Universidad de Valparaíso
CHILE

Facultad de Ciencias
Instituto de Estadística
Ingeniería en Estadística

Análisis de periodicidades en curvas de luz de estrellas con análisis wavelet. Uso de Weighted Wavelet Z-Transform

Ignacio Javier Agustín Ogalde Muñoz
21 de enero de 2024

Profesor Guía
Dra. Alejandra Christen.
Instituto de Estadística, Universidad de Valparaíso

Profesor Co-Guía
Mag. Gunther Felipe Avila.
Instituto de Estadística, Universidad de Valparaíso

Proyecto de titulación para optar al:

grado académico de: *Licenciado en Estadística*
título profesional de: *Ingeniero en Estadística*
minor en: *Modelización Estadística*

Resumen

En este trabajo se compara el desempeño de dos métodos de detección de periodos en series de tiempo: el análisis de Fourier, utilizando el periodograma para series con datos faltantes de Lomb-Scargle y el análisis wavelet, utilizando la modificación propuesta por Fóster (1996) llamada transformada Wavelet Z ponderada (WWZ), aplicado a curvas de luz de estrellas. El análisis de Fourier es un método clásico para la detección de periodicidades en astronomia, pero hay pocos estudios que analizan su desempeño en cuvas de luz de periodo conocido. El análisis wavelet clásico solo puede aplicarse a datos equidistantes en el tiempo, en cambio la transformada Wavelet Z ponderada (WWZ) es un método más reciente que puede aplicarse a datos con muestreo irregular, pero sus resultados pueden ser menos robustos que los del análisis de Fourier. Se realizó un estudio de simulación numérica basado en un diseño de experimento factorial para evaluar el desempeño de ambos métodos en la detección de periodos en curvas de luz de estrellas. Los resultados mostraron que ambos métodos son fiables para la detección de períodos, pero tienen sus propias fortalezas y debilidades que se exponen en este trabajo.

Algunas Palabras

En primer lugar, quiero agradecer a mi Profesora guía de la tesis, Dra. Alejandra Christen, por su orientación y apoyo inestimables. Su paciencia, aliento y comentarios constructivos fueron fundamentales para el éxito de este proyecto.

También quiero agradecer a los siguientes personas mi profesor co-guía, Mag. Gunther Felipe Avila, por su apoyo y colaboración invaluable. Y a la Licenciada Aldana Alberici y a la Dra. Lydia Cidale por su apoyo y colaboración.

Estoy muy agradecido con los profesores y profesoras del Instituto de Ingeniería en Estadística por su apoyo y enseñanzas a través de los años de estudio de la carreara.

Finalmente, quiero agradecer a mi familia y amigos por su amor y apoyo incondicional.

Índice general

Resumen **2**

Algunas Palabras **3**

1. Introducción **6**
1.1. Problemática . . . 7
1.2. Pregunta de investigación . . . 7
1.3. Hipótesis . . . 7
1.4. Objetivos . . . 7
1.4.1. Objetivo general . . . 7
1.4.2. Objetivos específicos . . . 8
1.5. Estado del arte . . . 8

2. Fundamentación teórica **12**
2.1. Teoría wavelet . . . 12
2.2. Familia Wavelet . . . 14
2.3. Periodograma de Lomb-Scargle . . . 18
2.4. Relación entre las escalas de wavelet y las frecuencias de Fourier . . . 18
2.5. Diseño factorial 2^k . . . 19

3. Estudio de simulación **22**
3.1. Descripción del diseño . . . 22
3.1.1. Curvas de luz sintéticas . . . 22
3.1.2. Variables en el estudio . . . 23

4. Resultados de la comparación **27**
4.1. Software y paquete utilizado . . . 27
4.2. Análisis de resultados . . . 27
4.2.1. Detección global de cada frecuencia-período . . . 27
4.3. Análisis de Varianza (ANOVA) . . . 31

A. Códigos **37**
A.0.1. Código de cómo hacer el análisis de WWZ y sus respectivos gráficos. En Python 37
A.0.2. Código de cómo hacer el análisis de Lomb-Scargle y sus respectivos gráficos. En Python . . . 41
A.0.3. El ANOVA para las proporciones de los resultados de los dos métodos(LS y WWZ). En R . . . 43

B. Tablas & Gráficos **46**

Referencias **83**

Capítulo 1

Introducción

Las curvas de luz de estrellas son series de tiempo que cuantifican el brillo de una estrella por un período determinado. En general es difícil obtener mediciones equidistantes en tiempo, por lo que su muestreo es irregular, es decir, con gran cantidad de datos faltantes. Uno de los principales análisis que se hace de estas observaciones es la detección de períodos en la serie de tiempo. Entre los métodos para obtener los períodos podemos mencionar el análisis de Fourier, el análisis wavelet y la minimización de la dispersión de fase (PDM, en inglés *Phase Dispersion Minimization*), entre otros. El análisis de Fourier utiliza periodogramas clásicos o el periodograma de Lomb-Scargle (Lomb (1976) y Scargle (1982)) , el ultimo para datos no equidistantes. En el caso del análisis wavelet se utilizan escalogramas y su gráfico de potencia promedio. La versión para datos irregulares se llama transformada Wavelet Z ponderada (Fóster (1996), WWZ, *the weighted wavelet Z-transform* en inglés). En este proyecto se espera comparar el desempeño de la transformada Wavelet Z ponderada (WWZ) con el periodograma de Lomb-Scargle en la detección de periodicidades en curvas de luz de estrellas (objetivo general). Para lograr este objetivo se realizará un estudio de simulación basado en un experimento factorial que contemple las principales fuentes de variación entre los sistemas binarios de estrellas. Estas son: presencia/ausencia de fenómeno de batido, presencia/ausencia de efecto de corrimiento de luz, relación del periodo de la pulsación con el periodo orbital, cantidad de pulsaciones (1 o 2), presencia/ausencia periodos cuasi-regulares y magnitud de la amplitud. Se espera determinar ventajas y desventajas de cada una de las metodologías para detectar periodos en curvas de luz de estrellas binarias.

1.1. Problemática

Plantear la problemática, como en la presentación de avances: En astronomía interesa clasificar objetos estelares, en particular estrellas masivas en sistemas binarios. Para lograrlo los astrónomos buscan detectar los períodos en una serie de tiempo o curva de luz que muestra la luminosidad observada de una estrella en un período de tiempo. Usualmente métodos basados en el análisis de Fourier o wavelet son ampliamente utilizados para detectar períodos. Debido a nubosidad u otras variables climáticas, entre otras, las mediciones no son equidistantes en el tiempo. Esto conduce a obtener series de tiempo con muchos datos faltantes y gaps. Debido a ello las metodologías habituales deben ser corregidas o modificadas para poder ser utilizadas en presencia de datos faltantes. En este trabajo detección de periodos en serie de tiempo, lo que nos permite caracterizar curvas de luz. Estos patrones, representados por sus periodos, pueden estar relacionados con fenómenos físicos de interés, como la presencia de sistemas binarios, pulsaciones u otros. Además, se analizará la potencialidad del análisis de la transformada Wavelet Z ponderada (WWZ, *the weighted wavelet Z-transform* en inglés) para la detección de periodicidades en curvas de luz con muestreo irregular (no equidistantes) y se comparará su desempeño con el del análisis de Fourier, en particular, con el periodograma de Lomb-Scargle.

1.2. Pregunta de investigación

El análisis wavelet se puede utilizar en series de tiempo para detectar periodos, pero solo cuando los datos son equidistantes en tiempo. Debido a esto, Fóster (1996) propuso una modificación del análisis wavelet, la transformada WWZ, que permite analizar datos con muestreo irregular, que llegó a competir con el periodograma de Lomb-Scargle que está basado en el análisis de Fourier. Surge así **la pregunta de investigación** da cuenta a este proyecto: ¿Se obtienen resultados similares con el análisis de Fourier (Lomb-Scargle) y el análisis wavelet (WWZ, *the weighted wavelet Z-transform*), en la búsqueda de periodicidades en datos no equidistantes?

1.3. Hipótesis

La hipótesis que da respuesta a la pregunta de investigación es la siguiente:

- La transformada wavelet Z ponderada da un resultado semejante al peridograma de Lomb-Scagle.

1.4. Objetivos

A continuación se presentan los objetivos de la investigación.

1.4.1. Objetivo general

Comparar el desempeño de la transformada Wavelet Z ponderada (WWZ, *the weighted wavelet Z-transform*) con el análisis de Fourier en la detección de periodicidades en curva de luz de estrellas, para determinar cuál es más eficiente.

1.4.2. Objetivos específicos

1. Cuantificar el desempeño de la WWZ en la detección de periodicidades a través de simulaciones numéricas para determinar sus fortalezas y debilidades.

2. Cuantificar el desempeño del periodograma de Lomb-Scargle en la detección de periodicidades a través de simulaciones numéricas para determinar sus fortalezas y debilidades.

1.5. Estado del arte

En el artículo de Fóster (1996), las series de tiempo son una herramienta estadística importante para modelar y entender datos que cambian con el tiempo. De acuerdo con el autor, una limitación común en el análisis de series de tiempo es que a menudo los datos se muestrean de manera irregular en el tiempo, lo que puede hacer que los métodos tradicionales, como el análisis de Fourier, sean inadecuados para analizar estos datos. Para abordar este problema, Fóster propone el uso de wavelets para el análisis de series de tiempo irregulares (no equidistantes). Las wavelets son una herramienta matemática poderosa que pueden detectar y localizar características de diferentes escalas en una señal, lo que las hace útiles para el análisis de señales no estacionarias. El autor realiza una simulación numérica para mostrar la eficacia de la transformada wavelet en el análisis de señales sinusoidales con diferentes niveles de ruido. La simulación también incluye una prueba de ruido blanco para evaluar la significancia estadística de los picos observados en las transformadas wavelets. Para la prueba de ruido blanco, se generan datos aleatorios con la misma longitud y nivel de ruido que los datos de la señal sinusoidal. Luego, aplica la misma transformada wavelet a los datos aleatorios y calcula el umbral de significancia para la transformada wavelet a partir de la distribución estadística de los coeficientes de la transformada wavelet de los datos aleatorios. De acuerdo con el autor, la transformada Z de wavelet ponderada (WWZ), es menos sensible al número efectivo de datos que la transformada wavelet convencional (WWT). Sin embargo, advierte que el uso de este estadístico requiere precaución ya que su comportamiento se deriva de una proyección en la que los pesos estadísticos son inversamente proporcionales a las varianzas de los datos, lo que puede no ser conveniente en todos los casos de análisis. Foster utilizó curvas de luz de estrellas variables periódicas, como variables cefeidas, estrellas RR Lyrae y estrellas variables cataclísmicas. Estas estrellas muestran variaciones regulares en su brillo a lo largo del tiempo y muestra que la WWZ es efectiva para eliminar picos espurios en datos de prueba y proporciona una concordancia asombrosa con el período real de la señal en cuestión. Además, se indica que la WWZ es una mejora significativa en la WWT para una relación señal/ruido moderado.

Torrence y Compo (1998) presentan los conceptos básicos de la teoría de wavelets y su relación con el análisis de Fourier. Luego, describen en detalle el procedimiento paso a paso para realizar un análisis wavelets y la realización de la transformada wavelet. Exploran diferentes aplicaciones del análisis wavelets en meteorología, como el análisis de patrones climáticos, la detección de eventos extremos, la identificación de oscilaciones atmosféricas y la caracterización de la variabilidad en diferentes escalas de tiempo y espacio. También discuten las ventajas y limitaciones de la transformada wavelet continua (CWT), proporciona una representación tiempo frecuencia de serie temporal, lo que significa que se pueden identificar patrones tanto en el dominio del tiempo como en el de la frecuencia. Esto contrasta con la transformada de Fourier, que brinda información sobre la frecuencia, pero carece de resolución en el tiempo. Proporcionan ejemplos concretos y casos de estudio para ilustrar la aplicación del análisis wavelets en meteorología. Además, se abordan aspectos prácticos como la capacidad de la CWT para analizar la serie temporal en términos de la

localización precisa de eventos en el tiempo y la identificación de las frecuencias asociadas con esos eventos, la interpretación de los resultados y la consideración de posibles ruido en los datos.

Thiebaut y Roques (2005) explican que las series temporales astronómicas se obtienen mediante la observación de un objeto celeste durante un período de tiempo determinado y que pueden ser irregulares debido a varios factores como la falta de observaciones, el clima o las condiciones atmosféricas. El autor proporciona una revisión de los métodos disponibles para el análisis de series de tiempo irregulares en astronomía y presenta dos enfoques para el análisis de series temporales astronómicas muestreadas irregularmente que son el remuestreo y la aproximación. El autor utiliza la transformada Wavelet Z ponderada (WWZ). La importancia del análisis de series de tiempo en astronomía y cómo puede ayudar a descubrir patrones y fenómenos no son evidentes en una sola observación. Además, menciona que la capacidad de analizar series de tiempo irregulares es cada vez más importante debido al aumento en la cantidad de datos astronómicos que se están generando a medida que avanzan las tecnologías de observación. La técnica del análisis wavelets puede ser útil para analizar series de tiempo astronómicas irregulares, como las mediciones de la luminosidad de las estrellas variables. Los autores presentan un ejemplo de una estrella variable Cefeida, para la cual la técnica de wavelets muestra una mejor resolución en frecuencia que la técnica del espectro de periodo. Comparan ambas metodologías en varios ejemplos de aplicación. Utilizan tres series de tiempo diferentes, cada una con sus propias características y desafíos, para demostrar la eficacia de la técnica del análisis wavelets: una serie de tiempo con variaciones irregulares y eventos transitorios, una serie de tiempo con una señal periódica débil y una serie de tiempo con una señal periódica fuerte.

El artículo de De Lira y cols. (2019) ilustra cómo las observaciones de las misiones espaciales Kepler y CoRoT están cambiando nuestra comprensión de la variabilidad estelar y su relación con la rotación de las estrellas. También discuten cómo la rotación estelar es una limitación importante en el estudio de la evolución del momento angular en las estrellas, así como en el transporte de este momento desde el núcleo hasta la superficie y la envoltura en expansión. Se menciona la normalidad de la rotación del Sol en comparación con las estrellas de la secuencia principal y la presencia de una distribución bimodal en los períodos de rotación de estas estrellas. Se destaca la importancia de estudiar la rotación en enanas blancas, que son vestigios de la física de las estrellas. Se describe el uso de la transformada wavelet continua (CWT) como una herramienta para analizar señales no estacionarias, con detalles sobre la wavelet Morlet de sexto orden utilizada. Donde para cada curva de luz seleccionada de la misión Kepler proporciona curvas de luz en 18 ejecuciones (o cuartos) en dos formatos: datos de fotometría de apertura simple (SAP) y datos procesados sin efectos instrumentales (PDC). Los autores eligieron 14 enanas blancas (WD) con series de luz de cadencia larga (30 minutos) y corta (1 minuto) del archivo de datos de Kepler. El umbral para detectar la periodicidad varía según la estrella, dependiendo de su brillo, el número de trimestres de observaciones y la limpieza de las curvas de luz y de la longitud mínima del intervalo de tiempo entre observaciones. Los autores realizaron un tratamiento adicional que incluyó la eliminación de valores atípicos y correcciones de tendencias instrumentales en las series de luz de PDC para evitar distorsiones en los mapas espectrales de ondas y cambios en los espectros de potencia. Utilizaron el análisis wavelets, específicamente para analizar las curvas de luz. Observaron diferentes periodicidades en una estrella enana blanca (WD) denominada KIC 11514682, una estrella variable inicialmente clasificada como WD, KIC 6862653, se reveló como una subenana rica en carbono dominada por helio. Destacan casos de modulación de rotación en estrellas con temperaturas efectivas más altas, donde la variabilidad se asocia a puntos magnéticos fríos. El procedimiento wavelet

permitió identificar variabilidades a corto plazo que eran difíciles de detectar mediante inspección visual de los datos. Estas variabilidades a corto plazo se caracterizan por su persistencia a lo largo del tiempo, a pesar de su baja amplitud. La periodicidad de 5 días en una de las estrellas WD (KIC 8682822) se considera menos confiable debido a su aparición limitada en el tiempo. Se resalta que el enfoque wavelet ofrece la capacidad de mapear características a corto y largo plazo.

Bravo, Roque, Estrela, Leão, y De Medeiros (2014), argumentan que las curvas de luz estelares registran las diferenciaciones en el brillo de las estrellas a lo largo del tiempo y contienen información valiosa sobre los procesos físicos que ocurren en las estrellas, como su rotación, actividad magnética y pulsaciones. Sin embargo, analizar y extraer información significativa de estas curvas de luz puede ser un desafío debido a la complejidad de las señales estelares y la presencia de ruido. La transformada wavelet resulta especialmente útil para identificar pulsaciones estelares, rotaciones diferenciales y variabilidad debida a la actividad magnética. Además, discuten la importancia de la escala y la resolución en el análisis de las señales estelares y proporcionan ejemplos concretos de su aplicación en estudios curvas de luz de la base COROT que tiene datos con cadencia corta y comparan los resultados que obtienen con publicaciones en la literatura.

El artículo de Polanco Martínez (2022) comienza explicando que el análisis wavelet es una técnica matemática utilizada para analizar señales que cambian en el tiempo, como las señales de audio e imágenes. El autor analizan curvas de luz de la base COROT que tienen datos muestreados con cadencia corta y comparan los resultados que obtienen con publicaciones en la literatura. El autor destaca que el análisis wavelet se puede realizar en diferentes escalas y niveles de detalle. La técnica se puede aplicar en diferentes áreas, como la compresión de datos, la detección de bordes en imágenes, la identificación de patrones en señales biomédicas, entre otras. También explica que el análisis wavelet se utiliza en diferentes campos, como la ingeniería, la física, la biología y la medicina. El escalograma obtenido con el análisis wavelet tiene ventajas sobre otras técnicas de análisis espectral, como el periodograma obtenido con la transformada de Fourier.

En el artículo de Alberici, Avila, Christen, y Cidale (2023), se abordan varios aspectos relacionados con el estudio de estrellas masivas en sistemas binarios y su detección de periodicidades en las curvas de luz. De acuerdo a los autores, las estrellas masivas pulsan en patrones regulares o cuasirregulares, lo que se manifiesta en variaciones fotométricas y cambios en los espectros estelares. Esto puede dificultar la detección de periodicidades en estrellas pulsantes que son parte de sistemas binarios debido al efecto del tiempo de luz y el cambio Doppler periódico. Utilizan un enfoque llamado periodograma, con énfasis en el periodograma de Lomb-Scargle para datos muestreados de manera irregular. Y mencionan que el análisis wavelet es una alternativa al análisis de Fourier para buscar períodos locales en una ventana de tiempo determinada, lo que proporciona resolución tanto en frecuencia como en tiempo. Utilizan un diseño factorial fraccionario potencia de 2 para identificar qué factores influyen en un proceso o fenómeno. Se describen seis variables del diseño, que incluyen la presencia o ausencia de fenómenos como el latido, variaciones en el período de pulsación, amplitud de pulsación, número de períodos de pulsación, efecto del tiempo de luz y pulsaciones cuasi regulares que son las mismas que se utilizan para la simulación en esta tesis. Dado que hay seis variables, cada una con dos niveles, se consideran 64 modelos en total. Sin embargo, debido a la optimización del diseño, se analizan solo 32 modelos lo que da como resultado un diseño factorial fraccionario 2^{6-1}. Se presenta dos herramientas de software utilizadas en el análisis de datos. La primera es "Period04", un programa que utiliza la Transformada Discreta de Fourier (DFT) para extraer frecuencias individuales de series temporales astronómicas. La segun-

da es "WaveletComp", un paquete R basado en la familia de wavelets de Morlet, que permite el análisis continuo de series de tiempo y proporciona información sobre la amplitud local y la fase instantánea de procesos periódicos a lo largo del tiempo. En conclusión se destaca que, aunque ambos métodos detectaron el período orbital y sus armónicos en la mayoría de los modelos, el método de Fourier proporcionó una detección de períodos más precisa, mientras que el análisis de wavelets lo encontró en más ocasiones. Sin embargo, el análisis de wavelets tendió a proporcionar valores de período ligeramente más bajos o con corrimiento de período de aproximadamente 0,06 días en todos los modelos, los autores atribuyen a la resolución espectral limitada de este método. Analizan la influencia significativa de la amplitud de la pulsación en la detección de períodos, con resultados más satisfactorios en el análisis wavelet para pulsaciones con grandes amplitudes y en el análisis de Fourier para pulsaciones con bajas amplitudes. Como recomendación, se sugiere utilizar al menos dos herramientas de diagnóstico para realizar un análisis detallado de datos de series temporales y considerar un segundo criterio para verificar la precisión de los períodos encontrados. Además, se menciona la posibilidad de evaluar otras herramientas basadas en wavelets que puedan ofrecer una mejor resolución en la búsqueda de períodos.

Esta tesis se organiza como sigue: en el capítulo 2 se introducen los principales conceptos y propiedades de las metodologías a utilizar: el análisis de Fourier y el análsis wavelet. Además se introducen los diseños de experimentos factoriales potencias de 2 que serán utilizados para la simulación numérica. En el capítulo 3 se desarrolla un estudio de simulación para poder comparar la eficiencia en la detección de periodos de ambas metodologías En el capítulo 4 finalmente se presentan los resultados y la tesis termina con las conclusiones del trabajo.

Capítulo 2

Fundamentación teórica

En este apartado se describen las principales características y propiedades de las 2 metodologías a utilizar durante el transcurso de esta tesis. Estas dos metodologías son la transformada Wavelet Z ponderada (WWZ) y el Periodograma de Lomb-Scargle.

2.1. Teoría wavelet

En la teoría del análisis wavelet (Misiti, Misiti, Oppenheim, y Poggi, 2007), se utilizan funciones llamadas wavelets, que cumplen ciertas propiedades matemáticas. Estas funciones están relacionadas con la transformada de Fourier y se denominan wavelets admisibles. Al discretizar las wavelets, se construyen átomos básicos que representan diferentes escalas y desplazamientos de una función original. Estos átomos básicos se utilizan para descomponer y reconstruir una señal en términos de sus coeficientes wavelet.

La teoría de las wavelets se basa en el concepto de describir el comportamiento local de las señales en diferentes escalas de tiempo. Al discretizar el tiempo y las escalas, nos centramos en las bases wavelet ortonormales, lo que nos permite:

- Complementar el análisis de las irregularidades con el de las aproximaciones locales.
- Organizar las wavelets por escala, desde las más finas hasta las más gruesas.
- Definir algoritmos rápidos con una complejidad lineal.

Sea $L^1(\mathbb{R})$ o L^1 el espacio de funciones integrables sobre los reales y $L^2(\mathbb{R})$ o L^2 el espacio integrable de funciones cuadradas de energía finita sobre los reales, con normas definidas por $\int_{\mathbb{R}} |s(t)|dt$ para s $\in L^1$ y $(\int_{\mathbb{R}} |s(t)|^2 dt)^{(1/2)}$ para $\in L^2$, donde la última se denomina energía de la señal s.

Sea $\hat{\psi}(\omega)$ la transformada de Fourier:

$$\hat{\psi}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} \psi(t) e^{-2i\pi\omega t} dt. \tag{2.1}$$

La función $\psi \in L^1 \cap L^2$ se llama wavelet o wavelet madre si cumple la condición de admisibilidad en el dominio de la frecuencia:

$$\int_{\mathbb{R}^+} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega = \int_{\mathbb{R}^-} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < +\infty, \tag{2.2}$$

donde $\hat{\psi}$ conforma a la transformada de Fourier de ψ. Esto conlleva en particular a que la wavelet utilizada tenga integral igual a 0.

Para probar de manera simple la condición de admisibilidad se considera que, para una wavelet ψ perteneciente a los reales, se tiene que verificar que:

$$\psi \in L^1 \cap L^2, t\psi \in L^1 \text{ y } \int_{\mathbb{R}} \psi(t)dt = 0. \tag{2.3}$$

A partir de una función ψ utilizando los componentes de dilatación, a, y traslación, b, se puede construir una familia de funciones que se denominan átomos básicos:

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad a \in \mathbb{R}^+, b \in \mathbb{R}. \tag{2.4}$$

Para una función f de energía finita, se obtiene la transformada wavelet continua C_f de la función $\psi_{a,b}$ por:

$$C_f(a,b) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{\psi_{a,b}(t)}dt \quad a \in \mathbb{R}^+ \quad y \quad b \in \mathbb{R}. \tag{2.5}$$

Realizar cálculos con la función C_f es lo mismo que hacer análisis en f con la transformada wavelet ψ. Por ende, la función f es posible describirla a través de los coeficientes de la transformada wavelet continua $C_f(a,b)$. Estos coeficientes son utilizados para medir las fluctuaciones de f en su escala a. Esto hace posible que el análisis wavelet realice un análisis local de la función f, además del comportamiento de los efectos de escala entre el $C_f(a,b)$ y distintos valores de a. Si por ejemplo suponemos que la función wavelet ψ es cero en el exterior del intervalo $[-Z,+Z]$, entonces $\psi_{(a,b)}$ va a ser cero en el exterior del intervalo $[-aZ+b,+aZ+b]$. Por consiguiente, el valor obtenido por $C_f(a,b)$ va a depender del valor de f en la vecindad que está ubicado b con la longitud que posea a.

Con respecto a esto, las wavelet poseen ciertas diferencias con el análisis de Fourier. El valor que posea la transformada de Fourier $\hat{f}(\omega)$ de f en un punto ω va a depender de los valores que tome f en todo el conjunto $\mathbb{R}$. Por contraparte, los valores grandes que tome $C_f(a,b)$ van a entregar información a la irregularidad local de f en el entorno de la posición b y en la escala de a. En síntesis, el análisis wavelet es considerado el análisis de las fluctuaciones que posea la función f en todas las escalas designadas.

Si solamente se requiere utilizar ciertas partes de la función, entonces el uso de un subconjunto discreto es lo indicado. Por ejemplo, si se tiene un subconjunto discreto de $\mathbb{R}^+$, o $\mathbb{R}$, se dejan fijos a $a_0 > 1, b_0 > 0$ y luego se toma a $a \in \left\{a_0^h\right\}_{h\in\mathbb{Z}}$ y $b \in \left\{qa_0^h b_0\right\}_{(h,q)\in\mathbb{Z}^2}$ en la eq. (2.4).

