Universidad de Valparaíso
CHILE
Instituto de Matemáticas
Facultad de Ciencias
IμUV

LA ADICIÓN DE FRACCIONES. UN ESTUDIO DESDE EL ANÁLISIS DIDÁCTICO

TESIS DE GRADO PARA OPTAR AL TITULO DE PROFESOR DE MATEMÁTICA CON MENCIÓN EN DIDACTICA O COMPUTACIÓN Y AL GRADO DE LICENCIADO EN EDUCACIÓN

JORGE EDUARDO TAPIA FUENTES

SOFÍA ELENA RIVAS CÓRDOVA

Profesora Guía: María Inés Pezoa Reyes

Valparaíso 2016

ÍNDICE

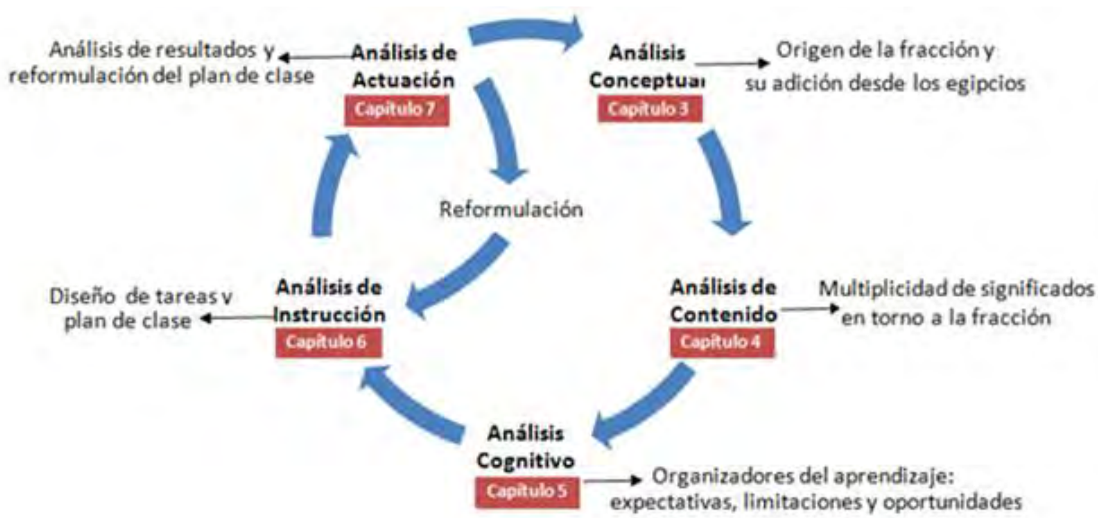
INTRODUCCIÓN

Este trabajo tiene su génesis en la reflexión final de nuestro proceso de formación como Profesores de Matemática de la Universidad de Valparaíso, donde evidenciamos una preparación sólida en los diversos campos de la disciplina matemática, tanto en sus aspectos teóricos como en los de sus aplicaciones, como también nos aporta la adquisición de competencias pedagógicas y prácticas integradas a través de la Didáctica de la Matemática complementada con herramientas tecnológicas aportando recursos virtuales para la promoción del aprendizaje. Sin embargo, en el desarrollo de nuestras prácticas pedagógicas hemos evidenciado una distancia entre lo teórico y lo que sucede realmente en el aula escolar.

En este sentido y considerando la importancia de la preparación de la enseñanza para lograr una transposición de saberes que permita a los estudiantes lograr aprendizajes más allá de la mecanización, hemos elegido realizar un estudio en la línea del Análisis Didáctico (Rico, 2013) dado que organiza el saber desde los ámbitos, disciplinar (matemática) y desde la enseñanza, cuya estructura es en torno a cinco análisis, mediante los cuales es posible analizar y describir un tema matemático para constituirlo como objeto de enseñanza. A saber, el ***análisis conceptual***, revisa el conocimiento matemático, sus fundamentos e historia, su génesis y desarrollo, los principios para su enseñanza e interpretación de su aprendizaje; el ***análisis de contenido***, permite al docente identificar y organizar los conceptos y procedimientos que conforman el tema, sus representaciones y la organización de los fenómenos y problemas a los que pueden dar respuesta; el ***análisis cognitivo***, describe las hipótesis acerca de cómo los escolares pueden progresar en la construcción de su conocimiento sobre la estructura matemática cuando se enfrenten a las tareas que compondrán las actividades de enseñanza y aprendizaje; en el ***análisis de instrucción***, el profesor diseña, analiza y selecciona las tareas que constituirán las actividades de enseñanza y aprendizaje objeto de la instrucción, finalmente en el ***análisis de actuación***, el profesor determina las capacidades que los escolares han desarrollado y las dificultades que pueden haber manifestado hasta ese momento. Así este Análisis Didáctico nos permite la articulación entre los ámbitos disciplinar, pedagógico y didáctico.

El objeto matemático de estudio en esta investigación será la operación de adición de fracciones con distinto denominador, y nuestro interés es dado que a partir de nuestra experiencia en aula, se evidencia una dificultad en la comprensión de los procesos involucrados. Esta problemática también ha sido abordada en diferentes investigaciones en las que se señala por ejemplo la falta de significado y la consecuente mecanización del algoritmo de la adición de fracciones con distinto denominador (Peña, 2011) o el predominio de los esquemas tradicionales en la enseñanza de fracciones y su operatoria, donde el docente expone una serie de contenidos y ejercicios (como por ejemplo, representación y clasificación de fracciones, amplificación, simplificación y fracción equivalente), y por último se resuelven problemas relacionados a estos (Ríos, 2007).

A continuación presentamos un esquema organizador de este trabajo en base a los análisis señalados anteriormente:



De acuerdo a la organización presentada, este trabajo se compone de ocho capítulos en los que se aborda:

En el capítulo uno y dos, se describen los antecedentes que sustentan la problemática de mecanización por sobre la comprensión de los procesos involucrados en la adición de fracciones con distinto denominador y se plantean los respectivos objetivos de investigación. Posteriormente se presenta la metodología y marco teórico didáctico. En esta línea, se exponen, el tipo de investigación que se llevará a cabo, el contexto de los sujetos de estudio, los instrumentos que se aplicarán para la recogida de datos y el proceso de levantamiento de categorías de análisis. Finalmente se presenta una explicación de lo que constituye el Estudio de Clases Japonés, como herramienta metodológica para la planificación y análisis de una clase. En este apartado además, se presenta el marco teórico que sustenta esta investigación, el Análisis Didáctico, el que da estructura a este estudio, orientando su diseño, aplicación, reformulación y análisis del objetivo propuesto.

En el capítulo tres, se realiza un análisis conceptual, el cual aborda la comprensión del concepto de fracción, desde sus orígenes, usos y evolución. Luego, se profundiza en el caso de la antigua civilización egipcia, donde se destaca el uso de las fracciones unitarias y su relación con la idea de reparto como fuente de conocimiento.

En el capítulo cuatro, el Análisis de Contenido presenta la definición formal, respecto a la construcción del conjunto de los números racionales y las definiciones escolares encontradas en los textos escolares sobre la adición de fracciones, para establecer la distancia entre ambos saberes. Se presenta la fenomenología, los registros de representación y se elabora un mapa conceptual con el fin de tener una imagen global de todos los saberes involucrados de acuerdo al objeto de estudio.

En el capítulo cinco, se presenta el Análisis Cognitivo, que aborda los aprendizajes de los estudiantes respecto al contenido estudiado, las expectativas de aprendizaje según lo indicado en el currículum nacional, las limitaciones de aprendizaje asociadas, describiendo errores y dificultades posibles, como también las oportunidades de aprendizaje del currículum y los textos escolares.

En el capítulo seis, se presenta el Análisis de Instrucción en el que se describe el diseño, justificación y posterior análisis de las tareas que constituyen nuestro cuestionario exploratorio, el que pretende darnos a conocer los conocimientos que manejan los estudiantes en cierto nivel escolar. Luego se detalla la confección de nuestro plan de clase que mediante su implementación busca que los estudiantes reflexionen acerca de los procesos realizados en la adición de fracciones con distinto denominador.

En el capítulo siete, se desarrolla el Análisis de Actuación, en el que se describe cada etapa de la implementación de la clase, con sus respectivas tareas, diseñadas en el análisis de instrucción. Se realiza una primera implementación, la cual se analiza en base a la planificación, manejo de aula y observación de pares, luego se reformula el diseño de clase, los tiempos y las tareas, para volver a implementar. Además, se analizan las producciones de las estudiantes, agrupando las diferentes estrategias de los estudiantes en categorías, incluyendo los errores y aciertos evidenciados.

Finalmente en el capítulo ocho, se recogen las conclusiones, proyecciones y reflexiones del estudio en torno a la problemática inicial y sus aportes a la formación docente y al quehacer educativo

CAPÍTULO 1
ANTECEDENTES, PROBLEMÁTICA Y OBJETIVOS

1.1 Antecedentes

La enseñanza y el aprendizaje son dos caras de una misma moneda, no es posible hacer referencia a una sin pensar en la otra, ya que al referirnos al aprendizaje, nos situamos en la persona que aprende y cuando se menciona la enseñanza pensamos en el que enseña, pero es imposible disociar un concepto del otro.

Durante mucho tiempo la enseñanza fue asociada a la transmisión del conocimiento, y el aprendizaje era de mejor calidad, en la medida en que la reproducción que hacía el que aprendía, era lo más fidedigna posible. Para el caso de la matemática, nuestra experiencia como estudiantes en el sistema escolar chileno y luego en los procesos de práctica docente, como profesores en formación, hemos evidenciado que, en el aula, la enseñanza de la matemática, en general, se limita a proporcionar a los estudiantes técnicas que les permitan resolver ejercicios de "forma mecánica", sin dar espacio a procesos reflexivos que cuestionen sus significados.

En este sentido, para el caso de las fracciones, a pesar de ser un objeto de enseñanza en el actual currículum escolar chileno, desde los primeros niveles de enseñanza básica, hemos observado que la aplicación mecánica de procedimientos por parte de los estudiantes de enseñanza media, para realizar operaciones que involucran adición y/o sustracción de fracciones con distinto denominador, provoca no solo errores en los procedimientos y en los resultados, sino que obstáculos para abordar tareas más complejas como por ejemplo, las operaciones con números racionales o con expresiones algebraicas fraccionarias y la resolución de problemas no sólo del sector de matemática.

Esta problemática la podemos evidenciar en las evaluaciones estandarizadas PSU (Proceso de Selección Universitario) que nos permite tener datos estadísticos relacionados con nuestro foco de investigación. Las siguientes imágenes corresponden a preguntas de PSU de diferentes años, respecto al logro de aprendizaje de los estudiantes, que han finalizado su enseñanza media, relacionados con la operación de fracciones con diferente denominador.

Si a $\frac{5}{6}$ se le resta $\frac{1}{3}$ resulta

A) $-\frac{1}{2}$
B) $\frac{1}{2}$
C) $\frac{2}{3}$
D) $\frac{4}{3}$
E) $\frac{2}{9}$

En este ítem el estudiante debe comprender la información dada en el enunciado, para luego traducirla como una resta de fracciones, la cual se resuelve sacando el mínimo común múltiplo entre los denominadores y simplificando el resultado obtenido.

$$\frac{5}{6} - \frac{1}{3} = \frac{5-2}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

La opción correcta es la B), la que fue elegida por el 57% de los estudiantes, indicando estadísticamente, que esta pregunta resultó de dificultad mediana para la población que la abordó.

Un alto porcentaje de los estudiantes se inclinaron por la alternativa D), el 28,8%, que corresponde a aquellos alumnos que restan hacia el lado, o sea numeradores entre sí y denominadores entre sí. Este error es muy común y se ha repetido a lo largo del tiempo en los alumnos egresados de la Enseñanza Media.

Figura 2. Sustracción de fracciones con distinto denominador. Fuente: DEMRE (2009, p.3)

$\frac{1}{2} + \frac{5}{2} + \frac{1}{5} + \frac{4}{2} =$

A) $\frac{26}{5}$
B) $\frac{11}{40}$
C) $\frac{11}{10}$
D) 1
E) Ninguno de los valores anteriores.

Para encontrar la respuesta correcta al ítem, el postulante debe operar con números racionales, en este caso, debe sumar fracciones con igual y distinto denominador.

Así, $\frac{1}{2} + \frac{5}{2} + \frac{1}{5} + \frac{4}{2} = \frac{1+5+4}{2} + \frac{1}{5} = \frac{10}{2} + \frac{1}{5} = \frac{10 \cdot 5 + 1 \cdot 2}{10} = \frac{52}{10} = \frac{26}{5}$

Este valor se encuentra en la opción A), que fue marcada por más de la mitad de los postulantes que la abordaron, resultando de mediana dificultad y además, su omisión fue de un 13%. Llama la atención estos resultados, ya que es un contenido que se trabaja habitualmente en las aulas desde la Enseñanza Básica.

El distractor E) fue el que tuvo una mayor preferencia (17%), lo que señala que existe un número considerable de postulantes que no saben operar con fracciones, llegando a otros valores que no se encuentran en los otros distractores.

Los distractores C) y D) obtuvieron un 7% de preferencias, en el primero obtienen bien el mínimo común múltiplo entre los denominadores, pero suman los numeradores sin amplificarlos. En el segundo caso, suman los numeradores y los denominadores.

Figura 3. Adición de fracciones con distinto denominador. Fuente: DEMRE[1] (2012, p.4)

En los comentarios de los problemas expuestos anteriormente se alude a la técnica del mínimo común múltiplo para resolverlo, además, se señala como un error típico y que perdura en el tiempo, lo cual no sólo se evidencia en la población evaluada.

[1] DEMRE: Departamento de evaluación, medición y registro educacional

1.2 Investigaciones asociadas a la operación de adición

La problemática referida a la adición de fracciones con distinto denominador ha sido motivo de estudio desde hace varios años, para la Didáctica de la Matemática, con investigaciones como las de Peralta (1994), donde señala que el caso más común de error en la suma de fracciones es "sumar numeradores y denominadores". Identifica también una discordancia entre el trabajo con representaciones gráficas de las fracciones equivalentes y su uso en el algoritmo de adición de fracciones. En el mismo sentido, Peña (2011) considera la falta de significado, para los estudiantes, del algoritmo de adición de fracciones con distinto denominador como dificultad para su correcta operación, por lo cual desarrolla un trabajo en base a la noción de medida y la fracción equivalente, usando regletas para subsanarlo. Mientras que Ríos (2007), afirma que al no considerar las diversas representaciones del concepto de fracción en la enseñanza o no establecer relaciones entre ellas, se producen dificultades para aprender y errores en el aprendizaje de los conceptos relacionados con las fracciones.

1.3 Antecedentes e investigaciones asociadas al proceso de planificación

Considerando el proceso de enseñanza, sin duda la planificación y la gestión de la clase son dos problemas que los profesores deben resolver en su actividad docente. El currículum escolar chileno a través de sus programas de estudios entrega lineamientos para facilitar esta tarea, donde señala que la planificación de las clases es un elemento central en el esfuerzo por promover y garantizar los aprendizajes de los estudiantes.

En este mismo sentido, hemos considerado investigaciones que abordan el proceso de planificación desde la didáctica como lo que señala Shulman (1996), sobre los conocimientos que debe tener el profesor, esto es, conocimiento curricular, conocimiento del contenido y conocimiento didáctico del contenido. En este sentido la planificación de clase del profesor de matemática debe considerar principios, procedimientos y herramientas fundamentadas en la didáctica de la matemática que permitan diseñar, evaluar y comparar las tareas y actividades de enseñanza de aprendizaje dejando atrás la idea de planificación como un simple guión para desarrollar un contenido a aprender. Por su parte, Rico (2008), considera la planificación, como una competencia clave del profesor de matemáticas, que demanda el desarrollo de capacidades específicas para identificar, organizar, seleccionar y priorizar los significados de los conceptos matemáticos mediante el análisis cuidadoso de su contenido, análisis necesario para establecer las expectativas de aprendizaje, previo al diseño de tareas y necesario para la elección de secuencias de actividades. Mientras que Gómez (2002) propone un procedimiento para la planificación de una hora de clase o una unidad didáctica, basándose en cuatro análisis: análisis de contenido, cognitivo, análisis de instrucción y análisis de actuación. El procedimiento cíclico de estos cuatro análisis considerando además el contexto lo denomina Análisis Didáctico.

Lo señalado en los párrafos anteriores, es lo que nos motiva para realizar esta investigación en la que abordaremos la confrontación entre lo observado en nuestras prácticas en el aula, lo propuesto por el currículum nacional y nuestra formación como Profesores de Matemática de la Universidad de Valparaíso, desde los ámbitos pedagógico, didáctico y disciplinar cuyo foco es la adición de fracciones con distinto denominador.

La pregunta orientadora para nuestro trabajo es la siguiente:

¿Qué tipos de tareas permite desarrollar en los estudiantes la comprensión de los procesos involucrados en la adición de fracciones con distinto denominador?

1.1 Objetivos de investigación

1.1.2 Objetivo General

Realizar un Análisis Didáctico entorno a la operación de adición de fracciones con distinto denominador, para el diseño de tareas que faciliten la comprensión de los procesos involucrados.

1.1.3 Objetivos Específicos

- Desarrollar un análisis conceptual y de contenido de los conceptos asociados a la operación de adición de fracciones con distinto denominador.
- Elaborar un análisis de instrucción en torno al objeto de estudio, a partir de la producción de un análisis cognitivo de sus conceptos asociados.
- Realizar un análisis de actuación utilizando una metodología en base al Estudio de Clases Japonés para el análisis de la implementación de la propuesta de aprendizaje.

CAPÍTULO 2
MARCO TEÓRICO Y METODOLÓGICO

En este capítulo se presenta el Análisis Didáctico como marco teórico didáctico, que estructura nuestro estudio, orientando su diseño, aplicación, reformulación y análisis del objetivo propuesto. Además se entrega la metodología que se utilizará en este trabajo, describiendo el tipo de investigación, el contexto de los sujetos de estudio, los instrumentos aplicados para recoger información y el análisis de categorías. Esto se complementa con Estudio de Clases Japonés, como herramienta metodológica para la planificación y análisis de una clase.

2.1 Análisis Didáctico

El Análisis Didáctico, es un método de investigación utilizado en la Didáctica de la Matemática, basado en las nociones generales que ha tenido el concepto de análisis, en la filosofía y a lo largo de la historia. Rico (2013) expone que el Análisis Didáctico tiene como fin fundamentar, organizar y coordinar la planificación y posterior implementación de los procesos de enseñanza y aprendizaje en torno a un contenido matemático escolar específico, constituyendo *"un procedimiento con el que es posible explorar, profundizar y trabajar con los diferentes y múltiples significados del conocimiento matemático escolar, para efectos de diseñar, llevar a la práctica y evaluar actividades de enseñanza y aprendizaje"* (Gómez 2002, p. 252).

Este análisis está constituido por cinco unidades de estudio, estas son: análisis conceptual, análisis de contenido, análisis cognitivo, análisis de instrucción y análisis de actuación.

El análisis conceptual entrega un conocimiento acabado de lo que se quiere investigar a partir de sus fundamentos, evolución histórica, nociones básicas, origen y desarrollo, preocupándose así *"por la naturaleza de las definiciones y del lenguaje; trata de encuadrar los términos y sus interconexiones (…)Examina cuidadosamente la* *diversidad de significados, las posibilidades de conexión entre los términos y los niveles subjetivos (creencias y concepciones) y objetivos (conceptos)"* (Rico, 2001, p.186).

Resulta imprescindible entonces conocer el origen y la historia evolutiva de las fracciones y su proceso de adición, por lo que nos remontamos a estudiar en detalle a la civilización egipcia debido a sus interesantes hallazgos y métodos empleados para resolver situaciones de la vida diaria, como la repartición del pan. Basándonos en este hecho, confeccionamos posteriormente una tarea que lo ejemplifica para el desarrollo y análisis de este estudio.

La segunda unidad de estudio, el análisis de contenido, busca reconocer, estudiar y dar sentido a los distintos significados del concepto en cuestión. Los diferentes significados de un término constituyen su categoría representacional, y comprenden las notaciones gráficas y simbólicas, así como también sus manifestaciones verbales. Este análisis también desarrolla una categoría fenomenológica, que consiste en describir los fenómenos en los que está involucrado el concepto y la relación existente entre ellos, *"los contextos en los que se utilizan y aquellas situaciones en las que se presentan y en las cuales se aplican"* (Rico, 2013, p.18).

Para atender a la pluralidad de significados que puede adoptar la fracción, es que analizamos las definiciones que se relacionan con esta, tanto en los textos expertos como en los escolares, estableciendo la distancia que hay entre ellas. También consideramos los distintos contextos en que la adición de fracciones puede ser de utilidad y las formas en que se puede expresar para identificar la presencia o no de esta en ciertas situaciones.

En el análisis cognitivo, el docente, considerando los diferentes aspectos abordados en los dos análisis anteriormente descritos, define y detalla sus conjeturas sobre cómo los estudiantes podrán alcanzar y desarrollar una construcción del conocimiento a partir de las actividades y tareas de enseñanza y aprendizaje que enfrentarán, constituyendo así un análisis a priori. De esta forma, podrá predecir las actuaciones, dificultades y errores de los estudiantes al enfrentarse a las tareas, y así poder definir las oportunidades de aprendizaje que le permitirán superar aquellas dificultades y errores. El desarrollo de cada tarea involucra conceptos de la estructura matemática en la que se está trabajando, y que se ponen en juego a través de diferentes sistemas de representación.

Se realiza un barrido de los textos escolares oficiales que constituyen el currículum nacional, respecto a las fracciones y su adición para conocer los organizadores según cada nivel, es decir, las expectativas, limitaciones y oportunidades de aprendizaje que se proponen, junto con las dificultades y errores que surgen en el tratamiento de la adición entre fracciones con distinto denominador.

La cuarta unidad de estudio es el análisis de instrucción y es donde el docente diseña la propuesta de aprendizaje que aplicará, identificando y describiendo las tareas de enseñanza y aprendizaje. Estas tareas han de considerar el contenido abordado en la estructura conceptual y los objetivos de aprendizaje propuestos, por lo tanto, considera un análisis de las dificultades, errores y obstáculos identificados en el análisis anterior, que le permita superarlos.

En base a lo estudiado en los análisis anteriores, es que diseñamos un plan de clases que permita dirigir el proceso de enseñanza-aprendizaje de la adición de fracciones con distinto denominador. Incluye la confección de tareas que buscan que el estudiante reconozca la fracción en su sentido parte-todo, identifique la unidad para que finalmente comprenda el proceso que realiza al sumar números fraccionario, dejando de lado la memorización de algoritmos.

El último análisis es el de actuación, y es donde el profesor, basándose en la descripción de las actuaciones de los estudiantes, determina los conocimientos y aprendizajes que adquirieron por medio de la propuesta de enseñanza y aprendizaje. Además, señala las dificultades y obstáculos que presentaron, y si fueron o no superados. Por lo tanto, esta unidad de estudio constituye un análisis a posteriori (Gómez, 2002), donde el docente describe y determina las destrezas, habilidades, estrategias, razonamientos y errores que el estudiante realizó, contrastándolo con lo previsto en el análisis de instrucción, para así poder reformular la propuesta, mediante un nuevo ciclo de Análisis Didáctico.

Se implementa el plan de clases diseñado y surgen las debilidades de éste, como la organización del tiempo, gestión de la clase y problemas en la comprensión de tareas, por lo que mediante una reformulación se perfecciona la planificación y se vuelve a implementar, consiguiendo categorizar los resultados en base al análisis de las producciones.

En el siguiente esquema presentamos el Análisis Didáctico entorno a la operación de adición de fracciones con distinto denominador.

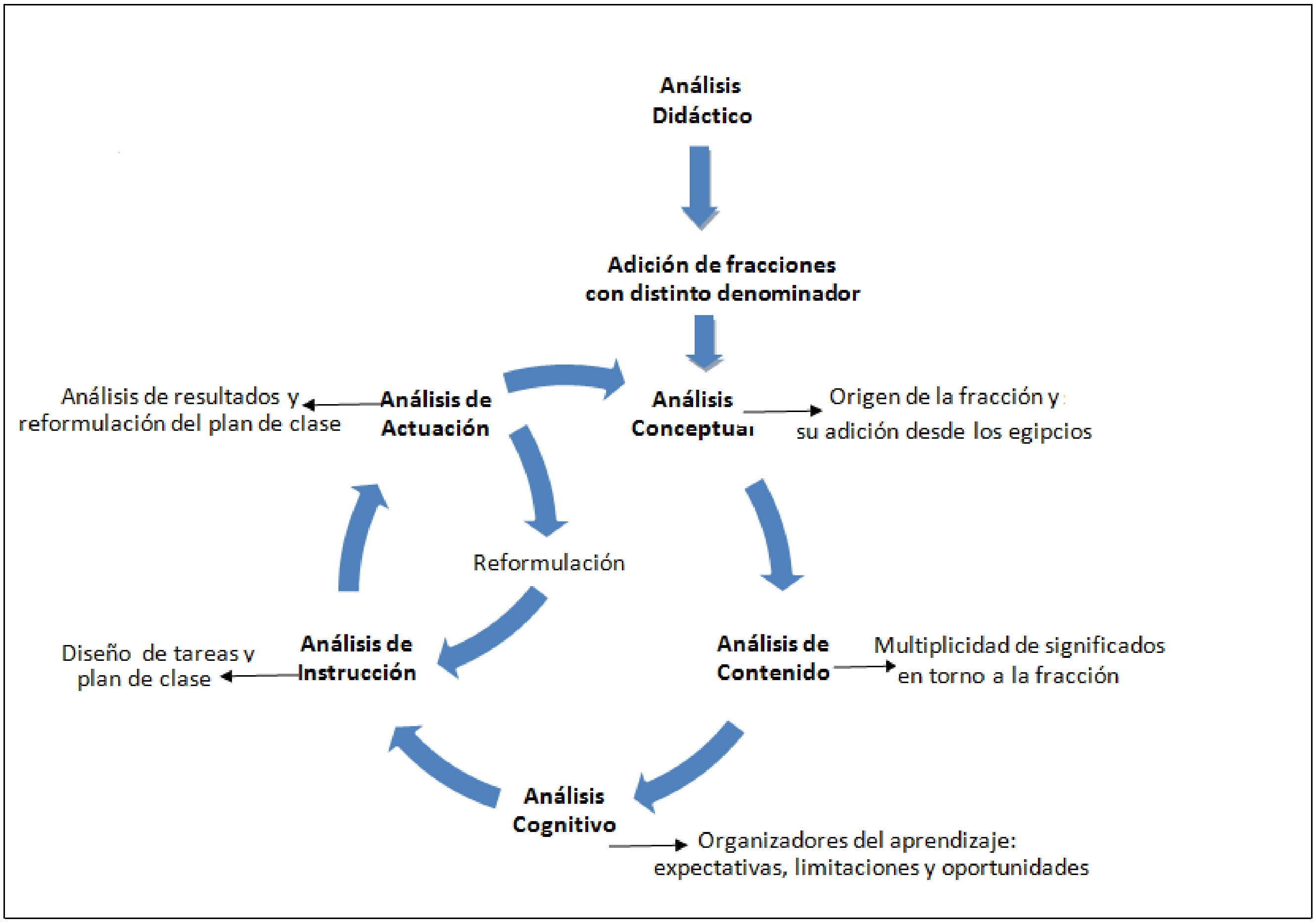


Figura 4. Esquema Análisis Didáctico Adición de Fracciones con distinto denominador. Fuente: Diseño propio

2.2 Tipo de Investigación

En virtud de la problemática y los correspondientes objetivos de la investigación, este estudio se afrontará desde el paradigma cualitativo interpretativo. En palabras de Merriam (1998), la metodología cualitativa consiste en entender el fenómeno de interés desde la perspectiva de los participantes y no del investigador. Así también, se centra en los procesos, significados y entendimientos, en otras palabras, se estudia la realidad en su contexto natural, tal como es, para así, interpretar los fenómenos implicados que tienen las personas (Rodríguez, Gil y García, 1996).

Es por esto que el tipo de investigación, será de carácter descriptivo, a decir de Hernández, Fernández y Baptista (2010), estos estudios "*pretenden medir o recoger información de manera independiente o conjunta sobre los conceptos o las variables a las que se refieren*" (p. 80). Lo anterior, se busca que sea "*con la mayor exactitud posible*" (Hernández, Fernández y Baptista, 2010, p. 82).

Además, el investigador en esta clase de estudio debe ser capaz de definir, o al menos visualizar, qué se medirá y cómo va a lograr esta medición, es decir, sobre qué o quienes se recolectarán los datos (Hernández et al., 2010).

En una investigación de corte descriptiva, Fernández (2006) estipula cuatro pasos que la constituyen como tal, estos son:

1. Obtener la información: hace referencia a los instrumentos para la recogida de información.
2. Capturar y ordenar la información: toda la información obtenida, debe ser transcrita en un formato legible.
3. Codificar la información: este paso indica que se deben realizar categorías de análisis, que concentren las ideas y conceptos claves que rigen a la investigación.
4. Integrar la información: relacionar las categorías obtenidas entre sí.

Para efectos de esta investigación, se interpretan los pasos que explica Fernández en función de responder a la problemática.

2.3 Contexto y Sujetos de Estudio

Es preciso señalar, como estipulan Hernández et al. (2010), cómo se va a realizar la medición de esta investigación. En este sentido, el grupo de sujetos al cual se le presentó la propuesta didáctica, está constituido por estudiantes del nivel séptimo y octavo básico del Colegio María Auxiliadora ubicado en el sector de Playa Ancha, Valparaíso y que educa exclusivamente a niñas. Fueron 37 y 25, respectivamente, las estudiantes que participaron del plan de clase implementado, cuyas edades fluctúan entre los 12 y los 14 años.

El establecimiento educacional corresponde a un Colegio Científico Humanista perteneciente a la Congregación de las Hijas de María Auxiliadora con 89 años de presencia formativa cristiana en las jóvenes.

El lugar donde se llevará a cabo la clase, es una sala amplía adecuada para la cantidad de alumnas que conforman el nivel Cuenta con los recursos necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje. Específicamente posee una pizarra acrílica y una de tiza, proyector data show, parlantes y televisor.

2.4 Instrumentos para la Recogida de Datos

1. Una grabación en video de la clase, lo que concede hechos en sí mismos, es decir, se registran detalles del aula y de los observantes, que no son captados por otros medios (Quintana, 2008). De esta forma, son visibles los momentos de la clase, las interacciones entre los participantes y las etapas del plan de acción.
2. Las tareas de clase, es decir, el material que se les facilitó a los alumnos para que lo trabajaran durante la sesión de clases.

   Es a partir de este instrumento que se obtienen evidencias empíricas del trabajo de los sujetos de estudio. Dicho instrumento se presenta en el Anexo 1.
3. Las evidencias escritas, tienen relación directa con las tareas de clase, porque en ellas los estudiantes plasmarán sus ideas y posibles estrategias de resolución al problema que se les planteará. Estas evidencias se encuentran en la sección de Anexos.

2.5 Levantamiento de categorías de análisis

Al analizar datos de tipo cualitativos, cobra suma importancia el modo a través del cual se examinarán los datos recogidos. Respecto a este entendido, se vuelve necesario etiquetar la información, es decir, agrupar los datos obtenidos en categorías que concentren las ideas, conceptos o temas revelados por el investigador (Rubin y Rubin, 1995; Fernández, 2006).

El proceso de levantamiento de categorías de análisis, permite llevar a cabo comparaciones y contrastes, bajo una estructura organizada que posibilita establecer las ideas más importantes, los descubrimientos y las conclusiones.

Es en esta línea, que las categorías que se utilizarán en este estudio para examinar los datos obtenidos, se diseñarán a partir de las estrategias que realicen los sujetos de estudio, para dar respuesta a la problemática que conlleva el plan de acción. De este modo, se analizarán los aciertos y los errores que se constaten en cada categoría.

2.6 Estudio de Clases Japonés

Para realizar el análisis de la clase que se implementará, se utiliza el Estudio de Clases o *Jugyou Kenkyu,* el cual es un "*método japonés de mejoramiento de clases diseñado para llevar su desarrollo a la más alta calidad"* (Arcavi, Isoda y Mena, 2007, p. 12). En este proceso, los docentes trabajan en conjunto, examinando y criticando sus distintas técnicas de enseñanza, para que de manera progresiva, puedan ir mejorando en sus respectivos métodos de enseñanza. Además de compartir conocimientos, y obtener retroalimentaciones unos de otros, los docentes actúan como investigadores de su propia práctica, aportando así, al desarrollo educativo del país (Arcavi, Isoda y Mena, 2007).

La mayor importancia del Estudio de Clases, radica en que todos sus procesos se realizan siempre en colaboración con otros docentes. Acorde a los autores Arcavi, Isoda y Mena (2007), el Estudio de Clases se compone de las siguientes tres etapas:

- La primera etapa, llamada Preparación, consiste en la selección de un contenido propuesto en los programas de estudio, para que sea implementado en el aula. Una vez que se conoce dicho contenido, se comienza a planificar la clase, evidenciando los recursos a utilizar y los elementos más relevantes para la implementación.

- La segunda etapa, denominada Clase a Investigar, radica en observar la clase que se implementa en el aula, basada en la planificación que se construyó en la primera etapa. En esta clase, se encuentran presentes otros docentes que están observando el actuar del profesor que lleva a cabo la implementación de la enseñanza. Esta sesión puede ser grabada para que otros pares especialistas la puedan observar.
- La tercera y última etapa, se conoce como Sesiones de Revisión, en ella los docentes observadores se reúnen con el profesor que realizó la clase, en una sesión en que todos participan dando a conocer sus opiniones respecto de la clase observada, buscando su mejora. Con esta reunión se pretende reformular la clase, dando término a las tres etapas del Estudio de Clases, y de esta manera comenzar nuevamente el mismo ciclo desde la planificación.

El Estudio de Clases es un apoyo metodológico que permitirá desarrollar el análisis de actuación, pues su estructura se enfoca en la discusión entre pares para retroalimentar una clase, obteniendo información relevante para su mejora.

CAPÍTULO 3
ANÁLISIS CONCEPTUAL

En este capítulo se aborda el análisis conceptual, que *"examina cuidadosamente la diversidad de significados, las posibilidades de conexión entre los términos y los niveles subjetivos (creencias y concepciones) y objetivos (conceptos) de cada campo conceptual"* (Rico, 2001, pág. 186). Este análisis conceptual utiliza la historicidad y dinamicidad de los términos para lograr una reflexión previa sobre lo que se desea investigar, en nuestro caso, aborda el concepto de fracción y sus usos, desde sus orígenes, en las antiguas civilizaciones y su evolución hasta la construcción de los números racionales. Luego, se profundiza en el caso de la antigua civilización egipcia, donde se destaca el uso de las fracciones unitarias y su relación con la idea de reparto como fuente de conocimiento respecto de la adición de fracciones con distinto denominador.

