FACULTAD DE CIENCIAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS

UNA EXPLORACIÓN DEL RAZONAMIENTO GEOMÉTRICO EN HOMBRES Y MUJERES

MEMORIA DE TESIS PARA OPTAR AL TÍTULO DE PROFESOR/A DE MATEMÁTICA CON MENCIÓN EN DIDÁCTICA Y AL GRADO DE LICENCIADO/A EN EDUCACIÓN

PRESENTADA POR:
ÁLVARO MAURICIO CABRERA HERNÁNDEZ
MARTA CAROLINA CINTO GONZÁLEZ

PROFESORA GUÍA:
CAROLINA GUERRERO ORTIZ

VALPARAÍSO, ABRIL 2019.

INDICE

RESUMEN

Los variados estudios que han constatado diferencias en los resultados de pruebas estandarizadas de matemática y también en las relaciones culturales entre hombres y mujeres, impulsan que la presente investigación intente ser un aporte a los estudios para reducir la brecha de género en educación, siguiendo una metodología cualitativa con estudiantes de entre 14 y 16 años de edad. Con base en el precario desempeño que existe en el razonamiento geométrico, se implementa una secuencia de enseñanza basada en el modelo de Van Hiele enmarcada en aplicar propiedades de semejanza y de proporcionalidad a modelos a escala en situaciones de la vida diaria y otras asignaturas, de la unidad de geometría. Además, mientras desarrollan actividades de geometría se analizan las interacciones entre las y los estudiantes cuando realizan trabajo grupal, categorizadas con los modelos de diseño de producción y receptor de Krummheuer. En cuanto a los resultados, se encuentra que el modelo de Van Hiele tiene como efecto resultados que tienden a ser iguales entre hombres y mujeres, en los tres niveles de razonamiento geométrico abarcados en la implementación. En cuanto a las interacciones grupales manifiestan una mayor participación las mujeres por sobre los hombres, siendo las mujeres quienes mostraban preocupación por quienes no entendían o se incorporaban de manera tardía al desarrollo de las actividades, tomando un rol educativo.

Palabras claves: Género, Brechas de Género, Interacción Grupal, Roles, Geometría, Semejanza, Razonamiento, Van Hiele.

ABSTRACT

The various studies that have found differences in the results of standardized tests of mathematics and also in the cultural relations between men and women, encourage this research to try to be a contribution to studies to reduce the gender gap in education, following a qualitative methodology with students between 14 and 16 years of age. Based on the precarious performance that exists in geometric reasoning, a teaching sequence based on the Van Hiele model is implemented, framed in applying properties of similarity and proportionality to scale models in situations of daily life and other subjects of the unit of geometry. In addition, while developing geometry activities, the interactions between students when performing group work, categorized with Krummheuer's production and receiver design models, are analyzed. In terms of results, the Van Hiele model is found to have the effect of results that tend to be equal between men and women, at the three levels of geometric reasoning covered in the implementation. As for group interactions, there is greater participation of women over men, with women showing concern for those who did not understand or were late in joining the development of activities, taking on an educational role.

Keywords: Gender, Gender Gaps, Group Interaction, Roles, Geometry, Similarity, Reasoning, Van Hiele.

INTRODUCCIÓN

En esta investigación se analiza el impacto que tiene el modelo de Van Hiele en el desarrollo del razonamiento geométrico en chicas y chicos luego de aplicar una secuencia de enseñanza, además se analizan las interacciones grupales en hombres y mujeres cuando estos resuelven problemas matemáticos en equipo, para esto se utiliza el modelo de Krummheuer. Ambos ejes de trabajo fueron enmarcados en la enseñanza del concepto de semejanza y sus aplicaciones.

Se diseñó una secuencia de enseñanza abordando los niveles 1, 2 y 3 del modelo de Van Hiele y considerando el Objetivo de Aprendizaje 10 (OA10) para primero medio, el cual dice: “Aplicar propiedades de semejanza y de proporcionalidad a modelos a escala y otras situaciones de la vida diaria y otras asignaturas” (MINEDUC, 2015). Esta secuencia fue implementada en un colegio subvencionado de la comuna de Quilpué en la región de Valparaíso.

Con el fin de recopilar la información necesaria se aplicó un test previo a la implementación de las sesiones de la secuencia de enseñanza, en donde las y los estudiantes realizaron actividades grupales en las cuales debían comentar, argumentar y escribir sus conclusiones. Simultáneamente se audio grabó la discusión de diferentes grupos en las sesiones donde los estudiantes trabajaron con el material diseñado. Posterior a la implementación los participantes respondieron un post test. El análisis de los datos se realizó a través del contraste de las respuestas en el pre test y post test y las transcripciones de los diálogos obtenidos en las sesiones.

Este trabajo contiene seis capítulos, los cuales a continuación se describen de manera general:

En el primer capítulo se presentan los antecedentes que dan sustento a la problemática de esta investigación. En el segundo capítulo se detalla el concepto de semejanza a partir de una perspectiva histórica, epistemológica, su definición formal y un barrido curricular. El tercer capítulo describe el Marco Conceptual de la investigación, en donde se delimitan los conceptos claves a utilizar para el análisis de datos, tanto para el modelo de Van Hiele como para el análisis de las interacciones grupales, ambos ejemplificados para su comprensión previa. Siguiendo en el cuarto capítulo, se aborda la metodología de investigación, describiendo a los participantes, el desarrollo de los instrumentos utilizados, los detalles de la secuencia de enseñanza, la metodología de análisis de datos y la confiabilidad de estas. El quinto capítulo describe el desarrollo de la implementación secuencia de enseñanza. Se continúa con el sexto capítulo en donde se describen los resultados encontrados en la implementación de la secuencia de enseñanza, para el razonamiento geométrico se ordenan las preguntas del post test por niveles y para el análisis de roles se analizan algunos diálogos extraídos de las transcripciones. Finalmente, en el séptimo capítulo se presentan las conclusiones y se da respuesta a las preguntas planteadas en esta investigación, acompañado de una reflexión pedagógica.

Por último, en la sección de Anexo se encuentra el material pedagógico completo, esto es las actividades de cada sesión y el test aplicado en dos etapas, además de las transcripciones de audio grabadas en algunas sesiones de la secuencia de enseñanza.

CAPITULO I
ANTECEDENTES Y PROBLEMÁTICA

En este capítulo se presentan los antecedentes que dieron origen a la problemática, que busca explorar el razonamiento geométrico en hombres y mujeres, para ello es importante considerar que se abordan dos puntos de vista. El primero es el razonamiento geométrico enmarcado en el modelo de Van Hiele y el segundo sobre las interacciones en estudiantes cuando trabajan de forma grupal al resolver problemas de geometría. Cada uno de estos puntos tiene sus respectivos antecedentes que decantan en una pregunta de investigación. Por último, se presentan los objetivos que guiarán el trabajo y la estructura de este documento.

RAZONAMIENTO GEOMÉTRICO POR GÉNERO

Las pruebas estandarizadas tanto nacionales como internacionales indican diferencias en los resultados de las pruebas de matemáticas entre hombres y mujeres, una brecha que ha persistido en los años recientes. La última prueba SIMCE de matemática (Agencia De La Calidad, 2017) muestra que estudiantes de octavo básico, de 13 y 14 años de edad, alcanzaron un puntaje promedio de 260 puntos, mientras que los estudiantes de segundo medio, de 15 y 16 años de edad, alcanzaron un promedio de 266 puntos, con una diferenciación de solo dos puntos a favor de los hombres en ambos niveles educativos, sin embargo entre el período del 2006 hasta el 2017, los puntajes de las mujeres siempre han estado por debajo de los resultados de los hombres alcanzando una diferencia máxima de 11 puntos.

Del mismo modo, si analizamos las pruebas internacionales, en TIMMS (Agencia De La Educación, 2015) los resultados generales de estudiantes de octavo básico en la tabla de Niveles de desempeño TIMMS, se encuentran en el intervalo de nivel bajo con 427 puntos, en donde además las mujeres se encuentran con una diferencia de 18 puntos bajo los hombres. De igual manera, la prueba PISA (Agencia De La Educación, 2015), destinada a evaluar las competencias de estudiantes de 15 años, muestra un puntaje por debajo del promedio OCDE y una diferencia de 19 puntos a favor de los hombres.

Muchas de estas diferencias en el desempeño de las y los estudiantes, son explicadas por el contexto en que se desenvuelven, ya que las matemáticas suelen ser catalogadas como una de las áreas más difíciles por aprender, lo que genera un rechazo a la asignatura, lo cual según Díaz (2015) proviene de tres principales causas: la familia, el grupo curso o un docente negativo. Si en la casa se menosprecia la matemática, si sus compañeros se burlan por sus errores, o si el docente no le presta la suficiente atención a un estudiante por querer avanzar en la clase, entonces éste optará por no esforzarse en la asignatura. Más aún, como señala Gamboa (2012), a estos contextos se añaden las representaciones culturales del género, que construye la idea de lo femenino y lo masculino, en donde a los hombres se les asocian con tareas como la matemática, las ciencias y la tecnología, mientras que a las mujeres se les asocia tareas como la lectura, la escritura, las danzas y las relaciones interpersonales. De manera que, estas creencias repercuten directamente en el rendimiento de las y los estudiantes.

Según Aravena (2016), dentro de los distintos dominios de la matemática (Números, Álgebra, Geometría y Datos) la que ha presentado mayores dificultades y obstáculos de aprendizaje en Chile durante los últimos 20 años, ha sido la geometría, debido a que apenas se trabaja en clases. Según Báez e Iglesias (2007); Paredes, Iglesias y Ortiz (2007), citados en Gamboa y Vargas (2013), la mayoría de las instituciones desarrollan la enseñanza de la geometría de una manera tradicional caracterizada por: la clase magistral, el trabajo en grupo y el discurso del profesor como medio didáctico. Además Gamboa y Vargas (2013) destacan que la geometría despierta en los estudiantes diversas habilidades que le sirven para comprender otras áreas de las matemáticas y les prepara mejor para entender el mundo que los rodea.

A excepción de TIMMS, las otras pruebas estandarizadas no hacen una diferenciación entre los distintos ejes de aprendizaje de la matemática, por lo que no es posible realizar un análisis comparativo más profundo. Los resultados más recientes de TIMMS indican que en el eje de la geometría, el rendimiento de las y los estudiantes estaría en el nivel bajo con 428 puntos, un punto más arriba que el promedio general obtenido en la prueba de matemática (Agencia de la Educación, 2015).

Para evidenciar el impacto que tienen los métodos de enseñanza en el desarrollo del razonamiento geométrico de las y los estudiantes, cabe preguntarse ***¿Qué efectos tiene en el razonamiento geométrico de hombres y mujeres, la implementación de una secuencia de enseñanza con el modelo de Van Hiele?,*** nos planteamos esta pregunta a raíz de un estudio que Aravena (2013) realizó sobre el razonamiento geométrico en la región del Maule según el modelo de Van Hiele, que caracteriza cinco niveles de razonamiento (explicadas en detalle más adelante en el marco conceptual), arrojando como resultado que la mayoría de los estudiantes de escuelas vulnerables se encuentran entre el nivel 1 y 2 de razonamiento, los más básicos del modelo, Aravena (2013) señala que una posible causa del bajo rendimiento podría deberse a los métodos de enseñanza, sin embargo estos estudios no establecen relaciones entre los resultados y el género, enfoque que se incorpora en este trabajo. Si bien el modelo utilizado es aplicable para cualquier contenido de la geometría, en particular en esta investigación se trabaja con el concepto de semejanza geométrica, la cual desde la mirada de la didáctica tiene complicaciones en el aprendizaje. En este sentido, según Gualdrón (2006) las y los estudiantes presentan algunas dificultades como el reconocimiento de la semejanza cuando la medida de los lados no es presentada con números enteros. Además observó el uso de una estrategia aditiva errónea y la falta de relación entre los lados de una figura en el caso de que un lado le corresponda un valor fraccionario, entre otras dificultades.

Años más tarde en la misma región del Maule, Aravena, Gutiérrez y Jaime (2016) realizaron una intervención con base en el modelo de Van Hiele, obteniendo resultados notables. Los estudiantes que participaron de la secuencia de enseñanza mostraron resultados favorables en comparación al grupo de control, entre estos resultados el paso del nivel 1 al 3, evidenciando un mejor dominio de definiciones y relaciones entre propiedades, mejor capacidad argumentativa-deductiva, entre otras. Estos resultados constituyen un soporte que apoya la implementación del modelo de Van Hiele en esta investigación.

INTERACCIONES EN UN CONTEXTO EDUCACIONAL

Hablar de cultura no es algo sencillo, ya que no hay una única definición y existen diferentes teorías que muestran una de las tantas caras que este concepto posee, una de ellas corresponde a una mirada antropológica, la cual, como define Austín (2000), está ligada a la apreciación y análisis de elementos como los valores, costumbres, normas, estilos de vida, entre otros. Se puede entender como una forma particular de vida de un grupo humano que se desarrolla en un período de tiempo. De esta definición se pueden identificar varios nichos sociales, tales como la familia, la población donde un individuo crece, el lugar de trabajo o la escuela.

La escuela además de ser un establecimiento educativo destinado a formar personas íntegras en habilidades y conocimientos para desenvolverse en la sociedad, es un espacio sociocultural con características particulares e individuales. Después de la familia, tal como señala Espinoza (2013), la escuela es el segundo agente socializador más importante en la vida, ya que no sólo se enseñan contenidos, sino que además se instauran normas de convivencia tanto para docentes, funcionarios y estudiantes, las cuales generan un profundo impacto en la comunidad educativa estableciendo una identidad propia. Sin embargo no sólo las normas aportan a la construcción de esta identidad, sino que los rituales, ceremonias y costumbres también juegan un papel fundamental dando un sentido de pertenencia al establecimiento.

Como Elías (2015) señala, este sistema de significados generalmente moldea el pensar y actuar de los individuos, generando una cultura escolar propia de cada establecimiento, incluso algunos autores (Firestone y Louis, 1999, citado en Elías) enfatizan que se pueden encontrar diversas subculturas en su interior. Al igual que en la cultura misma, posee características estáticas y dinámicas:

> El carácter estático se pone de manifiesto por que por un lado la cultura crea un carácter único en el sistema social al promover un sentido de pertenencia y

> compromiso, y participa activamente en la socialización de nuevos miembros introduciéndolos en una particular perspectiva de la realidad. Por otro lado está sujeta a cambios en tanto los miembros de la organización interactúan con nuevas ideas y enfoques, de ahí su carácter dinámico. (Elías, 2015, p.288)

Entre los distintos modelos que hay para describir la cultura escolar, Schein (1985) postula tres niveles, los cuáles poseen diferentes grados de accesibilidad y visibilidad dentro de la escuela. A grandes rasgos en el primer nivel se encuentran los *supuestos básicos* que constituyen el centro de la cultura escolar, es lo que hace que la organización sea lo que es, las creencias que son aceptadas como verdaderas y que el personal docente tiene naturalizado, por lo que no suele ser consciente para ellos. En el segundo nivel están los *valores y normas*, que alude a lo que el establecimiento considera como correcto o malo, y a partir de esto impone normas de conductas que forjan un comportamiento deseable; y el tercer nivel son los *artefactos*, es el más fácil de reconocer ya que se representa mediante mitos de los miembros de la escuela, símbolos, costumbres, procedimientos, entre otros (Elías, 2015).

Los estudios de la cultura escolar se han incrementado en los últimos años del siglo XX (Elías, 2015) y así mismo se le ha ido prestando mayor atención a las interacciones que se generan entre docentes y estudiantes, en el aula de clases. En una investigación realizada por Espinoza y Taut (2015) se encontró que los docentes tenían expectativas distintas respecto al aprendizaje de matemáticas según el género, produciendo prácticas de enseñanza diferenciadas.

Esto debido a la fuerte creencia de que los hombres tienen mayor facilidad en matemáticas que las mujeres, generando como consecuencia un desarrollo de habilidades y contenido de manera sesgada, logrando reforzar la confianza y seguridad de los hombres al ser estimulados con preguntas más abiertas y complejas, mientras que las mujeres reciben menos atención y cuando lo hacen -los profesores- utilizan preguntas con un bajo nivel de complejidad, comprobando que los supuestos básicos sobre prácticas de enseñanza diferenciadas por género influyen directamente en el desarrollo de las y los estudiantes.

Por otro lado, en el contexto particular del aprendizaje de las matemáticas también se generan ciertos tipos de interacciones, Rasmussen, Wawro y Zandieh (2015), han investigado los roles que se generan en la clase de matemáticas cuando los estudiantes trabajan en grupos, examinando tanto el progreso matemático individual, como el grupal; y caracterizando el grado de participación de los individuos que componen el grupo. Estos investigadores han utilizado las categorías de Krummheuer (2007,2011), para analizar el diseño de producción y de receptor, explicadas más adelante en el marco conceptual.

Con base en los resultados que reporta la literatura en relación con el rol de género que se favorece en la cultura escolar y centrados en las interacciones de los estudiantes en la clase de matemáticas, nos preguntamos ***¿Cómo interactúan hombres y mujeres de forma grupal cuando resuelven problemas de geometría?*** Para responder esta pregunta nos apoyamos en el análisis de las interacciones de Krummheuer (2007,2011).

Con los antecedentes recién planteados, se ha constatado en varios estudios que existen diferencias en los resultados de las pruebas de matemática y en las relaciones culturales entre hombres y mujeres. A partir de esto, los objetivos que guiaron esta investigación son:

OBJETIVO GENERAL:

Describir el razonamiento geométrico en hombres y mujeres cuando se involucran en una secuencia de enseñanza y trabajan en equipo en la resolución de problemas

OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

1. Determinar los efectos de una secuencia de enseñanza en el razonamiento geométrico de hombres y mujeres.
2. Describir interacciones entre hombres y mujeres cuando realizan trabajo grupal.

CAPITULO II
ANÁLISIS DEL CONCEPTO SEMEJANZA

Este capítulo aborda un análisis del concepto de semejanza desde distintas aristas, esto con el fin de comprender su proceso de construcción como concepto. Se inicia con un análisis histórico y epistemológico, sin embargo este último se centra particularmente en los obstáculos que han emergido en la construcción de este conocimiento. Seguido de ello, se intenta un acercamiento a la definición formal del concepto, para terminar con un recorrido de las Bases Curriculares de Chile.

2.1 ANÁLISIS HISTÓRICO

Para un correcto análisis conceptual, Rico (2013) indica que es necesario revisar en profundidad los conceptos y nociones básicas de la matemática, sobre sus fundamentos e historia, sobre su génesis y desarrollo, sobre los principios para su enseñanza e interpretación de su aprendizaje. La historia de la matemática permite hacer una revisión de la creatividad humana para desarrollar métodos y técnicas acordes a las necesidades de cada momento. Los siguientes extractos históricos provienen de los trabajos de Lemonidis (1991, citado en Nolasco 2013), quien ha realizado revisiones históricas del concepto de semejanza y conceptos asociados a su construcción tales como la proporcionalidad y la homotecia, en el cual identifica tres grandes períodos.

I. Aportaciones de la antigua Grecia.

La noción de semejanza ha estado estrechamente vinculada con la geometría desde los orígenes de esta. Thales de Mileto es considerado el primer geómetra y uno de los siete pensadores de la Grecia antigua, a quien se le considera como el iniciador del método deductivo que hace de la Geometría una ciencia racional que se adapta a la realidad física de una manera perfecta, estableciendo el inicio para el razonamiento geométrico que habría de culminar con Euclides.

Los historiadores atribuyen a los griegos, en particular a los Pitagóricos, el desarrollo de la teoría de las proporciones, aunque también se pueden encontrar vestigios en los babilonios en una tabla que se encuentra en el Museo Británico, que remite varios problemas de proporcionalidad (Comin, 2000 citado en Nolasco 2013). La escuela Pitagórica intentaba unificar dos conceptos que en esa época eran totalmente diferentes: el número, asociado a la aritmética y teoría de números, y la magnitud asociada a la geometría, debido a que los primeros eran discretos y las magnitudes continuas. A pesar de esto intentaron relacionar los números y las magnitudes mediante las proporciones, lo que les permitió resolver algebraicamente los problemas geométricos.

Dentro de estos problemas se pueden encontrar dos situaciones que hoy en día podemos resolver encontrando segmentos lineales que cumplen ciertas proporciones como:

a) $a:b = c:x$
b) $a:x = x:b$

Donde a, b y c son magnitudes de segmentos lineales dados. Para el caso a) ilustrado en la Figura 2.1 se tiene dos rectas paralelas que cortan a otras dos secantes, los segmentos formados son proporcionales entre si y permite encontrar el valor de x de la siguiente forma:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$$

Luego

$$a \cdot x = c \cdot b$$

Se despeja x

$$x = \frac{c \cdot b}{a}$$

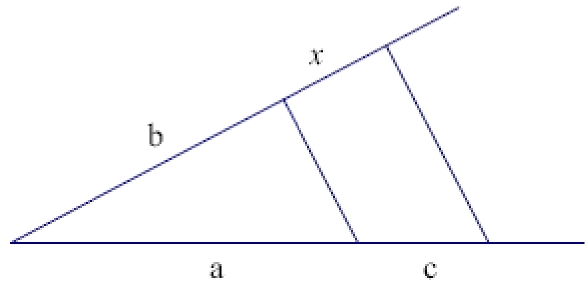


Figura 2.1: Caso uno de proporcionalidad

Para el caso b) ilustrado en la figura 2.2, se tiene una proporcionalidad que permite encontrar segmentos inconmensurables, es decir raíces no exactas, esto se da entre el segmento x perpendicular al diámetro de la semicircunferencia y los segmentos en que este los divide (a y b). Esta relación de proporcionalidad es de la siguiente forma:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$$

Despejando apropiadamente queda

$$x^2 = a \cdot b$$

Este problema puede ser abordado a través de la aplicación del teorema de Pitágoras de la siguiente forma:

$$x^2 = r^2 - h^2$$

Donde r es el radio de la semicircunferencia, y h es la distancia entre el centro y el segmento perpendicular x. Obteniendo como resultado

$$x^2 = (r+h)(r-h) = b \cdot a$$

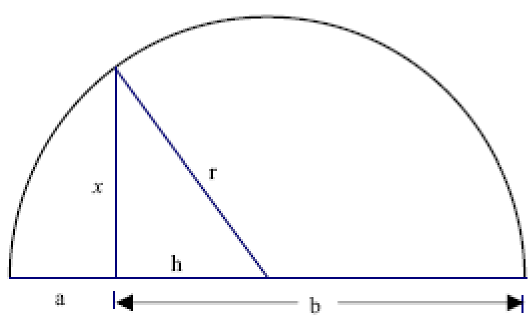


Figura 2.2: Caso dos de proporcionalidad

En un principio el razonamiento anterior era aplicable a magnitudes conmensurables, es decir, cantidades que podían ser conocidas. El descubrimiento de la inconmensurabilidad de la diagonal de un cuadrado con uno de sus lados, hecha por los mismos Pitagóricos, puso fin a la adecuación de los números enteros, lo que contribuyó a separar el estudio de los números de las magnitudes. Esta separación pudo ser un obstáculo en la comprensión de la noción de semejanza, ya que en los *Elementos de Euclides* (300 a. C.) se les trata de manera independiente, en el libro VII se refiere a los números proporcionales, y el libro V a las magnitudes proporcionales, donde los primeros eran números conocidos y los segundos se les asociaba con cantidades que hoy en día se conocen como irracionales.

II. Período del siglo XVI hasta el XVIII.

Después de la destrucción del Museo de Alejandría, la matemática se estancó por casi un milenio. Las obras de Euclides, de Apolonio y de Arquímedes sólo podían ser estudiadas por fuentes directas, despertando una nueva curiosidad por la Geometría, cuyos progresos fueron lentos en un comienzo, pero transcurrida la etapa de asimilación, las ideas geométricas adquirieron el carácter abstracto y general.

Durante el siglo XVI y XVIII la atención del mundo matemático se dirigió especialmente al álgebra y el cálculo descubierto por Newton y Leibniz, en particular para los geómetras renacentistas. Este descubrimiento aportó a identificar las carencias que esta ciencia poseía, permitiendo trabajar en la generalidad de problemas en la representación del espacio.

Los problemas de representación que surgieron en el Renacimiento se convertirían en un importante punto de apertura para el estudio de las transformaciones. Durante tal momento histórico se resaltó la función de la transformación como herramienta útil en la resolución de problemas prácticos, sobre todo en pintura y arquitectura.

Girard Desargues (1591-1662) fue pionero al intentar proporcionar una base sólida a las reglas utilizadas por los pintores renacentistas. De esta manera, abrió una vía completamente nueva al tratar los problemas del diseño arquitectónico a partir de procedimientos puramente geométricos. Uno de sus principales descubrimientos en la geometría proyectiva fue su famoso Teorema de los triángulos de Desargues, el que dice: si dos triángulos ABC y $A'B'C'$ están en perspectiva de un punto O , entonces las intersecciones de los lados correspondientes de cada triángulo pertenecen a la misma recta, tal como se muestra en la figura 2.3, esto es:

Si $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$ y $\overleftrightarrow{CC'}$son concurrentes en O, entonces $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{A'B'} = P$, $\overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{A'C} = R$ y $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{A'B'} = Q$ son colineales, o sea, forma la recta que pasa por los puntos P, Q y R.

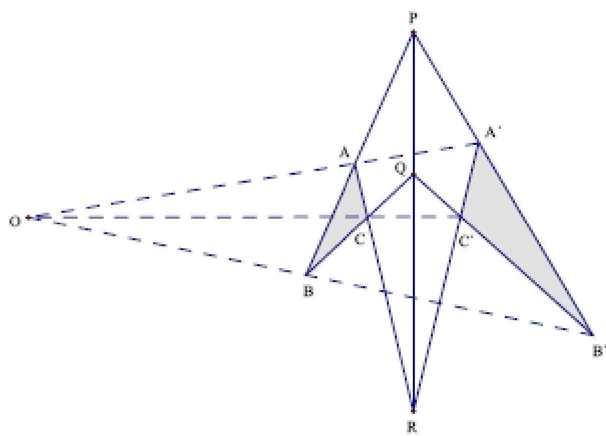


Figura 2.3: Teorema de los triángulos de Desargues

El Teorema de Desargues tiene su importancia, ya que es un primer acercamiento de manera implícita a la homotecia y a la semejanza de triángulos.

III. Siglos XIX y XX.

En el siglo XIX se consideraron la homotecia y la semejanza como objetos matemáticos, debido, en gran parte al desarrollo que experimentó la geometría a partir de la fecha de publicación de la geometría de Monge (1820) y del programa Erlangen de Félix Klein (1872).

En su tratado de geometría proyectiva, Monge sustentó los primeros ejemplos de la fecundidad de la transformación de las figuras espaciales en planos, permitiendo

demostrar muchas proposiciones de la geometría plana a través de figuras que resultan de proyecciones, entre otras. En ese sentido, la semejanza jugó un papel importante en este período, en tanto herramienta útil para la solución de problemas, aunque no se le dio el reconocimiento como objeto matemático, preservando un sentido estático.
Los acontecimientos ocurridos en la primera mitad del siglo XIX ejercieron influencia hasta los comienzos del XX. Ellos dominaron el campo de la geometría hasta el momento que surgió Klein.

Klein en 1872, logró la síntesis de las geometrías, basándose en la noción de grupo de transformaciones, lo que le permitió introducir distinciones entre diferentes tipos de geometría. El grupo principal de transformaciones del espacio está constituido por el conjunto de todas las transformaciones que dejan invariantes las propiedades geométricas de las figuras. El mismo Klein explica:

> Hay transformaciones del espacio que no alteran en nada las propiedades geométricas de las figuras. Por el contrario, estas propiedades son, efectivamente, independientes de la situación ocupada en el espacio por la figura considerada, de su tamaño o magnitud absoluta, y finalmente también el sentido en el cual estas partes están dispuestas. Los desplazamientos del espacio, sus transformaciones, así como aquellas con simetría, no alteran pues las propiedades de las figuras más que las transformaciones compuestas con las precedentes [...].
> (Klein, 1872, citado en Nolasco 2013)

Bajo esa óptica, se concibe el concepto semejanza como objeto matemático de una transformación caracterizada porque existe un tratamiento en que se busca la transformación resultante de dos o más transformaciones.

2.2 OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS EN LA SEMEJANZA

El concepto de semejanza, al igual que muchos otros conceptos, no ha estado exento de limitaciones durante la construcción del conocimiento. De esta manera se enmarca la noción de obstáculo epistemológico, el cual dentro del campo de la didáctica matemática busca acercarse a las causas que conducen a errores, Brousseau (1976) menciona que "el error no es solamente el efecto de la ignorancia o la incertidumbre, sino que es el efecto de un conocimiento anterior, que, a pesar de su interés o éxito, ahora se revela falso o simplemente inadecuado" (p.104). En las siguientes líneas se explican los conocimientos adquiridos en distintos momentos de la historia de la semejanza que han obstaculizado la construcción de conocimientos nuevos.

De acuerdo al análisis realizado por Nolasco y Velázquez (2013) de los distintos períodos históricos, se identifican cinco momentos de obstáculo epistemológico para la semejanza de figuras, tomando en cuenta las invariantes de la conciencia colectiva y los diferentes contextos de cada época.

I. Primer obstáculo epistemológico

Este obstáculo hace alusión al hecho de separar el estudio del número con el de las magnitudes, que tal como habíamos mencionado antes, en el pensamiento griego eran objetos distintos. Esto se hace presente en los *Elementos de Euclides* (300 a. C.) ya que separan la aritmética y las magnitudes trabajándose de manera independiente, donde se habla de números proporcionales y segmentos proporcionales, debido a que en el pensamiento griego los números eran discretos y las magnitudes continuas. Hoy en día se asocia de manera natural a cualquier cantidad de una magnitud una cierta medida numérica, ya que se manejan conceptos de números racionales e irracionales.

II. Segundo obstáculo epistemológico

Este obstáculo se basa en la concepción estática del concepto primitivo de semejanza en donde la idea de transformar una figura en otra estuvo ausente. Reflejo de ello es la creación del libro VI de los *Elementos de Euclides* que hace referencia a la semejanza contenida en las relaciones de medida solo entre magnitudes iguales.

III. Tercer obstáculo epistemológico

Este obstáculo aborda el reconocimiento tardío de la semejanza como objeto matemático, esto a raíz del sentido estático de semejanza que se mantuvo por siglos tratando la semejanza como una herramienta para la resolución de problemas de gráficas, concluyendo en el siglo XIX con Hilbert, el cual reformula los axiomas euclidianos y valoriza el sistema deductivo.

IV. Cuarto obstáculo epistemológico

Este obstáculo se relaciona con el concepto de proporción que se enmarcaba en las relaciones establecidas de la semejanza (magnitudes homólogas) ya que para los griegos todas las magnitudes eran razones de números enteros (entendiendo que estos son conceptos diferentes). Sin embargo hacia el siglo XV se pudieron establecer las relaciones de expresión $a\colon b = c\colon d$, incorporándose los conceptos actuales de razón y proporción.

V. Quinto obstáculo epistemológico

Este obstáculo responde a la algebrización de la geometría, donde se considera la semejanza como una traducción algebraica de la relación de elementos de una figura en un problema geométrico específico. Las relaciones que se establecen por este método, corresponden estrictamente a relaciones internas entre los elementos de la figura dada. Como por ejemplo la medida de sus ángulos, entre otros.

