



Facultad de Ciencias.

Instituto de Matemáticas.

## Métodos tipo secantes sobre variedades Riemannianas.

Trabajo Especial de Grado presentado ante

la Universidad de Valparaíso

por el Lic. Gustavo L. Di Giorgi A.

Para optar al grado de Magíster en Matemática.

Tutor: Dr. Rodrigo A. Castro M.

Valparaíso, Chile

Agosto de 2017.

## *Agradecimientos*

Agradezco a Dios y al pilar fundamental en mi vida “Giusto” Mi Padre por protegerme durante todo mi camino y darme fuerzas para superar obstáculos y dificultades a lo largo de toda mi vida.

A mi Fuerza, que con su demostración de madre ejemplar me ha enseñado a no desfallecer ni rendirme ante nada y siempre perseverar a través de sus sabios consejos.

A mi hermana (mi orgullo) y prometida (mi amor), por su apoyo incondicional y por demostrarme la gran fe que tienen en mí, por acompañarme durante todo este arduo camino y compartir conmigo alegrías y fracasos.

Al Dr. Rodrigo A. Castro M, Tutor de tesis, por brindarme su invaluable amistad, y la oportunidad de trabajar con su valiosa guía y asesoramiento a lo largo de todos mis estudios en Chile.

En especial quiero agradecer a la Familia Castro Morales por su inigualable amistad y apoyo, por acogerme como un miembro más de ellos. (Mamá Evelyn, Danielita, Sebas, Anis, y Roca).

Al Dr. Marcelo Flores Henríquez, y a su familia por su incondicional amistad y apoyo brindado a mi persona durante este proceso.

Gracias a todas las personas y profesores que ayudaron directa e indirectamente en la realización de este trabajo.

Gracias a la Universidad de Valparaíso, y a Chile por brindarme la oportunidad de continuar mis estudios de post-grado.

Gracias a mi país Venezuela y a la ilustre Universidad Central de Venezuela, por darme la formación necesaria para representarles dignamente en el exterior, manteniendo siempre mi carácter extremo autocrítico y auto-reflexivo, pero completamente revolucionario y socialista.

Gustavo Di Giorgi Armas.

*Este trabajo es dedicado a Dios, a  
la memoria de mi padre, a mi  
familia, mis amigos y profesores que  
me ayudaron a llegar donde estoy  
actualmente.*

*Gustavo Di Giorgi.*

# Índice general

<b>1. Preliminares Geométricos</b>	<b>6</b>
1.1. Variedades Diferenciables . . . . .	6
1.2. Vectores y espacio tangente de una variedad . . . . .	11
1.3. La diferencial de una función entre variedades y subvariedades . . . . .	17
1.4. Conexiones lineales sobre variedades . . . . .	19
1.5. Campos Vectoriales Paralelos y Geodésicas sobre Variedades con Conexión Lineal. . . . .	23
1.6. Métricas Riemannianas, distancias y curvaturas . . . . .	30
<b>2. Métodos iterativos sobre variedades Riemannianas</b>	<b>35</b>
2.1. Método de Kantorovich sobre espacios de Banach . . . . .	35
2.2. Método de Kantorovich sobre variedades Riemannianas . . . . .	37
2.3. Método Kantorovich simplificado sobre variedades Riemannianas . . . . .	38
2.4. Método de Chebyshev–Halley sobre variedades Riemannianas . . . . .	39
<b>3. Métodos Tipo Secante sobre Variedades Riemannianas</b>	<b>41</b>
3.1. Existencia de diferencias divididas sobre Variedades Riemannianas . . . . .	41
3.2. Método de la Secante sobre Variedades Riemannianas . . . . .	46
3.2.1. Análisis de convergencia para el método de la secante sobre variedades Riemannianas . . . . .	49
3.2.2. Orden de Convergencia del Método de la Secante sobre Variedades Riemannianas . . . . .	60
3.3. Una Familia de Métodos Tipo Secante sobre Variedades Riemannianas . . . . .	63
3.3.1. Análisis de convergencia para Una Familia de Métodos Tipo Secante sobre Variedades Riemannianas . . . . .	64
3.3.2. Orden de Convergencia para una familia de Métodos tipo Secante sobre Variedades Riemannianas . . . . .	78

<b>4. Ejemplo numérico</b>	<b>81</b>
4.1. Método tipo secante sobre $\mathbf{S}^2$ . . . . .	81
<b>5. Conclusión</b>	<b>90</b>

## **Abstract**

In this work we obtain a generalization of the secant method over Riemannian manifolds, moreover we construct a family of methods type secant over Riemannian manifolds. Consequently, we obtain some important complementary results as: a modified version of the concept of divided differences; a convergence result for the secant method over Riemannian manifolds that hold certain continuity conditions. Additionally, we prove a uniqueness solution result for the secant method over such manifolds. Finally, we give a non trivial example of the application of our method.

## Introducción

Recientemente, ha habido un creciente interés en el estudio de algoritmos numéricos para encontrar singularidades de campos vectoriales sobre variedades Riemannianas, véase, por ejemplo, [1, 5, 6, 13, 14, 20, 26, 29, 30, 37, 39, 44, 50]. Más específicamente, el estudio de los métodos sobre variedades Riemannianas comenzaron en 2002 con el trabajo de de O. Ferreira y B. Svaiter [30], donde extendieron el método de Kantorovich (Newton) a este contexto. Posteriormente en 2003 y 2006 J.P.Dedieu, P. Priouret, G. Malajovich, Li, C. y Wang, J. [43, 44], utilizando el trabajo de O. Ferreira y B. Svaiter, generalizaron las  $\alpha$ -Teoría y  $\gamma$ -Teoría de Smale al contexto de iteraciones intrínsecas tipo Newton sobre variedades geodésicamente completas, ver [21]. Más tarde, Ioannis K. Argyros en [14] debilitó las hipótesis de la convergencia del Método de Newton en variedades Riemannianas; En el mismo sentido podemos ver las obras presentadas en [13, 20, 26]. En 2009 Ionnis K. Argyros y posteriormente en 2013, Jinsu He, Jinhua Wang y Jen-Chih Yao, estudiaron el método de Newton sobre grupos de Lie, ver [8, 18]. En 2011, en su tesis doctoral [33], R. Castro extendió al contexto de variedades Riemannianas varios métodos, incluyendo entre ellos el método simplificado de Kantorovich [34], en el que la derivada covariante es la misma en cada paso. Extendió un método de tercer orden libre de operadores bilineales en el que fue necesario introducir el concepto de diferencias divididas en el contexto de variedades Riemannianas [37] y mostro la convergencia de algunos métodos clásicos de tercer orden a dicho contexto [38, 40]. Es relevante mencionar que el método de Newton sobre variedades Riemannianas ya ha sido utilizado por Roy L. Adler para estudiar el modelo geométrico de la columna vertebral humana, ver [1].

Un método se entiende como la construcción de una sucesión de puntos, por lo que en este trabajo diremos que un método converge si la sucesión asociada converge. En espacios euclídeos, el método más famoso para resolver de forma aproximada una ecuación no lineal

$$F(x) = 0,$$

es el método de Newtons, donde  $F$  es una función diferenciable que está definida de un espacio vectorial  $X$  sobre sí mismo. Este método, puede extenderse a los espacios de Banach, utilizando la derivada de Fréchet, como lo demostró Kantorovich [20].

Como es sabido, los métodos iterativos de orden superior para encontrar ceros de una función vectorial han sido extensamente estudiados durante el ultimo siglo. Dentro de los más importantes, nosotros destacamos los métodos de Newton, Shamanskii, Halley, Super-Halley, Chevyshev, Chevyshev-Halley, y el método de los Dos-pasos. Estos métodos se han extendido a espacios de Banach comenzando con el trabajo de Kantorovich en los años 60 [20, 34]. Existen varias pruebas para la convergencia de estos métodos, bajo diferentes hipótesis sobre las funciones vectoriales y la condición inicial considerada, ver [9, 10, 12, 13, 14, 17, 34, 41, 45, 49]. El método de Chevyshev-Halley ver [9] es probablemente el

método más conocido para resolver ecuaciones no lineales con convergencia cúbica, este método fue extendido al contexto de espacios de Banach por I. K. Argyros [9].

En análisis numérico el método de la secante en  $\mathbb{R}$  es una variación del método de Newton-Raphson en el cual en vez de calcular la derivada de la función en un punto, y teniendo en mente la definición de derivada, está se aproxima a la pendiente de recta secante que une el valor la función evaluada en el punto de estudio y el punto de la iteración anterior. Este método es de especial interés porque el costo computacional es muy importante al momento de seleccionar un métodos. Por lo tanto resulta importante evaluar si el costo computacional de derivar la función es demasiado elevado o no, de hecho por esta razón el método de Newton no resulta atractivo.

El método de la secante también ha sido generalizado y estudiado en espacios de Banach, dichos estudios han proporcionado algunos resultados de convergencia semilocal [23], posteriormente el método de la secante en espacios de Banach fue extendido a una familia de Métodos tipo Secante [24] se utilizaron  $\omega$ -condiciones de convergencia suave que generaliza las condiciones habituales, es decir, condiciones de continuidad tipo Lipschitz y Holder ver [23, 24, 33, 35]

En su mayoría los métodos numéricos clásicos ya han sido generalizados sobre variedades Riemannianas a excepción del método de la secante, el cual posee ciertas ventajas sobre los métodos ya mencionados, específicamente dicho método solo exige que el campo vectorial sea continuo, a diferencia de los demás métodos que exigen diferenciabilidad. Motivados por estos hechos, nos planteamos como objetivo central de este trabajo generalizar los métodos tipo secante al contexto variedades Riemannianas, además de demostrar la convergencia y unicidad de la solución de las sucesiones asociadas a dicho método, para lograrlo introducimos una modificación a la definición de diferencias divididas sobre variedades hecha por R. Castro y colaboradores, en [34]. Adicionalmente, bajo  $\omega$ -condiciones de convergencia suave se obtendrán resultados de convergencia semilocal para dichos métodos. Posteriormente damos estimaciones para el orden de convergencia del Método de la Secante sobre Variedades Riemannianas. Finalmente damos un ejemplo para ilustrar la aplicación y utilidad de la generalización del método de la secante sobre variedades Riemannianas.

# Capítulo 1

## Preliminares Geométricos

En este capítulo daremos algunos resultados preliminares que serán de utilidad en los próximos capítulos. Iniciamos recordando los elementos de la Geometría Diferencial. En particular variedades Riemannianas y algunos resultados de análisis matemático, estos nos permitirán establecer condiciones y resultados similares a las ya existentes en espacios de Banach, para estudiar y construir métodos iterativos sobre Variedades Riemannianas.

### 1.1. Variedades Diferenciables

En esta sección recordaremos daremos los conceptos de variedad diferenciable, campo de vectores, subvariedades conexiones, transporte paralelo, y daremos algunos ejemplos además recordaremos algunos resultados relevantes para nuestro objetivo, sus demostraciones pueden ser consultadas en [36]. Además, en todo lo que sigue, en esta sección  $M$  denotará un espacio topológico conexo no va vacío.

**Definición 1** Una carta o sistema de coordenadas  $m$ -dimensional en  $M$  es un par  $(U, \varphi)$ , donde  $U \subset M$  es un conjunto abierto y  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  es un homeomorfismo de  $U$  sobre  $\mathbb{R}^m$ .

**Observación 2** Sean  $\pi_i : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  las proyecciones canónicas, con  $i = 1, \dots, m$ , las cuales son dadas por  $\pi_i(x_1, \dots, x_m) = x_i$ . Si  $(U, \varphi)$  es una carta  $m$ -dimensional en  $M$  podemos escribir  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ , donde  $\varphi_i = \pi_i \circ \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ , las funciones  $\varphi_1, \dots, \varphi_m$  son llamadas funciones coordenadas de  $\varphi$  o simplemente las coordenadas de  $U$ .

**Definición 3**  $M$  es una variedad  $n$ -dimensional diferenciable, si existe una colección  $A$  de cartas coordenadas  $(U, \varphi)$  llamada atlas de  $M$  tal que:

- a) Para cada  $p \in M$  existe una carta  $(U, \varphi) \in A$  de dimensión  $n$  con  $p \in U$ .

b) Si  $(U, \varphi), (V, \mathcal{X}) \in A$  con  $U \cap V \neq \emptyset$  entonces  $\mathcal{X} \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \mathcal{X}(U \cap V)$  es un difeomorfismo  $C^\infty$ .

c)  $A$  es maximal con respecto a las condiciones a) y b); es decir  $A$  contiene todas las posibles cartas con estas propiedades. Ver Figura 1.1

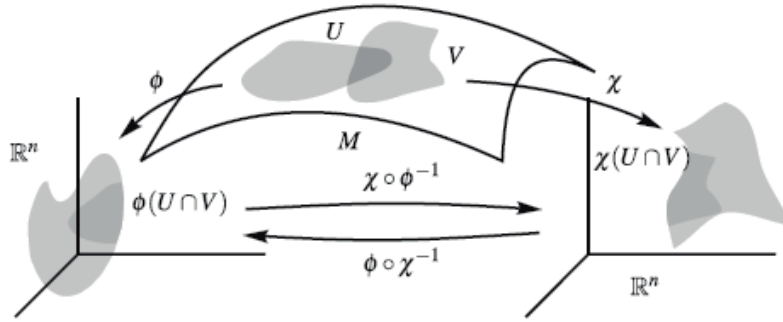


Figura 1.1: Compatibilidad entre de cartas

Además, dado  $N \subset M$ , éste hereda naturalmente las propiedades de variedad diferenciable, y es llamado subvariedad de  $M$ .

**Ejemplo 4**  $M = \mathbb{R}^m$  y  $\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  dada por  $\varphi = Id$ , así  $(\mathbb{R}^m, \varphi)$  es una carta  $m$ -dimensional en  $\mathbb{R}^m$ .

Dada

$$S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\}$$

la esfera unitaria  $n$ -dimensional en  $\mathbb{R}^{n+1}$  con la topología usual de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Para cada  $i = 1, \dots, n+1$ , consideremos los conjuntos

$$U_i^- = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n : x_i < 0\}$$

y

$$U_i^+ = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n : x_i > 0\},$$

es fácil ver que estos  $2n+2$  conjuntos son abiertos en  $S^n$  y que  $S^n = \cup_{i=1}^{n+1} (U_i^- \cup U_i^+)$ . Denotemos por  $D^n \subset \mathbb{R}^n$  el disco unitario abierto

$$D^n = \left\{ y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n y_i^2 < 1 \right\}$$

y definamos las aplicaciones  $\varphi_i^\pm : U_i^\pm \rightarrow D^n$  dadas por

$$\varphi_i^\pm(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_{n+1}),$$

donde  $\widehat{x}_i$  significa que omitimos la  $i$ -ésima coordenada. Podemos visualizar que para cada  $x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n$  se tiene que  $\varphi_i^\pm(x) \in D^n$ , pues  $\sum_{i,j=1}^{n+1} x_i^2 < 1$ . Una sustitución directa nos permite verificar que las aplicaciones inversas de  $\varphi_i^\pm$  son  $(\varphi_i^\pm)^{-1} : D^n \rightarrow U_i^\pm$ , donde

$$(\varphi_i^\pm)^{-1}(y_1, \dots, y_n) = \left( y_1, \dots, y_{i-1}, \pm \sqrt{1 - \sum_{i=1}^n y_i^2}, y_i, \dots, y_n \right).$$

Se puede verificar que las aplicaciones  $\varphi_i^\pm$  son homeomorfismos. De lo anterior, tenemos que  $A = \{(U_i^\pm, \varphi_i^\pm) : i = 1, \dots, n+1\}$  es un conjunto de  $2(n+1)$  cartas en  $S^n$ .

**Ejemplo 5** Supongamos  $X = \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ , en  $X$  definimos la relación de equivalencia siguiente: Sean  $x, y \in X$ , entonces  $x \equiv y$  si y sólo si existe  $t \in \mathbb{R} - \{0\}$  tal que  $y = tx$ , es decir,  $x \equiv y$  si y sólo si ellos están sobre la misma recta pasando por el origen en  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Denotemos por  $[x]$  la clase de equivalencia de  $x \in X$  y por  $\mathbb{R}\mathbf{P}^n = \{[x] : x \in X\}$ . El conjunto  $\mathbb{R}\mathbf{P}^n$  es llamado espacio proyectivo real  $n$ -dimensional.

Sea  $\pi : X \rightarrow \mathbb{R}\mathbf{P}^n$  la proyección  $\pi(x) = [x]$ . Dotamos a  $\mathbb{R}\mathbf{P}^n$  con la topología cociente inducida por  $\pi$ , es decir,  $A \subset \mathbb{R}\mathbf{P}^n$  es abierto si, y sólo si,  $\pi^{-1}(A)$  es abierto en  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Esta es la menor topología que hace a  $\pi$  continua.

Consideremos el espacio proyectivo real  $n$ -dimensional

$$\mathbb{R}\mathbf{P}^n = \{[(x_1, \dots, x_{n+1})] / [(x_1, \dots, x_{n+1})] = \{t(x_1, \dots, x_{n+1}) : t \neq 0\}\}.$$

Veamos que  $\mathbb{R}\mathbf{P}^n$  es una variedad  $n$ -dimensional con un atlas de  $(n+1)$  cartas. Definimos los abiertos en  $\mathbb{R}\mathbf{P}^n$

$$U_i = \{[x] \in \mathbb{R}\mathbf{P}^n : [x] = [(a_1, \dots, a_{n+1})]; a_i \neq 0\};$$

y notemos que  $\cup_{i=1}^{n+1} U_i = \mathbb{R}\mathbf{P}^n$ , también definimos  $\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$  dado por

$$\phi_i([x]) = \left( \frac{a_1}{a_i}, \dots, \frac{a_{i-1}}{a_i}, \frac{a_{i+1}}{a_i}, \dots, \frac{a_{n+1}}{a_i} \right);$$

$\phi_i$  esta bien definida, en efecto sea  $y = (y_1, \dots, y_{n+1}) \in [x]$ , luego

$$\phi_i([y]) = \left( \frac{y_1}{y_i}, \dots, \frac{y_{i-1}}{y_i}, \frac{y_{i+1}}{y_i}, \dots, \frac{y_{n+1}}{y_i} \right),$$

entonces existe  $t \in \mathbb{R} - \{0\}$  tal que

$$(y_1, \dots, y_{n+1}) = (ta_1, \dots, ta_{n+1}),$$

por lo que

$$\left( \frac{y_1}{y_i}, \dots, \frac{y_{i-1}}{y_i}, \frac{y_{i+1}}{y_i}, \dots, \frac{y_{n+1}}{y_i} \right) = \left( \frac{ta_1}{ta_i}, \dots, \frac{ta_{i-1}}{ta_i}, \frac{ta_{i+1}}{ta_i}, \dots, \frac{ta_{n+1}}{ta_i} \right)$$

y por lo tanto

$$\phi[x] = \phi[y].$$

Los siguientes resultados son importantes, ya que muestran que dada una función diferenciable  $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  tenemos que  $f^{-1}(0)$  es una variedad  $n$ -dimensional  $C^\infty$ , llamada hipersuperficie definida por  $f$ . Su demostración puede ser vista en [36].

**Teorema 6** Sea  $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función  $C^\infty$ ; y  $M_f = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} / f(x) = 0\}$ ; si el gradiente  $\text{grad}(f)_{(p)} \neq 0$  para todo  $p \in M_f$  entonces  $M_f$  es una variedad  $n$ -dimensional  $C^\infty$ , llamada hipersuperficie definida por  $f$ .

**Ejemplo 7** Sea  $Sl(n)$  el conjunto de todas las matrices reales con determinante igual a 1. Probemos que  $Sl(n)$  es una variedad de dimensión  $n^2 - 1$ . Es conocido que  $Sl(n)$  puede ser considerado como un subconjunto de  $\mathbb{R}^{n^2}$ .

Para dicho fin consideremos la función  $f : \mathbb{R}^{n^2} \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^\infty$ , dada por:

$$f(X) = 1 - \det(X),$$

luego es claro que

$$Sl(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n^2} / f(X) = 0\}.$$

Sea  $X \in Sl(n)$ , digamos  $X = (x_{11}, \dots, x_{1n}, x_{21}, \dots, x_{2n}, \dots, x_{n1}, \dots, x_{nn})$ , así

$$f(X) = 1 - \begin{vmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix},$$

por lo tanto

$$\frac{df}{dx_{11}} = - \begin{vmatrix} 1 & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{11} & 0 & \dots & x_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & 0 & \dots & x_{nn} \end{vmatrix} + \dots + (-1)^{n+2} \begin{vmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} & 0 \end{vmatrix},$$

luego sea

$$M_{i,j} = \begin{vmatrix} x_{11} & \dots & x_{1(j-1)} & x_{1(j+1)} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & \vdots & x_{i(j-1)} & x_{i(j+1)} & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{n(j-1)} & x_{n(j+1)} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix},$$

obtenemos

$$\frac{df}{dx_{11}} = (-1) \begin{vmatrix} x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix} = -(M_{11}).$$

Análogamente,

$$\frac{df}{dx_{ij}} = (-1)^{i+j+1} \begin{vmatrix} x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{i+j+1} M_{i,j}.$$

ahora razonamos por absurdo, supongamos que

$$\text{grad } f(X) = 0,$$

por lo tanto

$$\frac{df}{dx_{11}} = \dots = \frac{df}{dx_{1n}} = 0,$$

de donde

$$0 = x_{11}(M_{1,1}) - x_{12}(M_{1,2}) + \dots + (-1)^n x_{1n}(M_{1,n}) = \det(X),$$

lo cual es una contradicción, ya que

$$\det(X) = 1.$$

Así

$$\text{grad}(f(X)) \neq 0,$$

por lo tanto  $Sl(n)$  es una variedad de dimensión  $n^2 - 1$ .

**Ejemplo 8** Supongamos

$$M = \{A \in M(n) / \text{traza}(A) = 0\},$$

definimos

$$f : M(n) \rightarrow \mathbb{R},$$

dada por

$$f(A) = \text{traza}(A)$$

identificando la matriz  $A$  con un vector en  $\mathbb{R}^n$  tenemos

$$f((x_{11}, \dots, x_{1n}), \dots, (x_{n1}, \dots, x_{nn})) = \sum_{i=1}^n x_{ii},$$

esta función es  $C^\infty$ , si consideramos

$$M_f = \{A \in \mathbb{R}^{n^2} / f(A) = 0\}$$

y como

$$\text{grad}(f)_{(p)} = ((1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)) \neq 0$$

para todo  $p \in M_f$ ; entonces  $M_f$  es una variedad  $(n^2 - 1)$ -dimensional  $C^\infty$ .

## 1.2. Vectores y espacio tangente de una variedad

Apartir del concepto de vector tangente utilizado en la teoría de superficies, definiremos un concepto análogo, no obstante, una generalización inmediata de éste no es posible, ya que no necesariamente una variedad es un subconjunto de algún  $\mathbb{R}^n$ , lo que imposibilita una generalización inmediata. Sin embargo, en el cálculo en  $\mathbb{R}^n$ , un vector  $v$  en un punto  $p \in \mathbb{R}^n$  puede ser "visto" como una derivada direccional de la siguiente manera, si  $v = (a^1, a^2, \dots, a^n)$  y  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es diferenciable, entonces la derivada direccional de  $f$  en  $p$  en la dirección de  $v$  es

$$v(f)(p) = \sum a^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(p).$$

Vamos a emular esta idea mediante la definición de vector tangente como un operador real valuado en el conjunto de funciones diferenciables sobre  $M$ . Para ello necesitaremos definir el concepto de diferenciability sobre variedades.

**Definición 9** Sea  $p \in M$ ; diremos que  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  es de clase  $C^k$  (con  $k \leq \infty$ ) en el punto  $p$  si existe una carta  $(U, \varphi)$  alrededor de  $p$  tal que

$$f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}$$

es de clase  $C^k$  en  $\varphi(p) \in \mathbb{R}^n$ .

Notemos que en esta definición estamos aprovechando el concepto de diferenciability en  $\mathbb{R}^n$ , pues  $f \circ \varphi^{-1}$  está definido sobre el abierto  $\varphi(U)$  de  $\mathbb{R}^n$  donde conocemos bien este concepto y mediante este dimos la definición de diferenciability en  $M$ . Además, la definición no depende de la elección de la carta coordenada porque si tomamos  $(V, \psi)$  otra carta coordenada, tenemos que

$$f \circ \psi^{-1} = (f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \psi^{-1}),$$

la que a su vez también es de clase  $C^k$ , pues  $\varphi \circ \psi^{-1}$  es diferenciable.

**Definición 10** Consideremos las variedades de clase  $C^\infty$ ,  $M^m$  y  $N^n$ . Sea

$$f : M^m \rightarrow N^n,$$

Diremos que  $f$  es diferenciable de clase  $C^k$  (con  $k \leq \infty$ ) en el punto  $p$ , si existe una carta  $(U, \varphi)$  alrededor de  $p \in M^m$ ,  $(V, \psi)$  alrededor de  $f(p) \in N^n$  tal que  $f(U) \subseteq V$  y

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \psi(V)$$

es de clase  $C^k$  en  $\varphi(p)$  y diremos que  $f$  es diferenciable, si lo es para todo  $p \in M$ .

**Observación 11** El conjunto de las funciones reales valuadas sobre  $M$  esta definido por,

$$\Gamma(M) = \{f : M \rightarrow \mathbb{R} / f \text{ es de clase } C^\infty\}.$$

Ahora, ya nos encontramos en condiciones de definir el concepto de vector tangente.

**Definición 12** Un vector tangente a  $M$  en  $p$  es una función  $X_p : \Gamma(M) \rightarrow \mathbb{R}$ ; cuyo valor en  $f$  es denotado por  $X_p f$  ó  $X_p(f)$ , tal que para todo  $f, g \in \Gamma(M)$  y  $r \in \mathbb{R}$ ;

- a)  $X_p(f + g) = X_p(f) + X_p(g)$
- b)  $X_p(rf) = rX_p(f)$
- c)  $X_p(fg) = f(p)X_p(g) + g(p)X_p(f)$ ;

donde  $fg$  es el producto ordinario de funciones y  $f(p)X_p(g)$  es el producto de los números reales  $f(p)$  y  $X_p(g)$ .

**Ejemplo 13** Sea  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  una curva diferenciable en  $M$  con  $\alpha(0) = p$ ; definimos

$$X_p^\alpha : \Gamma(M) \rightarrow \mathbb{R}$$

por

$$X_p^\alpha(f) = \left. \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0},$$

donde la derivada del lado derecho es la derivada usual de función real  $f \circ \alpha$ , luego

$$\begin{aligned}
 a) X_p^\alpha(f+g) &= \left. \frac{d((f+g) \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0} \\
 &= \left. \frac{d(f \circ \alpha + g \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0} \\
 &= \left. \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0} + \left. \frac{d(g \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0} \\
 &= X_p^\alpha(f) + X_p^\alpha(g). \\
 b) X_p^\alpha(rf) &= \left. \frac{d(rf \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0} \\
 &= r \left. \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0} \\
 &= r X_p^\alpha(f). \\
 c) X_p^\alpha(fg) &= \left. \frac{d((fg) \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0} \\
 &= f(p) \left. \frac{d(g \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0} + g(p) \left. \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0} \\
 &= f(p) X_p^\alpha(g) + g(p) X_p^\alpha(f).
 \end{aligned}$$

Entonces  $X_p^\alpha$  es un vector tangente en  $p$ .

Sabemos que un vector tangente  $X_p$  a una superficie puede ser visto como una derivada direccional, eligiendo alguna curva cuyo vector de velocidad es  $X_p$ . De esta forma definimos algunos vectores tangentes  $(\partial/\partial x^i)_p$  a  $M$  en  $p$ , los cuales servirán como base del espacio tangente de  $M$  en  $p$ .

**Definición 14** Supongamos  $(U, \varphi)$  una carta alrededor de  $p \in M$  y  $u^1, \dots, u^n$  coordenadas de  $\mathbb{R}^n$ , entonces  $(\partial/\partial x^i)_p$  es un vector tangente dado por:

$$\left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{(p)} (f) = \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial u^i} (\varphi(p)).$$

**Ejemplo 15** Si consideramos  $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z,$$

y sea

$$p = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

Si  $(U, \varphi)$  es la carta alrededor de  $p \in S^2$  definida en el hemisferio superior, donde  $\varphi(x, y, z) = (x, y)$ , entonces

$$(f \circ \varphi^{-1})(u^1, u^2) = (u^1)^2 + (u^2)^2 + \sqrt{1 - (u^1)^2 - (u^2)^2},$$

como

$$\varphi(p) = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right),$$

entonces

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial x^1} \right)_{(p)} (f) &= \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial u^1} \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) \\ &= \left( 2u^1 - \frac{u^1}{\sqrt{1 - (u^1)^2 - (u^2)^2}} \right) \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) \\ &= \sqrt{2} - 1. \end{aligned}$$

Similarmente

$$\left( \frac{\partial}{\partial x^2} \right)_{(p)} (f) = \left( 2u^2 - \frac{u^2}{\sqrt{1 - (u^1)^2 - (u^2)^2}} \right) \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) = 0.$$

Hacemos hincapié en que el valor de  $(\partial/\partial x^i)_{(p)}(f)$  depende estrictamente de la carta utilizada.

**Definición 16** La  $i$ -ésima función coordenada local sobre  $M$  con respecto a la carta  $(U, \varphi)$  es la función  $x^i : U \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$x^i(m) = u^i(\varphi(m)).$$

Note que, tiene sentido calcular  $x_p(x^i)$ . Es más

$$\left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{(p)} (x^j) = \delta_i^j, \text{ para todo } 1 \leq i, j \leq n.$$

Sea  $p = \varphi^{-1}(\alpha)$  donde  $\alpha = (a^1, \dots, a^n) \in \mathbb{R}^n$ , si

$$\alpha_i(t) = \varphi^{-1}(a^1, \dots, a^i + t, \dots, a^n),$$

entonces

$$X_p^{\alpha_i} f = \frac{d(f \circ \alpha_i)}{dt}(0) = \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial u^i}(a^1, \dots, a^n) = \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{(p)} (f).$$

**Definición 17** El espacio tangente a  $M$  en  $p$ ,  $T_pM$ , es el conjunto de todos los vectores tangentes a  $M$  en  $p$ .

