



Universidad de Valparaíso

Facultad de Ciencias
Departamento de Matemática

**Dificultades en el planteamiento de problemas que involucran ecuaciones
lineales con una y dos incógnitas.**

Memoria para optar al título Profesional de Profesor de Matemática
Mención Didáctica.

Perla Maturana Carvajal

Profesor Guía: Dr. Carlos Silva Córdova

Valparaíso, Diciembre de 2012.

AGRADECIMIENTOS

Tras un año lleno de esfuerzos y sacrificios, cerrada esta etapa, me queda agradecer a:

Dios por haber permitido que llegue hasta este punto y por entregarme salud para lograr mis objetivos.

A mi madre Francisca por ser el pilar fundamental en todo lo que soy, en mi educación y por su incondicional apoyo a través del tiempo.

A mi padre Hugo, aunque ya no está con nosotros me brindó su apoyo y confianza.

A mi abuelita Bertita, por quererme tanto y apoyarme incondicionalmente, esto también se lo debo.

Y a todas las personas que de una u otra forma participaron en la realización de esta tesis.

Finalmente a los profesores, aquellos que marcaron cada etapa de mi camino universitario y que me ayudaron en asesorías y dudas presentadas en la elaboración de esta tesis.

RESUMEN

Esta tesis surge a partir de clases particulares realizadas a tres estudiantes de primero y segundo año de enseñanza media, los que presentaban dificultades en la resolución de problemas que involucran ecuaciones lineales con una y dos incógnitas.

Presentaremos los resultados de una investigación cualitativa de las dificultades que presentan los alumnos de enseñanza media en el momento de resolver este tipo de problemas, para lo cual se realizó una revisión bibliográfica, entrevistas a profesores, observación a participantes claves y análisis documental de programas de estudio y textos en uso en el aula.

Los docentes entrevistados concluyen que factores como la comprensión lectora, falta de: contenido previo, autoestima, motivación entre otros, son los que hacen que el alumno fracase al resolver este tipo de problemas. En relación a los planes de estudio y textos del estudiante, estos no muestran diversidad en el desarrollo de los problemas, solo hacen alusión a la resolución de problemas según George Polya.

Contenido

RESUMEN	2
INTRODUCCIÓN	5
CAPÍTULO 1. PROBLEMATIZACIÓN	7
1.1. <i>PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA</i>	7
<i>Evidencias empíricas</i>	8
<i>Evidencias teóricas</i>	16
<i>Problema de Investigación</i>	21
1.2. <i>JUSTIFICACIÓN DEL ESTUDIO</i>	22
1.3. <i>OBJETIVOS</i>	24
1.3.1. <i>Objetivo General</i>	24
1.3.2. <i>Objetivos Específicos</i>	24
1.4. <i>PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN</i>	25
CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO.....	26
2.1. <i>EL ARGUMENTO CONSTRUCTIVISTA</i>	26
2.1.1. <i>El aprendizaje</i>	27
2.1.2. <i>El aprendizaje constructivista</i>	28
2.2. <i>EL SISTEMA EDUCATIVO CHILENO</i>	29
2.3. <i>INVESTIGACIONES RECIENTES</i>	33
2.3.1. <i>Traducción del lenguaje natural al algebraico</i>	33
2.3.2. <i>Dificultades en la resolución de problemas por transferencia</i>	40
2.3.3. <i>Dificultades en el aprendizaje de la matemática</i>	43
2.3.4. <i>La diferencia entre un ejercicio y un problema matemático</i>	49
2.3.5. <i>Lógica de justificación en la resolución de ecuaciones de primer grado</i>	50
2.3.6. <i>Las ideas de Polya en la resolución de problemas</i>	52
2.3.7. <i>El trabajo de Allan Schoenfeld</i>	58
2.3.8. <i>Sistemas de Creencias</i>	59
2.3.9. <i>Los registros semióticos</i>	61
2.4. <i>ECUACIÓN DE PRIMER GRADO CON UNA Y DOS VARIABLES</i>	63
2.4.1. <i>Ecuación de primer grado con una variable</i>	63
2.4.2. <i>Ecuación de Primer Grado con dos variables</i>	66
CAPÍTULO 3. MARCO METODOLÓGICO	74
3.1. <i>OPCIÓN PARADIGMÁTICA</i>	74
3.2. <i>DISEÑO DE INVESTIGACIÓN</i>	74
3.3. <i>DELIMITACIÓN DEL PROBLEMA</i>	75
3.4. <i>MUESTRA</i>	75
3.5. <i>FUENTES DE LOS DATOS</i>	75
3.6. <i>CATEGORÍAS</i>	75
3.7. <i>TÉCNICA DE INDAGACIÓN</i>	76
3.8. <i>PLAN DE ANÁLISIS</i>	77
CAPÍTULO 4. RESULTADOS OBTENIDOS.....	79
4.1. <i>ANÁLISIS DE LAS ENTREVISTAS</i>	79
4.1.1. <i>Dificultades intrínsecas</i>	79
4.1.2. <i>Dificultades extrínsecas</i>	82
4.1.3. <i>Otras categorías emergentes</i>	84
4.1.4. <i>Estrategias docentes</i>	86
4.2. <i>OBSERVACIÓN PARTICIPANTE A LOS ALUMNOS</i>	87

4.3.	<i>ANÁLISIS DE LOS PROGRAMAS DE ESTUDIO</i>	89
4.4.	<i>ANÁLISIS DE LOS TEXTOS DE ESTUDIO</i>	91
	CONCLUSIONES	94
	RECOMENDACIONES	96
	BIBLIOGRAFÍA	97
	ANEXOS	102
	<i>ANEXO 1. ENTREVISTA M1</i>	102
	<i>ANEXO 2. ENTREVISTA H1</i>	104
	<i>ANEXO 3. ENTREVISTA H2</i>	105
	<i>ANEXO 4. ENTREVISTA M2</i>	108

INTRODUCCIÓN

La enseñanza de la matemática ha sido una tarea compleja para los docentes y al mismo tiempo, su aprendizaje para los estudiantes del país. Si bien, aprender matemática ha constituido, por múltiples razones, un desafío para los estudiantes de todos los tipos de establecimientos, esta investigación centra su mirada en los liceos del sistema municipal de educación. Lo hace porque ahí se concentran las mayores dificultades. No pretendiendo abordar toda la problemática que enseñar y aprender matemática conlleva, la presente investigación aborda como problema la resolución de problemas de planteo que involucran ecuaciones lineales de una y dos incógnitas.

Esta tesis tiene el propósito describir las dificultades que presentan los estudiantes de Primer y Segundo Año de Enseñanza Media, en el cambio de registro del lenguaje natural al algebraico. Para ello se auto impone cuatro objetivos a cumplir en el transcurso de la investigación: 1. Conocer la literatura pertinente en los ámbitos teórico, matemático y didáctico, que fundamente el estudio acerca de las dificultades que presentan los estudiantes de primer y segundo año de enseñanza media, en el cambio de registro del lenguaje natural al algebraico en la resolución de problemas que involucran ecuaciones lineales con una y dos incógnitas; 2. Analizar en los programas de estudio y los textos de uso actual en el aula el tratamiento que se da a la resolución de problemas y que recomendaciones metodológicas se sugieren; 3. Identificar, a partir de la práctica pedagógica las dificultades que los y las estudiantes enfrentan en el ámbito de estudio abordado por la investigación; y 4. Relacionar los programas, textos, y la práctica pedagógica con los aportes teóricos considerados en la investigación.

Para alcanzar estos objetivos, esta investigación se nutre de un marco teórico, el cual aborda en primer lugar el argumento constructivista, donde el protagonista central es el alumno, considerando sus intereses, habilidades para aprender y necesidades en el sentido más amplio; este argumento da sustento teórico a los

cambios que se han venido produciendo en las últimas décadas en la educación el país. En segundo lugar se exponen las características del sistema educacional chileno y finalmente se aboca a la enseñanza de las matemáticas, en particular, del contenido específico que se señala para el estudio.

La tesis se realiza bajo el paradigma cualitativo. Se trata de un diseño descriptivo donde a través de entrevistas abiertas se consigna la opinión que los docentes tienen del problema, se analizan los programas de estudio del nivel donde corresponde estudiar el contenido que preocupa al estudio y se analizan los textos de Matemática en uso en el aula.

La información se recoge de cuatro docentes que juegan el rol de informantes claves, quienes a través de una entrevista abierta dan a conocer su percepción del problema.; el análisis de las entrevistas sumado a ello el análisis de los programas de estudio y textos que permiten el cumplimiento de los objetivos señalados para el estudio.

CAPÍTULO 1. PROBLEMATIZACIÓN

1.1. Planteamiento del Problema

Entenderemos por problema de planteo, conjunto de palabras que presentan una situación que no es posible resolver de forma directa, sino que es necesario utilizar diversos conocimientos matemáticos, y buscar relaciones nuevas entre ellos.

La resolución de problemas de planteo, es sin duda una temática que a gran parte de los estudiantes, más de alguna vez, le ha traído complicaciones, ya sean por no dominar los contenidos necesarios, no comprender la problemática o falta de interés. En nuestra práctica laboral, en la realización de clases particulares de matemáticas, nos hemos encontrado con dichas dificultades, e incluso en nuestra propia experiencia estudiantil, tanto en la enseñanza media como en la etapa de formación universitaria, hemos sido testigos de los obstáculos y el fracaso continuo que presentan los estudiantes en la resolución de problemas de planteo.

Al analizar el sistema educativo nos encontramos que los textos de apoyo, por lo general, abundan ejercicios que no necesariamente necesitan el desarrollo de habilidades ni activan operaciones cognitivas complejas; al final de cada unidad hallamos un número reducido de problemas en su mayoría del mismo tipo y que pueden ser resueltos de acuerdo a un modelo a proceder; como consecuencia no ayuda a generar en los alumnos el desarrollo en su razonamiento matemático obteniéndose paulatinamente una actitud negativa en relación con la asignatura.

En esta investigación, nos abocaremos al estudio de la resolución de problemas de planteo que involucran ecuaciones lineales de una y dos incógnita.

Consideraremos evidencias desde dos ámbitos: uno con base en antecedentes empíricos y otro, con base en antecedentes teóricos. Para el primer caso

ilustraremos producciones escritas de tres estudiantes que asisten a nuestras clases particulares. En tanto, para el caso de antecedentes teóricos, se realizará una revisión bibliográfica acerca de la resolución de problemas de planteo que involucran ecuaciones lineales, y se mostrará una mirada en la resolución de problemas en sí mismo, es decir, no necesariamente en la temática de ecuaciones lineales.

Evidencias empíricas.

Tomamos el caso de tres estudiantes, María José y René estudiantes de tercer año medio, del colegio Santa Ana en la comuna de Villa alemana; y Ximena, de cuarto año medio, del colegio Hispano. Algunas características relevantes de los estudiantes mencionados, que pueden ayudar a complementar el análisis de sus producciones son las siguientes:

En el caso de René, se trata de un niño más bien callado, tímido con la gente que no conoce, a pesar de que tiene capacidad no se motiva a tener mejor rendimiento. En el colegio se queda con las dudas y prefiere no preguntar a su profesora, argumenta: “que saco con preguntar si no le entiendo”. En rendimiento, es regular sus calificaciones fluctúan entre 4,0 y 4,5, en relación a las clases particulares, tiene buena disposición y expone todas sus dudas.

A diferencia de René, María José es una adolescente tranquila muy preocupada con su rendimiento académico, en el colegio trata de no quedarse con dudas y le pregunta todo a su profesor, trata de mantener altas calificaciones no solo en matemáticas, sino que en todas las asignaturas, esto es lo que la llevo a tomar clase particulares, ya que quiere resaltar en sus calificaciones y más aún le interesa saber más de lo que ya sabe, por otro lado dice que quiere obtener puntaje nacional en el momento que le toque rendir la PSU, por lo mismo es una alumna dedicada y muy esforzada en las clases particulares.

Finalmente, Ximena es una adolescente extrovertida, con mucha personalidad, esto la hace desconcentrarse con facilidad, a pesar de que tiene capacidades su personalidad le juega en contra en el ámbito educacional, su rendimiento es regular, su promedio está entre 5,0 y 6,0, en el ámbito de clases particulares es muy ansiosa, se frustra fácilmente si no logra adquirir los conocimientos de forma inmediata, esto hace que los avances sean lentos, ya que cuando esto sucede no quiere continuar con la clase y pide que continuemos en otra sesión.

En lo que respecta a la investigación, le aplicamos a cada uno de los tres adolescentes, antes descritos, María José, René y Ximena, el set de ejercicios construido después de haber realizado una evaluación de contenidos previos, construido en esta tesis destacándose que esto ocurrió en diferentes momentos y lugares.

- Dos de resolución de ecuaciones lineales:

1. $2(x - 1) = 3(x + 2) - 5(x + 3)$

2. $\frac{1}{x} + \frac{3}{2x} = \frac{1}{3x} + \frac{13}{12}$

- Tres con problemas de planteo que involucran el uso de ecuaciones lineales.

1. Dividir el número 600 en tres partes, tales que la segunda exceda la primera en 25 y la tercera exceda a la segunda en 50.

2. La suma de tres números impares consecutivos es 297. ¿Cuál es el doble del mayor?

3. Hace seis años la edad de un hijo era un quinto la edad de su padre, dentro de nueve años la edad del hijo será los dos quinto de la de su padre. Determinar las edades actuales.

Análisis:

Los ejercicios de resolución de ecuaciones lineales no presentaron mayores dificultades.

El primer ejercicio fue resuelto de modo similar por los tres estudiantes, esgrimiendo un buen uso de las propiedades distributiva, invertiva de a suma y multiplicativa, llegando todos a la respuesta correcta. Esto se debe a que los tres desarrollaron el ejercicio siguiendo una secuencia de pasos que llevan de manera segura a la solución, además al ser los coeficientes de la ecuación lineal números enteros les facilitó aún la resolución.

En el caso del segundo ejercicio se aprecian matices en el modo de resolver. En efecto, María José (Fig.1) es rigurosa en cada uno de los pasos a seguir, en tanto que René (Fig.2) desarrolla el ejercicio de manera correcta omitiendo pasos, pero finalmente ambos llegan a la respuesta correcta.

$$\begin{aligned} \text{B)} \quad & \frac{1}{x} + \frac{3}{2x} = \frac{1}{3x} + \frac{13}{12} \quad / 12x \\ & 12x \cdot \frac{1}{x} + 12x \cdot \frac{3}{2x} = 12x \cdot \frac{1}{3x} + 12x \cdot \frac{13}{12} \\ & 12 + 18 = 4 + 13x \\ & 12 + 18 - 4 = 13x \\ & 26 = 13x \\ & \frac{26}{13} = x \\ & \boxed{\frac{26}{13} = x} \end{aligned}$$

Fig. 1

$$\begin{array}{l}
 3) \quad \frac{1}{x} + \frac{3}{2x} = \frac{1}{3x} + \frac{13}{12} \quad / 12x \\
 12 + 18 = 4 + 13x \\
 30 = 4 + 13x \\
 26 = 13x \\
 2 = x
 \end{array}$$

Fig.2

Al observar la resolución de problemas de planteo que involucran ecuaciones lineales, resueltos por María José, René y Ximena, nos damos cuenta que los tres presentan complicaciones en sus desarrollos.

En el primer ejercicio vemos que María (Fig.3) realiza un trabajo limpio, pero no tan ordenado como en los ejercicios anteriores, en tanto que René (Fig.4) presenta un desarrollo ordenado e identifica claramente lo que se está pidiendo en el ejercicio, utilizando el planteamiento adecuado de las incógnitas al igual que María, finalmente ambos realizan un cambio de registro correcto, del lenguaje natural al lenguaje algebraico, a diferencia de Ximena (Fig.5), quien no logra identificar lo que el problema pide, presentando un desarrollo desordenado, que es propio de su personalidad. En definitiva René es el único que llega a la solución correcta del ejercicio, ya que María en el último paso falla al aplicar inverso aditivo, por otro lado Ximena no logra llegar a la solución, concluyendo tres valores, sin comprobar que estos son erróneos.

1. Dividir el n° 600 en tres partes, tales que la segunda exceda la primera en 25 y la tercera exceda a la segunda en 50

$600 \rightarrow a, b, c$

$b + 25 = a \rightarrow b + 25 + b + c = 600$
 $c + 50 = b$

$$\begin{array}{r} c + 50 + 25 + c + 50 + c \\ c + 75 + c + 50 + c \\ \hline 3c + 125 = 600 \\ 3c = 475 \\ c = \frac{475}{3} \\ \hline c = 158.\bar{3} \end{array}$$

$b + 25 + b + 125 = 600$
 $2b = 600 - 150$
 $2b = 450$
 $b = 450 : 2 = 225$

$b + a + c = 600$
 $225 + x + 175 = 600$
 $x = 340$
 $a = 340$

$\boxed{b = 225}$ $\boxed{a = 340}$

Fig.3

1. Dividir el n° 600 en tres partes, tales que la segunda exceda la primera en 25 y la tercera exceda a la segunda en 50

600

$$\begin{array}{r} 1. x = 175 \\ 2. x + 25 = 200 \\ 3. x + 50 = 225 \\ \hline 3x + 75 = 600 \\ 3x = 600 - 75 \\ 3x = 525 \\ x = \frac{525}{3} \\ x = 175 \end{array}$$

Fig.4

1. Dividir el número 600 en tres partes, tales que la segunda exceda la primera en 25 y la tercera exceda a la segunda en 50.

$$600 : 3 = 200$$

$1^{\text{a}} = 200$
 $2^{\text{a}} = 225$
 $3^{\text{a}} = 275$

$100 \overset{25}{\curvearrowright} 100 \overset{50}{\curvearrowright} 100$

Fig.5

En el segundo ejercicio podemos ver que María José (Fig.6) presenta un desarrollo muy desordenado y confuso, al igual que Ximena (Fig.8), en cambio René (Fig.7) presenta un desarrollo más estructurado y es el único que utiliza la noción de ecuación, vale destacar que los tres logran encontrar la respuesta correcta, a pesar que el método de tanteo utilizado por Ximena y María José esta fuera de contexto en relación a lo que se está estudiando.

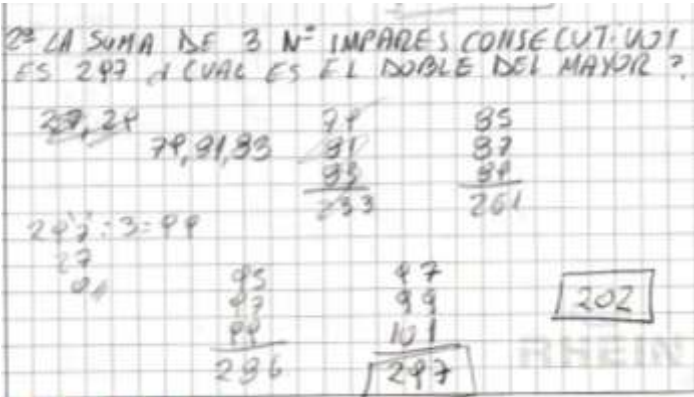


Fig.6

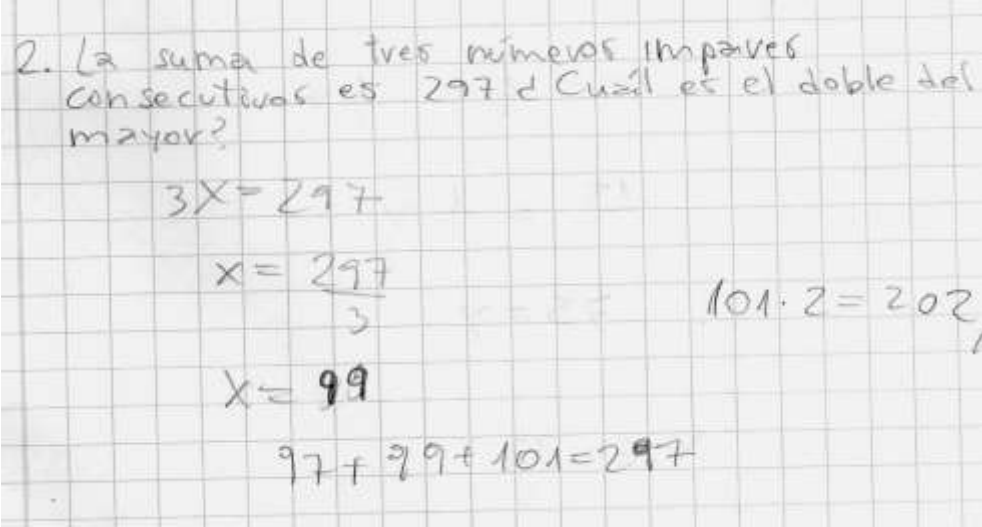


Fig.7

2. La suma de tres números impares consecutivos es 297. ¿Cuál es el doble del mayor?

$$\begin{array}{r}
 297 \\
 24 \\
 \hline
 91
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 3 = p - p \\
 24 \\
 \hline
 91
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 94 \\
 99 \\
 \hline
 196
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 297 \\
 196 \\
 \hline
 101
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 101 \cdot 2 \\
 \hline
 202
 \end{array}$$

n.º 94, 99, 101.
El doble del mayor es 202

Fig.8

Al analizar el tercer ejercicio, notoriamente es el que presenta mayor dificultad, pues ningún estudiante llegó a la solución correcta, claramente esto se observa en el caso de Ximena (Fig. 11) quien no escribió nada, argumentando “no se me ocurre cómo hacer éste”. Si observamos el desarrollo de María José (Fig. 9) y René (Fig.10) nos damos cuenta que manifiestan el mismo error en el planteamiento de las ecuaciones, es decir solo utilizan el instante de tiempo en un miembro de la ecuación, esto los lleva a encontrar soluciones erróneas.