2.3 DEFINICIÓN FORMAL

Escudero (2005) hace un recorrido sobre el tratamiento de la semejanza en los documentos oficiales y los textos escolares de España, donde se explora la construcción y la relación entre la semejanza y la homotecia desde diferentes perspectivas. Se identifican por Lemonidis (1991, citado en Escudero 2005), tres aproximaciones distintas del concepto de semejanza, las cuales están relacionadas con los tres momentos históricos mencionados anteriormente:

a) Relación intrafigural: Se destaca la correspondencia entre elementos de una figura y los correspondientes de su semejante, en partícular esta definición aborda la semejanza de triángulos y se puede extender a otros polígonos. Está ausente la idea de transformar una figura en otra.

- Dos triángulos son semejantes si sus ángulos son respectivamente iguales y los lados proporcionales. Es decir: Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes si se tiene que $A = A'$, $B = B'$ y $C = C'$, $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$.

b) Transformación geométrica vista como útil: La transformación geométrica se percibe como una aplicación del conjunto de puntos del plano en el mismo. (Se utiliza la semejanza como útil en la resolución de problemas gráficos, como por ejemplo en la creación de planos, modelos a escalas, entre otros.)

- "Transformación de un espacio euclidiano por la cual para cualesquiera dos puntos A y B, y sus respectivas imágenes A' y B' tiene lugar la relación $|A'B'| = k|AB|$, donde k es un número positivo llamado razón de semejanza" (Vinográdov, Tomo 9-2, p.53).

c) Transformación geométrica como objeto matemático: Caracterizada porque hay un tratamiento en el que se busca la transformación resultante de dos o más transformaciones.

- "La semejanza (S) es el producto de una homotecia (H) por un movimiento (M), $S = H \cdot M$" (Martínez et al., 1984, p.364). Con movimiento el autor se refiere a las transformaciones isométricas, es decir, Traslación, rotación y simetría.

En estas tres definiciones se puede apreciar que persiste, ya sea de manera explícita o implícita, la idea de razón, esto se ve alterado por el orden curricular de los contenidos, pues dependiendo del caso la semejanza es una consecuencia de la homotecia, o bien, la homotecia es una consecuencia de la semejanza. En casi todos los textos expuestos por Escudero (2005) se utiliza el teorema de Thales como tema para generar conocimientos nuevos entorno a cualquier de estos dos conceptos

Dada la versatilidad de los contenidos, el siguiente mapa conceptual (ver figura 2.4) del concepto de semejanza, busca ser una herramienta de aprendizaje basada en la representación gráfica, con el fin de organizar y comprender de mejor manera los conocimientos asociados:

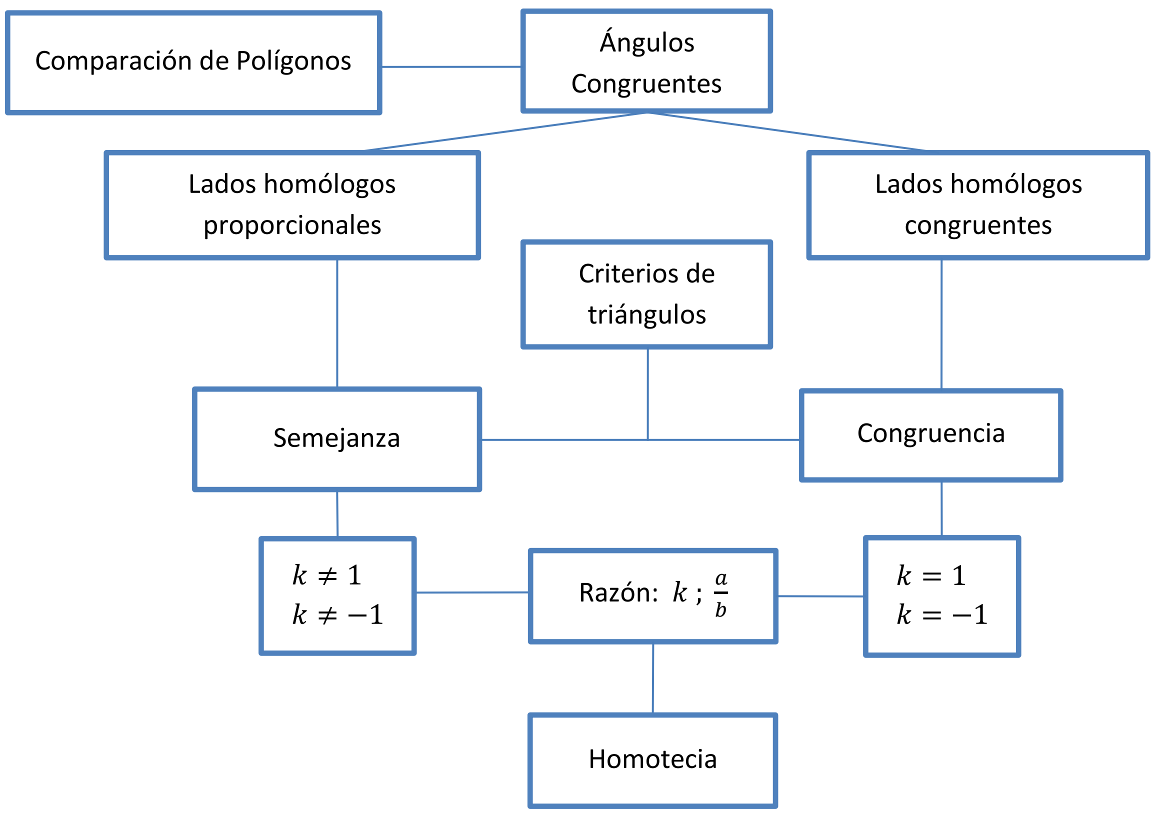


Figura 2.4: Mapa conceptual del concepto de semejanza

Fuente: Creación propia.

2.4 BASE CURRICULAR

Las Bases Curriculares en Chile establecen el marco de enseñanza en las distintas materias que debe otorgar el sistema educativo, ofreciendo así una base cultural común para todo el país mediante objetivos de aprendizaje establecidos para cada curso o nivel (MINEDUC, 2015). Las Bases Curriculares definen dos categorías de Objetivos de Aprendizaje, que complementariamente, tratan los conocimientos, habilidades y las actitudes de las y los estudiantes. Estos son los Objetivos de Aprendizaje Transversales que abarca todo el ciclo, y los Objetivos de Aprendizaje que abarca por curso y asignatura. Sin desmerecer el rol que cumplen los Objetivos de Aprendizaje Transversales, el análisis de recorrido curricular se centrará en los Objetivos de Aprendizaje de forma general en la geometría, y de forma particular en la construcción del conocimiento de la semejanza.

Los Objetivos de Aprendizaje están asociados principalmente al ámbito del desarrollo del conocimiento y la cultura, donde el o la docente, deberá orientar de manera prioritaria al estudiantado en el desarrollo del razonamiento matemático como una herramienta que favorezca la comprensión de las relaciones que se presentan en la vida diaria, actuando frente a problemas cotidianos con decisiones bien fundadas. En Geometría se espera que las y los estudiantes desarrollen sus capacidades espaciales y que entiendan que ellas les permiten comprender el espacio y sus formas. Para lograr esto, deberán comparar, medir y estimar magnitudes, y analizar propiedades y características de diferentes figuras geométricas de dos y tres dimensiones. Dentro de las habilidades que se busca desarrollar, se encuentra la descripción de posiciones y movimientos, usando coordenadas y vectores, obteniendo conclusiones respecto de las propiedades y las características de lugares geométricos de polígonos y cuerpos conocidos, por medio de sus representaciones. Transitando desde un ámbito bidimensional a uno tridimensional a partir de observar sus caras, bases, secciones, sombras y redes de puntos. Los y las estudiantes aprenderán a calcular perímetros, áreas y volúmenes al resolver problemas técnicos y cotidianos.

Al final del ciclo de Enseñanza Media, las y los estudiantes deberán ser capaces de apreciar y utilizar de manera adecuada y precisa las propiedades y relaciones geométricas, tendrán que ser competentes en mediciones geométricas y deberán poder relacionar la geometría con los números y el álgebra de manera armoniosa y concreta. Este eje presenta por primera vez las razones trigonométricas para que las alumnas y los alumnos tengan más herramientas para la resolución de problemas. Más aún, propone que comprendan las representaciones de coordenadas en el plano cartesiano y usen destrezas de visualización espacial. En este proceso de aprendizaje, las y los estudiantes deben utilizar diferentes instrumentos de medida para visualizar ciertas figuras 2D o 3D, recomendando tanto las construcciones manuales como las tecnológicas (MINEDUC, 2015).

De acuerdo a un recorrido realizado desde primero básico hasta segundo medio en las Bases Curriculares (Ver Tabla 2.1), se observa que no se habla de semejanza hasta primero medio, sin embargo se puede hacer un análisis en el que el concepto se construye desde el sexto básico, en donde las y los estudiantes deberán construir y comparar triángulos de acuerdo a la medida de sus lados y/o ángulos (MINEDUC, 2012). En los cursos posteriores se tratan contenidos que servirán como conocimientos previos para el concepto de homotecia en primero medio, para el cual se introducirán las propiedades de semejanzas para ser aplicadas en modelos a escala y en situaciones diarias de otras asignaturas. En segundo medio se espera que las y los estudiantes comprendan las razones trigonométricas de seno, coseno y tangente en triángulos rectángulos, relacionándolos con las propiedades de la semejanza. En la Tabla 2.1 se muestran los Objetivos de Aprendizajes asociado al concepto de semejanza.

Tabla 2.1

Objetivos de Aprendizaje de Semejanza desde Sexto Básico a Segundo Medio

<table>
<tr><th>6° Básico</th><th>7° Básico</th><th>8° Básico</th></tr>
<tr><td>OA 3: Demostrar que comprende el concepto de razón de manera concreta, pictórica, simbólica y/o usando software educativo.

OA 12: Construir y comparar triángulos de acuerdo a la medida de sus lados y/o sus ángulos con instrumentos geométricos o software geométricos.</td><td>OA 10: Descubrir relaciones que involucran ángulos exteriores o interiores de diferentes polígonos

OA 14: Identificar puntos en el plano cartesiano, usando pares ordenados y vectores de forma concreta (juegos) y pictórica.</td><td>OA 13: Describir la posición y el movimiento (traslaciones, rotaciones y reflexiones) de figuras 2D, de manera manual y/o con software educativo, utilizando: Los vectores para la traslación; Los ejes del plano cartesiano como ejes de reflexión; Los puntos del plano para las rotaciones.</td></tr>
<tr><th colspan="2">1° Medio</th><th>2° Medio</th></tr>
<tr><td colspan="2">OA 8: Mostrar que comprenden el concepto de homotecia: Relacionándola con la perspectiva, el funcionamiento de instrumentos ópticos y el ojo humano; Midiendo segmentos adecuados para determinar las propiedades de la homotecia; Aplicando propiedades de la homotecia en la construcción de objetos, de manera manuela y/o con software geométrico; Resolviendo problemas de la vida cotidiana y de otras asignaturas.

OA 9: Desarrollar el teorema de Tales mediante las propiedades de la homotecia, para aplicarlo en la resolución de problemas.

OA 10: Aplicar propiedades de semejanza y de proporcionalidad a modelos a escala y otras situaciones de la vida diaria y otras asignaturas.

OA 11: Representar el concepto de homotecia de forma vectorial, relacionándolo con el producto de un vector por un escalar, de manera manual y/o con software educativo.</td><td>OA 8: Mostrar que comprenden las razones trigonométricas de seno, coseno y tangente en triángulos rectángulos: Relacionándolas con las propiedades de la semejanza y los ángulos; Explicándolas de manera pictórica y simbólica, de manera manual y/o con software educativo; Aplicándolas para determinar ángulos o medidas de lados; Resolviendo problemas geométricos y de otras asignaturas.</td></tr>
</table>

CAPITULO III
MARCO CONCEPTUAL

En este capítulo se explicitan los conceptos teóricos desde el punto de vista de la didáctica en que se fundamenta este estudio y que se utilizarán para el análisis de datos. De esta manera se establecen tres temáticas a abordar: la primera se relaciona con el modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele; en la segunda temática se caracterizan los roles en las interacciones grupales de aprendizaje y por último se presentan orientaciones conceptuales para el análisis de género.

3.1 MODELO DE RAZONAMIENTO GEOMÉTRICO DE VAN HIELE

El modelo Van Hiele tiene origen a finales de la década del 50, fue diseñado y desarrollado en la publicación del libro *Structure and Insight* escrito por la pareja holandesa Dina y Pierre Van Hiele. Los Van Hiele postulan que el aprendizaje de la geometría se hace de manera continua y que atraviesa por una serie de niveles consecutivos de pensamiento y conocimiento, se sustenta en la capacidad de deducir y concluir nueva información en base a la ya conocida. Este modelo considera por una parte el rol del docente con la planificación de una secuencia de enseñanza enmarcada en las fases del modelo, y por otra parte considera al estudiantado que se ubica en un nivel dado al inicio del aprendizaje y, conforme va cumpliendo con las fases, profundiza o supera un nivel de razonamiento geométrico para pasar al siguiente.

El modelo de los Van Hiele considera fases y proporciona pautas para organizar el contenido y apoyar a los estudiantes en el desarrollo de su razonamiento. De acuerdo con Jaime (1993, citado en Gamboa y Vargas, 2013, p. 81) el modelo de Van Hiele abarca dos aspectos básicos:

- Descriptivos: Identifica cualidades que posee el estudiante según el nivel en el que se encuentran, y permite monitorear su progreso.
- Instructivos: Marca pautas a seguir por el docente para propiciar una evolución de los estudiantes en el razonamiento geométrico.

Este modelo caracteriza el razonamiento geométrico en cinco niveles de forma secuencial y gradual, una vez identificado el nivel en que se encuentra el estudiante, necesariamente avanza al siguiente en la escala, ya que ningún nivel es independiente del otro (Gamboa y Vargas, 2013). Del mismo modo, cada una de las fases es necesaria para poder avanzar de un nivel a otro como se muestra en la figura 3.1.

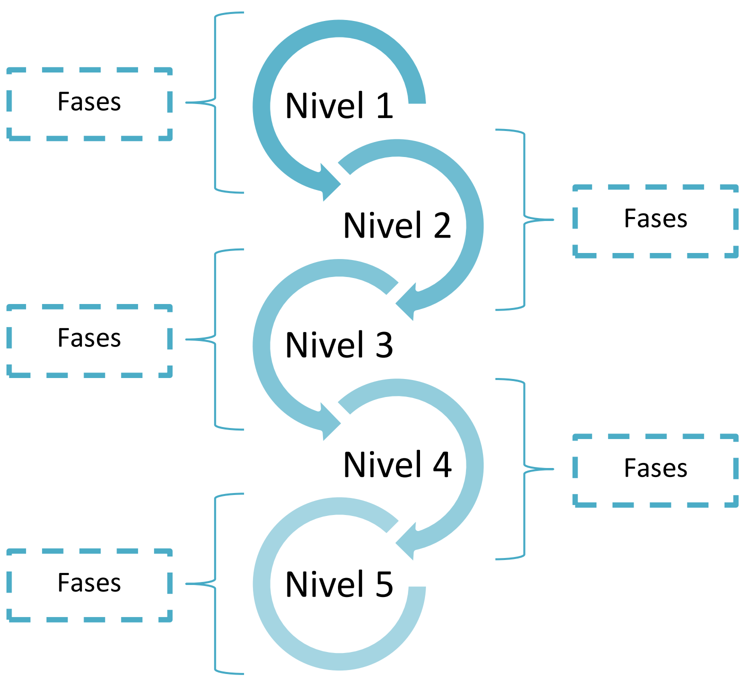


Figura 3.1: Forma secuencial y gradual del modelo de Van Hiele en relación a sus niveles de razonamiento geométrico y sus fases de aprendizaje.

Fuente: Creación propia.

Las siguientes definiciones de los niveles, las fases y los ejemplos, fueron extraídas de los artículos y textos de Aravena y Caamaño (2013), Fouz (2006), Gamboa y Vargas (2013), Gutiérrez y Jaime (1991).

3.1.1 NIVELES DE VAN HIELE

El modelo de Van Hiele postula cinco niveles de razonamiento en los cuáles se puede ubicar el estudiante, según la literatura pueden estar nombradas del 0 al 4, o bien, del 1 al 5. En esta investigación se utilizará la segunda nomenclatura.

Nivel 1: Visualización o Reconocimiento.

Es el nivel más elemental del razonamiento, en este los estudiantes perciben los objetos en su totalidad como una unidad, sin diferenciar sus atributos y componentes. Los reconocimientos, diferenciaciones o clasificaciones de figuras que realizan, se basan en semejanzas o diferencias físicas globales entre ellas. No hay un lenguaje geométrico básico para llamar a las figuras por su nombre correcto. Este nivel está más asociado a la percepción de los estudiantes respecto a las figuras.

Ejemplo: El estudiante de este nivel identifica cuadrados, rombos y rectángulos, etc. por su posición, un cuadrado después de girarlo es un rombo (Jaime & Gutiérrez, 1991).

Nivel 2: Análisis

En este nivel es donde se presenta por primera vez un tipo de razonamiento formal matemático, aquí los estudiantes son capaces de percibir los objetos formados por partes y que están dotados de propiedades, aunque no identifica las relaciones entre ellas. Pueden describir los objetos de manera informal, mediante el reconocimiento de sus componentes y propiedades, pero no son capaces de hacer clasificaciones lógicas. Deduce nuevas relaciones entre componentes o nuevas propiedades de manera informal a partir de la experimentación.

Ejemplo: El estudiante identifica un rectángulo como un polígono dotado de un número de propiedades matemáticas: tiene cuatro lados paralelos dos a dos, con cuatro ángulos rectos, con diagonales iguales que se cortan en el punto medio, etc, pero no se da cuenta de que unas propiedades están relacionadas con otras. No es capaz de relacionar inclusivamente los diferentes tipos de cuadriláteros, sino que lo sigue percibiendo como clases disjuntas (Jaime, 1991)

Nivel 3: Clasificación.

En este nivel se realizan clasificaciones lógicas de los objetos y se descubren nuevas propiedades con base en propiedades o relaciones ya conocidas y por medio de razonamiento informal. Describen las figuras de manera formal, es decir que el individuo comprende el papel de las definiciones y los requisitos de una definición correcta. Comprende lo pasos individuales de un razonamiento lógico de forma aislada, pero no comprende el encadenamiento de estos pasos ni la estructura de una demostración.
Ejemplo: Clasifica cuadriláteros a partir de sus propiedades; ya reconoce que cualquier cuadrado es un rectángulo, pero que no todos los rectángulos son cuadrados. Puede deducir unas propiedades a partir de otras como: Si sus lados opuestos son iguales entonces sus lados son paralelos, si todos sus ángulos son congruentes entonces son paralelos (Jaime, 1991).

Nivel 4: Deducción formal.

En este nivel el estudiante desarrolla la capacidad de razonamiento lógico matemático, permitiéndoles realizar demostraciones formales de aquellas propiedades que antes habían "demostrado informalmente" Así como también descubrir y demostrar nuevas propiedades. Además de entender la estructura axiomática de las matemáticas y acepta la posibilidad de llegar al mismo resultado desde distintas premisas (definiciones equivalentes).
Ejemplo: En este nivel maneja las propiedades de los cuadriláteros y los relaciona dentro de un contexto formal, por ejemplo puede demostrar formalmente cualquiera de los teoremas que ya ha visto. Puede comprender la existencia de definiciones de una figura, analizarlas y relacionarlas.

Ejemplo: Cuando dice que un rectángulo es un cuadrilátero cuyas diagonales son iguales y se cortan en sus puntos medios, o si un rectángulo es un cuadrilátero que tiene los ángulos rectos (Jaime, 1991).

Nivel 5: Rigor.

En este nivel el estudiante debe trabajar sistemas axiomáticos distintos del usual, es decir, debe manejar, analizar y comparar diferentes geometrías.

Respecto a este nivel, Jaime (1991) señala que investigaciones posteriores a la creación del modelo han mostrado inconsistencias de este en relación a los cuatro niveles anteriores. Además indica que la presencia de este nivel apenas aporta nada, desde un punto de vista práctico al Modelo.

3.1.1 FASES DE APRENDIZAJE DE VAN HIELE

Las fases de aprendizaje son propuestas como una secuencia cíclica que guía a los estudiantes a avanzar a través de un nivel y lograr alcanzar el siguiente, en efecto si las y los estudiantes se encuentran en el nivel 1 y experimentan completamente las fases, podrán avanzar al nivel 2. Son cinco fases que orientan cómo el docente debe actuar para garantizar el aprendizaje de sus estudiantes, tal como se muestra en la tabla 3.1:

Tabla 3.1

Fases de aprendizaje según modelo Van Hiele

Fases	***Características***
Fase 1: Información	Se coloca el énfasis en la visualización y en la comparación de objetos, se enuncian características de manera informal.
Fase 2: Orientación dirigida	Se identifican características, se reconocen propiedades y establecimiento de relaciones.
Fase 3: Explicitación	Intercambio de experiencias, comentar las regularidades encontradas, las propiedades, explicitación del trabajo realizado.
Fase 4: Orientación libre	Aplicación de los conocimientos a situaciones nuevas, pero con estructura comparada. Problemas más abiertos, más complejos, con una, varias o ninguna solución. Consolidación de las etapas anteriores.
Fase 5: Integración	Visión global de lo aprendido, integrando los nuevos conocimientos y métodos de trabajo. Se trata de la organización de los conceptos, definiciones, propiedades o relaciones adquiridas en las fases anteriores.

3.2 ROLES EN LAS INTERACCIONES GRUPALES

El proceso de aprendizaje del estudiante dentro del aula, no solo se ve influenciado por la relación estudiante-profesor, sino que las interacciones con sus pares influyen directamente en el desarrollo de conocimiento, sobre todo si trabajan en grupos. Krummheuer (2011) señala que los procesos de interacción en clases involucran estructuras de conversación relativamente complejas y que no están adecuadamente conceptualizadas por la estructura diádica de la interacción cara a cara.

Para abordar el análisis de las interacciones, se utiliza el trabajo de Krummheuer (2007, 2011) donde caracteriza el aprendizaje individual del estudiante mediante la participación dentro de un aula de matemáticas utilizando las construcciones de *diseño de producción y receptor* (Rasmussen, Wawro, Zandieh, 2015). Krummheuer (2011) indica que:

> “Para el concepto de orador, se introducirá el término "diseño de producción" que designa a cualquier persona que esté involucrada en la producción de un enunciado y el rol de esa persona cuando él / ella participa en esta producción. De manera similar, el concepto de oyente será reemplazado por el término "diseño del receptor", que indica el estado diferente que es evidente cuando otro participante se dirige al participante en la interacción”. (p 88)

Más adelante estos conceptos serán clarificados en un ejemplo para su mejor comprensión.

Tanto los diseño de producción como de receptor tiene subcategorías en la que se pueden clasificar a las y los integrantes de un equipo según su participación dentro de la conversación, cabe señalar que estas subcategorías pueden ser permanentes o rotativas. Las siguientes explicaciones son extraídas de Krummheuer (2011).

3.2.1 CONCEPTOS DEL DISEÑO DE PRODUCCIÓN:

Un orador puede heredar la responsabilidad de una idea, o bien, reclamar la originalidad de esta al hablar, dependiendo de la presencia o ausencia de dos componentes que hay en una expresión.

- La estructura sintáctica con una selección de palabras específica y forma (función de formulación) y/o
- La contribución (función del contenido) relacionada con el contenido (semántica).

Si un orador es responsable de ambos componentes (sintácticamente y semánticamente) de su expresión, entonces lo llamamos “autor” de la expresión. Los oradores que no se responsabilizan ni tienen originalidad por el contenido semántico de sus expresiones, los llamamos “retransmisor” de una expresión. Si un orador hereda la formulación idéntica de las partes de un enunciado anterior (sintáctica) y con ellos trata de expresar su propia idea haciéndose cargo de la originalidad del contenido, entonces llamamos al orador “fantasma”. Si un orador hereda la idea de un enunciado anterior (semántica) y luego trata de expresar esta idea con su propia formulación, lo llamaremos “vocero”. En la tabla 3.2 se presentan las categorías de los diseños de producción. Para identificar si un orador contiene responsabilidad de contenido y/o formulación, se expresa con el signo (+) para señalar su presencia y el signo (-) para señalar su ausencia en cada categoría.

Tabla 3.2
Diseño de producción de Krummheuer (2011)

Categorías	Responsabilidad por el contenido de un enunciado	Responsabilidad de la formulación de un enunciado.
Autor	+	+
Retransmisor	-	-
Fantasma	+	-
Vocero	-	+

3.2.2 CONCEPTOS DEL DISEÑO DEL RECEPTOR

El interlocutor a quién el hablante asigna el derecho de asumir el turno siguiente, lo caracterizaremos como “compañero de conversación”. Por lo general, este estado del destinatario está asociado con la obligación de un alto nivel de atención. Aquellos que también son abordados, pero no se asume que son los siguientes oradores y podrán participar más tarde, los llamaremos “oyentes”. Aquellos que son tolerados por el orador, pero no se considera que participen de la misma manera en la conversación, son los llamados “sobre-oyentes”. Los oyentes excluidos deliberadamente del enunciado serán llamados “espías”.

Estos cuatro roles del receptor se presentan en la tabla 3.3:

Tabla 3.3

Diseño de recepción Krummheuer (2011)

<table>
<tr><th colspan="4">Accesibilidad a un enunciado</th></tr>
<tr><td colspan="2">Participación directa del destinatario a la emisión.</td><td colspan="2">Participación no directa del destinario de la emisión</td></tr>
<tr><td>Dirigido
por el orador</td><td>No dirigido
por el orador</td><td>Tolerado
por el orador</td><td>Excluido
por el orador</td></tr>
<tr><td>Compañero de conversación</td><td>Oyentes</td><td>Sobre-oyentes</td><td>Espías</td></tr>
</table>

3.2.3 EJEMPLO DE ANÁLISIS CON LOS DISEÑOS DE PRODUCCIÓN Y RECEPTOR

El siguiente ejemplo es extraído de Krummheuer (2011, p.84) en el que se estudia la cooperación emergente entre dos estudiantes de tercer grado en una clase de matemáticas de edades múltiples. Thekla (tercer grado), Jakob (primer grado), Lenni y Salih (ambos estudiantes de segundo grado) están sentados juntos con la tarea de trabajar en su horario semanal. En estas mesas mixtas por edad, se les permite ayudarse mutuamente o buscar ayuda en otra mesa.

Thekla está trabajando en su tarea de matemáticas y ya ha terminado dos de sus tareas, cuando Steven (tercer grado) se acerca a la mesa. La transcripción que se muestra en la tabla 3.4 muestra solo las piezas de interacción adecuadas en la mesa que pertenecen a la conversación de Steven y Thekla. Por esta razón, hay saltos en la numeración de líneas. Los estudiantes han recibido tres ejercicios: (i) 360/90, (ii) 90/30 y (iii) 210/30. La transcripción solo trata con el trabajo en la primera tarea.

La transcripción original considera elementos como subidas, bajadas de tono, énfasis en ciertas palabras, movimientos, entre otros. Sin embargo para efectos del ejemplo y de la traducción, se ha omitido parte de la simbología.

Tabla 3.4

Diseño de recepción

67	Thekla	*Mirando hacia Steven* No lo sé (inentendible)
68	Thekla	Di de nuevo que tanto cabe 4 en el 36
79	Steven	En el 34
80	Thekla	En el 36 *con los dedos*, cuatro, ocho, doce, dieciséis
83	Steven	dos y siete cinco veces veinticuatro
84	Thekla	veinte, veinticuatro, veintiocho
85	Steven	treinta dos, treinta y seis nueve
86	Thekla	treinta dos, treinta y seis *saca la tapa de su lápiz, escribe*
89	Thekla	*Mientras escribe a Steven* ¿Qué pasa?
90	Thekla	*Se inclina hacia atrás por un segundo, cuenta dos dedos y vuelve a escribir*
97	Steven	tres en el nueve
98	Thekla	*Con sus dedos* tres seis nueve
99	Steven	nueve por tres, pero ese es fácil
103	Steven	*Hacia Thekla* es correcto o estás son tareas muy fáciles

A continuación en las siguientes dos secciones, se muestra el análisis de producción y reproducción de la tabla 3.4

a) Análisis del diseño de producción de la escena.

Thekla y Steven no comunican la idea de dividir el problema total en problemas más pequeños mediante la cancelación de los ceros. Esto solo se introduce en la interacción a través de la pregunta inicial de Thekla. Esta idea es iniciada por Thekla en su papel de autora a través de la formulación de la primera tarea de “cuatro en treinta y seis” en la línea <80> de la escena. Esta idea es retomada nuevamente para las siguientes tareas, de modo que los otros niños puedan ser vistos como voceros, con Thekla como iniciadora.

Alternativamente, Steven debe haber retomado su idea ya que fue capaz de reconstruir por sí mismo, donde estaba Thekla. Debe cerrar la brecha de "cuatro a treinta y seis" <80> a la tarea absoluta de 360/40, para poder encontrar la siguiente tarea en el libro. Para esta inferencia, puede ser visto como un fantasma de una idea.

Los niños calculan los resultados de los cocientes reducidos a través de la tabla de multiplicar como un paso más en el cálculo. Aunque enumeran los resultados parcialmente de forma sincrónica y asincrónica, no parecen estar imitándose unos a otros, sino que

expresan la idea de la tabla de tiempos al mencionar los hechos numéricos. El listado de la tabla de tiempos también se ajusta a la interpretación del problema de división como "con qué frecuencia se ajusta (*el divisor*) en (*el dividendo*)" que es formulado por primera vez por Thekla en <68>. Steven incluso más tarde recoge esta interpretación. Para ambos, es evidente que las tareas se pueden resolver de esta manera, expresada al menos en la acción de Thekla de anotar la solución de alguna forma en su cuaderno.
En resumen, este trabajo colectivo se puede describir con vistas al diseño de producción de la siguiente manera:

Thekla se puede caracterizar como el iniciador del esquema de trabajo de "cancelación y listado de las filas", un esquema al que se adhiere a lo largo de la tarea. Ambos chicos tanto por separado, como en pareja producen en un ‘dúo’ el listado de las filas como una estrategia de cálculo de la determinación de los cocientes. Para ser estudiantes de tercer grado, están logrando un enfoque de solución rutinariamente estandarizado.

Si se observa el modelo de cálculo que se estabiliza entre Thekla y Steven, queda claro que casi todos los pasos de Thekla se activan en la función como autor y que Steven toma las ideas de manera ejecutiva como vocero. El modelo de cálculo es proporcionado por Thekla y Steven ya no se cuestiona en su idoneidad. Por lo tanto, Thekla no recoge nuevas ideas, lo que podría haberle ofrecido una posibilidad sustancial para aprender. Esto podría ser diferente con Steven, ya que finalmente (no incluido en esta transcripción; vea Krummheuer & Brandt 2001, pág. 135 y siguientes) refina la estrategia de cumplimiento al referirse a los hechos de números multiplicativos de los problemas de división en una forma cancelada. Por ejemplo, a su pregunta "que tanto cabe el 3 en el 21" en el último problema 210/30, sugiere

128	Steven	Solo tienes que hacer 3 por 7

Aquí, Steven actúa en el estatus de un autor. Se puede suponer que Steven finalmente descubrió que una tarea de división se puede reformular como una tarea de multiplicación y que luego se puede (relativamente) aplicar fácilmente los hechos conocidos de la tabla de multiplicar.

b) *Análisis del diseño de receptor de la escena.*

Thekla está trabajando en la tarea 360/90. Primero le hace a Steven una pregunta con “No sé (ininteligible)”. Vuelve a preguntar cuánto cabe el cuatro en el treinta y seis'' '<67, 68> y le pregunta con esta afirmación por la solución de una tarea de división que realmente está conectada en un proceso de solución más complejo que la tarea real en cuestión. Selecciona a Steven solo a través del contacto visual <67-68> como compañero de conversación. Steven confirma esta selección en <79>; él mismo selecciona a Thekla como compañero de conversación y muestra con su reacción (tanto temática como socialmente) que ha notado que Thekla se ha dirigido a él y ha aceptado.

