FACULTAD DE CIENCIAS

INSTITUTO DE MATEMÁTICAS

MAGISTER EN MATEMÁTICAS

TEOREMA DE DENSIDAD DE CHEBOTAREV: VERSIÓN EFECTIVA Y NO EFECTIVA

Tesis presentada por **Pablo Madariaga Orellana**,
para optar al grado de Magíster en Matemáticas.

Profesor Guía: Dra. Amalia Pizarro Madariaga.

Valparaíso, 2016.

Para Antonia.

Índice

Notaciones

$\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$	:	Los números enteros, racionales, reales y complejos.
$\mathsf{GL}(V)$	:	Grupo de isomorfismos de V, espacio vectorial en si mismo.
$N_{\mathfrak{p}}$	:	Norma del primo $\mathfrak{p}$.
χ_0	:	Carácter trivial o carácter principal.
d_K	:	Discriminante de la extensión $K/\mathbb{Q}$.
n_K	:	Norma de la extensión $K/\mathbb{Q}$.
$\kappa(\mathfrak{p})$	:	Cuerpo residual $\mathbb{Z}_K/\mathfrak{p}$.
$o(f(x))$	:	o pequeña de $f(x)$.
$O(f(x))$	:	O grande de $f(x)$.

Introducción

El teorema de densidad de Chebotarev afirma que la densidad de ideales primos en un cuerpo de números con automorfismo de frobenius contenido en una clase de conjugación, denotado por $\pi_C(x, L/K)$ y definido en la sección 2.2 es igual al cuociente entre el cardinal de la clase de conjugación y el orden del grupo, es decir,

$$\pi_C(x, L/K) \sim \frac{|C|}{|G|}\frac{x}{\log x} \text{ , si } x \to \infty. \tag{1}$$

Este teorema es una generalización natural del teorema de los primos en progresión aritmética.

En un principio, este teorema fue demostrado en [T26] sin utilizar herramientas de la Teoría de cuerpos de clases, la que en ese momento estaba en desarrollo por Dedekind, Kronecker, Hilbert y Weber. En particular, en este trabajo incluiremos la demostración usando Teoría de cuerpo de clases.

En el año 1977, Lagarias y Odlyzko [LO77] demuestran un versión efectiva de este teorema, es decir, de manera explícita un término de error en la expresión (1), pero sin mostrar las constantes involucradas. El objetivo de esta trabajo es mostrar en detalle la demostración dada por Lagarias y Odlyzko y además calcular tales constantes.

En el primer capítulo estudiaremos el teorema de densidad de Chebotarev en su forma no efectiva. Para esto abordaremos algunos tópicos importantes para desarrollar el tema provenientes de la Teoría de cuerpos de clases, tales que como, la función de Artin y densidades.

El segundo capítulo, nos enfocaremos en el desarrollo de la demostración de la versión efectiva basada en el trabajo [LO77]. Comenzaremos mostrando los tópicos fundamentales que se utlizarán en ella, como algunas propiedades importantes de la función L- de Artin. Además, mostraremos las constantes efectivamente calculables, basados en el preprint de Bruno Winckler [W13], todo esto asumiendo la Hipótesis de Riemann Generalizada.

1. Teorema de Densidad de Chebotarev I: Versión no efectiva

1.1. Algunos aspectos de la Teoría Algebraica de Números

En esta sección estudiaremos algunos tópicos provenientes de la Teoría algebraica de números. Para más detalles, ver [N99].

Llamaremos cuerpo de números a toda extensión K finita de $\mathbb{Q}$. Los elementos de K se llaman **números algebraicos**. Un número algebraico será llamado **entero algebraico** si es raíz de un polinomio mónico $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$. El conjunto de todos los enteros algebraicos de K es $\mathbb{Z}_K$ el **anillo de enteros** de K.

Teorema 1 *Todo ideal $\mathfrak{a} \subset \mathbb{Z}_K$ distinto de (0) y (1) admite factorización*

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 \dots \mathfrak{p}_r, \tag{2}$$

donde los ideales $\mathfrak{p}_i$ son primos no nulos y la escritura es única salvo el orden de los factores.

Sea L una extensión de K y $\mathbb{Z}_L$, $\mathbb{Z}_K$ sus respectivos anillos de enteros. Luego, un ideal primo $\mathfrak{p} \neq 0$ en $\mathbb{Z}_K$ se descompone en $\mathbb{Z}_L$ de manera única en producto de ideales primos de $\mathbb{Z}_L$.

$$\mathfrak{p}\mathbb{Z}_L = \mathfrak{P}_1^{e_1} \dots \mathfrak{P}_r^{e_r}, \text{ con } e_i \in \mathbb{Z}. \tag{3}$$

Escribiremos $\mathfrak{p}$ en vez de $\mathfrak{p}\mathbb{Z}_L$. Diremos que los primos $\mathfrak{P}_i$ estan sobre $\mathfrak{p}$ si se factorizan como (3) y lo denotaremos $\mathfrak{P}_i|\mathfrak{p}$. Lo anterior, también se puede expresar como $\mathfrak{P}_i$ divide a $\mathfrak{p}$. Además se cumple la relación

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{P}_i \cap \mathbb{Z}_K.$$

El exponente e_i es llamado índice de ramificación. Con el cuerpo residual asociado $k(\mathfrak{p}) := \mathbb{Z}_L/\mathfrak{p}$ se define el grado de inercia de $\mathfrak{P}_i$ sobre $\mathfrak{p}$ como,

$$f_i = [\kappa(\mathfrak{P}_i) : \kappa(\mathfrak{p})].$$

Estos números esta relacionados por el siguiente resultado.

Proposición 1 *Sea L/K una extensión separable y $n = [L : K]$, entonces se tiene la identidad fundamental*

$$\sum_{i=1}^{r} e_i f_i = n.$$

Un ideal primo $\mathfrak{p}$ se dice que descompone completamente en L si en la escritura

$$\mathfrak{p}\mathbb{Z}_L = \mathfrak{P}_1^{e_1} \dots \mathfrak{P}_r^{e_r},$$

se tiene que $r = n = [L : K]$ y $e_i = f_i = 1$ para todo $i = 1, \dots, r$. Si $r = 1$ existe un sólo primo $\mathfrak{P}$ sobre $\mathfrak{p}$. Además, si $e_i = 1$ para todo i diremos que $\mathfrak{P}_i$ es ***no ramificado*** sobre $\mathbb{Z}_K$, en otro caso se dirá ***ramificado***. Un ideal primo $\mathfrak{p}$ se dice no ramificado, si todos los $\mathfrak{P}_i$ son no ramificados y ramificado en otro caso. La extensión L/K es llamada no ramificada si todos los ideales primos $\mathfrak{p}$ son no ramificados en L.

Proposición 2 *Sea L/K una extensión separable, entonces existe a lo más un número finito de ideales primos de K que ramifican en L.*

Teorema 2 *Para todos $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}'$ primos de $\mathbb{Z}_L$ sobre $\mathfrak{p}$ de $\mathbb{Z}_K$, existe $\sigma \in G = Gal(L/K)$ tal que $\sigma(\mathfrak{P}) = \mathfrak{P}'$.*

Demostración: Supongamos que el teorema no es verdadero, es decir, $\sigma(\mathfrak{P}) \neq \mathfrak{P}'$ para todo $\sigma \in G$. Luego por el teorema chino de los restos, existe $x \in \mathbb{Z}_L$ tal que, para todo $\sigma \in G$

$$x \equiv 0 \mod \mathfrak{P} \qquad \text{y} \qquad x \equiv 1 \mod \sigma(\mathfrak{P}'). \tag{4}$$

Ahora,

$$N_{L/K}(x) = \prod_{\sigma \in G} \sigma(x) \in \mathfrak{P} \cap \mathbb{Z}_K = \mathfrak{p}.$$

Pero por (4), $x \notin \sigma(\mathfrak{P}')$ y $\sigma(x) \notin \mathfrak{P}'$, entonces

$$N_{L/K}(x) = \prod_{\sigma \in G} \sigma(x) \notin \mathfrak{P}' \cap \mathbb{Z}_K = \mathfrak{p},$$

que es una contradicción. ♣

Definición 1 *Sea L/K una extensión de Galois de cuerpos de números, con $G = Gal(L/K)$. Para todo primo $\mathfrak{P}$ de $\mathbb{Z}_L$, sea*

$$G_{\mathfrak{P}} = \{\sigma \in G \, : \, \sigma(\mathfrak{P}) = \mathfrak{P}\}.$$

es llamado, el grupo de descomposición de $\mathfrak{P}$.

En particular, si $G_{\mathfrak{P}} = 1$, equivale a, $\mathfrak{p}$ descompone completamente y si $G_{\mathfrak{P}} = G$, equivale a, $\mathfrak{p}$ no descompone.

Consideremos nuevamente la descomposición (3) para el caso L/K extensión de Galois, luego los coeficientes e_i, f_i no dependen de i, es decir,

$$e_1 = e_2 = \ldots = e_r = e, \qquad f_1 = f_2 = \ldots = f_r = f.$$

Así, podemos escribir

$$\mathfrak{p} = \left(\prod_{\sigma} \sigma\mathfrak{P}\right)^{e},$$

donde σ varía en un sistema de representantes de $G/G_{\mathfrak{P}}$.

Sea

$$\begin{array}{cccc} \overline{\sigma} : & \kappa(\mathfrak{P}) & \longrightarrow & \kappa(\mathfrak{P}) \\ & x \mod \mathfrak{P} & \mapsto & \sigma(x) \mod \mathfrak{P} \end{array}.$$

Luego, si consideremos la aplicación $\sigma \in G_{\mathfrak{P}} \mapsto \overline{\sigma} \in Gal(\kappa(\mathfrak{P})/\kappa(\mathfrak{p}))$ es un homomorfismo de grupos, cuyo núcleo es llamado **grupo de inercia** de $\mathfrak{P}$ y es denotado como $I_{G,\mathfrak{P}}$. Además, $|I_{G,\mathfrak{P}}| = e$ y $[G_{\mathfrak{P}} : I_{G,\mathfrak{P}}] = f$.

Teorema 3 *La aplicación* $\sigma \mapsto \overline{\sigma}$ *es epiyectiva.*

1.2. Automorfismo de Frobenius

Los resultados de esta sección pueden ser encontrados en [J77]. Sea K un cuerpo de números. Supongamos que L/K es Galois, $\mathfrak{p}$ primo de K y $\mathfrak{P}$ de L sobre $\mathfrak{p}$. Si $[\kappa(\mathfrak{P}) : \kappa(\mathfrak{p})] = f$ y $|\kappa(\mathfrak{p})| = q$, entonces $|\kappa(\mathfrak{P})| = q^f$. El grupo $Gal(\kappa(\mathfrak{P})/\kappa(\mathfrak{p}))$ es cíclico generado por un automorfismo distinguido

$$\overline{x} \mapsto \overline{x}^q.$$

Esto significa que existe un único isomorfismo bajo conjugación $\sigma \in G_{\mathfrak{P}}$ tal que

$$\sigma(x) \equiv x^q (\mod \mathfrak{P}).$$

Este automorfismo es llamado **automorfismo de frobenius** de $\mathfrak{P}$. Como sabemos, si $\mathfrak{p}$ no ramifica en L es equivalente a que $I_{\mathfrak{P}} = \{1\}$. Entonces, σ esta únicamente determinado como un elemento de $G_{\mathfrak{P}}$. Así, para indicar la dependencia de $\mathfrak{P}$ no ramificado, L y K lo denotaremos como

$$\sigma = \left[\frac{L/K}{\mathfrak{P}}\right].$$

Proposición 3 *Sea* $\tau \in Gal(L/K)$ *y* $K \subseteq M \subseteq L$, *entonces*

(i) $\tau \left[\frac{L/K}{\mathfrak{P}}\right] \tau^{-1} = \left[\frac{L/K}{\tau\mathfrak{P}}\right]$,

(ii) $\left[\frac{L/M}{\mathfrak{P}_0}\right] = \left[\frac{L/K}{\mathfrak{P}}\right]^{f(\mathfrak{P}_0|\mathfrak{P})}$, *donde* $\mathfrak{P}_0 = \mathfrak{P} \cap M$.

(iii) $\left[\frac{M/K}{\mathfrak{P}_0}\right] = \left[\frac{L/K}{\mathfrak{P}}\right]\Big|_M$, *donde* $|_M$ *denota la restricción a* M.

(iv) Un primo $\mathfrak{p}$ de K descompone completamente en L si y sólo si

$$\left[\frac{\mathsf{L}/\mathsf{K}}{\mathfrak{P}}\right] = 1.$$

Demostración:

(i) Sea $y \in \mathbb{Z}_L$, entonces $y \in \tau^{-1}(x)$, para algún $x \in \mathbb{Z}_L$, luego

$$\left[\frac{\mathsf{L}/\mathsf{K}}{\mathfrak{P}}\right](y) = \left[\frac{\mathsf{L}/\mathsf{K}}{\mathfrak{P}}\right]\tau^{-1}(x) \equiv \tau^{-1}(x)^q (\bmod \mathfrak{P}).$$

Entonces, aplicando τ

$$\tau\left[\frac{\mathsf{L}/\mathsf{K}}{\mathfrak{P}}\right]\tau^{-1}(x) \equiv x^q (\bmod \tau\mathfrak{P}).$$

De esta manera, $\tau\left[\frac{\mathsf{L}/\mathsf{K}}{\mathfrak{P}}\right]\tau^{-1} = \left[\frac{\mathsf{L}/\mathsf{K}}{\tau\mathfrak{P}}\right]$ por unicidad del automorfismo de Frobenius.

(ii) Supongamos que el grupo de Galois $\mathsf{Gal}(\kappa(\mathfrak{P})/\kappa(\mathfrak{p}))$ esta generado por $y \mapsto y^q$ con $|\mathbb{Z}_{K/\mathfrak{p}}| = q$. Sea M un cuerpo intermedio, entonces $|\mathbb{Z}_{M/\mathfrak{P}_0}| = q^{f_0}$ con $f(\mathfrak{P}_0|\mathfrak{P}) = f_0$. Luego, el generador de $\mathsf{Gal}(\mathbb{Z}_{L/\mathfrak{P}}/\mathbb{Z}_{M/\mathfrak{P}_0})$ viene dado por $y \mapsto y^{q^{f_0}}$. Así,

$$\left[\frac{\mathsf{L}/\mathsf{M}}{\mathfrak{P}}\right](y) \equiv y^{q^{f_0}} (\bmod \mathfrak{P}).$$

Por otro lado,

$$\left[\frac{\mathsf{L}/\mathsf{K}}{\mathfrak{P}}\right]^{f_0}(y) \equiv (y^q)^{f_0} (\bmod \mathfrak{P}).$$

Por unicidad se deduce el resultado.

(iii) Sea $x \in \mathbb{Z}_M$, entonces

$$\left[\frac{\mathsf{M}/\mathsf{K}}{\mathfrak{P}}\right](x) \equiv x^q (\bmod \mathfrak{P}).$$

Por otro lado, para $x \in \mathbb{Z}_L$ se tiene

$$\left.\left[\frac{\mathsf{L}/\mathsf{K}}{\mathfrak{P}}\right]\right|_M (x) \equiv x^q (\bmod \mathfrak{P}_0).$$

Por unicidad se obtiene el resultado.

(iv) Sea $G(\mathfrak{P})$ el grupo de descomposición de $\mathfrak{P}$, Entonces, si $|G(\mathfrak{P})| = ef$ y $\mathfrak{p}$ es un primo de K descompone completamente, si y sólo si, $e = f = 1$, lo que es equivalente a que $G(\mathfrak{P}) = \{e\}$, si y sólo si $\left[\frac{\mathsf{L}/\mathsf{K}}{\mathfrak{P}}\right] = 1$.

♣

1.3. Función de Artin

Sea L/K es una extensión normal con $\mathsf{G} = \mathsf{Gal}(\mathsf{L}/\mathsf{K})$ abeliana. Además, si $\mathfrak{P}$ es un primo de L sobre $\mathfrak{p}$ de K y $\tau \in \mathsf{Gal}(\mathsf{L}/\mathsf{K})$. Entonces, $\tau\mathfrak{P}$ está sobre $\mathfrak{p}$. Luego, por propiedad anterior

$$\left[\frac{\mathsf{L}/\mathsf{K}}{\tau\mathfrak{P}}\right] = \left[\frac{\mathsf{L}/\mathsf{K}}{\mathfrak{P}}\right].$$

Luego, todos los automorfismos de Frobenius son iguales y en este caso lo denotaremos,

$$\left[\frac{\mathsf{L}/\mathsf{K}}{\mathfrak{P}}\right] = \left(\frac{\mathsf{L}/\mathsf{K}}{\mathfrak{p}}\right).$$

Si $\mathfrak{a} = \prod_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i^{r_i}$, $r_i \in \mathbb{Z}$, podemos extenderlo como sigue,

$$\left(\frac{\mathsf{L}/\mathsf{K}}{\mathfrak{a}}\right) = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\mathsf{L}/\mathsf{K}}{\mathfrak{p}_i}\right)^{r_i}.$$

Ahora, sea I_{K} el grupo de ideales fraccionarios de $\mathbb{Z}_{\mathsf{K}}$ y S el conjunto de primos de K que ramifican en L. Denotemos por $I_{\mathsf{K}}^{\mathsf{S}}$ el grupo de ideales fraccionarios generado por los ideales de I_{K} que no contengan primos de S en su factorización.

Sea $\mathfrak{a} \in I_{\mathsf{K}}^{\mathsf{S}}$, con $\mathfrak{a} = \displaystyle\prod_{\mathfrak{p}_i \text{primo}, \mathfrak{p}_i \notin \mathsf{S}}^{n} \mathfrak{p}_i^{r_i}$, $r_i \in \mathbb{Z}$. Se define **la función de Artin**

$$\begin{array}{rccl} \left(\frac{\mathsf{L}/\mathsf{K}}{\cdot}\right) & : & I_{\mathsf{K}}^{\mathsf{S}} & \to & \mathsf{Gal}(\mathsf{L}/\mathsf{K}) \\ & & \mathfrak{a} & \mapsto & \left(\frac{\mathsf{L}/\mathsf{K}}{\mathfrak{a}}\right) = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\mathsf{L}/\mathsf{K}}{\mathfrak{p}_i}\right)^{r_i} \end{array}$$

la cual es un homomorfismo.

Teorema 4 *La función de Artin es epiyectiva.*

Demostración: Ver corolario 5. 3 en [J77]. ♣

1.4. Módulo

Definición 2 *Sea* K *un cuerpo de números, definimos un módulo* $\mathfrak{m}$ *de* K *como el producto formal*

$$\mathfrak{m} = \prod_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p}^{n(\mathfrak{p})}$$

donde, $n : \{$ *primos de* $\mathsf{K}\} \to \mathbb{Z}$ *cumple con:*

(i) $n(\mathfrak{p}) \geqslant 0$ *para todo primo* $\mathfrak{p}$, *y* $n(\mathfrak{p}) = 0$ *para todo primo* $\mathfrak{p}$ *salvo un número finito de ellos.*

(ii) Si $\mathfrak{p}$ *es real, entonces* $n(\mathfrak{p}) = 0$ *ó* 1.

(iii) Si $\mathfrak{p}$ es complejo, entonces $n(\mathfrak{p}) = 0$.

Un módulo $\mathfrak{m}$ se puede escribir como $\mathfrak{m}_0\mathfrak{m}_\infty$, donde $\mathfrak{m}_0$ es el producto de los primos finitos con exponentes positivos en $\mathfrak{m}$ y $\mathfrak{m}_\infty$ el producto de primos reales en $\mathfrak{m}$. Así, $\mathfrak{m}_0$ puede ser identificado como un ideal entero de $\mathbb{Z}_K$.

Para un módulo $\mathfrak{m}$ se define,

$$K_{\mathfrak{m}} = \{a/b : a, b \in \mathbb{Z}_K, a\mathbb{Z}_K \text{ y } b\mathbb{Z}_K \text{ son primos relativos a } \mathfrak{m}_0\}$$
$$K_{\mathfrak{m},1} = \{\alpha \in K_{\mathfrak{m}} : \alpha \equiv 1 (\operatorname{mod} \mathfrak{m})\}.$$

Pongamos $I_{\mathfrak{m}}^S$ para denotar I_K^S, donde S es el conjunto de primos dividiendo a $\mathfrak{m}_0$.

1.4.1. Valuaciones

Definición 3 *Una valuación de un cuerpo K es una función*

$$| \quad | : K \to \mathbb{R},$$

tal que para todo $x, y \in K$

(i) $|x| \geqslant 0$, $|x| = 0$ si y sólo si $x = 0$,

(ii) $|xy| = |x||y|$,

(iii) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$.

Si consideramos la distancia de dos puntos $x, y \in K$ como

$$d(x, y) = |x - y|.$$

Entonces K es un espacio topológico. Además, si diremos que dos valuaciones son equivalentes si definen la misma topología sobre K.

Definición 4 *Una valuación $| \quad |$ es llamada no arquimediana si $|n|$ es acotada para todo $n \in \mathbb{N}$. En otro caso diremos que es arquimediana.*

Proposición 4 *Una valuación $| \quad |$ es no arquimediana si y sólo si*

$$|x + y| \leqslant \text{máx}\{|x|, |y|\}.$$

Demostración: Ver [N99] página 118. ♣

Definición 5 *Un cuerpo con valuación $(K, | \, |)$ es completo si toda sucesión de Cauchy $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en K converge a un elemento $a \in K$, es decir,*

$$\lim_{n\to\infty} |a_n - a| = 0.$$

El procedimento para completar un cuerpo K es análoga a la construcción de los números reales a partir de los racionales.

Definición 6 *Un primo o lugar* $\mathfrak{p}$ *de un cuerpo algebraico de números* K *es una clase de equivalencia de valuaciones de* K*. Las clases de equivalecias no arquimedianas son llamados primos finitos y las arquimedianas son los primos infinitos.*

Los primos infinitos $\mathfrak{p}$ se obtienen a partir de las inclusiones $\tau : \mathsf{K} \to \mathbb{C}$. Existen dos tipos, los primos reales que vienen dadas de las inclusiones reales $\tau : \mathsf{K} \to \mathbb{R}$ y los primos complejos que vienen a pares por las inclusiones no reales $\tau : \mathsf{K} \to \mathbb{C}$. El primo $\mathfrak{p}$ es real o complejo dependiendo si la completación $\mathsf{K}_{\mathfrak{p}}$ es isomorfa a $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Los primos infinitos se denotaran como $\mathfrak{p}|\infty$, los reales como $\mathfrak{p} \nmid \infty$.

1.5. Densidades

Definición 7 *Sea* K *un cuerpo de números. Se define la densidad de dirichlet o analítica de un conjunto* S *de ideales primos de* K*, como el límite*

$$\delta(\mathsf{S}) = \lim_{s \to 1^+} \frac{\sum_{\mathfrak{p} \in \mathsf{S}} \mathsf{N}\mathfrak{p}^{-s}}{-\log(s-1)}, \text{ si éste existe.}$$

Proposición 5 *Sea* L/K *una extensión abeliana finita con grupo de Galois* G*, y sea* $\sigma \in \mathsf{G}$*. Entonces, el conjunto de ideales primos* $\mathfrak{p}$ *en* K *que son no ramificados en* L *y para los cuales* $\left(\frac{\mathsf{L}/\mathsf{K}}{\mathfrak{p}}\right) = 1$ *tiene densidad de Dirichlet* $\frac{1}{[\mathsf{L}:\mathsf{K}]}$*.*

Demostración: Ver corolario 7. 3 en [M13]. ♣

Proposición 6 *Sea* T *el conjunto de ideales primos de* K *que tienen grado de inercia* 1 *sobre* $\mathbb{Q}$*, entonces* $\delta(\mathsf{T}) = 1$*.*

Demostración: Ver proposición 4. 5 en [M13]. ♣

1.6. Teorema de Densidad de Chebotarev

Para comenzar veremos el resultado asociado a la densidad de Dirichlet, la cual no contiene términos de error.

