UNIVERSIDAD DE VALPARAISO
Facultad de Ciencias Jurídicas, Económicas y Sociales
Instituto de Estudios Humanísticos

LOGICA MODAL: UNA MECANIZACION ALTERNATIVA PARA LA SEMANTICA DE LOS MUNDOS POSIBLES DE KRIPKE

001

Tesis para optar al grado Académico de Magister en Filosofía con mención en Lógica y Filosofía de las Ciencias

AUTOR TESIS: Wilfredo Quezada Pulido

PROFESOR GUIA: Carlos Verdugo Serna

1989

Gran parte del material que ofreceré aquí fue preparado y expuesto a propósito de encuentros nacionales e internacionales relacionados con el tema, realizados en los últimos tres años (Jornadas Nacionales de Filosofía de las Ciencias, Universidad de Santiago de Chile, 1987 y 1988, y XI Congreso Interamericano de Filosofía, Buenos Aires, 1989). Debo, por esta misma razón, ofrecer mis agradecimientos a quienes hicieron posible esta labor durante ese tiempo. En primer lugar, a la Universidad de Valparaíso, donde he cursado los estudios de Postgrado en Lógica y Filosofía de las Ciencias que ahora termino, y la que, mediante una beca extraordinaria, impidió que me alejara del programa de Magistratura por razones económicas. En esto, guardo un especial reconocimiento hacia las personas del profesor Julio Castro S., Director del Instituto de Estudios Humanísticos de dicha Universidad, y del condiscípulo y profesor Aldo Valle A., quienes gestionaron personalmente la obtención de tan importante beneficio. En segundo lugar, agradezco a la Universidad de Santiago de Chile, en la persona del profesor Miguel Orellana B., quien en 1988, siendo Director del Departamento de Filosofía, me propuso dictar mis lecciones de Lógica en el programa de Magistratura, dándome así una inestimable muestra de confianza.

Por último, agradezco a todos aquellos profesores, colegas y amigos, que, mediante el intercambio académico o el simple trato, me expresaron su interés y estimularon, de múltiples maneras, la marcha de mi trabajo en estos, a veces, no tan fáciles años. Pero, sin duda, entre éstos, guardo una deuda especial de gratitud y reconocimiento hacia el profesor guía de esta tesis, el profesor Carlos Verdugo S., pues con su decidido apoyo y leal colaboración este proyecto se convirtió en una meta realmente lograda.

Viña del Mar, Enero de 1990.

I N D I C E

INTRODUCCION

En 1963, Saúl Kripke terminó de formular las partes más importantes de su revolucionaria teoría sobre la lógica modal, familiarmente conocida como 'semántica de los mundos posibles'. Dicha teoría, que otros autores tales como Jaakko Hintikka o Stig Kanger, desde distintas direcciones, han ayudado a afinar, esclareció, en un alto grado, la naturaleza de los problemas de decisión, consistencia y completitud que planteaba la lógica modal, y que permanecían, hasta cierto punto, cerrados a los anteriores tratamientos axiomáticos, tipo Lewis, o semánticos, tipo Carnap.

Para lo anterior, Kripke basó su semántica no propiamente en la lógica de primer orden sino en la teoría matemática de modelos, cuyo precedente más cercano es, a su vez, la teoría de conjuntos. En segundo lugar, la base algorítmica la obtuvo de los procedimientos semánticos elaborados por E. Beth y J. Hintikka a fines de los años cincuenta, conocidos, en general, como Tableaux semantic. El resultado de todo esto fue la elaboración de una concepción sistemática, original y poderosa acerca de los fundamentos de la lógica modal, en general, y de cada sistema modal históricamente desarrollado, en particular.

Estimo que las consecuencias de esta revolucionaria teoría no se pueden medir aún con seguridad. Por lo pronto, desde un punto de vista lógico, se pueden destacar tres líneas de pensamiento, alimentadas por ella. La primera tiene que ver con la extensión, desarrollo y modificación simples de la propia teoría Kripkeana, en áreas distintas de la lógica modal: filosofía de las ciencias, lógica inductiva, lógica epistémica, lógica deóntica, teoría del significado y linguística, etc. Esta línea está representada, entre otros, por D. Lewis, Hintikka, Stalnaker y Hilpinen. La segunda línea se ha originado como consecuencia del intento de desarrollar teorías semánticas generales para distintas lógicas (preservando o no el principio de bivalencia). Ejemplos de esto son los trabajos, entre otros, de Van Frassen, Lambert, Cocchiarella, y Fitting. Por último, la postura abiertamente crítica de W. V. Quine y ciertos lógicos nominalistas o postnominalistas, a cualquier clase de fundamentación de la lógica modal, debe ser considerada como una tercera línea de pensamiento (renovada, se podría decir, **a causa** de la incitación Kripkeana).

A pesar de estas formidables consecuencias generadas por la propuesta Kripkeana, su influencia en lo que se refiere a la propia lógica modal, ha quedado reducida, a mi juicio, a aspectos más bien fundacionales. Después de la semántica de los mundos posibles, la lógica modal quedó, qué duda cabe, perfectamente cimentada. Sin embargo, su influjo se percibe sólo tenuemente, cuando se requiere, en términos prácticos, determinar la validez de las fórmulas modales, ya sea sentenciales o de lógica de predicados, en los diferentes sistemas. Según creo, esto no ocurriría si el método de decisión que Kripke suministró paralelamente a su teoría semántica, el método conocido como 'método por diagramas semánticos', funcionase como un simplificador mecánico de dicha teoría. En mi opinión, ocurre, más o menos, lo contrario. El método, como espero mostrarlo en mi tesis, crea, por su propia complejidad, ciertas confusiones y oscuridades que pueden poner en peligro una recta y adecuada comprensión de su núcleo teórico, la semántica de los mundos posibles. Parece, enseguida, natural requerir una alternativa decisional que haga, por fin, lo que no ha hecho la anterior, y que, por otra parte, siga teniendo a su base la teoría semántica Kripkeana. El propósito central de esta tesis consistirá en suministrar, paso por paso, dicho método alternativo. Esto significa, a su vez, que todas las explicaciones y aclaraciones informativas (concentradas fundamentalmente en el primer capítulo) pueden considerarse, hasta cierto punto, superfluas. Mi tesis no pretende en ningún sentido relevante convertirse en una 'introducción' a la semántica de los mundos posibles. Esto, desde luego, exigiría escribir algo así como una historia de la lógica modal durante los últimos treinta años, lo que, en mi opinión, excedería las posibilidades de una tesis como ésta. Lo que me propongo aquí es realizar algo, tal vez, menos ambicioso, pero mucho más acotado: una contribución fundamentalmente técnica al problema de la decisión en lógica modal, con base en las ideas de Kripke. Y el éxito o no en cumplir dicho objetivo es lo que el lector, en primer lugar, deberá evaluar.

La estrategia para alcanzar el fin ya señalado es, sumariamente, la siguiente. Utilizo, en primer lugar, al igual que Kripke, las <u>Tableaux semantic</u> como algoritmo extensional de prueba, pero, a diferencia de aquél, trabajo con desarrollos arbóreos en el sentido de Jeffrey. Enseguida, me ocupo de formular un grupo de reglas semánticas de eliminación para los operadores modales. Probada la efectividad del aparato resultante en la lógica sentencial modal, intento extenderlo a la lógica de predicados con identidad. Para esto último, vuelvo a formular nuevas reglas de eliminación ad hoc para operadores modales, tanto en lógica de predicados como en teoría de la identidad. Por último, defiendo una cierta concepción semántica de identidad que impide, apoyada en mi aparato decisional, la aparición de modalidades de re.

Finalmente, espero que los métodos que suministraré (así como las discusiones técnicas a que den origen) sirvan para simplificar lo suficiente la semántica de Kripke, de manera que las poderosas intuiciones que la respaldan puedan ser comprendidas lógicamente con una moderada facilidad, y, así, escrutadas desde una perspectiva aun más significativa: la perspectiva filosófica.

CAPITULO UNO

La propuesta semántica de Kripke

1. Sistemas modales

Actualmente, en lógica modal[1], esto es, aquella lógica concerniente a las nociones 'necesariamente' o 'es necesario' (de aquí en adelante L), y 'posiblemente' o 'es posible' (de aquí en adelante M)[2], se pueden encontrar variadísimos sistemas, dependiendo, en principio, la diferencia entre éstos de si se aceptan o no ciertas fórmulas como axiomas. Es así como en el nivel más básico de estas lógicas, en el nivel sentencial, pueden tenerse indistintamente fórmulas como las siguientes:

1. $Lp \supset p$,
2. $L(p \supset q) \supset (Lp \supset Lq)$,
3. $Lp \supset LLp$,
4. $Mp \supset LMp$,
5. $MLp \supset p$,
6. $p \supset LMp$.

En realidad, caben muchísimas más, tantas como sistemas modales hay, pero las fórmulas anteriores representan a aquellos axiomas que generan a los sistemas modales más conspicuos. Si se acepta, por ejemplo, 1 y 2, se da origen, de inmediato, al sistema modal considerado, en general, como el más elemental, el sistema T.[3] Si se acepta 1, 2 y 3 se da origen a uno de los sistemas ideados por el primer gran sistematizador de la lógica modal, C.I. Lewis, el sistema S4, que, como se ve, contiene, en su base axiomática, a T. Por otra parte, si se acepta 1, 2, 3 y 4, resulta otro sistema de Lewis-mucho más potente-, el sistema S5, que contiene, en su base, a S4.[4] Por último, añadiendo 5 (o 6) a los axiomas 1 y 2, obtenemos un sistema más débil que S4 y S5, conocido como sistema Brouweriano.

Aparte de los axiomas, la base deductiva de estos sistemas modales sentenciales es la misma, a saber,[5]

A. Símbolos primitivos

p, q, r... (variables sentenciales o fórmulas atómicas)

-, v (operadores lógicos extensionales)

L (operador modal)

(,) (paréntesis)

B. Reglas de formación

RF1. Una variable que aparezca sola es una fórmula bien formada (fbf).

RF2. Si α[6] es una fbf también lo son $-\alpha$ y $L\alpha$.

RF3. Si α y β son fbfs, también lo es $(\alpha \vee \beta)$.

C. Definiciones extensionales

1. [Def. '.'] $(\alpha . \beta) =_{df} -(-\alpha \vee -\beta)$

2. [Def. '$\supset$'] $(\alpha \supset \beta) =_{df} (-\alpha \vee \beta)$

3. [Def. '$\equiv$'] $(\alpha \equiv \beta) =_{df} ((\alpha \supset \beta) . (\beta \supset \alpha))$

D. Definiciones modales

1. [Def. M] $M\alpha =_{df} -L-\alpha$

2. [Def. '⥽'][7] $(\alpha ⥽ \beta) =_{df} L(\alpha \supset \beta)$

3. [Def. '≣'][8] $(\alpha ≣ \beta) =_{df} ((\alpha ⥽ \beta)\ (\alpha ⥽ \beta))$

'⥽' y '≣' corresponden a los conceptos intensionales, acuñados definitivamente por Lewis, de *implicación estricta* y *equivalencia estricta* respectivamente, sobre los que yo no volveré a tratar aquí.

E. *Reglas de deducción*

1. *Modus Ponens* (MP):

   De α y $\alpha \supset \beta$, donde α y β son fbfs del sistema, se infiere β.

2. *Regla de sustitución* (RS):

   Si α es una fbf y β resulta de sustituir en α la aparición de una variable, en todo lugar en que ella aparezca, por cualquier fbf, β es una fbf .

3. *Regla de Necesariedad* (RN)

   Si α es una fórmula válida (extensional) entonces $L\alpha$ es una fórmula válida modal.

2. Validez en los sistemas modales: validez intuitiva y deducción axiomática

De alguna manera, tanto las reglas Def y RN, asi como las fórmulas 1 y 2 de la sección anterior expresan, en general, requisitos intuitivos de validez que debe cumplir cualquier sistema modal.(9) De hecho, se podría decir, intuitivamente, que todo lo que se genere axiomáticamente a partir de dichos requisitos resultará válido; en particular, resultarán válidas todas las fórmulas que genere T (esto es, 1 + 2). Sin embargo, la validez del resto de las tesis modales, que forman parte esencial de los otros sistemas modales, queda claramente indeterminada. Esto es singularmente claro con, por ejemplo, 'Lp ⊃ LLp'. Esta fórmula jamás podría ser obtenida a partir de T y tampoco podríamos llegar a estar completamente seguros de su validez a través de un examen puramente intuitivo. En este caso, la intuición chocaría, seguramente, con la comprensión de lo que está supuesto en 'LLp'. Otro tanto ocurre con 'MLp ⊃ p'. ¿No es posible que la intuición volviese a resultar insuficiente en esta ocasión? Si una sentencia es sólo posible, como ocurriría con 'Lp',(10) ¿bajo qué condiciones se podría estar seguro de que se seguiría de ella 'p' y no '-p'? Todo esto indica que para evaluar cualquier fórmula modal sentencial (y en general cualquier fórmula modal) se necesita definir la validez para los sistemas modales de una manera mucho más rigurosa.

Hasta que lo anterior no ocurra, las tesis ya señaladas (aquellas distintas de 1 y 2) han de ser arbitrariamente aceptadas como válidas. En base a ello, se puede esperar luego que la clase de las fórmulas generadas axiomáticamente por dichas tesis (más su adición a 1 y 2) sea, a su vez, una clase de puras fórmulas modales válidas.

Finalmente, es así como podemos obtener, entre otros muchos, los siguientes teoremas (en el márgen derecho indico el sistema al cual cada uno pertenece):

7) $p \supset Mp$ (T),

8) $L(p \equiv q) \equiv (p \equiv q)$ (T),

9) $-M(p \vee q) \equiv (-Mp \,.\, -Mq)$ (T),

10) $M(p \vee q) \equiv (Mp \vee Mq)$ (T),

11) $Lp \equiv LLp$ (S4),

12) $Mp \equiv MMp$ (S4),

13) $MLp \equiv MLMLp$ (S4),

14) $MLp \supset Lp$ (S5),

15) $MLp \supset LMp$ (S5),

16) $MMp \supset LMp$ (S5).

Si bien la deducción axiomática resulta satisfactoria para demostrar la validez de las anteriores fórmulas, ella, por si misma, no podría ofrecernos un criterio general para determinar la validez o no validez de cualquier fórmula modal, de acuerdo a lo que dijimos. Pese a las conocidas excepciones demostradas por Gödel y otros respecto a incompletitud, se sabe que en lógica extensional es posible, en general, afirmar, desde un punto de vista semántico, que si una fórmula es lógicamente verdadera, esto es, válida, entonces es deducible (la conversa de esta afirmación es la tesis básica de consistencia).(11) A su vez, semánticamente, es fácil determinar, en lógica extensional, qué fórmulas son lógicamente válidas, pues ello dependerá exclusivamente de los valores de verdad que adopten las sentencias que componen dichas fórmulas. El criterio para la validez entonces descansa en la veritativo-funcionalidad de las fórmulas. Esto es precisamente lo que no ocurre con las fórmulas modales, pues sus valores de verdad pueden ser, indudablemente, afectados por los operadores modales. Examinaré brevemente, en lo que sigue, cómo se puede formular en lógica extensional un criterio de validez.(12)

Para lo anterior basta con decir que una fbf α será válida en cualquier cálculo sentencial (esto aquí no importa) si resulta verdadera o V para cualquier <u>asignación de valor</u> (o también interpretación) de sus variables componentes, y de lo contrario, resultará no válida. Más precisamente se dirá, primero, que $\mathcal{V}$(13) está por una función (diádica) de asignación de valor para un conjunto de variables $p_i, \ldots, p_n$, cuando a cada variable del conjunto, $\mathcal{V}$ le asigna el valor de verdad V o F. En segundo lugar, se escribirá '$\mathcal{V}(p_i)$=V', que se puede leer como '$\mathcal{V}$ asigna el valor V a 'p_i'', o '$\mathcal{V}(p_i)$=F', que se puede leer como '$\mathcal{V}$ asigna el valor F a 'p_i''. Esto permite formular, inmediatamente, las asignaciones o condiciones de asignación no sólo para variables, sino también, para los operadores extensionales primitivos. Estas asignaciones se simbolizarán, respectivamente, como $[\mathcal{V}-]$ y $[\mathcal{V}\text{v}]$. El resultado de todo esto es lo siguiente:

1. Para toda variable sentencial, p_i (de un conjunto especificado), o bien $\mathcal{V}(p_i)$=V, o bien $\mathcal{V}(p_i)$=F, pero no ambos.

2. $[\mathcal{V}-]$ Para cualquier fbf, α, $\mathcal{V}(-\alpha)$=V, si $\mathcal{V}(\alpha)$=F, de lo contrario $\mathcal{V}(-\alpha)$=F.

3. $[\mathcal{V}\text{v}]$ Para cualesquiera fbfs, α y β, $\mathcal{V}(\alpha \vee \beta)$=V, si, o bien $\mathcal{V}(\alpha)$=V, o $\mathcal{V}(\beta)$=V, en caso contrario $\mathcal{V}(\alpha \vee \beta)$=F.

Debido a que ' - ' y ' v ' son operadores primitivos, dada una asignación particular cualquiera, $\mathcal{V}$, se puede calcular $\mathcal{V}(\alpha)$ como V o F, siendo α cualquier fbf cuyas variables se encuentren en el conjunto. Finalmente, si $\mathcal{V}(\alpha)$=V, se dirá que $\mathcal{V}$ es una asignación o interpretación verificadora de α, y si $\mathcal{V}(\alpha)$=F se dirá que $\mathcal{V}$ es una asignación o interpretación falsificadora de α.

Ahora bien, algo asi como las asignaciones 1, 2 y 3 de arriba, resulta imposible de obtener directamente para la lógica modal, al menos, sin otros recursos formales que los ya usados. Esta imposibilidad aparente, puso a los lógicos interesados en la incómoda situación de ofrecer soluciones sólo parciales al problema de describir procedimientos de decisión para las fórmulas modales. Esto es lo hecho, por ejemplo, por Carnap y Wasjberg.(14) Sin embargo, dichos métodos resultaban, desde la partida, severamente limitados en su aplicabilidad (en la práctica sólo podían aplicarse al sistema S5 y al sistema S2 de Lewis).

3. Algunos elementos de teoría de modelos

La solución de Saúl Kripke para el problema de definir la validez modal debe considerarse, en muchos sentidos, como la coronación de un trabajo común, orientado en una misma dirección, por un grupo de destacados lógicos modales, tales como S. Kanger, Mc Kinsey, y J. Hintikka.(15) La base común de la reflexión, al parecer, fue la intuición de que el problema de la validez en un sistema modal era, ante todo, un problema semántico o interpretativo, antes que sintáctico. Sin embargo, Kripke se encargó de ligar dicha intuición a un soporte firme y probado: la teoría matemática de modelos. En particular, Kripke se valió de las nociones, centrales en dicha teoría, de estructura-modelo y validez semántica. Por consiguiente, antes de explicitar los aportes de Kripke sobre validez modal, daré algunos detalles básicos -de una manera semiformal- sobre dichas nociones y la teoría que las sustenta.

Como se sabe, se tiende a decir, en lógica simbólica, que la teoría de modelos estudia las relaciones entre los lenguajes formales (de aquí en adelante LF) y el mundo, real o posible; o, también, las relaciones entre los LF y las interpretaciones (de aquí en adelante <u>In</u>) de dichos lenguajes. Como se verá, estas afirmaciones, si bien dan una idea general, son moderadamente imprecisas.(16)

Supóngase que, dada una fórmula α o un conjunto de fórmulas Γ, de un LF (que puede ser llamado también <u>teoría</u>), se elige arbitrariamente como, digamos, espacio de referencia de dicho conjunto, un conjunto o colección U de objetos cualesquiera, por ejemplo, el conjunto de los enteros o de los chilenos. Es esperable que, a su vez, entre aquellos objetos se presenten determinadas propiedades o relaciones (ser par, es sucesor de, es idéntico a, ser sudamericano, etc.), de las cuales, también arbitrariamente, seleccionaremos la que nos interese. Estas relaciones o propiedades se pueden anotar como $P_1^*, \ldots, P_n^*$. Por otra parte, de U exigiremos, obviamente, que no sea un conjunto vacío, y que los objetos o los individuos que lo integren, puedan distinguirse entre sí, lo que podemos lograr, sin problemas, con signos índices apropiados. Podemos, además, necesitar manipular los individuos mediante determinadas operaciones (como adición o producto para los enteros, o como la $\mathcal{V}$ para los distintos conectivos extensionales). Es posible, finalmente, que, en algún momento, por ejemplo, trabajando en lógica de predicados, necesitemos especificar ciertos objetos o individuos en particular, dentro de U (como $\aleph_0$ para los números transfinitos de Cantor, o Sócrates para el conjunto de los filósofos). A las operaciones, se las puede simbolizar como $\mathcal{F}_1^*$,

$\ldots, \mathcal{F}^*_n$. A los objetos especificados se los simbolizará, en general, como $u^*_1, \ldots, u^*_n$.