Thekla vuelve a seleccionar a Steven como compañero de conversación para el proceso de resolución de la subtarea de 36/4. Thekla toma nota del resultado de esta subtarea y luego cuenta silenciosamente con sus dedos para la solución de la siguiente tarea, sin involucrar a Steven directamente en el proceso de escritura o en sus cálculos. Se le puede referir en este estado como un sobre-oyente. En este estado asignado, sigue atentamente el proceso de trabajo de Thekla y extrae de este proceso información suficiente para volver a Thekla como *compañero de conversación* para la siguiente tarea con "tres en nueve" <97>.

Thekla acepta el cuidadoso seguimiento de la conversación por parte de Steven y, posteriormente, la utiliza para involucrarlo en el proceso de solución para las próximas tareas. En el procesamiento de las siguientes tareas (que no se encuentran en el extracto de la transcripción), el cálculo de los resultados parciales se realiza casi por completo por Steven. A continuación, nombra casi inmediatamente la tarea de división acortada y el resultado parcial respectivo, y de esta manera puede volver a los datos de números multiplicativos recolectados. Thekla recibe los resultados parciales como un compañero de conversación y los incorpora a la solución general.

Mientras tanto, los alumnos de segundo grado, Lenni y Salih, están trabajando en una tarea de pintura diferente y están logrando una conversación que aparentemente es relativamente independiente de la conversación entre Thekla y Steven. No hay más información sobre las actividades de Jakob, un estudiante de primer grado. Parece trabajar independientemente en su hoja de trabajo. Desde la perspectiva de la conversación entre Thekla y Steven, los alumnos de segundo grado Lenni y Salih y el alumno de primer grado Jakob son tolerados sobre-oyentes. Ni Thekla ni Steven se dirigen directamente a estos tres compañeros de clase en su mesa, aunque Lenni, Salih y Jakob son capaces de seguir acústicamente las declaraciones producidas por Thekla o Steven. La transcripción no proporciona ninguna indicación de que se hayan hecho una idea de esta conversación. Sin embargo, tendrían la oportunidad de aprender o al menos recapitular una parte de la fila de cuatro (4 - 8 - 12 - 16 y 24 - 28), un enfoque estratégico para un problema de división (cuanto cabe 4 en 36), y, además, en el nivel social, podrían aprender cómo involucrar a un compañero en los propios intentos de resolución de problemas.

Estos roles explicados y ejemplificados anteriormente se identificarán, en este trabajo, en las y los estudiantes en su interacción grupal de aprendizaje, lo cual dará evidencia de cómo se desarrollan al expresar una opinión en un contexto entre pares. Más importante aún, se destacarán las participaciones que hombres y mujeres presentan en los grupos, y como esta se puede ver afectada por las cargas culturales del género.

3.3 ORIENTACIONES CONCEPTUALES PARA EL ANÁLISIS DE GÉNERO

Dentro de las últimas reformas en materia de educación en Chile, se creó la Unidad de Equidad de Género (UEG) que tiene como función principal impulsar la incorporación de la perspectiva de género en las políticas, planes y programas ministeriales, con el fin de promover una educación pública de calidad e inclusiva que permita el desarrollo integral y equitativo de niños, niñas y jóvenes del país (MINEDUC, 2017).

En este marco de acción la UEG diseñó material de apoyo para los avances en esta materia, entre ellos un documento llamado "Comuniquemos para la igualdad", el cual tiene un ítem que incorpora orientaciones conceptuales para una mejor comprensión del análisis de género, a saber:

> El análisis de género consiste en un examen crítico de cómo los roles, actividades, necesidades, oportunidades y derechos/prerrogativas afectan a hombres, mujeres, niñas y niños y diversas identidades de género y orientaciones sexuales en ciertas situaciones o contextos. El análisis de género examina las relaciones entre personas y su acceso y control de los recursos, así como las limitaciones de unas con respecto de los otros. En todas las evaluaciones sectoriales o análisis situacionales se debe integrar un análisis de género para asegurar que las intervenciones no exacerben las injusticias y desigualdades de género y que, cuando sea posible, se promueva mayor igualdad y justicia en las relaciones de género. (MINEDUC, 2017, p.17)

De acuerdo a la definición anterior, se recurre a los siguientes conceptos clave del documento ya antes mencionado:

Las ***categorías de género*** resultan útiles en los análisis de género, ya que identifican las condiciones que deben enfrentar niñas y niños durante su recorrido educativo. Estas condiciones se definen a partir de creencias sociales y atribuciones culturales en las que se asocia lo femenino y lo masculino al sexo biológico. El concepto de género constituye un sistema de roles definidos de manera excluyente el ser hombre o mujer, determinando la vida personal y social.

El ***enfoque de género*** por tanto, es una forma de observar la realidad basándose en las variables sexo, género y sus manifestaciones en determinados contextos.
En esta investigación, el enfoque de género se enmarca en el contexto educativo.

Como bien se esbozó en el primer capítulo de esta investigación, las instituciones educativas son el segundo espacio socializador para la formación de ciudadanos y ciudadanas. En este sentido el ***currículum oculto de género*** hace referencia a aquellos aprendizajes que las y los estudiantes incorporan pero que no necesariamente se encuentran en el currículum oficial. De esta manera estos aprendizajes pueden ser transmitidos en cualquier entorno social, pues lo que se aprende día a día no necesariamente está determinado solo por lo que entregan las instituciones educativas, sino que también por otras experiencias de la vida diaria.

Parte de estos aprendizajes se dan en un marco de ***estereotipos de género***, el cual determina las creencias populares sobre roles y rasgos que caracterizan a hombres y mujeres. Este concepto cobra sentido cuando se asocia popularmente que “los niños son mejores para las matemáticas”, siendo relacionados a una característica racional, en cambio “las niñas son mejores en lenguaje”, ya que son asociadas a una característica emotiva, menos racional.

De esta manera las y los estudiantes durante su formación escolar se apropian de esas creencias asociadas a los roles de género, constituyéndose como uno de los factores que favorecen el desarrollo de las ***brechas de género****,* las cuales evidencian que existen desigualdades en los ámbitos del desarrollo personal. En particular en este estudio se observa el desarrollo del aprendizaje en un ámbito educativo donde las brechas se relacionan con los niveles de participación, el acceso a oportunidades, a derechos, beneficios, entre otros correspondientes al bienestar y desarrollo humano.

Los conceptos mencionados que orientan el análisis de género de esta investigación, complementando la metodología de la investigación, el análisis de datos y las conclusiones tanto para el modelo de Van Hiele como para las interacciones grupales del modelo de Krummheuer.

CAPITULO IV
METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN

En el presente capítulo se aborda el método de investigación y su enfoque, la descripción de participantes y su contexto educacional, los instrumentos de recolección de información que se utilizaron, la propuesta de la secuencia de enseñanza, la metodología de análisis de datos y por último la validación de los resultados de este estudio.

4.1 TIPO DE METODOLOGÍA

Esta investigación se llevó a cabo siguiendo una metodología cualitativa, que como señala Sadín (2003) “es una actividad sistemática orientada a la comprensión en profundidad de fenómenos educativos y sociales, a la transformación de prácticas y escenarios socioeducativos, a la toma de decisiones y también hacia el descubrimiento y desarrollo de un cuerpo organizado de conocimiento (citado en Bisquerra, 2009, p. 276)”. De acuerdo a esto último, esta investigación pretende explorar el razonamiento geométrico mediante la descripción y análisis del impacto de la secuencia de enseñanza, y vislumbrar las interacciones entre hombres y mujeres cuando trabajan en equipos.

4.2 DESCRIPCIÓN DE PARTICIPANTES

Las y los participantes eran de un curso compuesto por 14 hombres y 14 mujeres estudiantes de primero medio de un colegio de la comuna de Quilpué ubicado en la región de Valparaíso, de un intervalo de edad entre los 14 y 16 años.

Se consideró este nivel educativo, ya que la propuesta de secuencia de enseñanza se creó para abordar el Objetivo de Aprendizaje (OA10) correspondiente a este nivel, según los planes y programas del MINEDUC, el cual dice: “Aplicar propiedades de semejanza y de proporcionalidad a modelos a escala y otras situaciones de la vida diaria y otras asignaturas”.

4.3 DESCRIPCIÓN DE INSTRUMENTOS

Como instrumento para la recolección de datos se utilizó material de registro escrito que fue diseñado con orientación en el modelo de Van-Hiele para el razonamiento geométrico:

- Un test de evaluación pre test [E1] y post test [E2], con preguntas de nivel 1 a 3. Que además incluye dos preguntas de percepción personal sobre estereotipos de género.
- Una guía de nivel 1 [A1], de visualización o reconocimiento.
- Una guía de nivel 2 [A2], de análisis por partes.
- Dos guías de nivel 3 [A3] y [A4], de clasificación con base en propiedades o relaciones ya conocidas.

El detalle de cada guía se explica en la implementación de la secuencia de enseñanza. Por otro lado, se realizó una coevaluación grupal respecto al trabajo desempeñado por quienes conforman cada equipo, además de grabaciones de audio a las interacciones de algunos grupos de trabajo.

4.4 PROPUESTA DE SECUENCIA DE ENSEÑANZA

La propuesta de secuencia de enseñanza constituye una parte de la investigación, la cual está enmarcada en el Objetivo de Aprendizaje 10 (OA10) de geometría para el nivel de primero medio, el cual busca que las y los estudiantes “apliquen propiedades de semejanza y de proporcionalidad a modelos a escala y otras situaciones de la vida diaria y otras asignaturas” (MINEDUC, 2015), incluyendo la congruencia como caso particular de la semejanza.

La recopilación de datos de la investigación se realiza a lo largo de siete sesiones, las que a su vez se dividen en tres etapas: la primera etapa que contempla una sola sesión, tiene por objetivo diagnosticar, la segunda etapa que contempla cinco sesiones, tiene por objetivo aplicar el modelo de Van Hiele y observar las interacciones grupales entre hombres y mujeres, y la tercera etapa que contempla una sesión, tiene por objeto evaluar resultados de la implementación. A continuación se describe cada una de ellas:

- Etapa I (Una sesión): Se realiza una dinámica de presentación personal entre el grupo a estudiar y quienes implementan la secuencia de enseñanza, luego se conforman los grupos de trabajo permanente y se finaliza con la aplicación del pre-test [E1] (ver Anexo).

- Etapa II (Cinco sesiones): En esta etapa se desarrollan cinco clases que transitan desde el nivel 1 al nivel 3 de Van Hiele, tal como se muestra en la Tabla 4.1.

Tabla 4.1
Distribución de actividades en la Etapa II

CLASE	N°1	N°2	N°3	N°4	N°5
ACTIVIDADES	A0 A1 Revisión A1 A2	Continuación A2 Contenido de criterios de Congruencia y Semejanza de triángulos	Continuación de contenidos Revisión A2 A3	Coevaluación Revisión A3 A4	Continuación A4 Revisión A4 Repaso de A1, A2 y A3.
NIVEL	1 – 2	2	3	3	3

En la primera clase se inicia con una actividad introductoria [A0] para explorar conocimientos previos de los conceptos a trabajar, seguido de dos guías [A1] y [A2], cada una para el nivel 1 y 2 respectivamente. En la segunda clase se continúa con la guía [A2] y se enseñan contenidos de criterios de congruencia y semejanza de triángulos, los cuales se finalizan en la tercera clase. Se sigue con la siguiente clase correspondiente a la número tres con la revisión de [A2], para finalizar con la guía [A3]. En la cuarta clase se realiza una coevaluación en cada grupo, se revisa [A3] y luego se finaliza con la guía [A4]. Por último, en la quinta clase, se continúa con la guía [A4] y se hace revisión de la misma, además de hacer un repaso de las guías [A1], [A2] y [A3]. Todas las actividades completas se muestran en Anexo. En esta etapa se realizan grabaciones de audio desde la primera a la quinta clase, registrando las interacciones de un grupo por clase.

- <u>Etapa III (Una sesión):</u> Finalizada las clases, se da paso a un post-test [E2] que es aplicado al grupo curso. Cabe recordar que [E1] y [E2] son el mismo test evaluativo (ver Anexo).

De acuerdo a las Bases Curriculares en geometría, en el capítulo dos de este estudio se hace referencia al barrido curricular de la construcción del aprendizaje de semejanza.

4.5 GESTIONES PARA LA IMPLEMENTACIÓN DEL EXPERIMENTO

Para la implementación de la secuencia de enseñanza se realizaron gestiones previas en el establecimiento educacional con las autoridades pertinentes, las que se especifican a continuación:

1. Reunión con sub director del colegio de Quilpué con el objetivo de entregar la carta de solicitud para la implementación de la secuencia de aprendizaje en un curso de primero medio que el establecimiento estime facilitar.
2. Reunión con profesora de matemática del colegio de Quilpué con el fin de explicar el objetivo de la investigación, contenido a tratar, horarios de asignatura, calendario y obtención de datos preliminares del curso a investigar.
3. Segunda reunión con profesora de matemática para explicar y comentar la planificación de la implementación de la secuencia de enseñanza, material a utilizar para recopilación de datos y calificación del aprendizaje con formato y escala de puntajes acorde a las normas del establecimiento.

Tras las reuniones antes mencionadas, se llegó a acuerdo con el establecimiento y con la profesora de matemática del curso que el Colegio puso a disposición para la implementación de la secuencia de enseñanza.

4.6 METODOLOGÍA DE ANÁLISIS DE DATOS

La metodología para el análisis de datos es un procedimiento clave para analizar los resultados obtenidos en el proceso de recopilación de información. En esta sección se explica cómo se sistematizó la información, relacionándola con las preguntas de investigación mencionadas en el primer capítulo de este documento, así como también las respuestas expertas y posibles estrategias de las y los estudiantes en el material pedagógico aplicado en las distintas etapas de la secuencia de enseñanza, que complementaran oportunamente el análisis de datos.

4.6.1 METODOLOGIA DE ANÁLISIS DE DATOS POR PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

A manera de dar respuesta a las preguntas de investigación, el análisis de datos se realiza desde dos perspectivas; por un lado se analizan los efectos de la secuencia de enseñanza en hombres y mujeres según los niveles de razonamiento geométrico de Van Hiele y por otro lado se analizan las interacciones entre hombres y mujeres de acuerdo a los roles definidos según Krummheuer(2007,2011), las cuales son explicadas con una perspectiva de género.

A) EFECTOS DE VAN HIELE EN HOMBRES Y MUJERES

Para dar respuesta a la pregunta de investigación:

¿Qué efectos tiene, en el razonamiento geométrico de hombres y mujeres, la implementación de una secuencia de enseñanza con el modelo de Van Hiele?

Se analizan las respuestas al pre test [E1] y post test [E2], y se identifican los niveles de adquisición de conocimiento según la categorización de razonamiento geométrico de Van Hiele. Para ello se organizaron y codificaron las respuestas escritas a los test de la siguiente manera:

- Para la codificación de tipos de respuestas según conocimiento y precisión matemático, grados de adquisición y ponderación en cada nivel de Van Hiele se utilizó la tabla 4.2. Esta tabla nace de una propuesta realizada por Jaime (1993) que está citada en Jaime y Caamaño (2013), en la que categoriza y jerarquiza el razonamiento geométrico y los grados de adquisición, relacionando el tipo de respuesta de las y los estudiantes desde el punto de vista del conocimiento matemático con 7 Tipos de Respuestas. La tabla incluye otras codificaciones en relación a los grados de adquisición ponderándose de 0 a 100, para efectos de esta metodología de análisis de datos, dicha ponderación no será utilizada. De todas maneras será incluida en la siguiente tabla para su conocimiento:

Tabla 4.2

Tipos de respuesta según conocimiento matemático, grados de adquisición y ponderación en cada nivel de Jaime (1993), citado en Aravena y Caamaño (2013).

Tipos de respuestas	**Conocimiento y precisión matemática**		**Grado de adquisición**	**Ponderación**
	Incorrecto	**Correcto**		
Tipo 1	Su respuesta es no codificable o no contesta		Nulo	0
Tipo 2	Respuesta inconsistente y muy incompleta		Bajo	20
Tipo 3		Respuesta muy incompleta, breve y pobre, aunque muestra indicios de cierto nivel de razonamiento	Bajo	25
Tipo 4		Respuesta que refleja dos niveles de razonamiento. Presentando ideas de distintos niveles que abarca la pregunta	Intermedio	50
Tipo 5	Respuesta muy completa, donde predomina un cierto nivel de razonamiento. La incorrección se debe a que contiene algunos errores matemáticos o que sigue una línea de trabajo que no lleva a la solución del problema.		Alto	75
Tipo 6		Respuesta bastante completa, pero no llegan a responder el problema totalmente, porque hay “saltos” en el proceso o faltan argumentos.	Alto	80
Tipo 7		Respuesta muy completa. Da solución total al problema.	Completo	100

- Luego de la clasificación de las respuestas tipo, se ingresan en una tabla de frecuencia según los resultados de las y los estudiantes, para luego representarlos con un gráfico que distingue las respuestas por sexo (hombres y mujeres), y sus totales como grupo curso. Este procedimiento se realiza para el análisis de las siete preguntas del pre test [E1] y post test [E2].

B) INTERACCIONES GRUPALES EN HOMBRES Y MUJERES

Para dar respuesta a la segunda pregunta de investigación:

¿Cómo interactúan hombres y mujeres de forma grupal cuando resuelven problemas de geometría?

Se analizan los diálogos entre las y los estudiantes mientras respondían a las tareas que se propusieron en la secuencia de enseñanza.

De la Etapa II, se analizaron las transcripciones de las conversaciones de las y los estudiantes en las clases 1, 3 y 4, considerando los grupos 7, 2 y 1 respectivamente. Para este análisis se organizó la información de la siguiente manera:

- Para al análisis de los diseños de producción, Krummheuer (2007, 2011), se utilizó la tabla 4.3, donde la primera columna (izquierda a derecha) se encuentra el nombre de la persona oradora y la función que este desempeña. Luego, en la siguiente columna, se escribe la declaración textual de quien está orando, indicando en la parte inferior la persona responsable de provocar dicha declaración, y al final se halla la última columna en la que se puede extraer la idea matemática tras la declaración. Para efectos de este estudio, la categorización solo se realiza con material de audio, por lo que en caso de haber escritos en *cursiva,* se refiere a una acción de la persona que realiza la declaración. Aclarar además, que en caso de intervenciones de Profesor, éste no es analizado.

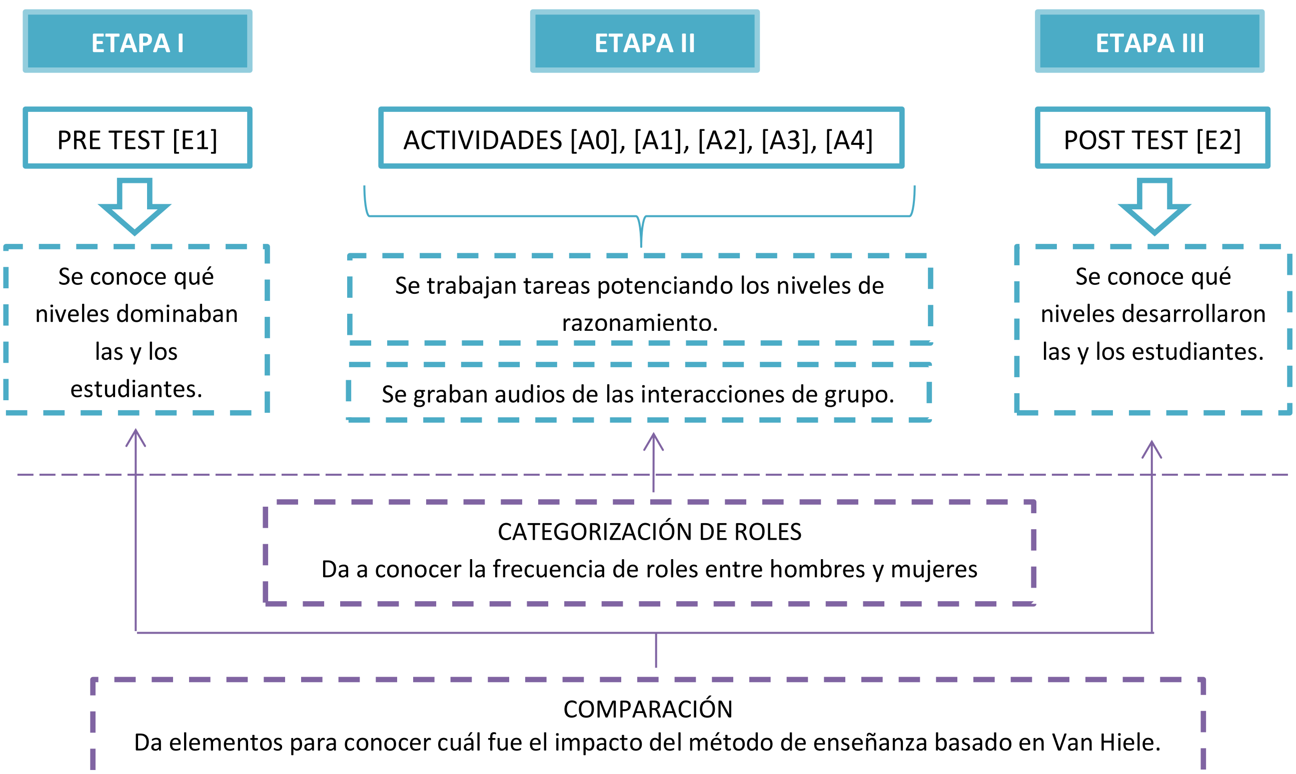
Tabla 4.3
Categorización para los diseños de producción, citado en Krummheuer (2007, 2011)

<table>
<tr><td rowspan="2">Orador y su función</td><td>Declaración</td><td rowspan="2">Idea de la declaración</td></tr>
<tr><td>Persona responsable</td></tr>
</table>

- Luego de codificar y ordenar los roles correspondientes, estos son registrados en una tabla de frecuencia por sexo hombre y mujer.

Los extractos seleccionados tienen como criterio un diálogo en torno a la construcción de conocimiento de la semejanza geométrica y la nula o irrelevante interacción con algún docente. Se prioriza la interacción pura entre estudiantes de cada grupo.

En el esquema 4.1 se resumen las etapas en donde se recopila la información (color celeste) y el análisis de datos en términos generales (color morado).



Esquema 4.1: Ilustración de Etapas y recopilación de datos en la Secuencia de Enseñanza, y análisis de datos.

Fuente: Creación propia.

4.6.2 RESPUESTAS EXPERTAS PARA LA CATEGORIZACIÓN Y ANÁLISIS

Para clasificar y analizar las respuestas tipo explicadas en la tabla 4.2 y entender los diálogos de las interacciones grupales, es necesario realizar una revisión del material pedagógico con el cual se recolectaron los datos. Para ello se consideran las respuestas expertas y posibles errores en cada una de las tareas que constituyen las actividades de cada clase, así como también el pre y el post test. A continuación se hace análisis de todas las actividades realizadas en clases en la etapa II y el test evaluativo que se implementó en la etapa I y III. El material completo de cada actividad se encentra en el Anexo.

A) ACTIVIDADES DE LA ETAPA II

Como se introdujo en el párrafo anterior, a continuación se explicarán las respuestas expertas, posibles errores y observaciones de cada actividad realizada en las cinco sesiones, que corresponden a las cinco clases planificadas, de la etapa II. Este tipo de análisis es realizado por quienes realizan esta investigación en base a los niveles de razonamiento de Van Hiele.

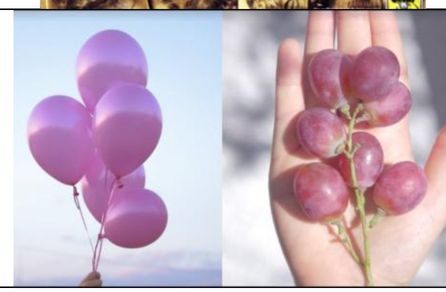
CLASE 1

La primera clase contempla las actividades [A0] y [A1] completamente realizadas, sin embargo la actividad [A2] se inicia en esta clase pero se finaliza en la siguiente.

Actividad 0 [A0]: ¿Semejante, congruente o parecido? Cada uno de los siete grupos, deberá determinar si el ejemplo de la imagen es semejante, congruente o parecido (Ver Tabla 4.4). La clasificación de la tabla 4.4 muestra las respuestas correctas.

- **<u>Nivel 1:</u>**

Tabla 4.4
Imágenes clasificadas entre congruente, semejante o parecido para la actividad [A0]

Congruentes	Semejantes	Parecidos
		
		
		

- **<u>Observación:</u>** También se admite como respuesta correcta las imágenes de congruencia en la columna de semejanza, ya que es el caso particular cuando la proporción es 1:1.
- **<u>Incorrecta:</u>** Cualquier combinación sin considerar la observación anterior, es incorrecta.

<u>Actividad 1 [A1]:</u> Para esta actividad se ocupa la figura 5.2 expuesta en el siguiente capítulo. También se puede ver en Anexo en el ítem *Actividades en clases*. Su resolución se muestra en la figura 4.1.

- **<u>Nivel 1:</u>**

Congruentes:	
Semejantes:	
Otros:	

Figura 4.1: Clasificación de figuras en [A1].

- **<u>Observación:</u>** Al igual que en la actividad anterior, se considera como correcto el caso en que algunas imágenes que son congruentes sean agrupadas con las semejantes.

CLASE 1 - 2

La segunda clase inicia con la continuación de la actividad [A2] que se había comenzado en la clase anterior.

<u>Actividad 2 [A2]:</u> Esta actividad contiene tres tareas y es ubicada en el nivel 2 del modelo de Van Hiele.

Tarea 1: En esta tarea se pide analizar las medidas de los lados y ángulos de unos pentágonos, mostrada en la figura 5.3 del siguiente capítulo o en Anexo en el ítem *Actividades en clases*, para evitar confusión se contaran los lados desde la base en sentido antihorario (Ver tabla 4.5) y los ángulos desde la esquina inferior derecho en sentido antihorario (Ver tabla 4.6).

Tabla 4.5
Resultados de medidas de los lados en Tarea 1 de [A2]

	Medida lado 1	Medida lado 2	Medida lado 3	Medida lado 4	Medida lado 5
FIGURA 1	4	6	2,8	2,8	6
FIGURA 2	2	3	1,4	1,4	3
FIGURA 3	4	3	2,8	2,8	3
FIGURA 4	2	3	1,4	1,4	3

Tabla 4.6
Resultados de medidas de los ángulos en Tarea 1 de [A2]

	Medida ángulo 1	Medida ángulo 2	Medida ángulo 3	Medida lado 4	Medida lado 5
FIGURA 1	90	135	90	135	90
FIGURA 2	90	135	90	135	90
FIGURA 3	90	135	90	135	90
FIGURA 4	90	135	90	135	90

- **Observación:** Para el cálculo de los lados 3 y 4 de las figuras, se considera correcta cualquier aproximación a los valores que aparecen en la tabla 4.5, debido a que son números irracionales al ser calculados por raíces no exactas.

Tarea 2: Esta tarea tiene tres preguntas, la primera de ellas es dibujar un triángulo tres veces el tamaño del original, la segunda es dibujar un rectángulo la mitad del tamaño original, como se muestra en la figura 4.2.

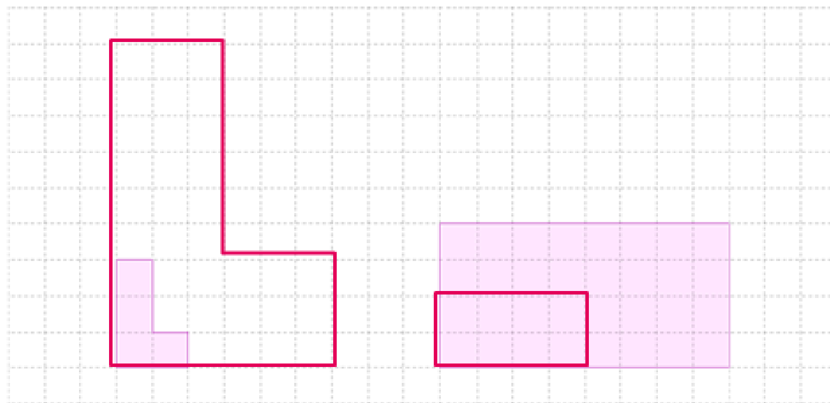


Figura 4.2: Resolución de Tarea 2 en [A2].

La última pregunta es ¿Cómo varía el área del rectángulo? Las respuestas a esta pregunta se pueden presentar en los siguientes niveles:

- **<u>Nivel 1:</u>** Es más pequeño que el original.
- **<u>Nivel 2:</u>** El primer rectángulo tiene un área de 32 cuadrados, mientras que el segundo es de 8 cuadrados, o sea que es 4 veces su área.
- **<u>Nivel 3:</u>** Los lados del rectángulo tienen la propiedad de que un lado es el doble del otro, por lo que si tomamos el lado menor vale $k\ cm$, el otro tiene un valor de $2k\ cm$, dando un área de $2k^2\ cm^2$.

<u>Tarea 3:</u> Para finalizar esta actividad, se tiene un grupo de cuatro triángulos los cuales deben ser agrupados de a dos según los que consideren o no semejantes, utilizando las medidas de sus lados y ángulos (Ver figura 4.3).

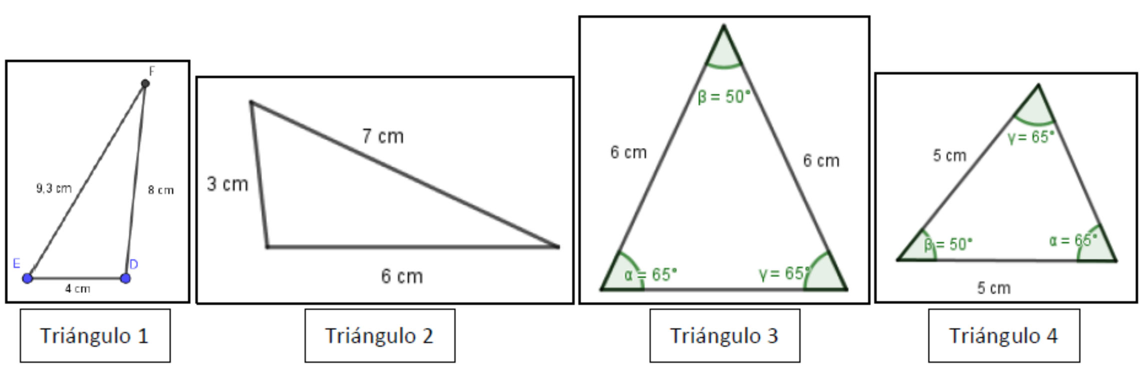


Figura 4.3: Triángulos de Tarea 3 en [A2].

Los tipos de respuesta se pueden presentar como sigue:

- **Nivel 1:** Los triángulos 3 y 4 son semejantes ya que poseen la misma forma y sólo están rotados
- **Nivel 2:** Solo los triángulos 3 y 4 son semejantes ya que ambos son isósceles o por que tienen los ángulos congruentes.
- **Nivel 3:** Los triángulos 3 y 4 son semejantes ya que con base en las actividades anteriores, si tienen ángulos congruentes y lados proporcionales son semejantes.
- **Incorrecta:** Siguiendo el argumento de la respuesta de nivel 1, pero agrupando el triángulo 1 y 2. El estudiante no sabe utilizar las razones y por consecuencia no plantea las proporciones adecuadas para determinar qué triángulos cumplen la proporcionalidad.

