UNIVERSIDAD DE VALPARAÍSO
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemática

CONCEPCIONES DE LOS ESTUDIANTES SOBRE LA RESOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON DOS VARIABLES REALES

TRABAJO FINAL PARA LA OBTENCIÓN DE GRADO DE LICENCIADO EN EDUCACIÓN Y TITULO DE PROFESOR DE MATEMÁTICAS CON MENCIÓN EN DIDÁCTICA

Presentada por:
Alenik Briones
Claudio González

Profesora Guía
Gladys González

VALPARAÍSO, OCTUBRE 2012

INDICE

INTRODUCCION

El siguiente trabajo de título busca indagar las concepciones que tienen los estudiantes respecto a la resolución e interpretación, referida al objeto matemático sistemas de ecuaciones lineales con dos variables reales.

Durante nuestra experiencia como alumnos de educación media y estudiantes en práctica, hemos podido observar diversos problemas y errores que manifiestan los estudiantes al trabajar con el objeto matemático de sistemas de ecuaciones lineales con dos variables reales, especialmente observamos que existe una mecanización, es decir, los estudiantes resuelven los ejercicios mediante técnicas de resolución una vez que plantean el sistema, lo que no permite al estudiante una mayor comprensión sobre el contenido.

Nuestra investigación se centrara en evidenciar por medio de un cuestionario si los estudiantes son capaces de comprender, interpretar y utilizar la teoría de Raymond Duval "registros de representación semiótica" (la cual será mencionada en detalle en el marco teórico) en los sistemas de ecuaciones lineales con dos variables reales.

Este trabajo se encuentra organizado en 6 capítulos, en el primer capítulo explicamos los antecedentes de otros autores que avalan nuestra investigación, los cuales nos llevan a fundamentar y justificar la problemática a abordar. Además presentamos la pregunta de investigación. Para finalizar este capítulo y en relación a lo anterior formulamos los objetivos (generales y específicos) los cuales son la base para la elaboración del cuestionario, el cual es el medio para dar respuesta a estos. Seguido de esto, en el segundo capítulo describimos el marco teórico que guía nuestro trabajo, utilizaremos registros de representación semiótica presentado por Raymond Duval (2004), también mostramos algunos antecedentes históricos respecto al objeto matemático y presentamos el saber matemático que fundamenta nuestra investigación. Posteriormente en el tercer capítulo exponemos la metodología a utilizar la cual detallará el procedimiento de cómo se diseño el cuestionario y como se realizó la investigación. En el cuarto capítulo mostramos los objetivos de las preguntas del cuestionario y exhibimos los análisis a Priori, en donde se muestran las respuestas que esperamos de los estudiantes. En el quinto capítulo presentamos los análisis a Posteriori, es decir, las respuestas dadas por los estudiantes respecto el cuestionario. En el sexto capítulo mostramos cómo se realizó la confrontación entre los análisis a Priori y análisis a Posteriori y se verá la distancia entre lo previsto y lo sucedido. Finalmente cerramos nuestra investigación mostrando una conclusión.

CAPITULO 1: OBJETIVOS DE LA INVESTIGACION

a. Problemática

En Chile actualmente (marco curricular del Ministerio de Educación) el contenido de sistemas ecuaciones lineales con dos variables reales aparece como tema de estudio en segundo año de educación media, el cual es enseñado a estudiantes de 14 - 15 años. Luego reaparece en tercer año de educación media, tanto en la formación general como en la formación diferenciada, abarcando la temática de sistemas de inecuaciones lineales.

Basándose en lo que propone el Ministerio de Educación, mediante los planes y programas de enseñanza media, se observa que dentro de los aprendizajes esperados (Conocen métodos para resolver sistemas de ecuaciones y recurren al que estimen más conveniente) y los Contenidos Mínimos Obligatorios **(**Reconocimiento de sistemas de ecuaciones lineales como modelos que surgen de diversas situaciones o fenómenos. Resolución de problemas asociados a sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, en contextos variados, representación en el plano cartesiano usando un software gráfico y discusión de la existencia y pertinencia de las soluciones) que los estudiantes deben manejar y conocer las diversas representaciones gráficas y algebraicas con respecto a lo que es la resolución de sistemas de ecuaciones lineales con dos variables reales, se puede afirmar que estos contenidos son trabajados, enseñados y analizados de forma independiente, lo cual no permite a los estudiantes un aprendizaje complementario de los mismos, sino más bien aprendizajes disgregados, consiguiendo en algunos casos generar grandes errores y vacíos conceptuales en torno a los mismos.

En el proceso de enseñanza - aprendizaje del objeto matemático sistemas de ecuaciones lineales con dos variables reales, hay una cantidad considerable de errores que comente los estudiantes. A continuación nos referiremos a hallazgos de autores que afirman que uno de los errores más frecuentes es la dificultad en las operaciones con los números reales, además de las dificultades referidas a las representaciones en el plano cartesiano, también los problemas en el manejo de representaciones algebraicas y gráficas (por ejemplo del algebraico al gráfico) y conflictos de interpretación del problema.

Para fundamentar lo anterior recurriremos a algunas investigaciones de autores que dan cuenta a los errores anteriormente señalados y su concepción respecto al tema.

En un primer caso tenemos que los estudiantes presentan dificultades para usar las operaciones aritméticas más elementales en problemas verbales que involucran ecuaciones o sistemas de ecuaciones, con lo anterior podemos afirmar que los estudiantes no han logrado los aprendizajes previos (Guzmán, 2000) citado por (Segura, 2004).

Otro error que se puede observar en los estudiantes es cuando confunden la solución de una ecuación (o sistemas), con la constante que está escrita, es decir, cuando la ecuación está escrita de la forma $f(x) = k$ con k real. Esto guarda relación con las investigaciones que señalan que los estudiantes de diferentes edades tienden a pensar que el signo de igual significa "el resultado es". Por otro lado confunden el concepto de solución con resolver. Es decir que, en lugar de utilizar el procedimiento de verificación para determinar si estamos o no frente a una solución, optan por resolver en lugar de sustituir (DeVries y Arnon, 2004).

De acuerdo a otras investigaciones, los estudiantes no logran identificar que las infinitas soluciones de un sistema de dos ecuaciones son también solución de cada ecuación (Panizza, Sadovsky & Sessa, 1995).

También tenemos el aporte de Cristina Ochoviet (2009) que en su investigación, afirma que los estudiantes tienen dificultades al reconocer el número de soluciones respecto al concepto de solución de un sistema de ecuaciones. Además recomienda que los sistemas de ecuaciones deberían ser presentados en diferentes modos de pensamiento como los que plantea Sierpinska (2000): el sintético-geométrico (aspecto visual), el analítico-aritmético (cálculos numéricos) y el analítico estructural (propiedades y axiomas). Ya que Ochoviet piensa que diferentes maneras de pensar a los objetos matemáticos permitirán a los estudiantes una comprensión más profunda de ellos.

Con respecto a la interpretación de sistemas también existen dificultades como las que plantean Panizza, Sadovsky y Sessa (1999) los cuales concluyen en su investigación: "que cualquiera que haya sido el trabajo realizado en torno al objeto matemático ecuación de la recta, éste no parece ser suficiente para que los estudiantes puedan establecer una relación entre los puntos de la recta y las soluciones de las ecuaciones correspondiente al sistema".

Referido a la interpretación y la dificultad en el cambio de registro en los sistemas de ecuaciones en dos variables reales tenemos que existen algunos libros de texto y profesores que apuntan al desarrollo algorítmico. "No trabajan los pasajes del registro algebraico al verbal, ni el gráfico al algebraico, a pesar de que el paso entre registros semiótica resulta necesario para acceder a un objeto matemático. Esto no se trata de una opinión pedagógica, sino de un aprendizaje obligado" (Guzmán I., 1990) citado por (Segura 2004).

Es común en los estudiantes evitar completamente los problemas presentados en lenguaje natural. Por otro lado al realizar el pasaje del registro gráfico al algebraico es al que menos recurren, pero los estudiantes resuelven en forma más segura problemas que involucren el pasaje del registro algebraico al gráfico. Finalmente se puede decir que los alumnos no recurren a registros de expresiones diferentes del algebraico. (Pérez Donoso, 1998). En general, no efectúan la representación y resolución gráfica de un sistema de ecuaciones lineales (Ramírez, 1997) citado por (Ochoviet, 2009).

Por otro lado referido al objeto matemático (sistema de ecuaciones lineales) el trabajar con los registros de representación facilitará que los estudiantes identifiquen al objeto en todos los registros, ya que se emplean en forma indistinta para simbolizarlo y así lograr una mayor comprensión del objeto matemático. (Segura, 2004)

A partir de la información recopilada por los autores anteriormente señalados, se puede evidenciar que en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales de dos variables reales, los estudiantes conocen y aplican los procedimientos necesarios para la resolución de los mismos, pero se les dificulta el traspaso de la forma gráfica a la forma algebraica o viceversa, es por ellos que los estudiantes no utilizan un razonamiento matemático para determinar gráficamente la existencia de una solución, infinitas soluciones o la no existencia de la misma.

Debido a lo anterior evidenciaremos las concepciones que tienen los estudiantes referido a la resolución e interpretación de sistemas de ecuaciones lineales de primer grado utilizando representaciones gráficas y algebraicas.

b. Pregunta de la investigación

- ✓ ¿Qué entienden los estudiantes por la resolución e interpretación de un sistema de ecuaciones lineales con dos variables reales?

c. Objetivo General

- ✓ Realizar un estudio que permita evidenciar si un grupo de estudiantes de 2° y 3° medio son capaces de comprender, resolver e interpretar los sistemas de ecuaciones lineales con dos variables reales.

d. Objetivos específicos

- ✓ Evidenciar por medio de un estudio si los estudiantes coordinan las representaciones algebraicas con sus respectivas representaciones gráficas y viceversa de sistemas de ecuaciones lineales con dos variables reales

- ✓ Revelar formas de razonamiento matemático que utilizan los estudiantes para respaldar los procedimientos que utilizan en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales con dos variables reales.

CAPITULO 2: MARCO TEÓRICO

a. Registros de Representaciones Semióticas

A continuación se describirán los principales puntos y términos específicos de la teoría que desarrollo Raymond Duval frente al tema Registros de Representación Semiótica, a lo cual él estipula que la utilización de varios sistemas semióticos de representación y expresión, facilitarían el aprendizaje y enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales de primer grado en Matemáticas.

La coordinación de varios registros de representación semiótica resulta fundamental para la asimilación conceptual de un objeto; además, hay que tener algo bien claro que no se debe confundir el objeto matemático sistemas de ecuaciones lineales con su representación, ya que, como lo expresa Duval, esta confusión entre ellos, provoca en un plazo más o menos amplio una pérdida de comprensión, y los conocimientos adquiridos llegan a ser pronto inutilizables fuera de su contexto de aprendizaje; ya sea por no recordarlos o porque ellos permanecen como representaciones inertes.

Es por ello que el conocer la diferencia entre un objeto matemático y su representación será una ayuda necesaria para el aprendizaje de la matemática, ya que, las representaciones semióticas no sólo son indispensables para fines de comunicación, sino que también son necesarias para el desarrollo de la actividad cognitiva del pensamiento. Y además si agregamos, la semiosis (aprehensión o producción de una representación semiótica) y la noesis (aprehensión conceptual del objeto) son inseparables, es decir, no hay noesis sin semiosis.

En el sistema de enseñanza se da más importancia a las representaciones mentales que a las representaciones semióticas. No obstante, las diferentes representaciones semióticas de un objeto matemático son absolutamente necesarias, estas juegan un papel fundamental en la actividad matemática.

La comprensión de un objeto matemático reposa en la combinación de varios registros de representación, pues, toda representación de un objeto matemático es parcial, cada una muestra o enfatiza solo algunos aspectos.

En matemáticas, la posibilidad de efectuar transformaciones sobre los objetos depende directamente del sistema de representación semiótico utilizado. Esta función de transformación sólo la pueden cumplir las representaciones semióticas (semiosis) y no las representaciones mentales (noesis).

Según Duval (1999), para que un sistema semiótico pueda ser un registro de representaciones, debe permitir las tres actividades cognitivas fundamentales ligadas a la semiosis:

Actividades cognitivas de representación inherentes a la semiosis.

1. Formación de representaciones
2. Tratamiento
3. Conversión

La primera de ellas, la formación de representaciones en un registro semiótico particular, bien sea para "expresar" una representación mental, o para "evocar" un objeto real.

Respecto a la segundo, un tratamiento es una transformación que se efectúa en el interior de un mismo registro, utilizando las reglas de funcionamiento propias al sistema, por tanto moviliza un solo registro de representación de manera más general.

Finalmente, la conversión es, por el contrario, una transformación de la representación de un objeto matemático, en un registro, de este mismo objeto en otro registro, requiriendo pues que el sujeto coordine y comprenda esta acción. La conversión es pues una transformación externa relativa al registro de representación de partida. La conversión de las representaciones semióticas constituye la actividad cognitiva menos espontánea y más difícil de adquirir para la mayoría de los alumnos.

De las tres actividades cognitivas ligadas a la semiosis, sólo las dos primeras, según Duval, son tomadas en cuenta en la enseñanza. Lo que implica que los alumnos no tengan una comprensión total de un objeto matemático, e incluso que lo confundan con su representación.

Estas tres actividades tienen reglas de funcionamientos propias a cada una de ellas, reglas dependientes de los mismos sistemas semióticos y que son independientes de las restricciones que una situación particular de comunicación puede imponer a la producción o a la comprensión de representaciones semióticas.

Toda representación es parcialmente cognitiva respecto a lo que representa. Pero además, de un registro a otro no son los mismos aspectos del objeto lo que se representa, de ahí que los distintos registros son complementarios. La conceptualización implica una coordinación de registros de representación, por lo que la comprensión de un objeto matemático reposa en la coordinación de al menos dos registros de representación

Duval declara que dos representaciones son congruentes, cuando los pasajes de una representación a otra se dan de manera espontanea y deben cumplir 3 condiciones:

1. Correspondencia semántica de los elementos significantes, es decir a cada unidad significante simple se le puede asociar una unidad significante elemental.
2. Univocidad semántica terminal, es decir a cada unidad significante elemental de la representación de salida le corresponde sólo una única unidad significante elemental en el registro de la representación de llegada.
3. Orden, es decir, que tenga el mismo orden de aprehensión de las unidades significantes.

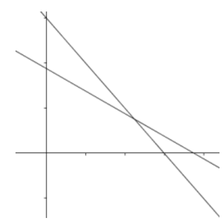
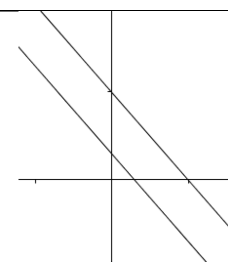
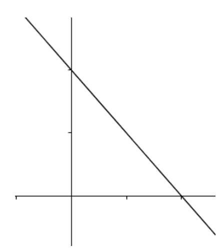
El pasaje de un registro a otro a veces es natural y otras no; este último caso resulta del fenómeno de no-congruencia entre las representaciones de un mismo objeto que proviene de sistemas semióticos diferentes.

La no congruencia conlleva a la encapsulación de los registros de representación, es decir, el sujeto se limita al tratamiento en un registro de representación, lo cual impide el aprendizaje significativo y real del concepto en juego. Esto tiene graves consecuencias en el aprendizaje. Con mucha frecuencia, conduce a fracasos en la actividad cognitiva de conversión.

Para nuestra investigación lo propuesto anteriormente por Duval cumple un rol fundamental, debido a que en su teoría propone que la coordinación entre los distintos

registros de representación resulta imprescindible para que el estudiante examine sus ideas y controle sus resultados respecto al objeto matemático sistemas de ecuaciones lineales.
Es por ello que se propone un cuestionario en donde el estudiante deberá realizar tratamientos y pasajes entre los distintos tipos de registros de representaciones semióticas; como pasajes entre el lenguaje natural y el registro algebraico, entre el registro algebraico al gráfico y viceversa, con el fin de evidenciar que el estudiante es capaz de comprender, resolver e interpretar los sistemas de ecuaciones lineales con dos variables reales.

Como ejemplo, en la siguiente tabla se muestra las diferentes representaciones del objeto matemático en diferentes registros de representación semiótica.

Objeto matemático	**Representación**		
	Registro verbal	**Registro algebraico**	**Registro gráfico**
Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas; solución única	En un corral hay gallinas y ovejas. En total hay 60 cabezas y 150 patas. ¿Cuántas gallinas y ovejas hay?	$\begin{cases} x + y = 60 \\ 2x + 4y = 150 \end{cases}$	
Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas; no existe solución	La suma de dos números es 300 y el doble de su suma es 400. ¿Cuáles son esos números?	$\begin{cases} x + y = 300 \\ 2(x + y) = 400 \end{cases}$	
Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas; soluciones infinitas	La suma de dos números es 2 y el doble de su suma es 4. ¿Cuáles son esos números?	$\begin{cases} 2(x + y) = 4 \\ x + y = 2 \end{cases}$	

Por otro lado según Duval el razonamiento es una actividad que adopta una variedad de formas, las cuales están organizadas mediante definiciones y propiedades que se entrelazan coherentemente y que se orientan a modificar el enunciado-objetivo, y con miras a modificar el valor epistémico, y que por tanto, altera el valor de verdad bajo el cumplimiento de ciertas condiciones.

Duval señala que investigaciones y tesis han mostrado que existen serias dificultades para los alumnos en el aprendizaje del razonamiento hipotético deductivo (razonamiento ligado a las inferencias explícitas), que hay obstáculos aparentemente insuperables en la mayoría de los alumnos concernientes a la comprensión del razonamiento deductivo.

Existen dos tipos de razonamiento el inductivo y razonamiento deductivo. El razonamiento deductivo parte de unas premisas y llega a una conclusión que se sigue de las mismas, mientras que el razonamiento inductivo consiste en alcanzar una conclusión que está apoyada por unas premisas. No obstante, existen dudas con relación una separación drástica de estos dos tipos de razonamiento. No resulta fácil hablar de razonamiento inductivo sin que aparezca unido al razonamiento deductivo (Duval, 1999).

b. Antecedentes históricos

A continuación se presentarán los puntos más importantes respecto al desarrollo epistemológico de los conceptos "ecuaciones" y "sistemas de ecuaciones lineales". Datos extraídos de Navas y compañía: *ecuaciones de primer grado y sistemas de ecuaciones; y* Hofmann, J. (1960), *Historia de la matemática, tomo 1, 2 y 3.*

Los primero hallazgos sobre ecuaciones se presentaron en la época de los egipcios, en donde las ecuaciones más utilizadas por ellos eran de la forma:

$$x + ax = b \text{ y } x + ax + bx = 0.$$

Con a y b eran números conocidos y x representaba la *incógnita* a la que nombraron *aha o montón.*

Los egipcios se vieron en la necesidad de resolver diversos problemas cotidianos (reparto de víveres, de cosechas, de materiales o de tierras) los cuales están escritos en el papiro de Rhind en el año 1650 a. de C. en donde hay 87 problemas resueltos, cuya solución era obtenida por un método que hoy conocemos como "método de la falsa posición" o "regula falsi". Dicho método consiste en tomar un valor concreto para la incógnita, probamos con él y si se verifica la igualdad ya tenemos la solución, si no, mediante cálculos se obtendría la solución exacta.

A continuación presentaremos el problema 24 del Papiro de Rhind:

"*una cantidad y su séptima parte dan conjuntamente 19*". Calcular dicha parte.

[1]El problema se limita a resolver la ecuación $x + x/7 = 19$ Ahmes parte en este caso de un valor estimado de 7 y calcula $7 + 7/7 = 8$. Entonces ahora para averiguar el valor real hay que encontrar un número N tal que al multiplicarlo por el resultado de aplicar el valor estimado nos de 19, es decir hay que dividir 19/8. El valor buscado entonces será $7 \cdot N$

1 8

21 6

½ **4**

¼ **2**

1/8 1

[1] Pulpón, A. "Historia del Papiro de Rhind"

$16 + 2 + 1 = 19 ---> 19/8 = 2 + 1/4 + 1/8$. Este es el valor a multiplicar por 7 para obtener la x buscada.

$$\begin{array}{ll} 1 & 2 + 1/4 + 1/8 \\ 2 & 4 + 1/2 + 1/4 \\ 4 & 9 + 1/2 \end{array}$$

Entonces el valor buscado es

$$2 + 1/4 + 1/8 + 4 + 1/2 + 1/4 + 9 + 1/2 = 16 + 1/2 + 1/8$$

Respecto a la cultura de los babilónicos no se enfocaron tanto en las ecuaciones lineales, sino que trabajaron más en los *sistemas de ecuaciones lineales y las ecuaciones de segundo grado*, pero sus aportes respecto a lo anterior no se encontraban. A continuación se presenta un ejemplo tomado de una tablilla babilónica, que plantea la resolución de un sistema de ecuaciones en los siguientes términos:

1/4 anchura + longitud = 7 manos

longitud + anchura = 10 manos

Los babilónicos en otras ocasiones resolvían habitualmente ecuaciones lineales con varias incógnitas, además ecuaciones en la forma $ax + by = C, xy = D$, y a base de éstas, ecuaciones reversibles, para lo cual hay que recurrir constantemente a la transformación $(\mathrm{x} + y)^2 = (\mathrm{x} - \mathrm{y})^2 + 4xy$.

Los griegos, lo cuales utilizaban métodos geométricos para resolver sistemas de ecuaciones, Thymaridas (400 a. de C.) había encontrado una fórmula para resolver un determinado sistema de n ecuaciones con n incógnitas. Dentro de los matemáticos griegos tenemos a Diofanto de Alejandría (250 d. de C.), este personaje se acerca un poco a lo que llamamos "método" él en vez de manejar un sistema de dos ecuaciones simultáneas en dos incógnitas, opera con las condiciones sucesivas de manera que solo aparezca una única incógnita a lo largo de todo el proceso. A diferencia de los anteriores matemáticos nombrados, utiliza números abstractos y no unidades de medida para determinar a las incógnitas. Diofanto resuelve problemas en los que aparecían sistemas de ecuaciones, transformándolos en una ecuación lineal, y sólo aceptaba las soluciones positivas, ya que lo que buscaba era resolver problemas y no ecuaciones. Una de las dificultades que encontramos en la resolución de ecuaciones por Diofanto es que carece de un método general y utiliza en cada problema métodos a veces excesivamente ingeniosos.

En la antigua civilización China uno de los libros más importantes es “*Nueve Capítulos sobre el Arte Matemático” (200 a.C.- 220 a.C.)*: el cual incluye *246 problemas en donde habían ejercicios de resolución de ecuaciones.* En muchos de estos casos la resolución de problemas conduce a sistemas de ecuaciones lineales utilizando números positivos y negativos.

También encontramos un esbozo del método de las matrices para resolver sistemas de ecuaciones lineales. Entre otras cosas se encuentra aquí el manejo del sistema de ecuaciones mediante recetas, análogas a nuestros determinantes. El matemático samurái Seki (1942-1708) emprende estudios sobre la teoría de las ecuaciones lineales según los métodos de los matemáticos chinos, resuelven sistemas de ecuaciones lineales por determinantes. El texto *Su-yüan yü-Chien o “Espejo Precioso de los Cuatro elementos” escrito por Chu Shih*-Chieh en 1303. El titulo de este texto representa los cuatro elementos que son el cielo, la tierra, el hombre y la materia y simbolizan las cuatro incógnitas de una ecuación. Además en este se estudian tanto sistemas de ecuaciones simultáneas como ecuaciones individuales de grados tan altos como catorce.

En la civilización Hindú, los *Sulvasütras* son los primeros documentos matemáticos que existen (datan del siglo III d.d.C). En éstos aparece el siguiente problema:

“Hallar el lado de un rectángulo, conociendo el otro lado y sabiendo que su área es igual al área de un cuadrado dado. "

Es decir, $a\ x\ =\ S$. al igual que los egipcios, los indues utilizaban el método de la falsa posición.

Por otro lado, *Brahmagupta* expresa cómo resolver ecuaciones lineales y representaba a la *incógnita* por la abreviatura -*ya*- , y las operaciones con la primera sílaba de las palabras. Estas ecuaciones surgieron en problemas de astronomía, las soluciones mostraban cuándo ciertas constelaciones habían aparecido en el firmamento. Consideraban *todas las soluciones enteras*, mientras que Diofanto tomaba una única solución racional. El procedimiento para obtener las soluciones enteras de $ax \pm bx = c,\ \ donde\ a, b\ y\ c$ son números enteros positivos era la siguiente: Ellos sabían que para que la ecuación tuviese soluciones enteras, a y b debían dividir a c, y además Brahmagupta descubrió que si a y b eran primos entre sí, todas las soluciones de la ecuación vendrían dadas por las fórmulas $x = p + mb$ e $y = q - ma$, donde m es un número arbitrario.

En la cultura árabe, el libro de Al-Khowârizmî contiene además de la resolución de ecuaciones, que ocupa aproximadamente la mitad del libro, reglas para operar con expresiones binómicas, incluyendo productos tales como $(10 + x)(10 - x)$, demostraciones geométricas para la resolución de ecuaciones. Al algebrista Abu-Kamil (siglo IX y X) se le atribuye una obra donde trata la solución de ecuaciones lineales por simple y doble falsa posición. A partir de aquí se dedican al estudio de ecuaciones de grado superior.

En la Europa Medieval, la ecuación lineal se resuelve al principio mediante la regula falsi, referente a los sistemas de ecuaciones lineales, se tratan principalmente en el siglo VI los tipos que se pueden resolver de manera simétrica; más tarde, aparecen muchas reglas especiales, y entre ellas también la regla general: el método de comparación entre dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Leonardo de Pisa (Fibonacci) en su obra *Liber Abaci* y *Liber Quadratorum* expone la solución de ecuaciones determinadas e indeterminadas de primer grado.

En el renacimiento, el trabajo realizado de un fraile italiano llamado Luca Pacioli (1445-1514), su principal publicación es la *Summa*. Fue escrita en lengua vernácula y la parte dedicada al álgebra incluye las soluciones de las ecuaciones lineales y algunas soluciones de las cuadráticas. Además llamaba a la incógnita la “cosa”.

En forma más contemporánea el matemático Euler (1748) de la resolución de ecuaciones lineales por medio de determinantes. La posibilidad de poder representar las soluciones de las ecuaciones en forma compleja hace suponer a Euler que todas las ecuaciones de coeficientes reales pueden descomponerse realmente en factores lineales y cuadráticos con coeficientes reales.

c. Saber Matemático

Antes de definir lo que es una función proposicional veremos a continuación lo que es una proposición.

