UNIVERSIDAD DE VALPARAISO

Facultad de Ciencias

Departamento de Matemáticas

Teoría de Supercaracteres de grupos finitos: Grupos cíclico y Diédrico

Tesis presentada por **Audri Contreras Picero.**
Para optar al grado de Magíster en Matemáticas.

Profesor Guía Dr. Jesús Juyumaya.

Valparaíso, Abril de 2015.

Índice general

Introducción 5

Capítulo 1. Preliminares 9

1. Notaciones 9
2. Grupo Cíclico 10
3. Grupo Diédrico 11
4. Grupo $U_4(\mathbb{F}_2)$ 13
5. Producto de Kronecker 19
6. Representaciones de Grupo 20
7. Teoría de Caracteres 24
8. Sumas de Ramanujan 31

Capítulo 2. Supercaracteres 35

1. Supercaracteres 35
2. Ejemplo de Supercaracteres del grupo unipotente $U_4(\mathbb{F}_2)$ 38

Capítulo 3. Supercaracteres del Grupo cíclico y aplicaciones 47

1. Teoría de Supercaracteres para el grupo $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 47
2. Tabla de Supercaracter de $\mathbb{Z}/p^{\alpha}\mathbb{Z}$, para p primo 52
3. Producto de Supercaracteres 58

Capítulo 4. Una Teoría de Supercaracteres para el grupo Diédrico 63

1. Grupo Diédrico 63
2. Supercaracteres del grupo Diédrico D_n 64

Bibliografía 87

Introducción

El tema central en la teoría de representaciones de grupos, es clasificar las representaciones irreducibles de un grupo. La teoría de caracteres es una herramienta fundamental para tal clasificación. Es más, se puede decir que determinar la tabla de caracteres de un grupo es equivalente a clasificar las representaciones irreducibles del grupo. A pesar que calcular la tabla de caracteres es una herramienta muy útil, para algunos grupos resulta incalculable.

El tema de esta tesis se desarrolla dentro de la teoría de Supercaracteres de grupos finitos. Esta es una teoría que tiene como origen una forma de aproximarse a entender los caracteres irreducibles de un grupo, cuando estos son muy complejos o prácticamente imposibles de determinar.

Sea $U_n(\mathbb{F}_q)$, el grupo de las matrices triangulares superiores de tamaño n con coeficientes en el cuerpo finito con q elementos, $\mathbb{F}_q$. El grupo $U_n(\mathbb{F}_q)$ es un grupo fundamental en grupos clásicos y ha sido estudiado por diferentes autores. Sin embargo, no se conoce una clasificación satisfactoria de sus representaciones irreducibles. Además, calcular sus caracteres irreducibles es un tema muy complejo y está lejos de describirse en una tabla de caracteres.

C. André y N. Yang hacen una aproximación a la tabla completa de caracteres de $U_n(\mathbb{F}_q)$, haciendo uso de ciertas particiones de caracteres irreducibles y de $U_n(\mathbb{F}_q)$. Los métodos utilizados por André y Yang son independientes y permiten entender los caracteres irreducibles del grupo $U_n(\mathbb{F}_q)$.

Persi Diaconis y I. Martin Isaacs han axiomatizado los trabajos realizados por André y Yang en una teoría de Supercaracteres de un grupo finito. Esta nueva teoría es útil para entender la tabla de caracteres, así como también variadas aplicaciones en otras áreas, por ejemplo en la teoría de números y la teoría de códigos, entre otras. La teoría de Supercaracteres de un grupo G, es definida a través de una partición de los caracteres irreducibles Irr(G) y de una partición de G.

Más precisamente, dado un grupo finito G, una teoría de Supercaracteres para G, consiste de una partición $\mathfrak{X}$ del conjunto de caracteres de Irr(G) y una partición $\mathcal{K}$ de G, que satisfacen los tres axiomas siguientes:

1. $\{1\} \in \mathcal{K}$
2. $|\mathfrak{X}| = |\mathcal{K}|$
3. Para cada $X \in \mathfrak{X}$, el siguiente carácter
$$\chi_X = \sum_{\chi \in X} \chi(1)\chi$$
es constante sobre cada $K \in \mathcal{K}$.

Los $K \in \mathcal{K}$ son llamados superclases y los elementos de $\mathfrak{X}$ son llamados supercaracteres de G. También se suele decir que los χ_X son los supercaracteres de G.

Si se considera, $\mathfrak{X}$ como la partición del conjunto de caracteres irreducibles Irr(G) a aquélla formada por los singleton y los elementos de $\mathcal{K}$ como las clases de conjugación de G, se tiene que la teoría de Supercaracteres de G coincide con la teoría ordinaria de caracteres de G. También se puede recuperar, mediante la teoría de Supercaracteres, la representación regular del grupo G (ver Ejemplo 11 para detalles).

Los dos ejemplos anteriores de Supercaracteres son considerados triviales. Para algunos grupos estos ejemplos triviales son las únicas posibilidades, existen muchos grupos para los cuales la teoría de supercaracteres no es trivial. Por ejemplo, supongamos que A es un grupo que actúa a través de automorfismos sobre G. Entonces, es bien sabido que, A permuta tanto los caracteres irreducibles de G y las clases de conjugación de G. Por el lema de Brauer (ver 9), la permutación de los caracteres de A correspondientes a estas dos acciones son idénticas, y por lo tanto hay un número igual de A- órbitas en Irr(G) y de G. Estas descomposiciones de las órbitas producen una teoría de supercaracteres para G: los miembros de $\mathfrak{X}$ son las A- órbitas en Irr(G), y los miembros de $\mathcal{K}$ son las uniones de las A-órbitas en las clases de G. En esta situación, la suma de los caracteres en una órbita $X \in \mathfrak{X}$ es constante en cada miembro de $\mathcal{K}$.

Esta tesis se centra principalmente en la construcción de una teoría de Supercaracteres del grupo Diédrico vía el teorema de Brauer mencionado anteriormente. También en recuperar la construcción de una teoría de Supercaracteres del grupo cíclico finito y sus aplicaciones a sumas de Ramanujan.

A continuación pasaré a dar detalles de la estructura de la presente tesis. El primer capítulo, se presentan notaciones y herramientas necesarias para el desarrollo de la tesis, se presentan también el grupo cíclico, el grupo Diédrico y el grupo unipotente de tamaño 4 con enteros en el cuerpo finito de dos elementos, así como también resume algunos elementos de la teoría de caracteres y las propiedades de las sumas de Ramanujan, para luego ser demostradas de manera más simple usando la teoría de supercaracteres. En el segundo capítulo, se presenta toda la teoría de supercaracteres, y se destaca el teorema de Brauer, importante para la construcción de la teoría y se muestra a modo de ejemplo el caso para $U_4(\mathbb{F}_2)$.

En el capítulo tercero, se desarrolla la teoría de supercaracteres para el grupo cíclico, la cual puede ser usada notablemente para estudiar las sumas de Ramanujan, ver [**6**]. Finalmente en el capítulo cuarto, se calcula una teoría de supercaracteres del grupo diédrico, este capítulo es fundamental dentro de esta tesis, pues la teoría de supercaracteres del grupo diédrico que hemos construído no se encuentra en la literatura, hasta donde sabemos. Nuestra construcción se basa en la teoría de supercaracteres del grupo cíclico vista en el capítulo 3.

De modo preciso, se logra una total descripción de los supercaracteres y superclases de $\mathrm{D_n}$, ver teorema 12, teorema 13 y teorema 14, teorema 15 respectivamente.

La tesis se enmarca dentro del Proyecto Fondecyt 1141254.

CAPíTULO 1

Preliminares

En este capítulo se recopilarán las notaciones y herramientas necesarias para el desarrollo de la tesis.

En la sección 1 se da una lista de notaciones, las cuales serán ocupadas en este trabajo. En la sección 2, se recuerda el Grupo Cíclico. En la sección 3 se muestran las clases de conjugación y la teoría de representaciones del grupo Diédrico. En la sección 4, se listan los elementos del grupo $U_4(\mathbb{F}_2)$ y también sus clases de conjungación, presentadas en una tabla.

En la sección 5, se define producto de Kronecker. En la sección 6, se dan algunas nociones básicas de representaciones lineales complejas de un grupo finito. En la sección 7, se presentan algunos elementos de la teoría de caracteres, que usaremos en el desarrollo de la tesis, por ejemplo las relaciones de ortogonalidad y Reciprocidad de Frobenius. La sección 8 es sobre las sumas de Ramanujan, las cuales usaremos en el capítulo 2 y 3.

En la tesis grupo significa grupo finito y los espacios vectoriales son complejos de dimensión finita.

1. Notaciones

Simbología	Significado
$\mathbb{Z}$	anillo de números enteros
$\mathbb{C}$	cuerpo de números complejos
$\mathbb{F}_q$	cuerpo finito con q elementos
$\mathrm{GL}(V)$	grupo de automorfismos lineales del $\mathbb{C}$- espacio vectorial V
$U_n(q)$	grupo de matrices unitriangulares superiores sobre $\mathbb{F}_q$
$\mathrm{tr}A$	traza de la matriz A
$C_G(g)$	centralizador de g en G
$C(a)$	clase de conjugación de a

2. Grupo Cíclico

Sea $\mathbb{Z}_n$ el grupo de enteros módulo n. Recordar que $\mathbb{Z}_n$ es cíclico de orden n y podemos considerarlo como:

$$\mathbb{Z}_n = \{1, 2, \ldots, n\}.$$

donde el neutro es n.

Ejemplo 1. *Tomando el conjunto* $\mathbb{Z}_4 = \{1, 2, 3, 4\}$*, la tabla de operaciones*

+	1	2	3	4
1	2	3	4	1
2	3	4	1	2
3	4	1	2	3
4	1	2	3	4

También tenemos el producto de enteros módulo n. Denotaremos $\mathbb{Z}_n^\times$ el grupo de unidades de $\mathbb{Z}_n$ con el producto.

Ejemplo 2. *Las unidades del grupo* $(\mathbb{Z}_4, \cdot)$ *son* 1 *y* 3*.*

Teorema 1. *Para todo* $n \in \mathbb{N}$*, tenemos:*

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_n) \simeq \mathbb{Z}_n^\times.$$

Demostración. Sea

$$\psi : \mathbb{Z}_n \longrightarrow \mathbb{Z}_n$$

un automorfismo. Tenemos que $\mathbb{Z}_n$ es generado por 1. Si $k \in \mathbb{Z}_n$, entonces

$$k = k \cdot 1 = \underbrace{1 + \ldots + 1}_{k-veces}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\psi(k) &= \psi(\underbrace{1 + \ldots + 1}_{k-veces}) \\
&= \underbrace{\psi(1) + \ldots + \psi(1)}_{k-veces} \\
&= k\psi(1).
\end{aligned}$$

Así, ψ queda completamente determinado por $\psi(1)$. Si $a := \psi(1)$, luego, todos los $\psi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_n)$ son de la forma:

$$\psi_a : \ 1 \ \longrightarrow \ a$$

con a unidad de $\mathbb{Z}_n$. Así, para cualquier automorfismo ψ de $\mathbb{Z}_n$, $\psi = \psi_a$, con $\psi(1) := a$ y a una unidad. Sea,

$$F : \ \mathbb{Z}_n^{\times} \ \longrightarrow \ \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_n)$$

con $F(a) = \psi_a$. Es claro que F es inyectiva y epiyectiva. Probemos que F es un homomorfismo. Sea $x \in \mathbb{Z}_n$, tenemos

$$(\psi_a \circ \psi_b)(x) = \psi_a(bx) = a(bx) = abx = \psi_{ab}(x)$$

Por lo tanto, $F(ab) = \psi_{ab} = \psi_a(\psi_b) = F(a)F(b)$. En consecuencia,

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_n) \simeq \mathbb{Z}_n^{\times}.$$

$\square$

3. Grupo Diédrico

En esta sección introduciremos el grupo Diédrico. En particular, calcularemos sus clases de conjugación y su teoría de representaciones.

Sea n un entero positivo. El grupo Diédrico D_n, es el grupo de simetrías de un n-ágono regular. Así, D_n actúa naturalmente sobre el conjunto de vértices y aristas del n-ágono regular. Denotemos por A la rotación a través del ángulo $2\pi/n$ y B es cualquier reflexión del n-ágono regular . Así, tenemos que el grupo Diédrico D_n, es el grupo presentado por generadores A y B, con las siguientes relaciones:

$$A^n = 1, \qquad B^2 = 1, \qquad BAB^{-1} = A^{-1},$$

donde A tiene orden n y B tiene orden 2. Es bien sabido que D_n tiene orden $2n$, y sus elementos son:

$$1, A, A^2, \cdots, A^{n-1}, B, AB, A^2B \cdots, A^{n-1}B.$$

Teorema 2. *En el grupo diédrico* D_n*, se distinguen dos tipos de clases de conjugación de acuerdo a la paridad de* n*. Más precisamente:*

1. *Si* n *es par,* D_n *tiene* $3 + n/2$ *clases de conjugación, las cuales son:*

$$\{1\}, \{A, A^{n-1}\}, \{A^2, A^{n-2}\}, \ldots, \{A^{n/2-1}, A^{n/2+1}\}, \{A^{n/2}\},$$

$$\{B, A^2B, \ldots, A^{n-2}B\}, \{AB, A^3B, \ldots, A^{n-1}B\}.$$

2. *Si n es impar,* D_n *tiene se tiene* $(n+3)/2$ *clases de conjugación, las cuales son:*

$$\{1\}, \{A, A^{n-1}\}, \{A^2, A^{n-2}\}, \ldots, \{A^{(n-1)/2}, A^{(n+1)/2}\},$$

$$\{B, AB, \ldots, A^{(n-1)}B\}.$$

Demostración. Toda rotación es conjugada a su inversa, debido a que

$$BA^jB^{-1} = A^{-j}$$

Más generalmente, las fórmulas

$$A^iA^jA^{-i} = A^j, \quad (A^iB)A^j(A^iB)^{-1} = A^{-j}$$

muestra que los conjugados de A^j en D_n son A^j y A^{-j}.

Para encontrar las clases de conjugación de B, notemos que:

$$A^iBA^{-i} = A^{2i}B, \quad (A^iB)B(A^iB)^{-1} = A^{2i}B$$

Como i varía, $A^{2i}B$ recorre las reflexiones en el cual la potencia de A es un exponente divisible por 2. Si n es impar, entonces todo entero módulo n es múltiplo de 2 (ya que 2 es invertible módulo n, así podemos resolver $a \equiv 2x \mod n$ dado a). Luego,

$$\{A^{2i}B \mid i \in \mathbb{Z}\} = \{A^iB \mid i \in \mathbb{Z}\}$$

así, toda reflexión en D_n es conjugada a B, si n es impar. Sin embargo, cuando n es par, solamente se obtienen la mitad de las reflexiones conjugadas a B. La otra mitad son conjugadas a AB. En efecto:

$$A^i(AB)A^{-i} = A^{2i+1}B, \quad (A^iB)(AB)(A^iB)^{-1} = A^{2i-1}B$$

como i varía, esto nos da la clase de AB, la cual es:

$$\{AB, A^3B, \ldots, A^{n-1}B\}.$$

Así, existen $(n-1)/2$ pares de rotaciones conjugadas para n impar (excluyendo la identidad) y $n/2 - 1$ pares de rotaciones conjugadas para n par (excluyendo la identidad y $A^{n/2}$). □

Ejemplo 3. *Sea* D_4 *el grupo diédrico de orden* 8*, el cual tiene la siguiente presentación:*

$$D_4 = \langle A, B \mid A^4 = B^2 = 1, BAB^{-1} = A^{-1} \rangle.$$

Los elementos del grupo son :

$$D_4 = \{1, A, A^2, A^3, B, AB, A^2B, A^3B\}.$$

Tenemos que A, A^3 son conjugados, ya que

$$BAB^{-1} = A^3.$$

También es fácil ver que B y A^2B son conjugados y que AB, A^3B también lo son. Luego, D_4 *tiene* 5 *clases de conjugación, las cuales son:*

$$\{1\}, \{A, A^3\}, \{A^2\}, \{B, A^2B\}, \{AB, A^3B\}. \tag{1}$$

Ejemplo 4. *Sea* D_3 *el grupo diédrico de orden* 6*, el cual tiene la siguiente presentación:*

$$D_3 = \langle A, B \mid A^3 = B^2 = 1, BAB^{-1} = A^{-1}\rangle.$$

Los elementos del grupo son :

$$D_3 = \{1, A, A^2, B, AB, A^2B\}.$$

Tenemos que A, A^2 son conjugados, ya que

$$BAB^{-1} = A^2.$$

También es fácil ver que B y AB son conjugados y que AB, A^2B también lo son. Así, D_3 *tiene* 3 *clases de conjugación, las cuales son:*

$$\{1\}, \{A, A^{2em}\}, \{B, AB\}. \tag{2}$$

4. Grupo $U_4(\mathbb{F}_2)$

Una descripción completa de la teoría de representaciones del grupo finito de matrices triangulares superiores, es un problema aún no resuelto. André y Yang, desarrollaron una teoría que permite aproximarse a una especificación de las representaciones irreducibles de este grupo. Luego, Diaconis e Isaacs axiomatizaron los resultados de André y Yang para un grupo finito. Así, gruesamente los supercaracteres reemplazan a los caracteres irreducibles y las superclases reemplazan a las clases de conjugación.

Para ejemplificar la teoría de Supercaracteres, nos serviremos del grupo $U_4(\mathbb{F}_2)$, es decir, del grupo unipotente de matrices de tamaño 4 con enteros en el cuerpo finito de dos elementos, $\mathbb{F}_2$. Para nuestra ejemplificación necesitaremos las clases de conjugación de $U_4(\mathbb{F}_2)$, las cuales son descritas a continuación:

$U_4(\mathbb{F}_2)$ consta de 64 elementos, los cuales son:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$U_4(\mathbb{F}_2)$ tiene 16 clases de conjugación. La tabla que sigue describe las clases de conjugación de $U_4(\mathbb{F}_2)$.

Tabla de clases de conjugación de $U_4(\mathbb{F}_2)$	
Tipos de clases	Número de clases de conjugación
$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	1
$C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	1
$C_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $c \in \mathbb{F}_2$	2
$C_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $c \in \mathbb{F}_2$	2
$C_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & c \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $c \in \mathbb{F}_2$	2
$C_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 1 & e \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $b, e \in \mathbb{F}_2$	4

CUADRO 1. Tabla de clases de conjugación de $U_4(\mathbb{F}_2)$

Tabla de clases de conjugación de $U_4(\mathbb{F}_2)$	
Tipos de clases	Número de clases de conjugación
$C_7 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & c+e & c \\ 0 & 1 & 0 & e \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $c, e \in \mathbb{F}_2$	4
$C_8 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b & 0 \\ 0 & 1 & 1 & e \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $b, e \in \mathbb{F}_2$	4
$C_9 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 & e \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $c, e \in \mathbb{F}_2$	4
$C_{10} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & b & c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $b, c \in \mathbb{F}_2$	4
$C_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & c \\ 0 & 1 & 0 & e \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $c, e \in \mathbb{F}_2$	4
$C_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & b & c \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $b, c \in \mathbb{F}_2$	4

CUADRO 2. Tabla de clases de conjugación de $U_4(\mathbb{F}_2)$

Tabla de clases de conjugación de $U_4(\mathbb{F}_2)$	
Tipos de clases	Número de clases de conjugación
$C_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & b & c \\ 0 & 1 & 0 & e \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $b, c, e \in \mathbb{F}_2$	4
$C_{14} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & b & c \\ 0 & 1 & 1 & e \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $b, c, e \in \mathbb{F}_2$	8
$C_{15} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & b & c \\ 0 & 1 & 1 & e \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $b, c, e \in \mathbb{F}_2$	8
$C_{16} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b & c \\ 0 & 1 & 1 & e \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $b, c, e \in \mathbb{F}_2$	8

Cuadro 3. Tabla de clases de conjugación de $U_4(\mathbb{F}_2)$

5. Producto de Kronecker

Recordemos que el producto de Kronecker $A \otimes B$ de una matriz A de $m \times n$ y una matriz B de $p \times q$ es la matriz de $mp \times nq$ definida por

$$A \otimes B := \begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix}.$$

Si A, B, C y D son matrices de manera que se puedan formar sus productos AC y BD, entonces

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD.$$

Recordemos también que si A es $m \times m$ y B es $n \times n$, entonces

$$\det(A \otimes B) = (\det A)^n (\det B)^m \tag{3}$$

y

$$\operatorname{tr}(A \otimes B) = (\operatorname{tr} A)(\operatorname{tr} B). \tag{4}$$

6. Representaciones de Grupo

Antes de definir el carácter de un grupo, necesitamos dar algunas nociones básicas de representaciones lineales complejas de un grupo finito.

