



Facultad De Ciencias
Departamento De Matemática

*Diseño de una propuesta de enseñanza aprendizaje para fortalecer el
aprendizaje de continuidad puntual, basado en los cambios de registros
semióticos*

Trabajo de titulación para optar al título de
Profesor de Educación Media con Mención Didáctica

Profesora guía: Patricia López Cepeda

Por: Sr. José Miguel Zúñiga Núñez
Sr. Joan Enrique Lillo Mardones

Valparaíso - Chile - 2011

AGRADECIMIENTOS Y DEDICATORIA

Los autores deseamos agradecer a las personas del Departamento de Matemática que han colaborado con nuestra formación como futuros profesionales: Jesús Juyumaya, Miguel Cerda, Eduardo Stange, Jaime Contreras, Jorge León, Pedro Delgado, Sylvio Arratia, Flavio Baumann, Daniel Jiménez. Y expresamos un agradecimiento especial a nuestro secretario Gerardo Araya por sus diversas orientaciones durante nuestra formación profesional. Queremos agradecer también a nuestra profesora Patria López Cepeda por haber aceptado nuestra propuesta y por último a los directivos, colegas, amigos y alumnos del Instituto Francisco Araya Bennett que nos dieron la oportunidad laboral de ejercer esta profesión sin título, valorando nuestras capacidades.

Particularmente José Miguel Zúñiga agradece a su hermano Christian Monsálvez Núñez por despertar la curiosidad por la matemática, a su amigo Henzo Arrue por el apoyo incondicional durante la carrera, a Katuska Alejandra Buigley Urrutia y toda su familia por el apoyo entregado emocionalmente durante mi carrera, Además agradezco a todo mi grupo de estudio y amigos de este período universitario.

José Miguel dedica este trabajo a toda su familia, en particular a mi primera profesora y bisabuela sanguínea, pero considerada mi primera madre; Emelina Luengo Vera, que descansa en paz en mi corazón. A mi madre Ruth Núñez Monsálvez y todos sus oficios realizados durante mis estudios. A Claudio Vergara Lagos por muchas veces jugar el rol de padre, a María Alicia Monsálvez por todo su apoyo entregado en uno de los momentos más difíciles de mi vida. A María Paulina López y Claudia López por aconsejarme en momentos difíciles de mi vida. A Silvana Valentina Aguilar Núñez por enseñarme que frente a obstáculos en la vida siempre se puede seguir adelante, a mi siquiatra Marcela Escobar por tratar mi enfermedad y por último a todos mis amigos de infancia.

Joan Lillo dedica este trabajo a mi familia, ya que sin su ayuda emocional y económica nunca hubiese alcanzado este gran logro. Mi dedicada madre Elsa Mardones, que se preocupaba de animarme, cuidarme y aconsejarme, con palabras que solo ella podía encontrar, las cuales me podían sacar de cualquier aprieto. A mi padre Marcial Lillo, hombre esforzado y confiado, siempre me considero un ejemplo para todos... gracias a sus palabras y apoyo incondicional me daba fuerzas para levantarme una y otra vez de los momentos más adversos. A mi hermano Pablo Lillo, quien se sacrifico en un principio dándome la oportunidad de estudiar.

Joan Lillo agradece a todos mis profesores de enseñanza básica y media que fueron mis formadores, en particular a los de matemáticas que despertaron en mí esta pasión por los números y la enseñanza. Así como lo son la profesora Verónica Toncio, que en paz descansa, el profesor Fernando Pavéz y el Profesor Persi Rocha Luna. A todos mis compañeros de universidad y amigos de pensión, que me ayudaron a disfrutar mi periodo universitario.

ÍNDICE

AGRADECIMIENTOS Y DEDICATORIA	1
ÍNDICE.....	3
INTRODUCCIÓN.....	6
CAPÍTULO I.....	9
1. Problemática	9
1.1. Objetivos.....	9
1.1.1. Objetivos Generales	9
1.1.2. Objetivos Específicos	9
CAPÍTULO II	11
2. Antecedentes.....	11
2.1 Historia Del Concepto de Continuidad	11
CAPÍTULO III	19
3.1. Marco Teórico	19
3.1.1 Una Visión de la Didáctica de la Matemática.	19
3.2. Marco Matemático	27
CAPÍTULO IV	32
4.1. Metodología.....	32
4.1.1. UN Estudio De Caso.	32
4.1.2. Participantes y Contexto.....	34
4.1.3. Recolección de Datos	35
4.1.4. Análisis de Datos	36
4.1.5 Análisis Didáctico En La Comprensión Del Concepto De Continuidad.....	37

4.1.6 Concepciones y Obstáculos Identificados en el Origen de la Continuidad de una Función	38
4.1.6.1. La Concepción Primitiva (CCA).....	39
4.1.6.2. La Concepción Geométrica (CCB)	40
4.1.6.3. Obstáculos Asociados a la Concepción (CCB).....	41
4.1.6.4. La Concepción Euleriana (CCC).....	41
4.1.6.5. La Concepción de Cauchy (CCD).....	42
4.1.6.6. La Concepción de Weiertrass-Darboux (CCE).....	43
4.1.6.7. La Concepción Topológica CCG	44
4.2. Análisis de textos Universitarios señalados por el Programa de la Carrera de Matemática	45
4.2.1. Calculus. Cálculo infinitesimal, segunda edición, Michael Spivak. Editorial Reverté S.A.....	46
Cálculo Diferencial e integral.....	60
Taylor, Edición Limusa.....	60
4.2.3. Cálculo Kitchen, Joseph W. Kitchen. Departament Of Matematics, Duke University	70
4.2.4. Aspectos de la continuidad puntual como objeto matemático analizados en una unidad didáctica.....	75
4.3. Diseño De Entrevista a Estudiantes De La Universidad	84
4.3.1 Entrevista Ayudante A	84
4.3.2. Entrevista Ayudante B.....	95
4.4.3. Entrevista Ayudante C.....	111
4.3.4. Entrevista Estudiante D	119
4.4. Diseño De Entrevista a Profesores De La Universidad.	126
4.4.1 Entrevista Profesor A	126

4.4.2. Entrevista Profesor B.....	142
4.4.3. Entrevista Profesor C.....	149
CAPÍTULO V	156
5.1. Propuesta Pedagógica	156
CAPÍTULO VI.....	172
6.1. Conclusiones.....	172
BIBLIOGRAFÍA.....	174
TRABAJOS CITADOS	174
ANEXOS	176
Anexo 1: Control de estudiantes del curso de Cálculo I del segundo Semestre del 2010.....	176
Anexo 2: Recopilación del tipo de evaluaciones referentes al contenido de continuidad en los diferentes años	198

INTRODUCCIÓN

Nuestra investigación se desarrollará en el marco de un estudio de casos del aprendizaje del concepto de continuidad puntual de una función de variable real, enseñado a nivel universitario, debido a que dicho concepto es fundamental en el estudio de la función real, siendo a la vez básica en la enseñanza matemática universitaria. Dentro de las problemáticas que trataremos existen algunas relacionadas con las dificultades y errores frecuentes de los estudiantes en la comprensión del concepto, por medio de diferentes registros semióticos, la epistemología del concepto y las entrevistas realizadas a profesores y estudiantes; así como otras relacionadas con las formas de evaluación del concepto.

Reconociendo la amplia variedad de problemáticas constatadas podemos destacar las siguientes que se reiteran con mayor frecuencia en los alumnos de la carrera de Matemática de una Universidad de la V Región.

En primer lugar, se identifica un error frecuente en los alumnos(as) al momento de justificar la continuidad de una función en un punto, puesto que éstos calculan los límites laterales y si estos son iguales, deduciendo así que la función es continua.¹

En segundo lugar se identifica una dificultad frecuente al momento de verificar la siguiente igualdad²:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Al carecer de las técnicas necesarias para calcular el límite de la función presentada, esto imposibilita al estudiante decidir si la función es continua o no en un punto. También ocurre que los estudiantes calculan erróneamente el límite de la función en juego, y por ende, responden de forma incorrecta si la función es continua o no.

¹ Dificultad reconocida por Profesor de Matemática de una Universidad de la quinta región, con más de diez años de experiencia dictando el curso de Cálculo I en la carrera.

² Ver anexo 1: Control de estudiantes del curso de Cálculo I del segundo semestre del 2010

En algunas investigaciones han observado que la forma de expresión de la función condiciona las respuestas de los alumnos(as), siendo el orden de dificultades, tablas, gráficos y expresiones algebraicas (Sierra Vázquez, González Astudillo, & López Esteban). Además, se observa que al momento de presentar problemas con representaciones graficas los estudiantes no infieren de forma correcta, o infieren los aspectos mínimos de la gráfica de la función en relación a la continuidad puntual. (Sierra Vázquez, González Astudillo, & López Esteban)

Referente a la utilización de los límites laterales, los estudiantes justifican la continuidad puntual de la siguiente forma: ... “hay un límite lateral por la izquierda y por la derecha. Cuando esos dos límites coinciden en ese punto, esa función es continua” (Sierra Vázquez, González Astudillo, & López Esteban, pág. 53)

Los alumnos(as) no comprenden la definición (épsilon-delta), pues el concepto de límite posee una complejidad mayor a la que están acostumbrados a trabajar. Esto se asocia al hecho de que los aspectos cognitivos implicados no se pueden generar puramente a partir de la definición matemática. (Vrancken, Gregorini, & Eng)

Desde otro punto de vista encontramos dificultades referentes al tipo de evaluación.

“Las preguntas que elaboran los profesores para clasificar las respuestas son del tipo, diga si es o no continua esta función, decida del conjunto de gráficas siguientes cuáles se corresponden con funciones continuas, etc. En cierto sentido, preguntan directamente lo que esperan ver aparecer, la continuidad, ignorando el hecho que quizá dichas respuestas estén ya condicionadas por las prácticas escolares” (Aparicio & Cantoral, 2004).

Esto se ve reflejado en la mayoría de las pruebas aplicadas en el curso de Cálculo I de la carrera de Matemática de una Universidad de la V región. A continuación veremos algunos de estos ejemplos extraídos de la primera prueba de Cálculo I³.

El propósito de nuestro trabajo es la creación de una situación didáctica exitosa que ayude a comprender el concepto de continuidad puntual en un primer curso de cálculo I, apoyándonos en conceptos tales como; registros semióticos, pensamiento matemático avanzado, epistemología de dicho concepto, experiencias de profesores y ayudantes del curso

³ Ver anexo 2: Recopilación del tipo de evaluaciones referente a la continuidad en diferentes años.

de cálculo I. Despertando con esto el interés de los estudiantes en formalizar con teorías didácticas los objetos matemáticos vistos en cálculo I.

CAPÍTULO I

1. PROBLEMÁTICA

1.1. OBJETIVOS

1.1.1. OBJETIVOS GENERALES

Diseñar una propuesta de enseñanza aprendizaje para fortalecer el aprendizaje de continuidad puntual mediante los cambios de registros: lenguaje natural, algebraico, numérico, tabular y gráfico.

1.1.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- a. Analizar desde las concepciones identificadas en el origen de la continuidad de una función según el proyecto de investigación (Contreras de la Fuente, Luque Cañada, Ordóñez Cañada, Ortega Carpio, & Sánchez Gómez, 2000), el tratamiento de la continuidad puntual en los textos universitarios citados en el programa de Cálculo I para la carrera de Matemáticas de una Universidad de la V región.

Con este objetivo se quiere ver la relación que existía entre los textos universitarios y la historia de dicho concepto.

- b. Analizar la continuidad puntual en los textos universitarios citados en el programa de Cálculo I para la carrera de Matemática de una Universidad de la V región, desde la Teoría de Registros Semióticos según Raymund Duval.

Este objetivo fue planteado con la finalidad de verificar la cantidad de registros semióticos utilizados y si existen cambios entre ellos. Por otro lado se quiere clasificar si el libro es apropiado para la enseñanza del concepto bajo la teoría de los registros semióticos.

- c. Analizar las respuestas del cuestionario de los estudiantes con experiencia formal en enseñar el concepto: Ayudantes de la Carrera de Matemáticas, desde la Teoría de Registros Semióticos según Raymund Duval.

Con este objetivo se quiere comprobar, inicialmente, si el ayudante tiene dominio del concepto, las dificultades que posee para pasar de un tipo de registro a otro y por último la capacidad de fundamentar sus respuestas apoyándose en más de un registro.

- d. Analizar las entrevistas realizadas a los profesores de la carrera de Matemática de una Universidad de la V región.

Con este objetivo se quiere reconocer e identificar conocimientos previos y relevantes que debe tener un estudiante e identificar el uso de diferentes registros en una propuesta realizada por los docentes.

- e. Diseñar una propuesta apoyado en el análisis previo de la Teoría de Registros semióticos, según Raymund Duval, y la experiencia de los tres profesores participantes de la Carrera de Matemáticas de una universidad de la V región.

CAPÍTULO II

2. ANTECEDENTES

2.1 HISTORIA DEL CONCEPTO DE CONTINUIDAD

El concepto de continuidad puntual de funciones reales de variable real es considerado básico en la enseñanza matemática universitaria, iniciándose su estudio cuando se hizo presente en los programas de bachillerato desde los años treinta del siglo XX. Los profesores de la enseñanza universitaria señalan las grandes dificultades que conlleva el proceso de enseñanza-aprendizaje de este concepto, el cual es clave para la comprensión de las matemáticas superiores (derivadas, integrales, etc.). Continuando con los lineamientos de las problemáticas de la adquisición del concepto de continuidad, se han encontrado en la literatura especializada muchas investigaciones que revelan que los estudiantes tienen dificultades al enfrentarse al concepto de límite, aun más cuando está en el contexto de las funciones y de la continuidad así como por ejemplo lo señalan Artigue, 1992; Breidenbach, Dubinsky, Hawks y Nichols, 1992; Cornu, 1992; Sierpiska, 1987; Tall y Vinner, 1981. (Gatica, Maz-Machado, May, Coscá, Echevarria, & Renaudo, 2010)

Al realizar un breve compendio de la historia de la continuidad puntual, no pretendemos hacer algo original, sino presentar una síntesis ordenada de los diferentes textos encontrados e investigados.

A lo largo de la historia de la continuidad, los griegos fueron una de las primeras civilizaciones en tener la noción de continuidad, aunque era del tipo intuitivo y no tenían enfoque alguno a las funciones, pues no existía este concepto aún. Así como señaló Boyer (Boyer & Martínez Pérez, 1999) los pitagóricos intuyeron que el espacio y el tiempo pueden ser imaginados como constituidos por puntos e instantes, pero tanto el espacio como el tiempo tienen también otra propiedad que es más fácil de intuir que definir conocida como continuidad.

Aristóteles describe el punto pitagórico como una unidad considerada en el espacio, lo cual trajo controversia al enfrentarse a las ideas de los eleáticos⁴, cuyo principio fundamental era la unidad y permanencia del ser. Entre los defensores de estas ideas podemos destacar a Zenón, cuyas paradojas más citadas son las que se refieren a la imposibilidad del movimiento, como por ejemplo las siguientes:

i) La de la dicotomía: Zenón está a ocho metros de un árbol. Llegado un momento, lanza una piedra, tratando de dar al árbol. La piedra, para llegar al objetivo, tiene que recorrer antes la primera mitad de la distancia que lo separa de él, es decir, los primeros cuatro metros, y tardará un tiempo (finito) en hacerlo. Una vez que llegue a estar a cuatro metros del árbol, deberá recorrer los cuatro metros que le quedan, y para ello debe recorrer primero la mitad de esa distancia. Pero cuando esté a dos metros del árbol, tardará tiempo en recorrer el primer metro, y luego el primer medio metro restante, y luego el primer cuarto de metro... De este modo, la piedra nunca llegará al árbol.

ii) La de Aquiles y la tortuga: “El guerrero Aquiles, el de los pies veloces, decide salir a competir en una carrera contra una tortuga. Ya que corre mucho más rápido que ella, y seguro de sus posibilidades, le da una gran ventaja inicial. Al darse la salida, Aquiles recorre en poco tiempo la distancia que los separaba inicialmente, pero al llegar allí descubre que la tortuga ya no está, sino que ha avanzado, más lentamente, un pequeño trecho. Sin desanimarse, sigue corriendo, pero al llegar de nuevo donde estaba la tortuga, ésta ha avanzado un poco más. De este modo, Aquiles no ganará la carrera, ya que la tortuga estará siempre por delante de él.”

iii) La de la flecha: En esta paradoja, se lanza una flecha. En cada momento en el tiempo, la flecha está en una posición específica, y si ese momento es lo suficientemente pequeño, la flecha no tiene tiempo para moverse, por lo que está en reposo durante ese instante. Ahora bien, durante los siguientes periodos de tiempo, la flecha también estará en

⁴ El pensamiento eleático se opone tanto a la filosofía materialista de los milesios como a la teoría del flujo universal formulada por el filósofo griego Heráclito. Según los eleáticos, el universo es en esencia una unidad inmutable, que siendo infinita en tiempo y espacio, está más allá de la cognición proporcionada por los sentidos humanos. Sólo a través de la reflexión filosófica, afirmaban, se puede alcanzar la verdad última. Las observaciones sensoriales ofrecen tan solo una visión limitada y distorsionada de la realidad.

reposo por el mismo motivo. De modo que la flecha está siempre en reposo (el movimiento es imposible)

iv) La del estadio: Dos filas de igual número de soldados (B B B B y C C C C) parten de los extremos de un estadio en dirección al centro (la tribuna formada por A A A A) a la misma velocidad. Se detienen cuando estén alineados. El primer soldado B recorre un espacio igual a dos A, pero en el mismo tiempo, el primer soldado C recorre cuatro soldados B. Dado que los tamaños de A, B y C son iguales, se concluye que la velocidad de los soldados C es doble que la de los soldados B, y habíamos dicho que la velocidad era la misma.

A A A A
 B B B B ----->
 <----- C C C C

Las paradojas de Zenón influyeron negativamente en el desarrollo del concepto de infinitesimales, pero son los primeros antecedentes del razonamiento infinitesimal. A pesar de ello, la noción de continuidad estaba implícita en las respuestas a estas paradojas. En este período no podemos olvidar que solo existía una noción intuitiva de lo que era continuidad, debida a que por el momento no estaba definido el concepto de función.

Continuando con la evolución del concepto de continuidad destacamos el nombre de Nicole Oresme (sitio Web Descartes) quien asocia el concepto de función en la Edad Media, Boyer (1986) señala que Oresme escribió: *“Todo lo que varía, se sepa medir o no, lo podemos imaginar como una cantidad continua representada por un segmento rectilíneo”* En su idea primitiva de representación gráfica de funciones, Oresme dibuja una gráfica velocidad-tiempo que es continua. La continuidad aparece como una propiedad global de las magnitudes medibles.

En el siglo XVII se produce la aritmetización de la geometría, lo que claramente va a influir y repercutir en la idea de continuidad. Como señala El Bouazzoui (1988) durante este periodo se pasa de la concepción geométrica intuitiva de la noción de función a una

concepción algebraica gracias a los trabajos de Descartes (1596-1650) y Fermat (1601-1665). Se debe recalcar que en esta época se utilizó el traspaso de un registro geométrico a uno algebraico, lo cual en estos días se hace de manera inversa. Las funciones se representan por fórmulas analíticas (registro analítico) y la mayor parte de ellas corresponden a trayectorias de un móvil. De esta manera, la continuidad toma cada vez más un carácter geométrico ligado a las curvas, ayudado claro está por Descartes. Gracias a los aportes de Newton (1643-1727) la concepción de continuidad comienza a ligarse con el tiempo y con Leibniz (1646-1716) toma un carácter espacial. Con Euler (1707-1783) la idea de continuidad va ligada al concepto de función, la cual fue desarrollada en el siglo XVIII. En el capítulo primero de su *Introduction in analysis infinitorum* comienza definiendo las nociones iniciales: términos constantes y variables, definiendo además la función como “una expresión analítica formada de cualquier manera a partir de esta cantidad variable y números o cantidades constantes (Boyer, 1986, p.558)”.

Esta restricción de expresión analítica desaparecerá posteriormente después de la polémica establecida con D’Alambert (1717-1783) sobre el problema de la cuerda vibrante. De este modo, en el prefacio de sus *Institutiones calculi differentialis*, de 1755, aparece la nueva definición “Si x es una cantidad variable, entonces toda cantidad que dependa de x de cualquier manera o que esté determinada por aquella se llama función de dicha variable”.

Las funciones “discontinuas” o “mixtas” son las que están definidas por tramos, en las cuales hay una expresión para cada intervalo de valores lo que ayuda a tener una función con mayores posibilidades de manipular en todo el dominio de la variable. Este tipo de funciones sería discontinuo, según lo propuesto por Euler, quien define las funciones continuas como “aquellas en las que todos los valores están ligados por una misma ley o dependencia de la misma ecuación. Así, una función que no es continua, es un conglomerado de funciones continuas”

De acuerdo con El Bouazzoui (1988) la idea Euleriana de continuidad es adecuada para las funciones numéricas de la época. Esta concepción de la continuidad llega a ser fuente de errores. La solución obtenida por Daniel Bernoulli para el problema de la cuerda vibrante como suma de una serie de senos y cosenos debería ser continua. Sin embargo, es discontinua (Velasco Hernández) En síntesis, la suma de una serie de funciones continuas puede no ser continua. A resolver estas “contradicciones” se dedican los matemáticos posteriores a Euler.

Lagrange (1736-1813) escribió dos grandes tratados sobre funciones: *Teoría de las funciones analíticas* y *Lecciones sobre el Cálculo de las funciones*. Da una nueva definición de función, más rica que la de Euler:

“Llamamos función de una o varias cantidades a toda expresión de cálculo en la cual estas cantidades entran de cualquier manera, mezcladas o no, con otras cantidades que consideramos como valores dados e invariables, mientras que las cantidades de la función pueden recibir todos los valores posibles. Así, en las funciones no consideramos más que las cantidades que suponemos variables, sin ninguna consideración a las constantes que pueden estar mezcladas” (citado en Grattan-Guinness (1984), p.33).

Es valioso el aporte de Lagrange, pues en sus trabajos se encuentra por primera vez una definición por comprensión del concepto de continuidad, consideró el desarrollo en serie entera de la función $f(x+i)$, la que define así:

Se podrá encontrar una abscisa i correspondiente a una ordenada menor que una cantidad dada, y entonces todo valor más pequeño de i corresponderá también a ordenadas menores que la cantidad dada (citado en El Bouazzoui (1988) p.80).

En el siglo XIX, el concepto de función tuvo su mayor apogeo, debido a que éste evoluciona considerablemente, afectando directamente al concepto de continuidad. En el transcurso de la época se encuentran funciones que presentan muchas contradicciones al

aplicarles la definición de continuidad, así como por ejemplo la encontrada por Cauchy en 1844:

$$F(x) = \begin{cases} y = x, x \geq 0 \\ y = -x, x < 0 \end{cases}$$

Esta función es discontinua en el sentido de Euler, pues está definida por dos expresiones. Sin embargo, puede representarse por una sola expresión $y = \sqrt{x^2}$ para todo número real x , por lo que será continua. Será Bolzano (1781-1848) el primero en dar una definición de continuidad desligada de las consideraciones geométricas, espaciales y temporales de sus predecesores. Como señalan Rey Pastor y Babini (1985) Bolzano se adelantó en numerosas cuestiones a los analistas más famosos del siglo XIX en el concepto de función continua, en los criterios de convergencia de series, en la existencia de funciones continuas sin derivada. Pero, la influencia de sus escritos fue escasa por estar alejado de los centros de poder matemáticos. Definió así el concepto de función continua sobre un intervalo:

“Decir que una función real f de la variable real x es continua, para todos los valores de x pertenecientes a un intervalo dado, no significa otra cosa que esto: si x es un tal valor cualquiera, la diferencia $f(x-w) - f(x)$ se hace más pequeña que cualquier cantidad dada si se toma w tan pequeña como queramos” (Dugac, 1981, p.16).

En sus trabajos, Bolzano demostrará con rigor las propiedades fundamentales de las funciones continuas. El Bouazzaoui (1988) considera esta definición como no geométrica (no hay consideraciones de tipo geométrico), local (se estudia lo que ocurre en un punto y se generaliza a los puntos de un intervalo) y aritmética (se apoya del cálculo). Es la primera vez que el concepto de continuidad toma la forma de definición matemática.

Otro personaje destacado es Cauchy (1789-1857) quien pone las bases del Análisis Matemático tal y como lo conocemos hoy en día. Su definición de función es la siguiente:

Cuando unas cantidades variables están ligadas entre ellas de tal manera que, dando el valor de una de ellas se puede deducir el valor de las otras, concebimos de ordinario estas diversas cantidades expresadas por medio de una que toma el nombre de la variable independiente y la otra cantidades expresadas por medio de la variable independiente son las que llamamos funciones de esta variable (citado por Youschkevitch (1976), p.58).

En 1821, Cauchy da su definición de continuidad:

La función $f(x)$ es continua con respecto a x entre los límites dados si, entre estos límites un crecimiento infinitamente pequeño de la variable, produce también un crecimiento infinitamente pequeño de la función misma.

Como vemos aparecen las palabras “infinitamente pequeño”, que intuitivamente se sabe lo que es, pero que no está precisado en la definición.

Con Weierstrass (1815-1897) se produce la “aritmética” del Análisis. Debido a que se refiere a las funciones continuas, es el primero en dar a conocer un ejemplo de una función continua en todos sus puntos y no derivable en ninguno de ellos, aunque ya Bolzano había puesto un ejemplo de este tipo de funciones (ejemplo que no había tenido difusión por el aislamiento en que se encontraba Bolzano con respecto de la comunidad de matemáticos). Weierstrass da una definición de continuidad desligada de ciertas ideas intuitivas de crecimientos “infinitamente pequeños”, de variable “aproximando” un límite, que estaban presentes en las definiciones anteriores. Su definición recogida en Boyer (1959, p.287) es la siguiente:

“ $f(x)$ es continua en ciertos límites de x si para todo valor de x_0 en este intervalo y para todo número positivo ϵ arbitrariamente pequeño, es posible encontrar un intervalo x_0 tal que para todos los valores de este intervalo la diferencia $f(x) - f(x_0)$ es en valor absoluto inferior a ϵ ”.

Aquí Weierstrass introduce al lenguaje la ϵ y el δ ; además utiliza cuantificadores que faltan en las definiciones de Bolzano y Cauchy; también su definición se aplica a cualquier función numérica arbitraria.

Con los trabajos de Cantor (1845-1918) y Dedekind (1831-1916) comienza el gran desarrollo de la topología, correspondiendo a Hausdorff (1868-1942) la noción de espacio topológico y a Fréchet (1878-1973) la de espacio métrico. Hausdorff definirá el concepto de continuidad de la siguiente manera:

“Una transformación continua significa que a cada punto del primer espacio hay asociado un único punto del segundo espacio y que dado un entorno de una imagen de un punto existe un entorno del punto origen (o de cada punto origen si hay varios) cuya imagen está contenida en el entorno de dicho punto imagen”.

Con la definición anterior desaparece la idea intuitiva geométrica de continuidad, la continuidad o no de una función dependerá de las topologías del dominio de la función y del espacio imagen.

CAPÍTULO III

3.1. MARCO TEÓRICO

3.1.1 UNA VISIÓN DE LA DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA.

Según Ricardo Cantoral, Francisco Cordero, et al. (2003) el objetivo central de la didáctica de la matemática es averiguar cómo funcionan las situaciones didácticas, es decir, cuáles de las características de cada situación resultan determinantes para la evolución del comportamiento de los alumnos y, subsecuentemente, de sus conocimientos. Lo cual no significa que sólo se interese en analizar las situaciones didácticas exitosas.

Para lograr comprender el objetivo central debemos conocer algunos conceptos básicos de la Ciencia de la Didáctica de la Matemática.

Brousseau define una situación didáctica como: “Un conjunto de relaciones explícita y/o implícitamente establecidos entre un alumno o un grupo de alumnos, algún entorno (incluyendo instrumentos o materiales) y el profesor con un fin de permitir a los alumnos aprender, es decir reconstruir algún conocimiento. Para que el alumno construya el conocimiento es necesario que se interese personalmente por la resolución del problema planteado en la situación didáctica. La resolución del problema se vuelve entonces responsabilidad del alumno, que debe hacerse cargo de obtener un cierto resultado. El análisis del comportamiento del alumno se realiza a través de las variables de la situación donde se produce este comportamiento. Cuando el estudiante se interesa personalmente en la situación, se dice que se ha conseguido la devolución de la situación al alumno”

Una situación funciona de manera “a-didáctica” cuando el alumno se apropia del problema planteado, entra en un proceso de búsqueda autónomo, sin ser guiado por las supuestas suposiciones que el profesor espera.

Por otro lado, debido a la característica del conocimiento matemático, que incluye tanto conceptos como sistemas de representación simbólica y procedimientos de desarrollo y validación de nuevas ideas matemáticas, es preciso contemplar varios tipos de situaciones.

Brousseau identifica cuatro tipos de situaciones:

Situación de Acción

Situación de Formulación

Situación de Validación

Situación de Institucionalización

En la **situación de acción** el alumno trabaja de manera individual en un medio didáctico, para lo cual necesita aplicar sus conocimientos previos al momento de resolver los problemas, consiguiendo con esto una adquisición de un determinado conocimiento. En esta situación el alumno se relaciona directamente con el medio físico, donde se desarrolla el proceso didáctico.

En la **situación de formulación** los alumnos se agrupan para dar a conocer sus hallazgos, algo similar a un plenario, donde pueden consensar y desarrollar conclusiones mucho más elaboradas que los ayudarán a concretar la siguiente etapa. Además, acá se lleva a cabo una sociabilización de las experiencias, dando a conocer las estrategias utilizadas al momento de resolver la problemática propuesta.

Para la **situación de validación** se necesita que las respuestas entregadas por los alumnos sean comprobadas de tal manera de validarlas. Este proceso debe ser directo, es decir, la misma situación corrobora que las respuestas encontradas son verdaderamente factibles para la problemática.

En la **situación de institucionalización**, el profesor toma protagonismo, puesto que toma lo hecho por los alumnos y aclara los conceptos que pudieron tener algún grado de dificultad, además aporta con observaciones ayudando a ordenar las ideas entregadas, presenta los resultados de una manera formal. En resumen oficializa la matemática trabajada en dicha situación.

A pesar de no constituir una situación a-didáctica, la institucionalización representa una actividad de suma importancia en el cierre de la situación didáctica.

Brousseau define este concepto de la siguiente forma:

La consideración “oficial” del objeto de enseñanza por parte del alumno, y del aprendizaje del alumno por parte del maestro, es un fenómeno social muy importante y una fase esencial del proceso didáctico: este doble reconocimiento constituye el objeto de la institucionalización. (Panizza)

Según Ricardo Cantoral, Francisco Cordero, et al (Cantoral, Farfán, Cordero, Alanís, Rodríguez, & Garza, 2005) para el desarrollo del pensamiento matemático entre los estudiantes es necesario diseñar situaciones didácticas en las que:

- Se responsabilicen de la organización de su actividad para tratar de resolver el problema propuesto, es decir, que formulen sus propios proyectos personales.
- La actividad esté orientada hacia la obtención de un resultado preciso, previamente hecho explícito por el profesor y que pueda ser identificado por los propios alumnos. Estos deben anticipar y luego verificar los resultados de su actividad.
- La resolución del problema planteado implica la toma de múltiples decisiones por parte de los alumnos, y la posibilidad de conocer directamente las consecuencias de sus decisiones a fin de modificarlas para adecuarlas al logro del objetivo perseguido. Es decir, se permite que los alumnos intenten resolver el problema varias veces.
- Los alumnos pueden recurrir a diferentes estrategias para resolver el problema planteado, estrategias que corresponden a diferentes puntos de vista sobre el problema. Es indispensable que en el momento de plantear el problema los estudiantes dispongan de al menos una estrategia (estrategia de base) para que puedan comprender la consigna y comenzar su actividad de búsqueda de la solución.

Al momento de diseñar una propuesta complementaria para la enseñanza del concepto de continuidad puntual, nos basaremos en diversos autores anteriormente nombrados, aprovechando tipos de preguntas y actividades que se consideran necesarias en el aprendizaje de este concepto, el cual aportara en forma paralela a otros conceptos que son la base del Cálculo y de otras áreas de Matemáticas de nivel universitario que utilizan el Pensamiento Matemático Avanzado, a diferencia del Pensamiento Matemático Elemental que es el utilizado en la Enseñanza Media de nuestro sistema educacional.

Es claro que una de las dificultades en el proceso de adquisición del concepto de continuidad puntual tiene que ver con los diversos problemas relacionados al aprendizaje del concepto de límite de una función, por ende al entendimiento del concepto de función y sus diferentes registros de representación (gráfico, algebraico), así como también a los cambios de registros de una función.

Según Abraham Cuesta Borges “El proceso de aprendizaje de los conceptos de función y extremo en estudiantes de economía: Análisis de una innovación didáctica” en la línea de investigación del Pensamiento Matemático Avanzado el objeto de estudio es el aprendizaje de conceptos y temas relacionados con el análisis, a saber: funciones, continuidad, números irracionales, números reales, límites y cálculo diferencial e Integral, que son propios del currículo de bachillerato y la universidad. Precisando más sutilmente, podemos tomar la descripción del Pensamiento matemático hecho por Dreyfus, que dice “comprender es un proceso que tiene lugar en la mente del estudiante” y es el resultado de “una larga secuencia de actividades de aprendizaje donde ocurren y actúan una gran cantidad de procesos mentales”. Además, se establece que en la matemática avanzada, gracias a su nivel de abstracción, basta con definir el concepto en base al conocimiento formal, no así en las matemáticas elementales que necesitan describirlo y depender de las experiencias. La similitud entre ambas es que se basan en el lenguaje natural para relacionar las actividades matemáticas con el contexto, logrando como resultado final la construcción de un esquema mental de un concepto matemático.

El formarse un esquema conceptual indica que se ha logrado comprender dicho concepto, lo cual permite que puedan asociar a él ciertos significados, como lo serían imágenes mentales, propiedades, procedimientos, pero particularmente con las experiencias de

los alumnos. Un sinnúmero de libros y clases de matemáticas parecen basarse en el supuesto que, los conceptos se adquieren en base a su definición “de memoria” lo cual permitiría que los estudiantes puedan aplicarla en la resolución de las tareas o problemas. Lo cierto es que aprenderse una definición de memoria no garantiza comprender el significado del concepto. Un claro ejemplo sería la definición de límite basada en ϵ - δ . Muchos estudiantes la reconocen y la recuerdan, pero muy pocos la pueden aplicar como realmente se debería.

En un artículo de investigación Didáctica de la Matemática (Azcárete & et.al, 1999) se hace una distinción entre Pensamiento Matemático Elemental y el Pensamiento Matemático Avanzado, considerando la complejidad y la capacidad de controlarla. Para controlarla afirma que uno de los procesos más potentes son la representación y la abstracción⁵. Por otra parte Dreyfus señala que abstraer, analizar, categorizar, generalizar, sintetizar, definir, demostrar y formalizar no forma parte de las matemáticas superiores. A pesar de ello, debemos destacar que las últimas tres toman gran importancia en los cursos superiores. Esta idea la podemos asociar a la capacidad de los estudiantes de formarse una imagen mental del concepto, la cual se puede describir como el conjunto de todas las imágenes asociadas a un concepto en su mente o cualquier representación del concepto. Está claro que al intentar traducir de manera verbal un concepto dependemos de las representaciones visuales, las imágenes mentales, las impresiones y las experiencias asociadas al nombre del concepto, pero como lo señala Vinner (1991), dichas formas verbales no son las primeras cosas que evocamos en nuestra memoria.

Dreyfus en (Cuesta Borges, 2007) hace especial referencia al carácter complementario de la relación existente entre los procesos de abstracción y representación, estableciendo una similitud entre ésta y la relación existente entre las representaciones internas o los esquemas mentales internos mediante los cuales el individuo interactúa con las representaciones externas del conocimiento. En este sentido señala que el proceso de aprendizaje debería consistir en cuatro etapas:

1. Usar una representación.
2. Usar varias representaciones en paralelo.
3. Realizar nexos entre estas representaciones.

⁵ Abstracción: es la sustitución de fenómenos concretos por conceptos confinados en la mente humana.

4. Integrar las representaciones y flexibilizar los cambios entre ellas.

Según lo indicado en uno de los libros estudiados (D`Amore), *la construcción de los conceptos matemáticos depende estrechamente de la capacidad de usar más registros de representaciones semióticas de dichos conceptos.*

1. *De representarlos en un registro dado.*
2. *De tratar tales representaciones al interior de un mismo registro.*
3. *De convertir tales representaciones de un registro dado en otro registro.*

La “construcción del conocimiento en Matemática” significa precisamente la unión de estas tres “acciones” sobre los conceptos, de tratar las representaciones obtenidas al interior de un registro establecido y de convertir las representaciones de un registro en otro.

Debemos tener en cuenta los cambios de registros, que se efectúan en objetos pertenecientes a la matemática, aspecto que es estudiado en la Teoría de Registros de Representación Semiótica, fundada por Raymond Duval. Afirma que: “Dado que los conceptos matemáticos no son directamente accesibles a la percepción... no es posible estudiar los fenómenos relativos al conocimiento sin recurrir a la noción de representación”.

Todos los símbolos, gráficas, signos, escrituras y notaciones, utilizados en matemáticas (puntos, comas, mayor que, menor que, etc.) representan un objeto matemático. Estos signos componen lo que se denomina registro, lo que constituye el medio de expresión o de representación semiótica, es decir, son los elementos que permiten representar un objeto matemático en un determinado tipo de registro o medio.

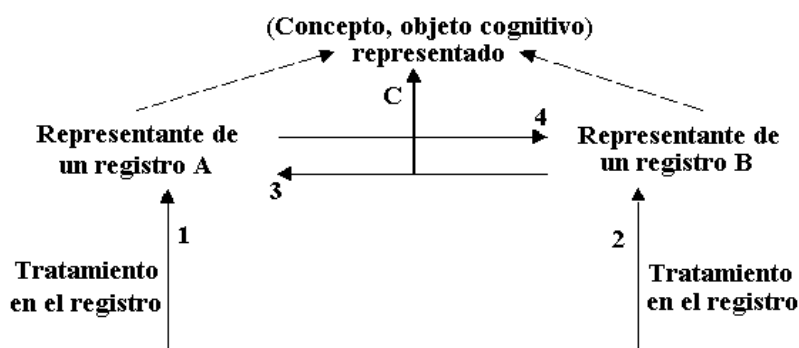
Duval sostiene, además, que solamente por medio de las representaciones semióticas es posible una actividad sobre los objetos matemáticos, porque las representaciones mentales que son expresadas al exterior por medio de símbolos o signos, a través de la llamada semiosis, deben ser las encargadas de realizar los procesos relacionados con un determinado objeto matemático.

Cuando Duval habla de “registro de representación semiótica”, se refiere a un sistema de signos que permite cumplir las funciones de comunicación, de tratamiento y de objetivación.

Según este pensador Matemático, para que un sistema semiótico se comporte como un registro de representación, debe cumplir con tres actividades cognitivas:

- La presencia de un objeto identificable como un objeto de un registro dado
- El tratamiento de un objeto, que es la transformación del objeto dentro del mismo registro donde ha sido expresado
- La conversión del objeto, que es la transformación del objeto en otro objeto perteneciente a un registro distinto del original, conservando la totalidad o parte del significado original del objeto

Además, sostiene, que para lograr la comprensión integral de un objeto se debe manejar y coordinar al menos dos registros de representación, donde la coordinación hace énfasis en la rápida y espontánea conversión de un tipo de registro a otro.



Modelo de la representación centrado en la función de objetivación.

Las flechas 1 y 2 corresponden a las transformaciones internas a un registro. Las flechas 3 y 4 corresponden a las transformaciones externas, es decir, a las conversiones por cambio de registro. La flecha C corresponde a lo que llamaremos comprensión integradora de una representación: supone una coordinación de dos registros. Las flechas punteadas corresponden a la clásica distinción entre representante y representado. Naturalmente, este esquema considera el caso más simple de la coordinación entre dos registros.