Proposición

Una proposición en el sistema de los número reales es un enunciado declarativo del que se puede afirmar que es verdadero o falso, es decir, las proposiciones son oraciones bivalentes; esto significa que asumen alguno de estos dos valores: verdadero o falso (pero no ambos simultáneamente). Las proposiciones se construyen respetando ciertas reglas de formación, utilizando operadores lógicos dentro del marco de los números reales.

Función proposicional

Función proposicional en el sistema de los números reales es una expresión con una o más variables que se convierte en una proposición cuando se le asignan valores específicos a las variables en el marco de los números reales.

Al igual que las proposiciones, las funciones proposicionales se construyen respetando ciertas reglas de formación, utilizando operadores lógicos, obteniéndose nuevas formas de expresiones llamadas funciones proposicionales compuestas.

Para el caso de las ecuaciones podemos considerar el siguiente ejemplo:

Consideremos la siguiente función proposicional en dos variables

$$P(x, y): x + y = 2$$

Donde x e y son números reales

- Si $x = 1$ e $y = 0$ se obtiene la siguiente proposición.
  $P(1,0): 1 + 0 = 2$ Esta afirmación es falsa.

- Si $x = 1$ e $y = 1$ se obtiene la siguiente proposición.
  $M(1,1): 1 + 1 = 2$ Esta afirmación es verdadera.

Para el caso de los sistemas de ecuaciones lineales podemos considerar el siguiente ejemplo:

Consideremos la siguiente función proposicional compuesta en dos variables

$P(x, y): x + y = 2 \ \wedge \ x - y = 0,$ Donde x e y son números reales

- Si $x = 1$ e $y = 2$ se obtiene la siguiente proposición.

$P(1{,}0)$: $1 + 2 = 2 \ \wedge \ 1 - 2 = 0$ Esta afirmación es falsa.

- Si $x = 1$ e $y = 1$ se obtiene la siguiente proposición.

$M(1{,}1)$: $1 + 1 = 2 \ \wedge \ 1 - 1 = 0$ Esta afirmación es verdadera.

Por otro lado dos funciones proposicionales son equivalentes si tienen el mismo conjunto solución, es decir, al reemplazar un valor determinado a la variable de una función proposicional se obtiene un valor de verdad y si se reemplaza ese mismo valor en la segunda función proposicional y se obtiene el mismo valor de verdad son equivalentes.

Conjunto solución de una función proposicional

El conjunto solución de una función proposicional, son todos los valores pertenecientes a los números reales que hacen verdadera una proposición.

El marco de los números reales

En $\mathbb{R}$ existen dos leyes de composición interna, llamadas suma y producto, las cuales se simbolizan por $+$ y $\cdot$, respectivamente. El sistema de los números reales $\mathbb{R}$ es un cuerpo ordenado completo.

Propiedades de la igualdad

En el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ la relación "=" en satisface las siguientes propiedades:

1. Reflexividad:

   Para todo elemento de a en el conjunto de los números reales se satisface:

$$a = a$$

2. Simetría:

   Para cada par de elementos a, b en el conjunto de los números reales:

$$\text{Si } a = b, \text{ entonces } b = a$$

3. Transitividad:

   Para cada trío de elementos a, b, c en el conjunto de los números reales:

$$\text{Si } a = b \text{ y } b = c, \text{ entonces } a = c$$

<u>Ecuaciones lineales en dos variables</u>

Las ecuaciones lineales en dos variables son funciones proposicionales que se rigen por las propiedades de la igualdad. Cuando se resuelve, se realiza de forma equivalente, es decir, transformando las igualdades en otras equivalentes desde el punto de vista lógico.

Tenemos la siguiente función proposicional:

$$p(u, v): au + bv = c$$

Donde los $a, b\ y\ c$ son números reales, u, v variables del sistema y cuyas soluciones vienen dada por el siguiente conjunto:

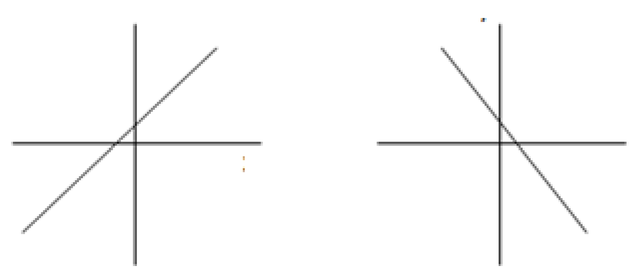
$$S = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2\ /au + bv = c\}$$

<u>Representación del conjunto solución de una ecuación lineal con dos variables</u>

Aquellos elementos o valores de $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ que la hacen verdadera la función proposicional se llaman soluciones.

Ahora sea $p_1(u, v): a_1u + b_1v = c_1$

El conjunto solución S se puede representar de la siguiente forma:



Sistemas de ecuaciones lineales con dos variables.

Los sistemas de ecuaciones lineales en dos variables son funciones proposicionales compuestas, unidas con una conjunción y que se rigen por las propiedades de la igualdad. Cuando se resuelve, se hace de forma implicativa. Porque al trabajar en esta forma, lo que está diciendo es que el conjunto solución de uno está incluido en el conjunto solución del otro.

Dadas las siguientes funciones proposicionales en las variable reales u, v

$$p_1(u,v): a_1u + b_1v = c_1$$
$$p_2(u,v): a_2u + b_2v = c_2$$

Se llama sistema de ecuaciones lineales a la función proposicional:

$$p_1(u,v) \wedge p_2(u,v)$$

La expresión anterior es una conjunción, la cual es únicamente verdadera cuando los valores de las proposiciones que las componen son ambas verdaderas, resultando falsa en cualquier otro caso.

Consideremos $S_1 \; y \; S_2$ conjuntos solución
Dado los $a_1, \; a_2, \; b_1, \; b_2, \; c_1 \; y \; c_2$ son números reales

$$S_1 = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \; / \; a_1u + b_1v = c_1 \}$$
$$S_2 = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \; / \; a_2u + b_2v = c_2 \}$$

El conjunto solución de S, viene dado por

$$S = S_1 \cap S_2$$

Es decir:

$$S = \{(u, v\ ) \in \mathbb{R}^2 \ /\ a_1u + \ b_1v = \ c_1 \ \ \wedge \ \ a_2u \ + b_2v = c_2\}$$

<u>Representación del conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos variables</u>

En el plano cartesiano se representan el conjunto solución de cada una de las ecuaciones pertenecientes al sistema dado y la solución de este sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas es la intersección de ambos conjuntos.

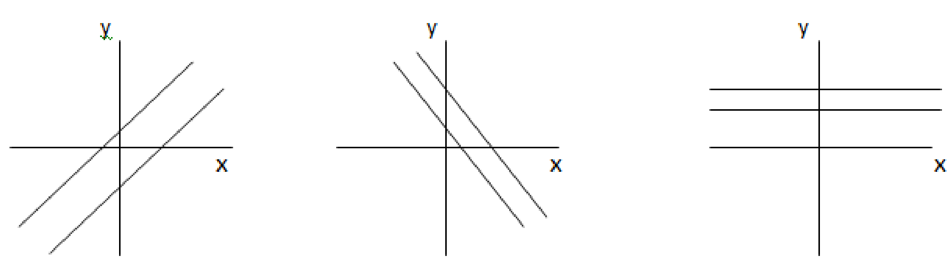
Sean

$$p_1(u, v): a_1u + b_1v = c_1$$
$$p_2(u, v): a_2u + b_2v = c_2$$

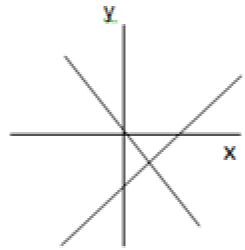
Como se verificó anteriormente el conjunto solución S, viene dado por $S = S_1 \cap S_2$, de acuerdo a si las rectas S_1 y S_2 son paralelas, se intersectan o son coincidentes.

A continuación se muestra las representaciones gráficas de cada caso.

i. Si el sistema de ecuaciones lineales no tiene solución, es decir $S = \emptyset$, entonces:

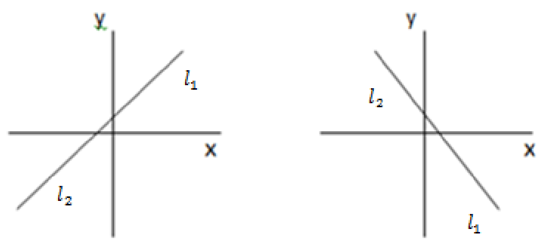


ii. Si el sistema de ecuaciones lineales tiene una solución, es decir $S \neq \emptyset$ entonces:



Donde P es el par ordenado donde se intersectan las rectas y es solución del sistema.

iii. Si el sistema de ecuaciones lineales tiene infinitas soluciones, es decir $S \neq \emptyset$ entonces:



En donde l_1 y l_2 son rectas coincidentes.

CAPITULO 3: METODOLOGIA

a. Metodología

La investigación realizada fue de tipo cualitativo. La metodología se baso principalmente en el diseño e implementación de un cuestionario, el cual fue enfocado en la calidad de dicho medio, es decir, en donde los estudiantes no solo ocupen métodos algebraicos para resolver, sino que logren analizar, interpretar y argumentar el problema a la situación a la que se enfrenten. Para luego aplicar, interpretar y establecer una relación entre los contenidos previamente adquiridos por ellos, sobre sistemas de ecuaciones lineales con dos variables reales.

Antes de aplicar este instrumento, se realizó un análisis a priori de cada situación y después fue aplicado a estudiantes entre 15 y 16 años pertenecientes a un establecimiento particular subvencionado, ya que estos han concluido con el estudio de sistemas de ecuaciones lineales en dos variables, conocimientos fundamentales para la resolución de las actividades propuestas en el cuestionario.

La aplicación y desarrollo de este cuestionario nos permitió responder a los objetivos de investigación previamente establecidos en nuestra problemática, tales como evidenciar los cambios de registro en la resolución e interpretación de los sistemas de ecuaciones lineales de primer grado con dos incógnitas, observar y analizar las distintas respuestas obtenidas por los estudiantes y posteriormente analizar el razonamiento matemático utilizado por éstos al momento de responder el instrumento de medición, estudiando los diversos obstáculos que se les presentaron para dar respuesta a las preguntas realizadas en el mismo.

Además realizamos el análisis de las respuestas entregadas por los estudiantes, procedimos a desarrollar la investigación en tres etapas, la primera de ellas correspondió al análisis a priori en relación a cada una de las posibles respuestas y errores que pueden entregar y/o cometer los estudiantes en torno a las diversas preguntas presentadas en el cuestionario a desarrollar. Posteriormente la segunda etapa, más precisamente en el análisis posteriori, complementamos las respuestas entregadas por los estudiantes con las posibles respuestas consideradas en el análisis a priori previamente realizado, terminando en la tercera etapa, con una entrevista personal a aquellos estudiantes en donde sus respuestas fuesen dudosas o requieran de una aclaración, para comprender de mejor manera las respuestas que éstos dieron al momento de llevar a cabo dicho instrumento de medición. Por último, recopilamos la información obtenida de los respectivos análisis desarrollados en torno a los mismos, llevamos a cabo la respectiva confrontación de los análisis previamente desarrollados.

b. Descripción de la implementación

El cuestionario fue aplicado en un grupo de 56 estudiantes, de los cuales 20 pertenecen a un 2° medio "B", 20 pertenecen a un 3° medio "A" humanista y 16 pertenecen a un 3° medio "B" científicos que se encuentran en el colegio particular subvencionado. La aplicación fue llevada a cabo el día 2 de diciembre de 2011.

CAPITULO 4: EL CUESTIONARIO

a) <u>Diseño del Cuestionario</u>

El instrumento creado, tiene por objetivo evidenciar si los alumnos participantes comprenden, resuelven e interpretan utilizando las distintas representaciones semióticas y registros con los que identifican los sistemas de ecuaciones lineales; lo que además permite analizar la asimilación conceptual del objeto en estudio, que pasa necesariamente a través de la adquisición y coordinación de una o más representaciones semióticas.

<u>Pregunta N° 1</u>

Responder las siguientes preguntas.

i. ¿Qué es para ti una ecuación lineal?
ii. ¿Qué es para ti una solución de una ecuación lineal?
iii. ¿Los pares ordenados $(1{,}3)\ y\ (-3\ {,}1)$ son soluciones de la ecuación $x - 2y = -5$?. Explica.
iv. Al graficar la ecuación $x - 2y = -5$ en el plano cartesiano
   ¿Qué forma tiene la gráfica?
   ¿Qué relación hay entre esa gráfica y la ecuación lineal presentada?
v. ¿Qué es para ti un sistema de ecuaciones lineales?
vi. ¿Qué es para ti una solución de un sistema de ecuaciones?

<u>Objetivo</u>

En los ítems i, ii, iii y iv se espera que el estudiante muestre lo que es una ecuación lineal en dos variables, su solución y representación gráfica.

En los ítems v y vi se espera que el estudiante muestre lo que es un sistema de ecuaciones lineales en dos variables y su solución.

<u>Pregunta N° 2</u>

Si en el supermercado por 3 Kg de manzanas y 2 Kg de naranjas pago $900. Pero si compro 2 Kg de manzanas y 4 Kg de naranjas, pago $ 850, ¿Cuánto cuesta el Kg de naranjas? Justifica cada paso del desarrollo del problema.

Objetivo

Evidenciar si el estudiante comprende el problema de planteo y lo modela por medio de un sistema de ecuaciones lineales, en el cual deberá reconocer las distintas variables y representarlas por medio de letras u otros símbolos. Expresar el problema como un sistema de ecuaciones. Y dominar la resolución algebraica de sistemas de ecuaciones en dos variables argumentando cada paso.

Pregunta N° 3

¿Los pares ordenados $(1,3)$ y $(-3,1)$ son soluciones del sistema $\begin{cases} x - 2y = -5 \\ x + y = 4 \end{cases}$?

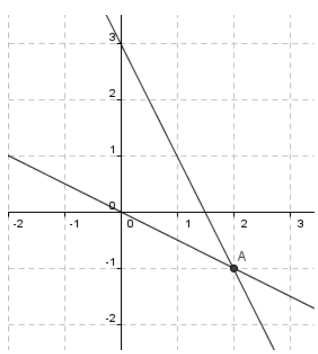
Justificar tu respuesta.

Objetivo

Evidenciar si el estudiante logra la comprensión del concepto de solución de sistema de ecuaciones.

Pregunta N° 4

La gráficas corresponden a las ecuaciones de uno de los dos sistemas dados ¿a cuál? Justifique



$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

Objetivo

Evidenciar si el estudiante interpreta las representaciones gráficas de las ecuaciones lineales y las relacione con su respectivo sistema de ecuación lineal.

Pregunta N° 5

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones gráficamente.

$$\begin{cases} 2x + 2y = -4 \\ -x + y = 2 \end{cases}$$

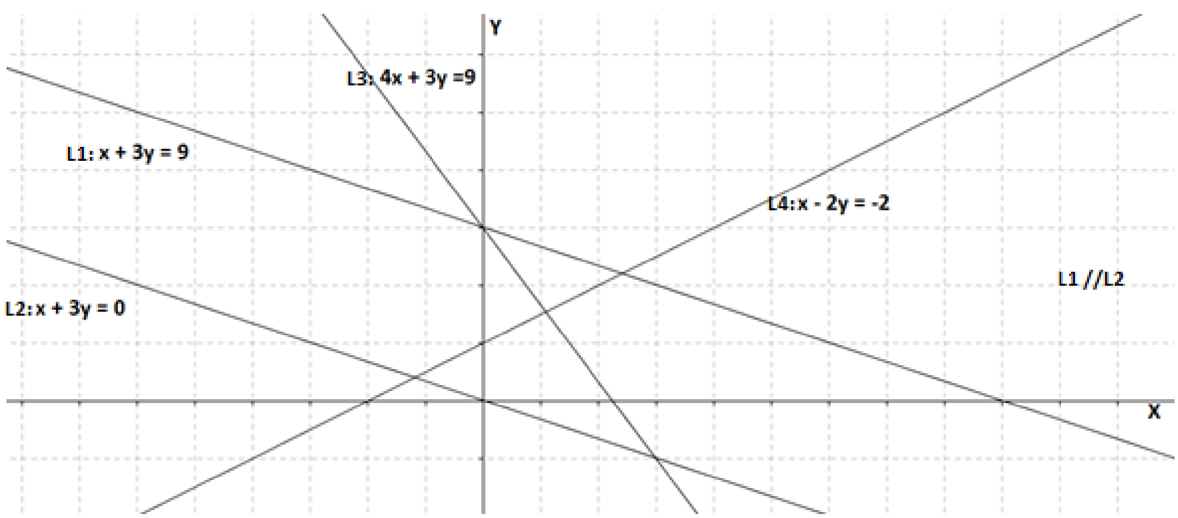
I. ¿Cuál es la relación entre las gráficas que representan las ecuaciones?
II. ¿Qué puedes decir respecto a las soluciones del sistema?

Objetivo

Evidenciar que el estudiante exprese en forma gráfica el sistema planteado, con el fin de que observen que las graficas que representan las ecuaciones coincidentes y que concluyan que sus soluciones son infinitas.

Pregunta N° 6

Observa el gráfico y responde



I. Responde a partir del grafico y escribe un sistema cuya solución es el par $(3, -1)$, es decir $(x = 3 \ e \ y = -1)$. Justifica tu respuesta.

II. Responde a partir del grafico y escribe un sistema cuya solución$(0,3)$, es decir $\{x = 0 \; e \; y = 3\}$. Justifica tu respuesta.

III. Responde a partir del grafico y escribe un sistema que no tenga solución. Justifica tu respuesta.

Objetivo

Evidenciar que el estudiante interprete los datos de la gráfica, es decir, que le den una lectura a los elementos significativos de las gráficas, con el fin de que construya sistemas de ecuaciones que tengan una solución y que no tengan solución.

b) Análisis a priori

Análisis A Priori pregunta N° 1

Se espera que el estudiante en los ítems i, ii, iii y iv demuestre sus conocimientos en relación al concepto de ecuación lineal en dos variables tales como su solución y su representación gráfica. Además se espera que alumnos en los ítems i y ii entreguen una visión algebraica, en el ítem iii realicen una transformación dentro del registro algebraico (tratamiento) y si realizan en el ítem iv a un pasaje entre el registro algebraico y el registro gráfico.

Se espera también que el estudiante en los ítems v y vi demuestre sus conocimientos respecto de lo es un sistema de ecuaciones lineales y su solución, y sus respuestas estén enfocadas en una visión del tipo algebraica.

1) Responder las siguientes preguntas.

i. ¿Qué es para ti una ecuación lineal?

ii. ¿Qué es para ti una solución de una ecuación lineal?

iii. ¿Los pares ordenados $(1,3)$ y $(-3\,,1)$ son soluciones de la ecuación $x-2y=-5$?. Explica.

iv. Al graficar la ecuación $x-2y=-5$ en el plano cartesiano

¿Qué forma tiene la gráfica?

¿Qué relación hay entre esa gráfica y la ecuación lineal presentada?

v. ¿Qué es para ti un sistema de ecuaciones lineales?

vi. ¿Qué es para ti una solución de un sistema de ecuaciones?

Análisis a priori de los ítems

i. ¿Qué es para ti una ecuación lineal?

Se espera que los estudiantes escriban que una ecuación lineal es una igualdad en la que hay una o dos variables desconocidas llamadas incógnitas. Y se *representan algebraicamente como $ax + b = 0$ para el caso de una variable y $ax + by = c$ para el caso de dos variables.*

ii. **¿Qué es para ti una solución de una ecuación lineal?**

Se espera que los estudiantes escriban que las soluciones son los valores de las incógnitas que hacen que la ecuación sea verdadera.

iii. **¿Los pares ordenados $(\mathbf{1},\mathbf{3})$ $\boldsymbol{y}$ $(\mathbf{-3}\,,\mathbf{1})$ son soluciones de la ecuación $\boldsymbol{x - 2y = -5}$?. Explica.**

Para este ítem se espera que el estudiante reemplace cada uno de los pares ordenados entregados en la ecuación lineal verificando si se cumple la igualdad y así lograr determinar cuál de ellos es solución de la ecuación.

<u>Estrategia N° 1</u>

El estudiante reemplazará cada par ordenando en la ecuación por separado y verificará que ambas son soluciones de la ecuación, para luego realizar el mismo procedimiento en el sistema de ecuaciones.

Primero se reemplazará los pares $(1,3)$ y $(-3\,,1)$ en la ecuación $x - 2y = -5$, por separado.

<u>Caso N° 1</u>

Cuando el par ordenado es $(1,3)$

$x - 2y = -5$ Reemplazando el par ordenando $(1,3)$ tenemos $1 - 6 = -5$

De lo anterior el par ordenando $(1,3)$ satisface la igualdad, luego es solución de la ecuación.

<u>Caso N° 2</u>

Cuando el par ordenado es $(-3,1)$

$x - 2y = -5$ Reemplazando el par ordenando $(-3,1)$ tenemos $-3 - 2 = -5$

De lo anterior el par ordenando $(-3,1)$ satisface la igualdad, luego es solución de la ecuación.

Por lo tanto con la información recopilada, se tiene que los pares ordenados $(1,3)$ y $(-3\ ,1)$ son soluciones de la ecuación $x - 2y = -5$.

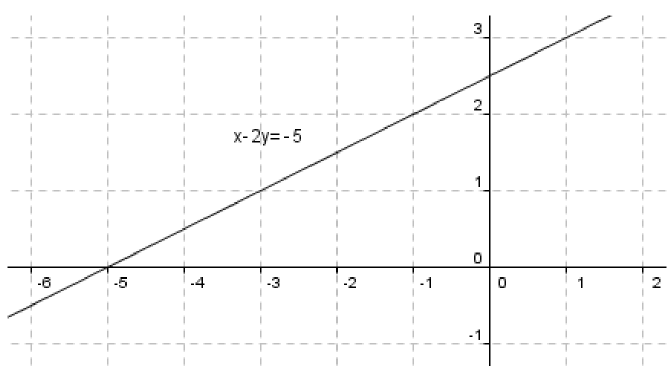
<u>Posibles errores ítem iii.</u>

En este caso los estudiantes podrían cometer un error de tipo algebraico y aritmético, es decir, podrían errar en el uso de las propiedades de la igualdad o errar en las operaciones elementales respectivamente.

iv. Al graficar la ecuación $x - 2y = -5$ en el plano cartesiano

¿Qué forma tiene la gráfica?

Se espera que los estudiantes representen que la gráfica tiene la forma de una línea recta.



¿Qué relación hay entre esa gráfica y la ecuación lineal presentada?

Se espera que los estudiantes escriban que la gráfica representa el conjunto solución de la ecuación lineal $x - 2y = -5$

<u>Posibles errores ítem iv.</u>

En este caso los estudiantes podrían errar al realizar el pasaje del registro algebraico al registro gráfico, determinando una gráfica distinta a la pedida.

v. **¿Qué es para ti un sistema de ecuaciones lineales?**

Se espera que los estudiantes escriban que un sistema de ecuaciones es un conjunto de dos o más ecuaciones con varias incógnitas.

vi. **¿Qué es para ti una solución de un sistema de ecuaciones?**

Se espera que los estudiantes escriban que una solución al sistema corresponde a un par ordenado (x,y), de modo que al remplazar el valor de cada incógnita en las ecuaciones se satisface la igualdad.

Análisis A priori pregunta N° 2

Se espera que el estudiante entienda que en el problema de planteo existen dos variables involucradas las que posteriormente deberá expresar por medio de letras y finalmente lo modele a través de un sistema de ecuaciones lineales con dos variables reales. Y domine la resolución de sistemas de ecuaciones en dos variables justificando cada paso.

En esta pregunta se espera que el estudiante realice un cambio de registro, específicamente un pasaje del lenguaje natural al registro algebraico.

2) Si en el supermercado por 3 Kg de manzanas y 2 Kg de naranjas pago $900, pero si compro 2 Kg de manzanas y 4 Kg de naranjas, pago $ 850, ¿Cuánto cuesta el Kg de naranjas? Justifica cada paso del desarrollo del problema.

Posibles estrategias de los estudiantes

Estrategia N° 1

El estudiante realiza un cambio de registro, es decir, expresar el problema planteado en lenguaje natural y llevarlo a un registro algebraico, para luego resolverlo por algún método algebraico[2].

"x" representa el precio de un kilo de manzanas e "y" representa el precio de un kilo de naranjas.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 900 \\ 2x + 4y = 850 \end{cases}$$

Se resuelve utilizando algún método algebraico en este caso utilizaremos el método de reducción

$$\begin{cases} 3x + 2y = 900 \quad /\cdot -2 \\ 2x + 4y = 850 \quad /\cdot 3 \end{cases}$$

[2] Puede ser cualquiera de los métodos algebraicos enseñados: igualación, sustitución, reducción.

Al multiplicar la primera ecuación por (-2) y la segunda ecuación por (3) a cada uno de los términos a ambos lados de la igualdad, se obtiene sistema equivalente:

$$\begin{cases} -6x - 4y = -1800 \\ 6x + 12y = 2550 \end{cases}$$

si ahora se suman ambas ecuaciones, respetando lo que está a cada lado de la igualdad, obtenemos:

$$\begin{cases} -6x - 4y = -1800 \\ 6x + 12y = 2550 \end{cases} \quad (+)$$

$$8y = 750 \quad /\cdot \frac{1}{8}$$

Luego amplificamos la ecuación por el inverso multiplicativo de 8, es decir, $\frac{1}{8}$.

$$\frac{8y}{8} = \frac{750}{8}$$

Seguido de esto simplificamos

$$y = \frac{750}{8}$$

Posteriormente dividimos

$$y \approx 94$$

Luego con lo anterior tenemos que el precio de un kilo de naranjas vale $\$94$

<u>Posibles errores</u>

El estudiante podría errar, al realizar el pasaje del lenguaje natural al registro algebraico, modelando el problema de planteo en otro sistema de ecuaciones lineales que no sea equivalente al pedido.

El estudiante podría cometer errores de tipo aritméticos (operaciones básicas) en la resolución del sistema de ecuaciones lineales modelado, llevándolo a obtener una solución incorrecta en relación al problema planteado.

Análisis A Priori pregunta N° 3

Se espera que el estudiante aplique los conocimientos sobre lo que es una solución de un sistema de ecuaciones, es decir, que los estudiantes reemplacen cada uno de los pares ordenados en el sistema de ecuaciones lineales presentado y determinen cuál de ellos es solución del sistema.

En esta pregunta se busca que los estudiantes realicen un tratamiento dentro del mismo registro algebraico.