Note que el conjunto de vectores tangentes a  $M$  en un punto  $p$  forman un espacio vectorial  $n$ -dimensional, lo cual se establece la siguiente proposición.

**Proposición 18**  $T_pM$  un espacio vectorial. Más aún

$$\left\{ \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{(p)} \right\}_{i=1}^n$$

es una base de  $T_pM$ . Además, si

$$X_p = \sum_{i=1}^n a^i \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{(p)} .$$

entonces

$$a^i = X_p(x^i)$$

**Ejemplo 19** Si  $M = \mathbb{R}^n$  y  $p \in \mathbb{R}^n$ , como  $\{(\mathbb{R}^n, id)\}$  es un atlas de  $\mathbb{R}^n$ ; tenemos que  $\{(\frac{\partial}{\partial x^i})_{(p)} / 1 \leq i \leq n\}$  es una base de  $T_pM$  para cada  $p \in \mathbb{R}^n$  (independiente de la carta; pues existe una sola carta). Si  $X_p \in T_pM$  entonces,

$$X_p = \sum_{i=1}^n a^i \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{(p)}$$

para algunos  $a^i \in \mathbb{R}$ . Por lo tanto, si  $(p; a^1, \dots, a^n)$ , la aplicación de  $X_p$  sobre una función  $f \in \Gamma(M)$  es

$$X_p(f) = \sum_{i=1}^n a^i \left( \frac{\partial f}{\partial u^i} \right)_{(p)}$$

donde

$$\left( \frac{\partial f}{\partial u^i} \right)_{(p)} = \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial u^i}(\varphi(p)) ,$$

Así, está coincide con la noción de derivada direccional de  $f$  respecto a  $v = (a^1, \dots, a^n)$  en el punto  $p$ .

Si  $M_f$  es la hipersuperficie definida por  $f$ , se puede concebir  $T_pM_f$  como un subespacio de  $T_p\mathbb{R}^{n+1}$  para cada  $p \in M_f$ .

**Ejemplo 20** Supongamos  $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$  y  $p \in S^2$  como en el ejemplo anterior. Sea  $(V, \psi)$  la carta definido por

$$\psi(x, y, z) = (x, z).$$

Se puede ver que con respecto a esta carta, que

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(p)} = \sqrt{2}, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(p)} = 1 .$$

Note que este es un resultado diferente que se obtuvo mediante el uso de la carta en el ejemplo anterior.

Realizamos el ejemplo anterior con la finalidad de mostrar que la base del espacio tangente  $T_p S^2$  depende de la elección de las cartas.

### Campos de vectores

En esta sección introduciremos el concepto de campos de vectores el cual será utilizado en las próximas secciones. En lo que sigue consideraremos  $M$  una variedad  $n$ -dimensional  $C^\infty$ .

**Definición 21** Un campo de vectores  $X$  es una asignación que a cada  $p \in M$  le asocia un vector  $X_p$ . Si  $X \in T_p M$ . Si  $X$  es un campo de vectores y  $f \in \Gamma(M)$ , podemos definir la función real valuada  $Xf$  en  $M$  por

$$(Xf)_{(p)} = X_p f.$$

Si  $Xf$  es  $C^\infty$ , es decir  $Xf \in \Gamma(M)$  para cada  $f \in \Gamma(M)$ , entonces  $X$  es llamado campo vectorial.

Notemos que  $X$  es un campo de vectorial y  $(U, \varphi)$  es una carta, en efecto (las  $x^i$  son funciones diferenciables) entonces  $X$  puede ser escrito como

$$X_p = \sum_{i=1}^n X^i(p) \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{(p)}$$

donde  $X^i(p) = X_p(x^i)$ , para todo  $p \in U$ .

**Observación 22** Sea  $\mathcal{X}(M)$  el conjunto de todos los campos vectoriales de  $M$ . Dado  $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ ,  $r \in \mathbb{R}$ , y  $f \in \Gamma(M)$ , podemos definir  $X + Y$ ,  $rX$ , y  $fX$  por

- a)  $(X + Y)_p = X_p + Y_p$
- b)  $(rX)_p = r.X_p$
- c)  $(fX)_p = f(p) X_p$ .

Así,  $\mathcal{X}(M)$  hereda naturalmente la estructura de espacio vectorial de  $T_p M$ .

Nótese que  $fX$  es un campo vectorial, mientras que  $Xf$  es una función  $C^\infty$  por ende  $Y_p(Xf)$  esta bien definido.

### 1.3. La diferencial de una función entre variedades y subvariedades

En esta sección introduciremos el concepto de la diferencial de una función  $f : M \rightarrow N$ , con  $M$  y  $N$  variedades. Esta idea proporcionará algunos ejemplos de conceptos geométricos. En particular, vamos a seguir estudiando el espacio tangente de una hipersuperficie  $M_f$  definida por una función  $f$ . Supondremos que  $M$  y  $N$  son variedades y que

$$\Phi : M \rightarrow N$$

es diferenciable.

Definimos para cada  $X_p \in T_pM$  un elemento  $(\Phi_*)_p(X_p)$  de  $T_{\Phi(p)}N$  de tal manera que la asignación

$$X_p \rightarrow (\Phi_*)_p(X_p)$$

sea una transformación lineal para cada  $p \in M$ . Una forma de hacer esto sería definir  $(\Phi_*)_p$  en una base de  $T_pM$ . Intuitivamente, el candidato natural para la definición de la matriz  $(\Phi_*)_p$  sería el Jacobiano de  $(\psi \circ \Phi \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))$  donde  $(U, \varphi)$  es una carta alrededor de  $p$  y  $(V, \psi)$  es una carta alrededor de  $\Phi(p)$ . Sin embargo, el eventual problema con esta definición es que no es invariante; es decir, depende de la elección de la carta coordenada. La demostración del siguiente lema, y las 4 proposiciones de esta sección, están detalladas en [36].

**Definición 23** Si  $\Phi : M \rightarrow N$  es diferenciable, el diferencial de  $\Phi$  en  $p$  es la función

$$(\Phi_*)_p : T_pM \rightarrow T_{\Phi(p)}N$$

definido por

$$(\Phi_*)_p(X_p)(f) = X_p(f \circ \Phi)$$

donde  $X_p \in T_pM$  y  $f \in \Gamma(N)$ .

**Lema 24**  $(\Phi_*)_p$  esta bien definido. Además, si  $\Phi : M \rightarrow N$  y  $X_p \in T_pM$ , entonces

$$(\Phi_*)_p(X_p) \in T_{\Phi(p)}N.$$

**Proposición 25** Sea  $\Phi : M \rightarrow N$  y  $p \in M$ . Entonces

$$(\Phi_*)_p : T_pM \rightarrow T_{\Phi(p)}N$$

es una transformación lineal.

**Proposición 26** Sean  $\Phi : M \rightarrow N$  y  $\Psi : N \rightarrow P$  funciones diferenciable sobre las variedades  $M$ ,  $N$  y  $P$ , si  $p \in M$  y  $q = \Phi(p)$ , entonces

$$((\Psi \circ \Phi)_*)_p = (\Psi_*)_q \circ (\Phi_*)_p$$

Más aún, esto ocurre para todo  $p \in M$ , luego

$$(\Psi \circ \Phi)_* = \Psi_* \circ \Phi_*$$

**Proposición 27** Sea  $\Phi : M \rightarrow N$  y  $p \in M$ . Sean  $(U, \varphi)$  y  $(V, \psi)$  cartas alrededor de  $p$  y  $q = \Phi(p)$  respectivamente tales que

$$\Phi(U) \subset V.$$

Si

$$\{(\partial/\partial x^i)_p / i = 1, \dots, m\}$$

es la base de  $T_p M$  asociado a la carta  $(U, \varphi)$  y

$$\{(\partial/\partial y^i)_q / i = 1, \dots, n\}$$

la base de  $T_q N$  asociado a la carta  $(V, \psi)$ , entonces la matriz de  $(\Phi_*)_p$  con respecto a dichas bases la matriz de  $\psi \circ \Phi \circ \varphi^{-1}$ , más concretamente

$$(\Phi_*)_p \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right) = \sum_j \frac{\partial (y^j \circ \Phi \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i} (s) \left( \frac{\partial}{\partial y^j} \right)_q,$$

donde

$$s = \varphi(p).$$

**Proposición 28** Si  $M = M_f$  es la hipersuperficie definida por

$$f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R},$$

entonces  $T_p M$  es isomorfo (como un espacio vectorial) a

$$(\Phi_*)_p T_p M = \left\{ X_p \in T_p M / \left\langle (\text{grad}(f))_p, X_p \right\rangle = 0 \right\},$$

donde  $\Phi$  es la inclusión de  $M$  en  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

## 1.4. Conexiones lineales sobre variedades

Para esta sección es importante la derivada de un campo vectorial a lo largo de una curva  $\alpha$ . Esto realmente significa que dado un campo vectorial  $Y$  podemos diferenciarlo en dirección de los vectores tangentes a la curva  $\alpha$ . Esto nos lleva naturalmente a la definición de un campo de vectores paralelos a lo largo de una curva  $\alpha$ , y nos da una condición suficiente y necesaria para una que curva  $\alpha$  sea una geodésica (que el campo vectorial tangente sea paralelo a lo largo de la curva). Formalizaremos la noción de diferenciación de un campo vectorial usando las llamadas conexiones lineales.

**Definición 29** Una conexión lineal en  $M$  es una función

$$\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M),$$

tal que para  $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ ,  $r \in \mathbb{R}$  y  $f \in \Gamma(M)$ ;

$$\begin{aligned} a) \nabla_X(Y + Z) &= \nabla_X Y + \nabla_X Z \text{ y } \nabla_X(rY) = r\nabla_X Y; \\ b) \nabla_{X+Y}Z &= \nabla_X Z + \nabla_Y Z \text{ y } \nabla_{fX}Y = f\nabla_X Y; \\ c) \nabla_X(fZ) &= (Xf)Y + f\nabla_X Y. \end{aligned}$$

donde  $\nabla_X Y := \nabla(X, Y)$ .

Notemos que la condición (c) tiene sentido a nivel técnico. Ya que,  $Xf \in \Gamma(M)$ , de modo que  $(Xf)Y$  está bien definido y el lado derecho de (c) es un campo vectorial. Se puede observar que, (c) es sólo la regla de la "derivada de un producto". Donde  $\nabla$  se denomina conexión lineal.  $\nabla_X Y$  debe ser leído como la derivada covariante de  $Y$  con respecto a  $X$  (o en la dirección de  $X$ ); Es importante mencionar que cualquier variedad admite muchas conexiones lineales, ver [7].

Si tomamos una carta  $(U, \varphi)$  con su base asociada en  $T_p M$  para todo  $p \in U$

$$\left\{ \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p / i = 1, \dots, n \right\},$$

entonces cualquier campo vectorial  $X$  puede expresarse de forma local

$$\sum_{i=1}^n X^i \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right),$$

donde

$$X^i \in \Gamma(U).$$

Debido a las propiedades lineales de  $\nabla$  y de la regla de la derivada del producto, el comportamiento de  $\nabla$  queda totalmente determinado conociendo sus valores en la base de  $T_p M$ , es decir los valores de

$$\nabla_{\left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)} \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right).$$

Estos valores deben poder expresarse como combinaciones lineales de los  $(\partial/\partial x^k)$  con los coeficientes en  $\Gamma(U)$ .

**Definición 30** Sea  $\nabla$  una conexión lineal en  $M$  y sea  $(U, \varphi)$  una carta coordinada los símbolos de christoffel con respecto a  $(U, \varphi)$  son funciones

$$\Gamma_{ij}^k \in \Gamma(U),$$

definidas por

$$\nabla_{\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)} \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \sum_k \Gamma_{ij}^k \left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right).$$

Nótese que no hay nada en esta definición nos permita concluir que

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k,$$

de hecho esto no suele ser cierto, Sin embargo si la conexión es simétrica,

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y],$$

y por [36], se tiene

$$\nabla_X Y = \nabla_Y X.$$

Es válido destacar que la conexión es única, si esta es libre de torsión o simétrica y además es compatible con la métrica.

**Ejemplo 31** Supongamos que  $M = \mathbb{R}^n$ , si  $Y \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$  digamos

$$Y_p = \sum (f^i)_p (e_i)_p,$$

para

$$f^i \in \Gamma(\mathbb{R}^n) \text{ y } e_i = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right),$$

podemos definir una conexión sobre  $\mathbb{R}^n$  por

$$\nabla_X Y = \sum_{i=1}^n (X f^i) (e_i).$$

Para interpretar ésta conexión en  $\mathbb{R}^n$ , supongamos que

$$Y = (f^1, \dots, f^n); \quad X = (a_1, \dots, a_n) = \sum_{j=1}^n a_j e_j,$$

como

$$e_j = \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right),$$

entonces

$$X = \sum_{j=1}^n a_j \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right),$$

luego

$$\begin{aligned} X(f^i) &= \left[ \sum_{j=1}^n a_j \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \right] f^i \\ &= \sum_{j=1}^n a_j \left( \frac{\partial}{\partial u^j} \right) f^i, \end{aligned}$$

así

$$\nabla_X Y = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_j \left( \frac{\partial f^i}{\partial u^j} \right) e_i,$$

por otra parte, tenemos que dado  $X : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  y como

$$DY_p = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial u^n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f^n}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial f^n}{\partial u^n} \end{pmatrix}_{(p)},$$

así

$$\begin{aligned} DY_p(X) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial u^n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f^n}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial f^n}{\partial u^n} \end{pmatrix}_{(p)} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_j \left( \frac{\partial f^1}{\partial u^j} \right) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_j \left( \frac{\partial f^n}{\partial u^j} \right) \end{pmatrix}_{(p)} \\ &= \sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial f^1(p)}{\partial u^j} e_1(p) + \cdots + \sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial f^n(p)}{\partial u^j} e_n(p), \end{aligned}$$

luego

$$DY_p(X) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_j \left( \frac{\partial f^i(p)}{\partial u^j} \right) e_i(p),$$

por lo tanto

$$D_X Y = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_j \left( \frac{\partial f^i}{\partial u^j} \right) e_i = \nabla_X Y.$$

Notemos que  $(\nabla_X Y)_p$  solo depende del valor de  $X$  en el punto  $p$ . La  $Y$  dependencia no es tan simple, pues depende del valor de  $Y$  a lo largo de cualquier curva sobre  $X$ .

**Definición 32** *Un campo vectorial  $Z$  a lo largo de la curva  $\alpha : I \rightarrow M$ ; es una asignación que a cada  $t \in I$  un elemento  $Z_{\alpha(t)} \in T_{\alpha(t)}M$  tal que  $\beta_f : I \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $\beta_f(t) = Z_{\alpha(t)}(f)$ , es una función diferenciable para todo  $f \in \Gamma(M)$ .*

**Definición 33** *Sea  $\alpha : I \rightarrow M$  una curva. El campo vectorial tangente a  $\alpha$ ,  $T_\alpha$  esta definido por*

$$(T_\alpha)_{\alpha(t)} = (\alpha_*)_t \left( \frac{d}{dt} \right)_t,$$

donde  $t$  es la coordenada de  $I$ .

Si no hay confusión, podemos escribir  $T = T_\alpha$ . En coordenadas locales sobre  $\alpha(t_0)$  tenemos:

$$T_{\alpha(t)} = \sum_i \frac{d\alpha^i}{dt}(t) \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{\alpha(t)}$$

A menudo se utiliza  $(d\alpha/dt)$  en lugar de  $T_\alpha$ . Nótese que  $T_\alpha$  es una función que depende  $t$ , y no depende de  $\alpha(t)$ .

**Definición 34** *Sea  $\alpha : I \rightarrow M$  y  $Y \in \mathcal{X}(M)$ ; definimos la derivada covariante de  $Y$  a lo largo de la curva  $\alpha$ , denotada por  $\nabla_T Y$ , por*

$$(\nabla_T Y)_{\alpha(t_0)} = (\nabla_X Y)_{\alpha(t_0)},$$

donde  $t_0 \in I$  y  $X$  es un campo vectorial sobre  $M$  tal que

$$X_{\alpha(t_0)} = T_{\alpha(t_0)}.$$

**Ejemplo 35** *Supongamos que  $M = \mathbb{R}^2$  con la conexión del plano euclideo y*

$$\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t)), \quad t \in (0, 2\pi),$$

sea

$$Y = ye_1 + xe_2,$$

y

$$T = -\sin(t)e_1 + \cos(t)e_2,$$

un vector tangente a  $\alpha(t)$ ,

Si

$$X = -ye_1 + xe_2,$$

entonces

$$X_{\alpha(t)} = T_{\alpha(t)}.$$

Por lo tanto,

$$\nabla_T Y = \nabla_X Y = Xye_1 - Xxe_2 = xe_1 + ye_2,$$

Así

$$\nabla_T Y = \cos(t) e_1 + \sin(t) e_2.$$

**Lema 36** Consideremos  $\alpha : I \rightarrow M$  es una curva, y  $Y, Z \in \mathcal{X}(M)$  tal que

$$Y_{\alpha(t)} = Z_{\alpha(t)}$$

para cada  $t \in I$ . Entonces

$$\nabla_{T_\alpha} Y = \nabla_{X_\alpha} Z$$

a lo largo de  $\alpha$ .

La siguiente proposición será importante, para facilitar los cálculos de nuestros ejemplos.

**Proposición 37** Sea  $M = M_f$  una hipersuperficie definida por  $f$ , si consideramos  $\tilde{\nabla}$  como la conexión lineal del espacio euclideo (derivada direccional) de dimensión  $(n + 1)$ , y tomemos

$$N = \frac{\text{grad } f}{|\text{grad } f|}.$$

Si  $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ , entonces la conexión en la variedad  $M_f$  está dada por

$$\nabla_X Y = \tilde{\nabla}_X Y - \langle \tilde{\nabla}_X Y, N \rangle N,$$

## 1.5. Campos Vectoriales Paralelos y Geodésicas sobre Variedades con Conexión Lineal.

En esta sección defimos algunos conceptos de campos vectoriales paralelos y geodésicas en variedades mediante las conexiones lineales. Mostramos que el transporte paralelo es una versión "global" de la derivada covariante. En esta sección fijaremos una variedad  $M$  con conexión lineal  $\nabla$ .

**Definición 38** Sea  $T$  un campo vectorial a lo largo de una curva  $\alpha$  sobre una variedad diferenciable  $M$ , decimos que un campo vectorial  $Y$  sobre  $M$  es paralelo a lo largo  $\alpha$  si

$$\nabla_{T_\alpha} Y = 0.$$

**Ejemplo 39** Consideremos el espacio euclideo  $\mathbb{R}^n$ , entonces  $Y$  es paralelo a lo largo de una curva  $\alpha$  si, y sólo si  $Y_{\alpha(t)} = (\alpha(t), a_1, \dots, a_n)$ , donde  $a_i \in \mathbb{R}$ .

En efecto, supongamos que  $Y$  es paralelo a lo largo de  $\alpha$ , es decir

$$\tilde{\nabla}_{T_\alpha} Y = 0,$$

sea  $X$  una extensión de  $T_\alpha$ , es decir

$$X_{\alpha(t)} = (T_\alpha)_{\alpha(t)},$$

si

$$Y = (p; f^1, \dots, f^n),$$

es una  $2n$ -tupla entonces

$$\tilde{\nabla}_X Y = \sum_{i=1}^n X(f^i) e_i = (X(p); X(f^1), \dots, X(f^n)),$$

sabemos que

$$(T_\alpha)_{\alpha(t)} = \sum_{i=1}^n \frac{d\alpha^i}{dt}(t) e_i(\alpha(t)) = \left( \alpha(t); \frac{d\alpha^1}{dt}(t), \dots, \frac{d\alpha^n}{dt}(t) \right),$$

luego

$$\left( \tilde{\nabla}_{T_\alpha} Y \right)_{\alpha(t)} = \left( \alpha(t); \sum_{i=1}^n \frac{d\alpha^i}{dt}(t) \frac{\partial}{\partial x^i} (f^1 \alpha(t)), \dots, \sum_{i=1}^n \frac{d\alpha^i}{dt}(t) \frac{\partial}{\partial x^i} (f^n \alpha(t)) \right),$$

como

$$\left( \tilde{\nabla}_{T_\alpha} Y \right)_{\alpha(t)} = 0,$$

entonces

$$\sum_{i=1}^n \frac{d\alpha^i}{dt}(t) \left( \frac{\partial f^j}{\partial x^i} \alpha(t) \right) = 0,$$

con  $J = 1, \dots, n$ , luego utilizando la regla de la cadena, tenemos que

$$\frac{d(f^j \circ \alpha)}{dt}(t) = 0,$$

por lo tanto

$$\frac{df^j}{dt} \alpha(t) = 0.$$

así  $f^j$  es constante a lo largo  $\alpha(t)$ , entonces

$$f^j(\alpha(t)) = a_j \in \mathbb{R}, \quad j = 1, \dots, n;$$

por lo cual

$$Y_{\alpha(t)} = (\alpha(t), a_1, \dots, a_n).$$

**Teorema 40** (*T. Levi-Civita, 1917, ver [36]*). Sea  $\alpha : [c, d] \rightarrow M$ ,  $p = \alpha(c)$  y  $\tilde{Y}_p \in T_p M$ . Entonces existe un único campo vectorial  $Y$  paralelo a lo largo de una curva  $\alpha$  tal que

$$Y_{\alpha(t)} = \tilde{Y}_p.$$

La prueba de este resultado se realiza usando el teorema de Picard, para establecer bajo qué condiciones puede asegurarse la existencia y unicidad de un campo vectorial  $Y$  paralelo a lo largo de una curva  $\alpha$ , ver detalles en [9].

**Definición 41** Dada una curva  $\alpha$ , definimos el transporte paralelo a lo largo de  $\alpha$ , via la aplicación

$$P_{\alpha, t_1, t_2} : T_{\alpha(t_1)} M \rightarrow T_{\alpha(t_2)} M$$

dado por

$$P_{\alpha, t_1, t_2} \left( \tilde{Y}_{\alpha(t_1)} \right) = Y_{\alpha(t_2)}$$

donde  $Y$  es el único campo vectorial paralelo a lo largo de la curva  $\alpha$  tal que

$$Y_{\alpha(t_1)} = \tilde{Y}_{\alpha(t_1)}.$$

La siguiente figura ilustra el comportamiento del transporte paralelo sobre un círculo de latitud  $\phi_o = \frac{\pi}{3}$ , del vector  $\tilde{X} = \left( \frac{1}{2}\sqrt{3}, 0, \frac{1}{2} \right)$ , sobre  $S^2$ , donde la aplicación de transporte paralelo esta dada por

$$X(t) = \cos((\cos \phi_o) t) \frac{\partial}{\partial \phi} - \frac{\sin((\cos \phi_o) t)}{\sin \phi_o} \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

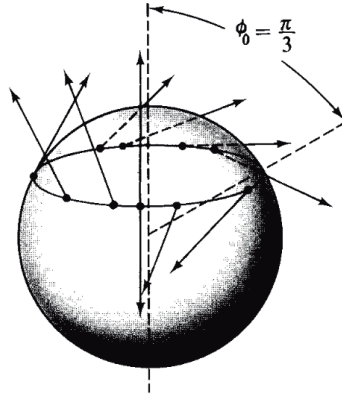


Figura 1.2: Transporte paralelo

**Proposición 42** Para toda curva  $\alpha$ ,

$$P_{\alpha, t_1, t_2} : T_{\alpha(t_1)}M \longrightarrow T_{\alpha(t_2)}M$$

es una transformación lineal isométrica.

**Observación 43** Dado que el transporte paralelo es una isometría, entonces

$$\|P_{\alpha, t_1, t_2}\| = 1.$$

La siguiente proposición muestra la relación entre el transporte paralelo y la derivada covariante.

**Proposición 44** Si

$$P_{\alpha, t_1, t_2} : T_{\alpha(0)}M \longrightarrow T_{\alpha(t)}M,$$

es el transporte paralelo a lo largo de  $\alpha$ , (con respecto a la conexión lineal  $\nabla$ ). Entonces

$$(\nabla_{T_\alpha} Y)_{\alpha(0)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P_{\alpha, \alpha(t), \alpha(0)}(Y_{\alpha(t)}) - (Y_{\alpha(0)})}{t}.$$

Las curvas sobre superficies que juegan el mismo rol de las rectas en el plano euclideo son las llamadas geodésicas, a continuación introduciremos la definición formal de ellas.

**Definición 45** Una curva  $\alpha$  sobre  $M$  es llamada geodésica con respecto a la conexión  $\nabla$ , si

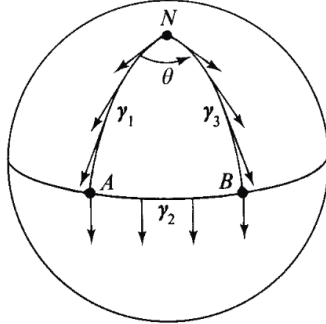
$$\nabla_{T_\alpha} T_\alpha = 0;$$

equivalentemente

$$\frac{d^2 \alpha^k}{dt^2} + \sum_{i, j=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{d\alpha^i}{dt} \frac{d\alpha^j}{dt} = 0,$$

para  $K = 1, \dots, n$ . Esta es conocida como la ecuación de una geodésica.

La siguiente figura ilustra sobre  $S^2$  que al considerar un segmento de círculo  $\gamma_1$  desde el polo norte  $N$  a un punto  $A$  en el ecuador, seguido por parte del ecuador  $\gamma_2$  a  $B$ , entonces un segmento de círculo  $\gamma_3$  de  $B$  al punto  $N$ . Sea  $X$  el vector unitario punto-hacia el sur a lo largo de  $\gamma_1$  en  $N$ . Esto puede ser transportado paralelamente a lo largo de  $\gamma_1$  hasta  $A$ , donde apunta hacia el sur, luego a lo largo de  $\gamma_2$  hasta  $B$ , donde apunta hacia el sur, y luego a lo largo de  $\gamma_3$  hasta  $N$ , donde apunta hacia el sur a lo largo de  $\gamma_3$ . El resultado final es un vector diferente de  $X$ . De hecho, el ángulo entre los dos vectores en  $N$  es  $\theta :=$  ángulo entre  $\gamma_1$  y  $\gamma_3$ . También  $\theta$  es igual al área de la región delimitada por  $\gamma_1, \gamma_2$  y  $\gamma_3$ .

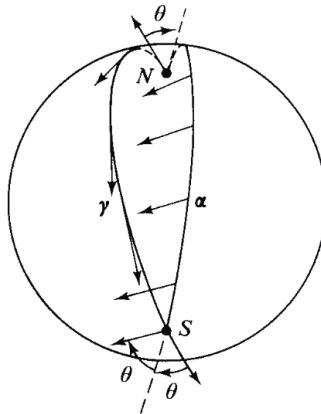


**Observación 46** Dado que  $\gamma'(0)$  es el vector tangente a la geodésica  $\gamma$  en el punto inicial, este es transportado paralelamente a lo largo de la geodésica  $\gamma$ , por lo que

$$\|\gamma'(0)\| = \|\gamma'(t)\|,$$

para todo  $t \in [0,1]$ .

La siguiente figura ilustra sobre  $S^2$  que si consideramos dos meridianos diferentes  $\gamma, \alpha$  desde el polo norte hasta el polo sur. Sea  $X$  el vector tangente a  $\gamma$  en el polo norte. Si  $X$  es transportado paralelamente a lo largo de  $\gamma$  hasta el polo sur, obtenemos un vector tangente  $\gamma'$ , ya que  $\gamma$  es una geodésica. Si  $X$  es transportado paralelamente a lo largo de  $\alpha$ , debe mantener un ángulo constante con  $\alpha'$ , que también es paralelo. Sea  $\theta$  el ángulo entre  $\gamma'$  y  $\alpha'$  en el polo norte. El ángulo entre los dos vectores se traduce en el transporte de  $X$  hasta el polo sur, notemos que  $2\theta$  es el área de la región limitada por  $\gamma$  y  $\alpha$ .



**Teorema 47** Sea  $M$  una variedad con una conexión lineal  $\nabla$ . Si  $p \in M$  y  $X_p \in T_pM$ , entonces existe una única geodésica

$$\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow M,$$

con  $\alpha(0) = p$ , y

$$(T_\alpha)_{\alpha(0)} = \left( \frac{d\alpha}{dt} \right) (0) = X_p.$$

Ahora introduciremos algunos resultados necesarios para enunciar la definición de función exponencial.

**Teorema 48** Dado  $p \in M$  existe una vecindad  $V$  de  $p$ , sea  $\epsilon > 0$  y una función  $C^\infty$ ,

$$\gamma : (-\delta, \delta) \times U \longrightarrow M$$

con

$$U = \{(q, w) \in TM/q \in V \text{ y } w \in T_qM; |w| < \epsilon\}$$

tal que

$$\gamma(q, w) : (-\delta, \delta) \longrightarrow M$$

es la única geodésica de  $M$ , la cual en el instante  $t = 0$  pasa a través de  $q$  con velocidad  $w$ , para cada  $q \in V$  y  $w \in T_qM$ ; con  $|w| < \epsilon$ .

**Definición 49** Sean  $p \in M$  y  $U \subseteq TM$ , donde  $TM$  denota el fibrado tangente de  $M$ , definimos la función exponencial

$$\exp : U \longrightarrow M,$$

por

$$\exp(q, v) = \gamma(1, q, v),$$

donde

$$\gamma : I \times U \longrightarrow M.$$

es la única geodésica de  $M$ , la cual en el instante  $t = 0$  pasa a través de  $q$ , para cada  $q \in V$ .

**Observación 50** La definición anterior nos permite definir la función

$$\exp_q : T_qM \longrightarrow M$$

por

$$\exp_q(v) = p,$$

donde

$$\exp(q, v) = \gamma(1, q, v).$$

Entonces

$$d(p, q) = \int_0^1 \|\gamma'_{(q,v)}(t)\| dt = \int_0^1 \|\gamma'_{(q,v)}(0)\| dt = \|v\|.$$

Esto significa, geoméricamente que  $\exp_q(v)$  es un punto  $p$  sobre  $M$  situado sobre la única geodésica que pasa a través de  $q$ , que tiene como vector tangente  $v$  en  $q$ , cuya

$$d(p, q) = \|v\|.$$

Se puede demostrar que  $\exp_p$  define un difeomorfismo de una vecindad  $\widehat{U}$  de origen  $0_p \in T_p M$  sobre una vecindad  $U$  de  $M$ ; Llamado vecindad normal de  $p$ , ver [26].