Definición 1. *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el cuerpo $\mathbb{C}$ y sea G un grupo finito. Una representación de G es un par (V, ρ), donde ρ es un homomorfismo del grupo G en el grupo $\mathrm{GL}(V)$:*

$$\begin{array}{rccc} \rho : & G & \longrightarrow & \mathrm{GL}(V) \\ & g & \longmapsto & \rho_g \end{array}$$

Se dice que V es el espacio de la representación, y que ρ es la acción de la representación. Si no hay peligro de confusión usaremos simplemente ρ (o V) para referirnos a la representación (V, ρ). Si el espacio vectorial V tiene dimensión n, se dice que n es el grado de la representación en cuestión.

Definición 2. *Sean (V, ρ) y (V', ρ') dos representaciones de G. Diremos que ellas son equivalentes, si existe un $\mathbb{C}$-isomorfismo ϕ de V en V' tal que ϕ respeta la acción de grupo, es decir, el siguiente diagrama es conmutativo:*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\rho_g"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & V' \arrow[d, "\rho_g{}'"] \\ V \arrow[r, "\phi"] & V' \end{tikzcd}$$

Definición 3. *Un subespacio W de V se dice que es G-estable si se tiene $\rho_g(W) \subseteq W$, para todo $g \in G$.*

Definición 4. *En el caso que $\{0\}$ y V sean los únicos espacios estables, diremos que la representación es irreducible, en caso contrario se dice que es reducible.*

Teorema 3 (Teorema de Mashcke, ver [**9**]). *Toda representación V de G es suma directa de representaciones irreducibles.*

Definición 5. *Sean (V, ρ) y (V', ρ') dos representaciones de un grupo G. Un entrelazamiento entre estas representaciones (o entre ρ con ρ') es una aplicación $\mathbb{C}$-lineal ϕ de V en V' tal que*

$$\rho'_g \circ \phi = \phi \circ \rho'_g, \quad \textit{para todo} \quad g \in G.$$

Denotaremos por $\mathrm{Hom}_G(V, V')$, el conjunto formado por el entrelazamiento de V a V'. Si $V = V'$ entonces $\mathrm{Hom}_G(V, V')$ se denota por $\mathrm{End}_G(V)$.

Nótese que $\mathrm{Hom}_G(V, V')$ es un subespacio vectorial de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, V')$.

Teorema 4 (Lema de Schur, ver [**9**]). *Sean (V, ρ) y (V', σ) dos representaciones irreducibles de G, y sea $\phi \in \mathrm{Hom}_G(V, V')$. Entonces:*

1. *Si ρ y σ no son isomorfos, tenemos que $\phi = 0$.*
2. *Si $V = V'$ y $\rho = \sigma$, entonces ϕ es una homotecia.*

Entonces tenemos el siguiente corolario:

Corolario 1. $\mathrm{End}_G(V) \simeq \mathbb{C}$, *si y sólo si V es irreducible.*

Proposición 1 (ver pág. 16 [**9**]). *Toda representación V de G tiene la descomposición siguiente:*

$$V = m_1 V_1 \oplus m_2 V_2 \oplus \ldots \oplus m_r V_r,$$

donde $m_i V_i$ denota la suma directa de m_i sumandos de V_i, y los V_i son irreducibles no equivalentes entre si.

Más aún si tenemos otra descomposición de V como la anterior, es decir

$$V = m'_1 V'_1 \oplus m'_2 V'_2 \oplus \ldots \oplus m'_s V'_s.$$

Entonces, $r = s$, $m'_j = m_{\sigma(j)}$ y $V'_j = V_{\sigma(j)}$, para algún σ permutación de $\{1, 2, \ldots, r\}$.

6.1. Representaciones del grupo Diédrico.

Teorema 5. *Para el grupo Diédrico $\mathrm{D_n}$, tenemos cuatro representaciones complejas unidimensionales, si n es par y dos representaciones complejas unidimensionales, si n es impar. Más precisamente:*

Para n par, las representaciones unidimensionales, denotadas θ_{++}, θ_{+-}, θ_{-+} y θ_{--}, son definidas como sigue:

$$\begin{array}{rccc} \theta_{++}: & G & \longrightarrow & \mathrm{GL}(V) \\ & A & \longmapsto & 1 \\ & B & \longmapsto & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \theta_{+-}: & G & \longrightarrow & \mathrm{GL}(V) \\ & A & \longmapsto & 1 \\ & B & \longmapsto & -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \theta_{-+}: & G & \longrightarrow & \mathrm{GL}(V) \\ & A & \longmapsto & -1 \\ & B & \longmapsto & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \theta_{--}: & G & \longrightarrow & \mathrm{GL}(V) \\ & A & \longmapsto & -1 \\ & B & \longmapsto & -1 \end{array}$$

Para n impar, las representaciones unidimensionales son θ_{++} y θ_{+-} y se definen de la siguiente forma:

$$\begin{array}{rccc} \theta_{++}: & G & \longrightarrow & \mathrm{GL}(V) \\ & A & \longmapsto & 1 \\ & B & \longmapsto & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \theta_{+-}: & G & \longrightarrow & \mathrm{GL}(V) \\ & A & \longmapsto & 1 \\ & B & \longmapsto & -1 \end{array}$$

Teorema 6 (ver [**9**]). *El grupo $\mathrm{D_n}$ tiene $n/2-1$ representaciones irreducibles complejas 2-dimensionales si n es par, y $(n-1)/2$ representaciones irreducibles complejas 2-dimensionales si n es impar.*

Más precisamente, en el teorema anterior las representaciones 2-dimensionales ρ_m, están definidas por

$$\rho_m: \ \mathrm{D}_n \longrightarrow GL_2(\mathbb{C})$$

donde

$$\rho_m(A) = \begin{pmatrix} \eta^m & 0 \\ 0 & \eta^{-m} \end{pmatrix}, \qquad \rho_m(B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

y $\eta = e^{2\pi i/n}$. En el caso par $1 \leq m \leq \frac{n}{2} - 1$ y en el caso impar $1 \leq m \leq \frac{n-1}{2}$ Los homomorfismos ρ_m definen una representación irreducible de D_n, más aún ellas son isomorfas entre sí.

Ejemplo 5. *Para el grupo Diédrico* D_4*, tenemos la cuatro representaciones unidimensionales:* θ_{++}*,* θ_{+-}*,* θ_{-+} *y* θ_{--}*.*
Además tenemos una representación compleja irreducible de dimensión 2*, según Teorema 6, la cual llamaremos* ρ_1*:*

$$\begin{array}{rccc} \rho_1: & G & \longrightarrow & \mathrm{GL}(V) \\ & A & \longmapsto & \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \\ \\ & B & \longmapsto & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ejemplo 6. *Sea* D_3 *el grupo diédrico de orden* 6*, ocupando el ejemplo 4 y el Teorema 5 este grupo posee dos representaciones unidimensionales, nombradas como* θ_{++} *y* θ_{+-}*.*

Además tenemos una representación compleja irreducible de dimensión 2*, según Teorema 6, la cual llamaremos* ρ_1*, donde*

$$\begin{array}{rccc} \rho_1: & G & \longrightarrow & \mathrm{GL}(V) \\ & A & \longmapsto & \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \\ \\ & B & \longmapsto & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

6.2. Algunas construcciones genéricas.

Ejemplo 7. *Sean* G *un grupo finito y sea* V *un espacio vectorial de dimensión finita sobre el cuerpo* $\mathbb{C}$*, con base* $B = \{v_g\}_{g \in G}$*. Para todo* $g \in G$*, definamos la función de* B *en* B *definido por:*

$$v_h \longmapsto v_{gh}$$

Esta función se extiende linealmente a todo V y define un homomorfismo ρ_g de $\mathrm{GL}(V)$*. Así, tenemos una representación ρ de G. La cual se llama la representación regular de G.*

Podemos construir representaciones de grupo a partir de representaciones dadas de él. Aquí usaremos la suma y el producto tensorial de representaciones. Los cuales se definen a continuación:

Definición 6. *Sea G un grupo y V, W espacios vectoriales. Consideremos dos representaciones lineales*

$$\begin{array}{rccc} \rho: & G & \longrightarrow & \mathrm{GL}(V) \\ \sigma: & G & \longrightarrow & \mathrm{GL}(W) \end{array}$$

Entonces podemos construir la representación suma directa:

$$\begin{array}{rccc} \rho \oplus \sigma: & G & \longrightarrow & \mathrm{GL}(V \oplus W) \\ & g & \longmapsto & (\rho \oplus \sigma)(g) \end{array}$$

También podemos construir la representación producto tensorial:

$$\begin{array}{rccc} \rho \otimes \sigma: & G & \longrightarrow & \mathrm{GL}(V \otimes W) \\ & g & \longmapsto & (\rho \otimes \sigma)(g) \end{array}$$

7. Teoría de Caracteres

Definición 7. *El caracter χ_ρ de una representación (V, ρ) de G es la función $\chi_\rho : G \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por:*

$$\chi_\rho(g) := \mathrm{tr}(\rho_g),$$

donde tr *denota la traza del automorfismo.*

Notemos que $\chi(1)$ es justamente la traza de la matriz identidad. Así, $\chi(1)$ es la dimensión de V.

Definición 8. *Si χ es el carácter de una representación irreducible de G, se dice que χ es un carácter irreducible.*

Ejemplo 8. *Teniendo presente* (5) *se sigue que el carácter χ_m de ρ_m tiene los siguientes valores:*

$$(\chi_m(\rho_m(A^j))) = \eta^{mj} + \eta^{-mj}, \qquad (\chi_m(\rho_m(A^j B))) = 0.$$

recuerde que $\eta = e^{2\pi i k/n}$.

Notación 1. *Denotaremos por* $\mathrm{Irr}(G)$ *al conjunto de todos los caracteres irreducibles de* G*.*

A continuación se enuncian las proposiciones básicas de la teoría de caracteres, cuyas demostraciones pueden ser consultados en [**8**], [**10**].

Proposición 2. *Sea* (V, ρ) *una representación de* G*. Entonces:*

1. $\chi_\rho(1) = \dim V$
2. $\chi_\rho(xgx^{-1}) = \chi_\rho(g)$*, para todo* $x, g \in G$*. Es decir, el carácter es constante sobre las clases de conjugación.*
3. $\chi_\rho(g^{-1}) = \overline{\chi_\rho}(g)$*.*
4. $\chi(g)$ *es una suma de raíces* n*-ésimas de la unidad, con* n *el orden de* g*.*

Proposición 3.

1. *Representaciones equivalentes tienen el mismo carácter.*
2. *Si* χ *es un carácter, entonces* $\chi(1)$ *divide a* $|G|$*.*
3. *El número de caracteres irreducibles es igual al número de clases de conjugación.*
4. $|G| = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \chi(1)^2$*.*

Proposición 4. *Sean* ρ *y* ρ' *dos representaciones de* G*. Entonces:*

1. $\chi_{\rho \oplus \rho'} = \chi_\rho + \chi_{\rho'}$*,*
2. $\chi_{\rho \otimes \rho'} = \chi_\rho \cdot \chi_{\rho'}$*.*

Corolario 2. *Todo carácter* χ *de un grupo finito* G *se descompone de forma única como combinación lineal de caracteres irreducibles* $\chi = n_1\chi_1 + \cdots + n_k\chi_k$ *para ciertos* $n_i \in \mathbb{N}$*.*

Nótese que los caracteres son funciones constantes sobre las clases de conjugación. Una función constante sobre las clases de conjugación se llama central o bien función de clases. Denotemos por $C(G)$ el $\mathbb{C}$-espacio vectorial, constituído por las funciones centrales de G, es decir:

$$C(G) := \{f : G \longrightarrow \mathbb{C} \ : \ f(h^{-1}gh) = f(g), \ \forall \ h \in G\}$$

Observación 1. *Según* 2 *de la Proposición* 2*,* $\chi_\rho \in C(G)$*, para toda representación* ρ *de* G*.*

Sean $C_1, C_2, \dots, C_n$ las clases de conjugación de G. Sea δ_i definido como sigue:

$$\delta_i(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in C_i \\ 0 & si \quad x \notin C_i \end{cases}.$$

Una base de $C(G)$ es justamente el conjunto $\{\delta_i \mid 1 \leq i \leq n\}$. En particular, se sigue la siguiente proposición.

Proposición 5. *La dimensión de $C(G)$ es igual al número de clases de conjugación de G.*

Definición 9. *Si G es un grupo finito, definimos en el espacio vectorial $C(G)$ el producto interno $\mathfrak{L}^2$, también llamado producto de Frobenius, como sigue:*

$$\langle f_1, f_2 \rangle := \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} f_1(x) \overline{f_2(x)}$$

donde $f_1, f_2 \in C(G)$.

Observación 2. *Bajo la acción por traslación, la representación natural $\mathfrak{L}^2(G) = (\mathbb{C}(G), \mathfrak{L}^2)$ es conocida como la representación regular de G,*

$$g \cdot x = gx, \ \ con\ g, x \in G$$

Teorema 7 (Ver [**8**]). *Sea G un grupo. El conjunto* Irr(G) *es una base ortonormal, con respecto al producto interno $\mathfrak{L}^2$, de $C(G)$.*

Corolario 3. *Si un carácter χ de un grupo finito se descompone en irreducibles como $\chi = n_1\chi_1 + \cdots + n_k\chi_k$, entonces*

$$\langle \chi, \chi \rangle = \sum_{i=1}^{k} n_i^2.$$

En particular, χ es irreducible si y sólo si, $\langle \chi, \chi \rangle = 1$.

Demostración. Del Corolario 2, se tiene que, $\chi = n_1\chi_1 + \cdots + n_k\chi_k$, para ciertos $n_i \in \mathbb{N}$. Luego,

$$\langle \chi, \chi \rangle = \langle n_1\chi_1 + \cdots + n_k\chi_k, n_1\chi_1 + \cdots + n_k\chi_k \rangle = \sum_{i,j} n_i n_j \langle \chi_i, \chi_j \rangle.$$

Ahora de Teorema 7, se sigue que

$$\langle \chi, \chi \rangle = \sum_{i=1}^{k} n_i^2 = 1$$

□

Proposición 6 (Ver página 19 de [**8**]). *Sea G un grupo y denotemos por χ_G el caracter de su representación regular (ver ejemplo 7). Entonces:*

$$\chi_G(g) = \begin{cases} |G| & si\ g = 1 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Además, χ_G tiene la siguiente descomposición como suma de caracteres irreducibles:

$$\chi_G = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \chi(1)\chi. \tag{6}$$

Definición 10. *Sea G un grupo. La tabla de carácter de G es una arreglo rectangular $S = (a_{i,j})$ de números complejos donde*

$$a_{i,j} := (\chi_i(c_j))$$

donde $\chi_i \in \mathrm{Irr(G)}$ y $c_i \in C_i$ Se conviene que χ_1 es el carácter trivial y que $c_1 = 1$.

Tabla de Carácter de G				
	c_1	c_2	$\dots$	c_r
χ_1	$\chi_1(c_1)$	$\chi_1(c_2)$	$\dots$	$\chi_1(c_r)$
χ_2	$\chi_2(c_1)$	$\chi_2(c_2)$	$\dots$	$\chi_2(c_r)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
χ_r	$\chi_r(c_1)$	$\chi_r(c_2)$	$\dots$	$\chi_r(c_r)$

CUADRO 4

Ejemplo 9. *Construiremos la tabla de caracteres de D_4, del ejemplo 5. Tenemos:*

$$\chi_1(\rho_1(A^2)) = \chi_1\left(\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}\right) = \chi_1\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right)$$

Ocupando la Definición 7, tenemos que

$$\chi_1\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right) = -2$$

$$\chi_1(\rho_1(AB)) = \chi_1\left(\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \chi_1\left(\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}\right)$$

Ocupando la Definición 7, tenemos que

$$\chi_1\left(\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}\right) = 0$$

De esta forma tenemos la siguiente tabla de caracteres:

Tabla de Carácter de D_4					
	1	A	A^2	B	AB
$\theta_{+,+}$	1	1	1	1	1
$\theta_{+,-}$	1	1	1	-1	-1
$\theta_{-,+}$	1	-1	1	1	-1
$\theta_{-,-}$	1	-1	1	-1	1
χ_1	2	0	-2	0	0

Cuadro 5

Terminaremos esta subsección recordando las relaciones de ortogonalidad.

El hecho que Irr(G) es una base ortonormal, dice en particular que

$$\langle \chi_i, \chi_j \rangle_G \;=\; \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \chi_i(g)\overline{\chi_j(g)} \;=\; \delta_{ij}.$$

Esta relación es llamada la Primera Relación de Ortogonalidad.

Teorema 8 (Segunda Relación de Ortogonalidad). *Sean $g, h \in G$ entonces*

$$\sum_{\chi\in G} \chi(g)\overline{\chi(h)} = \begin{cases} |C_G(g)| & \textit{si } g \textit{ y } h \textit{ son } G\textit{-conjugados,} \\ 0 & \textit{en otro caso} \end{cases}$$

Demostración. Sean $g_1, g_2, \ldots, g_k$ representantes de las clases de conjugación de G y X la matriz de tamaño $k \times k$ cuya entrada (i, j) es $\chi_i(g_j)$. Sea D la diagonal de la matriz que representa la tabla de caracter de G. De la primera relación de ortogonalidad, se obtiene

$$\delta_{ij} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \chi_i(g)\overline{\chi_j(g)} = \frac{1}{|G|}\sum_{m=1}^{k} \frac{|G|}{|C_G(g_m)|}\chi_i(g_m)\overline{\chi_j(g_m)}. \tag{7}$$

Este sistema de k^2 ecuaciones es equivalente a la siguiente ecuación matricial

$$|G|I = XD\overline{X}^t$$

donde I es la matriz identidad. Si a la ecuación anterior multiplicamos por X^{-1} por la izquierda y luego X por la derecha, obtenemos

$$X^{-1}|G|IX = D\overline{X}^t X.$$

Por la Primera Relación de Ortogonalidad tenemos que:

$$|G|\delta_{ij} = \sum_{g\in G} \chi_i(g)\overline{\chi_j(g)}. \tag{8}$$

Pero, recordando que los caracteres irreducibles son funciones clases y así constantes sobre las clases de conjugación, se sigue que:

$$|G|\delta_{ij} = \sum_{m=1}^{k} |C_G(g_m)|\chi_i(g_m)\overline{\chi_j(g_m)} \tag{9}$$

Esto implica que,

$$|G|I_k = MDM^*$$

Pero, recordemos que el cuadrado de la matriz inversa por la izquierda es necesariamente la inversa por la derecha, luego

$$|G|I = DM^*M$$

En general, la entrada (i, j)-éxima por la derecha de la matriz es

$$|G|\delta_{ij} = \sum_{m=1}^{k} |C_G(g_i)|\chi_k(g_i)\overline{\chi_k(g_j)} \tag{10}$$

Dividiendo ambos lados por $|C_G(g_i)| = \frac{|G|}{|\mathcal{C}_G(g_i)|}$, tenemos

$$|C_G(g_i)| = \sum_{m=1}^{k} \chi_k(g_i)\overline{\chi_k(g_j)} \tag{11}$$

□

7.1. Caracter inducido y Reciprocidad de Frobenius. Por último, introducimos la definición de caracter inducido y el resultado conocido como reciprocidad de Frobenius (ver [**8**]). Por lo anterior necesitamos introducir la siguiente definición.