3.1 Análisis Histórico-Epistemológico

Para entender la adición de fracciones, es necesario preguntarse por el origen de las fracciones, ya que *la concepción de una idea matemática va directamente relacionada con su emergencia y evolución histórica* (Peña, 2011, pág. 26)

Los estudios epistemológicos considerados tratan, principalmente, el concepto de fracción a través del tiempo, desde los pueblos babilónicos, egipcios, griegos, árabes e hindúes, llegando hasta los tiempos modernos cuando se construyen los números racionales. En primer lugar, se expone una breve reseña histórica epistemológica de la fracción, utilizando básicamente el estudio de Peña (2011) *Resignificación del algoritmo para operar aditivamente con fracciones en un contexto escolar*, quien describe de manera compacta el origen y la historia de la fracción, siendo complementado con otros estudios. Luego, se examina en detalle el sistema de adición de fracciones de los egipcios, pues se encuentran métodos particularmente interesantes, dadas las diferencias con el cálculo actual de la adición de fracciones y la concepción de la fracción unitaria que manejaban (de acuerdo a un impedimento epistemológico) que puede llevar a vislumbrar un cambio en la enseñanza, un camino distinto para sortear obstáculos o para enriquecer el aprendizaje y, posiblemente, facilitar el conocimiento de los estudiantes. Se ejemplifican los procedimientos utilizando la notación actual, para facilitar la escritura y la comprensión, ya que ellos usaban jeroglíficos y al parecer no usaban un símbolo para la adición, solo anotaban juntas las fracciones.

Para este apartado se utiliza principalmente las publicaciones en el blog personal de Carlos Maza Gómez, *Matemáticas en la Antigüedad*, y el libro *Historia del papiro de Rhind* de Ángel Pulpón Zarco.

3.1.1 La Historia de la Fracción y su Adición

Uno de los registros más antiguos que se tienen respecto del uso de las fracciones es el de la civilización babilónica, según Peña (2011) de alrededor del año 2500 a.C., cuando decidieron uniformar sus medidas para facilitar intercambios comerciales. Gracias al uso de tablillas de barro cocido que preservaron su conocimiento, se puede contar con información matemática al respecto. Los babilónicos usaban un sistema de numeración mixto de base 10 y 60, del cual perduran hasta hoy la forma de medir un círculo en 360 grados o el tiempo en minutos y segundos. Además usaban un sistema de medición con subunidades, para medir longitud la unidad menor era el dedo, 30 dedos componían un codo y 120 codos una vara; para cantidades que no calzaban con una unidad se establecieron otras intermedias como palmos, pero a la hora de operar la tarea resultaba compleja, por lo que la fracción resultaba ser una noción más eficaz para efectuar dichos cálculos, al estar expresada la medida en una sola unidad.

El concepto de fracción también fue utilizado para medir porciones no enteras de un reparto por la civilización egipcia, evidencias de ello se encuentran en los papiros de Moscú y de Rhin, que datan del año 1800 a.C. y 1650 a.C. respectivamente, pero por los conocimientos que en ellos aparecen podrían fecharse alrededor del año 3000 a.C.

(Pulpón, 2008). En el papiro de Rhind, o papiro de Ahmés, es posible apreciar la costumbre egipcia de expresar toda fracción como una suma de fracciones unitarias[2].

En la medida que se institucionaliza la fracción como un objeto matemático, éste se vuelve un tipo de número que permite expresar la medida de las porciones no enteras. Aún así, seguía resultando complejo operar con la notación egipcia que consideraba sólo fracciones unitarias. Los griegos, por ejemplo, marcaban el numerador con un acento y el denominador con dos; o bien colocaban al denominador sobre el numerador (como actualmente anotamos los exponentes). Finalmente, fueron los hindúes quienes resolvieron el problema de la notación, escribiendo el numerador sobre el denominador. De hecho, los antecedentes más antiguos acerca de la resolución de operaciones con números fraccionarios o quebrados, datan de Aryabhata, en el siglo VI d.C. y Bramagupta, en el siglo VII d.C. Posteriormente, Mahavira, en el siglo IX y Bháskara en el siglo XII, sistematizan la operatoria llegando al algoritmo actual. Por su parte, la mayoría del mundo árabe utilizaba una escritura similar a la egipcia para representar fracciones. Pero es a mediados del siglo IX d.c. cuando Muhammad ibn Musa Al Khwarizmi adopta la notación india al redactar un manual sobre aritmética que recoge precisamente toda la tradición matemática india. No es sino hasta el siglo XII que la obra de Al Khwarizmi es traducida al latín, y uno de sus grandes difusores -Leonardo de Pisa- comienza a hacer uso de la línea horizontal para representar divisiones originando la notación actual. (Peña, 2011, págs. 27-28)

Podemos ver, que pese a conocer y operar con fracciones, el avance de las antiguas civilizaciones en el concepto, escritura y operatoria de los números fraccionarios tuvo varias dificultades que sortear. La concepción y el uso de las fracciones egipcias se mantuvieron por mucho tiempo, desde los griegos hasta Leonardo de Pisa, quien continúa usándolas en algunos de sus cálculos (Iessi, 2007). Además, en la antigüedad, son poco conocidos los grandes aportes de los griegos, como el algoritmo de Euclides para máximo común divisor y mínimo común múltiplo o la Criba de Eratóstenes para la descomposición de los números en sus factores primos. Al parecer, por su dificultad no se incorporan estos

[2] Se refiere a fracciones de numerador uno, fracciones casi de uso exclusivo de los egipcios, por lo cual también se les llama fracciones egipcias.

conocimientos, el hombre práctico prefiere utilizar las fracciones unitarias, extendiéndose su uso por al menos un par de milenios, hasta la época de Herón (Iessi, 2007).

Hacia el tiempo medieval, encontramos a Leonardo de Pisa, más conocido como Fibonacci, quien utiliza tres clases de fracciones: comunes, sexagesimales y unitarias (Iessi, 2007), lo que nos demuestra el difícil proceso de compresión y tratamiento que experimentaba la noción de fracción. Finalmente, en tiempos modernos, Nicolás de Oresme presenta una exposición sistemática de reglas para la operación con fracciones, Karl Weierstrass presenta la construcción de los números racionales (Iessi, 2007).

3.2 Adición de Fracciones, Epistemología Egipcia

Una de las nociones más antiguas en cuanto a la adición de fracciones la podemos encontrar en la civilización egipcia, gracias a los escritos en el papiro de Rhind, que data aproximadamente del año 1650 a.C. El papiro Rhind es también conocido como papiro de Ahmes, escriba autor de la obra y comienza con la frase: "Cálculo exacto para entrar en conocimiento de todas las cosas existentes y de todos los oscuros secretos y misterios". El papiro de Moscú es de autor desconocido (Pulpón, 2008)

Gracias a la evidencia que entregan estos papiros, se conoce el uso egipcio de las fracciones como medida de reparto, además de medida y operador. De acuerdo a otros descubrimientos, como el rollo de cuero[3], existen suposiciones de que si usarían la adición de racionales como tal, usando algunas reglas particulares como los generadores o números rojos que se describen más adelante.

Para entender la forma de proceder con la adición de fracciones de los egipcios, debemos hacer una serie de consideraciones propias de la época.

[3] Otros papiros complementarios son el rollo de cuero, con 26 operaciones de sumas de fracciones de numerador 1, y los de Kahun, Berlín, Reiner y Ajmin (Pulpón, 2008).

Los egipcios manejaban las operaciones aritméticas, para multiplicar y dividir usaban el sistema de desdoblamiento, es decir, duplicar un número sucesivamente, lo que depende del hecho de que cualquier número puede expresarse como potencias de dos

Ejemplo: multiplicar 15 por 12

Si elegimos el número 15 para multiplicarlo por 12, se comienza por el numero 15 y se duplica sucesivamente, tantas veces como sea necesario (hasta no superar 12). Podemos descomponer 12 en $8 + 4$, por lo que el resultado será $15 \cdot 8 + 15 \cdot 4$, esto es $120 + 60$, luego el resultado de $15 \cdot 12$ es igual a 180.

15	1
30	2
60	4
120	8

$$15 \cdot 12 = 15 \cdot 8 + 15 \cdot 4 = 120 + 60 = 180$$

Figura 5. *Multiplicación egipcia.* Fuente: Elaboración propia

De acuerdo a lo registrado en el papiro de Rhind, los egipcios utilizaban solo fracciones unitarias, por lo que fracciones con numerador distinto de 1 eran expresadas como suma de fracciones unitarias diferentes (no sumaban fracciones iguales). Esto tendría una explicación en la noción de reparto que manejaban los egipcios respecto de la fracción.

Para entender la noción de reparto que primaba en los egipcios, presentamos a continuación un ejemplo interesante en Maza (2002), que tiene sentido con el método de desdoblamiento y que explica la forma de descomponer fracciones en fracciones unitarias.

Suponga que quiere repartir dos panes entre ocho personas. Para hacerlo, basta dividir cada uno en cuatro partes (1/4), pero en la práctica sería más sencillo dividir cada pan en dos partes iguales y cada una de estas partes en otras dos (1/2 de 1/2 es igual a 1/4). La acción de reparto es particularmente más sencilla por este procedimiento de divisiones sucesivas por la mitad, lo que concuerda con el método de desdoblamiento y es el motivo de que las fracciones de Horus (1/2, 1/4, 1/8, 1/16, 1/32, 1/64) hayan sido de uso tan frecuente. El reparto se complica si el número de personas entre las que hay que repartir los dos panes es distinto de una potencia de dos, por ejemplo, hacerlo entre seis personas supondría partir cada pan en dos partes y cada una de ellas en tres partes iguales (1/3 de 1/2 es igual a 1/6). Y ¿qué sucede cuando el número de personas es impar? En el caso de ser cinco personas, por ejemplo, se puede dividir cada pan en tres partes iguales de manera que, en un primer reparto, se da 1/3 de pan a cada persona, sobrando un tercio que, a su vez, habría que dividir en cinco partes iguales para repartir por igual. Cada uno de los trozos resultante supondría 1/5 de 1/3 de pan, es decir, 1/15 de pan. En resumen, cada persona no se llevaría 2/5 de pan sino 1/3 + 1/15, lo que lleva a establecer para el escriba egipcio la igualdad: 2/5 = 1/3 + 1/15. Esto último sería de acuerdo a la lógica que siguen los registros de estas fracciones en el papiro de Rhind (de la forma 2/n, con n impar), pues no responden a método de desdoblamiento, pareciendo natural poder dividir en 3 partes.

> *Dentro del contexto de reparto, por consiguiente, la fracción no es un número susceptible de ser generalizado, sino la expresión de una acción de reparto. Y en el reparto tal como ha sido expuesto sólo son admisibles las fracciones unitarias. Es por ello que, debido al origen de la fracción y a la limitación contextual del mismo, el egipcio nunca pudo superar la noción de la fracción en relación a la acción que la fundamenta.* (Maza, 2002)

Los egipcios también conocían la noción de fracción como medida, esto lleva a que exista al menos una excepción a la regla, ya que utilizaban la fracción 2/3 como operador, una explicación a este caso particular la encontramos en Maza (2002), para calcular el volumen, por ejemplo de un granero, utilizaban codos cúbicos como medida, pero la capacidad del grano se medía en Khar, cumpliendo la siguiente relación: *1 khar = 2/3 codo cúbicos*

> *Esto significa que 2/3 no es una fracción expresión de un reparto, como en el caso de las fracciones unitarias, sino que tiene una naturaleza de tipo operativo: Es el operador por el que hay que multiplicar los codos cúbicos para obtener su expresión en khar.* (Maza, 2002)

Quizás por ello la fracción $\frac{2}{3}$ no aparece en la tabla de descomposición del papiro de Rhind, aun cuando tiene su forma en suma de fracciones unitarias, más aun, se puede generalizar la descomposición de fracciones de la forma $\frac{2}{3k}$, con k un número entero positivo, esta es: $\frac{2}{3k} = \frac{1}{2k} + \frac{1}{6k}$

La forma de obtener esta regla procede de la idea de reparto de los egipcios, tal como se explicó anteriormente, para repartir dos panes entre tres personas se dividen en la mitad y se reparten tres de ellas, la sobrante se divide en tres con lo que se completa el reparto.

> *Obsérvese cómo la naturaleza conceptual de la fracción propia de los egipcios impide la acción más sencilla de hallar una tercera parte de dicha cantidad original repitiéndola de nuevo (1/3 + 1/3 = 2/3). Ello significaría tratar a las fracciones como números generalizables, consideración no coherente con el marco conceptual en que habían construido el concepto de fracción.* (Maza 2002)

De esta manera pueden obtenerse otras reglas que originan descomposiciones en fracciones unitarias, las que se pueden llamar *familias de fracciones*[4]. Otras reglas son:

$$\frac{2}{5k} = \frac{1}{3k} + \frac{1}{15k} \qquad\qquad \frac{2}{11k} = \frac{1}{6k} + \frac{1}{66k}$$

Pero aun, siguiendo estas reglas, quedarían varías descomposiciones sin explicar, además de los casos en que se encuentran o cruzan estas reglas para descomponer, como en el caso de 2/15 que pertenece a la familia de 2/3 y 2/5.

3.2.1 ¿Como hacían estas descomposiciones?

En el papiro de Rhind se ven una serie de descomposiciones, que al ser estudiadas posteriormente presentan algunas regularidades, pero de acuerdo a los errores que se presentan, la forma de proceder de los egipcios era realizar un mismo procedimiento, por

[4] Una imagen complementaria al respecto se encuentra en anexos.

lo que no existe evidencia de que manejaran algún método para realizar descomposiciones. En el papiro de Rhind, se presentan fracciones de la forma 2/n, con n impar, descompuestas en sumas de fracciones unitarias; fracciones que pueden ser descompuestas de diferentes formas, por lo que los egipcios debieron seguir algún criterio para su procedimiento[5].

3.2.2 Métodos para descomponer fracciones

Estos métodos buscan la solución para fracciones distintas a la forma 2/n descrita en el papiro de Rhind, de manera de entender como operarían los egipcios en otros casos, porque si usaron uno o más métodos seguirá siendo un misterio.

Ciertamente sobre la base de los 2 papiros más importantes de matemáticas no podemos sacar unas conclusiones claras de los conocimientos reales de los escribas egipcios en cuestiones de cálculo. (Pulpón, 2008)

3.2.2.1 Método de divisores

Por ejemplo, si tenemos la fracción $\frac{11}{16}$ esta puede separarse en sumandos convenientes como $\frac{10}{16}+\frac{1}{16}$ con lo que obtenemos una fracción unitaria. Luego, como no podemos repetir fracciones, el siguiente numerador, por ser el menor, será 2. Entonces $\frac{10}{16}=\frac{8}{16}+\frac{2}{16}$ Simplificando obtenemos que $\frac{11}{16}=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$

Podemos ver que los numeradores en que hemos descompuesto la fracción inicial (1, 2 y 8) son divisores del denominador, entonces se descompone el numerador en sumandos que son divisores del denominador, lo que sintetiza este método.

[5] Un estudio detallado lo realiza Gillings (1972), citado en el blog de Maza (2002), describiendo cinco criterios de descomposición.

3.2.1.2 *Método Fibonacci Sylvester*

El método está detallado por estos matemáticos de renombre, pero para hacerlo más simple, lo explicaremos con un ejemplo, y para hacer comparaciones, consideramos la misma fracción del caso anterior.

Lo que se hace es considerar el recíproco de la fracción, ubicarla entre dos números enteros, para luego al volver a aplicar el reciproco, restar la fracción menor.

La fracción $\frac{11}{16}$ tiene su recíproco entre 1 y 2, luego la fracción está entre $\frac{1}{2}$ y 1. De esta manera a $\frac{11}{16}$ se resta $\frac{1}{2}$ para obtener $\frac{3}{16}$.

La fracción $\frac{3}{16}$ tiene su recíproco entre 5 y 6, luego la fracción está entre la fracción $\frac{1}{6}$ y la fracción $\frac{1}{5}$. De esta manera a $\frac{3}{16}$ se resta $\frac{1}{6}$ para obtener $\frac{1}{48}$.

Finalmente $\frac{11}{16} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{48}$.

Nuestra intención no es ahondar en el método, sino dejar en claro que existen distintas formas de descomponer en fracciones unitarias, más aun, existen diversas formas de descomponer una fracción en fracciones unitarias, por lo que se hace difícil esclarecer como eligieron las descomposiciones los egipcios.

3.2.3 Descifrando los misterios de la adición de fracciones egipcias

Los egipcios realizaban sumas de fracciones, pero para ello realizaban un proceso más complejo, transformándolas a fracciones unitarias antes de operar. Existen casos en el papiro de Rhind, de acuerdo a lo que señala Pulpón (2008), donde se resuelven multiplicaciones de fracciones, para ello se utiliza el método del desdoblamiento, lo que implica sumar varias fracciones, que es nuestro objeto de interés.

3.2.3.1 El Rollo de Cuero

Según Maza (2002), además del papiro de Rhind, se encontraron otros documentos egipcios en posesión de Henry Rhind (de ahí su nombre), entre ellos estaba un rollo de cuero, que parecía tener signos aritméticos y se habría encontrado en la misma habitación, lo que hace suponer que sería una casa de futuros escribas. Debido a su mal estado, el Rollo de Cuero fue desenrollado posteriormente, en el se encontraron un conjunto de suma de fracciones en cuatro columnas, siendo las dos últimas copias fieles de las dos primeras, lo que sugiere que sería un ejercicio de práctica de un estudiante avanzado. A partir de los resultados encontrados en el Rollo de Cuero junto a los que aparecen en el papiro Rhind, se puede ensayar una reconstrucción de los distintos pasos seguidos por los escribas para llegar a estos resultados, desde los más sencillos a los más complejos.

Lo descrito a continuación está basado en Maza (2002) quien cita las investigaciones hechas por Gillings (1972).

Los escribas tendrían un conocimiento de la duplicación de una fracción (unitaria) con denominador par, como 1/4 + 1/4 = 1/2 ó 1/6 + 1/6 = 1/3, con lo que se obtiene como regla que la suma de dos fracciones iguales de denominador par es igual a una fracción cuyo denominador es la mitad del denominador inicial. Ello correspondería al generador (1,1). Cuando se extiende el procedimiento al generador (1,1,1) se ha de tener en cuenta que el escriba debía partir de una concepción de la fracción como parte de la unidad. Así, tomando 1/6 + 1/6 + 1/6 se están considerando un total de 3 partes entre 6 lo que supone la mitad de las existentes, es decir, 1/2. De esta manera, si se agrupan los tres sumandos de otro modo, el resultado es el mismo: (1/6 + 1/6) + 1/6 = 1/3 + 1/6 = 1/2 con lo que el generador (1,1,1) daría lugar a los resultados propios del (1,2) y a la regla de que, cuando se suman dos fracciones de manera que el denominador de una sea el doble que el de la otra, el resultado es una fracción que tiene por denominador el mayor de los dos primeros dividido por tres.

El procedimiento puede extenderse tanto como se quiera, por ejemplo considerando el generador (1,1,1,1) en el caso de la suma de fracciones 1/12 + 1/12 + 1/12 + 1/12. Esta suma, que corresponde a 4/12, es decir 1/3, puede agruparse de varias formas a partir de las reglas anteriores: (1/12 + 1/12 + 1/12) + 1/12 = 1/4 + 1/12 = 1/3, esto darían lugar al establecimiento de una regla general: La suma de dos fracciones tales que el denominador de una sea tres veces mayor que el de la otra, es igual a una fracción cuyo denominador se obtiene dividiendo entre cuatro el mayor de los denominadores iniciales.

En líneas generales, el escriba podría haber dispuesto en sus cálculos de varios procedimientos alternativos que ir aplicando según las fracciones implicadas, consideraron:

- Agrupar fracciones iguales con la utilización de resultados anteriores a partir de los más sencillos.
- Deducir unos resultados de otros a partir del cálculo de su mitad, de su tercera parte, etc.
- Desagrupando fracciones utilizadas en resultados anteriores.
- Aplicando las dos partes de la igualdad a cantidades concretas mediante “auxiliares rojos” (los que serán descritos más adelante)

3.2.3.2 Los generadores

Los procedimientos anteriores se deducen de las 26 sumas encontradas den el Rollo de Cuero y de acuerdo al trabajo de Gillings[6] se pueden agrupar para reflejar el conocimiento egipcio sobre la adición de fracciones, mediante dos criterios:

- En primer lugar, el número de fracciones que son sumadas para dar un resultado en forma de una única fracción unitaria. Así se pueden distinguir resultados de dos, tres y hasta cuatro fracciones sumadas.

[6] El conjunto de sumas de fracciones en el rollo de cuero más otras sumas similares que aparecen en el papiro Rhind, agrupadas por generadores, se encuentran en anexos CD

- En segundo lugar, la relación numérica de los denominadores en las fracciones sumadas. De este modo, la suma 1/9 + 1/18 responde al generador (1,2) ya que dando al menor denominador (9) el valor 1 en el generador, el otro (18) corresponderá a 2. Igualmente, la suma 1/14 + 1/21 + 1/42 obedecería al generador (2, 3, 6) debido a que la asignación de 1 al denominador 14 originaría una relación numérica fraccionaria que, por simplicidad, es mejor eludir.

Pese a estos hallazgos, queda sin respuesta cómo los egipcios habrían construido estos resultados pese a las limitaciones que presentaba el uso de las fracciones unitarias, Maza (2002).

3.2.3.3 Adición en el papiro de Rhind

A continuación se muestra la aplicación de los generadores en la suma, de acuerdo al problema 9 del papiro de Rhind, descrito en Pulpón (2008)

Problema 9: multiplica $\frac{1}{2}+\frac{1}{14}$ por $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$

El escriba multiplica $\frac{1}{2}+\frac{1}{14}$ por cada uno de los multiplicandos y luego suma los resultados parciales, obteniendo como producto 1 (Pulpón, 2008). Nótese que los multiplicandos son coincidentes con el método de desdoblamiento, duplicando sucesivamente ¼ o, de manera inversa, dividiendo por 2.

$$
\begin{array}{ll}
1 & \frac{1}{2}+\frac{1}{14} \\[2ex]
\frac{1}{2} & \frac{1}{4}+\frac{1}{28} \\[2ex]
\frac{1}{4} & \frac{1}{8}+\frac{1}{56}
\end{array}
$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4} \quad \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{14}+\frac{1}{28}+\frac{1}{56}$$

El método empleado es sumar primero $\frac{1}{14}+\frac{1}{28}+\frac{1}{56}$ lo que da como resultado $\frac{1}{8}$ (Pulpón, 2008). Esto sería de acuerdo al generador (1, 2, 4), tal que, generalizando la regla de los generadores, podríamos decir que el mayor de los denominadores se divide en la suma de los generadores, en este caso, 56 dividido en 7 (1+2+4).

La suma queda reducida ahora a $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}$ y después realiza sumas equivalentes para poder aplicar el método de reducción (Pulpón, 2008).

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$$

$$1$$

Podemos ver que se aplica la regla del generador (1, 1) sucesivamente y que no se aplica la regla del generador (1, 2, 4) a $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$ que daría el inverso de 8 dividido en 7, es decir, 7/8 lo cual es correcto, pero no es una fracción unitaria.

3.2.3.4 Los números auxiliares rojos

De acuerdo a Maza (2002) el problema 7 del papiro de Rhind tiene su resolución acompañada de una anotación de número rojos, tal como sigue:

Problema 7: multiplicación de $\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$ por $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$

$$\begin{array}{lll} 1 & \frac{1}{4}+\frac{1}{28} & 7\ 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{8}+\frac{1}{56} & 3\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{16}+\frac{1}{112} & 1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{4} \end{array}$$

¿Qué significan estos números conocidos como auxiliares rojos? Si se recuerda el procedimiento de multiplicar ambos términos de una igualdad de fracciones por una cantidad determinada para comprobar dicha igualdad de forma operativa, se observará que esta interpretación también está presente en este caso (Maza, 2002).

Entonces el procedimiento consiste en amplificar los resultados parciales, por algún denominador conveniente, de manera de obtener fracciones más fáciles de sumar. En el problema anterior se multiplica por 28, con lo que se obtienen los números auxiliares rojos.

$$\frac{1}{4}(28) = 7 \qquad \frac{1}{28}(28) = 1$$

$$\frac{1}{8}(28) = 3\frac{1}{2} \qquad \frac{1}{56}(28) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{16}(28) = 1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{4} \qquad \frac{1}{112}(28) = \frac{1}{4}$$

$$7 + 3\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2}\frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 14$$

Al sumar los números rojos se obtiene 14, y al dividirlo en 28 resulta 1/2, que es la respuesta al problema.

Esta es una idea primitiva y poco sistemática del actual mínimo común múltiplo. Es primitiva porque no se obtiene de la propia estructura de los números sino previsiblemente probando alguno de ellos suficientemente alto como para que el resultado adopte la forma de números enteros o fracciones sencillas. Es poco sistemático porque, si en este caso se tomaba un número intermedio entre el menor de los denominadores y el mayor, en otras ocasiones se considera el mayor de ellos (Maza, 2002).

A través de este estudio, podemos constar los obstáculos epistemológicos que se presentaron en distintas culturas al operar con fracciones, específicamente con la operación de adición. Destacando las dificultades para concebir la fracción como número, teniendo que recurrir a la descomposición en fracciones unitarias, las dificultades de notación de la fracción, que encuentra en tiempos modernos su forma actual y las dificultades para operar, intuyéndose métodos de adición a través del desdoblamiento, el uso de generadores o los números rojos. Sorprende de este estudio, que a pesar de los obstáculos epistemológicos que subyacen del método egipcio, este haya sido difundido en distintas culturas y que haya perdurado por tanto tiempo, ya que, como vimos, las producciones egipcias no se basaban en el cálculo, sino en la repetición de patrones o en la reproducción de los conocimientos en los papiros.

Esto tiene estrecha relación con el objetivo de nuestro estudio, pues nos muestra como la mecanización puede transmitirse con facilidad o, más aún, como pierde importancia el entender los procesos matemáticos que se realizan. Es aquí donde la labor del docente debe estar presente, para dar significado a los conceptos y operaciones matemáticas en los estudiantes.

Resulta interesante, desde un punto de vista matemático, como los egipcios, al descomponer fracciones, realizan el proceso inverso al de la adición de fracciones, lo que unido a la idea de reparto, resulta ser un contexto valioso para el diseño de tareas que logren rescatar el sentido de la adición de fracciones con distinto denominador.

CAPÍTULO 4
ANÁLISIS DE CONTENIDO

En este capítulo se presentan las definiciones expertas asociadas a la adición de fracciones con distinto denominador, y las definiciones escolares encontradas en los textos de estudio desde 5° básico, hasta 1° medio, para posteriormente evidenciar el contraste y la distancia entre ambas definiciones presentadas (experta y escolar).

Con el propósito de tener una imagen global de todos los elementos involucrados sobre el objeto de estudio, es que hemos elaborado una red de contenidos. Esta herramienta visual es de gran utilidad para plasmar las implicaciones que tiene un contenido con su entorno matemático. De esta forma, encontramos elementos de la definición formal de los números racionales (en la parte superior), donde su estructura de conjunto nos muestra que a partir de su definición cumple con las propiedades de orden, es un grupo abeliano con la adición, es un grupo abeliano con la multiplicación, luego al cumplir con la propiedad de distributividad conforma un cuerpo totalmente ordenado. Luego, reúne (en la parte inferior) los elementos de la definición escolar asociados a la adición de fracciones con distinto denominador, de la operación en sí, como también las nociones del concepto de fracción, su escritura simbólica y categorías, la idea de fracción equivalente y su tratamiento y las formas de representación.

A continuación de esto, se desarrolla el análisis fenomenológico, es decir*, "los fenómenos que dan origen a los conceptos, los contextos en los que se utilizan y aquellas situaciones en las que se presentan y en las cuales se aplican, que dotan de sentido a los contenidos en estudio"* (Rico, 2013, pág. 18). Para luego finalizar con los respectivos registros de representación de los conceptos, los cuales "*comprenden las notaciones gráficas, simbólicas, y sistemas de signos involucrados"* (Rico, 2013, pág. 18).

4.1 Red de Contenidos

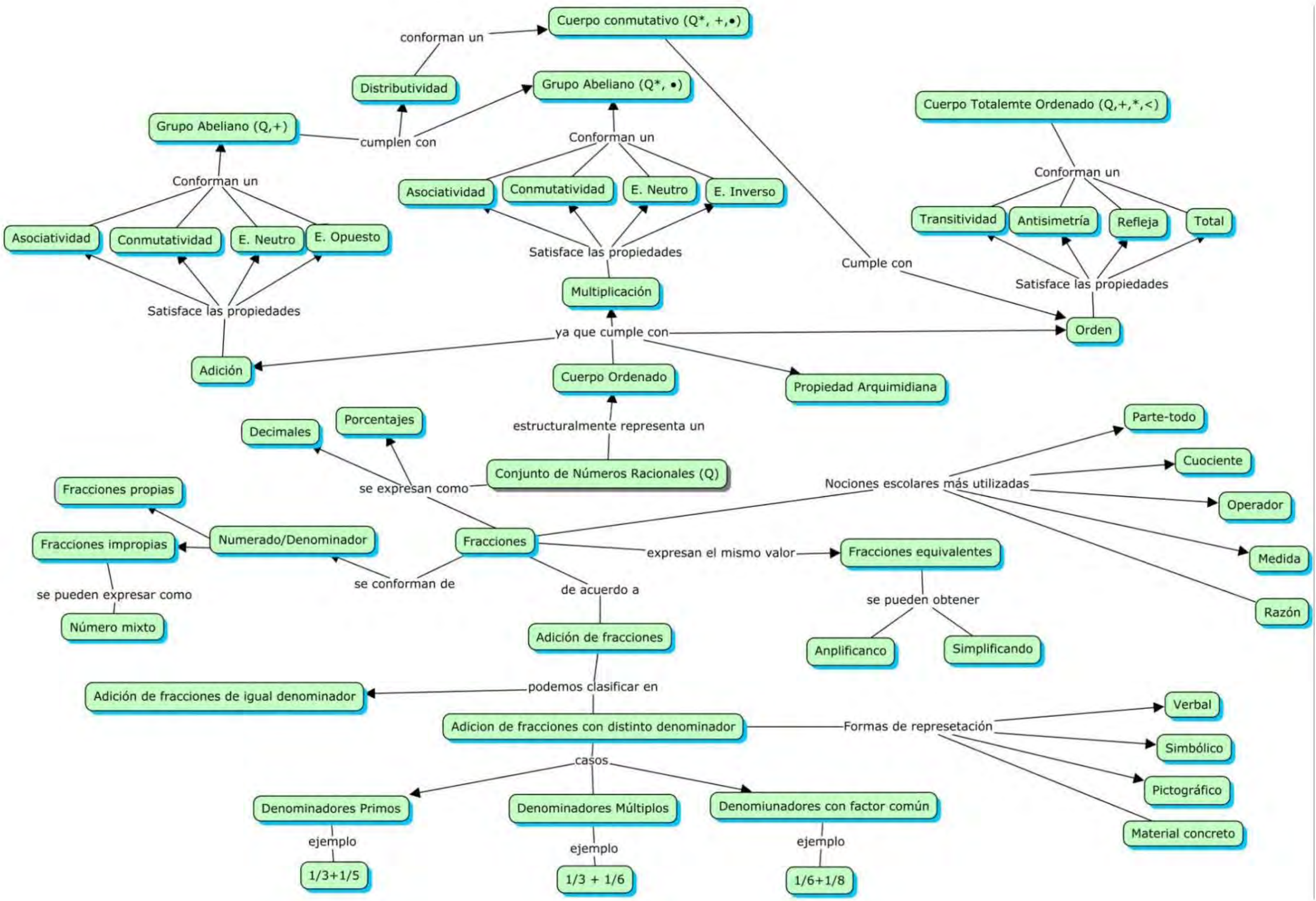


Figura 6. Mapa Conceptual de la Adición de Fracciones. Fuente: Elaboración propia.

4.2 Definición Formal

En esta sección revisamos en detalle el saber sabio, como punto de inicio de la trasposición didáctica. Para la confección de este apartado hemos considerado fuentes de autores matemáticos reconocidos, que han sido parte de nuestra formación docente, y otros trabajos, que detallan la estructura del conjunto numérico en el cual se encuentra inmerso nuestro estudio, es decir, el conjunto de los números racionales denotado por $\mathbb{Q}$. Las fuentes utilizadas corresponden al libro Aritmetica II (1987) de Aburto y Doniez; el apunte Aritmética (2013) del Doctor Daniel Jiménez y la tesis *Una mirada a la epistemología del profesor en la adición de fracciones* (2007) de Victor Iessi.

En primer lugar se presenta la definición formal de los números racionales y la relación de equivalencia involucrada. De acuerdo a ello, se definen las clases de equivalencia y el conjunto de los racionales como el conjunto de todas las clases de equivalencia. A continuación, se define la propiedad de clausura para los números racionales, con las operaciones de adición y multiplicación, para lo cual se especifican y comprueban estas operaciones, dándose un primer acercamiento a la adición de fracciones con distinto denominador. Posteriormente, se demuestra que el conjunto de los racionales con la adición y multiplicación son grupos abelianos que cumplen con la distributividad formando un cuerpo.

De esta manera buscamos visualizar qué elementos desaparecen y cuáles se rescatan, las transformaciones que sufren al someterse a la transposición didáctica para constituir los saberes escolares.

4.2.1 Construcción de Números Racionales

Se trata de dar sentido a la expresión $\frac{1}{a}$, ya que sabemos que $\frac{1}{a} \notin \mathbb{Z}$, salvo si $a = 1$ ó $a = -1$. Para ello se definirán los números racionales, de tal manera que incluyan a los enteros, respeten su estructura algebraica y de orden.

Definición: $\sim$ Relación

En el conjunto $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\}) = \{(a, b)/a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} - \{0\}\}$, se define la siguiente relación $\sim$:

Sean $(a, b); (c, d) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\})$, entonces:

$$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow ad = bc$$

Teorema: $\sim$Relación de Equivalencia

Debemos probar que "$\sim$" es una relación de equivalencia en $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\})$

Sean $a, c, e \in \mathbb{Z}$ y $b, d, f \in \mathbb{Z} - \{0\}$, tenemos:

i) Refleja

Por demostrar $(a, b) \sim (a, b)$

En efecto $ab = ba$, por ser $\mathbb{Z}$ conmutativo con la multiplicación

ii) Simétrica

Por demostrar $(a, b) \sim (c, d) \Rightarrow (c, d) \sim (a, b)$

Supongamos $(a, b) \sim (c, d)$ (Hipótesis)

$\Rightarrow ad = bc$ (Definición de $\sim$)

$\Rightarrow bc = ad$ (Simetría de la igualdad)

$\Rightarrow cb = da$ (Conmutatividad del producto en $\mathbb{Z}$)

$\Rightarrow (c, d) \sim (a, b)$ (Definición de $\sim$)

iii) Transitiva

Por demostrar $(a, b) \sim (c, d) \wedge (c, d) \sim (e, f) \Rightarrow (a, b) \sim (e, f)$

En efecto

$(a, b) \sim (c, d) \quad \wedge \quad (c, d) \sim (e, f)$ (Hipótesis)

$\Rightarrow ad = bc \quad \wedge \quad cf = de$

$\Rightarrow ad = bc / \cdot f(derecha) \wedge cf = de / \cdot b(izquierda)$

$\Rightarrow adf = bcf \quad \wedge \quad bcf = bde$

Luego, por transitividad de la igualdad, se tiene

$$adf - bde = 0 \Leftrightarrow (af - be)d = 0$$
$$Como\ d \neq 0, af = be$$
$$Es\ decir (a,b) \sim (e,f)$$

De i), ii) y iii) se tiene que $\sim$ es una relación de equivalencia.