3ª HACER 6 AÑOS LA EDAD DE UN HIJO ERA UN QUINTO LA EDAD DE SU PADRE, DENTRO DE 9 AÑOS LA EDAD DEL HIJO SERÁ LOS 2 QUINTOS DE LA DE SU PADRE DETERMINAR LAS EDADES ACTUALES.

$$\begin{array}{l}
 \frac{1}{5} a = 6 \\
 b - 6 = \frac{1}{5} P \\
 b + 9 = \frac{2}{5} P \\
 b \rightarrow \frac{2}{5} P - 9 \\
 \frac{2}{5} P - 9 - 6 = \frac{1}{5} P \\
 -15 = -\frac{1}{5} P \quad | \cdot -1 \\
 15 = \frac{1}{5} P \\
 \boxed{75 = P} \\
 b - 6 = \frac{75}{5} \\
 b = 15 + 6 \\
 \boxed{b = 21}
 \end{array}$$

Fig.9

3. Hace 6 años la edad de un hijo era un quinto la edad de su padre, dentro de 9 años la edad del hijo será los dos quintos de la de su padre. Determinar las edades actuales

$$x - 6 = \frac{1}{5} y$$

$$x + 9 = \frac{2}{5} y$$

$$x = \frac{1}{5} y + 6$$

$$\frac{1}{5} y + 6 + 9 = \frac{2}{5} y$$

$$15 = \frac{2}{5} y - \frac{1}{5} y$$

$$15 = \frac{1}{5} y$$

$$75 = y$$

$$x - 6 = \frac{75}{5}$$

$$x - 6 = 15$$

$$x = 21 //$$

Fig.10

3. Hace 6 años la edad de un hijo era un quinto la edad de su padre, dentro de 9 años la edad del hijo será los dos quintos de la de su padre. Determinar las edades actuales.

$$\frac{1}{5} - 6$$

Fig.11

Es claro que resolver una ecuación lineal es más sencillo que resolver un problema que involucre ecuación lineal, ninguno de los alumnos fue capaz de encontrar las soluciones de los problemas planteados, no obstante, si fueron capaces de resolver las ecuaciones planteadas, esto lleva a pensar que muchas de las dificultades en la resolución de problemas se deben a una mala

comprensión del enunciado (deficiente comprensión lectora), en algunos casos la impulsividad lleva a los estudiantes a no leer el enunciado comprensivamente.

Con la evidencia expuesta hasta el momento, y a las constantes equivocaciones, nos preguntamos ¿Por qué falla el cambio de registro? Para poder responder esta interrogante es necesario estudiar diferentes factores que afectan la manera de resolver dichos problemas, ya sean factores externos del alumno tales como: el ambiente, el pedagogo, la sociedad, entre otros y factores internos como lo son: la motivación, capacidad cognitiva, la actitud, entre otras dificultades que pueden ser perjudiciales para el buen desarrollo del problema en sí. Debido a esto centraremos nuestro problema de investigación en el traspaso de un registro de representación a otro en este caso de lenguaje natural a lenguaje algebraico.

Evidencias teóricas

Al examinar diferentes autores, podemos identificar la resolución de problemas no solo como una actividad cognitiva sino también como una capacidad de aprendizaje. Capacidad que encontramos en los objetivos de la educación como una de las características concretas del aprendizaje de alto nivel, ya que *“la resolución de problemas es una de las tareas más creativas, exigentes e interesantes para la mente humana y es un área que ha atraído el interés de los científicos cognitivos desde siempre, en especial en ciencias y matemáticas”* (Polya, 1957; Newel y Simon, 1972, Larkin y Reif, 1979). (Sanjosé y colaboradores, 2007, p. 540). Uno de los propósitos de la educación es desarrollar las habilidades del pensamiento, para esto se enfoca a la resolución de problemas como un eje transversal *“siendo el núcleo central de la actividad matemática, debiendo ocupar un lugar importante en el aprendizaje de esta disciplina, desde los niveles más básicos”*(Frías M. y colaboradores, 2008, p.5).

Conociendo la gran cantidad de características que se atribuyen a la resolución de problemas, no sólo en el ámbito escolar, se puede entender que tales exigencias no están ajenas a dificultades; estas últimas se presentan en nuestro dominio de estudio “la resolución de problemas de planteo”, que posee un enunciado planteado en lenguaje natural en el que se comunican los problemas, que el resolutor tiene que traducir a la representación matemática; es decir, al lenguaje matemático. Para el alumno, “el conflicto determinante consiste en hallar el modelo matemático que le permita plantear el problema” (Olazabal, 2005,p.11), por esto “la traducción constituye una etapa primordial en el planteamiento y resolución de los problemas matemáticos contextualizados.”(Olazabal, 2005,p.6). Este proceso de resolución requiere de al menos 3 niveles (Hegarty y colaboradores, 1995) cada uno de los cuales puede presentar dificultades para los estudiantes:

- a) *Comprensión de la situación descrita en el enunciado con sus entidades, sus relaciones y sus atributos a un nivel concreto, no abstracto. Es decir, la persona resolutora debe construir las representaciones del texto del enunciado en términos del contenido léxico, semántico o referencial. Ello incluye las reglas y las normas que rigen el funcionamiento del mundo que el sujeto conoce, y que sirven para que la situación descrita sea plausible una vez entendida (representada). El conocimiento general del mundo que el sujeto posee debe ser activado para incluir la situación descrita en un esquema de funcionamiento conocido.*

- b) *Traducción de esa situación del lenguaje natural al matemático y viceversa. El sujeto debe pasar de un modelo mental de la situación descrita en términos concretos (objetos y eventos; atributos y características espacio-temporales) a una representación abstracta Modelo del Problema que involucra magnitudes y fenómenos; cantidades y relaciones matemáticas; teoremas, leyes y axiomas. También en sentido contrario, a la hora de interpretar el resultado de*

un problema: las cantidades y abstracciones resultantes deben vincularse de nuevo con objetos y eventos del mundo.

- c) *Manejo de las herramientas matemáticas necesarias para llegar al resultado, asociado con un conocimiento procedimental de los esquemas aritméticos, algebraicos, etc. de resolución (citado en Sanjosé y cols. 2007, p.538).*

En el marco del primer nivel que señala Hegarty, tenemos que: *“la comprensión de un problema parte de la comprensión de su enunciado, el cual demanda una gran cantidad de inferencias y la activación de conocimiento previo específico conceptual, situacional, procedimental, estratégico y esquemático para atender la demanda del problema (Solaz-Portolés y Sanjosé, 2007; Nathan, Kintsch y Young, 1992; Ferguson-Hessler y de Jong, 1990)”(citado en Sanjosé, 2007, p.539).*

Sanjosé señala que *“la causa principal de las dificultades debe tener su origen en la construcción de un modelo de la situación y/o de un modelo del problema adecuado” (Sanjosé, 2007, p.538).* Según el autor se entiende por *modelo problema* al conjunto de modelos mentales necesarios para representar el problema que deben incluir abstracciones teóricas basadas en teoremas, leyes y principios; y por *modelo situación* al conjunto de modelos mentales en el que la información semántica del texto se relaciona con el conocimiento previo y se puede aplicar a nuevas situaciones (Sanjosé, 2007, p.539-540).

Con todo lo señalado, y lo visto en la evidencia empírica, claramente se marca la diferencia entre ejercicio y problema, *“en el caso del ejercicio, el sujeto conoce desde el principio el modo en que debe ser resuelto; en el caso del problema, es necesario hallar los procedimientos para su resolución” (Sanjosé y cols. 2007, p.538).*

Sanjosé y cols. postulan que *“si el sujeto resolutor, tras la lectura del enunciado, activa representaciones almacenadas en su memoria suficientemente completas*

como para integrar simultáneamente los datos, la demanda y el procedimiento (es decir, plantear, resolver y responder), entonces se trata de un ‘ejercicio’. Pero si para ello el sujeto requiere realizar inferencias para completar representaciones parciales activadas en su memoria, entonces se trata de un ‘problema’” (Sanjosé y cols. 2007, p.538).

Tradicionalmente la resolución de problemas, se ha dedicado a la aplicación de la teoría expuesta previamente por el profesor, a un conjunto de problemas tipo, al final de las unidades en el caso que el tiempo sea suficiente. (Silva, C., 2005)

En el sistema escolar generalmente la enseñanza de resolución de problemas se realiza mediante estrategias de transferencia; *“se resuelve y explica un conjunto de problemas y después se pide a los estudiantes que resuelvan otros problemas análogos a los ejemplos trabajados. Los profesores con frecuencia asumen que las relaciones analógicas entre los problemas resueltos y los problemas propuestos son sencillas de comprender y establecer, y atribuyen el fracaso a la falta de dominio de los procedimientos matemáticos de resolución.” (Sanjosé y cols. 2007, p.538)*

En la resolución de ecuaciones lineales (con cuantas incógnitas, de esto depende la lista a seguir) el alumno se desenvuelve dentro un mismo registro (algebraico), en el que es necesario aplicar los procedimientos de forma correcta, desarrollando una secuencia de pasos que conllevan claramente a la resolución de este ejercicio de forma más sencilla, como por ejemplo la lista de pasos a seguir que se muestra a continuación:

1. Deshacernos de los paréntesis, si los hubiera. Aplicando propiedades del conjunto de los números reales.
2. Transposición. Juntar todos los términos numéricos en un miembro de la ecuación y todos los términos con variables en el otro miembro.

3. Simplificar. Reducir todos los términos semejantes para obtener una ecuación con un sólo término en cada miembro.
4. Multiplicar o dividir por una cantidad conveniente en ambos miembros para que quede la incógnita sola.
5. Despejar la incógnita y calcular el resultado.
6. Comprobar el resultado.

En cambio para poder resolver problemas de planteo que involucren ecuaciones lineales, es necesario proporcionarles a los alumnos instrumentos, técnicas específicas de resolución de problemas que les permitan enfrentarse a los enunciados sin miedo y con ciertas garantías de éxito. Tomás (1990) señala las siguientes fases de resolución de un problema:

- *Lectura y comprensión del problema.*
- *Concepción de un plan de resolución.*
- *traducción del enunciado al lenguaje algebraico matemático.*
- *elección de una estrategia.*
- *resolución del problema.*
- *concretar una solución.*
- *Comprobación de los resultados (p.123).*

Se puede considerar una clara dificultad en la resolución de problemas de planteo, no sólo en matemáticas, sino también en otras áreas. Según Orton (1990): *“la resolución de problemas se entiende como generadora de un proceso a través del cual el que aprende combina elementos de conocimiento, reglas, técnicas, habilidades y conocimientos previamente adquiridos para dar solución a una situación nueva”* (Tomás, 1999, p.122). Es por ello que el problema de planteo involucra muchas variables que influyen en la gran dificultad para abordarlos correctamente. Según la conformación básica de un problema de planteo, estas variables son:

- *Variables que hacen referencia al enunciado.*
- *Variables que hacen referencia a la existencia o no del formato de resolución.*
- *Variables respecto a los mecanismos mentales para poder resolver el problema.*
- *Variables que hacen referencia a las operaciones concretas que deben realizarse para resolver el problema, es decir las habilidades mecánicas.*

El orden de las dificultades que encuentran los estudiantes es el mismo orden en que se exponen las variables.

Por otro lado, Mayer (1982), señala y expone los siguientes cuatro tipos de conocimientos, necesarios en la resolución de problemas:

- “- *Lingüísticos: se refiere a la comprensión del texto*
- *Esquemático: relación entre los problemas tipo.*
- *Algorítmico: como se realizan los procedimientos de cálculo, por ejemplo las fracciones algebraicas.*
- *Estratégico: como se enfocan los problemas”*(citado en Tomás, 1990, p. 123).

“El uso indiscriminado de estrategias puede llevar a hacer de la tarea de resolución de problemas una tarea meramente repetitiva. Sería peligroso reducir la solución de problemas en ejercicios precarios de creatividad, de imaginación con lo cual dejarían de ser una ocasión para desarrollar la capacidad de pensar” (Tomás, 1990, p.124), es por eso que la resolución de problemas, continuará siendo una tarea útil para el aprendizaje escolar.

Problema de Investigación

¿Cuáles son las dificultades que enfrenta el estudiante para cambiar de registro natural (enunciado) registro algebraico, en la resolución de problemas que involucran ecuaciones lineales con una y dos incógnitas?

1.2. Justificación del estudio

Actualmente se considera al profesor como un profesional reflexivo, que decide, diseña, e implementa, estrategias para lograr el aprendizaje de sus alumnos; aprendizaje que muestra claras evidencias, cuando el alumno aplica de forma adecuada un objeto matemático, donde ha concebido el objeto como un saber propio. Sin embargo cuando este objeto matemático está inmerso en un problema de planteo, el alumno no es capaz de resolver y llegar a la solución.

Se parte de la base que la resolución de problemas significa una dificultad marcada en todos los dominios de la educación escolar, donde el conocimiento aprendido ya no se procede a desarrollar de forma mecánica o estructurada, sino que involucra muchas variables, provenientes desde el enunciado hasta las operaciones concretas para la resolución del problema.

Según Silva (2010) al resolver problemas, lo que se pretende lograr una metodología que favorezca el aprendizaje autónomo, mediante la toma de decisiones reales y el desarrollo de las estrategias para aprender.

Según afirma Hernández y cols. (2006). Cinco son los criterios que, (adaptados de Ackroff (1973) y Miller y Salkind (2002)), pueden dar cuenta de la relevancia de una investigación: conveniencia, relevancia social, implicaciones prácticas, valor teórico y utilidad metodológica. Un estudio se justifica si cumple con uno o más de estos criterios.

Conveniencia: El estudio responde a una necesidad manifiesta, en la sociedad Chilena preocupada del mejoramiento de la calidad de los aprendizajes que, particularmente en el ámbito de las matemáticas, presentan los estudiantes en escuelas y liceos.

La comprensión del problema por parte de los docentes se traduce en un primer paso, en modificar las prácticas pedagógicas para conseguir superar en este caso las dificultades que el alumno encuentra en la resolución de problemas. Responde

así el estudio a las políticas que se han venido aplicando para lograr el mejoramiento de la calidad de los aprendizajes.

Implicaciones prácticas: La importancia de esta tesis, además radica en que persigue promover y fomentar un trabajo exhaustivo dentro del registro natural en que se encuentra el enunciado y el registro algebraico en que se encuentra el modelo matemático a seguir. Se trata de pulir en el alumno la práctica del quehacer matemático en las distintas partes del problema, recalcando la relevancia de tener una visión integral del mismo y un conocimiento de las dificultades que enfrenta, con el fin de poder constituir una etapa primordial en el planteamiento y resolución de problemas: **el proceso de traducción.**

Los resultados del estudio podrían ser aplicables en una enseñanza basada en la resolución de problemas, en donde el estudiante descubra los procesos, los asimile y pueda transferirlos a cualquier situación de aprendizaje, tanto en la vida escolar como en la vida cotidiana, fomentando la capacidad de resolver problemas de manera independiente superando limitaciones de índole epistemológicas, didácticas, cognitivas u otras.

La innovación, siendo un proceso que contempla la vida en el aula, la organización, la dinámica de las unidades educativas, la cultura profesional docente. (Silva, C., 2004)

Los beneficiarios son los estudiantes y también los docentes, toda vez que los primeros pueden superar las dificultades que enfrentan en la resolución de problemas, facilitando su aprendizaje y los segundos encuentran en este estudio antecedentes teóricos y prácticos que mejoran su práctica pedagógica. Ello, conociendo las habilidades y destrezas, que se esperan en los estudiantes a través de la resolución de problemas con previo análisis de dificultades, comportamientos matemáticos, cognitivos y la personalidad referente al carácter

del estudiante frente a este tipo de problemáticas. Es muy probable que esto impacte positivamente en el ambiente de aprendizaje.

Implicaciones teóricas: El reunir en un texto aportes de diversos autores acerca del tema, ayuda a los docentes de la especialidad a tener una mejor visión de los fundamentos teóricos que sustentan la enseñanza de las matemáticas. Sin pretender abarcar todas las posiciones el marco teórico ordena la preocupación que hay por el tema facilitando su reflexión.

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo General

Describir las dificultades que presentan los estudiantes de primer y segundo año medio, en el cambio de registro del lenguaje natural al algebraico en la resolución de problemas que involucran ecuaciones lineales con una y dos incógnitas.

1.3.2. Objetivos Específicos

- Conocer la literatura pertinente en los ámbitos teórico, matemático y didáctico, que fundamente el estudio acerca de las dificultades que presentan los estudiantes de primer y segundo año medio, en el proceso de traducción del lenguaje natural al algebraico en la resolución de problemas que involucran ecuaciones lineales con una y dos incógnitas.
- Analizar en los programas de estudio y los textos de uso actual en el aula el tratamiento que se da a la resolución de problemas y que recomendaciones metodológicas se sugieren.

- Identificar, a partir de la práctica pedagógica las dificultades que las y los estudiantes enfrentan en el cambio de registro de lenguaje natural a lenguaje algebraico.
- Relacionar los programas, textos, y la práctica pedagógica con los aportes teóricos considerados en la tesis.

1.4. Preguntas de investigación

¿Por qué es tan complejo para los estudiantes el cambio de registros en los problemas de planteo?

¿Cuáles son las dificultades que conllevan este proceso?

¿Cómo se aborda la resolución de problemas en los textos de estudio pertenecientes al sistema escolar Chileno?

¿Qué orientaciones entregan los programas de estudio al respecto?

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO

2.1. El argumento Constructivista

Los movimientos de reforma educacional llevada a cabo por diversos países, entre ellos Chile, a finales del siglo XX, se han dado a la tarea de transformar las concepciones pedagógicas que hasta entonces han dominado el espacio educativo. Se trata de pasar de una educación basada en la transmisión de conocimientos a otra basada en la construcción de conocimiento por parte del sujeto que aprende. Para ello, se ha optado por un paradigma nuevo en relación a lo educativo y el aprendizaje: el constructivismo.

El argumento constructivista es una propuesta teórica, la cual se va estructurando con los aportes de diversos autores desde diferentes perspectivas: Jean Piaget, Lev Vigostky, George Mead y Jerome Bruner desde la Psicología; Charles Pierce desde la Semiótica y Nelson Goodman desde la Filosofía, por nombrar a los más representativos. Este argumento asume que la especie humana “recorre un camino evolutivo abierto por mecanismos sociogenéticos y que se expresa en logros culturales” (Molina 2000). El argumento constructivista se articula en torno a dos tesis centrales: primero, que el desarrollo de la mente (y sus productos) es fruto del esfuerzo constructivo activo por parte del sujeto humano (individual y social) y, segundo, que lo real es un constructo de esta mente.

En este camino evolutivo se reconoce un rol especial a la educación, la que hace responsable del desarrollo individual (mental) y cultural del sujeto. Los procesos educativos que permiten dar cuenta de este propósito de la educación implican una articulación entre los procesos de enseñanza, aprendizaje y desarrollo, en otras palabras, los procesos educativos deben provocar acciones de enseñanza que favorezcan el aprendizaje, el que a su vez debe desembocar en el desarrollo del sujeto.

