



**UNIVERSIDAD DE VALPARAÍSO
FACULTAD DE HUMANIDADES
INSTITUTO DE FILOSOFÍA
PROGRAMA DE POSTGRADO EN FILOSOFÍA**

(Re)considerando la trivialización: una guía para dejar de preocuparse y amar la Bomba

**TESIS PARA OPTAR AL GRADO ACADÉMICO
DE MAGÍSTER EN FILOSOFÍA
CON MENCIÓN EN LÓGICA Y FILOSOFÍA DE LAS CIENCIAS**

AUTOR TESIS: Miguel Álvarez Lisboa

PROFESOR GUÍA: Nicolas Clerbout

VALPARAÍSO, Enero de 2019

Resumen

Este ensayo es una defensa paraconsistente del Principio de Explosión. Su propósito es mostrar que los sistemas finitamente trivializables tienen la capacidad de exhibir aquello que está más allá de sus límites normativos, lo que les confiere un interés filosófico especial. La primera parte del argumento incluye una revisión crítica de la historia y significado de la Negación como operación lógica y del Principio de Explosión en sus múltiples variantes. El propósito de esta revisión es denunciar los prejuicios que sobrevivieron a la consolidación del fenómeno de la trivialización como parte de la Lógica contemporánea. La segunda parte del argumento reconstruye los principales resultados formales conocidos en la literatura acerca del fenómeno de la trivialización, pero separados de dichos prejuicios y exhibidos de manera directa. Sobre la base de lo anteriormente expuesto se sustenta la tesis principal del ensayo, cuyos elementos se aúnan en una visión de la lógica históricamente consistente y filosóficamente fértil, en la cual el fenómeno de la trivialización juega un rol fundamental.

Palabras clave: paraconsistencia, negación, principio de explosión, filosofía de la lógica.

Abstract

This essay is a paraconsistent defense of the Principle of Explosion. Its purpose is to show that finitely trivializable systems have the capacity to exhibit what is beyond their normative bounds, which gives them a special philosophical interest. The first part of the argument includes a critical review of the history and meaning of Negation as a logical operation and the Explosion Principle in its multiple variants. The purpose of this review is to denounce the prejudices that survived the consolidation of the phenomenon of trivialization as part of Contemporary Logic. The second part of the argument reconstructs the main formal results known in the literature about the phenomenon of trivialization, but separated from those prejudices and exhibited directly. On the basis of the aforementioned, the main thesis of the essay is

sustained, whose elements are combined in a vision of logic both historically consistent and philosophically fertile, in which the phenomenon of trivialization plays a fundamental role.

Keywords: paraconsistency, negation, principle of explosion, philosophy of logic.

Resumo

Este ensaio é uma defesa paraconsistente do Princípio da Explosão. Sua finalidade é mostrar que sistemas finamente trivializáveis têm a capacidade de exibir o que está além de seus limites normativos, o que lhes confere um interesse filosófico especial. A primeira parte do argumento inclui uma revisão crítica da história e do significado da Negação como uma operação lógica e o Princípio da Explosão em suas múltiplas variantes. O objetivo desta revisão é denunciar os preconceitos que sobreviveram à consolidação do fenômeno da trivialização como parte da Lógica contemporânea. A segunda parte do argumento reconstrói os principais resultados formais conhecidos na literatura sobre o fenômeno da trivialização, mas separados desses preconceitos e exibidos diretamente. Com base no exposto, sustenta-se a tese principal do ensaio, cujos elementos se combinam em uma visão de lógica historicamente consistente e filosoficamente fértil, na qual o fenômeno da trivialização desempenha um papel fundamental.

Palavras-chave: paraconsistência, negação, princípio da explosão, filosofia da lógica.

A mis hermanos.

Agradezco a Andrés Bobenrieth por haberme invitado a hacer este Magíster; a Nicolas Clerbout, por haber puesto en él todo lo de “Lógica” que hubo en la mención “Lógica y Filosofía de las Ciencias”, y también por todo lo que me colaboró para sacar adelante este proyecto, dentro y fuera de su labor como profesor guía; y a mis compañeros del taller de Tesis, que hicieron aportaciones fundamentales en las primeras etapas de la investigación. Agradezco también a Carlo Apablaza, colega y amigo, por haber compartido conmigo su investigación de Magíster. Sin su aporte una parte importante de este trabajo hubiera quedado incompleta.

Miguel Álvarez Lisboa

Verano de 2019

Ella no quería morir. Quería experimentar esta misma explosión de emociones muchas veces más. Éste sólo era el inicio.

LAURA ESQUIVEL

Como agua para chocolate

Índice general

Índice general	VII
Convenciones notacionales y de estilo	XI
1 Un mapa para la ruta	1
1.1. Una panorámica	4
1.2. Llenarse de determinación	6
1.2.1. Disposiciones idiomáticas	7
1.2.2. La Lógica en diez palabras	9
1.2.3. Sociología de la Lógica	11
1.2.4. Matemática Tipográfica	16
1.2.5. La Lógica Matemática	17
1.2.5.1. Sustrato literal	18
1.2.5.2. Disposición compositiva	20
1.2.5.3. Disposición normativa	21
1.2.6. Otras disposiciones	23
1.2.6.1. Vocabulario excéntrico	23
1.2.6.2. Verifunciones	23
2 La Negación	25
2.1. El significado de la Negación	26
2.2. Negación y Oposición	31

2.3.	Sistemas de Oposiciones	37
2.4.	La lógica de la Negación	40
2.4.1.	La Negación en atención a lo verdadero y lo falso	41
2.4.2.	Razonando <i>desde</i> y <i>hacia</i> la Negación	43
2.4.3.	La <i>Reductio ad Absurdum</i>	55
2.4.4.	La Negación en contextos formalizados	61
3	El Principio de Explosión	71
3.1.	El desarrollo del Fenómeno de Explosión	73
3.1.1.	Primeros desarrollos	73
3.1.2.	Consistencia y trivialidad	79
3.1.3.	Trivialización y armonía	89
3.2.	Políticas armamentísticas	98
4	La Lógica de la Explosión	107
4.1.	Explosividad sin Negación	108
4.1.1.	Lógica abstracta	112
4.1.2.	Moralejas	119
4.2.	Explosividad con Negación	120
4.2.1.	La vía intuicionística a la Explosión	123
4.2.2.	La vía paraconsistente a la Explosión	130
4.2.3.	La negación lógica como negación de la explosión	137
4.3.	Tres maneras de explotar	140
4.3.1.	Explosión en el nivel alético	141
4.3.2.	Explosión en el nivel funcional	142
4.3.3.	Explosión en el nivel interactivo	145
4.3.4.	Moralejas	148
5	Explosiones, ¿por qué no?	151
5.1.	Metalógica y filosofía de la lógica	153

5.2. Inferencias ilógicas y normatividad	159
5.3. Un <i>non plus ultra</i> inferencial	164
5.4. Reducción al Absurdo es Reducción a lo Ilógico	169
5.5. Juegos y reglas negativas	173
5.6. La paraconsistencia es la nueva consistencia	177
6 Conclusiones	179
6.1. Una guía para dejar de preocuparse y amar la Bomba	179
6.2. Límites y prospecciones	182
6.3. Palabras finales	183
A Convenciones para juegos Dialógicos	185
B Nota sobre filosofía de las matemáticas	189
C Verdad, Ciencia y Lógica	193
Bibliografía	205

Convenciones notacionales y de estilo

A lo largo de este trabajo las siguientes convenciones de escritura y notación serán adoptadas:

1. Las comillas altas serán usadas para destacar una cita textual o cuando sea necesario destacar un uso forzado o poco literal de una expresión.

Ilustración: Aristóteles escribió que “todas las personas por naturaleza desean saber”. Claro, si es cierto que Aristóteles “escribía” sus libros y no los dictaba a discípulos, ayudantes o esclavos, por ejemplo.

2. Las comillas angulares serán usadas para hacer referencia a una expresión lingüística sin desatender a su complejidad simbólica. Si se tratara de una expresión muy larga, la colocaré centrada en una línea separada del párrafo principal.

Ilustración: «Todas las personas por naturaleza desean saber» es una traducción preferible a «Todos los hombres por naturaleza desean saber» del griego «Πάντες ἄνθρωποι τοῦ εἰδέναι ὀρεγόνται φύσει».

3. La mención (por oposición al uso) de una expresión lingüística cualquiera se indicará con comillas esquineras:

Ilustración: La voz griega «ἄνθρωποι» significa «persona» y la palabra griega Γἄνθρωποι¹ tiene ocho letras.

4. En atención a lo anterior, cuando use palabras de un idioma distinto al español¹ dentro del primer nivel de discurso, lo indicaré con itálicas. La única excepción será

1. Véase la nota 2 del capítulo 1, página 7.

el griego, pues la diferencia de alfabeto hace innecesaria cualquier otra diferenciación.

Ilustración: «Negación», es decir, *negation*, es un λέγεται πολλαθῶς: se dice en muchos sentidos.

5. Palabras en griego serán escritas usando ese alfabeto, sin transliterar: ἄνθρωποι y no ánzropoi.

6. *Nota bene:* para escribir en griego utilizo el paquete para $\text{\LaTeX} 2_{\epsilon}$ *lgreek*, mantenido en CTAN por Timothy Murphy, y que contiene una serie de macros para utilizar las fuentes griegas suministradas por Silvio Levy para una versión anterior de \LaTeX . Desafortunadamente, este paquete tiene problemas lidiando con la ligadura del espíritu suave y el acento grave ᾿, pues los coloca junto a la vocal y no encima de ella, como debería ser: ᾿ο, por ejemplo. Lo mismo ocurre con ambos espíritus y el circunflejo: ὀ, ὀ. Por lo tanto, donde estas combinaciones ocurran tomaré la convención siguiente: si la palabra comienza con espíritu suave y acento grave, dejaré sólo el acento grave; y si la palabra comienza con espíritu y circunflejo, dejaré sólo el espíritu. Las reglas gramaticales harán inequívoco cuál es el signo que falta y dónde debe colocárselo.

7. A la enojosa (y un poco estéril, a mi parecer) disputa sobre la manera correcta de colocar un paréntesis al final de una oración, mi decisión es la siguiente: cuando el paréntesis contiene a la oración completa, va por fuera del punto; pero cuando el paréntesis contiene a una parte de la oración, va por dentro. La misma observación aplica para las comillas.

Ilustración: Aristóteles estudió veinte años en la Academia (a juzgar por las fuentes). Tenía veinte años cuando entró allí. (Es decir que bordeaba los cuarenta cuando Platón murió.)

8. La igualdad definicional será indicada con el signo $\overset{\Delta}{=}$. Se asume que cada uno de sus términos está siendo mencionado y no usado, por lo que no se agregará el entrecomillado de rigor.
9. El signo $\overset{=}{=}$ será utilizado para expresar igualdad matemática. Esta relación significa fundamentalmente la posibilidad de sustitución *salva veritate*.
10. El signo $\overset{\equiv}{\equiv}$ será utilizado para expresar que dos expresiones lingüísticas refieren (extensionalmente) al mismo objeto o concepto, si bien pueden ser intensionalmente distintas. Se asume que cada uno de sus términos está siendo mencionado, no usado, por lo que no se agregará el entrecomillado de rigor².
11. En los lugares donde sea necesario hacer énfasis sobre una cita en la cual el autor original ya haya hecho énfasis, usaré la negrita. En cualquier otro caso, la marca de énfasis por defecto será la itálica.
12. Con respecto al uso de la persona gramatical a lo largo de la narrativa de la tesis, el uso es el siguiente: la *primera persona del singular* se refiere al autor de la Tesis; la *primera persona del plural* se refiere al autor y a su lector, y el *impersonal del singular* hace referencia a una inteligencia cualquiera.
Ilustración: Aunque es razonable sostener que Aristóteles no consideraba a todos los seres humanos como $\acute{\alpha}\nu\theta\rho\omega\pi\omicron\iota$, pienso que hay razones para interpretarlo de esta manera. En lo que sigue veremos que estas razones, no obstante, difícilmente podrían rastrearse hasta la obra del Estagirita.

2. La necesidad de distinguir entre $\overset{\Delta}{=}$ y $\overset{\equiv}{\equiv}$ puede no resultar evidente a simple vista. Nótese que, en el segundo caso, se trata de una equivalencia *sólo* extensional. La identidad definicional es más fuerte: ella expresa que los dos *relata* son intensional y extensionalmente idénticos, es decir, son dos nombres para una misma cosa. Un viejo ejemplo quineano puede resultar iluminador: «par $\overset{\Delta}{=}$ entero positivo divisible por 2» en contraposición a «animal con corazón $\overset{\equiv}{\equiv}$ animal con hígado».

Capítulo 1

Un mapa para la ruta

“Grandpa asked you to run an errand? Here, take this with you.”

Pokemon Blue

La (versión de Gauss de la) Conjetura de Goldbach dice que todo número par mayor que 2 puede expresarse como la suma de dos números primos. Esta proposición puede demostrarse así: primero definimos el predicado $\ulcorner p(n) \urcorner$:

$$p(n) \triangleq \forall x \forall y (xy = n \Rightarrow (x = 1 \vee y = 1))$$

Que dice que el número n es un número primo. Notemos ahora que, dado que todo número par tiene una mitad entera, si él es la suma de dos números primos entonces necesariamente: a) o su mitad es un número primo, o b) ambos números primos equidistan de su mitad, uno por exceso y el otro por defecto. Por lo que la Conjetura de Goldbach puede ser parafraseada así:

$$\forall x_{>1} \exists y_{\geq 0} (p(x+y) \wedge p(x-y))$$

Para demostrar esta proposición basta con demostrar que para cualquier número mayor que 1 es posible hallar otro tal que tanto su suma como su resta son números primos. Y esto puede hacerse de manera muy sencilla: sea a un número cualquiera mayor que 1. Dado que $a = a + 0$ y $a = a - 0$, la proposición quedará demostrada si podemos demostrar

que a es un número primo. Por la definición dada más arriba, para probar que a es un número primo basta con mostrar que en cualquier par de números x e y tales que $xy = a$, al menos uno de ellos es 1. Y esto puede demostrarse de manera más o menos directa. Obsérvese: si $xy = a$, entonces $x = \frac{a}{y}$. Para probar que $x = 1$, basta con probar entonces que $y = a$. Y esto a su vez es sencillo demostrarlo: dado que $0a = 0$ y también $0y = 0$, tenemos que $0a = 0y$. Dado que $1 = 0$, $1a = 1y$, y como $1a = a$ y $1y = y$, resulta de esto que $a = y$. Y esto termina la demostración.

La razón por la cual todavía no he podido cobrar los mil dólares que se ofrecen por la demostración (o refutación) de la Conjetura de Goldbach es que para que esta demostración matemática esté completa necesito poder disponer de un lema aún no demostrado: que $1 = 0$. Desafortunadamente, este valioso lema está fuera de mi alcance en todas las formulaciones axiomáticas clásicas e intuicionísticas de la teoría de números, encapsulado dentro del ámbito de un estorbo operador unario: $\lceil \neg \rceil$.

Es más. Si « $1 = 0$ » fuera una proposición disponible para deducir a partir de ella, de manera más o menos sencilla —y por un procedimiento esencialmente igual al aplicado más arriba— podría probar cualquier proposición que yo quisiera. Las demostraciones de completitud serían entonces inmediatas en la aritmética, en la teoría de números y en el álgebra, y sin mayores problemas podría hallar solución a todas las ecuaciones (pues cualquier número serviría para el caso), lo que permitiría entregar un método unificado de resolución de todos los problemas.

Hay, sin embargo, dos inconvenientes con « $1 = 0$ ». El primero es que, una vez desatado su poder deductivo, no habría manera de detenerlo: no sólo nos daría todas las soluciones correctas a todos los problemas, sino que también nos daría todas las soluciones incorrectas, y nos dejaría sin recurso alguno para distinguir entre unas y otras. Este es, sin duda, un problema mayúsculo. El segundo —una nimiedad, dirán algunos, pero no menos sensible para espíritus más prudentes— es que $1 = 0$, a pesar de todo nuestro entusiasmo, es a todas luces una proposición *falsa*, y por lo tanto una cuenta *correcta* de nuestras teorías matemáticas *no* debería contenerla.

Esta situación me hace pensar en el argumento de la película *Godzilla* de 1954. Este clásico del cine de terror muestra los padecimientos del pueblo japonés ante los ataques de un enorme dinosaurio mutante resucitado accidentalmente con el poder de la energía nuclear. El monstruo Godzilla no tiene propósitos ni persigue fines de ningún tipo: se levanta del mar, impredecible, y sin mediar provocaciones destruye todo lo que encuentra a su paso antes de volver a esconderse en las profundidades. Después de los horrores desencadenados por los verdaderos monstruos —las columnas de fuego que devoraron las ciudades de Hiroshima y Nagasaki—, el mundo se sumergió en una especie de pánico nuclear, donde la recién descubierta fuente de energía era vista a la vez con entusiasmo y espanto. Se temía, en efecto, que su enorme poder se volviera incontrolable, y que una mala manipulación del mismo pudiera llevar a hecatombes peores a las ya experimentadas.

Hay sistemas lógicos con proposiciones de un poder similar. Cuando aparecen dentro de una teoría, ésta gana un poder deductivo gigantesco: todo, o casi todo, se vuelve demostrable en ella. En contextos clásicos e intuicionísticos, « $1 = 0$ » es una de las tantas proposiciones matemáticas que tiene ese poder. Desde que esta curiosa propiedad lógica fue (re)descubierta, los matemáticos clásicos e intuicionistas tomaron la vía de la prudencia: decidieron que esta energía, aunque existe, no puede ser utilizada sin que destruya todo lo que se ha construido. En consecuencia, lo que hicieron fue encerrarla para siempre en una jaula inaccesible, construida de tal forma que todo lo que cayera dentro de ella no pudiera desbordarse fuera. Esta jaula es la *negación lógica*.

Sin embargo, hubo otros que fueron más osados. Timoneados por la intuición de que la razón humana alcanza su máximo potencial cuanto más se aproxima al peligro de la trivialización¹, los lógicos de la *paraconsistencia* intentaron domar el poder de estas proposiciones, utilizándolas para despertar nuevos monstruos pero manteniendo a raya sus fuerzas destructivas. El primero de los dinosaurios que resucitaron con ayuda de estas nuevas técnicas fue el Conjunto de Russell, un monstruo que había dormido sepultado en

1. “De um modo impreciso, poderíamos afirmar que a razão humana parece atingir o ápice de sua potência quanto mais se aproxima do perigo da trivialização” (DA COSTA, 1993, p. 21).

lo profundo del océano de la matemática moderna desde su descubrimiento, a principios del siglo XX, y que la lógica brasileña Ayda Arruda logró traer nuevamente a la vida con las herramientas formales que desarrolló junto a su maestro Newton da Costa. Amparada bajo el alero del *operador de buen comportamiento* y los axiomas que lo rigen, Arruda pudo demostrar, entre otras varias cosas, que el Conjunto de Russell está contenido recursivamente dentro de sí mismo y que él constituye un Universo (ÁLVAREZ LISBOA, 2017). El proyecto rápidamente halló adherentes, y sus ambiciones se radicalizaron: no sólo utilizar el poder de los monstruos, sino liberarlos en su totalidad. Nacieron así las lógicas de las inconsistencias e incluso de las contradicciones verdaderas, haciendo realidad las más antiguas pesadillas de la tradición aristotélica.

Este trabajo versa no tanto acerca de los monstruos sino de la energía capaz de liberarlos. Mi objeto de estudio es esa fuerza deductiva prolífica conocida como *explosión* o *trivialización*, y mi pregunta es por el significado filosófico que tiene el que haya sistemas lógicos capaces de liberarla. Este capítulo es un *mapa* u *hoja de ruta* (*roadmap*), donde encontraremos la metodología utilizada y los hitos a encontrarnos en el camino.

1.1. Una panorámica

El recorrido que comienza en el próximo capítulo termina en el último con la defensa de la siguiente afirmación: que *el que una lógica sea explosiva le da la capacidad de mostrar aquello que está más allá de sus límites normativos*. En cada capítulo nos ocuparemos de sentar las bases teóricas sobre las cuales se levanta esta afirmación y presentar evidencia en su favor.

Jugando sobre el campo semántico que abre la palabra «explosión», llamaré *detonador* a todo conjunto de fórmulas con el poder de trivializar a otro. Un conjunto de fórmulas es *trivial* si tiene por consecuencia a cualquier fórmula que se quiera y es *explosivo* si tiene un detonador. Si Γ es un conjunto no trivial de fórmulas, un detonador para Γ es un conjunto Δ con $\Xi \subseteq \Gamma \cup \Delta$ explosivo. En términos coloquiales, Δ contiene lo necesario para hacer explotar a Γ .

Este sentido de explosión es ligeramente más abstracto y “liberal”, en algún sentido, que el que maneja la literatura. En efecto, la tradición vió siempre la explosión como un fenómeno anejo a otros conceptos tales como lo falso, lo imposible o lo contradictorio, como si fueran ellos el resorte de todo detonador. Estas conexiones son importantes para comprender el fenómeno de la explosión, razón por la cual no deben ser ignoradas, pero tampoco debe permitírseles enturbiar el análisis: un detonador no debe ser confundido, *a priori*, con una contradicción o con un conjunto inconsistente (esto, entre otras cosas, porque los que sí sean lo uno o lo otro serán casos particularmente interesantes de estudiar). Por lo tanto, la reconstrucción histórica de algunos conceptos y la forma en que ellos llevaron al descubrimiento y tratamiento de la explosión es cosa que debe abordarse en este trabajo. En consecuencia con lo anterior, el capítulo 2 aborda la tarea de caracterizar el concepto de «negación» en términos lo suficientemente abstractos como para que otras importantes ideas derivadas de éste —contradicción o *Reductio ad Absurdum*, por ejemplo— puedan distinguirse claramente y definirse sin apelación a la característica explosiva. El capítulo 3, por su parte, reconstruye la historia del Principio de Explosión en varias de sus variantes, y muestra cómo es que, de hecho, la negación, lo imposible y lo contradictorio fueron asociados a la explosión. La explicitación concreta, matemática de estas afirmaciones será trabajada en el capítulo 4.

El terreno que preparan estos tres primeros capítulos es asaltado en el quinto para construir el argumento principal de esta tesis. Dicho argumento puede resumirse así: al igual que otros operadores lógicos de naturaleza híbrida entre lo intrasistemático y lo extrasistemático —como el predicado transparente de Verdad o la implicación estricta—, operadores unarios como el de negación o los de consistencia e inconsistencia tienen la capacidad de “mostrar” a la vez que “decir” cosas sobre la lógica (jerga wittgensteineana que será justificada en su momento). Cuando una teoría —es decir, una serie o conjunto de fórmulas cerrado bajo la relación de inferencia de una lógica— Γ posee subconjuntos con detonadores, estos detonadores *muestran* aquello con lo cual la lógica subyacente a Γ no es capaz de lidiar. Cuando esto ocurre, la lógica nos provee “conciencia” de sus límites. Por ejemplo, en la lógica clásica toda teoría no trivial Γ explota en presencia de

un conjunto Δ tal que exista $\alpha \in \Gamma \cup \Delta$ y $\neg\alpha \in \Gamma \cup \Delta$. La característica común a todos sus detonadores es el conjunto $\Xi \subseteq \Gamma \cup \Delta$ tal que $\Xi = \{\alpha, \neg\alpha\}$. Por tanto, podemos decir que la lógica clásica nos *muestra* que ella no es capaz de lidiar con contradicciones.

En el mismo capítulo 5 nos aproximaremos a algunas de las reflexiones filosóficas que permite esta interpretación. Una lógica que nos provee conciencia de sus límites resultará ser mucho más valiosa que una lógica sin ella, lo que permite construir un argumento filosófico en contra del programa relevantista y a favor de la aproximación brasileña a las lógicas paraconsistentes (qué cosa entiendo por “valiosa”, es algo que será clarificado en su momento). Además, supone nuevos desafíos para el programa dialecista, pues una de las conclusiones derivadas será la siguiente: que una lógica, con todo y lo liberal que pueda ser, *siempre* debe dejar algo fuera. Y el Principio de No Contradicción puede entonces ser interpretado en un sentido mucho más abstracto del habitual: *tu lógica, si deja algo fuera, no puede hablar acerca de ello*. Y toda lógica trivializable tiene una manera de mostrar aquello que deja fuera, con lo que la afirmación anterior dice que *ninguna lógica puede decir aquello que, en ella, se muestra como lo que ella no puede decir*. Hacia el final sugeriré que *éste* es el *firmissimum omnium principium*, que es la manera en que reinterpreté mi proposición favorita del *Tractatus*: “Lo que *puede* ser mostrado no puede ser dicho” (WITTGENSTEIN, 2001, 4.1212).

1.2. Llenarse de determinación

Aristóteles fue el primer filósofo de la tradición mediterránea en reconocer la necesidad de los primitivos teóricos. La búsqueda de conceptos, leyes o principios fundamentales debe detenerse en algún punto, y este punto *no* puede ser arbitrario. Con los primitivos teóricos debe ser “imposible engañarse” (ARISTÓTELES, 1989, 1005b 10), es decir, “should be terms of which we can expect everyone to have a pre-theoretical understanding.” (KURBIS, 2000, p. 1).

Haciendo caso del sabio consejo del Filósofo, en esta sección presentaré los preceptos y las decisiones metodológicas que he adoptado para sacar adelante esta investigación.

Las ideas que se exponen a continuación servirán, pues, como telón de fondo sobre el cual se desarrollarán los argumentos esbozados en la sección anterior.

1.2.1. Disposiciones idiomáticas

Esta tesis está escrita en español². Se asumen además como idiomas familiares el inglés y el portugués, por lo que citas en dichos idiomas no serán traducidas *salvo* cuando mi lectura se aleje de la literalidad del pasaje. Para todos los demás idiomas se ofrecerán traducciones; más en el caso del francés, y en el caso del griego o el latín contrastadas con una traducción profesional siempre que sea posible.

Esta nota idiomática es importante, ya que en áreas tan íntimamente relacionadas con el lenguaje el *idioma* en el que se piensa y escribe nunca es inocente. Gran parte de la literatura consultada presupone de manera no trivial que es el inglés el idioma en el que se hacen los análisis; por ejemplo, al escribir:

John is not pale

la forma gramaticalmente correcta de disponer los elementos hace posible que en inglés resulte evidente la anfibología entre negación interna y externa, lo que en la lengua escrita puede marcarse con un guión (que, como sabemos, no agrega fonemas a la oración):

John is not-pale

Pero esta anfibología es inexistente en español, y los intentos por reconstruirla resultan artificiales, no porque el adjetivo «no-pálido» sea menos artificial que «not-pale» (ambos lo son, de hecho) sino porque la forma correcta de negar un predicado en español coloca el «no» delante y no detrás de la cópula:

2. Aunque en (las) España(s) el castellano es sólo uno de los varios idiomas que allí se hablan, me atengo a la convención de llamar «español» al idioma que se hablaba en las colonias del Imperio Español y que heredaron los países que luego se formaron a partir de éstas. Es, por tanto, el idioma que se habla en América Latina y que comparte (al menos) un antepasado común con el castellano moderno, que es el castellano del siglo XVI.

Juanito no es pálido

Y no

Juanito es no pálido(?)

En español la anfibología a nivel de lengua hablada entre la negación interna y externa no existe, por lo que las negaciones “internas” no existen sintácticamente, salvo en los casos en que existen construcciones equivalentes con prefijos que, de todas formas, son heredados de lenguas anteriores al español («mortal»/«inmortal», por ejemplo). El español carece de un mecanismo gramaticalmente correcto para negar sintácticamente adjetivos, que sea distinto de la negación de la cópula, esto es, la “negación externa”.

Además, existen inequidades en la riqueza expresiva de ambos idiomas. En inglés, por ejemplo, las palabras «provability» y «probability» sugieren por su morfología ser ambas traducidas al español como «probabilidad». Pero esto es semánticamente válido sólo para la segunda, siendo «demostrabilidad» la traducción apropiada para la primera. No obstante, el adjetivo «probable» sí es homográfico de las dos, pero usarlo indistintamente puede inducir errores lógicos fatales.

En la misma línea, el hablante inglés puede distinguir entre «negation» y «denial», pero el español tiene para ambos conceptos una sola palabra, «negación». El ejemplo a continuación es sugerente:

And the Lord said, Simon, Simon, behold, Satan hath desired to have you, that he may sift you as wheat: But I have prayed for thee, that thy faith fail not: and when thou art converted, strengthen thy brethren. And he said unto him, Lord, I am ready to go with thee, both into prison, and to death. And he said, I tell thee, Peter, the cock shall not crow this day, before that thou shalt thrice **deny** that thou knowest me.

(Lc 22:31-34, King James) (El énfasis es mío.)

Simón, Simón, mira que Satanás os ha reclamado para zarandearos como a trigo; pero yo he rogado por ti para que tu fe no falle; y tú, una vez que hayas

regresado, fortalece a tus hermanos. Y Pedro le dijo: Señor, estoy dispuesto a ir contigo tanto a la cárcel como a la muerte. Pero Jesús le dijo: Te digo, Pedro, que el gallo no cantará hoy hasta que tú hayas **negado** tres veces que me conoces. (Lc 22:31-34, Biblia de las Américas) (El énfasis es mío.)

No existe una manera directa e intuitiva de distinguir en el español entre la negación sintáctica (el inglés «negation») y la negación como acto de habla (el inglés «denial»).

Por esta razón, las discusiones y teorizaciones han sido presentadas para que hagan sentido a un hablante del español, y donde esto no ha sido posible, se ha mantenido el idioma original (inglés o griego principalmente). De igual forma, en general *no* traduzco las citas, pero en los casos que me parecieron más inocentes me tomé la libertad de citar una traducción libre y colocar el original en una nota al pie, para mantener la homogeneidad de la prosa. También me parece importante destacar que en algunos textos donde los originales fueron inaccesibles, he confiado sin reservas en las traducciones disponibles.

1.2.2. La Lógica en diez palabras

En tanto rama de la filosofía, la Lógica es una disciplina que estudia el razonamiento humano con el objetivo de hallar un método para reconocer y producir argumentos válidos. En tanto ciencia³, sin embargo, la Lógica es el estudio sistemático de un cierto tipo de estructuras matemáticas más o menos relacionadas con el problema de la fundamentación de la teoría de números y la demostración formal, con aplicaciones prolíficas en computación e Inteligencia Artificial. Hoy en día ninguna de las dos perspectivas tiene preeminencia obvia sobre la otra: la procedencia histórica de los problemas y su profundidad filosófica es lo que da sentido a los desarrollos técnicos, pero ellos son a la vez la fuente no sólo de las soluciones sino de los verdaderos —y más interesantes— problemas, con lo que puede decirse que ellos sólo cobran sentido cuando han sido expresados matemáticamente. Haciendo enésimo eco de la gastadísima cita de Kant, puede decirse

3. Ciertamente, no en el sentido de *Wissenschaft*; al menos no en el sentido en que Hegel entendía esa palabra.

que la Lógica matemática sin Filosofía es ciega, pero la Lógica filosófica sin Matemática es vacía.

Esta dialéctica entre filosofía y matemática no está del todo resuelta en el discurso con que los lógicos justifican su práctica, y esto se manifiesta como una distancia entre sus eslóganes filosóficos (“estudio del razonamiento válido”) y las excentricidades de sus objetos matemáticos. Aquí es donde me encuentro con la necesidad de presentar una *retórica*, es decir, de volver a contar la historia de cómo se supera esa distancia entre filosofía y matemática y cómo ellas se reúnen en el todo coherente que es la Lógica como ciencia.

Podría decirse que todo este ensayo es un primer esfuerzo por articular esta nueva retórica de la Lógica. Por ejemplo, adoptaré la cautela de distinguir entre *fenómenos lógicos* y *Principios* o “Leyes”, los que son sólo enunciados rimbombantes que dicen si un fenómeno se da o no se da, si es deseable o indeseable, posible o prohibido. A la vez, distingo también entre uno de estos Principios y una fórmula que lo *muestre* (*zeigt*). Por ejemplo, el fenómeno de la no contradictoriedad puede darse en una lógica con negación, conjunción y una semántica de verifunciones bivaluadas, si en ella nunca reciben el valor designado una fórmula y su negación. El Principio de No Contradicción, en ese caso, es el enunciado que dice que esto es así. Y una manera de *mostrar* esto podría ser: $\models \neg(A \wedge \neg A)$.

Este es sólo un ejemplo de los usos lingüísticos *sui generis* que he adoptado, pero me permito colocarlo como ejemplo porque, como veremos, a veces un mismo fenómeno puede ser descrito de varias maneras distintas, y cada una de éstas puede ser ilustrada o mostrada de muchas otras.

1.2.3. Sociología de la Lógica

Reconozco a la Lógica⁴ como una empresa científica, lo que significa que ella se ciñe a la forma general en que se desenvuelve toda ciencia. Para la caracterización de dicha forma general he adaptado el modelo de las ciencias de Thomas Kuhn, según la interpretación que aparece en APABLAZA ÁVILA (2018). En esta sub-sección presentaré la manera en que dicho modelo puede ser aplicado a la Lógica.

La Ciencia en tanto actividad humana se ordena y desenvuelve en *paradigmas*, es decir, marcos de referencia que cumplen con que: “son una interfaz *necesaria* en la relación sujeto-mundo, *modelan* lo que el sujeto ve o entiende [del] mundo y su adherencia implica comunidades (*i. e.* la adherencia nunca es personal ni incluye simultáneamente a todo el género humano o de científicos)” (APABLAZA ÁVILA, 2018, p. 42). Un paradigma comprende cinco elementos⁵ (cf. APABLAZA ÁVILA (2018), pp. 43ss):

Generalizaciones simbólicas Propositiones que son aceptadas de manera fuertemente acrítica por los adherentes al paradigma, y ante las cuales no están dispuestos a sostener dudas o disensiones.

Modelos Metáforas o analogías compartidas que ponen de manifiesto los compromisos metafísicos de la comunidad.

Valores Criterios de evaluación y disposiciones axiológicas que definen las virtudes epistémicas del corpus teórico que maneja la comunidad.

4. Uso la distinción tipográfica entre «Lógica» con mayúscula y «lógica» con minúscula de manera poco sistemática. En general, esta distinción pretende separar la disciplina de su objeto de estudio, cuando hacer dicha separación tiene sentido. También la palabra «lógica», con minúscula, es utilizada para nombrar de manera genérica a los objetos matemáticos que estudia la Lógica. De acuerdo con las reglas gramaticales estándar del español, la mayúscula para este tipo de nombres sólo es requerida cuando forman parte de nombres propios, títulos académicos o cuando corresponden al nombre de una asignatura. Una distinción similar es defendida por Jean-Yves Béziau en BÉZIAU (2010), entre lo que él llama la *lógica como el razonamiento* (con mayúscula) y la *lógica como el estudio del razonamiento* (con minúscula; lo que va en la dirección contraria a la convención asumida aquí). Me permito señalar, por tanto, y a modo de precaución, que *no* estoy siguiendo a Béziau ni en su uso de la mayúscula ni en su identificación entre *lógica* y *razonamiento lato sensu*.

5. Cuatro en la formulación original de Kuhn, cinco considerando su obra tardía.

Ejemplares Casos típicos, realizaciones concretas, problemas solucionados o ilustraciones simples de las consecuencias del corpus teórico, que cumplen una función pro-pedéutica a la hora de introducir al neófito en la comunidad.

Taxonomía lexical Módulo intersubjetivo dentro del cual la comunidad almacena su vocabulario conceptual y lo ordena en jerarquías que permiten luego distinguir entre *clases* excluyentes de entidades llamadas *referentes*.

Las taxonomías lexicales, por su parte, presentan seis características fundamentales: 1) se adquieren mediante el uso, 2) son prerequisite para la formación de cualquier *creencia científica*, a la vez que 3) constriñen el universo posible de tales creencias; 4) sus clases están imbricadas, formando una red de interdefiniciones que, sin embargo, no se solapan; 5) se encuentran más o menos arraigadas biológicamente y 6) proveen expectativas del comportamiento de la naturaleza. Las taxonomías lexicales son las que más fuertemente establecen la conexión entre la disciplina y su objeto de estudio, y son lo que relativiza el concepto temprano de Kuhn de inconmensurabilidad entre los paradigmas. Permiten por tanto la comunicación entre investigadores de paradigmas distintos, y justifican leer a Kuhn como un *relativista morigerado* (APABLAZA ÁVILA, 2018).

Los paradigmas se ordenan en jerarquías. En el nivel más alto se encuentra el *macro-paradigma*, “la aceptación de una serie de compromisos cuya adhesión aglutina a la comunidad general de científicos naturalistas” (APABLAZA ÁVILA, 2018, p. 53). Cuando un paradigma suma compromisos no incompatibles con los de nivel superior, conforma una comunidad de sub-especialidad: por ejemplo, la química dentro de las ciencias naturales, o la química orgánica dentro de la química, etc. Sin embargo, también es posible que dentro de un mismo paradigma de nivel superior convivan paradigmas incompatibles entre sí:

El hecho de que el paradigma determine a los practicantes y no al área de estudio o especialidad como tal hace posible que dos grupos de practicantes (*i. e.* paradigmas) convivan simultáneamente en la misma especialidad o sub-especialidad manteniendo compromisos incompatibles entre sí y, aún así,

siendo ambos científicos. La única condición es que los compromisos específicos de estos paradigmas no contradigan a los presentes en paradigmas de jerarquías superiores. (APABLAZA ÁVILA, 2018, p. 53)

La Lógica en tanto disciplina científica tiene un indiscutible carácter matemático, y por lo tanto pertenece al paradigma de alto nivel de las Ciencias Exactas⁶. Bajo su alero, sin embargo, conviven una serie de paradigmas rivales e incompatibles entre sí: algunas veces estos paradigmas pueden ser identificados con movimientos reconocibles, y que son los “-ismos” habitualmente encontrados en la literatura (como el intuicionismo o el relevantismo); pero también pueden ser más amplios y borrosos, como en los casos de la (así llamada) Lógica Clásica o las Lógicas Paraconsistentes. La lucidez que aporta el modelo kuhneano a la sociología de la Lógica es que permite comprender, por una parte, que las diferencias entre estos paradigmas rivales *no* se limita ni a una diferencia puramente técnica, es decir, de resultados estrictamente matemáticos (como si la diferencia entre dos Lógicas involucrara sólo los teoremas que verifican dos sistemas axiomáticos), ni tampoco a diferencias puramente filosóficas (en el mal sentido: es decir, hermenéutico). En cambio, los paradigmas lógicos se diferencian unos de otros por sus *doctrinas* filosóficas (*generalizaciones simbólicas*, en la jerga kuhneana), sus ejemplares, sus modelos metafísicos, etc⁷. Estas consideraciones deben tenerse presente sobre todo en las reconstrucciones históricas de los capítulos 2 y 3⁸.

Me parece importante hacer también algunas puntualizaciones relativas a las taxonomías y convenciones historiográficas que asumo. En lo concreto, mi reconstrucción

6. Por su evidente distancia de objeto y metodología (y, crucialmente, la disposición metafísica hacia el primero) me inclino a creer que las Ciencias Exactas no deberían quedar subsumidas a las Naturales. Me atrevería a proponer, pues, un modelo en el cual la primera subdivisión (justo por debajo del macro-paradigma de la *Ciencia* a secas) fuera entre Ciencias Naturales y Exactas. Sin embargo, en comunicación personal, Carlo Apablaza se ha mostrado escéptico respecto a este punto. Dirimir en esto es irrelevante para lo que viene a continuación en todo caso, por lo que podemos soslayarlo.

7. El hecho de no poder agotar la lista (o peor: dar una serie de condiciones suficientes y necesarias para reconocer y clasificar un paradigma) es una virtud antes que una debilidad de esta propuesta. Por lo pronto, es la razón por la que la prefiero a otras que me parecen más racionalizadoras, como la de Susan Haack (HAACK, 1991).

8. Junto con Carlo Apablaza estamos trabajando actualmente en un artículo donde presentamos, desarrollamos y defendemos esta caracterización kuhneana de la Lógica.

racional de la historia de la lógica distingue entre *períodos*, *tradiciones*, *escuelas* y *autores*, ordenados de la siguiente forma:

Períodos Que corresponden a coordenadas históricas y geopolíticas.

Tradiciones Más o menos identificables con los paradigmas arriba descritos.

Escuelas Comunidades investigativas mínimas, de directa relación institucional o personal entre sus miembros.

Autores Personas naturales que escriben y trabajan en lo que duran sus vidas.

Estas categorías sólo autorizan el uso de algunos tipos de denominaciones:

1. Para *períodos*, motes estrictamente historiográficos o geográficos: «lógica moderna», «lógica premoderna», «lógica helenística», «lógica china», etc.
2. Para *tradiciones*, historiográficos o conceptuales, siempre y cuando no haya anacronías: «tradición silogística antigua», «tradición escolástica», «tradición modelo-teórica», etc.
3. Para *escuelas*, epónimos naturales o institucionales: «escuela peripatética», «escuela de Bagdad», «escuela de Leópolis-Varsovia», «grupo de Curitiba», etc.
4. Para *autores*, epónimos: «lógica aristotélica», «lógica fregueana», «lógica tarskiana», etc.

Así entonces, cuando utilizo expresiones tales como «la lógica aristotélica», estoy pensando exclusivamente en la obra de (o atribuida a) Aristóteles de Estagira y *no* a toda la tradición silogística antigua, o peor aún, a toda la lógica anterior al siglo XX. Pero a la vez, hago notar que debe entenderse esta taxonomía historiográfica como un esfuerzo y no como una aplicación sistemática.

Un último *caveat*: el relativismo morigerado que presenté más arriba (y al que adscribo) *no* debe confundirse con la posición filosófica conocida como *pluralismo lógico* (a la

que también adscribo). La coexistencia de paradigmas incompatibles dentro de la Lógica como ciencia es un hecho sociológico y ha sido reconocido por la gran mayoría de los historiadores y filósofos de la Lógica; sin embargo, la distinción y disputa entre *monismo* y *pluralismo* lógicos refiere a una toma de posición filosófica respecto del objeto de estudio de la ciencia misma.

Rechazo la tesis historiográfica popular que afirma que el siglo XX fue el escenario de una proliferación de sistemas lógicos (“no-clásicos”) que divergían de un núcleo anterior más o menos unificado y que en su historia había sido objeto de cambios de forma antes que de contenido⁹. Por el contrario, comparto la opinión de quienes han sabido reconocer que el desarrollo de los distintos paradigmas lógicos

[ha] tenido lugar en paralelo más que en serie; pues es saludable recordar que las lógicas “no estándar” se han desarrollado al lado de los sistemas estándar, y también que siempre ha habido críticos no sólo de los sistemas formales específicos, sino de las aspiraciones de la formalización misma.

(HAACK, 1991, p. 15)

Y esto no sólo en la historia reciente de la Lógica sino a todo lo largo de su desarrollo, como lo han atestiguado tanto historiadores como lógicos. Lo que sí puede decirse que reúne a todas las distintas tradiciones lógicas es la convicción de que el objeto de estudio es *único*, y que por lo tanto subyace al desarrollo de la ciencia misma una disputa por la caracterización *correcta* del mismo. El *pluralismo lógico* es la posición contraria, es decir, la que sostiene que, si hay un sentido filosóficamente interesante en el que pueda decirse que hay una lógica *correcta*, entonces ella no es *una* sino que son (necesariamente) *varias*. A la luz de esta posición alternativa es que puede llamarse a los primeros *monistas*, como es lo habitual en el campo actualmente (véase RUSSELL (2016)).

Hacia el final de esta tesis quedará en evidencia cómo algunas de mis conclusiones avalan el pluralismo lógico.

9. Llamo a esta quimera historiográfica el *mito fundacional de la Lógica Clásica*. Podría decir más al respecto, pero este no es el lugar para extenderme sobre el asunto.

1.2.4. Matemática Tipográfica

En esta sección expondré brevemente el tipo de matemática que utilizaré en el desarrollo de este trabajo, y que —a falta de un mejor nombre— llamo *tipográfica*¹⁰.

La ontología de todos los objetos matemáticos es nominalista en un sentido muy fuerte: un objeto matemático es un conjunto de signos posibles, es decir, de marcas gráficas. Estas marcas gráficas están relacionadas entre sí por una relación a la que llamo **identidad literal**, que es su similitud en sus características pictóricas más relevantes, como por ejemplo, entre $\lceil A \rceil$ y $\lceil A \rceil$.

Dentro de una estructura, dos objetos matemáticos **se consideran iguales** (o, por abuso de lenguaje, **son iguales**) si ellos son sinónimos, es decir, si admiten la sustitución *salva veritate*. Si A y B son dos objetos matemáticos, la proposición « $A = B$ » dice que ellos se consideran iguales. Una estructura es, al menos, un conjunto de convenciones de identificación entre objetos, lo que da lugar a los pseudo-objetos de la estructura. Sobre ellos, la definición de operaciones y relaciones se reduce a la instrucción formal de una serie de manipulaciones sígnicas permitidas.

Una **serie** se construye escribiendo objetos matemáticos uno al lado del otro en una línea horizontal que se asume del largo suficiente para contenerlos a todos sin necesidad de quebrar el renglón. Si un objeto matemático aparece en la construcción de una serie, entonces es un **elemento** de la serie. Las series pueden ser infinitas pero sólo si son recursivamente enumerables¹¹.

Cuando varias **series** se consideran iguales si sus elementos son literalmente iguales y sólo difieren en el orden en que aparecen en cada una de ellas, decimos que todas esas series son instancias de un mismo **multiconjunto**, por lo que llamar con el nombre del mismo multiconjunto a cada una de ellas es semánticamente correcto. Cuando varias

10. He incluido en el apéndice B algunas reflexiones explicatorias sobre qué entiendo por matemática tipográfica y qué diferencia tiene con otras concepciones filosóficas de las matemáticas.

11. El uso de la palabra «infinito» es en sentido potencial y no actual. Una serie es infinita si pueden obtenerse para ella tantos elementos discretos como se requieran. Los casos límite en que obtener una serie implica invertir más tiempo que el faltante para el fin del universo, o llegar con la línea horizontal hasta la frontera relativística del cosmos, me traen sin cuidado: pues ninguna serie puede ser llevada hacia donde nadie puede llegar (pues, ¿cómo llega la serie hasta allá entonces? ¿Sola?).

series se consideran iguales si sus elementos son literalmente iguales, sin importar cuántas veces aparezcan en cada una de ellas o en qué orden lo hagan, entonces decimos que todas esas series son instancias de un mismo **conjunto**.

La serie de los números naturales corresponde a la serie de objetos matemáticos constructibles recursivamente siguiendo las reglas de la notación arábica corriente.

1.2.5. La Lógica Matemática

La lógica es el estudio de los razonamientos deductivos desde el punto de vista de la validez de sus argumentos. Un argumento es, típicamente, una serie de aserciones conectadas entre sí de manera tal que hay algunas (llamadas *premisas*) que son entregadas como sustento o justificación para otra(s) (la(s) llamada(s) *conclusión(es)*). El estudio sistemático de la lógica, que en la tradición mediterránea se inicia con las obras de Aristóteles y de Euclides de Megara¹², se caracteriza por hacer abstracción de algunas partes textuales del argumento y conservar otras. Los lógicos medievales llamaron a las primeras *categoremas* y a las segundas *sincategoremas*, es decir, palabras con y sin significado propio. La voz latina «categorema» viene del griego «κατηγορημα», palabra que proviene de las obras lógicas de los estoicos. En las doctrinas de estos últimos, los *κατηγορήματα* pueden ser “algo que se dice de algo, o una cosa susceptible de combinación con otra u otras”, o bien “un *lektón*¹³ defectivo combinable con un caso nominativo en orden a formar una proposición” (KNEALE Y KNEALE, 1972, p. 137)¹⁴. Esta oposición entre lo que tiene significado propio y lo que no Kant la identificó con la distinción entre el *contenido* y la *forma* del argumento, razón por la cual usó y popularizó el nombre de “ciencia formal” para referirse a la lógica, y hoy llamamos *formalización* al proceso mediante el cual transformamos un argumento textual en una expresión simbólica que distingue mediante signos variables y constantes entre *categoremas* y *sincategoremas*.

12. No confundir con Euclides de Alejandría, el matemático.

13. Tecnicismo estoico de difícil traducción, pero que tiene que ver con aquello que las palabras significan o a lo que refieren. Véase KNEALE Y KNEALE (1972, Cap. III, Sec. 4).

14. «Sincategorema» es una palabra construida erróneamente a partir de «categorema», pues su prefijo no quiere significar el griego «σύν-», «unido con», sino el latín «sine», que quiere decir «no teniendo», «sin». En lo sucesivo, utilizo esta palabra como un sustantivo del español, por lo que la declino como tal.

Llamo, por tanto, *sincategoremas* a las constantes de la lógica y *categoremas* a sus variables. Otras palabras que aparecerán a veces para los primeros serán «conectiva» u «operador», sobre todo cuando ello sea impuesto por el uso de otro autor.

Hoy en día usamos la expresión «sistema lógico» (o, por abuso de lenguaje, sencillamente «lógica») para referirnos a una estructura matemática que se obtiene como el resultado de hacer abstracción del ejercicio de *formalización* al plano de lo puramente simbólico.

En todo sistema lógico podemos distinguir tres componentes esenciales:

1. Un *sustrato literal*, es decir, aquello con lo cual están expresados sígnicamente *categoremas* y *sincategoremas* y mediante lo cual se representan las proposiciones.
2. Una *disposición compositiva*, es decir, una manera de construir argumentos usando el sustrato literal, y distinguir en cada uno de ellos entre lo que corresponde a las premisas y lo que corresponde a la(s) conclusión(es).
3. Una *disposición normativa*, es decir, una manera de distinguir entre argumentos válidos e inválidos.

A continuación describo el aparataje matemático completo que utilizaré para construir sistemas lógicos a lo largo de este trabajo.

1.2.5.1. Sustrato literal

Dado que todos los sistemas lógicos que utilizaré serán proposicionales, bastará con considerar sólo un conjunto de variables, que harán las veces de *categoremas*.

Definición 1.1. El conjunto de las variables proposicionales \mathfrak{V}_p se construye de la siguiente forma: cada elemento del conjunto corresponde al signo $\lceil p \rceil$ y un entero positivo en notación arábica y base decimal por subíndice. □

Los *sincategoremas*, por su parte, pueden ser variados.

Definición 1.2 (Signatura). Una *signatura* es un conjunto no vacío de signos tomados de entre los siguientes:

$$\lceil \wedge \rceil, \lceil \vee \rceil, \lceil \neg \rceil, \lceil \sim \rceil, \lceil \rightarrow \rceil, \lceil \perp \rceil, \lceil \circ \rceil, \lceil \bullet \rceil$$

□

Definición 1.3 (Alfabeto). Un *alfabeto* es un conjunto recursivamente enumerable de signos que incluye:

1. *Categoremáticas*: Uno o varios conjuntos de variables de las indicadas en la definición 1.1.
2. *Sincategoremáticas*: Una signatura.
3. Los signos $\lceil \neg \rceil$ y $\lceil \neg \rceil$.

□

Definición 1.4 (Lenguaje Formal). Un *lenguaje formal* \mathcal{L} es un conjunto recursivamente enumerable construido a partir de combinaciones finitas de signos de un alfabeto siguiendo una serie dada de reglas. Los elementos de un lenguaje formal se llaman *fórmulas*.

□

Los nombres de los conjuntos se heredan a través de la estructura. Es decir que si un alfabeto \mathcal{A} contiene el conjunto \mathfrak{V}_p entonces en un lenguaje formal $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}$ construido a partir de \mathcal{A} llamamos «variables proposicionales de $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}$ » a los elementos de \mathfrak{V}_p .