<u>Definición (Conjunto Cuociente)</u>: El conjunto de todos los pares ordenados de $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\})$ relacionados con el par (a,b) se llama clase de equivalencia del elemento (a,b)y tiene por notación $\frac{a}{b}$. Es decir,

$$\frac{a}{b} = C_{(a,b)} = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\}) / (x,y) \sim (a,b)\}$$

El conjunto de todas las clases de equivalencia definidas sobre $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\})$, se llama conjunto de los números racionales y cada clase de equivalencia se llama número racional.

$$\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\}) / \sim = \mathbb{Q}$$

<u>Lema</u>: $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$, entonces $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow (a,b) \sim (c,d)$

Demostración:

$\Rightarrow$ $\frac{a}{b} = \{(x,y)/(x,y) \sim (a,b)\}$ $\quad \frac{c}{d} = \{(x,y)/(x,y) \sim (c,d)\}$

Sea $(x_0, y_0) \in \frac{a}{b}$, entonces $(x_0, y_0) \sim (a,b)$ y por hipótesis se tiene $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Luego $(x_0, y_0) \sim (c,d)$ (Hipótesis)

$\Rightarrow (a,b) \sim (c,d)$ (Transitividad de $\sim$)

$\Leftarrow\ (a,b) \sim (c,d)$

Sea $(x,y) \in \frac{a}{b}$, entonces $(x,y) \sim (a,b)$ y por hipótesis se tiene $(a,b) \sim (c,d)$

$\Rightarrow (x,y) \sim (c,d)$ (Transitividad de $\sim$)

$\Leftrightarrow (x,y) \in \frac{c}{d}$

<u>**Definición (Clausura)**</u>**:** En $\mathbb{Q}$ se define una suma y un producto.

Sean $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$, entonces:

1. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$
2. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

Ambas definiciones tienen sentido porque $b, d \neq 0$. Además debemos comprobar que estas operaciones están bien definidas, es decir, se verifica:

1) $Si\ \frac{a}{b} = \frac{a}{b} \wedge \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{ad+bc}{bd} = \frac{a\ d\ +c\ b}{b\ d}$

2) $Si\ \frac{a}{b} = \frac{a}{b} \wedge \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{ac}{bd} = \frac{a\ c}{b\ d}$

Demostración:

1) Supongamos $\frac{a}{b} = \frac{a}{b} \wedge \frac{c}{d} = \frac{c}{d}$ (Hipótesis)

$\Leftrightarrow ab\ \ = ba\ \ \wedge cd\ \ = dc$ (Lema)

$\Leftrightarrow ab\ dd\ \ = ba\ dd\ \ \wedge cd\ bb\ \ = c\ dbb$ (por dd y por bb a la der.)

$\Rightarrow ab\ dd\ \ + cd\ bb\ \ = ba\ dd\ \ + c\ dbb$ $(x = y\ \wedge z = w \rightarrow x + z = y + w)$

$\Leftrightarrow (ad + bc)b\ d\ \ = (a\ d\ \ + b\ c\ )bd$

$\Leftrightarrow \frac{ad+bc}{bd} = \frac{a\ d\ +b\ c}{b\ d}$ (Lema)

2) Supongamos $\frac{a}{b} = \frac{a}{b} \wedge \frac{c}{d} = \frac{c}{d}$ (Hipótesis)

$\Leftrightarrow ab \;\; = ba \;\; \wedge cd \;\; = dc$ (Lema)

$\Leftrightarrow ab \;\; cd \;\; = ba \;\; cd \;\; \wedge cd \;\; = dc$ (Por cd a la derecha)

$\Rightarrow ab \;\; cd \;\; = ba \;\; dc$ (Reemplazo $cd \; por \; dc$)

$\Leftrightarrow acb \;\; d \;\; = bda \;\; c$ (Conmutatividad del producto)

$\Leftrightarrow \frac{ac}{bd} = \frac{a \; c}{b \; d}$ (Lema)

Se debe ahora demostrar que estas operaciones de suma y producto en $\mathbb{Q}$ satisfacen las propiedades correspondientes a su estructura algebraica

Lema: $a \in \mathbb{Z}$, $b, t \in \mathbb{Z} - \{0\}$. Se tiene que:

$$\frac{a}{b} = \frac{at}{bt}$$

4.2.3 Cuerpo de los Racionales

Teorema: El conjunto de los números racionales con la suma y producto definidos anteriormente $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ es un cuerpo.

Demostración:

- Los números racionales con la suma forman un grupo abeliano

$$(\mathbb{Q}, +) \text{es un grupo abeliano}$$

i) <u>Asociatividad</u>: $\left(\frac{x}{y}+\frac{x_1}{y_1}\right)+\frac{x_2}{y_2}=\frac{x}{y}+\left(\frac{x_1}{y_1}+\frac{x_2}{y_2}\right), \forall \frac{x}{y}, \frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2} \in \mathbb{Q}$

Demostración:

$$\begin{aligned}\left(\frac{x}{y}+\frac{x_1}{y_1}\right)+\frac{x_2}{y_2}=\frac{xy_1+yx_1}{yy_1}+\frac{x_2}{y_2}&=\frac{(xy_1+yx_1)y_2+(yy_1)x_2}{yy_1y_2}\\ &=\frac{xy_1y_2+yx_1y_2+yy_1x_2}{yy_1y_2}=\frac{x(y_1y_2)+y(x_1y_2+y_1x_2)}{y(y_1y_2)}\\ &=\frac{x}{y}+\frac{x_1y_2+y_1x_2}{y_1y_2}=\frac{x}{y}+\left(\frac{x_1}{y_1}+\frac{x_2}{y_2}\right)\end{aligned}$$

ii) <u>Neutro Aditivo</u>: Sea $\frac{0}{1} \in \mathbb{Q}$ y cumple con $\frac{x}{y}+\frac{0}{1}=\frac{x}{y}, \forall \frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$

Demostración:

$$\frac{x}{y}+\frac{0}{1}=\frac{x1+0y}{y1}=\frac{x}{y}$$

Luego el neutro para la suma en $\mathbb{Q}$ existe, y es $\frac{0}{y}=\frac{0}{1}$ con $y \in (\mathbb{Z}-\{0\})$

iii) <u>Inverso Aditivo</u>: Sea $\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$. Existe $\frac{-x}{y} \in \mathbb{Q}$ tal que $\frac{x}{y}+\left(\frac{-x}{y}\right)=\frac{0}{1}$

Demostración:

$$\frac{x}{y}+\left(\frac{-x}{y}\right)=\frac{xy+(-x)y}{yy}$$

$$=\frac{0}{yy}=\frac{0}{1}$$

Por lo tanto, cada racional $\frac{x}{y}$ tiene un único inverso aditivo, $\frac{-x}{y}$.

iv) <u>Conmutatividad</u>: $\frac{x}{y}+\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_1}{y_1}+\frac{x}{y}$, $\forall \frac{x}{y},\frac{x_1}{y_1}\in \mathbb{Q}$

Demostración:

$$\frac{x}{y}+\frac{x_1}{y_1}=\frac{xy_1+yx_1}{yy_1}=\frac{x_1y+y_1x}{y_1y}=\frac{x_1}{y_1}+\frac{x}{y}$$

Luego la suma es conmutativa.

- Los números racionales, sin el neutro, con las propiedades de la multiplicación forman un grupo abeliano.

$(\mathbb{Q}^*,\cdot)$ es un grupo abeliano donde $\mathbb{Q}^*=\mathbb{Q}-\{0\}$

i) <u>Asociatividad</u>: $\left(\frac{x}{y}\cdot\frac{x_1}{y_1}\right)\cdot\frac{x_2}{y_2}=\frac{x}{y}\cdot\left(\frac{x_1}{y_1}\cdot\frac{x_2}{y_2}\right), \forall \frac{x}{y},\frac{x_1}{y_1},\frac{x_2}{y_2}\in \mathbb{Q}$

Demostración:

$$\left(\frac{x}{y}\cdot\frac{x_1}{y_1}\right)\cdot\frac{x_2}{y_2}=\frac{xx_1}{yy_1}\cdot\frac{x_2}{y_2}=\frac{(xx_1)x_2}{(yy_1)y_2}=\frac{x(x_1x_2)}{y(y_1y_2)}=\frac{x}{y}\cdot\left(\frac{x_1x_2}{y_1y_2}\right)=\frac{x}{y}\cdot\left(\frac{x_1}{y_1}\cdot\frac{x_2}{y_2}\right)$$

Luego la multiplicación es asociativa.

ii) <u>Neutro Multiplicativo</u>: Sea $\frac{x}{y}\in\mathbb{Q}$. Existe $\frac{1}{1}\in\mathbb{Q}$ que cumple $\frac{x}{y}\cdot\frac{1}{1}=\frac{x}{y}$

Demostración:

$$\frac{x}{y}\cdot\frac{1}{1}=\frac{x\cdot 1}{y\cdot 1}=\frac{x}{y}$$

Luego el neutro para el producto existe y es $\frac{x}{x}=\frac{1}{1}\ con\ x\in(\mathbb{Z}-\{0\})$

iii) <u>Inverso Multiplicativo</u>: Sea $\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}^*$. Existe $\frac{y}{x} \in \mathbb{Q}^*$ que cumple $\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x} = \frac{1}{1}$

Demostración:

$$\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x} = \frac{xy}{yx} = \frac{1}{1}$$

Luego cada racional no nulo $\frac{x}{y}$ tiene un único inverso para el producto y es $\frac{y}{x}$, que también se denota por $\left(\frac{x}{y}\right)^{-1}$

iv) <u>Conmutatividad</u>: $\frac{x}{y} \cdot \frac{x_1}{y_1} = \frac{x_1}{y_1} \cdot \frac{x}{y}$, $\forall \frac{x}{y}, \frac{x_1}{y_1} \in \mathbb{Q}$

Demostración:

$$\frac{x}{y} \cdot \frac{x_1}{y_1} = \frac{xx_1}{yy_1} = \frac{x_1x}{y_1y} = \frac{x_1}{y_1} \cdot \frac{x}{y}$$

Se ha demostrado anteriormente que $(\mathbb{Q}, +) y\ (\mathbb{Q} - \{0\}, \cdot)$son grupos abelianos, por lo que solo queda demostrar la distributividad.

<u>Distributividad</u>: Sean $\frac{x}{y}, \frac{u}{v}, \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ entonces se cumple que

$$\frac{x}{y} \cdot \left(\frac{u}{v} + \frac{r}{s}\right) = \left(\frac{x}{y} \cdot \frac{u}{v}\right) + \left(\frac{x}{y} \cdot \frac{r}{s}\right)$$

Demostración:

$$\frac{x}{y} \cdot \left(\frac{u}{v} + \frac{r}{s}\right) = \frac{x}{y} \cdot \frac{us + rv}{vs} = \frac{xus + xrv}{yvs} = \frac{xuys + xryv}{yvys} = \frac{xu}{yv} + \frac{xr}{ys} = \frac{x}{y} \cdot \frac{u}{v} + \frac{x}{y} \cdot \frac{r}{s}$$

Dadas las propiedades algebraicas de $\mathbb{Q}$ respecto a la suma y el producto, que se acaban de demostrar, podemos decir que $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ es un Cuerpo Conmutativo.

4.2.3 Orden en los Racionales

Se debe introducir en $\mathbb{Q}$ una estructura de orden que, respete la estructura algebraica de $\mathbb{Q}$ y prolongue el orden de $\mathbb{Z}(\subseteq \mathbb{Q})$.Nos limitaremos a señalar que esta relación de orden, que denotaremos con el símbolo $\leq$, en $\mathbb{Q}$ puede definirse formalmente sobre el orden del conjunto $\mathbb{Z}$.

<u>Definición</u>: Sea $\mathbb{Q}^+$ el conjunto de los números racionales positivos, donde

$$\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}^+ \Leftrightarrow xy > 0 \text{ en } \mathbb{Z}$$

La definición no es ambigua, ya que si $\frac{u}{v} = \frac{x}{y}$, y $xy > 0$ en $\mathbb{Z}$, entonces $uy = ux$. Luego $(uv)(xy) = v^2x^2 > 0$. Es decir, $(uv)(xy) > 0$ y como $xy > 0,$, es decir, $uv > 0$. En general,

$$\frac{x}{y} \leq \frac{z}{w} \Leftrightarrow \frac{z}{w} + \left(\frac{-x}{y}\right) \in \mathbb{Q}^+$$

Entonces, si $\frac{x}{y}$ y $\frac{u}{v}$ están escritos con denominadores positivos, se tiene $\frac{x}{y} \leq \frac{u}{v}$, si y solo si $xv \leq yu$

El orden $\leq$ en $\mathbb{Q}$, prolonga las propiedades de los enteros

i) <u>Refleja</u>:

Por demostrar $\frac{x}{y} \leq \frac{x}{y}$. En efecto, $\frac{x}{y} \leq \frac{x}{y} \leftrightarrow xy \leq xy$

ii) <u>Antisimétrica</u>:

Por demostrar $\frac{x}{y} \leq \frac{u}{v} \wedge \frac{u}{v} \leq \frac{x}{y} \rightarrow \frac{x}{y} = \frac{u}{v}$

En efecto, $\frac{x}{y} \leq \frac{u}{v}$ significa que $xv \leq yu$. Ahora bien, $\frac{u}{v} \leq \frac{x}{y}$ significa que $uy \leq xv$. Se tiene por tanto $xv \leq yu \leq xv$. De modo que $xv = yu$. Entonces $\frac{x}{y} = \frac{u}{v}$

iii) Transitiva:

Por demostrar $\frac{x}{y} \leq \frac{u}{v} \wedge \frac{u}{v} \leq \frac{r}{s} \to \frac{x}{y} \leq \frac{r}{s}$

En efecto, $\frac{x}{y} \leq \frac{u}{v}$ significa que $xv \leq yu$. Ahora bien $\frac{u}{v} \leq \frac{r}{s}$ significa que $us \leq vr$. Se tiene entonces $xv \leq yu \wedge us \leq vr$. Luego $xvs \leq yus \wedge yus \leq yvr$. Por tanto, $xvs \leq yvr$. Es decir $\frac{x}{y} \leq \frac{r}{s}$

Teorema (compatible): La relación $\leq$ es relación de orden total sobre el conjunto de los racionales, respeta la estructura algebraica de $\mathbb{Q}$, es decir, para $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}$ racionales, se verifica:

i) Compatibilidad de la relación de orden con la suma

$$\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \to \frac{a}{b} + \frac{e}{f} \leq \frac{c}{d} + \frac{e}{f}$$

En efecto: $\frac{c}{d} \leq \frac{a}{b}$ significa que $ad \leq cb$

Se multiplica por "ff" ambos miembros de la igualdad, con $ff \geq 0$, y se tiene

$$adff \leq cbff$$
$$adff + ebdf \leq cbff + ebdf$$
$$df(af + eb) \leq bf(cf + ed)$$

Esto es $\frac{af+eb}{bf} \leq \frac{cf+ed}{df}$ Y por tanto $\frac{a}{b} + \frac{e}{f} \leq \frac{c}{d} + \frac{e}{f}$

i) Compatibilidad de la relación de orden con el producto

Si $0 \leq \frac{e}{f}$, entonces, $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \to \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} \leq \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}$

Supongamos que $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ y asumamos que $0 \leq e, 0 < f$.

Ahora bien, $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ significa que $d \leq bc$. Luego $edf \leq bfce$.

Entonces $\frac{ae}{bf} \leq \frac{ce}{df}$, esto es, $\frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} \leq \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}$

Además el orden $\leq$ en $\mathbb{Q}$ es un orden arquimediano, propiedad que no puede deducirse de las ya enumeradas.

Teorema (Propiedad Arquimediana): Dados dos números racionales a, b, indicaremos con$<$ el orden estricto asociado al orden $\leq$ en $\mathbb{Q}$, es decir, $a < b$ si y solo si $a \leq b$ y $a \neq b$. Se tiene:

1) Si $a < b$, entonces hay al menos un c racional tal que $a < c < b$
2) Si $0 < a$ y b es un racional cualquiera, entonces hay n entero positivo tal que $na \geq b$

Demostración

1) $a < b \rightarrow a + a < a + b$ y $a + b < b + b$. O sea, $2a < a + b < 2b$. Multiplicando la desigualdad por el número positivo $\frac{1}{2}$ se tiene $a < \frac{a+b}{2} < b$.

En efecto, si a y b son racionales, lo es también el número $c = \frac{a+b}{2}$

2) Si $b \leq 0$ ó $0 < b < a$, basta poner $n = 1$ y se cumple el teorema. Luego basta considerar el caso $0 < a < b$. Sean, entonces, $0 < a = \frac{x}{y} < b = \frac{u}{v}$, y sin pérdida de generalidad puede suponerse x, y, u, v enteros positivos. Es claro que:

$$a = \frac{x}{y} = \frac{xv}{yv} \text{ y } b = \frac{u}{v} = \frac{yu}{yv}$$

O sea, puede suponerse que la representación de a y b tiene denominador común.

<u>Teorema (Densidad de $\mathbb{Q}$)</u>: Entre dos números racionales distintos a y b, hay infinitos números racionales. En efecto, entre a y b, hay un racional c; entre a y c hay un racional d; entre c y b hay otro racional e; entre a y f hay un racional g, etc.

Esta propiedad se expresa diciendo que el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales es *denso* respecto del orden $\leq$, o del orden estricto $<$; o también que $\leq$ en $\mathbb{Q}$es un orden denso.

Así, $\mathbb{Q}$ el conjunto de los números racionales, con la suma y el producto es un cuerpo que contiene a los enteros. Además, hay un único orden en $\mathbb{Q}$, que respeta la estructura algebraica de $\mathbb{Q}$ y que extiende el orden de los enteros. Finalmente, $\mathbb{Q}$ es un cuerpo totalmente ordenado arquimédico.

4.3 Definición Escolar

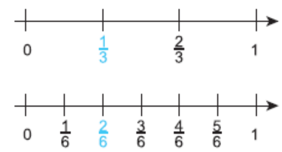
Considerando el nivel escolar desde el cual los estudiantes comienzan a estudiar la Adición de Fracciones, se realizará una revisión desde 5° básico, siguiendo la evolución del concepto hasta primero medio, donde se presenta el formalmente el conjunto de los números racionales.

4.3.1 Definiciones 5º año Educación Básica

En este nivel, podemos ver que los textos consideran como concepto necesario para la unidad, las fracciones equivalentes, fundamental para realizar la adición de fracciones con distinto denominador. Se entrega una definición verbal y se presenta la forma de reconocerlas utilizando la recta numérica como la de operar aritméticamente para obtener fracciones equivalentes.

La siguiente imagen es un reflejo textual de lo que aparece en el texto del estudiante:

Las fracciones $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{6}$ se llaman fracciones equivalentes. Fracciones equivalentes son fracciones que representan el mismo número o la misma cantidad. En las siguientes rectas numéricas, las fracciones $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{6}$ son fracciones equivalentes porque están a la misma distancia de **0**.



También puedes hallar fracciones equivalentes multiplicando el numerador y el denominador por el mismo número (amplificar), o bien, dividiendo el numerador y el denominador de la fracción por el mismo número (simplificar). Una fracción con el mismo numerador y denominador es igual a 1.

Figura 7. Fracciones equivalentes en la recta numérica. Fuente: Hartcourt, Inc.(2016). Matemáticas 5º básico. Texto del estudiante (p. 106).

En esta unidad se introducen las fracciones impropias y los números mixtos, que se definen como:

- *Un **número mixto** se compone de una parte entera y una **parte fraccionaria**. Un número mixto se puede convertir en una fracción mayor que 1. A veces, una fracción mayor que 1 se denomina **fracción impropia.***(Hartcourt, Inc, 2016, p.108)

El siguiente capítulo aborda la adición de fracciones, considerando en el vocabulario la fracción en su mínima expresión y la operación inversa o inverso aditivo.

- ***Fracciones equivalentes o iguales** fracciones que representas el mismo número o la misma cantidad.* (Hartcourt, Inc, 2016, p.127)
- ***Fracción en su mínima expresión** una fracción está en su mínima expresión cuando el numerador y el denominador tienen solamente el 1 como factor común.* (Hartcourt, Inc, 2016, p.127)
- ***Operaciones inversas** operaciones que se anulan una a la otra, como la suma y la resta o la multiplicación y la división*. (Hartcourt, Inc, 2016, p.127)

4.3.2 Definiciones 6º año de Educación Básica

En este nivel, se agregan varios conceptos matemáticos enfocados en profundizar el manejo simbólico matemático. Dentro de estos están (subrayados):

- *El **número múltiplo** de un número es el producto de dicho número por otro número cualquiera mayor que cero.* (Hartcourt, Inc, 2016, pág. 5)
- *Un **número primo** es un número natural mayor que 1 que tiene como únicos factores el 1 y sí mismo. Un **número compuesto** es un número natural mayor que 1que tiene dos o más factores distintos de uno.* (Hartcourt, Inc, 2016, pág. 8)
- *El **máximo común divisor** (m.c.d.), es el mayor número o factor que divide exactamente a todos y cada uno de los números.* (Hartcourt, Inc, 2016, pág. 10)
- *La **descomposición en factores primos** de un número se obtiene cuando un número está expresado como el producto de sus factores primos.* (Hartcourt, Inc, 2016, pág. 10)
- *El **mínimo común denominador** es el mínimo común múltiplo de dos o más divisores.* (Hartcourt, Inc, 2016, pág. 41)

Puede apreciarse un mayor trabajo matemático, introduciendo estos conceptos con la ayuda de figuras y representaciones, destinados a manejar el algoritmo típico de la adición de fracciones con distinto denominador.

4.3.3 Definiciones 1º año de Educación Media

En este nivel, encontramos distintas definiciones relacionadas al conjunto de los números racionales, con una mayor formalidad matemática, pero con la inclusión del sistema decimal.

En primer lugar, tenemos una definición de números racionales como respuesta a ecuaciones que no tienen solución en los enteros.

Existen ecuaciones que no tienen solución en los números enteros, pero sí en los ***números racionales****, en este conjunto están contenidos los números enteros positivos, negativos, el cero, fracciones y decimales positivos, y además las fracciones y decimales negativos.* (Hartcourt, Inc, 2016, pág. 10)

Para luego entregar, a modo de resumen, una definición que utiliza la notación matemática.

El **conjunto de los números racionales** $\mathbb{Q}$ está compuesto por todos los números que se pueden escribir como una fracción cuyo numerador y denominador (distinto de cero), son números enteros.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b}, a \in \mathbb{Z} \text{ y } b \in \mathbb{Z}; b \neq 0 \right\}$$

Figura 8. Definición del Conjunto de los números racionales
Fuente: Muñoz, G., Santis, A. & del Valle, J. (2016). Matemática 1º medio, texto del estudiante. (p. 10).

Encontramos en el texto, como estrategia para comparar fracciones, igualar denominadores. Luego se define simbólicamente la relación de orden entre números racionales.

- Si están en su forma fraccionaria, y sus denominadores son enteros positivos, puedes utilizar las siguientes estrategias:
  a) Igualar los denominadores de las fracciones y comparar los numeradores.
  b) Sean $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ con $a, c \in \mathbb{Z}$, $b, d \in \mathbb{Z}^+$. Si $a \cdot d > b \cdot c$, entonces $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$.

Figura 9. Orden de los números racionales.
Fuente: Muñoz, G., Santis, A. & del Valle, J. (2016). Matemática 1º medio, texto del estudiante. (p. 17).

Se define textualmente la operación de adición para el conjunto de los números racionales, pero confundiendo el procedimiento, de acuerdo a las formas de representación numérica.

> Para **sumar y restar números racionales** se puede utilizar su representación fraccionaria o decimal. Sin embargo, debes transformar los números decimales infinitos periódicos o semiperiódicos a fracción para operarlos con otro número racional. En $\mathbb{Q}$ la adición cumple con las propiedades de conmutatividad, asociatividad, existencia de un único elemento neutro aditivo y un elemento inverso aditivo .

Figura 10. Adición en los números racionales.
Fuente: Muñoz, G., Santis, A. & del Valle, J. (2016). Matemática 1º medio, texto del estudiante. (p. 26).

Se presenta además la definición de la propiedad de clausura con las operaciones aritméticas básicas, de manera textual.

> En el conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$, las operaciones de adición, multiplicación, sustracción y división (con divisor distinto de cero) cumplen con la propiedad de **clausura**, es decir, al operar con números racionales siempre se obtendrá otro número racional.

Figura 11. Propiedad de clausura de los números racionales.
Fuente: Muñoz, G., Santis, A. & del Valle, J. (2016). Matemática 1º medio, texto del estudiante. (p. 32).

Finalmente, encontramos con una definición textual de la propiedad de densidad, explicada a través buscar el promedio entre dos números sucesivamente, pero sin demostración formal.

> El conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ cumple con la propiedad de la **densidad**, ya que entre dos números racionales se pueden encontrar infinitos números racionales.

Figura 12. Propiedad de densidad de los números racionales. Fuente: Muñoz, G., Santis, A. & del Valle, J. (2016). Matemática 1º medio, texto del estudiante. (p. 34).

Con esto es que se visualiza el método utilizado por los textos escolares para presentar el contenido, lo que según la teoría de la transposición didáctica hace referencia al saber escolar, lo que nos será de utilidad para realizar un análisis de la distancia que existe con el saber sabio.

4.4 Distancia entre Saberes

Considerando la revisión de los saberes y de acuerdo a la Teoría de Transposición Didáctica, realizaremos un análisis comparativo, el que de aquí en adelante denominaremos como “distancia” entre Saber Sabio y Saber Escolar.

Siguiendo a Chevallard (1991), se identifican ambos saberes como:

- Saber Sabio, manejado por matemáticos profesionales e investigadores, por lo que se trata de un saber matemático puro y erudito, el cual ha sido despersonalizado y descontextualizado dejando de lado toda la epistemología que hay detrás del objeto de saber.
- Saber Escolar o Institucionalizado, se ve reflejada en textos escolares, en donde los entendidos reescriben las definiciones y propiedades en variados textos y manuales. Se propone una organización y jerarquización, se aportan ilustraciones, etc.

El Saber Sabio considera como origen del conjunto de los números racionales la búsqueda de sentido a la expresión del inverso multiplicativo en los enteros, es decir, 1/a para número distintos de 1 y -1, así surge la necesidad de ampliar el conjunto de los enteros. En cambio, la definición escolar considera la necesidad de abordar el conjunto de los números racionales para dar respuesta a ecuaciones que no tienen solución en los números enteros.

El saber sabio considera la definición de número racional como una relación de equivalencia de pares ordenados que pertenecen al producto cartesiano de $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}^*$. Esto es, se cumple la relación:

$$(a,b)\sim(c,d) \Leftrightarrow ad = bc$$

En el conjunto $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}-\{0\}) = \{(a,b)/a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}-\{0\}\}$

Por otro lado, el saber institucionalizado considera a los números racionales como un conjunto formado por números enteros, fracciones y decimales tratándolos como subconjuntos, pero sin hacer una clara distinción, salvo una división entre positivos y negativos. El saber escolar resume, como definición, que los racionales están compuestos por todos los números que pueden escribirse como fracción, no especificando (en primera instancia) a que conjunto pertenecen esos números, lo que luego se ve en la definición simbólica. En el sistema escolar, se introducen las fracciones equivalentes en quinto año básico, comparando fracciones en distintas representaciones, luego se hacen conjuntos de fracciones equivalentes y se deducen formas de obtenerlas, para luego aplicar los conceptos de amplificación y simplificación.

La definición experta, por su parte, explica la relación de equivalencia que se establece entre pares (a, b) o números racionales, lo que da origen en el saber escolar a las fracciones equivalentes. Todos los pares relacionados forman una clase de equivalencia y el conjunto de todas las clases de equivalencia da origen al conjunto de los números racionales. En el saber sabio encontramos definidas las operaciones de suma y multiplicación en los racionales. El saber escolar trabaja con casos particulares, para luego generalizar esta propiedad.

En sexto año básico, el saber escolar introduce los conceptos de múltiplos, números primos y compuestos, descomposición prima y denominador común para enfocarse en el trabajo simbólico matemático, que culmina con el uso del mínimo común múltiplo en la adición de fracciones con distinto denominador. La definición escolar insiste en tratar las operaciones aritméticas en los racionales mediante dos representaciones, fraccionaria y decimal. En cuanto a las propiedades de clausura y densidad, son definidas, pero no demostradas. En cambio en el saber sabio aparece su definición algebraica, explicación y demostración.

Encontramos en el saber escolar, las propiedades de conmutatividad, asociatividad, elemento neutro y elemento inverso aditivo, sin mayor definición. En el saber sabio, aparece cada una de estas propiedades, correspondientes a la estructura algebraica de los números racionales, con su demostración.

En cuanto al lenguaje que utilizan ambos saberes, las definiciones escolares son expresadas mediante una mezcla entre registros numérico- algebraico, verbal y gráfico-pictórico. Utiliza conceptos matemáticos, como clausura, densidad, entre otros, sin profundizar mucho en ellos. Lo que según Chevallard (1991) en su teoría de la transposición didáctica reconoce como el saber escolar o institucionalizado, correspondiente a los textos escolares y todo lo que lo conforma, entre ellos sus definiciones. Por otro lado, las definiciones formales o expertas, son detalladas y demostradas a cabalidad, van dirigidas a expertos en la disciplina y/o investigadores, por lo que se utiliza un lenguaje minucioso mayoritariamente representado mediante el registro numérico-simbólico. A Cada concepto utilizado, le corresponde su símbolo, demostración, propiedades, teoremas, entre otros. En Chevallard (1991), se identifica como el saber sabio y corresponde a un saber matemático puro y erudito, el cual ha sido despersonalizado y descontextualizado dejando de lado toda la epistemología que hay detrás del objeto de saber.

Nos queda claro entonces, que a partir del saber sabio se da inicio a la transposición didáctica, es decir, “el conjunto de las transformaciones que sufre un saber con el fin de ser enseñado” (Chevallard, 1991), o sea, saber escolar. A modo general, podemos concluir que ambas definiciones, tanto escolar como experta, presentan similitudes y diferencias, ya sea en su presentación, lenguaje, estructura y contenido de los textos. Cabe mencionar que en ambos saberes se hace referencia al mismo objeto matemático, es decir, adición de fracciones con distinto denominador. Aún así, el desarrollo de éste presenta muchas diferencias, dependiendo del receptor al cual va dirigido, en el caso del saber sabio, matemáticos profesionales e investigadores y en saber escolar, estudiantes. Esto ya que ambos tienen distintas intenciones, el saber sabio pretende demostrar a cabalidad cada propiedad, estructura, operación, construcción, entre otras. En cambio, el saber escolar, busca presentar el contenido para generar aprendizaje

4.5 Análisis Fenomenológico

Es común entre los profesores de matemática buscar la relación que existe entre lo que se va a enseñar, con la experiencia, pues a menudo los estudiantes demandan saber la utilidad de lo que se va a aprender. Sin embargo, encontrar esta relación no es una tarea fácil para el docente, ya que debe *"analizar esta relación para identificar, describir, caracterizar y clasificar los fenómenos naturales, sociales y matemáticos que pueden ser organizados (modelizados) por subestructuras contenidas en la estructura en cuestión. (…) Este procedimiento se denomina análisis fenomenológico."* (Gómez, 2002, p. 268). Así también, expone que el análisis fenomenológico de una estructura matemática o de un concepto, consiste en descifrar cuáles son los fenómenos para los que dicha estructura es el medio de organización, y a su vez, describir la relación existente entre ellos.

En busca de que los estudiantes logren reconocer la necesidad y significación de la adición y sustracción de números racionales, es que el texto del estudiante correspondiente a primero medio, posee una sección específica en cuanto a las aplicaciones de esta temática en los distintos ámbitos, como se muestra a continuación.

Contenido Matemático	Fenómeno	Ámbito
Números Racionales/ Adición y sustracción en Q	Comparación de cantidades	Física
Números Racionales/ Adición y sustracción en Q	Aplicaciones geométricas	Matemática
Números Racionales/ Adición y sustracción en Q	-División en situaciones de reparto -Modificación de una parte -Un todo dividido en partes	Resolución de Problemas

Tabla 1. Adición de fracciones y su fenomenología. Fuente: Elaboración propia

Presentaremos un ejemplo para cada área en que se ve involucrada la adición y sustracción de números racionales.

En física, se presentan situaciones que se describen utilizando la razón entre dos magnitudes, por ejemplo para la velocidad se tiene:

$V = \frac{d}{t}$, en donde V es velocidad, d es distancia y t es tiempo.

Desde aquí para cualquier ejercicio que involucre velocidades, es necesario que el estudiante sea capaz de realizar adiciones(o sustracciones) entre ellas, es decir adiciones ente fracciones con distinto denominador o entre números racionales.

Ejemplo general: “calcular la velocidad relativa de un bote que viaja en un cierto río, si el observador está en reposo.”

Para que el estudiante sea capaz de resolver este ejercicio, primero debe, además de conocer el concepto físico de velocidad relativa, reconocer los dos casos posibles e identificar la operatoria a utilizar, es decir:

a) La adición de las velocidades, si el bote y la corriente del río van en el mismo sentido
b) La sustracción de las velocidades, si el bote y la corriente del río van en sentidos opuestos.

Luego de identificar lo anterior, sólo basta realizar la adición o sustracción según sea el caso, en donde la velocidad del bote $V_{bote} = \frac{d_1}{t_1}$; la velocidad del río $V_{río} = \frac{d_2}{t_2}$

En matemática, hemos considerado un ejemplo correspondiente al eje de la geometría, específicamente se pretende que el estudiante utilice el teorema de Pitágoras, es decir, un triángulo rectángulo con medidas de cateto en forma de fracción, para obtener el resultado adecuado.

Ejemplo: “En un triángulo rectángulo uno de los catetos mide $\frac{1}{2}$cm y su hipotenusa mide 3,6 cm. ¿Cuál es la medida del otro cateto? Recuerda que el teorema de Pitágoras dice que en un triángulo rectángulo de catetos a y b e hipotenusa c. Se cumple que $a^2 + b^2 = c^2$”

Para desarrollar este ejercicio el estudiante, además de reconocer los catetos e hipotenusa de un triangulo rectángulo, debe ser capaz de transformar el número decimal 3,6 a fracción, luego reemplazarlos en la fórmula del teorema, resolver la ecuación, despejando la incógnita, para lo que deberá efectuar la adición o sustracción, dependiendo de su desarrollo, de ambos números racionales.