Para la transformada wavelet discreta se usará la familia wavelet indexada en $\mathbb{Z}$:

$$\psi_{h,q}(t) = a_0^{\frac{-h}{2}}\psi\left(a_0^{-h}t - qb_0\right) \quad a_0 > 1 \quad y \quad b_0 > 0 \quad y \quad h,q \in \mathbb{Z}.$$

Por lo tanto, para $f \in L^2$ se define la transformada wavelet discreta como:

$$C_f(h,q) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{\psi_{h,q}(t)}dt = (f,\psi_{h,q})_{L^2} \quad (h,q) \in \mathbb{Z}^2.$$

Los valores de a y de b respectivamente se presentan en la forma:

$$a = 2^j, b = r2^j \text{ o } b = ra \quad \text{para } (j,r) \in \mathbb{Z}^2.$$

Para el presente caso y para wavelets que corroboran propiedades más poderosas que la admisibilidad, como lo es el caso ortogonal, se determinan nuevas componentes para estudiar una señal a través de una función o wavelet padre φ vinculada con ψ y la función ψ se dilata y traslada por toda la señal. En resumen, la función escala representada por φ es utilizada para establecer las aproximaciones locales y la función ψ se utiliza para denotar las fluctuaciones alrededor de las aproximaciones locales como se define a continuación:

$$\psi_{j,r}(y) = 2^{\frac{-j}{2}} \psi\left(2^{-j}y - r\right), \quad \text{para } (j,r) \in \mathbb{Z}^2, \tag{2.6}$$

$$\varphi_{j,r}(y) = 2^{\frac{-j}{2}} \varphi\left(2^{-j}y - r\right), \quad \text{para} \quad (j,r) \in \mathbb{Z}^2. \tag{2.7}$$

Los coeficientes wavelet de una señal, $s(t)$, están definidos por

$$\alpha_{j,r} = \int_{\mathbb{R}} s(t)\psi_{j,r}(t)dt, \tag{2.8}$$

y, cumpliendo ciertas propiedades, los coeficientes obtenidos pueden reconstruir la señal de la siguiente manera:

$$s(t) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{r\in\mathbb{Z}} \alpha_{j,r}\psi_{j,r}(t), \tag{2.9}$$

dada la existencia de una función ψ tal que la familia de funciones $\{\psi_{j,r}\}_{(j,r)\in\mathbb{Z}^2}$ está estrechamente relacionado con el concepto de resolución múltiple. En este sentido, se pueden seleccionar wavelets adecuadas para capturar las características particulares de una señal. En el procesamiento de wavelets, existen dos enfoques principales: la transformada wavelet continua (TWC) y la transformada wavelet discreta (TWD). La elección entre ellas depende de la aplicación y los objetivos deseados. Si la redundancia es útil para el análisis de la señal, se recomienda utilizar la TWC. La TWC permite una representación más completa y detallada de la señal, pero puede ser computacionalmente más costosa debido a su mayor redundancia. Por otro lado, si el objetivo es comprimir la señal, es preferible utilizar la TWD. La TWD utiliza wavelets con filtros y busca una representación más compacta de la señal, eliminando redundancias innecesarias y conservando solo la información relevante. En el caso de la TWD, es importante seleccionar wavelets con propiedades óptimas para lograr una buena calidad de compresión. Por otro lado, en el contexto de la TWC, se valoran especialmente aquellas funciones wavelet que integren cero, ya que permiten realizar un análisis más preciso de la señal. Existen varias funciones ψ que permiten realizar análisis wavelet porque cumplen las condiciones de admisibilidad dadas en las ecuaciones (2.2) y (2.3). En lo que sigue veremos algunas familias wavelet muy utilizadas generadas por este tipo de funciones.

2.2. Familia Wavelet

Se encuentran variados tipos de familias de wavelets, cada una con distintas propiedades (Misiti y cols., 2007):

- El soporte de las funciones wavelet madre $\psi, \hat{\psi}$ (y también en wavelet padre $\varphi, \hat{\varphi}$) o la velocidad en que convergen a cero las funciones $\psi(t)$ y $\tilde{\psi}(\omega)$ cuando el tiempo t o la frecuencia ω crece hacia infinito, permiten cuantificar la localización wavelet en tiempo y en frecuencia.
- La simetría, en las funciones wavelet es relevante porque permite una representación eficiente de señales y datos. La simetría par o impar de una función wavelet permite aprovechar ciertas propiedades matemáticas que simplifican los cálculos y mejoran la eficiencia de los algoritmos utilizados en el procesamiento de señales y la compresión de datos.

- La cantidad de momentos de wavelet madre ψ o wavelet padre φ, que se anulan son utilizados en que se hace cero para entender su compresión. Cuando una wavelet tiene un mayor número de momentos cero, significa que puede representar señales y datos más suavizados o con componentes de baja frecuencia de manera más eficiente. Esto es útil en la compresión de datos porque permite eliminar redundancias y representar la información de manera más compacta.
- La regularidad en las funciones wavelet, es de mucha utilidad para conseguir imágenes o señales que son reestructuradas uniformes y regulares.

En la literatura y en la práctica se pueden encontrar diversos tipos de señales que comparten características similares con las familias wavelets, característica recomendable, las más utilizadas son:

- Wavelet Haar

La familia wavelet Haar es una de las wavelets más antiguas, simples y es discontinua. Es utilizada, es utilizada frecuentemente en muchas investigaciones, (ver en la figura 2.1 la madre wavelet Haar) y se define por:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= 1 \quad \text{si } x \in [0, 0{,}5[, \\ \psi(x) &= -1 \quad \text{si } x \in [0{,}5, 1[, \\ \psi(x) &= 0 \quad \text{e.o.c.} \end{aligned}$$

La función escala φ (padre wavelet) se define de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= 1 \quad \text{si } x \in [0, 1[, \\ \varphi(x) &= 0 \quad \text{e.o.c.} \end{aligned}$$

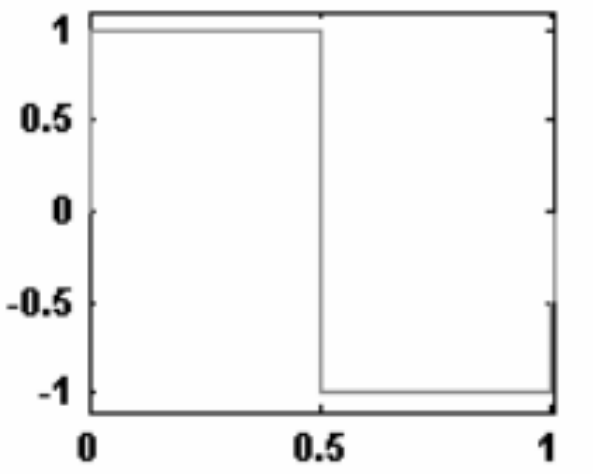


Figura 2.1: Gráfico de la madre wavelet Haar.
Fuente: Libro Wavelet and their Applications.(Misiti y cols., 2007)

Otro tipo de wavelet muy utilizada es la familia wavelet de Daubechies que incluye la familia wavelet Haar.

- Wavelets Daubechies

La familia wavelet Daubechies de un solo parámetro es de soporte compacto, regularidad arbitraria y posee las siguientes características:

- La longitud de soporte de la wavelet madre ψ y wavelet padre φ es de $2N-1$, donde N es la cantidad de momentos en que la wavelet madre ψ es cero.
- Las wavelets de Daubechies son asimétricas (Sobre todo para aquellos valores bajos de N) pero la wavelet Haar es un caso especial, es la $db1$.

La wavelet Daubechies de orden N = 2 hasta N = 10 se observa en la figura 2.2.

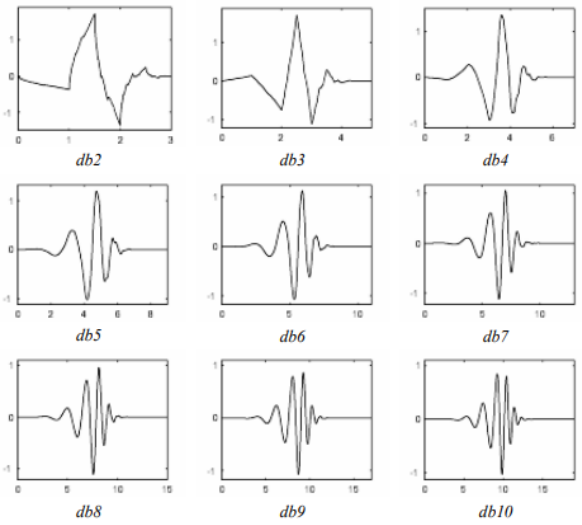


Figura 2.2: Ejemplo de una wavelet Daubechies para las familias db2-db10.
Fuente: Libro Wavelet and their Applications.(Misiti y cols., 2007)

En algunas situaciones la capacidad de análisis local y de precisión de las funciones en tiempo y en escala son confusas. Es por esto por lo que se da un mayor enfoque en wavelets que cumplen con la condición de admisibilidad muy débil. Algunos de ellos son:

- Wavelet Gorro mexicano

La wavelet Gorro mexicano es una función continua que es proporcional a la segunda derivada de una función de densidad gaussiana, se define como:

$$\psi(x) = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\pi^{-1/4}\right)\left(1-x^2\right)e^{-x^2/2}.$$

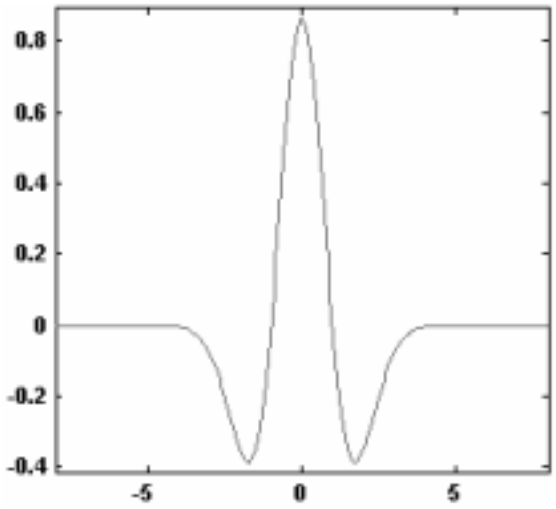


Figura 2.3: Ejemplo de Gorro mexicano.
Fuente: Libro Wavelet and their Applications.(Misiti y cols., 2007)

En la figura 3 se observa el wavelet Gorro mexicano donde posee variaciones de corta duración con frecuencias de altas y bajas amplitud.

- Wavelet Morlet

La wavelet Morlet cumple de manera parcial la condición de admisibilidad aunque sea una función que es estándar, se define de la siguiente manera:

$$\psi(x) = Ce^{-x^2/2}\cos(5x),$$

donde C es una constante de normalización que es utilizada para hacer la reconstrucción de señales.

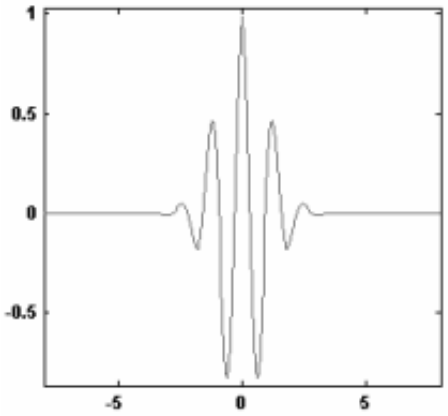


Figura 2.4: Ejemplo de una wavelet Morlet.
Fuente: Libro Wavelet and their Applications.(Misiti y cols., 2007)

2.3. Periodograma de Lomb-Scargle

El periodograma de Lomb-Scargle es una técnica que se desarrolló como respuesta a los problemas presentes en el periodograma clásico. Estos problemas incluyen la presencia de intervalos de datos faltantes, el efecto de aliasing (que se explicará más adelante en las consideraciones finales de este capítulo), la presencia de ruido gaussiano y la falta de uniformidad en el muestreo temporal de los datos. El periodograma clásico intenta ajustar los datos para calcular el espectro de potencia utilizando la transformada de Fourier. Sin embargo, esta aproximación no es suficientemente robusta para lidiar con los problemas mencionados anteriormente. El nuevo enfoque del periodograma aborda estos problemas al introducir funciones auxiliares y ajustar el método clásico. Este desarrollo se basó en los trabajos de Scargle (1982) y Lomb (1976), que propusieron modificaciones al periodograma clásico para mejorar su desempeño.

Este generaliza el periodograma clásico de la siguiente forma:

$$P\left(\omega_k\right) = \frac{A^2}{2}\left(\sum_m Z_{t_m}\cos\left(\omega_k\left[t_m-\tau\right]\right)\right)^2 + \frac{B^2}{2}\left(\sum_m Z_{t_m}\sin\left(\omega_k\left[t_m-\tau\right]\right)\right)^2.$$

siendo A, B y τ funciones arbitrarias, en términos de ω_k y t_m, pero no de Z_{t_m} que son los mismos calculados vía peridograma clásico, es decir, estas 3 funciones no dependen de la serie de tiempo usada. Vemos que volvemos al periodograma de Schuster cuando asumimos $A = B = \left(\frac{2}{n}\right)^2$, $Z_{t_m} = Z_t, \tau = 0$. Finalmente usando:

$$A^2 = \left(\sum_m \cos\left(\omega_k\left[t_m-\tau\right]\right)\right)^{-1}, y$$
$$B^2 = \left(\sum_m \sin\left(\omega_k\left[t_m-\tau\right]\right)\right)^{-1}$$

obtenemos el periodograma de Lomb-scargle como:

$$P(f) = \frac{1}{2}\frac{\left(\sum_m Z_{t_m}\cos\left(\omega_k\left[t_m-\tau\right]\right)\right)^2}{\left(\sum_m \cos\left(\omega_k\left[t_m-\tau\right]\right)\right)} + \frac{1}{2}\frac{\left(\sum_m Z_{t_m}\sin\left(\omega_k\left[t_m-\tau\right]\right)\right)^2}{\left(\sum_m \sin\left(\omega_k\left[t_m-\tau\right]\right)\right)},$$

con:

$$\tau = \frac{1}{2\omega_k}\tan^{-1}\left(\frac{\left(\sum_m \sin\left(2\omega_k t_m\right)\right)}{\left(\sum_m \cos\left(2\omega_k t_m\right)\right)}\right)$$

Estos cambios no son realizados por azar, estas funciones A, B reducen efectivamente el problema de la equidistancia o uniformidad del muestreo de la serie, pudiendo usar saltos de tiempo completamente arbitrarios, esto también soluciona el problema de los datos perdidos pues estos pueden ser tomados como saltos en el muestreo. El uso de τ ajusta para que el periodograma sea invariante en la posición inicial de toma de datos, propiedad que ya poseía el periodograma clásico.

2.4. Relación entre las escalas de wavelet y las frecuencias de Fourier

La relación entre el período, P, y la frecuencia de Fourier, f, es $P = 1/f$. Cuando trabajamos con análisis wavelet esta relación se modifica, según la familia wavelet que escojamos. La escala de wavelet y el "periodo equivalente de Fourier", para algunas funciones wavelet, derivarse analíticamente sustituyendo la función $e^{i2\pi f_0 t}$ de frecuencia conocida f_0 ya sea en la relación Wavelet

continua 2.5 y calcular la escala a en la cual el poder espectral de wavelet tiene su máximo. Para los casos de nuestro interés, *i.e.*, para el wavelet de Morlet y de acuerdo a Torrence y Compo (1998) la relación entre la frecuencia f y la escala a viene dada por

$$\frac{1}{f} = \frac{4\pi a}{\omega_o + \sqrt{2 + \omega_o^2}}. \tag{2.10}$$

Para efectos prácticos se asume que $\omega_o = 2\pi$ Torrence y Compo (1998), por tanto, la ecuación 2.10 puede expresarse como

$$\frac{1}{f} \approx a,$$

o de modo equivalente,

$$f \approx \frac{1}{a}$$

Este resultado simplifica mucho la interpretación del análisis de wavelet al utilizar la función de Morlet, porque es posible reemplazar escala por frecuencia.

2.5. Diseño factorial 2^k

En el diseño factorial hay dos beneficios al estudiar varios factores de tratamiento simultáneamente en un diseño factorial. En primer lugar, se puede detectar la interacción o efectos conjuntos de los factores. En segundo lugar, los experimentos son más eficientes. En otras palabras, se puede lograr la misma precisión de los efectos con menos experimentos de los que se requerirían si cada uno de los factores se estudiara uno a la vez en experimentos separados. Cuantos más factores se incluyan en un diseño factorial, mayor será la eficiencia y mayor el número de interacciones que se podrán detectar. Sin embargo, cuantos más factores se incluyan en un experimento factorial, mayor será el número de ejecuciones que se deben realizar. Cuando se incluyen muchos factores en un experimento factorial, una forma de reducir el número de ejecuciones es utilizar solo dos niveles de cada factor y ejecutar solo un experimento por celda o combinación de tratamientos.

En la etapa preliminar de la experimentación, donde el objetivo radica en determinar qué factores son importantes entre una larga lista de candidatos, un diseño factorial puede requerir demasiados experimentos incluso cuando sólo hay dos niveles de cada factor y sólo una repetición por cada factor.

Cuando el número de factores bajo estudio es grande, los investigadores a menudo abandonan por completo la eficiencia de los experimentos factoriales o varían el plan de un factor a la vez. Otros realizarán un experimento factorial con un subconjunto de factores, elegidos de la lista más larga adivinando cuáles pueden ser más importantes. Sin embargo, estos enfoques no son óptimos y no conservan los beneficios de los experimentos factoriales con una gran cantidad de factores. Una mejor solución a este problema es utilizar una fracción de los experimentos o ejecuciones necesarios para un experimento factorial completo. Para que sea eficaz, la fracción de ejecuciones utilizadas debe seleccionarse cuidadosamente para preservar algunos de los beneficios de un experimento factorial completo.

Una de las propiedades deseables de un plan factorial de 2^k es que los efectos de los factores no quedan oscurecidos por (o correlacionados con) cambios planificados en otros factores.

Según Montgomery (2017) el diseño factorial 2^k, es decir, un diseño con k factores cada uno en dos niveles. El modelo estadístico para un diseño 2^k incluiría k efectos principales, interacciones de dos factores, interacciones de tres factores y una interacción del factor k. Es decir, el modelo completo contendría 2^k. También se utiliza la notación para las combinaciones de tratamientos.

aquí. Por ejemplo, en un diseño 2^5, abd denota la combinación de tratamiento con los factores A, B y D en el nivel alto y los factores C y E en el nivel bajo. Las combinaciones de tratamientos pueden escribirse en orden estándar introduciendo los factores uno a la vez, combinando cada nuevo factor sucesivamente con los que lo preceden. Por ejemplo, el orden estándar para un diseño de 2^4 es (1), $a, b, ab, c, ac, bc, abc, d, ad, bd, abd, cd, acd, bcd$ y $.abcd$.

El enfoque general para el análisis estadístico del diseño 2^k se resume en los sioguientes pasos:

- Estimar los efectos de los factores
- Forma modelo inicial a) Si se replica el diseño, ajuste el modelo completo. Y b) Si no hay replicación, formar el modelo. utilizando una gráfica de probabilidad normal de los efectos
- Realizar pruebas estadísticas
- Refinar modelo
- Analizar residuos
- Interpretar resultado

El primer paso es estimar los efectos de los factores y examinar sus signos y magnitudes. Esto le da al experimentador información preliminar sobre qué factores e interacciones pueden ser importantes y en qué direcciones deben ajustarse estos factores para mejorar la respuesta. Al formar el modelo inicial para el experimento, generalmente elegimos el modelo completo, es decir, todos los efectos e interacciones principales, siempre que al menos uno de los puntos de diseño haya sido replicado. Luego, en el paso 3, utilizamos el análisis de varianza para probar formalmente la importancia de los efectos principales y la interacción. El paso 4, refinar el modelo, generalmente consiste en eliminar cualquier variable no significativa del modelo completo. El paso 5 es el análisis residual habitual para comprobar la adecuación del modelo y los supuestos. A veces, el refinamiento del modelo se producirá después del análisis residual si encontramos que el modelo es inadecuado o se violan gravemente los supuestos. El paso final generalmente consiste en un análisis gráfico, ya sea de efectos principales o de interacción, o de superficie de respuesta y de contorno.

Aunque los cálculos descritos anteriormente casi siempre se realizan computacionalmente, ocasionalmente es necesario calcular manualmente una estimación del efecto o la suma de cuadrados de un efecto. Para estimar un efecto o calcular la suma de cuadrados de un efecto, primero debemos determinar el contraste asociado con ese efecto. Para estimar un efecto o calcular la suma de cuadrados de un efecto, primero debemos determinar el contraste asociado con ese efecto. Esto es incómodo para valores grandes de k y podemos usar el siguiente metodo. Determinamos el contraste para el efecto $AB \cdots K$ expandiendo el lado derecho de

$$\text{Contraste }_{AB\cdots K} = (a \pm 1)(b \pm 1) \cdots (k \pm 1)$$

Al ampliar la ecuación anterrior , se utiliza álgebra básica reemplazando "1"por (1) en la expresión final. El signo en cada conjunto de paréntesis es negativo si el factor está incluido en el efecto y positivo si el factor no está incluido. considere un diseño factorial 2^3. El contraste para AB sería

$$\text{Contraste }_{AB} = (a-1)(b-1)(c+1) = abc + ab + c + (1) - ac - bc - a - b$$

Como ejemplo adicional, en un diseño 2^5, el contraste para $ABCD$ sería

Contraste $_{ABCD} = (a-1)(b-1)(c-1)(d-1)(e+1)$
$= abcde + cde + bde + ade + bce + ace + abe + e + abcd + cd + bd$
$+ ad + bc + ac + ab + (1) - a - b - c - abc - d - abd - acd - bcd - ae$
$- be - ce - abce - de - abde - acde - bcde$

Una vez que se han calculado los contrastes de los efectos, podemos estimar los efectos y calcular las sumas de cuadrados de acuerdo con

$$AB\cdots K = \frac{2}{n2^k}\,(\text{ Contraste }_{AB\cdots K})$$

y

$$SS_{AB\cdots K} = \frac{1}{n2^k}\,(\text{ Contraste }_{AB\cdots K})^2$$

respectivamente, donde n denota el número de réplicas.

Estos modelos pueden ser sin réplica o con ellas, es decir puede realizarse una sola vez cada una de las combinaciones obteniendo solamente una respuesta para cada una de las combinaciones o pueden realizarse el número de veces que se considere necesario obteniendo así más de una respuesta para cada combinación, en este caso habrá que tener en cuenta ambas respuestas.

Estos diseños presentan diferentes ventajas en relación a otros tipos de diseños.

- No es necesario un gran número de experimentos por cada uno de los factores a estudiar.
- Las observaciones producidas por los diseños se pueden interpretar utilizando el sentido común, la aritmética elemental y los gráficos por ordenador.
- Cuando se trata de factores cuantitativos se puede determinar una dirección prometedora para una mayor experimentación.
- Es posible aumentar los diseños cuando se necesita una exploración más focalizada.
- Es posible realizarlos de forma secuencial, de forma que una vez realizada una ronda del diseño factorial se puede montar una nueva para realizar una investigación más específica.

Capítulo 3

Estudio de simulación

En este apartado se usarán los datos simulados proporcionados por la licenciada Alberici, que se basan en la curva de luz de la estrella de Algol, utilizando un diseño de experimento factorial 2^6, donde tenemos 6 factores que se consideran dando así una simulación de 64 modelos que vamos a analizar. En este capitulo se describe su diseño, sus variables y el fenómeno fisico subyacente a cada una este diseño sera la punto de partida para capítulo siguiente.

3.1. Descripción del diseño

En estadística, el área de diseños experimentales se ocupa de encontrar el diseño que mejor ayude a determinar y estudiar los factores que influyen en una determinada variable. Hay muchos tipos diferentes de diseños: el diseño factorial, factorial fraccionario, por bloque, de cuadrado latino y anidado, entre otros. Los diseños factoriales son aquellos en los que se realizan experimentos correspondientes a todas las combinaciones posibles de los "niveles" o valores de los factores o medidas de interés. Los diseños 2^k son diseños factoriales con k factores o variables para los cuales solo se consideran dos niveles o valores para cada uno. Estos diseños con pocos valores para cada factor se utilizan a menudo cuando se desea determinar qué factores están afectando un determinado proceso o fenómeno. Para los niveles se consideran valores extremos de variables cuantitativas (como la temperatura o la concentración) o categorías extremas de variables cualitativas (como la presencia-ausencia de un atributo, entre otras posibilidades). Este tipo de diseño permite determinar qué factores o variables realmente influyen en el cambio o variación del proceso o fenómeno. Se utilizan en la primera etapa del estudio cuando se conocen muchas variables sobre un proceso y se desea determinar sus factores más influyentes. Una vez determinados los factores relevantes, se puede pasar a un diseño más exhaustivo, que considere más niveles o valores para cada factor o incluso a un diseño más complejo. Cada diseño de potencia k de 2 considera 2^k corridas diferentes, que pueden ser una cantidad considerable dependiendo del número k.

3.1.1. Curvas de luz sintéticas

En esta etapa, en vez de realizar un experimento real, nos planteamos utilizar simulaciones numéricas de curvas de luz para saber de antemano el resultado que deberíamos encontrar y así poder hacer un diagnóstico de la bondad de ajuste de cada uno de los métodos, análisis de Fourier y análisis wavelet, que se utilizará para detectar la periodicidad. En el contexto de esta investigación, realizamos simulaciones de curvas de luz sintéticas de una estrella pulsante en un sistema binario eclipsante. Para construirlos, utilizamos los datos fotométricos de un sistema binario conocido, HD

19356, conocido como Algol, obtenidos por la misión TESS (*Transiting Exoplanet Survey Satellite*).— Ricker y cols. (2014) con una resolución temporal de 120 seg. Luego, para obtener la curva de luz sintética, Alberici modeló los datos con el software PHOEBE (*Physics Of Eclipsing Binaries*) adoptando el período orbital de 2.87 días correspondiente al sistema binario seleccionado. La curva sintética resultante, denominada modelo N°0, se muestra en la Figura B.1. Este modelo será la base para el diseño completo de la simulación. Como las series temporales de muchos procesos físicos muestran propiedades estocásticas y autocorrelacionadas, se contaminó las curvas sintéticas con un ruido ARMA(1,1). Es apropiado considerar, por simplicidad, un modelo ARMA(1,1), que tiene cierta dependencia de los valores anteriores, para la fluctuación aleatoria de la luminosidad de la estrella. La magnitud de la variabilidad del proceso ARMA se ha determinado en un valor bajo por simplicidad, y se deja para trabajos futuros realizar un estudio con mayor variabilidad del proceso de ruido (es decir, donde la variabilidad de la luminosidad podría afectar la detección) Por lo tanto se planteó un diseño de simulación con seis variables y dos categorías (factores) cada una, que se describe en el siguiente apartado.

3.1.2. Variables en el estudio

De acuerdo a Alberici y cols. (2023) las variables que más influyen en las variabilidad de la deteccion de periodos en curvas de luz de sistemas binarios son las que se describe a continuación:

- **Fenómeno de batido (X_1).** El batido es la variación periódica de amplitud en un determinado punto de onda debido a la superposición de dos ondas que tienen frecuencias f_i y f_j ligeramente diferentes, produciendo una perturbación temporal entre la interferencia constructiva y la destructiva. Para simplificar, consideramos dos ondas de igual amplitud, A, y número de onda, k, pero con frecuencias angulares ligeramente diferentes:

$$y_i(x,t) = A\cos\left(kx - \omega_i t\right), \quad y_j(x,t) = A\cos\left(kx - \omega_j t\right). \tag{3.1}$$

  La onda resultante es la suma de $y_i + y_j$, lo que da es

$$y(x,t) = 2A\cos\left(\frac{\omega_i - \omega_j}{2}t\right)\cos\left(kx - \frac{\omega_i + \omega_j}{2}t\right), \tag{3.2}$$

  dónde

$$\omega = 2\pi f. \tag{3.3}$$

  Se consideraron simulaciones con (nivel alto del factor) y sin fenómenos de batido (nivel bajo del factor).