3) ¿Los pares ordenados $(1,3)$ y $(-3,1)$ son soluciones del sistema $\begin{cases} x-2y=-5 \\ x+y=4 \end{cases}$?
Justificar tu respuesta.

Posibles estrategias de los estudiantes

Estrategia N° 1

El estudiante reemplazará cada par ordenando en el sistema de ecuaciones por separado y verificará cuál de ellas es (son) la(s) solución(es) del sistema.

Se procederá a reemplazar los pares ordenados $(1,3)$ y $(-3\,,1)$ en el sistema

$$\begin{cases} x-2y=-5 \\ x+y=4 \end{cases}$$

Caso N° 1

Cuando el par ordenado es $(1,3)$

$\begin{cases} x-2y=-5 \\ x+y=4 \end{cases}$ reemplazando el par ordenando $(1,3)$ tenemos $\begin{cases} 1-2\cdot(3)=-5 \\ 1\;+\;3\;=\;4 \end{cases}$

De lo anterior el par ordenando $(1,3)$ satisface las igualdades, luego es solución del sistema de ecuaciones.

Caso N° 2

Cuando el par ordenado es $(-3{,}1)$

$\begin{cases} x - 2y = -5 \\ x + y = 4 \end{cases}$ reemplazando el par ordenando $(-3{,}1)$ tenemos $\begin{cases} -3 - 2 \cdot (1) = -5 \\ -3 \;+\; 1 \;=\; 4 \end{cases}$

De lo anterior el par ordenando $(-3{,}1)$ no satisface las igualdades, luego no es solución del sistema de ecuaciones.

Estrategia N° 2

El estudiante resolverá el sistema de ecuaciones por algún método, con el fin de encontrar la solución para así verificar si los pares son soluciones del sistema.

Se procederá a resolver el sistema $\begin{cases} x - 2y = -5 \\ x + y = 4 \end{cases}$

$$\begin{cases} x - 2y = -5 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

Se resuelve por el método de reducción

$$3y = 9$$

$$y = 3 \;;\; x = 1$$

Con lo anterior tenemos que la solución del sistema es única y es el par ordenado $(1{,}3)$. Luego como la solución al sistema de ecuaciones es única, el par ordenado $(-3{,}1)$ no es solución al sistema.

Posibles errores

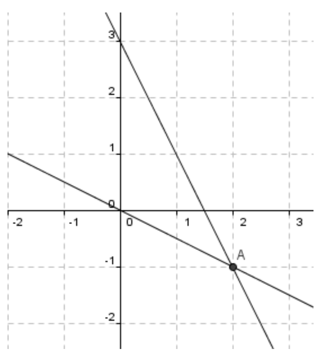
El estudiante podría cometer errores de tipo aritméticos (operaciones básicas) en la resolución del sistema de ecuaciones lineales modelado.

Análisis A priori pregunta N° 4

Se espera que el estudiante analice e intérprete la representación gráfica presentada en el plano cartesiano, para luego observar el par ordenado el cual representa la intersección entre ambas rectas. Seguido de esto, utilice este par y lo reemplacen en cada uno de los sistemas de ecuaciones lineales presentados para verificar si se cumple la igualdad y así determinar cuál es el sistema que corresponde a la gráfica.

En esta pregunta los estudiantes podrían realizar un pasaje del registro algebraico al registro gráfico o viceversa. O también realizar un tratamiento dentro de un mismo registro, en especial un tratamiento dentro del registro algebraico.

4) La gráfica corresponde a las ecuaciones de uno de los dos sistemas dados ¿a cuál? Justifique



$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

Posibles estrategias utilizadas por los estudiantes

Estrategia N° 1

El par ordenado $(2, -1)$ es la solución común que poseen ambas ecuaciones lineales. En este caso $(2, -1)$ es la solución del sistema

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$ Pues al reemplazar $$\begin{cases} 2 \cdot (2) - 1 = 3 \\ 2 - 2 \cdot (1) = 0 \end{cases}$$

Estrategia N° 2

Se analiza las representaciones de las rectas asociados a los sistemas de ecuaciones presentados.

Caso a) $y = -2x + 3$, la recta intersecta en el eje OY en el par ordenado (*0,3*), tiene pendiente negativa, se intersecta en el eje OX en el par ordenado $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ y el par $(2, -1)$ pertenece a la recta.

$y = x$, esta recta intersecta con el eje OY en (*0,0*), tiene pendiente positiva, además intersecta con el eje OX en par $(0,0) y\ el\ par$ $(2, -1)$ no pertenece a la recta.

Caso b) $y = -2x + 3$, esta recta intersecta con el eje OY en el par (*0,3*), tiene pendiente negativa, además intersecta en el eje OX en el par $\left(\frac{3}{2}, 0\right) y\ el\ par$ $(2, -1)$ pertenece a la recta.

$y = -x/2$, la recta intersecta con el eje OY en el par (*0,0*), tiene pendiente negativa, además intersecta en el eje OX en el par $(0,0) y\ el\ par$ $(2, -1)$ pertenece a la recta.

Por lo anterior la gráfica corresponde al sistema asociado a estas rectas.

Estrategia N° 3

Para obtener el sistema asociado a la gráfica se resuelve cada sistema para obtener el punto de intersección de las rectas siendo este el $(2, -1)$.

Caso a)

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

Por método de reducción se tiene:

$$3x = 3$$

$$x = 1\ ;\ y = 1$$

Por lo tanto la solución del sistema es el par (*1,1*), sin embargo este par no corresponde a la intersección de las rectas de la grafica.

Caso b)

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

Por reducción se tiene:

$$3x = 6$$

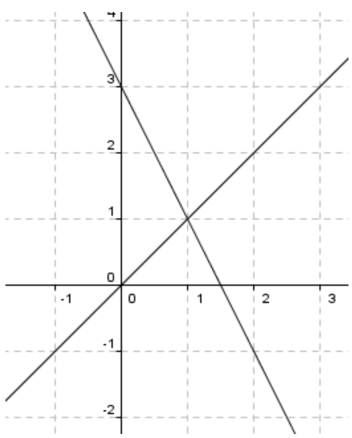
$$x = 2 \;\; e \;\; y = -1$$

De lo anterior se tiene que la intersección entre las dos rectas es el punto (2,-1)

<u>Estrategia N° 4</u>

Se representa gráficamente los sistemas entregados y luego se comparan estas con la gráfica otorgada.

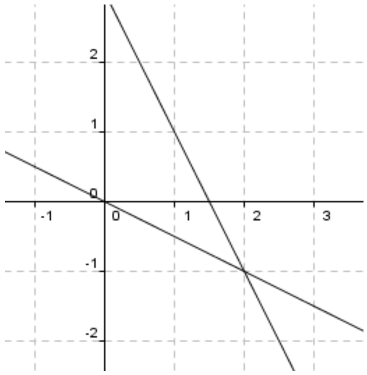
Para el primer sistema de ecuaciones lineales tenemos la siguiente representación gráfica.



$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

Según la representación del sistema anterior y al comparar con la gráfica otorgada se puede afirmar que no es la gráfica que representa las soluciones del sistema.

Para el segundo sistema de ecuaciones lineales tenemos la siguiente representación gráfica.



$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

Según la representación del sistema anterior y al comparar con la gráfica otorgada se puede afirmar que es la gráfica que representa las soluciones del sistema.

<u>Posibles errores</u>

El estudiante podría cometer el error de tomar el par ordenado equivocado.

El estudiante podría cometer errores de tipo aritméticos (operaciones básicas) en la resolución del sistema de ecuaciones lineales modelado.

Análisis A priori pregunta N° 5

Se espera que el estudiante represente gráficamente el sistema planteado, con el propósito que al expresarlas en su forma gráfica observen que ambas rectas son coincidentes y que concluyan que las soluciones del sistema son infinitas.

En esta pregunta se espera que los estudiantes realicen un pasaje entre registros, específicamente un cambio del registro algebraico al registro gráfico.

5) Al resolver el siguiente sistema de ecuaciones gráficamente.

$$\begin{cases} 2x + 2y = -4 \\ -x - y = 2 \end{cases}$$

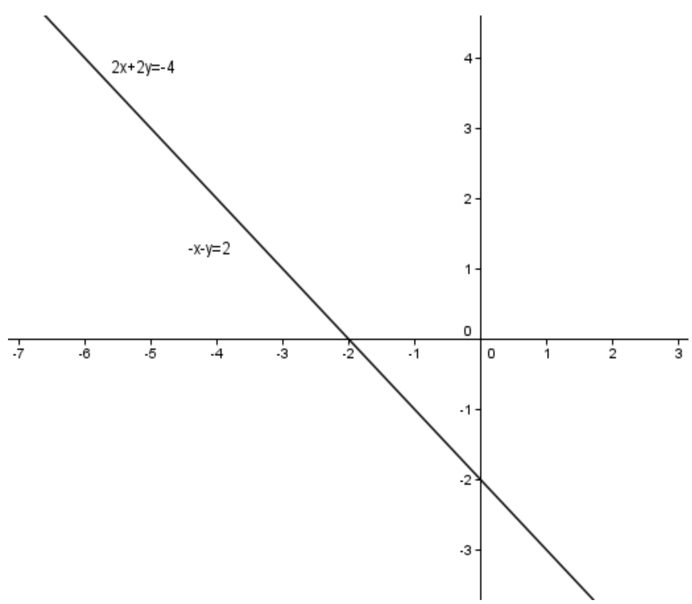
I. ¿Cuál es la relación entre las gráficas que representan las ecuaciones?

II. ¿Qué puedes decir respecto a las soluciones del sistema?

Posibles estrategias utilizadas por los estudiantes

Estrategia N° 1

Se representa gráficamente en el plano cartesiano, el conjunto solución de cada una de las ecuaciones planteadas en el sistema de ecuaciones lineales.



I. ¿Cuál es la relación entre las gráficas que representan las ecuaciones?

Se espera que los estudiantes escriban la relación que existe entre las gráficas es que las dos rectas son coincidentes, es decir, una recta esta encima de la otra.

II. ¿Qué puedes decir respecto a las soluciones del sistema?

Se espera que los estudiantes escriban el sistema posee infinitas soluciones.

<u>Posibles errores</u>

El estudiante podría errar al realizar el pasaje del registro algebraico al registro gráfico, es decir, podría errar al graficar cada una de las ecuaciones en plano cartesiano.

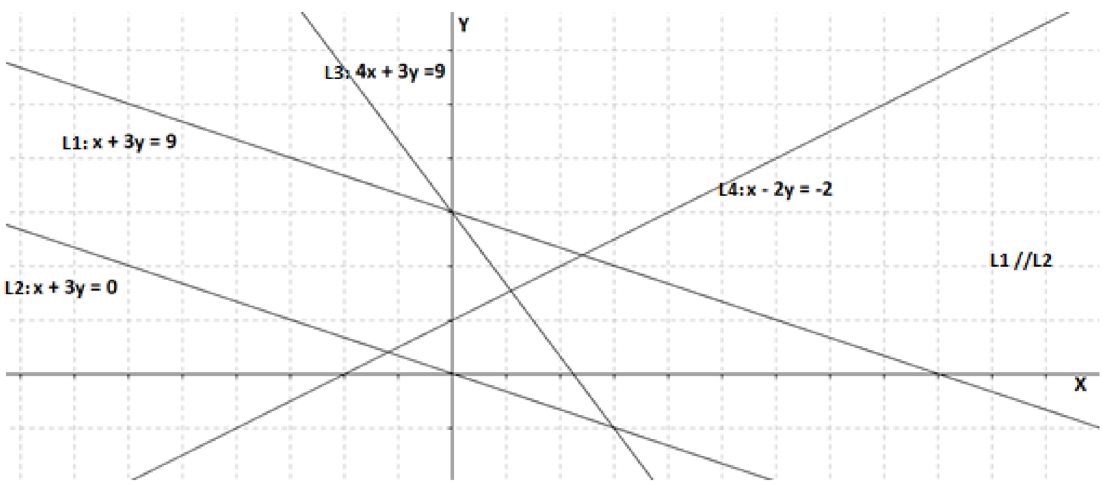
Análisis A priori pregunta N° 6

Para el caso i, ii se espera que el estudiante observe, analice e interprete los datos de la gráfica expresados en el plano cartesiano, para luego observar la ubicación de cada par ordenado entregado. Seguido de esto que verifique las rectas que pasan por dicho par ordenado y finalmente escriba las rectas que conforman el sistema pedido.

Para el caso iii se espera que el estudiante observe, analice e intérprete los datos de la gráfica expresados en el plano cartesiano identificando las rectas paralelas que están presente en el plano, con el fin conformar un sistema de ecuaciones lineales sin solución.

Además en esta pregunta se espera que los estudiantes realicen un pasaje entre registros, específicamente un cambio del registro gráfico al algebraico.

6) Observa el gráfico y responde



I. Responde a partir del grafico y escribe un sistema cuya solución es el par $(3,-1)$, es decir $\{x = 3 \ e \ y = -1\}$. Justifica tu respuesta.

II. Responde a partir del grafico y escribe un sistema cuya solución$(0,3)$, es decir $x = 0 \ e \ \ y = 3\}$. Justifica tu respuesta.

III. Responde a partir del grafico y escribe un sistema que no tenga solución. Justifica tu respuesta.

Posibles estrategias utilizadas por los estudiantes

Estrategia N° 1

I. Responde a partir del grafico y escribe un sistema cuya solución es el par $(\mathbf{3}, -\mathbf{1})$, es decir $\{\boldsymbol{x} = \mathbf{3}\ \boldsymbol{e}\ \boldsymbol{y} = -\mathbf{1}\}$. Justifica tu respuesta.

Se espera que los estudiantes identifiquen el par ordenado $(3, -1)$ en el plano cartesiano, para luego identificar las rectas que pasan por dicho par. Entonces observando la gráfica se ve que las rectas L_3 y L_2 se interceptan en el par $(3, -1)$, siendo éste la solución del sistema.

$$\begin{cases} 4x + 3y = 9 \\ x + 3y = 0 \end{cases}$$

II. **Responde a partir del grafico y escribe un sistema cuya solución$(\mathbf{0}, \mathbf{3})$, es decir $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}\ \boldsymbol{e}\ \ \boldsymbol{y} = \mathbf{3}\}$. Justifica tu respuesta**.

Se espera que los estudiantes identifiquen el par ordenado $(0,3)$ en el plano cartesiano, para luego identificar las rectas que pasan por dicho par. Entonces observando la gráfica se ve que las rectas L_1 y L_3 se interceptan en el par $(0,3)$, siendo éste la solución del sistema.

$$\begin{cases} 4x + 3y = 9 \\ x + 3y = 9 \end{cases}$$

III. Responde a partir del grafico y escribe un sistema que no tenga solución. Justifica tu respuesta.

La condición para que un sistema de ecuaciones no tenga solución es que las rectas asociadas a dicho sistema sean paralelas, luego basta observar en la gráfica rectas que sean paralelas. Por lo tanto las rectas que cumplen con la condición son L_1 y L_2, luego el sistema quedará:

$$\begin{cases} x + 3y = 9 \\ x + 3y = 0 \end{cases}$$

Posibles errores

El estudiante podría errar al ubicar e identificar los pares ordenados dados en el plano cartesiano, es decir, el alumno puede errar al ubicar e identificar la abscisa como ordenada y la ordenada como abscisa.

CAPITULO 5: ANÁLISIS A POSTERIORI

Análisis A Posteriori pregunta N° 1

Con lo analizado en los cuestionarios respecto a la pregunta N° 1, se procederá a analizar cada uno de los ítems por separado mostrando las distintas respuestas de los estudiantes.

- ✓ Para el ítem (i.) se pueden destacar dos categorías de respuestas dadas por los estudiantes "interpretación algebraica" y "interpretación geométrica".

Categoría N° 1: Interpretación algebraica

Dentro de esta categoría tenemos dos tipos de respuestas entregadas por los estudiantes, la primera de tipo procedimental, ya que, los alumnos tienen una idea del concepto como un proceso para encontrar una incógnita.

1) Responder las siguientes preguntas.
   i. ¿Qué es para ti una ecuación lineal?

Es una igualdad que nos permite hallar una incognita.

En la segunda los estudiantes tienen una concepción de la ecuación lineal como una expresión algebraica con una sola incógnita.

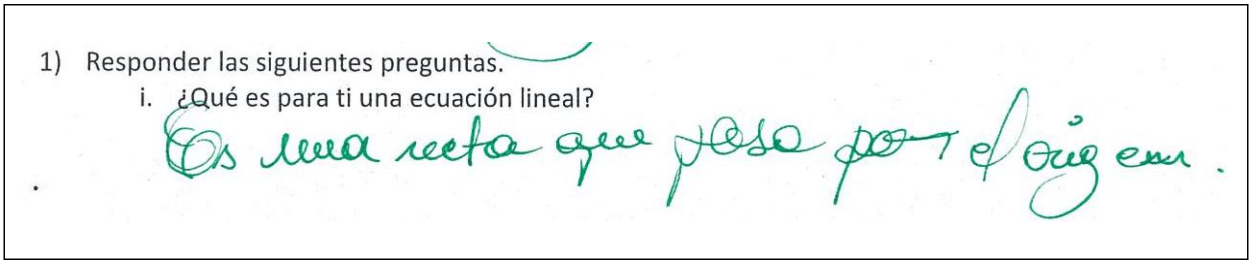
1) Responder las siguientes preguntas.
   i. ¿Qué es para ti una ecuación lineal?

para mi es una ecuación con una sola incognita

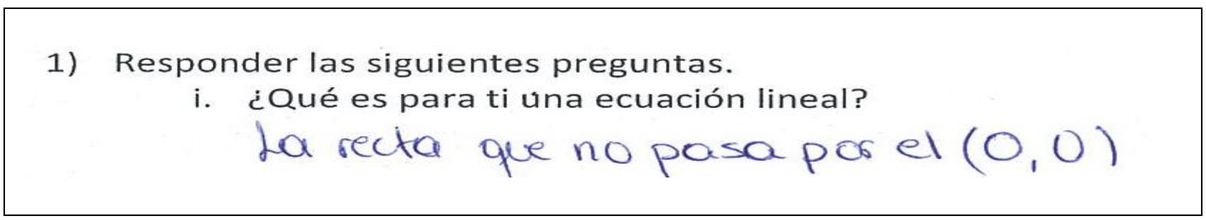
Las respuestas entregadas por 17 estudiantes en esta categoría tienen un enfoque de tipo algebraico.

Categoría N° 2: Interpretación geométrica

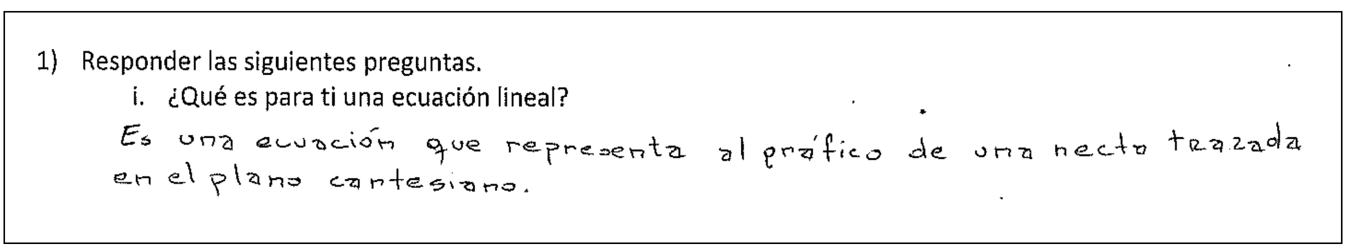
Dentro de esta categoría tenemos tres respuestas entregadas por los estudiantes, en la primera afirmaron que para ellos una ecuación lineal es aquella que pasa por el origen y solo lo relacionan con la representación gráfica de una función lineal.


1) Responder las siguientes preguntas.
i. ¿Qué es para ti una ecuación lineal?
Es una recta que pasa por el origen.

En la segunda respuesta dada por los alumnos, ellos afirmaron que una ecuación lineal es una recta la cual no pasa por el origen y que lo denotan como par (0,0). Se observa que la relacionan solo con una representación gráfica de una función afín.


1) Responder las siguientes preguntas.
i. ¿Qué es para ti una ecuación lineal?
La recta que no pasa por el (0,0)

En la tercera respuesta dada por lo estudiantes, ellos afirmaron que una ecuación lineal es aquella que puede ser representada o graficada en el plano cartesiano mediante en una recta.


1) Responder las siguientes preguntas.
i. ¿Qué es para ti una ecuación lineal?
Es una ecuación que representa al gráfico de una recta trazada en el plano cartesiano.

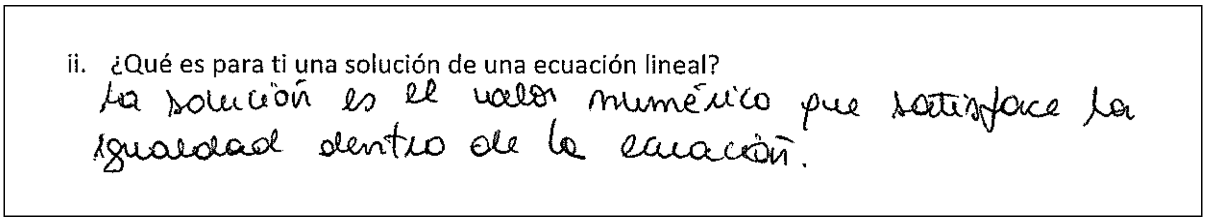
Las respuestas entregadas por los estudiantes en esta categoría tienen un enfoque de tipo geométrico, ya que, la identifican con su representación geométrica. Además la cantidad de respuestas entregadas en esta categoría fueron 27.

Para el ítem i, tenemos que 12 alumnos dejaron en blanco esta respuesta.

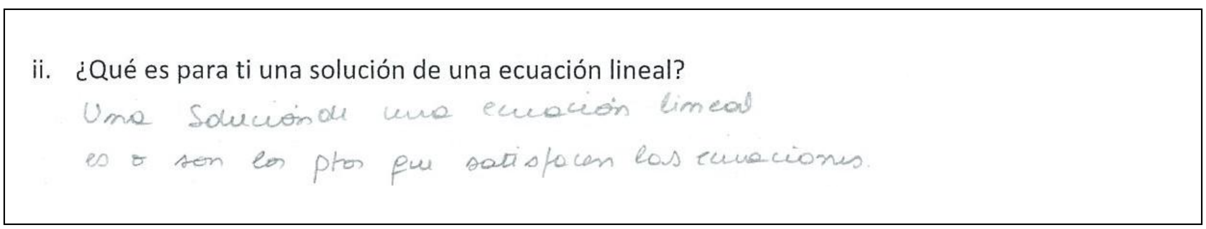
- ✓ Para el ítem (ii.) se pueden destacar 3 categorías de respuestas dadas por los estudiantes, la “tipo algebraica”, la “tipo geométrica” y la “tipo aritmético”.

<u>Categoría N° 1: tipo algebraica</u>

Dentro de esta categoría tenemos dos respuestas entregadas por los estudiantes, en la primera ellos afirmaron que una solución de una ecuación lineal es el valor numérico que satisface la igualdad dentro de la ecuación.


ii. ¿Qué es para ti una solución de una ecuación lineal?
La solución es el valor numérico que satisface la igualdad dentro de la ecuación.

En la segunda respuesta dada por los alumnos, ellos afirmaron que para ellos una solución de una ecuación lineal es o son los puntos que satisfacen las ecuaciones.


ii. ¿Qué es para ti una solución de una ecuación lineal?
Una Solución de una ecuación lineal
es o son los ptos que satisfacen las ecuaciones.

La cantidad de respuestas entregadas por los estudiantes en esta categoría son 10.

<u>Categoría N° 2: tipo geométrica</u>

Dentro de esta categoría tenemos dos respuestas entregadas por los estudiantes, la primera ellos afirmaron que una solución de una ecuación lineal son los puntos por donde pasa la recta en el plano cartesiano.

ii. ¿Qué es para ti una solución de una ecuación lineal?

los puntos por donde pasa la recta en un ~~punto~~ plano cartesia

Y en la segunda respuesta los estudiantes afirmaron que la solución de una ecuación lineal es el punto de intersección entre dos rectas. Acá los alumnos confunden la solución de una ecuación lineal con la solución de un sistema de ecuaciones lineales.

ii. ¿Qué es para ti una solución de una ecuación lineal?

Es el punto de intersección entre dos rectas

La cantidad de respuestas entregadas por los estudiantes en esta categoría son 16.

Categoría N° 3: tipo aritmético

Dentro de esta categoría tenemos una respuesta entregada por los estudiantes, en donde ellos afirmaron que la solución de una ecuación lineal es el valor numérico de la incógnita que tiene la ecuación. La cantidad de respuestas entregadas por los estudiantes en esta categoría son 11.

ii. ¿Qué es para ti una solución de una ecuación lineal?

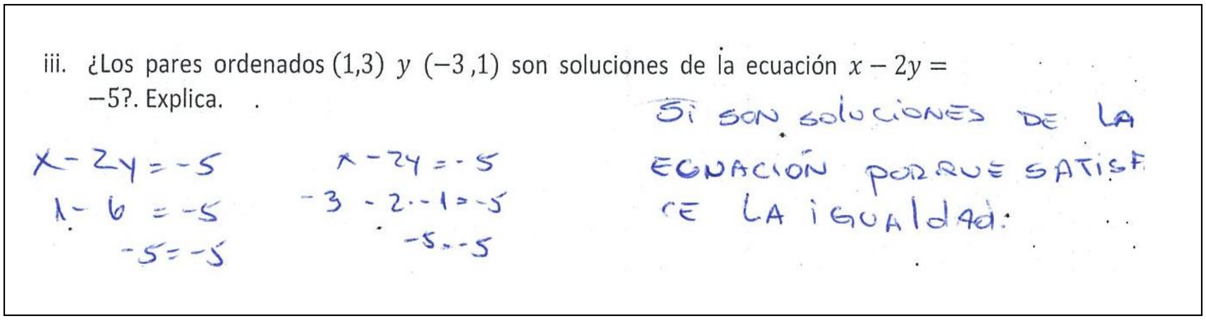
La solución de una ecuación lineal es el valor numérico de la incógnita que tiene la ecuación propiamente tal.

Finalmente para el ítem ii, tenemos que 19 alumnos dejaron en blanco esta respuesta.

- ✓ Para el ítem (iii.) se pueden destacar dos categorías de respuesta dadas por los estudiantes, “conceptual” y “procedimental”.