Por todo ello, la educación no puede pensarse, de acuerdo al argumento constructivista, como centrada solo en uno de esos procesos. Más bien la educación es un proceso multicentrado decidiéndose en la práctica concreta los énfasis de enseñanza, aprendizaje o desarrollo. Sin embargo, hay que recordar que la especie humano se distingue de las otras especies por la capacidad de enseñar más que por la capacidad de aprender. Es una especie que crea situaciones de enseñanza para que se produzcan situaciones de aprendizaje en beneficio del desarrollo de los sujetos. Situaciones que hoy en día privilegian el diálogo, la mediación y la negociación de significados para la producción de aprendizajes y de desarrollo cognitivo.

Tampoco puede la educación pensarse o practicarse solo centrada en lo cognitivo. Es un proceso que articula lo cognitivo con lo afectivo, siendo tan importante las habilidades mentales que permiten acceder a un conocimiento nuevo, como la voluntad de querer aprender. “La estrategia pedagógica debería elaborarse en función del equilibrio entre estos dos aspectos indisolubles del comportamiento humano” (Molina 2000).

2.1.1. El aprendizaje

A partir del argumento constructivista se han ido elaborando una concepción de aprendizaje que recoge los aportes de las disciplinas y los autores ya mencionados al inicio del capítulo.

De acuerdo a este argumento “el buen aprendizaje es aquel que es significativo para el sujeto que implica, por tanto, la movilización de los instrumentos cognitivos a disposición del sujeto a partir de los cuales éste significa y da sentido a su experiencia (Piaget, Dewey y Ausubel, citados por Molina 2000). El aprendizaje es resultado entonces de la construcción previa y uso actual por parte del sujeto, de sus instrumentos mentales.

Este aprendizaje significativo supone un diálogo en que el otro es reconocido como un igual y diferente a la vez (Touraine), supone para el sujeto una mediación activa de parte de los educadores y un acceso y uso de los instrumentos de significación (mediadores) que ofrece la cultura. Parafraseando a Lev Vigotsky (1988) “el buen aprendizaje (significativo) es aquel que realizado en un proceso de mediación permite al sujeto recorrer su zona de desarrollo próximo”. Es decir, el sujeto que aprende, parte de un nivel real de desarrollo para avanzar hacia un nivel potencial mediante la relación dialógica que establece con el educador y con los otros que aprenden con él. Una vez que el nivel potencial se transforma en real, se abre nuevamente una zona de desarrollo próximo a recorrer. Pensamiento abductivo (Pierce).

2.1.2. El aprendizaje constructivista.

La teoría del aprendizaje constructivista propone que el estudiante adquiera nuevos conocimientos en base a contextos que le sean significativos, siendo de vital importancia los factores como el ambiente, por lo que es esencial que el conocimiento esté relacionado con situaciones en las que se use.

Un rol importante lo cumple la memoria, ya que debe estar en constante construcción. Para que la transferencia sea efectiva en las tareas, éstas deben relacionarse con contextos significativos y contextualizados, en caso que esto no ocurra son muy bajas las posibilidades que la transferencia ocurra.

Los principios más relevantes de esta teoría de aprendizaje son: que el alumno tenga el suficiente control para manipular la información, que la información tenga diversas formas de presentarse, utilizar las habilidades de solución de problemas para que el alumno pueda ver más de lo que la información dice, y enfocar la evaluación hacia la transferencia de conocimiento y habilidades.

Para facilitar el aprendizaje el profesor debe inducir al alumno para que pueda construir el conocimiento y promover el descubrimiento de múltiples perspectivas. Cabe destacar que el alumno no construye el conocimiento solo sino que con el apoyo del profesor, sus compañeros y además el contexto cultural. En este ámbito el rol que cumple el docente es el de transmisor de conocimiento, animador, supervisor del proceso de aprendizaje e investigador, y para esto, el profesor debe tener en cuenta los conocimientos previos del alumno, teniendo como meta incrementar la competencia, la comprensión y la actuación autónoma de ellos.(Ertmer y Newby, 1993)

2.2. El sistema educativo chileno

La educación chilena se ha consagrado primordialmente en la Constitución Política de la República, la cual ha sido aprobada en el año 1980 manifestando modificaciones en el año 2003 y luego en el 2009 con la Ley General de Educación (LEGE) la que ha derogado la anterior Ley Orgánica Constitucional de Enseñanza de 1990 (LOCE), dando un nuevo paso a un marco para la institucionalidad de la educación en lo que respecta a la enseñanza básica y media, manteniendo así la normativa de educación superior. (Extraído de UNESCO; *Datos Mundiales de Educación*, 2010)

Con la nueva normativa se define la educación como un proceso de aprendizaje que abarca las distintas etapas de la vida con la finalidad de alcanzar un desarrollo integral de la persona, cultivando así valores, conocimientos y destrezas cuya intencionalidad es respetar el derecho a la educación y la libertad de enseñanza, en donde la inspiración se encuentra en principios como la calidad y equidad, autonomía, responsabilidad, integración, entre otros. (Extraído de UNESCO; *Datos Mundiales de Educación*, 2010)

Se describe a continuación un panorama general del sistema educativo chileno, el cual se divide en:

- Educación preescolar (obligatoria)
- Educación general básica (obligatoria)
- Educación media (obligatoria)
- Educación superior (optativa)

El currículum nacional se expresa en un Marco Curricular el cual es un documento que define los conocimientos, habilidades y actitudes que todos los estudiantes deben aprender en los distintos niveles y tipos de enseñanza escolar. Además, define las áreas de estudio obligatorias y las reglas para distribuir el tiempo escolar. Dicho documento posee instrumentos curriculares que lo operacionalizan, los cuales poseen variadas funciones que están claramente determinadas. (Extraído de Ministerio de Educación Chile; *Objetivos fundamentales y contenidos mínimos obligatorios de la Educación Básica y Media*, 2009).

Este marco curricular presenta ciertas características; es utilizado por las instituciones educativas y es de carácter obligatorio, el cual puede ser adaptable a la creación de planes y programas propios, por tanto, una institución educativa opta por una opción curricular, la cual se declara por medio de una planificación manifestada en los proyectos educativos de los establecimientos. Este marco es el referente en base al cual se construyen los planes de estudio, programas de estudio, los mapas de progreso, los textos escolares y el llamado Sistema de medición de calidad de la educación (Simce). (Extraído de Ministerio de Educación Chile; *Objetivos fundamentales y contenidos mínimos obligatorios de la Educación Básica y Media*, 2009)

Los instrumentos que componen el marco curricular son:

- Planes de estudio: Precisan la organización del tiempo en cada nivel escolar.

- Programas de estudio: Otorgan una organización didáctica del año escolar, con la finalidad de alcanzar el logro de los objetivos fundamentales (determinados en el marco curricular) y determinan cuales son los aprendizajes esperados ya sea por semestre o por unidad. Conjuntamente en este programa se entregan ejemplos de actividades, orientaciones metodológicas y evaluaciones para apoyar la labor docente.
- Mapas de progreso: Se describen en siete niveles, los cuales pretenden determinar el crecimiento de las competencias consideradas fundamentales en la formación estudiantil de cada sector curricular. Son un marco de referencia para evaluar el aprendizaje explicitado en el marco curricular.
- Textos escolares: Desarrollan los contenidos entregados por el marco curricular cuyo objetivo es apoyar al estudiante dentro y fuera del aula. Por otra parte los docentes reciben textos que constituyen una propuesta metodológica para apoyar el curriculum, siendo utilizado como guía didáctica para planificar, preparar y desarrollar sus clases.
- Simce: (Sistema de Medición de Calidad de la Educación) Evaluación nacional que contribuye a determinar si los objetivos fundamentales y los contenidos mínimos obligatorios del currículo nacional han sido alcanzados por los alumnos. Con sus resultados cuantitativos se describe el desempeño que exhiben los estudiantes.

(Extraído de Ministerio de Educación Chile; *Objetivos fundamentales y contenidos mínimos obligatorios de la Educación Básica y Media*, 2009)

Uno de los conceptos fundamentales de la organización curricular en E. Básica y E. Media son los objetivos fundamentales (OF); aprendizajes que los estudiantes deben lograr al finalizar los diversos niveles de la educación básica y media. Estos hacen referencia a conocimientos, habilidades y actitudes favorecedoras de un

desarrollo integral en cada estudiante. (Extraído de Ministerio de Educación Chile; *Objetivos fundamentales y contenidos mínimos obligatorios de la Educación Básica y Media*, 2009)

En el marco curricular se desprenden dos clases de objetivos fundamentales los que corresponden a:

- **Objetivos Fundamentales Verticales:** Determinan las competencias que los alumnos deben lograr en las diferentes etapas de escolarización. Hacen referencia a los *conocimientos* entendidos como conceptos, sistemas conceptuales, e información; *habilidades* referidas a la capacidad de ejecutar un acto cognitivo y/o motriz con precisión y adaptable al medio y las *actitudes* destinadas a la disposición adoptada frente a situaciones diversas del diario vivir. (Extraído de Ministerio de Educación Chile; *Objetivos fundamentales y contenidos mínimos obligatorios de la Educación Básica y Media*, 2009)
- **Objetivos Fundamentales Transversales:** *Son aprendizajes orientados al desarrollo personal y a la conducta moral y social de los alumnos. Tienen por propósito profundizar la formación de los valores fundamentales, contribuyendo a orientar la forma en que la persona se relaciona con otros seres humanos y con el mundo*” (Extraído de UNESCO; *Datos Mundiales de Educación*, 2010, p. 15).

Por otra parte los Contenidos Mínimos Obligatorios (CMO) “*explicitan los conocimientos, habilidades y actitudes implicados en los OF, es decir, si los Objetivos Fundamentales están formulados desde la perspectiva del aprendizaje que cada alumno y alumna debe lograr, los CMO lo están desde la perspectiva de lo que cada docente debe obligatoriamente enseñar*” (Extraído de Ministerio de Educación Chile; *Objetivos fundamentales y contenidos mínimos obligatorios de la Educación Básica y Media*, 2009, p.9). En tanto, los OF como los CMO están destinados al desarrollo de la competencias fundamentales para el desarrollo

personal durante el proceso de escolarización, con el objetivo de desenvolverse exitosamente en el ámbito social, laboral y ciudadano. (Extraído de Ministerio de Educación Chile; *Objetivos fundamentales y contenidos mínimos obligatorios de la Educación Básica y Media*, 2009)

2.3. Investigaciones recientes

Dentro de las publicaciones recientes tomaremos investigaciones en las cuales se abordan dificultades en la resolución de problemas y que se encuentran dentro de la misma problemática en la que nosotros queremos profundizar.

2.3.1. Traducción del lenguaje natural al algebraico

La primera investigación que analizaremos corresponde a la tesis de maestría perteneciente a: Ana María Olazabal Carpio, dirigida por la Dra. Patricia Camarena G., en el año 2005, titulada “Categorías en la traducción del lenguaje natural al algebraico de la matemática en contexto”, presentada en el Instituto Politécnico Nacional Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada de México. Su objetivo principal radica en plantear tres categorías de problemas de acuerdo al nivel de traducción que demandan, en el proceso de traducción del lenguaje natural al algebraico de la matemática en contexto, fundamentando que la “*traducción es una habilidad básica en el entendimiento y planteamiento de los problemas*” (Olazábal, 2005, p.6).

Según Olazábal (2005) estas categorías son:

2.3.1.1. Problemas con enunciado literal.

Son aquellos en cuales del mismo enunciado, se desprende la relación entre el vocabulario y el modelo matemático, es decir, el traductor debe conocer las

representaciones algebraicas de los términos claves que se extraen literalmente del enunciado. En este tipo de enunciados comúnmente existen palabras o frases que hacen referencia a un elemento matemático, por ejemplo:

÷ Significa, por ejemplo: entre, el cociente, la división.

+ Significa, por ejemplo: más, se aumenta, se añade.

· Significa, por ejemplo: por, se multiplica, se hace tantas veces.

2() Significa, por ejemplo: el doble de, dos veces.

()³ Significa, por ejemplo: *el triple producto, el cubo, la tercera potencia.*

$a = k * b$ ó $\frac{a}{b} = k$ *a es directamente proporcional a b, la razón entre a y b es constante.*

Un ejemplo de problemas con enunciado literal sería el siguiente:

Las edades de un padre y su hijo suman 83 años. La edad del padre excede en tres años al triple de la edad del hijo. Hallar ambas edades (Baldor, 1983).

Datos:

P: edad del padre

H: edad del hijo

3H: triple de la edad del hijo

P-3: la edad del padre excede en 3 años

Las condiciones en este problema son las siguientes;

1. La suma de las edades es 83, es decir:

$$P + H = 83.$$

2. La edad del padre excede en 3 años al triple de la edad del hijo:

$$P - 3 = 3H.$$

Al observar los datos y condiciones se observa que las ecuaciones se infieren únicamente del enunciado. El sistema de ecuaciones es el siguiente:

$$\begin{aligned}P + H &= 83 \\P - 3 &= 3H.\end{aligned}$$

2.3.1.2. Problemas con enunciado evocador

El enunciado entrega elementos que permiten inferir la relación pertinente del modelo matemático a resolver; mencionándolo, describiéndolo o haciendo referencia a él, donde el traductor debe conocer el significado de aquellos elementos, siendo capaz de representar el modelo matemático presente en el enunciado.

Un ejemplo de problemas con enunciado evocador sería el siguiente:

La suma de dos números es 59 y si el mayor se divide por el menor, el cociente es 2 y el residuo 5. Hallar los números (Baldor, 1983, citado en Olazábal, 2005)

Datos:

A: número mayor

B: número menor

Cociente: 2

Resto: 5

La condición en este problema es:

La suma de dos números es 59:

$$A + B = 59.$$

Pero, la siguiente condición no es posible traducirla directamente del enunciado, es necesario conocer el concepto de la “división” y su modelo matemático, es decir:

$$\text{dividendo} \div \text{divisor} = \text{cociente} + (\text{residuo} / \text{divisor})$$

ó

$$\text{dividendo} = \text{divisor} \cdot \text{cociente} + \text{residuo}.$$

De manera que el modelo para resolver el problema es el siguiente:

$$A + B = 59$$

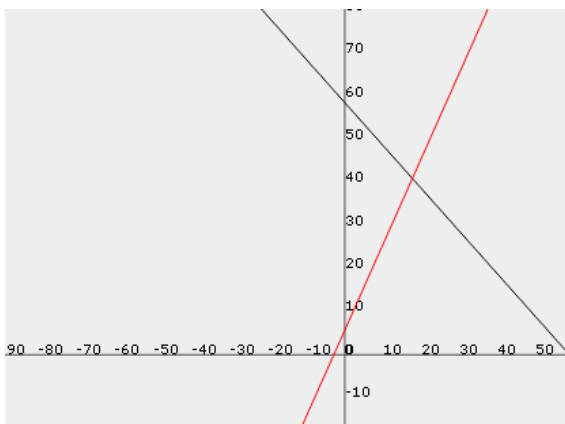
$$\frac{A}{B} = 2 + \frac{5}{B} \quad \text{ó} \quad A = 2B + 5$$

Ó en su forma equivalente:

$$59 - B = 2B + 5$$

Toda ecuación de primer grado con dos variables se llama ecuación lineal, porque representa una línea recta.

La solución del sistema, si existe y es única, es el punto de intersección de ambas rectas, lo que podemos observar en el plano cartesiano:



■ $A = 59 - B$

■ $A = 2B + 5$

Donde $A = 41$ Y $B = 18$

2.3.1.3. Problemas con enunciado complejo

El modelo matemático, en este caso, se encuentra implícito en el enunciado. Por lo que el traductor debe deducir el modelo matemático que conlleva a la resolución del problema. Cabe destacar que esta categoría es la que demanda mayor cantidad de habilidades y conocimientos. Fundamentalmente la habilidad verbal e inteligencia lógico matemática; entendiendo por habilidad verbal al *“conjunto de recursos vinculados al conocimiento lingüístico que, subsumidos a estrategias cognitivas, permiten procesar información lingüística para acceder a los significados explícitos e implícitos, superficiales y profundos de textos diversos.”* (extraída de Secretaría de Educación Jalisco, 2005, p.8). Se considera por inteligencia lógico matemática a *la capacidad de razonamiento lógico: incluye cálculos matemáticos, pensamiento numérico, capacidad para problemas de lógica, solución de problemas, capacidad para comprender conceptos abstractos, razonamiento y comprensión de relaciones.*

Un ejemplo de problemas con enunciado complejo sería el siguiente:

A y B corren una carrera de un kilómetro, ganando B por 1 minuto. Luego repiten la competencia, aumentando A su velocidad en 2 kilómetro por hora y disminuyendo B su velocidad en la misma cantidad; de este modo, A gana por 1 minuto. Calcular la velocidad de cada uno en la primera competencia. (Lehmann, 1979, citado en Olazábal, 2005)

Datos:

v_{A1} : Velocidad de A en la primera carrera

v_{B1} : Velocidad de B en la primera carrera

t_{A1} : Tiempo que hace A en la primera carrera

t_{B1} : Tiempo que hace B en la primera carrera

v_{A2} : Velocidad de A en la segunda carrera

v_{B2} : Velocidad de B en la segunda carrera

t_{A2} : Tiempo que hace A en la segunda carrera

t_{B2} : Tiempo que hace B en la segunda carrera

Condiciones:

Distancia por recorrer en ambas competencias es:

$$s = 1 \text{ km.}$$

Además, es necesario conocer las unidades de tiempo para poder evocar que:

$$1 \text{ h} = 60 \text{ min}$$

Luego del enunciado se desprende las siguientes situaciones:

$$v_{A2} = v_{A1} + \frac{2}{60}$$

$$v_{B2} = v_{B1} - \frac{2}{60}$$

$$t_{A1} = t_{B1} + 1$$

$$t_{A2} + 1 = t_{B2}$$

Para poder realizar el planteamiento correcto que permita resolver el problema es necesario tener conocimiento del concepto de movimiento rectilíneo uniforme, es decir:

($v = s / t$, expresado como $t = s / v$),

Y así poder relacionar las velocidades en la primera competencia:

$$\frac{1}{v_{A1}} = \frac{1}{v_{B1}} + 1$$

$$\frac{1}{v_{A1} + \frac{2}{60}} + 1 = \frac{1}{v_{B1} - \frac{2}{60}}$$

Se observa que la información que entrega el enunciado no es suficiente para plantear el problema, ya que el modelo que resulta es una ecuación cuadrática.

Las categorías mencionadas fortalecen este trabajo, ya que la traducción del lenguaje natural al lenguaje algebraico es uno de los elementos que intervienen en el conocimiento en el aprendizaje de la resolución de problemas.

En el análisis que presenta Olazabal se examinaron los enunciados de los problemas desde un punto de vista lingüístico y matemático, siguiendo la siguiente metodología propuesta:

- Análisis de textos
- Levantamiento y puesta a prueba de la propuesta con estudiantes
- Análisis de resultados

Uno de los puntos que la investigación de Olazabal menciona, pero no profundiza, son las dificultades que genera el aprendizaje de la resolución de problemas, ligadas, ya sea, a la complejidad de los objetos en matemáticas, al desarrollo cognitivo de los estudiantes, al currículo de las matemáticas y métodos de enseñanza que se concretan en la práctica en obstáculos que posteriormente se manifiestan en errores.

Olazábal (2005) señala que en el proceso de traducción del lenguaje natural al algebraico, encontramos dificultades según el enunciado en que estemos trabajando, recalcando la importancia de este proceso como uno de los objetivos de la matemática en el contexto de las ciencias.

Ambas investigaciones consideran la incorporación de los postulados de uno de los grandes exponentes del estudio de resolución de problema, refiriéndose al matemático George Polya.

De la investigación la autora menciona las siguientes conclusiones:

Se confirma fehacientemente que el proceso de traducción es una condición necesaria para la resolución de problemas, pero insuficiente para la consecución

de ésta. Actuando como referencia, a través del cual se saben los dominios que tiene el alumno sobre el problema tanto en su entendimiento y planteamiento.