Todo lo anterior generará, dependiendo de las teorías empleadas, lo que se da en llamar una estructura-modelo de la teoría en cuestión, que se simbolizará, de manera formal, mediante el siguiente conjunto ordenado $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A} = \langle U, P^*_1, \ldots, P^*_n, \mathcal{F}^*_1, \ldots, \mathcal{F}^*_n, u^*_1, \ldots, u^*_n \rangle.$$

De este modo, se queda en condiciones de hacer ingresar (o reformular) los LF o las teorías del caso en estructuras exhaustivas, y, con ello, es posible fijar, para cada uno de los elementos de la teoría, cuyo sentido no esté determinado, un referente en la estructura - modelo $\mathcal{A}$. A esta relación de correspondencia referencial entre LF y $\mathcal{A}$ se la puede llamar, con propiedad, una interpretación de LF.

En vez de dar ejemplos intuitivos de interpretación que el lector puede encontrar fácilmente en la literatura lógica que trata del tema,(17) haré una conexión, más relevante, entre dicha noción y otra no mencionada: la noción de satisfacción. Para ello, debo hacer notar que la definición de estructura - modelo ha de ser lo suficientemente general como para permitir, en principio, el ingreso de toda teoría formal, lo que significa que, mínimamente, ha de permitir el ingreso de la lógica de predicados standar con identidad. Así, $\mathcal{A}$ deberá aceptar fórmulas atómicas (o conjuntos de fórmulas atómicas) como: $Fa_1, \ldots, Fa_n$ (donde, por el momento, a, b, c... son meras constantes),[18] o fórmulas (o conjuntos de fórmulas) moleculares como: $(x_1)\ Fx_1, \ldots, (x_n)\ Fx_n$, o $(Ex_i)\ Fx_i, \ldots, (Ex_n)\ Fx_n$, o fórmulas moleculares más complejas (que constan de predicados n-ádicos, donde $n \geqslant 1$, y/o de conectivos extensionales).

Ahora bien, la relación referencial de interpretación claramente se convierte aquí, en lo que antes se ha denominado una 'asignación de valor' para las letras predicativas, las constantes y las variables individuales. Esto se cumple del siguiente modo:

1) Si P es una letra predicativa n-ádica ($n \geqslant 1$) de α o Γ, se le asignará como valor la relación n-ádica P^* que se dé entre los miembros de U.

2) Si 'a_i' es una mera constante individual en α o Γ, entonces se le asignará como valor el objeto u_i^* de U; y (lo que es obvio) si 'x_i' es una variable individual entonces su asignación dependerá de si P^* le asigna como valor o la refiere explícitamente (mediante un cuantificador) a <u>cualquier</u> objeto, o, cuando menos, a <u>un</u> objeto de la serie $\langle u_1^*, \ldots, u_n^* \rangle$ de U.

Ahora bien, en teoría de modelos, nuestra asignación de valor se denomina condición de <u>satisfacción</u> (de aquí en adelante la designo con el predicado relacional 'satisface a' o, abreviadamente, <u>Sat</u>) de una interpretación, y se formula, en general, así: dada una fórmula α (o un conjunto Γ), y un universo U, se dice que una interpretación <u>satisface</u> a α (<u>In</u> <u>Sat</u> α) o a Γ (<u>In</u> <u>Sat</u> Γ), si mediante <u>In</u>, α (o todo Γ) se convierte en una sentencia verdadera (o un conjunto de sentencias verdaderas).

Con la anterior definición y las estipulaciones dadas junto con ella, se puede formular fácilmente una <u>definición recursiva general de satisfacción</u>, que es la siguiente:

para toda fórmula α , y para cualesquiera de sus <u>In</u>:

S1. Si α es una fórmula atómica $Pa_1, \ldots, a_n$ ($n \geqslant 1$), entonces <u>In</u> <u>Sat</u> $Pa_1, \ldots, a_n$, si la relación n-ádica P^* refiere a la secuencia ordenada de objetos $\langle u_1, \ldots, u_n \rangle$ de U. (Como se podrá observar, las condiciones S2, S3 y S4 que vienen a continuación corresponden a nuestras asignaciones de valor 1, 2 y 3 de la sección anterior).

S2. Si α es sólo una variable sentencial $p_i, \ldots, p_n$ (de un conjunto especificado Γ), entonces, o bien <u>In</u> <u>Sat</u> (p_i), o bien <u>In</u>-<u>Sat</u> (p_i), pero no ambas.

S3. Si α es cualquier fbf, In Sat $-\alpha$, si In $-$Satα, de lo contrario In $-$Sat $-\alpha$.

S4. Si α y β son fbfs cualesquiera, entonces In Sat ($\alpha \vee \beta$), si o In Sat α, o In Sat β, de lo contrario, In Sat ($\alpha \vee \beta$).

(Las condiciones S5 y S6 son nuevas, pues corresponden a los cuantificadores).

S5. Si (a)α es una fbf (a, representa, de aquí en adelante, no a una constante si no a cualquier variable individual, y, en consecuencia, pasaré a denominarla metavariable o, más precisamente, parámetro),(19) entonces In Sat (a)α, si, para cualquier relación n-ádica P^*, que le asigna cualquier valor u^* al parámetro a, In' Sat (α), y donde In' da los mismos valores a todas las demás variables libres de α.

S6. Si (Ea)α es una fbf, entonces In Sat (Ea)α, si, para cualquier relación n-ádica P^*, que le asigna, cuando menos, un valor u^* (el cual no ha sido asignado antes a otra variable libre) al parámetro a, In' Sat (α), y donde In' da los mismos valores a todas las demás variables libres de α.

Finalmente, se dice que, cuando In satisface a un conjunto de fórmulas Γ (o incluso a α) para toda secuencia de objetos o valores, In es un modelo (Md) de Γ (o de α), es decir, In Md Γ (o α). Este, a su vez, es el criterio de validez de la teoría de modelos, o la definición semántica de validez que emana de ella, y que podemos formular, más precisamente, así: un conjunto Γ de fórmulas es válido, bajo una interpretación In para un universo U, ssi In Md Γ. Así también, podemos, por último, definir una fórmula α como lógicamente verdadera o válida diciendo que α es verdadera bajo toda In (o en todos sus modelos) y para todo universo (no vacío) U.

4. El aporte semántico de Kripke a la lógica modal.

Ahora, creo, es posible visualizar, rápidamente, el real aporte de Kripke al problema de la validez y, por ende, de la decisión, en lógica modal. Debo advertir que me valdré, en gran parte, para revisar las contribuciones de Kripke, de uno de sus artículos publicado en 1963, "Semantical Considerations on Modal Logic".(20) Sin embargo, me parece importante destacar que gran parte del fundamento teórico de aquéllas se encuentra ya en dos textos anteriores, el primero publicado en 1959 ("A Completeness Theorem in Modal Logic"),(21) y el segundo publicado en 1963 ("Semantical Analysis of Modal Logic I").(22)

Para decirlo en pocas palabras, Kripke se percató de que las teorías modales formales, esto es, los lenguajes modales formalizados y los sistemas modales particulares, admitían una reformulación exacta a través de la teoría de modelos. Esto significa que Kripke intuyó que el LF modal podía ingresar a una estructura - modelo $\mathcal{A}$ en particular, y que se podía determinar, a partir de ella, un criterio de validez semántica[23] para dicho LF. Dice Kripke:[24]

> "Para obtener una semántica para la lógica modal, introducimos la noción de una estructura modelo... Una estructura modelo (E - M) es un triple ordenado (G, K, R) donde K es un conjunto, R es una relación reflexiva sobre K y $G \in K$. Intuitivamente, vemos el asunto así: K es el conjunto de todos los 'mundos posibles', G es el 'mundo real'. Si m_1 y m_2 son dos mundos, m_1Rm_2 significa también intuitivamente que m_2 es 'relativamente posible' para m_1, i.e., que toda sentencia o proposición verdadera en m_2 es posible en m_1. Claramente entonces, la relación R debería ser, sin duda, reflexiva; todo mundo es relativamente posible para si mismo, ya que toda proposición verdadera en m, es, *a fortiori*, posible en m. La reflexividad es, de este modo, un requisito intuitivamente natural"

Es evidente, de acuerdo a la cita anterior, que la intuición Kripkeana permite darle, por fin, un sentido semántico claro a la relación entre mundos posibles. Si se toma en cuenta lo dicho en la sección anterior, salta a la vista que el U de $\mathcal{A}$ ha sido sustituido por el conjunto de mundos posibles K, y que P* ha sido sustituida por R. A su vez, R parece ser la clave en la intuición semántica de Kripke. Dicha R corresponde a lo que los lógicos modales habían denominado, hasta ese momento, relación de <u>accesibilidad</u>[24] (a veces, también, relación de alternatividad) entre mundos posibles, que permitía, aunque sólo intuitivamente, determinar la verdad modal entre mundos. Con Kripke, sin embargo, es posible regularizar esa relación del siguiente modo: si se acepta que m_i es el ancestral de todo otro mundo o mundos $m_j, \ldots, m_n$ de K y se acepta que, en <u>todos</u> los mundos relacionados ancestralmente con, o accesibles a, m_i (que no necesariamente deben ser <u>todos los de la serie</u>) hay una sentencia 'p' que es verdadera, entonces 'p' es <u>necesariamente</u> verdadera en m_i; conversamente, si 'p' es <u>necesariamente</u> verdadera en m_i, será verdadera en <u>todos</u> los mundos que sean accesibles a él. Por otro lado, si una proposición 'p' es verdadera en <u>alguno</u> de los mundos de la serie $m_j, \ldots, m_n$ de K que son accesibles o están relacionados ancestralmente con m_i, pero no en todos, entonces 'p' será sólo <u>posiblemente</u> verdadera en m_i, y viceversa.

Falta sólo, como se ve, algo parecido a la asignación $\mathcal{V}$, o a <u>Sat</u>, de las secciones anteriores. Kripke la introduce con algunas variantes respecto a mi explicación de la teoría de modelos dada en la sección tres, pero dichas modificaciones no alteran sensiblemente nada de lo dicho ahí.

Según Kripke, un <u>modelo</u> asigna a cada fórmula atómica A (variable sentencial o proposicional de acuerdo a su formulación) un valor de verdad V o F en cada mundo $m \in K$. Ahora bien, dada una E - M $\langle G, K, R \rangle$ obtenemos un modelo para una fbf, α, añadiendo precisamente una función binaria o diádica φ, que se simbolizará completamente como '$\varphi(A,m)$' y que se leerá de aquí en adelante como 'la asignación φ de A <u>en</u> (o con respecto a) m'.[26] Desde luego, φ corresponde en todo a nuestra $\mathcal{V}$, excepto en la introducción de m. Además, su primer argumento A abarca todas las fórmulas atómicas de α, su segundo argumento m recorre los elementos de K, y su rango es el conjunto de valores $\{V,F\}$.

Dice, seguidamente, Kripke:[27]

"Dado un modelo, podemos definir las asignaciones de valores de verdad a fórmulas no-atómicas mediante inducción. Asúmase que $\varphi(\alpha,m)$ y $\varphi(\beta,m)$ han sido ya definidas para todo $m \in K$. Entonces si $\varphi(\alpha, m) = \varphi(\beta, m) = V$, definimos $\varphi(\alpha.\beta, m) = V$; de lo contrario, $\varphi(\alpha.\beta, m) = F$. $\varphi(-\alpha, m)$ se define como F ssi $\varphi(\alpha, m) = V$, de lo contrario, $\varphi(-\alpha, m) = V$. Finalmente, definimos $\varphi(L\alpha, m) = V$ ssi $\varphi(\alpha, m') = V$ para todo $m' \in K$ tal que mRm'; de lo contrario, $\varphi(L\alpha, m) = F$. Intuitivamente, esto dice que α es necesario en m ssi α es verdadera en todos mundos m' relativamente posibles para m".

Esta última cita sirve para poner en correspondencia las asignaciones de Kripke con las asignaciones $\mathcal{V}$ y algunas de las condiciones Sat (las sentenciales). Sin embargo, Kripke ofrece aquí algo nuevo: por primera vez se introduce una asignación de valor para una fórmula modal, la asignación para $L\alpha$. En base a dicha asignación se puede definir también una asignación φ para M, del siguiente modo: φ (Mα, m)=V ssi φ (α, m') =V para algún m'$\in$K tal que mRm', de lo contrario φ (Mα, m)=F. Todo esto permite completar la ansiada definición de validez modal, pues se puede ahora evaluar cualquier fórmula (afectada o no por un operador modal) dentro de un mundo m$\in$K, en base sólo a modelos. Se dirá que α es verdadera en un modelo (o interpretación) φ, asociado con una E - M $\langle$G, K, R$\rangle$, si φ (α, G)=V, y falsa en ese modelo si φ (α, G)=F. Luego, α será válida si es verdadera en todos sus modelos φ, para cada E - M.

Lo que queda por ver, entonces, es la validez particular en cada E - M. Es lo que examinaré en la sección siguiente. Deseo anticipar, además, que, de aquí en adelante, utilizaré como signo uniforme de asignación, el símbolo $\mathcal{V}$, olvidándome de las alternativas Sat y φ.

5. Validez modal en las estructuras-modelo

En conformidad con la estrategia de Kripke, podemos tener tantas estructuras-modelo como sistemas modales tengamos. Así, podemos tener,por ejemplo, una estructura-modelo T (una E-M T), o una estructura modelo S4 (E-M S4) o S5(E-M S5). Esto trae como consecuencia que la validez modal debe definirse siempre en relación a un modelo, que pertenezca a una de esas estructuras-modelo, y a los mundos considerados en dicho modelo. Luego, podemos definir preliminarmente la validez de una fórmula modal cualquiera α , diciendo que α es válida si es verdadera (si se le asigna V) en todos los mundos de todo modelo (que pertenezca a alguna E-M)de un sistema modal especificado.

Ahora bien, la diferencia entre las distintas estructuras modelo está dada por cómo se caracteriza la relación R entre los diferentes miembros de K. Si la relación sólo es reflexiva, la relación modal básica, de acuerdo a Kripke, entonces nos enfrentamos a una estructura modelo-T correspondiente al sistema modal más débil, el sistema T. Si R, además de reflexiva, es transitiva (esto es, si para mundos cualesquiera m_i, m_j y m_k, dado m_iRm_j y m_jRm_k, entonces m_iRm_k), nos enfrentamos a una estructura modelo-S4. Finalmente, si R es reflexiva, transitiva y simétrica (esto es, si para mundos cualesquiera m_i y m_j, si m_iR m_j, entonces m_jRm_i), entonces tenemos una estructura modelo-S5. Se puede ahora redefinir más técnicamente la validez del siguiente modo:

(a) <u>Validez en la estructura modelo-T</u> [validez-T]

Una fbf, α , es válida-T si para todos los modelos-T, esto es, para todo triple ordenado $\langle K,G,R \rangle$ (donde R es reflexiva) y para todo $m_i \in K$, $\mathcal{V}(\alpha,m_i)=V$

(b) <u>Validez en la estructura modelo-S4</u> [validez-S4]

Una fbf, α , es válida-S4 si para todos los modelos-S4, esto es, para todo triple ordenado $\langle K,G,R \rangle$ (donde R es reflexiva y transitiva) y para todo $m_i \in K$, $\mathcal{V}(\alpha,m_i)=V$.

(c) <u>Validez en la estructura modelo-S5</u> [validez-S5]

Una fbf, α , es válida-S5 si para todos los modelos-S5, esto es, para todo triple ordenado $\langle K,G,R \rangle$ (donde R es reflexiva, transitiva y simétrica) y para todo $m_i \in K$, $\mathcal{V}(\alpha,m_i)=V$.

Las especificaciones sobre la relación de accesibilidad o sobre R, deben conciliarse con las asignaciones de L y M. Intuitivamente, esto significa que, por ejemplo, para la estructura modelo-T, dados mundos cualesquiera m_1, m_2 y m_3, cuando tengamos $\mathcal{V}(L\alpha,m_1)=V$ tendremos $\mathcal{V}(\alpha,m_1)=V$ y $\mathcal{V}(\alpha,m_2)=V$, pero no necesariamente $\mathcal{V}(\alpha,m_3)=V$ puesto que sólo tenemos m_1Rm_2 y no m_1Rm_3 (aun cuando tengamos m_2Rm_3). Del mismo modo, para mundos cualesquiera m_1, m_2 y m_3, cuando tengamos $\mathcal{V}(M\alpha,m_1)=V$, tendremos o $\mathcal{V}(\alpha,m_1)=V$ o bien $\mathcal{V}(\alpha,m_2)=V$, pero no necesariamente $\mathcal{V}(\alpha,m_3)=V$ puesto que, de acuerdo a R, no tenemos m_1Rm_3, aun cuando tengamos m_2Rm_3. En la estructura modelo-S4, sin embargo, para mundos cualesquiera m_1, m_2 y m_3 si tenemos $\mathcal{V}(L\alpha,m_1)=V$, tendremos $\mathcal{V}(\alpha,m_1)=V$, $\mathcal{V}(\alpha,m_2)=V$ y $\mathcal{V}(\alpha,m_3)=V$, lo anterior en el caso que tengamos m_1Rm_2 y m_2Rm_3 (de acuerdo a R en S4). Así también, si tenemos m_1Rm_2 y m_2Rm_3 y tenemos $\mathcal{V}(M\alpha,m_1)=V$, tendremos o $\mathcal{V}(\alpha,m_1)=V$ o $\mathcal{V}(\alpha,m_2)=V$, o bien $\mathcal{V}(\alpha,m_3)=V$. Finalmente, en la estructura modelo-S5, para mundos cualesquiera m_1, m_2 y m_3, si tenemos m_1Rm_2, m_2Rm_3 y m_1Rm_3, tenemos m_3Rm_1, m_3Rm_2 y m_2Rm_1 y, por tanto, si tenemos $\mathcal{V}(L\alpha,m_1)=V$ o $\mathcal{V}(L\alpha,m_2)=V$ o bien $\mathcal{V}(L\alpha,m_3)=V$, entonces tendremos $\mathcal{V}(\alpha,m_1)=V$ y/o $\mathcal{V}(\alpha,m_2)=V$, y/o $\mathcal{V}(\alpha,m_3)=V$. Del mismo modo, si tenemos $\mathcal{V}(M\alpha,m_1)=V$ o $\mathcal{V}(M\alpha,m_2)=V$ o bien $\mathcal{V}(M\alpha,m_3)=V$, deberemos tener $\mathcal{V}(\alpha,m_1)=V$ o $\mathcal{V}(\alpha,m_2)=V$, o bien $\mathcal{V}(\alpha,m_3)=V$.

6. El mecanismo de decisión originario: diagramas semánticos

Expondré aquí, de la manera más sumaria posible, el método semántico que ofreció originalmente Kripke para decidir la validez de las fórmulas modales. Dicho método se encuentra formulado en el artículo de 1963 "Semantical Analysis of Modal Logic I". Con todo, por el carácter sumario que le daré a mi exposición aquí, utilizaré, de preferencia, la síntesis que hacen del mencionado método G. E. Hughes y M. J. Cresswell, en su libro Introducción a la Lógica Modal.[28] Adelanto, además, que mi exposición se concentrará exclusivamente en el sistema modal T, pues lo que pretendo, simplemente, es ejemplificar los rasgos generales del método Kripkeano y algunas de sus, a mi juicio, dificultades.