Teorema 5 (Chebotarev) *Sea* L/K *una extensión de Galois de cuerpos de números, con* $\mathsf{G} = \mathsf{Gal}(\mathsf{L}/\mathsf{K})$*. Sea* $\sigma \in \mathsf{G}$ *y* C *la clase de conjugación de* σ*. El conjunto de primos* $\mathfrak{p}$ *en* K*, no ramificados en* L *tales que existe un* $\mathfrak{P}$ *en* L*,* $\mathfrak{P}$ *sobre* $\mathfrak{p}$ *tal que* $\left[\frac{\mathsf{L}/\mathsf{K}}{\mathfrak{P}}\right] = \mathsf{C}$*, tiene densidad de Dirichlet* $\dfrac{|\mathsf{C}|}{|\mathsf{G}|}$*.*

Demostración: Sea $f = |\sigma|$ y $M = L^{\langle\sigma\rangle}$ cuerpo fijo por $\langle\sigma\rangle$, de modo tal que $K \subset M \subset L$, de donde L/M es una extensión cíclica de grado f. Sea $\mathfrak{m}$ un divisor admisible para L/M y sea H el grupo de clases módulo $\mathfrak{m}$ de modo que se tiene el isomorfismo de Artin

$$C_{\mathfrak{m}}/H \to \mathrm{Gal}(L/M).$$

Sea S el conjunto de primos $\mathfrak{p}$ de K que cumplen el teorema y que son primos con $\mathfrak{m}$. Además, sea S_L el conjunto de primos $\mathfrak{P}$ de L que cumplen el teorema para un primo $\mathfrak{p} \in S$. Fijemos $\mathfrak{P} \in S_L$, $\mathfrak{q}$ primo de M y $\mathfrak{p}$ de K tal que $\mathfrak{P}|\mathfrak{q}|\mathfrak{p}$. Se tiene que el grupo de descomposición de $\mathfrak{P}$, $G_{\mathfrak{P}}$ para L/K esta generado por σ, es decir, $G_{\mathfrak{P}} \cong \mathrm{Gal}(L/M)$. Entonces, $f(\mathfrak{P}|\mathfrak{p}) = f(\mathfrak{P}|\mathfrak{q}) = f$ y $f(\mathfrak{q}|\mathfrak{p}) = 1$. En particular, como no hay ramificación $\mathfrak{P} = \mathfrak{q}$. Además,

$$\sigma = \left[\frac{L/K}{\mathfrak{P}}\right] = \left[\frac{L/M}{\mathfrak{P}}\right] = \left[\frac{L/M}{\mathfrak{q}}\right].$$

Si C es la clase de ideales correspondiente a σ por el isomorfismo de Artin tenemos que $\mathfrak{q} \in C$.

Ses S_M el conjunto de primos $\mathfrak{q}$ de M tal que $\mathfrak{q} \in C$ y $f(\mathfrak{q}|\mathfrak{p}) = 1$, donde $\mathfrak{p}$ es primo de K con $\mathfrak{p}|\mathfrak{q}$. Hemos probado, que si $\mathfrak{P} \in S_L$ el primo $\mathfrak{q}$ de M al cual divide cumple que $\mathfrak{q} \in S_M$. Reciprocamente, si $\mathfrak{q} \in S_M$ y $\mathfrak{P}$ es un divisor primo de $\mathfrak{q}$ en L, entonces

$$\sigma = \left[\frac{L/M}{\mathfrak{q}}\right] = \left[\frac{L/M}{\mathfrak{P}}\right] = \left[\frac{L/K}{\mathfrak{P}}\right].$$

Así, $\mathfrak{P} \in S_L$. De esta manera, los primos $\mathfrak{q} \in S_M$ estan en correspondencia biunivoca con los primos $\mathfrak{P} \in S_L$.

Por proposición 6, S_M tendrá densidad de Dirichlet si y sólo si lo tiene el conjunto de primos de grado de inercia 1. Pero, los primos de grado de inercia de S_M son los de grado uno de la clase C, pues $f(\mathfrak{q}|\mathfrak{p}) = 1$. Luego, por proposición 5, S_M tiene densidad de $\frac{1}{f}$.

Por otro lado, cada primo $\mathfrak{p} \in S$ tiene al menos un divisor $\mathfrak{q} \in S_M$. Si $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2$ son dos de ellos, existe $\tau \in G$ tal que $\mathfrak{q}_1 = \tau\mathfrak{q}_2$. Así,

$$\sigma = \left[\frac{L/M}{\mathfrak{q}_1}\right] = \left[\frac{L/M}{\tau\mathfrak{q}_2}\right] = \tau\left[\frac{L/K}{\mathfrak{q}_1}\right]\tau^{-1} = \tau\sigma\tau^{-1}.$$

Además, si $\sigma = \tau\sigma\tau^{-1}$ y $\mathfrak{q} \in S_M$ divide a $\mathfrak{p}$, entonces $\tau\mathfrak{q}\tau^{-1}$ divide a $\mathfrak{p}$. Se concluye que el número de divisores en S_M de un primo en S es $[C_G(\sigma) : G_{\mathfrak{q}}]$. Pero, $|G| = [G : C_G(\sigma)]|C|$, es decir, $|C_G(\sigma)| = \frac{|G|}{|C|}$ y $|G_{\mathfrak{q}}| = f$. Así, para cada primo $\mathfrak{p} \in S$ es divisible por $\frac{|G|}{f|C|}$ primos de S_M. Luego,

$$
\begin{aligned}
\delta(S) &= \lim_{s\to 1^+} \frac{\sum_{\mathfrak{p}\in S} N\mathfrak{p}^{-s}}{-\log(s-1)} \\
&= \frac{f|C|}{|G|} \lim_{s\to 1^+} \frac{\sum_{\mathfrak{p}\in S}\sum_{\mathfrak{q}|\mathfrak{p}} N\mathfrak{p}^{-s}}{-\log(s-1)} \\
&= \frac{f|C|}{|G|} \lim_{s\to 1^+} \frac{\sum_{\mathfrak{p}\in S}\sum_{\mathfrak{q}|\mathfrak{p}} N\mathfrak{q}^{-s}}{-\log(s-1)} \\
&= \frac{f|C|}{|G|} \lim_{s\to 1^+} \frac{\sum_{\mathfrak{q}\in S_M} N\mathfrak{q}^{-s}}{-\log(s-1)} \\
&= \frac{f|C|}{|G|}\delta(S_M) = \frac{|C|}{|G|}.
\end{aligned}
$$

Notemos que si $f(\mathfrak{q}|\mathfrak{p}) = 1$, entonces $N\mathfrak{q} = N\mathfrak{p}$.

♣

Cabe destacar que un divisor admisible es aquel módulo que satisface el Teorema de Reciprocidad de Artin, ver Teorema 5. 7 en [J77].

Este teorema nos dice que la probabilidad de que la clase de conjugación C en $Gal(L/K)$ es el Frobenius de un primo $\mathfrak{p}$ elegido al azar será exactamente $\frac{|C|}{|G|}$. Además, este teorema se probó originalmente en términos de densidad natural de un conjunto $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}_K$, la cual se define de la siguiente manera

$$\Delta(\mathcal{A}) = \lim_{x\to\infty} \frac{\#\{I \in \mathcal{A} \,:\, N_{K/\mathbb{Q}}I \leqslant x\}}{\#\{I \in \mathbb{Z}_K \,:\, N_{K/\mathbb{Q}}I \leqslant x\}}.$$

Es importante mencionar que la densidad natural implica la densidad analítica, como probaremos más adelante. Además, estos números coinciden. Ahora, el recíproco no es válido en general. En efecto, consideremos el conjunto

$$M = \bigcup_{k=0}^{\infty}\{p \text{ primo } : 10^k \leqslant p < 2\cdot 10^k\}$$

y

$$M(x) = \#\{p \in M : p \leqslant x\}.$$

Luego, por la construcción de M se tiene,

$$M(10^k) \leqslant \pi(2\cdot 10^{k-1})$$

y

$$M(2\cdot 10^k) \geqslant \pi(2\cdot 10^k) - \pi(10^k).$$

Supongamos que k es suficientemente grande, por el Teorema del número primo

$$\begin{aligned}
\frac{M(10^k)}{\pi(10^k)} &\leqslant \frac{\pi(2\cdot 10^{k-1})}{\pi(10^k)} \\
&\approx \frac{1}{5}\frac{\log 10^k}{\log 2\cdot 10^{k-1}} \\
&= \frac{1}{5}\frac{\log 2\cdot 10^{k-1}+\log 5}{\log 2\cdot 10^{k-1}} \\
&= \frac{1}{5}\left(1+\frac{\log 5}{\log 2\cdot 10^{k-1}}\right) \\
&\underset{k\to\infty}{=} \frac{1}{5}.
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\frac{M(2\cdot 10^k)}{\pi(2\cdot 10^k)} &\geqslant \frac{\pi(2\cdot 10^k)}{\pi(2\cdot 10^k)} - \frac{\pi(10^k)}{\pi(2\cdot 10^k)} \\
&\approx 1-\frac{1}{2}\frac{\log 2\cdot 10^k}{\log 10^k} \\
&= 1-\frac{1}{2}\frac{\log 10^k+\log 2}{\log 10^k} \\
&= 1-\frac{1}{2}\left(1+\frac{\log 2}{\log 10^k}\right) \\
&\underset{k\to\infty}{=} \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

De esta forma, $\frac{M(x)}{\pi(x)}$ oscila entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{5}$. Mientras tanto que la densidad analítica existe, y es $\log_{10} 2$. Ver el capítulo V sección 4. 5 de [S73].

Definición 8 *Diremos que 'f es o-pequeña de h' cuando x se acerca a x_0 y escribimos*

$$f(x) = o(h(x)),\ \textit{si}\ x \to x_0$$

significa que

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{h(x)} = 0$$

Intuitivamente, esto significa que $f(x)$ es más pequeña que $h(x)$ cerca de x_0

Proposición 7 *La densidad natural implica la densidad analítica. Más aún, estos los valores coinciden.*

Demostración: Sea $K=\mathbb{Q}$, en general la demostración es análoga. Sea

$$M(x)=\{p\in M : p\leqslant x\}$$

Definamos $a_n=1$ cuando $n=p$ primo, y 0 en otro caso. Así, la suma

$$\sum_{p\in M, p\leqslant x}\frac{1}{p^s}=\sum_{n\leqslant x}\frac{a_n}{n^s}=\frac{M(x)}{x^s}+s\int_1^x\frac{M(t)}{t^{s+1}}dt.$$

Ahora, supongamos que,

$$\Delta(M)=\lim_{x\to\infty}\frac{\#\{p\in M : p\leqslant x\}}{\#\{p : p\leqslant x\}}$$

existe y es igual a R. Por el Teorema del número primo tenemos

$$\lim_{x\to\infty}\frac{M(x)\log x}{x}=R \text{ o } M(x)=\frac{Rx}{\log x}+o(\frac{x}{\log x})$$

Ahora, pongamos en la fórmula de $M(x)$ en la suma de arriba. Tenemos

$$\delta(M)=\lim_{s\to 1+}\frac{\lim_{x\to\infty}\frac{M(x)}{x^s}+s\int_1^x\frac{M(t)}{t^{s+1}}dt}{-\log(s-1)}.$$

Como, $\sum_p\frac{1}{p^s}=-\log(s-1)+O(1)$. Ahora, usando la regla de L'hopital tenemos que,

$$\delta(M)=\lim_{s\to 1+}(s-1)\int_1^\infty\frac{M(t)\log t}{t^{s+1}}dt.$$

Así,

$$\delta(M)=\lim_{s\to 1+}(s-1)(R\int_1^\infty\frac{dt}{t^s}+o(\int_1^\infty\frac{dt}{t^s}))$$

Sabemos que,

$$\lim_{s\to 1+}(s-1)\int_1^\infty\frac{dt}{t^s}=1,\ \text{cuando } \epsilon\to 0.$$

Luego, $\delta(M)=R+o(1)=R$.

♣

Sea L/K una extensión de Galois de cuerpos de números, con $G=Gal(L/K)$. Sea C una clase de conjugación de G, definamos

$$\pi_C(x,L/K)=\#\{\mathfrak{p} \text{ primo de } K \text{ no ramificado en } L, N_{\mathfrak{P}}\leqslant x \text{ tal que } \left(\frac{L/K}{\mathfrak{P}}\right)=C, x\in\mathbb{R}^+\}.$$

tenemos el siguiente corolario.

Corolario 1 *Con las notaciones del teorema anterior, se tiene*

$$\pi_C(x,L/K)\sim\frac{|C|}{|G|}\frac{x}{\log x}\ ,\ \textit{si } x\to\infty.$$

2. Teorema de Densidad de Chebotarev: Versión efectiva

En este capítulo demostraremos la versión efectiva del Teorema de Densidad de Chebotarev. Esta demostración (original de Lagarias y Odlyzko), se basa en deteminar una fórmula explicita (expresión que relaciona primos con ceros de una cierta función L) para la función L- de Artín. Para esto comenzaremos el capítulo haciendo una introducción a dichas funciones.

Los resultados de este capítulo se basan en [LO77] y [W13].

2.1. Funciones L de Artin

2.1.1. Representaciones de Grupos

Definición 9 *Sea G un grupo finito. Una representación de G es un homomorfismo*

$$\rho : G \longrightarrow GL_n(V),$$

donde V es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión finita.

Usaremos la notación ρ_g en vez de $\rho(g)$. Por resultados de álgebra lineal, se sabe que $GL_n(V)$ representa las matrices invertibles de orden n. Supongamos que la dimensión de V es n entonces el *grado* de la representación ρ es n.

Ejemplo 1 *Sea $n = |G|$ y V un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión n, con base $\{e_t\}_{t\in G}$. Para todo $g \in G$, la función*

$$\begin{array}{cccc} \rho_g & : & V & \longrightarrow & V \\ & & e_t & \mapsto & e_{gt} \end{array},$$

define una representación de G, llamada representación regular de G, que la denotaremos como reg_G. El grado de esta representación es n. Además, notamos que $\{e_g = \rho_g(e_1)\}$ es una base de V.

Definición 10 *Sea ρ, ρ' dos representaciones de un grupo G con espacios vectoriales V y V'. Estas representaciones de dicen que son isomorfas si existe un isomorfismo lineal $\tau : V \longrightarrow V'$ tal que*

$$\tau \circ \rho(s) = \rho'(s) \circ \tau \text{ para todo } s \in G.$$

Definición 11 *Sea $\rho : G \longrightarrow GL_n(V)$ una representación de G, W un subespacio vectorial de V. Diremos que W es estable o invariante si $\rho_g(W) \subset W$ para todo $g \in G$. Además, si los únicos subespacios invariantes son 0 y V, diremos que la representación es irreducible.*

Teorema 6 *Toda representación es suma directa de representaciones irreducibles.*

Esta teorema nos entrega una forma de construir nuevas representaciones por medio de la suma directa.

Teorema 7 *Si $\rho : G \to GL(V)$ es una representación y $g \in G$, entonces V admite una base formada por vectores propios de $\rho(g)$, cuyos valores propios son raíces de la unidad.*

2.1.2. Teoría de Caracteres

Definición 12 *Sea $\rho : G \to GL(V)$ una representación de G. Para todo $g \in G$, se define el carácter de la representación ρ como*

$$\begin{array}{rccc} \chi_\rho & : & G & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & & g & \mapsto & Tr(\rho_g) \end{array},$$

donde Tr denota la traza de la matriz asociada a ρ_g.

Proposición 8 *Sea χ un carácter de la representación ρ de grado n, entonces*

(i) $\chi(1) = n$,

(ii) $\chi(g) = \overline{\chi(g^{-1})}$, *para* $g \in G$

(iii) $\chi(hgh^{-1}) = \chi(g)$, *para todo* $h, g \in G$

Las funciones $f : G \to \mathbb{C}$ que cumplen la condición (iii) de la proposición anterior, se llaman funciones de clases. Los caracteres de G son un $\mathbb{C}-$espacio vectorial y $\{\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_k\}$ es su base. Consideremos ψ, ϕ carácteres de G. Se define el producto interno,

$$\langle \psi, \phi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \psi(g)\phi(g^{-1}).$$

Teorema 8 *(i) Si χ es un carácter de una representación irreducible, entonces*

$$\langle \chi, \chi \rangle = 1,$$

(ii) Si χ, χ' son carácteres de representaciones irreducibles no isomorfas, entonces

$$\langle \chi, \chi' \rangle = 0.$$

Teorema 9 *Sea V una representación de G, con carácter ϕ y supongamos que*

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_k, W_i \text{ irreducibles.}$$

Entonces, si W es una representación irreducible con carácter χ, el número de W_i isomorfos a W es el producto interno $\langle \chi, \phi \rangle$.

Corolario 2 *Dos representaciones con el mismo carácter son isomorfas.*

Teorema 10 *Sea χ un carácter de G, entonces $\langle\chi,\chi\rangle \in \mathbb{Z}^+$. Además, $\langle\chi,\chi\rangle = 1$ si y sólo si V es irreducible.*

Proposición 9 *El carácter r_G de la representación regular satisface,*

$$r_G(g) = \begin{cases} |G| & g = 1 \\ 0 & g \neq 1 \end{cases}.$$

Demostración: Sea reg_G la representación regular de G. Una base de V es $\{e_t\}_{t\in G}$ tal que $\rho_g(e_t) = e_{gt}$. Si $g \neq 1$, entonces $gt \neq t$ para todo t. Luego la matriz de ρ_g es

$$\begin{pmatrix} 0 & * & * & * \\ * & 0 & * & * \\ * & * & \ddots & * \\ * & * & * & 0 \end{pmatrix},$$

por lo tanto, $r_G(g) = Tr(\rho_g) = 0$, si $g \neq 1$. Por otro lado, si $g = 1$, $Tr(\rho_1) = \dim(reg_G) = |G|$. ♣

Supongamos que $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_k$ son los carácteres irreducibles de G y $\chi_i(1) = n_i$

Corolario 3 *Toda representación irreducible W_i esta contenida en la representación regular con multiplicidad n_i.*

Corolario 4 *(i) $\sum_{i=1}^k n_i^2 = |G|$.*

(ii) Si $1 \neq g \in G$, se tiene $\sum_{i=1}^k n_i\chi_i(g) = 0$.

Demostración: De acuerdo al corolario 3, el carácter de la representación regular nos queda

$$r_G(g) = \sum_{\chi_i \in irr(G)} n_i\chi_i(g), \qquad g \in G$$

Luego, reemplazando con $g = 1$, se obtiene (i) y si $g \neq 1$ se obtiene (ii). ♣

Sea H un subgrupo de G. El espacio vectorial

$$W = \{F : G \to V : F(gh) = \theta(h)F(g),\ \text{para todo } h \in H,\ \text{para todo } g \in G\}.$$

Hagamos actuar G en W como sigue, $g(F(x)) = F(g^{-1}x)$, para todo $x \in G$. Esta representación W de G es llamada inducida de θ a G. Se denota $Ind_H^G\theta$.

Teorema 11 *Sea* χ *el caracter de la representación* $\theta : H \to GL_n(V)$*. Definamos* χ° *en* G *como sigue*

$$\chi^\circ(g) = \begin{cases} \chi(g) & g \in H \\ 0 & g \notin H \end{cases}.$$

Entonces, el carácter de la representación inducida $\operatorname{Ind}_H^G \theta$*, escrita* $\operatorname{Ind}_H^G \chi$ *está dada por*

$$\operatorname{Ind}_H^G \chi(g) = \frac{1}{|H|} \sum_{x \in G} \chi^\circ(xgx^{-1}).$$

Los caracteres r_G y χ_0 se relacionan de la siguiente manera.

$$r_G = \operatorname{Ind}_1^G \chi_0.$$

Teorema 12 (Reciprocidad de Frobenius) *Sean* $H \leqslant G$*,* χ *un carácter de* H *y* ϕ *un carácter de* G*. Entonces*

$$\langle \operatorname{Ind}_H^G \chi, \phi \rangle_G = \langle \chi, \operatorname{Res}_H^G \phi \rangle_H,$$

donde $\operatorname{Res}_H^G \phi$ *es la resticción de* ϕ *a elementos de* H*.*

Demostración: Por cálculos directos se tiene,

$$\begin{aligned}
\langle \operatorname{Ind}_H^G \chi, \phi \rangle_G &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \operatorname{Ind}_H^G \chi(g) \phi(g^{-1}) \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \frac{1}{|H|} \sum_{x \in G} \chi^\circ(xgx^{-1}) \phi(g^{-1}) \\
&\underset{g \mapsto x^{-1}gx}{=} \frac{1}{|G|} \frac{1}{|H|} \sum_{g \in G} \sum_{x \in G} \chi^\circ(g) \phi(x^{-1}g^{-1}x) \\
&= \frac{1}{|G|} \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} \sum_{x \in G} \chi(h) \phi(x^{-1}h^{-1}x) \\
&= \frac{1}{|G|} \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} \sum_{x \in G} \chi(h) \phi(h^{-1}) \\
&= \frac{1}{|G|} \frac{1}{|H|} |G| \sum_{h \in H} \chi(h) \phi(h^{-1}) \\
&= \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} \chi(h) \phi(h^{-1}) \\
&= \langle \chi, \operatorname{Res}_H^G \phi \rangle_H.
\end{aligned}$$

♣

Tenemos un caso especial del teorema anterior cuando $H \trianglelefteq G$.

Teorema 13 *Sean* $H \trianglelefteq G$*,* χ *un carácater de* G *y definamos*

$$\chi_{\#}(gH) = \frac{1}{|H|} \sum_{\pi(g)=gH} \chi(g)$$

como carácter de G/H*. Luego si* ψ *es un carácter de* G/H *se tiene,*

$$\langle \chi, \psi^* \rangle_G = \langle \chi_{\#}, \psi \rangle_{G/H}$$

donde $\psi^* = \psi \circ \pi$ *y* $\pi : G \to G/H$ *proyección canónica.*

Demostración: Por cálculos directos se tiene,

$$\begin{aligned}
\langle \chi_{\#}, \psi \rangle_{G/H} &= \frac{|H|}{|G|} \sum_{gH \in G/H} \chi_{\#}(gH)\overline{\psi(gH)} \\
&= \frac{|H|}{|G|} \sum_{gH \in G/H} \frac{1}{|H|} \sum_{\pi(g)=gH} \chi(g)\overline{\psi(gH)} \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{gH \in G/H} \sum_{\pi(g)=gH} \chi(g)\overline{(\psi \circ \pi)(g)} \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g)\overline{\psi^*(g)} \\
&= \langle \chi, \psi^* \rangle_G .
\end{aligned}$$

♣

Teorema 14 (Brauer) *Todo carácter* χ *de* G *se expresa como*

$$\chi = \sum_i m_i \operatorname{Ind}_{H_i}^G \psi_i \text{ con } m_i \in \mathbb{Z},$$

donde ψ_i *son carácteres unidimensionales.*

2.1.3. Definición de la Función L de Artin

Sean L, K cuerpos de números y L/K extensión de Galois con $G = Gal(L/K)$. Además, sea (V, ρ) una representación de G. Se define la función L de Artin como sigue

$$L(s, \rho, L/K) = \prod_{\mathfrak{p}} (\det(Id - \rho(\phi_{\mathfrak{P}})N\mathfrak{p}^{-s} \mid V^{I_{G,\mathfrak{P}}}))^{-1}. \tag{5}$$

Donde $\mathfrak{p}$ recorre todos los primos de K y $\phi_{\mathfrak{P}}$ es el Frobenius asociado a $\mathfrak{P}$, con $\mathfrak{P}$ sobre $\mathfrak{p}$. Además, $V^{I_{G,\mathfrak{P}}}$ es el subcuerpo fijo de $I_{G,\mathfrak{P}}$.

Consideremos,

$$\begin{aligned} \log(L(s,\rho,L/K)) &= \log(\prod_{\mathfrak{p}}(\det(\mathrm{Id}-\rho(\phi_{\mathfrak{P}})N\mathfrak{p}^{-s}\,|\,V^{I_{G,\mathfrak{P}}}))^{-1}) \\ &= -\sum_{\mathfrak{p}}\log(\det(\mathrm{Id}-\rho(\phi_{\mathfrak{P}})N\mathfrak{p}^{-s}\,|\,V^{I_{G,\mathfrak{P}}})). \end{aligned}$$

Para cada término de la suma, sean $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ los valores propios de $\rho(\phi_{\mathfrak{P}})$. Cabe señalar que $m \leqslant n = \dim(\rho)$, luego

$$\begin{aligned} \log(\det(\mathrm{Id}-\rho(\phi_{\mathfrak{P}})N\mathfrak{p}^{-s}\,|\,V^{I_{G,\mathfrak{P}}})) &= \log(\prod_{i=1}^{m}(1-\lambda_i N\mathfrak{p}^{-s})) \\ &= \sum_{i=1}^{m}\log(1-\lambda_i N\mathfrak{p}^{-s}) \\ &= -\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{\infty}\lambda_i^l\frac{N\mathfrak{p}^{-sl}}{l} \\ &= -\sum_{l=1}^{\infty}\chi_\rho(\phi_{\mathfrak{P}}^l)\frac{N\mathfrak{p}^{-sl}}{l}. \end{aligned}$$

Lo que implica que,

$$\log(L(s,\rho,L/K)) = \log(L(s,\chi_\rho,L/K)) = -\sum_{\mathfrak{p}}\sum_{l=1}^{\infty}\chi_\rho(\phi_{\mathfrak{P}}^l)\frac{N\mathfrak{p}^{-sl}}{l}.$$

Es decir,

$$L(s,\chi_\rho,L/K) = \exp(-\sum_{\mathfrak{p}}\sum_{l=1}^{\infty}\chi_\rho(\phi_{\mathfrak{P}}^l)\frac{N\mathfrak{p}^{-sl}}{l}). \tag{6}$$

2.1.4. Casos Especiales de la función L de Artin

Definición 13 *La función Zeta de Riemann se define como la serie,*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s},$$

donde $s = \sigma + it \in \mathbb{C}$.

Esta serie es convergente para todo $\sigma > 1$ y absolutamente convergente para $\sigma \geqslant 1+\delta$, con $\delta > 0$. Además, la función Zeta se puede escribir como producto infinito,

$$\zeta(s) = \prod_{p}\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}. \tag{7}$$

donde $p \in \mathbb{Q}$ primo. Cabe destacar que la función Zeta de Riemann es un caso particular de la función L de Artin, pues si colocamos $L = K = \mathbb{Q}$, obtenemos (7).