Utilizando la metodología se evidencio que no necesariamente al ascender de categoría el alumno enfrenta mayor dificultad, esto se justifica debido a que cada alumno tiene conocimientos previos distintos de los elementos claves en la traducción como son: conceptos, situaciones, objetos, fenómenos y el problema en particular al que nos estamos abocando.

Se enfatiza que el éxito de la resolución de problemas dependerá del grado de familiaridad que tenga el traductor, es decir, el conocimiento de los conceptos y modelos apropiados. Una vez que se comprenden los conceptos, la resolución reforzara los conocimientos de los mismos. No siempre existirá una relación directa entre el lenguaje natural al lenguaje algebraico, a veces será necesario utilizar un registro de representación adicional que servirá de puente entre el enunciado y el modelo matemático, pudiendo obstaculizar el proceso de traducción en algunos casos.

Finalmente, se recomienda establecer descripciones puntuales para traducir enunciados, ya sean habilidad verbal e inteligencia lógico - matemáticas, estilos de aprendizaje y nivel de conocimientos previos, o factores como: sintaxis de los enunciados, número y tipo de traducciones por problemas y experiencia en resolución de problemas parecidos

2.3.2. Dificultades en la resolución de problemas por transferencia

Otra investigación interesante es la que desarrollan Vicente Sanjosé, Tomás Valenzuela, María Fortes y Joan Solaz-Portolés, en el año 2007, titulada “Dificultades algebraicas en la resolución de problemas por transferencia” presentada por la Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias. La cual se enfoca en las dificultades que se encuentran en la enseñanza de resolución de

problemas en cursos de Enseñanza Secundaria (ciencias y matemáticas) a través de estrategias de transferencia (transfer): el docente resuelve y explica un conjunto de problemas y posteriormente, les pide a los alumnos que utilizando estos ejemplos de base, resuelvan otros problemas análogos a los trabajados.

Se busca esclarecer que el fracaso de este tipo de enseñanza no se debe a la falta de conocimiento matemático, sino que al establecimiento de una representación mental acorde con el modelo del problema, de esta forma se refieren a que la dificultad se presenta en el proceso de traducción de la situación problemática en lenguaje común (lenguaje natural), al lenguaje matemático (lenguaje algebraico), haciendo hincapié en la construcción de modelos mentales deficientes que impiden llegar al modelo del problema y plantear las ecuaciones adecuadas.

Es así como se incorpora un modelo de representación mental específico, cuando trabajamos con la resolución de problemas en el ámbito de la matemática, este modelo llamado Modelo Problema debe incluir las abstracciones teóricas regidas por axiomas, principios, teoremas y reglas pertinentes con el conocimiento matemático. Según Kintsh se poseen 3 niveles de representación mental de un texto, (aplicándolo en este caso al enunciado del problema):

- *Nivel léxico: o de reconocimiento de las palabras*
- *Nivel semántico o Base del texto: constituido por los significados de las oraciones independientemente de la forma que están escritas de las palabras usadas.*
- *Nivel referencial o Modelo de la Situación: en el que la información semántica del texto se relaciona con el conocimiento previo y se puede aplicar a nuevas situaciones (citado en Sanjosé y cols.2007, p.539).*

Es en el vínculo entre el Modelo de la Situación y el Modelo Problema, donde se crean las dificultades, es decir, el resolutor es incapaz de relacionar las

representaciones de los objetos y hechos del mundo observable a un nivel de representación abstracto para llegar a realizar las operaciones matemáticas necesarias para la resolución del problema, y viceversa, es decir, a la hora de volver a relacionar los conceptos abstractos con los acontecimientos y objetos del mundo tangible (traducción inversa).

Se procede a diseñar un experimento donde los participantes tienen que relacionar un problema explicado y totalmente resuelto (problema fuente) con un problema a resolver, el cual se resuelve de forma análoga (problema diana), los problemas utilizados requieren del conocimiento de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas (en el conjunto de los números reales).

Los resultados exponen que de cada 2 sujetos uno logra construir un vínculo correcto entre los problemas fuente y diana. Aludiendo como dificultad a *los procesos de construcción de las representaciones de los problemas; de la falta de comprensión de la situación descrita en el enunciado (construcción del modelo situación)*, del proceso de traducción entre el lenguaje natural del enunciado y el lenguaje matemático (construcción del Modelo Problema). Siendo fundamental en la enseñanza por medio de transferir el modo en que los sujetos construyen representaciones de los problemas. (Gentner, Loewenstein y Thompson, 2003, citado en Sanjosé y cols. 2007, p.554)

Los resultados concuerdan en que las clases de matemáticas deberían contemplar más problemas con enunciados, dando énfasis en establecer analogías estructurales para diversas situaciones planteadas para generalizar las representaciones y codificaciones de los problemas, facilitando desde luego la construcción del Modelo Problema a partir del Modelo Situación. Según Sanjosé y cols. *“La representación de un problema condiciona su codificación y almacenamiento en la memoria.”*(Sanjosé y cols. 2007, p.553). En definitiva los estudiantes exhiben problemas graves de comprensión de los problemas algebraicos con enunciado. Sin embargo, demuestran saber resolver ecuaciones

(ecuaciones lineales). Lo cual se observa claramente en el casos de los tres estudiantes mencionados anteriormente, resuelven ecuaciones lineales, pero en el momento de abordar problemas con enunciados, no son capaces de realizar el cambio de registro del lenguaje natural al algebraico de manera adecuada, en algunos casos por no realizar la representación mental adecuada.

2.3.3. Dificultades en el aprendizaje de la matemática.

En el aprendizaje de la matemática se conciben muchas dificultades, las cuales en su mayoría tienen su origen en el microsistema educativo: alumno, contenido, docente, institución educativa.

Las dificultades y errores provienen de diversa índole, y no se reducen a los alumnos menos capaces en cuanto a destrezas matemáticas, tener dificultades y errores va de la mano con el aprendizaje de esta disciplina. Por esto, Socas propone los siguientes 5 tópicos de manera de organizarlos por sus orígenes:

2.3.3.1. Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos en la matemática.

La comunicación de los objetos matemáticos se realiza mediante signos matemáticos con la ayuda del lenguaje natural (habitual), este proceso genera conflictos que se originan en la función que el lenguaje natural proporciona para la interpretación de los signos matemáticos. Se entiende el significado del lenguaje natural aunque se realicen “*abusos morfosintácticos, tales como roturas de reglas gramaticales o faltas de ortografía*” (Socas, 1997, p.127). En cambio el lenguaje matemático no comunica su significado sin la interpretación exacta de sus signos, por lo que el” *uso del lenguaje ordinario (natural) dentro del contexto matemático, es un conflicto de precisión*” (Socas, 1997, p.127).

Otro conflicto lo provoca el vocabulario común, las palabras tienen significados diferentes en matemáticas y en el lenguaje natural, causando confusiones

semánticas. Algunas de ellas son, por ejemplo: factor, potencia, producto, función, raíz, etc. Las palabras de igual significado en lenguaje común y en matemáticas, generan dificultades en saber que, efectivamente, significan lo mismo, formando de esta manera parte de otro dominio del lenguaje la Pragmática; *“estudio del sentido que se le da al discurso en función del contexto en que se enuncia”* (Socas, 1997, p.127).

Otro punto hace referencia al lenguaje de los signos, *su sintaxis y reglas formales de las operaciones, pueden entenderse y desarrollarse más allá del dominio original de sus aplicaciones”* (Socas, 1997, p.128), esto debido a la naturaleza abstracta de los conceptos matemáticos.

El aprendizaje de un objeto matemático, conlleva el desarrollo del lenguaje de signos, siendo estos una verdadera fuente de dificultades, debido a que al incorporar un nuevo sistema de signos nos encontramos con elementos que no pueden ser conocidos en términos del sistema de signos antiguo (previo).(Socas, 1997)

Es por esto que Socas lo analiza desde los sistemas de representación cognitivos, señalando los siguientes estadios de desarrollo para los signos matemáticos.

Estadio semiótico: los sujetos aprenden signos nuevos que adquieren significados con los signos antiguos.

Estadio estructural: el sistema nuevo se estructura según la organización del antiguo

Estadio autónomo: los signos actúan con significado propios.

El lenguaje matemático opera entonces en dos niveles, *“el nivel semántico; los signos son dados con un significado claro y preciso, y el nivel sintáctico; los signos pueden ser operados mediante reglas sin referencia directa a ningún significado”* (Socas, 1997, p.130).

Los objetos matemáticos (números, lenguaje algebraico, funciones, etc.) pueden funcionar desde estados distintos, ya sea desde un estado operacional; “*de carácter dinámico, donde los objetos son vistos como un proceso*” o de un estado conceptual; “*de carácter inmóvil, donde los objetos son vistos como una entidad conceptual*” (Socas, 1997, p.130).

2.3.3.2. Dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático.

Encontramos dificultades en los modos de pensamiento matemático, principalmente en el pensamiento lógico, es decir; “*la capacidad de seguir un argumento lógico*” (Socas, 1997, p.131). *Este enfoque lógico de las matemáticas debe conducir a resolver los problemas por medio de un pensamiento matemático inteligente* (Socas, 1997, p.131), pero que se ve truncado por la influencia de lo social sobre lo lógico, generando con las matemáticas una “lógica escolar” diferente de la “lógica social”, de esta forma, guiando al alumno a responder, según lo que él piensa “espera el profesor que el alumno realice” y no a la respuesta del problema que se le plantea

2.3.3.3. Dificultades asociadas a los procesos de enseñanza desarrollado para el aprendizaje de las matemáticas.

Dentro de estas dificultades tenemos a la organización que hay en: la institución escolar, el currículum de matemática y los métodos de enseñanza.

Como un deber de la institución escolar, es propiciar una organización escolar que tienda a reducir las dificultades del aprendizaje de la matemática, todo ello dependiendo de la óptima selección de los materiales curriculares, de los recursos y los estilos de enseñanza.

En la organización curricular en matemática, hay que considerar como dificultades a 4 elementos bases: las habilidades necesarias para desarrollar capacidades matemáticas, la exigencia de contenidos anteriores, nivel de abstracción pretendido y el pensamiento lógico de la matemática pertinente.

Los métodos de enseñanza vendrán dados tanto de los elementos de organización de la institución escolar como de la organización escolar, debiendo considerar aspectos como: el lenguaje, adaptado a las capacidades y comprensión de los alumnos, secuencia de las unidades de aprendizaje adaptadas a lógica interna de las matemáticas, exigir al máximo los recursos para representaciones adecuadas, respeto a los ritmos de trabajo de cada alumno. (Socas, 1997)

2.3.3.4. Dificultades asociadas a los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos.

Existen alumnos que a pesar de su buena disposición a aprender y a colaborar en sus tareas escolares, les es difícil lograr comprender en su totalidad los contenidos. Esto se debe a la presencia de dificultades de tipo cognitivas relacionadas con sus modos de razonamiento y tareas específicas de álgebra que de acuerdo a su estadio de desarrollo intelectual deberían ser capaces de hacer. (Palarea, 1999)

2.3.3.5. Dificultades asociadas actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas.

No a todos los estudiantes les gustan la matemática, muchos tienen actitudes negativas y sentimientos de miedo y tensión hacia ellas, provenientes de factores diversos como: *la naturaleza jerárquica del conocimiento matemático, la actitud de los profesores de matemáticas hacia sus alumnos, los estilos de enseñanza, las creencias hacia las matemáticas que les son transmitidas*" (Socas, 1997, p.135).

Son muchos los prejuicios que rodean a la matemática y que son transmitidas de padres a hijos, según Buxton (1981) alguna de las creencias sobre las matemáticas son:

- *Fijas, inmutables, externas, intratables, irreales,*
- *Abstractas y no relacionadas con la realidad,*
- *Un misterio accesible a pocos,*

- *Una colección de reglas y hechos que deben ser recordados,*
- *Una ofensa al sentido común en alguna de las cosas que aseguran,*
- *Un área en la que se harán juicios, no sólo sobre el intelecto, sino sobre valía personal,*

Es necesario conocer el origen de estas dificultades para evitar que se conecten y refuercen *en redes complejas que se concretan en la práctica en forma de obstáculos y se manifiestan en los alumnos por medio de errores” (Socas, 1997).*

Un obstáculo es un conocimiento adquirido y no una carencia de conocimiento, el cual ha sido valido para un cierto dominio de problemas, razón por la cual se establece en la mente del estudiante, pero a la postre de otro contexto y nuevos problemas resulta ineficaz e inadaptable (Socas, 1997).

Un obstáculo es un conocimiento relevante adquirido, validado temporalmente en un dominio categorizado y no necesariamente contextualizado. (Silva C., 2008)

El obstáculo adquiere fuerza y resistencia mientras más demuestre su eficacia en el dominio de validez, por tanto será mejor adquirido, por ello resulta fundamental identificarlo y preparar su rechazo en el nuevo conocimiento, analizando la procedencia de las respuestas inadecuadas por parte del estudiante.

Brousseau (1983) considera que los obstáculos que se presentan en el sistema didáctico pueden ser:

- *De origen ontogénico o psicogénico; debidos a las características del desarrollo del niño.*
- *De origen didáctico; resultado de una elección o un proyecto del sistema educativo, es decir opciones didácticas que se proponen para generar un situación enseñanza.*
- *De origen epistemológico; intrínsecamente relacionados con el propio concepto.* (Socas, 1997)

En cambio Tall (1989) los llama obstáculos cognitivos, distinguiendo 2 tipos:

Obstáculos basados en la secuencia de un tema; hay conceptos matemáticos que son complejos, por lo que es necesario familiarizarse con ellos y en un cierto orden. Por ejemplo: en álgebra, *“las destrezas operatorias son enseñadas con anterioridad a ideas conceptuales aparentemente más profundas”* (citado en Socas, 1997, p.136).

Obstáculos basados sobre casos simples; se suele limitar al estudiante a casos simples por un periodo sustancial de tiempo, y luego pasar a casos más complejos. (Socas, 1997, p.136)

Errores en el aprendizaje de la matemática.

Conocer los errores provee de información sobre la forma en que los alumnos interpretan los problemas, además es importante para el profesor saber, si un alumno es aparentemente óptimo no tenga serios errores conceptuales. Socas señala que *“en ningún caso el conocimiento nuevo se añade al saber antiguo, muy al contrario se construye luchando contra a él, porque debe provocar una estructuración nueva del conocimiento total”* (1997, p. 143).

En el aprendizaje de un nuevo saber se debe tener en cuenta dos aspectos básicos:

1. *El nuevo conocimiento debe tener significado para el alumno, debiendo éste asumir la responsabilidad de la construcción del conocimiento tomando el problema como propio y no del profesor.*
2. *El saber anterior produce modelos implícitos que a veces son favorables, por lo que hay que explicitarlos, pero otras son un obstáculo.*

El origen de un error en el aprendizaje de la matemática, se puede distinguir en tres ejes generales:

- *De origen en un obstáculo.*
- *De origen en ausencia de sentido.*
- *De origen en actitudes afectivas y emocionales.*

Como objetivo para un aprendizaje basado en los errores, sería plantear el propio error como un problema matemático. Por lo mismo, Socas postula en guiarse por el siguiente principio: *“todo error puede ser el comienzo de un buen aprendizaje”* (Socas, 1997, p. 154).

Se puede dar una mirada desde un punto de vista práctico, pasar de una enseñanza de dos fases: contenidos y aplicaciones, en la que el error tiene solo una función negativa, a una de dos fases: evaluación y diagnóstico, contenido y aplicaciones, siendo la primera la más importante, *“y en la cual la explicación de los errores se tiene que hacer, teniendo como objeto determinar inmediatamente una acción conveniente de remedio”* (Socas, 1997, p.148).

2.3.4. La diferencia entre un ejercicio y un problema matemático

Se considera que el sujeto aborda un problema cuando dispone de representaciones incompletas del Modelo de la Situación y/o Modelo Problema, necesarias para dar respuesta a las interrogantes formuladas en el enunciado. El sujeto entonces requiere realizar inferencias para completar representaciones parciales activadas en su memoria (Sanjosé y cols., 2007).

Según González (1999) se identifica a un problema como una situación que involucra cierto grado de incertidumbre, cuya clarificación requiere la actividad mental del resolutor en el proceso llamado resolución, en el que se ponen en juego los conocimientos matemáticos y la toma de decisiones comprendiendo las limitaciones y los errores que dichas decisiones producen, el cual finaliza cuando el resolutor encuentra la solución y da por acabada la tarea (citado en González, 2009).

Se trata de un ejercicio cuando el resolutor tras la lectura del enunciado activa representaciones almacenadas en su memoria, suficientemente completas como para integrar simultáneamente los datos, el modelo y su procedimiento. (Sanjosé y cols., 2007).

Por lo que es evidente la gran diferencia que existe entre un ejercicio; que implica una tarea de aplicación simple y directa, claramente sin una actividad cognitiva compleja como en el caso de un problema; el cual necesita de un dificultoso proceso llamado resolución, en el que intervienen conocimientos, estrategias y técnicas, decisiones, imaginación, concentración, autonomía y espíritu crítico, etc. Este es el sentido que señala Grupo Cero (1985) sobre la resolución de un problema: *“no estamos ante una ‘respuesta’ a encontrar ni ante un destino al que llegar, sino ante un proceso o un ‘viaje’ que realizar”* (citado en González, 2009, p.3). Es por ello que nuestra investigación se centra en la resolución de problemas que desarrolla una actividad funcional (de contexto) del conocimiento matemático y no en una actividad de aplicación mecánica que conlleva un ejercicio.

2.3.5. Lógica de justificación en la resolución de ecuaciones de primer grado.

En nuestra actualidad se abandona la visión de la matemática estructuralista, centrada en los desarrollos matemáticos deductivos, que favorece el enfoque constructivista, y que potencia argumentaciones inductivas. Por estructura matemática se entiende *a aquellos conjuntos formados por elementos tales que posibilitan definir una o más operaciones incluyendo propiedades* (Tomado de Hernández, diccionario de Matemáticas, citado en Ministerio de Educación, Perú, 2006).

La resolución de ecuaciones tiene su justificación lógica en la estructura algebraica o sistema numérico en el que se desarrolla. Dentro del aprendizaje de la dimensión formal, descubrimos la existencia de una axiomática de los números reales que facilita la resolución haciendo uso del opuesto aditivo. Pero a la vez,

genera dificultades en su aplicación en la práctica con justificaciones informales, como la generalización de procedimientos, entre los cuales se puede identificar “la operación paseo”.

Por ejemplo para la resolución de ecuaciones lineales es común decir: *si el número está sumando (Ej: +9), pasa al otro lado restando (-9); y si el número está restando (Ej: -6), pasa al otro lado sumando (+6)*. O en otras ocasiones: *si el número está multiplicando (Ej: ·2), pasa al otro lado dividiendo (en forma fraccionaria) (1/2)* (el número pasará sin cambiar su signo). Debemos establecer que no existe la operación “pasar”, es por ello que es importante la rigurosidad.

Dentro de la justificación de los procedimientos de resolución de ecuaciones de primer grado, encontramos conflictos, por lo general ocasionados por la complejidad implícita de una presentación axiomática, la cual dificulta a los alumnos en la comprensión y posterior aplicación de los procedimientos formales de la matemática, en la resolución de ecuaciones.

Generalmente los estudiantes, al resolver una ecuación lineal utilizan una lógica de justificación basada en descripciones de las técnicas usadas o de una visión fenomenológica, aseverando que se encuentran frente a verdades incuestionables que tienen como base la intuición, o acuerdos arbitrarios, demostrando que no tienen claridad en el ámbito de validez de la lógica de justificación que utilizan en la resolución de dichas ecuaciones. Esto ocurre debido a que los alumnos no poseen el conocimiento o comprensión que les permita justificar, pero si pueden con su conocimiento describir sus pasos de resolución. *La justificación de los pasos de resolución de una ecuación permite distinguir entre una postura pragmática y una axiomática deductiva* (Olfos, 2006., p.1).

Las justificaciones de los alumnos podrían identificarse como:

- Pragmáticas (de hecho, imposiciones de sus profesores)
- Deductivas (derivaciones, axiomáticas)

- Inductivas (generalizaciones a partir de un modelo, por ejemplo: el modelo de la balanza; la ecuación es como una balanza, se mantendrá la igualdad tal como la balanza conserva el equilibrio, si se suma lo mismo en ambos lados de la ecuación).
- Formales (deducciones que asumen la existencia de axiomas o saberes previos).