<u>Categoría N° 1: conceptual</u>

En esta categoría tenemos una respuesta dada por los estudiantes, en donde ellos reemplazan cada par ordenado en la ecuación presentada y luego proceden a responder explicando o justificando su respuesta.



iii. ¿Los pares ordenados $(1,3)$ y $(-3,1)$ son soluciones de la ecuación $x-2y=-5$?. Explica.

$x-2y=-5$
$1-6=-5$
$-5=-5$

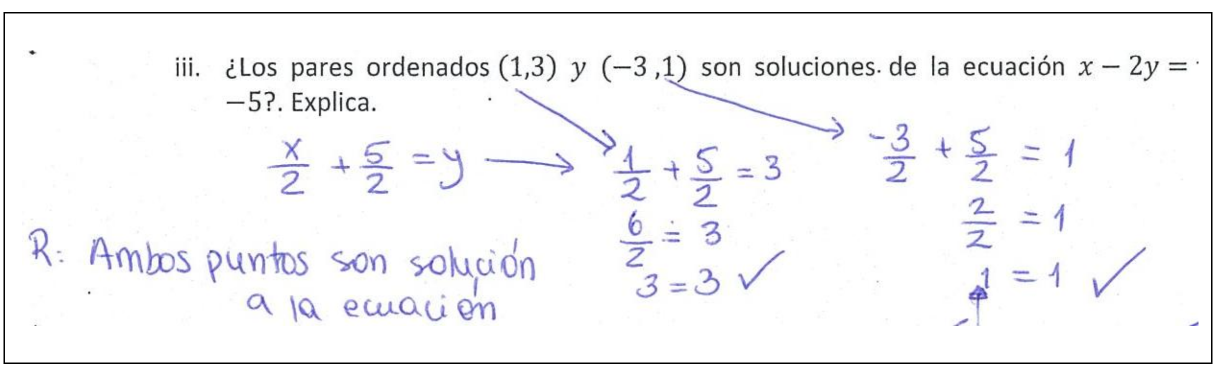
$x-2y=-5$
$-3-2\cdot 1=-5$
$-5=-5$

SI SON SOLUCIONES DE LA EGUACIÓN PORQUE SATISFACE LA IGUALDAD.

La cantidad de respuestas entregadas por los estudiantes en esta categoría son 28 y esta misma cantidad logro realizar un tratamiento dentro del registro algebraico.

<u>Categoría N° 2: procedimental</u>

En esta segunda categoría los estudiantes despejaron la variable “y”, a continuación procedieron a reemplazar ambos pares ordenados en la ecuación y finalmente respondieron a la pregunta solicitada explicando o justificando su respuesta. La cantidad de respuestas entregadas por los estudiantes en esta categoría son 9 y esta misma cantidad logro realizar un tratamiento dentro del registro algebraico.



iii. ¿Los pares ordenados $(1,3)$ y $(-3,1)$ son soluciones de la ecuación $x-2y=-5$?. Explica.

$\frac{x}{2}+\frac{5}{2}=y \longrightarrow \frac{1}{2}+\frac{5}{2}=3$
$\frac{6}{2}=3$
$3=3$ ✓

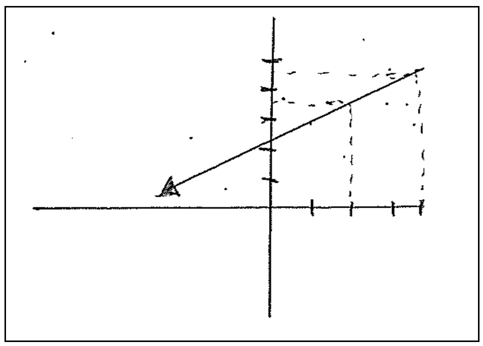
$-\frac{3}{2}+\frac{5}{2}=1$
$\frac{2}{2}=1$
$1=1$ ✓

R: Ambos puntos son solución a la ecuación

Finalmente para el ítem iii, tenemos que 19 alumnos dejaron en blanco esta respuesta. Además es esta misma cantidad de estudiantes los que realizan un tratamiento dentro del registro algebraico.

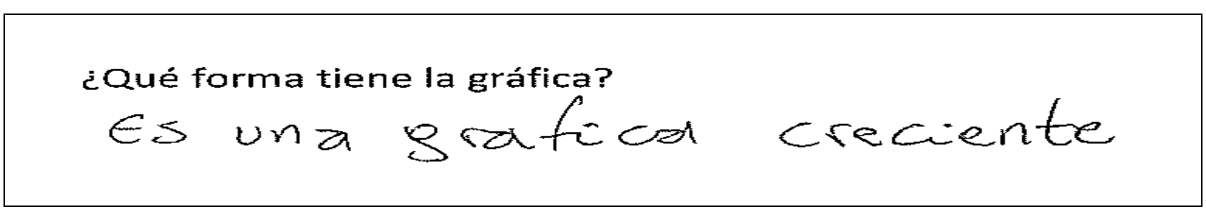
- ✓ Para el ítem (iv.) se observan dos ítems.
    - En el primer ítem se pueden destacar una categoría de respuestas dadas por los estudiantes, la “tipo geométrico”.

Categoría N° 1: tipo geométrico



Dentro de esta categoría tenemos tres respuestas entregadas por los estudiantes, la primera ellos afirmaron que la ecuación $x - 2y = -5$ es un objeto geométrico llamado recta.

En la segunda respuesta dada por los alumnos, ellos afirmaron que la ecuación $x - 2y = -5$ es una gráfica creciente. Con esto no se puede afirmar que la gráfica es una recta, ya que no especifica la forma que tiene, la cual puede ser de cualquier tipo por ejemplo cóncava.



Y en la tercera respuesta dada por los estudiantes, ellos afirmaron que la ecuación $x - 2y = -5$ es una recta creciente o ascendente. Ver figura A y figura B

Figura A

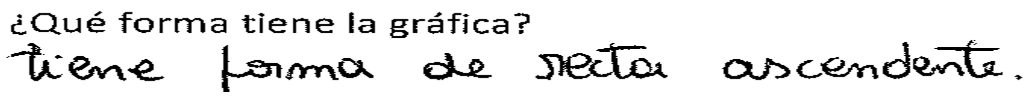
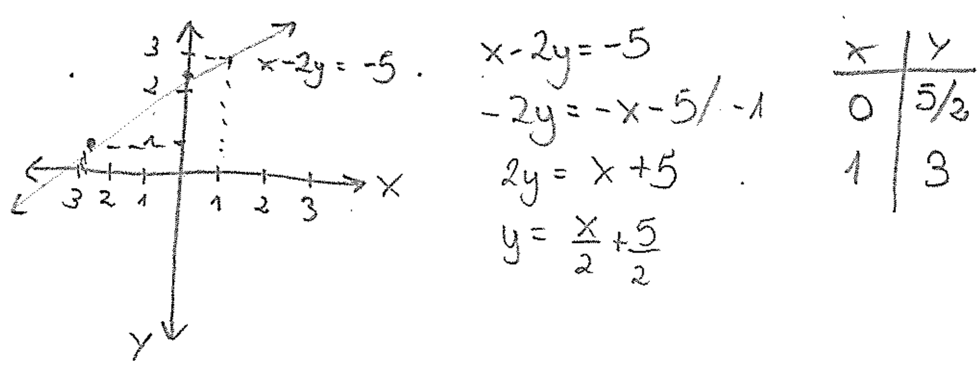


Figura B

La cantidad de respuestas entregadas por los estudiantes en esta categoría son 15.

- En el segundo ítem se pueden destacar dos tipos de categorías de respuestas dadas por los estudiantes, la “tipo algebraico” y la “tipo geométrico”

<u>Categoría N° 1: tipo algebraico</u>



Dentro de esta categoría tenemos tres respuestas entregadas por los estudiantes, en la primera ellos tienen una concepción errónea al creer que la ecuación lineal y su representación gráfica son iguales, es decir, que ambas son ecuaciones lineales.

- ¿Qué relación hay entre esa gráfica y la ecuación lineal presentada?

la relación que = ambas son ecuaciones lineales

En la segunda respuesta dada por los alumnos, ellos afirmaron que la relación que existe entre la gráfica y la ecuación lineal presentada, es que la gráfica representa la ecuación lineal.

¿Qué relación hay entre esa gráfica y la ecuación lineal presentada?

que la gráfica representa la ecuación lineal.

La cantidad de respuestas entregadas por los estudiantes en esta categoría son 7.

Categoría N° 2: tipo geométrico

Dentro de esta categoría los estudiantes afirmaron que la relación que existe entre la gráfica y la ecuación lineal presentada, es que ambos puntos dados como soluciones forman parte de la recta graficada. La cantidad de respuestas entregadas por los estudiantes en esta categoría son 4.

¿Qué relación hay entre esa gráfica y la ecuación lineal presentada?

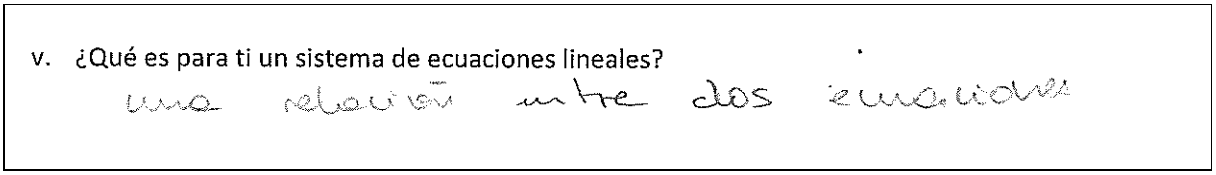
la relación es que ambos puntos dados como soluciones, forman parte de la recta graficada.

Finalmente la cantidad de respuestas entregadas por los estudiantes en esta categoría son 9.

- ✓ Para el ítem (v.) se pueden destacar dos categorías de respuestas dadas por los estudiantes, la "tipo algebraica" y la "tipo geométrica".

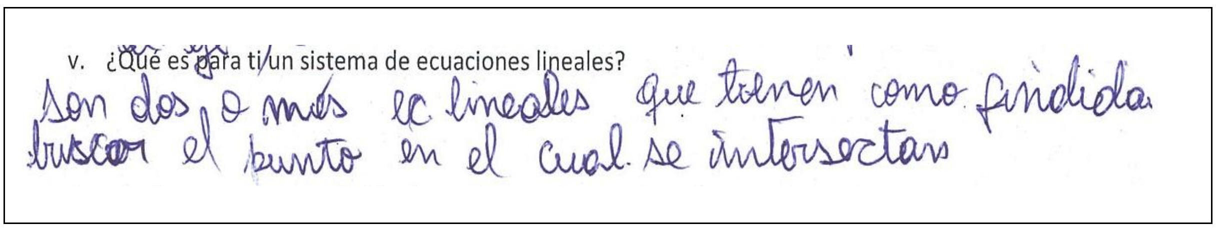
<u>Categoría N° 1: tipo algebraica</u>

Dentro de esta categoría los estudiantes afirmaron que para ellos un sistema de ecuaciones lineales es una relación entre dos ecuaciones, pero no especificaron el tipo de relación que existe. La cantidad de respuestas entregadas por los estudiantes en esta categoría son 16.

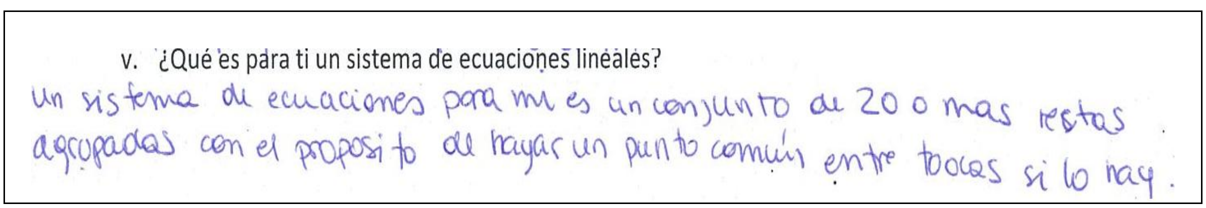

v. ¿Qué es para ti un sistema de ecuaciones lineales?
una relación entre dos ecuaciones

<u>Categoría N° 2: tipo geométrico</u>

Dentro de esta categoría tenemos tres respuestas entregadas por los estudiantes, en la primera ellos afirmaron que un sistema de ecuaciones lineales son dos o más ecuaciones lineales, que tiene por finalidad buscar el punto en el cual se intersectan las rectas.


v. ¿Qué es para ti un sistema de ecuaciones lineales?
Son dos o más ec lineales que tienen como finalidad buscar el punto en el cual se intersectan

En la segunda respuesta dada por los alumnos, ellos afirmaron que un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de dos o más rectas agrupadas con el propósito de encontrar un punto en común entre todas, si es que existe. Aca el estudiante confunde el par ordenado con el punto, relacionando el objeto geométrico con el objeto algebraico.


v. ¿Qué es para ti un sistema de ecuaciones lineales?
un sistema de ecuaciones para mi es un conjunto de 2 o mas restas agrupadas con el proposito de hayar un punto común entre todas si lo hay.

Y en la tercera respuesta dada por los estudiantes, ellos afirmaron que para ellos un sistema de ecuaciones lineales es una relación entre dos rectas, pero no especificaron el tipo de relación que existe.

v. ¿Qué es para ti un sistema de ecuaciones lineales?

La relación entre dos rectas.

La cantidad de respuestas entregadas por los estudiantes en esta categoría son 9.

Finalmente para el ítem v, tenemos que 31 alumnos dejaron en blanco esta respuesta.

- ✓ Para el ítem (vi.) se pueden destacar dos categorías de respuestas dadas por los estudiantes, la “tipo algebraico” y la “tipo geométrico”.

<u>Categoría N° 1: tipo algebraico</u>

Dentro de esta categoría los estudiantes afirmaron que para ellos una solución de un sistema de ecuaciones lineales es el punto el cual satisface a las ecuaciones o sistema. La cantidad de respuestas entregadas por los estudiantes en esta categoría son 9.

vi. ¿Qué es para ti una solución de un sistema de ecuaciones?

tener los puntos que satisfacen ambas ecuaciones.

<u>Categoría N° 2: tipo geométrico</u>

Dentro de esta categoría los estudiantes afirmaron que para ellos una solución de un sistema de ecuaciones lineales es un punto en donde se intersectan las rectas. La cantidad de respuestas entregadas por los estudiantes en esta categoría son 16.

vi. ¿Qué es para ti una solución de un sistema de ecuaciones? El punto de intersección entre ambas rectas.

Finalmente para el ítem vi, tenemos que 31 alumnos dejaron en blanco esta respuesta.

Análisis A Posteriori pregunta N° 2

Con lo analizado en los cuestionarios respecto a la pregunta N° 2 se pueden distinguir dos categorías de respuestas "correctas" e "incorrectas".

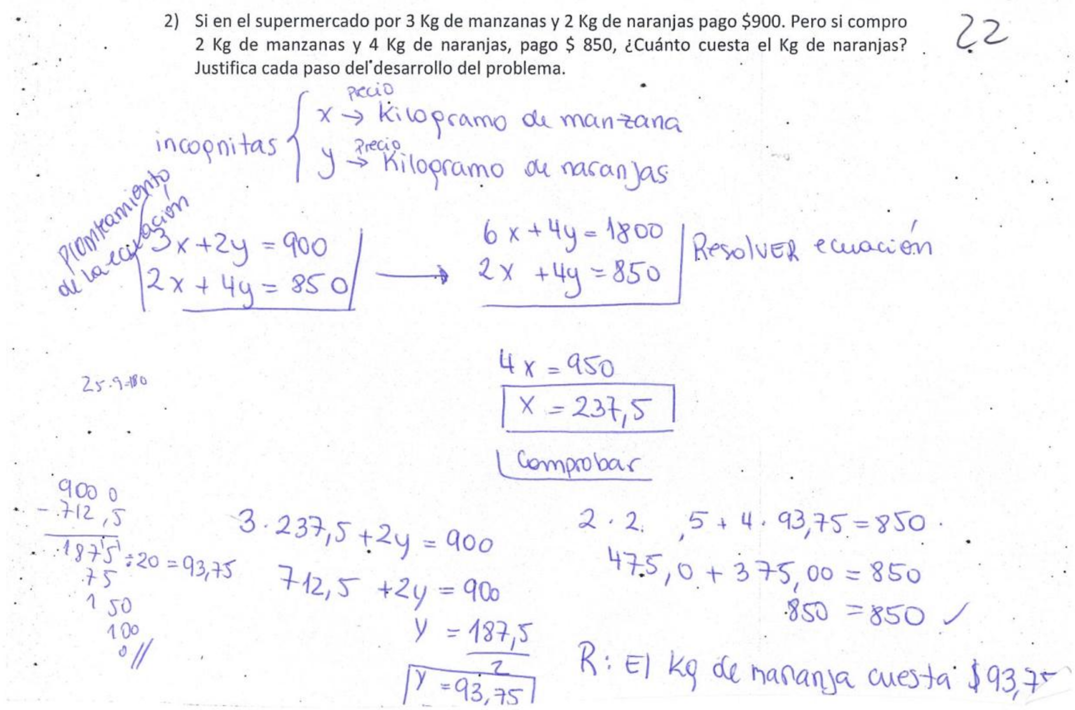
Categoría N° 1: respuestas correctas

En esta categoría los estudiantes rescataron los datos importantes del problema de planteo, luego determinaron cuales son las variables y le asignaron distintas letras (entre ellas x, y, M y N) o en otros casos se observa que representaron inmediatamente el sistema de ecuaciones lineales. Seguido de esto procedieron a representar el problema en ecuaciones lineales las cuales conformarán el sistema de ecuaciones. Más tarde resolvieron el sistema de ecuaciones lineales utilizando dos métodos algebraicos, el de reducción y el de sustitución, finalmente respondieron a la pregunta en lenguaje natural.

Para el caso de la resolución por el método de reducción hay estudiantes que inmediatamente determinan el valor de la incógnita (naranjas) que es lo pedido, luego responden adecuadamente a la pregunta en lenguaje natural; por otro lado otros estudiantes determinan ambas incógnitas (manzanas y naranjas) y después responden correctamente a lo que se pregunto en lenguaje natural. La cantidad de respuestas entregadas por los estudiantes que utilizaron el método de reducción fueron 11.Ver figura A

Para el caso de los estudiantes que utilizaron el método de sustitución, primero despejaron una de las incógnitas de una de las ecuaciones lineales asociadas al sistema, ya sea la incógnita que representa a las manzanas o a las naranjas, después la sustituyeron en la otra ecuación lineal y determinaron un valor (manzanas o naranjas), luego reemplazaron el valor encontrado en la cualquier ecuación lineal asociado al sistema de ecuaciones, con el fin de encontrar la otra solución y finalmente responden correctamente, en lenguaje natural lo que se pregunto. La cantidad de respuestas entregadas por los estudiantes que utilizaron el método de sustitución fueron 7. Ver figura B.

Finalmente tenemos que 18 estudiantes lograron realizar el pasaje del registro natural al registro algebraico.



2) Si en el supermercado por 3 Kg de manzanas y 2 Kg de naranjas pago $900. Pero si compro 2 Kg de manzanas y 4 Kg de naranjas, pago $ 850, ¿Cuánto cuesta el Kg de naranjas? Justifica cada paso del desarrollo del problema.

22

incognitas $\begin{cases} x \rightarrow \text{precio Kilogramo de manzana} \\ y \rightarrow \text{precio Kilogramo de naranjas} \end{cases}$

planteamiento de la ecuación

$$\begin{array}{l} 3x + 2y = 900 \\ 2x + 4y = 850 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} 6x + 4y = 1800 \\ 2x + 4y = 850 \end{array}$$

Resolver ecuación

$4x = 950$

$\boxed{x = 237{,}5}$

Comprobar

$3 \cdot 237{,}5 + 2y = 900$

$712{,}5 + 2y = 900$

$y = \frac{187{,}5}{2}$

$\boxed{y = 93{,}75}$

$2 \cdot 2\ \ ,5 + 4 \cdot 93{,}75 = 850$

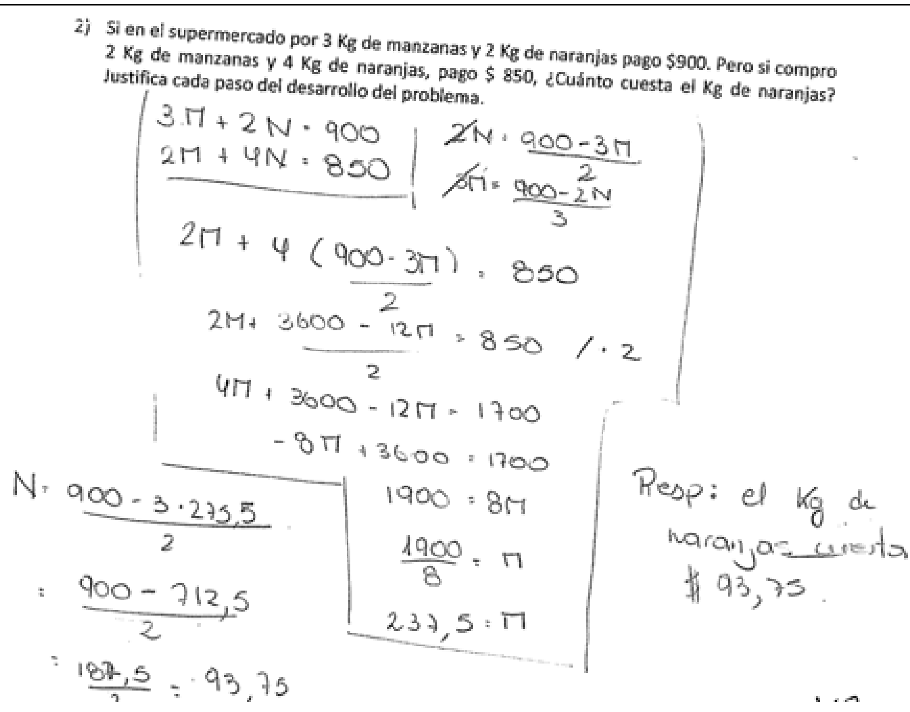
$475{,}0 + 375{,}00 = 850$

$850 = 850$ ✓

R: El kg de naranja cuesta $93,75

9000 − 712,5 = 1875 ÷ 20 = 93,75

Figura A



2) Si en el supermercado por 3 Kg de manzanas y 2 Kg de naranjas pago $900. Pero si compro 2 Kg de manzanas y 4 Kg de naranjas, pago $ 850, ¿Cuánto cuesta el Kg de naranjas? Justifica cada paso del desarrollo del problema.

$3M + 2N = 900$

$2M + 4N = 850$

$\cancel{2}N = \frac{900 - 3M}{2}$

$\cancel{3}M = \frac{900 - 2N}{3}$

$2M + 4\left(\frac{900 - 3M}{2}\right) = 850$

$2M + \frac{3600 - 12M}{2} = 850 \quad / \cdot 2$

$4M + 3600 - 12M = 1700$

$-8M + 3600 = 1700$

$1900 = 8M$

$\frac{1900}{8} = M$

$237{,}5 = M$

$N = \frac{900 - 3 \cdot 237{,}5}{2}$

$= \frac{900 - 712{,}5}{2}$

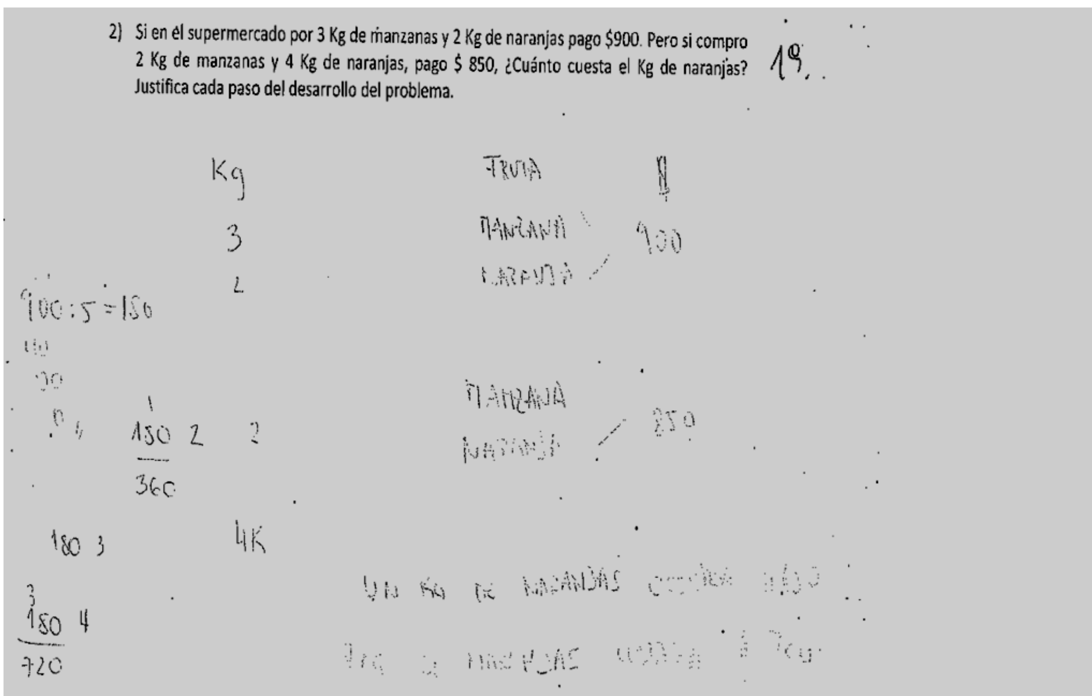
$= \frac{187{,}5}{2} = 93{,}75$

Resp: el Kg de naranjas cuesta $ 93,75.