De acuerdo con Duval, citado en una de las publicaciones de la revista CIAMEN (Castro Cortés, 2011), las actividades cognitivas fundamentales de representación ligadas a la semiosis son la formación, que implica recurrir al uso de signos para sustituir la visión de un objeto; el tratamiento, que es la transformación de una representación a otra al interior del mismo registro y la conversión: que es una transformación que produce una representación en

un registro distinto al inicial. A su vez, las funciones cognitivas comunes a todos los registros de representación están dadas por la comunicación: que puede verse bajo la forma de conversación, comentario, exposición etc.; debe permitir el paso de un sistema a otro, siendo fundamental para la interacción social; el tratamiento, que es la posibilidad de transformación de la información de tal manera que se pueda obtener nueva información y la objetivación: que es el control del sujeto frente a las actividades y sus vivencias.

Sobre la construcción de conceptos, Duval establece que, dado que cada representación es parcial con respecto a lo que representa, debemos considerar como absolutamente necesario la interacción entre diferentes representaciones para la formación del concepto.

3.2. MARCO MATEMÁTICO⁶

Sea f una función definida en una vecindad abierta

Se dice que la función f es continua en el punto x_0 .

Si se cumple la condición

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Esto es:

Si para cada número positivo ε , por pequeño que sea, podemos determinar la existencia de un número positivo δ , tal que para todos los valores de x , pertenecientes al dominio f que satisfacen la desigualdad $|x - x_0| < \delta$, se verificara la desigualdad

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \text{ es decir,}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que, si } 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

A continuación se presenta en forma gráfica

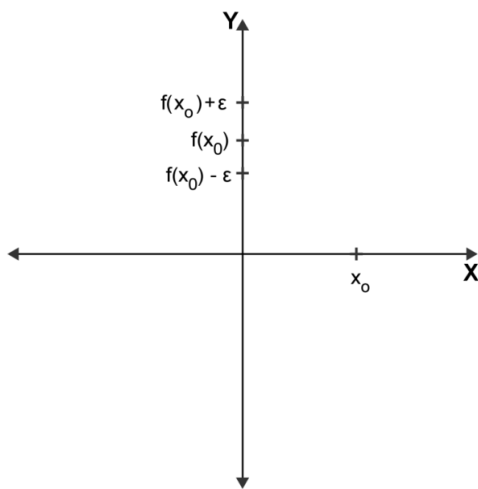


Figura 1: Para cualquier $\varepsilon > 0$

⁶ Definición extraída de Cálculo I “límites y continuidad de funciones”, escuela Naval Arturo Prat

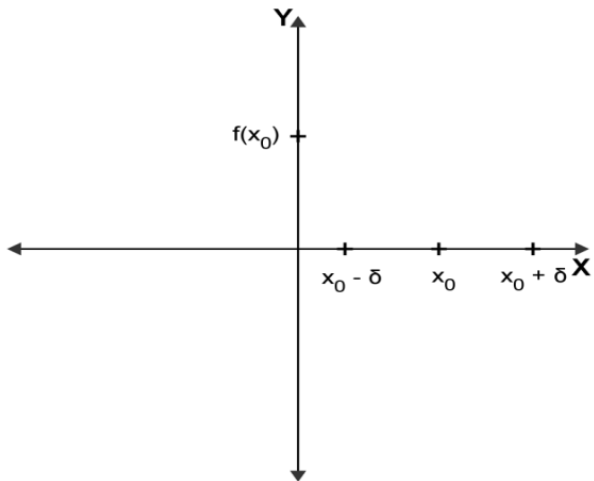


Figura 2: Existe $\delta > 0$

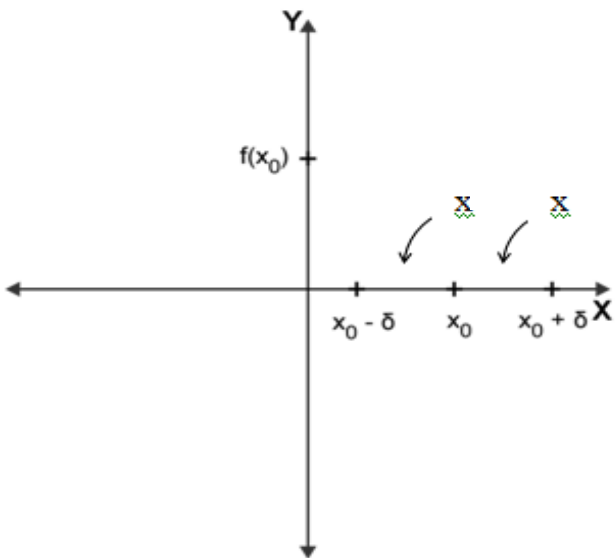


Figura 3: Tal que, si $0 < |x - x_0| < \delta$

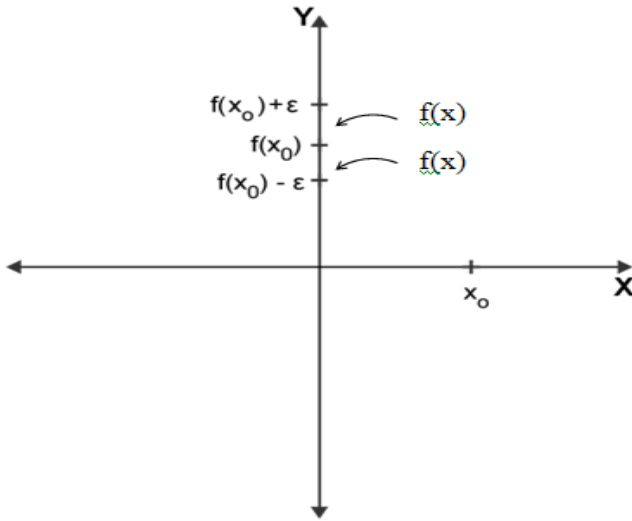
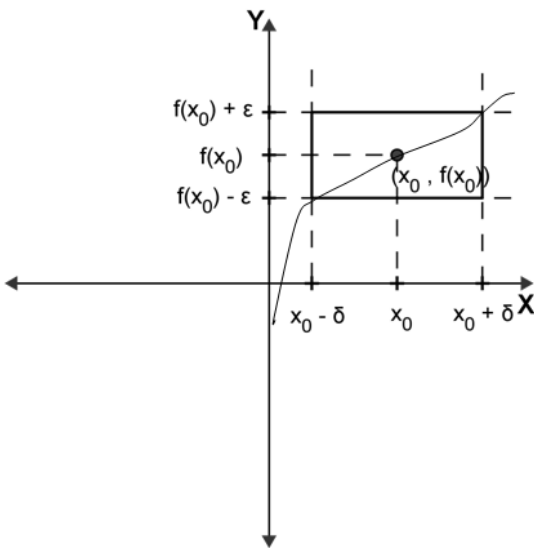


Figura 4: Entonces, $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

También el $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ se puede explicar a partir de la desigualdad $|x - x_0| < \delta$, de donde deducimos que $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, entonces para cualquier punto de la función con ecuación $y = f(x)$, corresponden a los puntos x localizados a una distancia no mayor que δ de x_0 , nos encontraremos dentro de un segmento de ancho 2ε , construido por dos rectas:

$$y = f(x) - \varepsilon \quad , \quad y = f(x) + \varepsilon$$



Observando la representación grafica, el punto $(x_0, f(x_0))$ se encuentra en la gráfica de f , y podemos encontrar puntos de ella muy cercanos al punto $(x_0, f(x_0))$.

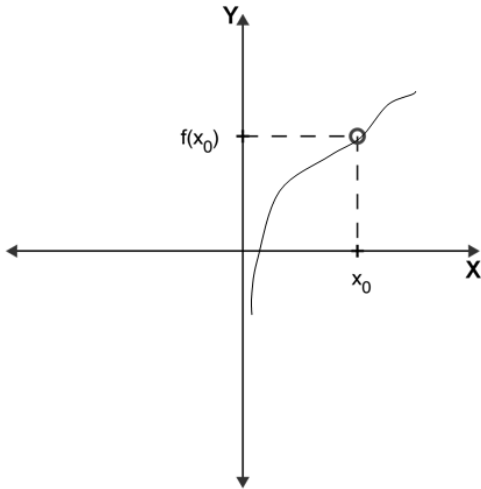
Para concluir, según la definición de continuidad, para cualquier ε positivo y para cualesquiera rectas de ecuación

$$y = f(x_0) - \varepsilon \quad , \quad y = f(x_0) + \varepsilon$$

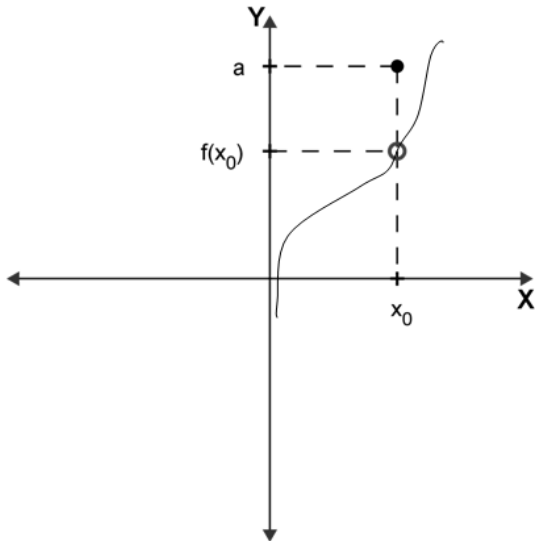
encontraremos dos rectas paralelas al eje de las ordenadas con ecuaciones $x = x_0 - \delta$, $x = x_0 + \delta$ tal que una parte de la gráfica de f queda completamente contenida en un rectángulo construido por las cuatro rectas mencionadas anteriormente.

Tipos de discontinuidad evitables

1) Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existe y $f(x_0)$ no existe, su representación gráfica es:



2) Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, $f(x_0) \neq a$ $a \in R$



En las dos situaciones anteriores se puede evitar la discontinuidad de la función.

CAPÍTULO IV

4.1. METODOLOGÍA

4.1.1. UN ESTUDIO DE CASO.

En este apartado, explicaremos cómo hemos seleccionado a los participantes para el proyecto de investigación. La decisión de utilizar una metodología de investigación cualitativa se debe al interés de nosotros que la muestra sea significativa, es decir, que las personas que integran dicha muestra sean personas que por su posición, por su historial académico o por cualquier otro criterio, puedan aportar conocimientos relevantes sobre el tema estudiado (1)

Nuestra elección ha sido optar por un estudio de caso: el grupo de profesores y estudiantes de la carrera de Matemáticas de una Universidad de la V región. Los criterios que se han utilizado para estudiar este grupo son diferentes. Unos para los estudiantes con experiencia en enseñar el contenido; otra para los sin experiencia y por último, otros para los profesores escogidos. La diferencia se centra en que los objetivos de la selección de las personas fueron distintos, pues no es menor la diferencia entre un académico y un estudiante con algo o nada de experiencia enseñando este concepto del Cálculo. A continuación mencionaremos los criterios seleccionados según profesores, estudiantes con experiencia y sin experiencia.

1. Para el caso de los profesores de la carrera.
 - La experiencia dictando la asignatura
 - La variada formación académica. Cabe mencionar que el profesor A tiene formación Pedagógica.
 - La disposición para colaborar con nuestro proyecto.

2. Para el caso de los Ayudantes de Cálculo I.
 - La experiencia que tienen como ayudantes en la carrera de Matemática.
 - La disposición para colaborar con nuestro proyecto.
 - El interés por el área del Cálculo.
3. Para el caso de un estudiante sin experiencia.
 - La disposición para colaborar con nuestro proyecto.
 - El interés por el área del Cálculo.
 - La confrontación de resultados al momento del análisis de sus respuestas, las que serán contrastadas con los entregados por los ayudantes de Cálculo I.

La técnica de estudio de casos como método docente, fue nuestra elección, pues tiene la ventaja de adaptarse a cualquier nivel educacional, en particular a la Educación Superior.

4.1.2. PARTICIPANTES Y CONTEXTO

En esta investigación participaron 3 docentes de enseñanza universitaria del Departamento de Matemáticas de una Universidad de la V región, con varios años de experiencia en la enseñanza del Cálculo a estudiantes de Pedagogía y Licenciatura en Matemática. Estos mostraron su conformidad al utilizar su imagen, apoyándonos en lo necesario para nuestra investigación, también participaron cuatro estudiantes de la Carrera de Matemática. El estudiante “A” aprobó Cálculo I y se ha desempeñado como ayudante dentro de la carrera en esta asignatura, pertenece al plan de Licenciatura en la Carrera. El estudiante “B” aprobó Cálculo I y se ha desempeñado como ayudante dentro de la carrera en esta asignatura, pertenece al plan de Pedagogía en Matemática último semestre. El estudiante “C” aprobó Cálculo I y se ha desempeñado como ayudante dentro de la carrera en esta asignatura, se encuentra en proceso de la elección del plan Pedagogía o Licenciatura en Matemática. El estudiante “D” aprobó Cálculo I y no tiene experiencia como ayudante, fue elegido para contrastar las argumentaciones de las respuestas con los ayudantes de Cálculo I.

La manera de referirse a nuestros participantes tiene como fin el garantizar su anonimato, retribuir la confiabilidad entregada al momento de dar sus respuestas y, por último asegurar que las argumentaciones entregadas por ellos no esté influenciado por presión alguna.

4.1.3. RECOLECCIÓN DE DATOS

Se han recolectado datos, tanto de la fase de análisis como de la fase de planificación del diseño de la propuesta. Realizamos una entrevista sobre la planificación de una clase a los docentes participantes, que se acotará solamente al contenido de continuidad puntual que tenía como objetivo profundizar en algunos aspectos relacionados con la enseñanza del concepto.

Esta entrevista es semiestructurada con un guión previo. En la primera parte indagamos en la fase de Iniciación previa a introducir el concepto. En la segunda etapa investigamos la fase de Institucionalización del concepto, y, en la tercera, en la Aplicación del concepto. Dentro de la fase de Aplicación se les solicitó el diseño de una clase, la cual sólo un docente realizó.

Posteriormente se realizó un cuestionario a los cuatro estudiantes participantes referidos al concepto de continuidad puntual. La instrucción general fue: Argumente todas sus respuestas, si es posible y dé varias fundamentaciones en cada respuesta. Este cuestionario fue realizado sin límite de tiempo. Después de la entrega del cuestionario se estudiaban las respuestas y se solicitaba un poco más de profundización, si es posible, en algunas de ellas con la finalidad de verificar si el estudiante argumentaba cada una de sus afirmaciones de manera más explícita.

4.1.4. ANÁLISIS DE DATOS

El análisis de datos tiene como fin el cumplimiento de varios objetivos, de acuerdo con la perspectiva teórica en la que nos apoyamos. Se analizaron los textos señalados en el programa de la carrera de Matemática desde dos ángulos, Epistemológico y Teoría de Registros Semióticos según Raymund Duval. Se consideraron estos dos aspectos, pues a medida que evolucionó el concepto se fueron presentando diferentes registros semióticos. Para el caso del cuestionario de continuidad puntual nos basaremos en Análisis de errores, una valiosa fuente de información acerca del aprendizaje de las Matemáticas (Silvia Mónica del puerto y otros). Se aplicaran entrevistas a algunos Profesores del Departamento de Matemática de la Universidad de Valparaíso, para constatar énfasis con los cuales se trata el concepto de continuidad puntual, importancia histórica y epistemológica del concepto, además de la utilización de los cambios de registros al momento de abarcar el tema.

4.1.5 ANÁLISIS DIDÁCTICO EN LA COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE CONTINUIDAD.

En esta sección expondremos un análisis epistemológico realizado al concepto de continuidad de una función de variable real (Contreras de la Fuente, Luque Cañada, Ordóñez Cañada, Ortega Carpio, & Sánchez Gómez, 2000), es decir su origen y evolución, con el fin de conocer las concepciones epistemológicas que se han presentado a lo largo de su desarrollo.

“La tesis didáctica básica que se postula es que los alumnos, a la hora de estudiar un concepto matemático, manifiestan unas concepciones cognitivas que, en general, pueden identificarse con las concepciones epistemológicas mostradas en la historia del desarrollo de ese concepto. Esto, en el campo de la Didáctica de las Matemáticas, tiene una importancia fundamental, puesto que si se conocen y afloran dichas concepciones epistemológicas y se contrastan con las cognitivas de los estudiantes, será posible modelizar y, por tanto, explicar su comportamiento académico. Además, también permitirá elaborar secuencias de aprendizaje capaces de incidir, por medio de una enseñanza activa donde el alumno participe en la construcción del conocimiento, positivamente en su rendimiento escolar”. (Contreras de la Fuente, Luque Cañada, Ordóñez Cañada, Ortega Carpio, & Sánchez Gómez, pág. 18).

Las concepciones y obstáculos identificados en la génesis referente al límite de una función se puede consultar en Contreras de la Fuente, Luque Cañada, Ordóñez Cañada, Ortega Carpio, & Sánchez Gómez, págs. (18-25). También en el mismo proyecto de investigación se pueden encontrar concepciones cognitivas del límite de una función detectadas en las respuestas de los estudiantes de dicho estudio (págs. 25-26).

A continuación nos enfocaremos en las concepciones y obstáculos identificados en la génesis de la continuidad de una función, la cual fue extraída del proyecto de investigación ya citado.

4.1.6 CONCEPCIONES Y OBSTÁCULOS IDENTIFICADOS EN EL ORIGEN DE LA CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN

Para analizar las concepciones se utilizó en el proyecto de investigación la metodología aplicada al concepto de límite de una función (Robinet (1983), D'Hombres (1987), Ruiz (1998), Deledicq (1995), Sánchez y Contreras (1995a), Sánchez y Contreras (1995b), Sánchez (1997) y Sánchez y Contreras (1998) y Contreras y cols. (2000c)); citado en (Contreras de la Fuente, Luque Cañada, Ordóñez Cañada, Ortega Carpio, & Sánchez Gómez)) la que clasifica en seis categorías:

- Etapa histórica.
- Hecho relevante que caracteriza la concepción.
- Científicos más relevantes relacionados con la concepción.
- Problemas más relevantes que se planteaban.
- Métodos empleados en las argumentaciones.
- Relación con otras concepciones.

Seguidamente se explicitarán dichas concepciones, juntos con los obstáculos encontrados en el proyecto de investigación.

4.1.6.1. LA CONCEPCIÓN PRIMITIVA (CCA)

Etapas: Desde el siglo V a.c. hasta el siglo XVII.

Hecho relevante que caracteriza la concepción. Los griegos consideraban que una curva era “un término fijo a quien los polígonos inscritos y circunscritos se aproximan continuamente y tanto como se quiera, a medida que se aumenta el número de sus lados”. La ley de continuidad sería como la guía en la aproximación continuada de los polígonos de la curva.

Científicos más relevantes relacionados con la concepción: Zenón y Arquímedes.

Problemas más relevantes que se plantean:

- a) La noción de continuidad está implícita en las respuestas a las paradojas de Zenón. Éste quiso poner en evidencia el problema causado por la introducción simultánea de dos hipótesis contradictorias: continuidad y discontinuidad. La primera supone la continuidad espacial y temporal, divisible hasta el infinito; la segunda, la discontinuidad radical de la realidad.
- b) Arquímedes consideraba a las curvas como el término fijo al que los polígonos inscritos y circunscritos se aproximaban continuamente tanto como se quiera, a medida que aumenta el número de lados.

Métodos empleados en las argumentaciones: La ley de continuidad sería como una guía en la aproximación continúa de los polígonos a la curva.

Relación con otras concepciones: Con la concepción geométrica del límite (CLG).

4.1.6.2. LA CONCEPCIÓN GEOMÉTRICA (CCB)

Etapas: Desde el siglo XVII hasta la primera mitad del siglo XVIII.

Hecho relevante que caracteriza la concepción. Se pasa de una aritmética geometrizada (la Aritmética está contenida en la Geometría) a una geometría aritmetizada, por medio de la Geometría Analítica.

Científicos más relevantes relacionados con la concepción: Descartes, Newton y Leibniz.

Problemas más relevantes que se plantean:

- a) Descartes, distingue la clase de las curvas algebraicas (que son expresables por medio de una ecuación) que llamó geométricas y las curvas mecánicas que no son geométricas.
- b) Newton, considera una curva como engendrada por el movimiento uniforme de un punto, descompone cada instante la velocidad de este punto en otras dos, una paralela al eje OX y la otra al OY. La curva es continua en el sentido de que está representada por un trazo continuo.
- c) Leibniz, enuncia el principio de la ley de la continuidad: “nada se hace por saltos en la naturaleza y no se puede pasar de un estado a otro sin pasar por los estados intermedios.

Métodos empleados en las argumentaciones. Las variaciones de las magnitudes que intervienen en las expresiones algebraicas de las curvas descritas por ecuaciones de 2º grado, se consideran como que evolucionan de manera continua y los puntos de estas curvas están en relación con los puntos de una recta.

Relación con otras concepciones. Con la concepción de límite numérica de infinitésimo como constante (CLNIC).

4.1.6.3. OBSTÁCULOS ASOCIADOS A LA CONCEPCIÓN (CCB)

La concepción CCB funciona para las funciones manipuladas en su época, es decir, funciones representadas por una expresión algebraica –fundamentalmente polinomios- siendo una fuente de errores al conducir a la idea de que son continuas las funciones que admiten una tangente en todo punto. Denominaremos a este obstáculo **OCCB**.

4.1.6.4. LA CONCEPCIÓN EULERIANA (CCC)

Etapas: Segunda mitad del siglo XVIII.

Hecho relevante que caracteriza la concepción. Se identifican las funciones continuas como “las definidas por una sola expresión analítica”. La función continua es la derivable.

Científicos más relevantes relacionados con la concepción: Euler y Lagrange.

Problemas más relevantes que se plantean:

- a) Euler, define las funciones continuas como aquellas en las que todos los valores están ligados por una misma ley o dependencia de la misma ecuación. Así, una función que no es continua, es un conglomerado de funciones continuas.
- b) Lagrange, al demostrar un teorema de series, dice “se podría siempre encontrar una abscisa i correspondiente a una ordenada menor que una cantidad dada, y entonces todo valor más pequeño que i responderá también a ordenadas menores que la cantidad dada.”

Métodos empleados en las argumentaciones. Se define la continuidad por comprensión, es decir, el enunciado da una propiedad que deberán satisfacer las abscisas y las ordenadas.

Relación con otras concepciones: Con la concepción numérica de derivada.

Obstáculos asociados a la concepción CCC

La concepción CCC funciona para funciones numéricas de la época, pero se constituye en obstáculo para funciones definidas a trozos. Por ejemplo, se denominará el obstáculo **OCCC**

4.1.6.5. LA CONCEPCIÓN DE CAUCHY (CCD)

Etapas: Primera mitad del siglo XIX.

Hecho relevante que caracteriza la concepción: Momento del encuentro de la continuidad con el límite.

Científicos más relevantes relacionados con la concepción. Chasles, Cauchy y Bolzano.

Problemas más relevantes que se plantean:

- a) Chasles, dio un ejemplo de función definida por expresiones analíticas distintas en intervalos diferentes del dominio de la variable independiente y que se puede representar por única expresión.
- b) Cauchy) proporciona un otro ejemplo en 1844:

$$F(x) = \begin{cases} y = x, x \geq 0 \\ y = -x, x < 0 \end{cases}$$

Es discontinua en el sentido de Euler, al estar definida por dos expresiones, pero también puede representarse por $y = \sqrt{x^2}$, para todo x real, será también función.

- c) Bolzano, da una definición de continuidad en la que ésta se encuentra con el concepto de límite.

Métodos empleados en las argumentaciones. De tipo infinitesimal. Cauchy dice: “... si un incremento infinitamente pequeño de la variable produce siempre un incremento infinitamente pequeño de la misma función.”

Relación con otras concepciones: Con la concepción numérica del límite.

4.1.6.6. LA CONCEPCIÓN DE WEIERTRASS-DARBOUX (CCE)

Etapas: Segunda mitad del siglo XIX.

Hecho relevante que caracteriza la concepción. Con esta concepción se disocia completamente la continuidad como intuición geométrica.

Científicos más relevantes relacionados con la concepción. Weierstrass, Heine, Riemann, Dedekind y Darboux.

Problemas más relevantes que se plantean:

- a) Hasta Weierstrass, una función continua era considerada como derivable, salvo en un cierto número de puntos aislados. Esto provenía de la experiencia física que hace creer que una curva continua posee en todos sus puntos una tangente, salvo quizás en ciertos puntos. Weierstrass da el primer ejemplo de una función continua en un dominio y no derivable en ninguno de sus puntos:

$$f(x) = \sum_0^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x) \quad \begin{array}{l} \text{con } a \text{ entero impar; } b \\ \text{constante y } > 1; \end{array} \quad a \cdot b > 1 + \frac{3\pi}{2}$$

- b) Heine, refina la definición al introducir ε y también η_0 (que es el δ de hoy).
c) Riemann, utilizó δ y α para definir la continuidad uniforme.
d) Dedekind, define la continuidad según la idea de cortadura en la recta real.
e) Darboux, define de la forma más exacta posible la continuidad en un punto (local) y la continuidad sobre un intervalo (global).

Métodos empleados en las argumentaciones. Al definir la continuidad con ε y δ y cuantificadores como: “para todo valor de x_0 ”, se convierte en “operativa” y se dota de un rigor matemático, lo cual permite aplicarla a funciones numéricas arbitrarias.

Relación con otras concepciones: Con la concepción CLMA (concepción métrico-analítica).

4.1.6.7. LA CONCEPCIÓN TOPOLÓGICA CCG

Etapas: Primera mitad del siglo XX.

Hecho relevante que caracteriza la concepción. La concepción aritmetizada de la continuidad se revela inadecuada en un contexto topológico, por lo cual es necesario generalizar la noción a funciones de un espacio topológico en otro.

Científicos más relevantes relacionados con la concepción. Hausdorff y Fréchet.

Problemas más relevantes que se plantean:

- a) Hausdorff, define el espacio topológico, la noción de entorno y otras nociones básicas como punto adherente, conjunto abierto, cerrado, conexo, separable y espacio compacto.
- b) Fréchet, aplica la continuidad a espacios métricos.

Métodos empleados en las argumentaciones. Al ser la noción de continuidad de carácter eminentemente topológico, se asegura la transferencia de ciertas propiedades de un espacio a otro. Por ejemplo, los homeomorfismos permiten la transferencia de estructuras algebraicas y topológicas.

Relación con otras concepciones. Con la concepción topológica de límite.

4.2. ANÁLISIS DE TEXTOS UNIVERSITARIOS SEÑALADOS POR EL PROGRAMA DE LA CARRERA DE MATEMÁTICA

Para el análisis de los textos universitarios utilizaremos dos criterios teóricos. El primero, será la identificación de concepciones y obstáculos de la continuidad puntual definidos en “Las Concepciones y Obstáculos Identificados en el Origen de la Continuidad de una función”. Puesto que dicho trabajo recorre la historia del concepto, se puede deducir una relación directa con la evolución del conocimiento, y apropiándonos de diversas concepciones (Contreras de la Fuente, Luque Cañada, Ordóñez Cañada, Ortega Carpio, & Sánchez Gómez, 2000), facilitaran un análisis más profundo de los textos Universitarios.

Para retomar las concepciones a utilizar y minimizar su escritura se definirán como:

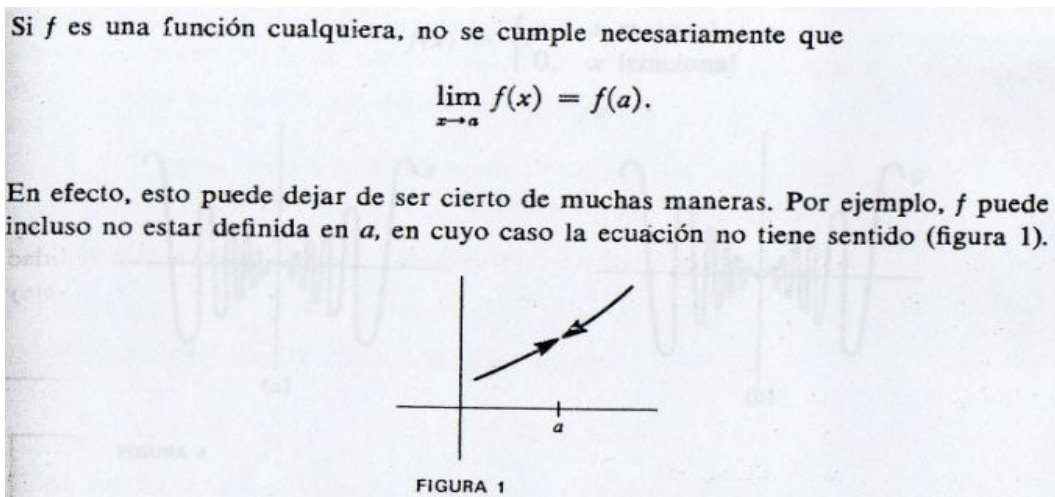
- La concepción ingenua CA. (Concepción primitiva CCA).
- La concepción geométrica, CB.
- La concepción de Euler, CC (concepción Euleriana CCC).
- La concepción de Cauchy CD. (Concepción de Cauchy CCD).
- La concepción de Weiertrass, CE. (Concepción de Weiertrass-Darboux CCE).
- La concepción topológica, CT. (Concepción topológica CCG).
- la concepción CH, relacionada con la contestación: “porque está definida en todo punto”. En esta contestación subyace lo siguiente: si f es función \Rightarrow la función traslada la “contigüidad” de los puntos del intervalo I a una “contigüidad” de las imágenes \Rightarrow la función es continua. Como esto supone decir, que el conjunto de las funciones F esta \subset en el de las funciones continuas F_c , se trata de una concepción errónea sustantivamente.

- La concepción CI, ligada con la contestación: “hay un punto no pertenece a la curva”. Es errónea sustantivamente (para más detalles ver El Bouazzoui, 1988).

Otra herramienta que utilizaremos es la Teoría de representaciones semióticas, según Raymund Duval, en particular identificaremos la utilización de los diferentes registros semióticos.

4.2.1. CALCULUS. CÁLCULO INFINITESIMAL, SEGUNDA EDICIÓN, MICHAEL SPIVAK. EDITORIAL REVERTÉ S.A.

Funciones Continuas (Capítulo 6)



Introducción del concepto: El concepto de continuidad se introduce a través de fenómenos discontinuos, pues explicita la negación de la definición de continuidad adoptada por este texto. Este segmento no deja claro todas las maneras en que no se cumple la definición, sólo especifica una y ésta se fortalece con la figura 1. Cabe destacar que en este segmento del texto estudiado no se realiza ninguna aclaración del fenómeno de discontinuidad, sólo se abarca implícitamente. Además, este caso de discontinuidad se

fortalece presentando la representación gráfica de dicha definición, con lo que se induce a la concepción geométrica CB. También, podemos hacer referencia a que evoca a la concepción intuitiva y por último es fortalecida por medio de la aclaración en el lenguaje técnico, referente al sentido de una ecuación. También podemos encontrar la concepción CI reflejada en el ejemplo y fortalecida con la gráfica de la figura 1.

Para profundizar el análisis, siguiendo los lineamientos de la Teoría de las representaciones semióticas de Raymund Duval, podemos mencionar que para la mayoría de los alumnos la comprensión que logran de un contenido quedará limitada a la forma de representación que utiliza. Considerando que es sólo un fragmento del inicio del capítulo podemos observar registros de escritura simbólica y gráficos, además de la primera definición que podríamos considerarla como un registro analítico.

También puede no existir $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ (figura 2). Finalmente, como se ve en la figura 3, aun estando definida f en a y existiendo $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, el límite puede no ser igual a $f(a)$.

Parece natural considerar como anormal todo comportamiento de este tipo y distinguir con algún calificativo honroso aquellas funciones que no presentan

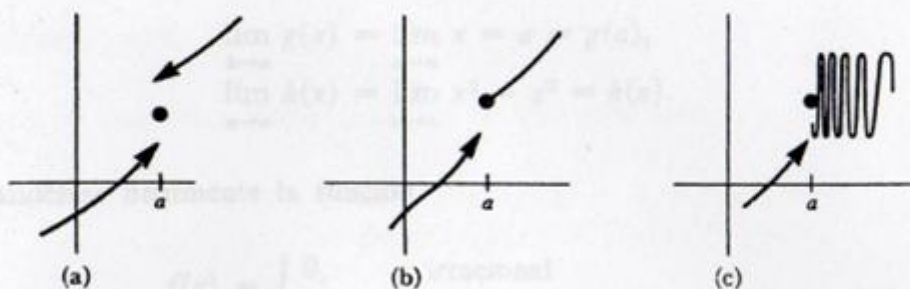


FIGURA 2

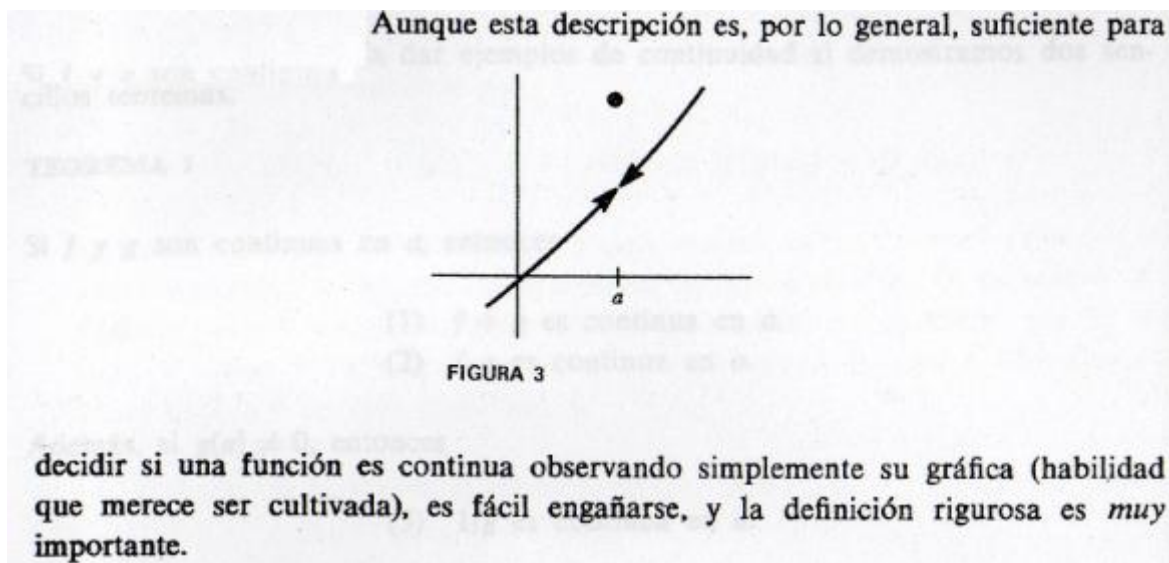
estas peculiaridades. El calificativo adoptado ha sido «continua». Intuitivamente, una función f es continua si su gráfica no contiene interrupciones, ni saltos ni oscilaciones indefinidas.

En este segmento del contenido continúa refiriéndose a los casos en que la definición de continuidad puntual no se cumple, pues explicita el caso en el que el límite de la función

$f(x)$ cuando tiende al punto a no existe, e implícitamente, la imagen del punto a existe “ $f(a)$ ”. Se fortalece esta situación apoyado de tres gráficas (CB) en las que ocurre que dicho límite no existe, pero si existe f de a . El segmento ofrece tres gráficas que representan la no existencia del límite, pero no especifica la diferencia entre ellas, lo que puede agobiar al lector que carece de espacio y tiempo para asimilar cada una de ellas.

Cuando se hace referencia a la figura 3 se continúa refiriéndose a la igualdad de la definición de continuidad puntual, pero en este caso es lógico estudiar el concepto de igualdad, pues este se refiere a la igualdad numérica. Por el contrario, en los casos anteriores no era lógico preguntarse si se cumplía la igualdad, puesto que al menos una de las expresiones algebraicas no existía.

El calificativo “continua” hace referencia a las concepciones geométricas CB por medio de las tres características que no puede poseer la gráfica de una función: no contiene interrupciones, ni saltos ni oscilaciones indefinidas, y, además, se enuncia implícitamente el principio de la Ley de continuidad de Leibniz.



Este segmento nos acerca a la definición formal de continuidad puntual, se presenta la concepción de Weiertrass-Darboux CE, pues se disocia la continuidad como intuición geométrica señalando que ésta debe ser cultivada. También se refleja la concepción CB al

describir la situación mediante la gráfica de la función abstracta. Dicha concepción es la equivalente a la mencionada en la Teoría de las representaciones semióticas. El contenido representado en esta expresión gráfica prioriza la intuición del alumno para relacionarla con el concepto requerido, además de una correspondencia semántica entre la gráfica y el argumento explicativo a él

DEFINICIÓN

La función f es **continua en a** si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

No tendremos dificultad alguna en hallar muchos ejemplos de funciones que son, o no son, continuas en algún número a ; todo ejemplo referente a límites suministra un ejemplo referente a continuidad, y el capítulo 5 suministra ciertamente bastantes de éstos.

Definición Formal

En esta definición no se explicita si ésta sirve para todo tipo de funciones (funciones definidas por tramos y las no definidas por tramos). Se asume que esto debiese ser un conocimiento adquirido al momento de ver la unicidad de límite tratada en capítulos anteriores. En cuanto a los ejemplos, considera que el lector posee la rapidez necesaria de relacionar los ejemplos de límites con el concepto de continuidad. Esta definición trae notaciones implícitas, pues la idea de esta definición es comparar valores numéricos, y por ende valores existentes, lo cual conlleva que el límite de la función cuando tiende al punto a , y f de a deben existir, de lo contrario esta definición no tendría sentido. En este segmento no se explicita inmediatamente la concepción de Cauchy, la cual relaciona la definición de límite con el concepto de continuidad puntual, según Bolzano, tampoco aparece en ella la concepción CB para fortalecer esta situación por medio de una grafica de la función abstracta y su relación de igualdad a f de a .

Dando una mirada a este fragmento de texto referido a la Teoría de las representaciones semióticas podríamos mencionar que hay un registro simbólico, pues hacemos referencia a una definición mediante expresiones simbólicas. Otra cosa curiosa que podemos destacar es la poca concordancia en la utilización de registros que se vieron en la introducción del concepto y el que se utiliza para dar la formalidad.

Ejemplos:

La función $f(x) = \text{sen } 1/x$ no es continua en 0, porque ni siquiera está definida en 0, y lo mismo vale para la función $g(x) = x \text{ sen } 1/x$. Por otra parte, si queremos extender la segunda de estas funciones, es decir, si queremos definir una nueva función G poniendo

$$G(x) = \begin{cases} x \text{ sen } 1/x, & x \neq 0 \\ a, & x = 0, \end{cases}$$

En este ejemplo se ve reflejada la concepción de Cauchy CD, al momento de explicitar la función $G(x)$, pues en esta concepción Euler dice que las funciones definidas por dos expresiones son discontinuas. También se dan dos ejemplos de funciones discontinuas por el hecho de no estar definidas puntualmente para la imagen del valor cero.

