



**FACULTAD DE CIENCIAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
CARRERA DE MATEMÁTICA**

**PRODUCTOS NOTABLES EN EL ESPACIO DE TRABAJO
MATEMÁTICO: UNA PROPUESTA PARA LA ENSEÑANZA Y
APRENDIZAJE EN LA ETAPA ESCOLAR**

Seminario de Título para optar al Título de Profesor de Enseñanza Media
en Matemática con Mención en Didáctica y el grado de Licenciado en
Educación.

**Cristian Marcelo Zambrano Cortez
Constanza Génesis Guerrero Garrido**

Profesor Guía: María Inés Pezoa Reyes

Valparaíso, Chile

2015

Agradecimientos.

Yo Constanza Guerrero Garrido dedico esta tesis a mis padres y hermanas, por el apoyo absoluto entregado estos años de estudio. Por tener siempre una palabra y un gesto de consuelo cuando lo necesitaba cada fin de semana que llegaba a casa y por darme fuerzas cuando pensaba que ya no podía seguir en el camino.

A mi esposo, Sebastián por haber estado presente desde los comienzos de esta carrera tan hermosa que es Pedagogía, por su paciencia y dedicación cuando requería de su ayuda y sobre todo por su amor incondicional que me ayudaba a sonreír cada día y sobrellevar los momentos malos que uno puede pasar como estudiante.

A mis amigos/as, por esas largas horas de estudio, con música y café (o té), por haber compartido gran parte del tiempo y haber vivido con ellos. Sin duda son unas grandes y valiosas personas para mí.

Me gustaría agradecerle a Dios por darme cada día de esta aventura y que hoy me llene el alma enseñar Matemáticas

Yo Cristian Zambrano Cortez agradezco y dedico esta tesis de manera muy especial a mis padres Jorge Zambrano y Marianela Cortez, y mi pareja Lidia Carrasco por sus consejos, comprensión, amor y apoyo durante todos estos años.

Gracias también a mis amigos/as que me acompañaron, y aconsejaron en este importante momento de mi vida.

También de manera muy especial y cariñosa, dedicamos esta tesis a Gerardo Araya por los incontables favores que nos hizo a lo largo de nuestra carrera, además de su excelente forma de trabajar y trato a los estudiantes en la universidad..

Índice

Introducción.....	3
Capítulo 1.....	5
Antecedentes del problema.....	5
Investigaciones previas y justificación del problema	11
Objetivos.....	14
Objetivo General	14
Objetivos Específicos	14
Preguntas de investigación	15
Los productos notables en el curriculum escolar Chileno.....	16
Capítulo 2.....	20
Aproximaciones epistemológicas	20
Antecedentes históricos	20
Espacio de trabajo matemático	40
Espacio de trabajo matemático y sus génesis	46
Teorías complementarias.....	51
Capítulo 3.....	56
Metodología	56
Fase 1: Identificación de tipos de tareas en el sentido de la TAD	57
Fase 2: Diseño de Instrumento 1 y análisis desde ETM	58
Fase 3: Aplicación del instrumento y análisis de los resultados.....	64
Fase 4: Elaboración de una propuesta	96
Fase 5: Descripción de la propuesta.....	97
Capítulo 4.....	106
Conclusiones.....	106
Referencias bibliográficas.....	110
Anexos.....	112

Introducción

Actualmente los productos notables son propuestos y estudiados en el eje de álgebra y existen algunas tareas sugeridas en donde se desarrollan aplicando conocimientos geométricos sin embargo esto no establece un medio para el desarrollo y análisis de las identidades notables, tampoco se menciona la propiedad distributiva o la factorización, las cuales están presentes en el desarrollo de estos. Entonces se puede inferir que no existe una circulación entre las representaciones geométricas y algebraicas.

Además en nuestro país existen pruebas estandarizadas, las cuales actualmente condicionan la manera en cómo se debe trabajar los productos notables en el aula, ya que estas pruebas sólo evalúan el uso de técnicas resolutivas de manera mecánica.

La dificultad que se produce ante el proceso de enseñanza y aprendizaje de los productos notables nos hizo plantear la siguiente interrogante, ¿cuál es el espacio de trabajo matemático de los estudiantes de segundo año de enseñanza media en la resolución de los productos notables y bajo qué condiciones es posible que exista una circulación entre los registros de álgebra y geometría para así lograr un aprendizaje significativo en el estudiante?

El objetivo principal de nuestra investigación es identificar las características del espacio de trabajo matemático asociado al estudio de los productos notables, para elaborar una propuesta de enseñanza que permita a los estudiantes dar sentido a los procedimientos algebraicos que se utilizan en el aprendizaje de las identidades notables, para que exista una articulación entre los dos ejes señalados anteriormente.

Nuestro trabajo de investigación se divide en tres capítulos:

En el primero, se plantea la problemática, antecedentes de investigaciones que abordan el estudio de los productos notables y los objetivos que guían la investigación.

En el segundo capítulo se muestran las aproximaciones epistemológicas de los productos notables, el saber matemático, además se presenta la teoría en la cual nos basamos para dar sustento a nuestra investigación, el Espacio de Trabajo Matemático (ETM), y teorías complementarias.

Por último en el capítulo tres se aborda la metodología utilizada para este trabajo de investigación, el análisis a priori de las tareas seleccionadas, las cuales implementamos en un cuestionario a estudiantes de segundo año de enseñanza media, a esto se le asigna el nombre de instrumento 1, luego de realizar un análisis a posteriori confeccionamos un instrumento 2 que es la propuesta que planteamos para ser aplicada, con el fin de exista una circulación entre lo algebraico a lo geométrico y viceversa, a esto lo llamamos descripción de la propuesta.

Capítulo 1.

Problema de Investigación

1.1.1 Antecedentes del Problema

El currículum escolar en Chile se organiza de acuerdo a los ajustes curriculares que se proponen en forma continua. El actual marco curricular para enseñanza media, vigente hasta el año 2015, se basa en competencias y separa los contenidos a tratar en cuatro ejes: Números, Geometría, Álgebra y Datos y Azar. En particular, el eje Álgebra abarca gran parte del currículum, y además está presente como herramienta para la resolución de problemas en otros ejes de aprendizaje. Actualmente, se han realizado modificaciones en el currículum, y se encuentran disponibles los ajustes, pero serán implementados a partir del año 2015, los que organizan el programa de acuerdo a habilidades, ejes temáticos y actitudes.

En el eje de Álgebra en Primer Año Medio (14 años aproximadamente), se estudian los productos notables, que en nuestro trabajo, asumimos como la multiplicación o potencia de expresiones algebraicas, sobre la cual se puede identificar algún patrón para descomponerlo, esto se puede hacer mediante simple inspección, sin verificar la multiplicación. Su aplicación simplifica y sistematiza la resolución de muchas multiplicaciones habituales. De acuerdo a lo anterior, asumimos ciertos métodos de factorización como el proceso inverso a la descomposición, por lo que podemos decir que el producto notable sirve como herramienta para la factorización. Así, una de las relaciones que podemos identificar entre los productos notables y, por ejemplo la ecuación cuadrática, es que los primeros nos ayudan a encontrar las raíces de las ecuaciones de grado 2. Sin embargo, en lo que sigue de acuerdo al currículum,

está el resolver problemas, por ejemplo, en ecuaciones cuadráticas con soluciones reales, y estas no son tratadas con la ayuda de los productos notables, pues estos se introducen en la enseñanza solo para problemas que involucran soluciones enteras, y en algunos casos, para soluciones racionales.

Otro dispositivo utilizado como apoyo para las clases de matemáticas, son los textos escolares, que cada cierto tiempo son licitados por el Ministerio de Educación, y se utilizan en la mayoría de los colegios. En ellos encontramos otras representaciones (geométricas) para trabajar los productos notables: se relaciona el área de un rectángulo cuyos lados son expresiones algebraicas lineales, con la multiplicación de los dos binomios, y por lo tanto un producto notable. Sin embargo, esta representación no constituye un medio para el desarrollo y descomposición de los productos, sino más bien, está propuesto como material de ejercitación o de apoyo visual. Tampoco se hace mención que la descomposición del producto notable involucra la propiedad distributiva de la multiplicación. En conclusión, no existe una articulación entre las representaciones algebraicas y geométricas, y tampoco un fundamento desde las propiedades multiplicativas presentes en el contenido de productos notables.

En nuestra experiencia como docentes en práctica, hemos evidenciado que los estudiantes presentan dificultades en la comprensión e identificación de los productos notables y su fundamento; los conceptos son adquiridos solo como una técnica, usando medios memorísticos. Nuevamente no hay relación entre el producto y la factorización. Por ejemplo, un error frecuente es confundir la expresión: $a^2 + b^2$ con $a^2 - b^2$.

Consultando a profesores sobre cómo introducen dicho concepto, en su mayoría responden que solo entregan las fórmulas asociadas a cada producto notable y no hacen mención por ejemplo, a la propiedad distributiva. Tampoco aluden a que el producto notable, como el cuadrado de binomio, se puede obtener por el cálculo de áreas de un rectángulo con sus respectivos lados,

pese a que esta estrategia está presente en los materiales de apoyo de los que el profesor dispone.

Es sabido que las pruebas estandarizadas en general, marcan una pauta para lo que el profesor realiza en el aula, en cuanto a las actividades que propone, y al tratamiento de los contenidos. En Chile existen dos pruebas estandarizadas: SIMCE¹ y PSU², y además, participa en dos evaluaciones internacionales: PISA³ y TIMSS⁴.

En el caso de la prueba SIMCE, esta es aplicada para los niveles de segundo año básico, cuarto año básico, octavo año básico y segundo año medio. Respecto a la prueba aplicada en segundo año medio (15 años aproximadamente), las preguntas relativas a álgebra son en su mayoría cerradas, y aquellas relacionadas con los productos notables aparecen sin tener un contexto involucrado.

En la PSU, las preguntas son cerradas y el eje de álgebra y funciones abarcan la mayor cantidad de los ítems (31 preguntas de un total de 70). Un ejemplo, para productos notables, es la pregunta que se presenta a continuación, extraída de los facsímiles que entrega el DEMRE, año 2012:

15. $\left(\frac{2}{3}x+y\right)\left(\frac{2}{3}x-y\right) =$

A) $\frac{4}{3}x^2 - y^2$

B) $\frac{4}{9}x^2 - y^2$

C) $\frac{2}{9}x^2 - y^2$

D) $\frac{4}{6}x^2 - y^2$

E) Ninguna de las expresiones anteriores.

Figura 1.1.1: Pregunta correspondiente a DEMRE publicaciones oficiales año 2012

¹ Sistema de Medición de la Calidad de la Educación

² Prueba de Selección Universitaria.

³ Program for International Student Assessment.

⁴ Trend in International Mathematics and Science Study.

En esta pregunta, de tipo cerrada, se puede observar que el estudiante solo debe asociar la expresión a un producto notable. El estudiante puede hacer uso de medios memorísticos, y aun así, tener éxito en la respuesta.

En conclusión, las pruebas estandarizadas nacionales, miden más bien el buen uso de las técnicas, como resoluciones mecánicas, y los problemas nos relacionan a contextos, y tampoco articulan la factorización o el uso de los productos notables como medio para encontrar raíces de ecuaciones

Por otro lado, los resultados chilenos en pruebas internacionales en contenidos relacionados con álgebra, son descendidos. El informe del año 2012 de PISA⁵, señala que Chile se ubica en el lugar 36 de un total de 44 países participantes. En TIMSS Chile se encuentra en el lugar 34 de un total de 41 países participantes. A pesar de que Chile no destaca de manera considerable en ambas pruebas, su participación es muy importante para nuestro sistema educativo, pues permite evaluar los aprendizajes de los estudiantes chilenos, medir las variaciones en los aprendizajes de los estudiantes a lo largo del tiempo, obtener información acerca del currículum, la organización escolar, la formación docente y las prácticas pedagógicas en un contexto comparativo.

La prueba PISA está diseñada para conocer las competencias, dicho en otros términos, las habilidades, la pericia y las aptitudes de los estudiantes para analizar y resolver problemas, para manejar información y para enfrentar situaciones que se les presentará en la vida adulta. PISA se concentra en la evaluación de tres áreas: competencia lectora, competencia matemática y competencia científica, en las cuales las preguntas son tres índoles: de desarrollo, contextualizadas y de selección única. Las preguntas que se presentan en álgebra son preguntas cerradas, con múltiples alternativas, en donde se aplica el conocimiento aprendido. Un ejemplo de las preguntas de álgebra en la prueba PISA es la siguiente:

⁵ <https://s3-us-west-2.amazonaws.com/documentos-web/Informes/Resultados+PISA+2012+Chile.pdf>

PREGUNTA DE DIFICULTAD INTERMEDIA

La edad de un señor es de 45 años y la de su hijo 11. Si llamamos "x" al número de años que deben transcurrir para que la edad del padre triplique a la de su hijo, ¿cuál es la ecuación que describe esta situación?

- 45 + 3·x = 11 + x A
- 45 + x = 3·(11+x) B*
- 45 - 3·x = 11 + x C
- 3·(45 + x) = 11+x D

	A	B	C	D	No contesta
Promedio de aciertos	20%	44%	8%	23%	5%

Probabilidad de que un alumno responda correctamente a la pregunta por niveles de dominio

50	100	150	200	250	300	350	400	450
0,14	0,15	0,17	0,24	0,41	0,67	0,87	0,96	0,99

Figura 1.1.2: Pregunta correspondiente a PISA del año 2003

Esta pregunta es de selección única, en donde el estudiante tiene que tener como habilidad el interpretar en lenguaje algebraico un problema contextualizado.

TIMSS, por su parte, evalúa los logros en matemática y ciencias, la cual tiene un fin de proporcionar información, a los países que participan, para que tengan la oportunidad de medir el progreso del rendimiento en estas dos áreas, junto con información empírica sobre los contextos de escolarización. TIMSS organiza las preguntas en torno a dos grandes dimensiones: la primero es de contenido, especificando los dominios o asignaturas que han de evaluarse dentro de la matemática, como por ejemplo: números, álgebra, geometría, datos y probabilidades y en segundo lugar tiene una dimensión cognitiva, especificando los dominios de los procesos de pensamiento a evaluar, es decir, conocer, aplicar y razonar. Algunas preguntas son de índole abiertas, las cuales tienen una guía de corrección y también existen preguntas cerradas, con alternativa única de respuesta. Las preguntas de álgebra en la prueba TIMSS, si bien son preguntas de selección única, de tipo cerradas, no son del

todo mecánicas, es decir, su resolución requiere de algo más que solo seguir una técnica establecida. Un ejemplo es la siguiente pregunta liberada (TIMSS, 1999):

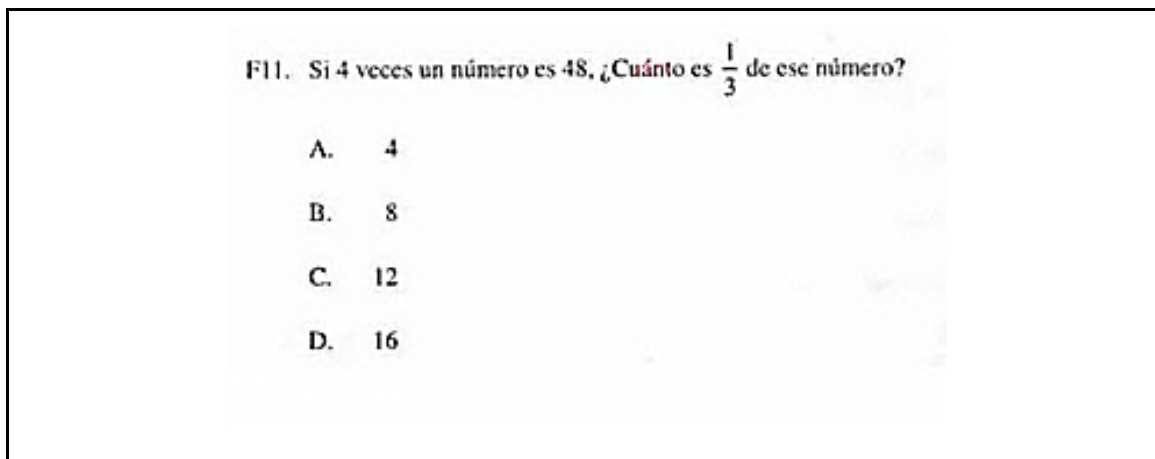


Figura 1.1.3: Pregunta liberada correspondiente a TIMSS del año 1999

El porcentaje internacional de respuestas correctas es de 47%, en cuanto al porcentaje nacional de respuestas correctas fue de un 22,5%.

En conclusión ambas pruebas miden casi las mismas habilidades y requieren de algo más que la sola mecanización de los procesos de desarrollo.

1.1.2 Investigaciones previas y justificación del problema

Diversas investigaciones han abordado el tema de los productos notables en la enseñanza. Luna (2005), en su investigación realiza una propuesta de enseñanza donde pretende que el estudiante visualice geoméricamente los procesos algebraicos, llegando a determinar que es posible trabajar la comprensión de los productos notable y sus factorizaciones. La autora plantea que “hay una falta de conciencia de los docentes al enseñar productos notables y factorización, ya que existen profesores que muestran estos contenidos como una simple aplicación de fórmulas” (p. 5), de tal manera que los estudiantes solo deben memorizar para aplicar y operar, provocando que si el alumno olvida una fórmula no sabrá enfrentar este tipo de problemas.

Por otro lado Martos (2008) desarrolla una entrevista a profesores donde cuestiona la importancia de los productos notables a través de las siguientes preguntas: ¿Qué entienden por productos notables?, ¿Es necesario enseñar los productos notables?, ¿Qué pasaría si omitimos el enseñar productos notables? Los resultados que arroja la investigación determina que todos los docentes pueden dar respuesta acerca de qué son los productos notables, pero el 90% lo trabaja en clases solo como una técnica de aplicación y memorización; se da como algo que simplemente debe ser, no cuestionando su modo de enseñarlo y la importancia de su valor.

Muñoz y Olivares (2011), por su parte, intentan llegar a una definición de producto notable a partir del estudio de distintos polinomios, señalando que “entre los productos de polinomios, hay algunos bastante utilizados en matemática, ya sea en estrategias de cálculo o en desarrollo algebraico en modelos matemáticos. A estos productos destacados los denominan productos notables” (p.68) En su investigación, los autores indagan sobre el pensamiento de los estudiantes de primer año de enseñanza media y sus dificultades cuando se enfrentan a situaciones que ameritan cambios de registro de

representaciones (en el sentido de Duval, 1999), con el propósito de diseñar estrategias óptimas para la comprensión de problemas de este ámbito.

En cuanto al artículo de Barreto (2009), se intenta articular el tratamiento algebraico con un tratamiento geométrico, analizando los productos notables de manera geométrica en relación a la noción de área, tomando en consideración la aditividad que guardan las figuras geométricas elementales que la conforman, en paralelogramos tales como los cuadrados o los rectángulos. Además, se tratan algunos productos notables desde este punto de vista y se observan los resultados. La propuesta fue llevada a cabo a partir de material concreto; mediante la percepción se trabajan los productos notables. Los estudiantes refuerzan la parte algebraica de una ecuación de segundo grado a partir de su representación geométrica y manipulación con material concreto, lo cual les permite deducir la fórmula analítica. Este trabajo nos da ideas para resolver el problema de representar de manera distinta los productos notables y trasladar el trabajo a un dominio geométrico, sin embargo nos preguntamos, ¿cómo podemos provocar el trabajo a la inversa?, es decir, que los propios estudiantes, a partir de la manipulación algebraica busquen la forma de representar geoméricamente o a partir de lo que observan en un problema geométrico, lo puedan trasladar a un ambiente algebraico.

Méndez (2001), realiza una investigación donde su análisis epistemológico menciona que la factorización y productos notables aparecen primero en la historia como una herramienta geométrica y no algebraica. En una investigación de estudio de textos, señala que en la enseñanza de los productos notables se suele privilegiar el registro algebraico, lo que hace parecer falta de sentido para el estudiante. Méndez plantea que “las ideas desarrolladas son las que dan cuenta de la adquisición del conocimiento matemático a través de la articulación de distintos registros de expresión.”(p.106) proponiendo en su investigación que es necesario que el estudiante sea capaz de trabajar con conversión de registro -en el sentido de Duval (1995)- donde articulen el registro algebraico al figural y viceversa. A

partir del análisis de los resultados de los alumnos en su propuesta, logra concluir que “el trabajo de convertir objetos algebraicos y numéricos en objetos geométricos permite al alumno razonar, inferir y deducir resultados.”(Méndez, 2001, p.106).

Luego del estudio profundo de estas investigaciones, y bajo otras evidencias, observamos que el problema de la enseñanza de los productos notables no es un tema resuelto, por lo que consideramos la relevancia de estudiar no solo el aprendizaje de los productos notables, sino también su enseñanza y las concepciones que los propios estudiantes tienen, a partir de la manipulación algebraica busquen la forma de representar geoméricamente o a partir de lo que observan en un problema geométrico, lo puedan trasladar a un registro algebraico.

Es importante señalar que los productos notables cumplen un rol importantes en el aprendizaje del proceso de factorización, ya que en muchos casos factorizar una expresión requiere reconocer y aplicar los productos notables.

1.1.3 Objetivos

1.1.1 Objetivo General

El objetivo principal de nuestra investigación es identificar las características del espacio de trabajo matemático que se deben cumplir para que los estudiantes puedan dar sentido a los procedimientos algebraicos que se utilizan en el aprendizaje de los productos notables, esto con el fin de realizar una propuesta de enseñanza y aprendizaje.

1.1.3 Objetivos Específicos

- 1) Analizar tareas asociadas a productos notables en programas de estudio, textos escolares, pruebas estandarizadas PSU y SIMCE.
- 2) Conocer el espacio de trabajo matemático que utilizan los estudiantes para resolver actividades asociadas a los productos notables, para determinar dificultades en su comprensión.
- 3) Determinar condiciones que favorecen la comprensión de los productos notables en la enseñanza media, bajo el vínculo de uno o más dominios de las matemáticas.
- 4) Diseñar una propuesta de enseñanza para los productos notables que permita a los estudiantes articular procedimientos algebraico y geométrico.

1.1.4 Preguntas de Investigación

Las preguntas que guían la presente investigación, son las siguientes:

- 1) ¿Qué procedimientos algebraicos ocupan los estudiantes para resolver los productos notables?
- 2) ¿Cómo se vincula la factorización y los productos notables en los procesos de enseñanza?
- 3) ¿Bajo qué condiciones se puede favorecer la comprensión de los productos notables articulando el álgebra con otros dominios de las matemáticas?
- 4) ¿Qué elementos de tipo geométrico, o desde otro dominio, debe tener una propuesta de enseñanza para que exista una articulación entre los distintos espacios de trabajos matemáticos?

1.1.5 Los productos notables en el curriculum escolar Chileno

Entre los múltiples procedimientos que se promueven desde la enseñanza de la matemática en productos notables están directamente relacionados con el dominio de una operatoria algebraica, el desarrollo de habilidades para reconocer e interpretar estos productos, algebraica y geoméricamente. En este sentido los estudiantes deberían ser capaces de calcular productos notables e interpretar numérica y geoméricamente.

Como un recurso de apoyo a la enseñanza, el texto escolar es una herramienta que puede colaborar con el desarrollo de estas habilidades. Sin embargo no es responsabilidad del texto escolar hacerse cargo de su desarrollo.

Es por esto último que se propone una plantilla, la cual mostraremos a continuación, que permite determinar posibles ausencias en las propuestas de actividades para la enseñanza de estos objetos matemáticos y que se sugiere resolver por medio de la integración de otros recursos para el aprendizaje distintos del texto escolar, como es la propuesta didáctica que se presentará más adelante.

Para identificar como se presentan los productos notables en textos escolares de primer año medio, consideraremos dos textos de la misma editorial, uno de ellos es distribuido gratuitamente por MINEDUC a todos los estudiantes de establecimientos municipalizados y subvencionados del país, el cual se llama “texto del estudiante, 1° medio Matemática”, este será identificado en nuestra tabla como texto 1 y el segundo texto se llama “Nuevo Explorando, Matemática 1° medio”, al cual designaremos como texto 2 en nuestra tabla.

Indicadores		Texto 1	Texto 2
Se ven contextualizado los productos notables	$(a + b)^2$	No	No
	$(a - b)^2$	No	No
	$(a + b)(a - b)$	No	No
	$(x + a)(x + b)$	No	No
	$(a + b)^3$	No	No
	$(a - b)^3$	No	No
Enuncia los productos notables algebraicamente	$(a + b)^2$	Si	Si
	$(a - b)^2$	Si	Si
	$(a + b)(a - b)$	Si	Si
	$(x + a)(x + b)$	Si	Si
	$(a + b)^3$	Si	Si
	$(a - b)^3$	Si	Si
Enuncia los productos notables geoméricamente	$(a + b)^2$	Si	Si
	$(a - b)^2$	No	No
	$(a + b)(a - b)$	No	Si
	$(x + a)(x + b)$	Si	Si
	$(a + b)^3$	Si	Si
	$(a - b)^3$	No	No
Se pide ilustración geométrica de las expresiones algebraicas de los productos notables.	$(a + b)^2$	Si	Si
	$(a - b)^2$	No	No
	$(a + b)(a - b)$	Si	No
	$(x + a)(x + b)$	Si	No
	$(a + b)^3$	No	No
	$(a - b)^3$	No	No
Se pide ilustración algebraica de las expresiones geométrica de los productos notables.	$(a + b)^2$	Si	Si
	$(a - b)^2$	No	No
	$(a + b)(a - b)$	No	Si
	$(x + a)(x + b)$	Si	Si
	$(a + b)^3$	Si	Si
	$(a - b)^3$	No	No

Figura 1.5.1: Tabla comparativa de cómo se presentan los productos notables.

