



Facultad de Ciencias
Instituto de Matemáticas

CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICA, ANTE LOS ERRORES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS CON ECUACIONES LINEALES

Memoria de Tesis para optar al grado de Licenciado en Educación y el
Título de Profesor de Matemática, Mención en Didáctica

Presentada por:

Yanka Beatriz Faúndez Gutiérrez
Nicole Elizabeth Macarena Ramírez Báez

Profesor guía:

Pablo Durán Oliva

Marzo de 2019
Valparaíso, Chile

Agradecimientos

En primer lugar, queremos agradecer a la Universidad de Valparaíso por entregarnos los conocimientos y permitirnos ser parte de esta comunidad universitaria para realizar nuestra formación docente. Sin olvidar, a los profesores que nos permitieron llevar a cabo este proceso, en especial al profesor Daniel Jiménez, por su disponibilidad y ser un ejemplo a seguir como docente, demostrando su vocación como educador en cada clase impartida. A nuestro profesor guía Pablo Durán, por su paciencia, comprensión y apoyo durante este trabajo de título. A Gerardo Araya, por su incondicional apoyo como funcionario, estando siempre para aconsejarnos, orientarnos y ayudarnos en todos nuestros problemas. Finalmente, agradecer a los establecimientos educacionales que nos abrieron sus puertas para recopilar los datos de nuestra investigación.

Deseo expresar los sentimientos de agradecimiento, ante las personas que fueron de gran ayuda durante esta etapa de formación en mi vida. En primer lugar agradecer a mi familia, con mayor precisión a mis padres Beatriz Gutiérrez y Francisco Faúndez por nunca permitirme decaer o rendir ante cualquier obstáculo, apoyándome en todas mis decisiones dándome su mejor consejo y entregando hasta lo imposible para cumplir mis propósitos. Con la misma importancia quiero agradecer a mi pareja Cristián Medina por su paciencia, compañía, consejos e incondicional apoyo durante este proceso. A Hank Apablaza, Isabel Melo y Evelyn Melo por la buena voluntad de atender mis dudas cada vez que requería ayuda. A cada uno de los amigos y compañeros que entregaron palabras de aliento; a Gerardo Araya por estar siempre para los alumnos, atender y solucionar nuestras dudas. Cabe mencionar a los profesores que tuve durante mi formación docente agradecer a cada uno de ellos su dedicación y paciencia para enseñarnos. Para finalizar, a Nicole Ramírez por los gratos momentos, las frustraciones y penas que vivimos juntas durante estos años en la universidad, y sobre todo por no romper nuestra promesa ser sinceras y juntas hasta el fin.

Yanka Beatriz Faúndez Gutiérrez

Quiero comenzar expresando el más profundo agradecimiento a Dios, mi motor no solo a lo largo de este proyecto sino que durante todos los otros a los que me he visto enfrentada en mi vida. A mi padre Hernán, quien me ha entregado su apoyo y confianza incondicional en cada paso así como su contención en los momentos difíciles. A mi madre Elizabeth por ayudarme a lidiar con las frustraciones y por tener siempre palabras de aliento que me impulsaron a seguir adelante. A mi hermano Cristian, quien fue mi apoyo a través de sus palabras, compañía y abrazos, mi tía Soledad por ser mi potencial apoyo a lo largo de toda la carrera a tal nivel que, quizás, sin ella no lo habría logrado. A Romina y Mathias, por acompañarme y darme alegrías en cada paso. A Yanka por su importante apoyo y participación en mi periodo universitario, tanto en el rol de compañera como en el de amiga, escribiendo junto a ella viví alegrías y momentos de estrés, pero juntas logramos salir adelante. También agradecer a mis amigos, especialmente a Mónica, Daniela Salazar y Daniela Ogas, por su compañerismo, por entregarme las fuerzas necesarias para seguir y por ayudarme con sus conocimientos. Finalmente, a ti, por tu compañía en las traspasadas de trabajo, por los abrazos que me daban la tranquilidad y contención que necesitaba en momentos de colapso.

Nicole Elizabeth Macarena Ramírez Báez

Tabla de contenido

Resumen.....	6
Abstract.....	7
Introducción.....	8
Capítulo 1.....	10
Descripción del Problema	10
1.1 Planteamiento del Problema.....	10
1.2 Justificación del Problema	13
1.3 Preguntas de investigación.....	16
1.4 Objetivos.....	16
1.4.1 Objetivo general	16
1.4.2 Objetivos específicos	16
Capítulo 2.....	18
Marco teórico	18
2.1 Conocimiento especializado del profesor de matemática (MTSK)	18
2.1.1 Conocimiento de la Enseñanza de la Matemática (KMT).	22
2.1.2 Conocimiento de las Características de Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM).	23
2.2 El concepto del error	23
2.3 Categorización del error	26
2.4 Resolución de problemas de planteo.	28
Capítulo 3.....	31
Marco metodológico.....	31
3.1 Tipo de Investigación.....	31
3.2 Contexto, Población y Tipo de Muestra.....	31
3.3 Instrumentos.....	32
3.4 Procedimientos.....	34
Capítulo 4.....	36

Análisis y discusión de resultados.....	36
4.1 Cuestionario a los estudiantes.....	36
4.2 Análisis entrevista semiestructurada a los profesores.....	45
4.2.1 Primera parte: Definición del error	46
4.2.2 Segunda parte: Anticipación al error.....	48
4.2.3 Tercera parte: Identificación del error	60
4.2.4 Cuarta parte: Estrategias para enfrentar el error	74
Capítulo 5.....	80
Conclusiones, Limitaciones y Recomendaciones.	80
5.1 Conclusiones.....	80
5.1.1 ¿Qué conocimientos poseen los profesores de pedagogía en matemática, para identificar los errores de los estudiantes de primero medio de liceos municipales en la resolución de problemas con ecuaciones lineales?.....	82
5.1.2 ¿Qué estrategias pedagógicas usan estos profesores de matemáticas para enfrentar estos errores?.....	85
5.2 Limitaciones.....	87
5.3 Recomendaciones.....	87
Bibliografía.....	89
Anexos.....	93
Anexo 1	93
Anexo 2	95
Anexo 3	96

Resumen

La presente investigación buscó analizar si los profesores de matemáticas poseían los conocimientos necesarios para identificar y enfrentar los errores producidos por estudiantes de primero medio al resolver problemas de planteo con contenido de ecuaciones lineales. El análisis fue guiado por el marco teórico del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemática (MTSK). Los participantes fueron estudiantes de 1° medio y profesores de pedagogía en Matemática de enseñanza media, todos pertenecientes a liceos municipales de zona urbana. La investigación se adscribe en un método cualitativo, sustentado en una perspectiva interpretativa. Los instrumentos aplicados incluyeron un cuestionario a estudiantes y entrevistas semiestructuradas a estudiantes y profesores. El análisis de datos se realizó de forma separada para los distintos instrumentos. Por un lado, los datos recolectados del cuestionario se analizaron usando como base la categorización de Movshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987), estudiando la distribución de frecuencia de los errores cometidos por los estudiantes según su categoría. Por otro lado, los datos de las entrevistas fueron analizados según la teoría fundamentada de datos (Strauss y Corbin, 2012). Dentro de los principales resultados de esta investigación se encontró que los profesores entrevistados poseen variados conocimientos sobre los errores de los estudiantes. Por otro lado, se identificaron tres estrategias principales usadas por ellos para enmendar los errores de los estudiantes: promover el uso de los pasos de Polya, colaborar con otras asignaturas para mejorar la comprensión lectora de los estudiantes, promover la reflexión de los estudiantes sobre sus propios procesos de resolución de problemas, y andamiaje sobre problemas apropiados.

Palabras claves: conocimiento especializado del profesor de matemática, errores, problemas de planteo.

Abstract

The present research sought to analyze whether mathematics teachers had the necessary knowledge to identify and address the errors produced by freshmen high school students, when solving problems with the content of linear equations. The analysis was guided by the theoretical framework of Specialized Knowledge of the Mathematics Teacher (MTSK). The participants were freshmen and high school mathematics teachers, all belonging to municipal urban area schools. The research is ascribed to a qualitative method, guided by an interpretative perspective. The instruments applied included a questionnaire to students and semi-structured interviews to students and teachers. Data analysis was carried out separately for each instrument. On the one hand, the data collected from the questionnaire were analysed on the basis of the categorisation of Movshovitz-Hadar, Zaslavsky and Inbar (1987), studying the frequency distribution of errors made by students according to their category. On the other hand, the interview data were analyzed according to grounded theory (Strauss & Corbin, 2012). The main results of this research were that the interviewed teachers had varied knowledge about the students' misconceptions. Additionally, teachers were found to use three main strategies to address students' misconceptions: promoting students' use of Polya steps, collaboration with other courses to improve students reading skills, promoting students' self-reflection of their own problem solving processes, and scaffolding.

Keywords: teacher's specialized knowledge of the mathematics, errors, problems solving.

Introducción

Debido a la relevancia del docente en el proceso de enseñanza, la actualización del profesor en el aula es fundamental. La presente investigación pretende estudiar los conocimientos de los profesores de matemática con respecto a los errores cometidos por los estudiantes. En la actualidad existe una variedad de estudios en materia del conocimiento del profesor donde se han formulado caracterizaciones que contribuyen a comprender este concepto (Shulman, 1986; Ball, Thames y Phelps, 2008; Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán, 2013). Según Zamudio (2012) el conocimiento está relacionado y condicionado por las creencias y experiencia directa del educando, y a su vez, ejerce influencia en las acciones relativas al ejercicio docente tales como las planificaciones, las clases, los materiales, entre otros. Es importante resaltar que este conocimiento guarda relación con la disciplina específica del docente, ya que no responderá al mismo funcionamiento el profesor de Historia que el de Matemáticas, debido a la diferencia sustancial que se produce tanto en el acercamiento a los contenidos, como en la planificación para alcanzar los objetivos propuestos.

Este estudio se enfoca particularmente en analizar los conocimientos del profesor de Matemática, sobre los errores cometidos por los estudiantes en la resolución de problemas con ecuaciones lineales. Además, conocer las estrategias pedagógicas que usan los profesores para enfrentar estos errores. Para lograr estos objetivos se realizaron entrevistas a profesores y cuestionarios de problemas de planteo a estudiantes. Los participantes, al momento de realizar la investigación, pertenecían a liceos municipales de zona urbana de las regiones: Libertador General Bernardo O'Higgins y Metropolitana. El trabajo está estructurado en cinco capítulos que son descritos brevemente a continuación.

Capítulo 1: se expone la problemática del conocimiento del profesor sobre los errores de los estudiantes. Se justifica la relevancia del problema y presentan las preguntas de investigación con sus objetivos principales.

Capítulo 2: se da a conocer el marco teórico que subyace al conocimiento especializado del profesor de matemáticas.

Capítulo 3: se describe el marco metodológico donde se detallan los procedimientos utilizados para conseguir la información. Asimismo, expone el diseño de entrevistas y cuestionarios aplicados, el perfil de los participantes, y los procedimientos llevados a cabo para analizar la información.

Capítulo 4: se presenta el análisis de los datos obtenidos en las entrevistas y el cuestionario de problemas.

Capítulo 5: se propone las conclusiones relacionadas con las preguntas de investigación y sugerencias para futuras investigaciones.

Capítulo 1

Descripción del Problema

1.1 Planteamiento del Problema

Durante el desarrollo de la etapa escolar los profesores cumplen un rol fundamental en la creación del pensamiento crítico en los alumnos, en consecuencia, se vuelve indispensable que los docentes estén capacitados en todos los temas necesarios para realizar sus clases.

En las últimas décadas se han realizado múltiples investigaciones con respecto al conocimiento del profesor de matemáticas. Algunas de ellas han sido enmarcadas en los modelos del Conocimiento Pedagógico del Contenido (PCK), el Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT), y el Conocimiento Especializado del Profesor de Matemática (MTSK) que mencionan claramente la necesidad de un conocimiento específico en la enseñanza de la matemática (Flores-Medrano et al., 2016). Aún más, Ball et al. (2008) plantean que, si este conocimiento se incluye prioritariamente en la formación de profesores, la probabilidad de que ellos sean capaces de aplicarlo cuando enseñan aumentaría considerablemente. Estas publicaciones resaltan la importancia que tienen los conocimientos específicos de un profesor de matemática en la calidad de la enseñanza. De lo anterior, es relevante informarse sobre la preparación que entregan los centros de formación docente y saber si durante esta formación los profesores adquirieron o no los conocimientos específicos necesarios para desenvolverse con seguridad y confianza en el aula.

Analizando la formación entregada a los profesores de matemática en Chile referente al conocimiento pedagógico del contenido, se descubre la escasa representación de la disciplina didáctica en el área de la matemática, por ejemplo, el año 2014 dentro de los programas de la formación del profesorado con una duración

mayor a cuatro años, los cursos de didáctica o enseñanza de la matemática y prácticas de pedagogía en matemática no sobrepasaban el 15% del plan de estudios (Vergara y Cofre, 2014). En otras palabras, las asignaturas en las cuales se podría mejorar o implementar el PCK, estuvieron durante dicho año dentro de un porcentaje mínimo en los planes de estudios. Aunque no es posible revelar si los profesores estudian los errores de los alumnos dentro de su formación docente. Este índice podría sugerir una limitación importante en las capacidades de los profesores de matemáticas para identificar los errores de los estudiantes y por tanto la necesidad de conocer con mayor precisión esta restricción. Para ello, es posible respaldarse en la categoría KFLM, que caracteriza la capacidad del docente de conocer y entender, cómo sus estudiantes podrían pensar matemáticamente frente a alguna actividad en el aula (Sosa, Flores-Medrano y Carrillo, 2015). Esta capacidad está asociada a la responsabilidad del maestro de conocer las características que tienen sus estudiantes, para aprender conocimientos previos, formas de razonamiento, habilidades, dificultades al aprender, entre otras.

Por otro lado, el cómo enfrentan los profesores los errores de sus estudiantes, se asocia a la categoría KMT (Conocimiento de la Enseñanza de las Matemática), que indica que el profesor tiene la responsabilidad de elegir recursos, materiales y la forma adecuada de enseñanza para tratar un contenido (Carreño, Rojas, Montes y Flores, 2013). Ambas caracterizaciones del conocimiento del profesor, el KMT y KFLM, ayudan a comprender mejor y a reconocer los factores asociados a la identificación del error.

Los errores que presentan los estudiantes son importantes, porque representan las dificultades que tienen los alumnos y estas pertenecen a las características involucradas en el aprendizaje. Estos errores además son parte de las producciones de una amplia cantidad de estudiantes (Pochulu, 2009), de aquí la importancia de analizar cómo los profesores definen el error y cómo trabajan con ellos, si tendrán los conocimientos suficientes o necesarios para identificarlos y comprenderlos.

Rico (1997) clasifica a los profesores en dos grupos según su criterio sobre el error de los estudiantes. El primero, mantiene una posición tradicional donde asimila que el error es el desconocimiento del alumno y este debe ser controlado, o penalizado. Esto señala que un profesor con un pensamiento tradicional toma el error como algo perjudicial, ya que en la sociedad así se denota. El segundo, sostiene una posición moderna y avanzada, donde comprende que el error es una construcción del conocimiento y él debe contribuir a ello, evitando causar rechazos o sanciones. Es decir, que un docente moderno interpreta el error como parte de la construcción a un aprendizaje significativo, intentando aportar en los conocimientos del alumno.

En la búsqueda de investigaciones enfocadas en el contexto nacional, se encuentran algunos estudios vinculados a los errores de los estudiantes. Santa Cruz, Thomsen, Beas y Rodríguez (2011) se enfocaron en demostrar que los errores son parte de un proceso normal de ajuste a las experiencias previas y también a la construcción del aprendizaje. Sánchez y Del Valle (2016) caracterizaron las dificultades y errores, en tareas para profesores en formación y estudiantes de enseñanza media. Correa, Muñoz, Salinas y Wyss (2014) identificaron y analizaron las dificultades y errores más reiterados de estudiantes de primero medio en la resolución de problemas que involucran ecuaciones lineales, con una muestra de tres liceos municipales. Por otro lado, existe un estudio relacionado con el Conocimiento Pedagógico del Contenido (PCK), en el que se estudia la conexión entre el PCK con la práctica y con el aprendizaje de los estudiantes (Vergara y Cofré, 2014).

Estos antecedentes evidencian un vacío en la literatura de educación matemática con respecto a los conocimientos que tienen los profesores de educación media en Chile en la actualidad, para identificar y enfrentar los errores que cometen los estudiantes al momento de la resolución de problemas en el contenido de ecuaciones lineales.

1.2 Justificación del Problema

El conocimiento de los profesores para identificar y enfrentar errores de los estudiantes tiene importantes consecuencias en la comprensión de situaciones que afectan al aprendizaje de estos. En la literatura sobre la educación matemática, se encuentran múltiples estudios que hablan sobre los errores de los alumnos. En primer lugar, se destaca el análisis nacional de resultados de la prueba SIMCE (Sistema Nacional de Evaluación de Resultados de Aprendizaje) de estudiantes de 2do medio, realizado por la (Agencia de Calidad de la Educación, 2017). Este análisis recopiló y analizó los errores comunes que se presentaron en los resultados entre los años 2013 y 2016. Estos errores se agruparon de acuerdo a su naturaleza: de estructura conceptual o de procedimiento de trabajo. La importancia de este estudio, respecto de la problemática en discusión, radica en que en esta prueba estandarizada se abarca una gran cantidad de contenidos enseñados hasta el nivel de segundo medio, lo que permite percibir una amplia variedad de errores comunes en el aprendizaje de los alumnos en el contexto nacional.

La mayoría de los errores hallados en los resultados del SIMCE se focalizaron en la utilización de métodos por parte del estudiante sin una comprensión adecuada de los conceptos. Por ejemplo, en los números racionales específicamente en operaciones con fracciones, los estudiantes tendieron a operar el numerador y denominador en forma independiente, no entendiendo la fracción como números con distintas razones (Agencia de Calidad de la Educación, 2017). Estos errores indican que los estudiantes tienen una dificultad notable en la comprensión de los conceptos matemáticos fundamentales.

