



Estrategia didáctica para conducir el aprendizaje de la distribución de Poisson y binomial

Trabajo de tesis para optar al grado de Magíster en Estadística

Realizado por:

Gabriela Cisternas Araya

Profesora guía:

Dra. Claudia Navarro Villarroel

Valparaíso, Chile, Marzo de 2017

*Dedicado a
mi Salvador.*

Agradecimientos

- A mi madre, donde quiera que estés, gracias por impregnarme de tus valores y esfuerzo.
- A la Dra. Claudia Navarro Villarroel, agradezco la dedicación por guiarme por este difícil camino. Gracias por el tiempo invaluable que me entregó, sin usted este sueño no sería posible.
- Al profesorado del Instituto de Estadística de la Universidad de Valparaíso, gracias por acogerme, por los aprendizajes logrados y por todo el conocimiento aportado para la realización de este trabajo.

Resumen

La enseñanza de la estadística debe culturizar tanto a los profesionales como a los ciudadanos comunes en el área de la estadística. Los hombres y mujeres del mundo de hoy deben manejar un lenguaje estadístico que les permita organizar datos, construir tablas, representar datos y sobre todo comprender conceptos, vocabulario y símbolos estadísticos, Ben-Zvi y Garfield (2004).

El conocimiento de la estadística es un motor del desarrollo de un país, Batanero (2001). Es por este motivo que la formación de los estadísticos oficiales está planteando desafíos y es necesario que el proceso de enseñanza-aprendizaje intencione las habilidades analíticas, más allá de los cálculos y la aplicación de técnicas estadísticas.

Para enseñar y compartir el conocimiento de la estadística, se debe tener en cuenta el nivel en el que se desarrolla la enseñanza y el tiempo que lleva el logro de los aprendizajes, porque no es inmediato. Se debe lograr una relación entre objetos de conocimientos y representaciones. Estos dos aspectos deben tener sentido para el estudiante.

Este estudio, tiene por objetivo desarrollar una estrategia para entregar de manera didáctica el conocimiento de la distribución binomial y distribución de Poisson, a los estudiantes de tercer año de enseñanza media y estudiantes del curso de Métodos Estadísticos inserto en la malla curricular en la carrera de Ingeniería en Estadística, de la Universidad de Valparaíso. Además de la estrategia en sí, se analizarán la forma en que los estudiantes razonan al aprender ambas distribuciones.

Índice general

Agradecimientos	II
Resumen	III
Índice general	IV
1. Introducción	1
1.1. Educación estadística	1
1.2. Investigaciones en educación estadística	5
1.3. Distribuciones muestrales y uso de la tecnología	11
1.4. Software Fathom	13
2. Metodología	15
2.1. Participantes en la investigación	15
2.2. Instrumentos de recolección de datos y procedimientos de trabajo	16
2.3. Selección y características de las actividades	17
2.3.1. Confección del cuestionario exploratorio	17
2.3.2. Confección de las clases realizadas a los estudiantes	20
2.3.3. Confección de la lección de la distribución binomial	20
2.3.4. Confección de la lección para la distribución de Poisson	21
2.4. Instrumentos de recogida de datos	24
2.4.1. Confección cuestionario evaluativo distribución binomial	25
2.4.2. Confección cuestionario evaluativo distribución de Poisson	26
3. Aplicación	27
3.1. Análisis del cuestionario diagnóstico	28
3.2. Conclusiones del cuestionario diagnóstico	29

3.3.	Análisis de la clase de distribución binomial	30
3.4.	Conclusiones Clase distribución binomial	33
3.5.	Análisis de la clase de distribución de Poisson.	34
3.6.	Conclusiones Clase distribución de Poisson	37
4.	Conclusiones finales	38
4.1.	Conclusiones respecto a los objetivos	38
4.2.	Aportes del estudio	39
4.3.	Limitaciones	40
4.4.	Propuestas futuras	40
	Referencias	41
	A. Anexos	45

Capítulo 1

Introducción

En este capítulo, se comenta acerca de cómo las instituciones ligadas a la estadística y a la educación matemática han puesto énfasis en la educación estadística en los últimos años, creando secciones y organizando jornadas de reflexión acerca del tema. También, se abordarán las estrategias propuestas por investigadores para desarrollar la educación estadística y fortalecer la alfabetización estadística a nivel mundial.

Por último, se dan a conocer resultados de investigaciones en el ámbito de las distribuciones muestrales y su aprendizaje mediante simuladores computacionales.

1.1. Educación estadística

La estadística es una ciencia que está creciendo expansivamente y cada día se distancia más de la matemática y se va posicionando como la “ciencia de los datos” Batanero (2001). Esto significa una constante investigación en cómo se enseña y se conduce el aprendizaje de las personas que quieren aprender esta ciencia.

Durante muchos años, los encargados de enseñar y entregar el conocimiento de la estadística han sido profesionales dedicados a la matemática que se especializaron en la rama de la estadística. Sin embargo, hace varios años que entre los profesionales que entregan el conocimiento de la estadística se hace visible la necesidad de una línea de investigación que se dedique a investigar cómo entregar y cómo enseñar

los conocimientos de la estadística, y es así como aparecen más instituciones interesadas en la exploración de la educación estadística, por ejemplo, Asociación Internacional para la Educación en Estadística o IASE, según su sigla en Inglés, *International Association for Statistical Education*, la sección de Educación Estadística de la *American Statistical Association* (ASA) o Asociación Americana de Estadística, son las más conocidas durante los últimos años. A continuación se describe parte de sus historias.

A nivel mundial, en el año 1991 el instituto internacional de estadística (ISI), institución de renombre en el mundo de la estadística, acoge la petición de los estadísticos dedicados a la educación estadística y contribuye para la formación de una nueva sección dentro del mismo instituto, nacería así la Asociación Internacional para la Educación Estadística (IASE), la que ha ido potenciando la educación estadística a través de Congresos Internacionales de Educación Estadística (ICOTS), donde el primero organizado fue en el año 1994 y se ha ido realizando periódicamente cada 4 años en diversos países del mundo. En estos, congresos se muestran los avances e investigaciones que los destacados profesionales dedicados específicamente a la educación estadística, han desarrollado en diversos niveles educativos. En su página web, www.iase-web.org, se pueden acceder a numerosos artículos de interés en el área de la educación estadística, artículos que proponen estrategias para trabajar cierto contenido, artículos que permiten conocer software que contribuyen al aprendizaje de los estudiantes e investigaciones que ayudan a fortalecer la cultura estadística de cada país.

Otra organización estadística que ha ido generando espacios dentro de su gestión para la educación estadística, es la Asociación Americana de Estadística (ASA), en cuya página web, www.amstat.org, se pueden acceder a publicaciones e investigaciones que potencian esta ciencia, se puede acceder a la revista diario de educación estadística, la cual está diseñada para docentes que entregan conocimientos de estadística desde pre básica a educación superior.

A nivel latinoamericano, la educación estadística para la población común, sin considerar los profesionales estadísticos, sigue estando a cargo de profesores de matemáticas, sin embargo el interés por la educación estadística se ha ido instaurando en congresos dedicados a la educación matemática, y se han ido creando secciones específicamente para la educación estadística dentro de sus programas de congresos.

En agosto de 1996, mientras se desarrollaba la X reunión cen-

troamericana y del Caribe sobre formación de profesores e investigación en matemática educativa, se forma el comité latinoamericano de matemática educativa (CLAME) y, se constituye como movimiento académico de carácter internacional. Antes de 1996, se realizaban reuniones anuales de educación matemática, a partir de ese año se decidió cambiar el nombre de esas reuniones y, es así como nace la Reunión Latinoamericana de Educación Matemática (RELME), en Agosto de 2016 se realizó la RELME 30, esta reunión convocó a profesionales destacados en el área de la educación matemática y ha ido incorporando el tema de investigación de la educación estadística. En la publicación de sus actas latinoamericanas de matemática educativa, (ALME), se encuentran las ponencias, comunicaciones breves y poster expuestos en cada reunión y los relacionados con educación estadística han sido un gran aporte para los docentes y profesionales ligados a la educación estadística.

En el ámbito de los profesionales latinoamericanos dedicados exclusivamente a la estadística, la reunión que los convoca es el Congreso Latinoamericano de Sociedades Estadísticas (CLATSE), organizado por las Sociedades de Estadística de Chile, Argentina, Perú, Colombia, Uruguay, Brasil y Ecuador. Esta reunión nace en el año 1991, cuando las Sociedades de estadística de Chile y Argentina deciden impulsar sus encuentros locales propiciando reuniones de carácter internacional. En el último tiempo los CLATSE se realizan cada dos años donde participan diversos países de Latinoamérica. En un principio en estas reuniones se desarrollaban temas de estadística y sus aplicaciones, sin dar espacio a la educación estadística, sin embargo en el año 2004, al finalizar el CLATSE realizado en Chile, la Sociedad Chilena de Estadística desarrolla un seminario de educación estadística con dos conferencias: “Perfeccionamiento de la Educación Estadística en América Latina: aspectos más urgentes” y “Métodos gráficos y pensamiento crítico”, (www.clatse.com/antecedentes).

Colombia es el único país de América del Sur que está propiciando encuentros que se dedican exclusivamente a la educación estadística; en agosto de 2014 se realiza el primer Congreso Colombiano de Educación Estocástica, reunión a la que asistieron personas de distintas partes del continente americano y entre las ponencias que destacan está el uso de simuladores computacionales en el aprendizaje de la estadística, alfabetización estadística en edad temprana, formación de profesores en estadística y probabilidad.

En Chile, la Asociación que reúne a los profesionales dedicados a la estadística, docentes, investigadores y estadísticos en general, es la Sociedad Chilena de Estadística (SOCHE). Fue en el año 2001, mientras se desarrollaban las XVII jornadas de estadísticas, organizadas por la destacada asociación, que los estadísticos reunidos determinaron promover una nueva sección en la SOCHE, la sección de educación estadística. En la página web de la SOCHE, sección educación estadística se encuentran los objetivos de dicha sección, entre los que destacan:

- Instancias de reflexión en torno a la educación estadística que incluyan docentes de nivel escolar y universitario. Temas a tratar diseño de estrategias, contenidos, aspectos didácticos y pedagógicos.
- Organizar reuniones satélites dentro de las jornadas nacionales de estadística.
- Destacar las aplicaciones transversales e interdisciplinarias que posee la estadística.
- Promover el conocimiento de la didáctica de la estadística.
- Crear relaciones con instituciones internacionales y nacionales vinculadas a la educación estadística, como la IASE y la Sociedad Chilena de Educación Matemática (SOCHIEM)

La SOCHIEM es la asociación que reúne a investigadores, docentes de todos los niveles y a profesionales dedicados a enriquecer los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática en todos los niveles del sistema educativo chileno, desde educación inicial (menor a 6 años) hasta postgrado y formación continua de profesores. Esta institución, creada hace más de 20 años, es la encargada de organizar las jornadas de educación matemáticas y en ella hay un espacio para que los investigadores muestren sus avances en educación estadística. En sus actas anuales de jornadas se encuentran destacadas experiencias realizadas por docentes con estudiante chilenos de establecimientos educacionales de enseñanza básica, media, pregrado y post grado. Existen, también, investigaciones relacionadas con la enseñanza de estadística dentro de la matemática y otras muy interesantes que muestran cómo aprenden estadística algunos profesionales de otras áreas, por ejemplo: enfermería, ingenierías, sociología, psicología, biología, entre otras

1.2. Investigaciones en educación estadística

La forma en que se enseña la estadística ha ido cambiando fuertemente en los últimos años, progresivamente ha ido dejando atrás el resolver los desafíos estadísticos mediante fórmulas y logaritmos secuenciales y se le ha abierto camino a una educación estadística que necesita que el estudiante piense y razone estadísticamente, Garfield y Ben-Zvi (2008).