En el “texto del estudiante, 1° medio matemática” se presentan las identidades notables en forma algebraica y sus representaciones geométricas, pero no existe una articulación entre los conocimientos, ya que si bien se les pregunta a los estudiantes cuál es la representación y producto de los lados y área dada, mostrando el recuadro que sigue como ejemplo:

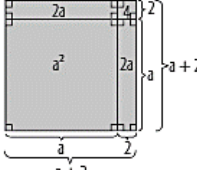
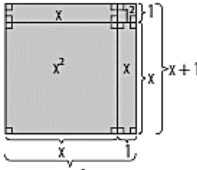
Cuadrado de binomio			
Ana está calculando el área de los siguientes cuadrados.			
Lado	Área	Representación	Producto
$(a + 2)$	$(a + 2)^2$		$(a + 2)(a + 2) =$ $= a \cdot a + a \cdot 2 + 2 \cdot a + 2 \cdot 2$ $= a^2 + 2a + 2a + 4$ $= a^2 + 4a + 4$
$(x + 1)$	$(x + 1)^2$		$(x + 1)(x + 1) =$ $= x \cdot x + x \cdot 1 + 1 \cdot x + 1 \cdot 1$ $= x^2 + x + x + 1^2$ $= x^2 + 2x + 1$
$(3 + y)$	$(3 + y)^2$		

Figura 1.5.2: Extracto Página 94, Texto del estudiante, 1° medio Matemática, 2014

Es posible que el estudiante observe los ejemplos, desarrolle lo pedido, copiando estos y solo le cambie los valores asociados a lo que están pidiendo y no detecte que al calcular el producto es equivalente a la suma de las sus partes y que la representación geométrica se construye a partir del cálculo de áreas que está presente dentro de este cuadrado grande.

Esta situación se repite con otros productos notables, como por ejemplo con el “binomio con término en común” y “suma por su diferencia”.

Con respecto a la situación anterior, creemos que no tiene sentido pedir que los estudiantes desarrollen la representación geométrica de la identidad notable, si no existe una articulación adecuada.

Además el texto entrega las fórmulas de los productos notables, induciendo a una memorización de las identidades como una simple “receta” que se debe aprender:

<p>Los productos notables son multiplicaciones de expresiones algebraicas que presentan regularidades por lo que su cálculo se puede abreviar de la siguiente manera:</p>	
<p>Cuadrado de binomio: $(u + v)^2 = u^2 + 2uv + v^2$ $(u - v)^2 = u^2 - 2uv + v^2$</p>	<p>Suma por su diferencia: $(u + v)(u - v) = u^2 - v^2$</p>
<p>Binomios con término común: $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$</p>	<p>Cubo de binomio: $(u + v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3$ $(u - v)^3 = u^3 - 3u^2v + 3uv^2 - v^3$</p>

Figura 1.5.3: Extracto Página 95, Texto del estudiante, 1° medio Matemática, 2014

En el segundo texto analizado se presenta la aplicación geométrica sin desarrollar actividades con ella, dedican dos planas para desarrollar y ejercitar los productos notables.

A continuación se muestra como son presentados los productos notables en el texto “Nuevo explorando, Matemática 1° medio”

<p>Para grabar</p>	
<p>Los productos notables son multiplicaciones de expresiones algebraicas que presentan regularidades. Por ejemplo:</p> <ul style="list-style-type: none"> • El cuadrado de un binomio: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ • El cubo de un binomio: $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$ • La suma por su diferencia: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ • Binomios con un término común: $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ 	<p>Ejemplo</p> <ul style="list-style-type: none"> • Cuadrado de un binomio: $\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 = x^2 + 2x \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}$ • Cubo de un binomio: $(y - 2z)^3 = y^3 - 3 \cdot y^2 \cdot 2z + 3 \cdot y \cdot (-2z)^2 - (2z)^3$ $= y^3 - 6y^2z + 12yz^2 - 8z^3$ • Suma por su diferencia: $(t + 5)(t - 5) = t^2 - 25$ • Binomios con un término común: $(x + 3)(x - 1) = x^2 + 2x - 3$

Figura 1.5.4: Extracto Página 112, Texto del estudiante, 1° medio Matemática, 2014

En ambos textos se evidencia una falta de problemas contextualizados, donde se les muestre utilidad de estas expresiones en situaciones cotidianas y así poder obtener un aprendizaje significativo.

Capítulo 2.

Marco Teórico

2.2.1. Aproximaciones epistemológicas

Antecedentes históricos

En un intento de entender el universo en que vivimos, uno de los mayores logros de la humanidad lo constituyen las matemáticas. Platón, quien prohibió la entrada en la academia a los desconectores de la geometría, hasta la afirmación de Galileo Galilei de que “El Universo está escrito en lenguaje matemático, y las letras son triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin las cuales es humanamente imposible entender una sola palabra.”, a través de la geometría, los matemáticos han desarrollado un incomparable cuerpo de doctrinas.

En cuanto a las civilizaciones mediterráneas, adquieren poco a poco algunos conocimientos geométricos de carácter práctico. Estas son ciertas fórmulas conocidas como algoritmos expresados para calcular longitudes, áreas y volúmenes, con el fin de obtener el resultado de la producción proporcional de las parcelas de tierra para determinar los impuestos o reconstruir las parcelas de tierras después de las inundaciones. Con respecto a los egipcios, siempre se ha dicho que tenían una gran formación geométrica, y se ha llegado a insinuar que tuvieron un conjunto de conocimientos secretos que se perdieron con el paso del tiempo porque no hay registro de ellos. Los egipcios se enfocaron principalmente en el cálculo de áreas y volúmenes, un ejemplo de esto es cuando encontraron el valor del área del círculo, el cual es

aproximadamente 3,1605. Sin embargo el desarrollo geométrico carece de teoremas y demostraciones formales. También se encuentran los principios de la trigonometría y nociones básicas de semejanza de triángulos.

El conocimiento de esta civilización y la cultura mesopotámicas sobre la geometría pasó íntegramente a la cultura griega a través de Thales, los Pitagóricos y fundamentalmente de Euclides⁶.

Los griegos establecieron los problemas de medida del bloque central en este campo: área de un cuadrado, el círculo, con una aproximación no muy certera ($\pi = 3$) de volúmenes de determinados cuerpos, semejanza de figuras e incluso hay autores que afirman que esta civilización tenía conocimientos del Teorema de Pitágoras⁷ aplicado a problemas particulares, aunque no como principio general.

En las civilizaciones antiguas escribían las expresiones algebraicas utilizando abreviaturas sólo ocasionalmente; pero es en la edad media, donde los matemáticos árabes son quienes fueron capaces de describir cualquier potencia de la incógnita x , y desarrollaron el álgebra fundamental de los polinomios, sin usar símbolos modernos. Esta álgebra incluía multiplicar, dividir y extraer raíces cuadradas de polinomios, así como el conocimiento del teorema del binomio.

En un principio las expresiones algebraicas se realizaban de forma geométrica, luego se trabajaba la parte algebraica, esto se observa en el libro II de los elementos de Euclides⁸, el cual contiene lo que comúnmente se denomina álgebra geométrica. Así pues, la gran mayoría de las proposiciones se pueden interpretar algebraicamente, cosa que no dejaron de hacer los matemáticos árabes-musulmanes, en particular Al-Khwarizimi y Muhammad.

⁶ Matemático griego que se cómo el fundador de la geometría.

⁷ Teorema de Pitágoras señala que en un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de sus catetos.

⁸ Libro II de los elementos de Euclides contiene álgebra geométrica y está formado por dos definiciones y 14 proposiciones, este libro no trata del tema del álgebra, puesto que no resuelve problemas numéricos ni mucho menos de ecuaciones, por el contrario, el libro se refiere sobre la igualdad de áreas de rectángulos y cuadrados.

Libro de Elementos de Euclides II.

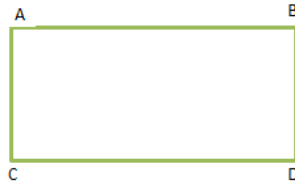
En el libro de Elementos de Euclides II, se demuestra varias igualdades algebraicas, también habla de figuras regulares, dando las características de estas (ángulos y lados iguales), donde se centra sobre todo en el pentágono y además en la resolución de ecuaciones cuadráticas. Lo interesante para nuestra investigación es que trata las relaciones de áreas de figuras como el cuadrado y el rectángulo, creando un sistema para representar igualdades algebraicas.

Si profundizamos aún más en este libro podemos notar que sus 14 proposiciones están destinadas al álgebra geométrica. A continuación nombraremos 3 de ellas que representan los productos notables y la propiedad distributiva, los cuales pueden ser explicadas de una manera sencilla mediante la representación geométrica.

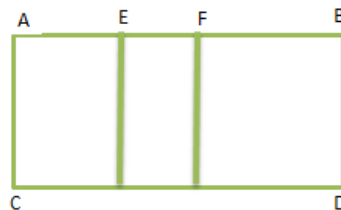
Desarrollo de la propiedad distributiva a partir de su representación geométrica.

Proposición 1: *“Si hay dos rectas y una de ellas se corta en un número cualquiera de segmentos, el rectángulo comprendido por las dos rectas es igual a los rectángulos comprendidos por la recta no cortada y cada uno de los segmentos.”*

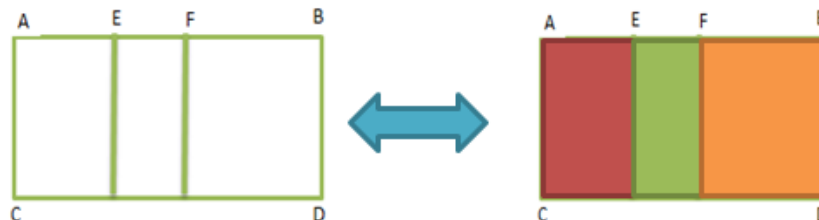
Si tenemos que las rectas son AB y CD, con ellas podemos formar un rectángulo ABCD como se muestra a continuación:



Si cortamos una de las rectas en una cantidad cualquiera de puntos, es decir, la recta AB la cortamos con los puntos E y F, los cuales proyectamos de forma perpendicular a la otra recta, la cual es CD, obtenemos:



Al calcular el área total del rectángulo, geoméricamente es equivalente a la suma de sus partes, es decir:



Lo que se explica en el teorema es:

$$AC \cdot AB = AC \cdot (AE + EF + FB) = AC \cdot AE + AC \cdot EF + AC \cdot FB$$

Como podemos notar, algebraicamente representa la propiedad distributiva que se conoce en la actualidad como:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad \text{ó} \quad (a + b) \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd$$

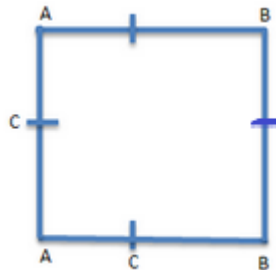
Desarrollo de un producto notable a través de su representación geométrica.

Proposición 4: “Si se corta al azar una línea recta, el cuadrado de la recta entera es igual a los cuadrados de los segmentos y dos veces el rectángulo comprendido por los segmentos”

Tenemos una recta AB, la cual se corta, determinando el punto C.



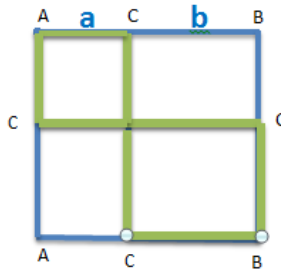
Al formar el cuadrado con esta recta AB, obtenemos:



Y si proyectamos los cortes en el punto C, los cuadrados de lados

$$AC = a \quad \text{y} \quad CB = b$$

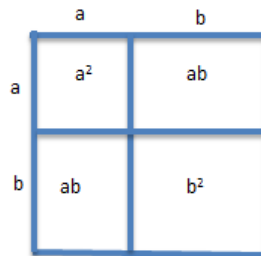
más dos rectángulos de lados AC y BC obtenemos:



Entonces geoméricamente es equivalente calcular el área total del cuadrado a la suma de las áreas de cada parte, en la actualidad se conoce como el cuadrado de binomio, que tiene la siguiente fórmula:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

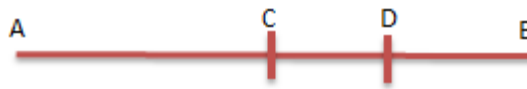
Lo que se representa de la siguiente manera:



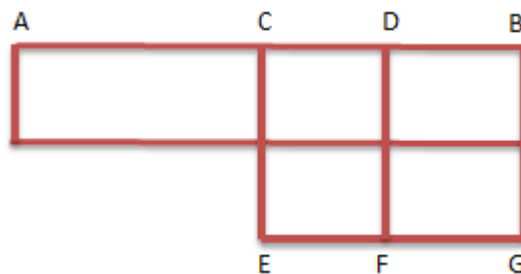
Desarrollo de un producto notable a través de su representación geométrica.

Proposición 5: *“Si se corta una línea recta en segmentos iguales y desiguales, el rectángulo comprendido por los segmentos desiguales de la recta entera junto con el cuadrado de la recta que está entre los puntos de sección, es igual al cuadrado de la mitad.”*

Entonces, sea la línea AB, y C y D los puntos que determinan los segmentos iguales y desiguales en AB.



Así que AC, CB son los segmentos iguales, quedando AD Y DB como los segmentos desiguales, los rectángulos que se forman por estos segmentos desiguales más el cuadrado de lado CD es igual al área del cuadrado de lado CB.



Se aprecia en la figura que $AC=CB=BG$ y si en la figura $AC=CB=BG=a$ y $CD=b$, se tiene que: $AD = a + b$ y $DB = a - b$, lo que la proposición nos dice es:

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

En conclusión el álgebra geométrica utilizada por la cultura griega nos da a entender que se permite estructurar dos tipos de representaciones: una representación verbal y una geométrica, que en la actualidad se interpreta de forma algebraica.

Las proposiciones de Euclides tienen como enfoque, un punto de vista algebraico, el cual es clave para la teorización de los objetos matemáticos presentes, como lo es el concepto de grupo. Un ejemplo de esto son los polinomios, los cuales tienen un comportamiento como estructura donde el rol fundamental es la propiedad distributiva, ya que las identidades notables

dependen de esta propiedad, en un anillo conmutativo⁹. Si nos centramos en el modelo del cuadrado de binomio, se sitúa en la teoría de polinomios al definir la operación de multiplicación de polinomios.

A continuación profundizaremos sobre el “*Teorema del binomio de Newton*”, su origen remonta del siglo XII en las obras de Yang Hiu, los cuales incluyen el resultado de sumas de series infinitas y el triángulo de Pascal. En el año 1624 la Encyclopédie der mathematischen wissenschaften, Kombinatorik (Netto), cita a Briggs (Aritmetica logarithmica, london) como la primera publicación donde se encuentra la regla del binomio para exponente entero y positivo, mencionando que Miguel Stifel¹⁰ debía haber conocido la regla práctica para el cálculo de los coeficientes de las potencias sucesivas, ya que en su libro “Arithmetica Integra” se menciona.

En el año 1654 B.Pascal¹¹ redactó “*Traité du triangle arithmétique*”, el cual fue publicado en 1665. Estudia los coeficientes binomiales por su significado combinatorio y recuerda que son los mismos números que van apareciendo en las bases sucesivas de sus triángulos aritméticos. Lo valioso del aporte de Pascal es que demuestra, las propiedades, por el método de inducción y este método se vuelve a utilizar en la teoría de números. Luego en la edición francesa de la misma enciclopedia, Stifel indica sin demostración un teorema equivalente a la fórmula recurrente:

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}.$$

Y en la obra Trigonometría Británica redactada en el año 1600 por Briggs y publicada por H. Gellibrand en el año 1633, trae una fórmula similar:

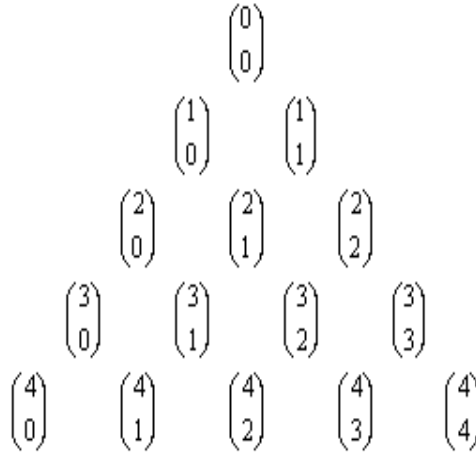
⁹ Las propiedades del teorema del binomio son válidos solo para anillos conmutativos, en anillos no conmutativos, por ejemplo las matrices, el teorema del binomio no es válido.

¹⁰ Matemático Alemán (1487-1567), en el año 1544 publica su libro “Arithmetica Integra”, donde se da a conocer la única tabla existente de los logaritmos y el cálculo con potencias de exponente racional.

¹¹ Pascal es un matemático francés que en el año 1654 publica el tratado del triángulo aritmético (Traité du triangle arithmétique) en el que describe las propiedades y aplicaciones del triángulo aritmético o triángulo de Pascal, la manera de presentar los coeficientes binomiales (aunque los matemáticos Chinos conocían el triángulo desde siglos atrás)

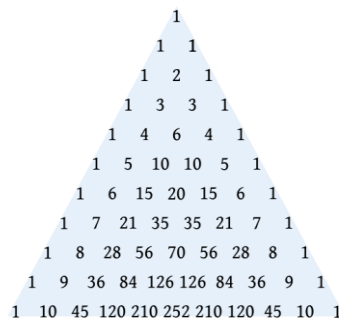
$$\binom{n}{m-1} = \frac{n-m}{m-1} \binom{n}{m}$$

De las fórmulas mostradas anteriormente se puede deducir que, la expresión para los coeficientes de los términos del binomio es como se muestra en la siguiente imagen:



Esto último representa específicamente los coeficientes numéricos de los términos de las potencias del binomio, lo que es equivalente a:

Triángulo de Pascal



Al ser conocidos estos temas por Euclides, fueron publicados en “El espejo precioso de los cuatro elementos” del autor TSCHU-SCHI-KIH, el cual presenta el triángulo de Pascal desarrollando a la octava potencia, por parte de los

chinos, el descubrimiento del Teorema Binominal para potencias enteras positivas estuvo asociado en su origen a la extracción de raíces (exponente fraccionario) más que el cálculo de potencias.

Luego, en el año 1667 es Isaac Newton¹², quien por accidente llega al teorema binominal para exponentes fraccionarios, ya que inicialmente el objeto perseguido en sus trabajos era el de obtener reglas que le permiten la cuadratura de curvas de cualquier tipo. En un principio, su idea consistía en desarrollar en serie la ecuación de la curva, para así poder obtener la expresión de la integral como suma de las integrales de los términos sucesivos. Los métodos empleados por Newton para obtener el desarrollo en serie de tipos muy generales de expresiones algebraicas fueron estudiados por Leibniz, se sabe que el teorema del binomio fue comunicado por primera vez en dos cartas dirigidas en el año 1676 a Oldenburg, la primera carta, la cual tiene fecha el 13 de junio de 1676, responde a una petición de Leibniz, el cual quería conocer los trabajos matemáticos ingleses sobre series infinitas, Newton presenta el enunciado de su teorema y un ejemplo que lo ilustra, además menciona ejemplos conocidos en los cuales se aplica el teorema. Leibniz responde con una carta que tiene fecha el día 17 de agosto de 1676, la cual trata que está en posesión de un método general que le permite obtener diferentes resultados sobre las cuadraturas, las series, etc. y menciona algunos de sus resultados.

Newton se interesa de los resultados obtenidos por Leibniz respondiendo con una carta, la cual tiene fecha del 24 de octubre de 1676, en la que explica en detalle cómo ha descubierto la serie binómica.

Además, Newton aplica los métodos de Wallis sobre la interpolación y extrapolación, inserta estos conceptos de exponentes generalizados mediante los cuales una expresión polinómica se transformaba en una serie infinita. Así

¹² Es el más grande astrónomo inglés, se destacó también como gran físico y matemático, el dio los inicios formales del teorema del binomio que fue publicado posteriormente por Wallis.

estuvo en condiciones de demostrar que un buen número de series ya existentes eran casos particulares.

El descubrimiento de la generalización de la serie binómica es un resultado importante de por sí, sin embargo, a partir de este descubrimiento Newton tuvo la intuición de que se podía operar con series infinitas de la misma manera que con expresiones polinómicas finitas. El análisis mediante las series infinitas parecía posible, porque ahora resultan ser una forma equivalente para expresar las funciones que representaban.

Newton nunca publicó el teorema del binomio, lo hizo John Wallis¹³ por primera vez en 1685 en su libro denominado Álgebra, atribuyendo a Newton este descubrimiento.

¹³ Matemático inglés, trabajaba con la conocida serie binomial, la cual manipula a través del teorema del binomio.

Saber matemático:

Dentro del proceso de enseñanza una de las misiones esenciales es lograr seleccionar la matemática que hay detrás de cada objeto matemático y para ello es de suma importancia conocer y manejar el objeto que se pretende enseñar, de manera de identificar lo sustancial de este para dar sentido a los procesos que se realicen en el aula de forma coherente.

Si nos adentramos aún más en el saber matemático de los productos notables, nos encontramos con el anillo de polinomios con coeficiente en el campo de los números reales. Este anillo es a la vez conmutativo, por lo tanto las operaciones entre ellos tales como la multiplicación y reducción (suma y resta) se rigen por las leyes del anillo y su funcionamiento al interior de ella obedece a sus propiedades.

Una propiedad fundamental del anillo de polinomios K es la propiedad distributiva, la que en general relaciona las operaciones de adición y multiplicación.

A continuación puntuaremos, desde la mirada matemática, lo que desarrollaremos en los siguientes párrafos, con el objeto de finar el marco teórico:

- Estructura de anillos.
- Definición de un polinomio a través de sucesiones.
- Descripción del anillo de polinomios K .
- Definición de las operaciones en K .
- Productos notables.

Estructura de anillos

Un anillo es una terna formada por un conjunto K y dos leyes de composición interna (operaciones), una aditiva y otra multiplicativa, lo que se denota por el trio $(K, +, \cdot)$ sujeta a las condiciones que se detalla a continuación:

La adición en K asocia a un par de elementos (x, y) de K un nuevo elemento de K anotado $(x + y)$

$$\begin{aligned} +: K \times K &\rightarrow K \\ (x, y) &\rightarrow x + y \end{aligned}$$

La multiplicación en K asocia a un par de elementos (x, y) de K , un nuevo elemento de K anotado $x \cdot y$

$$\begin{aligned} \cdot: K \times K &\rightarrow K \\ (x, y) &\rightarrow x \cdot y \end{aligned}$$

Estas operaciones cumplen las siguientes condiciones:

(A1) El par formado por el conjunto K y la ley aditiva sobre K , $(K, +)$, es un grupo abeliano.

Es decir: la adición es asociativa, la suma admite elemento neutro en K , todo elemento de K , admite opuesto aditivo y además la adición es conmutativa.

(A2) La ley de composición multiplicativa es asociativa y admite un elemento neutro. Es decir:

- a) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ para todo x, y, z elementos de K
- b) Existe 1 en K tal que $1 \cdot x = x$ y $x \cdot 1 = x$ para todo x en K

(A3) Cualesquiera sean los elementos x, y, z de K se cumple las relaciones llamadas distributivas de la multiplicación con respecto a la adición, esto es:

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \quad ; \quad (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$$

Cuando en la terna $(K, +, \cdot)$ se cumplen (A1), (A2) y (A3) se dice que K es un anillo. Además K es un anillo conmutativo cuando se cumple:

(A4) $x \cdot y = y \cdot x$ cualesquiera sean los elementos x, y de K , es decir la multiplicación es conmutativa en K .

Observación: Dos propiedades importantes de los anillos son:

$$(-1) \cdot x = -x, \quad 0 \cdot x = 0, \quad \text{Para todo } x \text{ elemento de } K.$$

Un ejemplo de anillo conmutativo es el anillo de los números enteros, \mathbb{Z} , pues en él están definidas las operaciones de adición y multiplicación. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ Satisface (A1), (A2) y (A3). También se puede probar que \mathbb{Q} y \mathbb{R} tienen estructura de anillo.

Más adelante necesitaremos la noción de subanillo, por ello daremos su definición:

Sea K un anillo y A un subconjunto de K tal que A es un subgrupo del grupo aditivo K y además se verifica que:

- Si x e y son elementos de A entonces xy pertenece a A
- 1 está en A

Entonces A es un subanillo de K .

Observación: para probar que un subconjunto no vacío A de un anillo K es un subanillo basta comprobar las condiciones siguientes:

- Si A contiene dos elementos x e y de K entonces contiene también a su suma $(x + y)$ y a su producto xy .
- 1 está en A

Por ejemplo un subanillo de los números reales \mathbb{R} , es \mathbb{Z} el anillo de los números enteros.

En efecto, dados dos elementos de \mathbb{R} que pertenezcan a \mathbb{Z} entonces su suma y su producto también pertenecen a \mathbb{Z} .

Polinomio a través de sucesiones

Para estudiar la estructura algebraica de los polinomios consideraremos el enfoque teórico formal que define a todo polinomio como una sucesión de soporte finito. Este enfoque permite justificar la aparición de la indeterminada x , es decir, que no se conoce el valor de x , en los polinomios, como la sucesión $(0,1,0, \dots)$ y a partir de allí describir polinomios como suma de términos, en forma creciente o decreciente, en la que interviene la letra x como indeterminada.

Definición: una sucesión de números es una función $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{R}$ que asocia a cada número natural n un número real.

Por ejemplo si $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{R}$ asocia a cada número natural su doble, obtenemos la sucesión $(0,2,4,6,8 \dots)$ que está definida por la función:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{N} &\rightarrow \mathcal{R} \\ n &\rightarrow 2n \end{aligned}$$

Nota: consideramos que el conjunto de los números naturales tiene como primer elemento cero.