Figura B

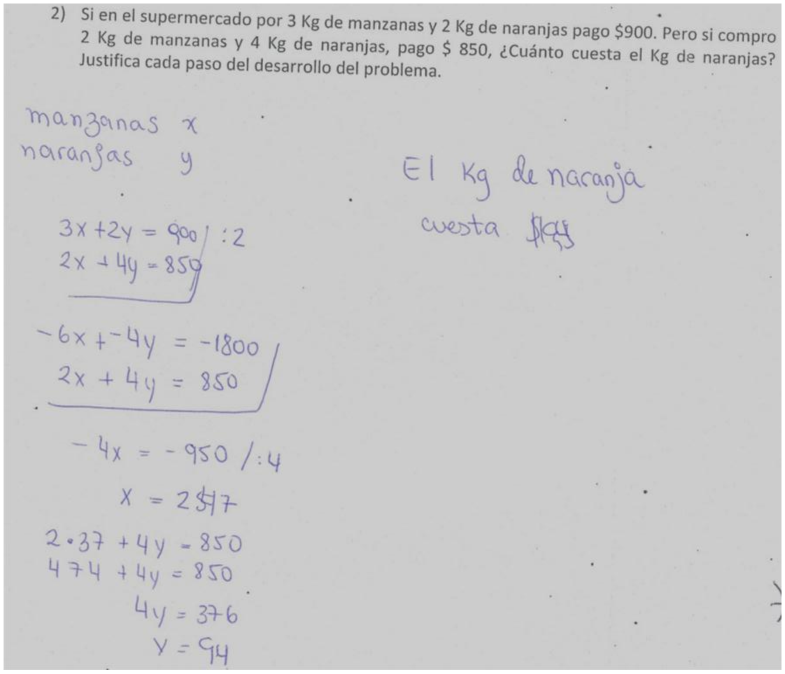
Categoría N° 2: respuestas incorrectas

En esta categoría existen tres tipos errores que cometieron los estudiantes, el primero es cuando intentaron resolver el problema por tanteo, realizando procedimientos en donde buscaron valores que no cumplían las condiciones del sistema de ecuaciones lineales, llegando a resultados erróneos. Con respecto a esto, en primer lugar, no lograron realizar el pasaje del lenguaje natural al algebraico, luego se enfocaron y trataron de resolver el problema de planteo utilizando solo la primera relación (3 Kg de manzanas y 2 Kg de naranjas pago $900) y dejando de lado la segunda relación (2 Kg de manzanas y 4 Kg de naranjas, pago $ 850). La cantidad de respuestas erróneas entregadas por los estudiantes que utilizaron este método fueron 3



El segundo error que cometen los estudiantes es en el proceso de resolución, es decir, cuando resuelven el problema por el método de reducción.

Como primer caso los estudiantes cometieron un error de tipo aritmético, estos manejan el algoritmo de resolución, pero se equivocaron en las operaciones elementales (suma, resta, multiplicación y división).



2) Si en el supermercado por 3 Kg de manzanas y 2 Kg de naranjas pago $900. Pero si compro 2 Kg de manzanas y 4 Kg de naranjas, pago $ 850, ¿Cuánto cuesta el Kg de naranjas? Justifica cada paso del desarrollo del problema.

manzanas x
naranjas y

El Kg de naranja cuesta $94

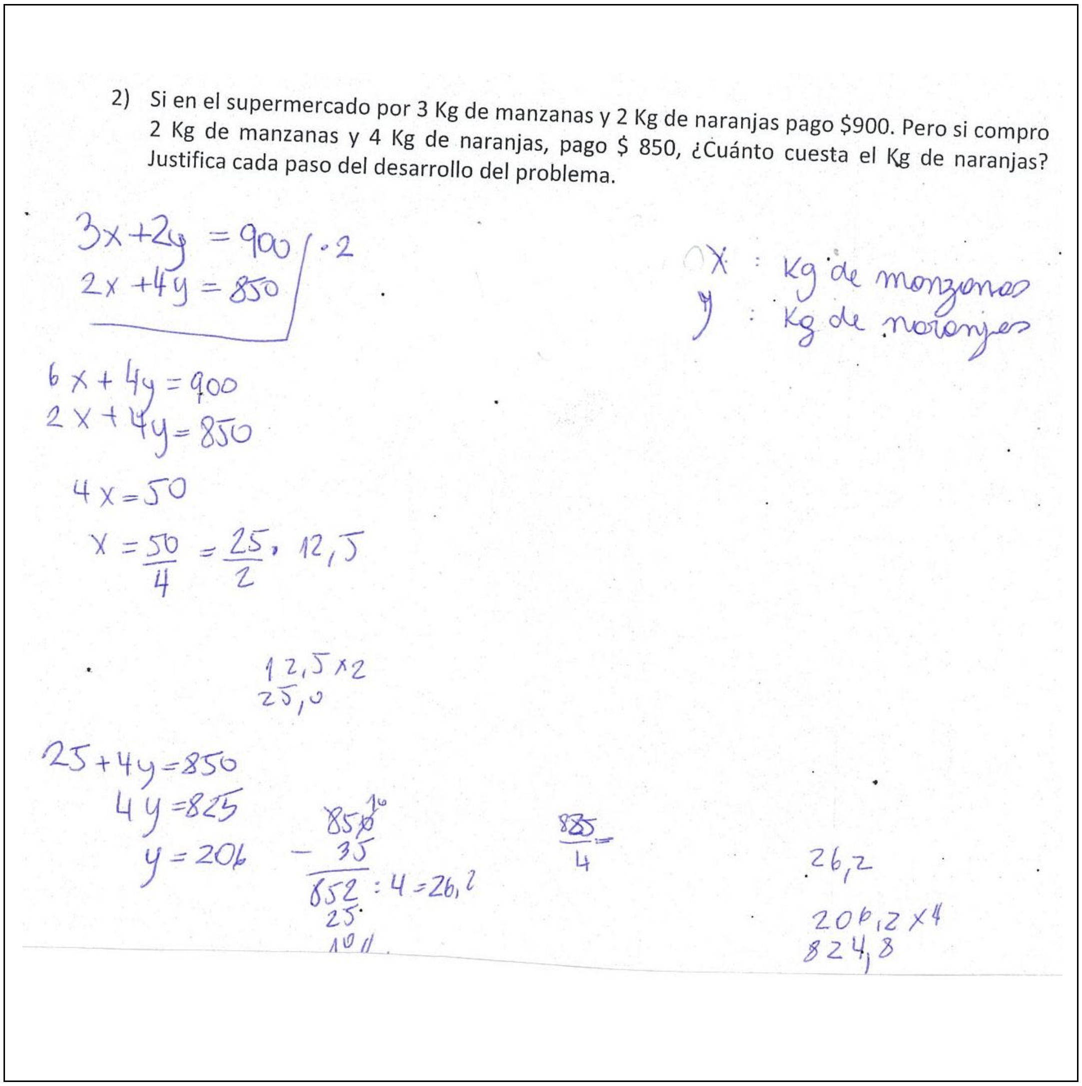
$3x + 2y = 900 \quad / :2$
$2x + 4y = 850$

$-6x + -4y = -1800$
$2x + 4y = 850$

$-4x = -950 \quad / :4$
$x = 237$

$2 \cdot 37 + 4y = 850$
$474 + 4y = 850$
$4y = 376$
$y = 94$

Como segundo caso los estudiantes cometieron un error de tipo algebraico, estos manejan el algoritmo de resolución, pero se equivocaron en el uso de las propiedades de la igualdad.



2) Si en el supermercado por 3 Kg de manzanas y 2 Kg de naranjas pago $900. Pero si compro 2 Kg de manzanas y 4 Kg de naranjas, pago $ 850, ¿Cuánto cuesta el Kg de naranjas? Justifica cada paso del desarrollo del problema.

$3x+2y=900 \quad /\cdot 2$

$2x+4y=850$

x : Kg de manzanas

y : Kg de naranjas

$6x+4y=900$

$2x+4y=850$

$4x=50$

$x=\frac{50}{4}=\frac{25}{2},\ 12{,}5$

$12{,}5 \times 2$

$25{,}0$

$25+4y=850$

$4y=825$

$y=206$

$850-35=852 : 4 = 26{,}2$

25

10

$\frac{825}{4}=$

$26{,}2$

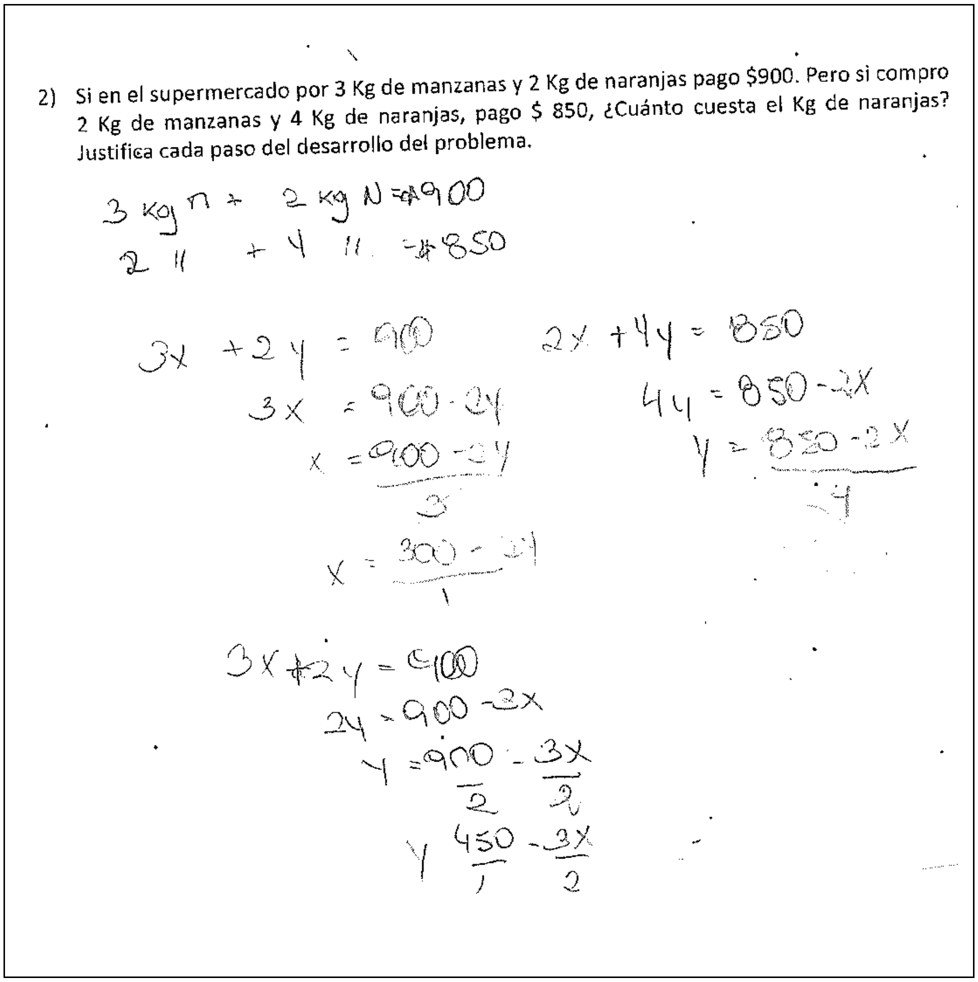
$206{,}2 \times 4$

$824{,}8$

Además en ambos casos no justifican el procedimiento, ya que solo se ve un proceso mecanizado al resolver el problema de planteo. La cantidad de respuestas erróneas entregadas por los estudiantes que utilizaron el método de reducción fueron 10 y esta misma cantidad logro realizar un pasaje del lenguaje natural al registro algebraico.

Y como tercer error se encuentra presente al resolver el problema por el método de sustitución.

Existen casos en donde los estudiantes cometieron un error de tipo algebraico, estos manejan el algoritmo de resolución, pero se equivocaron en el uso de las propiedades de la igualdad.



2) Si en el supermercado por 3 Kg de manzanas y 2 Kg de naranjas pago $900. Pero si compro 2 Kg de manzanas y 4 Kg de naranjas, pago $ 850, ¿Cuánto cuesta el Kg de naranjas? Justifica cada paso del desarrollo del problema.

3 kg n + 2 kg N = $900
2 " + 4 " = $850

$3x + 2y = 900$
$3x = 900 - 2y$
$x = \frac{900 - 2y}{3}$
$x = \frac{300 - 2y}{1}$

$2x + 4y = 850$
$4y = 850 - 2x$
$y = \frac{850 - 2x}{4}$

$3x + 2y = 900$
$2y = 900 - 3x$
$y = \frac{900}{2} - \frac{3x}{2}$
$y \; \frac{450}{1} - \frac{3x}{2}$

Además no justifican el procedimiento, ya que solo se ve un proceso mecanizado al resolver el problema de planteo.

La cantidad de respuestas erróneas entregadas por los estudiantes que utilizaron el método de sustitución fueron 4 y esta misma cantidad logró realizar un pasaje del lenguaje natural al registro algebraico.

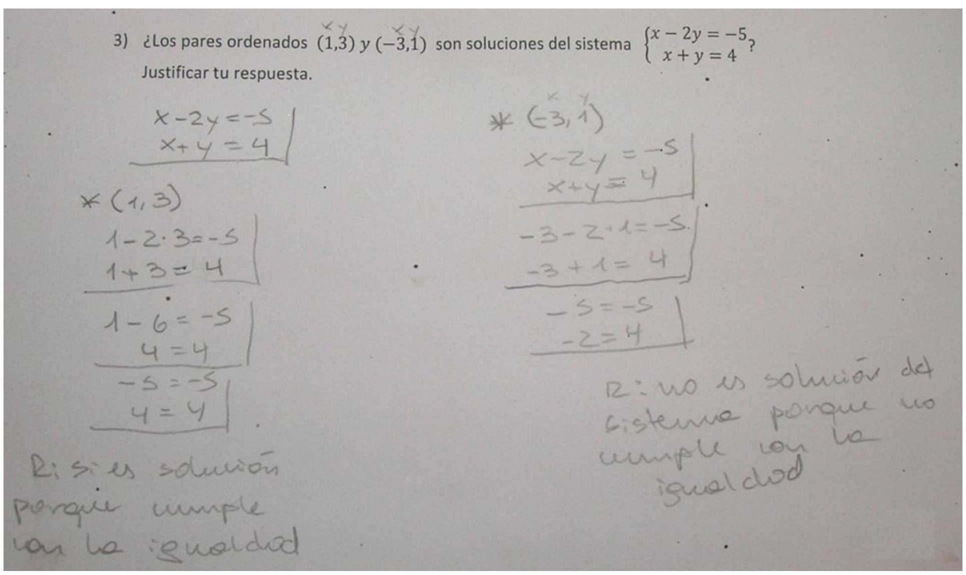
Por otro lado tenemos que 10 estudiantes no respondieron a la pregunta y 11 estudiantes dejaron inconclusa la pregunta.

Análisis A Posteriori pregunta N° 3

Con lo analizado en los cuestionarios respecto a la pregunta N° 3 se pueden distinguir dos categorías de respuestas “correctas” e “incorrectas”

Categoría N° 1: respuestas correctas

Dentro de las correctas tenemos dos tipos de respuestas dadas por los estudiantes, la primera los alumnos reemplazaron cada par ordenado en cada una de las ecuaciones presentadas en el sistema de ecuaciones lineales y así comprobaron si se cumplen las igualdades. La cantidad de respuestas entregadas por los estudiantes que reemplazaron fueron de 10.



La segunda respuesta correcta dada por los estudiantes es cuando resolvieron el sistema de ecuaciones lineales utilizando diversos métodos algebraicos, como el método de reducción y el método de sustitución, determinando así la solución de dicho sistema que es única y así descartaron el otro par ordenado. La cantidad de respuestas entregadas por los estudiantes que resolvieron fueron 11. Finalmente tenemos que 21 estudiantes lograron realizar un tratamiento en el registro algebraico. Ver figura A y figura B

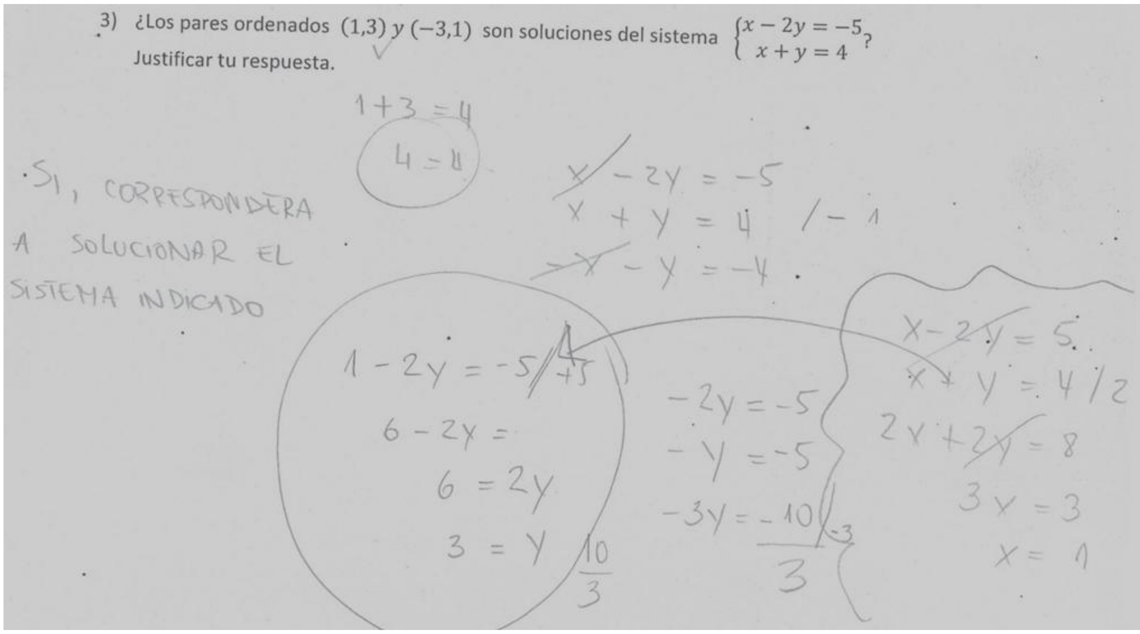


Figura A

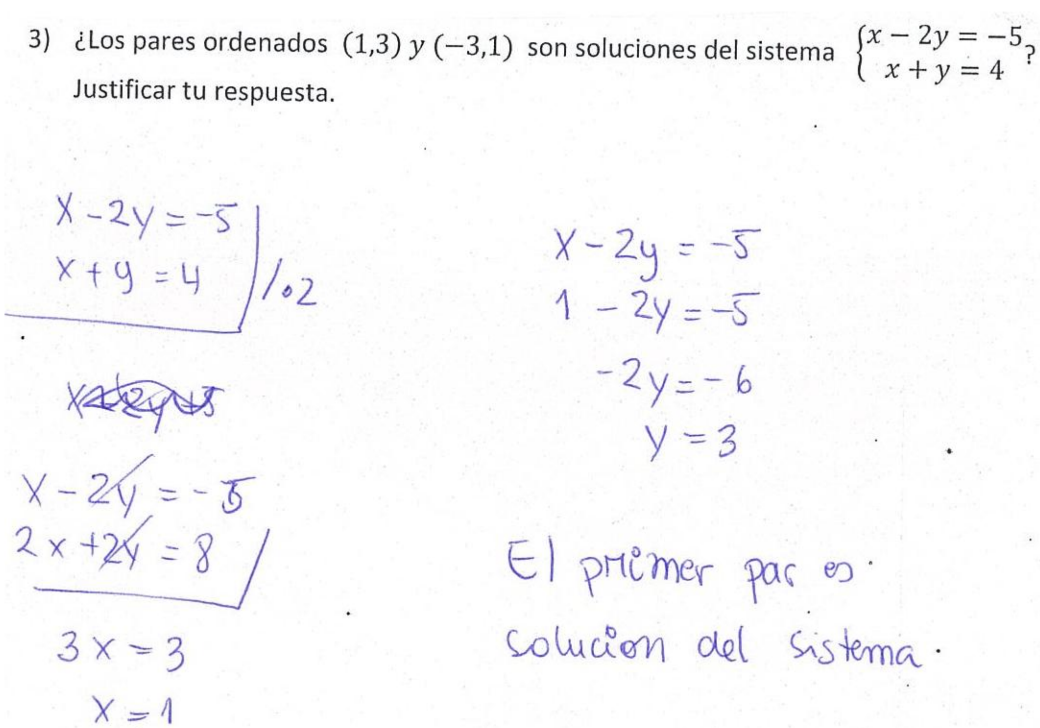


Figura B

Categoría N° 2: respuestas incorrectas

En esta categoría existen tres tipos de errores que comenten los alumnos. El primer error que cometieron los estudiantes es que reemplazaron incorrectamente los pares ordenados, tenemos el caso en donde reemplazaron ambos pares ordenados en la primera ecuación del sistema, otro caso en donde reemplazaron el primer par ordenado en la primera ecuación del sistema y el segundo par ordenado en la segunda ecuación del sistema y el último caso en donde reemplazaron ambos pares ordenado en la segunda ecuación del sistema. Finalmente al momento de responder la pregunta, esta es correcta, pero su procedimiento que justifica esta respuesta es erróneo. La cantidad de respuestas erróneas entregadas por los estudiantes que reemplazaron mal fueron 6 y esta misma cantidad de estudiantes realiza un tratamiento dentro del registro algebraico. Ver figura N° A, figura N° B y figura N° C.

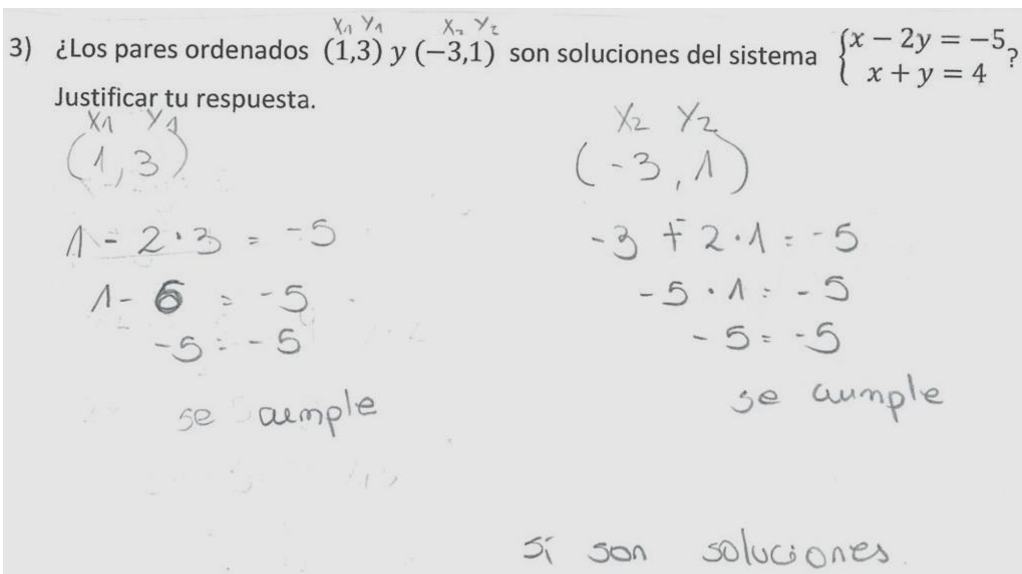
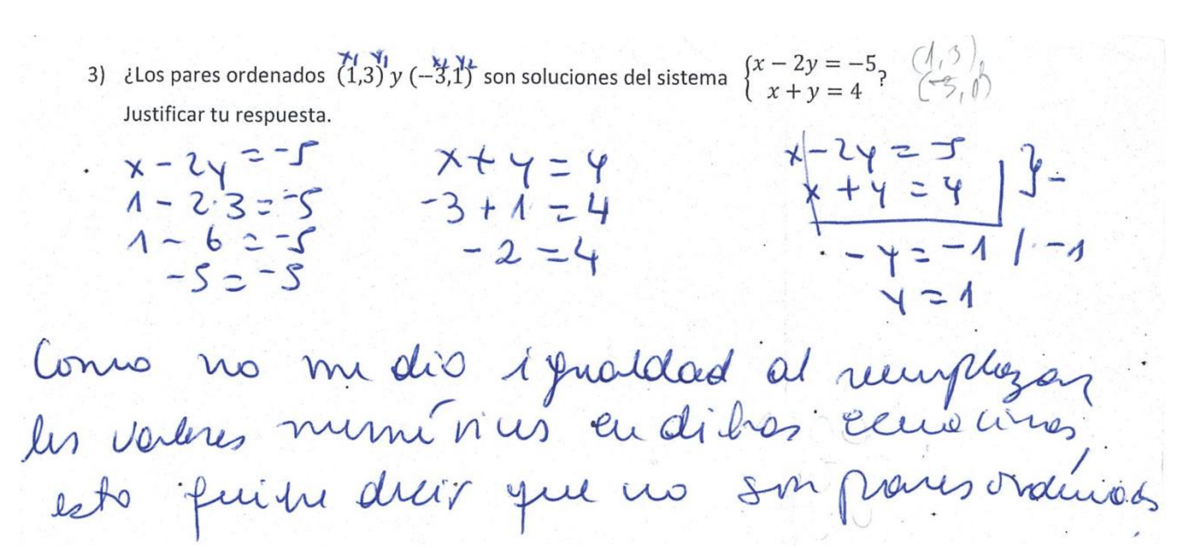


Figura N° A


3) ¿Los pares ordenados $(1,3)$ y $(-3,1)$ son soluciones del sistema $\begin{cases} x - 2y = -5 \\ x + y = 4 \end{cases}$? (1,3) (−3,1)

Justificar tu respuesta.

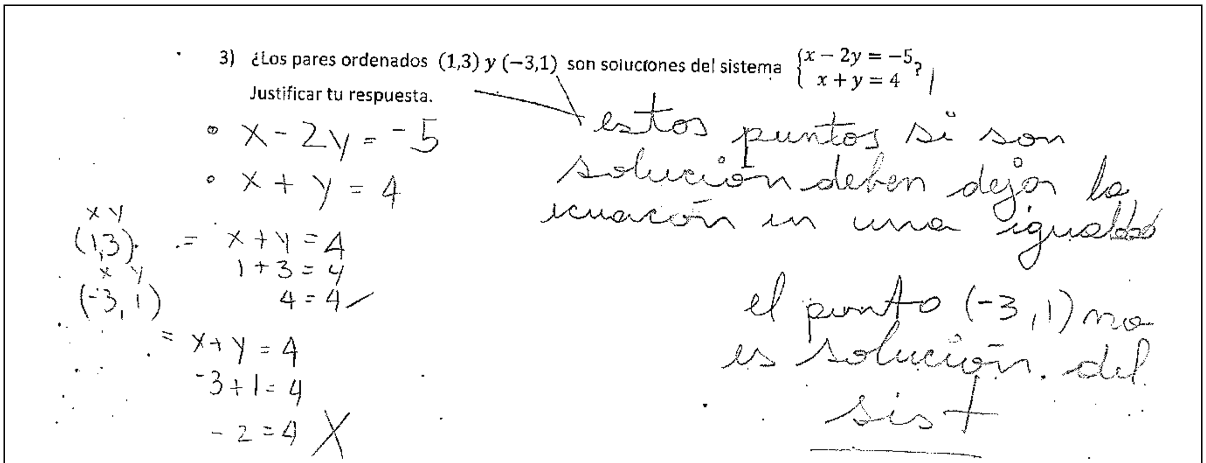
$x - 2y = -5$
$1 - 2\cdot 3 = -5$
$1 - 6 = -5$
$-5 = -5$

$x + y = 4$
$-3 + 1 = 4$
$-2 = 4$

$x - 2y = 5$
$x + y = 4$
$-y = -1 \;/\cdot -1$
$y = 1$

Como no me dio igualdad al reemplazar los valores numéricos en dichas ecuaciones esto quiere decir que no son pares ordenados

Figura N° B


3) ¿Los pares ordenados $(1,3)$ y $(-3,1)$ son soluciones del sistema $\begin{cases} x - 2y = -5 \\ x + y = 4 \end{cases}$?

