



# Educación Estadística para profesores de matemática en Chile

Isadora Navarro Pérez  
13 de junio de 2024

## **Profesor guía**

Carlos Henríquez Roldán. Ph.D.  
Instituto de Estadística, Universidad de Valparaíso

## **Profesor co-guía**

Felipe Ruz. Ph.D.  
Instituto de Estadística, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

## **Tesis para optar al**

grado académico de *Magíster en Estadística*

## *AGRADECIMIENTOS:*

La implementación de esta tesis ha sido posible gracias al financiamiento otorgado por el proyecto FOVI 220056 “Formación docente en la era de los datos y la información: potenciando la transformación digital desde la educación estadística”, liderado por el Dr. Felipe Ruz y la Dra. Elisabeth Ramos, académicos de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Su generoso respaldo y dedicación han sido fundamentales para el desarrollo e implementación de este trabajo.

Expreso mi más profundo agradecimiento al Dr. Carlos Henríquez, mi director de tesis, y al Dr. Felipe Ruz, mi co-director. Su experiencia, comprensión y orientación constante han sido fuentes invaluable de motivación, permitiéndome alcanzar alturas que nunca imaginé. Su inmenso apoyo ha sido crucial en cada etapa de este proceso académico.

Quiero expresar mi gratitud infinita a mi madre, cuyo amor incondicional y apoyo han sido el pilar de este logro. Su fe en mí, incluso en los momentos más difíciles, ha sido la luz que guió mi camino a través de este viaje académico. Sin su amor y sacrificio, este logro no habría sido posible.

Un sincero agradecimiento se extiende a todos mis amigos del Magíster, quienes compartieron conmigo tanto los momentos de estrés como las alegrías durante este largo y desafiante camino. Su compañía y respaldo fueron invaluable y contribuyeron significativamente a este logro académico.

# Índice general

|  |           |
|--|-----------|
| <b>1. Introducción y problema de investigación</b>   | <b>6</b>  |
| 1.1. Motivación . . . . .  | 6         |
| 1.2. Objetivos de investigación . . . . .  | 9         |
| 1.3. Hipótesis de trabajo . . . . .  | 9         |
| <b>2. Antecedentes</b>   | <b>11</b> |
| 2.1. La estadística en la práctica profesional del docente de matemáticas en Chile . . . . . | 11        |
| 2.2. Conocimiento del contenido de estadística . . . . .                                     | 13        |
| 2.3. Enseñanza no tradicional de la estadística . . . . .                                    | 16        |
| <b>3. Metodología</b>  | <b>20</b> |
| 3.1. Enfoque metodológico . . . . .  | 20        |
| 3.2. Participantes y contexto . . . . .  | 22        |
| 3.3. Instrumentos de evaluación . . . . .  | 23        |
| <b>4. Resultados</b>   | <b>25</b> |
| 4.1. Estudio de metodologías no tradicionales: un ejemplo . . . . .                          | 25        |
| 4.2. Análisis de las sesiones . . . . .  | 29        |
| 4.3. Análisis de las evaluaciones realizadas . . . . .                                       | 41        |
| <b>5. Conclusión</b>   | <b>48</b> |
| 5.1. Discusión . . . . .   | 48        |
| 5.2. Limitaciones y proyecciones . . . . .   | 50        |
| <b>Referencias</b>   | <b>51</b> |
| <b>A. Evaluación Diagnóstica</b>   | <b>54</b> |
| <b>B. Evaluaciones de las sesiones</b>   | <b>65</b> |

# Abreviaciones

- ASA: *American statistical Association*.
- DE: Desviación Estándar.
- END-FID: Evaluación Nacional Diagnóstica de la Formación Inicial Docente.
- ENUT: Encuesta Nacional de Uso del Tiempo.
- E2S: Estadístico, Simulación, Solidez.
- GAISE: *Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education* (en español: Lineamientos para la enseñanza y la evaluación en educación estadística).
- IBD: Investigación basada en el diseño.
- IC: Intervalos de Confianza.
- MKT: *Mathematical Knowledge for Teaching*.
- OA: Objetivo de Aprendizaje.
- OE: Objetivo Específico.
- PCK: *Pedagogical Content Knowledge*.
- PIE: Proceso de Investigación Estadística.
- PUCV: Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.
- RLS: Regresión Lineal Simple.
- TCL: Teorema Central del Límite.

# Resumen

En las últimas décadas, la estadística se ha vuelto cada vez más relevante en nuestra cultura, puesto que es crucial en muchos campos, y esto ha aumentado la necesidad de promover habilidades estadísticas en la sociedad actual. En Chile, un nuevo componente del plan de estudios aborda la inferencia estadística, presentando un desafío para los profesores de matemática de educación media. Sin embargo, según la Evaluación Nacional Diagnóstica de la Formación Inicial Docente 2020 y 2021, solo un tercio de los profesores domina la inferencia estadística. Esta situación resalta la necesidad urgente de mejorar su formación estadística para alcanzar un mejor desempeño pedagógico. Es por esto que el objetivo de esta investigación es analizar el conocimiento del contenido estadístico de los profesores de educación media en ejercicio, en un programa de desarrollo profesional basado en metodologías no tradicionales, a través de la simulación computacional. Para ello, se utilizará la metodología de la Investigación Basada en el Diseño (IBD) para la adaptación, implementación y evaluación de módulos de enseñanza, en los cuales se estudiarán conceptos que se deben enseñar en la asignatura de profundización. Se espera que las sesiones implementadas puedan ser ejemplos de buenas prácticas para los docentes y que ellos puedan enseñar estadística utilizando metodologías no tradicionales y también, a través de simulaciones. Además, los resultados obtenidos a partir de la implementación con docentes, permitirán tener una guía de cuáles serían las posibles dificultades que podrían tener los estudiantes al enfrentarse a los contenidos de inferencia.

Palabras claves: inferencia estadística, formación docente, metodologías no tradicionales, simulación computacional.

# Capítulo 1

## Introducción y problema de investigación

### 1.1. Motivación

La estadística es una ciencia formal deductiva, que estudia la variabilidad de los datos y el proceso aleatorio que la genera siguiendo leyes de probabilidad; es decir, es una ciencia que permite obtener información a partir de los datos (Ocaña-Riola, 2017). De acuerdo con Contreras y Portillo (2019), la estadística es una de las áreas de conocimiento que ha adquirido mayor relevancia y reconocimiento en las últimas décadas, debido a la relación que tiene con áreas científicas, sociales y humanísticas. Se considera a la misma como un conjunto de herramientas que permiten evaluar críticamente las afirmaciones basadas en datos, a partir de argumentos.

Además, según Contreras y Portillo (2019), dicha capacidad de evaluación crítica es una habilidad importante para todo ciudadano, ya que los datos se utilizan cada vez más para dar sustento a las investigaciones, estudios, noticias, entre otros. La estadística juega un papel importante en la sociedad actual, donde la información fluye a una velocidad vertiginosa y las decisiones se toman sobre la base de múltiples fuentes. No se limita a las páginas de los informes científicos; su influencia se extiende hasta los medios de comunicación y las redes sociales.

Es por esto que cualquier persona debe tener un conocimiento estadístico que le permita realizar dichos juicios y ese aprendizaje está relacionado con el concepto de “alfabetización estadística” (Gal, 2002) o “cultura estadística” (Batanero, 2004), que hace referencia justamente al conocimiento estadístico elemental que todo ciudadano debería poseer para la vida en las democracias modernas. El estudio de la estadística permite enfrentarse de manera apropiada a distintos tipos de información y es por esto que, es necesario que todo ciudadano aprenda a interpretar y comprender los datos que lo rodean.

Atendiendo precisamente a dicha demanda es que varios países han reconfigurado sus programas de educación escolar (Acevedo y Hernández, 2020) o han generado directrices para la enseñanza de la estadística. Por ejemplo, en Estados Unidos se han establecido los “Lineamientos para la Enseñanza y Evaluación en Educación Estadística” (*Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education II; GAISE II*). Estos lineamientos fueron diseñados con el objetivo final de promover la alfabetización estadística y destacan seis aspectos fundamentales: el fomento del cuestionamiento en la estadística, la comprensión de diferentes tipos de datos y variables, el desarrollo del pensa-

miento multivariable, la promoción del pensamiento probabilístico, la incorporación del rol de la tecnología en la estadística y la inclusión de ítems de evaluación destinados a medir el razonamiento estadístico. Estas directrices buscan no solo fortalecer la base de conocimientos de los estudiantes en estadística, sino también fomentar habilidades críticas y prácticas que sean aplicables en diversas situaciones y contextos (Bargagliotti et al., 2021).

De acuerdo con lo señalado por Acevedo y Hernández (2020), Chile no ha estado ajeno a ese proceso de modificación de los programas de estudio. De hecho, incluyó en su currículum objetivos que promueven el desarrollo del pensamiento estadístico durante toda la etapa escolar, a través de los contenidos estudiados en los ejes temáticos “Datos y Probabilidades” en enseñanza básica (MINEDUC, 2012) y “Probabilidad y Estadística” en el caso de enseñanza media (MINEDUC, 2015, 2019).

Por ejemplo, en el programa de la asignatura de matemática para el 3° año de enseñanza básica, se incluye el Objetivo de Aprendizaje 26 (OA 26) : “Representar datos usando diagramas de puntos” (MINEDUC, 2012, p. 237) mientras que el OA 2 de cuarto medio es “Fundamentar decisiones en situaciones de incerteza, a partir del análisis crítico de datos estadísticos y con base en los modelos binomial y normal” (MINEDUC, 2019, p. 111). Esto muestra que hay un progreso y evolución del conocimiento estadístico. En los cursos iniciales, se sientan las bases para comprender la visualización y presentación de información a través de herramientas gráficas sencillas. A medida que los estudiantes avanzan, se enfrentan a desafíos más complejos, desarrollando habilidades analíticas y de razonamiento crítico que les permiten abordar situaciones de incertidumbre con confianza. Este proceso no solo implica un aumento en la complejidad de los conceptos estadísticos, sino también un desarrollo integral de la capacidad para interpretar y aplicar estos conocimientos en contextos del mundo real.

Adicionalmente, se realizó una modificación a los programas de estudio durante 2019, la cual entró en vigencia el 2021, que consideró nuevas asignaturas para la formación diferenciada de los estudiantes de tercero y cuarto año de enseñanza media de colegios científico-humanistas. Dentro de esas nuevas asignaturas se creó “Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial”, que tiene como uno de sus objetivos transversales promover la alfabetización digital y el uso de la información, siendo estas habilidades muy relevantes en la educación del siglo XXI. Además, al revisar las unidades que tiene dicha asignatura se evidencia que su principal objetivo es fortalecer el razonamiento que incorpora la estadística. Este proceso culmina con una unidad de inferencia estadística, en la que se espera que los estudiantes desarrollen la capacidad de razonar sobre los parámetros y características de la población (MINEDUC, 2021). De esta manera, se observan avances a lo largo del curso, yendo más allá de la mera acumulación de conocimientos estadísticos y fortaleciendo el pensamiento para integrar de manera efectiva los principios y métodos estadísticos en el pensamiento crítico y la toma de decisiones.

Por otro lado, al revisar la formación estadística de los futuros docentes, dentro de los “Estándares de la profesión docente para carreras de Pedagogía en Matemática Educación Media” (MINEDUC y CPEIP, 2021), se definen los estándares disciplinarios como “lo que el docente egresado debe demostrar en cuanto al manejo de los conocimientos propios de su disciplina (...) y el saber didáctico específico para su enseñanza” (p. 9).

En particular, en el estándar disciplinario C denominado “Probabilidades y estadística” se señala los conocimientos que un docente egresado debería tener respecto a las estadísticas descriptiva e

inferencial y probabilidades (conocimiento disciplinar o del contenido), pero también, se menciona que el profesor debe diseñar instancias de evaluación que evidencien el ejercicio de una ciudadanía crítica que toma decisiones informadas y basadas en evidencia; es decir, el docente debe ser capaz de promover la “alfabetización estadística”.

En contraste con lo que plantean los estándares y de acuerdo con la revisión bibliográfica realizada, una de las dificultades presentes en la enseñanza de la estadística está directamente relacionada con los conocimientos que los profesores tienen sobre la misma. Respecto a esto, los resultados de la investigación de [Ruz et al. \(2021\)](#) ofrecen una visión esclarecedora sobre la formación de profesores en Chile. Más del 80% de los participantes ya habían aprobado todos los cursos de estadística obligatorios; sin embargo, la investigación señala que el conocimiento del contenido de estadística entre los profesores en formación es, en general, deficiente. Este fenómeno se acentúa al observar que la mayoría de ellos no dominaba los temas que están destinados a enseñar.

Por otro lado, la Evaluación Nacional Diagnóstica de la formación Inicial Docente (END-FID) es una prueba que los docentes rinden al finalizar su formación, destinada a medir sus conocimientos. Esta evaluación consta de dos partes: un conjunto de preguntas cerradas de opción múltiple que abordan conocimientos disciplinarios y didácticos, evaluando la apropiación de los Estándares Disciplinarios de la asignatura, y una pregunta de respuesta abierta que evalúa la resolución de situaciones pedagógicas. En el caso de matemática, la prueba de conocimientos disciplinarios y didácticos comprende 60 preguntas de respuesta cerrada, distribuidas en 5 ejes temáticos que son: “Números y Álgebra”, “Cálculo”, “Estructuras Algebraicas”, “Geometría” y “Datos y Azar”.

Si se observan los resultados obtenidos en la Evaluación Nacional Diagnóstica de la Formación Inicial Docente (END-FID) de 2020 y 2021, se evidencia que las áreas donde los docentes tienen menor conocimiento son “Geometría” y “Datos y Azar”. Además, cabe señalar que uno de los estándares evaluados es si el docente está preparado para conducir el aprendizaje de inferencia estadística, siendo este indicador el más descendido del área de estadística con un 35% y 34% de respuestas correctas en 2020 y 2021, respectivamente.

Tomando en cuenta las conclusiones obtenidas por [Ruz et al. \(2021\)](#) y los resultados revelados por la END-FID, que señalan deficiencias en el manejo de los contenidos estadísticos por parte de los docentes en formación, se destaca la importancia de mantener actualizada la preparación de los profesores en formación. No obstante, los resultados sugieren que los cursos de estadística actuales necesitan ser reformulados para mejorar la formación disciplinaria de estos futuros profesionales de la educación.

A partir de lo expuesto anteriormente, se evidencia que la estadística es necesaria para que todas las personas puedan desenvolverse en la sociedad como ciudadanos críticos, capaces de tomar decisiones y argumentarlas a partir de información basada en datos concretos y certeros. Es por lo mismo que la estadística entra en el currículum chileno y se requiere que los docentes tengan los conocimientos necesarios para poder enseñarla a sus estudiantes. La dificultad radica en que los profesores recién egresados no tienen los conocimientos necesarios para enseñar dichos contenidos, en particular, los contenidos de inferencia estadística, que son esenciales en el currículum actual. Así, la problemática a abordar en esta investigación es la necesidad de actualizar el conocimiento del contenido de estadística (conocimiento disciplinar) de los docentes de matemática en ejercicio, en lo relativo a inferencia a estadística, para que puedan enseñar dichos tópicos a sus estudiantes.

Considerando la problemática que se va a tratar en esta investigación, se plantea la siguiente pregunta de investigación: ¿es posible actualizar el conocimiento del contenido estadístico (conocimiento disciplinar) de los docentes de matemática en ejercicio, de modo que experimenten ejemplos de buenas prácticas de enseñanza del contenido de manera que sean un referente para su práctica profesional posterior?

A continuación se plantean los objetivos de la investigación, tanto general como específicos, que dan cuenta de los pasos a seguir para responder a la pregunta de investigación planteada.

## 1.2. Objetivos de investigación

### Objetivo general:

Analizar el conocimiento del contenido estadístico de los profesores de educación media en ejercicio, en un programa de desarrollo profesional basado en metodologías no tradicionales, a través de la simulación computacional.

### Objetivos específicos:

1. Estudiar metodologías de enseñanza y aprendizaje de los contenidos de estadística desde perspectivas no tradicionales y basadas en la simulación computacional.
2. Adaptar módulos de enseñanza y aprendizaje de los contenidos de estadística, en el marco de un programa de desarrollo profesional para profesores en ejercicio.
3. Evaluar el rendimiento y las producciones de los participantes del programa, en lo relativo a su conocimiento del contenido de estadística (conocimiento disciplinar) desde aproximaciones no tradicionales.

Tras la definición de los objetivos específicos de la investigación, que delinean claramente lo que se espera lograr, es crucial abordar la metodología para poner a prueba estas expectativas. Este paso se lleva a cabo mediante la formulación de hipótesis asociadas a cada objetivo específico. Estas hipótesis proporcionan un marco claro y directo para la evaluación de las metas establecidas, estableciendo conexiones tangibles entre los objetivos planteados y la estrategia de investigación diseñada para alcanzarlos.

## 1.3. Hipótesis de trabajo

**H1, relativa al OE1:** se identifica en la literatura especializada que existen propuestas modernas o no tradicionales para la enseñanza de la estadística (Wild y Pfannkuch, 1999; Bargagliotti et al., 2021; Pfannkuch et al., 2016) que han sido implementadas con estudiantes universitarios, produciendo efectos positivos en su rendimiento académico (Chance et al., 2016). Por tanto, se establece como factible la posibilidad de aplicar estas metodologías con profesores en ejercicio, de manera que experimenten ejemplos de buenas prácticas que sean un referente para su práctica profesional.

**H2, relativa al OE2:** de acuerdo con los “Estándares para la profesión docente: Pedagogía en Matemática Enseñanza Media”, los docentes deben comprometerse con su aprendizaje profesional continuo y transformar sus prácticas a través de la reflexión sistemática y la participación en distintas instancias de desarrollo profesional, con el propósito de mejorar el aprendizaje de sus estudiantes (MINEDUC y CPEIP, 2021). En este sentido, los programas de desarrollo profesional diseñados para profesores han contribuido y tenido un impacto positivo en las prácticas docentes de quienes los realizan (García-García et al., 2019). Actualmente, la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (PUCV) está ofreciendo un “Diplomado en Educación Estadística para profesores”, dirigido a docentes en ejercicio, el cual tiene por objetivo transferir herramientas de la educación estadística a la práctica profesional docente. Por lo tanto, es factible implementar módulos de enseñanza y aprendizaje sobre los contenidos de la estadística, dentro de este programa de desarrollo profesional para profesores en Chile.

**H3, relativa al OE3:** en el trabajo realizado previamente por Ruz et al. (2021), se desarrolló un instrumento que permitió evaluar el conocimiento y las actitudes hacia la estadística y su enseñanza, en futuros profesores de matemática, que fue debidamente validado. Tomando como referencia ese instrumento para esta investigación y haciendo algunos ajustes, se puede realizar un diagnóstico sobre el conocimiento estadístico de los profesores de matemática. Se proyecta aplicar el diagnóstico antes de que se implementen los módulos de enseñanza y aprendizaje con los docentes en ejercicio que participen del programa de desarrollo profesional. Cabe señalar que la evaluación del contenido se realizará desde una perspectiva cuantitativa, referida a lo anterior, pero también se considerará un aspecto cualitativo, donde se analizarán las tareas realizadas por los participantes del curso, con el objetivo de identificar aspectos que se podrían replicar y otros que se podrían mejorar.

Hasta este punto, hemos explorado diversos aspectos que integran el complejo panorama del problema de investigación propuesto, delineando con precisión los objetivos y las hipótesis que orientan este trabajo. En la siguiente etapa, se plantean los antecedentes de la investigación, que permiten contextualizar de manera más profunda la relevancia del problema planteado. Al profundizar en estos antecedentes, se evidencia la importancia inherente del tema y se ilustra por qué es imperativo actualizar el conocimiento estadístico de los profesores de matemáticas.

## Capítulo 2

# Antecedentes

En este capítulo, se presentan los antecedentes que fundamentan la problemática de investigación previamente expuesta. Para ello, se abordan tres categorías de estudios que proporcionan una visión integral de la enseñanza de la estadística en el contexto de la formación docente en matemáticas en Chile. En primer lugar, los que hacen referencia a la presencia de la estadística en el currículum de matemática chileno y los estándares de formación docente; en segundo lugar, los que se centran en el conocimiento estadístico de los profesores de matemática; y finalmente, investigaciones que hacen referencia a las propuestas de enseñanza no tradicional de la estadística.

### 2.1. La estadística en la práctica profesional del docente de matemáticas en Chile

En esta sociedad de la información, se suelen ver muchas noticias, anuncios y propagandas, los cuales se sustentan en estadísticas. En ese contexto, es importante que los ciudadanos sepan evaluar apropiadamente la información basada en los datos que les rodea, que puedan tomar decisiones con toda esa información ([Contreras y Portillo, 2019](#)).

Como consecuencia de lo anterior, diversos países se han unido al movimiento reformista en torno a la enseñanza de la estadística en la escuela, entre ellos Chile, promoviendo su aprendizaje durante toda la etapa escolar ([Ruz et al., 2020](#)) e incluso preescolar.

Esta inclusión temprana encuentra respaldo en las bases curriculares para la educación parvularia ([MINEDUC, 2018](#)), que subrayan el papel fundamental del pensamiento matemático como herramienta para la expansión del mundo de niños y niñas. Al respecto, se destaca que el pensamiento matemático no solo amplía horizontes, sino que también facilita la comprensión de la realidad y les ayuda a desenvolverse en la vida cotidiana. En este contexto, las bases curriculares especifican dos aspectos cruciales vinculados directamente con la estadística: el fomento del registro de datos y la estimulación de la formulación de conjeturas y predicciones. Estos elementos no solo respaldan el enfoque reformista, sino que también evidencian la importancia atribuida a la enseñanza de la estadística desde los primeros años de la educación formal.

Asimismo, en consonancia con la promoción temprana de la enseñanza estadística, las bases curriculares de primero a sexto básico ([MINEDUC, 2012](#)) refuerzan este enfoque al incorporar el eje “Datos y probabilidades”. Este componente específico del currículum resalta la importancia de que los estudiantes, desde sus primeros años de educación básica, adquieran habilidades en la

recolección, clasificación y lectura de información presentada en tablas y gráficos, así como una introducción a conceptos relacionados con las probabilidades.

A medida que los estudiantes avanzan en su educación, el énfasis en la estadística se consolida aún más en las bases curriculares de séptimo básico a segundo medio (MINEDUC, 2015), a través del eje denominado “Probabilidad y estadística”, que responde a la necesidad de que todos los estudiantes desarrollen habilidades avanzadas en el análisis, inferencia y obtención de información a partir de datos estadísticos. Esto con el fin de formar alumnos críticos que puedan utilizar dicha información para validar sus opiniones y decisiones. También, se espera que los estudiantes determinen la posibilidad de ocurrencia de un evento, en forma experimental y teórica, que construyan modelos probabilísticos basados en situaciones aleatorias y además, que diseñen experimentos de muestreo aleatorio que les permitan inferir sobre características por poblaciones, todo con el propósito de que el estudiante comprenda el rol de la estadística en la sociedad.

Este énfasis continuo en estadística encuentra su punto culminante en las bases curriculares de 3° y 4° año de enseñanza media para el plan común (MINEDUC, 2019). Aquí, el enfoque de la asignatura incluye el desarrollo del pensamiento racional, que se encuentra estrechamente relacionado con la estadística, siendo esta una herramienta que provee maneras de pensar y de trabajar para tomar decisiones en condiciones de incerteza.

También se revisó el programa de la asignatura de profundización “Probabilidades y estadísticas descriptiva e inferencial” y de acuerdo con lo señalado en este documento, durante el año se deben abordar tópicos de estadística descriptiva, distribuciones de probabilidad y finalmente, inferencia estadística. Se espera que los estudiantes comiencen realizando análisis descriptivos de los datos que poseen, para finalizar el año construyendo intervalos de confianza y realizando contrastes de hipótesis (MINEDUC, 2021). A partir de lo anterior, se evidencia que la estadística está presente durante toda la enseñanza, preescolar y escolar en las aulas chilenas.