Definición 14 *La función Zeta de Dedekind de un cuerpo de números* K *se define como la serie,*

$$\zeta_K(s) = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{1}{N\mathfrak{a}^s},$$

donde $\mathfrak{a}$ *recorre los ideales enteros de* K *y* $N\mathfrak{a}$ *es la norma de* $\mathfrak{a}$*.*

Proposición 10 *La serie* $\zeta_K(s)$ *converge absolutamente y uniformemente en el dominio* $\mathrm{Re}(s) > 1$ *y además,*

$$\zeta_K(s) = \prod_{\mathfrak{p}} \frac{1}{1 - N\mathfrak{p}^{-s}}. \tag{8}$$

donde $\mathfrak{p}$ *recorre los ideales primos de* K*.*

Recordemos que un carácter de Dirichlet es una función que satisface $\chi(n+k) = \chi(n)$ para todo n y $\chi(n) = 0$ si el mcd$(n, k) > 1$. Dado este carácter, se define la función L de Dirichlet como sigue

$$L(\chi, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s},$$

para todo número complejo s con parte real mayor que 1. Esta función se puede extender a todo el plano. La **Hipótesis de Riemann Generalizada (GRH)** afirma que todo carácter de Dirichlet χ y todo $s \in \mathbb{C}$ con $L(\chi, s) = 0$, entonces la parte real de s debe ser $\frac{1}{2}$.

Teorema 15 *La Función L de Artin converge para todo* $s \in \mathbb{C}$ *con Re*$(s) > 1$*.*

Demostración: Sea $\mathfrak{p}$ un primo de $\mathbb{Z}_K$. Localmente la función L de Artin, se puede escribir como

$$L_{\mathfrak{p}}(s, \chi_\rho, L/K) = \det(Id - \rho(\phi_{\mathfrak{P}})N\mathfrak{p}^{-s} \mid V^{I_{G,\mathfrak{P}}}) = \prod_{i=1}^{d_{\mathfrak{p}}}(1 - \lambda_{i,\mathfrak{p}}N\mathfrak{p}^{-s}),$$

donde $\lambda_{i,\mathfrak{p}}$ son raíces de la unidad y $d_{\mathfrak{p}} \leqslant \dim(\rho)$. Aplicando logaritmo se tiene

$$
\begin{aligned}
|\log L_{\mathfrak{p}}(s,\chi_\rho,L/K)| &= \left|\sum_{\mathfrak{p}}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{d_{\mathfrak{p}}}\frac{\lambda_{i,\mathfrak{p}}}{mN\mathfrak{p}^{sm}}\right| \\
&\leqslant \sum_{\mathfrak{p}}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{d_{\mathfrak{p}}}\left|\frac{\lambda_{i,\mathfrak{p}}}{mN\mathfrak{p}^{sm}}\right| \\
&= \sum_{\mathfrak{p}} d_{\mathfrak{p}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{mN\mathfrak{p}^{m\mathrm{Re}(s)}} \\
&\leqslant \dim(\rho)\sum_{\mathfrak{p}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{mN\mathfrak{p}^{m\mathrm{Re}(s)}} \\
&\leqslant \dim(\rho)[K:\mathbb{Q}]\sum_{p\ \text{primo}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{mp^{m\mathrm{Re}(s)}} \\
&= \dim(\rho)[K:\mathbb{Q}]\log(\zeta(\mathrm{Re}(s))),
\end{aligned}
$$

donde ζ es la función zeta de Riemann, que converge para $\mathrm{Re}(s) > 1$. En efecto, por el criterio de la integral se tiene,

$$
|\zeta(s)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|e^{-it\log n}|}{n^{\sigma}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\sigma}} \leqslant 1+\int_1^{\infty}\frac{d\,x}{x^{\sigma}} = 1+\frac{1}{\sigma-1}.
$$

♣

2.1.5. Propiedades de la Función L de Artin

A continuación demostraremos las propiedades básicas de la Función L de Artin.

Proposición 11 *Sea* L/K *una extensión de Galois de cuerpos de números.*

(i) Para el caracter principal χ_0 *se tiene.*

$$L(s,\chi_0,L/K) = \zeta_K(s).$$

(ii) Si χ,χ' *son caracteres de* $\mathrm{Gal}(L/K)$*, entonces*

$$L(s,\chi+\chi',L/K) = L(s,\chi,L/K)L(s,\chi',L/K).$$

(iii) Sea L'/K *una extensión de Galois tal que* $K\subset L\subset L'$*. Entonces,*

$$L(s,\chi,L'/K) = L(s,\chi,L/K).$$

(iv) Si M *es un cuerpo de números tal que* $\mathsf{K} \subset \mathsf{M} \subset \mathsf{L}$*. Sean* $\mathsf{G} = \mathsf{Gal}(\mathsf{L}/\mathsf{K})$ *y* $\mathsf{H} = \mathsf{Gal}(\mathsf{L}/\mathsf{E})$*. Entonces,*

$$\mathsf{L}(s, \chi, \mathsf{L}/\mathsf{K}) = \mathsf{L}(s, \mathsf{Ind}_{\mathsf{H}}^{\mathsf{G}}\chi, \mathsf{L}/\mathsf{M}).$$

Demostración: El carácter principal χ_0 proviene de la representación trivial, la cual tiene dimensión 1. Luego si se evalua en (5) y se tiene (i)

$$\mathsf{L}(s, \chi_0, \mathsf{L}/\mathsf{K}) = \prod_{\mathfrak{p}} (1 - \mathsf{N}\mathfrak{p}^{-s})^{-1} = \zeta_{\mathsf{K}}(s).$$

(ii) Se deduce de (6), pues

$$\begin{aligned} \mathsf{L}(s, \chi + \chi', \mathsf{L}/\mathsf{K}) &= \exp(-\sum_{\mathfrak{p}} \sum_{l=1}^{\infty} (\chi + \chi')(\phi_{\mathfrak{P}}^{l}) \frac{\mathsf{N}\mathfrak{p}^{-sl}}{l}) \\ &= \exp(-\sum_{\mathfrak{p}} \sum_{l=1}^{\infty} \chi(\phi_{\mathfrak{p}}^{l}) \frac{\mathsf{N}\mathfrak{p}^{-sl}}{l}) \exp(-\sum_{\mathfrak{p}} \sum_{l=1}^{\infty} \chi'(\phi_{\mathfrak{P}}^{l}) \frac{\mathsf{N}\mathfrak{p}^{-sl}}{l}) \\ &= \mathsf{L}(s, \chi, \mathsf{L}/\mathsf{K}) \mathsf{L}(s, \chi', \mathsf{L}/\mathsf{K}). \end{aligned}$$

(iii) Sean $\mathfrak{P}'|\mathfrak{P}|\mathfrak{p}$ primos de L', L y K, respectivamente. Luego, la proyección canonica $\mathsf{G}' = \mathsf{Gal}(\mathsf{L}'/\mathsf{K}) \to \mathsf{G} = \mathsf{Gal}(\mathsf{L}/\mathsf{K})$ induce los homomorfismos epiyectivos,

$$\mathsf{G}'_{\mathfrak{P}'} \to \mathsf{G}_{\mathfrak{P}}, \quad \mathsf{I}_{\mathsf{G}',\mathfrak{P}'} \to \mathsf{I}_{\mathsf{G},\mathfrak{P}}, \quad \mathsf{G}'_{\mathfrak{P}'}/\mathsf{I}_{\mathsf{G}',\mathfrak{P}'} \to \mathsf{G}_{\mathfrak{P}}/\mathsf{I}_{\mathsf{G},\mathfrak{P}}.$$

Además, $\phi_{\mathfrak{P}'} \mapsto \phi_{\mathfrak{P}}$, es decir, los Frobenius son conjugados, luego $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}'$ son primos de L' sobre $\mathfrak{p}$. Así, obtenemos el mismo Frobenius, por lo tanto,

$$\det(\mathsf{Id} - \chi(\phi_{\mathfrak{P}'}) t \,|\, \mathsf{V}^{\mathsf{I}_{\mathsf{G}',\mathfrak{P}'}})) = \det(\mathsf{Id} - \chi(\sigma\phi_{\mathfrak{P}}\sigma^{-1}) t \,|\, \mathsf{V}^{\mathsf{I}_{\mathsf{G},\mathfrak{P}}})) = \det(\mathsf{Id} - \chi(\phi_{\mathfrak{P}}) t \,|\, \mathsf{V}^{\mathsf{I}_{\mathsf{G},\mathfrak{P}}})).$$

(iv) Supongamos que $\mathfrak{p}$ primo de $\mathbb{Z}_{\mathsf{K}}$ y que $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_r$ primos de $\mathbb{Z}_{\mathsf{M}}$ sobre $\mathfrak{p}$. Para todo $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ elijamos un primo $\mathfrak{P}_i$ de $\mathbb{Z}_{\mathsf{L}}$ sobre $\mathfrak{q}_1$. Pongamos, $\mathsf{G}_{\mathfrak{P}_i} \cap \mathsf{H} = \mathsf{H}_{\mathfrak{P}_i}$ y $\mathsf{I}_{\mathsf{G},\mathfrak{P}_i} \cap \mathsf{H} = \mathsf{I}_{\mathsf{H},\mathfrak{P}_i}$. Además, se tiene $\mathsf{N}(\mathfrak{q}_1) = \mathsf{N}(\mathfrak{p})^{f_i}$, donde $f_i = [\mathbb{Z}_{\mathsf{M}}/\mathfrak{q}_i : \mathbb{Z}_{\mathsf{K}}/\mathfrak{p}]$.

Elijamos un elemento de $\tau_i \in \mathsf{G}$ tal que $\tau_i(\mathfrak{P}_i) = \mathfrak{P}_1$, luego tenemos $\mathsf{G}_{\mathfrak{P}_i} = \tau_i^{-1}\mathsf{G}_{\mathfrak{P}_1}\tau_i$ y también $\mathsf{I}_{\mathsf{G},\mathfrak{P}_i} = \tau_i^{-1}\mathsf{I}_{\mathsf{G},\mathfrak{P}_1}\tau_i$.

Consideremos el elemento $\phi_1 \in \mathsf{G}_{\mathfrak{P}_1}$ enviado al Frobenius $\phi_{\mathsf{G},\mathfrak{P}_1} \in \mathsf{G}_{\mathfrak{P}_1}/\mathsf{I}_{\mathsf{G},\mathfrak{P}_1}$, similarmente $\phi_i \in \mathsf{G}_{\mathfrak{P}_i} \mapsto \phi_{\mathsf{G},\mathfrak{P}_i} \in \mathsf{G}_{\mathfrak{P}_i}/\mathsf{I}_{\mathsf{G},\mathfrak{P}_i}$, pues $\phi_i = \tau_i^{-1}\phi_1\tau_i$. De la misma forma, $\phi_i^{f_i} \in \mathsf{H}_{\mathfrak{P}_i} \mapsto \phi_{\mathsf{H},\mathfrak{P}_i} \in \mathsf{H}_{\mathfrak{P}_i}/\mathsf{I}_{\mathsf{H},\mathfrak{P}_i}$. Ahora, si $\theta : \mathsf{H} \longleftrightarrow \mathsf{GL}(W)$ es una representación de H con χ como carácter y $(\rho, \mathsf{V}) = (\mathsf{Ind}_{\mathsf{H}}^{\mathsf{G}}\theta, \mathsf{Ind}_{\mathsf{H}}^{\mathsf{G}}W)$ como representación de G. Entoces para todo primo $\mathfrak{p}$, basta probar que,

$$\det(\mathsf{Id} - \rho(\phi_1) t \,|\, \mathsf{V}^{\mathsf{I}_{\mathsf{G},\mathfrak{P}_1}}) = \prod_{i=1}^{r} \det(\mathsf{Id} - \theta(\phi_i^{f_i}) t^{f_i} \,|\, W^{\mathsf{I}_{\mathsf{H},\mathfrak{P}_i}}),$$

donde $t = \mathsf{N}(\mathfrak{p})^{-s}$. Ahora, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ conjugando por τ_i, tenemos

$$\det(\mathsf{Id} - \theta(\phi_i^{f_i}) t^{f_i} \,|\, W^{\mathsf{I}_{\mathsf{H},\mathfrak{P}_i}}) = \det(\mathsf{Id} - \theta(\phi_1^{f_i}) t^{f_i} \,|\, \tau_i W^{\mathsf{I}_{\mathsf{G},\mathfrak{P}_1} \cap \tau_i \mathsf{H} \tau^{-1}}),$$

donde $f_i = [G_{\mathfrak{P}_i} : (G_{\mathfrak{P}_i} \cap \tau_i H \tau^{-1}) I_{G,\mathfrak{P}_i}]$. Para cada $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ se elige un sistema de representantes $\{\sigma_{i,j}\}$ de $G_{\mathfrak{P}_i} \mod G_{\mathfrak{P}_i} \cap \tau_i H \tau^{-1}$, luego $\{\sigma_{i,j}\tau_i\}$ es un sistema de representantes de $G \mod H$. Así, se tiene una descomposición V que corresponde a la representación inducida (ρ, V) de (θ, W) como

$$V = \bigoplus_{i,j} \sigma_{i,j} \tau_i W,$$

y poniendo

$$V_i = \bigoplus_{j} \sigma_{i,j} \tau_i W,$$

se obtiene la descomposión $V = \bigoplus_i V_i$ como $G_{\mathfrak{P}_1}$-módulo. Entonces,

$$\det(\mathrm{Id} - \rho(\phi_1)t \,|\, V^{I_{G,\mathfrak{P}_1}}) = \prod_{i=1}^{r} \det(\mathrm{Id} - \rho(\phi_1)t \,|\, V_i^{I_{G,\mathfrak{P}_1}}).$$

Ahora, basta demostrar

$$\det(\mathrm{Id} - \rho(\phi_1)t \,|\, V_i^{I_{G,\mathfrak{P}_1}}) = \det(\mathrm{Id} - \theta(\phi_1^{f_i})t^{f_i} \,|\, \tau_i W^{I_{G,\mathfrak{P}_1} \cap \tau_i H \tau^{-1}}).$$

Nuevamente, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ se tiene $(\rho, V_i, G_{\mathfrak{P}_1})$ es la representación inducida es $(\theta_i, \tau_i W, G_{\mathfrak{P}_1} \cap \tau_i H \tau_i^{-1})$ y además,

$$V^{I_{G,\mathfrak{P}_1}} = \mathrm{Ind}_{G_{\mathfrak{P}_1} \cap \tau_i H \tau^{-1} / I_{G,\mathfrak{P}_1} \cap \tau_i H \tau^{-1}}^{G_{\mathfrak{P}_1}/I_{G,\mathfrak{P}_1}} (\tau_i W^{I_{G,\mathfrak{P}_1} \cap \tau_i H \tau^{-1}}).$$

Tomemos la base $\{w_1, w_2, \ldots, w_d\}$ de $\tau_i W^{I_{G,\mathfrak{P}_1} \cap \tau_i H \tau^{-1}}$ y notando la descomposición

$$V^{I_{G,\mathfrak{P}_1}} = \bigoplus_{l=0}^{f_i - 1} \phi_1^l \tau_i W^{I_{G,\mathfrak{P}_1} \cap \tau_i H \tau^{-1}}.$$

Sea A la matriz de $\rho(\phi_1^{f_i})$ actuando en $\tau_i W^{I_{G,\mathfrak{P}_1} \cap \tau_i H \tau^{-1}}$, B la matriz de $\rho(\phi_1)$ actuando en $V^{I_{G,\mathfrak{P}_1}}$ e I matriz identidad de $d \times d$, luego

$$B = \begin{pmatrix} 0 & I & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ A & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \det(\mathrm{Id} - \rho(\phi_1)t \,|\, V^{I_{G,\mathfrak{P}_1}}) &= \det \begin{pmatrix} I & -tI & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -tI \\ -tA & 0 & 0 & I \end{pmatrix} \\ &= \det(\mathrm{Id} - \theta_i(\phi_1^{f_i})t^{f_i} \,|\, \tau_i W^{I_{G,\mathfrak{P}_1} \cap \tau_i H \tau^{-1}}). \end{aligned}$$

Las operaciones son multiplicar por t la primera columna y sumarla a la segunda, luego multiplicar por t la segunda y sumarla a la tercera, etc. ♣

Corolario 5 *Sea* L/K *una extesión de cuerpos de números, entonces*

$$\zeta_L(s) = \zeta_K \prod_{\chi \neq \chi_0} L(s, \chi, L/K)^{\chi(1)}$$

donde χ *recorre los carácteres irreducibles de* $\mathrm{Gal}(L/K)$.

Demostración: Sean $G = \mathrm{Gal}(L/K)$ y χ_0 el carácter principal. Por proposición 11 (iv) se tiene

$$\zeta_L(s) = L(s, \chi_0, L/L) = L(s, \mathrm{Ind}_{\{e\}}^G \chi_0, L/K).$$

Además, $\mathrm{Ind}_{\{e\}}^G \chi_0 = \mathrm{reg}_G = \sum_\chi \chi(e)\chi$, por lo tanto

$$\begin{aligned}
\zeta_L(s) &= L(s, \sum_\chi \chi(e)\chi, L/K) \\
&= \prod_\chi L(s, \chi, L/K)^{\chi(1)} \\
&= \zeta_K(s) \prod_{\chi \neq \chi_0} L(s, \chi, L/K)^{\chi(1)}.
\end{aligned}$$

♣

Consideremos el carácter,

$$\psi_{\mathfrak{p}}(g) = |G| \sum_{\phi_{\mathfrak{p}}^l = g} \overline{\frac{1}{l N\mathfrak{p}^{sl}}}.$$

Ahora, sea χ un carácter irreducible de G, entonces

$$\begin{aligned}
\langle \chi, \psi_{\mathfrak{p}} \rangle &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) \overline{\psi_{\mathfrak{p}}(g)} \\
&= \sum_{g \in G} \chi(g) \sum_{\mathfrak{p}^l = g} \frac{1}{l N\mathfrak{p}^{sl}} \\
&= \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\chi(\phi_{\mathfrak{p}}^l)}{l N\mathfrak{p}^{sl}} \\
&= \log L_{\mathfrak{p}}(s, \chi, L/K).
\end{aligned}$$

Si, $\phi_{\mathfrak{p}}^i = g_j \in G$, entonces $\phi_{\mathfrak{p}}^{i+kf} = g_j$, es decir, $\phi_{\mathfrak{p}}^l = g_j$, para todo $l \equiv i (\mod f)$. Supongamos que χ es trivial en algún subgrupo normal H de G. Entonces aplicando (13) se tiene,

$$\langle \chi, \psi_{\mathfrak{p}} \rangle = \langle \chi, (\psi_{\mathfrak{p}})_{\#} \rangle.$$

Es decir,

$$\log L_{\mathfrak{p}}(s, \chi, K^H/K) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l N\mathfrak{p}^{sl}} \frac{1}{|H|} \sum_{g \in \phi_{\mathfrak{p}}^l H} \chi(g).$$

En particular, si χ es trivial en el subrupo de inercia $I_{\mathfrak{p}}$, entonces $\mathfrak{p}$ es no ramificado en $K^{I_{\mathfrak{p}}}/K$, luego

Definición 15 *Sea $\mathfrak{p}$ es un primo finito de K, y $\mathfrak{P}$ primo de L sobre $\mathfrak{p}$ y χ un carácter de G, entoces se define un factor local de la función L de Artin como*

$$\log L_{\mathfrak{p}}(s, \chi, L/K) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\chi_{\#}(\phi_{\mathfrak{p}}^l)}{l N\mathfrak{p}^{sl}},$$

con $\chi_{\#}(\phi_{\mathfrak{p}}^l) = \frac{1}{|I_{\mathfrak{p}}|} \sum_{g \in \phi_{\mathfrak{p}}^l I_{\mathfrak{p}}} \chi(g)$.

2.1.6. Conductor de Artin

Sea

$$G_i = \{\sigma \in Gal(L/K) : \nu_L(\sigma(a) - a) \geqslant i + 1 \text{ para todo } a \in \mathbb{Z}_L\},$$

el i-ésimo grupo de ramificación, con ν_L es una valuación de L. En particular $G_{-1} = G$ y G_0 es el grupo de inercia. Además, se tiene una cadena de subgrupos normales

$$G_{-1} \supseteq G_0 \supseteq G_1 \supseteq \dots.$$

Ahora definamos,

$$f(\chi) = \prod_{\mathfrak{p} \nmid \infty} \mathfrak{p}^{f_{\mathfrak{p}}(\chi)},$$

donde,

$$f_{\mathfrak{p}}(\chi) = \sum_{i \geqslant 0} \frac{|G_i|}{|G_0|} \text{codim}(V^{G_i}).$$

Los ideales $f(\chi)$ son llamados conductores de Artin asociados a χ.

Definición 16 *El conductor de Artin local asociado al carácter χ de $Gal(L/K)$ es*

$$f_{\mathfrak{p}}(\chi) = \mathfrak{p}^{f(\chi)}.$$

Definición 17 *El conductor global de Artin asociado al carácter χ de $Gal(L/K)$ es*

$$f(L/K, \chi) = f(\chi) = \prod_{\mathfrak{p} \nmid \infty} f_{\mathfrak{p}}(\chi).$$

Proposición 12 *El conductor global de Artin, satisface:*

(i) $\mathsf{f}(\chi+\chi')=\mathsf{f}(\chi)\mathsf{f}(\chi')$, $\mathsf{f}(\chi_0)=1$.

(ii) Si L' *es una subextensión de* L *de Galois y* χ *es un carácter de* $\mathrm{Gal}(\mathsf{L}'/\mathsf{K})$*, entonces*

$$\mathsf{f}(\mathsf{L}'/\mathsf{K},\chi)=\mathsf{f}(\mathsf{L}/\mathsf{K},\chi).$$

(iii) Si $\mathsf{H}\leqslant\mathsf{G}$ *con cuerpo fijo* K'*, y* χ *es un carácter de* H*, entonces*

$$\mathsf{f}(\mathsf{L}/\mathsf{K},\mathrm{Ind}_{\mathsf{H}}^{\mathsf{G}}\chi)=\mathfrak{D}_{\mathsf{K}'/\mathsf{K}}^{\chi(1)}\mathsf{N}_{\mathsf{K}'/\mathsf{K}}(\mathsf{f}(\mathsf{L}/\mathsf{K}',\chi)).$$

Demostración: Ver [N99] página 533. ♣

Teorema 16 (Fórmula Discriminante-Conductor) *Sea* L/K *una extenión de Galois, entonces*

$$\mathfrak{D}_{\mathsf{L}/\mathsf{K}}=\prod_{\chi}\mathsf{f}(\chi)^{\chi(1)},$$

donde χ *recorre todos los carácteres irreducibles de* $\mathrm{Gal}(\mathsf{L}/\mathsf{K})$*.*

Definamos el ideal de $\mathbb{Z}$ formado por

$$\mathsf{c}(\mathsf{L}/\mathsf{K},\chi)=\mathfrak{D}_{\mathsf{K}/\mathbb{Q}}^{\chi(1)}\mathsf{N}_{\mathsf{K}/\mathbb{Q}}(\mathsf{f}(\mathsf{L}/\mathsf{K},\chi)).$$

Este ideal satisface,

Proposición 13 *(i)* $\mathsf{c}(\mathsf{L}/\mathsf{K},\chi+\chi')=\mathsf{c}(\mathsf{L}/\mathsf{K},\chi)\mathsf{c}(\mathsf{L}/\mathsf{K},\chi')$, $\mathsf{c}(\mathsf{L}/\mathsf{K},\chi_0)=|\mathsf{d}_{\mathsf{K}}|$.

(ii) Si L' *es una subextensión de* L *de Galois y* χ *es un carácter de* $\mathrm{Gal}(\mathsf{L}'/\mathsf{K})$*, entonces*

$$\mathsf{c}(\mathsf{L}'/\mathsf{K},\chi)=\mathsf{c}(\mathsf{L}/\mathsf{K},\chi).$$

(iii) Si $\mathsf{H}\leqslant\mathsf{G}$ *con cuerpo fijo* K'*, y* χ *es un carácter de* H*, entonces*

$$\mathsf{c}(\mathsf{L}/\mathsf{K},\mathrm{Ind}_{\mathsf{H}}^{\mathsf{G}}\chi)=\mathsf{c}(\mathsf{f}(\mathsf{L}/\mathsf{K}',\chi)).$$

Demostración: Ver [N99] página 535. ♣

2.1.7. La ecuación funcional

El objetivo de esta sección será obtener la ecuación funcional para la extensión analítica de la función L de Artin. Obtengamos una expresión de la función L de Artin para los primos infinitos, sea

$$L_\infty(s,\chi,L/K) = \prod_{\mathfrak{p}|\infty} L\mathfrak{p}(s,\chi,L/K),$$

donde,

$$L_\mathfrak{p}(s,\chi,L/K) = \begin{cases} \{2(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\}^{\chi(1)} & \mathfrak{p} \text{ complejo} \\ \{\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\}^{n^+}\{\pi^{-\frac{s+1}{2}}\Gamma(\frac{s+1}{2})\}^{n^-} & \mathfrak{p} \text{ real} \end{cases},$$

con, $n^+ = \frac{\chi(1)+\chi(g_0)}{2}$ y $n^- = \frac{\chi(1)-\chi(g_0)}{2}$ con 1 la identidad y g_0 la conjugación compleja.