En resolución de problemas, se presentan una infinidad de situaciones solucionables mediante la adición de fracciones. Para ejemplificar, hemos escogido el siguiente ejemplo de reparto.

Ejemplo: "Iván y su hermana participan de una cicletada que tiene un circuito de $\frac{11}{6}$ km de largo. Recorrieron $\frac{2}{3}$ km antes del almuerzo y $\frac{3}{4}$ km después de almorzar. ¿Cuántos kilómetros les queda por recorrer?".

Para poder desarrollar este problema, el estudiante deberá identificar el camino total a recorrer como el todo dividido en partes, luego proceder a efectuar la adición entre los tramos recorridos y finalizar realizando el proceso opuesto de este, es decir, la sustracción entre el total del camino y los tramos recorrido.

Con estos ejemplos anteriormente mostrados, presentamos la diversidad de usos que tiene la adición de fracciones en los racionales. Así damos cuenta de la importancia de nuestro objeto matemático en áreas de la vida cotidiana.

4.6 Registros de Representación

Por representaciones en el ámbito de la matemática, a decir de Lupiáñez (2009) se entiende a las notaciones, sean éstas simbólicas o gráficas, o bien manifestaciones verbales, "*mediante las que se expresan los conceptos y procedimientos en esta disciplina así como sus características y propiedades más relevantes*" (Lupiáñez, 2009, pág. 46). Estas representaciones, se pueden clasificar en registros o sistemas de representación según sus características (Duval, 1995).

La comprensión de conceptos en matemática, se lleva a cabo a través de las distintas representaciones de las nociones que se emplean y, a su vez, diferentes sistemas de representación ponen de manifiesto determinadas propiedades y cualidades de esas nociones. "*Un trabajo explícito sobre la diversidad de sistemas de representación en una misma estructura matemática y sobre las conexiones entre ellos, se profundiza en el dominio de dicha estructura*" (Lupiáñez, 2009, pág. 48).

Con el fin de confeccionar una secuencia de clase para llevar a cabo nuestro estudio, es que presentamos los sistemas de representación que nos serán de utilidad para evidenciar las distintas formas en que se exhibe nuestro objeto matemático, ya sea, para identificar y relacionar un concepto exponer, plantear o resolver una situación problema.

Estos sistemas de representación corresponden a la clasificación que estipula Lupiáñez (2009) y definidos según varios autores en relación a nuestro objeto de estudio.

- Sistema de representación verbal o natural: se refiere a la exposición mediante el uso de lenguaje natural. Consiste en representar conceptos y procedimientos mediante palabras, escritas u orales (Corrales, 2013).
- Sistema de representación simbólico: sistemas estructurados de grafismos que pueden usarse para representar números (Lupiáñez, 2009).
- Sistema de representación pictográfico: se refiere a la exposición mediante figuras gráficas o dibujos que intentan representar lo más fielmente posible los elementos involucrados en el problema (Varettoni & Elichiribehety, 2012).
- Mediante material manipulativo, ya que el ábaco las regletas o los bloque multibase, permiten representar y operar con números.

A continuación se presentan ejemplos, mediante una figura, que involucra los registros mencionados considerados para nuestro trabajo.

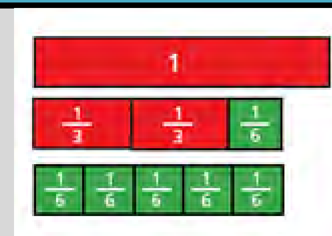
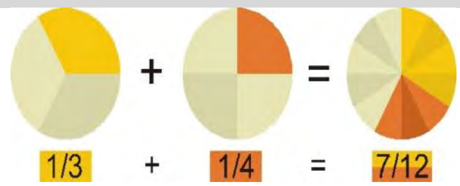
	Registro Verbal	**Registro Simbólico**	**Registro Pictográfico**
Ejemplo 1	Dos tercios un metro más un sexto de metro	$\frac{2}{3}+\frac{1}{6}$	
Ejemplo 2	Un tercio de torta más un cuarto de torta	$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$	
Ejemplo 3	Juan comió un cuarto de pizza y Estela un séptimo de pizza. ¿Cuánta pizza comieron entre los dos?	$\frac{1}{4}+\frac{1}{7}$	

Tabla 2. Registros de representación de fracciones. Fuente: Elaboración propia.

De esta forma, hemos revisado el contenido involucrado con nuestro objeto matemático, revisando el saber sabio y el saber escolar de los textos escolares del nivel de quinto básico, donde se introduce la adición de fracciones, hasta primero medio, donde se estudia el conjunto de los números racionales.

A continuación, analizamos las bases curriculares y programas de estudio vigente año 2016, como parte del análisis cognitivo, además de las expectativas, limitaciones y oportunidades de aprendizaje que se presentan sobre nuestro objeto de estudio, consideraciones que debe tener presente el docente al momento de planificar la unidad y la clase.

CAPÍTULO 5
ANÁLISIS COGNITIVO

El Análisis Didáctico busca diseñar, poner en práctica y evaluar una unidad didáctica o una sesión de clase con un tema matemático determinado, para lograrlo incluye diferentes tipos de análisis, entre los cuales se encuentra el análisis cognitivo (Lupiáñez, Rico, Gómez y Marín, 2005). Con este análisis el docente realiza una predicción respecto a cómo los estudiantes *"pueden progresar en la construcción de su conocimiento sobre la estructura matemática cuando se enfrenten a las tareas que compondrán las actividades de enseñanza y aprendizaje"* (Gómez, 2002, p. 271).

Para poder comenzar con este análisis, es preciso especificar el nivel educativo en el que se sitúa la propuesta de enseñanza, la unidad en la cual se ubica y los aprendizajes esperados en los que está presente el objeto de estudio, para posteriormente, describir las expectativas de aprendizaje y las limitaciones asociadas, analizando con ello los posibles errores y dificultades que podrían presentar los estudiantes durante su proceso de aprendizaje.

5.1 Expectativas de Aprendizaje y barrido curricular

En conformidad con Rico (2013), el análisis cognitivo busca organizar "el para qué" de estudiar un conocimiento, junto con el "hasta dónde" llegar en su aprendizaje, para lograrlo, una de las categorías alude a las expectativas de aprendizaje de los estudiantes, por lo mismo cada tema de conocimiento requiere establecer sus prioridades cognitivas, organizarlas y relacionarlas, y así determinar su objeto y alcance.

El contenido matemático que se considera en este trabajo, se encuentra en los Programas de Estudio de los niveles 5º y 6º año básico, específicamente en el eje de Números.

En resumen, y utilizando las habilidades matemáticas involucradas, los objetivos de aprendizaje para 5º básico[7], ponen énfasis en la *representación* de la fracción (propia), en distintas formas (concreta, simbólica y pictórica) para luego establecer igualdades que den paso al concepto de fracciones equivalente, *argumentando* por qué una fracción tiene muchas fracciones equivalentes. *Resuelven problemas* ordenando fracciones en la recta numérica y ocupando las propiedades de amplificación y simplificación.

Con estas herramientas, resuelven adiciones de fracciones (propias) simbólicas y pictóricas, como también problemas en contexto, argumentando si la solución es razonable. De esta forma, vemos como el currículum se preocupa de tener presente y darle importancia a todos los conceptos y procedimientos involucrados en la adición, invitando a encontrar las condiciones que permiten realizar la adición de fracciones con distinto denominador.

En 6º año básico, los objetivos de aprendizaje apuntan a ampliar la operación de adición de fracciones con distinto denominador a fracciones impropias y números mixtos para lo cual se realiza una transformación entre ambos tipos de escritura y *representan* usando el método COPISI, incluyendo software educativo. Ordenan fracciones impropias y números mixtos en la recta numérica *comunicando* los razonamientos utilizados, identifican fracciones equivalentes y *resuelven problemas* utilizando la recta numérica. Finalmente *resuelven problemas* rutinarios y no rutinarios de adición de fracciones, *modelan* situaciones traduciendo de lenguaje natural a lenguaje matemático y viceversa, *argumentando* los razonamientos y estrategias utilizadas.

Así, el currículum utiliza la misma estrategia, por medio de distintas representaciones, para incorporar las efectivamente las fracciones impropias y número mixtos, además de transformar los número entre estos tipos de escritura, para poder operar totalmente con la adición de fracciones. Para terminar la unidad, busca integrar todas las habilidades en situaciones cotidianas o cercanas para los estudiantes como en otras áreas de interés.

[7] Los aprendizajes esperados para 5º y 6º año básico, respecto al objeto, se especifican en anexos CD

A continuación se hace un Barrido Curricular para mostrar la evolución y el tratamiento existente a nivel escolar de nuestro de estudio, en él se presentan los objetivos de aprendizaje, los aprendizajes esperados y los indicadores de evaluación sugeridos que existen desde 5° básico hasta 1° medio, en torno a los conceptos de adición de fracciones. Para esta tarea, se revisó el documento ministerial “Unidad de Currículum y Evaluación Vigencia de Dispositivos Curriculares 2016”, donde se detallan los programas de estudio oficiales para cada nivel escolar. En la siguiente tabla se señalan sólo aquellos indicadores de evaluación que están en coherencia con nuestro objeto de estudio.

Barrido Curricular según Programas de Estudio.

Nivel	Objetivos de aprendizaje/ Aprendizajes esperados	Indicadores de evaluación sugeridos
5° año Básico	Demostrar que comprende las fracciones propias:	
	☐ Representándolas de manera concreta, pictórica y simbólica.	☑ Representan una fracción propia en cuadrículas, en superficies de círculos, en ángulos en círculos. ☑ Explican que una fracción admite distintas representaciones. ☑ Reconocen la unidad en superficies de círculos, en cuadrículas, en ángulos en el círculo y en la recta numérica, y que una fracción representa una parte de esa unidad.
	☐ Creando grupos de fracciones equivalentes –simplificando y amplificando	☑ Crean un conjunto de fracciones equivalentes y explican por qué una fracción tiene muchas fracciones equivalentes a ella, usando materiales concretos.
	Demostrar que comprende las fracciones impropias de denominadores de uso común los números mixtos asociados:	
	☐ Usando material concreto y pictórico para representarlas.	☑ Demuestran de manera pictórica que dos fracciones equivalentes se han amplificado o simplificado.
	☐ Identificando y determinando equivalencias entre fracciones impropias y números mixtos.	☑ Explican por qué las fracciones equivalentes representan la misma cantidad. ☑ Formulan una regla para desarrollar un conjunto de fracciones equivalentes.
	☐ Representando estas fracciones y estos números mixtos en la recta numérica.	☑ Emplean simplificaciones o amplificaciones para convertir fracciones de distinto denominador en fracciones equivalentes de igual denominador.

	Resolver adiciones y sustracciones con fracciones propias con denominadores menores o iguales a 12:	
	☐ De manera pictórica y simbólica	☑ Transforman fracciones de distinto denominador en fracciones equivalentes de igual denominador en sumas y restas
	☐ Amplificando o simplificando	☑ Determinan sumas y restas de fracciones de igual denominador. ☑ Determinan sumas y restas de fracciones de distinto denominador. ☑ Resuelven problemas que involucran sumas o restas de fracciones y determinan si la solución es razonable.
6° año Básico	Demostrar que comprenden las fracciones y los números mixtos	
	☐ identificando y determinando equivalencias entre fracciones impropias y números mixtos.	☑ Expresan fracciones impropias como números mixtos y viceversa. ☑ Identifican en la recta numérica fracciones impropias y los números mixtos correspondientes. ☑ Identifican fracciones equivalentes en la recta numérica.
	Resolver problemas rutinarios y no rutinarios que involucren adiciones y sustracciones de fracciones propias, impropias, números mixtos o decimales hasta la milésima.	
	☑ Suman y restan fracciones, amplificando o simplificando. ☑ Explican procedimientos para sumar números mixtos. ☑ Interpretan números representados como fracciones o decimales en el contexto de problemas. ☑ Verifican si el número decimal o la fracción obtenida como resultado es pertinente con el enunciado del problema.	
7° año Básico	Explicar la multiplicación y la división de fracciones positivas	
	☐ Relacionándolas con la multiplicación y la división de números decimales.	☑ Relacionan porcentajes conocidos con sus respectivas divisiones. ☑ Resuelven problemas que involucran porcentajes en situaciones de la vida real (IVA, ofertas, préstamos, etc.).
	Resolver problemas que involucren la multiplicación y la división de fracciones y de decimales positivos	
	☑ Utilizan diferentes metáforas (como repartición, cubrimiento) para describir la división entre fracciones. ☑ Crean problemas de la vida cotidiana que se modelan y se resuelven con operaciones matemáticas en el ámbito de números enteros y fracciones.	
8° año	Utilizar las operaciones de multiplicación y división con los números racionales en el contexto de la resolución de problemas:	

Básico	☑ Representan las cuatro operaciones con fracciones negativas y decimales negativos en la recta numérica. Realizan ejercicios rutinarios que involucren las cuatro operaciones con fracciones y decimales. ☑ Utilizan diferente notación simbólica para un número racional (decimal, fraccionaria, mixta).
1º año Medio	Distinguir problemas que no admiten solución en los números enteros y que pueden ser resueltos en los números racionales.
	☑ Reconocen cuando un problema, contextualizado, puede o no tener soluciones en el conjunto de los números enteros. ☑ Dan ejemplos de la vida cotidiana en que la información numérica corresponde a números racionales negativos. ☑ Identifican los números racionales como aquellos que pueden expresarse como un cuociente de dos números enteros, con denominador distinto de cero.
	Verificar la cerradura de las operaciones en los números racionales
	☑ Argumentan acerca de la cerradura de la suma y multiplicación en los racionales. ☑ Establecen las operaciones que son cerradas en los números racionales y justifican matemáticamente sus resultados.
	Resolver problemas en contextos diversos que involucran números racionales
	☑ Explican los procedimientos empleados para resolver problemas que involucran números racionales

Haciendo una síntesis de la tabla, de acuerdo a la evolución de los conceptos involucrados con nuestro objeto de estudio, podemos decir que, en quinto año básico, desde la representación en distintos registros de fracciones propias se pone en juego la noción parte-todo de fracción y se reconoce la unidad o referente a la que pertenece esa parte. Luego, por comparación, surge la noción de fracción equivalente y las propiedades de amplificación y simplificación, con lo que ordenan fracciones en la recta, se realizan adición pictórica y simbólica, y resolución de problemas con fracciones propias.

En sexto año básico se amplía el concepto de fracción, además del registro numérico y representación con fracciones impropias y números mixtos. Refuerzan las fracciones equivalentes y el orden en la recta, extendiendo la adición de fracciones a números mixtos, explicando los procedimientos y el razonamiento en resolución de problemas. En séptimo básico el énfasis en la operación de multiplicación de fracciones, con lo que parece la representación porcentual. En octavo básico se completan, con la división, las cuatro operaciones aritméticas con fracciones, además se agrega la noción de cuociente (reparto), con lo que se trabaja a la par con números decimales. Finalmente, en primero medio, se define el número racional como cuociente de dos enteros con denominado distinto de cero, se da respuesta a ecuaciones y problemas en contexto con solución en el conjunto de los racionales y se estudian las propiedades de clausura y densidad.

5.2 Limitaciones del Aprendizaje

En el análisis cognitivo, también está presente la identificación y descripción de los errores que el estudiante puede cometer y las dificultades de las cuales provienen. Conforme con Radatz (1979), cuando un alumno llega a una respuesta incorrecta respecto a un concepto o problema matemático, se puede establecer que está incurriendo en un error en relación a dicho concepto o problema, por ende, los errores se presentan en el quehacer del alumno al abordar una tarea en específico. Para Rico (1995), los errores son consecuencia del conocimiento que tienen los estudiantes al momento de abordar esa tarea, además del cómo lo utilizan para ello, mientras que *"las dificultades organizan los errores y se refieren al conocimiento que se pone en juego cuando los errores se producen"* (Gómez, 2002, p. 275).

Dentro de este análisis cognitivo se abordarán dos tipos de errores: los que son producto del saber que trae el estudiante y que es independiente a la estructura matemática en cuestión, y los que surgen a partir de los conocimientos asociados a esta estructura. "*El conocimiento que el profesor debe tener sobre el aprendizaje y la comprensión en matemáticas y la investigación que él haga en la literatura le deben permitir identificar esos errores"* (Gómez, 2002, p. 274).

La adición de números racionales presenta serias dificultades para los estudiantes, ya que involucra procesos y concepciones distintas a los vistos anteriormente con otros conjuntos numéricos, como los naturales o los enteros. Es así que podemos encontrar como causa de estas dificultades que: "Las diferencias epistemológicas respecto de los números naturales, que es lo que han trabajado antes de enfrentarse a este tema, producen obstáculos importantes en su comprensión y en su aprendizaje" (Peña, 2011, pág. 7). Además, la operatoria de adición de fracciones, tiene una forma diferente de realizarse a lo visto con números enteros, produciéndose errores. "Puede haber cierta dificultad para el estudiante cuando se ven primero los números naturales y luego los enteros, porque muchos de ellos extienden estos conceptos a los racionales, y suman las fracciones como si fueran números enteros." (Castaño, 2014, pág. 69)

Dentro de los números racionales, las fracciones se presentan como caso especial en su tratamiento y concepción, debido a su complejidad para los estudiantes. "Como lo refieren Perera y Valdemoros (2007), diversos investigadores han reconocido que las fracciones son uno de los contenidos matemáticos que manifiestan dificultades tanto para su enseñanza como su aprendizaje". (Flores & Martínez, 2009, pág. 1)

Si bien es posible apreciar, en la resolución de ejercicios y pruebas, las dificultades con la operación de fracciones, también existe un problema para enseñar y aprender el concepto de fracción, como lo señala Peña (2011), respecto hipótesis de la investigación de Flores (2010), "la variedad de significados asociados a la fracción es la razón principal de las dificultades con el concepto y con sus operaciones" (Peña, 2011, pág. 11)

En la obra de Fandiño se destacan los siguientes significados para la noción bajo estudio (Flores, 2010, pág. 20):

1. La fracción como parte de un todo; a veces continuo, a veces discreto.
2. La fracción como cociente.
3. La fracción como razón.
4. La fracción como operador.
5. La fracción en probabilidad.
6. La fracción en los puntajes.
7. La fracción como número racional.
8. La fracción como punto de una recta orientada.
9. La fracción como medida.
10. La fracción como indicador de una cantidad de elección en el todo.
11. La fracción como porcentaje.

12. La fracción en el lenguaje cotidiano.
13. La conceptualización de la fracción en la teoría de Vergnaud
14. La conceptualización signo – objeto de Duval

De acuerdo a Matute (2010), no lograr comprender los distintos significados, o al menos tener un manejo de algunos, de la noción de fracción, dificulta la comprensión de la operación de adición e impide obtener conocimientos duraderos que los estudiantes puedan aplicar a futuro. Esta falta de sentido los lleva a realizar un procedimiento mecánico, a memorizar un algoritmo más que comprenderlo.

No solo el concepto de fracción es un tema difícil de abordar por estudiantes y docentes, también las operaciones con fracciones presentan dificultades, en especial la operación de adición. Pero ambos aspectos van de la mano, no puede concebirse una mejora en la operación (adición) sin una comprensión del concepto de fracción, en palabras de Peña (2011, pág. 17) "Dado que la operatoria es el medio para resolver las situaciones problema, donde se contextualizan y adquieren sentido los conceptos de fracción mencionados, es necesario resignificar los algoritmos utilizados, para entender los procedimientos y asimilar los saberes".

En los ejercicios y pruebas los estudiantes demuestran las debilidades que tienen y las confusiones con los algoritmos, un caso particular en la suma de fracciones es sumar numerador con numerador y denominador con denominador (Matute, 2010)

Cuando se habla de suma de fracciones, quien ha estudiado el tema en la educación básica o media, automáticamente lo asocia con el mínimo común múltiplo, sin entender el por qué del procedimiento, ante esto podemos decir que prevalece una técnica sin una teoría. Algo similar a lo que ocurre con las ecuaciones de segundo grado y la aplicación de la formula general, la cual se aplica para todos los casos o formas en las que se puede presentar la ecuación. Además de ser poco estiloso, como diría un licenciado, se vuelve rutinario y carente de sentido. Al igual que los tres casos de una ecuación de segundo grado, podemos diferenciar casos de suma de fracciones con distinto denominador, donde no siempre es necesario recurrir al algoritmo mínimo común múltiplo (m.c.m.)

Conforme a lo expuesto anteriormente, se presenta las dificultades y errores asociados a la noción parte-todo de fracción, que utilizaremos en el diseño de tareas y de la adición de fracciones con distinto denominador.

Dificultad	Error
Manejar el significado de parte – todo de una fracción.	No considerar que: ☒ Una región entera se puede dividir en partes ☒ Se puede dividir la misma región en un numero distinto de partes ☒ Todas las partes iguales ☒ La unión de las partes abarca el todo ☒ El numero de partes puede ser diferente al número de cortes ☒ Cada parte puede considerarse como un “todo” (una nueva unidad) ☒ El todo se conserva, aun al dividirlo en partes.

Tabla 4. Dificultades y errores de la noción parte-todo de una fracción.
Fuente: Unidad Didáctica: Fracciones (León, 2011, pág. 21)

Dificultad	Error
Comprender la estructura aditiva de las fracciones con distinto denominador	☒ Sumar numeradores entre sí y denominadores entre sí, como número enteros. ☒ Sumar denominadores entre sí y mantener el numerador, en el caso de numeradores iguales. ☒ Sumar numeradores entre sí y multiplicar denominadores sí. ☒ Suma en cruz de numeradores y denominadores. ☒ Suma de numeradores y conservar alguno de los denominadores. ☒ Multiplicar numeradores y denominadores entre sí. ☒ Multiplicar numeradores entre sí y sumar denominadores entre sí.

Tabla 5. Dificultades y errores de la adición de fracciones con distinto denominador.
Fuente: Entorno a la suma de fracciones (Peralta, 1994, págs. 115, 116)

Teniendo en cuenta las dificultades y errores considerados anteriormente, se hace necesario estipular un plan de acción que permita abordarlos, y contemple una serie de tareas dirigidas a superarlos, las cuales serán planteadas en el siguiente apartado.

5.3 Oportunidades de Aprendizaje

Para concluir el análisis cognitivo, es preciso abordar las oportunidades de aprendizaje que el profesor entrega a los estudiantes para superar las dificultades y errores que puedan presentar. Lo y Wheatly (1994) exponen que las oportunidades de aprendizaje son aquellas circunstancias desarrolladas dentro del aula y la escuela, para promover el aprendizaje de todos los estudiantes, que dependen del entorno en el cual son llevadas a cabo. Así mismo, Lupiáñez (2009) señala que éstas también dependen de los tipos de tarea llevadas a cabo, *"una tarea es un reto para el alumno, y sirve para mostrar su aprendizaje sobre un foco de contenido movilizando conceptos y procedimientos"* (p. 114).

A continuación se detallan tipos de tareas que conforman las oportunidades de aprendizaje para el diseño a implementar en torno a la comprensión de los procedimientos involucrados en la adición de fracciones con distinto denominador. Las tareas de representación de fracciones estudiadas en los primeros años de escolaridad en Chile, están ligadas, en un comienzo, casi exclusivamente a la noción parte - todo. Según Peña (2011) los primeros acercamientos a la de fracción son a través de la noción parte todo, a partir de ella se trabaja la noción de equivalencia y posteriormente la operación de adición.

Para observar las oportunidades de aprendizaje hemos rescatado información desde la propuesta del marco curricular chileno y de los textos escolares oficiales. Desde la propuesta del marco curricular, destacamos las actividades presentadas como ejemplos para especificar cuando un alumno logra dicho nivel de escolaridad, en el que se contempla la transformación de fracciones de distinto denominador en fracciones equivalentes de igual denominador en sumas o restas de ellas, amplificando o simplificando, tema que aborda esta investigación. Realizamos también un análisis de los textos escolares en torno al contenido específico que aborda este estudio. Hemos considerado como referencia los textos que aporta el Ministerio de Educación de Chile gratuitamente a cada estudiante perteneciente a instituciones educativas públicas o subvencionadas del país.

5.3.1 Desde el marco curricular

Las bases curriculares definen los desempeños mínimos que se espera que todos los estudiantes logren en cada asignatura y nivel. Específicamente en 5° año básico se menciona que el estudiante debe: *resolver adiciones y sustracciones con fracciones propias con denominadores menores o iguales a 12, tanto de manera pictórica y simbólica como amplificando o simplificando.* En particular, en las tareas de enseñanza propuestas en el programa de estudio de quinto básico se presenta el siguiente ejemplo:

Objetivo: **Representan fracciones propias en cuadrículas e identifican la región que corresponde a sus sumas.**

Ejemplo: **En la figura (donde se muestran 6 rectángulos congruentes, es decir, todos los rectángulos tienen igual largo y ancho). Representar las fracciones $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{6}$. Representar las fracciones $\frac{2}{6}$ y $\frac{1}{6}$. ¿Cuál es la región que representa $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$ y la que representa $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}$?. ¿Qué puedes concluir respecto de ambas sumas?**

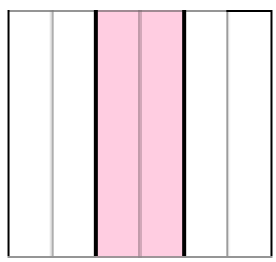


Figura 13. Ejemplo representación de fracciones.
Fuente: *Programa de Estudio nivel 5º básico* (MINEDUC, 2012a, p. 126)

En éste, se indica al docente la importancia de que los alumnos usen representaciones y estrategias para comprender mejor el problema e información matemática. Se indica la importancia de argumentar, comunicando de manera escrita o verbal los razonamientos matemáticos empleados.

5.3.2 Desde los textos escolares

Al revisar el texto del estudiante de matemática (Hartcourt, 2016), en la lección de adición y sustracción de fracciones se observan las siguientes características:

- Parte con un problema de planteo matemático inmerso en un contexto matemático abstracto.
- Explica el desarrollo de la adición que surge de la situación planteada de dos maneras. La primera utilizando representaciones gráficas y la segunda indicando paso a paso los procesos que se hacen: amplificación, suma y simplificación.
- Expresa en registro natural contextualizando según la situación la respuesta hallada anteriormente.
- Se plantea otro ejemplo como continuación del anterior, desarrollado de la misma manera.
- Se entrega una lista de ejercicios numéricos de suma y resta de fracciones
- Lo último tres ejercicios los engloba como comprensión de los aprendizajes.

El texto muestra en un ejemplo respecto a una situación desarrollada paso a paso, indicando que es lo que se hizo en cada uno, y luego, en un segundo ejemplo, vuelve a mostrar el mismo procedimiento, creando en el estudiante una mecanización de las estrategias. En los ejercicios propuestos, indica expresar una respuesta en registro gráfico a raíz de una adición entre fracciones.

Halla la suma o la diferencia. Escríbela como fracción en su mínima expresión. Usa cuadrículas.

8. $\frac{3}{7}+\frac{1}{8}$	**9.** $\frac{3}{4}-\frac{1}{2}$	**10.** $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}$	**11.** $\frac{5}{6}-\frac{2}{3}$	**12.** $\frac{7}{8}+\frac{1}{4}$
13. $\frac{4}{9}-\frac{1}{6}$	**14.** $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}$	**15.** $1-\frac{3}{10}$	**16.** $\frac{3}{10}+\frac{3}{4}$	**17.** $\frac{6}{7}-\frac{2}{14}$

Figura 14. Texto del Estudiante. Fuente: Matemáticas 5º básico (Hartcourt, 2016, pág. 143)

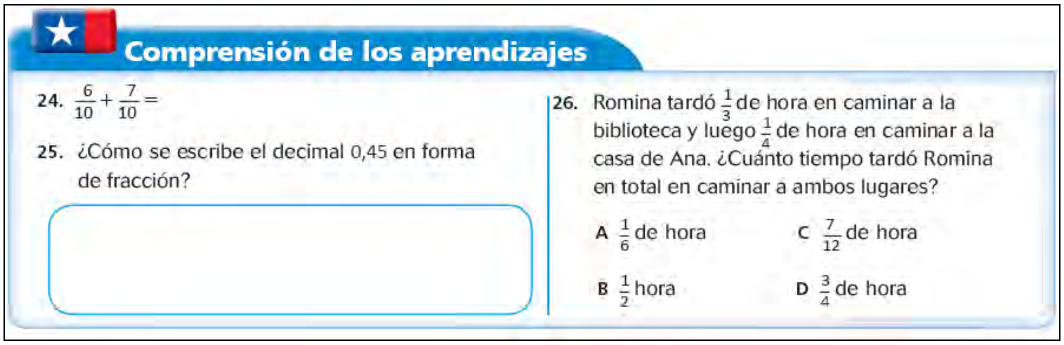
Luego plantea ejercicios para establecer relaciones de orden entre adiciones de fracciones

Compara. Escribe $<$ o $>$ en cada ●.

18. $\frac{1}{3}+\frac{1}{8}$ ● $\frac{2}{3}+\frac{1}{7}$ **19.** $\frac{5}{6}-\frac{1}{4}$ ● $\frac{9}{10}-\frac{1}{2}$ **20.** $\frac{1}{4}+\frac{3}{8}$ ● $\frac{2}{3}-\frac{1}{2}$

Figura 15. Texto del estudiante. Fuente: Matemáticas 5º básico (Hartcourt, 2016, pág. 143)

Finaliza, con la resolución de tres ejercicios planteados en distintos registros para avalar la comprensión de los aprendizajes en torno a lo trabajado.



Comprensión de los aprendizajes

24. $\frac{6}{10} + \frac{7}{10} =$

25. ¿Cómo se escribe el decimal 0,45 en forma de fracción?

26. Romina tardó $\frac{1}{3}$ de hora en caminar a la biblioteca y luego $\frac{1}{4}$ de hora en caminar a la casa de Ana. ¿Cuánto tiempo tardó Romina en total en caminar a ambos lugares?

A $\frac{1}{6}$ de hora

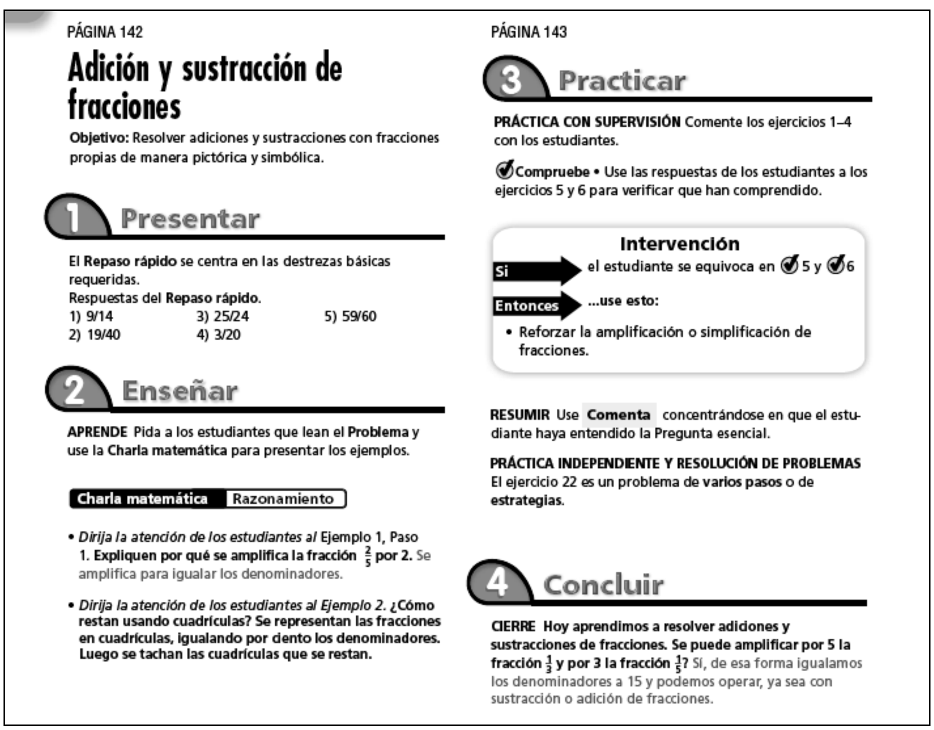
C $\frac{7}{12}$ de hora

B $\frac{1}{2}$ hora

D $\frac{3}{4}$ de hora

Figura 1. Ejercicios de comprensión de los aprendizajes del Texto del Estudiante.
Fuente: Matemáticas 5º básico (Hartcourt, 2016, pág. 143)

Al revisar el texto guía para el profesor de matemática se presenta una serie de recomendaciones para que el docente actúe de la manera más óptima en función del aprendizaje de los estudiantes en cada etapa de la clase en que se desarrolla la lección descrita anteriormente.



PÁGINA 142

Adición y sustracción de fracciones

Objetivo: Resolver adiciones y sustracciones con fracciones propias de manera pictórica y simbólica.

1 Presentar

El **Repaso rápido** se centra en las destrezas básicas requeridas.
Respuestas del **Repaso rápido**.

1) 9/14	3) 25/24	5) 59/60
2) 19/40	4) 3/20	

2 Enseñar

APRENDE Pida a los estudiantes que lean el **Problema** y use la **Charla matemática** para presentar los ejemplos.

Charla matemática Razonamiento

- *Dirija la atención de los estudiantes al* Ejemplo 1, Paso 1. **Expliquen por qué se amplifica la fracción $\frac{2}{5}$ por 2.** Se amplifica para igualar los denominadores.
- *Dirija la atención de los estudiantes al Ejemplo 2.* **¿Cómo restan usando cuadrículas? Se representan las fracciones en cuadrículas, igualando por dento los denominadores. Luego se tachan las cuadrículas que se restan.**

PÁGINA 143

3 Practicar

PRÁCTICA CON SUPERVISIÓN Comente los ejercicios 1–4 con los estudiantes.

Compruebe • Use las respuestas de los estudiantes a los ejercicios 5 y 6 para verificar que han comprendido.

Intervención

Si el estudiante se equivoca en 5 y 6

Entonces ...use esto:

- Reforzar la amplificación o simplificación de fracciones.

RESUMIR Use **Comenta** concentrándose en que el estudiante haya entendido la Pregunta esencial.

PRÁCTICA INDEPENDIENTE Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS El ejercicio 22 es un problema de varios pasos o de estrategias.

4 Concluir

CIERRE Hoy aprendimos a resolver adiciones y sustracciones de fracciones. Se puede amplificar por 5 la fracción $\frac{1}{3}$ y por 3 la fracción $\frac{1}{5}$? Sí, de esa forma igualamos los denominadores a 15 y podemos operar, ya sea con sustracción o adición de fracciones.