Definición 11. *Sea G un grupo finito y H un subgrupo de G. Si φ es una función de clases en H, llamaremos $\varphi^0 : G \longrightarrow \mathbb{C}$ a la función definida por*

$$\varphi^0(g) = \begin{cases} \varphi(g) & si\ g \in H, \\ 0 & si\ g \notin H. \end{cases}$$

Sea R un sistema de representantes de G según H, entonces

$$G = \dot{\bigcup}_{r\in R} Hr$$

Luego, definimos

$$\varphi^G(g) = \frac{1}{|H|}\sum_{r\in R}\sum_{h\in H}\varphi^0(hrg(hr)^{-1}) = \frac{1}{|H|}\sum_{h\in H}\sum_{r\in R}\varphi^0(hrg(hr)^{-1})$$

Notemos que,

$$\varphi^0(hrg(hr)^{-1}) = \begin{cases} \varphi^0(hrg(hr)^{-1}) & hrg(hr)^{-1} \in H, \\ 0 & \text{si } hrg(hr)^{-1} \notin H. \end{cases}$$

Pero, φ es una función de clase de H, es decir, $hrg(hr)^{-1} \in H$ es equivalente a $rgr^{-1} \in H$, de esta forma

$$\varphi^0(hrg(hr)^{-1}) = \begin{cases} \varphi(rgr^{-1}) & rgr^{-1} \in H, \\ 0 & \text{si } rgr^{-1} \notin H. \end{cases}$$

Así, $\varphi^0(hrg(hr)^{-1}) = \varphi^0(rgr^{-1})$. Por lo tanto:

$$\varphi^G(g) = \frac{1}{|H|}\sum_{r\in R}\sum_{h\in H}\varphi^0(rgr^{-1}) = \sum_{g\in G}\varphi^0(rgr^{-1})x.$$

Proposición 7 (Reciprocidad de Frobenius). *Sea H un subgrupo de G. Supongamos que φ es una función de clase de H y que θ es una función de clase de G, entonces*

$$\langle \varphi, \theta\rangle_H = \langle \varphi^G, \theta\rangle_G.$$

Demostración. Tenemos lo siguiente:

$$\langle \varphi^G, \theta\rangle_G = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\varphi^G(g)\overline{\theta(g)} = \frac{1}{|G|}\frac{1}{|H|}\sum_{g\in G}\sum_{x\in G}\varphi^0(xgx^{-1})\overline{\theta(g)}. \tag{12}$$

Haciendo $y = xgx^{-1}$ y observando que $\theta(g) = \theta(y)$, obtenemos

$$\langle \varphi^G, \theta\rangle_G = \frac{1}{|G|}\frac{1}{|H|}\sum_{y\in G}\sum_{x\in G}\varphi^0(y)\overline{\theta(y)} = \frac{1}{|H|}\sum_{y\in G}\varphi(y)\overline{\theta(y)} = \langle \varphi, \theta\rangle_H. \tag{13}$$

□

8. Sumas de Ramanujan

Denotemos por $\mathfrak{i}$ el complejo tal que $\mathbf{i^2 = -1}$. Sea $e(x) := \exp(2\pi \mathfrak{i} x)$ con x un entero positivo. $e(x)$ es una función periódica de período 1. Como es usual, denotemos por $c_n(x)$ la suma de Ramanujan, esto es

$$c_n(x) := \sum_{\substack{j=1 \\ (j,n)=1}}^{n} e\left(\frac{jx}{n}\right). \tag{14}$$

La suma de Ramanujan goza de interesantes propiedades, para enunciar alguna de ellas, necesitamos la siguiente notación

$$\delta_{x|n} := \begin{cases} 1, & \text{si } x|n \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{15}$$

A continuación daremos la definición de la función de Möbius y la definición de la función de Euler.

Definición 12. *Sea $n \in \mathbb{N}$. Se define la función de Möbius $\mu(n)$ del siguiente modo*

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & , si\ n = 1 \\ (-1)^k & , si\ n\ es\ producto\ de\ k\ primos\ diferentes, \\ 0 & ,\ si\ n\ es\ divisible\ por\ un\ cuadrado\ mayor\ que\ 1 \end{cases}$$

La función de Möbius es multiplicativa, y tiene gran relevancia en la teoría de las funciones multiplicativas y aritméticas.

Proposición 8. *La suma sobre todos los divisores positivos de n de la función de Möbius es cero, excepto cuando $n = 1$. Es decir*

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1, & si\ n = 1, \\ 0, & si\ n > 1 \end{cases}$$

Un resultado importante es la fórmula de inversión de Möbius:

$$c_n(x) = \sum_{\substack{d|x \\ d|n}} \mu\left(\frac{n}{d}\right) d = \sum_{d|(x,n)} \mu\left(\frac{n}{d}\right) d \tag{16}$$

Definición 13. *La función de Euler $\phi(n)$, está definida como el número de enteros positivos menores o iguales a n que son primos relativos con n. Se conviene que 1 es primo relativo con todo entero.*

Proposición 9. *Sean p un número primo y k un entero positivo. Entonces:*

1. $\phi(1) = 1$.
2. $\phi(p) = p - 1$.
3. $\phi(p^k) = (p-1)p^{k-1}$.
4. *La función $\phi(n)$ es multiplicativa, esto es si m y n son primos relativos entre sí, entonces*
$$\phi(mn) = \phi(m)\phi(n).$$

Observación 3. *la función $\phi(n)$ también se puede escribir como:*
$$\phi(n) = \sum_{k \leq n} \sum_{d|(k,n)} \mu(d).$$
Ahora reordenando las sumas tenemos
$$\phi(n) = \sum_{d|n} \mu(d)\frac{n}{d} = n \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d}$$

Proposición 10.
$$\sum_{d|n} \phi(n) = n.$$

Una importante relación entre la suma de Ramanujan y la función de Möbius es la siguiente:

$$\sum_{d|n} c_d(x) = \delta_{n|x} n \tag{17}$$

en otros términos:

$$c_n(x) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) d\delta_{d|x}. \tag{18}$$

Las dos primeras propiedades de la suma de Ramanujan, tienen que ver con la función de Euler y de Möbius. En efecto, la suma de Ramanujan puede ser vista como una generalización de estas funciones. Más precisamente, tenemos:

1. $c_n(0) = \phi(n)$ es la función de Euler
2. $c_n(x) = c_n(1) = \mu(n)$ si $(x, n) = 1$. $c_n(1)$ es la suma de las n-ésimas raices de la unidad, y esta es exactamente la función de Möbius $\mu(n)$.

Nótese que la fórmula (18) muestra que $c_n(x)$ es un entero. Esto representa un importante hecho aritmético; en efecto, la función de Möbius μ, puede ser vista como $\mu(n) = c_n(1)$. Así, tenemos la siguiente notable propiedad:

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \sum_{d|n} c_d(1) = n\delta_{n|1} \begin{cases} n, & \text{si } n = 1 \\ 0, & \text{si } n > 1 \end{cases} \tag{19}$$

8.1. A continuación listaremos una serie de propiedades de la suma de Ramanujan que serán demostradas en el Capítulo 3 usando la Teoría de Supercaracteres.

1. Si $(m, n) = 1$, entonces
$$c_{mn}(x) = c_m(x)c_n(x)$$
para todo x en $\mathbb{Z}$.
2. Si $(mx, ny) = 1$, entonces
$$c_{mn}(xy) = c_m(x)c_n(y).$$
3. Para $n \geq 1$ tenemos
$$c_n(1) = \mu(n), \quad c_n(n) = \phi(n).$$
Además, $c_n(x)$ es siempre un entero.
4. Si $n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$ es la factorización canónica de n entre los distintos primos $p_1, p_2, \ldots, p_r$ y $d = p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\cdots p_r^{\beta_r}$ es un divisor de n, entonces
$$c_n(d) = \prod_{l=1}^{r} c_{p_l^{\alpha_l}}(p_l^{\beta_l}).$$

CAPíTULO 2

Supercaracteres

La teoría de supercaracteres fue motivada por los trabajos de C. André (ver [**1**], [**2**], [**3**], [**4**]) y Ning Yan (ver [**11**]) sobre la teoría de representaciones del grupo unipotente sobre un cuerpo finito. A pesar de que los métodos seguidos por cada uno de ellos son diferentes, los resultados a los que llegan son equivalentes. En pocas palabras, ellos obtienen una partición del conjunto de caracteres irreducibles del grupo unipotente la cual tiene alguna de las propiedades notables que ayudan a entender la teoría de Caracteres del grupo unipotente. La teoría de supercaracteres, la cual es una axiomatización de los trabajos de C. André y N. Yan, fue introducida en el 2008 por P. Diaconis e Isaacs en [**5**].

1. Supercaracteres

Definición 14. *Sea G un grupo finito. Supongamos que $\mathfrak{X}$ es una partición de los caracteres irreducibles de G y $\mathcal{K}$ es una partición de G. Diremos que el par $(\mathfrak{X}, \mathcal{K})$ define una teoría de supercaracteres de G, si:*

1. $\{1\} \in \mathcal{K}$
2. $|\mathfrak{X}| = |\mathcal{K}|$
3. *Para cada $X \in \mathfrak{X}$, el siguiente carácter*

$$\chi_X = \sum_{\chi \in X} \chi(1)\chi$$

es constante sobre cada $K \in \mathcal{K}$.

Los $K \in \mathcal{K}$ son llamados superclases y los elementos de $\mathfrak{X}$ son llamados supercaracteres de G. También se suele decir que los χ_X son los supercaracteres de G.

Proposición 11. *Las superclases son uniones de clases de conjugación.*

Demostración. Sean $u, v \in G$ y $\mathfrak{X}$ una partición de $\mathrm{Irr}(G)$.
Sobre G se define la siguiente relación de equivalencia

$$u \sim v, \text{si y sólo si } \chi_X(u) = \chi_X(v),$$

para todo $X \in \mathfrak{X}$. Es claro que, $u \sim v$ es una relación de equivalencia, la cual induce una partición en G.
Las clases de equivalencia según $\sim$ son los elementos de $\mathcal{K}$, es decir, si C es clase de conjugación, entonces $C \subseteq K$, para algún $K \in \mathcal{K}$.

Ahora, sea X un conjunto no vacío, sobre el cual hay dos relaciones de equivalencia. Sean estas $\equiv$ y $\sim$.

Supongamos que $X \equiv Y$ entonces $X \sim Y$. Demostremos que la clase de equivalencia según $\sim$ son uniones de clases de equivalencia según $\equiv$.

$X \equiv Y$ si y sólo si $Y = gXg^{-1}$, luego

$$\chi_X(Y) := \sum_{\chi \in X} \chi(1)\chi(Y) = \sum_{\chi \in X} \chi(1)\chi(gXg^{-1}) = \chi_X(X)$$

se cumple debido a que χ_X es invariante por conjugación.

$\square$

Ejemplo 10. *Consideremos $\mathfrak{X}$ como la partición de $\mathrm{Irr}(G)$ cuyos elementos son todos los singleton posibles de $\mathrm{Irr}(G)$ y $\mathcal{K}$ como las clases de conjugación. Es decir,*

$$\mathfrak{X} = \{\{\chi\} \mid \chi \in \mathrm{Irr}(G)\}$$

$$\mathcal{K} = \{\textit{clases de conjugación de } G\}$$

Claramente tenemos que $\{1\} \in \mathcal{K}$ y $|\mathfrak{X}| = |\mathcal{K}|$. Además, si $X = \{\chi\}$:

$$\chi_X = \sum_{\chi \in X} \chi(1)\chi = \chi$$

Así, la Teoría de Supercaracteres es la Teoría ordinaria de Caracteres.

Ejemplo 11. *Sean $\mathfrak{X}$ y $\mathcal{K}$ definidos como sigue:*

$$\mathfrak{X} = \{X_1, X_2\}$$

donde $X_1 = \{1\}$ y $X_2 = \{\chi \in \mathrm{Irr}(G) \mid \chi \neq \mathbb{1}\}$. Y

$$\mathcal{K} = \{K_1, K_2\}$$

donde $K_1 = \{1\}$ y $K_2 = \{g \in G \mid g \neq 1\}$. Entonces, $(\mathfrak{X}, \mathcal{K})$, define una teoría de supercaracteres. En efecto, $\{1\} \in \mathcal{K}$ y que $|\mathfrak{X}| = |\mathcal{K}| = 2$, además

$$\chi_{X_1} = 1$$

y

$$\chi_{X_2} = \sum_{\chi \in X} \chi(1)\chi = \sum_{\chi \in X} (\dim \chi)\chi.$$

Así, $\chi_{X_2} = \chi_{\mathrm{G}} - \mathbb{1}$*, donde* χ_{G} *denota el caracter de la representación regular.*

Los dos ejemplos anteriores de supercaracteres, son válidos para cualquier grupo finito. Existe un mecanismo de construir una teoría de supercaracteres de un grupo finito, el cual está basado en un teorema de Brauer. Pasemos ahora a explicar este mecanismo: sea A un grupo que actúa en G por automorfismos. Luego, A permuta tanto Irr(G) como el conjunto de clases de conjugación de G. La partición de las clases de conjugación en las A-órbitas produce una partición $\mathcal{K}$ del grupo G, y sea $\mathfrak{X}$ la partición de Irr(G) dados por las A-órbitas. Un cálculo sencillo muestra que para cada A-órbita $X \in \mathfrak{X}$, el carácter χ_X es constante en cada miembro de $\mathcal{K}$. El lema de Brauer garantiza que $|\mathfrak{X}| = |\mathcal{K}|$, y por lo tanto, $(\mathfrak{X}, \mathcal{K})$ es una teoría de supercaracteres de G. Este mecanismo es el que ocuparemos principalmente en esta tesis.

Teorema 9 (Teorema de Brauer, Ver página 93 de [**8**]). *Sean G y A grupos, tales que A actúa sobre* $\mathrm{Irr}(G)$ *y A actúa sobre las clases de conjugación G Entonces el número de A-órbitas en* $\mathrm{Irr}(G)$ *es igual al número de A-órbitas en G.*

Sea $\mathcal{G} := \mathrm{Aut}(G)$ el grupo de automorfismos de G. Tenemos que $\mathcal{G}$ actúa sobre $\mathrm{Irr}(G)$ y G como sigue:

- $\mathcal{G}$ actúa sobre $\mathrm{Irr}(G)$, de la siguiente manera,

$$\varphi \in \mathcal{G};\ \varphi \cdot \chi := \chi \circ \varphi$$

- $\mathcal{G}$ actúa sobre G como sigue

$$\varphi \cdot g := \varphi(g)$$

Más generalmente, cada subgrupo H de $\mathrm{Aut}(G)$ actúa sobre $\mathrm{Irr}(G)$ y G. Así, cada subgrupo H de $\mathrm{Aut}(G)$ determina una correspondiente teoría de supercaracter $(\mathfrak{X}_H, \mathcal{K}_H)$ para G. Para ser más específicos, H induce una permutación de $\mathrm{Irr}(G)$ y también permuta las clases de conjugación de G. Esta descomposición nos da una teoría de Supercaracter para G donde los elementos X_i de $\mathfrak{X}_H$ $(= \{X_1, X_2, \ldots, X_r\})$ son $H-$órbitas en $\mathrm{Irr}(G)$ y las superclases K_i de $\mathcal{K}_H$ $(= \{K_1, K_2, \ldots, K_r\})$ son uniones de $H-$órbitas de clases de conjugación de G. Por el Teorema de Brauer, el número de $H-$órbitas de $\mathrm{Irr}(G)$ es igual al número de $H-$órbitas inducidas sobre el conjunto de clases de conjugación de G. Por construcción, cada supercaracter (20) es constante sobre cada miembro de $\mathcal{K}_H$.

1.1. Tabla de Supercaracteres. Supongamos que G es un grupo finito y que $(\mathfrak{X}, \mathcal{K})$ es una Teoría de Supercaracter para G. Sea $\mathfrak{X} = \{X_1, X_2, \ldots, X_r\}$ con sus correspondientes supercaracteres

$$\chi_{X_i} = \sum_{\chi \in X_i} \chi(1)\chi \tag{20}$$

y $\mathcal{K} = \{K_1, K_2, \ldots, K_r\}$. La tabla de Supercaracteres para G correspondiente a $(\mathfrak{X}, \mathcal{K})$ es el arreglo S de $r \times r$ cuyos (i, j) son las entradas de $\chi_{X_i}(K_j)$. Esta tabla es análoga a la tabla de Caracteres, donde ahora las filas son indexadas por los supercaracteres y las columnas por las superclases. Más precisamente, tenemos

$$S = (\chi_{X_i}(K_j))_{i,j=1}^{r}.$$

Tabla de Supercaracter de G				
	K_1	K_2	$\ldots$	K_r
χ_{X_1}	$\chi_{X_1}(K_1)$	$\chi_{X_1}(K_2)$	$\ldots$	$\chi_{X_1}(K_r)$
χ_{X_2}	$\chi_{X_2}(K_1)$	$\chi_{X_2}(K_2)$	$\ldots$	$\chi_{X_2}(K_r)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
χ_{X_r}	$\chi_{X_r}(K_1)$	$\chi_{X_r}(K_2)$	$\ldots$	$\chi_{X_r}(K_r)$

Cuadro 1

2. Ejemplo de Supercaracteres del grupo unipotente $U_4(\mathbb{F}_2)$

La teoría de representaciones del grupo simétrico S_n puede ser escrito combinatoriamente a través de la partición de n. En efecto, cada partición de n se identifica con un diagrama de Ferrer, ver [**7**], el cual permite construir la respectiva representación irreducible. Un fenómeno combinatorio similar ocurre con el grupo de matrices unipotentes $U_n(\mathbb{F}_q)$ definido sobre el cuerpo $\mathbb{F}_q$.

Recordemos que clasificar las representaciones irreducibles del grupo $U_n(\mathbb{F}_q)$, es un problema complejo, probablemente intratable para un n arbitrario. A pesar de esto, André (ver [**1**], [**2**], [**3**], [**4**]) descubre una manera natural de construir ciertas sumas de caracteres irreducibles y ciertas uniones de clases de conjugación de U_n, juntos forman una útil aproximación al grupo de representaciones irreducibles.

La noción de una teoría de Supercaracteres de un grupo finito estuvo motivada por el trabajo hecho por André y Yan (ver [**1**], [**2**], [**3**], [**4**], [**11**]) , de manera que las particiones del conjunto de $\{1, 2, \ldots, n\} := \mathbf{n}$ indexan los supercaracteres de $U_n(\mathbb{F}_q)$ de manera natural y fácil de calcular.

A continuación ejemplificaremos la Teoría de Supercaracteres de $U_n(\mathbb{F}_q)$ para $q = 2$ y $n = 4$. Esta ejemplificación es útil para entender la construcción de la teoría de supercaracteres para el grupo unipotente en general.

Definición 15. *Sea $U := U_4(\mathbb{F}_2)$. Todo elemento de U puede ser escrito como*

$$u + 1$$

donde u es de la forma

$$\begin{pmatrix} 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{21}$$

Como cualquier g se puede escribir como la identidad más su parte nilpotente, de esta manera $U = \{u + 1 \mid u \text{ es de la forma } (21)\}$.

Definición 16. *Una partición de* $\mathbf{n}$ *se puede representar mediante un diagrama que conecta los vértices de este con arcos.*

Definición 17. *Para $S \subset \{1, 2, \cdots, n\}$, sea*

$$\mathcal{S}_S = \{\textit{conjunto de particiones de } S\},$$

y

$$\mathcal{S} = \bigcup_{n \geq 0} S_n$$

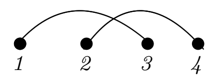
donde $S_n = \mathcal{S}_{\{1,2,\ldots,n\}}$.

Un arco $i \frown j$ de $K \in \mathcal{S}_S$ es un par $(i, j) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S}$ tal que

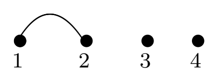
1. *$i < j$*

2. *i y j esten en la misma parte de K.*

Ejemplo 12. *Sea $n = 4$ y consideremos la siguiente partición $\{1,3\} \cup \{2,4\}$. Así, tenemos los arcos $1 \frown 3$ y $2 \frown 4$, el cual se puede representar por el diagrama que conecta los vértices de la partición dada, es decir*



Estas órbitas nos sugieren una manera natural de indexarlas por la entrada más lejana no cero de la matriz. Esto es, usar un conjunto de particiones, conectadas por un arco, donde un arco $i \frown l$ indica que hay un 1 en la entrada i, l de la matriz, y ceros a la izquierda en la i-ésima fila y ceros bajo él en la l-ésima columna. Por ejemplo, si tenemos la partición representada por los arcos

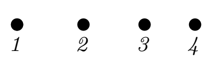


obtenemos la matriz

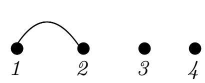
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

también se puede utilizar de manera recíproca. De esta forma los conjuntos de particiones indexan las superclases.