La Educación Estadística, debe lograr que los estudiantes comprendan los datos y los conviertan en información valiosa desarrollando interrogantes, teniendo en cuenta que los datos están sometidos a variabilidad e incertidumbre, lo que hace más difícil el razonamiento de las conclusiones y la toma de decisiones, Garfiel Ben-Zvi (2007).

En cuanto a las etapas del aprendizaje de la estadística, Garfield, delMas y Chance(2002) organizan los resultados esperados en tres grandes categorías (ver Cuadro 1.1). Alfabetización estadística, razonamiento estadístico y pensamiento estadístico. Es en esta última etapa cuando se espera que las personas razonen con ideas estadísticas y analicen la información proporcionada contextualizándola y realizando inferencias. A continuación se presenta las categorizaciones propuestas por Garfield, delMas y Chance(2002)

Alfabetización estadística	Razonamiento estadístico	Pensamiento estadístico
<ul style="list-style-type: none"> • Supone conocimiento/comprensión y uso del lenguaje básico y de las herramientas de la estadística. • Conocimiento del significado de los términos estadísticos. • Conocimiento del uso de los símbolos estadísticos. • Reconocimiento y capacidad de interpretar representaciones de datos. • Incluye técnicas básicas e importantes que pueden ser usadas para comprender información estadística o resultados de investigación. • Organizar datos, construir y presentar tablas y, finalmente, trabajar con diferentes representaciones de datos. • Incluye la comprensión de conceptos, vocabulario y símbolos. • Incluye la comprensión de la probabilidad como una medida de incertidumbre. 	<ul style="list-style-type: none"> • Es la forma en que la gente razona con ideas estadísticas y adquiere sentido la información estadística. • Supone conexiones de un concepto con otro. • Significa comprender y ser capaz de explicar procesos estadísticos. • Interpretar completamente los resultados estadísticos. • Hacer interpretaciones basadas sobre un conjunto de datos o resumen estadístico de datos. 	<ul style="list-style-type: none"> • Supone un conocimiento del por qué y cómo se realizan las investigaciones en estadística. • Comprensión de cómo se usan los modelos para simular fenómenos aleatorios, cómo se producen los datos para estimar probabilidades. • Reconocimiento de cómo, cuándo y por qué existen herramientas inferenciales. • Comprender y utilizar el contexto de un problema de investigación. • Comprender el por qué y el cómo las “grandes ideas” subyacen en la investigación estadística. • Comprensión de la naturaleza de la variación y cuando usar apropiadamente métodos de análisis de datos. • Supone la comprensión de la naturaleza del muestreo, cómo hacer inferencias a partir de la muestra y por qué los diseños experimentales son necesarios para establecer causas.

Cuadro 1.1: Categorías aprendizaje estadística

En el nivel que se desarrolla la investigación, para este trabajo, los estudiantes deben estar encaminados a desarrollar el razonamiento estadístico; para ello es necesario que los estudiantes ya tengan una alfabetización estadística como requisito para potenciar la capacidad del razonamiento estadístico; se usará la definición de Ridway, Nicholson y McCusker (2011) para entender la alfabetización estadística, la cual se define como la habilidad de leer e interpretar en forma contextualizada los datos y analizar las situaciones cotidianas en forma crítica, utilizando la información estadística que el diario vivir entrega.

Para lograr desarrollar las tres categorías en el proceso de enseñanza de la estadística, es necesario que los docentes de estadística, de cualquier nivel educacional, además de conocer ampliamente el contenido (Mc Clain, 2008), deben considerar cómo aprenden sus estudiantes, comprender dificultades específicas del proceso, buscar y utilizar los medios adecuados para guiar a los estudiantes hacia la comprensión. Sorto (2006), señala que los docentes deberían tener:

- a) Conocimiento de la materia, conocimiento pedagógico, conocimiento de los estudiantes como aprendices y, conocimiento de la evaluación.
- b) Ser capaces de manejar discusiones en clases, establecer una cultura de razonamiento matemático, diseñar y seleccionar tareas, analizar el pensamiento y el desempeño de los estudiantes, y planear la instrucción.

En cuanto a la enseñanza específicamente de la estadística, la Sociedad Americana de Estadística desarrolló la guía para la Evaluación y la Enseñanza en Educación Estadística (GAISE, 2016), en ella se pueden apreciar las siguientes recomendaciones:

- Enseñar el pensamiento estadístico: realizar en cada clase ejemplos de aplicación del contenido a trabajar, utilizando un contexto motivador para el estudiante. Permitir que los estudiantes analicen investigaciones reflexionando acerca de la recogida de datos, análisis de resultados y el alcance de las conclusiones que se lograron. En cada clase identificar siempre las variables y las unidades con las que se está trabajando. Entregar a los estudiantes el progreso del pensamiento estadístico que van logrando a través del curso.
- Centrarse en la comprensión de los conceptos: Enfocar el objetivo del curso en la comprensión por parte del estudiante en lugar de trabajar con una variada gama de técnicas dejando de lado

la comprensión. Realizar la mayoría de los cálculos utilizando la tecnología para permitir un mayor énfasis en la comprensión de conceptos y la interpretación de los resultados.

- Trabajar siempre con un contexto real y acorde a los estudiantes. Las estrategias de enseñanza deben considerar el contexto de los estudiantes, con el fin de incentivar la motivación y mostrar una relevancia del curso para el mundo real. Asegurarse que las preguntas a utilizar sean de interés para los estudiantes, es sabido que en un curso los intereses de los estudiantes son variados, entonces, es recomendable que docentes manejen una variedad de herramientas para trabajar en las clases. Es importante considerar que los datos recogidos de los estudiantes en clases sobre algún tema en particular, no sea algo embarazoso para ellos y no invada su privacidad. Utilizar software estadísticos para analizar grandes conjuntos de datos. Estar revisando constantemente nuevas fuentes de datos actualizadas. Considerar los datos que contribuyan a la formación general de la institución en la que se realiza la clase, por ejemplo, ayuda al medio ambiente, cultura social, entre otros.
- Fomentar el aprendizaje activo: fomentar las predicciones de los estudiantes acerca de los resultados para una actividad antes de analizar los datos. Esto motiva la necesidad de métodos estadísticos, si todos los datos son previsible, las estadísticas no harían falta. Evitar las actividades que lleven a los estudiantes paso a paso a través de una lista de procedimientos. Permitir que los estudiantes discutan y piensen sobre los datos y el desarrollo del problema. Considerar la evaluación por pares con el fin de proporcionar una retroalimentación y mejorar las calificaciones finales.
- Usar la tecnología para explorar conceptos y datos: Los estudiantes deben aprender a usar, como mínimo, un software estadístico. Propiciar que el estudiante genere y modifique gráficos apropiados, incluyendo las recientes innovaciones como gráficos y mapas en movimiento. Realizar simulaciones para ilustrar conceptos abstractos. Explorar “¿qué pasa si...?”. Creación de informes enfocados en la interpretación de los resultados sin dejar de lado el contexto. Utilizar juegos y entornos visuales para involucrar a los estudiantes, y así enseñar conceptos y analizar resultados.
- Utilizar las evaluaciones como un proceso de mejora del aprendizaje: la evaluación es parte del proceso de aprendizaje y como tal, durante la evaluación el estudiante sigue aprendiendo. Se re-

comienda integrar la evaluación como un componente esencial del curso, los trabajos escritos tales como informes sobre algún contenido en especial o un trabajo al finalizar el curso contribuyen al estudiante a desarrollar su capacidad de análisis y mejora también las habilidades de comunicación. Usar una variedad de métodos de evaluación para proporcionar una evaluación más completa del estudiante. Pedir a los estudiantes que interpreten, con sus propias palabras, gráficos o términos estadísticos que aparecen en la prensa escrita y medios gráficos. Animar a los estudiantes a trabajar en grupo para algunas evaluaciones, se reconoce el trabajo en grupo como una práctica de alto impacto

En este trabajo se vinculará la educación estadística con una estrategia didáctica. Sin embargo, para desarrollar una estrategia didáctica es necesario analizar algunas definiciones de la palabra didáctica. En la Real Academia Española, se presentan las siguientes definiciones:

- 1) Adj. Perteneciente o relativo a la didáctica o a la enseñanza.
- 2) Adj. Propio, adecuado o con buenas condiciones para enseñar o instruir.
- 3) Adj. Que tiene como finalidad fundamental enseñar o instruir.
- 4) f. Arte de enseñar.

En francés, el término didáctica no significa el arte o ciencia de enseñar, su propósito es mucho más amplio: incluye la enseñanza, el aprendizaje y la escuela como un sistema, y así sucesivamente (Douady y Mercier, 1992, p. 5, citado por Kilpatrick, 2003).

Brousseau (2004), adopta una amplia definición: “La Didáctica es la ciencia que estudia la difusión de los conocimientos útiles a los hombres y mujeres que viven en sociedad. Se interesa por la producción, la difusión y el aprendizaje de los conocimientos, así como por las instituciones y actividades que los facilitan”.

Regnier (2003), dice que la didáctica de la estadística ha desarrollado procesos de comunicación distribución y adquisición de conocimientos estadísticos, apoyándose en los conocimientos desarrollados por la didáctica de la matemática, pero es lo práctico de la estadística lo que la hace ser más cercana a los estudiantes y le ven mayor funcionalidad. Además, este autor en el año 2000 articula las concepciones sobre la pedagogía y la didáctica con la convicción de que ambas determinan la acción de la enseñanza. La Figura 1.1 muestra la esquematización

del sistema integrando los dos puntos de vista pedagógico y didáctico que condicionan la acción de enseñar.

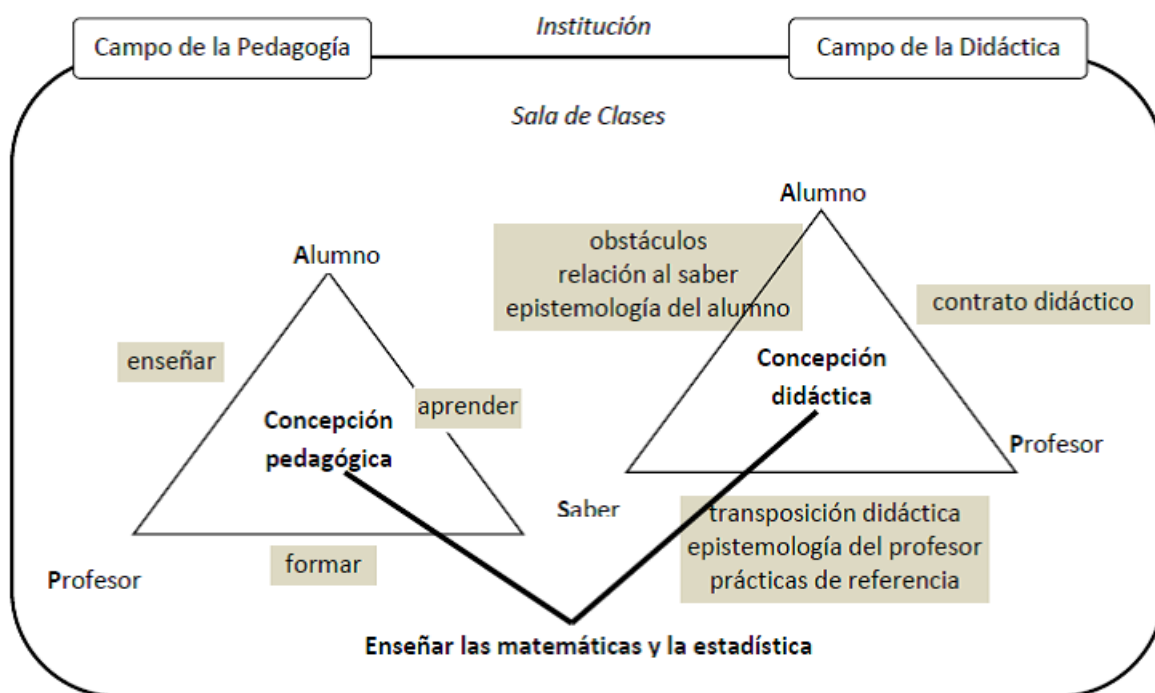


Figura 1.1: Pedagogía y didáctica en la acción de enseñar, Regnier (2000).