Figura 17. Recomendaciones para el docente respecto a la lección 6-7
Fuente: Matemáticas 5º básico. Guía Didáctica del Docente (Hartcourt, 2016, p.61)

CAPÍTULO 6
ANÁLISIS DE INSTRUCCIÓN

El Análisis de Instrucción que se presenta, considera lo señalado por Rico(2013) en cuanto al diseño de tareas y actividades junto a los aspectos relacionados con la gestión en el aula, a través de la planificación de una clase.

Watson y Sullivan (2008, citado en Luipiáñez, 2009) señalan que la selección de tareas por parte del profesor está directamente relacionada con la actividad matemática o aprendizaje que espera lograr. En este sentido, comenzaremos por la descripción y análisis de tareas que constituyen nuestro cuestionario exploratorio y luego con las de nuestro diseño de clase.

Finalizaremos este capítulo con el diseño del plan de clase, señalando las dificultades y errores asociados a la tarea y que tienen directa relación con las limitaciones de aprendizaje presentadas en el capítulo anterior.

6.1 Cuestionario Exploratorio

Las tareas asociadas a este cuestionario exploratorio permitirán conocer los conocimientos previos de los estudiantes respecto a los conceptos y operaciones involucradas en la adición de fracciones con distinto denominador.

Dicho implemento se aplica en el Colegio María Auxiliadora de Valparaíso, institución educativa conformada exclusivamente por estudiantes mujeres en un curso constituido, en esta instancia por 26 alumnas. Se aplica en séptimo básico, debido a que en ese nivel ya se ha estudiado y trabajado en la estructura aditiva de las fracciones y se pretende indagar en las competencias matemáticas que los escolares ya poseen.

En un primer momento, se le presenta el instrumento al curso, explicando en qué consiste. Posterior a la presentación se indican las instrucciones para el desarrollo del cuestionario y el comportamiento adecuado para el éxito de éste. Básicamente consiste en responder con calma, individualmente, justificando cada desarrollo de la manera que estimen, en un tiempo de 10 minutos.

6.1.1 Descripción de tareas

La Tarea 1 consta de 4 preguntas en las que se espera identificar las diferentes nociones que manejan los estudiantes respecto al concepto de fracción, suma de fracciones y los diferentes registros de representación de fracciones.

La siguiente tabla describe la justificación por parte de los investigadores de cada una de las preguntas, considerando el barrido curricular realizado en el capítulo anterior, análisis cognitivo

Tarea I: Respecto a la noción, representación y adición de fracción

Pregunta	Justificación
1) ¿Qué es para ti una fracción? Explica brevemente	Busca que el estudiante cuestione el concepto de fracción y su significado, generando curiosidad por indagar y explorar en los conocimientos adquiridos. Las respuestas esperadas se enfocan en las diferentes interpretaciones, significados y usos de una fracción, como situaciones de reparto, medida, transformación actuando como operador, división no entera, etc.
2) Exprese una fracción de diferentes formas	Pretende que el estudiante se sumerja en sus conocimientos y herramientas, permitiendo mostrar adecuadamente y con cierta simplicidad las diferentes posibilidades de hacer presente un concepto o idea respecto a la fracción. Se espera que las respuestas del estudiante consideren la notación usual, decimal, porcentaje, número mixto el lenguaje verbal y/o la representación gráfica.
3) Explica cómo sumar fracciones. Da un ejemplo.	Desea que el estudiante exponga con sus palabras la estrategia que utiliza para resolver una adición cualquiera entre números fraccionarios. Las posibles respuestas consideran el uso de comparación de fracciones, reducción a común denominador, amplificación, simplificación o fracciones equivalentes. Busca que el estudiante describa algún algoritmo de suma o resta de fracciones.

Tabla 8. Justificación Cuestionario exploratoria parte I. Fuente: Elaboración propia

Tarea II: Respecto a la operatoria de adición de fracciones con distinto denominador

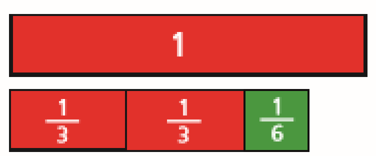
Pregunta		Justificación
1)	**Resuelve la siguiente suma de fracciones $\frac{2}{3}+\frac{1}{6}$. Explica con tus palabras el procedimiento que realizaste**	Pretende que el estudiante establezca y aplique las propiedades de la suma de números fraccionarios. Que el estudiante argumente el procedimiento, estrategia y/o herramientas utilizadas para efectuar la adición, cuando hay distintos denominadores. Las respuestas esperadas son la comparación de fracciones, reducción a común denominador, amplificación, simplificación o fracciones equivalentes. También se considera el caso no sepa resolver el ejercicio.
2)	**Ejemplifique una situación de la vida cotidiana donde esté presente la adición de fracciones con distinto denominador. Detalle la situación.**	Busca que el estudiante formule y resuelva problemas con sentido y concretos, mediante operaciones con fracciones, apoyándose en los diversos contextos y trabajando con distintas representaciones.
3)	**Utiliza el siguiente gráfico para resolver la adición $\frac{2}{3}+\frac{1}{6}$** 	Busca que el estudiante resuelva la adición apoyándose en la imagen de barras de fracciones, si es que se le ha presentado este método. En caso contrario, que intente describir cómo le podrían ser útil en la resolución del ejercicio. Se espera que el estudiante conozca el método, pues está presente en los textos escolares.

Tabla 9. Justificación Cuestionario exploratorio parte II. Fuente: Elaboración propia

6.1.2 Resultados de Aplicación

Los resultados de la aplicación del cuestionario se evidencian en las siguientes tablas, donde A_i hace referencia a la alumna que generó la respuesta.

Tarea I: Respecto a la noción, representación y adición de fracción

Pregunta 1	¿Qué es para ti una fracción? Explica brevemente
Evidencias	
A1: para mi una fraccion es algo divido o cortado	
A2: para mí una fracción es una forma de dividir graficamente, y también es algo que aplicamos cotidianamente.	
A3: Son números partidos por otro número Se conforma por denominador, númerador y números enteros	**A4**:  $= \frac{1}{4}$

Tabla 10. Evidencias Cuestionario exploratorio .Fuente: Elaboración propia

Tarea I: Respecto a la noción, representación y adición de fracción

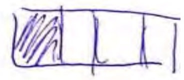
Pregunta 2	Exprese una fracción de diferentes formas	
Evidencias		
A1	**A2**	**A3**
$\frac{1}{4}\ \frac{3}{5}\ \frac{2}{5}\ \frac{1}{6}$	$\frac{20}{100}\quad 1/4$	 $\frac{1}{6}$ 
A4		
		

Tabla 11. Evidencias Cuestionario exploratorio. Fuente: Elaboración propia

Tarea I: Respecto a la noción, representación y adición de fracción

Pregunta 3	Explica cómo sumar fracciones. Da un ejemplo
Evidencias	
A1	**A2**
$\frac{1}{4}+\frac{2}{8}=\frac{2+2}{8}=\frac{4}{8}$	$\frac{3\cdot 4}{6\cdot 4}+\frac{5\cdot 6}{4\cdot 6}=\frac{12}{24}+\frac{30}{24}=\frac{42}{24}$
A3	
$\frac{2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ primero se suma lo de arriba y se dejo lo mismo de abajo	

Tabla 12. Evidencias Cuestionario exploratorio. Fuente: Elaboración propia

A partir de las evidencias que se presentan se establecen las siguientes categorías:

Respecto a la pregunta 1 la estudiante:

- Redacta en registro verbal
- Considera una fracción como la partición de un todo
- Describe una fracción en base a su estructura numérica(numerador y denominador)

Respecto a la pregunta 2 la estudiante:

- Se limita a la representación numérica
- Considera registro gráfico y numérico
- Considera registro gráfico, numérico y verbal

Respecto a la pregunta 3 la estudiante:

- Utiliza el mínimo común múltiplo
- Utiliza amplificación
- Reconoce la adición de fracciones con denominadores iguales

En base a estas evidencias podemos observar que existe una pluralidad de interpretaciones ante un mismo objeto matemático, aún participando de los mismos procesos de enseñanza-aprendizaje, ya que todas las encuestadas pertenecen al mismo curso. De la primera pregunta y en base a esta heterogeneidad de respuestas se observa que el concepto de fracción está en una fase de construcción, pues hay nociones de su significado pero las definiciones son imprecisas. De la segunda pregunta se muestra que hay estudiantes que se limitan a ciertos registros de representación, lo que les impedirá relacionar enunciados y expresiones compuestas. De la tercera pregunta se evidencian las estrategias más utilizadas según sea el caso.

Tarea II: Respecto a la operatoria de adición de fracciones con distinto denominador

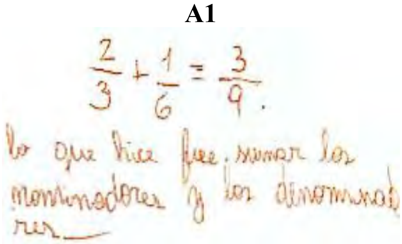
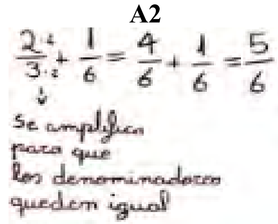
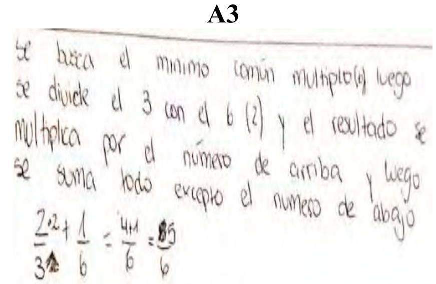
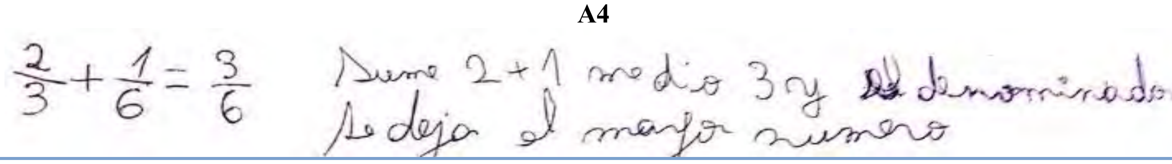
Pregunta 4	Resuelve la siguiente suma de fracciones $\frac{2}{3}+\frac{1}{6}$. Explica con tus palabras el procedimiento que realizaste	
Evidencias		
A1	**A2**	**A3**
		
A4		
		

Tabla 13. Evidencias Cuestionario exploratorio. Fuente: Elaboración propia

Tarea II: Respecto a la operatoria de adición de fracciones con distinto denominador

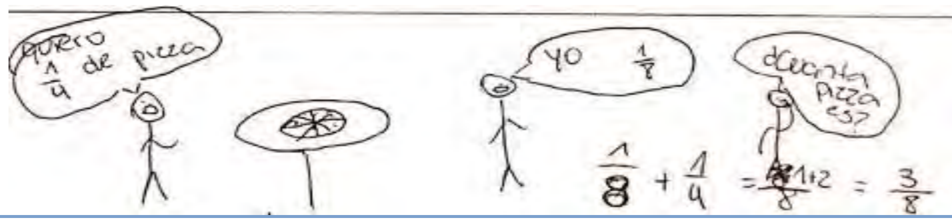
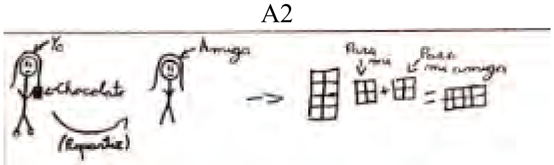
Pregunta 5	Ejemplifique una situación de la vida cotidiana donde esté presente la adición de fracciones con distinto denominador. Detalle la situación.
Evidencias	
A1 	
A2 	A3 $\frac{2}{4}$ DE manzana $+\frac{1}{5}$ DE peras

Tabla 14. Evidencias Cuestionario exploratorio. Fuente: Elaboración propia

Tarea II: Respecto a la operatoria de adición de fracciones con distinto denominador

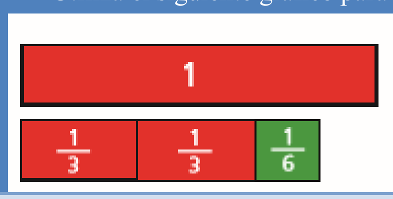
Pregunta 6	Utiliza el siguiente gráfico para resolver la adición $\frac{2}{3}+\frac{1}{6}$ 
Evidencias	
A1 $\frac{1}{3} \mid \frac{1}{3} \mid \frac{1}{6}$ Se unen y despues se agrega el 1/6, Luego se igualan los denominadores para poder encontrar el resultado $\frac{2\cdot 2}{3\cdot 2}+\frac{1}{6}=\frac{4}{6}+\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$	
A2 $\frac{2\cdot 2}{3\cdot 2}+\frac{1}{6.}=\frac{4}{6}+\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$	A3 "Por ejemplo" lan utilizaría para sumar todos los pedazos de chocolate que tengo.

Tabla 15. Evidencias Cuestionario exploratorio. Fuente: Elaboración propia

A partir de las evidencias que se presentan se establecen las siguientes categorías

Respecto a la pregunta 4 la estudiante:

- Plantea una estrategia incorrecta para sumar fracciones
- Realiza amplificación de fracciones
- Calcula el mínimo común múltiplo

Respecto a la pregunta 5 la estudiante:

- Plantea una situación de reparto
- Utiliza la fracción como operador

Respecto a la pregunta 6 la estudiante:

- Resuelve la adición, sin considerar las regletas
- Suma partes basándose en la imagen
- Relaciona las regletas con un ejemplo en concreto

Mediante el análisis de estas categorías se vislumbra que respondiendo al objetivo del enunciado y considerando las estrategias adecuadas de la pregunta 4, las estudiantes hacen referencia al proceso de amplificar una fracción, justificado bajo el argumento de que así se "dejan ambas fracciones con igual denominador para luego poder sumar lo numeradores". Si bien, se logra llegar a la respuesta numérica, las estudiantes no relacionan ni se cuestionan el proceder, lo hacen mecánicamente y porque "así se hace". Desde la epistemología del objeto matemático, en la pregunta 5, se replica un desafío que involucra la adición de fracciones con distinto denominador inmerso en una situación de reparto planteado en registro natural o verbal, apoyado de una imagen, registro gráfico, para así integrar todas las aristas del contenido. En la pregunta 6, las estudiantes que efectivamente se apoyan en la imagen de las regletas para hallar la solución concluyen insatisfactoriamente, mientras que las estudiantes que omiten la imagen y resuelven mediante registro numérico son capaces, mediante amplificación, de llegar a la respuesta.

Esto indica que a pesar que los textos escolares ofrecen el aprendizaje de este contenido de una forma, no parece ser la más conocida, aceptada y menos utilizada. Los estudiantes están acostumbrados a trabajar en un cierto registro y se niegan a la posibilidad de resolver un ejercicio por más de un método, limitando su capacidad de relacionar.

A continuación se clasifican las dificultades y errores en base a los resultados obtenidos:

Dificultad	Error (como se manifiesta la dificultad)
D1: **Dificultad para comprender el significado y uso de la fracción**	**E1.1:** Definiciones imprecisas del concepto fracción **E1.2:** No relacionan las partes de un todo con la estructura numerador-denominador **E1.3:** No logran establecer relaciones entre diferentes representaciones **E1.4:** No consideran que las partes sean equivalentes
D2: **Dificultad para realizar adición de fracciones**	**E2.1:** Generalizan las propiedades de adición de los números naturales a los racionales **E2.2**: Modifican algún paso del algoritmo **E2.3:** Confunde un número entero con su inverso **E2.4:** Confunde proceso de multiplicación con amplificación

Tabla 16. Dificultades y Errores cuestionario exploratorio. Fuente: Elaboración propia

Considerando todo lo expuesto, basado en la realidad de las respuesta de las encuestadas, se diseña una actividad central que pretende darle sentido a la matemática, específicamente al proceso de adición de fracciones con distinto denominador, el que estuvo ausente a lo largo de todas las respuestas de este análisis exploratorio, siendo un aporte para que los estudiantes comprendan los procedimientos que realizan y su significado.

6.2 Diseño de clase

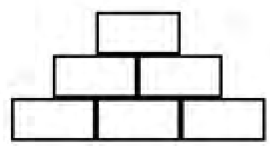
El diseño de clase se basa en la creación de tareas como secuencias didácticas. Constituidas por una serie organizada "de unidades de información y propuestas de acción que el profesor suministra al alumno con diferentes intenciones" (Marín, 2009, p. 18).

A continuación se detallan las tareas que conforman las oportunidades de aprendizaje consideradas para el diseño de enseñanza a implementar en torno a la adición de fracciones con distinto denominador.

6.2.1 Tarea 1

El diseño de esta tarea tiene como objetivo activar la noción de fracción como las partes que conforman un todo. Considerando la epistemología de las fracciones, se ha elegido una representación gráfica de rectángulos idénticos con una representación pictórica de una pirámide. En general las preguntas de esta tarea no contemplan mayor dificultad, sino que están orientadas a generar buena disposición del estudiante, como también hacer que se involucre con la observación y el posterior análisis de la figura presentada.

En el antiguo Egipto, las pirámides constituían las principales construcciones. Los egipcios las edificaban mediante la unión de bloques idénticos entre sí.



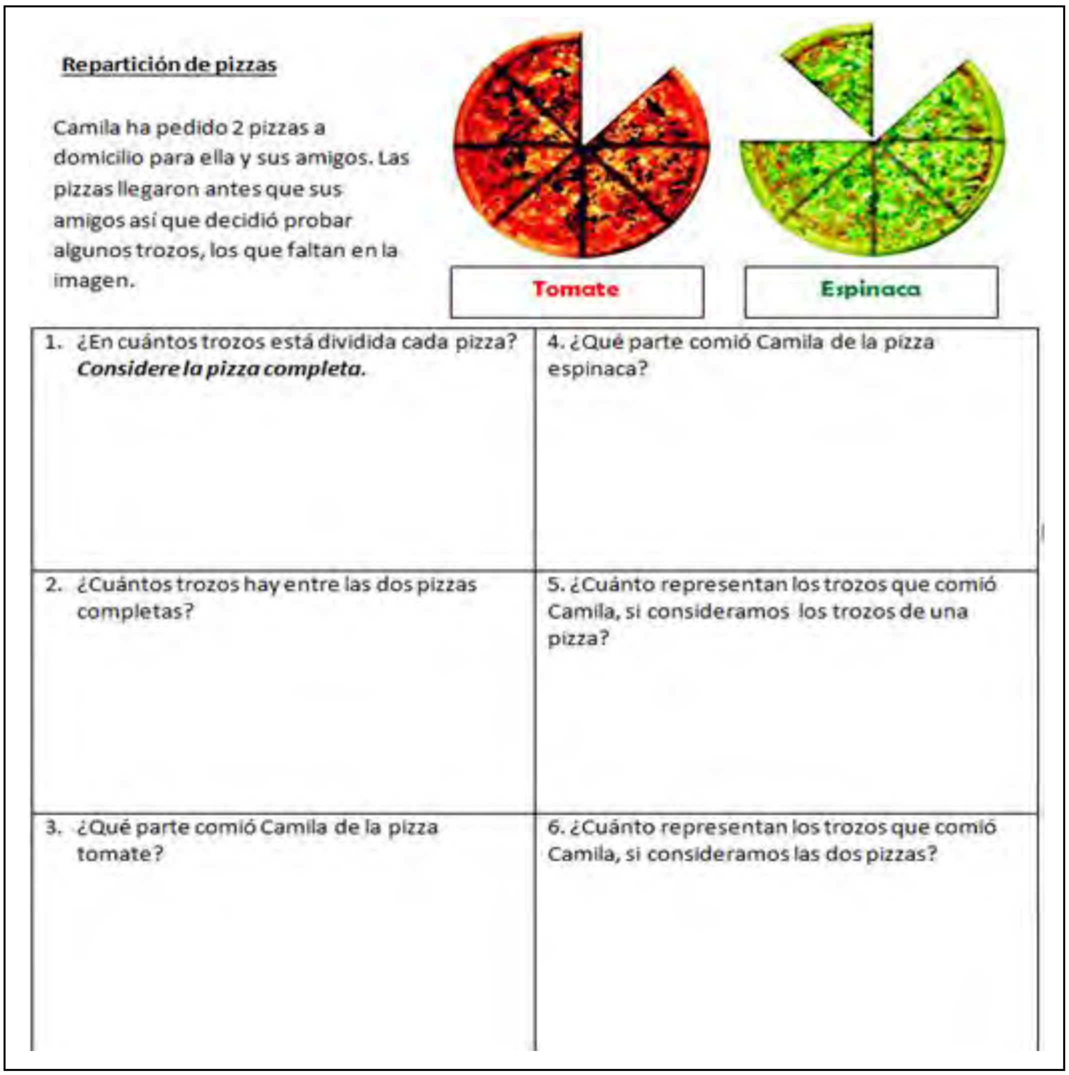
1. ¿Cuántos bloques conforman la pirámide?	5. ¿Qué otra cantidad representa la base respecto de la pirámide completa?
2. ¿Cuánto representa un bloque de la pirámide?	6. ¿Cuánto representan dos bloques respecto de la pirámide completa? Explica.
3. ¿Cuántos bloques conforman la base de la pirámide?	7. ¿Cuánto representa medio bloque respecto de la pirámide completa?
4. ¿Cuánto representa la base respecto de la pirámide completa?	8. ¿Cuánto representa un bloque y medio respecto del total de la pirámide?

Figura 21. Tarea 1. Fuente: Elaboración propia

La pregunta 5 en particular, incita a generar la destreza de reconocer y generar fracciones equivalentes. La pregunta 6 induce a la modificación del denominador en función del enunciado. La última pregunta, busca la comprensión del lenguaje natural.

6.2.2 Tarea 2

De acuerdo a la fenomenología, se presenta una situación de reparto y posterior a ella una secuencia de preguntas para lograr la activación conocimientos previos, respecto a la noción de unidad o referente al que está asociada la fracción en cuestión. La secuencia diseñada guía al l estudiante a responder ordenadamente y realizar las siguientes acciones: fraccionar, cortar en partes iguales, para luego seleccionar algunas. Luego debe medir, es decir, comparar la magnitud del objeto respecto de una magnitud referente. Finalmente debe comparar o relacionar cantidades y operar.


Repartición de pizzas

Camila ha pedido 2 pizzas a domicilio para ella y sus amigos. Las pizzas llegaron antes que sus amigos así que decidió probar algunos trozos, los que faltan en la imagen.

Tomate

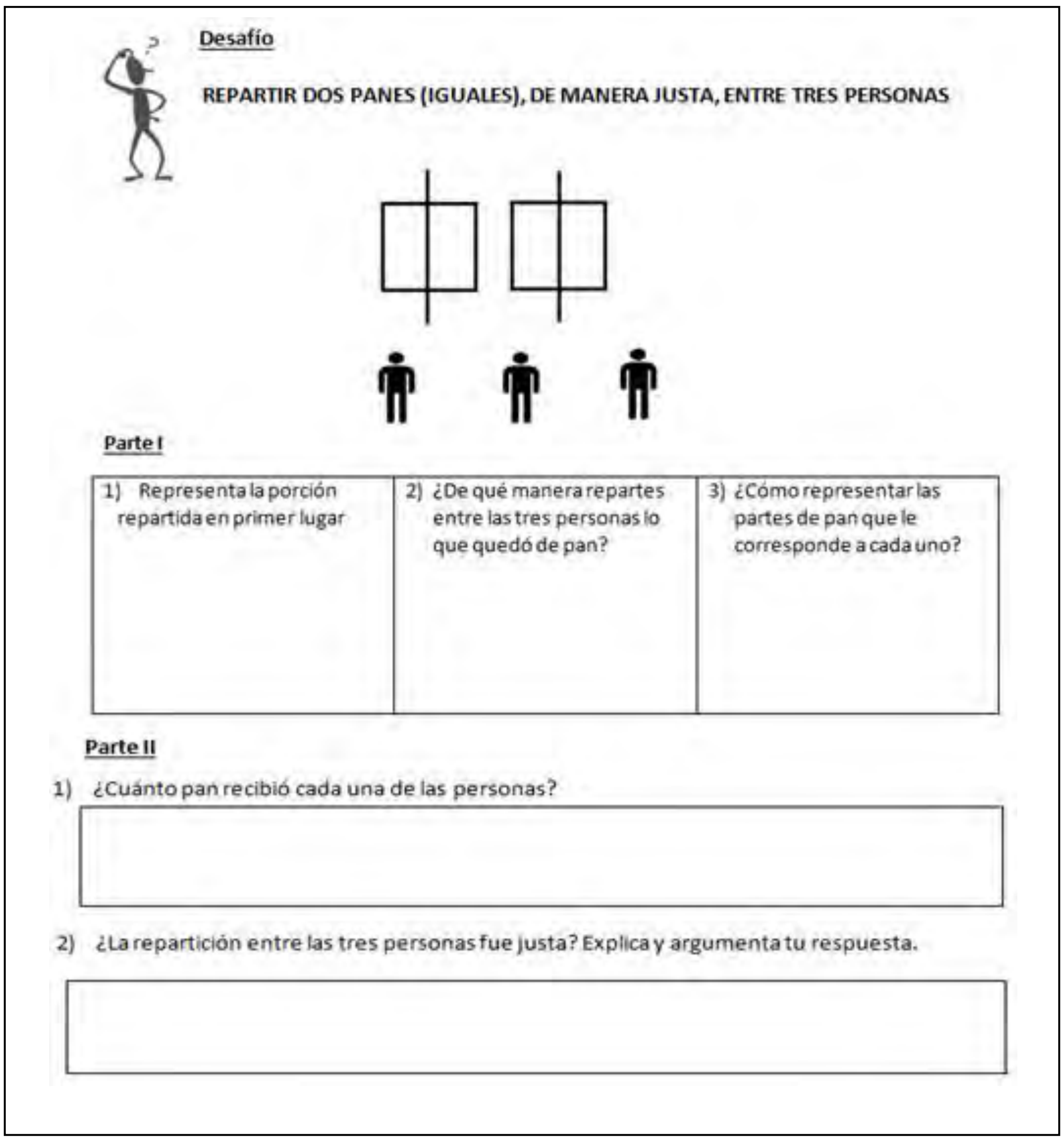
Espinaca

1. ¿En cuántos trozos está dividida cada pizza? ***Considere la pizza completa.***	4. ¿Qué parte comió Camila de la pizza espinaca?
2. ¿Cuántos trozos hay entre las dos pizzas completas?	5. ¿Cuánto representan los trozos que comió Camila, si consideramos los trozos de una pizza?
3. ¿Qué parte comió Camila de la pizza tomate?	6. ¿Cuánto representan los trozos que comió Camila, si consideramos las dos pizzas?

Figura 22. Tarea 2. Fuente: Elaboración propia.

6.2.3 Tarea Central

La tarea central pretende lograr que los estudiantes le otorguen sentido a la adición de fracciones, considerando lo histórico-epistemológico, específicamente del estudio de los egipcios y el uso de fracciones en situaciones de reparto. El estudiante deberá identificar el referente, unidad o el todo que se considera, la igualdad de las partes en que se reparte, efectuar la adición de fracciones con distinto denominador y por ende trabajar con las fracciones equivalentes y amplificación.



Desafío

REPARTIR DOS PANES (IGUALES), DE MANERA JUSTA, ENTRE TRES PERSONAS

Parte I

1) Representa la porción repartida en primer lugar	2) ¿De qué manera repartes entre las tres personas lo que quedó de pan?	3) ¿Cómo representar las partes de pan que le corresponde a cada uno?

Parte II

1) ¿Cuánto pan recibió cada una de las personas?

2) ¿La repartición entre las tres personas fue justa? Explica y argumenta tu respuesta.

Figura 23: Tarea central. Fuente: Elaboración propia

6.3 Plan de Clase

El plan de clases[8] que hemos confeccionado tiene por objetivo que los alumnos entiendan el significado de la estrategia que utilizan al sumar fracciones con distinto denominador. Para ello, el inicio será la instancia para generar motivación, presentando un video a modo de "misión" a resolver. También, se realizan las tareas 1 y 2 para lograr la activación de los conocimientos que serán necesarios para que puedan desarrollar la tarea central, en función de la consecución del objetivo de la clase, es decir, se abordarán los conceptos que se relacionan con fracción, poniendo énfasis en la unidad o referente que se considere. Al finalizar la activación de conocimientos, en el desarrollo de la clase, se dará lugar a la entrega, explicación y realización de la tarea central. Posterior a la validación de las respuestas, en el cierre de la clase, se realiza la formalización de los contenidos tratados y se exponen las conclusiones de la importancia de lo aprendido durante la sesión.

6.3.1 Dificultades y Devoluciones

Dentro de los aspectos que es necesario abordar para la planificación de la clase, están las dificultades y las devoluciones por parte del docente que permitan el logro del objetivo de la clase por todos los estudiantes. Importante destacar que estas dificultades y errores asociados a la tarea tienen directa relación con las limitaciones de aprendizaje presentadas en el capítulo anterior.

[8] Ver Plan de Clase en Anexos CD

En la siguiente tabla se observan las dificultades que se pueden presentar respecto a cada tarea y sus correspondientes devoluciones.

Dificultades	Devoluciones
Tarea Pirámides D1: **Características generales de la imagen** D2**: Modo de responder a las preguntas** Tarea Pizzas D3: **Comprensión de enunciados** D4**: Establecer relaciones entre la por porción faltante y el total** D5: **Omisión del referente o unidad.** D6: **Noción de fracciones equivalentes**	**Tarea Pirámides** D1.1: Recordar que los bloques son iguales, rectángulos ¿De qué forma son los bloques? ¿Son todos iguales? D1.2: Recordar que se relaciona un bloque con el total de bloques ¿Cómo relacionamos una parte con el total? D1.3: Recordar que los bloques son iguales, rectángulos. ¿Cuál es la base de la pirámide? D1.4: Considere que la pirámide está conformada por bloques enteros. Si divido todos los bloques en la mitad ¿Cuántas mitades hay en total? ¿Cuánto representa una mitad del total de mitades…? D2.1: Recordar que puede dejar el resultado expresado (sin resolver) **Tarea pizzas** D3.1: Considere la pizza completa, con todos sus trozos ¿Son todos los trozos iguales? D3.2: Considere ambas pizzas completas, con todos sus trozos ¿Son iguales ambas pizzas? ¿Cuántos trozos suman ambas? D4.1:¿Cómo represento una trozo del total? ¿Cómo represento dos trozos del total? D5.1: Señalar que deben relacionar los trozos faltantes con respecto a una pizza ¿Cuántos trozos comió Camila? ¿Cuántos trozos tiene una pizza? D5.2: Señalar que deben relacionar los trozos faltantes con respecto a ambas pizzas ¿Cuántos trozos comió Camila? ¿De un total de...? ¿De cuantas pizzas? D6.1:¿podemos representar el valor de una fracción con otra fracción?
Tarea repartiendo pan D7:**Comprensión del problema** D8: **Respecto al referente** D9: **Adición de fracciones**	**Tarea repartiendo pan** D7.1:Recordar que los panes son idénticos D7.2:La división que se ve en la imagen ya se ha realizado D7.3:Recuerde que cada persona debe recibir la misma cantidad de pan D7.4:Recuerda que la cantidad inicial eran dos panes D8.1:¿Qué cantidad de pan vas a considerar? D8.2:Recuerda lo que pasaba en la tarea pizzas cuando se consideraba una o dos D8.3:¿En cuántas porciones dividiste cada pan o cada parte de pan?¿Que me representan esas porciones? D9.1 :¿Qué se pretende con las fracciones equivalentes? D9.2: ¿Qué fracción es menor? D9.3: ¿Gráficamente que representa cada fracción? D9.4: Entonces, ¿Cómo puedo representar la porción mayor, en término de la menor?
Síntesis D10: **Relevancia de la clase**	**Síntesis** D10.1: ¿Cómo deben ser las partes para sumar fracciones? D10.2: ¿Por qué es importante el referente? D10.3: ¿En qué situaciones puedo aplicar lo aprendido? D10.4: ¿Gráficamente qué representan dos fracciones equivalentes?

Tabla 18. Posibles dificultades y preguntas de devolución. Fuente: Elaboración propia.

Con la planificación presentada a lo largo de este capítulo, se espera que los estudiantes profundicen sus conocimientos matemáticos, que además de llegar al resultado de un ejercicio, se entienda todo el proceso realizado hasta obtenerlo. Pretende fomentar en el estudiante el cuestionamiento, la indagación y la creatividad al enfrentarse a desafíos como situaciones de reparto.

Por otro lado, el diseño de este plan surgió desde la motivación de poder llevar a cabo un conocimiento adquirido en nuestra formación matemática, característica de la Universidad de Valparaíso, confrontando la problemática que presenciamos en variadas circunstancias en torno a la comprensión del proceso aditivo entre fracciones por parte de los estudiantes.

CAPÍTULO 7
ANÁLISIS DE ACTUACIÓN

El análisis de actuación aborda y describe las tareas desarrolladas por los estudiantes. En este capítulo, se describe cada etapa de la implementación de la clase, con sus respectivas tareas, diseñadas en el análisis de instrucción.

Un primer momento corresponde a la implementación inicial, la que posteriormente se analiza y se somete a una reformulación para su consecuente implementación. Para cada una de estas dos implementaciones, se describirán las percepciones de la clase de los docentes investigadores, desde la mirada de quien la implementó y luego desde la perspectiva de quién la observó. Posteriormente, se analizarán las producciones de las estudiantes, agrupando las diferentes estrategias de los estudiantes en categorías, incluyendo los errores y aciertos evidenciados. Finalmente, se describe la reformulación respecto de la implementación dos de la clase, considerando las percepciones de los investigadores, el análisis del desarrollo de la clase y las producciones de las estudiantes, generando así una versión perfeccionada de la clase diseñada.

7.1 Primera Implementación de clase

La primera implementación se realizó en el curso de octavo básico del Colegio María Auxiliadora de Valparaíso, conformado en esta instancia por 25 alumnas, durante el segundo periodo de clases.

7.1.1 Percepción de docente que implementa la clase

Al iniciar la clase se percibe un ambiente grato, distendido y relajado. En un primer momento, mientras se escribe el objetivo de la clase en la pizarra, las alumnas se mantienen en silencio, momento en el cual se anuncia que, además de las actividades, observarán un video que nos indicará “la misión” a desarrollar. A pesar de ello, se produce un corte en la dinámica que se llevaba hasta el momento, se siente una pausa innecesaria, además de darle la espalda al curso. Luego de la situación inicial, en la que se comenta sobre los egipcios y las fracciones unitarias, se observa que la información entregada no es comprendida por todas las alumnas, pues ha sido más bien un resumen de la historia, alejado de un proceso en el cual se puedan involucrar.