Se debe considerar que, si los estudiantes presentan la dificultad en la comprensión de un concepto fundamental, es probable que se les complique aún más la resolución de problemas, ya que estas requieren de análisis e iniciativa (Chavarría,

2014). Según Lesh y Zawojewski (2007) la resolución de problemas involucra ciclos interpretativos donde se ordenan, integran, modifican, revisan y redefinen grupos de conceptos matemáticos, es decir, que define como un proceso de interpretación una situación matemática. La definición equivocada de un concepto matemático en un estudiante los puede llevar a cometer errores al momento de utilizarlo, de modo que es necesario el apoyo de los profesores hacia los estudiantes para enmendar estos errores.

Golbach, Mena, Abraham y Rodríguez (2009) consideran que los errores que efectúan los estudiantes, permiten al profesor revelar los conocimientos y las dificultades de un contenido en particular. Asimismo, Engler, Gregorini, Müller, Vrancken y Hecklein (2004) proponen que es necesario para el profesor saber de dónde provienen los errores, ya que estos le entregan información y datos esenciales para otorgar una enseñanza y aprendizaje de calidad. Así, los profesores al tener conocimiento sobre el error pueden analizar los procesos cognitivos del estudiante y de esta manera mejorar su práctica docente, formulando estrategias adecuadas para enmendar los errores.

Además a lo anterior tenemos que, para Astolfi (1999) existen profesores que dudan de sí mismos, desconfiando de su eficacia en la enseñanza impartida, debido a los errores de los estudiantes. Esto indica que los errores de los estudiantes pueden crear inseguridad en los profesores en su forma de enseñar.

Santa Cruz et al. (2011) estudiaron en particular las clases de errores que presentan los alumnos. Para ello, realizaron una entrevista a un grupo de 50 profesores de enseñanza básica y media, donde les preguntan cuáles son los errores que cometen los estudiantes en sus asignaturas. Una parte de los profesores nombraron errores que surgen por falta de concentración o porque no estudiaron y la otra parte de los profesores se quedaron en silencio. Este silencio indicaría que no era del interés de los profesores darle importancia al error de los estudiantes, y que el total de los profesores

entrevistados no poseían los conocimientos necesarios para percatarse cuándo y por qué se presentan los errores.

Ahora, aun considerando que los profesores identifican los errores de sus alumnos, es difícil verificar si disponen de los conocimientos adecuados para enfrentar y modificar estos errores. Esto explica la falta de un desarrollo sistemático para predecir, interpretar, clasificar y superar errores en la búsqueda de un aprendizaje significativo de los estudiantes (Bernabeu et al. 2009), a pesar de la alta cantidad de estudios que se relacionan con los errores de los estudiantes.

Los conocimientos que poseen los profesores, para identificar y enfrentarse al error, se vinculan directamente con la Formación Inicial Docente (FID). En Chile, particularmente, la FID se evalúa a través de una evaluación nacional, nombrada antiguamente INICIA y actualmente como Evaluación Nacional Diagnóstica (END). Esta evaluación determina los conocimientos pedagógicos y disciplinarios de futuros profesores. En los resultados del año 2011, se observó que dos de cada cinco estudiantes de pedagogía carecen de los conocimientos mínimos en torno a las teorías del aprendizaje y técnicas para la enseñanza (Rodríguez y Castillo, 2014). Estos bajos niveles en los resultados del conocimiento pedagógico, permiten demostrar la insuficiente calidad de los procesos de FID. Cabe destacar que la FID es una base esencial en la educación chilena, porque son los profesores egresados quienes formarán a las nuevas generaciones.

Teniendo en cuenta los siguientes tres puntos, primero el vacío en la literatura de educación matemática con respecto a los conocimientos que tienen los profesores de educación media en Chile, para identificar y enfrentar los errores que cometen los estudiantes al momento de la resolución de problemas en el contenido de ecuaciones lineales. Segundo los errores hallados en los resultados del SIMCE, donde la mayoría se centran en la utilización de métodos sin una comprensión adecuada de los conceptos. Y tercero que los profesores al tener conocimiento sobre el error pueden

analizar los procesos cognitivos del estudiante y de esta manera mejorar su práctica docente, formulando estrategias adecuadas para enmendar los errores. En razón a estos tres motivos es que surgen las siguientes preguntas y objetivos de investigación.

1.3 Preguntas de investigación

Con el fin de abordar el problema de investigación, surgen dos preguntas principales a estudiar:

- ¿Qué conocimientos poseen los profesores de pedagogía en matemática, para identificar los errores de los estudiantes de primero medio de liceos municipales en la resolución de problemas con ecuaciones lineales?
- ¿Qué estrategias pedagógicas usan los profesores de matemáticas para enfrentar los errores de los estudiantes de primero medio de liceos municipales?

1.4 Objetivos

1.4.1 Objetivo general

Analizar los conocimientos de los profesores de pedagogía en matemática, para identificar los errores de los estudiantes en la resolución de problemas con ecuaciones lineales, y conocer las estrategias pedagógicas, que usan los profesores para enfrentar estos errores.

1.4.2 Objetivos específicos

- Identificar los errores de los estudiantes de primero medio en la resolución de problemas con ecuaciones lineales.
- Clasificar los errores de los estudiantes de primero medio en la resolución de problemas con ecuaciones lineales.

- Analizar los conocimientos de los profesores de pedagogía en matemática, referente a los errores de sus estudiantes.
- Describir las estrategias de enseñanza propuestas por los profesores para enmendar los errores de los estudiantes.

Capítulo 2

Marco teórico

En el presente capítulo, se detallan los principales aspectos teóricos que dan sustento a esta investigación centrada en los conocimientos del profesor de matemática sobre los errores de los estudiantes en la resolución de problemas de planteo con ecuaciones lineales. Estos aspectos teóricos fueron organizados a través de tres temas principales. En primera instancia, se detalla el *Conocimiento Especializado del Profesor de Matemática* (MTSK) (Carrillo et al, 2013), en particular las categorías del Conocimiento de la Enseñanza de la Matemática (KMT) y el Conocimiento de las Características de Aprendizaje de Matemática (KFLM). En segunda instancia, se incluye una descripción del concepto del error en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Rico, 1995; Guerrero, Castillo, Chamorro y Isaza, 2013; Godino, Batanero y Font, 2003; Astolfi, 1999; Socas, 1997). Por último, se discute la resolución de problemas de planteo según algunos referentes en la literatura del área de educación matemática (Polya, 1989; Lesh y Zawojewski, 2007).

2.1 Conocimiento especializado del profesor de matemática (MTSK)

El conocimiento especializado del profesor de matemática es representado principalmente a partir de dos modelos. El primero de los modelos fue formulado por Shulman (1986), pionero en dar un carácter específico al conocimiento necesario para enseñar. Shulman propuso tres categorías para representar el conocimiento del profesor: Conocimiento de la Materia (SMK), Conocimiento Pedagógico del Contenido (PCK) y Conocimiento Curricular (CUK). El segundo modelo, llamado por Ball et al. (2008) como Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT, por sus siglas en inglés) se basó en dos de las categorías del modelo de Shulman, SMK y PCK. En este

modelo se identificaron nuevos subdominios dentro de las categorías de Shulman, creándose tres categorías para el SMK y otras tres para el PCK. Por un lado, el SMK se subdividió en el Conocimiento Común del Contenido (CCK), Conocimiento Especializado del Contenido (SCK) y Conocimiento del Horizonte (HCK). Por otro lado, el PCK se subdividió en el Conocimiento de los Contenidos y los Estudiantes (KCS), el Conocimiento del Contenido y la Enseñanza (KCT) y Conocimiento del Currículo (KCC).

Finalmente, a partir de una reformulación del MKT, se creó el modelo denominado Conocimiento Especializado del Profesor de Matemática (MTSK), planteado por Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán (2013). Este modelo está enfocado específicamente al profesor de Matemáticas, excluyendo a otras profesiones vinculadas con la disciplina. El MTSK es significativo entre otros, porque permite comprender adecuadamente los elementos que necesita el profesor de matemáticas para anteponerse al pensamiento del estudiante, interpretar su desarrollo del lenguaje matemático, examinar y analizar las producciones de los estudiantes para poder devolver la oportunidad de aprendizaje (Sosa et al., 2015).

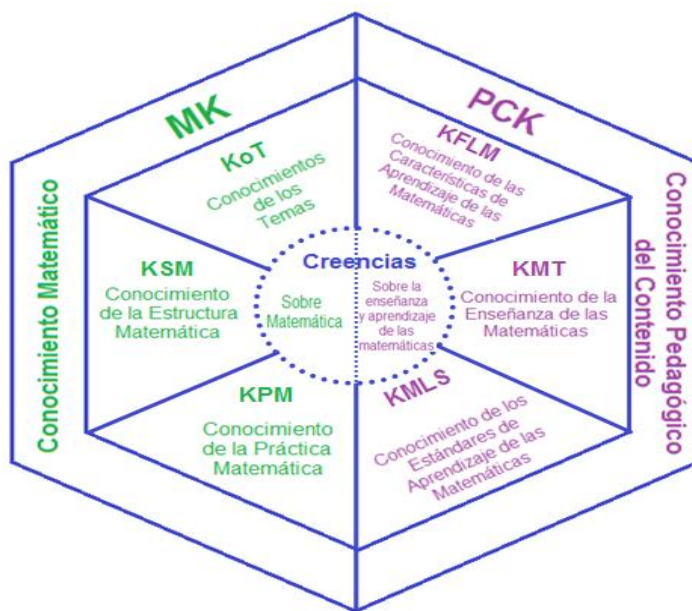


Figura 1: Categorías del MTSK de Carrillo et al. (2013)

Como se aprecia en la Figura 1, el modelo MTSK contiene dos subdominios principales: el Conocimiento Matemático (MK), que involucra al universo de las matemáticas en su totalidad (Carrillo et al., 2013); y el Conocimiento Pedagógico del Contenido (PCK), que refleja elementos relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de los contenidos (Sosa et al., 2015). A su vez, el MK y PCK se subdividen en tres categorías cada uno.

Por un lado, el MK se divide en: el Conocimiento de los Temas (KoT), el Conocimiento de la Estructura Matemática (KSM), y el Conocimiento de la Práctica Matemática (KPM). En primer lugar, el KoT corresponde al dominio de los contenidos matemáticos que se busca transferir. Aquí se incluyen los aspectos fenomenológicos, procedimiento de los temas con su fundamentación teórica, significados, definiciones, conceptos y ejemplos específicos que caractericen elementos concretos del tópico abordado.

En segundo lugar, el KSM corresponde a la conexión que existe entre los temas matemáticos, tanto con los contenidos anteriores como con los posteriores. Además, implica ver la matemática elemental de un punto de vista avanzado y la matemática avanzada de un punto de vista elemental. En general, es la comprensión completa de la estructura matemática vinculada con los conceptos.

Finalmente, el KPM es aquel conocimiento que le permite al profesor saber cómo se piensa, crea, produce y conoce la matemática. Algunos de los elementos que se incluyen dentro de este conocimiento son: elegir representaciones, argumentaciones, saber definir y usar definiciones, explorar o generalizar aspectos de la comunicación matemática. En otras palabras, el KPM está relacionado a las formas específicas en que se trata el conocimiento de la Matemática.

Por otro lado, el PCK se subdivide en las categorías de: el Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT), el Conocimiento de las Características de

Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM) y el Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de Matemáticas (KMLS).

El KMT se refiere al conocimiento con respecto a la elección de recursos, estrategias, materiales didácticos, instrucciones y ejemplos necesarios para enseñar los distintos contenidos de la asignatura de matemática. Por lo tanto, esta categoría requiere de descriptores que demuestren los procesos que realizan los docentes para tomar decisiones a la hora de llevar a cabo una lección.

El KFLM intenta caracterizar el conocimiento necesario para que el profesor comprenda el razonamiento o procedimiento habitual que utilizan los estudiantes, al enfrentarse a diferentes actividades o tareas. El profesor a través del KFLM logra conocer cómo el estudiante interioriza el contenido que se está enseñando.

El KMLS alude a conocer los contenidos propuesto en las normativas del currículum impartido por instituciones formales como el ministerio de educación, en los cuales se encuentran los indicadores de los conocimientos que corresponde a cada nivel de escolaridad en que se encuentra el estudiante. Puede extenderse más allá de los planes y programas, es decir, como en aquellas recomendaciones que nos pueden facilitar expertos en la materia o investigaciones.

Para explorar con mayor claridad los aspectos teóricos asociados a la pregunta de investigación, a continuación, se detallan con mayor profundidad las categorías KMT y KFLM. La definición de estas categorías ayudará a comprender mejor los conocimientos necesarios que deben tener los profesores de matemática para reconocer e intervenir en los errores producidos por los estudiantes durante su proceso de aprendizaje.

2.1.1 Conocimiento de la Enseñanza de la Matemática (KMT).

En la acción que realizan los profesores al enseñar, el conocimiento de cómo esa enseñanza puede o debe ser entregada a los alumnos es clave. Este conocimiento involucra la selección de estrategias y herramientas pedagógicas pertinentes, los ejemplos adecuados para el aprendizaje de cada contenido, así como la conciencia de cómo y cuándo se deben utilizar. El motivo de la elección de una estrategia u otra, puede estar relacionado al conocimiento de otro subdominio del MTSK. Podría ser influenciada, por ejemplo, por el KFLM que el profesor pueda tener, al escoger una determinada estrategia en función de su concordancia para el grupo de estudiantes al que se aplicará la clase, considerando el contexto y las distintas formas de aprender de ellos.

En el KMT, se destaca la integración de la matemática y la enseñanza, en el sentido de que no se trata del conocimiento matemático, por un lado, y del conocimiento pedagógico, por otro: sino que estos dos van de la mano cuando el contenido matemático limita a la enseñanza (Carrillo et al., 2013). Flores-Medrano, Escudero-Ávila, Montes, Aguilar y Carrillo (2014) consideran tres categorías para el KMT: conocimiento de teorías personales o institucionalizadas de enseñanza, conocimiento de recursos materiales y virtuales, y conocimiento de actividades, tareas, ejemplos y ayudas.

En primer lugar, el conocimiento de teorías personales o institucionalizadas de enseñanza corresponde al conocimiento de teorías de enseñanza específicas de la educación matemática. Además, con las teorías se logra conocer la potencialidad que pueden tener algunas actividades, estrategias o técnicas didácticas asociadas a un tema matemático.

En segundo lugar, el conocimiento de recursos materiales y virtuales incluye los conocimientos del profesor sobre recursos materiales y virtuales, como elementos para

la enseñanza de la matemática y los beneficios o dificultades debido al uso de éstos como apoyo para la enseñanza.

Finalmente, el conocimiento de actividades, tareas, ejemplos y ayudas, considera aquellos elementos que denotan la intencionalidad de enseñanza del profesor en un contenido determinado. Es decir, por ejemplo, conocer en qué momento o qué tipo de ayuda brindar al estudiante para propiciar un aprendizaje del contenido matemático.

2.1.2 Conocimiento de las Características de Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM).

El KFLM, según Montes (2015), le permite al profesor conocer en profundidad las capacidades que posee el alumno y a la vez de cuales carece, visualizar la mayoría de las formas que tienen estos de comprender y relacionar los contenidos matemáticos. Este conocimiento además le permite al profesor anticipar y conocer las dificultades u obstáculos que se pueden presentar en el camino de los alumnos y los errores que se podrían cometer durante el trayecto del aprendizaje a la matemática, con el propósito de estar a un paso más adelante que ellos.

2.2 El concepto del error

Según la Real Academia Española (RAE), el error se define como el concepto equivocado o juicio falso, acción equivocada. Por lo tanto, el error, en un sentido cotidiano, se entiende como el tener información incorrecta sobre un concepto y realizar conductas inadecuadas. En el ámbito educacional, existen al menos tres perspectivas principales para definir el concepto erróneo. Rico (1995) propone que el error surge a partir de un marco conceptual concreto y no por azar, basado en conocimientos previos. Además, agrega que en todo proceso del saber se generan errores, los cuales no siempre se logran evitar. Por otro lado, Guerrero et al. (2013) argumentan que el error

es una información o acción que es inaceptable a un juicio válido, es decir, que no proporciona el resultado esperado del docente. Finalmente, Godino et al. (2003, p. 73) consideran que el error existe cuando el estudiante ejecuta una práctica, acción o argumentación inapropiada desde la perspectiva de la educación matemática. Los autores definen que el error es una acción o práctica que realizan los estudiantes, la cual no responde a los resultados que se esperan para un aprendizaje determinado.

Teniendo en cuenta los puntos de vista de estos autores, se considerará, para este estudio, que el concepto de error nace a partir de un saber, información o acción, inadecuada a un contenido específico. De este modo, si los alumnos se sustentan en una estructura con base en información previa inapropiada, es natural que cometan errores.

Es evidente que los errores intervienen en el aprendizaje de los diferentes contenidos; por ello, es imprescindible que los estudiantes los reconozcan y admitan la necesidad de superarlos y así obtener mayores logros en el aprendizaje. El análisis de dichos errores puede ayudar al docente a organizar estrategias para un mejor aprendizaje, insistiendo en aquellos aspectos que generan más dificultades y contribuyen a una mejor preparación en instancias de corrección. Como menciona Astolfi (1999), no todas las soluciones incorrectas tienen por qué tener una respuesta lógica con la que se puedan identificar. Es posible que estas soluciones sean fruto de la distracción o la ignorancia, pero también si se considera sólo este principio, no existiría un progreso en la reflexión del análisis de los errores.

Ahora, antes de relacionar los errores de los estudiantes, específicamente en el área de la educación matemática, se debe entender cómo se considera el error dentro de un ámbito más general como el de la ciencia. Rico (1997) argumenta que el error en este ámbito, es conocimiento deficiente e incompleto, es una posibilidad y una realidad permanente, debido a que el desarrollo de este conocimiento está plagado de errores. Además, se puede observar que no es solo una hipótesis; basta con verificar lo que ha

ocurrido a lo largo de la historia de diversas disciplinas en la que se han aceptado como válido una gran cantidad de conceptos, que en la actualidad se sabe que son erróneos. Aún más, este fenómeno se ve claramente en el área de la Matemática, donde los matemáticos cometieron errores en el proceso de su investigación para la creación de teoremas y propiedades. Entonces, si los científicos han cometido errores en las etapas de sus investigaciones, no se les puede exigir a los estudiantes que no se equivoquen en algún momento en el transcurso de su aprendizaje.