**Observación 51** *Dados dos puntos  $q_1, q_2 \in W$ , tal que  $\gamma(0) = q_1$  y  $\gamma(1) = q_2$ , existe una única geodésica minimizante  $\gamma$  que los une y depende diferenciablemente de los puntos  $q_1$  y  $q_2$  en el siguiente sentido. Dados  $q_1, q_2 \in W$ , tal que  $\gamma(0) = q_1$  y  $\gamma(1) = q_2$ , existe  $v$  con  $d(q_1, q_2) = \|v\|$  tal que*

$$\gamma'(0) = v.$$

De esta forma

$$\gamma(t) = \exp_{q_1}(tv).$$

**Observación 52** *Sea  $p \in M$  y  $U$  una vecindad normal de  $p$ . Consideremos una base ortonormal  $\{e_i\}_{i=1}^m$  de  $T_p M$ . De esta base obtenemos el isomorfismo*

$$f : \mathbb{R}^m \longrightarrow T_p M,$$

definido por

$$f(u_1, \dots, u_n) = \sum_{i=1}^m u_i e_i.$$

Si

$$q = \exp_p \left( \sum_{i=1}^m u_i e_i \right),$$

decimos que  $(u_1, \dots, u_n)$  son coordenadas normales de  $q$  en la vecindad normal  $U$  de  $p$  y el sistema de coordenada es dado por la composición:

$$\varphi := \exp_p \circ f : \mathbb{R}^m \longrightarrow U.$$

Una de las propiedades más importantes de las coordenadas normales es que las geodésicas que pasan a través de  $p$  están dadas por ecuaciones lineales, [27].

La función exponencial posee muchas propiedades importantes ver [5, 6]. Cuando la función exponencial se define para cada valor del parámetro  $t \in \mathbb{R}$ ; diremos que la variedad Riemanniana  $M$  es geodésicamente completa o simplemente completa. El teorema de Hopf - Rinnovs ver [36], también establece que la propiedad de ser geodésicamente completa de la variedad Riemanniana es equivalente a ser completa en el sentido de espacio métrico.

## 1.6. Métricas Riemannianas, distancias y curvaturas

En esta sección definimos el concepto de métrica Riemanniana, veremos que cada variedad Riemanniana tiene una conexión lineal natural asociada (llamada conexión de Riemanniana), así con esta conexión la noción de geodésica cobra un mejor sentido.

Una métrica Riemanniana se define como una asignación diferenciable, que a cada punto  $p \in M$  le asigna un producto interno en  $T_pM$ . De manera más formal tenemos la siguiente definición:

**Definición 53** *Un campo de métricas  $g$  sobre una variedad  $M$  es una asignación que a cada punto  $p$  le hace corresponder*

$$g_p : T_pM \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que, para todo  $X_p, Y_p, Z_p \in T_pM$  se cumple que:

- a)  $g_p(X_p + Y_p, Z_p) = g_p(X_p, Z_p) + g_p(Y_p, Z_p)$
- b)  $g_p(rX_p, Y_p) = rg_p(X_p, Y_p)$ ; para todo  $r \in \mathbb{R}$
- c)  $g_p(X_p, Y_p) = g_p(Y_p, X_p)$
- d)  $g_p(X_p, Y_p) \geq 0$  y  $g_p(X_p, Y_p) = 0 \Rightarrow X_p = 0$ .

Notemos que mediante la condición a) y b) de la definición anterior obtenemos las siguientes igualdades

$$g_p(X_p, Y_p + Z_p) = g_p(X_p, Y_p) + g_p(X_p, Z_p),$$

$$g_p(rX_p, Y_p) = rg_p(X_p, Y_p),$$

Por lo tanto una métrica es un producto interno en  $T_pM$ . Además, dada una métrica  $g$  podemos definir la función  $g(X, Y) : M \longrightarrow \mathbb{R}$ , por  $g(X, Y)_{(p)} := g_p(X_p, Y_p)$ .

**Definición 54** *Una métrica Riemanniana sobre una variedad  $M$  es un campo de métricas  $g$  tal que  $g(X, Y) \in \Gamma(M)$ , para todo  $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ . Una variedad Riemanniana es una variedad  $M$  con una métrica Riemanniana.*

Es sabido que toda variedad diferenciable posee una métrica de Riemanniana, ver [5]. Debemos de tener en cuenta que en la geometría el término métrica no se refiere a una función de distancia, sino a un producto interno. Más adelante observaremos que existe una función de distancia asociada a la métrica de Riemanniana. Podemos definir las  $n^2$  funciones real valuadas  $g_{ij}$  en la carta coordenada  $(U, \varphi)$  mediante

$$g_{ij}(p) := g_p \left( \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p, \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right)_p \right).$$

**Ejemplo 55** Consideremos que  $N = \mathbb{R}^n$  y  $g = \langle, \rangle$  el producto interno usual tal que

$$g_p(X_p, Y_p) = \sum_{i=1}^n a_i b_i,$$

donde

$$X_p = (p; a_1, \dots, a_n),$$

y

$$Y_p = (p; b_1, \dots, b_n),$$

entonces

$$g_{ij}(p) = g_p \left( \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p, \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right)_p \right) = \delta_{ij},$$

donde  $\delta_{ij}$  es delta de kronecker, ya que

$$\begin{aligned} X_p &= \sum_{i=1}^n a_i \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p = a_1 \left( \frac{\partial}{\partial x^1} \right)_p + \dots + a_n \left( \frac{\partial}{\partial x^n} \right)_p \\ &= a_1 e_1 + \dots + a_n e_n, \end{aligned}$$

donde

$$\left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p = (p; 0, \dots, 1, \dots, 0).$$

**Definición 56** Supongamos que  $M$  es una subvariedad de  $N$ . Si  $p \in M$  entonces  $T_p M$  puede ser visto como subespacio vectorial de  $T_p N$ . Si  $N$  posee una métrica Riemanniana  $g^N$  y  $X_p, Y_p \in T_p M$ , además como  $T_p M \subseteq T_p N$ , entonces  $g^N(X_p, Y_p)$  existe y tiene sentido por tanto podemos definir

$$g_p^M(X_p, Y_p) := g_p^N(X_p, Y_p),$$

es decir

$$g_p^M = g_p^N$$

$g_p^M$  es llamada la métrica Riemanniana inducida por la  $g^N$ .

**Definición 57** Supongamos que  $A : T_p M \longrightarrow T_q M$  es una transformación lineal.  $A$  es una isometría, si para todo  $X_p, Y_p \in T_p M$ , se tiene que

$$g_p(X_p, Y_p) = g_q(AX_p, AY_p).$$

**Definición 58** Sea  $\nabla$  una conexión lineal sobre una variedad riemanena  $M$ . Se dice que  $\nabla$  es compatible con la métrica si para todo  $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ ,

$$X_g(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z),$$

donde  $X(g(Y, Z))$  está denotado por  $X_g(Y, Z)$ .

**Proposición 59** Sea  $\nabla$  una conexión lineal sobre una variedad Riemanniana  $M$ , entonces  $\nabla$  es compatible con la métrica si y sólo si para cada curva  $\alpha$  sobre  $M$  el transporte paralelo a lo largo de  $\alpha$  es una isometría.

**Definición 60** Una conexión a fin o lineal es simétrica o libre de torsión si

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y],$$

para todo  $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ .

Esta condición no es tan intuitiva como la propiedad de ser métrica. En particular, no tiene nada que ver con la torsión de una curva. La razón del termino simétrica viene dado por el siguiente lema.

**Lema 61**  $\nabla$  es libre de torsión si y sólo si en una carta coordenada,

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k,$$

para todo  $1 \leq i, j, k \leq n$ .

**Teorema 62** (Lema fundamental de la geometría Riemanniana ver [36]). Sea  $M$  una variedad de Riemanniana con una métrica Riemanniana  $g$ . Entonces existe una única conexión a fin o lineal  $\nabla$  simétrica y compatible con la métrica sobre  $M$ .

**Definición 63** La conexión lineal  $\nabla$  que es garantizada por el Teorema anterior es llamada conexión de Riemanniana o de Levi-Civita de la variedad de Riemanniana.

Ahora daremos una noción de distancia en una variedad Riemanniana y discutiremos la noción de longitud minimizante, ellas son propiedades de las geodésicas (con respecto a la conexión Riemanniana). Fijemos una variedad  $M$  y una métrica Riemanniana  $g$ , y

sea  $\nabla$  la conexión Riemanniana. Supongamos que  $M$  es conexa por caminos; es decir, si  $p, q \in M$ , entonces existe una curva

$$\alpha : [a, b] \longrightarrow M,$$

tal que

$$\alpha(a) = p \text{ y } \alpha(b) = q.$$

**Definición 64** Si  $\alpha : [a, b] \longrightarrow M$  entonces la longitud de  $\alpha$  está definida por

$$\|\alpha\| := \int_a^b \sqrt{g_{\alpha(t)} \left( (T\alpha)_{\alpha(t)}, (T\alpha)_{\alpha(t)} \right)} dt.$$

Si  $p, q \in M$ , la distancia de  $p$  a  $q$  es

$$d(p, q) = \inf \{ \|\alpha\| \},$$

donde el infimo se toma sobre todas las curvas  $C^\infty$  que unen  $p$  con  $q$ . Esta distancia es llamada métrica inducida por  $g$ .

**Proposición 65** La variedad Riemanniana  $M$  con la distancia definida anteriormene es un espacio métrico.

Consideremos la topología de una variedad Riemanniana  $M$  como un espacio métrico sobre  $M$  el cual posee la misma topología inducida por la estructura de espacio métrico procedente de la métrica Riemanniana  $g$ , ver [5]. Debido a que estamos suponiendo que  $M$  es una variedad Riemanniana tiene sentido hablar de una parametrización por longitud de arco.

**Definición 66** Diremos que la curva  $\alpha$  está parametrizada por longitud de arco si

$$g_{\alpha(t)}((T\alpha)_{\alpha(t)}, (T\alpha)_{\alpha(t)}) = 1.$$

**Teorema 67** Supongamos que  $\alpha : [a, b] \longrightarrow M$  es una curva parametrizada por longitud de arco. Si

$$\|\alpha\| \leq \|\beta\|,$$

para todas las curvas  $\beta \in C^\infty$  tal que

$$\beta(a) = \alpha(a),$$

y

$$\beta(b) = \alpha(b),$$

entonces  $\alpha$  es una geodésica.

**Teorema 68** (*J. H. C. Whitehead, 1932, ver [36]*) Para cada punto  $p$  en una variedad Riemanniana  $M$  existe un entorno  $U$  tal que

a) Cualquier dos puntos  $q, r \in U$  pueden unirse mediante una geodésica una cuya imagen está contenida en  $U$ .

b) La geodésica  $\alpha$  es la única geodésica que une  $q$  y  $r$ , que tiene una longitud  $d(q, r)$ .

c) Existe una carta de coordenadas local  $(U, 0)$  de manera tal que las geodésicas a través de  $p$  son de la forma

$$\alpha(t) = \varphi^{-1}(a_1 t, \dots, a_n t),$$

para algunas constantes  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ .

**Teorema 69** (*Hilbert, 1902 ver [36]*). Sea  $M$  una variedad Riemanniana conexa y completa como un espacio métrico con la métrica inducida por  $g$ , entonces cualquier par de puntos están unidos por una geodésica que minimiza la distancia entre el dichos puntos.

**Teorema 70** (*Hopf - Rinow, 1931 ver [36]*). Si toda geodésica en  $M$  puede ser extendida indefinidamente (es decir, se define en todo  $\mathbb{R}$ ), entonces cualquier par de puntos se pueden unir por una geodésica que minimiza la distancia entre ellos. Además  $M$  es completo con la métrica inducida por  $g$ .

El siguiente lema tomada de [35] nos permite saber cuando un operador es invertible y nos entrega una estimación para su inversa. Este jugará un papel muy importante en la prueba de nuestros resultados principales en la sección método de la secante sobre variedades riemannianas.

**Lema 71** (*Lema de Banach*). Sea  $A$  un operador lineal acotado e invertible en un espacio de Banach  $E$  y  $B$  un operador lineal acotado en  $E$ . Si

$$\|A^{-1}B - I\| < 1,$$

entonces existe  $B^{-1}$  y

$$\begin{aligned} \|B^{-1}\| &\leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}B - I\|} \\ &\leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\| \|B - A\|}. \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} \|B^{-1}A\| &\leq \frac{1}{1 - \|A^{-1}B - I\|} \\ &\leq \frac{1}{1 - \|A^{-1}\| \|B - A\|}. \end{aligned}$$

## Capítulo 2

# Métodos iterativos sobre variedades Riemannianas

En esta sección describiremos los métodos más para funciones definidas de espacios de Banach en sí mismos, estos métodos son: el método de Kantorovich (método de Newton sobre espacios de Banach), el de Kantorovich simplificado, el de Chebysheff-Halley y el de la secante, el cual será objeto de minucioso estudio en la siguiente sección.

Recientemente el método de Kantorovich , el de Newton-Kantorovich simplificado y el de Chebysheff-Halley han sido generalizados al contexto de variedades Riemannianas, ver [33, 34].

En este orden de ideas, nuestro objetivo es generalizar el método de la secante al contexto de las variedades Riemannianas en el siguiente capítulo, dicha generalización no había sido posible hasta ahora ya que no se tenía la noción de diferencias divididas en dicho contexto, Una primera definición fue hecha por R. Castro en su tesis doctoral, ver [33], en esta tesis hacemos una modificación de la definición hecha por R. Castro y logramos generalizar el método de la secante y una familia de métodos Tipo Secante al contexto de variedades Riemannianas.

Estableceremos una noción paralela entre el método de Newton en los espacios de Banach y el método de Newton en variedades de Riemannianas. Para ello recordemos el Teorema de Kantorovich o el método de Newton en los espacios de Banach, ver [20].

### 2.1. Método de Kantorovich sobre espacios de Banach

**Teorema 72** (*Kantorovich 1964*) Sea  $E$  un espacio de Banach,  $\Omega \subseteq E$  un conjunto abierto y convexo,  $F : \Omega \rightarrow \Omega$  una función continua,  $F \in C^1$  y  $DF$  Lipschitz sobre  $\Omega$  , tal que:

$$\|DF(x) - DF(y)\| \leq l \|x - y\|, \text{ para todo } x, y \in \Omega.$$

Supongamos que para algún  $x_0 \in \Omega$ ,  $DF(x_0)$  es invertible y que para algún  $a > 0$  y  $b \geq 0$ :

- (1)  $\|DF(x_0)^{-1}\| \leq a$
- (2)  $\|DF(x_0)^{-1} F(x_0)\| \leq b$
- (3)  $c = abl \leq \frac{1}{2}$
- (4)  $B(x_0, t_*) \subseteq \Omega$  donde  $t_* = \frac{1}{al} (1 - \sqrt{1 - 2c})$ .

si

$$\begin{aligned} v_k &= -DF(x_k)^{-1} F(x_k), \\ x_{k+1} &= x_k + v_k. \end{aligned}$$

entonces  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq B(x_0, t_*)$  y  $x_k \rightarrow p_*$ , es la única singularidad de  $F$  sobre  $B[x_0, t_*]$ . Además, si  $c < \frac{1}{2}$  y  $B(x_0, r) \subseteq \Omega$  con

$$t_* < r \leq t_{**} = \frac{1}{al} (1 + \sqrt{1 - 2c}),$$

entonces  $p_*$  también es la única singularidad de  $F$  sobre  $B(x_0, r)$  y una cota para el error es:

$$\|x_k - x_*\| \leq (2c)^{2^k} \frac{b}{c}; \quad k = 1, 2, \dots$$

Siguiendo con este orden de ideas, la derivada de  $F$  en  $x_n$  es sustituida por la derivada covariante de  $X$  en  $p_n$

$$\begin{aligned} \nabla_{(\cdot)} X(p_n) : T_{p_n} M &\longrightarrow T_{p_n} M \\ v &\longrightarrow \nabla_Y X, \end{aligned}$$

donde  $Y$  es un campo vectorial que satisface que  $Y(p) = v$ . Adoptamos la notación  $\mathcal{D}X(p)v = \nabla_Y X(p)$ ; por lo tanto  $\mathcal{D}X(p)$  es una aplicación lineal de  $T_p M$  en  $T_p M$ . Así, en éste nuevo contexto

$$-F'(x_n)^{-1} F(x_n),$$

se puede escribir como

$$-\mathcal{D}X(p_n)^{-1} X(p_n),$$

o

$$-(\nabla_{X(p_n)} X)^{-1}(p_n).$$

Ahora podemos escribir el teorema de Kantorovich en éste nuevo contexto, es decir sobre variedades Riemannianas.

## 2.2. Método de Kantorovich sobre variedades Riemannianas

**Definición 73** Sea  $M$  una variedad Riemanniana,  $\Omega \subseteq M$  un conjunto abierto convexo y  $X \in \mathcal{X}(M)$ . La derivada covariante

$$\mathcal{D}X = \nabla_{(\cdot)}X,$$

es Lipschitz con constante  $L > 0$ , si para cualquier geodésica  $\gamma$  y  $a, b \in \mathbb{R}$ , tal que  $\gamma[a, b] \subseteq \Omega$ , se tiene que

$$\|P_{\gamma, b, a} \mathcal{D}X(\gamma(b)) P_{\gamma, a, b} - \mathcal{D}X(\gamma(a))\| \leq L \left\| \int_a^b \|\gamma'(t)\| \right\|,$$

escribiremos  $\mathcal{D}X \in Lip_l(\Omega)$ .

**Teorema 74** (Kantorovich sobre variedades Riemanniana) Sea  $M$  una variedad Riemanniana,  $\Omega \subseteq M$  un conjunto abierto y convexo,  $X \in \mathcal{X}(M)$  y  $\mathcal{D}X \in Lip_l(\Omega)$ . Supongamos que algún  $p_0 \in \Omega$ ,  $\mathcal{D}X(p_0)$  es invertible y que para algún  $a > 0$  y  $b \geq 0$ :

- (1)  $\|\mathcal{D}X(p_0)^{-1}\| \leq a$        $\left(\|(\nabla_{(\cdot)}X(p_0))^{-1}\| \leq a\right)$
- (2)  $\|\mathcal{D}X(p_0)^{-1}X(p_0)\| \leq b$        $\left(\|(\nabla_{X(p_0)}X(p_0))^{-1}\| \leq b\right)$
- (3)  $c = abl \leq \frac{1}{2}$
- (4)  $B(p_0, t_*) \subseteq \Omega$  donde  $t_* = \frac{1}{al} (1 - \sqrt{1 - 2c})$ .

Si

$$\begin{aligned} v_k &= -\mathcal{D}X(p_k)^{-1}X(p_k), \\ p_{k+1} &= \exp_{p_k}(v_k), \end{aligned}$$

entonces  $\{p_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq B(p_0, t_*)$  y  $p_k \rightarrow p_*$ , es la única singularidad de  $F$  sobre  $B[x_0, t_*]$ . Además, si  $c < \frac{1}{2}$  y  $B(x_0, r) \subseteq \Omega$  con

$$t_* < r \leq t_{**} = \frac{1}{al} (1 + \sqrt{1 - 2c}),$$

entonces  $p_*$  también es la única singularidad de  $F$  sobre  $B(x_0, r)$  y una cota para el error es:

$$d(p_k, p_*) \leq \frac{b}{c} (2c)^{2^k}; \quad k = 1, 2, \dots$$

El siguiente dibujo muestra el comportamiento del método de Kantorovich sobre variedades Riemannianas

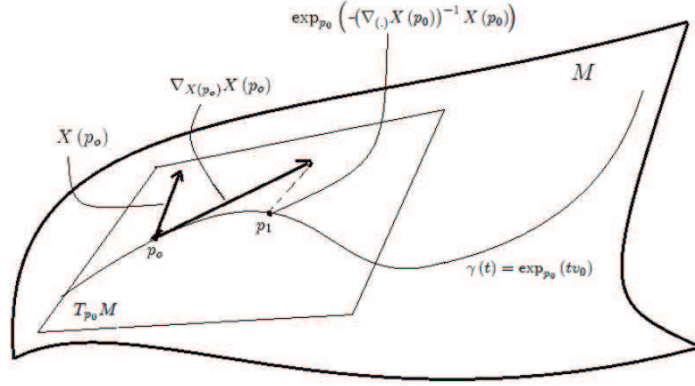


Figura 2.1: Interpretación geométrica del método de Kantorovich

### 2.3. Método Kantorovich simplificado sobre variedades Riemannianas

Ahora describiremos el método simplificado de Kantorovich sobre variedades Riemannianas fijando  $DX(p_0)^{-1}$  en cada iteración, el cual fue estudiado por R. Castro y colaboradores en [39].

**Teorema 75** (*Kantorovich simplificado sobre variedades Riemannianas*) Sea  $M$  una variedad Riemanniana,  $\Omega \subseteq M$  un conjunto abierto y convexo,  $X \in x(M)$  y  $\mathcal{D}X \in Lip_l(\Omega)$ . Supongamos que algún  $p_0 \in \Omega$ ,  $\mathcal{D}X(p_0)$  es invertible y que para algún  $p_0 \in \Omega$ ,  $\mathcal{D}X(p_0)$  es invertible y que para algún  $a > 0$  y  $b \geq 0$ :

- (1)  $\|\mathcal{D}X(p_0)^{-1}\| \leq a$ ,
- (2)  $\|\mathcal{D}X(p_0)^{-1} X(p_0)\| \leq b$ ,
- (3)  $c = ab \leq \frac{1}{2}$ ,
- (4)  $B(p_0, t_*) \subseteq \Omega$  donde  $t_* = \frac{1}{al} (1 - \sqrt{1 - 2c})$ .

Si

$$v_k = -P_{\sigma_k, 0, 1} \mathcal{D}X(p_0)^{-1} P_{\sigma_k, 1, 0} X(p_k),$$

$$p_{k+1} = \exp_{p_k}(v_k),$$

donde  $\{\sigma_k : [0, 1] \rightarrow M\}_{k \in \mathbb{N}}$  es una familia de geodésicas minimizantes que unen  $p_0$  y  $p_k$ .

Entonces  $\{p_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq B(p_0, t_*)$  y  $p_k \rightarrow p_*$ , es la única singularidad de  $X$  sobre  $B(p_0, t_*)$ . Además, si  $c < \frac{1}{2}$  y  $B(p_0, r) \subseteq \Omega$  con

$$t_* < r \leq t_{**} = \frac{1}{al} (1 + \sqrt{1 - 2c}),$$

entonces  $p_*$  es la única singularidad de  $X$  sobre  $B(p_0, r)$  y una cota para el error es:

$$d(p_k, p_*) \leq \frac{b}{c} (1 - \sqrt{1 - 2c})^{k+1}; \quad k = 1, 2, \dots$$

## 2.4. Método de Chebyshev–Halley sobre variedades Riemannianas

De los métodos de alto orden, para hallar los ceros de una aplicación no lineal, algunos de los más estudiados han sido el método Chebyshev y el de Halley.

Este método en espacios de Banach fue presentado por Argyros en [9], él probó la convergencia de las sucesiones asociadas al método y dio condiciones para la existencia y unicidad para dichas soluciones. El método está descrito por:

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - F'(x_n)^{-1} F(x_n), \\ G_n &= F'(x_n)^{-1} B(x_n)(y_n - x_n), \\ x_{n+1} &= y_n - \frac{1}{2} F'(x_n)^{-1} [I + \frac{\lambda}{2} G_n]^{-1} B(x_n)(y_n - x_n)^2, \quad n \geq 0. \end{aligned}$$

Donde  $B(x_n) : E \times E \rightarrow E$  es un operador bilineal,  $\lambda$  un parámetro no negativo y  $F'(x_n)$  y  $F''(x_n)$  denotan la primera y segunda derivada Fréchet de  $F$  evaluada en  $x_n$ . Note que, este método incluye, como casos particulares, el método de Newton y el método de Chebyshev-Halley sobre espacios Banach con ( $B = 0$  y  $B = F''$ , respectivamente), ver [17], [32], [16], [15]. Además, obtenemos el método Halley para  $\lambda = 1$  y  $B = F''$  (cf. [9]), y el método de Euler-Chebyshev para  $\lambda = 0$  y  $B = F''$  (cf. [10]). En general si  $B = F''$  es llamado familia de métodos de Chebyshev-Halley (cf. [16]).

Recientemente R. Castro y colaboradores llevaron este método al contexto de variedades Riemannianas, en donde describieron el método de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} u_n &= -\mathcal{D}X(p_n)^{-1} X(p_n), \\ q_n &= \exp_{p_n}(u_n), \\ \sigma(t) &= \exp_{p_n}(tu_n), \\ G_n &= \mathcal{D}X(p_n)^{-1} B(p_n)(u_n, \cdot), \\ H_n &= [I_{T_{p_n}M} + \frac{\lambda}{2} G_n], \\ v_n &= -\frac{1}{2} P_{\sigma, 0, 1} \mathcal{D}X(p_n)^{-1} H_n^{-1} B(p_n)(u_n, u_n), \\ p_{n+1} &= \exp_{q_n}(v_n), \end{aligned}$$

Donde

$$\begin{aligned} \mathcal{D}X(p_n) &= \nabla_{(\cdot)} X(p_n), \\ \mathcal{D}^2 X(p_n) &= \nabla_{(\cdot)} (\nabla_{(\cdot)} X(p_n)) - \nabla_{\nabla_{(\cdot)}(\cdot)} X(p_n), \end{aligned}$$

y  $I_{T_{p_n}M}$  denota la identidad sobre  $T_{p_n}M$  y  $B(p_n) : T_{p_n}M \times T_{p_n}M \longrightarrow T_{p_n}M$  es un operador bilineal que aproxima la segunda derivada de covariante. Si  $B = 0$ , obtenemos el método de Newton sobre variedades Riemannianas (cf. [40], [19], [30]). En el caso, de que

$$B = \mathcal{D}^2X,$$

Este es llamado método de Chebyshev-Halley sobre variedades Riemannianas.

## Capítulo 3

# Métodos Tipo Secante sobre Variedades Riemannianas

En esta sección vamos a generalizar el método de la secante sobre variedades Riemannianas y presentaremos una Familia de Métodos Tipo Secante sobre las mismas. Además, bajo condiciones de convergencia suave las cuales generalizan las condiciones habituales, es decir, continuidad Lipschitz y Holder, obtendremos un resultado de convergencia semilocal para ellos. También obtendremos un resultado para la unicidad de las soluciones para estos métodos, Y estimaremos el orden de convergencia para ellos.

Utilizaremos el hecho de que si  $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función diferenciable y 0 es uno de sus valores regulares, entonces  $f^{-1}(0)$  es una variedad  $n$ -dimensional  $C^\infty$ , llamada hipersuperficie definida por  $f$ . Esto será de utilidad para elaborar un ejemplo del método de la secante sobre variedades de este estilo ya que sobre ellas se puede calcular "fácilmente" la derivada covariante de un campo vectorial  $X$  como la proyección de la derivada direccional sobre el espacio tangente, por lo que no sería necesario utilizar los símbolos de Christoffel de la variedad.

### 3.1. Existencia de diferencias divididas sobre Variedades Riemannianas

El concepto de diferencias divididas ha sido fuertemente estudiado en las últimas décadas, ver [26, 23, 24], los primeros trabajos [26] asumieron la existencia de dichos operadores, posteriormente se demostró la existencia de estos operadores para espacios de Banach, este operador no es único, sin embargo cuando los dominios y recorridos son espacios de Banach finito dimensionales, es posible saber la cantidad operadores existentes [22].

En el contexto de variedades Riemannianas R. Castro en [33], dio una primera definición de diferencias divididas y construyó con ellas un método iterativo de tercer orden de

convergencia libre de segundas derivadas covariante.

A continuación demostraremos que toda variedad Riemanniana admite la construcción de diferencias divididas sobre ella y construiremos explícitamente una de ellas con la cual, en la última sección de esta tesis haremos un ejemplo sobre  $S^2$ .

**Definición 76** Sea  $M$  una variedad Riemanniana,  $\Omega \subseteq M$  un conjunto abierto y convexo. Supongamos que  $\gamma$  es una curva regular en  $M$ ,  $[s, s+h] \subset \text{dom}(\gamma)$  y  $X$  un campo vectorial continuo sobre  $M$ . Un operador lineal  $\theta : T_{\gamma(s+h)}M \rightarrow T_{\gamma(s+h)}M$  es llamado diferencias divididas de  $X$  en los puntos  $\gamma(s)$  y  $\gamma(s+h)$  en dirección de  $\gamma'(s)$  si y sólo si

$$\theta \circ P_{\gamma, s, s+h}(\gamma'(s)) = \frac{1}{h}(X(\gamma(s+h)) - P_{\gamma, s, s+h}(X(\gamma(s)))).$$

El siguiente teorema prueba la existencia de dichos operadores.

**Teorema 77** Para cada campo vectorial  $X$  definido sobre  $M$  y cada curva regular  $\gamma$  en  $M$  con  $[s, s+h] \subset \text{dom}(\gamma)$  existen diferencias divididas de  $X$  en los puntos  $\gamma(s)$  y  $\gamma(s+h)$  en dirección de  $\gamma'(s)$ .

**Proof.** Consideremos la curva regular  $\gamma$  sobre  $M$  con  $[s, s+h] \subset \text{dom}(\gamma)$  y el subespacio de  $T_{\gamma(s)}M$

$$M_1 = \text{gen}\{\gamma'(s)\} = \{\lambda\gamma'(s) : \lambda \in \mathbb{R}\},$$

sea  $\tilde{M}_1 = P_{\gamma, s, s+h}(M_1)$  y consideremos, sobre  $\tilde{M}_1$ , la aplicación lineal  $\tilde{\theta} : \tilde{M}_1 \rightarrow T_{\gamma(s+h)}M$  definida mediante

$$\tilde{\theta} \circ P_{\gamma, s, s+h}(\lambda\gamma'(s)) = \frac{1}{h}(\lambda X(\gamma(s+h)) - \lambda P_{\gamma, s, s+h}(X(\gamma(s)))),$$

sabemos que existe una proyección lineal  $\Pi$  de  $T_{\gamma(s+h)}M$  sobre  $\tilde{M}_1$ , es decir, existe  $\Pi : T_{\gamma(s+h)}M \rightarrow \tilde{M}_1$  tal que

$$\Pi(T_{\gamma(s+h)}M) = \tilde{M}_1,$$

y

$$\Pi(v) = v,$$

para todo  $v \in \tilde{M}_1$ .