Una sucesión se anota como: $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ o más correctamente como $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ donde a_n es el término general.

Ejemplos:

- 1) Formemos la sucesión de números naturales que asigna a los números 0 y 1, y a partir del natural 2 la suma de los dos anteriores. Bajo estas condiciones los términos de la sucesión son:

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 2, \quad a_3 = 3, \dots, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

La sucesión es $(1,1,2,3,5,8, \dots)$

Esta sucesión recibe el nombre de sucesión de Fibonacci.

- 2) Los términos de la sucesión que asigna a cada número natural el cero, excepto para los lugares $i = 1$ e $i = 3$, a los que les asigna los valores 7 y 2 respectivamente, son:

$$a_0 = 0, a_1 = 7, a_2 = 0, a_3 = 2, a_4 = 0, \dots$$

La sucesión es $(0,7,0,2,0,0,\dots)$

Definición: Cuando se considera una sucesión $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de elementos de un grupo G se llama soporte de la sucesión al conjunto de los índices $i \in \mathbb{N}$ tales que los elementos a_i son distintos de cero.

Por ejemplo el soporte de la sucesión del ejemplo 2) es

$$\{1,3\}, \text{ ya que } a_1 \text{ y } a_3 \text{ son distinto de cero.}$$

Definición: una sucesión tiene soporte finito si y sólo el soporte es un conjunto finito.

Por ejemplo la sucesión de Fibonacci, tiene soporte no finito, en el grupo aditivo \mathbb{Z} , pues todo elemento distinto de cero.

Un ejemplo de sucesión con soporte finito en el grupo aditivo \mathbb{Z} es la siguiente:

$$(0,2,3,-5,0,4,0,0,0, \dots)$$

donde $a_0 = 0, a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = -5, a_4 = 0, a_5 = 4, a_6 = 0 \dots$

Como en esta sucesión los elementos son distintos de cero (el neutro del grupo aditivo \mathbb{Z}) entonces el soporte de la sucesión es el subconjunto $\{1,2,3,5\}$.

Anillo de polinomios

Para describir el anillo de polinomios K , necesitamos un subanillo de L el que llamaremos A y un conjunto de sucesiones de elementos de K con soporte finito. Como A es un anillo, tiene estructura de grupo aditivo. Las sucesiones son de la forma.

$$(a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_k, 0,0,0, \dots), \text{ con } a_i \text{ elementos de } A$$

Al conjunto de tales sucesiones (de soporte finito) le llamaremos conjunto de polinomios con coeficiente en A lo anotaremos K .

Por ejemplo, un elemento de K κ es $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 0, 0, 0, \dots)$; donde $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_i = a_{i-1} + a_{i-2}$, para $i = 0, \dots, 5$, $a_i = 0$ para $i > 5$.

a_i es siempre un elemento del grupo aditivo de los enteros. Esta sucesión corresponde a un polinomio con coeficientes enteros, donde los elementos de ella son los números de Fibonacci.

Definición: Una sucesión con soporte vacío tiene todos sus elementos iguales a cero, así para todo elemento a_i de A , la sucesión es de la forma:

$$(0, 0, 0, 0, 0, \dots) \text{ con } a_i = 0 \text{ para todo } i \text{ en } \mathbb{N}$$

A esta sucesión se le llama polinomio vacío o nulo, y se representa por 0.

Definición: Dado P un polinomio no nulo, con coeficiente en A , se llama grado de P al máximo índice i tal que el término de la sucesión a_i de A sea no nulo. Esta definición no es posible, extenderá al polinomio nulo, por esto decimos que el polinomio nulo no tiene grado.

Ejemplos:

El grado de los siguientes polinomios no nulos son:

- 1) $(0, 0, 3, 0, 0, 0, \dots)$
- 2) $(a_0, 0, 0, 0, 0, \dots)$ $a_0 \neq 0$
- 3) $(0, a_1, 0, 0, 0, 0, \dots)$ $a_1 \neq 0$
- 4) $(0, 0, \dots, a_k, 0, 0, \dots)$ $a_k \neq 0$

Estos son ejemplos de monomios y su grado viene dado por el valor de i .

Observación: una sucesión cuyos elementos son todos ceros excepto para $i = 0$ se llama polinomio constante o simplemente constante, como se observa en el ejemplo anterior (2).

Operaciones en el anillo de polinomios.

En los polinomios como sucede en todo objeto matemático, podemos encontrar las operaciones básicas, de las cuales definiremos la operación de suma y de multiplicación de polinomios

- **Suma de polinomios**

Definición: Dados dos polinomios $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ y $(b_i)_{i \in \mathbb{N}}$ en K , con coeficientes en el anillo A , la suma entre ellos se define mediante la función:

$$+: KxK \rightarrow K$$

$$((a_i)_{i \in \mathbb{N}}, (b_i)_{i \in \mathbb{N}}) \rightarrow (a_i + b_i)_{i \in \mathbb{N}}$$

Por ejemplo sea los polinomios $(0,3,-7,0,\dots)$ y $(2,0,-3,4,0,\dots)$ con coeficientes enteros. La suma de ellos es el polinomio $(2,3,-10,4,0,\dots)$, una sucesión de soporte finito.

- **Multiplicación de polinomios**

Definición: Dados dos polinomios con coeficientes en A , $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ y $(b_i)_{i \in \mathbb{N}}$ en K , el producto entre ellos se define mediante la función:

$$\cdot: KxK \rightarrow K$$

$$((a_i)_{i \in \mathbb{N}}, (b_i)_{i \in \mathbb{N}}) \rightarrow (c_i)_{i \in \mathbb{N}}$$

Donde

$$c_i = a_0 \cdot b_i + a_1 \cdot b_{i-1} + a_2 \cdot b_{i-2} + \dots + a_{j-2} \cdot b_2 + a_{j-1} \cdot b_1 + a_j \cdot b_0$$

Es decir, $c_i = \sum(a_j \cdot b_k); j + k = i$ con $j, k, i \in \mathbb{N}$

Ejemplo: Consideremos la sucesión $(0,1,0,0,0,\dots)$ a la que llamaremos indeterminada de x , es decir $x = (0,1,0,0,0,\dots)$. Veamos las potencias sucesivas de x a partir de la definición de multiplicación.

$$x^2 = (0,1,0,0, \dots) \cdot (0,1,0,0, \dots)$$

$$= (0 \cdot 0, 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1, 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0, 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0, 0, \dots)$$

$$= (0, 0, 1, 0, 0, \dots)$$

Luego x^3 se obtiene multiplicando la sucesión anterior por la sucesión x , del siguiente modo:

$$x^3 = (0, 0, 1, 0, \dots) \cdot (0, 1, 0, 0, \dots)$$

$$= (0 \cdot 0, 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0, 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0, 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0, 0, \dots)$$

$$= (0, 0, 0, 1, 0, \dots)$$

De la misma manera podemos encontrar sucesión x^4 , multiplicando las sucesiones x^3 con x .

Generalizando para x^n se obtiene a partir de multiplicar la sucesión x^{n-1} por la sucesión x , obteniéndose una sucesión en que los elementos son todos nulos excepto para el lugar n que equivale a 1, lo que se demuestra por inducción.

Productos Notables

Recurriendo a la definición de multiplicación del anillo $A[x, y]$ para desarrollar las identidades notables como vemos a continuación. Utilizaremos notación algebraica simple.

$$(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$$

Donde x, y pertenece al anillo $K = A[x, y]$.

Utilizando la propiedad de multiplicación en el anillo $K = A[x, y]$ se tiene

$$(x^1 + y^1)(x^1 - y^1) = x^1 \cdot x^1 + x^1 \cdot (-y^1) + y^1 \cdot x^1 + y^1 \cdot (-y^1)$$

$$= x^2 + x \cdot (-y) + x \cdot y + y \cdot (-y) = x^2 + (-xy + xy) - y^2 = x^2 - y^2$$

Por tanto

$$(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$$

De igual manera el desarrollo de cuadrado de binomio

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \text{ para todo } x, y \in \mathbb{R}$$

En efecto,

$$\begin{aligned}(x + y)^2 &= (x^1 + y^1)(x^1 + y^1) = x^1 \cdot x^1 + x^1 \cdot y^1 + y^1 \cdot x^1 + y^1 \cdot y^1 \\ &= x^2 + (xy + xy) + y^2 = x^2 + 2xy + y^2\end{aligned}$$

$$\text{Así } (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$\text{Análogamente se demuestra que } (x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

2.2.1 Espacios de Trabajo Matemático

La teoría que sustenta nuestra investigación principalmente es la de Paradigmas Geométricos y Espacio de Trabajo Geométrico (ETG), iniciada por Houdement y Kuzniak (1996, 1999, 2006), esta teoría nos aporta un marco teórico en torno a la enseñanza y aprendizaje específicamente en el dominio de la geometría. Esta teoría es luego profundizada y ampliada por Kuzniak (2011), a la teoría de Espacio de Trabajo Matemático (ETM).

Iniciaremos esta sección refiriéndonos a la teoría de los ETG, para luego mostrar la ampliación a los ETM.

Paradigmas geométricos y Espacio de Trabajo Geométrico

En la teoría de Paradigmas Geométricos y ETG (Houdement y Kuzniak, 1996,1999, 2006) y (Kuzniak, 2011), los autores nos sugieren replantear la enseñanza y aprendizaje de la geometría en particular (y luego de las matemáticas en general, en los ETM), proponiendo elementos para que tanto el estudiante como el docente construyan un espacio de trabajo adecuado para resolver problemas en los distintos dominios de las matemáticas, tanto en su interpretación como la forma de abordarlo. Así, se definen en el dominio de la geometría los paradigmas geométricos, considerando tres ejes: el carácter cognitivo, tratado por Gonseth en los modos de pensamiento, el carácter filosófico, el cual surge en la conceptualización de paradigma según Kuhn y el carácter epistemológico.

Al ser tratados estos tres ejes como un conjunto, nos proporcionan una aproximación al espacio de trabajo geométrico y a los paradigmas geométricos, los cuales coexisten en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría.

En la ETG se distinguen tres paradigmas geométricos (GI, GII, GIII), influenciados de la noción de paradigma de Kuhn. A continuación se presentan las definiciones y se explican los tres paradigmas a través de los modos de pensamiento (componente cognitiva), elementos de validación (componente filosófica) y el modelo geométrico (componente epistemológica) puestos en escena.

Paradigmas geométricos.

Según Kuhn (1971) la noción de paradigma tiene dos facetas: la primera en su aspecto global, lo designa como el conjunto de las creencias, técnicas y valores que comparte un grupo científico, fijando así la manera correcta de plantear y de emprender la resolución de un problema. En el segundo sentido, interesado en una perspectiva de enseñanza, Kuhn caracteriza los ejemplos significativos y comunes que se entregan a los estudiantes para que aprendan a reconocer, aislar y distinguir las diferentes entidades constitutivas del paradigma global.

Para Gonseth (1945 - 1955), la intuición, la experiencia y el razonamiento deductivo, en su teoría de los modos de pensamiento, son la base del individuo para enfrentar un problema o tarea en geometría.

Adoptando estas posturas, Houdement y Kuzniak (1996, 1999, 2006) definen paradigma geométrico como “la caracterización de los problemas y ejemplos significativos que se entregan a los estudiantes para que aprendan a reconocer, aislar y distinguir las diferentes entidades constitutivas de la geometría puesta en juego” (p. 2).

A partir de esta definición, se plantean tres tipos de paradigmas geométricos, los cuales son: Geometría natural (GI), Geometría axiomática natural (GII) y Geometría axiomática formalista (GIII) y cada una presente en el espacio de trabajo geométrico (ETG). Estos paradigmas no están jerarquizados, sino que el horizonte de trabajo es distinto. A continuación se presentan los tres paradigmas del ETG:

Geometría natural (GI)

En este paradigma se presenta una relación con la realidad, es por esto que los objetos están definidos por el modelo geométrico pero con respecto a la realidad espacial y local del individuo. La experimentación, la deducción y la visión intuitiva trabajan en conjunto sobre la representación de los objetos geométricos mediados por los artefactos materiales y la apreciación.

En este paradigma existe una relación estrecha entre el modelo geométrico y el mundo real. En las tareas propuestas el razonamiento de validación no exige todos los axiomas de la geometría de Euclides, ya que se trabaja de forma local. Por lo tanto la geometría euclidiana no está completa dentro de GI.

Geometría axiomática natural (GII)

En esta geometría ya no se habla de dibujos para representar objetos, sino de figuras geométricas, de esta manera se describe el objeto a través de una propiedad. El razonamiento de validación se funda sobre las leyes hipotéticas deductivas del sistema axiomático puesto en juego, es decir, propiedades, definiciones, etc. El uso de artefactos materiales como medio de prueba no está permitido y solo es usado para las construcciones geométricas mediante los instrumentos geométricos (tradicionales y no tradicionales).

Esta geometría se dice que es edificada sobre un modelo próximo de la realidad y de la intuición espacial, de forma inicial, pero en el proceso de validación se construyen dentro del sistema axiomático puesto en juego, es decir, si tenemos un problema geométrico se acepta en primer lugar que la información venga del dibujo, pero al instante de aprobar el trabajo queda sujeto a la deducción lógica. Es así como se puede apreciar que la sintaxis de los problemas y sus propiedades no estén separados de lo semántico, ya que es posible relacionar los problemas geométricos con la realidad.

En este paradigma los problemas para ser resueltos no requieren la presencia de todos los axiomas, el modelo geométrico tampoco corresponde al de la

geometría de Euclides, es por esto que es posible referirse a un sistema axiomático local, la cual recibe el nombre de geometría Euclidiana local¹⁴.

Geometría axiomática formalista (GIII)

En esta geometría los objetos derivan de una axiomática elegida de forma rigurosa y formal del modelo, los cuales pueden ser representados por medio de un dibujo dependiendo del modelo y así podrían guiar la intuición del geómetra.

En este paradigma, el razonamiento de validación es solo por medio del sistema formal de axiomas del modelo geométrico subyacente. El uso de artefactos materiales no es permitido y deja de ser una cara visible, más bien se habla de instrumentos teóricos; es así como no existe la relación de esta geometría con la realidad.

Espacio de trabajo geométrico

Los tres paradigmas descritos anteriormente coexisten en el ETG, se definen en dos planos: uno cognitivo y otro epistemológico, los cuales se determinan por la interacción que tienen sus respectivas componentes. En el plano cognitivo, sus componentes son la visualización, la construcción y la prueba, en tanto para el plano epistemológico se encuentran los componentes de espacio local y real, los artefactos y el referencial teórico, en un inicio están conectadas en la geometría por tres modos de pensamientos: intuición, experimentación y deducción, para luego definirlos como tres génesis: semiótica, instrumental y discursiva, las cuales se especificarán más adelante.

¹⁴ La geometría de Euclides reducida a los axiomas necesarios para resolver problemas.

Componentes epistemológicos del ETG:

Para definir el espacio de trabajo geométrico, se introducen tres componentes características de la actividad geométrica en su dimensión puramente matemática. Estas tres componentes en interacción son las siguientes:

- I. Espacio local y real es la concepción por el individuo del modelo geométrico y tiene dos aspectos, el local que se refiere a que el individuo trabaja con una parte del modelo, y el real que se refiere a que los objetos son el resultante de la abstracción del modelo a partir de la realidad.
- II. Los Artefactos corresponde a todo lo que le permite al geómetra manipular los objetos geométricos con la finalidad de abordar un problema, en concordancia con el modelo geométrico.
- III. Referencial teórico corresponde al conjunto de definiciones, propiedades y relaciones articuladas por los axiomas y que finalmente determinan el modelo geométrico.

Componentes cognitivos del ETG.

Con respecto al punto de vista cognitivo, existen ciertos procesos asociados a la ETG, los cuales son: la visualización, la construcción y prueba, estos se relacionan con los componentes de la ETG construyendo un espacio de trabajo dinámico.

- I. Un proceso de visualización en relación con la representación del espacio y el soporte material.
- II. Un proceso de construcción determinado por los instrumentos utilizados (regla, compás, etc.) y las configuraciones geométricas.
- III. Un proceso discursivo que produce argumentaciones y pruebas.

El espacio real estará más particularmente ligado a la visualización mediante la intuición; los artefactos a la construcción a través de la experiencia; el modelo

teórico a la noción de prueba gracias a la deducción. Esto nos conduce al siguiente esquema (Figura 2.2.1) donde organiza las componentes del ETG en un plano cognitivo y en un plano epistemológico y la relación que existe entre cada una de ellas.

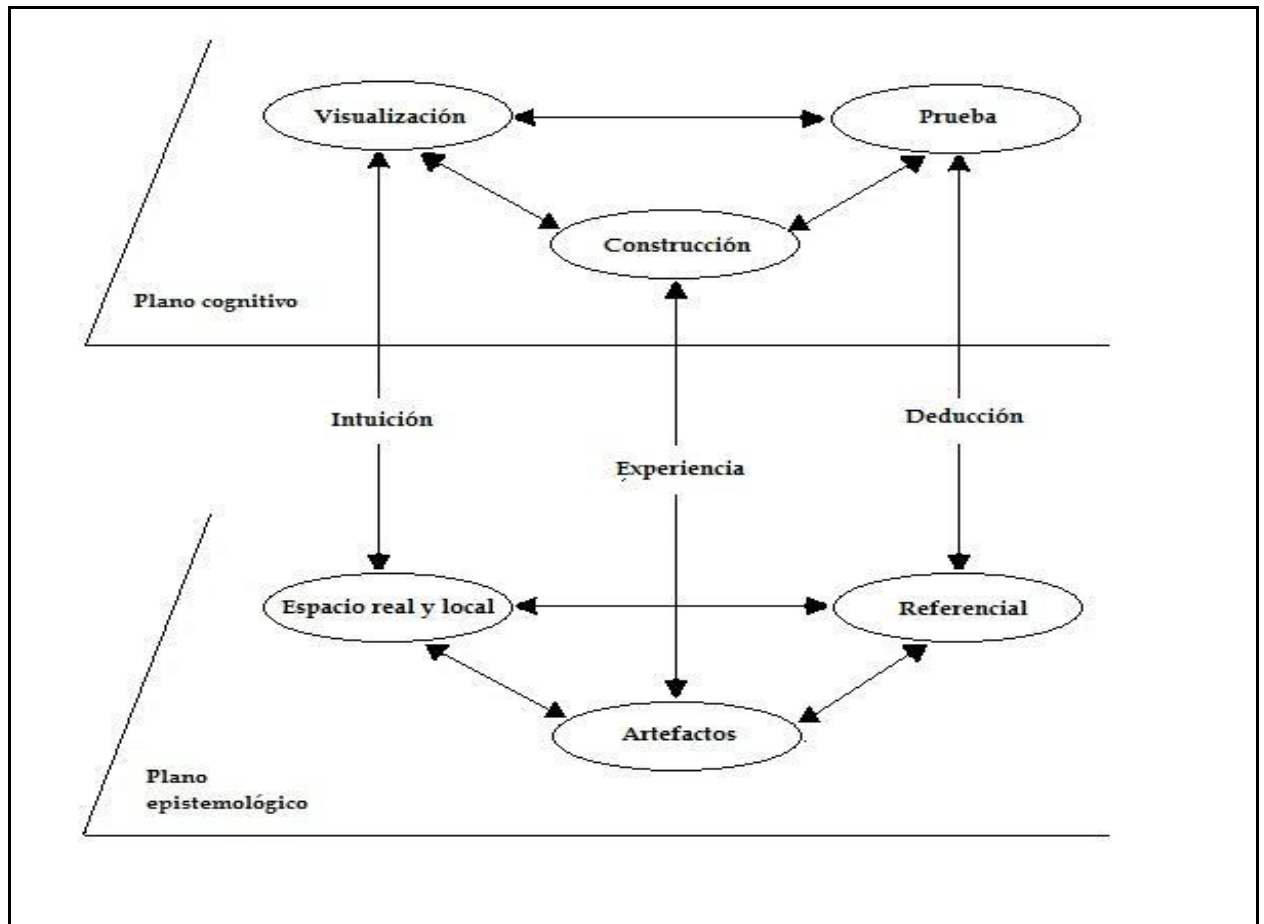


Figura 2.2.1: Espacio de Trabajo Geométrico. (Houdement & Kuzniak, 1996, 1999, 2006)

Hasta el momento solo hemos hablado de la ETG y sus componentes, pero también antes hemos mencionado que requerimos la profundización y ampliación de esta teoría al ETM, ya que el estudio de los productos notables considera aspectos geométricos y algebraicos. A continuación describiremos la teoría de Espacio de Trabajo Matemático (Kuzniak, 2011).

2.2.2 Espacio de trabajo matemático y sus génesis

Todo estudio didáctico supone la descripción de un espacio de trabajo para el campo abordado, por lo que el marco del ETM surge como una envoltura metodológica sobre la cual será posible apoyarse para desarrollar nuevos espacios de trabajo en otros dominios tales como:

ETMg: En este espacio de trabajo aborda todo el tema de la ETG puesto que se centra en el estudio de las propiedades de las figuras en el plano o espacio, para representar distintos aspectos de la realidad y a nociones como puntos, rectas, planos, paralelas, curvas, superficies, etc.

ETMa: En este espacio se trabaja con el álgebra de manera que se emplean números, letras y signos para poder hacer referencia a múltiples operaciones aritméticas acorde a ciertos axiomas.

ETMan: Se presenta un espacio de trabajo matemático basado en el estudio de los números reales, complejos y construcciones derivadas a partir de ellos, por ejemplo, las funciones. Además se estudia conceptos como la continuidad, la integración y la diferenciabilidad de diversas formas a partir de una formulación rigurosa.

ETMp: En este espacio se aborda el dominio de la probabilidad, de modo que se mide la frecuencia con la cual se obtiene un resultado mediante la realización de un experimento sobre el cual se conocen todos los resultados posibles gracias a las condiciones de estabilidad que el contexto supone antemano.

Del estudio de la ETG se conserva la idea de articular dos niveles en el espacio de trabajo: el de naturaleza epistemológica en estrecha relación con los contenidos matemáticos del dominio estudiado y el de naturaleza cognitiva.

El trabajo matemático es el resultado de un proceso progresivo de génesis que permitirá una articulación interna de estos dos niveles.

Componente semiótica

Los artefactos y el elemento referencial teórico quedan como dos componentes de base de todo plano epistemológico asociado a un campo matemático particular, sin embargo, la componente ligada al espacio y a las configuraciones geométricas debe ser modificada. Esta componente se asocia a la forma visible y concreta de los objetos propios de la geometría. Para extenderla a otros campos matemáticos, y considerando la concepción de las matemáticas fundadas sobre representaciones semióticas, se introduce la noción de signo o representamen en el sentido de Peirce (1976) (esta noción será desarrollada profundamente más adelante). Los signos pueden adquirir significaciones diferentes en función del nivel de su utilizador como en el caso de las fórmulas algebraicas que sintetizan las relaciones entre objetos y toman un sentido icónico para el utilizador experto. Estos diferentes niveles de relaciones con el objeto remiten las distinciones entre los paradigmas utilizados.

Para describir el nivel cognitivo del ETM, aceptaremos un proceso cognitivo en relación con la importancia que concedemos a los signos y a las representaciones en la constitución del trabajo matemático. Se conserva las nociones de prueba y construcción, sin embargo, el proceso de visualización necesita una reinterpretación fundamental para encontrar su lugar en el ETM, de manera que esté asociado a esquemas y operaciones de uso sobre los signos.

A continuación se presenta el esquema donde se muestra las componentes del ETM, con sus respectivas génesis:

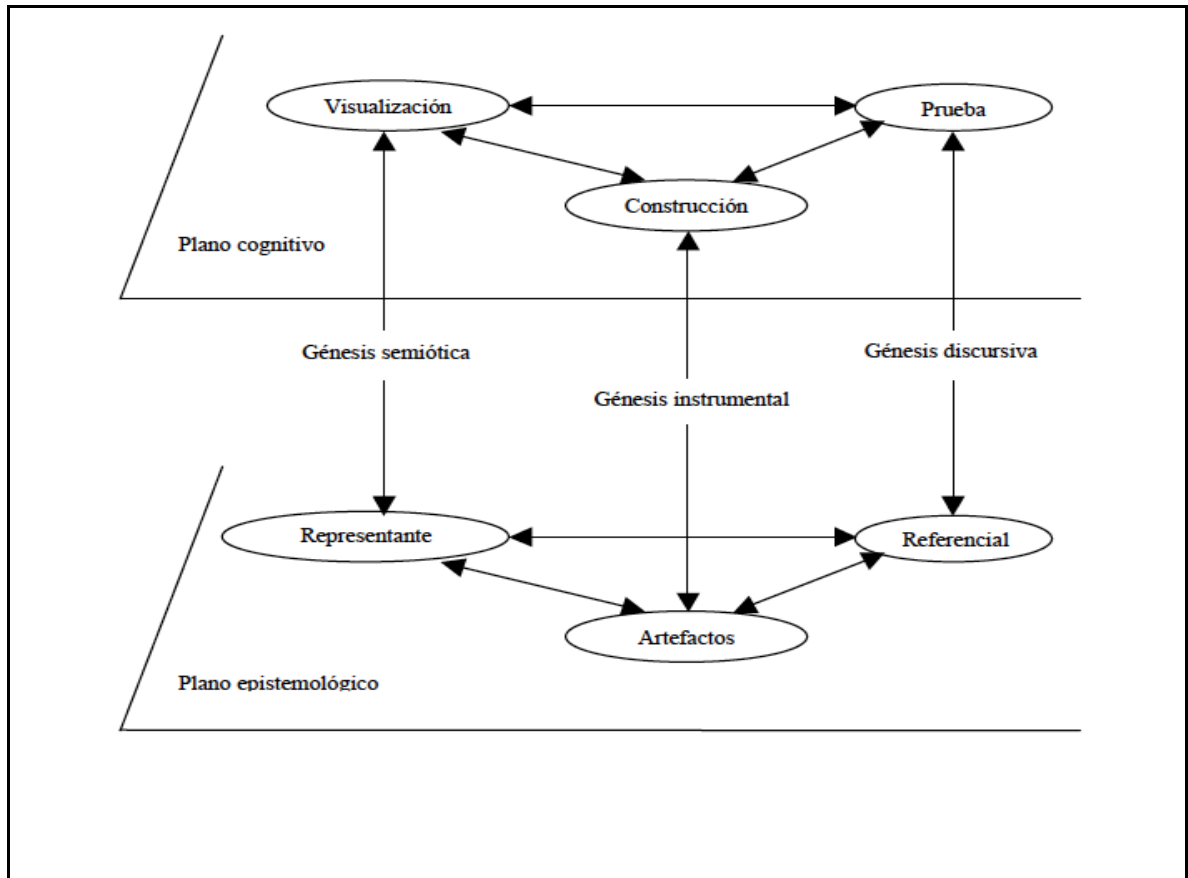


Figura 2.2.2: Espacio de trabajo matemático y sus génesis.