Al estudiar el error como parte natural del aprendizaje, se debe reconocer que existen otras variables en el proceso educativo, que no solo involucran al alumno, sino también al profesor, currículum, entorno social en el que se enmarca la escuela, medio cultural, así como las vinculaciones entre estas. El enfocarse en el docente y como él le da protagonismo al error y la forma en que trabaja con este en su práctica docente, influye decisivamente en los aprendizajes de los educandos y, por tanto, en su rendimiento escolar.

Enfatizando el rol preponderante del docente, Socas (1997) manifiesta que el análisis del error es un conducto de ayuda al momento de organizar estrategias generales y específicas para lograr una mejor enseñanza-aprendizaje. Además, argumenta que es imprescindible que los profesores entiendan los errores de sus estudiantes y se guíen por el principio de que todo error puede ser el comienzo de un buen aprendizaje, para así generar una estrategia de corrección para estos. El análisis de los errores, entonces, sirve para organizar y crear de mejor manera las estrategias que utilizarán los profesores en la sala de clase, reconociéndolos como parte del proceso de aprendizaje. Al momento de analizar los errores de los estudiantes, resulta útil identificar categorías generales de error. Las distintas categorizaciones del error encontradas en la literatura son presentadas en la sección siguiente.

2.3 Categorización del error

La identificación de las distintas categorías de los errores puede permitir orientar la atención del profesor hacia los aspectos centrales involucrados en el aprendizaje (o conocimientos) de los estudiantes, interviniendo en una evaluación y diagnóstico más efectivo, para poder apoyar a los estudiantes en sus dificultades al aprender sobre los objetos matemáticos y en el desarrollo de una actitud racional hacia la matemática.

Movshovitz-Hadar et al. (1987) hacen una clasificación empírica de los errores, sobre la base de un análisis constructivo de las soluciones de los alumnos realizadas por expertos. Esta categorización surgió a partir de un análisis de las soluciones realizadas por estudiantes en un examen para graduarse de secundaria en Israel, donde un gran porcentaje de ellos reprobaba. Los autores seleccionaron las respuestas incorrectas más comunes de los estudiantes y desde estas respuestas se creó la categorización de los errores fundamentada en el conocimiento matemático. Los autores lograron identificar las siguientes seis categorías descriptivas para clasificar los errores encontrados: datos mal utilizados, lenguaje mal interpretado, inferencia lógicamente inválida, teorema o definición deformada, solución no verificada, y errores técnicos.

La categoría de datos mal utilizados incluye los errores que se relacionan con el desacuerdo entre los datos que se encontraron en la información del enunciado y cómo se utilizaron para el procedimiento. Este error puede cometerse inicialmente al recolectar los datos o posteriormente al aplicarlos y tiene como elementos característicos: incorporar datos extraños, olvidar datos necesarios para la solución, mencionar como requisito algo que no era requerido en el problema, implantar condiciones que no coinciden con la información dada y usar un valor numérico de una variable para otra variable distinta.

La categoría de lenguaje mal interpretado corresponde a los errores referidos a

una traducción incorrecta de situaciones matemáticas detalladas en un lenguaje simbólico a otro simbólico distinto. En esta categoría se identifican los siguientes elementos característicos: la traducción de una expresión del lenguaje natural a una ecuación matemática o término que es diferente a lo que se describe verbalmente, la elección de un símbolo para un concepto matemático sin percatarse que ese símbolo corresponde a otro concepto, y la interpretación inadecuada de los símbolos gráficos como un término matemático o al revés.

La categoría de inferencia lógicamente inválida incorpora a los errores que se vinculan con el razonamiento incorrecto y no el contenido específico que corresponde. Los elementos que se caracterizan en esta categoría son: derivar de un enunciado condicional su recíproco o su contrario, utilizar incorrectamente los cuantificadores, y efectuar saltos injustificados en una inferencia lógica.

La categoría de teorema o definición deformada incluye aquellos errores que son realizados por una alteración de un principio, regla, teorema o definición específica. Los componentes característicos de esta categoría son: la aplicación de un teorema fuera de su condición, usar la propiedad distributiva en una función u operación que no es distributiva y también realizar una valoración o desarrollo inadecuado a una definición, teorema o fórmula reconocible.

En la categoría de solución no verificada, los errores se deben a que el tratamiento realizado por el estudiante es correcto en sí mismo, pero el resultado de aquel procedimiento no es una solución al problema planteado. Si él hubiera verificado la solución con la pregunta planteada, se podría haber evitado el error.

En la categoría de errores técnicos, se incluyen los errores de cálculo (multiplicación, división, suma y resta), errores en la extracción de datos de una tabla o gráfico, errores en la utilización de símbolos algebraicos elementales y otros errores que se perciben en el procedimiento de algoritmos matemáticos generalmente

enseñados en básica y media.

La categorización del error enfocada en el conocimiento matemático, es aún más factible evidenciarla en los errores que generalmente se presentan en la resolución de problemas de planteo, debido a que estos “utilizan muchas de las capacidades básicas: leer, reflexionar, planificar el proceso de resolución, establecer estrategias y procedimientos y revisarlos, modificar el plan si es necesario, comprobar la solución si se ha encontrado, hasta la comunicación de los resultados” (BOE, como se citó en Gómara, 2016, p. 3).

Las exigencias cognitivas de los problemas de planteo son respaldadas también por Guerrero (2016), quien argumenta que los problemas de planteo exigen poner en práctica un gran número de habilidades matemáticas para llegar a una solución describiendo la conducta del fenómeno considerado.

Estas exigencias de los problemas de planteo justifican su elección como medidas apropiadas para evaluar la capacidad de los profesores de identificar el error. Antes de detallar el diseño de los instrumentos de medición de este estudio, se incluye a continuación una breve reseña de los procesos involucrados en la resolución de este tipo de problemas.

2.4 Resolución de problemas de planteo.

George Polya fue uno de los primeros matemáticos en trabajar extensamente en entender los procesos relacionados a la resolución de problemas. En su famoso libro “Cómo plantear y resolver problemas” (1989), se puede ver como caracterizó este proceso de resolución de problemas en un ciclo de cuatro pasos que se describen a continuación:

- **Comprensión del problema:** en este paso el alumno no sólo debe entender un problema, sino que también debe tener ganas de resolverlo. Ante todo, el

enunciado verbal del problema debe ser comprendido, para esto se debe escoger un problema que se adecúe a los conocimientos de los estudiantes con un nivel de dificultad apropiado. En esta etapa del ciclo, se espera que los alumnos encuentren las incógnitas, los datos relevantes y las condiciones del problema. Polya propone a la vez que el profesor guíe a sus estudiantes, a través de preguntas como ¿cuáles son los datos?, ¿cuáles son las incógnitas?, ¿cuál es la condición? Alternativamente, Polya también sugiere que el profesor aconseje a sus estudiantes a leer cuidadosamente y tratar de encontrar la relación entre los datos y las incógnitas.

- Concepción de un plan: Polya menciona, en esta parte del ciclo, que es importante construir un plan para resolver el problema. En la creación de este plan se debe saber en general qué cálculo, razonamiento o construcción se debe realizar para determinar la incógnita. El plan principal va tomando forma poco a poco, o puede ser a través de un período de duda. En la concepción del plan es necesario poseer conocimientos previamente adquiridos, como problemas de planteo resueltos, propiedades, teoremas demostrados, definiciones, entre otras herramientas. El profesor puede apoyar con las siguientes preguntas: *¿Conoce algún problema relacionado?; ¿Con qué plan resolvió el problema anterior?*
- Ejecución del plan: es la etapa donde se debe llevar a cabo el plan previamente formulado. Para lograrlo, se requiere de distintas circunstancias: conocimientos adquiridos, razonamiento y concentración. El plan proporciona una línea general de solución, por lo cual se debe asegurar que los detalles encajan en esta línea. En este proceso, el profesor debe insistir en que el estudiante verifique cada paso.
- Visión retrospectiva: esta fase se refiere a verificar la solución, reexaminar el resultado y el proceso que los condujo a ella. Es aquí donde los estudiantes consolidan sus conocimientos y desarrollan sus aptitudes para resolver

problemas. El profesor debe comprender y hacer comprender a sus alumnos que siempre queda algo por hacer en la resolución de problemas, donde mediante un estudio cuidadoso se puede mejorar cualquier tipo de solución. Algunas interrogantes que pueden ayudar en esta etapa son: *¿Puede verificar el resultado?; ¿puede verificar el razonamiento?*

Un modelo de resolución de problema más reciente es el propuesto por Lesh y Zawojewski (2007). A diferencia de Polya, estos autores argumentan que la resolución de problemas es un proceso de interpretar una situación matemáticamente que involucra dos ciclos interactivos: un primer ciclo que incluye expresar, probar y revisar interpretaciones; y un segundo ciclo que involucra ordenar, integrar, modificar, revisar o redefinir grupos de conceptos matemáticos desde varios tópicos dentro y más allá de las matemáticas. La resolución de problemas según Lesh y Zawojewski se entiende entonces como la interpretación que realizan los estudiantes ante situaciones matemáticas, en las cuales se encuentran distintos conceptos matemáticos que deben ser reconocidos para lograr ordenarlos, integrarlos y modificarlos, con la finalidad de poder responder apropiadamente a la situación.

Capítulo 3

Marco metodológico

3.1 Tipo de Investigación

La investigación se adscribe en un método cualitativo, sustentado en una perspectiva interpretativa centrada en el entendimiento del significado de las acciones de seres vivos, sobre todo de los humanos y sus instituciones (Hernández, Fernández y Baptista, 2014). El estudio es, específicamente, una investigación interpretativa básica, orientada a describir fenómenos, procesos o el punto de vista particular de los participantes (Ary, Jacobs y Razavieh, 2010). El objetivo principal es analizar los conocimientos de los profesores de pedagogía en matemática, al momento de identificar y enfrentarse a los errores que realizan los estudiantes en la resolución de problemas de planteo con ecuaciones lineales.

3.2 Contexto, Población y Tipo de Muestra

Esta investigación se enfocó en las percepciones de los estudiantes de dos cursos de primero medio pertenecientes a dos liceos (A y B) y 13 profesores de pedagogía en matemática, tanto estudiantes como profesores pertenecientes a liceos municipales de zona urbana de las regiones del Libertador General Bernardo O'Higgins y Metropolitana de Santiago. Los educandos, al momento de participar del estudio, tenían un rango de edad de entre 14 y 17 años. En total 60 alumnos participaron, de los cuales 33 eran mujeres (55%) y 27 eran hombres (45%). Los profesores tenían entre cinco y veinte años de experiencia en el aula; siete de ellas eran mujeres y seis hombres.

Para hacer más sencillo el análisis de datos, los profesores entrevistados se codificaron desde D1 hasta D13, cómo se manifiesta en la tabla 1, la cual también

entrega información del sexo y los años de experiencia de cada uno de los profesores entrevistados.

Tabla 1: *Descripción de profesores entrevistados.*

Docentes	Sexo	Años de experiencia en aula
D1	Hombre	7 años
D2	Hombre	18 años
D3	Mujer	13 años
D4	Mujer	10 años
D5	Hombre	5 años
D6	Mujer	19 años
D7	Mujer	20 años
D8	Hombre	6 años
D9	Mujer	15 años
D10	Hombre	12 años
D11	Hombre	20 años
D12	Mujer	5 años
D13	Mujer	5 años

3.3 Instrumentos

La recolección de la información se realizó mediante tres instrumentos. El primero de ellos fue un cuestionario (Anexo 1) dirigido a estudiantes de primero medio de los establecimientos educacionales considerados para la investigación. El objetivo de este instrumento fue determinar los errores que presentaban los estudiantes al

resolver problemas de planteo con ecuaciones lineales. El segundo correspondió una entrevista semiestructurada (Anexo 2) aplicada a los estudiantes, para lograr identificar las dificultades que tuvieron al resolver los problemas de planteo. El tercero fue una entrevista semiestructurada (Anexo 3) que se aplicó a profesores de matemática, para identificar los conocimientos que tenían sobre los errores que cometen los estudiantes al enfrentar problemas de planteo en ecuaciones lineales y conocer las estrategias más convenientes para trabajar los errores desde sus perspectivas.

Cuestionario a estudiantes

El cuestionario de problemas para los estudiantes constó de cuatro preguntas, tres de ellas perteneciente a un instrumento elaborado por Chavarría (2014) y que tenían estrecha relación con el currículo de primero medio. El artículo de Chavarría analizó las dificultades de los estudiantes en la resolución de problemas de planteo, estas preguntas se modificaron y contextualizaron para lograr mayor motivación por parte de los estudiantes. A su vez, cada pregunta se seleccionó por un motivo específico: la primera por el contexto cercano a los estudiantes en el ahorro de dinero, la segunda por la complejidad del lenguaje algebraico, y la tercera por un dato distractor presente en el enunciado. La cuarta pregunta se eligió del texto del estudiante enviado por el Ministerio de Educación a los establecimientos educacionales en los años 2017 y 2018, su importancia es el trabajo que debe aplicar el estudiante para identificar los tiempos verbales. Se eligió sólo un problema de planteo del texto del estudiante, a causa de que este se familiariza con la complejidad y contexto de los problemas en el estudio de Chavarría.

Adicionalmente, el cuestionario fue validado con un piloteo previo. Este piloteo se realizó a siete estudiantes de primero medio, con un tiempo de resolución promedio de 45 minutos. La cantidad de problemas que formaron parte del cuestionario fue limitada por restricción de tiempo. Los resultados del piloteo sólo sugirieron cambios menores en la redacción de algunas preguntas.

Entrevista para los estudiantes

La entrevista para los estudiantes fue semiestructurada y se constituyó de cuatro preguntas guía que tenían el propósito de entender los errores de los estudiantes y el impacto que les produjeron las preguntas del cuestionario. La validación de este instrumento se realizó al mismo grupo de alumnos que participaron en el piloteo del cuestionario. Los resultados de este piloteo, al igual que el instrumento anterior, sólo sugirieron cambios menores en la redacción de algunas preguntas.

Entrevista orientada a los profesores de Educación Matemática

La entrevista a los profesores fue semiestructurada y procuró conocer la representación de los profesores referente a los errores de los estudiantes en la resolución de problemas de planteo. La entrevista se dividió en cuatro partes: la primera, fue creada con el propósito de conocer su perspectiva ante los errores de los estudiantes en general; la segunda, tenía como propósito reconocer si eran capaces de anticiparse a los posibles errores que presentarían los estudiantes en los problemas del cuestionario; la tercera, pretendía de que el profesor ante los errores cometido por distintos estudiantes, efectuará un análisis del razonamiento lógico que este utilizó; y por último la cuarta parte, tenía como objetivo conocer las distintas estrategias que emplearían los profesores para enmendar los errores vistos anteriormente.

La validez a las preguntas de esta entrevista también fue corroborada con un piloteo previo a un experto en el área de la didáctica de la matemática, quien evaluó la redacción adecuada de las preguntas y la duración de la entrevista.

3.4 Procedimientos

La secuencia para la aplicación de instrumentos fue en primer lugar el cuestionario de los estudiantes, después la entrevista semiestructurada a estudiantes y al final la entrevista semiestructurada a profesores de matemática.

El cuestionario se aplicó a dos cursos en distintos días, uno en el Liceo A y el otro en el Liceo B. Ambas aplicaciones se realizaron en una clase de dos horas pedagógicas, dirigidas por los investigadores quienes no intervinieron en las respuestas de los alumnos. En la actividad se visualizó la mejor disposición y entusiasmo de los estudiantes para resolver los problemas de planteo.

La entrevista semiestructurada de los estudiantes se aplicó al siguiente día del cuestionario, pero no a todos los alumnos, sino que a seis del Liceo A y cinco del liceo B. El motivo de esta elección fue el conocer en profundidad el razonamiento lógico que los estudiantes plasmaron en las respuestas que presentaban cierta ambigüedad al entender el error cometido. Las entrevistas fueron con grabación de voz e individuales, y tuvieron una duración de entre cinco a siete minutos aproximadamente.

La entrevista semiestructurada de los profesores de pedagogía en matemática se aplicó a trece docentes individualmente en un periodo de dos semanas, para la recolección de éstas se utilizó la grabación de voz con una duración de 15 a 50 minutos aproximadamente.

Capítulo 4

Análisis y discusión de resultados

4.1 Cuestionario a los estudiantes

En este apartado se dará a conocer el análisis de los resultados al cuestionario aplicado a los estudiantes del Liceo A y Liceo B. Este análisis se realizó clasificando los errores cometidos por ellos a través de la categorización de Movshovitz-Hadar et al. (1987).

Usando las preguntas de investigación como guía, esta clasificación de errores fue además modificada obteniendo las siguientes categorías:

1. Datos mal utilizados: Se incluyen aquí aquellos errores que se han producido por alguna discrepancia entre los datos que aparecen en un problema y el tratamiento que le ha dado el alumno. Esta categoría se divide en las siguientes tres:
 - a. Añadir datos extraños: son los errores por agregar datos que no se encuentran en el problema de planteo o ejercicio.
 - b. Olvidar algunos datos necesarios: estos errores ocurren por olvidar condiciones o datos, que se requieren para resolver el problema de planteo o ejercicio.
 - c. Utilizar valores numéricos de una variable para otra distinta: el error se presenta por confundir los valores numéricos que se designan a cada variable.

Movshovitz-Hadar et al. propusieron esta categoría sin subdivisiones explícitas; las subdivisiones fueron propuestas para realizar un análisis más claro y detallado del error.

2. Comprensión del enunciado: se incluyen en este caso los errores cometidos al descifrar lo que el enunciado indica. Este apartado se separa en dos subcategorías que son las siguientes:
 - a. Comprensión lectora: son aquellos errores que ocurren por una comprensión inadecuada del enunciado.
 - b. Interpretación incorrecta del lenguaje algebraico: se incluyen los errores por una deficiencia en la interpretación del lenguaje algebraico.