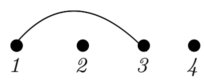
Ejemplo 13. *Para $n = 4$, tenemos 15 particiones.Cada conjunto partición de $\{1,2,3,4\}$ es un conjunto de arcos de $\{1,2,3,4\}$, donde estos arcos nos indicarán la posición del elemento 1 en las entradas de la matriz $U_4(\mathbb{F}_2) - 1$.*



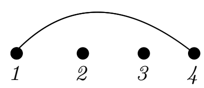
$$\longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



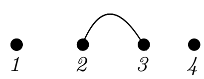
$$\longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



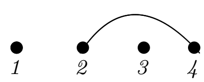
$$\longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



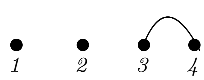
$$\longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



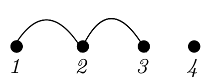
$$\longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



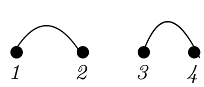
$$\longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



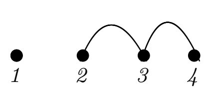
$$\longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



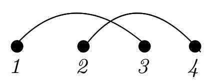
$$\longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



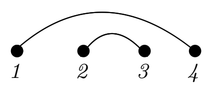
$$\longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



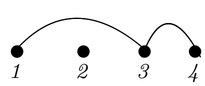
$$\longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



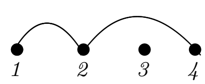
$$\longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



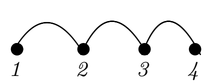
$$\longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esta biyección entre el conjunto de particiones (conectadas por un arco) y la entrada más lejana no cero de la matriz, nos da las superclases, $\mathcal{K}$ de $U_4(\mathbb{F}_2)$, que llamaremos $K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_6, K_7, K_8, K_9, K_{10}, K_{11}, K_{12}, K_{13}, K_{14}, K_{15}$ a cada una de las matrices anteriores respectivamente. De manera recíproca obtenemos los supercaracteres.

Ejemplo 14. *Los elementos pertenecientes a las superclases $\mathcal{K}$, son:*

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & u & v \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, K_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & w \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$K_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, K_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a & aw \\ 0 & 0 & 1 & w \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$K_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, K_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$K_8 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & u+a & v+aw \\ 0 & 0 & 1 & w \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, K_9 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & u & v+b \\ 0 & 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

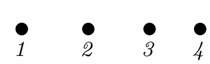
$$K_{10} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a & aw+b \\ 0 & 0 & 1 & w+d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, K_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & w+a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$K_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a & aw+1 \\ 0 & 0 & 1 & w \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, K_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & w+b \\ 0 & 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

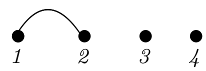
$$K_{14} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & u & v+a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, K_{15} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & u+a & v+aw+b \\ 0 & 0 & 1 & w+d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Estas particiones de las entrada de la matriz nos darán los supercaracteres de U_4.

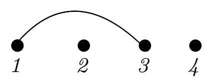
Para la matriz K_1 *su correspondiente supercaracter* X_1 *es:*

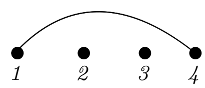


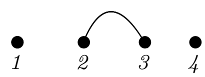
Lo mismo ocurre para la matriz K_2 su correspondiente supercaracter X_2 es:

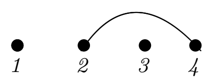


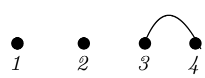
Siguiendo de la misma forma llamaremos a cada diagrama de arcos por X_i:

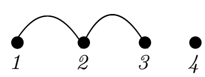
$X_3 =$ 

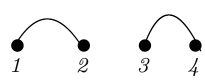
$X_4 =$ 

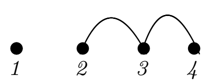
$X_5 =$ 

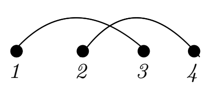
$X_6 =$ 

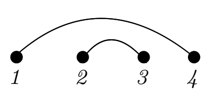
$X_7 =$ 

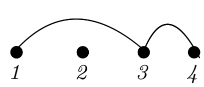
$X_8 =$ 

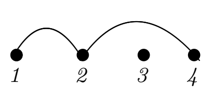
$X_9 =$ 

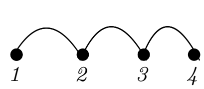
$X_{10} =$ 

$X_{11} =$ 

$X_{12} =$ 

$X_{13} =$ 

$X_{14} =$ 

$X_{15} =$ 

Podemos comprobar claramente que estas superclases reagrupan las clases de conjugación que dimos en las tablas 1 y 3, es decir

$$\begin{array}{cccc} C_1 \subset K_1, & C_2 \subset K_4, & C_3 \subset K_3, & C_4 \subset K_6, \\ C_5 \subset K_{11}, & C_6 \subset K_{12}, & C_7 \subset K_9, & C_8 \subset K_5, \\ C_9 \subset K_7, & C_{10} \subset K_2, & C_{11} \subset K_{13}, & C_{12} \subset K_{14} \\ C_{13} \subset K_9, & C_{14} \subset K_{15}, & C_{15} \subset K_8, & C_{16} \subset K_{10}. \end{array}$$

Hemos encontrado los supercaracteres y las superclases de $U_4(\mathbb{F}_q)$ de esta forma hemos comprobado que tienen el mismo cardinal y que el $\{1\}$ está en las superclases, sólo nos falta calcular la tabla de supercaracteres para tener una Teoría de Supercaracteres.

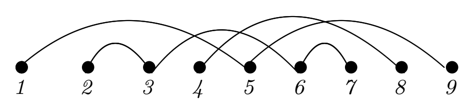
2.1. Para calcular la tabla de supercaracteres introduciremos los siguientes resultados:

Sean π y σ particiones de $\mathbf{4}$, donde sus valores están ordenados de manera creciente

1. $d(\pi,\sigma) := |\mathfrak{D}(\pi) \cap \mathfrak{D}(\sigma)|$, donde $\mathfrak{D}(\pi)$ es la cantidad de arcos de la partición π, de la misma forma para la partición σ.
2. $\dim(\pi)$, es la sumatoria de la resta de los vértices (vértice mayor - vértice menor) que conectan los arcos de la partición π.
3. $\mathrm{nst}(\pi)$ es el número de arcos anidados.

Para entender estos cálculos daremos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 15. *Sea* $\pi = \{1,5,9\} \cup \{2,3,6,7\} \cup \{4,8\}$ *una partición de* $\mathbf{9}$*, entonces, podemos representar esta partición con el siguiente diagrama*



$$d(\pi) = |\mathfrak{D}(\pi)| = 6$$

$$\dim(\pi) = [(9-5)+(5-1)] + [(7-6)+(6-3)+(3-2)] + [(8-4)] = 17$$

$$\mathrm{nst}(\pi) = 2$$

De esta forma podemos calcular los supercaracteres como sigue:

$$\chi_\pi(K_1) = \frac{(-1)^{d(\pi,\sigma)} q^{\dim(\pi) - \mathrm{d}(\pi)}}{q^{\mathrm{nst}(\sigma)} (q-1)^{d(\pi,\sigma)}}$$

pero en nuestro caso $q = 2$. Luego, sean $X_2 = \{1,2\}\{3\}\{4\}$ y $K_2 = \{1,2\}\{3\}\{4\}$

$$\chi_{X_2}(K_2) = \frac{(-1)^1 2^{1-1}}{2^0 (2-1)^1} = -1.$$

Sean $X_3 = \{1,3\}\{2\}\{4\}$ y $K_1 = \{1\}\{2\}\{3\}\{4\}$

$$\chi_{X_3}(K_1) = \frac{(-1)^0 2^{2-1}}{2^0 (2-1)^0} = 2.$$

A continuación, presentamos la tabla de supercaracter de $U_4(\mathbb{F}_2)$

Tabla de supercaracter de $U_4(\mathbb{F}_2)$

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6	K_7	K_8	K_9	K_{10}	K_{11}	K_{12}	K_{13}	K_{14}	K_{15}
χ_{X_1}	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_{X_2}	1	-1	1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	1	-1	1	-1
χ_{X_3}	2	0	-2	2	0	2	2	0	0	0	-2	0	-2	0	0
χ_{X_4}	4	0	0	-4	1	0	0	0	0	0	0	-2	0	0	0
χ_{X_5}	1	1	1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1
χ_{X_6}	2	2	2	2	0	-2	0	0	0	0	-2	0	0	-2	0
χ_{X_7}	1	1	1	1	1	1	-1	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1
χ_{X_8}	1	-1	1	1	-1	1	1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1
χ_{X_9}	1	-1	1	1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1
$\chi_{X_{10}}$	1	1	1	1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1
$\chi_{X_{11}}$	4	0	-4	4	0	-4	0	0	0	0	4	0	0	0	0
$\chi_{X_{12}}$	4	0	0	-4	-2	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0
$\chi_{X_{13}}$	2	0	-2	2	0	2	-2	0	0	0	-2	0	2	0	0
$\chi_{X_{14}}$	2	-2	2	2	0	-2	0	0	0	0	-2	0	0	2	0
$\chi_{X_{15}}$	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1

Cuadro 2

CAPíTULO 3

Supercaracteres del Grupo cíclico y aplicaciones

En este capítulo construiremos una Teoría de Supercaracteres para el grupo $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ a través del Teorema de Brauer.

1. Teoría de Supercaracteres para el grupo $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Sea G un grupo abeliano. Un homomorfismo $\rho: \ G \longrightarrow \mathbb{C}^{\times}$, donde $\mathbb{C}^{\times}$ es el grupo multiplicativo de los números complejos, se denomina carácter de G. Por lo tanto (en la notación multiplicativa) ρ tiene las siguientes propiedades

1. $\rho(xy) = \rho(x)\rho(y) \quad \forall x, y \in G$
2. $\rho(1) = 1$, donde 1 es el elemento identidad de G
3. $\rho^m(x) = 1$ para todo $x \in G$, donde $m = |G|$ es el orden de G

En particular, si G es cíclico de orden m y g es un generador de G, entonces todos los caracteres de G son:

$$\rho_s(x) = e\left(\frac{ak}{m}\right), \qquad \text{si } x = g^k,$$

para algún a(mod m). Así, el número complejo $\rho(g)$ es una raíz $m-$ésima de la unidad, por lo que es de la forma $\omega = e(\frac{a}{m})$ para algún $1 \leq a \leq m$. Como cada $x \in G$ puede escribirse de la forma $x = g^k$ para cierto k, se tiene que

$$\rho(x) = \rho(g^k) = \rho(g)^k.$$

Ocupando lo anterior, tenemos que las representaciones irreducibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ son como sigue:

$$\text{Irr}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \{ \ e_s : \ \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \ \longrightarrow \ \mathbb{C}^{\times} \ | \ e_s \text{ es un homomorfismo}\}. \tag{22}$$

donde, $e_s(k) := e^{\frac{2\pi i k s}{n}}$, para $0 \leq k \leq n-1$.

Sea $\mathcal{G} := \text{Aut}(\mathbb{Z}/\text{n}\mathbb{Z})$. $\mathcal{G}$ actúa sobre $\text{Irr}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ como sigue:

$$\psi_a \cdot e_s := e_s \circ \psi_a$$

donde $e_s \circ \psi_a = e_{as}$.

En orden a clasificar las $\mathcal{G}$- órbitas de $\mathrm{Irr}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$, veamos cuando dos elementos de $\mathcal{G}$ están relacionados. Sean e_r y e_s dos elementos de $\mathcal{G}$, con r y s en los enteros. Así, e_r está relacionado con e_s, si y sólo si, existe a elemento de las unidades del grupo cíclico, tal que

$$\psi_a \cdot e_r \quad = \quad e_s.$$

Luego, para todo k en $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, tenemos

$$\begin{array}{rcl} (e_r \circ \psi_a)(k) & = & e_s(k) \\ e^{\frac{2\pi i r(ak)}{n}} & = & e^{\frac{2\pi i s k}{n}} \\ e^{\frac{2\pi i k(ar-s)}{n}} & = & 1 \end{array}$$

En particular, si $k = 1$, entonces

$$(ar - s) = \dot{n}.$$

Tenemos ahora el siguiente lema:

Lema 1. *Sean r y s dos enteros, tenemos que $(r, n) = (s, n)$, si y sólo si, existe $a \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\times}$ tal que $ar \equiv s$, $(\mathrm{mod}\ n)$.*

Demostración. Sean r y s enteros tal que $ar = s$ con $a \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\times}$, por demostrar que si $(r, n) = t$, entonces, $(s, n) = t$. Si $(s, n) = t$, existen $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\alpha s + \beta n \quad = \quad t$$

por hipótesis, tenemos que $ar = s$, por lo tanto

$$\begin{array}{rcl} \alpha(ar) + \beta n & = & t \\ \alpha a(r) + \beta n & = & t \end{array}$$

Es decir, $(r, n) = t$.

Por otro lado, sean $(r, n) = (s, n) = t$, por demostrar que existe a en las unidades del grupo cíclico tal que $ar = s$.
Tenemos que t divide a r, s y n. Luego existen $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ tal que

$$\alpha r + \beta n \quad = \quad t \tag{23}$$

$$\alpha' s + \beta' n \;=\; t \tag{24}$$

Tomando la ecuación (23) y multiplicando por t^{-1}, se tiene

$$\alpha r t^{-1} + \beta n t^{-1} \;=\; 1$$

si multiplicamos la ecuación anterior por s, tenemos

$$\alpha r s t^{-1} + \beta n s t^{-1} \;=\; s$$

ahora, aplicamos módulo n, tenemos

$$\alpha s t^{-1} r \;\equiv\; s.$$

Luego, basta tomar $a := \alpha s t^{-1}$, entonces

$$ar \;=\; s t^{-1} \alpha r$$

despejando α de la ecuación (23), tenemos

$$\alpha r = t - \beta n$$

multiplicando por st^{-1} y reemplazando $a = \alpha s t^{-1}$

$$\begin{aligned} s t^{-1} \alpha r &= s t^{-1}(t - \beta n) \\ ar &= s t^{-1}(t - \beta n) \\ ar &= s - \beta n s t^{-1} \end{aligned}$$

multiplicando por α',

$$ar\alpha' \;=\; s\alpha' - \beta n s t^{-1} \alpha'$$

multiplicando por $\frac{1}{t}$,

$$\begin{aligned} art^{-1}\alpha' &= st^{-1}\alpha' - st^{-1}\beta n t^{-1}\alpha' \\ art^{-1}\alpha' &= \alpha' s(t^{-1} - t^{-2}\beta n) \end{aligned}$$

reemplazando $\alpha' s$ según la ecuación (24)

$$art^{-1}\alpha' \;=\; (t - \beta' n)(t^{-1} - t^{-2}\beta n)$$

ahora aplicando módulo n

$$a\alpha' r t^{-1} \;=\; 1.$$

Así, a es invertible. $\square$

Proposición 12. *Sean r, s en $\mathbb{Z}_n$. Ocupando el Lema 1, tenemos:*

e_r *está relacionado con* e_s *si y sólo si, existe a en $(\mathbb{Z}_n)^\times$, tal que $ar - s = \dot{n}$.*

O equivalentemente,

$$(r, n) = (s, n)$$

En orden a clasificar las $\mathcal{G}$-órbitas en $\mathbb{Z}_n$, veamos cuando dos elementos de $\mathcal{G}$ están relacionados. Primeramente, $\mathcal{G}$ actúa sobre $\mathbb{Z}_n$. Más precisamente

$$\psi_a \cdot k := \psi_a(k)$$

para todo k en $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Sean u y v dos elementos de $\mathcal{G}$. u y v están relacionados si y sólo si, existe a elemento en las unidades del grupo cíclico, tal que

$$\psi_a \cdot u = v$$

Es decir,

$$u \text{ está relacionado con } v \text{ si y sólo si } a \cdot u \equiv v \mod n.$$

Resumiendo tenemos, las órbitas X_r y K_u definidas como sigue:

$$X_r := \text{ la órbita de } e_r = \{e_s \mid (r, n) = (s, n)\}.$$

$$K_u := \text{ la órbita de } u = \{v \mid (u, n) = (v, n)\}.$$

Definidas anteriormente las órbitas X_r y K_u, tenemos el siguiente teorema:

Teorema 10. *Por el teorema de Brauer. Sean*

$$\mathfrak{X} = \{X_r \mid r \textit{ divisor de } n\}.$$

$$\mathcal{K} = \{K_u \mid u \textit{ divisor de } n\}.$$

entonces el par $(\mathfrak{X}, \mathcal{K})$ define una teoría de supercaracteres.

Ejemplo 16. *Si $n = 6$, entonces tenemos que los supercaracteres $\mathfrak{X}$ son:*

$$\begin{aligned} X_1 &= \{e_1, e_5\} \\ X_2 &= \{e_2, e_4\} \\ X_3 &= \{e_3\} \\ X_6 &= \{e_6\} \end{aligned}$$

los cuales están dados por los divisores de 6, *y las superclases* $\mathcal{K}$ *corresponden a:*

$$\begin{aligned} K_1 &= \{1,5\} \\ K_2 &= \{2,4\} \\ K_3 &= \{3\} \\ K_6 &= \{6\} \end{aligned}$$

Calculemos ahora la tabla de supercaracteres. Para cada X_i *con* i *divisor de* n, *el carácter* χ_{X_i} *es constante sobre cada* $K_i \in \mathcal{K}$, *luego*

$$\begin{aligned} \chi_{X_1} &= 1\cdot(e_1(1)+e_5(1)) = 1\cdot(e^{\frac{2\pi i}{6}}+e^{\frac{10\pi i}{6}}) = 1. \\ & 1\cdot(e_1(2)+e_5(2)) = 1\cdot(e^{\frac{4\pi i}{6}}+e^{\frac{20\pi i}{6}}) = -1. \\ & 1\cdot(e_1(3)+e_5(3)) = 1\cdot(e^{\frac{6\pi i}{6}}+e^{\frac{30\pi i}{6}}) = -2. \\ & 1\cdot(e_1(6)+e_5(6)) = 1\cdot(e^{\frac{12\pi i}{6}}+e^{\frac{60\pi i}{6}}) = 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \chi_{X_2} &= 1\cdot(e_2(1)+e_4(1)) = 1\cdot(e^{\frac{4\pi i}{6}}+e^{\frac{8\pi i}{6}}) = -1. \\ & 1\cdot(e_2(2)+e_4(2)) = 1\cdot(e^{\frac{8\pi i}{6}}+e^{\frac{16\pi i}{6}}) = -1. \\ & 1\cdot(e_2(3)+e_4(3)) = 1\cdot(e^{\frac{12\pi i}{6}}+e^{\frac{24\pi i}{6}}) = 2. \\ & 1\cdot(e_2(6)+e_4(6)) = 1\cdot(e^{\frac{24\pi i}{6}}+e^{\frac{48\pi i}{6}}) = 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \chi_{X_3} &= 1\cdot(e_3(1)) = 1\cdot(e^{\frac{6\pi i}{6}}) = -1. \\ & 1\cdot(e_3(2)) = 1\cdot(e^{\frac{12\pi i}{6}}) = 1. \\ & 1\cdot(e_3(3)) = 1\cdot(e^{\frac{18\pi i}{6}}) = -1. \\ & 1\cdot(e_3(6)) = 1\cdot(e^{\frac{36\pi i}{6}}) = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \chi_{X_6} &= 1\cdot(e_6(1)) = 1\cdot(e^{\frac{12\pi i}{6}}) = 1. \\ & 1\cdot(e_6(2)) = 1\cdot(e^{\frac{24\pi i}{6}}) = 1. \\ & 1\cdot(e_6(3)) = 1\cdot(e^{\frac{36\pi i}{6}}) = 1. \\ & 1\cdot(e_6(6)) = 1\cdot(e^{\frac{72\pi i}{6}}) = 1. \end{aligned}$$

Resumiendo tenemos la siguiente tabla:

Tabla de supercaracter de $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_6$				
	K_6	K_2	K_3	K_1
χ_{X_6}	1	1	1	1
χ_{X_2}	2	-1	2	-1
χ_{X_3}	1	1	-1	-1
χ_{X_1}	2	-1	-2	1

CUADRO 1

2. Tabla de Supercaracter de $\mathbb{Z}/p^{\alpha}\mathbb{Z}$, para p primo

En esta sección, se construirá la tabla de supercaracteres para $\mathbb{Z}_{p^{\alpha}}$, con p un número primo y $\alpha \geq 1$.