En el esquema da evidencia la concepción del ETM donde se introduce la idea de una génesis semiótica asociada a las representaciones de los objetos matemáticos conservando el término de visualización que deberá estar estrechamente asociado a la intuición y a los esquemas operatorios sobre los signos y las representaciones. Kuzniak (2011) introduce la noción de un representamen o signo en el sentido de Peirce considerando así otros dominios de la matemática ya antes mencionados. Para articular el plano cognitivo con el epistemológico se introducen tres génesis fundamentales y estrechamente ligadas al Espacio de Trabajo Matemático. Antes de describir las génesis del ETM, debemos mencionar que la palabra génesis no se debe entender como comienzo, sino como generador. A continuación nombraremos las génesis del ETM:

- I. Una génesis instrumental que permite hacer operativos los artefactos en el proceso constructivo. Las herramientas tecnológicas e informáticas

entregaron nuevos empujes a los instrumentos en la actividad matemática al facilitar su manejo y al ofrecer la posibilidad de desarrollar pruebas dinámicas. Rabardel (1995)

- II. Una génesis semiótica basada en los registros de representación semióticos que asegura a los objetos tangibles del ETM su estatus de objeto matemáticos operatorios. Para hablar de génesis semiótica utilizamos como complemento el marco de Duval (2005) con los registros y de Peirce (1976) con símbolos y signos.
- III. Una génesis discursiva de la prueba según Balacheff (1999) que dará sentido a las propiedades para ponerlas al servicio del razonamiento matemático. La articulación entre razonamiento y visualización conjetura la creación de espacio de trabajo matemático en donde el razonamiento se respalda de manera evidente en diagramas, en una clase de razonamiento diagramático, en el cual la imagen y el discurso se apoyan mutuamente.

Diferentes tipos de ETM

Cuando el matemático hace sus reflexiones sobre los problemas a los cuales se enfrenta y la adaptación realizada por los individuos que ejecutan un trabajo, es necesario considerar distintos tipos de ETM, los cuales son definidas a través de la relación con el saber, el cómo enseñar o conforme a cómo es afrontado el problema. A continuación se describen los tres tipos de ETM existentes definidos en esta teoría.

ETM de referencia: Es el espacio de trabajo definido de manera ideal, en donde una comunidad de individuos acuerdan formular problemas y también sus soluciones, privilegiando ciertas herramientas o ciertas formas de pensamiento en función de criterios matemáticos. Se puede considerar como el ETM institucional de la comunidad de los matemáticos.

ETM idóneo: El ETM de referencia debe ser conducido y organizado para llegar a ser un espacio de trabajo efectivo e idóneo. Es un espacio definido en

términos didácticos, en el cual se concibe la reflexión sobre la reorganización didáctica de los componentes del espacio de trabajo de referencia. La persona que naturalmente utiliza este ETM es el docente.

ETM personal: Es el espacio descrito por un utilizador particular a través de la reflexión dada entre los conocimientos aprendidos y los puestos en práctica por el geómetra, con respecto a los conocimientos matemáticos y su capacidad cognitiva.

Naturalmente este ETM es utilizado por el estudiante, aunque no hay que ignorar a los otros geómetras como lo son el docente y el investigador.

Los niveles de ETM ayudan a explicar el trabajo matemático en un marco escolar. Los ETM de referencia tienen descrita el dominio que la institución tiene en mente, los cuales deben ser adaptados en ETM idóneo para admitir un arreglo en las clases, en donde cada estudiante trabaja en su ETM personal.

2.2.3 Teorías complementarias

Las siguientes teorías, nombradas a continuación, apoyan nuestra investigación.

Duval (2005) concibe la visualización como “el derribo dimensional de las formas” (Ibid, p.7) y distingue dos niveles de operaciones puestos en juego en el acto de “ver”, diferentes e independientes el uno del otro, estos son: el reconocimiento discriminativo de formas y la identificación de los objetos correspondientes a las formas reconocidas.

Se distinguen dos mecanismos de visualización: la visualización icónica, es la que reposa en la semejanza que existe entre la forma reconocida en un trazado y la forma característica del objeto que hay que identificar y supone una caracterización para cada objeto geométrico (Ibid, p.15). La visualización no icónica reconoce las formas de las limitaciones internas de organización que hacen imposible ciertas deformaciones o aproximaciones en virtud de deducciones efectuadas en función de las propiedades que han sido enunciadas en las definiciones o en los teoremas.

Duval distingue de estos mecanismos de visualización cuatro entradas clásicas a la geometría: dentro de la visualización icónica se encuentran botánico y topógrafo, mientras que las otras dos: constructor e inventor están ligadas a la visualización no icónica, como se muestra en el siguiente cuadro:

	BOTANISTE	ARPENITEUR- géomètre	CONSTRUCTEUR	INVENTEUR- bricoleur
1. Type d'opération sur les FORMES VISUELLES , requis par l'activité proposée	Reconnaître des formes à partir de qualités visuelles d'un contour : UNE forme <i>particulière</i> est privilégiée comme TYPIQUE	Mesurer les bords d'une surface : sur un TERRAIN ou sur un DESSIN (variation d'échelle de grandeur et donc de procédure de mesure)	Décomposer une forme en tracés constructibles à l'aide d'un instrument Il faut (souvent) passer par des TRACÉS AUXILAIRES qui n'appartiennent pas à la figure "finale".	Transformer des formes les unes dans les autres . Il faut ajouter des TRACÉS REORGANISATEURS dans la figure finale pour initialiser ces transformations
2. Comment les PROPRIETES GEOMETRIQUES sont mobilisées par rapport à ce type d'opération	Pas de liens entre les différentes propriétés (pas de définition mathématique possible)	Les propriétés sont des critères de choix pour les mesures à faire. Elles ne sont utiles que si elles renvoient à <i>une formule permettant un calcul</i>	Comme contraintes d'un ordre de construction . Certaines propriétés sont obtenues par une seule opération de traçage , les autres exigent plusieurs opérations.	Implicitement par renvoi à un réseau plus complexe (une trame de droites pour la géométrie plane ou une trame d'intersections de plans...) que la figure de départ

Figura 2.3.1: Cuatro entradas clásicas a la geometría

A continuación se describe cada una de las cuatro entradas a la geometría:

- Botánico: Reconoce preceptivamente las formas elementales que son utilizadas en la geometría plana, localizando las diferencias entre dos formas que presentan ciertas similitudes y de hacer notar cuales son las similitudes entre dos formas diferentes. Aquí las propiedades geométricas son características visuales.
- Topógrafo: Mide las longitudes sobre un terreno, o la distancia entre dos puntos y de transportarlas sobre un dibujo que adquiere el estatuto de plano. Las propiedades son criterios de elección para las medidas necesarias, sirven para escoger el tipo de constataciones a hacer en el espacio real que nos rodea, tanto si es para construir un objeto como para calcular una longitud o una distancia.
- Constructor: La particularidad de las figuras geométricas que corresponden a las formas euclidianas elementales, debe poder ser construida con la ayuda de instrumentos. Un instrumento permite producir una forma visual que tiene una propiedad geométrica, y esta forma visual constituye la primitiva del instrumento.

- Inventor: Añadir trazos suplementarios a una figura de partida (la que acompaña al enunciado de un problema o puede construirse a partir del enunciado de un problema), a efectos de “ver” (es decir, descubrir sobre la figura) un procedimiento de resolución. Son esos trazos suplementarios los que van a permitir una reorganización visual de la figura de partida develando de alguna manera la solución de un problema.

Peirce (1976) propone la noción de signo o representamen. Los signos pueden adquirir significaciones diferentes en función del nivel de su utilizador.

Para Pierce todos los signos tienen dos objetos: un objeto dinámico (objeto muy eficiente, pero ese no es el objeto inmediato presente), y el objeto inmediato (el objeto como el signo lo representa). Además, cada signo tiene tres interpretantes (efectos): un interpretante final (el efecto producido en la mente por la señal después de un desarrollo suficiente de pensamiento), una interpretación dinámica (El actualmente producida en la mente) e interpretación inmediata, es decir interpretan representado o significado en el signo.

Además Peirce plantea que un signo dado revela su objeto dinámico parcialmente: la revelación parcial es su objetivo inmediato. De manera similar, la interpretación final de un signo es el resultado de una historia de interacción semiótica con un objeto dinámico dado, luego un interpretante dinámico es el efecto de un signo que se produce en la actualidad (en un momento dado) y el interpretante inmediato es el significado inmediato del signo.

Rabardel (1995) se refiere a los artefactos como herramientas inertes susceptibles de ser utilizada por un individuo o un utilizador, una vez que se utiliza el artefacto, este es llamado instrumento, entonces el instrumento es el artefacto que guía la acción del individuo, de manera que, un mismo artefacto podría definir dos instrumentos distintos, bajo dos acciones diferentes. Existen instrumentos materiales clásicos y no clásicos, un ejemplo de los primeros instrumentos materiales, son la regla y el compás y un ejemplo de los

segundos instrumentos materiales son los softwares computacionales. Además Rabardel se refiere a artefactos simbólicos, como los compuestos por símbolos matemáticos, que proceden como artefactos cuando van a ser empleados por un individuo.

Se denomina instrumentalización al desarrollo de la articulación entre el artefacto y el instrumento. En la ETM se habla de génesis instrumental.

Según Balacheff (1999) surgen explicaciones que son aceptadas o no por una comunidad, aquellas explicaciones que son aceptadas por la comunidad conforman las pruebas, las cuales están compuestas por las pruebas pragmáticas correspondiente a “aquellas que recurren a la acción sobre los objetos y supone la posibilidad de tener acceso a realización material de una tarea para justificar afirmaciones sobre ellos” (p.2), las pruebas intelectuales son “las que recurren a la formulación de propiedades y relaciones entre los objetos en cuestión”(p.2) y sus respectivas tipología, conformando así un esquema de trabajo intelectual denominado como un proceso de prueba.

A continuación se mencionan la tipología propia para cada una de estas pruebas anteriormente nombradas.

En las pruebas pragmáticas tenemos:

- Empirisme naïf: La persona que valida una afirmación lo hace después de verificarla para algunos casos particulares.
- Experimento (experiencia) crucial: La persona que valida la afirmación toma en cuenta la problemática de la generalidad y la resuelve mediante el uso de un caso particular que reconoce como no especial.
- Ejemplo genérico: La persona que valida justifica la afirmación considerando al objeto concreto como un representante de todos los pertenecientes al dominio de dicha afirmación.

En las pruebas intelectuales se encuentran:

- Experimento mental: El razonamiento de la persona se independiza de la representación del objeto, se observa un guion que tiene necesariamente la estructura de una demostración.
- Demostración: El razonamiento que utiliza la persona tiene la función de verificar y explicar en lenguaje reconocido por la comunidad matemática, cuyas reglas de debate se fundan sobre la lógica formal y en la deducción de teoremas y/o axiomas.
- Cálculo sobre el enunciado: No hay uso de ejemplos o dibujos, sino que se utiliza un razonamiento a partir de propiedades que por lo general, no son del todo ciertas y que son tan usuales de encontrar tanto a nivel numérico como en el geométrico.

Para nuestra metodología utilizaremos el concepto de Tipo de tareas y tareas de Chevallard (1999) mencionando lo siguiente:

Cuando una tarea t forma parte de un tipo de tareas T , se escribirá $t \in T$. En la mayoría de casos, una tarea se expresa por un verbo: limpiar la habitación, desarrollar la expresión literal dada, dividir un entero entre otro, saludar a un vecino, subir una escalera, etc. La noción de tarea empleada aquí es evidentemente más amplia que la del lenguaje corriente: rascarse la mejilla, ir del sofá al armario, e incluso sonreír a alguien, son también tareas. A continuación, la noción de tarea o, mejor, de tipo de tareas, supone un objeto relativamente preciso. Subir una escalera es un tipo de tarea, pero subir, simplemente, no lo es. De la misma manera, calcular el valor de una función en un punto es un tipo de tareas, pero calcular, simplemente, es lo que se llamará un género de tareas, que pide un determinativo. (Chevallard 1999, p.222)

Capítulo 3.

Metodología

La metodología utilizada en este trabajo es de corte cualitativo, de tipo descriptivo, y reposa sobre cuestionarios realizados a cuatro estudiantes (dos binomios). El trabajo metodológico se divide en 5 fases, las que describiremos a continuación:

- **Fase 1:** Identificación de tipos de tareas en el sentido de la TAD desde los Programas de estudio (MINEDUC, 2011), Facsímil oficial PSU¹⁵ de matemática (DEMRE¹⁶, 2011-2012) y textos escolares. En esta fase se definen los criterios para la selección de las preguntas que representan los tipos de tarea.
- **Fase 2:** Análisis de las preguntas seleccionadas en la fase anterior, bajo la teoría del ETM y elaboración del primer instrumento de investigación.
- **Fase 3:** Aplicación del instrumento 1 y análisis de los resultados.
- **Fase 4:** Elaboración de una propuesta, a partir de los resultados obtenidos en la fase 3.
- **Fase 5:** Aplicación de la propuesta y refinamiento de esta.

¹⁵ Prueba de Selección Universitaria.

¹⁶ Departamento de Evaluación, Medición y Registro Educativo

3.3.1 Fase 1: Identificación de tipos de tareas

En esta fase se describen 11 tipos de tareas referidas a los productos notables, que se obtienen a partir del análisis realizado en facsímiles oficiales de PSU de Matemática (DEMRE, 2011 – 2012) , programas de estudio de primer año de enseñanza (MINEDUC, 2011) y textos escolares oficiales entregados por MINEDUC. (Ver ANEXO 1)

Esta categorización se realiza considerando el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard, 1999).

Tipo de Tarea	Descripción
T ₁	Factorizar una expresión algebraica utilizando algún producto notable
T ₂	Factorizar la expresión algebraica dado uno de los factores.
T ₃	Factorizar agrupando términos semejantes, con su factor común.
T ₄	Transformar una expresión algebraica por completación de cuadrados para lograr la factorización.
T ₅	Desarrollar expresiones algebraicas que involucren cuadrados de binomio y reducir la expresión mediante términos semejantes.
T ₆	Determinar el área de un rectángulo, cuyos lados están dados por expresiones algebraicas.
T ₇	Determinar el rectángulo que representa al área y lado de una expresión algebraica dada.
T ₈	Desarrollar el producto notable asociado a una factorización dada.
T ₉	Comparar expresiones algebraicas según su factorización o producto notable.
T ₁₀	Determinar el valor de una expresión algebraica dado valor de la variable.
T ₁₁	Comparar áreas de rectángulos con lados dados por expresiones algebraicas, solo desde la visualización de la figura.

Figura 3.3.1: Tabla de los tipos de tarea seleccionadas

3.3.2 Fase 2: Diseño de Instrumento 1 y análisis desde ETM

El **Instrumento 1** nos permitirá conocer el espacio de trabajo matemático personal de los estudiantes y se ha diseñado a partir del análisis realizado a las diferentes tareas propuestas en la fase 1. Este instrumento (ver anexo 2) consta de seis preguntas, las cuales han sido seleccionadas para identificar las técnicas, propiedades, teoremas y la visualización que utilizan los estudiantes para resolver las actividades propuestas. A partir de los resultados se espera determinar la circulación entre las génesis del Espacio de Trabajo Matemático geométrico (ETMg) al Espacio de Trabajo Matemático algebraico (ETMa) y viceversa.

Analizaremos los trabajos matemáticos de estudiantes bajo la activación de las 6 tareas seleccionadas a la luz de la teoría de Espacios de Trabajo Matemático (Kuzniak, 2011), con el fin de confeccionar una propuesta que enriquezca el espacio de trabajo.

Pregunta 1: pertenece a los tipos de tarea T_5 y T_1 , el estudiante tiene que desarrollar el cuadrado de binomio y luego reducir los términos semejantes para encontrar el resultado

¿Cuál de las siguientes expresiones es equivalente a $(m + n)^2 - 4mn$?

- a) $(m - n)^2$
- b) $m^2 - 2 + n^2$
- c) $m^2 - 4mn + n^2$
- d) $2m - 4mn + 2n$
- e) $2m - 2mn + 2n$

Fuente: DEMRE publicaciones oficiales, 2011.

En el desarrollo de esta pregunta se activa inicialmente la **génesis semiótica** donde el estudiante trabaja en un registro algebraico, de modo que visualiza en primera instancia que se encuentra un cuadrado de binomio, recurriendo directamente a su fórmula, esto quiere decir que está utilizando un **artefacto**

simbólico que llevará a la activación de la **génesis instrumental**, la que ayudará a reconocer los términos semejantes para luego reducirlos. Para concluir el alumno deberá relacionar la expresión obtenida con los conocimientos previos (factorización) para llegar a la alternativa correcta.

Pregunta 2: pertenece a los tipos de tarea T₂, T₆ y T₇. La primera interacción con el problema tiene relación con resolver los tipos de tarea T₇ y T₆. En efecto, primero se determina el rectángulo que representa al área y lado de una expresión algebraica (T₇) y luego se debe calcular el área de los rectángulos (T₆). Además el tipo de tarea T₂ también está involucrado en este problema, pues es necesario desarrollar las expresiones algebraicas y luego factorizar.

Reúnanse en parejas, completen la tabla

Cuadrado de binomio

Ana está calculando el área de los siguientes cuadrados.

Lado	Área	Representación	Producto
$(a + 2)$	$(a + 2)^2$		$\begin{aligned} (a + 2)(a + 2) &= \\ &= a \cdot a + a \cdot 2 + 2 \cdot a + 2 \cdot 2 \\ &= a^2 + 2a + 2a + 4 \\ &= a^2 + 4a + 4 \end{aligned}$
$(x + 1)$	$(x + 1)^2$		$\begin{aligned} (x + 1)(x + 1) &= \\ &= x \cdot x + x \cdot 1 + 1 \cdot x + 1 \cdot 1 \\ &= x^2 + x + x + 1^2 \\ &= x^2 + 2x + 1 \end{aligned}$
$(3 + y)$	$(3 + y)^2$		

Fuente: Extracto Página 94, Texto del estudiante, 1° medio Matemática, 2014

Esta tarea activa inicialmente la génesis semiótica (Kuzniak, 2011), donde el estudiante trabaja de forma algebraica y geométrica el problema, es así como podemos aludir que se trabaja una **visualización icónica** en un **registro figural** (Duval, 1995), bajo un enfoque de **constructor** (Duval, 1995), ya que el estudiante podrá resolver el problema mediante los ejemplos dados. Dada la expresión algebraica y además visualizará la fórmula, identifica que es un cuadrado de binomio, y es así como activará la **génesis instrumental**, mediante un **artefacto simbólico** (Rabardel, 1995). Para finalizar el estudiante deberá resolver el producto notable, según este análisis a priori, las génesis que se destacan en esta y las demás tareas propuestas, solo articulan y activan la génesis semiótica e instrumental, quedando fuera la génesis discursiva, ya que no se aplica ningún teorema o alguna definición para resolver los ejercicios.

Pregunta 3: se identifica el tipo de tarea T_3 , pues es necesario factorizar según factor común y por agrupamiento.

Realizan factorizaciones intermedias para llegar a la factorización final. De este tipo son las siguientes factorizaciones:

- $ac + bc + ad + db$
- $ax - 2ay + 3a + bx - 2by + 3b$
- $ad - dx + ac - cx$

Fuente: Programas de estudio 1° medio, página 50, (MINEDUC 2011).

En la siguiente tarea podemos notar que existe la **génesis semiótica**, es decir, el estudiante debe reconocer los tipos de factorización que existen para poder desarrollar los ejercicios planteados. Se utilizó como referencial teórico la factorización por agrupamiento pero esto no es suficiente para activar la **génesis discursiva** (Kuzniak, 2011) porque la definición se utiliza como un **artefacto simbólico**, activando solo la **génesis instrumental**.

Pregunta 4: Está involucrado el tipo de tarea T_4 , ya que para llegar a la expresión inicial se debe completar cuadrados y así lograr una factorización.

Transforman expresiones algebraicas aplicando productos notables y factorizan la expresión transformada.

Por ejemplo:

- Factorizan la expresión $4a^4 + b^4$; con este propósito, transforman esta expresión en la forma $(2a^2 + b^2)^2 - (2ab)^2$.
- Factorizan la expresión $16x^4 + 4$; con este propósito, transforman esta expresión en la forma $(4x^2 + 2)^2 - 16x^2$.

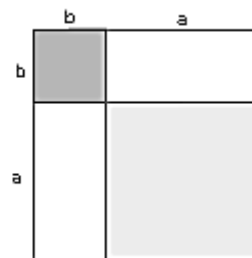
Fuente: Programas de estudio 1° medio, página 50, (MINEDUC 2011).

El estudiante se ve enfrentado a un tipo de factorización más compleja, de modo que trabajando en un registro algebraico visualiza que la expresión se asemeja a un cuadrado de binomio, activando inicialmente la **génesis semiótica**, al recurrir a la fórmula del cuadrado de binomio, notará que falta el doble del producto de ambos términos para completar el trinomio y así factorizar para llegar a un cuadrado de binomio, por lo que el estudiante deberá realizar completación de cuadrados, utilizando así un **artefacto simbólico** que lo lleva a transitar en la **génesis instrumental**, es decir, utiliza los conocimientos existentes del tema pero no son suficientes para activar la **génesis discursiva**, ya que no existe ninguna aplicación directa de algún teorema o definición.

Pregunta 5: Con respecto a las afirmaciones dadas, se puede inferir que están presentes los tipos de tarea T_6 y T_9 , porque es necesario determinar el área del cuadrado y el área achurada y luego comparar estas áreas. También podemos encontrar el tipo de tarea T_{11} en este problema, pues se debe comparar áreas de rectángulos con los lados dados, pero solo visualizando la imagen.

Se sabe que a y b son positivos y $a > b$. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es(son) verdadera(s)?

- I. El área del cuadrado de lado $(a + b)$ es igual al área achurada.
 II. $(a + b)(a - b)$ es igual a la diferencia de las áreas del cuadrado de lado a y el lado de b .
 III. $a(a + b) > a^2 + b^2$



- A) Sólo I B) Sólo I y II C) Sólo I y III
 D) Sólo II y III E) I, II y III

Fuente: DEMRE publicaciones oficiales, 2011.

El estudiante visualiza que la imagen entregada es un cuadrado de lados a y b , con esto se ve activada la **génesis semiótica** donde el estudiante trabaja bajo el perfil de productos notables. El estudiante debe analizar y tener en cuenta tanto la propiedad distributiva como los productos notables para poder responder correctamente, con estos **artefactos simbólicos** se activa la **génesis instrumental** y no se percibe una **génesis discursiva**, ya que para activar esta génesis se necesita un referencial teórico y la definición de la propiedad distributiva y la de producto notable se utiliza más bien como algoritmo, lo cual es un **artefacto simbólico**.

Pregunta 6: pertenece al tipo de tarea T_{10} , pues el estudiante deberá reemplazar el valor de la incógnita para determinar el valor de la expresión.

Si $x = -3$, entonces $(x - 2)(2x^2 - 3) =$

- a) -45
 b) -75
 c) 15
 d) 75
 e) 105

Fuente: DEMRE publicaciones oficiales, 2011.

En la tarea 6 se activa de manera inmediata la **génesis semiótica** donde el estudiante visualiza la expresión y trabajará en un registro algebraico. Un posible camino para resolver el problema, es que el estudiante tome el valor de la incógnita " x " y lo reemplaza sin hacer algún tratamiento al ejercicio para luego concluir con una multiplicación de números, o bien el alumno recurre a

un referencial teórico al relacionar el concepto de distributividad en el ejercicio logrando activar la ***génesis discursiva*** para finalizar con reemplazar el valor de “ x ” en el polinomio resultante, activando por último la ***génesis instrumental***.

3.3.3 Fase 3: Aplicación del instrumento y análisis de los resultados.

Luego de realizar un análisis a priori de las tareas seleccionadas (Ver ANEXO 3), lo que sigue es aplicar el instrumento 1 a estudiantes, para esto hemos seleccionado cuatro estudiantes de segundo año de enseñanza media que provienen de establecimientos particulares subvencionados de la región Metropolitana de nuestro país.

Llamaremos A_1 y A_2 a la primera pareja de binomios y B_1 y B_2 a la segunda pareja de binomio.

→ Primer binomio: A_1 y A_2

Pregunta 1:

¿Qué expresión es equivalente a $(m + n)^2 - 4mn$?

→ **Desarrollo del estudiante:**

➤ Momento de inicio:

En un primer momento los estudiantes leen en voz alta la tarea 1 y a continuación A_1 manifiesta que lo hagan de manera individual y así después comparan resultados, aceptando de manera inmediata A_2 .