Al igual que la categoría anterior, Movshovitz-Hadar et al. propusieron esta categoría sin subdivisiones explícitas; las subdivisiones fueron también propuestas para realizar un análisis más claro y detallado del error.

3. Inferencia lógicamente inválida.
4. Teorema o definición deformada.
5. Solución no verificada.
6. Errores técnicos.

El análisis del cuestionario se realizó en base a la teoría fundamentada de datos. Los investigadores del presente trabajo analizaron de forma independiente las respuestas, considerando las categorías indicadas anteriormente. Luego, estas evaluaciones se sistematizaron y sintetizaron, buscando los aspectos comunes que explican el error de los alumnos en las preguntas del cuestionario.

Para los errores presentados por los estudiantes del liceo A en el cuestionario aplicado las respuestas de los estudiantes se separaron en primer lugar en tres resultados generales: estudiantes que respondieron con error, estudiantes que respondieron correctamente y por último estudiantes que no respondieron. La frecuencia de los errores categorizados de esta forma se presenta en la Tabla 2.

Tabla 2: *Resultado del cuestionario en Liceo A*

Preguntas	Estudiantes que responden con error	Estudiantes que responden correctamente	Estudiantes que no responden	Total
Pregunta N° 1	8	27	1	36
Pregunta N° 2	18	8	10	36
Pregunta N° 3	9	4	23	36
Pregunta N° 4	15	6	15	36

En la Tabla 3 se categorizan los errores que cometieron los estudiantes del Liceo A en cada pregunta.

Tabla 3: *Categorización de los errores en el Liceo A*

Categorías	Pregunta N°1	Pregunta N°2	Pregunta N°3	Pregunta N°4	Total
Añadir datos extraños	0	0	0	0	0
Olvidar datos necesarios	7	0	1	2	10
Confundir los valores de las variables	1	0	4	0	5
Comprensión lectora	0	14	2	9	25

Interpretación incorrecta del lenguaje algebraico	0	5	2	1	8
Inferencia lógicamente inválida	0	0	0	0	0
Teoremas o definiciones deformados	0	0	0	0	0
Solución no verificada	0	0	1	3	4
Errores técnicos	0	0	1	0	1

Como se aprecia en la Tabla 3, no existe presencia de errores que entrarían en añadir datos extraños, inferencias no válidas lógicamente y teoremas o definiciones deformados. El no encontrar errores de teoremas o definiciones deformados, puede deberse a la preferencia de los estudiantes por resolver problemas al tanteo y no utilizar las ecuaciones. Otra situación que se destaca en la Tabla 3, es que los errores cometidos con mayor frecuencia por los estudiantes son aquellos que pertenecen a las categorías olvidar datos necesarios y comprensión lectora.

Para mayor entendimiento, se presentan algunos errores de los estudiantes clasificados en la categoría de olvidar datos necesarios.

Un estudiante está ahorrando dinero guardando de la mesada que recibe de sus padres. Hasta el momento tiene billetes de dos tipos: \$1.000 y \$2.000. Logró juntar 35 billetes que da un total de \$60.000. ¿Cuántos billetes de \$1.000 y \$2.000 tiene el estudiante?



billetes de 1000 tiene 20
 billetes de 2000 tiene 20

} 60.000

$$\begin{array}{r} 35 \cdot 2 \\ \hline 70 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 25 \cdot 2 \\ \hline 50 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 20 \cdot 2 \\ \hline 40 \\ + 20 \\ \hline \end{array}$$

Figura 2: Respuesta de estudiante (E1) perteneciente a la categoría de olvidar datos necesarios.

Un ejemplo de error en esta categoría se muestra en la Figura 2, donde se logra apreciar que el estudiante solo considera una de las condiciones del problema, que es el monto total del dinero, los \$60.000, pero el problema de planteo también tiene la condición de que deben ser 35 billetes en total, información que no se aprecia en la resolución de E1.

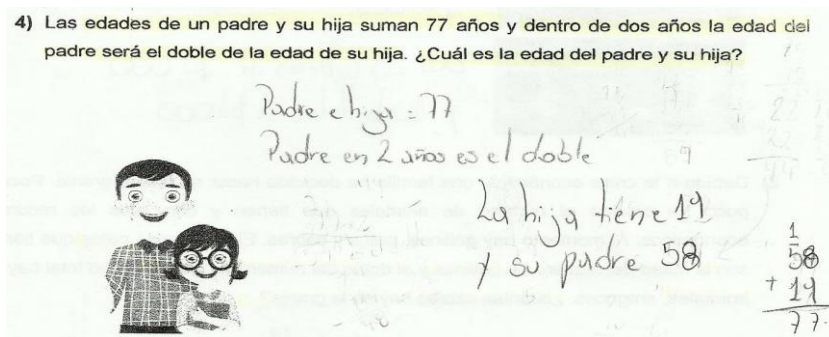


Figura 3: Respuesta de estudiante (E2) perteneciente a la categoría de olvidar datos necesarios.

Otro ejemplo de este tipo de error se puede apreciar en la Figura 3, donde se puede verificar que E2, en el problema número cuatro, toma en cuenta para su procedimiento sólo la condición de que la suma de las edades es 77 y olvida el dato necesario de que el padre en dos años más tendrá el doble de la edad de su hija.

Algunos ejemplos de los errores que representan la categoría de comprensión lectora se presentan a continuación.

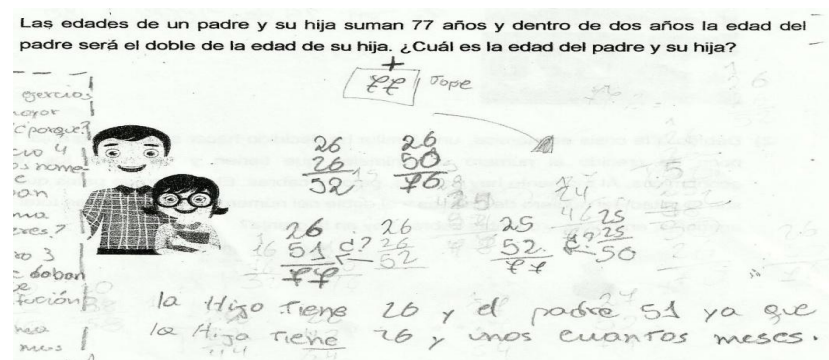


Figura 4: Respuesta de estudiante (E3) perteneciente a la categoría de comprensión lectora.

Un primer ejemplo se aprecia en la Figura 4, donde E3 en la resolución del cuarto problema de planteo del cuestionario se observa que se están considerando ambas condiciones, pero no entendiendo bien su función, ya que al parecer su confusión estuvo al entender el enunciado en esta parte “dentro de dos años la edad del padre será el doble de la edad de la hija”.

PARA RESOLVER:

) Debido a la crisis económica, una familia ha decidido hacer su propia granja. Poco a poco ha crecido el número de animales que tienen y con ellos los recursos económicos. Al momento hay gallinas, patos y cabras. El número de patos que tienen son la mitad del número de gallinas y el doble del número de cabras. Si en total hay 84 animales, entonces, ¿cuántas cabras hay en la granja?

84:2=42

42:2=21 → CABRAS

Gallinas el doble

21:2=10.5

patos mitad

21

R: Hay 21 cabras

Figura 5: Respuesta de estudiante (E4) perteneciente a la categoría de comprensión lectora.

Otro ejemplo se presenta en la Figura 5, donde se puede visualizar que E4 en el segundo problema de planteo, en la parte del enunciado que dice “el número de patos son la mitad del número de gallinas y el doble del número de cabras” entendió que, las gallinas son el doble de las cabras cuando en realidad el enunciado dice que los patos son el doble de las cabras.

La situación en el Liceo B se presenta a continuación. En la Tabla 4 se clasifican los resultados en el cuestionario aplicado a los estudiantes, indicando si: responden con error, responden correctamente y no responden. Luego, en la Tabla 5 se categorizan los errores que cometieron en cada pregunta.

Tabla 4: Resultado del cuestionario en Liceo B

Preguntas	Estudiantes que responden con error	Estudiantes que responden correctamente	Estudiantes que no responden	Total
Pregunta N° 1	12	11	1	24
Pregunta N° 2	14	0	10	24
Pregunta N° 3	11	0	13	24
Pregunta N° 4	15	0	9	24

Tabla 5: Categorización de los errores en el Liceo B

Categorías	Pregunta N°1	Pregunta N°2	Pregunta N°3	Pregunta N°4	Total
Añadir datos extraños	0	1	0	0	1
Olvidar datos necesarios	5	4	4	12	25
Confundir los valores de las variables	5	0	7	0	12
Comprensión lectora	2	10	1	3	16
Interpretación incorrecta del lenguaje algebraico	0	1	0	0	1
Inferencia lógicamente inválida	0	0	0	0	0
Teoremas o definiciones deformados	0	0	0	0	0
Falta de verificación en la solución	0	0	0	0	0

Errores técnicos	0	1	2	1	4
------------------	---	---	---	---	---

De forma similar al liceo A, se observa en la Tabla 5, que no se presentaron errores por inferencia lógicamente inválida, teorema o definiciones deformadas y falta de verificación en la solución. Los errores con mayor frecuencia, en la resolución a los problemas del cuestionario, fueron seleccionados en las siguientes categorías: olvidar datos necesarios y comprensión lectora.

Para entender mejor la categorización de errores en el Liceo B, a continuación, se dan a conocer algunos ejemplos de errores en la solución de dos estudiantes de este liceo clasificadas en cada una de las categorías con mayor frecuencia previamente mencionadas.

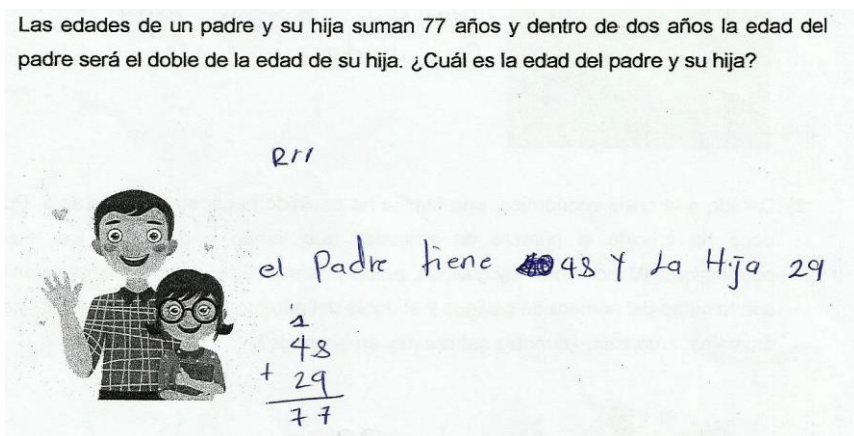


Figura 6: Respuesta de estudiante (E5) perteneciente a la categoría de olvidar datos necesarios.

El primer ejemplo para la categoría de olvidar datos necesarios corresponde a E5, en el cuarto problema de planteo, donde E5 como se puede apreciar en la Figura 6, escoge dos números al azar para las edades del padre y la hija, pero estos números solo cumplen que la suma entre ellos de 77 años, aunque no se ve indicio alguno de la otra condición del enunciado en donde dice que en dos años el padre tendrá el doble de la edad de su hija.

2) Debido a la crisis económica, una familia ha decidido hacer su propia granja. Poco a poco ha crecido el número de animales que tienen y con ellos los recursos económicos. Al momento hay gallinas, patos y cabras. El número de patos que tienen son la mitad del número de gallinas y el doble del número de cabras. Si en total hay 84 animales, entonces, ¿cuántas cabras hay en la granja?

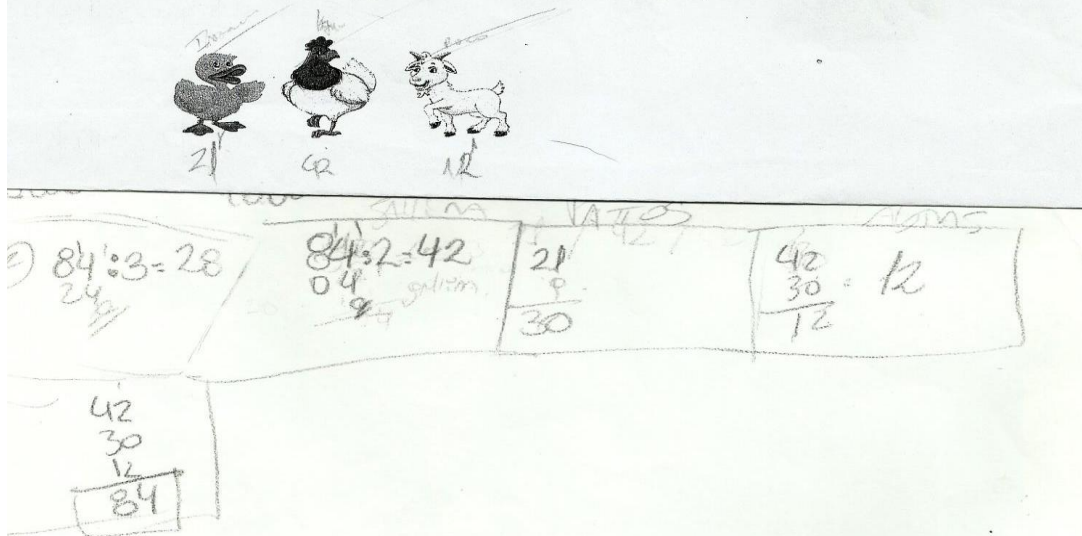


Figura 7: Respuesta de estudiante (E6) perteneciente a la categoría de comprensión lectora.

Un ejemplo del tipo de error clasificado en la categoría de comprensión lectora se muestra en la Figura 7, correspondiente a la resolución al segundo problema de planteo por E6. En esta figura, se visualiza que E6 presentó noción de saber que es la mitad o el doble, pero no hubo una comprensión del enunciado para entender la información que le ayudaría a solucionar el problema.

Un análisis comparativo de los tipos de errores por liceo, presentados anteriormente, se puede apreciar en la Figura 8, que muestra la frecuencia con la que ocurrieron los errores según su categorización para cada liceo.

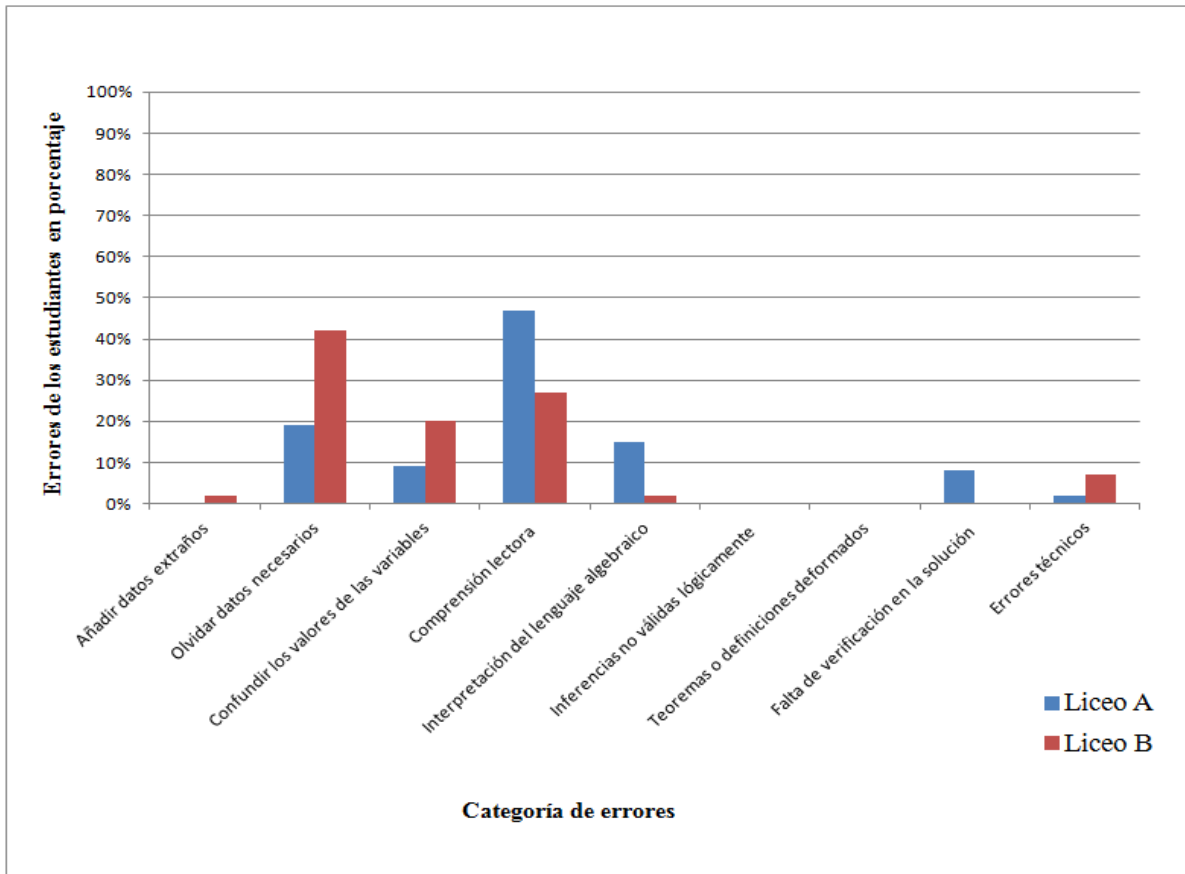


Figura 8: Frecuencia de errores entre el Liceo A y Liceo B por categoría.

En la figura 8, se ve claramente que los errores que se presentan con mayor reiteración en ambos liceos son: olvidar datos necesarios y comprensión lectora. Además, se visualiza que en el liceo B un 20% confunde los valores de las variables, y en el liceo A un 15% tiene problemas en la interpretación del lenguaje algebraico.