Justificar tu respuesta.

estos puntos si son solución deben dejar la ecuación en una igualdad

$x - 2y = -5$
$x + y = 4$

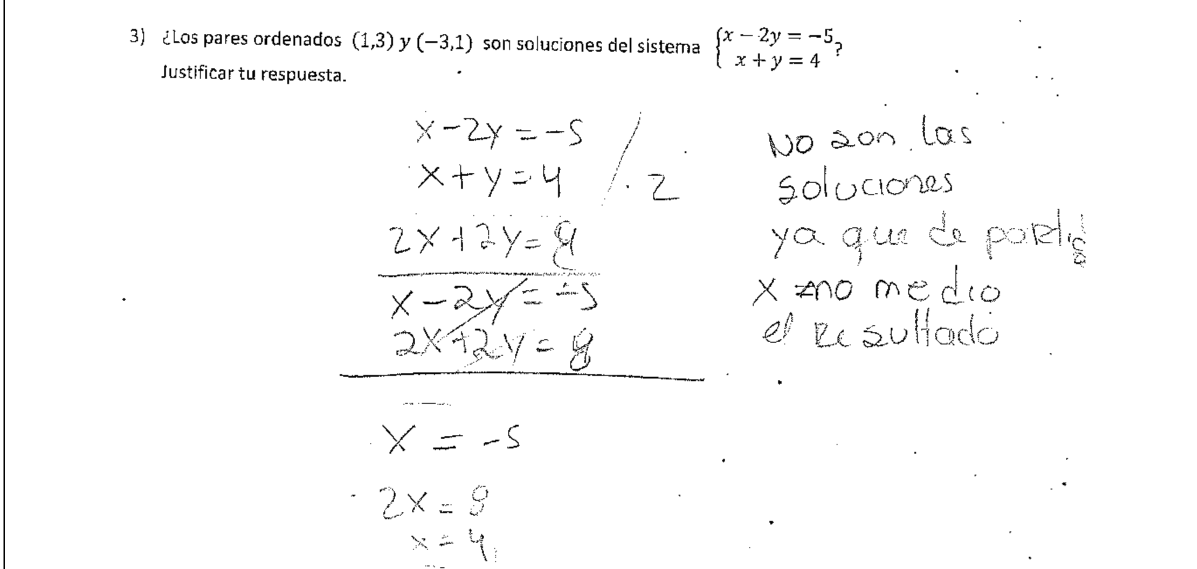
$(1,3) = x + y = 4$
$1 + 3 = 4$
$4 = 4$ ✓

$(-3,1) = x + y = 4$
$-3 + 1 = 4$
$-2 = 4$ X

el punto (−3,1) no es solución del sist.

Figura N° C

El segundo error que presentaron los estudiantes, es que resuelven el sistema de ecuaciones en forma incorrecta, utilizando el método de reducción, en donde los estudiantes conocen y manejan la técnica para desarrollar dicho sistema, pero cometieron errores aritméticos, es decir, realizaron errores en el empleo de las operaciones elementales (suma, resta, multiplicación y división). Finalmente al momento de responder a la pregunta, los estudiantes porque se equivocaron en las operaciones obtienen un par ordenado distinto al entregado y concluyeron que los pares entregados no son soluciones del sistema de ecuaciones. Por otro lado tenemos el caso de que los estudiantes no manejaron en su totalidad el método de reducción, es por ello que se equivocaron al desarrollar el sistema de ecuaciones lineales. La cantidad de respuestas erróneas entregadas por los estudiantes que resolvieron mal fueron 5 y esta misma cantidad de estudiantes realiza un tratamiento dentro del registro algebraico. Ver figura D y figura E.



3) ¿Los pares ordenados $(1,3)$ y $(-3,1)$ son soluciones del sistema $\begin{cases} x-2y=-5 \\ x+y=4 \end{cases}$? Justificar tu respuesta.

$x-2y=-5$
$x+y=4$ / $\cdot 2$

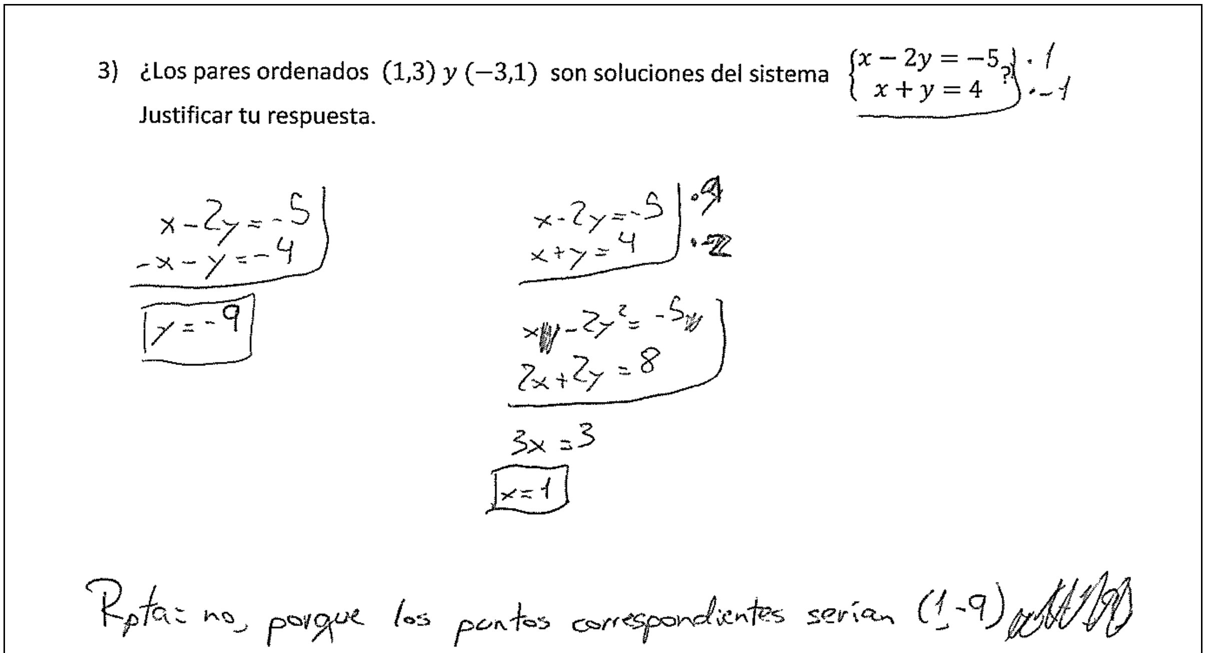
$2x+2y=8$

$x-\cancel{2y}=-5$
$2x+\cancel{2y}=8$

$x=-5$
$2x=8$
$x=4$

No son las soluciones ya que de por los $x \neq$ no me dio el Resultado

Figura D



3) ¿Los pares ordenados $(1,3)$ y $(-3,1)$ son soluciones del sistema $\begin{cases} x-2y=-5 \\ x+y=4 \end{cases}$?
Justificar tu respuesta.

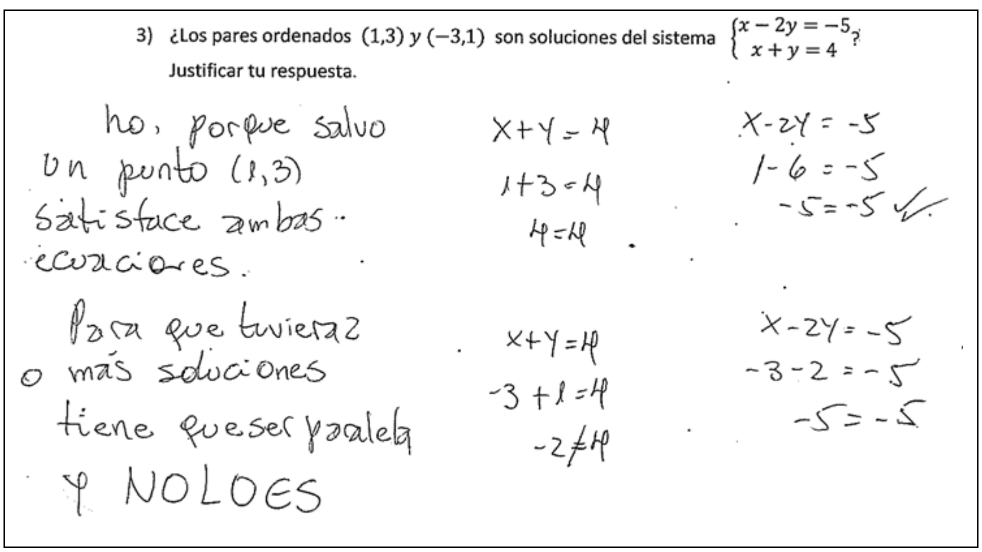
$x-2y=-5$
$-x-y=-4$
$\boxed{y=-9}$

$x-2y=-5$
$x+y=4$
$2x+2y=8$
$3x=3$
$\boxed{x=1}$

Rpta: no, porque los puntos correspondientes serían $(1,-9)$

Figura E

El tercer error de los estudiantes es que tienen concepciones erróneas de conceptos (concepto solución), referido a sistema de ecuaciones lineales. Por otro lado los estudiantes también afirmaban que la solución de un sistema es única. La cantidad de respuestas entregadas por los estudiantes que tienen concepciones erróneas fueron 3.



3) ¿Los pares ordenados $(1,3)$ y $(-3,1)$ son soluciones del sistema $\begin{cases} x-2y=-5 \\ x+y=4 \end{cases}$?
Justificar tu respuesta.

no, porque salvo un punto (1,3) satisface ambas ecuaciones.

Para que tuviera 2 o más soluciones tiene que ser paralela y NO LO ES

$x+y=4$
$1+3=4$
$4=4$

$x-2y=-5$
$1-6=-5$
$-5=-5$

$x+y=4$
$-3+1=4$
$-2\neq 4$

$x-2y=-5$
$-3-2=-5$
$-5=-5$

Finalmente 6 estudiantes dejan la pregunta incompleta y 15 estudiantes no contestaron o la dejaron en blanco.

Análisis A Posteriori pregunta N° 4

Con lo analizado en los cuestionarios respecto a la pregunta N° 4 se pueden distinguir dos categorías de respuestas "correctas" e "incorrectas".

Categoría N° 1: respuestas correctas

En esta categoría tenemos dos tipos de respuestas correctas, en la primera los estudiantes identificaron que el par ordenado $(2,-1)$ es la intersección de las dos rectas observadas en la gráfica y que es solución de un sistema de ecuaciones lineales, luego reemplazaron ese par ordenado en cada uno de los sistemas de ecuaciones lineales presentados. Por otro lado otros estudiantes solo reemplazaron el par ordenado en el segundo sistema de ecuaciones lineales. Seguido de esto, procedieron a responder justificando adecuadamente. Además dentro de esta realizaron un tratamiento dentro del registro algebraico. La cantidad de respuestas entregadas por los estudiantes que reemplazaron fueron 6. Ver figura A

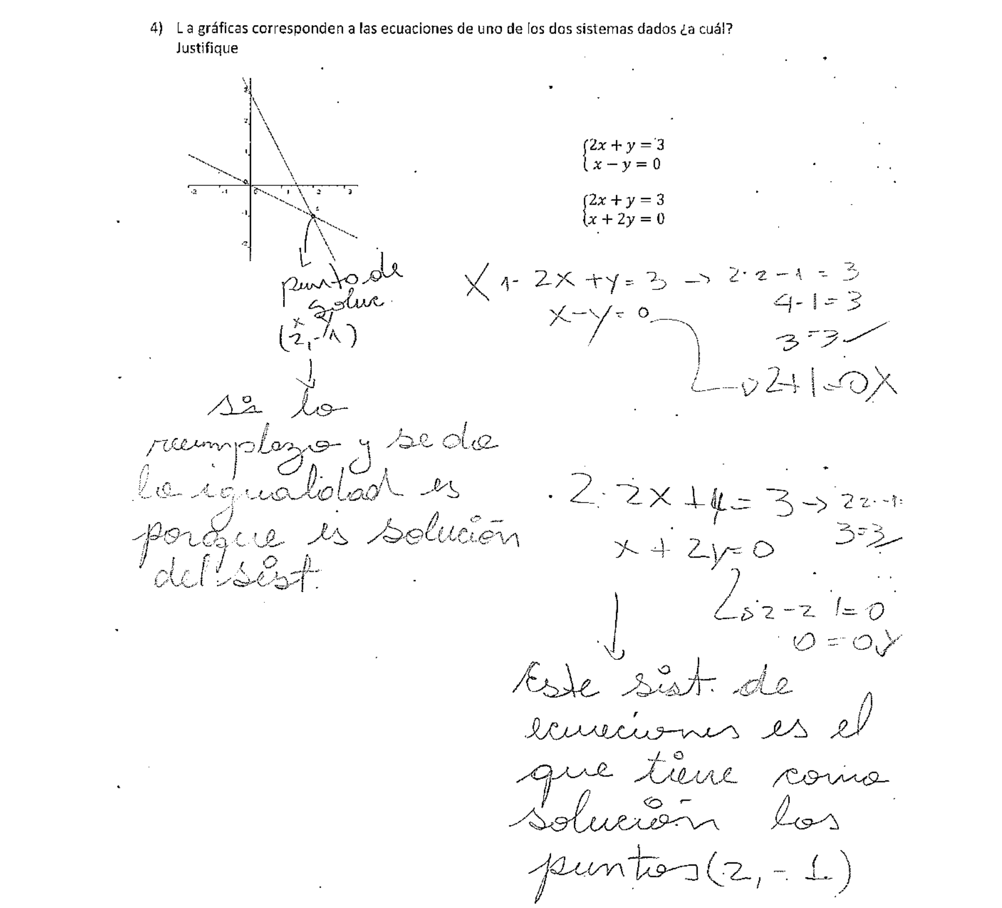


Figura A

a segunda respuesta correcta, los alumnos resolvieron el sistema de ecuaciones lineales utilizando diversos métodos algebraicos, como el método de reducción o el método de sustitución, determinando así la solución de cada sistema de ecuaciones lineales. Finalmente en la gráfica identificaron el par ordenado que es intersección de ambas rectas y lo compararon con el par obtenido en el proceso algebraico de resolución del sistema de ecuaciones y respondieron justificando correctamente. Además dentro de esta respuesta realizaron un tratamiento dentro del registro algebraico. La cantidad de respuestas entregadas por los estudiantes que resuelven fueron 11. Ver figura C y figura D.

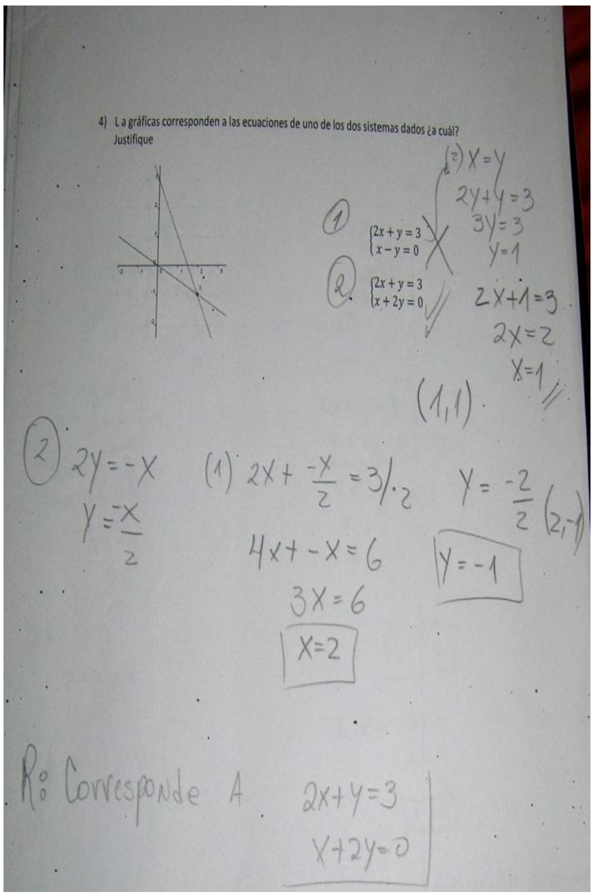


Figura D

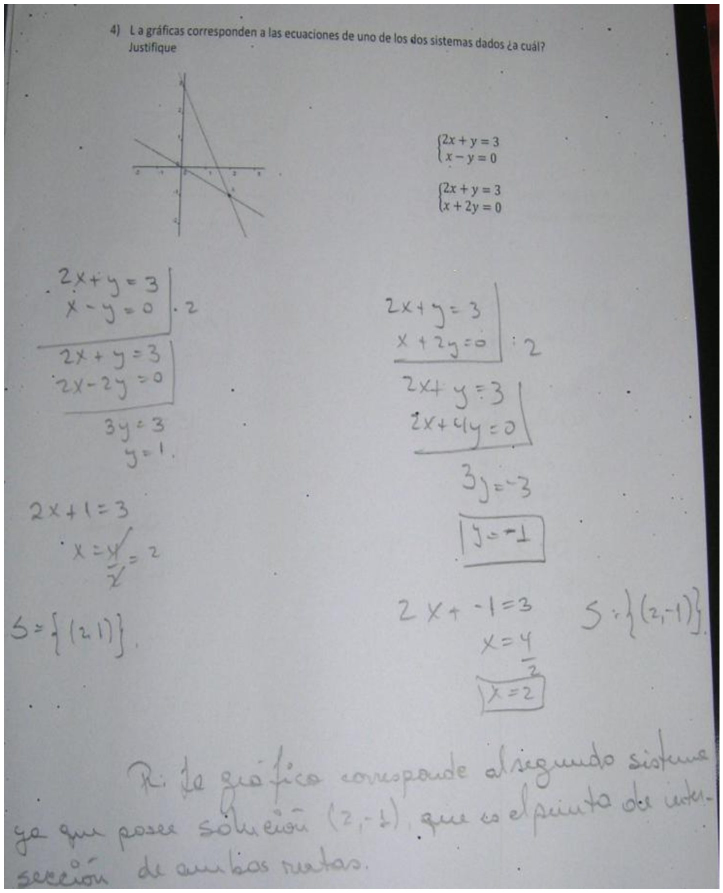


Figura C

Finalmente para esta pregunta tenemos que 6 estudiantes logran realizar el pasaje del registro geométrico al registro algebraico y 11 que logran realizar el pasaje del registro algebraico al registro geométrico. Por otro lado ninguno de ellos logró realizar ambos pasajes.

<u>Categoría N° 2: respuestas incorrectas</u>

En esta categoría tenemos dos tipos de errores que cometen los estudiantes, el primer error es de tipo algebraico y el segundo de tipo aritmético, los cuales se hacen presentes al resolver el problema por el método de reducción. Para el primer caso ellos manejan el algoritmo de resolución, pero se equivocaron en las operaciones elementales (suma, resta, multiplicación y división). Y para el segundo caso se equivocaron en el uso de las propiedades de la igualdad.

La cantidad de respuestas erróneas entregadas por ellos en esta categoría fueron 3 y esta misma cantidad de alumnos realizan un tratamiento dentro del registro algebraico. Ver Figura A y figura B

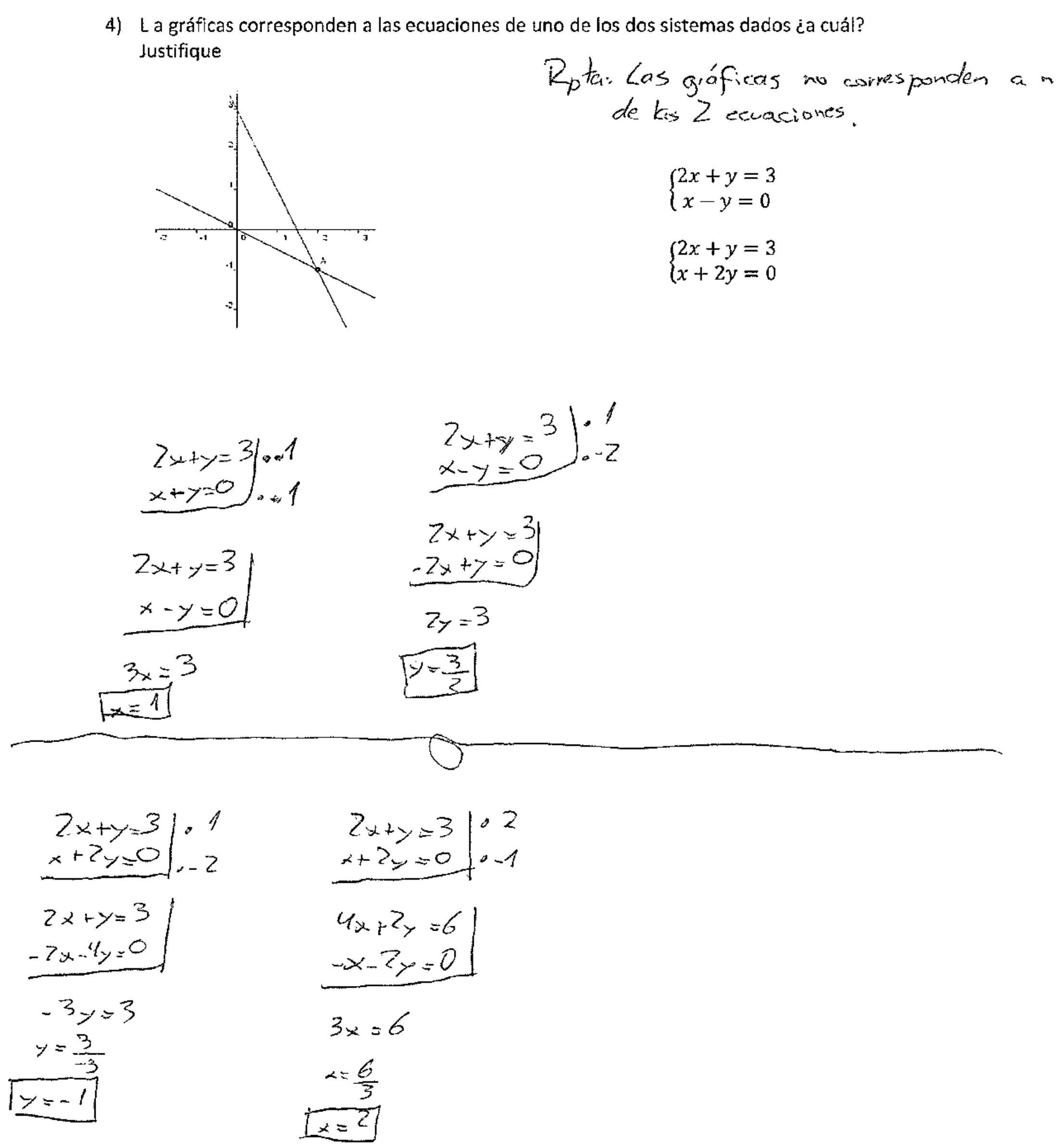
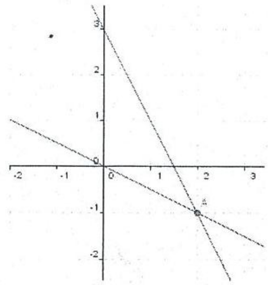


Figura A

4) L a gráficas corresponden a las ecuaciones de uno de los dos sistemas dados ¿a cuál? Justifique



$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

$*\ 2x + y = 3$
$x - y = 0 \quad / y -$

$\boxed{x = 3}$

$2 \cdot 3 + y = 3$
$6 + y = 3 \quad / -6$
$\boxed{y = -3}$

$*\ 2x + y = 3$
$x + 2y = 0 \quad / \cdot -2$

$2x + y = 3$
$-2x + 4y = -2 \quad / y +$

$5y = 1 \quad /:5$
$\boxed{y = \frac{1}{5}}$

$*\ 2x + \frac{1}{5} = 3$
$2x = 3 - \frac{1}{5}$
$2x = \frac{14}{5} \quad /:2$
$x = \frac{\frac{14}{5}}{2}$
$\boxed{x = \frac{7}{5}}$

$\frac{\cancel{14}^{7}}{5} \cdot \frac{1}{\cancel{2}_{1}} = \frac{7}{5}$

$2x + y = 3$
$x + 2y = 0$

Figura B

El segundo error que cometieron los estudiantes es de tipo aritmético, ya que resolvieron utilizando el método de sustitución, manejan el algoritmo de resolución, pero se equivocaron en las operaciones elementales (suma, resta, multiplicación y división). La cantidad de respuestas erróneas entregadas por ellos dentro de esta categoría fueron 5. Ver figura C

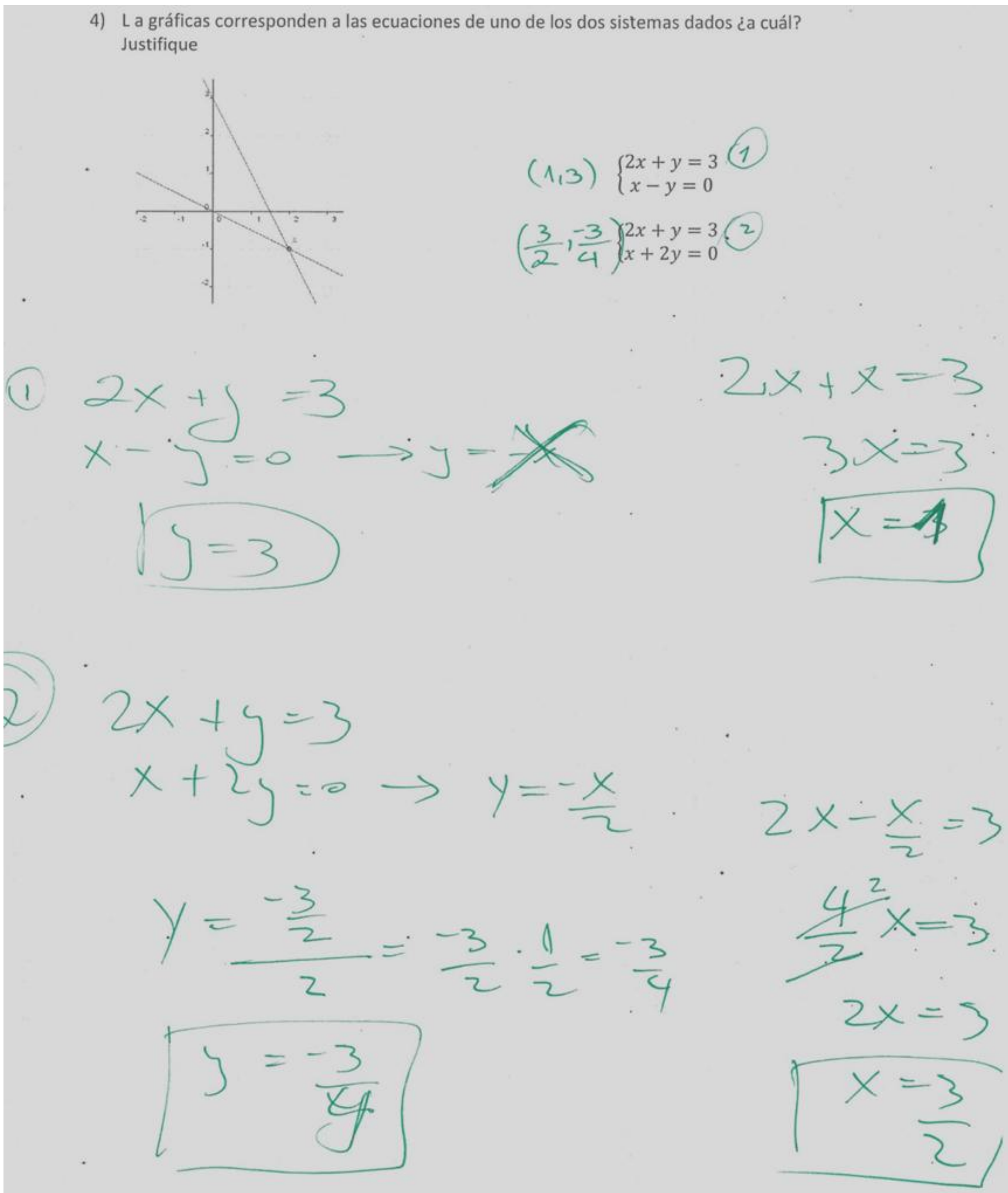


Figura C

Finalmente tenemos que 12 alumnos dejan inconcluso el ejercicio y que 19 no responden, dejando en blanco la pregunta.