- **Magnitud del período de la pulsación (X_2).** En esta variable, exploramos los efectos sobre la curva de luz considerando ciclos de pulsaciones regulares con un período más largo (nivel alto del factor) o más corto (nivel alto del factor) que el período orbital del sistema binario.

- **Amplitud de la pulsación con respecto a la profundidad del eclipse primario (X_3).** Para esta variable se consideraron dos categorías. La primera es que la amplitud de la pulsación es el 20 % de la profundidad del eclipse primario, lo que llamamos gran amplitud (nivel alto del factor). La segunda es que la amplitud de la pulsación es el 4 % de la profundidad del eclipse primario (nivel bajo del factor), lo que se denomina amplitud pequeña. Los valores de las amplitudes de las pulsaciones se eligieron de esta manera porque concuerdan con los observados en las curvas de luz TESS de algunas estrellas binarias pulsantes.

- **Número de periodos de pulsación (X_4).** Se considerarán escenarios donde la curva de luz se vea afectada por uno (nivel bajo del factor) o dos (nivel alto del factor) periodos de pulsación simultáneamente.

- **Efecto luz-tiempo (X_5).** Este escenario considera una estrella en un sistema binario que pulsa sinusoidalmente con una sola frecuencia. Su luminosidad varía con el tiempo como consecuencia de esta pulsación. Sin embargo, el movimiento orbital de la estrella conduce a una variación periódica de la distancia entre el observador y la estrella, por lo que la fase de variación de la luminosidad observada también varía con el período orbital. El efecto luz-tiempo conduce a multipletes de frecuencia en los espectros de Fourier para estrellas binarias pulsantes. Para modelar este efecto en nuestras curvas de luz sintéticas, nos basamos en el caso más simple de una estrella binaria pulsante con un movimiento orbital circular. Además, para emular el desdoblamiento del período de pulsación, se procedió a afectar la curva con tres pulsaciones sinusoidales: la frecuencia de pulsación intrínseca de la estrella y dos frecuencias de oscilación adicionales debidas al efecto luz-tiempo, donde el espaciamiento entre cada una de ellas y la frecuencia intrínseca de la pulsación es igual a la frecuencia orbital. Sea P_o el periodo orbital de la estrella y P_p el periodo de pulsación, entonces las múltiples componentes de las variaciones de luminosidad tendrán las siguientes frecuencias adicionales:

$$f_+ = \frac{1}{P_o} + \frac{1}{P_p}, \quad f_- = \left| \frac{1}{P_o} - \frac{1}{P_p} \right|. \tag{3.4}$$

  Además, las amplitudes y fases de los múltiples componentes se pueden utilizar para obtener información significativa sobre los elementos orbitales y la curva de velocidad radial. En este trabajo se consideraron escenarios con (nivel alto del factor) y sin (nivel bajo del factor) el efecto del tiempo de luz.

- **Pulsaciones cuasi regulares (X_6).** Consideremos ahora un conjunto de osciladores armónicos. El movimiento periódico significa que debe haber algún tiempo en el que todos los diferentes osciladores hayan completado un número entero de ciclos, es decir:

$$\begin{aligned} \omega_0 \tau &= 2\pi n_0, \\ \omega_1 \tau &= 2\pi n_1, \\ \omega_2 \tau &= 2\pi n_2, \\ &\dots \end{aligned} \tag{3.5}$$

  Esto significa que todos los n_k son enteros; por lo tanto, el cociente ω_i/ω_j debe ser un número racional. Si, por el contrario, es irracional, cualquier oscilador i o j podría no completar un número entero de ciclos en el tiempo , dando lugar a pulsaciones cuasi-periódicas (QPP). Este tipo de comportamiento es una característica común en la atmósfera solar y en las estrellas fulgurantes, donde la energía fulgurante se libera por reconexión magnética. También se observan pulsaciones cuasi-periódicas en las estrellas variables α Cyg y se atribuyen a oscilaciones de modo extraño. Se consideraron simulaciones con y sin períodos cuasi-regulares.

  Como hemos definido variables X_i (con i $= 1, \cdots, 6$) y cada una tiene 2 niveles o 2 categorías, el diseño total es factorial con $2^6 = 64$ modelos. Para cada variable se consideró una categoría en el nivel bajo y otra en el nivel alto. El diseño completo se describe, en la Tabla 3.1 y 3.2.

Cuadro 3.1: Características del diseño de simulación. La tabla enumera los fenómenos, propiedades y períodos fijados para simular las pulsaciones en cada modelo. El efecto del tiempo de luz y el fenómeno del latido generan períodos resaltados en violeta y rojo, respectivamente. En todos los casos, estos efectos están presentes sólo en el período de pulsación más bajo. Modelos 1 a 32.

Modelo	Fenómeno de batido	Efecto Luz-Tiempo	Período de la pulsación	N°. de Pulsación	Pulsaciones casi regulares	Amplitud[a] [%]	Periodos[b] [Dias]
N°1	Si	Si	Largo	2	Si	20	3e - 2.12 - 4.42 - 8.96 - 10
N°2	Si	Si	Largo	2	No	20	7 - 2.03 - 4.86 - 7.70 - 10
N°3	Si	No	Largo	2	Si	20	3e - 8.96 - 10
N°4	Si	No	Largo	2	No	20	7 - 7.70 - 10
N°5	Si	Si	Largo	1	Si	20	3e - 2.12 - 4.42 - 8.96
N°6	Si	Si	Largo	1	No	20	7 - 2.03 - 4.86 - 7.70
N°7	Si	No	Largo	1	Si	20	3e - 8.96
N°8	Si	No	Largo	1	No	20	7 - 7.70
N°9	Si	Si	Largo	2	Si	4	3e - 2.12 - 4.42 - 8.96 - 10
N°10	Si	Si	Largo	2	No	4	7 - 2.03 - 4.86 - 7.7 - 10
N°11	Si	No	Largo	2	Si	4	3e - 8.96 - 10
N°12	Si	No	Largo	2	No	4	7 - 7.70 - 10
N°13	Si	Si	Largo	1	Si	4	3e - 2.12 - 4.42 - 8.96
N°14	Si	Si	Largo	1	No	4	7 - 2.03 - 4.86 - 7.70
N°15	Si	No	Largo	1	Si	4	3e - 8.96
N°16	Si	No	Largo	1	No	4	7 - 7.70
N°17	Si	Si	Corto	2	Si	20	$\sqrt{2}$ - 0.94 - 2.78- 1.27 - 1.6
N°18	Si	Si	Corto	2	No	20	1.2 - 0.84 - 2.06 - 1.32 - 1.6
N°19	Si	No	Corto	2	Si	20	$\sqrt{2}$ - 1.27 - 1.6
N°20	Si	No	Corto	2	No	20	1.2 - 1.32 - 1.6
N°21	Si	Si	Corto	1	Si	20	$\sqrt{2}$ - 0.94 - 2.78 - 1.27
N°22	Si	Si	Corto	1	No	20	1.2 - 0.84 - 2.06 - 1.32
N°23	Si	No	Corto	1	Si	20	$\sqrt{2}$ - 1.27
N°24	Si	No	Corto	1	No	20	1.2 - 1.32
N°25	Si	Si	Corto	2	Si	4	$\sqrt{2}$ - 0.94 - 2.78 - 1.27 - 1.6
N°26	Si	Si	Corto	2	No	4	1.2 - 0.84 - 2.06 - 1.32 - 1.6
N°27	Si	No	Corto	2	Si	4	$\sqrt{2}$ - 1.27 - 1.6
N°28	Si	No	Corto	2	No	4	1.2 - 1.32 - 1.6
N°29	Si	Si	Corto	1	Si	4	$\sqrt{2}$ - 0.94 - 2.78 - 1.27
N°30	Si	Si	Corto	1	No	4	1.2 - 0.84 - 2.06 - 1.32
N°31	Si	No	Corto	1	Si	4	$\sqrt{2}$ - 1.27
N°32	Si	No	Corto	1	No	4	1.2 - 1.32

[a] La amplitud de la pulsación es con respecto a la profundidad del eclipse primario. [b] e: número de Euler.

Cuadro 3.2: Características del diseño de simulación. La tabla enumera los fenómenos, propiedades y períodos fijados para simular las pulsaciones en cada modelo. El efecto del tiempo de luz y el fenómeno del latido generan períodos resaltados en violeta y rojo, respectivamente. En todos los casos, estos efectos están presentes sólo en el período de pulsación más bajo. Modelos 33 a 64

Modelo	Fenómeno de batido	Efecto Luz-Tiempo	Período de la pulsación	N°. de Pulsación	Pulsaciones casi regulares	Amplitud[a] [%]	Periodos[b] [Dias]
N°33	No	Si	Largo	2	Si	20	$3e$ - 2.12 - 4.42 - 10
N°34	No	Si	Largo	2	No	20	7 - 2.03 - 4.86 - 10
N°35	No	No	Largo	2	Si	20	$3e$ - 10
N°36	No	No	Largo	2	No	20	7 - 10
N°37	No	Si	Largo	1	Si	20	$3e$ - 2.12 - 4.42
N°38	No	Si	Largo	1	No	20	7 - 2.03 - 4.86
N°39	No	No	Largo	1	Si	20	$3e$
N°40	No	No	Largo	1	No	20	7
N°41	No	Si	Largo	2	Si	4	$3e$ - 2.12 - 4.42 - 10
N°42	No	Si	Largo	2	No	4	7 - 2.03 - 4.86 - 10
N°43	No	No	Largo	2	Si	4	$3e$ - 10
N°44	No	No	Largo	2	No	4	7 - 10
N°45	No	Si	Largo	1	Si	4	$3e$ - 2.12 - 4.42
N°46	No	Si	Largo	1	No	4	7 - 2.03 - 4.86
N°47	No	No	Largo	1	Si	4	$3e$
N°48	No	No	Largo	1	No	4	7
N°49	No	Si	Corto	2	Si	20	$\sqrt{2}$ - 0.94 - 2.78 - 1.6
N°50	No	Si	Corto	2	No	20	1.2 - 0.84 - 2.06 - 1.6
N°51	No	No	Corto	2	Si	20	$\sqrt{2}$ - 1.6
N°52	No	No	Corto	2	No	20	1.2 - 1.6
N°53	No	Si	Corto	1	Si	20	$\sqrt{2}$ - 0.94 - 2.78
N°54	No	Si	Corto	1	No	20	1.2 - 0.84 - 2.06
N°55	No	No	Corto	1	Yes	20	$\sqrt{2}$
N°56	No	No	Corto	1	No	20	1.2
N°57	No	Si	Corto	2	Si	4	$\sqrt{2}$ - 0.94 - 2.78 - 1.6
N°58	No	Si	Corto	2	No	4	1.2 - 0.84 - 2.06 - 1.6
N°59	No	No	Corto	2	Si	4	$\sqrt{2}$ - 1.6
N°60	No	No	Corto	2	No	4	1.2 - 1.6
N°61	No	Si	Corto	1	Si	4	$\sqrt{2}$ - 0.94 - 2.78
N°62	No	Si	Corto	1	No	4	1.2 - 0.84 - 2.06
N°63	No	No	Corto	1	Si	4	$\sqrt{2}$
N°64	No	No	Corto	1	No	4	1.2

[a] La amplitud de la pulsación es con respecto a la profundidad del eclipse primario. [b] e: número de Euler.

Capítulo 4

Resultados de la comparación

En este capítulo se presenta un análisis de los resultados obtenidos con las simulaciones al momento de aplicar ambos métodos: Lomb-Scargle y el método WWZ para detectar periodos y posteriormente aplicar el análisis de varianza (ANOVA) a las proporciones de aciertos de estos dos métodos. Primero se especifica el software utilizado para la aplicación de cada uno de los métodos y luego un resumen de los resultados obtenidos.

4.1. Software y paquete utilizado

Para detectar periodos en las curvas de luz simuladas se utilizó el software Python y los siguientes paquetes:

- 'libwwz' (RedVox, 2023), esta biblioteca proporciona funciones para calcular la transformada Z Wavelet ponderada utilizando la versión 3.6 Python. El código se basa en el código Fortran desarrollado por Fóster y Templeton.
- 'astropy.stats' (Astropy, s.f.), este paquete contiene funciones estadísticas o algoritmos utilizados en astronomía. Se utilizó la clase LombScargle que contiene el algoritmo para calcular el periodograma de Lomb-Scargle.

Para el cálculo para el análisis de varianza se utilizaron 'aov' y 'FrF2' de software R. Los códigos implementados se encuentran en el apéndice A.

4.2. Análisis de resultados

4.2.1. Detección global de cada frecuencia-período

Para evaluar la capacidad de cada uno de los métodos utilizados, Lomb-Scargle (LS) y transformada Z Wavelet ponderada (WWZ) en la detección de cada una de las frecuencias o períodos incluidos en cada uno de los modelos de la simulación se presenta en un resumen del porcentaje de veces que cada frecuencia o periodo ha sido encontrado en cada uno de los 64 modelos. El porcentaje se calcula sobre la cantidad de modelos que contienen la frecuencia o el periodo. Los resultados se presentan en la Tabla 4.1. En esta tabla aparecen en las últimas seis columnas medidas del desempeño de ambos métodos. Las columnas $LS < 0{,}01$ y $WWZ < 0{,}01$ dan cuenta del porcentaje de veces en que el periodo es estimado con un error menor que 0,01. Las columnas $LS < 0{,}05$ y $WWZ < 0{,}05$ dan cuenta del porcentaje de veces en que el periodo es estimado con un error menor

que 0,05 y mayor que 0,01. Finalmente, las columnas No encontrado LS y No encontrado WWZ cuantifica el porcentaje de veces que no se encontró el periodo.

Cuadro 4.1: Tabla de los resultados de las 64 simulaciones en porcentaje respecto al periodo obtenido

Periodo	N° Periodo	N° Modelos generados con ese Periodo	LS $<$ 0,01 (%)	WWZ $<$ 0,01 (%)	LS $<$ 0,05 (%)	WWZ $<$ 0,05 (%)	No encontrado LS (%)	No encontrado WWZ (%)
2,87	P_0	64	98, 4	100,0	0,0	0,0	1,6	0,0
10	P_1	16	56,2	50,0	18,8	12,5	25,0	37,5
8,96	P_2	8	87,5	62,5	0,0	0,0	12,5	37,5
3e	P_3	16	18,8	25,0	25,0	43,8	56,3	31,3
7,7	P_4	8	12,5	25,0	37,5	37,5	50,0	37,5
7	P_5	16	68,8	68,8	6,3	12,5	25,0	18,8
4,86	P_6	8	75,0	50,0	25,0	37,5	0,0	12,5
4,42	P_7	8	50,0	62,5	50,0	25,0	0,0	12,5
2,78	P_8	8	25,0	0,0	0,0	0,0	75,0	100,0
2,12	P_9	8	100,0	87,5	0,0	12,5	0,0	0,0
2,06	P_{10}	8	87,5	75,0	0,0	0,0	12,5	25,0
2,03	P_{11}	8	87,5	50,0	0,0	0,0	12,5	50,0
1,6	P_{12}	16	93,7	12,5	0,0	12,5	6,2	75,0
$\sqrt{2}$	P_{13}	16	43,7	25,0	0,0	0,0	56,2	75,0
1,32	P_{14}	8	25,0	0,0	50,0	0,0	25,0	100,0
1,27	P_{15}	8	75,0	0,0	0,0	12,5	25,0	87,5
1,2	P_{16}	16	93,7	43,7	0,0	37,5	6,2	18,75
0,94	P_{17}	8	0,0	0,0	25,0	0,0	75,0	100,0
0,84	P_{18}	8	0,0	0,0	50,0	12,5	50,0	87,5

El período orbital, P_o, fue encontrado con gran precisión (error $< 0{,}01$) casi todas las veces (98 %) por el método Lomb-Scargle (LS) y todas las veces (100 %) por el método WWZ. LS no encuentra este periodo en el modelo Nº21 que incluye el fenómeno de batido, tiene una sola pulsación cuyo período es más corto que el orbital ($P_p < P_o$) y tiene una amplitud del 20 % respecto a la profundidad del eclipse del sistema binario, el período de la pulsación es cuasi regular, es decir, un número irracional, con valor $P_p = \sqrt{2}$ y presenta presencia de efecto de luz-tiempo. Este último efecto produce los dos períodos adicionales 0.94 y 2.78. Se podría conjeturar que el método de LS no encuentra el $P_o = 2{,}87$ con error menor que 0.01 debido a la influencia del periodo extra 2.78, pues detecta un periodo de valor 2.82, intermedio entre 2.78 y 2.87.

Los métodos reconocen el período $P_1 = 10$ aproximadamente el $56\,\% - 50\,\%$ de las veces con gran precisión, 18 % o 12 % con poca precisión y alrededor del $25\,\% - 37\,\%$ no lo encuentra, con LS o WWZ, respectivamente.

Ambos métodos reconocen el período $P_2 = 8{,}96$ (resultante del fenómeno de batido entre el período orbital $P_o = 2{,}87$ y el período de la pulsación $P_p = 3e$) con gran precisión o no lo reconocen. El período no es reconocido en los modelos Nº11 y Nº11-13-15, para LS y WWZ respectivamente. El fenómeno de batido presente en el periodo 8,96 no es reconocido en el modelo 11 por ninguno de los dos métodos. Este modelo tiene dos pulsaciones con periodos 3e y 10. Como en los modelos 13 y 15 el periodo 10 no aparece porque tienen solo una pulsación, los resultados indican que LS no detecta el periodo 8.96 por la presencia del 10 pero cuando éste desaparece si lo detecta. En cambio, WWZ no encuentra este periodo cuando la amplitud de la pulsación es de 4 %, salvo en un caso, el del modelo Nª 9, que se diferencia de los otros tres por la presencia conjunta de efecto luz-tiempo y dos pulsaciones.

El período $P_3 = 3e$ no es detectado el $56{,}3\,\% - 31\,\%$ de las veces con Lomb-Scargle - WWZ, respectivamente. Siendo los modelos no encontrados N° 5 - 7 - 9 - 11 - 13 - 15 - 35 - 41 - 43 para LS y N° 3 - 7 - 9 - 11 - 13, WWZ (ver Tabla B.2).

Casi todos los modelos mencionados con número menor que 32 tienen fenómeno de batido con período 8.96 que puede mezclarse con 3e, aproximadamente igual a 8.15. Los modelos 35, 41 y 43 no presentan este fenómeno de batido.

El período $P_4 = 7{,}70$ es detectado más veces por WWZ que por LS ($50\,\% - 37\,\%$ no lo encuentra, con LS o WWZ, respectivamente).

Ambos métodos reconocieron el período $P_5 = 7$ aproximadamente el $68\,\% - 68\,\%$ de las veces con gran precisión, aunque alguna veces encuentran $3{,}5 = P_5/2$ en lugar del 7 (ver Tabla B).

El período $P_6 = 4{,}86$ es detectado mas veces por LS que por WWZ en cambio el $P_7 = 4{,}42$ es encontrado con precisión mas veces por WWZ.

El período $P_8 = 2{,}78$ se confunde mucho con el periodo 2.87 ya que son valores muy cercano entre si.

El período $P_9 = 2{,}12$ fue encontrado todas las veces por ambos métodos y el 100 % las veces en LS fue encontrado con más precisión.

Los periodos de valor pequeño, $P_{10} = 2{,}06$, $P_11 = 2{,}03$, $P_{12} = 1{,}6$,$P_{15} = 1{,}27$, $P_16 = 1{,}2$ fueron encontrado por LS al menos el 75 % de las veces con gran precisión. En cambio en WWZ los encuentra pocas veces o ninguna.

4.3. Análisis de Varianza (ANOVA)

Para hacer el análisis de varianza vamos a utilizar como variable dependiente la proporción de los periodos acertados con error menor que 0.01 en cada uno de los modelos, por la transformada Wavelet Z ponderada (WWZ) y Lomb-Scargle (LS).

Los factores están compuestos por Fenómeno de batido (Batido, niveles: sin y con), Magnitud del Periodo de la pulsación (Relacion.PpPo, niveles: menor y mayor que P_o), Amplitud de la pulsación (AmpPuls, niveles: 4 % y 20 % de la profundidad del eclipse), Número de periodos (CantPuls, niveles: 1 y 2), Efecto luz-tiempo (TLE, niveles: sin y con) y Pulsaciones cuasi regulares (Pquasi, niveles: sin y con). Se realizo el gráfico de Daniel nos muestra los efectos significativo (ver Figuras 4.1 y 4.2 para las variables $WWZ < 0{,}01$ y $LS < 0{,}01$ respectivamente).

A partir de este gráfico, se seleccionan para WWZ los efectos Magnitud del Periodo de la pulsación (RelaciónPp.Po), Efecto luz-tiempo (TLE), Amplitud de la pulsación (AmpPuls), Cuasi-período (Pquasi) y Cantidad de pulsaciones (CantPuls) y las interacciones dobles y triples que aparecen resaltadas con su nombre. Se realiza un nuevo modelo y un análisis de varianza con estos efectos.

En la Tabla 4.2 podemos observar que los efectos significativos son Magnitud del Periodo de la pulsación (RelaciónPp.Po, $p < 0{,}001$), Amplitud de la pulsación (AmpPuls, $p < 0{,}001$) y Cantidad de pulsaciones (CantPuls, $p = 0{,}025$). Es decir, los efectos que influyen en la detección de los períodos son la relación entre el período orbital y el período de la pulsación; la amplitud de la pulsación y la cantidad de pulsaciones. Además influyen en conjunto (ver Figura 4.3), la relación entre los períodos orbital y de la pulsación con el efecto de luz ($p < 0{,}001$) o la relación entre los periodos si el periodo de la pulsación es cuasi ($p = 0{,}0011$), o afectan conjuntamente la amplitud de la pulsación con el efecto luz-tiempo ($p = 0{,}018$). También las interacciones de tres factores influyen en la detección: la relación entre períodos con la amplitud de la pulsación y el efecto luz-tiempo, como la interacción entre la relación entre periodos, el efecto luz-tiempo y que el periodo de la pulsación sea irracional o cuasi.

Se seleccionan para LS los efectos Magnitud del Periodo de la pulsación (RelaciónPp.Po), Efecto luz-tiempo (TLE), Amplitud de la pulsación (AmpPuls), Cuasi-período (Pquasi) y Cantidad de pulsaciones (CantPuls) y las interacciones dobles y triples que aparecen resaltadas con su nombre. Se realiza un nuevo modelo y un análisis de varianza con estos efectos.

En la Tabla 4.3 podemos observar que los efectos significativos son Efecto luz-tiempo (TLE, $p < 0{,}001$), Números de periodos (CantPlus, $p < 0{,}001$) y Pulsaciones cuasi regulares (Pquasi, $p < 0{,}001$). Es decir, los efectos que influyen en la detección de los períodos son el efecto luz-tiempo con el numero de pulsaciones y las pulsaciones de cuasi regulares. Además influyen en conjunto (ver Figura 4.4) y las interacciones dobles significativas son efecto de luz tiempo con la relación entre períodos (($p < 0{,}001$)), periodo cuasi regular con efecto de batido (($p < 0{,}001$)) y las interacciones triples factores significativas son Números de periodos con Efecto luz tiempo y Magnitud del Periodo

de la pulsación , Pulsaciones cuasi regulares con Magnitud del Periodo de la pulsación y Amplitud de la pulsación , Efecto de luz-tiempo con Pulsaciones cuasi regulares y Magnitud del Periodo de la pulsación.

En resumen, las características o fenómenos que afectan la detección de períodos son Pquasi, RelacionPo.Pp, TLE, AmpPuls y CantPuls. Ambos métodos se ven afectados por el número de las pulsaciones. Además, LS es influido por el efecto luz-tiempo y el periodo cuasi regular. En cambio WWZ por la relación entre el periodo orbital y el de la pulsación y la amplitud de la pulsación. Por esta razón detectan de manera diferente cada período. WWZ supera a LS en el porcentaje de detección de los períodos $P_0 = 2{,}87$ *periodo orbital,* $P_3 = 3e$ *(cuasi regular),* $P_4 = 7{,}7$ *y* $P_7 = 4{,}42$*. En todos los otros superan el método de LS en cantidad y precisión. Sobre todo en los períodos de valor pequeño, resultado que fue encontrado también por Alberici y cols. (2023).*

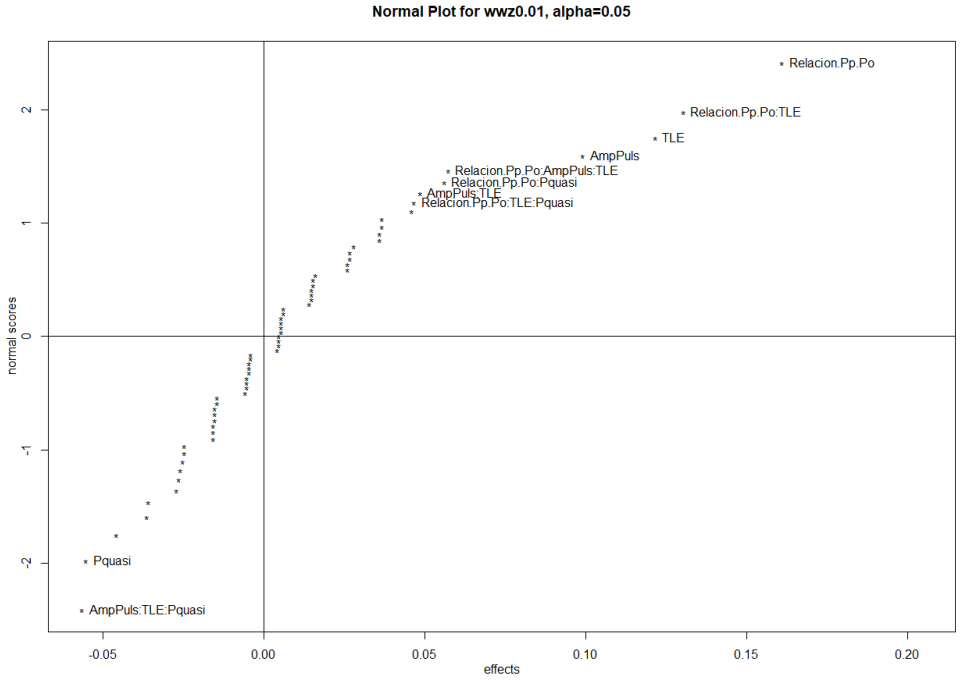


Figura 4.1: Grafico de Daniel de la varible respuesta WWZ < 0.01

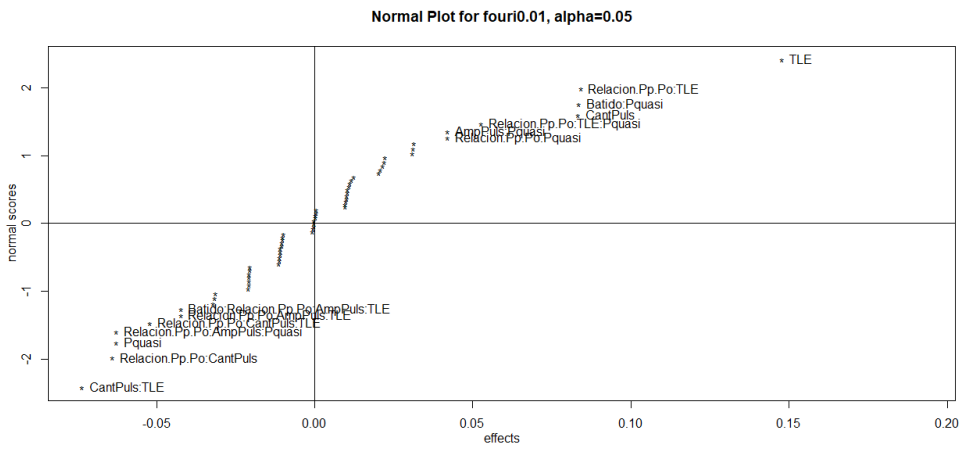


Figura 4.2: Grafico de Daniel de la varible respuesta LS < 0.01

	Df	Sum Sq	Mean Sq	value	Pr (>F)
Relacion.Pp.Po	1	0.4139	0.4139	65.632	1,37e − 10
AmpPuls	1	0.1567	0.1567	24.809	8,26e − 06
CantPuls	1	0.0339	0.0339	5.370	0.02470
Relacion.Pp.Po:TLE	2	0.5081	0.2541	40.226	4,60e − 11
Relacion.Pp.Po:Pquasi	2	0.0994	0.0497	7.868	0.00109
AmpPuls:TLE	1	0.0374	0.0374	5.918	0.01868
Relacion.Pp.Po:AmpPuls:TLE	2	0.0650	0.0325	5.145	0.00937
Relacion.Pp.Po:TLE:Pquasi	2	0.0447	0.0223	3.537	0.03674
AmpPuls:TLE:Pquasi	2	0.0627	0.0314	4.967	0.01086
Residuals	49	0.3095	0.0063		

Cuadro 4.2: Tabla de ANOVA para la Transformada wavelet Z ponderada con aciertos de gran precisión ($WWZ < 0{,}01$).