4.2 Análisis entrevista semiestructurada a los profesores

El análisis de las entrevistas de los profesores se basó en la teoría fundamentada de datos, esta teoría surge a partir de los datos recopilados de manera sistemática y analizados por un medio de investigación (Strauss y Corbin, 2012), llevando a cabo primeramente una codificación abierta, que se

refiere a una categorización general de los datos obtenidos en la investigación, siguiendo después una codificación axial, la cual corresponde a relacionar las categorías encontradas en la codificación abierta, y por último una codificación selectiva, la cual tiene como propósito encontrar una categoría central basándose en las codificaciones anteriores, que logre expresar el fenómeno de investigación (San Martín, 2014). La herramienta que hizo factible esta categorización fue el programa ELAN, con el cual se logró crear un proceso de codificación con las respuestas de los docentes que fueron grabadas en audios.

4.2.1 Primera parte: Definición del error

Para la primera parte, al ser preguntado a los profesores de matemática la definición del concepto de error (ver Anexo 2), diez de los 13 profesores describieron el error como parte del proceso de aprendizaje. Esta apreciación se ilustra en las respuestas de los docentes D4 y D8. Después de ser consultado sobre la definición de error, D4, profesora con más de 10 años de experiencia, por ejemplo, mencionó lo siguiente:

“ah, sí, hoy en día los errores siempre van a ser una oportunidad de aprendizaje. Obviamente, ya si se equivoca uno le dice: “no”, “malo”, “error”, “estas equivocado”, “cállate, no! eso ya no se usa. Siempre cuando comete un error a lo mejor, uno hace una pregunta en cuanto a un cálculo un procedimiento y le pregunta al alumno si esta correcto lo que él ha hecho o el compañero, cuando sale a la pizarra, ¿es correcto lo que hizo o se equivocó?. Es el momento para que todos empiecen a dar su opinión y decir: mire, faltó esto, faltó lo otro, pero es una oportunidad de aprendizaje del alumno, incluso de los errores se aprende.”

Similarmente, bajo la misma consulta D8, profesor con más de seis años de experiencia, respondió:

“mira, yo creo que el error es uno de los elementos más importantes dentro de la pedagogía, porque básicamente si el error no se presenta, el estudiante lo que te está mostrando que él sabe lo que tú le estás mostrando, por ende, tú no estás desarrollando nada nuevo en él. El error es uno de los elementos para mí más importante, porque es el punto de partida del aprendizaje, si el niño no se equivoca no aprende. Entonces pasa que el niño o el estudiante se frustra con el error y ahí es donde el trabajo emocional y de contención es importante, decirle que el error es común, tiene que aceptarlo y no frustrarse si no que utilizarlo para mejorar. Eso para mí es la forma de usar el elemento del error dentro de la clase.”

Luego de describir la relevancia que para él tiene el error en el proceso de aprendizaje agregó, además:

“para mí el paso número uno del aprendizaje es que el niño se equivoque. ¿Se equivocó? perfecto! por qué se equivocó, y desde ahí uno parte, para que corrija el pseudoproblema, ya que en realidad no es un problema, sino que es una fase del desarrollo. Si no se equivocan, no tienen nada que aprender. Es fome, les estás pasando una película que él ya aprendió”.

Como se aprecia en las respuestas de ambos docentes, D4 y D8, el error se percibe por los docentes en general como parte del proceso de enseñanza dentro de su práctica docente en el aula. Las respuestas obtenidas por los tres profesores que no consideraron el error como parte del aprendizaje mencionaron, en cambio, ejemplos concretos de errores, y plasmaron además su preocupación por los vagos conocimientos que hay sobre los contenidos básicos que deberían tener los estudiantes y sobre el déficit que existe en la comprensión lectora. Esta situación se refleja en las siguientes citas de los profesores D11 y D12. El primero, con 20 años de experiencia

laboral dice que “los principales errores de los estudiantes, es no tener el dominio de las tablas de multiplicar, falta de comprensión lectora, también es otro error que tienen que arrastran de muy pequeños y a veces llegan hasta cuarto medio con eso”. El segundo, con cinco años de experiencia en aula menciona que “los errores que yo he visto en lo básico, es en las multiplicaciones no se saben las tablas, el tema de los signos. Entonces ellos pueden entender un nivel más alto, pero hay siempre errores en los signos”.

4.2.2 Segunda parte: Anticipación al error

Para la segunda parte de la entrevista semiestructurada se les expuso a los profesores el cuestionario sin soluciones, y se les preguntó sobre los errores que sus estudiantes podrían cometer al solucionar los problemas del listado. Las respuestas de los profesores fueron analizadas según la metodología descrita en el capítulo anterior, basadas en la teoría fundamentada de datos. Las categorías creadas en este análisis se organizaron en base a las respuestas de los profesores a cada problema de planteo del cuestionario.

Para el primer problema de planteo presentado sin solución a los profesores las categorías identificadas en las respuestas se presentan a continuación en la Tabla 6.

Tabla 6: *Categorización a las respuestas del primer problema de planteo sin solución.*

Categoría	Descripción
P1C1	La dificultad al plantear y resolver sistema de ecuaciones, lo realizarán al tanteo.
P1C2	El plantear la ecuación o las ecuaciones.
P1C3	Comprensión lectora.
P1C4	La solución o procedimiento del sistema de ecuaciones.

P1C5	No tener claridad de las operaciones que deben utilizar.
P1C6	No identificar las variables del enunciado.
P1C7	Traspaso de un lenguaje a otro.
P1C8	Problemas con las palabras claves del enunciado.
P1C9	La impaciencia de querer resolver el problema rápidamente.
P1C10	No situarse en el contexto del enunciado.
P1C11	Sumar ambas variables.
P1C12	Los alumnos realizan sistema de ecuaciones, pero no comprenden que es.
P1C13	No cometen errores.

La distribución de las categorías mencionadas por cada docente se muestra a continuación en la Tabla 7.

Tabla 7: *Representación de las respuestas de los docentes identificadas en las categorías correspondientes, para el primer problema de planteo.*

	P1 C1	P1 C2	P1 C3	P1 C4	P1 C5	P1 C6	P1 C7	P1 C8	P1 C9	P1 C10	P1 C11	P1 C1 2	P1 C1 3	Tot al
D1	X									X	X			3
D2	X					X								2
D3					X	X								2
D4												X		1
D5		X		X										2
D6													X	1
D7		X			X									2

D8		X	X			X								3
D9									X					1
D10		X	X	X										3
D11			X				X							2
D12			X				X		X	X				4
D13		X		X				X		X				4
Tot al	2	5	4	3	2	3	2	1	2	3	1	1	1	

En la Tabla 7 se puede observar tres situaciones principales. Primero, se ve que tres (23%) de los trece profesores sólo mencionaron un posible error que quizás cometerían los alumnos al resolver este problema de planteo, lo que no es un número menor en comparación con la muestra que se entrevistó. Segundo, se percibe que ocho (62%) de los profesores, respondieron entre uno a dos posibles errores. Finalmente, solo los docentes D12 y D13 indican cuatro posibles errores que pertenecen a distintas categorías.

También se logra percibir en la Tabla 7, que la mayor cantidad de errores nombrado por los profesores, se encuentran en las siguientes categorías: el plantear la ecuación o las ecuaciones (P1C2) y la comprensión del enunciado (P1C3).

Algunos ejemplos de respuestas de los profesores que ilustran la categoría P1C2 son las respuestas de D5 y D8. Por un lado, el profesor D5 quien tiene cinco años de experiencia en el aula, a la pregunta dan las siguientes respuestas: “El primer error para el problema uno, es que no detecten que $X + Y$ es igual a 35, o sea no sean capaz

de encontrar la primera ecuación”. Por otro lado, D8, quien tiene una experiencia de seis años en aula, responde a la misma interrogante diciendo que: “El estudiante no sabría plantear más o menos las igualdades, no sabría plantear ni cual es X ni cual es Y, y luego no sabría plantear un sistema de ecuaciones o una ecuación lineal de primer grado para resolverlo”.

Respuestas de algunos profesores para entender la categoría P1C3, estos profesores son D8 y D12, para el primero sus años de experiencia en aula fueron indicados en el párrafo anterior y el segundo tiene cinco años de experiencia. Por un lado, D8 menciona para la primera pregunta que “el paso del texto al problema sería gravitante. Ahora si tú le colocas el sistema de ecuaciones ellas te los resuelven, pero poder construirlo, ahí va el problema. Comprensión lectora es un tema general”. Por otro lado, D12 comenta a esta interrogante diciendo que “Primero en entender el problema y al no comprenderlo no se atreven a cómo plantearlo matemáticamente. Ese es el error que tendría el estudiante, pasar de lo textual a lo matemático”.

Adicionalmente a estas citas. No se debe olvidar destacar de la Tabla 7, que una profesora (D6) según sus conocimientos no logró visualizar ninguna potencial dificultad en la resolución del problema, según ella: “en el primer ejercicio no tendrían problemas”.

Para el segundo problema de planteo sin solución, las categorías de las respuestas se presentan en la tabla 8 y la distribución de los docentes de acuerdo a estas categorías en la tabla 9.

Tabla 8: *Categorización de las respuestas al segundo problema de planteo sin solución.*

Categoría	Descripción
P2C1	Interpretación incorrecta del lenguaje algebraico.
P2C2	El plantear la ecuación o las ecuaciones.

P2C3	Confusión de variables.
P2C4	Procedimientos a seguir para resolver el problema.
P2C5	Comprensión lectora.
P2C6	Información complementaria.
P2C7	No logran identificar que se puede desarrollar utilizando solo una variable.
P2C8	Al aplicar el MCM.

Tabla 9: Representación de las respuestas de los docentes identificadas en las categorías correspondientes, para el segundo problema de planteo.

	P2C1	P2C2	P2C3	P2C4	P2C5	P2C6	P2C7	P2C8	Total
D1						X			1
D2	X								1
D3		X					X		2
D4		X							1
D5	X	X	X						3
D6	X								1
D7			X						1
D8					X				1
D9				X	X				2
D10	X	X		X					3

D11	X				X				2
D12	X	X			X				3
D13		X			X			X	3
Total	6	6	2	2	5	1	1	1	

En las respuestas de los profesores a la segunda pregunta de planteo del cuestionario en (anexo 1), es posible contemplar que seis (46%) de los profesores entrevistados recalcan en sus respuestas errores presentes en la categoría interpretación incorrecta del lenguaje algebraico (P2C1) y la misma cantidad, aunque no los mismos profesores hablan de plantear la ecuación o las ecuaciones P2C2.

Ejemplos recogidos en las respuestas de la entrevista para ilustrar la categoría de P2C1, los ejemplos son los profesores D5 y D12. Por un lado, D5 entregó la siguiente respuesta:

“el segundo error que puede haber, es en el enunciado. El número de patos que tienen son la mitad del número de gallinas y el doble del número de cabras. Entonces, ese enunciado lo pueden confundir, porque a lo mejor algebraicamente puede decir que el número de gallinas es el doble de número de patos y viceversa, entonces, puede haber un error en el procedimiento”.

Por otro lado, D12 quien tiene cinco años de experiencia reflexiona al respecto y dice “la mitad, que es para ellos la mitad, los conceptos matemáticos que se involucren el doble, comprender el problema, el diferenciar la mitad y el doble”.

Para la categoría P2C2, se clasificó D3 una docente con 13 años de experiencia en las aulas, quien manifestó que a los estudiantes “les cuesta relacionar que todo

depende de una variable, como una concadenación de relación eso para mí sería, no sé una ecuación mal planteada en vez de poner mitad coloque el doble y después no pueden relacionar eso”.

Es interesante, a la vez, que seis de los 13 profesores exponen tres categorías distintas para este problema de planteo estos entrevistados son el (46%) de la muestra, al igual es observable que el (31%) o sea cuatro docentes solo logran identificar un posible error para el problema de planteo.

Ahora analizando las respuestas de los profesores en el tercer problema de planteo sin soluciones. Las respuestas se categorizan en la tabla 10 y en la tabla 11 se presenta la distribución de los docentes de acuerdo a estas categorías.

Tabla 10: *Categorización al tercer problema de planteo sin solución.*

Categoría	Descripción
P3C1	Interpretación incorrecta del lenguaje algebraico.
P3C2	Utilizar datos distractores.
P3C3	El plantear la ecuación o las ecuaciones.
P3C4	Comprensión lectora.
P3C5	Errores aritméticos de operatorias.
P3C6	No contextualizar su procedimiento.
P3C7	Confusión al trabajar con las variables.
P3C8	Lo harían al tanteo.
P3C9	Que no usen todas las variables sino que se fijan solo los números escritos literalmente.
P3C10	Anotar las palabras claves.

Tabla 11: Representación de las respuestas de los docentes identificadas en las categorías correspondientes, para el tercer problema de planteo.

	P3C 1	P3C 2	P3C 3	P3C 4	P3C 5	P3C 6	P3C 7	P3C 8	P3C 9	P3C 10	Total
D1	X							X			2
D2	X		X								2
D3		X	X								2
D4	X		X	X							3
D5	X		X	X							3
D6					X						1
D7		X							X		2
D8				X							1
D9	X										1
D10	X		X		X						3
D11	X										1
D12	X	X		X		X				X	5
D13		X			X	X	X				4
Total	8	4	5	4	3	2	1	1	1	1	

En la Tabla 11, se observa que la categoría más reiterativa en las respuestas de los profesores es la interpretación incorrecta del lenguaje algebraico (P3C1), nombrada por ocho (62%) de los entrevistados y la categoría que sigue es el plantear la ecuación o las ecuaciones (P3C3), indicada por cinco (38%) profesores. Para entender de mejor manera, se presentan algunos ejemplos de las respuestas de los profesores correspondientes a las categorías mencionadas. Por un lado, se presentan respuesta

de los profesores D1 y D11 para la categoría P3C1. D1 quien tiene 7 años de experiencia en aulas educacionales, expresa que:

“aquí hay como una transferencia en el ejercicio tres, por lo menos veo que existe una transferencia en la cual hay que relacionar una cosa con otra, la edad de Jessica y Daniela (dos personas), ahí de repente pueden fallar, pero es más por el lenguaje algebraico, no tanto porque es difícil, sino porque en el lenguaje algebraico fallan”.

Otra respuesta es de D11 quien tiene 20 años de experiencia en el aula, él expone que “la dificultad que puedo decir, es llevarlo al lenguaje algebraico para interpretar el problema”.

Las respuestas obtenidas por los profesores D3 y D5 a esta pregunta se categorizaron en P3C3, donde D3 expone que “El principal error, yo creo que esta en plantear la ecuación, porque a ellos les cuesta relacionar dos variables, porque éste (problema 3) se hace con un sistema de ecuaciones”, y D5 manifiesta que:

“aquí (problema 3) hay que formar dos ecuaciones, que si eso lo llevó a una recta, es la ecuación general. Entonces, el principal error es como identificar que J, que es Jessica, es igual a tres Daniela, entonces formar esa ecuación puede ser el principal obstáculo”.

Por otro lado, se logra ver en la Tabla 11, que cuatro (31%) profesores hacen referencia a solo un tipo de error en el problema tres. Pero también se muestra que más de la mitad de la muestra mencionaron tres o más categorías para este problema.

En la Tabla 12, se exponen las categorías a las respuestas entregadas por los profesores al momento en que se les presentó el cuarto problema de planteo sin solución y en la Tabla 13 la distribución de estas categorías según los docentes que las mencionaron.

Tabla 12: *Categorización al cuarto problema de planteo sin solución.*

Categoría	Descripción
P4C1	Contextualizar en el tiempo que están trabajando.
P4C2	Comprensión lectora.
P4C3	Interpretación incorrecta del lenguaje algebraico.
P4C4	Confusión de variables.
P4C5	El profesor menciona que ocurrirá los mismos errores que en las preguntas anteriores.
P4C6	Los estudiantes se asustan al ver números grandes.
P4C7	Errores aritméticos de operatorias.
P4C8	No verificar si el resultado responde a la pregunta planteada.
P4C9	La solución o procedimiento del sistema de ecuaciones.

Tabla 13: *Representación de las respuestas de los docentes identificadas en las categorías correspondientes, para el cuarto problema de planteo.*

	P4C1	P4C2	P4C3	P4C4	P4C5	P4C6	P4C7	P4C8	P4C9	Total
D1					X					1
D2						X				1
D3	X									1
D4		X								1
D5	X		X					X		3
D6							X			1
D7	X									1

D8					X					1
D9		X		X						2
D10			X						X	2
D11			X							1
D12	X			X						2
D13	X	X	X						X	4
Total	5	3	4	2	2	1	1	1	2	

La Tabla 13 sugiere que una gran cantidad de los docentes les costó identificar categorías para este problema de planteo. Esta situación se ilustra al considerar que ocho (61%) de los profesores entrevistados solo visualizaron un error posible que pudieran cometer lo estudiantes en la resolución del cuarto problema de planteo del cuestionario.

Cabe destacar además que las categorías con mayores repeticiones fueron: en primer lugar, la contextualización en el tiempo que están trabajando (P4C1) mencionada por cinco (38%) docentes, seguida por interpretación incorrecta del lenguaje algebraico (P4C3) nombrada por cuatro entrevistados (31%) de la muestra total que serían los 13 profesores entrevistados.

Algunos ejemplos de respuestas mencionada por los profesores que ilustran la categoría P4C1 son D7 y D13. Por un lado, D7 con 20 años de experiencia en las aulas, reflexiona que los estudiantes:

“se confunden mucho cuando uno le hace preguntas, de hace cinco años atrás o dentro de cinco años o dentro de dos años, como que no saben si tiene que restarle a la igualdad o sumarle a la igualdad, o lo hacen en uno

solo de los lados de la igualdad de la ecuación, al plantear lo hacen en uno solo, no en los dos”.

Desde otro punto, D13 quien tiene cinco años de experiencia, analiza y menciona que:

“contextualizarse es lo que más cuesta, el presente, el pasado y el futuro, yo creo que eso es lo que más cuesta, porque aquí está el dentro, yo creo que ese es un error que pueden tener, yo lo tengo porque todavía me cuesta. La edad del padre y su hija suman 77 años, entonces, si me dicen suman, debería estar en el presente y después me dice dentro de dos años, es decir, en el futuro la edad del padre es el doble de la edad de su hija”.