De acuerdo a lo afirmado en la sección anterior, una fórmula, α, es válida-T, si para todos los modelos-T $\langle K,G,R \rangle$ (donde R es reflexiva) y para todo $m_i \in K$, $\mathcal{V}(\alpha, m_1)=V$. Definido el criterio de validez semántica, lo importante para Kripke era poder formular un procedimiento *ad hoc* que permitiese probar la validez de cada fórmula modal sentencial, en conformidad con dicho criterio. Las llamadas Tablas de Verdad, aunque resultaban ser un procedimiento semántico de decisión para la lógica sentencial, presentaban el inconveniente, al trasladarse a la lógica modal, de generar un número impredeciblemente grande (aunque finito) de modelos-T diferentes, los que, a su vez, debían chequearse en su totalidad a fin de determinar, de acuerdo a lo que prescribe el criterio, la validez de la fórmula modal en cuestión. Y esto aún para una fórmula sentencialmente simple.

El método que ideó Kripke, así como el método propio que presentaré en los siguientes capítulos, se basó en lo que, en lógica, se conoce como prueba de la <u>Reductio ad Absurdum</u>. De esta manera, dada una fórmula modal cualquiera, α, lo que se buscará es construir para ella un modelo-T 'falsificador', esto es, un modelo-T en el que para al menos un $m_i \in K$, $\mathcal{V}(\alpha, m_i)=F$. Si esto no es posible, es decir, si $\mathcal{V}(\alpha, m_i)=V$ (o, igualmente, si $\mathcal{V}(-\alpha, m_i)=F$), α será válida. Supóngase ahora que α corresponde a una fórmula condicional, cuyas partes bien-formadas son A y B (que corresponden, respectivamente, a la cláusula antecedente y a la cláusula consecuente), entonces $\mathcal{V}(\alpha, m_i)=F$ será igual a $\mathcal{V}((A \supset B), m_i)=F$. Kripke no formula, explícitamente, entre sus condiciones de asignación, las condiciones de verdad o falsedad del condicional. Tampoco se encuentran entre las condiciones $\mathcal{V}$ ni entre <u>Sat</u>. Pero, como se podrá adivinar, no resulta díficil introducirlas, dadas las anteriores. Por ahora, las formularé intuitivamente, pero, cuando construya mi método, lo haré de manera sistemática. Ahora bien, dado que '$A \supset B$' $=_{df}$ '$-A \vee B$', y $\mathcal{V}((-A \vee B), m_i)=F$ ssi $\mathcal{V}(A, m_i)=V$ y $\mathcal{V}(B, m_i)=F$, entonces $\mathcal{V}((A \supset B), m_i)=F$, si $\mathcal{V}(A, m_i)=V$ y $\mathcal{V}(B, m_i)=F$.

Consideremos ahora el siguiente ejemplo de fórmula modal condicional:(29)

[1] $L(p \supset L(q \supset r)) \supset M(q \supset (Lp \supset Mr))$.

De aquí en adelante las asignaciones de valores de verdad (V o F) se anotarán inmediatamente debajo de la fórmula, en el conectivo extensional o la fórmula que corresponda. Esto, como se verá, deberemos hacerlo por fases, lo que originará diagramas rectangulares seriados que expresarán los distintos cálculos.

Como [1] es un condicional, anotamos los siguientes valores:

$[1^i]$ m_1	L (p $\supset$ L(q $\supset$ r)) $\supset$ M (q $\supset$ (Lp $\supset$ Mr))
	V V F F F

Esto significa que, en algún modelo-T, hemos supuesto un mundo (que podemos llamar m_1) donde $\mathcal{V}([1], m_1)=F$. Esto se representa anotando F en el conectivo principal, y V y F, en el antecedente y el consecuente, respectivamente. Además, de acuerdo a las asignaciones de Kripke para L y M, y nuestras explicaciones intuitivas dadas al final de la sección anterior, se sigue que, como lo muestra $[1^i]$, si $L\alpha$ es verdadera en m_i, entonces α es verdadera en m_i (y en todo mundo accesible a m_i) y que si $M\alpha$ es falsa en m_i, α será falsa en m_i (y en todo mundo accesible a m_i).

Ahora bien, al anotar nuevas asignaciones sobre $[1^i]$ obtenemos:

$[1^{ii}]$ m_1

$$\begin{array}{l} L\,(p \supset L\,(q \supset r)) \supset M\,(q \supset (Lp \supset Mr)) \\ \text{V} \quad\;\; \text{V} \qquad\qquad\qquad \text{F F} \;\; \text{V F} \;\; \text{VV F FF} \end{array}$$

En esta fase es importante tener claro que cuando una fórmula, α, afectada por L, es falsa, $L\alpha$ también, obviamente, es falsa; asi como cuando una fórmula, α , afectada por M, es verdadera, $M\alpha$ es verdadera. Terminamos, en consecuencia, anotando los siguientes valores:

$[1^{iii}]$ m_1

$$\begin{array}{l} L(p \supset L(q \supset r)) \supset M(q \supset (Lp \supset Mr)) \\ \text{V}\; \underline{\text{V V F}}\; \text{V F F} \quad \text{F F V F} \;\; \text{VV F FF} \\ \qquad\;\; \text{X} \end{array}$$

El diagrama $[1^{iii}]$ muestra, finalmente, que hemos llegado a una inconsistencia o una contradicción en el antecedente, pues le hemos asignado inicialmente V, pero, por las asignaciones posteriores, hemos obtenido $\mathcal{V}(p,m_i)=V$ y $\mathcal{V}(L(q \supset r),m_i)=F$, que son sus cláusulas antecedente y consecuente, respectivamente, lo que es contradictorio. Las asignaciones contradictorias las destacamos subrayándolas y poniendo, bajo el subrayado, una X, que indica contradicción. Esto muestra que no podemos construir un modelo-T falsificador para [1], en que $\mathcal{V}([1],m_1)=F$, esto es, [1] es válida en T.

Antes examiné el caso en que una fórmula cualquiera,

α, afectada por L, es falsa, lo que obliga a que Lα , sea falsa; sin embargo, podemos encontrarnos con un caso distinto, en que una fórmula cualquiera, α , afectada por M, puede ser falsa (en m_1), ¿obliga esto a que Mα sea falsa? Evidentemente, no, pues Mα puede ser verdadera en m_1, con tal que α sea verdadera en algún mundo m_j accesible a m_1, aunque sea, de hecho, falsa en m_1. Esto se anota, en el método de Kripke, con un asterisco bajo la fórmula. La explicación anterior nos permitirá determinar la validez-T de la siguiente fórmula, muy parecida a [1] :

```
[2]  m1 | L (p ⊃ M(q ⊃ r)) ⊃  M(q ⊃ (Lp ⊃ Mr))
        | V  V V V V FF    F  F V F  VV F FF
        |          *   *
```

El hecho de que aparezca un asterisco bajo M, indica que necesitamos suponer la existencia de un mundo m_2, que sea accesible a m_1 y donde la cláusula '(q ⊃ r)' sea verdadera. Pero, por otra parte, estamos obligados a aceptar que, en m_2, las fórmulas cuyas L estan asignadas con V, o cuyas M estan asignadas con F, en m_1, seguirán asignadas con los mismos valores. En este caso, se anotarán o marcarán asteriscos, <u>sobre</u> los operadores modales en cuestión, lo que, finalmente, arroja los siguientes diagramas:

```
[2i]  m1 | *                  *     *     *
         | L (p ⊃ M(q ⊃r)) ⊃ M(q ⊃ (Lp ⊃ Mr))
         | V  V V V V FF   F F V F  VV F FF
         |          *
```

[2ii] m_2

q ⊃ r	p ⊃ M(q ⊃ r)	q ⊃ (Lp ⊃ Mr)	p	r
VV F	V	V F	V	F
X				

La flecha indica la relación de accesibilidad entre m_1 y m_2. Como se puede observar, el primer sub-diagrama en [2^{ii}] muestra que tratando de encontrar un modelo falsificador para [2], llegamos a una contradicción en m_2, lo que indica, por tanto, su validez-T.

Examinando estos dos ejemplos bastante simples, se observan, por lo menos, dos características notacionales del método que, a la larga, pueden implicar dificultades en su comprensión y manejo. La primera tiene que ver con cierta monotonía en el desarrollo de la técnica, lo que se expresa en una repetición, más o menos constante, de las fórmulas y las asignaciones originales. Un expediente para resolver este problema sería el anotar de una vez, bajo la fórmula original, todas las asignaciones de V y F que sean necesarias y numerar, arriba de las fórmulas componentes, los pasos sucesivos que se dan al asignar dichos valores. Pero, el uso de este expediente quedaría limitado, en la partida, a fórmulas para un solo mundo (y, aún en ellas, creo que no sería recomendable). Pues, cuando se tratara de fórmulas para las que se necesita más de un mundo, simplemente deberíamos anotar una nueva numeración que, en ciertos casos (aquellos que tienen que ver con las asignaciones de valores a variables sentenciales), entraría en conflicto con la anterior, lo que la haría perder todo sentido.

Otra característica embarazosa de los diagramas semánticos de Kripke, es la poca reducibilidad de las fórmulas, que dicha técnica garantiza. Esto implica cierta imposibilidad de obtener simplificaciones interesantes de las fórmulas originales, basadas en sus esquemas componentes. Ello es obvio en el caso de [2], pues [2^{ii}] no representa una simplificación significativa de ella, pese a estar descompuesta en sus esquemas componentes. Lo anterior vuelve a observarse en el siguiente ejemplo:

[3] L (p ∨ Mq) ⊃ (Lp ∨ Mq)

Sus diagramas seriados, a su vez, son los siguientes:

[3^{i}] m_1

```
*                            *
L (p ∨ Mq) ⊃ (Lp ∨ Mq)
V            F  F  F F
               *
```

[3^{ii}] m_1

```
*         *                  *
L (p ∨ Mq) ⊃ (Lp ∨ Mq)
V  V V FF  F  FV F FF
               *
```

Por el hecho de que 'Lp' es falsa en m_1, pero 'p' es verdadera en dicho mundo, es necesario hacer accesible a m_1, otro mundo m_2 donde 'p' sea falsa. Esto obliga a tener los siguientes diagramas:

$[3^{iii}]$ m_1

$$\begin{array}{l} L\ (p \vee Mq) \supset (Lp \vee Mq) \\ V\quad V\ V\ FF\quad F\quad FV\ F\ FF \end{array}$$

$\downarrow$

$[3^{iv}]$ m_2

p	pv	Mq	q
F	FV	VF	F

$\downarrow$

$[3^{v}]$ m_3

q
V

Finalmente, $[3^{v}]$ muestra que $[3]$ no es válida-T pues se ha obtenido en m_3 una asignación que no lleva a contradicción.

Por último, a las dos dificultades ya mencionadas, viene a añadirse una tercera, tal vez la más severa, que mezcla dos aspectos: por una parte, la proliferación de diagramas repetidos, y, por otra, la imposibilidad práctica, por la naturaleza del método Kripkeano, de tener una visión completa y de conjunto de los resultados que se van obteniendo, al aplicar las reglas de asignación. Esto es particularmente complejo cuando se trata de bicondicionales. Con el sólo propósito de ilustrar esto ofreceré un ejemplo, desarrollado por Hughes y Cresswell, sin entrar ya en la explicación de sus detalles. La fórmula es la siguiente:

$[4]$ $L\ (Mp \equiv Mq) \supset L\ (p \equiv Lq)$

A partir de [4] se obtiene un primer diagrama, que luego se escinde, de acuerdo al sentido del bicondicional, en otros dos. Esto se indica poniendo un signo '†' bajo el bicondicional que origina la doble asignación.

```
          *
[4i] m1   L (Mp ≡ Mq) ⊃ L (p ≡ Lq)
          V     V     F F
                †       *
```

```
[4ii] m1(a)    L (Mp ≡ Mq) ⊃ L (p ≡ Lq)
               V  V   V V   F F
                  *     *     *
```

```
               *   *    *
[4iii] m1(b)   L (Mp ≡ Mq) ⊃ L (p ≡ Lq)
               V  F   V F   F F
                              *
```

Los diagramas seriados siguen luego así:

```
               *   *    *
[4iv] m1(b)    L (Mp ≡ Mq) ⊃ L (p ≡ Lq)
               V  FF V FF   F F   F V FF
                              *       *
```

[4v]

m_2

p ≡ Lq	Mp ≡ Mq	p	q
F F FF	V	F	F
X			

[4^{vi}] m_1(a)

*								
L	(Mp	≡	Mq)	⊃	L	(p	≡	Lq)
V	V	V	V	F	F			
	*		*		*			

[4^{vii}] m_3

p	Mp ≡ Mq
V	VV V V
	* *

m_4

q	Mp ≡ Mq
V	V V VV
	* *

m_5

p ≡ Lq	Mp ≡ Mq
F	V
†	

[4^{viii}] m_6

q
V

m_7

p
V

[4^{ix}] m_5(a)

p ≡ Lq	Mp ≡ Mq
V F F	VV V V
*	* *

[4^{x}] m_8

q
F

m_9

q
V

[4^{xi}] m_5(b)

*	
p ≡ Lq	Mp ≡ Mq
F F VV	VF V VV
	* *

[4^{xii}] m_{10}

p	q
V	V

Evidentemente, en un desarrollo como el anterior la posibilidad de apoyarse en una visión totalizadora resulta escasa, por no decir nula. Sin embargo, parece importante contar gráficamente con ella, pues, de tenerla, permitiría reparar, de una sola vez, en la ancestralidad, respecto a m_1, en que se encuentran los restantes mundos. Por ejemplo, no es aquí ya tan claro si m_6, m_7, m_8, m_9 y m_{10} están en la misma relación de ancestralidad respecto a m_1 (lo que de hecho ocurre). Por otro lado, tampoco son claras todas las consecuencias que acarrea, para las asignaciones de verdad en determinado mundo, la relación de accesibilidad. Este es el caso de la relación entre m_5 (b) y m_{10}. Aquí, m_{10} da V para 'p' porque, en m_5 (b), 'Mp' es verdadera pero 'p' es falsa (lo que está señalado por el asterisco). Sin embargo, no queda claro si m_{10} da también V a 'q' porque en m_5(b) bajo 'Mq' hay un asterisco o porque 'Lq' es verdadera y hay sobre ella otro asterisco. Aunque se trata de esto último, lamentablemente la flecha que señala la relación de accesibilidad tiende a sugerir lo primero.

Deseo enfatizar que las anteriores observaciones críticas no tienen por propósito poner en entredicho el método Kripkeano en sí mismo. Como técnica decisional parece impecable (30) y no enfrenta más riesgos que los que enfrenta cualquier técnica semántica en lógica sentencial extensional (por ejemplo, el número de variables sentenciales distintas que aparecen en las fórmulas, en el caso del método por Tablas de Verdad). Pero, es preciso reconocer que los problemas a los que apuntan dichas observaciones, conspiran peligrosamente a una comprensión adecuada de la teoría que sostiene a la técnica decisional, vale decir, de la semántica de los mundos posibles. La confusión respecto al origen de las asignaciones que indiqué antes sugiere fuertemente este peligro. Por lo demás, es de desear que, desde un punto de vista intuitivo, nuestras técnicas decisionales se organicen, gráficamente, como todos coherentes y encadenados, y que, en lo posible, tiendan también gráficamente a la simplicidad. Esto se observa en lógica sentencial extensional,por ejemplo, al comparar el método de las Tablas de Verdad, con el manifiestamente superior método de Quine de análisis dicotómico. Contar con un método, con características intuitivas análogas al de Quine, para la semántica de mundos posibles de Kripke, se vuelve, así, algo urgente e inaplazable en lógica modal.

La solución, a mi juicio, para este importante requerimiento técnico se encuentra, en parte, en las propias fuentes Kripkeanas. Asi como la semántica de los mundos posibles estaba basada en la teoría de modelos, el método de diagramas semánticos estaba basado en un método desarrollado a partir de la segunda mitad de los años cincuenta, principalmente por E. Beth y J. Hintikka, denominado <u>Tableaux semantic</u>. El método era muy adecuado para los propósitos generales de la semántica de Kripke, pues tenía como objetivo básico la construcción de modelos falsificadores para determinar la validez de las fórmulas. Kripke utilizó sólo esta idea básica para, a partir de ella, desarrollar su técnica propia. De hecho, Kripke no hizo uso de la herramienta característica de las <u>Tableaux</u>, sus reglas semánticas de eliminación de los conectivos extensionales. A su vez, en 1968, Richard Jeffrey, en su libro <u>Formal Logic: Its Scope and Limits</u>, reformuló esta última técnica, introduciendo, por primera vez, desarrollos arbóreos o en forma de árboles de verdad para ella. Esta reforma le dió, finalmente, la sencillez y la coherencia con que ahora se la conoce familiarmente.

Estoy convencido que, utilizando las Tableaux en el sentido arbóreo de Jeffrey y haciendo el esfuerzo de formular reglas de eliminación apropiadas para los operadores modales, que se compatibilizen con las reglas de eliminación de los operadores extensionales, es posible arribar a un método decisional más poderoso e intuitivo que el Kripkeano. Sin embargo, al igual que este último, debe mantenerse inspirado básicamente en la semántica de mundos posibles, lo que significa que se sostendrá siempre en conjuntos de asignaciones semánticas, de un número y naturaleza, a veces (de acuerdo a las coyunturas teóricas), diferente de las asignaciones Kripkeanas originales. Puedo anticipar que los restantes capítulos de esta tesis constituyen la construcción efectiva, paso por paso, de un método de ese tipo. Pienso que contar con dicho método cobra aún mayor importancia en ciertas zonas más densas de la lógica, de las que en este capítulo apenas se ha hablado: la lógica de predicados y la teoría de la identidad modales. En dichas zonas, el método de diagramas semánticos puede llegar a ser sencillamente no recomendable, puesto que se corre el riesgo, por el hecho de introducir asignaciones mucho más complejas para los cuantificadores, de ver duplicadas las dificultades detectadas en el nivel sentencial.

NOTAS

(1) A veces, por el hecho que se generalizan el término 'modo' o 'modalidad' para cualquier sentencia o proposición que se encuentra en discurso indirecto o al interior de una 'cláusula que', se denomina también a esta lógica, lógica modal alética, distinguiéndola así de otras lógicas que se ocupan de las modalidades (lógica epistémica, deóntica, de las normas, etc.), en el sentido antes dicho.

(2) En algunos sistemas modales 'es necesario' se simboliza como $\Box$, y 'es posible' como $\Diamond$, entre otras muchas simbolizaciones. Para mayor información cf. G. E. Hughes y M. J. Cresswell, <u>Introducción a la Lógica Modal</u>, Madrid, Editorial Tecnos, 1973, 1a. Edición, pp. 285-287 (Apéndice IV). De aquí en adelante esta obra se simbolizará, por su importancia, simplemente como <u>ILM</u>.

(3) Este sistema fue ideado por Robert Feys en 1937, cf. <u>ILM</u>, p. 37.

(4) La primera formulación de estos sistemas se encuentra en C.I. Lewis <u>A Survey of Simbolic Logic</u>, Berkeley, University of California, 1918. La formulación completa está en C.I. Lewis y C.H. Langford <u>Symbolic Logic</u>, New York, Dover publications, 1932.

(5) Sigo en lo principal, aunque con algunas modificaciones en la formulación de ciertas reglas, a Hughes y Cresswell, cf. <u>ILM</u>, pp. 37-38.

(6) α no corresponde a una variable sentencial, sino, más bien, a una meta variable sentencial, por lo que queda fuera del vocabulario lógico.. Por esta razón, además, nunca va entrecomillada, así como tampoco las expresiones moleculares a

que puedan dar origen una o más metavariables sentenciales. Las variables sentenciales tales como 'p', 'q', etc. las entrecomillaré, de acuerdo a las estipulaciones standar sobre uso y mención de las expresiones.

(7) También se usa como alternativa de simbolización para la implicación estricta el signo '$\prec$'. CF. ILM, p. 33.

(8) Su alternativa de simbolización es '=', Ibid., Ibid.

