(0, 0)$ *en el valor de bifurcación* $\mu = 0$*. Para* $\mu < 0$ *no existen puntos críticos. Para* $\mu = 0$ *existe un punto crítico en el origen, para* $\mu > 0$ *existen dos puntos críticos.*



$\mu < 0$



$\mu = 0$



$\mu > 0$

Ejemplo 87 *Consideremos el sistema planar*

$$\dot{x} = \mu x - x^2$$

$$\dot{y} = -y,$$

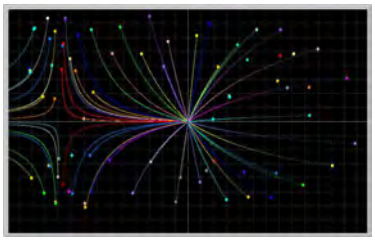
de acuerdo a las notaciones del teorema anterior, $\mathbf{v} = \mathbf{w} = (1,0)^T$, $\mathbf{w}^T f_\mu(\mathbf{0},0) = 0$,

$$Df_\mu(\mathbf{0},0)\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

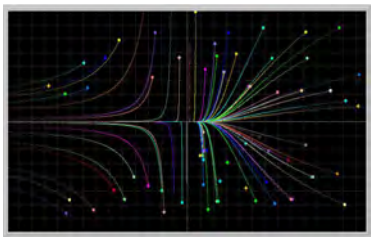
así $\mathbf{w}^T[Df_\mu(\mathbf{0},0)\mathbf{v}] = 1$ *y*

$$D^2 f(\mathbf{0},0)(\mathbf{v},\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

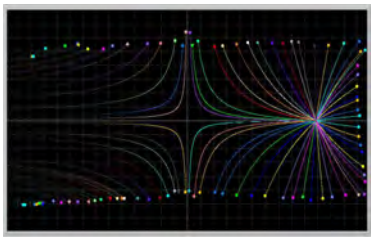
luego $\mathbf{w}^T[D^2 f(\mathbf{0},0)(\mathbf{v},\mathbf{v})] = -2$, *de esta manera el sistema experimenta una bifurcación transcritica en el origen, cuyo valor de bifurcación es* $\mu = 0$, *como se muestra en las figuras.*



$\mu < 0$



$\mu = 0$



$\mu > 0$

Ejemplo 88 *Consideremos el sistema*

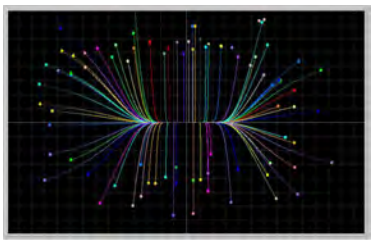
$$\dot{x} = \mu x - x^3$$
$$\dot{y} = -y.$$

De acuerdo a las notaciones del teorema anterior, tenemos que $\mathbf{v} = \mathbf{w} = (1,0)^T$, $\mathbf{w}^T f_\mu(\mathbf{0},0) = 0$, $\mathbf{w}^T[Df_\mu(\mathbf{0},0)\mathbf{v}] = 1 \neq 0$, $\mathbf{w}^T[D^2 f(\mathbf{0},0)(\mathbf{v},\mathbf{v})] = 0$ *y*

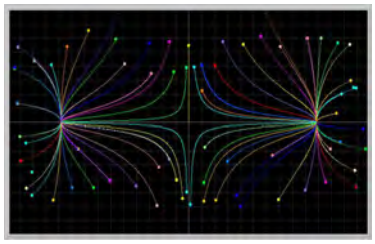
$$D^3 f(\mathbf{0},0)(\mathbf{v},\mathbf{v},\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix},$$

asi $\mathbf{w}^T[D^3 f(\mathbf{0},0)(\mathbf{v},\mathbf{v},\mathbf{v})] = -6 \neq 0$, *por lo tanto tenemos una bifurcación pitchfork en el punto*

de equilibrio $x_0 = 0$ *y* $\mu_0 = 0$.



$\mu \leq 0$



$\mu > 0$

2.3. Bifurcación Hopf

En las secciones previas, hemos considerado varios tipos de bifurcaciones que pueden ocurrir en un punto de equilibrio no hiperbólico x_0 de un sistema

$$\dot{x}=f(x,\mu) \tag{2.9}$$

dependiendo de un parámetro $\mu \in \mathbb{R}$ cuando la matriz $Df(\mathbf{x}_0, \mu_0)$ tiene un valor propio cero (simple). En esta sección consideraremos varios tipos de bifurcaciones que pueden ocurrir cuando la matriz $Df(x_0, \mu_0)$ tiene un par de valores propios imaginarios puros y ningún otro valor propio tiene parte real cero, por otra parte, para cada μ cerca de μ_0 habrá un único punto de equilibrio x_μ cerca de x_0, sin embargo, si los valores propios de $Df(x_\mu, \mu)$ cruzan el eje imaginario en $\mu = \mu_0$, entonces las dimensiones de las variedades estables e inestables de x_μ cambiaran y el retrato de fase local de (2.9) cambiara a medida que μ pase por el valor de bifurcación μ_0.

En el caso general, la bifurcación Hopf ocurre al crearse una órbita periódica mientras la estabilidad de un punto de equilibrio x_μ cambia. Ilustraremos esta idea con una representación estándar de un sistema que presenta una bifurcación Hopf.

Ejemplo 89 *(Una bifurcación Hopf). Consideremos el sistema planar*

$$\dot{x} = -y + x(\mu - x^2 - y^2)$$
$$\dot{y} = x + y(\mu - x^2 - y^2).$$

El único punto crítico está en el origen y

$$Df(0,\mu) = \begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix}.$$

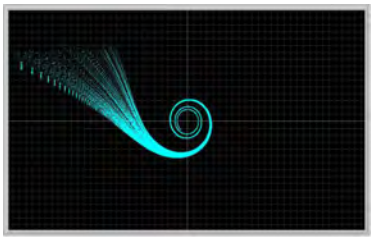
Ahora si $\mu > 0$, *el origen es un foco inestable y si* $\mu < 0$ *es un foco estable. Para* $\mu = 0$, $Df(0,0)$ *tiene un par de valores propios imaginarios puros, entonces por teorema* (53) *y teorema de Dulac el origen es, o bien un foco o un centro para el sistema no lineal con* $\mu = 0$. *Escribiendo el sistema en coordenadas polares tenemos*

$$\dot{r} = r(\mu - r^2)$$
$$\dot{\theta} = 1.$$

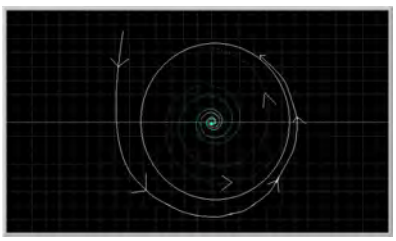
Vemos que en $\mu = 0$ *el origen es un foco estable y para* $\mu > 0$, *existe un ciclo limite*

$$\Gamma_\mu : \gamma_\mu(t) = \sqrt{\mu}(\cos t, \sin t)^T.$$

Tenemos que Γ_μ *es a una familia de ciclos limites para este sistema, cuyas curvas de nivel en el diagrama de bifurcación representan familias uniparametricas de los ciclos limites* Γ_μ, *que definen una superficie en* $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$. *La bifurcación de los ciclos limites desde el origen que ocurren en el valor de bifurcación* $\mu = 0$ *a medida que el origen cambia su estabilidad se le denomina bifurcación Hopf.*



$\mu \leq 0$



$\mu > 0$

Consideremos el sistema planar analítico

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\omega y + f(x,y) \\ \dot{y} &= \omega x + g(x,y), \end{aligned} \tag{2.10}$$

donde $\omega > 0$ y $f, g \in C^{k+1}, k \geq 3$, y denotamos el polinomio homogéneo de grado $i = 2, 3, ..., k+1$, en el polinomio de Maclaurin de f y g por f_i y g_i,respectivamente. Así

$$f(x,y) = \sum_{i=2}^{k} f_i(x,y) + o((x^2+y^2)^{\frac{k}{2}})$$

donde $f_i(x,y) = \sum_{j+l} a_{ijl} x^j y^l$ $(i = 2, 3, ..., k)$, y similarmente para g. Asumiremos momentáneamente que f y g en (2.10) son analíticas.

Notemos que cuando se aplica el *teorema (??)* en el caso en que m es par o impar se tiene que resolver el sistema de ecuaciones lineales, en el cual los coeficientes de F_i, f_i y g_i, $(i = 2, 3, ..., m-1)$, son cantidades conocidas y lo que se desconoce son los coeficientes de F_m en el caso impar y G_m en el caso par.