Enfocándose en P4C3, se presentan dos profesores D13 y D11 para revelar esta categoría. Por un lado, el docente D13 con los años de experiencia ya mencionados entrega la siguiente respuesta: “qué significa el doble, la palabra doble también puede ser un error porque pertenece al lenguaje algebraico”. Por otro lado, D11 con el máximo de experiencia estimada para este estudio dice que el posible error sería “interpretarlo correctamente en el lenguaje algebraico, nada más, yo encuentro incluso que son más entretenidos los últimos problemas porque son más cortos”.

El análisis a esta segunda parte de la entrevista semiestructurada realizada a profesores, en donde se les pidió identificar posibles errores que podrían manifestar los estudiantes de primero medio en los problemas de planteo del cuestionario que se les aplicó. Es observable que al menos cinco profesores (38%) de los entrevistados, en cada problema de planteo dieron respuestas representadas en tres categorías o más, aunque en el cuarto problema de planteo solo dos (15%) de los 13 profesores dieron como respuestas tres y cuatro categorías.

4.2.3 Tercera parte: Identificación del error

A los profesores se les presentaron respuestas representativas de los estudiantes con las cuales se les pidió identificar si es que hay un error en el problema. Si existía algún error, se solicitó que identificaran por qué sucedió. Para analizar sus respuestas, se creó una codificación guiada, como en los análisis anteriores, por la teoría fundamentada de datos.

Las respuestas seleccionadas fueron organizadas en esta sección según el orden de los problemas del cuestionario. En lo que sigue se recuerda brevemente el problema asociado a la respuesta, un extracto de la respuesta escogida, indicándose a que estudiante corresponde.

Problema 1

El enunciado del problema fue el siguiente:

“Un estudiante está ahorrando dinero guardando de la mesada que recibe de sus padres. Hasta el momento tiene billetes de dos tipos: \$1.000 y \$2.000. Logró juntar 35 billetes que da un total de \$60.000. ¿Cuántos billetes de \$1.000 y \$2.000 tiene el estudiante?”.

La respuesta escogida fue realizada por E7. A continuación en la figura 9, se muestra el extracto relevante de ella que fue mostrado a los profesores para consultarle sobre su interpretación sobre el error.

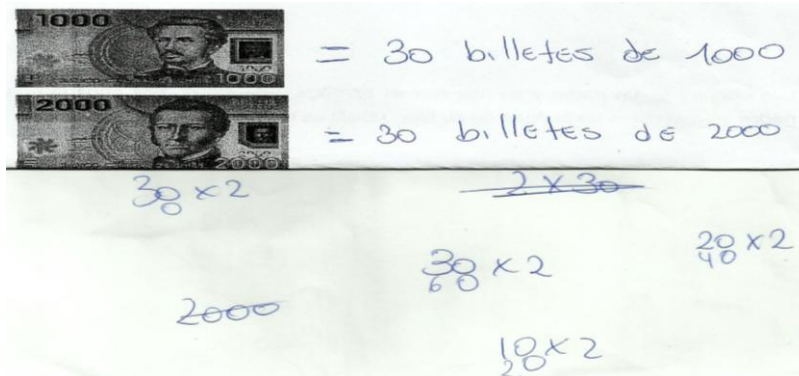


Figura 9: Solución al primer problema de E7.

Los investigadores del presente trabajo al realizar el análisis de categorización del error, determinaron que el error cometido por E7 pertenece a la categoría de “utilizar valores numéricos de una variable para otra distinta”. Esta categorización fue complementada con el análisis realizado por los docentes. En la siguiente Tabla 14, se describen las respuestas de los profesores clasificándolas en categorías, al analizar la solución de E7 en el primer problema de planteo presentada en la Figura 9. A continuación en la Tabla 15, se muestra la distribución a las categorías por cada docente entrevistado.

Tabla 14: *Categorías de las respuestas de los profesores, en el problema 1 con solución.*

Categoría	Descripción
S1C1	Confusión en las variables.
S1C2	No verificar si el resultado responde a la pregunta planteada.
S1C3	No plantear el contenido de ecuaciones, sino que lo intentan de resolver por tanteo.
S1C4	Comprensión lectora.
S1C5	Error en lo conceptual.

S1C6	Razonó incorrectamente.
S1C7	El profesor menciona que existe un error, pero no logra comprender el por qué.

Tabla 15: *Respuestas de los profesores al problema 1, según la categoría que les corresponde.*

	S1C1	S1C2	S1C3	S1C4	S1C5	S1C6	S1C7	Total
D1	X							1
D2	X							1
D3	X			X				2
D4			X					1
D5					X			1
D6							X	1
D7	X	X						2
D8		X	X	X				3
D9	X					X		2
D10	X							1
D11	X							1
D12	X	X						2
D13	X		X					2
Total	9	3	3	2	1	1	1	

En la Tabla 15, se destaca que 9 (69%) profesores identificaron que el error se produjo por confusión en las variables (S1C1).

Un ejemplo de respuesta clasificada en la categoría S1C1 se encuentra en el profesor D13, que menciona al interpretar el error de E7 que los estudiantes “no entienden que es una variable el dinero y la otra la cantidad de billetes. No tratan de que tengan relación las dos”. La respuesta del profesor D7 con 20 años de experiencia laboral también se clasificó en esta categoría, plasmando que, “dividir por dos creyendo que como son, o sea se habla de 35 billetes, pero ellos creen que los billetes son como 60. Dividen por dos estos 60”.

Cabe destacar que también existe el caso de la docente D6 quien reconoció que existe un error, pero no logró comprender el por qué (S1C7).

Problema 2

El enunciado del problema fue el siguiente:

“Debido a la crisis económica, una familia ha decidido hacer su propia granja. Poco a poco ha crecido el número de animales que tienen y con ellos los recursos económicos. Al momento hay gallinas, patos y cabras. El número de patos que tienen son la mitad del número de gallinas y el doble del número de cabras. Si en total hay 84 animales, entonces, ¿cuántas cabras hay en la granja?”

La respuesta escogida fue realizada por el estudiante E1. A continuación en la figura 10, se muestra el extracto relevante de ella que fue mostrado a los profesores para consultarle sobre su interpretación con respecto al error.

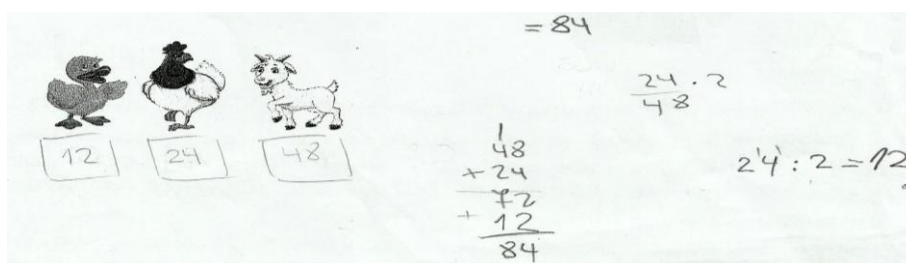


Figura 10: Solución al segundo problema de E1.

La solución de E1, en el análisis de los errores realizados por los investigadores, el error en esta solución fue clasificada en la categoría de comprensión lectora. Esta categorización fue complementada con el análisis realizado por los docentes que a continuación, en la Tabla 16, se presenta la clasificación de las respuestas de estos y se muestra la distribución de las categorías por cada docente entrevistado en la tabla 17.

Tabla 16: *categorías de las respuestas de los profesores, en el problema 2 con solución.*

Categoría	Descripción
S2C1	Comprensión lectora.
S2C2	Interpretación incorrecta del lenguaje algebraico.
S2C3	No encuentra error, dice que está correcto.
S2C4	Confusión en las variables.
S2C5	No verificar si el resultado responde a la pregunta planteada.
S2C6	El profesor menciona que existe un error, pero no logra comprender el por qué.
S2C7	Relacionar el orden de menor a mayor, por la posición de los animales en la imagen.

Tabla 17: *Respuestas de los profesores al problema 2, según la categoría que les corresponde.*

	S2C1	S2C2	S2C3	S2C4	S2C5	S2C6	S2C7	Total
D1	X							1
D2		X						1

D3	X							1
D4	X							1
D5	X							1
D6			X					1
D7				X				1
D8					X			1
D9			X					1
D10						X		1
D11			X					1
D12	X						X	2
D13	X							1
Total	6	1	3	1	1	1	1	

En la Tabla 17 se percibe que 6 (46%) de los entrevistados consideró que el error se debe a la comprensión lectora (S2C1), tal como la categorizaron de los investigadores. Algunos ejemplos para esta categoría son las respuestas de los profesores D4 y D13. Por un lado, D4 comenta que:

“a lo mejor lo mismo que pensé yo, que estaba pensando en la cantidad de patas. Entonces, yo me estaba tomando una referencia de las patas de los animales, porque al final dicen que son 84 animales, no me dice que son 84 patas. Pero como lo mismo dice, ahí va en la comprensión y la concentración que tiene uno del problema”.

Por otro lado, se tiene a D13 donde su respuesta se clasificó en la categoría S2C1, menciona:

“el error que cometí yo. Leyeron mal, aquí es súper simple de entender, dijeron lo mismo que hice yo, el doble del doble, el mismo error. Ese es el error, leyeron mal el número de patos que tienen son la mitad de gallinas, aquí están los patos, entonces, lo que hicieron es que multiplicaron, qué fue lo que quise hacer en un comienzo. Amplificaron, amplificaron y amplificaron, es como que entendieron y encontraron los números de los patos, después que hicieron dijeron el doble. Pero, relacionaron lo que tienen, es la mitad y esa mitad quizás pensaron que era la gallina, la gallina la mitad de los patos y era al revés, eran los patos la mitad de las gallinas. Entonces quizás se les dio vuelta la información”.

Con estas respuestas se caracteriza la categoría de comprensión lectora. Pero también es relevante rescatar de la Tabla 17, que tres (23%) profesores no identifican el error (S2C3). Se presentan algunas opiniones con respecto a esta categoría de error mencionadas por los profesores D9 y D11, para los cuales sus años de experiencia fueron expuestos anteriormente: D9 dice, “yo al final hice lo mismo que el niño. Está bueno, porque son doce patos, 24 gallinas y 48 cabras”, y D11 responde que “este ejercicio lo sacaron bien”.

Es importante ver en las respuestas, que el error no fue percibido por tres profesores entrevistados.

Problema 3

El enunciado del problema fue el siguiente:

“Ana tiene 25 años. Sus primas Jessica y Daniela son muy cercanas a ella. La edad de Jessica es el triple de la edad de Daniela. La resta de las

edades de Jessica y Daniela es de 48 años. ¿Cuál es la edad de Jessica?"

La respuesta escogida fue realizada por E8. A continuación en la figura 11, se muestra el extracto relevante de ella que fue mostrado a los profesores para consultarle sobre su interpretación sobre el error.

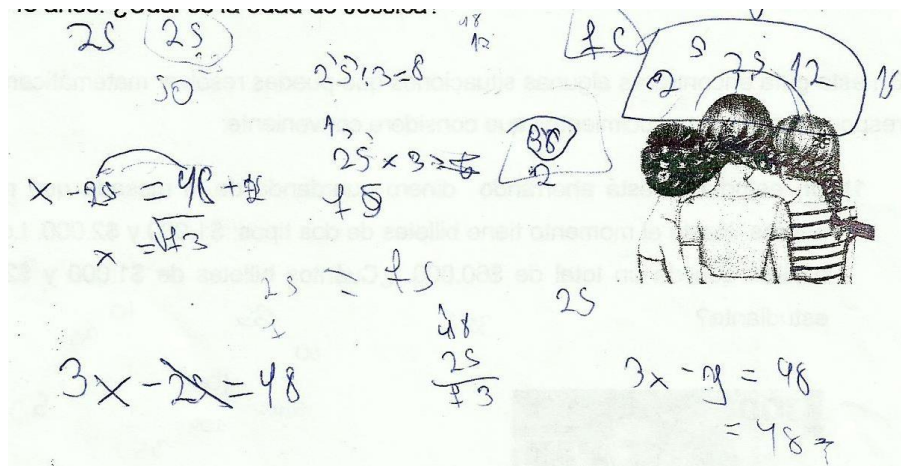


Figura 11: Solución al tercer problema de E8.

Los investigadores al realizar el análisis de las respuestas de los estudiantes determinaron que el error cometido por E8 pertenece a la categoría de “interpretación incorrecta del lenguaje algebraico”. Es clave decir que no tiene coincidencia con las categorías mayormente mencionadas por los profesores al analizar la respuesta de este estudiante, esto se podrá verificar más adelante en la tabla 19.

No se puede dejar a un lado los comentarios de los profesores al intentar analizar la solución de E8, estos fueron que en su práctica docente no acostumbran a utilizar un dato distractor en los problemas de planteo también destacaron que no comprendían el proceso lógico del estudiante debido a que no existe un orden en su resolución.

A continuación, en la siguiente tabla 18 se codificaron las categorías a las respuestas de los docentes para lograr una mejor comprensión de la tabla 19.

Tabla 18: *Categorías de las respuestas de los profesores, en el problema 3 con solución.*

Categoría	Descripción
S3C1	Interpretación incorrecta del lenguaje algebraico.
S3C2	Utilizar el dato distractor encontrado en el enunciado, que no sirve para el proceso de la resolución del problema.
S3C3	No existe un orden en el proceso de resolución.
S3C4	Error en la recopilación de datos.
S3C5	No se entiende el proceso lógico matemático utilizado por el estudiante.
S3C6	Comprensión lectora.
S3C7	Error técnico por multiplicación.
S3C8	Error conceptual, existe una raíz que no corresponde.
S3C9	El profesor menciona que existe un error, pero no logra comprender el por qué.
S3C10	El profesor se equivoca al resolver este problema.
S3C11	El alumno no supo qué hacer con la información entregada.
S3C12	No le da sentido a la variable X.

En la tabla 19 se presenta a cada profesor con las categorías correspondientes a sus respuestas.

Tabla 19: *Respuestas de los profesores al problema 3, según la categoría que les corresponde.*

	S3 C1	S3C 2	S3C 3	S3C 4	S3C 5	S3C 6	S3C 7	S3C 8	S3C 9	S3C 10	S3C 11	S3C 12	Tot al
D1			X	X		X							3
D2							X						1
D3					X								1
D4					X								1
D5	X	X						X					3
D6									X				1
D7		X											1
D8					X								1
D9					X					X			2
D10											X		1
D11											X		1
D12		X	X	X								X	4
D13	X	X	X	X		X							5
Tota l	2	4	3	3	4	2	1	1	1	1	2	1	

Lo que se distingue en la Tabla 19, es que hay dos de las doce categorías que se manifestaron con mayor frecuencia, cada una de ellas fueron mencionadas por cuatro (31%) de los profesores entrevistados, y estas categorías fueron: utilizar el dato distractor encontrado en el enunciado, que no sirve para el proceso de la resolución del

problema (S3C2) y no se entiende el proceso lógico matemático utilizado por el estudiante (S3C5).

A continuación, se destacan algunas respuestas de los docentes para una mejor comprensión de las categorías: S3C2 y S3C5. Para la primera categoría se consideran los profesores D5 y D7, quienes tienen cinco y veinte años de experiencia, respectivamente. Por un lado, D5 responde: “fíjate que aquí ocupó el 25, claro, porque tomó esta edad el 25, entonces ese fue un distractor, cayó en el distractor del 25, porque en ninguna parte el 25 afecta aquí el resultado”. Por otro lado, D7 mencionó:

“lo que pasa es que Ana es un distractor porque no tiene nada que ver con el problema, porque te dan la edad de Jessica y Daniela, y te dicen que Jessica es el triple de Daniela y ellos utilizan el 25 como dato del problema”.

Para representar la categoría S3C5, se distinguen las respuestas de los profesores D8 y D9, el primero D8 quien tiene seis años de experiencia laboral manifestó lo siguiente:

“no aquí de hecho, ya ni siquiera entiendo qué hizo él, o sea por ejemplo si yo corrijo una prueba acá a mí no me sirve esto, porque yo no sé cuál es el procedimiento. Pucha, por ejemplo, ahí apareció una raíz de donde no hay ni siquiera un exponente, nada. Yo no estoy viendo el proceso lógico matemático que hizo el niño, entonces, yo no puedo ahí por ejemplo, yo no te puedo decir que fue lo que hizo, no tengo idea, no tengo idea ni siquiera de lo que pensó”.

El segundo profesor D9, con 15 años de experiencia laboral en las aulas responde que:

“este es el que más me costó, mira como lo sacó él... no le entiendo lo que quiere decir, pero sacó la cuenta que eran 73 años los que tenía

Jessica. No, no sabría decirle en ésta. Pero ella saca que $3x-y= 48$, no sé cuál es el resultado correcto”.

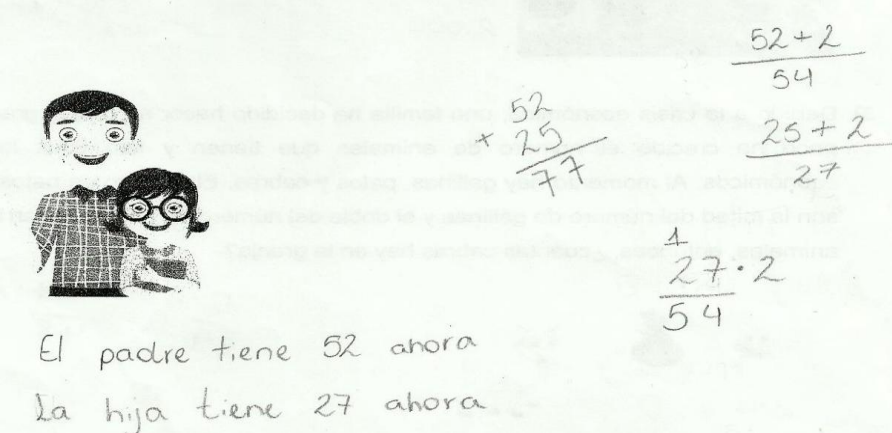
Las citas anteriores se logran percibir que los docentes en general no entienden el proceso lógico matemático utilizado por el estudiante en la solución que se les presentó.