Recordar que la función de Euler , $\phi(n)$ es una función aritmética que cuenta los números enteros positivos menores o iguales que n que son primos relativos con n. Así, tenemos que por definición $\phi(1) = 1$, pues el entero 1 sólo puede ser primo relativo consigo mismo. Ahora si p es primo, se tiene:

$$\phi(p) = p - 1.$$

Más generalmente,

$$\phi(p^k) = (p-1)p^{k-1} \quad (k \in \mathbb{N})$$

A continuación calcularemos la suma de Ramanujan $c_{p^{\alpha}}(m)$, donde $\alpha = k$. Analicemos primeramente el caso $\alpha = 1$ y $\alpha = 2$.

1. Si $\alpha = 1$, tenemos

$$c_p(m) = \sum_{\substack{j=1 \\ (j,p)=1}}^{p} e\left(\frac{jm}{p}\right)$$

Ahora distinguiremos dos casos cuando p divide a m y cuando p no divide a m.

Caso 1: Si p divide a m, entonces $m = kp$.

$$\begin{aligned} c_p(m) &= \sum\nolimits^{p}_{\substack{j=1 \\ (j,p)=1}} e\left(\tfrac{jkp}{p}\right) \\ &= \sum\nolimits^{p}_{\substack{j=1 \\ (j,p)=1}} e\left(jk\right) \\ &= \phi(p) \\ &= p - 1. \end{aligned}$$

Caso 2: Si p no divide a m, entonces $m = kp + r,\ 0 < r < p$.

$$\begin{aligned} c_p(m) &= \sum_{\substack{j=1\\(j,p)=1}}^{p} e\left(\frac{j(kp+r)}{p}\right)\\ &= \sum_{\substack{j=1\\(j,p)=1}}^{p} e\left(jk + \frac{jr}{p}\right)\\ &= \sum_{\substack{j=1\\(j,p)=1}}^{p} e\left(jk\right)\cdot e\left(\frac{jr}{p}\right)\\ &= \sum_{\substack{j=1\\(j,p)=1}}^{p} e\left(\frac{jr}{p}\right)\end{aligned}$$

Sea $A_p := \{j \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \mid (j,p) = 1\}$

$$\begin{aligned} c_p(m) &= \sum_{j\in A_p} e\left(\frac{jr}{p}\right)\\ &= \sum_{j\in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} e\left(\frac{jr}{p}\right) - \sum_{j\in A_p^c} e\left(\frac{jr}{p}\right)\\ &= 0 - \sum_{j\in A_p^c} e\left(\frac{jr}{p}\right)\\ &= -\sum_{j\in A_p^c} e\left(\frac{jr}{p}\right)\\ &= -1.\end{aligned}$$

2. Si $\alpha = 2$, tenemos

$$c_{p^2}(m) = \sum_{\substack{j=1\\(j,p^2)=1}}^{p^2} e\left(\frac{jm}{p^2}\right)$$

Distinguiremos dos casos: cuando p^2 divide a m y cuando p^2 no divide a m.

Caso 1: Si p^2 divide a m, entonces $m = kp^2$.

$$\begin{aligned} c_{p^2}(m) &= \sum_{\substack{j=1\\(j,p^2)=1}}^{p^2} e\left(\frac{jkp^2}{p^2}\right)\\ &= \sum_{\substack{j=1\\(j,p^2)=1}}^{p^2} e\left(jk\right)\\ &= \phi(p^2)\\ &= p(p-1).\end{aligned}$$

Caso 2: Si p^2 no divide a m , entonces $m = kp^2 + r,\ 0 < r < p^2$. En este caso, distinguiremos dos subcasos según p divide a m y según p no divide a m.

Si p divide a m, se tiene

$$\begin{aligned} c_{p^2}(m) &= \sum_{\substack{j=1\\(j,p^2)=1}}^{p^2} e\left(\frac{j(kp^2+r)}{p^2}\right) \\ &= \sum_{\substack{j=1\\(j,p^2)=1}}^{p^2} e\left(jk+\frac{jr}{p^2}\right) \\ &= \sum_{\substack{j=1\\(j,p^2)=1}}^{p^2} e\left(jk\right)\cdot e\left(\frac{jr}{p^2}\right) \\ &= \sum_{\substack{j=1\\(j,p^2)=1}}^{p^2} e\left(\frac{jr}{p^2}\right) \end{aligned}$$

Por otro lado, p divide a m si y sólo si, p divide a r lo que es equivalente a tener $r = lp$. Sea $A_{p^2} := \{j \in \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \mid (j, p^2) = 1\}$

$$\begin{aligned} c_{p^2}(m) &= \sum_{j\in A_{p^2}} e\left(\frac{jl}{p}\right) \\ &= \sum_{j\in \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}} e\left(\frac{jl}{p}\right) - \sum_{j\in A^c_{p^2}} e\left(\frac{jl}{p}\right) \\ &= 0 - \sum_{j\in A^c_{p^2}} e\left(\frac{jl}{p}\right) \\ &= -\sum_{j\in A^c_{p^2}} e\left(\frac{jl}{p}\right) \\ &= -\#A^c_{p^2} \\ &= -p. \end{aligned}$$

Si p no divide a m, tenemos

$$\begin{aligned} c_{p^2}(m) &= \sum_{\substack{j=1\\(j,p^2)=1}}^{p^2} e\left(\frac{j(kp^2+r)}{p^2}\right) \\ &= \sum_{\substack{j=1\\(j,p^2)=1}}^{p^2} e\left(jk+\frac{jr}{p^2}\right) \\ &= \sum_{\substack{j=1\\(j,p^2)=1}}^{p^2} e\left(jk\right)\cdot e\left(\frac{jr}{p^2}\right) \\ &= \sum_{j\in C_{p^2}} e\left(\frac{jr}{p^2}\right) - \sum_{j\in A^c_{p^2}} e\left(\frac{jr}{p^2}\right) \\ &= 0 - \sum_{j\in A^c_{p^2}} e\left(\frac{jr}{p^2}\right) \\ &= -\sum_{j\in A^c_{p^2}} e\left(\frac{jr}{p^2}\right) \end{aligned}$$

como, $A^c_{p^2} = \{p, 2p, 3p, \cdots\} = p \cdot \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, entonces $j = u \cdot p$, luego

$$\begin{aligned} c_{p^2}(m) &= -\sum_{u=1}^{p} e\left(\frac{upr}{p^2}\right) \\ &= -\sum_{u=1}^{p} e\left(\frac{ur}{p}\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ahora veamos cuando α es mayor que 2, tenemos

$$c_{p^m}(x) = \sum_{\substack{j=1\\(j,p^m)=1}}^{p^m} e\left(\frac{jx}{p^m}\right).$$

Distinguiremos dos casos: cuando p^m divide a x y cuando p^m no divide a x, entonces Caso 1: Si p^m no divide a x, entonces $x = kp^m + r,\ 0 < r < p^m$. En este caso, distingueremos dos subcasos más según p^{m-1} divide a x y según p^{m-1} no divide a x. Si p^{m-1} divide a x, se tiene

$$\begin{array}{rcl} c_{p^m}(x) &=& \sum_{\substack{j=1\\(j,p^m)=1}}^{p^m} e\left(\frac{j(kp^m+r)}{p^m}\right) \\ &=& \sum_{\substack{j=1\\(j,p^m)=1}}^{p^m} e\left(jk + \frac{jr}{p^m}\right) \\ &=& \sum_{\substack{j=1\\(j,p^m)=1}}^{p^m} e\left(jk\right) \cdot e\left(\frac{jr}{p^m}\right) \end{array}$$

p^{m-1} divide a x si y sólo si p^{m-1} divide a r, lo que es equivalente a tener $r = lp^{m-1},\ 0 < l < p$, así,

$$\begin{array}{rcl} c_{p^m}(x) &=& \sum_{\substack{j=1\\(j,p^m)=1}}^{p^m} e\left(\frac{jr}{p^m}\right) \\ &=& \sum_{j\in A_{p^m}} e\left(\frac{jl}{p}\right) \end{array}$$

Sea $A_{p^m} := \{j \in \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z} \mid (j,p^m) = 1\}$, luego

$$\begin{array}{rcl} c_{p^m}(x) &=& \sum_{j\in\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}} e\left(\frac{jl}{p}\right) - \sum_{j\in A^c_{p^m}} e\left(\frac{jl}{p}\right) \\ &=& 0 - \sum_{j\in A^c_{p^m}} e\left(\frac{jl}{p}\right) \\ &=& -\sum_{j\in A^c_{p^m}} e\left(\frac{jl}{p}\right) \\ &=& -\#A^c_{p^m} \\ &=& -p^{m-1}. \end{array}$$

Como

$$\#\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z} = \#A_{p^m} + \#A^c_{p^m}.$$

Tenemos,

$$\begin{array}{rcl} A^c_{p^m} &=& p^m - \phi(p^m) \\ &=& p^m - p^{m-1}(p-1) \\ &=& p^{m-1}. \end{array}$$

Si p^{m-1} no divide a x, tenemos

$$\begin{aligned} c_{p^m}(x) &= \sum_{\substack{j=1\\(j,p^m)=1}}^{p^m} e\left(\frac{j(kp^m+r)}{p^m}\right) \\ &= \sum_{\substack{j=1\\(j,p^m)=1}}^{p^m} e\left(jk+\frac{jr}{p^m}\right) \\ &= \sum_{\substack{j=1\\(j,p^m)=1}}^{p^m} e\left(jk\right)\cdot e\left(\frac{jr}{p^m}\right) \\ &= \sum_{j\in\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}} e\left(\frac{jr}{p^m}\right) - \sum_{j\in A^c_{p^m}} e\left(\frac{jr}{p^m}\right) \\ &= 0-\sum_{j\in A^c_{p^m}} e\left(\frac{jr}{p^m}\right) \end{aligned}$$

como, $A^c_{p^m}=\{p,2p,3p,\cdots\}=p\cdot\mathbb{Z}/p^{m-1}\mathbb{Z}$, entonces $j=u\cdot p^{m-1}$, luego

$$\begin{aligned} c_{p^m}(x) &= -\sum_{j\in A^c_{p^m}} e\left(\frac{jr}{p^m}\right) \\ &= -\sum_{u=1}^{p^{m-1}} e\left(\frac{up^{m-1}r}{p^m}\right) \\ &= -\sum_{u=1}^{p^{m-1}} e\left(\frac{ur}{p}\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Caso 2: Si p^m divide a x, entonces $x=kp^m$.

$$\begin{aligned} c_{p^m}(x) &= \sum_{\substack{j=1\\(j,p^m)=1}}^{p^m} e\left(\frac{jkp^m}{p^m}\right) \\ &= \sum_{\substack{j=1\\(j,p^m)=1}}^{p^m} e\left(jk\right) \\ &= \phi(p^m) \\ &= p^{m-1}(p-1). \end{aligned}$$

Resumimos lo anterior en el siguiente lema:

Lema 2. *Para todo p número primo y m entero.Tenemos:*

$$c_{p^m}(x)=\begin{cases} p^{m-1}(p-1) & \text{si } p^m|x, \\ -p^{m-1} & \text{si } p^m\not|x \text{ pero } p^{m-1}|x, \\ 0 & \text{si } p^m\not|x \text{ pero } p^{m-1}\not|x. \end{cases} \tag{25}$$

Notemos lo siguiente

$$c_{p^m}(1)=\mu(p^m), \qquad c_{p^m}(p^m)=\phi(p^m), \tag{26}$$

donde $\mu(n)$ denota la función de Mobius.

Debido a que los divisores de p^α son precisamente los números $d_i=p^{i-1}$ para $i=1,2,\ldots,\alpha+1$, por el lema anterior tenemos que (i,j) son las entradas $(\alpha+1)\times(\alpha+1)$ de la matriz $S=S(p^\alpha)$ dado por:

Corolario 4. *Si $m = i - 1$, entonces podemos escribir lo anterior como una matriz $S_{i,j}$, donde i, j son las entradas de una matriz de orden $(k+1) \times (k+1)$*

$$S_{i,j} = c_{p^{i-1}}(p^{k+1-j}) = \begin{cases} 1 & si\ i = 1, \\ p^{i-2}(p-1) & si\ i + j \leq k+2, \\ -p^{i-2} & si\ i + j = k+3, \\ 0 & si\ i + j > k+3. \end{cases} \tag{27}$$

Ejemplo 17. *Siguiendo la misma idea del ejemplo 16, calculemos la tabla de Supercaracter de $S(9) = S(3^2)$.*
Los supercaracteres de $\mathbb{Z}_9$ son $\mathfrak{X} = \{X_9, X_3, X_1\}$ y las superclases son $\mathcal{K} = \{K_9, K_3, K_1\}$, realizando algunos cálculos simples, obtenemos la siguiente tabla de Supercaracteres de Z_9.

Tabla de supercaracter de $\mathbb{Z}_9$			
	K_9	K_3	K_1
χ_{X_9}	1	1	1
χ_{X_3}	2	2	-1
χ_{X_1}	6	-3	0

CUADRO 2

Podemos también comprobar fácilmente usando el Corolario 4 que la tabla de $\mathbb{Z}_{3^2}$ es

Tabla de supercaracter de $\mathbb{Z}_{3^2}$			
	K_9	K_3	K_1
χ_{X_9}	1	1	1
χ_{X_3}	$3-1$	$3-1$	-1
χ_{X_1}	$3(3-1)$	-3	0

CUADRO 3

Ejemplo 18. *Ahora sin importar quien sea el número primo elegido, si su potencia es 2 o 3, (ocupando el Corolario 4), se sigue inmediatamente que:*

$$S(p^2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p-1 & p-1 & -1 \\ p(p-1) & -p & 0 \end{pmatrix}.$$

$$S(p^3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ p-1 & p-1 & p-1 & -1 \\ p(p-1) & p(p-1) & -p & 0 \\ p^2(p-1) & -p^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Producto de Supercaracteres

Dadas dos teorías de Supercaracteres $(\mathfrak{X}_1, \mathcal{K}_1)$ y $(\mathfrak{X}_2, \mathcal{K}_2)$ de dos grupos finitos G_1 y G_2 respectivamente. Se puede construir un producto natural de la teoría de Supercaracteres sobre $G_1 \times G_2$. Teniendo

$$\mathcal{K}_1 = \{K_1^{(1)}, K_2^{(1)}, \ldots, K_r^{(1)}\}, \quad \mathcal{K}_2 = \{K_1^{(2)}, K_2^{(2)}, \ldots, K_s^{(2)}\}$$

y

$$\mathfrak{X}_1 = \{X_1^{(1)}, X_2^{(1)}, \ldots, X_r^{(1)}\}, \quad \mathfrak{X}_2 = \{X_1^{(2)}, X_2^{(2)}, \ldots, X_s^{(2)}\}$$

primero definimos

$$\mathcal{K} := \mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2.$$

Por otro lado,

$$\mathrm{Irr}(G_1 \times G_2) = \mathrm{Irr}(G_1) \times \mathrm{Irr}(G_2),$$

esto indica considerar $\mathfrak{X}$, como sigue:

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_2,$$

Ahora un sencillo cálculo nos muestra que

$$\chi_{X_i^{(1)} \times X_j^{(2)}}((g_1, g_2)) = \chi_{X_i^{(1)}}(g_1)\chi_{X_j^{(2)}}(g_2), \tag{28}$$

siempre que g_1 y g_2 pertenezcan a G_1 y G_2 respectivamente. En particular esto implica que $\chi_{X_1 \times X_2}$ es constante sobre cada elemento de $\mathcal{K}$. Ahora, debido a que

$$|\mathfrak{X}| = |\mathfrak{X}_1||\mathfrak{X}_2| = |\mathcal{K}_1||\mathcal{K}_2| = |\mathcal{K}|,$$

podemos concluir que $(\mathfrak{X}, \mathcal{K})$ define una teoría de Supercaracteres sobre $G_1 \times G_2$.

Recordemos que si G_1 y G_2 son grupos finitos, entonces

$$\mathrm{Aut}(G_1) \times \mathrm{Aut}(G_2) \subseteq \mathrm{Aut}(G_1 \times G_2),$$

nótese que la igualdad no se tiene en general.

Sean $G_1 = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, $G_2 = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, con m y n primos relativos, tenemos que

$$(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z},$$

así

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \times \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \simeq \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}),$$

equivalentemente, por Teorema 1, tenemos:

$$(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \simeq (\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z})^\times.$$

Así, la función

$$\Phi : \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \tag{29}$$

definida por $\Phi((a,b)) = ab \pmod{mn}$ es un isomorfismo. En particular, si $(md, nd') = 1$, entonces

$$c_{mn}(dd') = c_m(d)c_n(d') \tag{30}$$

cuando d y d' sean divisores positivos de m y n, respectivamente. Es decir, sean $G_1 = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ y $G_2 = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, con

$$\begin{aligned} K^1_{\tau(m)} &= \{a \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} : (a,m) = 1\} \\ K^2_{\tau(n)} &= \{b \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} : (b,n) = 1\} \end{aligned}$$

De manera equivalente tenemos

$$\begin{aligned} X^1_{\tau(m)} &= \{a \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} : (a,m) = 1\} \\ X^2_{\tau(n)} &= \{b \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} : (b,n) = 1\} \end{aligned}$$

así,

$$\begin{aligned} \chi_{X_m}(x) &= \sum_{\chi \in X_m} \chi(1)\chi(x) \\ &= \sum_{e_s \in X_m} e_s(x) \\ &= \sum_{\substack{s=1 \\ (s,m)=\frac{m}{d_m}}}^{m} e_s\left(\frac{sx}{m}\right) \\ &= \sum_{\substack{i=1 \\ (i,d_m)=1}}^{d_m} e_s\left(\frac{sx}{d_m}\right) \\ &= c_{d_m}(x) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\chi_{X_n}(x) &= \sum_{\chi \in X_n} \chi(1)\chi(x) \\
&= \sum_{e_r \in X_n} e_r(x) \\
&= \sum_{\substack{r=1 \\ (r,n)=\frac{n}{d_n}}}^{n} e_r\left(\frac{rx}{n}\right) \\
&= \sum_{\substack{k=1 \\ (k,d_n)=1}}^{d_n} e_r\left(\frac{rx}{d_n}\right) \\
&= c_{d_n}(x)
\end{aligned}
$$

Luego,

$$
\begin{aligned}
\chi_{X_m \times X_n}(x) &= \sum_{\chi \in X_m \times X_n} \chi(1)\chi(x) \\
&= \sum_{e_{(s,r)} \in X_m \times X_n} e_{(s,r)}(x) \\
&= \sum_{(sr,mn)=\frac{mn}{d_m d_n}} e_{sr}\left(\frac{srx}{mn}\right) \\
&= \sum_{\substack{s=1 \\ (s,m)=\frac{m}{d_m}}}^{m} \sum_{\substack{r=1 \\ (r,n)=\frac{n}{d_n}}}^{n} e_r\left(\frac{sx}{m}\right)\left(\frac{rx}{n}\right) \\
&= \sum_{\substack{s=1 \\ (s,m)=\frac{m}{d_m}}}^{m} e_s\left(\frac{sx}{m}\right) \cdot \sum_{\substack{r=1 \\ (r,n)=\frac{n}{d_n}}}^{n} e_r\left(\frac{rx}{n}\right) \\
&= \sum_{\substack{s=1 \\ (s,m)=\frac{m}{d_m}}}^{m} e_s\left(\frac{sx}{m}\right) \cdot \sum_{\substack{r=1 \\ (r,n)=\frac{n}{d_n}}}^{n} e_r\left(\frac{rx}{n}\right) \\
&= c_m(x) \cdot c_n(x) \\
&= c_{mn}(x)
\end{aligned}
$$

En particular, por (29) tenemos que

$$
\Phi(K^1_{\tau_{(m)}} \times K^2_{\tau_{(n)}}) = \{c \in \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \ : \ (c, mn) = 1\}
$$

y que

$$\Phi((d,d')) = dd'(\text{mod } mn)$$

siempre que $d|m$ y $d'|n$. poniendo todo esto junto y usando (28) junto con el Corolario 4 da lo deseado

$$S(mn) = S(m) \otimes S(n) \tag{31}$$

siempre que $(m,n) = 1$.

Ejemplo 19. *Vamos a a calcular las tablas de Supercaracteres de $S(2)$ y $S(3)$.*

Sean $\mathfrak{X} = \{X_1, X_2\}$, los supercaracteres de $\mathbb{Z}_2$ y $\mathcal{K} = \{K_1, K_2\}$ las superclases de $\mathbb{Z}_2$, realizando algunos cálculos simples, obtenemos la siguiente tabla de Supercaracteres de Z_2.