Apoyados en la teoría de los registros semióticos, aludimos que solo se presenta registros de una escritura simbólica lo que va unido directamente a un registro analítico en lo referente a la igualdad producida en la función. Además, no concuerda el énfasis puesto en los registros de representación grafica vistos en la introducción del concepto y el tipo de registro utilizado para señalar el ejemplo. Esto cobra importancia ya que los alumnos tienden a resolver los ejercicios con los registros o estrategias que tienen más presentes en su memoria, en este caso, nos referimos a los registros de representación gráfica.

entonces la elección de $a = G(0)$ puede hacerse de tal manera que G sea continua en 0 ; para hacer esto podemos (de hecho, debemos) definir $G(0) = 0$ (figura 4). Esta clase de extensión no es posible para f ; si definimos

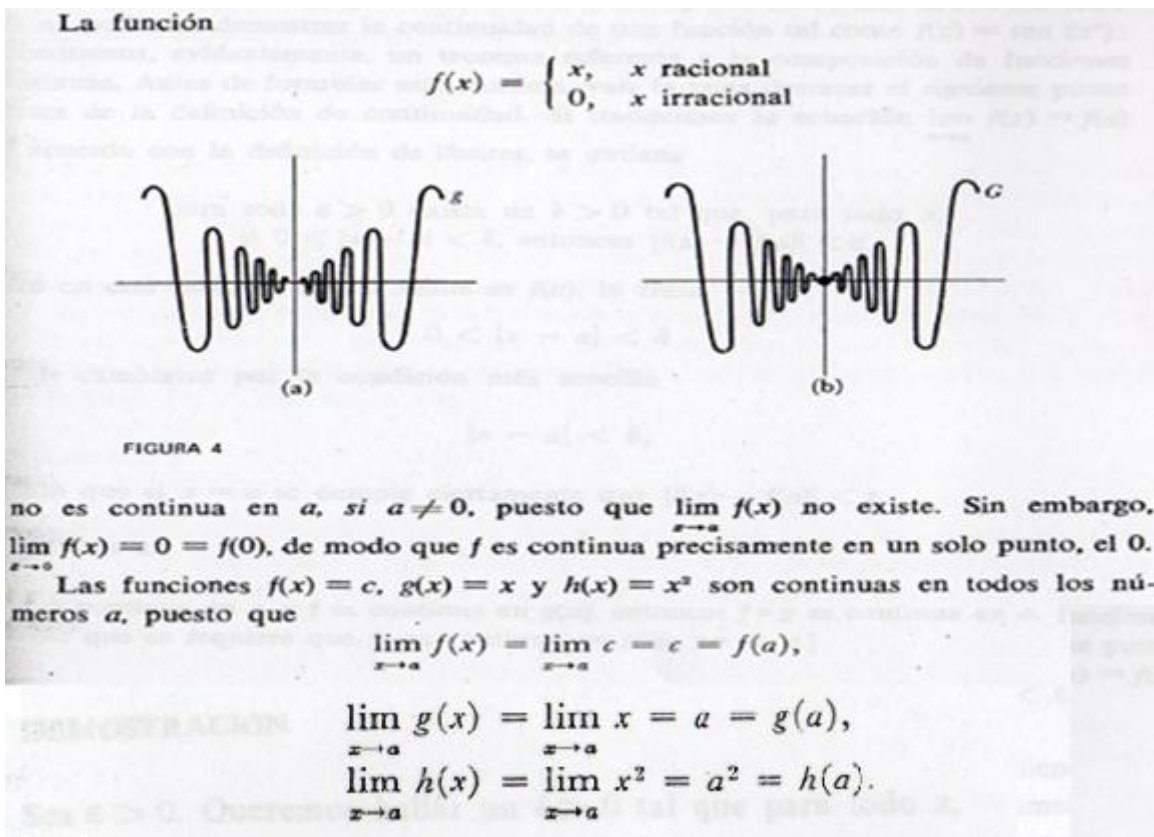
$$F(x) = \begin{cases} \text{sen } 1/x, & x \neq 0 \\ a, & x = 0, \end{cases}$$

entonces F no será continua en 0 , cualquiera que sea a , porque $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ no existe.

En este segmento, se define $G(0)$ con la finalidad de hacer continua la función $G(x)$ en el punto 0 . Esta ampliación de la función es fortalecida con la figura 4 al igual que la función $g(x)$, pero en este caso se ve reflejado que $g(0)$ no existe, pero el límite sí, ya que tiende a 0 , lo que se puede inferir a partir de la gráfica de la figura 4 parte a) En cuanto a esta inferencia no se da una explicación algebraica o analítica que fortalezca este hecho.

Teniendo presente la teoría de representaciones semióticas y su influencia en el análisis de la enseñanza de los conceptos, es importante destacar que en la formalización del concepto de continuidad puntual se priorizó el registro de escritura simbólica y el registro tabular, sin tomar en cuenta el registro gráfico de una función a la que tanto énfasis se le dio en la introducción del concepto. Esto nos lleva a inferir que no hay coherencia en la presentación del concepto de continuidad puntual con las formas de explicar los ejemplos expuestos. En este sentido y según las perspectivas de las representaciones semióticas, los alumnos podrían tener dificultades al momento de resolver dichos ejemplos, puesto que no tendrían un registro “modelo” a seguir.

Podemos identificar en este ejemplo la concepción de Cauchy CD, al momento de definir la función $F(x)$, ya que en esta concepción Euler habla de la discontinuidad de funciones definidas por tramos.

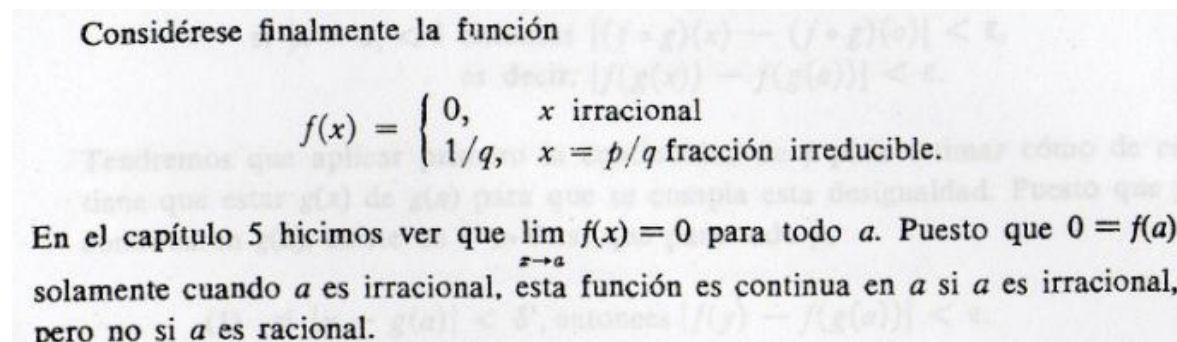


En este segmento se presenta la función $f(x)$ original (a) y a su lado la función reparada (b) lo que expresa una función continua en todo su dominio. Se apoyan en la gráfica de las funciones, concepción CB, para señalar de manera más coherente un ejemplo siguiendo la tendencia de la introducción del concepto. Además, podemos mencionar que se aprecia la concepción de Cauchy CD, pues se expresa la función en tramos.

Siguiendo con la secuencia lógica del análisis, en este segmento se puede apreciar claramente que la figura (a) no posee valor para la función evaluada en el punto a , lo cual nos lleva a inducir que la función no es continua en dicho punto. Este hecho lo explicita con lenguaje técnico, en cambio con un poco de dificultad se aprecia que en la figura (b) es apreciable la continuidad de la función en 0, claramente se puede apoyar en el texto para precisar con más detalle la diferencia entre ambas gráficas. Además esta afirmación la comprueba con la definición de continuidad puntual.

En este segmento se dan ejemplos de tres funciones continuas en un punto a y se verifica la igualdad de la definición de continuidad puntual.

Podemos señalar la correspondencia semántica entre registros (gráfico y lenguaje natural). Visualmente se encuentran registros del tipo simbólico, gráficos y del tipo analítico.



Considérese finalmente la función

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ irracional} \\ 1/q, & x = p/q \text{ fracción irreducible.} \end{cases}$$

En el capítulo 5 hicimos ver que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ para todo a . Puesto que $0 = f(a)$ solamente cuando a es irracional, esta función es continua en a si a es irracional, pero no si a es racional.

En este apartado del texto, se da un ejemplo de una función definida por tramos, lo cual hace referencia a la concepción de Cauchy, se verifica la igualdad de la función sólo para el caso en que “ a ” es irracional, pero no para el caso en que “ a ” es racional.

Nuevamente, bajo la perspectiva de registros semióticos notamos la ausencia de una visión de representación gráfica para justificar lo expresado en este fragmento de texto. Aquí podemos notar poca relación entre la función y su párrafo “explicativo” el cual está orientado a citar una explicación anterior. Teniendo presente dichos eventos, podríamos señalar que hay posibilidades de que los alumnos tuviesen problemas en la clara percepción de los ejercicios y ejemplos. Esta tendencia a no utilizar representaciones gráficas en la mayoría de sus ejemplos podría ser debido a la orientación calculista del libro, el cual estaría enfocado desde el principio para que los estudiantes practicasen y ejercitaran apoyándose en sus problemas.

Será más fácil todavía dar ejemplos de continuidad si demostramos dos sencillos teoremas.

TEOREMA 1

Si f y g son continuas en a , entonces

- (1) $f + g$ es continua en a ,
- (2) $f \cdot g$ es continua en a .

Además, si $g(a) \neq 0$, entonces

- (3) $1/g$ es continua en a .

DEMOSTRACIÓN

Puesto que f y g son continuas en a ,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a).$$

Por el teorema 2(1) del capítulo 5 esto implica que

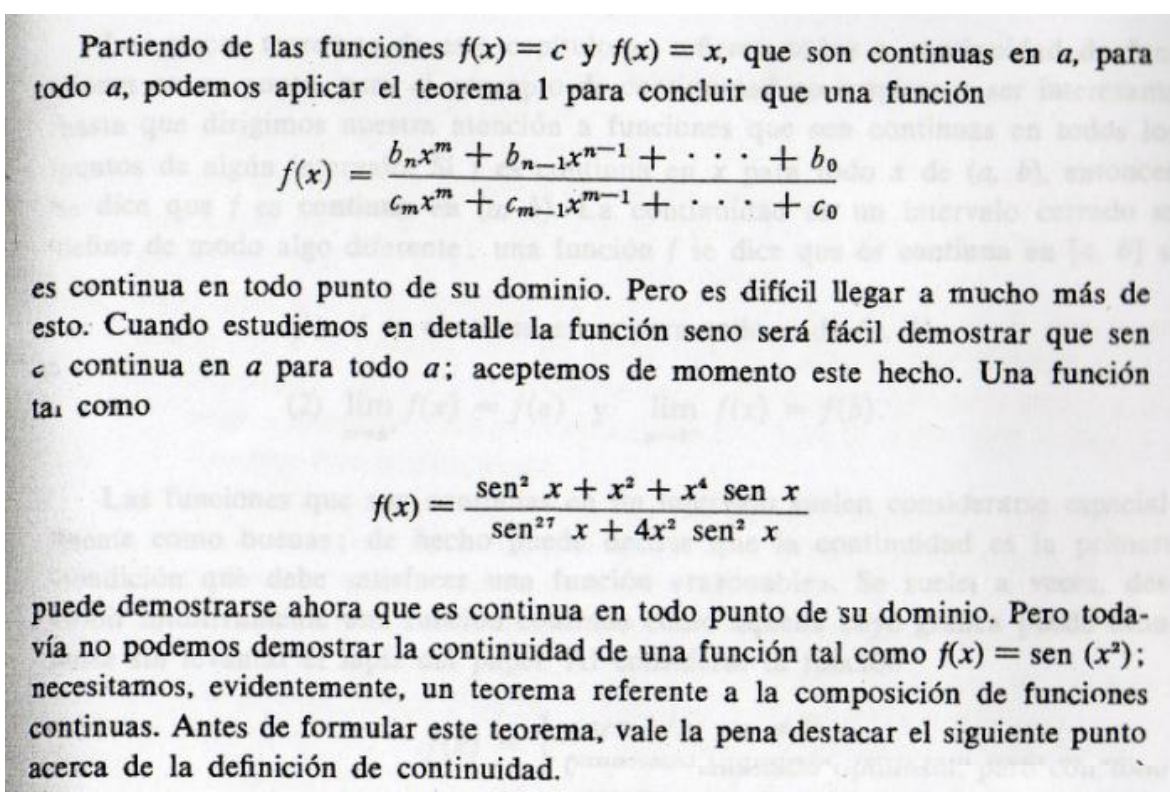
$$\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = f(a) + g(a) = (f + g)(a),$$

lo cual es precisamente la afirmación de que $f + g$ es continua en a . Las demostraciones de las partes (2) y (3) se dejan para el lector. ■

En este segmento se presenta un teorema de funciones continuas en un punto a , que tiene relación con álgebra de funciones continuas y seguidamente con la respectiva demostración de sólo una parte del teorema, en particular “ $f+g$ es continua en a ”. Esta demostración se realiza con la definición dada por la igualdad numérica. Las otras dos partes de este teorema se dejan al lector, pues se realizan de forma análoga.

En este segmento, no se utiliza la concepción de Weirtrass-Darboux CE para relacionar la continuidad puntual con (épsilon-delta), lo que muestra un razonamiento lógico correcto, pues aún no se explicita dicha relación, pero tampoco se fortalece este teorema con la concepción geométrica CB.

Profundizando un poco más, podemos mencionar que bajo la mirada de la teoría de representaciones semióticas hay una persistente utilización del registro de escritura simbólica, además de expresiones lingüísticas que apoyan las relaciones producidas con los registros analíticos. Nuevamente hacemos notar la carencia del registro gráfico utilizado en un comienzo para ilustrar las situaciones. Aunque podría ocurrir que el registro utilizado por excelencia este texto permite efectuar con mayor facilidad, rapidez y economía de espacio los ejercicios y problemas propuestos.

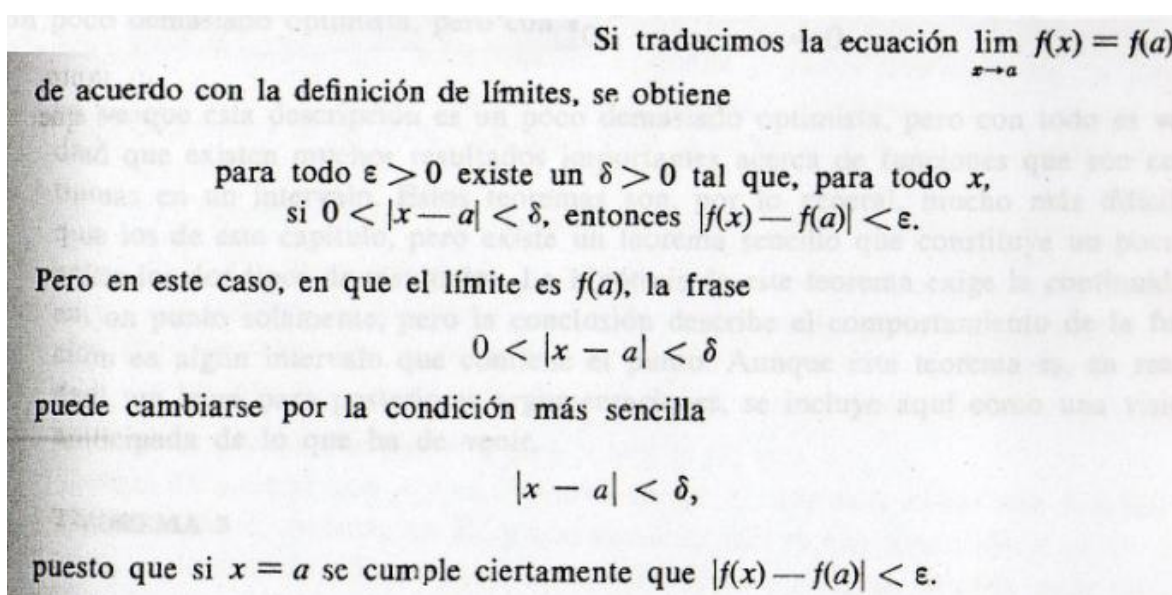


En este apartado, se encuentran ejemplos de funciones continuas construidas a partir de dos funciones ya definidas como continuas. A modo propio consideramos que los ejemplos expuestos no son de carácter trivial, puesto que se podría interpretar o pensar que sólo se debe utilizar el teorema 1 para su comprensión, además que dicho teorema no explicita de manera general acerca de la división de funciones continuas en un punto, sino que sólo se limita al

caso en que el numerador es una constante. Específicamente toma al número 1 como numerador y considera como denominador a la función g .

Podemos señalar que bajo la mirada de la teoría de representaciones semióticas encontramos bastante congruencia entre el enunciado en el lenguaje natural y la relación de las funciones respectivas que poseen registros de representación simbólica.

Volviendo nuevamente al análisis bajo el punto de vista de las concepciones epistemológicas e históricas podemos precisar que se percibe la presencia de la concepción de Cauchy CD, a causa que se presentan funciones continuas en un punto, con sólo una única expresión.



Prosiguiendo con el análisis de cada párrafo, acá podemos identificar que se relaciona la continuidad puntual en “a” con la definición (épsilon-delta), la que es explicada por partes apoyándose de los conectores lógicos de la expresión. A modo de reflexión consideramos que esta estrategia utilizada tiene como objetivo ayudar a los estudiantes a mejorar la comprensión de dicha definición, ya que así como fue abordada en capítulos anteriores. Ésta suele ser complicada y difícil de aplicar por los alumnos(as). Esta explicación amerita una

interpretación gráfica para mejorar su comprensión, porque está descrito y comprobado que el análisis heurístico de las interpretaciones gráficas o geométricas por parte de los alumnos (a) permite una mayor comprensión de lo expuesto (Duval, 1999). Lo mencionado recientemente alude a las representaciones gráficas bajo la mirada de la teoría de representaciones semióticas y al mismo tiempo a la concepción geométrica CB.

TEOREMA 2

Si g es continua en a , y f es continua en $g(a)$, entonces $f \circ g$ es continua en a . [Obsérvese que se requiere que f sea continua en $g(a)$, no en a .]

DEMOSTRACIÓN

Sea $\varepsilon > 0$. Queremos hallar un $\delta > 0$ tal que para todo x ,

$$\text{si } |x - a| < \delta \text{ entonces } |(f \circ g)(x) - (f \circ g)(a)| < \varepsilon, \\ \text{es decir, } |f(g(x)) - f(g(a))| < \varepsilon.$$

Tendremos que aplicar primero la continuidad de f para estimar cómo de cerca tiene que estar $g(x)$ de $g(a)$ para que se cumpla esta desigualdad. Puesto que f es continua en $g(a)$, existe un $\delta' > 0$ tal que para todo y ,

$$(1) \text{ si } |y - g(a)| < \delta', \text{ entonces } |f(y) - f(g(a))| < \varepsilon.$$

En particular, esto significa que

$$(2) \text{ Si } |g(x) - g(a)| < \delta', \text{ entonces } |f(g(x)) - f(g(a))| < \varepsilon.$$

Aplicamos ahora la continuidad de g para estimar cómo de cerca tiene que estar x de a para que se cumpla la desigualdad $|g(x) - g(a)| < \delta'$. El número δ' es un número positivo como cualquier otro número positivo; podemos, por lo tanto, tomar δ' como el ε (!) de la definición de continuidad de g en a . Deducimos que existe un $\delta > 0$ tal que, para todo x ,

$$(3) \text{ Si } |x - a| < \delta, \text{ entonces } |g(x) - g(a)| < \delta'.$$

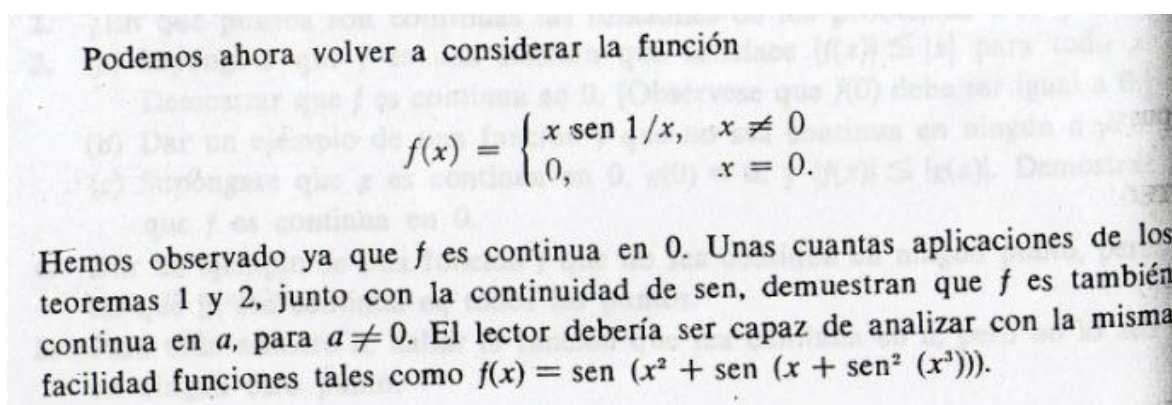
Combinando (2) y (3) vemos que para todo x ,

$$\text{si } |x - a| < \delta, \text{ entonces } |f(g(x)) - f(g(a))| < \varepsilon. \blacksquare$$

En esta sección se presenta un teorema que trata sobre la composición de funciones continuas en un punto “a”. Para el caso de su demostración se utiliza la concepción de

Weierstrass-Darboux, además de la definición (épsilon-delta). Tampoco hace referencia a la concepción CB, la que no muestra coherencia con la presentación inicial de la continuidad puntual.

Apoyándonos en la teoría de las representaciones semióticas, podemos destacar la presencia de los registros de escritura simbólicos, registros de expresiones lingüísticas. Estas últimas tienen una estrecha relación, puesto que la representación simbólica codifica la frase conformada por la expresión lingüística, dándole sentido a lo presentado bajo cada párrafo.



En este segmento se presenta un ejemplo de una función continua en todo su dominio, no explica las llamadas “Unas cuantas aplicaciones del teorema 1 y 2, junto con la continuidad de $f(x)$ ” para demostrar la continuidad puntual en a , por ende no encontramos pertinente este ejemplo en la forma en que se presenta, ni menos el que tiene relación con la composición de funciones. Podemos encontrar la concepción de Cauchy CD en la definición por tramos de la función f .

Ahora, desde un punto de vista más superficial, podríamos señalar que se encuentran registros de escritura simbólica, expresiones lingüísticas y registros analíticos. Además de hacer énfasis a que la sección encargada de explicar la función dada como ejemplo no es congruente con ella, en otras palabras, no dan claridad de lo que ocurre en lo representado algebraicamente. Así como señalábamos anteriormente se necesitaría una explicación con algún registro gráfico para ayudar a la pobre explicación del problema.

TEOREMA 3

Supóngase que f es continua en a , y $f(a) > 0$. Entonces existe un número $\delta > 0$ tal que $f(x) > 0$ para todo x que satisface $|x - a| < \delta$. Análogamente, si $f(a) < 0$, entonces existe un número $\delta > 0$ tal que $f(x) < 0$ para todo x que satisface $|x - a| < \delta$.

DEMOSTRACIÓN

Considérese el caso $f(a) > 0$ puesto que f que es continua en a , si $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que, para todo x ,

$$\text{si } |x - a| < \delta, \text{ entonces } |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Puesto que $f(a) > 0$ podemos tomar a $f(a)$ como el ε . Así, pues, existe $\delta > 0$ tal que para todo x ,

$$\text{si } |x - a| < \delta, \text{ entonces } |f(x) - f(a)| < f(a).$$

y esta última igualdad implica $f(x) > 0$.

Puede darse una demostración análoga en el caso $f(a) < 0$; tómese $\varepsilon = -f(a)$.
O también se puede aplicar el primer caso a la función $-f$. ■

En este segmento se presenta un teorema con la hipótesis de una función f continua en el punto “ a ”, se utiliza la implicancia con la definición (épsilon-delta), lo que hace referencia a la concepción CE. Para el caso de este teorema no se dan ejemplos, perdiendo con esto coherencia con la presentación de los teoremas anteriores. Tampoco hace referencia a la concepción CB, y de esta manera no muestra coherencia con la presentación inicial de la continuidad puntual.

Apoyándonos en la teoría de las representaciones semióticas, podemos destacar la presencia de los registros de escritura simbólicos, registros de expresiones lingüísticas. Estas últimas tienen una estrecha relación, puesto que la representación simbólica codifica la frase conformada por la expresión lingüística, dándole sentido a lo presentado bajo cada párrafo.

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL.

TAYLOR, EDICIÓN LIMUSA

(Apartado capítulo II)

2.3 Continuidad. Hemos visto que para una función $F = \{(x, y) \mid y = F(x)\}$; $\lim_{x \rightarrow a} F(x)$ no depende del valor de $F(a)$, y que dicho límite puede existir aunque $F(a)$ no exista.

La función F es **continua en a** si

- (i) a está en el dominio de F ; esto es, si $F(a)$ está definida;
- (ii) $\lim_{x \rightarrow a} F(x)$, existe;
- (iii) $\lim_{x \rightarrow a} F(x) = F(a)$.

Si una función es continua en cada punto de un intervalo dado, es **continua sobre el intervalo**. Si una función no es continua en a , se dice que es **discontinua** o que **tiene una discontinuidad en a** .

Las condiciones (i), (ii) y (iii) de la definición de continuidad en a , a veces se combinan en un solo enunciado:

$$\lim_{x \rightarrow a} F(x) = F(a) \quad (21)$$
o lo que es equivalente.

$$\lim_{h \rightarrow 0} F(a + h) = F(a). \quad (22)$$

En otras palabras, las proposiciones (21) y (22), cuando se interpretan como equivalentes a las condiciones (i), (ii) y (iii), pueden tomarse como definiciones de " F es continua en a ". Hemos supuesto que (21) y (22) son equivalentes; se le pide al lector que lo demuestre, en el ejercicio 23, al final de esta sección.

Debe tenerse cuidado al interpretar los enunciados (21) y (22). Una función puede dejar de ser continua en a , si $F(a)$ no existe, si no existe $\lim_{x \rightarrow a} F(x)$ o si $F(a)$ y $\lim_{x \rightarrow a} F(x)$ no son iguales. Considérense los siguientes ejemplos:

Introducción al concepto.

El concepto de continuidad se inicia a través de la definición de una función como "un conjunto de puntos denominado F , que alude a la relación que existe entre el valor del límite de F cuando x tiende al punto a y la imagen de F de a , (enfatisa en la dependencia de dichos valores). Da un ejemplo implícito de un caso de discontinuidad puntual, ya que cita la existencia del límite y la no existencia de la imagen de F de a ". Por un lado hace referencia a la concepción de Cauchy CD, pues define la continuidad de F en el punto " a " con las tres condiciones clásicas para que se cumpla la ecuación que relaciona la continuidad con el

cálculo de un límite y la imagen de F de a . Por otro lado en la definición de este concepto no se hace referencia a las concepciones CB, CE, ya que no se enfatiza en explicaciones geométricas del concepto y tampoco se relaciona con la definición formal (épsilon-delta).

Luego de las tres condiciones señaladas en el párrafo se define la continuidad en un intervalo y a continuación la discontinuidad puntual sin considerar ninguna concepción histórica explícitamente, pero sí lo hace de manera implícita, trata la continuidad puntual en un intervalo lo cual alude a la concepción CB, puesto que en esta concepción se definen las curvas no geométricas representadas por un tramo continuo. La definición la resume en la verificación de alguna de dos ecuaciones que presenta, porque las considera equivalentes. Dichas definiciones no explican la afirmación de equivalencia, ya que deja a cargo del lector la demostración formal. Cabe destacar que en principio señala explícitamente la equivalencia de las ecuaciones 21 y 22, luego explica que sólo era un supuesto por demostrar. En el siguiente párrafo, destaca el cuidado al interpretar las ecuaciones y entrega implícitamente los casos de discontinuidad puntual, tampoco se ve reflejada alguna concepción histórica.

Dando una mirada desde la teoría de las representaciones semióticas, podríamos señalar que el fragmento se destaca por especificar y orientar el contenido apoyándose en expresiones lingüísticas, registros de escritura simbólica. Los enunciados son congruentes con las proposiciones expuestas, lo que podría justificar la ausencia de registros gráficos que a nuestro parecer ayudaría bastante a los alumnos(as) a mejorar su comprensión.

Ejemplo 1. Considérese la función F , dada por

$$F(x) = \frac{2x^2 - 5x - 3}{x - 3}, \quad x \neq 3.$$

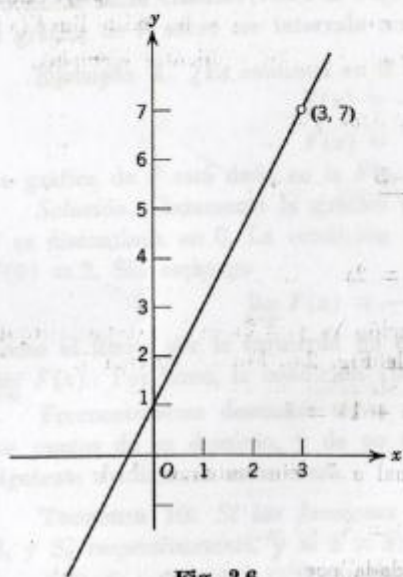
Note que

$$F(x) = \frac{(2x + 1)(x - 3)}{x - 3} = 2x + 1, \quad x \neq 3.$$

La gráfica de F es la recta cuya ecuación es $y = 2x + 1$, excepto porque le falta el punto $(3, 7)$, como se indica en la Fig. 2.6. Por el teorema 7,

$$\lim_{x \rightarrow 3} F(x) = \lim_{x \rightarrow 3} (2x + 1) = 7.$$

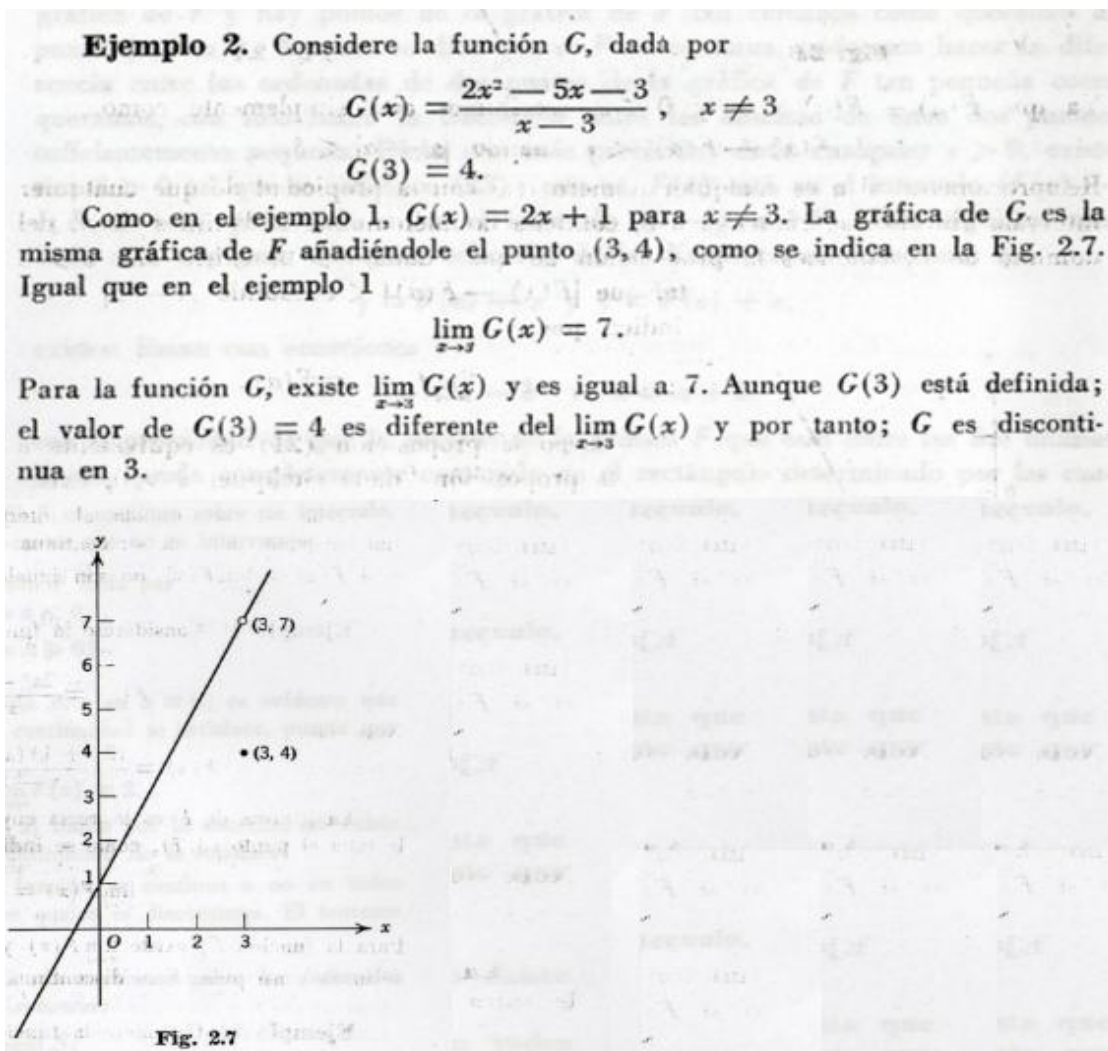
Para la función F , existe $\lim_{x \rightarrow 3} F(x)$ y es igual a 7. Sin embargo, $F(3)$ no está definida y así pues, F es discontinua en 3.



En la explicación de este ejemplo utiliza las concepción geométrica CB al instante de graficar la función; cabe resaltar el tratamiento en conjunto de la manipulación algebraica de la función y la manipulación geométrica de ésta, a pesar de que en la introducción del concepto no se reflejan estas concepciones; también se realiza una explicación detallada de la discontinuidad evitable de la función, ya que analiza la existencia del límite y de $F(3)$. Se continúa sin reflejar la concepción de Weierstrass-Darboux CE, pues no relaciona la definición utilizada actualmente (épsilon-delta) con el concepto de continuidad puntual.

Bajo la perspectiva de la teoría representaciones semióticas, podríamos mencionar que comienza utilizando los registros de representación simbólica y analítica, cambiando luego a

un registro lingüístico donde aclara lo sucedido anteriormente. Diversos registros son utilizados en este fragmento, donde se encuentra el ejemplo lo que ayudaría bastante a los alumnos(as) para que puedan comprender la manera de resolución que beneficia la resolución de los próximos ejercicios. En la explicación se utilizaron específicamente el registro lingüístico y el registro gráfico para señalar y dejar bien clara la ausencia del valor que corresponde a la restricción.



En la explicación de este ejemplo, nuevamente utiliza la concepción geométrica CB al instante de graficar la función. Es importante señalar el tratamiento en conjunto de la manipulación algebraica de la función y la manipulación geométrica de ésta, a pesar de que en la introducción del concepto no se reflejan estas concepciones, también se realiza una

explicación detallada de la discontinuidad evitable de la función, pues analiza la existencia del límite y de $G(3)$, en este caso no se cumple la igualdad, debido a que ambas expresiones existen pero son distintas. Se continúa sin reflejar la concepción de Weierstrass-Darboux CE, al no relacionar la definición utilizada actualmente (épsilon-delta) con el concepto de continuidad puntual.

Destacando una nueva perspectiva así como el de la teoría de las representaciones semióticas, observamos la presencia de registros gráficos y registros lingüísticos que apoyan la explicación, los cuales consideramos que beneficiarían al alumno(a) al momento de estudiarlo. Esto se argumenta por los estudios de Duval que señala que mientras mayor sea la cantidad de registros en los cuales se expresa un contenido o idea, son mayores las posibilidades de ser adquiridas por el oyente.

Ejemplo 3. Considere la función H , dada por

$$\left. \begin{aligned} H(x) &= \frac{2x^2 - 5x + 3}{x - 3}, \quad x \neq 3 \\ H(3) &= 7 \end{aligned} \right\} \text{o simplemente, } H(x) = 2x + 1.$$

Aquí $\lim_{x \rightarrow 3} H(x) = 7$ y $H(3) = 7$, de modo que $\lim_{x \rightarrow 3} H(x) = H(3)$, luego H es continua en 3. La gráfica de H es la recta mostrada en la Fig. 2.8

A veces deseamos expresar la definición de continuidad de una función F , en a , en términos de desigualdades. Nótese que la proposición (21) significa que dada una $\varepsilon > 0$, existe una $\delta > 0$ tal que

$$|F(x) - F(a)| < \varepsilon \text{ cuando } 0 < |x - a| < \delta.$$

Ya que $F(a) - F(a) = 0$, y $0 < \varepsilon$, escribimos esto simplemente como

$$|F(x) - F(a)| < \varepsilon \text{ cuando } |x - a| < \delta.$$

Recíprocamente, si a es cualquier número real con la propiedad de que cualquier intervalo abierto que contenga a a , contiene también números distintos de a , del dominio de F , entonces la proposición de que “dada $\varepsilon > 0$, existe una $\delta > 0$ tal que $|F(x) - F(a)| < \varepsilon$ cuando $|x - a| < \delta$ ” indica que

$$\lim_{x \rightarrow a} F(x) = F(a):$$

Luego la proposición (21) es equivalente a la proposición “dada cualquier $\varepsilon > 0$, existe una $\delta > 0$, tal que

$$|F(x) - F(a)| < \varepsilon \text{ cuando } |x - a| < \delta,$$

o sea:

$$F(a) - \varepsilon < F(x) < F(a) + \varepsilon$$

$$\text{cuando } a - \delta < x < a + \delta.” \quad (23)$$

Si F es continua en a y si $F(a) \neq 0$ entonces se sigue de (23) que existe un número $\delta > 0$ tal que

$$F(x) \neq 0 \text{ cuando } x \in [a - \delta; a + \delta].$$

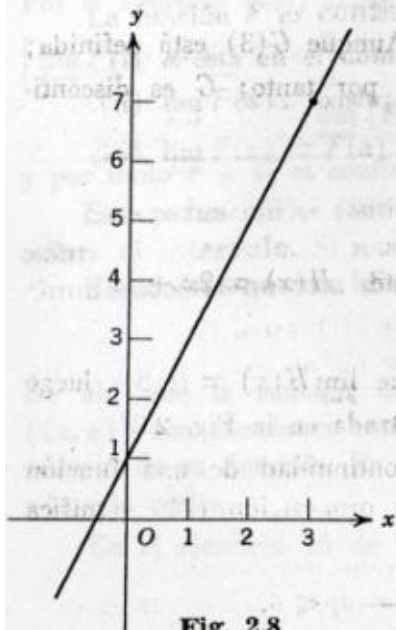


Fig. 2.8

En este fragmento de texto, nuevamente utiliza la concepción geométrica CB al momento de la explicación del ejemplo, puesto que grafica la función, destaca el tratamiento en conjunto de la manipulación algebraica de la función y la manipulación geométrica en el desarrollo del ejercicio. Hay que considerar que al momento de la introducción no reflejaban

estas concepciones, lo que tendía a suponer que en el desarrollo del capítulo no se encontrarían. Apoyándose de diversos registros lingüísticos, de escritura simbólica y analítica realiza una detallada explicación de la continuidad puntual de una función, ya que se analiza la existencia del límite y la existencia de $H(3)$, a diferencia de los casos anteriores ahora sí cumple la igualdad.

Se puede apreciar la concepción de Weierstrass-Darboux CE, al relacionar la definición utilizada actualmente (épsilon-delta) con el concepto de continuidad puntual, con este ejemplo fortalece la definición formal dada al comienzo.