La sustitución sintáctica de la expresión x por a en φ será representada así:

$$\left\| \frac{a}{x} \right\| \varphi$$

Esta notación admite la siguiente iteración, para hacer sustituciones sucesivas:

$$\left\| \frac{a,b,c}{x,y,z} \right\| \varphi = \left\| \frac{a}{x} \right\| \left\| \frac{b}{y} \right\| \left\| \frac{c}{z} \right\| \varphi$$

La notación siguiente representa el conjunto que contiene todas y sólo las sustituciones posibles de x por un elemento de A en φ :

$$\{\varphi' : \left\| \frac{A}{x} \varphi \right\| \}$$

Quiero hacer notar que incluso para introducir símbolos definidos en función de otros, el nuevo signo debe estar previamente incluido en la signatura del alfabeto correspondiente.

Letras latinas y griegas, mayúsculas y minúsculas serán utilizadas a menudo como variables sgnicas cuyo dominio será especificado en cada caso.

1.2.5.2. Disposición compositiva

Los *argumentos* serán expuestos siempre bajo la forma de *secuentes*.

Definición 1.5 (Secuente). Un *secuente* son dos series de elementos de un lenguaje formal separadas por un signo que *no* pertenezca al alfabeto de dicho lenguaje. Este signo se llama *torniquete*. □

Sin embargo, esto no significa que se vaya a utilizar explícitamente el *cálculo de secuentes* como sistema formal, sino tan sólo su sintaxis¹⁵.

Como es habitual, los torniquetes serán los signos $\Gamma \vdash \neg$ y $\Gamma \models \neg$, en ocasiones afectos de subíndices o superíndices para evitar confusiones. Por convención general, usaré mayúsculas griegas como variables de sub-conjuntos y mayúsculas latinas como variables de fórmulas dentro de un secuente. En el caso de las mayúsculas homográficas entre estos dos alfabetos, se asumirá siempre que pertenecen al latino. Las fórmulas aparecerán a menudo separadas por comas, pero estas comas no son objetos matemáticos del secuente.

En contextos formalizables o semi-formalizados (sobre todo al citar obras de otros autores) usaré disposiciones arbóreas (es decir, al estilo de la Deducción Natural de Gentzen) como recurso de la prosa del texto para reproducir argumentos. Esto es decir que

15. Aunque podría decirse que la metalógica utilizada será un cálculo de secuentes, al menos en un sentido respetable de «metalógica».

cada paso inferencial del tipo “premisa 1, premisa 2, por lo tanto, conclusión” (que puede aparecer a su vez como premisa de una inferencia posterior) la representaré así:

$$\frac{\text{premisa 1} \quad \text{premisa 2}}{\text{conclusión}}$$

La línea siempre marca un acto inferencial, haya o no un nombre explícito para dicho acto, o una regla formal precisa que lo justifique.

1.2.5.3. Disposición normativa

En filosofía y en matemática es habitual encontrar el concepto de *validez argumental* usado en dos sentidos principalmente: el primero se refiere a una cierta relación entre premisas y conclusión(es), típicamente (aunque no exclusivamente) asociada con alguna manera de entender la *preservación de verdad*; el segundo se refiere a la posibilidad de hacer explícito el paso de las premisas a la(s) conclusión(es) a través de un proceso identificado típicamente (aunque no exclusivamente) con el ejercicio racional de la *demonstración*. La literatura ha llamado a las disposiciones normativas que rescatan la primera intuición *semánticas*, y a las que rescatan la segunda, *sintácticas*.

En la práctica de la lógica subsiste toda una axiología asociada a ciertos resultados que tienen que ver con poseer disposiciones normativas variadas para un mismo sistema lógico y poder establecer ciertas relaciones entre ellas (las más comunes son los teoremas de Completitud y de Corrección). Por lo tanto, será útil mantener esta distinción en algunos niveles, pero me parece importante poder distinguir un nivel más abstracto que mente sobre las disposiciones normativas en general, y en el cual *una* disposición normativa para un sistema lógico sea simplemente una descripción de qué argumentos (secuentes) serán considerados válidos y cuáles no.

Siguiendo a la tradición, identificaré la validez derivada de una disposición normativa con una relación entre las premisas y la(s) conclusión(es) de los argumentos válidos. Por lo tanto, en cada caso la descripción de la disposición normativa de un sistema lógico será expresada en términos de las propiedades exhibidas por dicha relación, representada por el torniquete usado en sus secuentes.

La forma concreta en que interpretaré la relación entre las disposiciones “semánticas” y “sintácticas” no seguirá el enfoque clásico. En particular, abandono el uso de las palabras “semántica” y “sintáctica” en el sentido descrito más arriba, porque pienso que se trata de una costumbre profundamente equivocada: toda lógica es *sintáctica* por el hecho de estar articulada mediante un lenguaje, y toda disposición normativa es *semántica* pues compromete en algún sentido el significado de los sincategoremas. Llamo, en cambio, a toda disposición normativa una *semántica*, y ordeno estas semánticas en tres niveles metalógicos, parcialmente inspirados en GIRARD (2011a), y que son:

1. NIVEL -1 “ALÉTICO”: Comprende las disposiciones normativas que se comprometen con los conceptos de Verdad y Falsedad. Su criterio de verdad característico es la *preservación de verdad*: un argumento es válido cuando no es posible que sean todas las premisas simultáneamente verdaderas y la conclusión falsa.
2. NIVEL -2 “FUNCIONAL”: Comprende las disposiciones normativas que se comprometen con los conceptos de prueba y de transformación entre pruebas. Su criterio de verdad característico es la *existencia de demostración*: un argumento es válido cuando es posible construir una prueba que termina en la conclusión y comienza en las premisas.
3. NIVEL -3 “INTERACTIVO”: Comprende las disposiciones normativas que se comprometen con los conceptos de juego y estrategia. Su criterio de verdad característico es la *existencia de estrategia ganadora*: un argumento es válido cuando el jugador designado tiene una estrategia ganadora para el juego de la conclusión a partir de las premisas.

El sentido de orden sugerido por Girard es el siguiente: en cada nivel inferior se hace explícito lo que en el nivel superior estaba sólo implícito (GIRARD, 2011a). Mi manera de interpretar esto es que en el nivel 0 está el lenguaje natural, donde todo criterio de validez es implícito; y en el nivel -4, “deóntico” (que no he incluido en esta figura) nada

quedaría implícito: todo estaría a la vista. En ocasiones me referiré a estos niveles por sus números y en otras por sus nombres.

En el apéndice C un breve (y asistemático) ensayo da cuenta de algunas de las reflexiones que me han llevado a adoptar esta arquitectura metalógica.

1.2.6. Otras disposiciones

1.2.6.1. Vocabulario excéntrico

Algunas de las palabras con que me refiero a la jerga matemática pueden no ser conocidas para todos los lectores. Esta subsección detalla algunos de esos conceptos, para que no haya confusiones a lo largo del texto.

Expresiones de uso corriente en matemáticas y que en inglés se redactan, por ejemplo, así: $\lceil \lambda\text{-calculus} \rceil$ serán escritas usando la convención del guión pero invirtiendo el orden, para respetar las reglas gramaticales del español: $\lceil \text{cálculo-}\lambda \rceil$ y no $\lceil \lambda\text{-cálculo} \rceil$.

La palabra inglesa «singleton» será traducida como «singulete».

La palabra inglesa «turnstyle» será traducida como «torniquete».

Llamo *función de campo* a una función con dominio y codominio iguales. Dicho conjunto es el *campo* de la función, naturalmente.

1.2.6.2. Verifunciones

A lo largo de este trabajo utilizaré una notación especial para verifunciones (funciones veritativas). La razón para esta elección es hacer lo más explícito (literal, es decir, visual) posible que se trata de operaciones algebraicas entre elementos desprovistas de toda intención. La notación para verifunciones que utilizaré está inspirada en la que introdujo Wittgenstein en el *Tractatus* (WITTGENSTEIN, 2001, 4.442; 5.101).

Una verifunción será expresada como una *matriz*. Dicho en simple, esta matriz es resumen de una tabla de verdad dada según un formato estándar.

Toda verifunción es una función de campo sobre un conjunto de valores V , con un valor distinguido $D \subset V$. Para verifunciones binarias el campo es, como es habitual:

$$V = \{1, 0\}, D = \{1\}$$

La función unaria $(1 \ 0)(x)$ es la función identidad.

Una función binaria $(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix})(x, y)$ asigna:

1. $a = 1 \times 1$
2. $b = 1 \times 0$
3. $c = 0 \times 1$
4. $d = 0 \times 0$

Es decir, la matriz $(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix})(x, y)$ es una forma “en pequeñito” de escribir la tabla de verdad:

$(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix})(x, y)$	1	0
1	a	b
0	c	d

Entonces, por ejemplo, a la verifunción $(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix})(x, y)$ le corresponde la tabla de verdad:

$(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix})(x, y)$	1	0
1	1	0
0	0	0

Hacer esta distinción es importante, porque queremos que $(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix})(x, y)$ sea sólo la verifunción, conceptualmente distinta de la *conjunción* lógica.

Capítulo 2

La Negación

La Negación se dice en muchos sentidos, pero entre todos esos sentidos, al menos en dos. El primero es la negación *sintáctica*, es decir, el acto de marcar sígnicamente que una cierta construcción lingüística es la *negación* de otra, como cuando en español escribimos «No está nublado» y decimos que hemos negado la oración «Está nublado». El segundo es la negación como *acto de lenguaje*, y en éste, muchos casos subsidiarios son posibles: por ejemplo, cuando alguien pregunta «¿Quién dejó abierta la llave del baño?» y otra le responde «Yo estoy aquí sentada desde la mañana», sin mentar ninguna negación sintáctica pero *dando a entender* que ella no dejó el agua corriendo¹. Sin duda que las negaciones sintácticas sirven para negar ilocutivamente, pero de ninguna manera agotan su significado en esta posibilidad.

No todas las negaciones sintácticas ni todas las negaciones como actos de lenguaje son interesantes para la lógica. El propósito, pues, de este capítulo es delimitar aquello que sí será relevante para nosotros, sobre todo cuando llegemos al momento de distinguir entre los fenómenos relacionados con la negación y el fenómeno particular de la trivialización o explosión, que es más propiamente el que nos interesa.

1. El español no tiene dos palabras para distinguir entre la negación sintáctica y la negación como acto de lenguaje, pero otros idiomas sí. Por ejemplo, el inglés tiene el verbo «negate», que es más literalmente sintáctico, y «deny», que es propiamente el acto de lenguaje de negar algo. Una traducción literal del verbo inglés «deny» existe en español, y es «denegar». Sin embargo, esta palabra se usa sobre todo en el contexto jurídico, a diferencia del verbo inglés, que tiene un uso más secular. Véase la sub-sección 1.2.1, el ejemplo con las traducciones de la Biblia.

2.1. El significado de la Negación

La determinación del significado de la Negación es un problema filosófico, lógico y lingüístico respetablemente difícil. Ante él, uno no está en mejor posición que Aquiles en su carrera contra la tortuga; en muchos casos, ni siquiera sabríamos dónde dar el primer paso. Por lo tanto, es necesario abordar el problema con una estrategia distinta a la confrontacional. A veces la mejor (o la única) manera de ganar una carrera es dar una buena razón para no correrla.

Siguiendo a SYLVAN (1999), caracterizaré a la Negación como un *determinable* (inglés: «determinable»), susceptible de tener distintos *determinantes* (inglés: «determinates»)². Es decir, algo con el atractivo encanto de lo posible: *a priori* indeterminado, pero múltiplemente determinado *a posteriori*. En palabras del autor,

The determinable-determinate distinction develops from dictionary senses. *Determinable* means that which is ‘capable of being determined; proper to be determined’, and the *determinants* are what are properly so determined, the specific forms. According to the miniature [sic] theory of logical determinables, several key logical notions—most of the main logical particles—are determinable in character, with more specific more determinate kinds falling under a comprehensive determinable cover, somewhat as various more determinate colours fall under the determinable *colour*. Negation is such an item, with the one covering determinable function, a function naturally (and so far trivially) that of negating in some way[...]. Among many statemental determinates, for example, are connexive, classical, intuitionistic, orthological, relevant and other negations. (SYLVAN, 1999, p. 300)

Abordar el problema del significado de la Negación desde esta perspectiva es útil para nuestros propósitos, porque no impone ninguna exigencia *a priori* para que algo aplique como un determinante de cierto determinable: “logical determinables are universals of a kind, which their determinates do resemble, somewhat as exemplars resemble forms (though without problematic participation relations)” (SYLVAN, 1999, p. 300). Particularmente importante en el caso de la Negación, puesto que debe permanecer abierta la

2. Uso ‘determinante’ en lugar de ‘determinado’. Véase la cita del autor, donde esta elección queda justificada. Se trata, con todo, de una cuestión de mera decisión terminológica.

posibilidad de defender, como Sylvan, que no haya una propiedades distintivas del determinable, ni que tampoco existan propiedades comunes que identifiquen de manera suficiente y necesaria a sus determinantes. En la misma línea, nos da razones suficientes para restarnos de correr la carrera: los determinantes, al presentar condiciones suficientes pero no necesarias, nos permiten entrar en el campo sin cerrarlo.

La teoría del significado de la Negación que presentaré en esta sección pretende tener un carácter completamente general: ella busca abarcar la idea general de Negación sin distinguir entre lenguajes naturales y artificiales. Cada negación en cada uno de los lenguajes posibles es un determinante de la Negación como determinable. Nótese que una cualidad *común* a todos los determinantes no constituye que una cualidad *propia* del determinable. En general, una cualidad *propia* del determinable debería ser una *condición necesaria* para que un operador cuente como determinante de la negación, pero una cualidad sólo común a muchos determinantes podría no ser exigida para otros.

Este trabajo no versa sobre la Negación, lo que significa que el determinable como tema de reflexión nos es indiferente. En cambio, lo que necesitamos es una caracterización general para *ciertos* determinantes. Ellos incluyen —pero no agotan— las negaciones usualmente encontradas en la lógica, y muy particularmente las que nos interesan, que son las relacionadas con el fenómeno de la Explosión. Y todos ellos quedan parcialmente determinados por las siguientes dos condiciones necesarias. Si A es un objeto susceptible de ser negado y $\tilde{n}()$ una función apropiada para dicho objeto³, entonces

Dependencia Para que $\tilde{n}()$ sea una negación, el significado de $\tilde{n}(A)$ debe depender del significado de A .

Diferencia Para que $\tilde{n}()$ sea una negación, el significado de $\tilde{n}(A)$ no puede ser *exactamente* el mismo que el de A .

3. El signo \tilde{n} deriva de una forma antigua de abreviar la combinación $\ulcorner nn \urcorner$ escribiendo una $\ulcorner n \urcorner$ encima de la otra. Se trata de una letra característica del alfabeto español. Pero también lo he visto utilizado en la escritura *slang* del portugués brasileño para abreviar el adverbio de negación «*não*». Me pareció que había allí coincidencias idiosincrásicas suficientes para escogerlo como signo genérico de la función de negación.

La primera de estas dos condiciones deriva directamente de la definición de una negación como una función⁴. Por otro lado, comoquiera que interpretemos $\tilde{()}$, es claro que el significado intuitivo de lo que es una negación nos obliga a aceptar que \tilde{A} *no puede ser exactamente lo mismo que A*. No sólo porque, si A y \tilde{A} fueran sustituibles *salva veritate*, entonces no habría razón alguna para usar \tilde{A} , sino porque además la Negación debería, conceptualmente, imponerse a través de un concepto mínimamente negativo.

Dicho sea de paso, obsérvese el uso de la expresión «exactamente»: la condición de diferencia no impide que la función tenga puntos fijos, sino que sólo excluye la posibilidad de que ella sea la función identidad, es decir, *negar* no puede ser una operación idempotente. En una jerga matemática algo más seca, pero más precisa, las dos condiciones dicen⁵:

Dependencia Una negación no es una función constante.

Diferencia Una negación no es la función identidad.

Pienso que **Dependencia** y **Diferencia** son dos condiciones separadamente necesarias para que un operador lógico pueda ser llamado razonablemente una negación. Aunque me parece una afirmación lo suficientemente obvia como para no necesitar justificación, a lo largo de este trabajo encontraremos numerosa evidencia en favor de ella. Por lo tanto, en lo que queda de esta sección me permitiré introducir algo de vocabulario matemático del que habremos de servirnos en lo sucesivo.

Función y Operación La distinción entre *función* y *operación* muchas veces no es ni evidente ni necesaria para los matemáticos. Incluso se incurre en reducciones simplistas del tipo: “una *operación* es una función que envía tuplas de objetos a un único objeto”, como si la aridad fuera lo único distintivo entre una función a secas y una operación. Esto,

4. Algo que defenderé en la sección siguiente; por lo pronto, nótese que en el lenguaje natural la estructura correcta de predicación es: «negación de...».

5. Más adelante encontraremos todavía una caracterización más de estas dos condiciones. Véase la definición 4.15, página 120.

sin embargo, es filosóficamente insuficiente, al menos para lo que a nosotros nos interesa. Es necesario ensayar una distinción un poco más fina.

Consideremos la ecuación siguiente:

$$2 + 3 = 5$$

El significado del signo $\lceil + \rceil$ usado en la expresión a la izquierda del signo de igualdad en esta ecuación puede caracterizarse de dos maneras: la primera es afirmar que este signo representa una *operación* que transforma dos elementos (el 2 y el 3) en un tercer elemento (el 5); la segunda es afirmar que este signo representa una *función* que envía el par $\langle 2, 3 \rangle$ al valor 5. Ninguno de estos dos significados del signo $\lceil + \rceil$ se reduce al otro, pero es evidente que ellos están íntimamente relacionados: toda operación define una función, a la vez que toda función parece estar determinada por una operación. Dicho en términos un poco más informales, la *operación* es una actividad, mientras que la *función* es el mapeo de todas las posibles aplicaciones de la operación y por lo tanto es un objeto conjuntista (pares ordenados). Razón por la cual, en general, las operaciones serán nombradas con *verbos* y las funciones con *sustantivos*. En particular: **negar** es una operación, **negación** es una función.

Determinación e infradeterminación Una función es *determinada* por sus argumentos cuando a cada uno de ellos le corresponde *una* única imagen, y es *infradeterminada* por sus argumentos cuando conocer el valor de éstos no es suficiente para conocer el valor de cada imagen. En matemáticas, un ejemplo de función determinada es:

$$x^2 = y$$

Dado que a cada valor de x le corresponde un único valor x^2 que es su cuadrado. Pero la función inversa,

$$\sqrt{x} = y$$

Es infradeterminada, porque la raíz de un número puede ser positiva o negativa. En la jerga matemática habitual, una función determinada es una *inyección*.

Involución o idempotencia Una operación $\alpha()$ es *involutiva* o *idempotente* si al cabo de un número dado de iteraciones de su aplicación, ésta se cancela (esto es, devuelve el valor original). En términos más formales: $\alpha()$ es *involutiva* si existen $0 \leq m < n$ tales que $\alpha^n(A) = \alpha^m(A)$, donde $\alpha^k(A)$ es la iteración de $\alpha()$ k veces sobre A . Si $\alpha()$ es una función involutiva, diré que ella *tiene un ciclo de involución* (n,m) cuando n y m sean los dos números que verifican la condición dada.

En matemática estándar la función $-(\cdot) : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ que envía cada número a su inverso aditivo es idempotente, y tiene ciclo de involución $(2,0)$: al cabo de dos iteraciones, devuelve el argumento original.

$$-(2) = -2$$

$$-(-2) = 2$$

El hecho de que los enteros menores que 0 reciban actualmente el nombre de *negativos* ha hecho que esta función sea conocida habitualmente con el nombre de «negación». Como veremos en la sección 2.4, este (ab)uso lingüístico está a la base de una enojosa cantidad de prejuicios en torno a las propiedades de la negación lógica.

Fuerza lógica Una relación es *expresión de fuerza* cuando es un orden parcial sobre la estructura de sus relata. En términos precisos, $\leq \subseteq F$ es un orden parcial sobre los elementos de F siempre y cuando:

1. \leq es reflexiva: $x \leq x$.
2. \leq es antisimétrica: si $x \neq y$ y $x \leq y$, entonces no se da $y \leq x$.
3. \leq es transitiva: si $x \leq y$ y $y \leq z$ entonces $x \leq z$.

De un sistema consecucional donde la relación de inferencia \vdash sea un orden parcial diremos que esta última es expresión de *fuerza lógica*. Una operación lógica $\alpha()$ es *más*

fuerte que otra $\beta()$, si en un sistema consecucional de esta clase se tiene que

$$\alpha(A) \vdash \beta(A)$$

Al momento de hablar de funciones lógicas en general utilizaremos siempre comparativos relativos: «más fuerte *que*», «más débil *que*». En la literatura es habitual encontrar las expresiones «negación fuerte» y «negación débil», donde estos comparativos absolutos refieren a la negación de la lógica clásica (HORN, 2001). Esta convención me resulta moleestamente ideológica, por lo que *no* la seguiré.

Monotonía Una operación (y, por abuso de lenguaje, la función que ella define) es *monótona* si su aplicación conserva el orden de sus argumentos. Considérese la función $\alpha : F \longrightarrow G$ y las relaciones de orden parcial $\leq_F \subseteq F$ y $\leq_G \subseteq G$. Vamos a decir que la función $\alpha()$ *crece monótonamente* sobre el isomorfismo $\leq_{F \cong G}$ si tenemos que: si $a \leq_F b$ entonces $\alpha(a) \leq_G \alpha(b)$. En cambio, diremos que la función $\alpha()$ *decrece monótonamente* sobre $\leq_{F \cong G}$ si tenemos que: si $a \leq_F b$ entonces $\alpha(b) \leq_G \alpha(a)$.

La noción de decrecimiento monótonico captura el concepto lógico de *contraposición*, pero es de naturaleza mucho más general, como tendremos oportunidad de demostrar⁶.

2.2. Negación y Oposición

Aristóteles, siempre tan cuidadoso de no pisarse su propia cola, define «afirmación» y «negación» *sin* usar los adverbios negativos del griego⁷. Para conseguirlo echa mano de dos preposiciones cuya oposición es semántica y no sintáctica: « $\kappa\alpha\tau\acute{\alpha}$ » (que Candel Sanmartín traduce por «unido a») y « $\acute{\alpha}\pi\acute{o}$ » («separado de»). Llega así a la siguiente definición de afirmación y negación⁸:

6. Por lo pronto, véase la nota 13 del capítulo 4, página 119.

7. En filosofía siempre es sensato seguir el consejo siguiente: si no sabes por dónde comenzar, comienza por Aristóteles.

8. El texto griego de referencia en ambas citas es MINIO-PALUELLO (1974).

Una afirmación («κατάφασις») es la aserción de algo unido a algo («ἀπόφανσις τινός κατὰ τινός»), y una **negación** («ἀπόφασις») es la aserción de algo **separado de** algo («ἀπόφανσις τινός ἀπὸ τινός»).

(ARISTÓTELES, 1994, 17a 25) (El énfasis es mío.)

Ackrill abusa, en mi opinión, de la expresividad de su idioma para hacer una traducción mucho más osada del mismo pasaje y elige los verbos «affirm» y «deny» para reconstruir el texto aristotélico⁹:

An affirmation («κατάφασις») is a statement affirming something of something («ἀπόφανσις τινός κατὰ τινός»), a **negation** («ἀπόφασις») is a statement **denying** something of something («ἀπόφανσις τινός ἀπὸ τινός»).

(ARISTÓTELES, 1995, 17a 25) (El énfasis es mío.)

Aristóteles marca la distinción entre afirmación y negación con preposiciones, que son palabras de significado mucho más abstracto que los adjetivos (en Candel Sanmartín) o los verbos (en Ackrill)¹⁰. Sin embargo, es claro que en su elección persiste la idea de que afirmación y negación deben tener significados *opuestos*.

Los *opuestos* («ἀντικειμήνα») son un tecnicismo lógico aristotélico presentado en *Categorías*. Allí el filósofo distingue, además de la no marcada diferencia entre afirmaciones y negaciones, otros tres tipos de oposiciones (en itálica la traducción de Candel Sanmartín (ARISTÓTELES, 1994); entre paréntesis la expresión griega según la edición de Minio-Paluello (MINIO-PALUELLO, 1974)):

1. Los opuestos *como lo respecto a algo* («ὡς τὰ πρὸς τι»)
2. Los opuestos *como los contrarios* («ὡς τὰ ἐναντία»)
3. Los opuestos *por privación y posesión* («ὡς στῆρεσις καὶ ἔξις»)
4. Los opuestos *como la afirmación y la negación* («ὡς κατάφασις καὶ ἀπόφασις»)

9. Véase la sección 1.2.1.

10. Más aún, se trata de definiciones casi triviales, desde el momento en que «afirmación» y «negación» traducen, en este pasaje, a los nombres «κατάφασις» y «ἀπόφασις», «lo-dicho-junto» y «lo dicho-separado» respectivamente.

En la teoría lógica de Aristóteles el concepto de *oposición* es un primitivo teórico. De manera notable, Aristóteles *no* da una definición de lo que es para dos cosas “ser opuestas”, sino que en el capítulo 10 de *Categorías* se limita a dar ejemplos de cada oposición (11b 20-23) para luego distinguir las entre ellas (11b 24-13b 35). Lo mismo ocurre en el capítulo 10 del libro Δ de *Metafísica*.

La palabra griega empleada por Aristóteles para designar a los opuestos, «ἀντικειμήνα», tiene una marca característica de la negación en la gramática de este idioma: el prefijo «αντι-». Se trata de un componente que también aparece en las dos palabras más importantes de la tradición aristotélica para la filosofía de la negación: «ἐναντία» «contrariedad», y «ἀντίφασις», «contradictoriedad».

Es notable en el Estagirita la observación de que allí donde hay la negación de otra cosa (una proposición, un concepto), entre ambas se da “una cierta” relación. Vamos a llamar a esta relación con el nombre de **oposición**.

Introduzcamos un poco más de terminología. Desde el momento en que toda negación es negación “de algo” (esto a nivel tanto gramatical-sintáctico como semántico), ella aparece como una *función* cuyo campo son tanto los conceptos (expresables en español sea por un sustantivo, un adjetivo sustantivado o un grupo nominal) como las proposiciones (en un sentido general, es decir, como lo que sea que corresponda al referente de las oraciones en indicativo). Llamo *negatum* a “lo negado”, el argumento de la función y *negandum* al resultado de negarlo, su imagen. De manera que en

Luke no conoció a su padre

El *negatum* es «Luke conoció a su padre» y el *negandum* es «Luke no conoció a su padre». La palabra «negación» queda así reservada para referirse de manera exclusiva a la “función” de negar.

La relación que verifica en cada caso el *negandum* con su respectivo *negatum* se llama **oposición**¹¹. El valor de distinguir entre la oposición y la mera relación funcional entre

11. Nótese que la relación ha sido definida, por el momento, sólo en una dirección: del *negandum* al *negatum*.

negatum y *negandum* que proporciona la negación es que luego será iluminador poder afirmar que algo es equivalente a la negación de otro algo si entre ellos se verifica la relación de oposición, aunque no haya una marca sintáctica. Un ejemplo que ya ha aparecido de esto más arriba es el par «unido a»/«separado de»¹². Nótese que, desde la perspectiva gramatical, el nombre de estos pares es *antónimos*, voz española que deriva del griego «ἀντῶνυμος» y en la que aparece la partícula «αντι-».

La negación es una función de campo, es decir, el tipo de su valor es siempre el mismo que el de su argumento. Sin embargo, hemos visto más arriba que lo negable pueden ser tanto conceptos como oraciones completas: «calvo» es el *negandum* de «tener pelo» y «Luke no conoció a su padre» es el *negandum* de «Luke conoció a su padre».

Esto sugiere la distinción entre *dos* negaciones, tradicionalmente identificadas como **negación interna** (de conceptos) y **negación externa** (de oraciones completas) (HORN, 2001). La distinción proviene, en efecto, del mismo Aristóteles, quien distingue entre *κατάφασις* y *ἀπόφασις*, *afirmación* y *negación*, pero también entre *ὄνομα* y *ἄνῳνον*, los términos *definido* e *indefinido* de la tradición posterior¹³. Esto le permite presentar las cuatro combinaciones posibles que ejemplifica así (ARISTÓTELES, 1994, 19b 27-30) (el griego es de MINIO-PALUELLO (1974); el español es mío):

1. «ἔστι δίκαιος ἄνθρωπος» («es justa [la] persona»)
2. «οὐκ ἔστι δίκαιος ἄνθρωπος» («no es justa [la] persona»)
3. «ἔστιν οὐ δίκαιος ἄνθρωπος» («es no justa [la] persona»)

12. La oposición entre «unido a» y «separado de» puede volverse explícita si parafraseamos ambos conceptos con ayuda de una analogía geométrica, como expresando la ausencia o presencia de una “distancia” (conceptual, si se quiere). Esto porque el par «ausencia»/«presencia» puede a su vez parafrasearse en la oposición explícita «no existencia»/«existencia». Pero esta paráfrasis aproximativa tiene, por lo pronto, el resultado indeseado de hacer aparecer a la *afirmación* aristotélica (la *aserción de algo unido a algo*) como *negandum*. Con todo, se trata de una posibilidad abierta sólo en el caso del español. En el griego dicha paráfrasis no puede hacerse. Prueba de ello es que, según la terminología de Aristóteles, la oposición entre afirmación y negación es distinta a la oposición entre privación y posesión, categoría en la que cabe el par «presencia»/«ausencia».

13. Nótese que tanto en español como en griego la segunda palabra de la pareja lleva una marca de negación sintáctica.

4. «οὐκ ἔστιν οὐ δίκαιος ἄνθρωπος» («no es no justa [la] persona») ^{14 15}

La distinción entre negaciones internas y externas resulta del todo natural cuando se la presenta de esta forma, y por su fertilidad descriptiva hemos de conservarla. Tristemente, hoy en día no es habitual su uso en los estudios lógicos, y la razón para esto es que la lógica clásica la desprecia. En efecto, los primeros filósofos analíticos pretendieron reducir la negación interna a la externa mediante una generalización de la operación lógica conocida como *obversión*. Cuando se obvierte un juicio categórico, se cambia su valor cuantitativo y se niega su predicado. El resultado es un juicio equivalente al primero, como es fácil de constatar en los ejemplos siguientes:

1. «Todos los estudiantes son talentosos» ≡ «Ningún estudiante es no talentoso»
2. «Algunos estudiantes son talentosos» ≡ «Algunos estudiantes no son no talentosos»

La obversión de los lógicos clásicos consiste en considerar equivalentes la predicación de un concepto negativo y la negación de la correspondiente predicación positiva:

1. «La persona es no justa» ≡ «La persona no es justa»
2. «Luke es huérfano» ≡ «Luke no tiene padres»
3. «Deoxys es un extraterrestre» ≡ «Deoxys no es del planeta tierra»

14. Candel Sanmartín (ARISTÓTELES, 1994) traduce «ἄνθρωπος» como «hombre».

15. La sintaxis del griego y del español permite señalar la diferencia entre negación interna y externa de la misma manera, es decir, por la posición del adverbio; sin embargo, el inglés no tiene la misma flexibilidad, y es lo que obliga a Ackrill a tener que hacer una traducción anfibológica, notada sólo en la lengua escrita pero no en la hablada (ARISTÓTELES, 1995, p. 85):

- a) «ἔστι δίκαιος ἄνθρωπος» («a man is just»)
- b) «οὐκ ἔστι δίκαιος ἄνθρωπος» («a man is not just»)
- c) «ἔστιν οὐ δίκαιος ἄνθρωπος» («a man is not-just»)
- d) «οὐκ ἔστιν οὐ δίκαιος ἄνθρωπος» («a man is not not-just»)

Como señalé en la sub-sección 1.2.1, esta diferencia hace que el tratamiento lógico de las negaciones internas y externas sea un poco más idiosincrásico en los autores anglófonos, pues ellos pueden dar cuenta (o deben hacerse cargo) de una anfibología que para ellos es del todo natural, pero para nosotros no.

Para la aproximación conjuntista a la semántica alética (propia pero no exclusiva de la ideología clásica) esto está garantizado por la interdefinición del conjunto complemento (la negación interna de la teoría de conjuntos) con la negación del predicado de pertenencia (su negación externa): si A es una variable de conjuntos dentro de un universo acotado, entonces las teorías de conjuntos clásicas validan la identidad:

$$\bar{A} = \{x : x \notin A\}$$

Con lo que los juicios de negación interna y externa resultan equivalentes:

1. $a \notin A$ (« a no es un A »)
2. $a \in \bar{A}$ (« a es un no A »)

Sin embargo, la exigencia de un universo acotado hace que estas negaciones internas no sean realmente *indefinidas* o *infinitas*, por lo que la operación de complementariedad conjuntista no es una genuina negación interna, e identificarlas es lisa y llanamente un error. Cuando la negación interna es interpretada como infinita (lo que resulta natural en el lenguaje cotidiano) podemos reconocer de inmediato la diferencia tanto de sentido como de verdad entre las dos oraciones que aparecen a continuación, pero en una formalización conjuntista o bien a) ambas serán indistinguibles (con un universo que contenga tanto números como cosas susceptibles de tener un color), o bien b) al menos una de ellas será un sinsentido, por referir a una propiedad que no aplica para los elementos considerados.

1. El número 2 no es azul.
2. El número 2 es no azul. (¿De otro color, entonces?)

En la práctica es poco lo que diremos sobre la negación interna, pero mantener la distinción a la vista es crucial para comprender, sobre todo, las observaciones de la sección siguiente.

2.3. Sistemas de Oposiciones

La relación de oposición expresa lo que es para A y $\tilde{n}(A)$ ser **diferentes**. Que el *negandum* se oponga a su *negatum* quiere decir que, de alguna manera, ellos *no se dan juntos* (con arreglo al espacio y al tiempo, o al lugar lógico, o a cualquier otra determinación). Por lo tanto, cada vez que esta misma relación sea manifiesta entre dos elementos, podremos decir que ellos *se oponen*, aunque no haya uno que pueda ser identificado como la negación sintáctica del otro.

Este sentido de «opuestos» corresponde a lo que Aristóteles llama «contrarios» («ἐναντίως») ¹⁶, y que la tradición posterior a él consagró en el *Sistema de Oposiciones*. Se trata de un sistema de determinaciones e infradeterminaciones que se despliegan entre proposiciones, de acuerdo con dos relaciones primitivas y dos relaciones derivadas. Las relaciones primitivas son las que Aristóteles llama «ἐναντία» y «ἀντιφασεις», que Boecio traduce por «contrariedades» y «contradicción» ¹⁷ y que pasan consecuentemente al español como «contrariedad» y «contradicción». Las relaciones derivadas, ausentes en el sistema aristotélico, fueron llamadas por los lógicos latinos y escolásticos «subcontrariedades» y «subordinatio», que llegan al español como «subcontrariedad» y «subordinación» respectivamente.

De acuerdo con Aristóteles, la diferencia entre contrarias y contradictorias tiene que ver con el grado de determinación con que se dan sus elementos. Las contrarias “no pueden estar presentes a la vez en lo mismo” (ARISTÓTELES, 1994, 1018a 25), pero “[no] es necesario que siempre una de las dos cosas sea verdadera y la otra falsa: pues, existiendo Sócrates, será verdadero lo uno y falso lo otro, pero, no existiendo, ambas cosas serán fal-

16. Y no «ἀντιχειμήνα», que, como ya he dicho más arriba, corresponde a la palabra aristotélica que habitualmente se traduce por «opuestos».

17. La elección de estas palabras es particularmente afortunada, pues de alguna manera conserva la estructura morfológica de las palabras griegas. «ἐναντία» es $\Gamma_{\text{en}} \neg + \Gamma_{\text{anti}} \neg$, lo que “contiene” o “lleva en sí” la marca de negatividad expresada por la partícula $\Gamma_{\text{anti}} \neg$ en griego; mientras que «ἀντιφασεις» es $\Gamma_{\text{anti}} \neg + \Gamma_{\text{fasis}} \neg$, lo que “se dice” o “se habla” de esta manera negativa. (Quizás una traducción todavía más literal de «ἐναντία» hubiera sido «en-cuentro», pero esta palabra tiene connotaciones que claramente no tienen que ver con la noción de oposición que estamos intentando rescatar.) Así, la partícula latina $\Gamma_{\text{contra}} \neg$ se convierte en la traducción casi literal de la partícula griega $\Gamma_{\text{anti}} \neg$.

sas” (ARISTÓTELES, 1994, 13b 16)¹⁸. Con las contradictorias, en cambio, “necesariamente cada una de las dos ha de ser verdadera o falsa” (ARISTÓTELES, 1994, 17b 26)¹⁹.

Aunque Aristóteles sí reconoció la tercera relación de oposición entre “las que versan sobre los universales de manera no universal”, que pueden ser “a la vez verdaderas” (ARISTÓTELES, 1994, 17b 29), no hallamos un nombre especial para esta oposición en su obra. Apuleyo, en su traducción del libro *De la Interpretación*, las llamó «alterutrae» (BÉZIAU, 2016), pero Boecio fue cuidadoso en conservar la homografía y las llamó «sub-contrarias». El uso del prefijo «sub-», que significa “debajo” o “bajo de”, está justificado por la ubicación espacial de la relación en el diagrama de la figura 2.1, de inspiración peripatética pero cuya versión canónica fue introducida por el autor latino²⁰.

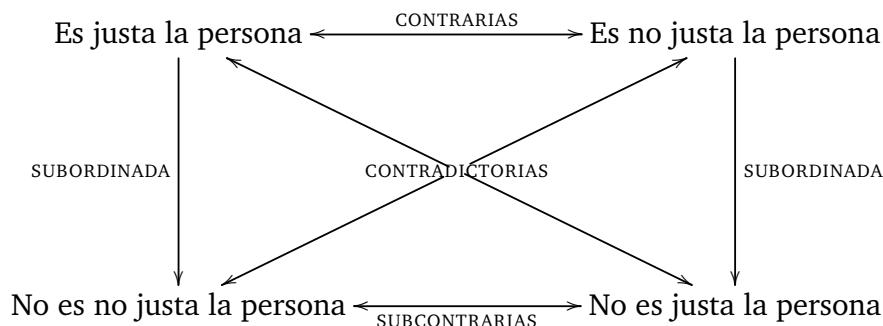


Figura 2.1: Cuadro clásico de Oposiciones

Desde una perspectiva aristotélica es claro que la contrariedad es anterior a la sub-contrariedad: dos objetos son sub-contrarios sólo cuando resultan ser los contradictorios

18. El pasaje original dice: “Tal cosa, sin embargo, podría parecer que acontece sobre todo en los contrarios que se dicen en combinación: en efecto, el que Sócrates esté sano es lo contrario de que Sócrates esté enfermo; pero tampoco en estos casos es necesario que siempre una de las dos cosas sea verdadera y la otra falsa: pues, existiendo Sócrates, será verdadero lo uno y falso lo otro, pero, no existiendo, ambas cosas serán falsas”. Así, mi *addendum* fue sólo para reemplazar el «tampoco», y que la oración tuviera sentido completo en el nuevo contexto.

19. En griego: “ὅσαι μὲν οὖν ἀντιφάσις τῶν καθόλου εἰσι καθόλου, ἀνάγκη τὴν ἑτέραν ἀληθῆ εἶναι ἢ ψευδῆ” (MINIO-PALUELLO, 1974). Ackrill traduce: “Of contradictory statements about a universal taken universally it is necessary for one or the other to be true or false” (ARISTÓTELES, 1995). Aunque la lectura literal del pasaje todavía es controvertible, es claro que aquí lo que quiere decir es que, no pudiendo ser los dos a la vez verdaderos (pues son contrarios), necesariamente uno de los dos debe serlo y el otro no.

20. Aquí desplegado con los ejemplos aportados por el Estagirita en el capítulo 10 de *De la Interpretación* y no con juicios categóricos, como es habitual. En HORN (2001), figura (12) del capítulo 1, se reproduce este mismo cuadro “aristotélico” de oposiciones.

de dos contrarios. Pero podemos decir todavía más: la contradictoriedad también se reduce a la contrariedad, por cuanto la contradictoriedad no es más que la contrariedad en un espacio lógico de sólo dos alternativas, es decir, *cuando se excluye un tercero*. Dicho de otro modo, en espacios lógicos de dos alternativas la oposición de *contrariedad* y la de *contradictoriedad* son indistinguibles. En el libro Γ de *Metafísica*, durante la célebre defensa del Principio de No Contradicción, Aristóteles habla consistente y sistemáticamente de «los contrarios» («ἐναντία») cuando se refiere a aquello que no puede darse simultáneamente en el mismo sujeto, mientras que «contradicción» («ἀντίφασις») es más bien un calificativo para la opinión de quienes niegan esto («δόξα ἢ τῆς ἀντιφασεως», literalmente: «la opinión de la contradicción»). Es sabido, además (véase, por ejemplo, BERTO (2006); BOBENRIETH MISERDA (1996); PRIEST (2006b)), que algunas de las refutaciones de este mismo libro recurren al Principio del Tercero Excluido tanto como al de No Contradicción, sin que el Estagirita lo haya declarado previamente como un axioma. Me parece que esto es porque la exclusión de tercero se sigue del mero hecho de que las oposiciones entre afirmar y negar, entre el ser y el no ser, y entre lo verdadero y lo falso, se dan sólo entre *dos* alternativas. Esta observación parece estar a la base del intento tantas veces repetido (y tantas más fallido) de reducir la negación a la noción de *otredad*²¹.

Aristóteles es cuidadoso en llamar sólo a la oposición contradictoria «negación», y esto al parecer por dos razones. La primera es que en el caso de la negación interna no es una proposición sino un concepto lo que es negado, y los conceptos por sí solos no pueden ser aseverados: “pues siempre, necesariamente, la negación ha de ser verdadera o falsa, y el que diga *no-hombre*, si no añade nada, no habrá dicho más ni menos verdad o falsedad que el que diga *hombre*” (ARISTÓTELES, 1994, 20a 34). La segunda razón es que la negación de una afirmación debe ser una sola, “pues es preciso que la negación niegue

21. Por lo pronto: Platón en *El Sofista*; Demos en el artículo que empujó a Russell a formular su (todavía más) nefasta doctrina de los hechos negativos (DEMOS, 1917); Vasiliev en sus escritos sobre lógica imaginaria (BOBENRIETH MISERDA, 1996; DA COSTA, 1980; RASPA, 2017) y varios otros todavía. Para una crítica general a estas doctrinas véase HORN (2001, §1.2.2). Para un análisis más específico de una variante formal de esta tesis puede consultarse KURBIS (2000) e incluso MOLNAR (2006).

lo mismo que afirmó la afirmación” (ARISTÓTELES, 1994, 17b 37) ²² para que puedan ser siempre una verdadera y la otra falsa, y sabemos que sólo en la oposición por contradictoriedad esto se cumple. Si bien estas conclusiones me parecen correctas, es evidente que ellas sólo tienen sentido en un marco alético, es decir, cuando la caracterización de las operaciones lógicas depende de su referencia a las nociones de verdad y falsedad. Una vez que se entra en los niveles funcional e interactivo, la clara distinción entre contradicción y contradictoriedad se vuelve difícil de sostener, razón por la cual en lo sucesivo la abandonaremos. De aquí en más, para nosotros una **oposición** será únicamente esto: la relación sostenida entre *negatum* y *negandum*, toda vez que la negación que los reúne verifique (al menos) **dependencia** y **diferencia**. Es decir:

Oposición: Una cosa *A* es *opuesta* a otra cosa *B* si el darse de *A* depende en alguna medida del darse o no darse de *B*, a la vez que no siempre *A* y *B* se darán o no se darán juntos.

2.4. La lógica de la Negación

En sus primeros siglos de vida los estudios lógicos estuvieron fuertemente determinados por su dimensión pragmática. Recuérdese la definición misma de lógica presentada por Aristóteles en el encabezado de los *Tópicos*: “El propósito de este estudio es encontrar un método a partir del cual podamos razonar sobre todo problema que se nos proponga, a partir de cosas plausibles, y gracias al cual, si nosotros mismos sostenemos un enunciado, no digamos nada que le sea contrario” (ARISTÓTELES, 1994, 100a 18), en la que aparece por primera vez esta importante condición negativa: *si nosotros mismos sostenemos un enunciado, no digamos nada que le sea contrario*. (αὐτοὶ λόγον ὑπεχοντες μηθὲν ἐποῦμεν

22. En griego: “φανερὸν δ’ ὅτι καὶ μία ἀπόφασις μιᾶς καταφάσεως: τὸ γὰρ αὐτὸ δεῖ ἀποφῆσαι τὴν ἀπόφασιν ὅπερ κατέφησεν ἢ κατάφασιν” (MINIO-PALUELLO, 1974, 17b 37). Ackrill traduce: “For the negation must deny the same thing as the affirmation affirmed” (ARISTÓTELES, 1995, 17b 37). Nótese que el traductor inglés, a pesar de utilizar «affirmation» y «affirmed», se ha mantenido consistente con su traducción anterior y ha utilizado el sustantivo «negation» y el verbo «deny» (véase *supra*, página 32), pero tanto en español como en griego se trata de una variante morfológica de la misma palabra: «negación/niegue», «ἀπόφασις/ἀποφῆσαι».

ὄπεναντίον»²³). Esta es la primera invocación a la *consistencia*, de la que tendremos mucho que hablar más adelante.

La función básica de la Negación es la de expresar *exclusiones*²⁴. Esto viene ya garantizado por su significado más general, pues desde el momento en que *negandum* y *negatum* deben ser diferentes pero no independientes, es claro que la presencia de $\neg(A)$ debe constreñir en algún sentido la posibilidad de la presencia de *A*. Esto puede tener distintos matices, empero. En esta sección analizaremos algunas de las características principales que se han postulado acerca de la lógica de la Negación, es decir, a la manera en que ella se comporta frente a las inferencias.

2.4.1. La Negación en atención a lo verdadero y lo falso

Una amplia, antigua y todavía muy difundida creencia acerca de la lógica es que ella se ocupa de la honorable actividad de separar lo verdadero de lo falso: “No hay nada más estimable que el buen sentido y la precisión del espíritu en el discernimiento de lo verdadero y de lo falso”²⁵ (ARNAULD Y NICOLE, 1992, p. 5). Bajo esta perspectiva, la Negación es un concepto secundario, que depende de esta oposición fundamental.

En sí mismo, «Verdad» (y «Falsedad») no es un concepto lógico, sino que su lugar propio es el lenguaje. Esto es decir que sólo de objetos lingüísticos tiene sentido decir o preguntarse si son o no verdaderos o falsos. Ahora bien, dado que el *método* de la Lógica alcanza su objeto de estudio (la inferencia) a través del lenguaje, resulta del todo esperable que consideraciones filosóficas en torno a la Verdad aparezcan, de cuando en vez, como mayor o menormente relevantes para la Lógica²⁶; por ejemplo, cuando se caracteriza la *validez argumental* como la preservación de Verdad de las premisas a la conclusión, o

23. Versión griega según la edición utilizada por Yvan Pelletier para su traducción al francés, disponible on-line en el sitio: <http://remacle.org/bloodwolf/philosophes/Aristote/topiqueslgr.htm>. Consultado por última vez en junio de 2018.

24. El «separado de» aristotélico.

25. La traducción es mía. Original: “Il n’y a rien de plus estimable que le bon sens et la justesse de l’esprit dans le discernement du vrai et du faux”.

26. No excluyéndose el caso más atrevido de todos, en el cual se identifica a la Lógica con la *Ciencia de la Verdad*. Para una imprudencia algo escandalosa, aunque no enteramente desprovista de interés, puede verse HEIDEGGER (2004).

cuando se define el significado de los sincategoremas en términos de verifunciones (sobre esto último véase *infra*, sub-sección 2.4.4). Por su parte, Verdad y Falsedad se reparten un mismo espacio lógico de manera exhaustiva, lo que los convierte en conceptos contradictorios: uno y otro se excluyen mutuamente, a la vez que *excluyen* a un tercero. Por lo tanto, en lo que a la Negación concierne, la intuición fundamental aquí es que un *negandum* proposicional asegura, con su verdad, la falsedad de su *negatum*. Y *vice-versa*.

La explicitación de las cualidades fundamentales de esta oposición entre Verdad y Falsedad ha sido expresada con violenta elocuencia en forma de preceptos, las —*pessime*— llamadas “leyes de la lógica”. Ellas son básicamente dos²⁷:

No Contradicción Una proposición no puede ser a la vez verdadera y falsa.

Tercero Excluido Una proposición siempre es verdadera o es falsa.

Leídas de manera un poco más liberal, estas Leyes expresan, a su vez, propiedades intrínsecas a la oposición entre *negatum* y *negandum*:

No Contradicción *Negatum* y *Negandum* no pueden ser verdaderos simultáneamente.

Tercero Excluido *Negatum* y *Negandum* no pueden ser falsos simultáneamente.

Estas consideraciones nos dan las siguientes ecuaciones:

1. Ser verdadero es lo mismo que no ser falso.
2. Ser falso es lo mismo que no ser verdadero.

Esta visión heredada del concepto de Negación puede ser desafiada de múltiples maneras y en múltiples direcciones. Algunos irán directamente a rechazar la necesaria relación

27. Diversos intentos de sistematización han dado lugar a más leyes (por ejemplo, el Principio de Bivalencia, que expresa lo mismo que el Principio del Tercero Excluido más la observación truística de que estamos hablando de lo verdadero y de lo falso), lo que algunos filósofos han valorizado positivamente como un logro conceptual. Mi posición al respecto es más bien escéptica. Decir varias veces lo mismo de formas distintas ayuda a comprender mejor las cosas, pero ponerle nombres distintos a cada una de esas maneras distintas de decirlo sólo hace el estudio más arduo. *Simplex sigillum veri*.

entre Verdad y Lógica, como los primeros intuicionistas, mientras que otros, aunque la conservan, ponen en tela de juicio la manera en que se ha caracterizado la relación entre Verdad y Falsedad. En la propuesta de Graham Priest, por ejemplo, Verdad y Falsedad no son conceptos perfectamente excluyentes, sino que en ocasiones se invaden (PRIEST, 1999), produciendo lo que en la literatura se conoce como un *grumo* («glut»); otros pueden defender la posición contraria, que Verdad y Falsedad no son exhaustivos sino que dejan *brechas* («gaps») entre ellos. Hay incluso quienes podrían cuestionar que Verdad y Falsedad sean los únicos elementos del espacio lógico, y a sazón introduzcan nuevos valores veritativos que conviertan la oposición entre Verdad y Falsedad en mera contradicción, admitiendo terceros, como podría ser una lectura particularmente entusiasta de la propuesta trivaluada de Łukasiewicz, o una adaptación atrevida de la Lógica Imaginaria de Vasiliev. Otros incluso se sentirán inclinados por hallar algo lógicamente significativo en la des-identificación entre lo Falso y lo No-Verdadero. Sin embargo, esta clase de divergencias tiene límites bastante estrechos, como mostraré más adelante, al referirme a la tesis de Suszko (sub-sección 2.4.4).

Por otra parte, este enfoque presenta otra debilidad y es que al asumírsele de manera demasiado acrítica brotan múltiples paradojas. Algunas de ellas son particularmente fuertes, lo que ha motivado esfuerzos considerables y nada triviales por resolverlas (véase BARRIO (2014) para una introducción al tema). Con todo, la flaqueza más evidente de este enfoque es su poca perspectiva: permaneciendo en el nivel alético no se puede dar cuenta cabal de la Negación tal como ella ocurre en los niveles inferiores. En particular, hay que decir que la Negación como *acto de lenguaje* posee un interés lógico que va mucho más allá de la mera (meta-)predicación de falsedad, como veremos en las sub-secciones que vienen a continuación.