En la Figura 1.1, se puede observar que para llevar a cabo el proceso de enseñanza de la estadística, hay que vincular la concepción pedagógica con la concepción didáctica, y ésta última, lleva una transposición didáctica la que en este trabajo se realizará con la ayuda de un software computacional de simulación.

Una de las indicaciones que sugieren Ben-Zvi y Garfield (2004) es el uso de la tecnología en el estudio de la estadística. Utilizar software y simuladores computacionales contribuye al aprendizaje de la estadística. A continuación se muestran las investigaciones que vinculan las distribuciones muestrales y el uso de la tecnología.

1.3. Distribuciones muestrales y uso de la tecnología

Como lo recomienda la ASA (*American Statistical Association*), el uso de la tecnología se recomienda en el aprendizaje de la estadística, sobre todo por la facilidad que da al estudiante la comprensión de los conceptos y puede ver visualmente la variabilidad de los procesos.

En la literatura, se encuentran variadas experiencias en simulaciones y actividades realizadas con diversos software computacionales para el aprendizaje de la estadística.

Una investigación realizada en el año 2006 por Insuza, muestra el resultado del trabajo al estudiar las distribuciones muestrales utilizando el software Fathom. En este, se da cuenta de que los estudiantes pudieron evaluar procesos al manipular los parámetros y datos en varias distribuciones de probabilidad, comenta qué favoreció el aprendizaje, pero los estudiantes seguían cometiendo errores en el uso de las representaciones numéricas. La comprensión de conceptos y de las distribuciones muestrales fueron muy superficiales.

En el año 2007, Retamal, Alvarado y Rebolledo realizaron una metodología de aprendizaje de las distribuciones utilizando el software @Risk con estudiantes de ingeniería. Ellos indican que el uso de la tecnología es fundamental para una comprensión de las distribuciones muestrales. En otra investigación, Ramírez (2008) utilizó el software Fathom para una comprensión de la distribución normal y concluyó que el software contribuyó a que los estudiantes pudieran rectificar las conceptualizaciones equivocadas que poseían acerca de la distribución trabajada; también pone énfasis en que los datos a trabajar sean reales, con un contexto cercano a los estudiantes y con una correcta utilización del lenguaje y simbología matemática. Las investigaciones realizadas dan cuenta de que las distribuciones muestrales crean una concepción reconocida como difícil para muchos estudiantes. Chance, delMas y Garfield (2002), estiman que para comprender las distribuciones muestrales, los estudiantes deben comprender muchos conceptos previos de estadística, por ejemplo muestra, población y variabilidad. Por otro lado, Moore (1992), relaciona los inconvenientes para comprender las distribuciones muestrales con el tipo de manera en que se enseñan, él menciona que la educación tradicional dificulta su aprendizaje y comprensión. Tomando en cuenta los obstáculos que la matemática pone

en la comprensión de conceptos estadísticos Lipson(2002), propone un trabajo con simulación computacional. Este autor, afirma que este proceso está más relacionado con la inferencia real y se necesitan menos antecedentes matemáticos y probabilísticos por parte de los estudiantes. En un artículo publicado por Garfield, Chance y DelMas, (2004), acerca de las tecnologías usadas en cursos de estadística en las universidades, se menciona que Fathom es un software con un entorno de aprendizaje dinámico para el análisis de datos, que permite una buena visualización de simulaciones. El software Fathom, fue desarrollado pensando en estudiantes de secundaria, pero hace algún tiempo está siendo usado en cursos de estadística de nivel universitario.

La ventaja de utilizar un software estadístico es que permite que los estudiantes tengan una mejor visualización de los conceptos y procesos estadísticos. En los últimos años, donde la tecnología es parte de la vida cotidiana, los estudiantes reciben variada información desde la televisión, la radio, aplicaciones en el celular y redes sociales, lo que hace que se preste atención a muchas cosas a la vez y, al mismo tiempo, no se logre profundizar en los temas. Es por esto que el educador estadístico debe ir moldeando sus actividades, con el fin de permitir un mayor acceso de parte de los estudiantes hacia el contenido a trabajar. En el artículo publicado por Snell y Peterson (1992), se plantea que hace falta investigación sobre maneras de relacionar la estadística y la tecnología, así como también, investigar acerca del real impacto del uso de ella en el aprendizaje, ya que la mayoría de las investigaciones se basan en mostrar estrategias, muy pocas analizan la huella que deja en los estudiantes la comprensión de los conceptos usando la tecnología.

1.4. Software Fathom

De acuerdo a lo revisado en investigaciones relacionadas con educación estadística, específicamente con distribuciones muestrales, autores destacados como Garfield, Ben-Zvi (2004) y Batanero (2001) aconsejan el uso de tecnología para el estudio de ese contenido, ya que permite una mejor visualización por parte del estudiante, contribuyendo así a una mejor comprensión de los conceptos. En esta particular investigación se optó por el software Fathom ya que cumple con ciertas características que hacen que éste sea un software muy amigable y eficiente para contribuir en el aprendizaje de conceptos de estadística, así también en la comprensión de distribuciones muestrales y aplicaciones.

Es un software con una interfaz cercana al usuario que sirve para desarrollar diversos procedimientos en diversas áreas de educación matemática. Sin embargo, su mayor fortaleza se encuentra en el área de la estadística, ya que permite simulación lo que ahorra una cantidad de tiempo y permite a los estudiantes visualizar diversos contenidos.

La siguiente imagen muestra la interfaz del software Fathom con algunas de sus funciones:

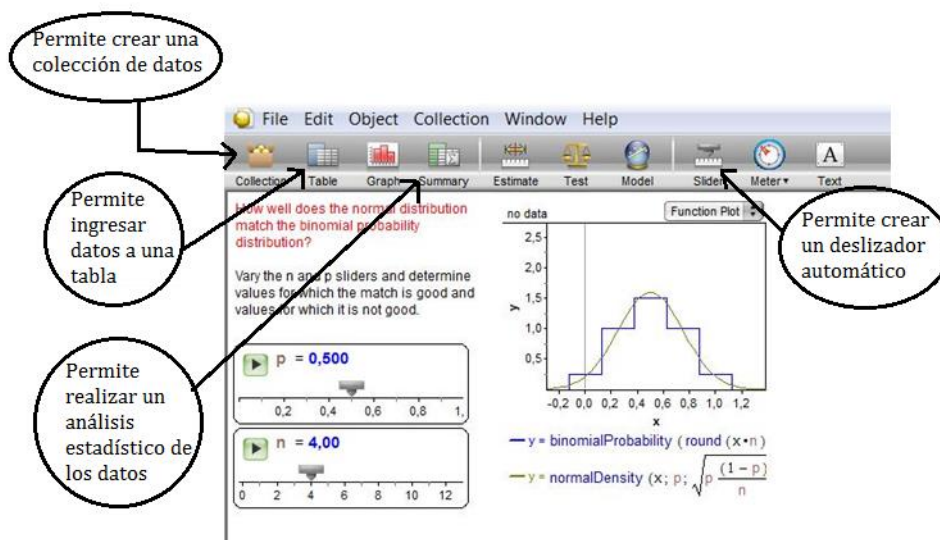


Figura 1.2: Interfaz del Software Fathom

Con la revisión de la literatura y la elección del software con el que se trabajará, la pregunta de investigación se procede a desarrollar la estrategia de enseñanza, la que será detallada en el siguiente capítulo.

Capítulo 2

Metodología

En este capítulo se detalla la metodología utilizada en la investigación, lugar y personas participantes del estudio, elección de secuencia a trabajar por parte del profesor y de los estudiantes. También, se muestran cuáles fueron las actividades y la finalidad de cada una de ellas.

2.1. Participantes en la investigación

Los sujetos participantes de esta investigación están divididos en dos grupos: el primer grupo (A) que corresponde a 35 estudiantes de tercer año de enseñanza media chilena, cuyas edades fluctúan entre los 15 y los 18 años. En la educación chilena, específicamente en el área de la matemática, existe un eje a trabajar durante toda la educación formal, este eje se llama datos y azar que incluye contenidos de Estadística y Probabilidades. En este eje la distribución binomial es un contenido dentro del programa de tercer año de enseñanza media, dictaminado por el Ministerio de Educación chileno. Sin embargo, previo a trabajar este contenido, los estudiantes deben haber trabajado con medidas de tendencia central, medidas de dispersión y variable aleatoria.

El segundo grupo, (B), corresponde a 20 estudiantes de primer año de la carrera de Ingeniería en Estadística de la Universidad de Valparaíso, cuyas edades fluctúan entre los 18 y los 20 años. La distribución de Poisson es un contenido dentro del programa de la asignatura de Métodos Estadísticos, asignatura inserta en la malla curricular de la carrera.

Antes de iniciar la enseñanza de ambas distribuciones, los alumnos habían estudiado algunos conceptos estadísticos: representaciones gráficas, medidas de posición central y dispersión. Al partir la secuencia de enseñanza de la distribución binomial y distribución de Poisson, se conversó con los estudiantes de ambos grupos acerca de la investigación que se estaba realizando, y se les solicitó autorización para grabar las clases y máxima colaboración, a lo cual ellos accedieron firmando su declaración.

2.2. Instrumentos de recolección de datos y procedimientos de trabajo

Los instrumentos utilizados para la recolección de información fueron: cuestionarios, notas, grabación de clases y resumen al final de cada actividad.

Se llevaron a cabo 3 sesiones para cada curso, dispuestas de la siguiente manera:

- Una sesión dedicada al diagnóstico.
- Una sesión de clases para entregar el contenido.
- Una sesión posterior a la actividad.

Las sesiones tuvieron duración de 90 minutos y al final de cada sesión, se realizó una retroalimentación de lo trabajado y se expuso los resultados obtenidos. Los cuestionarios se desarrollaron en forma individual y en las actividades dadas durante el desarrollo de las clases no se limitó el intercambio de opinión entre los compañeros, sino que se intencionó a la reflexión y discusión colectiva de las actividades realizadas. La profesora aclaraba dudas cuando era necesario y realizaba preguntas claves para resaltar aspectos relevantes de los contenidos trabajados.

2.3. Selección y características de las actividades

Las actividades realizadas se crearon con un orden secuencial de desarrollo de aprendizajes, puesto que los contenidos trabajados en la actividad previa eran necesarios para la actividad siguiente.