Teorema 17 *Para primos infinitos* $\mathfrak{p}$ *se tiene,*

(i) $L_\mathfrak{p}(s,\chi+\chi',L/K) = L_\mathfrak{p}(s,\chi,L/K)L_\mathfrak{p}(s,\chi',L/K)$.

(ii) Si L' *es una subextensión de* L *de Galois y* χ *es un carácter de* $\mathrm{Gal}(L'/K)$*, entonces*

$$L_\mathfrak{p}(s,\chi,L'/K) = L_\mathfrak{p}(s,\chi,L/K).$$

(iii) Si K' *es un cuerpo intermedio de* L*, y* χ *es un carácter* $\mathrm{Gal}(L/K')$*, entonces*

$$L_\mathfrak{p}(s,\mathrm{Ind}_H^G\chi,L/K) = \prod_{\mathfrak{q}|\mathfrak{p}} L_\mathfrak{q}(s,\chi,L/K'),$$

donde $\mathfrak{q}$ *varía en los primos de* K' *sobre* $\mathfrak{p}$*.*

Demostración: Ver [N99] página 536. ♣

Definición 18 *La extensión meromorfica de la función L de Artin con* χ *carácter de* $\mathrm{Gal}(L/K)$ *es*

$$\Lambda(s,\chi,L/K) = c(L/K,\chi)^{s/2}L_\infty(s,\chi,L/K)L(s,\chi,L/K),$$

donde $c(L/K,\chi) = |d_K|^{\chi(1)}\mathfrak{N}(f(L/K,\chi))$.

De la definición y propiedades anteriores se deduce la siguiente proposición.

Proposición 14 *(i)* $\Lambda(s,\chi+\chi',L/K) = \Lambda(s,\chi,L/K)\Lambda(s,\chi',L/K)$.

(ii) Si L' *es una subextensión de* L *de Galois y* χ *es un carácter de* $\mathrm{Gal}(L'/K)$*, entonces*

$$\Lambda(s,\chi,L'/K) = \Lambda(s,\chi,L/K).$$

(iii) Si K' *es un cuerpo intermedio de* L, *y* χ *es un carácter* $\mathsf{Gal}(L/K')$, *entonces*

$$\Lambda(s, \mathrm{Ind}_H^G \chi, L/K) = \Lambda(s, \chi, L/K').$$

Proposición 15 *La extensión meromorfica de la función L de Artin con* χ *carácter unidimensional de* $\mathsf{Gal}(L/K)$ *coincide con la extensión meromorfica de la función L de Hecke con* $\widetilde{\chi}$ *como* Größencharakter, *es decir*

$$\Lambda(s, \chi, L/K) = \Lambda(s, \widetilde{\chi}).$$

Demostración: Ver [N99] página 539. ♣

Teorema 18 *La extensión meromorfica de la función L de Artin satisface la ecuación funcional*

$$\Lambda(s, \chi, L/K) = W(\chi)\Lambda(1 - s, \overline{\chi}, L/K),$$

con $W(\chi) \in \mathbb{C}$ *cuyo módulo es 1.*

Demostración: El teorema de Brauer, nos dice que para cada carácter del $\mathsf{Gal}(L/K)$ se puede escribir como,

$$\chi = \sum n_i \psi_i,$$

donde ψ_i son carácteres inducidos por χ_i de grado 1 que provienen de los subgrupos $H_i = \mathsf{Gal}(L/K_i)$. Aplicando propiedades vistas anteriormente se tiene

$$\begin{aligned}
\Lambda(s, \chi, L/K) &= \prod_i \Lambda(s, \psi_i, L/K)^{n_i} \\
&= \prod_i \Lambda(s, \chi_i, L/K_i)^{n_i} \\
&= \prod_i \Lambda(s, \widetilde{\chi_i})^{n_i}.
\end{aligned}$$

Donde $\widetilde{\chi_i}$ es el Größencharakter de K_i asociado a χ_i. La función L de Hecke $\Lambda(s, \widetilde{\chi_i})$ admite una continuación meromorfica en $\mathbb{C}$ y satisface la ecuación funcional

$$\Lambda(s, \widetilde{\chi_i}) = W(\widetilde{\chi_i})\Lambda(1 - s, \overline{\widetilde{\chi_i}}).$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\Lambda(s,\chi,L/K) &= \prod_i \Lambda(s,\widetilde{\chi_i})^{n_i} \\
&= \underbrace{\prod_i W(\widetilde{\chi_i})}_{\substack{\shortparallel \\ W(\chi)}} \Lambda(1-s,\overline{\widetilde{\chi_i}})^{n_i} \\
&= W(\chi)\prod_i \Lambda(1-s,\overline{\widetilde{\chi_i}})^{n_i} \\
&= W(\chi)\prod_i \Lambda(1-s,\overline{\chi_i},L/K_i)^{n_i} \\
&= W(\chi)\Lambda(1-s,\overline{\chi},L/K).
\end{aligned}$$

♣

2.2. Versión efectiva del Teorema de Chebotarev

En 1922 Nikolai Chebotarev probó en su tesis, publicada en 1926 el teorema de densidad de Chebotarev en [T26]. Luego en 1977 Lagarias y Odlyzko demostraron en [LO77] que es posible conseguir un término de error, el cual es explícito y efectivamente calculable en función de x, n_L, d_L y $\frac{|C|}{|G|}$. Más aún, es posible calcular todas aquellas constantes, según se ve en [W13].

Sea K un cuerpo de números, es decir, una extensión finita de $\mathbb{Q}$. Tomemos L una extensión normal de K, con $G = Gal(L/K)$. Además, denotaremos por d_K, d_L los valores absolutos de los discriminantes de L y K. Sean $n_K = [K : \mathbb{Q}]$ y $n_L = [L : \mathbb{Q}]$.

Recordemos

$$\pi_C(x, L/K) = \#\{\mathfrak{p} : \mathfrak{p} \text{ no ramificado en } L, \left[\frac{L/K}{\mathfrak{p}}\right] = C, N\mathfrak{p} \leqslant x\},$$

donde C es una clase de conjugación de G. El teorema de densidad de Chebotarev dice que

$$\pi_C(x, L/K) \sim \frac{|C|}{|G|}\frac{x}{\log x} \text{ si } x \to \infty.$$

2.2.1. Esquema de trabajo

El objetivo primordial de este capítulo será demostrar que existe una constante c positiva absoluta y efectiva, tal que si $\zeta_L(s)$ satisface GRH, entonces para todo $x > 2$,

$$|\pi_C(x) - \frac{|C|}{|G|}\mathrm{Li}(x)| \leqslant c(\frac{|C|}{|G|}\sqrt{x}\log d_L x^{n_L} + \log d_L),$$

particularmente, encontraremos aquella constante explícitamente. Además, incondicionalmente,

$$\left|\pi_C(x) - \frac{|C|}{|G|}\mathrm{Li}(x)\right| \leqslant \frac{|C|}{|G|}\frac{x^{\beta_0}}{\log(x^{\beta_0})} + \frac{|C|}{|G|}\mathrm{Li}(x^{\beta_0}) + cxe^{-c_8\sqrt{\frac{\log(x)}{n_L}}},$$

con β_0 un cero real y simple de $\zeta_L(s)$.

Para esto se define,

$$\psi_C(x, L/K) = \sum_{\substack{N_{K/\mathbb{Q}}\mathfrak{p}^l \leqslant x \\ \mathfrak{p} \text{ no ramificado} \\ \left[\frac{L/K}{\mathfrak{p}}\right]^l = C}} \log(N_{K/\mathbb{Q}}\mathfrak{p}).$$

La estrategia para esta demostración será la siguiente:

1. Escribimos ψ_C como sigue:

$$\psi_C(x) = I_C(x, T) + R_1(x, T).$$

   Donde $I_C(x, T) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\sigma_0 - iT}^{\sigma_0 + iT} F_C(s)\frac{x^s}{s}\, ds$, es una transformada de Mellin inversa truncada y R_1 un resto a determinar.

2. Considerar $F_C(s)$, una cierta función con algunas propiedades que se podrá escribir como suma de carácteres y derivadas logaritmicas de la función L de Artin. Esto será de gran ayuda para lo que vendrá.

3. Escribimos, $I_C(x, T) = B_C(x, T) + R_2(x, T)$. Con R_2 un segundo resto a determinar y

$$B_C(x, T) = \frac{1}{2\pi i}\oint_B F_C(s)\frac{x^s}{s}\, ds.$$

4. La integral $B_C(x, T)$ se evalua mediante el Teorema de Cauchy, de donde se extrae el término principal $\frac{|C|}{|G|}x$ y una suma $S(x, T)$. Como resultado, se obtiene una fórmula explícita para $\psi_C(x)$.

5. La fórmula asintótica $\psi_C(x) \sim \frac{|C|}{|G|}x$ es obtenida con un término de error. De aquí, se obtiene $\pi_C(x) \sim \frac{|C|}{|G|}\mathrm{Li}(x)$ y además es posible el cálculo de las constantes efectivas.

2.3. Demostración del teorema

Comencemos con nuestro trabajo. Por (15), si además φ es un carácter irreducible de G y $\phi_{\mathfrak{p}}$ es el Frobenius de $\mathfrak{p}$,

$$\log L_{\mathfrak{p}}(s, \varphi, L/K) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\varphi_{\#}(\phi_{\mathfrak{p}}^{l})}{l N\mathfrak{p}^{sl}}.$$

Así,

$$\frac{L'}{L}(s, \phi, L/K) = \sum_{\mathfrak{p}} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\varphi_{\#}(\phi_{\mathfrak{p}}^{l}) \log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^{sl}}.$$

Sea $g \in C$. Se define la función,

$$\begin{array}{rcccl} f_C & : & G & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & & g & \mapsto & \sum_{\varphi} \overline{\varphi(g)} \varphi(g) \end{array}.$$

De esta manera,

$$f_C(\tau) = \begin{cases} \frac{|G|}{|C|} & \tau \in C \\ 0 & \tau \notin C \end{cases}.$$

Sea

$$F_C(s) = -\frac{|C|}{|G|} \sum_{\varphi} \overline{\varphi(g)} \frac{L'}{L}(s, \varphi, L/K).$$

Se verifica,

$$\begin{aligned} F_C(s) &= \frac{|C|}{|G|} \sum_{\varphi} \overline{\varphi(g)} \sum_{\mathfrak{p}} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\varphi_{\#}(\phi_{\mathfrak{p}}^{l})}{N\mathfrak{p}^{sl}} \log N\mathfrak{p} \\ &= \frac{|C|}{|G|} \sum_{\varphi} \overline{\varphi(g)} \sum_{\mathfrak{p}} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{|I_{\mathfrak{p}}|} \sum_{g \in \phi_{\mathfrak{p}}^{l} I_{\mathfrak{p}}} \varphi(g) \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^{sl}} \\ &= \frac{|C|}{|G||I_{\mathfrak{p}}|} \sum_{\mathfrak{p}} \sum_{l=1}^{\infty} |I_{\mathfrak{p}}| \sum_{\varphi} \overline{\varphi(g)} \varphi(g) \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^{sl}} \\ &= \sum_{\mathfrak{p}} \sum_{l=1}^{\infty} \vartheta(\phi_{\mathfrak{p}}^{l}) \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^{sl}}. \end{aligned}$$

Donde,

$$\vartheta(\phi_{\mathfrak{p}}^{l}) = \begin{cases} 1 & \left[\frac{L/K}{\mathfrak{p}}\right]^{l} = C \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases},$$

para primos no ramificados, mientras que $|\vartheta(\phi_{\mathfrak{p}}^{l})| \leqslant 1$ para los ramificados.

El siguiente lema será de utilidad en lo que sigue

Lema 19 *Sean* $y, \sigma, T > 0$*, entonces*

$$\begin{array}{ll}
\left|\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT}\frac{y^s}{s}\,ds - 1\right| \leqslant y^{\sigma}\min\{1, T^{-1}|\log y|^{-1}\} & \textit{Si } y > 0 \\
\left|\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT}\frac{y^s}{s}\,ds - \frac{1}{2}\right| \leqslant \sigma T^{-1} & \textit{Si } y = 1 \\
\left|\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT}\frac{y^s}{s}\,ds\right| \leqslant y^{\sigma}\min\{1, T^{-1}|\log y|^{-1}\} & \textit{Si } 0 < y < 1
\end{array}.$$

Demostración: Ver [M01] página 55. ♣

Sean $\sigma_0 > 1$ y $x \leqslant 2$, recordemos que

$$I_C(x, T) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_0-iT}^{\sigma_0+iT} F_C(s)\frac{x^s}{s}\,ds.$$

Entonces:

$$|I_C(x,T) - \psi_C(x, L/K)| \leqslant |I_C(x,T) - \sum_{\substack{\mathfrak{p},\, l \\ N\mathfrak{p}^l \leqslant x}} \vartheta(\phi_{\mathfrak{p}}^{l})\log N\mathfrak{p}| + |\sum_{\substack{\mathfrak{p},\, l \\ N\mathfrak{p}^l \leqslant x}} \vartheta(\phi_{\mathfrak{p}}^{l})\log N\mathfrak{p} - \psi_C(x)|.$$

Obtenemos por un lado,

$$\begin{aligned}
\left|I_C(x,T) - \sum_{\substack{\mathfrak{p},l \\ N\mathfrak{p}^l \leqslant x}}\vartheta(\phi_{\mathfrak{p}}^{l})\log N\mathfrak{p}\right| &= \left|\sum_{\substack{\mathfrak{p},l \\ N\mathfrak{p}^l \leqslant x}}\vartheta(\phi_{\mathfrak{p}}^{l})\log N\mathfrak{p}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_0-iT}^{\sigma_0+iT}\frac{(N\mathfrak{p}^{-m}x)^s}{s}\,ds - 1\right]\right. \\
&\quad \left. + \sum_{\substack{\mathfrak{p},l \\ N\mathfrak{p}^l > x}}\vartheta(\phi_{\mathfrak{p}}^{l})\log N\mathfrak{p}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_0-iT}^{\sigma_0+iT}\frac{(N\mathfrak{p}^{-m}x)^s}{s}\,ds\right]\right|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \Bigg| \sum_{\substack{\mathfrak{p},l \\ N\mathfrak{p}^l < x}} \vartheta(\phi_{\mathfrak{p}}^l) \log N\mathfrak{p} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_0 - iT}^{\sigma_0 + iT} \frac{(N\mathfrak{p}^{-m} x)^s}{s}\, ds - 1 \right] \\
&+ \sum_{\substack{\mathfrak{p},l \\ N\mathfrak{p}^l \leqslant x}} \vartheta(\phi_{\mathfrak{p}}^l) \log N\mathfrak{p} \left[\left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_0 - iT}^{\sigma_0 + iT} \frac{(N\mathfrak{p}^{-m} x)^s}{s}\, ds - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \right] \\
&+ \sum_{\substack{\mathfrak{p},l \\ N\mathfrak{p}^l > x}} \vartheta(\phi_{\mathfrak{p}}^l) \log N\mathfrak{p} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_0 - iT}^{\sigma_0 + iT} \frac{(N\mathfrak{p}^{-m} x)^s}{s}\, ds \right] \Bigg| \\
&\leqslant \sum_{\substack{\mathfrak{p},l \\ N\mathfrak{p}^l \neq x}} \log N\mathfrak{p} \left(\frac{x}{N\mathfrak{p}^m} \right)^{\sigma_0} \text{mín}\{1, T^{-1} | \log(\frac{x}{N\mathfrak{p}^m})|^{-1}\} \\
&+ \sum_{\substack{\mathfrak{p},l \\ N\mathfrak{p}^l = x}} \log N\mathfrak{p} [\sigma_0 T^{-1}] + \frac{1}{2} \sum_{\substack{\mathfrak{p},l \\ N\mathfrak{p}^l = x}} \log N\mathfrak{p}.
\end{aligned}
$$

Pongamos,

$$
R_0(x,T) = \sum_{\substack{\mathfrak{p},l \\ N\mathfrak{p}^l \neq x}} \log N\mathfrak{p} \left(\frac{x}{N\mathfrak{p}^m} \right)^{\sigma_0} \text{mín} \left\{ 1, T^{-1} \left| \log \left(\frac{x}{N\mathfrak{p}^m} \right) \right|^{-1} \right\}.
$$

Por otro lado, para primos ramificados, con $N\mathfrak{p} \geqslant 2$,

$$
\begin{aligned}
\left| \sum_{\substack{\mathfrak{p},l \\ N\mathfrak{p}^l \leqslant x}} \vartheta(\phi_{\mathfrak{p}}^l) \log N\mathfrak{p} - \psi_C(x) \right| &\leqslant \sum_{\substack{\mathfrak{p},l \\ \mathfrak{p} \text{ ramificado} \\ N\mathfrak{p}^l \leqslant x}} \log N\mathfrak{p} \\
&= \sum_{\mathfrak{p} \text{ ramificado}} \log N\mathfrak{p} \sum_{\substack{l \\ N\mathfrak{p}^l \leqslant x}} 1 \\
&= \sum_{\mathfrak{p} \text{ ramificado}} \log N\mathfrak{p} \left[\frac{\log x}{\log N\mathfrak{p}} \right] \\
&\leqslant 2 \log x \sum_{\mathfrak{p} \text{ ramificado}} \log N\mathfrak{p} \\
&\leqslant 2 \log x \log d_L.
\end{aligned}
$$

De [S81] página 333, se tiene

$$\sum_{\mathfrak{p} \text{ ramificado}} \log N\mathfrak{p} \leqslant \frac{2}{|G|} \log(d_L).$$

Para $N\mathfrak{p}^l = x$ existen n_k pares $\mathfrak{p}, l$. Así,

$$\sum_{\substack{\mathfrak{p}, l \\ N\mathfrak{p}^l = x}} \log N\mathfrak{p} \leqslant \sum_{\substack{l \\ N\mathfrak{p}^l = x}} 1 \sum_{\mathfrak{p}} \log N\mathfrak{p} \leqslant n_K \log x.$$

Luego, $\psi_C = I_C(x,T) + R_1(x,T)$ con

$$R_1(x,T) \leqslant 2\log x \log d_L + n_K \log x(\sigma_0 T^{-1} + 1) + R_0(x,T).$$

Ahora, estimaremos la expresión $R_0(x,T)$ separandola en tres sumandos

$$R_0(x,T) = S_1 + S_2 + S_3$$

Para comenzar, sea

$$S_1 = \{\mathfrak{p} \in R_0(x,T) : N\mathfrak{p}^l \leqslant \frac{3}{4}x \vee N\mathfrak{p}^l \geqslant \frac{5}{4}x\}.$$

Por un lado, tenemos $N\mathfrak{p}^l \leqslant \frac{3}{4}x \leqslant \frac{4}{5}x$, entonces $\log\left(\frac{x}{N\mathfrak{p}^l}\right) \geqslant \log\frac{5}{4}$ y por otro $N\mathfrak{p}^l \geqslant \frac{5}{4}x$, entonces $\log\left(\frac{x}{N\mathfrak{p}^l}\right) \leqslant \log\frac{4}{5} = -\log\frac{5}{4}$. Por lo tanto,

$$\left|\log\left(\frac{x}{N\mathfrak{p}^l}\right)\right| \geqslant \log\frac{5}{4} \Leftrightarrow \left|\log\left(\frac{x}{N\mathfrak{p}^l}\right)\right|^{-1} \leqslant \frac{1}{\log\frac{5}{4}}.$$

Así,

$$\text{mín}\left\{1, T^{-1}\left|\log\left(\frac{x}{N\mathfrak{p}^l}\right)\right|^{-1}\right\} \ll T^{-1} \text{ para todo } T \geqslant 1.$$

Pongamos $\sigma_0 = 1 + (\log x)^{-1}$. Entonces,

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{\mathfrak{p},l} \log N\mathfrak{p} \left(\frac{x}{N\mathfrak{p}^l}\right)^{\sigma_0} \text{mín}\left\{1, T^{-1}\left|\log\left(\frac{x}{N\mathfrak{p}^l}\right)\right|^{-1}\right\} \\ &= ex \sum_{\mathfrak{p},l} \log N\mathfrak{p}(N\mathfrak{p})^{-l\sigma_0} \text{mín}\left\{1, T^{-1}\left|\log\left(\frac{x}{N\mathfrak{p}^l}\right)\right|^{-1}\right\} \\ &\ll xT^{-1} \sum_{\mathfrak{p},l} \log N\mathfrak{p}(N\mathfrak{p})^{-l\sigma_0} \\ &= xT^{-1}\left(-\frac{\zeta_K'}{\zeta_K}(\sigma_0)\right). \end{aligned}$$

Además, podemos ver que la constante en este caso es,

$$S_1 \leqslant \frac{xeT^{-1}}{\log(\frac{5}{4})}\left(-\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma_0)\right).$$

Para acotar la derivada logarítmica de la función zeta de Dedekind usamos el siguiente lema.

Lema 20 *Sea* $\sigma > 1$*, entonces*

$$-\frac{\zeta_K'}{\zeta_K}(\sigma) \leqslant -n_K\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) \tag{9}$$

y

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) \leqslant \frac{1}{\sigma-1}. \tag{10}$$

Demostración: Para probar (9) tenemos,

$$-\frac{\zeta_K'}{\zeta_K}(\sigma) = \sum_{\mathfrak{p}} \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^\sigma - 1} \text{ y } -\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) = \sum_{p} \frac{\log p}{p^\sigma - 1}.$$

Para todo primo $\mathfrak{p}$ de $\mathbb{Z}_K$, existe $k \in \mathbb{Z}^+$ tal que $N\mathfrak{p} = p^k$. Luego para cada primo $\mathfrak{p}$,

$$\frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^\sigma - 1} = \frac{k\log p}{p^{k\sigma}-1} = \frac{k}{p^{(k-1)\sigma}+p^{(k-2)\sigma}+\ldots+p+1}\cdot\frac{\log p}{p^\sigma-1} \leqslant \frac{\log p}{p^\sigma - 1}.$$

Como existen a lo más n_K distintos primos $\mathfrak{p}$ sobre cada $p \in \mathbb{Q}$. Se obtiene el resultado,

$$-\frac{\zeta_K'}{\zeta_K}(\sigma) \leqslant n_K\sum_{p}\frac{\log p}{p^\sigma-1} = -n_K\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma).$$

Para probar (10), la función Zeta de Riemann, satisface

$$\zeta(\sigma) = \frac{\sigma}{\sigma-1} - \sigma I(\sigma),$$

donde, $I(\sigma) = \int_1^\infty \frac{t-[t]}{t^{\sigma+1}}dt$. Aplicando la derivada logaritmica, se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned} \frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) + \frac{1}{\sigma-1} &= \frac{1-(2\sigma-1)I(\sigma)+I'(\sigma)(\sigma-\sigma^2)}{\zeta(\sigma)(\sigma)} \\ &> \frac{1-(2\sigma-1)I(\sigma)}{\zeta(\sigma)(\sigma)}. \end{aligned}$$

Ahora, basta probar que

$$\frac{1-(2\sigma-1)I(\sigma)}{\zeta(\sigma)(\sigma)} \geqslant 0,$$

lo que equivale a probar que

$$\zeta(\sigma) \geqslant \frac{\sigma^2}{(\sigma-1)(2\sigma-1)}.$$

Es decir,

$$\begin{aligned}
\zeta(\sigma) \geqslant \frac{\sigma^2}{(\sigma-1)(2\sigma-1)} \quad &\Leftrightarrow \quad \zeta(\sigma) \geqslant \frac{\sigma}{(\sigma-1)} - \frac{\sigma}{(2\sigma-1)} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{(2\sigma-1)} \geqslant \frac{1}{\sigma}(\frac{\sigma}{\sigma-1} - \zeta(\sigma)) \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{(2\sigma-1)} \geqslant I(\sigma) \\
&\Leftrightarrow \quad 1-(2\sigma-1)I(\sigma) \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Luego, se obtiene lo pedido.