Para la activación de conocimientos previos considerado en el plan de clase, surge un inconveniente con el tamaño de la pizarra, que si bien se extiende casi de muro a muro, la parte central es de acrílico blanco para escribir con plumones y a sus costados hay superficies negras para escribir con tiza. Además, el proyector apunta al centro, por lo que se tuvo que ocupar un pequeño espacio para anotaciones, sin poder mantener lo escrito durante la clase. Por otro lado, el escritorio del profesor se hace pequeño para los recursos de la clase (hojas de las actividades por hacer, la planificación y el notebook).

Respecto al apoyo audiovisual presentado (video), queda la impresión de que se necesita una introducción, como parte de la clase, en que se involucre a cada alumna (en este caso), y dar valor a cada aporte que hagan, para cumplir "la misión" que se les presenta.

El desarrollo de la tarea 1, deja entrever que hay mucha diferencia entre el nivel de dificultad de las preguntas, siendo las primeras muy obvias mientras que las últimas presentan impedimentos de lenguaje, conceptos y abstracción para las alumnas, se disocia la relación con la figura y se entrega una "respuesta" aislada, un número que representa una mitad (0,5) sobre otro que no varía (el denominador). Se evidencia la necesidad de abordar el concepto de fracciones equivalentes, pues las alumnas no demuestran manejarlo. Se observan errores al operar con la simplificación, como también problemas conceptuales, dado que una alumna expresa la fracción equivalente invirtiendo numerador y denominador.

Para la tarea 2, se pierde el control de la clase al dibujar en la pizarra la representación de las dos pizzas, mientras las alumnas desarrollan la tarea. Finalizada la segunda tarea, la motivación de las estudiantes decae, lo que se evidencia en sus actitudes, hay poca atención a lo que se explica en pizarra respecto de lo que debían realizar, las conversaciones aumentan y el bullicio se vuelve un problema, más aun considerando que viene la segunda parte del video. Luego de exponer la segunda parte del video, se consigue retomar la motivación de las estudiantes, mediante preguntas fuera del contexto en que se estaba trabajando. En este momento se observa que las alumnas están agobiadas de tal cantidad de “papeles” y ejercicios, no importando la dificultad ni la cantidad de preguntas por hoja, solo el recibir una nueva tarea que hacer.

Por mi parte, siento que el trabajo se hace largo y no muy agradable para las alumnas, contrastando un poco con la realidad actual, la lluvia de diseños y la interacción que permiten los dispositivos tecnológicos hoy en día. Además, la entrega y retiro de las hojas se vuelve tedioso y complicado a momento, dado que algunas alumnas terminan pronto y, a favor del tiempo, se les entrega la segunda parte mientras que a otras se les retira la primera.

Queda una sensación de que el trabajo en clases va siempre de más a menos, como por ejemplo, terminar la clase con ejercicios de repaso, a diferencia de lo que proponemos, siendo la segunda parte y central la más importante.

El trabajo en la pizarra, es una de las partes más importantes de la clase, y aunque fue un final anticipado, se obtuvo atención de las alumnas, pero solo se logró en parte en torno a nuestro objetivo, pues se mostró la necesidad de igualar denominadores, pero a través de las operaciones para comprobar los resultados obtenidos. Por el tipo de respuestas, sobre el resultado de las adiciones, se constata un manejo desprolijo del tema.

7.1.2 Percepción de Docente Investigador observador de la clase

Para cada momento de la clase, se describen las percepciones generadas en el docente investigador observador, presente en la implementación de la clase, las que principalmente van dirigidas hacia temas de gestión, motivación y contenido.

Al iniciar la clase se indica el contenido a trabajar, adición de fracciones con distinto denominador, se percibe que es un tema que se ha trabajado anteriormente y las alumnas aceptan sin problemas el contenido, considerando que no es algo nuevo por aprender, sino que profundizar en lo que ya se sabe. En cuanto a la gestión, se establece el contrato pedagógico entre el profesor y las alumnas, es decir, se dan las instrucciones respecto al comportamiento adecuado para llevar a cabo el desarrollo de la clase y las indicaciones básicas para responder las actividades. Estas condiciones son escuchadas con atención y aceptadas por parte de las alumnas, generando confianza y seguridad en ellas al momento de responder las actividades.

En este momento de la clase, se observa gran interés por parte de las alumnas de saber de qué se va a tratar esta nueva experiencia con profesores desconocidos, esto se refleja en las preguntas que realizan a los profesores antes de iniciar la clase: ¿Qué haremos?, ¿Quiénes son? ¿Por qué vienen?

Al comenzar la activación de conocimientos previos con la reproducción de un video, las alumnas se mantienen atentas, al parecer les resulta novedoso para ellas este tipo de presentación audiovisual, hacer cambios a lo rutinario resultó pertinente y acertado.

En relación a los contenidos, se desarrollan dos tareas que pretenden activar conocimientos previos necesarios para poder resolver la actividad central. Si bien, ambas tareas se desarrollan completas, al momento de las correcciones del docente se ve que no cumplen a cabalidad sus objetivos. La primera tiene como fin reconocer las partes de un todo, las alumnas contestaban más por lógica que identificando. En la segunda, se espera que reconozcan el referente en una adición de fracciones con distinto denominador y si bien no lo identifican, el docente lo explica en la corrección para que así luego sea utilizado en el desafío central. Las estudiantes demostraron su mayor interés en responder rápido y terminar luego la actividad, por lo que los argumentos de sus desarrollos son escasos, actitud que impide el cumplimiento de los objetivos que requieren de compromiso con lo que se está haciendo.

Al trascurrir el desarrollo de la clase, surgen los primeros inconvenientes respecto a la gestión. Las características físicas del aula, dificultan la labor del profesor, ya que era una sala amplia en donde había que usar un tono de voz elevado para llamar la atención de todo el grupo curso, por lo que en momentos de trabajar respondiendo las guías, las alumnas se distraen y se desordenan, distrayendo al resto de las compañeras, incumpliendo el contrato pedagógico establecido al inicio y dificultando al docente mantener el dominio de grupo. Es por esto, que en circunstancias de corrección de tareas en pizarra, el profesor se limita a explicar y considerar a un grupo determinado de estudiantes, las más cercanas y participativas.

En el desarrollo de la clase, se percibe una actitud positiva, por parte de las alumnas frente a la tarea central, presentada a modo de desafío: “repartir dos panes idénticos entre tres personas”, indicándoles que necesitamos de su ayuda para poder resolverlo, generándose grupos de discusión de estrategias entre las alumnas y considerando que no era evaluada, participaban sin presiones. Las estudiantes desarrollan el desafío del reparto del pan, sin considerar lo aplicado en las tareas del inicio, impidiendo la comprensión del problema al no considerar el referente. Fueron muchas tareas a ejecutar y en función del tiempo, no se precisó el objetivo de cada una, resultando un proceso agotador para las estudiantes.

Un inconveniente a considerar en este momento de la clase, fue el tiempo estipulado para cada etapa de la clase, si bien el inicio se cumplió, no se consideró dentro de la planificación el tiempo extra que se utiliza en repartir y retirar material, generar el orden, correcciones de las actividades, por lo que el cierre de la clase tuvo que ser realizado rápidamente de manera general, suprimiendo el proceso de formalización de los contenidos tratados.

Respecto a la motivación que había estado presente durante el inicio y el desarrollo, disminuye considerablemente, pues las alumnas se ven interesadas en la proximidad del término del día escolar, por lo que comienzan a ordenar sus pertenencias y se distraen de la última actividad y de las explicaciones finales del docente.

Al finalizar la clase, el profesor destaca lo que se esperaba, sin embargo ante la distracción de las alumnas, se dificultó el proceso de institucionalización y de apreciaciones finales, impidiendo un adecuado cierre de clase.

7.2 Contraste de implementación y planificación de clase

En la siguiente tabla se presentan los logros y dificultades, según cada momento de la clase que permite contrastar lo establecido en el plan de clases con lo realizado en la implementación de este.

Tabla 1. Contraste planificación-implementación.

Momento	Logros	Dificultades
Inicio	• Presentación del objetivo de la clase, captando la atención de las alumnas. • Se plantea la situación inicial desde la epistemología, narrando las situaciones de reparto a las que se enfrentaban los egipcios y cómo las resolvían. • Las respuestas a las tareas de activación de conocimientos previos coinciden con las posibles respuestas del plan de clases • Se utilizan preguntas de devolución, respecto a la comprensión de las preguntas de las tareas.	• Se realiza una presentación detallada de la actividad, en lugar de establecer el contrato pedagógico. • Se realiza una revisión detallada de las respuestas de las tareas en pizarra que no se consideró en el plan de clases • Las estudiantes no manejan conceptos de amplificación y simplificación. • No se considera el tiempo empleado en repartir y retirar guías de trabajo • Se excede el tiempo predeterminado para este momento.
Desarrollo	• Se presenta el problema central utilizando un video a modo de desafío. • Se analizan y validan las respuestas de las alumnas utilizando la pizarra y enfocado al referente o unidad considerada. • Tanto las respuestas erróneas como las acertadas estaban consideradas en el plan de clases	• Para dar explicación al problema, se induce y anticipa la respuesta, pues no hay una devolución pertinente planificada. • Las estudiantes no reconocen las fracciones equivalentes. • Las estudiantes confunden conceptos de simplificación y amplificación con multiplicación. • Aplicaciones incorrectas de algoritmos de adición de fracciones. • Se excede el tiempo planificado
Cierre		No se realiza el cierre planificado, por falta de tiempo.

Fuente: Elaboración propia.

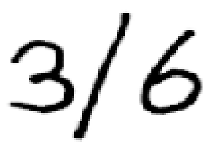
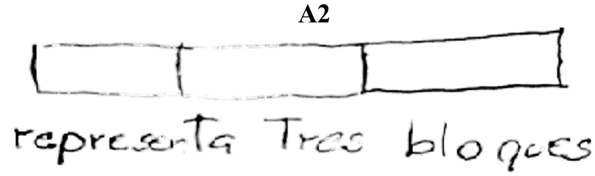
7.3 Análisis de las producciones de los estudiantes

A continuación se presenta un análisis realizado a las producciones estudiantiles correspondientes a esta primera implementación, por cada tarea, ejemplificando con imágenes, aciertos, dificultades y errores presentes.

7.3.1 Tarea 1

La mayor parte del curso contestó correctamente las primeras cuatro preguntas, pues no presentan mayor dificultad. Salvo unos casos donde no se entrega una respuesta matemática, usando fracciones, para representar un bloque y la base, respecto del total. Algunas alumnas cometieron un error de nomenclatura al utilizar fracciones cuando la respuesta era un número entero y algunas acompañaron su respuesta con un dibujo.

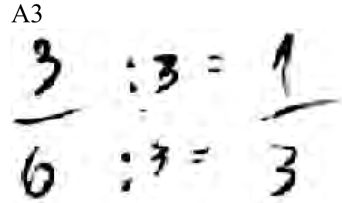
Tabla 2. Evidencias pregunta 1, tarea 1, implementación 1

Pregunta	¿Cuántos bloques conforman la base de la pirámide?
Evidencias	
A1 	**A2** 

Fuente: Elaboración propia.

Respecto de la pregunta 5, la fracción equivalente que más se utiliza para responder correctamente es $\frac{1}{2}$, con 9 de las 25 alumnas, además 6 alumnas dan otra fracción equivalente. Dentro de quienes no respondieron correctamente se destacan los casos de repetir como respuesta la fracción dada en la pregunta anterior, invertir dicha fracción y cometer un error en la simplificación.

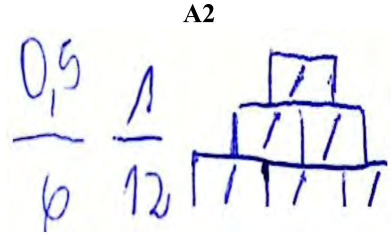
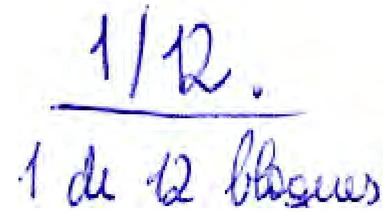
Tabla 3. Evidencias pregunta 5, tarea 1, implementación 1.

Pregunta	¿Qué otra cantidad representa la base respecto de la pirámide completa?	
Evidencias		
A1 	A2 	A3 

Fuente: Elaboración propia.

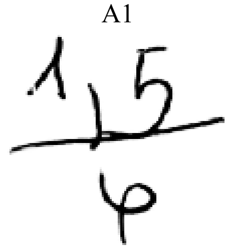
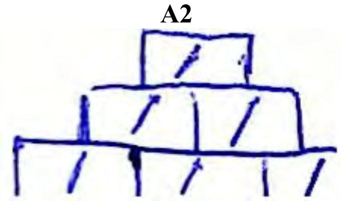
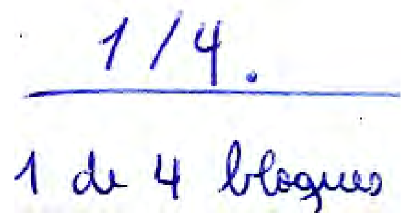
Las últimas dos preguntas resultan ser las más complejas, pues a pesar de entender qué cantidad tienen que relacionar con el total, la mayoría de las alumnas (16 y 13 respectivamente) opta por una notación decimal de ésta y, así , mantener el denominador. Cuatro alumnas responden correctamente $\frac{1}{12}$ en la pregunta 7 y sólo una la pregunta 8, dando $\frac{1}{4}$ como respuesta.

Tabla 4. Evidencias pregunta 7, tarea 1, implementación 1.

Pregunta	¿Cuánto representa medio bloque respecto de la pirámide completa?	
Evidencias		
A1	**A2**	**A3**
		

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 5. Evidencias pregunta 8, tarea 1, implementación 1.

Preguntas	¿Cuánto representa un bloque y medio respecto del total de la pirámide?	
Evidencias		
A1	**A2**	**A3**
		

Fuente: Elaboración propia.

7.3.2 Tarea 2

La mayoría de las alumnas (22 estudiantes) identifica que cada pizza está dividida en 8 trozos, como respuesta a la primera pregunta, sin embargo algunas (2 estudiantes) describen como fracción la porción de pizza mostrada en cada imagen. En la segunda pregunta se pide el total de trozos que había originalmente contando ambas pizzas, pero no se logró aquello, ya que 13 de las alumnas solo contaron los trozos que se aprecian en la imagen, que son 13 trozos o porciones.

Las preguntas 3 y 4 son respondidas sin mayor inconveniente. En las preguntas 5 y 6 la mayoría responde correctamente aunque también se presentan otras respuestas o se da una misma respuesta a las dos preguntas.

Tabla 6. Evidencias pregunta 5, tarea 2, implementación 1.

Pregunta	¿Cuánto representan los trozos que se comieron, si consideramos una pizza?	
Evidencias		
A1	**A2**	**A3**
Tomate Espinaca 4/8 6/8	$\frac{3}{16}$	$\left(\frac{3}{8}\right)$ $\frac{3}{16}$

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 7. Evidencias pregunta 6, tarea 2, implementación 1.

Pregunta	6. ¿Cuánto representan los trozos que se comieron, si consideramos dos pizzas?	
Evidencias		
A1	**A2**	**A3**
2/16 trozos	$\frac{3}{16}$	$\left(\frac{3}{16}\right)$ $\frac{1}{8}$ y $\frac{2}{8}$

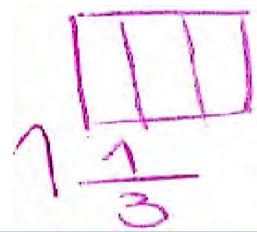
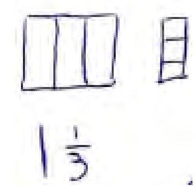
Fuente: Elaboración propia.

7.3.3 Tarea Central

Para la tarea central se esperaba una variedad de respuestas, además de las posibles, es así que surgen algunas que no se habían conjeturado, además de que prima la idea de dibujar para representar las cantidades repartidas con fracciones.

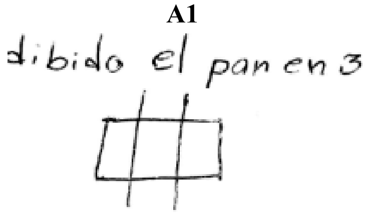
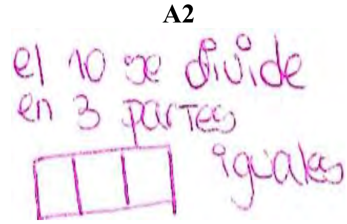
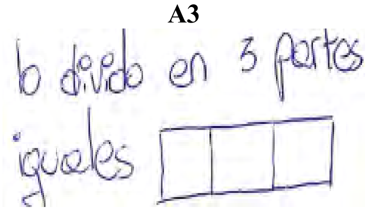
En la primera pregunta son 8 las alumnas que optan por dibujar el primer trozo de pan repartido, mientras que 16 de ellas dibujan en la siguiente pregunta el trozo restante divido en 3 partes iguales. En la tercera pregunta las respuestas mayoritarias son un dibujo de los 2 trozos repartidos a cada persona, un entero y un tercio, además de las sin responder.

Tabla 8. Evidencias pregunta 1.1, tarea central, implementación 1.

Pregunta	Representa la porción repartida en primer lugar	
Evidencias		
A1	**A2**	**A3**
		

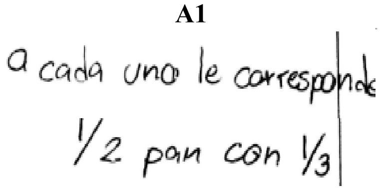
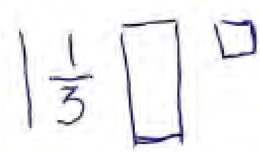
Fuente: Elaboración propia.

Tabla 9. Evidencias pregunta 2.1, tarea central, implementación 1.

Pregunta	¿De qué manera repartes entre las tres personas lo que quedó de pan?	
Evidencias		
A1	**A2**	**A3**
		

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 10. Evidencias pregunta 3.1, tarea central, implementación 1.

Pregunta	¿Cómo puedo representar las partes de pan que le corresponde a cada uno?	
Evidencias		
A1	**A2**	**A3**
		

Fuente: Elaboración propia.

En la segunda parte, la mayoría se inclinó por responder que cada persona había recibido un pan y un tercio en forma de fracción y otras como dibujo, otras respuestas son un medio y un tercio, además de un cuarto.

En la última pregunta, se esperaba que utilizaran la adición de fracciones con distinto denominador para comprobar que es una repartición justa, pero la mayoría dijo que utilizó la división sin realizar una operación matemática para comprobar.

Tabla 11. Evidencias pregunta 1.2, tarea central, implementación 1.

Pregunta	¿Cuánto pan recibió cada una de las personas?
Evidencias	
A1  un pan y un tercio	
A2 3 ~~4~~ panes recibio cada persona sobro un pan por la mitad	

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 12. Evidencias 2.2, tarea central, implementación 1.

Pregunta	¿Podemos afirmar que la repartición entre las tres personas fue justa? ¿Qué operación realizaste para determinarlo? Explica
Evidencias	
A1 fue justa la repartición y ocupe la divición	
A2 no fue gusta la repartición porque sopro un pan por la mitad	

Fuente: Elaboración propia.

7.4 Reformulación de Diseño

En este apartado se presentan los cambios realizados al diseño de la clase[9], en base a logros y dificultades presentadas en la primera implementación. Se modifican las tareas y el plan de clases.

[9] El plan de clases reformulado y las tareas se encuentran en anexos.

7.4.1 Reformulación Tareas

Tarea pizzas

Se eliminan las instrucciones en la hoja, para que el docente desempeñe el papel de guía, además de que pueda contextualizar la situación de mejor manera a la explicada brevemente en papel.

Se mantienen las seis preguntas, pero se realizan algunas modificaciones de redacción y se agregan algunos detalles para una mejor comprensión de los estudiantes. La consulta que se da inmediatamente en esta tarea es sobre los trozos de pizza que se deben considerar para responder las dos primeras preguntas, los que aparecen en la imagen o los que había en un comienzo, antes de que se los comiera Camila.

Consideramos que esto puede deberse a un problema de redacción, como también a una dificultad que impone la imagen ante el conocimiento que se está buscando, que es relacionar las partes con el todo, como noción de fracción. Desde una mirada externa, parecen obvias las respuestas de acuerdo al objeto matemático que se está tratando, pero la idea de fracción pareció indescifrable ante las estudiantes, aun cuando se indicó cual era el contenido a tratar.

De esta forma las preguntas:

- ¿En cuántos trozos está dividida cada pizza?
- ¿Cuántos trozos hay en total?

Quedan redactadas como:

- ¿En cuántos trozos está dividida cada pizza? ***Considere la pizza completa.***
- ¿Cuántos trozos hay entre las dos pizzas completas?

En la pregunta 5, debido a la redacción, las alumnas pensaron que al considerar una pizza, debía elegir entre una de las dos, y no necesariamente el número total de trozos, por lo que se hace énfasis en ello. Para la pregunta 6, no se produce tal problema, puedes deben considerar los trozos de ambas.

Así la pregunta original era:

- ¿Cuánto representan los trozos que se comió Camila, si consideramos una pizza?

Y se cambió por:

- ¿Cuánto representan los trozos que comió Camila, si consideramos los trozos de una pizza?

Tarea central

Al igual que en la tarea anterior, se eliminan las instrucciones escritas en la hoja para flexibilizar la labor del docente como conductor de la clase. De esta forma el expositor puede manejar los tiempos, los grupos de alumnas y la labor a realizar.

También se elimina la situación que se presenta como desafío, pues ya ha sido presentada en el video y si es necesario, el docente puede entregar su visión de la tarea y hacer énfasis en algunos aspectos necesarios. La tercera parte, que consiste en ejercicios de reparto como reforzamiento de lo aprendido, quedará como material adicional en caso de que sobre tiempo para realizar el cierre. Se realizaron algunas modificaciones de escritura, específicamente en la conjugación verbal, para involucrar a los estudiantes como participantes directos de este desafío.

Las preguntas originales son:

<u>Parte I</u>

1. ¿Cómo represento la porción repartida en primer lugar?
2. ¿De qué manera puedo repartir entre las tres personas lo que me quedó de pan?
3. ¿Cómo puedo representar las partes de pan que le corresponde a cada uno?

Parte II

1. ¿Cuánto pan recibió cada una de las personas?
2. ¿Podemos afirmar que la repartición entre las tres personas fue justa? ¿Qué operación realizaste para determinarlo? Explica.

Se reformularon de la siguiente manera:

Parte I

1. Representa la porción repartida en primer lugar
2. ¿De qué manera repartes entre las tres personas lo que quedó de pan?
3. ¿Cómo representas las partes de pan que le corresponde a cada uno?

Parte II

1. ¿Cuánto pan recibió cada una de las personas?
2. ¿La repartición entre las tres personas fue justa? Explica y argumenta tu respuesta

7.4.2 Reformulación plan de clase

Respecto de la presentación

El énfasis debe ponerse en el trabajo de investigación, omitiendo referirse a que es un trabajo de tesis, la universidad a la que pertenecemos o la carrera que cursamos. La idea es cautivar la atención de los estudiantes con una propuesta innovadora, que se presenta como una misión a través de un video y contiene actividades que necesitan de su participación, esfuerzo y creatividad, valorando todos los resultados propuestos.

Se presenta el objetivo, explicando que el propósito de las actividades es descubrir el por qué se realizan las operaciones involucradas en la adición de fracciones con distinto denominador, más que obtener un resultado.

Respecto de las tareas y el tiempo

Se optó por realizar solo una de las tareas para activar conocimientos previos y así poder tener el tiempo suficiente para debatir y exponer respecto de la actividad central, sin perjudicar el cierre.

Se eligió realizar solo la actividad pizzas, por ser un contexto más cercano para los alumnos, tener una presentación más atractiva (colores, formas), tener mejores resultados de acuerdo a la primera implementación y abordar de manera clara los conceptos de parte todo y de referente de una fracción, necesarios para la actividad central.

Se limitará el tiempo de esta actividad a favor de la actividad central, tanto su presentación, explicación, discusión y desarrollo, como la revisión de las respuestas logradas por los estudiantes.

Se incluye un momento previo en la actividad central, en el que las alumnas describan como repartir dos panes (iguales) entre tres personas para luego contrastar el caso actual con la forma de repartir que usaban los egipcios. Para ello se describe como utilizaban solo fracciones unitarias para realizar el reparto de sus bienes y se conecta con la tarea central, ponerse en el lugar de los egipcios para repartir el pan.

El cierre busca relacionar lo realizado con las definiciones matemáticas para la adición de fracciones con distinto denominador. Sintetiza el por qué de igualar denominadores al realizar la adición y necesidad de utilizar las fracciones equivalentes en este proceso, además de no perder de vista el referente de la fracción, es decir, el todo al que pertenece esa parte.

Respecto del trabajo en pizarra

Para optimizar el tiempo y no perder la atención de los estudiantes, las respuestas esperadas se presentarán en diapositivas[10], para así contrastarlas con las respuestas que obtengan en sus producciones las estudiantes.

[10] Ver en anexos CD

En primer lugar se expone una diapositiva con el objetivo de la actividad y luego las instrucciones para realizar la tarea, tanto procedimentales como actitudinales, preocupándose de que las estudiantes lo entiendan como necesario para el éxito de la clase. Luego se expone la tarea pizzas, donde se pueden apreciar en color. Otra diapositiva es utilizada para revisar en pizarra las preguntas 5 y 6, que tienen una importancia para la tarea central, pues buscan mostrar la relación que hay entre la fracción y la unidad considerada, con lo que al hablar de cuanto se comió, podemos decir 3/8 de pizza o 3/16 del total (2 pizzas) según la cantidad a la que nos referimos. También se utiliza como resumen el trabajo en pizarra (según se entrega en la planificación), considerando para las respuestas posibles 3 referentes (o unidades), que son un pan, medio pan o dos panes. De esta forma se puede llegar a 3 adiciones que representan la repartición considerando los 3 referentes mencionados.

Respecto de la formalización

Se decide exponer las definiciones de los conceptos utilizados, según los textos oficiales para dar formalidad a lo trabajado, en vez de utilizar una definición matemática formal.

Respecto de las conclusiones

Se expone una diapositiva[11] para resumir el contenido estudiado, con listado de oraciones que destacan la importancia de lo trabajado en la clase a modo de conclusiones.

[11] Ver en anexos CD

7.5 Segunda Implementación de clase

Posterior al análisis de la primera implementación de la clase y la reformulación de esta, es que se implementa el nuevo diseño, en el nivel de 7° básico conformado por 37 alumnas. En este nivel ya se ha estudiado el contenido respecto a fracciones, por lo que es conveniente la aplicación de la clase. Esta vez se incorpora otro recurso tecnológico en beneficio del tiempo y orden, el contenido expuesto en un PowerPoint.

7.5.1 Percepción de docente que implementa la clase

Al igual que en la implementación de la clase 1, se describirán las percepciones personales del docente investigador que implementó la clase, las que principalmente van enfocadas a temas de gestión, motivación y contenido.

Se inicia la clase indicando el contenido a trabajar y enunciando el objetivo de ésta. Se establece el contrato pedagógico señalando la importancia de cada punto indicado en la presentación PowerPoint, las que fueron aceptadas por las alumnas. Como docente me preocupa captar la atención de todo el grupo, a pesar de la gran cantidad de estudiantes y la amplitud de la sala de clases.

Para iniciar la clase comento lo histórico-epistemológico del contenido, desde donde y hace cuánto existe la adición de fracciones con el fin de motivar a los estudiantes con el tema, sin embargo, no hubo reacción ni muestra de interés de las estudiantes al respecto. Luego al iniciar la reproducción del video, se evidencia interés y asombro por parte de las alumnas al observarlo, les llama la atención la forma de presentar la tarea.

En este momento, destaco la importancia de comprender los procesos que se realizan al sumar fracciones con distintos denominador, definiendo así el objetivo de la clase, sin embargo, las estudiantes no demuestran mayor curiosidad, por lo que se entiende que lo importante para ellas es llegar al resultado.

Durante el desarrollo de las tareas, les señalo que expresen sus respuestas en registro numérico, monitoreando el trabajo de los grupos para corroborar el desempeño de todos. En esta etapa, debo llamar la atención en reiteradas ocasiones con el fin de evitar distracciones y desorden durante el desarrollo de la clase. Hasta este momento los tiempos estipulados se cumplen. Luego procedo a revisar las respuestas en voz alta, donde evidencio buena participación ya que los diferentes grupos levantan la mano y dan sus opiniones respecto a la respuesta correcta. Se aplica el desafío central “repartiendo pan” en el que, apoyados de un registro gráfico de la situación, es necesario que apliquen lo explicado en la tarea anterior. Escribo las respuestas mencionadas por las alumnas en pizarra, para luego validarlas en la corrección, sin embargo, me limito a escribir el resultado final, sin realizar una discusión abierta respecto a las diferentes estrategias utilizadas para obtener la respuesta.

Al contrastar las diferentes respuestas en pizarra con la corrección presentada en PowerPoint, se evidencia cierta parte del grupo curso que sí consideró el referente y pudo responder de manera acertada, mientras que otra parte del curso, siguió omitiendo este elemento principal, que permite comprender el proceso de igualar denominadores para poder efectuar una adición de fracciones. Los grupos corroboraron sus respuestas y corrigieron los errores.

En el cierre de la clase, la atención por parte de las estudiantes se dificulta por lo que tuve que insistir en la importancia de las conclusiones. En este momento la atención disminuye debido a la distracción del próximo recreo. Es por esto que solicito a las estudiantes mantener silencio para poder definir formalmente los términos matemáticos fundamentales empleados en la resolución de las tareas, llevando a cabo el proceso de institucionalización. Enfatizo la importancia de lo aprendido, sin embargo, ya las alumnas solo escuchan, esperando que termine para poder salir al recreo.

Sin embargo, al finalizar las conclusiones se percibe la sensación que las tareas desarrolladas y validadas en la presentación PowerPoint generaron una nueva perspectiva respecto a la adición de fracciones y su significado en las alumnas, más allá del proceso por el cual lo resuelvan, pues ya notan que no solo interesa el resultado en un ejercicio de matemática, sino también la comprensión de cómo se obtuvo este.

7.5.2 Percepción de Docente Investigador observador de la clase

Se realiza correcta presentación, poniendo énfasis en que las actividades servirán tanto para la investigación que se realiza como para que las alumnas logren entender desde una mirada diferente un contenido ya estudiado.

Se entrega con palabras claras y sencillas el propósito de la clase, esto es entender por qué "se hace lo se hace" al realizar un ejercicio matemático, y como se aplican situaciones matemática a la vida real, captando el interés y atención de las alumnas. También se indica la existencia de las matemáticas previas a la enseñanza en los colegios o en los libros, explicando que los conocimientos matemáticos surgen de situaciones de la vida real o cotidiana. A continuación se presenta el objetivo y las instrucciones para un correcto desempeño de la clase, destacando el respeto, la atención, participación y la optimización del tiempo. Junto con ello, la docente está preocupándose continuamente por el orden y silencio.

Tarea pizzas

Se explica detalladamente cada actividad y se utilizan las devoluciones para estimular y facilitar el desarrollo de las producciones estudiantiles. El énfasis está en la comparación de resultados y la comprensión de lo formalizado en las diapositivas preparadas por la docente. Se destaca el uso que deben hacer de estos conocimientos para la actividad central, guiando correctamente la atención al referente utilizado.

Tarea central

Luego de la continuación del video, la docente cuenta como resolvían los problemas de reparto los egipcios en la antigüedad, quienes no tenían la comprensión ni herramientas matemática de hoy, por lo que utilizaban fracciones unitarias, explicándolo al curso que son las que tienen denominador uno.

En esta parte se pide a las alumnas que den sus estrategias para repartir, como lo harían ellas, para luego ponerse en el lugar de los egipcios. Todas dividen ambos panes en tres partes, pero surgen diferencias al no considerar el referente, una alumna responde que es un tercio para cada uno o dos sextos que es lo mismo, mientras otra alumna señala que es un tercio por dos.

Sin señalar cuál es la respuesta correcta, se entregan la actividad central, para luego detallar el “desafío” entregado, el cual debe realizarse poniéndose en el lugar de los egipcios. Se explica que debe considerarse la primera división que trae marcada cada pan, de tal forma que se obtienen cuatro trozos, se reparten tres y se debe repartir el trozo restante.

Luego del tiempo de desarrollo considerado para una primera parte, la docente reúne las respuestas señaladas por las alumnas, pero para cada pregunta se entrega solo la respuesta numérica, desapareciendo la idea de referente que se explicó en la actividad anterior. Estas respuestas se contrastan con la formalización detallada para cada una de las respuestas posibles según el referente considerado.

Una de las dudas que surge de la segunda parte es si las preguntas deben contestarse de acuerdo a lo realizado por las alumnas o lo expuesto por la docente, lo que podría condicionar las respuestas entregadas.

Se realiza un cierre de acuerdo a la revisión de la última parte, en la cual debían sumar los trozos repartidos. La docente recrea el proceso de adición de fracciones con distinto denominador en dialogo con las alumnas, preguntando ¿qué debe hacerse para sumar fracciones con distinto denominador? (igualar denominadores) ¿Cómo se llama la operación que se usa para igual denominadores? (amplificación) ¿por qué es necesario igualar denominadores? (para poder sumar) ¿pero qué significa? Concluyendo que para sumar fracciones, estas deben representar el mismo tamaño de trozos (ejemplo pizzas), reafirmando con “es necesario que la unidad esté dividida en la misma cantidad de porciones”, con cual se logra cumplir con el objetivo entregado en un principio.

7.6 Contraste de implementación y la planificación de clase

A continuación se presenta una tabla que resume logros y dificultades, según cada momento de la clase que permite contrastar lo establecido en el plan de clases con lo llevado a cabo en la implementación de este.

Tabla 13. Contraste planificación-implementación.

Momento	Logros	Dificultades
Inicio	• Se establece el contrato pedagógico mediante la exposición en PowerPoint de un listado de instrucciones y actitudes a considerar. • Se plantea y enfatiza en el objetivo de la clase. • Las respuestas a las tareas de activación de conocimientos previos coinciden con las posibles respuestas del plan de clases • Se cumple el tiempo establecido.	• Al conocer el objetivo, las estudiantes muestran actitud desanimada respecto al contenido a trabajar, fracciones. • Se introduce el concepto desde su epistemología, narrando las situaciones de reparto que resolvían los egipcios a grandes rasgos, pues generaba más distracción que motivación. • Las estudiantes no dominan conceptos de amplificación y simplificación. • En momentos necesarios, no se recurre a las preguntas de devolución.
Desarrollo	• Se presenta el problema central mediante la reproducción de un video a modo de desafío • Se analizan y validan las respuestas mediante el contraste con la corrección expuesta enfocado al referente o unidad considerada. • Tanto las respuestas erróneas como las acertadas estaban consideradas en el plan de clases	• Surgen dudas respecto a la comprensión en general de la tarea central. • Las estudiantes no reconocen las fracciones equivalentes • No se aplican las preguntas de devolución indicadas para las respuestas erróneas establecidas en la planificación. • La revisión de la tarea excede el tiempo predeterminado
Cierre	• Se muestra una diapositiva con las definiciones formales de los conceptos matemáticos principales trabajados durante la clase. • Se presenta y expone la importancia del trabajado realizado a modo de conclusiones • El tiempo alcanza justo para finalizar el cierre de la clase.	• Se muestra y se menciona rápidamente los conceptos de la formalización, restándole importancia. • Se utiliza menos tiempo del considerado para la formalización • Las conclusiones son expuestas por el docente y no surgen de las estudiantes. • No se consideran ejercicios de cierre

Fuente: Elaboración propia.