➤ Momento de discusión:

El estudiante A_1 comenta a A_2 que el primer término de la expresión se trata de un cuadrado de binomio, por lo que comienza a explicar cómo podría desarrollar la tarea. A_1 desarrolla el cuadrado de binomio de forma correcta, empleando la fórmula conocida.

➤ Momento de resultado:

Al llegar al momento donde se les pide que expliquen el procedimiento, A₁ explica paso a paso su resultado, desarrolla el binomio de forma correcta, pero no reconoce que al tener dos términos semejantes puede restar directamente, sino que toma ambos términos, los factoriza, y la resta que obtiene la vuelve a multiplicar por el término común por el cual factorizo, de este modo llega a la solución correcta luego de factorizar y dejar expresado la solución como un cuadrado de binomio.

Pregunta 1:

¿Cuál de las siguientes expresiones es equivalente a $(m+n)^2 - 4mn$?

a) $(m-n)^2$
b) $m^2 - 2 + n^2$
c) $m^2 - 4mn + n^2$
d) $2m - 4mn + 2n$
e) $2m - 2mn + 2n$

Desarrollo:

$(m+n)^2 - 4mn$
 $(m^2 + 2mn + n^2 - 4mn)$
 $(m^2 + n^2) + 2mn(1-2)$
 $m^2 + n^2 - 2mn$

$m^2 + n^2 - 2mn$
 $m^2 - 2mn + n^2$
 $m^2(m-n)^2$

Figura: desarrollo del binomio A 1

Observaciones:

Se puede observar que los estudiantes no tienen problemas al reconocer el cuadrado de binomio, empleando de manera inmediata la fórmula conocida de desarrollar este tipo de multiplicación, del mismo modo al factorizar dicha expresión resultante al restar un término semejante, lo dejan expresado de forma correcta al aplicar una factorización así llegando a la alternativa correcta.

Pregunta 2:

Observe el siguiente ejemplo y complete:

Reúnanse en parejas, completen la tabla

Cuadrado de binomio

Ana está calculando el área de los siguientes cuadrados.

Lado	Área	Representación	Producto
$(a + 2)$	$(a + 2)^2$		$(a + 2)(a + 2) =$ $= a \cdot a + a \cdot 2 + 2 \cdot a + 2 \cdot 2$ $= a^2 + 2a + 2a + 4$ $= a^2 + 4a + 4$
$(x + 1)$	$(x + 1)^2$		$(x + 1)(x + 1) =$ $= x \cdot x + x \cdot 1 + 1 \cdot x + 1 \cdot 1$ $= x^2 + x + x + 1^2$ $= x^2 + 2x + 1$
$(3 + y)$	$(3 + y)^2$		

→ **Desarrollo del estudiante:**

➤ Momento de inicio:

A₂ comienza leyendo la pregunta en voz alta, y cada uno trabaja de manera independiente.

➤ Momento de discusión:

En la columna producto de la tarea A₂ comenta a A₁ si lo que está haciendo está correcto, explicando A₁ que hay errores básicos y problemas con algunos signos, de modo que A₂ se da cuenta de sus errores, corrigiendo y entendiendo el porqué. En la columna representación A₁ afirma a su compañero

que es más fácil hacer lo mismo que en el cuadrado anterior, solo copiar el dibujo y reemplazar los valores de igual forma que la figura anterior, así verificando cual es el cuadrado de lado 3 y lado “y”.

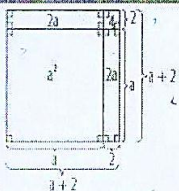
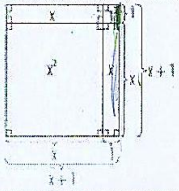

Forma	Área	Representación	Producto
$(a+2)$	$(a+2)^2$		$(a+2)(a+2) =$ $= a \cdot a + a \cdot 2 + 2 \cdot a + 2 \cdot 2$ $= a^2 + 2a + 2a + 4$ $= a^2 + 4a + 4$
$(x+1)$	$(x+1)^2$		$(x+1)(x+1) =$ $= x \cdot x + x \cdot 1 + 1 \cdot x + 1 \cdot 1$ $= x^2 + x + x + 1^2$ $= x^2 + 2x + 1$
$(3+y)$	$(3+y)^2$		$(3+y)(3+y) =$ $= 3 \cdot 3 + 3 \cdot y + y \cdot 3 + y \cdot y$ $= 9 + 3y + 3y + y^2$ $= 9 + 6y + y^2$

Figura: desarrollo del binomio A2

➤ Momento de resultado:

En el momento que ambos estudiantes terminan, el investigador interviene preguntado de qué manera llegaron a la respuesta. A₁ y A₂ responden “viendo el ejemplo de arriba”, afirmando que la parte algebraica lo pudieron hacer de forma rápida y sin ver el ejemplo anterior, solo copiaron del ejemplo anterior el dibujo, pero sabían que valores tiene cada lado de la figura.

Observaciones:

En este tipo de tarea, se puede dar cuenta que los estudiantes se guían por los ejemplos anteriores, de modo que no deducen lo que hacen, solo copian lo anterior y cambian sus valores respectivos, sin reconocer lo que hacen.

Pregunta 3:

Factoriza al máximo las siguientes expresiones:

- $ac + bc + ad + db$
- $ax - 2ay + 3a + bx - 2by + 3b$
- $ad - dx + ac - cx$

→ **Desarrollo del estudiante:**

➤ Momento de inicio:

El estudiante A₂ comienza leyendo la pregunta, paso seguido cada uno trabaja en la pregunta de forma individual

➤ Momento de Discusión:

A₁ al terminar el primer ejercicio de factorización, comienza ayudar a A₂ en la resolución de este. A₂ escucha atentamente a A₁ en la explicación de cómo se debe hacer el ejercicio, por lo que hace recordar a A₂ que se trata de una factorización por agrupación. En algún momento de la explicación que A₁ le da a A₂, llegan a la confusión de si al factorizar por agrupación, luego de hacer la segunda factorización entre los paréntesis va una suma o una multiplicación.

Desarrollo:

1) $ac + bc + ad + db$
 $(a+c)(b+d)$
 $a(c+d) + b(c+d)$
 $(a+b)(c+d)$

2) $ax - 2ay + 3a + bx - 2by + 3b$
 $(ax - 2ay + 3a)(bx - 2by + 3b)$
 $a(x - 2y + 3)b(x - 2y + 3)$
 $(a+b)(x - 2y + 3)$

3) $ad - dx + ac - cx$
 $(ad + ac)(d - x)$
 $a(d+c)(d-x)$
 $(a+c)(d-x)$

Figura: desarrollo del binomio A 1

➤ Momento de resultado:

Al finalizar ambos estudiantes los 3 ejercicios, se les pide la explicación de lo que hicieron, el desarrollo de ambos es correcto, A₁ da a conocer que solo tenían esa confusión de si entre los paréntesis iba una suma o multiplicación.

Observaciones:

Los estudiantes reconocen el tipo de factorización que involucran los ejercicios, pero surgen problemas al finalizar la factorización con una suma o una multiplicación.

Pregunta 4:

Factoriza las siguientes expresiones: $4a^4 + b^4$ y $16x^4 + 4$

- $a^4b^4(4 + b)$ y $4(4x^4 + 1)$
- $(2a^2 + b^2)(2a^2 - b^2)$ y $(4x^2 + 2)(4x^2 - 2)$
- $(2a^2 + b^2)^2$ y $(4x^2 + 2)^2$
- $(2a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2$ y $(4x^2 + 2)^2 - 16x^2$

➔ **Desarrollo del estudiante:**

➤ Momento de inicio:

A₁ comienza leyendo la pregunta en voz alta, seguido pregunta si ambos son distintos, refiriéndose a que si la “y” del enunciado no era parte de los términos. Contestando el investigador que tiene razón, la “y” es la separación de ambas expresiones, que no afecta en su factorización.

➤ Momento de discusión:

Luego de un tiempo, A₁ da a conocer a su compañero que finalizó, que solo puede factorizar uno de ambos términos, respondiendo A₂ que también solo factorizo uno.

- a) $a^4b^4(4+b)$ y $4(4x^4+1)$ ✓
 b) $(2a^2 + b^2)(2a^2 - b^2)$ y $(4x^2 + 2)(4x^2 - 2)$
 c) $(2a^2 + b^2)^2$ y $(4x^2 + 2)^2$ ✗
 d) $(2a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2$ y $(4x^2 + 2)^2 - 16x^2$ ✗

Desarrollo: $4a^4 + b^4 =$ (

$$16x^4 + 4 = 4(4x^4 + 1)$$

Figura: desarrollo del binomio A1

- a) $a^4b^4(4+b)$ y $4(4x^4+1)$
 b) $(2a^2 + b^2)(2a^2 - b^2)$ y $(4x^2 + 2)(4x^2 - 2)$
 c) $(2a^2 + b^2)^2$ y $(4x^2 + 2)^2$
 d) $(2a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2$ y $(4x^2 + 2)^2 - 16x^2$

Desarrollo:

$$4a^4 + b^4$$

$$4(a^4 + b^4)$$

$$16x^4 + 4$$

Figura: desarrollo del binomio A2

➤ Momento de resultado:

Para concluir el investigador pregunta a ambos si respondieron al azar la alternativa, A₁ responde que no, que lo sacó por la segunda expresión puesto que al factorizar, le da la una de las expresiones de la alternativa a), seguido A₂ responde que no pudo encontrar la alternativa, porque solo factorizo la primera expresión y no correspondía a ninguna de las alternativas.

Observaciones:

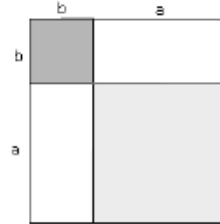
En esta tarea se puede evidenciar que el enunciado puede confundir al estudiante respecto al conector “y” con un término algebraico en las expresiones. Además ninguno de los estudiantes reconoció que se trataba de completar cuadrados y solo se dedicó a factorizar inmediatamente, marcando la alternativa que se asemeja más a lo que llegaron como respuesta.

Pregunta 5:

Se sabe que a y b son positivos y $a > b$. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es(son) verdadera(s)?

- I. El área del cuadrado de lado $(a + b)$ es igual al área achurada.
- II. $(a + b)(a - b)$ es igual a la diferencia de las áreas del cuadrado de lado a y el lado de b .
- III. $a(a + b) > a^2 + b^2$

- A) Sólo I B) Sólo I y II C) Sólo I y III
- D) Sólo II y III E) I, II y III



→ **Desarrollo del estudiante:**

➤ Momento de inicio:

El investigador les consulta a los estudiantes si saben a qué se refiere con área achurada, a lo que ellos contestan que es lo que está pintado, luego de eso comienzan a desarrollar de forma individual el ejercicio.

➤ Momento de discusión:

El estudiante A_1 se da cuenta inmediatamente que el primer ítem no es verdadero, puesto que a través del registro geométrico, el área de lado $(a+b)$ no corresponde al área achurada. En el segundo ítem, tanto A_1 como A_2 trabajan de forma algebraica, solo multiplicando ambos paréntesis, llegando a la diferencia de cuadrados. A_1 y A_2 responde el tercer ítem reemplazando valores y verificando si se cumple la condición.

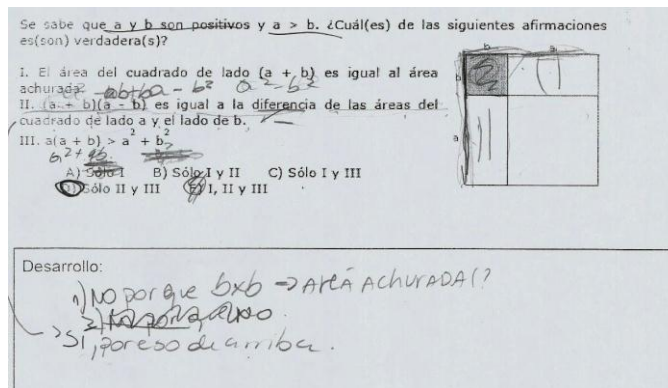


Figura: desarrollo del binomio A_1

➤ Momento de resolución:

Al finalizar, se les pregunta a los estudiantes si les pareció muy complicado la pregunta, por lo que responden que sí, que la geometría es muy difícil, y no les gusta. Ambos tuvieron dificultades para llegar a la solución correcta de la pregunta.

Observaciones:

Se evidencia la desmotivación de los estudiantes al abordar actividades en las que intervienen conocimientos geométricos. No identifican la relación del álgebra en la figura geométrica, solo trabajan en un registro algebraico, limitando el geométrico.

Pregunta 6:

Si $x = -3$, entonces $(x - 2)(2x^2 - 3) =$

➔ **Desarrollo del estudiante:**

➤ Momento de inicio:

En esta primera fase, el estudiante A_2 lee en voz alta la tarea 6, comprendiendo de manera inmediata la tarea ambos estudiantes.

➤ Momento de discusión:

A_1 comienza ayudar a A_2 en el desarrollo de la tarea, puesto que no concordaban con los resultados de cada uno en el desarrollo del ejercicio, A_1 se da cuenta que A_2 tiene algunos errores al reemplazar y problemas con signos.

➤ Momento de Resolución:

Al finalizar los estudiantes con la tarea, el investigador les pregunta de qué forma desarrollaron el ejercicio, respondiendo ambos estudiantes que solo tomaron el valor de “ x ” y lo reemplazan directamente en la expresión dada, llegando como resultado -75 .

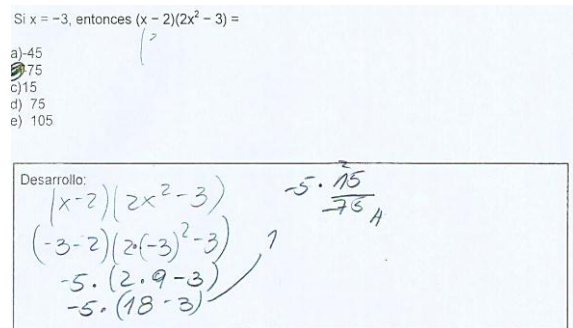


Figura: desarrollo del binomio A1

Observaciones:

Se puede determinar que la tarea 6 es una pregunta muy mecánica, ambos estudiantes toman el valor y reemplazan directamente, ninguno de ellos pensó en la opción de primero desarrollar la expresión para dejarla en operación de suma y resta para luego finalizar reemplazando el valor de x en una expresión más sencilla.

→ Primer binomio: B₁ y B₂

Pregunta 1:

¿Qué expresión es equivalente a $(m + n)^2 - 4mn$?

→ **Desarrollo del estudiante:**

➤ Momento de inicio:

Los estudiantes se ven enfrentados a esta tarea ministerial, comienzan a realizar cada uno de forma individual. El estudiante B₂ comienza a desarrollar el cuadrado de binomio, para luego restar términos semejantes. Mientras que el estudiante B₁ manifiesta que había pensado el ejercicio de forma numérica.

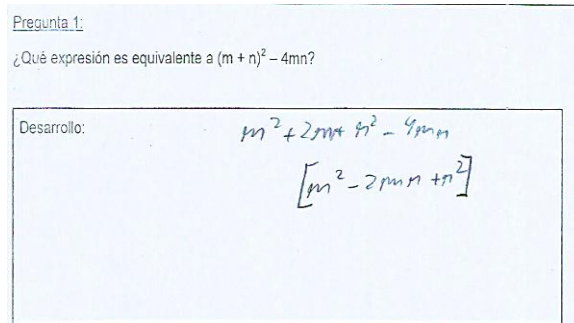


Figura: desarrollo del binomio B.2

➤ Momento de discusión:

El binomio B₁ manifiesta que había pensado desarrollar el ejercicio con números, pero luego el binomio B₂ le indica que deben desarrollar el cuadrado de binomio y restar el término $4mn$ y ahí encuentran la respuesta correcta, pero no identifican que deben factorizar la expresión que les queda.

➤ Momento de resultado:

El binomio B₁ al escuchar y ver el razonamiento empleado en la resolución del ejercicio, lo desarrolla de la misma manera y concluyen lo mismo.

Observaciones:

Se puede analizar que los estudiantes al tratar de buscar alternativas de desarrollo de manera mecánica, sin darse cuenta que la expresión dada se pueden factorizar.

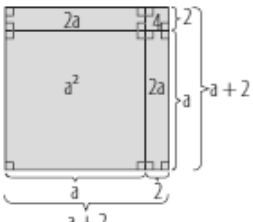
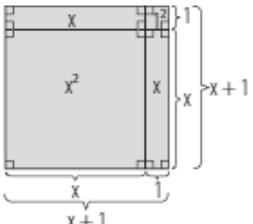
Pregunta 2:

Observe el siguiente ejemplo y complete:

Reúnanse en parejas, completen la tabla

Cuadrado de binomio

Ana está calculando el área de los siguientes cuadrados.

Lado	Área	Representación	Producto
$(a + 2)$	$(a + 2)^2$		$\begin{aligned}(a + 2)(a + 2) &= \\ &= a \cdot a + a \cdot 2 + 2 \cdot a + 2 \cdot 2 \\ &= a^2 + 2a + 2a + 4 \\ &= a^2 + 4a + 4\end{aligned}$
$(x + 1)$	$(x + 1)^2$		$\begin{aligned}(x + 1)(x + 1) &= \\ &= x \cdot x + x \cdot 1 + 1 \cdot x + 1 \cdot 1 \\ &= x^2 + x + x + 1^2 \\ &= x^2 + 2x + 1\end{aligned}$
$(3 + y)$	$(3 + y)^2$		

→ **Desarrollo del estudiante:**

➤ Momento de inicio:

Los estudiantes leen la pregunta de manera independiente y la resuelven de forma individual.

➤ Momento de discusión:

El estudiante B₂ sugiere que la primera fila del cuadrado es de lado “ $a + 2$ ”, luego ubica los valores correspondientes.

Para poder dibujar el cuadrado que se requiere, el estudiante B₁ señala que se debe dibujar de la misma manera que el ejemplo que aparece en el ejercicio dos, pero con los valores que solicitan. Luego el investigador hace algunas consultas, a la que ellos responden satisfactoriamente. El estudiante B₁ afirma que se guía respecto a lo que ha hecho anteriormente, en cambio su compañero B₂ nos dice que él no se guía por lo hecho anteriormente, ya que se puede equivocar y eso llevaría a que todo estuviera malo.

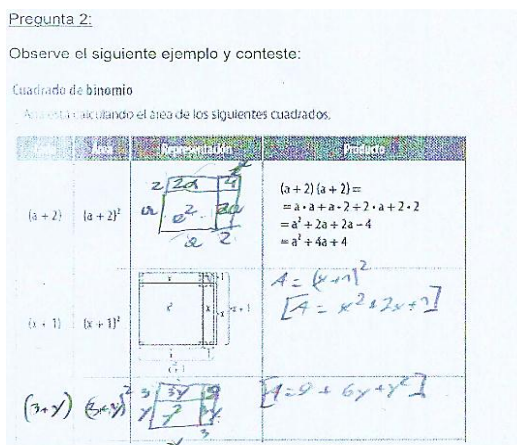


Figura: desarrollo del binomio B.2

➤ Momento de resultado:

Para concluir el investigador les pregunta a ambos estudiantes, ¿por dónde comenzaron a realizar los ejercicios, por lo algebraico o geométrico? a lo que ambos respondieron que comenzaron con lo algebraico, ya que lo geométrico se les hacía más fácil al tener el producto de los lados listo. La segunda pregunta clave que hizo el investigador fue ¿cómo representan los valores en la representación geométrica?, el estudiante B₂ es quien comienza indicando los valores que obtienen los cuadrados y rectángulos que se forman dentro del cuadrado grande.

Observaciones:

Esta tarea extraída del texto del estudiante 1° medio, Matemática, fue modificada, ya que originalmente sólo nos pedían realizar el cálculo algebraico. Al pedir que los estudiantes dibujen el cuadrado y solo tienen los datos del desarrollo algebraico, podemos inferir que en la mayor parte del tiempo se fijan solo en cómo está desarrollado el ejemplo y cuando dan valores del lado del cuadrado mayor y su área respectiva, evidenciamos que observan los ejemplos dados y se guían de ellos para responder.

Pregunta 3:

Factoriza al máximo las siguientes expresiones:

- $ac + bc + ad + db$
- $ax - 2ay + 3a + bx - 2by + 3b$
- $ad - dx + ac - cx$

→ **Desarrollo del estudiante:**

➤ Momento de inicio:

En esta pregunta, el estudiante B₂ es quien la lee en voz alta y B₁ es quien expresó que no recuerda cómo se factoriza, entonces se dirige a los investigadores, los cuales manifiestan que no pueden intervenir y el estudiante B₂ le sugiere que él lo puede ayudar.

➤ Momento de Discusión:

Luego que el estudiante B₂ le ayudará a su compañero B₁ a desarrollar esta pregunta, ambos dudan en que si existe una multiplicación o una suma entre los paréntesis.

Pregunta 3:

Factoriza al máximo las siguientes expresiones:

- A. $ac + bc + ad + bd$
- B. $(ax - 2ay + 3a) + bx - 2by + 3b$
- C. $ad - dx + ac - cx$

Desarrollo:

$$c(a+b) + d(a+b) \quad c \cdot d (a+b)^2$$
$$5a(x-y) + 5b(x-y) \quad [(c+d)(a+b)]$$
$$a(x-2y+3) \quad b(x-2y+3) \quad d(a-x) + c(a-x)$$
$$\downarrow \quad \downarrow$$
$$(a+b)(x-2y+3) \quad (d+c)(a-x)$$

Figura: Desarrollo del binomio B.2

➤ Momento de resultado:

Ambos estudiantes entregan sus respuesta de forma correcta, al darse cuenta que entre los paréntesis existe una multiplicación y no una suma como pensaban en un principio. Luego se les pregunta si lo encontraron difícil, el estudiante B₁ manifiesta que sí, ya que no recordaba cómo realizar la factorización y el estudiante B₂ nos señala que no recordaba que iba entre los paréntesis y el nombre de este tipo de factorización.

Observaciones:

Los estudiantes realizan de forma mecánica esta pregunta, se cuestionan el nombre del tipo de factorización.

Pregunta 4:

Factoriza las siguientes expresiones:

- a) $4a^4 + b^4$
- b) $16x^4 + 4$

➔ Desarrollo del estudiante:

➤ Momento de inicio:

El estudiante B₁ manifiesta que esta pregunta puede desarrollarse como la

pregunta 3, pero el estudiante B₂ le dice que no puede ser así, ya que aquí piden factorizar estas expresiones y no tienen nada en común y en la pregunta 3 si lo tenía.

Ambos estudiantes tratan de desarrollar el ejercicio de forma individual.

➤ Momento de discusión:

El estudiante B₂ le explica a su compañero B₁ que este ejercicio debe tratarse de un resultado de una expresión y eso es lo que deben buscar. Aun así el estudiante B₁ insiste en que se parece a la pregunta 3 y es así como se guiará para resolver el ejercicio.

➤ Momento de resultado:

El estudiante B₁ explica que de acuerdo a lo que se ve y lo que ha hecho en los ejercicios anteriores factoriza por factor común, en cuanto al estudiante B₂ nos manifiesta que no logro llegar al resultado porque no supo cómo factorizar si no tenían nada en común y que trato de resolverlo por medio de la suma por su diferencia, colocando un signo menos delante del primer paréntesis, pero sabía que al comprobarlo no daba lo que estaban pidiendo. Ambos estudiantes nos expresan que no pueden resolver el ejercicio.

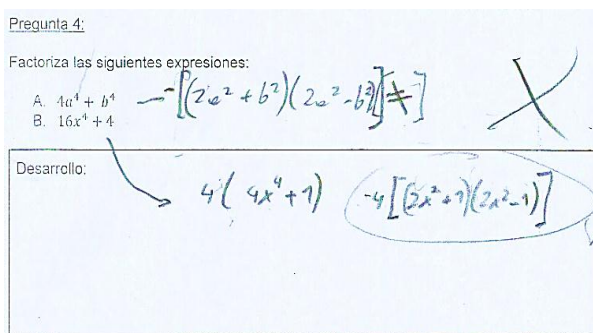


Figura: Resolución del estudiante B.2

Observaciones:

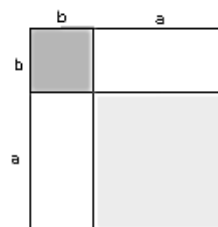
Existe una clara forma de resolución de ejercicios de factorización, se está

acostumbrado a que cuando se indica “Factorizar” se debe dar una larga expresión algebraica y esta debe ser factorizada de acuerdo a los distintos tipos de factorización, pero no existe un pensamiento sobre los productos notables como tipos de factorización, es por esto que ambos estudiantes fallan en esta pregunta, ya que ninguno pudo visualizar el cuadrado de binomio que existía.

Pregunta 5:

Se sabe que a y b son positivos y $a > b$. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es(son) verdadera(s)?

- I. El área del cuadrado de lado $(a + b)$ es igual al área achurada.
- II. $(a + b)(a - b)$ es igual a la diferencia de las áreas del cuadrado de lado a y el lado de b .
- III. $a(a + b) > a^2 + b^2$



- A) Sólo I B) Sólo I y II C) Sólo I y III
- D) Sólo II y III E) I, II y III

→ Desarrollo del estudiante:

➤ Momento de inicio:

El investigador les consulta a los estudiantes si saben a qué se refiere con área achurada, a lo que ellos contestan que es lo que está pintado, luego de eso comienzan a desarrollar de forma individual el ejercicio.