♣

Como $-\frac{\zeta_K'}{\zeta_K}(\sigma) \ll n_K(\sigma-1)^{-1}$ entonces

$$S_1 \ll n_K x T^{-1} \log x.$$

Para S_2 consideramos los términos de $R_0(x,T)$ tal que $0 < |N\mathfrak{p}^l - x| \leqslant 1$. Por un lado tenemos $x - N\mathfrak{p}^l \leqslant 1$, entonces $\log \frac{x}{x-1} \geqslant \log \frac{x}{N\mathfrak{p}^l}$ y además,

$$\text{mín}\left\{1, T^{-1}\left|\log\left(\frac{x}{N\mathfrak{p}^l}\right)\right|^{-1}\right\} \leqslant 1.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
S_2 \quad &\leqslant \quad \sum_{\mathfrak{p},l} \log N\mathfrak{p} \left(\frac{x}{x-1}\right)^{\sigma_0} \\
&\leqslant \quad \left(\frac{x}{x-1}\right)^{\sigma_0} \sum_{\mathfrak{p},l} \log N\mathfrak{p} \\
&\leqslant \quad 2n_K \left(\frac{x}{x-1}\right)^{\sigma_0} \frac{1}{l} \log(x+1) \\
&\ll \quad n_K \log x.
\end{aligned}$$

Ahora, la constante se acota así,

$$S_2 \leqslant \frac{4e\log(3)}{\log(2)} n_k \log x.$$

Por último, S_3 contine los términos tal que $1 < |N\mathfrak{p}^l - x| < \frac{1}{4}x$. Para esto usaremos la estimación

$$\left|\log \frac{x}{n}\right|^{-1} \leqslant \frac{2n}{|x-n|},$$

válida para $\frac{x}{n} \leqslant 2$.

$$\begin{aligned}
S_3 &\leqslant \left(\frac{4}{3}\right)^{\sigma_0} \sum_{\mathfrak{p},l} \log N\mathfrak{p} \, \text{mín}\left\{1, T^{-1}\left|\log\left(\frac{x}{N\mathfrak{p}^l}\right)\right|^{-1}\right\} \\
&\ll T^{-1}\log x \sum_{\substack{n \\ 1<|n-x|<\frac{1}{4}x}} \left|\log\left(\frac{x}{n}\right)\right|^{-1} \sum_{\substack{\mathfrak{p},l \\ N\mathfrak{p}^l = n}} 1 \\
&\leqslant n_K \frac{5}{2} x T^{-1} \log x \sum_{1<k<\frac{1}{4}x} \frac{1}{k} \\
&\ll n_K T^{-1} x (\log x)^2.
\end{aligned}$$

La constante asociada para este caso,

$$S_3 \leqslant \frac{8e^2}{3^{1+\frac{1}{\log(2)}}} n_K T^{-1} x (\log x)^2.$$

Luego, para todo $x \geqslant 2$ y $T \geqslant 1$ se tiene la estimacíon

$$\begin{aligned}
R_0(x,T) &= S_1 + S_2 + S_3 \\
&\ll n_K x T^{-1} \log x + n_K \log x + n_K x T^{-1} (\log x)^2 \\
&\ll n_K \log x + n_K x T^{-1} (\log x)^2.
\end{aligned}$$

Las constantes en este caso son,

$$R_0(x,T) \leqslant \frac{69}{4} n_K \log x + \frac{65}{3} n_K x T^{-1} (\log x)^2.$$

Por otro lado, para todo $x \geqslant 2$, $T \geqslant 1$, $\sigma_0 T^{-1} + 1$ es una constante y además, $n_K \leqslant n_L \ll \log d_L$, luego se tiene,

$$\begin{aligned}
R_1(x,T) &\leqslant 2\log x \log d_L + n_K \log x(\sigma_0 T^{-1} + 1) + R_0(x,T) \\
&\ll \log x \log d_L + n_K \log x(\sigma_0 T^{-1} + 1) + n_K \log x + n_K x T^{-1} (\log x)^2 \\
&\ll \log x \log d_L + n_K \log x + n_K x T^{-1} (\log x)^2 \\
&\ll \log x \log d_L + n_K x T^{-1} (\log x)^2.
\end{aligned}$$

Además, tenemos

$$R_1(x,T) \leqslant \frac{2}{\log(2)} \frac{\log(x)\log(d_L)}{|G|} + \frac{73}{4} n_K \log x + \frac{145}{6} n_K x T^{-1} (\log x)^2.$$

Lema 21 *Sea* $g \in C$, $H = \langle g \rangle$. *Sea* E *cuerpo fijo por* H *y* χ *carácter irreducible unidimensional de* H, *entonces tenemos*

$$F_C(s) = -\frac{|C|}{|G|} \sum_{\chi} \overline{\chi(g)} \frac{L'}{L}(s, \chi, L/E).$$

Demostración: Sea τ la función de clases definida como

$$\begin{array}{rcl} \tau : H & \to & \mathbb{C} \\ h & \mapsto & \left\{ \begin{array}{cc} |H| & h = g \\ 0 & h \neq g \end{array} \right. . \end{array}$$

Por propiedades de carácteres tenemos $\tau(h) = \sum_{\chi} \overline{\chi(g)} \chi(h)$ para todo $h \in H$. Consideremos $\mathrm{Ind}_H^G \tau$, luego

$$\mathrm{Ind}_H^G \tau(y) = \left\{ \begin{array}{cc} |C_G(g)| & y \in C \\ 0 & y \notin C \end{array} \right. .$$

Pero, $|C_G(g)| = \frac{|G|}{|C|}$, entonces $\mathrm{Ind}_H^G \tau = f_C$, lo que implica que

$$\sum_{\chi} \overline{\chi(g)} \mathrm{Ind}_H^G \chi = \sum_{\varphi} \overline{\varphi(g)} \varphi.$$

Ahora, para $\mathsf{Re}(s) > 1$ y por proposición 11.

$$\begin{aligned} F_C(s) &= -\frac{|C|}{|G|} \sum_{\chi} \overline{\chi(g)} \frac{L'}{L}(s, \mathrm{Ind}_H^G \chi, L/K) \\ &= -\frac{|C|}{|G|} \sum_{\chi} \overline{\chi(g)} \frac{L'}{L}(s, \chi, L/E). \end{aligned}$$

♣

Nuestro siguiente paso será evaluar $I_C(x, T)$ aplicando el lema anterior, es decir,

$$I_C(x, T) = -\frac{|C|}{|G|} \sum_{\chi} \overline{\chi(g)} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_0 - iT}^{\sigma_0 + iT} \frac{x^s}{s} \frac{L'}{L}(s, \chi, L/E)\, ds.$$

De aqui en adelante fijemos notación para $\frac{L'}{L}(s, \chi)$ en vez de $\frac{L'}{L}(s, \chi, L/E)$ y $c(\chi) = d_E N_{E/\mathbb{Q}} f(\chi)$ en vez de $c(\chi, L/E) = d_E N_{E/\mathbb{Q}} f(L/E, \chi)$. Además, definamos

$$\delta(\chi) = \left\{ \begin{array}{cc} 1 & \chi = \chi_0 \\ 0 & \chi \neq \chi_0 \end{array} \right. ,$$

tambien,

$$\gamma_\chi(s) = \left[\pi^{-\frac{s+1}{2}}\Gamma(\frac{s+1}{2})\right]^b \left[\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\right]^a,$$

para a, b enteros no negativos que dependen de χ y que cumplen con $a + b = n_E$ por último,

$$\xi(s,\chi) = [s(s-1)]^{\delta(\chi)} c(\chi)^{s/2} \gamma_\chi(s) L(s,\chi),$$

que cumple la ecuación funcional

$$\xi(1-s,\overline{\chi}) = W(\chi)\xi(s,\chi),$$

con $W(\chi) \in \mathbb{C}$ tal que $|W(\chi)| = 1$.

Vemos que ξ es una función entera de orden 1, que no se anula en $s = 0$,luego por el teorema de factorización de Hadamard se tiene

$$\xi(s,\chi) = e^{B_1 + Bs} \prod_\rho (1 - \frac{s}{\rho}) e^{\frac{s}{\rho}},$$

para constantes $B_1, B \in \mathbb{C}$ que dependen de χ, con $\rho = \beta + i\gamma$ recorriendo los ceros no triviales de $L(s,\chi)$ que estan ubicados en $0 < \beta < 1$.

Ahora, aplicando la derivada logartimica a ξ e igualando obtenemos la siguiente identidad,

$$\frac{L'}{L}(s,\chi) = B(\chi) + \sum_\rho \left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho}\right) - \frac{1}{2}\log c(\chi) - \delta(\chi)\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s-1}\right) - \frac{\gamma_\chi'}{\gamma_\chi}(s). \quad (11)$$

Con la notación actual tenemos el siguiente lema.

Lema 22

$$\mathrm{Re}(\rho) = -\sum_\rho \frac{1}{\rho}$$

y

$$\frac{L'}{L}(s,\chi) + \frac{L'}{L}(s,\overline{\chi}) = \sum_\rho \left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{s-\overline{\rho}}\right) - \log c(\chi) - 2\delta(\chi)\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s-1}\right) - 2\frac{\gamma_\chi'}{\gamma_\chi}(s). \quad (12)$$

Demostración: Ver [O77] página 389. ♣

Lema 23 *Si* $\sigma = \mathrm{Re}(s) > 1$*, entonces*

$$\left|\frac{L'}{L}(s,\chi)\right| \ll \frac{n_E}{\sigma - 1}.$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{L'}{L}(s,\phi,L/K)\right| &= \left|\sum_{\mathfrak{p}}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\varphi_{\#}(\phi_{\mathfrak{p}}^{l})\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^{sl}}\right| \\
&\leqslant \sum_{\mathfrak{p}}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^{\sigma l}} \\
&= -\frac{\zeta_E'}{\zeta_E}(\sigma) \\
&\leqslant -n_E\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) \\
&\ll \frac{n_E}{\sigma-1}.
\end{aligned}$$

♣

Lema 24 *Se verifican las siguientes desigualdades,*

(i) Si $\mathsf{Re}(z) \geqslant a \geqslant 1$*, entonces*

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma}(z) \leqslant \log(|z|) + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{a}.$$

(ii) Si $|\mathrm{Im}(z)| \geqslant b \geqslant 1$*, entonces*

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma}(z) \leqslant \log(|z|) + \pi\left(1+\frac{1}{2b}\right) + \frac{1}{2b}.$$

(iii) Si $|z+k| \geqslant \frac{1}{8}$ *para todo* $k \in \mathbb{N}$*, entonces*

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma}(z) \leqslant \log(|z|) + \frac{83}{5}.$$

Demostración: Ver [W13]. ♣

Lema 25 *Si* $\sigma = \mathsf{Re}(s) > -\frac{1}{2}$ *y* $|s| \geqslant \frac{1}{8}$*, entonces*

(i) $\left|\frac{\gamma_\chi'}{\gamma_\chi}(s)\right| \ll n_E \log(|s|+2).$

(ii) Efectivamente,

$$\left|\frac{\gamma_\chi'}{\gamma_\chi}(s)\right| \leqslant \frac{n_E}{2}\left(\log(|s|+1) + \frac{164}{7}\right).$$

Demostración: Recordemos que $\gamma_\chi(s) = \left[\pi^{-\frac{s+1}{2}}\Gamma(\frac{s+1}{2})\right]^b \left[\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\right]^a$, luego la derivada logaritmica de γ_χ es

$$\frac{\gamma_\chi'}{\gamma_\chi}(s) = \frac{n_E}{2}\log\pi + \frac{1}{2}\left[b\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{s+1}{2}\right) + a\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{s}{2}\right)\right]. \tag{13}$$

Para estimar, emplearemos el siguiente resultado válido para todo $s \in \mathbb{C}$ tal que $|s| \geqslant \frac{1}{16}$ y $\mathrm{Re}(s) > -\frac{1}{4}$

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma}(s) \ll \log(|s|+2).$$

Luego,

$$\begin{aligned}\left|\frac{\gamma_\chi'}{\gamma_\chi}(s)\right| &\leqslant \frac{n_E}{2}\log\pi + b\left|\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{s+1}{2}\right)\right| + a\left|\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{s}{2}\right)\right| \\ &\ll b\frac{\Gamma'}{\Gamma}(s) + a\frac{\Gamma'}{\Gamma}(s) \\ &\ll n_E\log(|s|+2).\end{aligned}$$

Para (ii), si $|z| \geqslant \frac{1}{16}$ y $\mathrm{Re}(z) \geqslant \frac{-1}{4}$, entonces

$$\left|\frac{\gamma_\chi'}{\gamma_\chi}(s)\right| \leqslant \log(|z|) + \frac{827}{36}.$$

En efecto, si $\mathrm{Re}(z) > \frac{-1}{4}$, entonces, $\mathrm{Re}(z+2) > \frac{7}{4}$, luego,

$$\left|\frac{\Gamma'}{\Gamma}(z+2)\right| \leqslant \log(|z|+2) + \frac{\pi}{2} + \frac{4}{7}.$$

Ahora, aplicando lo anterior en (13) se obtiene el resultado. ♣

Observación 1 *Si $s = \sigma + it$, en el lema 25, se puede ver que*

$$\left|\frac{\gamma'}{\gamma}(s)\right| \leqslant \frac{n_e}{2}\left(\log(|t|+\sigma+1) + \frac{405}{134}\right).$$

Para continuar, denotaremos $n_\chi(t)$ como el número de ceros $\rho = \beta + i\gamma$ de $L(s,\chi)$ tal que $0 < \beta < 1$ con $|\gamma - t| \leqslant 1$.

Lema 26 *Para todo t se tiene,*

(i) $n_\chi(t) \ll \log c(\chi) + n_E\log(|t|+2)$.

(ii) Efectivamente,

$$n_\chi(t) + n_\chi(-t) \leqslant \frac{5}{2}\left[\log c(\chi) + n_E\left(\log(|t|+3) + \frac{1075}{134}\right)\right].$$

Demostración: Al sustituir $s = 2 + it$ en la identidad (12), aplicando el lema 23 y tomando la parte real, tenemos por un lado

$$\left| \mathrm{Re}\, \frac{L'}{L}(s,\chi) + \mathrm{Re}\, \frac{L'}{L}(s,\overline{\chi}) \right| \ll n_E,$$

luego,

$$\left| \mathrm{Re} \sum_{\rho} \left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{s-\overline{\rho}} \right) - \mathrm{Re}\, \log c(\chi) - 2\mathrm{Re}\delta(\chi) \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} \right) - 2\mathrm{Re}\, \frac{\gamma_\chi'}{\gamma_\chi}(s) \right| \leqslant C_1 n_E,$$

lo que es equivalente a,

$$\left| \mathrm{Re} \sum_{\rho} \left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{s-\overline{\rho}} \right) \right| \leqslant C_1 n_E + \log c(\chi) + 2\delta(\chi) \left(\frac{2}{4+t^2} + \frac{1}{1+t^2} \right) - 2n_E \log(|s|+2).$$

Lo que implica,

$$\sum_{\rho} \mathrm{Re} \left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{s-\overline{\rho}} \right) \ll \log c(\chi) + n_E \log(|t|+2).$$

Como $2 = \mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(\rho)$, entonces $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{s-\rho}\right), \mathrm{Re}\left(\frac{1}{s-\overline{\rho}}\right) > 0$. Luego,

$$\begin{aligned}
\sum_{\rho} \mathrm{Re} \left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{s-\overline{\rho}} \right) &= \sum_{\rho} \frac{(2-\beta)}{(2-\beta)^2 + (t+\gamma)^2} + \frac{(2-\beta)}{(2-\beta)^2 + (t-\gamma)^2} \\
&\geqslant \sum_{\rho, |\gamma - t| \leqslant 1} \frac{(2-\beta)}{(2-\beta)^2 + (t-\gamma)^2} \\
&\geqslant \frac{1}{5} n_\chi(t).
\end{aligned}$$

Así, se obtiene (i). Para (ii), acotamos,

$$\left| \sum_{\rho} \left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{s-\overline{\rho}} \right) \right| \leqslant 3 + \log(c(\chi)) + n_E \left(\log(|t|+3) + \frac{673}{134} \right).$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\sum_{\rho} \mathrm{Re} \left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{s-\overline{\rho}} \right) &= \sum_{\substack{\rho \\ |\gamma - t| \leqslant 1}} \frac{(2-\beta)}{(2-\beta)^2 + (t+\gamma)^2} + \sum_{\substack{\rho \\ |\gamma + t| \leqslant 1}} \frac{(2-\beta)}{(2-\beta)^2 + (t-\gamma)^2} \\
&\geqslant \sum_{\substack{\rho \\ |\gamma - t| \leqslant 1}} \frac{1}{2-\beta} + \sum_{\substack{\rho \\ |\gamma + t| \leqslant 1}} \frac{1}{2-\beta} \\
&\geqslant \frac{2}{5}(n_\chi(t) + n_\chi(t)).
\end{aligned}$$

♣

Lema 27 *Para todo* $0 < \epsilon \leqslant 1$ *se tiene*

(i) $\mathsf{B}(\chi) + \sum_{\substack{\rho \\ |\rho|<\epsilon}} \frac{1}{\rho} \ll \epsilon^{-1}(\log \mathsf{c}(\chi) + \mathsf{n}_{\mathsf{E}})$.

(ii) Efectivamente

$$\left| \mathsf{B}(\chi) + \sum_{\substack{\rho \\ |\rho|<\epsilon}} \frac{1}{\rho} \right| \leqslant \frac{1}{8}\left(5\pi^2 + 34 + \frac{10}{\epsilon}\right) \log \mathsf{c}(\chi) + \left(\frac{10842}{107} + \frac{1790}{157\epsilon}\right) \mathsf{n}_{\mathsf{E}}.$$

Demostración: Evaluemos $s = 2$ en la identidad (11) entonces,

$$\frac{\mathsf{L}'}{\mathsf{L}}(2,\chi) = \mathsf{B}(\chi) + \sum_{\rho}\left(\frac{1}{2-\rho} + \frac{1}{\rho}\right) - \frac{1}{2}\log \mathsf{c}(\chi) - \frac{3}{2}\delta(\chi) - \frac{\gamma_\chi'}{\gamma_\chi}(2).$$

Pero, $\left|\frac{\mathsf{L}'}{\mathsf{L}}(2,\chi)\right| \ll \mathsf{n}_{\mathsf{E}}$ y $\left|\frac{\gamma_\chi'}{\gamma_\chi}(2)\right| \ll \mathsf{n}_{\mathsf{E}}$. Entonces,

$$\mathsf{B}(\chi) + \sum_{\rho}\left(\frac{1}{2-\rho} + \frac{1}{\rho}\right) \ll \log \mathsf{c}(\chi) + \mathsf{n}_{\mathsf{E}}.$$

Ahora,

$$\begin{aligned}
\sum_{|\rho|\geqslant 1}\left|\frac{1}{2-\rho} + \frac{1}{\rho}\right| &= \sum_{|\rho|\geqslant 1}\left|\frac{2}{(2-\rho)\rho}\right| \\
&\leqslant \sum_{|\rho|\geqslant 1}\frac{2}{|\rho|^2} \\
&\ll \sum_{j=1}^{\infty}\frac{\mathsf{n}_{\chi(t)}}{j^2} \\
&\ll \log \mathsf{c}(\chi) + \mathsf{n}_{\mathsf{E}}.
\end{aligned}$$

Por otro lado, como $|2-\rho|^{-1} \leqslant 1$ se tiene

$$\sum_{|\rho|<1}\left|\frac{1}{2-\rho}\right| \ll \log \mathsf{c}(\chi) + \mathsf{n}_{\mathsf{E}},$$

de esta manera escribimos

$$B(\chi)+\sum_{\rho}\left(\frac{1}{2-\rho}+\frac{1}{\rho}\right)=B(\chi)+\sum_{|\rho|\geqslant 1}\left(\frac{1}{2-\rho}+\frac{1}{\rho}\right)+\sum_{|\rho|<1}\frac{1}{2-\rho}+\sum_{|\rho|<1}\frac{1}{\rho}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
B(\chi)+\sum_{\rho,|\rho|<\epsilon}\frac{1}{\rho} &\ll \sum_{\rho,\epsilon\leqslant|\rho|<1}\frac{1}{\rho}+\log c(\chi)+n_E\\
&\leqslant \sum_{\rho}\frac{1}{\epsilon}+\log c(\chi)+n_E\\
&\leqslant \frac{1}{\epsilon}n_\chi(t)+\log c(\chi)+n_E\\
&\ll \frac{1}{\epsilon}(\log c(\chi)+n_E).
\end{aligned}$$

Para (ii), debemos acotar,

$$\begin{aligned}
\sum_{|\rho|\geqslant 1}\left|\frac{1}{2-\rho}+\frac{1}{\rho}\right| &\leqslant \sum_{\substack{t=-\infty\\ t\,\mathrm{impar}}}^{\infty}\ \sum_{\substack{|\rho|\geqslant 1\\ t\leqslant\gamma\leqslant t+2}}\frac{2}{|\rho|^2}\\
&\leqslant 2\sum_{j=0}^{\infty}\frac{n_\chi(2j+2)+n_\chi(-(2j+2))}{(2j+1)^2}+2n_\chi(0)\\
&\leqslant 2\left(\frac{5}{2}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\log(c(\chi))+n_E(\log(|2j+2|+3))+\frac{1075}{134}}{(2j+1)^2}\right)\\
&+ \frac{5}{2}\left(\log(c(\chi))+n_E(\log 3+\frac{1075}{134})\right)\\
&\leqslant 5\left(\left(\log(c(\chi))+\frac{1075}{134}n_E\right)\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(2j+1)^2}+\sum_{j=0}^{\infty}\frac{n_E\log(|2j+2|+3)}{(2j+1)^2}\right)\\
&+ \frac{5}{2}\left(\log(c(\chi))+n_E(\log 3+\frac{1075}{134})\right)\\
&\leqslant 5\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(2j+1)^2}+\frac{1}{2}\right)\left(\log(c(\chi))+\frac{1075}{134}n_E\right)\\
&+ 5n_E\left(\int_0^{\infty}\frac{\log(2t+5)}{(2t+1)^2}+\frac{\log(3)}{2}\right)\\
&= 5\left(\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{2}\right)\left(\log(c(\chi))+\frac{1075}{134}n_E\right)+5n_E\left(\frac{5\log(5)}{8}+\frac{\log(3)}{2}\right).
\end{aligned}$$

También,

$$\left|\sum_{\epsilon<|\rho|<1}\frac{1}{\rho}\right|\leqslant\frac{n_{\chi(0)}}{\epsilon}\leqslant\frac{5}{4\epsilon}\left(\log(c(\chi))+\left(\log(3)+\frac{1075}{134}\right)n_E\right).$$

Además,

$$\left|\sum_{|\rho|<1}\frac{1}{2-\rho}\right|\leqslant\frac{5}{4\epsilon}\left(\log(c(\chi))+\left(\log(3)+\frac{1075}{134}\right)n_E\right).$$

Para finalizar,

$$\left|B(\chi)+\sum_{\rho}\left(\frac{1}{2-\rho}+\frac{1}{\rho}\right)\right|\leqslant\frac{3}{2}+\frac{n_E}{2}\left(\log(3)+\frac{673}{134}\right)+\frac{1}{2}\log(c(\chi)).$$

Reagrupando los datos, se obtiene lo pedido.