2.3.1. Confección del cuestionario exploratorio

Se confeccionó un cuestionario exploratorio con el fin de diagnosticar cuáles eran los conceptos que ya comprendían los estudiantes. Como menciona Sorto (2006), el docente debe saber acerca de los conocimientos con que cuenta el estudiante para poder trabajar sobre una base. Además, Garfield (2002) señala que para que el estudiante logre una comprensión de la distribución cualquiera que sea, debe manejar conceptos como población, muestra, variabilidad.

El cuestionario exploratorio posee 9 preguntas enfocadas a población, muestra, variación, variable aleatoria, función de probabilidad, de distribución y esperanza de una variable aleatoria. A continuación, los cuadros muestran el objetivo a cubrir con cada una de las respuestas realizadas.

Pregunta	Objetivo
<ul style="list-style-type: none"> • ¿Qué entiendes por población en estudio? • ¿Qué entiendes por muestra aleatoria? 	<p>La primera y segunda pregunta fueron escogidas para identificar qué entiende el estudiante por población y por muestra aleatoria. De acuerdo a la información recogida en el marco teórico, los estudiantes tienen complicaciones al diferenciar la población de la muestra y se les dificulta identificar métodos que sirven para escoger una muestra aleatoria. Ambas preguntas se encuentran en la categoría de alfabetización estadística, revisada en el primer capítulo.</p>
<ul style="list-style-type: none"> • Los siguientes conjuntos de datos corresponden a las temperaturas de dos ciudades. Calcula el promedio y la desviación estándar de las temperaturas. • Con la información de la pregunta 3, ¿cuál ciudad crees que tiene mayor variación de temperaturas? • Si pudieras ir de vacaciones a una de esas dos ciudades, ¿cuál escogerías? ¿Por qué? 	<p>La tercera, cuarta y quinta pregunta fueron seleccionadas para identificar si el estudiante era capaz de realizar cálculos correctamente, identificar cuál de las dos muestras posee mayor variación y decidir, considerando la desviación estándar, ya que el promedio es el mismo en ambas muestras. Estas preguntas apuntan a identificar si el estudiante está razonando con la información estadística obtenida.</p>

Pregunta	Objetivo
<p>Se sabe que los estudiantes que ingresan a primer año de universidad tienen una edad promedio estimada de 20 años. Si en una muestra de 5 personas, las edades de 4 de ellos es: 18, 19, 20, 19, respectivamente. ¿Cuál es la edad esperada para la quinta persona?</p>	<p>La pregunta 6 del cuestionario exploratorio, fue seleccionada para identificar si el estudiante distingue entre esperanza poblacional y media muestral. De acuerdo a la investigación realizada por Batanero(2001), la mayoría de los estudiantes respondería que la edad de la quinta persona es 24, lo cual es un error, ya que esa sería la edad para que la media muestral fuera de 20 años.</p>
<p>Sea X la variable aleatoria definida por el número de respuestas correctas en una prueba de 5 preguntas.</p> <ul style="list-style-type: none"> • ¿Cuál es la función de probabilidad que representa a X? • ¿Cuál es la función de distribución de la variable aleatoria X? • ¿Cuál es la esperanza de la variable aleatoria X? 	<p>De acuerdo a la secuencia de contenidos trabajados en ambos grupos, las preguntas 7, 8 y 9 corresponden a contenidos trabajados previos a la investigación. Se escogieron estas tres preguntas para identificar si el estudiante era capaz de proponer una función de distribución para la variable aleatoria. Según la recopilación de información detallada en el capítulo 1, el estudiante debe conocer y comprender el concepto de variable aleatoria como requisito para el estudio de las distribuciones muestrales.</p>

Una vez que se realizó la aplicación del cuestionario, se realizarn las clases a los estudiantes, las cuales se detallan a continuación.

2.3.2. Confección de las clases realizadas a los estudiantes

La distribución binomial y de Poisson, corresponden a distribuciones de variable aleatoria discreta más utilizadas, es por eso que fueron escogidas para realizar esta investigación. El aprendizaje de ambas distribuciones contribuye a la creación de una base para el aprendizaje y comprensión de las distribuciones de variable continua.

Para la confección de las actividades propuestas para entregar el conocimiento de las distribuciones de Poisson y binomial se consideraron recursos didácticos propuestos por Alvarado (2004), los cuales son:

- Representación manipulativa: se trabaja con material concreto (fichas y monedas), papel, lápiz y calculadora, no se realizan cálculos algebraicos. El trabajo realizado es empírico y se trabaja con gráficos y representaciones sencillas. El lenguaje utilizado es poco abstracto.
- Representación computacional: permite incrementar la cantidad de gráficas dinámicas. Se estudian ejemplos y contraejemplos, se prefiere el lenguaje inductivo.
- Representación algebraica: utiliza un lenguaje representativo y una demostración deductiva. Se trabaja con técnicas analíticas.

2.3.3. Confección de la lección de la distribución binomial

Estas actividades fueron desarrolladas para estudiantes de tercer año medio y, como lo sugiere la *GAISE*, el trabajo debe ser contextualizado de acuerdo a la realidad del estudiante, por lo que se escoge trabajar con el juego virtual Pokémon Go. El juego original consiste en capturar pokemones lanzándoles una pokebola de manera virtual. Sin embargo, para desarrollar la clase se trabajó con material concreto, es decir, se llevó una pelota de tenis la que representaba a una pokebola y se llevaron figuras pequeñas las que representaban a los pokemones, después se continuó con uso de tecnología, específicamente el software Fathom y posteriormente se formaliza con representación algebraica.

Primero se trabaja con la representación manipulativa, en la cual los estudiantes lanzan la pelota a una distancia de la figura que representa el pokemon y anotan cuántas veces aciertan y cuántas no.

En la representación computacional, se simularon 10 lanzamientos por estudiante y luego se tomó una muestra de 35 estudiantes y se contaron cuántas veces lograron capturar al pokemon. Como se comentó en el primer capítulo, se utilizará el software Fathom para las simulaciones.

Finalmente, en la representación algebraica se les presentó a los estudiantes la distribución binomial y se les pidió que calculen probabilidades de manera teórica para comparar sus resultados con los obtenidos de manera experimental con el juego de la pokebola.

Como cierre de la actividad, se plantearon preguntas para que los estudiantes valoricen la utilización de la estructura algebraica y puedan contrastar con los resultados obtenidos de manera empírica.

2.3.4. Confección de la lección para la distribución de Poisson

Esta clase se desarrolló para estudiantes de primer año de Ingeniería en Estadística de la Universidad de Valparaíso. Se realizaron 5 actividades, las cuales siguen una secuencia de orden que se mostraron en una presentación incluyendo imágenes atrayentes.

La primera actividad se desarrolló siguiendo las recomendaciones de la *GAISE*, donde dice que el contexto de los contenidos debe ser cercano a los estudiantes, por lo que se les presentan situaciones problemáticas en las que ellos puedan intuir una respuesta de acuerdo a la información que adquieren en el diario vivir. Las preguntas fueron:

- ¿Cuántas fallas crees que tiene un computador personal antes de llegar a las 1000 horas de funcionamiento?
- ¿Cuántos defectos crees que hay en un centímetro cuadrado de tela?, ¿y en un metro cuadrado?
- ¿Cuántas estrellas hay en un determinado espacio de cielo?
- ¿Cuántos siniestros por póliza de seguro, sufre un asegurado de cierta aseguradora de automóviles?

Una vez que los estudiantes dieron sus respuestas, se procedió a completar tablas con la información y se les pidió a los estudiantes que realicen un gráfico manual de cualquiera de los ejemplos trabajados, pero adicionando la información propuesta por el resto de sus compañeros. También se les pidió que calcularan las medidas de tendencia central para analizar descriptivamente los datos recogidos de sus compañeros.

Se intencionó el trabajo para que los estudiantes visualizaran que las situaciones planteadas pueden tener como respuesta cero o también pueden ser infinitas, ya sea, las fallas antes de 1.000 horas de funcionamiento, o la cantidad de defectos en un metro de tela o infinitas estrellas en un centímetro cuadrado de cielo.

La segunda actividad, fue formalizar las características de la distribución de Poisson y pedir a los estudiantes que den ejemplos de algunas situaciones de la vida real que se distribuyan siguiendo la distribución de Poisson.

La tercera y cuarta actividad, se enmarcaron dentro de la recomendación de la *GAISE*, acerca del uso de la tecnología y de simuladores computacionales en la enseñanza de la estadística. Se les pidió a los estudiantes que compartieran la información obtenida y se procede a graficar usando el software Fathom.

En la cuarta actividad, se trabajó con una base de datos real, acerca de los siniestros sufridos por los asegurados de una aseguradora de automóviles durante un año. Los estudiantes pudieron visualizar la influencia del promedio en la gráfica de la distribución y se realizó una simulación a través de un deslizador interactivo que posee el software, *slider*, el que va mostrando de manera simulada diversos valores para el parámetro, para que los estudiantes analicen la relación entre el valor del parámetro y la gráfica.

Una de las ventajas que se obtuvo al trabajar con el software Fathom es la rapidez de los procesos al realizar las simulaciones. También el uso del deslizador interactivo, permitió a los estudiantes visualizar el cambio en la gráfica cuando se realizan variaciones en el parámetro.

La quinta actividad, correspondió a la representación algebraica propuesta por Alvarado (2004), se presenta la distribución de Poisson de una manera formal, se analizan los parámetros de la distribución y cómo influye el valor del parámetro en la forma de la gráfica. Se realizaron las siguientes preguntas:

- ¿Qué observas en la gráfica?
- Describe el efecto del cambio del parámetro
- ¿Qué ocurre cuando el parámetro aumenta?
- ¿Qué ocurre cuando el parámetro disminuye?
- Añade 1000 casos más a la muestra y describe lo que ocurre.

Como cierre de la actividad, se les plantea la siguiente actividad a los estudiantes, deben desarrollarla en parejas, con el fin de motivar el trabajo colaborativo dentro de la asignatura.

Ejercicio

A continuación se presentan tres tablas de frecuencias, realiza un gráfico e indica cuál o cuáles podrían corresponder a distribución de Poisson

Experimento biológico

Cantidad de células por cuadrante	Cantidad de cuadrantes observados
0	75
1	103
2	121
3	54
4	30
5	13
6	2
7	1
8	0
9	1

Cantidad de kilos de fruta que compran cierta cantidad de familias

Kilos de fruta	Cantidad de familias
1	5
2	12
3	26
4	30
5	27
6	21
7	8

Cantidad de anotaciones en la liga de fútbol

Número de anotaciones	Número de veces observadas
0	35
1	99
2	104
3	110
4	62
5	25
6	10
7*	3

Figura 2.1: Actividad propuesta a los estudiantes

La aplicación y los resultados se analizaron en el siguiente capítulo.

2.4. Instrumentos de recogida de datos

A continuación, se detalla la metodología utilizada para la evaluación del trabajo por parte de los estudiantes. La evaluación debe ser trabajada como una etapa más del proceso de aprendizaje, y no debe ser un proceso excluyente, sino un proceso formador. Para evaluar los procesos de aprendizaje en estadística, se deben considerar dos tipos de evaluación, según lo sugerido por Gal (1997). El primer tipo, es preguntar sobre la lectura directa de datos, definiciones o aplicación de las propiedades, donde las respuestas puedan ser categorizadas como correctas o incorrectas. Y, en segundo lugar, para analizar el razonamiento estadístico del estudiante, se deben realizar preguntas abiertas, donde se le permita al estudiante expresar y mostrar de diversas maneras de cómo está desarrollando su razonamiento estadístico. Además, se necesita recoger información acerca del proceso que está realizando para poder argumentar la adquisición de conocimiento acerca del tópico en cuestión.