➤ Momento de discusión:

El estudiante B_1 comienza a leer el primer enunciado y afirma que esta incorrecto, ya que no es representativo lo que dice y su compañero afirma su respuesta, luego en el segundo enunciado el estudiante B_1 no sabe muy bien como comenzar y su compañero le indica cómo desarrollarlo, ambos llegan al mismo resultado, que el enunciado número II está en lo correcto y por

último el estudiante B₁ afirma que el enunciado III se encuentra en lo correcto, el estudiante B₂ lo revisa y le dice que tiene razón al respecto.

Pregunta 5:
Se sabe que a y b son positivos y $a > b$. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es(son) verdadera(s)?

I. El área del cuadrado de lado $(a + b)$ es igual al área achurada.
 II. $(a + b)(a - b)$ es igual a la diferencia de las áreas del cuadrado de lado a y el lado de b.
 III. $a(a + b) > a^2 + b^2$

A) Sólo I B) Sólo I y II C) Sólo I y III
 D) Sólo II y III E) I, II y III

Desarrollo:

I) NO, Porque el área del cuadrado $(a+b)$ es: ab
 y el otro es b^2 .

II) $(a+b)(a-b)$ | Sí, Porque a^2 representa el cuadrado de a y b^2 representa b (achurada).
 $a^2 - ab + ab - b^2$
 Sí, es mayor.

III) $a^2 + ab > a^2 + b^2$

Figura: Resolución del estudiante B2

➤ Momento de resolución:

Para concluir los estudiantes explican el por qué afirman que el enunciado II y III están en lo correcto.

Pregunta 5:
Se sabe que a y b son positivos y $a > b$. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es(son) verdadera(s)?

I. El área del cuadrado de lado $(a + b)$ es igual al área achurada.
 II. $(a + b)(a - b)$ es igual a la diferencia de las áreas del cuadrado de lado a y el lado de b.
 III. $a(a + b) > a^2 + b^2$

A) Sólo I B) Sólo I y II C) Sólo I y III
 D) Sólo II y III E) I, II y III

Desarrollo:

I) NO, porque el área achurada es b^2 y no $b(a+b)$ → total

II) Sí, Suma por diferencia, $\rightarrow (a+b)(a-b) \rightarrow a^2 - b^2$
 área D a - área D b

III) Sí, porque $(a+b)$ es $a^2 + b^2$
 $a^2 + ab > a^2 + b^2$
 $ab > b^2$
 $a > b$

Figura: Resolución del estudiante B2

Observaciones:

Ambos estudiantes desarrollan el ejercicio tanto geoméricamente como algebraicamente y reconocen el concepto de áreas tanto de cuadrado como de

rectángulo, pero aun así no reconocen una cercanía entre conceptos, es decir no asocian el cuadrado de binomio con el concepto de áreas.

Pregunta 6:

Si $x = -3$, entonces $(x - 2)(2x^2 - 3) =$

→ **Desarrollo del estudiante:**

➤ Momento de inicio:

El estudiante B_2 es quien lee la pregunta, luego le consulta a su compañero si la desarrollan de forma individual o la hacen juntos, a lo que responde el compañero B_1 que lo hagan de forma individual.

➤ Momento de discusión:

El estudiante B_2 es quien termina primero, el estudiante B_1 manifiesta que se equivocó dos veces al desarrollarlo, pero luego llegó al mismo resultado que su compañero.

El investigador les pregunta si existe otra forma de desarrollarlo a lo que ellos manifiestan que sí, el estudiante B_2 nos explica que la otra forma sería desarrollando lo algebraico y luego reemplazar el valor de “ x ” y el estudiante B_1 manifiesta que no lo hubiera hecho de otra forma, solo se hubiera saltado pasos.

➤ Momento de Resolución:

Ambos estudiantes llegan a la misma respuesta, reemplazando el valor de X en el ejercicio. Nos manifiestan que lo más complejo sería no identificar de forma correcta que tener $(-3)^2$ no es igual a -9 .

Pregunta 6:
Si $x = -3$, entonces $(x - 2)(2x^2 - 3) =$

Desarrollo:

Figura: Resolución del estudiante B2

Observaciones:

Ambos estudiantes llegan a la respuesta correcta, el estudiante B₁ sólo se equivocó por no respetar signos y potencias. Podemos inferir que esta pregunta se desarrolla de manera mecánica, solo se reemplaza el valor que le asignan a “x” y el estudiante no observa si se puede desarrollar de otra forma.

A continuación presentamos dos tablas, donde se especifica el tipo de tarea, el Espacio de Trabajo Matemático desarrollado y la intervención de los estudiantes de ambos binomios respecto al cuadro anterior, los cuales los llamaremos B₁ y B₂.

Tabla Binomio A₁, A₂

Preguntas	Tipo de tarea	ETM desarrollado	Intervención del estudiante
P ₁	T ₅ y T ₁	Se pudo observar que los estudiantes activan inmediatamente la génesis semiótica al visualizar el	A ₁ : ya yo creo que lo hice Investigador: ¿cómo lo hizo?

		<p>problema y reconocer que se trata de un cuadrado de binomio, dando paso a la activación de la génesis instrumental al usar artefactos simbólicos en el desarrollo de la expresión.</p>	<p>A₁: bueno me están diciendo que aquí tengo $(m + n)^2 - 4mn$, esto $(m + n)^2$ lo puedo factorizar como, bueno lo multiplico, el primero al cuadrado, más el doble del primero por el segundo, más el n al cuadrado menos $4mn$ que era el que sobraba, después junte el $2mn$ con el $4mn$, los junte y los factorice, y eso me daba $2mn$ que son los cuando el profe dice que saque el más chiquitito, y me quedaba $(1 - 2)$ y eso es igual -1 y al otro lado me queda , el $2mn$ lo multiplique por -1 y me dio y eso si yo lo ordeno me da y si lo vuelvo a ordenar $(m + n)^2$ ¿está bien ?</p>
P ₂	T ₂ , T ₆ y T ₇	<p>Los estudiantes predominan en el dominio algebraico (ETMa) solo activando en forma lineal, la génesis semiótica e instrumental, al</p>	<p>A₁: bueno yo lo que hice, lo copie el cuadrado y empecé a ver las cositas que hay aquí, dibújalo igual con las líneas y todo eso,</p>

		<p>momento de cambiar de registro, de algebraico a geométrico (ETMg), los estudiantes se ven en conflicto, de modo que la única solución que encuentran es copiar y repetir el proceso de crear el cuadrado de binomio geoméricamente.</p>	<p>entonces el pedazo más chiquitito vale aquí en este caso 1 por eso.</p> <p>Investigador: ¿cómo llegaron a la respuesta?</p> <p>A₁ y A₂: viendo el ejemplo de arriba</p> <p>Investigador: ¿pudieron sacar la parte algebraica sola?</p> <p>A₁: sípo</p>
P ₃	T ₃	<p>El estudiante A₁ en su resolución de la pregunta, activa inmediatamente la génesis semiótica y trabaja en un registro algebraico, la génesis discursiva se ve en conflicto, luego que el estudiante al aplicar factorización, no recordará si tiene sentido con la multiplicación o la suma.</p>	<p>A₁: y aquí cuando uno llegaba acá en esta etapa, uno debía juntar los de afuera y los de adentro, entonces $(a + b)$ y aquí no me acuerdo si iba un signo más afuera y otro paréntesis y se junta $(a + b)$, eso es el ejercicio. Ya haz el otro.</p> <p>A₂: ok</p> <p>A₁: sale más conveniente con el "a", porque tiene más amiguitos, y el "b" también tiene más amiguitos</p>

			<p>A₂: a verdad, ¿pero se pone “+” o se poner “por”?</p> <p>A₁: se pone el signo “por”, y ahora hay que factorizar, el a en el a cabe una vez, y el a en el x no tiene amiguitos, entonces seria x, menos.</p>
P ₄	T ₄	<p>La génesis semiótica falla completamente en esta pregunta, puesto que los estudiantes no visualizan el problema, no encuentran la manera de resolver el ejercicio para llegar a lo que se les pide, lo que provoca que los estudiantes se fijen en qué alternativa se asemeja a lo que han logrado hacer.</p>	<p>A₁: yo ya termine, pude hacer uno nomas, no se hacer el otro.</p> <p>Investigador: ¿lo hiciste al azar?</p> <p>A₁: no, lo saque por el segundo ejercicio, que me da el resultado que me da el primero</p> <p>Investigador: ¿cómo lo hiciste?</p> <p>A₁: lo factorice por 4, me daba 4 factor de y seria, eso sale allí</p> <p>Investigador: ¿lo hiciste por sacar 1 y al descarte?</p> <p>A₁: si</p>
P ₅	T ₆ ,	Ambos estudiantes trabajan	A ₁ : el área del cuadrado

	<p>T₉ y T₁₁</p>	<p>en un registro algebraico, priorizando así un ETMa, dejando muy débil el ETMg, no relacionan lo algebraico con lo geométrico, solo realizan cálculos, activando levemente la génesis discursiva al utilizar concepto de áreas.</p>	<p>$a + b$, yo creo que es esa parte, es igual al área achurada, es igual a esto, no po, no creo, si b por b es igual a eso</p> <p>Investigador: ponga en el desarrollo lo que acaba de decir.</p> <p>A₁: ya después sería $(a + b)(a - b)$ es igual a la diferencia de las áreas del cuadrado del lado a y del lado b, ¿cómo eso?, ósea la resta de las áreas del cuadrado del lado a, y lado b.</p> <p>A₂: la dos no porque no.</p> <p>Investigador: ¿por qué no? ¿que acabas de hacer?</p> <p>A₁: ósea los multiplique, me da, es igual ooooh, verdad, ahora si me di cuenta, entiendo. sería que es verdad, porque al multiplicar estos términos me da y eso es igual a la diferencia de las áreas del cuadrado del lado a y lado</p>
--	---	---	---

			<i>b.</i>
P ₆	T ₁₀	El estudiante trabaja en un registro algebraico puro, visualiza el problema de forma inmediata a través de la génesis semiótica, reemplazando directamente el valor dado, pasando por la génesis instrumental al usar artefactos simbólicos, llegando de manera mecánica a resultado final.	Investigador: ¿qué hicieron? A ₁ : tenemos el ejercicio y reemplazamos la x $(-3 - 2) \cdot (2 \cdot (-3)^2 - 3)$, sería $-5 \cdot (18 - 3) = -75$. Investigador: ¿cómo se llegó a eso? ¿llegaron y reemplazaron? A ₁ y A ₂ : sí.

Tabla Binomio B₁, B₂.

Preguntas	Tipo de tarea	ETM desarrollado	Intervención del estudiante
P ₁	T ₅ y T ₁	Se observa que los estudiantes visualizan el cuadrado de binomio y lo desarrollan, activando la génesis semiótica, como no existen alternativas de cómo expresar el resultado factorizado al máximo, los estudiantes lo dejan expresado como un	B ₂ : Yo creo que hay que desarrollar el cuadrado de binomio. B ₁ : Si. B ₂ : Y restarle el $4mn$ y quedaría $m^2 + 2mn + n^2 = m^2 - 2mn + n^2$ B ₁ : Así mismo lo pensé, pero con números, pero mejor lo

		trinomio y no como un cuadrado de binomio.	hago con letras.
P ₂	T ₂ , T ₆ y T ₇	<p>Los estudiantes visualizan los lados de cada cuadrado y rectángulo que compone la figura, es así como se activa la génesis semiótica. El estudiante A 2.2 define los lados de cada figura geométrica involucrada, artefacto simbólico (algoritmo), para luego desarrollar el área de cada una y así obtener el área del cuadrado completo. Aquí se ve que existe la presencia de las tres génesis, sin embargo, se privilegia la génesis instrumental, utilizando los lados para calcular el área de cada figura.</p>	<p>B₂: La primera fila era con cuadrado, de lado “$a + 2$”, es un cuadrado de binomio y lo reconozco.</p> <p>B₁: Es lo mismo que se hace abajo, pero con los datos de arriba.</p> <p>Investigador: Entonces tu sabes, ¿este cuál sería?</p> <p>B₁: “a”, el lado.</p> <p>Investigador: y ¿el área que representa?</p> <p>B₂: el área representa la suma de las dos longitudes al cuadrado.</p> <p>B₁: ¿La suma o la multiplicación?, la multiplicación es este por este.</p> <p>B₂: La suma de “$a + 2$” al cuadrado.</p> <p>B₁: “$a + 2$” por “$a + 2$” es “$a + 2$ al cuadrado”.</p>

P ₃	T ₃	<p>Predomina el dominio algebraico (ETMa), activando la génesis semiótica, el estudiante A2.2 explica a su compañero el modo en que se debe realizar la factorización, la génesis instrumental se ve activada mediante la utilización de artefacto simbólico.</p>	<p>B₁: Aquí le pongo “a por b, no más y aquí x menos $2y$ y 3” y el otro sería “$d + c$ y $a - x$” y ¿va con suma o resta entre los paréntesis?</p> <p>B₂: Va una multiplicación, porque al multiplicar cada factor con el otro factor del paréntesis nos da lo que teníamos.</p> <p>Investigador: ¿Qué pueden concluir chiquillos?</p> <p>B₁: Que estaba peluo, estaba difícil, esto no lo veía hace mucho tiempo.</p> <p>Investigador: ¿te costó identificarlo? (dirigiéndose al binomio B₂)</p> <p>B₂: No.</p> <p>Investigador: Recuerdas ¿cómo se llamaba este tipo de factorización?</p> <p>B₂: Los nombres no lo recuerdo, trato de no memorizar nada de nombres en matemática, eso lo hago en otros ramos como biología</p>
----------------	----------------	---	---

			<p>por ejemplo.</p> <p>Investigador: ¿Entonces es algo más mecánico lo que haces?</p> <p>B₂: Claro.</p>
P ₄	T ₄	<p>La génesis semiótica está ausente en esta pregunta, ya que los estudiantes no logran visualizar cómo resolver la pregunta, lo que induce a que revisen los ejercicios anteriores y traten de ver alguna semejanza y los lleva a resolver el ejercicio de forma errónea. Está ausente el ETMg, ya que los estudiantes no logran trabajar en ese espacio.</p>	<p>B₁: Yo no sé mucho de esto, pero me guie por el ejercicio de antes que era factorizar y ver como se hizo el ejercicio y por lo que comentamos con mi compañero, es el resultado de algo. Entonces si yo tuviera esto (señalando su desarrollo) el resultado sería esto (señalando lo que estaban pidiendo factorizar).</p> <p>B₂: Yo acá solo cuentié , en el primero puse suma por su diferencia , pero sé que está mal porque acá me quedaría menos entre los dos términos y acá hay un “+” y no sé si tendría que colocar un menos afuera para que resultara o no y en el otro ejercicio saque algo parecido, solo que lo factorice por 4 porque ambos números presentes son</p>

			<p>múltiplos de 4 y luego factorice por suma por su diferencia con el -4 adelante, por lo mismo dicho anteriormente porque en la suma por su diferencia da negativo el signo de al medio y aquí está el signo positivo. E igual es complicado que piden factorizar dos términos si factorizar significa simplificar y por eso a mí me quedo la media embarra.</p>
P ₅	T ₆ , T ₉ y T ₁₁	<p>Se ve activada la génesis semiótica, ya que los estudiantes trabajan en el registro de visualización de los enunciados. Se activa levemente la génesis discursiva al recurrir al concepto de área.</p>	<p>B₁: Porque el cuadrado "$a + b$" y el cuadrado "$a - b$" es lo mismo, ¿cierto? porque daría la diferencia del cuadrado de adentro con el de afuera y ahí se completaría, o ¿nada que ver?</p> <p>B₂: Mira, resuelve eso que está ahí (se refiere a la suma por su diferencia).</p> <p>B₁: Ya.</p> <p>B₂: Te quedo "a elevado al cuadrado y b elevado al cuadrado", ¿qué es eso?</p> <p>B₁: La diferencia del</p>

			<p>cuadrado de lado “a” y de lado “b”</p> <p>B₂: Claro, la diferencia de este cuadrado con este otro cuadrado, es como lo que hicimos al principio.</p> <p>B₁: La tercera afirmación es verdadera, porque es mayor eso que esto otro.</p> <p>B₂: Haber “$a + b$” es el de acá y está multiplicando con esta a entonces nos daría el área “a elevado al cuadrado más a por b, entonces sería todo esto” y el otro sería la suma de las áreas sombreadas.</p> <p>B₁: Ah sí, tienes razón.</p>
P ₆	T ₁₀	<p>Destaca el dominio algebraico, se visualiza el problema, esto hace que se activa la génesis semiótica, cuando se debe reemplazar el valor de “x”, se activa la génesis instrumental con los artefactos simbólicos, resolviendo el ejercicio de manera mecánica.</p>	<p>B₂: Reemplace el número -3 en el lugar de la x y lo desarrolle. Puse un paréntesis para resolver la potencia y luego la multiplicación y así no confundirme.</p> <p>Investigador: ¿Esa es la única forma de la cual lo harías? o ¿existe otra forma?</p>

			<p>B₂: Si</p> <p>B₁: Yo me equivoque la primera vez, la segunda también pero la tercera me salió. Me pasa por ser tan atarantado y saltarme los pasos. Reemplacé el -3 en los lugares donde está la "x". Mi primer error fue que puse el resultado de "$-32 = -9$", pero luego me di cuenta que el signo negativo se está multiplicando dos veces así que nos da como resultado 9. Luego multiplicamos los números que nos queda y nos da como resultado -75.</p>
--	--	--	---

3.3.4 Fase 4: Elaboración de una propuesta a partir de los resultados obtenidos en la fase 3.

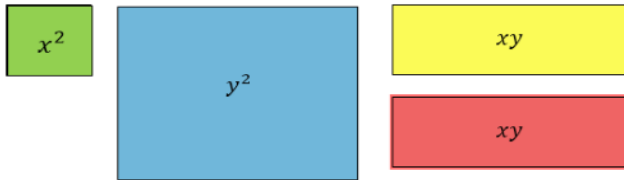
A partir de los resultados de la aplicación del instrumento 1, se elabora la siguiente propuesta de enseñanza cuyo objetivo es abordar el estudio de los productos notables de manera algebraica y geométrica. Esta propuesta consta de dos momentos:

- momento 1: activa los conocimientos previos, trabajando en el eje de álgebra y geometría, para movilizar al estudiante entre un ETMa y ETMg.
- momento 2: consta de tres tareas diseñadas para que exista una circulación entre la génesis semiótica, génesis instrumental y génesis discursiva, y así lograr que el estudiante logre un aprendizaje significativo.

Momento 1
<p>P1:</p> <p>I. Dados un segmento a, un segmento b, con $a > b$, representa geoméricamente las siguiente expresiones:</p> <p>a) a^2</p> <p>b) b^2</p> <p>c) ab</p>

P2:

II. Observa las siguientes imágenes, luego contesta:



- ¿Qué representa lo escrito dentro de cada figura?
- ¿Cuáles son los respectivos lados de cada figura?
- Organiza estas figuras para formar un cuadrado. ¿Cuál es su área total?
- ¿Cuánto mide el lado del cuadrado formado por las figuras?
- Al calcular algebraicamente $(x+y)^2$ ¿Qué se obtiene?

P3:

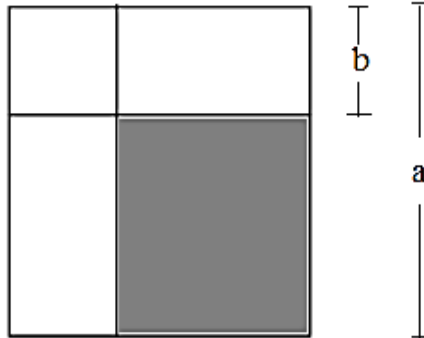
III. Completa la siguiente tabla según lo que se pida.

Lado	Área	Desarrollo del área	Representación geométrica del desarrollo del área
$(a+2)$			
		$x^2 + 2x + 1$	
	$(3+y)^2$		
$(2x+7)$			

Momento 2:

P1:

- I. Según la siguiente figura, responde



- ¿Cuál es el área del cuadrado de lado a ?
- ¿Cuál es el área de la parte achurada de la figura?
- ¿Cuál es el área de cada una de las figuras no achuradas?
- Si al área del cuadrado de lado a se le resta las áreas de las partes no achuradas, ¿Qué se obtiene?
- ¿A qué producto notable se relaciona lo desarrollado?

P2:

- II. Dados los trazos de medida, con $m > n$

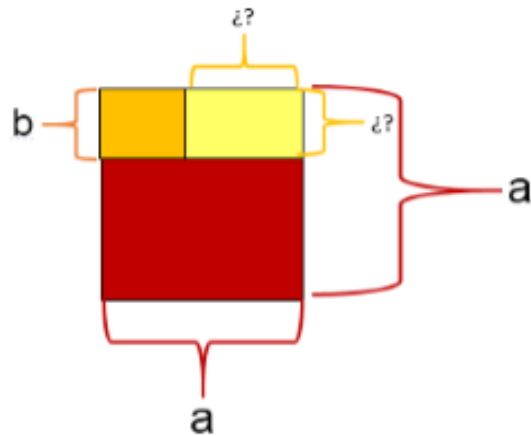


- Construye un cuadrado de lado $(m + n)$ y calcula su área.
- El **desarrollo** del cálculo del área, ¿Cómo lo representarías en el mismo cuadrado formado anteriormente?
- Si al área del cuadrado de lado $(m + n)$ se le resta $4mn$, ¿Qué expresión factorizada se obtiene?
- Ubica la expresión obtenida en el cuadrado que dibujaste anteriormente.
- ¿Qué representan los $4mn$?

P3:

III. Responde:

Observa la siguiente imagen y contesta:



- ¿Cuáles son los valores que obtienen los lados del rectángulo de color amarillo?
- ¿cómo lo encontraste?

Ahora, si tenemos el rectángulo rojo de lado "a" y "a - b" del ejercicio anterior y queremos obtener un rectángulo, cuyo largo es "a + b":

- ¿Qué figura usarías para obtener dicho rectángulo, el cuadrado anaranjado de lado "b" o el rectángulo amarillo para encontrar lo pedido?
- ¿Cuál es el área de la figura encontrada? y con respecto al resultado obtenido, ¿A qué producto notable se relaciona lo desarrollado?

3.3.5 Fase 5: Descripción de la implementación de la propuesta

La propuesta fue implementada con estudiantes de segundo año de enseñanza media de la Región de Valparaíso y la Región Metropolitana, proceden de colegios municipales. El cuestionario fue grabado, tanto visual como auditivo, en los lugares acordados con cada binomio.

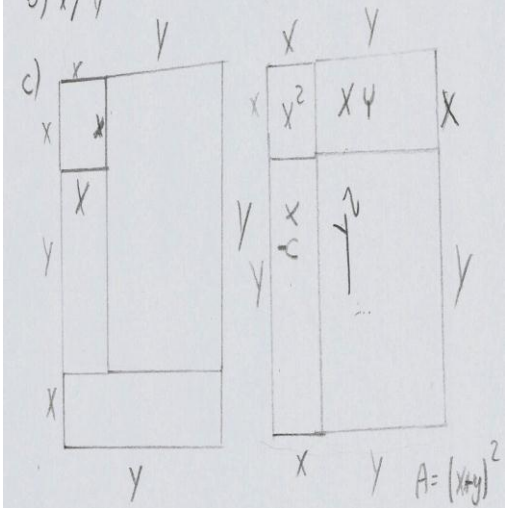
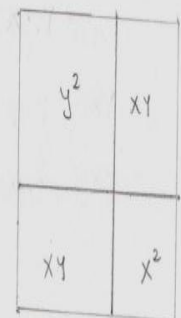
Momento 1: Análisis desde la Teoría de Espacio de Trabajo Matemático

En la primera pregunta los estudiantes comprenden inmediatamente lo solicitado visualizando así la expresión que representa la situación. Trabajan como constructor, activando la génesis semiótica, ya que esta representación lleva inmediatamente a la génesis discursiva, al utilizar el concepto de área y por último se utiliza como artefacto la regla, para la construcción de las figuras geométricas, activando de esta manera la génesis instrumental.

Evidencia Pregunta 1	
Binomio 1	Binomio 2

En la segunda pregunta los estudiantes comienzan indicando que lo que se encuentra dentro de cada cuadrado y rectángulo son las áreas, identificando los valores de los lados de cada figura, esto hace que se active la génesis semiótica y la génesis discursiva, luego de eso utilizan la regla para

representar el cuadrado con las figuras presentes y así poder identificar su área total, aquí los estudiantes trabajan como constructor, con esto se activa la génesis instrumental y sigue presente la génesis discursiva, ya que los estudiantes mantienen el concepto de área presente y logran visualizarlo y relacionarlo, se aprecia una circulación entre el ETMg y ETMa.

Evidencia Pregunta 2	
Binomio 1	Binomio 2
<p>a) Área</p> <p>b) x/y</p> <p>c) </p> <p>d) $x+y$</p> <p>e) $x^2 + 2(xy) + y^2 = \text{Área}$</p>	<p>a) Lo escrito dentro de la figura representa el área de cada figura —</p> <p>b) Los respectivos lados de cada figura son:</p> <p>(1) $x \cdot x = x^2$ (2) $y \cdot y = y^2$ (3y4) $x \cdot y = x \cdot y$</p> <p>c) </p> <p>d) $(x+y)$</p> <p>e) $(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$ Cuadrado de binomio</p>

En la siguiente pregunta los estudiantes no representan mayor dificultad en visualizar lo que se les pide realizar, trabajan dentro de un registro algebraico en el ETMa en las primeras tres columnas, activando la génesis instrumental al utilizar artefactos simbólicos en el desarrollo de este, como referencial teórico, utilizan el concepto de áreas para desarrollar las dos últimas columnas, activando la génesis discursiva y así logrando el tránsito en la ETMg, ubicando

cada medida correspondiente al cuadrado formado por las sumas de áreas desarrollada anteriormente.