Así, por teorema (**??**), una función de Liapunov

$$F(x,y) = x^2 + y^2 + \sum_{i=3}^{m} F_i(x,y) \tag{2.11}$$

puede ser determinada, donde F_i es un polinomio homogéneo de grado i $(i = 3, 4, .., m)$ tal que

$$\dot{F}(x,y) = G_m(x^2+y^2)^{\frac{m}{2}} + o((x^2+y^2)^{\frac{m}{2}}),$$

donde $m \geq 4$ es un número par y $G_m \in \mathbb{R}$ está únicamente determinado.

Definición 90 *Sea*

$$M = \text{máx}\{m \geq 3 : \textit{existen } F_3, ..., F_{m-1} \textit{ tal que } \tilde{F}_j = 0 \ (j = 3, ..., m-1)\}$$

(donde $\tilde{F}_j$ es el polinomio homogéneo de grado j en la expansión de $\dot{F}$) si este máximo existe,

y $M = \infty$ si tal máximo no existe; M es llamado el índice del sistema (2.10); el número

$$G = \left\{ \begin{array}{c} 0 \ si \ M = \infty \\ G_m \ si \ M \in \mathbb{N} \end{array} \right\}$$

es llamado constante de Poincaré-Liapunov de (2.10).

Teorema 91 *Si el indice $M = \infty$, entonces el sistema (2.10) admite una integral primera analítica de la forma*

$$F(x,y) = x^2 + y^2 + \sum_{i=3}^{\infty} F_i(x,y),$$

el origen $(0,0)$ es estable en el sentido de Liapunov pero no asintóticamente estable, y toda solución en una vecindad suficientemente pequeña del origen son periódica; si el índice de $M \in \mathbb{N}$, entonces existe una función polinomial de Liapunov de la la forma (2.11) con $m = M$ tal que

$$\dot{F}(x,y) = G_m(x^2 + y^2)^{\frac{m}{2}} + \psi(x,y),$$

donde $G \neq 0$ y ψ es analítica cuya expansión comienza con términos de grado mayor igual a $M + 1$. En este caso si $G < 0$, entonces el origen es asintóticamente estable; si $G > 0$, es repulsor.

Ahora retornamos al caso general donde los sistemas no son analíticos, asumiendo que $f, g \in C^{k+1}$, $k \geq 3$ en (2.10).

Definición 92 *Sea h un entero entre 2 y k, decimos que el origen es h-asintóticamente estable (resp. h-inestable) si para $\xi, \eta \in C^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ arbitrarios tal que ambos ξ y η son $o((x^2 + y^2)^{\frac{h}{2}})$ para el sistema*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\omega y + \sum_{i=2}^{h} f_i(x,y) + \xi(x,y) \\ \dot{y} &= \omega x + \sum_{i=2}^{h} g_i(x,y) + \eta(x,y); \end{aligned} \tag{2.12}$$

el origen es asintóticamente estable (resp. inestable), y h es el menor entero entre 2 y k con esta propiedad.

Teorema 93 *(Negrini-Salvadori [1979]). Sea $2 \leq h \leq k$; el equilibrio $(x, y) = (0, 0)$ del sistema (2.10) es h-asintóticamente estable (resp. inestable) si y solo si el índice del sistema*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\omega y + \sum_{i=2}^{h} f_i(x, y) \\ \dot{y} &= \omega x + \sum_{i=2}^{h} g_i(x, y), \end{aligned} \tag{2.13}$$

es igual a $k + 1$ y la constante de Poincaré-Liapunov de (2.13) es negativa (resp. positiva).

Observación 94 *Si el origen es h-asintóticamente estable o h-inestable, entonces, este es un punto espiral débil de orden $\frac{(h-1)}{2}$.*

Como hemos visto una bifurcación de Hopf, es un tipo de bifurcación que presentan algunos sistemas, de tal manera que al variar el valor del parámetro, este sufre un cambio en la estabilidad del punto crítico en estudio, dando origen o desapareciendo una órbita periódica, la cual tiene una determinada estabilidad (dicha estabilidad es proporcionada por el signo del primer coeficiente de Lyapunov). El siguiente teorema nos garantiza la existencia de una bifurcación Hopf si se cumplen ciertas hipótesis. Este teorema será utilizado en el siguiente capítulo para demostrar la existencia de órbitas periódicas.

Teorema 95 *(teorema de Hopf* [1942]*). Consideremos el sistema*

$$\dot{x} = f(x, \mu)$$

donde $f \in C^{k+1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$, $k \geq 4$ y $f(0, \mu) = 0$; supongamos que para $|\mu|$ pequeño la matriz $Df(0, \mu)$ tiene un par de valores propios complejos conjugados $\alpha(\mu) \pm i\omega(\mu)$, $\omega(\mu) > 0$, $\alpha(0) = 0$, $\dot{\alpha}(0) > 0$ (la derivada de la parte real respecto al parámetro μ es positiva) y los otros $n-2$ valores propios tienen parte real negativa; entonces

i) *Existe un $\delta > 0$ y una función $\mu \in C^{k-2}((-\delta, \delta), \mathbb{R})$ tal que para $\varepsilon \in (-\delta, \delta)$ el sistema $\dot{x} = f(x, \mu(\varepsilon))$ tiene solución periódica $p(t, \varepsilon)$ con periodo $T(\varepsilon) > 0$, también $T \in C^{k-2}$, $\mu(0) = 0$, $T(0) = \frac{2\pi}{\omega(0)}$, $p(t, 0) = 0$ y la amplitud de esta solución periódica (la distancia media de la correspondiente órbita periódica desde el origen) es proporcional a $\sqrt{|\mu(\varepsilon)|}$;*

ii) *El origen* $(x, \mu) = (0, 0)$ *del espacio* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ *tiene una vecindad* U *contenida en* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ *que no contiene ninguna órbita periódica de (2.9).*

iii) *Si el origen* $x = 0$ *es un* 3*-asintóticamente estable (resp. inestable) del sistema* $\dot{x} = f(x, 0)$, *entonces* $\mu(\varepsilon) > 0$*(resp.* $\mu(\varepsilon) < 0$*) para* $\varepsilon \neq 0$, *y las soluciones periódicas* $p(t, \varepsilon)$ *son asintóticamente orbital estables (resp. inestable).*

Capítulo 3

UN MODELO DEPREDADOR-PRESA CON MEMORIA

En este capítulo presentaremos un modelo poblacional del tipo Depredador-Presa el cual generaliza el de Lotka-Volterra. Mostraremos que dicho modelo exhibe una bifurcación del tipo Hopf.

Un problema similar fue propuesto por Farkas en 1984 y resuelto por Farkas y Szabó en 1988. Aquella solución proponía un modelo Depredador-Presa que mejoraba el modelo clásico de Lotka-Volterra en dos aspectos. En primer lugar, tomaba en cuenta la competición intra-específica de la especie presa, y en segundo lugar, introducía un "término de memoria".

En esta tesis haremos una variación al problema resuelto por Farkas y Szabó generalizando la ecuación logística, la cual cumple con las características típicas de este tipo de función, como por ejemplo, ser positiva, se acerca a cero cuando la población se acerca a la capacidad de carga del habitad, etc.

3.1. Dinámica de la población

A finales del siglo XVII, Malthus (1798) publicó un ensayo sobre el principio de la población, acordando que la velocidad del crecimiento de una población es proporcional a la cantidad

de la población, Malthus propone que las poblaciones humanas crecen exponencialmente (es decir, se duplican con cada ciclo) mientras que la producción de alimentos crece a una razón aritmética (es decir, mediante la adición repetida de un incremento uniforme en cada intervalo de tiempo uniforme). De este modo, mientras era probable que en una serie de intervalos de veinticinco años la producción de alimentos aumentara en la progresión aritmética 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, etc., la población podía aumentar en la progresión geométrica 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, etc. Este argumento del aumento aritmético de los alimentos con un crecimiento geométrico simultáneo de la población humana predecía un futuro en el que las personas no tendrían recursos para sobrevivir. Para evitar tal catástrofe, Malthus sugirió con ahínco que se implementaran controles en el crecimiento demográfico. Llevando esto a ecuaciones diferenciales, denotemos el tamaño de la población en el tiempo t por $N(t)$. Esta función es considerada no negativa que varía continuamente en el tiempo, ahora bien, si tenemos en mente las bacterias, hierba o peces, entonces esta es aceptable pues podemos medirlos en miligramos o toneladas, pero si hablamos de leones o seres humanos, entonces esta sólo es una aproximación, y puede considerarse razonable solo si los números son grandes, así la población Malthusiana puede ser modelada por la ecuación

$$\dot{N}(t) = rN(t),$$

donde $r > 0$ es una constante llamada tasa de crecimiento intrínseco de la población. La ecuación también puede escribirse de la forma

$$\frac{\dot{N}(t)}{N(t)} = r,$$

donde la tasa de crecimiento per cápita (el número de descendientes producidos por uno de los miembros de la población en una unidad de tiempo) es la constante r. Las soluciones de la ecuación diferencial $\dot{N}(t) = rN(t)$ son $N(t) = N_0 e^{rt}$, donde $N_0 = N(0) > 0$ es el tamaño de la población en el momento inicial. Así, una población Malthusiana está creciendo exponencialmente. Observando los datos y midiendo cuánto tiempo es necesario para la duplicación de la población, podemos determinar la tasa de crecimiento intrínseco.