2.4.2. Razonando desde y hacia la Negación

Los trabajos lógicos de los peripatéticos y los estoicos nos heredaron la mayoría de los esquemas de razonamiento que rigen a la Negación sea como premisa, sea como conclu-

sión. En esta sub-sección presentaremos los principales de ellos, aunque dejaremos para la próxima el más importante de todos, la *Reductio ad Absurdum*.

El griego ático, como el español de nuestros días, tiene dobles negaciones enfáticas. Sin embargo, una vez que los lógicos estoicos conceptualizaron los sincategoremas en términos verifuncionales, se les hizo necesario aceptar la involutividad de la Negación clásica, característica que hoy reconocemos expresada en la “Ley” de la Doble Negación:

Doble Negación La negación de una negación equivale a la afirmación de lo negado.

Hay varios esquemas de razonamiento que corresponden a la Doble Negación, y a la vez varios de estos esquemas muestran, bajo la forma aparentemente evidente de una Doble Negación, otros preceptos menos inocentes. La simple equivalencia entre « P » y «no-no- P » que la Doble Negación consagra puede descomponerse naturalmente en:

1. Si P entonces no-no- P .
2. Si no-no- P entonces P .

Estos dos esquemas, que podríamos llamar respectivamente *Introducción* y *Eliminación* de la Doble Negación, pueden formalizarse de varias maneras distintas. Por ejemplo, si la construcción «si... entonces...» se interpreta como una relación de inferencia y la primera de las dos negaciones como un estricto predicado de falsedad (o indeducibilidad), estos dos esquemas corresponden al Principio de No Contradicción y al Principio del Tercero Excluido:

1. Si P entonces no-no- P : $\frac{\vdash P}{\not\vdash \neg P}$
2. Si no-no- P entonces P : $\frac{\Gamma \not\vdash \neg P}{\Gamma \vdash P}$

Ninguno de estos esquemas resulta demasiado intuitivo a simple vista, pero cuando un sistema lógico es robustecido con una cantidad suficiente de propiedades matemáticas (cantidad, por lo demás, nada ambiciosa o exagerada para los estándares de las

lógicas más fuertes) ambos pueden obtenerse de manera relativamente simple. En efecto, la lógica clásica verifica ambas; la intuicionística estándar verifica sólo la primera, y la paraconsistente C_1 sólo la segunda. Esto va en perfecta coherencia con los lineamientos ideológicos de las tres, una vez que identificamos Introducción y Eliminación de la Doble Negación con los Principios de No Contradicción y del Tercero Excluido²⁸.

Otra forma de argumentación común en la Grecia clásica es la llamada *Consequentia Mirabilis*, la “consecuencia admirable”, bautizada por Łukasiewicz como Ley de Clavius²⁹. Su formulación esquemática, en el lenguaje de los estoicos, es como sigue: “Si lo primero, lo primero; si no lo primero, lo primero; pero lo primero o no lo primero; lo primero, por tanto” («εἰ τὸ πρῶτον, τὸ πρῶτον· εἰ οὐ τὸ πρῶτον, τὸ πρῶτον· ἤτοι τὸ πρῶτον ἢ οὐ τὸ πρῶτον· τὸ πρῶτον ἄρα») ³⁰ Podemos reformular esta cláusula sencillamente como sigue:

Consequentia Mirabilis Para afirmar una proposición es suficiente que sea implicada por su propia negación.

Hay varios ejemplos en la literatura filosófica griega, siendo el más antiguo el célebre pasaje del *Protréptico* de Aristóteles que dice: “Si debemos filosofar, entonces debemos filosofar; y si no debemos filosofar, entonces debemos filosofar; por lo tanto, debemos filosofar” («εἰ μὲν φιλοσοφητέον φιλοσοφητέον, καὶ εἰ μὴ φιλοσοφητέον φιλοσοφητέον· πάντως ἄρα φιλοσοφητέον»³¹). Otro podría ser este simpático pasaje de las *Diatribas* de Epícteto:

Quando algum dos presentes disse:

— Persuade-me de que a lógica é útil.

28. Es sensible notar que la segunda, $\frac{\Gamma \not\vdash \neg P}{\Gamma \vdash P}$ sólo es válida cuando el conjunto Γ es maximal, afirmación que en sí misma captura la idea básica tras el Principio del Tercero Excluido (y las demostraciones de completitud usando el método de Henkin) de que “nada falta”. Vamos a volver sobre esto un poco más adelante (página 84).

29. Aunque, a juzgar por lo señalado en KNEALE (1957), el filósofo polaco estaba conciente de que no fue Clavius su primer formulador. En el próximo capítulo nos encontraremos con otro desafortunado epónimo de Łukasiewicz.

30. Versión de Sexto Empírico, *Adv. Math.* XIII, 292, tal como aparece citado en KNEALE (1957).

31. De acuerdo a la versión presentada en KNEALE (1957, p. 62).

— Queres, disse Epicteto, que te demonstre isso?

— Sim!

— Portanto, é-me preciso selecionar um argumento demonstrativo?

Quando o outro concordou, [Epicteto disse]:

— E como saberás se eu te apresentar um sofisma?

Quando o homem se calou, Epicteto disse:

— Vês como tu mesmo concordas que a lógica é necessária, já que sem ela não é possível saber se é necessária ou não.

Diat. II xxv, citado en D’OTTAVIANO Y GOMES (2017, p. 141)

En todos estos casos la regla implicada dice que toda proposición implicada por su propia negación debe ser verdadera. Kneale señala, acertadamente, que los argumentos de esta forma son una instancia particular del dilema constructivo (KNEALE, 1957), cuya forma esquemática corresponde a:

$$\frac{P \text{ o } Q \quad \text{Si } P \text{ entonces } R \quad \text{Si } Q \text{ entonces } R}{R}$$

Cuando «R» es la misma «P» y «Q» es «no-P»:

$$\frac{P \text{ o no-}P \quad \text{Si } P \text{ entonces } P \quad \text{Si no-}P \text{ entonces } P}{P}$$

Cuando dos de estas premisas son truísticas, el esquema puede simplificarse a:

$$\frac{\text{Si no-}P \text{ entonces } P}{P}$$

Es sensible notar que esta otra versión:

$$\frac{\text{Si } P \text{ entonces no-}P}{\text{no-}P}$$

Aunque puede obtenerse por simple sustitución de «P» por «no-P» y la Eliminación de la Doble Negación, no dice exactamente lo mismo. En la subsección siguiente me permitiré decir algo al respecto.

Los trabajos de los estoicos fueron recogidos por las tradiciones posteriores, a veces acreditándoles su autoría y otras —la mayoría— confundiendo sus doctrinas con las de

la lógica peripatética tardía. Los lógicos europeos de los siglos XI a XIII desarrollaron ampliamente la teoría de las *consequentiae*, los silogismos con términos proposicionales primero inventados por los filósofos de la Stoa. De ellos hemos recibido el nombre y la forma de cuatro de estos silogismos:

1. el *Modus Ponendo Ponens*,
2. el *Modus Ponendo Tollens*,
3. el *Modus Tollendo Ponens* y
4. el *Modus Tollendo Tollens*.

Los nombres son sugerentes: «ponere» significa *establecer, colocar, fundar*³²; mientras que «tollere» quiere decir *levantar, remover, eliminar*. Los nombres hacen referencia a la relación entre la premisa menor y la conclusión en cada esquema:

1. el modo que colocando coloca (premisa afirmativa, conclusión afirmativa):

$$\frac{A \quad \text{si } A \text{ entonces } B}{B}$$

2. el modo que colocando elimina (premisa positiva, conclusión negativa):

$$\frac{A \quad \text{no ambas, } A \text{ y } B}{\text{no } B}$$

3. el modo que eliminando coloca (premisa negativa, conclusión positiva):

$$\frac{\text{no } A \quad A \text{ o } B}{B}$$

4. el modo que eliminando elimina (premisa negativa, conclusión negativa)³³:

32. De hecho, se trata del antepasado del verbo español «poner».

33. Nótese que esta figura:

$$\frac{\text{no } A \quad \text{si no } A \text{ entonces no } B}{\text{no } B}$$

No es un *tollendo tollens* sino un *ponendo ponens*.

$$\frac{\text{no } A \quad \text{si } B \text{ entonces } A}{\text{no } B}$$

La razón por la cual estos modos recibieron una atención especial durante la proliferación de los estudios lógicos escolásticos fue su advertidísima cuasi-simetría con los cuatro modos aristotélicos del silogismo perfecto, también llamado *de primera figura*:

1. *bArbArA* (premisa menor afirmativa, conclusión afirmativa):

$$\frac{\text{Todos los } G \text{ son } H \quad \text{Todos los } F \text{ son } G}{\text{Todos los } F \text{ son } H}$$

2. *cElArEnt* (premisa menor afirmativa, conclusión negativa):

$$\frac{\text{Ningún } G \text{ es } H \quad \text{Todos los } F \text{ son } G}{\text{Ningún } F \text{ es } H}$$

3. *dArII* (premisa menor afirmativa, conclusión afirmativa)³⁴:

$$\frac{\text{Todos los } G \text{ son } H \quad \text{Algunos } F \text{ son } G}{\text{Algunos } F \text{ son } H}$$

4. *fErIO* (premisa menor negativa, conclusión negativa):

$$\frac{\text{Ningún } G \text{ es } H \quad \text{Algunos } F \text{ son } G}{\text{Algunos } F \text{ no son } H}$$

El trabajo de los lógicos escolásticos fue prolífico en lo que respecta a identificar reglas de inferencia. En la lista (ino exhaustiva!) de tales reglas que los Kneale presentan en la página 272-3 de KNEALE Y KNEALE (1972), nos corresponde que destaquemos las siguientes:

1. De la negación de una proposición conjuntiva a la disyunción de las negaciones de sus miembros y viceversa.

34. En la silogística aristotélica puede demostrarse que no hay silogismos válidos con premisa negativa y conclusión afirmativa, por lo que no puede haber un modo válido de la forma E-X-A/I. Esto, sin embargo, no es cierto en otras silogísticas. Véase, por lo pronto, ÁLVAREZ Y CORREIA (2012).

2. De la negación de una proposición disyuntiva a la conjunción de las negaciones de sus miembros y viceversa.
3. De una proposición condicional a la proposición condicional que tiene por antecedente la negación del consecuente originario y por consecuente la negación del antecedente originario.
4. De la negación de la necesidad a la posibilidad de la negación y viceversa.
5. De la negación de la posibilidad a la necesidad de la negación y viceversa.

Las dos primeras de la lista corresponden a las hoy llamadas Leyes de De Morgan, que el autor británico presentó en el párrafo 133 de su *Syllabus of a proposed system of logic* en el año 1860. La tercera corresponde a la regla de contraposición, y las dos últimas a las conversiones que en el siglo XX serán de tanta utilidad (y polémica) en el desarrollo de las lógicas modales formales. Estos lógicos conocieron también las conversiones de cuantificadores, que William of Shyreswood, en su *Introductiones in Logicam* presenta así:

Aequivalent omnis, nullus-non, non-aliquis-non.

Nullus, non-aliquis, omnis-non aequiparantur.

Quidam, non-nullus, non-omnis-non sociantur.

Quidam-non, non-nullus-non, non-omnis adhaerent.

(KNEALE Y KNEALE, 1972, p. 217)

Que puede traducirse a:

Equivalente a Todos, Ninguno-no, No-algunos-no.

A Ninguno, No-algunos, Todos-no se equiparan.

A Algunos, No-ninguno, No-todos-no se asocian.

A Algunos-no, No-ninguno-no, No-todos se adhieren.

Y que expresa esencialmente la misma información que la desplegada por Frege en el Cuadro de Oposiciones del párrafo 12 de *Begriffsschrift*.

De todas las mencionadas recién, la contraposición exige que le dediquemos unas cuantas palabras más. En la jerga silogística una contraposición corresponde a la inversión de los términos de un juicio, pero tomando en cada caso no el juicio mismo sino su conjugado o negación interna. De las cuatro proposiciones consideradas en la teoría aristotélica del silogismo, sólo dos verifican la contraposición:

- «Todos los F son G » \equiv «Todos los no- G son no- F »
- «Algunos F no son G » \equiv «Algunos no- G no son no- F »

En la lógica de proposiciones la contraposición de una hipotética corresponde a la hipotética que tiene por antecedente a la negación del consecuente de la primera y por consecuente a la negación del antecedente de la primera:

Contraposición Si A implica B , entonces no- B implica no- A .

En este nivel de análisis es iluminador no hacer clara distinción entre la implicación como sincategorema y la implicación como relación de inferencia. Dependiendo de nuestras elecciones en este respecto, la contraposición se revelará equivalente a distintos esquemas. Por ejemplo, el *modus tollendo tollens* puede ser interpretado como una forma de contraposición en donde la segunda instancia de «implica» es interpretada como relación de inferencia. O, si interpretamos ambos «implica» y la construcción «si... entonces...» como sincategoremáticos, lo que obtenemos es el “clásico” esquema de contraposición:

$$(P \supset Q) \supset (\neg Q \supset \neg P)$$

En un par de artículos altamente relevantes para nuestro tema (LENZEN, 1996, 1998)³⁵, Wolfgang Lenzen intentó defender una forma particularmente débil de contraposición,

35. El segundo no es sino una ampliación del primero.

que a juicio suyo debería considerarse como una propiedad necesaria de cualquier negación (una característica del determinable, diríamos en nuestra jerga). Dicha formulación es la siguiente (LENZEN, 1996, pp. 43, 46):

(CP 1) If $p \vdash q$, then $\sim q \vdash \sim p$.

(ADQ 2) A unary operator \sim is a negation of the logic **L** only if it satisfies **CP 1**: If $p \vdash_L q$, then $\sim q \vdash_L \sim p$.

Es decir, corresponde a la interpretación de ambos \lceil implica \rceil y la construcción «si... entonces...» como relaciones de inferencia. El argumento de Lenzen en favor de su regla **ADQ 2** es sugerente pero insostenible a mi juicio, razón por la cual le dedicaré el resto de esta sub-sección. De paso, algunas de las cosas que veremos ahora nos serán útiles para lo que viene más adelante.

La primera explicación intuitiva dada por el autor para defender **ADQ 2** es la siguiente:

Just as a negative number $-x$ is the smaller the greater the positive number x is itself, so also — one will want to say — a negative or negated proposition $\sim p$ is “the falser” “the truer” the positive proposition p is itself. Somewhat more exactly: If p is “at most as true” as q , i.e. if p *logically entails* q , then conversely q is “at most as false” as p , i.e. *the “falsity” of the latter proposition q logically entails the “falsity” of the former proposition p .*

(LENZEN, 1998, p. 216-7)

En una nota al pie (en ambas versiones) atribuye la formulación original de esta cláusula a Leibniz: “Si ex propositione L [...] sequitur propositio M [...] tunc contra ex falsitate propositionis M sequitur falsitas propositionis L .”

Esta primera idea es desarrollada luego con algo más de detalle:

Elementary mathematics teaches us that the product of two positive numbers, $(+x)(+y)$, as well as the product of two negative numbers, $(-x)(-y)$, always yields a positive number, while $(+x)(-y)$ and $(-x)(+y)$ is negative. Similarly, the affirmation of an affirmative expression and the negation of a negative expression appear to yield an affirmation, while the affirmation of a negation

as well as the negation of an affirmation normally represents a negation. In particular, it seems safe to maintain that the classical negation of an affirmative expression itself constitutes a negation, while the *classical negation* of an arbitrary negation yields an affirmation. E.g., if $\sim p$ is taken to mean that p is “false”, or that p is “not true”, or that p is “impossible”, or that p is “unlikely to be true”, or what not, then the classically negated expression $\neg \sim p$ either says that p is not false, or that p is true, or that p is not impossible, or that p is not unlikely to be true, etc. All these expressions evidently represent various kinds of an affirmation. *ibidem*

Esta analogía con la que Lenzen prepara el terreno para su argumento es altamente problemática. Aun reconociendo la debilidad de los argumentos por analogía, es importante tener presente que ellos, de todas formas, pueden conducir nuestras intuiciones en una dirección equivocada. Quizás algunas observaciones históricas sirvan para evitar que éste nos juegue una mala pasada.

Los inversos aditivos de los números naturales terminaron llamándose «negativos» sólo al final de un largo proceso. Antes de llamarse como los conocemos hoy, recibieron otros nombres tales como «absurdos» (Chuquet, siglo XV; Stifel, siglo XVI), «ficticios» (Cardano) o «falsos» (Descartes) (KLINE, 1972, p. 338). Al momento de ser inventados, en la aritmética india, no representaban cantidades “negativas” en el sentido moderno sino deudas (KLINE, 1972). De igual manera, los signos $\lceil + \rceil$ y $\lceil - \rceil$ fueron utilizados por primera vez en un libro de Johannes Widmann (siglo XV), pero no para representar números positivos o negativos (ni siquiera sumas y restas) sino saldos y deudas en problemas de negocios, y eso todavía entre otros usos (CAJORI, 1993). Incluso la interpretación que damos hoy de ellos como “enteros menores que cero” no fue siempre aceptada con igual familiaridad. Por ejemplo, “Euler, en la segunda mitad del siglo XVIII, aún creía que los números negativos eran mayores que el ∞ ” (KLINE, 1972, p. 784).

Por lo tanto, cuando Lenzen dice que “the affirmation of an affirmative expression and the negation of a negative expression appear to yield an affirmation, while the affirmation of a negation as well as the negation of an affirmation normally represents a negation”, la analogía sólo tiene sentido una vez que las propiedades algebraicas de los enteros ya

son conocidas y la negación de la lógica clásica también ha sido definida en términos sospechosamente similares.

Como contraejemplo basta con invocar cualquier *doble negación enfática*, como en este pasaje de Ortega y Gasset: “no hay nada más opuesto a la espontaneidad biológica, al mero vivir la vida, que buscar un principio para derivar de él nuestros pensamientos y nuestros actos” (ORTEGA Y GASSET, 1974, p. 179 (El destacado es mío.)) o en el inglés, en estos “*building-site examples*” que proporciona Sylvan: “*I don’t need it no more, you ain’t seen nothing, I don’t do nothing*” (SYLVAN, 1999, p. 316). En estos casos la negación de una negación no es una afirmación sino otra negación, rompiéndose la analogía con los números enteros.

Por lo demás, la oposición entre los inversos de una operación aritmética tampoco corresponde, en la jerga aristotélica, a opuestos como la afirmación y la negación («ὡς κατάφασις καὶ ἀπόφασις») sino como lo respecto a algo («ὡς τὰ πρὸς τι»), de los cuales el ejemplo del Estagirita son precisamente el «doble» y la «mitad»³⁶.

Todas estas observaciones deberían debilitar la plausibilidad de la analogía de Lenzen. Veamos ahora sus argumentos propiamente tal:

Now, for any affirmative operator Φ_A the premise that p logically entails q generally seems to warrant that $\Phi_A(p)$ logically entails $\Phi_A(q)$, too. To be sure, I have no proof of this very strong principle. In order to lend it at least some credibility, however, let it be pointed out that this law holds not only for each so-called affirmative modality in alethic modal logic (and in related systems for other modal operators), but also, e.g., for probabilistic notions saying that p is likely, that p is probable, that p is certain, etc. If it could thus be taken for granted that affirmations are generally closed under logical implications, Example 20 [«if $p \vdash q$ then $\neg q \vdash \neg p$ »] might be “proved” as follows. Let p, q be propositions such that p logically entails q , and let q be “false” in the sense of the operator \sim , i.e. let $\sim q$ be true. Suppose further that — contrary to Example 20 — p would not be “false” in the sense of \sim ; i.e. suppose that $\sim p$ does not hold. This can be expressed metalinguistically by means of classical negation as $\neg \sim p$. Hence we have in sum the assumption that $p \vdash q$, that $\sim q$, and that $\neg \sim p$. Now if \sim really is a *negation* operator — no matter what particular

36. La matemática griega no manejaba el concepto de número negativo pero sí el de razón propia, es decir, el de los números racionales.

kind of “negation” one has in mind — then $\neg \sim$ certainly will not be a negation itself but instead expresses some sort of *affirmation*. Thus by our assumption that affirmations are closed under logical implication, $\neg \sim p$ logically entails $\neg \sim q$; and hence we would arrive at the classical contradiction that, on the one hand, $\sim q$, and on the other hand, $\neg \sim q$. (LENZEN, 1998, p. 218)

Tal como he mostrado arriba, este argumento depende de la suposición de que “ $\neg \sim$ certainly will not be a negation itself but instead expresses some sort of *affirmation*”. Esto es sin duda el caso cuando \neg es una negación clásica, pero no hay razón alguna para suponer que \sim lo sea; todavía más, no hay realmente una razón para exigir que \neg deba serlo. La apelación a la negación clásica que ha hecho el autor (“This can be expressed metalinguistically by means of classical negation as $\neg \sim p$ ”) no parece apoyarse en otra cosa que en una presuposición ideológica (y contra ella véase, por ejemplo, BACON (2013)).

Lenzen continúa:

The “proof” of Example 20 just given, even if its main idea is basically sound, certainly remains problematic insofar as the central assumption of the logical closure of arbitrary affirmations is in need of justification at least to the same degree as the principle that it purports to justify. Therefore let me sketch another argument in favour of Example 20 which does without the latter assumption. As was argued above [...] a logical implication $p \vdash_L q$ must be understood to hold only if the conclusion q cannot fail to be “true” once the entailing proposition p itself is assumed to be “true”. Or, to give a somewhat more formal paraphrase: If $p \vdash_L q$, then, necessarily, (if p is “true”, then q is “true”). So, by classical contraposition: If $p \vdash_L q$, then, necessarily, (if q is not “true”, then p isn’t “true” either). But to say that some proposition p is not “true” (either in the sense of classical, two-valued semantics or in the sense of some other distinguished true-truelike value) appears to be tantamount to *negating* p (in some way or another). Thus one obtains the following version of Example 20: If $p \vdash q$, then, necessarily (if q is “false”, then p must be “false”, too). (LENZEN, 1998, p. 218)

La caracterización de implicación lógica que figura en este párrafo:

...a logical implication $p \vdash_L q$ must be understood to hold only if the conclusion q cannot fail to be “true” once the entailing proposition p itself is assumed to be “true”

Y que en el mismo artículo aparece formulada anteriormente de manera más explícita (LENZEN, 1996, 1998, ASSUMPTION 1), corresponde a la caracterización alética de validez lógica como preservación de verdad. Tiene, por tanto, el mismo defecto que toda caracterización similar: que presupone los conceptos de «verdad» y «falsedad» junto con la oposición entre ellos, como vimos en la sub-sección anterior. Dicha oposición es lo que autoriza el movimiento que el autor ha llamado una *contraposición clásica* (“classical contraposition”) sobre “If $p \vdash_L q$, then, necessarily, (if p is “true”, then q is “true”)”. Por último, y aunque pueda parecer que, como dice él, “to say that some proposition p is not “true” [...] *appears to be tantamount to negating p* ”, de hecho no lo es necesariamente. En la literatura vamos a encontrar sistemas lógicos que distinguen entre «predicar la verdad» de la negación de una proposición y «predicar la falsedad» de una proposición (véase HORN (2001)), siendo éste un tema particularmente delicado para lógicas que manipulan contradicciones, como las paraconsistentes.

2.4.3. La *Reductio ad Absurdum*

Aunque no se tiene claridad respecto al momento preciso en que la Reducción al Absurdo³⁷ fue introducida en el pensamiento griego, es claro que ella constituye una marca característica de la lógica en su cultura, no sólo en la matemática sino también en la filosofía y en la política (WASZKIEWICZ Y WOJCIECHOWSKA, 1990). Se trata de un modo de razonamiento profusamente utilizado en la matemática mucho antes de Euclides, y también en los debates públicos y erísticos del período clásico (con ejemplos por doquier en la obra socrática de Platón). Sin embargo, en su tiempo ella era considerada una peculiaridad del razonamiento matemático, y esto muy probablemente porque la demostración

37. Uso «Reducción al Absurdo» y «*Reductio ad Absurdum*» como perfectamente sinónimas, siendo la elección del idioma poco más que un capricho.

matemática más conocida y polémica de aquél período, la de la existencia de números irracionales, tenía esa forma.

En Aristóteles encontramos mención explícita a la Reducción al Absurdo como un modo válido de razonamiento. Lo presenta en el segundo libro de *Primeros Analíticos*:

Ahora bien, el razonamiento a través de lo imposible («διὰ τοῦ ἀδυνάτου») se demuestra cuando se pone la contradicción de la conclusión («ἡ ἀντίφασις τεθῆ τοῦ συμπεράσματος») y se añade otra proposición, y se forma en todas las figuras: pues es semejante a la inversión, salvo que difiere en que la inversión se hace una vez formado el razonamiento y aceptadas ambas proposiciones y, en cambio, se reduce a lo imposible no por haberse puesto previamente de acuerdo sobre la [proposición] opuesta, sino por ser evidente que es verdad. (ARISTÓTELES, 1994, 61a 19)

Y más adelante:

La demostración [por reducción] a lo imposible difiere de la demostrativa [propriadamente tal] en que pone lo que quiere eliminar reduciéndolo a lo previamente acordado como falso («εἰς ὁμολογούμενον ψεῦδος»); la demostrativa, en cambio, parte de las tesis previamente acordadas. Así, pues, ambas [demostraciones] toman dos proposiciones previamente acordadas; pero ésta última toma aquellas de las que [surge] el razonamiento; aquélla toma una de éstas y una [que es la] contradicción de la conclusión. Y aquí no es necesario que se conozca la conclusión [previamente], ni que se presuponga que es [verdadera] o que no; allá, en cambio, es necesario presuponer que no es [verdad]. (ARISTÓTELES, 1994, 62b 29)

La estructura básica de una Reducción al Absurdo puede ser formulada de la manera siguiente:

Reductio ad Absurdum Asumo provisionalmente una proposición. Razono sobre la base de ella y obtengo conclusiones *absurdas*. A fin de no aceptar dichas conclusiones, concluyo en su lugar que no puedo aceptar la proposición previamente asumida.

¿Qué es lo que significa exactamente la palabra «absurdas» en este contexto? La doctrina lógica clásica afirma: lo absurdo es lo *contradictorio*. Sin embargo, como ha escrito

recientemente Dennett, en su uso más profano la piedra de tope de una *Reductio* puede ser simplemente una conclusión “ridícula”, como en los ejemplos coloquiales que él mismo da: «si eso es un oso, entonces los osos tienen cuernos» o «No llegará a tiempo a la cena a menos que pueda volar como Superman» (DENNETT, 2013, p. 31). Sin embargo, para los griegos el *absurdo* no podía limitarse a ser contra-intuitivo o evidentemente falso, pues como modo de razonamiento se popularizó precisamente para precaverse de errores tentadores: “It deals with propositions which are intuitive but false what makes the method of *reductio ad absurdum* trustworthy (if not indispensable)” (WASZKIEWICZ Y WOJCIECHOWSKA, 1990, p. 88).

Thomas L. Heath, en las dos escuetas páginas que le dedica a la Reducción al Absurdo en su clásico *A history of Greek mathematics*, lo categoriza como un tipo de razonamiento o modo de prueba que él llama *analítico*. En la misma línea que Aristóteles, en el pasaje citado más arriba, el autor dice: “For analysis begins with a *reduction* (ἀπαγωγή) of the original proposition, which we hypothetically assume to be true, to something simpler which we can recognize as being either true or false; the case where it leads to a conclusion known to be false is the *reductio ad absurdum*” (HEATH, 1921, p. 372). Por lo tanto, lo absurdo ni siquiera tiene que ser tal; es suficiente con que la afirmación a reducir nos lleve a donde sabemos que *no* debe llevarnos:

In a polemical context, the point of a *reductio* argument is not normally to establish something, but to try to force an opponent to give up a view. In a dialethic context, establishing its negation is not *logically* sufficient for this. However, whilst a contradiction may be *logically* possible, it does not at all follow that it may be rational to believe it. That I will turn into a fried egg tomorrow is logically possible, but a belief in this is ground for certifiable insanity. (PRIEST, 1999, p. 115) (Énfasis como en el original.)

Concientes de lo importante que es para la matemática este esquema de demostración, en *Principia Mathematica* Russell y Whitehead llaman *Reductio ad Absurdum* a su

proposición *2,01, que es la siguiente (RUSSEL Y WHITEHEAD, 1981, p. 160)³⁸:

$$\vdash: p \supset \sim p. \supset . \sim p$$

Pero el nombre es desafortunado, pues, como es fácil notar, se trata de una instancia de la *Consequentia Mirabilis*³⁹. Peano, por su parte, define en su artículo *Principles of arithmetic* un símbolo especial, $\Gamma \Lambda$ ⁴⁰, al que llama “the false, or the absurd”, y un axioma posterior lo identifica con « $a - a$ », que en su notación corresponde a la conjunción de una proposición con su negación (PEANO, 1889, p. 87ss).

Quienes asumieron de forma especialmente radical la importancia de la *reductio* para la caracterización lógica de la Negación fueron los intuicionistas. En los planteamientos originales de Brouwer una proposición hipotética expresa la posibilidad de realizar una construcción embebida o incrustada (*imbedded*⁴¹) en otra. Van Dalen sugiere que la manera más plausible de entender esta afirmación es la siguiente:

In order to establish $A \rightarrow B$, one has to carry out two tasks, namely, (i) find a construction for (the structure specified by) A , (ii) find a construction for (the structure specified by) B that departs from the first construction. We have left the reference to the “embedding” implicit. In fact, this embedding is mostly tacitly incorporated into the construction for B .

(VAN DALEN, 2004, p. 251)

Es necesario señalar que el intuicionismo es un programa filosófico y matemático que rechaza la tesis de que la práctica matemática sea intrínsecamente lingüística. En consecuencia, rechaza también la preeminencia de la lógica en la filosofía de la matemática. Para Brouwer, y en buena medida para sus continuadores, la lógica es el resultado de sistematizar abstracciones que nacen de la observación de la práctica matemática misma. Por lo tanto, lo que van Dalen explica en la cita anterior *no* debe interpretarse como la

38. Con agrupación de paréntesis y no de puntos la fórmula se escribiría $\Gamma((p \supset \sim p) \supset \sim p)\Gamma$.

39. A propósito de la cual, véase el final de esta sub-sección.

40. Para él esto no es una mayúscula griega lambda sino una mayúscula latina uve de cabeza.

41. Sic (FRANCHELLA, 1994, p. 258).

explicitación del significado del condicional que servirá de base para la noción de demostración sino al contrario: la hipotética intuicionística en realidad recupera y sistematiza un procedimiento mental que es anterior y se considera, en este nivel de análisis, dado.

Debido a lo anterior, la definición verifuncional de las conectivas lógicas es insatisfactoria para la lógica intuicionística, puesto que sus aseveraciones no se comprometen con hechos sino con la posibilidad de realizar una construcción o prueba. Y, en este sentido, para un intuicionista la *Reductio ad Absurdum* expresa exactamente lo que una proposición negativa es⁴²: negar que P corresponde a mostrar que una construcción de P no puede realizarse, porque en algún punto ella entraña un absurdo. “[...] negation expresses a construction that comes to a stop, that cannot continue any further” (FRANCHELLA, 1994, p. 257).

Las observaciones del intuicionismo relativas a la naturaleza constructiva de la *Reductio ad Absurdum* llevaron a la separación de esta regla en dos. La primera es la que hemos enunciado más arriba, y que corresponde a la variante que el intuicionismo acepta. La segunda es ésta:

Reductio no-constructiva Asumo provisionalmente la *negación* de una proposición. Razono sobre la base de ella y obtengo conclusiones *absurdas*. A fin de no aceptar dichas conclusiones, concluyo en su lugar que *debo* afirmar la proposición previamente negada.

En una lógica verifuncional con una negación involutiva de ciclo (2,0) las dos *Reductii* son equivalentes, porque se verifica la Ley de la Doble Negación. Pero en otros paradigmas lógicos, y de manera eminente en el intuicionismo, ellas son radicalmente diferentes. Esta distinción entre razonamientos constructivos y no constructivos aplica también, como ya anticipé más arriba (página 46), sobre la *Mirabilis*: la equivalencia entre $\frac{\text{Si no-}P \text{ entonces } P}{P}$ y $\frac{\text{Si } P \text{ entonces no-}P}{\text{no-}P}$ sólo está garantizada asumiendo las dos reglas de la Doble Negación, es decir, tanto el Principio de No Contradicción como el Principio del Tercero Excluido. Cuando uno de los dos falta, es necesario distinguir entre

42. Agreguemos: en matemática.

una *Mirabilis* constructiva y una no-constructiva, de la misma forma como hacemos con la *Reductio*. La necesidad de esta distinción puede explicarse de manera sencilla: en todos estos esquemas la información relevante se presume contenida *en* la proposición misma, razón por la cual sólo involucran *una* variable tipada. Cuando dicha información nos resulta absurda, ello es suficiente para *negar* dicha proposición: y mostrar en qué sentido resulta absurda es de hecho *demostrar* dicha negación. Pero una negación es demasiado inespecífica, por lo que en ocasiones no nos dará información suficiente para *afirmar* la proposición comprometida. Un buen ejemplo son las coartadas en las investigaciones policiales: un individuo puede probar que *no* cometió un crimen si consigue evidencia de que en el momento del hecho se encontraba en su casa, pongamos por caso. Pero un detective no puede concluir que el mismo sujeto *sí* cometió el crimen, sólo porque *no* estaba en su casa. El único escenario plausible en que esta inferencia es válida, es cuando puede asegurarse que el sospechoso *sólo* podía estar en uno de dos lugares, en su casa o en el lugar de los hechos. Esto nos da un criterio para distinguir sintácticamente entre esquemas constructivos y no-constructivos: todos aquellos razonamientos que comienzan en una negación y terminan en una afirmación sin requerir ninguna otra información adicional, realmente se apoyan en la presuposición de que *no hay más alternativa*, que es típicamente lo asegurado por el Principio del Tercero Excluido, y por lo tanto son no-constructivos.

El cuadro 2.1 resume esta última reflexión.

RAZONAMIENTO	CONSTRUCTIVO	NO-CONSTRUCTIVO
<i>Doble Negación</i>	Si P entonces no-no- P	Si no-no- P entonces P
<i>Consequentia Mirabilis</i>	Si P entonces no- P ; por lo tanto, no- P	Si no- P entonces P ; por lo tanto, P
<i>Reductio ad Absurdum</i>	Asumo P . Llego a conclusiones absurdas. Concluyo: no- P .	Asumo no- P . Llego a conclusiones absurdas. Concluyo: P .

Cuadro 2.1: Razonamientos constructivos y no-constructivos

2.4.4. La Negación en contextos formalizados

Horn nos informa que los lógicos estoicos concibieron una forma de negar que es sintácticamente equivalente a la de la lógica matemática moderna: anteponiendo una “partícula negativa” a una proposición (HORN, 2001, §1.1.2). Esta operación gramaticalmente violenta a la lengua griega habría permitido iteraciones, lo que habría a su vez permitido su formulación de la Ley de Doble Negación, como mencionamos en la sub-sección 2.4.2. Hodges, por su parte, afirma que la lengua árabe tiene también una partícula negativa («*laysa*») que niega una oración cuando se la coloca delante (HODGES, 2017, p. 598). Pero fuera de estos dos casos, es en general correcto afirmar que el adminículo para negar de la lógica formal le es ajeno a las lenguas naturales. En palabras de Horn y Wansing:

Where we do not find negation is in the one place propositional logic would lead us to look, sentence- or clause-peripheral position. Furthermore, unlike speech act types (e.g., interrogation), negation never seems to be marked in natural language by a global intonation contour. Typically, sentence negation is associated directly on or near the main finite verb or predicate expression.
(HORN Y WANSING, 2017, §1.1 párr. 5)

El uso hoy habitual de representar la negación de una fórmula φ como una fórmula obtenida a partir de φ por anteposición de un único signo (típicamente un guión) proviene de la matemática. Como mencioné en mi crítica al artículo de Lenzen, el uso de un guión largo para representar al inverso aditivo de un número ($\lceil -a \rceil$) fue introducido de manera paulatina en la práctica matemática, pero hacia el siglo XIX ya era una práctica más o menos estandarizada, lo mismo que el uso de las palabras «positivo» y «negativo» para distinguir entre los naturales y sus inversos aditivos.

Con todo, entre los lógicos del siglo XIX la notación sigue siendo dispar. De Morgan utiliza a veces la distinción entre mayúsculas y minúsculas para representar una clase y el complemento de una clase, aunque en su trabajo más importante al respecto, el *Syllabus of a proposed system of logic* de 1860, se maneja con relaciones (en nuestra jerga, *opciones*) antes que con funtores, e introduce una exótica notación de dobles paréntesis

para representarlas. Santiago Peirce, por su parte, utiliza la notación de barra superinscrita para representar el complemento lógico (KNEALE Y KNEALE, 1972). La notación a la que estamos acostumbrados hace su aparición en la obra de George Boole. En *The Mathematical Analysis of Logic* (1847), Boole utiliza el signo $\lceil 1 \rceil$ para representar “el universo [...], o la unidad, que comprenderá toda clase concebible de objetos de existencia real o no” (BOOLE, 1960, p. 51) y la expresión « $x - y$ » para significar la clase de los x que no están incluidos en la clase de los y ; de tal forma, la expresión « $(1 - x)$ » caracteriza, naturalmente, a la clase de los objetos en general que no están incluidos en la clase de los x . Luego, en el capítulo dedicado a las proposiciones y los silogismos hipotéticos, adapta estas convenciones para referirse a proposiciones de la manera siguiente:

...lo que vamos a considerar no son objetos o clases de objetos sino las verdades de las proposiciones, es decir de esas proposiciones elementales que están incorporadas en los términos de nuestras premisas hipotéticas.

Podemos adecuar los símbolos X, Y, Z , que representan las proposiciones, los símbolos electivos x, y, z , en el sentido siguiente:

El Universo hipotético, 1 , comprenderá todos los casos concebibles y las circunstancias anexas.

El símbolo electivo x , junto a cada sujeto que exprese dichos casos, elegirá a aquellos en los que la proposición X es verdadera y del mismo modo en lo que respecta a Y y Z .

Si nos limitamos a considerar una proposición dada X manteniendo en suspenso cualquier otra estimación, sólo serán concebibles dos casos: 1) que la proposición dada sea verdadera y 2) que sea falsa.

Estos casos constituyen la totalidad del Universo de la proposición, de manera que como el primero está determinado por el símbolo electivo x el último lo está por el símbolo $1 - x$. (BOOLE, 1960, p. 105-6)

Frege introduce una notación distinta a la de Boole para representar no sólo la negación sino toda forma de predicación⁴³, pero de todas formas la concibe como una notación sígnica prefija: si

— φ

43. “Cuando Schöder le objetó [a Frege] su desvío de la notación simbólica de Boole, Frege hubo de replicar que lo que él deseaba era construir un lenguaje apto para el análisis del razonamiento matemático, lo que le llevaba a evitar deliberadamente la adaptación booleana del simbolismo algebraico por conveniente que pudiera resultar para ciertos propósitos limitados” (KNEALE Y KNEALE, 1972, p. 441).

Expresa el contenido de la proposición φ ,

$$\neg \varphi$$

Expresa su negación, es decir, el pensamiento de que la proposición φ no ocurre⁴⁴. En sus palabras: “If a short vertical stroke is attached below the content stroke, this will express the circumstance that *the content does not take place*.” (FREGE, 1879, §7).

Peano generaliza la notación booleana y utiliza $\neg a$ para representar la negación de a . Es sabido que Russell adopta la notación de Peano en *Principia Mathematica*, pero en lugar de utilizar el guión largo habitual introduce el uso de la virgulilla \sim para representar la negación. Łukasiewicz, por su parte, utiliza \neg por la palabra polaca «negacja», aunque como su sistema notacional es completamente prefijo esta característica no es singular de la Negación. El signo \neg , que a día de hoy es el más utilizado como marca lógica para la Negación, fue introducido por Gentzen y era originalmente una \neg acostada: \neg (véase GENTZEN (1955)).

En sistemas completamente formalizados hay varias maneras de representar la Negación. Una doctrina propugnada por Frege —aunque fuertemente sugerida en la obra de Boole y Peirce (véase SHRAMKO Y WANSING (2010))— sugiere considerar la Verdad y la Falsedad como objetos (de hecho, *valores*) a los que las proposiciones refieren. La Verdad (y la Falsedad) dejan de ser, así, *predicados* cuyo lugar es la proposición, y la formulación intuitiva «la proposición P es verdadera/falsa» es reemplazada en la formalización por: «El valor (veritativo) de la proposición P es Lo Verdadero/Lo Falso».

Los Principios de No Contradicción y del Tercero Excluido se convierten entonces en las siguientes disposiciones formales:

1. Una proposición debe recibir sólo uno de los dos valores veritativos (No Contradicción)

44. Recuérdese que en Frege, así como en el primer Russell, subsiste una distinción entre el contenido de una proposición y la afirmación de la misma. Esta tesis luego será rechazada en general por la filosofía analítica de segunda generación (comenzando por Wittgenstein en el *Tractatus*), y no se la considerará doctrina de la Lógica Clásica.

2. La proposición debe recibir al menos uno de los dos valores veritativos (Tercero Excluido)

Donde el número puede relativizarse:

1. Una proposición debe recibir sólo un valor veritativo (No Contradicción)
2. La proposición debe recibir al menos un valor veritativo (Tercero (?) Excluido)

Lo que queda condensado en la siguiente

Tesis Verifuncional El carácter de una proposición de ser verdadera o falsa se reduce a su referencia. La referencia para proposiciones es una función que envía cada proposición a un valor veritativo.

Si 1 representa la Verdad y 0 la Falsedad, la verifunción $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}(x)$ representa la Negación. Ésta es la disposición original fregueana, y es la que adoptó la Lógica Clásica. Es sensible notar, en cualquier caso, que no hay muchas otras alternativas. Verifunciones unarias, en un álgebra de sólo dos elementos, hay sólo cuatro: además de la ya considerada, la identidad $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}(x)$ y las dos constantes, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}(x)$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}(x)$. Por lo que la identificación de $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}(x)$ con la Negación resulta un poco *faute de mieux*⁴⁵.

Considerar la definición de Negaciones en álgebras con más de dos elementos puede ayudar a ilustrar este último punto. En un álgebra de tres valores de base $\{1, U, 0\}$ y función identidad $\begin{pmatrix} 1 \\ U \\ 0 \end{pmatrix}(x)$ hay catorce funciones unarias candidatas para ser la Negación característica de dicha lógica:

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}(x) & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ U \end{pmatrix}(x) & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}(x) \\
 \begin{pmatrix} 0 \\ U \\ 1 \end{pmatrix}(x) & \begin{pmatrix} 0 \\ U \\ 1 \end{pmatrix}(x) & \begin{pmatrix} 0 \\ U \\ U \end{pmatrix}(x) \\
 \begin{pmatrix} 0 \\ U \\ 0 \end{pmatrix}(x) & \begin{pmatrix} 0 \\ U \\ 1 \end{pmatrix}(x) & \begin{pmatrix} 0 \\ U \\ 1 \end{pmatrix}(x) \\
 \begin{pmatrix} 0 \\ U \\ 0 \end{pmatrix}(x) & \begin{pmatrix} 0 \\ U \\ U \end{pmatrix}(x) & \begin{pmatrix} 0 \\ U \\ 1 \end{pmatrix}(x) \\
 \begin{pmatrix} 0 \\ U \\ U \end{pmatrix}(x) & \begin{pmatrix} 0 \\ U \\ 0 \end{pmatrix}(x) & \begin{pmatrix} 0 \\ U \\ 0 \end{pmatrix}(x)
 \end{array}$$

45. Lo mismo puede decirse de la identificación del condicional con la verifunción $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}(x, y)$.

E incluso:

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}(x) & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}(x) \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ U \end{pmatrix}(x) & \begin{pmatrix} 1 \\ U \\ 1 \end{pmatrix}(x) \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ U \end{pmatrix}(x) & \end{array}$$

Pues todas estas respetan Dependencia y Diferencia. La conocida Negación de Łukasiewicz, Bochvar y Kleene es la función $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ U \end{pmatrix}(x)$, pero no hay razones estrictamente *a priori* para preferirla por sobre las demás. Y con que no hay una razón *a priori* quiero decir que va todo en la interpretación filosófica intencionada.

La semántica de valores de verdad puede generalizarse para considerar un conjunto arbitrariamente grande (finito) de valores V , dentro del cual se distingue un subconjunto D de *valores designados*. Sin embargo, como ha mostrado Suszko, el hecho de que esta distinción sea conjuntista presupone a la lógica clásica y por tanto la recupera en el meta-nivel (cf. SUSZKO (1977); SHRAMKO Y WANSING (2010)): ahora en lugar de una oposición contradictoria entre Verdad y Falsedad tenemos la misma oposición pero entre *valores designados* y *no-designados*.

Las semánticas que involucran modelos conjuntistas también están afectos de las conclusiones de Suszko. Sea M un conjunto de configuraciones conjuntistas y sea L un lenguaje formal. La relación \vDash para M con fórmulas de L de la siguiente manera: $M \vDash p \in L$ si y sólo si bajo una función de interpretación apropiada la fórmula p se corresponde con una configuración de M . En todas las semánticas apropiadas para esta descripción se verifica que o bien $M \vDash p$ o bien $M \not\vDash p$, pero nunca ambos. Se trata de la misma semántica bivaluada de la Lógica Clásica, como es fácil notar.

La lógica intuicionística no está afectada de la Tesis de Suszko, puesto que no interpreta a las conectivas lógicas como verifunciones. La interpretación BHK (Brouwer-Heyting-Kolmogorov), que podría considerarse la estándar dentro del paradigma intuicionista, define el significado de las conectivas lógicas en función de la existencia de pruebas (construcciones efectivas) para las proposiciones involucradas. Utilizan entonces una constante (\perp) para representar el “absurdo” brouweriano, la construcción imposible o lo que no

admite pruebas, y definen consecuentemente la negación « $\neg A$ » como

$$A \rightarrow \perp$$

Donde el condicional es interpretado como las transformaciones de las pruebas del antecedente en pruebas del consecuente.

Esta definición de negación es compatible con los sistemas clásicos, pero insuficiente para asegurar la eliminación de la Doble Negación, y por consiguiente también insuficiente para demostrar $\vdash A \vee \neg A$, razón por la cual se dice que la lógica intuicionística viola el Principio del Tercero Excluido. Sin embargo, la negación intuicionística posee un ciclo de involución extraño, (3,1), lo que significa que la doble negación intuicionística se comporta como una afirmación en sentido clásico, y en consecuencia toda la lógica clásica puede ser recuperada en un marco intuicionístico: basta con poner dobles negaciones delante de todas las fórmulas, algoritmo que se conoce como “traducción de Gödel”, por haber sido él quien la propuso.

Una vez que la lógica intuicionística es puesta en equivalencia con los cálculos funcionales como Lambda y las teorías de tipos susceptibles de ser definidas sobre ellos (lo que se conoce como *correspondencia Curry-Howard*), la constante “absurdo” recibe una interpretación un poco más refinada. De acuerdo con dicha correspondencia, las proposiciones pueden ser interpretadas como conjuntos (o tipos) cuyos elementos son las pruebas o demostraciones efectivas de la proposición. Si « \perp » es identificado con el conjunto vacío (la proposición que carece de toda prueba), la interpretación de una fórmula como « $A \rightarrow \perp$ » se vuelve entonces el conjunto de funciones que van de A a \perp ; como ninguna función total puede tener por codominio el conjunto vacío sin que su dominio sea vacío a su vez, se sigue que las pruebas de A son tantas como las pruebas de \perp , es decir, *ninguna*. Ello justifica entonces, de manera quizás un poco más fuerte o “natural”, la identificación de $A \rightarrow \perp$ con $\neg A$. Sin embargo, esto todavía no suprime la captura de la Lógica Clásica dentro de la Intuicionística, y el ciclo de involución (3,1) sigue teniendo una justificación natural, aunque no por ello poco problemática:

For instance, since $\mathbf{0}$ is false, θ is a proof of $\neg A := A \Rightarrow \mathbf{0}$ iff A has no proof at all; indeed, θ must send the proofs of A into the proofs of $\mathbf{0}$, i. e., into the empty set, which is possible only in case A has no proof at all; in which case θ does not matter. In particular, doubly negated formulas are quite mistreated by this interpretation. Either $\neg A$ has a proof (and no matter what is a proof of $\neg A$) or it is $\neg\neg A$ who has a proof (and no matter what is a proof of $\neg\neg A$). All one can object to my remark is poor: I am using the excluded middle, so my «meta» is inappropriate! Witness how this Mister Meta comes in time to tangle up the cards! (GIRARD, 2011b, p. 99)

La negación intuicionística es un primer buen ejemplo de por qué el análisis alético es insuficiente para dar cuenta de todas las propiedades lógicas (esto es, inferenciales) de una negación. Los conceptos de construcción y función no tienen un único opuesto conceptual interesante para reproducir, en el nivel funcional, la oposición clásica entre Verdad y Falsedad, y es por esto que él resulta insuficiente; no-construcción, o ausencia-de-función, son alternativas descartadas, pues caen fuera del ámbito de discusión. Véaselo de la siguiente forma: en un juego de rompecabezas donde el único movimiento lícito es presentar propuestas de solución, no-presentar una propuesta de solución no es un movimiento lícito, es simplemente no estar jugando. De la misma forma, si la matemática “consiste” en presentar ciertas construcciones, todo lo que puede decirse *en* ella versa sobre dichas construcciones; el no tener una construcción no es en sí mismo una construcción, por lo que no es algo que se diga *en* la matemática.

En el nivel interactivo esto se vuelve todavía más patente. Entre las lógicas dialécticas⁴⁶ existen principalmente dos maneras de formalizar la negación, vinculadas a cada una de las dos grandes tradiciones en el campo: la Dialógica, inaugurada por los trabajos de Lorenz y Lorenzen, y las semánticas de teoría de juegos (GTS por sus siglas en inglés) propuestas originalmente por Jaako Hintikka.

En ambos enfoques la disposición compositiva considera diálogos entre dos participantes que proponen aserciones o responden con aserciones a las del otro. Desde esta perspectiva, el diálogo formal (es decir, puramente lógico) se caracteriza por el hecho

46. En el sentido original de “diálogo” o “debate”, y no del uso (post)hegeliano que es sin duda una divergencia.

de que las posibilidades de aseverar o responder se definen sólo en atención a la forma lógica de las aserciones involucradas, y establecen por tanto el significado de los sincategoremas. En todos estos juegos el juego transcurre de manera analítica, descomponiendo la aserción original (*tesis*) en sus partes constituyentes. El jugador que gana es el que se queda con la última palabra. La gran diferencia entre los dos enfoques tiene que ver con la forma en que manejan las fórmulas no analizables: mientras que en Dialógica se asume que los átomos proposicionales no pueden ser respondidos y por lo tanto el análisis lógico permanece por completo *en* el diálogo mismo, en GTS se recurre a un *modelo* externo que determina desde afuera el valor de dichas aserciones⁴⁷. Este rol es el que explica la divergente caracterización de los participantes del diálogo en ambas propuestas. Para la Dialógica, los jugadores son respectivamente un Proponente y un Oponente, y el juego consiste en que el Proponente busque conseguir del Oponente las concesiones suficientes para que éste último se comprometa con la tesis que el primero le ha *propuesto* (de ahí su nombre). La apelación a un modelo es innecesaria, pues el Proponente sólo necesita del Oponente que le haga tales concesiones, indiferente de su verdad o falsedad respecto de un posible modelo o universo de referencia.