Evidencia Pregunta 3

Binomio 1

Lado	Área	Desarrollo del área	Representación geométrica del desarrollo del área
$(a+2)$	$(a+2)^2$	$a^2 + 4a + 4$	
$(x+1)$	$(x+1)^2$	$x^2 + 2x + 1$	
$(3+y)$	$(3+y)^2$	$9 + 6y + y^2$	
$(2x+7)$	$(2x+7)^2$	$4x^2 + 28x + 49$	

Binomio 2

Lado	Área	Desarrollo del área	Representación geométrica del desarrollo del área
$(a+2)$	$(a+2)^2$	a^2+4+4a	
$(x+1)$	$(x+1)^2$	x^2+2x+1	
$(3+y)$	$(3+y)^2$	y^2+6y+9	
$(2x+7)$	$(2x+7)^2$	$4x^2+28x+49$	

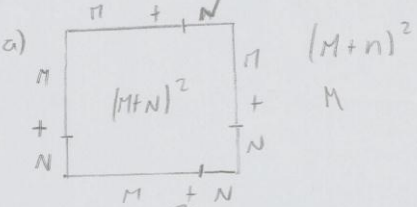
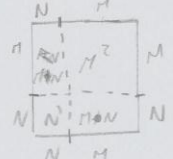
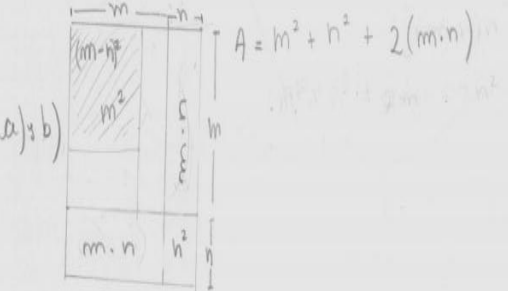
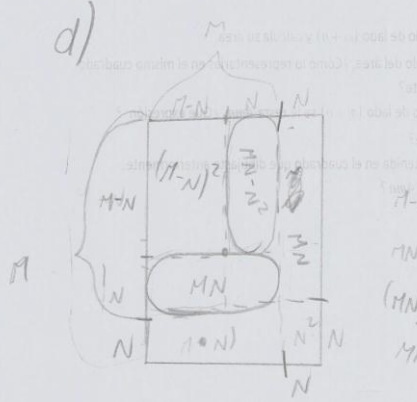
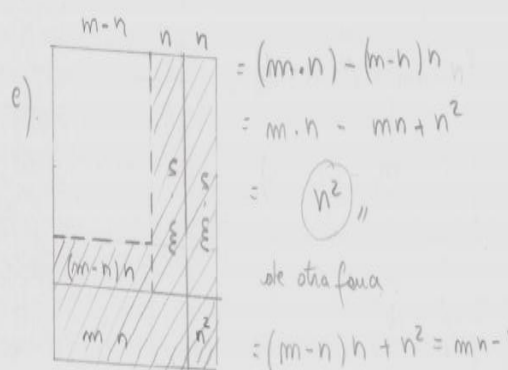
Momento 2: Análisis desde la Teoría del Espacio de Trabajo Matemático

Con la primera pregunta los estudiantes activan la génesis semiótica y discursiva a la vez, ya que identifican el cuadrado de lado “a” para luego representar su área. Dentro de esta pregunta existe una interrogante en la que los estudiantes deben restar áreas e identificar a qué producto notable se parece, es ahí donde los estudiantes visualizan de forma no icónica y trabaja como constructor con la ayuda de un artefacto material que es la regla para construir lo pedido, así se ve que los estudiantes utilizan las tres génesis para poder resolver esta interrogante.

Evidencia Pregunta 1	
Binomio 1	Binomio 2
<p>a) $a^2 \rightarrow$ Cuadrado total</p> <p>b) $(a-b)^2$</p> <p>c) \square pequeño = b^2 $\square = ab - b^2$</p> <p>d) $(a^2 - b^2) - (ab - b^2) \rightarrow (ab - b^2)$</p> <p>$(a+b)(a-b) - ab + b^2 \rightarrow ab + b^2$</p> <p>$a^2 + b^2 - 2ab - a^2 - 2ab + b^2$</p> <p>e) $(a-b)^2 \rightarrow \square$ de binomio con -</p>	<p>a) a^2</p> <p>b) $(a-b)^2$</p> <p>c) (1) b^2 (2) $(a-b) \cdot b$ (3) $(a-b) \cdot b$</p> <p>d) $a^2 - b^2 - 2[(a-b) \cdot b]$ $a^2 - b^2 - 2(ab - b^2)$ $a^2 - b^2 - 2ab + 2b^2$ $a^2 + b^2 - 2ab$</p> <p>e) al cuadrado de binomio</p>




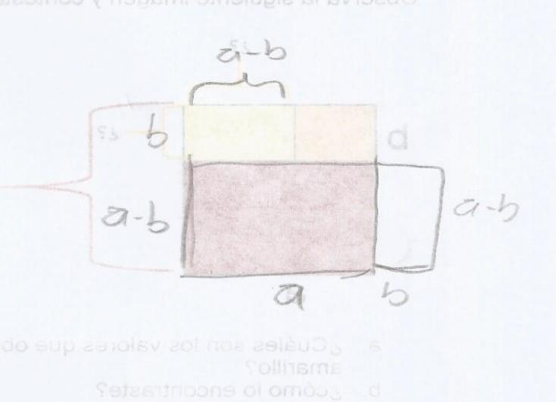
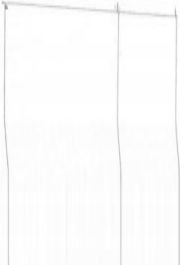
En la siguiente pregunta, los estudiantes trabajan de una manera no icónica puesto que deben construir la figura a partir del enunciado, de modo que para lograr avanzar en lo que se les pide, trabajan como constructor con la ayuda de un artefacto material clásico como por ejemplo la regla que se les otorgó para que la utilizaran si era necesario, activando así de manera simultánea, la génesis semiótica y la génesis instrumental, en las preguntas a) y b) los estudiantes usan como referencial teórico, el concepto y definición de área de cuadrados y rectángulos. Se ve potenciado el ETM en esta pregunta, de modo que los estudiantes transitan entre el ETMa y ETMg, usando de ambos dominios referencias para completar la tarea de forma correcta y no solo quedarse varado en un dominio.

Evidencia Pregunta 2

Binomio 1	Binomio 2
<p>a)  $(M+N)^2$</p> <p>b) $M^2 + 2MN + N^2$ </p> <p>c) $M^2 + 2MN + N^2 - 4MN = M^2 - 2MN + N^2 = (M-N)^2$</p>	<p>a) y b)  $A = m^2 + n^2 + 2(m \cdot n)$</p> <p>c) $m^2 + n^2 + 2(m \cdot n) - 4mn = m^2 + n^2 - 2mn = (m-n)^2$</p>
<p>d)  $(M-N)^2$</p> <p>e) $4mn$ representa los \square</p>	<p>d)  $(m-n)h + n^2 = mn - n^2 + n^2$</p>

En la última pregunta, la cual se encuentra dividida en ítems “a,b,c,d”, los estudiantes comienzan a desarrollar las dos primeras alternativas, utilizando una visualización icónica y trabajando como botánico al medir la longitud que se les pide encontrar, activando así la génesis semiótica, luego al trabajar en las otras dos alternativas, los estudiantes desarrollan en primera instancia una visualización no icónica para luego trabajar como inventor al añadir trazos suplementarios al rectángulo rojo con un instrumento material

clásico, provocando la activación de la génesis instrumental. La génesis discursiva está presente cuando los estudiantes deben trabajar con el concepto de área y producto notable y además de trabajar en un registro algebraico en el ETMa, también trabajan en un registro geométrico en el ETMg, es así como se puede observar que existe una circulación entre las génesis del ETM.

Evidencia Pregunta 3	
Binomio 1	Binomio 2
<p>a) </p> <p>b) Ancho por los // y el largo por los lados a y b que restados son a-b</p> <p>c) El  amarillo porque tiene sus lados a-b y b</p> <p>d) $A = (a-b)(a+b) = a^2 - b^2 \rightarrow$ Diferencia de </p> 	<p>a) $(a-b); b$</p> <p>b) El lado $(a-b)$ se obtiene al restar el lado a del cuadrado grande, menos el lado b del cuadrado amarillado. El lado b del cuadrado amarillado se refleja en el lado b de la figura amarilla.</p> <p>c) el rectángulo amarillo</p> <p>d)  $(a-b) \cdot (a+b)$ $a^2 - b^2$</p>

Capítulo 4.

Conclusiones

Las conclusiones de este trabajo serán en base a los objetivos generales y específicos planteados para la investigación que permitieron el desarrollo de este trabajo.

La implementación del instrumento 1, nos permitió identificar el espacio de trabajo personal de los estudiantes al resolver tipos de tareas propuestas en documentos oficiales del marco curricular vigente y pruebas estandarizadas (SIMCE, PSU).

A partir de las evidencias se puede concluir por actividad lo siguiente:

- Pregunta 1:

El estudiante en primera instancia usará el registro algebraico para desarrollar el cuadrado de binomio, es decir, se activa la génesis semiótica, utilizando un artefacto simbólico, el cual impulsa a la activación de la génesis instrumental.

No existe una articulación entre las tres génesis existentes, entonces el estudiante no adquiere un aprendizaje significativo.

- Pregunta 2 :

En esta pregunta el estudiante debe trabajar tanto de forma geométrica como algebraica, existe una visualización icónica y un registro figural el cual ayuda a la activación de la génesis instrumental.

No existe una articulación entre las génesis, ya que solo está presente una de ellas.

- Pregunta 3:

Existe una clara activación de la génesis semiótica, ya que los estudiantes reconocen los tipos de factorización y recurre a ellos para resolver la problemática, activando así la génesis instrumental.

- Pregunta 4:

En esta pregunta se activa la génesis semiótica, ya que los estudiantes asocian la expresión al cuadrado de binomio, esto implica que la génesis instrumental se active, pero no existe una articulación de la génesis discursiva, ya que no se ocupa ningún teorema para resolver la problemática.

- Pregunta 5:

El diseño de esta pregunta permite que se active la génesis semiótica, ya que el estudiante visualiza el cuadrado de lado “ a ” y de lado “ b ”, también como está presente la propiedad distributiva y el desarrollo de los productos notables, esto es ocupado como artefactos simbólicos, los cuales activan la génesis instrumental. Nuevamente notamos que no existe articulación entre las tres génesis existentes.

- Pregunta 6:

Al reemplazar el valor de x , se activa la génesis semiótica, pero no se ve activada la génesis discursiva, ya que no utilizan la propiedad distributiva como camino para resolver la problemática.

En general las tareas propuestas en el instrumento 1 evidencian que no existe una circulación entre las génesis: semiótica, instrumental y discursiva lo que no permite una articulación entre los polos epistemológicos y cognitivo. Esto provoca que en la mayoría de los casos los estudiantes resuelvan de forma mecánica las actividades que involucran productos notables.

Respecto a la implementación de la propuesta se evidencia lo siguiente:

Fue diseñada con el propósito de que los estudiantes activaran sus conocimientos previos sobre área y perímetro, desde lo más básico a lo más complejo y así a través de las definiciones activar la génesis discursiva, ya que esta génesis era la menos presente en los ejercicios analizados. Las preguntas diseñadas fueron creadas para lograr activar esta génesis y así se hacía mucho más factible la articulación entre las génesis.

En conclusión, la propuesta que se presenta permite ampliar la concepción que tenían los estudiantes con respecto a los productos notables y considerando la epistemología del concepto, se puede dar un enfoque tanto geométrico como algebraico y relacionar ambos.

En general el desarrollo de este trabajo nos ha permitido reflexionar como futuros docentes la importancia de considerar el rol que tenemos como investigadores de nuestras propias prácticas. El conocimiento matemático es fundamental a la hora de organizar nuestras clases, pero sin duda si no lo complementamos con la didáctica no lograremos que nuestros estudiantes adquieran un aprendizaje significativo.

Implementando nuestra propuesta observamos que una de las principales dificultades que poseen los estudiantes corresponde en la utilización de los números reales y las propiedades de potencia. En rigor, a los estudiantes les dificulta poder aplicar la propiedad distributiva, sobre todo cuando se trata de multiplicación de binomios. Respecto a la propiedad de potencias, consideramos que la dificultad más relevante tiene que ver con que confunden el uso de propiedad de potencias con la reducción de términos semejantes.

La metodología implementada nos proporciona la obtención de las interacciones verbales y la evidencia en lápiz y papel, aspectos importantes para nuestra investigación. Esto nos indicó varias evidencias del ETM que quedarían ocultas si nos hubiéramos limitado al trabajo individual de cada estudiante, es por esto que escogimos binomios, porque así ellos serían

capaces de interactuar, analizar e inferir de manera conjunta cada tarea y con los distintos trabajos realizados. Asimismo observamos que las tareas propuestas en nuestro instrumento 2 favorecen la circulación por las distintas génesis que componen el ETM fortaleciéndose entre ellas mediante el desarrollo de la propuesta.

Uno de los objetivos específicos es: *“Determinar condiciones que favorecen la comprensión de los productos notables en la enseñanza media, bajo el vínculo de uno o más dominios de la matemática”*, constatamos que las condiciones óptimas para la comprensión de los productos notables es la existencia de la articulación entre el eje de algebra con el eje de geometría, con el fin de que a través de estos registros de representación, el estudiante pueda evidenciar de manera concreta lo que trabaja de forma algebraica y así pueda hacer la conversión por sí solo, con esto se logra que el estudiante comprenda de una forma clara el concepto que se está trabajando.

Pretendemos que nuestro trabajo de investigación sea una base de propuesta para que luego exista un refinamiento de esta, especialmente en la incorporación de las identidades notables que no están presentes.

Por otra parte el objetivo de las tareas del instrumento 1 sugiere que el estudiante reconozca los productos notables y trabajará de modo que sólo los desarrolle. Considerando esto y constatando que los estudiantes desarrollaban las tareas de forma mecánica, decidimos crear una propuesta en donde se activen los conocimientos previos y circulen las tres génesis existentes, logrando así un tránsito entre el ETMa y ETMg y viceversa.

Referencias Bibliográficas

Balacheff N. (1987). Processus de preuve et situations de validation, *Educational studies in mathematics*, 18 (2),147-176.

Barreto, J. (2009). Percepción geométrica de los productos notables y de la media geométrica. *Revista de Didáctica de las matemáticas*, 71, 57-74.

Chevallard, Y. (1999) El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), pp.221-266.

Duval, R. (1995), *Sémiosis et pensée humaine*. Éditions Peter Lang, coll. Exploration, Recherches en sciences de l'éducation. Berne, Suisse.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 10, 5-53.

Houdement, C. & Kuzniak, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de didactique et de sciences cognitives*. 11. pp. 175- 193- IREM de Strasbourg.

Kuzniak, A. (2011). L'espace de Travail Mathématique et ses genèses. *Annales de didactique et de sciences cognitives*. 16, 9-24.

Luna, E. (2005). *¿Cómo introducir el concepto de factorización?* Tesis no publicada para obtener el título de Profesor de Matemáticas. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile

Martos, E. (2008). *Valores prácticos y epistémicos de los productos notables en profesores de matemáticas*.

Méndez, T. (2001). *Las dificultades en la práctica de factorización e identidades notables*. Tesis no publicada para obtener el título de Profesor de Matemáticas. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile

Montoya, E. (2010). *Paradigmas y Espacio de trabajo geométrico*.

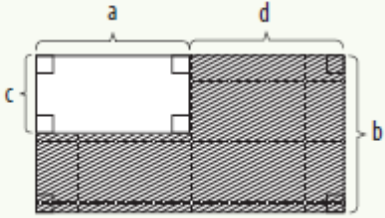
Montoya, E. (2014). Circulaciones y génesis en el espacio de trabajo matemático, Vol. 17 (4-I), pp. 191-210.

Rabardel, P. (1995). *Les Hommes et les Technologies. Une approche cognitive des instruments contemporains*. Armand Colin. Francia, París.

ANEXOS

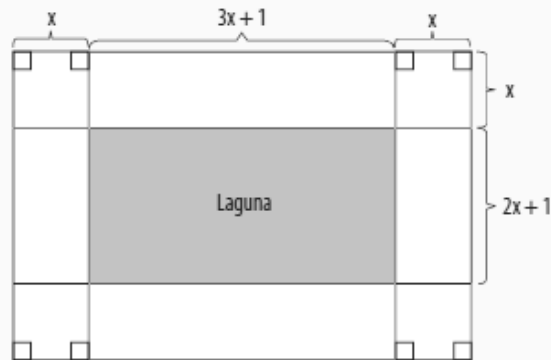
ANEXO 1

Fuente de la pregunta	Pregunta
Extracto página 51, Programas de estudio del MINEDUC, año 2011	1. Factorizan expresiones, utilizando productos notables. De este tipo son las siguientes factorizaciones: <ul style="list-style-type: none"> • $4x^2 - 16y^2$ • $x^2 + 4xy + y^2$ • $4(x - z)$ • $2 - 36(y + 2)^2$ • $(x + 2)^2 + 8(y + 2)^2$ • $xy + y^2$ • $4(x - z)$ • $2 - 36(y + 2)^2$ • $(x + 2)^2 + 8(x + 2) + 16$ • $x^4 - 16y^4$
Extracto página 51, Programas de estudio del MINEDUC, año 2011	2. Utilizan la forma $a^2 + a(b + c) + bc - (a + b)(a + c)$. De este tipo son las siguientes factorizaciones: <ul style="list-style-type: none"> • $x^2 + 7x + 10$ • $a^2 + 6a - 7$ • $b^2 - 3b - 54$ • $4a^2 + 14a - 8$
Extracto página 52, Programas de estudio del MINEDUC, año 2011	3. Un terreno rectangular tiene una superficie $x^2 + 7x - 12$ y como largo a $x + 4$. Respecto de este enunciado, los estudiantes determinan: <ul style="list-style-type: none"> • su ancho • su perímetro cuando $x = 100$ metros
Extracto página 52, Programas de estudio del MINEDUC, año 2011	4. Realizan factorizaciones intermedias para llegar a la factorización final. De este tipo son las siguientes factorizaciones: <ul style="list-style-type: none"> • $ac + bc + ad + db$ • $ax - 2ay + 3a + bx - 2by + 3b$ • $ad - dx + ac - cx$

<p>Extracto página 52, Programas de estudio del MINEDUC, año 2011</p>	<p>5. Transforman expresiones algebraicas aplicando productos notables y Factorizan la expresión transformada. Por ejemplo:</p> <ul style="list-style-type: none"> Factorizan la expresión $4a^4 + b^4$; con este propósito, transforman esta expresión en la forma $(2a^2 + b^2) - (2ab)^2$ Factorizan la expresión $16x^4 + 4$; con este propósito, transforman esta expresión en la forma $(4x^2 + 2)^2 - 16x^2$
<p>PRUEBA OFICIAL DE MATEMÁTICA, serie DEMRE 2013, Universidad de Chile.</p>	<p>6. $(b+1)^2 - 5(b+2)$</p> <p>a) $b^2 - 5b + 11$ b) $b^2 - 3b + 3$ c) $b^2 - 5b + 3$ d) $b^2 - 3b - 9$ e) $b^2 - 3b + 11$</p>
<p>Texto escolar MINEDUC 2014.</p>	<p>Patricio, Marta y Andrea discuten sobre la fórmula que representa el área de la zona achurada en la siguiente figura:</p>  <p>Patricio dice que el área es $(a + c)b - d$. Marta dice que el área es $ab + bd - ac$. Andrea dice que el área es $(a + d)a - ac$.</p> <p>¿Quién o quiénes tienen la razón?</p>

Texto escolar
MINEDUC
2014.

En un parque se decide colocar una laguna rectangular como se muestra en la figura.



- ¿Cuál es el área de la laguna?
- Se decide colocar una reja de protección alrededor de la laguna ¿Qué longitud debe tener?

Texto escolar
MINEDUC
2014.

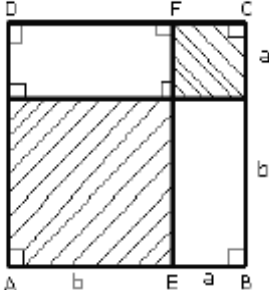
Cuadrado de binomio

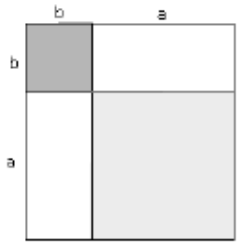
Ana está calculando el área de los siguientes cuadrados.

Lado	Área	Representación	Producto
$(a + 2)$	$(a + 2)^2$		$(a + 2)(a + 2) =$ $= a \cdot a + a \cdot 2 + 2 \cdot a + 2 \cdot 2$ $= a^2 + 2a + 2a + 4$ $= a^2 + 4a + 4$
$(x + 1)$	$(x + 1)^2$		$(x + 1)(x + 1) =$ $= x \cdot x + x \cdot 1 + 1 \cdot x + 1 \cdot 1$ $= x^2 + x + x + 1^2$ $= x^2 + 2x + 1$
$(3 + y)$	$(3 + y)^2$		

<p>Texto escolar MINEDUC 2014.</p>	<p>Binomios con término común</p> <p>Lucía está calculando el área de las superficies de colores de cerámicas de distintos tamaños.</p> <table border="1" data-bbox="573 352 1424 573"> <thead> <tr> <th>Ancho</th> <th>Largo</th> <th>Área</th> <th>Producto</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>$(a + 2)$</td> <td>$(a + 4)$</td> <td>$(a + 2)(a + 4)$</td> <td>$a^2 + 6a + 8$</td> </tr> <tr> <td>$(x + 4)$</td> <td>$(x + 5)$</td> <td>$(x + 4)(x + 5)$</td> <td>$x^2 + 9x + 20$</td> </tr> <tr> <td>$(x + 1)$</td> <td>$(x + 2)$</td> <td>$(x + 1)(x + 2)$</td> <td></td> </tr> </tbody> </table>	Ancho	Largo	Área	Producto	$(a + 2)$	$(a + 4)$	$(a + 2)(a + 4)$	$a^2 + 6a + 8$	$(x + 4)$	$(x + 5)$	$(x + 4)(x + 5)$	$x^2 + 9x + 20$	$(x + 1)$	$(x + 2)$	$(x + 1)(x + 2)$	
Ancho	Largo	Área	Producto														
$(a + 2)$	$(a + 4)$	$(a + 2)(a + 4)$	$a^2 + 6a + 8$														
$(x + 4)$	$(x + 5)$	$(x + 4)(x + 5)$	$x^2 + 9x + 20$														
$(x + 1)$	$(x + 2)$	$(x + 1)(x + 2)$															
<p>Texto escolar MINEDUC 2014.</p>	<p>Suma por su diferencia</p> <p>Jaime está calculando el área de los siguientes rectángulos.</p> <table border="1" data-bbox="573 726 1455 898"> <thead> <tr> <th>Largo</th> <th>Ancho</th> <th>Área</th> <th>Producto</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>$(a + b)$</td> <td>$(a - b)$</td> <td>$(a + b)(a - b)$</td> <td>$a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2$</td> </tr> <tr> <td>$(x + 3)$</td> <td>$(x - 3)$</td> <td>$(x + 3)(x - 3)$</td> <td></td> </tr> </tbody> </table>	Largo	Ancho	Área	Producto	$(a + b)$	$(a - b)$	$(a + b)(a - b)$	$a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2$	$(x + 3)$	$(x - 3)$	$(x + 3)(x - 3)$					
Largo	Ancho	Área	Producto														
$(a + b)$	$(a - b)$	$(a + b)(a - b)$	$a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2$														
$(x + 3)$	$(x - 3)$	$(x + 3)(x - 3)$															

<p>Publicación DEMRE 2011</p>	<p>1. La expresión $a^4 - b^4$ se puede escribir como:</p> <p>a) $(a - b)^4$</p> <p>b) $(a + b)^2(a - b)^2$</p> <p>c) $(a^3 - b^3)(a + b)$</p> <p>d) $(a^2 + b^2)(a^2 - b^2)$</p> <p>e) $(a - b)(a^3 + b^3)$</p>
<p>Publicación DEMRE 2011</p>	<p>2. ¿Cuál(es) de las siguientes expresiones al ser simplificada(s) resulta(n) 1?</p> <p>I) $\frac{2a + 3}{3 + 2a}$ II) $\frac{a^2 - b^2}{(a - b)^2}$ III) $\frac{(b - a)^2}{a^2 + b^2 - 2ab}$</p> <p>a) Sólo I</p> <p>b) Sólo I y II</p> <p>c) Sólo I y III</p> <p>d) Sólo II y III</p> <p>e) I, II y III</p>
<p>Publicación DEMRE 2011</p>	<p>3. El área de un rectángulo es $2x^2 + 2x - 24$. Si uno de sus lados mide $(x - 3)$, el otro lado mide:</p> <p>a) $(x + 8)$</p> <p>b) $2(x + 8)$</p>

	<p>c) $2(x-4)$ d) $2(x-3)$ e) $2(x+4)$</p>
Publicación DEMRE 2011	<p>4. Si $x = -3$, entonces $(x-2)(2x^2-3) =$ a) -45 b) -75 c) 15 d) 75 e) 105</p>
Publicación DEMRE 2011	<p>5. ¿Cuál de las siguientes expresiones es un factor de $k^2 + k - 6$? a) $k+1$ b) $k+2$ c) $k-6$ d) $k-3$ e) $k-2$</p>
Publicación DEMRE 2011	<p>En la figura, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es(son) verdadera(s)?</p> <p>I) El área de ABCD es $a^2 + 2ab + b^2$ II) El área de la región achurada es $(a+b)^2$ III) El área de AEFD es $b^2 + ab$</p> <p>A) Solo I B) Solo II C) Solo III D) Solo I y III E) Solo II y III</p> 
Publicación DEMRE 2011	<p>6. Si x es un número entero mayor que 1 y el área de un rectángulo se expresa como $(x^2 + 5x - 6)$, ¿cuál de las siguientes opciones puede representar a sus lados? a) $(x-1)y(x-5)$ b) $(x+2)y(x-3)$ c) $(x-1)y(x+6)$ d) $(x+1)y(x-6)$ e) $(x-2)y(x-3)$</p>
PSU Matemática 2011 530 preguntas de	<p>7. ¿Cuál de las siguientes expresiones es equivalente a $(m-n)^2 - 4mn$? a) $(m-n)^2$ b) $m^2 - 2 + n^2$ c) $m^2 - 4mn + n^2$</p>

facsímliles oficiales	<p>d) $2m - 4mn + 2n$ e) $2m - 2mn + 2n$</p>
Publicación DEMRE 2011	<p>Se sabe que a y b son positivos y $a > b$. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es(son) verdadera(s)?</p> <p>I. El área del cuadrado de lado $(a + b)$ es igual al área achurada.</p> <p>II. $(a + b)(a - b)$ es igual a la diferencia de las áreas del cuadrado de lado a y el lado de b.</p> <p>III. $a(a + b) > a^2 + b^2$</p> <p>A) Sólo I B) Sólo I y II C) Sólo I y III D) Sólo II y III E) I, II y III</p> 
Publicación DEMRE 2011	<p>$\left(\frac{2}{3}x + y\right)\left(\frac{2}{3}x - y\right) =$</p> <p>A) $\frac{4}{3}x^2 - y^2$ B) $\frac{4}{9}x^2 - y^2$ C) $\frac{2}{9}x^2 - y^2$ D) $\frac{4}{6}x^2 - y^2$ E) Ninguna de las expresiones anteriores</p>

ANEXO 2

Cuestionario

(Instrumento 1)

El presente cuestionario constituye un instrumento de investigación para la realización del Seminario de título, enmarcado en el trabajo de título de Profesor de Matemáticas, de dos estudiantes de la Universidad de Valparaíso.