Olfos, es claro en señalar que en la práctica priman argumentaciones de tipo pragmático, mezcladas con frases o ideas de tipo descriptivo (Olfos, 2006.).

2.3.6. Las ideas de Polya en la resolución de problemas

George Polya es el pionero o gestor de las etapas de la resolución de problemas. No se puede dejar de abordar esta temática sin dejar de destacar a este gran matemático. Nacido en Budapest en 1887 y muere en California en 1985 (Alfaro, 2006)

La posición de Polya respecto a resolución de problemas se basa en una serie de procedimientos que podemos utilizar y aplicar en cualquier ámbito de la vida cotidiana. Por lo que Polya expresa *“Mi punto de vista es que la parte más importante de la forma de pensar que se desarrolla en matemáticas es la correcta actitud de la manera de cometer y tratar los problemas la actitud correcta en la forma de pensar puede ser ligeramente diferente de un dominio a otro, pero solo tenemos una sola cabeza y por lo tanto es natural que en definitiva haya solo un método de acometer toda clase de problemas, lo central en la enseñanza de las matemáticas es desarrollar tácticas en la resolución de problemas”* (Alfaro, 2006, p.1).

Polya cuestionó las estrategias que existían para resolver problemas o como se admitía una sucesión de pasos lógicos para aplicar a la resolución de cualquier tipo de problemas. En su primer libro llamado “El método de los cuatro pasos” plantea que para resolver cualquier tipo de problemas se debe:

- Comprender el problema
- Concebir un plan
- Ejecutar el plan
- Examinar la solución

Para cada uno de estos pasos señala una serie de preguntas y sugerencias:

1. Comprender el problema:

Se debe comenzar por familiarizarse con el problema de manera de tener claridad en lo que se debe resolver. Visualizado el problema se tendrá claro que se debe resolver, luego de este proceso se comprende el problema; en esta micro-fase se separan las partes y se comienzan a resolver.

Se tienen las siguientes preguntas:

- *¿Cuál es la incógnita?*
- *¿Cuáles son los datos?*
- *¿Cuál es la condición?*
- *¿Es la condición suficiente para determinar la incógnita?*
- *¿Es insuficiente?*
- *¿Es redundante?*
- *¿Es contradictoria?*

2. Concebir un plan

En este paso el problema debe relacionarse con problemas semejantes, con resultados útiles y determinar si se pueden utilizar estos problemas similares o sus resultados, para que así surja una idea útil. Por ello, plantea como importante determinar cuándo un problema es análogo a otro. Verlos de distintas perspectivas, conectarlo con conocimientos previos y buscar algo útil en lo que se haya trabajado antes.

Se proponen las siguientes preguntas:

- *¿Se ha encontrado con un problema semejante?*
- *¿Ha visto el mismo problema planteado en forma ligeramente diferente?*
- *¿Conoce un problema relacionado?*
- *¿Conoce algún teorema que le pueda ser útil?*
- *¿Podría enunciar el problema en otra forma?*
- *¿Podría plantearlo en forma diferente nuevamente? Refiérase a las definiciones.*

3. Ejecución del plan

Se iniciará examinando todos los detalles, es decir, se hace una profunda revisión de todos los pasos comprobando cada uno de ellos y verificar si son correctos.

- *¿Puede ver claramente que el paso es correcto?*
- *¿Puede demostrarlo?*

4. Examinar la solución

Fase denominada también como “Visión retrospectiva”. El sujeto debe detenerse a observar que fue lo que se hizo, es necesario verificar el resultado y razonamiento. Se señalan las siguientes preguntas para esta etapa:

- *¿Puede verificar el resultado?*
- *¿Puede verificar el razonamiento?*
- *¿Puede obtener el resultado en forma diferente?*
- *¿Puede verlo de golpe?*
- *¿Puede emplear el resultado o el método en algún otro problema?*

Durante esta etapa final se obtiene una retroalimentación para lograr resolver otros problemas planteando que cuándo se resuelve un problema se están creando habilidades que posteriormente se utilizaran en cualquier tipo de problemas, utilizando como herramientas tanto la solución como el método de solución. Esta visión retrospectiva tiene como finalidad que los resolutores visualicen una amplia gama de posibles caminos para resolver.

Un punto muy importante en el proceso de la Resolución de Problemas es la labor del docente, debido a que es complicado llevar a cabo la ayuda que se le da al alumno, es decir, es difícil mantener el equilibrio entre si se presta más ayuda de la conveniente o no, un profesor debe facilitar la información precisa y necesaria. El docente debe ser empático con el alumno y pensar que el estudiante se cuestiona si realmente se le puede ocurrir a él la solución que el profesor da de forma muy natural.

Polya enfatiza dos puntos relevantes en la función del profesor

- Preguntar y señalar el camino de distintas formas.
- Usar las preguntas para ayudar a que el alumno resuelva el problema y a la vez genere habilidades.

Una de las características fundamentales para resolver un problema es el interés, debido a esto se debe buscar la manera de interesar al alumno a resolver problemas, siendo de suma importancia exponer el problema con el objeto de atraer la curiosidad de los estudiantes y familiarizarlos con el problema.

La imitación resulta ser un método óptimo para este tipo de enseñanza por medio de resolución de problemas, el profesor debe ser un modelo, el mismo debe hacer las preguntas cuando resuelve un problema en la clase. Con esto el docente crea situaciones de aprendizaje al estudiante para que descubra estos procesos los

asimile y pueda transferirlos a cualquier otra situación problemática (Ministerio de Educación Perú, 2006, p. 5)

El método de interrogar del profesor debe comenzar por una pregunta general o una sugerencia e ir de a poco a preguntas más precisas con el objeto de conseguir respuestas por parte de los estudiantes, llevándolos a razonar sobre el problema y apoyarse en problemas análogos.

Polya señala que las preguntas tienen que ser simples y naturales, de forma que las respuestas se le puedan ocurrir a algún estudiante y logren ser desarrolladas en diferentes situaciones problemáticas sin restringirse en algún ámbito. Las preguntas deben ser generales.

Polya afirma que, el estudio de la heurística busca comprender características generales y estrategias de resolución. Algunas de las heurísticas son:

- Variación del problema: *el problema original se puede variar descomponiéndolo* y no necesariamente enfocándolo directamente (Alfaro, 2006, p.6). Se puede separar por partes, cambiar alguna condición, Polya afirma que esto genera la movilización y organización de los conocimientos previos.
- Generalización: El método es pasar del análisis de un objeto a el análisis de un conjunto de objetos., entre los cuales se encuentra el primer objeto.
- Particularización: Es el caso inverso de la generalización. Se comienza a particularizar en algunos casos para encontrar ideas sobre el problema.
- Analogía: Se puede apoyar en problemas similares más simples.

En esta investigación, hemos entendido por Heurística a la capacidad de resolver problemas mediante la creatividad y el pensamiento lateral o pensamiento divergente. La capacidad heurística es un rasgo característico de los humanos, desde cuyo punto de vista puede describirse como el arte y la ciencia del descubrimiento y de la invención.

En Chile, para facilitar la labor del profesor, cada año, en el mes de marzo, se le hace entrega de un libro llamado “GUIA DIDÁCTICA DEL PROFESOR”. Esta guía se relaciona cien por ciento con el libro del estudiante, es decir, muestra y explica los contenidos e indica en que páginas del libro del estudiante se debe trabajar. En algunos niveles, además, se integran guías complementarias y evaluaciones, las que están formuladas según los planes y programas del Mineduc.

Uno de los puntos que resalta la Guía didáctica del profesor en matemáticas es “Razonamiento matemático y resolución de problemas”. Con este punto se quiere incitar al profesor a generar situaciones en las que los alumnos busquen, analicen e investiguen conceptos para adquirir los contenidos en una modalidad constructivista.

En este punto se consideran cinco componentes interconectadas:

- Conceptos: Contenidos previos necesarios para resolver problemas matemáticos.
- Habilidades: Aptitudes que el alumno debe desarrollar en los contenidos.
- Procesos: Razonamiento y heurística involucrados en la resolución de problemas matemáticos.
- Actitudes: Aspecto afectivo en el aprendizaje matemático.
- Metacognición: Habilidad de monitorear el proceso de pensamiento durante la resolución de problemas.

Además, se hace referencia al modelo de resolver problemas de Polya y en base a esta propuesta se muestra un diseño de actividades en las que los alumnos puedan identificar cada uno de los pasos que propone Polya: comprender el problema, crear un plan, poner en práctica el plan y examinar los hechos. (Zañartu, Darrigrandi, & Ramos, 2009)

Razonamiento plausible

El matemático razona de distintas maneras no de una única forma conjeturando, buscando relaciones, determinando la mejor forma de resolver problemas. La lógica es de la siguiente manera:

Si A implica B y B es cierto entonces A es más digna de crédito.

Las características del razonamiento plausible son:

- Es impersonal, la verificación es una consecuencia, fortalece una conjetura.
- Es universal, la verificación de una consecuencia es una evidencia razonable de una conjetura en cualquier dominio,
- Es autosuficiente, la conclusión plausible está apoyada por las premisas.
- Es provisional, puede aparecer un contraejemplo que elimine la conjetura.

Según Alfaro (2006), *el profesor de matemáticas debe mostrar el rostro humano de esta disciplina: donde se equivoca, dónde las conjeturas se desechan o siguen ahí, si hay problemas abiertos en donde todavía no sabemos si tienen solución o no. Sería muy importante que muchos de esos aspectos pudieran incluirse en la enseñanza de la matemática. (p. 8)*

2.3.7. El trabajo de Allan Schoenfeld

Este se apoya en el trabajo hecho por Polya, pero del cual no pueden rescatar investigaciones de campo con estudiantes, por lo que se dedicó a este punto, realizando experimentos con estudiantes y profesores siguiendo las ideas de Polya. Y finalmente concluyendo que al utilizar la Resolución de Problemas como una estrategia didáctica en la enseñanza de la matemática, se deben considerar otros factores además de las heurísticas, de otra manera no funcionara este modelo de enseñanza.

Como los recursos o conocimientos previos del estudiante, señalando como deber del docente tener claridad sobre las herramientas que posee el sujeto y como las aplica. Además, un docente debe conocer como accede el alumno a sus propios conocimientos, hacer un *inventario de recursos*. Además tiene la tarea de apreciar cuales son los recursos defectuosos, es decir, los conocimientos mal aprendidos que usa en alguna situación y resultan efectivos pero que resultan inútiles en situaciones nuevas, puede ser alguna fórmula, procedimiento, entre otras. Otro factor serían las circunstancias estereotípicas que provocan respuestas estereotípicas, es decir el procedimiento de resolución se efectúa de manera casi automática (Barrantes, 2006).

Schoenfeld expone que las heurísticas son muy generales, cada tipo de problemas necesita de ciertas heurísticas específicas, por lo que habría que conocerlas y estudiar sus usos de modo de generar las habilidades necesarias.

Existen variados caminos para llegar a la solución de un problema, pero aquí el estudiante debe tener la capacidad de darse cuenta cuando la vía de solución escogida no funciona, de manera de retroceder e intentar de nuevo por otra vía. Esto es lo que Schoenfeld denomina *control*. Destacando la habilidad de evaluar el proceso de la resolución y del conocimiento de sí mismo, es decir, conocer cuáles son sus herramientas, y cómo reacciona con ella ante las diversas situaciones problemáticas (Barrantes, 2006).

2.3.8. Sistemas de Creencias

Una incidencia importante es la que tienen las creencias sobre la matemática, las que guiaran las maneras de comportarse del estudiante al enfrentarse a un problema. Según señala Schoenfeld el matemático se apoya en la argumentación matemática formal para descubrir soluciones, por lo que Schoenfeld postula que el estudiante puede usar la argumentación matemática en solo dos situaciones:

- Para confirmar algo que es intuitivamente obvio (Barrantes, 2006, p.5).

- Para verificar algo que afirma el profesor y no es tan obvio para el estudiante (Barrantes, 2006).

Las creencias condicionan el aprendizaje de la matemática de muchas formas, una de ellas referida al momento en que el estudiante toma la decisión de cuándo debe ocupar argumentos formales y cuando no, otra forma de restricción ocurre al determinar cómo trata de comprender la matemática, en la cual sólo necesitan memorizar una serie de reglas y aplicar procedimientos, a la vez también determina la disposición para trabajar en matemáticas, es decir, si el sujeto cree que todos los problemas tomaran cinco minutos no le dedicará más tiempo a la resolución que ese tiempo (Barrantes, 2006).

En el desarrollo de la matemática se presentan creencias socio culturales manifestadas en la experiencia escolar en la que *hacer matemáticas significa seguir las reglas dadas por el profesor; conocer matemáticas significa recordar y aplicar correctamente las reglas cuando el profesor lo requiera y la verdad matemática queda determinada cuando la respuesta es ratificada por el profesor* (Barrantes, 2006, p.5).

Schoenfeld señala las creencias sobre las matemáticas:

- Los problemas matemáticos tienen una y solo una respuesta correcta
- Existe una única manera correcta para resolver cualquier problema, usualmente es la regla que el profesor dio en la clase.
- Los estudiantes corrientes no pueden esperar entender matemáticas, simplemente esperan memorizarla y aplicarla cuando la hayan aprendido mecánicamente. Esta creencia se ve con bastante frecuencia.
- La Matemática es una actividad solitaria realizada por individuos en aislamiento, no hay nada de trabajo en grupo.
- Los estudiantes que han entendido las matemáticas que han estudiado podrán resolver cualquier problema que se les asigne en cinco minutos o menos.

- Las matemáticas aprendidas en la escuela tiene poco o nada que ver con el mundo real.


En un ámbito general, las creencias sociales sobre las matemáticas afectan en el aprendizaje determinando el currículo, el nivel de los programas, la forma de los libros de texto, la sociedad decide qué es posible, qué es lo que desea que se aprenda y cómo es necesario enseñar.

2.3.9. Los registros semióticos

Duval, se plantea dos interrogantes que considera de vital importancia en el aprendizaje de las matemáticas, ¿Cómo se aprende a cambiar de registro?, ¿Cómo se aprende a no confundir un objeto con la representación que se propone?, al mismo tiempo el supone que la ignorancia de los docentes en este tema es una de las principales causas de las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, en este caso resolución de problemas que involucran ecuaciones con una y dos incógnitas.

Además Duval nos plantea que para que un alumno tenga un aprendizaje significativo debe estar consciente de las distintas representaciones que posee el contenido. En la resolución de problemas de ecuaciones lineales con una y dos incógnitas podemos encontrar tres tipos de registros; de la lengua natural, algebraico y gráfico.

En el siguiente cuadro se ejemplifica dicha situación:

Objeto matemático	Registro la lengua natural	Registro algebraico	Registro gráfico
Sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.	Hace 6 años la edad de un hijo era un quinto de la edad de su padre, dentro de 9 años la edad del hijo será dos quintos de la edad de su padre. Determine las edades actuales.	$x - 6 = \frac{1}{5}(y - 6)$ $x + 9 = \frac{2}{5}(y + 9)$	<div style="display: flex; flex-direction: column; align-items: center;"> <div style="display: flex; align-items: center; margin-bottom: 10px;"> <div style="width: 15px; height: 15px; background-color: black; margin-right: 5px;"></div> $x = \frac{1}{5}(y - 6) + 6$ </div> <div style="display: flex; align-items: center; margin-bottom: 10px;"> <div style="width: 15px; height: 15px; background-color: red; margin-right: 5px;"></div> $x = \frac{2}{5}(y + 9) - 9$ </div>  </div>

Una de las bases para la construcción de la situación que involucra el objeto, es el pasaje fluido entre registros. La coherencia en el cambio de registro puede darse de forma natural o espontánea en el sujeto, en el caso de la evidencia empírica tenemos por ejemplo: que *la suma de 3 números impares consecutivos es 297* se representa el enunciado $x \in \text{imp.}; x + (x + 2) + (x + 4) = 297$, donde el conjunto imp. es el conjunto de los números impares, ante la pregunta ¿Cuál es el doble del mayor? La mayoría de los estudiantes tienen éxito, debido a que hay una congruencia entre la representación algebraica de la ecuación y el de saber que el doble del mayor va a ser $2(x + 4)$. Pero al no haber congruencia entre registros, concebir un concepto se torna una dificultad, obstaculizando el desarrollo y el aprendizaje de los estudiantes, por ejemplo, si tomamos el siguiente enunciado; *Hace 6 años la edad de un hijo era un quinto de la edad de su padre, dentro de 9 años la edad del hijo será dos quintos de la edad de su padre. Determine las edades actuales*, es necesario un traspaso al registro algebraico, generando dificultades, ya que se trata de un problema que se compone de dos ecuaciones una en la que se le añaden 9 años al padre (variable 1) y al hijo (variable 2), y la otra ecuación donde se sustraen 6 años al padre y al hijo. Y además debe usar la condición en una de las variables, en función de la otra. El estudiante procede a

sumar los nueve años a sólo una de las 2 variables y no a las 2, por lo general condiciona una variable en función de la otra pero lo hace al revés o trabaja una, este ejercicio muestra el fenómeno de no congruencia, contemplando el cambio de registro lengua natural al algebraico.

Para desarrollar un objeto matemático se necesita de un significante (semiosis) y de un significado (noesis). *“Las representaciones mentales nunca pueden considerarse independientes de las representaciones semióticas.* Un punto muy importante que Duval menciona es la relación que existe entre semiosis y noesis, siendo noesis; *“los actos cognitivos, como la aprehensión conceptual de un objeto”,* y semiosis; *“es el medio del cual dispone un individuo para exteriorizar sus representaciones mentales”* (Ministerio de Educación Perú, 2007, p.5), que si relacionamos las definiciones se concluye que sin noesis no puede haber semiosis, es decir no puede haber asimilación de ideas o conocimiento de un objeto sin algún representante de éste.

2.4. Ecuación de primer grado con una y dos variables.

2.4.1. Ecuación de primer grado con una variable.

El objeto matemático de nuestro estudio son las ecuaciones lineales con una y dos variables (incógnitas).

Si se busca la definición de ecuación de primer grado con una variable es común encontrarla como “una igualdad con una incógnita”. Una ecuación se define como una función proposicional, que al reemplazar las variables por valores se convierten en proposiciones verdaderas o falsas. Una ecuación de primer grado con una variable es una función proposicional de la forma:

$$ax + b = 0, \text{ con } a \neq 0 \text{ y } a, b \in \mathfrak{R}$$

Donde a y b son constantes de la ecuación; y x es la variable, la cual posee exponente 1, por tanto la ecuación es de primer grado.

Llamaremos conjunto de solución de la ecuación $P(x) = Q(x)$ al subconjunto S de los x en \mathfrak{R} que satisfacen la ecuación, es decir:

$$S = \{x \in \mathfrak{R} : P(x) = Q(x)\}$$

Sea el siguiente teorema:

Sean $a, b \in \mathfrak{R}, a \neq 0$, entonces, el conjunto solución S de $ax + b = 0$ es $S = \{-\frac{b}{a}\}$

Demostración:

Sea :

$$ax + b = 0$$

Se aplica inverso aditivo de b en ambos miembros:

$$ax + b = 0 \quad / \quad +(-b)$$

$$ax + b + (-b) = 0 + (-b)$$

Por neutro aditivo, se tiene:

$$ax + b + (-b) = -b$$

Por propiedad asociativa de la adición, tenemos:

$$ax + (b + (-b)) = -b$$

$$ax + 0 = -b$$

Por propiedad neutro aditivo, se tiene:

$$ax = -b$$

Se aplica inverso multiplicativo en ambos miembros:

$$ax = -b / \left(\frac{1}{a}\right)$$

$$\left(\frac{1}{a}\right) \cdot ax = \left(\frac{1}{a}\right) \cdot -b$$

Por propiedad asociativa del producto, se tiene:

$$\left(\frac{1}{a} \cdot a\right) x = -\frac{b}{a}$$

Por propiedad inverso multiplicativo, tenemos:

$$1x = -\frac{b}{a}$$

Por propiedad neutro multiplicativo se tiene:

$$x = -\frac{b}{a}$$

Los valores de la variable que hacen cierta la igualdad se llaman soluciones o raíces de la ecuación.