Respecto a la formación de futuros profesores, el MINEDUC y CPEIP (2021) en los “Estándares de la profesión docente para carreras de Pedagogía en Matemática Educación Media”, tiene estándares pedagógicos los cuales son transversales a docentes de todas las áreas y, por otro lado, tiene estándares disciplinarios. En el caso de matemática, el dominio “probabilidades y estadística” señala que los docentes de matemática deben comprender las probabilidades, la estadística descriptiva e inferencial para planificar y realizar actividades de aprendizaje para que sus estudiantes comprendan y apliquen los conceptos básicos de probabilidades y diseñen y lleven a cabo investigaciones estadísticas, haciendo inferencias sobre la población.

De acuerdo con la revisión curricular realizada se evidencia que hay un nuevo panorama en la enseñanza de la estadística, el cual considera que los estudiantes deben aprender diversos contenidos de la estadística durante toda su etapa escolar. Esto, sumado a la incorporación de una asignatura de profundización de probabilidades y estadística al currículum chileno, tiene como consecuencia que se establece una necesidad activa del profesorado por perfeccionar sus conocimientos estadísticos para la enseñanza. A continuación, se exploran los antecedentes relacionados con el conocimiento del contenido de estadística, abordando modelos de conocimiento profesional relevantes y delineando conceptualmente qué implica el conocimiento del contenido. Posteriormente, se caracteriza específicamente cómo se manifiesta el conocimiento del contenido de estadística entre los profesores de matemática.

## 2.2. Conocimiento del contenido de estadística

La preparación de profesores de matemáticas es un proceso complejo, en el cual los futuros docentes deben adquirir los conocimientos básicos necesarios para su trabajo profesional. Esto incluye aprender las matemáticas que enseñarán, demostrar habilidades docentes y aprender de sus propias prácticas (Strutchens et al., 2017).

Aunque existe cierto acuerdo en los aspectos clave a tener en cuenta, se ha notado que no hay consenso colectivamente aceptado sobre cómo describir el conocimiento profesional de los profesores para enseñar matemáticas (Mason, 2016). En este contexto, como señalan Ball et al. (2008), la mayoría de las personas estaría de acuerdo en que la comprensión de los contenidos es esencial para la enseñanza. Sin embargo, lo que constituye esa comprensión del contenido está definido de forma imprecisa, lo que agrega complejidad a la conceptualización de la preparación docente en ese ámbito.

Tomando en cuenta lo anterior y además, que en Chile son los docentes de matemática quienes deben enseñar la estadística, la revisión de los modelos de conocimiento profesional de los profesores de matemática, adquiere un papel crucial. A través de este análisis, se busca precisar cómo estos modelos caracterizan la comprensión del contenido, ofreciendo así una visión más clara y detallada de los conocimientos necesarios para la enseñanza.

Entre las diversas perspectivas que han abordado el conocimiento profesional del profesor de matemáticas, destaca la influyente contribución de Shulman (Shulman, 1986, 1987). En su investigación, Shulman identifica tres categorías clave en su primera propuesta de 1986: conocimiento curricular, conocimiento del contenido pedagógico y conocimiento del contenido. Respecto a esta última categoría, Shulman conceptualiza el conocimiento del contenido como un dominio profundo de la materia a enseñar, trascendiendo la mera comprensión de conceptos para abarcar especialmente los principios fundamentales que respaldan su enseñanza. En este acercamiento se caracteriza a este conocimiento como aquel que permite al docente entender por qué un tema es esencialmente central para una disciplina, mientras que otro puede ser algo más específico.

En 1987, Shulman amplía su propuesta y organiza el conocimiento profesional del profesor de matemática en siete categorías, incorporando aspectos relacionados con el contexto, el currículum y otros elementos, pero mantiene el conocimiento del contenido como un pilar fundamental. Este modelo propuesto por Shulman, también conocido como modelo *PCK* (*Pedagogical Content Knowledge*) ha sentado las bases para otros autores que han caracterizado el conocimiento profesional del docente de matemáticas.

En 2008, Ball y colaboradores (Ball et al., 2008; Hill et al., 2008), proponen el modelo de conocimiento matemático para la enseñanza conocido como *MKT* (*Mathematics Knowledge for Teaching*), en el cual se distinguen dos dimensiones fundamentales que configuran el conocimiento profesional del docente de matemáticas: una relacionada con el conocimiento matemático (conocimiento del contenido) y otra vinculada al conocimiento pedagógico del contenido, como se muestra en la figura 2.1.

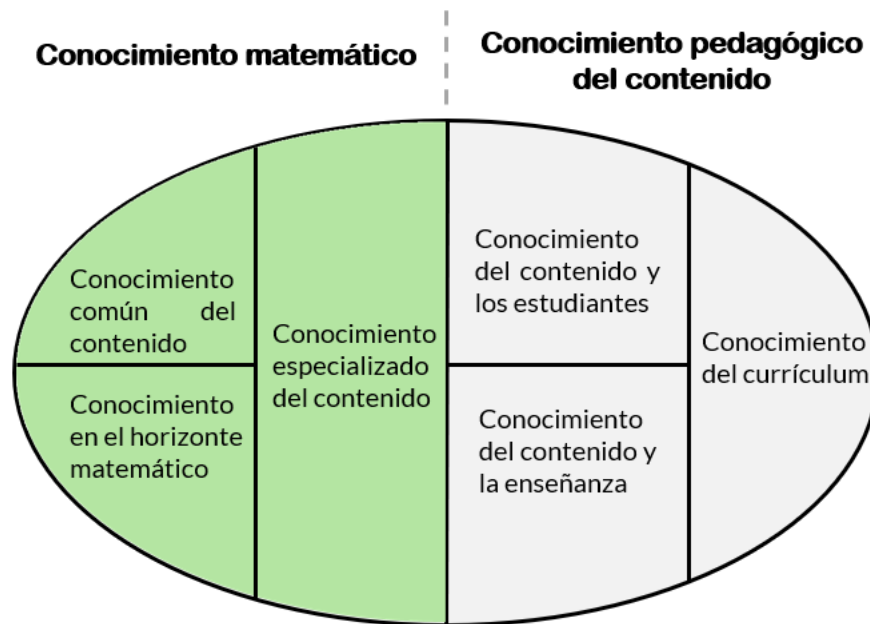


Figura 2.1: Mapa de conocimientos matemáticos para la enseñanza. Adaptado de Hill et al. (2008). Traducción propia con modificaciones.

El conocimiento matemático necesario para la enseñanza corresponde al conocimiento matemático necesario para llevar a cabo la labor de enseñar matemáticas, y en él se distinguen tres dimensiones, que son el conocimiento común del contenido, el conocimiento en el horizonte matemático y el conocimiento especializado del contenido.

- **Conocimiento Común del Contenido:** permite a los profesores identificar respuestas incorrectas de los estudiantes y verificar la exactitud de los textos escolares. Este conocimiento se comparte con otras profesiones y ocupaciones que emplean las matemáticas (Hill et al., 2008).
- **Conocimiento en el Horizonte Matemático:** abarca la conciencia de cómo se entrelazan los temas matemáticos a lo largo del plan de estudios. Es esencial para establecer las bases de futuros aprendizajes matemáticos y contribuye a una enseñanza efectiva (Ball et al., 2008).
- **Conocimiento Especializado del Contenido:** habilita a los profesores para realizar tareas docentes específicas, como la representación precisa de ideas matemáticas, la entrega de explicaciones matemáticas para reglas y procedimientos comunes, y la comprensión de métodos no convencionales para resolver problemas (Hill et al., 2008).

Al contrastar las perspectivas de Shulman (1986, 1987) y Ball et al. (2008), emerge una convergencia en la importancia del conocimiento del contenido, aunque con enfoques distintivos. Mientras Shulman destaca la comprensión profunda de los principios fundamentales, Ball amplía la dimensión matemática al desglosarla en tipos específicos de conocimiento, proporcionando así una panorámica completa del conocimiento necesario para una enseñanza efectiva de las matemáticas, destacando tanto los aspectos conceptuales profundos como las habilidades prácticas y conscientes necesarias para abordar la diversidad de situaciones en el aula.

Un modelo de conocimiento más reciente y que constituye una propuesta innovadora que fusiona elementos clave del Modelo PCK de [Shulman \(1986, 1987\)](#) y el Modelo MKT de [Ball et al. \(2008\)](#) es el Modelo de Conocimiento Didáctico-Matemático, concebido por Godino y colaboradores ([Godino, 2009](#); [Pino-Fan y Godino, 2015](#); [Pino-Fan et al., 2018](#)), el cual sostiene que el conocimiento de un profesor de matemáticas debe abarcar tres dimensiones esenciales referidas a: la habilidad para enseñar matemáticas y adaptar las tareas a las capacidades e intereses de sus estudiantes (dimensión didáctica), la facultad de reflexionar sobre la práctica pedagógica para mejorar la enseñanza (dimensión meta didáctico-matemática), y también, el conocimiento que tiene el docente sobre el contenido a enseñar (dimensión matemática). Esta última se desglosa en dos aspectos fundamentales: el conocimiento común del contenido y el conocimiento ampliado del contenido ([Pino-Fan y Godino, 2015](#)), los cuales se caracterizan a continuación:

- **Conocimiento común del contenido:** se refiere al dominio necesario para abordar las tareas propuestas en el currículum y los textos escolares. Este saber compartido entre el profesor y los estudiantes en el aula constituye un pilar fundamental para el proceso de enseñanza, según la conceptualización de [Godino \(2009\)](#) y [Pino-Fan y Godino \(2015\)](#).
- **Conocimiento ampliado del contenido:** este tipo de conocimiento capacita al profesor para establecer conexiones entre el objeto matemático actual y otras nociones matemáticas que se explorarán en cursos futuros. Al dotar al docente de los fundamentos matemáticos necesarios, se le empodera para presentar desafíos matemáticos adicionales en el aula y guiar a los estudiantes hacia un estudio más avanzado ([Pino-Fan y Godino, 2015](#); [Pino-Fan et al., 2018](#)).

Aunque la literatura sostiene que los docentes requieren no solo de un mero conocimiento del contenido para enseñar matemáticas, varios modelos concuerdan en la importancia de poseer un conocimiento sólido para la tarea educativa. En este contexto, considerando que en Chile son los profesores de matemática quienes deben llevar a cabo la tarea de enseñar estadística, resulta pertinente analizar el conocimiento del contenido específico de esta disciplina.

La evaluación del conocimiento del contenido estadístico en los profesores de matemáticas es fundamental para comprender su preparación en esta área. [Ruz et al. \(2021\)](#) llevaron a cabo un estudio que reveló resultados significativos en cuanto al dominio de los profesores en estadística. La prueba de conocimientos del contenido indicó que los docentes obtuvieron un 33,3 % de logro en ítems relacionados con estadística descriptiva, aproximadamente un 30 % para ítems de inferencia estadística, y un 14,2 % para ítems de probabilidad, siendo este último el de menor rendimiento. Estos resultados evidencian la necesidad de incrementar el conocimiento estadístico de los profesores.

Los hallazgos de Ruz y otros investigadores también señalan una diferencia en el dominio entre el conocimiento común del contenido y el conocimiento ampliado, según el modelo de Conocimiento Didáctico-Matemático de Godino. Los docentes demostraron un mayor dominio en temas alineados con el conocimiento común del contenido, aquel considerado suficiente para abordar tareas propuestas en el currículum y textos escolares. En contraste, el conocimiento ampliado del contenido, crucial para conectar conceptos matemáticos entre diferentes niveles educativos, presentó un menor nivel de dominio.

La investigación de [Ruz et al. \(2021\)](#) aporta significativamente al estudio de la inferencia estadística al utilizar ítems previamente aplicados y validados, permitiendo la comparación de resultados con investigaciones anteriores. Destacan las dificultades identificadas en la interpretación de conceptos fundamentales, siendo el ítem relacionado con el nivel de confianza el que mostró mayor variación entre interpretaciones correctas e incorrectas. En el ámbito educativo, [Groth y Meletiou-Mavrotheris \(2018\)](#) resaltan la complejidad al abordar la inferencia estadística, considerada desafiante tanto para profesores como para la población en general. A pesar de su progresiva inclusión en los currículos escolares, la falta de preparación de los profesores emerge como un obstáculo significativo. Además, [Ruz \(2021\)](#) señala que la inferencia se posiciona como una idea fundamental en estadística, implicando la selección de una muestra aleatoria y su aplicación para realizar estimaciones o tomar decisiones vinculadas a la población o proceso bajo estudio.

Esta perspectiva destaca la relevancia y complejidad de enseñar conceptos fundamentales de inferencia estadística, subrayando la importancia de abordar adecuadamente estos temas en la formación de los profesores de matemáticas. De acuerdo con [Groth y Meletiou-Mavrotheris \(2018\)](#), la investigación sugiere que es imperativo mejorar el conocimiento de los profesores sobre la incertidumbre y la inferencia estadística. Aunque adquirir conocimientos sobre estructuras y herramientas pedagógicas es esencial, los autores enfatizan que el dominio de la inferencia es necesario pero no suficiente para una enseñanza eficaz. Estudios, como el de [Leavy \(2010\)](#) indican que incluso cuando los profesores poseen conocimiento sólido sobre inferencia informal, pueden enfrentar dificultades para manejar respuestas inesperadas de los estudiantes y conducir adecuadamente el aprendizaje.

En definitiva, el análisis detallado de los modelos de conocimiento del profesor de matemáticas, sumado a los conocimientos y las dificultades que tienen los docentes en el área de estadística, subraya la necesidad de una preparación más sólida de los docentes para enfrentar este campo de manera más eficaz, asegurando así la entrega de una enseñanza de calidad. En este contexto, la exploración de enfoques innovadores en la enseñanza de la estadística se convierte en un paso fundamental. La siguiente sección presenta distintos marcos referenciales que conceptualizan la estadística como un proceso, los cuales ofrecen nuevas perspectivas que buscan consolidar el conocimiento estadístico de los estudiantes.

### 2.3. Enseñanza no tradicional de la estadística

Recientemente, diversos investigadores han comenzado a entender a la estadística como un proceso. Estas nuevas concepciones tienen como consecuencia que la enseñanza de la estadística deba repensarse y comenzar a utilizar metodologías no tradicionales. Dentro de esas propuestas, destacan tres: el ciclo PPDAC, denominado así por las etapas del mismo, que son: problema, plan, datos, análisis y conclusión ([Wild y Pfannkuch, 1999](#)), el ciclo propuesto en *GAISE II* ([Bargagliotti et al., 2021](#)) y el Proceso de Investigación Estadística desarrollado por [Tintle et al. \(2016\)](#).

De acuerdo con [Wild y Pfannkuch \(1999\)](#), el pensamiento estadístico se refiere a la capacidad de utilizar principios y métodos estadísticos para analizar y comprender datos, tomar decisiones informadas y realizar inferencias basadas en la evidencia. En el contexto de la investigación empírica, el pensamiento estadístico es esencial para abordar preguntas de investigación, diseñar experimentos adecuados, analizar datos y sacar conclusiones válidas y confiables. Por ello, los autores proponen la implementación del ciclo PPDAC, con la finalidad de fomentar el desarrollo del pensamiento estadístico. Se destaca que alcanzar este propósito implica adquirir una comprensión profunda de los

conceptos estadísticos, interpretar adecuadamente los resultados y comunicar de manera efectiva las conclusiones.

A nivel internacional, la *American Statistical Association (ASA)* ha desempeñado un papel destacado en la promoción de enfoques integrados para la enseñanza de la estadística. La iniciativa de los *GAISE*, liderada por la *ASA* desde 2007, ha evolucionado para incorporar un ciclo de investigación estadística en su segunda edición *GAISE II* (Bargagliotti et al., 2021). Este ciclo, compuesto por cuatro etapas, proporciona una estructura efectiva para guiar el proceso investigativo en la estadística. A continuación, se examinan en detalle cada una de estas etapas.

- **Formular preguntas de investigación estadística:** para desarrollar investigaciones productivas, las interrogantes planteadas deben anticipar la variabilidad y también, conducir a un proceso de recopilación de datos extenso, y que permitan un posterior análisis de esos datos. En la pregunta de investigación, debe estar explícita la variable de interés, también debe estar claro el grupo o población considerado, y también debe ser evidente la intención de la pregunta, ya sea describir datos, realizar comparaciones o inferencias (Bargagliotti et al., 2021, pp. 13-14).
- **Recolectar los datos:** en esta etapa hay que diseñar métodos que reconozcan la variabilidad propia de la información recolectada. Además, es importante el diseño de la recogida de datos, ya que este influye no solo en la calidad de la información obtenida, sino también en la amplitud de la generalización y en posibles limitaciones en las fases subsiguientes de análisis e interpretación (Bargagliotti et al., 2021, p. 14).
- **Analizar los datos:** se resalta la importancia de describir minuciosamente la variabilidad presente en la información. Para este análisis se requieren representaciones gráficas o tabulares, pues estas herramientas visuales no solo enriquecen la comprensión de la variabilidad, sino que también facilitan la exploración, descripción y comparación de las distribuciones de datos, ofreciendo una perspectiva más completa para su posterior interpretación (Bargagliotti et al., 2021, pp. 14-15).
- **Interpretar los resultados:** esta etapa se caracteriza por realizar una interpretación de los datos considerando su variabilidad. Además, se realizan generalizaciones de los resultados, cuando es posible, e incluso se profundiza en aspectos que van más allá de la información recopilada en el estudio (Bargagliotti et al., 2021, p. 15).

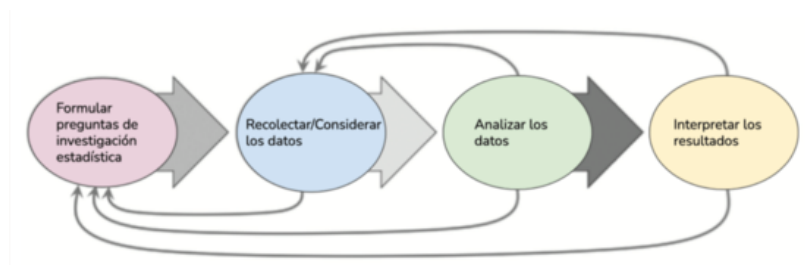


Figura 2.2: Proceso estadístico de resolución de problemas planteado en *GAISE II* (Bargagliotti et al., 2021)

El enfoque del ciclo propuesto en *GAISE II* destaca la importancia de integrar el pensamiento estadístico y las habilidades prácticas en la enseñanza de la estadística. Se enfatiza la resolución de problemas basados en datos y la toma de decisiones informadas, y se promueve una mayor comprensión del proceso de investigación en la estadística.

Finalmente, en esta investigación se considerará como marco referencial la perspectiva propuesta por [Tintle et al. \(2016\)](#), que ha tenido positivos resultados en la formación universitaria. Este proceso consta de seis etapas en el proceso de conducir investigaciones estadísticas, que son: (1) plantear preguntas de investigación; (2) diseñar el estudio de las preguntas y recopilar datos; (3) explorar los datos; (4) plantear inferencias; (5) formular conclusiones; y (6) revisión retrospectiva.

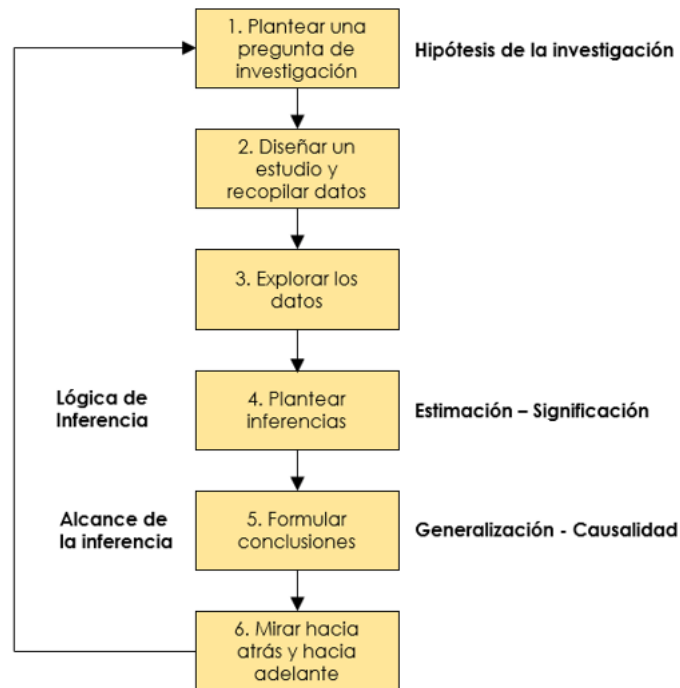


Figura 2.3: Etapas del Proceso de Investigación Estadística (Tintle et. al, 2016, p. 4). Traducción propia.

Cada uno de los pasos del proceso anterior se caracteriza por lo siguiente:

- Paso 1: formulación de una pregunta de investigación que pueda ser abordada mediante la recopilación de datos. Estas preguntas a menudo involucran describir los datos, comparar grupos o investigar si una variable afecta a otra (causa-efecto).
- Paso 2: diseño del estudio y recopilación de datos. En esta etapa se seleccionan las unidades experimentales a estudiar, se decide qué datos se recopilarán sobre ellas y se lleva a cabo la recopilación de datos de manera cuidadosa y sistemática.
- Paso 3: exploración de los datos, buscando patrones relacionados con la pregunta de investigación (Paso 1), así como también identificando resultados inesperados que puedan dar lugar a nuevas preguntas para responder.

- Paso 4: extracción de inferencias más allá de los datos, determinando si los hallazgos en los datos reflejan una tendencia genuina.
- Paso 5: formulación de conclusiones que consideren el alcance de la inferencia realizada en el Paso 4. Se reflexiona sobre a qué proceso subyacente o grupo más grande se pueden generalizar estas conclusiones y si es justificada una conclusión de causa y efecto.
- Paso 6: reflexión sobre el estudio y sugerencia de nuevas investigaciones. En esta etapa, se señalan las limitaciones del estudio y se proponen nuevas investigaciones que podrían aprovechar los hallazgos obtenidos durante todo el proceso.

La revisión de diversos enfoques en esta sección destaca la concepción de la estadística como un proceso, vinculando eficazmente los elementos de estadística descriptiva, probabilidades e inferencia. Esta aproximación se revela como clave para lograr un aprendizaje más sólido de la disciplina.

Al analizar los modelos de conocimiento profesional, se evidencia un consenso general: la enseñanza va más allá de simplemente conocer el contenido, siendo crucial el dominio sustancial de la materia. En cuanto al conocimiento estadístico de los docentes, las investigaciones señalan dificultades, especialmente en tópicos relacionados con la inferencia estadística. Esto plantea un desafío significativo, dado que la estadística está presente en todo el currículum escolar chileno, desde preescolar hasta niveles superiores, y a los profesores de matemáticas se les otorga la responsabilidad de enseñarla.

En este contexto, los marcos referenciales que conciben la estadística como un proceso brindan una opción valiosa al integrar de manera efectiva los conocimientos disciplinares. Esta integración, propuesta como respuesta a las dificultades identificadas, busca contribuir a la mejora de la enseñanza de la estadística, permitiendo una comprensión más holística y evitando la percepción de conocimientos aislados. A continuación, se presenta la metodología de la investigación, donde se detallan los procedimientos y enfoques empleados para abordar los objetivos planteados. Este capítulo proporciona una visión detallada del enfoque metodológico adoptado, fundamentando la investigación y ofreciendo una guía para comprender el desarrollo del estudio.

## Capítulo 3

# Metodología

En este capítulo, se exploran los pilares fundamentales que sustentan el desarrollo de la presente investigación. Se inicia con la exposición del enfoque metodológico seleccionado, el cual proporciona la estructura clave para el estudio. A continuación, se ofrece un análisis detallado del perfil de los participantes, quienes son estudiantes del Diplomado en Educación Estadística para profesores, contextualizando así su importancia dentro del marco investigativo. Además, se describe minuciosamente el diseño y desarrollo de las sesiones de dicho diplomado. Finalmente, se presentan los instrumentos de evaluación utilizados para recopilar la información necesaria para esta investigación. Cada una de estas secciones se desarrolla con mayor profundidad en los apartados siguientes, con el objetivo de ofrecer una comprensión detallada y sistemática de la metodología empleada en el estudio.