Para GTS en cambio el juego consiste en que un primer jugador busca asentar que la tesis es satisfecha por el modelo dado, mientras que el otro intenta mostrar lo contrario. Así, al menos al momento de arrancar el juego, *Eloísa* o *Yo mismo* hace las veces de verificador y *Abelardo* o *Naturaleza* de falseador de la tesis. Las reglas del juego dictaminan en cada caso cuál de los dos jugadores puede hacer un movimiento en cada turno, lo que está gobernado por el significado lógico de cada sincategorema: por ejemplo, ante una conjunción $A \wedge B$ es el falsador quien puede escoger entre continuar el juego para A o para B , dado que una conjunción necesita sólo uno de sus conyuntos para ser falsa; pero ante una disyunción $A \vee B$ el verificador tiene la preferencia, pues la disyunción necesita sólo uno de sus disyuntos para ser verdadera. La regla para la negación $\neg A$ manda entonces un cambio de roles: quien hasta ese momento había estado jugando como verificador se

47. Aunque cf. KRABBE (2006), en donde el autor defiende que la única diferencia sustancial estriba en los intereses teóricos de cada propuesta (p. 689).

convierte en falsador y vice-versa, y el juego continúa para la aserción *A*. Esta interpretación está en perfecta concordancia con la oposición clásica entre lo verdadero y lo falso, aunque su semántica alética subyacente no es exhaustiva, sino que tiene brechas (*gaps*):

A pleasant feature of the GTS treatment of negation encoded in the rule (R. \neg) is its robustness. It allows us to make the same kind of distinction that was made in Chapter 14 on Partiality between *non-true* and *false*. The former is the lack of a winning strategy for Myself⁴⁸, the latter the existence of a winning strategy for Nature. [...]

Indeed, it is difficult to see how else negation could be treated game-theoretically. Furthermore, the way we defined truth and falsity preserves the usual symmetry between the two with respect to negation: *S* is true iff⁴⁹ $\neg S$ is false; *S* is false iff $\neg S$ is true; *S* is undefined iff $\neg S$ is undefined.

All this is natural and might seem trivial. On closer inspection, however, certain striking consequences begin to come to light. One such striking consequence is the failure of the law of the excluded middle.

(HINTIKKA Y SANDU, 2011, p. 426)

Pace Hintikka, en Dialógica la regla para la negación no puede expresarse como un cambio de roles: en primer lugar, porque en Dialógica el juego no consiste en movimientos alternados entre el Proponente y el Oponente sino que en cada turno ellos buscan atacar alguna de las aserciones del otro o defenderse de algún ataque. Por lo tanto, ni es uno el que en cada momento debe sólo atacar o sólo defender, ni tampoco es completamente posible que sus roles sean intercambiados por completo:

One supplementary rule is that atomic formulas are never attacked or defended, but *P* [el Proponente] may assert them only if they have been previously asserted by *O* [el Oponente]. The idea behind this rule is that the semantics is to describe logical validity, not truth in a particular situation, so a winning strategy for *P* should succeed independently of any information about atomic facts. Thus *P* can safely assert such a fact only if *O* is already committed to it; otherwise, it might turn out to be wrong. *A consequence of this rule governing atomic statements is that negating a formula does not fully interchange the roles of the two players, because it is still P who is constrained by the rule.*

(BLASS, 1992, p. 184) (El énfasis es mío.)

48. Que aquí he traducido por «Yo mismo», es decir, Eloísa o el verificador inicial.

49. «if and only if».

En lo que respecta a la regla de Dialógica para la negación, varias alternativas son posibles. En su escrito de 1955, *Einführung in die operative Logik und Mathematik*, Lorenzen propone interpretar la negación a la usanza intuicionística, es decir como una implicación desde el *negatum* hacia una aseveración que los dos jugadores hayan acordado previamente considerar insostenible. Más adelante, en 1962, lo hace con ayuda de la constante $\lceil \perp \rceil$, cuya regla dice que cualquier jugador que se comprometa con \perp pierde (KRABBE, 2006). En propuestas más recientes (por ejemplo, CLERBOUT (2013)) las reglas estipulan que la manera de atacar un *negandum* es aseverar su *negatum*, pero en contrapartida no hay manera de defenderse. Esto lleva también a estrategias de encerrona, en las cuales el jugador que aseveró originalmente el *negandum* perderá a menos que pueda atacar el *negatum*, es decir, justificar su aseveración de una negación.

Capítulo 3

El Principio de Explosión

Voy a comenzar este capítulo con dos anécdotas. Según la primera, estaba Bertrand Russell dictando una cátedra sobre lógica, cuando afirmó que de una premisa falsa puede concluirse cualquier cosa. Uno de sus estudiantes, incrédulo, le interpeló diciendo: “¿puede entonces demostrar, sobre la base de que $2 + 2 = 5$, que usted es el Papa en Roma?” Russell le contestó de inmediato:

Supongamos que $2 + 2 = 5$. Si sustraemos 2 a ambos lados, obtenemos que $2 = 3$. Sustraemos todavía 1 y llegamos al siguiente resultado: $1 = 2$. Ahora bien, es claro que yo soy una persona, y a la vez que el Papa en Roma y yo somos dos personas. Pero, dado que Uno es igual a Dos, usted y yo estaremos de acuerdo en concluir que yo soy el Papa en Roma.

Ingeniosa como es, esta respuesta parece sostenerse más en la habilidad del profesor Russell por contestar preguntas impertinentes, que en la peculiaridad lógica de la que, se supone, ella depende. En un contexto similar —aunque un tiempo diferente¹— un profesor de Matemáticas plantea a sus estudiantes universitarios el siguiente acertijo:

Un matemático espera su tren en una estación rural. De pronto se detiene un tren militar en el andén y bajan algunos oficiales a pedir asistencia. El ma-

1. Esta anécdota me la contó una estudiante de Matemáticas de la Universidad de Santiago.

temático se acerca a uno de los vagones y sube a él. El guardia de la estación, que lo ha visto, le grita:

—¡Señor! Baje por favor, este tren no se detiene aquí.

A lo que el matemático, con toda calma, le responde:

—Si este tren no se detiene aquí, entonces yo no me he subido.

¿Es verdadero lo que ha contestado el matemático?

Al igual que Russell, el profesor intenta ilustrar a sus estudiantes una de las peculiaridades más extrañas de la lógica matemática que deben aprender: que de una afirmación falsa se sigue cualquier cosa. Pero, ¿cuál es la *necesidad* de enseñar (adoctrinar) a los futuros matemáticos en esta peculiaridad? Después de todo, ninguna demostración matemática interesante depende radicalmente de ella (si es que alguna lo hace): si sabemos que una proposición es falsa (o una construcción imposible) las conclusiones que se sigan de ella no resultan interesantes, a la vez que concluir alguna cosa falsa es algo que en general siempre queremos evitar².

En este capítulo abordaré el estudio de este interesante fenómeno lógico. Será útil, pues, tener un nombre para él. A lo largo del siglo XX se popularizó la expresión latina «*Ex falso sequitur quodlibet*», “de lo falso se sigue cualquier cosa [que se quiera]”³, aunque, como veremos, también le cabe la expresión «*Ex impossibile sequitur quodlibet*», “de lo imposible se sigue cualquier cosa [que se quiera]” e incluso otras variantes. Jan Łukasiewicz lo llamó *Principio de Duns Scotus*, o *Principio del Pseudo-Scotus* luego de que el epónimo fuera rectificado⁴. En PRIEST (2006a) y BOBENRIETH MISERDA (1996) hallamos las expresiones «*Ex contradictione quodlibet*» y «*Ex contradictione sequitur quodlibet*» respectivamente, y para la segunda de ellas el autor da la siguiente justificación:

He encontrado que algunos autores sostienen que esta situación se habría expresado en formas que no corresponden al texto original: por un lado, Miró

2. Recuérdese mi demostración de la Conjetura de Goldbach al comienzo del capítulo 1.

3. El significado preciso de «quodlibet» es «lo que se quiera», o más literalmente aún: «lo que [te] plazca» (*quod-libet*). También se lo puede hallar como «quidlibet», que es lo mismo sólo que en género masculino («quod» es neutro).

4. Véase *infra*, sección 3.1.

Quesada 1988: p. 612, n. 52, plantea que este fenómeno “quedó vigorosamente expresado en el dictum «ex contradictoriis quodlibet»”, que significaría «de cosas contradictorias (se sigue) cualquier otra». Por su parte Dalla Chiara 1974: p. 27 habla de un principio según el cual, “ex absurdo sequitur quodlibet”. Esta segunda expresión, si bien no corresponde a ninguna de las formulaciones del original, al igual que la anterior, podría servir para englobar tanto la regla a partir de lo contradictorio, como más específicamente a partir de lo imposible. He preferido sugerir la expresión «*Ex contradictione sequitur quodlibet*» porque parece englobar mejor la situación, en la medida en que «*contradictio*» se entienda como la deducción de dos proposiciones contradictorias. (BOBENRIETH MISERDA, 1996, p. 103)

Finalmente, el nombre más reciente es el de *Principio de Explosión* (*Principle of Explosion*), propuesto por Priest en PRIEST (1998) con la única justificación de ser más “colorido” (*colorful*) que la cláusula latina.

Como veremos en seguida, a pesar de que las cláusulas más habituales identifican a lo *falso*, lo *imposible* o lo *contradictorio* como aquello de lo que “se sigue cualquier cosa”, tan sólo en el aparatage clásico este resultado depende de muchos otros factores, por lo que *no* es una propiedad que pueda atribuirse sólo a ellos. La amplia variedad de denominaciones para este fenómeno lógico es, en efecto, síntoma de su inespecificidad. Por lo tanto, en lo sucesivo preferiré el sugerente nombre de Priest, «*Explosión*», para referirme a él, pero más que por su colorido lo hago por tener la ventaja de no comprometer directamente ningún otro concepto lógico.

3.1. El desarrollo del Fenómeno de Explosión

3.1.1. Primeros desarrollos

En el segundo libro de *Primeros Analíticos*, Aristóteles aborda la cuestión de la posibilidad de razonar desde o hacia premisas falsas. Con respecto a los argumentos con premisas verdaderas y conclusión falsa, el filósofo concluye que no pueden ser considerados válidos; pero al momento de considerar el argumento con premisas falsas, es más cauteloso.

D'Ottaviano y Gomes coinciden con los críticos en considerar dichos pasajes del *corpus* aristotélico como el lugar en el que se encuentra el fundamento original del fenómeno de la explosión. Sin embargo, los autores también explican, siguiendo a Bochénski, que en este pasaje el filósofo sostiene “apenas que alguém pode formular silogismos, nos quais uma ou as duas premissas sejam falsas e a conclusão seja verdadeira” (D’OTTAVIANO Y GOMES, 2017, p. 101). Aristóteles pone estos argumentos en una posición demostrativa inferior a la de los argumentos con premisas verdaderas: “Así, pues, a partir de cosas verdaderas no es posible probar por razonamiento algo falso, en cambio, a partir de lo falso es posible probar lo verdadero, sólo que no el *porque* («διότι»), sino el *que* («ὅτι»): en efecto, el razonamiento del *porque* no surge a partir de cosas falsas” (ARISTÓTELES, 1994, 53b 4-10).

Algo similar ocurre en el caso de la Stoa, la segunda cuna de la lógica mediterránea. Sexto Empírico, en su exposición (y crítica) de la lógica de los filósofos estoicos, nos informa de la distinción entre dos nociones de consecuencia⁵, que atribuye cada una a su defensor original, Filón y Diodoro. El condicional de Filón “é verdadeiro quando não é o caso que seu antecedente seja verdadeiro e o conseqüente falso” (*Adv. Math.*, VIII, 113), mientras que el de Diodoro “é verdadeiro quando ou sempre fora verdadeiro ou não é possível ao antecedente ser verdadeiro e o conseqüente falso” (*ibidem*, 115) (D’OTTAVIANO Y GOMES, 2017, p. 132). En otro de sus libros el autor incluye todavía otros dos: el condicional *por coherencia*, que “vale sempre que a negação de seu conseqüente é incompatível (ἀντικείμενον) com seu antecedente” (*Hip. Pirrh.* II, 111)⁶, y el condicional *por el sentido implícito*⁷, que “é verdadeiro se seu conseqüente está, com efeito, incluído em seu antecedente” (*ibidem*, 112)⁸ (D’OTTAVIANO Y GOMES, 2017, p. 134).

5. Subyacentes, al parecer, tanto a las proposiciones hipotéticas como a los argumentos. Sin embargo, es importante destacar que los estoicos *no* confundían una cosa y la otra. Véase D’OTTAVIANO Y GOMES (2017), sobre todo la sección 1.3.

6. La traducción de Gallego Cao y Muñoz Diego pone: “una implicación es válida cuando la negación de lo que en ella está como conseqüente, se contrapone también a lo que en ella está como antecedente” (SEXTO EMPÍRICO, 1993).

7. Nombres según la traducción de Gallego Cao y Muñoz Diego (SEXTO EMPÍRICO, 1993).

8. “Es verdadera una implicación cuyo conseqüente esté incluído implícitamente en el antecedente” (SEXTO EMPÍRICO, 1993).

De estos cuatro condicionales sólo los dos primeros son verifuncionales. En ambos casos, los estoicos parecen haber reconocido la posibilidad de condicionales verdaderos con antecedentes falsos como problemática: “os estoicos teriam consciência do conteúdo lógico do *Ex falso*, que para eles soou paradoxal, como atesta a polêmica em torno do critério dos condicionais corretos” (D’OTTAVIANO Y GOMES, 2017, p. 137). Sin embargo, como en Aristóteles, todavía no hay una referencia explícita y plenamente conciente a la posibilidad de que haya un argumento válido con “cualquier cosa” por consecuencia. Habrá que esperar hasta el siglo XI, en el florecimiento de la lógica europea, para que el terreno de las discusiones se vuelva lo suficientemente fértil como para hacer posible el fenómeno de la explosión.

Un ingrediente muy importante en la maduración del argumento explosivo es el reconocimiento de la *preservación de verdad* como criterio de validez deductiva.

Criterio de validez -1 [PRESERVACIÓN DE VERDAD] Un argumento es válido cuando no es posible que todas sus premisas sean simultáneamente verdaderas y su conclusión falsa.

De acuerdo con SPRUYT (1993), los primeros autores en manejar esta definición de validez fueron Garlandus Compotista y Petrus Abælardus, pero ella realmente se popularizó sólo hacia la segunda mitad del siglo XII. D’Ottaviano y Gomes nos informan, en cualquier caso, que en las generaciones que separan al amante de Eloísa de los escolásticos del período intermedio (1160 - 1301)⁹ sí hubo reflexiones más o menos profundas sobre la aparente paradoja de que un argumento con premisas falsas “debería” admitir cualquier cosa por conclusión, principalmente en torno a comentarios a la obra de Boecio, el gran referente de lógica en Europa antes del redescubrimiento de la obra aristotélica (D’OTTAVIANO Y GOMES, 2017, sección 2.1). Hacia fines del siglo XII, sin embargo, el escenario institucional de la enseñanza y el cultivo de la filosofía y la lógica cambiaron en el mundo europeo, e hicieron posible un desarrollo mucho más sistemático de las discusiones.

9. De acuerdo con la cronología presentada en D’OTTAVIANO Y GOMES (2017, figura 2.1, p. 150).

Hacia comienzos del siglo XIII, las opiniones en torno a si podía o no seguirse algo de lo falso o de lo imposible estaban divididas entre las escuelas lógicas europeas. Por una parte se tenía la evidencia conceptual de que, *stricto sensu*, el criterio de preservación de verdad atribuía verdad al argumento (o al condicional, pues —a diferencia de los estoicos— los lógicos medievales no fueron, en general, muy cuidadosos en distinguir entre ambos) con premisas (o antecedente) falso o imposible, pero las consecuencias de esto resultaban a ratos rayanas en lo herético: “No debate acerca da natureza da Trindade, por exemplo, a partir de algo impossível, como o Espírito Santo não proceder do Filho, poder-se-ia concluir que a segunda e a terceira pessoas da Trindade fossem distintas, quebrando assim a sua unicidade. Devido a razões de caráter doutrinário, esse tipo de inferência poderia levar a conclusões altamente indesejáveis” (D’OTTAVIANO Y GOMES, 2017, p. 174). En la otra vereda, quienes defendían que la verdad de un condicional se deriva de una relación causal entre antecedente y consecuente rechazaban que un condicional con antecedente imposible pudiera tener conclusión alguna, puesto que lo imposible, siendo la nada, no debería poder ser causa de alguna cosa.

Llegados a este punto ya han sido claramente identificados dos de los tres elementos que típicamente serán asociados con la explosión: lo falso y lo imposible. Es notable que el último elemento —la contradicción— no haya aparecido todavía, siendo que en el siglo XX cobrará un especial protagonismo. Es importante además destacar que no hay todavía un nombre propio para el fenómeno, y en realidad no lo habrá antes de que Łukasiewicz se lo atribuya erróneamente a Duns Scoto, como veremos en seguida. Sin embargo, las formas descriptivas para referirse a él empiezan a homogeneizarse, y al menos Guillermo de Ockham ya usa la expresión a la que llegaremos a acostumbrarnos en el siglo XX¹⁰. En la *Summa Logicæ* (Tratado tercero, parte tercera, capítulo 38), compuesta en la década de los 20’ del siglo XIV, al presentar las reglas generales que gobiernan las *consequentiae* (ocho), enuncia dos de ellas así (D’OTTAVIANO Y GOMES, 2017, p. 194-5):

10. No he podido encontrar, en las fuentes consultadas, una referencia precisa a la primera vez en que la expresión haya sido usada.

1. Ex falsis potest sequi verum (“de lo falso puede seguirse lo verdadero”) (*Summ. Log.* 728.12)
2. Ex impossibili sequitur quodlibet (“de lo imposible se sigue cualquier cosa”) (*Summ. Log.* 730.88)

Aunque hubo autores que se aproximaron bastante a una demostración formal del principio y varios que lo enunciaron más o menos explícitamente¹¹, el texto que sin lugar a dudas marca la concientización definitiva del fenómeno lógico de la explosión es el *Universam Logicam Quaestiones*¹². Se trata de un texto anónimo atribuido erróneamente a Duns Scoto (1266-1308) por Luke Wadding, editor de la obra del *Doctus Subtilis* publicada en 1639 (KNEALE Y KNEALE, 1972)¹³. El autor, que a falta de una identificación más precisa hoy es llamado Pseudo-Scotus, enuncia entre otras la regla siguiente (KNEALE Y KNEALE, 1972, p. 261): “ad quaelibet propositionem implicantem contradictionem sequitur quaelibet alia propositio in consequentia formali” (de cualquier proposición que implique contradicción se sigue cualquier otra como consecuencia formal). El ejemplo de esta proposición, que parece tener para el autor carácter de prueba, es reconstruido y presentado por los Kneale así (*ibidem*):

$$\frac{\frac{\text{Sócrates existe y no existe}}{\text{Sócrates no existe}} \quad \frac{\frac{\text{Sócrates existe y no existe}}{\text{Sócrates existe}}}{\text{Sócrates existe o un hombre es un asno}}}{\text{Un hombre es un asno}}$$

La cita textual que reproducen los autores es la siguiente:

Ad istam *Socrates est et Socrates non est*, quae implicat contradictionem de forma, sequitur *Homo est asinus vel Baculus stat in angulo* et sic de quocumque. Probat, quia sequitur *Socrates est et Socrates non est, igitur Socrates non est*, quia a copulativa ad alteram eius partem est consequentia formalis. Tunc

11. En D’OTTAVIANO Y GOMES (2017) se encuentra una exposición comprensiva de los aportes de cada uno de ellos. Véase sobre todo D’OTTAVIANO Y GOMES (2017, sección 2.3).

12. Véase, en cualquier caso, MARTIN (1986).

13. Los autores en D’OTTAVIANO Y GOMES (2017) señalan que el error de atribución fue denunciado por primera vez en 1936 por R. P. E. Longpre.

reservetur illud consequens. Postea sequitur *Socrates est et Socrates non est, igitur Socrates est* per eandem regulam. Et ad istam *Socrates est* sequitur *Igitur Socrates est vel homo est asinus*, quia quaelibet propositio infert se ipsam formaliter cum quacumque alia in una disiunctiva. Tunc arguitur ex consequente: *Socrates est vel homo est asinus, sed Socrates non est* (ut reservatum fuit prius), *igitur homo est asinus*. Et sicut arguitur de ista, ita potest argui de quocumque alia; omnes enim consequentiae sunt formales.

(Mayúsculas e itálicas como en KNEALE Y KNEALE (1972))

Y que traduzco así:

De esta, *Sócrates existe y no existe*, que implica una contradicción de forma, se sigue *Un hombre es un asno* o *El bastón permanece inclinado* y así cualquier otra. Se puede probar que es así, porque se sigue *Sócrates existe y no existe, por lo tanto Sócrates no existe*, ya que la copulativa tiene cada una de sus partes por consecuencia formal. Apartemos esta conclusión por el momento. Después se sigue *Sócrates existe y no existe, por lo tanto Sócrates existe* por la misma regla. Y a esta *Sócrates existe* le sigue *Por lo tanto Sócrates existe o un hombre es un asno*, ya que cualquier proposición se infiere formalmente a sí misma en disyunción con cualquier otra. Entonces probamos a partir de esta consecuencia: *Sócrates existe o un hombre es un asno, pero Sócrates no existe* (que es lo que habíamos apartado anteriormente), *por lo tanto un hombre es un asno*. Y de la misma forma como probamos esto, es posible probar cualquier otra cosa; todo, en efecto, es consecuencia formal de esto.

El pasaje de Pseudo-Scotus es importante por dos razones: la primera es que de manera explícita y mucho más consciente que sus predecesores ha identificado el *sequitur quodlibet* como una consecuencia de la contradicción y no de lo falso o de lo imposible (de hecho, en el mismo escrito el autor demostrará el *Ex falso* y el *Ex impossibili* a partir de esta primera regla); la segunda es que lo ha presentado ya no como una consecuencia conceptual sino formal. Esto es decir que en Pseudo-Scotus el fenómeno de la explosión no se deriva de su definición de consecuencia, sino que se reduce a otras manipulaciones deductivas¹⁴.

14. Cabe decirse también que la deducción de Pseudo-Scotus a través de una disyunción que primero se agrega y luego se elimina es la forma “estándar” de probar el *quodlibet* a partir de una contradicción. Christopher Martin la llama “what we know as C. I. Lewis’s proof that anything follows from a contradiction” (MARTIN, 1986, p. 565), y es perfectamente análoga a la que utiliza Sir Karl Popper en su escrito *What*

cuales no parecía haber conexión de significado entre las partes, en el siglo XX el problema se desplaza hacia el de la consistencia formal (con la no menor excepción de los lógicos relevantistas). Según BOBENRIETH MISERDA (2010) una de las primeras expresiones literales de la regla de Pseudo-Scotus aparece en *Principia Mathematica* de Russell y Whitehead, en la proposición *2,21¹⁵. Dicha proposición es la siguiente:

$$\vdash: \sim p \supset p \supset q$$

Donde $\ulcorner \urcorner$ es una Afirmación¹⁶. La demostración que proporcionan los autores apela sólo a la regla de adición lógica, la conmutatividad de la disyunción y a la definición del condicional que ellos utilizan, enunciada como proposición *1,01 y que corresponde a

$$p \supset q = \sim p \vee q$$

Dicha demostración tiene esta sencilla forma (RUSSEL Y WHITEHEAD, 1981, *2,21):

$$\frac{\frac{\frac{\vdash: p \supset .q \vee p \text{ (Add.)}}{\vdash: q \vee p \supset .p \vee q \text{ (Syll.)}}}{\vdash: q \vee p \supset .p \vee q} \quad \frac{\frac{\frac{\vdash: p \supset .p \vee q}{\vdash: \sim p \supset . \sim p \vee q} \left[\frac{\sim p}{p} \right]}{\vdash: \sim p \supset .p \supset q} *1,01}{\vdash: q \vee p \supset .p \vee q \text{ (Perm.)}}$$

(Cada bajada de línea representa una aplicación de la regla de conclusión, una sustitución (anotada según la convención de Russell y Whitehead) o una aplicación de la identidad definicional.)

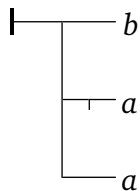
Dicho sea de paso, Bobenrieth señala a renglón seguido que “they do not use the principle of non-contradiction; that appears as number 3.24” (BOBENRIETH MISERDA, 2010, p. 112), pese a que en nuestra exposición del desarrollo del fenómeno de explosión no

15. Como diré en breve, equivalentes a esta proposición ya aparecen en *Begriffsschrift* y también en el *Principles of arithmetic* de Peano. En el caso de este último, el axioma lógico 40 corresponde a « $\Lambda \supset a$ », donde $\ulcorner \Lambda \urcorner$ es la constante falsa o absurda (PEANO, 1889, p. 88) (véase la página 58). Esta expresión es equivalente a la que aparece en el apéndice al *Über den Satz des Widerspruchs bei Aristoteles* de Łukasiewicz (1910): « $0 < a$ » (donde $\ulcorner < \urcorner$ es la implicación y $\ulcorner 0 \urcorner$ la constante *falsum*). Dicho sea de paso, es aquí donde el lógico polaco identifica a Duns Scotus como el primer formulador del *Ex impossibili sequitur quodlibet*. Véase BOBENRIETH MISERDA (2010, p. 117).

16. Con agrupación de paréntesis y no de puntos la fórmula se escribiría $\ulcorner (\sim p \supset (p \supset q)) \urcorner$.

hemos tenido que referirnos al Principio de No Contradicción en ningún momento. Es claro, pues, que el autor escribe a un auditorio predispuesto a asociar una cosa con la otra, lo que no es una casualidad. Como veremos en breve, los lógicos clásicos lograron popularizar el mito de que su vinculación del Principio de No Contradicción al de Explosión (y, en alguna medida, su confusión) tiene tanto arraigo en la tradición como la gran mayoría de las peculiaridades de su Lógica.

Si comparamos esta demostración con la de Pseudo-Scotus, veremos que en los dos casos el elemento “extraño” —la proposición *quodlibet*— ha sido introducido con ayuda de la regla de adición lógica, que autoriza a deducir una disyunción a partir de cualquiera de sus disyuntos *sin importar lo que sea el otro*. No obstante, llegado el momento los lógicos relevantistas y paraconsistentes manifestaron, en general, una mayor desconfianza hacia la negación y el condicional que hacia la disyunción en la identificación de las causas del fenómeno de la explosión, y esto por razones no muy claras. A este respecto me parece interesante comentar que Frege demuestra en *Begriffsschrift* precisamente una proposición casi idéntica a la *2,21 de *Ppia. Math.*, que en su notación corresponde a (FREGE, 1879, §18):



Pero que él decide interpretar no en su sentido literal sino como la regla de adición: “The case in which b is denied, $\neg a$ is affirmed, and a is affirmed does not occur. We can express this as follows: ‘If a occurs, then one of the two, a or b , takes place’ ” (FREGE, 1879, p. 46).

Para Bobenrieth es también cosa notable que Emil Post, en su célebre demostración de la completitud del cálculo de proposiciones de *Principia Mathematica* de 1921, señala el fenómeno de la explosión como una consecuencia de la completitud y *no* de la consistencia. Dice el autor que toda proposición es “either asserted as a result of the postulates or else its assertion will bring about the assertion of every possible elementary proposi-

tion” (Post, citado en BOBENRIETH MISERDA (2010, p. 113)) por virtud de la ya citada proposición *2,21 de *Prin. Math.*. La completitud en este sentido corresponde al hecho de que el sistema deductivo permite deducir sea una fórmula o su negación, lo que está más cercano al Principio del Tercero Excluido que al de No Contradicción.

Es en estos años en los que comienza a estandarizarse el uso de la palabra «consistencia» para referir a la no contradicción. En el artículo de Post recién mencionado el autor hace uso explícito de la palabra con este sentido:

THEOREM. *The system of elementary propositions of Principia is consistent.*
 For if it were inconsistent we would have both a function and its negative asserted. (POST, 1921, p. 272)

A diferencia de los autores revisados hasta ahora, David Hilbert usa los conceptos de tradición filosófica en una forma mucho más liberal. En su artículo *On the Infinite*, por ejemplo, llama “principle of contradiction” (HILBERT, 1925, p. 382) al esquema

$$(A \rightarrow (B \& \bar{B})) \rightarrow \bar{A}$$

Que *stricto sensu* es una forma de *Reductio ad Absurdum* (véase la sección 2.4). De él presenta sólo un esquema derivado, sin demostración, que en BOBENRIETH MISERDA (2010) es identificado como “the precise formulation of ECSQ¹⁷”:

$$(A \& \bar{A}) \rightarrow B$$

A diferencia de la versión de *Ppia. Math.* o de *Begriff.*, aquí la contradicción aparece expresada de manera explícita como la conjunción de una proposición y su negación, que es la manera en que lo hace Pseudo-Scotus, y que podría decirse que es también la presupuesta en el *Prin. of arith.* de Peano, *via* la igualdad entre « $a - a$ » y « Λ » (véase la nota 15 en la página 80).

De acuerdo con la investigación de Bobenrieth la primera referencia explícita al fenómeno de la explosión en la literatura de la lógica matemática aparece en el libro *Grundzüge*

17. «*Ex Contradictione Sequitur Quodlibet*», el nombre que Bobenrieth usa para referirse al Principio de Explosión.

der theoretischen Logik, escrito por Hilbert y Ackermann y publicado en 1928 (BOBENRIETH MISERDA, 2010, p. 114). Después de presentar la definición usual de consistencia como la imposibilidad de derivar una fórmula y su negación, los autores agregan:

This definition of consistency requires an explanation. It might seem as though we were giving a preferred position to one particular logical principle —the principle of contradiction. The fact is, however, that the occurrence of a formal contradiction, i.e. the provability of two formulas A and $\neg A$, would condemn the entire calculus as meaningless; for we have observed above that if two sentences of form A and $\neg A$ were provable the same would be true of any other sentences whatsoever. Thus consistency of the calculus in the sense of the definition has the same meaning as the stipulation that not every arbitrary formula be provable. (*Hilbert and Ackermann 1928*: p. 30 [also *Hilbert and Ackermann 1938*: p. 31, translated in *Hilbert and Ackermann 1950*: p. 383])
(BOBENRIETH MISERDA, 2010, p. 114)

Como bien señala el autor a renglón seguido, el pasaje anterior no sólo es notable por hacer explícito el fenómeno de la explosión, sino porque además lo relaciona directamente con la contradicción y lo responsabiliza del horror a ella.

En el mismo año de la publicación de este libro, Alfred Tarski presentó ante la Sociedad Polaca de Matemáticas, con sede en Varsovia, una lectura que dos años más tarde daría paso a una comunicación y a un artículo que finalmente aparecería en las *Comptes Rendus des sciences de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie* (vol. 23) bajo el título “Über einige fundamentale Begriffe der Metamathematik”. Este artículo, que ha sido traducido al inglés como “On some fundamental concepts of metamathematics” (TARSKI, 1930a), contiene una serie de ideas que son de primera relevancia para nuestro estudio.

El lógico polaco, tras la observación fundamental de que “las disciplinas deductivas formalizadas forman el campo de investigación de la metamatemática más o menos en el mismo sentido en que las entidades espaciales forman el campo de investigación de la geometría”¹⁸ (TARSKI, 1930a, p. 30), propone considerarlas como *conjuntos* de oraciones significativas (“*meaningful sentences*”). Sobre la base de esta idea Tarski define el conjunto

18. La traducción es mía. Original: “Formalized deductive disciplines form the field of research of metamathematics roughly in the same sense in which spatial entities form the field of research in geometry”.

S de las oraciones significativas y el operador de consecuencia $\ulcorner Cn \urcorner$, que representa al conjunto de consecuencias que pueden deducirse de un conjunto cuando ciertas reglas o axiomas del sistema han sido dadas. Tarski propone varios axiomas para su metamatemática y demuestra de ellos otros tantos teoremas, pero a nosotros nos interesan en particular tres¹⁹:

- 5. *Existe una oración $x \in S$ tal que $Cn(\{x\}) = S$.*
- 9*. *Si $x \in S$, entonces $Cn(\{x, n(x)\}) = S$.*
- 10*. *Si $x \in S$, entonces $Cn(\{x\}).Cn(\{n(x)\}) = Cn(0)$.*

Estos tres axiomas expresan ideas estrechamente relacionadas con el fenómeno de la explosión, pero en un sentido distinto al que hemos visto hasta ahora. De los tres, sólo 9* corresponde literalmente a la afirmación de que de una contradicción se sigue cualquier cosa; el axioma 5 declara la existencia de una oración capaz de deducir cualquier otra, aunque no dice cuál sea ella. En el caso del 10*, lo que dice es que la no-contradicción es inocua, puesto que las únicas consecuencias que una oración y su negación tienen en común son sólo las que se siguen del conjunto vacío.

Con estos axiomas Tarski define la *consistencia*, de manera *sui generis*, como la propiedad de un conjunto X de verificar que $Cn(X) \neq S$, y la *completitud* como la propiedad de un conjunto X de ser equivalente a todos los conjuntos consistentes que lo incluyen²⁰. Llega así a los teoremas 9* y 10*, que relacionan de una manera inesperada estos conceptos con los Principios de No Contradicción y del Tercero Excluido²¹:

- TEOREMA 9*. *X es consistente si y sólo si no existe $y \in S$ tal que $y \in Cn(X)$ y $n(y) \in Cn(X)$.*
- TEOREMA 10*. *X es completo si y sólo si para cada $y \in S$ se verifica o bien que $y \in Cn(X)$ o bien que $n(y) \in Cn(X)$.*

19. En lo que viene a continuación, « $n(x)$ » es la negación de x , « 0 » es el conjunto vacío y « $A.B$ » es la intersección conjuntista de A y B (TARSKI, 1930a).

20. En TARSKI (1930a) dos conjuntos X e Y son equivalentes cuando $Cn(X) = Cn(Y)$.

21. La redacción es ligeramente distinta a la original. Cf. TARSKI (1930a, p. 34).

En TARSKI (1930b) el autor justifica esta definición de consistencia en los siguientes términos:

A set of sentences is called consistent if it is not equivalent to the set of all meaningful sentences [...].

According to the usual definition, a set of sentences is called consistent if there is no sentence which together with its negation belongs to the consequences of this set. Our definition thus diverges from the usual one, and indeed it has a much more general character since knowledge of the concept of negation is not presupposed; in consequence this definition can be applied even to those deductive disciplines in which the negation concept is either entirely lacking or at least does not exhibit the properties usually ascribed to it. (TARSKI, 1930b, p. 90)

De esta definición de consistencia se sigue naturalmente una nueva definición de *inconsistencia*: un conjunto de fórmulas es *inconsistente* si tiene por consecuencia toda oración significativa. Dicho de otra forma, es aquel del cual *se sigue cualquier cosa*.

La escuela de Leópolis-Varsovia será la que primero tomará conciencia de estas diferencias y las hará explícitas. Stanisław Jaśkowski llamó *supercompletos*²² a estos conjuntos de los que se sigue cualquier cosa, haciendo una aclaración que para nuestros propósitos es interesante destacar:

A deductive system \mathfrak{S} is called *contradictory*, if its theses include two such which contradict one another, that is such that one is the negation of the other, e. g., \mathfrak{J} and $N\mathfrak{J}$. If a contradictory system is based on a two-valued logic, then by the implicational law of over-completeness [$CpCNpq$]²³ one can obtain in it as a thesis any formula \mathfrak{P} which is meaningful in that system. It suffices to substitute in L_2 1 [$CpCNpq$] \mathfrak{J} for p and \mathfrak{P} for q and to apply the rule of modus ponens twice. A system in which any meaningful formula is a thesis shall be termed *over-complete*. This deviates from the terminology accepted so far: in the methodology of the deductive sciences such systems have so far been called contradictory, but for my purpose of the analysis presented in this paper it is necessary to make a distinction between two different meanings of

22. La palabra utilizada en la versión en inglés es «over-complete». Bobenrieth la traduce por «sobre-completo» (BOBENRIETH MISERDA, 1996, p. 153), que es más literal pero menos elegante.

23. En notación infija: $\lceil (pC(NpCq)) \rceil$.

the term “a contradictory system”, and to use it only in one sense, as specified above. (JAŚKOWSKI, 1969, p. 145)

Nótese, primero que todo, la simetría entre la proposición *2,21 de *Ppia. Math.* y la proposición L_21 de Jaśkowski: ambas dicen que entre una proposición y su negación, si una es afirmada la otra implica cualquier cosa. Esto, por tanto, alinea al esquema de supercompletud en la descendencia del argumento de Pseudo-Scotus.

Jaśkowski hace explícita una diferencia entre dos formas de inconsistencia que, como vimos, ya habían sido divisadas por Tarski, y que corresponden a las que en CARNIELLI Y CONIGLIO (2016) —siguiendo a HUNTER (1996)— son llamadas *inconsistencia simple* (contradictoriedad) e *inconsistencia absoluta* (supercompletud).

Una vez que estas dos ideas de inconsistencia se tienen a la vista, la revisión de algunos conceptos clásicos se hace necesaria. Los autores que hoy son considerados precursores del dialecismo, como Heráclito o Hegel (PRIEST, 2006a), o los de la lógica paraconsistente, como Łukasiewicz o Vasiliev (BOBENRIETH MISERDA, 1996; D’OTTAVIANO Y GOMES, 2017) no tenían a la vista el resultado de Pseudo-Scotus, y por lo tanto para ellos se trataba sólo de desafiar el *principium omnium firmissimum* aristotélico. De la misma forma, la paradoja que tan famosamente destruyó el primer intento logicista de Frege, la del *conjunto de Russell*, no es, en su primera versión, la denuncia de una inconsistencia absoluta sino sólo de una contradicción flagrante:

There is just one point where I have encountered a difficulty. You state (p. 17) that a function, too, can act as the indeterminate element. This I formerly believed, but now this view seems doubtful to me because of **the following contradiction**. Let w be the predicate: to be a predicate that cannot be predicated of itself. Can w be predicated of itself? *From each answer its opposite follows*. Therefore we must conclude that w is not a predicate. Likewise there is no class (as a totality) of those classes which, each taken as a totality, do not belong to themselves. **From this I conclude that under certain circumstances a definable collection [Menge] does not form a totality.**

(RUSSELL, 1902, p. 124-5) (El énfasis es mío.)

Ni Russell en esta carta ni Frege en su respuesta de la semana siguiente hacen alusión alguna a que “todo se siga” de la teoría de Frege. De hecho, el filósofo alemán detecta las proposiciones que se ven afectadas y los lugares donde su teoría se queda con fundamentos insuficientes, lo que sugiere que él ha interpretado lo dicho por Russell en la misiva como una *Reductio ad Absurdum*, donde la tesis a negar es que las “colecciones definibles siempre forman una totalidad”. Nótese además que la piedra de tope del argumento no es que el predicado pueda y no pueda ser predicado de sí mismo, sino que de cada una de las dos alternativas *se sigue* la otra. La primera parte de esta *reductio* tiene por tanto la forma de un dilema constructivo, que presentamos en la sección 2.4.2 (página 46):

$$\frac{w \text{ es } w \text{ o } w \text{ no es } w \quad \text{Si } w \text{ es } w \text{ entonces } w \text{ no es } w \quad \text{Si } w \text{ no es } w \text{ entonces } w \text{ es } w}{???}$$

Lo que ya nos pone tras la pista de su conexión con la *Consequentia Mirabilis*²⁴:

$$\frac{\frac{\text{Si } w \text{ no es } w \text{ entonces } w \text{ es } w}{w \text{ es } w} \text{ Cons. Mir.} \quad \frac{\text{Si } w \text{ es } w \text{ entonces } w \text{ no es } w}{w \text{ no es } w} \text{ Cons. Mir.}}{w \text{ es y no es } w}$$

Todo esto muestra que la paradoja de Russell no fue *diseñada* para producir una explosión sino para dar una contradicción, lo que significa que el tipo de inconsistencia que estaba predestinada a delatar era del tipo simple y no absoluto. Esto es en general cierto también para todas las paradojas de su misma generación.

En 1935, apenas unos años después de la publicación de TARSKI (1930a) y antes de la comunicación de JAŚKOWSKI (1969) (que fue en 1948), Kleene y Rosser presentaron una paradoja en las lógicas combinatorias, proyecto que estaba desarrollando Haskell B. Curry en aquel momento. La inconsistencia comprometida en este caso es de tipo *absoluta*: “We discuss here some formal logics which are inconsistent *in the sense that every formula in*

24. Esto es mucho más que una mera curiosidad: recordemos que en *Ppia. Math.* el esquema presentado como *Reductio ad Absurdum* es la forma constructiva de la *Mirabilis* (y aquí usada en la rama izquierda de la deducción); además, la reducción desde el silogismo constructivo hacia la *Mirabilis* depende de la aceptación de «*P* o no *P*» y de «Si *P* entonces *P*» como truísticas, y el primero de estos esquemas ha sido típicamente asociado con el Principio del Tercero Excluido. Todo esto es perfectamente coherente con la asociación, sorprendente para Bobenrieth, que hiciera Post del fenómeno de la no trivialidad del sistema con la *completitud* antes que con la *consistencia*.

their notation is provable, irrespective of its meaning under the interpretation intended for the symbols” (KLEENE Y ROSSER, 1935, p. 630). (El énfasis es mío.) Curry respondió con una versión generalizada y, en alguna manera, fortalecida de la misma paradoja, que por esta razón hoy recibe su nombre²⁵.

La paradoja de Curry, al igual que la de Russell, aprovecha la fertilidad del Axioma de Intensión para producir el resultado indeseado, pero tiene la notable diferencia de que no recurre al concepto de contradicción, ni siquiera al de negación. Para formular la paradoja sólo es necesario que la teoría de conjuntos objetivo (MEYER, ROUTLEY Y DUNN, 1979, non sic):

1. Tenga toda instancia del Axioma de Intensión como un teorema (A.I.),
2. Tenga toda instancia del Axioma de Contracción como un teorema (A.C.),
3. Sea cerrada bajo sustitución de equivalentes (equivalencia material: $\Gamma \leftrightarrow \neg$) (S. E.),
4. Posea un condicional ($\Gamma \rightarrow \neg$) que valide *Modus P Ponens* (M. P).

La paradoja de Curry considera al conjunto $C = \{x : x \in x \rightarrow (x \in x \rightarrow \varphi)\}$ donde « φ » es cualquier fórmula.

El razonamiento va entonces como sigue (adaptado de MEYER, ROUTLEY Y DUNN (1979)). Primero:

$$\frac{\begin{array}{c} \text{(A.I.)} \\ (C \in C \rightarrow (C \in C \rightarrow \varphi)) \rightarrow (C \in C \rightarrow \varphi) \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{(A.C.)} \\ C \in C \leftrightarrow (C \in C \rightarrow (C \in C \rightarrow \varphi)) \end{array}}{C \in C \rightarrow (C \in C \rightarrow \varphi)} \text{ (S.E.)}$$

Luego:

$$\frac{\begin{array}{c} \text{(A.C.)} \\ C \in C \leftrightarrow (C \in C \rightarrow (C \in C \rightarrow \varphi)) \end{array} \quad \begin{array}{c} C \in C \rightarrow (C \in C \rightarrow \varphi) \end{array}}{C \in C} \text{ (S.E.)} \quad \frac{C \in C \rightarrow (C \in C \rightarrow \varphi)}{C \in C \rightarrow \varphi} \text{ (M.P.)}$$

25. Aunque algunos autores prefieren llamarla paradoja de Curry-Shaw-Kwei, puesto que la forma completamente general de la paradoja fue propuesta por Mo Shaw-Kwei en SHAW-KWEI (1954).

Y finalmente:

$$\frac{C \in C \quad C \in C \rightarrow \varphi}{\varphi} \text{ (M.P.)}$$

Además de la ya mencionada ausencia de negaciones en su demostración, la paradoja de Curry es interesante para nuestros propósitos porque, aunque tienen en común con la paradoja de Russell el recurso a la autorreferencia, éste es el primer ejemplo encontrado de una supercompleción que no se apoya en la tríada *Ex falso/contradictione/impossibile sequitur quodlibet*. Junto con ésta, hay todavía una más que exhibe esta característica, pero para poder analizarla correctamente es necesario que nos movamos fuera del paradigma clásico y entremos en terreno intuicionista.

3.1.3. Trivialización y armonía

En esta sub-sección dejaremos de lado el criterio alético de validez y consideraremos, en su lugar, el funcional; es decir, el de las demostraciones efectivas.

Criterio de validez -2 [EXISTENCIA DE DEMOSTRACIÓN] Un argumento es válido cuando es posible construir una prueba que termina en la conclusión y comienza en las premisas.

Aunque esta idea de validez es la que subyace a los planteamientos originales de Brouwer y también a las interpretaciones de éstos por parte de Kolmogorov, Heyting y Glivenko, lo cierto es que no existirá una propuesta sintáctica concreta antes de la popularización de los sistemas deductivos de Gentzen. Como ya vimos en la sección 2.4.3 (página 58 en adelante), Brouwer era enemigo de las pretensiones formalistas, por lo que no veía en su constructivismo la posibilidad de una semántica para la lógica matemática. El tratamiento del problema por parte de los primeros lógicos intuicionistas siguió por tanto la metodología filosófica de Hilbert, es decir, presentar grupos de axiomas y defenderlos bajo una interpretación sugerida.

Una vez que la mera consideración de condiciones veritativas es abandonada en favor de la exigencia de formas explícitas de demostración, la validez de una regularidad como el *Ex falso sequitur quodlibet* se hace difícil de sostener²⁶. En particular, Kolmogorov en sus primeros escritos sobre intuicionismo mostró una fuerte desconfianza hacia esquemas axiomáticos como

$$(A \rightarrow (\bar{A} \rightarrow B))$$

(La notación es la de Hilbert²⁷) por considerar que “no tiene, ni puede tener ninguna fundamentación intuitiva, ya que éste afirma algo sobre las consecuencias de algo imposible: tenemos que aceptar B si el juicio verdadero A se toma como falso” (Kolmogorov citado en BOBENRIETH MISERDA (1996, p. 133)). Durante la década de 1930, Kolmogorov e Ingebrigt Johansson propusieron, en consecuencia, sistemas axiomáticos hoy llamados *minimales*, en los cuales se obtiene el particular resultado de que, si bien no todo se sigue de una contradicción, sí se siguen todas las negaciones (BOBENRIETH MISERDA, 1996; D’OTTAVIANO Y GOMES, 2017).

Heyting, sin embargo, fue más liberal y aceptó explícitamente el *Ex falso sequitur quodlibet* como característica de su lógica intuicionística. A lo largo de su obra hay dos justificaciones del principio que resultan interesantes para nuestra investigación. La primera²⁸ dice:

A case is conceivable that, after the statement $A \rightarrow B$ has been proved in the sense specified, it turns out that B is always correct. Once accepted, the formula $A \rightarrow B$ then has to remain correct; that is, we must attribute a meaning to the sign \rightarrow such that $A \rightarrow B$ still holds. The same can be remarked if it turns out later on that A is always false. For these reasons, the formulae

$$\vdash B \rightarrow (A \rightarrow B)$$

and

$$\vdash \neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$$

are adopted.

Heyting citado en VAN DALEN (2004, p. 253)

26. Nótese que he dicho “*Ex falso*”, no “*Ex impossibile*” ni “*Ex contradictione*”.

27. Acerca de esta manera de notar la negación véase lo dicho sobre Hilbert en la sección 2.4.3.

28. Sigo una cita en VAN DALEN (2004, p. 253), donde se hace referencia a la fuente como “Heyting’s first paper on intuitionistic logic”.

Como bien hace notar van Dalen en el lugar donde presenta la cita, el argumento está afecto de cierta circularidad. Cuando « B » es efectivamente verdadera, no es difícil comprender por qué “the formula $A \rightarrow B$ then has to remain correct”; en algún sentido, dicha prueba nos dice que íbamos a poder llegar a la prueba de « B » de todos modos, dado que ella era posible. Pero el mismo razonamiento no funciona en la dirección contraria, como pretende Heyting, porque cuando « A » es imposible o fuertemente no constructible (es decir, implica un absurdo en el sentido de Brouwer), cuesta ver en qué sentido podría haberse probado la verdad de « $A \rightarrow B$ » en primer lugar. Y esto exactamente por lo expresado por Kolmogorov en la cita que dimos más arriba: “afirma algo sobre las consecuencias de algo imposible”. El condicional de Heyting, en esta etapa de su trabajo, sigue siendo fuertemente no constructivo²⁹.

Años más tarde y sólo después de refinar la definición del condicional intuicionístico hasta su forma considerada hoy estándar³⁰, Heyting se halla en posición de dar una defensa filosóficamente más convincente de la explosividad del condicional intuicionístico. Me quedaré con la versión que da van Dalen de dicha defensa:

Clearly, Heyting recognized that the construction interpretation is problematic in the case of a false antecedent. It represents, so to speak, a singularity in the domain of the implication. More or less by personal intervention, Heyting filled the gap in the above way. In fact, he had drawn the conclusion which is implicit in the notion of the construction interpretation of \rightarrow . Namely, the interpretation of implication (based on the commitment implicit in the notion of “construction”) becomes as follows: p is a proof of $A \rightarrow B$ (abbreviated as $p : A \rightarrow B$) if for each a with $a : A$ we have $p(a) : B$. In other words, p holds a promise: whenever I am presented with a proof a of A , I will apply p to a and produce (in finite time) a proof $p(a)$ of B . Thus, the burden on the proof of implication in the case of Ex Falso is placed on the construction. Since falsum, \perp , has no proof, any construction p establishes $\perp \rightarrow A$, and of course

29. Y a propósito de los dos esquemas presentados por el autor, compárelos con las dos reglas lógicas de Ockham que presentamos en la página 76.

30. “la prueba de una hipotética es la prueba de que toda prueba de su antecedente puede transformarse en una prueba de su consecuente”. Estas transformaciones pueden expresarse como funciones: una prueba de « $A \rightarrow B$ » es una función que envía cada prueba de A a una prueba de B . O mejor aún, una función f que para cada prueba a de A da una prueba $f(a)$ de B .

also $A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$ ³¹. Thus, Heyting’s justification of the Ex Falso principle is, albeit hesitant, the standard argument of today. But it is noteworthy that it is also the only case where the “promise” character of a construction is explicitly used, and where no construction is carried out.

(VAN DALEN, 2004, p. 255)

Esta afirmación final de van Dalen relativa a las “promesas” me parece muy interesante, por lo que me permitiré una breve digresión para referirme a ella. Volvamos un momento a los ejemplos “coloquiales” de reducciones al absurdo de los que habla Dennett y que vimos en la sección 2.4, como en «Para llegar a la hora tendría que ser Superman». Esta aserción parece comprometerse con la verdad de una afirmación condicional que en sí misma es verosímil, aunque no su antecedente: *si yo fuera Superman, entonces llegaría a la hora*. Podríamos sugerir, sobre la base de ejemplos como éste, que la verosimilitud de una afirmación condicional depende o es directamente proporcional a la *inverosimilitud* de su antecedente³². Si esto es así, entonces, en el límite, un antecedente imposible de verificarse es suficiente para asegurar la verdad del condicional. El problema es que en este caso límite la verdad pierde todo su valor pragmático. Similarmente, una *promesa* condicional:

Si esto-y-esto se da, entonces yo me comprometo a hacer esto-y-esto-otro

Parece sugerir que su grado de compromiso depende de la verosimilitud de la condición. Si yo prometo hacer algo a condición de otro algo que es imposible, difícilmente

31. Donde $\neg A \triangleq A \rightarrow \perp$. La proposición obviada en este pasaje no requiere sino la regla *Modus P. Ponens* para ser demostrada:

$$\frac{\frac{\frac{[A]^1 \quad [A \rightarrow \perp]^2}{\perp} \quad \perp \rightarrow B}{B} \quad 2}{(A \rightarrow \perp) \rightarrow B} \quad 1}{A \rightarrow ((A \rightarrow \perp) \rightarrow B)} \quad 1$$

Pero, como es evidente, todavía depende de aceptar que de \perp , lo falso o absurdo, se siga cualquier cosa.