Dado que en ninguna parte de la naturaleza es posible tener un crecimiento exponencial ilimitado, entonces el modelo Malthusiano no es un modelo bueno o ideal para determinar la población de una especie en un largo plazo. En la primera mitad del siglo XIX, Verhulst modifico

el modelo Malthusiano argumentando que algunos recursos están disponibles sólo en cantidades limitadas, donde cada población crece en una fase saturada en la cual no puede crecer más. Cuando este principio se llevó a una ecuación y se asumió que la tasa de crecimiento per cápita no es constante, sino una función decreciente del tamaño de la población, más aún, la manera más sencilla de realizar este procedimiento es suponer que la tasa de crecimiento per cápita es una función lineal decreciente, así se obtiene el sistema

$$\frac{\dot{N}(t)}{N(t)} = r(1 - \frac{N(t)}{K}),$$

donde $K > 0$ es la capacidad de carga del medio ambiente. Multiplicando por $N(t)$ obtenemos la ecuación diferencial logística

$$\dot{N} = rN(1 - \frac{N}{K}),$$

de hecho, si $N > K$, entonces N es decreciente, pues su derivada respecto al tiempo es negativa y si $0 < N < K$, entonces es creciente.

3.1.1. Dos especies interactuando. Depredador y presa

En un habitad (en un lugar bien definido como un lago, bosque, una isla, un tubo de ensayo, etc.) donde varias especies viven juntas, uno puede seleccionar dos, las cuales interactúen obviando las demás y así tener una comprensión más profunda para entender su dinámica. En principio hay tres maneras de interactuar: *i*) Una de ellas puede servir de alimentos para la otra especie, en cuyo caso se habla de interacción entre el predador y la presa; *ii*) Las dos especies pueden competir por el mismo recurso, en este caso hablamos de un sistema competitivo; y *iii*) Pueden ayudarse mutuamente a existir, entonces se dicen que viven en simbiosis o que son cooperativos. Nosotros estudiaremos la interacción entre el predador y la presa cuyo comienzo nace con la obra de la dinámica de la población de Volterra (1931) y Lotka (1924). Un sistema donde las tasas de crecimiento percápita de las especies participantes son funciones lineales de la cantidad (densidad) de especies, es llamado un sistema de Lotka-Volterra. En nuestro caso, tenemos una especie de presa cuya cantidad en un tiempo t será denotada por $N(t)$ y la especie depredadora cuya cantidad en un tiempo t será denotada por $P(t)$. La tasa de crecimiento per

cápita de la presa es

$$\dot{N}/N = \varepsilon(1 - N/K) - \alpha P,$$

donde K, ε y α son constantes positivas, con K la capacidad de carga del habitad con respecto a la presa (si no hay depredación, P es cero, entonces la presa está siguiendo la dinámica de la ecuación logística), ε es la tasa de crecimiento intrínseco de la presa y α la tasa de depredación. La tasa de crecimiento per cápita del predador es

$$\dot{P}/P = -\gamma + \beta N - \delta P,$$

donde γ, β y δ son constantes positivas con γ la mortalidad intrínseca del depredador (si no hay alimentos presente, N es cero, y la cantidad de depredadores P es pequeña, entonces el predador esta muriendo por está tasa); sin embargo, si δ es distinto de cero, entonces la mortalidad del depredador es una función lineal creciente de la cantidad P debido, quizás, a otros recursos restrictivos para los cuales existen una competición dentro de las especies depredadoras; finalmente, β es la tasa de conversión, es decir, el depredador está disminuyendo la cantidad de presas en una unidad de tiempo por αNP y este aumenta la cantidad de depredadores en unidad de tiempo por $(\beta/\alpha)\alpha NP$ (normalmente $\beta/\alpha < 1$ debido a una perdida en el proceso de conversión de biomasa de la presa en biomasa del depredador). Multiplicando por N y P ambas ecuaciones (respectivamente), obtenemos el sistema $2D$ Lotka-Volterra depredador-presa de ecuaciones diferenciales.

$$\dot{N} = N\varepsilon(1 - N/K) - \alpha NP$$
$$\dot{P} = P(-\gamma + \beta N - \delta P).$$

Más realismo

En esta sección serán considerados modelos con mas realismo, tomando en cuenta el retardo, las estructuras por edades de la población y la dispersión espacial. En orden de tomar en cuenta esto, uno debe ir más allá aplicando retardo y ecuaciones diferenciales parciales, pero esto resulta más difícil de manejar que una ecuación diferencial ordinaria, así se plantea la siguiente pregunta; ¿hasta qué punto vale la pena ir en la aproximación de la realidad?, ya que

entre más complicado los modelos que usamos, menos conclusiones podemos deducir de ellos, mientras que a partir de modelos simples podemos sacar más conclusiones, sin embargo, ¿estas reflejan la realidad?. Ahora veremos como el retardo puede ser incorporado en el modelo de depredador-presa.

Retardo: El retardo juega un papel importante en la dinámica de la población, la descendencia aparece debiendo alcanzar la madurez antes de tomar parte en el proceso reproductivo y la criatura viviente debe comer para poder reproducirse, pero la descendencia solo aparece después de algún tiempo (el periodo gestacional en el caso de los mamíferos). Presentaremos un modelo depredador presa en el cual la tasa de crecimiento del dedpredador no depende únicamente de la cantidad de presas. Veremos como el efecto del retardo en el pasado influye en el comportamiento del sistema. Consideremos el sistema

$$\begin{aligned} \dot{N} &= N\varepsilon(1 - N/K) - \alpha NP \\ \dot{P} &= P(-\gamma + \beta N - \delta P), \end{aligned} \tag{3.1}$$

donde los parámetros ε, α, γ, $K > 0$ y $\delta = 0$, es decir, la mortalidad del depredador es constante. Tomando en cuenta que la tasa de crecimiento del depredador en el presente depende de la cantidad pasada de las presas, por lo tanto, introducimos una función G de densidad cuyo rol es ver las densidad en los momentos pasados y caracterizar su comportamiento probable en un intervalo de tiempo. La función G satisface:

$$G(s) \geq 0, \ \ s \in (0, \infty), \ \ \int_0^\infty G(s)ds = 1 \tag{3.2}$$

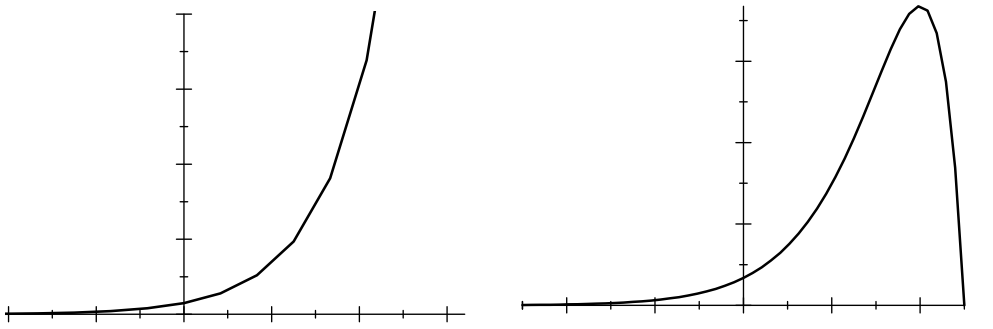
y $N(t)$ es reemplazado en la segunda ecuación del sistema (3.1) por su promedio ponderado sobre el pasado

$$\Theta(t) = \int_{-\infty}^{0} N(\tau)G(t - \tau)d\tau,$$

de esta manera llegamos al sistema de retardo

$$\begin{aligned} \dot{N}(t) &= \varepsilon N(t)\left((1 - N(t)/K - P(t)\alpha/\varepsilon\right) \\ \dot{P}(t) &= -\gamma P(t) + \beta P(t) \int_{-\infty}^{t} N(\tau)G(t - \tau)dt. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Aquí el retardo es continuo, lo que significa que la cantidad de presas tiene influencia en la tasa de crecimiento del depredador donde la densidad de la función G es distinta de cero, pues si $G = 0$ la cantidad de presas no influye en el crecimiento actual del depredador. Este sistema a sido estudiado por Farkas (1988), aplicando las función densidad $G(s) = a^2 s \exp(-as)$, $a > 0$, llamada "memoria con una joroba" y $G(s) = as \exp(-as)$, $a > 0$ llamada "*sistema con desvanecimiento exponencial de memoria*". La función densidad de "memoria con joroba" tiene la ventaja que especifica un momento en el pasado cuando la cantidad de alimentos es la más importante, desde el punto de vista del crecimiento actual del depredador.