	Df	Sum Sq	Mean	F value	Pr($> F$)
CantPuls	1	0.1111	0.1111	22.611	1,99e − 05
TLE	1	0.3491	0.3491	71.038	6,96e − 11
Pquasi	1	0.0629	0.0629	12.804	0.000829
TLE: Relacion.Pp.Po	2	0.1153	0.0576	11.731	7,64e − 05
Pquasi:Batido	2	0.1269	0.0634	12.910	3,55e − 05
CantPuTs:TLE:Relacion.Pp.Po	3	0.1954	0.0651	13.254	2. 30e − 06
Pquasi:Relacion.Pp.Po:AmpPuls	5	0.1511	0.0302	6.148	0.000193
TLE: Pquasi:Relacion. Pp.Po	2	0.0463	0.0232	4.714	0.013731
Residuals	46	0.2260	0.0049		

Cuadro 4.3: Tabla de ANOVA para Lomb-Scargle con aciertos de gran precisión ($LS < 0{,}01$).

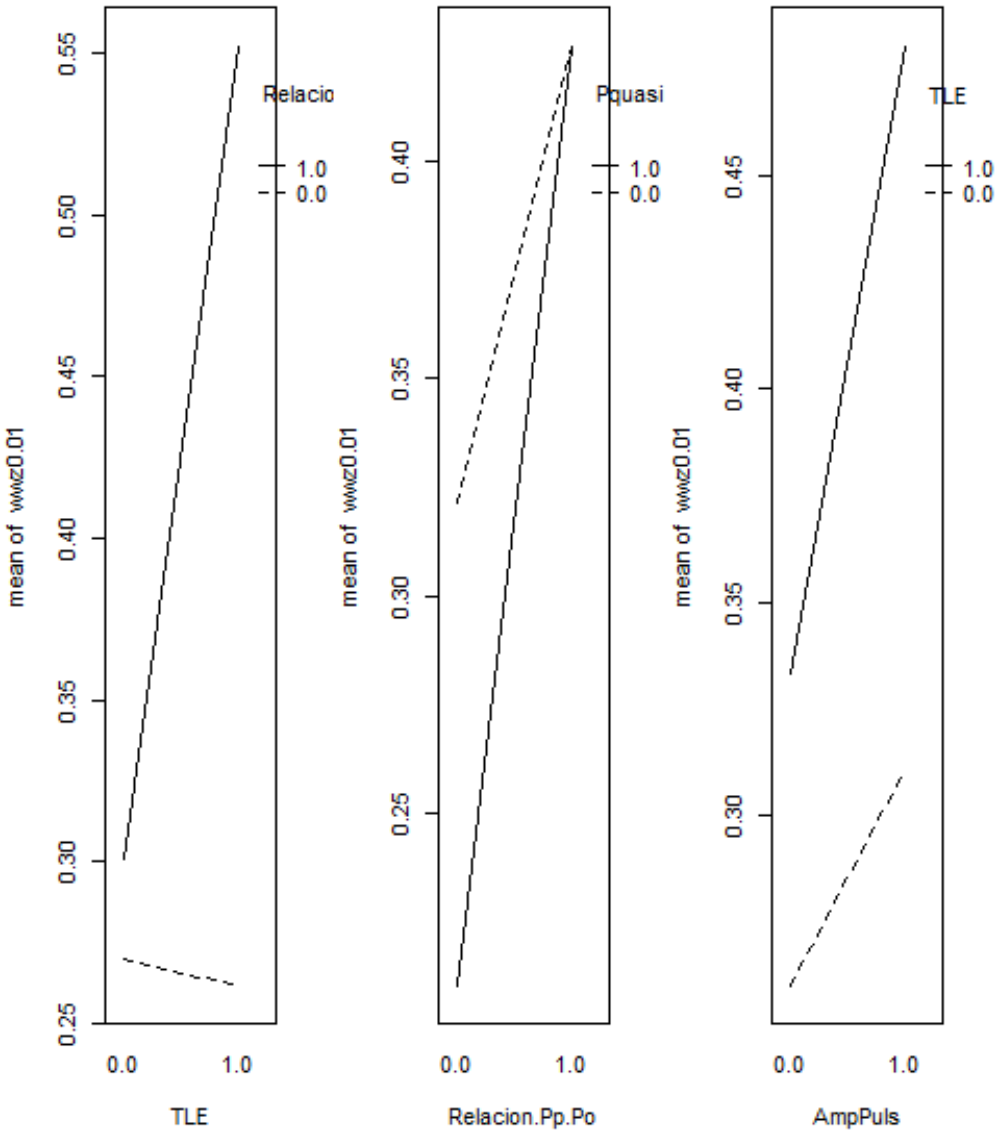


Figura 4.3: Grafico de interacciones de WWZ < 0.01

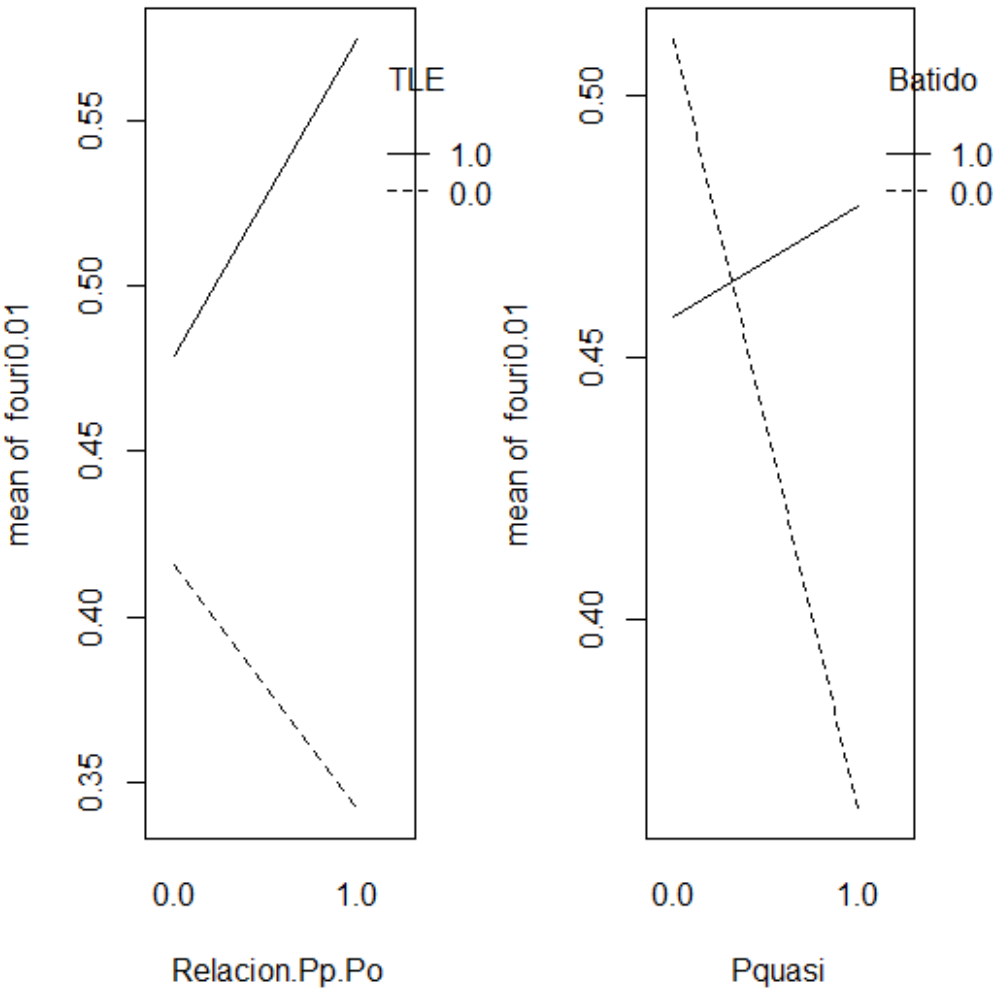


Figura 4.4: Grafico de interacciones de LS < 0.01

Conclusiones

En este trabajo se realizó un análisis de la detección de períodos de curvas de luz de estrellas con los métodos de la transformada wavelet Z ponderada (WWZ) y se comparó su desempeño con el análisis de Fourier (periodograma de Lomb-Scargle). Para esto se implementó diseño experimental factorial 2^6 dando así 64 modelos se aplicaron los dos métodos mencionados anteriormente, donde analizo la detección de cada frecuencia-período y se realizó análisis de varianza, para así responder a los objetivos generales y específicos planteados al inicio de este trabajo.

Respecto del objetivo específico 1: Evaluación del desempeño del método de Lomb-Scargle en la detección de periodos.
Tomando en cuenta que las ventajas de usar este método son que es un método muy utilizado, ampliamente probado, relativamente más rápido, fácil de implementar en Python es importante la evaluación de desempeño en curva de luz. En este trabajo se encontró que en los 4 periodos correspondientes al fenómeno de batido, $P_2 = 8{,}96$, $P_4 = 7{,}70$, $P_{14} = 1{,}32$ y $P_{15} = 1{,}27$ en al menos tres de ellos tiene más precisión que el método de WWZ, no así en $P_4 = 7{,}70$. Tiene más precisión que el WWZ cuando los períodos de la pulsación son más cortos, todo los periodos menores o iguales a 2.12. Como desventaja, este método es más sensible a la presencia al efecto de luz-tiempo por lo tanto le cuesta detectar los periodos asociados a este fenómeno: 0.84, 0,94, 2,06, 2,78 sobre todo en la interacción con la relación entre el periodo orbital y el periodo de la pulsación. También tiene un desempeño menos favorable cuando el periodo es cuasi regular.

Respecto del objetivo específico 2: Evaluación del desempeño del método WWZ en la detección de periodos.
Como ventaja tenemos que es preciso en la detección de períodos de valor grande o largos, es menos sensible al efecto de luz tiempo y también es menos sensible a la presencia de pulsaciones cuasi regulares. Como desventaja tenemos que es menos preciso cuando detecta periodos de valor pequeño o cortos a diferencia de Lomb-Scargle. Es un método más complejo de implementar y consume más tiempo al ejecutarlo en software Python.

Resultado de la comparación de los desempeños. Ambos métodos se ven afectados por el número de las pulsaciones. Además, LS es influido por el efecto luz-tiempo y si el periodo cuasi regular. En cambio, WWZ tiene un desempeño menos favorable según sea la relación entre el periodo orbital y el de la pulsación y la amplitud de la pulsación. WWZ supera a LS en el porcentaje de detección precisa (error menor a 0,01) de los períodos $P_0 = 2{,}87$ periodo orbital, $P_3 = 3e$, $P_4 = 7{,}7$ y$P_7 = 4{,}42$. En todos los otros periodos el método de LS supera a WWZ en cantidad de aciertos y precisión. Sobre todo, en los períodos de valor pequeño.

Apéndice A

Códigos

A.0.1. Código de cómo hacer el análisis de WWZ y sus respectivos gráficos. En Python

```
import numpy as np

import matplotlib.pyplot as plt

from astropy.stats import LombScargle

import libwwz

import libwwz.wwz as wwz

import libwwz.plot_methods as wwz_plot

import pandas as pd

from scipy.signal import find_peaks

data = pd.read_csv("C:/Users/iogal/OneDrive/Escritorio/Trabajo de Titulacion/curvas de luz/
curva1/modelo1.dat", delim_whitespace=True )

data = data.dropna()

data.isnull().sum()

plt.scatter(data["t.modelo"], data["mod1"],s=1)
plt.xlabel('Tiempo')
plt.ylabel('Valor')
plt.title('Curva sinusoidal Modelo 1')
plt.show()

data = data.reset_index(drop=True)

tt = data["t.modelo"].to_numpy()
```

```
dd = data["mod1"].to_numpy()

freq_low = 0.08
freq_high = 1.3
freq_steps = 0.001
freq_lin = [freq_low, freq_high, freq_steps]

f = 2
w = 2 * np.pi * f
c = 1/(2*w**2)


WWZ_simple_linear = wwz.wwt(tt, dd, 100, freq_lin, c, 'linear')

np.save('C:/Users/iogal/OneDrive/Escritorio/Trabajo de Titulacion/resultados WWZ/
modelo1_4.npy', WWZ_simple_linear)

WWZ_simple_linear = np.load('C:/Users/iogal/OneDrive/Escritorio/Trabajo de Titulacion/
resultados WWZ/modelo1_4.npy')


fig, ax = plt.subplots()
heatmap = ax.pcolormesh(WWZ_simple_linear[0], WWZ_simple_linear[1], WWZ_simple_linear[2],
vmin=0, vmax=1500,cmap='RdYlGn')


ax.set_xlabel('Tiempo')
ax.set_ylabel('Frecuencia')
cbar = plt.colorbar(heatmap)
plt.title('Curva de luz escalograma modelo 1 ')
plt.show()


fig, ax = plt.subplots()
heatmap = ax.pcolormesh(WWZ_simple_linear[0], WWZ_simple_linear[1], WWZ_simple_linear[2],
vmin=0, vmax=1500, cmap='RdYlGn')
# Ajusta el tamaño de la fuente de las marcas del eje x
ax.tick_params(axis='x', labelsize=8)
ax.set_xlabel('Tiempo')
ax.set_ylabel('Frecuencia')

cbar = plt.colorbar(heatmap)
plt.title('Curva de luz escalograma modelo 1 ')
plt.show()

fig, ax = plt.subplots()
heatmap = ax.pcolormesh(WWZ_simple_linear[0], 1/WWZ_simple_linear[1],
WWZ_simple_linear[2],vmin=0, vmax=1500,cmap='RdYlGn')
```

```
ax.set_xlabel('Tiempo')
ax.set_ylabel('Periodo')
cbar = plt.colorbar(heatmap)
plt.show()

df = pd.DataFrame(WWZ_simple_linear[2])
df2 = pd.DataFrame(WWZ_simple_linear[1])
df11=df.mean()
df22=df2.mean()
frec1 = df22.to_numpy()
Averag = df11.to_numpy()

plt.figure(figsize=(15,6))
plt.plot(frec1, Averag,linestyle='-',markersize=4)

plt.plot(frec1, Averag, 'ro',markersize=4)

# line of search
#plt.axvline(x=1.323, linewidth=2, color='b')

#plt.axis([np.min(1/time1), np.max(1/time1)/2, 0, np.max(Averag)])
plt.show()

df = pd.DataFrame(WWZ_simple_linear[2])
df2 = pd.DataFrame(WWZ_simple_linear[1])
df11=df.mean()
df22=df2.mean()
frec1 = df22.to_numpy()
Averag = df11.to_numpy()

plt.figure(figsize=(15,6))
plt.plot(1/frec1, Averag,linestyle='-',markersize=4)
plt.plot(1/frec1, Averag, 'ro',markersize=4)
# line of search
#plt.axvline(x=1.323, linewidth=2, color='b')

#plt.axis([np.min(1/time1), np.max(1/time1)/2, 0, np.max(Averag)])
plt.show()

power=Averag
frequency=frec1


# Encontrar los picos en la columna de poder
peaks, _ = find_peaks(power, height=100, distance=1)
```

```
# Obtener las frecuencias correspondientes a los picos encontrados
frequencies_peaks = frequency[peaks]

# Obtener las frecuencias de los 10 picos más altos
top_10_peaks = np.argsort(power[peaks])[-10:]
frequencies_top_10_peaks = frequency[peaks[top_10_peaks]]
# Graficar el resultado
plt.figure(figsize=(15,6))
plt.plot(frequency, power,color='green',markersize=7)
plt.plot(frequencies_peaks, power[peaks], 'x')
plt.plot(frequencies_top_10_peaks, power[peaks[top_10_peaks]], 'o')
plt.xlabel('Frecuencia')
plt.ylabel('Poder')


plt.show()


TableP = pd.DataFrame({'Freq': frequencies_top_10_peaks,'Period': 1/frequencies_top_10_peaks,
'Pow': power[peaks[top_10_peaks]]})
TableP = TableP.sort_values(by='Pow', ascending=False)
TableP


arr_transposed = np.transpose(WWZ_simple_linear[0])
indices_maximos = np.argmax(WWZ_simple_linear[2], axis=0)

fig, ax = plt.subplots()
heatmap = ax.pcolormesh(WWZ_simple_linear[0], WWZ_simple_linear[1],
WWZ_simple_linear[2],vmin=0, vmax=1500,cmap='RdYlGn')


ax.set_xlabel('Time')
ax.set_ylabel('Freq')


cbar = plt.colorbar(heatmap)

#plt.axhline(y=0.065)
plt.plot(arr_transposed[0][indices_maximos], WWZ_simple_linear[1][1], 'b', linewidth=2)
plt.title('Curva de luz escalograma modelo 1 ')
plt.show()

fig, ax = plt.subplots()
heatmap = ax.pcolormesh(WWZ_simple_linear[0], 1/WWZ_simple_linear[1],
WWZ_simple_linear[2],cmap='RdYlGn')
```

```
ax.set_xlabel('Time')
ax.set_ylabel('Freq')


cbar = plt.colorbar(heatmap)

#plt.axhline(y=0.065)
plt.plot(arr_transposed[0][indices_maximos], 1/WWZ_simple_linear[1][1], 'b', linewidth=2)
plt.show()
```

A.0.2. Código de cómo hacer el análisis de Lomb-Scargle y sus respectivos gráficos. En Python

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from astropy.stats import LombScargle
import libwwz
import libwwz.wwz as wwz
import libwwz.plot_methods as wwz_plot
import pandas as pd
from scipy.signal import find_peaks

data = pd.read_csv("C:/Users/iogal/OneDrive/Escritorio/Trabajo de Titulacion/curvas de
luz/curva1/modelo1.dat", delim_whitespace=True )


data

data = data.dropna()

data.isnull().sum()

plt.scatter(data["t.modelo"], data["mod1"],s=1)
plt.xlabel('Tiempo')
plt.ylabel('Valor')
plt.title('Curva sinusoidal hd195592_lc0_4col ')
plt.show()


rhool = LombScargle(data["t.modelo"], data["mod1"])
frequency = np.arange(0.001, 1.3, 0.0001)
power = rhool.power(frequency)

plt.plot(frequency, power, label='Lomb Scargle')
plt.xlabel('Frecuencia')
plt.ylabel('Poder')
plt.title('Curva de luz Lomb-Scargle modelo 1 ')
plt.axis([0, 1.3, 0, 0.5])
```

```
plt.legend()

# Encontrar los picos en la columna de poder
peaks, _ = find_peaks(power, height=np.mean(power), distance=10)

# Obtener las frecuencias correspondientes a los picos encontrados
frequencies_peaks = frequency[peaks]

# Obtener las frecuencias de los 10 picos más altos
top_10_peaks = np.argsort(power[peaks])[-10:]
frequencies_top_10_peaks = frequency[peaks[top_10_peaks]]
# Graficar el resultado
plt.figure(figsize=(15,6))
plt.plot(frequency, power,color='green',markersize=7)
plt.plot(frequencies_peaks, power[peaks], 'x')
plt.plot(frequencies_top_10_peaks, power[peaks[top_10_peaks]], 'o')
plt.xlabel('Frecuencia')
plt.ylabel('Poder')
plt.axis([0, 1.1, 0, 0.5])
plt.title('Curva de luz Lomb-Scargle modelo 1 ')
plt.show()


TableP = pd.DataFrame({'Freq': frequencies_top_10_peaks,'Period': 1/frequencies_top_10_peaks,
'Pow': power[peaks[top_10_peaks]]})
TableP = TableP.sort_values(by='Pow', ascending=False)
TableP


freq = []
powr = []
period = []
i = 20

tiempos = data["t.modelo"]
residuo = data["mod1"]

for t in range(i):


    frequency = np.arange(0.001, 1.3, 0.0001)
    Lombs = LombScargle(tiempos,residuo,normalization='psd')
    power = Lombs.power(frequency)

    best_frequency = frequency[np.argmax(power)]
    best_power = power[np.argmax(power)]
    best_period = 1/frequency[np.argmax(power)]
    freq.append(best_frequency)
```

```
    powr.append(best_power)
    period.append(best_period)
    y_fit = Lombs.model(tiempos, best_frequency)
    residuo = residuo-y_fit


TableP = pd.DataFrame({'Freq': freq,'Period': period, 'Pow': powr})
TableP = TableP.sort_values(by='Pow', ascending=False)
TableP
}
```

A.0.3. El ANOVA para las proporciones de los resultados de los dos métodos(LS y WWZ). En R

```
    ############################################################
# Analisis cant de periodos detectados por ambos metodos
############################################################

install.packages("FrF2")
library(FrF2)
library(readxl)



#cant.detect<-read.table(file.choose(), header = TRUE)


cant.detect<-  read_excel("C:/Users/iogal/Downloads/Tabla
frecuencias (3).xlsx", sheet = "Hoja 3")
head(cant.detect) #la primera linea es el modelo 0
names(cant.detect)
dim(cant.detect) #[1] 65  13
length(as.vector(cant.detect[2:65,9]))
cant.detect2<- cant.detect[-1,]
no <- cant.detect2$`LS<0,01`



class(cant.detect)

wwz0.01<-cant.detect2$`WWZ<0,01`#muestra el aciertos de WWZ
wwz0.05<-cant.detect2$`WWZ<0,05`#muestra la tasa periodo encontrado con error  de WWZ
wwzNE<-cant.detect2$WWZ#muestra tasa de lo que lo periodo no encontrado de WWZ
length(wwz0.01)
length(wwz0.05)
length(wwzNE)

fouri0.01<-cant.detect2$`LS<0,01`
```

```
fouri0.05<-cant.detect2$`LS<0,05`
fouriNE<-cant.detect2$LS
length(fouri0.01)
length(fouri0.05)
length(fouriNE)

x11()
par(mfrow=c(2,3))
hist(wwz0.01, xlim=c(0,1),ylim=c(0,50))
hist(wwz0.05, xlim=c(0,1),ylim=c(0,50))
hist(wwzNE, xlim=c(0,1),ylim=c(0,50))
hist(fouri0.01, xlim=c(0,1),ylim=c(0,50))
hist(fouri0.05, xlim=c(0,1),ylim=c(0,50))
hist(fouriNE, xlim=c(0,1),ylim=c(0,50))

#diseno<-read.table(file.choose(), header = TRUE) #diseno
diseno<-cant.detect2[,1:7]

head(diseno) #son 64
names(diseno) #[1] "ModeloOrig" "X1"   "X2"  "X3"  "X4"  "X5" "X6" [1] "...1"
#[3] "Pp mayor o menor que Porb"     "Amplitud de la pulsación"
#[5] "Con 2 pulsaciones o con 1"     "Time effect"
#[7] "Con o sin P cuasi irregulares
dim(diseno) #[1] 64  7
names(diseno)<-c("ModeloOrig","Batido","Relacion.Pp.Po","AmpPuls", "CantPuls","TLE", "Pquasi")



Batido<-as.factor(diseno$Batido)
Relacion.Pp.Po<-as.factor(diseno$Relacion.Pp.Po)
AmpPuls<-as.factor(diseno$AmpPuls)
CantPuls<-as.factor(diseno$CantPuls)
TLE<-as.factor(diseno$TLE)
Pquasi<-as.factor(diseno$Pquasi)

diseno.df<-data.frame(cbind(Batido,Relacion.Pp.Po,AmpPuls,CantPuls,TLE,Pquasi,wwz0.01))

sim.aov<-aov(wwz0.01~Batido*Relacion.Pp.Po*AmpPuls*CantPuls*TLE*Pquasi)
summary(sim.aov)
x11()
DanielPlot(sim.aov)
abline(h=0)
abline(v=0)
#summary.aov(sim.aov)
sim2.aov<-aov(wwz0.01~Batido+Relacion.Pp.Po+AmpPuls+CantPuls+TLE+Pquasi+Relacion.Pp.Po:TLE+
Relacion.Pp.Po:Pquasi+AmpPuls:TLE+Relacion.Pp.Po:AmpPuls:TLE+
Relacion.Pp.Po:TLE:Pquasi+AmpPuls:TLE:Pquasi)
summary(sim2.aov)
```

```
sim3.aov<-aov(wwz0.01~Relacion.Pp.Po+AmpPuls+CantPuls+Relacion.Pp.Po:TLE+
Relacion.Pp.Po:Pquasi+AmpPuls:TLE+Relacion.Pp.Po:AmpPuls:TLE+Relacion.Pp.Po:TLE:Pquasi
+AmpPuls:TLE:Pquasi)
summary(sim3.aov)
x11()


qqnorm(sim3.aov$effects)
x11()
par(mfrow=c(1,3))
interaction.plot(TLE,Relacion.Pp.Po,wwz0.01)
interaction.plot(Relacion.Pp.Po,Pquasi,wwz0.01)
interaction.plot(AmpPuls,TLE,wwz0.01)