### 3.1. Enfoque metodológico

Esta investigación adopta un enfoque metodológico mixto con alcance exploratorio, combinando elementos cuantitativos y cualitativos para abordar la pregunta de investigación. Esta metodología busca una comprensión profunda y extensa de un fenómeno o problema específico (Sampieri et al., 2018). En particular, se utiliza la investigación basada en el diseño, un tipo de investigación mixta centrada en el diseño, desarrollo, implementación y evaluación de intervenciones educativas o innovaciones en el ámbito de la enseñanza y el aprendizaje (Anderson, 2005).

Antes de caracterizar la investigación basada en el diseño, es necesario mencionar qué son los experimentos de diseño. Este término fue introducido en 1992 por Brown (1992) y Collins (1992), quienes plantean los experimentos de diseño como una forma de llevar a cabo investigación formativa para probar y perfeccionar diseños educativos. Esta perspectiva destaca la importancia de diseñar y probar intervenciones educativas en entornos reales y complejos, como las aulas, para abordar problemas de aprendizaje y enseñanza.

Posteriormente, Cobb et al. (2003) abordan la investigación basada en el diseño (IBD) y enfatizan la importancia de centrarse en el desarrollo de la enseñanza y aprendizaje en contextos auténticos. Su enfoque se alinea con la idea de que la investigación basada en el diseño puede generar conocimientos valiosos al generar intervenciones en contextos reales. Además, Anderson (2005), hace énfasis en que esta metodología, que constituye una herramienta eficaz de investigación educativa, no solo contribuye al desarrollo y evaluación de innovaciones en las aulas tradicionales, sino que también se puede aplicar a la formación online.

McKenney y Reeves conciben a la IBD como “un género de investigación en el que el desarrollo iterativo de soluciones a problemas educativos prácticos y complejos también crea un contexto para la investigación empírica que produce una comprensión teórica que puede ser útil en el trabajo de otros” (p. 8). Señalan que este tipo de investigación, también conocida como investigación sobre diseño educativo, se caracteriza por utilizar métodos cuantitativos, cualitativos y, probablemente con mayor frecuencia, mixtos para responder las preguntas de investigación (McKenney y Reeves, 2014).

La IBD es pragmática, busca soluciones prácticas a los problemas educativos. Se fundamenta en teorías y resultados empíricos, siendo intervencionista al introducir cambios en contextos específicos. Su enfoque iterativo implica múltiples ciclos de diseño, desarrollo, implementación y evaluación. La colaboración multidisciplinaria, con profesionales y expertos, es esencial. La adaptabilidad se refleja en ajustes basados en nuevos conocimientos. Además, está orientada a la teoría, contribuyendo a una comprensión científica más amplia (McKenney y Reeves, 2014).

En la IBD, Easterday et al. (2014) distinguen cuatro etapas principales que son: preliminares, diseño, implementación y evaluación, las cuales son iterativas, y se caracterizan por:

- **Preliminares:** en esta fase inicial, se identifican y definen claramente los problemas o desafíos que se abordarán. Además, se establecen los objetivos específicos de la intervención y se realiza una revisión exhaustiva de la literatura relevante.
- **Diseño:** durante esta etapa, se desarrolla la intervención o el artefacto educativo propuesto. Esto implica la creación de materiales didácticos, estrategias de enseñanza, tecnologías educativas u otros recursos necesarios para abordar los problemas identificados en la fase preliminar.
- **Implementación:** una vez diseñada la intervención, se lleva a cabo su implementación en el entorno educativo correspondiente. Durante esta etapa, se recopilan datos sobre la aplicación práctica de la intervención y se monitorea su efectividad.
- **Evaluación:** finalmente, se evalúa la efectividad de la intervención mediante la recopilación y análisis de datos. Esta evaluación incluye la comparación de resultados antes y después de la implementación, así como la retroalimentación de los participantes. Además, se fomenta la reflexión sobre el proceso de diseño e implementación, identificando áreas de mejora y ajustes necesarios para futuras iteraciones del ciclo de IBD.

Este estudio se basa en un enfoque de IBD, centrado específicamente en las etapas de diseño, implementación y evaluación, tal como se describen en el marco propuesto por (Easterday et al., 2014). Aunque no se aborda de manera explícita la fase preliminar de la IBD en este trabajo, los antecedentes y la motivación presentados en la introducción permiten identificar y justificar el problema de investigación abordado. Estos elementos proporcionan un fundamento sólido para el desarrollo y la aplicación de las intervenciones educativas, así como para la evaluación de su efectividad en el contexto del estudio.

En relación con la etapa 2 de la IBD, referida al diseño, es importante destacar que, si bien no se partió de cero en la creación de la intervención educativa, que consistía en los módulos de enseñanza de estadística del programa de desarrollo profesional para profesores en ejercicio, se realizó un proceso significativo de adaptación. Estos módulos habían sido previamente utilizados con un grupo

de docentes en formación, lo que requirió ajustes considerables para adecuarlos al nuevo contexto. Además, durante esta etapa se diseñaron completamente las evaluaciones que se aplicaron a lo largo del diplomado, creando así herramientas específicas para medir el aprendizaje y la efectividad de la intervención.

En resumen, el presente estudio abordó las etapas de implementación y evaluación de manera integral. Los módulos de enseñanza desarrollados fueron implementados con éxito en el Diplomado en Educación Estadística para profesores, impartido por la PUCV, brindando así una oportunidad concreta para aplicar y evaluar su efectividad en un entorno educativo real. Durante el desarrollo de este diplomado, los docentes participantes fueron sometidos a tres evaluaciones a lo largo del curso, además de una evaluación diagnóstica inicial, que proporcionaron información valiosa sobre el impacto de los módulos de enseñanza en el aprendizaje y la formación de los participantes. Los detalles específicos sobre la implementación y los resultados de estas evaluaciones se presentarán en las secciones posteriores. A continuación, se abordará en detalle el contexto del diplomado, incluyendo información sobre los participantes y el esquema de las sesiones o módulos de enseñanza, lo que se complementará y se enlazará con el análisis de los resultados obtenidos.

### 3.2. Participantes y contexto

La investigación se centra en analizar el conocimiento del contenido estadístico de docentes de educación media que participaron en un Diplomado de Educación Estadística para profesores. Este programa, impartido de manera online, consta de cinco módulos que abarcan aspectos tanto del conocimiento del contenido estadístico como de otros elementos didácticos y de reflexión sobre la práctica docente. La muestra está compuesta por 8 docentes de matemáticas y ciencias que participaron voluntariamente en el diplomado, conformando un grupo no aleatorio. Se ha seleccionado deliberadamente esta muestra como un piloto para evaluar la implementación de los módulos de enseñanza desarrollados en el contexto del diplomado. Al utilizar este grupo como un piloto, se busca identificar posibles ajustes necesarios en la implementación de los módulos y recopilar retroalimentación inicial sobre su efectividad antes de su aplicación a una escala más amplia. Esta fase piloto permitirá mejorar la implementación y la adaptación de los módulos para asegurar su eficacia en el contexto educativo.

El énfasis de la investigación recae en la primera parte del diplomado, la cual está especialmente diseñada para abordar el conocimiento del contenido estadístico necesario para la enseñanza en educación media. Este módulo consta de cuatro sesiones de enseñanza, cada una adaptada previamente en el contexto de este estudio para abordar aspectos específicos relacionados con la enseñanza de la estadística. Durante el desarrollo de la investigación, se implementaron estas cuatro sesiones centradas en el conocimiento del contenido estadístico. A continuación, se proporcionan detalles sobre los contenidos y actividades desarrolladas en cada una de estas sesiones.

Durante la sesión 1, se realizó el “Primer *Workshop* Internacional de Educación Estadística para Profesores”, en el cual se llevó a cabo la presentación de los participantes y se realizaron encuestas sobre tópicos de interés. Además, se introdujo el marco teórico esencial para las sesiones subsiguientes: el Proceso de Investigación en Estadística (PIE) (Tintle et al., 2016). Este marco teórico se presentó como una herramienta clave que los docentes utilizarían en las sesiones posteriores del diplomado.

Antes de continuar con la descripción de las sesiones 2, 3 y 4, cabe destacar que en éstas, se profundizó en los temas presentados en el *workshop*. Cada una de estas sesiones se estructuró en torno a la explicación detallada de los tópicos mencionados, y se guió a los participantes a través del PIE aplicado a variables cualitativas, cuantitativas y a la asociación entre variables, respectivamente. En todas las sesiones, se planteaban preguntas clave alineadas con las etapas del PIE, proporcionando así a los docentes un referente concreto que podrían replicar como una práctica efectiva en sus aulas. Estas sesiones se concibieron con el propósito de ofrecer a los profesores un enfoque práctico y aplicado que pudieran integrar en sus prácticas pedagógicas. A continuación, se describe brevemente cuál era el objetivo a lograr en cada una de estas sesiones.

La sesión 2 de la primera parte del diplomado tuvo como objetivo principal que los docentes participantes lograran comprender las pruebas de significación estadística y los intervalos de confianza aplicados a variables cualitativas. Específicamente, se buscaba que los profesores comprendieran los conceptos de contrastes de hipótesis e intervalos de confianza relacionados con la proporción poblacional.

Respecto a la sesión 3, su propósito fue que los docentes participantes comprendieran las pruebas de significación estadística y los intervalos de confianza, pero esta vez aplicados a variables cuantitativas. Se esperaba que los profesores comprendieran los contrastes de hipótesis e intervalos de confianza relacionados con la media poblacional.

Por último, en cuanto a la sesión 4 se dividió en dos partes distintas. La primera parte, se enfocó en que los docentes realizaran contrastes de hipótesis para la comparación de grupos, centrándose en la comprensión y aplicación de intervalos de confianza para diferencias de medias. Por otro lado, en la segunda parte de la sesión, se abordó la aplicación de herramientas estadísticas para evaluar la correlación entre variables. En la siguiente sección, se proporciona una breve descripción de los instrumentos de evaluación y su estructura.

### 3.3. Instrumentos de evaluación

Para evaluar el nivel de conocimiento del contenido estadístico de los docentes antes de la implementación de las sesiones, se administró una evaluación diagnóstica. Esta evaluación comprende una pregunta abierta que solicita a los participantes definir el concepto de “inferencia estadística”. Además, consta de 33 preguntas de selección múltiple, distribuidas en 6 temas clave: recolección de datos, estadística descriptiva, intervalos de confianza, alcance de las conclusiones, significancia y simulación.

Durante el desarrollo del primer módulo del diplomado, se llevaron a cabo tres evaluaciones, una después de la sesión 2, otra después de la sesión 3 y una última después de la sesión 4, la cual consta de dos partes. Cada una de estas evaluaciones estuvo diseñada en congruencia con las etapas del PIE, al igual que las sesiones del diplomado. Estas evaluaciones permitieron medir el rendimiento y la asimilación de los contenidos por parte de los docentes participantes en cada fase del diplomado.

Ahora, se detalla la estructura de las evaluaciones de cada sesión:

- Evaluación de la sesión 2: consiste en 14 preguntas de respuesta larga, alineadas con las etapas del PIE. Estas preguntas buscan que los docentes demuestren su comprensión de los

conceptos relacionados con contrastes de hipótesis e intervalos de confianza para la proporción poblacional, aprendidos durante la sesión 2.

- Evaluación de la sesión 3: esta evaluación comprende 17 preguntas de desarrollo, también alineadas con el PIE. Su objetivo es que los profesores reflejen su comprensión de los contrastes de hipótesis e intervalos de confianza para la media poblacional, abordados en la sesión 3.
- Evaluación de la sesión 4: consta de dos partes, cada una con 8 preguntas. La primera parte aborda temas relacionados con la asociación entre una variable cuantitativa y otra cualitativa, es decir, diferencia de medias. En la segunda parte, se aborda la correlación entre dos variables cuantitativas. Es importante destacar que esta evaluación, siendo la última de la implementación, presenta preguntas más generales, con menos referencias específicas a cada etapa del PIE. Esto se hace con el propósito de permitir a los docentes seguir el proceso de forma más autónoma y sin una guía tan específica como en las evaluaciones anteriores.

Las evaluaciones diagnóstica y de proyectos se encuentran en la sección de anexos, proporcionando una visión completa de las preguntas y enunciados utilizados para medir el conocimiento del contenido estadístico de los participantes antes y después de las sesiones del diplomado. La evaluación diagnóstica, aplicada antes del inicio del diplomado, permite obtener una comprensión inicial del nivel de conocimiento en estadística de los docentes participantes. Por otro lado, las evaluaciones realizadas después de cada sesión del diplomado permiten evaluar el progreso y el aprendizaje adquirido por los participantes durante el curso.

Dado que los antecedentes sugieren que la inferencia estadística ha sido una dificultad para los profesores de matemáticas, es esencial prestar especial atención a esta área. Por esta razón, se analizará detalladamente el conocimiento de los docentes en inferencia estadística tanto en la evaluación diagnóstica como en las evaluaciones realizadas después de cada sesión, con el objetivo de identificar cualquier progreso observado después de la implementación de las sesiones del diplomado. Estos análisis constituirán la base de los resultados que se presentarán en el próximo capítulo.

Con el propósito de simplificar la lectura de los resultados, de aquí en adelante se llamará etapas a las que abarca el PIE y que se encuentran detalladas en la tercera sección del capítulo de “Antecedentes”. Y respecto a la implementación, se llamará sesiones a aquellas que se realizaron durante el Diplomado de Educación Estadística de la PUCV.

## Capítulo 4

# Resultados

Este capítulo presenta los resultados de la investigación, los cuales están directamente relacionados con los objetivos específicos establecidos inicialmente. En primer lugar, se proporcionará evidencia de los resultados correspondientes al OE 1, que aborda el estudio de metodologías de enseñanza y aprendizaje de los contenidos de estadística desde perspectivas no tradicionales y basadas en la simulación computacional. En segundo lugar, se detallan los resultados relacionados con el OE 2, donde se describen las características de cada una de las sesiones adaptadas e implementadas, destacando cómo se evidencian las etapas del PIE en cada una de ellas.

La última sección de este capítulo se centra en la evaluación del rendimiento y las producciones de los participantes del programa, específicamente en lo que respecta al OE 3, con un énfasis especial en su conocimiento del contenido estadístico. En este sentido, se realizará un análisis exhaustivo para evaluar si ha habido avances en el conocimiento del contenido estadístico, mediante la comparación entre los resultados de la evaluación diagnóstica y las evaluaciones realizadas después de cada sesión del diplomado. Este análisis permitirá determinar el impacto y los beneficios de las metodologías no tradicionales utilizadas en la enseñanza de la estadística dentro del contexto de un programa de desarrollo profesional para profesores en ejercicio.

### 4.1. Estudio de metodologías no tradicionales: un ejemplo

Como se mencionó previamente, el primer objetivo específico de la investigación consiste en estudiar metodologías de enseñanza no tradicionales para lograr el aprendizaje de los contenidos de estadística. Respecto a estas metodologías, en el capítulo de antecedentes se hizo referencia a que existen diversos marcos referenciales que conceptualizan a la estadística como un proceso, destacando entre ellos al PIE, el cual fue utilizado en esta implementación como base para las sesiones que fueron implementadas.

En este contexto, se presenta un ejemplo hipotético que ilustra cómo se aplica el PIE en la enseñanza de la estadística. Este ejemplo permite comprender cómo las diferentes etapas del proceso se entrelazan para facilitar el aprendizaje de los conceptos involucrados. A través de este ejemplo, se explorarán las diversas etapas del PIE, desde la formulación de la pregunta de investigación hasta la comunicación de conclusiones, proporcionando una visión clara y detallada de cómo se pueden integrar estas metodologías no tradicionales en el aula.

Al ofrecer este ejemplo, se busca no solo demostrar la aplicabilidad práctica del PIE, sino también resaltar su relevancia y utilidad para los docentes que desean implementar enfoques innovadores en la enseñanza de la estadística. Este enfoque metodológico no solo promueve la comprensión profunda de los conceptos estadísticos, sino que también desarrolla habilidades de pensamiento crítico y resolución de problemas que son esenciales para el éxito en el mundo actual y además, fomenta el uso de recursos tecnológicos para el aprendizaje.

### Una aplicación del PIE.

**Contexto:** una persona lanza 16 veces una moneda y en 15 de sus lanzamientos obtiene cara. ¿Está cargada la moneda?

Para responder a la pregunta anterior, se seguirán las etapas que propone el PIE:

1. ¿Cuál es la pregunta de investigación en este estudio?

En este caso, una pregunta de investigación posible es: ¿Está cargada la moneda?. También otra pregunta podría ser: ¿Se obtiene cara con la misma proporción que sello al lanzar la moneda?

2. ¿Cuáles son las hipótesis a contrastar?

**Hipótesis nula ( $H_0$ ):** es igualmente probable obtener cara y sello al lanzar la moneda, es decir,  $H_0 : p = \frac{1}{2}$ .

**Hipótesis alternativa ( $H_1$ ):** es más probable obtener cara que sello al lanzar la moneda, es decir,  $H_1 : p > \frac{1}{2}$

En este caso el parámetro de interés ( $p$ ) es la proporción, a largo plazo, de veces que se obtiene cara al lanzar la moneda.

3. Realice un análisis descriptivo de los datos y refiérase a la conjetura.

- **Moda:** Cara
- **Estadístico observado:**  $\frac{15}{16} = 0,94$
- Dado el estadístico observado y la conjetura (es más probable obtener cara que sello al lanzar la moneda) se puede decir que el estadístico observado aporta evidencia a favor de la conjetura.

| 1 | Opción escogida | Número de veces que se obtuvo |
|---|-----------------|-------------------------------|
| 2 | Cara            | 15                            |
| 3 | Sello           | 1                             |

Figura 4.1: Representación tabular del número de caras y sellos obtenidos al lanzar 16 veces la moneda.

### Distribución de resultados obtenidos al lanzar una moneda

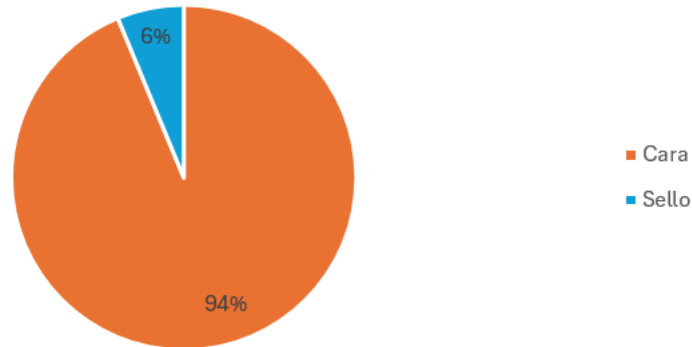


Figura 4.2: Distribución de los resultados obtenidos al lanzar la moneda.

4. Aplique la estrategia E2S para evaluar la solidez de la evidencia observada en el problema. Para eso, utilice el applet:

<https://www.rossmanchance.com/applets/2021/oneprop/OneProp.htm?language=4>

**Estadístico:**  $\hat{p} = \frac{15}{16} = 0,94$

**Simulación:** 1000 juegos de 16 lanzamientos de una moneda.

**Solidez:**  $p < 0,001$

En síntesis, lo que se realizó fue simular que se hizo mil veces el experimento de lanzar 16 veces la moneda y se contó la proporción de veces en que se obtuvo cara. La simulación se realiza asumiendo que la hipótesis nula es verdadera, con el propósito de determinar qué tan probable es que el resultado observado (conjetura) se haya obtenido al azar, y dicha probabilidad que es la que aparece como proporción de muestras (ver figura 4.3), es una aproximación al valor  $p$ , puesto que indica la proporción de veces en las que se obtuvo un valor tan extremo como el que se observó en la muestra. En consecuencia, a partir del valor  $p$  obtenido en la simulación, el cual es menor a 0,001, se concluye que hay evidencia muy fuerte contra la hipótesis nula ( $H_0$ ). Cabe señalar que esta aproximación al valor  $p$  es la que permite cuantificar la solidez en la estrategia E2S.

### Describe el proceso:

Probabilidad de éxito

Tamaño de la muestra

Número de muestras

Animación

Total de muestras = 1000

### Elige de estadístico:

Número de éxitos

Proporción de éxitos

### Contar muestras

Tan extremo como

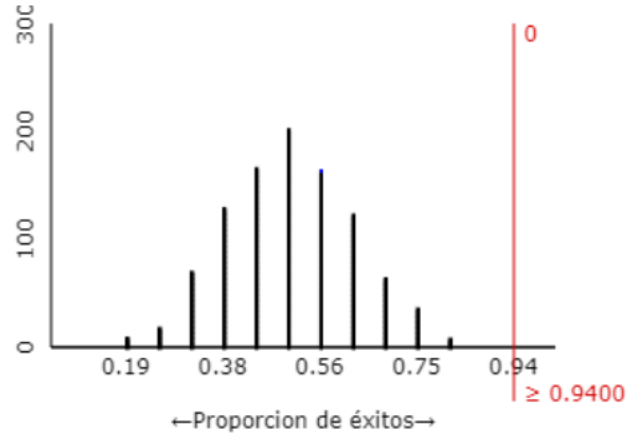
Proporción de muestras:  
0 / 1000 = 0

### Resultados más recientes

Número de Éxitos = 9

Número de Fracasos = 7

Estadísticos



Mostrar datos anteriores

Mostrar deslizadores

Figura 4.3: Captura de pantalla de la simulación realizada, aplicación de la estrategia E2S.

5. A partir de los pasos recorridos previamente, ¿cómo responderías las pregunta de investigación? Justifica.

Como se mencionó anteriormente, dado que el valor  $p$  obtenido es menor a 0,001, se observa que existe evidencia muy fuerte en contra de  $H_0$ . Esto quiere decir que la hipótesis nula no es una explicación plausible para el resultado observado, y en consecuencia, quiere decir que este no se obtuvo solo por azar. Así, la respuesta a la pregunta planteada es que efectivamente está cargada la moneda.

6. A partir del proceso recorrido, ¿habrías hecho algo diferente?

Se podrían haber considerado diversas modificaciones al estudio, como por ejemplo:

- Estudiar qué hubiera ocurrido si en vez de 15 caras hubiera obtenido 13 o 14, ¿la conclusión hubiese sido la misma?
- También otra variación puede ser el número de lanzamientos realizados.

El propósito del ejemplo desarrollado previamente es evidenciar de qué manera puede enseñarse estadística en el aula utilizando el PIE y qué interrogantes se pueden realizar para lograr responder a la pregunta de investigación planteada al comienzo de este proceso. Es relevante mencionar que no tienen por qué solo ser seis preguntas, podrían ser más y que vayan detallando aún más en algunas etapas del PIE. Del mismo modo se puede plantear una sesión que solo considere las primeras 3 etapas, cuyo foco sea realizar un análisis descriptivo de los datos.

Además, en lo anterior se evidencia que, para incluir el uso de simuladores computacionales en las clases de estadística no se necesita un conocimiento de programación o un manejar *software* que sea muy específico, ya que existen sitios web donde se encuentran *applets* como el utilizado en el ejemplo, que permiten realizar las simulaciones deseadas. En la siguiente sección, que se refiere a cómo se adaptaron e implementaron las sesiones de enseñanza sobre el contenido, y también, a cuáles fueron sus características, se mencionan aspectos relacionados con el rol que tiene la simulación computacional dentro del aula cuando se enseña utilizando el PIE.