$G(s) = ae^{-as}$ $\qquad$ $G(s) = a^2 s e^{-as}$

Así al sistema (3.3) lo llamaremos familia de Farkas.

3.2. Sistema predador presa

3.2.1. Una generalización de la Familia de Farkas

Recientemente, Rodrigo Castro M , Willy Sierra A, Eduardo Stange S, ver ([28]) Hicieron una generalización de la familia de Fakas con $G(s) = ae^{-as}$, en dicha generalización, la cual se acerca más a la realidad de las especies, ellos supusieron una función de crecimiento logístico de carácter general, esto motivado en el hecho que no todas las especies tienen un crecimiento logístico lineal, por ejemplo ver ([3]), además mostraron que a pesar de la generalización el sistema seguia teniendo una bifurcación del tipo Hopf y dieron condiciones para la estabilidad de las órbitas periódicas generadas.

Nuestro objetivo es hacer lo propio con la familia de Farkas (3.3) que involucra la función de

densidad de probabilidad $G(s) = a^2 s e^{-as}$ "sistema de memoria con joroba", acá generalizaremos la familia de Farkas, suponiendo que la ecuación logística $f(N/K) = (1 - N/K)$ no es necesariamente lineal, sino una función arbitraria positiva de clase C^3, decreciente cuando la población se acerca a la capacidad de carga del hábitat, es decir, $N = K$, es decir, estudiaremos el sistema

$$\begin{aligned} \dot{N}(t) &= \varepsilon N(t) f(N/K) - \alpha N(t) P(t) \\ \dot{P}(t) &= -\gamma P(t) + \beta P(t) \int_{-\infty}^{t} N(\tau) G(t-\tau) d\tau, \end{aligned} \tag{3.4}$$

donde

$$G(s) = a^2 s e^{-as},\ f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^+,\ f \in C^3(0,1),\ \text{y}\ f'(\gamma/K\beta) < 0.$$

Al igual que lo hicieron Farkas y Szabo, estableceremos condiciones para la existencia de puntos de equilibrios, órbitas periódicas, concretamente demostraremos la existencia de una bifurcación del tipo Hopf.

Para facilitar el análisis del sistema, definamos las funciones auxiliares

$$\begin{aligned} Q(t) &= a^2 \int_{-\infty}^{t} N(\tau)(t-\tau) e^{-a(t-\tau)} d\tau \quad \text{y} \\ R(t) &= a \int_{-\infty}^{t} N(\tau) e^{-a(t-\tau)} d\tau,\ t \geq 0. \end{aligned}$$

Determinaremos $\dot{Q}(t)$ y $\dot{R}(t)$ usando la regla de Leibniz:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{x} h(x,y)\, dy = h(x,x) + \int_{-\infty}^{x} \frac{\partial}{\partial x} h(x,y)\, dy,$$

para una función arbitraria h de clase C^1, así

$$\begin{aligned} \dot{Q}(t) &= a^2 N(t)(t-t) e^{-a(t-t)} + a^2 \int_{-\infty}^{t} N(\tau) \frac{\partial}{\partial t}(t-\tau) e^{-a(t-\tau)} d\tau \\ &= a^2 \Big(\int_{-\infty}^{t} N(\tau) e^{-a(t-\tau)} d\tau - a \int_{-\infty}^{t} N(\tau)(t-\tau) e^{-a(t-\tau)} d\tau \Big) \\ &= a(R(t) - Q(t)), \end{aligned}$$

de manjera análoga tenemos que $\dot{R}(t) = a(N(t) - R(t))$, luego el sistema anterior nos queda equivalente a

$$\begin{aligned} \dot{N} &= \varepsilon N f\left(N/K\right) - \alpha N P \\ \dot{P} &= -\gamma P + \beta P Q \\ \dot{Q} &= a\left(R - Q\right) \\ \dot{R} &= a(N - R),\ t \geq 0. \end{aligned} \tag{3.5}$$

La equivalencia de los sistemas (3.4) y (3.5) sobre $\mathbb{R}^+$ debe entenderse en el siguiente sentido. Si denotamos $C^0(-\infty; 0]$ al conjunto de funciones real-valuadas que son continuas y acotadas en $(-\infty; 0]$, y $(N, P) : [0, \infty) \to \mathbb{R}^2$ es la solución de (3.4), que corresponde a la "función inicial" $\tilde{N}\ \epsilon\ C^0(-\infty; 0]$ y al valor inicial $P_0 = P(0)$ (i.e. sobre $(-\infty, 0)$ es considerado igual a $\tilde{N}$); entonces $(N, P, Q, R) : [0, \infty) \to \mathbb{R}^4$ es la solución de (3.5), que satisface la condición inicial $N(0) = \tilde{N}(0)$, $P(0) = P_0$,

$$\begin{aligned} Q\left(0\right) = Q_0 &= a^2 \int_{-\infty}^{0} \tilde{N}\left(\tau\right)\left(t - \tau\right) e^{-a(t-\tau)} d\tau \text{ y} \\ R(0) = R_0 &= a \int_{-\infty}^{0} \tilde{N}\left(\tau\right) e^{-a(t-\tau)} d\tau, \end{aligned}$$

claramente, si los valores iniciales $N(0)$, $P(0)$, $Q\left(0\right)$ y $R(0)$ para (3.5) estan prescritos, por lo tanto, estos no determinan la función inicial $\tilde{N}$ correspondiente a la solución de (3.4).

Introduciendo los cambios de variables $N = Kn$, $P = Kp$, $Q = Kq$, $R = Kr$ y $t = \frac{s}{\varepsilon}$, el sistema (3.5) nos queda como

$$\begin{aligned} \dot{n} &= n f\left(n\right) - \tfrac{K\alpha}{\varepsilon} n p \\ \dot{p} &= -\tfrac{\gamma}{\varepsilon} p + \tfrac{K\beta}{\varepsilon} p q \\ \dot{q} &= \tfrac{a}{\varepsilon}\left(r - q\right) \\ \dot{r} &= \tfrac{a}{\varepsilon}(n - r). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Ahora hallemos los puntos de equilibrio de (3.6), para ello debemos de resolver el sistema:

$$\begin{aligned} nf(n) - \frac{K\alpha}{\varepsilon}np &= 0 \\ -\frac{\gamma}{\varepsilon}p + \frac{K\beta}{\varepsilon}pq &= 0 \\ \frac{a}{\varepsilon}(r-q) &= 0 \\ \frac{a}{\varepsilon}(n-r) &= 0, \end{aligned}$$

una de sus soluciones es la trivial

$$n = 0,\ p = 0,\ q = 0 \text{ y } r = 0.$$

Si $n \neq 0$ y $p = 0$ entonces $f(n) = 0$, así una nueva solución del sistemas es

$$n = n_0,\ p = 0,\ q = n_0,\ r = n_0, \text{ donde } n_0 \text{ es raíz de la ecuación } f(n).$$

Si $n \neq 0$ y $p \neq 0$ es fácil ver que

$$n = \frac{\gamma}{K\beta},\ p = f(\frac{\gamma}{K\beta})\varepsilon/K\alpha,\ q = \frac{\gamma}{K\beta} \text{ y } r = \frac{\gamma}{K\beta},$$

así tenemos que los puntos de equilibrios del sistema son $\lambda_0 = (0,0,0,0)$, $\lambda_1 = (n_0, 0, n_0, n_0)$ donde $f(n_0) = 0$ y $\lambda_2 = (\frac{\gamma}{K\beta}, f(\frac{\gamma}{K\beta})\varepsilon/K\alpha, \frac{\gamma}{K\beta}, \frac{\gamma}{K\beta})$. La matriz de la linealización de (3.6) es

$$DF(n,p,q,r) = \begin{pmatrix} f(n) + nf'(n) - K\alpha p/\varepsilon & -K\alpha n/\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma/\varepsilon + K\beta q/\varepsilon & K\beta p/\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & -a/\varepsilon & a/\varepsilon \\ a/\varepsilon & 0 & 0 & -a/\varepsilon \end{pmatrix}.$$