CLASE 3

En la tercera clase se desarrolla completamente la actividad [A3].

Actividad 3 [A3]: Para esta actividad se ocupa la figura 5.7 del capítulo cinco o también se puede ver la actividad en Anexo en el ítem de *Actividades en clases*, en la que se deberá calcular el área y perímetro de la plaza usando la escala $1{:}2500\ cm$.

Tarea 1: A los estudiantes se les entrega un plano de la ciudad de Quilpué, específicamente de la Plaza Arturo Prat, conocida popularmente como la Plaza Vieja, utilizando la escala dada y una regla, deberán encontrar un método para calcular el perímetro (P) y el área (A).

- **Observación:** Tanto el método para el perímetro y el área son el mismo, la única diferenciación es el cálculo final.
- **Nivel 2:** Solo se mide con la regla y no se utiliza la escala para establecer los valores en la vida real, sus respuestas son $A = 9$ y $P = 12$.
- **Nivel 3:** Se relaciona con lo aprendido en la clase anterior de la actividad [A2], por lo que una vez que encuentran las medidas con la regla deben multiplicar los

valores por la escala que en este caso es 2500. Su perímetro es $12 \cdot 2.500 = 30.000$ mientras que el área es $2.500^2 \cdot 3^2 = 56.250.000$.

- **<u>Incorrecto:</u>** Algún error en la secuencia de pasos. Un error posible es que para el área se multiplique $9\, por\, 2500$ sin elevar este último al cuadrado, dando por resultado 22500.

CLASE 4-5

En la cuarta clase se desarrolla incompletamente la actividad [A4], por lo que en la siguiente clase es finalizada en su totalidad.

<u>Actividad 4 [A4]:</u> En esta actividad se va construyendo las propiedades necesarias para que se evidencie el teorema de Euclides usando triángulos semejantes.

<u>Tarea 1:</u> Esta tarea se divide en dos partes, la primera usa la figura 5.8 y la segunda la figura 5.9, ambas se muestran en el capítulo cinco o también en Anexo en el ítem de Actividades en clases:

1) La primera es con unos cortes imaginarios de una semi-pizza y se les pregunta: ¿Qué característica tienen en común los triángulos formados? ¿Cuáles son congruentes /o semejantes?
   - **<u>Nivel 1:</u>** Los triángulos AEF y BFE son congruentes, el triángulo ABF es semejante ya que es más grande que los otros dos, los tres poseen la misma forma.
   - **<u>Nivel 2:</u>** Los triángulos AEF, BFE y ABF tienen los mismos ángulos (45°, 45° y 90°), y AEF es congruente con BFE, mientras que ABF es semejante por criterio AA.

2) La segunda parte considera el semicírculo que está inscrito en el rectángulo $ABCD$ y se les pregunta a los estudiantes ¿Qué relación que hay entre el diámetro de la semi-pizza y el ancho de la bandeja? Si el radio AB de la semi-pizza es de 15 cm ¿Cuál es el área de la bandeja $ABCD$?

- **Nivel 3:** Dado que la semi-pizza está inscrita en el rectángulo, y el trazo EF pasa por el centro de esta, sabemos que EF es congruente con AE y EB, luego $AB = 2EF$. Sabiendo que el radio de la semi-pizza es de $15\,\mathrm{cm}$, entonces el área del rectángulo sería $\overline{\mathrm{EF}} \cdot \overline{\mathrm{AB}} = 15 \cdot 30 = 450\ \mathrm{cm}^2$.

Tarea 2:

En esta tarea es necesario usar una regla para construir un rectángulo y un cuadrado con medidas que se indican en el triángulo rectángulo de la figura 5.10 del capítulo cinco o bien ver en Anexo en el ítem de *Actividades en clases.* Luego, con papel lustre, cortar cuadrados del mismo tamaño y pegarlos en la superficie de los cuadriláteros construidos, como se explica en la clase 5 del siguiente capítulo. Luego de eso se les pregunta si es que hay algo que les llame la atención de sus áreas.

Las respuestas a esta pregunta se pueden presentar en los siguientes niveles:

- **Nivel 1:** Las áreas son muy parecidas, más no exactas.
- **Nivel 2:** La cantidad de cuadrados coinciden en ambas figuras, por ende sus áreas son iguales.
- **Nivel 3:** El área del rectángulo de lados a y b es igual con el cuadrado de lado h, entonces $a \cdot b = h^2$
- **Incorrecto:** No darse cuenta que las áreas son iguales o son similares, esto puede ser debido a un mal corte de los cuadrados.

B) TEST EVALUATIVO DE ETAPA I Y III

Para categorizar las respuestas de acuerdo a la tabla 4.2, se compararon las respuestas de los estudiantes con las respuestas expertas del test evaluativo que se aplicó en la etapa I y III. A continuación se hace revisión de las respuestas expertas, posibles errores y observaciones, especificando además el nivel asociado según las categorías de Van Hiele y el Tipo de respuesta según la tabla 4.2. Es necesario recordar que las respuestas de Tipo 2 y 5 son de conocimiento y precisión matemática *incorrectos*, las de Tipo 3, 4, 6 y 7 son *correctas* y las de Tipo 1 son respuestas *sin contestar o no codificables*. El test completo se puede ver en Anexo.

Pregunta 1: ¿Cuál de estas imágenes crees que son semejantes? ¿Por qué? Agrúpalas según sus números de imagen.

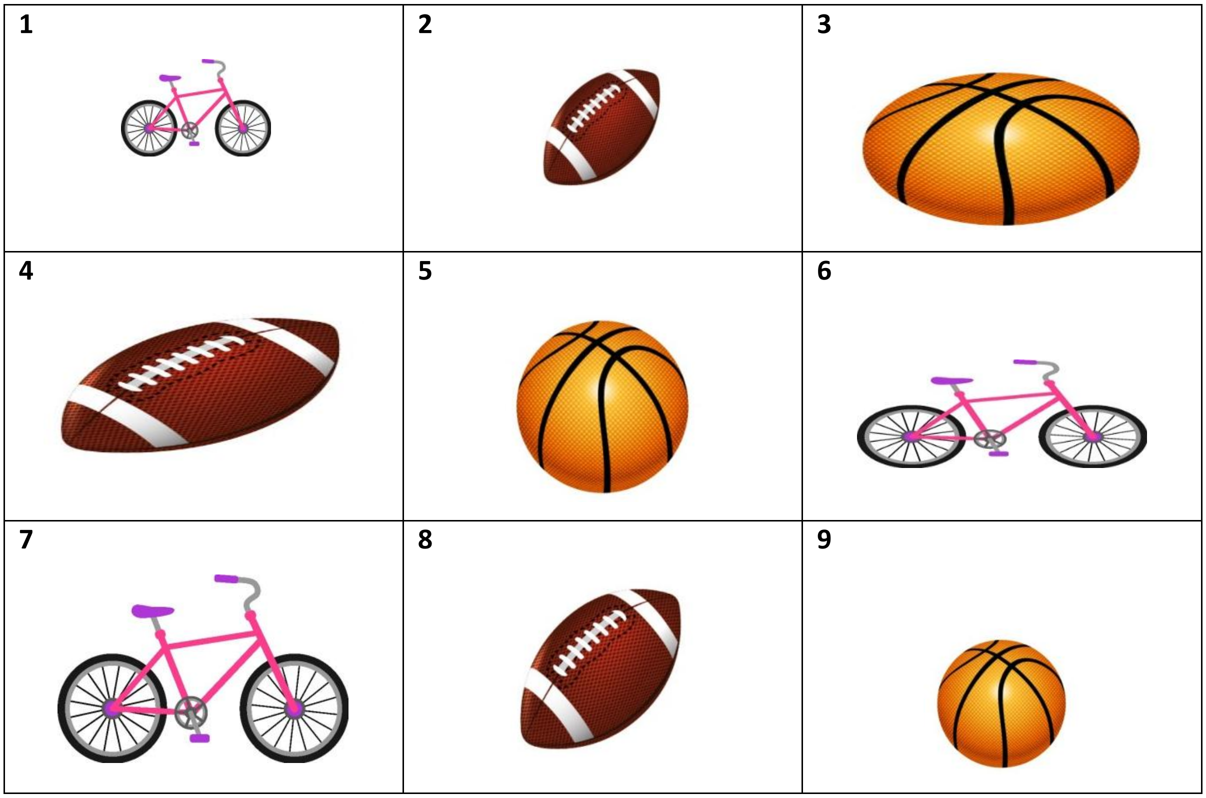


Figura 4.4: Figuras de pregunta 1 en [E1] y [E2].

Esta pregunta únicamente abarca el Nivel 1, ya que solo deben agrupar las imágenes según sus características visuales pero además deben justificar la agrupación (Ver figura 4.4).

Tipos de respuestas	**Conocimiento y precisión matemática**		**Grado de adquisición**
	Incorrecto	**Correcto**	
Tipo 1	Su respuesta es no codificable o no contesta		Nulo
Tipo 2	Agrupa alguna de estas combinaciones 1-6-7, 2-4-8 y 3-5-9, y /o justifica sin atributos físicos		Bajo
Tipo 3		Agrupa alguna o todas estas combinaciones 1-7, 2-8 y 5-9. No justifica.	Bajo
Tipo 4		Falta alguna de estas agrupaciones 1-7, 2-8 y 5-9, y	Intermedio

		falta argumentar: misma forma y/o distinto tamaño.	
Tipo 5	Agrupa alguna o todas estas combinaciones 1-6-7, 2-4-8 y 3-5-9, y justifica con atributos físicos		Alto
Tipo 6		Falta alguna de estas agrupaciones 1-7, 2-8 y 5-9, ó falta argumentar: misma forma y/o distinto tamaño.	Alto
Tipo 7		Agrupa 1-7, 2-8 y 5-9, y justifica mencionando que tiene misma forma y distinto tamaño.	Completo

Pregunta 2: Observa estas fotografías y justifica si son semejantes entre sí y por qué.

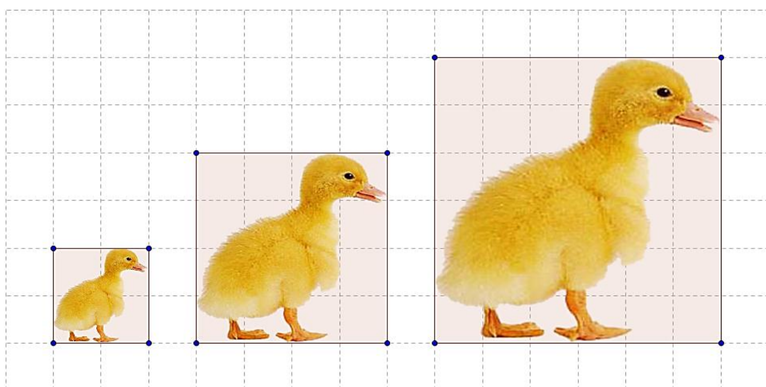


Figura 4.5: Figuras de pregunta 2 en [E1] y [E2].

Esta pregunta abarca el Nivel 1 y 2, ya que admite dos tipos de respuestas:

Tipos de respuestas	Conocimiento y precisión matemática		Grado de adquisición
	Incorrecto	Correcto	
Tipo 1	Su respuesta es no codificable o no contesta		Nulo
Tipo 2	Decir que no son semejantes. No justifica [NIVEL 1]		Bajo
Tipo 3		Los patos son semejantes. Menciona que tiene misma forma y/o distinto tamaño. [NIVEL 1]	Bajo
Tipo 4		Los patos son semejantes porque tienen la misma forma y	Intermedio

		distinto tamaño. Son proporcionales. [NIVEL 1 Y 2]	
Tipo 5	Decir que son semejantes porque son las mismas imágenes pero no hacer alusión a la proporción o las medidas que estas presentan, o realizar una relación de proporción incorrecta. [NIVEL 2]		Alto
Tipo 6		Las figuras si son semejantes, tienen misma forma y distinto tamaño. Hace alusión a las medidas pero no realiza relación de proporción. [NIVEL 2]	Alto
Tipo 7		Las figuras si son semejantes, debido a que el tamaño de las imágenes de los patos (ver figura 4.15), de izquierda a derecha, es de 2x2, 4x4 y 6x6, por lo que el segundo y el tercero, es el doble y el triple del primero, respectivamente. [NIVEL 2]	Completo

Pregunta 3: Si tienes un cuadrado de lados 3 cm, entonces construye otro cuadrado semejante a él de forma que la razón de semejanza sea 1:2 y otro de razón 2:1.

Las respuestas abarcan desde el nivel 1 hasta el 2:

Tipos de respuestas	Conocimiento y precisión matemática		Grado de adquisición
	Incorrecto	Correcto	
Tipo 1	Su respuesta es no codificable o no contesta		Nulo
Tipo 2	No dibujan cuadrados, sino más bien, lo asocian con un rectángulo, al no comprender que la razón es una comparación entre dos cantidades. [NIVEL 1]		Bajo
Tipo 3		Se dibuja un cuadrado que representa el original y otros dos que sean más pequeños y más grandes, cabe señalar que	Bajo

		no necesariamente representa la mitad o el doble, ni se indican las medidas correspondientes. [NIVEL 1]	
Tipo 4		Se dibuja un cuadrado que representa el original y otros dos que sean más pequeños y más grandes, no se indican las medidas correspondientes pero si se indica qué cuadrado corresponde a la razón 2:1 y 1:2. [NIVEL 1 Y 2]	Intermedio
Tipo 5	Realiza cuadrado con las medidas de la razón 2:1, sin embargo cuando dibuja el cuadrado con razón 1:2 no lo hace con las medidas del cuadrado original. [NIVEL 2]		Alto
Tipo 6		Se relacionan propiedades matemáticas, como la medida que le corresponde a cada cuadrado, sin embargo le falta dibujar uno de los dos cuadrados, el de razón 2:1 o 1:2. [NIVEL 2]	Alto
Tipo 7		Se relacionan propiedades matemáticas, como la medida que le corresponde a cada cuadrado, la razón 1:2 nos indica que por cada cm del cuadrado original, hay 2 cm en el cuadrado nuevo, por lo que se dibuja un cuadrado de lados 6 cm. Mientras que en la razón 2:1 indica que nos queda un cuadrado de lados 1,5 cm. [NIVEL 2]	Completo

Pregunta 4: Los lados de un triángulo miden 6, 8 y 12 cm. Se construye otro semejante cuyas dimensiones son 9, 12 y 18. ¿Cuál es la razón de semejanza?

El objetivo de esta pregunta es que los/las estudiantes puedan obtener la razón mediante los lados proporcionales, por lo que abarca el Nivel 1 y 2.

Tipos de respuestas	Conocimiento y precisión matemática		Grado de adquisición
	Incorrecto	**Correcto**	
Tipo 1	Su respuesta es no codificable o no contesta		Nulo
Tipo 2	Asociar los lados de $12\ cm$ de los triángulos como iguales, haciendo alusión a su atributo físico. [NIVEL 1]		Bajo
Tipo 3		Se dibujan dos triángulos con las medidas indicadas y en el orden de lados correspondientes entre ambos triángulos, sin entregar más información. [NIVEL 1]	Bajo
Tipo 4		Se dibujan dos triángulos con las medidas indicadas y en el orden de lados correspondientes entre ambos triángulos. Indican que son proporcionales pero no justifican. [NIVEL 1 Y 2]	Intermedio
Tipo 5	Se dibujan dos triángulos con las medidas indicadas y en el orden de lados correspondientes entre ambos triángulos, pero no son capaces de generar la razón o lo calculan incorrectamente. [NIVEL 2]		Alto
Tipo 6		Comparan las razones de la siguiente manera $\frac{6}{9} = \frac{8}{12} = \frac{12}{18}$, pero no obtienen la Razón o indican que cada lado fue aumentado en la mitad. [NIVEL 2]	Alto
Tipo 7		Comparan las razones de la siguiente manera $\frac{6}{9} = \frac{8}{12} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$. Se indica que cada lado fue aumentado en la mitad. [NIVEL 2]	Completo

Pregunta 5: Dos cuadrados son semejantes, uno es el doble del otro. Si el área del cuadrado más pequeño es $4\,cm^2$. ¿Cuál es el área más grande? ¿Y cuál es el perímetro de cada cuadrado?

Esta pregunta abarca el nivel 3, en donde ya se deben empezar a relacionar propiedades y conceptos, en este caso para la primera pregunta se debe entender el concepto de área y raíz, para luego con esa información responder la segunda pregunta.

Tipos de respuestas	**Conocimiento y precisión matemática**		**Grado de adquisición**
	Incorrecto	**Correcto**	
Tipo 1	Su respuesta es no codificable o no contesta		Nulo
Tipo 2	Hace los dibujos de cuadrados, no necesariamente con las medidas correspondientes al problema. No entrega mayor información. [NIVEL 2]		Bajo
Tipo 3		Solo realiza el cálculo de la medida del cuadrado pequeño y encuentra su perímetro. [NIVEL 2]	Bajo
Tipo 4		Verifica con otros ejemplos para poder encontrar los valores del problema. Encuentra los valores de las medidas de los dos cuadrados pero no realiza todos los cálculos solicitados en el problema. [NIVEL 2 Y 3]	Intermedio
Tipo 5	Multiplicar los $4\ cm^2\ por\ 2$ para obtener el área del cuadrado grande, sin relacionar la variación de la razón de semejanza, obteniendo un cuadrado de área 8 y perímetro de 12. [NIVEL 3]		Alto
Tipo 6		Encuentran las medidas de los dos cuadrados, sin embargo falta algún cálculo sobre área o perímetro. [NIVEL 3]	Alto
Tipo 7		Para la primera pregunta se	Completo

		debe relacionar los conceptos de áreas y raíz, para buscar la medida de los lados del cuadrado que al elevar a 2 dé como resultado 4 cm^2, lo que nos da como resultado 2 cm. Luego si el cuadrado más grande es el doble de grande sus lados miden 4 cm y su área es de 16 cm^2. Para finalizar sus perímetros son 8 cm y 16 cm respectivamente. [NIVEL 3]	

Pregunta 6: Responde verdadero (V) o falso (F) de manera justificada los siguientes enunciados.

a) Un triángulo con un ángulo de 30° y otro de 40° es semejante a otro triángulo con un ángulo de 30° y otro de 110°.
- <u>Verdadero</u>, ya que al completar sus ángulos son congruentes, entonces por el criterio AA estos son semejantes. [NIVEL 3]

b) Dos polígonos regulares con el mismo número de lados son semejantes.
- <u>Verdadero</u>, ya que al ser regular tienen todos sus ángulos interiores iguales. [NIVEL 3]

c) Un triángulo con ángulos de 80° y 90° es semejante a otro con ángulos de 100° y 70°.
- <u>Falso</u>, ya que sus ángulos no son congruentes entre sí, por lo que no cumple con algún criterio de semejanza de triángulos. [NIVEL 3]

d) Un cuadrilátero cuyos lados mide 3, 4, 5 y 6 cm es semejante a otro cuyos lados miden 6, 8, 10 y 12 cm.
- <u>Verdadero</u>, ya que uno es el doble del otro. [NIVEL 3]

Pregunta 7: En la imagen se muestra la vista de atrás de un camión que pasa por un túnel con la forma de cilindro. La imagen es bidimensional y por eso el cilindro se proyecta en forma de semicírculo.

a. **Se quiere saber la altura máxima de un camión que pasa por la parte derecha de la pista.**

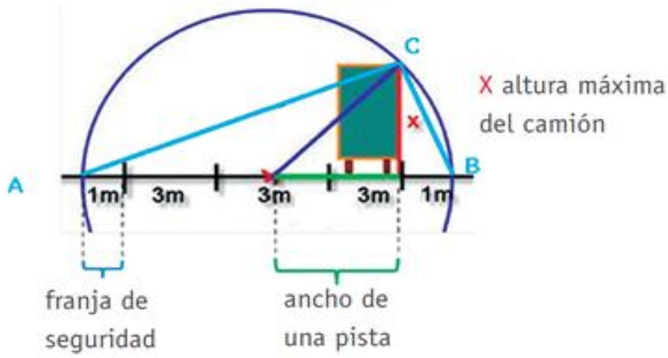


Figura 4.6: Figuras referente de la pregunta 7 en [E1] y [E2].

Con base a la figura 4.16, se tienen las siguientes posibles respuestas:

Tipos de respuestas	**Conocimiento y precisión matemática**		**Grado de adquisición**
	Incorrecto	**Correcto**	
Tipo 1	Su respuesta es no codificable o no contesta		Nulo
Tipo 2	Los errores se pueden dar al no identificar las propiedades de las figuras inscritas en la imagen y no considerar que esta sea de referencia, por los que sus medidas no son a escala. [NIVEL 2]		Bajo
Tipo 3		Tratan de relacionar propiedades a partir de la información del dibujo pero no logran identificar la ecuación de segundo grado. [NIVEL 2]	Bajo
Tipo 4		Sabiendo que x es la altura, entonces se sabe que cae en 90° al suelo, formando un triángulo rectángulo con el punto C, el centro de la semicircunferencia, luego se puede resolver con el teorema de Pitágoras, resultando en $\sqrt{10}$. [NIVEL 2 Y 3]	Intermedio
Tipo 5	Logran generar las relaciones de una ecuación de segundo grado en base a las medidas que indica el dibujo, sin embargo toman medidas que		Alto

	no sirven para encontrar el valor de X. [NIVEL 3]		
Tipo 6		Relacionan la información donde llegan a $x^2 = 10 \cdot 1$, sin embargo no saben resolver. [NIVEL 3]	Alto
Tipo 7		Relacionando lo visto en clase con los triángulos semejantes, sea D el punto de intersección entre la altura x y la base del semicírculo, sabemos que x es igual a AD por DB, resultando en $x^2 = 10 \cdot 1$, luego $x = \sqrt{10}$. [NIVEL 3]	Completo

4.7 VALIDEZ Y CONFIABILIDAD

Para otorgar validez y confiabilidad a la investigación, se utilizó el criterio de triangulación de datos, que como define Sampieri et al. (2014), busca analizar un mismo fenómeno por medio de los resultados obtenidos del estudio para compararlos y contrastarlos. La investigación es más efectiva cuando quienes investigan combinan varias fuentes o métodos, debido a que éstos permitirán contrastar puntos de vista sobre una misma situación (Sampieri et al., 2014).

De lo anterior, en este estudio se recopiló información mediante material escrito a través de un pre test, actividades en cada sesión y un post test. Por medio del pre test se conoce qué niveles de razonamiento de Van Hiele dominaban las y los estudiantes. Del mismo modo, con el post test, se conoce qué niveles fueron desarrollados, con esta información las respuestas se categorizan según la tabla 4.2 anteriormente explicada. Finalmente se comparan e interpretan resultados de ambos test.

Adicionalmente, se graban audios de las interacciones de distintos grupos en cada clase de la etapa II de la secuencia de enseñanza. Los audios son transcritos y luego categorizados según la tabla 4.3 con el fin de identificar los roles que desarrollaban las y los estudiantes mientras trabajaban con su grupo.

La categorización de la información recopilada se realizó de forma separada por las dos personas que realizan este estudio y luego se compararon para una mejor triangulación de los datos. Cada una de las partes de la secuencia de enseñanza fue validada por una experta, quién además guía esta investigación.

CAPITULO V
DESCRIPCIÓN DEL EXPERIMENTO

En este capítulo se describe el desarrollo de la implementación en cada una de las sesiones, abordando la explicación de las actividades, las consultas o dificultades más frecuentes por parte de los estudiantes y explicaciones o instrucciones entregadas por el/la docente a cargo de la clase.

5.1 DESCRIPCIÓN DE LA IMPLEMENTACIÓN DE LA SECUENCIA DE ENSEÑANZA

La implementación de la secuencia de enseñanza fue efectuada por quienes realizan este estudio en compañía de la profesora de matemática a cargo de dicho curso. A continuación se explica en detalle la implementación. Cabe señalar que originalmente se tenían planificadas seis sesiones, dos de ellas dedicadas a evaluaciones correspondientes a la etapa I y III, y las otras cuatro sesiones para realizar las actividades con el curso, sin embargo por cuestiones de tiempo se realizó una sesión extra. Cada sesión de la secuencia, se realizó en dos horas pedagógicas. Para mayor claridad, se pueden ver las actividades, sus respuestas y errores en la sección 4.6.2.

Sesión 1

Esta sesión tuvo por objetivo presentarse al curso explicando lo que se iba a realizar para la investigación, aplicar el pre test [E1], realizar una dinámica de presentación de cada estudiante y de quienes estuvieron a cargo de la implementación de la secuencia de enseñanza, y la conformación de los grupos de trabajo permanente. Para esto último se decidió hacer uso del azar utilizando cartas de diferentes colores y con números del uno al siete, para así formar siete grupos de cuatro integrantes con dos hombres y dos mujeres. Si bien los grupos fueros azarosos, hubo algunos de mayor y otros de menor aceptación por quienes integraban cada equipo.

Sesión 2-Clase 1:

Al inicio de la sesión el docente solicitó a las y los estudiantes que se reunieran en sus grupos de trabajo para dar inicio a las actividades, seguido de ello se utilizó apoyo visual (Figura 5.1) para la presentación de la actividad introductoria [A0], la cual tenía por nombre ¿Semejantes, Congruentes o Parecidos/as?

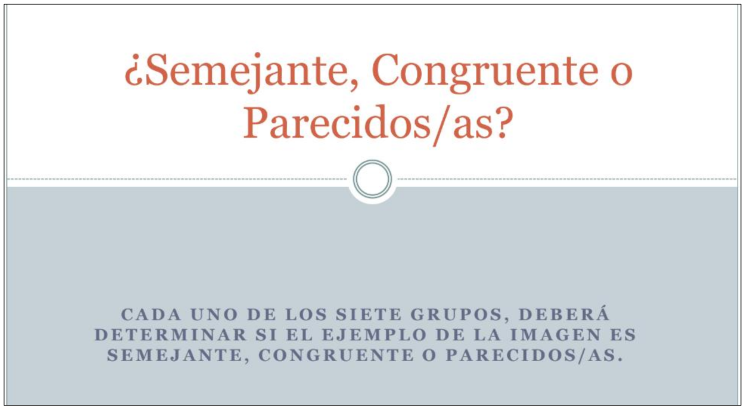


Figura 5.1: Presentación [A0].

El objetivo de esta actividad era presentar por parte del docente una secuencia de siete láminas con pares de imágenes, las que cada grupo debía de clasificar en una categoría según lo que entendieran por semejante, congruente o parecido. Mediante una interacción guiada por el docente, se iban anotando en la pizarra las clasificaciones que los grupos iban realizando para después preguntarles qué características tenía cada una de las categorías. Algunas de estas imágenes se muestran en la tabla 5.1.

Tabla 5.1
Imágenes tipo para clasificación, [A0]

Semejante	**Congruente**	**Parecido**
		

Esta actividad se encuentra en el nivel 1 respecto al modelo de Van Hiele, ya que se busca que las y los estudiantes asocien características visuales a los conceptos geométricos explicitados en el cuadro.

Una vez establecidas las características de la semejanza, la congruencia y el parecido, el docente entregó a cada grupo la actividad [A1] que desarrollaron en equipo. Esta actividad presenta un conjunto de 12 imágenes las cuales deben recortarse y agrupar en semejantes, congruentes o varios como se muestra en la figura 5.2.

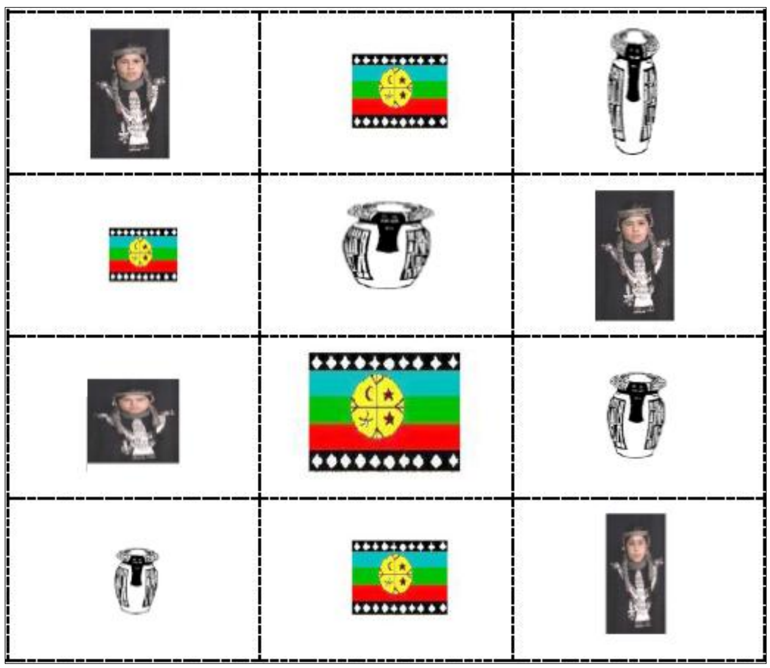


Figura 5.2: Cuadro de recorte en actividad [A1].

Esta actividad presenta solo el nivel 1 del razonamiento geométrico, sin embargo ahora cuenta con una mejor aproximación de los conceptos matemáticos que se abordaron en [A0].

Para estas dos actividades se estimó un tiempo total de 30 minutos, acabado ese tiempo el docente retiró las hojas para realizar una revisión de la actividad [A1] con apoyo visual (proyección de las imágenes) y la participación de los grupos indicando sus diferentes selecciones de imágenes. Una vez constatadas las agrupaciones, se procedió a formalizar brevemente los conceptos de congruencia y semejanza, las cuales se construyeron entre los estudiantes y el docente.

Congruencia: Dos objetos son congruentes cuando presentan las mismas dimensiones, tienen la misma forma y el mismo tamaño.

Semejanza: Dos objetos son semejantes si estos son proporcionales, poseen la misma forma, pero distinto tamaño.

Luego, el docente procedió a entregar la actividad [A2] que contiene tres tareas enfocadas en el nivel 2 del modelo de Van Hiele en el cual se introducen propiedades matemáticas a las figuras, como las medidas de sus lados o de sus ángulos. La primera tarea buscaba establecer qué propiedades deben cumplir dos objetos para que sean semejantes o congruentes, para esto hay cuatro pentágonos en una cuadrícula (figura 5.3) y se debía indicar cuál de estos poseen la misma forma, la medida de sus lados y ángulos, y la relación entre éstos últimos. En este caso, la mayor cantidad de consultas que se le hicieron al docente, fue asociada a los valores de los ángulos y los valores de medida de las diagonales de las figuras.

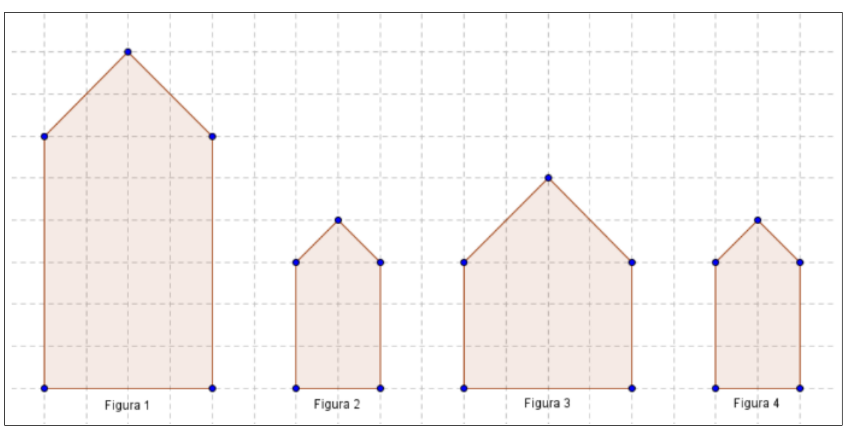


Figura 5.3: Figuras para clasificación de Tarea 1 en actividad [A2].