La respuesta a este cuestionario significa un gran aporte para el trabajo mencionado. Rogamos ser lo más específico posible en sus respuestas, responder con claridad y señalar su nombre. No está de más decir que este instrumento **no** será usado con algún otro fin más que aportar a la investigación como una evidencia para la problemática abordada. El hecho de solicitar su nombre, es solo en caso de que exista alguna duda en su respuesta y se deba solicitar alguna aclaración.

Agradecemos de antemano su colaboración.

Nombre:

Pregunta 1:

¿Qué expresión es equivalente a $(m+n)^2 - 4mn$?


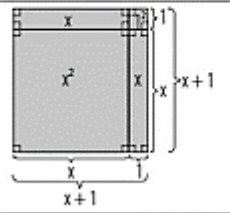
Desarrollo:

Pregunta 2:

Observe el siguiente ejemplo y complete:

Cuadrado de binomio

Ana está calculando el área de los siguientes cuadrados.

Lado	Área	Representación	Producto
$(a + 2)$	$(a + 2)^2$		$\begin{aligned}(a + 2)(a + 2) &= \\ &= a \cdot a + a \cdot 2 + 2 \cdot a + 2 \cdot 2 \\ &= a^2 + 2a + 2a + 4 \\ &= a^2 + 4a + 4\end{aligned}$
$(x + 1)$	$(x + 1)^2$		
$(3 + y)$	$(3 + y)^2$		

Desarrollo

Pregunta 3:

Factoriza al máximo las siguientes expresiones:

- $ac + bc + ad + db$
- $ax - 2ay + 3a + bx - 2by + 3b$
- $ad - dx + ac - cx$

Desarrollo:

Pregunta 4:

Factoriza las siguientes expresiones:

A. $4a^4 + b^4$

B. $16x^4 + 4$

Desarrollo:

Pregunta 5:

Se sabe que a y b son positivos y $a > b$. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es(son) verdadera(s)?

I. El área del cuadrado de lado $(a + b)$ es igual al área achurada.

II. $(a + b)(a - b)$ es igual a la diferencia de las áreas del cuadrado de lado a y el lado de b .

III. $a(a + b) > a^2 + b^2$

- A) Sólo I B) Sólo I y II C) Sólo I y III
D) Sólo II y III E) I, II y III



Desarrollo:

Pregunta 6:

Si $x = -3$, entonces $(x - 2)(2x^2 - 3) =$

Desarrollo:

Cuestionario

(Instrumento 1)

El presente cuestionario constituye un instrumento de investigación para la realización del Seminario de título, enmarcado en el trabajo de título de Profesor de Matemáticas, de dos estudiantes de la Universidad de Valparaíso.

La respuesta a este cuestionario significa un gran aporte para el trabajo mencionado. Rogamos ser lo más específico posible en sus respuestas, responder con claridad y señalar su nombre. No está de más decir que este instrumento **no** será usado con algún otro fin más que aportar a la investigación como una evidencia para la problemática abordada. El hecho de solicitar su nombre, es solo en caso de que exista alguna duda en su respuesta y se deba solicitar alguna aclaración.

Agradecemos de antemano su colaboración.

Nombre:

Pregunta 1:

¿Cuál de las siguientes expresiones es equivalente a $(m+n)^2 - 4mn$?

- a) $(m-n)^2$
- b) $m^2 - 4mn + n^2$
- c) $m^2 - 2 + n^2$
- d) $2m - 4mn + n^2$
- e) $2m - 2mn + 2n$

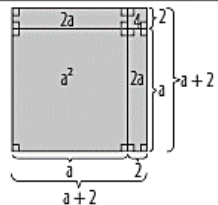
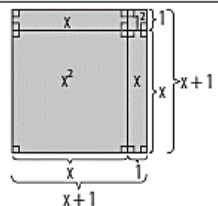
Desarrollo:

Pregunta 2:

Observe el siguiente ejemplo y complete:

Cuadrado de binomio

Ana está calculando el área de los siguientes cuadrados.

Lado	Área	Representación	Producto
$(a + 2)$	$(a + 2)^2$		$\begin{aligned}(a + 2)(a + 2) &= \\ &= a \cdot a + a \cdot 2 + 2 \cdot a + 2 \cdot 2 \\ &= a^2 + 2a + 2a + 4 \\ &= a^2 + 4a + 4\end{aligned}$
$(x + 1)$	$(x + 1)^2$		$\begin{aligned}(x + 1)(x + 1) &= \\ &= x \cdot x + x \cdot 1 + 1 \cdot x + 1 \cdot 1 \\ &= x^2 + x + x + 1^2 \\ &= x^2 + 2x + 1\end{aligned}$
$(3 + y)$	$(3 + y)^2$		

Desarrollo:

Pregunta 3:

Factoriza al máximo las siguientes expresiones:

- $ac + bc + ad + db$
- $ax - 2ay + 3a + bx - 2by + 3b$
- $ad - dx + ac - cx$

Desarrollo:

Pregunta 4:

¿Cuál de las siguientes expresiones corresponde a $4a^4 + b^4$ y $16x^4 + 4$ factorizado?

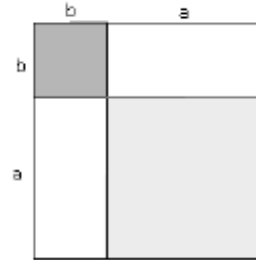
- a) $a^4b^4(4 + b)$ y $4(4x^4 + 1)$
- b) $(2a^2 + b^2)(2a^2 - b^2)$ y $(4x^2 + 2)(4x^2 - 2)$
- c) $(2a^2 + b^2)^2$ y $(4x^2 + 2)^2$
- d) $(2a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2$ y $(4x^2 + 2)^2 - 16x^2$

Desarrollo:

Pregunta 5:

Se sabe que a y b son positivos y $a > b$. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es(son) verdadera(s)?

- I. El área del cuadrado de lado $(a + b)$ es igual al área achurada.
- II. $(a + b)(a - b)$ es igual a la diferencia de las áreas del cuadrado de lado a y el lado de b .
- III. $a(a + b) > a^2 + b^2$



- A) Sólo I B) Sólo I y II C) Sólo I y III
- D) Sólo II y III E) I, II y III

Desarrollo:

Pregunta 6:

Si $x = -3$, entonces $(x - 2)(2x^2 - 3) =$

- a) -45
- b) -75
- c) 15
- d) 75
- e) 105

Desarrollo:

ANEXO 3

Propuesta Tarea 1:

¿Cuál de las siguientes expresiones es equivalente a $(m+n)^2 - 4mn$?

- a) $(m-n)^2$
- b) $m^2 - 4mn + n^2$
- c) $m^2 - 2 + n^2$
- d) $2m - 4mn + n^2$
- e) $2m - 2mn + 2n$

- Estrategias del estudiante para resolver el ejercicio (E1):

1. El estudiante puede resolver este ejercicio al reconocer que $m + n^2$ es un cuadrado de binomio, el cual tiene su fórmula para resolverlo y luego para encontrar la solución tiene que saber identificar y reducir los términos semejantes existentes y por último saber que la expresión que queda se puede factorizar.

2. También el estudiante puede resolverlo, usando propiedades de potencia y también la propiedad distributiva en la multiplicación de binomios, entonces tiene $m + n^2$ se puede expresar como $m + mn + n$, luego multiplica los binomios, aplicando propiedad de potencia cuando corresponda, reduce los términos semejantes.

- Estrategias erróneas (E2):

1. El estudiante puede resolver el ejercicio obteniendo como resultado de $m + n^2$ la siguiente expresión $m^2 + n^2$.

2. Otra forma errónea de desarrollar este ejercicio sería no teniendo la noción

de reducción de términos semejantes.

3. El estudiante no identifica el cuadrado de binomio, ni tampoco sabe cómo resolver $m + n^2$ de otra manera, así que por existir alternativas hace sus operaciones al azar.

4. El estudiante al reducir los términos semejantes solo lo hace mediante las letras y deja sólo los números.

- Estrategia esperada (E3):

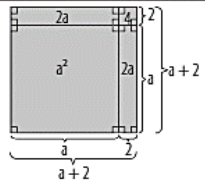
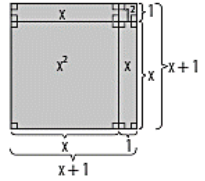
1. El estudiante reconoce $m + n^2$, lo desarrolla y reduce los términos semejantes existentes, para luego reescribir de forma factorizada lo que le queda, es decir, $m^2 - 2mn + n^2 = m - n^2$.

Propuesta tarea 2:

Observe el siguiente ejemplo y complete:

Cuadrado de binomio

Ana está calculando el área de los siguientes cuadrados.

Lado	Área	Representación	Producto
$(a + 2)$	$(a + 2)^2$		$(a + 2)(a + 2) =$ $= a \cdot a + a \cdot 2 + 2 \cdot a + 2 \cdot 2$ $= a^2 + 2a + 2a + 4$ $= a^2 + 4a + 4$
$(x + 1)$	$(x + 1)^2$		$(x + 1)(x + 1) =$ $= x \cdot x + x \cdot 1 + 1 \cdot x + 1 \cdot 1$ $= x^2 + x + x + 1^2$ $= x^2 + 2x + 1$
$(3 + y)$	$(3 + y)^2$		

- Estrategias del estudiante para resolver el ejercicio (E1):

1. El estudiante observa los ejemplos que están presente en el ejercicio, para luego construir la figura y asignar los lados correspondientes. También se da cuenta que es un cuadrado de binomio y que la figura a construir debe tener como resultado lo que obtenga al desarrollar el cuadrado de binomio asignado.

- Estrategias erróneas (E2):

1. El estudiante no visualiza los ejemplos y no sabe cómo desarrollar el ejercicio.

2. El estudiante dibuja el cuadrado y los rectángulos dentro de él, pero no sabe cómo asignar los lados que les corresponde a cada figura, tampoco identifica que se está calculando el área de un cuadrado, entonces no llega al resultado correcto.

3. El estudiante no sabe o no reconoce como aplicar la propiedad distributiva en la multiplicación de los binomios y llega a un resultado incorrecto.

- Estrategia esperada (E3):

1. El estudiante analiza el lado del cuadrado, el cual se le fue asignado, luego nota que es un cuadrado de binomio el que se debe desarrollar, asigna los valores del cuadrado y de los rectángulos existentes dentro de este. También debe notar que a cada figura que compone el cuadrado grande obtienen el área respectiva de cada uno y estas áreas se pueden sumar y obtener el área total de la figura, desarrollando así el cuadrado de binomio que se obtiene asignando los lados correspondientes del cuadrado grande y multiplicándolos para obtener su área total, entonces se puede apreciar que por ambos métodos se puede

llegar al resultado correcto.

Propuesta Tarea 3:

Realizan factorizaciones intermedias para llegar a la factorización final. De este tipo son las siguientes factorizaciones:

- $ac + bc + ad + bd$
- $ax - 2ay + 3a + bx - 2by + 3b$
- $ad - dx + ac - cx$

- Estrategias del estudiante para resolver el ejercicio (E1):

1.El estudiante se da cuenta que puede factorizar agrupando por términos semejantes, tiene dos caminos para llegar a la solución única, el primero es agrupar los términos "**ac**" y "**bc**", factorizando de esa manera por el término común que es "**c**" teniendo $c(a + b)$, de la misma manera factoriza "**ad**" y "**bd**" por "**d**" obtenido $d(a + b)$, por último vuelve a factorizar, pero esta vez por $(a + b)$ llegando a la solución final $(a + b)(c + d)$, el segundo camino es análogamente al anterior, solo que el estudiante agrupa distintos términos, es decir, agrupa "**ac**" con "**ad**" y factoriza por "**a**", de igual manera agrupa "**bc**" con "**bd**" y factoriza por "**b**", teniendo $a(c+d)+b(c+d)$ llegando así a la misma solución dada por $(a + b)(c + d)$.

2.Referente al ejercicio número 2, el alumno puede agrupar de a dos términos o bien de tres términos, puesto que si se da cuenta que puede agrupar de tres, es más sencillo y saldrá más rápida la solución, dejando así como se muestra la siguiente expresión $a(x - 2y + 3) + b(x - 2y + 3)$ por lo que sólo deberá volver a factorizar por el paréntesis en común y llegar a la solución dada por $(a + b)(x - 2y + 3)$, en cambio sí solo agrupa de dos términos llegará a la misma solución, pero con un desarrollo más largo del

ejercicio.

- Estrategias erróneas (E2):

1. El alumno no identifica los términos por cual agrupar y llegar a una factorización por sus términos semejantes.

2. Un error muy común que cometen los alumnos al factorizar por agrupamiento son los signos, como se da en el ejercicio número 3, el estudiante en este ejercicio sólo puede agrupar los términos "ad" con "ac" y "-dx" con "-cx" para factorizar términos en común, al momento de factorizar (-dx-cx) solo factoriza por x , teniendo de este modo $x(-d - c)$ dejando el signo negativo dentro del paréntesis, llegando así a un conflicto donde los factores en paréntesis no son iguales y no podrá volver a factorizar para llegar a la solución correcta.

- Estrategia esperada (E3):

1. Que el estudiante reconozca el tipo de factorización que se utiliza para resolver estos casos y aplique de forma correcta la propiedad distributiva

Propuesta Tarea 4:

Transforman expresiones algebraicas aplicando productos notables y factorizan la expresión transformada.

Por ejemplo:

- Factorizan la expresión $4a^4 + b^4$; con este propósito, transforman esta expresión en la forma $(2a^2 + b^2)^2 - (2ab)^2$

- Factorizan la expresión $16x^4 + 4$; con este propósito, transforman esta expresión en la forma $(4x^2 + 2)^2 - 16x^2$

- Estrategias del estudiante para resolver el ejercicio (E1):

1. El estudiante analiza las siguientes expresiones algebraicas, como le piden factorizar, el estudiante se da cuenta que existe un producto notable pero se debe factorizar completando cuadrado y así obtener el cuadrado de binomio menos la multiplicación del doble del primer término por el segundo término.

- Estrategias erróneas (E2):

1. El estudiante al observar ambos ejercicios y analizarlos cree estar en presencia del producto notable “suma por su diferencia” y ambos los factoriza de la siguiente manera:

$$4a^4 + b^4 = 2a^2 + 2a^2b^2 - b^2$$

$$16x^4 + 4 = 4x^2 + 24x^2 - 2$$

o bien dejando ambos paréntesis de forma positiva.

- Estrategia esperada (E3):

1. Para poder factorizar la primera expresión, el estudiante analizará la situación de que $4a^4 + b^4$ se puede descomponer, es decir, ambas expresiones algebraicas son el primer término al cuadrado y el último término al cuadrado de un cuadrado de binomio, entonces el término resultante del doble del producto de ambos términos se debe restar para poder obtener la expresión dada reducida al máximo.

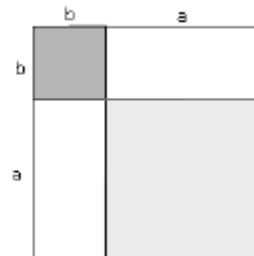
El mismo procedimiento se hace para la expresión $16x^4 + 4$.

Propuesta Tarea 5:

Se sabe que a y b son positivos y $a > b$. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es(son) verdadera(s)?

- I. El área del cuadrado de lado $(a + b)$ es igual al área achurada.
- II. $(a + b)(a - b)$ es igual a la diferencia de las áreas del cuadrado de lado a y el lado de b .
- III. $a(a + b) > a^2 + b^2$

- A) Sólo I B) Sólo I y II C) Sólo I y III
- D) Sólo II y III E) I, II y III



- Estrategias del estudiante para resolver el ejercicio (E1):

1. El estudiante analiza cada aseveración dada, respecto a la primera, calcula el área del cuadrado de lado $(a + b)$, obteniendo como área $a + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$ y con respecto al área achurada tenemos un cuadrado de lado “ b ”, entonces el cuadrado tiene un área de b^2 y la otra área achurada es un cuadrado de lado “ a ”, entonces su área es a^2 , sumando ambas

Áreas achuradas obtenemos $a^2 + b^2$ y si compara el área achurada con el área total del cuadrado notará que ambas áreas no son iguales, por ende la primera aseveración es falsa. Respecto al ítem II, el alumno directamente aplicará la propiedad distributiva, obteniendo la expresión $a^2 - ab + ab - b^2$ donde al cancelar, se dará cuenta que obtiene la diferencia de las áreas de los cuadrados a y b correspondiente a $a^2 - b^2$

Y por último, el estudiante analiza la III aseveración. En esta nos indican que a $a + ba^2 + b^2$, sabemos que $a^2 + b^2$ el área achurada y el resultado de $a + b$ es $a^2 + ab$, entonces a^2 representa al cuadrado de lado “ a ” y ab sería el rectángulo que se encuentra junto al cuadrado de lado “ a ”, entonces el estudiante junta ambas figuras y se da cuenta que cubre más que juntando ambas figuras de área achurada, entonces la aseveración es verdadera.

- Estrategias erróneas (E2):

1. El estudiante no tiene claro cómo calcular áreas de figuras geométricas, es por eso que opta por el azar en esta pregunta.

2. El estudiante conoce como realizar los cálculos de área y reconoce los lados de las figuras que se forman dentro del cuadrado de lado $a + b$, pero no entiende cómo asociarlos y analizarlos.

- Estrategias esperadas (E3):

1. Que el estudiante entienda el concepto de área y pueda desarrollar lo pedido para luego verificar si los enunciados están en lo correcto o no.

Propuesta Tarea 6:

Si $x = -3$, entonces $(x - 2)(2x^2 - 3) =$

- a) -45
- b) -75
- c) 15
- d) 75
- e) 105

- Estrategias del estudiante para resolver el ejercicio (E1):

1. El alumno toma el valor de la incógnita x reemplazándola inmediatamente

en la expresión dada, finalizando con una multiplicación de números enteros.

2. Antes de reemplazar la incógnita, el alumno desarrolla la multiplicación de paréntesis, aplicando la propiedad distributiva llega a un polinomio, donde ahora si reemplaza la x por su valor dado -3 .

- Estrategias erróneas (E2):

1. No visualiza de manera correcta lo que tiene que hacer en el ejercicio.

2. Comete errores al multiplicar los paréntesis aplicando la propiedad distributiva y al evaluar la incógnita llega a un resultado equivocado.

3. El alumno al reemplazar directamente la incógnita comete errores con los signos al sumar y luego multiplicar los resultados de ambos paréntesis.

- Estrategia esperada (E3):

1. Se espera que el estudiante reemplace el valor numérico en la " x " y luego resuelva de manera correcta la potencia, las operaciones en los paréntesis y luego la multiplicación de los números que se obtienen en cada paréntesis.

ANEXO 4

Propuesta de enseñanza y aprendizaje

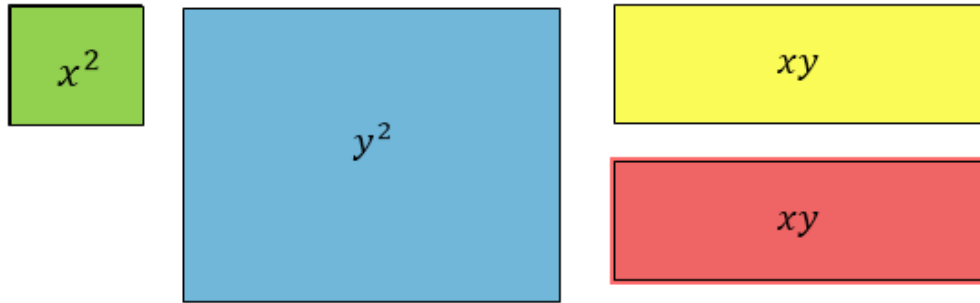
I. Dados un segmento a , un segmento b , con $a > b$, representa geoméricamente las siguiente expresiones:

a) a^2

b) b^2

c) ab

II. Observa las siguientes imágenes, luego contesta:



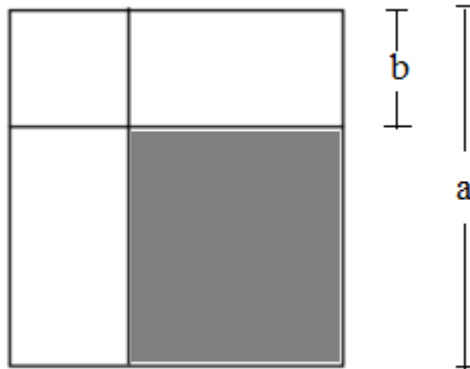
- ¿Qué representa lo escrito dentro de cada figura?
- ¿Cuáles son los respectivos lados de cada figura?
- Organiza estas figuras para formar un cuadrado. ¿Cuál es su área total?
- ¿Cuánto mide el lado del cuadrado formado por las figuras?
- Al calcular algebraicamente $(x + y)^2$ ¿Qué se obtiene?

III. Completa la siguiente tabla según lo que se pida.

Lado	Área	Desarrollo del área	Representación geométrica del desarrollo de área
$(a + 2)$			
		$x^2 + 2x + 1$	
	$(3 + y)^2$		
$(2x + 7)$			

Propuesta de enseñanza y aprendizaje

I. Según la siguiente figura, responde



- ¿Cuál es el área del cuadrado de lado a ?
- ¿Cuál es el área de la parte achurada de la figura?
- ¿Cuál es el área de cada una de las figuras no achuradas?
- Si al área del cuadrado de lado a se le resta las áreas de las partes no achuradas, ¿Qué se obtiene?
- ¿A qué producto notable se relaciona lo desarrollado?

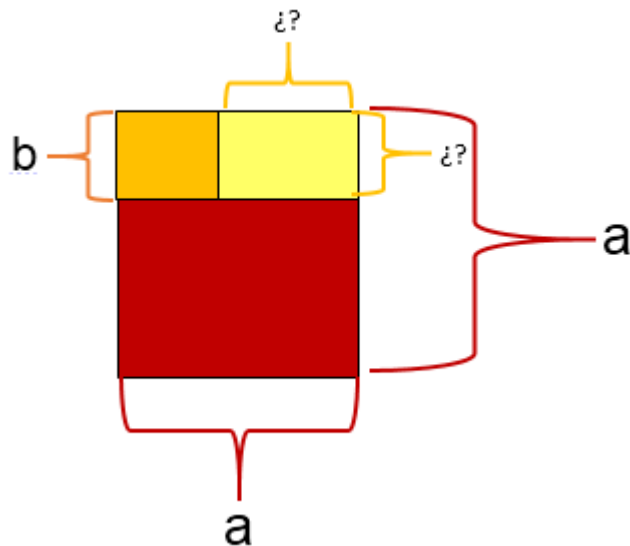
II. Dados los trazos de medida, con $m > n$



- a) Construye un cuadrado de lado $(m + n)$ y calcula su área.
- b) El **desarrollo** del cálculo del área, ¿Cómo lo representarías en el mismo cuadrado formado anteriormente?
- c) Si al área del cuadrado de lado $(m + n)$ se le resta $4mn$, ¿Qué expresión factorizada se obtiene?
- d) Ubica la expresión obtenida en el cuadrado que dibujaste anteriormente.
- e) ¿Qué representan los $4mn$?

III. Responde:

Observa la siguiente imagen y contesta:



- ¿Cuáles son los valores que obtienen los lados del rectángulo de color amarillo?
- ¿cómo lo encontraste?

Ahora, si tenemos el rectángulo rojo de lado “ a ” y “ $a - b$ ” del ejercicio anterior y queremos obtener un rectángulo, cuyo largo es “ $a + b$ ”:

- ¿Qué figura usarías para obtener dicho rectángulo, el cuadrado anaranjado de lado “ b ” o el rectángulo amarillo para encontrar lo pedido?
- ¿Cuál es el área de la figura encontrada? y con respecto al resultado obtenido, ¿A qué producto notable se relaciona lo desarrollado?