2.4.1. Confección cuestionario evaluativo distribución binomial

El cuestionario fue confeccionado con ejercicios de elaboración propia. A continuación se muestra el objetivo de algunas preguntas realizadas a los estudiantes.

Pregunta	Objetivo
¿Qué observa en las gráficas para los distintos valores de los parámetros?	Con esta pregunta se desea verificar si el estudiante razona acerca de cómo el tamaño de la muestra está relacionado con el gráfico a trabajar. También, se pretende verificar si el estudiante identifica la proporción y su influencia en la forma del gráfico.
<p>En un proceso de fabricación de tornillos se sabe que el 2% son defectuosos. Los empaquetamos en cajas de 50 tornillos.</p> <p>a) <i>Calcula la probabilidad de que en una caja haya un tornillo defectuoso.</i></p> <p>b) <i>Calcula la probabilidad de que en una caja haya más de dos tornillos defectuosos.</i></p>	Con la pregunta a) se desea verificar si el estudiante es capaz de identificar los datos del problema y los relaciona con los componentes de la fórmula de la distribución binomial. La pregunta b), fue diseñada para verificar si el estudiante comprende el concepto de complemento y lo aplica para calcular una probabilidad

Cuadro 2.1: Objetivos de preguntas

El proceso de aplicación y resultados del cuestionario se explicarán en el capítulo de aplicación y se detallarán las conclusiones.

2.4.2. Confección cuestionario evaluativo distribución de Poisson

El cuestionario de la distribución de Poisson se diseñó para analizar la comprensión que tiene el estudiante de la distribución y verificar si aplica bien los conceptos trabajados en clases.

Ejemplo de pregunta: *Los siguientes datos corresponden a la cantidad de incendios ocurridos por mes en cierta ciudad del país. Calcula las probabilidades experimentales y teóricas y determina si puedes concluir que los datos se distribuyen Poisson. Realiza una gráfica de los datos.*

Número de incendios por mes	Número de veces observados	Frecuencia relativa	Probabilidad teórica
0	15		
1	32		
2	35		
3	21		
4	10		
5	4		
6	1		

Con esta pregunta, se desea dilucidar si el estudiante reconoce de manera intuitiva la distribución, se apoya en la gráfica para tomar una decisión y es capaz de aplicar la fórmula de la distribución para calcular las probabilidades de manera teórica.

En este capítulo, se mostró el diseño y selección de las actividades. Como se mencionó anteriormente, se trabajó con dos grupos diferentes y se les aplicó la secuencia realizada en este capítulo. En el siguiente capítulo se muestran los resultados de la aplicación de la secuencia detallada.

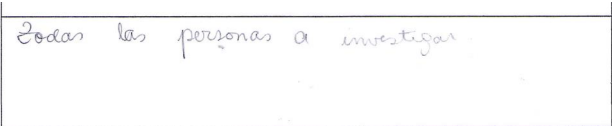
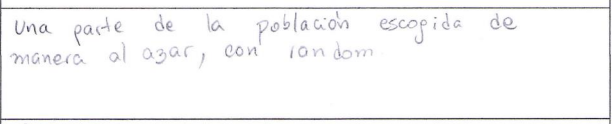
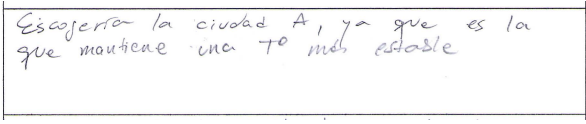
Capítulo 3

Aplicación

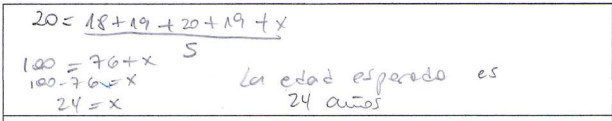
En este capítulo, se explica el proceso de aplicación del cuestionario exploratorio y las conclusiones obtenidas de ese proceso. También, se detalla el desarrollo de las clases de distribución binomial y de Poisson a los respectivos grupos de estudiantes, se muestran ejemplos de los diálogos de los alumnos con la profesora y se detallan los resultados obtenidos en los cuestionarios para evaluar el aprendizaje.

3.1. Análisis del cuestionario diagnóstico

El cuestionario diagnóstico fue respondido por la totalidad de los estudiantes, de ambos grupos, en forma individual, sin apoyo de software computacional. El objetivo de este cuestionario era determinar los conocimientos previos que tenían los estudiantes y constó de 9 preguntas. A continuación, algunos ejemplos de respuestas de los estudiantes:

Respuesta	Observación
<p>¿Qué entiendes por población en estudio?</p>  <p>“Todas las personas a investigar”</p>	Esta respuesta está categorizada como una alfabetización estadística inicial
<p>¿Qué entiendes por muestra aleatoria?</p>  <p>“Una parte de la población escogida de manera al azar, con Random”</p>	Al igual que la anterior, esta respuesta corresponde a una alfabetización estadística inicial
<p>Si pudieras ir de vacaciones a una de esas dos ciudades, ¿cuál escogerías? ¿por qué?</p>  <p>“Escogería la ciudad A, ya que es la que mantiene una Temperatura más estable”</p>	Esta respuesta corresponde a la categoría razonamiento estadístico, ya que ocupa el resultado de un algoritmo matemático para emitir una opinión.

Cuadro 3.1: Respuestas de estudiantes.

Respuesta	Observación
<p>Se sabe que los estudiantes que ingresan a primer año de universidad tienen una edad promedio estimada de 20 años. Si en una muestra de 5 personas, las edades de 4 de ellas son: 18, 19, 20 y 19, respectivamente. ¿Cuál es la edad esperada de la quinta persona?</p>  <p>“La edad esperada es 24 años”</p>	<p>Esta es la pregunta en que la mayoría de los estudiantes erró, ya que confundieron la media muestral con la esperanza de una población. De acuerdo a lo expuesto en el primer capítulo, es un error común entre los estudiantes que comienzan sus estudios en estadística.</p>

Cuadro 3.2: Respuestas de estudiantes.

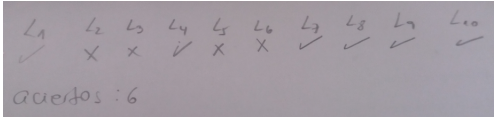
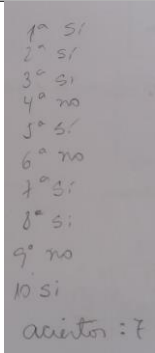
Los estudiantes se mostraron interesados en la retroalimentación una vez entregada la corrección del cuestionario, se respondieron dudas y se aclararon errores conceptuales.

3.2. Conclusiones del cuestionario diagnóstico

En general, los estudiantes respondieron de manera correcta a la mayoría de las preguntas, a excepción de la pregunta número 6, donde los estudiantes confunden el valor esperado con un dato faltante en la muestra. Solo 8 de los 55 estudiantes que contestaron el cuestionario, respondieron correctamente esa pregunta. Se concluye también que los estudiantes cuentan con la base de conocimientos mencionada por Garfield (2002), para comenzar a estudiar las distribuciones muestrales.

3.3. Análisis de la clase de distribución binomial

Esta clase fue aplicada a estudiantes de tercer año medio, por lo que cuando se les presentó la actividad de lanzar una pokebola y pegarle al pokemón, los estudiantes se mostraron motivados y comenzaron a jugar y a realizar apuestas acerca de los lanzamientos de sus compañeros. Cada estudiante debía realizar 10 lanzamientos y anotar cuántas veces acertaba. Los aciertos de los estudiantes fueron registrados para su posterior análisis. A continuación, se muestran algunos registros realizados por los estudiantes.

Aciertos contados en forma horizontal	Aciertos contados en forma vertical
	

Cuadro 3.3: Respuestas de estudiantes.

Se puede observar que los estudiantes no tienen la misma manera de registrar sus observaciones, algunos se mostraban inseguros al verificar que su compañero registraba datos de una manera diferente.

Al pasar a la etapa de la utilización de software, se presentaron algunas dificultades, ya que algunos alumnos querían seguir jugando con el material manipulativo. Una vez que la totalidad de los estudiantes estuvieron dispuestos a trabajar con el software, se procedió a realizar las simulaciones de lanzamientos. Los estudiantes visualizaron que las simulaciones eran similares, pero no iguales a lo realizado previamente con las pokebolas. A continuación, se muestra una de las simulaciones que arrojó el software Fathom para aciertos en 10 lanzamientos.

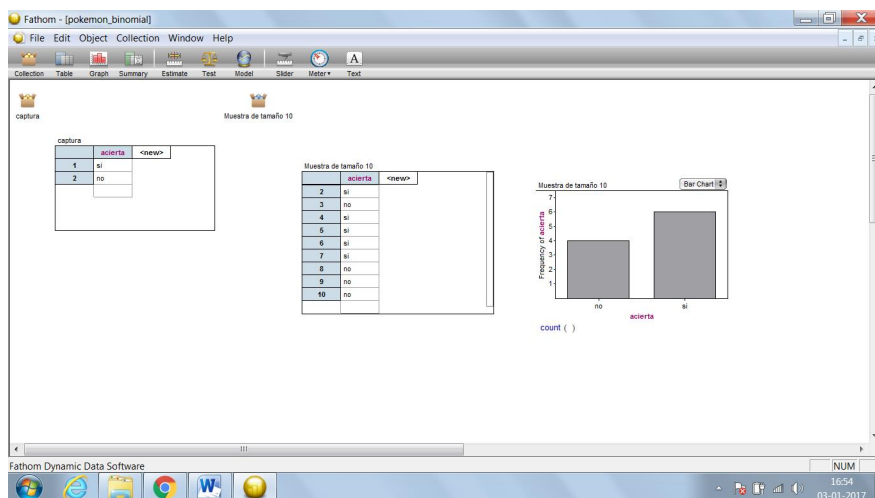
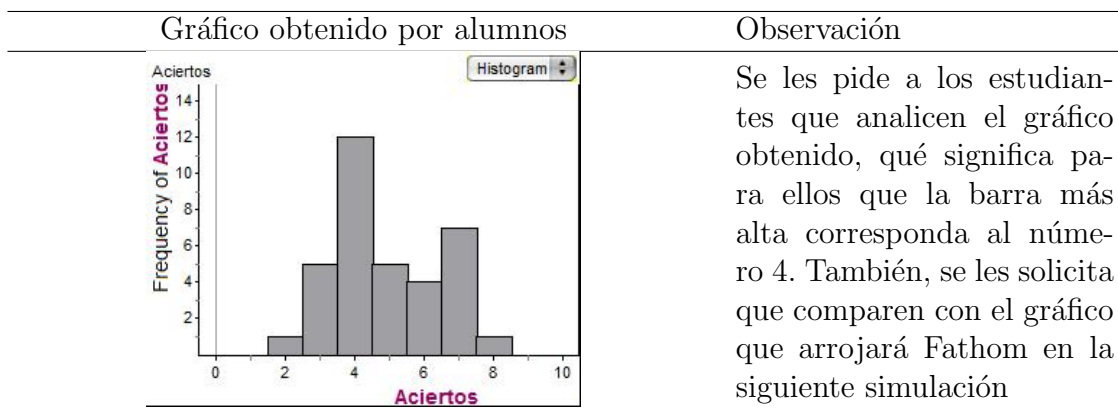


Figura 3.1: Simulación 10 lanzamientos

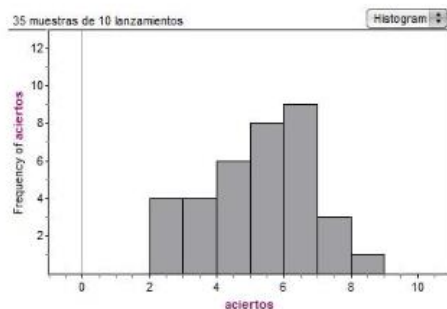
Los estudiantes se mostraron interesados por la simulación y querían seguir simulando varias veces, hasta encontrar una simulación idéntica a la obtenida por ellos en forma individual. Posterior a la simulación, se seleccionaron 35 muestras de 10 lanzamientos cada una, se escoge 35, porque en la sala de clases había 35 estudiantes y se quería realizar una comparación de muestras de igual tamaño. El gráfico de los estudiantes cuando juntaron su información quedó de la siguiente manera:



Al realizar una simulación de 35 muestras, el gráfico en el software Fathom quedó de la siguiente forma:

Gráfico simulado en Fathom

Observación



Los estudiantes se muestran sorprendidos al ver un gráfico diferente al de ellos, comienzan a preguntar y a mencionar que quizás ellos lo habían hecho mal.