(10) Para explicar por qué entrecomillo la expresión Lp pero no hago lo mismo con $L\alpha$, debo explicar como entiendo la expresión L. Al igual que Hughes y Cresswell la considero un operador semántico. Esto significa que corresponde a una expresión metalógica que modifica o completa expresiones del vocabulario lógico, al igual que un predicado metalógico extensional tal como 'es deducible' u otros. De ahí que tenga un status semejante al de las variables predicativas n-ádicas, que se simbolizan usualmente con las letras griegas φ , ψ ,... etc. Dichas letras no van por lo general entrecomilladas, de tal manera que cada vez que aparezca la expresión L aislada, o acompañada con otra metavariable como, por ejemplo, α , no la entrecomillaré. Sin embargo, si dicha expresión,o complejos de dicha expresión, acompañan a una fórmula del vocabulario lógico tenderé a entrecomillarla, dándole preminencia a esta última. Es lo que ocurre con la expresión Lp, que motivó esta nota.

(9) Para todo este punto cf. ILM, p. 33 y ss.

(11) Cf. Manuel Garrido, Lógica Simbólica, Madrid, Editorial Tecnos, 1983, p. 308 y ss., y J.N. Crossley y otros ¿Qué es la Lógica Matemática?, Madrid, Editorial Tecnos, 1983, p.71 y ss.

(12) Cf. ILM, pp. 22 - 23

(13) $\mathcal{V}$ es una constante metalógica como $\in$, en teoría de conjuntos, y no la entrecomillo. Como se verá después, $\mathcal{V}$ coincide con la función de Kripke $\wp$, y en fórmulas como $\mathcal{V}(\alpha, m_i) = V$, debe leerse así: la asignación de valor de α, <u>en</u> m_i, es igual a V.

(14) R. Carnap "Modalities and Quantification" en <u>The Journal of Symbolic Logic</u>, en 1946, Vol. 11, pp. 33-64 y M. Wajsberg "Ein erweiteter Klassenkalkül" <u>Monatshefte für Mathematik und Physik</u>, 1933, Vol. 40, pp. 113-126. La estrategia de ambos autores esta basada en las formas normales conyuntivas modales, y está limitada, en su aplicabilidad, a sistemas exclusivamente sentenciales.

(15) El primer intento lo hizo J.C.C. McKinsey "On the Syntactical Construction of Systems of Modal Logic" en <u>The Journal of Symbolic Logic</u>, 1945, Vol. 10, pp. 83-96. Después hay intentos en R. Carnap (op. cit.), S. Kanger <u>Provability in Logic</u>, Stockholm, Ed. Almqvist and Wiksell, 1957, y en J. Hintikka "Modality and Quantification" en <u>Theoria</u>, 1961, Vol. 27, pp. 110-128, y todos sus textos posteriores.

(16) Las explicaciones que vienen a continuación estan basadas principalmente en el texto de M. Garrido ya citado y en el de B. Van Frassen <u>Semántica Formal y Lógica</u>, Ciudad de México, Editorial UNAM, 1987, pp. 127-131. Para una introducción esencialmente matemática en el tema es inevitable consultar cualquiera de estos dos textos: J. L. Bell y A. B. Slomson, <u>Models and Ultraproducts: an Introduction</u>, Amsterdam y Londres, Editorial North-Holland, 1969; y A. Robinson, <u>Introduction to model theory and to the metamathematics of algebra</u>, Amsterdam, Editorial North-Holland, 1963. No resulta inútil también consultar el clásico de A. Tarski, <u>Introduction to Logic and to the Methodology of Deductive Sciences</u>, New York, Oxford University Press, 1959, pp. 120-125.

(17) Un buen ejemplo se puede encontrar en J. N. Crossley, op. cit., pp. 71-73.

(18) Haré aquí algunas precisiones notacionales sobre <u>expresiones de individuo</u>, en particular. Cuando se trate de simples constantes individuales utilizaré las letras minúsculas bajas del alfabeto $a_1,\dots a_n$, $b_1,\dots b_n$, etc., que, citadas aisladamente serán entrecomilladas. Los individuos de un <u>dominio especificado</u> (que puede o no ser U, como veremos en los capítulos tres y cuatro) se simbolizan solamente con us diferenciadas por suscritos, y nunca las entrecomillaré. Finalmente, en esta tesis haré un uso intenso de la noción de <u>parámetro</u>, esto es, de la noción de metavariable individual, que sirve para señalar o nombrar a <u>cualquier</u> individuo de U, especificado o no. Cuando deba simbolizar dicho parámetro lo haré con las letras minúsculas bajas del alfabeto subrayadas, del siguiente modo: $\underline{a}_1,\dots,\underline{a}_n$, $\underline{b}_1,\dots,\underline{b}_n$, etc. Los parámetros al igual que las metavariables senténciales, jamás van entrecomilladas. Por último $x_1,\dots, x_n$, $y_1,\dots, y_n$, etc., representan simples variables individuales y, dado el caso, las entrecomillaré.

(19) Cf. supra n. 18. Es posible que, en algunos pasajes de la tesis, utilice más libremente la expresión variable, aludiendo con ello a parámetro. En todos esos casos, debe entenderse que, cuando hablo de 'una' o 'algunas' variables, quiero decir siempre 'cualquier' variable.

(20) S. Kripke "Semantical Considerations on Modal Logic", en L. Linsky (ed.) <u>Reference and Modality</u>, Oxford, Oxford University Press, 1971, Reep. 1977, pp. 63-73.

(21) S. Kripke "A Completeness Theorem in Modal Logic", en <u>The Journal of Symbolic Logic</u>, 1959, Vol. 24, pp. 1-14.

(22) S. Kripke, "Semantical Analysis of Modal Logic. I, Normal Propositional Calculi", en Zeitschrift für matematische Logik und Grundlagen der Mathematik, 1963, Vol. 9, pp. 67-96.

(23) Una explicación muy aclaratoria sobre por qué, en un sentido intuitivo, la definición de validez dada por Kripke permite hablar de una 'semántica' de los sistemas modales o de los mundos posibles, se ofrece en ILM, p. 72, la que a continuación cito: "Nuestro método para la definición de la validez se ha basado en asignar a los elementos de las fórmulas ciertos valores que no son por sí mismos parte del sistema al que pertenece la fórmula y en valorar las fórmulas en términos de aquellas asignaciones. Este procedimiento es lo mismo que dotar de significado a las fórmulas..."

(24) "Semantical considerations..." op. cit., p. 64. He hecho algunas alteraciones notacionales mínimas en el texto, para dejarlo más cercano a la terminología usada en esta tesis.

(25) Cf. ILM, pp. 73-74.

(26) Cf. supra n. 13

(27) "Semantical considerations..." op. cit., p. 64.

(28) ILM, pp. 78-89

(29) Todos los ejemplos que vienen a continuación están tomados de ILM.

(30) Cf., para una demostración de esto, Ibid., pp. 88-89

CAPITULO DOS

Un procedimiento alternativo: lógica sentencial modal

En este capítulo, ofreceré algunas técnicas de decisión que difieren y, en cierta medida, simplifican los procedimientos Kripkeanos revisados antes. Se harán aplicaciones para los sistemas sentenciales ya considerados T, S4 y S5 y daré una ilustración de cómo se pueden usar estas técnicas en el sistema brouweriano o SB.

1. Definición semántica de validez para sistemas modales.

Siguiendo a Kripke, establecemos la validez de las fórmulas modales mediante una estructura modelo constituida por el triple ordenado $\langle K, G, R \rangle$ más la función binaria $\mathcal{V}(\alpha, m_i)$ y cuyo rango es el conjunto $\{V, F\}$. K representa el conjunto no vacío de mundos posibles $m_i \ldots m_n$; G representa a algún $m_i \in K$ y R es una relación diádica, como dijimos antes, que establece el tipo de "accesibilidad" que se puede dar entre los miembros de K. La función $\mathcal{V}(\alpha, m_i)$ representa la operación de asignar el valor de verdad V o F a una fbf α cualquiera en cada $m_i \in K$.

Esta asignación de valor deberá cumplir las siguientes condiciones:

(1) Para cualquier variable sentencial 'p_j' y para cualquier $m_i \in K$, o bien $\mathcal{V}(p_j, m_i) = V$, o $\mathcal{V}(p_j, m_i) = F$.

(2) $[\mathcal{V}\ N]$. Para cualquier fbf, α, y para cualquier $m_i \in K$, $(-\alpha, m_i) = V$ ssi $\mathcal{V}(\alpha, m_i) = F$; en caso contrario, $\mathcal{V}(-\alpha, m_i) = F$.

(3) $[\mathcal{V}\ A]$. Para cualquiera fbfs, α y β, y para cualquier $m_i \in K$, $\mathcal{V}(\alpha \vee \beta) = V$, si, o bien $\mathcal{V}(\alpha, m_i) = V$, o $\mathcal{V}(\beta, m_i) = V$; en caso contrario, $\mathcal{V}((\alpha \vee \beta), m_i) = F$.

(4) $[\mathcal{V}\ C]$. Para cualquiera fbfs, α y β, y para cualquier $m_i \in K$, $\mathcal{V}((\alpha \supset \beta), m_i) = F$, ssi $\mathcal{V}(\alpha, m_i) = V$ y $\mathcal{V}(\beta, m_i) = F$, en cualquier otro caso, $\mathcal{V}((\alpha \supset \beta), m_i) = V$. (1)

(5) $[\mathcal{V} L]$. Para cualquier fbf, α, y para cualquier $m_i \in K$, $\mathcal{V}(L\alpha, m_i) = V$, ssi, para todo $m_j \in K$ tal que $m_i R m_j$, $\mathcal{V}(\alpha, m_j) = V$, en caso contrario $\mathcal{V}(L\alpha, m_i) = F$.

(6) $[\mathcal{V}\ M]$. Para cualquier fbf, α, y para cualquier $m_i \in K$, $\mathcal{V}(M\alpha, m_i) = V$, ssi, para algún $m_j \in K$ tal que $m_i R m_j$, $\mathcal{V}(\alpha, m_j) = V$, de lo contrario $\mathcal{V}(M\alpha, m_i) = F$.

2. Teorema modal y reglas semánticas de eliminación.

Propondré ahora la siguiente definición de teorema modal (teorema-T, S4 o S5).

Teorema Modal: Una fórmula modal (T, S4 o S5) es un teorema del sistema respectivo (T, S4 o S5), ssi su negación es inconsistente. O, lo que es lo mismo, una fórmula modal (T, S4 o S5) es un teorema del sistema (T, S4 o S5) si, de su negación, es deducible una contradicción. En términos de modelos esta definición puede reformularse así: una fbf, α, es un teorema modal si no es posible construir para ella un modelo (T, S4 o S5) falsificador, es decir, si no encontramos un modelo (T, S4 o S5) en el cual, para al menos un $m_i \in K$, $\mathcal{V}(\alpha, m_i) = F$.

A partir de esta definición estamos en condiciones de fundar una estrategia metodológica para evaluar semánticamente cualquier fórmula modal en los referidos sistemas. La semejanza de dicha estrategia con el método Kripkeano radica en la idea básica de contraejemplo o método de la reductio ad absurdum, que, en ambos casos, toma la forma de modelo falsificador. La diferencia descansa en el hecho que la estrategia que se describe a continuación no se basa en una resolución por asignación de valores de las fórmulas componentes, como en la técnica de Kripke, sino en un conjunto de reglas semánticas de eliminación que dan origen al método de decisión conocido como 'árboles de verdad', de Jeffrey.(2) En lo siguiente me basaré en las exposiciones standar de este último, sobre todo en las de Hodges(3) y Smullyan,(4) y daré, por sentado, su conocimiento y dominio. Para mis propósitos, reformularé sus reglas del siguiente modo:

A) Reglas semánticas de eliminación extensional (REE)

Reglas de Verdad

1. RVK
$$\begin{array}{c} \alpha . \beta, m_i \\ \hline \alpha, m_i \\ \beta, m_i \end{array}$$

2. RVA
$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\alpha \vee \beta, m_i} \\ \hline \alpha, m_i & \beta, m_i \end{array}$$

3. RVC
$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\alpha \supset \beta, m_i} \\ \hline -\alpha, m_i & \beta, m_i \end{array}$$

4. RVB
$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\alpha \equiv \beta, m_i} \\ \hline \alpha, m_i & -\alpha, m_i \\ \beta, m_i & -\beta, m_i \end{array}$$

Reglas de Falsedad

1. RFK
$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{-(\alpha . \beta), m_i} \\ \hline -\alpha, m_i & -\beta, m_i \end{array}$$

2. RFA
$$\begin{array}{c} -(\alpha \vee \beta), m_i \\ \hline , m_i \\ , m_i \end{array}$$

3. RFC
$$\begin{array}{c} -(\alpha \supset \beta), m_i \\ \hline \alpha, m_i \\ -\beta, m_i \end{array}$$

4. RFB
$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{-(\alpha \equiv \beta), m_i} \\ \hline \alpha, m_i & -\alpha, m_i \\ -\beta, m_i & \beta, m_i \end{array}$$

A estas reglas les agregaré otras cuatro, específicamente modales, a las que llamaré 'reglas semánticas de eliminación modal', y que abreviaré como REM.

B) Reglas semánticas de eliminación modal (REM)

Reglas de Verdad

5. RVL $\dfrac{L\alpha,\ K\ (5)}{(m_i)\ (\alpha, m_i)}$

6. RVM $\dfrac{M\alpha,\ K}{(Em_i)\ (\alpha, m_i)}$

Reglas de Falsedad

5. RFL $\dfrac{-L\alpha,\ K}{(Em_i)\ (-\alpha, m_i)}$

6. RFM $\dfrac{-M\alpha,\ K}{(m_i)\ (-\alpha, m_i)}$

Por último, formulo un grupo de reglas de inconsistencia y de clausura para árboles modales.

C) Reglas de inconsistencia y de clausura (RIC)

1. Dos expresiones α y $-\alpha$ (con o sin operador modal) son contradictorias si pertenecen a un mismo mundo m_i.

2. Se clausura una rama o una sub-rama cuando se encuentra una contradicción en su desarrollo para un mismo mundo m_i. Llamamos a estas ramas o sub-ramas, ramas o sub-ramas inconsistentes.

3. Cualquier rama de un mismo mundo m_i a la que sea accesible una rama inconsistente de un mundo m_j es una rama inconsistente m_i.

4. Si se han aplicado todas las reglas conocidas (RSE, RMSE) que sean necesarias tenemos una ramificación completa-T, S4 o S5, o un árbol-T, S4 o S5. Una fbf es válida-T, S4 o S5 o un teorema-T, S4 o S5, si la ramificación completa-T, S4 o S5 de su m_1 es inconsistente (esto es, si todas sus ramas o sub-ramas están clausuradas de acuerdo a RIC1, 2 o 3).

De este modo, siempre estamos en condiciones de determinar si una fórmula cualesquiera es o no un teorema sentencial modal, debido a que en el caso de una fbf, α, o se demuestra que la ramificación completa de su mundo m_1 es inconsistente (lo que es lo mismo que decir que es imposible construir un modelo falsificador para ella) o, de lo contrario, se termina la ramificación completa de α sin que se pueda demostrar que su m_1 sea inconsistente (lo que es lo mismo que decir que habrá por lo menos un mundo $m_i \in K$ tal que para algún modelo-T, S4 o S5 es posible una asignación $\mathcal{V}$ en que $\alpha = F$).

Pruebas para el sistema T. (6)

Daremos algunos ejemplos característicos del sistema con su respectivo comentario aclaratorio.

(1) $Lp \supset Mp$

1.	$-(Lp \supset Mp)$	PA
2.	Lp^{m_1}	FC1
3.	$-Mp$	FC1
4.	p	VL2
5.	$\boxed{-p^{m_1}}$	FM3

De acuerdo a este ejemplo, asumimos la negación de la fórmula y comenzamos la ramificación anotando, en la forma de un exponente, el mundo para el cual la realizamos, en este caso, para m_1. Esta prescripción significa que, siempre que abramos una rama para un nuevo mundo, debemos marcar ese mundo asi como también marcarlo en la última fórmula de esa rama (si acaso con ella termina el proceso o se abre otro nuevo mundo). Por otra parte, toda vez que lleguemos a una contradicción y clausuremos una rama, cercamos la última fórmula con un rectángulo que incluye el mundo respectivo. Es lo que ha ocurrido con '-p' en la línea 5, que contradice a 'p' en la línea 4, y que, a su vez, queda dentro de las fórmulas de m_1. Desde luego, la obtención de 'p' en la línea 4 y de '-p' en la línea 5 se hace conforme a las REM, lo que muestra que (1) es un teorema-T.

(2) $-M(p \vee q) \supset (-Mp \cdot -Mq)$

1. $-\big(-M(p \vee q) \supset (-Mp \cdot -Mq)\big)$ PA

2. $-M(p \vee q)^{m_1}$ FC1

3. $-(-Mp \cdot -Mq)$ FC1

4. $-(p \vee q)$ FM2

5. $-p$ FA4

6. $-q$ FA4

7. Mp^{m_1} FK,DN3	8. Mq^{m_1} FK,DN3
9. p^{m_2} VM,7	12. q^{m_3} VM8
10. $-(p \vee q)$ AC4	13. $-(p \vee q)$ AC4
11. $\boxed{-p^{m_2}}$ FA10	14. $-p$ FA13
	15. $\boxed{-q^{m_3}}$ FA13

En el ejemplo anterior no habíamos necesitado establecer acceso con otros mundos para obtener la ramificación completa de la fórmula modal. En (2), sin embargo, nos enfrentamos por primera vez a este requerimiento. Esto ocurre en las líneas 7 y 8. En 7, de acuerdo a VM, debemos establecer el acceso de un nuevo mundo donde 'p' debe ser verdadera. Gráficamente este acceso se representará en T mediante una doble línea vertical '||'. Como abrimos una nueva rama y nuevo mundo, marcamos también éste como un exponente sobre la primera fórmula de la rama. Lo mismo hacemos en la línea 12. Este mundo nuevo debe ser diferente del requerido en la línea 7 (de acuerdo a lo que establece la relación R para la estructura modelo T), por lo tanto, lo marcamos también como exponente al abrir la rama. Tanto en la línea 10 como en la 13, de acuerdo al sentido de VL y FM y su conexión con R, hemos marcado el acceso del residuo que resulta de aplicar FM a '-M (p v q)', esto es, de ' -(p v q)'. El hecho de que aparezca en ambos mundos se debe, obviamente, al alcance universal (para todos los mundos posibles de K) del cuantificador en FM. Marcamos el hecho del acceso con la abreviación AC y le agregamos el número de línea de la fórmula que se repite. Desde luego, lo mismo regirá para el acceso de Lα en un mundo m_j. Finalmente, la inconsistencia de la ramificación completa muestra que (2) también es un teorema-T.

(3) $L(p \vee Mq) \supset (Lp \vee Mq)$

1.	$-(L(p \vee Mq) \supset (Lp \vee Mq))$	PA
2.	$L(p \vee Mq)^{m_1}$	FC1
3.	$-(Lp \vee Mq)$	FC1
4.	$p \vee Mq$	VL2

5. p	VA4	6. Mq	VA4
7. $-Lp$	FA3	16. $-Lp$	FA3
8. $-Mq$	FA3	17. $\boxed{-Mq^{m_1}}$	FA3
9. $-q^{m_1}$	FM8		
10. $-p^{m_2}$	FL7		
11. $-q$	AC9		

12. $p \vee Mq$ AC4

13. $\boxed{p^{m_2}}$ VA12 14. Mq^{m_2} VA12

15. q^{m_3} VM14

Por primera vez hemos establecido la no validez de una fórmula modal. Esto queda evidenciado en la sub-rama 14-15, donde han sido aplicadas todas las reglas de eliminación y todos los accesos posibles. En m_3 no se puede marcar el acceso, de acuerdo a las explicaciones intuitivas dadas antes sobre R en T, de ninguna fórmula modal regida por la negación de L , o por M,en m_1 (aun cuando haya acceso de m_3 a m_2), luego, no es posible agregar a m_3 '-q'. De esta manera, es posible encontrar un modelo-T falsificador de (3) tal que para $K=\{m_1, m_2, m_3\}$, es posible encontrar un mundo, m_3, donde la asignación $\mathcal{V}$ de 'q' como V da como asignación $\mathcal{V}$ para (4), en m_1, F, esto es, $\mathcal{V}((4),m_1)=F$.