7.7 Análisis de las producciones estudiantiles

En esta sección se analizarán las producciones de las 37 estudiantes de séptimo básico que participaron de la clase, a través de la formulación de categorías. Para cada pregunta de cada tarea, presentadas en el capítulo análisis de instrucción, se formulan categorías a partir de las estrategias desarrolladas por los estudiantes para dar respuesta al problema, analizando además los aciertos y errores implicados, cuando corresponda.

Tarea 1

Esta primera tarea se pretende activar conocimientos previos respecto a fracciones, como las partes que conforman un entero y el entero o unidad considerado como referente para cada situación.

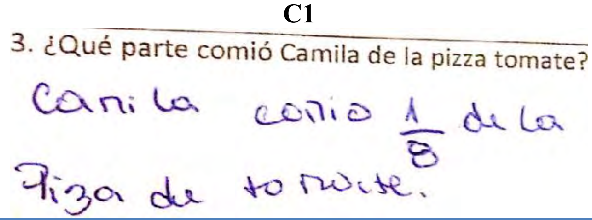
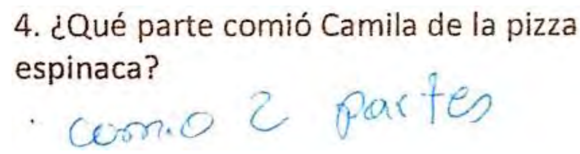
Las respuestas a estas dos primeras preguntas resultan casi inmediatas, pues basta con mirar la ilustración expuesta en la guía de trabajo. La totalidad de las alumnas responde con certeza.

Tabla 14. Evidencias preguntas 1 y 2, tarea 1, implementación 2.

Preguntas	1¿En cuántos trozos está dividida cada pizza? Considere la pizza completa. 2¿Cuántos trozos hay entre las dos pizzas completas?	
Respuestas	**Aciertos** **Categoría 1:** La alumna reconoce las particiones de la unidad.(37 alumnas)	**Errores** Sin categorías
Evidencias		
	C1 la de tomate en 8trozos. la de espinaca en 8trozos	**C1** entre los dos pizas hay 16 trozos.

Fuente: Elaboración propia.

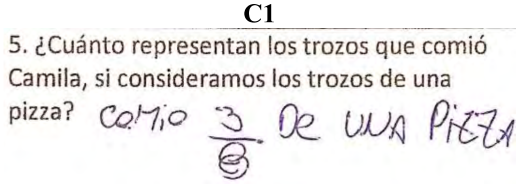
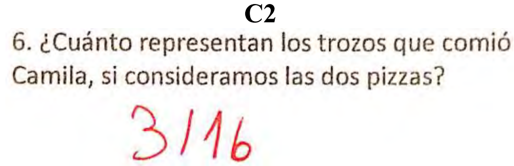
Tabla 15. Evidencias preguntas 3 y 4, tarea 1, implementación 2.

Preguntas	3¿Qué parte comió Camila de la pizza tomate? 4¿Qué parte comió Camila de la pizza espinaca?	
Respuestas	**Aciertos** **Categoría 1:** La alumna expresa las partes de un todo como fracción. (33 alumnas)	**Errores** **Categoría 2:** La alumna omite la unidad.
Evidencias		
	C1	**C2**
		

Fuente: Elaboración propia.

Considerando las respuestas de las preguntas 3 y 4, la mayoría (33 de 34) de las alumnas responde correctamente y de forma numérica. Mientras que solo una estudiante omite la unidad, en este caso, la pizza.

Tabla 16. Evidencias preguntas 5 y 6, tarea 1, implementación 2.

Preguntas	5¿Cuánto representan los trozos que comió Camila, si consideramos los trozos de una pizza? 6¿Cuánto representan los trozos que comió Camila, si consideramos las dos pizzas?	
Respuestas	**Aciertos** **Categoría 1:** en la pregunta 5, la alumna expresa la cantidad indicada como fracción (37 alumnas) **Categoría 2:** en la pregunta 6 la alumna omite la unidad o referente en su respuesta de manera escrita(37 alumnas)	**Errores** Sin categorías
Evidencia		
	C1	**C2**
		

Fuente: Elaboración propia.

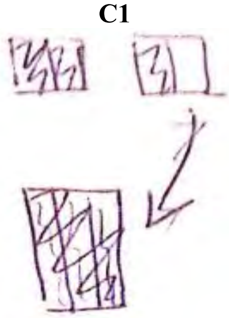
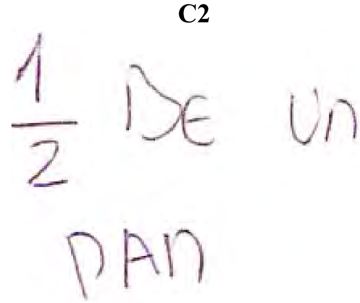
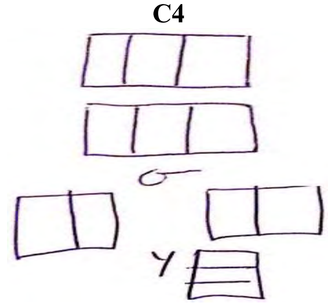
En relación con las preguntas 5 y 6, podemos ver que si bien no se presentaron errores, hay estudiantes que entregan una respuesta más completa identificando el referente considerado, y otras que solo entregan la respuesta numérica, lo que no deja entrever si tiene en cuenta o no el referente.

Se evidencia entonces, que no hay dificultades para identificar las partes que conforman una unidad, cuando el referente viene indicado en la pregunta. Por esto es necesaria la corrección de esta tarea enfatizando en la diferencia que existe entre las pregunta 5 y 6 dependiendo si se consideran una o dos pizzas.

Tarea central

Esta tarea pretende que las estudiantes comprendan el proceso de adición de fracciones con distinto denominador, a partir de una situación de reparto. A continuación la categorización de las respuestas expuesta mediante una tabla.

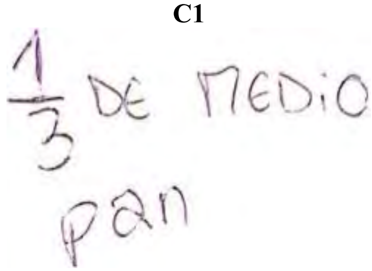
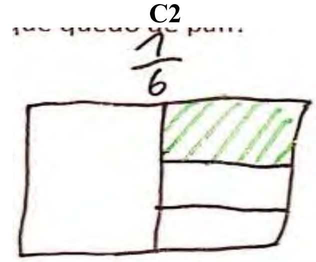
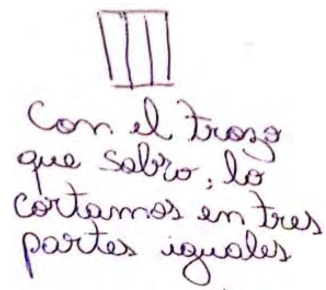
Tabla 17. Evidencias pregunta 1.1, tarea central, implementación 2.

Pregunta	Representa la porción repartida en primer lugar	
Respuestas	**Aciertos** **Categoría 1:** La alumna expresa gráficamente su respuesta.(8 alumnas) **Categoría 2:** La alumna responde en registro numérico, indicando el referente considerado.(7alumnas)	**Errores** **Categoría 3:** La alumna no contesta.(11 alumnas) **Categoría 4:** La alumna entrega de manera gráfica una respuesta sin sentido(11 alumnas)
Evidencias		
C1 	**C2** 	**C4** 

Fuente: Elaboración propia.

Dentro de las respuestas, se observan 7 estudiantes que consideraron el referente al momento de dar su respuesta, es decir, tomaron en cuenta los conocimientos activados en la tarea 1, permitiéndoles responder acertadamente, lo que no ocurrió antes de la validación de la actividad repartiendo pizza.

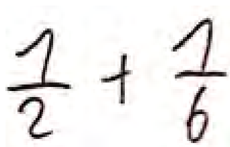
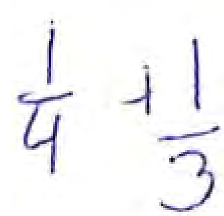
Tabla 18. Evidencias pregunta 2.1, tarea central, implementación 2.

Pregunta	Representa la porción repartida en primer lugar	
Respuestas	**<u>Aciertos</u>** **Categoría 1:** La alumna expresa su respuesta indicando el referente.(4 alumnas) **Categoría 2:** La alumna expresa su respuesta(1/6) numéricamente y/o gráficamente.(12 alumnas)	**<u>Errores</u>** **Categoría 3:** La alumna expresa verbalmente o gráficamente su respuesta(1/3)(13alumnas) **Categoría 4:** la alumna expresa una respuesta sin sentido o no responde.(8 alumnas)
Evidencias		
C1 	**C2** 	**C4** 

Fuente: Elaboración propia.

Se infiere que mientras más específicas se van haciendo las preguntas, son menos las estudiantes que siguen considerando el referente y aumentan las respuestas erróneas.

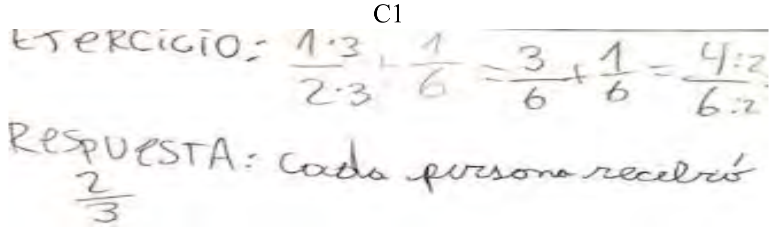
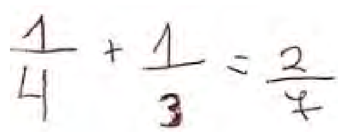
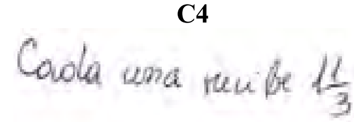
Tabla 19. Evidencias pregunta 3.1, tarea central, implementación 2.

Pregunta	¿Cómo representar las partes de pan que le corresponde a cada uno?	
Respuestas	**<u>Aciertos</u>** **Categoría 1:** La alumna expresa su respuesta numéricamente como una adición de fracciones.(9 alumnas) **Categoría 2:** La alumna expresa su respuesta en otro registro, verbal, gráfico o como número mixto. (10 alumnas)	**<u>Errores</u>** **Categoría 3:** La alumna no considera el referente(1/4+1/3,1/2+1/3)(8alumnas) **Categoría 4:** la alumna expresa una respuesta sin sentido o no responde.(10 alumnas)
Evidencias		
C1 	**C2** 	**C3** 

Fuente: Elaboración propia.

Aquí se concluye la primera parte, en la que se refleja la capacidad de las estudiantes de expresar la situación en registro numérico como una adición de fracciones con distinto denominador.

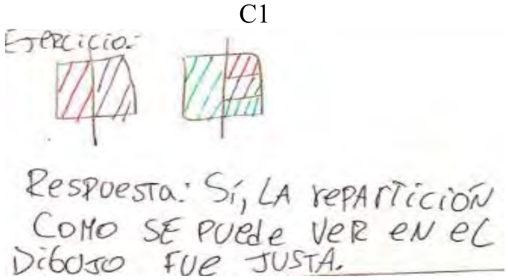
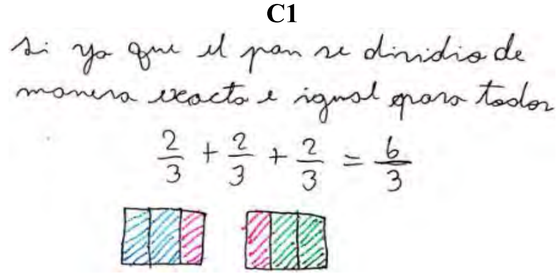
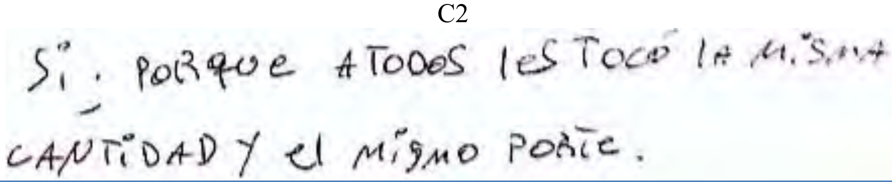
Tabla 20. Evidencias pregunta 1.2, tarea central, implementación 2.

Pregunta	¿Cuánto pan recibió cada una de las personas?	
Respuestas	**<u>Aciertos</u>** **Categoría 1:** La alumna llega al resultado esperado, efectuando bien la adición de fracciones (2 alumnas)	**<u>Errores</u>** **Categoría 2:** La alumna expresa su respuesta sin considerar el referente(15 alumnas) **Categoría 3:** la alumna plantea una adición sin considerar el referente y demuestra no saber realizarla.(2 alumnas) **Categoría 4**: la alumna señala 1 entero1/3 como respuesta.(6alumnas) **Categoría 5:** la alumna indica una respuesta sin sentido o no responde.(12alumnas)
Evidencias		
C1 		
C3 	**C4** 	

Fuente: Elaboración propia.

Esta pregunta, a diferencia de la anterior, pretende que realicen la adición, logrando una respuesta de la porción de pan que recibe cada una sumando ambos trozos. Este resultado debe coincidir (considerando el referente adecuado) con el obtenido en un primer momento, cuando se les pide que utilicen sus propias estrategias, pero no logran relacionarlo, alejándose cada vez más de la “mercancía” o elemento a repartir. Se evidencia que las respuestas de la categoría 1, a diferencia del resto, son argumentadas con seguridad, debido al dominio del contenido de suma de fracciones.

Tabla 21. Evidencias pregunta 2.2, tarea central, implementación 2.

Pregunta	¿La repartición entre las tres personas fue justa? Explica y argumenta tu respuesta	
Respuestas	**Aciertos** **Categoría 1:** La alumna señala que sí fue justa, argumentando ya sea con gráfico o adición de fracciones. (2 alumnas) **Categoría 2:** la alumna señala que sí fue justa, argumentando en lenguaje natural.(15 alumnas)	**Errores** **Categoría 3:** La alumna señala que sí fue justa, sin embargo, no es capaz de argumentar.(10 alumnas) **Categoría 4:** la alumna indica una respuesta sin sentido o no responde.(10alumnas)
Evidencias		
	C1 	**C1** 
	C2 	

Fuente: Elaboración propia.

Comparando los análisis realizados de ambas implementaciones, podemos ver que la aplicación del plan de clases reformulado resulta más eficaz, pues las dificultades que se presentan se tornan a la gestión de clase, que depende de la labor de cada docente, más que en el desarrollo de esta. Se modifican las tareas, lográndose una optimización del tiempo y clarificando las dificultades relacionadas a la comprensión de enunciados. Se evidencia en las producciones estudiantiles el cumplimiento de los objetivos específicos de cada tarea, que conllevan al logro del objetivo general de la clase.

Finalmente, con todo este proceso, se concluye que siempre un plan de clase se puede seguir perfeccionando, teniendo presente el contexto en el que se vaya a implementar formulando una perspectiva general de lo que se maneja por parte de los estudiantes respecto al contenido en cierto nivel. En este estudio, esa información lo entrega la aplicación y posterior análisis del cuestionario exploratorio, para el que no fueron necesarios más de 10 minutos para su desarrollo.

CAPÍTULO 8
CONCLUSIONES Y REFLEXIONES

Realizar este estudio, en base al Análisis Didáctico, nos permitió integrar los conocimientos adquiridos en nuestra formación con los lineamientos que propone el currículum escolar, acortando esa “distancia” percibida al comienzo. Este marco teórico logra articular lo disciplinar, lo pedagógico y lo didáctico, respecto a una problemática reiterada de un contenido matemático, logrando, luego de efectuar los análisis respectivos, entregar una propuesta concreta, sustentada desde el análisis histórico epistemológico, como aporte al sistema escolar.

Al someter la operación de adición de fracciones con distinto denominador al Análisis Didáctico, conseguimos ver distintas aristas de este contenido, que presenta varias dificultades para su aprendizaje, como sus orígenes y evolución, su definición formal y escolar, como vive dentro del currículum escolar, las oportunidades y limitaciones cognitivas que presenta para los estudiantes; lo anterior interactuando en la confección de tareas y diseño de clases, resultando una propuesta potente, evidenciado en su implementación y abierta a su mejoramiento continuo.

De esta forma, el Análisis Didáctico contribuye al desarrollo de la competencia de planificación en el profesor, para lograr una transposición adecuada desde el saber sabio hacia el saber escolar.

8.1 Respecto a los análisis

En el desarrollo del análisis conceptual utilizamos los conocimientos obtenidos del estudio epistemológico, el cual fue, más que una revisión histórica, una fuente de sustento para la creación de tareas investigativas. De esta forma, el proceder egipcio pasó a sustentar la creación de la tarea central de aprendizaje contextualizada, que involucra el empleo de conocimientos (fracciones unitarias), procedimientos (descomponer en sumandos) y actitudes (ponerse en el lugar de los egipcios) por parte de los estudiantes.

Así quienes se enfrenten a esta tarea diseñada desde la epistemología podrán contrastar el método de repartición egipcio con los actuales, otorgándole valor e importancia a las herramientas matemáticas que disponen para resolver situaciones prácticas.

Considerando que nuestra formación se centra en lo matemático y gracias al desarrollo del análisis de contenido pudimos establecer una conexión entre lo formal de nuestros saberes con lo que constituyen los saberes escolares. Esto nos faculta como docentes para realizar una eficaz transposición del contenido que enseñemos, pues nos dota de un dominio minucioso respecto a la estructura matemática del concepto de fracción, su operatoria de adición y la multiplicidad de significados que se le atribuyen.

Luego de desarrollar el análisis cognitivo, vimos la importancia de conocer el currículum nacional, no solo de enseñanza media y así conocer cómo evolucionan los contenidos. Como profesores en formación nos brinda herramientas potentes como las expectativas, limitaciones y oportunidades de aprendizaje capacitándonos para abordar la confección de una planificación en torno a la operatoria aditiva entre fracciones. Nos facilita entregar al estudiante oportunidades de aprendizaje mediante la adecuada selección de tareas.

Entendemos la estrecha relación del análisis cognitivo con el análisis de instrucción, ya que teniendo claro las expectativas, limitaciones y oportunidades de aprendizaje, podemos realizar una óptima selección o diseño de tareas, cada una con su objetivo, que orienta también a los criterios de evaluación del aprendizaje. Este análisis nos ayuda a sacar provecho de las dificultades y errores que surgen en el aula, ya que son de utilidad para cuestionarnos y generar posibles intervenciones que los aborden.

En el análisis de actuación se examinan los resultados de la implementación del plan de clase diseñado como también el desempeño sobre la gestión del aula. En cuanto a los resultados se destacan las dificultades más significativas respecto al objeto matemático que entorpecieron el desarrollo y logro de objetivos de las tareas planteadas.

8.2 Reflexiones

Reconocemos en el desarrollo de este trabajo, las debilidades que surgieron, la necesidad de conocer el currículum actual vigente es primordial para la planificación y desarrollo de cualquier instrumento escolar, el poco dominio de grupo al desarrollar la implementación, la escasa dotación de herramientas de investigación para formalizar nuestro trabajo, entre otras, son aspectos a mejorar en la formación, desde nuestra experiencia como futuros docentes de la Universidad de Valparaíso.

En primera instancia, surge una dificultad respecto a la comprensión del significado de fracción debido a la pluralidad de estos que posee. Principalmente en el desarrollo de la tarea central de reparto de pan importa la errada interpretación que tienen los estudiantes respecto a la relación parte-todo que representa una fracción. A raíz de esta dificultad, emergen otras respecto al proceso aditivo entre fracciones que se evidencia cuando el estudiante olvida o modifica algún paso del algoritmo: aditivo, comparativo o equivalencia. Ante la adquisición de un contenido nuevo, las dificultades deben ser atendidas con prontitud, ya que de lo contrario tiene un efecto de "bola de nieve", que facilita una construcción errónea del conocimiento matemático.

Lo que se consigue al cumplir el objetivo de la aplicación de la clase es que las estudiantes comprendan que las matemáticas van más allá de ser una asignatura impuesta en el colegio o que su estudio sirve exclusivamente para aprobar una evaluación, sino que surgen y están presentes en situaciones de la vida real y cotidiana a las que se enfrentan y resuelven, muchas veces sin darse cuenta, mediante la utilización de fracciones y su operatoria, logrando que tomen sentido de esto.

Otros aspectos que nos interesa mencionar a modo de reflexiones respecto a la experiencia en la implementación del plan de clase son:

La gestión de aula: nos llama la atención, quizás por nuestra poca experiencia laboral, la influencia de la gestión de aula en el proceso de enseñanza y aprendizaje que realiza el profesor, pues resulta complejo estar atentos a todos los aspectos que se generan en el aula de clases. Esto se evidencia luego de la primera implementación, en el que la gestión fue débil y dificultó el desarrollo de la clase, sin embargo, para la segunda implementación, nos ocupamos de esta debilidad anticipándonos a ciertas situaciones que podían surgir y cómo actuar ante ellas. En virtud del logro de objetivos, organizamos una eficiente gestión de aula que consideró aspectos como la disciplina, la integración de todas las alumnas, la organización de diferentes tareas y el manejo del tiempo. Nos deja satisfechos haber logrado un correcto cierre, con la síntesis de los conocimientos entregados y esperamos que otros aspectos se puedan fortalecer en futuras aplicaciones de esta planificación didáctica. Se espera que esta experiencia se pueda replicar y mejorar para ser considerada en el aula y, por qué no, ser incluida en los textos de estudiantiles, de acuerdo al nivel de los contenidos de matemática.

La planificación de clase: A través de la realización de esta investigación, y en base a las evidencias presentadas en los antecedentes, consideramos que la planificación es una competencia profesional que debe poseer un profesor de matemática, pues le permite y capacita para identificar, organizar, seleccionar y priorizar las tareas a desarrollar para la enseñanza de un contenido en un plan de clase que considere el contexto y las expectativas de aprendizaje.

Romper la rutina: Recalcamos lo provechoso que resultó romper la rutina de una clase tradicional en cuanto a la actitud de las estudiantes, por lo que sugerimos en base a esta experiencia la alternancia de la enseñanza clásica, con su trabajo en pizarra y el desarrollo de tareas repetitivas y tediosas, con la enseñanza propuesta en base al análisis didáctico compuesta por tareas concretas y contextualizadas pensando en los intereses de los estudiantes despertando interés y motivación en estos respecto de la utilidad de la matemática.

Finalmente debemos mencionar que el desarrollo de este trabajo nos permite conocer y adoptar un nuevo rol como profesor investigador de una problemática, analizarla bajo fundamentos teóricos y empíricos, dándonos la posibilidad de participar de otro campo de desempeño para enriquecer nuestra labor docente.

Bibliografía

Aburto, L., & Doniez, R. (1987). Aritmética II. En L. Aburto, & R. Doniez, *Aritmética II.* Valparaíso: Universidad Católica de Valparaíso.

Castaño, N. (2014). *Dificultades en la enseñanza con números racionales en la educación secundaria.* Tesis maestría en enseñanza de las ciencias , Universidad Autónoma de Manizales.

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado.* Buenos Aires: Aique.

Corrales, M. (2013). *Análisis didáctico de una propuesta instruccional en torno a los números racionales en el grado séptimo en la institución educativa San Vicente.* Proyecto Para Optar al Título de Magíster en Educación Énfasis en Educación Matemática, Instituto de educación y pedagogía, Santiago de cali.

Fernández, L. (2006). ¿Cómo analizar datos cualitativos? *Butlletí LaRecerca*(7), 1-13.

Flores, R. (2010). *Significados asociados a la noción de fracción en la escuela secundaria.* Tesis que para obtener el grado de Maestría en Ciencias en Matemática Educativa, Instituto Politécnico Nacional, México, D. F.

Flores, R., & Martínez, G. (2009). Una construcción de significado de la operatividad de los números fraccionarios. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (págs. 509-516). México DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Gómez, P. (2002). Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas. *EMA*, 251-293.

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria.* Granada, España: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Hartcourt, Inc. (2016). *Matemáticas 5º básico. Texto del estudiante.* Santiago: Galileo libros ltda.

Hartcourt, Inc. (2016). *Matemáticas 6º básico. Texto del estudiante .* Santiago: Galileo libros ltda.

Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, P. (2010). *Metodología de la investigación* (5ta ed.). México D.F.: McGraw-Hill.

Iessi, V. (2007). *Una mirada a la epistemología del profesor en la adición de fracciones.* Tesis para optar al grado de magíster en enseñanza de las ciencias con mención en didáctica de la matemática, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Valparaíso.

Isoda, M., Arcavi, A., & Mena, A. (2007). *El Estudio de Clases Japonés en Matemáticas. Su importancia para el mejoramiento de los aprendizajes en el escenario global.* Valparaíso: Ediciones Universitarias de Valparaíso.

Jiménez, D. (2013). Aritmética MLP 110. En D. Jiménez, *Aritmética MLP 110* (págs. 115-122). Valparaíso.

León, G. (2011). *Unidad Didáctica: Fracciones.* Trabajo Fin de Master Universitario de Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria,Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas, Universidad de Granada, Didáctica de la Matemática, Granada, España.

López, J. (2012). *Propuesta didáctica para la enseñanza del concepto de fracción en el grado séptimo considerando la relación parte-todo .* Tesis para optar al título de Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Nacional de Colombia, Manizales, Colombia.

Lupiáñez, L. (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formacion inicial de profesores de matemáticas de secundaria.* Tesis Doctoral, Universidad de Granada, Didáctica de la matemática, Granada.

Matamala, R. (2005). *Las estrategias metodológicas utilizadas por el profesor de matemática en la enseñanza media y su relación con el desarrollo de habilidades intelectuales de orden superior en sus alumnos y alumnas.* Tesis para optar al grado de magíster en educación con mención en currículo y comunidad educativa, Universidad de Chile, Facultad de ciencias sociales, Santiago.

Mateos, J. (2010). *Historia de la matemática: Fracciones egipcias.* Obtenido de Slideshare: http://es.slideshare.net/matesymas/fracciones-egipcias-18-estalmat

Matute, K. (2010). *Concepciones matemáticas en los estudiantes de septimo grado de la escuela nomrmal mixta "Pedro Nufio" acerca de las fracciones y sus diferenes interpretaciones.* Tesis para obtener el grado de master en matemática educativa , Tegucigalpa M.D.C.

Maza, C. (2002). *Matemáticas en la Antigüedad.* Obtenido de http://personal.us.es/cmaza/egipto/fracciones.htm

Mineduc. (2011). Matemática, Programa de estudio, primer año medio. En MINEDUC, *Programa de estudio primer año medio* (págs. 16-18). Santiago: Mineduc.

Mineduc. (2016). *Texto del estudiante Matemática Primero medio.* Santiago: SM.

Peña, P. (2011). *Resignificación del algoritmo para operar aditivamente con fracciones en un contexto escolar.* Tesis para optar al grado de Maestra en Ciencias en Matemática, Instituto Politécnico Nacional, México, D.F.

Peralta, T. (1994). En torno a la suma de fracciones. *Educación, 18*(1), 113-123. Obtenido de http://dx.doi.org/10.15517/revedu.v18i1.12499.

Pulpón, Á. (2008). *Historia del Papiro de Rhind y similares.* Universidad de Castilla La Mancha. Obtenido de http://matematicas.uclm.es/ita-cr/web_matematicas/trabajos/165/el_papiro_de_Rhind.pdf

Quintana, E. (2008). Las Grabaciones en Video de Secuencias Didácticas como instrumento de observación, análisis y reflexión para la evaluación y autoevaluación de la práctica docente. *La evaluación en el aprendizaje y la enseñanza del español como lengua extranjera/segunda lengua: XVIII Congreso*

Internacional de la Asociación para la Enseñanza del Español como lengua Extranjera (ASELE), (págs. 611-617).

Rico, L. (2001). *Análisis conceptual e investigación en didáctica de la matemática. Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática.* Universidad de Granada, Granada.

Rico, L. (2013). El método del Análisis Didáctico. *Revista iberoamericana de educación matemática*(33), 11-27.

Rico, L., Marín, A., Lupiáñez, J., & Gómez, P. (2008). Planificación de las matemáticas escolares en secundaria. El caso de los Números Naturales. *SUMA, 58*, 7-23.

Ríos, Y. (2007). Una ingeniería didáctica aplicada sobre fracciones. *Omnia, 13*(2), 120-157.

Rodríguez, G., Gil, J., & García, E. (1996). *Metodología de la Investigación Cualitativa.* Granada, España: Ediciones Aljibe.

Rubin, H., & Rubin, I. (1995). *Qualitative interviewing. The art of hearing data.* Thousand Oaks, California: Sage Publicatios.

Varettoni, M., & Elichiribehety, I. (2012). *Un estudio sobre registros de representación que emplean docentes de la E.P. en la resolución y anticipación de un problema.* Trabajo presentado en III Jornadas de Enseñanza e Investigación Educativa en el campo de las Ciencias Exactas y Naturales, 26, 27 y 28 de septiembre de 2012, La Plata, Argentina. Disponible en: http://www.memoria.fahce.unlp.edu.ar/trab_eventos/ev.3720/ev.

Anexos

Familias de fracciones en la descomposición de fracciones unitarias en el papiro de Rhind

5	3,15	45	30,90	85	51,255
7	4,28	47	30,141,470	87	58,174
9	6,18	49	28,196	89	60,356,534,890
11	6,66	51	34,102	91	70,130
13	8,52,104	53	30,318,795	93	62,186
15	10,30	55	30,330	95	60,380,570
17	12,51,68	57	38,114	97	56,679,776
19	12,76,114	59	36,236,531	99	66,198
21	14,42	61	40,244,488,610	101	101,202,303,606
23	12,276	63	42,126		
25	15,75	65	39,195		
27	18,54	67	40,335,536		
29	24,58,174,232	69	46,138		
31	20,124,155	71	40,568,710		
33	22,66	73	60,219,292,365		
35	30,42	75	50,150		
37	24,111,296	77	44,308		
39	26,78	79	60,237,316,790		
41	24,246,328	81	54,162		
43	42,86,129,301	83	60,332,415,498		

Papiro Rhind
Tabla 2/n de Ahmes

- Todas las fracciones de la forma **2/3k** están expresadas como suma de fracciones unitarias de la forma **1/2k + 1/6k**.
- Para las fracciones de la forma **2/5k** la descomposición es **1/3k + 1/5k** excepto la correspondiente a 2/95 (k= 19).

Fuente: Mateos, J. (2010). Historia de la matemática: Fracciones egipcias (Imagen). Obtenido de http://es.slideshare.net/matesymas/fracciones-egipcias-18-estalmat

Generadores con dos, tres y cuatro sumandos

Generador	Línea	Suma
(1 , 1)	7	1/3 + 1/3 = 2/3
	5	1/6 + 1/6 = 1/3
	4	1/10 + 1/10 = 1/5
(1 , 2)	Rhind	1/3 + 1/6 = 1/2
	Rhind	1/6 + 1/12 = 1/4
	11	1/9 + 1/18 = 1/6
	13	1/12 + 1/24 = 1/8
	24	1/15 + 1/30 = 1/10
	20	1/18 + 1/36 = 1/12
	21	1/21 + 1/42 = 1/14
	19	1/24 + 1/48 = 1/16
	23	1/30 + 1/60 = 1/20
	22	1/45 + 1/90 = 1/30
	25	1/48 + 1/96 = 1/32
	26	1/96 + 1/192 = 1/64
(1 , 3)	3	1/4 + 1/12 = 1/3
	Rhind	1/8 + 1/24 = 1/6
	Rhind	1/12 + 1/36 = 1/9
(1 , 4)	2	1/5 + 1/20 = 1/4
	1	1/10 + 1/40 = 1/8
(1 , 6)	Rhind	1/7 + 1/42 = 1/6
	Rhind	1/14 + 1/84 = 1/12
(2 , 3)	Rhind	1/10 + 1/15 = 1/6
(1 , 1 , 1)	6	1/6 + 1/6 + 1/6 = 1/2
(1 , 2 , 4)	12	1/7 + 1/14 + 1/28 = 1/4
	Rhind	1/14 + 1/28 + 1/56 = 1/8
(1 , 2 , 6)	10	1/25 + 1/50 + 1/150 = 1/15
(2 , 3 , 6)	Rhind	1/6 + 1/9 + 1/18 = 1/3
	14	1/14 + 1/21 + 1/42 = 1/7
	15	1/18 + 1/27 + 1/54 = 1/9
	16	1/22 + 1/33 + 1/66 = 1/11
	17	¿ 1/26 + 1/39 + 1/78 = 1/13 ?
	18	1/30 + 1/45 + 1/90 = 1/15
(3 , 5 , 15 , 40)	8	1/15 + 1/25 + 1/75 + 1/200 = 1/8
	9	1/30 + 1/50 + 1/150 + 1/400 = 1/16
	17	¿ 1/28 + 1/49 + 1/98 + 1/196 = 1/14 ?