32. Una versión más precisa de este hecho, que aquí presentamos en términos informales, ha recibido en la literatura el nombre de Paradoja de Bar-Hillel-Carnap. Al respecto puede consultarse el artículo seminal BAR-HILLEL Y CARNAP (1953). También en CARNIELLI Y CONIGLIO (2016, sec. 1.1) los autores se refieren brevemente al asunto.

puede decirse que me he comprometido realmente. Este hecho es comprendido, de manera intuitiva, por cualquier hablante competente de una lengua natural. Supongamos que S desea hacer saber a T que un evento, p , jamás se realizará. Sobre la base del conocimiento de S del conocimiento de T en la animadversión de S por una actividad α , S puede implicaturizar conversacionalmente lo que le interesa transmitir prometiendo a T lo siguiente: “Si p , te prometo que haré α ”. S así da a conocer a T , con humor³³, su opinión respecto de p . Un ejemplo concreto, adaptado de una anécdota real: supongamos que S es un profesor de filosofía de férreo lineamiento ideológico con la tradición analítica y escéptico respecto de las políticas de mejoramiento institucional de su Universidad. T puede ser uno o varios de sus alumnos. S dice entonces un día a T : “Cuando construyan la nueva facultad de Humanidades y yo tenga mi propio despacho, les prometo hacer un seminario sobre la Filosofía del Lenguaje de Heidegger”. Los alumnos ríen porque saben que la promesa no es tal, y lo que está dando a entender el profesor es que en realidad él piensa que jamás se construirá la nueva facultad, y mucho menos él tendrá su propio despacho.

Si las proposiciones intuicionísticas tienen cierta fuerza compromisiva entonces se vuelve plausible sostener que de lo falso o absurdo se sigue cualquier cosa, pero sólo si se puede asegurar que lo falso o absurdo es *efectivamente* imposible de realizar. Por lo tanto, tendríamos que decir que la lógica intuicionística acepta el *Ex falso sequitur quodlibet* sólo en la medida en que acepta su forma más fuerte, el *Ex impossibile sequitur quodlibet*. Pero esto es, por decir lo menos, sospechoso. En particular, parece exigir la aceptación de que “no hay una prueba para lo absurdo” (o que, *via* la correspondencia Curry-Howard³⁴, el conjunto de pruebas del absurdo es vacío), lo que es una afirmación muy poco constructiva en su espíritu. En particular, es precisamente el rechazo de la oposición “hay prueba”/”no hay prueba” como el significado de la oposición “verdad”/”falsedad” lo que *distingue* a un intuicionista de un lógico clásico y *justifica* su rechazo del Tercero Excluido (Al respecto véase GRANSTRÖM (2011, cap. VI) y HAND (1993)).

33. Sobre las implicaturas conversacionales y su relación con el humor véase ÁLVAREZ LISBOA (2015a).

34. Véase la sub-sección 2.4.4, página 66.

Con la obra de Gerhard Gentzen la idea de “prueba”, que en Heyting tenía un sentido intencionadamente ambiguo, adquiere una denotación muy concreta: la posibilidad de dar una demostración efectiva de la conclusión a partir de las premisas, *utilizando un sistema de reglas preciso*. En su ensayo seminal (GENTZEN, 1955) el autor presenta las reglas siguientes³⁵ para la negación:

- *NE*: $\frac{[\mathfrak{A}]}{\neg\mathfrak{A}}$
- *NB*: $\frac{\mathfrak{A} \quad \neg\mathfrak{A}}{\wedge}$
- (sin nombre): $\frac{\wedge}{\mathfrak{D}}$

A propósito de estas tres reglas el autor dice:

NB. \mathfrak{A} y $\neg\mathfrak{A}$ significa una contradicción, y una contradicción no puede constituirse como avalable (principio de contradicción). El esquema de deducción *NB* expresa esto de manera formal: \wedge designa la contradicción, “lo falso”.

NE. (*Reductio ad absurdum*.) En el momento en que, de una hipótesis \mathfrak{A} , se sigue una proposición falsa (\wedge), \mathfrak{A} no es verdadera, es decir: tenemos $\neg\mathfrak{A}$.

El esquema $\frac{\wedge}{\mathfrak{D}}$: si la proposición falsa es avalable, toda proposición, sea cual sea, es avalable.³⁶ (GENTZEN, 1955, pp. 24-5)

35. Voy a atenerme al uso estándar de llamar a estas reglas “de introducción” cuando la conectiva caracterizada aparece como resultado de la aplicación de la regla y “de eliminación” cuando aparece como condición. En ese sentido, lo que uno *introduce* y *elimina* son fórmulas complejas en el curso de una demostración.

36. La traducción es mía. Original:

NB. \mathfrak{A} et $\neg\mathfrak{A}$ signifie une contradiction, et une contradiction ne peut être constituée comme valable (principe de contradiction) [sic]. Le schéma de déduction *NB* exprime ceci de façon formelle : \wedge y désigne la contradiction, « le faux ».

NE. (*Reductio ad absurdum*.) Lorsque, d’une hypothèse \mathfrak{A} , découle une proposition fautive (\wedge), \mathfrak{A} n’est pas vrai, c’est-à-dire : on a $\neg\mathfrak{A}$.

Le schéma $\frac{\wedge}{\mathfrak{D}}$: si la proposition fautive est valable, toute proposition, quelle qu’elle soit, est valable.

Aunque «válido» parece ser una traducción más natural para el francés «valable», he preferido la literal «avalable» porque en francés «valide» también existe, y más aún, es la palabra para expresar lo mismo que en lógica expresamos por la palabra «válido» en español. En el mismo GENTZEN (1955) la palabra «valide» se utiliza en este sentido, por lo que la distinción entre «valide» y «valable» debe respetarse. Por lo demás,

Lo primero que debemos notar de este pasaje es que Gentzen utiliza la palabra «avalable» (plausible, admisible) y *no* «verdadera». Por contrapartida, lo “absurdo” sí es identificado con “lo falso”, pero ello no se opone a lo avalable como lo “no-avalable”: si tal fuera el caso, la afirmación “si la proposición falsa es avalable...” sería un sinsentido.

La regla a la que Gentzen no ha puesto nombre es el *Ex falso sequitur quodlibet*. Nótese que según las reglas dadas él es distinto y anterior al *Ex contradictione sequitur quodlibet*: las contradicciones *implican* lo falso, y es *de lo falso* que se sigue cualquier cosa. Como en Hilbert, aquí es la Explosión lo que justifica la No Contradicción.

Gentzen comprenderá la explosión como una peculiaridad de lo absurdo en dos sentidos: por una parte, justifica las reglas que rigen al signo $\ulcorner \wedge \urcorner$ ³⁷; por otra, justifica su definición de la no-contradicción del sistema deductivo. Una vez que ha demostrado el Teorema de Eliminación de Cortes (“Teorema Fundamental”) para su cálculo de secuentes, afirma:

Una consecuencia trivial del teorema fundamental es el hecho ya conocido por otros lugares (ver por ejemplo H.-A., p. 65) de la no-contradicción de la lógica de predicados clásica (e intuicionista). La secuencia \rightarrow (que es derivable de toda secuencia contradictoria $\rightarrow \mathcal{A} \& \neg \mathcal{A}$, cf. 3.21) no puede ser la conclusión de ninguna figura de deducción si no es de un corte; ella no es por tanto derivable.³⁸ (GENTZEN, 1955, p. 109)

Gentzen no afirma sólo que el seciente contradictorio « $\rightarrow \mathcal{A} \& \neg \mathcal{A}$ » no puede derivarse sin cortes (con lo que estaría probando la consistencia *simple*, dado su Teorema Fundamental), sino que nos dice que el seciente vacío « \rightarrow » es el que no puede ser derivado. En

Feys y Ladrière justifican de manera similar su decisión de traducir «richtig» por «valable» y no por «vrai» (GENTZEN, 1955, nota 41, p. 109).

37. Que corresponde no a la conjunción lógica sino al *falsum* de Peano; véase la nota 40.

38. La traducción es mía. Original:

Une conséquence triviale du théorème fondamental est le fait déjà connu par ailleurs (voir par exemple : H.-A., p. 65) de la non-contradiction de la logique des prédicats classique (et intuitionniste). La séquence \rightarrow (qui est dérivable de toute séquence contradictoire $\rightarrow \mathcal{A} \& \neg \mathcal{A}$, cf. 3.21) ne peut être la conclusion d'aucune figure de déduction autre qu'une coupure; elle n'est donc pas dérivable.

las reglas de su sistema, el secuento vacío « \rightarrow » puede ser debilitado a la izquierda y a la derecha cuantas veces se quiera, por lo que cualquier derivación de un secuento absolutamente arbitrario *debe* pasar por la derivación de « \rightarrow ». Por lo tanto, la no-contradicción del sistema deductivo que Gentzen ha probado no es sólo una prueba de su consistencia en sentido simple sino también absoluto: en él *no se sigue cualquier cosa*, pero de manera absolutamente novedosa «cualquier cosa» aquí ya no sólo son proposiciones (como en los ejemplos clásicos) sino *argumentos completos*. Este hecho cobrará una inusitada relevancia en el capítulo 5.

El trabajo de Gentzen sugirió la posibilidad de definir el significado de las operaciones lógicas ya no en términos de modelos sino sólo de reglas para introducir o eliminar dichas operaciones. Pero esta idea ingenua de inferencialismo también reviste peligros explosivos.

En un artículo publicado en 1960 titulado *The runabout inference-ticket*³⁹, Arthur N. Prior mostró una inconsistencia (de tipo *absoluta*) derivada de confiar en que las reglas de introducción y eliminación de una conectiva sean suficientes para caracterizar su significado. En particular él presentó la conectiva *Tonk*, que tiene las reglas siguientes:

- Introducción de *Tonk*:
$$\frac{A}{A \text{ Tonk } B}$$
- Eliminación de *Tonk*:
$$\frac{A \text{ Tonk } B}{B}$$

Si la sola explicitación de reglas para introducir o eliminar una conectiva son suficientes para caracterizar su significado, y si una palabra sólo necesita significado y reglas adecuadas de uso gramatical para ser introducida en un lenguaje, entonces *Tonk* es una conjunción gramatical con uso lógico y valida inferencias como ésta (PRIOR, 1960, p. 40):

$$\frac{\frac{2 \text{ más } 2 \text{ son } 4}{2 \text{ más } 2 \text{ son } 4 \text{ tonk } 2 \text{ más } 2 \text{ son } 5}}{2 \text{ más } 2 \text{ son } 5}$$

39. El nombre de este artículo es de difícil traducción al español. En inglés británico un «runabout ticket» es un boleto que te permite abordar un servicio de transporte (un tren, un metro, un bus, etc.) de manera liberada las veces que quieras, durante un período definido de tiempo. Un «runabout inference-ticket» sería un pase libre de este tipo, pero para inferencias.

Es claro que en lugar de «2 más 2 son 5» podríamos haber introducido *cualquier cosa*. Esta explosión es interesante para nosotros porque su posibilidad ha sido cargada totalmente del lado de la lógica. Su pie forzado ya no es “lo falso”, “lo imposible” o “lo contradictorio” (o “lo absurdo”, en términos más generales y ambiguos) sino que puede ser cualquier cosa; aunque es importante destacar que *debe* haber ese algo, puesto que para eliminar *Tonk* primero debe introducirse.

La conclusión que sugiere el escrito de Prior (*via reductio ad absurdum*) es que las reglas de introducción y eliminación no pueden escogerse arbitrariamente. Las reflexiones sobre este punto hicieron posible formular el siguiente

Principio de Armonía Una conectiva lógica es caracterizada por sus reglas de inferencia si éstas son armónicas.

Hay varias maneras de caracterizar lo que el Principio enuncia como “armonía”. En BELNAP (1962), donde la idea es presentada por primera vez (aunque aún sin el nombre que estamos usando aquí), el autor la caracteriza en términos estructurales:

...even on the synthetic view, we are not defining our connectives *ab initio*, but rather in terms of an *antecedently given context of deducibility*, concerning which we have some definite notions. By that I mean that before arriving at the problem of characterizing connectives, we have already made some assumptions about the nature of deducibility. That this is so can be seen immediately by observing Prior's use of the transitivity of deducibility in order to secure his ingenious result. But if we note that we already *have* some assumptions about the context of deducibility within which we are operating, it becomes apparent that by a too careless use of definitions, it is possible to create a situation in which we are forced to say things inconsistent with those assumptions. (BELNAP, 1962, p. 53)

La propuesta de Belnap, que aquí es llamada *conservatividad*, pero que Michael Dummett luego llama *armonía* (DUMMETT, 1994, cap. 9), puede ser sintetizada así:

Armonía Las reglas de inferencia para una conectiva son armónicas si su adhesión a un sistema lógico previo produce sólo nuevas inferencias posibles en las cuales aparece dicha conectiva.

La razón por la que *Tonk* no es una conectiva armónica es que en virtud de su aplicación la inferencia “2 más 2 es 4; por lo tanto, 2 más 2 es 5”, en la cual *no* aparece *Tonk*, de pronto es reconocida como válida siendo que anteriormente no lo era. Las reglas de *Tonk* han provocado una perturbación en el comportamiento de otras reglas, en particular, de la transitividad de la deducción (esto es a lo que Belnap se refiere con el “Prior’s use of the transitivity of deducibility in order to secure his ingenious result”).

Nótese además que la apelación a un contexto previo es sumamente liberal. El autor es particularmente lúcido respecto de este punto:

It is good to keep in mind that the question of the existence of a connective having such and such properties is relative to our characterization of deducibility. If we had initially allowed $A \vdash B$ (!), there would have been no objection to *tonk*, since the extension would then have been conservative. Also, there would have been no inconsistency had we omitted from our characterization of deducibility the rule of transitivity. (BELNAP, 1962, p. 55)

Volveremos sobre este pasaje en el capítulo 5, donde tendremos oportunidad de hacer una interpretación radical de esta sugerencia de Belnap.

3.2. Políticas armamentísticas

De la aceptación del Principio de Explosión (en cualquiera de sus *tres* variantes) se siguen (al menos) dos consecuencias filosóficamente sospechosas: por una parte,

1. exige reconocer como *válidos* argumentos en los cuales la conclusión puede ser “cualquier cosa”, lo que atenta contra el sentido preteórico de lo que es un argumento válido⁴⁰. Y también

40. Una falacia habitual entre los que hemos sido entrenados en las perspicacias de la lógica clásica se defiende de esta clase de ataques diciendo que la pertinencia entre conclusiones y premisas es una relación

2. pone ciertos tipos de proposiciones (las falsas, imposibles o contradictorias) fuera del alcance de un análisis lógico riguroso.

Hemos visto en la sección anterior que los lógicos clásicos e intuicionísticos que abrazaron el resultado de Pseudo-Scotus y lo integraron a sus teorías lógicas estaban más o menos al tanto de estas dificultades, pero ellas no les resultaban lo suficientemente graves como para llevarles a buscar soluciones alternativas. No obstante, hubo lógicos a los que estos problemas sí les parecieron bastante graves, aunque no a todos ellos por los mismos motivos. La primera de estas consecuencias, a la que podríamos llamar el *descuido de la pertinencia*⁴¹, denuncia un *error* en las teorías lógicas explosivas; la segunda en cambio les atribuye una *limitación*, razón por la cual usaremos para ella el nombre de *miopía teórica*.

Quienes sostienen que el descuido de la pertinencia es un *error* de las teorías lógicas que aceptan explosiones hacen una afirmación particularmente fuerte, que puede ser leída en dos niveles interconectados. El primero corresponde al nivel del *objeto de estudio* de la Lógica, es decir, los argumentos y razonamientos en tanto actividad humana⁴² y el segundo corresponde al nivel de las teorías acerca de dicha actividad.

En el primer caso, la denuncia apunta hacia un hecho difícilmente contestable y es que ningún razonador, iniciado o profano, “experimenta” la explosión en el curso de sus ejercicios racionales:

de *contenido*, mientras que la Lógica estudia sólo relaciones de *forma*. Incluso sin necesidad de deshacerse de la distinción entre forma y contenido (algo que, por lo demás, no me parece en absoluto terrible), el error puede ser fácilmente exhibido recordando que en *toda* formalización los designadores lingüísticos deben ser sustituidos por variables literalmente idénticas en cada una de sus apariciones, lo que en última instancia transmite *cierta* información de “contenido” en el nivel “formal”. Estas relaciones analíticas, aunque *de contenido*, le son esenciales al ejercicio de la lógica, y por lo tanto no es cierto que todo en la lógica sea puramente formal (al menos en este sentido ingenuo de la oposición entre forma y contenido).

41. Uso la palabra «pertinencia» para significar lo que significa el inglés «relevance», que es —por lo demás— su traducción más apropiada. Sin embargo, en favor de un uso hoy ampliamente extendido en la literatura, llamaré «Lógicas Relevantes» a las «Relevance/Relevant Logics», y usaré el adjetivo «relevantista» para referirme tanto a sus cultores como a sus productos teóricos. (La expresión «relevance logics» es popular sobre todo en Estados Unidos; en Reino Unido y Australasia suele usarse más bien «relevant logics».)

42. Al margen de la distinción —que en cualquier caso considero incorrecta— entre contenidos objetivos y subjetivos de la conciencia, o lo que es lo mismo, la doctrina (clásica) del antipsicologismo.

Si uno descubre una contradicción dentro de los propios razonamientos, es muy improbable que la estructura mental personal sufra una desarticulación completa. En lugar de ello, lo más fácil es que uno comience a revisar las convicciones o los modos de razonar a los cuales atribuye la falla. Dicho de otra manera, uno abandona, en la medida de lo posible, los sistemas interiores a los cuales responsabiliza de la contradicción, e intenta recomponerlos. No es ni remotamente probable que uno baje los brazos y exclame, “Bueno, sospecho que esto muestra que ahora creo cualquier cosa”. Puede que algo así se diga en son de broma, pero ninguna seriamente. (HOFSTADTER, 2010, p. 221)

Al mismo tiempo, incluso una persona gravemente insana mentalmente, que creyera en toda clase de extravagancias y fantasías y se contradijera de las maneras más explícitas podría estar clara y distintamente convencido de que algunas cosas *no* son el caso (su propia locura, por ejemplo).

Si esto es así, entonces una teoría lógica *no* debería ser tenida por verdadera o correcta si de hecho ella valida esta clase de argumentos “impertinentes”. De ahí es que llegamos al nivel de las teorías lógicas, en el cual el engaño no sólo pasa por intentar convencernos de que los argumentos explosivos son válidos, sino además que ellos “siempre” lo han sido:

For more than two millennia logicians have taught that a necessary condition for the validity of an inference from *A* to *B* is that *A* is relevant to *B*. Virtually every logic book up to the present century has a chapter on fallacies of relevance, and many contemporary elementary texts have followed the same plan. Notice that contemporary writers, in the later and more formal chapters of their books, seem explicitly to contradict the earlier chapters, when they try desperately to bamboozle the students into accepting strict “implication” as a “kind” of implication relation, in spite of the fact that this relation countenances fallacies of relevance. (ANDERSON Y BELNAP, 1975, p. 17)

Observaciones de este tipo fueron las que motivaron el surgimiento de la Lógica Relevante, un paradigma para el cual no sólo la preservación de verdad sino *además* la pertinencia de las premisas para la conclusión son los criterios fuertes para decir que un argumento es válido.

En la otra rivera, quienes consideran que es la miopía teórica lo que invita a revisar los sistemas explosivos no consideran al Principio de Explosión como una herejía sino sólo como un precepto demasiado fuerte. En el intento de debilitarlo es que surgieron, durante la segunda mitad del siglo XX, las Lógicas Paraconsistentes.

La palabra «paraconsistencia» fue acuñada por el filósofo peruano Francisco Miró-Quesada Cantuarias para designar a los sistemas lógicos que había inventado Newton da Costa en Brasil, y que estaba desarrollando con sus colegas por aquellos años. La carta en la que Miró-Quesada propone este concepto a da Costa data de 1975, y los fundamentos del neologismo son específicamente éstos:

Utiliza ‘para’, que en griego significa *al lado de*. ‘Lógicas Paraconsistentes’ suena bonito, un poco esotérico, da una idea más o menos precisa de lo que se trata (lógicas que no son como las clásicas, sino que quedan un poco al lado de ellas pues pueden aplicarse a sistemas inconsistentes) y tiene la ventaja de que no hay una carga semántica deformante.

Miró-Quesada Cantuarias, citado en D’OTTAVIANO Y GOMES (2017, p. 476).

El término, según comenta el mismo da Costa, “dio la vuelta al mundo” en dos o tres meses (D’OTTAVIANO Y GOMES, 2017, p. 477), después de que el filósofo peruano la presentara oficialmente en el III Simposio Lationamericano de Lógica Matemática, que tuvo lugar en la recientemente fundada Universidad Estatal de Campinas en 1976. El concepto, importado a la lengua inglesa como «paraconsistency», se ha vuelto ubicuo en la literatura especializada, y designa hoy específicamente a aquellos sistemas lógicos que debilitan o rechazan el Principio de Explosión en alguna de sus tres variantes clásicas, es decir, como *Ex falso*, *Ex contradictione* o como *Ex impossibile sequitur quodlibet*. Bajo esta definición es claro que muchas lógicas relevantistas *son* paraconsistentes, pero esta es una racionalización posterior y no se condice con el desarrollo histórico de los sistemas.

El interés original de da Costa en las lógicas luego llamadas paraconsistencias fue muy claramente el desafío al Principio de No Contradicción. Ayda Arruda, que en los años de incipencia del proyecto fue la más cercana discípula de da Costa, enumera la inédita tesis doctoral de su maestro como ejemplo de “sistemas onde o principio da não contradição

não é universalmente válido” (ARRUDA, 1963, p. 261). Da Costa expone su propósito en estos términos:

A idéia central do presente trabalho consiste, a grosso modo, no seguinte: um sistema dedutivo formalizado tendo por base a lógica elementar clássica (ou a lógica intuicionista, ou várias formas de lógicas polivalentes, ...), se for inconsistente, é trivial no sentido de que todas as suas proposições são demonstráveis; logo, assim encarado, não apresenta especial interesse matemático. Todavia, por diversos motivos, como, por exemplo, para análises comparativas com sistemas consistentes e para valoração apropriada, do ponto de vista metamatemático, dos diversos princípios em jogo, torna-se conveniente estudar, de maneira *direta*, os sistemas inconsistentes. Mas, para tanto, é imprescindível estruturar novos tipos de lógica elementar, com auxílio dos quais se possam manipular tais sistemas. (DA COSTA, 1993, p. 3)

El sentido preciso en que da Costa utiliza la palabra «inconsistente» en este pasaje es el de «contradicción», lo que queda claro cuando señala que en los sistemas que ha desarrollado no es válido el esquema « $\neg(A \& \neg A)$ », “que exprime o princípio da não contradição”, y que “em qualquer um deles, de duas proposições contraditórias não se pode deduzir, em geral, qualquer proposição” (DA COSTA, 1993, p. 4).

En una obra muy posterior, su *Ensaio sobre os fundamentos da lógica* (1980), da Costa insiste todavía en alinear a las Lógicas Paraconsistentes con el desafío al Principio de No Contradicción mediante la distinción entre inconsistencia y trivialidad. En aquella obra el autor distingue como *primer* objetivo de la Lógica Paraconsistente como programa de investigación el “establecer técnicas lógico-formais capazes de nos permitirem a melhor compreensão das estruturas lógicas subjacentes às concepções dos partidários da dialética, tais como Heráclito, Hegel, Marx, Engels e Lênin” (DA COSTA, 1980, p. 149). Hasta aquí, por lo tanto, hay todavía cierto nivel de compromiso con la idea de que el concepto central que intenta ser recuperado por la Lógica Paraconsistente es el de *contradicción*. Sin embargo, el desarrollo posterior obligó a distinguir entre tres conceptos diferentes:

1. El *relevantismo*, que es la convicción de que una cuenta correcta de la validez lógica debe considerar la pertinencia entre premisas y conclusión,

2. La *paraconsistencia*, que es, en términos generales, la constrictión de las formas tradicionales del Principio de Explosión, y
3. El *dialecismo*⁴³, la creencia en la posibilidad de que haya contradicciones verdaderas.

Como mencioné más arriba, el foco de interés de las investigaciones relevantistas *no* es el Principio de Contradicción y tampoco específicamente el de Explosión, sino todo el amplio universo de situaciones en las cuales las lógicas más difundidas parecen no respetar la demanda de pertinencia entre premisas y conclusiones. Por otra parte, el desarrollo original de las Lógicas Paraconsistentes tuvo como uno de sus principales horizontes filosóficos originales el reconsiderar (desde una perspectiva lógico-formal) las doctrinas de aquellos filósofos que defendían el valor de la contradicción en la cuenta de lo real, y que en el pasaje recién citado da Costa identifica como “dialécticos”. Y sin embargo, históricamente el dialecismo fue una corriente filosófica que nació en el seno del primer paradigma y no del segundo:

Pues bien, Meyer se fue, en 1974, a trabajar a Australia gracias a Routley [...] y se dedicaron a construir lógicas relevantes que permitieran formalizar problemas relacionados con las contradicciones; de ahí surgió la primera publicación de un sistema parconsistente de la “escuela australiana” (Routley / Meyer 1976) [...]. Luego, estos autores establecieron contacto con el trabajo de da Costa en Brasil, y entonces Routley fue a Campinas en 1976 —donde participó en el III [Simposio Latinoamericano de Lógica Matemática]— y da Costa a Canberra en 1977. (BOBENRIETH MISERDA, 1996, p. 235s) (El énfasis es mío.)

43. Esta forma de traducir el neologismo inglés «dialetheism» no tiene sustento en el medio y es, hasta donde yo sé, una invención mía; en la escueta literatura en español sobre el tema la transliteración habitual es «dialeteísmo». Mis razones para preferir la alternativa aquí presentada por sobre la usual (que figura por primera vez en mi tesina de pregrado (ÁLVAREZ LISBOA, 2015b, p. 36, nota 11)) es estrictamente ortográfica: en tanto la palabra «dialetheism» pretende provenir de las voces griegas «διά» y «ἀλήθεια», la transliteración correcta del grupo consonántico inglés «th» debería ser la consonante «c» y no «t», como de hecho ocurre en el nombre español «Alicia», cuya raíz etimológica es precisamente «ἀλήθεια». Por lo demás, el neologismo original es «dialetheia» (que yo traduzco por «dialecia», pero que otros traducen como «dialetheia»), y entre los angloparlantes ocurrió de hecho que produjo dos variantes del ismo, «dialethism» y «dialetheism» (en el prefacio de WEBER (2009) aparece un breve comentario a la diferencia entre ambas opciones). Por lo que mi opción, «dialecismo», y la más comúnmente aceptada, «dialeteísmo», bien podrían considerarse las traducciones respectivas de estas dos alternativas originales.

La colaboración internacional hizo que paulatinamente el concepto lógico rector de todos estos paradigmas fuera el de *paraconsistencia*, pero entendida ésta específicamente como la tolerancia a las contradicciones —o, de manera más general, la constricción del fenómeno de la Explosión—, sin un compromiso necesario con las tesis dialecistas o con los estándares relevantistas⁴⁴. Con todo, este uso universal del concepto tiene la desventaja de que desdibuja lo original en las propuestas de cuño brasileño, específicamente lo que aquí hemos destacado como su característica principal, que es el hecho de que el Principio de Explosión es abandonado de manera parcial y no total. Y en lo que respecta al dialecismo, los sistemas formales que proveen la base lógica para sus disquisiciones han sido *no* las Lógicas Paraconsistentes brasileñas sino mayormente los sistemas relevantes derivados del de Anderson y Belnap y la *Logic of the Paradox* de Graham Priest, un sistema alético trivalente creado *para* formalizar la tesis dialecista, es decir, de que hay (o puede haber) contradicciones *verdaderas* (PRIEST, 2006a)⁴⁵.

El vínculo que une al dialecismo con la paraconsistencia es la tolerancia a la contradicción, lo que suele enunciarse a veces como que el dialecismo es una interpretación *radical* de la tesis paraconsistente. Sin embargo, el dialecismo es un mal término medio para vincular a la paraconsistencia con el relevantismo, puesto que si bien ellos se parecen por el lado de su trato de las contradicciones, por el lado de su relación con la Explosión ellos son muy diferentes.

Estas reflexiones, junto con las de la sección anterior, nos llevan a la conclusión de este capítulo. Se trata de las diversas actitudes de tolerancia frente al fenómeno de la Explosión, que en tono jocoso he llamado *políticas armamentísticas*. Ellas son fundamentalmente tres:

44. Aunque resulta de esto evidente que puede haber lógicas paraconsistentes no relevantistas, también “Relevant logics are not necessarily paraconsistent. For example, Ackermann’s original relevant logic Π' was not. But relevant logics in the standard Anderson-Belnap family are.” (PRIEST, 2006c, p. 657).

45. Es preciso decir que lo propiamente original en la *Logic of the Paradox* no es tanto el detalle formal del sistema, que en sus rasgos fundamentales se halla anticipado en Jaśkowski (JAŚKOWSKI, 1969) y en Asenjo (ASENJO, 1966), sino la fuerza de la interpretación que su autor defiende como canónica del mismo, y que es la del compromiso con la naturaleza contradictoria de lo real.

1. Los argumentos explosivos son lógicamente válidos. La aceptación de este hecho nos enseña que todo lo que provoca explosión es lógicamente aberrante.
2. Los argumentos explosivos son lógicamente válidos. Pero lo aberrante es la explosión misma y no lo que la provoca. Debemos manejar formas atenuadas de explosión para poder investigar el potencial lógico de aquello que tradicionalmente la provocaba.
3. Los argumentos explosivos son lógicamente inválidos. Debemos dar cuenta de la inferencia lógica de tal manera que el fenómeno jamás se produzca.

Llamo a estas tres actitudes **cautela**, **temeridad** y **rechazo** respectivamente. Por todo lo dicho en la sección anterior es claro que los paradigmas clásicos e intuicionísticos son *cautos*. Y por lo defendido en esta, el enfoque de la Paraconsistencia es *temerario*, mientras que el del relevantismo es claramente de *rechazo*. Entre estos dos últimos, a diferencia de lo que respecta a las contradicciones, no hay punto de encuentro posible. Las Lógicas Paraconsistentes brasileñas —así como sus herederas naturales, las Lógicas de la Inconsistencia Formal— *no rechazan la validez de los argumentos explosivos* sino que relativizan la extensión del fenómeno. Es por ello que he llamado a esta actitud “temeridad”, pues su espíritu queda bien ilustrado por este pasaje de la obra seminal de da Costa: “De um modo impreciso, poderíamos afirmar que a razão humana parece atingir o ápice de sua potência quanto mais se aproxima do perigo da trivialização” (DA COSTA, 1993, p. 21).

Dado que el interés principal de este trabajo es el fenómeno de la trivialización y *no* la tolerancia a las contradicciones, en lo sucesivo dejaré de lado el análisis y crítica del programa relevantista, salvo por alguno que otro comentario puntual. Por lo que el tratamiento formal que emprenderé en el próximo capítulo se atenderá a un aparataje metalógico dentro del cual dicho paradigma queda completamente excluido.

Capítulo 4

La Lógica de la Explosión

El propósito de este capítulo es presentar de manera totalmente rigurosa una metalingüística que lidie con la explosión en términos anteriores e independientes al concepto de negación. De esta manera exorcizaremos todos los fantasmas ideológicos descubiertos en los últimos dos capítulos y podremos ver al fin el fenómeno que nos interesa bajo una luz limpia.

Dicha en sentido absoluto¹, la cláusula «*sequitur quodlibet*» expresa que todo se sigue, *sin referirse a qué*. El complemento «*ex hoc...*» expresa por tanto una constrictión o relativización: todo se sigue, *pero a partir de algo o dadas ciertas condiciones*. Jugando dentro del campo semántico de la colorida palabra de Priest, llamemos a aquello de lo que se sigue cualquier cosa un *detonador*.² Y reservemos las palabras «explosión» y «trivialización» para referirnos al *sequitur quodlibet*, es decir, al hecho de que se siga cualquier cosa.

1. La palabra «absoluto» significa primeramente “indeterminado, sin ataduras”. Éste es el significado pretendido aquí.

2. Los tres detonadores que encontramos formulados explícitamente en la cláusula latina (*lo falso*, *lo imposible* y *lo contradictorio*) son conceptos que difícilmente un filósofo estaría dispuesto a identificar, aunque hay una excepción particularmente escandalosa y es Wittgenstein: en el *Tractatus*, el filósofo llama *contradicción* a la proposición falsa para todas las posibilidades veritativas (WITTGENSTEIN, 2001, 4.46), y luego un poco más adelante agrega que *lo imposible* no es sino la verdad de la contradicción (WITTGENSTEIN, 2001, 4.464). Dicho sea de paso, el *Ex falso sequitur quodlibet* es formulado explícitamente en el *Tractatus*, pero de manera más bien críptica: “La proposición construye un mundo con ayuda de un armazón lógico, y por ello, puede verse en ella también cómo se comporta todo lo lógico, *si* es verdadera. De una proposición falsa cabe *extraer conclusiones*. («Man kann aus einem falschen Satz *Schlüsse ziehen*») (WITTGENSTEIN, 2001, 4.023). Esta aseveración guarda una coherencia oscura con afirmaciones posteriores relativas a la naturaleza de la deducción (sobre todo 5.12, 5.122, 5.131 y 5.143).

4.1. Explosividad sin Negación

En esta sección haremos algunas reflexiones de alta generalidad. Los resultados nos llevarán a las primeras conclusiones filosóficas interesantes de esta investigación: que *la explosividad es anterior a la negación, y guarda estrecha relación con la noción de monotonía y el Modus Ponendo Ponens.*

Definición 4.1 (Sistema lógico y teoría lógica). Un sistema lógico (*lógica*) \mathcal{L} está formado por un lenguaje formal \mathcal{L} y una relación de inferencia $\vdash \subseteq \wp(\mathcal{L}) \times \mathcal{L}$. Una *teoría* es un conjunto $\Gamma \subseteq \mathcal{L}$ cerrado bajo \vdash (es decir, si $\Gamma'_{\subseteq \Gamma} \vdash A$ entonces $A \in \Gamma$). \square

Convención 4.1. En contexto de una lógica particular, el seciente « $\Gamma \vdash A$ » siempre será una abreviación para la proposición « $(\Gamma, A) \in \vdash$ ». Asimismo, « $\Gamma, A \vdash B$ » es una abreviación para « $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$ », « $\Gamma, \Delta \vdash A$ » una abreviación para « $\Gamma \cup \Delta \vdash A$ » y « $\vdash A$ » una abreviación para « $\emptyset \vdash A$ ».

Nótese que la relación de inferencia descrita en la definición 4.1 es inespecífica respecto de su disposición normativa: puede ser de nivel -1, -2 o -3. También es importante señalar que esta no es una definición perfectamente general, dado que las lógicas cubiertas aquí necesariamente:

1. Consideran sólo argumentos con una única conclusión. [uni-conclusividad]
2. Son insensibles a repeticiones de premisas. [contractividad]
3. Son insensibles al orden en que aparecen las premisas. [permutatividad]

Esto es así por la forma en que ha sido definida la relación \vdash , pero no hay un compromiso real con que los sistemas lógicos *deban* cumplir estas condiciones (al tiempo que dar una definición de «sistema lógico» para que ellas no sean presupuestas es bastante simple). La única razón para adoptar la definición 4.1 como punto de partida es que cubre a todas las lógicas que revisaremos en lo sucesivo.

Escolio 4.1. Las condiciones sobre los secuentes pueden ser vistas como reglas estructurales. Es decir, ellas autorizan meta-inferencias válidas: por ejemplo, la contractividad autoriza realizar una inferencia de esta forma:

$$\frac{\Gamma, A, A \vdash B}{\Gamma, A \vdash B}$$

En lo sucesivo haremos uso de pasos inferenciales de este estilo, sobre todo en demostraciones que de otra manera resultan demasiado tediosas.

Escolio 4.2. En algún sentido, puede identificarse la lógica $\mathcal{L} = \langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ con el conjunto de todos los secuentes que genera la relación \vdash . Dado que los secuentes son afirmaciones matemáticas (véase la convención 4.1), una lógica es un conjunto de afirmaciones matemáticas de máxima generalidad. Son argumentos en el sentido de Aristóteles, es decir, “enunciado[s] en [los] que, sentadas ciertas cosas, se sigue necesariamente algo distinto de lo ya establecido por el [simple hecho de] darse esas cosas” (ARISTÓTELES, 1994, 24b 19).

Definición 4.2 (Consecuencias lógicas). Sea $\mathcal{L} = \langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ una lógica. Si $\Gamma \subseteq \mathcal{L}$, las consecuencias (lógicas) de Γ son el conjunto $Cn(\Gamma) = \{X \in \mathcal{L} : \Gamma \vdash X\}$. El conjunto $\Gamma \cup Cn(\Gamma)$ se llama, por extensión, la *teoría de* Γ , que simbolizamos por $\text{th}(\Gamma)$.³ \square

Las definición siguiente adapta la terminología introducida en ANDERSON Y BELNAP (1975, §1.3) para argumentos con o sin premisas. Rescato, además, el concepto tractatario de *proposición de la lógica* (WITTGENSTEIN, 2001, 6.1ss), con las observaciones que hago más abajo.

Definición 4.3 (Argumentos, proposiciones de la lógica). Sea $\mathcal{L} = \langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ una lógica estándar con condicional. Un seciente $\Gamma \vdash A$ de \mathcal{L} es un *argumento categórico* si $\Gamma = \emptyset$; en caso contrario, es un *argumento hipotético*.

3. CAVEAT: Nótese que es posible tener $Cn(\Gamma) \neq \bigcup_{\Gamma' \subseteq \Gamma} Cn(\Gamma')$, como en el caso de las lógicas no-monotónicas. Véase la definición 4.10.

Llamamos *proposición de la lógica* \mathcal{L} , o también *proposición lógica* de \mathcal{L} , o más simplemente aun *proposición- \mathcal{L}* a la fórmula a la derecha del torniquete en un argumento categórico. □

Escolio 4.3. Mi definición de *proposición de la lógica* es mucho más abstracta que la de Wittgenstein, por cuanto aplica en cualquiera de los tres niveles metalógicos considerados:

1. En el nivel alético, las proposiciones de la lógica pertenecen a las tautologías y a las fórmulas válidas.
2. En el nivel funcional, las proposiciones de la lógica pertenecen a las pruebas sin supuestos abiertos (o no descargados).
3. En el nivel interactivo, las proposiciones de la lógica pertenecen a los juegos sin concesiones para los cuales el jugador I tiene una estrategia ganadora.

Definición 4.4 (Teoría lógica). Sea $\mathcal{L} = \langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ una lógica estándar con condicional. El conjunto de las proposiciones lógicas de \mathcal{L} , $\text{th}_L(\mathcal{L})$, se llama *teoría lógica de \mathcal{L}* . □

La definición 4.4 nos permite caracterizar una lógica a través de su teoría lógica. Más aún, nos proporciona un método para traducir sistemas lógicos que en la literatura hayan sido presentados sea axiomáticamente, sea por modelos, tablas de verdad, reglas de introducción/eliminación, etc., a una formulación sintácticamente equivalente pero independiente del nivel metalógico en el que estén formulados originalmente.

Vimos en el capítulo anterior que lo que Jaśkowski llamó *supercompletud* corresponde a lo mismo que Hunter llamó *inconsistencia absoluta*. Sin embargo, seguiré la terminología hoy habitual en la literatura sobre paraconsistencia y usaré la palabra *trivialidad*. La elección no deja de ser más o menos arbitraria: en la práctica matemática habitual, un resultado es “trivial” cuando es obvio, lo que no parece relacionarse directamente con el sentido técnico que queremos darle aquí. Sin embargo, la prefiero a las otras dos alternativas porque «supercompletud» es una palabra horrible e «inconsistencia absoluta» echa

mano de otro concepto al que también me veré obligado a darle un sentido preciso más adelante, «consistencia».

Definición 4.5 (Trivialidad). Sea $\mathcal{L} = \langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ una lógica. Una teoría $\Gamma \subseteq \mathcal{L}$ es *trivial* si $\Gamma = \mathcal{L}$. La lógica \mathcal{L} es *trivial* si $Cn(\emptyset) = \mathcal{L}$. \square

Es tentador definir ahora un detonador como un conjunto finito Δ tal que si Γ es una teoría no trivial entonces la teoría $\Gamma \cup \Delta$ sí lo es. Sin embargo, a veces ocurrirá que la bomba no vendrá ensamblada sino por partes, y es posible que algunas de sus partes estén contenidas previamente en Γ . Por lo tanto, es necesario definir lo que es un detonador de manera más precisa. Por el momento lo haremos *relativizando* el detonador al conjunto que se desea hacer explotar, esto es, identificándolo exactamente como lo que tiene que obtenerse dentro del conjunto $\Gamma \cup \Delta$ para provocar la explosión.

Definición 4.6 (Detonador). Sea $\mathcal{L} = \langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ una lógica y Γ una teoría no trivial de \mathcal{L} . Si $\Delta \subseteq \mathcal{L}$ es un conjunto finito tal que la teoría $\Delta \cup \Gamma$ es trivial, un *detonador* para Γ es un conjunto $\Xi \subseteq \Delta \cup \Gamma$ tal que para toda $\Xi' \subseteq \Xi$ tal que $Cn(\Xi')$ es trivial se tiene que $\Xi' = \Xi$.⁴ \square

Definición 4.7 (Bomba). Si un detonador es un conjunto singulete, entonces la fórmula que pertenece a él es una *bomba*. \square

Ahora estamos en condiciones de definir la *explosividad* como la *calidad de poder explotar*.

Definición 4.8 (Explosividad). Sea $\mathcal{L} = \langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ una lógica. \mathcal{L} es *explosiva* si existe $\Gamma \subset \mathcal{L}$ tal que $Cn(\Gamma)$ es trivial. Una teoría es *explosiva* si tiene un detonador.⁵ \square

Definición 4.9 (Equivalencia lógica). Sea $\mathcal{L} = \langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ una lógica. Dos fórmulas A y B son *lógicamente equivalentes en \mathcal{L}* si se verifica que $A \vdash B$ y $B \vdash A$. La proposición « $A \cong_{\mathcal{L}} B$ » dice que las fórmulas A y B son lógicamente equivalentes en \mathcal{L} . \square

4. Si se quita la constricción de que Δ sea finito, entonces se abre la posibilidad de tener casos en que $\Delta = \mathcal{L} - \Gamma$, lo que es impráctico para un análisis discreto.

5. Nótese que una definición como: “ \mathcal{L} es *explosiva* si tiene una teoría trivial” haría, *ipso facto*, explosiva a toda lógica. Y esto porque \mathcal{L} es una teoría y es trivial.

Convención 4.2. Cuando el contexto sea claro, omitiremos el subíndice en $\ulcorner \cong_{\mathcal{L}} \urcorner$.

Con las definiciones anteriores ya es posible enunciar un hecho que, aunque en apariencia inocente, será muy relevante para lo que sigue:

Proposición 4.1. *En una lógica todas las bombas son lógicamente equivalentes entre sí.*

Demostración. Sea $\mathcal{L} = \langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ una lógica. Sean Γ y Δ teorías no triviales de \mathcal{L} , y sean G una bomba para Γ y D una bomba para Δ . Por definición de detonador, $Cn(\{G\})$ es trivial, por lo que, en particular, $G \vdash D$; por un razonamiento similar, $D \vdash G$. Por la definición 4.9, se sigue que $G \cong D$. Esto completa la demostración. \square

4.1.1. Lógica abstracta

Hasta este punto hemos presentado el vocabulario mínimo con el cual caracterizar las lógicas y el fenómeno de la trivialidad, distinguiéndolo de la explosión. El paso siguiente es definir de manera completamente general lo que entenderemos por una *lógica estándar*. Esta definición fija las propiedades estructurales mínimas de todos los sistemas que consideraremos en lo sucesivo, y expresa esto último mediante afirmaciones generales acerca de los secuentes que la relación de inferencia permite construir. Esta definición está basada parcialmente en la 2.1.4 de CARNIELLI Y CONIGLIO (2016).

Definición 4.10 (Lógica estándar). Sea $\mathcal{L} = \langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ una lógica. \mathcal{L} es una lógica *tarskiana* si cumple las siguientes condiciones, para cada $\Gamma \cup \Delta \cup \{A\} \subseteq \mathcal{L}$:

1. Si $A \in \Gamma$ entonces $\Gamma \vdash A$; [reflexividad]
2. Si $\Gamma \vdash A$ y $\Gamma \subseteq \Delta$ entonces $\Delta \vdash A$; [monotonía]
3. Si $\Gamma \vdash A$ y $\Delta \vdash G$ para cada $G \in \Gamma$, entonces $\Delta \vdash A$. [corte]

\mathcal{L} es una lógica *finitaria* si cumple la siguiente condición:

4. Si $\Gamma \vdash A$ entonces existe un subconjunto finito Γ_0 de Γ tal que $\Gamma_0 \vdash A$.⁶

6. La Finitariedad expresa el contenido del metateorema conocido como “de compacidad”.

Una lógica es *estándar* si es tarskiana y finitaria. □

Para la demostración de la proposición siguiente, recuérdese la definición de fuerza lógica presentada en el capítulo 2 (página 30).

Proposición 4.2. *La relación de inferencia de una lógica estándar es expresión de fuerza lógica.*

Demostración. Sea $\mathcal{L} = \langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ una lógica estándar. Una relación de inferencia es expresión de fuerza lógica cuando es un orden parcial sobre \mathcal{L} . Por lo tanto, debemos verificar que la relación \vdash :

1. Es reflexiva: $X \vdash X$.
2. Es antisimétrica: si $X \not\approx Y$ y $X \vdash Y$, entonces no se da $Y \vdash X$.
3. Es transitiva: si $X \vdash Y$ y $Y \vdash Z$ entonces $X \vdash Z$.

El primer caso es inmediato; el segundo es evidente por la definición 4.9, y el tercero también es directo, por *corte*. □

Definición 4.11 (Condicional). Sea $\mathcal{L} = \langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ una lógica estándar y sea $\Gamma \Rightarrow \top$ un sincategorema binario de \mathcal{L} . El sincategorema $\Gamma \Rightarrow \top$ es un *condicional* si cumple las siguientes condiciones:

1. Si $\Gamma, A \vdash B$ entonces $\Gamma \vdash A \Rightarrow B$; [Condicionalización]
2. Si $\Gamma \vdash A \Rightarrow B$ y $\Delta \vdash A$ entonces $\Gamma \cup \Delta \vdash B$; [Modus P. Ponens]

Por abuso de lenguaje estas condiciones serán llamadas *reglas*⁷. □

7. La Condicionalización expresa el contenido del metateorema conocido como “de la deducción”. Por otra parte, la forma tradicional de enunciar la regla Modus P. Ponens es un caso particular de la que he presentado aquí:

$$\frac{A \Rightarrow B \vdash A \Rightarrow B \quad A \vdash A}{A \Rightarrow B, A \vdash B}$$

Proposición 4.3. *Toda lógica estándar con condicional contiene en su teoría lógica el fragmento puramente condicional del sistema Hilbert-Bernays.*

Demostración. Sea $\mathcal{L} = \langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ una lógica estándar con condicional $\vdash \Rightarrow \top$. Para demostrar que $\text{th}_L(\mathcal{L})$ contiene el fragmento puramente condicional del sistema Hilbert-Bernays, es suficiente demostrar que los dos (esquemas de) axiomas clásicos del condicional son proposiciones- \mathcal{L} . Tales axiomas son:

1. $(A \Rightarrow (B \Rightarrow A))$
2. $((A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)))$

Demostración del primero: Por reflexividad tenemos que $A \vdash A$; por monotonía, $A, B \vdash A$, y aplicando dos veces condicionalización obtenemos que $\vdash (A \Rightarrow (B \Rightarrow A))$. como se trata de un argumento categórico, $(A \Rightarrow (B \Rightarrow A)) \in \text{th}_L(\mathcal{L})$.

Demostración del segundo: El árbol siguiente describe la demostración. Las hojas del árbol corresponden a instancias del Modus P. Ponens (véase la nota 7):

$$\begin{array}{c}
 \frac{A, (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \vdash (B \Rightarrow C) \quad B, B \Rightarrow C \vdash C}{A, B, (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \vdash C} \text{Corte} \quad \frac{A, (A \Rightarrow B) \vdash B}{A, A, (A \Rightarrow B), (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \vdash C} \text{Corte} \\
 \frac{A, A, (A \Rightarrow B), (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \vdash C}{A, (A \Rightarrow B), (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \vdash C} \text{Contracc.} \\
 \frac{A, (A \Rightarrow B), (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \vdash C}{(A \Rightarrow B), (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \vdash (A \Rightarrow C)} \text{Condic.} \\
 \frac{(A \Rightarrow B), (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \vdash (A \Rightarrow C)}{(A \Rightarrow B) \vdash ((A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C))} \text{Condic.} \\
 \frac{(A \Rightarrow B) \vdash ((A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C))}{\vdash ((A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)))} \text{Condic.}
 \end{array}$$

Como se trata de un argumento categórico, $((A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C))) \in \text{th}_L(\mathcal{L})$.

Esto completa la demostración. □

Escolio 4.4. La proposición 4.3 tiene como consecuencia que *ninguno* de los sistemas que veremos en lo sucesivo es relevantista. Sin embargo, si se cambia en la definición 4.10 la condición de *monotonía* por esta otra:

- 2'. Si $\Gamma \vdash A$, $\Delta \subseteq \Gamma$ y $\Delta \vdash A$ entonces $\Gamma = \Delta$ [relevancia]

Se obtiene una metalógica en la cual *todas* las lógicas estándar resultan relevantistas, y sus teorías lógicas, en lugar de contener el fragmento puramente condicional de la lógica clásica, contienen sólo el cálculo puro de *entailment*, E_{\rightarrow} , descrito en ANDERSON Y BELNAP (1975, p. 24)⁸.

La proposición siguiente enuncia un hecho fundamental:

Proposición 4.4. *Sea $\mathcal{L} = \langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ una lógica estándar con condicional $\Gamma \Rightarrow \top$. Se verifica que si $\Gamma, A \vdash B$ entonces $\Gamma, B \Rightarrow C \vdash A \Rightarrow C$.*

Demostración. Sea $\mathcal{L} = \langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ una lógica estándar con condicional $\Gamma \Rightarrow \top$. Primero demostramos $\vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$:

$$\frac{\frac{\frac{A, (A \Rightarrow B) \vdash B}{A, (A \Rightarrow B), (B \Rightarrow C) \vdash B} \text{Monot.} \quad \frac{B, (B \Rightarrow C) \vdash C}{A, (A \Rightarrow B), (B \Rightarrow C) \vdash C} \text{Corte}}{\frac{(A \Rightarrow B), (B \Rightarrow C) \vdash (A \Rightarrow C)}{(A \Rightarrow B) \vdash (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)} \text{Condic.}} \text{Condic.} \quad \frac{\vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C))}{\vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C))} \text{Condic.}$$

Con este resultado a la vista, lo que queda de la demostración es sencillo:

$$\frac{\frac{\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash (A \Rightarrow B)} \text{Condic.} \quad \vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C))}{\Gamma \vdash (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)} \text{M. P. P.} \quad \frac{(B \Rightarrow C) \vdash (B \Rightarrow C)}{\Gamma, (B \Rightarrow C) \vdash (A \Rightarrow C)} \text{M. P. P.}}$$

Esto termina la demostración. □

Definición 4.12 (Lenguaje proposicional). Un lenguaje \mathcal{L} es *proposicional* cuando sus categoremas son exactamente el conjunto \mathfrak{V}_p . □

8. La demostración de este hecho, aunque interesante desde un punto de vista lógico, es perfectamente inatingente a efectos de lo que estamos haciendo aquí, por lo que no puedo permitirme incluirla. Sin embargo, nótese que 1) la condición de monotonía es necesaria para demostrar el axioma « $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$ » (proposición 4.3), y 2) los axiomas faltantes para llegar a E_{\rightarrow} , se demuestran de forma análoga a como hemos demostrado « $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$ ». Por lo demás, la condición que aquí he llamado *relevancia* impide, en un sentido bastante fuerte del término, que cualquier argumento contenga premisas inatingentes. La monotonía puede recuperarse si se exige para una agregación de premisas inatingentes que ellas no puedan ser condicionalizadas. Todo esto bien podría ser materia de una investigación posterior.