♣

Lema 28 *Sea* $s=\sigma+it$ *con* $-\frac{1}{2}\leqslant\sigma\leqslant 3$ *y* $|s|\geqslant\frac{1}{8}$ *entonces,*

(i) $\displaystyle\frac{L'}{L}(s,\chi)+\frac{\delta(\chi)}{s-1}-\sum_{\substack{\rho\\ |\gamma-t|\leqslant 1}}\frac{1}{s-\rho}\ll\log c(\chi)+n_E\log(|t|+2).$

(ii) Efectivamente,

$$\begin{aligned}\left|\frac{L'}{L}(s,\chi)+\frac{\delta(\chi)}{s-1}-\sum_{\substack{\rho\\ |\gamma-t|\leqslant 1}}\frac{1}{s-\rho}\right| &\leqslant \frac{5}{4}\left(1+\frac{7}{4}\pi^2\right)\log c(\chi)\\ &+\frac{n_E}{2}\log(|t|+5)\left(57+\frac{35}{|t|+4}\right)\\ &+\frac{50096}{255}n_E+\frac{53}{6}.\end{aligned}$$

Demostración: Evaluemos en (11) con $\sigma+it$ y $3+it$ con el objetivo de eliminar $B(\chi)$, entonces,

$$\begin{aligned}\frac{L'}{L}(s,\chi)-\frac{L'}{L}(3+it,\chi)=&\sum_{\rho}\left(\frac{1}{s-\rho}-\frac{1}{3+it-\rho}\right)-\delta(\chi)\left[\frac{1}{s}+\frac{1}{s-1}-\frac{1}{2+it}-\frac{1}{3+it}\right]\\ &-\frac{\gamma_\chi'}{\gamma_\chi}(s)+\frac{\gamma_\chi'}{\gamma_\chi}(3+it).\end{aligned}$$

Se sabe que, $\left|\frac{L'}{L}(3+it,\chi)\right| \ll n_E$, $\left|\frac{\gamma'_\chi}{\gamma_\chi}(3+it)\right| \ll n_E$, $\left|\frac{\gamma'_\chi}{\gamma_\chi}(3+it)\right| \ll n_E \log(|s|+2)$

$$\begin{aligned}
\left|\frac{L'}{L}(s,\chi)+\frac{\delta(\chi)}{s-1}-\sum_{\substack{\rho\\|\gamma-t|\leqslant 1}}\frac{1}{s-\rho}\right| &= \left|\sum_{\substack{\rho\\|\gamma-t|>1}}\left(\frac{1}{s-\rho}-\frac{1}{3+it-\rho}\right)-\delta(\chi)\left[\frac{1}{s}-\frac{1}{2+it}-\frac{1}{3+it}\right]\right.\\
&\quad\left.-\frac{\gamma'_\chi}{\gamma_\chi}(s)+\frac{\gamma'_\chi}{\gamma_\chi}(3+it)+\frac{L'}{L}(3+it,\chi)-\sum_{\substack{\rho\\|\gamma-t|\leqslant 1}}\frac{1}{3+it-\rho}\right|\\
&\ll n_E\log(|t|+2)+\sum_{\substack{\rho\\|\gamma-t|>1}}\left|\frac{1}{s-\rho}-\frac{1}{3+it-\rho}\right|\\
&\quad-\sum_{\substack{\rho\\|\gamma-t|\leqslant 1}}\frac{1}{|3+it-\rho|}.
\end{aligned}$$

Pero, $\sum_{\substack{\rho\\|\gamma-t|\leqslant 1}}\frac{1}{|3+it-\rho|} \leqslant \sum_{\substack{\rho\\|\gamma-t|\leqslant 1}} 1 \ll \log c(\chi)+n_E\log(|t|+2)$ y por otro lado,

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{\rho\\|\gamma-t|>1}}\left|\frac{1}{s-\rho}-\frac{1}{3+it-\rho}\right| &= \sum_{\substack{\rho\\|\gamma-t|>1}}\frac{3-\sigma}{|s-\rho||3+it-\rho|}\\
&\ll \sum_{j=1}^{\infty}\frac{n_\chi(t+j)+n_\chi(t-j)}{j^2}\\
&\ll \log c(\chi)+n_E\log(|t|+2).
\end{aligned}$$

Para (ii), notemos que,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{L'}{L}(s,\chi)+\frac{\delta(\chi)}{s-1}-\sum_{\substack{\rho\\|\gamma-t|\leqslant 1}}\frac{1}{s-\rho}\right| &\leqslant \sum_{\substack{\rho\\|\gamma-t|>1}}\left|\frac{1}{s-\rho}-\frac{1}{3+it-\rho}\right|\\
&+ \sum_{\substack{\rho\\|\gamma-t|\leqslant 1}}\left|\frac{1}{3+it-\rho}\right|\\
&+ \frac{53}{6}+\left(\log(|t|+4)+\frac{24811}{1876}\right)n_E.
\end{aligned}$$

Pues,

$$\left|\frac{1}{2+it}+\frac{1}{3+it}-\frac{1}{s}\right| \leqslant \frac{53}{6},$$

y

$$\left|\frac{L'}{L}(3+it)-\frac{\gamma'_\chi}{\gamma}(s)+\frac{\gamma'_\chi}{\gamma}(3+it)\right| \leqslant \frac{n_E}{2}\left(\log(1+|s|)+\frac{164}{7}+\log(1+|3+it|)+\frac{405}{134}+1\right)$$
$$\leqslant n_E\left(\frac{1}{2}\log(|t|+4)+\frac{25749}{1876}\right)$$
$$\leqslant n_E\left(\log(|t|+4)+\frac{25749}{1876}\right).$$

Además, $|3+it-\rho|>2$, luego,

$$\sum_{\substack{\rho \\ |\gamma-t|\leqslant 1}} \frac{1}{3+it-\rho} \leqslant \frac{1}{2}n_\chi(t) \leqslant \frac{5}{4}\left(\log(c(\chi))+n_E(\log(|t|+3)+\frac{1075}{134})\right).$$

Como, $-\frac{1}{2}\leqslant\sigma\leqslant 3$, entonces, $3-\sigma\leqslant\frac{7}{2}$. Por otro lado, $\frac{1}{|s-\rho|}\leqslant\frac{1}{t-\gamma}$. Así, se tiene,

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{\rho \\ |\gamma-t|\leqslant 1}} \left|\frac{1}{s-\rho}-\frac{1}{3+it-\rho}\right| &\leqslant \frac{7}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\substack{\rho \\ |\gamma-(t+2k)|\leqslant 1}}\frac{1}{|t-\gamma|^2} \\
&+ \frac{7}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\substack{\rho \\ |\gamma-(t-2k)|\leqslant 1}}\frac{1}{|t-\gamma|^2} \\
&\leqslant \frac{7}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{n_\chi(t+2k)+n_\chi(t-2k)}{(2k-1)^2} \\
&\leqslant \frac{35\pi^2}{16}\left(\log(c(\chi))+\frac{1075}{134}n_E\right) \\
&+ \frac{35}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\log(|t|+2k+3)}{(2k-1)^2}n_E.
\end{aligned}$$

La integral impropia,

$$\int_1^\infty \frac{\log(|t|+2k+3)}{(2k-1)^2}dk = \frac{\log(|t|+5)}{2}\left(1+\frac{1}{|t|+4}\right).$$

Agrupando todos estos datos,

$$
\left|\frac{L'}{L}(s,\chi)+\frac{\delta(\chi)}{s-1}-\sum_{\substack{\rho\\|\gamma-t|\leqslant 1}}\frac{1}{s-\rho}\right| \leqslant \frac{35\pi^2}{16}\left(\log(c(\chi)+\frac{1075}{134}n_E\right)+\frac{35}{2}\frac{\log(|t|+5)}{2}\left(1+\frac{1}{|t|+4}\right)
$$

$$
+\frac{5}{4}\left(\log(c(\chi)+(\log(|t|+5)+\frac{1075}{134})n_E\right)
$$

$$
+\frac{53}{6}+\left(\log(|t|+4)+\frac{25749}{1876}\right)n_E
$$

$$
\leqslant\left(\frac{35\pi^2}{16}+\frac{5}{4}\right)\log(c(\chi))+\frac{\log(|t|+5)}{4}\left(44+\frac{35}{|t|+4}\right)n_E
$$

$$
+\frac{100447}{510}n_E+\frac{53}{6}.
$$

En donde de acotó, $\dfrac{25749}{1876}+\dfrac{1075}{134}\left(\dfrac{35\pi^2}{16}+\dfrac{5}{4}\right)\leqslant\dfrac{100447}{510}$.

♣

El siguiente paso será evaluar $I_\chi(x,T)$ en vez de $I_C(x,T)$, donde

$$
I_\chi(x,T)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_0-iT}^{\sigma_0+iT}\frac{x^s}{s}\frac{L'}{L}(s,\chi)\,ds,
$$

donde se impone un requerimiento adicional, este dice que T no debe coincidir con la ordenada de ningún cero de $L(s,\chi)$. Pongamos $U=j+1/2$ para algún entero no negativo j. Además,

$$
I_\chi(x,T,U)=\frac{1}{2\pi i}\int_B\frac{x^s}{s}\frac{L'}{L}(s,\chi)\,ds,
$$

donde B es el rectángulo orientado positivamente, de vertices σ_0-iT, σ_0+iT, $-U+iT$ y $-U-iT$, como se muestra en la figura 1.

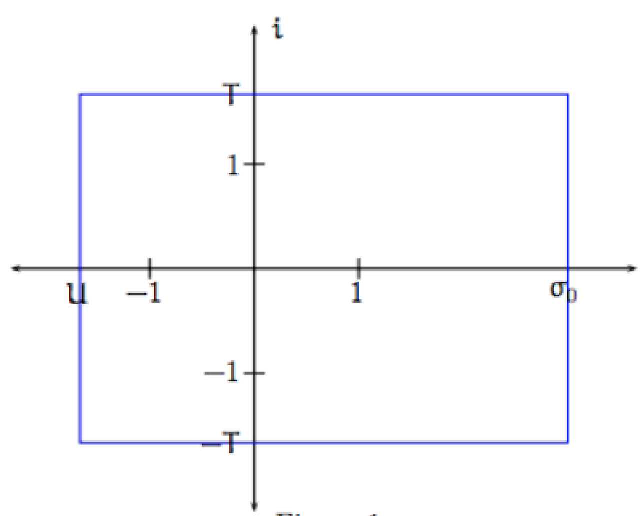

Figura 1

Probaremos que la diferencia

$$R_\chi(x,T,U) = I_\chi(x,T,U) - I_\chi(x,T),$$

es pequeña. Para esto se definen las siguientes integrales,

$$V_\chi(x,T,U) = \frac{1}{2\pi}\int_T^{-T} \frac{x^{-U+it}}{-U+it}\frac{L'}{L}(-U+it,\chi)\,dt$$

$$H_\chi(x,T,U) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-U}^{-1/4} \left\{\frac{x^{\sigma-iT}}{\sigma-iT}\frac{L'}{L}(\sigma-iT,\chi) - \frac{x^{\sigma+iT}}{\sigma+iT}\frac{L'}{L}(\sigma+iT,\chi)\right\} d\sigma$$

$$H^*_\chi(x,T,U) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-1/4}^{\sigma_0} \left\{\frac{x^{\sigma-iT}}{\sigma-iT}\frac{L'}{L}(\sigma-iT,\chi) - \frac{x^{\sigma+iT}}{\sigma+iT}\frac{L'}{L}(\sigma+iT,\chi)\right\} d\sigma$$

Lema 29 *Si* $s = \sigma + it$ *con* $\sigma \leqslant -1/4$ *y* $|s+m| \geqslant \frac{1}{4}$ *para todo entero no negativo* m, *entonces*

(i) $\frac{L'}{L}(s,\chi) \ll \log c(\chi) + n_E \log(|s|+2)$.

(ii) Efectivamente

$$\left|\frac{L'}{L}(s,\chi)\right| \leqslant \log c(\chi) + n_E\left(\log(|s|+2) + \frac{19683}{812}\right).$$

Demostración: Aplicando la derivada logaritmica a la ecuación funcional se obtiene

$$\frac{L'}{L}(s,\chi) = -\frac{L'}{L}(1-s,\overline{\chi}) - \log(c(\chi)) - \frac{\gamma'_\chi}{\gamma_\chi}(1-s) - \frac{\gamma'_\chi}{\gamma_\chi}(s).$$

Aplicando el lema 24 (iii), se obtiene

$$\left|\frac{\gamma'_\chi}{\gamma_\chi}(s)\right| \leqslant \frac{n_E}{2}\left(\log(1+|s|) + \log\sqrt{\pi} + \frac{83}{5}\right) \leqslant \frac{n_E}{2}\left(\log(1+|s|) + \frac{989}{58}\right).$$

Además, por lema 23 y 25 (ii) lema se tiene respectivamente,

$$\left|\frac{\gamma'_\chi}{\gamma_\chi}(1-s)\right| \leqslant \frac{n_E}{2}\left(\log(2+|s|) + \frac{164}{7}\right) \quad ; \quad \left|\frac{L'}{L}(1-s,\chi)\right| \leqslant -\frac{n_E}{\sigma}.$$

Entonces,

$$\left|\frac{L'}{L}(s,\chi)\right| \leqslant \log(c(\chi)) + n_E\log(2+|s|) + \frac{n_E}{2}\left(\frac{164}{7} + \frac{989}{58}\right) - \frac{n_E}{\sigma}.$$

Pero, $-\frac{n_E}{\sigma} \leqslant 4$ y $\frac{1}{2}(\frac{164}{7} + \frac{989}{58}) + 4 = \frac{19683}{812}$ como se quería.

♣

Con estos lemas podemos estimar, $V_\chi(x, T, U)$ y $H_\chi(x, T, U)$

$$\begin{aligned}
|V_\chi(x,T,U)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_T^{-T} \frac{x^{-U+it}}{-U+it} \frac{L'}{L}(-U+it,\chi)\, dt \right| \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \left| \frac{x^{-U+it}}{-U+it} \frac{L'}{L}(-U+it,\chi) \right| dt \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi} \frac{x^{-U}}{U} \int_{-T}^{T} \left| \frac{x^{-U+it}}{-U+it} \frac{L'}{L}(-U+it,\chi) \right| dt \\
&\ll \frac{x^{-U}}{U} \int_{-T}^{T} \log c(\chi) + n_E \log(|-U+it|+2)\, dt \\
&\ll \frac{x^{-U}}{U} T \{\log c(\chi) + n_E \log(U+T)\}.
\end{aligned}$$

Efectivamente tenemos,

$$|V_\chi(x,T,U)| \leqslant \frac{x^{-U}T}{\pi U} \left\{ \log c(\chi) + n_E \left(\log(U+T+2) + \frac{19683}{812} \right) \right\}.$$

$$\begin{aligned}
|H_\chi(x,T,U)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{-U}^{-1/4} \left\{ \frac{x^{\sigma-iT}}{\sigma-iT} \frac{L'}{L}(\sigma-iT,\chi) - \frac{x^{\sigma+iT}}{\sigma+iT} \frac{L'}{L}(\sigma+iT,\chi) \right\} d\sigma \right| \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{-1/4} \left| \left\{ \frac{x^{\sigma-iT}}{\sigma-iT} \frac{L'}{L}(\sigma-iT,\chi) - \frac{x^{\sigma+iT}}{\sigma+iT} \frac{L'}{L}(\sigma+iT,\chi) \right\} \right| d\sigma \\
&\ll \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{-1/4} \frac{x^\sigma}{T} \{\log c(\chi) + n_E \log(|\sigma|+2) + n_E \log T\} \\
&\ll \frac{x^{-1/4}}{T} \{\log c(\chi) + n_E \log T\}.
\end{aligned}$$

Efectivamente,

$$
\begin{aligned}
|H_\chi(x,T,U)| &\leqslant \frac{1}{\pi T}\int_{-\infty}^{-1/4} x^\sigma \left(\log(c(\chi)) + n_E\left(\log(|\sigma|+T+2)+\frac{19683}{812}\right)\right)d\sigma \\
&\leqslant \frac{1}{\pi T}\left(\log(c(\chi)) + \frac{19683}{812}n_E\right)\int_{-\infty}^{-1/4} x^\sigma d\sigma \\
&+ \frac{n_E}{\pi T}\int_{-\infty}^{-1/4} x^\sigma \log(|\sigma|+T+2)d\sigma \\
&\leqslant \frac{1}{\pi T}\left(\log(c(\chi)) + \frac{19683}{812}n_E\right)\frac{x^{-1/4}}{\log(x)} + \frac{n_E}{\pi T}\left(\frac{x^{-1/4}}{\log(x)}\log(T+\frac{9}{4})\right. \\
&+ \left.\frac{x^{-1/4}}{\log^2(x)}\frac{1}{(T+\frac{9}{4})}\right) \\
&= \frac{x^{-1/4}}{\pi T\log(x)}\left[\log(c(\chi)) + \left(\log(T+\frac{9}{4}) + \frac{19683}{812}\right)n_E\right] + \frac{n_E x^{-1/4}}{\pi T\log^2(x)}\frac{1}{(T+\frac{9}{4})}.
\end{aligned}
$$

El lema 28 nos entrega al evaluar en $\sigma + iT$ y $\sigma - iT$

$$
\frac{L'}{L}(\sigma+iT,\chi) - \sum_{\substack{\rho \\ |\gamma-T|\leqslant 1}} \frac{1}{\sigma+iT-\rho} \ll \log c(\chi) + n_E\log(T).
$$

$$
\frac{L'}{L}(\sigma-iT,\chi) - \sum_{\substack{\rho \\ |\gamma+T|\leqslant 1}} \frac{1}{\sigma-iT-\rho} \ll \log c(\chi) + n_E\log(T).
$$

Más precisamente, para $T \geqslant 2$

$$
\left|\frac{L'}{L}(\sigma\pm iT,\chi) - \sum_{\rho,|\gamma\mp T|\leqslant 1}\frac{1}{\sigma\pm iT-\rho}\right| \leqslant \frac{571}{25}\log c(\chi) + n_E\left(\frac{377}{12}\log(T+5)+\frac{50096}{255}\right)+\frac{53}{6}.
$$

Así, para todo $\sigma \in [-\frac{1}{4}, \sigma_0]$, $x \geqslant 2$

$$
\left|H_\chi^*(x,T) - \frac{1}{2\pi i}\int_{-1/4}^{\sigma_0}\left\{\frac{x^{\sigma-iT}}{\sigma-iT}\sum_{\substack{\rho \\ |\gamma+T|\leqslant 1}}\frac{1}{\sigma-iT-\rho} - \frac{x^{\sigma+iT}}{\sigma+iT}\sum_{\substack{\rho \\ |\gamma-T|\leqslant 1}}\frac{1}{\sigma+iT-\rho}\right\}\right| d\sigma.
$$

$$
\begin{aligned}
&\ll \int_{-1/4}^{\sigma_0}\frac{x^\sigma}{T}\{\log c(\chi) + n_E\log(T)\}\,d\sigma \\
&\ll \frac{x}{T\log x}\{\log c(\chi) + n_E\log(T)\}\,.
\end{aligned}
$$

En efecto, esta última estimación nos queda menor o igual que

$$\frac{ex - x^{-1/4}}{\pi T \log(x)} \left[\frac{571}{25} \log c(\chi) + n_E \left(\frac{377}{12} \log(T+5) + \frac{50096}{255} \right) + \frac{53}{6} \right].$$

Para completar la estimación necesitamos un lema.

Lema 30 *Sea* $\rho = \beta + i\gamma$ *con* $0 < \beta < 1$, $\gamma \neq t$. *Si* $|t| \geqslant 2$, $x \geqslant 2$, *y* $1 < \sigma_1 \leqslant 3$, *entonces*

$$\int_{-1/4}^{\sigma_1} \frac{x^{\sigma+it}}{(\sigma+it)(\sigma+it-\rho)}\, d\sigma \ll |t|^{-1} x^{\sigma_1} (\sigma_1 - \beta)^{-1}.$$

Demostración: Supongamos que $\gamma > t$ y sea B el rectángulo cuyos vertices son $\sigma_1 + i(t-1), \sigma_1 + it, -\frac{1}{4} + it, -\frac{1}{4} + i(t-1)$. El teorema de Cauchy nos permite decir que,

$$\int_B \frac{x^s}{s(s-\rho)}\, ds = 0,$$

pues el integrando no tiene singularidades dentro del rectángulo. Por otro lado, los tres lados, salvo el que une $-\frac{1}{4} + it$ con $\sigma_1 + it$ pueden ser acotados por $\frac{x^{\sigma_1}}{(|t|-1)(\sigma_1-\beta)}$. Para $\gamma < t$, se cambia $i(t-1)$ por $i(t+1)$. ♣

Observación 2 *En el lema anterior, se obtiene más precisamente*

$$\int_{-1/4}^{\sigma_1} \frac{x^{\sigma+it}}{(\sigma+it)(\sigma+it-\rho)}\, d\sigma \leqslant \left(\sigma_1 + \frac{9}{4}\right) (|t|-1)^{-1} x^{\sigma_1} (\sigma_1 - \beta)^{-1}.$$

Aplicando el lema obtenemos y recordando que $\sigma_0 = 1 + \log^{-1}(x)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{-1/4}^{\sigma_0} \sum_{\substack{\rho \\ |\gamma+T|\leqslant 1}} \frac{x^{\sigma-iT}}{(\sigma-iT)(\sigma-iT-\rho)}\, d\sigma &\ll \frac{x^{\sigma_0}}{T} (\sigma_0 - 1)^{-1} n_\chi(-T) \\ &\ll \frac{x \log x}{T} \{\log c(\chi) + n_E \log(T)\}. \end{aligned}$$

también,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{-1/4}^{\sigma_0} \sum_{\substack{\rho \\ |\gamma-T|\leqslant 1}} \frac{x^{\sigma+iT}}{(\sigma+iT)(\sigma+iT-\rho)}\, d\sigma &\ll \frac{x^{\sigma_0}}{T} (\sigma_0 - 1)^{-1} n_\chi(T) \\ &\ll \frac{x \log x}{T} \{\log c(\chi) + n_E \log(T)\}. \end{aligned}$$

Efectivamente,

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{-1/4}^{\sigma_0}\sum_{\substack{\rho\\|\gamma+T|\leqslant 1}}\frac{x^{\sigma-iT}}{(\sigma-iT)(\sigma-iT-\rho)}\,d\sigma\right|\leqslant\frac{(\sigma_0+\frac{9}{4})}{2\pi}\frac{x^{\sigma_0}}{T-1}(\sigma_0-1)^{-1}n_\chi(-T)$$

$$\leqslant\frac{5(13\log(x)+4)}{16\pi(T-1)}\left[\log(c(\chi))+n_E\left(\log(T+3)+\frac{1075}{134}\right)\right].$$

Así, sumando y restando se obtiene

$$H_\chi^*(x,T)\ll\frac{x\log x}{T}\{\log c(\chi)+n_E\log(T)\}.$$

Particularmente,

$$\begin{aligned}
\left|H_\chi^*(x,T)\right| &\leqslant \frac{ex-x^{-1/4}}{\pi T\log(x)}\left[\frac{571}{25}\log c(\chi)+n_E\left(\frac{377}{12}\log(T+5)+\frac{50096}{255}\right)+\frac{53}{6}\right]\\
&+ 2\left(\frac{5(13\log(x)+4)}{16\pi(T-1)}\left[\log(c(\chi))+n_E\left(\log(T+5)+\frac{1075}{134}\right)\right]\right)\\
&= \left(\frac{5(13\log(x)+4)ex}{8(T-1)}+\frac{571}{25}\frac{ex-x^{-1/4}}{T\log(x)}\right)\frac{\log(c(\chi))}{\pi}\\
&+ \frac{n_E}{\pi}\left[\left(\frac{5(13\log(x)+4)ex}{8(T-1)}+\frac{377}{12}\frac{ex-x^{-1/4}}{T\log(x)}\right)\log(T+5)\right.\\
&+ \left.\frac{5375(13\log(x)+4)ex}{2144(T-1)}+\frac{50096}{255}\frac{ex-x^{-1/4}}{T\log(x)}\right]+\frac{53}{6}\frac{ex-x^{-1/4}}{\pi T\log(x)}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
R_\chi(x,T,U) &= -V_\chi(x,T,U)-H_\chi(x,T,U)-H_\chi^*(x,T)\\
&\ll \frac{x\log x}{T}\{\log c(\chi)+n_E\log(T)\}\\
&\ll \frac{x^{-U}}{U}T\{\log c(\chi)+n_E\log(U+T)\}+\frac{x\log x}{T}\{\log c(\chi)+n_E\log(T)\}.
\end{aligned}$$

Particularmente,

$$
\begin{aligned}
|R_\chi(x,T,U)| \quad \leqslant& \quad \frac{65ex\log(x)}{8\pi(T-1)}\left[\log(c(\chi)) + n_E\left(\log(T+5) + \frac{1075}{268}\right)\right]\\
+& \quad \frac{5ex}{2\pi(T-1)}\left[\log(c(\chi)) + n_E\left(\log(T+5) + \frac{1075}{268}\right)\right]\\
+& \quad \frac{ex}{\pi T\log(x)}\left[\frac{571}{25}\log(c(\chi)) + n_E\left(\frac{377}{12}\log(T+5) + \frac{50096}{255}\right)\right]\\
+& \quad \frac{x^{-U}}{\pi U}\left[\log(c(\chi)) + n_E\left(\log(U+T+2) + \frac{19683}{812}\right)\right]\\
+& \quad \frac{n_E x^{-1/4}}{17T\pi\log^2(x)} + \frac{53ex}{6\pi T\log(x)}.
\end{aligned}
$$

Los términos que tienen el factor $\dfrac{x^{-1/4}}{\pi T\log(x)}$ se omiten por ser negativos.