Fuente: Maza, C. (2002). Matemáticas en la Antigüedad (Imagen). Obtenido de [*http://personal.us.es/cmaza/egipto/fracciones3.htm*](http://personal.us.es/cmaza/egipto/fracciones3.htm)

Objetivos de aprendizaje e indicadores de evaluación para 5º año básico

	Objetivos de aprendizaje	Indicadores de evaluación sugeridos
OA07	Demostrar que comprende las fracciones propias:	
	☐ Representándolas de manera concreta, pictórica y simbólica.	☑ Representan una fracción propia en cuadrículas, en superficies de círculos, en ángulos en círculos. ☑ Explican que una fracción admite distintas representaciones. ☑ Reconocen la unidad en superficies de círculos, en cuadrículas, en ángulos en el círculo y en la recta numérica, y que una fracción representa una parte de esa unidad.
	☐ Creando grupos de fracciones equivalentes –simplificando y amplificando– de manera concreta, pictórica, simbólica, de forma manual y/o con software educativo.	☑ Crean un conjunto de fracciones equivalentes y explican por qué una fracción tiene muchas fracciones equivalentes a ella, usando materiales concretos.
	☐ Comparando fracciones propias con igual y distinto denominador de manera concreta, pictórica y simbólica.	☑ Comparan fracciones propias en la recta numérica de igual y distinto denominador.
OA08	Demostrar que comprende las fracciones impropias de uso común de denominadores 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12 y los números mixtos asociados:	
	☐ Usando material concreto y pictórico para representarlas, de manera manual y/o usando software educativo.	☑ Demuestran de manera pictórica que dos fracciones equivalentes se han amplificado o simplificado.
	☐ Identificando y determinando equivalencias entre fracciones impropias y números mixtos.	☑ Explican por qué las fracciones equivalentes representan la misma cantidad. ☑ Formulan una regla para desarrollar un conjunto de fracciones equivalentes.
	☐ Representando estas fracciones y estos números mixtos en la recta numérica.	☑ Emplean simplificaciones o amplificaciones para convertir fracciones de distinto denominador en fracciones equivalentes de igual denominador.
OA09	Resolver adiciones y sustracciones con fracciones propias con denominadores menores o iguales a 12:	
	☐ De manera pictórica y simbólica	☑ Transforman fracciones de distinto denominador en fracciones equivalentes de igual denominador en sumas y restas, de manera pictórica. ☑ Transforman fracciones de distinto denominador en fracciones equivalentes de igual denominador en sumas o restas de ellas, amplificando o simplificando
	☐ Amplificando o simplificando	☑ Determinan sumas y restas de fracciones de igual denominador. ☑ Determinan sumas y restas de fracciones de distinto denominador. ☑ Resuelven problemas que involucran sumas o restas de fracciones y determinan si la solución es

		razonable.
OA13	Resolver problemas rutinarios y no rutinarios, aplicando adiciones y sustracciones de fracciones propias o decimales hasta la milésima.	
	☑ Resuelven problemas que involucran adiciones y sustracciones de fracciones hasta el centésimo. ☑ Evalúan las soluciones de los problemas en función del contexto ☑ Distinguen entre problemas rutinarios y no rutinarios que involucran fracciones o decimales y dan ejemplos de cada uno de ellos.	

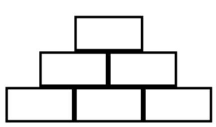
Fuente: Programa de Estudio nivel 5º básico (MINEDUC, 2012a, p. 116)

Objetivos de aprendizaje e indicadores de evaluación para 6º año básico.

	Objetivos de aprendizaje	**Indicadores de evaluación sugeridos**
OA05	Demostrar que comprenden las fracciones y los números mixtos:	
	☐ Identificando y determinando equivalencias entre fracciones impropias y números mixtos, usando material concreto y representaciones pictóricas de manera manual y/o con software educativo	☑ Demuestran, usando modelos, que una fracción impropia representa un número mayor que 1. ☑ Expresan fracciones impropias como números mixtos. ☑ Expresan números mixtos como fracciones impropias.
	☐ Representando estos números en la recta numérica	☑ Identifican en la recta numérica fracciones impropias y los números mixtos correspondientes. ☑ Ubican un conjunto de fracciones, que incluyan fracciones impropias y números mixtos, en la recta numérica y explican la estrategia usada para determinar la posición. ☑ Identifican fracciones equivalentes en la recta numérica. ☑ Resuelven problemas relativos a la identificación de fracciones y números mixtos en la recta numérica.
OA08	Resolver problemas rutinarios y no rutinarios que involucren adiciones y sustracciones de fracciones propias, impropias, números mixtos o decimales hasta la milésima.	
	☑ Interpretan números representados como fracciones o decimales en el contexto de problemas. ☑ Suman y restan las fracciones o los decimales involucrados en el problema. ☑ Verifican si el número decimal o la fracción obtenida como resultado es pertinente con el enunciado del problema..	

Fuente: Programa de Estudio nivel 6º básico (MINEDUC, 2012b, p. 52)

Plan de clases

Actividad de aprendizaje	Intervención docente	Indicadores de la marcha de la clase
1. Contrato pedagógico **Se establece las condiciones entre profesor y estudiantes necesario para la clase**	**1.1 Contrato pedagógico** El docente señala que el contrato les permite expresarse y tomar conciencia de la actividad y sus condiciones	¿Los estudiantes participan en la elaboración del contrato pedagógico?
2. Planteamiento del objetivo: "Entender la adición de fracciones con distinto denominador".	**2.1 Plantea situación inicial.** Se explica que, más que enseñar un algoritmo, se pretende enseñar el sentido (el por qué) de la adición.	¿Los alumnos entienden el propósito del objetivo planteado?
3. Activación de conocimientos previos **Se presenta un video y se entrega una guía de trabajo para orientar y permitir a los estudiantes desarrollar la actividad central.**	**3.1 Activación de conocimientos previos**	¿Los estudiantes reconocen los conceptos suficientes para lograr el objetivo de la clase?
3.1 Actividad pirámides **Esta actividad pretende que los estudiantes reconozcan las partes de un todo.** **Se realizan las siguientes preguntas según la siguiente imagen:**	Se señala la importancia de identificar la representación de las partes que conforman una fracción y el referente como condiciones necesarias para efectuar una adición con distinto denominador.	5 min ¿Se cumple el tiempo?
	**3.1 Actividad pirámides** Lectura de la actividad	¿Los estudiantes responden favorablemente a cada pregunta?
a) ¿Cuántos bloques conforman la pirámide? **Posibles respuestas:** • **Seis (bloques)** • **Tres (filas)**	a) ¿Cuántos bloques conforman la pirámide? El profesor pregunta por dudas o respuestas distintas.	
b) ¿Cuánto representa un bloque de la pirámide? **Posibles respuestas:**	b) ¿Cuánto representa un bloque de la pirámide? El profesor les señala que pueden escoger cualquier bloque.	

- **un bloque**
- **un extremo de la pirámide**
- **uno de cinco**
- **uno de seis**
- **un sexto de la pirámide**

c) ¿Cuántos bloques conforman la base de la pirámide?

Posibles respuestas:

- **tres bloques**
- **un bloque (una fila)**

d) ¿Cuánto representa la base respecto de la pirámide completa?

Posibles respuestas:

- **tres sextos de la pirámide**
- **un medio de la pirámide**
- **La mitad de la pirámide**
- **Un tercio de la pirámide**

e) ¿Qué otra cantidad representa la base respecto de la pirámide completa?

Posibles respuestas:

- **1/2**
- **2/4**
- **3/6**

f) ¿Cuánto representan dos bloques respecto de la pirámide completa?

Posibles respuestas:

- **2/6**
- **1/3**
- **el piso central de la pirámide**

g) ¿Cuánto representa medio bloque de la pirámide?

Posibles respuestas:

- **1/2**
- **1/12**

h) ¿Cuánto representa un bloque y medio respecto del total de la pirámide?

Posibles respuestas:

- **1/12+1/2**
- **Un bloque y medio**
- **1/12+1/6**

c) ¿Cuántos bloques conforman la base de la pirámide?

El profesor les señala que la base la conforman los bloques que sostienen a los demás, la primera fila de bloques o los bloques de “abajo” de la pirámide.

d) ¿Cuánto representa la base respecto de la pirámide completa

El profesor explica que se debe cuantificar esta relación.

e) ¿Qué otra cantidad representa la base respecto de la pirámide completa?

El profesor indica que deben encontrar una o más cantidades que expresen la misma relación.

f) ¿Cuánto representan dos bloques respecto de la pirámide completa?

- Pregunta de reforzamiento

g) ¿Cuánto representa medio bloque de la pirámide?

h) ¿Cuánto representa un bloque y medio respecto del total de la pirámide?

10 min

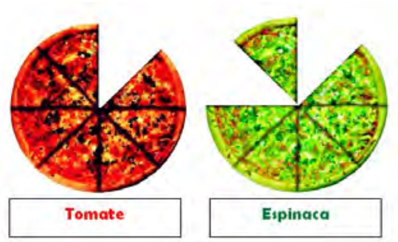
¿Se cumple el tiempo?

- **1/4**

3.2 Tarea comiendo pizza

Esta tarea pretende que los alumnos reconozcan la unidad usada como referente en cada situación.

Responder las preguntas según la siguiente imagen:



a) ¿En cuántos trozos está dividida cada pizza?
Posibles respuestas:
- **en 8 trozos cada una**
- **entre las dos hay 16 trozos**

b) ¿Cuántos trozos hay en total?
Posibles respuestas:
- **16 trozos**

c) ¿Qué parte de la pizza 1 comieron?
Posibles respuestas:
- **un trozo**
- **1/8**

d) ¿Qué parte de la pizza 2 se comieron?
Posibles respuestas:
- **dos trozos**
- **2/8**
- **¼**

e) ¿Cuánto representan los trozos que se comieron, si consideramos una pizza?
Posibles respuestas:
- **3/8**
- **3/16**
- **Depende de la pizza**

f) ¿Cuánto representan los trozos que se comieron, si consideramos las dos pizzas?
Posibles respuestas:

3.2Tarea comiendo pizzas

El profesor lee cada pregunta

a) ¿En cuántos trozos está dividida cada pizza?

b) ¿Cuántos trozos hay en total?

c) ¿Qué parte comió Camila de la pizza tomate?

d) ¿Qué parte comió Camila de la pizza espinaca?

e) ¿Cuánto representan los trozos que comió Camila, si consideramos una pizza?

f) ¿Cuánto representan los trozos que comió Camila, si consideramos las dos pizzas?

¿Los estudiantes identifican a los trozos como las partes que conforman una pizza?

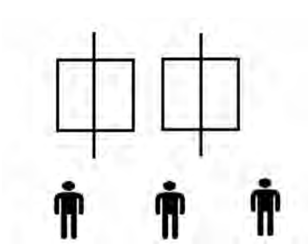
¿Los estudiantes identifican el total de trozos en relación a las dos pizzas?

¿Los estudiantes determinan la porción faltante en cada unidad o pizza?

¿Los estudiantes consideran como unidad o referente a una pizza de ocho trozos?

¿Los estudiantes consideran como unidad o referente a dos pizzas o 16 trozos?

10 min

• **en total 3 trozos** • **3/8** • **3/16**		¿Se cumple el tiempo?
4 Planteamiento del problema **Mediante un video motivacional se desarrolla la interrogante:** **"¿Cómo puedo repartir dos panes entre tres personas de manera equitativa?"** **4.1** Actividad Repartiendo pan **Esta tarea busca aplicar los conocimientos previos, reconociendo las partes de un todo y la unidad referente, a la vez que utilizar la adición con distinto denominador para sumar las dos porciones (distintas) que le corresponden a cada uno para comprobar la repartición.**  Posibles respuestas	**4 Presentación del problema** Se continúa el video que se vio al iniciar la clase, pero ahora se debe resolver la interrogante gracias a los conocimientos activados en el inicio. **4.1 Actividad Repartiendo pan** Se recuerda el desafío planteado en el video y se entrega la tarea central en la que deben responder las siguientes preguntas: a) ¿Cómo represento la porción repartida en primer lugar? b) ¿De qué manera puedo repartir entre las tres personas lo que me quedó de pan? c) ¿Cómo puedo representar las partes de pan que le corresponde a cada uno? d) ¿Cuánto pan recibió cada una de las personas? e) ¿Podemos afirmar que la repartición entre las personas fue justa? ¿Qué operación realizaste para determinarlo?	5 min ¿Se cumple el tiempo? ¿Los estudiantes trabajan en sus guías? ¿Los estudiantes comprenden los ejercicios de la guía? ¿Se entiende el tipo de tarea que deben realizar? 20 min ¿Se cumple el tiempo planificado?

a) **¿Cómo represento la porción repartida en primer lugar?**

- **1/2 de cada pan**
- **1/4 de los dos panes**

b) **¿De qué manera puedo repartir entre las tres personas lo que me quedó de pan?**

- **dividir en tres partes la mitad que quedó (1/6)**
- **dividir en tres partes el cuarto que quedó (1/12)**

c) **¿Cómo puedo representar las partes de pan que le corresponde a cada uno?**

- **1/2 + 1/6**
- **1/4 + 1/12**

d) **¿Cuánto pan recibió cada una de las personas?**

- **2/3**
- **1/3**

e) **¿Podemos afirmar que la repartición entre las personas fue justa? ¿Qué operación realizaste para determinarlo? Explica.**

- **Sí porque cada uno recibió la misma cantidad**
- **Si porque si sumo lo que recibieron las 3 personas me da la cantidad inicial**

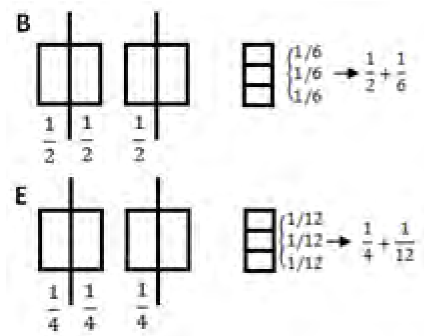
4.2 Trabajo en pizarra

Se exponen las respuestas de los estudiantes en relación a la forma de repartir.
Respuestas posibles:

Explica.

4.2 Trabajo en pizarra

El docente solicita en forma de diálogo las respuestas de los estudiantes en pizarra y las agrupa, solicita todas las respuestas posibles de la forma en que procedieron para el reparto.
Se analizan y se concluye que su validez depende del referente utilizado.



En el caso B se considera como referente 1 pan, que divididos en la mitad obteniendo cuatro medios. Se reparten 3 mitades y la mitad (1/2) sobrante se divide en 3 (1/6) y se reparten.
En el caso E se consideran como referente 2 panes, que divididos en la mitad dan cuatro cuartos. Se reparten 3 cuartos y el cuarto (1/4) sobrante se divide en 3 (1/12) y se reparten.

En un caso se obtendrá de manera más inmediata mediante la adición que a cada persona le corresponden 2/3. En el otro caso se debe multiplicar por 2.
Así al sumar las partes de cada persona (3) se obtiene la unidad.

¿Los estudiantes entienden la forma de repartir en los casos B y E?

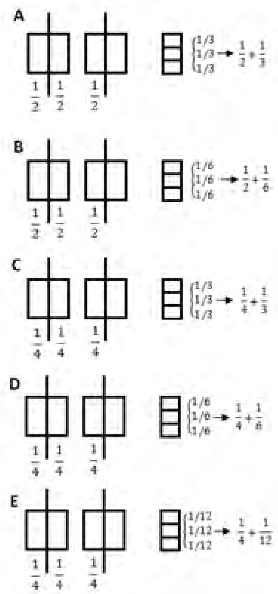
¿Entienden por qué ambos son correctos?

¿Los estudiantes pueden explicar por qué no pueden ser los otros casos?

¿Entienden la importancia del referente?

$\boxed{\text{10 min}}$

¿Se cumple el tiempo planificado?



7. Realiza preguntas claves para sintetizar la clase **¿Qué aprendieron hoy?** **¿Qué elementos eran importantes para la resolución del problema?** **Se realiza una síntesis con las ideas principales y lo aprendido en la clase.** Ejercicios de cierre **Utiliza lo aprendido para repartir en los siguientes casos:** **a) 2 panes entre 5 personas.** **b) 3 panes entre 5 personas.** **Dibuja, reparte, comprueba.** Comprobación de ejercicios	**7. Formalización** La fracción es una parte de un todo, es importante a qué "todo" nos referimos y en cuantas partes está dividido. Las fracciones con distinto denominador son porciones distintas de una misma unidad (todo o referente) y para sumarlas debemos dividirlas en partes iguales, es decir, igualar denominadores. Para ello representamos una fracción con otra equivalente (manteniendo la cantidad o porción). Esta(s) fracción(es) equivalente debe(n) tener el mismo denominador para poder sumar. Finalmente podemos sumar numeradores (la cantidad de partes) y conservar el denominador (en cuanto está divida la unidad). Matemáticamente, sean $a, b, c, d \in Z$, con $a \neq b \neq c \neq d$. Entonces: La adición de fracciones con igual denominador se sintetiza:	¿Se cumplió con el objetivo de la clase? ¿Los alumnos entienden por qué realizan la operación de adición de fracciones con distinto denominador? ¿Los alumnos entienden lo que significa el procedimiento que realizan al sumar fracciones con distinto denominador? Síntesis 10 min Ejercicios 10 min

	$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}= \frac{a+b}{c}$$ La adición de fracciones con distinto denominador (denominadores múltiplos) se puede expresar: $$\frac{a}{c}+\frac{b}{cd}=\frac{a}{c}*\frac{d}{d}+ \frac{b}{cd}= \frac{ad+b}{cd}$$ La adición de fracciones con distinto denominador (denominadores primos) se puede resumir $$\frac{a}{c}+\frac{b}{d}= \frac{a}{c}*\frac{d}{d}+\frac{b}{d}*\frac{c}{c}=\frac{ad+bc}{cd}$$
Síntesis **¿Cómo deben ser las partes para sumar fracciones?** **¿Por qué es importante el referente?**	

Fuente: Elaboración propia

Plan de clase reformulado

Actividad de aprendizaje

4. Contrato pedagógico

Se establece las condiciones entre profesor y estudiantes necesario para la clase

5. Planteamiento del objetivo: "Entender la adición de fracciones con distinto denominador".

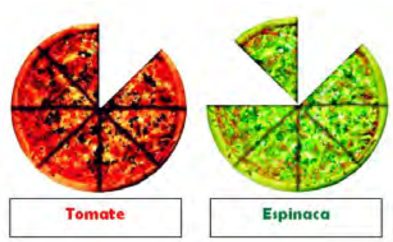
6. Activación de conocimientos previos

Se presenta un video y se entrega una guía de trabajo para orientar y permitir a los estudiantes desarrollar la actividad central.

6.1 Actividad comiendo pizza

Esta actividad pretende que los alumnos reconozcan la unidad usada como referente en cada situación.

Responder las preguntas según la siguiente imagen:



g) ¿En cuántos trozos está dividida cada pizza?
Posibles respuestas:
- **en 8 trozos cada una**
- **entre las dos hay 16 trozos**

h) ¿Cuántos trozos hay en total?
Posibles respuestas:
- **16 trozos**

i) ¿Qué parte de la pizza 1 comieron?
Posibles respuestas:
- **un trozo**
- **1/8**

Intervención docente

4.1 Contrato pedagógico

El docente señala que el contrato les permite expresarse y tomar conciencia de la actividad y sus condiciones

5.1 Plantea situación inicial.

Se explica que, más que enseñar un algoritmo, se pretende enseñar el sentido (el por qué) de la adición.

3. Activación de conocimientos previos

Se explica la situación de reparto y se da lectura a las preguntas de la guía.

Se señala la importancia de identificar la representación de las partes que conforman una fracción y el referente como condiciones necesarias para efectuar una adición con distinto denominador.

4.3 Posibles respuestas

g) ¿En cuántos trozos está dividida cada pizza?

h) ¿Cuántos trozos hay en total?

i) ¿Qué parte comió Camila de la pizza tomate?

j) ¿Qué parte comió Camila de la pizza espinaca?

k) ¿Cuánto representan los trozos que comió Camila, si consideramos una pizza?

l) ¿Cuánto representan los trozos que comió Camila, si consideramos las dos pizzas?

Indicadores de la marcha de la clase

¿Los estudiantes participan en la elaboración del contrato pedagógico?

¿Los alumnos entienden el propósito del objetivo planteado?

¿Los estudiantes reconocen los conceptos suficientes para lograr el objetivo de la clase?

¿Los estudiantes mejoran su disposición luego de ver el video?

Contrato y situación inicial

$\boxed{\text{5 min}}$

¿Se cumple el tiempo?

Presentación actividad y lectura de preguntas

$\boxed{\text{5 min}}$

¿Se cumple el tiempo?

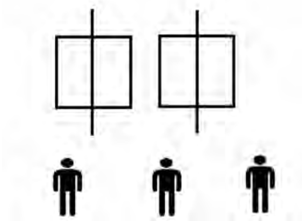
¿Los estudiantes identifican a los trozos como las partes que conforman una pizza?

¿Los estudiantes identifican el total de trozos en relación a las dos pizzas?

¿Los estudiantes determinan la porción faltante en cada unidad o pizza?

¿Los estudiantes consideran como unidad o referente a una pizza de

j) ¿Qué parte de la pizza 2 se comieron? **Posibles respuestas:** • **dos trozos** • **2/8** • **¼** **k) ¿Cuánto representan los trozos que se comieron, si consideramos una pizza?** **Posibles respuestas:** • **3/8** • **3/16** • **Depende de la pizza** **l) ¿Cuánto representan los trozos que se comieron, si consideramos las dos pizzas?** **Posibles respuestas:** • **en total 3 trozos** • **3/8** • **3/16**		ocho trozos? ¿Los estudiantes consideran como unidad o referente a dos pizzas o 16 trozos? Desarrollo de la actividad Pizzas 10 min ¿Se cumple el tiempo? Revisión de las respuestas y corrección 5 min ¿Se cumple el tiempo?
5 Planteamiento del problema **Mediante un video motivacional se desarrolla la interrogante:** **"¿Cómo puedo repartir dos panes entre tres personas de manera equitativa?"** **Los estudiantes elaboran estrategias de repartición.** **5.1 Actividad Repartiendo pan** **Esta actividad busca aplicar los conocimientos previos, reconociendo las partes de un todo y la unidad referente, a la vez que utilizar la adición con distinto denominador para sumar las dos porciones (distintas) que le corresponden a cada uno para comprobar la repartición.**	**5 Presentación del problema** Se continúa el video que se vio al iniciar la clase, pero ahora se debe resolver la interrogante gracias a los conocimientos activados en el inicio. El docente deja la interrogante "¿Cómo puedo repartir dos panes entre tres personas de manera equitativa?" Se exponen las estrategias elaboradas por los estudiantes. **5.1 Actividad Repartiendo pan** Se recuerda el desafío planteado en el video y se entrega la actividad central en la que deben responder las siguientes preguntas: Parte I f) ¿Cómo represento la porción repartida en primer lugar? g) ¿De qué manera puedo repartir entre las tres personas lo que me quedó de pan? h) ¿Cómo puedo representar las partes de pan que le corresponde a cada uno?	¿Los estudiantes elaboran variadas estrategias? ¿Se obtiene más de una respuesta? 5 min ¿Se cumple el tiempo? ¿Los estudiantes trabajan en sus guías? ¿Los estudiantes comprenden los ejercicios de la guía? ¿Se entiende el tipo de tarea que deben realizar?



Posibles respuestas

f) ¿Cómo represento la porción repartida en primer lugar?
- **1/2 de cada pan**
- **1/4 de los dos panes**

g) ¿De qué manera puedo repartir entre las tres personas lo que me quedó de pan?
- **dividir en tres partes la mitad que quedó (1/6)**
- **dividir en tres partes el cuarto que quedó (1/12)**

h) ¿Cómo puedo representar las partes de pan que le corresponde a cada uno?
- **1/2 + 1/6**
- **1/4 + 1/12**

i) ¿Cuánto pan recibió cada una de las personas?
- **2/3**
- **1/3 (devolución: recuerda que la cantidad inicial eran dos panes)**

j) ¿Podemos afirmar que la repartición entre las personas fue justa? ¿Qué operación realizaste para determinarlo? Explica.
- **Sí porque cada uno recibió la misma cantidad**
- **Si porque si sumo lo que recibieron las 3 personas me da la cantidad inicial**

5.2 Trabajo en pizarra

Se exponen las respuestas de los estudiantes en relación a la forma de repartir.
Respuestas posibles:

Parte II

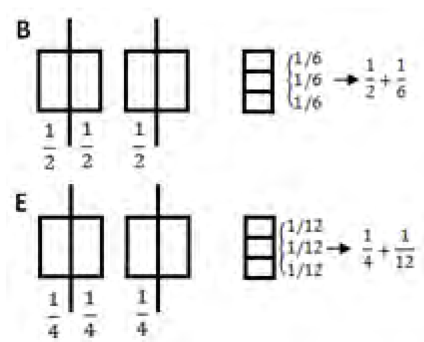
i) ¿Cuánto pan recibió cada una de las personas?

j) ¿Podemos afirmar que la repartición entre las personas fue justa? ¿Qué operación realizaste para determinarlo? Explica.

k)

5.2 Trabajo en pizarra

El docente solicita en forma de diálogo las respuestas de los estudiantes en pizarra y las agrupa, solicita todas las respuestas posibles de la forma en que procedieron para el reparto.
Se analizan y se concluye que su validez depende del referente utilizado.



En el caso B se considera como referente 1 pan, que divididos en la mitad obteniendo cuatro medios. Se reparten 3 mitades y la mitad (1/2) sobrante se divide en 3 (1/6) y se reparten.
En el caso E se consideran como referente 2 panes, que divididos en la mitad dan cuatro cuartos. Se reparten 3 cuartos y el cuarto (1/4) sobrante se divide en 3 (1/12) y se reparten.

En un caso se obtendrá de manera más inmediata mediante la adición que a cada persona le corresponden 2/3. En el otro caso se debe multiplicar por 2.
Así al sumar las partes de cada persona (3) se obtiene la unidad.

Desarrollo parte I

10 min

¿Se cumple el tiempo planificado?

Desarrollo parte II

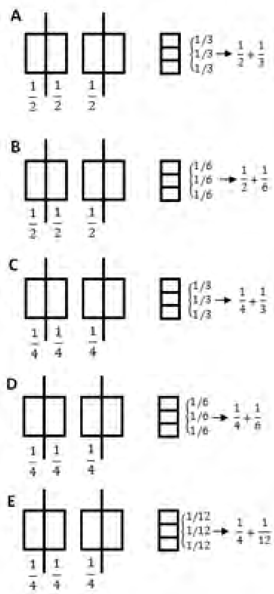
5 min

¿Los estudiantes entienden la forma de repartir en los casos B y E?

¿Entienden por qué ambos son correctos?

¿Los estudiantes pueden explicar por qué no pueden ser los otros casos?

¿Entienden la importancia del referente?

 		$\boxed{\text{10 min}}$ ¿Se cumple el tiempo planificado?
7. Realiza preguntas claves para sintetizar la clase **¿Qué aprendieron hoy?** **¿Qué elementos eran importantes para la resolución del problema?** **Se realiza una síntesis con las ideas principales y lo aprendido en la clase.** 8. Conclusiones Los estudiantes aportan los conocimientos adquiridos durante el desarrollo de la clase.	**7. Formalización** Se exponen las definiciones de los conceptos utilizados durante la clase Fracciones equivalentes: Dada la fracción $\frac{a}{b}$, las fracciones que se obtienen multiplicando numerador y denominador por el mismo número entero (distinto de cero) se dice que son equivalente a $\frac{a}{b}$. Las fracciones equivalentes representan la misma parte. Adición de fracciones: para poder sumar fracciones, se debe buscar fracciones equivalentes que tengan el mismo denominador. **8. Conclusiones** Se expone un listado con lo más relevante de la clase -La importancia de reconocer el referente en situaciones de reparto -La necesidad de entender qué hay detrás del procedimiento matemático que se realiza al sumar fracciones. En general, siempre cuestionarnos por qué hacemos cierta operación y qué significa. -Darle sentido a la matemática	¿Se cumplió con el objetivo de la clase? ¿Los alumnos entienden por qué realizan la operación de adición de fracciones con distinto denominador? ¿Los alumnos entienden lo que significa el procedimiento que realizan al sumar fracciones con distinto denominador? Síntesis $\boxed{\text{10 min}}$ Ejercicios $\boxed{\text{10 min}}$

Ejercicios de cierre

Utiliza lo aprendido para repartir en los siguientes casos:

c) **2 panes entre 5 personas.**
d) **3 panes entre 5 personas.**

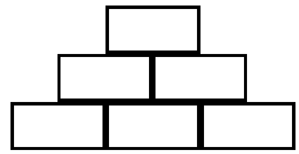
Dibuja, reparte, comprueba.

Comprobación de ejercicios

Fuente: Elaboración propia

Tarea 1

En el antiguo Egipto, las pirámides constituían las principales construcciones. Los egipcios las edificaban mediante la unión de bloques idénticos entre sí.



1. ¿Cuántos bloques conforman la pirámide?	5. ¿Qué otra cantidad representa la base respecto de la pirámide completa?
2. ¿Cuánto representa un bloque de la pirámide?	6. ¿Cuánto representan dos bloques respecto de la pirámide completa? Explica.
3. ¿Cuántos bloques conforman la base de la pirámide?	7. ¿Cuánto representa medio bloque respecto de la pirámide completa?
4. ¿Cuánto representa la base respecto de la pirámide completa?	8. ¿Cuánto representa un bloque y medio respecto del total de la pirámide?

Fuente: Elaboración propia

Tarea 2

<u>Repartición de pizzas</u>

Camila ha pedido 2 pizzas a domicilio para ella y sus amigos. Las pizzas llegaron antes que sus amigos así que decidió probar algunos trozos, los que faltan en la imagen.

Tomate

Espinaca

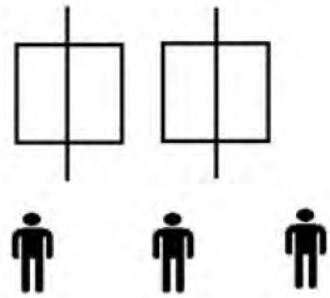
1. ¿En cuántos trozos está dividida cada pizza? ***Considere la pizza completa.***	4. ¿Qué parte comió Camila de la pizza espinaca?
2. ¿Cuántos trozos hay entre las dos pizzas completas?	5. ¿Cuánto representan los trozos que comió Camila, si consideramos los trozos de una pizza?
3. ¿Qué parte comió Camila de la pizza tomate?	6. ¿Cuánto representan los trozos que comió Camila, si consideramos las dos pizzas?

Fuente: Elaboración propia.

Tarea Central

Desafío

REPARTIR DOS PANES (IGUALES), DE MANERA JUSTA, ENTRE TRES PERSONAS



Parte I

1) Representa la porción repartida en primer lugar	2) ¿De qué manera repartes entre las tres personas lo que quedó de pan?	3) ¿Cómo representas las partes de pan que le corresponde a cada uno?

Parte II

1) ¿Cuánto pan recibió cada una de las personas?

2) ¿La repartición entre las tres personas fue justa? Explica y argumenta tu respuesta.

Fuente: Elaboración propia

PowerPoint implementación

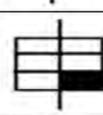
Para tener en cuenta:

- Para responder las preguntas 5 y 6, es necesario reconocer el referente o unidad
- Si el referente es una pizza $\rightarrow$ 8 porciones
- Si el referente son dos pizzas $\rightarrow$ 16 porciones

5. ¿Cuánto representan los trozos que comió Camila, si consideramos los trozos de una pizza?	6. ¿Cuánto representan los trozos que comió Camila, si consideramos las dos pizzas?
$\frac{3}{8}$ *de una pizza*	$\frac{3}{16}$ *de dos pizza*

Corrección tarea 1
Fuente: Elaboración propia.

PowerPoint implementación

Pregunta	Referente	Respuesta
1.Representa la porción repartida en primer lugar	Dos panes	$\frac{1}{4} de\ 2\ panes \rightarrow \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$
	Un pan	$\frac{1}{2} de\ 1\ pan \rightarrow \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$
	Medio pan	$1\ de\ medio\ pan \rightarrow 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
2. De qué manera repartes entre tres personas lo que quedó de pan?	Dos panes	 $\frac{1}{12} \cdot 2 \rightarrow \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$
	Un pan	 $\frac{1}{6} \cdot 1 \rightarrow \frac{1}{6}$
	Medio pan	 $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{6}$
3. ¿Cómo representar las partes de pan que le corresponde a cada uno?	Dos panes	$\frac{1}{4} + \frac{1}{12}$
	Un pan	$\frac{1}{2} + \frac{1}{6}$
	Medio pan	$1 + \frac{1}{3}$

Pregunta	Referente	Respuesta
1. Cuánto pan recibe cada una de las personas	Dos panes	$\frac{1}{4}+\frac{1}{12}=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{3}\right)+\frac{1}{12}=\frac{3}{12}+\frac{1}{12}=\frac{4}{12}\cdot\mathbf{2}=\frac{2}{3}$
	Un pan	$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{3}\right)+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}+\frac{1}{6}=\frac{4}{6}\cdot\mathbf{1}=\frac{2}{3}$
	Medio pan	$1+\frac{1}{3}=1\cdot\left(\frac{3}{3}\right)+\frac{1}{3}=\frac{3}{3}+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$
2) ¿La repartición entre las tres personas fue justa? Explica y argumenta tu respuesta.	Dos panes Un pan Medio pan	Para saber si la repartición fue justa, se deben sumar las porciones de pan que recibió cada persona $\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=\frac{6}{3}=2\ panes\ iniciales$

Corrección Tarea central parte I y II.
Fuente: Elaboración propia.

PowerPoint Implementación

DEFINICIONES IMPORTANTES

Fracciones equivalentes:

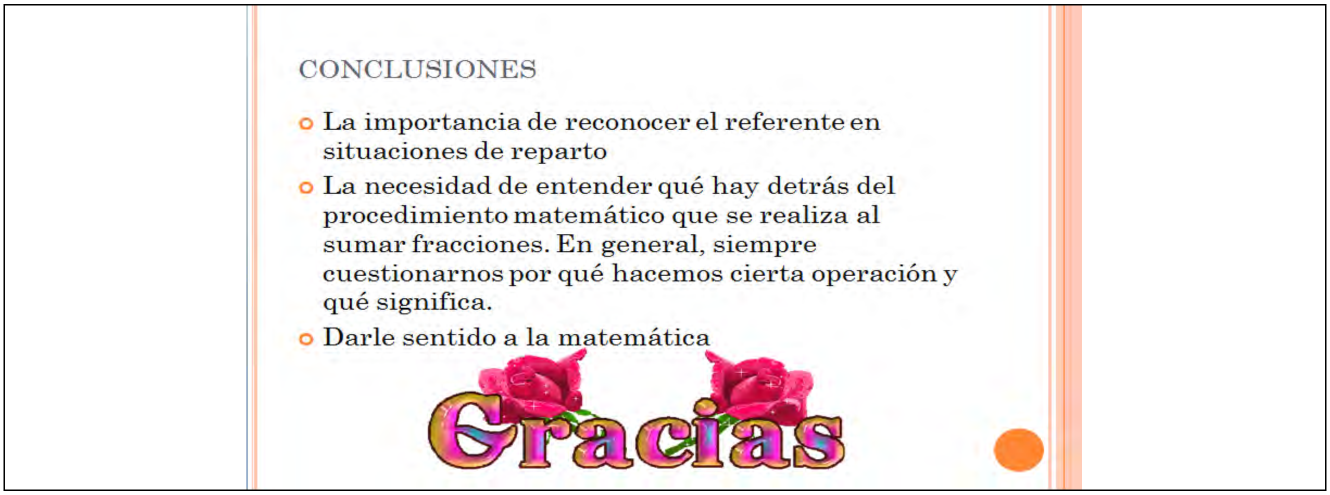
Dada la fracción $\frac{a}{b}$, las fracciones que se obtienen multiplicando numerador y denominador por el mismo número entero (distinto de cero) se dice que son equivalentes a la fracción $\frac{a}{b}$

Las fracciones equivalentes representan la misma parte

Para poder sumar fracciones, se debe buscar fracciones equivalentes que tengan el mismo denominador.

Diapositiva Formalización.
Fuente: Elaboración propia.

PowerPoint Implementación



Diapositiva Conclusiones.
Fuente: Elaboración propia.