Definición 4.13 (Lenguaje proposicional positivo). El *Lenguaje Proposicional Positivo* \mathcal{L}_0 se construye a partir del alfabeto formado por el conjunto \mathfrak{V}_p y la signatura $\Sigma_0 = \{\vee, \wedge, \rightarrow\}$ siguiendo las reglas siguientes: $A \in \mathcal{L}_0$ si y sólo si

1. $A \in \mathfrak{V}_p$, o
2. $A \in \{(\alpha * \beta)' : \frac{\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_0, \{\wedge, \vee, \rightarrow\}}{\alpha, \beta, *}\}(\alpha * \beta)\}$.

□

Convención 4.3. Por regla general, en cada lenguaje formal considerado los paréntesis externos siempre se eliminarán. Un punto ($\ulcorner \cdot \urcorner$) a la derecha de un sincategorema sustituye un paréntesis en dicha posición, emparentado con un paréntesis omitido en el extremo derecho de la fórmula; lo mismo para el lado izquierdo. Ejemplos: $\ulcorner A \rightarrow .B \rightarrow C \urcorner \triangleq \ulcorner A \rightarrow (B \rightarrow C) \urcorner$; $\ulcorner A \wedge (B \vee C) . \vee (D \rightarrow E) \urcorner \triangleq \ulcorner (A \wedge (B \vee C)) \vee (D \rightarrow E) \urcorner$. Este será el único uso que se hará del punto $\ulcorner \cdot \urcorner$ para agrupar.

Definición 4.14 (Lógica Positiva). La *Lógica Positiva Pos* corresponde a cualquier sistema estándar $\langle \mathcal{L}_0, \vdash_{Pos} \rangle$ con un condicional $\ulcorner \rightarrow \urcorner$ que verifique, salvo isomorfismo⁹, exactamente que:

$$\text{th}_L(\mathbf{Pos}) = \text{Cn}\left(\left\{ \begin{array}{ll} A \rightarrow (B \rightarrow A) & (A \rightarrow B) \rightarrow .(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C) \\ A \wedge B . \rightarrow A & A \wedge B . \rightarrow B \\ A \rightarrow .A \vee B & B \rightarrow .A \vee B \end{array} \right\} \right)$$

$$(A \rightarrow B) \rightarrow .(A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow .B \wedge C) \quad (A \rightarrow C) \rightarrow .(B \rightarrow C) \rightarrow .(A \vee B) \rightarrow C$$

Por abuso de lenguaje, llamamos a estas fórmulas *axiomas* de **Pos**. □

Lema 4.1. *Las tres secuentes¹⁰ que aparecen a continuación pertenecen a Pos:*

9. La expresión «salvo...» utilizada en matemáticas —en español— no quiere decir «a excepción de...» sino todo lo contrario, «considerando...». Se trata del equivalente al inglés «up to...».

10. Aquí y en otros lugares haré abuso de lenguaje y diré «secuente» cuando lo más apropiado sería decir «esquema de secuente».

1. $A, B \vdash_{Pos} A \wedge B$
2. $A, B \vdash_{Pos} A \vee B$
3. $A, B \vdash_{Pos} A \rightarrow B$

Demostración. Para demostrar la primera es conveniente tener a la vista la tercera, que es inmediata:

$$\frac{\frac{B \vdash_{Pos} B}{A, B \vdash_{Pos} B} \text{Monot.}}{B \vdash_{Pos} A \rightarrow B} \text{Condic.}$$

$$\frac{B \vdash_{Pos} A \rightarrow B}{A, B \vdash_{Pos} A \rightarrow B} \text{Monot.}$$

Ahora la primera:

(Por economía de espacio, sustituyo $\ulcorner \vdash_{Pos} \urcorner$ por $\ulcorner \vdash \urcorner$, además de $\ulcorner A \rightarrow A \urcorner$ por $\ulcorner v \urcorner$ y $\ulcorner A \rightarrow B \urcorner$ por $\ulcorner w \urcorner$ en la instancia de la proposición-**Pos** $\ulcorner (A \rightarrow A) \rightarrow .(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow .A \wedge B) \urcorner$.)

$$\frac{\frac{A \vdash A}{A, B \vdash A} \text{Monot.} \quad \frac{A, B \vdash A \rightarrow B}{A, B \vdash A \rightarrow A} \text{Condic.} \quad \frac{\frac{A \vdash A}{\vdash A \rightarrow A} \text{Condic.} \quad \frac{\vdash (v) \rightarrow .(w) \rightarrow (A \rightarrow .A \wedge B)}{A, B \vdash (v) \rightarrow .(w) \rightarrow (A \rightarrow .A \wedge B)} \text{Monot.}}{\frac{A, B \vdash A \rightarrow A}{A, B \vdash (w) \rightarrow (A \rightarrow .A \wedge B)} \text{Monot.}} \text{M. P. P.}$$

$$\frac{\frac{A, B \vdash A \rightarrow A}{A, B \vdash A \rightarrow .A \wedge B} \text{M. P. P.} \quad \frac{A, B \vdash (w) \rightarrow (A \rightarrow .A \wedge B)}{A, B \vdash A \rightarrow .A \wedge B} \text{M. P. P.}}{A, B \vdash A \wedge B} \text{M. P. P.}$$

La segunda es inmediata:

$$\frac{\frac{A \vdash_{Pos} A}{A, B \vdash_{Pos} A} \text{Monot.} \quad \ulcorner \vdash_{Pos} A \rightarrow .A \vee B \urcorner}{A, B \vdash_{Pos} A \vee B} \text{M. P. P.}$$

□

Proposición 4.5. *La lógica Pos es explosiva.*

Demostración. Por la definición 4.8, **Pos** es explosiva si existe $\Gamma \subset \mathcal{L}_0$ tal que $Cn(\Gamma)$ es trivial.

Consideremos $\Gamma = \mathfrak{A}_p$. Es claro que $(p_1 \wedge p_2) \notin \Gamma$ (por lo que $\Gamma \neq \mathcal{L}_0$), y sin embargo, por inducción sobre los resultados del lema 4.1, sin duda que $Cn(\Gamma) = \mathcal{L}_0$. Esto completa la demostración. □

Al resultado anterior se le contrapone el siguiente:

Proposición 4.6. *Ningún conjunto finito de fórmulas tiene un detonador en **Pos**.*

Demostración. A fin de abreviar lo más posible la demostración (que de otra forma resulta engorrosamente larga), introduciremos un caso particular de **Pos**, el sistema **pvf** (*proposicional verifuncional*).

Sea m_ω una secuencia infinita de Unos (1) y Ceros (0). La función $\sigma : \mathcal{L}_0 \longrightarrow \{1, 0\}$ se define de la siguiente forma:

1. Si $A \in \mathfrak{P}_p$, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $A = p_k$. Entonces, $\sigma(A) = m_k$.
2. Si $A, B \in \mathcal{L}_0$ entonces $\sigma(A \wedge B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}(\sigma(A), \sigma(B))$, $\sigma(A \vee B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}(\sigma(A), \sigma(B))$ y $\sigma(A \rightarrow B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}(\sigma(A), \sigma(B))$.

La lógica **pvf** corresponde al sistema $\langle \mathcal{L}_0, \models \rangle$, en el cual $\Gamma \models A$ si y sólo si:

Para toda secuencia m_ω , si $\sigma(G) = 1$ para toda fórmula $G \in \Gamma$, entonces $\sigma(A) = 1$.

Por Demostrar: El sistema **pvf** es una instancia de **Pos**.

Sub-demostración. Este resultado se sigue de la completud y corrección del cálculo proposicional clásico de Hilbert-Bernays para la semántica de tablas de verdad. La demostración es larga, tediosa y sobradamente conocida en la literatura, por lo que la he omitido¹¹. ■

Sea $\Gamma \subset \mathcal{L}_0$ finito. De acuerdo con la definición 4.6, un detonador para Γ es un conjunto $\Xi \subseteq \Delta \cup \Gamma$ con Δ finito, tal que $Cn(\Xi)$ es trivial. Sea Δ cualquier conjunto finito de fórmulas. Dado que Γ es finito y Δ es finito, sea $p \in \mathfrak{P}_p$ una variable proposicional que no aparece en $\Gamma \cup \Delta$. La demostración consiste en mostrar que $p \notin Cn(\Gamma \cup \Delta)$.

Consideremos una secuencia m_ω de Unos y Ceros construida de la siguiente forma:

- $m_n = 1$ si p_n aparece en $\Gamma \cup \Delta$.
- $m_n = 0$ si p_n no aparece en $\Gamma \cup \Delta$.

11. Véanse, por ejemplo, las secciones 22 a 33 de HUNTER (1996).

Por el lema 4.1, es claro que para esta secuencia m_ω se cumple que $\sigma(X) = 1$ para todo $X \in \Gamma \cup \Delta$. Y sin embargo, $\sigma(p) = 0$, por definición de p . Pero entonces $\Gamma \cup \Delta \not\vdash p$. Es decir que $p \notin Cn(\Gamma \cup \Delta)$, lo que significa que Γ no tiene un detonador. Esto es lo que había que demostrar. \square

4.1.2. Moralejas

Las definiciones de esta sección nos han aportado el vocabulario mínimo para hablar acerca de las explosiones. Además, hemos visto que en la lógica positiva de Hilbert-Bernays, un punto de partida común para una gran cantidad de sistemas lógicos, ya se encuentra *in nuce*¹² todo el fenómeno de la explosión, sólo que todavía encapsulado. Hemos visto que la intromisión de información extraña (y que los relevantistas denuncian como impertinencias) ha hecho su aparición de dos formas sumamente significativas:

1. Bajo la forma de debilitamientos a la izquierda del torniquete, autorizados por la condición de *monotonía*.
2. Bajo la forma de conservación de la fuerza lógica expresada por el torniquete y preservada por el condicional —su avatara en el lenguaje-objeto— que a sazón autoriza:

- a) Agregar antecedentes impertinentes:
$$\frac{A \vdash A}{\frac{A, B \vdash A}{A \vdash B \Rightarrow A}}$$
- b) Invertir el sentido de la fuerza lógica:
$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma, B \Rightarrow C \vdash A \Rightarrow C}$$

Greg Restall llama *modalidades positivas* a aquellas funciones que crecen monotónicamente y *modalidades negativas* a las que decrecen (RESTALL, 2000, cap. 3)¹³. Esto podría sugerirnos, sobre todo en presencia de la proposición 4.4, que la fórmula « $A \Rightarrow C$ » es una

12. Léase: *in nuke*.

13. Que la condicionalización por la derecha es una modalidad negativa es un hecho que Restall presenta en el libro, pero del cual no da una explicación o interpretación filosófica. Por eso preferí evitar su elección terminológica (en la sección 2.1) en favor de la de crecimiento/decrecimiento, que me parece mucho más intuitiva y neutral para lo que estamos haciendo aquí.

función que “en algún sentido” se muestra *negativa* ante «A»; o que, en nuestros términos, ambas se revelan *opuestas* “en algún sentido”. La definición clásica del condicional (filónico) como:

$$\text{Si } P \text{ entonces } Q \equiv \text{No-}P \text{ o } Q$$

Parece ir en esta misma dirección. El vínculo entre condicional y explosión en este punto resulta sugerente, puesto que el Modus Ponendo Ponens:

$$A, A \Rightarrow C \vdash C$$

Es ya una forma pequeña de explosión controlada, lo que podríamos expresar mediante la metáfora de que razonar lógicamente es *minar* las premisas para extraer de ellas las conclusiones esperadas.

Con todo, no me parece que haya algo “negativo” en el decrecimiento monotónico. Más bien parece ser la negación en tanto función lógica la que parece involucrar cierto tipo de fuerza lógica, al menos cuando ella es efectivamente matriz de explosiones, como en los sistemas que analizaremos en el resto de este capítulo. Todo lo que podemos decir por el momento es que un detonador es un objeto lógico de *fuerza lógica infinita*, o cuanto mucho, *maximal*. Es más: dado que las teorías triviales contienen *todas* las proposiciones, ellas no dejan nada fuera, y en ese sentido son todo lo contrario a *negativas*. La oposición entre lo positivo y lo negativo, por tanto, no es particularmente iluminadora a la hora de intentar comprender el fenómeno de la explosión.

4.2. Explosividad con Negación

La definición que viene a continuación abre el terreno a las disquisiciones que nos interesan:

Definición 4.15 (Negación). Sea $\mathcal{L} = \langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ una lógica estándar y sea $\ulcorner \tilde{\neg} \urcorner$ un sincategorema unario de \mathcal{L} . El sincategorema $\ulcorner \tilde{\neg} \urcorner$ es una *negación* si cumple las siguientes condiciones:

1. Si $A \not\equiv B$, entonces $\neg A \not\equiv \neg B$; [Dependencia]

2. Existe algún A que verifica $A \not\equiv \neg A$ [Diferencia]

□

Ahora estamos en condiciones de definir lo que es para un conjunto de fórmulas (y, por extensión, para una teoría y para una teoría lógica) el ser *consistente*, *inconsistente* y *paraconsistente*. Nótese que utilizaré este último concepto como un tecnicismo. Las sutilezas de la definición serán justificadas más abajo.

Definición 4.16 ((In/para)consistencia). Sea $\mathcal{L} = \langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ una lógica con negación \neg . Un conjunto de fórmulas Γ de \mathcal{L} es *inconsistente* si hay al menos una fórmula $A \in \Gamma$ tal que $\neg A \in \Gamma$. El conjunto Γ es *consistente* si no es inconsistente, y es *paraconsistente* si no es trivial. □

De acuerdo con esta definición, toda teoría trivial es inconsistente (dado que la lógica debe tener negación), pero puede haber teorías inconsistentes no-triviales. Dichas teorías fueron las que originalmente motivaron el desarrollo de las lógicas paraconsistentes, sin embargo, para este canon toda teoría consistente es además paraconsistente. Consistencia e inconsistencia son opuestos contradictorios, al igual que paraconsistencia y trivialidad. Consistencia y trivialidad son, pues, sólo contrarios, y paraconsistencia e inconsistencia sólo sub-contrarios. La información anterior puede ser desplegada en un Cuadro clásico de Oposiciones (figura 4.1)¹⁴.

En la literatura es habitual llamar «lógicas paraconsistentes» a las teorías lógicas inconsistentes no-triviales. Por esta razón, y por el cercano cariño que las lógicas clásicas e intuicionísticas le tienen al Principio de No Contradicción, puede resultar contraintuitivo o incluso herético afirmar que todas las teorías consistentes son paraconsistentes.

14. Es posible que este cuadro ya haya sido descubierto por alguien más, muy probablemente Jean-Yves Béziau o alguno de sus colaboradores en los estudios del Cuadro de Oposiciones.

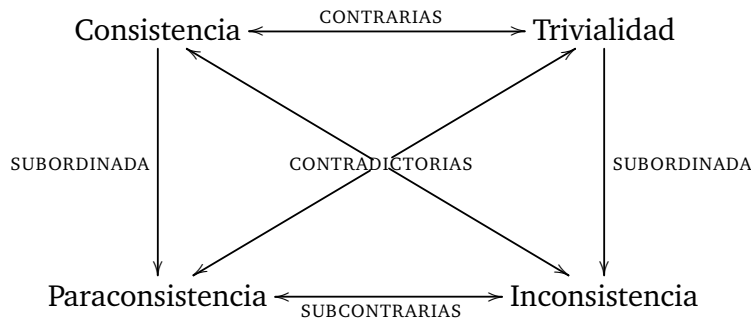


Figura 4.1: Cuadro de Oposiciones de la definición 4.16.

Sin embargo, pienso que esta decisión no contraviene severamente el espíritu del programa paraconsistente en general. No creo que sea necesario presentar aquí un caso bien acabado de esto último, pero me permitiré presentar al menos tres antecedentes en su favor:

1. Dentro del paradigma de la Lógica Paraconsistente se considera un *valor*¹⁵ el que los sistemas sean capaces de *recapturar* las teorías consistentes, típicamente las de la Lógica Clásica. Intentos en dicha dirección los hallaremos tanto en los primeros trabajos del grupo de Curitiba como en desarrollos más actuales (véase (BOBENRIETH MISERDA, 1996; D’OTTAVIANO Y GOMES, 2017; CARNIELLI Y CONIGLIO, 2016)).
2. La compatibilidad entre las lógicas paraconsistentes y las lógicas de la consistencia ha sido un derrotero habitual para distinguir entre paraconsistencia, relevantismo y dialecismo (véase (BOBENRIETH MISERDA, 1996; D’OTTAVIANO Y GOMES, 2017; CARNIELLI Y CONIGLIO, 2016; PRIEST, 1999)).
3. Las Lógicas de la Inconsistencia Formal son un sub-paradigma de la Pparaconsistente (véase sobre todo la entrevista a W. Carnielli en D’OTTAVIANO Y GOMES (2017, Apéndice C)).

15. En sentido kuhneano. Véase la sección 1.2.3.

4.2.1. La vía intuicionística a la Explosión

Los resultados que comentaremos en esta sub-sección se basan en el sistema de Deducción Natural presentado en la definición 2.1.1 de TROELSTRA Y SCHWICHTENBERG (2000), obra a la que remito para los detalles. El fragmento proposicional positivo de dicho sistema considera las reglas presentadas en el cuadro 4.1. Llamo a este sistema DN_0 .

$\text{I-}\wedge: \frac{\frac{D_1}{A} \quad \frac{D_2}{B}}{A \wedge B}$	$\text{E-}\wedge_d: \frac{\frac{D_1}{A \wedge B}}{A}$	$\text{E-}\wedge_i: \frac{\frac{D_1}{A \wedge B}}{B}$
$\text{I-}\vee_d: \frac{\frac{D_1}{A}}{A \vee B}$	$\text{I-}\vee_i: \frac{\frac{D_1}{B}}{A \vee B}$	$\text{E-}\vee: \frac{\frac{D_1}{A \vee B} \quad \frac{[A]^u \quad D_2}{C} \quad \frac{[B]^v \quad D_3}{C}}{C} u, v$
$\text{I-}\rightarrow: \frac{\frac{[A]^u \quad D_1}{B} \quad u}{A \rightarrow B}$	$\text{E-}\rightarrow: \frac{\frac{D_1}{A \rightarrow B} \quad \frac{D_2}{A}}{B}$	

Cuadro 4.1: Reglas Positivas para el cálculo de Deducción Natural proposicional estándar.

El lenguaje con el que trabajaremos en esta sección es introducido en la definición 4.17.

Definición 4.17 (Lenguaje proposicional intuicionista). El *Lenguaje Proposicional Intuicionista* \mathcal{L}_1 se construye a partir del alfabeto formado por el conjunto \mathfrak{A}_p y la signatura $\Sigma_1 = \{\vee, \wedge, \rightarrow, \perp, \neg\}$, siguiendo las reglas siguientes: $A \in \mathcal{L}_1$ si y sólo si

1. $A \in \mathfrak{A}_p$, o
2. $A = \perp$, o
3. $A \in \{(\alpha * \beta)' : \frac{\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_1, \{\wedge, \vee, \rightarrow\}}{\alpha, \beta, *} (\alpha * \beta)\}$, o

$$4. A \in \{(*\alpha)' : \frac{\mathcal{L}_1, \{\neg\}}{\alpha, *}(*\alpha)\}.$$

□

La *Lógica Minimal* contempla el fragmento del lenguaje \mathcal{L}_1 en el que el signo \neg no aparece ni una sola vez, y su disposición normativa es DN_0 .

Definición 4.18 (Lógica Minimal). La *Lógica Minimal Mn* corresponde al sistema $\langle \mathcal{L}_{1-}, \vdash_{Mn} \rangle$, donde \mathcal{L}_{1-} es el fragmento del lenguaje \mathcal{L}_1 en el que el signo \neg no aparece ni una sola vez, y la relación $\Gamma \vdash_{Mn} A$ se verifica exactamente cuando existe una *prueba* en DN_0 que termina en A y que todas sus premisas abiertas pertenecen a Γ . □

Proposición 4.7. *Mn es una lógica estándar y el sincategorema $\neg \rightarrow \neg$ es un condicional en ella.*

Demostración. Relativamente inmediato. Nótese que la definición 4.18 no obliga a que todas las fórmulas en Γ deban aparecer en una prueba de A para que $\Gamma \vdash_{Mn} A$, lo que es necesario para asegurar monotonía. □

Proposición 4.8. *Si $\neg \perp \neg$ es considerado una variable proposicional, Mn es una instancia de Pos.*

Demostración. Se sigue de la completitud y corrección del Sistema de Deducción Natural proposicional para la semántica de tablas de verdad, resultado ampliamente conocido en la literatura¹⁶. □

Convención 4.4. En lo sucesivo, un torniquete no afecto de subíndice debe presuponerse como característico del último sistema que fue definido.

Como es inmediato notar, **Mn** no tiene reglas para lidiar con $\neg \perp \neg$. Por lo tanto, en lo que a él concierne, dicha constante se comporta como una fórmula no analizable cualquiera. En concreto, los siguientes son secuentes válidos en esta lógica:

16. Véanse, por ejemplo, los capítulos 7 y 8 de la segunda parte de ZACH (2016).

1. $\vdash A \rightarrow .(A \rightarrow \perp) \rightarrow \perp$
2. $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow .(A \rightarrow (B \rightarrow \perp)) \rightarrow (A \rightarrow \perp)$
3. $\perp \vdash A \rightarrow \perp$
4. $\vdash A \rightarrow (A \rightarrow \perp). \rightarrow (A \rightarrow \perp)$

(La primera es una instancia de Modus P. Ponens. La segunda es una instancia del segundo axioma clásico del condicional (véase la proposición 4.3). La tercera se obtiene por reflexividad, monotonía y condicionalización. La cuarta puede obtenerse por condicionalización de una instancia de contracción.)

El sistema que viene a continuación, la *Lógica Minimal Intuicionística*, se obtiene introduciendo la siguiente definición:

$$\neg A \triangleq A \rightarrow \perp$$

Definición 4.19 (Lógica Minimal Intuicionística). La *Lógica Minimal Intuicionística Min* corresponde al sistema $\langle \mathcal{L}_1, \vdash_{Min} \rangle$, donde la relación $\Gamma \vdash_{Min} A$ se verifica exactamente cuando existe una *prueba* en DN_0 que termina en A y que todas sus premisas abiertas pertenecen a Γ ; y en cuyos secuentes vale la substitución *salva veritate* autorizada por la definición:

$$\neg A \triangleq A \rightarrow \perp$$

□

Es inmediato notar que $\lceil \neg \rceil$ es una negación (conforme a la definición 4.15) de la Lógica Minimal Intuicionística. Los siguientes son secuentes válidos de este sistema:

1. $\vdash A \rightarrow \neg \neg A$
2. $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow .(A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A$
3. $\perp \vdash \neg A$

$$4. \vdash A \rightarrow \neg A. \rightarrow \neg A$$

$$5. A, \neg A \vdash \neg B$$

$$6. \vdash \neg(A \wedge \neg A)$$

(Las cuatro primeras se obtienen por sustitución *salva veritate* a partir de las que dimos para la Lógica Minimal Negativa. La quinta se obtiene por corte entre la tercera y el Modus P Ponens, y la última es una aplicación de Modus P Ponens sobre una instancia favorable de la segunda.)

En lo que a explosividad respecta, la Lógica Minimal Intuicionística no es diferente del sistema de Lógica Positiva que vimos en la sección anterior: es explosiva, dado que el conjunto $\mathfrak{F}_p \cup \{\perp\}$ es explosivo (proposición 4.5); pero ningún conjunto finito de fórmulas tiene un detonador, puesto que este sistema no maneja recursos para producir más inferencias que el anterior (proposición 4.6).

En este sistema lógico la constante $\ulcorner \perp \urcorner$ captura sólo una de las cualidades de lo absurdo, a saber, el hecho de que *no puede ser demostrado*. Sin embargo, en presencia de un condicional estándar esta sola interpretación ya es suficiente para validar varias de las cualidades comunmente atribuidas a la negación: Introducción de la Doble Negación, No Contradicción y la forma constructiva tanto de la *Consequentia Mirabilis* como de la *Reductio ad Absurdum*. Tal es la relevancia del secuyente que viene a continuación, que expresa además la gran diferencia entre **Mn** y **Mín**:

$$\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow .(A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A \quad (4.1)$$

Haciendo las sustituciones apropiadas, el secuyente anterior se convierte en este otro:

$$\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow .(A \rightarrow (B \rightarrow \perp)) \rightarrow \neg A$$

Que puede ser leído de la siguiente forma: *Comoquiera que una de tus premisas implique una proposición que a su vez implique lo absurdo, niega esa premisa.*

Nótese además esta particular regla derivada para el absurdo¹⁷:

17. Consecuencia inmediata de los secuentes de más arriba.

$$\frac{D_1}{\frac{\perp}{\neg A}}$$

Esta curiosa forma atenuada de explosión (“del absurdo se sigue *cualquier negación*”) se condice bien con lo que hemos dicho más arriba, dado que, en tanto lo absurdo es todo aquello que no debe poder demostrarse, ninguna proposición lo implica, lo que significa que asumirlo como dado es suficiente para negar todas las demás proposiciones. Sin embargo, no debemos olvidar que el seciente

$$\perp \vdash \neg A$$

Proviene del seciente

$$\perp \vdash A \rightarrow \perp$$

Y que este seciente a su vez está presente en toda lógica estándar, pues toda lógica estándar es *monotónica*¹⁸:

$$\frac{\frac{\perp \vdash \perp}{\perp, A \vdash \perp} \text{ Monot.}}{\perp \vdash A \rightarrow \perp} \text{ Condi.}$$

Esto refuerza la idea que presenté en la sub-sección 4.1.2 de que la explosión es un fenómeno asociado primariamente con la monotonía y la condicionalización. Esto luego sugerirá que la negación lógica, en tanto Negación, es explosiva cuando ella es precisamente *negación de la explosión*. Téngase a bien considerar, además, la proposición siguiente¹⁹.

Proposición 4.9. *La negación de **Min** decrece monótonamente respecto de sus términos.*

Demostración. Es decir, si $\Gamma, A \vdash B$ entonces $\Gamma, \neg B \vdash \neg A$. Y esto es inmediato por la definición de \neg y la proposición 4.4. □

Escolio 4.5. Aquí ha aparecido una de las propiedades comunmente asociadas a la negación, la contraposición. Pero es sensible notar que en este caso proviene de una propiedad del condicional (proposición 4.4), por lo que su vínculo con la explosión *no* tendrá que ver de manera primigenia con la negación.

18. Cf. la proposición 4.3.

19. Y confróntesela con la condición **ADQ2** de LENZEN (1996) que comentamos en la sub-sección 2.4.2, página 51 y siguientes.

La Lógica Intuicionística se obtiene de la Minimal Intuicionística agregando la simétrica de la regla $\frac{D_1}{\frac{\perp}{\neg A}}$ para que \perp tenga poder explosivo completo. Ello se logra enriqueciendo el cálculo DN_0 con la regla siguiente, para llegar al sistema DN_1 :

$$E-\perp: \frac{D_1}{\frac{\perp}{A}}$$

Definición 4.20 (Lógica Intuicionística). La *Lógica Intuicionística Int* corresponde al sistema $\langle \mathcal{L}_1, \vdash_{Int} \rangle$, donde la relación $\Gamma \vdash_{Int} A$ se verifica exactamente cuando existe una *prueba* en DN_1 que termina en A y que todas sus premisas abiertas pertenecen a Γ ; y en cuyos secuentes vale la substitución *salva veritate* autorizada por la definición:

$$\neg A \triangleq A \rightarrow \perp$$

□

La Lógica Intuicionística es un sistema explosivo, como resulta del todo evidente. Su bomba es \perp , y sus detonadores tienen siempre la forma $\{A, \neg A\}$, lo que nos dice (una vez aceptada la no poco polémica definición « $\neg A \triangleq A \rightarrow \perp$ ») que estamos ante una variante *Ex contradictione* del Principio de Explosión.

En cuanto a la manera en que **Min** y **Int** tratan el absurdo, vemos que la versión intuicionística de \perp no ha hecho más que atribuirle el poder deductivo de una bomba. La pregunta sobrevive: ¿por qué de lo absurdo debería seguirse cualquier cosa?

En la sección anterior vimos que al menos un conjunto explosivo en **Pos** es \mathfrak{V}_p (proposición 4.5), es decir, el total de todas las variables proposicionales. En algún momento Michael Dummett sugirió interpretar a \perp como “the conjunction of all atomic sentences” (DUMMETT, 1994, p. 295); para él, ello 1) explicaba por qué el absurdo tiene tanto poder deductivo, y 2) justificaba por qué no tiene una regla de introducción. Y es que de hecho sí la tendría, pues no tendría que ser más que una iteración de la regla $I-\wedge$ sobre todas las variables: pero, dado que \mathfrak{V}_p es infinito, la condición nunca se satisface (pues una prueba es por definición *finita*), y en consecuencia, aun existiendo, se trataría de una regla que jamás podría aplicarse. Con todo y su elegancia, esta salida sin embargo no

parece justificar de manera plausible o siquiera convincente que “lo absurdo” deba ser “la conjunción de todas las proposiciones básicas”. Aunque sí podría darse algo de crédito a quien dijera que “es absurdo estar dispuesto a aceptar cualquier cosa que se quiera”, no parece razonable concluir de allí que lo absurdo es *sólo* eso.

Me es necesario señalar además que este sistema permite formalizar el argumento de Pseudo-Scotus:

$$\frac{\frac{A \wedge \neg A}{A} \quad \frac{A \wedge \neg A}{\neg A}}{A \vee B} B$$

Aunque su apariencia sin negación es sumamente sospechosa:

$$\frac{\frac{A \wedge (A \rightarrow \perp)}{A} \quad \frac{A \wedge (A \rightarrow \perp)}{A \rightarrow \perp}}{A \vee B} B$$

Y esto porque la regla Modus Tollendo Ponens, que en este sistema puede obtenerse como derivada, tiene una apariencia igual de sospechosa:

$$\frac{A \vee B \quad \frac{[A]^u \quad A \rightarrow \perp}{\perp} \quad \frac{\perp}{B} \quad [B]^u}{B} u$$

La razón es que aquí la explosión no proviene de la contradicción (como en Pseudo-Scotus, con la interpretación más natural del Modus Tollendo Ponens) sino de \perp y su misterioso poder deductivo. La última prueba lo delata: siendo sólo A y $\neg A$ suficientes para obtener B , el paso por $A \vee B$ es un rodeo innecesario.

La lógica clásica puede obtenerse de la Intuicionística de varias maneras. La más directa (y que es la que aparece en TROELSTRA Y SCHWICHTENBERG (2000)) es agregar a la regla de \perp la capacidad de descargar una negación:

$$E-\perp: \quad \frac{[\neg A]^u \quad D_1 \quad \frac{\perp}{A} u}{A}$$

Otras formas posibles son agregar una regla de Eliminación de la Doble Negación, o incluso forzar la posibilidad de introducir $A \vee \neg A$ sin premisas. Con todo, es necesario señalar que ninguna de estas alternativas asegura a la armonía de las reglas de la Lógica Clásica, como ha sido sobradamente demostrado en la literatura.

4.2.2. La vía paraconsistente a la Explosión

Definición 4.21 (Lenguaje proposicional paraconsistente). El *Lenguaje Proposicional Paraconsistente* \mathcal{L}_2 se construye a partir del alfabeto formado por el conjunto \mathfrak{V}_p y la signatura $\Sigma_2 = \{\vee, \wedge, \rightarrow, \neg, \circ\}$, siguiendo las reglas siguientes: $A \in \mathcal{L}_2$ si y sólo si

1. $A \in \mathfrak{V}_p$, o
2. $A \in \{(\alpha * \beta)' : \|\frac{\mathcal{L}_2, \mathcal{L}_2, \{\wedge, \vee, \rightarrow\}}{\alpha, \beta, *}\}(\alpha * \beta)\}$, o
3. $A \in \{(*\alpha)' : \|\frac{\mathcal{L}_2, \{\neg, \circ\}}{\alpha, *}\}(*\alpha)\}$.

El *fragmento clásico* de \mathcal{L}_2 es el fragmento de fórmulas de \mathcal{L}_2 en el cual el símbolo \neg o \circ no aparece ni una sola vez. Designamos a este lenguaje \mathcal{L}_{2*} . □

El sistema de lógica clásica que presentamos a continuación no es un único sistema sino un isomorfismo de sistemas, a la manera en que definimos **Pos**.

Definición 4.22 (Lógica Clásica). La *Lógica Clásica Clas* corresponde a cualquier sistema estándar $\langle \mathcal{L}_{2*}, \vdash_{Clas} \rangle$ con un condicional $\Gamma \rightarrow \neg$ que verifique, salvo isomorfismo, exactamente que:

$$\text{th}_L(\mathbf{Clas}) = \text{Cn}(\left\{ \begin{array}{ll} A \rightarrow (B \rightarrow A) & (A \rightarrow B) \rightarrow .(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C) \\ A \wedge B. \rightarrow A & A \wedge B. \rightarrow B \\ A \rightarrow .A \vee B & B \rightarrow .A \vee B \end{array} \right\} \cup \left\{ \begin{array}{ll} (A \rightarrow B) \rightarrow .(A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow .B \wedge C) & (A \rightarrow C) \rightarrow .(B \rightarrow C) \rightarrow .(A \vee B) \rightarrow C \\ (A \rightarrow B) \rightarrow .(A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A & \neg \neg A \rightarrow A \end{array} \right\}$$

Por abuso de lenguaje, llamamos a estas fórmulas *axiomas* de **Clas**²⁰. □

La Lógica Clásica valida todos tus esquemas lógicos favoritos: Contraposición, las dos reglas para la Doble Negación, las formas no constructivas de la *Reductio* y la *Mirabilis*, todas las transformaciones (mal llamadas) de De Morgan y todas las paradojas del Condicional denunciadas por los relevantistas. Pero lo más importante para nosotros es que verifica múltiples instancias del *Ex contradictione sequitur quodlibet*:

Proposición 4.10. *Los siguientes secuentes son todos válidos en Clas:*

1. $A, \neg A \vdash B$
2. $A \wedge \neg A \vdash B$
3. $\vdash A \wedge \neg A. \rightarrow B$
4. $\vdash A \rightarrow . \neg A \rightarrow B$
5. $\vdash \neg A \rightarrow . A \rightarrow B$

Demostración. Presentaré sólo la demostración de la primera, ya que las demás pueden ser obtenidas de ésta por procedimientos sumamente simples. Como en otras ocasiones, divido la demostración en partes por cuestión de espacio.

Primero obtenemos:

$$\frac{\frac{A \vdash A}{A, \neg B \vdash A} \text{ Monot.}}{A \vdash (\neg B \rightarrow A)} \text{ Condi.} \quad \vdash (\neg B \rightarrow A) \rightarrow . (\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg \neg B \quad \text{M. P. P.}$$

$$\frac{}{A \vdash (\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg \neg B} \text{ M. P. P.}$$

Ahora:

$$\frac{A \vdash (\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg \neg B}{A, \neg A \vdash \neg \neg B} \text{ M. P. P.}$$

$$\frac{\frac{\neg A \vdash \neg A}{\neg A, \neg B \vdash \neg A} \text{ Monot.}}{\neg A \vdash (\neg B \rightarrow \neg A)} \text{ Condi.}$$

Y finalmente:

20. La línea punteada separa los nuevos axiomas de los axiomas de **Pos**. La misma indicación aplica en las definiciones por seguir.

$$\frac{A, \neg A \vdash \neg\neg B \quad \vdash \neg\neg B \rightarrow B}{A, \neg A \vdash B} \text{M. P P}$$

Esto completa la demostración. □

Escolio 4.6. Obsérvese que en la demostración de la proposición 4.10 el último axioma invocado es $\vdash \neg\neg B \rightarrow B$, es decir, la forma no-constructiva de la Doble Negación²¹. Hasta antes de ese punto la prueba es suficiente para demostrar que de una contradicción se sigue cualquier negación, que es un resultado conocido para **Min**. Esto nos revela que un sistema que valide todos los axiomas de **Pos** más el esquema 4.1 (página 126) será isomórfico a **Min**. Volveré brevemente sobre este punto un poco más adelante.

Nótese el rol fundamental que juega en la demostración de la proposición 4.10 el esquema 4.1. En **Clas** no existe la constante \perp , y sin embargo, en virtud de esta última proposición todo el poder deductivo de \perp en **Int** es asumido por las contradicciones en un sentido amplio, es decir, por cualquier par de fórmulas tal que una sea equivalente a la negación de la otra. Esto implica que todas las fórmulas que en **Clas** se ajustan al esquema $A \wedge \neg A$ son bombas, y también que un detonador para cualquier conjunto Γ debe tener la forma $\{A, \neg A\}$.

La estrategia original de da Costa para constreñir las explosiones por contradicción fue distinguir sintácticamente entre aquellas proposiciones que validan el Principio de No Contradicción (las “bien comportadas”, «bem comportadas») de aquellas que no lo hacen (las “mal comportadas”). Esto permite alejar a las primeras del esquema 4.1 y por ende de la explosión, a la vez que evita perder el valioso poder deductivo de la *Reductio ad Absurdum* y esquemas relacionados para las segundas.

El sistema siguiente, **pClas**, es formalmente equivalente al sistema C_1 de da Costa, presentado en DA COSTA (1993)²². Lo provocador del nombre será justificado en lo sucesivo.

21. Véase el cuadro 2.1, página 60.

22. Con la pequeña diferencia de que da Costa utiliza el operador de buen comportamiento como un sufijo, por razones que no tengo muy claras.

Definición 4.23 (Lógica Paraconsistente Clásica). La *Lógica Paraconsistente Clásica* **pClas** corresponde a cualquier sistema estándar $\langle \mathfrak{L}_2, \vdash_{pClas} \rangle$ con condicional \rightarrow que verifique, salvo isomorfismo, exactamente que:

$$\text{th}_L(\mathbf{pClas}) = \text{Cn} \left(\left\{ \begin{array}{l} A \rightarrow (B \rightarrow A) \qquad (A \rightarrow B) \rightarrow .(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C) \\ A \wedge B. \rightarrow A \qquad A \wedge B. \rightarrow B \\ A \rightarrow .A \vee B \qquad B \rightarrow .A \vee B \\ (A \rightarrow B) \rightarrow .(A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow .B \wedge C) \quad (A \rightarrow C) \rightarrow .(B \rightarrow C) \rightarrow .(A \vee B) \rightarrow C \\ \hline A \vee \neg A \qquad \neg \neg A \rightarrow A \\ \circ B \rightarrow .(A \rightarrow B) \rightarrow .(A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A \end{array} \right\} \right)$$

(Los axiomas de **pClas**), y que además valide los argumentos:

- $\circ A, \circ B \vdash_{pClas} \circ(A \wedge B)$
- $\circ A, \circ B \vdash_{pClas} \circ(A \vee B)$
- $\circ A, \circ B \vdash_{pClas} \circ(A \rightarrow B)$

Y en cuyos secuentes valga la substitución *salva veritate* autorizada por la definición:

$$\circ A \triangleq \neg(A \wedge \neg A)$$

□

El signo \rightarrow en **pClas** señala explícitamente qué fórmulas se comportan bien, y les permite servir de piedra de tope en una *Reductio*; tal es el significado de la variante del esquema 4.1 en esta lógica,

$$\circ B \rightarrow .(A \rightarrow B) \rightarrow .(A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A \tag{4.2}$$

que podría decirse que es su rasgo característico. Da Costa también dispuso que el buen comportamiento de las fórmulas fuera hereditario, es decir, que fórmulas bien comportadas aseguraran que al componerse con otras fórmulas bien comportadas dieran por

resultado más fórmulas bien comportadas. El sistema lógico **pClas** verifica algunas cualidades notables, todas ellas demostradas en DA COSTA (1993), texto al que remito para los detalles:

1. **pClas** no valida la Introducción de la Doble Negación (DA COSTA, 1993, Teorema 2.8).

2. Los esquemas

- $\neg A \rightarrow .A \rightarrow B$
- $\neg A \rightarrow .A \rightarrow \neg B$
- $A \wedge \neg A. \rightarrow B$
- $A \wedge \neg A. \rightarrow \neg B$

no son válidos en **pClas** (DA COSTA, 1993, Teorema 2).

3. **Pos** es un sub-sistema de **pClas** (DA COSTA, 1993, Teorema 5).

4. El fragmento de **pClas** afecto del operador de buen comportamiento $\lceil \circ \rceil$ es una instancia de **Clas** (DA COSTA, 1993, Teoremas 8 y 9).

5. La forma constructiva de la *Consequentia Mirabilis* ($\langle\langle A \rightarrow \neg A \rangle\rangle \rightarrow \neg A$) es un esquema válido en **pClas** (DA COSTA, 1993, Teorema 6.5).

Sin embargo, definir « $\circ A$ » exactamente como « $\neg(A \wedge \neg A)$ » tiene la desafortunada inelegancia de usar el signo de negación en los axiomas que rigen la negación, lo que reintroduce la explosión en **pClas** a través de las fórmulas bien comportadas. Esto es esencialmente lo expresado por la proposición 4.11.

Proposición 4.11. *Salvo sustitución, $(A \wedge \neg A) \wedge \circ A$ es la bomba de **pClas**.*

Demostración. Consideremos el singulete $\{(A \wedge \neg A) \wedge \circ A\}$, de acuerdo a lo requerido por la definición 4.7 de *bomba*. Es inmediato notar que los tres secuentes siguientes son válidos:

- $(A \wedge \neg A) \wedge \circ A \vdash A$
- $(A \wedge \neg A) \wedge \circ A \vdash \neg A$
- $(A \wedge \neg A) \wedge \circ A \vdash \circ A$

Y que por tanto la siguiente instancia de Modus P. Ponens también:

$$\frac{(A \wedge \neg A) \wedge \circ A \vdash \circ A \quad \vdash \circ A \rightarrow .(\neg B \rightarrow A) \rightarrow .(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg \neg B}{(A \wedge \neg A) \wedge \circ A \vdash (\neg B \rightarrow A) \rightarrow .(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg \neg B}$$

Y desde aquí lo que falta es similar a la demostración de la proposición 4.10. □

Escolio 4.7. En CARNIELLI Y CONIGLIO (2016) se introduce el concepto de *gentle explosion* para caracterizar al hecho de que un detonador exija “algo más” que una contradicción para producir la explosión (CARNIELLI Y CONIGLIO, 2016, cap. 2). Este concepto no reviste mucho interés en este marco, puesto que hemos separado el fenómeno de la explosión del *Ex contradictione sequitur quodlibet*.

En la demostración de 4.11 no fue necesario recurrir a ninguna sustitución de $\ulcorner \circ A \urcorner$ por $\ulcorner A \wedge \neg A \urcorner$, por lo que una variante de **pClas** sin dicha definición tiene exactamente la misma bomba y por lo tanto los mismos detonadores.

He llamado al sistema **pClas** “Clásico” porque su fragmento bien comportado —y, por tanto, aquel al que pretende proteger del *Ex contradictione*— es la lógica clásica. Pero la estrategia de fortalecimiento del esquema para la *Reductio* podría aplicarse a un sistema inmediatamente más expresivo que **Pos**, el sistema **pMed**.

Definición 4.24 (Lógica Paraconsistente Intermedia). La *Lógica Paraconsistente Intermedia pMed* corresponde a cualquier sistema estándar $\langle \mathcal{L}_2, \vdash_{pMed} \rangle$ con condicional $\ulcorner \rightarrow \urcorner$ que verifique, salvo isomorfismo, exactamente que:

$$\text{th}_L(\mathbf{pMed}) = \text{Cn}\left(\left\{ \begin{array}{ll} A \rightarrow (B \rightarrow A) & (A \rightarrow B) \rightarrow .(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C) \\ A \wedge B. \rightarrow A & A \wedge B. \rightarrow B \\ A \rightarrow .A \vee B & B \rightarrow .A \vee B \end{array} \right\} \right)$$

$$\begin{array}{ll} (A \rightarrow B) \rightarrow .(A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow .B \wedge C) & (A \rightarrow C) \rightarrow .(B \rightarrow C) \rightarrow .(A \vee B) \rightarrow C \\ \circ B \rightarrow .(A \rightarrow B) \rightarrow .(A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A & \end{array}$$

(Los axiomas de **pMed**), y que además valide los argumentos:

- $\circ A, \circ B \vdash_{pMed} \circ(A \wedge B)$
- $\circ A, \circ B \vdash_{pMed} \circ(A \vee B)$
- $\circ A, \circ B \vdash_{pMed} \circ(A \rightarrow B)$

Y en cuyos secuentes valga la substitución *salva veritate* autorizada por la definición:

$$\circ A \triangleq \neg(A \wedge \neg A)$$

□

Este sistema corresponde al *Cálculo Intermedio* en el diagrama de BOBENRIETH MISERDA (1996, An. D), donde además puede verse de qué manera se obtienen, a partir de él, **Min**, **Int**, **pClas** y **Clas**, y de manera notable este sistema de Lógica Minimal Paraconsistente:

Definición 4.25 (Lógica Minimal Paraconsistente). La *Lógica Minimal Paraconsistente* **pMin** corresponde a cualquier sistema estándar $\langle \mathfrak{L}_2, \vdash_{pMin} \rangle$ con condicional $\Gamma \rightarrow \neg$ que verifique, salvo isomorfismo, exactamente que:

$$\text{th}_L(\mathbf{pMin}) = \text{Cn}\left(\left\{ \begin{array}{ll} A \rightarrow (B \rightarrow A) & (A \rightarrow B) \rightarrow .(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C) \\ A \wedge B. \rightarrow A & A \wedge B. \rightarrow B \\ A \rightarrow .A \vee B & B \rightarrow .A \vee B \end{array} \right\} \right)$$

$$\begin{array}{ll} (A \rightarrow B) \rightarrow .(A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow .B \wedge C) & (A \rightarrow C) \rightarrow .(B \rightarrow C) \rightarrow .(A \vee B) \rightarrow C \\ \circ B \rightarrow .(A \rightarrow B) \rightarrow .(A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A & A \vee \neg A \end{array}$$

(Los axiomas de **pMin**), y que además valide los argumentos:

- $\circ A, \circ B \vdash_{pMin} \circ(A \wedge B)$
- $\circ A, \circ B \vdash_{pMin} \circ(A \vee B)$
- $\circ A, \circ B \vdash_{pMin} \circ(A \rightarrow B)$

Y en cuyos secuentes valga la substitución *salva veritate* autorizada por la definición:

$$\circ A \triangleq \neg(A \wedge \neg A)$$

□

4.2.3. La negación lógica como negación de la explosión

En esta sección el sistema original **Bomb** es introducido, y sobre él algunos resultados son presentados. Este desarrollo servirá para delinear algunas conclusiones parciales de la presente investigación, además de servir de base técnica para algunos de los argumentos en el capítulo 5.

Definición 4.26 (Lenguaje proposicional ampliado). El *Lenguaje Proposicional Ampliado* \mathfrak{L}_3 se construye a partir del alfabeto formado por el conjunto \mathfrak{A}_p y la signatura $\Sigma_3 = \{\vee, \wedge, \rightarrow, \neg, \bullet\}$, siguiendo las reglas siguientes: $A \in \mathfrak{L}_3$ si y sólo si

1. $A \in \mathfrak{A}_p$, o

2. $A \in \{(\alpha * \beta)' : \frac{\mathcal{L}_3, \mathcal{L}_3, \{\wedge, \vee, \rightarrow\}}{\alpha, \beta, *}\}(\alpha * \beta)\}$, o
3. $A \in \{(*\alpha)' : \frac{\mathcal{L}_3, \{\neg, \bullet\}}{\alpha, *}\}(*\alpha)\}$.

□

La interpretación intencionada para el sistema **Bomb** es poseer una marca sintáctica para indicar qué fórmulas son explosivas ($\Gamma \bullet \neg$) y sobre la base de ella definir la negación de tal manera que ella pueda interpretarse exactamente como *negación de la explosión*, de manera que sean literalmente las fórmulas explosivas las piedras de tope de la *Reductio ad Absurdum*, y por ende que el absurdo sea no más y no menos que lo explosivo.

Definición 4.27 (Lógica Puramente Explosiva). La *Lógica Puramente Explosiva Bomb* corresponde a cualquier sistema estándar $\langle \mathcal{L}_3, \vdash_{Bomb} \rangle$ con condicional $\Gamma \rightarrow \neg$ que verifique, salvo isomorfismo, exactamente que:

$$\text{th}_L(\mathbf{pBomb}) = \text{Cn}\left(\left\{ \begin{array}{ll} A \rightarrow (B \rightarrow A) & (A \rightarrow B) \rightarrow .(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C) \\ A \wedge B. \rightarrow A & A \wedge B. \rightarrow B \\ A \rightarrow .A \vee B & B \rightarrow .A \vee B \end{array} \right\} \right)$$

$$\begin{array}{ll} \bullet A \rightarrow (A \rightarrow B) & \bullet B \rightarrow .(A \rightarrow B) \rightarrow \neg A \end{array}$$

Por abuso de lenguaje, llamamos a estos esquemas *axiomas de Bomb*. □

Proposición 4.12. *Salvo sustitución, $A \wedge \bullet A$ es la bomba de Bomb.*

Demostración. Inmediato por el axioma de \bullet . □

Proposición 4.13. *El esquema $\bullet A \rightarrow \neg A$ es válido en Bomb.*

Demostración. Inmediato por sustitución en el segundo axioma del fragmento puramente condicional y dos aplicaciones de Modus P. Ponens. □

La proposición 4.13 expresa exactamente el significado intencionado para $\neg A$, pero su conversa no es verdadera, como lo menta explícitamente la proposición siguiente.

Proposición 4.14. *El esquema $\neg A \rightarrow \bullet A$ no es válido en **Bomb**.*

Demostración. El sistema no tiene los recursos suficientes para validar este esquema, dado que no posee axiomas ni para eliminar $\ulcorner \neg \urcorner$ ni para introducir $\ulcorner \bullet \urcorner$. \square

El mayor interés que reviste **Bomb** para nosotros radica en el hecho de que este sistema no posee recursos para introducir $\ulcorner \bullet \urcorner$ o para eliminar $\ulcorner \neg \urcorner$. Supongamos que φ es una fórmula compleja y queremos expresar lógicamente el hecho de que φ tiene la forma de una proposición explosiva. Para tal efecto, es suficiente que amplíemos el sistema de axiomas de **Bomb** con el esquema:

$$A \rightarrow \varphi. \rightarrow \bullet A$$

De lo que se sigue inmediatamente que φ es la bomba en este nuevo sistema:

$$\frac{\vdash \varphi \rightarrow \varphi. \rightarrow \bullet \varphi \quad \vdash \varphi \rightarrow \varphi}{\vdash \bullet \varphi}$$

Y también que φ es piedra de tope de la *Reductio ad absurdum*:

$$\frac{\bullet \varphi \rightarrow .(A \rightarrow \varphi) \rightarrow \neg A \quad \bullet \varphi}{(A \rightarrow \varphi) \rightarrow \neg A}$$

Lo importante para nuestros propósitos es que *no hay necesidad alguna de que φ sea lo falso, lo contradictorio, lo imposible o lo absurdo*. Por ejemplo, una instancia plausible de φ podría ser:

$$(A \rightarrow \neg \neg A) \wedge (\neg \neg A \rightarrow A)$$

De lo que resultaría una lógica en la cual *ex Legi Duplicis Negationis sequitur quodlibet*, “de la Ley de la Doble Negación se sigue cualquier cosa”. El sistema resultante *no* es trivial, lo que significa que no hay nada intrínsecamente extraño a la explosión en la Ley de Doble Negación. Esto significa además, y de manera absolutamente significativa, que la tarea de justificar la definición de una bomba en dichos términos es *enteramente filosófica*. Por

lo tanto, lo mismo puede decirse de las bombas tradicionales: lo falso, lo contradictorio, lo imposible o lo absurdo.