La segunda tarea, también presentaba una hoja cuadriculada en la cual había que ampliar el tamaño de una “L” al triple del original y reducir a la mitad el tamaño de un rectángulo como se muestra en la figura 5.4. Además se les pregunta cómo varía el área del rectángulo reducido respecto del original.

Figura 5.4: Figuras geométricas para aumentar o disminuir tamaño en Tarea 2 de [A2].

Para la última tarea se les presentaron cuatro triángulos (Ver figura 5.5), los cuales debían seleccionar en torno a las definiciones de semejanza y justificar su elección

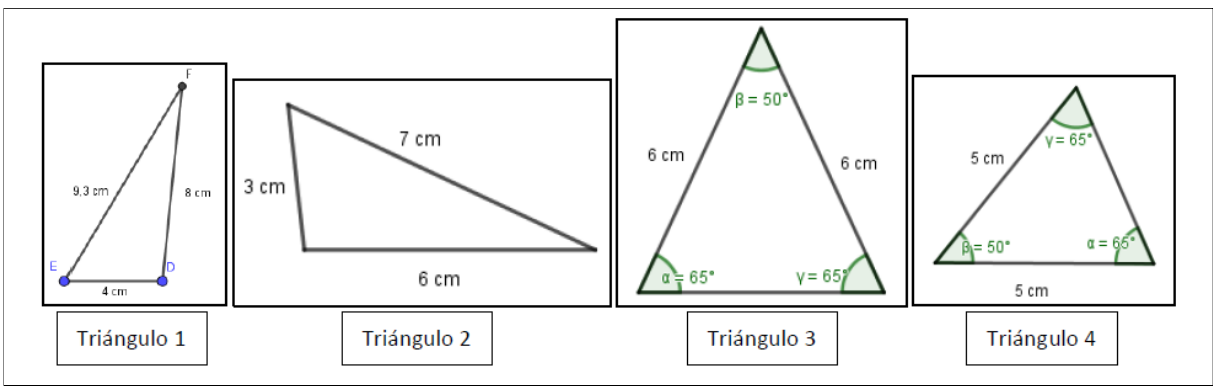


Figura 5.5: Triángulos de Tarea 3 en actividad [A2].

Sesión 3-Clase 2:

Dado que en la sección anterior no todos los grupos pudieron completar la actividad [A2], el docente decidió destinar unos minutos para que pudieran finalizar (15 minutos aproximadamente). Transcurrido el tiempo, se proyectó una presentación (Figura 5.6) para explicar los criterios de congruencia y semejanza de triángulos por el docente, se abrió la discusión preguntando por la diferencia de estos conceptos y se preguntó si recordaban lo que era la razón y la proporción, en lo cual se ocupó el resto de la hora para que las y los estudiantes escribieran el contenido junto a los ejemplos, quedando dos criterios pendientes.

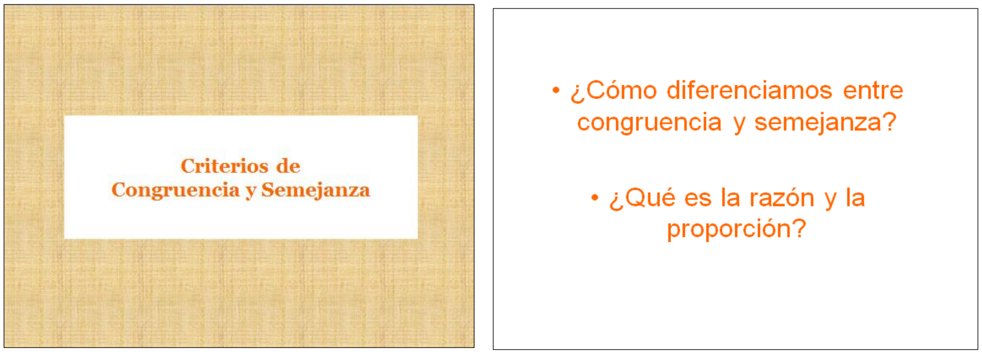


Figura 5.6: Presentación de contenidos de semejanza y congruencia.

Las y los estudiantes en su mayoría se encontraban atentos a la explicación de cada criterio, expresión de esto es el diálogo impulsado por algunos estudiantes quienes hicieron observaciones a la presentación y complementaron el aprendizaje colectivo.

Sesión 4-Clase 3:

Se inició retomando el contenido de los dos criterios pendientes de la sesión anterior. Finalizado esto último, el docente presentó las tareas de la actividad [A2] para que, junto a las y los estudiantes, se concluyera una resolución de cada una de las tareas. En particular, la tarea dos de [A2], fue la que más complicaciones tuvo para que las y los estudiantes comprendieran cómo variaba el área de un rectángulo si se ampliaba o reducía. Luego se les hizo entrega de la actividad [A3], que consistía en un plano a escala de la Plaza Arturo Prat de Quilpué, para el cual se debía describir un método para calcular su perímetro y área real como se muestra en la figura 5.7.


Considerando que el plano de Quilpué está en una escala de 1:2500 cm:

a. Describan un método para determinar el perímetro aproximado de la Plaza Vieja, suponiendo que es un cuadrado perfecto.
b. Describan un método para determinar el área aproximada de la Plaza Vieja, suponiendo que es un cuadrado perfecto.

Figura 5.7: Mapa a escala de Plaza Arturo Prat de Quilpué.

Esta actividad en el modelo de Van Hiele está ubicada en el Nivel 3, ya que busca relacionar propiedades matemáticas e información ya conocida, deben ser capaces de utilizar lo aprendido en la actividad [A2] con el área del rectángulo. Las mayores complicaciones en esta actividad se debieron al débil conocimiento de lo que es el perímetro y el área, esto sumado a la dificultad con los conceptos de razón y proporción. Hubo gran diálogo entre grupos debido a estas dudas.

Por cuestiones de tiempo y de relevancia, se decidió no llevar a cabo la segunda tarea de la actividad [A3].

Sesión 5-Clase 4:

Se inició la clase con una coevaluación en cada grupo, para ver la percepción que las y los estudiantes tienen sobre el desempeño de sus compañeros del mismo grupo de trabajo. Actividad que permitió expresar percepciones de los equipos de trabajo y hacer modificaciones por parte de los docentes en la composición de dos grupos. Luego se procedió con la revisión de la actividad [A3] guiada por uno de los dos docentes, lo que se realizó en alrededor de 20 minutos. Finaliza lo anterior, se hizo entrega de la actividad [A4], el cual contiene dos tareas que buscaban evidenciar el teorema de Euclides utilizando triángulos semejantes. Para poder hacer más llamativo el problema, este se ambienta en el contexto de una pizza que ha sido dividida en la mitad quedando como semicírculo, tal como se muestra en la figura 5.8, para luego preguntarles por la relación entre los triángulos que se forman después de otros cortes que se señalan en el texto introductorio.

1) Claudia y José, se juntaron para comer pizza, Claudia corta la pizza por la mitad y le dice a José, que si se vuelve a cortar una vez más por la mitad y se unen los extremos de la pizza se obtiene un triángulo rectángulo, representado en la figura 1 como ΔABF . ¿Qué características tienen en común los triángulos formados ? ¿Cuáles son congruentes y/o semejantes?

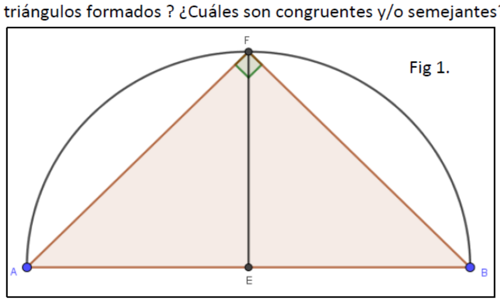


Figura 5.8: Figura geométrica formada por cortes de la pizza.

Ahora la mitad de la pizza está inscrita en un rectángulo que representa una bandeja (Ver figura 5.9) y se les pregunta ¿Cuál es la relación que hay entre el diámetro de la semipizza y el ancho de la bandeja? Seguido de ello, se les indicó que el radio de la semipizza es 15 cm, y luego se les pregunta ¿Cuál es el área de la bandeja *ABCD*?

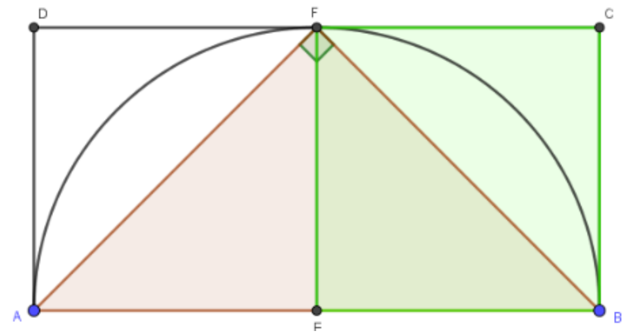


Figura 5.9: Figura geométrica para calcular y relacionar medidas.

Algunos grupos no tenían claro lo que era el radio, el diámetro, el área y el ancho, dificultando la comprensión del ejercicio.

La segunda tarea, constaba de construir un cuadrado y un rectángulo utilizando medidas del triángulo de la figura 5.10. Para el cuadrado se utilizó el segmento $\overline{CD}$ y para el rectángulo los segmentos $\overline{AD}$ y $\overline{DB}$. Luego usaron cuadros de papel lustre para rellenar los cuadriláteros para así concluir que las áreas eran iguales.

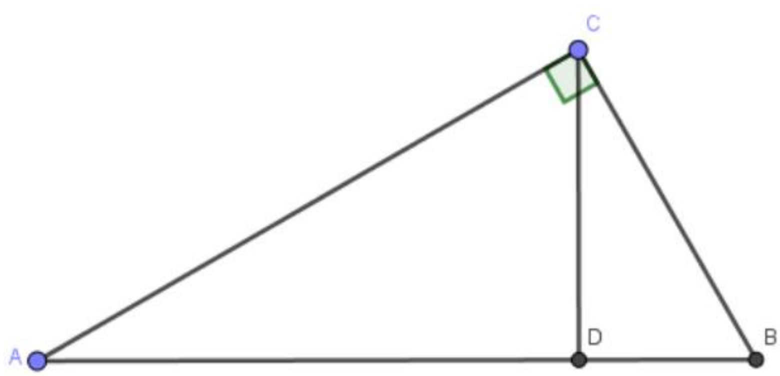


Figura 5.10: Figura geométrica formada por cortes de la pizza.

La mayoría de los grupos no cortaron sus cuadros de papel lustre de un mismo tamaño, en consecuencia sus conclusiones sobre el área fueron erradas, afectando el objetivo de aprendizaje.

Sesión 6-Clase 5:

Algunos grupos no lograron terminar la segunda tarea de la actividad [A4], por lo que los docentes destinaron 10 minutos de la clase, para luego continuar con la revisión de la actividad misma, y formalizar con el teorema de Euclides.

“En un triángulo rectángulo ABC, rectángulo en C, se traza la altura desde C, entonces la altura al cuadrado es igual a la multiplicación de sus proyecciones. Es decir $CD^2 = AD \cdot DB$”.

Y se prosiguió con un repaso de todas las actividades de las sesiones anteriores. Particularmente en esta sesión hubo muy poca concentración y participación de las y los estudiantes. Se destinaron varias intervenciones de solicitud de orden al grupo curso para poder proseguir con las explicaciones.

Sesión 7:

Se realizó el post test [E2], el cual durante su desarrollo las y los estudiantes hicieron varias consultas a la docente, quien les recordaba las actividades realizadas en las sesiones de trabajo grupal sin dar las respuesta del test. Posterior a que la totalidad de las y los estudiantes entregaran sus evaluaciones, la docente hizo un repaso de las respuestas correctas en voz alta con todo el curso. Se les indicó además que al siguiente día se les haría entrega de las notas, las que contemplan un porcentaje del trabajo grupal y un porcentaje de su avance desde el pre test [E1] al post test [E2].

CAPITULO VI
ANÁLISIS DE DATOS

En este capítulo se analizan los datos obtenidos de la implementación de la secuencia de enseñanza tales como las respuestas a los test y las transcripciones de las grabaciones. Para obtener resultados sobre los efectos en hombres y mujeres que tuvo la implementación de la secuencia de enseñanza con base en el modelo de Van Hiele, se analizan los datos obtenidos del pre y post test. A fin de obtener información sobre las interacciones entre hombres y mujeres se utiliza la categorización de Krummheuer.

6.1 ANÁLISIS DE RAZONAMIENTO GEOMÉTRICO POR SEXO

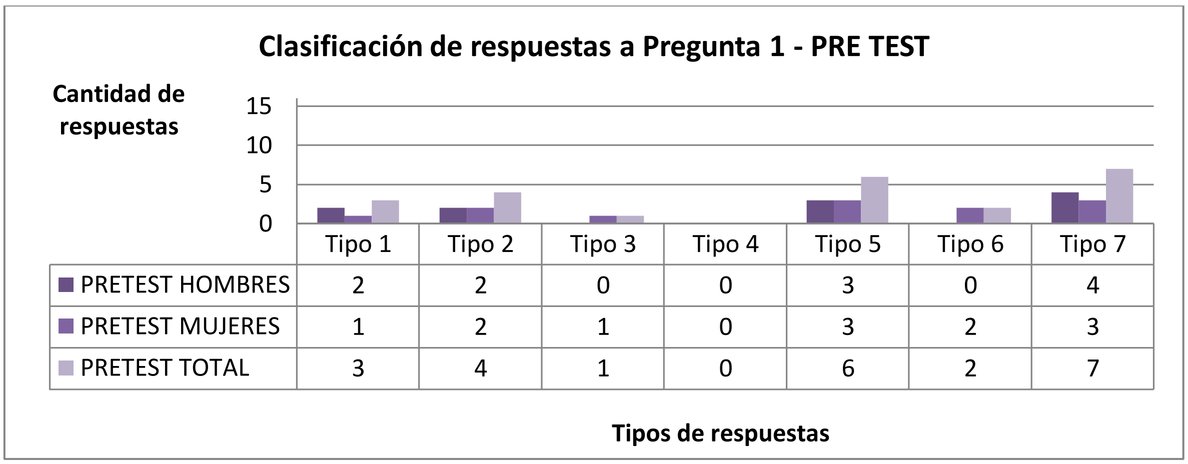
El siguiente análisis se desarrolla con base en las respuestas obtenidas de los test [E1] y [E2] de las y los estudiantes. Se comparan las respuestas previas y posteriores a la implementación de la secuencia de enseñanza diseñada bajo el modelo de Van Hiele.

Para efectos de este análisis, se categorizaron las respuestas de acuerdo a la tabla 4.2, la cual asigna un grado de adquisición según el conocimiento matemático. Las respuestas de *Tipo 1* son el grado de adquisición más bajo (*Nulo)* y las de *Tipo 7,* las con grado de adquisición más alto *(Completo).* Además, se hará referencia a las respuestas expertas y posibles errores descritas en el ítem B) de la sección 4.6.2 del capítulo cuatro.

Con el fin de ordenar el análisis de los datos, se agruparon las preguntas del mismo nivel de razonamiento geométrico y además se diferencian los resultados por sexo (Hombre y Mujer), y se representan por medio de gráficos de barra. En el eje horizontal de los gráficos se encuentra los Tipos de respuestas según la tabla 4.2, las que se separan entre los resultados de los hombres, las mujeres y el total entre ambos sexos, y en el eje vertical se encuentra la cantidad de respuestas.

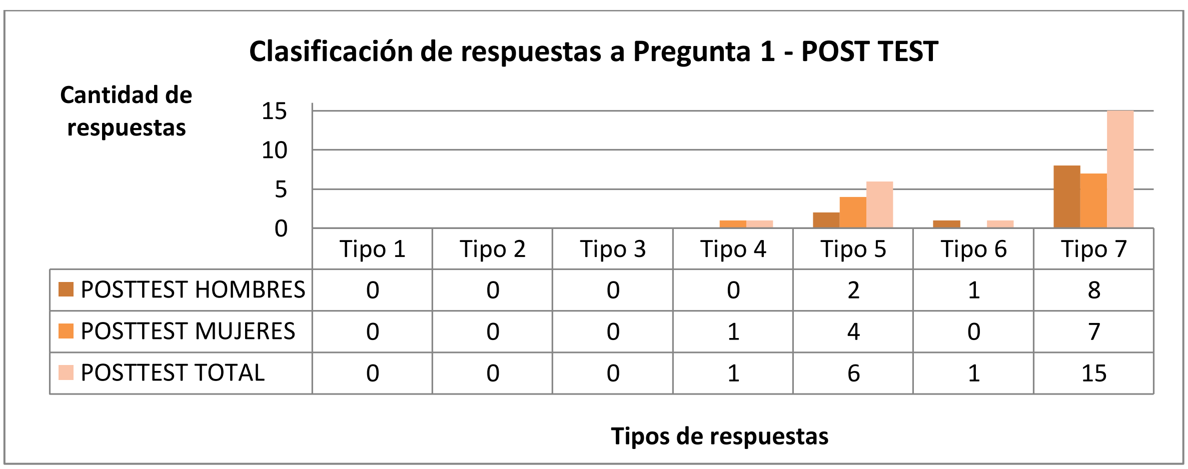
NIVEL 1.

En este nivel se encuentra solo la pregunta 1. Si se observa el gráfico 6.1, se puede evidenciar que la dispersión de los tipos de respuesta en el pre test tiende a ser equitativa entre hombres y mujeres. Cabe señalar que las respuestas con mayores frecuencias, las de *Tipo 5 y 7*, son de grado *alto* y *completo* respectivamente. Sin embargo, la primera describe respuestas que involucraron conocimientos matemáticos incorrectos, mientras que la segunda es completamente correcta.



	Tipo 1	Tipo 2	Tipo 3	Tipo 4	Tipo 5	Tipo 6	Tipo 7
PRETEST HOMBRES	2	2	0	0	3	0	4
PRETEST MUJERES	1	2	1	0	3	2	3
PRETEST TOTAL	3	4	1	0	6	2	7

Gráfico 6.1: Distribución de tipos de respuestas a la pregunta uno del pre test [E1].



	Tipo 1	Tipo 2	Tipo 3	Tipo 4	Tipo 5	Tipo 6	Tipo 7
POSTTEST HOMBRES	0	0	0	0	2	1	8
POSTTEST MUJERES	0	0	0	1	4	0	7
POSTTEST TOTAL	0	0	0	1	6	1	15

Gráfico 6.2: Distribución de tipos de respuestas a la pregunta uno del post test [E2].

El post test se puede apreciar en el gráfico 6.2 que la cantidad de respuestas de *Tipo 5* se mantienen en relación al pre test, sin embargo hay un claro traslado y concentración en la respuesta de *Tipo 7,* o sea, de conocimiento y precisión matemática *completa.* Al igual que en el pre test, no se aprecia una diferenciación importante en hombres y mujeres.

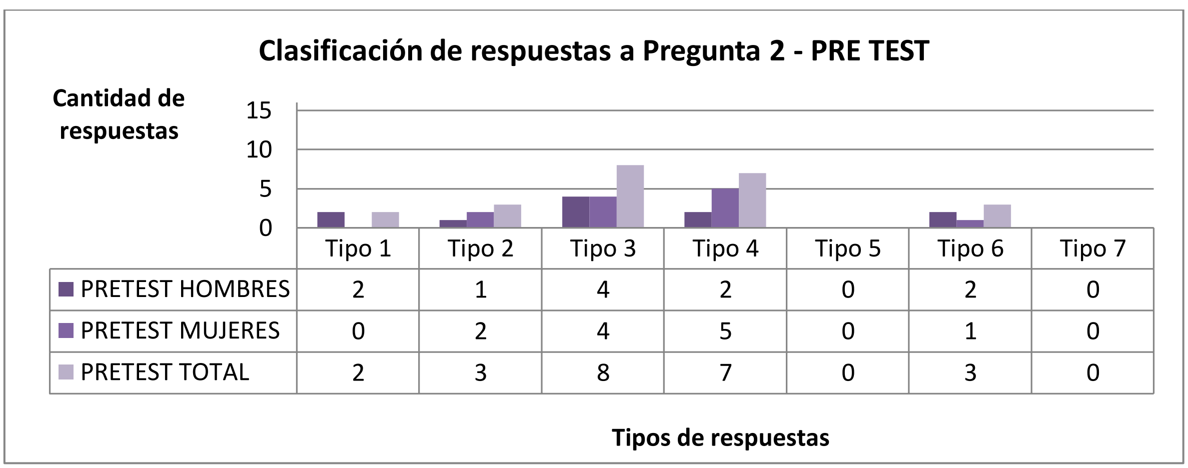
Según los obstáculos epistemológicos descritos por Nolasco y Velázquez (2013), el error recurrente de las respuestas de *Tipo 5* se debe a lo asociado al concepto de proporción, al llevar lo aritmético a lo visual. En este caso y de acuerdo al nivel 1, no se identifican los cambios de tamaño y forma de algunas figuras en los atributos físicos, respondiendo con una agrupación de las imágenes de manera incorrecta.

NIVEL 2.

Las preguntas 2, 3 y 4 corresponden a este nivel. Las cuales se analizaran una por una y luego se hará un barrido general del nivel.

Pregunta 2.

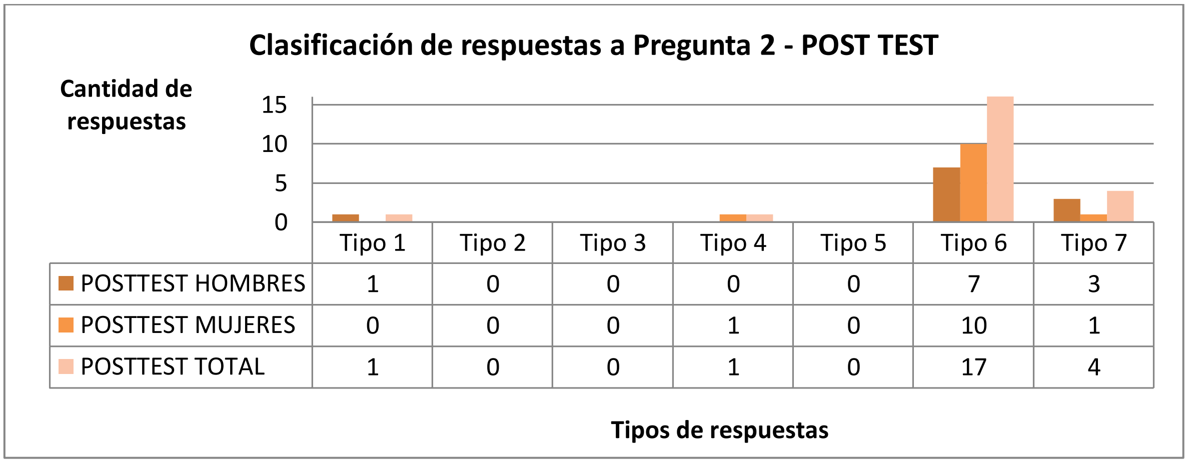
En el gráfico 6.3 sobre el pre test [E1], se observa que los tipos de respuestas entre hombres y mujeres se concentran en las de *Tipo 3* y *4*, las que corresponden a la categoría bajo e intermedio respectivamente, quedando por tres unidades las mujeres por sobre los hombres.



	Tipo 1	Tipo 2	Tipo 3	Tipo 4	Tipo 5	Tipo 6	Tipo 7
PRETEST HOMBRES	2	1	4	2	0	2	0
PRETEST MUJERES	0	2	4	5	0	1	0
PRETEST TOTAL	2	3	8	7	0	3	0

Gráfico 6.3: Distribución de tipos de respuestas a la pregunta dos del pre test [E1].

Por otro lado, se aprecia que en el [E2] no hay respuestas de *Tipo 2,* ni *Tipo 5* (Ver gráfico 6.4), las cuales son consideradas *incorrectas* según la tabla de clasificación. Concentrándose mayoritariamente en las respuestas de *Tipo 6*, manteniendo la diferencia de tres unidades entre hombres y mujeres. Sin embargo, un mayor número de hombres que de mujeres, logran una respuesta de tipo *completa*.



	Tipo 1	Tipo 2	Tipo 3	Tipo 4	Tipo 5	Tipo 6	Tipo 7
POSTTEST HOMBRES	1	0	0	0	0	7	3
POSTTEST MUJERES	0	0	0	1	0	10	1
POSTTEST TOTAL	1	0	0	1	0	17	4

Gráfico 6.4: Distribución de tipos de respuestas a la pregunta dos del post test [E2].

En relación a la adquisición del nivel 2, se evidencia en ambos gráficos la distribución de los tipos de respuestas desde el [E1] al [E2], lo que arroja un claro avance. Concentrándose en las respuestas de *Tipo 6* y *7*, las cuales se clasifican en grado *alto* y *completo*, respectivamente. Sin embargo una dificultad que no permite adquirir la última categoría, se debe a que no dotan de propiedades de medida a las figuras, o sea no relacionan una cantidad numérica a una magnitud, lo que se explica con el primer obstáculo epistemológico sobre la separación de la aritmética y las magnitudes, donde se habla de números proporcionales y magnitudes proporcionales, descrito en Nolasco y Velázquez (2013).

Pregunta 3.

Las gráficas 6.5 y 6.6 muestran un avance de las respuestas desde el pre al post test, centrándose en los extremos de la clasificación de los tipos de respuestas. Esto es, en el [E2], una concentración del *Tipo 1* y en el *Tipo 6-7*, siendo estos niveles de adquisición *nula* y *alto-completa*, respectivamente.

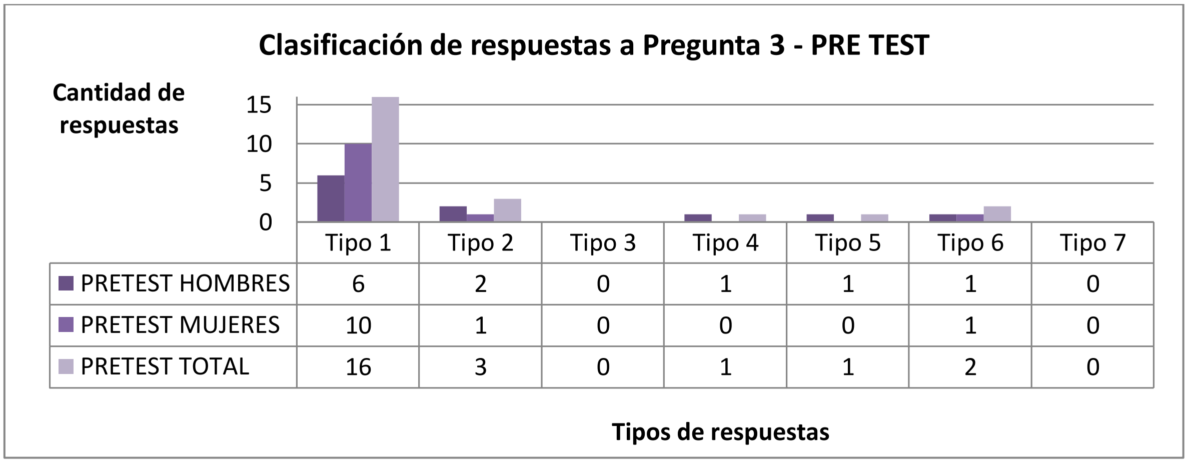


Gráfico 6.5: Distribución de tipos de respuestas a la pregunta tres del pre test [E1].

Se aprecia que el avance entre hombres y mujeres se realiza de manera equitativa según los resultados del post test [E2] como se muestra en el gráfico 6.6. Sin embargo se aprecia que aún persiste un alto número de estudiantes que no logra superar las respuestas de *Tipo 1*.

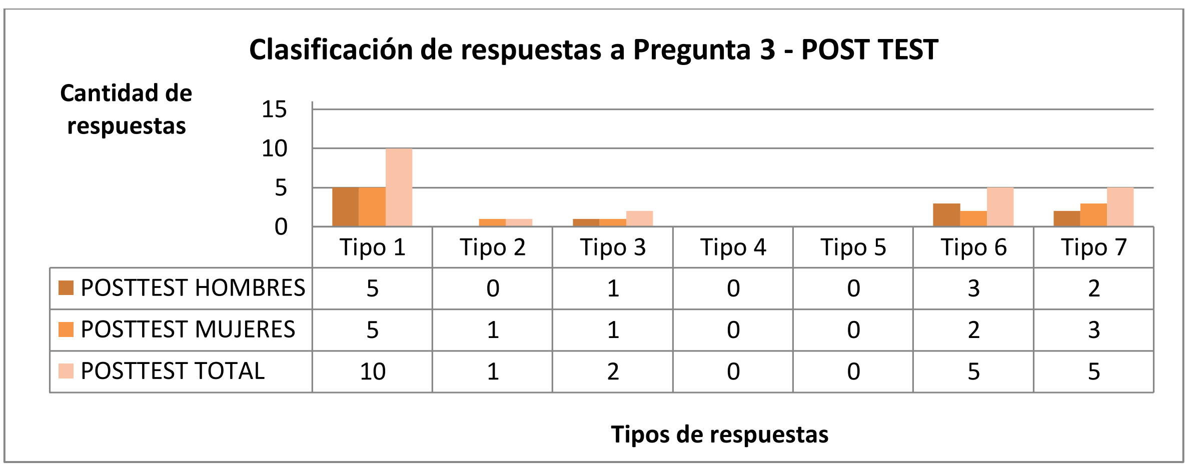
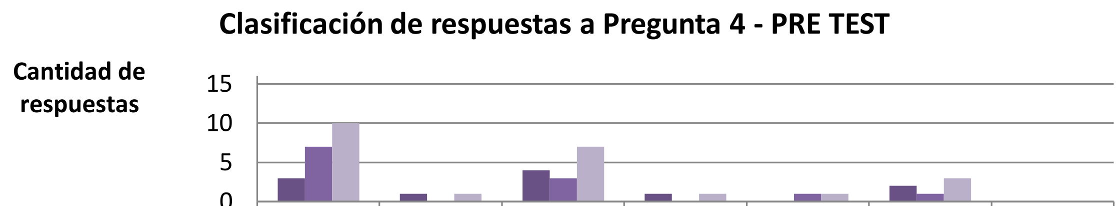


Gráfico 6.6: Distribución de tipos de respuestas a la pregunta tres del post test [E2].

La concentración de respuestas del *Tipo 1* se caracteriza por ser no codificables o no responden, esto se puede explicar debido a una falta de comprensión de una nomenclatura de razones. Por otro lado, las respuestas de *Tipo 6* son correctas pero incompletas, ya que no escriben el cuadrado de razón 2:1.

Pregunta 4.

De acuerdo a lo que se indica en los gráficos 6.7 y 6.8, se aprecia una falta de dinamismo en la adquisición del conocimiento. Si se observa, en el [E1] se concentran las respuestas en el *Tipo 1* y *3*, que son de nivel *nulo* y *bajo* respectivamente.

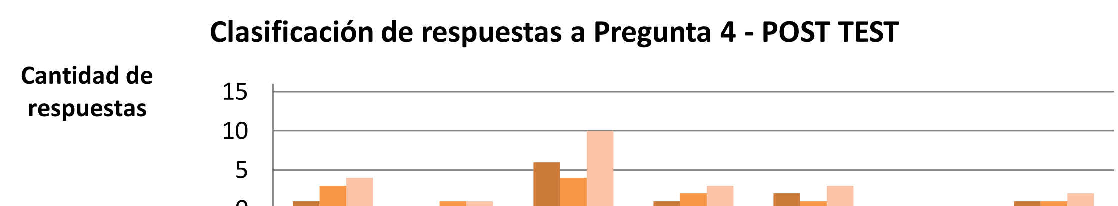


	Tipo 1	Tipo 2	Tipo 3	Tipo 4	Tipo 5	Tipo 6	Tipo 7
PRETEST HOMBRES	3	1	4	1	0	2	0
PRETEST MUJERES	7	0	3	0	1	1	0
PRETEST TOTAL	10	1	7	1	1	3	0

Tipos de respuestas

Gráfico 6.7: Distribución de tipos de respuestas a la pregunta cuatro del pre test [E1].