Tabla de supercaracter de $\mathbb{Z}_2$		
	K_2	K_1
χ_{X_2}	1	1
χ_{X_1}	1	-1

Cuadro 4

Sean $\mathfrak{X} = \{X_1, X_3\}$, los supercaracteres de $\mathbb{Z}_3$ y $\mathcal{K} = \{K_1, K_3\}$ las superclases de $\mathbb{Z}_3$, realizando algunos cálculos sencillos, obtenemos la siguiente tabla de Supercaracteres de Z_3.

Tabla de supercaracter de $\mathbb{Z}_3$		
	K_3	K_1
χ_{X_3}	1	1
χ_{X_1}	2	-1

Cuadro 5

Ahora, teniendo en cuenta la tabla de supercaracteres calculada en el ejemplo 16, podemos afirmar que

$$S(6) = S(2) \otimes S(3)$$

Una importante consecuencia de (30) es el hecho que las sumas de Ramanujan $c_n(x)$ son multiplicativas respecto al subíndice n (ver [**5**]) . Este hecho lo describen las propiedades enunciadas en el Capítulo 1, subsección 8.1, las cuales demostraremos a continuación.

1. Dado que $(m,n)=1$, se sigue de la ecuación (30) que
$$c_{mn}((c,mn)) = c_{mn}((c,m)(x,n)) = c_m((c,m))c_n((c,n))$$
de donde $c_{mn}(x) = c_m(x)c_n(x)$ por (31).

2. Dado que $(m,n)=(x,n)=(y,m)=1$, se sigue de (30) que
$$c_{mn}((xy,mn)) = c_{mn}((x,m)(y,n)) = c_m((x,m))c_n((y,n)$$
de donde $c_{mn}(xy) = c_m(x)c_n(y)$ por (31).

3. Esta propiedad se resume de (26) y del Lema 2. La parte fundamental de c_n se sigue del Lema 2 y los valores explícitos dados en (27).

CAPíTULO 4

Una Teoría de Supercaracteres para el grupo Diédrico

1. Grupo Diédrico

En este capítulo calcularemos primero los automorfismos del grupo diédrico, basándose en la teoría de Supercaracteres construida para el grupo cíclico. Los elementos del grupo de automorfismos de $\mathrm{D_n}$, serán usados para construir una Teoría de Supercaracteres del grupo Diédrico.

Teorema 11. $\mathrm{Aut}(\mathrm{D}_n) \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\times} \ltimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Demostración. Sean $\gamma \in \mathrm{Aut}(\mathrm{D}_n)$ y A y $B \in \mathrm{D}_n$, definidos en el capítulo 1, sección 3, entonces $\gamma(A) \in \langle A\rangle$ y $\gamma(B) \notin \langle A\rangle$, pues el orden de (A^jB) es igual a 2, el cual es diferente de n, con $1 \le j \le n-1$. Así,

$$\begin{aligned}\gamma(A) &= A^s\\ \gamma(B) &= A^tB.\end{aligned}$$

para algún s y t. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\gamma(A^i) &= A^{is}\\ \gamma(A^iB) &= A^{is+t}B.\end{aligned}$$

De este modo, un automorfismo γ de D_n queda determinados por enteros s y t, donde $1 \le s \le n-1$ y $0 \le t \le n-1$. Se escribirá, si no hay peligro de confusión, $\gamma = \gamma_{s,t}$.

Consideremos ahora la acción de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\times}$ sobre $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ por:

$$\begin{array}{rcccl}\varphi & : & (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\times} & \longrightarrow & \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/\mathrm{n}\mathbb{Z})\\ & & s & \longmapsto & \varphi_s\end{array}$$

donde

$$\begin{array}{rcccl}\varphi_s & : & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\\ & & t & \longmapsto & st\end{array}$$

De esta acción se definirá el producto semidirecto $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\times} \ltimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$:

$$(s_1,t_1)(s_2,t_2) = (s_1s_2, t_1 + \varphi_{s_1}(t_2)) = (s_1s_2, t_1 + s_1t_2).$$

Sea ψ definido como sigue:

$$\begin{array}{rcccl} \psi & : & \mathrm{Aut}(\mathrm{D}_n) & \longrightarrow & (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\times} \ltimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ & & \gamma_{s,t} & \longmapsto & (s,t) \end{array}$$

Tenemos que ψ es un homomorfismo.

$$\begin{aligned} \psi(\gamma_{s_1,t_1})\psi(\gamma_{s_2,t_2}) &= (s_1s_2, t_1 + s_1t_2) \\ &= (s_1s_2, t_1 + \varphi_{s_1}(t_2)) \\ &= (s_1,t_1)(s_2,t_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\gamma_{s_1,t_1})(\gamma_{s_2,t_2})(A^iB) &= \gamma_{s_1,t_1}(A^{is_2+t_2}B) \\ &= A^{(is_2+t_2)s_1+t_1}B \\ &= A^{is_2s_1+(t_2s_1+t_1)}B. \end{aligned}$$

lo que implica que $\psi(\gamma_{s_1,t_1})(\gamma_{s_2,t_2}) = (s_1s_2, t_1+s_1t_2) = \psi(\gamma_{s_1,t_1})\psi(\gamma_{s_2,t_2})$.
Claramente ψ es un isomorfismo. La inyectividad viene directamente del hecho:

$$\gamma_{s,t} \in \mathrm{Ker}(\psi) \Rightarrow \psi(\gamma_{\mathrm{s,t}}) = (1,0) \Rightarrow \gamma_{\mathrm{s,t}} = \mathrm{Id}.$$

Esto demuestra el teorema. $\square$

2. Supercaracteres del grupo Diédrico D_n

2.1. Supercaracteres. Para construir una teoría de Supercaracteres (según el Teorema de Brauer, ver 9), usaremos las acciones del grupo diédrico sobre $\mathrm{Irr}(G)$ y sobre sí mismo vista en página 35 de esta tesis. Distinguiremos según n sea par o impar.

Conservando la notación del Teorema 11, sea $\psi = \psi_{s,t} \in \mathrm{Aut}(\mathrm{D_n})$. Tenemos:

2.2. $\mathcal{G}$ actúa sobre $\mathrm{Irr}(\mathrm{D}_n)$. En el grupo diédrico, los caracteres irreducibles se pueden distringuir entre los caracteres de dimensión uno y los de dimensión dos.

Como el comportamiento de los caracteres no es homogéneo, debemos distinguir dos casos: el caso cuando n es par y cuando n es impar.

2.2.1. **Caso n par.** Dados $1 \leq u, v \leq \frac{n}{2} - 1$. χ_u está relacionado con χ_v si y sólo si, existe (i,j) en $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\times} \ltimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tal que

$$\psi_{(i,j)} \cdot \chi_u = \chi_v.$$

Entonces,

$$(\chi_u \circ \psi_{(i,j)})(A) = \chi_v(A)$$

luego,

$$\chi_u(A^i) = \chi_v(A) \tag{32}$$

$$\eta^{ui} + \eta^{-ui} = \eta^v + \eta^{-v}. \tag{33}$$

donde $\eta^{ui} = cos(\frac{2\pi ui}{n}) + isen(\frac{2\pi ui}{n})$. Tomando en cuenta que la función coseno es una función par y la función seno es una función impar, la ecuación (33), se nos reduce a

$$\begin{aligned} cos(\tfrac{2\pi ui}{n}) &= cos(\tfrac{2\pi v}{n}) \\ \tfrac{2\pi ui}{n} + \dot{2\pi} &= \tfrac{2\pi v}{n} \\ ua + \dot{2\pi} &= v \end{aligned}$$

donde $\dot{2\pi}$ significa múltiplo de 2π. Ocupando Lema 1, tenemos que, existe a en la unidades del grupo cíclico, tal que

$$au \equiv v \pmod{n},$$

donde u es divisor de n.

Proposición 13. *Sean χ_r, χ_s. Tenemos que $\chi_r \sim \chi_s$ si y sólo si,*

$$s = ar$$

con $a \in \mathbb{Z}_n^{\times}$. Así,

$$O(\chi_r) = \{\chi_{ar} \mid a \in \mathbb{Z}_n^{\times}\}$$

También la órbita de χ_r, puede ser descrita como:

$$O(\chi_r) = \{\chi_s \mid (r,n) = (s,n), \quad 1 \leq s \leq \frac{n}{2} - 1\}$$

con $1 \leq r \leq \frac{n}{2} - 1$. Y

$$O(\chi_r) = \{\chi_{ad} \mid a \in \mathbb{Z}_n^{\times}\}$$

con $d = (r,n)$.

Demostración. Primero demostremos que $O(\chi_r) = \{\chi_{ar} \mid a \in \mathbb{Z}_n^\times\}$ es equivalente a $O(\chi_r) = \{\chi_s \mid (r,n) = (s,n), \quad 1 \leq s \leq \frac{n}{2} - 1\}$, con $1 \leq r \leq \frac{n}{2} - 1$.

Sea $\chi \in O(\chi_r)$, entonces

$$\chi = \chi_{ar}, \quad \text{para algún } a \in \mathbb{Z}_n^\times$$

luego, debemos probar que $(r,n) = (s,n)$, es decir

$$(r,n) = (ar,n)$$

Si $d = (r,n)$, entonces $d = (ar,n)$. Luego, $d = (ar,n)$ si y sólo si

1. $d|ar$ y $d|n$
2. $d'|ar$ y $d'|n$, entonces $d'|d$

Es claro que la primera condición dada se cumple, debido a que $d = (r,n)$, entonces $d|n$ y $d|r$, por lo tanto d divide a cualquier múltiplo de r, es decir, $d|ar$.

Ahora, si $d'|ar$, entonces existe $u \in \mathbb{Z}_n$, tal que

$$ar = ud'$$

como $a \in \mathbb{Z}_n^\times$, ocupando Lema 1,

$$\begin{aligned} ar &= ud' \\ r &= a^{-1}ud' \end{aligned}$$

Es decir, $d'|r$ y $d'|n$, entonces $d'|d$, pues $d = (r,n)$.

Sea s tal que $(r,n) = (s,n)$ y $1 \leq s \leq \frac{n}{2} - 1$, por demostrar que $\chi_s \in O(\chi_r)$. Basta ver que,

$$s = ar \qquad \text{para algún } a \in \mathbb{Z}_n^\times.$$

Como $(r,n) = (s,n)$, ocupando el Lema 1, existe $a \in \mathbb{Z}_n^\times$ tal que

$$ar = s$$

Ahora, demostremos que la descripción de las órbitas de χ_r son equivalentes, es decir, $O(\chi_r) = \{\chi_s \mid (r,n) = (s,n), \ 1 \leq s \leq \frac{n}{2} - 1\}$ con $1 \leq r \leq \frac{n}{2} - 1$ es equivalente a $O(\chi_r) = \{\chi_{ad} \mid a \in \mathbb{Z}_n^\times\}$ con $d = (r,n)$.

Sea $\chi \in O(\chi_r) = \{\chi_s \mid (r,n) = (s,n), \quad 1 \leq s \leq \frac{n}{2} - 1\}$ con $1 \leq r \leq \frac{n}{2} - 1$, entonces

$$\chi = \chi_s$$

con $(r,n)=(s,n)=d$. Luego, debemos demostrar que $\chi\in\{\chi_{ad}\mid a\in\mathbb{Z}_n^\times\}$, es decir,

$$\chi=\chi_{ad},\qquad \text{para algún } a\in\mathbb{Z}_n^\times$$

Así,

$$\chi=\chi_s=\chi_{ar}$$

como $(r,n)=(d,n)$ por lema 1, existe $\alpha\in\mathbb{Z}_n^\times$ tal que

$$r=\alpha d$$

de esta manera,

$$\chi_{ar}=\chi_{a\alpha d}$$

Ahora, si $\chi\in\{\chi_{ad}\mid a\in\mathbb{Z}_n^\times\}$, entonces

$$\chi=\chi_{ad}\qquad \text{para algún } a\in\mathbb{Z}_n^\times$$

Nuevamente, ocupando lema 1, existe $\alpha\in\mathbb{Z}_n^\times$ tal que

$$r=\alpha d$$

así, $\alpha^{-1}r=d$, de esta forma

$$\chi_{ad}=\chi_{a\alpha^{-1}r}$$

□

Ejemplo 20. *Para $n=6$. Sea $1\leq r\leq 2$, luego existen dos representaciones de dimensión dos $\chi_1,\ \chi_2\in\mathrm{Irr}(G)$. Encontraremos las órbitas de estas representaciones ocupando la Proposición 13. Así, tenemos,*

$$\begin{aligned} O(\chi_1) &= \{\chi_{a\cdot 1}\mid a\in\{1,5\}\}\ \textit{con}\ 1\leq a\cdot 1\leq 2\\ &= \{\chi_1\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} O(\chi_2) &= \{\chi_{a\cdot 2}\mid a\in\{1,5\}\}\ \textit{con}\ 1\leq a\cdot 2\leq 2\\ &= \{\chi_2\}\end{aligned}$$

Ejemplo 21. *Para $n=8$. Sea $1\leq r\leq 3$, luego existen tres representaciones de dimensión dos $\chi_1,\ \chi_2,\ \chi_3\in\mathrm{Irr}(G)$. Encontraremos las órbitas de estas representaciones ocupando la Proposición 13. Así, tenemos,*

$$\begin{aligned} O(\chi_1) &= \{\chi_{a\cdot 1}\mid a\in\{1,3,5,7\}\}\ \textit{con}\ 1\leq a\cdot 1\leq 3\\ &= \{\chi_1,\chi_3\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} O(\chi_2) &= \{\chi_{a\cdot 2} \mid a \in \{1,3,5,7\}\} \textit{ con } 1 \leq a\cdot 2 \leq 3 \\ &= \{\chi_2\} \end{aligned}$$

Ejemplo 22. *Para $n = 10$. Sea $1 \leq r \leq 4$, luego existen cuatro representaciones de dimensión dos $\chi_1,\ \chi_2,\ \chi_3,\ \chi_4 \in \mathrm{Irr}(G)$. Encontraremos las órbitas de estas representaciones ocupando la Proposición 13. Así, tenemos,*

$$\begin{aligned} O(\chi_1) &= \{\chi_{a\cdot 1} \mid a \in \{1,3,5,7,9\}\} \textit{ con } 1 \leq a\cdot 1 \leq 4 \\ &= \{\chi_1, \chi_3\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} O(\chi_2) &= \{\chi_{a\cdot 2} \mid a \in \{1,3,5,7,9\}\} \textit{ con } 1 \leq a\cdot 2 \leq 4 \\ &= \{\chi_2, \chi_4\} \end{aligned}$$

Representaciones unidimensionales. Sin peligro de confusión nombraremos las representaciones unidimensionales por $\theta_{+,+}, \theta_{+,-}, \theta_{-,+}, \theta_{-,-}$.

Ahora, veamos cuando dos de estas representaciones están relacionadas. Tenemos:

1. $\theta_{+,+}$ estará relacionado con $\theta_{+,-}$, si y sólo si, existe (a,b) en $(\mathbb{Z}_n)^\times \ltimes \mathbb{Z}_n$ tal que

$$\begin{aligned} \psi_{(a,b)} \cdot \theta_{+,+} &= \theta_{+,-} \\ \theta_{+,+} \circ \psi_{(a,b)} &= \theta_{+,-} \\ (\theta_{+,+} \circ \psi_{(a,b)})(A) &= \theta_{+,-}(A) \\ \theta_{+,+}(A^a) &= \theta_{+,-}(A) \\ (\theta_{+,+}(A))^a &= \theta_{+,-}(A) \\ 1 &= 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_{(a,b)} \cdot \theta_{+,+} &= \theta_{+,-} \\ \theta_{+,+} \circ \psi_{(a,b)} &= \theta_{+,-} \\ (\theta_{+,+} \circ \psi_{(a,b)})(B) &= \theta_{+,-}(B) \\ \theta_{+,+}(A^b B) &= \theta_{+,-}(B) \\ (\theta_{+,+}(A))^b(\theta_{+,+}(B)) &= \theta_{+,-}(B) \\ 1 &\neq -1. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\theta_{+,+}$ no está relacionado con $\theta_{+,-}$.

2. $\theta_{+,+}$ estará relacionado con $\theta_{-,+}$, si y sólo si, existe (a,b) en $(\mathbb{Z}_n)^\times \ltimes \mathbb{Z}_n$ tal que

$$\begin{array}{lcl} \psi_{(a,b)} \cdot \theta_{+,+} & = & \theta_{-,+} \\ \theta_{+,+} \circ \psi_{(a,b)} & = & \theta_{-,+} \\ (\theta_{+,+} \circ \psi_{(a,b)})(A) & = & \theta_{-,+}(A) \\ \theta_{+,+}(A^a) & = & \theta_{-,+}(A) \\ (\theta_{+,+}(A))^a & = & \theta_{-,+}(A) \\ 1 & \neq & -1. \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \psi_{(a,b)} \cdot \theta_{+,+} & = & \theta_{-,+} \\ \theta_{+,+} \circ \psi_{(a,b)} & = & \theta_{-,+} \\ (\theta_{+,+} \circ \psi_{(a,b)})(B) & = & \theta_{-,+}(B) \\ \theta_{+,+}(A^b B) & = & \theta_{-,+}(B) \\ (\theta_{+,+}(A))^b(\theta_{+,+}(B)) & = & \theta_{-,+}(B) \\ 1 & = & 1. \end{array}$$

Por lo tanto, $\theta_{+,+}$ no está relacionado con $\theta_{-,+}$.

3. $\theta_{+,+}$ estará relacionado con $\theta_{-,-}$, si y sólo si, existe (a,b) en $(\mathbb{Z}_n)^\times \ltimes \mathbb{Z}_n$ tal que

$$\begin{array}{lcl} \psi_{(a,b)} \cdot \theta_{+,+} & = & \theta_{-,-} \\ \theta_{+,+} \circ \psi_{(a,b)} & = & \theta_{-,-} \\ (\theta_{+,+} \circ \psi_{(a,b)})(A) & = & \theta_{-,-}(A) \\ \theta_{+,+}(A^a) & = & \theta_{-,-}(A) \\ (\theta_{+,+}(A))^a & = & \theta_{-,-}(A) \\ 1 & \neq & -1. \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \psi_{(a,b)} \cdot \theta_{+,+} & = & \theta_{-,-} \\ \theta_{+,+} \circ \psi_{(a,b)} & = & \theta_{-,-} \\ (\theta_{+,+} \circ \psi_{(a,b)})(B) & = & \theta_{-,-}(B) \\ \theta_{+,+}(A^b B) & = & \theta_{-,-}(B) \\ (\theta_{+,+}(A))^b(\theta_{+,+}(B)) & = & \theta_{-,-}(B) \\ 1 & \neq & -1. \end{array}$$

Por lo tanto, $\theta_{+,+}$ no está relacionado con $\theta_{-,-}$.

4. $\theta_{+,-}$ estará relacionado con $\theta_{-,+}$, si y sólo si, existe (a,b) en $(\mathbb{Z}_n)^\times \ltimes \mathbb{Z}_n$ tal que

$$\begin{array}{lcl} \psi_{(a,b)} \cdot \theta_{+,-} & = & \theta_{-,+} \\ \theta_{+,-} \circ \psi_{(a,b)} & = & \theta_{-,+} \\ (\theta_{+,-} \circ \psi_{(a,b)})(A) & = & \theta_{-,+}(A) \\ \theta_{+,-}(A^a) & = & \theta_{-,+}(A) \\ (\theta_{+,-}(A))^a & = & \theta_{-,+}(A) \\ 1 & \neq & -1. \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \psi_{(a,b)} \cdot \theta_{+,-} & = & \theta_{-,+} \\ \theta_{+,-} \circ \psi_{(a,b)} & = & \theta_{-,+} \\ (\theta_{+,-} \circ \psi_{(a,b)})(B) & = & \theta_{-,+}(B) \\ \theta_{+,-}(A^bB) & = & \theta_{-,+}(B) \\ (\theta_{+,-}(A))^b(\theta_{+,-}(B)) & = & \theta_{-,+}(B) \\ -1 & \neq & 1. \end{array}$$

Por lo tanto, $\theta_{+,-}$ no está relacionado con $\theta_{-,+}$,

5. $\theta_{+,-}$ estará relacionado con $\theta_{-,-}$, si y sólo si, existe (a,b) en $(\mathbb{Z}_n)^\times \ltimes \mathbb{Z}_n$ tal que

$$\begin{array}{lcl} \psi_{(a,b)} \cdot \theta_{+,-} & = & \theta_{-,-} \\ \theta_{+,-} \circ \psi_{(a,b)} & = & \theta_{-,-} \\ (\theta_{+,-} \circ \psi_{(a,b)})(A) & = & \theta_{-,-}(A) \\ \theta_{+,-}(A^a) & = & \theta_{-,-}(A) \\ (\theta_{+,-}(A))^a & = & \theta_{-,-}(A) \\ 1 & \neq & -1. \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \psi_{(a,b)} \cdot \theta_{+,-} & = & \theta_{-,-} \\ \theta_{+,-} \circ \psi_{(a,b)} & = & \theta_{-,-} \\ (\theta_{+,-} \circ \psi_{(a,b)})(B) & = & \theta_{-,-}(B) \\ \theta_{+,-}(A^bB) & = & \theta_{-,-}(B) \\ (\theta_{+,-}(A))^b(\theta_{+,-}(B)) & = & \theta_{-,-}(B) \\ -1 & = & -1. \end{array}$$

Por lo tanto, $\theta_{+,-}$ no está relacionado con $\theta_{-,-}$.