## 4.2. Análisis de las sesiones

Luego de estudiar metodologías no tradicionales para poder enseñar los contenidos de estadística se procedió a la adaptación de módulos de enseñanza, originalmente diseñados y aplicados con profesores en formación, para su implementación específica con docentes en ejercicio. Cada sesión se centró en el estudio y aplicación del PIE en relación con un tipo particular de variable estadística. Durante este proceso de adaptación, se hizo hincapié en identificar las preguntas y aspectos clave pertinentes a cada etapa del proceso, proporcionando así una guía detallada y específica para los docentes. El propósito de estas sesiones fue ofrecer a los participantes del diplomado ejemplos de buenas prácticas pedagógicas que pudieran replicar en sus propias aulas, promoviendo así la utilización de metodologías no tradicionales en la enseñanza de la estadística.

A continuación, se presentan aspectos clave de las sesiones implementadas, organizadas según el marco referencial del PIE. El objetivo es explorar cómo evolucionó la aplicación del PIE a lo largo de las sesiones 2, 3 y 4 del primer módulo del programa de desarrollo profesional donde se llevó a cabo esta implementación. Además, se destacarán las actividades específicas, preguntas clave y características distintivas de cada etapa del PIE en las distintas sesiones. Esta comparación permitirá identificar patrones, lecciones aprendidas y posibles áreas de mejora, proporcionando una visión detallada de la adaptación de los módulos de enseñanza y aprendizaje para profesores en ejercicio.

### **Etapa 1: formular una pregunta de investigación**

Antes de detallar los aspectos clave de cada etapa del PIE que se resaltaron en cada sesión, es relevante destacar que todas las sesiones comenzaban con la presentación de un contexto. Este contexto consistía en la exposición de una investigación o situación de interés para su análisis, a partir del cual se planteaban interrogantes alineadas con las diversas etapas del PIE.

El paso 1 del PIE se centra en la formulación de la pregunta de investigación, por esta razón, es esencial tener en cuenta ciertos atributos cruciales que debe tener la misma. Una pregunta de investigación efectiva debe ser específica y estar estrechamente enfocada en el fenómeno bajo estudio. Además, de acuerdo con [Arnold y Franklin \(2021\)](#), es fundamental que la pregunta de investigación no sea simplemente algo que se pueda responder con un número, es decir, debe referirse a una idea o hipótesis clara, la cual debe ser evaluada mediante la interpretación de los datos y también a través de la inferencia que se pueda realizar con esos datos.

Se debe considerar también que la pregunta planteada debe abordar un problema o interrogante que sea relevante dentro del contexto de la investigación. Todos estos elementos claves para formular una buena pregunta fueron mencionados en el desarrollo de las distintas sesiones, con mayor énfasis en la sesión 2, que fue la primera en la cual se explicitó como era posible aplicar los pasos del PIE con el objetivo de enseñar conceptos relacionados con inferencia estadística. Ahora,

se presenta en detalle cómo se abordó la formulación de una pregunta de investigación en las demás sesiones implementadas.

- Sesión 2: para dar inicio a esta sesión, se planteó un contexto vinculado al “Cachipún”, ya que este es un juego conocido para los docentes que participaron del diplomado. Respecto al juego, un artículo escrito por [Eyler et al. \(2009\)](#) señala que los jugadores novatos muestran una tendencia a evitar la elección de tijeras. A partir de esta información, se planteó una situación específica relacionada con el contexto: supón que juegas al cachipún con un niño que nunca ha jugado antes. Le explicas las reglas y juegan 12 veces, en las cuales solo en dos ocasiones el niño muestra tijeras.

La idea es que los participantes determinen si el resultado anterior es significativo o no, pero para hacerlo, deben recorrer, a lo largo de la sesión, cada uno de los pasos del PIE, comenzando por el primero que consiste en plantear una pregunta de investigación. Respecto a esto, se mencionan cuáles son las características que debe tener una buena pregunta de investigación, enfatizando en que esta no debe responderse solo con un número, sino que debe tener una respuesta basada en los datos ([Arnold y Franklin, 2021](#)). Además, como esta sesión tiene por objetivo comprender las pruebas de hipótesis y los intervalos de confianza para la proporción poblacional, la pregunta de investigación planteada debe hacer referencia al parámetro en estudio.

- Sesión 3: en esta sesión se planteó un contexto relacionado con las horas de sueño, tomando como referencia lo señalado por el Centro de Control y Prevención de Enfermedades de Estados Unidos, que indica que los adultos deben dormir al menos siete horas al día. Si nos enfocamos en Chile, al revisar los datos planteados en la Encuesta Nacional de Uso del Tiempo (ENUT), realizada el 2015, los cuales indican que los chilenos en promedio duermen 7,28 horas diarias.

Con el propósito de realizar inferencias, se utilizó la información recopilada en el *Workshop* de inicio, donde se les consultó a los participantes, entre otras cosas, cuántas horas habían dormido la noche anterior. Allí se recogieron 43 resultados y el promedio de horas de sueño fue 6,3. Como se obtuvo un promedio menor a 7 horas, y menor al planteado en la ENUT, es posible preguntarse si este resultado es significativo para concluir que los chilenos duermen menos de lo recomendado. Así, al igual que en la sesión anterior, se debe recorrer el PIE para responder esa interrogante.

Respecto a la pregunta de investigación, se reforzaron las características que esta debía tener, que se habían planteado en la sesión anterior, pero también se hizo hincapié en que la pregunta debe hacer referencia al parámetro en cuestión, que en esta ocasión era la media poblacional.

- Sesión 4: como esta sesión se realizó en dos partes, se plantearon dos contextos distintos de acuerdo al contenido que se quería estudiar en cada una de ellas. A modo de contexto y con el propósito de promover la utilización del PIE, en la primera parte de la sesión se mencionó que existe relación entre la capacidad de memoria y el consumo de cafeína. Ésta puede ser beneficiosa, porque puede ayudar a mejorar la concentración y la memoria a corto plazo, pero si se consume en exceso, puede tener un impacto negativo en la memoria a largo plazo.

A fin de realizar inferencias sobre lo anterior, se utilizaron los datos recopilados en el *Workshop* de inicio sobre el puntaje obtenido en un test de memoria (variable cuantitativa) y si habían consumido (o no) café en ese día (variable cualitativa), los cuales fueron analizados siguiendo las etapas del PIE, partiendo por la primera que consiste en plantear la pregunta de investigación. Respecto a esto, se recordaron las características que esta debe tener, pero el foco estuvo en que la pregunta debe hacer referencia al parámetro en estudio, que en esta ocasión era la diferencia de medias, puesto que la idea era estudiar si existía diferencias en los puntajes obtenidos en el test de memoria entre las personas que sí consumieron cafeína ese día y las que no.

En la segunda parte de esta sesión, nuevamente se revisan los resultados del test de memoria realizado en el *Workshop* de inicio, pero esta vez, se comparan con la cantidad de horas de sueño que los docentes habían dormido la noche anterior. Estas dos variables son cuantitativas, y entonces lo que se realiza es recorrer las etapas del PIE, con el propósito de determinar si existe asociación entre esas dos variables.

Sobre la pregunta de investigación, se enfatiza en que esta debe referirse al parámetro en cuestión, que en esta oportunidad es la correlación entre las variables.

A modo de síntesis de lo realizado en esta etapa del PIE en cada sesión, se presenta el cuadro 4.1, que resume los aspectos claves de las distintas sesiones respecto a la motivación o contexto planteado para iniciar, y también, sobre la pregunta de investigación.

| Etapa 1: Formular una pregunta de investigación   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| Sesión 2  | Sesión 3  | Sesión 4 (parte 1)  | Sesión 4 (parte 2)  |
| Se comienza planteando un contexto referido al juego “Cachipún”. Se señalan cuáles son las características que debe tener una buena pregunta de investigación. Además, se plantea la pregunta de investigación respecto a la proporción poblacional | Se plantea un contexto referido a las horas de sueño. Se recuerdan cuáles son las características que debe tener una buena pregunta de investigación. Se plantea la pregunta de investigación respecto a la media poblacional | Se da inicio a la sesión conversando sobre la relación entre la memoria y el consumo de cafeína. Se recuerda nuevamente las características de una pregunta de investigación adecuada. Se plantea la pregunta de investigación respecto a la diferencia de medias | Se comienza esta parte mencionando la relación entre la memoria y las horas de sueño. Se plantea la pregunta de investigación respecto a la correlación entre las variables |

Cuadro 4.1: Comparación de lo realizado en la etapa 1 del PIE en las distintas sesiones.

En esta etapa del PIE, la adaptación de las sesiones de enseñanza que ya se habían aplicado con docentes en formación consistió fundamentalmente en los contextos que se planteaban al inicio. En este caso, se recogió información en el *Workshop* de inicio y a partir de esos datos se pudo plantear distintos contextos como motivación para las sesiones, mientras que en el caso de los profesores en formación, los contextos en su mayoría fueron extraídos del texto de (Tintle et al., 2016), que es el texto en el cual se plantean las etapas del PIE con detalle y que precisamente tiene ejemplos sobre aplicaciones de este, para diferentes tipos de variables.

## Etapa 2: diseñar un estudio y recopilar datos

En relación con la etapa 2 del PIE, es relevante destacar que se hizo hincapié en dos aspectos fundamentales durante todas las sesiones. En primer lugar, se formularon preguntas destinadas a identificar la unidad de observación, el tamaño muestral, la variable del estudio, el tipo de variable (cualitativa o cuantitativa) y sus posibles resultados. En segundo lugar, se realizaron preguntas cuyo propósito era lograr identificar cuáles eran las hipótesis a contrastar (hipótesis nula y alternativa), tanto en símbolos como en palabras. A continuación, el detalle de lo realizado en esta etapa del PIE respecto a las hipótesis:

- Sesión 2: en esta sesión, antes de plantear las hipótesis a contrastar se les realizaron preguntas a los docentes, que les permitieron identificar el procedimiento inferencial más apropiado para la situación. A los profesores se les preguntó cuál era el parámetro de interés en el estudio, con el propósito de que determinaran a qué elemento debían hacer referencias las hipótesis que posteriormente plantearían.

Además, se les solicitó que indicaran cual sería el valor del parámetro si el juego fuera justo y qué relación existe entre el valor de éste (en el contexto) y su valor si el juego fuera justo. Como en esa sesión, el contexto planteado es el “cachipún” y el parámetro en cuestión es la proporción de veces a largo plazo en que se obtienen tijeras, se sabe que el valor esperado del parámetro es  $\frac{1}{3}$  si el juego es justo. Sin embargo, la evidencia observada señalaba que los jugadores escogían menos veces tijeras, y entonces la relación observada es  $p < \frac{1}{3}$ . Precisamente esto lleva a los docentes a identificar que el procedimiento más apropiado es un contraste de hipótesis, y así, esta etapa del PIE se concluye planteando éstas, mediante palabras y símbolos.

Con el propósito de introducir el concepto de significación, se introdujo una interrogante específica vinculada al grado de disposición a cometer errores. El propósito de esta pregunta que se realizó a los docentes era explicar el nivel de significación o error tipo I; ya que, este concepto se abordaría en esta sesión y en las posteriores, específicamente en la etapa 4 del PIE.

- Sesión 3: tomando en consideración lo realizado la sesión anterior, en ésta no se realizaron preguntas para inducir a los docentes a determinar cuál era el procedimiento inferencial más apropiado, sino que se procedió a plantear las hipótesis inmediatamente. Los profesores debían escribir las hipótesis primero en palabras y luego en símbolos, a partir de los datos recopilados en el *Workshop* de inicio, la cantidad de horas de sueño recomendadas y los resultados de la ENUT.

Considerando esos tres elementos, se podría pensar que los chilenos no duermen en promedio 7 horas diarias, y por lo tanto, la media poblacional para las horas de sueño debería ser distinta de 7, es decir,  $\mu \neq 7$ . Esta expresión precisamente constituye la hipótesis alternativa para la investigación.

- Sesión 4: del mismo modo que la sesión previa, acá se les consultó directamente cuales serían las hipótesis nula y alternativa a partir de la pregunta de investigación planteada. Para la primera parte de la sesión, donde había que determinar si existía asociación entre el consumo de cafeína y la memoria, se plantearon primero las hipótesis en palabras y luego en símbolos. En este caso el parámetro en cuestión era la diferencia de medias, y lo que se buscaba con-

trastar era si las medias de los puntajes obtenidos en el test de memoria eran iguales para las personas que consumían cafeína y para las que no.

Respecto a la segunda parte de la sesión, se busca recorrer el PIE para determinar si existía asociación entre las horas de sueño y los resultados obtenidos en el test de memoria. En ese contexto y con el propósito de plantear las hipótesis se les recuerda a los docentes cuál es el indicador numérico que otorga información respecto a la asociación lineal entre variables, que es la correlación de Pearson. Luego, se les pide que ellos puedan plantear las hipótesis nula y alternativa en palabras y luego en símbolos, explicitando aquí que la hipótesis alternativa es que existe asociación lineal entre variables; es decir, que el coeficiente de correlación de Pearson ( $\rho$ ) es distinto de cero.

La siguiente tabla sintetiza lo realizado en las distintas sesiones referido a la etapa 2 del PIE. Acá se puede evidenciar cuales fueron los aspectos comunes a todas las sesiones y qué cosas las distinguen entre ellas.

| Etapa 2: Diseñar un estudio y recopilar datos  |  |   |   |
|--|--|---|---|
| Sesión 2   | Sesión 3   | Sesión 4 (parte 1)  | Sesión 4 (parte 2)  |
| Identificar unidad de observación, variable, tipo de variable y posibles resultados  |  |   |   |
| Plantear hipótesis a contrastar sobre la proporción poblacional.<br>Además, se planteó una pregunta a los docentes sobre el grado de disposición a equivocarse, haciendo referencia al nivel de significación. | Plantear hipótesis a contrastar sobre la media poblacional | Plantear hipótesis a contrastar sobre la diferencia de medias | Plantear hipótesis a contrastar sobre la correlación de las variables (correlación de Pearson). |

Cuadro 4.2: Comparación de lo realizado en la etapa 2 del PIE en las distintas sesiones.

### Etapa 3: explorar los datos

En esta etapa del PIE, destacan dos aspectos fundamentales que son: el detallado análisis descriptivo de los datos y también, la relación entre el estadístico observado y la conjetura de investigación. Es muy relevante lo primero, puesto que la realización de un análisis descriptivo del conjunto de datos permite repasar que información nos entrega éste y así, determinar si es necesario replantear la pregunta de investigación o reformular las hipótesis, entendiendo que el PIE es un ciclo.

Dada la importancia de los análisis descriptivos, es que para ellos se consideraron distintos elementos de acuerdo al tipo de variable en estudio, los cuales se van a detallar para cada sesión a continuación. Cabe destacar que, para enriquecer esta etapa, se incorporaron de manera sistemática recursos tecnológicos, tales como Excel y *applets*. La inclusión del primer programa mencionado se debe a que en el programa de estudio de la asignatura “Probabilidades y estadísticas descriptiva

e inferencial” (MINEDUC, 2021), dentro de las orientaciones para el docente se plantea el uso de Excel para la enseñanza de los contenidos.

El otro recurso utilizado son los *applets*, que son programas diseñados para ser subidos a una página *web*, las cuales son gratuitas. En este contexto se trabajó con *applets* diseñados específicamente para hacer análisis estadísticos de los datos. Estos programas, a pesar de haber sido desarrollados por estadounidenses, tienen versiones en español que facilitan el uso de esta herramienta. Esta elección estratégica permitió no solo potenciar el entendimiento de los docentes en ejercicio, sino también proporcionarles herramientas prácticas que podrían integrar fácilmente en sus clases con estudiantes.

En cuanto al segundo elemento clave en esta etapa del PIE, que es la relación entre el estadístico observado (evidencia) y la conjetura, se hace énfasis en que la expresión que se plantea en la hipótesis alternativa es precisamente la conjetura. Además, se señala que ésta hace referencia a lo que el investigador se encuentra estudiando o busca probar. Ahora, se presenta el detalle sobre los análisis descriptivos realizados en cada sesión implementada.

- Sesión 2: para el análisis descriptivo que se realizó en esta sesión, se hicieron representaciones tabulares de los datos, gráficas y se calculó un estadístico de resumen. Todo esto se efectuó en el programa Excel.

Además, para complementar el análisis se planteó una pregunta referida a la relación existente entre el estadístico observado y la conjetura de investigación. En el contexto del juego del “cachipún”, la evidencia muestral era de un 16,67 % de tijeras obtenidas, lo cual se encontraba a favor de lo planteado en la hipótesis alternativa.

- Sesión 3: en esta sesión, se inició el análisis descriptivo realizando una gráfica de los datos, a partir del cual se determinaron medidas de centro, forma, variabilidad y también, potenciales datos atípicos. También, se señalaron ideas importantes para cada uno de esos conceptos, como lo son el sesgo (hacia la izquierda o hacia la derecha) de una distribución o el Criterio de Tukey para identificar valores atípicos en un conjunto de datos.

En este caso el programa que se utilizó para realizar dicho análisis fue Excel, sin embargo, también se mencionó que existe un *applet* donde se pueden realizar análisis descriptivos de los datos, que se encuentra disponible en este enlace <https://www.rossmanchance.com/applets/2021/descstats/Dotplot.htm?language=1>. Esta aplicación permite cargar los datos que uno desea analizar y solamente presionando botones o marcando casillas realiza gráficas, calcula estadísticos de resumen y otorga información sobre la variabilidad y datos atípicos del conjunto de datos.

Del mismo modo que en la sesión anterior, para complementar el análisis descriptivo se planteó una pregunta referida a la relación existente entre el estadístico observado y la conjetura de investigación. En el contexto de las horas de sueño la evidencia muestral era de 6,3 horas en promedio, lo cual se encontraba a favor de la conjetura, puesto que la hipótesis alternativa era  $\mu \neq 7$ .

- Sesión 4: como ya se ha señalado anteriormente, esta sesión consta de dos partes. En la primera parte, se realizó un análisis descriptivo que consideraba los mismos elementos de la sesión 3, pero se utilizó en esta ocasión solo el *applet* de estadística descriptiva. En la segunda parte de esta sesión, relativa a la asociación entre variables cuantitativas, se utilizó otro programa y se analizaron otros elementos.

Para determinar si existía asociación lineal entre el puntaje obtenido en el test de memoria y las horas de sueño de los asistentes al *Workshop* se tenía que elaborar un gráfico de dispersión. Para hacer esa gráfica, se utilizó un nuevo *applet* denominado “Análisis de dos variables cuantitativas”, que permite ingresar los datos y realiza automáticamente la gráfica de dispersión. Cabe destacar además que este programa permite visualizar la recta de regresión lineal, conocer el valor del coeficiente de correlación, entre otros que son muy útiles para la asociación entre dos variables cuantitativas.

A partir del gráfico de dispersión realizado por el *applet*, se analizaron aspectos relacionados con la dirección (es decir si es creciente o decreciente), la forma (si tiende a ser lineal o no), la fuerza de la asociación y las observaciones inusuales (datos que se alejan del resto).

En el cuadro 4.3 se muestran cuáles son los aspectos en común de las sesiones en esta etapa y en qué se diferencian.

| Etapa 3: Explorar los datos   |  |  |  |
|---|--|--|--|
| Sesión 2  | Sesión 3   | Sesión 4 (parte 1)   | Sesión 4 (parte 2)   |
| Análisis descriptivo: representación tabular, gráfica y un estadístico de resumen (usando Excel). Se identificó si el estadístico observado aportaba evidencia a favor de lo planteado en la hipótesis alternativa. | Análisis descriptivo: gráficas, medidas de centro, forma, variabilidad y potenciales datos atípicos (usando Excel). Se presentó un <i>applet</i> de estadísticas descriptivas. Se identificó si el estadístico observado aportaba evidencia a favor de la conjetura. | Análisis descriptivo: gráficas, medidas de centro, forma, variabilidad y potenciales datos atípicos (usando <i>applet</i> ). | Análisis descriptivo: gráficas, dirección de la relación, forma, fuerza y observaciones inusuales (usando <i>applet</i> ). |

Cuadro 4.3: Comparación de lo realizado en la etapa 3 del PIE en las distintas sesiones.

## Etapa 4: plantear inferencias

En la cuarta etapa del PIE, se implementó la estrategia E2S: Estadístico, Simulación, Solidez. Esta táctica se desglosa en tres pasos cruciales, que son:

1. Estadístico: identificar cuál es el valor del estadístico observado en la situación planteada.
2. Simulación: utilizando simuladores computacionales (*applet*) se realiza un gran número de repeticiones del experimento planteado como contexto.
3. Solidez: en esta etapa se evalúa la solidez de la evidencia observada. En el simulador se cuenta la proporción de muestras en las cuales se obtiene un valor mayor o igual que el estadístico observado (esta relación de orden varía de acuerdo a lo planteado en la hipótesis alternativa). Lo relevante es que esa proporción, que cuantifica la solidez de la evidencia observada, hace referencia al valor  $p$  o probabilidad de obtener la evidencia observada únicamente por azar.

Como se mencionó anteriormente, en esta etapa del PIE que consiste en plantear inferencias a partir de los datos, se implementó la estrategia E2S en todas las sesiones. La diferencia entre ellas tiene que ver con el *applet* que se utilizó en cada caso y también, con la técnica aplicada al momento de hacer la simulación. A continuación, se presenta el detalle de cómo se aplicó la estrategia a cada tipo de variable.

- Sesión 2: para aplicar la estrategia E2S con el propósito de realizar contraste de hipótesis para la proporción, se utiliza el *applet* denominado “Inferencia de una proporción”. Este programa es el mismo que se utilizó para el ejemplo que se desarrolló en la sección anterior, referida a los resultados del primer objetivo específico de la investigación.

Luego de realizar la simulación se formaliza el concepto de valor  $p$  y qué es lo que ocurre con la hipótesis nula de acuerdo al valor de éste; es decir, se menciona en qué casos existe evidencia fuerte, moderada o bien no existe evidencia en contra de la hipótesis nula. Además, en esta etapa se muestra cómo obtener el estadístico estandarizado a partir de la simulación realizada y luego se formaliza el concepto. Esto se realiza con el propósito de otorgar a los docentes otra herramienta con la cual puedan determinar la fuerza de la evidencia contra la hipótesis nula.

Posteriormente, se plantea una pregunta referida a si es posible predecir la distribución nula sin simularla. Para dar respuesta a esto, se recurre al Teorema Central del Límite (TCL), explicitando en primer lugar lo que señala este teorema y luego, cuáles son las condiciones de validez para que este se pueda aplicar. Así, al verificar que efectivamente en el contexto utilizado los datos cumplen con las condiciones de validez del TCL, se tiene conocimiento sobre la distribución de las proporciones de la muestra, la cual sería una normal centrada en el valor de la proporción a largo plazo y con una desviación estándar de  $\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$ . Esto es lo que permite calcular el estadístico estandarizado teórico y en consecuencia, poder concluir respecto a la hipótesis nula.

- Sesión 3: para esta sesión la aplicación de la estrategia E2S considera el uso de Excel y del *applet* “Muestreo de una variable”. Lo que se debe realizar primero es construir una población de gran tamaño (considere  $n = 10000$ ) que cumpla con lo planteado en la hipótesis nula. Si los datos son simétricos es posible considerar una distribución normal para esa población.

Luego, los datos simulados mediante Excel se copian en el *applet*, donde se realiza la simulación, a través del muestreo de conjuntos de un tamaño muestral determinado por los participantes. Utilizando el simulador se escogieron 1000 muestras de tamaño 2993 (se consideró ese tamaño ya que esa es la cantidad de individuos que respondieron la ENUT), a partir de la población de tamaño 10000 que se había generado previamente.

En el *applet* aparecen tres gráficos: uno sobre la distribución poblacional, otro sobre la distribución de datos para una muestra específica y otro que representa la distribución nula de las medias muestrales. A partir de este último gráfico y utilizando las opciones disponibles en el programa, se puede concluir respecto a la hipótesis nula, tanto con el valor p como con el cálculo del estadístico estandarizado ( $z$ ) a partir de la simulación. Sin embargo, como no se conocen los datos relativos a la población, la desviación estándar poblacional ( $\sigma$ ) se puede estimar a partir de la desviación estándar muestral ( $s$ ) si se cumplen las condiciones dadas por el TCL. Así, se tiene que una expresión para la desviación estándar de las medias muestrales es  $\frac{s}{\sqrt{n}}$

Cuando no se conoce el valor de  $\sigma$ , al estadístico estandarizado se denomina estadístico t, puesto que su distribución es una t de *Student* con  $n - 1$  grados de libertad. Sabiendo todo esto, es posible calcular el estadístico t de forma teórica y así determinar si se rechaza o no la hipótesis nula.