Definamos  $\theta : T_{\gamma(s+h)}M \rightarrow T_{\gamma(s+h)}M$  por  $\theta = \tilde{\theta} \circ \Pi$ , claramente  $\theta$  es un operador lineal y además, dado que  $P_{\gamma, s, s+h}(\gamma'(s)) \in \tilde{M}_1$ , entonces

$$\begin{aligned} \theta \circ P_{\gamma, s, s+h}(\gamma'(s)) &= \tilde{\theta}(\Pi(P_{\gamma, s, s+h}(\gamma'(s)))) \\ &= \tilde{\theta} \circ P_{\gamma, s, s+h}(\gamma'(s)) \\ &= \frac{1}{h}(X(\gamma(s+h)) - P_{\gamma, s, s+h}(X(\gamma(s)))), \end{aligned}$$

es decir,  $\theta$  es una diferencia dividida de  $X$  en los puntos  $\gamma(s)$  y  $\gamma(s+h)$  en dirección de  $\gamma'(s)$ . ■

**Ejemplo 78** Como en el teorema anterior, consideremos la curva regular  $\gamma$  sobre  $M$  con  $[s, s+h] \subset \text{dom}(\gamma)$ , el subespacio de  $T_{\gamma(s)}M$

$$M_1 = \text{gen} \{ \gamma'(s) \} = \{ \lambda \gamma'(s) : \lambda \in \mathbb{R} \},$$

y

$$\tilde{M}_1 = P_{\gamma, s, s+h}(M_1),$$

además supongamos que

$$\left\{ e_{\gamma(s+h)}^i \right\}_{i=1}^n,$$

es una base de  $T_{\gamma(s+h)}M$ , supongamos que  $P_{\gamma, s, s+h}(\gamma'(s))$  en dicha base tiene la representación

$$P_{\gamma, s, s+h}(\gamma'(s)) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^\gamma e_{\gamma(s+h)}^i, \quad \lambda_i^\gamma \in \mathbb{R}.$$

Sea  $i_0$  el primer índice para el cual  $\lambda_{i_0}^\gamma \neq 0$ , por lo que el conjunto

$$\left\{ e_{\gamma(s+h)}^1, \dots, e_{\gamma(s+h)}^{i_0-1}, P_{\gamma, s, s+h}(\gamma'(s)), e_{\gamma(s+h)}^{i_0+1}, \dots, e_{\gamma(s+h)}^n \right\}$$

es linealmente independiente, por lo que además es una nueva base de  $T_{\gamma(s+h)}M$ .

Definamos ahora la proyección lineal  $\Pi : T_{\gamma(s+h)}M \rightarrow \tilde{M}_1$  de la siguiente manera:

$$\Pi(P_{\gamma, s, s+h}(\gamma'(s))) = P_{\gamma, s, s+h}(\gamma'(s)) \text{ y } \Pi(e_{\gamma(s+h)}^i) = 0_{\gamma(s+h)},$$

para  $i \neq i_0$ , donde  $0_{\gamma(s+h)}$  es el vector nulo en  $T_{\gamma(s+h)}M$ , por lo tanto, si  $v \in T_{\gamma(s+h)}M$ , digamos

$$v = \sum_{i=1}^n \beta_i^\gamma e_{\gamma(s+h)}^i,$$

entonces

$$\begin{aligned} \Pi(v) &= \sum_{i=1}^n \beta_i^\gamma \Pi(e_{\gamma(s+h)}^i) \\ &= \Pi(\beta_{i_0}^\gamma e_{\gamma(s+h)}^{i_0}) \\ &= \beta_{i_0}^\gamma \Pi(e_{\gamma(s+h)}^{i_0}), \end{aligned}$$

como

$$\begin{aligned} \Pi(P_{\gamma, s, s+h}(\gamma'(s))) &= \sum_{i=1}^n \lambda_i^\gamma \Pi(e_{\gamma(s+h)}^i) \\ &= \lambda_{i_0}^\gamma \Pi(e_{\gamma(s+h)}^{i_0}), \end{aligned}$$

entonces

$$\Pi \left( e_{\gamma(s+h)}^{i_0} \right) = \frac{1}{\lambda_{i_0}^\gamma} \Pi \left( P_{\gamma,s,s+h} \left( \gamma' (s) \right) \right),$$

por lo que

$$\Pi (v) = \frac{\beta_{i_0}^\gamma}{\lambda_{i_0}^\gamma} \Pi \left( P_{\gamma,s,s+h} \left( \gamma' (s) \right) \right)$$

concluyendo que

$$\begin{aligned} \theta (v) &= \tilde{\theta} \circ \Pi (v) \\ &= \frac{\beta_{i_0}^\gamma}{\lambda_{i_0}^\gamma} \Pi \left( P_{\gamma,s,s+h} \left( \gamma' (s) \right) \right) \\ &= \frac{\beta_{i_0}^\gamma}{\lambda_{i_0}^\gamma} \tilde{\theta} \left( P_{\gamma,s,s+h} \left( \gamma' (s) \right) \right) \\ &= \frac{\beta_{i_0}^\gamma}{\lambda_{i_0}^\gamma} \left( \frac{1}{h} \left( X \left( \gamma (s+h) \right) - P_{\gamma,s,s+h} \left( X \left( \gamma (s) \right) \right) \right) \right). \end{aligned}$$

El ejemplo anterior es útil cuando el campo vectorial es no diferenciable, en el caso de ser diferenciable, construiremos en el siguiente lema, otras diferencias divididas en términos de la derivada covariante.

**Lema 79** Sea  $\gamma$  una geodésica sobre  $M$  y sea  $X$  un campo vectorial  $C^1$  sobre  $M$ , entonces el operador  $[\gamma (s), \gamma (s+h); X]$  es definido por

$$[\gamma (s), \gamma (s+h); X](\cdot) := \frac{1}{h} \int_s^{s+h} P_{\gamma,t,s+h} \left( \mathcal{D}X \left( \gamma (t) \right) \left( P_{\gamma,s+h,t} (\cdot) \right) \right) dt$$

es una diferencia dividida a lo largo de la curva  $\gamma$ . En particular si  $\gamma : I \rightarrow M$  es la geodésica que une a los puntos  $p$  y  $q$  entonces para  $s = 0$  y  $h = 1$  obtenemos

$$[p, q; X](\cdot) = \int_0^1 P_{\gamma,t,1} \left( \mathcal{D}X \left( \gamma (t) \right) \left( P_{\gamma,1,t} (\cdot) \right) \right) dt$$

**Proof.** Consideremos la curva definida en  $T_{\gamma(s)}M$

$$f (t) = P_{\gamma,t,s} \left( X \left( \gamma (t) \right) \right),$$

entonces

$$\begin{aligned} f' (t) &= \lim_{w \rightarrow 0} \frac{f (t+w) - f (t)}{w} \\ &= \lim_{w \rightarrow 0} \frac{1}{w} \left( P_{\gamma,t+w,s} \left( X \left( \gamma (t+w) \right) \right) - P_{\gamma,t,s} \left( X \left( \gamma (t) \right) \right) \right) \\ &= \lim_{w \rightarrow 0} \frac{1}{w} \left( P_{\gamma,t,s} \left( P_{\gamma,s,t} \circ P_{\gamma,t+w,s} X \left( \gamma (t+w) \right) - X \left( \gamma (t) \right) \right) \right), \end{aligned}$$

donde  $P_{\gamma,t,s}$  es lineal y continuo, entonces

$$\begin{aligned} f'(t) &= P_{\gamma,t,s} \left[ \lim_{w \rightarrow 0} \frac{1}{w} (P_{\gamma,s,t} \circ P_{\gamma,t+w,s} (X(\gamma(t+w))) - X(\gamma(t))) \right] \\ &= P_{\gamma,t,s} \left[ \lim_{w \rightarrow 0} \frac{1}{w} (P_{\gamma,t+w,t} (X(\gamma(t+w))) - X(\gamma(t))) \right] \\ &= P_{\gamma,t,s} (\mathcal{D}X(\gamma(t))(\gamma'(t))). \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} \int_s^{s+h} P_{\gamma,t,s} (\mathcal{D}X(\gamma(t))(\gamma'(t))) dt &= \int_s^{s+h} f'(t) dt \\ &= f(s+h) - f(s) \\ &= P_{\gamma,s+h,s} X(\gamma(s+h)) - P_{\gamma,s,s} X(\gamma(s)) \\ &= P_{\gamma,s+h,s} X(\gamma(s+h)) - X(\gamma(s)), \end{aligned}$$

por lo tanto, obtenemos

$$\begin{aligned} &\frac{1}{h} \int_s^{s+h} P_{\gamma,t,s+h} (\mathcal{D}X(\gamma(t)) (P_{\gamma,s+h,t}(\gamma'(s+h)))) dt \\ &= \frac{1}{h} \int_s^{s+h} P_{\gamma,s,s+h} \circ P_{\gamma,t,s} (\mathcal{D}X(\gamma(t)) (P_{\gamma,s+h,t}(\gamma'(s+h)))) dt \\ &= \frac{1}{h} P_{\gamma,s,s+h} \int_s^{s+h} P_{\gamma,t,s} (\mathcal{D}X(\gamma(t))(\gamma'(t))) dt \\ &= \frac{1}{h} P_{\gamma,s,s+h} (P_{\gamma,s+h,s} X(\gamma(s+h)) - X(\gamma(s))) \\ &= \frac{1}{h} (X(\gamma(s+h)) - P_{\gamma,s,s+h} X(\gamma(s))) \end{aligned}$$

lo que nos permite definir unas diferencias divididas a lo largo de  $\gamma$  mediante

$$[\gamma(s), \gamma(s+h); X](\gamma'(s+h)) := \frac{1}{h} \int_s^{s+h} P_{\gamma,t,s+h} (\mathcal{D}X(\gamma(t)) (P_{\gamma,s+h,t}(\gamma'(s+h)))) dt$$

es decir, hemos definido un operador diferencias divididas en  $T_{\gamma(s+h)}M$  por la formula

$$[\gamma(s), \gamma(s+h); X](\cdot) := \frac{1}{h} \int_s^{s+h} P_{\gamma,t,s+h} (\mathcal{D}X(\gamma(t)) (P_{\gamma,s+h,t}(\cdot))) dt$$

en particular si  $\gamma : I \rightarrow M$  es la geodésica que une a los punto  $p$  y  $q$  entonces para  $s = 0$  y  $h = 1$ , obtenemos

$$[p, q; X](\cdot) = \int_0^1 P_{\gamma,t,1} (\mathcal{D}X(\gamma(t)) (P_{\gamma,1,t}(\cdot))) dt.$$

■

### 3.2. Método de la Secante sobre Variedades Riemannianas

Antes de comenzar con la generalización del método de la secante sobre variedades Riemannianas, en esta sección estudiaremos método de la Secante sobre espacios de Banach ver [23]. Comenzaremos por establecer algunas nociones paralelas entre el método en espacios de Banach y sobre variedades Riemannianas.

Nos interesa encontrar condiciones para la convergencia semilocal del método secante sobre variedades Riemannianas, este problema es fundamental para el análisis numérico y la geometría, ya que muchos problemas aplicados se reducen a resolver una ecuación con un operador  $F$  no lineal tal que

$$F(x) = 0.$$

Para aplicar el método de la secante en espacios de Banach, es necesario utilizar en concepto de diferencias divididas. Sea  $F : \Omega \subseteq X \rightarrow Y$  y  $\Omega$  un subconjunto convexo abierto de  $X$  en  $Y$ , espacios de Banach. Dado  $L(X, Y)$ , el espacio de los operadores lineales acotados de  $X$  a  $Y$ , entonces un operador  $[x, y, F] \in L(X, Y)$ , es llamado diferencia dividida de primer orden para  $F$  en los puntos  $x$  e  $y$  con  $(x \neq y)$ , si cumple la siguiente igualdad:

$$[x, y, F](x - y) = F(x) - F(y).$$

Por [23], tenemos que el método secante a los espacios de Banach, se describe mediante:

$$\begin{cases} \text{dados } x_{-1}, x_0 \in \Omega, \\ x_{n+1} = x_n - [x_{n-1}, x_n, F]^{-1} F(x_n). \end{cases}$$

Estudiaremos condiciones de continuidad tipo Lipschitz o Holder, Suponemos que, para cada par de puntos distintos  $x, y \in \Omega$ , existen las diferencias divididas de primer orden de  $F$  para estos puntos. Si existe una constante no negativa  $k$  tal que se satisface:

$$\|[x, y, F] - [v, w, F]\| \leq k(\|x - v\|^p + \|y - w\|^p), \text{ con } p \in [0, 1],$$

para todo  $x, y, v, w \in \Omega$  con  $x \neq y$  y  $v \neq w$ , decimos que  $F$  tiene unas diferencias divididas tipo  $(k, p)$ -Holder continuas en  $\Omega$ . Si  $p = 1$ , decimos que  $F$  tiene una diferencia dividida tipo Lipschitz continuas sobre  $\Omega$ .

Para nuestro trabajo podemos relajar esta condición de siguiente manera:

$$\|[x, y, F] - [v, w, F]\| \leq k(\|x - v\| + \|y - w\|), \text{ con } x, y, v, w \in \Omega,$$

donde  $w : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  es una función continua no decreciente en sus dos argumentos.

Haciendo uso de este andamiaje teórico y dadas las condiciones en espacios de Banach, ya podemos comenzar con la construcción de las herramientas necesarias para generalizar el método de la Secante sobre Variedades Riemannianas.

**Definición 80** Sea  $M$  una Variedad Riemanniana,  $\Omega \subseteq M$  un conjunto abierto y convexo. Supongamos que  $\gamma$  es una curva en  $M$ ,  $[a, b] \subset \text{dom}(\gamma)$  y  $X : M \rightarrow TM$  un campo vectorial continuo sobre  $M$ . Definimos las diferencias divididas de primer orden para un campo vectorial  $X$  en los puntos  $\gamma(s), \gamma(s+h)$  en dirección de  $\gamma'(s)$  por:

$$[\gamma(s), \gamma(s+h); X] \circ P_{\gamma, s, s+h}(\gamma'(s)) = \frac{1}{h} (X(\gamma(s+h)) - P_{\gamma, s, s+h}(X(\gamma(s)))) .$$

Notemos que esta definición generaliza la noción de diferencias divididas de primer orden a un espacio euclideo, en este caso como la geodésica

$$\gamma(s) = x + s(y - x),$$

con  $s \in \mathbb{R}$ ; donde  $\begin{cases} \gamma(0) = x \\ \gamma(1) = y \end{cases}$  una  $x$  e  $y$ . En este caso  $s = 0$  y  $h = 1$ ; entonces  $\gamma'(s) = (y - x)$ . Así remplazando obtenemos,

$$[\gamma(0), \gamma(1); X] \circ P_{\gamma, 0, 1}(\gamma'(0)) = X(\gamma(1)) - P_{\gamma, 0, 1}(X(\gamma(0))),$$

de esta ecuación se tiene

$$[x, y, X](x - y) = X(x) - X(y).$$

Por lo tanto usando estos resultados podemos escribir la generalización del método de la secante en variedades Riemannianas, de la siguiente forma:

$$\begin{cases} v_n = -[p_{n-1}, p_n, X]^{-1}(X(p_n)) \\ p_{n+1} = \exp_{p_n}(v_n), \end{cases} \quad (3.1)$$

con  $p_{n-1}, p_n$  dados.

Ilustramos la geometría del método en Figura 3.1:

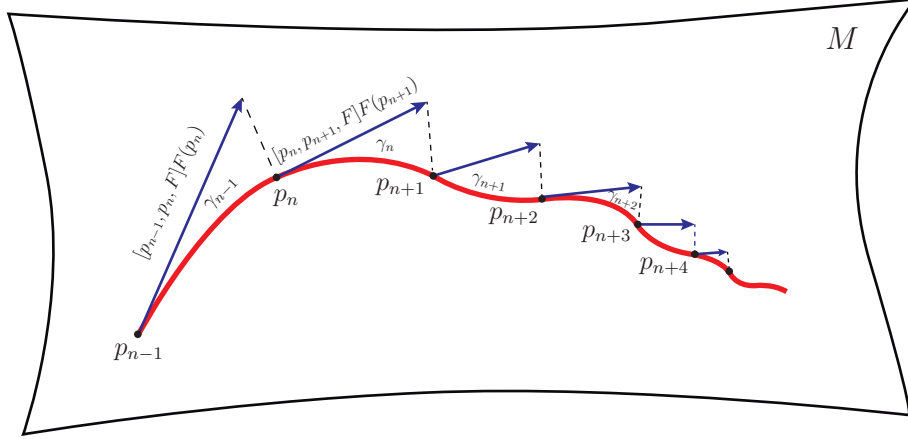


Figura 3.1: Interpretación geométrica del método de la secante

Ahora necesitamos generalizar las condiciones de continuidad tipo Lipschitz o Holder sobre Variedades Riemannianas, resultado sumamente valioso para obtener un resultado de convergencia semilocal para el método secante en variedades Riemannianas. Es muy importante notar que nuestro método (3.1) sirve para hallar singularidades de campos vectoriales  $X$  los cuales no necesariamente tienen que ser diferenciables.

**Definición 81** *Suponemos que, para cada par de puntos distintos  $p_1, p_2 \in \Omega \subseteq M$ ; y  $q_1, q_2 \in \Omega \subseteq M$ , donde  $\Omega$  es un abierto conexo de  $M$ , existe un operador diferencias divididas de primer orden  $X$  en estos puntos, tal que satisface la siguiente  $\omega$  condición:*

$$\|[p_1, p_2, X] \circ (P_{\gamma, 0, 1}) - (P_{\gamma, 0, 1}) \circ [q_1, q_2, X]\| \leq \omega(d(p_1, q_1), d(p_2, q_2)) \quad (3.2)$$

donde con  $\gamma(0) = q_2$  y  $\gamma(1) = p_2$ , donde  $\gamma$  es la única geodésica minimizante que une  $p_2$  y  $q_2$  y  $\omega : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  es una función continua no decreciente en sus dos argumentos. Note que

$$[p_1, p_2, X] \circ (P_{\gamma, 0, 1}) - (P_{\gamma, 0, 1}) \circ [q_1, q_2, X]$$

esta bien definido, pues ambos tienen mismo dominio y recorrido, de hecho:

$$\begin{aligned} [p_1, p_2, X] \circ (P_{\gamma, 0, 1}) &: T_{q_2} M \longrightarrow T_{p_2} M \\ & \text{y} \\ (P_{\gamma, 0, 1}) \circ [q_1, q_2, X] &: T_{q_2} M \longrightarrow T_{p_2} M. \end{aligned}$$

### 3.2.1. Análisis de convergencia para el método de la secante sobre variedades Riemannianas

Antes de obtener el resultado de convergencia semilocal para el método secante sobre variedades Riemannianas, bajo estas nuevas condiciones, Introducimos algunas notaciones. Sea  $p_{-1}, p_0 \in \Omega \subseteq M$  y se tendrán en cuenta las siguientes funciones auxiliares:

$$a(u) = \frac{\beta\omega(\alpha, u)}{1-\beta\omega(\alpha, u)}, \quad b(u) = \frac{\beta\omega(u, 2u)}{1-\beta\omega(u+\alpha, u)}, \quad c(u) = \frac{\beta\omega(2u, 2u)}{1-\beta\omega(u+\alpha, u)},$$

donde  $\alpha = d(p_{-1}, p_0)$ ,  $\beta = \|[p_{-1}, p_0, X]^{-1}\|$ .

**Teorema 82** *Supongamos que para cada par de puntos distintos  $p_1, p_2 \in \Omega \subseteq M$ ; y  $q_1, q_2 \in \Omega \subseteq M$ , donde  $\Omega$  es un abierto conexo de  $M$ , existen los operadores diferencias divididas de primer orden  $[p_1, p_2, X] \in L(T_{p_1}M, T_{p_1}M)$  y  $[q_1, q_2, X] \in L(T_{p_1}M, T_{p_1}M)$  en estos puntos, tal que satisface la siguiente  $\omega$  condición:*

$$\|[p_1, p_2, X] \circ (P_{\gamma, 0, 1}) - (P_{\gamma, 0, 1}) \circ [q_1, q_2, X]\| \leq \omega(d(p_1, q_1), d(p_2, q_2))$$

con  $\gamma(0) = q_2$  y  $\gamma(1) = p_2$ , donde  $\gamma$  es la única geodésica minimizante que une  $p_2$  y  $q_2$ .

Asumamos que:

· El operador lineal  $L_0 = [p_{-1}, p_0, X]$  es invertible y  $\|[p_{-1}, p_0, X]^{-1}(X(p_0))\| \leq \eta$ ;

· La ecuación  $u = \left(\frac{b(u)a(u)}{1-c(u)} + a(u) + 1\right)\eta$ .

(3.3)

esta ecuación tiene al menos una raíz positiva. Sea  $R$  la mínima raíz positiva. Si  $\beta\omega(R + \alpha, R) < 1$ ,  $c(R) < 1$ , y  $\overline{B(p_0, R)} \subset \Omega$ , entonces la sucesión generada por (3.1) esta bien definida, y converge a  $p^* \in B(p_0, R)$ .

Antes de comenzar con la prueba de este teorema, estableceremos varios lemas previos.

**Lema 83** *Si la sucesión  $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  generada por el método (3.1) esta bien definida entonces, se tiene que:*

$$X(p_n) = ([p_{n-1}, p_n, X] \circ P_{\gamma_{n-1}, 0, 1} - P_{\gamma_{n-1}, 0, 1} \circ [p_{n-2}, p_{n-1}, X])(v_{n-1}).$$

**Proof.** Sea  $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  la familia de geodésicas minimizantes que une  $p_{n-1}$  y  $p_n$ , es decir,  $\gamma_{n-1}(0) = p_{n-1}$  y  $\gamma_{n-1}(1) = p_n$ . Luego por la definición de diferencias divididas,

$$[\gamma_{n-1}(s), \gamma_{n-1}(s+h); X] \circ P_{\gamma, s, s+h}(\gamma'_{n-1}(s)) = \frac{1}{h}(X(\gamma_{n-1}(s+h)) - P_{\gamma, s, s+h}(X(\gamma_{n-1}(s)))) ,$$

cuando  $(s = 0$  y  $h = 1)$  se tiene:

$$[\gamma_{n-1}(0), \gamma_{n-1}(1); X] P_{\gamma, 0, 1}(\gamma'_{n-1}(0)) = (X(\gamma_{n-1}(1)) - P_{\gamma, 0, 1}(X(\gamma_{n-1}(0)))) ,$$

es decir

$$[p_{n-1}, p_n, X] \circ P_{\gamma_{n-1}, 0, 1} (\gamma'_{n-1} (0)) = (X (p_n) - P_{\gamma_{n-1}, 0, 1} (X (p_{n-1}))),$$

dado que

$$\gamma_{n-1} (t) = \exp_{p_{n-1}} (tv_{n-1}),$$

por lo tanto

$$\gamma'_{n-1} (0) = v_{n-1},$$

así

$$[p_{n-1}, p_n, X] \circ P_{\gamma_{n-1}, 0, 1} (v_{n-1}) = (X (p_n) - P_{\gamma_{n-1}, 0, 1} (X (p_{n-1}))) \quad (3.4)$$

por otra parte utilizando el método (3.1) sabemos que  $v_{n-1}$  está definido por:

$$v_{n-1} = - [p_{n-2}, p_{n-1}, X]^{-1} (X (p_{n-1})).$$

Ahora si despejamos  $X (p_{n-1})$  obtenemos:

$$X (p_{n-1}) = - [p_{n-2}, p_{n-1}, X] (v_{n-1}).$$

Luego, reemplazando en (3.4)

$$[p_{n-1}, p_n, X] \circ P_{\gamma_{n-1}, 0, 1} (v_{n-1}) = X (p_n) + P_{\gamma_{n-1}, 0, 1} [p_{n-2}, p_{n-1}, X] (v_{n-1}),$$

Finalmente:

$$X (p_n) = ([p_{n-1}, p_n, X] \circ P_{\gamma_{n-1}, 0, 1} - P_{\gamma_{n-1}, 0, 1} [p_{n-2}, p_{n-1}, X]) (v_{n-1}).$$

■

**Lema 84** Bajo las mismas hipótesis de teorema 82 se tiene que:

1.  $d(p_3, p_0) \leq (ba + a + 1)\eta < R$ .

**Proof.** Primero comenzaremos probando que  $p_1 \in B(p_0, R)$ . Usando el método (3.1)

$$v_0 = -[p_{-1}, p_0, X]^{-1} (X (p_0))$$

$$p_1 = \exp_{p_0} (v_0),$$

por definición 49 tenemos que

$$\gamma_0 (t) = \exp_{p_0} (tv_0),$$

dado que

$$d(p_0, p_1) = \int_0^1 \|\gamma' (t)\| dt = \int_0^1 \|v_0\| dt = \|v_0\|,$$

por lo tanto

$$d(p_0, p_1) = \|v_0\| = \|[p_{-1}, p_0, X]^{-1}(X(p_0))\|.$$

por hipótesis sabemos que

$$\|[p_{-1}, p_0, X]^{-1}(X(p_0))\| \leq \eta,$$

Además

$$R = \left( \frac{ba}{1-c} + a \right) \eta + \eta,$$

entonces

$$\eta < R.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} d(p_0, p_1) &= \|v_0\| \\ &= \|[p_{-1}, p_0, X]^{-1}(X(p_0))\| \\ &\leq \eta < R, \end{aligned}$$

es decir

$$p_1 \in \overline{B(p_0, R)}. \quad (3.5)$$

Luego utilizando la definición 81, (3.2) y el hecho que el transporte paralelo es una isometría obtenemos que

$$\begin{aligned} &\|I_{T_{p_0}} - [p_{-1}, p_0, X]^{-1} \circ P_{\gamma_0, 1, 0} \circ [p_0, p_1, X] \circ P_{\gamma_0, 0, 1}\| \\ &\leq \|[p_{-1}, p_0, X]^{-1} \circ P_{\gamma_0, 1, 0} \circ P_{\gamma_0, 0, 1} \circ [p_{-1}, p_0, X] - [p_{-1}, p_0, X]^{-1} \circ P_{\gamma_0, 1, 0} \circ [p_0, p_1, X] \circ P_{\gamma_0, 0, 1}\| \\ &\leq \|[p_{-1}, p_0, X]^{-1} \circ P_{\gamma_0, 1, 0}\| \|P_{\gamma_0, 0, 1} \circ [p_{-1}, p_0, X] - [p_0, p_1, X] \circ P_{\gamma_0, 0, 1}\| \\ &\leq \|[p_{-1}, p_0, X]^{-1}\| \|P_{\gamma_0, 1, 0}\| \|[p_0, p_1, X] \circ P_{\gamma_0, 0, 1} - P_{\gamma_0, 0, 1} \circ [p_{-1}, p_0, X]\| \\ &\leq \|[p_{-1}, p_0, X]^{-1}\| \|[p_0, p_1, X] \circ P_{\gamma_0, 0, 1} - P_{\gamma_0, 0, 1} \circ [p_{-1}, p_0, X]\| \\ &\leq \|[p_{-1}, p_0, X]^{-1}\| \omega(d(p_0, p_{-1}), d(p_1, p_0)) \\ &\leq \beta\omega(\alpha, R) \\ &\leq \beta\omega(\alpha + R, R) \\ &< 1. \end{aligned}$$

Luego aplicando el lema 71, tenemos que existe

$$([p_0, p_1, X] \circ P_{\gamma_0, 1, 0})^{-1} = P_{\gamma_0, 0, 1} \circ [p_0, p_1, X]^{-1},$$

Como:

$$\|P_{\gamma_0, 1, 0} \circ [p_0, p_1, X]^{-1}\| = \|[p_0, p_1, X]\|^{-1},$$

entonces

$$\|[p_0, p_1, X]\|^{-1} \leq \frac{\beta}{1 - \beta\omega(\alpha, R)}. \quad (3.6)$$

Ahora probaremos  $\|X(p_1)\| \leq \omega(\alpha, R) d(p_1, p_0)$ , usando el lema (83)

$$X(p_1) = ([p_0, p_1, X] \circ P_{\gamma_0, 0, 1} - P_{\gamma_0, 0, 1} \circ [p_{-1}, p_0, X])(v_0),$$

luego

$$\begin{aligned} \|X(p_1)\| &\leq \|([p_0, p_1, X] \circ P_{\gamma_0, 0, 1} - P_{\gamma_0, 0, 1} \circ [p_{-1}, p_0, X])\| \|v_0\| \\ &\leq \omega(d(p_0, p_{-1}), d(p_1, p_0)) d(p_1, p_0), \end{aligned}$$

como  $\omega : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  es una función continua no decreciente en sus dos argumentos, además utilizando  $d(p_1, p_0) < \eta$  y  $\alpha = d(p_0, p_{-1})$ , obtenemos que:

$$\begin{aligned} \|X(p_1)\| &\leq \omega(\alpha, \eta) d(p_1, p_0) \\ &\leq \omega(\alpha, R) d(p_1, p_0). \end{aligned} \tag{3.7}$$

verifiquemos que  $d(p_2, p_1) \leq ad(p_1, p_0)$ , usando el método 3.1 sabemos que:

$$\begin{aligned} v_1 &= -[p_0, p_1, X]^{-1}(X(p_1)) \\ p_2 &= \exp_{p_1}(v_1), \end{aligned}$$