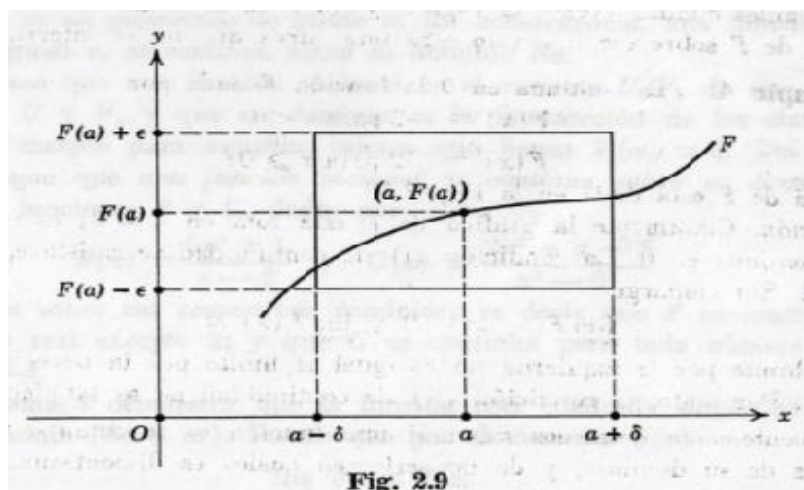


Fig. 2.9

Si la función F es continua en a , entonces el punto $(a, F(a))$ está en la gráfica de F y hay puntos de la gráfica de F tan cercanos como queramos al punto $(a, F(a))$. A veces se dice que si F es continua, podremos hacer la diferencia entre las ordenadas de dos puntos de la gráfica de F tan pequeña como queramos, con sólo hacer la diferencia entre las abscisas de estos dos puntos, suficientemente pequeña. Dicho con más precisión: dada cualquier $\epsilon > 0$, existe una $\delta > 0$ tal que se satisface (23); esto es, $F(x)$ está en el intervalo $(F(a) - \epsilon; F(a) + \epsilon)$ para toda x en el intervalo $(a - \delta; a + \delta)$. Esto significa que dada una ϵ y para cualquier selección de las líneas cuyas ecuaciones son

$$y = F(a) - \epsilon \text{ y } y = F(a) + \epsilon,$$

existen líneas con ecuaciones

$$x = a - \delta \text{ y } x = a + \delta$$

con la propiedad de que la porción de la gráfica F que está entre las dos últimas líneas, queda completamente contenida en el rectángulo determinado por las cua-

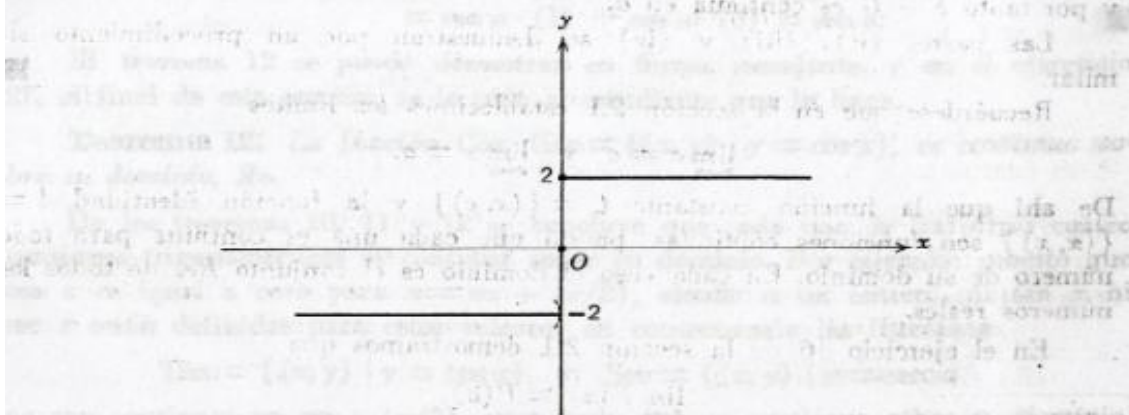


Fig. 2.10

tro líneas antes citadas (véase la Fig. 2.9). Si F es continua sobre un intervalo, la gráfica de F sobre ese intervalo será una curva que no se interrumpe.

En este segmento del texto se fortalece la definición formal dada al comienzo. Podemos reconocer el uso de las concepciones CB, CD y CE las cuales sirven de apoyo para realizar una explicación de la definición señalada en el texto; además, podemos mencionar que recurre a la gráfica de una función arbitraria para mostrar la relación que existe entre la continuidad y la definición de límite. Por último, destacamos que explicita la definición formal (épsilon-delta).

Recurriendo nuevamente a la teoría de las representaciones semióticas, podemos recalcar la directa relación entre los registros de representación simbólica y la representación gráfica, la cual facilita la comprensión del concepto. El registro lingüístico trabajado se caracteriza complementar perfectamente lo señalado de modo gráfico.

Ejemplo 4. ¿Es continua en 0 la función F dada por

$$F(x) = -2 \text{ para } x < 0$$

$$F(x) = 2 \text{ para } x \geq 0?$$

La gráfica de F está dada en la Fig. 2.10.

Solución. Claramente la gráfica de F está rota en $x = 0$; es evidente que F es discontinua en 0. La condición (i) de continuidad se satisface, puesto que $F(0) = 2$. Sin embargo

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} F(x) = -2 \text{ y } \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = 2.$$

Como el límite por la izquierda no es igual al límite por la derecha, no existe $\lim_{x \rightarrow 0} F(x)$. Por tanto, la condición (ii) de continuidad no se satisface.

Frecuentemente deseamos saber si una función es continua o no en todos los puntos de su dominio, y de no serlo, en cuales es discontinua. El teorema siguiente ayudará en estos casos.

En este ejemplo identificamos la presencia de la concepción Euleriana CC, ya que define una función por tramos. Si recordamos, Euler señalaba que las funciones que estaban conformadas por más de una función eran discontinuas; además, detectamos la concepción geométrica CB la cual es referenciada de manera implícita ya que argumenta la discontinuidad, citando la grafica de la función F. Para finalizar, encontramos que se encuentra enunciado un teorema que en estos instantes no se analizara puesto que escapa a los parámetros y lineamientos de nuestra investigación.

Profundizando y destacando más elementos que ayuden al análisis del texto recurrimos a la teoría de representaciones semióticas, las cuales nos hacen detectar la presencia de registros de representación simbólica, registros lingüísticos y registros analíticos. Como ya ha sido costumbre, en el texto continúa la estrecha relación entre los registros detectados.

4.2.3. CÁLCULO KITCHEN, JOSEPH W. KITCHEN.
DEPARTAMENT OF MATEMÁTICS, DUKE UNIVERSITY

3.6. Continuidad

No sólo han discutido los teólogos sobre el número de ángeles que pueden bailar sobre la cabeza de un alfiler, sino también sobre si un ángel puede

moverse de un punto A a otro B instantáneamente, y si en tal caso tiene el ángel que pasar por el espacio intermedio. Sin entrar en tal controversia, no parece arriesgado afirmar que los movimientos cotidianamente observados no muestran discontinuidades como esas atribuidas a veces a los ángeles. Considérese un coche circulando por la autopista de Pensilvania. Supondremos, a efectos de esta discusión, que dicha autopista es una recta en la que hemos introducido un sistema de coordenadas. Sea $f(t)$ la coordenada del coche en el instante t . Supóngase que en un cierto instante t_0 se halla el coche en medio de un túnel de longitud 2ε . Es claro que con toda certeza el coche deberá haber estado dentro del túnel durante algún tiempo (quizás muy corto) anterior a t_0 y que seguirá en su interior durante otro cierto tiempo después de t_0 . La primera cláusula de la frase anterior puede ser formulada analíticamente así: Existe un $T < t_0$ tal que

$$T < t \leq t_0 \Rightarrow |f(t) - f(t_0)| < \varepsilon.$$

La traducción de la segunda cláusula es esta: Existe un T' tal que $t_0 < T'$ y

$$t_0 \leq t < T' \Rightarrow |f(t) - f(t_0)| < \varepsilon.$$

Sea $\delta = \min(t_0 - T, T' - t_0)$. Si $|t - t_0| < \delta$, entonces o bien

$$T < t \leq t_0 \quad \text{o} \quad t_0 \leq t < T'.$$

En cualquiera de los casos $|f(t) - f(t_0)| < \varepsilon$. Como el túnel fue elegido arbitrariamente, hemos probado de hecho que

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall t)(|t - t_0| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(t_0)| < \varepsilon).$$

Una afirmación equivalente es

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = f(t_0).$$

Introducción al concepto.

El concepto de continuidad puntual es introducido mediante la concepción intuitiva CA, ya que alude a una situación poco convencional (no matemática) para explicar el principio básico de esta misma. Destaca y asocia cuidadosamente la relación que existe entre las variables, lo que ayuda al lector a tener una percepción más primitiva del concepto logrando con esto un entendimiento mucho más profundo de lo que se quiere decir acerca del

concepto. Va transformando poco a poco la situación de carácter intuitiva a matemática, alcanzando la concepción de Weierstrass-Darboux CE, ya que se presenta la definición en base a ε y δ y cuantificadores como “para el valor de t ”, se convierte en “operativa” y se dota de un rigor matemático, lo que permite aplicarla a funciones numéricas arbitrarias.

En la introducción del concepto, nos habla de coordenadas espaciales, las cuales debiesen ir apoyadas por la concepción CB que ayudarían para reflejar lo que se pretende explicar. A pesar de ello, la relación entre la situación y las variables es bastante clara, lo que justificaría la no presencia de la concepción CB. Por medio de una serie de argumentos e igualdades logra llegar a la definición formal (épsilon-delta) y su equivalente ecuación.

Aportando nuevos datos al análisis ya señalado, encontramos la presencia de registros de representación lingüística, pero enfocada al lenguaje natural no matemático, además de tener registros de representación simbólica que expresa a la perfección la situación señalada con el lenguaje natural. Teniendo en cuenta la manera poco común de introducir el concepto se considera innecesario el uso de representaciones gráficas para describir la situación.

Definición 1. Se dice que una función real f es **continua en un punto** $a \in \mathbb{R}$ si y sólo si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a),$$

o equivalentemente,

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x)(|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon).$$

Se dice que la función f es **continua sobre** (o **en**) **un conjunto** $S \subset \mathbb{R}$ si y sólo si es continua en cada punto del conjunto.

Nótese que para que una función f sea continua en un punto a deben satisfacerse tres condiciones:

- 1) $f(a)$ debe estar definido (es decir, $a \in \mathcal{D}_f$);
- 2) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ tiene que existir;
- 3) el límite anterior debe ser $f(a)$.

Definición.

En este fragmento de texto, se repite la conclusión a la cual se llegó en el fragmento anterior, donde la equivalencia de la definición formal (épsilon-delta) y la ecuación es clara. Está ligada directamente con la concepción de Cauchy CD, pues define la continuidad de f en el punto a con las tres condiciones clásicas para que se cumpla la ecuación que relaciona la continuidad con el cálculo de un límite y la imagen de F de a .

Tomando como punto de vista la teoría de representaciones semióticas señalamos la presencia de registros de representación simbólica y registros de representación lingüística. Ahora a pesar que ya se formalizó el concepto luego de realizar una introducción fascinante, consideramos que hubiese sido conveniente apoyarse de algún gráfico y así expresar otro punto de vista a la formalidad entregada.

Ejemplo 1. De los Ejemplos 4 y 13 de la sección precedente se sigue que las funciones seno y coseno son continuas sobre toda la recta real. También, por el Ejemplo 5 de dicha sección, se tiene que la función raíz cuadrada es continua sobre el intervalo $(0, +\infty)$.

Al momento de presentar los ejemplos, destacamos la poca relación entre la introducción al concepto y lo que tenemos en este fragmento de texto, lo cual consideramos que perjudicaría directamente al alumno(a) ya que las herramientas entregadas en un principio parecen insuficiente para alcanzar la comprensión de dicho ejemplo.

Destacando, por otra parte, la pobreza de registros utilizados en esta sección, nos hace deducir que para trabajar con este libro es necesario ya tener las nociones básicas que se relacionan con el concepto, además de una gama de registros para interpretar lo que señala dicho texto. Es complejo describir elementos no utilizados y necesarios para una buena comprensión del concepto, pero hay presencia de registros de representación lingüística.

Ejemplo 2. La función $f(x)=[\text{sen } x]$ no es continua en $\pi/2$. En este caso, se cumplen las condiciones (1) y (2), pero no la (3), pues vimos que

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} f(x) = 0 \neq 1 = f(\pi/2).$$

En este ejemplo, se relaciona directamente con la manera que se introdujo el concepto, ya que es sencillo observar que se cumplen las condiciones 1 y 2 pero no la 3. La dificultad que podría encontrarse en esta sección es el dominio básico de las funciones trigonométricas, puesto que ni en la introducción ni en el encabezado de los ejemplos señalan algún tipo de ayuda.

Ahora, sí detectamos más de un registro de representación semiótica, entre las cuales podría señalar registros analíticos, registros de representación simbólica y registros lingüísticos.

Ejemplo 3. La función $\text{sen}(1/x)$ es discontinua en 0 ya que no se satisface ni (1) ni (2).

De los teoremas sobre límites podemos inferir de inmediato ciertas propiedades de cierre para la clase de funciones continuas. Supóngase, por ejemplo, que f y g son ambas continuas en un punto x_0 . En tal caso

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0), \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0),$$

y, por tanto,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f + g)(x) = f(x_0) + g(x_0) = (f + g)(x_0),$$

es decir, la función $f + g$ es continua en x_0 . De igual forma pueden tratarse el producto, la diferencia y el cociente.

En este fragmento de texto, destacamos la trivialidad del ejemplo, la poca presencia de alguna perspectiva diferente para hacerle referencia o énfasis a su representación gráfica, a pesar de ser un ejemplo trivial y fácil de verificar las propiedades señaladas en el texto, podría ser interesante observar el comportamiento de la curva. Luego presenta unas funciones continuas de las cuales postula una propiedad sin preocuparse de entregar una explicación o

demostración de peso. Además menciona que de la misma manera puede tratarse la multiplicación y otras.

Desde el punto de vista de la teoría de las representaciones semióticas, podríamos corroborar la pobreza de registros observados, destacar el registro de representaciones simbólicas y las representaciones lingüísticas. Con la gran diferencia en comparación al análisis de los otros textos, acá no se presenta una congruencia entre ambos registros.

4.2.4. ASPECTOS DE LA CONTINUIDAD PUNTUAL COMO OBJETO MATEMÁTICO ANALIZADOS EN UNA UNIDAD DIDÁCTICA

Tabla 1. Cálculo de Kitchen.

FORMA (Sintaxis)	¿Cómo introduce el Concepto?	Situando la ubicación de un coche en una autopista, en la cual introduce un sistema de coordenadas y plantea una problemática.
		Tres condiciones para una función f 1. $f(a)$ debe estar definido (es decir $a \in D_f$) 2. el $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ debe existir 3. el limite anterior debe ser $f(a)$
	¿Qué símbolos utiliza?	ε, δ
		$\lim_{x \rightarrow a} f(x), f(a)$
		$\lim_{x \rightarrow a} f(t), f(t_0)$, donde $y t_0$ son tiempos
	¿En qué términos las define?	Se dice que una función real f es continua en un punto $a \in R$ si y sólo si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$
		$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall t)(t - t_0 < \delta \Rightarrow f(t) - f(t_0) < \varepsilon)$

FORMA (Sintaxis)	¿Qué otros aspectos formales manejan?	Definición de límite	
	¿Qué técnicas se tratan?	<p>Técnica directa: definición de una función continua en un punto.</p> <p>Técnica indirecta: igualdad numérica (aplicación del cálculo de límites)</p>	
CONTENIDO (Semántica)	¿Cómo introduce el concepto?	El concepto es introducido por medio de la cita de un problema ficticio y luego con un problema de la vida cotidiana, en particular un problema de aplicación física. Esto conlleva a las dos definiciones formales mencionadas anteriormente	
	¿Cómo maneja el paso de la equivalencia entre las dos definiciones?	No se maneja	
	Significado geométrico	Grafica en un solo trozo de curva ()	Variación de imágenes y pre-imágenes ()
	¿Marca importancia?	No, a ningún significado geométrico.	

CONTENIDO (Semántica)	¿Cómo maneja el paso de la grafica en un solo trozo a la variación de las imágenes?	No lo maneja, pues no menciona ningún significado geométrico			
REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS	Fenomenología	Matemática (X)	Física (X)	Otras (X)	
	¿Marca importancia?	Marca mayor importancia a la matemática pues solo aparece un enunciado relacionado a la fenomenología física			
	Contexto	Algebraico (X)	Numérico ()	Lenguaje natural (X)	Gráficos ()
	¿Marca importancia?	En lo algebraico, pues sólo hay dos ejercicios que solicitan gráficos de una función relacionándolo con la continuidad puntual. En cambio el lenguaje natural se explicita sólo al comienzo del tema con la situación de un coche en una autopista			

Tabla 2. Cálculo infinitesimal, Segunda Edición Michael Spivak

FORMA (Sintaxis)	¿Cómo introduce el Concepto?	Lo introduce implícitamente explicando los tipos de discontinuidades por medio de ejemplos con sus respectivas graficas.
---------------------	------------------------------	--

FORMA (Sintaxis)	¿Cómo introduce el Concepto?	Observando su grafica (sin interrupciones, ni saltos, ni oscilaciones indefinidas)
	¿Qué símbolos utiliza?	$\lim_{x \rightarrow a} f(x), f(a)$
		ε, δ
	¿En qué términos las define?	a) En términos de desigualdades ε, δ
		b) La función f es continua en a si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$
	¿Qué otros aspectos formales manejan?	Registros semióticos gráficos y su interpretación de $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$
Discontinuidad de una función (implícitamente)		
Definición de limite		
¿Qué técnicas se tratan?	Técnica directa: definición de una función continúa en un punto. Técnica indirecta: - igualdad numérica (aplicación del cálculo de limites) - Interpretaciones graficas de la ecuación $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$	
CONTENIDO (Semántica)	¿Cómo introduce el concepto?	Analizando los posibles casos en que no se cumple la ecuación $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. Intuitivamente, analizando su gráfica y destacando que este método merece ser cultivado, pues suele ser engañoso.

CONTENIDO (Semántica)	¿Cómo maneja el paso de la equivalencia entre las dos definiciones?	Explicando la definición “a)” apoyado de la definición “ b) ” y explicando esta misma		
	Significado geométrico	Grafica en un solo trozo de curva (X)	Variación de imágenes y pre-imágenes ()	
	¿Marca importancia?	Marca importancia en los gráficos de las figuras 1, 2 y 3 que muestran los diferentes tipos de discontinuidades		
	¿Cómo maneja el paso de la grafica en un solo trozo a la variación de las imágenes?	No se maneja en el texto.		
REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS	Fenomenología	Matemática (X)	Física ()	Otras ()
	¿Marca importancia?	Marca mayor importancia a la matemática, pues todas las definiciones, ejemplos y ejercicios son de esta fenomenología		
	Contexto	Algebraico (X)	Numérico (X)	Lenguaje natural () Gráficos (X)

<p>REPRESENTA_</p> <p>CIONES</p> <p>SEMIÓTICAS</p>	<p>¿Marca</p> <p>importancia?</p>	<p>Marca importancia en la representación</p> <p>semiótica de los gráficos al momento de explicar</p> <p>cuando no se cumple la siguiente ecuación</p> $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$
--	-----------------------------------	---

Tabla 3. Cálculo diferencial e integral de Taylor, Edición Limusa

FORMA (Sintaxis)	¿Cómo introduce el Concepto?	Con la definición de una función $F = \{(x, y) y = F(x)\}$ y haciendo notar que el valor de $F(a)$ no depende de $\lim_{x \rightarrow a} F(x)$ (tipos de discontinuidades)
	¿Qué símbolos utiliza?	$\lim_{x \rightarrow a} F(x), F(a)$
		$\lim_{h \rightarrow 0} F(a + h), F(a)$
		ε, δ
	¿En qué términos las define?	a) (i) a está en el dominio de F ; esto es si $F(a)$ está definida. (ii) $\lim_{x \rightarrow a} F(x)$, existe (iii) $\lim_{x \rightarrow a} F(x) = F(a)$
		b) $\lim_{x \rightarrow a} F(x) = F(a)$
		c) $\lim_{h \rightarrow 0} F(a + h) = F(a)$
		d) en términos de desigualdades ε, δ
	¿Qué otros aspectos formales manejan?	Definición de una función
		Discontinuidad de una función
¿Qué técnicas se tratan?	Técnica directa: definición de una función continua en un punto. Técnica indirecta: igualdad numérica (aplicación del cálculo de límites)	

CONTENIDO (Semántica)	¿Cómo introduce el concepto?	Definiendo una función y relacionándola implícitamente con los tipos de discontinuidad		
	¿Cómo maneja el paso de la equivalencia entre las cuatro definiciones?	Se combina las definiciones de a) para concluir la definición b).		
		Para explicar el significado de la definición b) se utiliza la definición d) y la figura 2.9, que es la grafica de la definición de d)		
	Significado geométrico	Grafica en un solo trozo de curva ()	Variación de imágenes y pre-imágenes ()	
	¿Marca importancia?	En la gráfica en un solo trozo de curva al momento de explicar los ejemplos 1, 2, 3 y 4.		
	¿Cómo maneja el paso de la grafica en un solo trozo a la variación de las imágenes?	No se maneja en el texto.		
REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS	Fenomenología	Matemática (X)	Física ()	Otras ()
	¿Marca importancia?	Marca mayor importancia a la matemática, pues todas las definiciones, ejemplos y ejercicios son de esta fenomenología		

REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS	Contexto	Algebraico (X)	Numérico (X)	Lenguaje natural (X)	Gráficos (X)
	¿Marca importancia?	Marca importancia a las desigualdades algebraicas al momento de explicar las definiciones a), b), c) y d). Y en segundo lugar le da importancia a los gráficos al momento de explicar todos los ejemplos de continuidad puntual, y en los ejercicios que presenta el texto en los ejemplos de continuidad puntual.			

A modo de conclusión consideramos que el texto universitario, Cálculo Diferencial de Taylor, se debe mantener en la bibliografía recomendada en la carrera de matemática para el curso de cálculo I, ya que, se utilizan cuatro representaciones semióticas poniendo énfasis en los registros algebraicos y gráficos.

Cuestionamos el texto universitario, Cálculo de Kitchen, ya que posee el tratamiento de solo dos representaciones semióticas, dándole mayor importancia al registro algebraico y no al gráfico. No obstante, debemos destacar la rigurosidad matemática que este libro posee y las aplicaciones a las ciencias físicas.

Para finalizar el texto universitario, Cálculo Infinitesimal de M. Spivak, destacamos la utilización del registro gráfico y algebraico al momento de enseñar el contenido y de ejemplificar el concepto de continuidad puntual. El texto maneja tres representaciones semióticas, dándole importancia al registro gráfico.

4.3. DISEÑO DE ENTREVISTA A ESTUDIANTES DE LA UNIVERSIDAD

4.3.1 ENTREVISTA AYUDANTE A

1. ¿Qué entiende por proceso continuo en el lenguaje ordinario?

Resp 1.- Cuando se habla de un proceso continuo, solemos asociarlo al tiempo y de como este (el proceso) no "para" mientras transcurre el tiempo.

El ayudante evidencia un entendimiento correcto por medio de un ejemplo asociado al tiempo, utiliza un registro utilizando el lenguaje natural.

2. ¿La función $f(x)=x$ es continua en $x=5$? ¿Por qué?

Resp 2.- La función $f(x)=x$ no tiene restricciones. Se sabe que una función continua en algún $x=a$ cualquiera $a \in S \subseteq \mathbb{R}$ si cumple las 3 condiciones:

- 1.- $a \in \text{Dom} f$
- 2.- $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe
- 3.- Dicho límite (del punto "2") es $f(a)$

La función $f(x)=x$ claramente está definida en todo \mathbb{R} (con lo cual se puede establecer como dominio máximo) todo \mathbb{R} , lo que implicaría que $S \in \mathbb{R} = \text{Dom} f$

Fácilmente se concluye que $\lim_{x \rightarrow 5} x$ existe. El límite de dicha función es 5 (Basta tomar $d=E$)
 $\therefore f(x)=x$ es continua en $x=5$

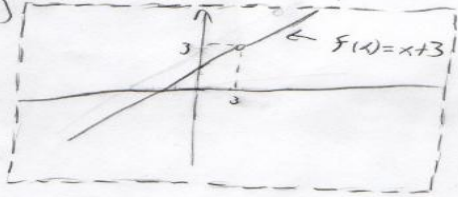
El ayudante logra una respuesta correcta verificando cada una de las condiciones de la definición de continuidad puntual. Para verificar la primera condición utiliza un registro con lenguaje natural y lenguaje matemático formal; para verificar la segunda condición emplea un registro algebraico y, además, la definición equivalente de continuidad puntual para

encontrar el valor del límite. El ayudante no verifica la última condición, suponemos que la considera trivial, ya que define el dominio maximal de la función.

3. ¿La función $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ es continua en todo su dominio? Justifique

Resp 3:-
 La función $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ tiene como dominio $\mathbb{R} - \{3\}$ ya que $f(3) = \frac{0}{0}$ está indefinido
 considerando esta condición inicial de la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{(x+3)(\cancel{x-3})}{(\cancel{x-3})} = (x+3)$$

Basándonos en esta función (que es una recta expresada en el plano \mathbb{R}^2) con su "dominio restringido" es una línea en \mathbb{R}^2 con un pequeño "vacío" en su gráfico
 (ver fig 1)
 fig 1 → 
 Como en el caso anterior, se habla de una recta y toda recta de la forma " $mx + b$ " es continua para todo x en su dominio
 Por lo tanto $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ es continua en su dominio
 (Dom $f = \mathbb{R} - \{3\}$)

El ayudante muestra un dominio en el registro algebraico y gráfico para fundamentar su respuesta. La respuesta es correcta, el lenguaje matemático utilizado lo consideramos adecuado sin detectar problemas de escritura matemática.

4. Decida si la función $f(x)$ es o no continua en el punto $x=-7$, justifique su respuesta.

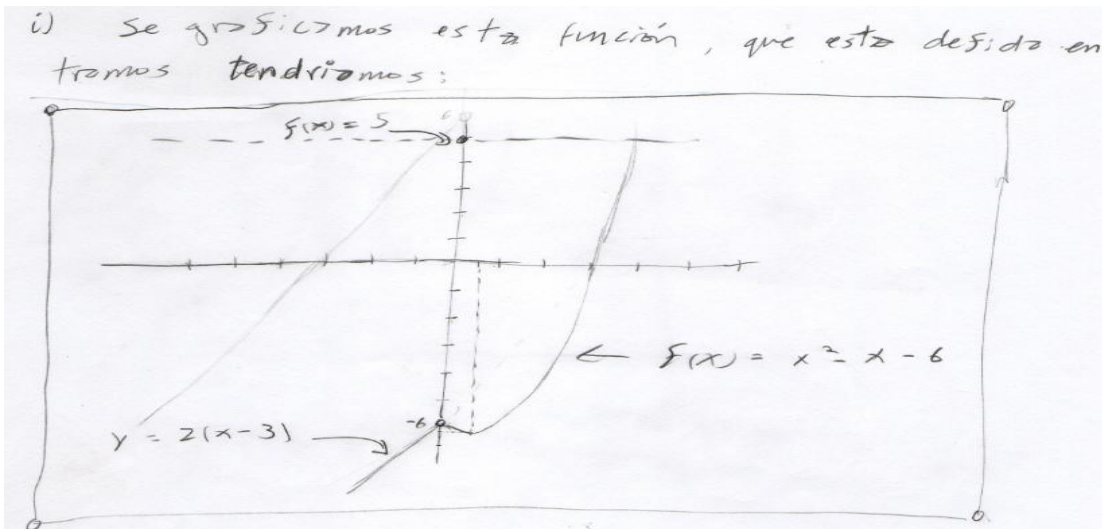
$$i) \quad \text{Sea } f(x) = \begin{cases} 2(x-3) & \text{si } x < 0 \\ x^2 - x - 6 & \text{si } x > 0 \\ 5 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

4) Comentario (i): Se puede ver cierta ambigüedad en el enunciado, ya que se pregunta por la $x=7$ y función muestra un comportamiento extraño en $x=0$ (cosa que desvía la atención de cualquier estudiante que suele "mecanizar" este tipo de problemáticas) (2)

El comentario que realiza el estudiante, consideramos que es una dificultad del reconocimiento del comportamiento de la función en $x=-7$, no compartimos su punto de vista.. La pregunta fue planteada precisamente con la idea de estudiar la argumentación de la respuesta de cada estudiante ante esta situación.

Decida si la función $g(x)$ es o no continua en el punto $x=-7$, justifique su respuesta

$$ii) \quad \text{Sea } f(x) = \begin{cases} x + 7 & \text{si } x \leq -7 \\ x^2 + 3x - 28 & \text{si } x > -7 \end{cases}$$



El ayudante A muestra un dominio del registro algebraico asociado a la función planteada.

Si uno se dejara llevar por la definición de función "i" y verificamos si es continuo en $x=0$, el gráfico muestra una discontinuidad por salto en dicho punto.

Sin embargo, si se entera la atención en el verdadero problema (f. continuo en $x=7$) nos damos cuenta que estamos hablando de un elemento positivo ($x > 0$) lo que nos llevaría al análisis de la función $f(x) = x^2 - x - 6$. Claramente se cumplen las tres condiciones de continuidad por lo tanto f es continuo en $x=7$.

El ayudante logra comprender la pregunta, esto se refleja en la identificación de la discontinuidad en el punto $x=0$. La respuesta la justifica citando las tres condiciones de continuidad puntual sin explicitarlas, suponemos que la considera trivial.

Decida si la siguiente función es continua o no en $x=0$, justifique su respuesta.

$$\text{Sea } f(x) = \frac{1}{x^2}$$

S:- La función $f(x) = \frac{1}{x^2}$ para verificar si es continua, se deben cumplir las 3 condiciones ya mencionadas anteriormente.

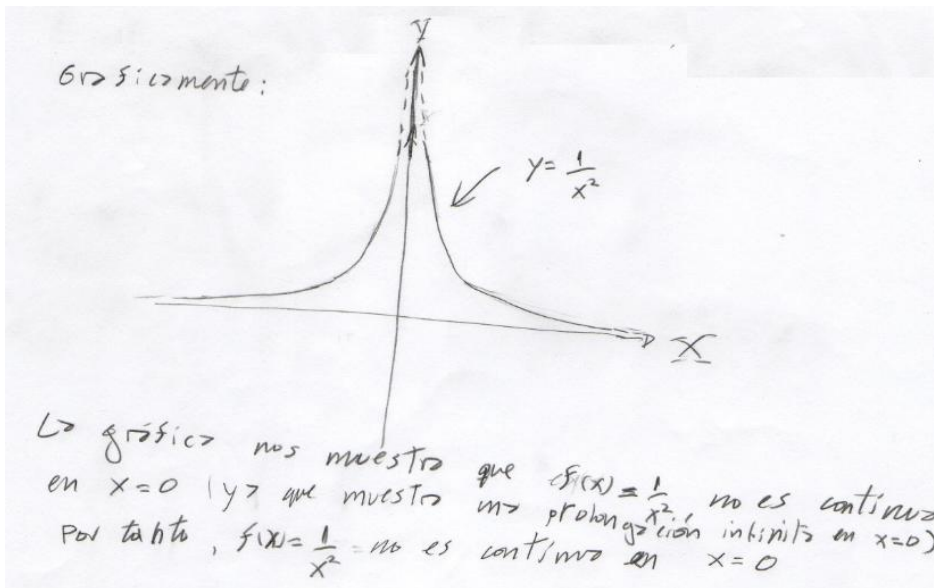
Claramente $0 \notin \text{Dom} f$, lo que nos lleva a concluir que no se cumple la condición 1.

Se sabe que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \neq \text{f.}$, lo que descarta la condición 2.

Como $0 \notin \text{Dom} f$, $f(0) \notin \text{Rec} f$. Como $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$ no existe no se cumple la condición 3.

Por lo tanto, algebraicamente hablando, $f(x) = \frac{1}{x^2}$ no es continuo en $x=0$.

El ayudante tiene claridad del concepto ya que nuevamente verifica cada condición asociada a la continuidad puntual, utilizando un lenguaje matemático y escritura correcta y con un buen manejo del registro algebraico.



El ayudante evidencia un correcto manejo del registro gráfico y se preocupa de inferir la respuesta a partir de la gráfica de la función.

5. Encuentre, si es posible, tres funciones diferentes de modo que $|f(x)| = |g(x)| = |h(x)| = 2$.

El estudiante no responde esta pregunta, suponemos que no logra encontrar las funciones requeridas.

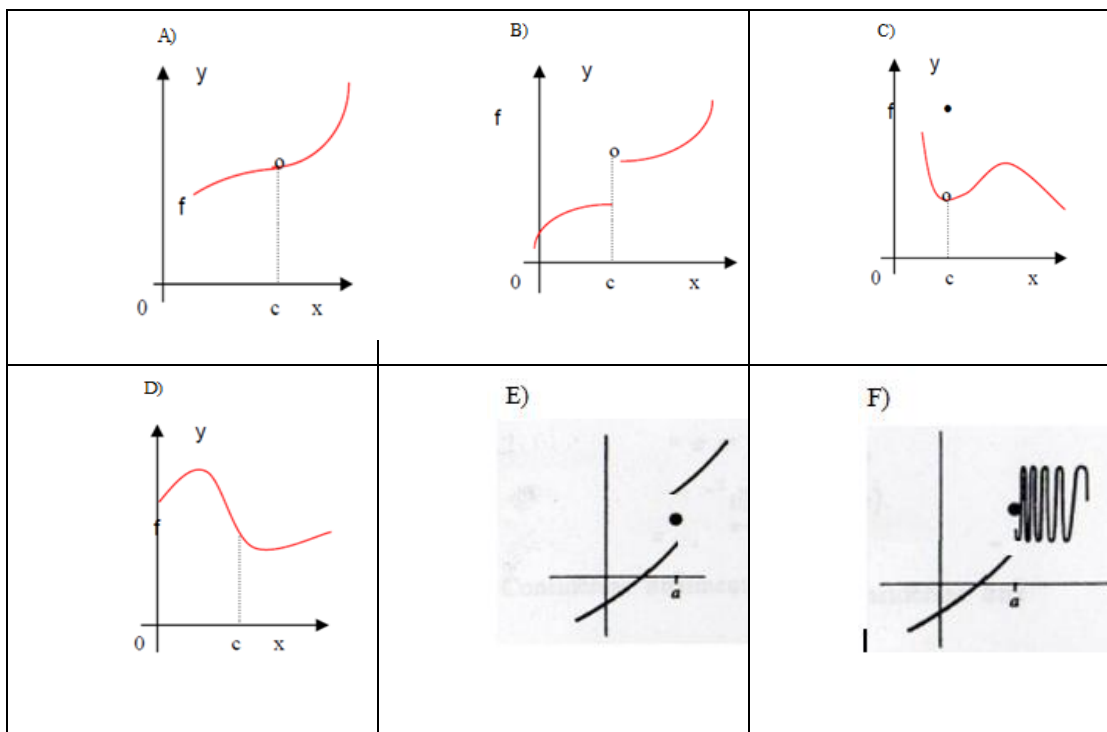
6. ¿Qué comprendes por continuidad puntual de una función de variable real?

7.- Cuando pienso en el "concepto puntual" se me viene a la mente el hecho de como dentro de una curva (o función) cada punto debe unirse al que está a su lado y estos construyen una especie de camino que no tiene ningún "hoyo". Este hecho se repite con cada punto de dicho "camino" (o curva, función, etc) en cuestión.

El ayudante se apoya en el registro de lenguaje natural para argumentar su respuesta, no relaciona explícitamente las condiciones de continuidad puntual, pero evidencia una comprensión del concepto a partir de la construcción de una gráfica continua, extrapola la situación citando una especie de camino.

Actividad nº 2

Analice las siguientes gráficas:



1. ¿Qué observa en el comportamiento de la función en $x=c$ en el gráfico A?

1.- Se puede observar que la gráfica es "fluida", que no tiene saltos (aparentemente), sin embargo el "punto blanco" en la gráfica $(c, f(c))$ supuestamente indica que la función f no está definida en $x=c$. Lo que llevaría a concluir que la función no es continua en $x=c$ ya que esto no pertenece al dominio de f .

El ayudante logra una respuesta correcta, pero coloca en duda la apreciación del registro gráfico presentado, pues dice "supuestamente", esto lo atribuimos a la no familiarización de la observación de funciones por medio de registros gráficos.

2. ¿Qué observa en el comportamiento de la función en $x=c$ en el gráfico B?

2.- Se pueden observar dos cosas relevantes:

- Una de ellas es la no definición del punto $(c, f(c))$ en la función, lo cual descarta toda posibilidad de continuidad (como en caso de la gráfica "A")
- Otra cosa llamativa es el "salto" desde la tendencia derecha hacia el punto $(c, f(c))$ a la tendencia por izquierda al mismo punto. Esto lleva a concluir, por sí solo, que esta función sería discontinua por salto.

El ayudante responde correctamente, su argumentación la consideramos muy buena ya que identifica el tipo de discontinuidad a partir del registro gráfico y logra identificar la tendencia de los límites laterales involucrados.

3. ¿Qué observa en el comportamiento de la función en $x=c$ en el gráfico C?

3.- Este gráfico tiene mucha semejanza con la gráfica "A". A diferencia, se puede notar en punto $(c, f(c))$ bien definido en la gráfica, pero a la vez se ve como este no forma parte de la curva. Esto indicaría que la función no es continua en $(c, f(c))$ ya que los límites hacia el punto $(c, f(c))$ no es $(c, f(c))$.

El ayudante responde correctamente, muestra una comprensión del comportamiento de la función a partir del registro gráfico, pero esta vez no clasifica el tipo de discontinuidad.

4. ¿Qué observa en el comportamiento de la función en $x=c$ en el gráfico D?

4) En la gráfica no se observa problema en cuanto a definición del punto $(c, f(c))$ ni en su ubicación dentro de la gráfica. Esto indica, a simple vista, que la función es continua.

El ayudante responde correctamente, nuevamente muestra una inquietud al decir a simple vista, lo atribuimos a la incomodidad de enfrentarse a preguntas que sólo utilizan un registro gráfico.

5. ¿Qué observa en el comportamiento de la función en $x=c$ en el gráfico E?

5.- Se observa que la función, tanto desde izquierda como desde derecha, "apuntan" hacia un punto distinto $(c, f(c))$. No hay unicidad de límites. Por lo tanto no es continua.

El ayudante responde correctamente, su respuesta se basa en la verificación de la segunda condición, vale decir, la existencia del límite; no clasifica el tipo de discontinuidad, no analiza la existencia de la función en el punto solicitado y tampoco comprueba la condición de igualdad del límite con la función en el punto requerido.

6. ¿Qué observa en el comportamiento de la función en $x=a$ en el gráfico F?

b- Se observan dos cosas relevantes:
- No hay unicidad de límite en $(c, f(c))$
- De derecha \approx izquierda no se define un límite
cuando x tiende hacia c (por la derecha)
por lo tanto la función no es continua.

El ayudante responde correctamente, su justificación se basa en la verificación de la segunda condición de continuidad puntual, el ayudante no comprueba las otras dos condiciones.

Actividad nº 3

1. ¿Qué entiendes de cada una de las siguientes definiciones de continuidad puntual?
Explica.

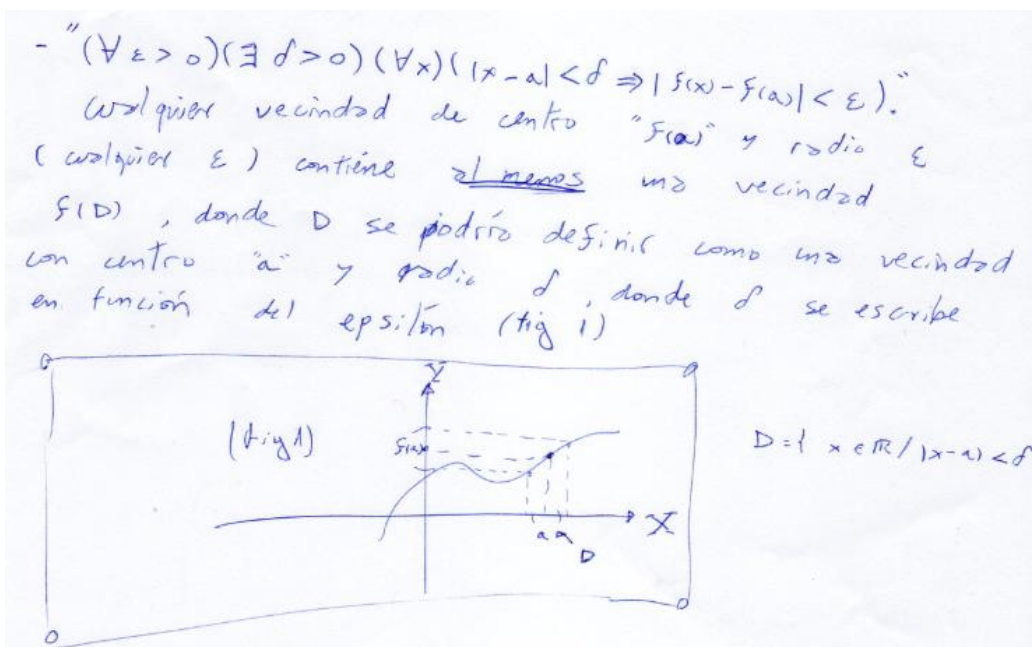
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a),$$

1.-
- " $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ "
Esta definición muestra como la función (y su límite hacia $f(a)$) está bien definido. En otras palabras, si se avanza sobre la curva (o retrocede) no habrá ningún "agujero".