Los estudiantes quisieron seguir simulando para lograr un gráfico similar al de ellos. Se les permitió la simulación y después de varios intentos lograron un gráfico similar. Una vez realizada las simulaciones se les pregunta a los estudiantes, en forma abierta, cuál es la cantidad de veces que ellos creen que acertarán a la pokebola si le dan 10 lanzamientos.

Ejemplo de diálogo profesora (P) alumna (A):

P: Si tuvieras 10 lanzamientos, ¿en cuántos crees que acertarías?

A: Yo creo que en 8, pero según las simulaciones es más probable que acerté a 4 o 5 o 6 veces.

P: Pero si tuvieras que elegir una sola cantidad, ¿cuál sería?

A: A ver, haga otra simulación para decidir.

P: Ok, (La profesora realiza otra simulación)

A: Ya, estoy segura, diría que estoy casi segura que acertaría 5 veces, pero también podría acertar más o menos, ¿y si calculamos probabilidades para todos los acierto para saber cuál es más alta?

Con la pregunta: ¿cuántas veces acertarías? los estudiantes responden de acuerdo a su experiencia previa, pero al preguntarles qué pensarían sobre cuántas veces otra persona distinta acertaría, ven la necesidad de buscar alguna manera teórica de responder esa pregunta.

Se les insta a que calculen probabilidades de acuerdo a lo realizado en forma experimental, deben responder las siguientes preguntas:

¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante acierte 4 veces?

¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante acierte menos de 7 veces?

Una vez que los estudiantes tienen sus respuestas, se les presenta la

estructura algebraica de la distribución binomial, se les pide que comparen sus respuestas obtenidas de manera empírica con las obtenidas de manera teórica. Para finalizar, se realizaron simulaciones en el software comparando las muestras obtenidas con la distribución binomial en forma teórica.

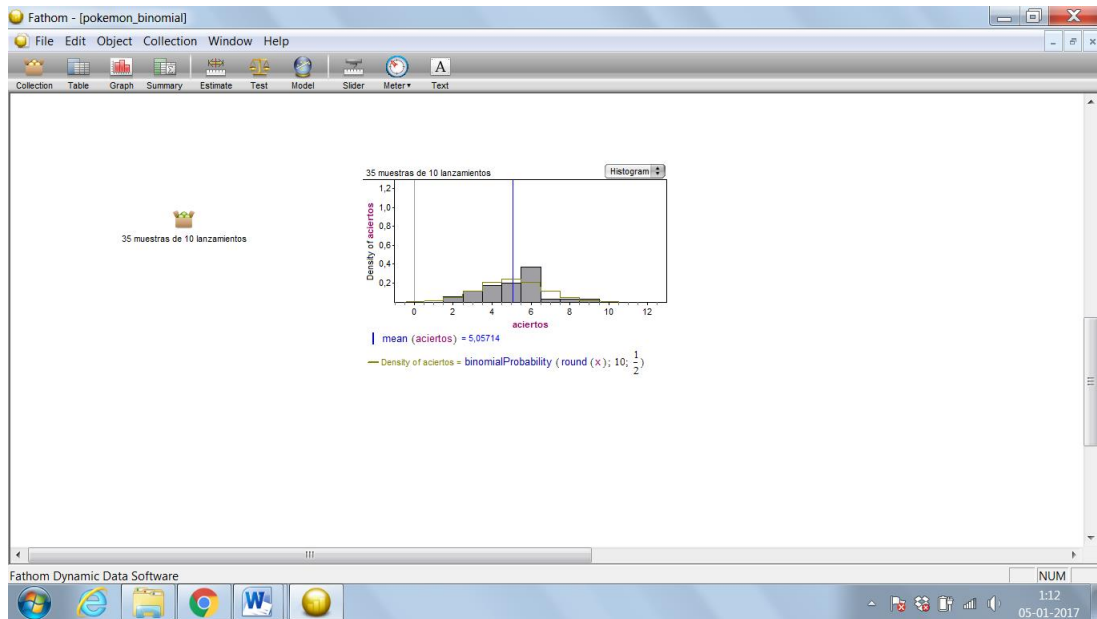


Figura 3.2: Simulación experimental versus teórica

En la clase siguiente se aplica el cuestionario de la distribución binomial, el que será analizado más adelante.

3.4. Conclusiones Clase distribución binomial

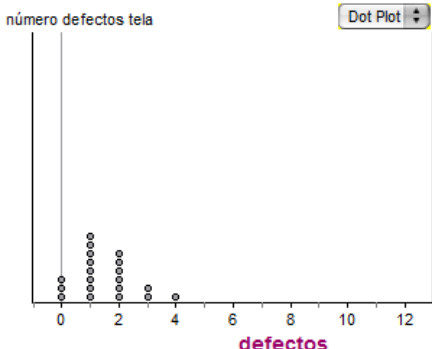
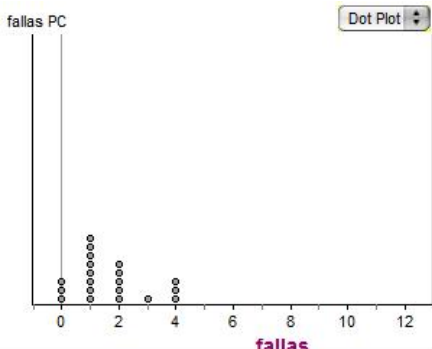
Uno de los grandes objetivos de la educación, es motivar a los estudiantes para que nazca en ellos el interés por resolver nuevos desafíos. En esta clase, al ser un contexto cercano a los estudiantes, ellos se mostraron abiertos y colaboradores para con su aprendizaje. Las reflexiones realizadas por ellos, observadas a través de preguntas abiertas y a alumnos en particular fueron enriquecedoras y dieron a conocer que los estudiantes se apropiaron del contenido, lograron responder preguntas aplicando una simulación y de manera teórica.

3.5. Análisis de la clase de distribución de Poisson.

A diferencia del trabajo realizado con el grupo A en la distribución binomial, los estudiantes del grupo B, son estudiantes que no requieren solicitudes de silencio u orden, están más dispuestos al aprendizaje, en la clase tienen sus materiales solicitados y trabajan de acuerdo a las instrucciones dadas.

Con la actividad motivacional, sobre responder preguntas, se mostraron muy motivados a responder y a compartir con sus compañeros las respuestas, luego se les solicita que como grupo curso confeccionen un gráfico con sus respuestas. Se les solicita que confeccionen gráficos utilizando la información como grupo curso.

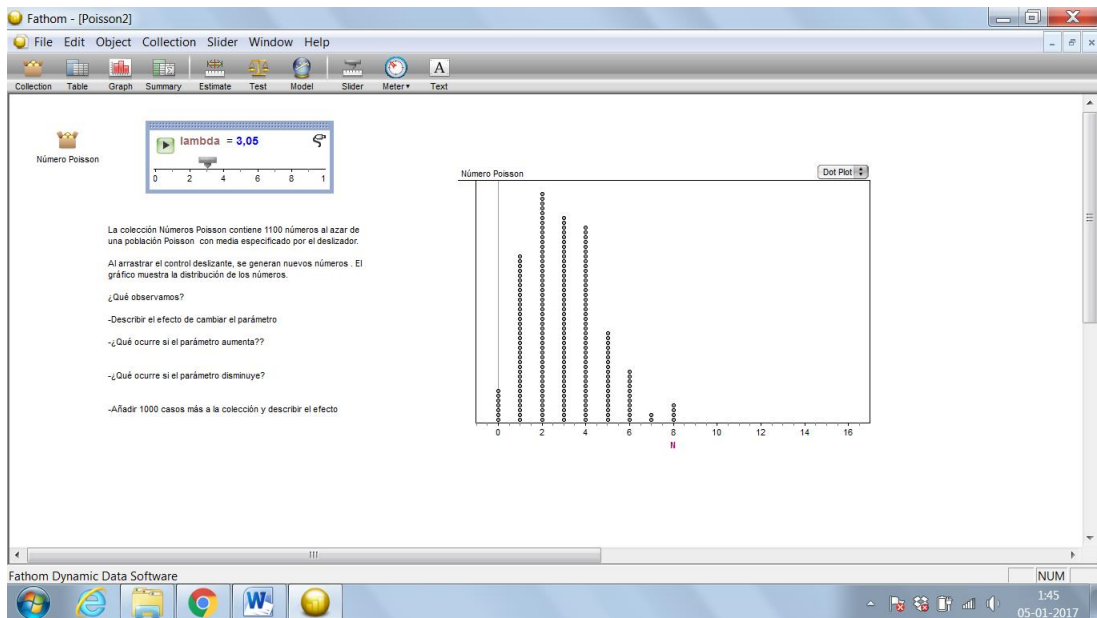
Resultados obtenidos:

Gráficos obtenidos	Observación
	<p>Correponde al número de defectos obtenidos en un centímetro cuadrado de tela</p>
	<p>Correponde al número de fallas de un computador personal antes de las 1.000 horas de funcionamiento</p>

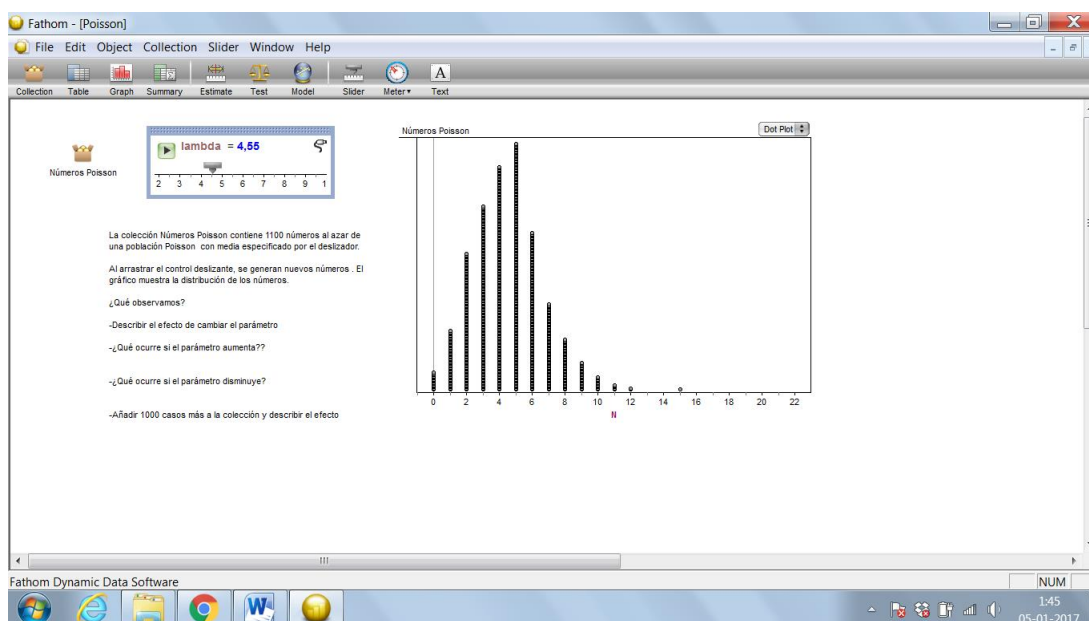
Se les presenta la distribución en forma teórica y se analizaron las partes y su aplicación con un ejemplo breve.