Luego usando lema 3.5 y la definición 50 tenemos

$$\begin{aligned} d(p_2, p_1) &= \|v_1\| \\ &\leq \|[p_0, p_1, X]^{-1}\| \|X(p_1)\| \\ &\leq \|[p_0, p_1, X]\|^{-1} \|X(p_1)\| \\ &\leq \frac{\beta\omega(\alpha, R)}{1 - \beta\omega(\alpha, R)} d(p_1, p_0) \\ &\leq ad(p_1, p_0), \end{aligned}$$

es decir

$$d(p_2, p_1) \leq ad(p_1, p_0). \tag{3.8}$$

Finalmente, probemos  $d(p_2, p_0) < R$ , para esta prueba consideramos,

$$\begin{aligned} d(p_2, p_0) &\leq d(p_2, p_1) + d(p_1, p_0) \\ &\leq \left[ \frac{\beta\omega(\alpha, R)}{1 - \beta\omega(\alpha, R)} + 1 \right] d(p_1, p_0), \end{aligned}$$

luego basta evaluar  $R$  en la ecuación (3.3) entonces:

$$\begin{aligned} R &= \left( \frac{ba}{1-c} + a + 1 \right) \eta \\ &= \left( \frac{ba}{1-c} \right) \eta + (a + 1) \eta. \end{aligned}$$

pero como  $\left( \frac{ba}{1-c} \right) \eta > 0$  y  $(a + 1) \eta > 0$ , tenemos que:

$$d(p_2, p_0) \leq (a + 1) \eta < R,$$

es decir que

$$P_2 \in B(p_0, R). \quad (3.9)$$

Análogamente como operamos en la prueba de 3.6, utilizando la definición 81, asumiendo que  $\omega : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  es una función continua no decreciente en sus dos argumentos, usando el resultado 43 y definiendo  $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una familia de geodésicas que une a cada uno de los puntos  $p_0 \in M$  con  $p_n \in M$ , en este caso cabe destacar que  $\gamma_0 = \phi_1$  es la geodésica que une  $\phi_1(0) = p_0$  con  $\phi_1(1) = p_1$  y  $\phi_2$  es la geodésica que une  $\phi_2(0) = p_0$  con  $\phi_2(1) = p_2$ , obtenemos que:

$$\begin{aligned} & \|I_{T_{p_0}} - [p_{-1}, p_0, X]^{-1} \circ P_{\phi_2, 1, 0} \circ [p_1, p_2, X] \circ P_{\phi_2, 0, 1}\| \\ & \leq \left\| [p_{-1}, p_0, X]^{-1} \circ P_{\phi_2, 0, 1} \circ P_{\phi_2, 0, 1} \circ [p_{-1}, p_0, X] - [p_{-1}, p_0, X]^{-1} \circ P_{\phi_2, 0, 1} \circ [p_1, p_2, X] \circ P_{\phi_2, 0, 1} \right\| \\ & \leq \left\| [p_{-1}, p_0, X]^{-1} \circ P_{\phi_2, 0, 1} \right\| \left\| P_{\phi_2, 0, 1} \circ [p_{-1}, p_0, X] - [p_1, p_2, X] \circ P_{\phi_2, 0, 1} \right\| \\ & \leq \left\| [p_{-1}, p_0, X]^{-1} \right\| \left\| P_{\phi_2, 0, 1} \right\| \left\| [p_1, p_2, X] \circ P_{\phi_2, 0, 1} - P_{\phi_2, 0, 1} \circ [p_{-1}, p_0, X] \right\| \\ & \leq \left\| [p_{-1}, p_0, X]^{-1} \right\| \left\| [p_1, p_2, X] \circ P_{\phi_2, 0, 1} - P_{\phi_2, 0, 1} \circ [p_{-1}, p_0, X] \right\| \\ & \leq \left\| [p_{-1}, p_0, X]^{-1} \right\| \omega(d(p_1, p_{-1}), d(p_2, p_0)) \\ & \leq \left\| [p_{-1}, p_0, X] \right\|^{-1} \omega(d(p_1, p_0) + d(p_0, p_{-1}), d(p_2, p_0)) \\ & \leq \beta \omega(\alpha + R, R) \\ & < 1. \end{aligned}$$

Luego aplicando el lema 71, tenemos que existe

$$([p_1, p_2, X] \circ P_{\phi_2, 0, 1})^{-1} = P_{\phi_2, 0, 1} \circ [p_1, p_2, X]^{-1},$$

Como:

$$\|P_{\phi_2, 0, 1} \circ [p_1, p_2, X]^{-1}\| = \|[p_1, p_2, X]^{-1}\|,$$

entonces

$$\|[p_1, p_2, X]\|^{-1} \leq \frac{\beta}{1 - \beta \omega(\alpha, R)}. \quad (3.10)$$

Veamos que  $\|X(p_2)\| \leq \omega(R, 2R) d(p_2, p_1)$ , usando el lema 83

$$X(p_2) = ([p_1, p_2, X] \circ P_{\gamma_n, 0, 1} - P_{\gamma_n, 0, 1} \circ [p_0, p_1, X])(v_1),$$

luego

$$\begin{aligned}\|X(p_2)\| &\leq \|([p_1, p_2, X] \circ P_{\gamma_n, 0, 1} - P_{\gamma_n, 0, 1} \circ [p_0, p_1, X])\| \|(v_1)\| \\ &\leq \omega(d(p_1, p_0), d(p_2, p_1)) d(p_2, p_1) \\ &\leq \omega(d(p_1, p_0), d(p_2, p_0) + d(p_1, p_0)) d(p_2, p_1),\end{aligned}$$

como  $\omega : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  es una función continua no decreciente en sus dos argumentos, además utilizando  $d(p_1, p_0) < \eta = R$  y el paso 4, obtenemos que:

$$\begin{aligned}\|X(p_2)\| &\leq \omega(R, R + R) d(p_2, p_1) \\ &\leq \omega(R, 2R) d(p_2, p_1)\end{aligned}\tag{3.11}$$

Ahora probemos  $d(p_3, p_2) \leq bd(p_2, p_1)$ , usando el método (3.1) sabemos que:

$$\begin{aligned}v_2 &= -[p_1, p_2, X]^{-1}(X(p_2)) \\ p_3 &= \exp_{p_2}(v_2),\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}d(p_3, p_2) &= \|v_2\| \\ &\leq \left\| [p_1, p_2, X]^{-1} \right\| \|X(p_2)\| \\ &\leq \left\| [p_1, p_2, X] \right\|^{-1} \|X(p_2)\| \\ &\leq \frac{\beta\omega(R, 2R)}{1 - \beta\omega(R + \alpha, R)} d(p_2, p_1) \\ &\leq bd(p_2, p_1),\end{aligned}$$

es decir, hemos probado

$$d(p_3, p_2) \leq bd(p_2, p_1).\tag{3.12}$$

Verifiquemos que  $d(p_3, p_0) < R$ , para esta prueba consideramos,

$$\begin{aligned}d(p_3, p_0) &\leq d(p_3, p_2) + d(p_2, p_0) \\ &\leq bd(p_2, p_1) + d(p_2, p_0) \\ &\leq ab(d(p_1, p_0)) + (a + 1)d(p_1, p_0) \\ &\leq (ba + a + 1)d(p_1, p_0),\end{aligned}$$

luego basta evaluar  $R$  en la ecuación (3.3) entonces:

$$\begin{aligned}R &= \left( \frac{ba}{1 - c} + a + 1 \right) \eta \\ &= (ba + a + 1) \eta.\end{aligned}$$

pero como  $c < 1$ ;  $(ba + a + 1)\eta > 0$ , entonces:

$$d(p_3, p_0) \leq (ba + a + 1)\eta < R,$$

es decir que

$$P_3 \in B(p_0, R). \quad (3.13)$$

■

**Lema 85** *Bajo las mismas hipótesis de teorema 82 para todo  $n \geq 3$ , se tiene que:*

*i<sub>n</sub>)  $d(p_n, p_0) < R$ .*

*ii<sub>n</sub>) Existe  $[p_{n-1}, p_n, X]^{-1}$  tal que*

$$\begin{aligned} \left\| [p_{n-1}, p_n, X]^{-1} \right\| &\leq \frac{\beta}{1 - \omega(d(p_{n-1}, p_{-1}), d(p_n, p_0))} \\ &\leq \frac{\beta}{(1 - \beta\omega(R + \alpha, R))}. \end{aligned}$$

*iii<sub>n</sub>)  $\|X(p_n)\| \leq \omega(2R, 2R)d(p_{n-1}, p_{n-2})$ .*

*iv<sub>n</sub>)  $d(p_{n+1}, p_n) \leq cd(p_n, p_{n-1})$ .*

**Proof.** Demostremos que *i<sub>n</sub>) – iv<sub>n</sub>)* son ciertas para todo  $n \geq 3$ , para ello usaremos el principio de inducción matemática.

Sabemos para  $n = 3$  por lema 3.13, que:

$$d(p_3, p_0) \leq (ba + a + 1)\eta < R,$$

es decir que  $P_3 \in B(p_0, R)$ .

Ahora probemos *ii<sub>n</sub>)*.

Análogamente como operamos en la prueba del lema 84, utilizando la definición 81, asumiendo que  $\omega : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  es una función continua no decreciente en sus dos argumentos, usando el resultado 43, y considerando  $\phi_3$  la geodésica que une  $\phi_3(0) = p_0$  con  $\phi_3(1) = p_3$ , obtenemos que:

$$\begin{aligned} &\left\| I_{T_{p_0}} - [p_{-1}, p_0, X]^{-1} \circ P_{\phi_3, 1, 0} \circ [p_2, p_3, X] \circ P_{\phi_3, 0, 1} \right\| \\ &\leq \left\| [p_{-1}, p_0, X]^{-1} \circ P_{\phi_3, 0, 1} \circ P_{\phi_3, 0, 1} \circ [p_{-1}, p_0, X] - [p_{-1}, p_0, X]^{-1} \circ P_{\phi_3, 0, 1} \circ [p_2, p_3, X] \circ P_{\phi_3, 0, 1} \right\| \\ &\leq \left\| [p_{-1}, p_0, X]^{-1} \circ P_{\phi_3, 0, 1} \right\| \left\| P_{\phi_3, 0, 1} \circ [p_{-1}, p_0, X] - [p_2, p_3, X] \circ P_{\phi_3, 0, 1} \right\| \\ &\leq \left\| [p_{-1}, p_0, X]^{-1} \right\| \left\| P_{\phi_3, 0, 1} \right\| \left\| [p_2, p_3, X] \circ P_{\phi_3, 0, 1} - P_{\phi_3, 0, 1} \circ [p_{-1}, p_0, X] \right\| \\ &\leq \left\| [p_{-1}, p_0, X]^{-1} \right\| \left\| [p_2, p_3, X] \circ P_{\phi_3, 0, 1} - P_{\phi_3, 0, 1} \circ [p_{-1}, p_0, X] \right\| \\ &\leq \left\| [p_{-1}, p_0, X] \right\|^{-1} \omega(d(p_2, p_{-1}), d(p_3, p_0)) \\ &\leq \left\| [p_{-1}, p_0, X] \right\|^{-1} \omega(d(p_2, p_0) + d(p_0, p_{-1}), d(p_3, p_0)) \\ &\leq \beta\omega(\alpha + R, R) \\ &< 1. \end{aligned}$$

Luego aplicando el lema 71, tenemos que existe

$$([p_2, p_3, X] \circ P_{\phi_3, 0, 1})^{-1} = P_{\phi_3, 1, 0} \circ [p_2, p_3, X]^{-1},$$

Como:

$$\|P_{\phi_3, 1, 0} \circ [p_2, p_3, X]^{-1}\| = \|[p_2, p_3, X]^{-1}\|,$$

entonces

$$\|[p_2, p_3, X]\|^{-1} \leq \frac{\beta}{1 - \beta\omega(\alpha, R)}.$$

Verifiquemos que  $iii_n$ ) se cumple

Usando el lema 83

$$X(p_3) = ([p_2, p_3, X] \circ P_{\gamma_n, 0, 1} - P_{\gamma_n, 0, 1} \circ [p_1, p_2, X])(v_2),$$

luego

$$\begin{aligned} \|X(p_3)\| &\leq \|([p_2, p_3, X] \circ P_{\gamma_n, 0, 1} - P_{\gamma_n, 0, 1} \circ [p_1, p_2, X])\| \|v_2\| \\ &\leq \omega(d(p_2, p_1), d(p_3, p_2)) d(p_3, p_2) \\ &\leq \omega(d(p_2, p_0) + d(p_1, p_0), d(p_3, p_0) + d(p_2, p_0)) d(p_3, p_2), \end{aligned}$$

como  $\omega : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  es una función continua no decreciente en sus dos argumentos, además utilizando  $d(p_1, p_0) < \eta = R$ , obtenemos que:

$$\|X(p_3)\| \leq \omega(2R + 2R) d(p_3, p_2).$$

Ahora probemos  $iv_n$ ).

Usando el método (3.1) sabemos que:

$$\begin{aligned} v_3 &= -[p_2, p_3, X]^{-1}(X(p_3)) \\ p_4 &= \exp_{p_3}(v_3), \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} d(p_4, p_3) &= \|v_3\| \\ &\leq \|[p_2, p_3, X]^{-1}\| \|X(p_3)\| \\ &\leq \|[p_2, p_3, X]\|^{-1} \|X(p_3)\| \\ &\leq \frac{\beta\omega(2R, 2R)}{1 - \beta\omega(R + \alpha, R)} d(p_3, p_2) \\ &\leq cd(p_3, p_2). \end{aligned}$$

Supongamos ahora que estas condiciones  $i_n) - iv_n)$  son ciertas para  $n \leq k$ , probemos que estas condiciones se cumplen para  $n = k + 1$ , por el método (3.1)

$$\begin{aligned} v_k &= -[p_{k-1}, p_k, X]^{-1} (X(p_k)) \\ p_{k+1} &= \exp_{p_k}(v_k), \end{aligned}$$

Luego

$$d(p_{k+1}, p_0) \leq d(p_{k+1}, p_k) + d(p_k, p_{k-1}) + \cdots + d(p_3, p_2) + d(p_2, p_0),$$

ahora usando la hipótesis inductiva tenemos que:

$$\begin{aligned} d(p_{k+1}, p_0) &\leq cd(p_{k+1}, p_k) + cd(p_k, p_{k-1}) + \cdots + d(p_3, p_2) + d(p_2, p_0) \\ &\leq [c^{n-2} + c^{n-3} + \cdots + 1]d(p_3, p_2) + d(p_2, p_0) \\ &\leq [c^{n-2} + c^{n-3} + \cdots + 1](bad(p_1, p_0)) + (a+1)d(p_1, p_0), \end{aligned}$$

como  $c < 1$ , obtenemos que:

$$\begin{aligned} d(p_{k+1}, p_0) &\leq \left[ \frac{1 - c^{n-2}}{1 - c} \right] d(p_1, p_0) \\ &\leq \left[ \frac{ba}{1 - c} + a + 1 \right] \eta = R, \end{aligned}$$

es decir que  $P_{k+1} \in B(p_0, R)$ .

Ahora probemos  $ii_n)$ .

Análogamente como operamos en la prueba del lema 84, utilizando la definición 81, asumiendo que  $\omega : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  es una función continua no decreciente en sus dos argumentos y usando el resultado 43, y considerando  $\phi_{k+1}$  la geodésica que une  $\phi_{k+1}(0) = p_0$  con  $\phi_{k+1}(1) = p_{k+1}$ , obtenemos que:

$$\begin{aligned} &\|I_{T_{p_0}} - [p_{-1}, p_0, X]^{-1} \circ P_{\phi_{k+1}, 1, 0} \circ [p_k, p_{k+1}, X] \circ P_{\phi_{k+1}, 0, 1}\| \\ &\leq \left\| [p_{-1}, p_0, X]^{-1} \circ P_{\phi_{k+1}, 1, 0} \circ P_{\phi_{k+1}, 0, 1} \circ [p_{-1}, p_0, X] - [p_{-1}, p_0, X]^{-1} \circ P_{\phi_{k+1}, 1, 0} \circ [p_k, p_{k+1}, X] \circ P_{\phi_{k+1}, 0, 1} \right\| \\ &\leq \left\| [p_{-1}, p_0, X]^{-1} \circ P_{\phi_{k+1}, 1, 0} \right\| \left\| P_{\phi_{k+1}, 0, 1} \circ [p_{-1}, p_0, X] - [p_k, p_{k+1}, X] \circ P_{\phi_{k+1}, 0, 1} \right\| \\ &\leq \left\| [p_{-1}, p_0, X]^{-1} \right\| \left\| P_{\phi_{k+1}, 1, 0} \right\| \left\| [p_k, p_{k+1}, X] \circ P_{\phi_{k+1}, 0, 1} - P_{\phi_{k+1}, 0, 1} \circ [p_{-1}, p_0, X] \right\| \\ &\leq \left\| [p_{-1}, p_0, X]^{-1} \right\| \left\| [p_k, p_{k+1}, X] \circ P_{\phi_{k+1}, 0, 1} - P_{\phi_{k+1}, 1, 0} \circ [p_{-1}, p_0, X] \right\| \\ &\leq \left\| [p_{-1}, p_0, X] \right\|^{-1} \omega(d(p_k, p_{-1}), d(p_{k+1}, p_0)) \\ &\leq \left\| [p_{-1}, p_0, X] \right\|^{-1} \omega(d(p_k, p_0) + d(p_0, p_{-1}), d(p_{k+1}, p_0)) \\ &\leq \beta \omega(\alpha + R, R) \\ &< 1. \end{aligned}$$

Luego aplicando el lema 71, tenemos que existe

$$([p_k, p_{k+1}, X] \circ P_{\phi_{k+1}, 1, 0})^{-1} = P_{\phi_{k+1}, 0, 1} \circ [p_k, p_{k+1}, X]^{-1},$$

Como

$$\|P_{\phi_{k+1},1,0} \circ [p_k, p_{k+1}, X]^{-1}\| = [p_k, p_{k+1}, X]^{-1},$$

entonces

$$\|[p_k, p_{k+1}, X]\|^{-1} \leq \frac{\beta}{1 - \beta\omega(R + \alpha, R)}.$$

Ahora verificamos *iii<sub>n</sub>*), usando el lema 83

$$X(p_{k+1}) = ([p_k, p_{k+1}, X] \circ P_{\gamma_n,0,1} - P_{\gamma_n,0,1} \circ [p_{k-1}, p_k, X])(v_2),$$

luego

$$\begin{aligned} \|X(p_{k+1})\| &\leq \|([p_k, p_{k+1}, X] \circ P_{\gamma_n,0,1} - P_{\gamma_n,0,1} \circ [p_{k-1}, p_k, X])\| \|v_2\| \\ &\leq \omega(d(p_k, p_{k-1}), d(p_{k+1}, p_k)) d(p_{k+1}, p_k) \\ &\leq \omega(d(p_k, p_0) + d(p_{k-1}, p_0), d(p_{k+1}, p_0) + d(p_k, p_0)) d(p_{k+1}, p_k), \end{aligned}$$

como  $\omega : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  es una función continua no decreciente en sus dos argumentos, además utilizando  $d(p_{k-1}, p_0) < \eta = R$ , obtenemos que:

$$\|X(p_{k+1})\| \leq \omega(2R, 2R) d(p_{k+1}, p_k).$$

Ahora probemos *iv<sub>n</sub>*).

Usando el método (3.1) sabemos que:

$$\begin{aligned} v_{k+1} &= -[p_k, p_{k+1}, X]^{-1} (X(p_{k+1})) \\ p_{k+2} &= \exp_{p_{k+1}}(v_{k+1}), \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} d(p_{k+2}, p_{k+1}) &\leq \|[p_k, p_{k+1}, X]^{-1} X(p_{k+1})\| \\ &\leq \|[p_k, p_{k+1}, X]\|^{-1} \|X(p_{k+1})\| \\ &\leq \frac{\beta\omega(2R, 2R)}{1 - \beta\omega(\alpha + R, R)} d(p_{k+1}, p_k) \\ &\leq cd(p_{k+1}, p_k). \end{aligned}$$

■

A continuación demostraremos nuestro resultado principal.

**Proof.** Para concluir con la prueba del teorema 82, demostremos que  $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de cauchy, para  $m \geq 1$  y  $n \geq 2$  para esta prueba tenemos:

$$d(p_{n+m}, p_n) \leq d(p_{n+m}, p_{n+m-1}) + d(p_{n+m-1}, p_{n+m-2}) + \cdots + d(p_{n+1}, p_n),$$

utilizando  $iv_n$ ) y fijando  $p_{n+m}$ , tenemos que:

$$\begin{aligned} d(p_{n+m}, p_n) &\leq [c^{m-1} + c^{m-2} + \cdots + 1]d(p_{n+1}, p_n) \\ &= \left( \frac{1 - c^m}{1 - c} \right) d(p_{n+1}, p_n), \end{aligned}$$

usando el hecho de que  $\left( \frac{1-c^m}{1-c} \right) c^{n-2} \leq \left( \frac{c^{n-2}}{1-c} \right)$ , entonces:

$$d(p_{n+m}, p_n) \leq \left( \frac{c^{n-2}}{1-c} \right) d(p_3, p_2),$$

por lo tanto  $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de cauchy y como  $M$  es completo entonces  $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tiene limite, digamos  $p_*$ , es decir  $p_n \rightarrow p_*$ . Tomando limite y usando el hecho que  $d$  es una función continua, se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (d(p_n, p_0)) \leq d\left(\lim_{n \rightarrow \infty} p_n, \lim_{n \rightarrow \infty} p_0\right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} R,$$

por lo tanto

$$d(p_*, p_0) \leq R,$$

lo que implica que

$$p_* \in \overline{B(p_0, R)}.$$

Finalmente, veamos que  $p^*$  es una raiz de  $X$ ,

$$\|X(p_n)\| \leq \omega(2R, 2R) d(p_n, p_{n-1}),$$

cuando  $n \rightarrow \infty$ , entonces  $d(p_n, p_{n-1}) \rightarrow 0$ . Por lo tanto

$$\|X(p_*)\| = 0.$$

Ahora basta probar que el operador  $[q_*, p_*, X]$  es invertible, para esto operamos análogamente como en la prueba del lema 84, utilizando la definición 81, asumiendo que  $\omega : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  es una función continua no decreciente en sus dos argumentos y usando el resultado 43, y considerando  $\phi$  la geodésica que une  $\phi(0) = p_0$  con  $\phi(1) = p_*$ , obtenemos que:

$$\begin{aligned} &\|I_{T_{p_0}} - [p_{-1}, p_0, X]^{-1} \circ P_{\phi,1,0} \circ [q_*, p_*, X] \circ P_{\phi,0,1}\| \\ &\leq \left\| \left[ [p_{-1}, p_0, X]^{-1} \circ P_{\phi,1,0} \circ P_{\phi,0,1} \circ [p_{-1}, p_0, X] - [p_{-1}, p_0, X]^{-1} \circ P_{\phi,1,0} \circ [q_*, p_*, X] \circ P_{\phi,0,1} \right] \right\| \\ &\leq \left\| [p_{-1}, p_0, X]^{-1} \circ P_{\phi,1,0} \right\| \left\| P_{\phi,0,1} \circ [p_{-1}, p_0, X] - [q_*, p_*, X] \circ P_{\phi,0,1} \right\| \\ &\leq \left\| [p_{-1}, p_0, X]^{-1} \right\| \left\| P_{\phi,1,0} \right\| \left\| [q_*, p_*, X] \circ P_{\phi,0,1} - P_{\phi,0,1} \circ [p_{-1}, p_0, X] \right\| \\ &\leq \left\| [p_{-1}, p_0, X]^{-1} \right\| \left\| [q_*, p_*, X] \circ P_{\phi,0,1} - P_{\phi,0,1} \circ [p_{-1}, p_0, X] \right\| \\ &\leq \left\| [p_{-1}, p_0, X] \right\|^{-1} \omega(d(q_*, p_{-1}), d(p_*, p_0)) \\ &\leq \beta \omega(d(q_*, p_0) + d(p_0, p_{-1}), d(p_*, p_0)) \\ &\leq \beta \omega(\alpha + R, R) \\ &< 1. \end{aligned}$$

Luego aplicando el lema 71, tenemos que existe

$$([q_*, p_*, X] \circ P_{\phi_*, 1, 0})^{-1}$$

y como

$$([q_*, p_*, X] \circ P_{\phi_*, 1, 0})^{-1} = P_{\phi_*, 0, 1} \circ [q_*, p_*, X]^{-1},$$

entonces  $[q_*, p_*, X]^{-1}$  existe y además

$$\|[q_*, p_*, X]\|^{-1} \leq \frac{\beta}{1 - \beta\omega(\alpha + R, R)},$$

ya que

$$\|P_{\phi_*, 1, 0} \circ [q_*, p_*, X]^{-1}\| = \|[q_*, p_*, X]^{-1}\|.$$

Ahora probemos que  $p_*$  es único. Supongamos que existe una segunda raíz,  $q_* \in \overline{B}(p_0, R)$  y consideremos la geodésica que une  $p_*$  y  $q_*$ , tal que  $\alpha(0) = p_*$  con  $\alpha(1) = q_*$ , y como

$$[\alpha(0), \alpha(1), X] \circ P_{\alpha, 0, 1}(\alpha'(0)) = (X(\alpha(1)) - P_{\alpha, 0, 1}(X(\alpha(0))))).$$

entonces

$$[q_*, p_*, X] \circ P_{\alpha, 0, 1}(\alpha'(0)) = 0,$$

y como  $[q_*, p_*, X]$  y  $P_{\alpha, 0, 1}$  son operadores lineales invertibles, entonces

$$\alpha'(0) = 0 \in T_{p_*}M,$$

por lo tanto

$$d(q_*, p_*) = \|\alpha'(0)\| = 0,$$

concluimos que

$$q_* = p_*,$$

es decir,  $p_*$  es único. ■

### 3.2.2. Orden de Convergencia del Método de la Secante sobre Variedades Riemannianas

El análisis del orden de convergencia del método de la Secante sobre Variedades Riemannianas, se realizará de manera local, es decir, en un vecindad de una singularidad del campo vectorial que estamos considerando. Podemos definir el orden de convergencia, en variedades Riemannianas de la siguiente manera.

**Definición 86** Sea  $M$  una variedad riemanniana completa y sea  $\{p_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  una sucesión en  $M$  convergente a  $p_*$ . Si existe un sistema de coordenadas  $(U; x)$  de  $M$  con  $p_* \in U$ , y constantes  $p > 0; C \geq 0$ ; y  $K \geq 0$  tal que, para todo  $k \geq K$ ; la sucesión  $\{p_k\}_{k=K}^\infty$  está contenida en  $U$  entonces se cumple la siguiente desigualdad:

$$\|x^{-1}(p_{k+1}) - x^{-1}(p_*)\| \leq c \|x^{-1}(p_k) - x^{-1}(p_*)\|^p, \quad (3.14)$$

entonces se dice que  $\{p_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  converge a  $p_*$  con orden de convergencia al menos  $p$ .

Notemos que la definición anterior no depende de la elección del sistema de coordenadas, al contrario la constante  $c$  si depende solo de este, pero para cualquier sistema de coordenadas dado, existe tal constante, ver [31].

Observe que en coordenadas normales alrededor de  $0_{p_k}$ ,

$$\|\exp_{p_k}^{-1}(p) - \exp_{p_k}^{-1}(q)\| = d(p, q), \quad (3.15)$$

así, en coordenadas normales, (3.14) se transforma en

$$d(p_{k+1}, p_*) \leq cd(p_k, p_*)^p.$$

**Teorema 87** Bajo las hipótesis del 82, la siguiente estimación para el orden de convergencia del método de la secante es cierta.

$$d(p_{n+1}, p_*) \leq \frac{\beta\omega(d(p_n, p_{n-1}), d(p_n, p_*))}{1 - \beta\omega(d(p_{n-1}, p_{n-1}), d(p_n, p_0))} d(p_n, p_*), \text{ para todo } n \geq 0,$$

es más,

$$d(p_{n+1}, p_*) \leq \frac{\beta\omega(R + \alpha, 2R)}{1 - \beta\omega(\alpha + R, R)} d(p_n, p_*).$$

**Proof.** Sea  $k$  suficientemente grande de tal forma que  $p_k, p_{k+1}, \dots, p_*$  pertenezcan a una vecindad normal  $U$  de  $p_k$ . Consideremos la geodésica  $\beta_k$  que une  $p_k$  con  $p_*$  definida por

$$\beta_k(t) = \exp_{p_k}(t\mu_k), \quad (3.16)$$

donde  $u_k \in T_{p_k}M$  y  $d(p_k; p_*) = \|u_k\|$ . ver remark 3.8 además sabemos que si  $p$  y  $q$  están en un vecindad normal  $U$  de  $p_k$ ; entonces

$$\|\exp_{p_k}^{-1}(p) - \exp_{p_k}^{-1}(q)\| = d(p, q), \quad (3.17)$$

ver [33].