(4) $Lp \equiv -M-p$

1. $-(Lp \equiv -M-p)$ PA

2. $Lp^{m}1$	FB1	3. $-M-p^{m}1$	FB1
4. $M-p$	FB,DN1	8. $-L\ p$	FB1
5. $p^{m}1$	VL2	9. $p^{m}1$	FM,DN3
6. $-p^{m}2$	VM4	10. $-p^{m}3$	FL8
7. $\boxed{p^{m}2}$	AC5	11. $\boxed{p^{m}3}$	AC9

(4) es, de acuerdo a las líneas 7 y 11, válida-T y expresa la definición de L en términos de M y negación. En este ejemplo hemos procedido en conformidad a las REE para el bicondicional, lo que nos obliga a escindir el desarrollo en dos ramas finitas de dos líneas cada una. Un ejemplo de este género, más complejo, lo encontramos en el siguiente árbol.

(5) $L(p \,.\, q) \equiv Lp \,.\, Lq$

1. $-(L(p \,.\, q) \equiv Lp \,.\, Lq)$ PA

2. $L(p \,.\, q)^{m_1}$ FB1
4. $-(Lp \,.\, Lq)$ FB1
5. $p \,.\, q$ VL2
6. p VK5
7. q VK5

8. $-Lp^{m_1}$ FK4
10. $-p^{m_2}$ FL8
11. $p \,.\, q$ AC5
12. $\boxed{p^{m_2}}$ VK11

9. $-Lq^{m_1}$ FK4
13. $-q^{m_3}$ FL9
14. $p \,.\, q$ AC5
15. $\boxed{q^{m_3}}$ VK14

16. $Lp \,.\, Lq^{m_1}$ FB1
17. $-L(p \,.\, q)$ FB1
18. Lp VK3
19. Lq VK3
20. p VL17
21. q VL18
22. $-(p \,.\, q)^{m_4}$ FL16
23. p AC19
24. q AC20

25. $\boxed{-p^{m_4}}$ FK21
26. $\boxed{-q^{m_4}}$ FK21

Como se ve, de acuerdo a las líneas 12, 15, 25 y 26, la ramificación completa del m_1 de (5) es inconsistente y, por consiguiente, (5) también es válida-T. Una observación que se debe reiterar todo lo que sea posible es la necesidad de marcar los accesos inmediatamente después de haber aplicado, en cualquier m_j, VM o FL. Dado este paso se debe operar de inmediato también sobre el residuo de la aplicación de VM o FL.

4. Pruebas para el sistema S4

Debemos recordar, antes de pasar a los ejemplos, que la única diferencia relevante, de acuerdo a lo que dijimos antes, entre la estructura modelo-T y la estructura modelo-S4, descansa en la caracterización de R. En S4, R no sólo es una relación reflexiva sino que, además, expresa una relación transitiva entre los diferentes miembros de K. Esto trae, como consecuencia, que toda vez que tengamos en una rama de un mundo m_i, $L\alpha$, deberemos marcar el acceso para α , en todas las ramas de nuevos mundos m_j, siempre que se sigan de aquella primera rama. Lo mismo acontecerá con $-\alpha$, el residuo de '$-M\alpha$' . En el caso de fórmulas cuya ramificación completa exija sólo dos mundos, obviamente el requisito de transitividad es superfluo y esto significa que en dichos casos la diferencia entre los árboles modales T y los árboles modales S4 se disuelve.

A continuación ofrezco un ejemplo desarrollado, primero de acuerdo a T, y luego de acuerdo a S4.

(6) $Lp \supset LLp$

1.	$-(Lp \supset LLp)$	PA (T)
2.	Lp^{m_1}	FC1
3.	$-LLp$	FC1
4.	p^{m_1}	VL2
5.	$-Lp^{m_2}$	FL3
6.	p^{m_2}	AC4
7.	$-p^{m_3}$	FL5

1.	$-(Lp \supset LLp)$	PA(S4)
2.	Lp^{m_1}	FC1
3.	$-LLp$	FC1
4.	p^{m_1}	VL2
	|||	
5.	$-Lp^{m_2}$	FL3
6.	p^{m_2}	AC4
	|||	
7.	$-p^{m_3}$	FL5
8.	$\boxed{p^{m_3}}$	AC6

De acuerdo a las anteriores ramificaciones,(6) no es válido-T, lo cual era esperable pues (6) es el axioma característico de S4. El segundo árbol muestra la validez-S4 de (6). Como se ve, graficamos ahora la relación de accesibilidad para S4 mediante tres líneas '|||'. A diferencia de T, ahora estamos obligados a marcar acceso no sólo en el mundo m_2,sino también en el mundo m_3, lo que posibilita finalmente obtener una contradicción.

(7) $Mp \equiv MMp$

1. $-(Mp \equiv MMp)$ PA

2. $Mp^{m}1$	FB1	4. $MMp^{m}1$	FB1
3. $-MMp$	FB1	5. $-Mp$	FB1
6. $\boxed{-Mp^{m}1}$	FM3	7. $-p^{m}1$	FM5
$\sim p$			
X			
		8. $Mp^{m}2$	VM4
		9. $-p^{m}2$	AC7
		10. $p^{m}3$	VM8
		11. $\boxed{-p^{m}3}$	AC7
		X	

Las líneas 6 y 11 muestran la validez-S4 de (7).

Arboles modales infinitos en S4

En S4 es posible encontrar fórmulas que dan origen a árboles modales infinitos. Esto, como lo han observado Hughes y Creswell (7) para el procedimiento de Kripke, se debe a que en S4, a diferencia de T, el grado de las fórmulas no desaparece necesariamente conforme se aplican las REM. Es decir, si la rama de un mundo m_i contiene $L\alpha$ entonces la ramificación completa exigirá que en toda rama de un nuevo mundo m_j (por lejos que esté de m_i) aparezca α . Luego, si α es de grado modal n todas las ramas de nuevos mundos contendrán al menos una fórmula modal de grado modal n . Esto se puede evidenciar con el siguiente ejemplo:

(8) $LMp \supset MLp$

1.	$-(LMp \supset MLp)$	PA
2.	LMp^{m_1}	FC1
3.	$-MLp$	FC1
4.	Mp	VL2

5. $-Lp^{m_1}$ FM4

6. p^{m_2} VM4	7. $-p^{m_3}$ FL5
8. $-Lp^{m_2}$ AC5	9. Mp^{m_3} AC4
10. $-p^{m_4}$ FL8	12. p^{m_5} VM9
11. Mp^{m_4} AC4	13. $-Lp^{m_5}$ AC5
14. p^{m_6} VM11	16. $-p^{m_7}$ FL13
15. $-Lp^{m_6}$ AC5	17. Mp^{m_7} AC4

De hecho, (8) no es válida-S4, sin embargo, esto no queda establecido en el desarrollo anterior. Pues dicho desarrollo no expresa un modelo falsificador S4 para (8). Si así fuese, tanto en m_6 como en m_7 deberíamos haber terminado de aplicar las REM; lo que, por supuesto, no ocurre, debido a que, en m_6, tenemos todavía '-Lp' y, en m_7, 'Mp'. Necesitaríamos abrir nuevos mundos para eliminar dichos operadores, es decir, hacer lo mismo que hicimos en m_2 y m_3, y eso nos llevaría a mundos iguales a m_4 y m_5 y así hasta el infinito. A estas ramas que nos llevan al infinito podemos llamarlas 'ramas repetidoras'. Ahora bien, todo este problema puede resolverse ateniéndose a la sencilla regla que se formula a continuación.

Regla para ramas repetidoras: Siempre que en una rama de un árbol S4 cualquiera, m_j esté contenido integramente en un m_i que aparece con anterioridad en esa rama, suprimimos m_j y devolvemos las relaciones de accesibilidad que iban hacia m_j, a m_i.(8)

La regla anterior permite reformular así la ramificación de (8):

1.	$-(LMp \supset MLp)$	PA
2.	LMp^{m_1}	FC1
3.	$-MLp$	FC1
4.	Mp	VL2

5. $-Lp^{m_1}$ FM4

6. p^{m_2}	9. Mp^{m_4}	10. $-p^{m_3}$	13. $-Lp^{m_5}$
VM4 y 6	AC4	FL5 y 13	AC5
7. $-Lp^{m_2}$	8. $-p^{m_4}$	11. Mp^{m_3}	12. p^{m_5}
AC5	FL7	AC4	VM11

Se puede observar ahora que las relaciones de accesibilidad que, en el anterior árbol, iban de m_4 a m_6 y de m_5 a m_7 las hemos devuelto a m_2 y m_3 respectivamente, en donde ya están 'p' y '-p'. Además, hemos anotado bajo cada línea la justificación para simplificar la graficación del árbol. Finalmente, ahora es posible decir que la ramificación completa de (8) expresa un modelo falsificador de ella, y que, por tanto, no es válida S4. Pues las eliminaciones requeridas en cada mundo son satisfechas por otro mundo sin que se obtengan contradicciones.

5. Pruebas para el sistema S5

De acuerdo a lo dicho antes, en toda estructura modelo S5 la relación R entre los miembros de K no sólo es reflexiva y transitiva sino que, además, simétrica, lo que significa que todo mundo de K está en relación de accesibilidad con todos los otros mundos de K. Gráficamente, marcamos esta relación con cuatro líneas del tipo '||||'. Desde un punto de vista lógico, esto significa que si tenemos en una rama de un mundo m_i una fórmula $L\alpha$, marcamos acceso para α en todas las ramas de nuevos mundos m_j, no importa que se sigan o no de aquella primera rama (lo mismo aplica, por supuesto, para fórmulas del tipo '$-M\alpha$').

Ofrecemos como ejemplo la ramificación S4 y S5 de una misma fórmula.

(9) $MLp \supset LMp$

1. $-(MLp \supset LMp)$ PA (S4)
2. MLp^{m_1} FC1
3. $-LMp^{m_1}$ FC1

4. Lp^{m_2}	VM2	5. $-Mp^{m_3}$	FC3
6. p^{m_2}	VL4	7. $-p^{m_3}$	FM5

1. $-(MLp \supset LMp)$ PA (S5)

2. MLp^{m_1} FC1

3. $-LMp^{m_1}$ FC1

4.	Lp^{m_2}	VM2	5.	$-Mp^{m_3}$	FL3
6.	p	VL4	7.	$-p$	FM5
8.	$\boxed{-p^{m_2}}$	AC7	9.	$\boxed{p^{m_3}}$	AC8

La primera ramificación muestra que (9) no es válida-S4. Sin embargo, la segunda, muestra que (9) es válida-S5. Esto se debe a que, a diferencia de lo que pide R en S4, en S5, R nos exige marcar el acceso de '-p' en la línea 8 para la rama de m_2 y hacer lo mismo con 'p' en la línea 9 para m_3. Y dichos accesos son los que provocan finalmente las contradicciones en cada rama.

(10) $MMp \supset LMp$

1. $-(MMp \supset LMp)$ PA

2. MMp^{m_1} FC1

3. $-LMp^{m_1}$ FC1

4. Mp^{m_2} VM2   5. $-Mp^{m_3}$ FL3

7. $-p^{m_2}$ AC1   6. $-p^{m_3}$ FM5

8. p^{m_4} VM4

9. $\boxed{-p^{m_4}}$ AC6

(10) es válida-S5, de acuerdo a la línea 9. Al marcar el acceso de '-p' en la línea 6 para m_4 hemos provocado una contradicción. Las líneas cuádruples de m_3 a m_2 y de m_2 a m_4, muestran la necesidad de marcar este acceso. En realidad, debimos también trazar líneas cuádruples de m_3 a m_4 para mostrar claramente que la contradicción alcanza también a m_3. Sin embargo, podemos hacer algo mejor, suprimiendo la presencia de '-p' en m_2 y, con ello, de las líneas cuádruples que van de m_3 a m_2, y dejando sólo las que van de m_3 a m_4. Lo que resulta es el siguiente ár-

bol-S5:

1\. $-(MMp \supset LMp)$ PA

2\. MMp^{m_1} FC1

3\. $-LMp^{m_1}$ FC1

4\. Mp^{m_2} VM2 5. $-Mp^{m_3}$ FL3

6\. $-p^{m_3}$ FM5

7\. p^{m_4} VM4

8\. $\boxed{-p^{m_4}}$ AC6

Aparentemente, la ausencia de '-p' en m_2 no afecta a m_4, donde se origina la contradicción, por lo que puede aceptarse.

(11) $Lp \equiv LMp$

1\. $-(Lp \equiv LMp)$ PA

2\. Lp^{m_1} FB1 4. LMp^{m_1} FB1

3. $-LMp$	FB1	5. $-Lp$	FB1		
6. p^{m_1}	VL2	7. Mp^{m_1}	VL4		
8. $-Mp^{m_2}$	FL3	11. $-p^{m_3}$	FL5	13. p^{m_4}	VM7
9. p	AC6	12. Mp^{m_3}	AC7		
10. $-p^{m_2}$	FM8				
		14. p^{m_5}	VM12		

Como se puede observar (11) no es válida-S5 pues la rama de m_1 que lleva a m_5 no se clausura. Es interesante observar además que en el caso de fórmulas que contienen bicondicionales las ramificaciones de cada rama de m_1 son <u>diferentes</u> entre sí (corresponden en el fondo a la ramificación de dos condicionales diferentes) y que por tanto no pueden dar origen a accesibilidad entre sus mundos. En nuestro ejemplo, accesibilidad entre m_2 y los mundos m_3, m_4 y m_5. Si hubiese sido eso posible, la presencia de '$-p$' de m_2 en cualesquiera de esos mundos habría originado de inmediato una contradicción en la rama de ese mundo y finalmente habría hecho a toda la ramificación inconsistente.

6. Un ejemplo de prueba en SB

Finalmente, damos aquí un ejemplo, a modo de ilustración, de cómo probar fórmulas modales en el sistema Brouweriano o SB. Dicho sistema se diferencia de los demás en que en su estructura modelo, R se caracteriza como una relación reflexiva y simétrica pero no transitiva, lo que graficaremos con el signo ' ▨ '.

(12) $MLp \supset p$

1.	$-(MLp \supset p)$	PA
2.	$MLp^{m}1$	FC1
3.	$-p^{m}1$	FC1
4.	$Lp^{m}2$	VM2
5.	$p^{m}2$	VL4
6.	$\boxed{p^{m}1}$ ✱	AC5

La validez-B de (12) se obtiene, como se puede observar, de una contradicción en m_1 entre 'p' y '-p'. Debido a que la relación entre m_1 y m_2 es simétrica, estamos obligados a marcar tanto el acceso de una fórmula de m_1 en m_2 como a la inversa. Esto último es lo que ha ocurrido con 'p', el residuo en m_2 de eliminar L de la línea 4. Para simplificar la graficación hemos marcado el acceso de 'p' fuera de la rama de m_1, pero nos cuidamos de advertir esto con el asterisco y con el exponente que expresa el mundo al que corresponde la fórmula. Obviamente, (12) también es válida S5, aunque no es válida-T, ni válida-S4 (como tal vez se recordará, para esta clase de fórmulas el requisito de transitividad es irrelevante).

NOTAS

(1) Agrego, como una nota, la condición de asignación para el bicondicional, [$\mathcal{V}$ B]. Aunque dicha asignación puede derivarse de las anteriores, de manera tácita, es conveniente ofrecerla aparte, pues el bicondicional jugará un papel importante en las futuras demostraciones.

[$\mathcal{V}$B] Para cualesquiera fbfs, α y β, y para cualquier $m_i \in K$, $\mathcal{V}((\alpha \equiv \beta), m_i)=V$, ssi o $\mathcal{V}(\alpha, m_i)=\mathcal{V}(\beta, m_i)=V$, o bien $\mathcal{V}(\alpha, m_i)=\mathcal{V}(\beta, m_i)=F$, en caso contrario $\mathcal{V}((\alpha \equiv \beta), m_i)=F$.

(2) R. C. Jeffrey, Formal Logic: Its Scope and Limits, New York, McGraw-Hill, 1967.

(3) W. Hodges, Logic, London, Penguin Books Ltd. England, 1977.

(4) R. M. Smullyan First - order Logic, New York, Berlín-Heidelberg, Springer Verlag, 1968. También se puede consultar con provecho, M. Garrido, op. cit., pp. 258-273, y R. Beneyto "Laberintos Analíticos", en Revista Teorema, Valencia, Vol. 4, 1971, pp. 19-30.

(5) Se lee como ' α es necesaria en el conjunto K'.

(6) A diferencia del capítulo anterior, muchos de los ejemplos que ofreceré, no aparecen en ILM.

(7) Debo aclarar que usaré en este capítulo, AC, para ilustrar indistintamente, los accesos en T, S4 y S5, pues aquí específico antes en qué sistema estoy trabajando. Pero, en los capítulos restantes tenderé, a veces, a indicar en qué sistema se registra el acceso, y lo haré utilizando el signo 'x' de, por ejemplo, la siguiente manera: ACxS5, 4. Esto significa simplemente 'acceso por S5, a partir de la línea 4'.

(8) Esta regla está inspirada en una regla análoga que Hughes y Cresswell formulan para el método de Kripke, cf. ILM, p. 100.

CAPITULO TRES

Un procedimiento alternativo: lógica de predicados modal

En este capítulo ofreceré nuevas técnicas de decisión para los sistemas modales cuantificados T, S4 y S5. Para ello formularé, en primer lugar, una semántica para los sistemas modales cuantificados T, S4 y S5, más sencilla y liberal que la de Kripke, aunque basada en su concepción original. A esta semántica la denominaré 'semántica indulgente' o Sem I.(1) La de Kripke, a la que, como veremos, se puede llegar agregando algunas restricciones estratégicas, la denominaré Sem K.

1. Una semántica indulgente

Una Sem I, mediante la cual definimos la validez de las fórmulas modales cuantificadas, es una estructura modelo constituída por un cuádruple ordenado $\langle K, R, D, \mathcal{V} \rangle$, siendo K el conjunto no vacío de mundos posibles $m_i \ldots m_n$; R es la relación diádica que se establece entre los miembros de K y que hemos llamado 'accesibilidad'. D es un conjunto o dominio de individuos, y, finalmente, $\mathcal{V}$ representa la operación (o función) de asignar un valor, ya sea de individuos de D a cualquier variable libre en la forma $\mathcal{V}(x)=u$ (donde $u \in D$), o ya sea del conjunto $\{V, F\}$ a cualquier fbf α constituída por una variable predicativa φ n-ádica, seguida de un (n + 1) múltiplo ordenado, del tipo $\langle u_1 \ldots u_n, m_i \rangle$ y donde $m_i \in K$. A su vez, $\mathcal{V}(\varphi)$ es igual al conjunto de todos aquellos múltiplos ordenados.

A partir de lo anterior, podemos, en principio,[2] calcular $\mathcal{V}(\alpha, m_i)$ para toda α y todo $m_i \in K$ de acuerdo a las siguientes condiciones.

(1) Para cualquier fórmula atómica de lógica cuantificacional, si φ es una variable predicativa n-ádica, entonces $\mathcal{V}(\varphi(x_1, \ldots x_n), m_i) = V$ si $\langle \mathcal{V}(x_1), \ldots, \mathcal{V}(x_n), m_i \rangle \in \mathcal{V}(\varphi)$, de lo contrario $\mathcal{V}(\varphi(x_1, \ldots, x_n), m_i) = F$

(2) Para toda fórmula atómica precedida por un cuantificador universal, del tipo $((\underline{a})\alpha, m_i)$, donde la letra $\underline{a}$ representa cualquier variable individual (un parámetro), y $m_i \in K$, $\mathcal{V}((\underline{a})\alpha, m_i) = V$ si, para cualquier asignación $\mathcal{V}'$ hecha en alguno de los modelos (T,S4,S5) que dé a todas las variables, excepto a la variable a, los mismos valores que les asigna $\mathcal{V}$, $\mathcal{V}'(\alpha) = V$,en caso contrario $\mathcal{V}((\underline{a})\alpha, m_i) = F$. Para esta condición se ha elegido arbitrariamente,como primitivo, el cuantificador universal.