Problema 4

El enunciado del problema fue el siguiente:

“las edades de un padre y su hija suman 77 años y dentro de dos años la edad del padre será el doble de la edad de su hija. ¿Cuál es la edad del padre y su hija?”

La respuesta escogida fue realizada por E9. A continuación en la figura 12, se muestra el extracto relevante de ella que fue mostrado a los profesores para consultarle sobre su interpretación sobre el error.



The figure shows a handwritten solution on a piece of paper. On the left, there is a simple line drawing of a man and a young girl. To the right of the drawing are three arithmetic calculations:

$$\begin{array}{r} 52 \\ + 25 \\ \hline 77 \end{array}$$
$$\begin{array}{r} 52+2 \\ \hline 54 \\ 25+2 \\ \hline 27 \end{array}$$
$$\begin{array}{r} 4 \\ 27 \cdot 2 \\ \hline 54 \end{array}$$

Below the calculations, the student has written the final answer in Spanish:

El padre tiene 52 ahora
La hija tiene 27 ahora

Figura 12: Solución al cuarto problema de E9.

Los investigadores en el análisis de categorización del error determinaron que en la solución de E12 el error visualizado, pertenece a la categoría: “falta de verificación en

la solución”. Esta categorización fue complementada con el análisis realizado por los docentes. En la Tabla 20, se describen las respuestas de los profesores clasificándolas en categorías, al analizar la solución de E9 en el cuarto problema de planteo presentada en la Figura 12. A continuación, en la Tabla 21, se muestra la distribución a las categorías por cada docente entrevistado.

Tabla 20: *Categorías de las respuestas de los profesores, en el problema 4 con solución.*

Categoría	Descripción
S4C1	No presenta un proceso adecuado en la resolución del problema.
S4C2	No plantean el contenido de ecuaciones, sino que lo intentan de resolver por tanteo.
S4C3	Se confundió con los datos al responder la pregunta (existe una distracción).
S4C4	El alumno no coloca datos.
S4C5	No encuentra error, dice que está correcto.
S4C6	El profesor menciona que existe un error, pero no logra comprender el por qué.

Tabla 21: *Respuestas de los profesores al problema 4, según la categoría que les corresponde.*

	S4C1	S4C2	S4C3	S4C4	S4C5	S4C6	Total
D1	X						1
D2		X					1
D3			X				1
D4			X				1

D5			X				1
D6			X				1
D7	X						1
D8	X			X			2
D9					X		1
D10					X		1
D11						X	1
D12			X				1
D13		X					1
Total	3	2	5	1	2	1	

La categoría en donde los profesores manifiestan que el alumno se confundió con los datos al responder la pregunta (existe una distracción) corresponde a S4C3, la cual tiene una estrecha relación con la clasificada por los investigadores “falta de verificación”.

Como se observa en la Tabla 21, la categoría S4C3 es mencionada por cinco (38%) profesores. Algunos ejemplos de las respuestas de estos profesores son de D4 y D12. Por un lado, D4 quien tiene una experiencia de diez años en la sala de clases, respondió lo siguiente:

“a lo mejor se confundió. La pregunta era... las edades eran 77, entonces, consideran en el momento que las edades eran 77 la suma y su respuesta se fue para otro lado, perdió el foco, a lo mejor puso la respuesta que le dio al final”.

Por otro lado, D12 quien tiene cinco años de experiencia en aula, mencionó para el error presentado por E12 (figura 12) lo siguiente:

“¿Cuál es la edad del padre? es 52, está bien y la de la hija le puso 27 y era 25. Puede haber ocurrido por distracción yo creo, porque te creo si él le hubiera puesto acá 54 y 27, quizás entendió mal la pregunta por qué vio lo último, pero acá dio la respuesta del 52 y luego dio la respuesta de en dos años a la hija. Entonces, yo creo que se distrajo o se aceleró y dio las respuestas”.

Con estas respuestas de los docentes, se entiende de mejor manera a que se refiere la categoría S4C3.

4.2.4 Cuarta parte: Estrategias para enfrentar el error

En esta cuarta y última parte, los profesores respondieron a la pregunta referida a qué estrategias utilizarían para enmendar los errores cometido por los estudiantes en las soluciones presentadas en la segunda parte de esta entrevista (Anexo 3). Para mostrar estas respuestas más claramente se creó la Tabla 22 categorizando las distintas estrategias mencionadas.

Tabla 22: *Categorización de las estrategias entregadas por los docentes.*

Categorías	Descripción
I3C1	Enseñar los problemas de planteo a través de los pasos del método de Polya. (Trabajando por partes del ciclo)
I3C2	Crear una articulación con las asignaturas de Matemática, Lenguaje, Ciencias e inglés. Para la resolución de problemas de planteo. (Para reforzar la comprensión lectora).
I3C3	Que los estudiantes analicen su respuesta para identificar sus errores, esto puede ser guiado a través de la duda que le provoque el profesor. Con la finalidad de seguir el camino de su aprendizaje.

I3C4	Elegir problemas más simples para que los estudiantes aprendan a identificar los datos del enunciado.
I3C5	Ejercitar problemas de planteo con la mayoría de los contenidos que se deben ver en clases.
I3C6	Seleccionar errores más frecuentes, para realizar una retroalimentación en conjunto con todos los estudiantes del curso. Utilizar el aprendizaje colaborativo.
I3C7	Enseñar las distintas soluciones de un sistema de ecuaciones para que el estudiante seleccione el más conveniente para él.
I3C8	Elegir uno a dos problemas elementales en vez de muchos, para enseñarles paso a paso y dedicando el tiempo necesario para que el estudiante aprenda.
I3C9	Explicarles cómo llevar al lenguaje algebraico, Interpretación de un número con una letra. Luego desarrollar problemas en los cuales se apliquen estos conceptos y por último hacer un repaso de la modalidad de hacer ecuaciones de primer grado.
I3C10	Trabajar en grupo mediante desafíos.
I3C11	Simplificar el problema antes de trabajar con las incógnitas pedidas.
I3C12	Crear un ambiente de confianza para trabajar los errores.
I3C13	Explicar al alumno que cometió un error y decirle cómo era la solución

En la Tabla 23, se clasifican las respuestas dadas por los profesores, identificándose en la categoría que les corresponde. Además, se aprecia cuantas estrategias menciona cada uno de los entrevistados.

Tabla 23: Estrategias mencionadas por los profesores según la categoría que le corresponde.

	I3C 1	I3C 2	I3C 3	I3C 4	I3C 5	I3C 6	I3C 7	I3C 8	I3C 9	I3C 10	I3C 11	I3C 12	I3C 13	Tot al
D1	X	X												2
D2								X						1
D3					X									1
D4	X		X			X								3
D5	X		X											2
D6													X	1
D7				X				X						2
D8	X	X												2
D9							X	X						2
D1 0							X		X					2
D1 1									X					1
D1 2	X	X				X								3
D1 3	X	X	X							X	X	X		6

Tot al	6	4	3	1	1	2	2	3	2	1	1	1	1	
-----------	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	--

Es posible observar que existe una alta representación en dos de las 13 estrategias, para los errores en los problemas de planteo: la primera fue enseñar estos a través de los pasos del método de Polya (I3C1), plasmada por 6 (46%) profesores, los que demostraron el interés y la importancia de trabajar este ciclo lentamente y por parte; y la segunda fue crear una articulación con las asignatura de Matemática, Lenguaje, Ciencias e Inglés (I3C2), para mejorar la comprensión lectora. Esta última es mencionada por cuatro (31%) de los 13 profesores entrevistados.

Un ejemplo de respuestas clasificadas como I3C1 se encuentra en la entrevista a D1, profesor con siete años de experiencia, respondiendo lo siguiente, al ser preguntado sobre las estrategias usadas para enfrentar el error:

“a lo mejor una buena estrategia sería trabajar la primera parte de Pólya, luego la primera y la segunda parte, después la primera, la segunda, la tercera y la cuarta parte (vamos), pero no se puede hacer todo de un viaje”.

Otro ejemplo de clasificación en esta categoría es la respuesta de D8, profesor con 6 años de experiencia, quien ante la misma pregunta responde:

“resolver los ejercicios mostrándoles un método, tomar los datos ordenarlos, cuáles son los datos que usted tiene, ¿qué le están preguntando? y en base de eso poder sacar el sistema de ecuaciones. Mostrarle un método bien ordenado bien establecido y el paso a paso”.

A continuación, se destacan las respuestas de los profesores D8 y D13, representadas con las categorías I3C2, D8 con seis años de experiencia como docente responde que:

“trabajar la comprensión lectora y eso va de la mano con la articulación curricular, trabajar los problemas de matemática de comprensión lectora en lenguaje también, y en inglés. De hecho acá (en el liceo), por ejemplo hay un profesor que el otro día me estaba pidiendo ejercicio de matemática simple, pero quería trabajarlos en inglés, porque quería trabajar la comprensión lectoras en inglés con ejercicios de matemática. Hacer las articulaciones curriculares, porque también sucede que los niños se le ve y se le analiza que lo que tú le estás enseñando le sirve no solamente en un ramo, le da más pertinencia y se genera un aprendizaje significativo”.

Y el profesor D13 con cinco años de experiencia en las aulas entregó la siguiente respuesta:

“la articulación entre el departamento de lenguaje y el departamento de matemática. Primero porque nosotros, como te dije al principio de la entrevista muchos profesores y yo me di cuenta, que muchos profesores tenemos problemas de comprensión lectora. Entonces, cómo enseñamos a un niño a entender un problema sino tenemos las herramientas básicas para poder entenderlas. Entonces, qué es lo que sucede, cuando nosotros llegamos a la sala primero que todo le explicamos el problema como nosotros lo entendemos, y no nos ponemos en el contexto del estudiante de cómo él lo entendería. Una solución sería que entendieran el problema, trabajar el mismo problema en lenguaje, puede ser en un taller de lenguaje y en el taller de matemática, con el fin de que el niño entienda lo que quiere decir el problema”.

En esta última cita se evidencia que el profesor reconoce su falta de comprensión lectora, por lo tanto, recomienda una articulación con las distintas asignaturas.

Capítulo 5

Conclusiones, Limitaciones y Recomendaciones.

5.1 Conclusiones

La presente investigación buscó analizar si los profesores de matemática, de enseñanza media, poseen los conocimientos necesarios para identificar y enfrentar los errores producidos por sus estudiantes, al resolver problemas de planteo con contenido de ecuaciones lineales. El trabajo de investigación fue guiado por el marco teórico del conocimiento pedagógico del contenido (Shulman, 1986; Ball et al., 2008; Carrillo et al., 2013). El modelo adoptado para estudiar el conocimiento del profesor se basó en el Conocimiento Especializado del Profesor de Matemática (MTSK), específicamente en dos de sus categorías: el Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT), que se refiere a la elección de los recursos, estrategias, materiales didácticos, entre otros, para la enseñanza de la matemática; y el Conocimiento de las Características de Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM), que corresponde al conocimiento que posee el profesor para comprender el razonamiento o procedimiento que utilizan habitualmente sus estudiantes al enfrentarse a diferentes actividades o tareas, y además debe conocer cómo el alumno interioriza los contenidos que se desea enseñar (Carrillo et al., 2013).

Los participantes de este estudio fueron estudiantes de primero medio (N=60) y profesores de pedagogía en Matemática (N=13), todos pertenecientes a liceos municipales de zonas urbanas de las Regiones del Libertador General Bernardo O'Higgins y Metropolitana de Santiago. La investigación fue adscrita a un método cualitativo, sustentado en una perspectiva interpretativa. Los instrumentos de investigación aplicados fueron tres: el primero, un cuestionario a estudiantes, el cual contenía cuatro problemas de planteo; el segundo, una entrevista semiestructurada a estudiantes, para comprender las soluciones de estos; y el tercer instrumento consistió

en una entrevista semiestructurada para los profesores. Este último instrumento, fue seccionado en cuatro partes. En la primera parte, a cada profesor se le pidió entregar su definición de error; en la segunda parte, a los profesores se les mostró el cuestionario (Anexo 1) sin soluciones a los problemas de planteo, con el fin de conocer su capacidad de anticiparse a los posibles errores de sus estudiantes; en la tercera parte, a los profesores se les expuso el cuestionario con soluciones de algunos alumnos, para saber si identificaban los errores que los estudiantes cometieron; en la cuarta y última parte, a los profesores se les pidió mencionar estrategias que utilizarían para enmendar los errores percibidos en la tercera parte de esta entrevista.

El análisis de datos se realizó de forma separada para los distintos instrumentos. Por un lado, los datos recolectados del cuestionario se analizaron usando como base una versión modificada de la categorización de Movshovitz-Hadar et al. (1987). La distribución de frecuencia de los errores cometidos por los estudiantes según estas categorías fue estudiada con tabulaciones cruzadas de datos.

Por otro lado, los datos de las entrevistas se analizaron según la teoría fundamentada de datos, esta teoría surge a partir de los datos recopilados de manera sistemática y analizados por un medio de investigación (Strauss y Corbin, 2012), llevando a cabo una codificación abierta, axial y selectiva. El resultado de estas codificaciones fue la identificación de 30 categorías generales para los problemas de planteo sin solución y 22 categorías para los problemas de planteo con solución.

Las conclusiones generales de este estudio se organizan a continuación con base en las preguntas de investigación.

5.1.1 ¿Qué conocimientos poseen los profesores de pedagogía en matemática, para identificar los errores de los estudiantes de primero medio de liceos municipales en la resolución de problemas con ecuaciones lineales?

Es posible afirmar que los profesores de pedagogía en matemática entrevistados, en general, poseen un conocimiento general sobre los errores de los estudiantes; sin embargo, estos conocimientos varían considerablemente.

Esto se observa principalmente a partir de las respuestas que se obtuvieron en la primera y segunda etapa de la entrevista, presentadas en el capítulo anterior. En la primera etapa, los profesores además de entregar la definición también revelaron distintos errores que presentaron sus estudiantes en la resolución de problemas. Estos errores correspondían a un ámbito general que han observado a través de su práctica docente. En la segunda etapa, los profesores mencionaron posibles errores que sus estudiantes podrían efectuar al presentarles el cuestionario de problemas de planteo sin resultados.

En la Figura 13, se presenta un resumen de las tablas 7, 9, 11 y 13. En donde se clasificaron los errores anticipados por los profesores, a los cuatro problemas de planteo del cuestionario.

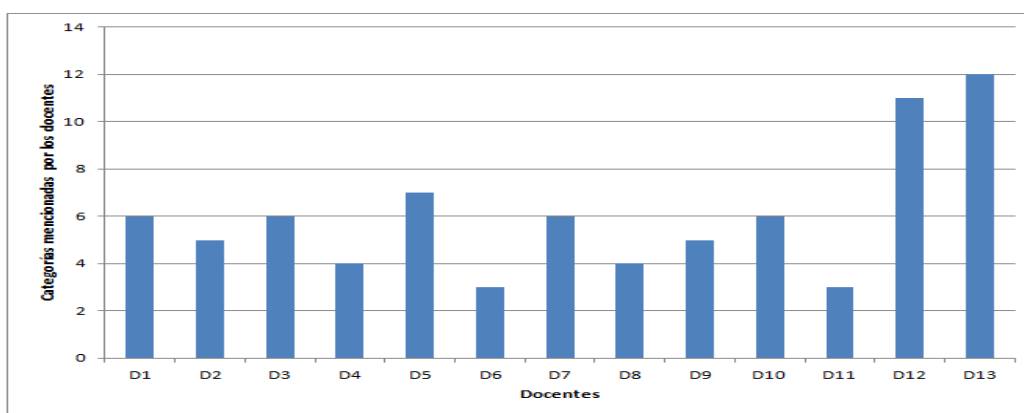


Figura 13: Gráfico de categorías indicadas por los docentes, al anticipar errores.

Como es posible observar en la Figura 13, la mayoría de los docentes son capaces de identificar entre cuatro y siete categorías; sin embargo, se destacan dos grupos con capacidades muy distintas de identificar posibles errores en los estudiantes. Por un lado, dos profesores (D12 y D13) tienen una gran capacidad de reconocer sobre diez categorías diferentes; y por el otro lado, opuesto al grupo anterior se encuentran dos profesores (D6 y D11) con baja capacidad de reconocer errores, determinando sólo tres categorías. Un caso particular a destacar en este segundo grupo es D6, quien en el primer problema de planteo como se observa en el Capítulo 4 análisis y discusión de resultados, estimó que no se cometerían errores.

Adicionalmente, es importante notar que las categorías mayormente mencionadas por los profesores fueron: interpretación incorrecta del lenguaje algebraico, plantear la ecuación o las ecuaciones y comprensión lectora. Se puede comprobar que existe una similitud de estas categorías, con el análisis realizado por los investigadores a los errores de los estudiantes cometidos en el cuestionario presentados en las Tablas 3 y 5 del capítulo 4 de análisis y discusión de resultados. En estas tablas se ve claramente que los errores correspondientes se debieron tanto a la comprensión lectora (su frecuencia identificada fue observada en 41 respuestas del cuestionario completo) e interpretación incorrecta del lenguaje algebraico (su frecuencia identificada fue observada en 9 respuestas del cuestionario completo). No obstante, el planteamiento de las ecuaciones no se logró observar en las respuestas de los alumnos de este estudio.

El hecho de que los profesores en general fueran capaces de identificar el error se confirma, además, por los datos obtenidos en la tercera parte de la entrevista de identificación del error. Los profesores, en esta parte de la entrevista, demostraron cierta capacidad de analizar los errores producidos por los estudiantes que participaron en esta investigación, llegando a encontrar el por qué se produjeron estos errores. Esta capacidad se ilustra en la tercera parte de la entrevista para los profesores presentada

en el capítulo 4. Al ser consultado sobre el cuarto problema de planteo, el docente D12 menciona lo siguiente:

“¿Cuál es la edad del padre? es 52, está bien y la de la hija le puso 27 y era 25. Puede haber ocurrido por distracción yo creo, porque te creo si él le hubiera puesto acá 54 y 27, quizás entendió mal la pregunta por qué vio lo último, pero acá dio la respuesta del 52 y luego dio la respuesta de en dos años a la hija, entonces, yo creo que se distrajo o se aceleró y dio las respuestas”.