Sea  $\{\beta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  la familia de geodésicas minimizantes que une  $p_n$  y  $p_*$ , es decir,  $\beta_n(0) = p_n$  y  $\beta_n(1) = p_*$ . Luego por la definición de diferencias divididas 81,

$$[\beta_n(0), \beta_n(1); X]P_{\beta_n, 0, 1}(\beta_n'(0)) = (X(\beta_n(1)) - P_{\beta_n, 0, 1}(X(\beta_n(0)))) ,$$

es decir

$$[p_n, p_*, X] \circ P_{\beta_n, 0, 1} (\beta'_n (0)) = (X(p_*) - P_{\beta_n, 0, 1} (X(p_n))),$$

dado que  $X(p_*) = 0$ , entonces

$$[p_n, p_*, X] \circ P_{\beta_n, 0, 1} (\beta'_n (0)) = -P_{\beta_n, 0, 1} (X(p_n)),$$

así

$$X(p_n) = -P_{\beta_n, 1, 0} \circ [p_n, p_*, X] \circ P_{\beta_n, 0, 1} (\beta'_n (0))$$

componiendo con el operador  $[p_{n-1}, p_n, X]$ , obtenemos

$$-[p_{n-1}, p_n, X]^{-1} (X(p_n)) = [p_{n-1}, p_n, X]^{-1} \circ P_{\beta_n, 1, 0} \circ [p_n, p_*, X] \circ P_{\beta_n, 0, 1} (\beta'_n (0)).$$

Usando el método (3.1) tenemos que:

$$v_n = [p_{n-1}, p_n, X]^{-1} \circ P_{\beta_n, 1, 0} \circ [p_n, p_*, X] \circ P_{\beta_n, 0, 1} (\beta'_n (0)),$$

como  $\beta'_n (0) = \mu_n$ , entonces

$$v_n - \mu_n = \left( [p_{n-1}, p_n, X]^{-1} \circ P_{\beta_n, 1, 0} \circ [p_n, p_*, X] \circ P_{\beta_n, 0, 1} - I_{T_{p_n} M} \right) (\mu_n),$$

luego por 3.17, 3.1 y 3.16

$$\begin{aligned} d(p_{n+1}, p_*) &= \|\exp_{p_n}^{-1}(p_{n+1}) - \exp_{p_n}^{-1}(p_*)\| \\ &= \|v_n - \mu_n\| \\ &= \left\| \left( [p_{n-1}, p_n, X]^{-1} \circ P_{\beta_n, 1, 0} \circ [p_n, p_*, X] \circ P_{\beta_n, 0, 1} - I_{T_{p_n} M} \right) (\mu_n) \right\| \\ &\leq \left\| [p_{n-1}, p_n, X]^{-1} \circ P_{\beta_n, 1, 0} \circ [p_n, p_*, X] \circ P_{\beta_n, 0, 1} - I_{T_{p_n} M} \right\| \|\mu_n\|, \end{aligned}$$

como  $\|\mu_n\| = d(p_n, p_*)$ , entonces

$$d(p_{n+1}, p_*) \leq \left\| [p_{n-1}, p_n, X]^{-1} \circ P_{\beta_n, 1, 0} \circ [p_n, p_*, X] \circ P_{\beta_n, 0, 1} - I_{T_{p_n} M} \right\| d(p_n, p_*),$$

así

$$\begin{aligned} d(p_{n+1}, p_*) &\leq \left\| [p_{n-1}, p_n, X]^{-1} \circ P_{\beta_n, 0, 1} \right\| \left\| [p_n, p_*, X] \circ P_{\beta_n, 0, 1} - P_{\beta_n, 0, 1} \circ [p_{n-1}, p_n, X] \right\| d(p_n, p_*) \\ &= \frac{\beta}{1 - \beta\omega(d(p_{n-1}, p_{-1}), d(p_n, p_0))} \left\| [p_n, p_*, X] \circ P_{\beta_n, 0, 1} - P_{\beta_n, 0, 1} \circ [p_{n-1}, p_n, X] \right\| d(p_n, p_*) \\ &\leq \frac{\beta\omega(d(p_n, p_{n-1}), d(p_n, p_*))}{1 - \beta\omega(d(p_{n-1}, p_{-1}), d(p_n, p_0))} d(p_n, p_*) \\ &\leq \frac{\beta\omega(R + \alpha, 2R)}{1 - \beta\omega(\alpha + R, R)} d(p_n, p_*). \end{aligned}$$

concluimos que:

$$d(p_{n+1}, p_*) \leq \frac{\beta\omega(R + \alpha, 2R)}{1 - \beta\omega(\alpha + R, R)} d(p_n, p_*).$$

■

Observemos que el ultimo resultado, implica que el orden de convergencia para el método de la secante sobre variedades Riemannianas es al menos 1.

El método de la Secante es útil cuando  $X$  no es derivable o es difícil de calcular  $X'$ , pero es más lento que el método de Newton. Recordemos que, mientras que el método de Newton tiene convergencia cuadrática sobre espacios de Banach, el método de la secante tiene orden de convergencia  $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$  sobre espacios de Banach, ver [24].

### 3.3. Una Familia de Métodos Tipo Secante sobre Variedades Riemannianas

En esta sección estudiaremos como generalizar una familia de métodos tipo secante sobre variedades Riemannianas, esto con la finalidad de resolver ecuaciones no lineales sobre variedades Riemannianas. Consideramos la Condición (3.2), para las diferencias divididas 81 que generaliza aquellas habituales, es decir, condiciones de continuidad tipo Lipschitz o Holder. También obtendremos un resultado para la convergencia semilocal de una Familia de Métodos Tipo Secante sobre variedades Riemannianas. Además obtendremos un resultado para la existencia y unicidad de las soluciones de una Familia de métodos tipo secante sobre variedades Riemannianas, Y estimaremos el orden de convergencia de una Familia de Métodos Tipo Secante sobre Variedades Riemannianas.

Ahora utilizando el andamiaje teórico construido hasta ahora, y dadas las condiciones en espacios de Banach construimos una familia uniparamétrica de procesos iterativos de tipo Secante, dada por el siguiente algoritmo:

$$\begin{cases} \text{dados } x_{-1}, x_0 \in \Omega, \\ y_n = \lambda x_n + (1 - \lambda) x_{n-1}, \text{ con } \lambda \in [0, 1], \\ x_{n+1} = x_n - [y_n, x_n, F]^{-1} F(x_n). \end{cases} \quad (3.18)$$

Observemos que (3.18) se reduce al método de la Secante si  $\lambda = 0$  y al método de Newton si  $\lambda = 1$ , porque  $x_n = y_n$  y en este caso es conocido [24] que, si  $F$  es diferenciable Fréchet,  $[y_n, x_n; F] = F(x_n)$ . En el caso real, para los métodos (3.18), es claro que cuanto más próximo esté  $x_n$  a  $y_n$ , más alta será la velocidad de convergencia. Por ello, considerar los procesos iterativos dados en (3.18) nos permitirá aproximarnos más rápidamente a la solución que el método de la Secante y la velocidad de convergencia se aproximará a la del método de Newton cuando  $\lambda$  sea aproximadamente 1. Además, evitamos calcular el operador  $F(x_n)$  en cada paso.

Ya estamos en condiciones de comenzar con la construcción de las herramientas necesarias para generalizar una familia de métodos tipo secante sobre variedades Riemannianas, para esto construimos una familia uniparamétrica de procesos iterativos de tipo secante sobre variedades Riemannianas mediante la siguiente definición.

**Definición 88** Sea  $\lambda \in [0, 1]$ , dados  $p_{-1}, p_0 \in \Omega \subseteq M$ , consideremos  $\sigma_0$  una geodésica minimizante que une  $p_{-1}$  y  $p_0$ , tal que  $\sigma_0(0) = p_{-1}$  y  $\sigma_0(1) = p_0$ , y sea  $q_0 = \sigma_0(\lambda)$ , para todo  $n \geq 0$  definiremos la familia de métodos iterativos tipo secante a la sucesión generada por:

$$\begin{cases} v_n = -[q_n, p_n, X]^{-1} X(p_n) \\ \sigma_{n+1}(t) = \exp_{p_n}(tv_n) \\ q_n = \sigma_n(\lambda) \\ p_{n+1} = \exp_{p_n}(v_n), \end{cases} \quad (3.19)$$

donde  $\sigma_n : [0, 1] \rightarrow M$ , es una familia de geodésicas minimizantes que unen  $p_{n-1}$  con  $p_n$ .

Mostramos la geometría del método con esta figura:

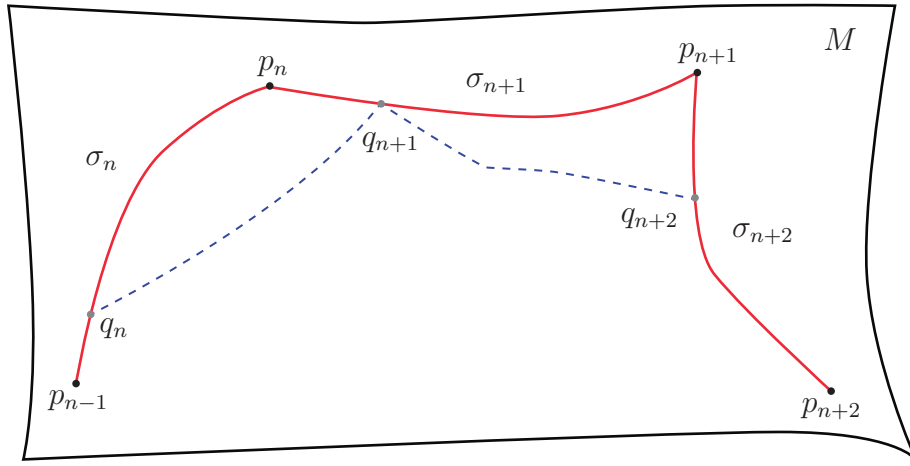


Figura 3.2: Interpretación geométrica de una familia de métodos tipo secante

Considerar las condiciones (3.19) aplicadas a una familia uniparamétrica nos permitirá solucionar la dificultad de aproximar una solución del problema inicial de forma reducida en cuanto al costo operacional, y efectiva en cuanto a la velocidad de convergencia.

### 3.3.1. Análisis de convergencia para Una Familia de Métodos Tipo Secante sobre Variedades Riemannianas

En lo que sigue se considerará una función  $\omega : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  continua y no decreciente en sus dos argumentos. Si  $p_{-1}, p_0, q_0, q_1$  son puntos de nuestra variedad  $M$ ,

entenderemos por  $i) - iv)$  las siguientes 4 condiciones:

- i)  $d(p_{-1}, p_0) = \alpha$ .
- ii) Existe  $[q_0, p_0, X]^{-1}$  y además  $\| [q_0, p_0, X]^{-1} \| \leq \beta$ .
- iii)  $\| [q_0, p_0, X]^{-1} X(p_0) \| \leq \eta$ .
- iv) Se satisface la siguiente  $\omega$  condición:

$$\| [p_1, p_2, X] \circ (P_{\sigma,0,1}) - (P_{\sigma,0,1}) \circ [q_1, q_2, X] \| \leq \omega(d(p_1, q_1), d(p_2, q_2))$$

con  $\sigma(0) = q_2$  y  $\sigma(1) = p_2$ , donde  $\sigma$  es una geodisica minimizante que une  $q_2$  y  $p_2$ .

Si  $\lambda \in [0, 1]$ , definiremos el escalar  $a$  y la funcion  $b(u)$  por:

$$a = \frac{\beta\omega((1-\lambda)\alpha, \eta)}{1-\beta\omega(\lambda\eta+(1-\lambda)\alpha, \eta)}, \quad b(u) = \frac{\beta\omega((1-\lambda)\eta, \eta)}{1-\beta\omega(u+(1-\lambda)\alpha, u)}.$$

Bajo las condiciones previamente establecidas probaremos el siguiente teorema, el cual nos da condiciones para la convergencia semilocal del método (3.19), el cual generaliza el método de la secante sobre variedades Riemannianas estudiado en la sección anterior, mas aun, si  $\lambda = 1$  el método (3.19) se convierte en el método de Kantorovich sobre variedades Riemannianas. Es muy importante notar que si  $\lambda \neq 1$ , es decir  $\lambda \in [0, 1)$ , nuestro método (3.19) sirve para hallar singularidades de campos vectoriales  $X$  los cuales no necesariamente tienen que ser diferenciables.

**Teorema 89** *Sea  $\Omega$  un abierto de  $M$ , supongamos que para cada par de puntos distintos  $p_1, p_2 \in \Omega \subseteq M$ ; y  $q_1, q_2 \in \Omega \subseteq M$ , (con  $p_1 \neq p_2$  y  $q_1 \neq q_2$ ) existen los operadores diferencias divididas de primer orden  $[p_1, p_2, X] \in L(T_{p_2}M, T_{p_2}M)$  y  $[q_1, q_2, X] \in L(T_{q_2}M, T_{q_2}M)$ . Si las condiciones  $i) - iv)$  son ciertas, si la ecuación*

$$u = \left( \frac{a}{1-b(u)} + 1 \right) \eta \tag{3.20}$$

*tiene al menos una solución positiva, siendo  $R$  la menor de ellas, y si*

$$\beta\omega(R + (1-\lambda)\alpha, R) < \frac{1}{2}, \quad b(R) < 1 \quad \text{y} \quad B(p_0, R) \subset \Omega.$$

*Entonces, la sucesión  $\{p_n\}$  definida en (3.19) está bien definida, es decir,  $p_n \in B(p_0, R)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  y converge a un único punto  $p_* \in B[p_0, R]$ , tal que  $X(p_*) = 0$ .*

Antes de comenzar con la prueba de este teorema, estableceremos los siguientes 4 lemas.

**Lema 90** Sea  $\{\sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una familia de geodésicas minimizantes  $\sigma_n$  las cuales unen  $p_{n-1}$  y  $p_n$ , es decir,  $\sigma_n(0) = p_{n-1}$  y  $\sigma_n(1) = p_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Si la sucesión  $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  generada por el método (3.19) esta bien definida entonces:

$$X(p_n) = ([p_{n-1}, p_n, X] \circ P_{\sigma_n, 0, 1} - P_{\sigma_n, 0, 1} \circ [q_{n-1}, p_{n-1}, X])(v_{n-1}).$$

**Proof.** Usando la definición de diferencias divididas 81,

$$[\sigma_n(s), \sigma_n(s+h); X] \circ P_{\sigma_n, s, s+h}(\sigma'_n(s)) = \frac{1}{h} (X(\sigma_n(s+h)) - P_{\sigma_n, s, s+h}(X(\sigma_n(s)))),$$

si  $s = 0$  y  $h = 1$  la anterior igualdad se convierte en

$$[\sigma_n(0), \sigma_n(1); X] P_{\sigma_n, 0, 1}(\sigma'_n(0)) = (X(\sigma_n(1)) - P_{\sigma_n, 0, 1}(X(\sigma_n(0)))),$$

es decir

$$[p_{n-1}, p_n, X] \circ P_{\sigma_n, 0, 1}(\sigma'_{n-1}(0)) = (X(p_n) - P_{\sigma_n, 0, 1}(X(p_{n-1}))). \quad (3.21)$$

Como

$$\sigma_n(t) = \exp_{p_{n-1}}(tv_{n-1}),$$

entonces

$$\sigma'_n(0) = v_{n-1},$$

luego por (3.21)

$$[p_{n-1}, p_n, X] \circ P_{\sigma_n, 0, 1}(v_{n-1}) = (X(p_n) - P_{\sigma_n, 0, 1}(X(p_{n-1}))). \quad (3.22)$$

Por otra parte, utilizando (3.19), podemos observar que:

$$X(p_{n-1}) = -[q_{n-1}, p_{n-1}, X](v_{n-1}),$$

luego, reemplazando en (3.22)

$$[p_{n-1}, p_n, X] \circ P_{\sigma_n, 0, 1}(v_{n-1}) = X(p_n) + P_{\sigma_n, 0, 1} \circ [q_{n-1}, p_{n-1}, X](v_{n-1}),$$

lo que finalmente implica

$$X(p_n) = ([p_{n-1}, p_n, X] \circ P_{\sigma_n, 0, 1} - P_{\sigma_n, 0, 1} \circ [q_{n-1}, p_{n-1}, X])(v_{n-1}).$$

■

**Lema 91** Sea  $\{\sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  la familia de geodésicas del lema 90, y  $q_n$  como fue definido en (3.19), si  $i) - iv)$  son ciertas, entonces:

1.

$$d(q_0, q_1) \leq \lambda \|v_0\| + (1 - \lambda) \alpha. \quad (3.23)$$

2. Para todo  $n \geq 1$

$$d(q_n, q_{n+1}) \leq \lambda \|v_n\| + (1 - \lambda) \|v_{n-1}\|. \quad (3.24)$$

**Proof.**

1. Ya que

$$d(q_0, q_1) \leq d(q_0, p_0) + d(p_0, q_1), \quad (3.25)$$

y  $q_0$  es un punto de la geodésica  $\sigma_0$ , entonces

$$d(p_{-1}, p_0) = d(p_{-1}, q_0) + d(p_0, q_0),$$

luego por hipótesis i) y como

$$d(p_{-1}, q_0) = \int_0^\lambda \|\sigma'_0(t)\| dt$$

obtenemos que

$$\alpha = \int_0^\lambda \|\sigma'_0(t)\| dt + d(p_0, q_0),$$

teniendo en cuenta 46,

$$d(p_0, q_0) = \alpha - \int_0^\lambda \|\sigma'_0(0)\| dt = \alpha - \lambda \alpha, \quad (3.26)$$

Por otro lado notemos que

$$\sigma'_n(0) = v_{n-1} \text{ y } \sigma'_{n+1}(0) = v_n,$$

por lo que

$$d(p_0, q_1) = \int_0^\lambda \|\sigma'_1(t)\| dt = \lambda \|v_0\|. \quad (3.27)$$

Remplazando (3.26) y (3.27) en (3.25), concluimos

$$d(q_0, q_1) \leq \lambda \|v_0\| + (1 - \lambda) \alpha.$$

2. Por 3.19, sabemos que para todo  $n \in \mathbb{N}$

$$\exp_{p_{n-1}}(tv_{n-1}) = \sigma_n(t) \text{ y } q_n = \sigma_n(\lambda),$$

entonces  $q_n \in \sigma_n([0, 1])$ , por lo que

$$d(q_n, p_n) = d(p_{n-1}, p_n) - d(p_{n-1}, q_n),$$

lo que implica que

$$\begin{aligned} d(q_n, q_{n+1}) &\leq d(q_n, p_n) + d(p_n, q_{n+1}) \\ &\leq d(p_{n-1}, p_n) - d(p_{n-1}, q_n) + d(p_n, q_{n+1}), \end{aligned}$$

así, y por nota 46

$$\begin{aligned} d(q_n, q_{n+1}) &\leq \int_0^1 \|\sigma'_n(t)\| dt - \int_0^\lambda \|\sigma'_n(t)\| dt + \int_0^\lambda \|\sigma'_{n+1}(t)\| dt \\ &\leq \int_0^1 \|\sigma'_n(0)\| dt - \int_0^\lambda \|\sigma'_n(0)\| dt + \int_0^\lambda \|\sigma'_{n+1}(0)\| dt, \end{aligned}$$

luego, concluimos que

$$\begin{aligned} d(q_n, q_{n+1}) &\leq \|v_{n-1}\| - \lambda \|v_{n-1}\| + \lambda \|v_n\| \\ &\leq \lambda \|v_n\| + (1 - \lambda) \|v_{n-1}\|. \end{aligned}$$

■

**Lema 92** *Bajo las mismas hipótesis de teorema 89 se tiene que:*

1.  $d(p_3, p_0) \leq (ba + a + 1) \eta < R$ .
2.  $d(q_2, p_0) \leq (a + 1) \eta \leq \left[ \frac{a}{1-b} + 1 \right] \eta < R$ .

**Proof.** Comenzaremos probando que  $p_1 \in B(p_0, R)$ . Sabemos por el método (3.19), para  $n = 0$  que

$$\sigma_1(t) = \exp_{p_0}(tv_0),$$

por lo que

$$d(p_0, p_1) = \int_0^1 \|\sigma'_1(t)\| dt = \int_0^1 \|v_0\| dt = \|v_0\|,$$

y esto, a su vez implica que

$$d(p_0, p_1) = \|[q_0, p_0, X]^{-1}(X(p_0))\| \leq \eta,$$

además como

$$R = \frac{a\eta}{1-b(R)} + \eta,$$

entonces

$$d(p_0, p_1) = \eta < R,$$

es decir

$$p_1 \in B(p_0, R). \quad (3.28)$$

Por otra parte utilizando la definición 81, (3.2) y el hecho que el transporte paralelo es una isometria, obtenemos que:

$$\begin{aligned} & \|I_{T_{p_0}} - [q_0, p_0, X]^{-1} \circ P_{\sigma_1, 1, 0} \circ [q_1, p_1, X] \circ P_{\sigma_1, 0, 1}\| \\ & \leq \| [q_0, p_0, X]^{-1} \circ P_{\sigma_1, 1, 0} \circ P_{\sigma_1, 0, 1} \circ [q_0, p_0, X] - [q_0, p_0, X]^{-1} \circ P_{\sigma_1, 1, 0} \circ [q_1, p_1, X] \circ P_{\sigma_1, 0, 1} \| \\ & \leq \| [q_0, p_0, X]^{-1} \circ P_{\sigma_1, 1, 0} \| \| P_{\sigma_1, 0, 1} \circ [q_0, p_0, X] - [q_1, p_1, X] \circ P_{\sigma_1, 0, 1} \| \\ & \leq \| [q_0, p_0, X]^{-1} \| \| P_{\sigma_1, 1, 0} \| \| [q_1, p_1, X] \circ P_{\sigma_1, 0, 1} - P_{\sigma_1, 0, 1} \circ [q_0, p_0, X] \| \\ & \leq \| [q_0, p_0, X]^{-1} \| \| [q_1, p_1, X] \circ P_{\sigma_1, 0, 1} - P_{\sigma_1, 0, 1} \circ [q_0, p_0, X] \| \\ & \leq \| [q_0, p_0, X]^{-1} \| \omega(d(q_0, q_1), d(p_0, p_1)) \end{aligned}$$

utilizando lema 3.23,

$$\begin{aligned} \| [q_0, p_0, X]^{-1} \| \omega(d(q_0, q_1), d(p_0, p_1)) & \leq \beta \omega((\lambda \|v_0\| + (1 - \lambda)\alpha), R) \\ & \leq \beta \omega((\lambda \eta + (1 - \lambda)\alpha), R) \\ & \leq \beta \omega((R + (1 - \lambda)\alpha), R) \\ & < 1, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\|I_{T_{p_0}} - [q_0, p_0, X]^{-1} \circ P_{\sigma_1, 1, 0} \circ [q_1, p_1, X] \circ P_{\sigma_1, 0, 1}\| < 1,$$

aplicando el lema de Banach 71, existe

$$([q_1, p_1, X] \circ P_{\sigma_1, 0, 1})^{-1} = P_{\sigma_1, 1, 0} \circ [q_1, p_1, X]^{-1},$$

y ademas

$$\| [q_1, p_1, X] \|^{-1} \leq \frac{\beta}{1 - \beta \omega(\lambda \eta + (1 - \lambda)\alpha, \eta)}. \quad (3.29)$$

Por otra parte, si  $n = 1$ , entonces por el lema 90

$$X(p_1) = ([p_0, p_1, X] \circ P_{\sigma_1, 0, 1} - P_{\sigma_1, 0, 1} \circ [q_0, p_0, X])(v_0),$$

luego

$$\begin{aligned} \|X(p_1)\| & \leq \| [p_0, p_1, X] \circ P_{\sigma_1, 0, 1} - P_{\sigma_1, 0, 1} \circ [q_0, p_0, X] \| \|v_0\| \\ & \leq \omega(d(p_0, q_0), d(p_0, p_1)) d(p_0, p_1), \end{aligned}$$

como  $d(p_1, p_0) < \eta$  y por (3.26)

$$\begin{aligned} \omega((1-\lambda)\alpha, \eta) d(p_0, p_1) &\leq \omega(\lambda\|v_0\| + (1-\lambda)\alpha, \eta) d(p_0, p_1) \\ &\leq \omega(R + (1-\lambda)\alpha, \eta) d(p_0, p_1) \\ &\leq \omega(R + (1-\lambda)\alpha, R) d(p_0, p_1), \end{aligned}$$

luego

$$\|X(p_1)\| \leq \omega(R + (1-\lambda)\alpha, R) d(p_0, p_1). \quad (3.30)$$

Por otra parte utilizando el método (3.19) para  $n = 1$ , 3.28 y 50 tenemos

$$\begin{aligned} d(p_2, p_1) &= \|v_1\| \\ &\leq \left\| [q_1, p_1, X]^{-1} X(p_1) \right\| \\ &\leq \left\| [q_1, p_1, X] \right\|^{-1} \|X(p_1)\| \\ &\leq \frac{\beta\omega((1-\lambda)\alpha, \eta)}{1 - \beta\omega(\lambda\eta + (1-\lambda)\alpha, \eta)} d(p_1, p_0) \\ &\leq ad(p_1, p_0), \end{aligned}$$

por lo tanto

$$d(p_2, p_1) \leq ad(p_1, p_0). \quad (3.31)$$

Por lema (3.28) y la anterior desigualdad obtenemos

$$\begin{aligned} d(p_2, p_0) &\leq d(p_2, p_1) + d(p_1, p_0) \\ &\leq \left[ \frac{\beta\omega((1-\lambda)\alpha, \eta)}{1 - \beta\omega(\lambda\eta + (1-\lambda)\alpha, \eta)} + 1 \right] d(p_1, p_0) \\ &\leq (a+1)\eta, \end{aligned}$$

además, como  $R$  es una raíz de (3.20), entonces

$$\begin{aligned} R &= \left( \frac{a}{1-b} + 1 \right) \eta \\ &= \left( \frac{ab}{1-b} + a + 1 \right) \eta \\ &= \left( \frac{ab}{1-b} \right) \eta + (a+1)\eta + \eta. \end{aligned}$$

dado que  $\left( \frac{ab}{1-b} \right) \eta > 0$  y  $(a+1)\eta > 0$ , entonces  $(a+1)\eta < R$  por lo tanto

$$d(p_2, p_0) < R, \quad (3.32)$$

es decir que

$$P_2 \in B(p_0, R).$$

Ahora probemos que  $[q_2, p_2, X]$  es invertible, para ello definimos la geodésica  $\theta$  que une a  $p_0 \in M$  con punto  $p_2 \in M$ , es decir  $\theta(0) = p_0$  y  $\theta(1) = p_2$ , así

$$\begin{aligned} & \|I_{T_{p_0}} - [q_0, p_0, X]^{-1} \circ P_{\theta,1,0} \circ [q_2, p_2, X] \circ P_{\theta,0,1}\| \\ & \leq \left\| [q_0, p_0, X]^{-1} \circ P_{\theta,1,0} \circ P_{\theta,0,1} \circ [q_0, p_0, X] - [q_0, p_0, X]^{-1} \circ P_{\theta,1,0} \circ [q_2, p_2, X] \circ P_{\theta,0,1} \right\| \\ & \leq \left\| [q_0, p_0, X]^{-1} \circ P_{\theta,1,0} \right\| \left\| P_{\theta,0,1} \circ [q_0, p_0, X] - [q_2, p_2, X] \circ P_{\theta,0,1} \right\| \\ & \leq \left\| [q_0, p_0, X]^{-1} \right\| \left\| P_{\theta,1,0} \right\| \left\| [q_2, p_2, X] \circ P_{\theta,0,1} - P_{\theta,1,0} \circ [q_0, p_0, X] \right\| \\ & \leq \left\| [q_0, p_0, X]^{-1} \right\| \left\| [q_2, p_2, X] \circ P_{\theta,0,1} - P_{\theta,1,0} \circ [q_0, p_0, X] \right\| \\ & \leq \left\| [q_0, p_0, X]^{-1} \right\| \omega(d(q_2, q_0), d(p_2, p_0)), \end{aligned}$$

por (3.23) y (3.28), obtenemos

$$\begin{aligned} \left\| [q_0, p_0, X]^{-1} \right\| \omega(d(q_2, q_0), d(p_2, p_0)) & \leq \beta \omega(d(q_2, q_0), d(p_2, p_0)) \\ & \leq \beta \omega(d(q_0, p_0) + d(p_1, p_0) + d(q_2, p_1), d(p_2, p_0)) \\ & = \beta \omega\left(\left((1-\lambda)\alpha + \eta + \int_0^\lambda \|\sigma'_2(t)\| dt\right), R\right) \\ & = \beta \omega\left(\left((1-\lambda)\alpha + \eta + \int_0^\lambda \|v_1\| dt\right), R\right) \\ & = \beta \omega\left(\left((1-\lambda)\alpha + \eta + \lambda \|v_1\|\right), R\right) \\ & = \beta \omega\left(\left((1-\lambda)\alpha + \eta + \lambda ad(p_2, p_0)\right), R\right) \\ & = \beta \omega\left(\left((1-\lambda)\alpha + \lambda a\eta + \eta\right), R\right) \\ & \leq \beta \omega\left(\left((1-\lambda)\alpha + \eta(1+a)\right), R\right) \\ & \leq \beta \omega\left(\left((1-\lambda)\alpha + R, R\right)\right) \\ & < 1, \end{aligned}$$

luego

$$\left\| I_{T_{p_0}} - [q_0, p_0, X]^{-1} \circ P_{\theta,1,0} \circ [q_2, p_2, X] \circ P_{\theta,0,1} \right\| < 1,$$

por el lema 71, existe  $([q_2, p_2, X] \circ P_{\theta,0,1})^{-1}$ , así existe  $[q_2, p_2, X]^{-1}$ , además

$$\begin{aligned} \|[q_2, p_2, X]\|^{-1} & = \|P_{\theta,1,0} \circ [q_2, p_2, X]^{-1}\| \\ & \leq \frac{\beta}{1 - \beta \omega(R + (1-\lambda)\alpha, \eta)}. \end{aligned} \tag{3.33}$$

De otro lado, por el lema 90 con  $n = 2$  y el hecho de que  $q_1$  es un punto de la geodésica

que une  $p_0$  con  $p_1$

$$\begin{aligned}
\|X(p_2)\| &\leq \|[p_1, p_2, X] \circ P_{\sigma_2, 0, 1} - P_{\sigma_2, 0, 1} \circ [q_1, p_1, X]\| \|v_1\| \\
&\leq \omega(d(p_1, q_1), d(p_2, p_1)) d(p_2, p_1), \\
&= \omega(d(p_0, p_1) - d(p_0, q_1), d(p_2, p_1)) d(p_2, p_1) \\
&\leq \omega(\|v_0\| - \lambda \|v_0\|, a\eta) d(p_2, p_1) \\
&\leq \omega((1 - \lambda)\eta, a\eta) d(p_2, p_1),
\end{aligned}$$

note que

$$\beta\omega(\lambda\eta + (1 - \lambda)\alpha, \eta) \leq \beta\omega(R + (1 - \lambda)\alpha, R) \leq \frac{1}{2},$$

y como

$$1 - \beta\omega(\lambda\eta + (1 - \lambda)\alpha, \eta) > 0,$$

entonces

$$\frac{\beta\omega(\lambda\eta + (1 - \lambda)\alpha, \eta)}{1 - \beta\omega(\lambda\eta + (1 - \lambda)\alpha, \eta)} \leq 1$$

es decir

$$a \leq 1,$$

además como  $\omega$  es creciente entonces

$$\omega((1 - \lambda)\eta, a\eta) d(p_2, p_1) \leq \omega((1 - \lambda)\eta, \eta) d(p_2, p_1)$$

por lo tanto

$$\|X(p_2)\| \leq \omega((1 - \lambda)\eta, \eta) d(p_2, p_1). \quad (3.34)$$

Por método (3.1), para  $n = 3$

$$\begin{aligned}
d(p_3, p_2) &= \|v_2\| \\
&\leq \|[q_2, p_2, X]^{-1} X(p_2)\| \\
&\leq \|[q_2, p_2, X]\|^{-1} \|X(p_2)\| \\
&\leq \frac{\beta\omega((1 - \lambda)\eta, a\eta)}{1 - \beta\omega(R + (1 - \lambda)\alpha, R)} d(p_2, p_1) \\
&\leq b d(p_2, p_1),
\end{aligned}$$

así

$$d(p_3, p_2) \leq b d(p_2, p_1). \quad (3.35)$$

Además

$$\begin{aligned}
 d(p_3, p_0) &\leq d(p_3, p_2) + d(p_2, p_0) \\
 &\leq bd(p_2, p_1) + d(p_2, p_0) \\
 &\leq bad(p_1, p_0) + (1+a)\eta \\
 &\leq ba\eta + (1+a)\eta \\
 &\leq \eta(ba + a + 1),
 \end{aligned}$$

notemos que

$$\begin{aligned}
 R &= \left( \frac{ab}{1-b} + a + 1 + ba - a - ab \right) \eta \\
 &= \eta(ba + a + 1) + \eta \left( \frac{a}{1-b} - a - ab \right),
 \end{aligned}$$

y dado que  $b < 1$ , entonces

$$\eta \left( \frac{b}{1-b} - a - ab \right) > 0,$$

lo que implica que

$$\eta(ba + a + 1) < R,$$

concluimos que

$$d(p_3, p_0) \leq \eta(ba + a + 1).$$

Ahora probemos 2

$$\begin{aligned}
 d(q_2, p_0) &\leq d(q_2, q_1) + d(q_1, p_0) && (3.36) \\
 &\leq \lambda \|v_1\| + (1-\lambda) \|v_0\| + \lambda \|v_0\| \\
 &= \lambda \|v_1\| + \|v_0\| \\
 &\leq d(p_2, p_1) + d(p_1, p_0) \\
 &\leq ad(p_1, p_0) + d(p_1, p_0) \\
 &\leq (a+1)\eta \\
 &\leq \left[ \frac{a}{1-b} + 1 \right] \eta < R.
 \end{aligned}$$

■

**Lema 93** *Bajo las hipótesis de teorema 89, para todo  $n \geq 2$ :*

$$i_n) \quad d(p_n, p_0) < R.$$

$$ii_n) \quad d(q_n, p_0) \leq \left[ \frac{a}{1-b} + 1 \right] \eta < R.$$

iii\_n) Existe  $[q_n, p_n, X]^{-1}$  tal que

$$\begin{aligned} \left\| [q_n, p_n, X]^{-1} \right\| &\leq \frac{\beta}{1 - \beta\omega(d(q_n, q_0), d(p_n, p_0))} \\ &\leq \frac{\beta}{(1 - \beta\omega(R + (1 - \lambda)\alpha, R))}. \end{aligned}$$

$$iv_n) \quad \|X(p_n)\| \leq \omega((1 - \lambda)\eta, \eta) d(p_n, p_{n-1}).$$

$$v_n) \quad d(p_{n+1}, p_n) \leq bd(p_n, p_{n-1}).$$

**Proof.** Todas estas afirmaciones ya han sido probadas para  $n = 2$ , sus demostraciones estan incluidas en el lema 92, ver (3.32, 3.33, 3.34, 3.35 y 3.36).