Una variable es una incógnita si se usa para representar valores específicos que se desconocen pero que se pueden calcular resolviendo una ecuación o desigualdad. (Domínguez, s.f. p.6)

Resolución de ecuaciones de primer grado con una variable

Sean $a, b \in \mathfrak{R}$

- i) La ecuación $x + a = b$ tiene por única solución el real $b - a$
- ii) Si $a \neq 0$ la ecuación $ax = b$ tiene como única solución el real $\frac{b}{a}$

2.4.2. Ecuación de Primer Grado con dos variables

Una ecuación de primer grado con dos variables es una función proposicional de la forma:

$$ax + by + c = 0, \text{ con } a, b \neq 0 \text{ y } a, b, c \in \mathfrak{R}$$

Donde x, y son variables, con exponente 1, por tanto la ecuación es de grado 1.

Resolución de ecuaciones de primer grado con dos variables.

Se llama sistema de ecuaciones lineales a un conjunto de ecuaciones lineales expresadas de la forma:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned}$$

Donde con $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathfrak{R}$ y $c_1, c_2 \in \mathfrak{R}$. Cualquier sistema de ecuaciones tiene:

- a) Exactamente una solución.
- b) Ninguna solución.
- c) Un número infinito de soluciones.

Los sistemas en los que el número de ecuaciones coincide con el de las variables se denominan sistemas cuadrados.

En el análisis de un sistema de ecuaciones lineales se pueden presentar varios casos:

- Tiene solución, y ésta es única, se le llama **compatible determinado**.
- Presenta infinitas soluciones posibles, se le denomina **compatible indeterminado**.
- Si no tiene solución, se la da el nombre de imposible o **incompatible**.

Métodos de resolución más usuales (Baldor, A. 2009):

Consideremos el sistema:

$$\begin{cases} ax + by = c & (1) \\ dx + ey = f & (2) \end{cases}$$

A continuación describiremos los métodos de resolución de sistemas de ecuaciones:

- Eliminación por igualación.

Para resolver el sistema por dicho método debemos seguir los siguientes pasos:

- i) Despejar una de las dos incógnitas en ambas ecuaciones.
- ii) Igualar los dos valores de la incógnita que se han obtenido, resultando una ecuación.
- iii) Resolver la ecuación de primer grado con una incógnita obtenida.
- iv) Sustituir el valor obtenido en una de las ecuaciones originales (generalmente la más sencilla), para así obtener el valor de la otra incógnita.
- v) Comprobar los resultados obtenidos, sustituyendo los valores obtenidos en una de las ecuaciones originales.

Ejemplo:

Considere el siguiente sistema de ecuaciones.

$$x + y = 15$$

$$2x + 2y = 44$$

Despejamos una de las incógnitas, en este caso, x :

$$x = 15 - y$$

$$x = 22 - 2y$$

Como ambas expresiones son iguales a x , deben ser iguales entre sí:

$$15 - y = 22 - 2y$$

Se obtiene una ecuación de primer grado con una incógnita, siendo su solución $y = 7$.

Luego, se reemplaza y en cualquiera de las ecuaciones originales, si reemplazamos en la primera ecuación se obtiene:

$$x + 7 = 15$$

Luego, $x = 8$.

Entonces, $x = 8$ e $y = 7$, es solución del sistema, ya que satisface ambas ecuaciones.

- Eliminación por sustitución.

Para resolver el sistema por dicho método debemos seguir los siguientes pasos:

- i) Despejar una de las dos incógnitas en una de las ecuaciones .
- ii) El valor obtenido se sustituye en la otra ecuación.
- iii) Resolver la ecuación de primer grado con una incógnita obtenida.
- iv) Sustituir el valor obtenido en una de las ecuaciones originales (generalmente la más sencilla), para así obtener el valor de la otra incógnita.
- v) Comprobar los resultados obtenidos, sustituyendo los valores obtenidos en una de las ecuaciones originales.

Ejemplo:

Si Pedro tiene tres veces la edad de Josefina y en 5 años mas Pedro duplicará la edad de Josefina. ¿Cuál es la edad de cada uno?

Sea:

x : La edad de Pedro

y : La edad de Josefina

$x = 3y$ "Pedro tiene tres veces la edad de Josefina"

$x + 5 = 2(y + 5)$ "En cinco años mas Pedro duplicará la edad de Josefina"

El sistema ecuaciones es el siguiente:

$$x = 3y$$

$$x + 5 = 2(y + 5)$$

Reemplazamos la primera ecuación en la segunda, se obtiene:

$$3y + 5 = 2(y + 5)$$

Reduciendo términos semejantes, obtenemos $y = 5$, y luego, $x = 15$.

Es decir Pedro tiene 15 años y Josefina tiene 5 años, lo que claramente cumple el enunciado del problema.

- Método por reducción.

Para resolver el sistema por dicho método debemos seguir los siguientes pasos:

- i) Se deben igualar los coeficientes la incógnita a eliminar.

- ii) El coeficiente de dicha variable en la ecuación (1) se ha de multiplicar por la ecuación (2), y el coeficiente de la variable a eliminar de la ecuación (2) se multiplica por la ecuación (1). Procurando que los coeficientes de la variable a eliminar tengan signos contrarios.
- iii) Se reducen los términos y se resuelve la ecuación resultante.
- iv) Sustituir el valor obtenido en una de las ecuaciones originales (generalmente la más sencilla), para así obtener el valor de la otra incógnita.
- v) Comprobar los resultados obtenidos, sustituyendo los valores obtenidos en una de las ecuaciones originales.

Ejemplo:

Resuelve el sistema:

$$2x - y = 5$$

$$3x - 2y = 3$$

Multiplicando la primera ecuación por 2 y la segunda por -1, tenemos:

$$4x - 2y = 10$$

$$-3x + 2y = -3$$

Si sumamos ambas ecuaciones se obtiene una ecuación donde no aparece y .

$$4x - 2y = 10$$

$$+ \underline{-3x + 2y = -3}$$

$$x = 7$$

Evidentemente $x = 7$, si se reemplaza en la primera ecuación se obtiene:

$$14 - y = 5$$

Luego, $y = 9$.

- Método gráfico.

Resolver gráficamente, un sistema de dos ecuaciones lineales, consiste en hallar el punto de intersección de las líneas rectas que determinan las ecuaciones, por lo que es necesario graficar ambas rectas en un mismo sistema de coordenadas cartesianas, siguiendo los siguientes pasos.

- i) Despejar la variable “ y ” en cada una de las ecuaciones, y luego se elabora una tabla, asignándole valores a “ x ”.
- ii) Graficar ambas rectas en un mismo plano cartesiano.
- iii) El punto de intersección de ambas gráficas es la solución.
- iv) Comprobar la solución, sustituyendo los valores en las ecuaciones originales.

Ejemplo:

Considera el sistema:

$$2x + y = 3$$

$$x + 2y = 0$$

Reescribiendo el sistema:

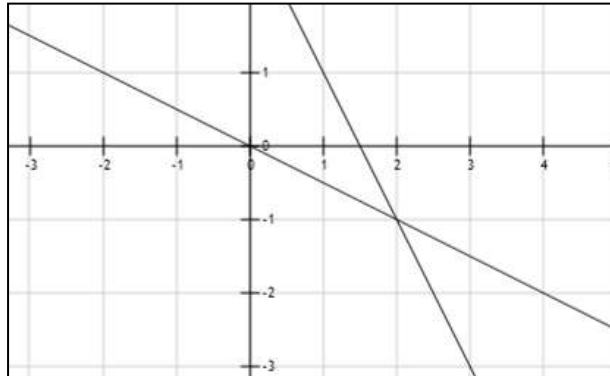
$$y = 3 - 2x$$

$$y = -\frac{x}{2}$$

Dando valores $x = -2$ y $x = 4$ en la primera ecuación se obtienen los puntos $(-2,7)$ y $(4,-5)$. Asimismo, en la segunda ecuación, se obtienen los puntos

$(-2,1)$ y $(4,-2)$. Se ubican estos puntos en el plano cartesiano y se trazan las rectas correspondientes a cada ecuación.

El punto de intersección de ambas rectas es $(2,-1)$. Por lo tanto, la solución del sistema es $x = 2$ e $y = -1$.



- Método por determinante.

Para resolver el sistema es necesario seguir los siguientes pasos:

- i) El valor de cada incógnita del sistema de ecuaciones de primer grado, es una fracción que tiene por denominador el determinante formado por los coeficientes de las incógnitas “ x ” e “ y ”, llamado **Determinante del Sistema**, y por numerador, el determinante que se obtiene al sustituir, en el determinante del sistema, la columna de los coeficientes de la incógnita buscada por los términos independientes de las ecuaciones dadas.
- ii) Comprobar los resultados obtenidos, sustituyendo los valores obtenidos en una de las ecuaciones originales.

Ejemplo:

Resuelve el siguiente sistema:

$$5x + 6y = -10$$

$$2x + 3y = -1$$

Calculamos primero el determinante del sistema:

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 5 \cdot 3 - 2 \cdot 6 = 15 - 12 = 3$$

Ahora calculamos el valor de x sustituyendo los valores de la primera columna del determinante del sistema por los valores de los términos independientes y divididos entre el determinante del sistema.

$$x = \frac{\begin{pmatrix} -10 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}}{3} = \frac{(-10) \cdot 3 - (-1) \cdot 6}{3} = \frac{-30 + 6}{3} = \frac{-24}{3} = -8$$

Para calcular el valor de y sustituimos los valores de la segunda columna del determinante del sistema por los valores de los términos independientes y dividimos entre el determinante del sistema.

$$y = \frac{\begin{pmatrix} 5 & -10 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}}{3} = \frac{5 \cdot (-1) - 2 \cdot (-10)}{3} = \frac{-5 + 20}{3} = \frac{15}{3} = 5$$

CAPÍTULO 3. MARCO METODOLÓGICO

3.1. Opción paradigmática

Se ha optado por el enfoque cualitativo en que se usan datos no numéricos en la recolección de información como es el caso de la revisión de documentos y las entrevistas semi estructuradas realizadas a informantes claves en el presente estudio.

El análisis de los datos se hace a partir de las representaciones que los actores, en este caso profesores, se hacen del fenómeno estudiado y de las unidades de significado relevantes que, en relación al problema, se desprenden de los documentos seleccionados.

Los datos se relacionan entre ellos y con la teoría pertinente, la que se va incorporando a medida que avanza el estudio. (Hernández, Fernández y Baptista, 2006)

3.2. Diseño de investigación

Se trata de un estudio descriptivo en el que se busca señalar las características de un fenómeno a partir de la mirada de los actores, contrastando esa perspectiva con la teoría.

En este caso, se describen las dificultades que se desprenden del análisis de los programas, textos de estudio y de las prácticas pedagógicas de los docentes que hacen parte de la unidad de análisis. Hernández, Fernández y Baptista (2006) citando a Patton (1990) definen “los datos cualitativos como descripciones detalladas de situaciones, eventos, personas, interacciones, conductas observadas y sus manifestaciones”.

3.3. Delimitación del Problema.

Si bien, la situación general observada refiere a la resolución de problemas el estudio se centra en aspectos puntuales que requieren tres precisiones: :

- Los problemas corresponden a resolución de problemas con ecuaciones lineales con una y dos incógnitas.
- Este contenido específico se aborda para su aprendizaje en primer y segundo año de enseñanza media. Las dificultades que se busca describir son las que enfrentan las y los estudiantes al cambiar de registro natural a registro algebraico

3.4. Muestra

Como muestra se han tomado, con un criterio de conveniencia para la investigación, las siguientes unidades de análisis:

- Programas vigentes de primer y segundo año de enseñanza media, del Mineduc, Chile.
- Textos de estudio de primer y segundo año de enseñanza media de uso actual en el aula.
- Docentes de primer y segundo año de enseñanza media, V región Valparaíso.

3.5. Fuentes de los datos

Los datos provienen de fuentes primarias como son, en este caso, los documentos en análisis, el discurso de los docentes en la entrevista y estudiantes.

3.6. Categorías

Se han definido a priori dos grandes categorías:

Dificultades **intrínsecas** que enfrentan los estudiantes, las que consideran al menos dos sub categorías:

- Desarrollo cognitivo
- Desarrollo afectivo

Dificultades **extrínsecas** que suponen otras dos subcategorías:

- Metodológicas (docente)
- Socioculturales (contexto)

Sin embargo, la definición a priori de estas categorías y sub categorías no impide que durante el estudio surjan otras que se agreguen al análisis.

3.7. Técnica de indagación

Para recolectar la información se ha optado por el análisis documental, en este caso de los programas de estudio y los textos actualmente en uso en aula; la observación participante, a los alumnos; y una entrevista semi estructurada que se realizará a docentes con el fin de rescatar su percepción del problema en estudio.

El **análisis documental** es el examen minucioso de documentos escritos, que encierran valiosa información para el desarrollo del proceso investigativo.

La **observación** “permite obtener información sobre un fenómeno o acontecimientos tal y como éste se produce” (Rodríguez; Gil; García, 1999:138). Es una opción que deja fuera la posibilidad de desviación o distorsión de lo que una persona podría recordar, modificando así los datos. Además, como señalan los autores citados, no es fácil para el sujeto hablar con plena conciencia de sus propias conductas y, en ese caso, es mejor que las conductas sean observadas “si queremos descubrir sus aspectos característicos”.

La observación es externa al objeto observado sin embargo se distinguen grados de externalidad. En algunos casos quien observa no interactúa con el grupo o persona observada. Es aquella en que “el observador, empleando técnicas de registro cualitativas (registros de acontecimientos, conducta no verbal, categorización de comportamientos, etc.) no pertenece ni participa en el grupo objeto de estudio” (Gutiérrez, J.; Delgado, J. 1999:142). Se habla, ese caso de observación no participante.

En el presente estudio se ha optado por la **observación participante** la que se considera “un método interactivo de recogida de información que requiere una implicación del observador en los acontecimientos y fenómenos que está observando (Rodríguez y otros, 1999:154)”.

La **entrevista** de investigación es “una conversación entre dos personas, un entrevistador y un informante, dirigida y registrada por el entrevistador con el propósito de favorecer la producción de un discurso conversacional, continuo y con una cierta línea argumental –no fragmentado, segmentado, precodificado, y cerrado por un cuestionario previo- del entrevistado sobre un tema definido en el marco de una investigación” (Alonso, 1999).

El carácter semi estructurado, hace que la entrevista tenga solo un guión con los tópicos a tratar, dejando libertad al investigador para formular preguntas en la medida que avanza la conversación, favoreciendo, en todo momento la libre expresión del entrevistado. “A diferencia de las entrevistas estructuradas, se desarrollan en una situación abierta, donde hay más flexibilidad y libertad” (Rodríguez y otros, 1999:169).

3.8. Plan de análisis

En primer lugar se analizarán los programas de estudio del subsector de Educación Matemática correspondiente a los cursos de Primer y Segundo Año de Enseñanza Media.

Paralelamente, se escogerá los informantes clave teniendo los siguientes criterios de inclusión:

- Docentes de Enseñanza Media
- Especialidad Matemática
- Experiencia en Primer y Segundo Año de Enseñanza Media

Primer nivel de análisis:

- Contenido de los documentos y de las entrevistas
- Levantamiento de categorías

Segundo nivel de análisis:

- Relaciones entre categorías
- Informe de investigación

3.4. Trabajo de campo

El trabajo de campo se remite a las siguientes actividades:

- Revisión bibliográfica: insumos teóricos previos y emergentes según el avance del estudio.
- Entrevistas a informantes claves.
- Observación actividades realizadas de los alumnos.
- Análisis documental de programas de estudio y textos en uso en el aula.

CAPÍTULO 4. RESULTADOS OBTENIDOS

4.1. Análisis de las entrevistas

La entrevista abierta hecha a los informantes claves a partir de las dos grandes categorías prefijadas, dificultades intrínsecas y extrínsecas que tienen los alumnos y alumnas a la hora de resolver ecuaciones lineales, que contemplan una o dos incógnitas y ellas emergen, a partir del discurso de los informantes, otras categorías que dicen relación con el origen de la dificultad, los contenidos específicos a tratar y las estrategias docentes. En casi todas las categorías, incluyendo las prefijadas, se contemplan subcategorías. El análisis da cuenta del discurso de los docentes entrevistados relacionando dicho discurso con el marco teórico que sustenta la investigación.

4.1.1. Dificultades intrínsecas

Este tipo de dificultades dicen relación con aquellos obstáculos que, para aprender el contenido, encuentran los y las estudiantes. Reconociendo de acuerdo al argumento constructivista, que en el aprendizaje están comprometidos indisolublemente elementos tanto cognitivos como afectivos se consideraron dos subcategorías.

i) Dificultades intrínsecas de tipo cognitivo

Los docentes coinciden en señalar que desde el punto de vista cognitivo los y las estudiantes de los primeros cursos de enseñanza media carecen de un dominio de aquellos contenidos previos pertinentes que les permitirían acceder al nuevo contenido. En dicho análisis no dejan fuera aquellas dificultades específicas que presentan las alumnas y alumnos con necesidades educativas especiales.

“Falta de dominio en contenidos previos” M1.

“La base que traen es deficiente” M1.

“Las propias de los alumnos con problemas de aprendizaje” H1.

“Las relativas a comprensión lectora o de dislexia” H1.

“Dificultades de los alumnos relacionadas con problemas de aprendizaje” H1.

“No son capaces de relacionar conceptos de la vida diaria con lenguaje matemático” M2

Refiriéndose específicamente a la dificultad que puede ofrecer el contenido señalan que dicha dificultad aparece

“Cuando deben representar un problema que aparentemente tiene más de una incógnita, pero en realidad es una sola” M1

“Complejidades referentes al traspaso de la aritmética al álgebra”. H2

“De la costumbre de sólo trabajar con las cuatro operaciones básicas, a símbolos abstractos como las variables.” H2

“Hay dificultad cuando son variables dependientes” H2.

“No son capaces de relacionar conceptos de la vida diaria con lenguaje matemático” M2.

La comprensión lectora deficiente, que tienen los escolares es una habilidad básica, cuya carencia les dificulta entender lo que se les pide.

“Comprensión lectora” M2.

“En la comprensión de los enunciados, fundamentalmente en el proceso de modelizar matemáticamente el problema” H2

. Otra manera de referirse a esta dificultad cognitiva, es señalando las carencias que los y las estudiantes tienen en este aspecto antes de llegar al liceo, aludiendo a un mala base en su formación de educación básica que no los prepara para las exigencias de la educación media, impidiendo que puedan enfrentar con éxito el aprendizaje de los contenidos mínimos obligatorios contemplados en los programas.

“La base que traen es deficiente” M1.

“Para la realidad que uno tiene en el liceo (desarrollo cognitivo)” M1.

“Como recibe a los alumnos que vienen de otras escuelas y llegan a primero medio (desarrollo cognitivo)” M1.

“Creo que los programas pretenden mucho como “contenidos mínimos” M1.

ii) Dificultades intrínsecas de tipo afectivo

Se consideran acá, aquellas dificultades que dicen relación con las actitudes asumidas por las y los estudiantes al enfrentarse con el contenido nuevo a aprender. Se señalan como obstáculos para el aprendizaje el bajo nivel de autoestima que, de acuerdo a los autores como Neva Milicic (2001), actúa como un inhibidor del aprendizaje. Unido a ello se señala también la escasa motivación y la carencia de destrezas.

“Alumnos con problemas de autoestima baja”.H1.

“Escasa motivación y destrezas en el alumno” H1.

“Se nota el miedo que tienen los menos aventajados cuando se les pide resolver un problema, por lo general ni siquiera lo intentan” H2.

Otro aspecto relacionado con las actitudes de los alumnos y alumnas dice relación con el esfuerzo intencionado que este puede hacer para aprender. De acuerdo a César Coll (1995), para aprender significativamente debe haber una intención de parte de quien aprende de hacerlo. Según lo dicho por los docentes entrevistados esa intencionalidad no está presente en los alumnos.

“No quieren tomarse la molestia de pensar” M1.

“Quieren tener el ejercicio resuelto y no pensar como se resuelve” M1.

“Los alumnos para empezar no tienen hábitos de estudios” M1.

“Además tienen el lema de trabajar con el mínimo esfuerzo” M1.

“No intentan solucionar o simplificar las dificultades de un ejercicio” M2.

Aparece en el discurso de los estudiantes la negación de sus habilidades para aprender las matemáticas y justifican así su imposibilidad de resolver los problemas.