Al comparar las respuestas de los docentes con el análisis realizado por los investigadores a los errores cometidos por los estudiantes que se presentaron en la tercera parte de la entrevista, se observó una similitud en las categorías consideradas por ambos grupos, tal vez, los nombres de las categorías no sean idénticos, pero sí existe una descripción semejante entre ellas.

La capacidad de los profesores de identificar el error se concentró en tres categorías principales: confusión en las variables; comprensión lectora; y la confusión con los datos al responder la pregunta, recalcando que existió una distracción. Esta tendencia a identificar estas categorías se confirma además con lo encontrado en revisiones literarias realizadas en el transcurso de este trabajo de investigación.

En el estudio de Pochulu (2009), los profesores de matemáticas entrevistados argumentaron que los alumnos no están acostumbrados a releer un problema de planteo y tampoco a leer consignas, también señalan que los estudiantes no leen completamente el enunciado, por lo cual se deduce que la comprensión lectora es una dificultad habitual en los estudiantes, es importante destacar que los profesores también presentan problemas en la comprensión lectora, afirmado también por D13 en el capítulo anterior . Por otro lado, el error de la interpretación incorrecta del lenguaje algebraico se puede visualizar en que el álgebra por su naturaleza simbólica es un área

que reporta diversas dificultades provocando errores desde que los estudiantes inician la interacción con ésta (Sánchez y Del Valle, 2016). Ambas investigaciones confirman que tanto la comprensión lectora y la interpretación incorrecta del lenguaje algebraico son unos de los grandes generadores de errores dentro de la matemática en la resolución de problemas. Situación que se puede reafirmar con los datos recopilados en este estudio, donde algunos profesores mencionaron su déficit en la comprensión lectora.

A pesar de que los profesores en general demostraron un conocimiento general del error, se encontraron variaciones importantes al compararlos. Por ejemplo, en la tercera parte de la entrevista a los profesores, existieron cuatro participantes que no lograron reconocer en uno de los problemas de planteo del cuestionario el error generado por el estudiante.

En resumen, es posible afirmar que los profesores de matemática poseen conocimientos de las características de aprendizaje de las matemáticas (KFLM), debido a que los profesores entrevistados en esta investigación, en toda instancia al momento de responder las preguntas se basaban en las características de sus estudiantes, en cómo ellos pensarían, actuarían y que se les dificultaría más al momento de resolver los problemas de planteo. Situación que demuestra el interés de los profesores por comprender la forma de aprendizaje de sus estudiantes.

5.1.2 ¿Qué estrategias pedagógicas usan estos profesores de matemáticas para enfrentar estos errores?

Para responder la segunda pregunta de investigación, donde los profesores de matemática debían mencionar distintas estrategias que utilizarían para enmendar los errores de los estudiantes de este estudio, se analizaron los datos recolectados de la cuarta parte de la entrevista semiestructurada representadas en la tabla 23 del capítulo de análisis y discusión de resultados. A partir de este análisis, se concluye que las

estrategias mayormente expuestas fueron cuatro: guiar al estudiante a seguir los pasos del método de Polya, crear una articulación entre las distintas asignaturas del establecimiento, promover el auto-análisis de las respuestas de los estudiantes y escoger problemas de planteo cuidadosamente.

La primera estrategia sobre guiar al estudiante a seguir los pasos del método de Polya se refiere, como se indica en el capítulo 3, a enseñar los problemas de planteo detalladamente a través de las cuatro etapas del método que tienen un orden cronológico: comprensión del problema, concepción de un plan, ejecución del plan y por último visión retrospectiva. Una segunda estrategia propuesta por los profesores es crear una articulación entre los distintos departamentos del establecimiento, para reforzar la comprensión lectora, ya que el estudiante le tomará mayor interés si lo que está aprendiendo le sirve para más de una asignatura.

La tercera, es crear un ambiente adecuado, logrando que los estudiantes analicen sus respuestas para identificar sus propios errores, guiándolos a través de las dudas que le provoque el profesor en sus respuestas, con la finalidad de que siga el camino de su aprendizaje; la cuarta y última estrategia, consistió en que, en vez de proponerles a los alumnos muchos problemas de planteo, elegir uno o dos que sean elementales para enseñárselos paso a paso y dedicándoles el tiempo necesario, con el propósito de que los estudiantes entiendan y aprendan significativamente.

Además, se logra concluir que la mayoría de los profesores de matemática que participaron en este estudio, tienen la capacidad de pensar o planificar más de una estrategia para enmendar los errores que presenten sus estudiantes, esto se deduce por lo mostrado en la tabla 23 que se encuentra en el capítulo del análisis y discusión de resultados. Los profesores al obtener esta capacidad, los ayuda a tener otra alternativa en el caso que, con la primera estrategia que utilicen no se logre enmendar el error que está cometiendo el estudiante.

Como fue presentado en el capítulo 3 de este trabajo, la componente KMT, referida al conocimiento de la enseñanza de las matemáticas del profesor, involucra la capacidad de seleccionar estrategias efectivas al momento de diseñar una secuencia pedagógica. Esto implica que en el proceso de formación profesional del profesor, se le debe preparar para saber cómo enfrentar los errores de sus estudiantes. Se requiere una reflexión seria sobre esta componente.

5.2 Limitaciones

En el desarrollo de la investigación se identificaron las siguientes limitaciones:

- Dificultad para acceder a los establecimientos educacionales a la hora de recopilar los datos necesarios para la investigación.
- Validación insuficiente de los instrumentos de investigación, en vista de la dificultad en el momento de buscar estudiantes que cumplieran con las características necesarias del estudio y la accesibilidad a personas expertas en educación matemática.
- Debido al tiempo para desarrollar la investigación, se obtuvo un tamaño de muestra bajo para el estudio. Por lo tanto, no se logra encontrar generalizaciones significativas para asegurar una distribución representativa de la población.

5.3 Recomendaciones

Es importante señalar que esta investigación es de corte interpretativo, por tanto, es necesario continuar investigando el conocimiento especializado del profesor de matemática, en la educación chilena, para así fomentar la aplicación de este conocimiento en la formación inicial docente.

Para esto se sugiere que, en los cursos finales de la formación docente, se inserte la capacidad de anticiparse a las soluciones que podrían realizar sus

estudiantes y de análisis a las soluciones realizadas. Una forma de lograr esto, podría ser incorporar asignaturas en donde se presenten soluciones reales de distintos estudiantes, y promover la reflexión en los futuros profesores sobre qué otras respuestas se les podría dar al ejercicio o problema de planteo, de esta forma darles la oportunidad de explorar distintas estrategias para enseñar a los estudiantes. Así cuando se inserten en el área laborar tengan estrategias suficientes para enfrentar posibles errores de los estudiantes.

Algunas de las estrategias sugeridas para la resolución de problemas son las mencionadas por Godino, Batanero y Font (2003) y Morán (2012) que incluyen las estrategias de ensayo y error para la resolución de un problema de planteo y estrategias para la comprensión lectora de los enunciados.

Bibliografía

- Agencia de Calidad de la Educación (2017). Aprendiendo de los Errores. Un Análisis de los Errores Frecuentes de los Estudiantes de II medio en las Pruebas Simce y sus Implicancias Pedagógicas. Ministerio de Educación de Chile, OECD Programme for International Student Assessment, Santiago.
- Astolfi, J. (1999). *El "error", un medio para enseñar*. Sevilla, España: Díada editora.
- Ary, D., Jacobs, L. C., y Razavieh, A. (2010). Introducción a la Investigación en Educación 8ª edición, Wardsworth Cengage Learning. Canadá: Nelson Education Ltd Exotic Classic, p. 453.
- Ball, D., Thames, M., y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special?. *Journal of Teacher Education*, 59 (5), 389-407.
- Bernabeu, M., León, T., Jiménez, M., Matos, C., Pherson, M., Álvarez, M.,... González, M. (2009). *Tratamiento de los Errores Frecuentes en el Aprendizaje de la Matemática, el Español y las Ciencias Naturales*. La Habana, Cuba: Editorial Educación Cubana.
- Carreño, E., Rojas, N., Montes, M., y Flores, P. (2013). Mathematics Teacher's Specialized Knowledge. Reflections Based on Specific Descriptors of Knowledge. *In Proceeding of the CERME*, (8), 2976-2984.
- Carrillo, J. Climent, N., Contreras, L., y Muñoz-Catalán, M. (2013). Determining Specialised Knowledge for Mathematics Teaching. En B. Ubuz, C. Haser y M. A. Mariotti (eds.). *Proceedings of the CERME 8*. Middle East Technical University, Ankara, Turquía: ERME, pp. 2985-2994.
- Chavarría, G. (2014). Dificultades en el Aprendizaje de Problemas que se Modelan con Ecuaciones Lineales: El Caso de Estudiantes de Octavo Nivel de un Colegio de Heredia. *Uniciencia*, 28 (2), 15-44.
- Correa, C., Muñoz, F., Salinas, D., y Wyss, J. (2014). *Resolución de Problemas de la Unidad de Álgebra 1º Medio: Un análisis comparativo de errores y dificultades en tres Colegios De la Región Metropolitana* (Tesis de pregrado). Universidad Academia de Humanismo Cristiano, Santiago, Chile.

- Engler, A., Gregorini, M., Müller, D., Vrancken, S., y Hecklein, M. (2004). Los Errores en el Aprendizaje de Matemática. *Revista Premisa*, 6(23), 23-32.
- Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Montes, M., Aguilar, Á., y Carrillo, J. (2014). Nuestra Modelación del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemática, el MTSK. *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas*, 57-72.
- Flores-Medrano, E., Montes, M., Carrillo, J., Contreras, L., Muñoz-Catalán, M., y Liñán, M. (2016). El Papel del MTSK como Modelo de Conocimiento del Profesor en las Interrelaciones entre los Espacios de Trabajo Matemático. *Bolema*, 30(54), 204-221.
- Godino, J., Batanero, C., y Font, V. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y aprendizaje de la Matemática para maestros*. Universidad de Granada. Distribución en Internet: https://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/1_Fundamentos.pdf
- Golbach, M., Mena, A., Abraham, G., y Rodríguez, M. (2009). Identificación de los errores en la resolución de problemas de geometría analítica y su comparación con el rendimiento académico en alumnos de ingeniería. *Revista Premisa*, 48, 13.
- Gómara, I. (2016). *La resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas en educación primaria* (Trabajo fin de grado). Universidad de la Rioja, Logroño, España.
- Guerrero, F. (2016). Errores matemáticos en la resolución de problemas de modelización matemática. Caso: Estudiantes del primer año de educación media. *Revista ciencias de la educación*, 26(47).
- Guerrero, J., Castillo, E., Chamorro, H., y Isaza, G. (2013). El error como oportunidad de aprendizaje desde la diversidad en las prácticas evaluativas. *Plumilla Educativa*, (12), 361-381.
- Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, C. (2014). *Metodología de la Investigación 6ª edición*. México: McGRAW-HILL.
- Lesh, R., y Zawojewski, J. S. (2007). Problem Solving and Modeling. In F. K. Lester, Jr. (Ed). *The Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and*

- Learning*. (pp. 763-804). National Council of Teachers of Mathematics. Charlotte, NC: Information Age Publishing.
- Montes, M. (2015). *Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas acerca del Infinito: un estudio de caso* (Tesis doctoral). Universidad de Huelva, España.
- Morán, E. (2012). Estrategias de la lectura para la comprensión de textos matemáticos. Un estudio en educación secundaria. *Memoria del Congreso Iberoamericano de las Lenguas en la Educación y en la cultura /IV Congreso Leer.es*. Salamanca, España. Recuperado: http://www.oei.es/congresolenguas/comunicacionesPDF/Moran_Erika.pdf
- Movshovitz-Hadar, N., Zaslavsky, O., y Inbar, S. (1987). An Empirical Classification Model for Errors in High School Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 18, 3-14.
- Pochulu, M. (2009). Análisis y Categorización de Errores en el Aprendizaje de la Matemática en Alumnos que Ingresan a la Universidad. *Revista Iberoamericana De Educación*, (8).
- Polya, G. (1989). *Cómo plantear y Resolver problemas* (15° ed.). México: Trillas.
- Real Academia Española. (2001). Disquisición. En *Diccionario de la lengua española* (22.a ed.). Recuperado de: <http://dle.rae.es/?id=G47B9qL>
- Rico, L. (1995). Errores en el Aprendizaje de la Matemática. En Kilpatrick Jeremy, Gómez Pedro y Rico Luis (Editores) *Educación Matemática*. México: Grupo Editorial Iberoamérica, pp. 69 – 108.
- Rico, L. (1997). Reivindicación del Error en el Aprendizaje de las Matemáticas. *Revista Epsilon*, (38), 185-198.
- Rodríguez, C., y Castillo, V. (2014). Calidad en la Formación Inicial Docente : los Déficits de las Competencias Pedagógicas y Disciplinarias en Chile. *Actualidades Investigativas en Educación*, 14(2),1-25.
- Sánchez, N., y Del Valle, M. (2016). Álgebra Escolar: Una Revisión Preliminar En Relación A Errores Y Dificultades. En Rosas, Alejandro (Ed.), *Avances en Matemática Educativa. Teorías y Enfoques* (pp. 60-75). México: Lectorum.

- San Martín, D. (2014). Teoría Fundamentada y Atlas.ti: Recursos Metodológicos para la Investigación Educativa. *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, 16 (1), 104-122.
- Santa Cruz, M., Thomsen, M., Beas, J., y Rodríguez, C. (2011). Análisis de las Clases de Errores que Cometan los Alumnos y Propuesta de Andamiaje para Aquellos Errores que Requieren Cambio Conceptual. *Revista Iberoamericana de Educación*, 57 (1).
- Shulman, L. (1986). Those Who Understand: Knowledge growth in Teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.
- Socas, M. (1997). Dificultades, Obstáculos y Errores en el Aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria. En *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125-154). Horsori.
- Sosa, L., Flores-Medrano, E., y Carrillo, J. (2015). Conocimiento del Profesor Acerca de las Características de Aprendizaje del Álgebra en Bachillerato. *Enseñanza de las Ciencias*, 33(2), 173-189.
- Strauss, A. y Corbin, J. (2012). *Bases de la investigación cualitativa. Técnicas y procedimientos para desarrollar la teoría fundamentada*. Medellín, Colombia: Universidad de Antioquia.
- Vergara, C., y Cofré, H. (2014). Conocimiento Pedagógico del Contenido: ¿el Paradigma Perdido en la Formación Inicial y Continua de Profesores en Chile?. *Estudios Pedagógicos (Valdivia)*, 40(especial), 323-338.
- Zamudio, J. (2012). El Conocimiento del Profesor que Enseña Historia. *Enseñanza de las ciencias sociales*, (11), 31-41.

Anexos

Anexo 1

Problemas Matemáticos

Nombre:

Edad:

Liceo:

Curso:

En esta guía encontrarás algunas situaciones que puedes resolver matemáticamente. Intente responder con los conocimientos que considere conveniente:

- 1) Un estudiante está ahorrando dinero guardando de la mesada que recibe de sus padres. Hasta el momento tiene billetes de dos tipos: \$1.000 y \$2.000. Logró juntar 35 billetes que da un total de \$60.000. ¿Cuántos billetes de \$1.000 y \$2.000 tiene el estudiante?



- 2) Debido a la crisis económica, una familia ha decidido hacer su propia granja. Poco a poco ha crecido el número de animales que tienen y con ellos los recursos económicos. Al momento hay gallinas, patos y cabras. El número de patos que tienen son la mitad del número de gallinas y el doble del número de cabras. Si en total hay 84 animales, entonces, ¿cuántas cabras hay en la granja?



3) Ana tiene 25 años. Sus primas Jessica y Daniela son muy cercanas a ella. La edad de Jessica es el triple de la edad de Daniela. La resta de las edades de Jessica y Daniela es de 48 años. ¿Cuál es la edad de Jessica?



4) Las edades de un padre y su hija suman 77 años y dentro de dos años la edad del padre será el doble de la edad de su hija. ¿Cuál es la edad del padre y su hija?



Anexo 2

Entrevista Semiestructurada a los Estudiantes

Nombre:

Liceo:

1. ¿Cuál de los ejercicios te causó mayor dificultad?
 - ¿Por qué?
 - ¿Qué entendiste del problema?
 - ¿Qué no entendiste del problema?

2. Considerando este problema:
 - ¿Qué te llevó a resolver el problema de esta forma?
 - ¿Qué datos consideraste?
 - ¿Cómo utilizaste estos datos?
 - ¿Por qué decidiste hacer esta operación?

3. ¿Qué problemas te causaron interés?
 - ¿Por qué?

4. ¿Qué problema encontraste más fácil de resolver?
 - ¿Por qué?
 - ¿Por qué es más cercano a tu vida cotidiana o por qué entiendes el contenido?

Anexo 3

Entrevista Profesor

1. Primera parte: Definición del Error.

- a. ¿Cómo define los errores de los estudiantes, considerando su experiencia pedagógica?

2. Segunda parte: Anticipación al error.

- a. Se presentan los problemas sin resolución.
 - i. ¿Qué errores crees que cometerían los estudiantes de primero medio del liceo al solucionar los siguientes problemas? ¿Puede pensar en algún otro error?
 - ii. ¿Por qué?

3. Tercera parte: Identificación del error

- a. Se presentan la selección de respuestas de los alumnos.
 - i. ¿Existe algún error en estas soluciones?
 - ii. ¿Qué errores percibe?
 - iii. ¿Por qué cree que cometieron estos errores?
 - iv. ¿Se ha encontrado con este tipo de errores anteriormente?

4. Cuarta parte: Estrategias para enfrentar el error

- a. ¿Qué estrategias utilizaría para enmendar/enfrentar estos errores?
¿Existe alguna otra estrategia?

Antecedentes del participante:

- a. Carrera
- b. Años de experiencia