Los estudiantes se muestran interesados en aplicar la fórmula a los datos trabajados al inicio de la clase, algunos se complicaron calculando el promedio de los datos obtenidos.

Ellos mismos comenzaron a calcular las probabilidades en forma experimental y teórica para comparar resultados. En la siguiente actividad se les presentó el software y se procede a graficar los datos de los estudiantes con el fin de comparar los gráficos obtenidos. Los estudiantes se muestran interesados en lo amigable del software y su dinamismo. Posteriormente, se les presenta un gráfico de la distribución teórica de Poisson, con un parámetro dinámico (*slider*), donde los estudiantes puedan visualizar la influencia del parámetro en la gráfica.



Y luego se agregan más casos:



Se les pide a los estudiantes que respondan las preguntas propuestas en la aplicación, ejemplo de diálogo profesora (P) alumno (A): **P:** ¿Qué está ocurriendo con la gráfica?

A: Los datos se cargan a la izquierda cuando el parámetro es pequeño.

P: ¿Qué tan pequeño?

A: Cero

P: ¿Puede ser menor que cero?

A: No sé, pero creo que no. En todos los ejemplos que tenemos un número negativo no sirve.

P: ¿A qué te refieres con que “no sirve”?

A: Que es imposible que un computador falle en promedio $-3,4$ horas o que un pedazo de tela tenga -5 defectos.

Con los ejemplos trabajados, el estudiante intuye que un número negativo no forma parte de esta distribución. Algunos estudiantes solicitan ver varias veces la aplicación, se muestran cautivados por el software y quieren agregar más casos o ampliar el rango del parámetro. La profesora accede y los estudiantes visualizan y generan conclusiones cuando el parámetro está entre 0 y 10, entre 11 y 20 y mayor a 20. Para finalizar, se les pide a los estudiantes que analicen un conjunto de datos y determinen si pueden corresponder a una distribución de Poisson.

Al finalizar cada clase se realizó una retroalimentación y los estudiantes se mostraron satisfechos con el trabajo realizado y manifiestan una cercanía a los trabajos realizados con el software.

3.6. Conclusiones Clase distribución de Poisson

Durante la clase se presentaron diversas preguntas con el fin de que los estudiantes reflexionaran acerca del proceso de aprendizaje, ellos se mostraron receptivos y con ganas de participar, sus reflexiones mostraban una comprensión de lo trabajado de manera empírica, pero hubo que guiarlos para que lograran la comprensión de conceptos teóricos. Los estudiantes al momento de trabajar compartían reflexiones con el compañero, comentaban sus avances y verificaban si coincidían en las respuestas.

Para finalizar, los resultados obtenidos en este trabajo buscan entregar información acerca de cómo razonan los estudiantes y mostrar una metodología de enseñanza que mezcle tanto la concepción pedagógica como la concepción didáctica. Se espera que el uso de la tecnología y utilizar el contexto de los estudiantes para el aprendizaje de los contenidos sea una motivación para lograr el objetivo propuesto.

Capítulo 4

Conclusiones finales

En este trabajo, se ha presentado una estrategia didáctica para entregar el contenido de la distribución de Poisson y binomial a dos grupos de estudiantes. Las actividades fueron desarrolladas siguiendo los lineamientos mundiales que se proponen para la educación estadística, entre los que destacan problemas contextualizados dentro del entorno del estudiante y el uso de la tecnología para el desarrollo de las clases, en particular el uso de software de simulación Fathom.

A continuación se desglosan las conclusiones, las limitaciones, el aporte y las propuestas para futuras investigaciones.

4.1. Conclusiones respecto a los objetivos

El objetivo general es conducir el aprendizaje de las distribuciones de Poisson y binomial utilizando un software computacional. Para lograrlo se desarrolló la secuencia de actividades analizadas en los capítulos precedentes. La simulación que realiza el software Fathom permite que los estudiantes visualicen que los resultados obtenidos con el software son cercanos a los obtenidos al calcularlos con la fórmula. Esto conduce a que los estudiantes vean en el software una ayuda y les permite sentirse más empoderados con el conocimiento. Otra de las ganancias al utilizar simulaciones computacionales, es que realiza una retroalimentación de manera instantánea, lo que faculta que el estudiante se enfoque en el proceso de caracterización de la distribución,

más que en el cálculo de probabilidades siguiendo un algoritmo matemático.

De las actividades realizadas se puede concluir que mientras más cercano a la propia realidad del estudiante, mayor será su motivación y dedicación al aprendizaje de nuevos conocimientos y contenidos. El uso del software Fathom, al ser un software dinámico contribuyó al aprendizaje de los estudiantes y estos se mostraron interesados en explorar y conocer más utilidades que el software les puede ofrecer.

De acuerdo a la articulación que propone Regnier (2000), revisada en el primer capítulo, se puede concluir que el contrato didáctico logrado en el aula al realizar este trabajo, fue un contrato sólido que permitió una correcta trasposición didáctica de ambas distribuciones trabajadas. Al momento de crear la secuencia se consideró la epistemología tanto del profesor como la de los estudiantes, permitiendo que el proceso de enseñanza y aprendizaje se desarrollara tanto desde la concepción pedagógica como desde la concepción didáctica. Se logró que el estudiante se apropiara del saber que el profesor le estaba entregando.

4.2. Aportes del estudio

El principal aporte de este estudio es la secuencia de actividades que permitieron conducir el aprendizaje de las distribuciones de Poisson y binomial. También, lo es la articulación lograda al combinar el proceso de enseñanza - aprendizaje con la estadística, permitiendo que un contenido visto como lejano para los estudiantes, fuera interiorizado y visualizado en su diario vivir.

Otro aporte es la revisión de la literatura actual con respecto a la educación estadística y sus avances a lo largo de los últimos años.

La *GAISE*, propone el uso de la tecnología en la enseñanza de la estadística. Esta investigación permite dar a conocer y acercar a otros docentes el software Fathom, software interactivo, fácil de usar y con una interfaz amigable para el estudiante y el docente.

4.3. Limitaciones

Esta investigación fue diseñada de acuerdo al contexto actual de los jóvenes, y como todo proceso que incluye a la realidad puede haber limitaciones si la situación de los jóvenes cambia, por ejemplo, si pierden interés cosas como los juegos virtuales; en ese caso se debe modificar la actividad motivacional.

4.4. Propuestas futuras

Si se equipara la información acerca de cómo enseñar álgebra o geometría versus cómo enseñar estadística se encuentra escasa información con respecto a la última. Es por esto que se deben seguir realizando investigaciones que contribuyan a la enseñanza de la estadística en el área de la enseñanza y seguir investigando cómo es que aprenden nuestros estudiantes. Además, sería favorable fortalecer además la didáctica de la estadística, línea de investigación más reciente aún, junto con contribuir con material y estrategias de trasposición didáctica para los diversos tópicos del eje datos y azar, en el caso de los programas de estudio aportados por el Ministerio de Educación Chileno.

Referencias

1. Alvarado, H. (2004). Significado y comprensión de un teorema estadístico: Elementos básicos en el desarrollo profesional del profesor para una buena enseñanza. *Boletín de Investigación Educativa*, 19(1), 227 – 244.
2. Barone S. y Lo Franco E. (2010). TEFM Methodology for Statistics Education Improvement. *Journal of Statistics Education*. Volumen 18, Number 3.
3. Batanero C., Garfield J., Ottaviani M. y Truran J. (2002). Investigación en Educación Estadística: Algunas Cuestiones Prioritarias. *Journal Statistical Education Research Newsletter*.
4. Batanero C. (2001). *Didáctica de la Estadística*. Granada GEEUG. Universidad de Granada.
5. Ben-Zvi, J. Garfield. (2004). Statistical literacy, reasoning, and thinking: Goals, definitions, and challenges, In J. Garfield D. Ben-Zvi (Eds), *The Challenge of developing statistical literacy, reasoning, and thinking*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.
6. Brousseau, G. (2004). Investigaciones En Educación Matemática, Conferencia Plenaria, *XII Jornadas Nacionales De Educación Matemática*, Chile, 2004. Recuperado en junio 2007 desde <http://www.sochiem.cl/sochiem/documentos/XII/inicio.pdf>
7. Chervaney, N. (1977). A framework for the development of measurement instruments for evaluating the introductory statistics course, *The American Statistician*, 31, 17-23.
8. GAISE College Report ASA Revision Committee, *Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education College Report 2016*, <http://www.amstat.org/education/gaise>.

9. Gal, I. (1997). *The Assessment Challenge in Statistics Education* Amsterdam: IOS Press.
10. Garfield J. y Ben-Zvi.(2008). Preparing school teachers to develop studentsstatistical reasoning.In C. Batanero, G. Burrill, C. Reading A. Rossman(Eds.), *Proceedings of the Joint ICMI/IASE Study on Statistics Education in Scholl Mathematics: Challenges for Teaching and Teacher Education*. Montenegro, Mexico: ITESM.
11. Garfield, J. (2002). The Challenge of Developing Statistical Reasoning. *Journal of Statistics Education* [Online], 10(3). www.amstat.org/publications/jse/v10n3/garfield.html.
12. Garfiel, J. y Ben-Zvi, D.(2007). How students learn statistics revisited: A current review research on teaching and learning statistics. *International Statistics Review*.75(3), pp.372-396
13. Garfield, J., delMas, R. y Chance, B.(2002). *The Assessment Resource Tools for Improving Statistical Thinking Project*.NSF CCLI grant ASA-0206571.
14. Garfield, J., delMas, R. y Chance, B. (2004). Reasoning about sampling distributions. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds), *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking* (pp. 295-323). Netherlands:Kluwer Academic Publishers.
15. Hawkins, A., Jolliffe, F.y Glickman, L.(1992). *Teaching Statistical Concepts*, London:Longman Publishers.
16. Inzunsa, S. (2006). *Significados que estudiantes universitarios atribuyen a las distribuciones muestrales en un ambiente de simulación computacional y estadística dinámica*. (Tesis doctoral no publicada). CINVESTAT-IPN.Mexico.
17. Kilpatrick, J. (2003). Twenty years of French didactique viewed from the United States. *For the Learning of Mathematics*, 23 (2), 23–27.
18. Lipson, K. (2002). The role of computer based technology in developing understanding of the concept of sampling distribution. En B. Phillips (Ed.). *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics*. Cape Town South Africa.