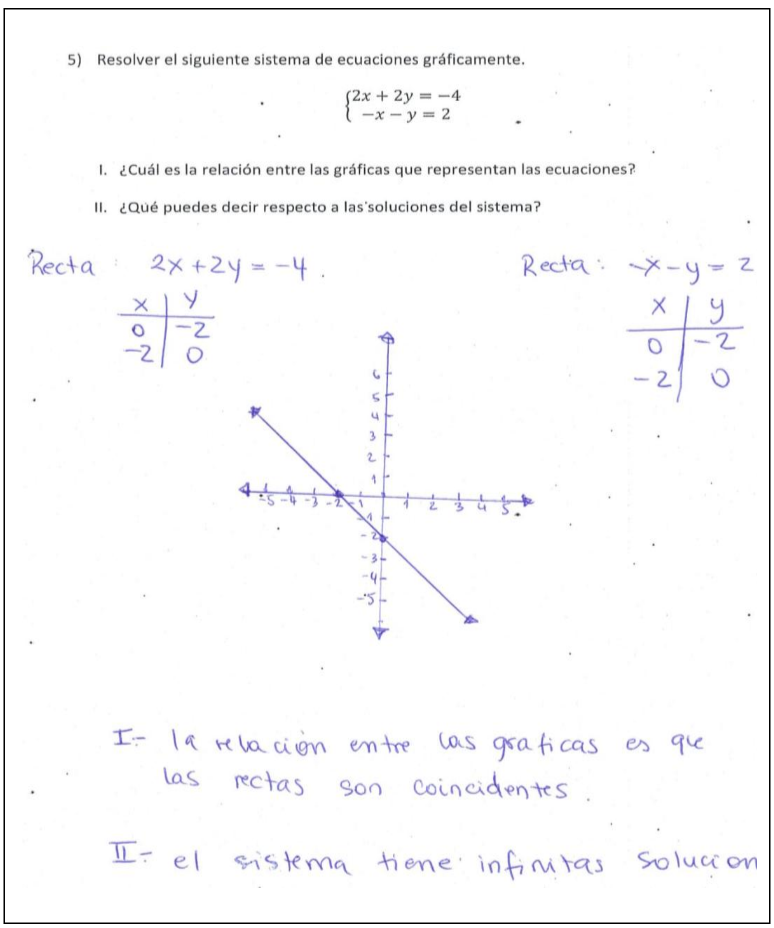
Análisis A Posteriori pregunta N° 5

Con lo analizado en los cuestionarios respecto de la pregunta N° 5, se puede observar dos categorías de respuestas dadas por los estudiantes, la “correcta” y la “resolución algebraico”, respecto a la resolución gráfica del sistema de ecuaciones lineales. Luego se analizaron las respuestas de los estudiantes de cada uno de los ítems presentados.

Categoría N° 1: respuesta correcta

En esta categoría los estudiantes realizaron la representación gráfica del sistema de ecuaciones lineales, es decir, graficaron en el plano cartesiano cada ecuación perteneciente al sistema de ecuaciones lineales, utilizando tablas de valores para la construcción.

La cantidad de respuestas entregadas por los alumnos representaron en forma gráfica fueron 5 y esta misma cantidad son los que realizaron el pasaje entre el registro algebraico al registro geométrico. Finalmente respondieron a cada pregunta correctamente.



5) Resolver el siguiente sistema de ecuaciones gráficamente.

$$\begin{cases} 2x + 2y = -4 \\ -x - y = 2 \end{cases}$$

I. ¿Cuál es la relación entre las gráficas que representan las ecuaciones?

II. ¿Qué puedes decir respecto a las soluciones del sistema?

Recta: $2x+2y=-4$.

x	y
0	−2
−2	0

Recta: $-x-y=2$

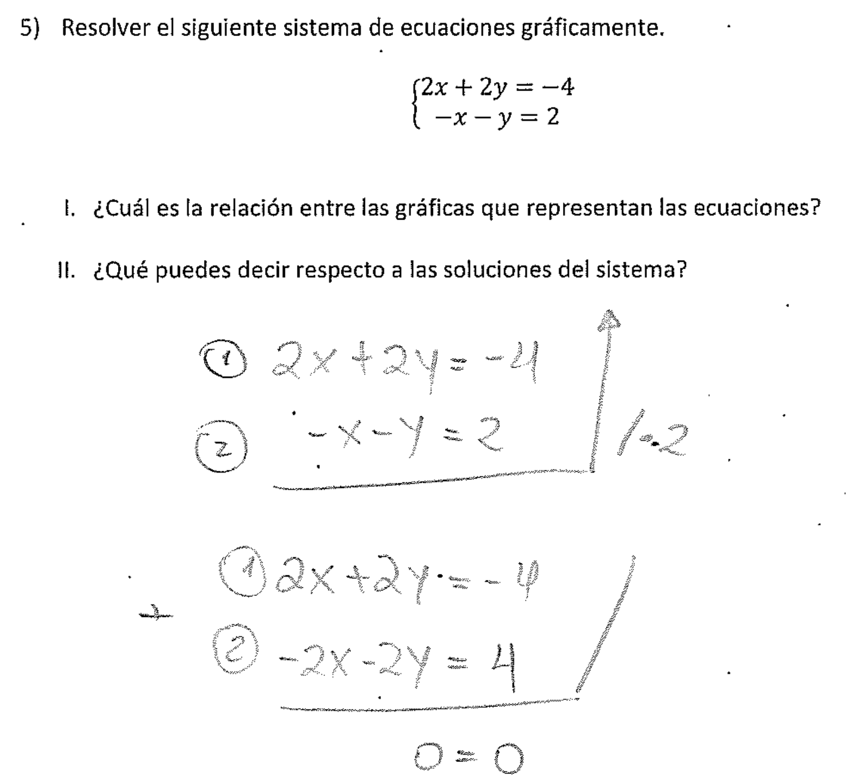
x	y
0	−2
−2	0

I.- la relación entre las graficas es que las rectas son coincidentes.

II.- el sistema tiene infinitas solucion

<u>Categoría Nº 2: resolución algebraica</u>

A pesar que el enunciado decía resolver gráficamente el problema, algunos estudiantes solucionaron el problema de forma algebraica, utilizando los métodos de reducción y sustitución, debido a esto entregaron las siguientes respuestas. Ver figura A y figura B.



5) Resolver el siguiente sistema de ecuaciones gráficamente.

$$\begin{cases} 2x + 2y = -4 \\ -x - y = 2 \end{cases}$$

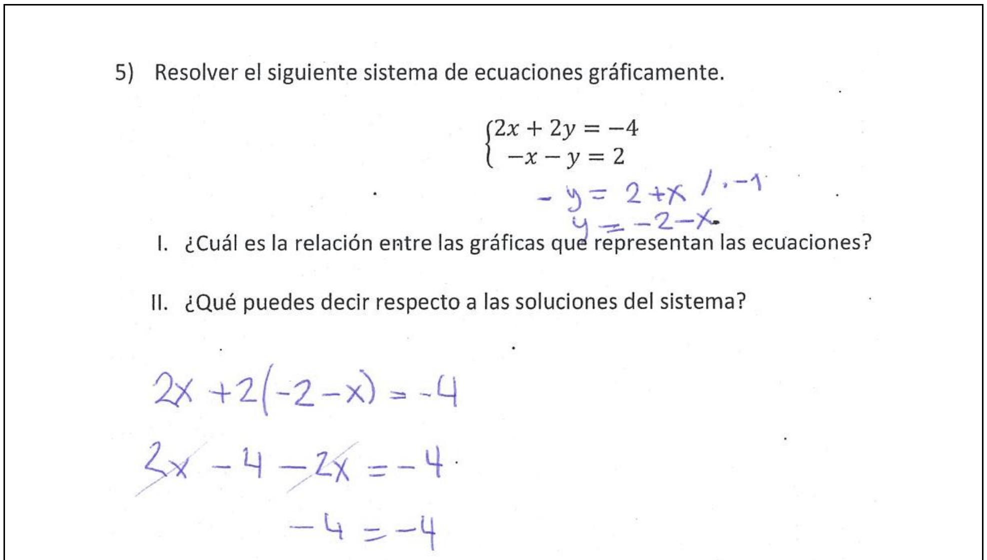
I. ¿Cuál es la relación entre las gráficas que representan las ecuaciones?

II. ¿Qué puedes decir respecto a las soluciones del sistema?

$$\begin{array}{ll} (1) & 2x+2y=-4 \\ (2) & -x-y=2 \quad / \cdot 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} & (1) & 2x+2y=-4 \\ + & (2) & -2x-2y=4 \\ \hline & & 0=0 \end{array}$$

Figura A



5) Resolver el siguiente sistema de ecuaciones gráficamente.

$$\begin{cases} 2x + 2y = -4 \\ -x - y = 2 \end{cases}$$

$-y = 2 + x \; / \cdot -1$

$y = -2 - x$

I. ¿Cuál es la relación entre las gráficas que representan las ecuaciones?

II. ¿Qué puedes decir respecto a las soluciones del sistema?

$2x + 2(-2 - x) = -4$

$\cancel{2x} - 4 - \cancel{2x} = -4$

$-4 = -4$

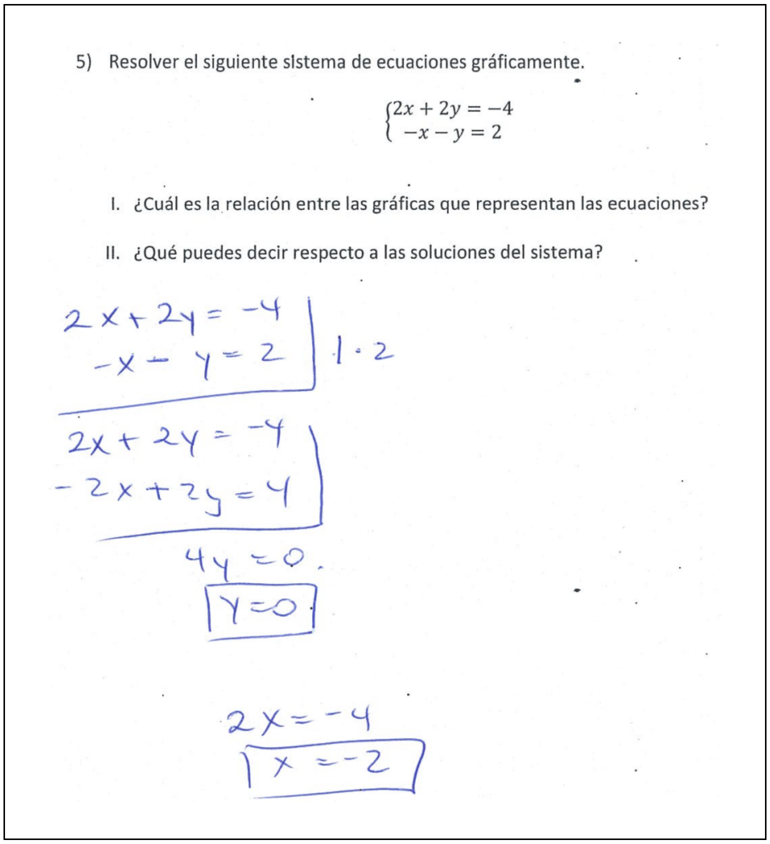
Figura B

Con respecto a los ítems 1 y 2 los alumnos responden diciendo “no se” o “no entiendo” y el resto solo las deja en blanco dejando incompleta la pregunta.

<u>Errores de la categoría N° 2</u>

Se puede distinguir un solo tipo de error, al momento de resolver algebraicamente cometen errores de tipo aritmético utilizando el método de reducción, con esto los alumnos encuentran valores para las incógnitas “x” e “y”.

La cantidad de respuestas erróneas entregadas por los estudiantes fueron 4.



5) Resolver el siguiente slstema de ecuaciones gráficamente.

$$\begin{cases} 2x + 2y = -4 \\ -x - y = 2 \end{cases}$$

I. ¿Cuál es la relación entre las gráficas que representan las ecuaciones?

II. ¿Qué puedes decir respecto a las soluciones del sistema?

$$\begin{array}{l} 2x + 2y = -4 \\ -x - y = 2 \quad / \cdot 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2x + 2y = -4 \\ -2x + 2y = 4 \end{array}$$

$4y = 0$

$\boxed{y = 0}$

$2x = -4$

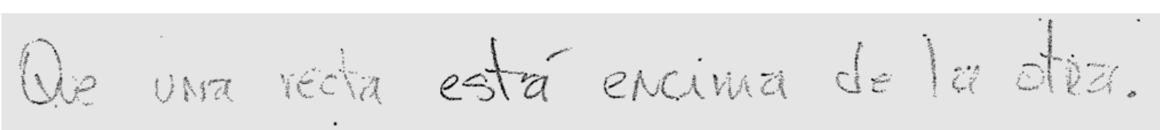
$\boxed{x = -2}$

Ahora se procederá a analizar cada una de las respuestas dadas por los alumnos de cada uno de los ítems presentados.

- ✓ Para el ítem (i.) se pueden destacar solo 1 categoría de respuestas dadas por los estudiantes.

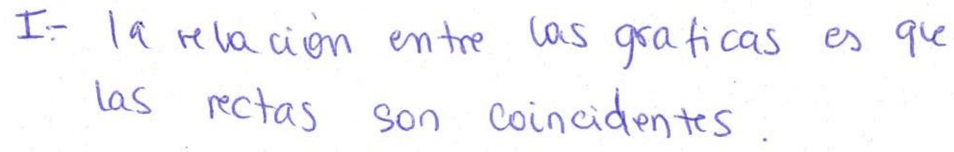
<u>Categoría N° 1</u>

Dentro de esta categoría los estudiantes afirmaron que la relación entre las gráficas que representan las ecuaciones, es que ambas graficas son coincidentes o que una está encima de la otra. Ver figura A y ver figura B.



Que una recta está encima de la otra.

Figura A



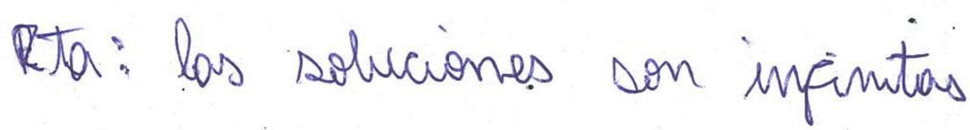
I:- la relación entre las graficas es que las rectas son coincidentes.

Figura B

- ✓ Para el ítem (ii.) se pueden destacar una categoría de respuestas dadas por los alumnos

Categoría N° 1

Dentro de esta categoría los estudiantes afirmaron que las soluciones del sistema son infinitas.



Rta: los soluciones son infinitas

Finalmente tenemos que 11 alumnos dejaron incompletas sus respuestas y que 36 no la respondieron, dejando la pregunta en blanco.

Análisis A posteriori pregunta N° 6

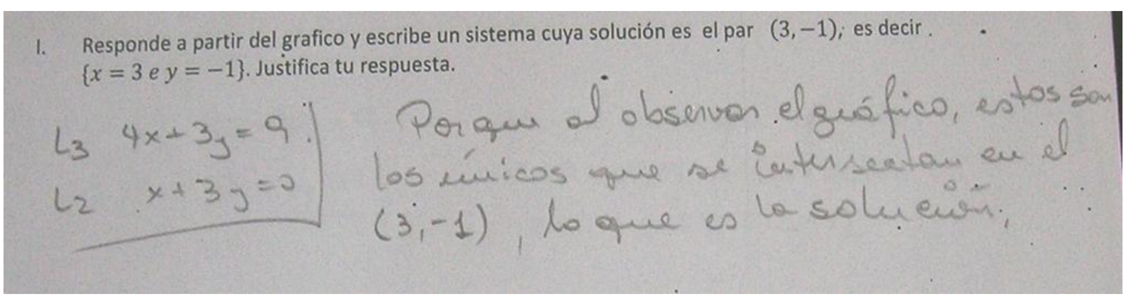
Con lo analizado en los cuestionarios respecto a la pregunta N° 6 se puede distinguir dos categorías de respuestas “correctas” e “incorrectas”.

A continuación revisaremos las respuestas correctas entregadas por los estudiantes, para dar paso a los errores cometidos por estos.

Categoría N° 1: respuestas correctas

En esta categoría se analizará por cada ítem presentado.

i. En esta pregunta los alumnos identificaron correctamente el par ordenado $(3,-1)$ en la gráfica y escribieron las rectas en forma de sistema de ecuaciones que pasan por dicho par ordenado. Finalmente justificaron afirmando que el par ordenado $(3,-1)$ es la intersección entre las dos rectas y además que es solución del sistema de ecuaciones lineales. Además realizaron un pasaje del registro gráfico al algebraico. La cantidad de respuestas entregadas por ellos en este ítem fueron 12 y esta misma cantidad logro realizar el pasaje del registro geométrico al registro algebraico.

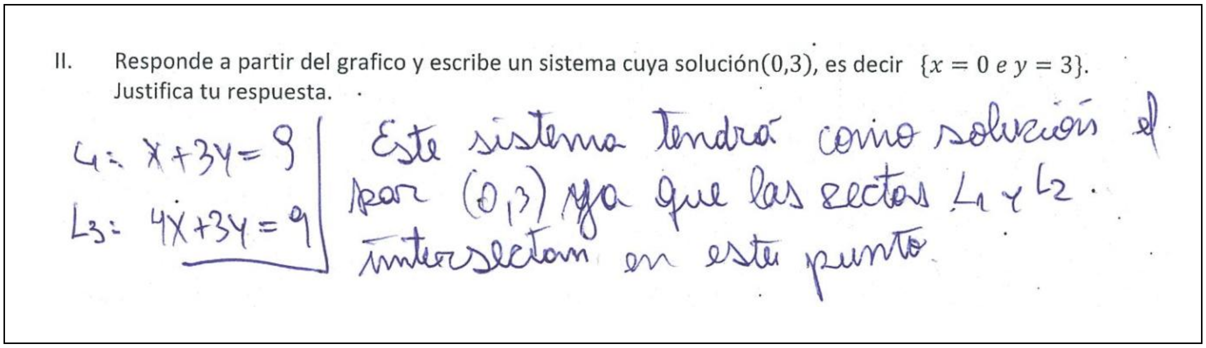

I. Responde a partir del grafico y escribe un sistema cuya solución es el par $(3,-1)$, es decir $\{x = 3 \ e \ y = -1\}$. Justifica tu respuesta.

$L_3 \quad 4x+3y=9$

$L_2 \quad x+3y=0$

Porque al observar el gráfico, estos son los únicos que se intersectan en el (3,-1), lo que es la solución.

ii. En esta pregunta identificaron correctamente el par ordenado $(0,3)$ en la gráfica y escribieron las rectas en forma de sistema de ecuaciones que pasan por dicho par. Finalmente justificaron afirmando ese par $(0,3)$ es la intersección entre las dos rectas y además que es solución del sistema de ecuaciones lineales. Además realizaron un pasaje del registro gráfico al algebraico. La cantidad de respuestas entregadas por ellos en este ítem fueron 9 y esta misma cantidad logro realizar el pasaje del registro geométrico al registro algebraico.

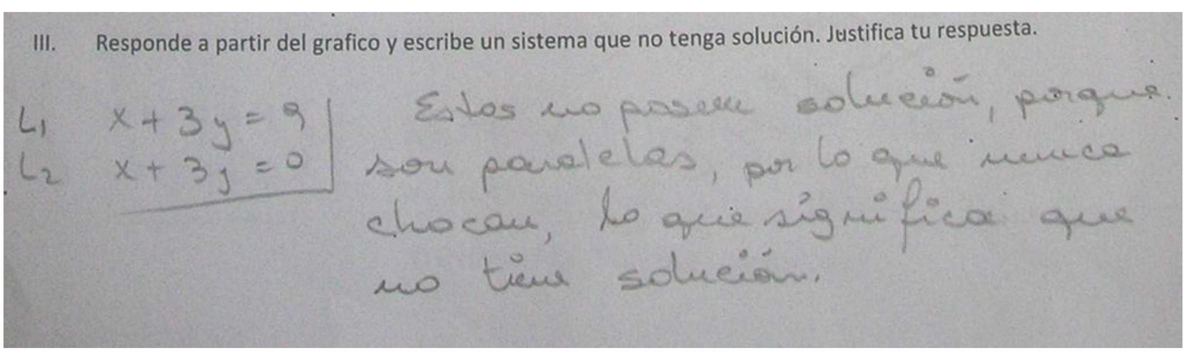


II. Responde a partir del grafico y escribe un sistema cuya solución$(0,3)$, es decir $\{x = 0 \ e \ y = 3\}$. Justifica tu respuesta.

L_1: $X+3Y=9$
L_3: $4X+3Y=9$

Este sistema tendrá como solución el par $(0,3)$ ya que las rectas L_1 y L_2 intersectan en este punto.

iii. En esta pregunta los estudiantes identificaron correctamente el sistema de ecuaciones lineales que no posee solución, pero lo justificaron en dos formas: la primera que las rectas son paralelas y la segunda que las rectas asociadas al sistema de ecuaciones lineales poseen igual pendiente y distinto coeficiente de posición; luego el sistema de ecuaciones lineales no posee solución. Además realizaron un pasaje del registro gráfico al algebraico. La cantidad de respuestas entregadas por ellos en este ítem fueron 13 y esta misma cantidad logro realizar el pasaje del registro geométrico al registro algebraico. Ver figura A y Figura B

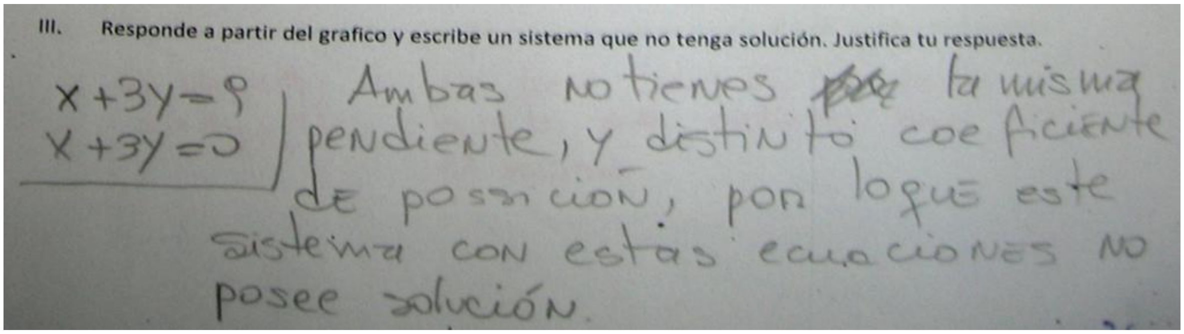


III. Responde a partir del grafico y escribe un sistema que no tenga solución. Justifica tu respuesta.

L_1 $x+3y=9$
L_2 $x+3y=0$

Estos no poseen solución, porque son paralelas, por lo que nunca chocan, lo que significa que no tiene solución.

Figura A



III. Responde a partir del grafico y escribe un sistema que no tenga solución. Justifica tu respuesta.

$x+3y=9$
$x+3y=0$

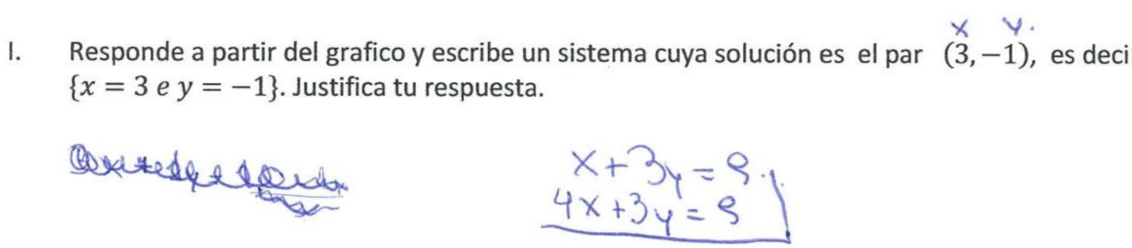
Ambas no tienes la misma pendiente, y distinto coeficiente de posición, por lo que este sistema con estas ecuaciones no posee solución.

Figura B

<u>Categoría N° 2: respuestas incorrectas</u>

i. En esta pregunta los estudiantes cometieron un error de interpretación, ya que, no identificaron la ubicación del par ordenado dado en la gráfica y anotaron dos tipos de rectas distintas a las pedidas y las expresaron como sistema de ecuaciones lineales.