# FOURIER

simfu.aov<-aov(fouri0.01~Batido*Relacion.Pp.Po*AmpPuls*CantPuls*TLE*Pquasi)
summary(simfu.aov)
x11()
DanielPlot(simfu.aov)
abline(h=0)
abline(v=0)
#summary.aov(sim.aov)
simfu2.aov<-aov(fouri0.01~Batido+Relacion.Pp.Po+AmpPuls+CantPuls+TLE + Pquasi +
 Relacion.Pp.Po:TLE+Batido:Pquasi+Relacion.Pp.Po:CantPuls:TLE+
Relacion.Pp.Po:AmpPuls:Pquasi+Relacion.Pp.Po:TLE:Pquasi)
summary(simfu2.aov)

simfu3.aov<-aov(fouri0.01~CantPuls+TLE + Pquasi + Relacion.Pp.Po:TLE+Batido:Pquasi+
Relacion.Pp.Po:CantPuls:TLE+Relacion.Pp.Po:AmpPuls:Pquasi+
Relacion.Pp.Po:TLE:Pquasi)
summary(simfu3.aov)



#DanielPlot(simfu3.aov)
x11()
qqnorm(simfu3.aov$effects)
x11()
par(mfrow=c(1,2))
interaction.plot(Relacion.Pp.Po,Pquasi,fouri0.01)
interaction.plot(Pquasi,Batido,fouri0.01)
```

Apéndice B

Tablas & Gráficos

-

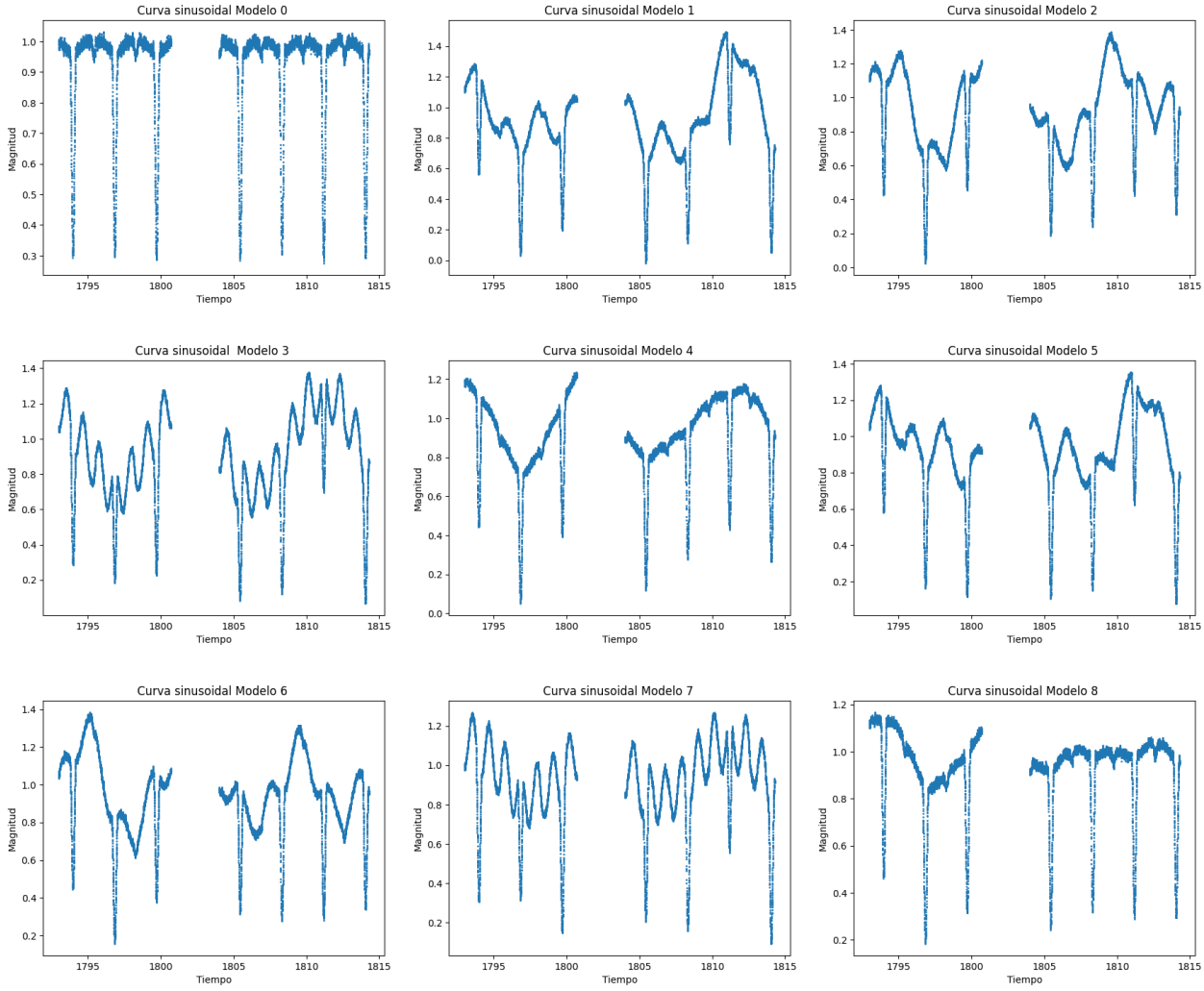


Figura B.1: Curvas de luz de estrella para los modelos No. 0 to No. 8.

-

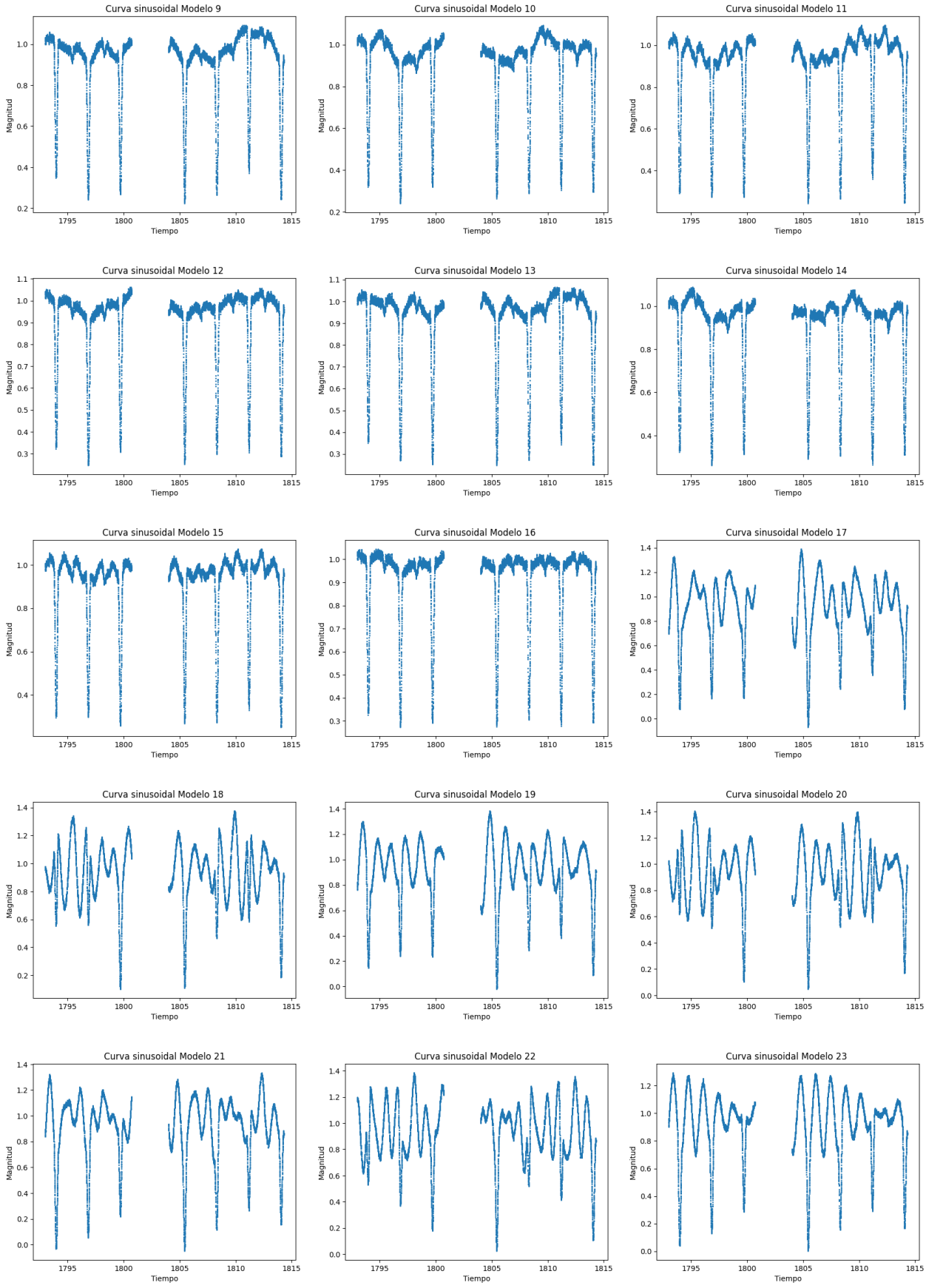


Figura B.2: Curvas de luz de estrella para los modelos No. 9 to No. 23.

-

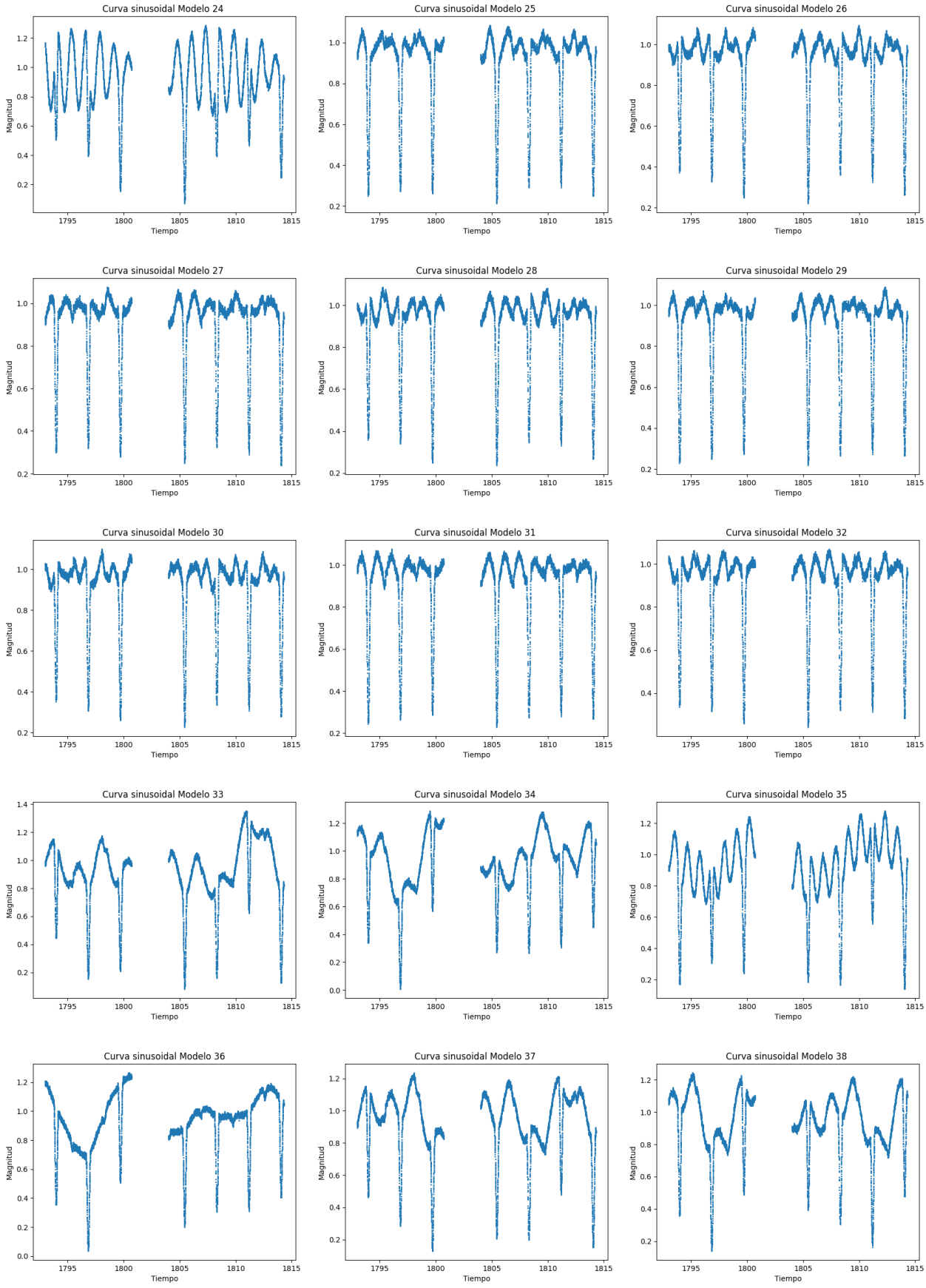


Figura B.3: Curvas de luz de estrella para los modelos No. 24 to No. 38.

-

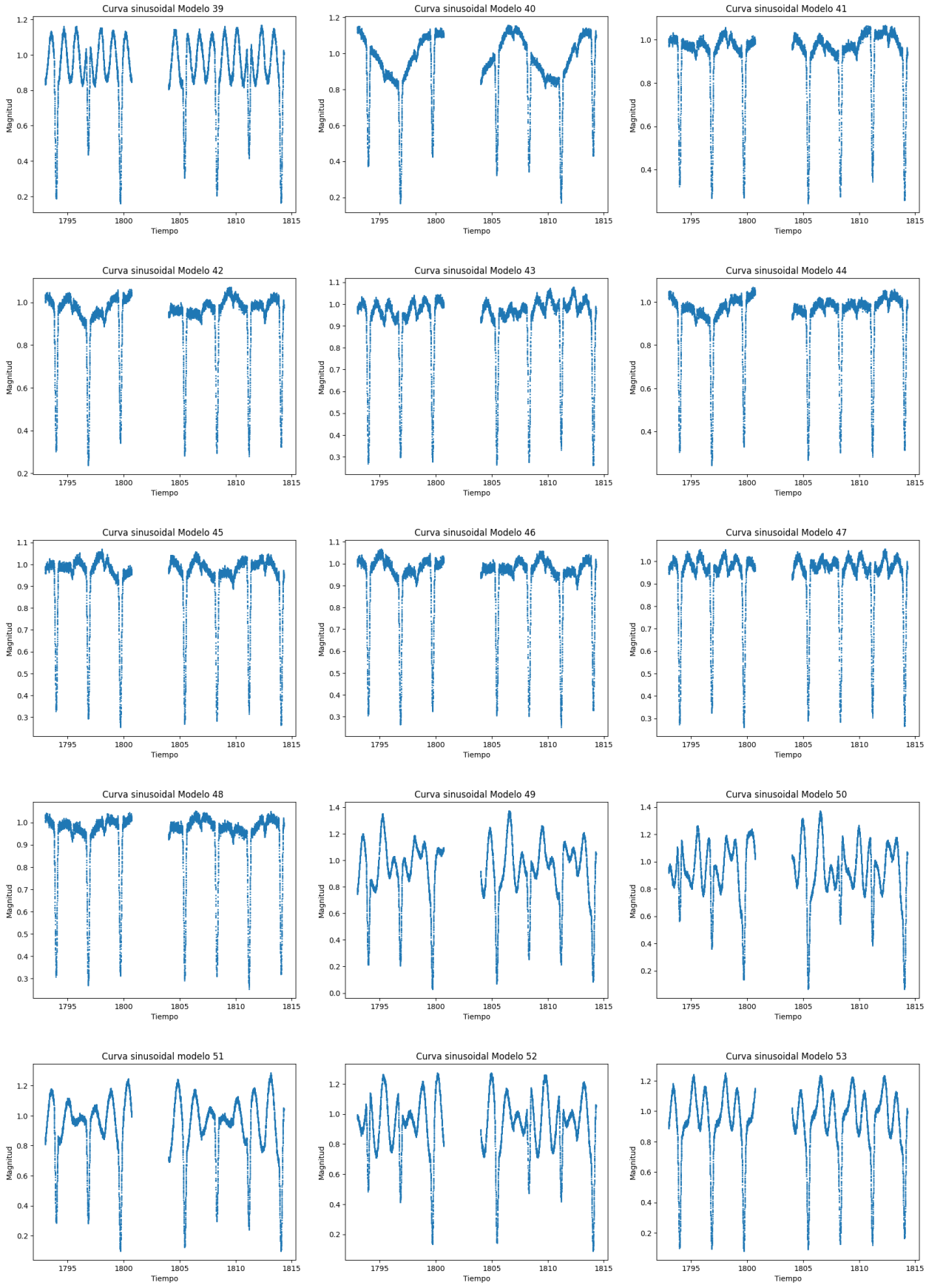


Figura B.4: Curvas de luz de estrella para los modelos No. 39 to No. 53.

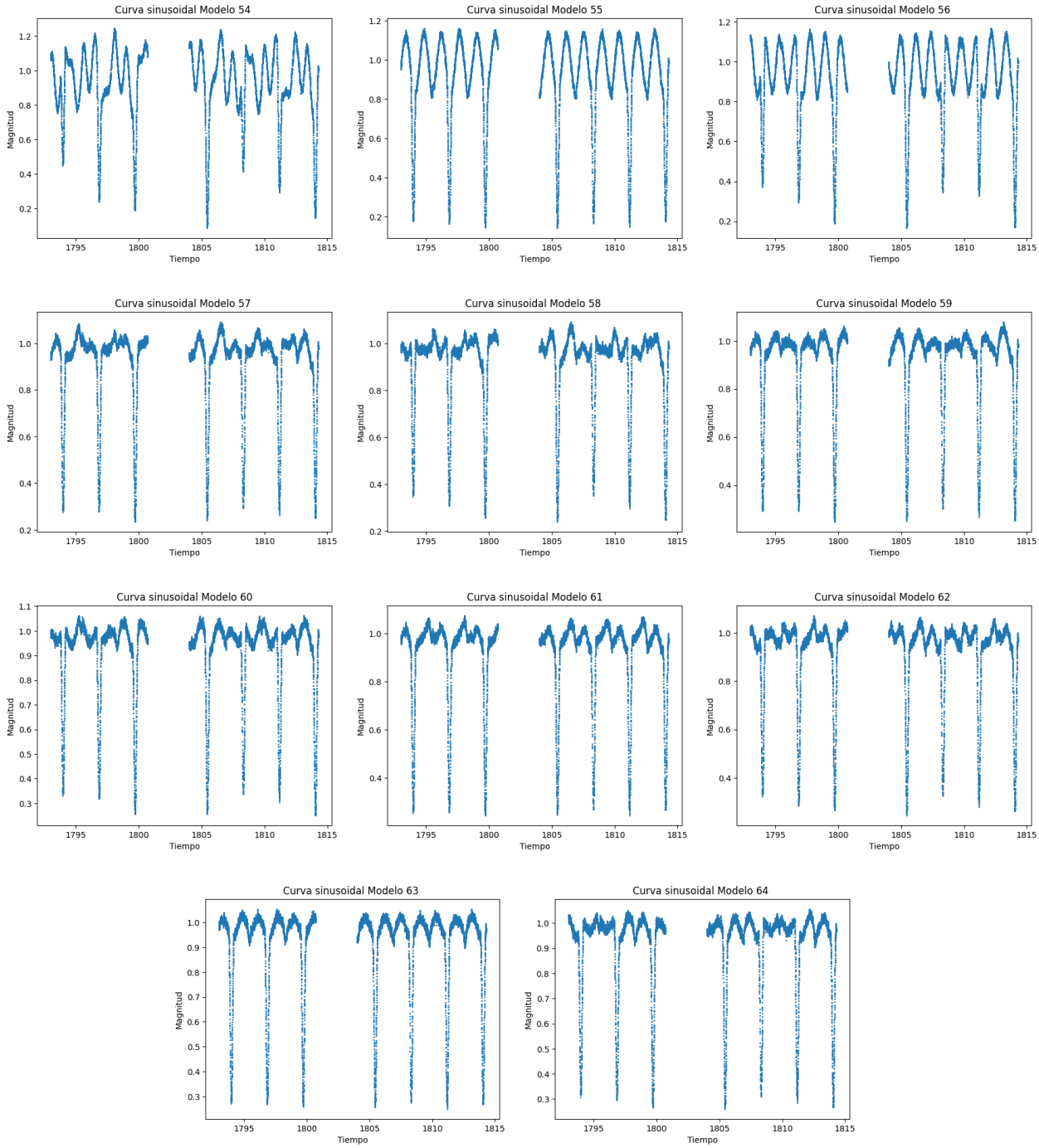


Figura B.5: Curvas de luz de estrella para los modelos No. 54 to No. 64.

Cuadro B.1: Cantidad de frecuencias encontrada con los métodos Lomb-Scargle y WWZ.

Periodo	N° Frecuencia	N° Modelos generados con esa frecuencia	WWZ Frecuencias halladas	Lomb-Scargle Frecuencias halladas
2.87	f_0	64	64	63
10	f_1	16	10	12
8.96	f_2	8	5	7
3e	f_3	16	11	7
7.7	f_4	8	5	4
7	f_5	16	13	12
4.86	f_6	8	7	8
4.42	f_7	8	7	8
2.78	f_8	8	0	2
2.12	f_9	8	8	8
2.06	f_{10}	8	6	7
2.03	f_{11}	8	4	7
1.6	f_{12}	16	4	15
$\sqrt{2}$	f_{13}	16	4	7
1.32	f_{14}	8	0	6
1.27	f_{15}	8	1	6
1.2	f_{16}	16	13	15
0.94	f_{17}	8	0	2
0.84	f_{18}	8	1	4

Cuadro B.2: Listado de los números de los modelos en los que Lomb-Scargle (respectivamente WWZ) no encontró las frecuencias o períodos presentes en la curva de luz.

Periodo	N° Frecuencia	N° Modelos generados con esa frecuencia	Lomb-Scargle Modelos no encontrado	WWZ Modelos no encontrado
2.87	f_0	64	21	...
10	f_1	16	1 - 3 - 9 - 10	1 - 2 - 3 - 9 - 41
8.96	f_2	8	11	11 - 13 - 15
3e	f_3	16	5 - 7 - 9 - 11 - 13 - 15 - 35 - 41 - 43	3 - 7 - 9 - 11 - 43
7.7	f_4	8	4 - 12 - 14 - 16	4 - 12 - 16
7	f_5	16	10 - 12 - 16 - 42	12 - 16 - 44
4.86	f_6	8	...	14
4.42	f_7	8	...	13
2.78	f_8	8	25 - 29 - 49 - 53 - 57 - 61	17 - 21 - 25 - 29 - 49 - 53 - 57 - 61
2.12	f_9	8	...	...
2.06	f_{10}	8	18	18 - 30
2.03	f_{11}	8	6	10 - 14 - 42 - 46
1.6	f_{12}	16	17	17 - 19 - 25 - 26 - 27 - 28 - 49 - 51 - 57 - 58 - 59 - 60
$\sqrt{2}$	f_{13}	16	23 - 25 - 27 - 29 - 31 - 57 - 59 - 61 - 63	17 - 21 - 25 - 27 - 29 - 31 - 49 - 53 - 59 - 61 - 63
1.32	f_{14}	8	26 - 28	18 - 20 - 22 - 24 - 26 - 28 - 30 -32
1.27	f_{15}	8	21 - 25	19 - 21 - 23 - 25 - 27 - 29 - 31
1.2	f_{16}	16	30	58 - 62 - 64
0.94	f_{17}	8	17 - 21 - 25 - 29 - 57 -61	17 - 21 - 25 - 29 - 49 - 53 - 57 - 61
0.84	f_{18}	8	18 - 30 - 58 -62	18 - 22 - 26 - 30 - 50 - 58 - 62

Cuadro B.3: Resultados del análisis wavelet que informan los períodos y armónicos significativos. *El aterisco (*) en comentario significa que la frecuencia se encuentra con un error menor de 0.05 y mayor a 0.01. la frecuencias sin aterisco en la columna del comentario significa que la frecuencia se encuentra con error menor a 0.01.*

Modelo	**Lomb-Scargle [Dias]**		**WWZ [Dias]**		**Comentarios**	
	Frecuencia	**Periodo**	**Frecuencia**	**Periodo**	**Lomb-Sacargle**	**WWZ**
N°0	0.3483	2.871088	0.347	2.881844	f_0	f_0
2.87	0.6974	1.433897	0.696	1.436782	$2f_0$	$2f_0$
	1.0458	0.956206	1.042	0.959693	$3f_0$	$3f_0$
N°1	0.1073	9.319664	0.107	9.345794	f_2	f_2
Periodo	...	...	0.167	5.988024		f_3*
$3e$ - 2.12 - 4.42 - 8.96 - 10	0.4690	2.132196	0.466	2.145923	f_9	f_9
Frecuencia	0.3485	2.869440	0.350	2.857143	f_0	
0.123 - 0.472 - 0.226 - 0.112 -0.1	0.2148	4.655493	0.225	4.444444	f_7*	f_7
	0.6967	1.435338	0.701	1.426534	$2f_0$	$2f_0$
	1.0469	0.955201	1.038	0.963391	$3f_0$	$3f_0$
	0.4727	2.115507	...	...	f_9	
	0,1380	7.246377	...	...	f_3*	
	0.3604	2.774695	...	...	f_0	
N°2	0.1174	8.517888	0.117	8.547009	f_4*	f_4*
Periodo	0.2175	4.597701	0.201	4.975124	f_6*	f_6
7 - 2.03 - 4.86 - 7.7 - 10	0.6981	1.432460	0.698	1.432665	$2f_0$	$2f_0$
Frecuencia	0.4410	2.267574	0.419	2.386635		
0.143 - 0.492 - 0.206 - 0.130 - 0.1	0.3432	2.913753	0.344	2.906977	f_0	f_0
	0.4907	2.037905	0.495	2.020202	f_{11}	f_{11}
	1.0462	0.955840	1.045	0.956938	$3f_0$	$3f_0$
	0.2699	3.705076	0.279	3.584229	$2f_5$*	$2f_5$
	0.0780	12.820513	...	...	f_1*	
N°3	0.1066	9.380863	0.107	9.345794	f_2	f_2

Continúa en la siguiente página

Modelo	**Lomb-Scargle [Dias]**		**WWZ [Dias]**		**Comentarios**	
	Frecuencia	**Periodo**	**Frecuencia**	**Periodo**	**Lomb-Sacargle**	**WWZ**
Periodo	0.9039	1.106317	0.897	1.114827	?	?
$3e$ - 8.96 - 10	···	···	0.175	5.714286		?
Frecuencia	0.6973	1.434103	0.703	1.422475	$2f_0$	$2f_0$
0.122 - 0.112 - 0.1	0.3476	2.876870	0.348	2.873563	f_0	f_0
	···	···	0.220	4.545455		$2f_2$
	···	···	0.439	2.277904		$4f_4$
	1.0455	0.956480	···	···	$3f_0$	$3f_0$
	0.8869	1.127523	···	···	$8f_2$?	
	0.1286	7.776050	···	···	f_3	
	···	···	0.532	1.879699		$5f_2$
N°4	0.1071	9.337068	0.107	9.345794	f_1	f_1
Periodo	0.6973	1.434103	0.698	1.432665	$2f_0$	$2f_0$
7 - 7.70 - 10	0.3465	2.886003	0.345	2.898551	f_0	f_0
Frecuencia	···	···	0.169	5.917160		f_5* o $f_0/2$?
0.143 - 0.130 - 0.1	···	···	0.222	4.504505		$2f_1*$
	1.0456	0.956389	1.041	0.960615	$3f_0$	$3f_0$
	···	···	0.423	2.364066		$4f_1*$
	0.1522	6.570302	···	···	f_5	
N°5	0.1165	8.583691	0.116	8.620690	f_2	f_2
Periodo	0.3496	2.860412	0.349	2.865330	f_0	f_0
$3e$ - 2.12 - 4.42 - 8.96	0.4714	2.121341	0.469	2.132196	f_9	f_9
Frecuencia	0.2186	4.574565	0.223	4.484305	f_7	f_7
0.123 - 0.472 - 0.226 - 0.112	···	···	0.167	5.988024		f_3
	0.6971	1.434514	0.699	1.430615	$2f_0$	
	1.0464	0.955657	1.041	0.960615	$3f_0$	$3f_0$
	0.0743	13.458950	···	···		
N°6	0.1340	7.462687	0.133	7.518797	f_4	f_4

Continúa en la siguiente página

Modelo	Lomb-Scargle [Dias]		WWZ [Dias]		Comentarios	
	Frecuencia	**Periodo**	**Frecuencia**	**Periodo**	**Lomb-Sacargle**	**WWZ**
Periodo	0.2166	4.616805	0.205	4.878049	f_6*	f_6
7 - 2.03 - 4.86 - 7.70	0.6978	1.433075	0.698	1.432665	$2f_0$	$2f_0$
Frecuencia	0.3388	2.951594	0.344	2.906977	f_0	f_0
0.143 - 0.493 - 0.206 - 0.130	0.4222	2.368546	0.418	2.392344		
	0.2794	3.579098	0.277	3.610108	$f_5/2$	$f_5/2$
	···	···	0.489	2.044990		f_{11}
	1.0454	0.956572	1.045	0.956938	$3f_0$	$3f_0$
	0.0940	10.638298	···	···		
	0.5626	1.777462	···	···		
N°7	0.1130	8.849558	0.114	8.771930	f_2	f_2
Periodo	0.9031	1.107297	0.899	1.112347		
$3e$ - 8.96	0.6977	1.433281	0.701	1.426534	$2f_0$	$2f_0$
Frecuencia	0.3481	2.872738	0.348	2.873563	f_0	f_0
0.123 - 0.112	···	···	0.178	5.617978		
	···	···	0.427	2.341920		
	1.0452	0.956755	···	···	$3f_0$	
	0.8845	1.130582	···	···		
N°8	0.3484	2.870264	0.346	2.890173	f_0	
Periodo	0.6979	1.432870	0.697	1.434720	$2f_0$	
7 - 7.7	···	···	0.118	8.474576		f_4*
Frecuencia	···	···	0.161	6.211180		f_5*
0.143 - 0.130	···	···	0.224	4.464286		
	1.0447	0.957213	1.041	0.960615	$3f_0$	$3f_0$
	0.1438	6.954103	···	···	f_5	
	0.1095	9.132420	···	···	f_4*	
	0.1673	5.977286	···	···	f_5	
N°9	0.3489	2.866151	0.348	2.873563	f_0	f_0

Continúa en la siguiente página

Modelo	Lomb-Scargle [Dias]		WWZ [Dias]		Comentarios	
	Frecuencia	**Periodo**	**Frecuencia**	**Periodo**	**Lomb-Sacargle**	**WWZ**
Periodo	0.6974	1.433897	0.697	1.434720	$2f_0$	$2f_0$
$3e$ - 2.12 - 4.42 - 8.96 - 10	0.1066	9.380863	0.110	9.090909	$3f_0$	$3f_0$
Frecuencia	1.0456	0.956389	1.041	0.960615	f_2	f_2
0.123 - 0.472 - 0.226 - 0.112 -0.1	0.4761	2.100399	0.460	2.173913	f_9	f_9*
	0.2166	4.616805	0.224	4.464286	f_7	f_7
N°10	0.3479	2.874389	0.347	2.881844	f_0	f_0
Periodo	0.6977	1.433281	0.697	1.434720	$2f_0$	$2f_0$