Por último, cabe destacar que en esta sesión se presenta un nuevo *applet* denominado “Inferencia basada en la teoría”, en el cual se completa con el tamaño de la muestra, la media muestral y la desviación estándar muestral, además de plantear las hipótesis a contrastar. Una vez completados los elementos, la aplicación entrega la gráfica de la distribución para las medias muestrales y también calcula el valor p y el estadístico t, para poder concluir respecto a  $H_0$ .

- Sesión 4: En esta sesión la técnica de remuestreo utilizada al momento de aplicar la estrategia E2S fue el *Bootstrapping*, tanto para la primera parte como para la segunda. Sin embargo, los *applet* que se utilizaron fueron distintos en cada caso.

Para la primera parte de la sesión se utilizó el *applet* “*Two means*”, en el cual se ingresaron los datos y este programa automáticamente toma el conjunto de datos y realiza un muestreo con repetición a partir de estos. La idea es que ese proceso se repita al menos 1000 veces y en cada caso, se analiza el valor de la diferencia entre las muestras de los que si consumen café y los que no. Además, este programa otorga la gráfica de la distribución de esas diferencias, a partir de la cual, calcula el valor p. Al finalizar este proceso, es decir, una vez aplicada la estrategia, se formaliza el concepto de *bootstrapping*.

En la segunda parte de esta sesión, relativa a la asociación entre dos variables cuantitativas, para aplicar la estrategia E2S se utilizó el *applet* denominado “Análisis de dos variables cuantitativas”, que ya había sido utilizado en la etapa 3 del PIE para esta misma sesión. En

este caso el programa otorga una opción ahí mismo de realizar el muestreo y utiliza la técnica de *bootstrapping* a la que se hizo referencia recientemente.

Es importante reiterar que al concluir esta etapa, en todas las sesiones, se formalizó la teoría subyacente. La tabla que se presenta a continuación sintetiza las similitudes y diferencias entre las distintas etapas, proporcionando así una panorámica clara de la implementación de la estrategia E2S en cada sesión.

| Etapa 4: Plantear inferencias  |  |   |  |
|--|--|---|--|
| Sesión 2   | Sesión 3   | Sesión 4 (parte 1)  | Sesión 4 (parte 2)   |
| Estrategia E2S utilizando el applet “Inferencia de una proporción”           | Estrategia E2S utilizando Excel y el applet “Muestreo de una variable” | Estrategia E2S aplicando <i>Bootstrapping</i> mediante el applet “ <i>Two means</i> ” | Estrategia E2S aplicando <i>Bootstrapping</i> mediante el applet “Análisis de dos variables cuantitativas” |
| Solidez: valor p y estadístico estandarizado.                                | Solidez: valor p y estadístico estandarizado (estadístico t)           | Solidez: valor p  | Solidez: valor p   |
| Al finalizar esta etapa se formaliza la teoría que corresponde en cada caso. |  |   |  |

Cuadro 4.4: Comparación de lo realizado en la etapa 4 del PIE en las distintas sesiones.

### Etapa 5: formular conclusiones

El paso 5 del PIE consiste en formular conclusiones que consideren el alcance de la inferencia realizada previamente. Tomando en cuenta lo anterior es que en esta etapa se reforzaron tres aspectos relevantes: realizar una conclusión apropiada respecto a las hipótesis, responder la pregunta de investigación y también, qué representan los intervalos de confianza y cuál es su relación con las hipótesis.

Así, en esta etapa, se realizaron preguntas que llevaban a los docentes a concluir respecto a las hipótesis planteadas en la etapa 2 del PIE. La idea era que pudieran contestar, luego de los pasos realizados, si se rechazaba o no se rechazaba la hipótesis nula, y que posteriormente, a partir de dicha respuesta, pudieran responder concretamente la pregunta de investigación que habían planteado al comienzo.

También, cabe destacar que en esta etapa, durante todas las sesiones se hizo énfasis en cómo era posible determinar un rango de valores posibles para el parámetro en cuestión, en el caso de que se hubiese rechazado la hipótesis nula, haciendo referencia a los intervalos de confianza (IC) para los distintos tipos de variables (proporción poblacional, media poblacional y diferencia de medias). Se explicaron diversas aproximaciones hasta llegar a formalizar la teoría detrás de los IC. Hay que añadir que se utilizaron algunos applets de inferencia basada en la teoría para comprobar que los intervalos de confianza calculados a mano estaban correctos, todo esto con el propósito de darle mayor relevancia a la utilización de aplicaciones para mejorar la enseñanza de la estadística.

En el caso particular de la asociación entre dos variables cuantitativas, al rechazar la hipótesis nula y concluir que existe asociación entre las variables, se hace énfasis en que es posible plantear un modelo de regresión lineal simple (RLS). Enseguida, se presenta un detalle de lo realizado en esta etapa para cada sesión.

- Sesión 2: en esta sesión se plantea la siguiente interrogante: si se rechaza la hipótesis nula, ¿qué valores puede tomar el parámetro? Esta pregunta permite aproximarnos a la definición formal de intervalos de confianza, conceptualizándolos como un rango de valores plausibles para el verdadero valor del parámetro. Adicionalmente, se menciona que los IC se calculan como el estadístico observado  $\pm$  un margen de error.

Luego, se formaliza el concepto y también se hace referencia a lo que es el nivel de confianza. Se presenta la fórmula del intervalo de confianza para una proporción y además, se calcula un IC de manera manual y posteriormente, esto se comprueba utilizando el *applet* de “Inferencia basada en la teoría”.

- Sesión 3: para esta sesión se revisaron dos aproximaciones que permitieron comprender los IC para la media poblacional. En primer lugar, y haciendo énfasis en que cotidianamente en estadística se trabaja con intervalos de confianza al 95 %, es que se planteó el método de las 2 desviaciones estándar, el cuál otorga una aproximación muy cercana del intervalo de confianza teórico. Este método dice que un IC para la media al 95 % se calcula como  $\bar{x} \pm 2 \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$ , donde  $\frac{s}{\sqrt{n}}$  es la desviación estándar del estadístico.

Posteriormente se explican los IC utilizando el enfoque basado en la teoría, reemplazando el 2 por un multiplicador que depende del nivel de confianza. Del mismo modo en que se hizo en la sesión anterior, se calculó el IC utilizando la teoría de forma manual y posteriormente se comprobó el resultado obtenido, utilizando el *applet* de “Inferencia basada en la teoría”.

- Sesión 4: en la primera parte de esta sesión, referida a la asociación entre una variable cualitativa y otra cuantitativa, se utilizó el *applet* de “Inferencia basada en la teoría” directamente para calcular el intervalo de confianza. Aquí se señaló que si el 0 está contenido en el IC, es plausible que la diferencia de las medias sea cero, lo cual concordaba con lo obtenido a partir de la estrategia E2S, puesto que se había obtenido poca evidencia en contra de la hipótesis nula.

Para la segunda parte de la sesión, no se trabajó con intervalos de confianza. En esta oportunidad se mencionó que, si se rechaza la hipótesis nula, es decir, si el coeficiente de correlación es distinto de cero, es posible plantear un modelo de regresión lineal simple. Aquí se conceptualiza lo que es un modelo de RLS y se utiliza el *applet* de “Asociación entre dos variables” para calcular la expresión analítica de la recta de regresión y también, para graficarla.

En el cuadro 4.5 se presenta una síntesis de las similitudes y diferencias entre sesiones, de lo realizado en la etapa 5 del PIE.

| Etapa 5: Formular conclusiones   |   |   |  |
|--|---|---|--|
| Sesión 2   | Sesión 3  | Sesión 4 (parte 1)  | Sesión 4 (parte 2)   |
| Concluir respecto a las hipótesis planteadas en el paso 2.                   |   |   |  |
| Responder la pregunta de investigación.                                      |   |   |  |
| En caso de rechazar la hipótesis nula, se determina un IC para la proporción | En caso de rechazar la hipótesis nula, se determina un IC para la media poblacional (método de las 2DE y enfoque basado en la teoría) | Si en el IC está el 0, es plausible que la diferencia de las medias sea cero. | Si se rechaza la hipótesis nula (es decir, existe asociación entre las variables), se puede plantear un modelo de RLS. |

Cuadro 4.5: Comparación de lo realizado en la etapa 5 del PIE en las distintas sesiones.

## Etapa 6: mirar hacia atrás y hacia adelante

En cuanto al paso 6 del PIE, durante las sesiones 2, 3 y 4 se planteó una pregunta reflexiva común: “A partir de los análisis implementados previamente, ¿qué puedes concluir sobre los resultados del estudio? ¿habrías hecho algo diferente?” Se esperaba que los docentes indicaran modificaciones al estudio, como por ejemplo, qué ocurría si había cambios en la evidencia observada, o también que podría cambiar en las conclusiones si en el contraste de hipótesis se planteaban hipótesis bilaterales, o que pasaría si se replica el estudio pero con una muestra aleatoria.

Además, al concluir cada sesión, se presentaron esquemas que sintetizaban los elementos teóricos clave aprendidos, permitiendo a los participantes hacer la conexión entre los conocimientos adquiridos mediante la aplicación del PIE y simulaciones y la teoría subyacente a los conceptos de inferencia estadística involucrados en cada sesión.

A partir de todo lo planteado en esta sección, se refuerza la idea de que efectivamente es posible aplicar el PIE en el aula, ya que este funciona como una guía que permite orientar los momentos que tendría la clase. Además, esta forma de conceptualizar la estadística favorece la vinculación de los conceptos involucrados, y también, el uso de recursos tecnológicos permite transitar con facilidad desde lo empírico a lo teórico, es decir, se puede comenzar realizando simulaciones y desde ahí lograr la formalización de los conceptos involucrados.

Respecto a la adaptación de las sesiones que se habían implementado antes con docentes en formación, se recalca que, para esta implementación se utilizaron contextos distintos a esa oportunidad. Además, cabe mencionar que en esta ocasión se realizó una sesión para cada tipo de variable o asociación entre variables, mientras que en la implementación con docentes en formación se efectuaron varias sesiones referidas a un mismo tema, con el propósito de introducir paulatinamente los conceptos.

En la siguiente sección se presentan los resultados obtenidos referidos a las evaluaciones realizadas durante la implementación, tanto la evaluación diagnóstica como las evaluaciones realizadas

luego de cada sesión. Respecto a estas, se señalan las dificultades observadas en cada etapa del PIE y finalmente, un comentario general respecto al desempeño de los docentes en estas evaluaciones y el efecto que tuvo la implementación en su conocimiento del contenido.

### 4.3. Análisis de las evaluaciones realizadas

Como el objetivo específico 3 de esta investigación hace referencia a la evaluación y el rendimiento de las producciones de los participantes del Diplomado en Educación Estadística para profesores, en lo relativo a su conocimiento del contenido, conceptualizado por Pino-Fan y Godino (2015), en esta sección se presentan aspectos claves que se obtuvieron en los distintos tipos de evaluaciones realizadas durante la implementación del programa de desarrollo profesional.

#### Evaluación diagnóstica

Como se señaló en el capítulo de la metodología, antes de la implementación de los módulos de enseñanza adaptados, se les realizó una evaluación diagnóstica a los docentes con el propósito de evaluar sus conocimientos del contenido estadístico, la cual tenía 33 preguntas de selección múltiple y también una pregunta abierta en la cuál debían referirse al concepto de inferencia estadística y particularmente, qué entendían sobre dicho concepto.

Sobre las preguntas del conocimiento del contenido, estas preguntas se encontraban distribuidas en 6 temas clave: recolección de datos (2 preguntas), estadística descriptiva (7 preguntas), intervalos de confianza (7 preguntas), alcance de las conclusiones (2 preguntas), significancia (11 preguntas) y simulación (5 preguntas). Cabe señalar que la pregunta 30 se refería a dos temas: confianza y significancia.

Para cuantificar el porcentaje de respuestas correctas se consideró la cantidad de respuestas correctas en todas las preguntas de cada tema y se comparó respecto a la cantidad total de respuestas obtenidas en el mismo tema. Tomando en cuenta lo anterior, en la siguiente tabla se muestra el porcentaje de respuestas correctas por tema:

| Tema                        | Porcentaje de respuestas correctas |
|-----------------------------|------------------------------------|
| Recolección de datos        | 31,25 %                            |
| Estadística descriptiva     | 66,60 %                            |
| Intervalos de confianza     | 42,80 %                            |
| Alcance de las conclusiones | 56,25 %                            |
| Significancia               | 57,90 %                            |
| Simulación                  | 42,50 %                            |

Si bien hay tres temas que se encuentran con un porcentaje de respuestas correctas inferior al 50%, hay dos de esos tópicos que se relacionan con inferencia estadística, que son los intervalos de confianza y la simulación, los cuales obtuvieron aproximadamente un 43% de respuestas correctas. Es necesario reforzar que los porcentajes de la tabla son globales, es decir, hacen referencia a todas las respuestas correctas obtenidas por todos los docentes, porque si bien hay profesores cuyo porcentaje individual de respuestas correctas por tema se encuentra muy cercano a los que aparecen en la tabla, existen algunos que tienen conocimientos mucho más sólidos en determinados temas y que por ejemplo en un tema tienen 6 de 7 respuestas correctas, mientras que otros, por el contrario,

presentan sólo 1 de 7 respuestas correctas.

Por otra parte, respecto a la pregunta abierta “¿Qué entiende por el concepto de inferencia estadística?” se obtuvo que 3 de los 8 docentes participantes son capaces de explicar correctamente que es la inferencia estadística.

**PARTE 0:** ¿Qué entiende por inferencia estadística? Explique, puede usar un ejemplo (máx. 3 líneas).

Rama de la estadística que utiliza la información recolectada de una muestra, seleccionada aleatoriamente, con el fin de estimar, tomar decisiones y/o hacer predicciones acerca de la población a la cual pertenece.

Figura 4.4: Ejemplo de respuesta correcta

En la figura 4.4 se muestra una de las respuestas correctas obtenidas para esa pregunta. En esta respuesta aparecen elementos característicos de la inferencia, como lo es utilizar la información de una muestra aleatoria para poder determinar propiedades de la población en estudio.

**PARTE 0:** ¿Qué entiende por inferencia estadística? Explique, puede usar un ejemplo (máx. 3 líneas).

A partir de algún estudio se puede deducir o predecir o inducir algún suceso. concluir la probabilidad de que salga cara al lanzar tres monedas

Figura 4.5: Ejemplo de respuesta incorrecta

En contraste, la figura 4.5 muestra una de las respuestas incorrectas para la misma pregunta, en la cual se evidencia que no hay claridad de qué lo que es la inferencia estadística, porque se relaciona este concepto al cálculo de la probabilidad de un suceso determinado.

## Evaluaciones de las sesiones

Respecto a las evaluaciones de las sesiones, primero se mencionarán cuáles fueron las dificultades que se observaron, en concordancia con las etapas del PIE.

En la primera etapa del proceso, que consiste en plantear la pregunta de investigación, no se observaron dificultades. Sin embargo, en las demás etapas del proceso si se evidenciaron y son precisamente esas las que se detallan a continuación.

Respecto a la etapa 2 del PIE, el propósito fue lograr plantear las hipótesis a contrastar, tanto en símbolos como en palabras y en ese sentido, solamente hubo una dificultad en la evaluación de la sesión 2. Acá una persona planteó correctamente las hipótesis en palabras, pero tuvo un error al momento de escribirlas simbólicamente, como se muestra en la figura 4.6. En el resto de evaluaciones no hubo dificultades con la representación simbólica de las hipótesis a contrastar.

$H_0$ : Las personas conjeturan en igual cantidad de veces el obtener “cara” o “sello” (no cara) en una moneda antes de lanzarla.

$$H_0 = \frac{1}{2}$$

$H_1$ : Las personas conjeturan más veces que obtendrán “cara” en una moneda antes de lanzarla.

$$H_1 > \frac{1}{2}.$$

Figura 4.6: Ejemplo de respuesta donde se plantea adecuadamente las hipótesis en palabras, pero no en símbolos

También respecto a la etapa 2, se puede señalar que no hubo problemas para determinar el tamaño muestral, la variable, el tipo de variable y sus posibles resultados en ninguna de las evaluaciones realizadas.

En la etapa 3 del PIE no existieron dificultades para realizar el análisis descriptivo de los datos, pero sí las hubo para identificar si la evidencia observada se encontraba a favor o en contra de la conjetura, puesto que, se concebía a la conjetura de investigación como la hipótesis nula. Es decir, no estaba claro que la conjetura hacía referencia a la hipótesis alternativa, a pesar de que se había explicitado en las sesiones realizadas.

Lo anterior se evidencia en estas dos respuestas (figuras 4.7 y 4.8) de un docente, quien si bien identifica correctamente las hipótesis a contrastar en el estudio, con la simbología adecuada y también expresándolas verbalmente, en la siguiente pregunta considera a la hipótesis nula como conjetura. En otras palabras, este docente realiza bien la pregunta referida a la etapa 2 del PIE, pero no contesta adecuadamente la pregunta referida a la etapa 3.

5. Establezca las hipótesis de investigación, en palabras y símbolos matemáticos, y defina el parámetro de interés en el estudio.

Hip. Nula: Las palabras del poema 20 de Neruda tienen en promedio 4 letras

$$H_0: \mu = 4 \text{ letras}$$

Hip. Alternativa: Las palabras del poema 20 de Neruda no tienen en promedio 4 letras

$$H_1: \mu \neq 4 \text{ letras}$$

Figura 4.7: Ejemplo de respuesta correcta donde se plantea adecuadamente las hipótesis

6. A partir de las hipótesis de investigación planteadas y la información del estudio, justifique si la evidencia observada aporta evidencia a favor (o en contra) de la conjetura.

Según la muestra observada el promedio de letras es de 6,06 lo cual aporta información en contra de la hipótesis nula

Figura 4.8: Ejemplo de respuesta incorrecta donde se identifica erróneamente la conjetura

En el paso 4 del PIE donde se deben plantear inferencias sobre los resultados obtenidos, a partir de la simulación de un gran número de repeticiones del experimento, también se evidenciaron dificultades, en primera instancia, debidas a la utilización de simuladores que eran desconocidos hasta ese momento. Justamente por ese motivo es que las dificultades presentadas en esta etapa tenían que ver con una mala completación de los datos en el simulador o con la realización de la simulación con solo una muestra en lugar de hacerla con un “n” grande, como se muestra en la figura 4.9.

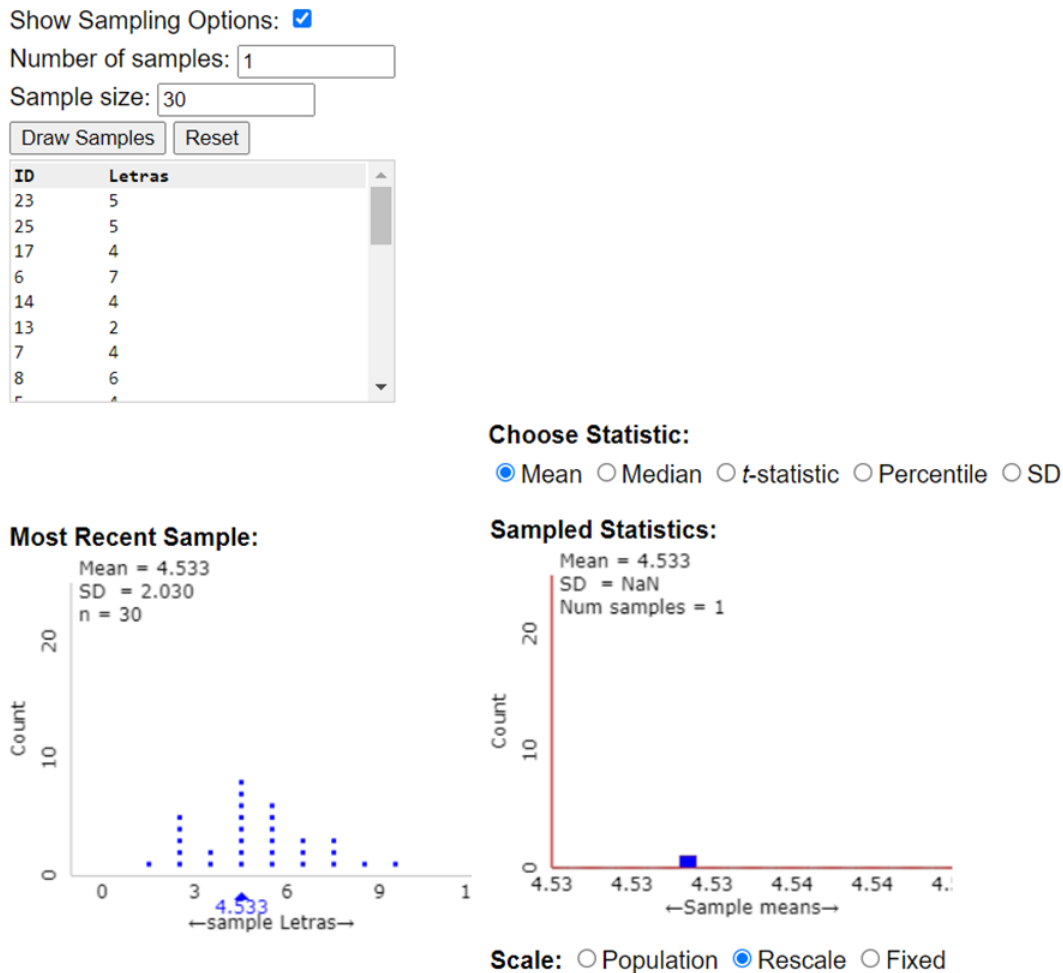


Figura 4.9: Ejemplo de simulación en la cuál solo se considera una muestra

En el simulador, donde aparece “number of samples” (número de muestras) correspondía colocar un número mayor a 1. No hay que olvidar que el propósito de la simulación es repetir un gran número de veces el experimento con el propósito de determinar qué tan probable es que el resultado obtenido o, en otras palabras, la evidencia observada, se haya debido al azar. Otro aspecto a considerar en lo realizado por este docente es que utilizó la versión en inglés del *applet*, a pesar de que se encontraba disponible la versión en español del mismo.

Cabe destacar que, si bien en un comienzo se presentaron dificultades con el uso del simulador porque no lo conocían, se evidenciaron mejoras en la última evaluación, en la cual todos los docentes aplicaron correctamente el Bootstrapping en la estrategia E2S, para posteriormente realizar inferencias a partir de lo realizado.

Respecto a la etapa 5 del PIE, en la cual se debe concluir a partir de lo realizado en los pasos anteriores y también, se busca responder la pregunta de investigación, se evidenció que en general no existían dificultades. Sin embargo, en el primer proyecto se evidenció que si bien los docentes lograban concluir apropiadamente si se rechazaba o no la hipótesis nula, un 75 % no respondió concretamente la pregunta de investigación.

12. A partir de los análisis realizados, concluye respecto a las hipótesis planteadas en esta variación al estudio. ¿Cómo se respondería a la pregunta de investigación?

- ✓ De la primera perspectiva del estudio, se concluye que no existe evidencia sólida para rechazar la hipótesis nula.
- ✓ Mientras que, al realizar la variación al estudio, se concluye que existe evidencia fuerte contra  $H_0$ . En este caso, se concluye que el parámetro de interés, que es la proporción de veces en que las personas predicen cara, no es  $\frac{1}{2}$ , por lo que se calculó un intervalo de confianza (al 95% de confianza) para dicha proporción, que es  $[0,5138; 0,6086]$ , siendo este intervalo un rango de valores plausibles para el parámetro de interés.