Ahora, en el equilibrio λ_0 tenemos

$$DF(0,0,0,0) = \begin{pmatrix} f(0) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a & a \\ a & 0 & 0 & -a \end{pmatrix},$$

cuyos valores propios son $f(0)$, $-\gamma$ y $-a$ (de multiplicidad dos), por lo tanto el sistema en este punto de equilibrio es inestable, ya que $f(0) > 0$. En el punto λ_1

$$DF(n_0,0,n_0,n_0) = \begin{pmatrix} n_0 f'(n_0) & -K\alpha n_0/\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & (-\gamma + K\beta n_0)/\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a/\varepsilon & a/\varepsilon \\ a/\varepsilon & 0 & 0 & -a/\varepsilon \end{pmatrix},$$

es fácil ver que sus valores propios son $n_0 f'(n_0)$, $(-\gamma + K\beta n_0)/\varepsilon$ y $-a/\varepsilon$ (de multiplicidad dos), luego este punto de equilibrio es asintotícamente estable si $f'(n_0) < 0$ y $n_0 < \frac{\gamma}{\beta K}$, e inestable si $f'(n_0) > 0$ o $n_0 > \frac{\gamma}{\beta K}$.

Ahora analicemos el tercer y último punto de equilibrio λ_2 del sistema (3.6), para simplificar los cálculos hagamos el cambio de variable $b = \frac{\gamma}{\beta K}$, por lo que el punto de equilibrio λ_2 es reescrito como

$$\lambda_2 = (b, f(b)\varepsilon/K\alpha, b, b)$$

y el sistema linealizado en este punto es

$$DF(b, \frac{f(b)}{K\alpha}\varepsilon, b, b) = \begin{pmatrix} bf'(b) & -K\alpha b/\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta f(b)/\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{a}{\varepsilon} & \frac{a}{\varepsilon} \\ \frac{a}{\varepsilon} & 0 & 0 & -\frac{a}{\varepsilon} \end{pmatrix},$$

ya que

$$\begin{pmatrix} f(n)+nf'(n)-K\alpha p/\varepsilon & -K\alpha n/\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma/\varepsilon+K\beta q/\varepsilon & K\beta p/\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & -a/\varepsilon & a/\varepsilon \\ a/\varepsilon & 0 & 0 & -a/\varepsilon \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} f(b)+bf'(b)-\left(f(b)\varepsilon/K\alpha\right)K\alpha/\varepsilon & -K\alpha n/\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma/\varepsilon+\left(\frac{\gamma}{\beta K}\right)\frac{K\beta}{\varepsilon} & \left(\frac{f(b)}{K\alpha}\varepsilon\right)K\beta/\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & -a/\varepsilon & a/\varepsilon \\ a/\varepsilon & 0 & 0 & -a/\varepsilon \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} bf'(b) & -K\alpha b/\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta f(b)/\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{a}{\varepsilon} & \frac{a}{\varepsilon} \\ \frac{a}{\varepsilon} & 0 & 0 & -\frac{a}{\varepsilon} \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico de $A = DF(b, \frac{f(b)}{K\alpha}\varepsilon, b, b)$ es

$$\begin{aligned} P(X) &= Det(A - XI_4) \\ &= \begin{vmatrix} bf'(b)-X & -K\alpha b/\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & -X & \beta f(b)/\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{a}{\varepsilon}-X & \frac{a}{\varepsilon} \\ \frac{a}{\varepsilon} & 0 & 0 & -\frac{a}{\varepsilon}-X \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{\varepsilon^3}\left(X^4\varepsilon^3 + 2X^3a\varepsilon^2 - bf'X^3\varepsilon^3 + X^2a^2\varepsilon - 2bf'X^2a\varepsilon^2 - bf'Xa^2\varepsilon + Kbf\beta a^2\right) \\ &= X^4 + \left(2\frac{a}{\varepsilon} - bf'(b)\right)X^3 + \frac{a}{\varepsilon^2}\left(a - 2bf'(b)\varepsilon\right)X^2 - a^2b\frac{f'(b)}{\varepsilon^2}X + Ka^2bf(b)\frac{\beta}{\varepsilon^3}, \end{aligned}$$

es decir,

$$P(X) = X^4 + \left(2\frac{a}{\varepsilon} - bf'(b)\right)X^3 + \frac{a}{\varepsilon^2}\left(a - 2bf'(b)\varepsilon\right)X^2 - a^2b\frac{f'(b)}{\varepsilon^2}X + Ka^2bf(b)\frac{\beta}{\varepsilon^3}, \quad (3.7)$$

Puesto que $f'(b) < 0$, cada coeficiente del polinomio es positivo y su matriz de Hurwitz (ver

43) es

$$H_p = \begin{pmatrix} -a^2 b\frac{f'(b)}{\varepsilon^2} & Ka^2 bf(b)\frac{\beta}{\varepsilon^3} & 0 & 0 \\ 2\frac{a}{\varepsilon} - bf'(b) & \frac{a}{\varepsilon^2}\left(a - 2bf'(b)\varepsilon\right) & -a^2 b\frac{f'(b)}{\varepsilon^2} & Ka^2 bf(b)\frac{\beta}{\varepsilon^3} \\ 0 & 1 & 2\frac{a}{\varepsilon} - bf'(b) & \frac{a}{\varepsilon^2}\left(a - 2bf'(b)\varepsilon\right) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

calculemos los determinantes de los tres menores principales, claramente $\Delta_1 = -a^2 b\frac{f'(b)}{\varepsilon^2} > 0$,

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \begin{vmatrix} -a^2 b\frac{f'(b)}{\varepsilon^2} & Ka^2 bf(b)\frac{\beta}{\varepsilon^3} \\ 2\frac{a}{\varepsilon} - bf'(b) & \frac{a}{\varepsilon^2}\left(a - 2bf'(b)\varepsilon\right) \end{vmatrix} \\ &= a^3 b\left(-af'(b) - 2Kf(b)\beta\right) + a^2 b^2 f'(b)\left(2af'(b) + Kf(b)\beta\right)\varepsilon \end{aligned}$$

y haciendo los cálculos, es fácil ver que

$$\begin{aligned} &\Delta_3 = \Delta_4 = -\tfrac{1}{\varepsilon^5}\left(2a^5 bf'(b) - 4a^4 b^2 (f'(b))^2\varepsilon + 4Kf(b)\beta a^4 b + 2a^3 b^3 (f'(b))^3\varepsilon^2\right) \\ &-\tfrac{1}{\varepsilon^5}\left(-4b^2 Kf(b)\beta a^3 f'(b)\varepsilon + Kf(b)\beta a^2 b^3 (f'(b))^2\varepsilon^2\right), \end{aligned}$$

por criterio de Routh-Hurwitz, el sistema es asintotícamente estable, si haciendo alguna simplificaciones elementales el signo de Δ_4 es igual al signo del polinomio $J(\varepsilon)$ dado por

$$\begin{aligned} J(\varepsilon) &= b^2 (f'(b))^2\left(-2af'(b) - Kf(b)\beta\right)\varepsilon^2 + 4ab\left(a(f'(b))^2 + Kf(b)f'(b)\beta\right)\varepsilon \\ &\quad + 2a^2\left(-af'(b) - 2Kf(b)\beta\right), \end{aligned} \tag{3.8}$$

para hacer el estudio de la estabilidad del polinomio analicemos el signo de $J(\varepsilon)$ y Δ_2 según los siguientes casos:

i) Si $-2af'(b) - Kf(b)\beta < 0$.

En este caso $a < -Kf(b)\beta/2f'(b)$, luego $a(f'(b))^2 + Kf(b)f'(b)\beta < 0$, pues, $a < -Kf(b)\beta/f'(b)$ y $a < -2K\beta f(b)/f'(b)$, así $-af'(b) - 2Kf(b)\beta < 0$, en consecuencia $J(\varepsilon)$, $\Delta_2 < 0$, por lo tanto el equilibrio $(b, f(b)\varepsilon/K\alpha, b, b)$ es inestable.

ii) Si $-af'(b) - 2Kf(b)\beta > 0$.