7 - 2.03 - 4.86 - 7.7 - 10	0.1180	8.474576	0.119	8.403361	f_4*	f_4*
Frecuencia	1.0454	0.956572	1.042	0.959693	$3f_0$	$3f_0$
0.143 - 0.493 - 0.206 - 0.130 - 0.1	···	···	0.284	3.521127		$f_5/2$
	0.2150	4.651163	0.223	4.484305	f_6	$f_6{}^*$
	0.4915	2.034588	···	···	f_{11}	
	1.2362	0.808931	···	···		
N°11	0.3489	2.866151	0.348	2.873563	f_0	f_0
Periodo	0.6975	1.433692	0.697	1.434720	$2f_0$	$2f_0$
$3e$ - 8.96 - 10	0.1059	9.442871	0.108	9.259259	f_{11}	f_{11}
Frecuencia	1.0468	0.955292	1.043	0.958773	$3f_0$	$3f_0$
0.123 - 0.112 - 0.1	···	···	0.892	1.121076		
	···	···	0.526	1.901141		
	0.9055	1.104362	···	···		
N°12	0.3486	2.868617	0.347	2.881844	f_0	f_0
Periodo	0.6976	1.433486	0.697	1.434720	$2f_0$	$2f_0$
7 - 7.70 - 10	1.0455	0.956480	1.041	0.960615	$3f_0$	$3f_0$
Frecuencia	0.1062	9.416196	0.109	9.174312	f_1	f_1
0.143 - 0.130 - 0.1	···	···	0.226	4.424779		$2f_1$
N°13	0.3487	2.867795	0.348	2.873563	f_0	f_0
Periodo	0.6974	1.433897	0.697	1.434720	$2f_0$	$2f_0$

Continúa en la siguiente página

Modelo	Lomb-Scargle [Dias]		WWZ [Dias]		Comentarios	
	Frecuencia	**Periodo**	**Frecuencia**	**Periodo**	**Lomb-Sacargle**	**WWZ**
$3e$ - 2.12 - 4.42 - 8.96	1.0457	0.956297	1.042	0.959693	$3f_0$	$3f_0$
Frecuencia	···	···	0.124	8.064516		f_3
0.123 - 0.472 -0.206 - 0.112	0.4745	2.107482	0.463	2.159827	f_9	f_9
	0.1149	8.703220	···	···	f_2	
	0.2202	4.541326	···	···	f_6	
N°14	0.3476	2.876870	0.347	2.881844	f_0	f_0
Periodo	0.6977	1.433281	0.697	1.434720	$2f_0$	$2f_0$
7 - 2.03 - 4.86 - 7.70	1.0455	0.956480	1.042	0.959693	$3f_0$	$3f_0$
Frecuencia	···	···	0.282	3.546099		$2f_5$
0,493 - 0,206 - 0,143 - 0,130	···	···	0.133	7.518797		f_4
	0.1389	7.199424	···	···	f_5	
	0.4925	2.030457	···	···	f_{11}	
	0.2079	4.810005	···	···	f_6	
N°15	0.3487	2.867795	0.348	2.873563	f_0	f_0
Periodo	0.6975	1.433692	0.697	1.434720	$2f_0$	$2f_0$
$3e$ - 8.96	1.0469	0.955201	1.043	0.958773	$3f_0$	$3f_0$
Frecuencia	0.9047	1.105339	0.893	1.119821		
0.123 - 0.112	0.1126	8.880995	···	···	f_2	
	···	···	0.120	8.333333		f_3
	···	···	0.526	1.901141		
N°16	0.3484	2.870264	0.347	2.881844	f_0	f_0
Periodo	0.6976	1.433486	0.696	1.436782	$2f_0$	$2f_0$
7 - 7.7	1.0456	0.956389	1.041	0.960615	$3f_0$	$3f_0$
Frecuencia	1.2774	0.782840	···	···		
0.143 - 0.130						
N°17	0.3535	2.828854	0.353	2.832861	f_0 o f_8	f_0
Periodo	0.6839	1.462202	0.683	1.464129	$2f_0$	$2f_0$

Continúa en la siguiente página

Modelo	Lomb-Scargle [Dias]		WWZ [Dias]		Comentarios	
	Frecuencia	**Periodo**	**Frecuencia**	**Periodo**	**Lomb-Sacargle**	**WWZ**
$\sqrt{2}$ - 0.94 - 2.78- 1.27 - 1.6	0.7950	1.257862	0.771	1.297017	f_{15}	$f_{15}*$
Frecuencia	1.0524	0.950209	1.048	0.954198	$3f_0$	$3f_0$
0.707 - 1.064 - 0.485 - 0.758 - 0.625	...	...	0.288	3.472222		
	0.7056	1.417234	...	...		
	0.6235	1.603849	...	...		
N°18	0.8308	1.203659	...	...	f_{16}	
Periodo	0.3473	2.879355	0.345	2.898551	f_0	f_0
1.2 - 0.84 - 2.06 - 1.32 - 1.6	0.6249	1.600256	0.620	1.612903	f_{12}	f_{12}
Frecuencia	0.7423	1.347164	...	...	$f_{14}*$	
0.833 - 0.113 - 0.485 - 0.758 -0.625	1.0479	0.954290	1.043	0.958773	$3f_0$	$3f_0$
	0.8016	1.247505	0.812	1.231527	$f_{16}*$	$f_{16}*$
	0.9049	1.105094	...	...		
	0.6923	1.444460	...	...	$2f_0$	
N°19	0.7033	1.421868	0.702	1.424501	f_{13}	f_{13}
Periodo	0.3479	2.874389	0.348	2.873563	f_0	f_0
$\sqrt{2}$ - 1.27 - 1.6	...	...	0.555	1.801802		?
Frecuencia	1.0466	0.955475	1.047	0.955110	$3f_0$	$3f_0$
0.707 - 0.787 - 0.625	0.6194	1.614466	...	...	f_{12}	
	0.7919	1.262786	...	...	f_{15}	
	0.6825	1.465201	...	...	$2f_0$	
	0.7300	1.369863	...	...	$f_{13}*$	
	0.6293	1.589067	...	...	f_{12}	
N°20	0.8317	1.202357	0.820	1.219512	f_{16}	f_{16}
Periodo	0.3474	2.878526	0.345	2.898551	f_0	f_0
1.2 - 1.32 - 1.6	0.6245	1.601281	0.620	1.612903	f_{12}	f_{12}
Frecuencia	1.0459	0.956114	1.042	0.959693	$3f_0$	$3f_0$
- 0.758 - 0.625	0.7419	1.347891	...	...	$f_{14}*$	

Continúa en la siguiente página

Modelo	Lomb-Scargle [Dias]		WWZ [Dias]		Comentarios	
	Frecuencia	**Periodo**	**Frecuencia**	**Periodo**	**Lomb-Sacargle**	**WWZ**
	0.8997	1.111482	···	···	?	
	0.6868	1.456028	···	···	$2f_0$	
N°21	0.3546	2.820079	0.353	2.832861	f_8	f_0
Periodo	0.6976	1.433486	0.698	1.432665	$2f_0$	$2f_0$
$\sqrt{2}$ - 0.94 - 2.78 - 1.27	1.0514	0.951113	1.045	0.956938	$3f_0$	$3f_0$
Frecuencia	···	···	0.287	3.484321		?
0.707 - 1.064 - 0.360 - 0.348	···	···	0.528	1.893939		?
	0.7894	1.266785	···	···	f_{15}	
	0.7014	1.425720	···	···	f_{13}	
N°22	0.8365	1.195457	0.816	1.225490	f_{16}	$f_{16}*$
Periodo	0.3463	2.887670	0.345	2.898551	f_0	f_0
1.2 - 0.84 - 2.06 - 1.32	0.4861	2.057190	0.486	2.057613	f_{10}	f_{10}
Frecuencia	1.1767	0.849834	1.139	0.877963	$f_{18}*$	¿$f_{18}*$?
0.833 - 1.190 - 0.485 - 0.758	1.0458	0.956206	···	···	$3f_0$	
	0.7715	1.296176	···	···	$f_{14}*$	
	0.7011	1.426330	···	···	$2f_0$	
	0.8441	1.184694	···	···	$f_{18}*$	
	0.7723	1.294834	···	···	$f_{14}*$	
N°23	0.7008	1.426941	0.704	1.420455	$2f_0$	f_{13}
Periodo	0.3490	2.865330	0.348	2.873563	f_0	f_0
$\sqrt{2}$ - 1.27	1.0463	0.955749	1.042	0.959693	$3f_0$	$3f_0$
Frecuencia	0.7901	1.265663	···	···	f_{15}	
0.707 - 0.787	0.6936	1.441753	···	···	$2f_0$	
N°24	0.8325	1.201201	0.812	1.231527	f_{16}	$f_{16}*$
Periodo	0.3475	2.877698	0.345	2.898551	f_0	f_0
1.2 - 1.32	1.0449	0.957029	1.033	0.968054	$3f_0$	$3f_0$
Frecuencia	0.7399	1.351534	···	···	$f_{14}*$	

Continúa en la siguiente página

Modelo	Lomb-Scargle [Dias]		WWZ [Dias]		Comentarios	
	Frecuencia	**Periodo**	**Frecuencia**	**Periodo**	**Lomb-Sacargle**	**WWZ**
0.833 - 0.758	0.6871	1.455392	···	···	$2f_0$	
N°25	0.3499	2.857959	0.349	2.865330	f_0	f_0
Periodo	0.6976	1.433486	0.696	1.436782	$2f_0$	$2f_0$
$\sqrt{2}$ - 0.94 - 2.78 - 1.27 - 1.6	1.0476	0.954563	1.043	0.958773	$3f_0$	$3f_0$
Frecuencia	···	···	0.287	3.484321		?
0.707 - 1.064 - 0.485 - 0.758 - 0.625	···	···	0.531	1.883239		?
	0.6206	1.611344	···	···		
N°26	0.3477	2.876043	0.347	2.881844	f_0	f_0
Periodo	0.6991	1.430411	0.698	1.432665	$2f_0$	$2f_0$
1.2 - 0.84 - 2.06 - 1.32 - 1.6	1.0468	0.955292	1.045	0.956938	$3f_0$	$3f_0$
Frecuencia	0.4840	2.066116	0.491	2.036660	f_{10}	f_{10}
0.833 - 1.190 - 0.485 - 0.758 - 0.625	0.8291	1.206127	0.848	1.179245	f_{16}	f_{16*}
	1.1062	0.903996	···	···		
	1.2721	0.786102	···	···		
	0.6296	1.588310	···	···	f_{12}	
	1.2276	0.814598	···	···	f_{18*}	
N°27	0.3482	2.871913	0.347	2.881844	f_0	f_0
Periodo	0.6981	1.432460	0.697	1.434720	$2f_0$	$2f_0$
$\sqrt{2}$ - 1.27 - 1.6	1.0468	0.955292	1.043	0.958773	$3f_0$	$3f_0$
Frecuencia	···	···	0.285	3.508772		?
0.707 - 0.787 - 0.625	···	···	0.529	1.890359		?
	0.6244	1.601537	···	···	f_{12}	
	0.7961	1.256124	···	···	f_{15}	
	0.4372	2.287283	···	···	?	
N°28	0.3478	2.875216	0.347	2.881844	f_0	f_0
Periodo	1.0459	0.956114	1.042	0.959693	$3f_0$	$3f_0$
1.2 - 1.32 - 1.6	0.6999	1.428776	0.699	1.430615	$2f_0$	$2f_0$

Continúa en la siguiente página

Modelo	Lomb-Scargle [Dias]		WWZ [Dias]		Comentarios	
	Frecuencia	**Periodo**	**Frecuencia**	**Periodo**	**Lomb-Sacargle**	**WWZ**
Frecuencia	0.8302	1.204529	0.842	1.187648	f_{16}	$f16$
0.833 - 0.758 - 0.625	0.6299	1.587554	···	···	f_{12}	
	···	···	0.534	1.872659		?
N°29	0.3502	2.855511	0.349	2.865330	f_0	f_0
Periodo	0.6976	1.433486	0.696	1.436782	$2f_0$	$2f_0$
$\sqrt{2}$ - 0.94 - 2.78 - 1.27	1.0470	0.955110	1.042	0.959693	$3f_0$	$3f_0$
Frecuencia	···	···	0.286	3.496503		?
0.707 - 1.064 - 0.360 - 0.787	0.7920	1.262626	···	···	f_{15}	
N°30	0.3478	2.875216	0.347	2.881844	f_0	f_0
Periodo	0.6973	1.434103	0.697	1.434720	$2f_0$	$2f_0$
1.2 - 0.84 - 2.06 - 1.32	1.0463	0.955749	1.044	0.957854	$3f_0$	$3f_0$
Frecuencia	0.7606	1.314752	···	···	f_{14}	
0.833 - 1.190 - 0.485 - 0.758	···	···	0.849	1.177856		f_{16}*
	0.4859	2.058037	0.489	2.044990	f_{10}	
N°31	0.6985	1.431639	0.697	1.434720	$2f_0$	$2f_0$
Periodo	0.3487	2.867795	0.348	2.873563	f_0	f_0
$\sqrt{2}$ - 1.27	1.0460	0.956023	1.042	0.959693	$3f_0$	$3f_0$
Frecuencia	0.7923	1.262148	···	···	f_{15}	
0.707 - 0.787	1.2774	0.782840	···	···	?	
N°32	0.3478	2.875216	0.347	2.881844	f_0	f_0