“Los estudiantes repiten con mucha frecuencia que ellos son negados para la matemática.”H2

“Cuando se les pregunta alguna cosa responden de inmediato “profe yo con las matemáticas no puedo soy negado”.H2

“No intentan solucionar o simplificar las dificultades de un ejercicio”M2.

4.1.2. Dificultades extrínsecas

Este tipo de dificultades dicen relación con aquellos obstáculos que, para aprender el contenido, encuentran las y los estudiantes pero que no dependen de su nivel cognitivo ni de sus actitudes frente al estudio. En el marco de la buena enseñanza (2010), se señalan las condiciones en que se aprende un elemento importante que contribuye al proceso de aprendizaje. De esas condiciones el docente se hace cargo, creando ambientes de aprendizaje, entre otras variables, definir una metodología de enseñanza. Por ello, la metodología se contempla como una subcategoría. Por otro lado, el contexto cultural y social, considerado también una subcategoría, ejerce una gran influencia en la vida del estudiante quien aprende en primer término de su mundo cercano al que se incorpora la escuela y el liceo en algún momento de la vida. Esos aprendizajes son claves a la hora de enfrentar aprendizaje de contenidos complejos como el que se analiza en este estudio.

- ***Dificultades extrínsecas en relación a la metodología docente***

En relación a este aspecto que, si consideramos el marco de la buena enseñanza, es un factor importante a la hora de crear ambientes que favorezcan el aprendizaje, los docentes reconocen algunas de sus propias carencias en relación a conocer la realidad de los alumnos, para adecuar su metodología a dicha realidad.

“Falta de mayor contextualización con la realidad de tienen hoy los alumnos en algunos contenidos” M1.

“Que consideren las conductas de entrada” H1.

Otro aspecto dice relación con sus necesidades de capacitación referidas también al tema de la resolución de problemas y a la evaluación.

“Carencia de cursos en distintos tipos de evaluación” M1.

“La que se refiere al procedimiento o aplicación de algún método de resolución” H1.

- ***Dificultades extrínsecas en relación al contexto en que se aprende.***

Una primera dificultad, referida al contexto en que el alumno aprende la reconocen los docentes en relación a los textos de estudio en uso en el liceo. Para algunos puede ser indiferente el uso o no del texto, pero quienes los usan mantienen una mirada crítica acerca de la manera como se presentan los contenidos y procedimientos matemáticos:

“(los textos) No ayudan mucho ni tampoco obstaculizan” M1.

“Obstaculizan, (los textos) en el sentido que no presentan un procedimiento detallado de la resolución” H1.

“Los textos de estudio no profundizan, por ejemplo la parte formal de las matemáticas, en cuanto a su buen dominio en el lenguaje formal” H2.

“Con el intento de acercar los conceptos matemáticos a la vida diaria, muchas veces están dejando de lado los conceptos puros” M2.

La misma crítica alcanza a los programas de estudio, sin embargo, hay en este ámbito opiniones contradictorias, porque por un lado se reconoce que los programas presentan contenidos mínimos obligatorios y, por otro, se reconoce que estos contenidos mínimos son ya de una sobre-exigencia para los alumnos:

“En los programas no se trata a la resolución de problemas como el eje central de las unidades” H2.

“Programas pretenden mucho como “contenidos mínimos” M1.

“Los programas de estudio consideran los aprendizajes de contenidos mínimos” H1.

Sin embargo, una dificultad que ofrece el contexto es el ambiente socio cultural y económico así como el ámbito familiar en que el alumno se desenvuelve. Los alumnos en los liceos, de acuerdo al juicio de los profesores, vienen de estratos socio económicos bajos donde a su pobreza económica, se agrega la pobreza cultural.

“Creo que las dificultades de aprendizaje siempre se han manifestado con mayor intensidad en estratos bajos, que es el tipo de alumnos que tenemos en el liceo que trabajo” M1.

En ese contexto en que viven los alumnos, el apoyo de los padres es escaso y eso se nota en la percepción que los mismos alumnos tienen de sus padres, de quienes no reciben estímulos positivos:

“La mayoría recibe poco apoyo de sus padres”M1

“Creen que sus padres están sólo cuando los tienen que retar. No reciben un estímulo positivo cuando hacen algo bien” M1

4.1.3. Otras categorías emergentes

Del discurso de los profesores, aparte de sus referencias a categorías ya instaladas por la misma entrevista, se agregan otras que emergen en la conversación como son el origen de la dificultades tanto desde el punto de vista cognitivo como afectivo, el contenido específico que se aborda como materia de estudio referido al contenido previo manejado por el alumno y a su falta de

estrategia frente al aprendizaje del mismo y, por último hacen una referencia a la estrategia del enseñanza.

4.1.3.1. Origen de las dificultades en el aspecto cognitivo.

De acuerdo al discurso de los docentes las dificultades que el alumno manifiesta en el aspecto cognitivo tienen su origen en los aprendizajes realizados en la educación básica. Reconocen que en la educación básica no han adquirido contenidos previos que ahora necesitan, que no quedan instaladas destrezas y habilidades básicas para el desarrollo de las matemáticas. Aducen que los cambios deben realizarse en ese nivel y que faltan especialistas en la materia.

“Se supone que se adquieren en la básica” (el contenido previo que les falta) M1.

“Que ya en primero medio vengan con algunas habilidades y destrezas básicas para el desarrollo de las matemáticas.” H2.

“Que siempre todo cambio, debe realizarse de la básica o la pre-básica, para que el alumno al encontrarse con la realidad de la media no sea tan brusco el cambio” M1.

“En el nivel de Enseñanza Básica debería haber profesores especialistas en matemática.” H2.

4.1.3.2. Origen de las dificultades en el aspecto afectivo.

Hay que señalar que los docentes en ningún momento ubicaron como en el caso de los contenidos, el origen de las dificultades en el aspecto afectivo, en la educación básica. Más bien ponen el problema en el mismo alumno, en la necesidad que ellos tienen de conectar lo aprendido con su futuro y en la difícil experiencia del aprendizaje de las matemáticas.

“Están los estudiantes constantemente preguntando “profe para que me sirve esto si yo no voy a ir a la universidad” H2.

“la resolución de problemas debe ser una de las experiencias más difíciles que afronta el estudiante durante su etapa escolar” H2.

- **Falta de dominio del contenido previo**

Los docentes solo señalan dos contenidos que a su juicio son previos y que los alumnos no dominan, lo que dificulta los aprendizajes en la educación media en el contenido específico que se aborda en este estudio:

“Operatoria básica en números reales” M1.

“No asimilan el concepto de igualdad y de inversos”M2.

- **Falta de estrategias para manejar el contenido**

La carencia de estrategias para aprender el contenido específico que se aborda en este estudio por parte de los alumnos tiene sus manifestaciones en las siguientes expresiones de los docentes:

“No recurren a los conocimientos propios para resolver problemas” M2.

“Solo saben trabajar con un método de resolución porque está dentro del contrato didáctico” H2.

“No se conciben como llegar de una frase o palabra a una expresión algebraica” H2.

“Principalmente las dificultades de representación de los enunciados o datos de este, en el álgebra matemática” H2.

“cuando deben representar un problema que aparentemente tiene más de una incógnita, pero en realidad es una sola” M1.

4.1.4. Estrategias docentes

En este tema los docentes se remitieron a señalar algunas acciones que ellos realizaban con la finalidad de lograr el aprendizaje de sus alumnos, como

confeccionar guías, intentar potenciar las habilidades y destrezas, y plantear problemas solucionables de manera de no generar desmotivación.

“Uno debe recurrir a sus propias guías” M1.

“Potenciar las habilidades y destrezas de alumnos” H1.

“Mismo, para no generar una desmotivación ante un problema que parece que solo el docente puede dar la solución, se trabaja mucho con problemas parecidos entre sí, para que por lo menos, adquieran un plan a seguir con estos problemas” H2.

4.2. Observación participante a los alumnos.

La observación participante, de acuerdo a la definición realizada en el marco metodológico, ocurrió en una situación social en que el observador participa. En este caso, clases a tres estudiantes en que el observador cumple el rol de profesor.

Se realizaron cuatro clases en dos semanas, cada una con una duración de 120 minutos aproximadamente; cada clase estuvo planificada de acuerdo al contenido a tratar.

En la primera clase solo se trató de reforzar contenido que los alumnos dominaban bastante bien; “ecuaciones lineales” desarrollando una guía con ecuaciones según su complejidad así en el momento de traducir del lenguaje natural al lenguaje algebraico sea más sencillo relacionar la simbología. Esta clase para los tres alumnos, en lo general fue bastante satisfactoria sobre todo cuando se fueron percatando que, a medida que los ejercicios avanzaban, el proceso se iba complejizando. Otro momento relevante fue cuando se les hizo entrega de las definiciones de término algebraico, expresión algebraica y ecuación lineal. En el caso de Ximena fue muy fácil percibir que no tenía idea de esa definición. René y María José no se la memorizaban pero si tenían conocimiento de ella. Al finalizar

la clase se hizo entrega a cada uno de una guía con diez ejercicios con ecuaciones lineal para que las resolvieran antes de la siguiente clase.

La segunda clase estuvo destinada a que los alumnos, mediante interrogantes, fueran capaces de relacionar la simbología matemática con el lenguaje natural: ¿Qué símbolo matemático se relaciona con la palabra más? ¿y con menos? ¿y por? Luego de responder estas preguntas y tener el ambiente propicio para la clase, se les hizo entrega de una tabla en la que debían relacionar el lenguaje natural con el algebraico y viceversa, finalizando con una guía con ejercicios para traer en la próxima clase.

Esta clase fue un poco más compleja ya que comenzamos relacionando el lenguaje natural con el algebraico. La realización de la clase para Ximena fue muy difícil, ya que en los casos de dudas no siempre preguntaba y en algunos momentos no mostró interés en seguir avanzando. Por el contrario, lo único que quería era que la clase terminara lo antes posible. En cambio, María José y René se involucraron más en esta clase. En el caso de René, éste avanzó de acuerdo a lo planificado en la clase y en los momentos de dudas preguntó y luego siguió avanzando, por lo que en el término de la clase se mostraba bastante satisfecho. Por otro lado, María José no avanzó tan bien como René, a pesar de su buena disposición, ya que le era bastante complejo relacionar la simbología matemática cuando se le preguntó de forma oral. Pero, en el momento de llenar la tabla, le fue un poco más sencillo, aunque seguía mostrando dudas. A pesar de las dudas que surgieron con ambos chicos la finalización de la clases fue muy satisfactoria ya que el objetivo se cumplió en su totalidad: “poder relacionar el lenguaje natural con el algebraico y vice versa”.

La tercera clase consistió en desarrollar una guía de ejercicios con resolución de problemas que involucraban ecuaciones lineales. En la primera parte, los ejercicios estaban según grado de dificultad como los ejercicios que desarrollaron en la primera clase. En la segunda parte, los ejercicios estaban combinados. Para

los tres alumnos fue bastante complicado el desarrollo de las clases pero pudimos culminar la clase cumpliendo en un gran porcentaje el objetivo de la clase, destacando nuevamente que Ximena es la que tiene menos motivación e interés en el desarrollo de las clase y que en esta tercera clase ella no pudo llegar al objetivo, sobre todo por la segunda parte de la guía. El siquiera pensar que los ejercicios eran más complejos la ponía bastante mal.

En la cuarta clase y última se trató de resolver una guía sin ayuda para evaluar lo estudiado. René obtuvo un 70% de corrección de la guía. Cabe destacar que además en las clases tuvo muy buena disposición y mostró responsabilidad en el momento de las tareas asignadas, María José desarrollo el 90% de la guía en forma correcta siendo la que obtuvo mejor resultado y también fue muy responsable tanto en la clase como con las tareas asignadas. En el caso de Ximena solo obtuvo el 50% correcto de la guía. Esta vez, su poca disposición y motivación le jugó en contra por lo que los resultados no fueron los esperados. A pesar de los distintos resultados obtenidos los resultados son bastante buenos y claramente relacionados con la disposición de los alumnos.

4.3. Análisis de los programas de estudio

En el siguiente cuadro se presenta una descripción del programa de estudios que aborda el contenido específico. Las categorías se establecieron de acuerdo al ordenamiento de las características que presenta el programa:

Programa de Estudio Primer año medio Matemática. (Diciembre 2010)

CATEGORÍAS	DESCRIPCIÓN
PRESENTACIÓN DE CONTENIDOS	Sólo menciona las secciones de la unidad sin mostrar el contenido seguido por una serie de observaciones al docente, respecto como se debe abordar la unidad, mostrando que tipo de preguntas se deberían realizar.
UBICACIÓN TEMPORAL DE	La unidad completa está estimada en un total de 70 horas.

CONTENIDOS	
ORIENTACIONES DIDÁCTICAS	<p>Propone una serie de actividades a considerar para lograr un aprendizaje significativo como:</p> <ul style="list-style-type: none"> -Los conceptos Matemáticos: profundidad e integración. -El uso del contexto. -Razonamiento matemático y resolución de problemas. -Uso del error. -Aprendizaje matemático y desarrollo personal. -Tecnologías digitales y aprendizaje matemático. -Clima y motivación.
EJEMPLIFICACIÓN	No, Muestra 3 actividades (sin resolución)
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS	Solo los muestra sin resolución.
EJERCICIOS	Muestra ejercicios modelos para cada sección de la unidad.
APRENDIZAJES ESPERADOS	Muestra un cuadro con los aprendizajes esperados y paralelamente sugerencias de indicadores de evaluación.
DIAGNÓSTICO	No hay.
EVALUACIÓN	Hay una evaluación pero está referida a otra sección no involucra resolución de problemas.
TRABAJO GRUPAL	No solo ejemplifica trabajos individuales.

Programa de Estudio Segundo año medio Matemática (2004).

CATEGORÍAS	DESCRIPCIÓN
PRESENTACIÓN DE CONTENIDOS	Se proponen actividades para el aprendizaje constituidas por: su respectivo objetivo, su ejemplo y las indicaciones al docente para su desarrollo óptimo, marcando las dificultades específicas del ejemplo dando un pauta de lo que se quiere que el estudiante adquiera tras el desarrollo del ejemplo propuesto. Estas actividades poseen problemas con enunciado verbal, ejercicios de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, análisis de las variables, ejercicios de aplicación de conocimientos de ecuación de la recta.
UBICACIÓN TEMPORAL DE CONTENIDOS	Se presenta como la unidad 6 la última del curso; con el nombre de "Sistema de ecuaciones lineales". Proponiendo una duración de 20 a 25 horas. Junto a la unidad 4 "La circunferencia y sus ángulos", son las de menor tiempo estimado.
ORIENTACIONES DIDÁCTICAS	Al comienzo de la unidad, entrega que busca la unidad, cuales son las dificultades comunes y sugerencias para el aprendizaje

	de los contenidos de la unidad.
EJEMPLIFICACIÓN	Se muestran variados ejemplos, según los objetivos de la unidad, pero sin resolución.
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS	Si hay. Se proponen problemas los cuales se deben traducir al lenguaje algebraico en este caso se deben plantear sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Estos se observan en la sección de actividades propuestas para la evaluación.
EJERCICIOS	Si se observan en cantidad abundante.
APRENDIZAJES ESPERADOS	Se da cuenta de los aprendizajes esperados en el comienzo de la unidad, exponiendo lo que se lograra durante la unidad, en 5 puntos.
DIAGNÓSTICO	No existe una propuesta de diagnóstico.
EVALUACIÓN	Actividades propuestas para la evaluación. Con 7 ejemplos y observaciones para considerar en la evaluación.
TRABAJO GRUPAL	No, solamente se observan actividades individuales.

4.4. Análisis de los textos de estudio

Se procede con las mismas categorías utilizadas para el programa de estudios. El siguiente cuadro sintetiza lo observado:

Texto para el estudiante Matemática Primero medio (Ed1)

CATEGORÍAS	DESCRIPCIÓN
PRESENTACIÓN DE CONTENIDOS	<p>Comienza presentando una ecuación con el que se pretende explicar que es una igualdad y una ecuación. Para esto muestra el ejemplo de:</p> <p>La igualdad entre el periodo T de un péndulo con el largo de la cuerda L que lo sostiene y la aceleración de gravedad g.</p> $T^2 = 4\pi^2 \frac{L}{g}$ <p>Para clarificar más el concepto suma, resta y multiplica en ambos miembros cantidades arbitrarias para demostrar que la</p>

	igualdad no cambia, finalmente despeja la variable L aplicando inverso aditivo e inverso multiplicativo a las variables restantes, luego se exponen una serie de ejemplos resueltos para finalizar la sección con una gran variedad de ejercicios. Cabe destacar que cada sección se trata y termina de igual manera y la unidad culmina con una autoevaluación.
UBICACIÓN TEMPORAL DE CONTENIDOS	En la unidad nº 2 Algebra, sección 4 consta de 4 páginas. Aproximadamente utiliza 6 horas.
ORIENTACIONES DIDÁCTICAS	El comenzar la sección con un ejercicio y no con el contenido propiamente tal. Da a conocer el concepto de igualdad mostrando el ejemplo del espejo (si nos miramos vemos lo mismo si nos ponemos un sombrero también)
EJEMPLIFICACIÓN	La sección comienza con ejemplo matemático pero finaliza con 3 problemas con enunciado verbal
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS	Al final de la unidad en la sección “aplicando lo aprendido” se presentan 4 problemas sin solución.
EJERCICIOS	Sí en gran cantidad. Al final de cada sección y al final de la unidad.
APRENDIZAJES ESPERADOS	Al comenzar la unidad muestra un mapa conceptual llamado “Al finalizar esta unidad serás capaz de:”
DIAGNÓSTICO	No existe una propuesta de diagnóstico.
EVALUACIÓN	Al final de la unidad hay una autoevaluación, pero no presenta resolución de problemas con ecuaciones lineales, solo resolución de ecuaciones.
ACTIVIDADES PROPUESTAS	La sección finaliza con una gran variedad de ejercicios y al final de la unidad se presenta una sección denominada Refuerzo de la unidad en la que se exponen ejercicios de todo lo visto.
TRABAJO GRUPAL	No se incentiva el trabajo grupal solo muestra trabajo individual
SOLUCIONARIO	El texto no presenta solucionario ni tampoco alguna sección con las respuestas

Ed1: Matemática, texto para el estudiante. Editorial; Mc Graw Hill, año 2011.

Texto para el estudiante Matemática Segundo medio (Ed2)

CATEGORÍAS	DESCRIPCIÓN
PRESENTACIÓN DE CONTENIDOS	Se parte con una introducción de resolución de sistemas lineales con dos incógnitas Luego en dos páginas se abordan

	<p>algunos conocimientos previos necesarios para la unidad, tras ello se muestra la representación gráfica de un sistema de ecuaciones lineales con 2 ecuaciones y 2 incógnitas.</p> <p>Se presenta 3 métodos de resolución para los sistemas de ecuaciones lineales con 2 incógnitas.</p> <p>Se analiza las soluciones de los sistemas de ecuaciones lineales.</p> <p>Para introducir un contenido. Se da un ejemplo y se presenta su resolución, luego se proponen unos ejercicios de aplicación.</p>
UBICACIÓN TEMPORAL DE CONTENIDOS	<p>Se ubica en la Unidad 1: “Álgebra y funciones”. Específicamente en el capítulo 3: “Sistemas de ecuaciones”. Es el capítulo más corto de la unidad con 18 páginas.</p>
ORIENTACIONES DIDÁCTICAS	<p>En un recuadro al comienzo, se muestra el aprendizaje que se logrará en cada sección.</p> <p>Y otros recuadros “Para saber más”, “Toma nota”, “Para meditar”, los que resaltan algún aspecto importante o frases que inducen a la meditación.</p>
EJEMPLIFICACIÓN	<p>Al principio de cada contenido se entrega un ejemplo, a partir de un enunciado verbal, el cual es resuelto.</p>
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS	<p>En poca cantidad. Dentro de un recuadro llamado “Para entretenerse” al costado de los ejercicios propuestos.</p>
EJERCICIOS	<p>Abundantes. Propuestos. Sin resolver.</p>
APRENDIZAJES ESPERADOS	<p>Se entregan al principio de la unidad. Y se esperan que sean adquiridos.</p>
DIAGNÓSTICO	<p>No hay. Se entregan algunos conocimientos previos para la unidad.</p>
EVALUACIÓN	<p>Con alternativas al final de la unidad.</p>
ACTIVIDADES PROPUESTAS	<p>Al final de la unidad dentro de la sección Taller de profundización, se presenta la manera de resolver sistemas de ecuaciones lineales con 3 incógnitas y algunos ejercicios de aplicación.</p>
TRABAJO GRUPAL	<p>2 actividades propuestas al final del capítulo.</p>
SOLUCIONARIO	<p>Al final del texto de las páginas 235-237</p>

CONCLUSIONES

Al finalizar la presente tesis concluimos, que el cambio de registro en resolución de problemas de planteo, que involucran ecuaciones lineales es un proceso muy complejo, debido a los múltiples factores que intervienen en el momento de resolver problemas de ese tipo; ya sea: el contenido previo, el ambiente, las estrategias, los aspectos afectivos, entre otros.