2.3.1. La fórmula explícita de $\psi_C(x)$

El objetivo de esta sección será determinar una fórmula explícita para la función $\psi_C(x)$ en términos de los ceros ρ de $L(s,\chi)$. Recordemos la integral

$$I_\chi(x,T,U) = \frac{1}{2\pi i}\int_B \frac{x^s}{s}\frac{L'}{L}(s,\chi)\,ds,$$

donde $x \geqslant 2$, $U = j + \frac{1}{2}$ para algún entero no negativo y $T \geqslant 2$ no es igual a la parte real de un cero de $L(s,\chi)$. Esta integral la evaluaremos mediante el teorema de Cauchy, donde B es el rectángulo descrito anteriormente. Luego aplicando el Teorema 40 y la proposición 16 a la identidad (11) se tiene,

- Si $\chi = \chi_0$ el cáracter principal, L'/L tiene un polo de orden 1 con residuo igual a -1 en $s = 1$, luego la contribución es

$$-\delta(\chi)x.$$

- Los ceros no triviales de L son polos de orden 1 con residuo igual a 1 para L'/L, aquellos ceros se cuentan de acuerdo a su multiplicidad. Así, la contribución es

$$\sum_\rho \frac{x^\rho}{\rho}.$$

- Los llamados ceros triviales de L que provienen de la función Gamma, que son los números enteros negativos, pasan a ser polos de L'/L de orden 1. Primero, los polos para $m = -(2m-1)$, $m = 1, 2, 3\dots$ tienen residuo $b(\chi)$, entonces su contribución es

$$-b(\chi)\sum_{m=1}^{[\frac{U+1}{2}]}\frac{x^{-(2m-1)}}{2m-1}.$$

Segundo, los polos para $m = -2m$, $m = 1, 2, 3\dots$ tienen residuo $a(\chi)$, entonces su contribución es

$$-a(\chi)\sum_{m=1}^{[\frac{U}{2}]}\frac{x^{-(2m)}}{2m}.$$

Solo resta determinar lo que sucede en $s = 0$, lo complicado radica en que L'/L podría tener un polo de orden 1. Ahora, podemos escribir

$$\begin{aligned} x^s &= e^{s\log x} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(s\log x)^n}{n!} \\ &= 1 + s\log x + \frac{s^2\log^2 x}{2} + \dots, \end{aligned}$$

dividiendo por s se obtiene la expresión

$$\frac{x^s}{s} = \frac{1}{s} + \log x + sh_1(s),$$

con h_1 analítica en $s = 0$. Por otro lado, de (11) se tiene

$$\frac{L'}{L}(s,\chi) = \frac{a(\chi)-\delta(\chi)}{s} + r(\chi) + sh_2(s,\chi),$$

donde

$$r(\chi) = B(\chi) - \frac{1}{2}\log(c(\chi)) + \frac{n_E}{2}\log\pi + \delta(\chi) - \frac{b(\chi)}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}(\frac{1}{2}) - \frac{a(\chi)}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}(1).$$

Luego, al multiplicar se obtiene el residuo en $s = 0$

$$r(\chi) + (a(\chi) - \delta(\chi))\log x.$$

De esta manera,

$$\begin{aligned} I_\chi(x,T,U) &= -\delta(\chi)x + \sum_{\substack{\rho \\ |\gamma|<T}}\frac{x^\rho}{\rho} - b(\chi)\sum_{m=1}^{[\frac{U+1}{2}]}\frac{x^{-(2m-1)}}{2m-1} \\ &- a(\chi)\sum_{m=1}^{[\frac{U}{2}]}\frac{x^{-(2m)}}{2m} + r(\chi) + (a(\chi)-\delta(\chi))\log x. \end{aligned}$$

Luego, si $U \to \infty$ se obtiene la fórmula explícita

$$\begin{aligned}
\psi_C(x) &= I_\chi(x,T) + \delta(\chi)x + \sum_{\rho,|\gamma|<T} \frac{x^\rho}{\rho} - r(\chi) - (a(\chi)-\delta(\chi))\log x \\
&- \frac{n_E}{2}\log(1-x^{-1}) + \frac{1}{2}(b(\chi)-a(\chi))\log(1+x^{-1}) \\
&\ll \frac{x\log x}{T}\{\log c(\chi) + n_E \log T\}.
\end{aligned}$$

De donde
$$\log(1\pm x^{-1}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(\pm x^{-1})^n}{n},$$

se obtiene al agrupar terminos de $\displaystyle\sum_{m=1}^{[\frac{U+1}{2}]} \frac{x^{-(2m-1)}}{2m-1}$ con $\displaystyle\sum_{m=1}^{[\frac{U}{2}]} \frac{x^{-2m}}{2m}$. Así, efectivamente se tiene,

$$\begin{aligned}
|\psi_C(x)| &\leqslant \frac{65ex\log(x)}{8\pi(T-1)}\left[\log(c(\chi)) + n_E\left(\log(T+5) + \frac{1075}{268}\right)\right] \\
&+ \frac{5ex}{2\pi(T-1)}\left[\log(c(\chi)) + n_E\left(\log(T+5) + \frac{1075}{268}\right)\right] \\
&+ \frac{ex}{\pi T\log(x)}\left[\frac{571}{25}\log(c(\chi)) + n_E\left(\frac{377}{12}\log(T+5) + \frac{50096}{255}\right)\right] \\
&+ \frac{n_E x^{-1/4}}{17T\pi\log^2(x)} + \frac{53ex}{6\pi T\log(x)}.
\end{aligned}$$

Teorema 31 *Si* $x \geqslant 2$ *y* $T \geqslant 2$, *entonces*

$$\begin{aligned}
\psi_C(x) - \frac{|C|}{|G|}x + S(x,T) &\ll \frac{|C|}{|G|}\left\{\frac{x\log x + T}{T}\log d_L + n_L\log x + \frac{n_L x\log x\log T}{T}\right\} \\
&+ \log x\log d_L + n_K x T^{-1}(\log x)^2,
\end{aligned}$$

donde

$$S(x,T) = \frac{|C|}{|G|}\sum_\chi \overline{\chi}(g)\left\{\sum_{\substack{\rho \\ |\gamma|<T}} \frac{x^\rho}{\rho} - \sum_{\substack{\rho \\ |\rho|<\frac{1}{2}}} \frac{1}{\rho}\right\}.$$

Demostración: Reemplacemos $\epsilon = \frac{1}{2}$ en el lema 27 y como $a + b = n_E$, se tiene

$$r(\chi) + \sum_{\substack{\rho \\ |\rho| < \frac{1}{2}}} \frac{1}{\rho} \ll \log c(\chi) + n_E.$$

Además, por la fórmula explícita se tiene

$$I_\chi(x,T) + \delta(\chi)x + \sum_{\substack{\rho \\ |\gamma| < T}} \frac{x^\rho}{\rho} - \sum_{\substack{\rho \\ |\rho| < \frac{1}{2}}} \frac{1}{\rho} \ll \log c(\chi) + n_E \log x + \frac{x \log x}{T} \log c(\chi) + n_E \log T.$$

Recordemos que

$$I_C(x,T) = -\frac{|C|}{|G|} \sum_\chi \overline{\chi(g)} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_0 - iT}^{\sigma_0 + iT} \frac{x^s}{s} \frac{L'}{L}(s,\chi)\, ds$$

y

$$I_\chi(x,T) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_0 - iT}^{\sigma_0 + iT} \frac{x^s}{s} \frac{L'}{L}(s,\chi)\, ds.$$

De esta manera,

$$\begin{aligned}
I_C(x,T) - \frac{|C|}{|G|} \sum_\chi \overline{\chi(g)} \{\delta(\chi)x \quad &+ \quad \sum_{\substack{\rho \\ |\gamma| < T}} \frac{x^\rho}{\rho} - \sum_{\substack{\rho \\ |\rho| < \frac{1}{2}}} \frac{1}{\rho}\} \\
&= \quad \frac{|C|}{|G|} \sum_\chi \overline{\chi(g)} \left\{ I_\chi(x,T) + \delta(\chi)x + \sum_{\substack{\rho \\ |\gamma| < T}} \frac{x^\rho}{\rho} - \sum_{\substack{\rho \\ |\rho| < \frac{1}{2}}} \frac{1}{\rho} \right\} \\
&\ll \quad \frac{|C|}{|G|} \sum_\chi \left\{ \frac{x \log x + T}{T} \log c(\chi) + n_E \log x + \frac{n_E x \log x \log T}{T} \right\} \\
&\ll \quad \frac{|C|}{|G|} \left\{ \frac{x \log x + T}{T} \log d_L + n_L \log x + \frac{n_L x \log x \log T}{T} \right\}.
\end{aligned}$$

Por la fórmula discriminate conductor, teorema 16

$$\sum_\chi \log c(\chi) = \log d_L,$$

y también $n_E \cdot [L : E] = n_L$. Recordemos, que $\psi_C(x) = I_C(x,T) + R_1(x,T)$. Luego, si $\chi = \chi_0$ encontramos el término $\frac{|C|}{|G|}x$, con los demás se tiene $S(x,T)$. La estimación de $R_1(x,T)$ se extrae de (11).

♣

Efectivamente tenemos para este teorema,

$$\begin{aligned}
\left| r(\chi) + \sum_{|\rho|<\frac{1}{2}} \frac{1}{\rho} \right| &= \left| B(\chi) + \sum_{|\rho|<\frac{1}{2}} \frac{1}{\rho} - \frac{1}{2}\log(c(\chi)) + \frac{n_E}{2}\log(\pi) + \delta(\chi) \right. \\
&- \left. \frac{b(\chi)}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}(1/2) - \frac{a(\chi)}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}(1) \right| \\
&\leqslant \frac{1}{8}\left(5\pi^2 + 34 + 20 + \frac{1}{2}\right)\log(c(\chi)) \\
&+ \left(\frac{10842}{107} + \frac{2\cdot 1890}{157} + \frac{1}{2}\log(\pi) + \frac{1}{2}\gamma + \log 2\right) n_E \\
&\leqslant \frac{94}{7}\log(c(\chi)) + \frac{3817}{30} n_E.
\end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned}
|I_\chi(x,T) + \delta(\chi)x &+ \sum_{\substack{\rho \\ |\gamma|<T}} \frac{x^\rho}{\rho} - \sum_{\substack{\rho \\ |\rho|<\frac{1}{2}}} \frac{1}{\rho}| \\
&\leqslant \frac{65ex\log(x)}{8\pi(T-1)}\left[\log(c(\chi)) + n_E\left(\log(T+5) + \frac{1075}{268}\right)\right] \\
&+ \frac{5ex}{2\pi(T-1)}\left[\log(c(\chi)) + n_E\left(\log(T+5) + \frac{1075}{268}\right)\right] \\
&+ \frac{ex}{\pi T\log(x)}\left[\frac{571}{25}\log(c(\chi)) + n_E\left(\frac{377}{12}\log(T+5) + \frac{50096}{255}\right)\right] \\
&+ \frac{n_E x^{-1/4}}{17T\pi\log^2(x)} + \frac{53ex}{6\pi T\log(x)} + n_E\log(x) + \frac{94}{7}\log(c(\chi)) + \frac{3817}{30}n_E.
\end{aligned}$$

Para finalizar, el resultado efectivo.

$$
\begin{aligned}
\left|\psi_C(x) - \frac{|C|}{|G|}x + S(x,T)\right| &\leqslant \frac{|C|}{|G|}\left\{\frac{145}{6}\frac{x(\log^2(x))}{T}n_L + \frac{94}{7}\log(d_L) + \frac{3817}{30}n_L\right. \\
&+ \frac{65ex\log(x)}{8\pi(T-1)}\left[\log(d_L) + n_L\left(\log(T+5) + \frac{1075}{268}\right)\right] \\
&+ \frac{5ex}{2\pi(T-1)}\left[\log(d_L) + n_L\left(\log(T+5) + \frac{1075}{268}\right)\right] \\
&+ \frac{ex}{\pi T\log(x)}\left[\frac{571}{25}\log(d_L) + n_L\left(\frac{377}{12}\log(T+5) + \frac{50096}{255}\right)\right] \\
&+ \left.\frac{n_L x^{-1/4}}{17T\pi\log^2(x)} + \frac{53ex}{6\pi T\log(x)} + \log(x)\left[\frac{2}{\log 2}\log(d_L) + \frac{77}{4}n_L\right]\right\}.
\end{aligned}
$$

2.3.2. Zonas libres de ceros

Recordemos que,

$$\zeta_L(s) = \prod_{\chi} L(s,\chi),$$

luego las regiones libres de ceros de $\zeta_L(s)$ son las mismas que cada una de las $L(s,\chi)$.

Lema 32 *Existe una constante* C *positiva absoluta y efectiva tal que* $\zeta_L(s)$ *no tiene ceros* $\rho = \beta + i\gamma$ *en la región*

$$
\begin{aligned}
|\gamma| &\geqslant (1 + 4\log d_L)^{-1} \\
\beta &\geqslant 1 - C(\log d_L + n_L\log(|\gamma| + 3))^{-1}.
\end{aligned}
$$

Demostración: Tenemos $-\frac{\zeta_L'}{\zeta_L}(s) = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\alpha(m)}{m^s}$, para todo $\sigma = \mathrm{Re}(s) > 1$ y $\alpha(m) \geqslant 0$ para todo m. Además,

$$m^s = m^{\sigma+it} = m^\sigma m^{it} = m^\sigma e^{it\log m} = m^\sigma e^0(\cos(t\log m) + i\sin(t\log m)).$$

Luego,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Re}(-3\frac{\zeta_L'}{\zeta_L}(\sigma) - 4\frac{\zeta_L'}{\zeta_L}(\sigma+it) - \frac{\zeta_L'}{\zeta_L}(\sigma+2it)) &= \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\alpha(m)}{m^\sigma}(3 + 4\cos(t\log m) + 4\cos(2t\log m)) \\
&\geqslant 0.
\end{aligned}
$$

Por la conocida relación

$$3 + \cos\theta + \cos 2\theta = 2(1+\cos\theta)^2 \geqslant 0.$$

Consideremos la extensión trivial L/L, luego $\zeta_L(s)$ es la función asociada a χ_0 y sea γ_L el factor Gama asociado, así por (12) tenemos

$$-\frac{\zeta_L'}{\zeta_L}(s) = -\frac{1}{2}\sum_{\rho}\left(\frac{1}{s-\rho}+\frac{1}{s-\overline{\rho}}\right)+\frac{1}{2}\log d_L+\frac{1}{s}+\frac{1}{s-1}+\frac{\gamma_L'}{\gamma_L}(s),$$

donde la suma es tomada sobre los ceros no triviales de $L(s,\chi_0)$. Notemos además, que si $\mathrm{Re}(s) > 1$, entonces $\mathrm{Re}(s-\rho)^{-1} > 0$ para todo ρ. Ahora, tomemos un cero con la condición $|\gamma| \geqslant (1+4\log d_L)^{-1}$, entonces para $2 \geqslant \sigma > 1$ se tiene,

$$\begin{aligned}
-\frac{\zeta_L'}{\zeta_L}(\sigma) &\leqslant \frac{1}{\sigma-1}+\frac{1}{\sigma}+\frac{1}{2}\log d_L+\frac{\gamma_L'}{\gamma_L}(\sigma)\\
&\leqslant \frac{1}{\sigma-1}+1+\frac{1}{2}\log d_L+\frac{n_L}{2}\left(\log(3)+\frac{539}{134}\right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\mathrm{Re}\frac{\zeta_L'}{\zeta_L}(\sigma+2i\gamma) &\leqslant \mathrm{Re}\left(\frac{1}{\sigma+2it-1}+\frac{1}{\sigma+2it}\right)+\frac{1}{2}\log d_L+\mathrm{Re}\left(\frac{\gamma_L'}{\gamma_L}(\sigma+2it)\right)\\
&\leqslant \frac{5}{2}\log d_L+\frac{n_L}{2}\left(\log(2|\gamma|+3)+\frac{539}{134}\right)+\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Por último, conservando la contribución de $\rho = \beta + i\gamma$ se tiene,

$$-\mathrm{Re}\frac{\zeta_L'}{\zeta_L}(\sigma+i\gamma) \leqslant \frac{9}{2}\log d_L+\frac{n_L}{2}\left(\log(|\gamma|+3)+\frac{539}{134}\right)+1-\frac{1}{\sigma-\beta},$$

donde

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\frac{1}{\sigma+it-\beta+i\gamma}+\frac{1}{\sigma+it-\beta-i\gamma}\right) &= -\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\frac{(\sigma-\beta)-i(t-\gamma)}{(\sigma-\beta)^2+(t-\gamma)^2}\right.\\
&+\left.\frac{(\sigma-\beta)-i(t+\gamma)}{(\sigma-\beta)^2+(t+\gamma)^2}\right)\\
&\leqslant -\frac{1}{2}\left(2\frac{1}{\sigma-\beta}\right)\\
&= -\frac{1}{\sigma-\beta}.
\end{aligned}$$

Juntando los resultados previos obtenemos

$$\begin{aligned}
0 &\leqslant \mathrm{Re}(-3\frac{\zeta_L'}{\zeta_L}(\sigma)-4\frac{\zeta_L'}{\zeta_L}(\sigma+it)-\frac{\zeta_L'}{\zeta_L}(\sigma+2it))\\
&\leqslant \frac{3}{\sigma-1}+22\log d_L+n_L\left(\frac{5}{2}\log(|\gamma|+3)+4\cdot\frac{539}{134}+2\log 3\right)+\frac{15}{2}-\frac{4}{\sigma-\beta}.
\end{aligned}$$

Lo que es equivalente a

$$\frac{4}{\sigma-\beta} < \frac{3}{\sigma-1} + \frac{3}{\sigma-1} + 22\log d_L + n_L\left(\frac{5}{2}\log(|\gamma|+3) + 4\cdot\frac{539}{134} + 2\log 3\right) + \frac{15}{2}.$$

Ahora, si $\sigma = 1+(2\sqrt{3}-3)\left(22\log d_L + n_L\left(\frac{5}{2}\log(|\gamma|+3)+4\cdot\frac{539}{134}+2\log 3\right)+\frac{15}{2}\right)^{-1}$ se obtiene la contradicción al suponer que existía un cero en esa región.

♣

Lema 33 *Si $n_L > 1$, entonces $\zeta_L(s)$ tiene a lo más un cero $\rho = \beta + i\gamma$ en la región*

$$\begin{aligned} |\gamma| &\leqslant (4\log d_L)^{-1} \\ \beta &\geqslant 1-(4\log d_L)^{-1}. \end{aligned}$$

Este cero, si existe es real y simple.

Demostración: Sea $1 < \sigma \leqslant 2$, aplicando la parte real a (12) se obtiene

$$\begin{aligned} \sum_{\rho}\frac{\sigma-\beta}{(\sigma-\beta)^2+\gamma^2} &= \frac{1}{\sigma-1}+\frac{1}{2}\log d_L + \frac{\zeta_L'}{\zeta_L}(\sigma) + \frac{1}{\sigma} + \frac{\gamma_L'}{\gamma_L}(\sigma) \\ &\leqslant \frac{1}{\sigma-1}+\frac{1}{2}\log d_L. \end{aligned}$$

pues $\frac{\zeta_L'}{\zeta_L} < 0$ y además,

$$\frac{1}{\sigma}+\frac{\gamma_L'}{\gamma_L}(\sigma) = \left(\frac{1}{\sigma}-\frac{n_E}{2}\log\pi\right) + \frac{a}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{\sigma}{2}\right) + \frac{b}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{\sigma+1}{2}\right) < 0,$$

pues por (19), $\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{\sigma}{2}\right), \frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{\sigma+1}{2}\right) < 0$. Lo anterior, es válido para $1 \leqslant \sigma \leqslant 1+(\log 3)^{-1}$. Ahora, supongamos que $\rho = \beta + i\gamma$ es un cero de ζ_L en la región de nuestra hipótesis con $\gamma \neq 0$ entonces por (14) se tiene,

$$2\frac{\sigma-\beta}{(\sigma-\beta)^2+\gamma^2} \leqslant \frac{1}{\sigma-1}+\frac{1}{2}\log d_L.$$

Luego, si $\sigma = 1+(\log d_L)^{-1} \leqslant 1+(\log 3)^{-1}$ se obtiene una contradicción.

♣

Si existe este cero, lo denotaremos como β_0 y lo llamaremos cero excepcional de Siegel. Luego, si $L(\beta_0,\chi_1)=0$, el carácter χ_1 debe ser real pues, $L(\beta_0,\overline{\chi_1}) = \overline{L(\beta_0,\chi_1)} = 0$.

2.3.3. Resultados Principales

Teorema 34 *Si* $\zeta_L(s)$ *satisface* GRH*, entonces para todo* $x \geqslant 2$ *se tiene*

$$\psi_C(x) - \frac{|C|}{|G|}x \ll \frac{|C|}{|G|}\sqrt{x}\log x \log d_L T^{n_L} + \log x \log d_L.$$

Demostración: Si $\zeta_L(s)$ satisface GRH, entonces todas las $L(s,\chi)$. Además, no existen ceros con $|\rho| < \frac{1}{2}$, luego

$$\begin{aligned}
|S(x,T)| &\leqslant \frac{|C|}{|G|}\sum_{\chi}\left|\sum_{\rho,|\gamma|<T}\frac{x^{\rho}}{\rho}\right| \\
&\leqslant \frac{|C|}{|G|}\sqrt{x}\sum_{\chi}\sum_{\rho,|\gamma|<T}\frac{1}{|\rho|} \\
&\ll \frac{|C|}{|G|}\sqrt{x}\sum_{\chi}\sum_{j=1}^{[T]}\frac{n_{\chi}(j)}{j} \\
&\ll \sqrt{x}\sum_{\chi}\{\log c(\chi) + n_E \log T\}\log T \\
&= \sqrt{x}\{\log d_L + n_L \log T\}\log T.
\end{aligned}$$

Válido para $T \geqslant 2$. Pongamos $T = \sqrt{x} + 1$, de esta manera obtenemos el resultado. ♣

Siguiendo con las hipotesis del teorema anterior,

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{\rho,|\gamma|<T}\frac{x^{\rho}}{\rho} + \sum_{|\rho|<1/2}\frac{1}{\rho}\right| &\leqslant \sqrt{x}\left[2n_{\chi}(0) + \sum_{0\leqslant j\leqslant \frac{T-1}{2}}\frac{n_{\chi}(2j+2) + n_{\chi}(-(2j+2))}{2j+1}\right] \\
&\leqslant \frac{5}{2}\sqrt{x}\left[\log(c(\chi)) + \left(\log 3 + \frac{1075}{134}\right)n_E\right. \\
&+ \left.\left(\log(c(\chi)) + \frac{1075}{134}n_E\right)\sum_{j=1}^{\frac{T-1}{2}}\frac{1}{2j+1} + n_E\sum_{j=1}^{\frac{T-1}{2}}\frac{\log(2j+5)}{2j+1}\right] \\
&\leqslant \frac{5}{2}\sqrt{x}\left[\left(2 + \frac{\log(T)}{2}\right)\left(\log(c(\chi)) + \frac{1075}{134}n_E\right)\right. \\
&+ \left.\left(\frac{281}{55} + \frac{\log T \log(T+4)}{4}\right)n_E\right].
\end{aligned}$$

donde,

$$\int_1^{\frac{T-1}{2}} \frac{dt}{2t+1} = \frac{1}{2}\log(\frac{T}{3})$$

y

$$\begin{aligned}
\int_1^{\frac{T-1}{2}} \frac{\log(2t+5)}{2t+1}dt &= \frac{1}{2}\int_1^{\frac{T-1}{2}} \frac{\log(2t+5)}{2t+1} + \frac{\log(2t+1)}{2t+5}dt \\
&- \frac{1}{2}\int_1^{\frac{T-1}{2}} \frac{\log(2t+5)}{2t+1} - \frac{\log(2t+1)}{2t+5}dt \\
&\leqslant \frac{1}{4}\left[\log T \log(T+4) - \log 3 \log 7\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{4}{3}\log 2 + 9\log(\frac{3}{2})\right].
\end{aligned}$$

Como,

$$\begin{aligned}
\left|\psi_C(x) - \frac{|C|}{|G|}x + S(x,T)\right| &\leqslant \frac{|C|}{|G|}\left\{\frac{145}{6}\frac{x(\log^2(x))}{T}n_L + \frac{94}{7}\log(d_L) + \frac{3817}{30}n_L\right. \\
&+ \frac{65ex\log(x)}{8\pi(T-1)}\left[\log(d_L) + n_L\left(\log(T+5) + \frac{1075}{268}\right)\right] \\
&+ \frac{5ex}{2\pi(T-1)}\left[\log(d_L) + n_L\left(\log(T+5) + \frac{1075}{268}\right)\right] \\
&+ \frac{ex}{\pi T\log(x)}\left[\frac{571}{25}\log(d_L) + n_L\left(\frac{377}{12}\log(T+5) + \frac{50096}{255}\right)\right] \\
&+ \left.\frac{n_L x^{-1/4}}{17T\pi\log^2(x)} + \frac{53ex}{6\pi T\log(x)} + \log(x)\left[\frac{2}{\log 2}\log(d_L) + \frac{77}{4}n_L\right]\right\}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
|S(x,T)| &\leqslant \frac{5}{2}\frac{|C|}{|G|}\sqrt{x}\left[\left(2 + \frac{\log(T)}{2}\right)\left(\log(d_L) + \frac{1075}{134}n_L\right)\right. \\
&+ \left.\left(\frac{281}{55} + \frac{\log T\log(T+4)}{4}\right)n_L\right].
\end{aligned}$$

Si $T = \sqrt{x}+1$, nos queda

$$
\begin{aligned}
\left|\psi_C(x) - \frac{|C|}{|G|}x\right| &\leqslant \frac{|C|}{|G|}\left\{\frac{145}{6}\frac{x(\log^2(x))}{\sqrt{x}}n_L + \frac{94}{7}\log(d_L) + \frac{3817}{30}n_L\right. \\
&+ \frac{65ex\log(x)}{8\pi(\sqrt{x})}\left[\log(d_L) + n_L\left(\log(\sqrt{x}+6) + \frac{1075}{268}\right)\right] \\
&+ \frac{5ex}{2\pi(\sqrt{x})}\left[\log(d_L) + n_L\left(\log(\sqrt{x}+6) + \frac{1075}{268}\right)\right] \\
&+ \frac{ex}{\pi(\sqrt{x})\log(x)}\left[\frac{571}{25}\log(d_L) + n_L\left(\frac{377}{12}\log(\sqrt{x}+6) + \frac{50096}{255}\right)\right] \\
&+ \left.\frac{n_L x^{-1/4}}{17(\sqrt{x})\pi\log^2(x)} + \frac{53ex}{6\pi(\sqrt{x})\log(x)} + \log(x)\left[\frac{2}{\log 2}\log(d_L) + \frac{77}{4}n_L\right]\right\} \\
&+ \frac{5}{2}\frac{|C|}{|G|}\sqrt{x}\left[\left(2 + \frac{\log(\sqrt{x}+1)}{2}\right)\left(\log(d_L) + \frac{1075}{134}n_L\right)\right. \\
&+ \left.\left(\frac{281}{55} + \frac{\log(\sqrt{x}+1)\log(\sqrt{x}+5)}{4}\right)n_L\right].
\end{aligned}
$$

Acotando $\log(\sqrt{x}+K) \leqslant \log(x)$ para $x \geqslant 2$ determinado y agrupando se obtiene,

$$
\begin{aligned}
\left|\psi_C(x) - \frac{|C|}{|G|}x\right| &\leqslant \frac{|C|}{|G|}\sqrt{x}\left[\left(\frac{23}{3}\log(x) + \frac{29}{3} + \frac{336}{17\log(x)} + \frac{26\log(x)}{9\sqrt{x}} + \frac{94}{7\sqrt{x}}\right)\log(d_L)\right. \\
&+ \left(\frac{863}{31}\log^2(x) + \frac{68}{3}\log(x) + \frac{1198}{13} + \frac{1343}{6\log(x)}\right. \\
&+ \left.\left.\frac{77\log(x)}{4\sqrt{x}} + \frac{3817}{30\sqrt{x}} + \frac{3}{40x^{3/4}\log^2(x)}\right)n_L\right].
\end{aligned}
$$

Acotando nuevamente, se tiene este resultado importante,

$$
\begin{aligned}
\left|\psi_C(x) - \frac{|C|}{|G|}x\right| &\leqslant \frac{|C|}{|G|}\sqrt{x}\log(x)\left[\left(\frac{971}{100} + \frac{919}{25\log(x)}\right)\log(d_L)\right. \\
&+ \left.\left(\frac{863}{31}\log(x) + \frac{907}{25} + \frac{20281}{50\log(x)}\right)n_L\right]. \qquad (14)
\end{aligned}
$$

Teorema 35 *Existe una constante* c *positiva absoluta y efectiva, tal que si*

$$x \geqslant e^{4n_L(\log d_L)^2},$$

entonces,

$$\psi_C(x) = \frac{|C|}{|G|}x - \frac{|C|}{|G|}\chi_1(g)\frac{x^{\beta_0}}{\beta_0} + R(x),$$

con,

$$|R(x)| \leqslant xe^{-c\sqrt{\frac{\log x}{n_L}}},$$

donde el término con β_0 *es considerado, si* $L(\beta_0, \chi_1) = 0$ *con* χ_1 *cáracter real de* $H = Gal(L/E) =< g >$.