El ayudante tiene la claridad del símbolo matemático "igualdad", ya que explicita que la comparación debe cuestionarse sólo en el caso que los dos objetos matemáticos relacionados

existan por medio de la expresión “está bien definida”. También realiza una argumentación basada en el registro gráfico de la función, explícitamente se refiere a “agujero”.

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x)(|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon).$$



El ayudante utiliza un lenguaje matemático correcto para introducir un concepto implícito que aparece en la definición, caracteriza esta vecindad con su centro y radio, explicita además la relación que resulta entre ε - δ . Muestra un correcto manejo del registro algebraico y gráfico.

¿Cuál prefieres y por qué?

En lo personal, prefiero la definición "límite" ya que se tiende a mecanizar su aplicación y esto lo hace más fácil de "entender".

El ayudante relaciona la mecánica con el entendimiento de un concepto matemático.

2. ¿Cuáles son las condiciones suficientes para asegurar la continuidad de una función en $x = a$? ¿Por qué?

2.- Al menos (rewards) \exists :

- $a \in \text{Dom } f$
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe y es único

El ayudante coloca en duda las tres condiciones que se deben cumplir para que una función sea continua en un punto específico. Las condiciones sólo las relaciona con la definición de continuidad puntual que involucra la existencia e igualdad de las constantes. No especifica ninguna condición apoyado en el registro gráfico

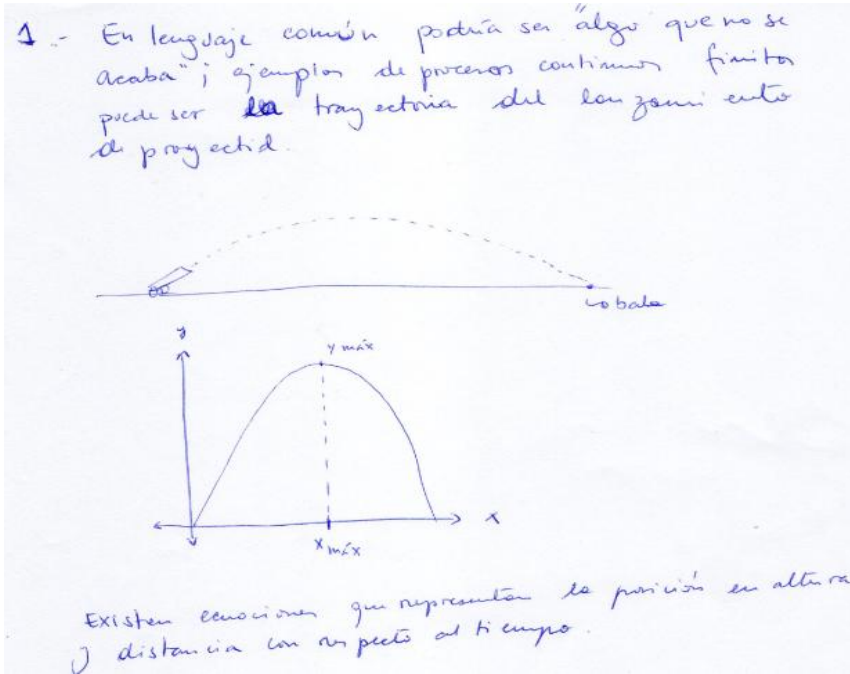
3. ¿Qué dificultades has detectado que tienes para decidir sobre la continuidad de una función en un punto?

3.- Por lo general, el método ϵ - δ no es algo trivial y fácil de comprender en su plenitud. Esta prueba que su aplicación se realiza con cierta inseguridad.

El ayudante detecta la dificultad de comprensión de la definición de continuidad puntual ϵ - δ , reconocemos que es un concepto abstracto que necesita diferentes tipos de registros al momento de presentarse, ya que esto nos ayuda a la comprensión de un concepto matemático.

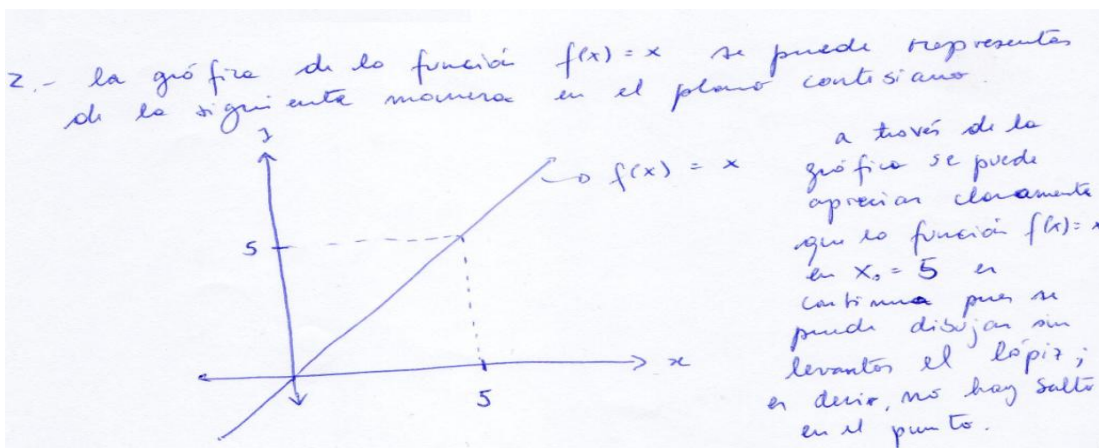
4.3.2. ENTREVISTA AYUDANTE B

1. ¿Qué entiende por proceso continuo en el lenguaje ordinario?



El ayudante explicita un ejemplo de continuidad la que está relacionada con el ámbito físico, apoyada en su trayectoria. Desempeñándose en el rol de ayudante es capaz de extrapolar dicho concepto a otra ciencia, demuestra un manejo en el registro-lenguaje natural y en el registro algebraico, hace referencia implícita al registro algebraico al citar ecuaciones, sin explicitar dicho registro.

2. ¿La función $f(x)=x$ es continua en $x=5$? ¿Por qué?



El ayudante responde correctamente, su justificación se basa en el registro gráfico de la función, también hace referencia a una concepción histórica al referirse a dibujar sin levantar el lápiz utiliza un registro del lenguaje natural. En su justificación no verifica las tres condiciones de continuidad puntual a partir de la gráfica, suponemos que no lo considera necesario.

3. ¿La función $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ es continua en todo su dominio? Justifique

3. a) Claramente el dominio de la función (2)
 o dom f : $\mathbb{R} - \{3\}$.

b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} \quad \exists ?$

Comentario: la idea intuitiva de límite es una "Tendencia a a".

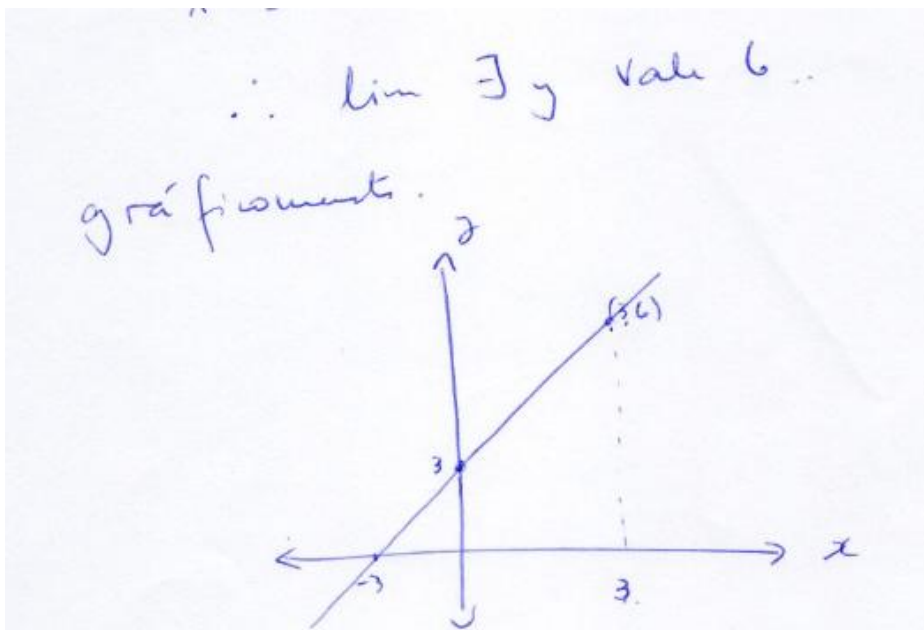
Vamos a probar la existencia.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+3)(\cancel{x-3})}{(\cancel{x-3})} \quad (\text{Puedo simplificar, por } 3 \notin \text{Dom } f)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} x + 3 = 6$$

$\therefore \lim \exists$ y vale 6.

El ayudante verifica la existencia de límite utilizando la técnica de factorización correctamente, además explicita el dominio de la función, para ello utiliza un registro algebraico.



El ayudante no logra graficar correctamente la función, ya que no considera su dominio, por ende no maneja el registro gráfico de dicha función, reconoce la existencia y el valor del límite, pero no explicita las justificaciones gráficas para sus afirmaciones.

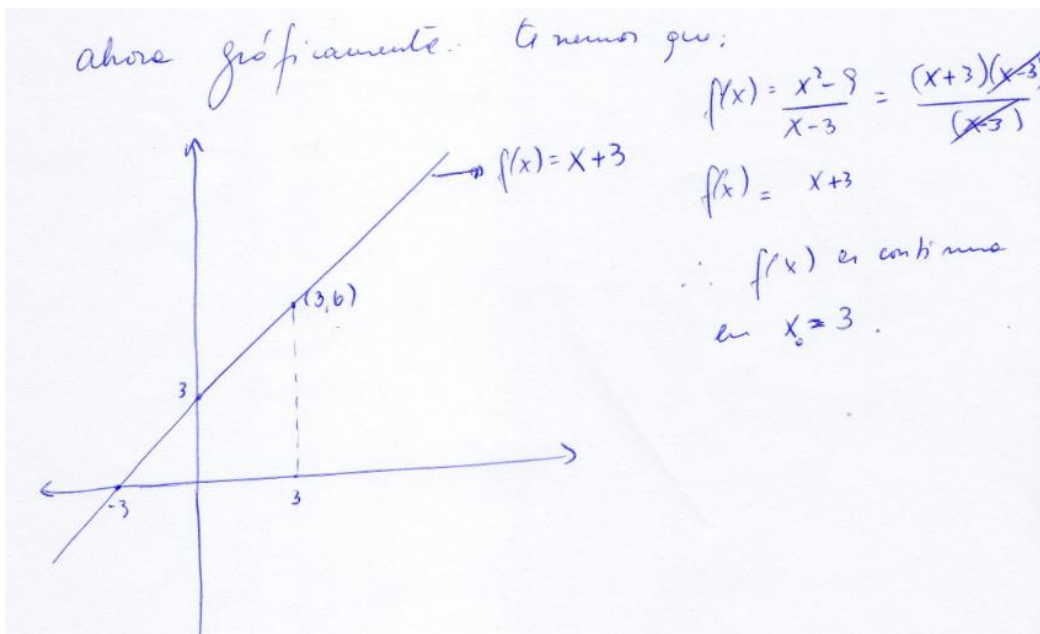
c) $f(3) = \frac{3^2 - 9}{3 \cdot 3} = \frac{0}{0} \therefore$ está indefinido (3)

esto implica que no se cumple ~~$x = 3$~~

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = f(3).$$

por ello la función no es continua en $x_0 = 3$.

El ayudante verifica la condición 2 y 3 utilizando un registro algebraico correctamente.



El ayudante intenta entregar una justificación utilizando el registro gráfico, pero nuevamente no considera el dominio de la función y utiliza sólo un registro algebraico para su afirmación, no verifica las condiciones de continuidad puntual.

Comentarios: surge una contradicción en el aspecto algebraico y geométrico, pues uno me muestra la indefinición y la otra la continuidad. (se puede graficar sin levantar el lápiz).

El ayudante se percata de las contradicciones que se evidencian al utilizar el registro gráfico y algebraico, pero no se logra explicar el origen de estas contradicciones. El ayudante sólo se preocupa de estudiar la continuidad en el punto específico $x=3$, no realiza el estudio de la continuidad en todo su dominio.

4. Decida si la función $f(x)$ es o no continua en el punto $x=-7$, justifique su respuesta.

$$i) \quad \text{Sea } f(x) = \begin{cases} 2(x-3) & \text{si } x < 0 \\ x^2 - x - 6 & \text{si } x > 0 \\ 5 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Decida si la función $g(x)$ es o no continua en el punto $x=-7$, justifique su respuesta

$$i) \text{ sea } f(x) = \begin{cases} 2(x-3) & \text{si } x < 0 \\ x^2 - x - 6 & \text{si } x > 0 \\ 5 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$f(-7) = 2(-7-3) = 2(-10) = -20$$

\therefore la función es continua.

$$\lim_{x \rightarrow -7} f(x) = \lim_{x \rightarrow -7} 2(x-3) = 2(-7-3) = 2(-10) = -20$$

$\therefore \lim_{x \rightarrow -7} f(x) = f(-7)$

\therefore la función es continua.

El ayudante justifica su respuesta correctamente utilizando el registro algebraico, verifica todas las condiciones de continuidad puntual, pero anticipadamente explicita que la función es continua sin verificar todas las condiciones. No utiliza un registro gráfico.

$$\text{ii) Sea } f(x) = \begin{cases} x+7 & \text{si } x \leq -7 \\ x^2 + 3x - 28 & \text{si } x > -7 \end{cases}$$

ii) $\lim_{x \rightarrow -7} g(x) \exists ?$

$$\lim_{x \rightarrow -7^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow -7^+} x^2 + 3x - 28 = (-7)^2 + 3(-7) - 28$$

$$= 49 - 21 - 28$$

$$= 49 - 49 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -7^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow -7^-} x+7 = -7+7 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -7^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow -7^-} g(x) = 0$$

además $g(-7) = 0 \therefore$ es continua.

El ayudante responde correctamente utilizando el registro algebraico y verifica las tres condiciones de continuidad puntual. No utiliza un registro gráfico en su justificación.

5. Decida si la siguiente función es continua o no en $x=0$, justifique su respuesta.

$$\text{Sea } f(x) = \frac{1}{x^2}$$

5) Seanos $f(0)$ en $f(x) = \frac{1}{x^2}$

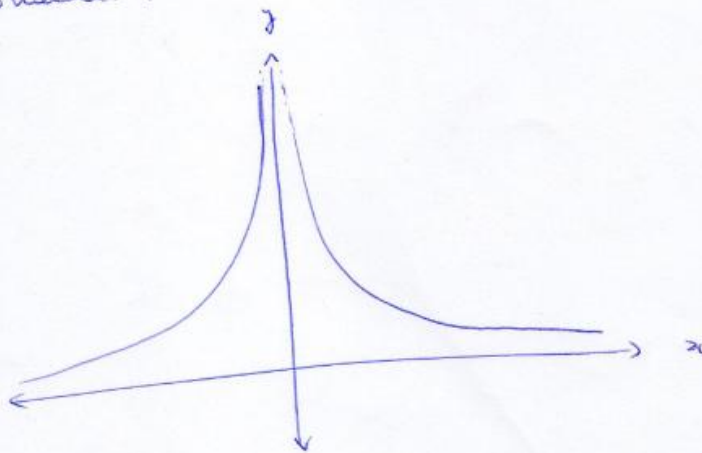
$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$f(0) = \frac{1}{0}$$

lo que no está definido.

El ayudante utiliza el registro algebraico para verificar la existencia de la función en el punto $x=0$, esta verificación la realiza correctamente.

y gráficamente:



gráficamente la imagen de $x_0 = 0$ no interseca al eje de las ordenadas; lo que implica que su imagen no se puede definir en la traza de la función. Con esto se ve claramente la discontinuidad en $x_0 = 0$ pues $x_0 = 0 \notin \text{Dom } f$.

El ayudante justifica correctamente la primera condición utilizando el registro gráfico, suponemos que no considera necesario verificar las dos condiciones restantes de continuidad puntual.

6. Encuentre, si es posible, tres funciones diferentes de modo que $|f(x)| = |g(x)| = |h(x)| = 2$.

6.-

El ayudante no logra encontrar las funciones solicitadas.

7. ¿Qué comprendes por continuidad puntual de una función de variable real?

* Un dicho común: ⑦
"Si yo no levanto el lápiz mientras trazo la gráfica de la función en un punto cuestionable, entonces la función es continua en dicho punto".

El ayudante hace referencia a un "dicho común", el cual se expresa utilizando un lenguaje natural, no entrega detalles acerca de su comprensión.

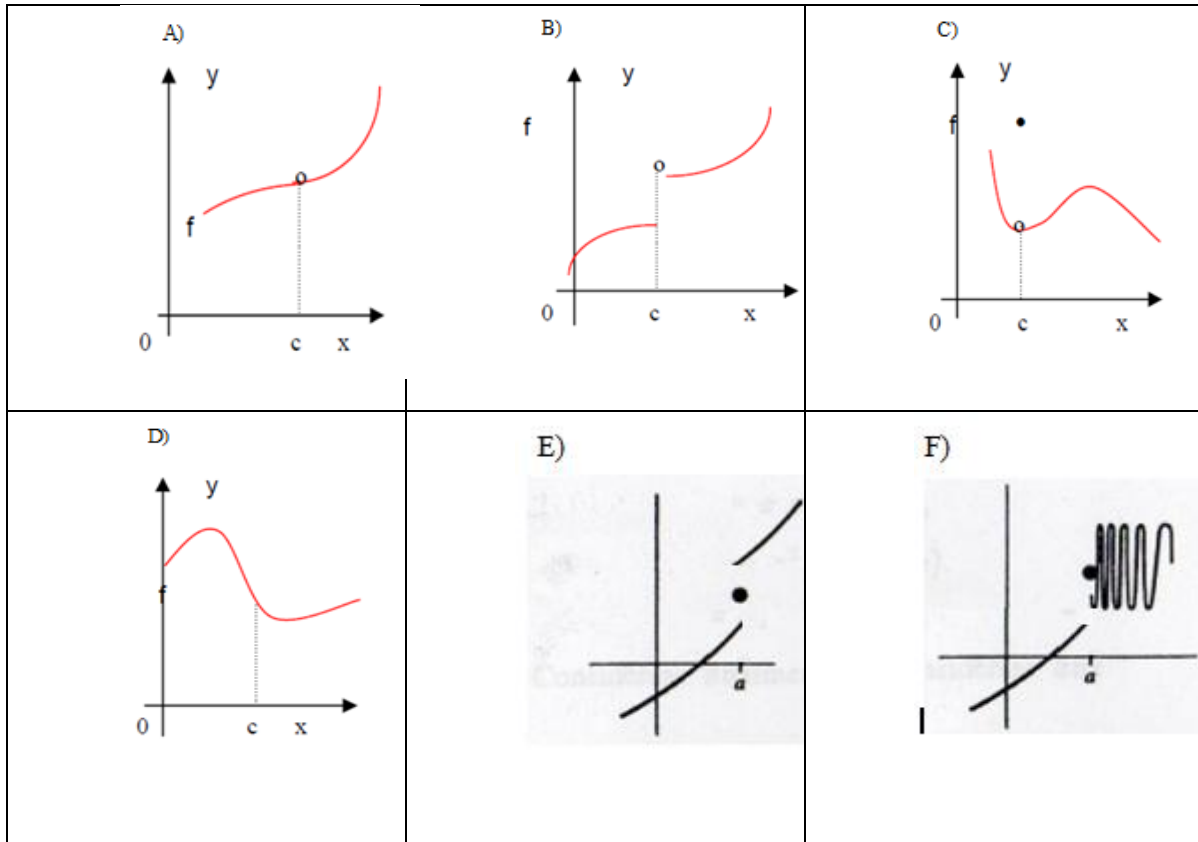
* Matemáticamente podríamos tomar un camino respecto del dominio y del recorrido; es decir:

- i) que el pto en cuestión tiene que pertenecer al dominio de la función. ($a \in \text{Dom } f$)
- ii) que a medida que me acerque al pto su límite existe. (por cualquier dirección o trayectoria) es decir: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \exists$.
- iii) que el límite anteriormente mencionado sea la imagen del pto en cuestión al ser evaluado en la función, y que pertenezca al recorrido de la función.
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

El ayudante realiza una explicación de cada una de las condiciones de la continuidad puntual, utiliza un lenguaje matemático para explicar cada una de las condiciones, explicita el registro algebraico. En su comprensión no hace referencia a la equivalencia de continuidad épsilon-delta.

Actividad n° 2

Analice las siguientes gráficas:



1. ¿Qué observa en el comportamiento de la función en $x=c$ en el gráfico A?

1.- Acerca del pto en cuestión; qué fíjamente se observa que no tiene imagen, por lo tanto es una función discontinua en $x=c$.

El ayudante realiza una correcta inferencia del registro gráfico de la función, esta inferencia se centra en verificar la primera condición de continuidad puntual. No realiza inferencias respecto de las dos condiciones restantes de continuidad puntual.

Acerca de la def:

i) $x=c \in \text{dom } f.$

No se debería cumplir; uno como alumno podría decir que si está pues no se ve claramente que no pertenece al dominio y podría confundirse al ver que su imagen no pertenece al recorrido.

ii) $\lim_{x \rightarrow c} f(x) \exists.$

claramente en lo gráfico se ve que su límite (acercamiento) si existe; y si uno no tiene los herramientas para decir que \nexists ; tendríamos a decir lo contrario.

iii) $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$

las herramientas dichas anteriormente nos permitirían decir que $f(c)$ no está en el recorrido $\therefore \lim_{x \rightarrow c} f(x) \neq f(c)$

Explícitamente $f(c) \notin \text{rec } f.$; en cambio

$\lim_{x \rightarrow c} f(x) \exists.$ y uno tendría a decir $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$

lo que no es correcto.

El ayudante realiza afirmaciones apoyado en la verificación de las condiciones de continuidad puntual y basándose en las inferencias que realiza del registro gráfico. Además utiliza el registro algebraico para complementar sus afirmaciones. Consideramos que argumenta correctamente su respuesta ya que utiliza el registro de representación correctamente.

2. ¿Qué observa en el comportamiento de la función en $x=c$ en el grafico B?

2.- la gráfica B claramente es discontinua en $x=c$.
Solo podríamos quedarnos con la gráfica y sería suficiente pues claramente vemos que si nos acercamos al punto por 2 direcciones diferentes llegamos a números diferentes.
Analíticamente:
i) $c \notin \text{Dom } f$,
ii) $\lim_{x \rightarrow c} f(x) \nexists$.
iii) como $c \notin \text{Dom } f \Rightarrow f(c) \nexists$.
por lo tanto no podríamos comparar la imagen en su límite asociado.

El ayudante destaca implícitamente que es ilógico comparar dos constantes que no existen basándose en el registro algebraico, deja claro que para realizar una comparación numérica es necesario que las constantes existan. No se refiere al tipo de discontinuidad que tiene la función.

3. ¿Qué observa en el comportamiento de la función en $x=c$ en el grafico C?

3.- la gráfica C no es continua
pues $f(c) \neq \lim_{x \rightarrow c} f(x)$
las otras condiciones si las cumple.

El ayudante responde correctamente, pero su justificación no es completa ya que no entrega los argumentos necesarios para decir que se cumple la desigualdad y tampoco justifica las dos condiciones restantes. Utiliza un lenguaje algebraico pero sin justificación, no menciona el tipo de discontinuidad que tiene la función en el punto $x=c$.

4. ¿Qué observa en el comportamiento de la función en $x=c$ en el grafico D?

4.- Claramente la función D si es continua.
pues cumple con todas las condiciones:
i) $c \in \text{Dom } f$
ii) $\lim_{x \rightarrow c} f(x) \exists$
iii) $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$

El ayudante explicita las tres condiciones utilizando el registro algebraico, pero no justifica sus afirmaciones.

5. ¿Qué observa en el comportamiento de la función en $x=c$ en el grafico E?
6. ¿Qué observa en el comportamiento de la función en $x=c$ en el grafico F?

5 y 6.- los gráficos E y F No son continuos:

- i) c en ambos \in al dom f .
- ii) en ambos $\lim_{x \rightarrow c} f(x) \exists$
- iii) claramente $\lim_{x \rightarrow c} f(x) \neq f(c)$

\Downarrow
 \exists

El ayudante verifica las tres condiciones de continuidad puntual, no justifica claramente la no existencia del límite en el punto c , no clasifica el tipo de discontinuidad que presenta cada función. Para su justificación sólo utiliza el registro algebraico, el ayudante explicita una contradicción pues en la afirmación dos aparece que existe el límite para ambas funciones, en cambio en la condición tres afirma que el límite no existe.

Actividad nº 3

1. ¿Qué entiendes de cada una de las siguientes definiciones de continuidad puntual? Explica.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a),$$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x)(|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon).$$

¿Cuál prefieres y por qué?

1.- a) Acerca de $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

esta igualdad en globo condiciones previas necesarias pero que una función sea continua en $x=a$ que son

- i) $a \in \text{Dom } f$
- ii) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \exists$.

Podríamos decir entonces que si un alumno maneja estas condiciones previas; podría utilizar esta única igualdad para decir que la función es continua en el pto.

El ayudante destaca las dos condiciones que involucra una igualdad entre dos constantes, no interpreta la igualdad gráficamente.

$$b) (\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall x) (|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)$$

A simple vista lo anterior podrían ser solo símbolos sin mayor entendimiento; pero nos encontramos con una definición de límite bastante compleja en términos de lógica e inequaciones, que si una persona no manija es incapaz de comprender y entender.

Lo difícil, para mí, es verlo en una gráfica donde explique que significa el ε y δ .

Personalmente opto por la primera definición; es más fácil visualizarla y poder ver cómo se comporta la función en un punto cualquiera; en este sentido es más práctica y se puede enseñar sin mayor dificultad.

El ayudante enfatiza que la definición anterior es más fácil de visualizar algebraicamente, pero no realiza esta visualización gráfica. Evidencia la incompreensión de la definición ε -delta y la atribuye a conocimientos previos tales como: inequaciones y cuantificadores lógicos.

2. ¿Cuáles son las condiciones suficientes para asegurar la continuidad de una función en $x = a$? ¿Por qué?

2.- Por todo lo dicho anteriormente bastaría con que se cumpla

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

El ayudante explicita la tercera condición de continuidad puntual, no realiza inferencias a partir de su significado gráfico de la continuidad puntual.

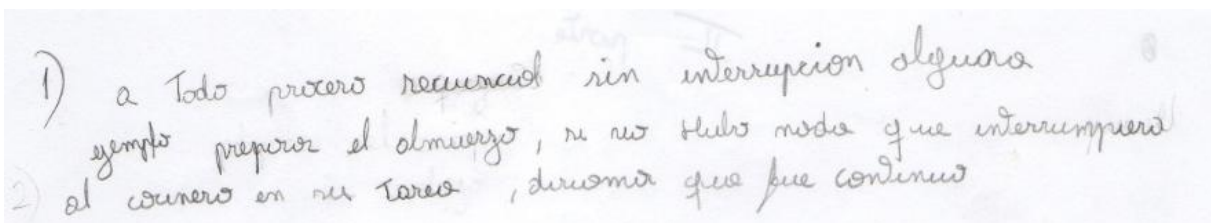
3. ¿Qué dificultades has detectado que tienes para decidir sobre la continuidad de una función en un punto?

3.- Primero entender las diferentes definiciones acerca de la continuidad puntual; y lo que hay previo de estas definiciones; es decir lógico; conectivos lógicos, inecuaciones, tratamiento de funciones (gráficas, dominios, recorridos y evaluación de funciones) y finalmente lo concerniente a límites.
Segundo todo lo concerniente a gráficas; el saber representarlas; evaluarlas y su aritmética.

Las dificultades que señala tienen relación con conocimientos previos a un curso de Cálculo. Destaca el lenguaje lógico, inecuaciones, el tratamiento de funciones en sus diferentes registros y todo lo que involucra el concepto de límites de funciones. Suponemos que los conocimientos previos detectados tienen relación con el entendimiento del concepto de continuidad puntual ϵ - δ y también con el entendimiento de dicho concepto en todos sus registros.

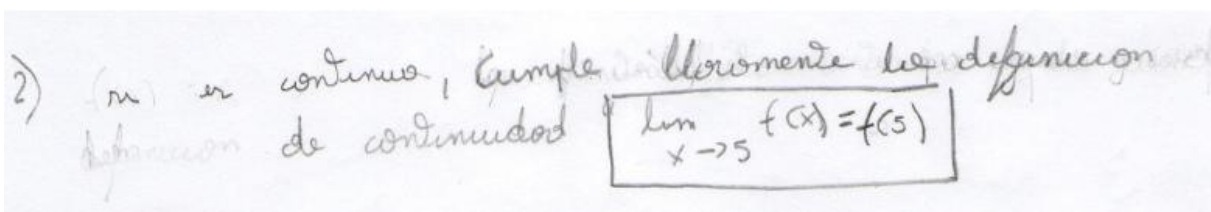
4.4.3. ENTREVISTA AYUDANTE C

1. ¿Qué entiende por proceso continuo en el lenguaje ordinario?



El entrevistado asocia el proceso continuo a un hecho cotidiano finito, como es el de preparar el almuerzo, este ejemplo implícitamente tiene relación con el tiempo y se expresa en un registro lingüístico natural.

2. ¿La función $f(x)=x$ es continua en $x=5$? ¿Por qué?



El ayudante no justifica su respuesta, pues suponemos que la considera trivial. Explicita la igualdad que se debe cumplir para la continuidad puntual con un registro algebraico únicamente, no explicita la existencia del límite, tampoco hace referencia a la existencia de la función en $x=5$.

3. ¿La función $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ es continua en todo su dominio? Justifique



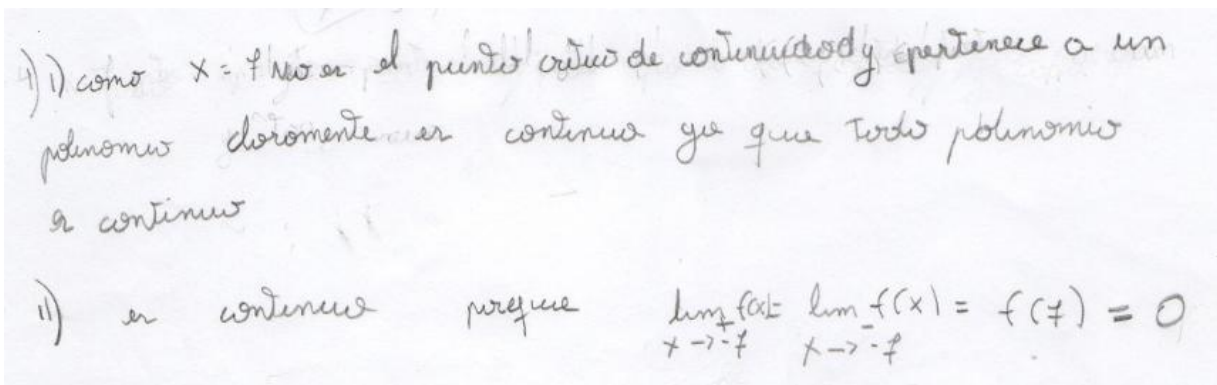
Su justificación es incorrecta, pues verifica la existencia de la función en $x=3$ y este punto no pertenece al dominio de la función, además no realiza un estudio de la continuidad puntual en el dominio de la función.

4. Decida si la función $f(x)$ es o no continua en el punto $x=-7$, justifique su respuesta.

$$i) \quad \text{Sea } f(x) = \begin{cases} 2(x-3) & \text{si } x < 0 \\ x^2 - x - 6 & \text{si } x > 0 \\ 5 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Decida si la función $g(x)$ es o no continua en el punto $x=-7$, justifique su respuesta

$$ii) \quad \text{Sea } f(x) = \begin{cases} x + 7 & \text{si } x \leq -7 \\ x^2 + 3x - 28 & \text{si } x > -7 \end{cases}$$



En el primer ejercicio su respuesta es correcta, utiliza un teorema de continuidad para su justificación. Menciona el concepto de punto crítico, para referirse al comportamiento de la función en su dominio, no tiene la claridad de un punto crítico. No queda claro a que polinomio se refiere pues se supone que se refiere al tramo $x > 0$, se infiere además que el estudiante no considera que en la función aparecen tres polinomios: uno de grado 0, uno de grado 1 y uno de grado 2. El lenguaje no es el apropiado pues dice “pertenece a un polinomio”, suponemos que intenta justificar que es una función polinomial. El ayudante utiliza un registro algebraico. En su argumentación utiliza el concepto de continuidad puntual.

Para el segundo ejercicio su respuesta es correcta, pero no justifica los procedimientos que utilizo para verificar la igualdad, además no explicita correctamente la definición de

continuidad puntual, pues da por entendido la unicidad del límite. Utiliza un registro algebraico, no verifica las condiciones de continuidad puntual.

5. Decida si la siguiente función es continua o no en $x=0$, justifique su respuesta.

$$\text{Sea } f(x) = \frac{1}{x^2}$$

5) No, porque no está definida en $x=0$

Su afirmación es correcta, pues la función no cumple con la primera condición de continuidad puntual, el ayudante justifica dicha respuesta. Utiliza un registro algebraico.

6. Encuentre, si es posible, tres funciones diferentes de modo que $|f(x)| = |g(x)| = |h(x)| = 2$.

6) $f(x) = 2, g(x) = -2, h(x) = 2$

El ayudante no responde esta pregunta, suponemos que no logra encontrar dichas funciones.

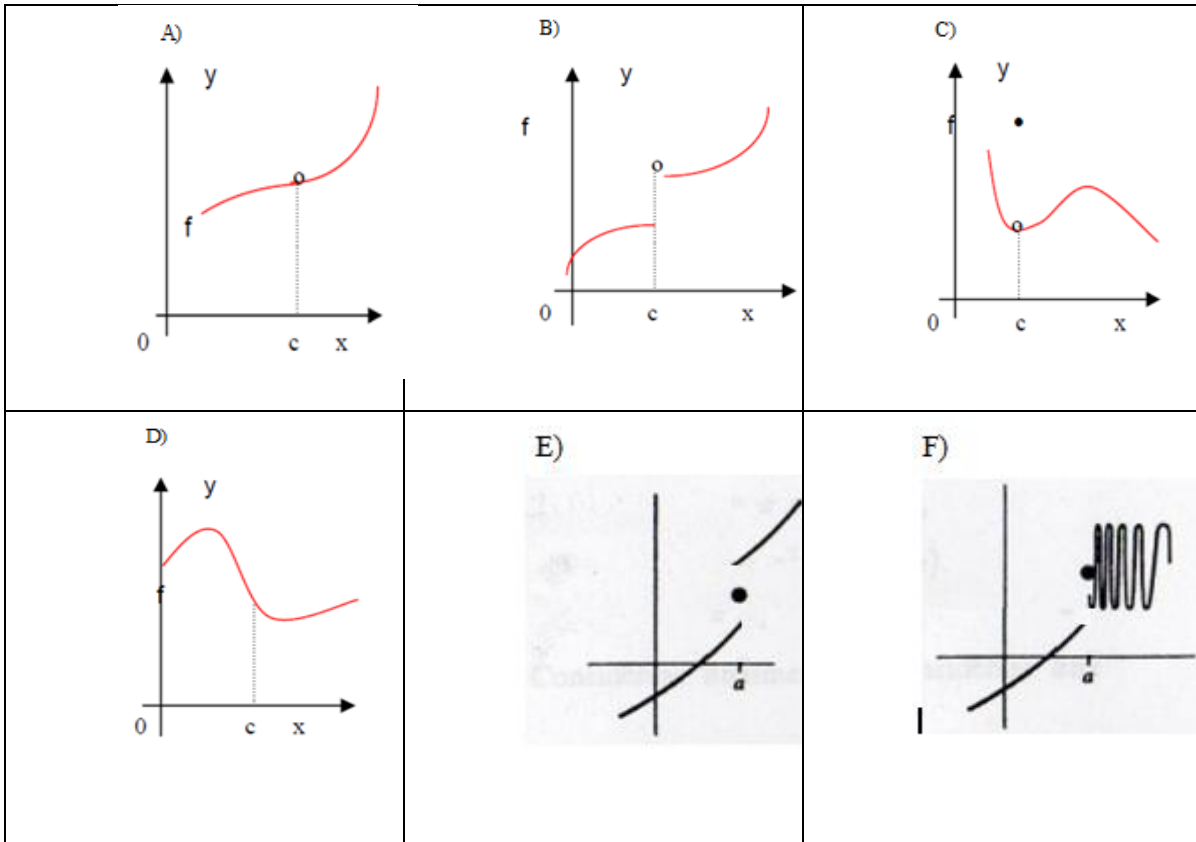
7. ¿Qué comprendes por continuidad puntual de una función de variable real?

f) - del punto de vista gráfico, que se pueda dibujar sin tener que levantar el lápiz
- Tomando $f(x)$ en cierto dominio, el $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ se cumple
 $\forall x_0 \in \text{el dominio}$

El ayudante hace referencia al registro gráfico, a pesar de no expresar parte de su respuesta utilizando dicho registro, además de una concepción histórica acerca de una función continua, explicita el concepto de continuidad puntual por intermedio del registro algebraico. En su comprensión sólo explicita la definición, no explica que comprende de ella, no explicita ninguna aplicación del concepto, no utiliza un registro gráfico.

Actividad n° 2

Analice las siguientes gráficas:

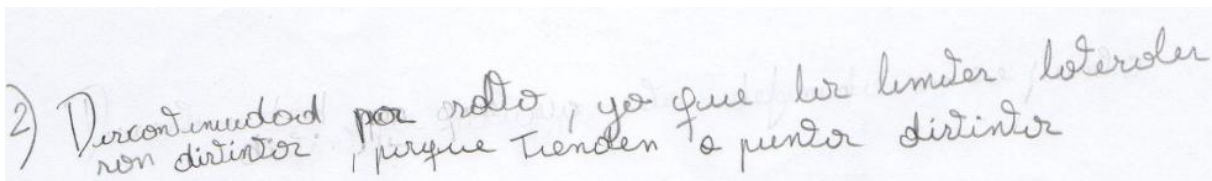


1. ¿Qué observa en el comportamiento de la función en $x=c$ en el gráfico A?

1) No está definida en ese punto, por lo tanto no es continua en ese punto

Su inferencia a partir de la gráfica es correcta, su argumentación se basa en la primera condición de continuidad puntual.

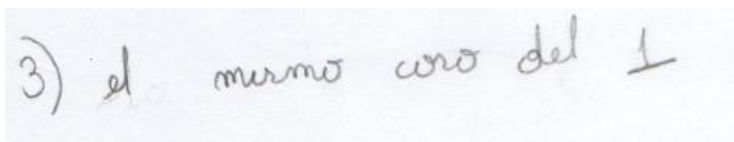
2. ¿Qué observa en el comportamiento de la función en $x=c$ en el gráfico B?



2) Discontinuidad por salto, ya que los límites laterales no coinciden, porque tienden a puntos distintos

Si observamos solamente la respuesta, suponemos que el estudiante no comprende la clasificación de una función discontinua por salto, ya que únicamente argumenta la existencia del límite por intermedio de los límites laterales, no se preocupa de la existencia de la función en el punto $x=c$.

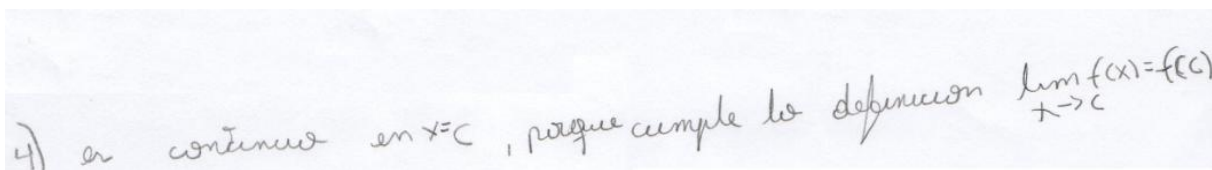
3. ¿Qué observa en el comportamiento de la función en $x=c$ en el gráfico C?



3) el mismo caso del 1

Suponemos que el ayudante con esta respuesta se refiere a que no se cumple la condición uno de continuidad puntual. No utiliza ningún registro en su respuesta, además no consideramos esta observación como válida, ya que no la argumenta.