El dominio de los contenidos es de vital importancia, ya que si no están los conocimientos previos necesarios es imposible poder resolver este tipo de problemas de manera correcta, lo que conlleva que los alumnos bajen sus calificaciones, se frustren, desmotiven y hasta en algunos casos pierdan el interés en la asignatura. Otro factor que no se puede obviar es el interés en la asignatura, esto se observa claramente en el caso de Ximena, a pesar que puede resolver ecuaciones con muy pocos errores, su desmotivación con la asignatura la ha llevado al fracaso en ejercicios más complejos, en este caso, sobre resolución de problemas. La comprensión lectora se vuelve indispensable; si el alumno no tiene comprensión lectora, aunque domine completamente la parte aritmética no será capaz de encontrar la solución.

El trabajo del profesor, en los procesos de enseñanza y aprendizaje, es indispensable para que los alumnos puedan acceder al conocimiento, objetivo que, en algunos momentos, se ve frustrado por el bajo compromiso que algunos profesores muestran en el momento de realizar una clase, ya sea por improvisar, por el poco dominio que poseen en relación con los contenidos o por el incumplimiento de planificaciones en su debido tiempo, por lo que la elaboración de material de apoyo y su uso es fundamental para que los alumnos puedan obtener un aprendizaje real, significativo y no sea solamente una memorización de pasos a seguir que en la gran mayoría de las veces, no saben donde aplicarlos. Esto se pudo observar en María José y René, que a pesar de comprender con pocas dificultades la resolución de ecuaciones lineales, al abordar este contenido en resolución de problemas se veían muy intimidados, en algunos casos la no

comprensión del enunciado, es decir la falta de comprensión lectora, el no relacionar el lenguaje algebraico con el lenguaje natural de manera adecuada, la impulsividad por terminar con anticipación, acciones que cambiaron con muy buenos resultados en la última clase.

Los profesores entrevistados concuerdan que la comprensión lectora es el principal factor que hace que un alumno fracase a la hora de resolver un problema, en segundo lugar hacen alusión a la falta de contenido previo o la mala base matemática en la enseñanza general básica, otros factores que recalcan son: La baja autoestima, poca motivación, falta de destreza, la no presencia de esfuerzo, entre otros. En relación a sus metodologías reconocen no tener la suficiente capacitación, ya sea para entregar estrategias y diversidad de éstas y para la realización de las evaluaciones. También recalcan que los contenidos mínimos obligatorios son de sobre exigencia en los casos de colegios que el nivel académico es de bajo rendimiento.

La guía didáctica que entrega el Ministerio de Educación, los planes y programas, éstos solo hacen referencia al modelo de resolución de problemas de Polya, por lo que no hay diversidad. No utilizan nuevos métodos o estrategias en la resolución de problemas de planteo, destacando que en los textos de estudio la resolución de problemas, en general, siempre está al final de las unidades como lo proponen los planes y programas del Ministerio de Educación. Cabe destacar que dependiendo el colegio es la editorial del texto de estudio que se utiliza, por lo que en algunos casos las unidades se presentan de manera diferente y con menor o mayor importancia.

La resolución de problemas de planteo que involucran ecuaciones lineales, es un tema bastante amplio para ser investigado, son demasiados los estudios que hoy podemos encontrar, por lo que se recomienda seguir este tema, para así poder abordar otras variables que pueden influir en el momento de resolver este tipo de problemas.

RECOMENDACIONES

Esta investigación se puede continuar y completar con las siguientes recomendaciones:

- Extender esta investigación del lenguaje natural al lenguaje gráfico y verificar si presentan las mismas dificultades u otras en el momento de resolver problemas que involucran ecuaciones de primer grado con una y dos incógnitas.
- Realizar esta investigación con un grupo más amplio de estudiantes, para estudiar otras variables que afecten al desarrollo de problemas que involucran ecuaciones lineales con una y dos incógnitas.

BIBLIOGRAFÍA

Alfaro, C. (2006). Las ideas de Pólya en la Resolución de Problemas. Cuadernos de investigación y formación en educación matemática. Escuela de Matemática. Universidad Nacional.

Alonso, Luis Enrique. (1999). "Sujeto y discurso: el lugar de la entrevista abierta en las prácticas de la sociología cualitativa". En Delgado, Juan Manuel y Gutiérrez, Juan, editores. Métodos y Técnicas Cualitativas de Investigación en Ciencias sociales. España: Editorial Síntesis.

Baldor, A. (2009). Álgebra. México: Grupo Editorial Patria..

Barrantes, H. (2006). Resolución de Problemas. El trabajo de Allan Schoenfeld. Cuadernos de investigación y formación en educación matemática. Centro de Investigaciones Matemáticas y Meta-Matemáticas, UCR. Escuela de Ciencias Exactas y Naturales UNED.

Cid, E. (2007). Matemática 2° medio. Edición especial para el Ministerio de educación (2ª edición). Chile: Ediciones Cal y Canto.

*Colaboradores de Wikipedia. Ecuación [en línea]. Wikipedia, La enciclopedia libre. Obtenida con fecha 23 de febrero del 2011, de:
http://es.wikipedia.org/wiki/Ecuaci%C3%B3n#Ecuaci.C3.B3n_Polinomial*

*Colaboradores de Wikipedia. Heurística [en línea]. Wikipedia, La enciclopedia libre. Obtenida con fecha 24 de febrero del 2011, de:
<http://es.wikipedia.org/wiki/Heur%C3%ADstica>*

Coll es (1995) "Un marco de referencia psicológico para la educación escolar: la concepción constructivista del aprendizaje y la enseñanza". *Corrientes Pedagógicas Contemporáneas. Antología Básica*. UPN. México

Domínguez Cuenca, Ángeles (s.f.). *Comprensión de la noción de variable algebraica por estudiantes universitarios*.

Ertmer, Peggy y Newby, Thimoty, (1993). "Conductismo, cognitivism y constructivismo: una comparación de los aspectos críticos desde la perspectiva del diseño de instrucción". *En Performance Improvement Quarterly*, 1993, 6(4), 50-72. Obtenido con fecha 3 de enero de 2012, de:

http://crisiseducativa.files.wordpress.com/2008/03/conductismo_cognitivismo_constructivismo.pdf.

González, J. L. (2009). *Resolución de problemas. Diferentes clases y métodos de resolución. Planificación, gestión de los recursos, representación, interpretación y valoración de los resultados. Estrategias de intervención educativa. Curso CEP Ceuta, UMA. Universidad de Málaga*.

Delgado, J.M. y Gutiérrez, J. (1999) *Métodos y técnicas cualitativas de investigación en Ciencias Sociales*. Editorial Síntesis, 1999. Tercera reimpresión. Madrid, España.

Hernández, Roberto; Fernández, Carlos y Baptista, Pilar (2006). *Metodología de la Investigación (4ª edición)*. México:Mac Graw Hill. P. 8- 9.

Martínez Z., Irene (s.f.). *Inteligencias Múltiples*. Obtenido con fecha 16 de Febrero de 2011, de:

http://sepiensa.org.mx/contenidos/f_inteligen/f_intelimate/matem_1.htm

Milicic, Neva (2001). *Creo en Ti*. Lom Ediciones. 2a edición. Santiago, Chile.

Ministerio de Educación. (2009). *Objetivos fundamentales y contenidos mínimos obligatorios de la Educación Básica y Media. Santiago de Chile, diciembre 2009.*

Ministerio de Educación. (2004). *Matemática. Programa de Estudio, segundo año medio, Formación General. Santiago de Chile, diciembre 2004.*

Ministerio de Educación. (2010). *Matemática. Programa de Estudio primer año medio. Formación General. Santiago de Chile, diciembre 2010.*

Ministerio de Educación. (2007). *Aspectos metodológicos en el aprendizaje del álgebra en secundaria. Serie 2 para docentes de Secundaria, Didáctica de la Matemática Fascículo 2. (1ª edición). Perú.*

Ministerio de Educación. (2006). *Guía para el desarrollo de la capacidad de Solución de Problemas (1ª edición). Perú.*

Nieto, J. H. (2004). *Resolución de problemas matemáticos. Talleres de formación matemática. Maracaibo.*

Olazabal, A. (2005). *Categorías en la traducción del lenguaje natural al algebraico de la matemática en contexto. Tesis de maestría. Instituto Politécnico Nacional Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, México.*

Olfos, R. (2006.). *Lógica de justificación en la resolución de ecuaciones de primer grado. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Chile.*

Ortiz, A., Reyes, C., Valenzuela, M., Chandía, E. (2010). *Matemática 1° año medio. Texto para el estudiante. Edición especial para el Ministerio de Educación (1ª edición). Chile: McGraw-Hill Interamericana.*

Palarea M., (1999), *Revista de didáctica de las matemáticas*, 40, 3-28.

Rodríguez, J. G., Caraballo, A. L., Cruz, T., Hernández, O., (2000). *Razonamiento matemático. Fundamentos y aplicaciones. (2ª edición). México. International Thomson Editores.*

Rodríguez, G., Gil J. García, E. (1999) *Metodología de la investigación cualitativa. Ediciones Aljibe. Segunda edición. Málaga, España.*

Sanjosé, V., Valenzuela, T., Fortes, M. y Solaz-Portolés, J. (2007) *Dificultades algebraicas en la resolución de problemas por transferencia. Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias, Volumen 6, Nº3, 538-561.*

Secretaría de Educación Jalisco, (2005). *Guía de actividades para la preparación del examen de Admisión a las Escuelas Normales. (2ª edición). Guadalajara, Jalisco, México, febrero 2005.*

Silva, C. (2004) *El software educativo en la enseñanza del cálculo. Rechiem. Sociedad Chilena de Educación Matemática. Vol.1, 2004 Chile.*

Silva, C.(2008) *Resolución de problemas en geometría. Universidad de Playa Ancha. Chile.*

Silva, C. (2010) *Didáctica y modelos de enseñanza y aprendizaje de las ciencias y matemáticas. Universidad de Playa Ancha. Chile.*

Socas, M. (1997): "Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria", cap. 5., pp. 125-154, en RICO, L., y otros: *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria. Barcelona: Ed. Horsori.*

Tomás Folch, Marina. (1990). *Los problemas aritméticos de la enseñanza primaria. Estudio de dificultades y propuesta didáctica. Revista Educar 17, p.119-140.*

United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization (UNESCO), (2010). Datos Mundiales de Educación (7ª edición).

Zañartu, M., Darrigrandi, F., & Ramos, M. (2009). GUÍA DIDÁCTICA PARA EL PROFESOR. Chile: Santillana.

ANEXOS

ANEXO 1. ENTREVISTA M1

Cuestionario base para entrevista 1 M1

Años de servicio: 13

Edad: 36

Género: femenino

Experiencia en 1° y 2° Medio: 13

Tipo de establecimiento (experiencia en 1° y 2° medio): particular subvencionado

Preguntas

1. ¿Qué tipo de dificultades en el aprendizaje de las matemáticas observa en estos cursos?

Falta de dominio en contenidos previos, que se supone que se adquieren en la básica, como por ejemplo: operatoria básica en números reales.

2. ¿Reconoce dificultades específicas en la resolución de problemas?

Si, por que no quieren tomarse la molestia de pensar, quieren tener el ejercicio resuelto y no pensar como se resuelve.

3. De manera más específica, ¿hay alguna dificultad particular referida a la **resolución de problemas que involucran ecuaciones lineales de una y dos incógnitas?**

La mayor dificultad la tienen cuando deben representar un problema que aparentemente tiene más de una incógnita, pero en realidad es una sola, por ejemplo “ la mama tiene el doble de la edad de la hija mayor, y a la vez la hija mayor el triple de...”

En relación a este problema en particular:

4. ¿De qué forma los textos de estudio en uso, a su juicio, ayudan u obstaculizan al estudiante para superar esas dificultades?

No ayudan mucho ni tampoco obstaculizan, sino que uno debe recurrir a sus propias guías.

5. ¿Observa alguna dificultad con respecto a esta temática particular relacionada con los programas de estudio?

No, pero si creo que los programas pretenden mucho como “contenidos mínimos”, para la realidad que uno tiene en el liceo y como recibe a los alumnos que vienen de otras escuelas y llegan a primero medio.

6. ¿Podría señalar que dificultades Ud. relacionaría con el desarrollo cognitivo de los estudiantes?

Los alumnos para empezar no tienen hábitos de estudios, la base que traen es deficiente, y además tienen el lema de trabajar con el mínimo esfuerzo.

7. ¿Podría señalar que dificultades Ud. relacionaría con el desarrollo afectivo de los estudiantes?

La mayoría recibe poco apoyo de sus padres, por lo tanto, creen que sus padres están sólo cuando los tienen que retar. No reciben un estímulo de positivo cuando hacen algo bien.

8. En relación al docente ¿reconoce Ud. alguna dificultad relacionada con la metodología de enseñanza?

Falta de mayor contextualización con la realidad de tienen hoy los alumnos en algunos contenidos, carencia de cursos en distintos tipos de evaluación.

9. En relación al contexto ¿reconoce Ud. dificultades relacionadas con el ambiente social y cultural del estudiante?

Creo que las dificultades de aprendizaje siempre se han manifestado con mayor intensidad en estratos bajos, que es el tipo de alumnos que tenemos en el liceo que trabajo.

10. ¿Qué agregaría en relación a esta problemática?

Que siempre todo cambio, debe realizarse de la básica o la pre-básica, para que el alumno al encontrarse con la realidad de la media no sea tan brusco el cambio.

ANEXO 2. ENTREVISTA H1

Entrevista 2. H1

El entrevistado solo devolvió las respuestas.

- 1.- las propias de los alumnos con problemas de aprendizaje.
- 2.- las relativas a comprensión lectora o de dislexia.
- 3.- la que se refiere al procedimiento o aplicación de algún método de resolución.
- 4.- obtaculizan en el sentido que no presentan un procedimiento detallado de la resolución.
- 5.- no, los programas de estudio consideran los aprendizajes de contenidos mínimos.
- 6.- alumnos con problemas de aprendizaje.
- 7.- alumnos con problemas de autoestima baja.
- 8.- las referidas a que consideren las conductas de entrada.
- 9.- escasa motivación o perspectivas de estudios superiores.
- 10.- potenciar las habilidades y destrezas del alumno.

ANEXO 3. ENTREVISTA H2

Cuestionario base para entrevista H2

Años de servicio: 14

Edad: 38

Género: Masculino

Experiencia en 1° y 2° Medio: 10

Tipo de establecimiento (experiencia en 1° y 2° medio): Liceo Municipal y Particular Subvencionado

Preguntas

1. ¿Qué tipo de dificultades en el aprendizaje de las matemáticas observa en estos cursos?

Complejidades referentes al traspaso de la aritmética al álgebra. De la costumbre de sólo trabajar con las cuatro operaciones básicas, a símbolos abstractos como las variables.

2. ¿Reconoce dificultades específicas en la resolución de problemas?

Si en la comprensión de los enunciados, fundamentalmente en el proceso de modelizar matemáticamente el problema. Por ejemplo “solo saben trabajar con un método de resolución porque está dentro del contrato didáctico”, me refiero que si estamos trabajando con probabilidades saben que ocuparan la fórmula de Bayes de casos favorables entre casos totales, etc.

3. De manera más específica, ¿hay alguna dificultad particular referida a la **resolución de problemas que involucran ecuaciones lineales de una y dos incógnitas?**

Si sobre todo hay dificultad cuando son variables dependientes, o que no saben que ciertas palabras como por ejemplo aumenta inmediatamente tienen un significado en la simbología matemática a desarrollar.

En relación a este problema en particular:

4. ¿De qué forma los textos de estudio en uso, a su juicio, ayudan u obstaculizan al estudiante para superar esas dificultades?

A mi juicio los textos de estudio no profundizan por ejemplo la parte formal de las matemáticas, en cuanto a su buen dominio en el lenguaje formal

5. ¿Observa alguna dificultad con respecto a esta temática particular relacionada con los programas de estudio?

Si en los programas no se trata a la resolución de problemas como el eje central de las unidades, siendo esta una posibilidad para saber que domina el estudiante y en que le hace falta profundizar, además la resolución de problemas es una buena oportunidad en matemáticas para hacer trabajar grupalmente al curso.

6. ¿Podría señalar que dificultades Ud. relacionaría con el desarrollo cognitivo de los estudiantes?

Principalmente las dificultades de representación de los enunciados o datos de este, en el álgebra matemática. No se conciben como llegar de una frase o palabra a una expresión algebraica.

7. ¿Podría señalar que dificultades Ud. relacionaría con el desarrollo afectivo de los estudiantes?

Los estudiantes repiten con mucha frecuencia que ellos son negados para la matemática, incluso cuando se les pregunta alguna cosa te responden de inmediato “profe yo con las matemáticas no puedo soy negado”

8. En relación al docente ¿reconoce Ud. alguna dificultad relacionada con la metodología de enseñanza?

Si pienso que en el nivel de Enseñanza Básica debería haber profesores especialistas en matemática. De forma que ya en primero medio vengan con algunas habilidades y destrezas básicas para el desarrollo de las matemáticas.

9. En relación al contexto ¿reconoce Ud. dificultades relacionadas con el ambiente social y cultural del estudiante?

De todas maneras, están los estudiantes constantemente preguntando “profe para que me sirve esto si yo no voy a ir a la universidad”, por lo mismo constantemente hay que estar motivándolos.

10. ¿Qué agregaría en relación a esta problemática?

Creo que la resolución de problemas debe ser una de las experiencias más difíciles que afronta el estudiante durante su etapa escolar, se nota el miedo

que tienen los menos aventajados cuando se les pide resolver un problema, por lo general ni siquiera lo intentan. Por lo mismo para no generar una desmotivación ante un problema que parece que solo el docente puede dar la solución, se trabaja mucho con problemas parecidos entre sí para que por lo menos adquieran un plan a seguir con estos problemas.

ANEXO 4. ENTREVISTA M2

Cuestionario base para entrevista M2

Años de servicio: 3 años

Edad: 31 años

Género: Femenino

Experiencia en 1° y 2° Medio: 2 años

Tipo de establecimiento (experiencia en 1° y 2° medio): Liceos Municipales con alumnos en riesgo social.

1. ¿Qué tipo de dificultades en el aprendizaje de las matemáticas observa en estos cursos?

Muchos de los alumnos no son capaces de relacionar conceptos de la vida diaria con lenguaje matemático.

No intentan solucionar o simplificar las dificultades de un ejercicio.

2. ¿Reconoce dificultades específicas en la resolución de problemas?

Comprensión lectora. No recurren a los conocimientos propios para resolver problemas.

3. De manera más específica, ¿hay alguna dificultad particular referida a la **resolución de problemas que involucran ecuaciones lineales de una y dos incógnitas?**

No asimilan el concepto de igualdad y de inversos.

4. En relación a este problema en particular: ¿De qué forma los textos de estudio en uso, a su juicio, ayudan u obstaculizan al estudiante para superar esas dificultades?

Con el intento de acercar los conceptos matemáticos a la vida diaria, muchas veces están dejando de lado los conceptos puros.

5. ¿Observa alguna dificultad con respecto a esta temática particular relacionada con los programas de estudio?

6. ¿Podría señalar que dificultades Ud. relacionaría con el desarrollo cognitivo de los estudiantes?

7. ¿Podría señalar que dificultades Ud. relacionaría con el desarrollo afectivo de los estudiantes?

8. En relación al docente ¿reconoce Ud. alguna dificultad Ud. relacionada con la metodología de enseñanza?

9. En relación al contexto ¿reconoce Ud. dificultades relacionadas con el ambiente social y cultural del estudiante?

10. ¿Qué agregaría en relación a esta problemática?