Sin embargo en el [E2], se observa que la concentración de respuestas correctas es del *Tipo 3* y *4*, siendo estas de grado de adquisición *bajo* e *intermedio* (Ver gráfica 6.7). Este suceso se da principalmente porque las respuestas están enfocadas en explicar la definición de semejanza y no incorpora una óptica numérica, asociándose al objetivo de aprendizaje OA 3 de 6° básico, que indica “Demostrar que comprende el concepto de razón de manera concreta, pictórica, simbólica y/o usando software educativo.



	Tipo 1	Tipo 2	Tipo 3	Tipo 4	Tipo 5	Tipo 6	Tipo 7
POSTTEST HOMBRES	1	0	6	1	2	0	1
POSTTEST MUJERES	3	1	4	2	1	0	1
POSTTEST TOTAL	4	1	10	3	3	0	2

Tipos de respuestas

Gráfico 6.8: Distribución de tipos de respuestas a la pregunta cuatro del post test [E2].

En relación al avance entre hombres y mujeres, estas últimas muestran mayor dificultad de grado de adquisición del conocimiento matemático, estancándose cuatro mujeres y un hombre en las respuestas de *Tipo 1* y *2*.

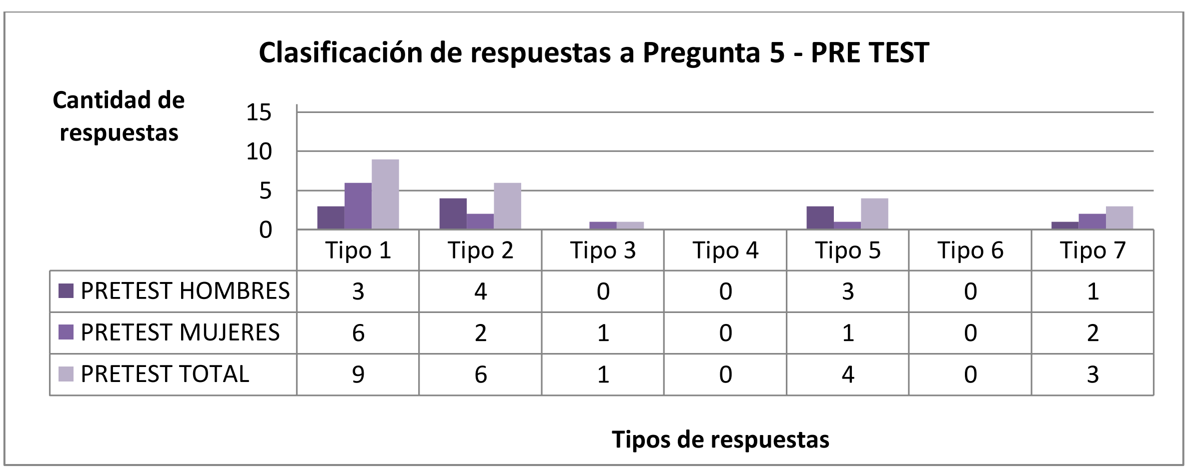
En general, de las respuestas a las preguntas 2 y 3, se visualiza en común entre hombres y mujeres, que éstos tienen avances de grado de adquisición equitativos, sin embargo en la pregunta 4 no sucede así. La poca comprensión del concepto de razón como conocimiento previo, dificulta el aprendizaje y aplicación de la semejanza para el desarrollo de estas tres preguntas.

NIVEL 3.

Este nivel de clasificación según los criterios de Van Hiele, esta abordado en las preguntas 5, 6 y 7 de los test evaluativos. Para la pregunta 6, que es de verdadero o falso, se aborda aparte ya que no es compatible con la clasificación de la tabla 4.2 de adquisición de conocimiento que contempla siete tipos de respuestas.

Pregunta 5.

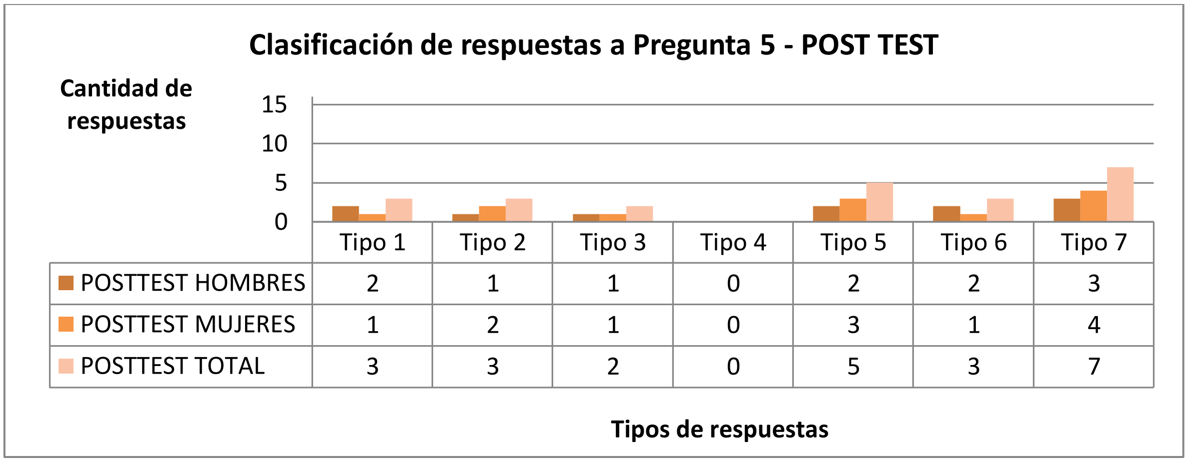
Los resultados que arrojan los gráficos 6.9 y 6.10 son similares en la distribución de la frecuencia de resultados, sin embargo desde el [E1] al [E2] hay una movilidad desde la concentración de respuestas de *Tipo 1, 2 y 3*, a las de *Tipo 5, 6 y 7*. Obteniendo casi el doble de respuestas en las categorías de nivel *alto y completo.*



	Tipo 1	Tipo 2	Tipo 3	Tipo 4	Tipo 5	Tipo 6	Tipo 7
PRETEST HOMBRES	3	4	0	0	3	0	1
PRETEST MUJERES	6	2	1	0	1	0	2
PRETEST TOTAL	9	6	1	0	4	0	3

Gráfico 6.9: Distribución de tipos de respuestas a la pregunta cinco del pre test [E1].

El efecto de la secuencia de enseñanza de este nivel en hombres y mujeres se muestra relativamente equilibrado en cada tipo de respuesta en el post test, ya que estas se diferencian en una unidad de un sexo por sobre el otro.



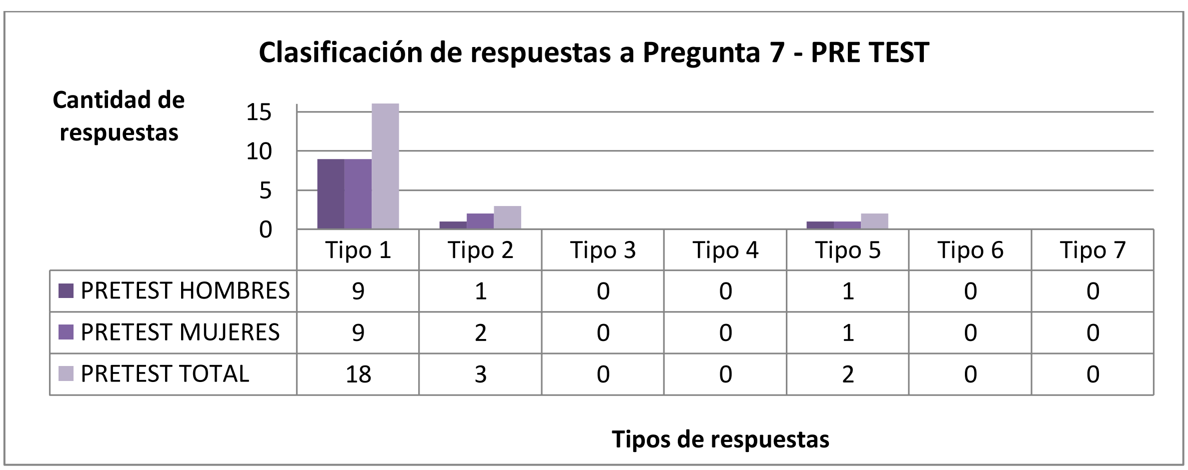
	Tipo 1	Tipo 2	Tipo 3	Tipo 4	Tipo 5	Tipo 6	Tipo 7
POSTTEST HOMBRES	2	1	1	0	2	2	3
POSTTEST MUJERES	1	2	1	0	3	1	4
POSTTEST TOTAL	3	3	2	0	5	3	7

Gráfico 6.10: Distribución de tipos de respuestas a la pregunta cinco del post test [E2].

El bajo o nulo dominio de los conceptos de perímetro y área, dificultó el desarrollo de este ejercicio, lo que se evidencia en que un tercio del grupo curso no supo abordar la problemática y menos realizar el proceso inverso de obtención de las medidas de los lados de cada cuadrado.

Pregunta 7.

En el pre test [E1], la mayoría de las y los estudiantes no contestaron esta pregunta, por lo que se clasifican en respuestas de *Tipo 1*.



	Tipo 1	Tipo 2	Tipo 3	Tipo 4	Tipo 5	Tipo 6	Tipo 7
PRETEST HOMBRES	9	1	0	0	1	0	0
PRETEST MUJERES	9	2	0	0	1	0	0
PRETEST TOTAL	18	3	0	0	2	0	0

Gráfico 6.11: Distribución de tipos de respuestas a la pregunta siete del pre test [E1].

Sin embargo, desde el [E1] al [E2] se observa una clara baja de las respuestas del Tipo 1, éstas se trasladan a las respuestas del *Tipo 2 y 5,* las que tiene un nivel de adquisición *bajo* y *alto*, respectivamente, pero ambas de categoría *incorrecta* (Ver gráficas 6.11 y 6.12).

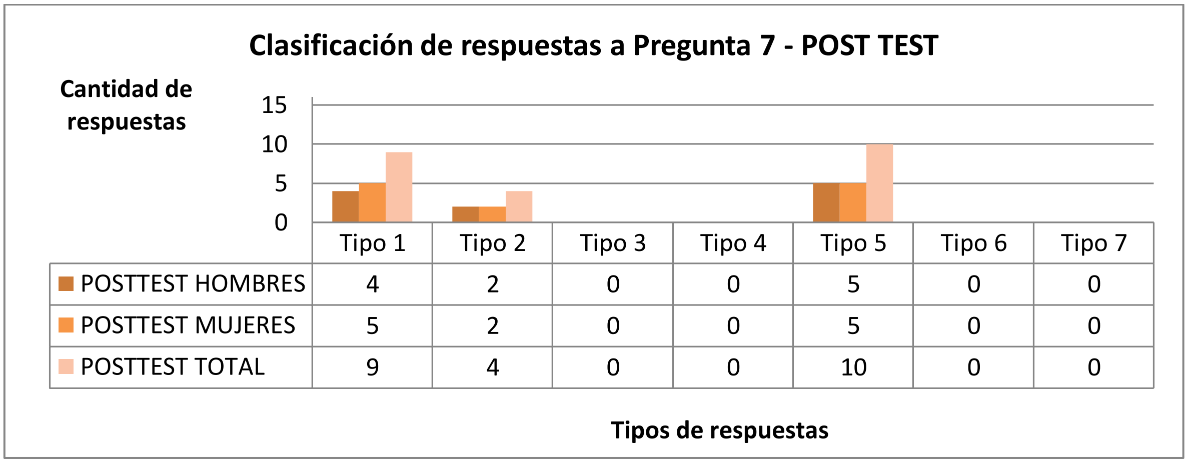


Gráfico 6.12: Distribución de tipos de respuestas a la pregunta siete del post test [E2].

En ambos casos las respuestas entre hombres y mujeres están distribuidas de igual manera, teniendo una diferencia de una unidad en algunos casos.

Las dificultades detectadas se asocian a la falta de abstracción de la imagen del ejercicio, ya que la utilizan tomándolo como referencia real de la escala de las medidas. Esto se ve reflejado en que la mayoría de las respuestas de *Tipo 5* dicen que la altura del camión es 3 o 6 metros ya que voltean el camión y lo miden según la información que indica la imagen, la que pueden confundir con el radio de la semicircunferencia. Debido a esto las y los estudiantes no lograron extraer la información importante para resolver el ejercicio mediante el teorema de Euclides.

Pregunta 6.

Esta pregunta contempla cuatro afirmaciones que las y los estudiantes debían dirimir si eran verdaderas o falsas. Para efectos del análisis, se plantearan los resultados por cada sub-pregunta, identificándolas desde la A) a la D). Las siglas en los gráficos corresponden a Verdadero (V), No Responde (NR) y Falso (F).

Pregunta 6.A)

Si bien la distribución de respuestas desde el [E1] al [E2] se observa una notable baja en la clasificación de NR, esto no se refleja en los gráficos 6.13 y 6.14 con la adquisición correcta del aprendizaje, pues se incrementó la cantidad de respuestas erróneas (F) por sobre las respuestas correctas (V).

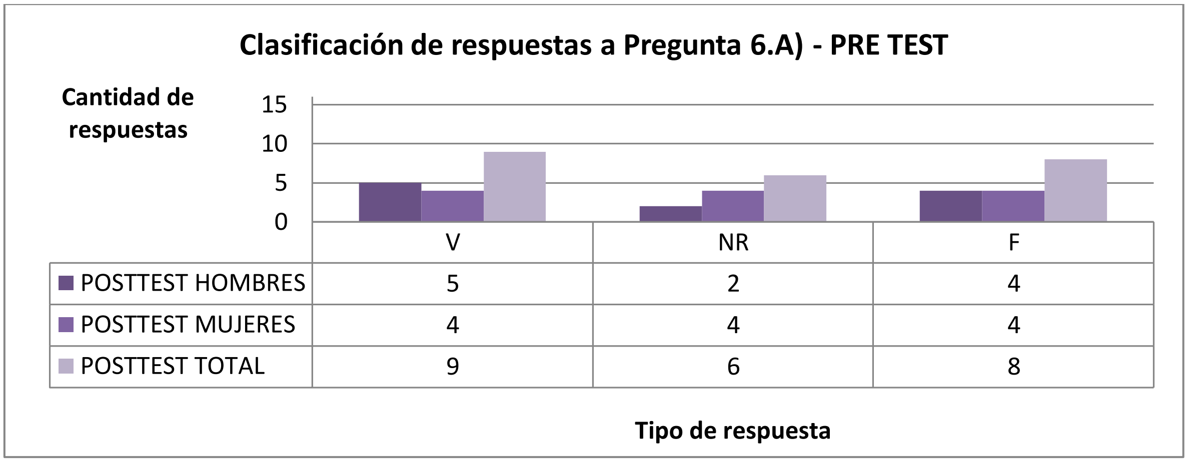


Gráfico 6.13: Distribución de respuestas a la pregunta 6.A) del pre test [E1].

En cuanto a la relación de distribución de respuestas entre hombres y mujeres, los resultados arrojan un mayor alto porcentaje de NR en las mujeres, las cuales posteriormente se trasladan a las respuestas erróneas. Lo mismo sucede con los hombres pero en menor escala.

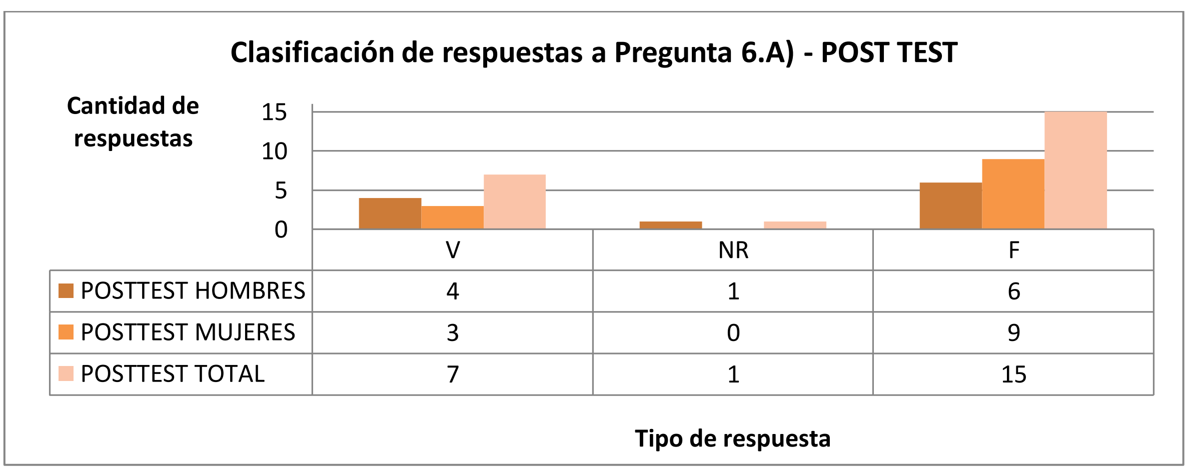


Gráfico 6.14: Distribución de respuestas a la pregunta 6.A) del post test [E2].

Las dificultades para responder esta pregunta se debe a que no identifican el tercer ángulo partir de los datos entregados, por lo que no hacen uso del criterio de semejanza AA. Confunden la medida de los ángulos y la medida de los lados, y no distinguen que si sus ángulos interiores son iguales, no necesariamente sus lados son congruentes. Por otro lado, quienes justificaron correctamente, asociaron su respuesta con los criterios de semejanza.

Pregunta 6.B):

De igual forma que en la pregunta anterior, se observa una baja en la categoría de NR desde el pre test al post test. Sin embargo esta vez sí se mantiene el total de las respuestas correctas (V), principalmente de mujeres por sobre los hombres (Ver gráficos 6.15 y 6.16).

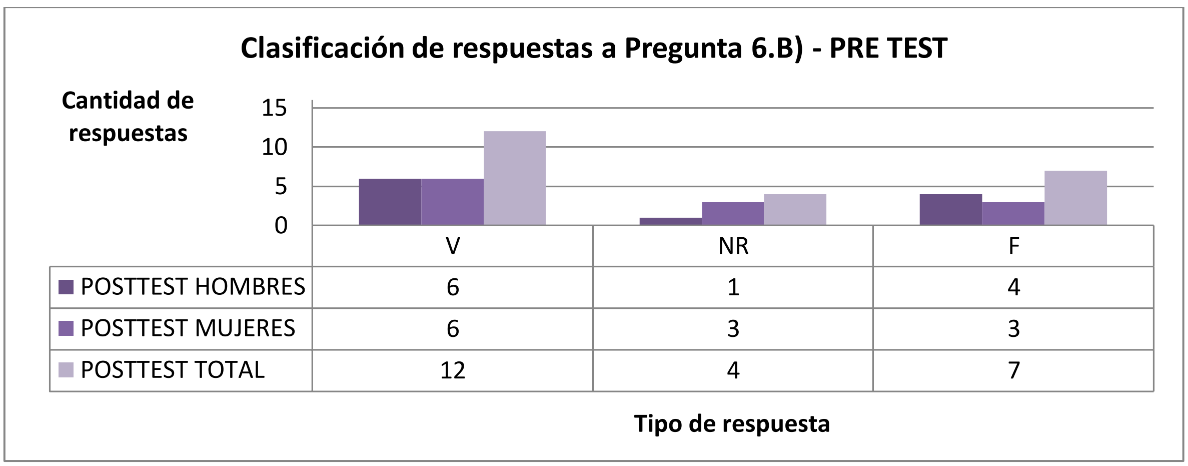


Gráfico 6.15: Distribución de respuestas a la pregunta 6.B) del pre test [E1].

En el caso de los hombres se denota, en los gráficos 6.15 y 6.16, que parte de sus respuestas correctas (V) del pre test, se trasladan a las respuestas incorrectas (F) en el post test, manteniendo la categoría NR.

La complejidad de esta pregunta radica en la comprensión del significado de polígono regular, ya que lo asocian directamente con el significado de congruencia siendo éste un caso particular de la semejanza. Por otro lado, las justificaciones a las respuestas correctas, relacionan el caso de la semejanza con la proporcionalidad.

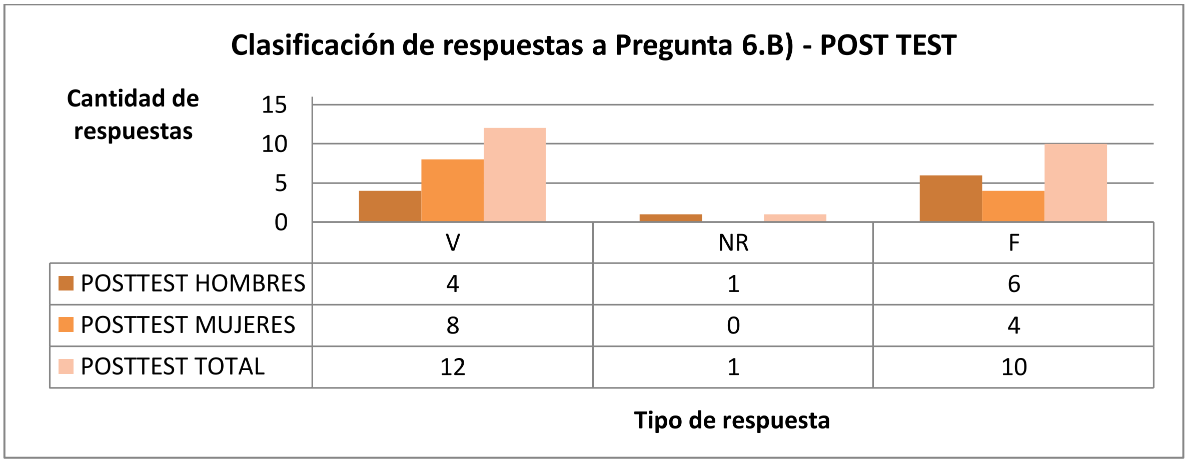


Gráfico 6.16: Distribución de respuestas a la pregunta 6.B) del post test [E2].

Además, al igual que en la sub-pregunta anterior, las mujeres tienen menor justificación que los hombres, siendo éstos quienes tiene la totalidad de justificaciones.

Pregunta 6.C):

Los gráficos 6.17 y 6.18 muestran que desde el pre test [E1] al post test [E2] se puede apreciar que existe un traslado de respuestas incorrectas (V) o No Responde, a la correcta (F). Siendo los hombres trasladados desde las incorrectas (V), en cambio las mujeres se trasladaron desde las NR.

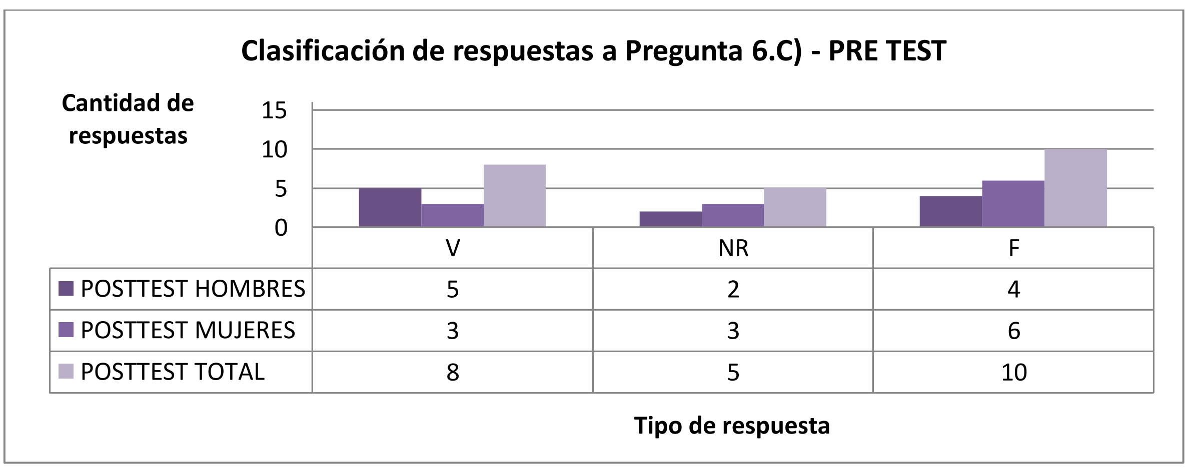
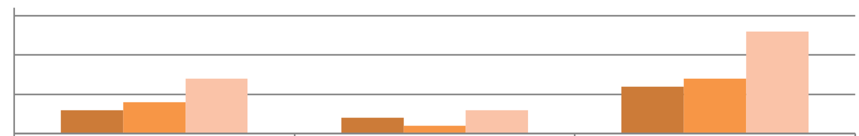


Gráfico 6.17: Distribución de respuestas a la pregunta 6.C) del pre test [E1].



	V	NR	F
POSTTEST HOMBRES	3	2	6
POSTTEST MUJERES	4	1	7
POSTTEST TOTAL	7	3	13

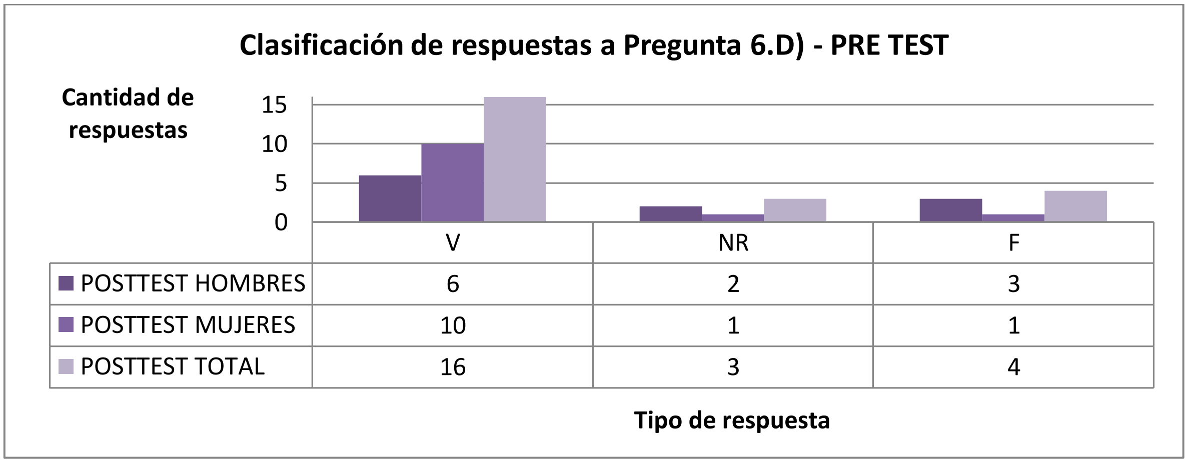
Gráfico 6.18: Distribución de respuestas a la pregunta 6.C) del post test [E2].

La adquisición de conocimiento de este nivel, se alcanzó para la mitad del curso aproximadamente. La complejidad de esta pregunta está relacionada con la pregunta 6.A), que relaciona las medidas de los ángulos pero en este caso es explícito que sus ángulos internos no son de igual medida por lo que facilita la identificación de que no cumplen los criterios de semejanza, según lo que justifican las y los estudiantes.

Nuevamente se repite el fenómeno de la no justificación de las respuestas por parte de las mujeres y una justificación total de los hombres.

Pregunta 6.D):

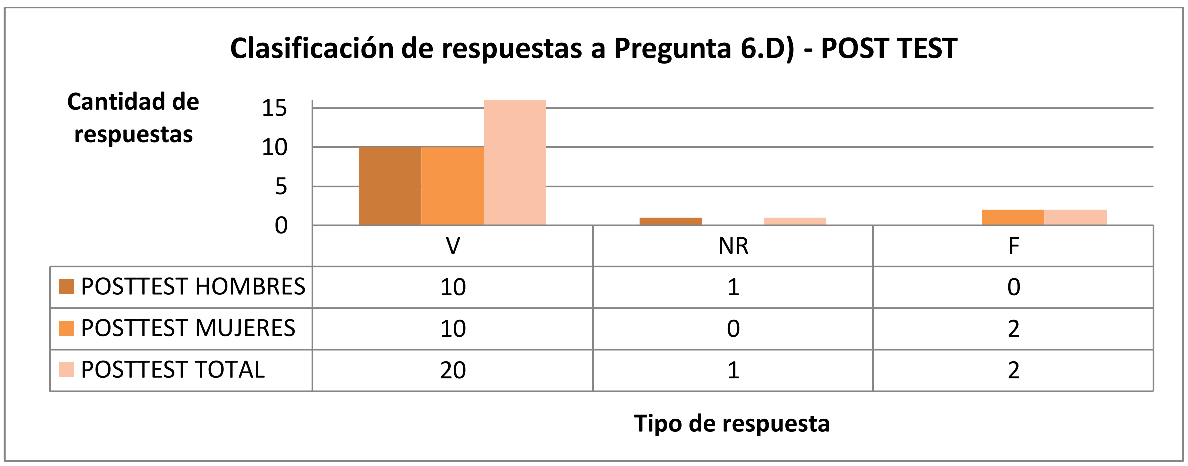
Dentro de la complejidad del nivel, tanto en el pre test y el post test (Ver gráficos 6.19 y 6.20) los resultados fueron favorables en cuanto a la adquisición del contenido relacionado a ésta pregunta. Sólo tres estudiantes no estuvieron en la categoría de la respuesta correcta (V) luego de la aplicación de la secuencia de enseñanza como se muestra en el gráfico 6.20.



	V	NR	F
POSTTEST HOMBRES	6	2	3
POSTTEST MUJERES	10	1	1
POSTTEST TOTAL	16	3	4

Gráfico 6.19: Distribución de respuestas a la pregunta 6.D) del pre test [E1].

A pesar del alto porcentaje de respuestas correctas, fueron los hombres quienes se trasladaron desde la respuesta incorrecta (F) a la correcta (V), y las mujeres mantuvieron el total de respuestas correctas (V).



	V	NR	F
POSTTEST HOMBRES	10	1	0
POSTTEST MUJERES	10	0	2
POSTTEST TOTAL	20	1	2

Gráfico 6.20: Distribución de respuestas a la pregunta 6.D) del post test [E2].

La dificultad que se observa en esta pregunta no puede ser explicada ya que sus respuestas no fueron justificadas o no son coherentes.

6.2 ANÁLISIS DE INTERACCIONES GRUPALES

Se analizan las transcripciones de las grabaciones de audio cuando las y los estudiantes realizaron las actividades de la Etapa II. Para lo cual se grabó el audio de la conversación de tres grupos en algunas sesiones.

Para el análisis de interacciones en los grupos se realizaron las transcripciones de las grabaciones y se utilizó el modelo de Krummheuer (2007, 2011), junto a la tabla 4.3 que ordena las estructuras de diálogo. Los análisis de cada grupo se realizaron de acuerdo al orden sucesivo de las sesiones de la secuencia de enseñanza, en el que cada extracto tiene su análisis grupal en particular, para realizar finalmente un análisis general del fenómeno de interacción entre hombres y mujeres.

Los grupos fueron grabados de manera azarosa y en este análisis se omite la clase 2 en la que se enseñó contenido por lo que no hubo mayor interacción, y la clase 5 también se omite por ser una sesión de repaso de todas las actividades anteriores, las que se detallan en la Tabla 4.1 de Distribución de actividades en Etapa II. Se prescindieron algunas líneas de los diálogos por no ser parte de la discusión principal. Por último, se resguardan los nombres de los participantes y estos se reemplazan por siglas, en donde la letra M hace referencia a las mujeres y la letra H a los hombres.