4. ¿Qué observa en el comportamiento de la función en $x=c$ en el gráfico D?



4) es continua en $x=c$, porque cumple la definición $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$

El ayudante responde correctamente, pero no justifica las condiciones de continuidad puntual, sólo hace referencia a la tercera condición de continuidad puntual sin hacer un análisis de los límites laterales a partir de la gráfica, utiliza en su respuesta un registro algebraico.

5. ¿Qué observa en el comportamiento de la función en $x=a$ en el gráfico E?

5) discontinuidad; límites laterales distintos y ninguno de los dos concuerda con la imagen del punto

El ayudante observa la discontinuidad que se presenta por medio de la existencia del límite, ya que analiza los límites laterales, verifica la desigualdad que hay entre la imagen del punto y la existencia del límite en el punto. No utiliza un registro algebraico.

6. ¿Qué observa en el comportamiento de la función en $x=c$ en el gráfico F?

6) discontinuidad lo mismo que lo gráfica anterior

El ayudante responde correctamente, pero la argumentación no es válida pues no explicita las condiciones que se deben cumplir para que una función sea continua puntualmente, los gráficos son distintos por ende necesitan un análisis individual. No utiliza los registros en su argumentación.

Actividad nº 3

1. ¿Qué entiendes de cada una de las siguientes definiciones de continuidad puntual? Explica.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a),$$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x)(|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon).$$

¿Cuál prefieres y por qué?

1)

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Que los límites laterales existan} \\ \text{y también coincida con la imagen} \\ \text{del punto} \end{array} \right.$$

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x)(|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon)$$

es la definición formal de continuidad ya expresada arriba

El ayudante hace referencia a la comprensión de la unicidad de límite al referirse a los límites laterales, pero no explicita la condición que estos deben ser iguales para que el límite en el punto a exista. También hace referencia a la existencia de la función en el punto $x=a$, pues realiza la comparación con el límite por medio de la palabra “coincida”, suponemos que comprende la unicidad de límite pero no la explícita, además no se refiere al concepto básico de igualdad, es decir, la comparación de dos constantes. El ayudante no realiza inferencias respecto de la gráfica de la función, tampoco se refiere al registro numérico que involucra una igualdad.

Con respecto a la equivalencia de la definición de continuidad puntual épsilon-delta, el ayudante sólo identifica la expresión sin realizar comentarios acerca de dicho concepto, es más, no realiza comentarios referentes a ningún registro.

2. ¿Cuáles son las condiciones suficientes para asegurar la continuidad de una función en $x = a$? ¿Por qué?

2) límites laterales iguales y que coincida con la imagen del punto | porque así se asegura que la gráfica en ese punto no presentara interrupción

En su argumentación hace referencia al registro gráfico y algebraico, sin utilizarlos, no explicita las condiciones de continuidad puntual, suponemos que entiende la condición de existencia del límite, ya que hace referencia a la unicidad de límite, también comprende la condición de existencia de la función en todo su dominio, pues hace la referencia de la imagen de la función.

3. ¿Qué dificultades has detectado que tienes para decidir sobre la continuidad de una función en un punto?

3) - al presentar una función donde el alumno debe reconocer el límite de ella para luego verificar la continuidad, suele ocurrir que no se perciben de ese detalle o sea que no reconocen los cambios del gráfico

- Otro ejemplo raro, en funciones definidas como fracciones de polinomio de grado 5 o más, el cálculo se dificulta para el alumno, y este no logra decidir la continuidad o discontinuidad dependiendo del caso, la dificultad surge en las factorizaciones de dicho polinomio para facilitar el cálculo de los límites

La primera dificultad mencionada por el ayudante no la reconocemos en nuestro trabajo, a pesar que gracias a su trayectoria él logra reconocerla como una. Referente a la segunda dificultad consideramos que es el caso puntual representado en su experiencia con un tipo particular de funciones, suponemos que es válida pero tiene relación con técnicas de factorización de polinomios de cualquier grado, lo cual se escapa de nuestro tema.

4.3.4. ENTREVISTA ESTUDIANTE D

Actividad n° 1

Responder:

1. ¿Qué entiende por proceso continuo en el lenguaje ordinario?

Que es algo constante, que se va haciendo permanente, un ejemplo de esto se podría decir que cuando uno tiene una función $f(x)=x^2$ y le da valores a esta para poder graficarla se da cuenta que en ningún punto se separa de otro, sigue una línea sin cortes.

El estudiante explicita un ejemplo basado en el concepto de función y no en un lenguaje ordinario. En su entendimiento logramos identificar la relación que tiene con respecto al tiempo, ya que lo relaciona con “algo constante”, que es “permanente”. Utiliza un registro algebraico y el lenguaje natural para explicar un proceso continuo.

2. ¿La función $f(x)=x$ es continua en $x=5$? ¿Por qué?

Si, por que sus límites laterales dan el mismo valor.

El estudiante no tiene claridad del concepto de función, ya que lo relaciona con la unicidad de límites solamente sin considerar el dominio de la función. No utiliza ningún registro para justificar su respuesta.

3. ¿La función $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$ es continua en todo su dominio? Justifique

No, porque presenta una discontinuidad en el punto $x=3$.

El estudiante no demuestra claridad en el concepto de continuidad, ya que no logra identificar correctamente el dominio de la función y se centra en el punto donde dicha función es indeterminada. Utiliza el registro algebraico para referirse a la indeterminación de la función.

4. Decida si la función $f(x)$ es o no continua en el punto $x=-7$, justifique su respuesta.

$$\text{iii) Sea } f(x) = \begin{cases} 2(x - 3) & \text{si } x < 0 \\ x^2 - x - 6 & \text{si } x > 0 \\ 5 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

No, porque sus límites laterales no son iguales y tampoco en el punto dado $x=0$.

El estudiante no logra comprender el enfoque de la pregunta, ya que realiza un estudio de continuidad en el punto $x=0$ y no en el punto $x=-7$, que es el punto en cuestión.

En su justificación nuevamente da a entender que no maneja el concepto de continuidad puntual, pues lo relaciona a la unicidad de límite para verificar la existencia de dicho límite. No logra en base a su respuesta clasificar el tipo de discontinuidad que se presenta. No utiliza un registro gráfico, sólo utiliza un registro algebraico para estudiar el comportamiento de la función en el punto.

5. Decida si la función $g(x)$ es o no continua en el punto $x=-7$, justifique su respuesta

$$\text{iv) Sea } g(x) = \begin{cases} x + 7 & \text{si } x \leq -7 \\ x^2 + 3x - 28 & \text{si } x > -7 \end{cases}$$

Si, por que sus límites laterales son iguales y en el punto igual.

El estudiante no utiliza un lenguaje formal para justificar su respuesta, no explicita las condiciones de continuidad puntual, aunque tiene algunas nociones de dichas condiciones que las evidencia en preocuparse de la igualdad entre los límites laterales (segunda condición de continuidad), también se preocupa de la existencia de la función en el punto en cuestión y de la igualdad de este con el límite (primera y tercera condición de continuidad).El estudiante no utiliza los registros gráficos ni algebraicos para su justificación, tampoco justifica sus afirmaciones.

6. Decida si la siguiente función es continua o no en $x=0$, justifique su respuesta.

$$\text{Sea } f(x) = \frac{1}{x^2}$$

Es indeterminable, ya que no existe porque da $1/0$ por lo tanto no es continua.

El estudiante no utiliza un lenguaje matemático adecuado, logra justificar la no existencia de la función en el punto solicitado, por ende su afirmación es correcta. No utiliza correctamente el registro algebraico, no justifica su respuesta en un registro gráfico.

7. Encuentre, si es posible, tres funciones diferentes de modo que $|f(x)| = |g(x)| = |h(x)|=2$.

El estudiante no logra encontrar las funciones solicitadas.

8. ¿Qué comprendes por continuidad puntual de una función de variable real?

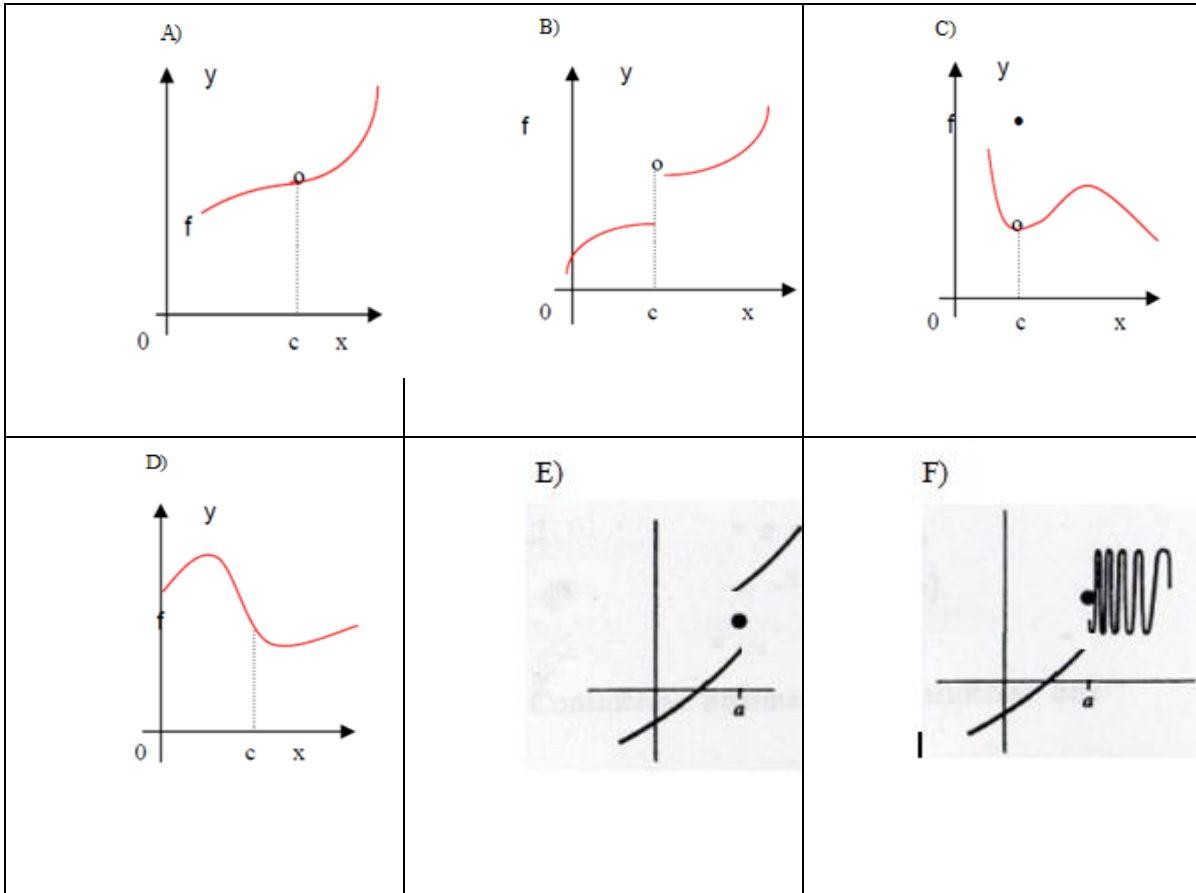
Que la función es continua solo en el punto indicado, es decir, es sacar el límite de la función que tiende a un número y ese número se reemplaza en la función.

El estudiante intenta describir la mecánica de las condiciones para que una función sea continua, no evidencia un entendimiento correcto de estas tres condiciones, suponemos que no comprende el concepto de continuidad puntual y tampoco lo podría extrapolar a alguna situación real.

No utiliza los diferentes registros: gráfico, algebraico, lenguaje natural, etc.

Actividad n° 2

Analice las siguientes gráficas:



1. ¿Qué observa en el comportamiento de la función en $x=c$ en el grafico A?

Que la función es continua, porque no existe ningún “corte” en la grafica

El estudiante no logra responder correctamente, ya que suponemos que no comprende el significado del círculo en blanco, el que señala que la función en el punto c no está definida.

2. ¿Qué observa en el comportamiento de la función en $x=c$ en el grafico B?

Que es discontinua en el punto $x=c$, ya que existe un “corte” en ese punto

El estudiante no logra justificar cada una de las condiciones de continuidad a partir del registro gráfico de la función, sólo verifica la no existencia de la función en el punto “c”, afirma que la función es discontinua sin clasificar el tipo de discontinuidad, no se refiere a la existencia del límite en el punto en cuestión.

3. ¿Qué observa en el comportamiento de la función en $x=c$ en el grafico C?

Que es continua en toda la grafica porque es una sola línea, sin saltos.

El estudiante no responde correctamente, nuevamente no reconoce el significado del círculo en blanco. El estudiante no realiza observaciones referentes a las condiciones de continuidad puntual, ya que no se refiere a la existencia del límite de la función ni tampoco a la función evaluada en el punto.

4. ¿Qué observa en el comportamiento de la función en $x=c$ en el grafico D?

Que es continua por que la grafica no muestra cortes.

El estudiante responde correctamente, pero su justificación sólo se basa en la visualización de la gráfica, no verifica las tres condiciones de continuidad puntual.

5. ¿Qué observa en el comportamiento de la función en $x=c$ en el grafico E?

Que es discontinua porque en $x=a$ existe un corte

El estudiante no responde correctamente, pues su justificación no es válida ya que la función existe en el punto en cuestión, el estudiante no se refiere a la existencia del límite en dicho punto, tampoco realiza la comparación por medio de la igualdad entre el límite y la función en dicho punto. Además no clasifica el tipo de discontinuidad presentado en dicha función.

6. ¿Qué observa en el comportamiento de la función en $x=c$ en el gráfico F?

Que es discontinua en el punto $x=a$ ya que no es una línea.

El estudiante no responde correctamente, ya que suponemos que sólo considera las “líneas” como funciones continuas, no se refiere a las condiciones de continuidad puntual. A pesar de que explicita la discontinuidad de la función, no la consideramos correcta pues su justificación es incorrecta.

Actividad nº 3

1. ¿Qué entiendes de cada una de las siguientes definiciones de continuidad puntual? Explica.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a),$$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x)(|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon).$$

La primera dice Que el límite de la función $f(x)$ cuando tiende a un valor “a” debe ser reemplazado en la función y dar un numero, luego se sacan los limites laterales cuando tiende al menos y mas el numero (no en valores, solo en signos para indicar izquierda y derecha) y deben dar el mismo número. Cuando los tres números sean iguales la función es continua en dicho valor al cual tiende la función.

La segunda dice: para todo épsilon mayor que cero existe un delta mayor que cero para todo X, tal que ese X restado con un numero en valor absoluto sea menor que el delta si y solo si el valor absoluto de la función menos la función reemplazada con el numero es menor que el épsilon

El estudiante no comprende esta definición, ya que sólo explicita el significado de la simbología que involucra la definición épsilon-delta.

¿Cuál prefieres y por qué?

La primera porque es mucho más práctico de entender y aplicar.

La elección la atribuimos a la mecanización que entiende por el concepto de continuidad puntual.

2. ¿Cuáles son las condiciones suficientes para asegurar la continuidad de una función en $x = a$? ¿Por qué?

Que sus límites laterales y en el punto “a” la función debe dar el mismo valor

El estudiante intenta evidenciar el entendimiento de la existencia del límite, por medio de la unicidad de límite, implícitamente verifica la existencia de la función en el punto a y la igualdad que se debe cumplir entre el valor del límite y el valor de la función en el punto “a”.

3. ¿Qué dificultades has detectado que tienes para decidir sobre la continuidad de una función en un punto?

Cuando me ponen una función y me dan un número que debo sacar la continuidad, siempre me complico como no me daban diferentes funciones para cuando x era mayor que el número dado, menor que el número dado e igual al número dado. Me dificultaba que hacer en ese caso.

El estudiante evidencia una dificultad no detectada en nuestro trabajo, pero si la evidencia en el error que comete en la pregunta cuatro de la actividad número uno al estudiar la continuidad en el punto $x=0$.

A modo de conclusión cuestionamos por parte de los ayudantes, el manejo de los diferentes registros semióticos y casualmente encontramos dificultades en la comprensión del concepto. Reafirmamos con esta entrevista la necesidad de crear una situación didáctica que facilite la enseñanza del concepto por medio del uso y el y traspaso de diferentes registros semióticos.

4.4. DISEÑO DE ENTREVISTA A PROFESORES DE LA UNIVERSIDAD.

4.4.1 ENTREVISTA PROFESOR A

Observación: La siguiente entrevista se traspasa desde una grabación, por lo cual hay algunas palabras e ideas que no se concretan o en ocasiones palabras que no se podían entender en la grabación, esto se realizó en mutuo acuerdo (Docente-entrevistador).

¿CÓMO ENSEÑAR EL CONCEPTO DE CONTINUIDAD PUNTUAL?

Objetivo: Profundizar en algunos aspectos relacionados con la enseñanza del concepto de continuidad puntual en la carrera de matemática, partiremos del supuesto de que se desea enseñar el concepto de continuidad puntual a los alumnos que cursaran Calculo I de la carrera de matemática de una Universidad de la V región.

FASE DE INICIACIÓN PREVIA A INTRODUCIR EL CONCEPTO:

1. ¿En qué asignatura considera usted que sería mejor tratar el concepto de continuidad puntual? ¿En qué contexto sería mejor introducir este concepto?

Respuesta: bueno, razonablemente en un primer curso de cálculo, ya no sé como se llame y el concepto... sería lo mejor introducir este concepto considerando que los alumnos tengan un conocimiento previo de lo que es los conjuntos continuos, en el sentido de variable que se usa en este tipo de funciones para entender la continuidad, tienen que ser funciones definidas en un conjunto continuo. Por ejemplo los reales o complejos. Y la continuidad puntual evidentemente implica posteriormente una continuidad global definida en cualquier conjunto numérico continuo.

2. ¿Cuál es la justificación que se puede dar a los estudiantes para tener que introducir el concepto de continuidad puntual? ¿Para qué sirve este concepto?

Respuesta: bueno, aunque vean que una función... cierto en un medio real, no un medio necesariamente continuo, aparentemente, pero por lo menos podemos citar lo que tiene que ver con todo lo que interviene con variables temporales, es decir, el tiempo suponiéndolo continuo podríamos asegurar que la mayoría de los fenómenos, ya sean de cualquier tipo: físicos, biológicos, químicos, psicológicos. Se pueden considerar en variable continua, sin rupturas... por lo menos tenemos la seguridad de que existe una variable continua.

Bueno, ya lo habíamos dicho anteriormente porque lo que más se usa hoy en día en los sistemas generales y en los cursos lineales y no lineales donde interviene la variable del tiempo como variable real.

3. ¿Cómo se puede motivar a los estudiantes hacia el aprendizaje de este concepto?

Respuesta: bueno, un poco tiene que ver con la pregunta anterior porque la motivación justamente es que las personas, los estudiantes, vean que por ejemplo la misma vida de ellos ha sido continua en el tiempo, ellos tienen la edad que tienen es porque de alguna manera el tiempo transcurrió en forma continua en su vida como por ejemplo. O que se yo en algún fenómeno temporal como es la medida de la velocidad de un móvil o el lanzamiento de un satélite o lo que ustedes quieran usar, movimientos astronómicos.

4. ¿Con qué conceptos previos debe estar familiarizado el alumnado antes de introducir el concepto de continuidad puntual? ¿Qué modelos matemáticos debe manejar los estudiantes para acceder al concepto continuidad?

Respuesta: bueno, ya un poco lo habíamos comentado porque este concepto tiene que ver con conjunto y con conjuntos de números, no necesariamente, pero si en lo cotidiano en lo usual debe ser con conjuntos numéricos continuos, como por ejemplo los números reales o los

complejos, así que por lo tanto el alumno debe conocer los números reales muy bien y por qué no, en los cursos posteriores debiera conocer variable compleja.

El concepto de modelo matemático aunque es muy amplio, pero acabamos de decir que existe una clasificación entre modelos matemáticos continuos y modelos matemáticos discretos, así que por lo tanto nosotros debemos ser capaces de mostrarle a los alumnos modelos matemáticos continuos.

5. ¿Qué aspectos considera usted que sería conveniente que el profesor/a tuviera presente a la hora de iniciar la introducción del concepto en el aula?

Respuesta: bueno, ya lo hemos comentado un poco antes, tendríamos que tener en que el alumno tenga una familiaridad con cierto tipo de conceptos, los maneje, por ejemplo el concepto de intervalo real, bola abierta compleja en el caso complejo, cosa que ahí lo ubique perfectamente en que variable está trabajando y ¿por qué?, y con funciones del tipo real o compleja que esté trabajando.

Análisis de Fase Previa a la Introducción del Concepto

Según las palabras señaladas por el Profesor, considera que es necesario introducir el concepto en los primeros cursos de cálculo, ya que los alumnos deben tener formadas las nociones básicas de conjuntos continuos, así como lo son: los números reales, los números complejos; la finalidad de los requisitos señalados es para que los alumnos(as) logren comprender a cabalidad el concepto de continuidad.

Una de las primeras nociones que el Docente presenta en la enseñanza del concepto de continuidad puntual va enfocada a hechos cotidianos, situaciones que son comunes para los alumnos(as), así como lo son las variables temporales, fenómenos físicos, biológicos, químicos y psicológicos. El objetivo de dichos ejemplos es motivar a los jóvenes pues si observan que el contenido se refleja en unos hechos concretos y cotidianos para ellos tienden a prestar mucha más atención.

El profesor al utilizar dichos ejemplos también estaría usando registros gráficos, para exponer la situación planteada, y registros algebraicos para definirla de un modo formal-matemático.

FASE DE INSTITUCIONALIZACIÓN DEL CONCEPTO:

A continuación le presentamos definiciones del concepto de continuidad puntual, extraídas de los libros de texto citados en el programa de cálculo I de la carrera de matemática de una Universidad de la V región.

1. ¿Cuál de ellas la considera más adecuada para enseñar a los estudiantes de este nivel?
¿Por qué?

Cálculo, Joseph W. Kitchen, Jr.

Definición 1. Se dice que una función real f es continua en un punto $a \in \mathbb{R}$ si y sólo si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a),$$

o equivalentemente,

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x)(|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon).$$

Nótese que para que una función f sea continua en un punto a deben satisfacerse tres condiciones:

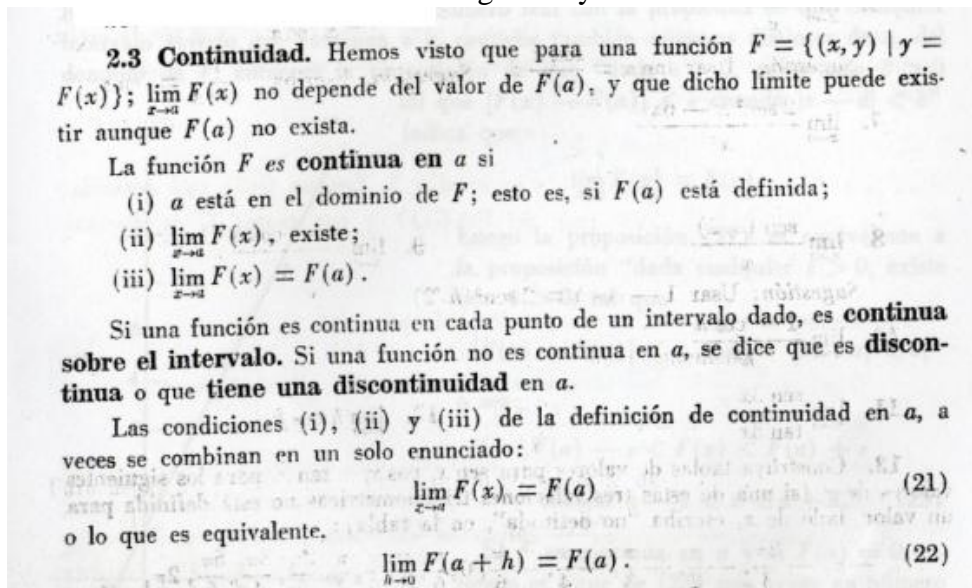
- 1) $f(a)$ debe estar definido (es decir, $a \in \mathcal{D}_f$);
- 2) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ tiene que existir;
- 3) el límite anterior debe ser $f(a)$.

Calculus. Cálculo infinitesimal, Michael Spivak, Segunda edición

DEFINICIÓN

La función f es continua en a si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$



Respuesta: bueno, la verdad es que las tres definiciones son de autores muy importantes. Aquí el cálculo diferencial de Kitchen, pero aunque es una representación buena en general, el libro que aparece acá citado de Michael Spivak segunda edición, la verdad que él hace lo que se llama definición provisional de la continuidad, vale decir, que va introduciendo poco a poco, primero que nada poniendo en claro el dominio de la función que está hablando, poniendo en claro muy bien qué tipo de punto es la continuidad... en ese, en aquel... que tipo de punto, muy bien, y también además, dice más en forma casi en castellano la forma de expresar la continuidad, no usando el formalismo del típico lenguaje épsilon-delta que aparece muchas veces en algunos libros citados.

2. ¿Cómo presenta usted la definición de continuidad puntual?

Respuesta: bueno, la definición de continuidad puntual, específicamente en funciones de variable real... reales de variable real... se presenta normalmente... en las clases que yo hago, primero que nada haciendo hincapié que significa que una variable tienda a un punto, es decir, se va haciendo por partes y posteriormente a que valores tiende la función evaluada en esa dicha variable y por qué razón, entonces represento un diagrama geométrico de la situación gracias a las propiedades de los intervalos... esa es la forma que lo hago.

3. ¿Qué opina del uso de los aspectos históricos y evolutivos en la enseñanza de los conceptos matemáticos? Para el caso concreto del concepto de continuidad ¿qué puede comentarnos? ¿Lo utiliza?

Respuesta: bueno esto es demasiado amplio, pero bueno podríamos decir que... los aspectos históricos son siempre importantes porque hay que pensar que los autores de todos estos conceptos que hemos estado hablando... ellos también hicieron un trabajo de la forma de representación más clara a las personas que escuchaban por primera vez el concepto. En consecuencia creo que es notable por ejemplo el caso de algunos autores como... los que iniciaron el cálculo como es Newton, Leibniz... y ellos presentaron de una forma que a lo mejor que hoy en día no podríamos entender, para la época, pero gracias al estudio didáctico del concepto se ha logrado gran entendimiento de la mejor demostración de la representación de este concepto.

En el caso de continuidad puntual ¿lo utiliza? Claro, por supuesto porque en el concepto original de la continuidad que representaba Newton, por ejemplo, el no hablaba prácticamente de límite sino que hablaba de aproximaciones... hay que pensar que él utilizaba la teoría de aproximaciones para el concepto de límite de la función y era aparentemente muy rudimentario, pero se entendía muy bien cuando una variable tendía a un punto.

4. ¿Cree necesaria su enseñanza en los cursos de tercero y cuarto medio? ¿Por qué?

Respuesta: la verdad es que debiera ser posible, porque se supone que los estudiantes nuevos... de estas nuevas generaciones, han evolucionado en el concepto de... del conjunto que habíamos eludido en el momento y hay que pensar que todo esto tiene que ver con el concepto de variable de conjunto que tiende a un punto es muy antiguo, por lo tanto, se supone que los alumnos hay evolucionado en sus mentes para poder entender que una variable tienda a un punto... así que podríamos decir que ahí tenemos el por qué del asunto.

5. ¿Qué ejemplos utiliza en clase para que los alumnos comprendan el significado del concepto Continuidad puntual? ¿Por qué?

Respuesta: Bueno, el... la idea siempre no es hacer formalmente una... colocar una función y decir que la variable tiende a un número... no es solamente esto sino que uno debe dar ejemplos de continuidad real, en la realidad pero concretamente y... hay muchos ejemplos en la vida real de continuidad puntual... emm en la realidad... de hecho ya nosotros tenemos una idea de continuidad puntual con nuestros propios días de edad, nuestra cronología es distinta.

6. ¿Qué otros aspectos estudia con los alumnos en el tratamiento de la continuidad puntual?

Respuesta: bueno, los otros aspectos que... naturalmente nacen de la continuidad puntual, son necesariamente la continuidad en conjuntos que ya no sean necesariamente de puntos, sino que puede ser cualquier tipo de conjuntos... por ejemplo el caso de los reales, referido a solo los aspectos matemáticos.

Análisis de la Fase De Institucionalización del concepto.

El profesor no presenta alguna preferencia al momento de seleccionar alguna de las definiciones de los tres libros propuestos por el programa de Matemática de una Universidad de la V región. Destaca la importancia de los tres autores, aunque por su formación sugiere el uso de ϵ - δ . Dichos conceptos son perfectamente apropiados para los alumnos de primeros medios de enseñanza universitaria, según la visión del profesor, ya que poseen la madurez y la capacidad de abstraer los conceptos presentados.

La manera de formalizar el concepto es por medio de las variables reales o funciones por partes, lo cual infiere que el Profesor se apoya en el registro algebraico para realizar la

mayoría de sus clases. Podemos señalar que también valora los aspectos históricos de la continuidad, a pesar que no los utiliza de manera formal en sus clases.

ENTREVISTA 2

EVALUACIÓN DEL CONCEPTO DE CONTINUIDAD, FASE DE APLICACIÓN DEL CONCEPTO:

1. ¿En qué situaciones particulares utiliza más frecuentemente el concepto de continuidad puntual o para realizar qué tipo de cálculos? ¿En qué asignaturas?

Respuesta: bueno, a esto normalmente cuando uno lo aplica, evidentemente en cursos posteriores, la verdad es que uno al principio parte con el concepto... el alumnos tiene que llegar a lo que significa gráficamente lo que es dibujar una función continua a través de un lápiz puesto en una hoja, cierto, sin levantarlo y entonces queda el grafico de una función continua, pero la aplicación realmente del concepto complicado es más adelante... es más adelante, en cursos posteriores cuando uno requiere, como decíamos anteriormente, requiere que las funciones a tratar tengan un tipo de continuidad para poder hacer una... por ejemplo una aproximación continua de algo... y yo creo que la pregunta vale... en que asignatura... la verdad que la asignatura son la posterior, por ejemplo en un curso de varias variables, un curso de cálculo en varias variables la continuidad... en una función de varias variables, la continuidad también aparece en la continuidad en cada variable y cada variable es variable real ... en consecuencia también una de estas aparece en la continuidad en varias variables y hay que recordar que la continuidad en una variable real de una función vectorial, ósea cuando corresponde a una curva... da más idea grafica de por qué la curva, como curva que alguien se mueve sobre ella se presenta una característica de continuidad puntual... porque tanto la trayectoria o curva o como quiera llamarse son ... la mayoría son funciones que son continuas y para el concepto de limite puntual en varias variables se utilizan curvas del tipo continuo, por lo tanto, que converjan a un punto que tengan como limite un punto donde ... de varias variables... donde tenemos asignaturas posteriores en que podemos aplicar la continuidad puntual, también podría ser una asignatura de limite de ecuaciones diferenciales ordinarias donde la variable normalmente... la variable continua en el punto y también va a interesar que

la respuesta a esta ecuación diferencial o fenómeno diferencial de una respuesta realmente continua en el punto.

2. ¿Qué aspectos del concepto de continuidad cree que necesariamente deben figurar en una evaluación de su aprendizaje?

Respuesta: bueno, las continuidades tienen que ver con derivada de funciones y muchas veces con funciones que son compuestas... de forma como cociente, como las funciones racionales polinomiales que son cociente polinomio y requiere un estudio de la continuidad así que por lo tanto los teoremas básicos, digámoslo así, los principales de la continuidad debieran estar en manifiesto, y hay otras cosas que aunque esta continuidad es continuidad puntual también no deja de ser la continuidad que posteriormente se desarrolla en cualquier programa de continuidad uniforme, que permite mucho mejor todavía seguridad de una evaluación real del aprendizaje de la matemática.

3. ¿Cómo sabe que sus alumnos han aprendido el concepto de continuidad puntual?

Respuesta: ehh... bueno, una manera de saber que los alumnos realmente han entendido este concepto debiera ser y es atreves... primero que nada el profesor tiene la obligación de hacer una suficiente ejercitación adecuada para que el alumno entienda plenamente el concepto. En segundo lugar debiéramos pedirle, si es que tuviéramos un ayudante... ayudantes que deben estar capacitados para hacer algún tipo de ejercicio básico y fundamental para que entienda el concepto... El tercer punto es que siempre es importante entregar guías dirigidas de aprendizaje en cualquier tipo de aprendizaje de concepto matemático, en lo particular... La aplicación más clara se ve a través de las funciones que uno espera que el alumno encuentre en algún momento en su vida, como estudiante de matemática, ósea que no sea cualquier tipo de función por qué hay funciones que realmente no se usan casi... podríamos aludir a algunas funciones como del tipo exponencial, del tipo como decíamos logarítmica, combinaciones de logaritmos con exponencial... funciones compuestas.

Análisis de la Evaluación del Concepto de Continuidad

El Docente encuestado señala que el alumno debe ser capaz de reconocer de manera grafica el concepto, para fortalecer su base, el cual se utilizara en los cursos superiores. A pesar que en el inicio del concepto se enfoca en su interpretación grafica, se induce que es solo la primera etapa para trabajar posteriormente con registros algebraicos y de una manera más abstracta.

Para corroborar los conocimientos adquiridos por los alumnos, deberían ser capaces de responder a los problemas planteados, precisamente en el registro algebraico, a pesar que al instante de introducir el concepto se utilizo diversos registros y ejemplos relacionados con situaciones cotidianas, estos no forman parte de la evaluación. Se infiere que a causa del nivel de enseñanza que realiza el docente, la grafica no alcanza a cubrir todo lo que necesita expresar, ya que es un pensamiento más abstracto el cual se puede interpretar utilizando el registro algebraico. Para finalizar y asegurarse que los alumnos comprendan los alumnos tendrán el apoyo de un ayudante capacitado que sea capaz de orientarlos en cada unos de los ejemplos y ejercicios, además de poder apoyarlos a interpretar los diferentes problemas en variados registros, lo que suponemos mejora la comprensión del concepto.

4. Diseñe una clase que tenga por objetivo enseñar el concepto de continuidad puntual

- Esta clase debe tener actividades de evaluación y las posibles respuestas de sus estudiantes.

④ Diseño clase de continuidad puntual ①

* Establecer donde se muestra claramente la variable continua. Es decir, en un intervalo abierto, cerrado o de cualquier otro tipo.

Al momento de especificar el movimiento de la variable utilizara algún registro grafico para señalar el comportamiento o quizás para que los alumnos(as) puedan observar desde una perspectiva más concreta la situación.

* Recordar que la variable puede tener
real
por la izquierda o derecha a un pto. y
por lo tanto si ese pto es extremo
del intervalo debe considerarse el respectivo
límite lateral. (se supone visto antes)

Para recrear esta situación por lo general se utiliza un grafico o quizás algún esquema, pero como señala no profundiza mucho ya que es un conocimiento que el profesor considera como previo al curso.

* Una vez aclarado lo anterior se consideran
primero los ptos interiores del intervalo
cual quise considerados (recordar concepto de
pto interior) y definir una función
real en el intervalo alrededor.

Al momento de señalar una función real nos estaríamos refiriendo a la representación algebraica, pero siempre teniendo en cuenta que reconoce varios conocimientos como ya adquiridos por los alumnos(as).

* En seguida, tomar un pto (fijo)
en el intervalo en cuestión y
recordar que significa que un pto variable
tiende al pto (fijo)

Para esta etapa de la clase ya comienza a dominar el registro algebraico por sobre el registro grafico.

* Enunciar la continuidad puntual (2)
 de la siguiente manera. Considerar
 $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ $t_0 \in \overset{\circ}{I}$ (interior de I)
 f es continua en t_0 si cuando t tiende
 a t_0 entonces $f(t)$ tiende a $f(t_0)$

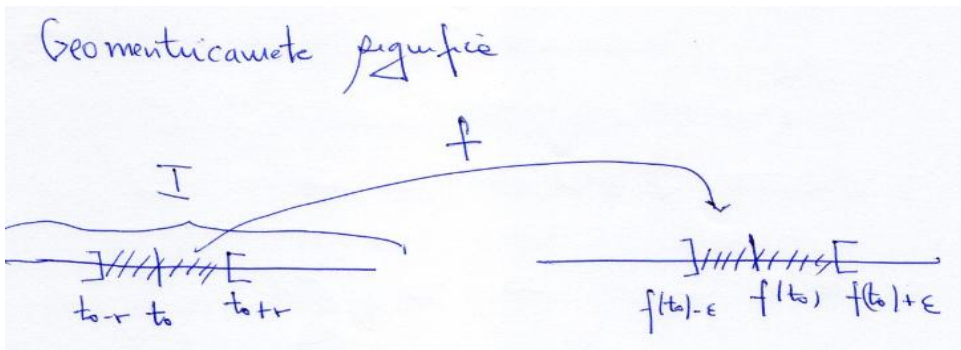
Para este nivel ya predomina completamente el registro algebraico, además de hacer referencia a símbolos matemáticos que los alumnos deberían comprender, puesto que ya tuvieron una preparación en lo referente a funciones, así como lo serían: función, intervalo I , conjunto de los números reales, la función evaluada en t , etc.

* En segundo mostrar ejemplos con funciones sencillas tales como:
 $t \xrightarrow{f} t$ $\forall t \in \mathbb{R}, t_0 \in \mathbb{R}$
 $t \xrightarrow{g} t^2$ $\forall t \in \mathbb{R}, t_0 \in \mathbb{R}$

Perduran los registros algebraicos y símbolos matemáticos pertinentes al contenido.

* Hacer una definición más formal y explicarla gráficamente.
 f tiende a ser continua en $t_0 \in \overset{\circ}{I}$ si
 $\forall \varepsilon > 0$ (suficientemente pequeño) $\exists \delta > 0$ m
 $\forall t \in]t_0 - \delta, t_0 + \delta[\subset I \Rightarrow |f(t) - f(t_0)| < \varepsilon$

Al momento de presentar la definición formal, el Profesor utiliza algo similar a la definición expresada con épsilon-delta, aunque ajustada a la orientación entregada en el curso el cual hace referencia a la continuidad de un punto perteneciente a un intervalo.



Así como interpreto en un comienzo la definición de continuidad puntual de manera algebraica, ahora la presenta de manera grafica para mejorar la comprensión de dicha definición, esto se considera poco utilizado por los docentes, pues la mayoría de los estudiantes utilizan pocos registros para expresar sus ideas acerca del concepto

Osea $\epsilon > 0$ (arbitrario) es el grado de aproximación que queremos a $f(t_0)$
 y por esto debemos escoger $r > 0$ (suficiente
 muy pequeño)
 III que cuando t tiende a t_0 ($r > 0$ regula
 esta situación) entonces $f(t)$ tiende a $f(t_0)$
 Esto autor se puede graficar con
 funciones reales que el alumno vea
 el fenomeno descrito anteriormente.

Parafraseando lo explicitado anteriormente de manera algebraica y grafica, ahora utiliza un registro de lenguaje natural para facilitar la comprensión del dicho concepto.

- * En cuanto a las actividades de evaluaci3n
- ① se deber hacer una adecuada y razonada lista de ejercicios presentada en clases
 - ② Proponer pruebas cortas de pequeños contenidos vistos en clases

De la manera que expresa la forma que tendr3n las evaluaciones podr3amos asegurar que en ellas estar3n presentes ejercicios en variados registros, de esta manera seria consecuente con su m3todo de ense3anza.

5. Con respecto al dise3no de su clase.

5.1. ¿Qu3 dificultades podr3an tener sus estudiantes al resolver las actividades propuestas?

- * En cuanto a las dificultades presentadas por los alumnos en las actividades propuestas
- ① No tienen claridad del significado de cuando una variable tiende a un pts (fijo)

El docente a pesar de presentar el concepto de varias maneras, con sus a3os de experiencia, igual considera que en los alumnos m3s de alguna duda tendr3n, pues conoce la diversidad de los j3venes.

② Tampoco se ha extrapolado a situaciones más complejas de la continuidad puntual

A pesar de los intentos por interpretar de varias maneras el concepto y probablemente los ejemplos, los alumnos tienen demasiadas dificultades para traspasar de un registro a otro.

③ Notemos que no se habla de una continuidad puntual en $t_0 \in I$, pero el cual es un extremo izquierdo de I o derecho de I . ¿Qué puede significar la continuidad en $t_0 \in I$ (extremo)?