(3) La siguiente condición la formularé para introducir el operador de necesidad L. Para cualquier fbf A[3] (esto es, precedida o no por cuantificador) y cualquier $m_i \in K$, $\mathcal{V}(LA, m_i) = V$ si para todo $m_j \in K$ tal que $m_i R m_j$, $\mathcal{V}(A, m_j) = V$, de lo contrario $\mathcal{V}(LA, m_i) = F$.

2. Teorema modal y reglas de eliminación en lógica de predicados.

Propondré ahora, en términos de modelos, la siguiente definición de teorema modal para T, S4 o S5 cuantificados. Una fbf, A, es un teorema de un sistema modal cuantificado (T,S4 o S5) si no es posible construir para ella un modelo $\langle K, R, D, \rangle$ falsificador , es decir, si no encontramos un modelo

(T, S4 o S5) en el cual, para al menos un $m_i \in K$, $\mathcal{V}(A, m_i) = F$.

En lo siguiente, utilizaré tanto las REE como las REM detalladas en el capítulo anterior, y sólo recordaré aquí las reglas de eliminación de los cuantificadores. Distinguiré, semánticamente, entre reglas de verdad y reglas de falsedad.

Reglas de Verdad

(RVU) Si tenemos '(x) Fx', entonces tenemos 'F$\underline{a}$'

(RVE) Si tenemos '(Ex)Fx', entonces tenemos 'F$\underline{a}$' (se admite la exigencia standard de que $\underline{a}$ sea un parámetro o una constante nueva en el curso de la deducción).

Reglas de Falsedad

(RFU) Si tenemos '-(x)Fx', entonces tenemos '-F$\underline{a}$'

(RFE) Si tenemos '-(Ex)Fx', tenemos '-F$\underline{a}$'

3. Eliminación semántica en cuantificación modal.

Para dar sentido a la eliminación semántica en los sistemas modales cuantificados, empezaré aclarando las situaciones que en el curso de ella podemos enfrentar y, luego, formularé ciertas reglas ad hoc.

En relación a lo primero, es conveniente observar que para L (y consecuentemente para -M), tenemos las siguientes cuatro situaciones: i) L(x)Fx,m_i ; ii) L(Ex)Fx,m_i ; iii) (x)LFx, m_i y iv) (Ex)LFx,m_i. Para M (y consecuentemente para -L) tenemos: v)$M(x)Fx,m_i$; vi) $M(Ex)Fx,m_i$; vii) $(x)MFx,m_i$, y viii) $(Ex)MFx,m_i$. Podemos decir que i), ii), v) y vi) son cuantificaciones modales 'bien ordenadas'; en cambio iii), iv), vii) y viii) son cuantificaciones modales 'cruzadas'. (4)

Desde un punto de vista intuitivo, las eliminaciones en ii) y vi) llevarían sin problemas a '$(Ex)Fx,m_i$' y '$(Ex)Fx,m_j$', respectivamente; y en iv) y viii) llevarían respectivamente, a 'LFy,m_i' ('y' es cualquier $u \in D$) y 'MFy,m_i' (eventualmente a 'Fy,m_j'). Sin embargo, enfrentamos problemas intuitivos en i) y v), y en iii) y vii). ¿Cómo eliminamos aquí? Si aplicamos, de nuevo, el principio usado hasta ahora, al que llamaré principio pragmático, de tomar el conectivo más exterior como el principal y partimos eliminando desde ahí, obtenemos en i) y v), respectivamente, '$(x)Fx,m_i$' y '$(x)Fx,m_j$'. Y en iii) y vii) obtenemos respectivamente 'LFy,m_i' y 'MFy,m_i' (eventualmente 'Fy,m_j'). Sin embargo, podríamos no respetar ese principio (aunque, como veremos, con resistencias filosóficas) y obtener de i) y v) también 'LFy,m_i' y 'MFy,m_i' (eventualmente 'Fy,m_j'). Lo mismo, entonces, podría hacerse con iii) y vii), obteniendo respectivamente '$(x)Fx,m_i$' y '$(x)Fx,m_j$'. En general, podríamos admitir que ningún operador se considere el principal, y así eliminar a discreción. Si aceptamos estas, digamos, liberalizaciones antiintuitivas, necesitamos hacer dos modificaciones mínimas en nuestra Sem I: primero exigiremos que nuestro dominio D sea el mismo para todos los miembros de K y, en segundo lugar, aunque de manera independiente, estableceremos un requisito de inclusión entre mundos, de tal manera que, siempre que m_iRm_j, todos los miembros del dominio m_i, o también D_i, serán miembros del dominio de m_j, o también D_j, esto es, $D_i \subseteq D_j$.

De acuerdo a lo anterior, podemos probar de dos formas diferentes, ateniéndonos o (I) al principio pragmático, o (II) a las liberalizaciones ya enunciadas, que la fórmula '(x)LFx $\supset$ L(x)Fx' es un teorema del sistema modal más débil T (y por ende, de S4 y S5):

(F1)	(x)LFx $\supset$ L(x)Fx	(I)
1.	$-((x)LFx \supset L(x)Fx)$	PA.
2.	$(x)LFx^{m_1}$	FC1
3.	$-L(x)Fx$	FC1
4.	LFy	VU2
5.	Fy^{m_1}	VL4
6.	$-(x)Fx^{m_2}$	FL3
7.	$-Fy$	FU6
8.	$\boxed{Fy^{m_2}}$	AC5

(F1)	(x) LFx $\supset$ L(x) Fx	(II)
1.	$-((x)LFx \supset L(x)Fx)$	PA.
2.	$(x)\ LFx^{m_1}$	FC1
3.	$-L(x)Fx$	FC1
4.	LFy	VU2
5.	$\boxed{-LFy^{m_1}}$	VU3

De acuerdo al método de árboles de verdad, comenzamos negando la fórmula y marcamos al lado de la primera y la última subfórmula de cada rama, en la forma de un exponente, el mundo al que pertenece. A su vez, en m_j de (I) el residuo 'Fy' debe ser también verdadero, pues es el resultado de eliminar, en el mundo m_i, L, y, por lo tanto, marcamos como antes esa consecuencia del acceso de m_j a m_i como AC.

Como se habrá notado, tanto en (I) (principio pragmático) como en (II) (liberalizaciones) se obtiene una inconsistencia, lo que hace, por tanto, válida a F1. Sin embargo, no es difícil reconocer en dicha fórmula a la controvertida 'fórmula Barcan' (FB).[5] Ahora bien, hay buenas razones filosóficas, creo, para bloquear en ciertos casos esta fórmula. Y estas razones se reflejan en nuestras demostraciones semánticas. (II) puede ser rechazada plausiblemente porque para ella hemos apelado a una liberalización antiintuitiva en relación a la eliminación semántica convencional. En verdad, aceptaríamos FB si pudiese ser obtenida, como otras fórmulas modales cuantificadas, de una manera convencional. (I) parece expresar esto. Sin embargo, (I) también suscita controversias, pues ella se sostiene en el hecho de que aceptemos el acceso en m_2 de 'Fy', el residuo de L en la línea 4. A su vez, 'LFy' se obtuvo en m_1 de eliminar en una cuantificación modal cruzada. Y aceptar esto parece ser una consecuencia, como vimos antes, de aceptar la exigencia que pende sobre las liberalizaciones antiintuitivas: que los miembros del dominio D sean los mismos para todo $m_i \in K$.

Dicha exigencia es, por supuesto, muy controvertible. Como se ha mostrado una y otra vez, no hay ninguna buena razón lógica (ni filosófica) que nos obligue a pensar que los objetos no varían de un mundo posible a otro. Si no aceptamos esa exigencia debemos agregar entonces la siguiente restricción a nuestras reglas semánticas de eliminación:

(<u>Res</u>) Si (A,m_i) es una fórmula modal cuantificada que se desea probar mediante un modelo falsificador, aplíquense sobre ella las eliminaciones RVU, RFU, RVE, RFE y REM de acuerdo a su operador más exterior y rechácense (si es el caso) los AC, en cualquier m_j, de residuos de subfórmulas con L (en m_i) obtenidos, a su vez, de cuantificaciones modales cruzadas.

Con esta restricción, como se puede ver, ni (I), ni (II), son aceptables; empero, el inverso de FB, 'L(x)Fx⊃(x)LFx', aún resulta ser un teorema-T (y, por ende, S4 y S5), como se puede comprobar fácilmente. Por otra parte, <u>Res</u> trae como consecuencia una restricción en la <u>Sem I</u>, que es la siguiente:

asócianse con cada miembro $m_i \ldots m_n$ de K, subconjuntos particulares no vacíos de D, $D_i \ldots D_n$.

4. El problema de la fórmula Barcan en S5 cuantificado.

Nuestra anterior restricción impide que FB resulte ser un teorema-T y, además, que sea un teorema-S4. De acuerdo a lo sostenido en el capítulo anterior, en relación a las pruebas para S4 sentencial, esto último no necesita mayor demostración cuando se trata sólo de dos mundos m_i y m_j. Empero, Res no puede impedir que FB sea un teorema-S5. De hecho, aquí, por la condición de simetría, m_i es equivalente a m_j. Luego, si en m_i aparece 'Fy' como el resultado de eliminar L, también debe aparecer en m_j. La demostración es la siguiente:

$(x)LFx \supset L(x)Fx$

1.	$-((x)LFx \quad L(x)Fx)^{m1}$	PA
2.	$(x)LFx$	FC1
3.	$-L(x)Fx$	FC1
4.	LFy	VU2
5.	Fy^{m1}	VL4
6.	$-(x)Fx^{m2}$	FL3
7.	$-Fy$	FU6
8.	$\boxed{Fy^{m2}}$	AC5

Sin embargo, la semántica de Kripke, Sem K, es tan potente que bloquea incluso la posibilidad de probar FB en S5 cuantificado. Para ello, Kripke abandona el requisito de inclusión de que $D_i \subseteq D_j$, lo que significa que distintos miembros de K pueden tener distintos dominios sin privilegio de uno sobre otro, esto es, que incluso pueden haber mundos donde desaparecen algunos de los objetos presentes (se añadan o no algunos nuevos al mundo presente). Esto trae como consecuencia que Sem K invalide la fórmula cuantificacional '$(x)Fx \supset Fy$', que es la muestra típica de la regla de Ejemplificación Universal. A cambio de esto, Kripke acepta como válida, siguiendo a Quine, la clausura universal de dicha fórmula: '$(y)((x)Fx \supset Fy)$'(6), esto es, el resultado de ligar toda aparición de sus variables libres mediante un cuantificador universal.

Ahora biem, es totalmente practicable representar Sem K para la lógica modal cuantificada mediante una restricción adecuada a mis eliminaciones semánticas. La restricción es:

(Res') Si (A, m_i) es una fórmula modal cuantificada que se desea probar con un modelo falsificador, aplíquense sobre ella las eliminaciones RVU, RFU, RVE, RFE y REM de acuerdo a su operador más exterior, y acéptense en m_j (si es el caso) sólo los AC de residuos de L (en m_i) que sean la clausura universal de subfórmulas de A, obtenidas mediante las reglas de eliminación.

De acuerdo a Res', resulta imposible entonces aceptar 'Fy', en m_2 de la demostración anterior, aún cuando m_1Rm_2 y m_2Rm_1, pues 'Fy' es una fórmula abierta y, por lo tanto, FB resulta también no válida en S5. Además, también resulta no válido en T (y por tanto, en S4 y S5) el inverso de FB, tal como ocurre en Sem K.

A modo de ilustración, se puede ver, sin embargo, que Res' permite demostrar sin problemas la validez en S5 de la fórmula modal '$L(x)Fx \supset L(x)Fx$'. La demostración es la siguiente:

(F2) $L(x)Fx \supset L(x)Fx$

1.	$-(L(x)Fx \supset L(x)Fx)$	PA
2.	$L(x)Fx\ ^{m_1}$	FC 1
3.	$-L(x)Fx$	FC 1
4.	$(x)Fx\ ^{m_1}$	VL 2
5.	$-(x)Fx\ ^{m_2}$	FL 3
6.	$\boxed{(x)Fx\ ^{m_2}}$	ACxRes' 4.

NOTAS

(1) Esta semántica, cuya característica es la admisión, como veremos, de ciertas fórmulas cuantificadas sujetas a controversia filosófica, coincide, más o menos, con la semántica que Hughes y Cresswell ofrecen para lo que ellos llaman, el CEP (Cálculo Elemental de Predicados) modal.

(2) Es obvio que, si bien podemos calcular siempre, mediante este algoritmo, el valor de cualquier fórmula de la lógica sentencial modal, esto es lógicamente imposible cuando se trata de una fórmula de la lógica de predicados (aún monádicos) modal. Conclusión que se sigue, para la lógica modal, de un teorema demostrado precisamente por Kripke en 1962("The Undecidability of Monadic Modal Quantification Theory" en Zeitschrift für mathematische Logik und Grunglagen der Mathematik, 1962, Vol. 8, pp. 113-116) y, para la teoría de árboles, de un lema conocido, en teoría de conjuntos, como Lema de König (cf. Van Frassen ,op.cit. p.33)

(3) Introduzco la metavariable sentencial $A_i, \ldots A_n$, en vez de α, para sugerir que estoy considerando fórmulas de lógica de predicados, de mayor complejidad que las variables sentenciales de los capítulos anteriores. A, a su vez, admite, como se ve en la formulación de la asignación para el cuantificador universal, ser reformulada como '$(\underline{a})\alpha$'.

(4) Por el momento, me valdré de estas denominaciones ad hoc, y eludiré, hasta el capítulo cuatro, referirme a estas fórmulas con otros calificativos filosóficamente más arraigados.

(5) Espero que el lector no alcanze a confundir esta abreviación de la fórmula Barcan, con RFB (la regla de la falsedad del bicondicional), que, a veces, en contextos muy obvios, cito también como FB.

(6) Cf. S. Kripke "Semantical Considerations..." op.cit. p.69.

CAPITULO CUATRO

Semánticas de identidad y antirreísmo

En este capítulo, finalmente, me propongo extender los procedimientos sobre lógica de predicados reseñados antes, a la teoría de la identidad, pero ahora con un cierto grado de prescindencia de las ideas de Kripke.

Para lo anterior introduzco el símbolo '=', de tal manera que la expresión '*a*=*b*' se leerá como '*a* es idéntico a *b*' ('=' se puede entender también como un predicado diádico del tipo 'Fxy'), y '*a*=*b*' se leerá como '*a* es distinto de *b*' (tenderé a usar '*a*≠*b* en vez de -(*a*=*b*)'). (1)

Anticipo de inmediato que los sistemas cuantificacionales que tendré en cuenta aquí, admitirán al principio la fórmula Barcan o FB, discutida en el capítulo anterior (ya sea asumida como teorema o como axioma). De este modo, inicialmente las reglas que ofreceré se aplicarán a T+FB, S4+FB y S5+FB. Sin embargo, veremos luego, con más exactitud casi al final de este capítulo, que dicha fórmula puede también ser abandonada, dependiendo de la concepción de identidad que se esté dispuesto a defender.

1. Reglas de eliminación semántica en teoría de la identidad.

En primer lugar, utilizo, para las fórmulas atómicas $\varphi a, \ldots, \varphi n$, un esquema deductivo de eliminación de identidad, similar al de Kalish-Montague (?) y lo reformulo semánticamente del siguiente modo:

$$\text{(GSId)}\quad \frac{(\underline{a})\ (\underline{a}=\underline{b} \supset \varphi\underline{a}\ ),\ m_i \in K}{\varphi\underline{b},\ m_i}$$

Esta regla tiene la siguiente restricción: aplíquese GSId si $\varphi\underline{a}$ y $\varphi\underline{b}$ difieren solamente en que en todos los lugares en que aparezca libre $\underline{a}$, aparece libre $\underline{b}$. A esta regla la denomino 'gran regla de la sustitutividad de la identidad' y la abrevio, en consecuencia, GSId. Las reglas de eliminación semántica para variables individuales son las siguientes:

1. (RVId) $$\frac{\underline{a}=\underline{b},\ m_i \in K}{\begin{array}{l}\underline{a}=u, m_i\\ \underline{b}=u, m_i\end{array}}$$

2. (RFId) $\frac{\underline{a}\neq\underline{b},\ m_i \in K}{\underline{a}\neq u, m_i \mid \underline{b}\neq u, m_i}$

'u' corresponde, de acuerdo a lo que se sostuvo antes, a cualquier elemento o valor de D.

Por último, en las demostraciones que vienen a continuación se aceptaran como ejemplos de contradicción o inconsistencia, en teoría de la identidad, las siguientes expresiones o secuencias de expresiones:

1. $\underline{a}\neq\underline{a}$, 2. m) $\underline{a}=\underline{b}$, o 3. m) $\underline{a}=u$

.
.
.
.

n) $\underline{a}\neq\underline{b}$ n) $\underline{a}\neq u$.

2. Concepciones rivales de identidad : identidad estricta

Se ha hecho un lugar común, sobre todo a partir de las críticas hechas en los cuarenta por Quine,[3] pensar, en lógica modal, en dos concepciones de identidad rivales. La noción de identidad más arraigada en dicha lógica es la que se ha dado en llamar 'identidad estricta'.[4] Es ella también la que ha sufrido el mayor embate crítico. A consecuencias de esto, se han formulado nuevos sistemas de identidad modal, conocidos como sistemas de 'identidad contingente'.[5] De acuerdo a la intención de mi trabajo, me desentenderé, hasta donde se pueda, de las razones filosóficas que sustentan a cada una de las concepciones de identidad, y trataré, más bien, de mostrar, en forma técnica, cómo se reflejaría semánticamente el sutil mapa de controversias a que ellas dan lugar. A continuación entonces examinaré los fundamentos semánticos de los sistemas de identidad estricta.

La idea nuclear de dichos sistemas es que cualquier enunciado sobre identidad de individuos que pueda formularse significativamente, debe entenderse como afirmando una relación estricta o necesaria entre esos individuos o, lo que es lo mismo, que todo enunciado de identidad verdadero es un enunciado de identidad necesaria. La expresión obvia de esto sería el teorema

(T1) $(x=y) \supset L(x=y)$.

A su vez, con T1 parece estar ligado, de alguna manera, este otro teorema

(T2) $(x \neq y) \supset L(x \neq y)$.

La pregunta que se plantea enseguida es en qué sistemas modales y cómo podríamos demostrar que estas fórmulas son en realidad teoremas. La respuesta para T1 es que es un teorema incluso en T+FB (y por tanto en S4+FB y S5+FB), a condición simplemente de que se acepten las reglas de eliminación dadas en el apartado anterior. La demostración es la siguiente:

1.	$-((x=y) \supset L(x=y))$	PA
2.	$x=y \quad m_1$	FC 1
3.	$-L(x=y)$	FC 1
4.	(*) $-L(x=x)\ m_1$	GSId 3
5.	$-(x=y)\ m_2$	FL 3
6.	$x \neq y$	NId 5
7.	(*) $\boxed{x \neq x \quad m_2}$	GSId 6

El *quid* de esta prueba descansa en GSId (no necesitamos usar, por ejemplo, RVId o RFId), De acuerdo a ella, sustituimos en 3'y' por 'x' en la línea 4. Para dejar claro que sigue siendo la misma fórmula anoto en su lado izquierdo un asterisco rodeado por un círculo. En m_2 vuelvo a hacer lo mismo (pues GSId no hace restricciones especiales sobre algún m_j tal que $m_i R m_j$). Finalmente, se obtiene una contradicción de identidad en la línea 7, lo que prueba la validez de T1.

En el caso de T2, sin embargo, se puede ver que no resulta ser un teorema T+FB, pues podemos obtener un modelo falsificador de dos mundos para dicha fórmula. El modelo es el siguiente:

1.	$-((x \neq y) \supset L(x \neq y))$	PA
2.	$x \neq y$ ^{m_1}	FC 1
3.	$-L(x \neq y)^{m_1}$	FC 2
	‖	
4.	$-(x \neq y)$ ^{m_2}	FL 3
5.	$x = y$ ^{m_2}	DN Id 4.

Aquí no podemos apelar a GSId, pues ella opera sobre la base de que el antecedente del caso está constituido efectivamente por la afirmación de una identidad entre dos individuos. En T2, en cambio, el antecedente es la negación de una identidad. Por otra parte, tampoco es necesario ocupar las otras reglas de eliminación para la identidad, pues se seguiría teniendo el mismo modelo falsificador.