Supongamos que las afirmaciones  $i_n) - iv_n)$  son ciertas para todo  $n \leq K$ . Probemos que ellas son ciertas para  $n = K + 1$ . Probemos  $i_n)$  para  $n = k + 1$ .

Por definici3n del m3todo (3.19), para  $n \leq K$  y utilizando la desigualdad triangular

$$\begin{aligned} d(p_{k+1}, p_0) &\leq d(p_{k+1}, p_k) + d(p_k, p_{k-1}) + \cdots + d(p_3, p_2) + d(p_2, p_1) + d(p_1, p_0) \quad (3.37) \\ &\leq bd(p_k, p_{k-1}) + bd(p_{k-1}, p_{k-2}) + \cdots + bd(p_2, p_1) + d(p_1, p_0) \\ &\leq b^2d(p_{k-1}, p_{k-2}) + b^2d(p_{k-2}, p_{k-3}) + \cdots + b^2d(p_2, p_1) + bd(p_2, p_1) + d(p_1, p_0) \\ &\leq [b^{k-1}d(p_2, p_1) + b^{k-2}d(p_2, p_1) + \cdots + bd(p_2, p_1) + d(p_1, p_0)] \\ &\leq [b^{k-1} + b^{k-2} + \cdots + b + 1]d(p_2, p_1) + d(p_1, p_0) \\ &\leq \left[ \frac{1 - b^k}{1 - b} \right] ad(p_1, p_0) + d(p_1, p_0) \\ &\leq \left[ \frac{a}{1 - b} + 1 \right] \eta = R, \end{aligned}$$

es decir  $P_{k+1} \in B(p_0, R)$ .

Probemos ahora  $ii_n)$  para  $n = k + 1$ .

Por desigualdad triangular

$$d(q_{k+1}, p_0) \leq d(q_{k+1}, q_k) + d(q_k, q_{k-1}) + \cdots + d(q_2, q_1) + d(q_1, p_0),$$

y por lema 91, se tiene que

$$\begin{aligned} d(q_{k+1}, p_0) &\leq (\lambda \|v_k\| + (1 - \lambda) \|v_{k-1}\|) \\ &\quad + (\lambda \|v_{k-1}\| + (1 - \lambda) \|v_{k-2}\|) + \cdots + (\lambda \|v_1\| + (1 - \lambda) \|v_0\|) + \lambda \|v_0\|, \end{aligned}$$

dado que

$$\|v_{k+1}\| = d(p_{k+2}, p_{k+1}),$$

entonces

$$\begin{aligned} d(q_{k+1}, p_0) &\leq \lambda d(p_{k+1}, p_k) + (1 - \lambda) d(p_k, p_{k-1}) + \lambda d(p_k, p_{k-1}) \\ &\quad + (1 - \lambda) d(p_{k-1}, p_{k-2}) + \cdots + \lambda d(p_2, q_1) + (1 - \lambda) d(p_1, p_0) + \lambda d(p_1, p_0) \\ &= \lambda d(p_{k+1}, p_k) + d(p_k, p_{k-1}) + \cdots + d(p_1, p_0) \\ &\leq d(p_{k+1}, p_k) + d(p_k, p_{k-1}) + \cdots + d(p_1, p_0), \end{aligned}$$

Por un procedimiento analogo a prueba  $i_n$ ), se obtiene

$$d(p_{k+1}, p_k) + d(p_k, p_{k-1}) + \cdots + d(p_1, p_0) \leq \left[ \frac{a}{1-b} + 1 \right] \eta < R,$$

así

$$d(q_{k+1}, p_0) \leq \left[ \frac{a}{1-b} + 1 \right] \eta < R. \quad (3.38)$$

Probemos ahora  $iii_n$ ) para  $n = k + 1$ .

Consideremos la geodésica  $\phi$  que une  $p_0$  y  $p_n$  con  $p_0, p_n \in M$ , es decir  $\phi_n(0) = p_0$  con  $\phi_n(1) = p_n$ ,

$$\begin{aligned} &\|I_{T_{p_0}} - [q_0, p_0, X]^{-1} \circ P_{\phi,1,0} \circ [q_{k+1}, p_{k+1}, X] \circ P_{\phi,0,1}\| \\ &\leq \left\| \left\| [q_0, p_0, X]^{-1} \circ P_{\phi,1,0} \circ P_{\phi,0,1} \circ [q_0, p_0, X] - [q_0, p_0, X]^{-1} \circ P_{\phi,1,0} \circ [q_{k+1}, p_{k+1}, X] \circ P_{\phi,0,1} \right\| \right\| \\ &\leq \left\| \left\| [q_0, p_0, X]^{-1} \circ P_{\phi,1,0} \right\| \left\| P_{\phi,0,1} \circ [q_0, p_0, X] - [q_{k+1}, p_{k+1}, X] \circ P_{\phi,0,1} \right\| \right\| \\ &\leq \left\| \left\| [q_0, p_0, X]^{-1} \right\| \left\| P_{\phi,1,0} \right\| \left\| [q_{k+1}, p_{k+1}, X] \circ P_{\phi,0,1} - P_{\phi,0,1} \circ [q_0, p_0, X] \right\| \right\| \\ &\leq \left\| \left\| [q_0, p_0, X]^{-1} \right\| \left\| [q_{k+1}, p_{k+1}, X] \circ P_{\phi,0,1} - P_{\phi,0,1} \circ [q_0, p_0, X] \right\| \right\| \\ &\leq \left\| [q_0, p_0, X] \right\|^{-1} \omega(d(q_{k+1}, q_0), d(p_{k+1}, p_0)) \\ &\leq \beta \omega(d(q_{k+1}, q_0), d(p_{k+1}, p_0)) \end{aligned}$$

por otra parte usando (3.26) y (3.38) obtenemos

$$\begin{aligned} \beta \omega(d(q_{k+1}, q_0), d(p_{k+1}, p_0)) &\leq \beta \omega(d(q_0, p_0) + d(q_{k+1}, p_0), R) \\ &\leq \beta \omega\left((1 - \lambda) \alpha + \left[ \frac{a}{1-b} + 1 \right] \eta, R\right) \\ &\leq \beta \omega((1 - \lambda) \alpha + R, R) \end{aligned}$$

así

$$\begin{aligned} \left\| I_{T_{p_0}} - [q_0, p_0, X]^{-1} \circ P_{\phi_{k+1},1,0} \circ [q_{k+1}, p_{k+1}, X] \circ P_{\phi_{k+1},0,1} \right\| &\leq \beta \omega(d(q_{k+1}, q_0), d(p_{k+1}, p_0)) \\ &\quad (3.39) \\ &\leq \beta \omega((1 - \lambda) \alpha + R, R) < 1, \end{aligned}$$

por el lema 71, existe  $([q_{k+1}, p_{k+1}, X] \circ P_{\phi_{k+1}, 0, 1})^{-1}$ , así existe  $[q_{k+1}, p_{k+1}, X]^{-1}$ , además

$$\begin{aligned} \|[q_{k+1}, p_{k+1}, X]\|^{-1} &= \|P_{\phi_{k+1}, 1, 0} \circ [q_{k+1}, p_{k+1}, X]^{-1}\| \\ &\leq \frac{\beta}{1 - \beta\omega(d(q_{k+1}, q_0), d(p_{k+1}, p_0))} \\ &\leq \frac{\beta}{1 - \beta\omega((1 - \lambda)\alpha + R, R)}. \end{aligned}$$

Ahora probemos  $iv_n$ ) para  $n = k + 1$ .

Por el lema 90, y el hecho de que  $a\eta < \eta$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \|X(p_{k+1})\| &\leq \|([q_k, p_k, X] \circ P_{\sigma_{k+1}, 0, 1} - P_{\sigma_{k+1}, 0, 1} \circ [p_k, p_{k+1}, X])\| \|(v_k)\| \\ &\leq \omega(d(q_k, p_k), d(p_{k+1}, p_k)) d(p_{k+1}, p_k) \\ &\leq \omega((1 - \lambda)d(p_{k+1}, p_k), bd(p_k, p_{k-1})) d(p_{k+1}, p_k) \\ &\leq \omega\left((1 - \lambda)b^{k-2}d(p_2, p_1), b^{k-2}d(p_2, p_1)\right) d(p_{k+1}, p_k) \\ &\leq \omega((1 - \lambda)d(p_2, p_1), d(p_2, p_1)) d(p_{k+1}, p_k) \\ &\leq \omega((1 - \lambda)a\eta, a\eta) d(p_{k+1}, p_k) \\ &\leq \omega((1 - \lambda)\eta, \eta) d(p_{k+1}, p_k), \end{aligned}$$

así

$$\|X(p_{k+1})\| \leq \omega((1 - \lambda)\eta, \eta) d(p_{k+1}, p_k).$$

Ahora probemos  $v_n$ ) para  $n = k + 1$ .

Por el método (3.19)

$$\begin{aligned} d(p_{k+2}, p_{k+1}) &\leq \|[q_{k+1}, p_{k+1}, X]^{-1}\| \|X(p_{k+1})\| \\ &\leq \|[p_2, p_3, X]\|^{-1} \|X(p_{k+1})\| \\ &\leq \frac{\beta\omega\omega((1 - \lambda)\eta, \eta)}{1 - \beta\omega(R + (1 - \lambda)\alpha, R)} d(p_{k+1}, p_k) \\ &\leq bd(p_{k+1}, p_k) \\ &< \eta. \end{aligned}$$

■

A continuación demostraremos nuestro segundo resultado principal.

**Proof.** Para concluir con la prueba del teorema 89, demostremos que  $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de cauchy.

Para  $m \geq 1$  y  $n \geq 1$  se tiene

$$d(p_{n+m}, p_n) \leq d(p_{n+m}, p_{n+m-1}) + d(p_{n+m-1}, p_{n+m-2}) + \cdots + d(p_{n+1}, p_n),$$

utilizando *iv*) reiteradamente, tenemos

$$\begin{aligned}
d(p_{n+m}, p_n) &\leq bd(p_{m+n-1}, p_{n+m-2}) + bd(p_{m+n-2}, p_{n+m-3}) + \cdots + d(p_{n+1}, p_n) \\
&\leq b^{m-1}d(p_{n+1}, p_n) + b^{m-2}d(p_{n+1}, p_n) + \cdots + bd(p_{n+1}, p_n) + d(p_{n+1}, p_n) \\
&\vdots \\
&\leq [b^{m-1} + b^{m-2} + \cdots + 1]d(p_{n+1}, p_n) \\
&= \left(\frac{1-b^m}{1-b}\right) d(p_{n+1}, p_n),
\end{aligned}$$

dado que  $\left(\frac{1-b^m}{1-b}\right) \leq \left(\frac{1}{1-b}\right) b^{n-1}$ , entonces

$$d(p_{n+m}, p_n) \leq \left(\frac{b^{n-1}}{1-b}\right) d(p_3, p_2),$$

por lo tanto  $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de cauchy ya que  $b^n \rightarrow 0$  pues  $b < 1$ . Y como  $M$  es completo entonces  $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es convergente, digamos que  $p_n \rightarrow p_*$ .

Tomando limite y usando el hecho que la distancia es una función continua, se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (d(p_n, p_0)) \leq d\left(\lim_{n \rightarrow \infty} p_n, \lim_{n \rightarrow \infty} p_0\right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} R,$$

por lo tanto

$$d(p_*, p_0) \leq R,$$

lo que implica que

$$p_* \in \overline{B(p_0, R)}.$$

Veamos que  $p_*$  es una raíz de  $X$ ,

$$\|X(p_n)\| \leq \omega(1-\lambda)a\eta, a\eta) d(p_n, p_{n-1}),$$

cuando  $n \rightarrow \infty$ , entonces  $d(p_n, p_{n-1}) \rightarrow 0$ . Por lo tanto

$$\|X(p_*)\| = 0.$$

Finalmente probemos la unicidad, Supongamos que existe una segunda raíz,  $q_* \in \overline{B(p_0, R)}$ , veamos primero que el operador  $[q_*, p_*, X]$  es invertible. Consideremos  $\phi$  la geodésica que une  $\phi(0) = p_0$  con  $\phi(1) = p_*$ , entonces

$$\begin{aligned}
&\|I_{T_{p_0}} - [q_0, p_0, X]^{-1} \circ P_{\phi,1,0} \circ [q_*, p_*, X] \circ P_{\phi,0,1}\| \\
&\leq \left\| [q_0, p_0, X]^{-1} \circ P_{\phi,1,0} \circ P_{\phi,0,1} \circ [q_0, p_0, X] - [q_0, p_0, X]^{-1} \circ P_{\phi,1,0} \circ [q_*, p_*, X] \circ P_{\phi,0,1} \right\| \\
&\leq \left\| [q_0, p_0, X]^{-1} \circ P_{\phi,1,0} \right\| \|P_{\phi,0,1} \circ [q_0, p_0, X] - [q_*, p_*, X] \circ P_{\phi,0,1}\| \\
&\leq \left\| [q_0, p_0, X]^{-1} \right\| \|P_{\phi,1,0}\| \|[q_*, p_*, X] \circ P_{\phi,0,1} - P_{\phi,0,1} \circ [q_0, p_0, X]\| \\
&\leq \left\| [q_0, p_0, X]^{-1} \right\| \|[q_*, p_*, X] \circ P_{\phi,0,1} - P_{\phi,0,1} \circ [q_0, p_0, X]\| \\
&\leq \|[q_0, p_0, X]\|^{-1} \omega(d(q_*, q_0), d(p_*, p_0)) \\
&\leq \|[q_0, p_0, X]\|^{-1} \beta\omega(d(q_*, p_0) + d(p_0, q_0), d(p_*, p_0)),
\end{aligned}$$

cuando  $n \rightarrow \infty$ , entonces

$$\begin{aligned} \beta\omega(d(q_*, p_0) + d(p_0, q_0), d(p_*, p_0)) &= \beta\omega\left(d\left(\lim_{n \rightarrow \infty} p_n, p_0\right) + d(p_0, q_0), d\left(\lim_{n \rightarrow \infty} p_n, p_0\right)\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \beta\omega(d(p_n, p_0) + d(p_0, q_0), d(p_n, p_0)) \\ &\leq \beta\omega(R + (1 - \lambda)\alpha, R) \\ &< 1, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\|I_{T_{p_0}} - [q_0, p_0, X]^{-1} \circ P_{\phi, 1, 0} \circ [q_*, p_*, X] \circ P_{\phi, 0, 1}\| < 1,$$

aplicando el lema 71, tenemos que existe

$$([q_*, p_*, X] \circ P_{\phi, 1, 0})^{-1}$$

y como

$$([q_*, p_*, X] \circ P_{\phi, 1, 0})^{-1} = P_{\phi, 0, 1} \circ [q_*, p_*, X]^{-1},$$

entonces  $[q_*, p_*, X]^{-1}$  existe, ahora consideremos la geodésica  $\varphi$  que une  $p_*$  y  $q_*$ , es decir,  $\varphi(0) = p_*$  con  $\varphi(1) = q_*$ , y como

$$[\varphi(0), \varphi(1), X] \circ P_{\varphi, 0, 1}(\varphi'(0)) = (X(\varphi(1)) - P_{\varphi, 0, 1}(X(\varphi(0))))).$$

entonces

$$[q_*, p_*, X] \circ P_{\varphi, 0, 1}(\varphi'(0)) = 0,$$

y como  $[q_*, p_*, X]$  y  $P_{\varphi, 0, 1}$  son operadores lineales invertibles, entonces  $\varphi'(0) = 0 \in T_{p_*}M$ , luego

$$d(q_*, p_*) = \|\varphi'(0)\| = 0,$$

concluimos que

$$q_* = p_*.$$

■

### 3.3.2. Orden de Convergencia para una familia de Métodos tipo Secante sobre Variedades Riemannianas

El análisis del orden de convergencia para una familia de Métodos tipo Secante Variedades Riemannianas, se realizará de manera local, es decir, en un vecindad de una singularidad del campo vectorial que estamos considerando. Podemos definir el orden de convergencia, en variedades Riemannianas como en (3.14).

**Teorema 94** *Bajo las hipótesis del 89, la siguiente estimación de el orden de convergencia para una familia de métodos tipo secante es cierta.*

$$d(p_{n+1}, p_*) \leq \frac{\beta\omega(d(q_n, p_n), d(p_n, p_*))}{1 - \beta\omega(d(q_n, p_0), d(p_n, p_0))} d(p_n, p_*), \text{ para todo } n \geq 0,$$

es más,

$$d(p_{n+1}, p_*) \leq \frac{\beta\omega(\alpha + R, 2R)}{1 - \beta\omega(\alpha + R, R)} d(p_n, p_*).$$

**Proof.** Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que  $U$  es una vecindad normal de tal forma que  $p_k, p_{k+1}, \dots, p_* \in U$  para  $k$  suficientemente grande. Luego se cumple, (3.14) para todo  $p, q \in U$  y para todo  $k$ . así, si  $\mu_k \in T_{p_k}M$  satisface  $\exp_{p_k}(\mu_k) = p_*$ , entonces

$$\beta_k(t) = \exp_{p_k}(t\mu_k),$$

es una geodésica minimizante que une  $p_k$  con  $p_*$  y  $d(p_k, p_*) = \|\mu_k\|$ . Por lo tanto, por (80),

$$[\beta_k(0), \beta_k(1); X]P_{\beta_k,0,1}(\beta'_k(0)) = X(\beta_k(1)) - P_{\beta_k,0,1}(X(\beta_k(0))),$$

o su equivalente

$$\begin{aligned} [p_k, p_*; X]P_{\beta_k,0,1}(\mu_k) &= X(p_*) - P_{\beta_k,0,1}(X(p_k)) \\ &= -P_{\beta_k,0,1}(X(p_k)), \end{aligned}$$

ya que  $X(p_*) = 0$  y  $d(\exp_q)_0$  es la identidad de  $T_qM$  para todo  $q \in M$ . Concluimos que

$$X(p_k) = -P_{\beta_k,1,0} \circ [p_k, p_*; X] \circ P_{\beta_k,0,1}(\mu_k),$$

de ahí que

$$-[q_k, p_k; X]^{-1}(X(p_k)) = [q_k, p_k; X]^{-1} \circ P_{\beta_k,1,0} \circ [p_k, p_*; X] \circ P_{\beta_k,0,1}(\mu_k),$$

por (3.19)

$$v_k = [q_k, p_k; X]^{-1} \circ P_{\beta_k,1,0} \circ [p_k, p_*; X] \circ P_{\beta_k,0,1}(\mu_k),$$

por otra parte

$$v_k - \mu_k = \left( [q_k, p_k; X]^{-1} \circ P_{\beta_k,1,0} \circ [p_k, p_*; X] \circ P_{\beta_k,0,1} - I_{T_{p_k}M} \right) (\mu_k),$$

usando (3.19) y (3.15),

$$\begin{aligned} d(p_{k+1}, p_*) &= \|\exp_{p_k}^{-1}(p_{k+1}) - \exp_{p_k}^{-1}(p_*)\| \\ &= \|v_k - \mu_k\| \\ &= \left\| \left( [q_k, p_k; X]^{-1} \circ P_{\beta_k,1,0} \circ [p_k, p_*; X] \circ P_{\beta_k,0,1} - I_{T_{p_k}M} \right) (\mu_k) \right\| \\ &\leq \left\| [q_k, p_k; X]^{-1} \circ P_{\beta_k,1,0} \circ [p_k, p_*; X] \circ P_{\beta_k,0,1} - I_{T_{p_k}M} \right\| \|\mu_k\| \\ &\leq \left\| [q_k, p_k; X]^{-1} \circ P_{\beta_k,1,0} \circ [p_k, p_*; X] \circ P_{\beta_k,0,1} - I_{T_{p_k}M} \right\| d(p_k, p_*). \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
& \left\| [q_k, p_k; X]^{-1} \circ P_{\beta_k, 1, 0} \circ [p_k, p_*; X] \circ P_{\beta_k, 0, 1} - I_{T_{p_k} M} \right\| \\
& \leq \left\| [q_k, p_k; X]^{-1} \circ P_{\beta_k, 1, 0} \right\| \left\| [p_k, p_*; X] \circ P_{\beta_k, 0, 1} - P_{\beta_k, 0, 1} \circ [q_k, p_k; X] \right\| \\
& \leq \frac{\beta}{1 - \beta\omega(d(q_k, p_0), d(p_k, p_0))} \left\| [p_k, p_*; X] \circ P_{\beta_k, 0, 1} - P_{\beta_k, 0, 1} \circ [q_k, p_k; X] \right\| \\
& \leq \frac{\beta\omega(d(q_k, p_k), d(p_k, p_*))}{1 - \beta\omega(d(q_k, p_0), d(p_k, p_0))}.
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$d(p_{k+1}, p_*) \leq \left\| [q_k, p_k; X]^{-1} \circ P_{\beta_k, 1, 0} \circ [p_k, p_*; X] \circ P_{\beta_k, 0, 1} - I_{T_{p_k} M} \right\| d(p_k, p_*),$$

concluimos que:

$$\begin{aligned}
d(p_{k+1}, p_*) & \leq \frac{\beta\omega(d(q_k, p_k), d(p_k, p_*))}{1 - \beta\omega(d(q_k, p_0), d(p_k, p_0))} d(p_k, p_*), \\
& \leq \frac{\beta\omega(\alpha + R, 2R)}{1 - \beta\omega(\alpha + R, R)} d(p_k, p_*).
\end{aligned}$$

■

Observemos que la anterior desigualdad implica que el el orden de convergencia para nuestra familia de métodos tipo secante sobre variedades Riemannianas es al menos 1, Sin embargo es deseable encontrar una desigualdad del tipo

$$d(p_{k+1}, p_*) \leq k(\lambda) d(p_k, p_*),$$

donde

$$k(\lambda) \longrightarrow c_1 d(p_k, p_*), \text{ cuando } \lambda \longrightarrow 1,$$

y

$$k(\lambda) \longrightarrow c_2 [d(p_k, p_*)]^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}, \text{ cuando } \lambda \longrightarrow 0.$$

## Capítulo 4

# Ejemplo numérico

En esta sección, haremos un ejemplo numérico para hallar las singularidades de un campo vectorial, usando el método tipo secante sobre variedades Riemannianas y las diferencias divididas (96) sobre la esfera  $S^2$ , para ello es necesario establecer una formula explicita para el transporte paralelo de un campo vectorial a lo largo de una geodésicas sobre  $S^2$ , más generalmente hallaremos una formula para el transporte paralelo de un campo vectorial a lo largo de una geodésicas sobre cualquier variedad dos dimensional inmersa en  $\mathbb{R}^3$ .

### 4.1. Método tipo secante sobre $S^2$

**Lema 95** Sea  $X$  un campo vectorial sobre una subvariedad dos-dimensional  $M \subset \mathbb{R}^3$  y  $P_{\gamma,0,1}X(p)$  el transporte paralelo de  $X(p)$  a lo largo de la geodésica  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  que une  $\gamma(t_1)$  con  $\gamma(t_2)$ , y sea  $\theta$  el angulo formado entre el vector tangente  $\gamma'(t_1)$  a la curva en  $\gamma(t_1)$  y el vector  $X(\gamma(t_1))$ , entonces

$$P_{\gamma,0,1}X(\gamma(t_1)) = \|X(\gamma(t_1))\| \left[ \frac{\gamma'(t_2)}{\|\gamma'(t_2)\|} \cos \theta + \frac{N_{\gamma(t_2)} \times \gamma'(t_2)}{\|N_{\gamma(t_2)} \times \gamma'(t_2)\|} \sin \theta \right]$$

En particular si  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  es la geodésica que une  $p$  con  $q$ , y sea  $\theta$  el angulo formado entre el vector tangente  $\gamma'(0)$  a la curva en  $p$  y el vector  $X(p)$ , entonces

$$P_{\gamma,0,1}X(p) = \|X(p)\| \left[ \frac{\gamma'(1)}{\|\gamma'(1)\|} \cos \theta + \frac{N_q \times \gamma'(1)}{\|N_q \times \gamma'(1)\|} \sin \theta \right],$$

donde  $N_p$  es el vector normal a  $M$  en el punto  $p$ .

**Proof.** Definamos  $\widehat{X}(\gamma(t_2)) = P_{\gamma,t_1,t_2}X(\gamma(t_1))$ , notemos que  $\widehat{X}(\gamma(t_2)) \in T_{\gamma(t_2)}M$ , dado que el vector tangente a una geodésica  $\gamma$  siempre es paralelo a lo largo de esta

geodésica dada, entonces

$$P_{\gamma, t_1, t_2} \gamma'(t_1) = \gamma'(t_2),$$

además como  $N(\gamma(t_2)) \perp T_{\gamma(t_2)}M$  entonces  $N(\gamma(t_2)) \times \gamma'(t_2)$  es un vector tangente de  $T_{\gamma(t_2)}M$  por lo que el conjunto

$$\left\{ \frac{\gamma'(t_2)}{\|\gamma'(t_2)\|}, \frac{N_{\gamma(t_2)} \times \gamma'(t_2)}{\|N_{\gamma(t_2)} \times \gamma'(t_2)\|} \right\}$$

es una base de  $T_{\gamma(t_2)}M$ , supongamos que la representación de  $\widehat{X}(\gamma(t_2))$  en dicha base está dada por

$$\widehat{X}(\gamma(t_2)) = \lambda_1 \frac{\gamma'(t_2)}{\|\gamma'(t_2)\|} + \lambda_2 \frac{N_{\gamma(t_2)} \times \gamma'(t_2)}{\|N_{\gamma(t_2)} \times \gamma'(t_2)\|}$$

por lo tanto

$$\lambda_1 = \left\langle \widehat{X}(\gamma(t_2)), \frac{\gamma'(t_2)}{\|\gamma'(t_2)\|} \right\rangle,$$

como el transporte paralelo es una isometría, entonces  $\theta$  es el ángulo formado entre el vector  $\widehat{X}(\gamma(t_2))$  y el vector  $\gamma'(t_2)$ , por lo que

$$\|\widehat{X}(\gamma(t_2))\| \|\gamma'(t_2)\| \cos \theta = \left\langle \widehat{X}(\gamma(t_2)), \gamma'(t_2) \right\rangle,$$

por lo tanto

$$\|\widehat{X}(\gamma(t_2))\| \cos \theta = \left\langle \widehat{X}(\gamma(t_2)), \frac{\gamma'(t_2)}{\|\gamma'(t_2)\|} \right\rangle,$$

y como

$$\|\widehat{X}(\gamma(t_2))\| = \|X(\gamma(t_1))\|,$$

esto pues

$$\widehat{X}(\gamma(t_2)) = P_{\gamma, t_1, t_2} X(\gamma(t_1)),$$

entonces

$$\lambda_1 = \|X(\gamma(t_1))\| \cos \theta.$$

De manera similar se puede probar que

$$\lambda_2 = \|X(\gamma(t_1))\| \sin \theta,$$

así concluimos que

$$\widehat{X}(\gamma(t_2)) = \|X(\gamma(t_1))\| \cos \theta \frac{\gamma'(t_2)}{\|\gamma'(t_2)\|} + \|X(\gamma(t_1))\| \sin \theta \frac{N_{\gamma(t_2)} \times \gamma'(t_2)}{\|N_{\gamma(t_2)} \times \gamma'(t_2)\|},$$

es decir

$$P_{\gamma, t_1, t_2} X(\gamma(t_1)) = \|X(\gamma(t_1))\| \left( \cos \theta \frac{\gamma'(t_2)}{\|\gamma'(t_2)\|} + \sin \theta \frac{N_{\gamma(t_2)} \times \gamma'(t_2)}{\|N_{\gamma(t_2)} \times \gamma'(t_2)\|} \right).$$

En particular si  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  es la geodésica que une  $p$  con  $q$ , y sea  $\theta$  el ángulo formado entre el vector tangente  $\gamma'(0)$  a la curva en  $p$  y el vector  $X(p)$ , entonces

$$P_{\gamma, 0, 1} X(p) = \|X(p)\| \left[ \frac{\gamma'(1)}{\|\gamma'(1)\|} \cos \theta + \frac{N_q \times \gamma'(1)}{\|N_q \times \gamma'(1)\|} \sin \theta \right],$$

donde  $N_p$  es el vector normal a  $M$  en el punto  $p$ . ■

Mediante esta Figura 4.1 ilustramos el concepto transporte paralelo necesario para nuestro ejemplo.