En este otro caso tenemos que $a > -2Kf(b)\beta/f'(b)$, $a > -Kf(b)\beta/f'(b)$ y $a > -Kf(b)\beta/2f'(b)$, así tenemos que $-af'(b) - 2Kf(b)\beta > 0$, $a(f'(b))^2 + Kf(b)f'(b)\beta > 0$ y $-2af'(b) - Kf(b)\beta > 0$ respectivamente, entonces $J(\varepsilon)$, $\Delta_2 > 0$, es decir, el punto de equilibrio $(b, f(b)\varepsilon/K\alpha, b, b)$ es asintotícamente estable.

iii) Finalmente, si

$$-Kf(b)\beta/2f'(b) < a < -2Kf(b)\beta/f'(b).$$

Claramente la el signo de $J(\varepsilon)$ se mantiene positivo para un ε grande y no para uno pequeño, ya que los dos primeros coeficientes de $J(\varepsilon)$ son positivos y el termino independiente es negativo, pues $-Kf(b)\beta/2f'(b) < a$ implica que $-2af'(b) - Kf(b)\beta > 0$ y $a(f'(b))^2 + Kf(b)f'(b)\beta > 0$ y además como $-Kf(b)\beta/2f'(b) < a < -2Kf(b)\beta/f'(b)$ se obtiene que $-af'(b) - 2Kf(b)\beta < 0$.

Por lo anterior la gráfica de $J(\varepsilon)$ debe de cruzar el eje positivo ε pasando de ser negativo a positivo para algún $\varepsilon_0 > 0$, por lo que $J(\varepsilon)$ tiene solo una raíz positiva ε_0, de hecho

$$\varepsilon_0 = \frac{\left(2a^2(f'(b))^2 + 2Kaf(b)f'(b)\beta - \sqrt{2}\Psi\right)}{b(f'(b))^2\left(2af'(b) + Kf(b)\beta\right)} > 0,$$

ya que $2af'(b) + Kf(b)\beta < 0$ y $2a^2(f'(b))^2 + 2Kaff'(b)\beta < 0$, con $\Psi = \sqrt{-Ka^3f(b)(f'(b))^3\beta}$, de esta manera el equilibrio $(b, f(b)\varepsilon/K\alpha, b, b)$ es asintotícamente estable para $\varepsilon > \varepsilon_0$ e inestable para $\varepsilon_0 > \varepsilon > 0$. Así ε puede ser considerado como un parámetro de bifurcación. Veamos qué tipo de bifurcación es obtenida si ε decrece cruzando el valor crítico ε_0. El polinomio característico (3.7) en $\varepsilon = \varepsilon_0$ es:

$$P(X) = X^4 + \left(b\frac{a^2(f'(b))^2 + \sqrt{2}\Psi}{a(af'(b) + 2Kf(b)\beta)}\right)X^3 + \left(-ab^2(f'(b))^3\frac{(2af'(b) + Kf(b)\beta)\left(2a^2(f'(b))^2 - 2\sqrt{2}\Psi + 3Kaf(b)f'(b)\beta\right)}{\left(2a^2(f'(b))^2 - \sqrt{2}\Psi + 2Kaf(b)f'(b)\beta\right)^2}\right)X^2$$
$$- \left(\frac{\left(a^2b^3(f'(b))^5\right)(2af'(b) + Kf(b)\beta)^2}{\left(2a^2(f'(b))^2 - \sqrt{2}\Psi + 2Kaf(b)f'(b)\beta\right)^2}\right)X + \frac{\left(Ka^2b^4f(f')^6\beta\right)(2af' + Kf\beta)^3}{\left(2a^2(f'(b))^2 - \sqrt{2}\Psi + 2Kaf(b)f'(b)\beta\right)^3},$$

él se puede factorizar de la forma: $(X^2+\omega^2)(X^2+A_1X+A_0)$ con

$$A_0 = -Kb^2f(b)\beta\frac{2a^3(f'(b))^3+3\sqrt{2}af'(b)\Psi+2\sqrt{2}Kf(b)\beta\Psi}{2a^2(af'+2Kf\beta)^2} > 0,$$
$$A_1 = b\frac{a^2(f'(b))^2+\sqrt{2}\Psi}{a(af'(b)+2Kf(b)\beta)} > 0,$$
$$\omega^2 = \frac{\left(-b^2(f'(b))^2(2af'(b)+Kf(b)\beta)^2\right)\left(a^2(f'(b))^2-\sqrt{2}\Psi\right)}{\left(2a^2(f'(b))^2-\sqrt{2}\Psi+2Kaf(b)f'(b)\beta\right)^2} > 0,$$

ya que

$$A_0\omega^2 = \frac{Ka^2b^4f(b)(f'(b))^6\beta(2af'(b)+Kf(b)\beta)^3}{\left(2a^2(f'(b))^2-\sqrt{2}\Psi+2Kaf(b)f'(b)\beta\right)^3}$$
$$A_1\omega^2 = -a^2b^3(f'(b))^5\frac{(2af'(b)+Kf(b)\beta)^2}{\left(2a^2(f'(b))^2-\sqrt{2}\Psi+2Kaf(b)f'(b)\beta\right)^2}$$
$$\left(A_0+\omega^2\right) = -ab^2(f'(b))^3\frac{(2af'(b)+Kf(b)\beta)\left(2a^2(f'(b))^2-2\sqrt{2}\Psi+3Kaf(b)f'(b)\beta\right)}{\left(2a^2(f'(b))^2-\sqrt{2}\Psi+2Kaf(b)f'(b)\beta\right)^2}.$$

Así, en $\varepsilon=\varepsilon_0$ el polinomio característico tiene un par de valores propios imaginarios

$$X(\varepsilon_0) = i\omega \text{ y } \bar{X}(\varepsilon_0) = -i\omega, \text{ con}$$
$$\omega = \sqrt{\frac{-b^2(f'(b))^2\left(2af'(b)+Kf(b)\beta\right)^2\left(a^2(f'(b))^2-\sqrt{2}\Psi\right)}{\left(2a^2(f'(b))^2-\sqrt{2}\Psi+2Kaf(b)f'(b)\beta\right)^2}} > 0,$$

note que $\omega>0$ pues $a^2(f'(b))^2-\sqrt{2}\Psi<0$, además los dos valores propios restantes tienes parte real negativa.

Consideremos la función

$$F(X,\varepsilon) = X^4+\left(2\frac{a}{\varepsilon}-bf'(b)\right)X^3+\frac{a}{\varepsilon^2}\left(a-2bf'(b)\varepsilon\right)X^2-a^2b\frac{f'(b)}{\varepsilon^2}X+Ka^2bf(b)\frac{\beta}{\varepsilon^3},$$

notemos que $F(X(\varepsilon_0),\varepsilon_0)=F(i\omega,\varepsilon_0)=0$, pues $i\omega$ es una raíz simple del polinomio $F(X,\varepsilon_0)$, por otra parte tenemos que

$$F'_X(X,\varepsilon) = 4X^3+\left(6\frac{a}{\varepsilon}-3bf'(b)\right)X^2+\frac{2a}{\varepsilon^2}\left(a-2bf'(b)\varepsilon\right)X-a^2b\frac{f'(b)}{\varepsilon^2},$$

es continua y

$$\begin{aligned} F'_X(i\omega,\varepsilon) &= 4\,(i\omega)^3 + \left(6\frac{a}{\varepsilon} - 3bf'(b)\right)(i\omega)^2 + \frac{2a}{\varepsilon^2}\left(a - 2bf'(b)\varepsilon\right)(i\omega) - a^2b\frac{f'(b)}{\varepsilon^2} \\ &= \left(\left(3bf'(b) - 6\frac{a}{\varepsilon}\right)\omega^2 - a^2b\frac{f'(b)}{\varepsilon^2}\right) + \left(\frac{2a}{\varepsilon^2}\left(a - 2bf'(b)\varepsilon\right)(\omega) - 4\omega^3\right)i. \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} &F'_X(i\omega,\varepsilon_0) = -\frac{\omega^2\left(12a^3b(f'(b))^4+18Ka^2bf(b)(f'(b))^3\beta+6\sqrt{2}Kbf(b)f'(b)\beta\Psi\right)}{4a^3(f')^3-4\sqrt{2}af'\Psi+6Ka^2f(f')^2\beta+4K^2af^2f'\beta^2-4\sqrt{2}Kf\beta\Psi} \\ &+\frac{K^2ab^3f^2(b)(f'(b))^4\beta^2+4Ka^2b^3f(b)(f'(b))^5\beta+4a^3b^3(f'(b))^6}{4a^3(f')^3-4\sqrt{2}af'\Psi+6Ka^2f(f')^2\beta+4K^2af^2f'\beta^2-4\sqrt{2}Kf\beta\Psi} \\ &+\left(\frac{2ab^2(f'(b))^3(2af'(b)+Kf(b)\beta)\left(2a^2(f'(b))^2-4a^2(f'(b))^2\omega+2\sqrt{2}\omega\Psi+Kaf(b)f'(b)\beta-4Kaf(b)f'(b)\beta\omega\right)}{\left(2a^2(f'(b))^2-\sqrt{2}\Psi+2Kaf(b)f'(b)\beta\right)^2} - 4\omega^3\right)i \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