6. $\theta_{-,+}$ estará relacionado con $\theta_{-,-}$, si y sólo si, existe (a,b) en $(\mathbb{Z}_n)^{\times} \ltimes \mathbb{Z}_n$ tal que

$$\begin{array}{lcll}
\psi_{(a,b)} \cdot \theta_{-,+} & = & \theta_{-,-} & \\
\theta_{-,+} \circ \psi_{(a,b)} & = & \theta_{-,-} & \\
(\theta_{-,+} \circ \psi_{(a,b)})(A) & = & \theta_{-,-}(A) & \\
\theta_{-,+}(A^a) & = & \theta_{-,-}(A) & \\
(\theta_{-,+}(A))^a & = & \theta_{-,-}(A) & \\
(\theta_{-,+}(A))^a & \neq & -1 & \quad \text{para algún } a \in \mathbb{Z}_n^{\times}
\end{array}$$

$$\begin{array}{lcl}
\psi_{(a,b)} \cdot \theta_{-,+} & = & \theta_{-,-} \\
\theta_{-,+} \circ \psi_{(a,b)} & = & \theta_{-,-} \\
(\theta_{-,+} \circ \psi_{(a,b)})(B) & = & \theta_{-,-}(B) \\
\theta_{-,+}(A^b B) & = & \theta_{-,-}(B) \\
(\theta_{-,+}(A))^b(\theta_{-,+}(B)) & = & \theta_{-,-}(B) \\
(\theta_{-,+}(A))^b(\theta_{-,+}(B)) & \neq & -1.
\end{array}$$

Por lo tanto, $\theta_{-,+}$ no está relacionado con $\theta_{-,-}$.

Resumiendo lo anterior, tenemos:

Teorema 12. *Los supercaracteres del grupo Diédrico son:*

$$\mathfrak{X} = \{\{\theta_{+,+}\}, \{\theta_{+,-}\}, \{\theta_{-,+}\}, \{\theta_{-,-}\}, O(\chi_r)\}$$

con $O(\chi_r)$ según la Proposición 13.

2.3. $\mathcal{G}$ actúa sobre G. Recordando las distintas clases de conjugación para el grupo Diedral. En el caso par, ellas son:

$$\begin{array}{ccc}
\{1\}, & \{A^{\frac{n}{2}}\}, & ,\{A^u, A^{n-u}\} \text{ con } 1 \leq u \leq \frac{n}{2} - 1 \\
& \{B, A^2B, \cdots, A^{n-1}B\}, & \{AB, A^3B, \cdots, A^{n-1}B\}
\end{array}$$

las cuales nos sirven para hacer el cálculo de las superclases.

Sean $A^u,\ A^v, B \in G$, con $1 \leq u, v \leq \frac{n}{2} - 1$ entonces

1. $A^{\frac{n}{2}}$ estará relacionado con A^v, si y sólo si, existe (a,b) en $(\mathbb{Z}_n)^\times \ltimes \mathbb{Z}_n$ tal que

$$\begin{array}{lcll}
\psi_{(a,b)} \cdot A^{\frac{n}{2}} & = & A^v & \\
\psi_{(a,b)}(A^{\frac{n}{2}}) & = & A^v & \\
A^{\frac{n}{2}a} & = & A^v & \\
A^{\frac{n}{2}a-v} & = & 1 & \\
\frac{n}{2}a - v & = & \dot{n} & \\
\frac{n}{2}a - v & = & 0 & \text{módulo } n
\end{array}$$

Como n es par y $a \in \mathbb{Z}_n^\times$, entonces $A^{\frac{n}{2}}$ no está relacionado con A^v .

2. $A^{\frac{n}{2}}$ estará relacionado con B, si y sólo si, existe (a,b) en $(\mathbb{Z}_n)^\times \ltimes \mathbb{Z}_n$ tal que

$$\begin{array}{lcl}
\psi_{(a,b)} \cdot A^{\frac{n}{2}} & = & B \\
\psi_{(a,b)}(A^{\frac{n}{2}}) & = & B \\
A^{\frac{n}{2}a} & = & B.
\end{array}$$

Por lo tanto, $A^{\frac{n}{2}}$ no está relacionado con$B$.

3. $A^{\frac{n}{2}}$ estará relacionado con AB, si y sólo si, existe (a,b) en $(\mathbb{Z}_n)^\times \ltimes \mathbb{Z}_n$ tal que

$$\begin{array}{lcl}
\psi_{(a,b)} \cdot A^{\frac{n}{2}} & = & AB \\
\psi_{(a,b)}(A^{\frac{n}{2}}) & = & AB \\
A^{\frac{n}{2}a} & = & AB \\
A^{\frac{n}{2}a-1} & = & B.
\end{array}$$

Por lo tanto, $A^{\frac{n}{2}}$ no está relacionado con AB .

4. A^u estará relacionado con A^v, si y sólo si, existe (a,b) en $(\mathbb{Z}_n)^\times \ltimes \mathbb{Z}_n$ tal que

$$\begin{array}{lcll}
\psi_{(a,b)} \cdot A^u & = & A^v & \\
\psi_{(a,b)}(A^u) & = & A^v & \\
A^{ua} & = & A^v & \\
A^{ua-v} & = & 1 & \\
ua - v & = & \dot{n} & \\
ua & = & v & \text{módulo } n \\
(u,n) & = & (v,n). &
\end{array}$$

Por lo tanto, A^u está relacionado con A^v, si y sólo si $(u,n) = (v,n)$.

5. A^u estará relacionado con B, si y sólo si, existe (a,b) en $(\mathbb{Z}_n)^\times \ltimes \mathbb{Z}_n$ tal que

$$\begin{array}{lcl} \psi_{(a,b)} \cdot A^u & = & B \\ \psi_{(a,b)}(A^u) & = & B \\ A^{ua} & = & B. \end{array}$$

Por lo tanto, A^u no está relacionado con B .

6. A^u estará relacionado con AB, si y sólo si, existe (a,b) en $(\mathbb{Z}_n)^\times \ltimes \mathbb{Z}_n$ tal que

$$\begin{array}{lcl} \psi_{(a,b)} \cdot A^u & = & AB \\ \psi_{(a,b)}(A^u) & = & AB \\ A^{ua-1} & = & B. \end{array}$$

Por lo tanto, A^u no está relacionado con AB .

7. B estará relacionado con AB, si y sólo si, existe (a,b) en $(\mathbb{Z}_n)^\times \ltimes \mathbb{Z}_n$ tal que

$$\begin{array}{lcll} \psi_{(a,b)} \cdot B & = & AB & \\ \psi_{(a,b)}(A^bB) & = & AB & \\ A^{b-1} & = & 1 & \\ A^{b-1} & = & \dot{n} & \\ A^{b-1} & = & 1 & \text{módulo } n \\ A^{b} & = & 1 & \text{módulo } n \end{array}$$

Por lo tanto, B no está relacionado con AB .

Podemos resumir lo anterior, en el siguiente teorema:

Teorema 13. *Las superclases $\mathcal{K}$ del grupo Diédrico para n par son:*

$$\{1\} \quad \{A^{\frac{n}{2}}\} \quad \{A^iB, \textit{con } i \textit{ par}\} \quad \{A^iB, , \textit{con } i \textit{ impar}\}$$

y la superclase, que nombraremos K_d, está dada por:

$$K_d = \{A^k, A^{n-k} \textit{ tal que } (n,k) = d\}$$

donde d divisor de n y $d < \frac{n}{2}$.

Algunos ejemplos,

a) Para $n = 6$ tenemos, $\{A^1, A^5\}$, $\{A^2, A^4\}$, veamos si A^1 está relacionado con A^2, entonces debemos ver si existe (a,b) en $(\mathbb{Z}_6)^\times \ltimes \mathbb{Z}_6$. Así,

$$1 \cdot a - 2 = \dot{6}$$

Como $\mathbb{Z}_6^\times = \{1, 5\}$, entonces A^1 no está relacionado con A^2. Es decir, $\{A^1, A^5\}$ y $\{A^2, A^4\}$.

b) Para $n = 8$ tenemos, $\{A^1, A^7\}$, $\{A^2, A^6\}$, $\{A^3, A^5\}$ veamos si $A^1 \sim A^2$, $A^1 \sim A^3$, $A^2 \sim A^3$, entonces debemos ver si existe (a, b) en $(\mathbb{Z}_8)^\times \ltimes \mathbb{Z}_8$. Así,

$$\begin{aligned} 1 \cdot a - 2 &= \dot{8} \\ 1 \cdot a - 3 &= \dot{8} \\ 2 \cdot a - 3 &= \dot{8} \end{aligned}$$

Como $\mathbb{Z}_8^\times = \{1, 3, 5, 7\}$, entonces

$$\begin{aligned} A^1 &\nsim A^2 \\ A^1 &\sim A^3 \\ A^2 &\nsim A^3 \end{aligned}$$

Es decir, $\{A^1, A^7, A^3, A^5\}$ y $\{A^2, A^6\}$.

c) Para $n = 10$ tenemos, $\{A^1, A^9\}$, $\{A^2, A^8\}$, $\{A^3, A^7\}$, $\{A^4, A^6\}$ veamos si $A^1 \sim A^2$, $A^1 \sim A^3$, $A^1 \sim A^4$, $A^2 \sim A^3$, $A^2 \sim A^4$, entonces debemos ver si existe (a, b) en $(\mathbb{Z}_{10})^\times \ltimes \mathbb{Z}_{10}$.Así,

$$\begin{aligned} 1 \cdot a - 2 &= \dot{10} \\ 1 \cdot a - 3 &= \dot{10} \\ 1 \cdot a - 4 &= \dot{10} \\ 2 \cdot a - 3 &= \dot{10} \\ 2 \cdot a - 4 &= \dot{10} \end{aligned}$$

Como $\mathbb{Z}_{10}^\times = \{1, 3, 7, 9\}$, entonces

$$\begin{aligned} A^1 &\nsim A^2 \\ A^1 &\sim A^3 \\ A^1 &\nsim A^4 \\ A^2 &\nsim A^3 \\ A^2 &\sim A^4 \end{aligned}$$

Es decir, $\{A^1, A^9, A^3, A^7\}$ y $\{A^2, A^8, A^4, A^6\}$.

Ejemplo 23. *Para $n = 8$, según los cálculos realizados anteriormente, tenemos*

$$\mathfrak{X} = \{\{\theta_{+,+}\}, \{\theta_{+,-}\}, \{\theta_{-,+}\}, \{\theta_{-,-}\}, \{\chi_1, \chi_3\}, \{\chi_2\}\}$$

$$\mathcal{K} = \{\{1\}, \{A^4\}, \{A^2, A^6\}, k_1, k_2, k_3\}$$

Sean, $k_1 = \{A^1, A^3, A^5, A^7\}$, $k_2 = \{B, A^2B, A^4B, A^6B\}$ *y* $k_3 = \{AB, A^3B, A^5B, A^7B\}$. *Así, podemos calcular la tabla de supercaracteres,*

$$\begin{aligned}
\chi_2(A^4) &= 2 \cdot (\eta^{2\cdot4} + \eta^{-2\cdot4}) \\
&= 2 \cdot (cos(\tfrac{2\pi\cdot8}{8}) + isen(\tfrac{2\pi\cdot8}{8}) + cos(\tfrac{-2\pi\cdot8}{8}) + isen(\tfrac{-2\pi\cdot8}{8})) \\
&= 2 \cdot (1 + i0 + 1 + i0) \\
&= 4.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\chi_2(A^2) &= 2 \cdot (\eta^{2\cdot2} + \eta^{-2\cdot2}) \\
&= 2 \cdot (cos(\tfrac{2\pi\cdot4}{8}) + isen(\tfrac{2\pi\cdot4}{8}) + cos(\tfrac{-2\pi\cdot4}{8}) + isen(\tfrac{-2\pi\cdot4}{8})) \\
&= 2 \cdot (-1 + i0 + -1 + i0) \\
&= -4.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\chi_1 + \chi_3)(A^4) &= 2 \cdot (\chi_1(A^4) + \chi_3(A^4)) \\
&= 2 \cdot (\eta^{1\cdot4} + \eta^{-1\cdot4} + \eta^{3\cdot4} + \eta^{-3\cdot4}) \\
&= 2 \cdot (cos(\tfrac{2\pi\cdot4}{8}) + cos(\tfrac{-2\pi\cdot4}{8}) + cos(\tfrac{2\pi\cdot12}{8}) + cos(\tfrac{-2\pi\cdot12}{8})) \\
&= 2 \cdot (-1 + -1 + -1 + -1) \\
&= -8.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\chi_1 + \chi_3)(A^2) &= 2 \cdot (\chi_1(A^2) + \chi_3(A^2)) \\
&= 2 \cdot (\eta^{1\cdot2} + \eta^{-1\cdot2} + \eta^{3\cdot2} + \eta^{-3\cdot2}) \\
&= 2 \cdot (cos(\tfrac{2\pi\cdot2}{8}) + cos(\tfrac{-2\pi\cdot2}{8}) + cos(\tfrac{2\pi\cdot6}{8}) + cos(\tfrac{-2\pi\cdot6}{8})) \\
&= 2 \cdot (0 + 0 + 0 + 0) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\chi_1 + \chi_3)(A^1) &= 2 \cdot (\chi_1(A^1) + \chi_3(A^1)) \\
&= 2 \cdot (\eta^{1\cdot1} + \eta^{-1\cdot1} + \eta^{3\cdot1} + \eta^{-3\cdot1}) \\
&= 2 \cdot (cos(\tfrac{2\pi\cdot1}{8}) + cos(\tfrac{-2\pi\cdot1}{8}) + cos(\tfrac{2\pi\cdot3}{8}) + cos(\tfrac{-2\pi\cdot3}{8})) \\
&= 2 \cdot (\tfrac{\sqrt{2}}{2} + \tfrac{\sqrt{2}}{2} + \tfrac{-\sqrt{2}}{2} + \tfrac{-\sqrt{2}}{2}) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Tabla de Supercaracter para D_8						
Elemento	1	A^4	A^2	k_1	k_2	k_3
$\theta_{+,+}$	1	1	1	1	1	1
$\theta_{+,-}$	1	1	1	1	-1	-1
$\theta_{-,+}$	1	-1	-1	-1	1	1
$\theta_{-,-}$	1	-1	-1	-1	-1	-1
χ_2	1	4	-4	0	0	0
$A_{\{\chi_1,\chi_3\}}$	2	-8	0	0	0	0

Cuadro 1. Tabla de Supercaracter para D_8

En conclusión tenemos el cálculo para los supercaracteres del grupo Diédrico D_n, cuando n es par, considerando las superclases descritas en el Teorema 13.

Consideremos el elemento A^k en la superclase K_d, tenemos que para $1 \leq r \leq \frac{n}{2}-1$

$$
\begin{aligned}
\sigma_{X_r}(A^k) &= \sum_{\chi\in X_r} \chi(1)\chi(A^k) \\
&= 2\cdot \sum_{a\in\mathbb{Z}_n^\times} \chi_{ar}(A^k) \\
&= 2\cdot \sum_{1\leq s\leq \frac{n}{2}-1} \chi_s(A^k) \\
&= 2\cdot \sum_{\substack{d=(r,n)\\ 1\leq r\leq \frac{n}{2}-1\\ a\in\mathbb{Z}_n^\times}} \chi_{ad}(A^k) \\
&= 2\cdot \sum_{\substack{d=(r,n)\\ 1\leq r\leq \frac{n}{2}-1\\ a\in\mathbb{Z}_n^\times}} \eta^{adk} + \eta^{-adk} \\
&= 2\cdot \sum_{\substack{d=(r,n)\\ 1\leq r\leq \frac{n}{2}-1\\ a\in\mathbb{Z}_n^\times}} 2cos(\tfrac{2\pi adk}{n}) \\
&= 4\cdot \sum_{\substack{d=(r,n)\\ 1\leq r\leq \frac{n}{2}-1\\ a\in\mathbb{Z}_n^\times}} cos(\tfrac{2\pi adk}{n})
\end{aligned}
$$

Consideremos la Superclase $A^{\frac{n}{2}}$. Tenemos que para $1 \leq r \leq \frac{n}{2} - 1$

$$\begin{aligned}
\sigma_{X_r}(A^{\frac{n}{2}}) &= \sum_{\chi \in X_r} \chi(1)\chi(A^{\frac{n}{2}}) \\
&= 2 \cdot \sum_{a \in \mathbb{Z}_n^\times} \chi_{ar}(A^{\frac{n}{2}}) \\
&= 2 \cdot \sum_{1 \leq s \leq \frac{n}{2}-1} \chi_s(A^{\frac{n}{2}}) \\
&= 2 \cdot \sum_{\substack{d=(r,n) \\ 1 \leq r \leq \frac{n}{2}-1 \\ a \in \mathbb{Z}_n^\times}} \chi_{ad}(A^{\frac{n}{2}}) \\
&= 2 \cdot \sum_{\substack{d=(r,n) \\ 1 \leq r \leq \frac{n}{2}-1 \\ a \in \mathbb{Z}_n^\times}} \eta^{ad\frac{n}{2}} + \eta^{-ad\frac{n}{2}} \\
&= 2 \cdot \sum_{\substack{d=(r,n) \\ 1 \leq r \leq \frac{n}{2}-1 \\ a \in \mathbb{Z}_n^\times}} 2cos(\frac{2\pi ad\frac{n}{2}}{n}) \\
&= 4 \cdot \sum_{\substack{d=(r,n) \\ 1 \leq r \leq \frac{n}{2}-1 \\ a \in \mathbb{Z}_n^\times}} cos(\pi ad)
\end{aligned}$$

Consideremos la Superclase B

$$\begin{aligned}
\sigma_{X_r}(B) &= \sum_{\chi \in X_r} \chi(1)\chi(B) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Consideremos la Superclase AB

$$\begin{aligned}
\sigma_{X_r}(AB) &= \sum_{\chi \in X_r} \chi(1)\chi(AB) \\
&= 0
\end{aligned}$$

2.3.1. **Caso n impar.** Dados $1 \leq u, v \leq \frac{n-1}{2}$. χ_u está relacionado con χ_v si y sólo si, existe (i, j) en $(\mathbb{Z}_n)^\times \ltimes \mathbb{Z}_n$ tal que

$$\psi_{(i,j)} \cdot \chi_u = \chi_v.$$

Entonces,

$$(\chi_u \circ \psi_{(i,j)})(A) = \chi_v(A)$$

luego,

$$\chi_u(A^i) = \chi_v(A) \tag{34}$$

$$\eta^{ui} + \eta^{-ui} = \eta^{v} + \eta^{-v}. \tag{35}$$

donde $\eta^{ui} = cos(\frac{2\pi ui}{n}) + isen(\frac{2\pi ui}{n})$. Tomando en cuenta que la función coseno es una función par y la función seno es una función impar, la ecuación (35), se reduce a

$$\begin{array}{rcr} cos(\frac{2\pi ui}{n}) & = & cos(\frac{2\pi v}{n}) \\ \frac{2\pi ui}{n} + \dot{2\pi} & = & \frac{2\pi v}{n} \\ ua + \dot{2\pi} & = & v \end{array}$$

donde $\dot{2\pi}$ significa múltiplo de 2π. Ocupando Lema 1, tenemos que, existe a en la unidades del grupo cíclico, tal que

$$au = v \pmod{\text{n}}$$

y u divisor de n.