SESIÓN 2 – CLASE 1.

El siguiente extracto corresponde al grupo 7 de la clase 1, que está compuesto por las y los estudiantes a quien en las transcripciones nos hemos referido por M1, M2, H1 y H2. En particular el diálogo se desarrolla en el minuto 33 de la grabación hasta el minuto 36. Luego de realizar la actividad [A1] y su posterior corrección en pizarra, el grupo resuelve la Tarea 1 de la actividad [A2], tanto M1 como M2 empiezan a trabajar en conjunto para la resolución de la Tarea 2 como se muestra en la tabla 6.1

Tabla 6.1
Diálogo desde <101> a <108> de Clase 1 – Grupo 7.

Orador y su función	**Declaración**	**Persona responsable**	**Idea de la declaración**
M1 Retransmisora	Eso se hacía así ¿O no M2? Mira esto dice *dibuje la figura L, de modo que sea tres veces que el tamaño original.* No sé cómo hacer eso. <101>	*Texto de ejercicio*	Lectura del ejercicio a realizar.
M2 Autora	Serían 9 pa' arriba ¿O no? <102>	M1	Calcula el resultado de 3x3

M1 Fantasma	A ver, si son dos cuadros 2x3, 6. Serían 6 hacia el lado. <103> M2	Calcular la multiplicación lado más pequeño de la "L"
M2 Retransmisora	Sí. <104> M1	Afirmar el razonamiento de M1
M1 Vocera	Si es uno hacia al lado, son tres hacia al lado. <105> M2	Comprensión de razón 1:3
M1 Autora	Que el rectángulo sea la mitad del tamaño original, entonces hay que dividir 4:2=2 y acá serían 8:2=4, 2 y 4. <108>	Calcular las medidas del rectángulo reducido por la mitad

Con la segunda tarea de la actividad 2, M1 lee el enunciado por lo que solo es una retransmisora del texto, M2 se posiciona como autora, ya que entrega el resultado de 9 en <102> , ya que el largo de la "L" mide 3 cuadros y se debía ampliar 3 veces su tamaño, ella realizó el cálculo de 3x3. M1 entiende el razonamiento de su compañera y en <103> se aventura diciendo "si son dos cuadros, 2x3, 6. Serían 6 para el lado.", por lo que es responsable del contenido, pero no de la forma, haciendo de fantasma y M2 hace de retransmisora al afirmarle su respuesta. Finalmente en la línea <108>, M1 demuestra que entendió por completo el ejercicio al resolver el rectángulo "Que el rectángulo sea la mitad del tamaño original, entonces hay que dividir 4:2=2 y acá serían 8:2=4, 2 y 4" posicionándose como autora. Por otro lado en el análisis de recepción, M1 es quién suele convocar las ideas eligiendo a M2 como su compañera de conversación, mientras que H1 y H2 no tienen una participación directa por lo que serían sobre-oyentes.

A continuación en la Tabla 6.2, H1 y H2 se integran al diálogo en el minuto 37. H2 no entiende bien qué es lo que sus compañeras hicieron para resolver el ejercicio, M1 es quién se toma el tiempo para que ellos comprendan y les explica.

Tabla 6.2

Diálogo desde <117> a <123> de Clase 1 – Grupo 7.

Orador y su función	**Declaración**	**Persona responsable**	**Idea de la declaración**
M1 Autora	*(Lee las instrucciones).* Entonces multiplicamos 3x2 <117>		Calcula el triple de la base de L, la que tiene 2 unidades.
H2 Vocero	9, ah me confundí con las potencias, 6 <118>	M1	Calcula 3x2.
M1 Retransmisora	Ya entonces la base va a ser esta. ¿Y 3x3? <119>	M1	Afirma el cálculo de 3x2 y pregunta por el triple del lado izquierdo de la L, la que tiene 3 unidades.
H2 Retransmisor	Ahora si 9. <120>	M1	Responde al cálculo de 3x3.
M1 Fantasma	Ahora 9 pa' arriba. <121>	H2	Explica cómo se amplía el lado izquierdo de la L.
M1 Autor	Y acá se divide ¿4 divido en 2 y 8 dividido en 2? <122>		Pregunta por el cálculo de los lados del rectángulo.
H1 – H2 Voceros	2 y 4 <123>	M1	Calcularon 4:2 y 8:2

Como se observa, M1 es autora ya que está explicando cómo se resuelve el ejercicio siendo H2 quien desarrolla un rol de vocero en su mayoría, al ir siguiendo las ideas de M1. Luego, M1 es Fantasma al utilizar la respuesta de H2 para seguir orientando la discusión del ejercicio. Finalmente, M1 toma el rol de autora al resolver el ejercicio del rectángulo en donde H1 y H2 solo se remiten a responder el cálculo que M1 pregunta, pasando a ser voceros. Por otro lado, en el análisis de receptor, M1 escoge como compañero de conversación a H2, mientras que H1 se acota a ser sobre-oyente. Y M2 pasa a ser fisgona ya que no participa del diálogo.

SESIÓN 4 - CLASE 3.

El siguiente extracto corresponde al grupo 2 que se grabó en la clase 3. Este grupo está compuesto por M3, M4, H3 y H4.

El diálogo de la Tabla 6.3 se sitúa al comienzo de la grabación, cuando los alumnos ya comenzaron a resolver la [A3] entregada por el docente y se encuentran discutiendo sobre el método para calcular el perímetro de una plaza a escala. Cabe destacar que esto no ocurre desde el inicio de la clase, ya que los primeros minutos se explicó el contenido pendiente de la clase anterior y la resolución de la actividad [A2] completada la clase anterior.

Tabla 6.3

Diálogo desde <1> a <46> de Sesión 3 – Grupo 2.

Orador y su función	**Declaración**	**Persona responsable**	**Idea de la declaración**
M3 Autora	30 mil centímetros. <1>		Expresa verbalmente la solución
H4 Autor	7 por 4, 24 <3>		Por su cuenta, está calculando el resultado
H3 Fantasma	No, 7 por cuanto ¿24 o 34? <4>	H4	Resolviendo la multiplicación de 7.500 por 4.
M3 Retransmisora	No sé cuánto es <7>	H3	Desconoce calculo
H3 – H4 Autores	Son 30 mil <12><13>		Terminan de calcular el resultado.
M4 Retransmisora	Y 30.000 equivale ¿a...? <15>	M3 - H3 - H4	Intenta establecer una unidad de medida a la respuesta
M3 Fantasma	30... ¿metros? <16>	M4	Variación de idea
H3 Fantasma	¿30.000 centímetros? <17>		Variación de idea

	M4	
M4 Fantasma	¿Cúbicos? <18> M4	Variación de idea
M3 Retransmisora	30 mil centímetros <19> H3	Coincide con la expresión de H3
M3 Autora	Describan un método ¡Ah! hay que describir el método, no hay que poner el resultado, hagámoslo en la parte de atrás <31>	Comprende las instrucciones
H3 Autor	Se mide...Se consigue la medida de uno de los lados... <32>	Intenta dar un punto de partida al método
M3 Vocera	Primero medimos... <33> H3	Reformula la idea de H3
H3 Vocero	Uno de los lados... <34> M3	Completa la idea de M3
M4 Autora	Para eso hay que ver que todos los lados miden lo mismo. <35>	Prioriza la importancia de saber la medida de la plaza
H3 Autor	Se multiplica por 4 y se consigue el perímetro <41>	Completa la idea de M4
M4 Retransmisora	Se multiplica por 4... <42> H3	Repite idea de H3
M3 Fantasma	No po', te faltó multiplicar por 2.500 <43> H3	Utiliza la escala del mapa
M3 Retransmisora	Luego multiplicamos... <45> M3	Continúa con idea de redacción
M4 Autora	Por 2.500, que es supuestamente lo que equivale a lo que mide <46>	Intenta expresar en sus palabras la escala 1 es a 2500

M3 y H3 son guiadores de la discusión ya que se posicionan en el rol de autores y fantasmas, haciendo que se entreguen ideas y nuevos elementos para nutrir la discusión. M4 si bien también es autora, complementa su rol con retransmitir contenidos, lo que hace que centre la discusión en base al tema principal. Y H4 en cambio, no tiene mayor participación en la discusión sin embargo solo interviene para entregar dos ideas al comienzo. Ahora bien, en el análisis de receptor, tanto M3, M4 Y H3 son compañeros de conversación y H4 es oyente, ya que tiene una participación directa pero no es dirigido por las y los oradores.

Transcurridos dos minutos, los integrantes del equipo cuestionan el resultado de 30.000 centímetros, intentando buscar referentes a las medidas que ellos conocen, como por ejemplo, 2 metros es un poco más alto que uno de sus compañeros. Repasan nuevamente los pasos, le preguntan al docente y corroboran que estaban en lo correcto desde el comienzo. En el minuto 5, pasan a resolver la siguiente tarea que es describir un método para el cálculo del área (Ver tabla 6.4).

Tabla 6.4
Diálogo desde <98> a <122> de Clase 3 – Grupo 2.

Orador y su función	**Declaración** **Persona responsable**	**Idea de la declaración**
M4 Autora	El área se supone que es la multiplicación de todos los lados. <98>	Explica fórmula de área.
M3 Fantasma	No de dos lados, uno de acá y uno de acá. <99> M4	Corrige a M4 sobre concepto de área.
M3 Fantasma	Multiplicamos este ladito por 2.500 y lo que nos dé por dos. <100> M3	Explica lo que está desarrollando del ejercicio.
H4 Autor	Ya pero ahora ¿Qué hay que hacer? <103>	Consulta sobre el ejercicio.
M3 Retransmisora	El área. <104>	Responde pregunta H4

		M4	
H4 Vocero	¿Y qué es el área? <105>	M3	Pregunta la respuesta de M3
M4 Vocera	La multiplicación de dos lados. <106>	H4	Responde pregunta de H4
M3 Autora	Hay que multiplicar 3.000 por 2.500 <109>		Explica procedimiento
H4 Retransmisor	¿3.000 por cuánto? <110>	M3	Cuestiona multiplicación
M3 Retransmisora	Por 2.500 <111>	M3	Repite su procedimiento
M4 Retransmisora	3 por 2.500 <112>	M3	Corrige a M3
H4 Vocero	¡Ah! 3, no 3.000 <113>	M4	Repite corrección de M4
M4 Fantasma	7.500 <114>	M4	Resuelve la multiplicación
M3 Fantasma	Y eso hay que multiplicarlo por 7500 <115>	M4	Prosigue con idea de área a escala
H3 Autor	¿M3 qué estás sacando ahora? <116>	M3	Consulta sobre procedimiento
M3 – M4 Retransmisoras	El área <117>	H3	Responden a H3
M3 Autora	Ya si es un cuadradito cada lado 7.500 por 7.500, me da 56.250.000 <118>		Resuelve área a escala
H4 Vocero	Sí, a mi igual <119>	M3	Reafirma resultado de área a escala

H3 Retransmisor	Yo al tiro lo saco <120> M3	Comprobando cálculo de área de M3
M4 Retransmisora	Está bien <121> M3	Confirma resultado de M3
H3 Retransmisor	Ah me dio flojera sacarlo confío en ustedes <122> M3	Avala resultado de M3, M4 y H4

Se inicia la discusión con M4 dando una idea errónea sobre el área, la cual es corregida por M3 quien toma el rol de fantasma ya que se hace cargo del contenido del enunciado de M4, seguido de ello H4 se trata de integrar al diálogo preguntando por el procedimiento de la tarea en general, identificándolo como autor en <103>. Con esto la discusión prosigue en torno al desarrollo del ejercicio. M3 vuelve a centrar el tema del área siendo autora del procedimiento a pesar de que éste sea erróneo, M4 corrige la multiplicación de M3 tomando el rol de fantasma, la cual complementa las ideas previas. Por otro lado en el diseño de receptor se encuentra que M3 y M4 desarrollan el rol de compañeras de conversación por tener una participación activa del tema, sin embargo H4 también es participante activo pero no dirigido por las oradoras por lo que tiene el rol de oyente. Mientras que H3 no participa activamente del diálogo, desarrollando el rol de sobre-oyente.

SESIÓN 5 - CLASE 4.

El siguiente extracto corresponde al grupo 1 el cual se grabó en la sesión 4. Este grupo está compuesto por las y los estudiantes M5, M6, H5 y H6. Cabe señalar que por una disolución del grupo 7, M2 y H1se integraron al grupo 1 en esta clase.

El diálogo se desarrolló luego de 4 minutos iniciada la grabación, en la que los integrantes del grupo intentan comprender la primera tarea de la actividad [A4] y ver cómo resolverlo, sin embargo no lograron entender la tarea por lo que acuden a la ayuda del profesor (Ver Tabla 6.5).

Tabla 6.5

Diálogo desde <47> a <61> de Clase 4 – Grupo 1.

Orador y su función	Declaración / Persona responsable	Idea de la declaración
H6 Autor	¿Pero por qué dice *Qué característica tienen en común… los triángulos formados*? Esa es la pregunta, hay que responder a ESA pregunta <47>	Lee y comprende la pregunta
H1 Autor	Las características que tienen es que son lados iguales <52>	Establece relaciones de congruencia entre los dos triángulos.
H1 Retransmisor	*(Dirigiéndose al profesor)* Los triángulos...las características que tienen los triángulos formados es que son iguales los lados <59> / H1	Establece relaciones de congruencia entre los dos triángulos hacía el profesor.
Profesor	Ya esa es una ¿Cuál puede ser otra? <60>	
H6 Vocero	Que todos sus lados son congruentes <61> / H1	Emplea en lenguaje formal la idea de H1

El diálogo que se produce entre H1 y H6, en donde ambos toman roles de autor y de retransmisor y vocero respectivamente, permite construir el conocimiento respecto al concepto de congruencia. Siendo los demás integrantes sobre-oyentes de la discusión.

Luego que identifican la congruencia y semejanza de los triángulos, escriben los resultados en su hoja de respuesta, hasta el minuto 13 donde empiezan a ver la Tarea 2 de la actividad [A4] en la que se debía relacionar el radio de una circunferencia con el ancho de la bandeja de la pizza, sin embargo al ser una actividad de Nivel 3 requirieron de ayuda externa para entender el problema. La Tabla 6.6 se desarrolla en el minuto 17, posteriormente de que el profesor terminara su explicación en la línea <157>.

Tabla 6.6

Diálogo desde <157> a <173> de Clase 4 – Grupo 1.

Orador y su función	Declaración Persona responsable	Idea de la declaración
M5 Autora	Para arriba también son 15 <157>	Relaciona el radio de la pizza, con el alto del rectángulo al que está inscrito
H6 Fantasma	¿El área? <158> M5	Consulta por la afirmación M5
M5 Fantasma	O sea que acá hay 15 y acá también hay 15. Hay que verlo como en este cuadradito. Está hablando solamente del radio <159> M5	Explica su propio razonamiento.
H6 Vocero	El profe dijo que todo esto medía 15 ¿no? <166> M5	Tiene dudas si la medida es sobre el diámetro o el radio
M5 Fantasma	¡Algo así! Pero como que esto era 15. Pero dijo un número al azar creo… Pero mídelo mejor po' <167> H6	Verificar información
H6 Autor	¡No! Es que no hay que medirlo, porque eso es... una medida propia ¿Cachai? <168>	Comprende que la imagen es referencial a los datos entregados
M5 Autora	Entonces ¿Qué relación hay entre el radio y esto? Es que miden lo mismo <171>	El ancho de la bandeja, mide lo mismo que el diámetro de la pizza
H6 Vocero	Son semejantes <172> M5	Formaliza la idea de M5
M5 Fantasma	¿No será congruente? <173> H6	Corrige la idea de H6

En la discusión mostrada en la tabla 6.6, M5 inicia como autora y fantasma por lo que guía la discusión del tema. Sin embargo H6 se desempeña de mejor manera en el rol de vocero, lo que hace que vaya respaldando el procedimiento. Con base en estos roles, ambos se complementan para deducir información del ejercicio. Por otro lado, los compañeros de conversación lo conforman M5 y H6, siendo sobre-oyentes los demás integrantes del grupo.

El diálogo de la Tabla 6.7 se desarrolla a continuación del anterior, en el minuto 18, tanto M5 como H6 presentan dudas aún respecto al ejercicio.

Tabla 6.7
Diálogo desde <176> a <183> de Clase 4 – Grupo 1.

Orador y su función	**Declaración** **Persona responsable**	**Idea de la declaración**
M5 Retransmisora	El radio mide 15 <176> *Texto del ejercicio*	Comunica información del texto
Profesor	El radio es solo la mitad <177> M5	
M5 Fantasma	O sea que el diámetro mide 30 <178> Profesor	Concluye a partir de información del radio
Profesor	Mide 30 <179> M5	
M5 Retransmisora	Esto igual mide 15 *(Le dicta a H6)* <180> M5	Complementa información
H6 Autor	El área era ¿lado por lado? <181>	Consulta por concepto de área
M5 Retransmisora	Sí <182> H6	Confirma a H6
H6 Autor	30 por 15 ¿Cuánto es? 450. El área es igual a 450 <183>	Calcula el área

Con la ayuda del profesor para esclarecer la idea de la relación entre el radio, el diámetro y el ancho de la pizza, M5 deduce información necesaria y suficiente para el cálculo del área, tomando roles de retransmisora y fantasma. Mientras que H6 se apropia de la deducción de M5 y calcula el área. Por otro lado, en el diseño de recepción, M5 y el profesor son compañeros de conversación, mientras que H6 tiene una participación directa pero no dirigida, por lo que toma el rol de oyente, concluyendo el resultado del ejercicio.

De las clases y extractos analizados en este capítulo, la frecuencia de roles de Autor/a se dio 12 veces en hombres y 12 veces en mujeres, en el rol de Retransmisor/a se observó 5 veces para los hombres y 17 veces para las mujeres. En el rol de Fantasma fueron 3 veces los hombres y 13 veces las mujeres, y por último, en el rol de Vocero/a se obtuvo 9 veces en hombres y 3 veces en mujeres. Lo anterior deja reflejado una interacción mayor de las mujeres por sobre los hombres, quienes desarrollaron con mayor frecuencia los roles de Autora, Retransmisoras y Fantasmas. Mientras que ellos desarrollaron con mayor frecuencia los roles de Autor y Vocero.

CAPITULO VII
CONCLUSIONES

Cada establecimiento en su cotidianidad construye y re-construye una cultura propia, plasmándola de manera general en los "modos de ser" comunidad educativa, y de manera particular en las prácticas y relaciones sociales que se establecen al interior de las salas de clase. Las dinámicas que se producen y reproducen en el aula, afectan directa e indirectamente los procesos de enseñanza y aprendizaje, por lo que es menester poner atención en los modelos educativos junto con el ambiente que se genera en dicho espacio. Por ello, un desafío importante que tienen hoy los establecimientos educacionales y quienes componen las relaciones dentro de estos, es revisar e impulsar constantemente mejoras educativas en el quehacer docente, haciendo de las comunidades espacios inclusivos y de calidad, que propician y permiten que las y los estudiantes se desarrollen de forma integral y equitativa. Es así, que los resultados del presente estudio son un aporte para abordar dichos desafíos, incorporando el enfoque de género como una forma de observar y transformar la realidad desde las variantes del contexto educativo, el sexo y el género.

Ya se anunciaban de manera general en el capítulo de Antecedentes y Problemática algunas dificultades relacionadas con la enseñanza y el género, en particular en el desarrollo del conocimiento de las matemáticas y algunos factores que pueden influir en el aprendizaje de niñas y niños. A raíz de la problemática identificada en la literatura, las preguntas que guiaron este estudio son: *¿Qué efectos tiene, en el razonamiento geométrico de hombres y mujeres, la implementación de una secuencia de enseñanza con el modelo de Van Hiele?* y *¿Cómo interactúan hombres y mujeres de forma grupal cuando resuelven problemas de geometría?* Para dar respuestas a estas interrogantes, es importante mencionar que, el protagonismo de la secuencia de enseñanza está puesto en las y los estudiantes, por lo que el profesor o profesora pasa a ser un actor secundario, aspecto que nos permitió incorporar el modelo de Van Hiele para estudiar el razonamiento geométrico, ya que cumple con estas características. Los elementos anteriores son fundamentales para crear contextos horizontales, en donde la exploración por parte de los estudiantes es esencial para la construcción de nuevo conocimiento entre pares, así el docente solo guía el trabajo en clases y realiza intervenciones en los diferentes grupos cuando las y los estudiantes lo estimen conveniente. Esto tiene su importancia en que, tal como menciona Espinoza (2015), los docentes realizan prácticas diferenciadas al momento de estimular a los hombres o a las mujeres, siendo estas últimas interrogadas con preguntas de tipo cerradas o que requieren habilidades cognitivas inferiores. Adicionalmente, se trabajó de forma grupal en donde cada equipo se compuso de dos hombres y dos mujeres, con el fin de formar grupos con igual composición de sexos. De esta forma, se establece un ambiente más claro para evidenciar los comportamientos entre ambos sexos cuando estos trabajan en equipo. Con este modelo de trabajo se disminuyen las preconcepciones culturales del docente, pues la relación docente-estudiante se omite y solo queda la relación entre estudiantes.

Bajo las condiciones de aprendizaje recién mencionadas, los resultados de las y los estudiantes en los tres niveles de razonamiento que caracteriza el modelo de Van Hiele y, que además, se potencian en la secuencia de enseñanza, arrojan resultados que muestran efectos que tienden a ser parejos entre hombres y mujeres, es decir, en el nivel 1 ambos sexos adquirieron casi completamente las características de razonamiento geométrico, en el nivel 2 se polarizaron los resultados en ambos sexos, teniendo en las categorías de tipo de respuestas, desempeños muy bajos o muy altos logrando que la mitad del curso alcanzara un nivel óptimo, y en el nivel 3 no se logró con éxito la adquisición del aprendizaje, obteniendo respuestas de tipo incorrecto en ambos sexos. Por lo tanto, se infiere que el modelo de Van Hiele es un modelo que prima el desarrollo equitativo entre las y los estudiantes, puesto que independiente del nivel en el que se encontraban al inicio de la secuencia de enseñanza, el grupo curso fue avanzando en conjunto desde un nivel, experimentando las fases del modelo y alcanzando el siguiente nivel de complejidad. Dicho de otra forma, el modelo posee un efecto de arrastre que va nivelando a las y los estudiantes que tienen un razonamiento geométrico inferior, por lo que el modelo de Van Hiele en concordancia a las características del trabajo realizado en el aula de clases, en este caso particular, es una forma de trabajo pedagógico equitativo que aporta a la promoción de una mayor igualdad en el desempeño del razonamiento geométrico de hombres y mujeres. Queda en evidencia que tanto hombres como mujeres tienen las mismas capacidades para alcanzar niveles de razonamiento geométrico de igual manera, o sea el sexo biológico no es un obstáculo a la hora de aprender.

Si bien los resultados obtenidos en cada nivel eran esperables por los antecedentes de estudios anteriores (Aravena, 2016), un factor importante que influyó en estos resultados, fue el poco tiempo que se intervino con este modelo en contraste con el modelo de enseñanza que el curso recibía por parte de su docente oficial de matemática, el cual estaba asociado a un modelo conductista, que tal como señala Viñoles (2013) toma a los estudiantes como individuos que no actúan autónoma y racionalmente, más bien son reactores pasivos que pueden ser moldeados para obtener un resultado deseable. Junto con lo anterior, otro elemento importante a mencionar, es que los test aplicados en este estudio fueron realizados con preguntas de desarrollo a diferencia de las pruebas estandarizadas que hacen referencia a las brechas de género (TIMMS, PISA, SIMCE), esto permitió generar condiciones en que las y los estudiantes expresaran de forma escrita lo que estaban pensando al momento de resolver los test evaluativos.

En base en lo anterior, es necesario que como cuerpo docente reflexionemos sobre cómo propiciar un ambiente favorable para el desarrollo de sus estudiantes, tanto en capacidades como en habilidades, sin que estos se vean afectados por el sexo biológico y los prejuicios asociados a ellos.

En resumen, en el contexto de esta investigación el modelo de Van Hiele fue efectivo para desarrollar equitativamente el razonamiento geométrico, que debe ser permanente en el tiempo para generar más y mayores efectos positivos.

En relación a las interacciones entre las y los estudiantes, se deben precisar dos cosas, por una parte el estudio de Krummheuer (2007, 2011) se realizó considerando grabaciones de audio y video de un aula de clases en la que varios estudiantes de distintos niveles estaban resolviendo sus tareas individuales, lo que no sucedió en el presente estudio debido a que se limitó el análisis de las interacciones manifestadas solo al audio. Y por otro lado, el modelo para la categorización de roles, no discrimina por nivel de conocimiento ya que una idea correcta o no, puede ser clasificada en el rol de autor, sin embargo sí puede ser una variante la personalidad de las y los estudiantes al momento de incluirse en la discusión.

Aclarado lo anterior, las interacciones estudiadas arrojan como resultado que las mujeres realizan mayores interacciones que los hombres, teniendo alta presencia de roles de autoras, retransmisoras y fantasmas. En cambio los hombres tuvieron mucho menos interacciones y éstas se acotaron al rol de autor y vocero. Una interpretación de estos resultados, es que las estudiantes mujeres tienen mayor preocupación por generar y compartir el conocimiento, incluso procurando que quienes no estaban participando activamente tengan conocimiento de las ideas expresadas por los miembros del equipo.
En contraste, los estudiantes hombres no tuvieron tanta interacción en general, pero sus intervenciones en los diálogos se asociaron a la generación de ideas y a repetir de otra forma los contenidos ya anunciados.

De las notas de observación docente en la implementación de la secuencia de enseñanza, hubo un fenómeno que llamó la atención en relación a los grupos liderados por hombres o mujeres, pues en el caso de las estudiantes eran más abiertas a darse el tiempo de incluir a todos los integrantes en el proceso de la resolución de problemas, a veces incluso interpelando a quienes no estaban aportando. Por el contrario, cuando los grupos fueron liderados por hombres la dinámica fue diferente, estos intentaban desarrollar las actividades con la menor intervención posible de sus compañeros de grupo teniendo como prioridad que éstas fueran realizadas correctamente, excluyendo a los compañeros y compañeras que no comprendían las distintas tareas, favoreciendo el trabajo individual y no propiciando el aprendizaje colectivo. No obstante esto pudo deberse a la falta de compatibilidad de los integrantes de estos grupos y por eso se configuró una dinámica alejada del trabajo inclusivo por quienes lideraban, situación que se deja abierta a una futura investigación.

En efecto, las interacciones de hombres y mujeres en el trabajo grupal, se desarrollan con dinámicas cargadas de una cultura de género, las que de cierta forma coinciden con las características de liderazgos femeninos y masculinos que definieron las y los estudiantes, asociando lo fememnino a la *responsabilidad, la comprensión, la paciencia, aportando a hacer trabajos perfectos y a "ser mejores para explicar al otro"*. En cambio lo masculino lo detallan como *líderes seguros, no tan comprensivos, estrictos, capaces de mantener la calma en momentos difíciles pero desordenados cuando se trata de hacer trabajos.* Gamboa (2012) señala que este tipo de acciones es producto de los estereotipos de género que el estudiantado ha interiorizado inconscientemente, reproduciendolos en su actuar.

Esto último se vio reflejado en las interacciones donde algunos integrantes en ningún momento participaban de la conversación colectiva, y por consecuencia, no contribuían con nuevo conocimiento. A raíz de esto, como docentes consideramos importante la creación de espacios que potencien las relaciones entre pares, para que las y los estudiantes puedan trabajar en equipo sin la necesidad de que la afinidad entre ellos sea un factor que perjudique el desempeño a la hora de aprender en grupo. También es necesario trabajar en la búsqueda de mecanismos pedagógicos que no reproduzcan estereotipos de género en las interacciones grupales.

Como docentes vemos la necesidad del perfeccionamiento continuo de nuestra profesión, para que mejoremos constantemente la enseñanza y aprendizaje. Uno de los elementos que aporta a este objetivo, y que estuvo involucrado en este estudio, fue el análisis histórico, epistemológico y curricular del contenido que se enseñó, ya que nos permitió amplíar las perspectivas de nuestra formación que poseíamos al momentos de diseñar actividades que fueron abordadas de acuerdo a las necesidades educativas de sus estudiantes. Como también lo es la preparación y ensayo previo del material de estudio, para así detectar errores o dificultades en su diseño. Otro elemento no menor, es propiciar que las y los estudiantes se desarrollen de igual manera brindándoles la oportunidad de participar activamente en la clase y darles más espacio para que ellos sean protagonistas de la construcción de su aprendizaje.

Para finalizar, la incorporación del enfoque de género en la formación constante del docente y de los estudiantes, es menester para seguir aportando en una educación que permita reconocer a niños y niñas con el mismo potencial de aprendizaje y desarrollo, reconociendo la igualdad de derechos como la educación.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Agencia de Calidad de la Educación. (2015). *Resultados PISA.* Santiago de Chile: MINEDUC.

Agencia de calidad de la educación. (2015). *Resultados TIMSS Chile.* Santiago de Chile: MINEDUC.

Agencia de Calidad de la Educación. (2017). *Resultados SIMCE.* Santiago de Chile: MINEDUC.

Aravena, M., & Caamaño, C. (2013). Niveles de razonamiento geométrico en estudiantes de establecimiento municipalizados de la región del Maule. Talca, Chile. *Revista latinoamericana de investigación matemática educativa*, 139-178.

Aravena, M., Guitiérrez, Á., & Jaime, A. (2016). Estudio de los niveles de razonamiento de Van Hiele en alumnos de centro de enseñanza vulnerable de educación media en Chile. *Enseñanza de las Ciencias*, 107-128.

Austin, T. (2000). Para comprender el concepto de Cultura.

Bisquerra, R. (2009). *metodología de la investigación educativa.* Barcelona: Editorial La muralla S.A.

Díaz, J., Herrera, S., Novelo, S., & Sañinas, H. (2015). Temor a las matemáticas: causa y efecto. *Iberoamericana de Producción Académica y Gestión educativa*.

Elías, M. E. (2015). La cultura escolar: Aproximación a un concepto complejo. *Revista electrónica Educare*.

Escudero, I. (2005). Un análisis del tratamiento de la semejanza del tratamiento de la semejanza en los documentos oficiales y textos escolares de matemática en la segunda mitad del siglo XX.

Espinoza, A. M., & Taut, S. (2015). *El rol de género en las interacciones pedagógicas de aulas de matemática chilenas.* Santiago de Chile.

Fouz, F., & de Donosti, B. (2013). Modelo de Van Hiele para la didáctica de la geometría. 67-81.

Gamboa, R. (2012). ¿Equidad de género en la enseñanza de las matemáticas? *Revista Electrónica Educare*, 63-78.

Gamboa, R., & Vargas, G. (2013). El modelo de Van Hiele y la enseñanza de la geometría. *Uniciencia*, 74-94.

Gualdrón Pinto, É., & Gutiérrez Rodríguez, Á. (Febrero de 2016). *ESTRATEGIAS CORRECTAS Y ERRÓNEAS EN TAREAS RELACIONADAS CON LA SEMEJANZA.* Obtenido de ResearchGate: https://www.researchgate.net/publication/295260340

Jaime, Á., & Gutiérrez, A. (1991). El modelo de razonamiento de Van Hiele como marco para el aprendizaje comprensivo de la geometría. Un ejemplo: Los giros. *Educación matemática*, 49-65.

Krummheuer, G. (2007). Argumentarion and participation in the primary mathematics classroom: Two episodes and related theoretical abductions. *Journal of mathematical Behavior*.