Periodo	0.6979	1.432870	0.699	1.430615	$2f_0$	$2f_0$
1.2 - 1.32	1.0451	0.956846	1.041	0.960615	$3f_0$	$3f_0$
Frecuencia	0.8304	1.204239	0.842	1.187648	f_{16}	f_{16}
0.833 - 0.758	0.7597	1.316309	···	···	f_{14}	
N°33	0.1024	9.765625	0.103	9.708738	f_1	f_1
Periodo	0.3495	2.861230	0.349	2.865330	f_0	f_0

Continúa en la siguiente página

Modelo	Lomb-Scargle [Dias]		WWZ [Dias]		Comentarios	
	Frecuencia	**Periodo**	**Frecuencia**	**Periodo**	**Lomb-Sacargle**	**WWZ**
$3e$ - 2.12 - 4.42 - 10	0.4729	2.114612	0.468	2.136752	f_9	f_9
Frecuencia	···	···	0.154	6.493506		f_3*
0.123 - 0.472 - 0.226 - 0.1	0.2145	4.662005	0.220	4.545455	f_7*	f_7
	0.6967	1.435338	0.699	1.430615	$2f_0$	$2f_0$
	1.0469	0.955201	1.042	0.959693	$3f_0$	$3f_0$
	0.1329	7.524454	···	···	f_3*	
	0.3641	2.746498	···	···	f_0*	
N°34	0.1110	9.009009	0.111	9.009009	f_1*	f_1*
Periodo	0.2144	4.664179	0.206	4.854369	f_6	f_6
7 - 2.03 - 4.86 - 10	0.6979	1.432870	0.696	1.436782	$2f_0$	$2f_0$
Frecuencia	0.4911	2.036245	0.489	2.044990	f_{11}	f_{11}
0.143 - 0.493 - 0.206 - 0.1	0.3435	2.911208	0.340	2.941176	f_0	f_0
	1.0455	0.956480	1.044	0.957854	$3f_0$	$3f_0$
	···	···	0.422	2.369668		$2f_6*$
	0.1443	6.930007	···	···	f_5	
	0.2161	4.627487	···	···	f_6*^*	
	0.2677	3.735525	0.282	3.546099	$2f_5*$	$2f_5$
N°35	0.9035	1.106807	0.899	1.112347	$9f_1$	$9f_1$
Periodo	0.1008	9.920635	0.101	9.900990	f_1	f_1
$3e$ - 10	0.3481	2.872738	0.347	2.881844	f_0	f_0
Frecuencia	0.6975	1.433692	0.700	1.428571	$2f_0$	$2f_0$
0.123 - 0.1	1.0452	0.956755	···	···	$3f_0$	
	0.8867	1.127777	···	···	$9f_1*$	
	···	···	0.165	6.060606		f_3*
	···	···	0.226	4.424779		$2f_3*$
N°36	0.0960	10.416667	0.096	10.416667	f_1	f_1
Periodo	0.1412	7.082153	0.150	6.666667	f_5	f_5

Continúa en la siguiente página

Modelo	Lomb-Scargle [Dias]		WWZ [Dias]		Comentarios	
	Frecuencia	**Periodo**	**Frecuencia**	**Periodo**	**Lomb-Sacargle**	**WWZ**
7 - 10	···	···	0.216	4.629630		$2f_1$
Frecuencia	0.6976	1.433486	0.696	1.436782	$2f_0$	$2f_0$
0.143 - 0.1	0.3494	2.862049	0.341	2.932551	f_0	f_0
	1.0455	0.956480	1.039	0.962464	$3f_0$	$3f_0$
	···	···	0.417	2.398082		$3f_5$
	0.1262	7.923930	···	···	f_5*	
N°37	0.3485	2.869440	0.348	2.873563	f_0	f_0
Periodo	0.2158	4.633920	0.213	4.694836	f_7*	f_7*
$3e$ - 2.12 - 4.42	0.4718	2.119542	0.471	2.123142	f_9	f_9
Frecuencia	0.6969	1.434926	0.698	1.432665	$2f_0$	$2f_0$
0.123 - 0.472 - 0.226	0.1187	8.424600	···	···	f_3	
	1.0464	0.955657	1.044	0.957854	$3f_0$	$3f_0$
	0.3563	2.806624	···	···	f_0	
	···	···	0.130	7.692308		f_3
N°38	0.1411	7.087172	0.140	7.142857	f_5	f_5
Periodo	0.6979	1.432870	0.696	1.436782	$2f_0$	$2f_0$
7 - 2.03 - 4.86	0.2799	3.572705	0.278	3.597122	f_5	f_5
Frecuencia	0.4210	2.375297	0.422	2.369668	$2f_6$	$2f_6*$
0.143 - 0.493 - 0.206	1.0456	0.956389	1.043	0.958773	$3f_0$	$3f_0$
	0.5616	1.780627	···	···		
	0.2043	4.894763	0.209	4.784689	f_6	f_6
	0.3423	2.921414	0.342	2.923977	f_0	f_0
	0.4927	2.029633	0.487	2.053388	f_{11}	f_{11}
	0.6358	1.572822	···	···		
N°39	0.9038	1.106439	0.901	1.109878	$7f_3*$	$7f_3*$
Periodo	0.3483	2.871088	0.347	2.881844	f_0	f_0
$3e$	0.6975	1.433692	0.698	1.432665	$2f_0$	$2f_0$

Continúa en la siguiente página

Modelo	Lomb-Scargle [Dias]		WWZ [Dias]		Comentarios	
	Frecuencia	**Periodo**	**Frecuencia**	**Periodo**	**Lomb-Sacargle**	**WWZ**
Frecuencia	1.0452	0.956755	···	···	$3f_0$	
0.123	0.8866	1.127904	···	···	$7f_3*$	
N°40	0.1437	6.958942	0.143	6.993007	f_5	f_5
Periodo	0.6974	1.433897	0.696	1.436782	$2f_0$	$2f_0$
7	0.3482	2.871913	0.345	2.898551	f_0	f_0
Frecuencia	1.0457	0.956297	1.039	0.962464	$3f_0$	$3f_0$
0.143	0.1344	7.440476	···	···	f_5	
	···	···	0.214	4.672897		?
N°41	0.3485	2.869440	0.348	2.873563	f_0	f_0
Periodo	0.6972	1.434309	0.697	1.434720	$2f_0$	$2f_0$
$3e$ - 2.12 - 4.42 - 10	1.0459	0.956114	1.042	0.959693	$3f_0$	$3f_0$
Frecuencia	0.4757	2.102165	0.462	2.164502	f_9	f_9
0.123 - 0.472 - 0.226 - 0.1	0.2160	4.629630	0.218	4.587156	f_7	
	0.1017	9.832842	···	···	f_1	
	···	···	0.136	7.352941		f_3
N°42	0.6976	1.433486	0.697	1.434720	$2f_0$	$2f_0$
Periodo	0.3477	2.876043	0.347	2.881844	f_0	f_0
7 - 2.03 - 4.86 - 10	1.0454	0.956572	1.042	0.959693	$3f_0$	$3f_0$
Frecuencia	0.1113	8.984726	0.112	8.928571	f_1*	f_1*
0.143 - 0.493 - 0.206 - 0.1	0.2126	4.703669	0.221	4.524887	f_6	f_6*
	0.4915	2.034588	···	···	f_{11}	
	···	···	0.283	3.533569		$2f_5$
N°43	0.3485	2.869440	0.347	2.881844	f_0	f_0
Periodo	0.6974	1.433897	0.697	1.434720	$2f_0$	$2f_0$
$3e$ - 10	1.0470	0.955110	1.043	0.958773	$3f_0$	$3f_0$
Frecuencia	0.9052	1.104728	0.892	1.121076	$9f_1$	$9f_1$
0.123 - 0.1	···	···	0.103	9.708738		f_1

Continúa en la siguiente página

Modelo	Lomb-Scargle [Dias]		WWZ [Dias]		Comentarios	
	Frecuencia	**Periodo**	**Frecuencia**	**Periodo**	**Lomb-Sacargle**	**WWZ**
	0.0992	10.080645	···	···	f_1	
N°44	0.3484	2.870264	0.347	2.881844	f_0	f_0
Periodo	0.6974	1.433897	0.696	1.436782	$2f_0$	$2f_0$
7 - 10	1.0455	0.956480	1.041	0.960615	$3f_0$	$3f_0$
Frecuencia	0.1486	6.729475	···	···	f_5	
0.143 - 0.1	0.1005	9.950249	0.101	9.900990	f_1	
	···	···	0.221	4.524887		$2f_1$
N°45	0.3483	2.871088	0.347	2.881844	f_0	f_0
Periodo	0.6972	1.434309	0.696	1.436782	$2f_0$	$2f_0$
3e - 2.12 - 4.42	1.0460	0.956023	1.042	0.959693	$3f_0$	$3f_0$
Frecuencia	0.2167	4.614675	0.207	4.830918	f_7	f_7*
0.123 - 0.472 - 0.226	0.4749	2.105706	0.466	2.145923	f_9	f_9
	0.1187	8.424600	···	···	f_3	
	···	···	0.135	7.407407		f_3
N°46	0.3474	2.878526	0.347	2.881844	f_0	f_0
Periodo	0.6976	1.433486	0.696	1.436782	$2f_0$	$2f_0$
7 - 2.03- 4.86	1.0455	0.956480	1.042	0.959693	$3f_0$	$3f_0$
Frecuencia	0.1420	7.042254	···	···	f_5	
0.143 - 0.493 - 0.206	0.4914	2.035002	···	···	f_{11}	
	···	···	0.282	3.546099		$2f_5$
	···	···	0.551	1.814882		
	0.2086	4.793864	0.222	4.504505	f_6	f_6*
N°47	0.3483	2.871088	0.347	2.881844	f_0	f_0
Periodo	0.6974	1.433897	0.696	1.436782	$2f_0$	$2f_0$
$3e$	1.0471	0.955019	1.043	0.958773	$3f_0$	$3f_0$
Frecuencia	0.9055	1.104362	0.893	1.119821	$7f_3*$	$7f_3*$
0.123	···	···	0.526	1.901141		

Continúa en la siguiente página

Modelo	Lomb-Scargle [Dias]		WWZ [Dias]		Comentarios	
	Frecuencia	**Periodo**	**Frecuencia**	**Periodo**	**Lomb-Sacargle**	**WWZ**
N°48	0.3482	2.871913	0.347	2.881844	f_0	f_0
Periodo	0.6974	1.433897	0.696	1.436782	$2f_0$	$2f_0$
7	1.0456	0.956389	1.041	0.960615	$3f_0$	$3f_0$
Frecuencia	···	···	0.285	3.508772		$2f_5$
0.143	···	···	0.219	4.566210		?
	0.1421	7.037298	···	···	f_5	
N°49	0.3529	2.833664	0.352	2.840909	f_0	f_0
Periodo	0.7086	1.411233	0.695	1.438849	f_{13}	$2f_0$
$\sqrt{2}$ - 0.94 - 2.78 - 1.6	1.0533	0.949397	1.050	0.952381	$3f_0$	$3f_0$
Frecuencia	0.6253	1.599232	···	···	f_{12}	
0.707 - 1.064 - 0.360 - 0.348	0.6863	1.457089	···	···		
	1.0784	0.927300	···	···	f_{17}	
	0.6160	1.623377	···	···	f_{12}	
	···	···	0.549	1.821494		?
	···	···	0.288	3.472222		?
N°50	0.4816	2.076412	0.483	2.070393	f_{10}	f_{10}
Periodo	0.8360	1.196172	0.832	1.201923	f_{16}	f_{16}
1.2 - 0.84 - 2.06 - 1.6	0.3493	2.862869	0.346	2.890173	f_0	f_0
Frecuencia	0.6208	1.610825	···	···	f_{12}	
0.833 - 1.190 - 0.485 - 0.625	1.1779	0.848969	···	···	f_{18}	
	1.0471	0.955019	···	···	$3f_0$	
	0.6971	1.434514	···	···	$2f_0$	
	0.6375	1.568627	0.636	1.572327	f_{12}	f_{12}
	0.4743	2.108370	···	···		
	···	···	1.118	0.894454		?
N°51	0.7057	1.417033	0.700	1.428571	f_{13}	f_{13}
Periodo	0.3480	2.873563	0.347	2.881844	f_0	f_0

Continúa en la siguiente página

Modelo	Lomb-Scargle [Dias]		WWZ [Dias]		Comentarios	
	Frecuencia	**Periodo**	**Frecuencia**	**Periodo**	**Lomb-Sacargle**	**WWZ**
$\sqrt{2}$ - 1.6	···	···	0.548	1.824818		
Frecuencia	1.0459	0.956114	1.048	0.954198	$3f_0$	$3f_0$
0.707 - 0.625	0.6230	1.605136	···	···	f_{12}	
	0.6861	1.457513	···	···	$2f_0$	
N°52	0.8339	1.199185	0.832	1.201923	f_{16}	f_{16}
Periodo	0.3480	2.873563	0.346	2.890173	f_0	f_0
1.2 - 1.6	0.6212	1.609788	···	···	f_{12}	
Frecuencia	1.0469	0.955201	1.038	0.963391	$3f_0$	$3f_0$
0.833 - 0.625	0.6971	1.434514	···	···	$2f_0$	
	0.6347	1.575548	0.635	1.574803	f_{12}	f_{12}*
	0.8383	1.192890	···	···	f_{16}	