Figura 4.10: Ejemplo de una respuesta donde no se responde concretamente la pregunta de investigación planteada al inicio.

Como se evidencia en la figura 4.10, hubo docentes que concluyeron correctamente respecto a las hipótesis planteadas, es decir, determinaron correctamente si existía evidencia para rechazar la hipótesis nula. Pero si la pregunta planteada es: ¿las personas escogen más veces cara antes de lanzar una moneda?, la respuesta a la pregunta debería ser sí o no, a partir de las conclusiones obtenidas luego de la aplicación del PIE.

Sobre la etapa 6, cuyo propósito es hacer una revisión retrospectiva y determinar qué aspectos se hubieran realizado diferente, en general no se observaron dificultades. Cabe destacar de todas maneras que un aspecto relevante en este paso también es lograr determinar si los resultados obtenidos se pueden generalizar o no, a partir de la información que se conoce del estudio y de cómo se recolectaron los datos y en ese sentido, si se evidenciaron dificultades. Es necesario mencionar que esta pregunta en la cual se solicitó generalizar los resultados solo se realizó en la primera evaluación, con el propósito de determinar si los docentes tenían una idea previa de cuándo era posible generalizar un resultado.

Si bien hay docentes que mencionaron que era necesario conocer si la muestra era aleatoria o no para poder generalizar los resultados (Figura 4.11), otros no hicieron referencia a la aleatoriedad en sus respuestas, sino más bien a otros elementos, como los intervalos de confianza (Figura 4.12).

Sería posible extender los resultados obtenidos en la segunda investigación a toda la población, considerando el tamaño de la muestra, pero faltaría precisar cómo se obtuvo ésta (muestreo aleatorio o no).

Figura 4.11: Respuesta correcta: hace referencia a la aleatoriedad de la muestra.

La respuesta anterior puede considerarse correcta porque menciona la principal característica que debe tener la muestra para que se puedan generalizar los resultados, que es la aleatoriedad. Sin embargo, es necesario considerar también que la muestra además de ser aleatoria debe ser representativa de la población para poder asegurar que es posible generalizar.

**13. ¿Se podrán generalizar los resultados obtenidos a toda la población? Justifique.**

Mientras más grande sea la muestra que se escoja y con las mismas condiciones, se podría generalizar, además a medida que crece el porcentaje del intervalo de confianza se agranda la amplitud y por ende podemos encontrar el parámetro dentro de él.

Figura 4.12: Respuesta incorrecta: hace referencia a los intervalos de confianza y no se menciona que la muestra debe ser aleatoria.

Por otro lado, en esta respuesta se evidencia que el docente menciona a los intervalos de confianza, argumentando que mientras mayor sea el porcentaje del intervalo de confianza, este tendrá mayor amplitud y por lo tanto sería posible encontrar el parámetro en él. Esto quiere decir que la interpretación que se le da al intervalo en esta situación es, que al aumentar la confianza hay mayor probabilidad de encontrar el parámetro en cuestión y en consecuencia, se podrán generalizar los resultados, lo cual no ocurre. Además, una respuesta destacada es la que se observa en la siguiente imagen (figura 4.13).

Esta respuesta hace referencia a la aleatoriedad y la representatividad, pero además menciona el Teorema Central del Límite (TCL) y cuáles son las condiciones que deben tener los datos para que se pueda aplicar dicho teorema. La relevancia de esto radica en que, al poder aplicar el TCL, a partir de la información de la muestra se logra determinar información respecto a la población, en particular, de su distribución. Esto es lo que permite generalizar los resultados a toda la población, siempre que se cumplan las condiciones para aplicar el teorema.

13. ¿Se podrán generalizar los resultados obtenidos a toda la población? Justifique.

Para que los resultados puedan generalizarse a toda la población, es necesario que la muestra de estudiantes universitarios haya sido seleccionada de manera aleatoria y representativa. Si se asegura que la muestra es verdaderamente aleatoria y representa a la población de estudiantes universitarios en cuestión, entonces esta condición se cumple.

Si el tamaño de la muestra es lo suficientemente grande (en general, se considera que  $n > 30$  es suficiente), entonces la distribución de los medios de muestra tenderá a seguir una distribución normal. En este caso, el tamaño de la muestra es 400, lo que cumple con este requisito.

Las observaciones en la muestra deben ser independientes entre sí. Esto significa que las elecciones de los estudiantes deben ser independientes y no influenciadas por las elecciones de otros estudiantes. Si se aseguró que las elecciones fueron independientes, esta condición se cumple.

Finalmente, en comparación con el tamaño de la población total, el tamaño de la muestra es relativamente grande (400 en comparación con el tamaño total de estudiantes universitarios). Esto es favorable para la aplicación del Teorema del Límite Central, ya que permite que las muestras se consideren independientes y no afecten significativamente a la población.

Figura 4.13: Respuesta destacada: menciona la aleatoriedad y también el Teorema Central del Límite.

Ahora, desde un punto de vista más general, si se compara el desempeño de los docentes en las tres evaluaciones posteriores a cada sesión, se observa que hubo más dificultades al aplicar el PIE a una variable cuantitativa (media poblacional), específicamente en las etapas 2 y 4. Fue en esta sesión donde surgieron las dificultades asociadas a la conjetura de investigación, la cual relacionaban con la hipótesis nula.

Además, fue precisamente en la evaluación de la sesión 2 donde se presentaron mayores dificultades al momento de realizar simulaciones. Esto ocurrió debido a que, del mismo modo que se hizo en la implementación de la sesión 2, para aplicar la estrategia E2S se debía utilizar dos programas (Excel y un *applet*), lo cual dificultó en cierta medida el desempeño de los docentes en la etapa 4 del PIE.

Finalmente, cabe mencionar que si se analiza el desempeño de los profesores en los proyectos, se evidencia un progreso en sus evaluaciones, ya que las calificaciones obtenidas fueron mejorando con el desarrollo de las sesiones. Esto refleja que el conocimiento del contenido de cada uno de los docentes fue consolidándose a medida que avanzaba la implementación de las sesiones. Enseguida se presentan las conclusiones de esta investigación, referidas al cumplimiento de las metas propuestas al inicio y también, se señalan las limitaciones y proyecciones de este estudio.

## Capítulo 5

# Conclusión

En este capítulo, que corresponde al apartado final de la investigación, se presenta un resumen de los hallazgos más relevantes obtenidos en este estudio. Además, se describe de qué manera el proceso realizado y los resultados obtenidos permiten responder a la pregunta de investigación planteada al inicio. Adicionalmente, se explica en qué medida se cumplieron los objetivos presentados. Estos aspectos son abordados en la primera parte, referida a la discusión. Luego, se presenta una sección donde se mencionan las limitaciones del estudio, así como nuevas perspectivas para el mismo.

### 5.1. Discusión

Con respecto a los hallazgos de esta investigación, en primer lugar, se debe mencionar que a partir del estudio de nuevas metodologías que conceptualizan a la estadística como un proceso, es posible estructurar una clase a partir de estos marcos referenciales. En este caso, tal como se evidenció en el ejemplo planteado en el primer apartado de los resultados, se puede diseñar una clase a partir de las etapas del PIE. A diferencia de la manera habitual en la que se enseña estadística, la cual inicia enseñando tópicos relacionados con estadística descriptiva, luego probabilidades y, finalmente, inferencia; esta nueva perspectiva permite ir relacionando conceptos, consolidando así el conocimiento sobre los mismos.

A partir de lo señalado en el párrafo anterior, la aplicación del PIE en el aula tendría un impacto positivo en el conocimiento estadístico de los estudiantes, en particular, de los conceptos relacionados de inferencia, ya que en este proceso son fundamentales. Sin embargo, para poder realizar clases con esta perspectiva, el docente de matemáticas debe conocer las etapas del PIE, pero además tiene que dominar los contenidos que va a enseñar, porque a pesar de que este proceso se basa en el método científico y posee etapas donde se realizan simulaciones, siempre es necesario formalizar la teoría involucrada, y para eso los profesores deben tener un conocimiento sólido del contenido.

Es en este punto donde se presentan las dificultades, ya que, de acuerdo con el problema de investigación planteado, los docentes no tienen los conocimientos para poder enseñar los contenidos de inferencia estadística. Precisamente por esto surge la necesidad de actualizar el conocimiento del contenido que tienen los profesores de matemática, a través del estudio de contenidos de inferencia estadística a partir del PIE. Cabe destacar que el otro propósito de enseñar utilizando el PIE fue que los docentes que participaron de la implementación, conocieran las etapas del proceso para posteriormente aplicarlo en sus propias clases.

Sobre la adaptación e implementación de sesiones sobre los contenidos de inferencia estadística, se debe considerar que, si bien se utilizaron como referencia unas clases que ya se habían realizado con docentes en formación, las nuevas sesiones consideraron una cantidad de información mucho mayor. Como el propósito de la implementación con los profesores del diplomado era enseñarles los conceptos de estadística y prepararlos para poder explicar los contenidos de la asignatura de profundización “Probabilidades y Estadísticas Descriptiva e Inferencial”, las sesiones debían abordar todos los conceptos de inferencia que están presentes en el programa, desde contraste de hipótesis para la proporción hasta conceptos relacionados con regresión lineal.

En concordancia con las orientaciones para el docente, las cuales son entregadas por el programa de la asignatura de profundización, en las sesiones adaptadas se consideró el uso de Excel y también de applets para hacer análisis descriptivos, realizar simulaciones y para corroborar el cálculo de intervalos de confianza. La incorporación de estas herramientas tecnológicas facilitó la comprensión de los docentes sobre los conceptos estadísticos. Esto deja como evidencia que el uso de aplicaciones es esencial para mejorar la calidad de la enseñanza en el aula, puesto que, lo que ocurrió con profesores también ocurriría con estudiantes de enseñanza media.

Por otra parte, las evaluaciones realizadas a los docentes del diplomado después de cada sesión no solo constituyen un indicador de su desempeño, sino que también sirven como guía para anticipar y abordar posibles errores y dificultades que los estudiantes podrían enfrentar al aprender esos conceptos estadísticos. Estos resultados tienen implicaciones tangibles para mejorar la calidad de la enseñanza de la estadística. Por ejemplo, si en las evaluaciones con los docentes se presentaron dificultades para comprender la relación entre el estadístico observado y la conjetura de investigación, para una clase con estudiantes de enseñanza media se puede enfatizar en eso utilizando más de un ejemplo. O también, si se observaron dificultades con el uso de algún applet, se puede destinar una clase a que se realicen las primeras cuatro etapas del PIE con énfasis en la estrategia E2S, para que los alumnos se acostumbren a la aplicación y posteriormente puedan utilizarla sin dificultades.

De todo el proceso realizado en la investigación, se puede concluir que sí es posible actualizar el conocimiento del contenido estadístico de los docentes de matemática en ejercicio y a su vez, mostrarles ejemplos de buenas prácticas de enseñanza del contenido para que puedan replicar posteriormente en sus clases. Esto se acredita con el desempeño que tuvieron los profesores en las evaluaciones, ya que sus calificaciones fueron mejorando a medida que avanzaban las sesiones. Además, la utilización del PIE y herramientas tecnológicas en las sesiones permitieron que los profesores aprendieran los contenidos, pero además, conocieran una nueva forma en la cuál explicar esos contenidos a sus propios estudiantes.

Por todo lo expuesto anteriormente, este estudio no solo ha cumplido satisfactoriamente con los objetivos propuestos inicialmente, sino que también ha proporcionado una visión detallada y enriquecedora de los desafíos y oportunidades en la enseñanza de la inferencia estadística. La adaptación y aplicación de módulos de enseñanza y aprendizaje, junto con la evaluación del rendimiento de los docentes, no solo han contribuido a mejorar la comprensión de estos conceptos, sino que también han allanado el camino para mejoras tangibles en la calidad de la educación estadística.

A partir de los resultados de la investigación, se destaca la importancia de desarrollar instancias más masivas para la actualización de la formación de profesores de matemática, especialmente considerando su papel crucial en la enseñanza de los contenidos de estadística en el currículum. En la siguiente sección se presentan las limitaciones y las proyecciones de este estudio.

## 5.2. Limitaciones y proyecciones

Aunque los objetivos se alcanzaron con éxito, es imperativo reconocer las limitaciones de este estudio. La principal de ellas radica en la no aleatoriedad de la muestra, ya que los docentes participantes fueron seleccionados de manera voluntaria al inscribirse en el Diplomado en Educación Estadística. Futuras investigaciones deben abordar esta limitación mediante el uso de muestras aleatorias que sean representativas de la diversidad de la realidad nacional.

Adicionalmente, se identificó como una limitación el factor tiempo. Aunque el diplomado contemplaba 80 horas, solo 12 se destinaron al primer módulo donde se implementó la propuesta. Esta restricción temporal generó desafíos, ya que, además de abordar el PIE, era necesario formalizar contenidos de inferencia estadística, y el tiempo limitado a veces dificultaba atender todas las consultas relevantes de los participantes.

Por otra parte, si se buscan nuevas perspectivas para este mismo estudio, destaca la necesidad de explorar cómo la enseñanza no tradicional influye en la comprensión estadística de los estudiantes. A partir de las mejoras observadas en el conocimiento del contenido de los profesores, se sugiere que los docentes de matemática incorporen el PIE en su enseñanza, permitiendo un análisis posterior de los resultados obtenidos al aplicar esta perspectiva, con el propósito de determinar el efecto de la enseñanza bajo este paradigma.

[Arnold et al. \(2018\)](#) conceptualizan las trayectorias de aprendizaje como una descripción del pensamiento y de los comportamientos que es probable que surjan, a medida que los alumnos progresan en su comprensión de un concepto. Dichas trayectorias se construyen considerando el objetivo de aprendizaje, las hipótesis sobre el proceso de aprendizaje y también, las actividades de aprendizaje asociadas al contenido. En ese sentido, se podrían diseñar clases basadas en el espiral del PIE, considerando las posibles trayectorias de aprendizaje de los estudiantes y también, tomando en cuenta los resultados de esta investigación, puesto que las dificultades o errores observados en la muestra de los docentes, pueden ocurrir también en una clase con estudiantes de enseñanza media.

Cabe destacar que el uso de las trayectorias de aprendizaje como instrumento de investigación suele asociarse a la metodología de la investigación basada en el diseño, debido a que durante la secuencia de enseñanza, los investigadores pueden determinar cómo se produce el aprendizaje en la práctica real y, mediante una reflexión crítica, pueden ajustar o modificar el plan para la siguiente lección ([Arnold et al., 2018](#)).

En síntesis, este trabajo no solo contribuye al conocimiento de la enseñanza de la estadística, sino que también proporciona a los educadores una guía valiosa para mejorar su práctica docente. La superación de las limitaciones planteadas abrirá nuevas oportunidades para investigaciones más exhaustivas y con un impacto más amplio.

# Referencias

- Acevedo, N. A. S., y Hernández, B. R. R. (2020). Análisis de las actividades propuestas en dos programas de estudio chilenos en el eje de estadística y probabilidad. *IE Revista de Investigación Educativa de la REDIECH*, 11, 1-24. doi: 10.33010/ie\_rie\_rediech.v11i0.776
- Anderson, T. (2005). Design-based research and its application to a call centre innovation in distance education. *Canadian Journal of Learning and Technology/La revue canadienne de l'apprentissage et de la technologie*, 31.
- Arnold, P., Confrey, J., Jones, R. S., Lee, H. S., y Pfannkuch, M. (2018). Statistics learning trajectories. En (p. 295-326). doi: 10.1007/978-3-319-66195-7\_9
- Arnold, P., y Franklin, C. (2021). What makes a good statistical question? *Journal of Statistics and Data Science Education*, 29(1), 122–130.
- Ball, D. L., Thames, M. H., y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching. *Journal of Teacher Education*, 59, 389-407. doi: 10.1177/0022487108324554
- Bargagliotti, A., Franklin, C., Arnold, P., Johnson, S., Perez, L., Spangler, D. A., y Gould, R. (2021). *Pre-k-12 guidelines for assessment and instruction in statistics education ii (gaise ii) a framework for statistics and data science education writing committee the pre-k-12 guidelines for assessment and instruction*.
- Batanero, C. (2004). Los retos de la cultura estadística. *Yupana. Revista de Educación Matemática de la UNL*, 1, 27-36.
- Brown, A. L. (1992). Design experiments: Theoretical and methodological challenges in creating complex interventions in classroom settings. *Journal of the learning sciences*, 2, 141-178.
- Chance, B., Wong, J., y Tintle, N. (2016). Student performance in curricula centered on simulation-based inference: A preliminary report. *Journal of Statistics Education*, 24, 114-126. doi: 10.1080/10691898.2016.1223529
- Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., y Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher*, 32, 9-13. doi: 10.3102/0013189X032001009
- Collins, A. (1992). Toward a design science of education. En (p. 15-22). Springer Berlin Heidelberg. doi: 10.1007/978-3-642-77750-9\_2
- Contreras, J. M., y Portillo, E. M. (2019). Elementos clave de la cultura estadística en el análisis de la información basada en datos. En J. M. Contreras, M. M. G. Serrano, M. del Mar López Martín, y E. M. Portillo (Eds.), .
- Easterday, M., Lewis, D. R., y Gerber, E. (2014). Design-based research process: Problems, phases, and applications..
- Eyler, D., Shalla, Z., Doumaux, A., y McDevitt, T. (2009). Winning at rock-paper-scissors. *The College Mathematics Journal*, 40(2), 125–128.
- Gal, I. (2002). Adults' statistical literacy: Meanings, components, responsibilities. *International Statistical Review*, 70, 1-25. doi: 10.1111/j.1751-5823.2002.tb00336.x
- García-García, F. J., Quesada-Armenteros, A., Ariza, M. R., y Gallego, A. M. A. (2019). Promover la indagación en matemáticas y ciencias: desarrollo profesional docente en primaria y

- secundaria. *Educación XX1*, 22. doi: 10.5944/educxx1.23513
- Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN - Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 5, 13-31.
- Groth, R., y Meletiou-Mavrotheris, M. (2018). Research on statistics teachers' cognitive and affective characteristics. En (p. 327-355). doi: 10.1007/978-3-319-66195-7\_10
- Hill, H. C., Ball, D. L., y Schilling, S. G. (2008, 7). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39, 372-400. doi: 10.5951/jresmetheduc.39.4.0372
- Leavy, A. (2010). The challenge of preparing preservice teachers to teach informal inferential reasoning. *STATISTICS EDUCATION RESEARCH JOURNAL*, 9, 46-67. doi: 10.52041/serj.v9i1.387
- Mason, J. (2016). Perception, interpretation and decision making: understanding gaps between competence and performance—a commentary. *ZDM*, 48, 219-226. doi: 10.1007/s11858-016-0764-1
- McKenney, S., y Reeves, T. C. (2014). Educational design research. En (p. 131-140). Springer New York. doi: 10.1007/978-1-4614-3185-5\_11
- MINEDUC. (2012). *Bases curriculares educación básica*.
- MINEDUC. (2015). *Bases curriculares 7° a 2° medio*.
- MINEDUC. (2018). *Bases curriculares educación parvularia*.
- MINEDUC. (2019). *Bases curriculares 3° y 4° medio*.
- MINEDUC. (2021). *Programa de estudio probabilidades y estadística descriptiva e inferencial*.
- MINEDUC, y CPEIP. (2021). *Estándares de la profesión docente: Carreras de pedagogía en matemática educación media*.
- Ocaña-Riola, R. (2017). La necesidad de convertir la estadística en profesión regulada. *Estadística Española*, 59, 193-212.
- Pfannkuch, M., Budgett, S., Fewster, R., Fitch, M., Pattenwise, S., Wild, C., y Ziedins, I. (2016, 11). Probability modeling and thinking: What can we learn from practice? *STATISTICS EDUCATION RESEARCH JOURNAL*, 15, 11-37. doi: 10.52041/serj.v15i2.238
- Pino-Fan, L., y Godino, J. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *Paradigma*, 36, 87-109.
- Pino-Fan, L., Godino, J. D., y Font, V. (2018). Assessing key epistemic features of didactic-mathematical knowledge of prospective teachers: the case of the derivative. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 21, 63-94. doi: 10.1007/s10857-016-9349-8
- Ruz, F. (2021). Formación estadística de futuros profesores de matemática chilenos.
- Ruz, F., Chance, B., Medina, E., y Contreras, J. M. (2021). Content knowledge and attitudes towards stochastics and its teaching in pre-service Chilean mathematics teachers. *STATISTICS EDUCATION RESEARCH JOURNAL*, 20, 5. doi: 10.52041/serj.v20i1.100
- Ruz, F., Portillo, E. M., y García, J. M. C. (2020). Evaluación de conocimientos sobre el contenido de estadística descriptiva de futuros profesores de matemáticas. *Avances de investigación en educación matemática*.
- Sampieri, R. H., Collado, C. F., y Lucio, P. B. (2018). *Metodología de la investigación* (Vol. 4). McGraw-Hill Interamericana México.
- Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15, 4-14. doi: 10.3102/0013189X015002004
- Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57, 1-23. doi: 10.17763/haer.57.1.j463w79r56455411
- Strutchens, M. E., Huang, R., Losano, L., Potari, D., de Costa Trindade Cyrino, M. C., da Ponte, J. P., y Zbiek, R. M. (2017). *The mathematics education of prospective secondary teachers*

*around the world*. Springer International Publishing. doi: 10.1007/978-3-319-38965-3

Tintle, N., Chance, B., Cobb, G., Rossman, A., Roy, S., Swanson, T., y VanderStoep, J. (2016). *Introduction to statistical investigations*. John Wiley Sons.

Wild, C. J., y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review*, 67, 223-248. doi: 10.1111/j.1751-5823.1999.tb00442.x

## Apéndice A

# Evaluación Diagnóstica

Las preguntas de la evaluación diagnóstica aparecen desde la página 55 en adelante.