Krummheuer, G. (2011). Representation of the notion "learning as participation" in everyday situations of mathematic classe. *Springer*.

MINEDUC. (2012). *Bases Curriculares Educación Básica.* Santiago de Chile.

MINEDUC. (2015). *Bases Curriculares 7° básico a 2° medio.* Santiago de Chile.

MINEDUC. (2017). *Comuniquemos PARA LA IGUALDAD. Orientaciones para un uso de lenguaje NO SEXISTA E INCLUSIVO.* Santiago de Chile.

Nolasco, H., & Velázquez, S. (2013). Análisis histórico y epistemológico del concepto de semejanza. *Comité Latinoamericano de Matemática Educativa*.

Rasmussen, C., Wawro, M., & Zendieh, M. (2015). *Examing inidivdual and collective level mathematical progress.* Springer.

Rico, L. (2013). *Análisis conceptual e investigación en didáctica de la matemática.*

Rico, L. (2013). El método del análisis didáctico. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 11-27.

Sampieri, R. (2014). *Metodología de la investigación.* Interamericana Editores SA.

Viñoles, M. A. (2013). Conductismo y constructivismo: modelos pedagógicos son argumentos en la educación comparada. *Human artes. Revista Electronica de Ciencias sociales y educación*, 7-20.

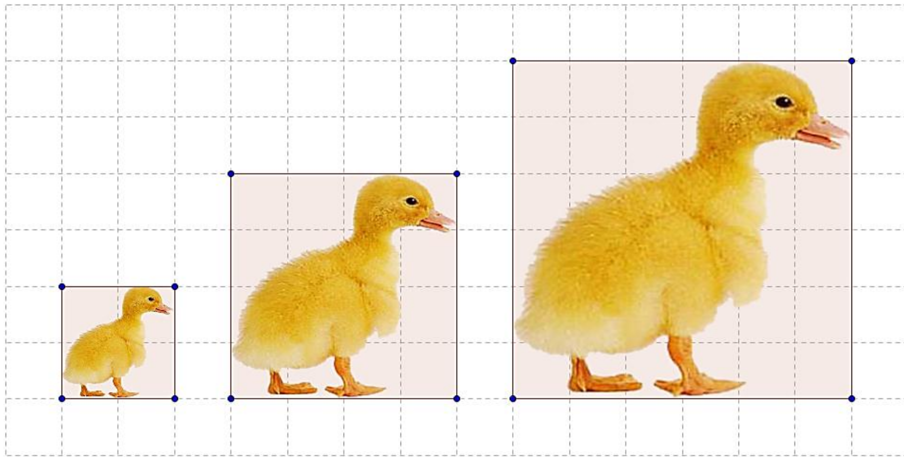
ANEXO

A. TEST EVALUATIVO [E1] – [E2]

1. ¿Cuáles de estas imágenes crees que son semejantes? ¿Por qué? Agrúpalas según sus números de imagen.

1 	**2** 	**3** 
4 	**5** 	**6** 
7 	**8** 	**9** 
RESPUESTA:		

2. Observa estas fotografías y justifica si son semejantes entre sí y por qué.



RESPUESTA:

3. Si tienes un cuadrado de lados 3 cm., entonces construye otro cuadrado semejante a él de forma que la razón de semejanza sea 1:2 y otro de razón 2:1.

RESPUESTA:

4. Los lados de un triángulo miden 6, 8 y 12 cm. Se construye otro semejante cuyas dimensiones son 9,12 y 18 cm. ¿Cuál es la razón de semejanza?

RESPUESTA:

5. Dos cuadrados son semejantes, uno es el doble del otro. Si el área del cuadrado más pequeño es 4 cm^2. ¿Cuál es el área del cuadrado más grande? ¿Y cuál es el perímetro de cada cuadrado?

RESPUESTA:

6. Responde verdadero (V) o falso (F) de manera justificada los siguientes enunciados:

a. ____ Un triángulo con un ángulo de 30° y otro de 40° es semejante a otro triángulo con un ángulo de 30° y otro de 110°.

J: ____

b. ____ Dos polígonos regulares con el mismo número de lados son semejantes.

J: ____

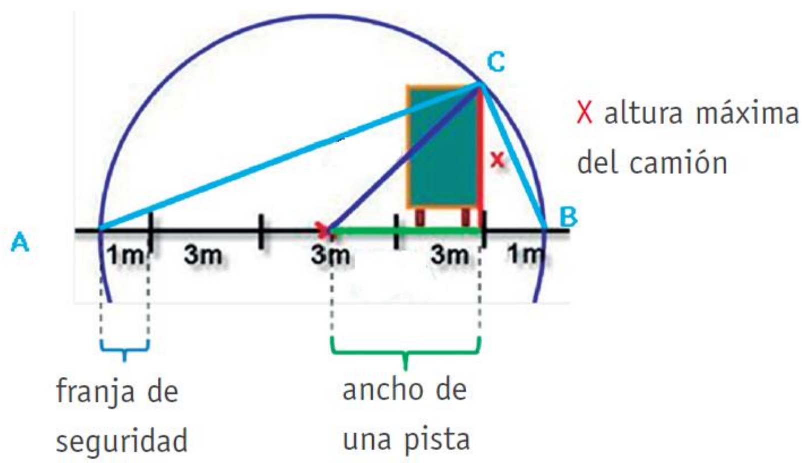
c. ____ Un triángulo con ángulos de 80° y 90° es semejante a otro con ángulos de 100° y 70 °.

J: ____

d. ____ Un cuadrilátero cuyos lados miden 3, 4, 5 y 6 cm es semejante a otro cuyos lados miden 6, 8, 10 y 12 cm.

J: ____

7.



En la imagen se muestra la vista de atrás de un camión que pasa por un túnel con la forma de medio cilindro. La imagen es bidimensional y por eso el cilindro se proyecta en forma de semicírculo.

a. Se quiere saber la altura máxima que puede tener un camión que pasa por la parte derecha de la pista (vista desde quien está leyendo el problema).

RESPUESTA:

B. ACTIVIDADES EN CLASES

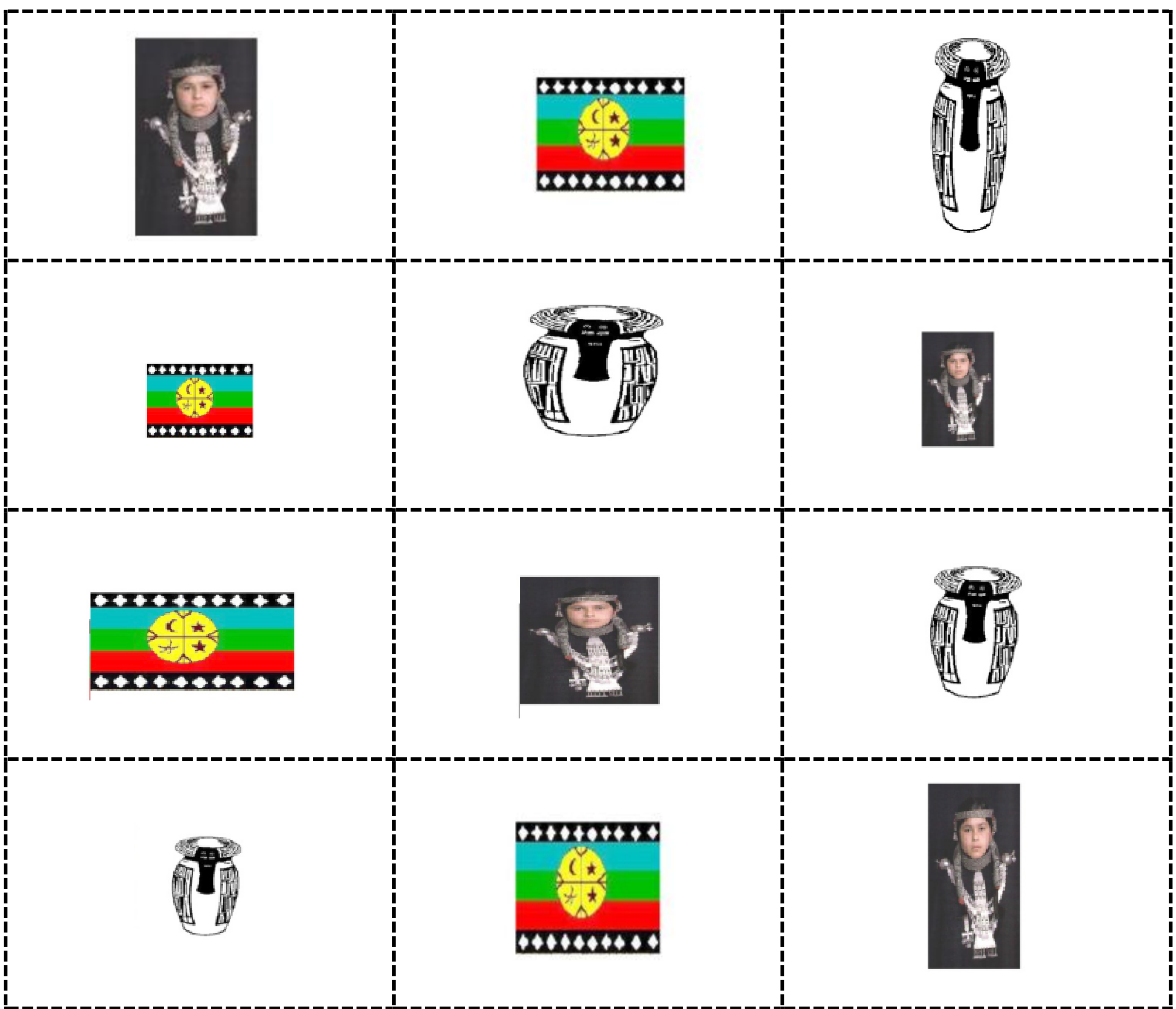
Actividad [A1]

ACTIVIDAD N°1

INSTRUCCIONES:

En grupo, deberán discutir sobre las imágenes de cada lámina, siguiendo la regla de agrupación y respondiendo la pregunta planteada:

a. Recortar las siguientes imágenes por el borde punteado.
b. Agrupen las figuras que ustedes crean que son semejantes y las figuras que crean que se parecen pero no son semejantes.
c. De acuerdo a la agrupación que han realizado ¿Cuándo son semejantes dos o más figuras?



1) Congruentes:
2) Semejantes:
3) Otros:

Actividad [A2]

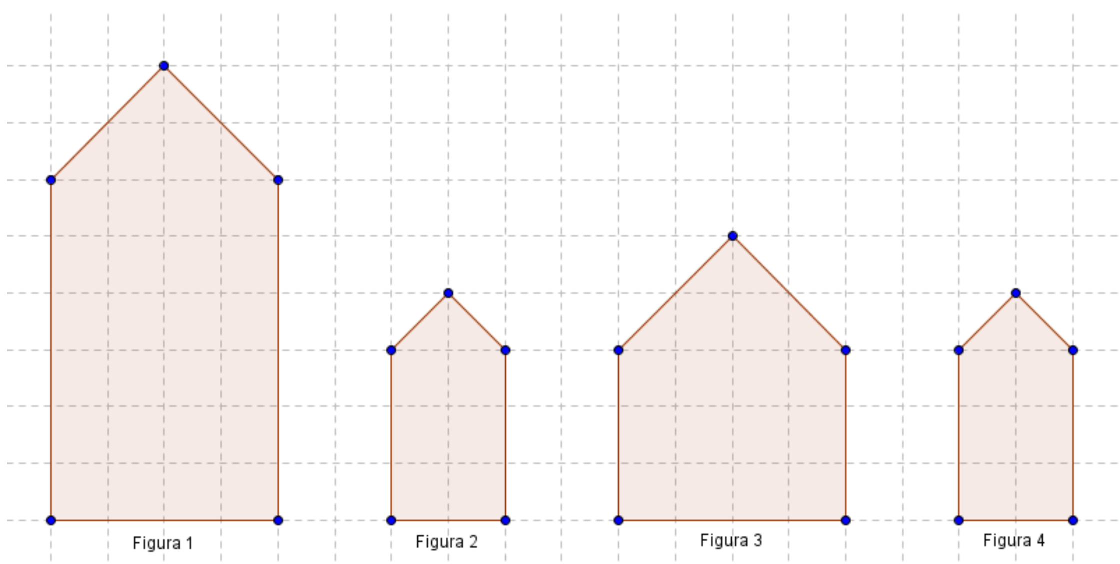
ACTIVIDAD N°2

INSTRUCCIONES:

Con tu grupo de trabajo discutan y realicen las siguientes tareas planteadas. Recuerden registrar sus conclusiones de cada tarea.

TAREA_1

Dados los siguientes polígonos:



a. ¿Qué figuras tienen la misma forma?

b. Completa las siguientes tablas, tomando como unidad el lado del cuadrado de la hoja cuadriculada:

	Medida lado 1	Medida lado 2	Medida lado 3	Medida lado 4	Medida lado 5
FIGURA 1					
FIGURA 2					
FIGURA 3					
FIGURA 4					

	Medida ángulo 1	Medida ángulo 2	Medida ángulo 3	Medida lado 4	Medida lado 5
FIGURA 1					
FIGURA 2					
FIGURA 3					
FIGURA 4					

c. Según las figuras de la misma forma que establecieron anteriormente ¿Observas alguna relación entre sus lados y sus ángulos?

TAREA_2

Figuras tamaño original:

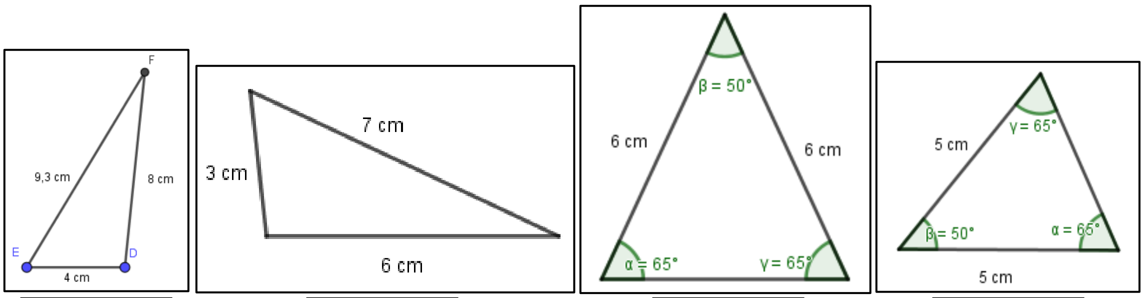
De acuerdo a las figuras de la cuadrícula:

a. Dibujen la figura L de manera que su tamaño sea tres veces del tamaño original.
b. Dibujen la figura rectangular de manera que su tamaño sea la mitad del tamaño original.

c. De acuerdo al rectángulo original y el rectángulo reducido, calcula sus áreas y compara sus resultados. ¿Cómo varía el área?

TAREA_3

Dado los siguientes triángulos, identifica y justifica aquellos que sean semejantes y ¿Por qué?:



Triángulo 1 | Triángulo 2 | Triángulo 3 | Triángulo 4

Actividad [A3]

ACTIVIDAD N°3

INDICACIONES:

En sus grupos de trabajo, realicen las siguientes tareas. Recuerden que deben anotar todas las ideas que tengan, hará que su discusión sea más enriquecedora.

TAREA_1

Considerando que el plano de Quilpué está en una escala de 1 cm:2500 cm :

a. Describan un método para determinar el perímetro aproximado de la Plaza Vieja, suponiendo que es un cuadrado perfecto.
b. Describan un método para determinar el área aproximada de la Plaza Vieja, suponiendo que es un cuadrado perfecto.

Actividad [A4]

ACTIVIDAD N°4

INDICACIONES:

En sus grupos de trabajo, realicen las siguientes tareas. Recuerden que deben anotar todas las ideas que tengan, hará que su discusión sea más enriquecedora.

TAREA_1

1) Claudia y José, se juntaron para comer pizza, Claudia corta la pizza por la mitad y le dice a José, que si se vuelve a cortar una vez más por la mitad y se unen los extremos de la pizza se obtiene un triángulo rectángulo, representado en la figura 1 como ΔABF. ¿Qué características tienen en común los triángulos formados? ¿Cuáles son congruentes y/o semejantes?

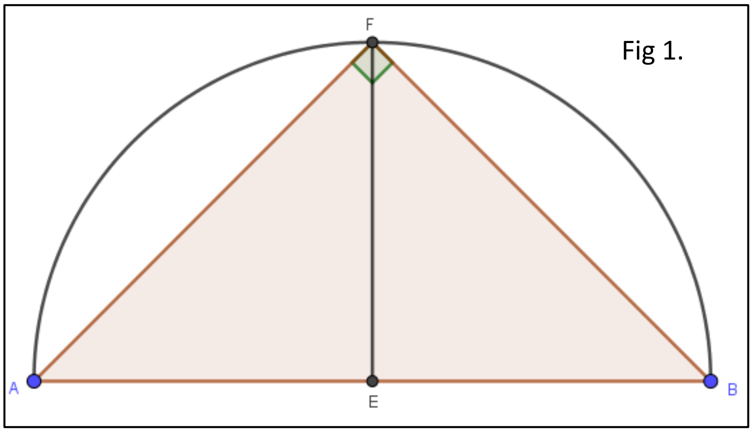


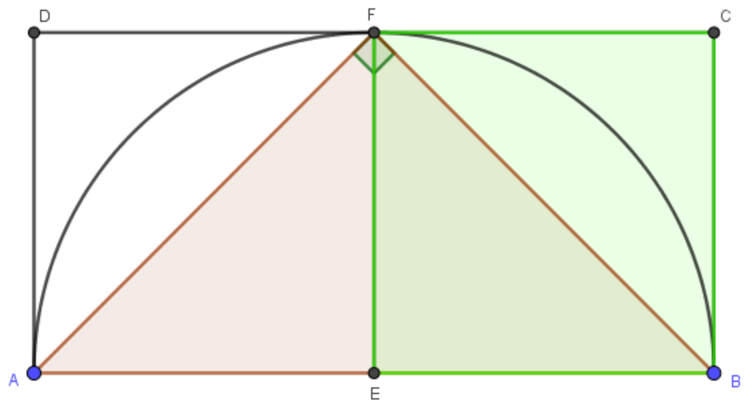
Fig 1.

____

____

____

2) Si se quiere hornear la mitad de la pizza, es necesario que el borde de la pizza no sobrepase la bandeja del horno, representada como el rectángulo ABCD de la figura 2 ¿Qué relación hay entre el diámetro de la semi-pizza y el ancho de la bandeja? Si el radio de la circunferencia es 15 cm ¿Cuánto mide el área del rectángulo ABCD?



TAREA_2

1) Utilizando regla en el triángulo ABC de la figura 2, dibujen un rectángulo de medidas $\overline{AD}$ y $\overline{DB}$, y además dibujen un cuadrado de lado $\overline{CD}$.

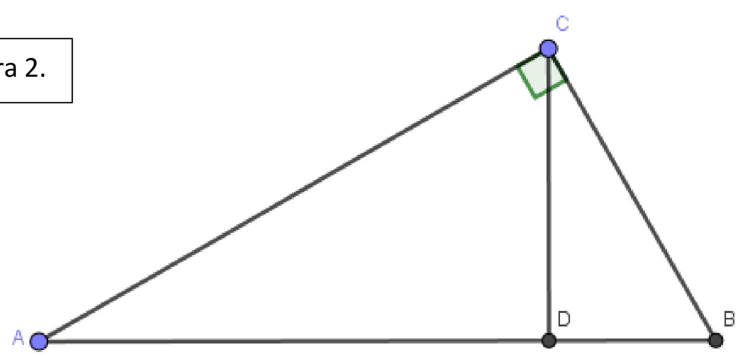
2) Con papel lustre hagan cuadrados de la misma medida, e intenten llenar por completo el área de los cuadriláteros y anoten la cantidad de papel lustre utilizado del:

- Cuadrado:

- Rectángulo:

¿Hay algo que les llame la atención de sus áreas?

Figura 2.



C. TRANSCRIPCIONES DE AUDIO

SESIÓN 2 - CLASE 1:

100. **H2:** ¿Qué hiciste acá? [min 33:00]
101. **M1:** ¿Eso se hacía así o no Carla? Mira esto dice *dibuje la figura L, de modo que sea tres veces que el tamaño original*, no sé cómo hacer eso.
102. **M2:** Serían 9 pa arriba po ¿O no?
103. **M1:** A ver, si son dos cuadros, 2x3 6, serían 6 hacia el lado.
104. **M2:** Si [min 34:00]
105. **M1:** Si es uno hacia al lado, son tres hacia al lado. Ni se ven los cuadros, o no caben 9 hacia arriba.
106. **M1:** Profe ¿cómo hago que entre la L acá? y ¿si la hago al medio? [min 35:00]
107. **P:** Hazla encima de la figura.

108. **M1:** ya ahí está, listo. Que el rectángulo sea la mitad del tamaño original, entonces hay que dividir 4:2=2 y acá serían 8:2=4, 2 y 4. [min 36:00]
109. **H1:** Son la 1 recién, quiero puro irme
110. **M1:** Yo quiero mis fideos con salsas. Ya hace la cuestión del área.
111. **H2:** Todo yo.
112. **H1:** Si tu cachai po.
113. **H2:** No porque yo cache, tengo que saber hacer lo. ¿Qué hiciste?
114. **M1:** Lo que había que hacer.
115. **H1:** ¡Profe!
116. **H2:** ¿Por qué lo hiciste mal? No entiendo [min 37:00]
117. **M1:** *(Lee las instrucciones)* entonces multiplicamos 3x2.
118. **H2:** 9, ah me confundí con las potencias, 6.
119. **M1:** ya entonces la base va hacer esta ¿y 3x3?
120. **H2:** Ahora si 9.
121. **M1:** Ahora 9 pa arriba. Y acá se divide, 4 divido en 2 y 8 dividido en 2? [min 38:00]
122. **H2 y H1:** 2 y 4.
123. **P:** ¿cómo van ustedes?
124. **M1:** Soy la única, con la Carla que pensamos en este grupo, con el Claudio.
125. **H2:** Yo he hecho esa y esa.
126. **P:** Hoy en la tarde voy a escuchar la grabación.

SESIÓN 4 - CLASE 3

Grupo 2: Compuesto por H2, H3, M4 y M3.

1. **M3:** 30 mil centímetros [min 0:00]
2. **M4:** Espérate
3. **H2:** 7 por 4 24
4. **H3:** No 7 por cuanto 24 o 34?
5. **M3:** 3 mil
6. **H3:** No monse
7. **M3:** No sé cuánto es
8. **H3:** son 26
9. **M3:** 7 x 4 es 28
10. **M4:** Es que le dije 26
11. **H3:** No te pesco más
12. **H2:** son 30
13. **H3:** 30 mil
14. **M3:** 30 mil po ¿quién me dijo que no?
15. **M4:** y 30 mil equivale a...?
16. **M3:** 30... ¿metros?
17. **H3:** 30 mil ¿centímetros?
18. **M4:** ¿Cúbicos?
19. **M3:** 30 mil centímetros
20. **H3:** díctame eso
21. **M3:** si po...siento que algo hicimos mal, 3 por...
22. **M4:** 2500, que es lo que equivale (inentendible) a la medida ¿no?
23. **H3:** son 7500
24. **M3:** 5 por 3 15, 1 2por 3 6 más 1 7, esto por 4 [min 1:00]
25. **H3:** 0 0 0
26. **M4:** 4 por 7
27. **M3:** 28
28. **H3:** 30 de nuevo
29. **H2:** Son 30 mil
30. Todos aprueban
31. **M3:** *describan un método* ¡ah! hay que describir el método, no hay que poner el resultado, hagámoslo en la parte de atrás.
32. **H3:** Se mide... Se consigue la medida de uno de los lados..
33. **M3:** Primero medimos ...
34. **H3:** uno de los lados...
35. **M4:** Para eso hay que ver que todos los lados miden lo mismo.
36. **H3:** ¡Damn!
37. **M4:** Luego...No Alexis
38. **M3:** Están grabando recuerdense tenemos que actuar como si sabemos
39. **H3:** No me digai
40. **M3:** Luego...

41. **H3:** Se multiplica por 4 y se consigue el perímetro.
42. **M4:** Se multiplica por 4...
43. **M3:** No po te falto multiplicar por 2500
44. **H3:** Perdón Monse [min 2:00]
45. **M3:** Luego multiplicamos...
46. **M4:** por 2500 que es supuestamente lo que equivale a lo que mide.
47. **H3:** En una de esas no equivocamos midiendo la plaza.

86. **H3:** Profe sabe que nos da 30 mil [min 4:43]
87. **P:** ¿30 mil? a ver 3 mil por 2500 les da 7500... mm si les podría dar 30 mil
88. **M3:** Si igual es harto, la plaza no es tan grande. [min 5:00]
89. **H3:** Pero tampoco es tan chica.
90. **M3:** Es una cuadra
91. **M4:** Bueno si
92. **H3:** Si po, una cuadra pero de campo
93. **M3:** una cuadra entera
94. **H3:** Ya sigamos, sigue copiando Monse por favor
95. **M3:** Ni siquiera sabemos si estas son las medidas reales, puede que sea falsa
96. **M4:** No si po si es como aproximado.
97. **M3:** Digan un método para determinar el área.
98. **M4:** El área se supone que es la multiplicación de todos los lados.
99. **M3**: No de dos lados, uno de acá y uno de acá
100. **M3:** Multiplicamos este ladito por 2500 y lo que nos de por dos.
101. **H3:** No
102. **M3:** o no? nono
103. **H2:** Ya pero ahora que hay que hacer?
104. **M3:** El área
105. **H2:** y que es el área?
106. **M4:** La multiplicación de dos lados
107. **M3:** No se po mira, esto 4 8 4 8, esto por esto.
108. **H2:** ah yaya [min 6:00]
109. **M3:** Hay que multiplicar 3 mil por 2.500
110. **H2:** 3 mil por ¿cuánto?
111. **M3:** Por 2500
112. **M4:** 3 por 2500
113. **H2:** A 3 no 3 mil
114. **M4:** 7500
115. **M3:** y eso hay que multiplicarlo por 7500
Silencio de casi 40 segundos
116. **H3:** Monse ¿que estas sacando ahora? [7: 42]
117. **M3 y M4:** el área
118. **M3:** Ya si es un cuadradito cada lado 7500, por 7500 me da 56250000 [min 8:00]
119. **H2:** Si a mí igual
120. **H3:** Yo al tiro lo saco

121. **M4:** está bien
122. **H3:** ah me dio flojera sacarlo confío en ustedes
123. **M3:** ¿Cuánto es?
124. **H3:** 0 por 0, 0 0 0
125. **M4:** Ya entonces es 7500 por 7500
126. **M3:** Muy bien, pero eso son cm cuadrados.
127. **M3:** ¿Cuántos metros son esos?
128. **H3:** ¿56.250.000 metros? [min 9:00]
129. **M3:** Profe hay que anotar el resultado de verdad?
130. **P:** El resultado y como llegaron

SESIÓN 5 – CLASE 4:

Grupo 1: Compuesto por H5, H6, M5, M6, H1 y M2

*: Estos estudiantes pertenecientes al grupo 7, se incorporaron a este grupo ya que el suyo se disolvió por falta de sus compañeros.

44. **H1:** Ya po Javier confío en ti. [min 4: 00]
45. **H6:** Ya yo digo que son congruentes, pero no sé cómo escribirlo aquí
46. **H1:** Yo igual, pon son congruentes...
47. **H6:** Pero por que dice *¿Que característica tienen en común... los triángulos formados?* esa es la pregunta, hay que responder a ESA preguntas.
48. **M5:** Pero estos triángulos a que se refieren porque acá esta, pero llega hasta ahí
49. **H1:** Es que son de dos actividades distintas
50. **H6:** No si son iguales
51. **M5:** Los triángulos distintos de cada....le sobra y acá esta justo justo.
52. **H1:** las características que tienes es que son lados iguales.
53. **H6:** ¿Le preguntamos al profe?
54. **H1:** Lados iguales, lado iguales
55. **M5:** Aparte lo que tenemos...ah no si son letras esa
56. **H1:** Profe
57. **P:** ¿Hicieron la primera?
58. **H6:** Es que no sabemos cómo responder eso.
59. **H1:** Los triangulo...las características que tiene los triángulos formados es que son iguales los lados no
60. **P:** Ya esa es una, ya ¿Cuál puede ser otra?
61. **H6:** Que todos sus lados son congruentes
62. **H1:** No pero es lo mismo que son iguales.
63. **P:** En el fondo es lo mismo, pero es más aceptado decir congruentes a que sea iguales.
64. **H1:** Una misma [este] tiene el mismo ángulo.
65. **P:** ¿Un mismo eje? ¿A qué te refieres?
66. **H6:** El mismo ángulo
67. **P:** El mismo ángulo, ya pero por ejemplo quien los tiene iguales
68. **H6:** Todos, creo ¿o no?
69. **P:** No se po, ¿cuales con cuáles?

70. **H1:** El B el F, y ese no sé qué dice y el E
71. **M5:** El A
72. **P:** Ese es una A, ya pero tengo los ángulos del triángulo grande y los ángulos del triángulo chico. Tienen alguna...
73. **H6:** ¿Cuál triángulo grande?
74. **P:** El triángulo AFB, el más grande, que tiene el triángulo pequeño, hay tres triángulos dando vuelta. [min 6:00]

154. **P:** Por ejemplo esto va de un lado a otro, de acá a acá, pero eso no es el diámetro, por donde tiene que pasar? [min 16:00]
155. **H1:** Por lo puntos.
156. **P:** Ya, el diámetro de una circunferencia... o sea para que una recta sea diámetro, debe pasar por la mitad de la circunferencia, o sea que el diámetro es todo esto...entonces la pregunta es ¿qué relación hay entre el diámetro de la semipizza (porque es la mitad de la pizza)y el ancho de la bandeja? La segunda pregunta dice, si el radio de la pizza es 15 cm entonces cuanto mide el área del rectángulo.
157. **M5:** Para arriba también son 15
158. **H6:** ¿El área?
159. **M5:** O sea que acá hay 15 y acá también hay 15. Hay que verlo como en este cuadradito, está hablando del radio solamente.
160. **H6:** Este sería 7,5
161. **M5:** Si, o sea aquí no po
162. **H6:** 7,5
163. **M5:** ¿lo mediste? Pero hay que medir esto, si es la mitad solamente
164. **H6:** Es 7,5
165. **M5:** ¿Lo mediste ya?
166. **H6:** El profe dijo que todo esto medía 15 ¿no? [18:11]
167. **M5:** Algo así, pero como que esto era 15, pero dijo un número al azar creo, pero mídelo mejor po
168. **H6:** No es que no hay que medirlo porque esto es... una medida propia cachai?
169. **M5:** O sea es lo que nosotros queramos...
170. **H6:** Si por ejemplo esto no te va a dar 15 si lo medí así
171. **M5:** Entonces qué relación hay entre el radio y esto, es que miden lo mismo
172. **H6:** Son semejantes
173. **M5:** ¿No serán congruentes?
174. **H6:** ¿Profe esto era lo que medía 15?
175. **P:** Ahí dice el radio
176. **M5:** El radio mide 15
177. **P:** el radio es solo la mitad
178. **M5:** o sea que el diámetro mide 30
179. **P:** mide 30
180. **M5:** Esto igual mide 15 (le dicta a H6)
181. **H6:** El área era lado por lado?
182. **M5:** Si

183. **H6:** 30 por 15 ¿cuánto es? 450. El área es igual a 450
184. **M5:** ¿Estay seguro?
185. **H6:** Calcula po cuanto es 15 por 30, 450 no?[min 20:00]
186. **H1:** 15 por 30? 210