N°53	0.3536	2.828054	0.353	2.832861	f_0 0 f_8	f_0
Periodo	0.7015	1.425517	0.700	1.428571	f_{13}	$2f_0$
$\sqrt{2}$ - 0.94 - 2.78	1.0516	0.950932	1.047	0.955110	$3f_0$	$3f_0$
Frecuencia	···	···	0.287	3.484321		?
	···	···	0.527	1.897533		?
	0.7120	1.404494	···	···	f_{13}	
	1.0836	0.922850	···	···	f_{17}	
N°54	0.3472	2.880184	0.346	2.890173	f_0	f_0
Periodo	0.4846	2.063558	0.485	2.061856	f_{10}	f_{10}
1.2 - 0.84 - 2.06	0.8360	1.196172	0.835	1.197605	f_{16}	f_{16}
Frecuencia	1.1776	0.849185	1.150	0.869565	f_{18}	f_{18}
0.833 - 1.190 - 0.485	0.6973	1.434103	0.691	1.447178	$2f_0$	$2f_0$
	1.0466	0.955475	···	···	$3f_0$	
	0.3409	2.933412	···	···	f_0	
	0.8459	1.182173	···	···	f_{16}*	
N°55	0.7027	1.423082	0.702	1.424501	f_{13}	f_{13}

Continúa en la siguiente página

Modelo	Lomb-Scargle [Dias]		WWZ [Dias]		Comentarios	
	Frecuencia	**Periodo**	**Frecuencia**	**Periodo**	**Lomb-Sacargle**	**WWZ**
Periodo	0.3483	2.871088	0.348	2.873563	f_0	f_0
$\sqrt{2}$	1.0458	0.956206	1.042	0.959693	$3f_0$	$3f_0$
Frecuencia						
0.707						
N°56	0.8352	1.197318	0.833	1.200480	f_{16}	f_{16}
Periodo	0.6975	1.433692	0.697	1.434720	$2f_0$	$2f_0$
1.2	0.3481	2.872738	0.346	2.890173	f_0	f_0
Frecuencia	1.0462	0.955840	1.032	0.968992	$3f_0$	$3f_0$
0.833	0.8501	1.176332	···	···	f_{16}	
	···	···	0.287	3.484321		?
N°57	0.3497	2.859594	0.349	2.865330	f_0	f_0
Periodo	0.6990	1.430615	0.698	1.432665	$2f_0$	$2f_0$
$\sqrt{2}$ - 0.94 - 2.78 - 1.6	1.0474	0.954745	1.043	0.958773	$3f_0$	$3f_0$
Frecuencia	···	···	0.288	3.472222		?
0.707 - 1.064 - 0.360 - 0.625	···	···	0.532	1.879699		?
	0.6241	1.602307	···	···	f_{12}	
N°58	0.3480	2.873563	0.347	2.881844	f_0	f_0
Periodo	0.6965	1.435750	0.695	1.438849	$2f_0$	$2f_0$
1.2 - 0.84 - 2.06 - 1.6	1.0471	0.955019	1.045	0.956938	$3f_0$	$3f_0$
Frecuencia	0.6270	1.594896	···	···	f_{12}	
0.833 - 1.190 - 0.485 - 0.625	0.8318	1.202212	···	···	f_{16}	
	0.4863	2.056344	0.489	2.044990	f_{10}	f_{10}
N°59	0.3482	2.871913	0.347	2.881844	f_0	f_0
Periodo	0.7000	1.428571	0.699	1.430615	$2f_0$	$2f_0$
$\sqrt{2}$ - 1.6	1.0463	0.955749	1.043	0.958773	$3f_0$	$3f_0$
Frecuencia	···	···	0.535	1.869159		?

Continúa en la siguiente página

Modelo	Lomb-Scargle [Dias]		WWZ [Dias]		Comentarios	
	Frecuencia	**Periodo**	**Frecuencia**	**Periodo**	**Lomb-Sacargle**	**WWZ**
0.707 - 0.625	0.6252	1.599488	···	···	f_{12}	
N°60	0.3480	2.873563	0.347	2.881844	f_0	f_0
Periodo	0.6970	1.434720	0.695	1.438849	$2f_0$	$2f_0$
1.2 - 1.6	1.0460	0.956023	1.042	0.959693	$3f_0$	$3f_0$
Frecuencia	0.8305	1.204094	0.828	1.207729	f_{16}	f_{16}
0.833 - 0.625	0.6243	1.601794	···	···	f_{12}	
	···	···	0.531	1.883239		?
N°61	0.3498	2.858776	0.349	2.865330	f_0	f_0
Periodo	0.6982	1.432254	0.697	1.434720	$2f_0$	$2f_0$
$\sqrt{2}$ - 0.94 - 2.78	1.0470	0.955110	1.042	0.959693	$3f_0$ - f_{17}	
Frecuencia	···	···	0.287	3.484321		?
0.707 - 1.064 - 0.360	···	···	0.526	1.901141		?
	1.2363	0.808865	···	···	?	
N°62	0.3480	2.873563	0.347	2.881844	f_0	f_0
Periodo	0.6960	1.436782	0.695	1.438849	$2f_0$	$2f_0$
1.2 - 0.84 - 2.06	1.0467	0.955384	1.044	0.957854	$3f_0$	$3f_0$
Frecuencia	0.4853	2.060581	0.488	2.049180	f_{10}	f_{10}
0.833 - 1.190 - 0.485	0.8312	1.203080	···	···	f_{16}	
N°63	0.6993	1.430001	0.698	1.432665	$2f_0$	$2f_0$
Periodo	0.3483	2.871088	0.347	2.881844	f_0	f_0
$\sqrt{2}$	1.0458	0.956206	1.042	0.959693	$3f_0$	$3f_0$
Frecuencia	···	···	0.531	1.883239		?
0.707	1.2367	0.808604	···	···	?	
N°64	0.3481	2.872738	0.347	2.881844	f_0	f_0
Periodo	0.6970	1.434720	0.696	1.436782	$2f_0$	$2f_0$
1.2	1.0454	0.956572	1.042	0.959693	$3f_0$	$3f_0$

Continúa en la siguiente página

Modelo	**Lomb-Scargle [Dias]**		**WWZ [Dias]**		**Comentarios**	
	Frecuencia	**Periodo**	**Frecuencia**	**Periodo**	**Lomb-Sacargle**	**WWZ**
Frecuencia	0.8303	1.204384	$\cdots$	$\cdots$	f_{16}	
0.833	1.2370	0.808407	$\cdots$	$\cdots$	f_{16}	

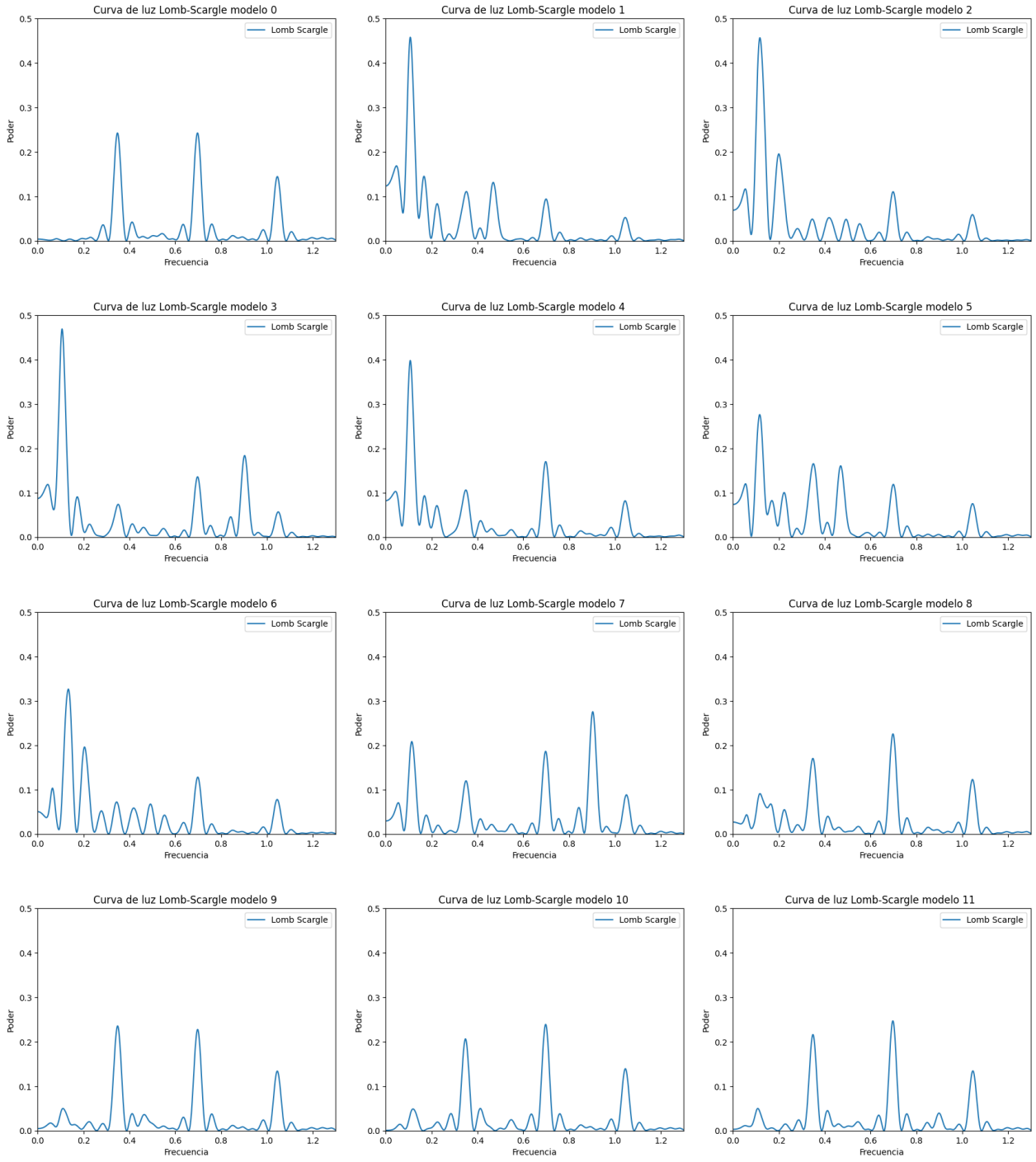


Figura B.6: Periodogramas obtenidos del análisis de Fourier para los modelos No. 0 to No. 11.

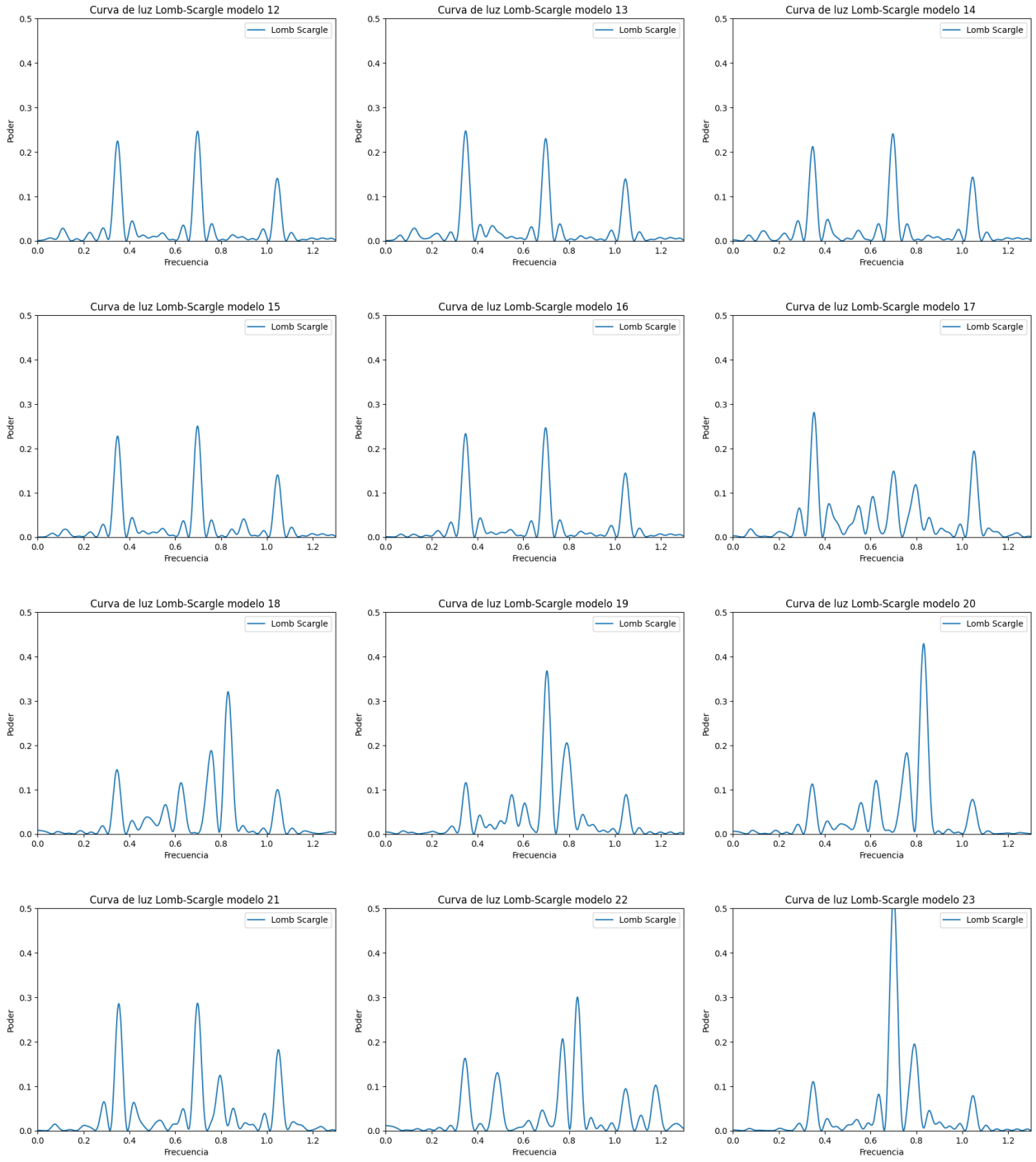


Figura B.7: Periodogramas obtenidos del análisis de Fourier para los modelos No. 12 to No. 23.



Figura B.8: Periodogramas obtenidos del análisis de Fourier para los modelos No. 24 to No. 35.

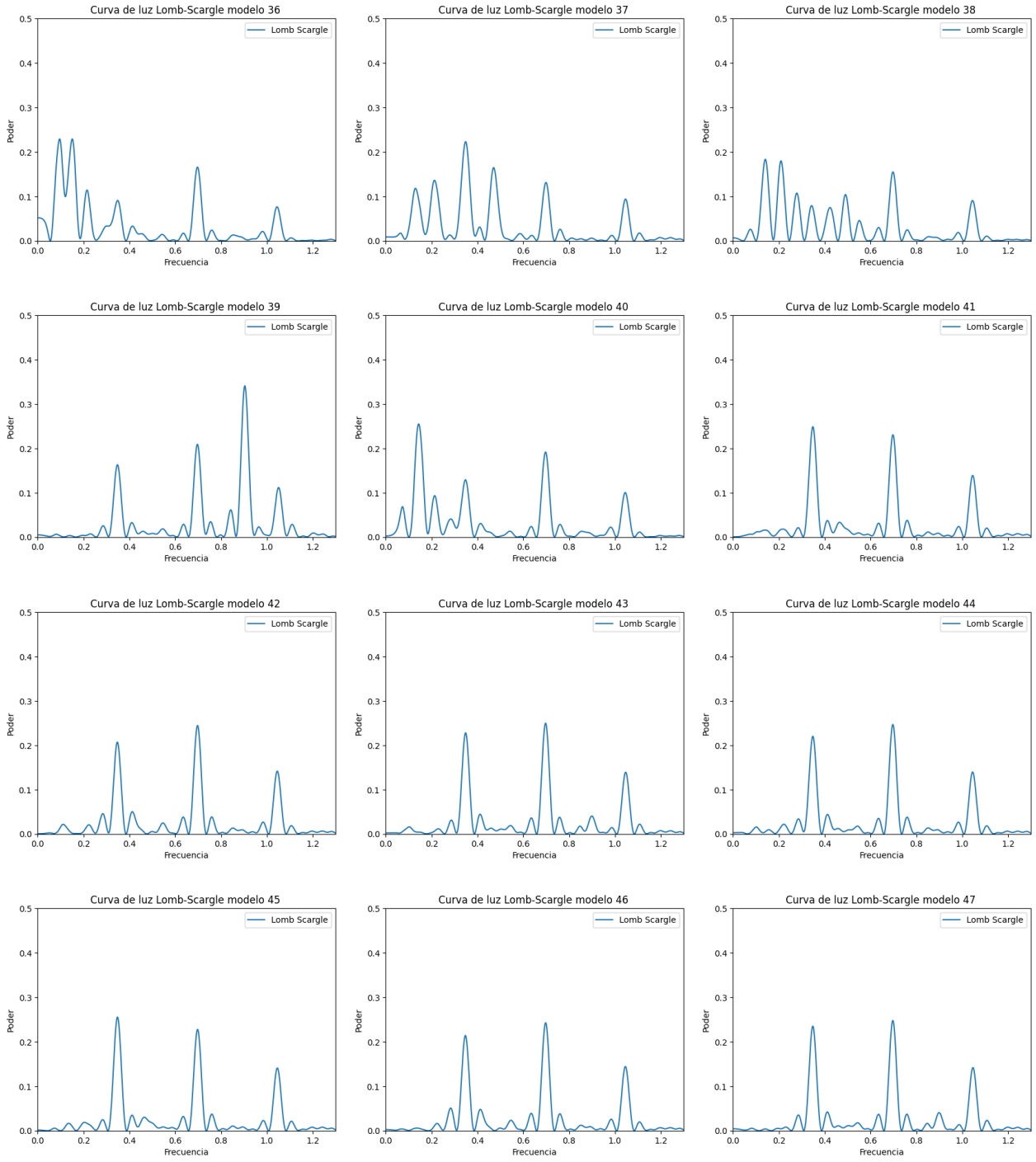


Figura B.9: Periodogramas obtenidos del análisis de Fourier para los modelos No. 36 to No. 47.

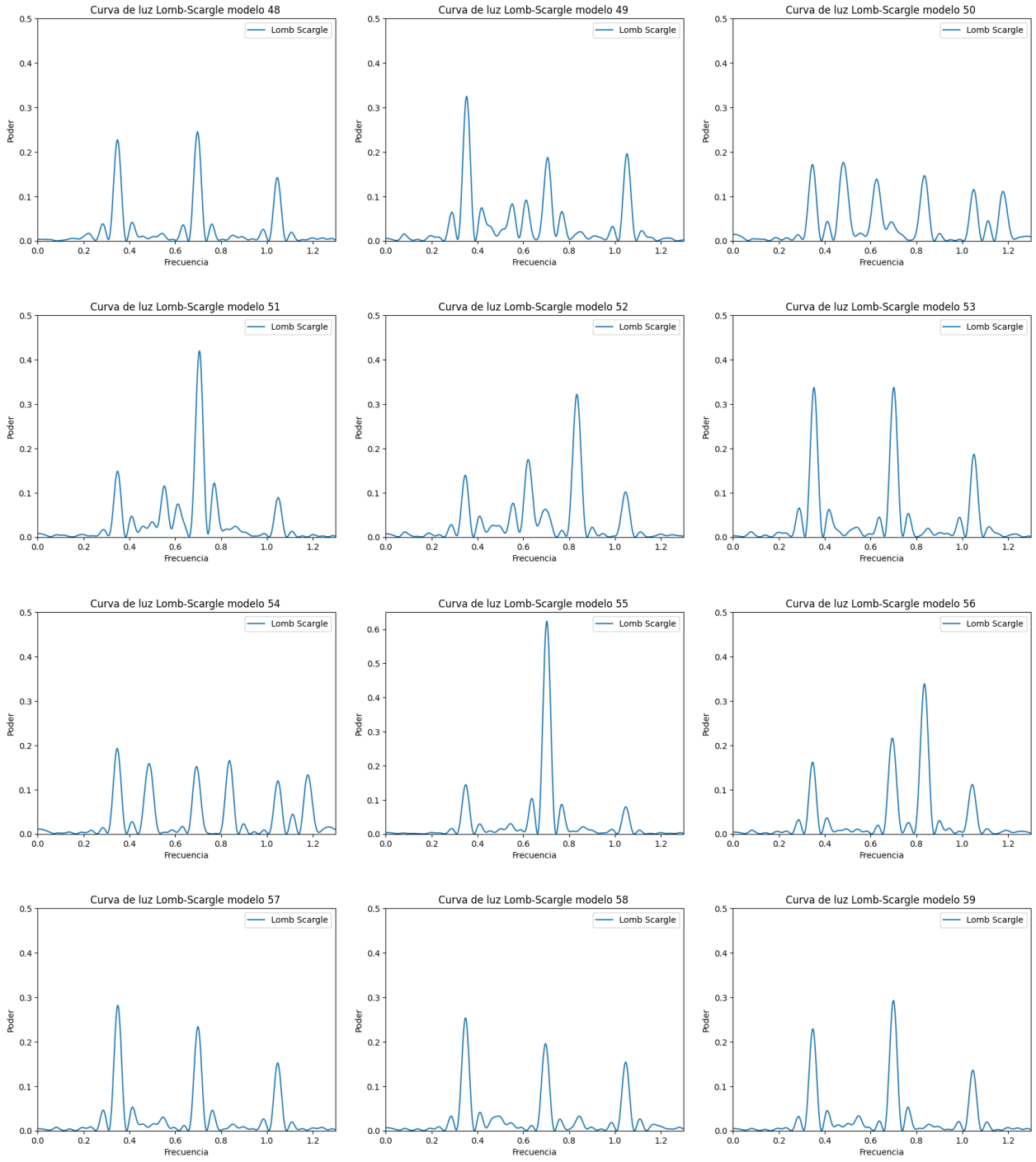


Figura B.10: Periodogramas obtenidos del análisis de Fourier para los modelos No. 48 to No. 59.

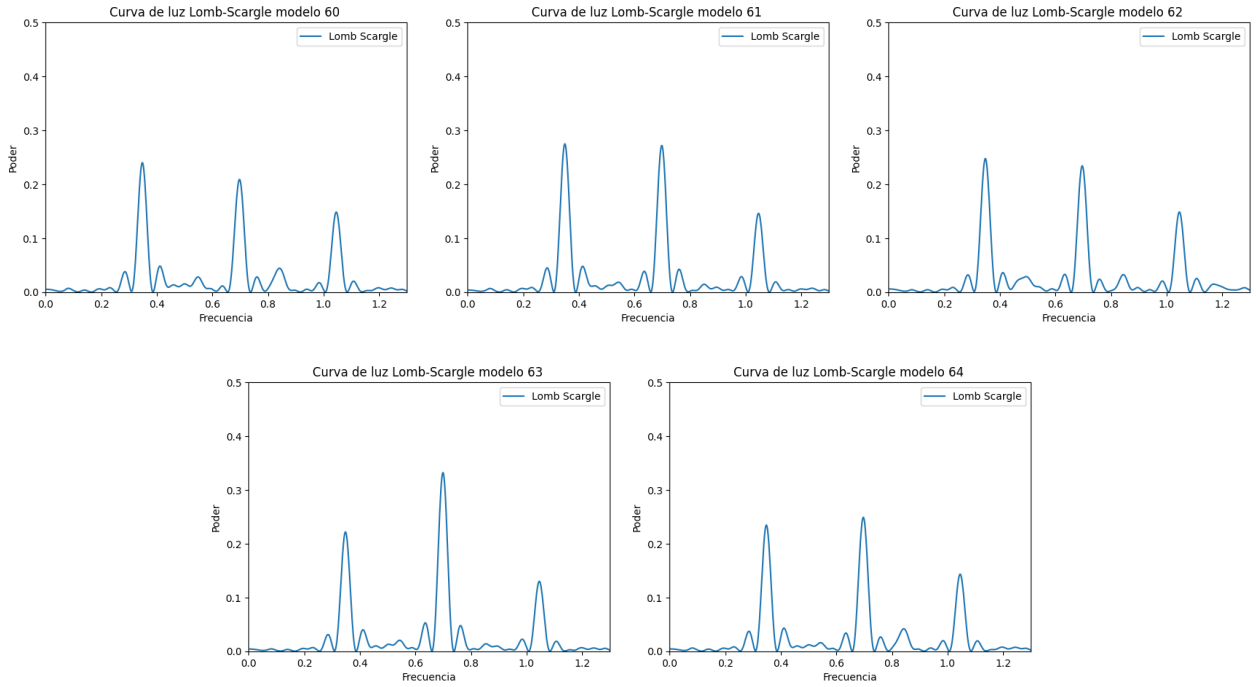


Figura B.11: Periodogramas obtenidos del análisis de Fourier para los modelos No. 60 to No. 64.

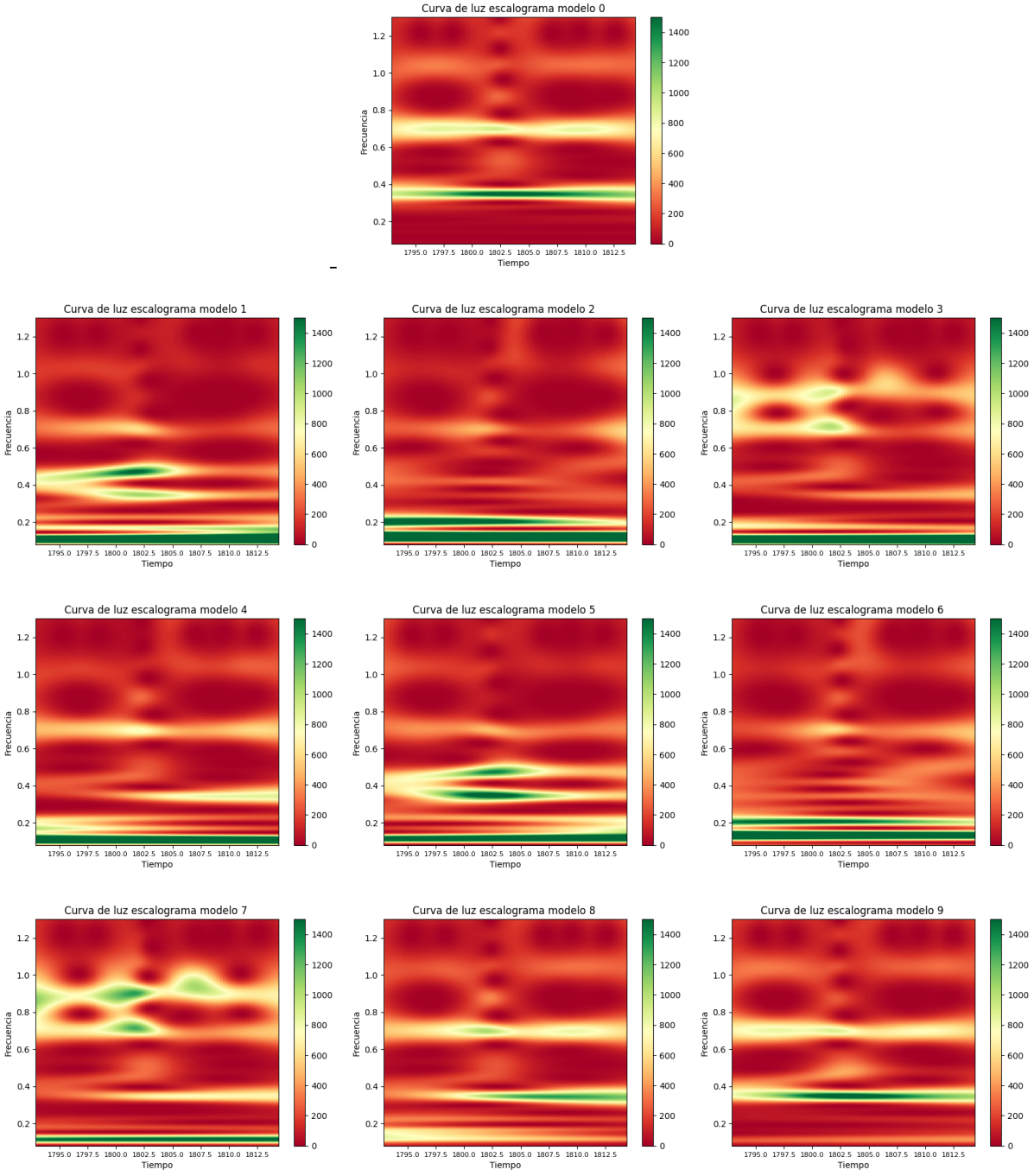


Figura B.12: Resultados del análisis wavelet para modelos No. 0 to No. 9.

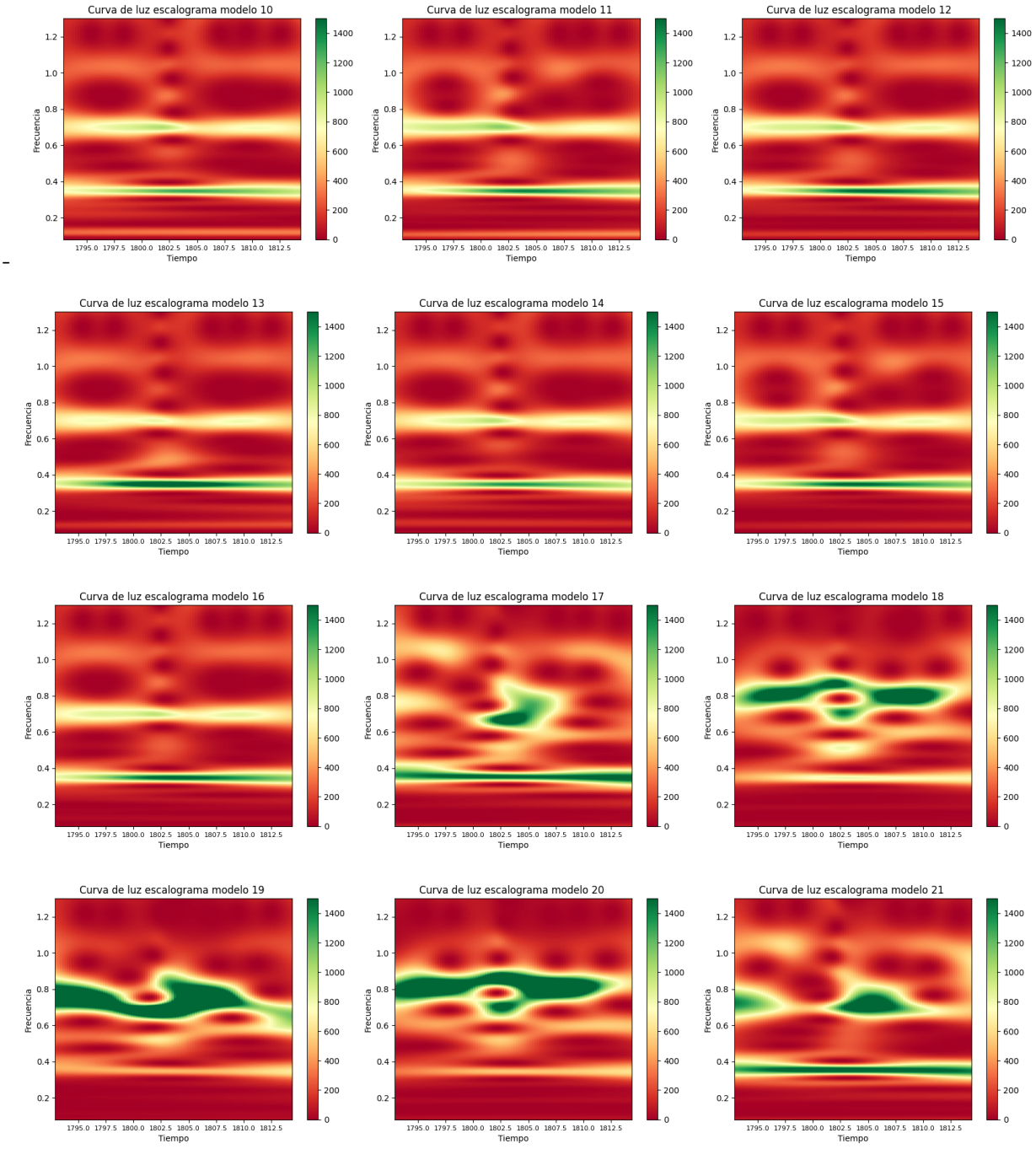


Figura B.13: Resultados del análisis wavelet para modelos No. 10 to No. 21.

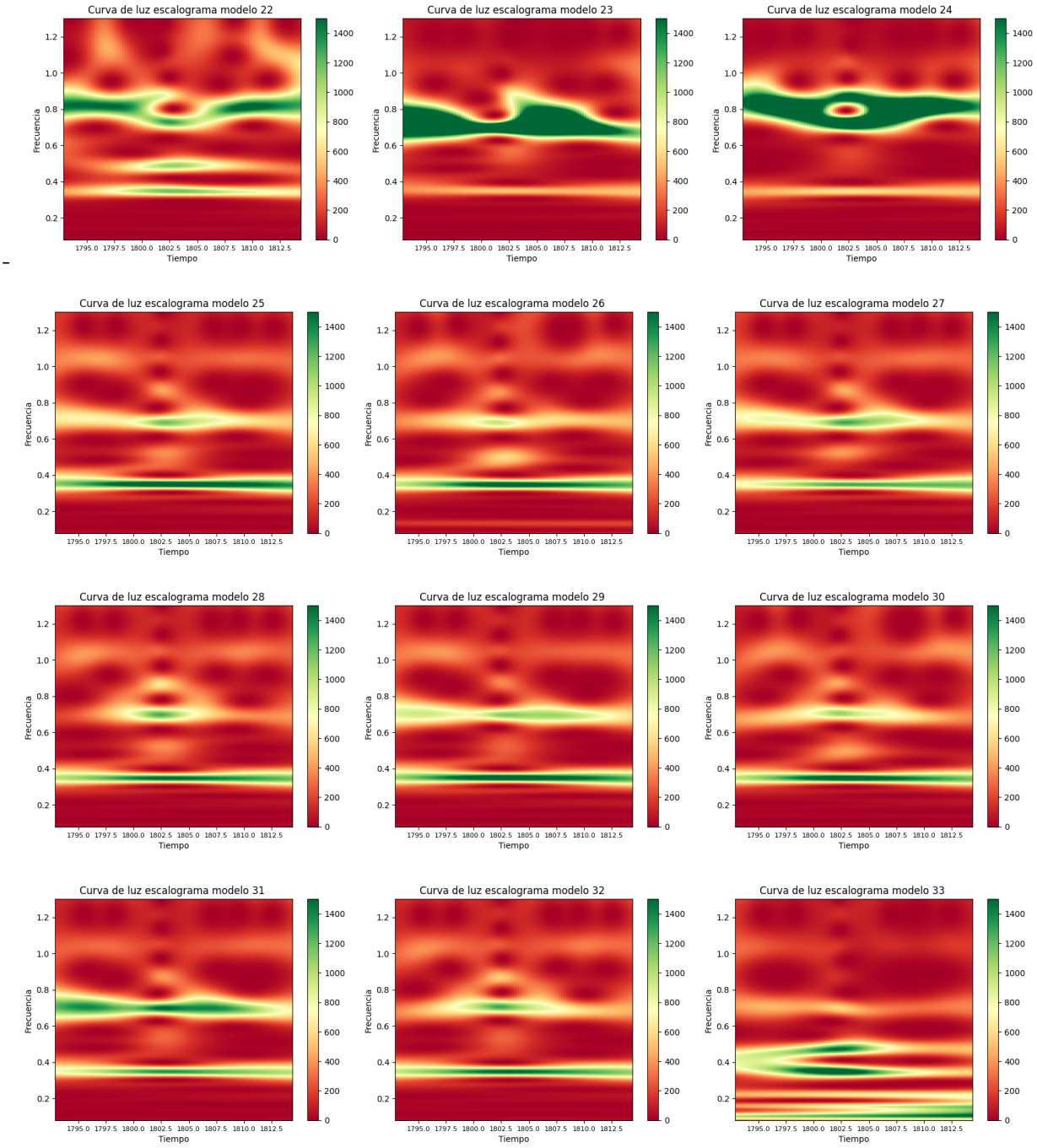


Figura B.14: Resultados del análisis wavelet para modelos No. 22 to No. 33.

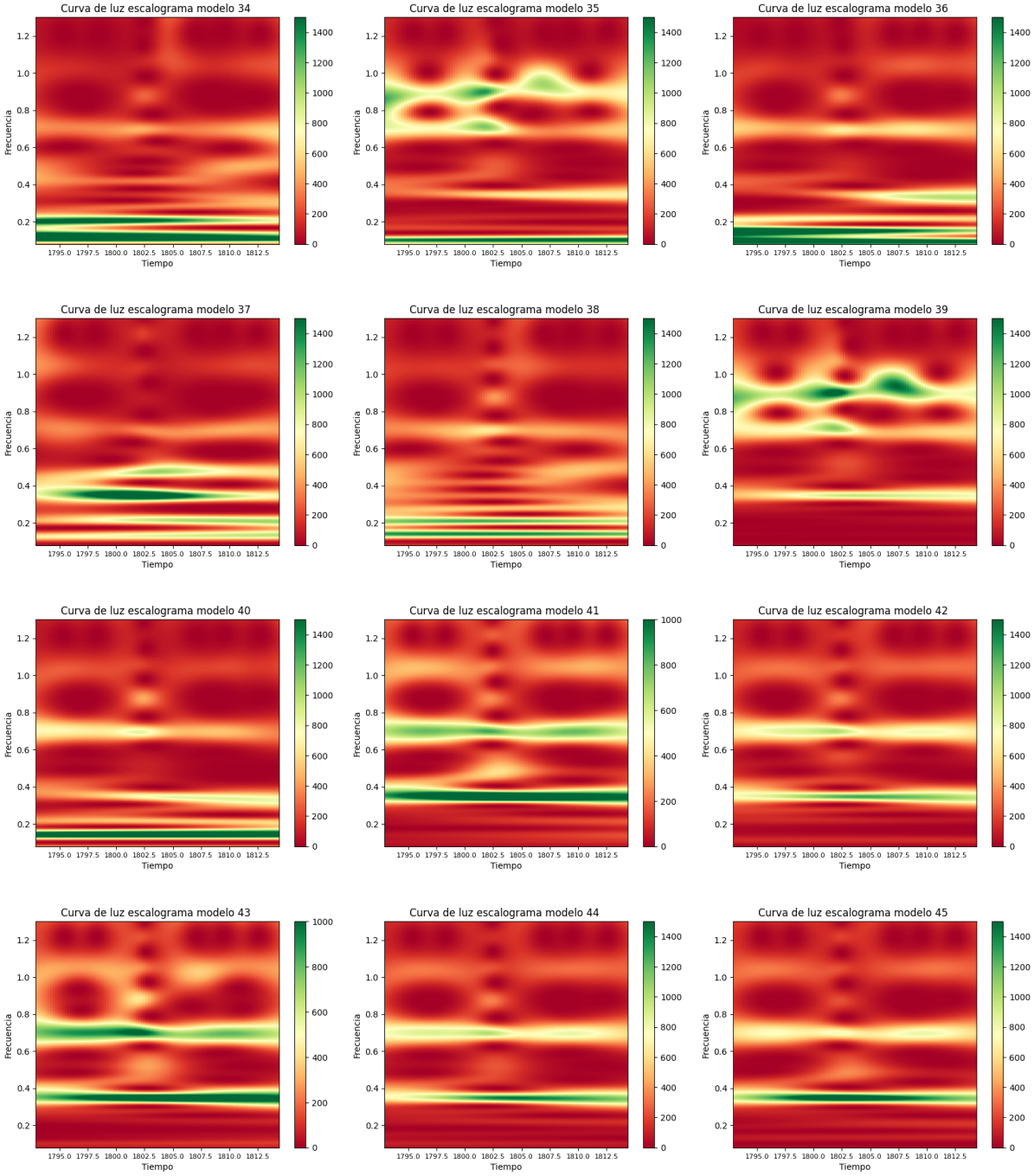


Figura B.15: Resultados del análisis wavelet para modelos No. 34 to No. 45.

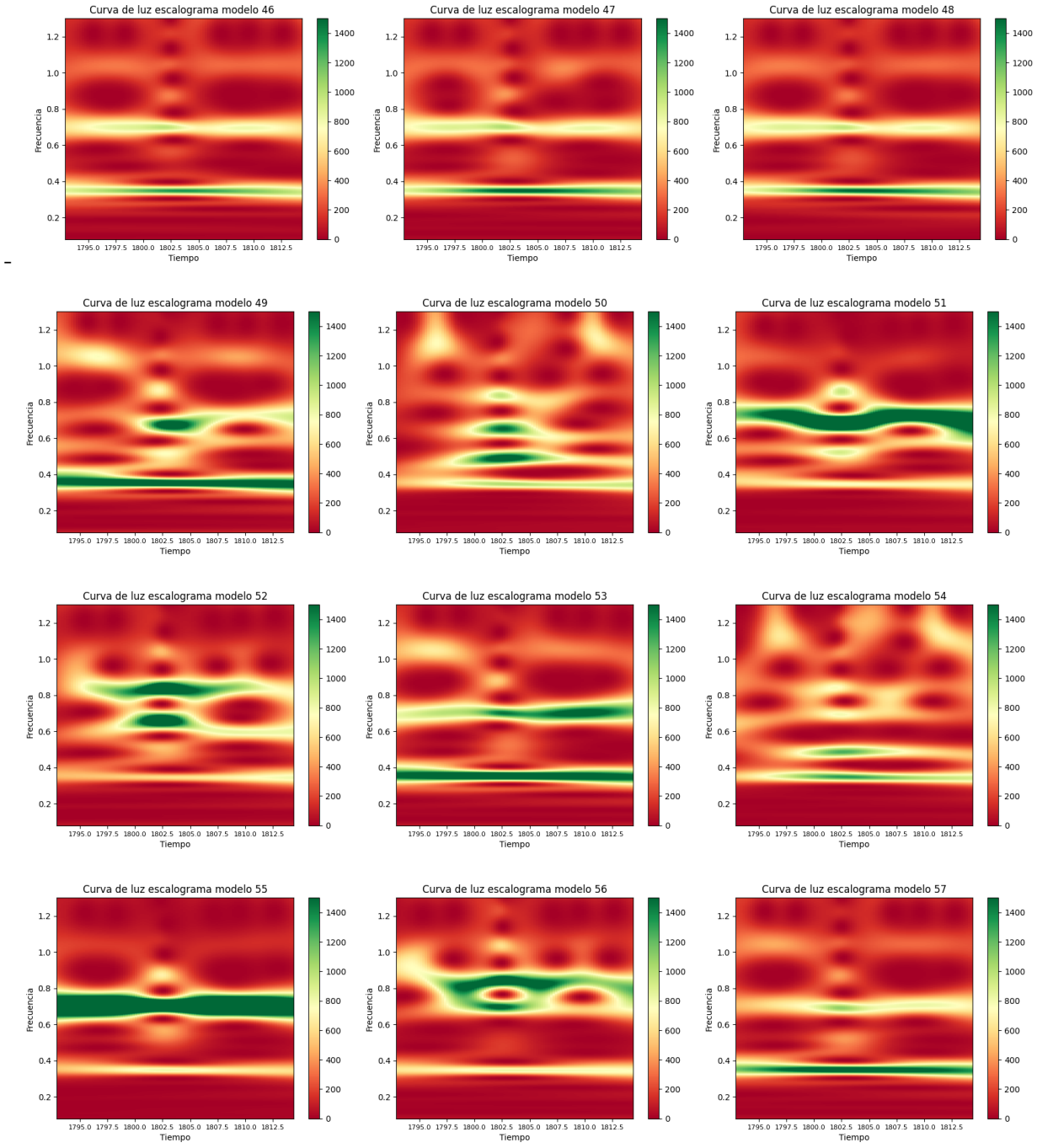


Figura B.16: Resultados del análisis wavelet para modelos No. 46 to No. 57.

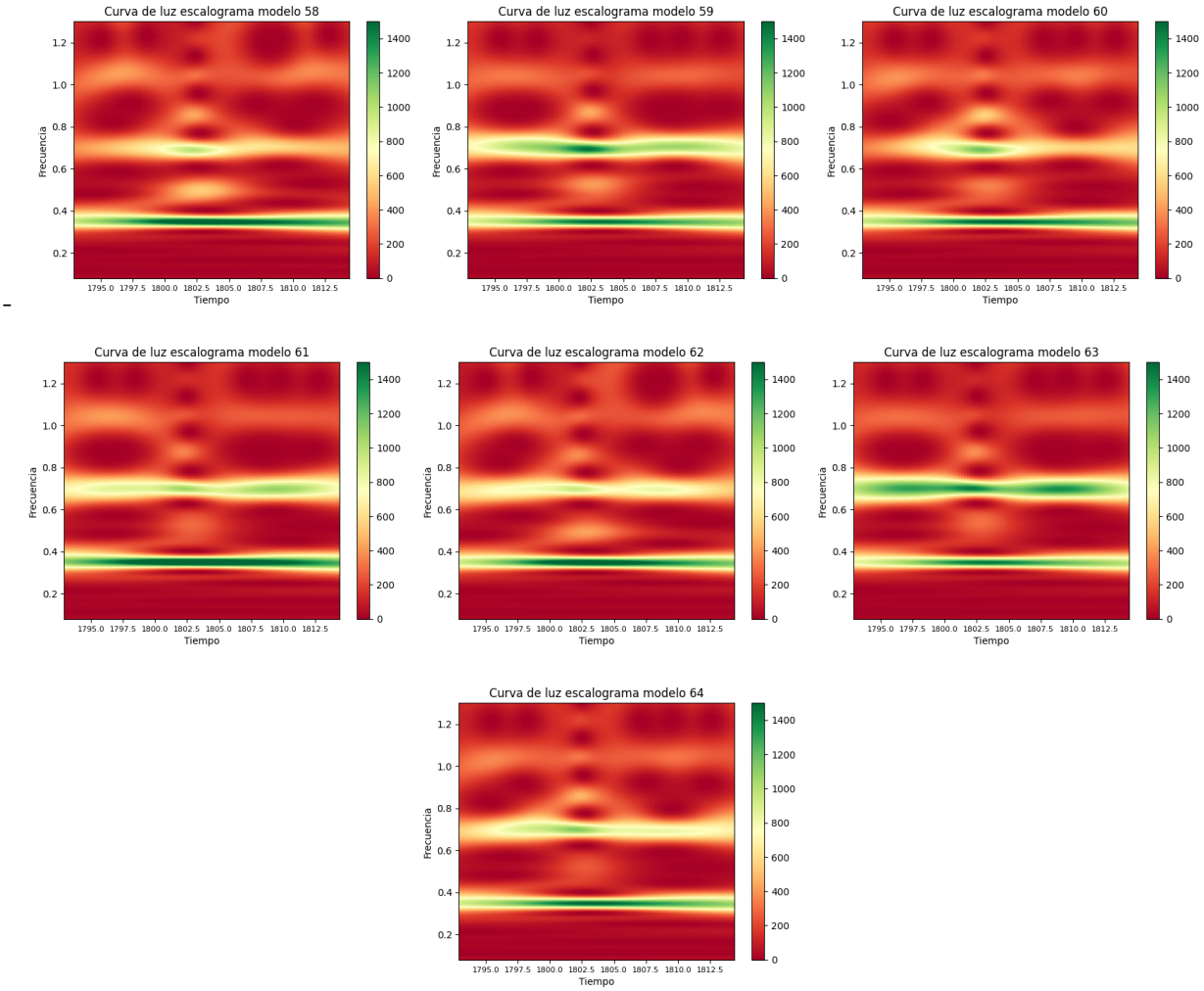


Figura B.17: Resultados del análisis wavelet para modelos No. 58 to No. 64.

Referencias

Alberici, A., Avila, G. F. A., Christen, A., y Cidale, L. S. (2023). Synthetic light curve design for pulsating binary stars to compare the efficiency in the detection of periodicities. *Galaxies*, *11*(3), 69. Descargado de https://oi.org/10.3390/galaxies11030069 doi: 10.3390/galaxies11030069

Astropy. (s.f.). *Astrostatistics Tools (astropy.stats).* https://docs.astropy.org/en/stable/stats/index.html. (Accessed: 1 July 2023)

Bravo, J. P., Roque, S., Estrela, R., Leão, I. C., y De Medeiros, J. R. (2014). Wavelets: a powerful tool for studying rotation, activity, and pulsation in kepler and corot stellar light curves. *Astronomy Astrophysics*, *568*, A34. doi: 10.1051/0004-6361/201323032.

De Lira, S. R., Bravo, J. P., Leão, I. C., Costa, A., Martins, B. L. C., De Freitas, D. B., y De Medeiros, J. R. (2019). A wavelet analysis of photometric variability in kepler white dwarf stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. doi: 10.1093/mnras/stz122

Fóster, G. (1996). Wavelets for period analysis of unevenly sampled time series. *The Astronomical Journal*, *112*, 1709. doi: 10.1086/118137.

Lomb, N. R. (1976). Least-squares frequency analysis of unequally spaced data. *Astrophysics and Space Science*, *39*(2), 447–462.

Misiti, M., Misiti, Y., Oppenheim, G., y Poggi, J.-M. (Eds.). (2007). *Wavelets and their applications.* Iste Publishing Company.

Montgomery, D. C. (2017). *Design and analysis of experiments.* John Wiley & Sons.

Polanco Martínez, J. M. (2022). Análisis espectral de wavelet: una concisa revisión. *Revista de Climatologia*, *22*.

RedVox. (2023, 28 de April). *libwwz.* https://pypi.org/project/libwwz/.

Ricker, G. R., Winn, J. N., Vanderspek, R., Latham, D. W., Bakos, G. , Bean, J. L., ... others (2014). Transiting exoplanet survey satellite (tess). *Proceedings of SPIE*, *9143*, 914320. Descargado de https://doi.org/10.1117/12.2063489 ([arXiv:astro-ph.EP/1406.0151]) doi: 10.1117/12.2063489

Scargle, J. D. (1982). Studies in astronomical time series analysis. ii - statistical aspects of spectral analysis of unevenly spaced data. *The Astrophysical Journal*, *263*. doi: https://doi.org/10.1086/160554

Thiebaut, C., y Roques, S. (2005). Time-scale and time-frequency analyses of irregularly sampled astronomical time series. *EURASIP journal on advances in signal processing*, *2005*(15). doi: https://doi.org/10.1155/asp.2005.2486

Torrence, C., y Compo, G. P. (1998). A practical guide to wavelet analysis. *Bulletin of the American Meteorological Society*, *79*(1), 61–78. doi: 10.1175/1520-0477(1998)079⟨0061:apgtwa⟩2.0.co;2
.