Así bajo las hipótesis del teorema de la función implícita, existe una única función X definida en intervalo $(\varepsilon_0-\delta,\varepsilon_0+\delta)$, $\delta>0$ la cual cumple que $F(X(\varepsilon),\varepsilon)\equiv 0$ y $X(\varepsilon_0)=i\omega$, es más:

$$\frac{d(X(\varepsilon_0))}{d\varepsilon} = -\frac{F'_\varepsilon(\omega i,\varepsilon_0)}{F'_X(\omega i,\varepsilon_0)}.$$

Ahora, para verificar las hipótesis del teorema de Hopf. Demostraremos que

$$\frac{d\,\mathrm{Re}\,X(\varepsilon_0)}{d\varepsilon} > 0.$$

Note que

$$F'_\varepsilon(X,\varepsilon) = -\frac{a}{\varepsilon^4}\left(\left(2X^3 - 2X^2bf'(b)\right)\varepsilon^2 + \left(2X^2a - 2Xabf'(b)\right)\varepsilon + 3Kabf(b)\beta\right),$$

así

$$\begin{aligned} F'_\varepsilon(i\omega,\varepsilon) &= -\frac{a}{\varepsilon^4}\left(\left(2\,(i\omega)^3 - 2\,(i\omega)^2\,bf'(b)\right)\varepsilon^2 + \left(2\,(i\omega)^2\,a - 2i\omega abf'(b)\right)\varepsilon + 3Kabf(b)\beta\right) \\ &= 2i\frac{a}{\varepsilon^2}\omega^3 + 2\frac{a^2}{\varepsilon^3}\omega^2 - 2ab\frac{f'(b)}{\varepsilon^2}\omega^2 + 2ia^2b\frac{f'(b)}{\varepsilon^3}\omega - 3Ka^2bf(b)\frac{\beta}{\varepsilon^4} \\ &= \left(\left(2a^2\varepsilon - 2bf'(b)a\varepsilon^2\right)\omega^2 - 3Kbf(b)\beta a^2\right)\frac{1}{\varepsilon^4} + \frac{1}{\varepsilon^4}\left(2bf'(b)a^2\varepsilon\omega + 2a\varepsilon^2\omega^3\right)i, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}\frac{dX(\varepsilon_0)}{d\varepsilon} &= -\frac{F\prime_{\varepsilon}(\omega i,\varepsilon_0)}{F\prime_{X}(\omega i,\varepsilon_0)} \\ &= \frac{-\left(\left(2a^2\varepsilon_0-2bf'(b)a\varepsilon_0^2\right)\omega^2-3Kbf(b)\beta a^2\right)\frac{1}{\varepsilon_0^4}+\frac{1}{\varepsilon_0^4}\left(2bf'(b)a^2\varepsilon_0\omega+2a\varepsilon_0^2\omega^3\right)i}{\left(3bf'(b)-6\frac{a}{\varepsilon_0}\right)\omega^2-a^2b\frac{f'(b)}{\varepsilon_0^2}+\left(\frac{2a}{\varepsilon_0^2}\left(a-2bf'(b)\varepsilon_0\right)(\omega)-4\omega^3\right)i}.\end{aligned} \tag{3.9}$$

Sea

$$\begin{aligned}\tilde{a} &= \left(\left(2a^2\varepsilon_0-2bf'(b)a\varepsilon_0^2\right)\omega^2-3Kbf(b)\beta a^2\right)\frac{1}{\varepsilon_0^4} \\ \tilde{b} &= \frac{1}{\varepsilon_0^4}\left(2bf'(b)a^2\varepsilon_0\omega+2a\varepsilon_0^2\omega^3\right) \\ \tilde{c} &= \left(\left(3bf'(b)-6\frac{a}{\varepsilon_0}\right)\omega^2-a^2b\frac{f'(b)}{\varepsilon_0^2}\right) \\ \tilde{d} &= \left(\frac{2a}{\varepsilon_0^2}\left(a-2bf'(b)\varepsilon_0\right)(\omega)-4\omega^3\right),\end{aligned}$$

multiplicando (3.9) por su conjugado, haremos un estudio del signo de la parte real donde tendremos en cuenta que:

$$\begin{aligned}\omega^2\varepsilon &= \frac{1}{2af'(b)}\left(\sqrt{2}b\Psi-2a^2b(f'(b))^2\right) \\ \omega^2\varepsilon^2 &= \left(-\frac{1}{(f'(b))^2}\left(a^2(f'(b))^2-\sqrt{2}\Psi\right)\right).\end{aligned}$$

En efecto, como

$$\frac{d\,\mathrm{Re}\,X(\varepsilon_0)}{d\varepsilon}=\frac{\tilde{a}\tilde{c}+\tilde{b}\tilde{d}}{\tilde{c}^2+\tilde{d}^2},$$

el signo de $\frac{d\,\mathrm{Re}\,X(\varepsilon_0)}{d\varepsilon}$ es el signo de $\tilde{a}\tilde{c}+\tilde{b}\tilde{d}$, analicémoslo:

$$\begin{aligned}\tilde{a}\tilde{c} &= \left(\left(2a^2\varepsilon_0-2bf'(b)a\varepsilon_0^2\right)\omega^2-3Kbf(b)\beta a^2\right)\frac{1}{\varepsilon_0^4}\left(\left(3bf'(b)-6\frac{a}{\varepsilon_0}\right)\omega^2-a^2b\frac{f'(b)}{\varepsilon_0^2}\right) \\ &= \frac{a}{\varepsilon_0^6}\left(bf'(b)a^2+6a\varepsilon_0\omega^2-3bf'(b)\varepsilon_0^2\omega^2\right)\left(2bf'(b)\varepsilon_0^2\omega^2-2a\varepsilon_0\omega^2+3Kabf(b)\beta\right)\end{aligned}$$

y como

$$\begin{aligned}
&\tfrac{a}{\varepsilon_0^6}\left(bf'(b)a^2+6a\varepsilon_0\omega^2-3bf'(b)\varepsilon_0^2\omega^2\right)=\tfrac{a}{\varepsilon_0^6}\left(bf'(b)a^2+\tfrac{6a\left(\sqrt{2}b\Psi-2a^2b(f'(b))^2\right)}{2af'(b)}\right)\\
&-\tfrac{a}{\varepsilon_0^6}\tfrac{3bf'(b)\left(-a^2(f'(b))^2+\Psi\right)}{(f'(b))^2}\\
&=-2a^2bf'(b)\tfrac{a}{\varepsilon_0^6}>0
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
&2bf'(b)\varepsilon_0^2\omega^2-2a\varepsilon_0\omega^2+3Kabf(b)\beta=-\tfrac{2bf'(b)\left(a^2(f'(b))^2-\sqrt{2}\Psi\right)}{(f'(b))^2}-\tfrac{2a\left(\sqrt{2}b\Psi-2a^2b(f'(b))^2\right)}{2af'(b)}\\
&+3Kabf(b)\beta\\
&=\tfrac{b}{f'(b)}\left(\sqrt{2}\Psi+3Kaf(b)f'(b)\beta\right)<0
\end{aligned}$$

ya que $a<\frac{-2Kf(b)\beta}{f'(b)}$, por lo tanto

$$\tilde{a}\tilde{c}=\left(-2a^2bf'(b)\frac{a}{\varepsilon_0^6}\right)\frac{b}{f'(b)}\left(\sqrt{2}\Psi+3Kaf(b)f'(b)\beta\right)<0.$$