Para responder a esta pregunta el alumno podría utilizar un registro gráfico u algebraico, pero siempre y cuando haya captado la idea de interpretar la aproximación por los costados.

④ Cuando se pide una demostración ϵ - δ de la continuidad puntual no saben hacerla.

Esta problemática o dificultad detectada por el docente es común en los estudiantes, esta problemática tiene relación con la utilización de los diferentes registros semióticos y con sus cambios, pues en los textos estudiados en este trabajo sólo se presentan con el registro algebraico. Además esta dificultad es detectada por todos los participantes de nuestro trabajo.

⑤ Las pruebas escritas revelan falta de lenguaje y escritura matemática

Así como los estudiantes tienen dificultades para cambiar de registros al enfrentar algún problema planteado, es claro que esta dificultad tiene relación con toda la enseñanza de las matemáticas, ya que la rigurosidad que se necesita en esta ciencia es de vital importancia para el aprendizaje de los conceptos matemáticos. Consideramos que esta dificultad se presenta en los ayudantes y en el estudiante sin experiencia.

5.2. Con este diseño, ¿Qué significado cree usted que construirá el estudiante sobre el concepto de continuidad puntual?

* Aunque el concepto de continuidad puntual práctico no debería ser el más normal sino el de continuidad en un conjunto intervalo de números reales. Debería el estudiante intuir en la mente un modelo de variable continua en un intervalo y una función real de dicha variable, también en un intervalo predeterminado.

El profesor espera que el estudiante construya un modelo de variable continua en un intervalo, además una función real de esta variable. Consideramos que los aprendizajes esperados podrían lograrse utilizando explícitamente los cambios de registros.

4.4.2. ENTREVISTA PROFESOR B

¿CÓMO ENSEÑAR EL CONCEPTO DE CONTINUIDAD PUNTUAL?

Objetivo: Profundizar en algunos aspectos relacionados con la enseñanza del concepto de continuidad puntual en la carrera de matemática, partiremos del supuesto de que se desea enseñar el concepto de continuidad puntual a los alumnos que cursaran Calculo I de la carrera de matemática.

FASE DE INICIACIÓN PREVIA A INTRODUCIR EL CONCEPTO:

1. ¿En qué asignatura considera usted que sería mejor tratar el concepto de continuidad puntual? ¿En qué contexto sería mejor introducir este concepto?

R.: Cuando el alumno tenga claridad y madurez del concepto de límite. A nivel universitario.

2. ¿Cuál es la justificación que se puede dar a los estudiantes para tener que introducir el concepto de continuidad puntual? ¿Para qué sirve este concepto?

R.: Que toda función no presenta la propiedad de que todo par de puntos próximos deben tener imágenes próximas. Sirve, además de lo anterior, para modelar procesos continuos de la vida diaria.

3. ¿Cómo se puede motivar a los estudiantes hacia el aprendizaje de este concepto?

R.: Presentando:

a) Situaciones reales que se puedan modelar a través de curvas continuas o discontinuas.

b) Como una aplicación directa del concepto de límite.

4. ¿Con qué conceptos previos debe estar familiarizado el alumnado antes de introducir el concepto de continuidad puntual? ¿Qué modelos matemáticos debe manejar los estudiantes para acceder al concepto continuidad?

R.: Con el concepto de límite de funciones. Debe manejarse modelos lineales y no lineales simples.

5. ¿Qué aspectos considera usted que sería conveniente que el profesor/a tuviera presente a la hora de iniciar la introducción del concepto en el aula?

R.: Alumnos interesados en el tema. Alumnos con una formación inicial que permita entender el concepto.

Análisis de la Fase de introducción del Concepto

Para conseguir el dominio del concepto de continuidad el Docente requiere que los alumnos posean una madurez y claridad del concepto de límite, un dominio de los conjuntos numéricos lineales-no lineales, lo cual implicaría que conozca su interpretación gráfica, algebraica y probablemente su interpretación en el contexto de la vida cotidiana. Precisamente estos registros son los iniciales y motivadores para que los alumnos aprecien dicha asignatura, esta conclusión se infiere, pues el docente lo señala pero no de manera explícita. Al referirse a ejemplos de la vida cotidiana suponemos que utilizara variados

registros para explicitar dichas situaciones (registros gráficos, algebraicos y lenguaje natural.)

FASE DE INSTITUCIONALIZACIÓN DEL CONCEPTO:

A continuación le presentamos definiciones del concepto de continuidad puntual, extraídas de los libros de texto citados en el programa de cálculo I de la carrera de matemática de la universidad de Valparaíso.

1. ¿Cuál de ellas la considera más adecuada para enseñar a los estudiantes de este nivel?
¿Por qué?

R.: La utilizada por J. Kitchen. Presenta todas las alternativas de continuidad.

Cálculo, Joseph W. Kitchen, Jr.

Definición 1. Se dice que una función real f es continua en un punto $a \in \mathbb{R}$ si y sólo si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a),$$

o equivalentemente,

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x)(|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon).$$

Nótese que para que una función f sea continua en un punto a deben satisfacerse tres condiciones:

- 1) $f(a)$ debe estar definido (es decir, $a \in \mathcal{D}_f$);
- 2) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ tiene que existir;
- 3) el límite anterior debe ser $f(a)$.

DEFINICIÓN

La función f es **continua en a** si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Calculus. Cálculo infinitesimal, Michael Spivak, Segunda edición

2.3 Continuidad. Hemos visto que para una función $F = \{(x, y) \mid y = F(x)\}$; $\lim_{x \rightarrow a} F(x)$ no depende del valor de $F(a)$, y que dicho límite puede existir aunque $F(a)$ no exista.

La función F es **continua en a** si

- (i) a está en el dominio de F ; esto es, si $F(a)$ está definida;
- (ii) $\lim_{x \rightarrow a} F(x)$, existe;
- (iii) $\lim_{x \rightarrow a} F(x) = F(a)$.

Si una función es continua en cada punto de un intervalo dado, es **continua sobre el intervalo**. Si una función no es continua en a , se dice que es **discontinua** o que **tiene una discontinuidad** en a .

Las condiciones (i), (ii) y (iii) de la definición de continuidad en a , a veces se combinan en un solo enunciado:

$$\lim_{x \rightarrow a} F(x) = F(a) \quad (21)$$

o lo que es equivalente.

$$\lim_{h \rightarrow 0} F(a + h) = F(a). \quad (22)$$

Calculo diferencial e integral. Taylor & Wade. Editorial Limusa

2. ¿Cómo presenta usted la definición de continuidad puntual?

R.: Haciendo una motivación geométrica sobre el tema a tratar.

3. ¿Qué opina del uso de los aspectos históricos y evolutivos en la enseñanza de los conceptos matemáticos? Para el caso concreto del concepto de continuidad ¿qué puede comentarnos? ¿Lo utiliza?

R.: Son importantes en la medida que no desvirtúen la atención sobre el concepto a tratar. Creo que no es necesario, en un curso de Cálculo en una variable, hacer un alcance histórico para este tema (si lo debiese utilizar para el concepto de límite de una función real). No lo utilizo.

4. ¿Cree necesaria su enseñanza en los cursos de tercero y cuarto medio? ¿Por qué?

R.: Podría ser necesario en la medida en que, a ese nivel de formación, el estudiante consiga comprender el concepto fundamental anterior: límite de una función.

5. ¿Qué ejemplos utiliza en clase para que los alumnos comprendan el significado del concepto Continuidad puntual? ¿Por qué?

R.: Ejemplo diversos: funciones lineales, polinomiales, definidas por tramos, de aplicación a fenómenos geométricos y/o físicos. Porque se representan en estos una gama diversa de tipos de funciones y no continuas.

6. ¿Qué otros aspectos estudia con los alumnos en el tratamiento de la continuidad puntual?

R.: Discontinuidades, teoremas fundamentales, cálculos. Continuidad en intervalos cerrados y teoremas fundamentales sobre este tipo de continuidad.

Análisis de la Fase de Institucionalización del concepto.

El Docente encuestado para formalizar el concepto entre los libros presentados por el programa de la carrera de Matemática de una Universidad de la V región prefiere el Kitchen, puesto que expresa de todas formas el concepto de continuidad. Se apoya del enfoque geométrico y posteriormente del registro algebraico para formalizar el concepto.

Considera como base para introducir el concepto que los alumnos posean un dominio de la función, la grafica y el significado del concepto de función. Además considera importante los aspectos históricos de los conceptos matemáticos, aunque precisamente para la continuidad no la considera fundamental.

El Docente tanto para los ejemplos y ejercicios del comienzo se enfoca casos cotidianos, para finalizar con ejercicios formales del curso, me refiero a funciones lineales, polinomios, fenómenos geométricos o físicos.

ENTREVISTA 2

EVALUACIÓN DEL CONCEPTO DE CONTINUIDAD, FASE DE APLICACIÓN DEL CONCEPTO:

1. ¿En qué situaciones particulares utiliza más frecuentemente el concepto de continuidad puntual o para realizar qué tipo de cálculos?. ¿En qué asignaturas?

R.: En todas aquellas que involucren funciones continuas. Al tratar el concepto de derivada de una función (más exigente que la continuidad), de integral definida, series de funciones. Asignaturas: Cálculo I, Cálculo II, Cálculo en Varias Variables, Ecuaciones Diferenciales y cualquier otro de matemática superior.

2. ¿Qué aspectos del concepto de continuidad puntual cree que necesariamente deben figurar en una evaluación de su aprendizaje?

R.: El dominio del concepto, el uso de cálculos involucrados, la aplicación de teoremas enseñados.

3. ¿Cómo sabe que sus alumnos han aprendido el concepto de continuidad puntual?

R.: A través de evaluaciones parciales y globales que se utilizan en el curso. A través de la participación en el aula mediante preguntas dirigidas a los estudiantes.

Análisis de la evaluación del concepto de continuidad

Para la evaluación del concepto el Docente utiliza los métodos tradicionales de evaluación, así como lo son: controles parciales, evaluaciones globales. Para la cual espera que alumnos posean un dominio del tema y aplicaciones de los teoremas, esto nos hace inferir que los alumnos(as) serian capaces de trabajar en más de un registro para solucionar los problemas planteados.

Observación: El Docente encuestado no presenta una propuesta de clase, por lo cual no podremos analizarla. A pesar de ellos consideramos que por las respuestas entregadas su propuesta intentaría cumplir con todos los ítems destacados anteriormente.

4.4.3. ENTREVISTA PROFESOR C

¿CÓMO ENSEÑAR EL CONCEPTO DE CONTINUIDAD PUNTUAL?

Objetivo: Profundizar en algunos aspectos relacionados con la enseñanza del concepto de continuidad puntual en la carrera de matemática, partiremos del supuesto de que se desea enseñar el concepto de continuidad puntual a los alumnos que cursaran Calculo I de la carrera de matemática.

FASE DE INICIACIÓN PREVIA A INTRODUCIR EL CONCEPTO:

1. ¿En qué asignatura considera usted que sería mejor tratar el concepto de continuidad puntual? ¿En qué contexto sería mejor introducir este concepto?

R.: - Calculo I

- Si se tiene como conductas de entradas el concepto de Límite de Funciones, se puede introducir el concepto formalmente

2. ¿Cuál es la justificación que se puede dar a los estudiantes para tener que introducir el concepto de continuidad puntual? ¿Para qué sirve este concepto?

R.: - Es un concepto básico para el estudio de ramas de la Matemática como son Calculo en una variable, Calculo en una o más variables, para el estudio en Topología y Análisis real

3. ¿Cómo se puede motivar a los estudiantes hacia el aprendizaje de este concepto?

R.: - Mostrando graficas de funciones arbitrarias tanto continuas como discontinuas

- Mostrado aplicaciones de funciones en otras áreas de estudio como Física, Biología u otros

4. ¿Con qué conceptos previos debe estar familiarizado el alumnado antes de introducir el concepto de continuidad puntual? ¿Qué modelos matemáticos debe manejar los estudiantes para acceder al concepto continuidad?

R.: - concepto de función

- concepto de límites de funciones y conocer algunas técnicas algebraicas del cálculo de Limites

5. ¿Qué aspectos considera usted que sería conveniente que el profesor/a tuviera presente a la hora de iniciar la introducción del concepto en el aula?

R.: - Los objetivos y conductas de entradas que tiene el curso al cual se va a enseñar el concepto de continuidad

Análisis de la introducción del Concepto

El docente entrevistado señala que los conocimientos requeridos para introducir el concepto es un curso inicial de cálculo (introducción al cálculo), lo que implicaría que el alumno(a) domine el concepto de función (en su forma grafica, algebraica y contexto natural). Está claro que el enfoque dado a este concepto es solo preparativo para trabajar de una manera más abstracta, lo que denominaríamos un lenguaje formal del contenido.

Sin importar el objetivo que pretenda alcanzar, el docente trabaja en un inicio con registros gráficos y situaciones de la vida cotidiana (aspectos físicos, biológicos, etc.)

FASE DE INSTITUCIONALIZACIÓN DEL CONCEPTO:

A continuación le presentamos definiciones del concepto de continuidad puntual, extraídas de los libros de texto citados en el programa de cálculo I de la carrera de matemática de la universidad de Valparaíso.

1. ¿Cuál de ellas la considera más adecuada para enseñar a los estudiantes de este nivel?
¿Por qué?

R.: De las tres presentadas para la Carrera de Matemática usaría la definición del libro cálculo de Joseph W. Kitchen, Jr

Cálculo, Joseph W. Kitchen, Jr.

Definición 1. Se dice que una función real f es **continua en un punto** $a \in \mathbb{R}$ si y sólo si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a),$$

o equivalentemente,

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x)(|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon).$$

Nótese que para que una función f sea continua en un punto a deben satisfacerse tres condiciones:

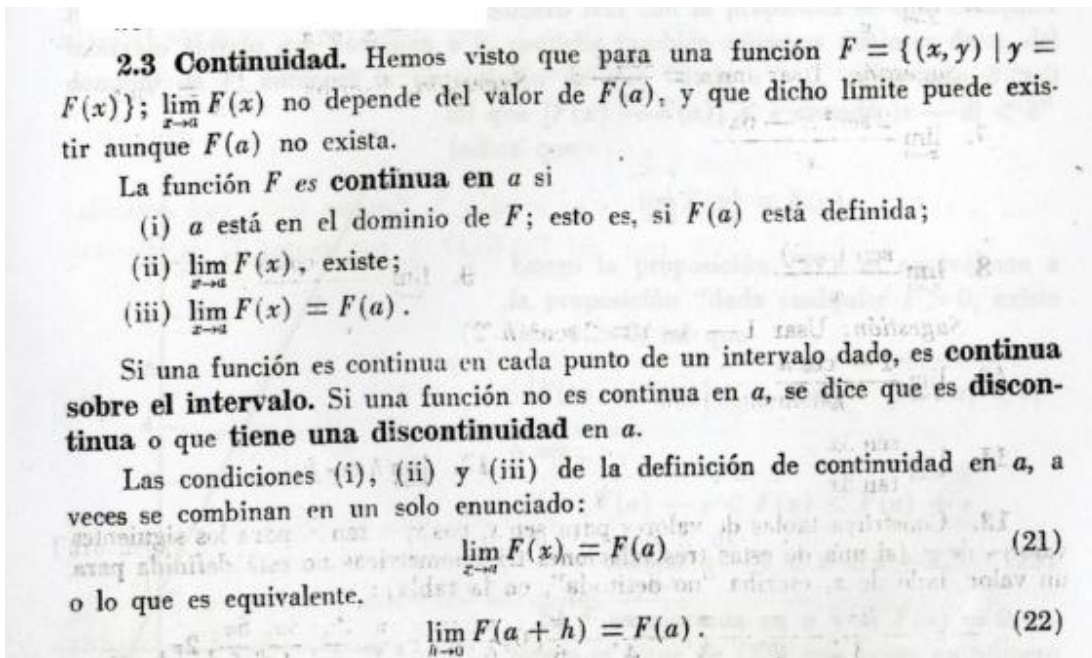
- 1) $f(a)$ debe estar definido (es decir, $a \in \mathcal{D}_f$);
- 2) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ tiene que existir;
- 3) el límite anterior debe ser $f(a)$.

Calculus. Cálculo infinitesimal, Michael Spivak, Segunda edición

DEFINICIÓN

La función f es **continua en a** si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$



2. ¿Cómo presenta usted la definición de continuidad puntual?

Depende si hay conceptos básicos de topología lo presento así.

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, f es continua en x_0 si $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)$ tal que $f(V_\delta(x_0)) \subseteq V_\varepsilon(f(x_0))$

V_δ vecindad abierta de x_0 , V_ε vecindad abierta de $f(x_0)$

Si no hay conceptos topológicos, entonces lo defino en forma equivalente

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

3. ¿Qué opina del uso de los aspectos históricos y evolutivos en la enseñanza de los conceptos matemáticos? Para el caso concreto del concepto de continuidad ¿qué puede comentarnos? ¿Lo utiliza?

R.: El conocer aspecto histórico del desarrollo de la matemática es una fuente inagotable de recurso para un profesor de matemática de modo de tener las herramientas para desarrollar e incentivar el estudio de esta ciencia

El concepto de Cálculo y sus ramificaciones se introdujo en el siglo XVIII, con el gran desarrollo que obtuvo el análisis matemático, creando ramas como el cálculo diferencial, integral y de variaciones. Por los trabajos de Descartes y Leibnitz se dice que descubrieron en forma independiente el cálculo diferencial Bernard Bolzano, fue el pionero en el análisis de funciones, en sus trabajos estudió el criterio de convergencia de sucesiones y dio una definición rigurosa de continuidad de funciones. Estudió profundamente las propiedades de las funciones continuas y demostró en relación con éstas una serie de notables teoremas, destacando el denominado teorema de Bolzano: una función continua toma todos los valores comprendidos entre su máximo y su mínimo.

4. ¿Cree necesaria su enseñanza en los cursos de tercero y cuarto medio? ¿Por qué?

R.: Con el avance que se tiene hoy, creo que es necesario y posible introducir algunos conceptos básicos del Cálculo diferencial

5. ¿Qué ejemplos utiliza en clase para que los alumnos comprendan el significado del concepto Continuidad puntual? ¿Por qué?

R.: En ciertos niveles es necesario usar el ejemplo visual para introducir y facilitar la comprensión del comportamiento de las funciones continuas y discontinuas

6. ¿Qué otros aspectos estudia con los alumnos en el tratamiento de la continuidad puntual?

R.: Las Propiedades algebraicas de las funciones continuas y aplicaciones también el concepto de tangencia en un punto

Análisis de la institucionalización del concepto

Nuevamente la preferencia entre los textos propuestos por el programa de Matemática es el Kitchen, gracias a sus variadas alternativas para expresar la continuidad. Para formalizar el concepto utiliza la formalidad de ϵ -delta, lo cual es un registro completamente algebraico, que confirmado por los ayudantes y otros, es una de las expresiones más complejas para reproducir por los alumnos, pues la aprenden pero no la comprenden.

Considera los aspectos históricos como una fuente de recursos para el docente, aunque no queda claro si da o no utilidad a ella en sus clases. Basándonos en esto comprendemos la utilización de registros gráficos por el docente para introducir el concepto, lo cual ayuda a la comprensión.

ENTREVISTA 2

EVALUACIÓN DEL CONCEPTO DE CONTINUIDAD, FASE DE APLICACIÓN DEL CONCEPTO:

1. ¿En qué situaciones particulares utiliza más frecuentemente el concepto de continuidad puntual o para realizar qué tipo de cálculos?. ¿En qué asignaturas?

R.: En calculo diferencial e integral en una y varias variables, en ecuaciones diferenciales, Espacios topológicos.

2. ¿Qué aspectos del concepto de continuidad puntual cree que necesariamente deben figurar en una evaluación de su aprendizaje?

R.: - Saber distinguir entre una función continua y discontinua en un punto

- Reconocer algunas propiedades algebraicas que tienen las funciones continuas

3. ¿Cómo sabe que sus alumnos han aprendido el concepto de continuidad puntual?

R.: Haciendo preguntas sobre continuidad, evaluando guías de ejercicios, tareas y en las evaluaciones formales.

Análisis de la evaluación del concepto

El docente orienta la evaluación del concepto utilizando el registro algebraico en vez del grafico, a pesar que la mayoría de la introducción estuvo apoyada de una u otra manera de dicho registro.

Observación: el docente no alcanza a realizar la clase, pero al igual que el docente anterior suponemos que intentaría cumplir con sus objetivos o intereses de la clase al momento de formularla.

CAPÍTULO V

5.1. PROPUESTA PEDAGÓGICA

A continuación se presenta una situación complementaria que pretende una búsqueda de modelos en situaciones, en donde se identifiquen y expresen diferentes registros semióticos, gráficos y algebraicos. También se pretende que se reflexione y se analice la utilización de recursos manipulativos tangibles, obstáculos e implicaciones históricas, realizar una mirada a las diferentes actividades cognitivas que conlleva la utilización de sistemas semióticos que define Duval, en particular la formación, el tratamiento y la comprensión que define dicho autor.

La situación presentada nos permite evidenciar actividades cognitivas de formación, tratamiento y conversión que requiere un sistema semiótico. Se presentan algunos registros de representación en el planteamiento de esta actividad y se requiere la utilización y el análisis de los registros para la resolución del problema. El análisis que se pretende en torno a este problema es las actividades cognitivas que permiten la comunicación para exteriorizar representaciones mentales y por ende complementar el buen desarrollo de una actividad matemática.

Conocimientos previos

Para realizar esta actividad el alumno debe manejar los siguientes objetos matemáticos: concepto de función, concepto de límite, límites laterales y unicidad de límite

Analisis A priori

Basandonos en los resultados obtenidos de las entrevistas, estamos convencidos que sería apropiado experimentar con tecnicas y actividades complementarias que ayuden a mejorar la adquisición y comprensión en su plenitud del concepto de continuidad puntual de una función real de variable real, para lograrlo proponemos una serie de actividades que se basan principalmente en los cambios de registros; así como ya se ha expuesto anteriormente mientras más registros se dominen al momento de tratar un concepto implica mayor dominio de él.

Las actividades estan propuestas para alumnos con nociones básicas del concepto de continuidad, como por ejemplo el concepto de función, concepto de límite, límites laterales y unicidad de límite. Apoyándose en estos conocimientos los alumnos(as) deberán analizar las diferentes situaciones propuestas, interpretar gráficos y relacionarlos con tablas de valores y por último deberán obtener conclusiones desde las respuestas entregadas. Cada actividad esta ordenada de tal manera que la dificultad aumenta gradualmente, logrando que la adquisición del concepto sea natural y a la vez significativa para los estudiantes.

La primera actividad se basa en la intuición, que consideramos una de las formas más sencillas de adquirir la esencia de un concepto. El alumno deberá ser capaz de interpretar la relación de una vida cotidiana con el concepto de límites laterales, puede decirse que es guiada, pero es bastante práctica al momento de intentar señalar que algo se aproxima a un punto muchísimo aunque nunca se toque.

La segunda y tercera actividad están basadas en el cálculo y cambios de registros, además del análisis de sus respuestas y en la reflexión de las mismas.

El estudiante acá deberá ser capaz de encontrar el dominio de una función, el conflicto que podría existir es evaluar la función en valores que no se encuentran en su dominio. Luego deberá obtener conclusiones a partir de análisis realizado a cada pregunta, de la misma manera que la primera actividad la dificultad aumenta de manera gradual. Por último la tercera actividad hace que el alumno relacione el registro tabular con el gráfico, completando así el traspaso de varios registros, lo cual produciría como resultado un mayor dominio del concepto.

Las Lineas del Tren

Objetivo: relacionar una situación de la vida cotidiana al concepto de continuidad puntual

El ojo estima la distancia en base a la disminución de tamaño de los objetos y al ángulo de convergencia de las líneas, es decir, partir de dos partes distintas para luego encontrarse en un punto. Del objetivo y de la distancia dependerá el que la imagen tenga más o menos profundidad, hay que considerar que la sensación de profundidad es puramente ilusoria, pero forma parte una técnica de composición muy importante.

1. Según tu punto de vista ¿Qué indica la perspectiva de las vías del tren?



Que puedes observar

2. Si trasaras una línea por el centro de las vías ¿Qué relación habría entre las vías y dicha línea?



Que puedes observar

3. ¿Habrá un punto en el cual se junten las vías y la línea imaginaria? Y si tomamos en cuenta la perspectiva ¿cambiarías de opinión?



Que puedes observar

4. ¿Que concepto del cálculo se relaciona con la respuesta anterior?

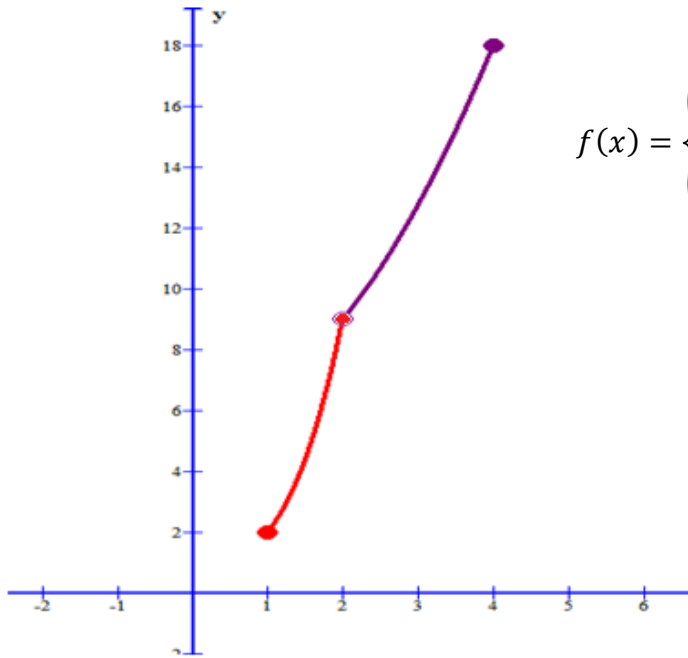
5. Apoyado con el concepto relacionado anteriormente ¿Qué relación podrías señalar entre las vías y la línea trazada?

Objetivo: Inferir el concepto de continuidad puntual.



Que puedes observar

Facilitando el Trabajo con el Concepto de Continuidad Puntual



$$f(x) = \begin{cases} 1 + x^3 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ \frac{3x^2}{4} + 6 & \text{si } 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

1. Contruye una tabla de valores de x cada vez mas proximos a 2 por la izquierda.

Objetivo: *confrontar el dominio de la funcion con la tarea matemática del calculo de imágenes de determinados números reales.*

Conclusiones a partir de la construcción de la Tabla 1

2. Construya una tabla de valores proximos a 2 por la derecha.

Objetivo: establecer correspondencia entre las aproximaciones de la tabla y su límite lateral por derecha.

Conclusiones a partir de la construcción de la Tabla 2

3. A partir de la construcción de las dos tablas anteriores. ¿Qué puede concluir?.

Objetivo: descubrir la relación existente entre ambas tablas.

Conclusiones

4. Contruye una tabla de valores de x cada vez mas proximos a 1 por la derecha.
Objetivo: establecer correspondencia entre las aproximaciones de la tabla y su límite lateral por derecha.

Conclusiones a partir de la construcción de la Tabla 3

5. ¿Es posible construir una tabla de valores proximos a 1 por la izquierda? Si es posible contruyala, de lo contrario justifique su respuesta.
Objetivo:

Conclusiones de la Tabla 4

6. A partir de las tablas y conclusiones (3 y 4) ¿Qué relación podemos encontrar?
Objetivo: descubrir la relación existente entre ambas tablas.

Conclusiones

7. Contruye una tabla de valores de x cada vez mas proximos a 4 por la izquierda.
Objetivo: establecer correspondencia entre las aproximaciones de la tabla y su límite lateral por izquierda.

Conclusiones a partir de la construcción de la Tabla 5

8. ¿Es posible construir una tabla de valores próximos a 4 por la derecha? Si es posible contruyala, de lo contrario justifique su respuesta.

Objetivo:

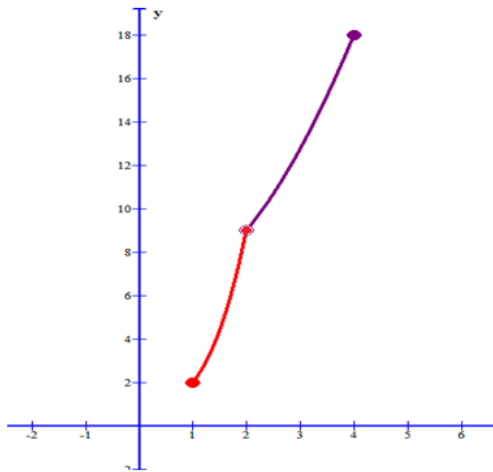
Conclusiones a partir de la construcción de la Tabla 6

9. A partir de las tablas y conclusiones (5 y 6) ¿Qué relación podemos encontrar?

Objetivo: descubrir la relación existente entre ambas tablas

Conclusiones

10. Complete la tabla según corresponda:



$$f(x) = \begin{cases} 1 + x^3 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ \frac{3x^2}{4} + 6 & \text{si } 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

X			
F(x)			

11. Compara los valores de las tablas 3 y 4 (valores proximos de 1) con el valor de $f(1)$.

Objetivo: verificar si se cumple una de las condiciones para la continuidad de una función.

Comparación de las Tablas 3 y 4 con el valor de $f(1)$	

12. Compara los valores de la tabla para los valores proximos de 2 con La imagen de 2 .

Objetivo: verificar si se cumple una de las condiciones para la continuidad de una función.

Comparación de las Tablas 1 y 2 con el valor de $f(2)$	

13. Compara los valores de la tabla para los valores proximos de 4 con La imagen de 4.
Objetivo: verificar si se cumple una de las condiciones para la continuidad de una función.

Comparación de las Tablas 5 y 6 con el valor de $f(4)$

Formalizando los Conceptos

En conjunto con tus compañeros responde cada una de las siguientes preguntas y contrasta las respuestas con el Profesor.

- De acuerdo a lo realizado hasta el momento. Expresa utilizando el concepto de limite las relaciones de las tablas construidas para:
Objetivo: comprobar la forma y capacidad de abstracción en base a lo señalado anteriormente.

Expresión para $x = 1$

Expresión para $x = 2$

Expresión para $x = 4$

2. ¿Existe el límite para los valores próximos a $x = 1$?, justifica tu respuesta.
Objetivo: Relacionar la respuesta de la actividad número 1 con la unicidad de límite

Justificación

3. ¿Existe el límite para los valores próximos a $x = 2$?, justifica tu respuesta.
Objetivo: Relacionar la respuesta de la actividad número 1 con la unicidad de límite

Justificación

4. ¿Existe el límite para los valores próximos a $x = 4$?, justifica tu respuesta.
Objetivo: Relacionar la respuesta de la actividad número 1 con la unicidad de límite

Justificación

5. Compara los valores proximos a 1 con el valor de $f(1)$

Objetivo: Comparar resultados del registro tabular con resultados del registro análitico

6. Compara los valores proximos a 2 con el valor de $f(2)$

Objetivo: comprobar si logra argumentar basandose en los principio de continuidad puntual.

7. Compara los valores proximos a 4 con el valor de $f(4)$

Objetivo: comprobar si logra argumentar basandose en los principio de continuidad puntual.

8. ¿Qué tipo de Discontinuidad existe en $x = 1$?

Objetivo: Verificar a partir la actividad número la existencia de una discontinuidad puntual.

9. ¿Qué otras Discontinuidades hay en esta función? ¿Por qué?. Utiliza lenguaje Matemático

Objetivo: comprobar si se logra argumentar correctamente utilizando un lenguaje matemático la existencia o no de otras discontinuidades.

10. ¿Por qué es continua en $x = 2$?

Objetivo: Comprobar la adquisición del concepto de continuidad puntual

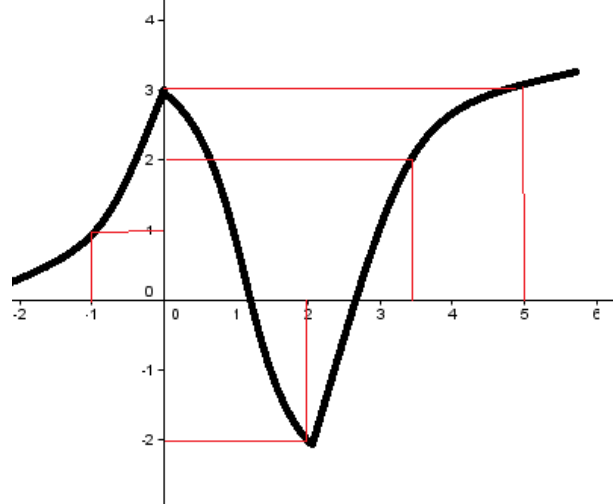
11. ¿Expresa de forma algebraica la relación entre el límite cuando el valor de x se aproxima a una constante y el valor de la imagen de dicha constante ?

Identificando Gráficas

1. Completa la siguiente tabla apoyandote del gráfico

x	$f(x)$

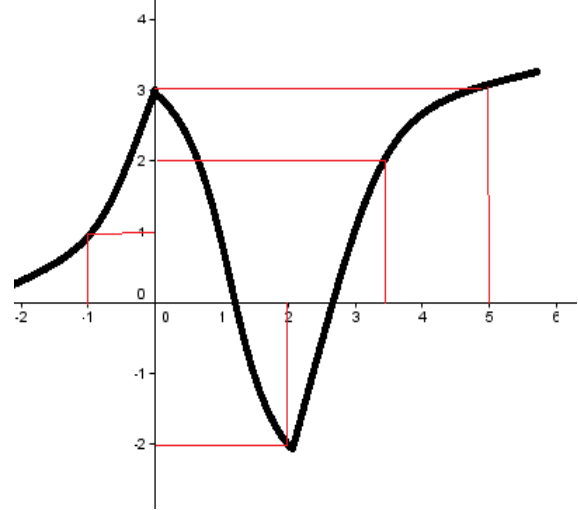
Objetivo: traspasar del registro algebraico a lenguaje tabular.



2. Determina los siguientes límites utilizando para ello la representación gráfica de la función f

Objetivo: relacionar la gráfica con los respectivos límites laterales

- a. $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$
- b. $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$
- c. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$
- d. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$
- e. $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$
- f. $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$
- g. $\lim_{x \rightarrow \frac{7}{2}^-} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$
- h. $\lim_{x \rightarrow \frac{7}{2}^+} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$
- i. $\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$
- j. $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$



3. ¿La función que representa la gráfica anterior es Continua en todo su dominio? Justifique.

Observación: aplicar conocimientos e interpretaciones anteriores para sacar conclusiones

CAPÍTULO VI

6.1. CONCLUSIONES

Nuestra idea se origino a partir de las experiencias que hemos tenido en la educación superior como ayudantes de la asignatura de cálculo I, esto nos llevo a discutir el objeto matemático que debemos estudiar, la elección fue la continuidad puntual ya que la mayoría de los teoremas vistos en cursos superiores exige que una función sea continua. En nuestra investigación nos fuimos dando cuenta que los errores de los estudiantes de una universidad de la V región se repetían a nivel mundial y por ende, era necesario buscar una solución al problema. También nos motivo el darnos cuenta que este trabajo sea el pionero en las investigaciones de los estudiantes de la carrera de pedagogía, ya que no nos cabe duda que a futuro estos temas debamos enseñarlos como docentes de enseñanza media o superior.

El diseño de situaciones de aprendizaje orientadas a la construcción de un concepto matemático no es trivial, debido a las características de abstracción y representación que son requeridos en el pensamiento matemático avanzado, y por ende en un discurso matemático universitario.

Consideramos que el estudio de los textos recomendados para la asignatura desde la mirada de los cambios de registros y además fortalecido desde el punto de vista histórico es coherente, ya que por un lado los obstáculos y concepciones identificadas revelan la utilización de cambios de registros, y por otro lado diversos autores (Dreyfus, D'Amore y Duval), afirman que la utilización de cambios de registros es una herramienta fundamental para construir un concepto matemático.

El grupo de participantes que intervino en nuestro proyecto fue escogido con diferentes objetivos orientados a destacar el triangulo didáctico: el saber, el docente y el alumno. Los profesores nos aportaron en su experiencia en la introducción, institucionalizar y evaluar el concepto de continuidad puntual, esto nos permitió por un lado identificar los conocimientos relevantes en la construcción del concepto, y por otro lado identificar la importancia que le otorgan a la historia y uso de los diferentes registros. Los ayudantes nos permitieron identificar la importancia del dominio de los diferentes registros al momento de justificar sus

respuestas. Además una consecuencia que se detectó casualmente fue las dificultades que tienen los ayudantes para inferir información a partir de los diferentes registros. El estudiante sin experiencia en enseñar el concepto de continuidad puntual nos permitió por un lado identificar los errores en la utilización del lenguaje y escritura matemática y por otro lado la poca experiencia en la uso de los diferentes registros al instante de justificar sus respuestas, y por ende se reflejan errores conceptuales del concepto de continuidad puntual.

Consideramos que la puesta en práctica de las actividades planteadas en nuestro diseño permitirá a los estudiantes lograr una conceptualización intuitiva del concepto y la importancia que tiene el manejar distintos registros semióticos. Además la puesta en práctica permitirá el rediseño y estudio de la experiencia desde otros enfoques teóricos que estime conveniente el lector.

A modo de conclusión final consideramos que debemos cuestionarnos día a día las situaciones didácticas que implementamos en el aula, ya que esto, nos permitirá familiarizarnos con los objetos matemáticos que enseñamos. La didáctica de la matemática se debe implementar en la enseñanza universitaria chilena y esperamos que a futuro se continúen estudiando objetos matemáticos del cálculo diferencial apoyados de conceptos tales como: Registros Semióticos, Pensamiento Matemático avanzado y su Epistemología.

BIBLIOGRAFÍA

TRABAJOS CITADOS

Aparicio, E., & Cantoral, R. (2004). Sobre la noción de continuidad puntual: Un estudio de las formas discursivas utilizadas por estudiantes universitarios en contextos de geometría dinámica . *CLAME*, vol 17 , 342.

Azcárete, C., & et.al. (1999). Perspectivas de Investigación en Didáctica de las Matemáticas: Investigación en Didáctica del Análisis.

Badillo Jiménez, E. R. (2003). *La Derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de matemática de Colombia*. Bellaterra.

Boyer, C. B., & Martínez perez, m. (1999). *Historia de la Matemática*. Alianza S.A.

Cantoral, R., Farfán, R. M., Cordero, F., Alanís, J. A., Rodríguez, R. A., & Garza, A. (2005). *Desarrollo Del Pensamiento Matemático*. Trillas.

Castro Cortés, C. C. (2011). Formación, tratamiento y conversión como actividades cognitivas de representación: una experiencia con estudiantes para profesor. *CIAMEN* .

Contreras de la Fuente, Á., Luque Cañada, L., Ordóñez Cañada, L., Ortega Carpio, M., & Sánchez Gómez, C. (2000). *Estudio sobre la enseñanza-aprendizaje de conceptos fundamentales del análisis matemático (límite, continuidad, derivada e integral) en manuales y en estudiantes del bachillerato-logse y de primer curso universitario*.

Cuesta Borges, A. (2007). El proceso de aprendizaje de los conceptos de función y extremo en estudiantes de economía: Análisis de una innovación didáctica.

D'Amore, B. *BASES FILOSOFICAS, PEDAGOGICAS, EPISTEMOLOGICAS Y CONCEPTUALES DE LA DIDACTICA DE LA MATEMATICA*.

Del Puerto, S. M., & Minnaard, C. L. *Análisis de los errores: Una valiosa fuente de información acerca del aprendizaje de las matemáticas*. Argentina.

Duval, R. (1999). *Semiosis y Pensamiento humano registros semióticos y aprendizajes intelectuales*.

Gatica, N., Maz-Machado, A., May, G., Coscá, C., Echevarria, G., & Renaudo, J. (2010). Un acercamiento a la idea de continuidad de funciones en estudiantes de ciencias económicas. *revista Iberoamerica de educación matemática* , 121-131.

Panizza, M. (s.f.). Conceptos Básicos de la Teoría de Situaciones Didácticas.