Proposición 14. *Sean χ_r, χ_s. Tenemos que $\chi_r \sim \chi_s$ si y sólo si,*

$$s = ar$$

con $a \in \mathbb{Z}_n^{\times}$. Así,

$$O(\chi_r) = \{\chi_{ar} \mid a \in \mathbb{Z}_n^{\times}\}$$

También la órbita de χ_r, puede ser descrita por:

$$O(\chi_r) = \{\chi_s \mid (r,n) = (s,n), \quad 1 \leq s \leq \frac{n-1}{2}\}$$

con $1 \leq r \leq \frac{n-1}{2}$. Y

$$O(\chi_r) = \{\chi_{ad} \mid a \in \mathbb{Z}_n^{\times}\}$$

con $d = (r,n)$.

Demostración. Primero demostremos que $O(\chi_r) = \{\chi_{ar} \mid a \in \mathbb{Z}_n^{\times}\}$ es equivalente a $O(\chi_r) = \{\chi_s \mid (r,n) = (s,n), \quad 1 \leq s \leq \frac{n-1}{2}\}$, con $1 \leq r \leq \frac{n-1}{2}$.

Sea $\chi \in O(\chi_r)$, entonces

$$\chi = \chi_{ar}, \quad \text{para algún } a \in \mathbb{Z}_n^{\times}$$

luego, debemos probar que $(r,n) = (s,n)$, es decir

$$(r,n) = (ar,n)$$

Si $d = (r,n)$, entonces $d = (ar,n)$. Luego, $d = (ar,n)$ si y sólo si

1. $d|ar$ y $d|n$

2. $d'|ar$ y $d'|n$, entonces $d'|d$

Es claro que la primera condición dada se cumple, debido a que $d = (r, n)$, entonces $d|n$ y $d|r$, por lo tanto d divide a cualquier múltiplo de r, es decir, $d|ar$.

Ahora, si $d'|ar$, entonces existe $u \in \mathbb{Z}_n$, tal que

$$ar = ud'$$

como $a \in \mathbb{Z}_n^{\times}$, ocupando Lema 1,

$$\begin{aligned} ar &= ud' \\ r &= a^{-1}ud' \end{aligned}$$

Es decir, $d'|r$ y $d'|n$, entonces $d'|d$, pues $d = (r, n)$.

Sea s tal que $(r, n) = (s, n)$ y $1 \leq s \leq \frac{n-1}{2}$, por demostrar que $\chi_s \in O(\chi_r)$. Basta ver que,

$$s = ar$$

para algún $a \in \mathbb{Z}_n^{\times}$.

Como $(r, n) = (s, n)$, ocupando el Lema 1, existe $a \in \mathbb{Z}_n^{\times}$ tal que

$$ar = s$$

Ahora, demostremos que la descripción de las órbitas de χ_r son equivalentes, es decir, $O(\chi_r) = \{\chi_s \mid (r, n) = (s, n), \ \ 1 \leq s \leq \frac{n-1}{2}\}$ con $1 \leq r \leq \frac{n-1}{2}$ es equivalente a $O(\chi_r) = \{\chi_{ad} \mid a \in \mathbb{Z}_n^{\times}\}$ con $d = (r, n)$.

Sea $\chi \in O(\chi_r) = \{\chi_s \mid (r, n) = (s, n), \ \ 1 \leq s \leq \frac{n-1}{2}\}$ con $1 \leq r \leq \frac{n-1}{2}$, entonces

$$\chi = \chi_s$$

con $(r, n) = (s, n) = d$. Luego, debemos demostrar que $\chi \in \{\chi_{ad} \mid a \in \mathbb{Z}_n^{\times}\}$, es decir,

$$\chi = \chi_{ad}, \qquad \text{para algún } a \in \mathbb{Z}_n^{\times}$$

Así,

$$\chi = \chi_s = \chi_{ar}$$

como $(r, n) = (d, n)$ por lema 1, existe $\alpha \in \mathbb{Z}_n^{\times}$ tal que

$$r = \alpha d$$

de esta manera,

$$\chi_{ar} = \chi_{a\alpha d}$$

Ahora, si $\chi \in \{\chi_{ad} \mid a \in \mathbb{Z}_n^\times\}$, entonces

$$\chi = \chi_{ad} \quad \text{para algún } a \in \mathbb{Z}_n^\times$$

Nuevamente, ocupando lema 1, existe $\alpha \in \mathbb{Z}_n^\times$ tal que

$$r = \alpha d$$

así, $\alpha^{-1} r = d$, de esta forma

$$\chi_{ad} = \chi_{a\alpha^{-1}r}$$

$\square$

Ejemplo 24. *Para $n = 7$. Sea $1 \leq r \leq 3$, luego existen tres representaciones de dimensión dos $\chi_1,\ \chi_2,\ \chi_3 \in \mathrm{Irr}(G)$. Encontraremos las órbitas de estas representaciones ocupando la Proposición 14. Así, tenemos,*

$$\begin{aligned} O(\chi_1) &= \{\chi_{a\cdot 1} \mid a \in \{1,2,3,4,5,6\}\} \text{ } \textit{con } 1 \leq a \cdot 1 \leq 3 \\ &= \{\chi_1, \chi_2, \chi_3\} \end{aligned}$$

Ejemplo 25. *Para $n = 9$. Sea $1 \leq r \leq 4$, luego existen cuatro representaciones de dimensión dos $\chi_1,\ \chi_2,\ \chi_3,\ \chi_4 \in \mathrm{Irr}(G)$. Encontraremos las órbitas de estas representaciones ocupando la Proposición 14. Así, tenemos,*

$$\begin{aligned} O(\chi_1) &= \{\chi_{a\cdot 1} \mid a \in \{1,2,4,5,7,8\}\} \text{ } \textit{con } 1 \leq a \cdot 1 \leq 4 \\ &= \{\chi_1, \chi_2, \chi_4\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} O(\chi_3) &= \{\chi_{a\cdot 3} \mid a \in \{1,2,4,5,7,8\}\} \text{ } \textit{con } 1 \leq a \cdot 3 \leq 4 \\ &= \{\chi_3\} \end{aligned}$$

Representaciones unidimensionales Sin peligro de confusión nombraremos las representaciones unidimensionales por::

- La trivial la cual ya hemos nombrado por $\theta_{+,+}$.
- De igual manera la representación $\theta_{+,-}$

Veamos cuando dos de estas representaciones están relacionadas. Tenemos:

1. $\theta_{+,+} \sim \theta_{+,-} \quad \Leftrightarrow \quad \exists\ (a,b) \in (\mathbb{Z}_n)^\times \ltimes \mathbb{Z}_n \quad$ tal que

$$\begin{aligned}
\psi_{(a,b)} \cdot \theta_{+,+} &= \theta_{+,-} \\
\theta_{+,+} \circ \psi_{(a,b)} &= \theta_{+,-} \\
(\theta_{+,+} \circ \psi_{(a,b)})(A^u) &= \theta_{+,-}(A^u) \\
(\theta_{+,+}(A))^{ua} &= (\theta_{+,-}(A))^u \\
1 &= 1
\end{aligned}$$

2. $\theta_{+,+} \sim \theta_{+,-} \quad \Leftrightarrow \quad \exists\ (a,b) \in (\mathbb{Z}_n)^\times \ltimes \mathbb{Z}_n \quad$ tal que

$$\begin{aligned}
\psi_{(a,b)} \cdot \theta_{+,+} &= \theta_{+,-} \\
\theta_{+,+} \circ \psi_{(a,b)} &= \theta_{+,-} \\
(\theta_{+,+} \circ \psi_{(a,b)})(A^u B) &= \theta_{+,-}(A^u B) \\
\theta_{+,+}(A^{ua+b} B) &= \theta_{+,-}(A^u B) \\
(\theta_{+,+}(A))^{ua+b}(\theta_{+,+}(B)) &= (\theta_{+,-}(A))^u(\theta_{+,-}(B)) \\
1 &\neq -1
\end{aligned}$$

Así, $\theta_{+,+} \not\sim \theta_{+,-}$.

Resumiendo lo anterior, tenemos:

Teorema 14.

$$\mathfrak{X} = \{\theta_{+,+}, \theta_{+,-}, O(\chi_r)\}$$

con $O(\chi_r)$, según la Proposición 14.

Recordando las distintas clases de conjugación para el grupo Diedral. En el caso impar, ellas son:

$$\{1\}$$
$$\{A^u, A^{n-u}\} \text{ con } 1 \leq u \leq \frac{n-1}{2}$$
$$\{B, AB, A^2B, \cdots, A^{(n-1)}B\}$$

las cuales nos sirven para hacer el cáculo de las superclases.

Sean $A^u,\ A^v, B \in G$, con $1 \leq u, v \leq \frac{n}{2} - 1$ entonces

$$\begin{aligned}
A^u \sim B \quad &\Leftrightarrow \quad \exists\ (a,b) \in (\mathbb{Z}_n)^\times \ltimes \mathbb{Z}_n \quad \text{tal que} \quad \psi_{(a,b)} \cdot A^u = B \\
&\Leftrightarrow \quad \exists\ (a,b) \in (\mathbb{Z}_n)^\times \ltimes \mathbb{Z}_n \quad \text{tal que} \quad \psi_{(a,b)}(A^u) = B \\
&\Leftrightarrow \quad \exists\ (a,b) \in (\mathbb{Z}_n)^\times \ltimes \mathbb{Z}_n \quad \text{tal que} \quad A^{ua} = B
\end{aligned}$$

Así, $A^u \not\sim B$.

Podemos resumir lo anterior en el siguiente teorema:

Teorema 15. *Las superclases $\mathcal{K}$ del grupo diédrico para n impar son:*

$$\{1\}; \quad \{B, AB, A^2B, \cdots, A^{(n-1)}B\}$$

y la superclase, que nombraremos K_d, está dada por:

$$K_d = \{A^k, A^{n-k} \text{ tal que } (n,k) = d\}$$

donde d divisor de n y $d < \frac{n-1}{2}$.

Ejemplo 26. *Sea $n = 7$, tenemos que si d es divisor de 7 y $d < 3$,*

$$d = \{1\}$$

de esta forma

$$K_1 = \{A^1, A^6, A^2, A^5, A^3, A^4\}$$

Ejemplo 27. *Para $n = 7$, según los cálculos realizados anteriormente, tenemos*

$$\mathfrak{X} = \{\{\theta_{+,+}\}, \{\theta_{+,-}\}, \{\chi_1, \chi_2, \chi_3\}\}$$

$$\mathcal{K} = \{\{1\}, \{A^1, A^2, A^3, A^4, A^5, A^6\}, \{B, AB, A^2B, A^3B, A^4B, A^5B, A^6B\}\}$$

Así, podemos calcular la tabla de supercaracteres,

$$\begin{aligned}
(\chi_1 + \chi_2 + \chi_3)(A^1) &= 2 \cdot (\chi_1(A^1) + \chi_2(A^1) + \chi_3(A^1)) \\
&= 2 \cdot (\eta^{1\cdot 1} + \eta^{-1\cdot 1} + \eta^{2\cdot 1} + \eta^{-2\cdot 1} + \eta^{3\cdot 1} + \eta^{-3\cdot 1}) \\
&= 2 \cdot (cos(\tfrac{2\pi\cdot 1}{7}) + cos(\tfrac{-2\pi\cdot 1}{7}) + cos(\tfrac{2\pi\cdot 2}{7}) + cos(\tfrac{-2\pi\cdot 2}{7}) + cos(\tfrac{2\pi\cdot 3}{7}) + cos(\tfrac{-2\pi\cdot 3}{7})) \\
&= 2 \cdot -1 \\
&= -2
\end{aligned}$$

Tabla de Supercaracter para D_7			
Elemento	1	A^1	B
$\theta_{+,+}$	1	1	1
$\theta_{+,-}$	1	1	-1
$A_{\{\chi_1,\chi_2,\chi_3\}}$	3	-2	0

Cuadro 2. Tabla de Supercaracter para D_7

Ejemplo 28. *Para $n = 9$, tenemos*

$$\mathfrak{X} = \{\{\theta_{+,+}\}, \{\theta_{+,-}\}, \{\chi_1, \chi_2, \chi_4\}, \{\chi_3\}\}$$

$$\mathcal{K} = \{\{1\}, k_1, k_2, k_3\}$$

donde

$$k_1 = \{A^1, A^2, A^4, A^8, A^7, A^5\}$$

$$k_2 = \{A^3, A^6\}$$

$$k_3 = \{B, AB, A^2B, A^3B, A^4B, A^5B, A^6B, A^7B, A^8B\}$$

Así, podemos calcular la tabla de supercaracteres,

$$\begin{aligned}
(\chi_1 + \chi_2 + \chi_4)(A^1) &= 2 \cdot (\chi_1(A^1) + \chi_2(A^1) + \chi_4(A^1)) \\
&= 2 \cdot (\eta^{1\cdot 1} + \eta^{-1\cdot 1} + \eta^{2\cdot 1} + \eta^{-2\cdot 1} + \eta^{4\cdot 1} + \eta^{-4\cdot 1}) \\
&= 2 \cdot (cos(\tfrac{2\pi\cdot 1}{9}) + cos(\tfrac{-2\pi\cdot 1}{9}) + cos(\tfrac{2\pi\cdot 2}{9}) + cos(\tfrac{-2\pi\cdot 2}{9}) + cos(\tfrac{2\pi\cdot 4}{9}) \\
&\quad +cos(\tfrac{-2\pi\cdot 4}{9})) \\
&= 2 \cdot 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Tabla de Supercaracter para D_9				
Elemento	1	k_1	k_2	k_3
$\theta_{+,+}$	1	1	1	1
$\theta_{+,-}$	1	1	1	-1
$A_{\{\chi_1,\chi_2,\chi_4\}}$	3	0	-6	0
$A_{\{\chi_3\}}$	1	-2	4	0

Cuadro 3. Tabla de Supercaracter para D_9

Ejemplo 29. *Para $n = 15$, tenemos*

$$\mathfrak{X} = \{\{\theta_{+,+}\}, \{\theta_{+,-}\}, \{\chi_1, \chi_2, \chi_4, \chi_7\}, \{\chi_3, \chi_6\}, \{\chi_5\}\}$$

$$\mathcal{K} = \{\{1\}, k_1, k_2, k_3, k_4\}$$

donde

$$k_1 = \{A^1, A^2, A^4, A^7, A^8, A^{11}, A^{13}, A^{14}\}$$

$$k_2 = \{A^3, A^6, A^9, A^{12}\}$$

$$k_3 = \{A^5, A^{10}\}$$

$k_4 = \{B, AB, A^2B, A^3B, A^4B, A^5B, A^6B, A^7B, A^8B, A^9B, A^{10}B, A^{11}B, A^{12}B, A^{13}B, A^{14}B\}$

Así, podemos calcular la tabla de supercaracteres,

$$\begin{aligned}
(\chi_1 + \chi_2 + \chi_4 + \chi_7)(A^1) &= 2 \cdot (\chi_1(A^1) + \chi_2(A^1) + \chi_4(A^1) + \chi_7(A^1)) \\
&= 2 \cdot (\eta^{1\cdot 1} + \eta^{-1\cdot 1} + \eta^{2\cdot 1} + \eta^{-2\cdot 1} + \eta^{4\cdot 1} + \eta^{-4\cdot 1} + \eta^{7\cdot 1} + \eta^{-7\cdot 1}) \\
&= 2 \cdot (cos(\tfrac{2\pi\cdot 1}{15}) + cos(\tfrac{-2\pi\cdot 1}{15}) + cos(\tfrac{2\pi\cdot 2}{15}) + cos(\tfrac{-2\pi\cdot 2}{15}) + cos(\tfrac{2\pi\cdot 4}{15}) \\
&\quad + cos(\tfrac{-2\pi\cdot 4}{15}) + cos(\tfrac{2\pi\cdot 7}{15}) + cos(\tfrac{-2\pi\cdot 7}{15})) \\
&= 2 \cdot 1 \\
&= 2
\end{aligned}$$

Tabla de Supercaracter para D_{15}					
Elemento	1	k_1	k_2	k_3	k_4
$\theta_{+,+}$	1	1	1	1	1
$\theta_{+,-}$	1	1	1	1	-1
$A_{\{\chi_1,\chi_2,\chi_4,\chi_7\}}$	4	2	-4	-8	0
$A_{\{\chi_3,\chi_6\}}$	2	-2	-2	8	0
$A_{\{\chi_5\}}$	1	-2	4	-2	0

CUADRO 4. Tabla de Supercaracter para D_{15}

En conclusión tenemos el cáculo para los supercaracteres de D_n, cuando n es impar, considerando las superclases descritas en el Teorema 15.

Consideremos el elemento A^k en la superclase K_d. Tenemos que para $1 \leq r \leq \frac{n-1}{2}$.

$$\begin{aligned}
\sigma_{X_r}(A^k) &= \sum_{\chi \in X_r} \chi(1)\chi(A^k) \\
&= 2 \cdot \sum_{a \in \mathbb{Z}_n^\times} \chi_{ar}(A^k) \\
&= 2 \cdot \sum_{1 \leq s \leq \frac{n-1}{2}} \chi_s(A^k) \\
&= 2 \cdot \sum_{\substack{d=(r,n) \\ 1 \leq r \leq \frac{n-1}{2} \\ a \in \mathbb{Z}_n^\times}} \chi_{ad}(A^k) \\
&= 2 \cdot \sum_{\substack{d=(r,n) \\ 1 \leq r \leq \frac{n-1}{2} \\ a \in \mathbb{Z}_n^\times}} \eta^{adk} + \eta^{-adk} \\
&= 2 \cdot \sum_{\substack{d=(r,n) \\ 1 \leq r \leq \frac{n-1}{2} \\ a \in \mathbb{Z}_n^\times}} 2cos(\tfrac{2\pi adk}{n}) \\
&= 4 \sum_{\substack{d=(r,n) \\ 1 \leq r \leq \frac{n-1}{2} \\ a \in \mathbb{Z}_n^\times}} cos(\tfrac{2\pi adk}{n})
\end{aligned}$$

Cuando n es un un número primo e impar, el cálculo del supercaracter

$$\begin{aligned}
\sigma_{X_r}(A^k) &= 4 \sum_{\substack{d=(r,n) \\ 1 \leq r \leq \frac{n-1}{2} \\ a \in \mathbb{Z}_n^\times}} cos(\tfrac{2\pi adk}{n}) \\
&= 4 \cdot \tfrac{-1}{2} \\
&= -2
\end{aligned}$$

Consideremos la Superclase B

$$\begin{aligned}
\sigma_{X_r}(B) &= \sum_{\chi \in X_r} \chi(1)\chi(B) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Bibliografía

[1] André, C. A. M., *Basic characters of the Unitriangular Group*, Journal of Algebra, 175: 287-319, 1995.

[2] André, C. A. M., *The regular character of the unitriangular group*, Journal of Algebra, 201: 1-52, 1998.

[3] André, C. A. M., *The basic character table of the unitriangular group*, Journal of Algebra, 241: 437-471, 2001.

[4] André, C. A. M., *Basic characters of the Unitriangular Group (for arbitrary primes)*, Proceeding of the American Mathematical Society, 130: 1943-1954, 2002.

[5] P. Diaconis y I. M. Isaacs, *Supercharacters and superclasses for algebra groups*, Journal Tans. Amer. Math. Soc., 2008.

[6] C. F. Fowler, S. García y G. Karaali, *Ramanujan sums as supercharacters*, math. NT, 14 diciembre 2012

[7] W. Fulton, *Young tableaux with applications to Representation theory and geometry*, Cambridge University Press, 1997

[8] I. Martin Isaacs, *Character theory of finite groups*, Dover Pub. , Nueva York, 1976.

[9] Serge Lang, *Algebra*, Springer, Nueva York, 1971.

[10] Jean-Pierre Serre, *Linear Representations of Finite Groups*, Springer, Nueva York, 1977.

[11] Yan, *Representation of finite unipotent linear group (Tesis doctoral)*, Universidad de Pennsylvania, 2001.

[12] F. Zaldivar, *Introducción a la teoría de grupos*, Sociedad matemática mexicana, 2006.