Por otra parte, nótese que si se introduce en **Bomb** el esquema

$$\neg A \rightarrow \bullet A$$

Los signos $\ulcorner \bullet \urcorner$ y $\ulcorner \neg \urcorner$ colapsan en uno solo, de lo que se sigue que los dos axiomas característicos del sistema se convierten en:

1. Una instancia del *Ex contradictione sequitur quodlibet*: $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$
2. Una instancia de la regla de Contraposición: $\neg B \rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow \neg A$ (permutación de antecedentes en: $\langle\langle A \rightarrow B \rangle \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)\rangle\rangle$)

El sistema resultante es un fragmento propio tanto de **Clas** como de **Int**, por lo que podemos afirmar que en ambos *la negación lógica es negación de la explosión, y todo lo negado es explosivo*, última cláusula que, de manera más o menos liberal, podría asociársela con el *Ex falso sequitur quodlibet*.

4.3. Tres maneras de explotar

En esta sección presentaremos la lógica clásica en tres variantes distintas, una para cada uno de los tres niveles metalógicos que hemos considerado: alético, funcional e interactivo. Luego veremos de qué manera se presenta en ellos el argumento de explosión. Este material será objeto de análisis profundo en el capítulo siguiente.

En todos los ejemplos a continuación lo que haremos será demostrar el seciente

$$A, \neg A \vdash B$$

Que es la instancia más general de *Ex contradictione sequitur quodlibet* para la lógica clásica, como ya hemos mostrado más arriba (proposición 4.10).

4.3.1. Explosión en el nivel alético

Las definiciones a continuación son absolutamente estándar y corresponden a la versión de **Clas** que popularizó la primera filosofía analítica.

Definición 4.28 (Interpretación verifuncional clásica). La función $\sigma : \mathcal{L}_{2^*} \longrightarrow \{0, 1\}$ es una *interpretación verifuncional clásica* si y sólo si, para toda secuencia m_ω de Unos y Ceros se verifica que:

1. Si $A \in \mathfrak{A}_p$, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $A = p_k$. Entonces, $\sigma(A) = m_k$.
2. Si $A, B \in \mathcal{L}_{2^*}$ entonces $\sigma(\neg A) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}(A)$, $\sigma(A \wedge B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}(\sigma(A), \sigma(B))$, $\sigma(A \vee B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}(\sigma(A), \sigma(B))$ y $\sigma(A \rightarrow B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}(\sigma(A), \sigma(B))$.

□

Definición 4.29 (Lógica Verifuncional Clásica). La *Lógica Verifuncional Clásica vClas* corresponde al sistema $\langle \mathcal{L}_{2^*}, \vdash_{vClas} \rangle$ en el cual $\Gamma \vdash_{vClas} A$ si y sólo si para toda interpretación verifuncional clásica σ se cumple que: si $\sigma(G) = 1$ para toda $G \in \Gamma$, entonces $\sigma(A) = 1$. □

La demostración de $A, \neg A \vdash B$ es inmediata y viene dada por la tabla de verdad del cuadro 4.2.

A	$\neg A$	B
1	0	1
1	0	0
0	1	1
0	1	0

Cuadro 4.2: Tabla de verdad para $A, \neg A \vdash B$.

Dado que sabemos que **Clas** verifica el Metateorema de la Deducción²³, del hecho de que este secuyente sea válido se sigue que

$$\vdash A \rightarrow . \neg A \rightarrow B$$

23. Véase la nota 7 de este capítulo, página 113.

Es una proposición-**Clas**. La relación avatárica de $\Gamma \rightarrow \neg$ respecto de la relación \vdash_{vClas} es, en este sistema, más explícita que en ningún otro, dado que de forma absolutamente general puede afirmarse que

$$G_1, \dots, G_n \vdash A$$

Si y sólo si

$$\vdash G_1 \cdot \wedge \dots \wedge G_n \cdot \rightarrow A$$

Con lo que una segunda justificación para el *Ex contradictione sequitur quodlibet* proviene de la observación absolutamente general de que las interpretaciones verifuncionales clásicas verifican que, por una parte,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}(x, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}(x)) = 0$$

Para todo x , y que también

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}(0, y) = 1$$

Para todo y , de lo que se sigue, bajo los mismos parámetros, que:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}(x, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}(x)), y) = 1$$

Dado que la interpretación filosófica de esta semántica asocia tradicionalmente el valor 1 a “lo Verdadero” y el valor 0 a “lo Falso” podemos decir que en este caso todo el fenómeno explosivo se reduce al *Ex falso*²⁴.

4.3.2. Explosión en el nivel funcional

Para el nivel funcional consideraremos el sistema **dnClas**, cuya disposición normativa es el sistema de Deducción Natural DN_2 , que se obtiene de DN_1 cambiando la regla E- \perp por la que aparece en la página 129.

Definición 4.30 (Lógica Clásica con Deducción Natural). La *Lógica Clásica con Deducción natural dnClas* corresponde al sistema $\langle \mathcal{L}_1, \vdash_{dnClas} \rangle$ en el cual $\Gamma \vdash_{dnClas} A$ si y sólo si existe

²⁴. Véase la nota 2 de este capítulo, página 107.

una prueba en DN_2 que termine en A y que todas sus premisas no descargadas pertenezcan a Γ . □

Como hemos visto en la sub-sección 4.2.1, la prueba del seciente $A, \neg A \vdash B$ en presencia de una constante para el absurdo es una simple aplicación del Modus Ponendo Ponens:

$$\frac{\frac{\neg A \quad A}{\perp} E-\rightarrow}{B} E-\perp$$

Cuya forma sin negación corresponde a:

$$\frac{A \rightarrow \perp \quad A}{B} E-\rightarrow$$

Nótese que dado que la regla $E-\perp$ utilizada en esta deducción no hizo descarga alguna, se trata de una prueba también válida en DN_1 y por lo tanto, intuicionística. Notar esto es importante para la demostración de la proposición siguiente.

Proposición 4.15. *La prueba anterior está en forma normal.*

Demostración. Por el teorema 6.1.8 de TROELSTRA Y SCHWICHTENBERG (2000) sabemos que en DN_1 (Ni en el libro) toda derivación reduce a una forma normal. Y es fácil notar que las pruebas aquí dadas se atienen a las convenciones de normalidad impuestas por dicho teorema²⁵. □

Esto significa que estamos ante la prueba más directa del seciente $A, \neg A \vdash B$.

Aunque puede demostrarse que el sistema **dnClas** es una instancia de **Clas** bajo la definición

$$A \wedge \neg A \triangleq \perp$$

El uso de la constante para el absurdo es todavía muy intuicionística en su espíritu. Cabe preguntarse si no puede formularse **Clas** en un cálculo de Deducción Natural que no contenga $\ulcorner \perp \urcorner$. El sistema de Deducción Natural DN_3 se obtiene de DN_2 haciendo los siguientes cambios:

25. Téngase presente, en cualquier caso, el escolio (*Remark*) 6.1.11 del mismo libro.

1. Considerando \mathcal{L}_{2*} en lugar de \mathcal{L}_1 .
2. Agregando las dos reglas siguientes para introducir y eliminar la negación, donde B es una fórmula que no figura en A , así como tampoco en ninguna de las premisas de la prueba:

$$I-\neg: \frac{[A]^u \quad D_1}{\frac{B}{\neg A} u} \quad \Bigg| \quad E-\neg: \frac{D_1 \quad D_2}{\frac{A \quad \neg A}{B}}$$

Estas reglas corresponden a las presentadas en la sección 2 de DE CAMPOS SANZ (2004), por lo que todo el sistema DN_3 puede verse como una adaptación de dicha propuesta²⁶. La justificación del autor para estas reglas es la siguiente:

We claim the negation introduction and negation elimination schemata are adequate means of developping Russell's account about negation [...]. When Russell said that a negated proposition should be regarded as equivalent to a complex implication, he suggested to understand negation by means of definitional equivalence with triviality. Negation introduction rule has triviality, under some context of hypotheses, as its condition of applicability, while elimination rule allows us to restore any consequence resulting from such condition. (DE CAMPOS SANZ, 2004, p. 584)

En DN_3 la prueba normal para el seciente $A, \neg A \vdash B$ se convierte sencillamente en:

$$\frac{A \quad \neg A}{B}$$

Si todavía nos parece que esta regla es demasiado esotérica, podemos cambiarla por una que resulte más plausible. A tal fin podemos crear el sistema DN_4 , que se obtiene de DN_3 cambiando la regla $E-\neg$ por el Modus Tollendo Ponens:

$$E-\neg: \frac{D_1 \quad D_2}{\frac{\neg A \quad A \vee B}{B}}$$

26. Es claro que este sistema es intuicionístico, puesto que $I-\neg$ es una regla estrictamente constructiva.

Para obtener un cálculo clásico basta con añadir la dual no-constructiva de $I-\neg$: $\frac{[\neg A]^u \quad D_1}{\frac{B}{A} u}$.

Ahora la demostración normal del seciente $A, \neg A \vdash B$ tiene la forma del argumento de Pseudo-Scotus:

$$\frac{\frac{A}{A \vee B} \quad \neg A}{B}$$

Es sencillo notar que toda prueba en DN_4 que utilice esta nueva regla puede reducirse a una prueba en DN_3 en la que se utilice la original, quitando el paso de introducción de $\ulcorner \vee \urcorner$. Por lo que ambos sistemas son equivalentes.

4.3.3. Explosión en el nivel interactivo

El sistema **dialClas** que definiré en breve corresponde al sistema dialógico para la Lógica Clásica presentado y defendido en CLERBOUT (2013, cap. 1), con las indicaciones de la sub-sección 3.2.2 del mismo texto para juegos con concesiones. Para mayor información acerca de los detalles y peculiaridades de esta versión de la dialógica remito directamente al texto citado²⁷. Aquí sólo haré algunas explicitaciones de índole general.

Un *juego* Dialógico en el cual Γ son las concesiones y A la tesis se abreviará así: $\ulcorner \mathcal{D}(\Gamma, A) \urcorner$. Cuando Γ es vacío, nos permitiremos anotar $\ulcorner \mathcal{D}(A) \urcorner$. Un *sub-juego* en la cual el Oponente escoge rango n y el Proponente rango m , las concesiones son el conjunto Γ y la tesis es A se abreviará así: $\ulcorner \mathcal{D}^{n,m}(\Gamma, A) \urcorner$.

Las Reglas Locales para el Juego Dialógico Clásico son las que aparecen en el cuadro 4.3.

Afirmación	$!p$	$X!A \wedge B$	$X!A \vee B$	$X!A \rightarrow B$	$!\neg A$
Ataque		$Y?!A$ o bien $Y?!B$	$Y?[!A, !B]$	$Y!A; ?!B$	$!A$
Defensa		$X!A$ o bien $X!B$	$X!A$ o bien $X!B$	$X!B$	

Cuadro 4.3: Reglas Locales para el Juego Dialógico Clásico.

Las Reglas Estructurales son las siguientes (CLERBOUT, 2013, p. 18, non sic):

27. Aunque los diálogos están presentados en un formato distinto al de CLERBOUT (2013); véase el apéndice A.

1. RS0: Toda partida $\mathcal{D}(\Gamma, A)$ con $A \notin \mathfrak{A}_p$ comienza con la afirmación de todas las concesiones por parte de un jugador y la afirmación de la tesis por parte del otro. Este último jugador es identificado como el *Proponente* (**P**), y su adversario como el *Oponente* (**O**). Ambos jugadores eligen un número entero positivo para que sea su *rango de repetición*.
2. RS1: Los jugadores juegan turno a turno. Sea n el rango de repetición del jugador **X**. En su turno, **X** puede atacar una afirmación precedente o defenderse de un ataque, en concordancia con las Reglas Locales y a lo más n veces.
3. RS2: El Proponente no puede afirmar una variable proposicional a menos que el Oponente la haya afirmado primero.
4. RS3: El jugador que hace el último movimiento posible de la partida gana.

En el Juego Intuicionístico, según la versión de CLERBOUT (2013), la regla RS1 se sustituye por esta otra:

- 2' RS1i: Los jugadores juegan turno a turno. Sea n el rango de repetición del jugador **X**. En su turno, **X** puede atacar una afirmación precedente a lo más n veces o defenderse del *último ataque sin respuesta*, en concordancia con las Reglas Locales.

Definición 4.31 (Dialógica Clásica). La *Dialógica Clásica* **dialClas** corresponde al sistema $\langle \mathfrak{L}_{2*}, \vdash_{\text{dialClas}} \rangle$ en el cual $\Gamma \vdash_{\text{dialClas}} A$ si y sólo si el Proponente tiene una estrategia ganadora para $\mathcal{D}(\Gamma, A)$ en el Juego Dialógico Clásico. \square

Proposición 4.16. *Sea φ una fórmula compleja del lenguaje proposicional. El Proponente tiene una estrategia de victoria en $\mathcal{D}(\varphi)$ si y sólo si tiene una estrategia de victoria en el sub-juego $\mathcal{D}^{1,2}(\varphi)$.*

Demostración. Demostrado en CLERBOUT (2013, Teorema 1.2.2). \square

Lema 4.2. *El Proponente tiene una estrategia de victoria en el juego $\mathcal{D}(\{G_1, \dots, G_n\}, A)$ si y sólo si tiene una estrategia de victoria en el juego $\mathcal{D}(G_1 \wedge \dots \wedge G_n \rightarrow A)$.*

Demostración. De acuerdo a lo señalado en CLERBOUT (2013, sec. 3.2.2), el juego $\mathcal{D}(\{G_1, \dots, G_n\}, A)$ comienza por la afirmación del Oponente de todas las concesiones en $\{G_1, \dots, G_n\}$ y luego por la afirmación de A por parte del Proponente. Las concesiones pueden ser atacadas por el Proponente, dado que el Oponente las ha afirmado.

En el juego $\mathcal{D}(G_1 \wedge \dots \wedge G_n \rightarrow A)$, el Oponente no puede sino atacar la tesis en concordancia con las reglas locales; esto es, afirmar $G_1 \wedge \dots \wedge G_n$ y luego pedirle al Proponente que afirme A . En este momento, el Proponente está facultado para atacar las fórmulas G_1, \dots, G_n (sin convenciones especiales para resumir la desagrupación de conjunciones, este proceso puede ser más largo, pero el resultado final es el mismo). A partir de aquí ambos juegos se desarrollarán de la misma manera. Esto completa la demostración. \square

La validez del seciente $A, \neg A \vdash B$ depende ahora de la existencia de una estrategia de victoria para el Proponente en todo juego de la forma $\mathcal{D}(\{A, \neg A\}, B)$.

Proposición 4.17. *El Proponente tiene una estrategia de victoria en todo juego de la forma $\mathcal{D}(\{A, \neg A\}, B)$.*

Demostración. Por el lema 4.2, basta con demostrar que el Proponente tiene una estrategia ganadora en el juego $\mathcal{D}(A \wedge \neg A \rightarrow B)$, y por la proposición 4.16, consideraremos sólo los sub-juegos $\mathcal{D}^{1,2}(A \wedge \neg A \rightarrow B)$. Haremos la demostración por inducción sobre la complejidad de las fórmulas.

Por demostrar: el Proponente tiene una estrategia ganadora en el juego $\mathcal{D}^{1,2}(A \wedge \neg A \rightarrow B)$ cuando $A, B \in \mathfrak{A}_p$.

Sub-demostración. La partida siguiente exhibe dicha estrategia:

O(1)	P(2)
0. $C = \emptyset$	$!A \wedge \neg A \rightarrow B$
1. $!A \wedge \neg A; ?!B$	$?!A$
2. $!A$	$?!\neg A(1)$
3. $!\neg A$	$!A++$

■

En el caso en que A es atómica y B es compleja, la estrategia es igual que la anterior. *Por demostrar:* el Proponente tiene una estrategia ganadora en el juego $\mathfrak{D}^{1,2}(A \wedge \neg A. \rightarrow B)$ cuando A es compleja y $B \in \mathfrak{A}_p$.

Sub-demostración. Consideremos la misma partida de la sub-demostración anterior, pero ahora asumamos que A es una fórmula compleja y por lo tanto puede ser atacada. La partida continuará de la siguiente forma:

O(1)	P(2)
0. $C = \emptyset$	$!A \wedge \neg A. \rightarrow B$
1. $!A \wedge \neg A; ?!B$	$?!A$
2. $!A$	$?!\neg A(1)$
3. $!\neg A$	$!A$
4. Ataca A	Ataca $A(2)$
5. Defiende A	Defiende $A(4)$
6.	

Es sencillo notar que la misma jugada puede repetirse hasta llegar al nivel final de descomposición de la fórmula A . Dado que el Oponente tiene rango de repetición 1, no puede volver a atacar la tesis. El Proponente, pues, gana en todos los casos. ■

En el caso en que B es compleja, la estrategia es la misma que la anterior. Esto completa la demostración. □

Es inmediato notar que la demostración de la proposición 4.17 aplica también cuando la regla RS1 es reemplazada por RS1i, por lo que este resultado es también intuicionísticamente válido.

4.3.4. Moralejas

Una vez que las disposiciones normativas se tienen a la vista y los sistemas se han desplegado de manera explícita, vemos que el *sequitur quodlibet* no es en realidad un “se

sigue lo que se quiera”, sino más bien un “se sigue *n’importe quoi*”²⁸. En los tres ejemplos revisados la llegada a la derecha del torniquete en el secuento $A, \neg A \vdash B$ ocurre después de que todo lo relevante desde el punto de vista del análisis lógico ya ha terminado. En el nivel interactivo esto es particularmente evidente: en la partida $\mathcal{D}(A \wedge \neg A \rightarrow B)$ el Proponente gana el juego sin tener que atender al requerimiento de B , a la vez que para el Oponente hacer dicho requerimiento no tiene ninguna utilidad desde el punto de vista estratégico. Por otra parte, desde un punto de vista estético, si se quiere, esto es lo más importante de un *Quodlibet*: que hay una porción de la fórmula o fórmulas consideradas que, para efectos del análisis, pueden ser borroneadas o cubiertas con la mano —son perfectamente irrelevantes.

La inesperada relación entre condicional y explosión que descubrimos en la sub-sección 4.1.2 se hace mucho más explícita en el nivel interactivo. En el cuadro 4.3 puede verse que atacar tanto un condicional como una negación exigen hacerse cargo de una afirmación. Si la proposición a comprometer es insostenible, entonces quien deba afirmarla perderá de seguro. Para el caso clásico e intuicionístico, en el cual lo insostenible es la contradicción, la analogía es absolutamente evidente (cuadro 4.4). Esto refuerza nuestra intuición de que $A \rightarrow B$ y $\neg A$ son funciones similares respecto de A .

O(1)	P(2)	O(1)	P(2)
0. $C = \emptyset$	$!A \wedge \neg A \rightarrow B$	0. $C = \emptyset$	$!\neg(A \wedge \neg A)$
1. $!A \wedge \neg A; ?!B$	$?!A$	1. $!A \wedge \neg A$	$?!A$
2. $!A$	$?!\neg A(1)$	2. $!A$	$?!\neg A(1)$
3. $!\neg A$	$!A++$	3. $!\neg A$	$!A++$

Cuadro 4.4: Estrategia ganadora para el Proponente en los juegos $\mathcal{D}^{1,2}(A \wedge \neg A \rightarrow B)$ y $\mathcal{D}^{1,2}(\neg(A \wedge \neg A))$

Esta idea de callejón sin salida que sugiere la contradicción en el nivel interactivo aparece también en el alético: a la hora de completar una tabla de verdad, una vez que las premisas han resultado inconsistentes terminar de completar la información para la

28. Prefiero la expresión en francés porque dice literalmente “no-importa-qué”, una idea que no puede expresarse de manera tan natural en español.

conclusión es innecesario. En contrapartida, si el nivel funcional es menos explícito, esto sólo se debe a que en el Cálculo de Deducción Natural el *n'importe quoi* ha sido completamente cargado en la interpretación de la constante $\lceil \perp \rceil$ y las reglas que la rigen. En consecuencia, el sistema es incapaz de mostrar el mecanismo detrás de la explosión. Esto representa sin duda una debilidad de estas implementaciones, y explica en parte por qué los intuicionistas, en su momento, tuvieron que dar justificaciones antes filosóficas que lógicas para su adscripción al Principio de Explosión, como vimos en el capítulo 3.

Capítulo 5

Explosiones, ¿por qué no?

Dov Gabbay, en un influyente artículo titulado *What is negation in a system?* hace la siguiente observación:

A basic intuition regarding the meaning of $\neg A$ is that A does not hold or A is not wanted or A is not confirmed. Thus if L is a system with a candidate $*A$ for negation, we cannot hope to have $A, *A$ consistent together. [...]

(GABBAY, 1987, p. 98) (Énfasis como en el original.)

El autor presenta, sobre la base de esta intuición, tres¹ definiciones de negación en términos de inconsistencia, y para todas ellas considera un conjunto Θ de fórmulas que o no se siguen, o son indeseadas, o no están confirmadas, de acuerdo con el pasaje anteriormente citado. En concreto:

We must specify a set Θ of unwanted wffs². The wffs of Θ are not allowed to be true. This is normal and natural for any database. For example we do not want two lecturers to be assigned to the same classroom at the same time. In a formal system L , one can take $\Theta = \text{falsity}$ or one can take Θ to be certain conjunctions of atoms etc. *Ibidem.* (Énfasis como en el original.)

1. En realidad son cuatro, dado que la primera tiene dos versiones.
2. «Well formed formulas».

Gabbay afirma un poco más adelante que definir la negación en estos términos es puramente sintáctico (“purely syntactic”), aunque no resulta del todo claro que lo sea. Esto porque en todos los casos que él considera, el decidir qué proposiciones no triviales pertenecen a Θ es *anterior* al análisis lógico. Una negación definida de esta manera no parece lo suficientemente *analítica* como para ser considerada una negación lógica.

Para que un determinante de la Negación sea puramente analítico, su significado debería poder caracterizarse por entero en términos formales y no depender del hecho contingente de que tales o cuales proposiciones sean falsas (i. e. pertenezcan o no a Θ). Por lo demás, si ya tenemos el conjunto de proposiciones falsas (indeseadas, no confirmadas), no parece tener mucho sentido desarrollar aquel método para extraer conclusiones válidas a partir de premisas conocidas, como es el que nos ofrece la lógica. Por lo tanto, el acto de lenguaje detrás de la negación lógica no puede ser el de la exclusión de lo meramente falso o lo indeseado, como dice Gabbay.

En los capítulos anteriores hemos visto que —por mucho— el razonamiento por excelencia asociado a la negación es la *Reductio ad Absurdum*. Todos los esquemas posteriores: contraposiciones, involuciones, *Consequentiae Mirabiles* y demases parecen depender de la manera en que sea caracterizado este silogismo negativo fundamental. Y también hemos visto que no cualquier cosa puede ser la piedra de tope de una *Reductio*: si algo va a ser lógicamente inaceptable, ello debe ser inaceptable *a priori*, es decir, incontestablemente e irreparablemente inaceptable. Dicha piedra de tope *no* es lo falso o lo imposible, y tampoco es la contradicción. Lo inaceptable, lo absolutamente absurdo en sentido lógico, es la explosión.

El propósito de este último capítulo de mi investigación es dar sustento filosófico a esta última afirmación. Quiero defender que, *pace* las consideraciones de los lógicos paraconsistentes, el que una lógica valide argumentos explosivos nos aporta cierta información acerca de dicha lógica y sus *límites*, por lo que la investigación no debería buscar erradicar por completo el fenómeno de la explosión sino comprenderlo mejor, acercándose de maneras novedosas a él.

5.1. Metalógica y filosofía de la lógica

Las investigaciones lógico-matemáticas que tomaron aliento entre los siglos XIX y XX estuvieron marcadas, entre otras cosas, por el surgimiento de una serie de problemas que en otro momento hubieran pasado por meros “juegos de palabras”. Estos problemas, que de manera más o menos general podemos llamarlos *paradojas de la predicación*, desempeñaron un rol muy importante en el desarrollo de la lógica matemática temprana y determinaron fuertemente la consolidación de sus estructuras formales estándar, dado que éstas de alguna manera pueden ser vistas como intentos deliberados por refrenar o disolver dichas paradojas.

Un paso muy importante en el desarrollo de las soluciones a las paradojas fue el descubrimiento de la forma general que subyace a todas ellas —o al menos a las consideradas más graves en aquél momento—. Dicha estructura es deducida por Sir Bretrand Russell y presentada en una lectura ante la Sociedad Londinense de Matemáticas el año 1905 (RUSSELL, 1907). Russell tuvo la intuición de que aquello que provocaba las paradojas era la incapacidad de algunas “normas”³ de definir conjuntos de elementos, por no poder ser considerados ellos mismos con independencia de sus argumentos:

“We have thus reached the conclusion that some norms (if not all) are not entities which can be considered independently of their arguments, and that some norms (if not all) do not define classes. Norms (containing one variable) which do not define classes I propose to call *non-predicative*; those which do define classes I shall call *predicative*” (RUSSELL, 1907, p. 34).

Sobre la base de la existencia de estas normas “impredicativas” Russell diseñó una solución a las paradojas que marcaría el estándar del tratamiento de éstas para la posteridad. Dicha solución consiste en restringir el ámbito de aplicación de los predicables por medio de la restricción del poder expresivo del lenguaje mismo. En el sistema lógico de Russell cada función categoremática está afecta de un índice al que llama *tipo* (*type*),

3. En un sentido más o menos amplio, aunque sin duda inexactos para los parámetros en los que Russell trabajaba, podríamos identificar estas normas con predicables. En notación conjuntista clásica, la “norma” es $\ulcorner \phi \urcorner$ en el esquema general $\ulcorner \{x : \phi[x]\} \urcorner$ para definir conjuntos.

y prescribe (más o menos arbitrariamente) que los argumentos de toda función deben tener un tipo estrictamente inferior al de ella misma. Años más tarde, Tarski lleva esta intuición a su forma más acabada en sus artículos sobre semántica formal de la década de los treinta y cuarenta, lugar donde se populariza la distinción entre *lenguaje-objeto* y *metalenguaje* (véase TARSKI (1956))⁴.

Mientras que para Russell la teoría de Tipos tiene por única función erradicar las paradojas, la propuesta de Tarski es mucho más amplia y tiene que ver con el problema general de la determinación del *significado* de las operaciones lógicas. Esta semántica, que hoy es considerada el estándar de la lógica clásica y la marca característica de su ideología, se basa en la tríada:

Modelo < Lenguaje-objeto < Metalenguaje(s)

Donde la relación «<» es el *Esquema T* ($\ulcorner T \urcorner$ de Tarski, pero también de «Truth», Verdad):

A_{n+1} es verdadera si y sólo si A_n

Los elementos A_0 , que corresponden al dominio del Modelo son no-lingüísticos: ellos constituyen la base sobre la cual se erigirá una torre infinita de desdoblaciones semejantes. En cada nivel la verdad de sus enunciados está justificada por el nivel inferior pero es predicada sólo en el nivel superior, con lo que el Esquema T provee la forma general de las vértebras que se ensamblan en la columna completa:

« A_1 es verdadera porque A_0 es el caso.»₂

La relación entre dos variables A_i y A_j viene dada por una correspondencia uno-a-uno en el más puro estilo aristotélico: en el nivel más bajo, cada variable de objeto es el avatar de un objeto, cada variable de predicado es el avatar de una propiedad, etc., y la correspondencia entre el hecho y la proposición que lo describe viene dado por una

4. Hasta donde tengo entendido, las expresiones «lenguaje-objeto» y «metalenguaje» fueron acuñadas por Carnap, allá por 1935, en su célebre artículo *Philosophy and Logical Syntax*.

solidaridad de forma entre ambos. Luego, una vez que comienza el ascenso hallaremos en cada nivel un lenguaje $n + 1$ que tiene el vocabulario suficiente para hablar de todo lo que habla el lenguaje n , además de poder hablar *del* lenguaje n mismo y así poder ceñirse a la forma general del Esquema T.

La concepción tarskiana de la semántica sólo tiene valor epistémico si se acepta, de manera explícita o implícita, que el Modelo tiene cierta preeminencia ontológica sobre los lenguajes que se erigen por encima de él⁵. Una imagen útil para comprender mejor esta observación es la de dos espejos enfrentados. Si coloco algo entre los dos espejos, digamos, una manzana, obtengo una serie infinita de manzanas: infinitas manzanas hacia un lado, infinitas manzanas hacia el otro. Cada reflejo, o cada par de reflejos es una descripción de la manzana en un metalenguaje, una fotografía de la manzana enmarcada en un cuadro dentro de otro cuadro. Si quito la manzana la ilusión no desaparece del todo, pero su contenido ahora es espurio: sólo están los cuadros dentro de los cuadros, sin que en el punto de fuga de cada espejo hay algo más que en el primer nivel, es decir, dos espejos enfrentados.

Desde una perspectiva tipográfica como la mía (véase *infra*) el Modelo no tiene ni puede tener dicha preeminencia ontológica. Todos los objetos matemáticos, incluso los números y los conjuntos (y las categorías, los homotipos o lo que se quiera) son signos y por lo tanto su naturaleza es intrínsecamente lingüística. Esto hace que la diferencia entre el Modelo y los Lenguajes provenga de una decisión arbitraria y en alguna medida ociosa, puesto que la *interpretación* recogerá lo mismo que *ya* había sido puesto antes por nosotros al decidir una intención de significado en el lenguaje original, que es el del Modelo⁶. Estas consideraciones nos motivan a desestimar —y en buena medida a abandonar— aquella metalógica especular que descansa sobre la Teoría de Modelos clásica. El esfuer-

5. De la misma forma como la doctrina más típicamente filosófica de la verdad por correspondencia sólo tiene sentido cuando hay tal cosa como una realidad objetiva sobre la cual el lenguaje pueda versar.

6. Jean-Yves Girard se ha referido a este mismo punto contra la doctrina tarskiana de la verdad, a veces en términos mucho más pintorescos (y menos respetuosos) que los míos. Aunque no me pliego por entero a su crítica, es innegable que ella ejerció cierta influencia en mi propia toma de posición al respecto. A manera de crédito bibliográfico, puedo sugerir la lectura de GIRARD (1999, sec. 2), GIRARD (2007b, sec. 1.1) o GIRARD (2007c, sec. 5.1).

zo filosófico que nos convoca debe hacerse sobre una base interpretativa de naturaleza diferente.

Dicho en breve, la matemática tipográfica se basa en una forma radical de antimetafísica que reconoce como sustrato ontológico último de los objetos matemáticos la identidad literal⁷ de los signos, es decir, la semejanza pictórica entre las diversas instancias del mismo, como la que existe entre $\ulcorner A \urcorner$ y $\lrcorner A \lrcorner$. Estos signos representan objetos o clases de objetos de manera indirecta y generalizada, “por analogía”, y no heredan de ellos ninguna propiedad de orden metafísico, sino que a ellos les pertenece sólo el haber sido dispuestos convenientemente para su imitación. Las propiedades y relaciones relevantes a la teoría y a la aplicación de la matemática no les pertenecen, pues, a los signos, sino a las estructuras dentro de las cuales se los define; estructuras que en última instancia son sólo convenciones de uso, reglas de manipulación de los primeros. Por lo tanto, entre el propio significado de los signos y su uso hay un abismo insalvable: todo lo que viene dado por el uso de los signos está más allá del significado de los mismos («significado» en sentido representacional: lo que, “por analogía”, es representado en el signo).

Antes de que la solución de Tarski entrara en escena, la solución de Russell a las paradojas ya había sido desafiada y revisada anteriormente, en particular por su discípulo Ludwig Wittgenstein. Su única obra publicada en vida, el *Tractatus Logico-Philosophicus* (1921) («El Tractatus» para los amigos), en varios pasajes aborda el problema de los impredicativos y da sugerencias para su solución, *contra* la ofrecida por su maestro. La teoría metalógica utilizada y en parte explicada y defendida por Wittgenstein en el *Tractatus* guarda coincidencias importantes con una concepción tipográfica de la matemática⁸, al menos muchas más de lo que un lógico clásico o un filósofo analítico de vieja escuela podría estar dispuesto a conceder. Dicha metalógica se apoya en la distinción fundamental entre lo que un lenguaje o sistema simbólico en general es capaz de *decir* («sagen») y lo que es capaz de *mostrar* («zeigen»). La relación entre ambos órdenes de lo abierto en el

7. Sobre lo que llamo «identidad literal» véase la sub-sección 1.2.4, así como el apéndice B.

8. Afirmar cualquier cosa más atrevida que esto sería ocioso o derechamente injusto. De cualquier manera, no estoy interesado en hacer una exégesis de uno de los filósofos más citados (si no el que más) del siglo pasado, puesto que sólo necesito sus ideas como punto de apoyo para erigir las mías.

lenguaje es de orden trascendental, y en esto reside toda la originalidad de la propuesta wittgensteineana: que “lo que *puede* ser mostrado, no *puede* ser dicho” (WITTGENSTEIN, 2001, 4.1212).

En Wittgenstein, la *figura*, que es aquello por medio de lo cual nos representamos los hechos (WITTGENSTEIN, 2001, 2.1), ha de compartir algo con la realidad para poder representarla. Y “lo que la figura ha de tener en común con la realidad para poder figurarla a su modo y manera —correcta y falsamente— es su forma de figuración” (2.17); pero “la figura no puede figurar su forma de figuración; la ostenta («es weist sie auf»)” (2.172). Aquí es donde aparece por primera vez la distinción trascendental entre lo expresado y lo exhibido. Esta distinción se hereda a través de las sucesivas hipóstasis lógicas, puesto que todas ellas han sido presentadas como reflejo de las anteriores.

En la proposición hay más de lo que ella puede expresar (que es lo que tratan las proposiciones 3.1, 3.2 y 3.3 con sus sub-proposiciones). “Lo que no alcanza a expresarse en los signos es cosa que muestra su uso. Lo que los signos tragan («verschlucken») es cosa que expresa su uso” (3.262); de ahí que “para reconocer el símbolo en el signo hay que atender al uso con sentido” (3.326). Para Wittgenstein, todo el error de la Teoría de Tipos de Russell reposa en su incorrecta apercepción de este hecho fundamental:

A partir de esta observación lancemos una mirada a la «Theory of Types» de Russell: el error de Russell se muestra en que tuvo que hablar del significado de los signos al establecer las reglas sígnicas.

(WITTGENSTEIN, 2001, 3.331)

En efecto, “las reglas de la sintaxis lógica tienen que comprenderse por sí mismas, con sólo saber cómo designa cada signo” (3.334). Esto nos lleva a los pasajes más importantes del Tractatus para lo que a nosotros nos interesa, que son la proposición 4.12 y sus sub-proposiciones. Dice el filósofo que “la proposición puede representar la realidad entera, pero no puede representar lo que ha de tener en común con la realidad para poder representarla —la forma lógica” (4.12) (cf. 3.13). Y es que no puede, porque “ésta se refleja en ella. El lenguaje no puede representar lo que en él se refleja. Lo que *se* expresa

en el lenguaje no podemos expresarlo *nosotros* a través de él. La proposición *muestra* la forma lógica de la realidad. La ostenta” (4.121). Todas las sub-proposiciones siguientes son aclaraciones respectivas a estos dos pensamientos fundamentales.

En claro contraste con la estética de la metalógica tarskiana, en Wittgenstein la posibilidad de algo así como el metalenguaje se ha cerrado, en un sentido particularmente fuerte:

[P]ara hablar acerca de las propiedades formales del lenguaje se debe utilizar el lenguaje; pero al hacerlo se están manifestando en su utilización las mismas propiedades acerca de las cuales se intenta hablar, *pues el lenguaje que nos sirve para hablar acerca del lenguaje tendrá que poseer la forma que es esencial a cualquier lenguaje*. Cabe preguntarse ante esto qué es lo que se dice en el nivel metalingüístico, si en él se manifiesta lo mismo que intenta explicar. Desde la perspectiva de Wittgenstein, acceder a dicho nivel es salirse del lenguaje, y cuando esto se logra nada puede decirse.

(VALLEJOS OPORTOT, 1983, p. 11-2) (El énfasis es mío.)

La manera en que yo entiendo esta conclusión (y su relación con la polémica proposición 6.54 del Tractatus) es que a lo que se debe renunciar no es a la posibilidad de expresar aquello que el lenguaje o sistema simbólico *muestra*, sino a pretender darle al lenguaje con el que expresamos aquello un tratamiento similar al que hemos dado al lenguaje mismo. La invitación a “arrojar la escalera” significa exactamente esto: que las afirmaciones acerca del lenguaje no son proposiciones con sentido en el mismo sentido que lo son las *del* lenguaje sino que son aclaraciones («Erläuterungen») del uso de dichas proposiciones, o a lo sumo observaciones acerca de dicho uso, en un registro al que pertenece el lenguaje natural en su totalidad y no a un lenguaje científico o formalizable en concreto.

Las implicaciones de esto último para la metalógica son profundas y esclarecedoras. Desde un punto de vista matemático, la relación entre un conjunto \mathcal{L} de fórmulas y las proposiciones de un lenguaje (o del Lenguaje-con-mayúscula) no es el de una correspondencia, ni siquiera el de una abstracción en sentido —más o menos— místico, sino sólo una analogía útil, similar a la que vincula a los números naturales con los conjuntos conta-

bles. Demostramos cosas acerca de \mathcal{L} y las diferentes relaciones de inferencia, $\vdash_1, \vdash_2, \vdash_3$, etc. con las que erigimos los sistemas lógicos $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3$; pero dichas demostraciones no son revelaciones de verdades acerca de “los argumentos” de “el Lenguaje”, sino que son resultados matemáticos, es decir, pruebas validadas dentro de las convenciones de usos sígnicos y *nada más*. La vuelta a hacer matemática con estos resultados, considerándolos ahora como objetos matemáticos en sí mismos (por ejemplo, cálculos de secuentes cuyos términos son argumentos de un sistema lógico anterior) es “metalógica” en aquel sentido del prefijo «meta-» que significa iteración: *lógica de la lógica*. Pero lo auténticamente metalógico, en aquel sentido del prefijo «meta-» que significa trascendencia, lo “más allá”, es de orden estrictamente filosófico: luego de haber obtenido los resultados matemáticos, el ejercicio que hacemos es volver sobre las analogías originales y preguntarnos por aquello que los primeros *tragan* («verschlucken»), y luego intentar hacerlo explícito. Esta explicación ocurre *fuera* del juego de signos y no es ya un resultado matemático sino una aclaración («Erläuterung») de lo que significan los resultados matemáticos⁹.

5.2. Inferencias ilógicas y normatividad

Tal como señalé en la sub-sub-sección 1.2.5.2, los secuentes en un sistema lógico $\mathcal{L} = \langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ representan argumentos (formulados en un lenguaje, el que es representado por \mathcal{L}) de una única conclusión. A esta relación, « \vdash », bien cabe que la llamemos *inferencia*¹⁰: en el lenguaje cotidiano, decir que tenemos un argumento en favor de A dadas ciertas premisas Γ parece perfectamente equivalente a decir que podemos inferir la oración A a partir de las oraciones Γ .

Pero lo lógico no es la inferencia sino más bien la *posibilidad* de la inferencia. Esto es, que tenga sentido en tal o cual contexto decir que «de A puedo inferir B », o que « B

9. La práctica puramente matemática de la lógica, es decir, desprovista de esta reflexión acerca de lo que los resultados muestran, sin duda que es posible, pero me parece filosóficamente estéril. No creo que este sea el caso para la matemática en su totalidad, y esto habla fuertemente de la naturaleza híbrida de la lógica y su vínculo irrenunciable con la filosofía. Como dije en alguna otra parte de este mismo trabajo (página 10), pienso que la Lógica matemática sin Filosofía es ciega, pero la Lógica filosófica sin Matemática es vacía.

10. Como de hecho lo hicimos: proposición 4.1, página 108.

se sigue de A »¹¹. Este es, en esencia, el pensamiento que expresaron Anderson y Belnap cuando escribieron, al comienzo de *Entailment*, que:

Although there are many candidates for “logical connectives,” such as conjunction, disjunction, negation, quantifiers, and for some writers even identity of individuals, we take *the heart of logic* to lie in the notion “if ... then —”.

(ANDERSON Y BELNAP, 1975, p. 3) (El énfasis es mío.)

El interés de la lógica por la inferencia está justificado en la búsqueda de un método¹² para distinguir entre argumentos (esto es, inferencias) válidos e inválidos. Este esfuerzo configura lo que algunos autores han llamado la *normatividad* de la lógica: que ella nos dice *cuándo*, *cómo* (y, en ocasiones, *por qué*¹³) es sensato decir que B se sigue de A . Cuando un sistema lógico valida un seciente $\Gamma \vdash A$ él nos *muestra* que bajo su norma el argumento que infiere A a partir de Γ es válido.

En el límite de lo que es dable reconocer como una inferencia está aquella en la cual no existe exigencia alguna para la relación \vdash , y en consecuencia de cualquier A se sigue indistintamente todo B . Hasta este punto, nada impide reconocer a esta relación como una inferencia; de hecho, la hemos encontrado antes¹⁴, en un pasaje de Belnap a propósito de Tonk:

It is good to keep in mind that the question of the existence of a connective having such and such properties is relative to our characterization of deducibility. If we had initially allowed $A \vdash B$ (!), there would have been no objection to *tonk*, since the extension would then have been conservative.

(BELNAP, 1962, p. 55)

Esta relación de inferencia es mucho más fuerte que la de una teoría trivial¹⁵. En una lógica con esta relación de inferencia no sólo hay bombas, sino que *todo* es una bomba:

11. Por lo pronto, la naturaleza material de A y B , o de la relación entre ellos es poco importante.

12. Cf. ARISTÓTELES (1994, 100a 18), pasaje ya citado al comienzo de la sección 2.4 (página 40).

13. *¿Cuándo/cómo/por qué?* Estas tres preguntas se corresponden con los tres niveles metalógicos de Girard: lo alético es el *cuándo*, lo funcional el *cómo* y lo interactivo el *por qué* de hecho B se sigue de A .

14. Página 98.

15. Cf. la definición 4.5.

Ex quolibet sequitur quodlibet. Aunque primariamente esta idea puede resultar turbadora (nótese el punto de exclamación del autor en la cita de arriba), hay que reconocer que, en principio, nada en lo conceptual prohíbe considerar una lógica así¹⁶. Sin embargo, es claro que se trata de un caso límite de la definición. A esta inferencia la llamo, pues, *ilógica*, en el sentido siguiente: que, en tanto relación de inferencia, no hay nada lógicamente interesante en ella.

Contra este uso del adjetivo «ilógico» alguien podría protestar diciendo que lo propio de una inferencia con un nombre así no debería ser que todo argumento fuera válido, sino más bien que todo argumento fuera inválido (falaz). Pero esta es una intuición que va contra la idea de normatividad lógica: considerar que todo es falaz no es un debilitamiento de las normas lógicas sino todo lo contrario, corresponde a fortalecerlas en su grado máximo. En contraposición, cuando se dice de una persona o incluso de una obra literaria que es “ilógica” (o, de manera absolutamente iluminadora: “absurda”) nos referimos a que sus criterios inferenciales son *demasiado* liberales. Cuando se puede llegar a cualquier lugar por cualquier camino, ahí es donde el camino se vuelve insustancial.

La absoluta permisibilidad de la inferencia ilógica contrasta con la normatividad de una inferencia lógica, en donde algunos argumentos son excluidos del ámbito de lo válido y por tanto *hay* tal distinción entre lo admisible y lo falaz. Si razonar ilógicamente es razonar “a tontas y a locas”, entonces razonar lógicamente es *no* hacerlo así sino siguiendo un orden. He aquí donde se hace patente la oposición entre «lógico» e «ilógico», que la sintaxis del español confunde: lo absoluto y positivo es lo *ilógico*, pues su negación, lo *lógico*, se manifiesta como una constricción sobre lo primero.

Que lo lógico es un concepto negativo queda ilustrado de mejor manera a través del paralelismo descrito en el cuadro 5.1. Esta oposición entre lo lógico y lo ilógico es tan fundamental que incluso una lógica positiva, como **Pos**, resulta ser negativa, desde el momento en que en ella no es válido, por ejemplo, el seciente

$$A \vee B \vdash A \wedge B$$

16. Nótese que la definición de Lógica en el capítulo anterior (definición 4.1) define la relación de inferencia como $\vdash \subseteq \wp(\mathcal{L}) \times \mathcal{L}$. La inferencia ilógica corresponde al caso límite $\vdash = \wp(\mathcal{L}) \times \mathcal{L}$.

NEGACIÓN	LÓGICA
Una negación debe manifestar al menos dependencia entre <i>negatum</i> y <i>negandum</i> , y asegurar algún tipo de diferencia entre ellos.	Una lógica debe manifestar al menos dependencia entre premisas y conclusiones, y asegurar algún tipo de restricción entre ellas.
NEGACIÓN IN-DIFERENTE : una negación tan tolerante, que no hay nada negativo interesante en ella.	INFERENCIA I-LÓGICA : una relación de inferencia tan liberal, que no hay nada lógico interesante en ella.

Cuadro 5.1: Paralelismo entre la Negación y lo Lógico

Más aún, se trata de una oposición perfectamente clásica, dado que

1. ninguna lógica puede admitir un seciente que ella misma rechaza, y a la vez
2. todo seciente debe ser admitido o rechazado por ella.

Esta es una conclusión con la que incluso los lógicos de la paraconsistencia o los dialécticos deberían estar de acuerdo. Newton da Costa y Graham Priest, por ejemplo, al diseñar sus sistemas C_1 o LP tuvieron en mente una serie de consecuencias que querían capturar en el formalismo, pero a la vez se mantuvieron siempre claros en las que *no* querían que se siguieran: por ejemplo, que de una contradicción se siga cualquier cosa.

A esta última afirmación alguien podría replicar diciendo que un dialéctico consecuente con su dialéctismo *no* necesita ser consecuente (?) con él, dado que acepta la verdad de las inconsistencias. Me parece que esto no es un hombre de paja, puesto que es de hecho perfectamente razonable (y dialéctico) suponer que una lógica $\mathcal{L} = \langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ pudiera ser definida inconsistentemente, de manera que existan Γ y A tales que:

$$\Gamma \vdash A \text{ y } \Gamma \not\vdash A$$

Siempre y cuando la meta-lógica $\mathcal{L}^2 = \langle \mathcal{L}, \Vdash \rangle$, donde $\Vdash = \wp(\mathcal{L}) \times \mathcal{L}$, sea paraconsistente, en el sentido de que no valide el (meta)seciente:

$$\Gamma \vdash A, \Gamma \not\vdash A \Vdash \Delta \vdash B$$

Para cualquier Δ, B . De hecho, investigaciones en direcciones parecidas a ésta ya se han emprendido, por ejemplo en BARRIO, PAILOS Y SZMUC (2018).

Aquí es donde mi observación sobre la inaptitud de la metalógica tarskiana se hace relevante. El hecho de que uno pueda crear niveles sobre niveles de relaciones de inferencia, meta-inferencias, meta-meta-inferencias y en general meta ^{ω} -inferencias y estudiarlas a cada una de ellas como sistemas lógicos distintos sin duda que tiene una relevancia lógico-matemática y quizás algún impacto filosófico insospechado¹⁷, pero ninguna de dichas conclusiones está realmente en el nivel de lo que cada uno de esos formalismos, juntos o por separado, *muestran* acerca de su logicidad. El hecho aquí es que el lógico paraconsistente o el dialcista, *al final*, debe comprometerse con alguna distinción fuertemente exclusiva, so pena de convertirse en uno de aquellos trivialistas que son como las plantas, que ni emitir opinión ni moverse pueden siquiera (ARISTÓTELES, 1994, 1008b 10-30). Ésta es la calidad negativa de lo lógico que se está afirmando aquí, y es éste sentido, particularmente específico y particularmente fuerte, del Principio de No Contradicción que se está avalando.

Decimos, pues, que toda lógica no trivial $\mathcal{L} = \langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ es una restricción de su respectiva inferencia ilógica. Cualquiera de estas restricciones necesariamente ocurre a ambos lados del torniquete, puesto que si en \mathcal{L} falta el secuyente $\Gamma \vdash A$, entonces a la vez 1) de Γ no se sigue cualquier cosa, y 2) A no se concluye de cualquier cosa. En el otro extremo, la alternativa más fuerte para esta restricción es que no haya *quodlibet* en ningún sentido: ninguna conclusión puede ser demostrada a partir de cualquier cosa, y ningún conjunto de premisas tiene cualquier cosa por conclusión. (El cuadro 5.2 exhibe una miniatura de estas diferencias.) Sin embargo, la segunda alternativa casi nunca es considerada, porque en todas las lógicas (incluso en las relevantistas y en las no-monotónicas) es matemáticamente útil y filosóficamente relevante que una proposición de la lógica —en el sentido de la definición 4.3— sí se siga de cualquier cosa, es decir, pueda ser invocada “sin más” y en cualquier contexto. Lo que nos deja de cara a sólo dos posibilidades: o hay premisas que tienen cualquier cosa por conclusión, o no las hay.

17. Al menos más insospechado que el que tienen los “relojes de mostaza” de Girard. Véase GIRARD (1990).

$$\mathcal{L} = \{a, b\}$$

ILÓGICA	EX QUODLIBET SEQUITUR HOC	EX HOC SEQUITUR QUODLIBET
$\emptyset \vdash a$	$\emptyset \vdash a$	
$\emptyset \vdash b$		
$a \vdash a$	$a \vdash a$	
$a \vdash b$		
$b \vdash a$	$b \vdash a$	$b \vdash a$
$b \vdash b$		$b \vdash b$
$a, b \vdash a$	$a, b \vdash a$	
$a, b \vdash b$		
	a se sigue de cualquier cosa.	De $\{b\}$ se sigue cualquier cosa.

Cuadro 5.2: Las dos formas de *Quodlibet*.

*Explosividad o no-explosividad*¹⁸. He aquí el dilema.

5.3. Un *non plus ultra* inferencial

En la sección 3.2 me referí al principal argumento de los relevantistas para rechazar aquellos razonamientos en los cuales la conclusión resulta materialmente impertinente a las premisas, un hecho lógico que contiene pero que de ninguna manera se agota en el fenómeno de la explosión. Limitándonos a lo que nos interesa, consideremos un ejemplo simple de *Ex Falso*. Una persona S necesita tomar un bus a las 4:00 de la tarde pero está a más de una hora del rodoviario. Mira su reloj y descubre que son las 3:30, de lo que concluye que no alcanzará a llegar a tiempo. Ahora bien, resulta que S no se informó del más reciente cambio de horario, y en realidad son las 2:30 aunque ella no lo sabe. El razonamiento de S se basó en información falsa, lo que hace a la inferencia materialmente válida, pero existe una clara pertinencia entre premisa y conclusión, por lo que es relevantísticamente válida también. Supongamos ahora que S , en exactamente el mismo escenario anterior, concluye, sobre la base de que su reloj indica que son las 3:30, de que

18. Nótese que las lógicas relevantistas, aunque pertenecen a esta segunda categoría, no la agotan. La condición de pertinencia es más exigente que la mera no-explosividad.

el Archipreste de Hita ha sido asesinado en el interior del Matto Grosso. El razonamiento sigue siendo materialmente válido, pero esta vez es evidentemente impertinente, por lo que cae dentro de lo que los relevantistas considerarían un argumento inválido.