19. Lovett, M. (2001). A Collaborative Convergence on Studying Reasoning Processes: A Case Study in Statistics, in Carver and Klahr (eds.), *Cognition an Instruction:Twenty-Five Years of Progress* (pp.347-384), Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.
20. McClain, Kay. (2008). The Evolution of Teachers' Understandings of Distribution, en Carmen Batanero, Gail Burrill, Chris Reading y Allan Rossman (eds.). *Joint ICMI/IASE Study: Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference*, Monterrey (México), International Association in Statistical Education.
21. Moore, D. (1992). *Perspectives on Contemporary Statistics*, MAA Notes No. 21, Washington, DC: Mathematical Association of America.
22. Ramírez Arce, Greivin. (2008). Formas de razonamiento que muestran estudiantes de maestría de matemática educativa sobre la distribución normal mediante problemas de simulación en Fathom. *Revista electrónica de investigación en educación en ciencias*, 3(1), 10-23.
23. Régnier, J-C, (2000). *Auto-évaluation et autocorrection dans l'enseignement des mathématiques et de la statistique. Entre praxéologie et épistémologie scolaire*. Note de HDR, Université Marc Bloch, Strasbourg.
24. Régnier, J-C. (2003). A propos de la formation en statistique. Approches praxéologiques et épistémologiques de questions du champ de la didactique de la statistique, *Questions éducatives. L'école et ses marges*, CRE Université de Saint-Etienne, France, n22 – 23, 157 – 201.
25. Retamal P, Lidia, Alvarado M, Hugo y Rebolledo V, Rodrigo. (2007). Comprensión de las distribuciones muestrales en un curso de Estadística para Ingenieros. *Ingeniare. Revista chilena de ingeniería*, 15(1), 6-17.
26. Ridgway, J., Nicholson, J., and McCusker, S. (2011). *Developing Statistical Literacy in Students and Teachers* In C. Batanero, G Burril, and C. Readings(Eds.). *Teaching Statistics in School Mathematics-Challenges for Teachings and Teacher*

Educacion.Springer:Dordrecht. New ICMI Study Series, Vol. 15, 311 – 322.

27. Serradó A.(2013) El Proyecto Internacional de Alfabetización Estadística, *Journal Números*, Volumen 83, 19-33
28. Sorto, Alejandra.(2006). "Identifying Content Knowledge for Teaching Statistics", Allan Rossman Beth Chance (eds.), *Working Cooperatively in Statistics Education. Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching of Statistics*, Salvador, Brazil.
29. Snell, L. y Peterson, W. (1992). Does the computer help us understanding statistic? En Florence, G. y Gordon, S. (Eds.): *Statistic for the Twenty-First Century*. The Mathematical Association of America MAA Notes, 26, 167 – 188.

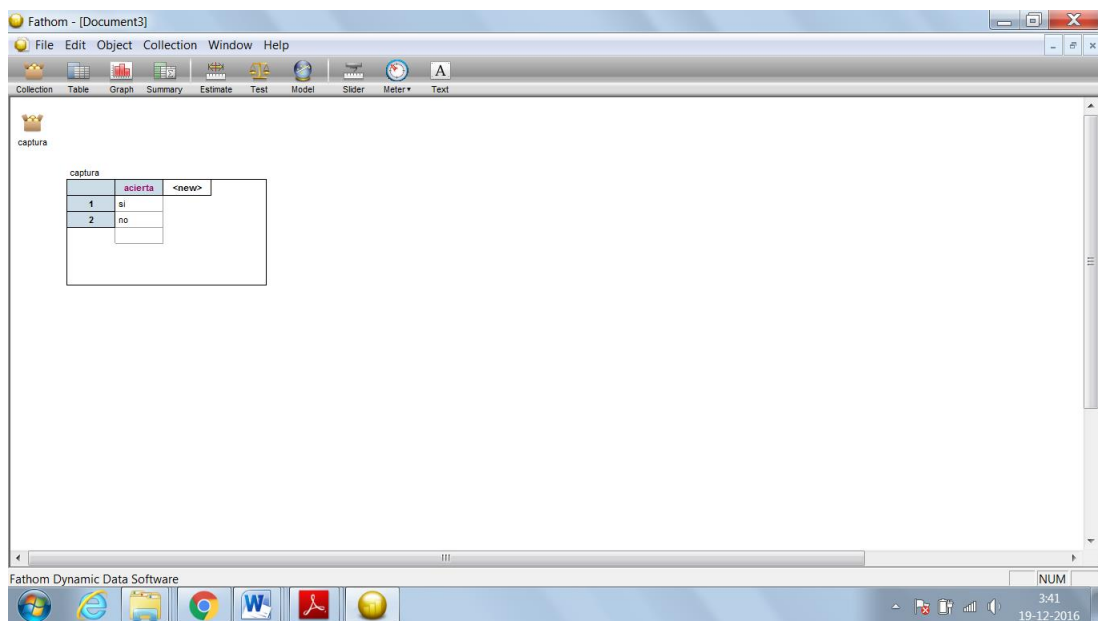
Apéndice A

Anexos

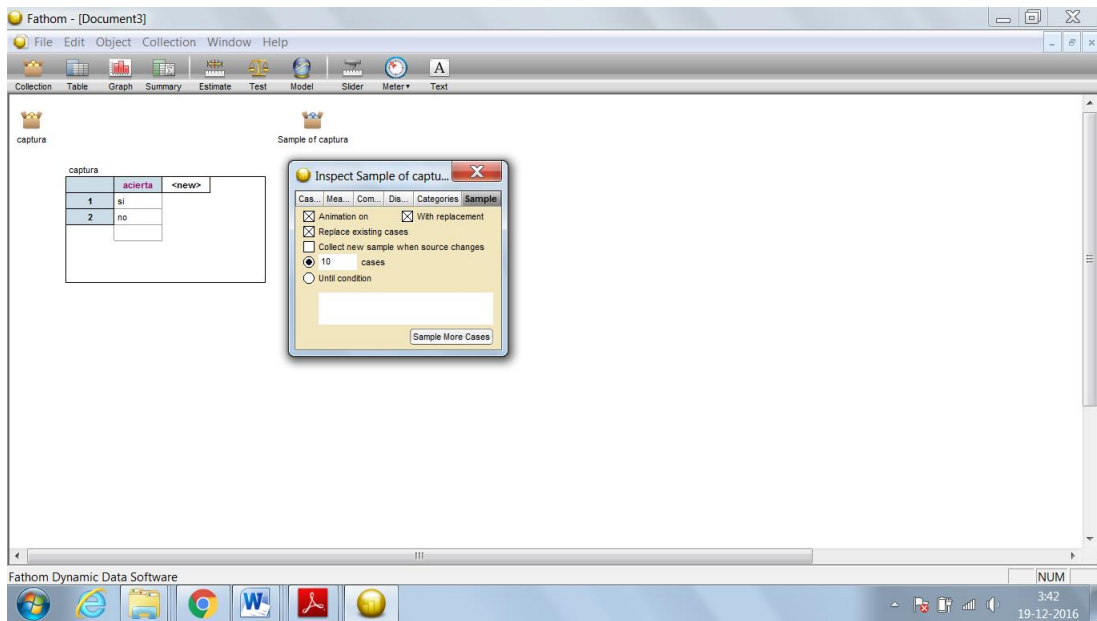
Instrucciones Fathom

Instrucciones para el trabajo con Fathom

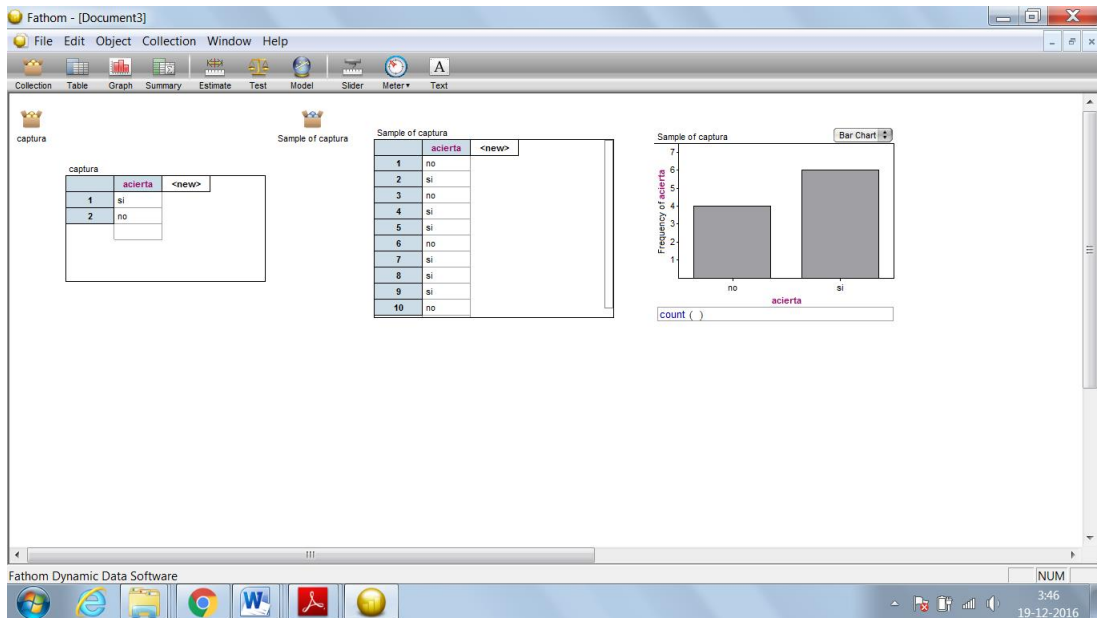
- 1) Crea una colección con las variables: acierta, no acierta



- 2) Crea una muestra de 10 lanzamientos



3) Crea una tabla e histograma para visualizar los aciertos de los 10 lanzamientos



4) Crea la medida contar los aciertos.

Fathom - [Document3]

File Edit Object Collection Window Help

Collection Table Graph Summary Estimate Test Model Slider Meter Text

captura

captura	acierto	<new>
1	si	
2	no	

Sample of captura

Sample of captura

Sample of captura

Bar Chart

Inspect Sample of captu...

Formula for aciertos

aciertos =

count (aciertos = "si")

Distributions

- Beta
- Binomial
 - binomialCumulative
 - binomialProbability
 - binomialQuantile

Cancel Apply OK

Fathom Dynamic Data Software

NUM

3:45
19-12-2016

5) Crea 35 colecciones de muestras

The screenshot shows the Fathom software interface. A dialog box titled "Inspect Measures from Sam..." is open, with the "Collect Measures" tab selected. The "Collect Measures" section has the following options:

- Animation on
- Replace existing cases
- Re-collect measures when source changes
- 35 measures
- Until condition

The background shows a table with the following data:

Sample of captura	acierta
2	no
3	no
4	no
5	no
6	si
7	si
8	no
9	si
10	no

To the right, a bar chart titled "Sample of captura" shows the "Frequency of acierta" for "no" (6) and "si" (4). The x-axis is labeled "acierta" and the y-axis is labeled "Frequency of acierta".

6) Grafica las colecciones de muestras

The screenshot shows the Fathom software interface. A histogram titled "Measures from Sample of captura" is displayed. The x-axis is labeled "aciertos" and the y-axis is labeled "Frequency of aciertos". The histogram shows a distribution of values from 0 to 12, with a peak frequency of 40 at the value 0.

The background shows a table with the following data:

Measures from Sample of captura	aciertos
66	3
67	6
68	6
69	6
70	4
71	7
72	6
73	5
74	4
75	5