Por otra parte

$$\begin{aligned}
\tilde{b}\tilde{d}&=\tfrac{1}{\varepsilon_0^4}\left(2bf'(b)a^2\varepsilon_0\omega+2a\varepsilon_0^2\omega^3\right)\left(\tfrac{2a}{\varepsilon_0^2}\left(a-2bf'(b)\varepsilon_0\right)(\omega)-4\omega^3\right)\\
&=-\tfrac{2}{\varepsilon_0^6}2a\varepsilon\omega^2\left(\varepsilon\omega^2+abf'(b)\right)\left(-a^2+2bf'(b)a\varepsilon_0+2\varepsilon_0^2\omega^2\right),
\end{aligned}\tag{3.10}$$

y

$$\begin{aligned}
\varepsilon_0\omega^2+abf'(b)&=\frac{1}{2af'(b)}\left(\sqrt{2}b\Psi-2a^2b(f'(b))^2\right)+abf'(b)\\
&=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{a}\frac{b}{f'(b)}\Psi<0,
\end{aligned}$$

así

$$-\frac{2}{\varepsilon_0^6}\omega\left(2bf'(b)a^2\varepsilon_0\omega+2a\varepsilon_0^2\omega^3\right)>0,$$

analicemos el segundo termino de (3.10)

$$\begin{aligned}-a^2+2bf'(b)a\varepsilon_0+2\varepsilon_0^2\omega^2 &= -a^2+2\varepsilon_0\varepsilon_0\omega^2+abf'(b)\\ &= -a^2+\frac{2\varepsilon_0}{2af'(b)}\left(\sqrt{2}b\Psi-4\varepsilon_0a^2b(f'(b))^2\right)+abf'(b)\\ &= -a^2+2\varepsilon_0\left(\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{a}\frac{b}{f'(b)}\Psi\right)<0,\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\tilde{b}\tilde{d}<0.$$

En conclusión

$$\frac{\tilde{a}\tilde{c}+\tilde{b}\tilde{d}}{\tilde{c}^2+\tilde{d}^2}<0$$

y

$$\frac{d\,\mathrm{Re}\,X(\varepsilon_0)}{d\varepsilon}=\mathrm{Re}\left(-\frac{F'_\varepsilon(\omega i,\varepsilon_0)}{F'_X(\omega i,\varepsilon_0)}\right)>0.$$

Ahora, si el parámetro de bifurcación

$$\mu=\varepsilon-\varepsilon_0 \text{ o bien } \varepsilon(\mu)=\mu+\varepsilon_0,$$

es introducido en el sistema (3.6), se tiene que

$$\varepsilon=\varepsilon_0 \text{ si y sólo si } \mu=0,\ \varepsilon>\varepsilon_0 \text{ si y sólo si } \mu>0 \text{ y } \varepsilon<\varepsilon_0 \text{ si y sólo si } \mu<0.$$

Así

$$\frac{d\,\mathrm{Re}(X(\varepsilon(\mu)))}{d\mu}=\frac{d\,\mathrm{Re}(X(\varepsilon))}{d\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{d\mu}$$

y por lo tanto

$$\left.\frac{d\,\mathrm{Re}(X(\varepsilon(\mu)))}{d\mu}\right|_{\mu=0}>0,$$

lo que verifica las hipótesis del teorema de *Andronov-Hopf* , luego el sistema (3.6) presenta una única órbita periódica en una vecindad del punto de equilibrio $(b, f(b)\varepsilon/K\alpha, b, b)$ cuando $a\in(\varepsilon_0-\delta,\varepsilon_0+\delta)$.

Conclusión

De acuerdo a lo planteado, al generalizar la función logística del sistema propuesto por Farkas, nos dimos cuenta que se mantiene la misma cantidad de puntos de equilibrios, presentando inestabilidad en $\lambda_0 = (0, 0, 0, 0)$, estabilidad asintótica en $\lambda_1 = (n_0, 0, n_0, n_0)$ (cumpliéndose ciertas condiciones) y por último, en el punto $\lambda_2 = (\frac{\gamma}{K\beta}, f(\frac{\gamma}{K\beta})\varepsilon/K\alpha, \frac{\gamma}{K\beta}, \frac{\gamma}{K\beta})$, hicimos un estudio más detallado, donde utilizamos el criterio de Routh-Hurwitz analizando distintos casos, concluyendo que el sistema en λ_2 presenta una única curva periódica, es más, al cumplir con las hipótesis del teorema de Hopf, corroboramos que en este punto existe una bifurcación de este tipo, como sospechábamos desde el principio.

Un trabajo pendiente es analizar su orientación. Para esto se pueden utilizar distintos métodos, entre ellos están los coeficientes de Liapunov. Al concretar esto será interesante ver su aplicación en la biología ya que a menudo el crecimiento y evolución de las especies está ligado a este tipo de bifurcación y además nos suministra valiosa información acerca de los momentos críticos que marcan la supervivencia de las especies.

Bibliografía

[1] D. Alstad, Basic Populus Models of Ecology, Preitice hall, Upper Saddle River, N. j Chapeter 5, 2001

[2] L. Perko, Differential equations and dynamical systems, Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg, 2000.

[3] J. Ayala, E. Gilpin, J Ehrenfled, Competition between species: Theoretical models and experimental tests, Theor. Population Biology 4, 331-356. 1973

[4] A. Blumberg, Logistic Growth Rate Functions, J. Theo. Biol., 21, pp 42-44, 1968.

[5] Blanchard, R. Devaney & G. Hall, Ecuaciones diferenciales.

[6] R. Buis, On the Generalization of the Logistic Law of Growth, Acta Biotheoretica, 39, pp 185-195, 1991.

[7] F. Dumortier, Singularities of vector fields, Monograf. Mat. N^o 32, Inst. Mat. Pura e Apl. (IMPA), Rio de Janeiro, 1978.

[8] Miklós Farkas, Dynamical Models in Biology, Academic Press, 525 B Street, Suite 1900, San Diego, CA 92101-4495, USA.

[9] Morris W.Hirsch and Stephen Smale, Ecuaciones Diferenciales, Sistemas Dinámicos y Álgebra lineal, Academic Press, New York, 1974.

[10] H. El-Owaidy and A. A. ammar, Stable oscillations in a predator-prey model with time lag, Journal of mathematical analysis and applications 130, 191-199, 1988.

[11] E. Gilpin, J. Ayala, Schoener's model and Drosophila competition,Theoretical Population Biology Volume 9, Issue 1, February 1976, Pages 12-14

[12] M. Farkas, Stable oscillations in a predator-prey model with time lag, J. Math. Anal. Appl., 102, pp 175-188, 1984.

[13] M. Farkas, A. Farkas and G. Szabo, Multiparameter bifurcation diagrams in predator prey models with time lag, J. Math. Biol., 26, pp 93-103, 1988.

[14] J. Glick and H. Koçak. Phaser Scientific Software: A Universal Simulator for Dynamical Systems, LLC. 2003.

[15] N.G. Lloyd, Limit cycles of polynomial systems-some recent developments, In new Direction in Dynamical Systems. Cambridge University Press, pp. 192-234, 1988.

[16] S. Krise, S. Roy Choudhury, Bifurcations and chaos in a predator–prey model with delay and a laser-diode system with self-sustained pulsations, Chaos, Solitons and Fractals 16, 59–77, 2003.

[17] R.Shigui, Bifurcation Analysis of a Chemostat Model with a Distributed Delay, Journal of mathematical analysis and applications 204, 786-812, 1996.

[18] M. Sibly, Daniel Barker, C. Denham, Jim Hone, MarkPage, On the Regulation of Populations of Mammals, Birds, Fish, and Insects, Science. 2005 Jul 22;309(5734):607-10

[19] P. Stiling, Ecology: Theories and Applications 2nd ed. Prentice Hall International 1998.

[20] J. Sotomayor, Licoes de Equacoes Diferenciais Ordinárias, Rio de Janeiro, 1979.

[21] A. Tsoularis, Analysis of Logistic Growth Models, Res. Lett. Inf. Math. Sci., 2, pp 23-46, 2001.

[22] A. Tsoularis and J. Wallace, Analysis of logistic growth models, Math. Biosc., 179, pp 21-55, 2002.

[23] Sh. Wang and Z. Ge, The Hopf Bifurcation for a Predator-Prey System with θ-Logistic Growth and Prey Refuge, Abst. Appl. Anal., pp(13), 2013.

[24] J.L. Willems, Stability Theory of Dynamical Systems, New York: Wley, 1970.

[25] S. Wiggins, Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos, Tex in Applied Mathematics, Springer-Verlag New York, Inc., 1990.

[26] S. Wolfram, The Mathematica Book, 5th ed. Wolfram Media, 2003.

[27] Abstract (articulo guía).

[28] Bifurcations in a predator–prey model with general logistic growth and exponential fading memory. Rodrigo Castro *, Willy Sierra , Eduardo Stange. Instituto de Matemáticas. Universidad de Valparaíso, Casilla 5030, Valparaíso, Chile.

[29] Periodic motions, Miklós Farkas, Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg, 1994.