Este cuestionario tiene como propósito recoger información sobre el conocimiento y actitudes hacia la estocástica y su enseñanza en profesores chilenos. Las respuestas proporcionadas son totalmente confidenciales y son parte del secreto estadístico (Ley 17.374 art. 29).

|      |
|------|
| RUT: |
|------|

|  |
|--|
| <b>PARTE 0:</b> ¿Qué entiende por inferencia estadística? Explique, puede usar un ejemplo (máx. 3 líneas). |
|--|

|   |                  |                |               |                   |
|---|------------------|----------------|---------------|-------------------|
| <b>PARTE 1: ACTITUDES HACIA LA ESTOCÁSTICA Y SU ENSEÑANZA(AEE)</b>  |                  |                |               |                   |
| Se plantea una serie de enunciados referidos a aspectos actitudinales hacia la estocástica y su enseñanza. Le solicitamos que lea cuidadosamente cada uno y lo <b>califique según su grado de acuerdo o desacuerdo</b> , entre: |                  |                |               |                   |
| 1: Muy en desacuerdo  | 2: En desacuerdo | 3: Indiferente | 4: De acuerdo | 5: Muy de acuerdo |

| Enunciado  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|--|---|---|---|---|---|
| 1.1) Me divierto en las clases en las que se explican los contenidos de inferencia estadística.                              |   |   |   |   |   |
| 1.2) Utilizo información inferencial a la hora de tomar decisiones basadas en datos e incertidumbre.                         |   |   |   |   |   |
| 1.3) Es difícil para mí enseñar los temas de inferencia estadística.   |   |   |   |   |   |
| 1.4) La inferencia estadística ayuda a entender el mundo de hoy.   |   |   |   |   |   |
| 1.5) Me gusta la inferencia estadística, es un tema que siempre me ha interesado.  |   |   |   |   |   |
| 1.6) La inferencia estadística es fácil.   |   |   |   |   |   |
| 1.7) Nunca he usado la inferencia estadística fuera de un contexto científico.   |   |   |   |   |   |
| 1.8) Domino los principales contenidos de inferencia estadística.  |   |   |   |   |   |
| 1.9) Tengo seguridad de que me gustará enseñar los contenidos de inferencia estadística en la escuela.                       |   |   |   |   |   |
| 1.10) Creo que sabré detectar y corregir errores/dificultades de alumnos en temas de inferencia estadística.                 |   |   |   |   |   |
| 1.11) Solo enseño inferencia estadística si me queda tiempo después de los otros temas.                                      |   |   |   |   |   |
| 1.12) La inferencia estadística no sirve para nada.  |   |   |   |   |   |
| 1.13) La inferencia estadística no tiene tanto valor como otras ramas de la estadística.                                     |   |   |   |   |   |
| 1.14) Me resulta fácil diseñar actividades de evaluación sobre inferencia estadística.                                       |   |   |   |   |   |
| 1.15) Uso la inferencia estadística en la vida cotidiana.  |   |   |   |   |   |
| 1.16) Me siento intimidado/a ante datos o información con inferencias estadísticas.  |   |   |   |   |   |
| 1.17) La inferencia estadística la entiende solo la gente del área científica.   |   |   |   |   |   |
| 1.18) Evito leer informaciones donde aparecen términos de inferencia estadística.  |   |   |   |   |   |
| 1.19) Los conocimientos sobre inferencia estadística ayudan a los alumnos a razonar críticamente.                            |   |   |   |   |   |
| 1.20) Se debería dedicar más tiempo a enseñar inferencia estadística en los primeros niveles de educación.                   |   |   |   |   |   |
| 1.21) Me agobia saber responder preguntas de inferencia estadística de mis alumnos.  |   |   |   |   |   |
| 1.22) No me siento preparado/a para resolver cualquier problema de inferencia estadística.                                   |   |   |   |   |   |
| 1.23) Pienso que no soy capaz de preparar recursos didácticos apropiados para clases de inferencia estadística.              |   |   |   |   |   |
| 1.24) Cuando sea pertinente, utilizaré la inferencia estadística en los otros ejes del currículo de matemática que enseñaré. |   |   |   |   |   |
| 1.25) Si pudiera eliminar alguna materia del currículo de matemática sería la inferencia estadística.                        |   |   |   |   |   |
| 1.26) No tengo mucho interés en enseñar los temas de inferencia estadística, aunque aparezcan en el currículo.               |   |   |   |   |   |
| 1.27) No me agrada resolver problemas de inferencia estadística.   |   |   |   |   |   |
| 1.28) Como profesor/a, me siento cómodo/a al enseñar inferencia estadística.   |   |   |   |   |   |

CUESTIONARIO AEE - CCAE

**PARTE 2: CONOCIMIENTO DEL CONTENIDO DE ESTOCÁSTICA (CCA)**

En esta etapa, se presentan preguntas tipo test, donde sólo una es correcta. Responda seleccionando **UNA opción** como respuesta, salvo cuando se indique lo contrario.

**2.1)** Una gran universidad seleccionó una muestra de sus estudiantes, los cuales actualmente viven en dormitorios de uno de sus campus. El propósito era estimar la proporción de estudiantes que prefieren habitaciones individuales, habitaciones dobles o habitaciones múltiples (más de dos personas).

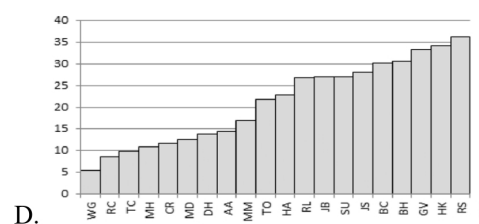
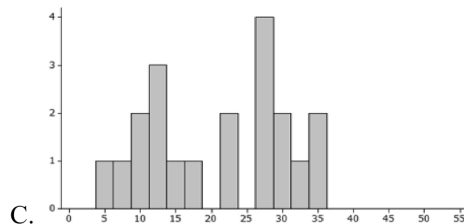
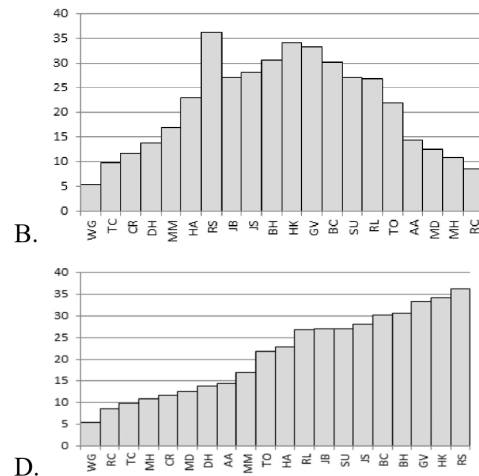
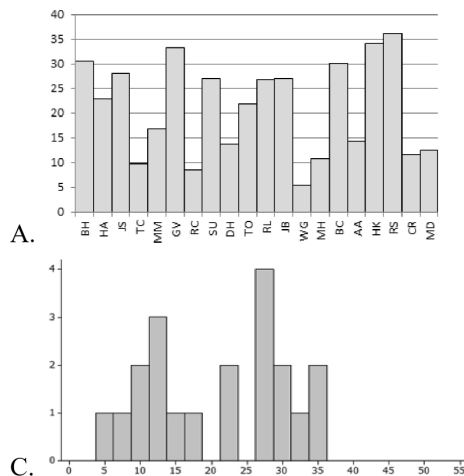
¿Cuál de las siguientes opciones se debe tener en consideración, al momento de decidir si los resultados de esta muestra se pueden generalizar a todos los estudiantes de esta universidad que actualmente viven en los campus? (puede seleccionar más de una alternativa)

- A. Si la muestra se seleccionó al azar o no.
- B. El tamaño de la muestra en comparación con el número de estudiantes que viven en dormitorios de los campus.
- C. Si la universidad encuestó al menos a 100 estudiantes.
- D. El porcentaje de estudiantes contactados que respondieron a la consulta.

**2.2)** Una profesora registró el tiempo que le tomó a sus estudiantes completar un examen en particular (en minutos). Estos tiempos (junto con las iniciales de los estudiantes) se registran en la siguiente tabla.

| Estudiante | Tiempo | Estudiante | Tiempo | Estudiante | Tiempo | Estudiante | Tiempo |
|------------|--------|------------|--------|------------|--------|------------|--------|
| BH         | 31     | GV         | 33     | RL         | 27     | AA         | 14     |
| HA         | 23     | RC         | 9      | JB         | 27     | HK         | 34     |
| JS         | 28     | SU         | 27     | WG         | 5      | RS         | 36     |
| TC         | 10     | DH         | 14     | MH         | 11     | CR         | 12     |
| MM         | 17     | TO         | 22     | BC         | 30     | MD         | 13     |

¿Cuál de los siguientes gráficos visualiza de forma adecuada la distribución de los tiempos, permitiendo a la profesora describir la forma, el centro y la variabilidad de los tiempos de finalización del examen?



CUESTIONARIO AEE - CCAE

**2.3-5)** Un curso de estadística de un colegio quiere estimar el peso promedio de una galleta de cierta marca genérica de galletas con chips de chocolate. Para ello, recolectan una muestra aleatoria de 50 galletas de dicha marca y calculan el peso (en gramos) de cada una. Según sus resultados, el intervalo de confianza del 95 % para el peso medio por galleta es de 25,65 a 26,35 gramos.

Para cada una de las siguientes tres afirmaciones, indique si la conclusión expresada es válida o inválida.

**2.3)** Podemos inferir con un 95 % de confianza que una galleta seleccionada al azar fabricada para esta marca genérica pesará entre 25,65 y 26,35 gramos.

- A. Válido
- B. Inválido

**2.4)** Podemos inferir con un 95% de confianza que el peso medio de todas las galletas fabricadas para esta marca genérica está entre 25,65 y 26,35 gramos.

- A. Válido
- B. Inválido

**2.5)** Podemos inferir con un 95% de confianza que el peso medio de 50 galletas seleccionadas al azar de las fabricadas para esta marca genérica estará entre 25,65 y 26,35 gramos.

- A. Válido
- B. Inválido

**2.6-7)** Doscientas cincuenta personas, que sufren constantes dolores de cabeza, aceptaron participar en un estudio. Cien de estas fueron seleccionadas al azar para recibir un nuevo medicamento, que debían tomar cuando sufrieran dolor de cabeza, y las otras 150 personas recibieron su medicamento habitual. Se registró el tiempo hasta que las personas ya no padecieran este dolor. Los resultados se muestran a continuación.

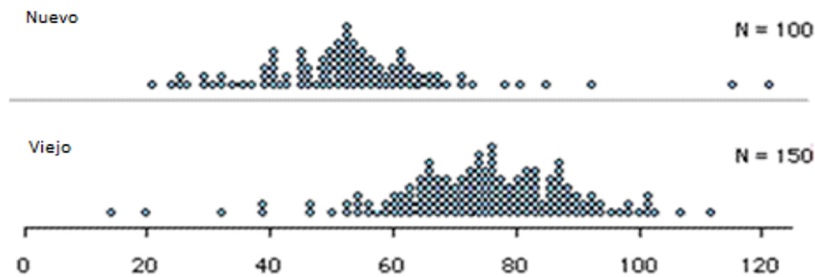


Figura. Tiempo de acceso a la página de prueba (en minutos)

**2.6)** ¿Cuál de las siguientes conclusiones es la más acertada para estos datos?

- A. Se debe preferir el nuevo medicamento. Las personas que tomaron el nuevo medicamento comenzaban a sentir alivio, en promedio, 20 minutos antes que los que tomaron el medicamento habitual.
- B. Ninguno de los dos medicamentos es preferible. El número de pacientes en los dos grupos no es el mismo, por lo que no corresponde compararlos.
- C. El medicamento habitual es más efectivo. Dos personas que tomaron el medicamento habitual comenzaron a sentir alivio en menos de 20 minutos, mientras que ninguno de los que tomaron el nuevo medicamento lograron alivio en ese mismo tiempo. Además, el peor resultado lo obtuvo el nuevo medicamento, donde las personas demoraron cerca de 120 minutos en sentir alivio.

CUESTIONARIO AEE - CCAE

---

**2.7)** Supongamos que el estudio encuentra una tendencia estadísticamente significativa para un alivio más rápido con el nuevo medicamento. A partir de esto, ¿podemos concluir que el nuevo medicamento produce un alivio más rápido entre las personas que participaron en el estudio?

- A. Sí, porque este fue un experimento aleatorio y estadísticamente significativo.
- B. Sí, porque ambos tamaños de muestra están por sobre las 50 personas.
- C. No, porque probablemente la diferencia se debió al azar.
- D. No, porque los tamaños de las muestras fueron demasiado pequeños.

**2.8-9)** Un investigador en ciencias ambientales realizó un estudio para determinar el impacto de un herbicida en particular, en el nivel de una determinada enzima de un pez. Asignó aleatoriamente 60 peces sanos, 30 fueron a un grupo de tratamiento expuesto al herbicida y los restantes a un grupo de control que no estuvieron expuestos al herbicida. Al final del estudio el investigador calculó que el nivel promedio de la enzima era más alto en los peces expuestos al herbicida en comparación a los que no estuvieron expuestos. Pero cuando realizó una prueba de hipótesis, concluyó que no había diferencias estadísticamente significativas.

Para cada una de las siguientes afirmaciones, indique si la conclusión es correcta o incorrecta.

**2.8)** Es plausible que el herbicida no tuviera un impacto en el nivel de la enzima, pero quizás el tamaño de la muestra puede que haya sido demasiado pequeño para detectar la diferencia.

- A. Correcta
- B. Incorrecta

**2.9)** Existe evidencia suficiente de que el herbicida no tiene un impacto en el nivel de la enzima.

- A. Correcta
- B. Incorrecta

**2.10)** Investigadores encuestaron a 1000 adultos seleccionados al azar en los EE. UU. Se encontró una asociación positiva fuerte, estadísticamente significativa, entre el nivel de ingresos y el número de contenedores de reciclaje que normalmente recolectan en una semana. Seleccione la mejor interpretación de este resultado.

- A. Se puede concluir que a mayores ingresos mayor es el reciclaje entre los adultos estadounidenses, porque la asociación es estadísticamente significativa.
- B. No se puede concluir que a mayores ingresos es mayor el reciclaje, porque este tipo de estudio no permite inferir causalidad.
- C. No se puede concluir que a mayores ingresos es mayor el reciclaje, porque la muestra es demasiado pequeña para obtener conclusiones sobre la asociación entre el nivel de ingresos y la cantidad de reciclaje.

**2.11)** Estados Unidos tiene más de 310 millones de habitantes. Suponga que se desea estimar la proporción de estadounidenses que desayunaron esta mañana con un margen de error de 3 puntos porcentuales con un 95% de confianza. ¿Aproximadamente cuántas personas necesitarían muestrear aleatoriamente? (suponiendo que todas respondieran la encuesta). Seleccione la mejor alternativa.

- A. 30
- B. 1.500
- C. 300.000
- D. 10.000.000

CUESTIONARIO AEE - CCAE

**2.12)** Un estudiante de post grado está desarrollando una investigación, en la que espera demostrar que los resultados de un experimento son estadísticamente significativos. ¿Qué tipo de p-valor debería obtener?

- A. La magnitud del p-valor no tiene impacto en la significancia estadística.
- B. Un p-valor grande
- C. Un p-valor pequeño

**2.13-16)** Un artículo de investigación informa los resultados de una nueva prueba de drogas. Se supone que el fármaco reduce la pérdida de visión en personas con degeneración macular (un tipo de trastorno ocular) con más eficacia que el tratamiento actual. El artículo reporta un p-valor de 0,04 en la sección de análisis.

Indica si las siguientes afirmaciones son interpretaciones correctas o incorrectas sobre el p-valor.

**2.13)** Se concluye que el nuevo fármaco no es efectivo porque solo hay una probabilidad 0,04 de que el fármaco sea más eficaz que el tratamiento actual.

- A. Válido
- B. Inválido

**2.14)** Se concluye que el nuevo fármaco es efectivo porque resultados como los encontrados, o incluso más favorables a la nueva droga, solo sucederían el 4% de las veces si el fármaco no fuera efectivo.

- A. Válido
- B. Inválido

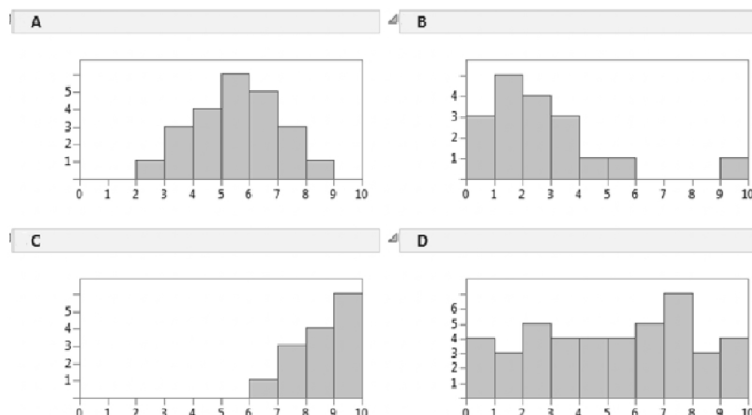
**2.15)** Se concluye que el nuevo fármaco es efectivo porque solo hay un 4% de posibilidades de que no lo sea.

- A. Válido
- B. Inválido

**2.16)** Se concluye que el nuevo fármaco no es efectivo porque la diferencia en la proporción de pacientes con degeneración macular con pérdida de visión entre los dos tratamientos es de solo 0,04.

- A. Válido
- B. Inválido

**2.17-18)** A continuación, se muestran cuatro histogramas. Haga coincidir la descripción con el histograma apropiado.



CUESTIONARIO AEE - CCAE

**2.17)** La distribución del penúltimo dígito de los números telefónicos de una muestra de estudiantes de una clase (por ejemplo, para el número de teléfono 968-9667 el penúltimo dígito es 6) está mejor representada por:

- A. Histograma A
- B. Histograma B
- C. Histograma C
- D. Histograma D

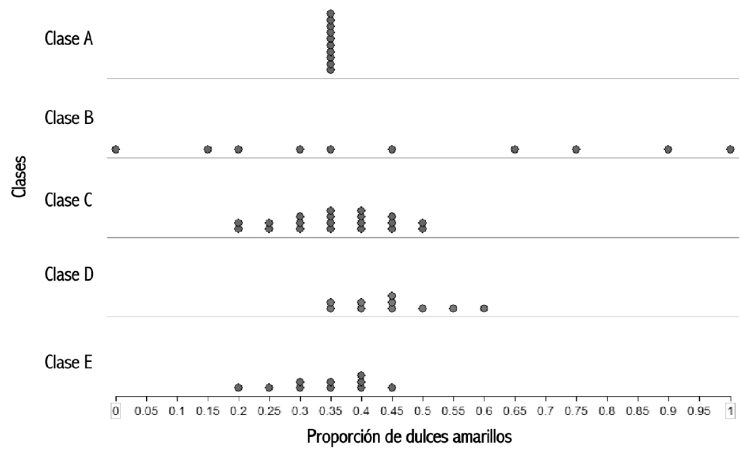
**2.18)** La distribución de los puntajes en una prueba de 10 puntos donde la prueba fue muy fácil y la mayoría de los estudiantes lo hizo bien, está mejor representada por:

- A. Histograma A
- B. Histograma B
- C. Histograma C
- D. Histograma D

**2.19)** Supongamos que, en una universidad con muchos estudiantes, el 15% de ellos son zurdos. Sam planea tomar una muestra aleatoria de 100 estudiantes a quienes preguntar si son zurdos o no. Kerry planea preguntarle a una muestra aleatoria de 50 estudiantes si son zurdos o no. ¿Quién, Sam o Kerry, es más probable que encuentre que más del 25% de su muestra es zurda?

- A. Sam porque es más probable que una muestra más grande tenga más estudiantes zurdos.
- B. Kerry porque es más probable que una muestra más pequeña tenga más estudiantes zurdos.
- C. Kerry porque hay más variabilidad en la proporción de estudiantes zurdos entre las muestras más pequeñas.
- D. Sam porque hay más variabilidad en la proporción de estudiantes zurdos entre muestras más grandes.
- E. Ambos tienen la misma oportunidad porque ambos planean seleccionar una muestra aleatoria de una población en la que el 15% son zurdos.

**2.20)** Imagina que tienes un barril que contiene miles de caramelos de diferentes colores, producidos a partir de un determinado proceso de fabricación. Sabemos que dicho proceso produce caramelos amarillos el 35% de las veces. Cada uno de diez estudiantes toma una muestra aleatoria de 20 dulces del barril e individualmente registra la proporción de dulces amarillos en su muestra.



CUESTIONARIO AEE - CCAE

---

¿Cuál de los diagramas de puntos anteriores es el más probable para los resultados de estos diez estudiantes?

- A. Curso A
- B. Curso B
- C. Curso C
- D. Curso D
- E. Curso E

**2.21)** La siguiente tabla se construye a partir de los registros de accidentes recopilados por una Oficina Estatal de Seguridad Vial y Vehículos a Motor. Dicha oficina quiere decidir si los conductores tienen menos probabilidades de tener un accidente fatal si usan el cinturón de seguridad que si no lo usan.

| Equipo de seguridad en uso | Lesión No fatal | Lesión Fatal | Total Fila     |
|----------------------------|-----------------|--------------|----------------|
| Cinturón de seguridad      | 412.368         | 510          | 412.878        |
| Sin cinturón de seguridad  | 162.527         | 1.601        | 164.128        |
| <b>Total Columna</b>       | <b>574.895</b>  | <b>2.111</b> | <b>577.006</b> |

¿Cuál de las siguientes comparaciones es la más apropiada para apoyar esta conclusión?

- A. Comparar las proporciones  $510/412.878$  y  $1.601/164.128$
- B. Comparar las proporciones  $510/577.006$  y  $1.601/577.006$
- C. Comparar las proporciones  $412.368/412.878$  y  $510/412.878$
- D. Comparar los números 510 y 1601

**2.22-24)** Una estudiante afirma que con los ojos vendados puede distinguir entre los sabores de Coca-Cola y Pepsi con un sólo sorbo. Sus amigos le permiten tomar una muestra de cada refresco y luego repetir el proceso 10 veces, decidiendo al azar cuál prueba primero. Ella identifica correctamente qué refresco es ocho veces de los diez intentos. Ella afirma que esto prueba que puede distinguir de manera confiable la diferencia entre los dos refrescos. Deseas determinar la probabilidad de que alguien acierte al menos ocho de cada diez intentos, si realmente no pudiera notar la diferencia entre los dos refrescos.

Para cada una de las tres siguientes afirmaciones que a continuación se presentan, marque si es un método correcto o incorrecto para proporcionar una estimación precisa de esta probabilidad.

**2.22)** Hacer que el alumno repita este experimento muchas veces y calcule la proporción (%) de veces que distingue correctamente entre ambas marcas.

- A. Correcto
- B. Incorrecto

**2.23)** Simular este proceso una gran cantidad de veces en un computador con un 50% de posibilidades de adivinar el refresco correcto en cada intento, y calcular la proporción de veces en que hay ocho o más aciertos en diez intentos.

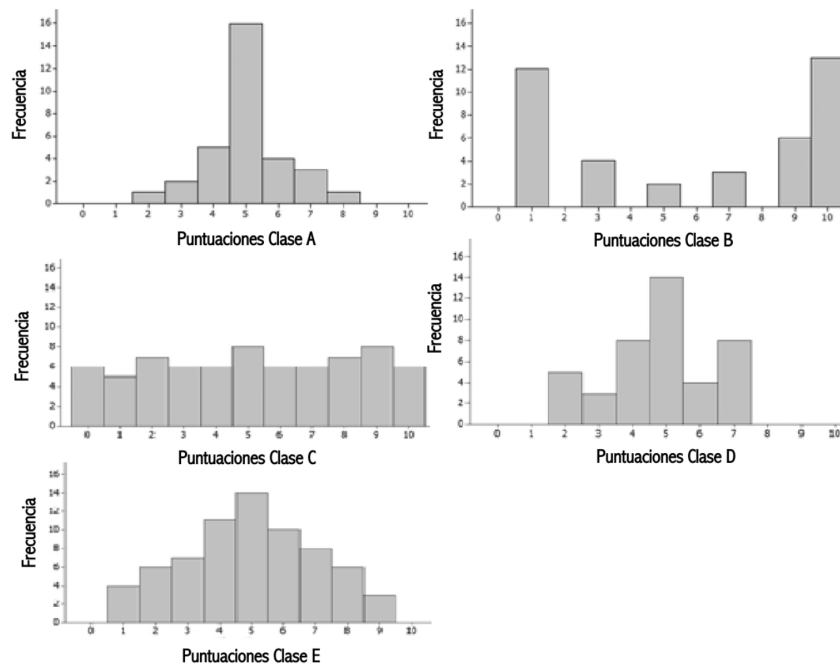
- A. Correcto
- B. Incorrecto

CUESTIONARIO AEE - CCAE

**2.24)** Repetir este experimento con una muestra muy grande de personas y calcular el porcentaje de ellas que aciertan ocho de cada diez intentos.

- A. Correcto
- B. Incorrecto

**2.25-26)** Las siguientes dos preguntas se refieren a la siguiente situación: A continuación, se presentan cinco histogramas. Cada histograma muestra los puntajes de las pruebas en una escala de 0 a 10 para una de los cinco diferentes cursos de estadística.



**2.25)** ¿Cuál de las clases tiene la menor variabilidad (medida por la desviación estándar) de puntajes?

- A. Curso A
- B. Curso B
- C. Curso C
- D. Curso D
- E. Curso E

**2.26)** ¿Cuál de las clases tiene la mayor variabilidad (medida por la desviación estándar) de puntajes?

- A. Curso A
- B. Curso B
- C. Curso C
- D. Curso D
- E. Curso E

## CUESTIONARIO AEE - CCAE

---

**2.27)** Una investigación reciente dividió aleatoriamente a los participantes en dos grupos: a un grupo se le administró vitamina E para que la tomara diariamente y al otro grupo solo se le dio una pastilla de placebo que no contenía vitamina E. El estudio siguió a los participantes durante ocho años para ver quiénes desarrollaron un tipo de cáncer durante ese período de tiempo. ¿Cuál es el propósito principal del uso de la asignación aleatoria para hacer inferencias basadas en este estudio?