Sierra Vázquez, M., González Astudillo, M. T., & López Esteban, M. d. *LOS CONCEPTOS DE LÍMITE Y CONTINUIDAD EN LA EDUCACIÓN SECUNDARIA : TRANSPOSICIÓN DIDÁCTICA Y CONCEPCIONES DEL ALUMNO*.

sitio Web Descartes. (s.f.). *experimentacion con descartes en Andalucia*. Recuperado el 10 de enero de 2011, de http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/funciones_eda05/INDICE_FUNCIONES.htm

Velasco Hernández, J. X. (s.f.). *Daniel Bernoulli y Leonardo Euler o el encuentro de dos formas de ver la matemática*. Obtenido de http://www.misclaneamatematica.org/Misc45/Jorge_V.pdf

Vrancken, S., Gregorini, M. I., & Eng, A. (s.f.). <http://www.soarem.org.ar/Documentos/29%20vrancken.pdf>.

ANEXOS

ANEXO 1: CONTROL DE ESTUDIANTES DEL CURSO DE CÁLCULO I DEL SEGUNDO SEMESTRE DEL 2010

CARRERA DE MATEMÁTICA
MLP - 111 / CÁLCULO I

CONTROL N°4

Nombre: Katherine Soto Elache

Para la función $f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}^3(\pi x)}{x(\sec(\pi x) - 1)} & , \text{ si } -\pi/2 \leq x < 0 \\ a & , \text{ si } x = 0 \\ b + \frac{1 - \sqrt{1-x}}{x} & , \text{ si } 0 < x \leq 1 \end{cases}$

Existen $a, b \in \mathbf{R}$ de modo que f sea continua en $x = 0$?. Justifique.

Tiempo: 15 min.
Octubre /2010.

Desarrollo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

$$* \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(b + \frac{1 - \sqrt{1-x}}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} b + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \sqrt{1-x}}{x} \cdot \frac{1 + \sqrt{1-x}}{1 + \sqrt{1-x}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} b + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - (1-x)}{x(1 + \sqrt{1-x})} = b + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x(1 + \sqrt{1-x})}$$

$$= b + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + \sqrt{1-x}}$$

$$= b + \frac{1}{1 + \sqrt{1-0}} = \boxed{b + \frac{1}{2}}$$

$$* \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen}^2(\pi x)}{x(\sec(\pi x) - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen}^2(\pi x)}{x(\sec(\pi x) - 1)} \cdot \frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{-x} \cdot \frac{\pi \pi x}{\pi}$$

$$= \pi \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen}^2(\pi x)}{\sec(\pi x) - 1} \cdot \frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{x} = \pi \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen}^2(\pi x)}{\sec(\pi x) - 1} = \pi \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2 \operatorname{sen}(x) \cos(x)}{\sec(\pi x) - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \exists = a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = a$$

Nombre: JOSÉ DANIEL HERNÁNDEZ PINO

CARRERA DE MATEMÁTICA
MLP - 111 / CÁLCULO I

CONTROL N°4

Nombre:

$$\text{Para la función } f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}^3(\pi x)}{x(\sec(\pi x) - 1)} & , \text{ si } -\pi/2 \leq x < 0 \\ a & , \text{ si } x = 0 \\ b + \frac{1 - \sqrt{1-x}}{x} & , \text{ si } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

Existen $a, b \in \mathbb{R}$ de modo que f sea continua en $x = 0$? Justifique.

Tiempo: 15 min.
Octubre / 2010.

Desarrollo:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen}^3(\pi x)}{x(\sec(\pi x) - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen}^3(\pi x)}{x \left(\frac{1}{\operatorname{sen}(\pi x)} - 1 \right)} = \frac{\operatorname{sen}(\pi x) \cdot \operatorname{sen}^2(\pi x)}{\frac{1}{\operatorname{sen}(\pi x)} - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} b + \frac{1 - \sqrt{1-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} b + \frac{1 - (1-x)}{x(1 + \sqrt{1-x})} = \lim_{x \rightarrow 0^+} b + \frac{x}{x(1 + \sqrt{1-x})} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} b + \frac{1}{(1 + \sqrt{1-x})} = \lim_{x \rightarrow 0^+} b + \frac{1}{2} = b + \frac{1}{2}$$

evaluado en 0

Para ser continua f limite y $f(0)$ debe ser igual

Natalia Garrido: $\frac{b-1+d}{x}$

CARRERA DE MATEMÁTICA
MLP - 111 / CÁLCULO I

CONTROL N°4

Nombre:

Para la función $f(x) = \begin{cases} \frac{\text{sen}^3(\pi x)}{x(\sec(\pi x) - 1)} & , \text{ si } -\pi/2 \leq x < 0 \\ a & , \text{ si } x = 0 \\ b + \frac{1 - \sqrt{1-x}}{x} & , \text{ si } 0 < x \leq 1 \end{cases}$

Existen $a, b \in \mathbf{R}$ de modo que f sea continua en $x = 0$?. Justifique.

Tiempo: 15min.
Octubre /2010.

Desarrollo:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\text{sen}^3(\pi x)}{x(\sec(\pi x) - 1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\text{sen}^3(\pi x)}{x \left(\frac{1}{\cos(\pi x)} - 1 \right)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\text{sen}^3(\pi x)}{x \left(\frac{1 - \cos(\pi x)}{\cos(\pi x)} \right)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\text{sen}^3(\pi x) \cdot \cos(\pi x)}{x(1 - \cos(\pi x))}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\pi \text{sen}(\pi x)}{\pi/x} \cdot \frac{\text{sen}^2 \pi x \cdot \cos \pi x}{(1 - \cos(\pi x))}$$

$$\pi \cdot \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\text{sen}^2(\pi x) \cos(\pi x) \cdot (1 + \cos(\pi x))}{1 - \cos(\pi x) \cdot (1 + \cos(\pi x))}$$

$$\pi \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\text{sen}^2(\pi x) \cos(\pi x) (1 + \cos \pi x)}{1 - \cos^2(\pi x)}$$

$$\pi \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\text{sen}^2(\pi x) \cos(\pi x) (1 + \cos \pi x)}{\text{sen}^2(\pi x)}$$

$$\pi \lim_{x \rightarrow 0^-} \cos(\pi x) (1 + \cos(\pi x)) = 1(1+1) = 2\pi$$

- Sen
- Cos
- Tg
- Ctg
- Sec
- Cosec.

$$\text{Sec} = \frac{1}{\cos}$$

$$\pi/2 = 0$$

$$\pi/2 = 1 + 0$$

$$\frac{\text{sen}^3 \pi x}{x \left(\frac{1 - \cos \pi x}{\cos \pi x} \right)}$$

$$\frac{\text{sen}^3 \pi x}{x} \cdot \frac{\cos \pi x}{1 - \cos \pi x}$$

$$\frac{\text{sen}^3 \pi x \cos \pi x}{x(1 - \cos \pi x)}$$

	0	30	45	60	90
Sen	0	1	2	3	4
Cos	4	3	2	1	0



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{b + 1 - \sqrt{1-x}}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} b + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \sqrt{1-x}}{x}$$

$$b + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \sqrt{1-x}}{x} \cdot \frac{1 + \sqrt{1-x}}{1 + \sqrt{1-x}}$$

$$b + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - (1-x)}{x(1 + \sqrt{1-x})}$$

$$b + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - 1 + x}{x(1 + \sqrt{1-x})}$$

$$b + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x(1 + \sqrt{1-x})}$$

$$b + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + \sqrt{1-x}} = b + \frac{1}{2}$$

Para que sean continuos los límites laterales deben ser iguales además en el $f(0)$.

$$\therefore \boxed{a = 2\pi}$$

$$b + \frac{1}{2} = 2\pi$$

$$b = 2 - \frac{1}{2}$$

$$b = \frac{4-1}{2}$$

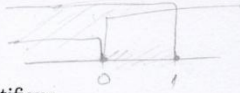
$$\boxed{b = \frac{3}{2}}$$

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

CONTROL N°4

Nombre: *Mario José Morales*

Para la función $f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}^3(\pi x)}{x(\sec(\pi x) - 1)} & , \text{ si } -\pi/2 \leq x < 0 \\ a & , \text{ si } x = 0 \\ b + \frac{1 - \sqrt{1-x}}{x} & , \text{ si } 0 < x \leq 1 \end{cases}$



Existen $a, b \in \mathbf{R}$ de modo que f sea continua en $x = 0$?. Justifique.

Tiempo: 15min.
Octubre /2010.

Desarrollo:

• $f(0) = a = 0$

• $\lim_{x \rightarrow 0^+} b + \frac{1 - \sqrt{1-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{bx + 1 - \sqrt{1-x}}{x} = \frac{0}{0}$

• $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}^3(\pi x)}{x(\sec(\pi x) - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}^3(\pi x)}{x \left(\frac{1}{\cos(\pi x)} - 1 \right)}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}^3(\pi x)}{x \left(\frac{1 - \cos(\pi x)}{\cos(\pi x)} \right)}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}^3(\pi x)}{\frac{x - x \cdot \cos(\pi x)}{\cos(\pi x)}}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}^3(\pi x) \cdot \cos(\pi x)}{x - x \cdot \cos(\pi x)}$

∴ \neq ya que
se indetermina.

CARRERA DE MATEMÁTICA
MLP - 111 / CÁLCULO I

CONTROL N°4

Nombre: Pissylla Vergara. Castro.

Para la función $f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}^3(\pi x)}{x(\sec(\pi x) - 1)} & , \text{ si } -\pi/2 \leq x < 0 \\ a & , \text{ si } x = 0 \\ b + \frac{1 - \sqrt{1-x}}{x} & , \text{ si } 0 < x \leq 1 \end{cases}$

Existen $a, b \in \mathbb{R}$ de modo que f sea continua en $x = 0$? Justifique.

Tiempo: 15min.
 Octubre /2010.

Desarrollo:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = a$$

$$a = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen}^3(\pi x)}{x(\sec(\pi x) - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen}^3(\pi x)}{x \left(\frac{1}{\cos(\pi x)} - 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen}^3(\pi x)}{x \left(\frac{1 - \cos(\pi x)}{\cos(\pi x)} \right)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen}^3(\pi x)}{x \left(\frac{1 - \cos(\pi x)}{\cos(\pi x)} \right)} \cdot \frac{1 + \cos(\pi x)}{1 + \cos(\pi x)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen}^3(\pi x) (1 + \cos(\pi x))}{x \left(\frac{1 - \cos^2(\pi x)}{\cos(\pi x)} \right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cancel{\operatorname{sen}^3(\pi x)} (1 + \cos(\pi x))}{x \left(\cancel{\operatorname{sen}^2(\pi x)} \right)} \cdot \frac{\cos(\pi x)}{\cos(\pi x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \operatorname{sen}(\pi x) \cdot (1 + \cos(\pi x)) \cdot \frac{\cos(\pi x)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-}$$

Nombre: Joviana Enema M.

$$\text{Para la función } f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}^3(\pi x)}{x(\sec(\pi x) - 1)} & , \text{ si } -\pi/2 \leq x < 0 \\ a & , \text{ si } x = 0 \\ b + \frac{1 - \sqrt{1-x}}{x} & , \text{ si } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

Existen $a, b \in \mathbf{R}$ de modo que f sea continua en $x = 0$? Justifique.

Tiempo: 15 min.
Octubre /2010.

Desarrollo:

$$a, x=0$$

$$f(0) = f(a) = a.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{b + 1 - \sqrt{1-x}}{x}, \text{ si } 0 < x \leq 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{b + 1 - \sqrt{1-x}}{x}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{b+1 - \sqrt{1-x}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{b+1}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{b}{x} + \frac{1}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x}}{x} \cdot \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot b - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-x}{x\sqrt{1+x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{0\sqrt{1+0}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} 0 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1}} \\ &= 0 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1} \\ &= 0 - \lim_{x \rightarrow 0} 1 = -1. \end{aligned}$$

$$\frac{\sin^3(\pi x)}{x(\sec(\pi x) - 1)}, \text{ si } -\pi/2 \leq x < 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\pi/2} \frac{\sin^3(\pi x)}{x(\sec(\pi x) - 1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\pi/2} \frac{\sin^3(\pi x)}{x} \cdot \frac{1}{\sec(\pi x) - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\pi/2} \frac{\sin^3(\pi \cdot -\pi/2)}{x} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\cos(\pi x)} - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\pi/2} \frac{\sin^3(\frac{\pi^2}{2})}{x} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\cos(\frac{\pi^2}{2})} - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sqrt{x}}{x} - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sqrt{x} - 1 - \sqrt{x}}{x}$$

$$\frac{x + \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}} \cdot \frac{x - \sqrt{x}}{x} - \frac{1 + \sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sqrt{x} - 1 - \sqrt{x}}{x}$$

$$\frac{x - 1}{x + \sqrt{x}} - \frac{1 + \sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sqrt{x} - 1 - \sqrt{x}}{x}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x+0}} - \frac{1}{0} = 0 = 0 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sqrt{x} - 1 - \sqrt{x}}{x}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}} - 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

Katherine
Tonnejón

CARRERA DE MATEMÁTICA
MLP - 111 / CÁLCULO I

CONTROL N°4

Nombre:

Para la función $f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}^3(\pi x)}{x(\sec(\pi x) - 1)} & , \text{ si } -\pi/2 \leq x < 0 \\ a & , \text{ si } x = 0 \\ b + \frac{1 - \sqrt{1-x}}{x} & , \text{ si } 0 < x \leq 1 \end{cases}$

Existen $a, b \in \mathbb{R}$ de modo que f sea continua en $x = 0$? Justifique.

Tiempo: 15min.
07 / Octubre / 2010.

Desarrollo:

$f(x)$ es continua si y solo si tiene lim y si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = x_0$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \frac{\operatorname{sen}^3(\pi x)}{x(\sec(\pi x) - 1)} \\ &= \frac{\operatorname{sen}^3(\pi x)}{x(\sec(\pi x) - 1)} \\ &= \frac{\operatorname{sen}^3(\pi x)}{x} \cdot \frac{1}{\sec(\pi x) - 1} \\ &= \frac{\operatorname{sen}^2(\pi x)}{1} \end{aligned}$$

CONTROL N°4

Nombre:

Para la función $f(x) = \begin{cases} \frac{\text{sen}^3(\pi x)}{x(\sec(\pi x) - 1)} & , \text{ si } -\pi/2 \leq x < 0 \\ a & , \text{ si } x = 0 \\ b + \frac{1 - \sqrt{1-x}}{x} & , \text{ si } 0 < x \leq 1 \end{cases}$

Existen $a, b \in \mathbb{R}$ de modo que f sea continua en $x = 0$? Justifique.

Tiempo: 15 min.
Octubre / 2010.

Desarrollo:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(b + \frac{1 - \sqrt{1-x}}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{b + 1 - (\sqrt{1-x}) \cdot (\sqrt{1+x})}{x(\sqrt{1+x})}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{b + 1 - (1-x)}{x(\sqrt{1+x})} = \frac{b + 1 - 1 + x}{x\sqrt{1+x}} = \frac{b+x}{x\sqrt{1+x}}$$

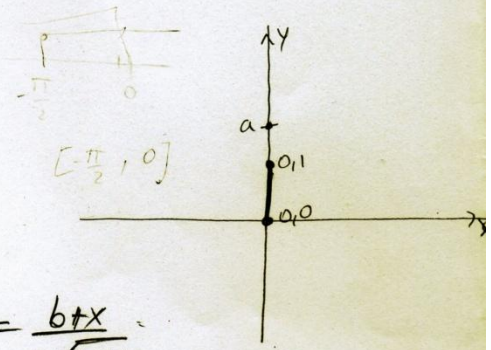
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} a = 0$$

$$\frac{b + 1 - (1-x)}{x(\sqrt{1+x}) \cdot (\sqrt{1+x})} = \frac{b + 1 - 1 + x}{x\sqrt{1+x}} = \frac{b+x}{x\sqrt{1+x}}$$

$$1 - \sqrt{1-0} = (0,0) (0,1)$$

$$\frac{0}{1} = 0$$

$$\frac{1 - \sqrt{1-x}}{x} = 1$$



CARRERA DE MATEMÁTICA
MLP - 111 / CÁLCULO I

CONTROL N°4

Nombre: Florencia Basualdo Sanchez

Para la función $f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}^3(\pi x)}{x(\sec(\pi x) - 1)} & , \text{ si } -\pi/2 \leq x < 0 \\ a & , \text{ si } x = 0 \\ b + \frac{1 - \sqrt{1-x}}{x} & , \text{ si } 0 < x \leq 1 \end{cases}$

Existen $a, b \in \mathbb{R}$ de modo que f sea continua en $x = 0$? Justifique.

Tiempo: 15 min.
Octubre /2010.

Desarrollo:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} b + \frac{1 - \sqrt{1-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} b + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \sqrt{1-x}}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} b + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \sqrt{1-x}}{x} \cdot \frac{1 + \sqrt{1-x}}{1 + \sqrt{1-x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} b + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - (1-x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} b + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - 1 + x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} b + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = \boxed{b + 1} = \lim_{x \rightarrow 0^+}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen}^3(\pi x)}{x(\sec(\pi x) - 1)} = \frac{\operatorname{sen}^3(\pi x)}{x \left(\frac{1}{\cos(\pi x)} - 1 \right)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen}^3(\pi x)}{\frac{x}{\cos(\pi x)} - x} = \frac{\operatorname{sen}^3(\pi x)}{\frac{x - \cos(\pi x)x}{\cos(\pi x)}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} = \frac{\operatorname{sen}^3(\pi x) \cdot \cos(\pi x)}{x - \cos(\pi x)x} = \frac{\operatorname{sen}^3(0) \cdot \cos(0)}{0 - \cos(0)}$$

$$= \frac{0 \cdot 1}{1} = \frac{0}{1} = 0$$

Para f sea continua $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$

$b + 1 = 0 = a$ $\boxed{a = 0}$ Para f sea continua en $x = 0 \rightarrow \boxed{a = 0}$ y $\boxed{b = -1}$

$\operatorname{tg}(x) = \frac{1}{\cos(x)}$
 $1 + \operatorname{tg}(x) = \frac{1 + \operatorname{sen}^2(x)}{\cos(x)}$

CONTROL N°4

Nombre: MACAZENA BUSTAMANTE ALBERTA

Para la función $f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}^3(\pi x)}{x(\sec(\pi x) - 1)} & , \text{ si } -\pi/2 \leq x < 0 \\ a & , \text{ si } x = 0 \\ b + \frac{1 - \sqrt{1-x}}{x} & , \text{ si } 0 < x \leq 1 \end{cases}$

Existen $a, b \in \mathbb{R}$ de modo que f sea continua en $x = 0$? Justifique.

Tiempo: 15 min.
Octubre / 2010.

Desarrollo:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen}^3(\pi x)}{x(\sec(\pi x) - 1)} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen}(\pi x) \cdot \operatorname{sen}(\pi x) \cdot \operatorname{sen}(\pi x)}{x(\sec(\pi x) - 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen}^2(\pi x) \cdot \operatorname{sen}(\pi x)}{x(\sec(\pi x) - 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\sec(\pi x) - 1} = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} b + \frac{1 - \sqrt{1-x}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} b + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \sqrt{1-x}}{x} \\ &= b + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \sqrt{1-x}}{x} \cdot \frac{1 + \sqrt{1-x}}{1 + \sqrt{1-x}} \\ &= b + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - (1-x)}{x(1 + \sqrt{1-x})} \\ &= b + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x(1 + \sqrt{1-x})} = b + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + \sqrt{1-x}} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} b + \frac{1 - \sqrt{1-x}}{x} &= b + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = a$$

$$a = b + \frac{1}{2}$$

$$a = b + \frac{1}{2}$$

$$-1 = b + \frac{1}{2} \Rightarrow -1 - \frac{1}{2} = b$$

$$\Rightarrow \frac{-2 - 1}{2} = b$$

$$\Rightarrow \frac{-3}{2} = b$$

CARRERA DE MATEMÁTICA
MLP - 111 / CÁLCULO I

CONTROL N°4

Nombre: Diego Núñez Oyarce

Para la función $f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}^3(\pi x)}{x(\sec(\pi x) - 1)} & , \text{ si } -\pi/2 \leq x < 0 \\ a & , \text{ si } x = 0 \\ b + \frac{1 - \sqrt{1-x}}{x} & , \text{ si } 0 < x \leq 1 \end{cases}$

Existen $a, b \in \mathbb{R}$ de modo que f sea continua en $x = 0$? Justifique.

Tiempo: 15min.
Octubre /2010.

Desarrollo:

* Primero se deben sacar los límites por límites laterales.

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen}^3(\pi x)}{x(\sec(\pi x) - 1)} \quad , \quad -\pi/2 \leq x < 0$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen}^3(\pi x)}{x \left(\frac{1}{\operatorname{sen}(\pi x)} - 1 \right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen}^3(\pi x)}{x \left(\frac{1 - \operatorname{sen}(\pi x)}{\operatorname{sen}(\pi x)} \right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen}^4(\pi x)}{x(1 - \operatorname{sen}(\pi x))}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen}^4(\pi x)}{x - x \operatorname{sen}(\pi x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen}^3(\pi x)}{\operatorname{sen}(\pi x) \left(x - \frac{x}{\operatorname{sen}(\pi x)} \right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen}^3(\pi x)}{x - x - \frac{x}{\operatorname{sen}(\pi x)}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{x}$$

$$b + \frac{1 - \sqrt{1-x}}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} b + \frac{1 - \sqrt{1-x}}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} b + \frac{1 - \sqrt{1-x}}{x} \cdot \frac{1 + \sqrt{1-x}}{1 + \sqrt{1-x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} b + \frac{1 - (1-x)}{x(1 + \sqrt{1-x})}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} b + \frac{-x}{x(1 + \sqrt{1-x})}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} b + \frac{-1}{(1 + \sqrt{1-x})}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} b + \frac{-1}{1 + \sqrt{1-0}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \boxed{b - 1}$$

$b, \exists //$

CONTROL N°4

Nombre: Carol Aracena L.

Para la función $f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}^3(\pi x)}{x(\sec(\pi x) - 1)} & , \text{ si } -\pi/2 \leq x < 0 \\ a & , \text{ si } x = 0 \\ b + \frac{1 - \sqrt{1-x}}{x} & , \text{ si } 0 < x \leq 1 \end{cases}$

Existen $a, b \in \mathbb{R}$ de modo que f sea continua en $x = 0$?. Justifique.

Tiempo: 15 min.
Octubre /2010.

Desarrollo:

$$f(0) = a$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} b + \frac{1 - \sqrt{1-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} b + \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 - \sqrt{1-x}}{x} \cdot \frac{1 + \sqrt{1-x}}{1 + \sqrt{1-x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} b + \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 - (1-x)}{x(1 + \sqrt{1-x})} = \lim_{x \rightarrow 1^+} b + \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x(1 + \sqrt{1-x})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} b + \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{1 + \sqrt{1-x}} = b + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\pi/2^-} \frac{\operatorname{sen}^3(\pi x)}{x(\sec(\pi x) - 1)} = \lim_{x \rightarrow -\pi/2^-} \frac{\operatorname{sen}(\pi x) \cdot \operatorname{sen}^2(\pi x)}{x \left(\frac{1}{\cos(\pi x)} - 1 \right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\pi/2^-} \frac{\operatorname{sen} \pi x}{x} \cdot \frac{\operatorname{sen}^2(\pi x)}{\frac{1 - \cos(\pi x)}{\cos(\pi x)}} = \lim_{x \rightarrow -\pi/2^-} \frac{\operatorname{sen} \pi x}{x} \cdot \frac{\operatorname{sen}^2 \pi x}{1 - \cos \pi x} \cdot \cos \pi x$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\pi/2^-} \frac{\operatorname{sen} \pi x}{x} \cdot \frac{1 - \cos^2 \pi x}{1 - \cos \pi x} \cdot \cos \pi x = \lim_{x \rightarrow -\pi/2^-} \frac{\operatorname{sen} \pi x}{x} \cdot \frac{(1 - \cos \pi x)(1 + \cos \pi x)}{1 - \cos \pi x} \cdot \cos \pi x$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\pi/2^-} \frac{\operatorname{sen} \pi x}{x} \cdot \cos \pi x \cdot \cos \pi x = 0$$

$$f(0) = a$$

$$b + 1 = 0$$

$$b = -1$$

Stephanie MANDRIQUEZ.

CARRERA DE MATEMÁTICA
MLP - 111 / CÁLCULO I

CONTROL N°4

Nombre:

$$\text{Para la función } f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}^3(\pi x)}{x(\sec(\pi x) - 1)} & , \text{ si } -\pi/2 \leq x < 0 \\ a & , \text{ si } x = 0 \\ b + \frac{1 - \sqrt{1-x}}{x} & , \text{ si } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

Existen $a, b \in \mathbb{R}$ de modo que f sea continua en $x = 0$? Justifique.

Tiempo: 15 min.
Octubre /2010.

Desarrollo:

PARA QUE LA FUNCIÓN SEA CONTINUA
SUS LÍMITES TIENEN QUE SER IGUALES

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen}^3(\pi x)}{x(\sec(\pi x) - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} b + \frac{1 - \sqrt{1-x}}{x} \left| \frac{1 + \sqrt{1-x}}{1 + \sqrt{1-x}} \right.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen}^3(\pi x)}{x \left(\frac{1 - \cos(\pi x)}{\cos(\pi x)} \right)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} b + \frac{1 - \sqrt{1-x}}{x(1 + \sqrt{1-x})}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen}^2(\pi x) \cdot \cos(\pi x)}{x(1 - \cos(\pi x))} = \lim_{x \rightarrow 0^+} b + \frac{-x}{x(1 + \sqrt{1-x})}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen}^3(\pi x) \cdot \cos(\pi x)}{x \operatorname{sen}^2(\pi x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} b + \frac{-1}{1 + \sqrt{1-x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen}^3(\pi x) \cdot \cos(\pi x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} b + \frac{-1}{1 + \sqrt{1-0}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen}^3(\pi x) \cdot \cos(\pi x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} b + \frac{1}{2}$$

$$a = b - \frac{1}{2}$$

CONTROL N°4

Nombre: Valentina Bachiller O.

Para la función $f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}^3(\pi x)}{x(\sec(\pi x) - 1)} & , \text{ si } -\pi/2 \leq x < 0 \\ a & , \text{ si } x = 0 \\ b + \frac{1 - \sqrt{1-x}}{x} & , \text{ si } 0 < x \leq 1 \end{cases}$

Existen $a, b \in \mathbf{R}$ de modo que f sea continua en $x = 0$? Justifique.

Tiempo: 15min.
Octubre /2010.

Desarrollo: Para que sea continua el $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = a$ • $f(0) = 0$

tenemos que ver si el límite \exists

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}^3(\pi x)}{x(\sec(\pi x) - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}^3(\pi x)}{x \left(\frac{1}{\cos(\pi x)} - 1 \right)}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{x \left(\frac{-\cos(\pi x) + 1}{\cos(\pi x)} \right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{x \left(\frac{\cos(\pi x) - 1}{\cos(\pi x)} \right)} = 0 \quad \exists$

$\lim_{x \rightarrow 0} b + \frac{1 - \sqrt{1-x}}{x} =$
 $\frac{1 - \sqrt{1-x}}{x} \cdot \frac{1 + \sqrt{1-x}}{1 + \sqrt{1-x}} = \frac{1 - (1-x)}{x(1 + \sqrt{1-x})} = \frac{x}{x(1 + \sqrt{1-x})} = 1$

por lo tanto $f(x)$ es continua

CONTROL N°4

Nombre: Emerken Valenzuela

Para la función $f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}^3(\pi x)}{x(\sec(\pi x) - 1)} & , \text{ si } -\pi/2 \leq x < 0 \\ a & , \text{ si } x = 0 \\ b + \frac{1 - \sqrt{1-x}}{x} & , \text{ si } 0 < x \leq 1 \end{cases}$

Existen $a, b \in \mathbf{R}$ de modo que f sea continua en $x = 0$? Justifique.

Tiempo: 15min.
Octubre /2010.

Desarrollo:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} b + \frac{1 - \sqrt{1-x}}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen}^3(\pi x)}{x(\sec(\pi x) - 1)} \cdot \frac{\pi^3 x^2}{\pi^3 x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen}^3(\pi x)}{\pi^3 x^2} \cdot \frac{\pi^3 x^2}{(\sec(\pi x) - 1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\pi^3 x^2}{\left(\frac{1}{\cos(\pi x)} - 1\right)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\pi^3 x^2}{\frac{1 - \cos(\pi x)}{\cos(\pi x)}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\pi^3 x^2 \cdot \cos(\pi x)}{1 - \cos(\pi x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\pi x}{\cos \pi x - 1} \cdot \frac{\pi^2 x \cos(\pi x)}{-1} = 0$$

Para que sea continua $a = 0$

Luego

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} b + \frac{1 - \sqrt{1-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} b + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \sqrt{1-x}}{x} = b$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \sqrt{1-x}}{x} \cdot \frac{1 + \sqrt{1-x}}{1 + \sqrt{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - (1-x)}{x(1 + \sqrt{1-x})} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x(1 + \sqrt{1-x})}$$

$$= \frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} b + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \sqrt{1-x}}{x} = 0$$

$$b + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow b = -\frac{1}{2}$$

CARRERA DE MATEMÁTICA
MLP - 111 / CÁLCULO I

CONTROL N°4

Nombre:

Jorge Aballay Herrera

$$\text{Para la función } f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}^3(\pi x)}{x(\sec(\pi x) - 1)} & , \text{ si } -\pi/2 \leq x < 0 \\ a & , \text{ si } x = 0 \\ b + \frac{1 - \sqrt{1-x}}{x} & , \text{ si } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

Existen $a, b \in \mathbf{R}$ de modo que f sea continua en $x = 0$? Justifique.

Tiempo: 15min.
Octubre /2010.

Desarrollo:

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen}^3(\pi x)}{x(\sec(\pi x) - 1)} = \text{[scribble]}$$

$$\text{[scribble]}$$

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen}^3(\pi x)}{x \sec(\pi x) - x} = \frac{\operatorname{sen}^3(\pi x)}{x \cdot \frac{1}{\cos(\pi x)}} - \frac{\operatorname{sen}^3(\pi x)}{x}$$

$$f(x) = x \cdot \operatorname{sen}^3 \cdot \cos(\pi x) - \frac{\operatorname{sen}^3(\pi x)}{x}$$

$$f(x) = x \cdot \operatorname{sen}^3 \cdot \cos(\pi x) - \operatorname{sen}^3(\pi x) \cdot x^{-1}$$

$$f(x) = x \cdot \operatorname{sen}^3(\pi x) \cdot (\cos(\pi x) - x^{-2})$$

CARRERA DE MATEMÁTICA
MLP - 111 / CÁLCULO I

CONTROL N°4

Nombre: *Bryan Mónica Vilches*

Para la función $f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}^3(\pi x)}{x(\sec(\pi x) - 1)} & , \text{ si } -\pi/2 \leq x < 0 \\ a & , \text{ si } x = 0 \\ b + \frac{1 - \sqrt{1-x}}{x} & , \text{ si } 0 < x \leq 1 \end{cases}$

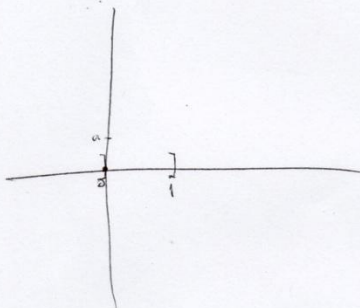
Existen $a, b \in \mathbb{R}$ de modo que f sea continua en $x = 0$?. Justifique.

Tiempo: 15min.
Octubre /2010.

Desarrollo:



$$\frac{\operatorname{Sen}^3(\pi x)}{x(1 - \cos(\pi x))} \quad \sec(\pi x) = \frac{1}{\cos(\pi x)}$$



~~$\frac{\operatorname{Sen}^3(\pi x)}{x(1 - \cos(\pi x))}$~~

$$\begin{aligned} & \frac{\operatorname{Sen}^3(\pi x) \cos(\pi x)}{x(1 - \cos(\pi x))} \\ & \frac{(1 - \cos^2(\pi x)) \operatorname{Sen}(\pi x) \cos(\pi x)}{x(1 - \cos(\pi x))} \\ & \frac{(1 - \cos(\pi x))(1 + \cos(\pi x)) (\operatorname{Sen}(\pi x)) (\cos(\pi x))}{x(1 - \cos(\pi x))} \\ & \frac{(1 + \cos(\pi x)) (\operatorname{Sen}(\pi x)) (\cos(\pi x))}{(\operatorname{Sen}(\pi x))} \\ & \frac{x}{(\operatorname{Sen}(\pi x))} \\ & \frac{(1 + \cos(\pi x)) (\cos(\pi x))}{x} \end{aligned}$$

Nombre: JOSE HERNANDEZ SERVA.

Para la función $f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}^3(\pi x)}{x(\sec(\pi x) - 1)} & , \text{ si } -\pi/2 \leq x < 0 \\ a & , \text{ si } x = 0 \\ b + \frac{1 - \sqrt{1-x}}{x} & , \text{ si } 0 < x \leq 1 \end{cases}$

Existen $a, b \in \mathbb{R}$ de modo que f sea continua en $x = 0$? Justifique.

Tiempo: 15 min.
Octubre /2010.

$\mathbb{R} = \text{si existen y son } b = \frac{1}{2} \text{ y } a = 0.$

Desarrollo:

debemos obtener los límites laterales.

$$b + \frac{1 - \sqrt{1-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} b + \frac{1 - \sqrt{1-x}}{x} = b \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \sqrt{1-x}}{x} \cdot \frac{1 + \sqrt{1-x}}{1 + \sqrt{1-x}}$$

$$= b \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - (1-x)}{x(1 + \sqrt{1-x})} = b \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x(1 + \sqrt{1-x})} = b \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + \sqrt{1-x}}$$

$$= b \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + \sqrt{1-x}} = \frac{1}{2} \cdot b = \frac{b}{2}$$

como

$$\frac{\operatorname{sen}^3(\pi x)}{x(\sec(\pi x) - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen}^3(\pi x)}{x(\sec(\pi x) - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen}^3(\pi x)}{x(\sec(\pi x) - 1)} \cdot \left(\frac{1}{\pi x}\right)^3$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen}^3 \pi x}{\frac{\pi x^3}{x(\sec(\pi x) - 1)}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\left(\frac{\operatorname{sen} \pi x}{\pi x}\right)^3}{\frac{1}{x(\sec(\pi x) - 1)}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x(\sec(\pi x) - 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(\pi x)^3}{x(\sec(\pi x) - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\pi^3 x^2}{\sec(\pi x) - 1}$$

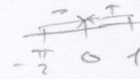
$\mathbb{R} = \text{si existe y son } b = \frac{1}{2} \text{ y } a = 0.$

CARRERA DE MATEMÁTICA
MLP - 111 / CÁLCULO I

CONTROL N°4

Nombre: JUAN Guilleno Pérez Herrera.

Para la función $f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}^3(\pi x)}{x(\sec(\pi x) - 1)} & , \text{ si } -\pi/2 \leq x < 0 \\ a & , \text{ si } x = 0 \\ b + \frac{1 - \sqrt{1-x}}{x} & , \text{ si } 0 < x \leq 1 \end{cases}$



Existen $a, b \in \mathbb{R}$ de modo que f sea continua en $x = 0$?. Justifique.

Tiempo : 15min.
Octubre /2010.

Desarrollo:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen}^3(\pi x)}{x(\sec(\pi x) - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen}^3(\pi x)}{x \left(\frac{1}{\cos \pi x} - 1 \right)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen}^3(\pi x)}{x \frac{(1 - \cos \pi x)}{\cos \pi x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen}^3(\pi x) \cdot \cos \pi x}{x(1 - \cos \pi x)}$$

Nombre: Constanza Soto.

$$\text{Para la función } f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}^3(\pi x)}{x(\sec(\pi x) - 1)} & , \text{ si } -\pi/2 \leq x < 0 \\ a & , \text{ si } x = 0 \\ b + \frac{1 - \sqrt{1-x}}{x} & , \text{ si } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

Existen $a, b \in \mathbf{R}$ de modo que f sea continua en $x = 0$?. Justifique.

Tiempo: 15min.

Octubre / 2010.

Desarrollo:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} b + \frac{1 - \sqrt{1-x}}{x} \\ b + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \sqrt{1-x}}{x} \cdot \frac{1 + \sqrt{1-x}}{1 + \sqrt{1-x}} \\ b + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + \sqrt{1-x}} + \sqrt{1-x} \\ b + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + \sqrt{1-x}} = b + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore a = 2$$

$$b = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen}^3(\pi x)}{x(\sec(\pi x) - 1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen}^3(\pi x)}{x \left(\frac{1}{\cos(\pi x)} - 1 \right)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen}^3(\pi x) \cdot \cos(\pi x)}{x(1 - \cos(\pi x))}$$

$$= \pi \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}^2(\pi x) \cdot \cos(\pi x)}{1 - \cos(\pi x)} \cdot \frac{1 + \cos \pi x}{1 + \cos \pi x}$$

$$\pi \lim_{x \rightarrow 0} \cos(\pi x) (1 + \cos(\pi x)) = 2$$

ANEXO 2: RECOPIACIÓN DEL TIPO DE EVALUACIONES REFERENTES AL CONTENIDO DE CONTINUIDAD EN LOS DIFERENTES AÑOS

CARRERA DE MATEMÁTICA
MLP - 111 / CÁLCULO I

CONTROL N°4

Nombre:

$$\text{Para la función } f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}^3(\pi x)}{x(\sec(\pi x) - 1)} & , \text{ si } -\pi/2 \leq x < 0 \\ a & , \text{ si } x = 0 \\ b + \frac{1 - \sqrt{1-x}}{x} & , \text{ si } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

Existen $a, b \in \mathbf{R}$ de modo que f sea continua en $x = 0$?. Justifique.

Tiempo : 15min.
Octubre /2010.

Desarrollo:

Universidad de Valparaíso
Licenciatura en Ciencias
PCBQ - 123 / CALCULO I

I.

3) Determine, justificando, todas las discontinuidades remediabiles de la función

$$f(x) = \frac{\cos(\frac{\pi}{2} + 1 - x)}{x^2 - 3x + 2}$$

II.

2.0 pts.

1) Sea $a \in \mathbf{R}$. Se define la función

$$f(x) = \begin{cases} a \frac{\sqrt{1 + \sqrt{x}} - \sqrt{2}}{x - 1} & \text{si } x < 1 \\ \sqrt{|x^2 - x + a|} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Determine a de modo que f sea continua en $x = 1$.

2.0 pts.

Universidad de Valparaíso
Carrera de Matemática
MLP - 111 / CALCULO DIFERENCIAL

III.

1) Para la función $f(x) = \begin{cases} 2\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right) & , \text{ si } 1 \leq x \leq 2 \\ \frac{a-2}{x-2} & , \text{ si } x > 2 \end{cases}$

Existe $a \in \mathbf{R}$ de modo que f sea continua en $x = 2$?. Justifique.

2) Dada la función $f(x) = \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x - x^2}$, determine el tipo de discontinuidad que presenta en $x = 1$. (1.5 pt.s.)

Universidad de Valparaíso
Carrera de Matemática
MLP - 111 / CALCULO DIFERENCIAL

Prueba 2 - Recuperativo

1. Dada la función $f(x) = \begin{cases} \frac{\text{sen}(ax)}{x} + 1 & , \text{ si } x < 0 \\ 1 & , \text{ si } x = 0 \\ \frac{1 - \cos(\sqrt{2}x)}{x^2} & , \text{ si } x > 0 \end{cases}$

Es posible determinar el valor de a de modo que resulte continua en $x = 0$?. Justifique.

- I. 3) Determine, justificando, todas las discontinuidades removibles de la función

$$f(x) = \frac{\cos(\frac{\pi}{2} + 1 - x)}{x^2 - 3x + 2} \quad 2.0 \text{ pts.}$$

II.

- 1) Sea $a \in \mathbf{R}$. Se define la función

$$f(x) = \begin{cases} a \frac{\sqrt{1 + \sqrt{x}} - \sqrt{2}}{x - 1} & \text{si } x < 1 \\ \sqrt{|x^2 - x + a|} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Determine a de modo que f sea continua en $x = 1$. 2.0 pts.