Demostración: Consideremos $\rho = \beta + i\gamma \neq \beta_0$, un cero no trivial de alguna $L(s, \chi)$ con $|\gamma| < T$, estimemos la expresión

$$S(x, T) - \chi_1(g)\frac{x^{\beta_0}}{\beta_0}.$$

Primero, por lema anterior existe un cero en con la condición $\beta \leqslant 1 - (\log(d_L T^{n_L}))^{-1}$, luego,

$$|x^\rho| = x^\beta \leqslant x e^{-c_1 \frac{\log x}{\log(d_L T^{n_L})}}.$$

Además,

$$\sum_{\chi} \sum_{\substack{\rho \\ |\rho| > \frac{1}{2} \\ |\gamma| < T}} \frac{1}{|\rho|} \ll \sum_{\chi} \log T\{\log c(\chi) + n_E \log T\} \ll \log T \, \log(d_L T^{n_L}).$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\sum_{\chi} \sum_{\substack{\rho \neq 1-\beta_0 \\ |\rho| < \frac{1}{2}}} \left\{ \left|\frac{x^\rho}{\rho}\right| + \left|\frac{1}{\rho}\right| \right\} &\leqslant \sum_{\chi} \sum_{\substack{\rho \neq 1-\beta_0 \\ |\rho| < \frac{1}{2}}} x^{\frac{1}{2}} \left|\frac{1}{\rho}\right| + \left|\frac{1}{\rho}\right| \\
&= (x^{\frac{1}{2}} + 1) \sum_{\chi} \sum_{\substack{\rho \neq 1-\beta_0 \\ |\rho| < \frac{1}{2}}} \left|\frac{1}{\rho}\right| \\
&\ll x^{\frac{1}{2}} \log(d_L).
\end{aligned}$$

Como $\rho \neq 1 - \beta_0$, entonces necesariamente $|\rho| \geqslant \dfrac{1}{4\log(d_L)}$. Además,

$$\frac{x^{1-\beta_0}}{1-\beta_0} - \frac{1}{1-\beta_0} = x^\sigma \log(x) \leqslant x^{\frac{1}{2}} \log(x),$$

para algún $\sigma \in [0, 1 - \beta_0]$. Ahora, agrupando los datos,

$$\begin{aligned}
S(x, T) - \chi_1(g)\frac{x^{\beta_0}}{\beta_0} &= \frac{|C|}{|G|} \left\{ \sum_{\chi} \overline{\chi}(g) \left(\sum_{\substack{|\rho| > \frac{1}{2} \\ |\gamma| < T}} \frac{x^\rho}{\rho} + \sum_{\substack{|\rho| < \frac{1}{2} \\ |\gamma| < T}} \frac{x^\rho}{\rho} - \sum_{|\rho| < \frac{1}{2}} \frac{1}{\rho} \right) - \chi_1(g)\frac{x^{\beta_0}}{\beta_0} \right\} \\
&\ll \frac{|C|}{|G|} x e^{-c_1 \frac{\log x}{\log(d_L T^{n_L})}} + \frac{|C|}{|G|} x^{\frac{1}{2}} \log(x).
\end{aligned}$$

Reemplazamos $T = e^{n_L^{-\frac{1}{2}}(\log(x)^{\frac{1}{2}} - \log(d_L))}$ y luego usando el teorema 31 se obtiene el resultado el teorema.

♣

Para finalizar esta sección definiremos la función Teta

$$\theta_C(x) = \theta_C(x, L/K) = \sum_{\substack{N_{K/\mathbb{Q}}\mathfrak{p} \leqslant x \\ \mathfrak{p} \text{ no ramificado} \\ \left[\frac{L/K}{\mathfrak{p}}\right] = C}} \log(N_{K/\mathbb{Q}}\mathfrak{p}).$$

Además, tenemos que

$$\psi_C(x) - \theta_C(x) = \sum_{\substack{l \geqslant 2 \\ N_{K/\mathbb{Q}}\mathfrak{p}^l \leqslant x \\ \mathfrak{p} \text{ no ramificado} \\ \left[\frac{L/K}{\mathfrak{p}}\right]^l = C}} \log(N_{K/\mathbb{Q}}\mathfrak{p}) \ll n_K x^{\frac{1}{2}}.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} |\theta_C(x) - \frac{|C|}{|G|}x| &= |\theta_C(x) - \psi_C(x) + \psi_C(x) - \frac{|C|}{|G|}x| \\ &\leqslant |\theta_C(x) - \psi_C(x)| + |\psi_C(x) - \frac{|C|}{|G|}x| \\ &\leqslant c_1 n_K\sqrt{x} + c_2\{\frac{|C|}{|G|}\sqrt{x}\log x \log d_L x^{n_L} + \log x \log d_L\} \\ &\leqslant c_3\{\frac{|C|}{|G|}\sqrt{x}\log x \log d_L x^{n_L} + \log x \log d_L\}. \end{aligned}$$

Es decir, el resultado para $\psi_C(x)$ tambien es válido para $\theta_C(x)$.

Efectivamente tenemos,

$$\sum_{\substack{l \geqslant 2 \\ N_{K/\mathbb{Q}}\mathfrak{p}^l \leqslant x \\ \mathfrak{p} \text{ no ramificado} \\ \left[\frac{L/K}{\mathfrak{p}}\right]^l = C}} \log(N_{K/\mathbb{Q}}\mathfrak{p}) = \theta_C(x^{1/2}) + \theta_C(x^{1/3}) + \cdots + \theta_C(x^{1/[\log(x)/\log(2)]}),$$

válido para $l > \log(x)/\log(2)$, además por el Teorema 9 de [RS62],

$$\theta_C(X) < 1{,}01624 n_K x,$$

si $x \geqslant 2$, esto implica que

$$\psi_C(x) - \theta_C(x) \leqslant \frac{22}{15} n_K \sqrt{x}\log(x), \tag{15}$$

de esta manera, agrupando (14) y (15)

$$\begin{aligned}\left|\theta_C(x) - \frac{|C|}{|G|}x\right| &\leqslant \frac{|C|}{|G|}\sqrt{x}\log(x)\left[\left(\frac{971}{100} + \frac{919}{25\log(x)}\right)\log(d_L)\right. \\ &+ \left.\left(\frac{863}{31}\log(x) + \frac{2831}{75} + \frac{20281}{50\log(x)}\right)n_L\right]. \qquad (16)\end{aligned}$$

Teorema 36 *Existe una constante* c *positiva absoluta y efectiva, tal que si* $\zeta_L(s)$ *satisface GRH, entonces para todo* $x > 2$*,*

$$|\pi_C(x) - \frac{|C|}{|G|}\mathrm{Li}(x)| \leqslant c(\frac{|C|}{|G|}\sqrt{x}\log d_L x^{n_L} + \log d_L).$$

Demostración: El resultado se obtiene por teorema de sumación de Abel. Sean

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es primo} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

$$b_n = a_n \delta_n \log n.$$

$$\delta_n = \#\{\mathfrak{p} \text{ primo de } \mathbb{Z}_K \text{ no ramificado} : N\mathfrak{p} = n \text{ y } \left[\frac{L/K}{\mathfrak{p}}\right] = C\}.$$

Además, sea $f(x) = \frac{1}{\log x}$, entonces,

$$\begin{aligned}\pi_C(x) &= \sum_{n\leqslant x}\frac{b_n}{\log n} \\ &= \frac{\theta_C(x)}{\log x} + \int_2^x \frac{\theta_C(y)}{y\log^2 y}\,dy \\ &= \frac{|C|}{|G|}\frac{x}{\log x} + O(\frac{|C|}{|G|}\sqrt{x}\log d_L x^{n_L} + \log d_L) \\ &\quad + \frac{|C|}{|G|}\int_2^x \frac{dy}{\log^2 y} + O(\int_2^x \frac{|C|}{|G|}\frac{\log d_L + n_L \log y}{\sqrt{y}\log(y)} + \frac{\log d_L}{y\log(y)}\,dy) \\ &= \frac{|C|}{|G|}(\mathrm{Li}(x) + \frac{2}{\log 2}) + O(\frac{|C|}{|G|}\sqrt{x}\log d_L x^{n_L} + \log d_L).\end{aligned}$$

Es decir,

$$\pi_C(x) - \frac{|C|}{|G|}\mathrm{Li}(x) \ll C(\frac{|C|}{|G|}\sqrt{x}\log d_L x^{n_L} + \log d_L).$$

♣

Efectivamente, tenemos el siguiente resultado,

Teorema 37 *Supongamos que GRH es válida para $\zeta_L(s)$, entonces para todo $x > 2$,*

$$\begin{aligned}\left|\pi_C(x) - \frac{|C|}{|G|}\mathrm{Li}(x)\right| &\leqslant \frac{|C|}{|G|}\sqrt{x}\left[\left(\frac{971}{100} + \frac{5566}{25\log(x)}\right)\log(d_L)\right. \\ &+ \left.\left(\frac{863}{31}\log(x) + \frac{217211}{2325} + \frac{326863}{150\log(x)}\right)n_L\right].\end{aligned}$$

Demostración: Aplicando sumación de Abel se tiene,

$$\pi_C(x) - \frac{|C|}{|G|}\mathrm{Li}(x) = \frac{\theta_C(x) - \frac{|C|}{|G|}x}{\log(x)} + \int_2^x \frac{\theta_C(t) - \frac{|C|}{|G|}t}{t\log^2(x)}\,dt$$

Aplicando (16) y acotando $\int_2^x \frac{dt}{\sqrt{t}\log^2(t)} \leqslant \int_2^x \frac{dt}{\sqrt{t}\log(t)} \leqslant \frac{4\sqrt{x}}{\log(x)}$ tenemos

$$\begin{aligned}\left|\pi_C(x) - \frac{|C|}{|G|}\mathrm{Li}(x)\right| &\leqslant \frac{|C|}{|G|}\sqrt{x}\left[\left(\frac{971}{100} + \frac{919}{25\log(x)}\right)\log(d_L)\right. \\ &+ \left.\left(\frac{863}{31}\log(x) + \frac{2831}{75} + \frac{20281}{50\log(x)}\right)n_L\right] \\ &+ \frac{|C|}{|G|}\int_2^x\left[\left(\frac{971}{100\sqrt{t}\log(t)} + \frac{919}{25\sqrt{t}\log^2(t)}\right)\log(d_L)\right. \\ &+ \left.\left(\frac{863}{31\sqrt{t}} + \frac{2831}{75\sqrt{t}\log t} + \frac{20281}{50\sqrt{t}\log^2(t)}\right)n_L\right]dt \\ &\leqslant \frac{|C|}{|G|}\sqrt{x}\left[\left(\frac{971}{100} + \frac{919}{25\log(x)}\right)\log(d_L)\right. \\ &+ \left.\left(\frac{863}{31}\log(x) + \frac{2831}{75} + \frac{20281}{50\log(x)}\right)n_L\right] \\ &+ \frac{|C|}{|G|}\left[\left(\frac{4647}{100}\frac{4\sqrt{x}}{\log(x)}\right)\log(d_L)\right. \\ &+ \left.\left(\frac{863}{31}\cdot 2\sqrt{x} + \frac{13301}{30}\frac{4\sqrt{x}}{\log(x)}\right)n_L\right] \\ &\leqslant \frac{|C|}{|G|}\sqrt{x}\left[\left(\frac{971}{100} + \frac{5566}{25\log(x)}\right)\log(d_L)\right. \\ &+ \left.\left(\frac{863}{31}\log(x) + \frac{217211}{2325} + \frac{326863}{150\log(x)}\right)n_L\right].\end{aligned}$$

♣

Por otro lado, usando el Teorema (35) obtenemos un resultado incondicional,

$$\left|\theta_C(x) - \frac{|C|}{|G|}\right| \leqslant c_1 n_K\sqrt{x} + \frac{|C|}{|G|}\frac{x^{\beta_0}}{\beta_0} + |R(x)|.$$

$$
\begin{aligned}
\left|\pi_C(x)-\frac{|C|}{|G|}\mathrm{Li}(x)\right| &\leqslant \left|\frac{\theta_C(x)-\frac{C}{G}x}{\log(x)}\right|+\int_2^x\left|\frac{\theta_C(t)-\frac{C}{G}t}{t\log^2(t)}\right|dt\\
&\leqslant \frac{c_1n_L\sqrt{x}+\frac{|C|}{|G|}\frac{x^{\beta_0}}{\beta_0}+|R(x)|}{\log(x)}+\int_2^x\frac{C_1n_K\sqrt{t}+\frac{|C|}{|G|}\frac{t^{\beta_0}}{\beta_0}+|R(t)|}{t\log^2(t)}dt\\
&\leqslant \frac{c_1n_L\sqrt{x}+\frac{|C|}{|G|}\frac{x^{\beta_0}}{\beta_0}+xe^{-c_2\sqrt{\frac{\log(x)}{n_L}}}}{\log(x)}\\
&+ \int_2^x\frac{c_1n_L\sqrt{t}+\frac{|C|}{|G|}\frac{t^{\beta_0}}{\beta_0}+te^{-c_2\sqrt{\frac{\log(t)}{n_L}}}}{t\log^2(t)}dt.
\end{aligned}
$$

Haciendo uso de que $x\geqslant e^{10n_L\log^2(d_L)}$, $\sqrt{x}\leqslant e^{\frac{a^2}{2}}\cdot xe^{-a\sqrt{\frac{\log(x)}{n_L}}}$, con $0<a<1$ y la cota de Minkowski, cada sumando nos queda,

$$\frac{c_1n_L\sqrt{x}}{\log(x)}\leqslant\frac{c_1\sqrt{x}}{10\log^2(d_L)}\leqslant xe^{-a\sqrt{\frac{\log(x)}{n_L}}}.$$

$$\frac{xe^{-c_2\sqrt{\frac{\log(x)}{n_L}}}}{\log(x)}\leqslant\frac{xe^{-c_2\sqrt{\frac{\log(x)}{n_L}}}}{10n_L\log^2(d_L)}\leqslant c_4xe^{-c_2\sqrt{\frac{\log(x)}{n_L}}}.$$

$$\int_2^x\frac{c_1n_L\sqrt{t}}{t\log^2(t)}dt=c_1n_L\int_2^x\frac{dt}{\sqrt{t}\log^2(t)}dt\leqslant c_1n_L\cdot\frac{4\sqrt{x}}{\log(x)}\leqslant c_5xe^{-a\sqrt{\frac{\log(x)}{n_L}}}.$$

$$\int_2^x\frac{t^{\beta_0-1}}{\beta_0\log^2(t)}dt=\frac{1}{\beta_0}\int_{2^{\beta_0}}^{x^{\beta_0}}\frac{du}{\log(u)}\leqslant\frac{\mathrm{Li}(x^{\beta_0})}{\beta_0}.$$

$$\int_2^x\frac{e^{-a\sqrt{\frac{\log(t)}{n_L}}}}{\log^2(t)}dt\leqslant\frac{e^{-a\sqrt{\frac{\log(2)}{n_L}}}}{\log^2(2)}\leqslant c_6\int_2^x dt\leqslant c_6x,$$

de esta manera, otro resultado importante

Teorema 38 *Existen constantes* c_7, c_8 *efectivas, absolutas y calculables tal que, si*

$$x\geqslant\exp(10n_L\log^2(d_L)),$$

entonces

$$\left|\pi_C(x)-\frac{|C|}{|G|}\mathrm{Li}(x)\right| \leqslant \frac{|C|}{|G|}\frac{x^{\beta_0}}{\log(x^{\beta_0})}+\frac{|C|}{|G|}\mathrm{Li}(x^{\beta_0})+c_7xe^{-c_8\sqrt{\frac{\log(x)}{n_L}}},$$

donde β_0 *aparece si* β_0 *existe.*

3. Apéndice

3.1. Tópicos de variable compleja

Para más detalles de los resultados de esta sección ver [C73].

Definición 19 *Sea* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ *una curva diferenciable, y sea* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *una función compleja la cual es continua sobre* γ. *Entonces, la integral de* f *a lo largo de* γ *es*

$$\int_\gamma f(s)\,ds = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt.$$

Definición 20 *Sea* $f : G \to \mathbb{C}$ *analítica, tal que* $f(a) = 0$ *para* $a \in G$. *Entonces,* a *es un cero de orden* $m \geqslant 1$ *si existe* $g : G \to \mathbb{C}$ *analítica tal que* $f(s) = (s-a)^m g(s)$, *con* $g(a) \neq 0$.

Definición 21 *Diremos que una función* f *tiene una singularidad en* $s = a$, *si existe* $R > 0$ *tal que* f *es analítica en* $B(a, R) - \{a\}$. *Además, esta singularidad será un polo de* f *si* $\lim_{s\to a} |f(s)| = \infty$. *Un polo tendrá orden* $m \in \mathbb{Z}^+$, *si*

$$\lim_{s\to a} (s-a)^m f(s) = 0.$$

Teorema 39 (Desarrollo en series de Laurent) *Sea* f *analítica en el anillo* $A(a, R_1, R_2)$, *entonces*

$$f(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (s-a)^n$$

donde la convergencia es absoluta y uniforme en $A(a, r_1, r_2)$ *con* $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$. *Los coeficiente se obtienen mediante la integral,*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(s)}{(s - a^{n+1})}\,ds.$$

con γ *circunferencia de radio* r *centrada en* a *con* $R_1 < r < R_2$.

El coeficiente a_{-1} de la serie de Laurent, es llamado como residuo de f en $s = a$. Este se denota por $\mathrm{Res}(f, a)$.

Teorema 40 (Residuo) *Sea* f *analítica en* G *salvo en singularidades* $a_1, a_2, \ldots, a_n$. *Si* γ *es una curva cerrada en* G *que no pasa por estas singularidades , entonces*

$$\int_\gamma f = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}(f, a_k).$$

Proposición 16 *Supongamos que* f *tiene un polo de orden* $m \geqslant 0$ *en* $s = a$ *y sea* $g(s) = (s-a)^m f(s)$, *entonces*

$$\mathrm{Res}(f, a) = \lim_{s \to a} \frac{1}{(m-1)!} g^{(m-1)}(a),$$

donde $g^{(m-1)}$ *representa la* $m-1$*-ésima derivada de* g *respecto a* s.

Recordemos que una función de variable compleja analítica en todo el plano $\mathbb{C}$ es llamada función entera.

Teorema 41 (Factorización de Weierstrass) *Sea* f *una función entera, y sea* $\{a_n\}$ *la sucesı'on de ceros no nulos de* f *repetidos de acuerdo a su multiplicidad. Supongamos que* f *tiene un cero de orden* $m \geqslant 0$ *en* $s = 0$*. Entonces, existe una función* g *y una sucesión de enteros* $\{p_n\}$ *tal que,*

$$f(s) = s^m e^{g(s)} \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{s}{a_n}\right),$$

donde

$$\begin{aligned} E_0(s) &= 1 - s \\ E_p(s) &= (1-s)\exp\left(s + \frac{s^2}{2} + \ldots + \frac{s^p}{p}\right), \quad p \geqslant 1. \end{aligned}$$

Definición 22 *Diremos que una función entera* f *tiene orden* λ*,* $0 \leqslant \lambda \leqslant \infty$ *si*

$$\rho = \{\lambda \leqslant 0 : \sup_{|s|=r} |f(s)| = O(e^{r^\lambda}) \text{ cuando } r \to \infty\},$$

o equivalentemente a

$$\rho = \{\lambda \leqslant 0 : \text{ existen } A, B > 0 : |f(s)| \leqslant A e^{B|s|^\lambda} \text{ para todo } s \in \mathbb{C}\}.$$

Definición 23 *Sea* f *una función entera con ceros* $\{a_1, a_2, \ldots\}$ *repetidos de acuerdo a su multiplicidad y ordenados tal que* $|a_1| \leqslant |a_2| \leqslant \ldots$ *Entoces* f *tiene rango finito, si existe un entero* p *tal que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n^{p+1}} < \infty.$$

Si p *es el entero más pequeño que satisface, entonces se dice que* f *tiene rango* p.

Definición 24 *Una función entera* f *tiene genero finito, si* f *tiene rango finito y además*

$$f(s) = s^m e^{g(s)} P(s),$$

donde $P(s) = \prod_{n=1}^{\infty} E_p(\frac{s}{a_n})$ *y* $g(s)$ *es un polinomio. Si* p *es el rango de* f *y* q *el grado del polinomio* g*, entonces* $\mu = \max\{p, q\}$ *es el genero de* f.

Teorema 42 (Factorización de Hadamard) *Sea* f *una función entera de orden finito* λ *y sea* μ *el genero de sus ceros no nulos* $\{a_n\}$*. Supongamos que* f *tiene un cero de orden* $m \geqslant 0$ *en* $s = 0$*. Entonces, existe un polinomio* g *de orden menor o igual a* λ *y una sucesión de enteros* $\{p_n\}$ *tal que,*

$$f(s) = s^m e^{g(s)} \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}(\frac{s}{a_n}).$$

3.2. Función Gamma

Detalles se pueden encontrar en [WW27].

Definición 25 *La función Gamma se define como el producto de Weierstrass,*

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = se^{\gamma s} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1 + \frac{s}{n}\right) e^{-\frac{s}{n}} \right\}, \tag{17}$$

donde γ *es llamada como constante de Euler.*

Cabe señalar que la función Gama es analítica para todo $s \neq 0, -1, -2, \ldots$, donde estos son polos simples. A partir de la fórmula anterior se deduce,

$$\Gamma(s) = \frac{1}{s} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^s \left(1 + \frac{s}{n}\right)^{-1} \right\}.$$

Además, se tiene

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s) \tag{18}$$

Así, usando (17) y (18) se obtiene una expresión para la derivada logaritmica de la función Gamma

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma}(s) = -\gamma - \frac{1}{s} + s \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+s)}. \tag{19}$$

Referencias

[C73] Conway J., *Functions of One Complex Variable*, Springer- Verlag, New York inc, 1973.

[J77] Janusz G. , *Algebraic Number Fields*, Academic press, 1977.

[LO77] Lagarias J. C. & Odlyzko A. M., *Effective versions of the Chebotarev density theorem* in Algebraic Number Fields, A. Frohlich (ed.), Academic Press, 1977.

[M13] Milne J. S. , *Class Field Theory*, 2013. http://www.jmilne.org/math/CourseNotes/CFT.pdf

[MM97] Murty M. Ram, Murty V. Kumar , *Non-vanishing of L-Functions and Applications*, Springer Basel AG, 1997.

[M01] Murty M. Ram , *Problems in Analytic Number Theory*, Springer-Verlag New York, Inc. 2001.

[N99] Neukirch J. , *Algebraic Number Theory*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1999.

[O77] Odlyzko A. M., *On conductors and discriminants* in Algebraic Number Fields, A. Frohlich (ed.), Academic Press, 1977.

[RS62] Rosser J. B., Schoenfeld L., Aproximate formulas for some functions of prime numbers, Illinois J. Math., 1962 p. 64-94.

[S73] Serre, J-P., *A course in Arithmetic*, Springer- Verlag, New York inc, 1973.

[S77] Serre, J-P., *Linear Representations of Finite Groups*, Springer- Verlag, New York inc, 1977.

[S81] Serre J-P., Quelques applications du théorème de densité de Chebotarev, Publications mathématiques de l'I. H. É. S., tomo 54, p. 123-201, 1981.

[T26] Tschebotareff, N., *Die Bestimmung der Dichtigkeit einer Menge von Primzahlen, welche zu einer gegebenen Substitutionsklasse gehören*, Mathematische Annalen 95, 1926.

[WW27] Whittaker E. T. , Watson G. N. , *A Course of Modern Analysis*, Cambridge University Press, 1927.

[W13] Winckler B., Théorème de Chebotarev effectif, 2013. http://arxiv.org/pdf/1311.5715v1.pdf