- A. Es probable que los participantes en el estudio sean representativos de la población más grande.
- B. Se espera que los grupos sean similares en todos los aspectos excepto por el uso de vitamina E.
- C. Tanto A. como B. son propósitos principales de la asignación aleatoria.

**2.28-29)** Cuando se fabrican, las monedas necesitan un borde biselado (ligeramente angulado) para ayudar a sacarlas de la prensa. Por esta razón, se ha supuesto que es más probable que al girar una moneda caiga con el sello hacia arriba. Suponga que investiga dicho supuesto, haciendo girar una moneda 15 veces (poniéndola en el borde y golpeándola para que gire sola) y descubre que cae con el sello hacia arriba 13 veces. Usted determina que, si una moneda girada tiene la misma probabilidad de caer sello o cara, entonces la probabilidad de 13 o más sellos en 15 tiradas de moneda es 0.004.

**2.28)** ¿Qué te dice este análisis acerca de si es más probable que esta moneda caiga con el sello hacia arriba si se gira una gran cantidad de veces?

- A. Obtener 13 sellos en 15 giros probablemente sucedió por azar y, por lo tanto, esta moneda tiene una probabilidad de 50-50 de obtener sellos cuando se gira una gran cantidad de veces.
- B. Existe una fuerte evidencia de que es más probable que esta moneda caiga sello que cara si se gira una gran cantidad de veces.
- C. Estos resultados demuestran que es más probable que esta moneda caiga sello que cara cuando se gira una gran cantidad de veces.
- D. Nada, girar la moneda solo 15 veces no produce evidencia concluyente de ninguna manera.

**2.29)** ¿Para qué resultado estaría más convencido/a de que es más probable que esta moneda caiga sello cuando se gira?

- A. 13 sellos en 15 tiradas de monedas
- B. 130 sellos en 150 tiradas de monedas
- C. Son igualmente convincentes porque  $13/15 = 130/150$

**2.30)** Suponga que se le pide a una muestra aleatoria de 41 estudiantes universitarios que midan la longitud de su pie derecho en centímetros. Un intervalo de confianza del 95 % para la longitud media del pie de los estudiantes de esta universidad resulta ser [21,709 - 25,091]. Con base en este intervalo, ¿qué podemos decir acerca de la afirmación de que: “la longitud media del pie de los estudiantes de esta universidad es de 25 cm”?

- A. Tenemos pruebas convincentes de que la longitud media del pie en esta escuela no es de 25 cm porque 25 está cerca del extremo derecho del intervalo.
- B. No tenemos evidencia de que la longitud media del pie en esta escuela difiera de 25 cm porque 25 está dentro del intervalo de confianza.
- C. Tenemos evidencia de que la longitud media del pie en esta escuela es de 25 cm porque 25 está dentro del intervalo de confianza.
- D. No podemos hacer ninguna declaración sobre la afirmación basada en el intervalo de confianza, necesitaríamos el p-valor.

CUESTIONARIO AEE - CCAE

**2.31-32)** Suponga que su maestro cree que el intervalo de confianza encontrado en la pregunta anterior es demasiado amplio. Quiere saber qué se podría haber hecho para producir un intervalo de confianza más estrecho y, por lo tanto, una estimación más precisa de la longitud media del pie para los estudiantes de esta universidad. Para cada sugerencia que a continuación se presenta, responda “Sí, No o No puedo decir” si este cambio produciría un intervalo de confianza más estrecho.

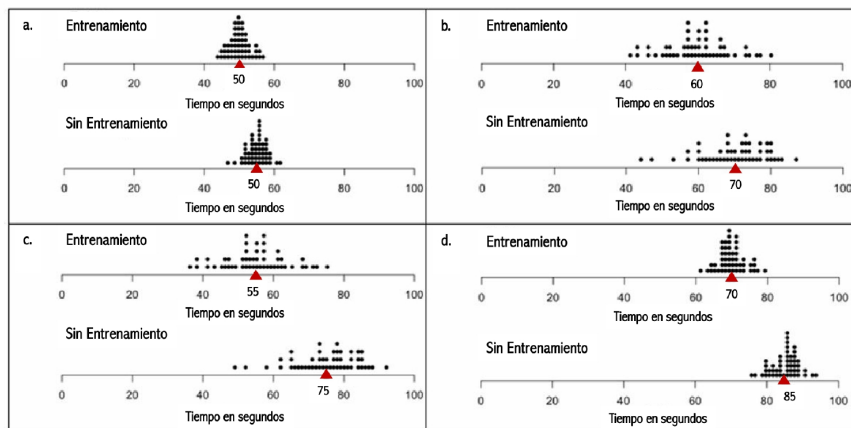
**2.31)** Aumente el tamaño de la muestra a 150

- A. Sí
- B. No
- C. No puedo decir

**2.32)** Aumente el nivel de confianza a 99%

- A. Sí
- B. No
- C. No puedo decir

**2.34)** Hay 100 estudiantes en un campamento de verano que entrena atletas para correr una carrera en pista. Para evaluar si agregar entrenamiento con pesas al programa puede aumentar la velocidad de los participantes, se selecciona aleatoriamente a 50 atletas para que reciban un programa adicional de entrenamiento con pesas (grupo de Entrenamiento) y otros 50 atletas que no reciben el programa de entrenamiento con pesas (grupo Sin Entrenamiento). Al final del campamento, todos los atletas de ambos grupos corren la misma carrera y se registran sus tiempos (en segundos). A continuación, se muestran cuatro pares de diagramas de puntos hipotéticos de sus tiempos de carrera al final del estudio. Un triángulo rojo marca la media de cada diagrama de puntos y el valor de la media está impresa debajo del triángulo.



¿Qué par de diagramas de puntos proporciona la evidencia estadística más fuerte de que el grupo de entrenamiento corrió más rápido (tiempos más bajos), en promedio, que el grupo sin entrenamiento?

- A. Par A
- B. Par B
- C. Par C
- D. Par D

## Apéndice B

# Evaluaciones de las sesiones

Las evaluaciones de las sesiones se muestran de la página 67 en adelante.

## El lanzamiento de la moneda

Cuando se les pide a las personas que predigan el resultado que se obtendrá al lanzar una moneda no cargada, ¿tienen las mismas probabilidades de elegir cara o sello?

Con el objetivo de estudiar ese fenómeno se utilizaron los datos de un estudio en donde le preguntaron a 83 estudiantes que predijeran si saldría cara o sello antes de lanzar una moneda. Los datos mostraron que 46 de los 83 estudiantes encuestados escogieron cara como predicción.

### Paso 1: Plantea pregunta de investigación

1. ¿Cuál es la pregunta de investigación? Explique

### Paso 2: Diseña estudio y recoge datos

2. Identifique aspectos relativos al diseño, estudio y recolección de los datos.

3. Establezca las hipótesis de investigación, palabras y símbolos matemáticos, y defina el parámetro de interés en el estudio.

4. A partir de las hipótesis de investigación planteadas y la información del estudio, determine si la evidencia observada aporta evidencia a favor (o en contra) de la conjetura.

### Paso 3: Explora los datos

5. Realice un análisis descriptivo de los datos. Utiliza al menos una representación tabular, gráfica, un estadístico de resumen y refiérase a la conjetura.

#### **Paso 4: Plantea inferencias**

Utilice el applet **One proportion**

(<http://www.rossmanchance.com/applets/2021/oneprop/OneProp.htm?language=4>) para simular la distribución nula de este estudio. Incluya una captura de pantalla de los valores que ingresó en el applet y de los resultados.

6. Aplique la estrategia E2S para evaluar la solidez de la evidencia observada en el problema. Considere:
  - Estadístico: ¿cuál es la evidencia observada? ¿con qué símbolo la representarías?
  - Simulación: Agrega una captura de pantalla del simulador e interpreta la gráfica observada.
  - Solidez: Concluya a partir de lo observado, mencionando y dando evidencia del criterio utilizado (estrategia E2S o estadístico estandarizado).

#### **Paso 5: Formula conclusiones**

7. ¿Qué puede concluir respecto a lo realizado previamente? ¿Existe evidencia suficiente para rechazar la hipótesis nula? Justifique

67

Una variación al estudio

Se realiza un nuevo estudio sobre las predicciones que realizan las personas respecto al resultado que se obtendrá en el lanzamiento de una moneda. Se les preguntó a un grupo de 400 estudiantes universitarios que predijeran si saldría cara o sello antes de lanzar una moneda y 225 de ellos eligieron cara.

8. Aplique nuevamente una estrategia para evaluar la solidez de la evidencia observada en esta variación del estudio. Agregue una captura de pantalla y utilice un criterio distinto al elegido para responder a la pregunta 6.

9. De acuerdo con los datos del estudio ¿se cumplen las condiciones de validez para aplicar el Teorema Central del Límite? Si su respuesta es afirmativa, determine el valor del estadístico estandarizado teórico. En caso contrario, agregue evidencia que refuerce su decisión.

68

10. A partir del valor obtenido para el estadístico estandarizado, ¿qué puedes concluir sobre la hipótesis nula? Justifica tu respuesta.

11. Si en la pregunta anterior se rechazó la hipótesis nula, calcule el intervalo de confianza al 95% para la proporción. ¿Qué puede concluir? Justifique.

**Paso 6: Mira hacia atrás y hacia adelante**

12. A partir de los análisis realizados, concluye respecto a las hipótesis planteadas en esta variación al estudio. ¿Cómo se respondería a la pregunta de investigación?

13. ¿Se podrán generalizar los resultados obtenidos a toda la población? Justifique.

14. ¿Hubieras hecho algo diferente en este proceso? Destaca al menos dos aspectos que pudiste haber hecho diferente en esta investigación.

### Evaluación Sesión 3 - PIE en variables cuantitativas

1. Seleccione un conjunto representativo de 30 palabras del Poema 20 de "Veinte Poemas de Amor y Una Canción Desesperada" de Pablo Neruda, destacándolas con color **amarillo**.

Puedo escribir los versos más tristes esta noche.  
Escribir, por ejemplo: "La noche está estrellada,  
y tiritan, azules, los astros, a lo lejos".  
El viento de la noche gira en el cielo y canta.  
Puedo escribir los versos más tristes esta noche.  
Yo la quise, y a veces ella también me quiso.

En las noches como ésta la tuve entre mis brazos.  
La besé tantas veces bajo el cielo infinito.  
Ella me quiso, a veces yo también la quería.  
Cómo no haber amado sus grandes ojos fijos.

Puedo escribir los versos más tristes esta noche.  
Pensar que no la tengo. Sentir que la he perdido.  
Oír la noche inmensa, más inmensa sin ella.  
Y el verso cae al alma como al pasto el rocío.

¿Qué importa que mi amor no pudiera guardarla?  
La noche está estrellada y ella no está conmigo.  
Eso es todo. A lo lejos alguien canta. A lo lejos.  
Mi alma no se contenta con haberla perdido.

Como para acercarla mi mirada la busca.  
Mi corazón la busca, y ella no está conmigo.  
La misma noche que hace blanquear los mismos árboles.  
Nosotros, los de entonces, ya no somos los mismos.

Ya no la quiero, es cierto, pero cuánto la quise.  
Mi voz buscaba el viento para tocar su oído.  
De otro. Será de otro. Como antes de mis besos.  
Su voz, su cuerpo claro. Sus ojos infinitos.

Ya no la quiero, es cierto, pero tal vez la quiero.  
Es tan corto el amor, y es tan largo el olvido.  
Porque en noches como ésta la tuve entre mis brazos,  
mi alma no se contenta con haberla perdido.

La lectura es una habilidad fundamental y transversal que impacta todas las esferas de conocimiento, desde las artes hasta las ciencias. A través de la lectura, accedemos a nuevas perspectivas, ideas y emociones que enriquecen nuestra comprensión del mundo. Es un vehículo que nos permite explorar diferentes culturas, épocas y pensamientos, expandiendo nuestra mente de maneras invaluable.

En este contexto, es imposible hablar de la importancia de la lectura sin mencionar a Pablo Neruda, un icónico autor chileno cuya obra trasciende fronteras y generaciones. Su poesía,

profundamente emotiva y apasionada, captura la esencia de la vida humana y la belleza de la naturaleza. Sus palabras tejen una conexión íntima entre el lector y el mundo que lo rodea.

La actividad consiste en un muestreo de palabras, que se realizará a partir del Poema 20 de Pablo Neruda. Este texto se caracteriza porque tiene 271 palabras y el promedio de letras por palabra es de aproximadamente 4 letras.

2. Registre cada palabra de su muestra (sin signos de puntuación, interrogación y exclamación) e indique a continuación la longitud de la palabra (número de letras).

| Palabra | Longitud (nº letras) | Palabra | Longitud (nº letras) |
|---------|----------------------|---------|----------------------|
| 1.      |                      | 16.     |                      |
| 2.      |                      | 17.     |                      |
| 3.      |                      | 18.     |                      |
| 4.      |                      | 19.     |                      |
| 5.      |                      | 20.     |                      |
| 6.      |                      | 21.     |                      |
| 7.      |                      | 22.     |                      |
| 8.      |                      | 23.     |                      |
| 9.      |                      | 24.     |                      |
| 10.     |                      | 25.     |                      |
| 11.     |                      | 26.     |                      |
| 12.     |                      | 27.     |                      |
| 13.     |                      | 28.     |                      |
| 14.     |                      | 29.     |                      |
| 15.     |                      | 30.     |                      |

**Paso 1: Plantea pregunta de investigación**

3. Dada la evidencia observada, ¿cuál sería la pregunta de investigación? Explique

**Paso 2: Diseña estudio y recoge datos**

4. Identifique aspectos relativos al diseño, estudio y recolección de los datos.

5. Establezca las hipótesis de investigación, en palabras y símbolos matemáticos, y defina el parámetro de interés en el estudio.

6. A partir de las hipótesis de investigación planteadas y la información del estudio, justifique si la evidencia observada aporta evidencia a favor (o en contra) de la conjetura.

**Paso 3: Explora los datos**

7. Realice un análisis descriptivo de los datos utilizando la muestra seleccionada. Debe adjuntar un archivo excel con la muestra seleccionada, fórmulas y al menos un gráfico utilizado. Además debe incluir una captura del gráfico realizado en este informe. Refiérase al centro, forma, variabilidad y valores inusuales de sus datos.

#### **Paso 4: Plantea inferencias**

Utilice el applet **Muestreo desde una población finita**

(<https://www.rossmanchance.com/applets/2021/sampling/OneSample.html?language=1>) para simular la distribución nula de este estudio. Incluya una captura de pantalla de los valores que ingresó en el applet y de los resultados.

Al ingresar, presione el botón “reajustar”. Luego, copie los datos de la hoja “palabras (Paso 4)” del archivo “muestreo palabras” en la ventana desplegable y marque “utilizar los datos”. Comience seleccionando la variable “largo” referida al largo de las palabras.

8. Aplique la estrategia E2S para evaluar la solidez de la evidencia observada en el problema. Considere:

- Estadístico: ¿cuál es la evidencia observada? ¿con qué símbolo la representarías?
- Simulación: Agrega una captura de pantalla del simulador e interpreta la gráfica observada.
- Solidez: Concluya a partir de lo observado, mencionando y dando evidencia del criterio utilizado (estrategia E2S o estadístico estandarizado).

#### **Paso 5: Formula conclusiones**

9. A partir de lo realizado previamente, ¿considera que la muestra se escogió realmente de manera aleatoria o que representa a la distribución del número de letras de las palabras del fragmento? ¿qué entiende por muestra “representativa”? Justifique (esta pregunta es orientativa, y no tiene respuesta correcta o incorrecta para este trabajo).

74

|  |
|--|
|  |
|--|

**Una variación a lo anterior**

10. Seleccione nuevamente una muestra de 30 palabras, pero esta vez utilizando una técnica al azar. Con ayuda de google sheets, usando la fórmula =ALEATORIO.ENTRE(1;271) va a generar una lista de 30 números aleatorios entre 1 y 271, ya que el fragmento de texto tiene en total 271 palabras. Cada número generado va a corresponder a una palabra del texto, según el ID asignado en la columna A de la hoja "palabras (Paso 4)" del excel enviado. Escriba ahora su selección:

| Palabra | Longitud (nº letras) | Palabra | Longitud (nº letras) |
|---------|----------------------|---------|----------------------|
| 1.      |                      | 16.     |                      |
| 2.      |                      | 17.     |                      |
| 3.      |                      | 18.     |                      |
| 4.      |                      | 19.     |                      |
| 5.      |                      | 20.     |                      |
| 6.      |                      | 21.     |                      |
| 7.      |                      | 22.     |                      |
| 8.      |                      | 23.     |                      |
| 9.      |                      | 24.     |                      |
| 10.     |                      | 25.     |                      |
| 11.     |                      | 26.     |                      |
| 12.     |                      | 27.     |                      |
| 13.     |                      | 28.     |                      |
| 14.     |                      | 29.     |                      |
| 15.     |                      | 30.     |                      |

**Paso 2: Diseña estudio y recoge datos**

11. Si es necesario, replantee las hipótesis de investigación, utilizando palabras y símbolos matemáticos. Justifique, tanto en caso de haber realizado cambios como no.

|    |
|----|
| 75 |
|----|

**Paso 3: Explora los datos**

12. Realice un análisis descriptivo de los datos utilizando la muestra seleccionada al azar. Debe incluir una captura del gráfico realizado en este informe. Refiérase al centro, forma, variabilidad y valores inusuales de sus datos..

**Paso 4: Hacer inferencias**

13. Aplique nuevamente una estrategia para evaluar la solidez de la evidencia observada en esta variación del estudio. Agregue una captura de pantalla y utilice un criterio distinto al elegido para responder a la pregunta 8.

14. Contraste el resultado obtenido en la pregunta 13 con la aplicación del método basado en la teoría. Utilice el applet **Inferencia basada en la teoría** (<http://www.rossmanchance.com/applets/2021/tbia/TBIA.html?language=1&pi=1>) y concluya.

15. Obtenga un intervalo de confianza para el parámetro en estudio, utilizando el método de las 2DE y también, un intervalo al 95% con la forma teórica, utilizando el applet. Agregue capturas de pantalla de sus procedimientos y resultados. Interprete sus resultados.

**Paso 5: Plantear conclusiones**

16. Concluya a partir de lo realizado con la muestra seleccionada por usted y la muestra aleatoria. ¿Cómo respondería la pregunta de investigación?

77

**Paso 6: Mirar hacia adelante y atrás**

17. ¿Hubieras hecho algo diferente en este proceso? Destaca al menos dos aspectos que pudiste haber hecho diferente en esta investigación.



## Evaluación Sesión 4 - PIE para relaciones bivariadas

El Informe Mundial de la Felicidad es una encuesta histórica que evalúa la felicidad global. Publicado desde 2012, presenta clasificaciones de felicidad de países utilizando datos de encuestas de Gallup ([www.gallup.com](http://www.gallup.com)). Estas calificaciones se basan en la pregunta de evaluación de vida, donde los encuestados asignan un valor del 0 al 10 a su satisfacción actual. Además, se comparan factores como economía, apoyo social, libertad y percepción de corrupción en relación con un país imaginario llamado Dystopia, que representa la peor situación posible. La idea es permitir a los países compararse y mejorar en términos de estos factores. Los datos mencionados provienen de la Base de Datos del Índice de Felicidad de 2019 de Kaggle ([www.kaggle.com](http://www.kaggle.com)).

En esta base de datos, las variables disponibles son: el puntaje (índice de felicidad), el PIB per cápita, el índice de apoyo social, la esperanza de vida y la percepción de la corrupción.

### Primera parte: Comparaciones de grupo

Considerando las variables “Puntaje” y “Percepción de la corrupción”, responda a las siguientes preguntas:

#### Paso 1: Plantea pregunta de investigación

1. Dada la evidencia observada, ¿cuál sería la pregunta de investigación? Explique

#### Paso 2: Diseña estudio y recoge datos

2. Identifique aspectos relativos al diseño, estudio y recolección de los datos. Use notación estadística adecuada en caso de ser necesario.

3. Defina el parámetro de interés en el estudio y establezca las hipótesis de investigación, en palabras y símbolos matemáticos.

### **Paso 3: Explora los datos**

4. Realice un análisis descriptivo de los datos. Utilice el applet de análisis descriptivo (<https://www.rossmanchance.com/applets/2021/descstats/Dotplot.htm?language=1> ) Refiérase al centro, forma, variabilidad y valores inusuales de sus datos.

### **Paso 4: Plantea inferencias**

Utilice el applet **Two means** (<https://www.rossmanchance.com/applets/2021/anovashuffle/AnovaShuffle.htm?hideExtras=2> ) para simular la distribución nula de este estudio a partir del Bootstrapping. Incluya una captura de pantalla de los valores que ingresó en el applet y de los resultados.

5. Aplique la estrategia E2S para evaluar la solidez de la evidencia observada en el problema. Considere:

- Estadístico: ¿cuál es la evidencia observada? ¿con qué símbolo la representaría?
- Simulación: Agregue una captura de pantalla del simulador y describa la gráfica observada.
- Solidez: Concluya a partir de lo observado, mencionando y dando evidencia del criterio utilizado.

6. En el mismo applet (esquina inferior izquierda), seleccione el IC al 95% para la diferencia de medias. ¿Cómo interpreta este resultado?

**Paso 5: Formula conclusiones**

7. A partir de lo realizado previamente, concluya respecto a la pregunta de investigación e hipótesis estadísticas establecidas. Justifique.

**Paso 6: Mira hacia atrás y adelante**

8. ¿Habría hecho algo diferente en este proceso? Destaque al menos dos aspectos que pudo haber hecho diferente en esta investigación.

81

**Segunda parte: Comparación de dos variables cuantitativas**

Considerando las variables “Puntaje” y “PIB per cápita”, responda a las siguientes preguntas:

**Paso 1: Plantea pregunta de investigación**

9. Dada la evidencia observada ¿cuál sería una posible pregunta de investigación? Explique

**Paso 2: Diseña estudio y recoge datos**

10. Identifique aspectos relativos al diseño, estudio y recolección de los datos. Además, identifique roles de variable explicativa y respuesta según su pregunta de investigación.

11. Establezca las hipótesis de investigación, en palabras y símbolos matemáticos, y defina el parámetro de interés en el estudio.

**Paso 3: Explora los datos**

12. Realice un análisis descriptivo de los datos. Utilice el applet de análisis de dos variables cuantitativas <https://www.rossmanchance.com/applets/2021/regshuffle/regshuffle.htm>. Refiérase a la dirección de la relación, forma, fuerza y posibles observaciones inusuales.

82

**Paso 4: Plantea inferencias**

Utilice el applet **Análisis de dos variables cuantitativas**

(<https://www.rossmanchance.com/applets/2021/regshuffle/regshuffle.htm> ) para simular la distribución nula de este estudio a partir del Bootstrapping. Incluya una captura de pantalla de los valores que ingresó en el applet y de los resultados.

13. Aplique la estrategia E2S para evaluar la solidez de la evidencia observada en el problema. Considere:

- Estadístico: ¿cuál es la evidencia observada? ¿con qué símbolo la representaría?
- Simulación: Agregue una captura de pantalla del simulador y describa la gráfica observada.
- Solidez: Concluya a partir de lo observado, mencionando y dando evidencia del criterio utilizado.

**Paso 5: Formula conclusiones**

14. A partir de lo realizado en la pregunta anterior, ¿qué puede concluir sobre la hipótesis nula? Justifique

83

15. A partir de lo realizado anteriormente, ¿tiene sentido determinar la recta de regresión para los datos? Justifique.

Si su respuesta es afirmativa, utilice el applet e indique la ecuación de la recta de regresión e interprete sus resultados en el contexto del problema.

**Paso 6: Mira hacia atrás y adelante**

16. ¿Hubiera hecho algo diferente en este proceso? Destaque al menos dos aspectos que pudo haber hecho diferente en esta segunda parte de la investigación.