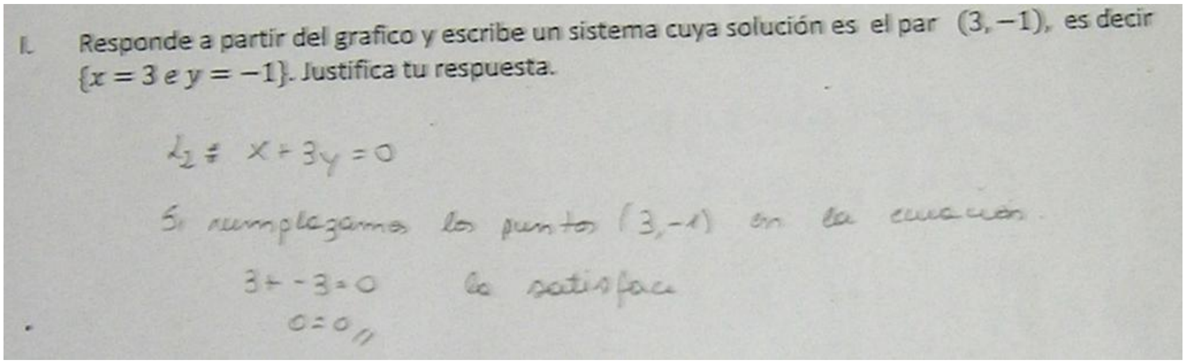
   Otro error que cometieron es que anotaron una sola recta, evaluaron el par ordenado entregado y concluyeron que la igualdad se cumple. La cantidad de respuestas erróneas entregadas por ellos en este ítem fueron 7 y esta misma cantidad logro realizar el pasaje del registro geométrico al registro algebraico. Ver figura A y figura B



I. Responde a partir del grafico y escribe un sistema cuya solución es el par $(3,-1)$, es decir $\{x = 3 \ e \ y = -1\}$. Justifica tu respuesta.

$x+3y=9$
$4x+3y=9$

Figura A



I. Responde a partir del grafico y escribe un sistema cuya solución es el par $(3,-1)$, es decir $\{x = 3\ e\ y = -1\}$. Justifica tu respuesta.

L_2: $x + 3y = 0$

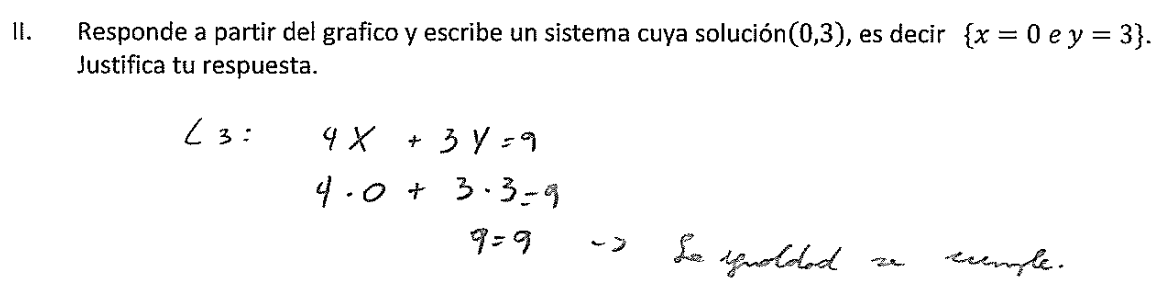
Si reemplazamos los puntos $(3,-1)$ en la ecuación.

$3 + -3 = 0$ la satisface

$0 = 0$

Figura B

ii. En esta pregunta los estudiantes cometieron un error y anotaron una sola recta, evaluaron el par ordenado entregado y concluyeron que la igualdad se cumple. La cantidad de respuestas erróneas entregadas por ellos en este ítem fueron 7.



II. Responde a partir del grafico y escribe un sistema cuya solución$(0,3)$, es decir $\{x = 0\ e\ y = 3\}$. Justifica tu respuesta.

L_3: $4X + 3Y = 9$

$4 \cdot 0 + 3 \cdot 3 = 9$

$9 = 9$ → La igualdad se cumple.

iii. Para esta pregunta se encontraron errores que no cumplen con las condiciones para una categoría. Ya que son errores aislados que dan los alumnos.

La cantidad de respuestas erróneas entregadas por ellos en este ítem fueron 3.

Finalmente en el ítem i no hay respuestas incompletas, en el ítem ii tenemos 3 respuestas incompletas, en el ítem iii tenemos 3 respuestas incompletas. Además tenemos que 37 estudiantes no respondieron nada, dejando en blanco sus respuestas.

CAPITULO 6: CONFRONTACIÓN ENTRE LOS ANÁLISIS A PRIORI Y APOSTERIORI

<u>Pregunta N° 1</u>

Para esta pregunta la confrontación entre ambos análisis se realizará por cada uno de los ítems realizado.

Para el ítem i, nosotros esperábamos una respuesta de tipo algebraico y esta se presentó en la categoría de “tipo algebraico”, sin embargo, éstas corresponden a descripciones parciales de la respuesta esperada. Por otro lado se presentó otra categoría “tipo geométrico”, en donde los estudiantes afirmaban que la ecuación lineal es una recta que se representa en el plano cartesiano. Para esta pregunta se tiene un 30% de estudiantes que respondieron de acuerdo a lo esperado.

Para el ítem ii, se esperaba una respuesta en el marco algebraico y esta se evidenció una categoría llamada “algebraica”, ya que se asemeja a la esperada por nosotros. En cambio en las otras dos categorías de respuestas dadas por los estudiantes estaban dentro del marco geométrico y del marco aritmético, pero una de estas afirma que la solución de una ecuación lineal es la intersección de dos rectas, lo cual corresponde a una concepción errónea con respecto al concepto solución de una ecuación lineal. Para esta pregunta se tiene un 18% de ellos que respondieron de acuerdo a lo esperado.

Para el ítem iii, lo esperado en el análisis a priori estuvo presente en las respuestas dadas por los estudiantes las cuales estaba expuestas en el análisis a posteriori. Pero se presentó una nueva estrategia dada por los alumnos, la cual consistía en despejar la incógnita “y” para luego evaluar ambos pares ordenados.
Tenemos que un 50% de los estudiantes que reemplaza inmediatamente ambos pares ordenados en la ecuación lineal dada y por otro lado tenemos que un 16% de los alumnos despejaban la variable real “y” y luego reemplazaron los pares ordenados.

Finalmente cabe mencionar que un 21 % de ellos lograron realizar un tratamiento dentro del registro algebraico.

Para el ítem iv, en el primer ítem, la respuesta que estaba planteada en el análisis a priori se vio reflejada en las respuestas dadas por los alumnos y en estas realizaron la representación gráfica de la ecuación dada. Además cabe destacar que todas las respuestas de las categorías eran de tipo gráfico, lo cual era lo pedido en el análisis a priori.
Con respecto al segundo ítem, la respuesta esperada se ve evidenciada en la primera categoría y en la segunda categoría presentada los estudiantes la relacionan con su representación gráfica. Para esta pregunta se tiene un 46 % de ellos respondieron de acuerdo a lo esperado.

En el ítem v, se esperaba que los estudiantes expresaran una respuesta de tipo algebraico, lo cual si se vio reflejada. Además se evidenciaron respuestas de tipo geométrico, si bien no era la respuesta esperada, no estaba incorrecta. Para esta pregunta se tiene un 29 % de ellos que respondieron de acuerdo a lo esperado.

Para el ítem vi, la respuesta esperada que planteamos era de carácter algebraico y en las respuestas entregadas por los alumnos se ven dos tipos de categorías de las cuales una se asemeja a la esperada (categoría N° 1) y la otra es de carácter geométrico en donde responden que un sistema es la intersección entre dos rectas. Para esta pregunta se tiene un 16 % de ellos que respondieron de acuerdo a lo esperado.

Pregunta N° 2

En esta pregunta la estrategia planteada para resolver el problema que se consideró en el análisis a priori (cambio de registro y resolver el sistema de ecuaciones) y fue la única utilizada por los estudiantes para responder de forma correcta, en otras palabras un 32 % de las respuestas dadas por ellos se evidenciaron en el análisis a posteriori.
Los métodos utilizados por estos para resolver el sistema de ecuaciones lineales fueron los de sustitución y de reducción, dejando de lado el método de igualación, el cual también fue considerado en el análisis a priori.

Finalmente cabe mencionar que un 57 % de ellos lograron realizar correctamente el pasaje del lenguaje natural al registro algebraico.

Con respecto a los errores, los que fueron presentados en el análisis a priori estuvieron evidenciados en el análisis a posteriori, pero surgieron nuevos errores que no consideramos antes, estos fueron de tipo algebraico y errores al tratar de resolver por medio del método de tanteo.

Pregunta N° 3

Para esta pregunta las dos estrategias planteadas en el análisis a priori (reemplazar cada par ordenando en el sistema de ecuaciones por separado y verificar cuál de ellas es (son) la(s) solución(es) del sistema; y resolver el sistema de ecuaciones por algún método algebraico) para resolver el problema, fueron parte de las estrategias utilizadas por los estudiantes que se evidencian en el análisis a posteriori. Además que fueron las únicas estrategias que utilizaron ellos.

Las respuestas dadas por un 18 % de estos concuerdan con las presentadas en el análisis a priori. Ya que, los alumnos reemplazaban ambos pares ordenados en el sistema de ecuaciones lineales dado, con esto podemos evidenciar que tienen claro lo que es el concepto de solución de sistemas de ecuaciones lineales. Cabe destacar que esta respuesta era la esperada por nosotros. Por otro lado tenemos que un 20 % de respuestas dadas por ellos correspondían a resolver el problema, es por ello que utilizan métodos algebraicos (sustitución, reducción) de los tres métodos algebraicos (sustitución, reducción e igualación) que establecen los planes y programas presentados por el Mineduc.

Finalmente cabe destacar que un 58% de ellos lograron realizar correctamente el tratamiento del registro algebraico.

El error esperado en el análisis a priori (errores aritméticos) efectivamente estuvo presente en las respuestas dadas por los estudiantes, además aparecieron dos tipos de errores que no fueron considerados (reemplazan mal los pares ordenados en los sistemas y resuelven mal utilizando el método de reducción).

Pregunta N° 4

Para esta pregunta tenemos que un 11 % de alumnos respondieron con la estrategia que se esperaba en el análisis a priori (analizar e interpretar la representación gráfica para luego encontrar la relación entre la representación y los sistema). Por otro lado un 20 % de ellos resolvieron el sistema, en donde utilizaron dos métodos algebraicos (sustitución y reducción) de los tres métodos (sustitución, reducción e igualación) de resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

Para esta pregunta tenemos que un 11% de ellos logran realizar el pasaje del registro geométrico al registro algebraico y un 20% de ellos logran realizar un pasaje del registro algebraico al geométrico.

Con respecto a los errores, el error 1 mostrado en el análisis a priori no estuvo presente en los errores expuestos en el análisis a posteriori, pero el error 2 si estuvo presente en la categoría de respuestas incorrectas del análisis a posteriori. Por otro lado surgió un nuevo error de tipo algebraico al resolver el sistema de ecuaciones lineales por el método de reducción.

Pregunta N° 5

En esta pregunta lo esperado en el análisis a priori (representar gráficamente el sistema planteado y concluir que las rectas son coincidentes) se vio evidenciado en un 9 % de las respuestas dadas por los estudiantes en el análisis a posteriori, lo cual fue muy reducido. En cambio los alumnos realizaron una nueva estrategia en donde un 20 % de las respuestas dadas son de método algebraico (método de sustitución o método de reducción) y al final llegan a una función proposicional (0=0) que no entienden o simplemente lo dejan sin terminar o concluyen que no tiene solución debido a que se van las incógnitas.

Con respecto a los errores se vieron evidenciados cuando realizaban algún método algebraico, en estos los alumnos erraban al momento de resolver y cometían errores de tipo aritméticos.

Además tenemos que un 9% de ellos logran realizar un pasaje del registro algebraico al registro geométrico.

Pregunta N° 6

Para el ítem i tenemos que un 21% de los estudiantes que respondieron, resolvieron en forma correcta, para el ítem ii tenemos que un 16 % de los que respondieron, resolvieron en la forma esperada la cual fue planteada en el análisis a priori (analizar e interpretar el gráfico y escribir el sistema pedido). Para la ítem iii utilizaron dos estrategias para responder la pregunta, en la primera de ellas un 17% de las respuestas dadas por los alumnos la respondieron según lo esperado en el análisis a priori (rectas paralelas) y la segunda de ellas un 5% de las respuestas dadas por ellos consistió en una nueva estrategia, en donde los alumnos analizan las pendientes y el coeficiente de posición de las rectas.

Finalmente en el ítem i un 40% de los estudiantes lograron realizar el pasaje entre el registro gráfico y el registro algebraico. En el ítem ii un 29% de ellos lograron realizar el pasaje entre el registro gráfico y el registro algebraico. Y en el ítem iii un 29 % de ellos lograron realizar el pasaje entre el registro gráfico y el registro algebraico.

En cuanto a los errores cometidos por los alumnos, en la ítem i el error 1 expuesto en el análisis a priori estuvo presente en las respuestas expuestas en el análisis a posteriori, además surgió un nuevo error cometido por los estudiantes el cuál escriben una recta en vez del sistema pedido. Por otro lado el error 2 presentado en el análisis a priori se encuentra ausente en las respuestas dadas por los estudiantes.

En el ítem ii ninguno de los errores previstos fue cometido por los estudiantes en las respuestas analizadas, pero surge un nuevo error cometido por ellos el cuál escriben una recta en vez del sistema pedido.

En el ítem iii se evidenciaron errores que no alcanzaron para una categoría, ya que se trataban de respuestas aisladas, en donde se evidenciaban concepciones erradas por parte de los alumnos.

CONCLUSIONES

Al momento de elaborarse este trabajo, los objetivos de investigación son un factor importante, puesto que todos ellos se dirigen a comprender las concepciones de los estudiantes frente al objeto matemático de sistema de ecuaciones lineales con dos variables reales, específicamente a la relación entre sus registros gráficos y algebraicos, los cuales son fundamentados por la teoría de registros de representación de Raymond Duval, en conjunto con los análisis a priori y a posteriori respectivos y la confrontación entre estos se logró armar un compacto de conclusiones finales.

En cuanto a las concepciones que tenían los estudiantes (ecuación lineal, solución de una ecuación lineal, sistema de ecuaciones lineales y solución de un sistema de ecuaciones lineales), estos los identificaban con un enfoque geométrico o con un enfoque algebraico, pero en ningún caso lograron realizar una definición que incluyera ambos enfoques. Además en esta investigación se vio que los estudiantes confunden el concepto de solución con resolver, ya que, por ejemplo si se les solicitaba verificar si un par ordenado es una solución del sistema, en su mayoría recurrían a resolver el problema utilizando un método algebraico, en vez de reemplazar el par ordenado en cada una de las ecuaciones del sistema y verificar si se cumple la igualdad. Este hecho nos indica el poco dominio conceptual por parte de los estudiantes, lo cual coincide por las investigaciones citadas en nuestra problemática. Por otro lado los estudiantes tenían una concepción errónea al decir que el par ordenado es un punto, en donde ellos confunden el par ordenado con su representación geométrica.

Con respecto a las distintas soluciones de los sistemas de ecuaciones lineales, los estudiantes no tenían una comprensión acerca del concepto solución para los casos en donde no existe solución o posee infinitas soluciones al visualizarlo en su representación gráfica, por ejemplo, al observar dos rectas paralelas en plano cartesiano, los estudiantes no lograron concluir que dichas rectas conformaban un sistema de ecuaciones lineales en donde no tenían solución.

Por otro lado con respecto a los registros de representación, los estudiantes no presentaron mayores dificultades al momento de realizar un tratamiento dentro del registro algebraico, lo cual quedo evidenciado en sus respuestas entregadas. Con respecto a la conversión entre registros, podemos decir como primera instancia que en el pasaje del lenguaje natural al registro algebraico, los estudiantes no tuvieron mayores dificultades, ya que, lograban comprender el enunciado y lo representaban mediante un sistema de ecuaciones. Por otro lado ninguno de ellos realizó procedimientos aritméticos en la resolución del problema, ya que inmediatamente resolvieron el problema en forma algebraica. A partir de este único problema de planteo que se utilizó podemos decir que los resultados obtenidos en esta investigación no concuerdan con estudios anteriores, ya que, los otros autores afirmaban que los estudiantes evitaban los problemas en lenguaje natural. En cuanto al pasaje entre el registro algebraico al gráfico, según los resultados obtenidos, indican que un número reducido de estudiantes (6 alumnos) logró realizarlo, otro grupo de ellos optó por hacer un tratamiento dentro del registro algebraico, es decir, resolvieron el sistema de ecuaciones utilizando métodos algebraicos; sin embargo, no era lo pedido en el enunciado y al utilizar este método no lograron llegar a una conclusión, como por ejemplo, obtenían que 0=0 ó 2=2 y no comprendieron que esta expresión es siempre verdadera, por lo tanto no pudieron interpretar que el sistema tenia infinitas soluciones. Para el caso del pasaje del registro gráfico al algebraico, un número limitado de estudiantes (20 alumnos) logró realizar el pasaje. En nuestra investigación nos hemos dado cuenta que los estudiantes que realizaron correctamente los pasajes entre los distintos tipos de registros, presentaban una mayor comprensión respecto al objeto matemático, lo cual fue descrito en las investigaciones citadas, en especial por Duval.

Respecto al razonamiento matemático los estudiantes realizaron un razonamiento deductivo informal, en donde los procedimiento para resolver los ejercicios planteados los alumnos no entregaban fundamentos matemáticos (propiedades), es decir, al resolver los problemas no fundamentaban los procedimientos. Además ellos no resolvían de forma equivalente, sino que resolvían de forma implicativa. Por otro lado podemos decir que los alumnos que tienen un alto dominio conceptual, ya sea conceptos previos (ecuación en dos variables) y los referidos a sistemas de ecuaciones lineales contestaron de forma satisfactoria y eficiente el resto de las preguntas, esto confirma que la asimilación de los conocimientos previos facilita un posterior entendimiento del concepto a tratar.

Para finalizar, con todo lo expuesto anteriormente podemos concluir que evidentemente los estudiantes conocen y aplican los procedimientos necesarios para la resolución de los mismos, pero se les dificulta el traspaso de la forma gráfica a la forma algebraica o viceversa, es por ellos que los estudiantes no utilizan un razonamiento matemático para determinar gráficamente la existencia de una solución, infinitas soluciones o la no existencia de la misma, o sea, los estudiantes realizan un manejo algebraico técnico.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

Artigue, M. (2000). *Didáctica de la Matemática y formación de profesores*. Conferencia pronunciada en la Universidad Católica de Valparaíso, Chile.

Boyer, C. (1986). *Historia de la Matemática*. Universidad Santiago de Chile.

DeVries, D., Arnon, I. (2004). *Solution-What does it mean? Helping linear algebra student develop the concept while improving research tool*. Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2, 55-62. http://www.emis.de/proceedings/PME28/RR/RR211_Arnon.pdf

Duval, R. (1999). *Los problemas Fundamentales en el Aprendizaje de las Matemáticas y las Formas Superiores del Desarrollo Cognitivo.* Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile.

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamientos humano: Registros semióticos y Aprendizajes Intelectuales*. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile.

Grimaldi, R. (1997). *Matemáticas discretas y combinatorias*. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile.

Guzmán, R. I. (1998). *Apuntes de curso Didáctica experimental de la Matemática.* (Magister en Enseñanza de las Ciencias con mención en Didáctica de la Matemática). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile.

Guzmán, R. I. (1999). Apuntes de curso Fundamentos teóricos de la Didáctica de la Matemática. (Magister en Enseñanza de las Ciencias con mención en Didáctica de la Matemática). Universidad Católica de Valparaíso, Chile.

Hofmann, J. (1960), *Historia de la matemática, tomo Nº 1.* Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile.

Hofmann, J. (1960), *Historia de la matemática, tomo Nº 2.* Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile.

Hofmann, J. (1960), *Historia de la matemática, tomo Nº 3.* Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile.

MINEDUC 2005. Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios de la Educación Media. MINEDUC, Chile.

MINEDUC 2009. Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios de la Enseñanza Básica y Media. Actualización 2009.

Navas, Y. Fuentes, V. Fernández J. Fernandez F. (2009), *Ecuaciones de primer grado y sistemas de ecuaciones*, trabajo realizado para la asignatura de didáctica de las matemáticas curso 2008-2009. Universidad de los Andes, República de Colombia. http://funes.uniandes.edu.co/1612/2/Fernandez_et_al._2009_Ecuaciones.pdf

Panizza; Sadovsky, P. & Sessa, C. (1999). *Los primeros aprendizajes algebraicos*. http://www.fcen.uba.ar/carreras/cefiec/matem/articulo/pss_1995.doc

Panizza; Sadovsky, P. & Sessa, C. (1999). *La ecuación lineal con dos variables: entre la unicidad y el infinito*. Trabajo de investigación realizado en el marco del proyecto. http://www.fcen.uba.ar/carreras/cefiec/matem/articulo/pss_1999.doc

Pérez Donoso, L. (1998). *Pasaje de registros: Ecuaciones*. Tesis de Magister en Enseñanza de las Ciencias con Mención en Didáctica de Matemática. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile.

Ochoviet, C. (2009). *Sobre el concepto solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas*. Instituto Politécnico nacional de Uruguay.
http://www.cicata.ipn.mx/FILES/PDF/PROME_D_20090000_001.PDF

Segura, M. (2001). *Sistema de ecuaciones lineales: una secuencia didáctica*. Tesis para optar al grado de Magister en Enseñanza de las Ciencias con Mención en Didáctica de las Matemáticas. Universidad Católica de Valparaíso, Chile.

Segura, M. (2004). *Sistemas de ecuaciones lineales: una secuencia didáctica.* Relime Vol. 7, Núm. 1, pp 49-78.
http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2095347

Sierpinska, A. (2000). *On some aspects of students thinking in linear algebra*.

ANEXOS

Cuestionario

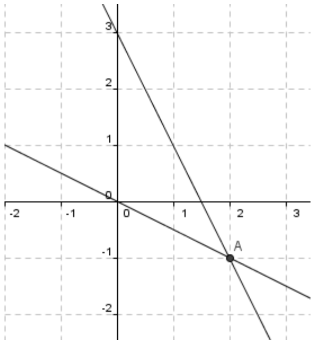
Nombre:__________________________Curso:__________Fecha:_____________

1) Responder las siguientes preguntas.
   i. ¿Qué es para ti una ecuación lineal?
   ii. ¿Qué es para ti una solución de una ecuación lineal?
   iii. ¿Los pares ordenados $(1,3)$ y $(-3\ ,1)$ son soluciones de la ecuación $x - 2y = -5$?. Explica.
   iv. Al graficar la ecuación $x - 2y = -5$ en el plano cartesiano
   ¿Qué forma tiene la gráfica?
   ¿Qué relación hay entre esa gráfica y la ecuación lineal presentada?
   v. ¿Qué es para ti un sistema de ecuaciones lineales?
   vi. ¿Qué es para ti una solución de un sistema de ecuaciones?

2) Si en el supermercado por 3 Kg de manzanas y 2 Kg de naranjas pago \$900. Pero si compro 2 Kg de manzanas y 4 Kg de naranjas, pago \$ 850, ¿Cuánto cuesta el Kg de naranjas? Justifica cada paso del desarrollo del problema.

3) ¿Los pares ordenados $(1,3)$ y $(-3,1)$ son soluciones del sistema $\begin{cases} x - 2y = -5 \\ x + y = 4 \end{cases}$?
   Justificar tu respuesta.

4) La gráficas corresponden a las ecuaciones de uno de los dos sistemas dados ¿a cuál? Justifique



$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

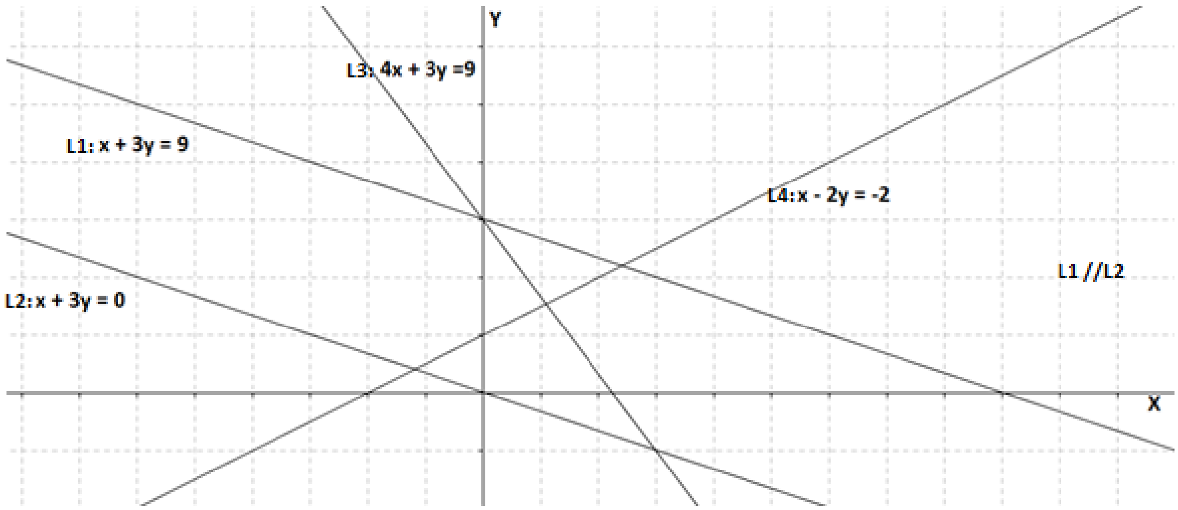
5) resolver el siguiente sistema de ecuaciones gráficamente.

$$\begin{cases} 2x + 2y = -4 \\ -x + y = 2 \end{cases}$$

I. ¿Cuál es la relación entre las gráficas que representan las ecuaciones?

II. ¿Qué puedes decir respecto a las soluciones del sistema?

6) Observa el gráfico y responde



IV. Responde a partir del grafico y escribe un sistema cuya solución es el par $(3, -1)$, es decir $\{x = 3 \ e \ y = -1\}$. Justifica tu respuesta.

V. Responde a partir del grafico y escribe un sistema cuya solución$(0{,}3)$, es decir $x = 0 \ e \ \ y = 3\}$. Justifica tu respuesta.

VI. Responde a partir del grafico y escribe un sistema que no tenga solución. Justifica tu respuesta.