Desde un punto de vista filosófico, T1 y T2, generan una cerrada resistencia de parte de algunos lógicos. Sobre todo T1. En parte desde Frege, ya sabemos cómo atacar esta clase de fórmulas, pues, como él mostró, aunque las expresiones 'lucero de la mañana' y 'lucero de la tarde' denotan el mismo cuerpo celeste, esta identidad es nada más que una verdad contingente de la astronomía y no una verdad necesaria que se puede determinar por pura lógica.(6) Quine, a partir de ejemplos parecidos,(7) ha desarrollado una crítica persistente hacia T1 así como hacia los contextos modales en general, que no es del caso reproducir aquí.

Por supuesto, hay una forma más o menos coherente de argumentar a favor de T1 . El argumento a favor de T1 dice (sin entrar en extensiones innecesarias): si de un objeto que posee contingentemente una determinada propiedad φ , afirmamos su identidad con respecto a un objeto, el cual también posee contingentemente una propiedad ψ , entonces lo único que estamos diciendo es que un objeto (al que podemos asociarle diferentes propiedades) es idéntico a si mismo, y la necesidad de esta identidad se puede determinar efectivamente sólo por lógica. Desde un punto de vista semántico, aceptar esta argumentación, a mi juicio débil, significa elaborar una semántica apropiada para T1 y T2, del tipo de la <u>Sem I</u> para la lógica de predicados descrita en el capítulo anterior.

La mencionada semántica debería aceptar una condición de asignación $\mathcal{V}$ para la identidad, esto es, $[\mathcal{V}=]$,(semejante, en cierto sentido, a la exigencia que se le impuso antes a las liberalizaciones antiintuitivas), según la cual cualquier valor de D que tomen las variables individuales relacionadas mediante el predicado '=', sería uno y el mismo. Es decir, que 'x=y' se consideraría verdadero cuando 'x' e 'y' tuviesen asignado el mismo valor como objeto, esto es, el mismo $u \in D$ para cualquier $m_i \in K$. Nótese que esta condición de validez <u>generaliza</u> la asignación de los valores a las variables, de manera que el mismo valor tomado por dos variables, determina toda la serie $u_i, \ldots, u_k$ de D, <u>para cualquier otro mundo</u>.

Formularé la mencionada condición de asignación para la identidad así:

$[\mathcal{V}=]$ Para variables individuales cualesquiera $\underline{a}$ y $\underline{b}$, y para cualquier $m_i \in K$, $\mathcal{V}((\underline{a}=\underline{b}),m_i)=$ V o F, si $\mathcal{V}(\underline{a})=\mathcal{V}(\underline{b})$, o si $\mathcal{V}(\underline{a})\neq\mathcal{V}(\underline{b})$.

Con $[\mathcal{V}=]$, T1 resulta válido, según lo que se mostró antes, como teorema en T+FB y S4+FB; a su vez, con $[\mathcal{V}=]$, T2 resulta también efectivamente válido en dichos sistemas, aunque, de acuerdo a lo establecido anteriormente, sólo como axioma. No obstante, ambos T1 y T2 resultan ser teoremas válidos en S5+FB. Esto, con la prueba en T+FB, ha quedado demostrado para T1. Para T2 la prueba es la siguiente:

1.	$-((x \neq y) \supset L(x \neq y))$	PA
2.	$x \neq y^{m_1}$	FC1
3.	$-L(x \neq y)^{m_1}$	FC1
4.	$-(x \neq y)^{m_2}$	FL3
5.	$x=y$	DNId4
6.	$\boxed{x \neq y^{m_2}}$	AC2xS5

De acuerdo a la condición de simetría que rige en S5 debemos aceptar en m_2 el acceso de '$x \neq y$', lo que provoca, finalmente, la contradicción que indica la validez de T2 en dicho sistema.

3. Identidad contingente

Las inevitables críticas que T1 y T2 enfrentan, hacen bastante razonable, a mi juicio, elaborar una propuesta semántica alternativa en que dichos teoremas no se presenten. A este tipo de semántica se la llama usualmente semántica de identidad contingente. Desde el punto de vista de mis reglas de eliminación, dicha semántica se puede obtener modificando GSId mediante la siguiente cláusula:

(GSId') Aplíquese GSId si *a* y *b* difieren solamente en que, en todos los lugares en que aparezca libre *a*, sin caer bajo el alcance de un operador modal, aparece libre *b*.

GSId' imposibilita, como se puede comprobar fácilmente, la derivación de T1 en T+FB y en S4+FB, pues dicha prueba dependía de que aceptasemos: 1) por GSId , '$*$ -L(x=x)' en m_1, 2) '$x \neq y$' en m_2, y 3) '$* x \neq x$' en ese mismo mundo.

Pero la modificación de GSId, significa, a su vez, una modificación al interior de la semántica cuantificacional modal que hasta ahora hemos venido aceptando, esto es, una modificación en sus condiciones de asignación de valores a variables, si queremos reflejar semánticamente la situación que ha quedado consignada en GSId', al impedir que se aplique GSId cuando alguna variable a esté regida por un operador modal. Lo anterior requiere que se remueva la generalidad que, como vimos en el apartado anterior, subyace a la asignación $[\mathcal{V}=]$.

Se exigirá entonces que $\mathcal{V}$ no haga una asignación absoluta a una variable a dentro de una serie $u_1,...,u_k \in D$ para cualquier otro mundo m_j, sino una asignación a a <u>dentro de un mundo</u> m_i. Sólo de esta manera, evitaremos que se dé $\mathcal{V}((x=y),m_i)=V$ y $\mathcal{V}((x=y),m_j)=V$ si m_iRm_j, esto es, evitaremos que se dé T1. En otras palabras, aunque tengamos un solo objeto asignado a 'x' e 'y' en m_i, podremos tener distintos objetos asignados a dichas variables en m_j, y, por tanto, $\mathcal{V}((x=y),m_j)=F$. Esto, como se puede comprobar rápidamente, es lo que debería aparecer reflejado mediante el uso de mis reglas, pues, con ellas, obtenemos en m_1 'x=y' y, en m_2, 'x≠y' sin que, por otra parte, aparezca ya en este último mundo '$\circledast$ x=x'.

Así, la anterior propuesta para asignar valores a variables individuales nos obligará a las siguientes reformulaciones de las condiciones de asignación descritas para <u>Sem I</u> en el capítulo anterior (a este conjunto de asignaciones o condiciones lo llamaré ahora <u>Sem Id</u>):

1. Para cualquier variable individual, a, y para cualquier $m_i \in K$, (a,m_i) es algún elemento de la serie $u_1,...,u_k \in D$.

2. Para cualquier fórmula atómica de lógica de predicados, si φ es una variable predicativa n-ádica en cualquier $m_i \in K$, $\mathcal{V}(\varphi(x_1,\ldots,x_n),m_i)=V$ si $\langle \mathcal{V}(x_1,m_i),\ldots,\mathcal{V}(x_n,m_i),m_i\rangle \in \mathcal{V}(\varphi)$, de lo contrario, $\mathcal{V}(\varphi(x_1,\ldots,x_n),m_i)=F$.

La asignación de identidad $[\mathcal{V}=]$ se reformula ahora así:

3. Para variables individuales cualesquiera, $\underline{a}$ y $\underline{b}$, y para cualquier $m_i \in K$, $\mathcal{V}((\underline{a}=\underline{b}),m_i)=$ V o F, si $\mathcal{V}(\underline{a},m_i) = \mathcal{V}(\underline{b},m_i)$ o, si $\mathcal{V}(\underline{a},m_i) \neq \mathcal{V}(\underline{b},m_i)$.

La asignación de L, de Sem I, no necesita, por el momento, mayores reformulaciones. Sin embargo, la asignación del cuantificador universal debe necesariamente reformularse. Aparentemente, la reformulación más natural, a mi juicio,(8) sería:

4. Para cualquier fórmula del tipo$((\underline{a})\alpha,m_i$,donde $\underline{a}$ es cualquier variable individual y $m_i \in K$, $\mathcal{V}((\underline{a})\alpha,m_i)=$ V si cualquier asignación $\mathcal{V}'$ da a todas las variables, excepto a $\underline{a}$, en m_i, los mismos valores que les asigna $\mathcal{V}$, es decir, $\mathcal{V}'(\alpha,m_i)=V$, en caso contrario, $\mathcal{V}((\underline{a}),m_i)=F$.

En lo que se refiere a mi mecánica de decisión las anteriores reformulaciones tienen como consecuencia el introducir una modificación notacional. Dicha modificación tendrá por propósito señalar el hecho de que cuando abrimos, por efecto de la aplicación de la regla FL, un nuevo mundo m_j, esto es, cuando tenemos $m_i R m_j$, y no se han especificado los elementos de D para m_i y m_j, no sabemos si los valores de D que se le asignen a las variables individuales son valores que ya estaban o no en la serie $u_i,\ldots,u_k$ de D que le corresponde a m_i. A estas asignaciones las llamaré <u>asignaciones inciertas - j</u> (a los valores que estén en esta situación los llamaré, por extensión, valores inciertos). Finalmente, la regla correspondiente a la anterior modificación (y que abreviaré A-J) rezará así:

(A-J) Si se tiene $m_i R m_j$, por efecto de RLF, y <u>si no se han especificado los elementos de D para m_i y m_j (u otros mundos</u>) entonces señálense las asignaciones inciertas -j de las fórmulas, mediante el símbolo '?', al modo de un subíndice del elemento de D, en la forma ' $\underline{a}_n = u_?$' o en la forma derivada (por GSId') '$Fu_?$'.

En lo siguiente, ocuparé las nuevas condiciones de asignación más la nueva regla A-J, para determinar la no validez de T1 y T2 en S5+FB. Para ello únicamente se deberá aceptar, en la partida, que no se han especificado, excepto para m_i, los elementos de D mundo por mundo, lo que nos autorizará a usar A-J donde sea necesario. Por otra parte, este supuesto es la única condición necesaria para determinar lógicamente la no validez de las fórmulas en cuestión.

Hemos visto antes que GSId' impide que T1 sea un teorema en T+FB y S4+FB, pero obviamente GSId' no podría lograr por sí sola lo mismo, cuando se trata de S5+FB, donde la condición de simetría permite tener en m_2 tanto 'x=y' como 'x≠y'. Algo parecido acontece con T2. Sin embargo, si apoyamos convenientemente GSId' en las nuevas condiciones y en A-J, se podría impedir que T1 y T2 fuesen teoremas en S5+FB. Para ello, además de las nuevas restricciones estipuladas, es necesario formular una nueva regla intuitiva que llamaré <u>regla de bloqueo</u>. Esta regla tiene como fin bloquear ciertos accesos en un mundo m_j de algunas fórmulas de identidad. Esto último resulta obvio si se considera que no tiene sentido admitir (después de aplicar A-J), en un mismo mundo m_j, por ejemplo, '$x=u_2$' y, por acceso a m_i, '$x=u_1$'; o tener en m_i '$x\neq u_2$' y, por acceso, '$x=u_1$'. La regla (que abreviaré RB) es la siguiente:

(RB) Bloquéense en cualquier m_j los AC de fórmulas de identidad (afirmadas o negadas) cuya variable individual <u>a</u> sea la misma de toda fórmula, sea de identidad o no (y afirmada o negada), obtenida en m_j por A-J.

Paso ahora a determinar la no validez de T1 en S5+FB. Lo haré con el siguiente modelo:

1. $-((x=y) \supset L(x=y))$ PA

2. $x=y\ ^{m_1}$ FC1

3. $-L(x=y)$ FC1

4. $x=u_1$ RVId2

5. $y=u_1\ ^{m_1}$ RVId2

||||

6. $-(x=y)\ ^{m_2}$ FL3

7. $x \neq y$

8. $x \neq u_?$ RFId,A-J 6 9. $y \neq u_?$ RFId,A-J 6

10. $y=u_1\ ^{m_2}$ ACxS5 5 11. $x=u_1\ ^{m_2}$ ACxS5 4

RB se aplica, en m_2, para la primera sub-rama, con '$x=u_1$' de m_1; y, para la segunda sub-rama, con '$y=u_1$' de m_1. Para T2 se tiene lo siguiente:

1. $-((x\neq y) \supset L(x\neq y))$	PA		
2. $x\neq y$ ^{m_1}	FC1		
3. $-L(x\neq y)$	FC1		

4. $x\neq u_1$ ^{m_1}	RFId2	5. $y\neq u_1$ ^{m_1}	RFId2
6. $-(x\neq y)$ ^{m_2}	FL3	7. $-(x\neq y)$ ^{m_3}	FL3
8. $x=y$	DNId6	11. $x=y$	DNId7
9. $x=u_?$	RVId,A-J 8	12. $x=u_?$	RVId,A-J 11
10. $y=u_?$ ^{m_2}	RVId,A-J 8	13. $y=u_?$ ^{m_3}	RVId,A-J 11

RB se aplica, en m_2, con '$x\neq u_1$' de m_1, y, en m_3, con '$y\neq u_1$' de m_1. Como se puede ver, si se acepta que no se han especificado los valores de D para mundos diferentes de m_i, los anteriores constituyen los modelos falsificadores en S5+FB, de T1 y T2, respectivamente.

Finalmente, desarrollaré las derivaciones (la primera para probar validez y la segunda no validez) de dos fórmulas, cuya comparación dará pie, en la próxima sección, a algunas reflexiones de vuelo filosófico sobre tipos de modalidades. La no validez de la segunda fórmula se demuestra en el sistema modal más fuerte, esto es, en S5, lo que imposibilita, en principio, su aceptación bajo cualquier interpretación modal standar. A esta fórmula la denominaré T4 y a la primera T3. Son las siguientes:

(T3) $(x=y) \supset (Fx \supset Fy)$

1.	$-((x=y) \supset (Fx \supset Fy))$	PA
2.	$x=y^{m_1}$	FC1
3.	$-(Fx \supset Fy)$	FC1
4.	$x=u_1$	RVId2
5.	$y=u_1$	RVId2
6.	Fx	FC3
7.	$-Fy$	FC3
8.	Fu_1	GSId'4,6
9.	$\boxed{-Fu_1{}^{m_1}}$	GSId'5,7

(T4) $(x=y) \supset (LFx \supset LFy)$

1.	$-((x=y) \supset (LFx \supset LFy))$	PA
2.	$x=y \;^{m_1}$	FC1
3.	$-(LFx \supset LFy)$	FC1
4.	$x=u_1$	RVId2
5.	$y=u_1$	RVId2
6.	LFx	FC3
7.	$-LFy$	FC3
8.	$Fx \;^{m_1}$	VL6
9.	$-Fy \;^{m_2}$	FL7
10.	$x=u_1$	ACxS5,4
11.	Fx	AC9
12.	$-Fu_2$	A-J 9
13.	$Fu_1 \;^{m_2}$	GSId' 11,10.

En el caso de T3, su validez era un hecho esperable pues, como se puede observar, se trata, en rigor, más que de un teorema modal, de un teorema extensional que expresa la sustitutividad, no como una regla (al modo de GSId) sino como una fórmula o sentencia.

El examen del modelo falsificador para T4 exige un comentario más extenso. En primer lugar, debo recordar que no se puede usar GSId' en m_1, puesto que tanto 'Fx' como 'Fy' están regidos por operadores modales. Esto es lo que impide técnicamente que en m_1 'Fx' pueda ser sustituida por 'Fu_1' (lo que no ocurre en m_2). Por otra parte, '-Fy' debería dar origen en m_2 a una asignación incierta-j. Sin embargo, por tratarse de un modelo S5, estamos obligados a hacer ingresar, a m_2, '$x=u_1$', y parece legítimo preguntarse si no se debe hacer lo mismo con '$y=u_1$'. A esta pregunta crucial se debería contestar, en principio, negativamente, de acuerdo a RB. Esto tiene como consecuencia que la asignación para 'y' en m_2 siga siendo incierta, esto es, que dicha variable podría tomar otro valor distinto de 'u_1', lo que aparece expresado finalmente en la línea 12. Sin embargo, hay dos cosas que tomar en cuenta aquí: primero, que estamos en S5 y que aceptamos en él el requisito de simetría para cualquier fórmula, y , segundo, que se podría aplicar en este caso, en m_2, GSId', lo que nos permitiría tener, por último, '$-Fu_1$'. De acuerdo a esto, la única forma de evitar que se presenten, en m_2, 'Fu_1' y '$-Fu_1$', es suponer lo que se supuso para <u>Sem K</u> del capítulo anterior, esto es, el rechazo del requisito de inclusión $D_i \subseteq D_j$. Como este supuesto resulta una característica de mi semántica de identidad, ella admite, desde este punto de vista preciso, ser considerada una semántica de <u>tipo</u> Kripkeano. La diferencia, en mi semántica de identidad, es que el mencionado requisito no aplicaría ahora, en la forma de Res', a los residuos universales de fórmulas afectadas por L, sino a los elementos mismos de cada dominio en cada mundo, y en la forma más abreviada:

(Res'') Si (A, m_i) es una fórmula modal de identidad que se desea probar con un modelo falsificador, acéptense en m_j (si es el caso) sólo los AC de $u_i, \ldots, u_k \in D_i$ que sean los valores (en m_i) de variables individuales cuyos predicados no tengan la restricción A-J en m_j.

Es claro ahora que Res'' es lo que impide tener en m_2 '$y=u_1$' y lo que, empero, permite tener '$x=u_1$'. Por otra parte, el hecho de que 'Fx' se presente en m_2 depende de si aceptamos o no la regla Res' de Sem K. De ahí que he rodeado con un círculo tanto su acceso en la línea 11 como la aplicación sobre ella de GSId' en la línea 13, sugiriendo con ello que tales fórmulas podrían estar o no en m_2. De acuerdo a la anterior explicación, lo que podríamos tener en m_2, a lo sumo, sería la secuencia

m) $-Fu_2 \quad m_2$

.

.

.

.

n) $Fu_1 \quad m_2$,

pero nunca la inconsistencia

m) $-Fu_1\ ^{m}2$

.

.

.

.

n) $Fu_1\ ^{m}2$.

4. Cuantificaciones modales en la semántica de identidad contingente

Si bien <u>Sem Id</u> cumple satisfactoriamente la tarea de eliminar definitivamente de los sistemas modales las fórmulas T1 y T2 como fórmulas válidas, a cambio, nos enfrenta, como se verá, a algunas consecuencias inevitables respecto a ciertas cuantificaciones modales de las que ya hemos hablado en el capítulo anterior, entre ellas, de FB.

Si se revisa la condición de asignación para el cuantificador universal formulada en <u>Sem Id</u>, se llega rápidamente a dos conclusiones: primero, que, al hacer la asignación, se acepta que ella es relativa a m_i, y que, por tanto, en mundos diferentes, la asignación $\mathcal{V}'$ para el cuantificador universal se cumple como una nueva asignación en ese mundo, dependiendo, si los hubiere, de los nuevos valores que admitiese D. Esto significa que, en m_j, $\mathcal{V}'$ para el cuantificador universal, se convierte nuevamente en $\mathcal{V}$ para el cuantificador universal en m_i, esto es, $\mathcal{V}(\underline{a}) = \mathcal{V}'(\underline{a})$. En segundo lugar, el carácter relativo de la asignación indica que ningun elemento de la serie de D, posee una y la misma propiedad en todos los mundos, o, lo que es lo mismo, que ninguna variable individual, en una asignación $\mathcal{V}(\underline{a})$, toma <u>necesariamente</u> algún valor del dominio (puesto que estos pueden variar) y aunque dicha asignación esté regida por el operador de necesidad. Esto último significa, filosóficamente, que las cuantificaciones modales cruzadas pierden su vigencia en la <u>Sem Id</u>, de tal manera que expresiones tales como '(x)LFx' deben entenderse y reescribirse, de no indicarse otra cosa para el dominio, simplemente como '(x)Fx'. Es claro entonces que dichas expresiones, al interior de <u>Sem Id</u>, deben ser tratadas sólo extensionalmente.