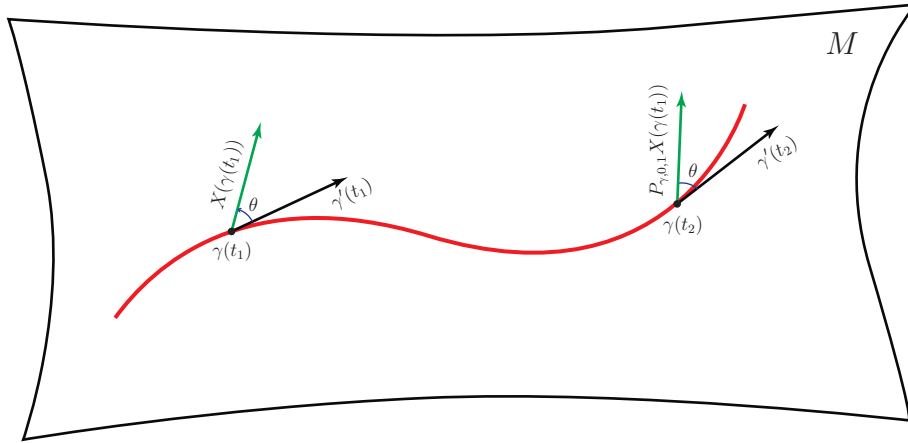


Figura 4.1: Interpretación geométrica del transporte paralelo

**Observación 96** *Construyamos unas nuevas diferencias divididas sobre una variedad  $M$ , y con ellas fabricaremos un algoritmo usando el método tipo secante.*

*Supongamos que  $M$  es una variedad 2-dimENSIONAL y  $\beta_p = \{e_p^1, e_p^2\}$  es una base de  $T_p M$ , sea  $\tilde{w}$  un elemento arbitrario de  $T_p M$  digamos*

$$\tilde{w} = \beta_1 e_p^1 + \beta_2 e_p^2 \quad , \quad \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R} \quad ,$$

*Además supongamos que  $\gamma : I \rightarrow M$  es una geodésica que une  $q$  y  $p$  y supongamos que*

$$[\gamma'_k(1)]_{\beta_p} = \lambda_1 e_p^1 + \lambda_2 e_p^2,$$

definamos el nuevo operador

$$[q, p, X] : T_p M \longrightarrow T_p M$$

diferencias divididas de la siguiente forma: Sean

$$\begin{aligned} C_1 &= \Pi_1 \left( [X(p) - P_{\gamma,0,1} X(q)]_{\beta_p} \right) \\ C_2 &= \Pi_2 \left( [X(p) - P_{\gamma,0,1} X(q)]_{\beta_p} \right), \end{aligned}$$

donde

$$\Pi_1, \Pi_2 : T_p M \longrightarrow \mathbb{R},$$

son la primeras y segundas proyecciones en  $T_p M$  respectivamente, así  $[q, p, X]$  es el operador lineal sobre  $T_p M$  cuya representación en la base de  $T_p M$  es:

$$[q, p, X]_{\beta_p} (\tilde{w}) = \begin{cases} \begin{pmatrix} \frac{C_1}{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \frac{C_2}{\lambda_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}, & \text{si } \lambda_1, \lambda_2 \neq 0 \\ \begin{pmatrix} \frac{C_1}{\lambda_1} & 0 \\ \frac{C_2}{\lambda_1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}, & \text{si } \lambda_2 = 0 \\ \begin{pmatrix} 0 & \frac{C_1}{\lambda_2} \\ 0 & \frac{C_2}{\lambda_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}, & \text{si } \lambda_1 = 0 \end{cases} . \quad (4.1)$$

En efecto  $[q, p, X]$  son diferencias divididas pues

$$\begin{aligned} [q, p, X]_{\beta_p} [\gamma'(1)]_{\beta_p} &= \begin{cases} \begin{pmatrix} \frac{C_1}{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \frac{C_2}{\lambda_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}, & \text{si } \lambda_1, \lambda_2 \neq 0 \\ \begin{pmatrix} \frac{C_1}{\lambda_1} & 0 \\ \frac{C_2}{\lambda_1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \end{pmatrix}, & \text{si } \lambda_2 = 0 \\ \begin{pmatrix} 0 & \frac{C_1}{\lambda_2} \\ 0 & \frac{C_2}{\lambda_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}, & \text{si } \lambda_1 = 0 \end{cases} \\ &= \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \Pi_1 \left( [X(p) - P_{\gamma,0,1} X(q)]_{\beta_{p_k}} \right) \\ \Pi_2 \left( [X(p) - P_{\gamma,0,1} X(q)]_{\beta_{p_k}} \right) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

por lo que

$$[q, p, X] (\gamma'(1)) = (X(p) - P_{\gamma,0,1} X(q)).$$

**Ejemplo 97** (Descripción de el método tipo secante sobre una variedad  $M$ ). Para poder ejemplificar el método tipo secante es necesario que nuestro operador diferencias divididas sea invertible, por lo que supondremos que  $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$  en (4.1). Supongamos que  $M$  es una variedad 2-dimensional y  $\beta_{p_k} = \{e_{p_k}^1, e_{p_k}^2\}$  es una base de  $T_{p_k} M$ , sea  $\tilde{w}$  un elemento arbitrario de  $T_{p_k} M$ , y digamos

$$\tilde{w} = \beta_1 e_{p_k}^1 + \beta_2 e_{p_k}^2,$$

donde  $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ , supongamos además que

$$[\gamma'_k(1)]_{\beta_{p_k}} = \lambda_1^k e_{p_k}^1 + \lambda_2^k e_{p_k}^2,$$

así el operador

$$[p_{k-1}, p_k, X] : T_{p_k} M \longrightarrow T_{p_k} M,$$

diferencias divididas quedará definido por

$$[p_{k-1}, p_k, X]_{\beta_{p_k}} [\gamma'_k(1)]_{\beta_{p_k}} = \begin{pmatrix} \frac{C_1^k}{\lambda_1^k} & 0 \\ 0 & \frac{C_2^k}{\lambda_2^k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^k \\ \lambda_2^k \end{pmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned} C_1^k &= \Pi_{1,k} \left( [X(p_k) - P_{\gamma_k,0,1} X(p_{k-1})]_{\beta_{p_k}} \right) \\ C_2^k &= \Pi_{2,k} \left( [X(p_k) - P_{\gamma_k,0,1} X(p_{k-1})]_{\beta_{p_k}} \right) \end{aligned}$$

y  $\Pi_{1,k}, \Pi_{2,k} : T_{p_k} M \longrightarrow \mathbb{R}$  son las primeras y segundas proyecciones sobre  $T_{p_k} M$  respectivamente en la base  $\beta_{p_k}$ , Supongamos que

$$[X(p_k)]_{\beta_{p_k}} = (g_1(p_k), g_2(p_k)),$$

luego por lema 95

$$\begin{aligned} C_i^k &= \Pi_{i,k} \left( \left[ X(p_k) - \|X(p_{k-1})\| \left( \cos \theta \frac{\gamma'_k(1)}{\|\gamma'_k(1)\|} + \sin \theta \frac{N_{p_k} \times \gamma'_k(1)}{\|N_{p_k} \times \gamma'_k(1)\|} \right) \right]_{\beta_{p_k}} \right) \\ &= \Pi_{i,k} (X(p_k)) - \|X(p_{k-1})\| \Pi_{i,k} \left( \left[ \cos \theta \frac{\gamma'_k(1)}{\|\gamma'_k(1)\|} + \sin \theta \frac{N_{p_k} \times \gamma'_k(1)}{\|N_{p_k} \times \gamma'_k(1)\|} \right]_{\beta_{p_k}} \right) \\ &= \left( (g_i(p_k)) - \frac{\|X(p_{k-1})\|}{\|v_{k-1}\|} \Pi_{i,k} \left( [\gamma'_k(1) \cos \theta + N_{p_k} \times \gamma'_k(1) \sin \theta]_{\beta_{p_k}} \right) \right), \end{aligned}$$

donde  $\gamma_k$  es la geodésica que une  $p_{k-1}$  con  $p_k$ , más concretamente

$$\gamma_k(t) = \exp_{p_{k-1}}(tv_{k-1}),$$

y  $\theta$  es el ángulo formado por  $X(p_{k-1})$  y  $\gamma'_k(0) = v_{k-1}$ , luego

$$[p_{k-1}, p_k, X]_{\beta_{p_k}} = \begin{pmatrix} \frac{C_1^k}{\lambda_1^k} & 0 \\ 0 & \frac{C_2^k}{\lambda_2^k} \end{pmatrix},$$

por lo que

$$\begin{aligned} [v_k]_{\beta_{p_k}} &= -[p_{k-1}, p_k, X]^{-1}(X(p_k)) \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{\lambda_1^k}{C_1^k} & 0 \\ 0 & -\frac{\lambda_2^k}{C_2^k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1(p_k) \\ g_2(p_k) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{\lambda_1^k}{C_1^k} g_1(p_k) \\ -\frac{\lambda_2^k}{C_2^k} g_2(p_k) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

finalmente

$$p_{k+1} = \exp_{p_k}(v_k).$$

**Observación 98** Consideremos un campo vectorial  $X$  sobre  $\mathbf{S}^2$  obtenemos una restricción para el campo vectorial

$$F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

a  $T_p\mathbf{S}^2$ , donde  $T_p\mathbf{S}^2$  es naturalmente identificado como  $\mathbb{R}^3$ -subespacio, i.e.,

$$X = F|_{\mathbf{S}^2} \quad \text{and} \quad F|_{\mathbf{S}^2}(p) \in T_p\mathbf{S}^2 \quad \text{for all } p \in \mathbf{S}^2,$$

donde  $F = (f_1, f_2, f_3)$ , si consideramos la base de  $T_{p_k}\mathbf{S}^2$

$$\beta_{p_k} = \left\{ \begin{pmatrix} -p_{3k} \\ 0 \\ p_{1k} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -p_{3k} \\ p_{2k} \end{pmatrix} \right\},$$

entonces

$$[X(p_k)]_{\beta_{p_k}} = \begin{pmatrix} -\frac{f_1(p_k)}{p_{3k}} \\ -\frac{f_2(p_k)}{p_{3k}} \end{pmatrix},$$

y como  $N_{p_k} = p_k$  sobre  $S^2$ , entonces

$$[v_k]_{\beta_{p_k}} = \begin{pmatrix} -\frac{\lambda_1^k}{p_{3k}C_1^k} f_1(p_k) \\ -\frac{\lambda_2^k}{p_{3k}C_2^k} f_2(p_k) \end{pmatrix},$$

así

$$v_k = \begin{pmatrix} -\frac{\lambda_1^k}{C_1^k} f_1(p_k) \\ -\frac{\lambda_2^k}{C_2^k} f_2(p_k) \\ \frac{p_{1k}\lambda_1^k}{p_{3k}C_1^k} f_1(p_k) + \frac{p_{2k}\lambda_2^k}{p_{3k}C_2^k} f_2(p_k) \end{pmatrix},$$

y

$$c_i^k = \left( \left( -\frac{f_i(p_k)}{p_{3k}} \right) - \frac{\|X(p_{k-1})\|}{\|v_{k-1}\|} \Pi_{i,k} \left( [\gamma'_k(1) \cos \theta + p_k \times \gamma'_k(1) \sin \theta]_{\beta_{p_k}} \right) \right),$$

donde

$$\gamma_k(t) = \cos(t\|v_{k-1}\|) p_{k-1} + \frac{1}{\|v_{k-1}\|} \sin(t\|v_{k-1}\|) v_{k-1},$$

finalmente

$$p_{k+1} = \cos(\|v_k\|) p_k + \frac{1}{\|v_k\|} \sin(\|v_k\|) v_k.$$

**Algorithm 99** Método tipo secante sobre  $S^2$

1. Definir los puntos

$$p_{-1}, p_0, \text{ y } v_{-1},$$

tal que

$$p_0 = \cos(\|v_{-1}\|) p_{-1} + \frac{1}{\|v_{-1}\|} \sin(\|v_{-1}\|) v_{-1}.$$

2. Definir

$$X = (f_1, f_2, f_3), \text{ y } p_k = (p_{1k}, p_{2k}, p_{3k}),$$

3. Calcular

$$\gamma'_k(1) = -\|v_{k-1}\| \sin(\|v_{k-1}\|) p_{k-1} + \cos(\|v_{k-1}\|) v_{k-1} = \begin{pmatrix} a_{k1} \\ a_{k2} \\ a_{k3} \end{pmatrix},$$

4. Calcular

$$\cos \theta_{k-1} = \frac{\langle v_{k-1}, X(p_{k-1}) \rangle}{\|v_{k-1}\| \|X(p_{k-1})\|} \text{ y } \sin \theta_{k-1} = \sqrt{1 - \cos^2 \theta_k},$$

5. Calcular

$$[\gamma'_k(1)]_{\beta_{p_k}} = \begin{pmatrix} \lambda_1^k \\ \lambda_2^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{a_{k1}}{p_{k3}} \\ -\frac{a_{k2}}{p_{k3}} \end{pmatrix},$$

6. Calcular

$$[\gamma'_k(1) \cos \theta + p_k \times \gamma'_k(1) \sin \theta] = \begin{pmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ b_{3k} \end{pmatrix},$$

7. Calcular

$$\begin{aligned} c_1^k &= \begin{pmatrix} -\frac{f_i(p_k)}{p_{3k}} \end{pmatrix} + \frac{\|X(p_{k-1})\|}{\|v_{k-1}\|} \frac{b_{k1}}{p_{k3}} \\ c_2^k &= \begin{pmatrix} -\frac{f_i(p_k)}{p_{3k}} \end{pmatrix} + \frac{\|X(p_{k-1})\|}{\|v_{k-1}\|} \frac{b_{k2}}{p_{k3}} \end{aligned},$$

8. Calcular

$$v_k = \begin{pmatrix} -\frac{\lambda_1^k}{C_1^k} f_1(p_k) \\ -\frac{\lambda_2^k}{C_2^k} f_2(p_k) \\ \frac{p_{1k}\lambda_1^k}{p_{3k}C_1^k} f_1(p_k) + \frac{p_{2k}\lambda_2^k}{p_{3k}C_2^k} f_2(p_k) \end{pmatrix},$$

9. Calcular

$$p_{k+1} = \cos(\|v_k\|) p_k + \frac{1}{\|v_k\|} \sin(\|v_k\|) v_k.$$

**Ejemplo 100** Consideremos el campo vectorial

$$F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,$$

dado por

$$X \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x - xz^2 \\ xyz \end{pmatrix},$$

y sea  $X = F|_{\mathbb{S}^2}$ . Se puede verificar que  $F|_{\mathbb{S}^2} \in T_p\mathbb{S}^2$ , para todo  $p \in \mathbb{S}^2$ . Sean

$$p_{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{10} \\ \frac{3}{10} \\ -0,86603 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad p_0 = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} \\ \frac{2}{10} \\ -0,93274 \end{pmatrix},$$

y la geodésica que une el punto  $p_{-1}$  y  $p_0$  es dada por  $\gamma_0 : [0, 1] \longrightarrow M$ , tal que

$$\gamma_0(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \sin \pi \left( \frac{1}{12}t + \frac{1}{6} \right) \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \sin \pi \left( \frac{1}{12}t + \frac{1}{6} \right) \\ \cos \pi \left( \frac{1}{12}t + \frac{1}{6} \right) \end{pmatrix},$$

luego

$$\gamma'_0(0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} \\ \frac{4}{10} \\ 0,06671 \end{pmatrix} = v_{-1}.$$

La siguiente tabla muestra los resultados de las iteraciones

	0	1	10	11
$p_i$	$\begin{pmatrix} \frac{3}{10} \\ \frac{2}{10} \\ -0,93274 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,28754 \\ 0,07680 \\ -0,95468 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0,04400 \\ -0,00392 \\ 0,99902 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0,03950 \\ 0,00910 \\ 0,999177 \end{pmatrix}$
$X(p_i)$	$\begin{pmatrix} -0,30000 \\ 0,09999 \\ -0,10392 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0,20000 \\ 0,03899 \\ -0,05596 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,00205 \\ -0,00007 \\ 0,00008 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,00192 \\ -0,00008 \\ 0,00007 \end{pmatrix}$
$\ X(p_i)\ $	0,3328655510	0,21131238163	0,00205371770	0,00019098933

Note que  $(p_i)$  converge a la singularidad  $(0,0,1)^T$  del campo vectorial  $X$ .

## Capítulo 5

# Conclusión

Existe un gran interés, por estudiar los llamados métodos numéricos de alto orden de convergencia esto motivado por los avances en la ciencia de la computación. Recientemente varios matemáticos se han dedicado a mostrar la validez de estos métodos en espacios más generales que el Euclideo, tales como espacios de Banach [4, 10, 12, 13, 17, 39, 40, 41]. En este orden de generalización es lógico tener interés en demostrar la validez de esos métodos en conjuntos aún más generales que los espacios de Banach tales como variedades Riemannianas [1, 5, 6, 13, 14, 20, 26, 29, 30, 37, 39, 44, 50].<sup>3</sup>

La principal contribución de este trabajo fue la generalización del método de la secante sobre variedades Riemannianas y una familia de métodos tipo secante sobre variedades Riemannianas, los cuales pueden ser utilizados para encontrar puntos singulares de campos vectoriales sobre variedades Riemannianas. Además se obtuvieron resultados secundarios, pero no menos importantes tales como: la modificación a la extensión del concepto de diferencias divididas en el contexto de variedades Riemannianas, también obtuvimos un resultado de convergencia para el método secante en variedades Riemannianas y una Familia de Métodos Tipo Secante sobre Variedades Riemannianas bajo condiciones de convergencia suave, es decir, continuidad Lipschitz y Holder. Adicionalmente obtuvimos un resultado para la unicidad de las soluciones para el método secante sobre variedades Riemannianas y una familia de métodos tipo secante sobre variedades Riemannianas.

De este trabajo podemos extraer algunos problemas de interés para su futura investigación tales como elaborar un ejemplo para ilustrar la aplicación y utilidad de la generalización de una familia de métodos tipo secante sobre variedades Riemannianas.

En el desarrollo de estos métodos tipo secantes en variedades Riemannianas surgieron nuevas dificultades, que no existían en espacios de Banach. Algunas de estas dificultades son de naturaleza técnicas; Por ejemplo y más específicamente, en los espacios de Banach no hay distinción entre el espacio  $E$  y su espacio tangente  $T_p E$  en el punto  $p$ , ya que son isomorfos. Así es "Legítimo" poder sumar puntos y vectores. En variedades esto no

sucede, así que debemos ser muy cuidadosos. Para ello, se utilizó la función exponencial, es decir, a un punto y un vector de el espacio tangente se le asigna un nuevo punto de la variedad. Otra dificultad es la definición de la derivada; puede ser que la derivada ordinaria sea suficiente para definir los métodos en el caso en que la variedad este incrustada en un espacio euclidiano, pero esto no es cierto ya que la derivada ordinaria no es necesariamente es tangente a la variedad en el punto considerado.

En nuestro caso fue muy importante la modificación a la definición de diferencias divididas dada por R. Castro en [33], ya que está es esencial para concebir la generalización de los métodos tipo secantes sobre variedades Riemannianas. Además, se estimó el orden de convergencia del método de la secante sobre variedades Riemannianas, pero suponemos que este puede ser mejorado a  $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ . Finalmente construimos un ejemplo no trivial para el método de la secante sobre  $S^2$ . Es importante destacar que el método de la secante, a pesar de ser más lento que el método de Kantorovich, tiene un menor costo computacional y solo exige que el campo vectorial sea continuo, a diferencia de los demás métodos que exigen diferenciabilidad, por cual este puede ser utilizado para hallar singularidades de campos vectoriales no necesariamente diferenciables.

Otras dificultades generales encontradas, es que a diferencia de los espacios de Banach, donde las geodésicas son líneas rectas, en las variedades las bolas abiertas no necesariamente son geodésicamente convexas, la geodésica que une dos puntos en una bolas abiertas, no es necesariamente esta contenida en la bola.

Esta diferencia con los espacios de Banach crea una gran dificultad para extender a el nuevo contexto los teoremas de unicidad de los métodos clásicos, como se puede ver en la prueba de la unicidad del método simplificado de Kantorovich discutido por los autores en [39]. Sin embargo, las técnicas clásicas para probar la unicidad pueden ser llevadas al contexto de variedades, pero con algunas restricciones sobre las constantes, esto con la finalidad de estimar los orden de convergencia de los métodos tipo secante sobre variedades Riemannianas.

# Bibliografía

- [1] R.L. Adler, J.-P. Dedieu, J.Y. Margulies, M. Martens, M. Shub, Newton's method on Riemannian manifolds and a geometric model for the human spine. *IMA J. Numer. Anal.* 22 (3), 359-390 (2002).
- [2] T. Bittencourt, O. P. Ferreira, Kantorovich's theorem on Newton's method under majorant condition in Riemannian manifolds, *Journal of Global Optimization*, p. 1-25, (2016).
- [3] C. Li, J. Wang: Newton's method for sections on Riemannian manifolds. Generalized covariant  $\alpha$ -theory, *Journal of Complexity*, 24, (2007), 423–451.
- [4] C. T. Kelley, A Shamanskii-like acceleration scheme for nonlinear equations at singular roots, *Math. Comp.*, 47, (1986), 609–623.
- [5] D. Carmo, *Riemannian geometry*, Birkhäuser, Boston, 1992.
- [6] F. Alvarez, J. Bolte, Munier, A unifying local convergence result for Newton's method in Riemannian manifolds, *Foundations of Computational Mathematics*, 8, (2), (2008), 197–226.
- [7] Hicks. N, *Notes on Differential Geometry*. Princeton: van Nostrand, 1965.
- [8] Ioannis K. Argyros, Newton's method on Lie groups, *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 2009, Volume 31, Issue 1–2, pp 217–228
- [9] I.K Argyros, Chebyshev-Halley like methods in Banach spaces, *Korean Journ. Comp. Appl. Math.*, 4, (1), (1997), 83–107.
- [10] I.K. Argyros and D. Chen, Results on the Chebyshev method in Banach spaces, *Proyecciones*, 12, (1993), 119–128.
- [11] J. Dedieu, D. Nowicki, Symplectic methods for the approximation of the exponential map and the Newton iteration on Riemannian submanifolds, *Journal of Complexity*, 21, (2005), 487–501.

- [12] J.A. Ezquerro, A modification of the Chebyshev method, *IMA J. Numer. Anal.*, 17, (4), (1997), 511–525.
- [13] J.A. Ezquerro, J.M. Gutiérrez, M.A. Hernández, M.A. Salanova, Chebyshev-like methods and quadratic equations, *Rev. Anal. Numér. Théor. Approx.*, 28, (1), (2000), 23–35.
- [14] J.A. Ezquerro, M.A. Hernández, New Kantorovich-type conditions for Halley’s method, *Appl. Numer. Anal. Comput. Math.*, 2, (1), (2005), 70–77.
- [15] J. M. Ortega and W. C. Rheinboldt, *Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables*, Academic Press, New York, NY, USA, 1970.
- [16] J. M. Gutiérrez and M. A. Hernández, A family of Chebyshev–Halley type methods in Banach spaces, *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 55, (1), (1997), 113–130.
- [17] J. Kou, Y. Li and X. Wang, A modification of Newton method with third-order convergence, *Applied Mathematics and Computation*, 181, (2007), 1106–1111.
- [18] Jinsu He, Jinhua Wang and Jen-Chih Yao, Convergence criteria of Newton’s method on Lie groups, *Fixed Point Theory and Applications* 2013, DOI: 10.1186/1687-1812-2013-293.
- [19] J.P. Dedieu, P. Priouret, G. Malajovich, Newton’s method on Riemannian manifolds: covariant alpha theory, *IMA J Numer Anal.*, 23, (2003) 395–419.
- [20] L.V. Kantorovich. and G. P. Akilov, *Functional Analysis in Normed Spaces*, Pergamon, Oxford, 1964.
- [21] Li, C., Wang, J.: Newton’s method on Riemannian manifolds: Smale’s point estimate theory under the  $\gamma$ -condition. *IMA J. Numer. Anal.* 26 (2), 228-251 (2006).
- [22] M. Balázs, and G. Goldner, On existence of divided differences in linear spaces. *Revue D’analyse numérique et de la théorie de l’approximation*, tome 2, 1973, pp. 5-9.
- [23] M.A. Hernández and M.J. Rubio, Semilocal Convergence of the Secant Method under Mild Convergence conditions of differentiability, *Pergamon computer and mathematics*, 44, 2002,277-285.
- [24] M.A. Hernández and M.J. Rubio, A uniparametric family of iterative processes for solving nondifferentiable equations, *Mathematical Analysis and Applications*, 275, 2002, 821-834.

- [25] M.A. Hernández, Second-derivative-free variant of the Chebyshev method for nonlinear equations, *J. Optim. Theory Appl.*, 104, (3), (2000), 501–515.
- [26] M. Balázs and G. Goldner, On existence of divided differences in linear spaces, *Reveu D’analyse numerique et de la theorie de la approximation*, tome 2, 1973, pp.5-9.
- [27] M. Spivak, *A comprehensive introduction to differential geometry. Vol. II*, third ed., Publish or Perish Inc., Houston, texas, 2005.
- [28] N. Romero, Familias paramétricas de procesos iterativos de alto orden de convergencia, Ph.D. Dissertation, Logroño, Spain, 2006.
- [29] O. Ferreira ., B. Svaiter, Kantorovich’s Theorem on Newton’s Method in Riemannian manifolds, *Journal of Complexity*, 18, (2002), 304–329.
- [30] O.P. Ferreira, B.F. Svaiter, Kantorovich’s theorem on Newton’s method in Riemannian manifolds, *J. Complex*, 18, (2002), 304–329.
- [31] P. Absil, R. Mahony, and R. Sepulchre, *Optimization Algorithms on Matrix manifolds*, Princeton University Press, Princeton NJ, 2008.
- [32] Q. B. Wu and Y. Q. Zhao, Third-order convergence theorem by using majorizing function for a modified Newton method in Banach space, *Applied Mathematics and Computation*, 175, (2), (2006), 1515–1524.
- [33] R. Castro, Higher order iterative methods in Riemannian manifolds, Ph.D. Dissertation, Universidad de Santiago de Chile, Chile 2011.
- [34] R. Castro, *Riemannian manifolds, Kantorovich-type conditions, Newton and Chebyshev-Halley’s methods*, Chile 2017.
- [35] R. Kress. *Numerical Analysis*, Springer-Verlag, New York, 1998.
- [36] Richard S. Millman, George D. Parker. *Elements of differential geometry*-Prentice-Hall (1977)
- [37] S. Amat, Ioannis K. Argyros, Sonia Busquier, R. Castro, Saïd Hilout, Sergio Plaza, On a bilinear operator free third order method on Riemannian manifolds, *Applied Mathematics and Computation*, 219, (14), (2013), 7429–7444.
- [38] S. Amat, I. K. Argyros, S. Busquier, R. Castro, S. Hilout, S. Plaza, Traub-type high order iterative procedures on Riemannian manifolds, *SeMA Journal*, 63, (1), 27–52.
- [39] S. Amat, S Busquier, R. Castro And S. Plaza, Third-order methods on Riemannian Manifolds under Kantorovich condition , *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 255, (2014), 106–121.

- [40] S. Amat, I. K. Argyros, S. Busquier, R. Castro, S. Hilout and S. Plaza, Newton-type Methods on Riemannian Manifolds under Kantorovich-type conditions, *Applied Mathematics and Computation*, 227, (C), (2014), 762–787.
- [41] S. Amat, S. Busquier, A two-step Steffensen’s method under modified convergence conditions, *J. Math. Anal. Appl.*, 324, (2006), 1084–1092.
- [42] S. Amat, S. Busquier, J. M. Gutiérrez: Third-order iterative methods with applications to Hammerstein equations: A unified approach, *J. Computational Applied Mathematics*, 235, (9), (2011), 2936–2943.
- [43] S. Amat, C. Bermúdez, S. Busquier, M. J. Legaz S. Plaza, On a family of high order iterative methods under Kantorovich conditions and some applications, *AMS*, 2011.
- [44] S. Amat, C. Bermúdez, S. Busquier, S. Plaza, On a third-order Newton-type method free of bilinear operators, *Numer. Linear Algebra Appl*, 17, (4), (2010), 639–653.
- [45] S. Amat and S. Busquier. Third-order iterative methods under Kantorovich conditions, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 336, (1), (2007), 243–261.
- [46] S. Lang, *Introduction to Differentiable Manifolds*, Springer 2002.
- [47] S. Lang, *Differential and Riemannian Manifolds*, GTM No. 160. Springer-Verlag, third edition, 1995.
- [48] S. Richard, D. George Parker. *Elements of differential geometry*, Englewood Cliffs, N.J. : Prentice-Hall, c1977
- [49] V. E. Shamanskii, A modification of Newton’s method, *Ukrain. Mat. Zh.*, 19, (1967), 133–138.
- [50] V. I. Averbuh and O. G. Smoljanov (1967), Differentiation theory in linear topological spaces, *Uspehi Mat. Nauk* 6, 201–260, *Russian Math. Surveys*, 6, 201–258.