En conformidad con las conclusiones anteriores, tenemos que, entre otras, las siguientes fórmulas no resultan ser teoremas:

(F1) $(x)LFx \supset LFy$,

pues se convierte en la fórmula

(F1') $(x)Fx \supset LFy$

que, evidentemente, no es válida como se demuestra con la siguiente derivación:

1.	$-((x)Fx \supset LFy)$	PA
2.	$(x)Fx \ m_1$	FC1
3.	$-LFy$	FC1
4.	$Fy \ m_1$	VU2
	$\|\|$	
5.	$-Fy \ m_2$	FL3

El interés de la anterior demostración es que F1 resultaba ser un teorema en lógica de predicados modal, pues se cumple, ya sea aceptando <u>Sem I</u> o <u>Sem K</u>. Como se puede ver, una semántica como <u>Sem Id</u> permite eliminarla definitivamente.

Por otro lado, <u>Sem Id</u> permite hacer una reconsideración novedosa de una fórmula que, de acuerdo a mi <u>Res'</u> para <u>Sem K</u>, no es válida en lógica de predicados modal. Se trata de

(F2) $L(Ex)Fx \supset (Ex)LFx.$

Esta fórmula, por supuesto, sigue siendo no válida en Sem K, pero, para Sem Id, ella puede ser reescrita, simplemente, como

(F2') $L(Ex)Fx \supset (Ex)Fx$,

que es una inocente ejemplificación de el, tal vez, más elemental de todos los axiomas modales, el axioma de necesariedad '$Lp \supset p$'.

Por otra parte, ahora no resulta problemático impedir la validez de FB, como ocurría en el capítulo anterior, pues, de acuerdo a Sem Id, ella debe ser reescrita ahora como

(FB') $(x)Fx \supset L(x)Fx$,

fórmula obviamente no válida. De esta manera, podemos, en adelante, considerar nuestra semántica de identidad contingente como no requiriendo la adición de la mencionada fórmula a los sistemas modales cuantificados.

Finalmente, Sem Id, preserva la validez de

(F3) $L(x)Fx \supset LFy$,

que se demuestra del siguiente modo

1. $-(L(x)Fx \supset LFy)$ PA

2. L(x)Fx ^{m_1} FC1

3. -LFy FC1

4. (x)Fx ^{m_1} VL2

||

5. -Fy ^{m_2} FL3

6. (x)Fx ACxRes' 4

7. $\boxed{Fy\ ^{m_2}}$ VU 6.

Indudablemente, si F3 hubiese resultado no válida habría quebrantado el sentido mismo de las lógicas modales, y ésta habría sido una razón suficiente para abandonar Sem Id. Esto se debe a que podemos considerar a F3 como un ejemplo de aplicación de dos principios fundamentales que debe aceptar cualquier lógica modal: en primer lugar, la llamada regla de necesariedad, y, en segundo lugar, el axioma de necesariedad de la implicación. Como se recordará, se aludió a dichos principios en el primer capítulo de esta tesis.

Ahora bien, si se examina F3 nuevamente, se puede ver de inmediato que, originalmente, corresponde a la fórmula extensional '(x)Fx ⊃ Fy', que es una muestra típica de la regla de ejemplificación universal. A su vez, si dicha fórmula se acepta como tesis lógica,[9] entonces, obviamente, por la regla de necesariedad se tiene

$L((x)Fx \supset Fy)$

y, finalmente, por sustitución en el axioma de necesariedad de la implicación y <u>modus ponens</u> se tiene

$L(x)Fx \supset LFy$.

5. Modalidad de dicto y modalidad de re: algunos problemas

Conectaré aquí, finalmente, lo dicho para F3 con lo demostrado para T3 y T4 al final de la sección tres. El hecho que T3 '$(x=y) \supset (Fx \supset Fy)$' resulte válido y, en cambio, T4 '$(x=y) \supset (LFx \supset LFy)$' no, ha llevado a afirmar a algunos autores como Hughes y Cresswell,[10] que, en los sistemas de identidad contingente, la regla de la sustitución uniforme para variables predicativas no es válida, ya que, si lo fuera, se podría sustituir 'F' por 'LF' en T3, obteniendo como teorema T4. De esto, ellos deducen, a su vez, que, aparentemente, la aceptación de dichos sistemas implicaría rechazar el tratar una expresión de la forma 'LF' como designadora de una propiedad genuina.

En general, cuando consideramos una expresión no cuantificada como 'LFx', podemos interpretarla, obviamente, de las siguientes dos maneras (<u>a</u> se puede entender, al igual que en el capítulo anterior, simplemente como un parámetro más, incluso como 'x'):

(MD) L(F<u>a</u>)

(MR) (LF)<u>a</u>.

Tanto (MD) como (MR) corresponden a lo que se conoce, de acuerdo a la tradición filosófica, como modalidad <u>de dicto</u> y modalidad <u>de re</u>, y se pueden leer, respectivamente, como 'el enunciado 'x es F' es necesario' y 'el objeto x necesariamente es F'. Las observaciones de Hughes y Cresswell tienen que ver, desde luego, con el segundo tipo de modalidad, y permiten que las semánticas como <u>Sem Id</u> puedan caracterizarse de antirreistas o, de una manera no totalmente exacta, a mi juicio,[(11)] de antiesencialistas. A su vez, es posible distinguir en las semánticas antirreistas dos tipos, uno fuerte y uno débil. Esta distinción depende de que las semánticas del caso rechazen como fórmulas válidas expresiones constituidas exclusivamente por (a) cuantificaciones modales cruzadas (antirreismo débil), o (b) expresiones del tipo '(LF)<u>a</u>', y que llamaré modalidades <u>de re</u> simples (antirreismo fuerte). Ya sabemos que <u>Sem Id</u> cumple con (a), por lo que puede ser calificada inicialmente de antirreista débil. A continuación mostraré además, que <u>Sem Id</u> es antirreista en un sentido fuerte, esto es, que esta diseñada para cumplir siempre con (b).

Para mostrar técnicamente la última afirmación hay que preguntarse, en primer lugar, lo siguiente, ¿cómo aceptaríamos que 'LF$\underline{a}$' fuese verdadera en <u>Sem Id</u>? Si se trata de (MD), es decir, de 'L(F$\underline{a}$)', la respuesta es que $\mathcal{V}$(L(F$\underline{a}$))= V en m_i, si el valor que se asigna a 'x' <u>en m_i</u> es F, y el que se le asigna a la misma variable (distinto o no) <u>en m_j</u>, es también F. De ahí que en T4, por ejemplo, asignados a 'x' e 'y', en m_1, 'u_1', y a 'x', en m_2, de nuevo 'u_1', tengamos $\mathcal{V}$(x=y)= V, $\mathcal{V}$(L(Fx))=V y, sin embargo, por A-J, tengamos, finalmente, para 'y', 'u_2', lo que muestra que el valor asignado a 'y' en m_2 puede no tomar F (a no ser que 'y=u_1, m_2', pero esto es lo que precisamente impide saber A-J).

Al evaluar (MR), esto es, '(LF)$\underline{a}$' parece que intuitivamente debieramos esperar que nuestra semántica no nos ofreciese la posibilidad interpretativa de considerarla, en algún sentido, verdadera. A su vez, esto depende de que '(LF)$\underline{a}$' no pudiese ser aceptada o construida coherentemente en <u>Sem Id</u> como una auténtica propiedad. Sin embargo, éstas no pasan de ser intuiciones, pues, como han mostrado también los mencionados autores, es perfectamente posible construir, en toda semántica de identidad contingente, '(LF)$\underline{a}$', en la misma forma que <u>cualquier otra propiedad no modal o extensional</u>. Esto sugiere entonces que podemos formular precisas condiciones de asignación, de tal manera de hacer verdadera a '(LF)$\underline{a}$'. Estas condiciones se resumen en la idea básica de que, para ser verdadera dicha fórmula, el objeto $\underline{a}$ debe ser F en todo mundo accesible de m_i. Más exactamente, esto querría decir que $\mathcal{V}$ ((LF)$\underline{a}$,m_i)=V, si cualquier valor asignado, u_i,...u_K, a $\underline{a}$ en m_i es F en todo m_j accesible a m_i, y aunque el valor asignado a la variable $\underline{a}$ en m_j sea F en ese mundo o no.

Al trasladar esta nueva condición a T4 se puede ver que se exige ahora que el valor tomado por 'y' en el modelo falsificador, esto es, 'u_1', sea F en m_1 y F en m_2. Lo primero es evidente, y lo segundo se cumple por el hecho que, en m_2, se tiene (en la línea 11) 'Fx' y (en la línea 10) '$x=u_1$'. Luego, de acuerdo a la interpretación (MR), T4 perfectamente podría ser válida.

Las anteriores consideraciones permiten concluir entonces que, cuando se determina la validez de T3 pero la no validez de T4, las semánticas de identidad contingente, por ejemplo, Sem Id, están asumiendo que las fórmulas modales simples o no cuantificadas que ocurren en ellas, deben interpretarse en el sentido (MD) más bien que en el de (MR).[(12)] Desde este punto de vista, es que digo de ellas que son *fuertemente* antirreístas. Recordará el lector que he sugerido antes reescribir las cuantificaciones modales cruzadas (que también podemos llamar, por extensión, modalidades *de re* complejas) como cuantificaciones extensionales. Ahora, además, estoy proponiendo reescribir las modalidades *de re* simples, en la forma (MD).

Obviamente, no se me puede escapar que, en principio, cualquier proyecto de identidad reísta, ya sea débil o fuerte, puede enfrentar, en su desarrollo, sólo obstáculos filosóficos o mecánicos, pero, de acuerdo a lo observado por Hughes y Cresswell, nunca semánticos, si es que no se quiere cuestionar la consistencia misma de cualquier semántica de identidad, incluso, y esto es lo más sorprendente, de las contingentes. Sin embargo, me parece, hasta donde se puede ver, que la superación de los obstáculos mecánicos (esto es, aquellos que tienen que ver con decisión o semidecisión), son determinantes a la hora de elegir la teoría demostrativa <u>ad hoc</u> que servirá de base a la semántica reísta. El problema es que, para ella, ya no hay una manera coherente de expresar la validez del tipo (MR) dentro de nuestros modelos falsificadores, de forma que dicha validez se refleje, en algún mundo posible, mediante alguna clase de contradicción o inconsistencia. De hecho, en T4, no podríamos decir, de aceptarse la asignación (MR), que se ha obtenido, en m_2, una contradicción entre 'Fu_1' y '$-Fu_1$', porque, de acuerdo a dicha asignación, el valor asignado a la variable individual en cuestión, en m_j, puede ser F en ese mundo o no. Esto indica claramente que '$-Fy$' en m_2 debe mantenerse incierta, esto es, como '$-Fu_7$'.

Así, me temo que el proyecto reísta de reformar la asignación para variables predicativas, de tal manera de incorporar fórmulas válidas que contengan sólo expresiones del tipo '(LF) a', impactaría severamente sobre la posibilidad de utilizar con éxito modelos falsificadores para determinar, en general, la validez de las fórmulas modales. Desgraciadamente, dichos modelos, como se ha podido observar a través de todo el desarrollo de esta tesis, son el recurso demostrativo más eficaz del que, hasta la fecha, cualquier semántica de mundos posibles pueda disponer.

NOTAS

(1) Esta observación se puede reformular más precisamente como la siguiente regla:

(NId) si a y b son parámetros y se tiene la fórmula -(a=b), entonces se puede inferir (a≠b), y viceversa.

Además, junto con la anterior, se puede formular la siguiente regla, que denominaré 'doble negación de la identidad':

(DNId) si a y b son parámetros y se tiene la fórmula -(a≠b), entonces se puede inferir (a=b), y viceversa.

(2) Kalish y Montague, "Remarks on Description and Natural Deduction" en Archiv für matematische Logik und Grundlagenforschung, 1957, Vol. III, fasc. 1-2, pp.50-64, y fasc. 3-4, pp. 65-73.

(3) A mi juicio, los textos básicos de Quine, de esa época, son los siguientes : "The Problem of interpreting Modal Logic" en The Journal of Symbolic Logic, 1947, Vol.12, pp.43-53; "Three Grades of Modal Involvement" en W.V.Quine The Ways of Paradox and Other Essays, Cambridge, Massachussets, Harvard University Press, 1977, pp. 158-176, y "Reference and Modality", en W.V.Quine From a Logical Point of View, Cambridge, Massachusetts, Harvard University Press, 1953, pp. 139-159 (hay traducción española, "Referencia y Modalidad" en Desde un punto de vista lógico, Barcelona, Ed. Ariel, 1962, pp.201-227).

(4) Cf. ILM pp. 161-163.

(5) Ibid., pp.165-168.

(6) G. Frege "Sobre Sentido y Denotación" en A. Gomez-Lobo (ed. y trad.) <u>Lógica y Semántica</u>, Valparaíso, Ediciones Universitarias de Valparaíso, 1972, pp. 47-49.

(7) Cf., a modo de ilustración, "Referencia y ..." op. cit. pp. 206-208, y "Three Grades... " op. cit. pp.174-175.

(8) En esto sigo, en parte, a S. Kanger, cf. <u>ILM</u> p.166 n.148.

(9) Nótese que no se está afirmando que la fórmula <u>sea</u> una tesis lógica, lo que contradeciría lo demostrado mediante <u>Sem K</u>, en el capítulo anterior. Lo que se quiere decir es que <u>si</u> ella lo fuese, entonces, por la regla de necesariedad y el axioma de necesariedad de la implicación, obtendríamos F3 deductivamente, lo que se comprueba con el modelo respectivo.

(10) <u>ILM</u> p.168,n.151.

(11) Una defensa interesante de la independencia del compromiso esencialista respecto al compromiso modal, y , en particular, de la independencia de las modalidades <u>de re</u> respecto a las modalidades <u>de dicto</u>, se puede encontrar en T. Parsons "Essentialism and Quantified Modal Logic" en L. Linsky, op.cit. pp. 73-87 . Para una discusión amplia sobre esencialismo cf. Baruch Brody <u>Identity and Essence</u>, Princeton, New Jersey, Princeton University Press, 1980 (para nuevas teorías sobre identidad intermundos ('across possible worlds') revísese especialmente el capítulo 5, parágrafo 4).

(12) Cf. <u>ILM</u> p.169, nota.

BIBLIOGRAFIA

BELL, J.L. y SLOMSOM, A.B. Models and Ultraproducts: an introduction, Amsterdam y Londres, Ed. North-Holland, 1969.

BENEYTO, R. "Laberintos Analíticos" en Revista Teorema, Valencia, vol.4, 1971.

BETH, E.W. The foundations of mathematics. A study in the philosophy of science, Amsterdam, Ed. North-Holland, 1959; Sec. ed. 1965.

CARNAP, R. Meaning and Necessity, Chicago, Chicago University Press, 1947 y 1956.

CARNAP, R. "Modalities and Quantification" en The Journal of Symbolic Logic, vol.11, 1946.

CROSSLEY, J. N. y otros ¿ Qué es la lógica matemática ?, Madrid, Ed. Tecnos, 1983.

COCCHIARELLA, N. Tense and Modal Logic: a study in the Topology of Temporal Reference, Los Angeles, Los Angeles University, 1965 (Tesis).

DALLA CHIARA SCABIA, M.L. Lógica, Barcelona, Ed. Labor, 1976.

FITTING, M.C. Intuitionistic Logic, Model Theory and Forcing, Amsterdam, Ed. North-Holland, 1969.

GARRIDO, M. Lógica Simbólica, Madrid, Ed. Tecnos, 1983.

HAACK, S. Filosofía de las Lógicas, Madrid, Ed. Cátedra, 1982.

HILPINEN, R. (ed.) — Deontic Logic : Introductory and systematic readings, Dordrecht-Holland, D.Reidel Pub. , 1971.

HINTIKKA, J. — "Modality and Quantification" en Theoria, Vol.27, 1961.

HINTIKKA, J. — "The Modes of Modality", Acta Philosophica Fennica, Helsinski, Fasc. 16, 1963.

HINTIKKA, J. — Models for Modalities, Dordrecht-Holland, D. Reidel Pub., 1969.

HINTIKKA, J. — Lógica, juegos de lenguaje e información. Temas kantianos de filosofía de la lógica, Madrid, Tecnos, 1976.

HINTIKKA, J. — Saber y Creer, Madrid, Ed. Tecnos, 1979.

HODGES, W. — Logic, Penguin Books Ltd. England, 1978.

JEFFREY, R. — Formal Logic: Its Scope and Limits, Nueva York y Lòndres, Ed. McGraw-Hill, 1967.

KANGER, S. — Provability in logic, Stockholm, Almqvist and Wiksell, 1957.

KANGER, S. — "On the Characterization of Modalities" en Theoria, Vol.23, 1957.

KRIPKE, S. — "The Undecidabality of monadic modal quantificatiom theory" en Zeitschrift für matematische Logik und Grundlagen der Mathematik, vol.9, 196 .

KRIPKE, S. "Semantical Analysis of Modal Logic I, Normal Propositional Calculi" en Zeitschrift für matematische Logik und Grundlagen der Matetik, Vol. 9, 1963.

KRIPKE, S. "Semantical Considerations on Modal Logic" en L. Linsky (ed.) Reference and Modality , Oxford, Oxford University Press, 1971,Rep. 1977.

LAMBERT, K. y VAN FRASSEN, B. "Meaning Relations, Possible Objects, and Possible Worlds" en K.Lambert (ed), Philosophical Problems in Logic, Dordrecht,Holanda, Reidel Pub.,1970.

LEWIS, C.I. A Survey of Symbolic Logic , Berkeley, University of California, 1918.

LEWIS, C.I. y LANGFORD, C.H. Symbolic Logic , New York, Dover Publications, 1932.

LEWIS, D. "Counterpart theory and quantified modal logic" en The Journal of Philosophy, Vol. 65.

LINSKY, L. (ed.) Reference and Modality, Oxford,Oxford University Press, 1971, rep. 1977.

MARCUS, R.B. "A functional calculus of first order based on strict implication" en The Journal of Symbolic Logic, Vol. 11, 1946

MARCUS, R.B. "The identity of individuals in a strict functional calculus of second order" en The Journal of Symbolic Logic, Vol. 12,1947.

MARCUS, R.B. "Extensionality" en Reference and Modality ed. L. Linsky, Oxford, Oxford University Press, 1971,rep. 1977.

PARSONS, T. "Essentialism and Quantified Modal Logic" en L.Linsky (ed.) Reference and Modality, Oxford, Oxford University, 1971.

PLANTINGA, A. "De Re et De Dicto" en Nous III, No. 3 1969 .

PRIOR, A. Time and Modality, Oxford, Clarendon Press, 1957.

PRIOR, A. "Possible Worlds", en The Philosophical Quarterly , Vol. 12, 1962

QUINE, W.V. "The Problem of interpreting Modal Logic" en The Journal of Symbolic Logic , Vol. 12, 1947.

QUINE, W.V. "Three Grades of Modal Involvement" en Proceedings of the XIth International Congress of Philosophy, Amsterdam: North-Holland Publishing Co. Vol.14, 1953.

QUINE, W.V. Desde un punto de vista lógico, Barcelona, Ed. Ariel. 1962. la. Ed. inglés: 1953.

QUINE, W.V. Los métodos de la lógica. Barcelona, Ed. Ariel, 1981. (Nueva ed. en inglés: 1972).

QUINE, W.V. The Ways of Paradox and Other Essays, Cambridge, Masschusetts, Harvard University Press, 1977.

ROBINSON, A. Introduction to Model Theory and the Metamathematics of Algebra, Amsterdam, Ed. North-Holland, 1963.

RODRIGUEZ, J. "Lógica Deóntica, Deducción natural y Decisión mediante Tablas Semánticas" , en Revista Teorema vol. III, 1973.

SMULLYAN, A. "Modality and Description" en L.Linsky (ed.) Reference and Modality, Oxford, Oxford University Press, 1971, rep. 1977.

SMULLYAN, R.M. First-order Logic, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1968.

STALNAKER, R. "A Theory of Conditionals", American Philosophical Quarterly, monograph series,No. 2.

VAN FRASSEN, B. Semántica Formal y Lógica , UNAM México, 1987

Quezada Pulido, Wilfredo
Lógica modal: una mecanización alternativa para la semántica de los mundos posibles de Kripke