Creo que el alegato relevantista tiene sentido cuando lo que se considera son casos particulares como el anterior, pero no cuando se atiende al fenómeno general, que es el hecho de que las conclusiones de un argumento explosivo son *cualquier cosa que se quiera*. Es decir: no es que “el Archipreste de Hita ha sido asesinado en el interior del Matto Grosso”, sino más bien que, como ésta, podría haber sido cualquier otra (si es el *Ex Falso* una instancia válida del Principio de Explosión, lo que en breve intentaré refutar). Lo importante es la pérdida de conexión entre premisas y conclusiones, que libera a esta última de los “nudos” analíticos que le imponen las primeras, convirtiéndola en una variable completamente independiente.

En otros pasajes de este trabajo me referí a que existen ciertos contextos argumentales en los cuales hay una peculiaridad en las premisas que hace insustancial a la conclusión. Pensemos en un debate político o una entrevista previa a las elecciones. Las candidatas —por regla general— tenderán a atenerse a escenarios actuales y desearán que se las convide a razonar sobre situaciones plausibles para ellas mismas y para la audiencia. Supongamos que en un programa de televisión un agudo entrevistador le pregunta a una de las candidatas por el tipo de política de defensa que aplicaría en el caso de que su país fuera invadido por una fuerza extraterrestre. Seguramente la candidata, aunque desconcertada, respondería siguiendo los lineamientos de lo que haría en el caso de una invasión extranjera cualquiera: probar primero la vía diplomática, intentar establecer comunicación, pero responder enérgicamente cualquier muestra de hostilidad. A renglón seguido el entrevistador le pregunta por la propagación repentina de una extraña enfermedad que convierta a las personas en zombies. La candidata, una vez más, podría referirse a sus políticas para enfrentar cualquier tipo de crisis de salud: aislar a la población, buscar la cura, intervenir por medio de la fuerza si es necesario. Pero supongamos que el entrevistador elabora luego un escenario todavía menos plausible, un extraño fenómeno físico o psicológico que genera toda clase de distorsiones en la realidad, en la posibilidad

de comunicarse entre las personas o de distinguir lo real de lo irreal. Si se viera obligada a responder, es claro que podría decir *cualquier cosa*. Supongamos que su respuesta es pedirle a todo su gabinete que se arrojen por las ventanas de sus respectivas oficinas, y prohibir que las personas vistan de amarillo. ¿Qué podría contestar el entrevistador? Ha puesto las condiciones en un nivel de implausibilidad tan alto, que ni él es capaz de prever las consecuencias de una acción así, por lo que no sabría evaluar si lo que le han respondido es apropiado o no. De alguna manera, la respuesta es tan inmaterial como las condiciones de la pregunta misma, pero esto parece ser suficiente para considerarla una respuesta apropiada.

Cuando hablo de lo ilógico pienso en algo que excede a lo falso, lo contradictorio o lo imposible. La razón es que conceptos explosivos clásicos como estos tres se refieren a las condiciones materiales del argumento, mientras que lo *ilógico* es una cualidad de la inferencia en sí misma. Permítaseme ilustrar este punto con otro par de ejemplos. Tomemos el cuento *El libro de arena* de Jorge L. Borges. En él se relata el encuentro del protagonista con un vendedor de biblias que le ofrece un libro de *infinitas* páginas:

Lo abrí al azar. Los caracteres me eran extraños. Las páginas, que me parecieron gastadas y de pobre tipografía, estaban impresas a dos columnas a la manera de una biblia. El texto era apretado y estaba ordenado en versículos. En el ángulo superior de las páginas había cifras arábigas. Me llamó la atención que la página par llevara el número (digamos) 40.514 y la impar, la siguiente, 999. La volví; el dorso estaba numerado con ocho cifras. Llevaba una pequeña ilustración, como es de uso en los diccionarios: un ancla dibujada a la pluma, como por la torpe mano de un niño. (...) Me fijé en el lugar y cerré el volumen. Inmediatamente lo abrí. En vano busqué la figura del ancla, hoja tras hoja. [El vendedor] me pidió que buscara la primera hoja. Apoyé la mano izquierda sobre la portada y abrí con el dedo pulgar casi pegado al índice. Todo fue inútil: siempre se interponían varias hojas entre la portada y la mano. Era como si brotaran del libro. (BORGES, 1980, p. 96-7)

El libro descrito en este párrafo es un objeto *imposible*, pero el escenario que describe Borges no es *ilógico*, y esto porque, por ejemplo, nos parece del todo sensato que, más adelante en el cuento, el narrador nos diga: “Pensé en el fuego, pero temí que la combustión

de un libro infinito fuera parejamente infinita y sofocara de humo al planeta” (BORGES, 1980, p. 99). Sin embargo, nos resultaría inverosímil que el libro comenzara a cantar en francés, o que al narrador le salieran tentáculos verdes por los oídos, pues esta clase de cosas *no se siguen* del hecho de que el libro tenga infinitas páginas. En este caso falla el *Ex Impossibile sequitur quodlibet*, pero no porque parezca estarse haciendo una concesión a lo imposible sino porque el contexto inferencial es capaz de lidiar con ello.

Consideremos ahora la secuencia final de la película *Bob Esponja* (DRYMON ET AL.; BOURNE, 2004). En el punto de clímax de la película, el villano Plankton utiliza unos cascos para controlar las mentes de Neptuno —rey del mar— y de todos los ciudadanos de Fondo de Bikini (donde viven Bob Esponja y sus amigos), situación que por razones que no es importante mencionar determina el fracaso de la misión del protagonista. En aquel momento, y sin que medie ninguna explicación o mecanismo reconocible, Bob Esponja se convierte en una estrella de rock, interpreta una canción y de alguna manera que nos es perfectamente desconocida libera a todos los personajes, derrota a Plankton y salva el día. La narrativa de esta película me parece que es perfectamente *ilógica*, en el sentido de que en ningún momento de la situación parecen constreñidas las posibilidades de lo que ocurrirá a continuación: dentro de una ficción así la película podría haber terminado de esta manera o de *cualquier* otra. No hay nada falso, nada contradictorio ni nada imposible *stricto sensu* que haya detonado, y sin embargo, el contexto inferencial está completamente desarticulado. En un sentido radical, decimos que él es *absurdo*¹⁹.

Estas consideraciones deben ahora ponerse de relieve ante otro de los conceptos que he utilizado en este trabajo: el de *fuerza lógica*. Decir que $A \vdash B$, en cualquiera de los sentidos en que queramos interpretar la relación de inferencia o la materialidad de las variables A y B , expresa que existe alguna forma de necesidad de B una vez que se tiene A : el que A se cumpla *fuerza* o *exige que* B también lo haga. En los ejemplos anteriores esta fuerza lógica se manifiesta como una condicionalización en el grado de plausibilidad

19. El atolón Bikini es un complejo de islas en el Pacífico Norte donde Estados Unidos condujo pruebas nucleares durante las décadas de 1940 y 1950. En el fondo de dicho atolón está emplazada la ciudad donde vive Bob Esponja, por lo que no es descabellado pensar —e incluso su creador, Stephen Hillenborg, lo ha sugerido en ocasiones— que él y sus coloridos amigos sean resultado de dichas explosiones.

...igual que Godzilla.

de dos situaciones: B se sigue de A si B es al menos tan plausible como lo es A . Bajo esta interpretación, una situación máximamente implausible tiene a su vez el máximo de fuerza lógica: cualquier situación es al menos tan plausible como la menos plausible de todas.

Sobre la base de esta reflexión propongo pues la definición siguiente:

Absurdo Todo aquello que se revele como poseyendo la *máxima* fuerza lógica, en un contexto inferencial dado.

Dado que la relación de fuerza lógica es un orden parcial, el absurdo así definido es el ínfimo de dicha relación: sólo lo absurdo implica lo absurdo, porque lo absurdo implica cualquier cosa.

Toda bomba es un *absurdo*, porque posee la máxima fuerza lógica en un sentido muy literal: si de A se sigue cualquier cosa, entonces A está libre de todas las constricciones de la lógica considerada. Acepto, con los relevantistas, que esto *dice* algo muy extraño y contra-intuitivo, pero como contraparte *muestra* algo sumamente valioso, y es que **la lógica considerada es impotente ante la bomba**. Dicho de otra forma, la bomba señala un límite, un *non plus ultra* en el poder inferencial de la lógica (recordemos que el *quodlibet* es la marca de lo ilógico, es decir, allá donde la lógica por definición no es capaz de llegar). Y que una lógica sea capaz de hacer tal cosa resulta particularmente valioso, pues nos brinda conciencia de tales límites.

Los lógicos relevantistas renuncian a esta conciencia de límites, pues construyen sus sistemas de tal manera que nada pueda aparecer como absurdo en este sentido. No obstante, pienso que (al menos en el caso de los argumentos explosivos) tener inatingencias como ésta resulta valioso, puesto que nos muestra cosas acerca de la lógica que utilizamos, de la misma forma como un resultado evidentemente incorrecto en una computación delata un *bug* en su programación. Los argumentos explosivos, en este sentido, cumplen con que marcan el lugar de lo impensable al aparecer como casos límites de lo pensable (cf. WITTGENSTEIN (2001, 4.114, 4.115, 4.116)).

5.4. Reducción al Absurdo es Reducción a lo Ilógico

En el capítulo 2 vimos que la característica más importante de una negación lógica es que puede ser inferida por medio de un argumento reductivo. Esta reducción tiene una piedra de tope o punto último de retorno que, en cada caso, se considera *suficiente* para volver atrás y concluir que la premisa asumida debe ser negada.

La piedra de tope de una *Reductio* será a veces lo falso; a veces, lo contradictorio o lo imposible; o incluso simplemente algo “indeseado”, como en GABBAY (1987). Pero todos estos casos son todavía demasiado sintéticos, en el sentido de que son dependientes del contexto inferencial escogido y no definen, por tanto, a la estrategia de manera completamente general. Por ejemplo, el razonamiento:

El Comandante Proxy fue asesinado en 1965, por lo que *no* pudo participar en el golpe de 1973.

(La piedra de tope: que el Comandante Proxy pudiera haber hecho algo un año posterior al de su muerte. Esto es, en general, *imposible*.)

Es una *Reductio* válida en un contexto, digamos, “normal”, pero resulta inválida si el Comandante Proxy es un viajero del tiempo²⁰. Las reducciones a lo falso tampoco sobreviven a esta crítica, a menos que pueda asegurarse que lo falso es *necesariamente falso*; es decir, *contradictorio*; es decir, *imposible*²¹. Consideremos el ejemplo más célebre de *Reductio* por esta vía, la demostración pitagórica de la irracionalidad de $\sqrt{2}$. El esquema general es el siguiente:

Asumo que existen dos números naturales a, b primos entre sí tales que $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$. Razono sobre la base de esta suposición y descubro que existen c, d tales que $\frac{a}{b} = \frac{2c}{2d}$. Concluyo que los enteros a, b no existen, y por tanto $\sqrt{2}$ no puede expresarse como fracción.

20. El Comandante Proxy es un personaje de las novelas de ficción de Jorge Baradit. Entre otras cosas, tiene el poder de viajar por el tiempo.

21. Wittgenstein comprendió de manera particularmente lúcida esta interrelación. Considérese, con todo, la nota 2 en la página 107.

En este caso la piedra de tope es la contradicción entre la presuposición de que a y b son primos entre sí y el hecho de que tengan un factor común, 2. Pero también puede ser interpretado como que es la falsedad, dada la premisa de que a y b son primos entre sí, de que tengan un factor común. O también puede decirse que es la simple imposibilidad de que dos enteros *siempre* tengan un factor común.

Ahora bien, consideremos el siguiente razonamiento:

Asumo que existen dos números naturales a, b tales que $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$. Razono sobre la base de esta suposición y descubro que existen c, d tales que $\frac{a}{b} = \frac{2c}{2d}$. Concluyo que a, b tienen infinitos factores comunes entre sí.

En este nuevo ejemplo el punto de inflexión del argumento sigue siendo el mismo, pero la conclusión no tiene forma negativa. El razonamiento arriba descrito sugiere una manera alternativa de llegar a los irracionales, definiendo estos últimos como conjuntos de pares de números que siempre pueden dividirse entre sí (por lo pronto, los números enteros no tienen esta propiedad, pero los infinitos cantorianos sí). El giro hacia la *Reductio* aparece entonces como una decisión antes que como una necesidad analítica.

El caso es diferente cuando la piedra de tope de la *Reductio* es lo absurdo, es decir, aquello que ostente el máximo poder inferencial²². Porque lo absurdo, siendo aquello con lo cual una lógica es incapaz de lidiar, debe poder ser evitado en contextos inferenciales donde dicha lógica se ha propuesto normar. La negación como marca signica es esta cerradura: si sabemos que allá afuera ronda Godzilla y queremos mantenernos a salvo dentro del búnker, saber que por tal puerta se llega a la salida es suficiente para cerrarla.

Lo falso, lo imposible y lo contradictorio no son absurdos en sentido absoluto, sino sólo relativos. Para la lógica clásica, por ejemplo, ellos serán indistinguibles, pero sólo porque el sistema ha sido definido de tal forma que lo contradictorio siempre es idénticamente falso y todo lo idénticamente falso es lógicamente equivalente, de lo que se sigue (recuérdese la proposición 4.1) que todo ello es *la bomba*. Pero en sistemas que

22. Aquí la palabra «máximo» debe entenderse en un sentido propiamente superlativo, no comparativo. Es «aquello tal que nada puede tener más poder inferencial», no «lo que resulta tener más poder inferencial que otras cosas de orden similar».

toleran contradicciones, como las lógicas paraconsistentes, las Lógicas de la Inconsistencia Formal o los sistemas dialécticos, las contradicciones *no son absurdas*, y esto es todo lo que puede decirse de ellas: que ellas no están fuera, sino dentro de lo considerado por el contexto inferencial. El sistema C_1 de da Costa es un buen ejemplo de esto²³, puesto que lo rudimentario de su estrategia lo hace mucho más explícito. Dado que él quería poder razonar sobre contradicciones de la forma

$$A \wedge \neg A$$

Impuso que la piedra de tope de la *Reductio* sólo pudieran ser aquellas contradicciones entre proposiciones que *no* fueran inconsistentes. Esto resta a las contradicciones “simples” de lo absurdo, pero también implica que lo absurdo es que una proposición pueda ser y no ser inconsistente. En consecuencia, $A \wedge \neg A$ puede no ser explosivo en su sistema, pero sí lo es:

$$(A \wedge \neg A) \wedge \neg(A \wedge \neg A)$$

O lo que es lo mismo:

$$(A \wedge \neg A) \wedge \circ A$$

(cf. Proposición 4.11).

El que lo absurdo *así definido* sea lo único susceptible de ser la piedra de tope de la *Reductio* (*ad Absurdum*, de hecho) dota a la negación introducida por esta vía un carácter de analiticidad que de otra forma no tiene. Por ejemplo, la proposición «Martín Vargas no fue el campeón mundial de Boxeo» no *muestra* que haya algo absurdo en el hecho de que Martín Vargas pudiera haber sido el campeón mundial de Boxeo, simplemente *dice* que él no lo fue (y *muestra*, si se quiere, las consecuencias que se siguen de ello²⁴). Las negaciones introducidas por vía de la *Reductio* tienen, en cambio, lo irrefragable de lo analítico: ellas *muestran* que aceptar lo negado es caer fuera del ámbito racional en el que se está inmerso, o, como dijera Quine, cambiar de tema. Pero *esto* no es verdadero:

23. Voy a utilizar el sistema *pClas*, que resulta ser equivalente a C_1 , para las ilustraciones que vienen a continuación.

24. Consecuencias *stricto sensu*, es decir, pertinentes.

que *toda* negación, si se la acepta, entonces puede ser presentada como la conclusión de una *Reductio* de premisas actualmente verdaderas. Y esto sencillamente porque no todo lo que negamos es ilógico²⁵.

Al mismo tiempo, el hecho de que la bomba sea la piedra de tope de la *Reductio* tampoco implica necesariamente que la contradicción resulte explosiva. Quiero decir que si $\tilde{n}(A)$ dice que A es explosiva, entonces, en estricto rigor, el detonador característico no es $\{A, \tilde{n}(A)\}$ sino sólo A , la bomba. Por eso es que la adscripción del intuicionismo al *Ex contradictione* pasa por su definición de negación como $A \Rightarrow \perp$ y no por el hecho de que $\frac{\perp}{B}$ sea la regla de eliminación de \perp ; porque, como vimos en el capítulo 4, la inferencia

$$\frac{A \quad \neg A}{B}$$

Es una instancia de Modus P. Ponens:

$$\frac{A \quad \frac{A \rightarrow \perp}{\perp}}{B}$$

De paso, se ve aquí también con mayor claridad algo que señalamos en la sub-sección 4.3.4: el que $\lceil \perp \rceil$ haga las veces de bomba es una inelegancia para esta perspectiva, porque lo interesante es que el carácter explosivo sea *mostrado*, mientras que el *absurdum* intuicionístico *dice* que él es explosivo. Por eso una variante intuicionística del argumento de Pseudo-Scotus es menos ilustrativa que la versión original original (véase la página 129), porque todo lo que la prueba *Ex contradictione* muestra, en ella ha desaparecido.

25. Nótese que el esfuerzo alético de “ir a ver” quienes han sido campeones mundiales de Boxeo para verificar si alguno de ellos es o no idéntico a Martín Vargas aquí está completamente descaminado, puesto que *no* hemos necesitado el compromiso ontológico con el modelo (que es lo que nos dice qué es verdadero y qué es falso, qué es posible y qué es imposible) para definir lo que es absurdo (aquello de lo que se sigue cualquier cosa).

5.5. Juegos y reglas negativas

Concebir la lógica como he defendido en las secciones anteriores ayuda a justificar de manera más directa su relación íntima con los juegos, y la razón por la cual le corresponde al nivel interactivo estar a la base de los otros dos²⁶.

Como la lógica, el juego es una actividad regida por ciertas disposiciones normativas. Dichas disposiciones son trascendentales, en el sentido de que limitan el ámbito de lo posible dentro del juego a la vez que muestran lo que queda fuera de él. Nótese que en ambos casos las disposiciones no alcanzan a ser determinísticas: una partida (*mutatis mutandis*, un argumento) se desenvuelve en conformidad con las reglas, pero su resultado no está determinado por ellas. Es el caso del célebre ejemplo de Ryle con el ajedrez, que por su belleza y elocuencia he decidido reproducir completo:

Un espectador científicamente entrenado, que no conoce el ajedrez u otro juego, observa un tablero cuando los jugadores realizan sus jugadas, sin ver que éstos las realizan. Después de cierto tiempo comienza a detectar algunas regularidades; las piezas conocidas como “peones”²⁷ normalmente se mueven un solo casillero a la vez y siempre hacia adelante, salvo en casos especiales, en que se mueven diagonalmente. Las piezas conocidas como “alfiles” sólo se mueven diagonalmente, cualquier número de casilleros por vez. Los movimientos de los “caballos” siempre son en ángulo recto, y así sucesivamente. Después de mucha investigación, nuestro espectador conseguirá extraer todas las reglas del ajedrez y, recién entonces, se le mostrará que los movimientos de las piezas son realizados por personas a las que llamamos “jugadores”. Entonces, se apenará por la esclavitud a que están sujetos. “Toda jugada que hacen”, les dice, “está regida por leyes inviolables; desde el momento mismo en que uno de ustedes toma un peón, la jugada que hará con él es predecible en la mayoría de los casos. El curso total de lo que trágicamente denominan su «juego» se encuentra preordenado sin alternativas. Nada acaece que no pueda mostrarse como regido por una u otra de estas leyes inevitables. El juego está gobernado por una necesidad inflexible, que no deja lugar para la inteligencia o la atención. Es cierto que todavía no puedo explicar todos los movimientos que observo, en base a las reglas que he conseguido descubrir. Pero no sería científico suponer que fueran inexplicables. En consecuencia, debe haber

26. Más sobre este asunto, aunque de manera absolutamente indagatoria, en el apéndice C.

27. Entrecorillado como en el original. Lo mismo aplica para la totalidad de la cita.

otras reglas, que espero descubrir y que permitirán completar satisfactoriamente las explicaciones dadas hasta ahora.” Los jugadores, por supuesto, se reirán y replicarán que aunque todas las movidas están regidas por reglas, ninguna está decretada por ellas. “Es cierto que si muevo mi alfil puede predecirse con certeza que me detendré en un casillero del mismo color que el de la partida. Esto puede ser deducido de las reglas, pero lo que no está establecido ni es deducible de ellas es si moveré el alfil en éste u otro momento del juego. Existe un amplio campo para que pongamos de manifiesto la inteligencia o la estupidez y para que pensemos yelijamos. Aunque nada de lo que acaece es contrario a las reglas, mucho de lo que ocurre es sorprendente, ingenioso o tonto; aunque las reglas son las mismas para todas las partidas de ajedrez que se han jugado, sin embargo casi todas ellas han tenido un desarrollo novedoso para los jugadores. Las reglas son inalterables pero las partidas no son uniformes. **Las reglas prescriben lo que los jugadores no pueden hacer; todo lo demás está permitido, aunque muchas movidas permitidas serían una mala táctica.**”

“Tampoco quedan otras reglas del juego que deban ser descubiertas, y las «explicaciones» que aún espera ofrecer de las movidas particulares no son explicables en términos de reglas sino de otras cosas, como, por ejemplo, la aplicación por parte del jugador de principios tácticos. El sentido según el cual una regla «explica» una jugada que se conforma a ella no es igual al sentido en que un principio táctico explica una jugada, aunque cada jugada que obedece a un principio táctico también obedece a una regla. Saber cómo aplicar principios tácticos presupone conocer las reglas del juego, pero está fuera de cuestión que tales principios sean «reducibles» a dichas reglas.”

(RYLE, 2005, p. 75) (El énfasis es mío.)

En exactamente el mismo sentido en que lo que extralimita a la lógica es lo ilógico (*Ex quolibet sequitur quodlibet*), fuera de todo juego está el “hacer cualquier cosa”. En un sentido físico, nada impide que una Reina de blancas pueda caminar por sobre la línea que separa los escaques, o que dos Torres se monten una sobre la otra o que haya ocho Reyes Negros sobre un mismo tablero: todo lo que sabemos de estas configuraciones es que ellas no pertenecen al ámbito de lo ajedrecístico, porque están fuera del espacio de posibilidad que demarcan las reglas. De ellas puede decirse lo mismo que dice Wittgenstein a propósito de las proposiciones: “Debe delimitar lo pensable y con ello lo impensable. Debe delimitar desde dentro lo impensable por medio de lo pensable.” (WITTGENSTEIN, 2001, 4.115).

En la lógica, así como en cualquier juego, la línea que separa lo que está permitido de lo que no, es clara hacia el interior pero difusa hacia el exterior. Esta escala de matices no puede estar determinada por las reglas mismas del juego, puesto que está más allá de su ámbito, y por lo tanto el juego es insensible a ella; pero a nosotros esta gradación se nos *muestra* en la práctica. Así, podemos distinguir con mayor o menor claridad cuándo una jugada es estratégicamente sonza (interior) o un error de ejecución (exterior cercano), un intento de hacer trampa o lisa y llanamente un acto indiferente (exterior más lejano), aunque no existan meta-reglas que diriman entre una cosa y la otra²⁸. En la lógica ocurre lo mismo: un argumento puede ser válido pero estar conducido de manera boba (una prueba no normal es un ejemplo usual de esto) o puede ser una falacia ignota (como el uso habitual de la afirmación del consecuente en personas no entrenadas en lógica), un sofisma deliverado o un absurdo.

Laurent Keiff en su presentación de la Dialógica comprendió de manera particularmente lúcida esta relación entre lo lógicamente absurdo y el acto lúdico de abandonar o retirarse de un juego. Su propuesta recupera la definición intuicionística de la negación:

$$\neg A \triangleq A \rightarrow \perp$$

E interpreta el signo $\ulcorner \perp \urcorner$ como el acto performativo de rendirse²⁹:

Desde el punto de vista de la teoría del diálogo argumentativo, esto se reduce a considerar la negación como un caso límite de la subjunción: antes que atar compromisos *lingüísticos* entre los dos jugadores, la negación más bien ata un compromiso lingüístico con el compromiso meta-lingüístico codificado por \perp . El jugador que se compromete con (asevera) $\phi \rightarrow \perp$ se compromete a abandonar el diálogo si su adversario puede justificar su compromiso con ϕ .³⁰ (KEIFF, 2007, p. 32)

28. Sobre todo, distinguir entre un error de ejecución y un intento de hacer trampa es particularmente difícil. Los puntapiés en el fútbol son un buen ejemplo de esto.

29. Cf. las propuestas de Lorenzen que vimos al final de la sub-sección 2.4.4.

30. La traducción es mía. Original:

Du point de vue de la théorie du dialogue argumentatif, cela revient à faire de la négation un cas limite de la subjonction : plutôt que de lier des engagements *linguistiques* répartis entre

Este movimiento retórico es sumamente común en política, donde la exageración muchas veces se interpreta como señal de compromiso: a menudo cuando un político niega una aseveración lo hace dando a entender que no sostendrá conversaciones con quien la afirme. Como Sebastián Piñera, quien después de conocerse el fallo de la Corte de Derecho Internacional de La Haya en la causa de Bolivia por su salida soberana al mar, declaró:

Tal como lo hemos afirmado siempre Chile *nunca* ha tenido ninguna obligación, *ni* la tiene hoy día, de negociar nuestro mar, nuestro territorio *ni* nuestra soberanía. Y tal como siempre hemos dicho, Chile es un país que tiene un afán, una actitud y una disposición de dialogar y colaborar con todos los países del mundo, en forma muy especial con los países vecinos, pero siempre dentro del contexto del derecho internacional, del respeto a los tratados vigentes y, por supuesto, defendiendo y protegiendo, con firmeza, con fuerza y voluntad nuestra soberanía.

Piñera, S. citado en SCHÜLLER GAMBOA (2018, párr. 4) (El énfasis es mío.)

Dando a entender, con las negaciones que he destacado, que allí hay puntos de no retorno, y que —como él mismo afirma luego— toda la buena voluntad y la disposición a dialogar se terminan con la afirmación de lo allí negado.

Keiff, al presentar los fundamentos de su doctrina de la negación, reconoce que “la interrupción de la interacción lingüística no es, hablando propiamente, una forma de interacción, sino más bien un acto que determina un límite de la interacción *desde el exterior*” (KEIFF, 2007, p. 30) (Énfasis como en el original.)³¹. Y sin embargo, la integra de todos modos en su teoría dialógica por dos motivos: el primero es que hay juegos en los cuales definir la utilidad del abandono es uno de los parámetros esenciales de un juego, y el segundo es que un jugador podría estar dispuesto (como Piñera) a hacer explícito bajo qué condiciones no seguirá jugando. Esta reflexión acerca de los juegos es simétrica a la que, en el ámbito general de la lógica, presenté como justificación para

les deux joueurs, la négation lie un engagement linguistique et l’engagement méta-linguistique codé par \perp . Le joueur qui s’engage sur (asserte) $\phi \rightarrow \perp$ s’engage à abandonner le dialogue si son adversaire peut justifier son engagement sur ϕ .

31. La traducción es mía. Original: “l’interruption de l’interaction linguistique n’est pas à proprement parler une forme de l’interaction, c’est bien plutôt un acte qui détermine une limite de l’interaction *de l’extérieur*.”

querer incluir argumentos explosivos en un sistema: primero, porque en ocasiones es útil saber qué clase de información me producirá el efecto indeseado, y segundo, porque a veces es importante que el sistema lógico sea capaz de *mostrar* con qué cosas él no es capaz de lidiar (por ejemplo, la Lógica Clásica con las contradicciones).

5.6. La paraconsistencia es la nueva consistencia

Todas las consideraciones anteriores parecen arrastrarnos en la dirección del desafío siguiente, que no propongo como conclusión sino más bien como invitación: abandone-mos la consistencia. Después de todo, ¿para qué la necesitamos? Quedémonos en su lugar con la paraconsistencia: viene a cubrir el mismo rol, pero no tiene la innecesaria carga ideológica de la primera. «Consistencia» no es sino la ausencia de contradicciones: inclu-so en su uso más vulgar, ser «consistente», «coherente» o «consecuente» significa pensar, creer o actuar *sin contradicción*. Un valor noble desde una perspectiva moral, de eso no cabe duda, pero su necesidad analítica ciertamente resulta difícil de justificar.

Los grandes cultores de las Lógicas Clásica e Intuicionística hallaron cierta satisfacción en el hecho de que pudiera demostrarse que las contradicciones son bombas en sus siste-mas, pero no porque el resultado fuera interesante en sí mismo sino porque les permitía justificar la adscripción al Principio de No Contradicción —una reliquia filosófica— por medio del Principio de Explosión —un resultado matemático preciso que expresa conse-cuencias evidentemente indeseables—. Para ellos nunca fue una opción el abandonar *esa* consistencia; más bien, lo que ellos buscaban era poder justificarla, y en ese ánimo dieron con *esta* otra. En consecuencia, la campaña publicitaria fue deshonesta: nos vendieron un producto puro y lo que obtuvimos fue miel mezclada con jarabe.

Al final, cuando la ausencia de trivialidad terminó de ser aislada e identificada clara-mente como un concepto matemático interesante y filosóficamente fértil, hubo que poner-le un nombre ajeno, de versión alternativa: «paraconsistencia». Es como este mal chiste de llamar «mayonesa casera» a la mayonesa de verdad sólo porque «mayonesa» es la que comemos todos los días, pero que es artificial. Aquello que realmente separa lo lógico de

lo que no lo es y que por tanto *define* el campo es la Paraconsistencia, la no-trivialidad; pero esto es lo que la Consistencia debía ser en primer lugar (recuérdese el Cuadro de Oposiciones en la figura 4.1, página 122).

Por lo demás, la mudanza de un paradigma de la consistencia a otro de la paraconsistencia es en muchos casos gratis. En CARNIELLI Y CONIGLIO (2016), por ejemplo, puede verse cómo demostrar resultados clásicos como Completitud (teoremas 2.2.8 y 7.5.6), Compacidad (teorema 7.6.7) o Löwenheim-Skolem Descendiente (teorema 7.6.9) para sistemas con inconsistencias pasa sencillamente por cambiar la consistencia clásica por la no-trivialidad. En la misma línea, Arruda demostró en su tesis doctoral que los resultados de incompletitud de Gödel también aplican para las lógicas paraconsistentes, al menos en la jerarquía de da Costa (D'OTTAVIANO Y GOMES, 2017). Es decir que dentro del paradigma paraconsistente nada se pierde; y en contrapartida, lo que se gana con el abandono de la consistencia clásica es una conciencia total del rol lógico de la trivialización, sin que las menudencias en torno a la contradicción la enturbien o compliquen.

Capítulo 6

Conclusiones

“I can’t believe that Godzilla was the only surviving member of its species... But, if we keep on conducting nuclear tests, it’s possible that another Godzilla might appear somewhere in the world, again.”

Godzilla (1954)

El recorrido que terminó en el capítulo 5 comenzó en el segundo con un análisis de la Negación como operación lógica, y su propósito general fue fundamentar la tesis de todo este ensayo: que **el que una lógica sea explosiva le da la capacidad de mostrar aquello que está más allá de sus límites normativos**. Este último capítulo tiene por propósito resumir todo el argumento e insistir sobre sus conclusiones más importantes.

6.1. Una guía para dejar de preocuparse y amar la Bomba

El título de este trabajo (referencia —espero que obvia— a la película de Stanley Kubrick, *Dr. Strangelove or: How I Learned to Stop Worrying and Love the Bomb*, de 1964) es algo más que un capricho literario. La invitación es a dejar de preocuparse por el fenómeno de la trivialización y aprender a *amar* (es decir, a considerar deseable) aquello

que lo desencadena. Si tuviera que buscar un *slogan* insidioso, diría que se trata de una defensa paraconsistente del Principio de Explosión¹. La mía es una reflexión que no hace vista gorda de las preocupaciones razonables que el fenómeno de la explosión despierta, como en el caso de Clásicos e Intuicionistas, y tampoco busca despreciarlo y erradicarlo por completo, como en el caso de los Relevantistas. El objetivo ha sido radicalizar aquel pensamiento de Newton da Costa de que la razón humana alcanza su máximo potencial cuanto más se aproxima al “perigo da trivialização”: comprender dicho peligro para saber cuánto puede acercarse la razón a él y por qué, de hecho, ella se beneficia de hacerlo.

A lo largo del escrito presenté varias definiciones aceptables de lo que es la lógica, para hacia el final contrastarlas y armonizarlas con esta: que la Lógica consiste en el estudio de la *posibilidad de la inferencia*, con miras a obtener *métodos* para distinguir entre inferencias válidas e inválidas. He intentado ser lo más liberal posible ante esto: a diferentes contextos, diferentes lógicas, diferentes racionalidades. Ellas, sin embargo, comparten entre sí el rasgo común de hallarse extralimitadas por la *inferencia ilógica*, aquella de acuerdo con la cual todo se sigue de cualquier cosa. De aquí nace una observación particularmente iluminadora, conclusión destacable de este trabajo: que **una lógica es una restricción, la imposición de un límite al ámbito de lo inferencial**; es decir, un concepto *negativo*.

El que una lógica admita explosiones es cosa que nos dice algo bastante contraintuitivo, pues nos *autoriza* a inferir cualquier cosa si tales o cuales condiciones se cumplen. En esto estoy de acuerdo. Pero, desde la perspectiva que yo propongo, la explosividad de una lógica nos muestra, a la vez, algo sumamente esclarecedor: un punto, un elemento ante el cual la racionalidad involucrada es impotente. Nos provee cierta “conciencia” de sus límites.

Estas reflexiones no ofrecen gran dificultad y creo que en buena medida responden bien a intuiciones más o menos generalizadas en torno a la lógica. Sin embargo, para llegar a ellas de modo riguroso fue necesario superar una serie de obstáculos. Que tales obstáculos existían, pero que ellos no representaban un verdadero problema para el asentamiento de mi tesis es otra de las conclusiones más importantes de este trabajo. En

1. En *mis* términos (definición 4.8), no como *Ex contradictione sequitur quodlibet*.

concreto, estoy en posición de defender que **nuestra comprensión del fenómeno de la explosión está gobernado por prejuicios y confusiones ideológicas provenientes de una imperfecta comprensión del desarrollo histórico de la Lógica.** La necesidad de traer este hecho a la luz es lo que ha justificado el esfuerzo, en parte filológico e historiográfico, de los capítulos 2 y 3. Los desarrollos formales del capítulo 4 podrían considerarse la contraparte positiva de los dos anteriores, por cuanto muestran cómo puede desarrollarse una *lógica de la explosión* en un marco libre de dichas preconcepciones ideológicas. Todos estos fueron pasos necesarios para llegar al argumento principal en el capítulo 5.

El sumario de las conquistas de este trabajo puede exponerse así:

1. En el capítulo 2 caracterizamos la negación lógica como una familia de determinantes para un determinable más general y ambiguo, la Negación. Definimos la relación de oposición entre *negatum* y *negandum* de manera más general que en el Sistema clásico de Oposiciones. Todo esto nos permitió mapear, de manera poco profunda pero bastante amplia, el tratamiento que la Negación ha recibido por parte de los lógicos. Sobre esta base conseguimos nuestro logro más importante: mostrar en qué sentido **la *Reductio ad Absurdum* es el silogismo más valioso (en sentido kuhneano) para una negación lógica.**
2. El capítulo 3 fue el lugar para mostrar que la asociación del Principio de No Contradicción al de Explosión es un rasgo ideológico de la Lógica Clásica, lo que se manifiesta sobre todo en la forma como clásicos e intuicionistas relacionaron el Principio de Explosión con la *Reductio ad Absurdum*. Ello implicó, de paso, mostrar que la trivialización es un fenómeno que escapa a la tríada *Ex falso / contradictione / impossibile sequitur quodlibet*. También fue el lugar para exhibir la importante diferencia ideológica entre Relevantismo y Paraconsistencia (al estilo brasileño) en lo que concierne a la explosión, y cómo el Dialecismo no es una posición intermedia en este caso. Pero, sobre todo, mostramos que **el fenómeno de la trivialización es anterior a —e independiente de— la negación lógica.**

3. En el capítulo 4 expresamos de manera matemática las conclusiones positivas sugeridas por los dos capítulos anteriores. El gran mérito de estos desarrollos y las reflexiones en torno a ellos fue mostrar cómo el fenómeno de la trivialización se relaciona con otras características lógicas tales como la monotonía, el decrecimiento monotónico y el Modus Ponendo Ponens antes que con la contradicción o la inconsistencia. Pero, en contrapartida, vimos que **la piedra de tope de una *Reductio ad Absurdum* propiamente analítica es la explosión**, y descubrimos que el sentido preciso del *quodlibet* es ser lógicamente irrelevante para el análisis del argumento en cuestión.
4. En el capítulo 5, finalmente, caracterizamos la inferencia ilógica como aquella en la cual todo se sigue de todo, y a la inferencia lógica como una constricción de la primera. Con esto hallamos sustento filosófico para decir que lo que niega una negación lógica es la explosión, una de las conclusiones del capítulo anterior, y también que Reducción al Absurdo es Reducción a lo Ilógico. Finalmente, con ello pudimos terminar de argumentar que *el que una lógica sea explosiva le da la capacidad de mostrar aquello que está más allá de sus límites normativos*. Cerramos con una provocación a modo de invitación: abandonar la consistencia “clásica” en favor de la paraconsistencia.

6.2. Límites y prospecciones

Esta investigación dejó fuera del análisis mucha literatura en torno al concepto de negación lógica. El itinerario se diseñó de tal forma que la panorámica excluyera aportes sin duda relevantes, como los de Neil Tennant, Aaron Avron, Michael Dunn o el mismo Jean-Yves Girard. También hay una serie de trabajos de la escuela australiana, asociada principalmente a nombres como Richard Routley-Sylvan, Ross Brady, Greg Restall y David Ripley que podrían haber enriquecido el análisis y complejizado sus conclusiones. En el caso particular de este último, su interpretación de los secuentes como *posiciones* guarda

una afinidad insospechadamente natural con el argumento defendido aquí. La idea es que « $A \vdash B$ » expresa la posición discursiva que afirma A a la vez que rechaza B . Bajo esta interpretación, una inferencia del tipo:

$$\frac{A_1 \vdash B_1 \quad \dots \quad A_n \vdash B_n}{C \vdash D}$$

Se convierte en la afirmación de que si se *aceptan* las posiciones $A_1 \vdash B_1$ a $A_n \vdash B_n$, entonces está *fuera de lugar* (inglés: «out of bounds») aceptar la posición $C \vdash D$. Esta interpretación hace muy natural expresar el significado de la lógica en términos de límites, y por un momento fue muy tentador incluir un análisis de su propuesta; pero hubiera sido un desvío difícil de justificar dado el hilo conductor escogido.

En contrapartida, pienso que una prospección atractiva para esta investigación es elucidar qué ocurre con la *Reductio ad Absurdum* en el nivel interactivo. A la luz de mi interpretación de la explosión y su relación con el absurdo, la posibilidad de recuperar el esquema tradicional de la *Reductio* en el nivel más profundo aquí considerado cobra un inusitado interés filosófico. Por lo demás, la estrategia de reducción es primariamente un recurso dialógico, por lo que pienso que sólo estoy ofreciendo un aliciente filosófico adicional para insistir sobre un vínculo antiguo y evidente, e intentar reformularlo en términos modernos.

6.3. Palabras finales

Sobre el tema de la trivialización se ha escrito mucho y muy poco. Mucho, porque en los últimos ciento-y-tantos años este fenómeno lógico ha cobrado especial importancia en la caracterización de otros conceptos fundamentales; y muy poco, precisamente porque la literatura se ha preocupado más de aquellos conceptos fundamentales que del primero. Pienso que tal es la originalidad de mi trabajo: dar foco a un tema que siempre ha estado allí, pero al que no se le ha reconocido el protagonismo suficiente.

Me rebelo, pues, contra el pesimista que podría sugerir que mi tema está cerrado y todo lo que puede decirse al respecto no es sino repetir lo ya dicho por otros. A él respondo haciendo mías las palabras de Pedro Abelardo:

Non enim tanta fuit antiquorum scriptorum perfectio ut non et nostro doctrina indigeat studio, nec tantum in nobis mortalibus scientia potest crescere ut non ultra possit augmentum recipere. *Dialectica*, I, 5.

[Pues tampoco es tanta la perfección de los escritos antiguos como para que nada de nuestra doctrina les falte, ni puede ocurrir a nosotros los mortales que llegue a crecer tanto la ciencia que ya no se la pueda aumentar más.]²

Pero tampoco reniego de quienes han venido antes de mí. Todo lo contrario, pienso que el desprecio por la historia es uno de los errores metodológicos más profundos de la primera filosofía analítica, y la perseverancia en dicho error le ha provocado un daño enorme a la filosofía del presente. Hago mías también, por tanto, estas palabras de Bernardo de Chartres:

Dicebat Bernardus Carnotensis nos esse quasi nanos, gigantium humeris incidentes, ut possimus plura eis et remotiora videre, non utique proprii visus acumine, aut eminentia corporis, sed quia in altum subvenimur et extollimur magnitudine gigantea. JEAN DE SALISBURY, *Metalogicon*, III, 4.

[Decía Bernardo de Chartres que somos como enanos subidos a hombros de gigantes, y que si podemos ver más y más lejos que ellos no es por la agudeza de nuestra propia visión o por la excelencia de nuestros cuerpos, sino porque hemos conseguido elevarnos y asomarnos más allá de su gigantesca estatura.]³

En la esperanza de que el futuro de la Ciencia humana no guarde para nosotros, los “escritores de *papers*”, la misma reputación injusta que impartió a los ingeniosos filósofos, científicos y lógicos de los siglos XI a XV.

2. La traducción es mía.

3. La traducción es mía.

Apéndice A

Convenciones para juegos Dialógicos

Dado que los textos sobre dialógica con los que he trabajado están en francés, en esta sección señalaré las palabras que he adaptado para hacer algunas traducciones.

- «Opposant» la traduzco por «Oponente».
- «Proposant» la traduzco por «Proponente».
- «Partie» la traduzco por «partida».
- «Coup» la traduzco por «movimiento», porque en contexto de juegos el español «golpe» es demasiado extraño, y «movida» en algunos contextos puede significar una serie estratégica de movimientos.
- «Requête» la traduzco por la más literal «requerimiento», aunque para el acto de habla de requerir preferiré «pedir», ya que «requerir» tiene una connotación de necesidad que me parece confusa en este contexto.

En CLERBOUT (2013) las partidas son presentadas en forma de tabla. Reproduzco aquí el ejemplo 1.1 (CLERBOUT, 2013, p. 19) con su respectiva explicación:

	O		P	
			$a \rightarrow b$	0
1	$n := 1$		$m := 2$	2
3	$a; ?!b$	(0)		

Explicaciones. Una tabla de este tipo constituye una representación cómoda de una *partida*. Los números en las columnas exteriores indican el orden de los movimientos. La tesis es por convención el movimiento número 0, y la elección de rangos, siendo movimientos, reciben un número. Notemos que para aligerar la notación, el signo de afirmación ! es omitido cuando no aparece en el alcance de un requerimiento. En el movimiento 3, el oponente ataca el movimiento 0, en concordancia con la regla local para la implicación material. Cuando un movimiento es un ataque, el número del movimiento atacado es indicado en las columnas internas. Después de eso, el Proponente no tiene más movimientos posibles: no puede afirmar b por causa de la regla formal, y no puede atacar a porque una fórmula atómica no puede ser atacada. El Proponente pierde la partida.¹

Aunque este ejemplo es demasiado simple para haberlo ilustrado, en partidas más largas “las defensas son generalmente escritas frente a sus ataques correspondientes” (CLERBOUT, 2013, p. 21)².

La notación que he diseñado es una simplificación de estas tablas, en el sentido de que exigen *perder* cierta información. Se trata de una imitación de la notación algebraica para partidas de ajedrez, con las modificaciones respectivas para el caso de juegos dialógicos.

1. La traducción es mía. Original:

Explications. Une table de ce genre constitue une représentation commode d'une *partie*. Les numéros dans les colonnes extérieures donnent l'ordre des coups. La thèse est par convention le coup numéro 0, et les choix de rangs étant des coups, ils reçoivent un numéro. Notons que pour alléger la notation, le signe d'affirmation ! est omis quand il n'apparaît pas dans la portée d'une requête. Au coup 3, l'Opposant attaque le coup 0 en accord avec la règle locale pour l'implication matérielle. Quand un coup est une attaque, le numéro du coup attaqué est précisé dans les colonnes internes. Après cela, le Proposant n'a plus de coup possible : il ne peut pas affirmer b à cause de la règle formelle, et ne peut pas attaquer a parce qu'une formule atomique ne s'attaque pas. Le Proposant perd la partie.

2. La traducción es mía. Original: “les défenses sont généralement écrites face aux attaques correspondantes”.

A fin de ilustrar mi manera de anotar juegos y poder explicar cómodamente todas sus peculiaridades, reproduzco la partida de la demostración del Teorema 1.2.2 de CLERBOUT (2013, p. 29):

	O			P	
				$\neg(a \wedge \neg a)$	0
1	$n := 1$			$m := 2$	2
3	$a \wedge \neg a$	(0)			
5	a		(3)	?! a	4
7	$\neg a$		(3)	?! $\neg a$	6
			(7)	a	8

Mi versión de la misma partida:

O(1)	P(2)
0. $C = \emptyset$?! $\neg(a \wedge \neg a)$
1. ?! $a \wedge \neg a$?! a
2. ?! a	?! $\neg a(1)$
3. ?! $\neg a$?! $a++$

Los rangos han sido indicados entre paréntesis junto a los identificadores de cada jugador. La indicación $\lceil C = \emptyset \rceil$ indica que el Oponente no le hace concesiones al Proponente antes de comenzar la partida. Los números en la primera columna señalan pares de turnos, como en la notación algebraica para el ajedrez, y en estricto rigor señalan los pares de movimientos a partir del 3, puesto que he obviado el hecho (remarcado por Clerbout) de que la elección de rangos es un par de movimientos al comienzo de la partida. Ataques y defensas sólo indican el turno del movimiento contrario al que responden cuando no es el inmediatamente anterior. El signo $\lceil ++ \rceil$ señala explícitamente quién es el ganador de la partida. Nótese además que yo no he dejado de escribir el $\lceil ! \rceil$ en las afirmaciones.

Mi única razón para decidirme por utilizar esta notación abreviada en lugar de la notación completa con tablas, es que me resulta más cómoda para escribir partidas que no vienen dadas en las fuentes bibliográficas.

Apéndice B

Nota sobre filosofía de las matemáticas

Tal como afirmo en varios lugares de este trabajo, la matemática con la que trabajo es algo *sui generis*, por cuanto pretende ser consecuente con un nominalismo particularmente fuerte al que llamo «concepción tipográfica». El propósito de este apéndice es dar alguna aclaración sobre qué es lo que caracteriza a esta concepción y qué relación guarda con otras posturas populares en filosofía de las matemáticas.

El nombre de «matemática tipográfica» está inspirado en el nombre de la «Teoría de Números Tipográfica» («Typographic Number Theory»), sistema formal introducido por Douglas F. Hofstadter en su obra *Gödel, Escher, Bach: Un Eterno y Grácil Bucle* (HOFSTADTER, 2010, part. I, cap. VIII). La idea básica de esta concepción de la matemática es que su práctica es pura manipulación simbólica, y por consiguiente la ontología de sus objetos se agota en los signos usados. Por lo tanto, ellos *no* son símbolos de (o no refieren a) otras cosas. Esto es decir que el número Dos es el signo $\ulcorner 2 \urcorner$ y todas sus instancias, reunidas por la única relación metafísica de la propuesta, que es la

Identidad literal Dos objetos matemáticos son *literalmente idénticos* si se parecen lo suficiente, en sentido perceptual y pictórico, como para tratarlos de manera relevante como instancias de una misma entidad.

Así por ejemplo, $\ulcorner A \urcorner$ y $\ulcorner A \urcorner$ son literalmente idénticos, y en algunos contextos $\ulcorner A \urcorner$ y $\ulcorner A \urcorner$ o $\ulcorner \emptyset \urcorner$ también lo serán, pero en otros no. Lo mismo para un Dos dibujado con

tiza o lápiz, en un pizarrón o en un cuaderno y con tinta de color azul, verde o negro. Nótese que aunque la considero una relación metafísica, de todas maneras depende de la convención de *uso* el qué signos son literalmente idénticos y cuáles no, por lo que la identidad literal tampoco es una relación *esencial* en sentido tradicional.

Una vez que los signos han sido identificados como el sustrato último de la práctica matemática, todo lo que se puede hacer con ellos es escribirlos, agruparlos y dar reglas de identificación posterior para crear pseudo-objetos más complejos. Por ejemplo, las *secuencias* o *series* son signos escritos unos al lado de otros en línea horizontal. La primera convención que podríamos introducir aquí es que el espacio para escribir no importa: por ejemplo, si tengo una serie que comienza con los elementos:

$$a, ab, abb, abbb, abbbb$$

A partir de ella puedo “dar la idea” de la serie de todas las cadenas sígnicas que se obtienen de escribir una $\lceil a \rceil$ seguida de algunas $\lceil b \rceil$. Esta serie no tiene existencia, pues no está escrita ni puede ser escrita, dado que es infinita; sin embargo, la acepto como existente en un sentido figurado, es decir, como un pseudo-objeto, una *sombra óptica* de la serie literal escrita aquí arriba.

Siendo los objetos matemáticos signos, ellos son susceptibles de ser utilizados dentro de un lenguaje, pero en tal caso estos lenguajes no son significativos en el sentido representacional, sino que su significado se agota, nuevamente, en las posibilidades de articulación de los mismos. Esto es decir que la proposición $\lceil 2 + 2 = 4 \rceil$ no *significa* otra cosa que lo que dice allí: que la serie

$$2 + 2 = 4$$

es un objeto matemático susceptible de ser tratado matemáticamente, es decir, manipulado en arreglo a otras convenciones estipuladas o por estipular.

Una teoría o rama de las matemáticas, desde esta perspectiva, es una serie de convenciones para obtener pseudo-objetos matemáticos a partir de objetos dados. Esta obtención

depende de la introducción de la convención más importante de todas, que es la de la identificación *relativa*, por oposición a la *literal*:

Identidad relativa (igualdad) Dentro de una teoría matemática, dos objetos son *idénticos o iguales* si, por convención, se acepta que cada uno puede ser sustituido por el otro bajo ciertas condiciones, puesto que se los interpreta como instancias diferentes de un mismo objeto.

Recogiendo el ejemplo anterior, la secuencia

$$2 + 2 = 4$$

Puede a veces interpretarse como una forma perezosa de decir que el objeto matemático $\lceil 2 + 2 \rceil$ es igual al objeto matemático $\lceil 4 \rceil$, pero otras veces puede interpretarse como la proposición que dice que Dos más Dos es igual a Cuatro. El primero sería un uso típico de esta secuencia en teoría de números, dentro de la cual la secuencia misma *no* estaría siendo considerada un objeto matemático en sí mismo sino sólo un adminículo de redacción, mientras que en el segundo caso la secuencia sí sería un pseudo-objeto; por ejemplo, de la Lógica Matemática.

A partir de este punto la práctica matemática autorizada no es diferente de la que aceptaría un constructivista o incluso un formalista, en la medida en que esté dispuesto a rechazar postulados metafísicos sospechosos tales como el de la “existencia como no contradicción”. La razón para esto es que el único abuso de lenguaje admitido como válido es la identificación de objetos y pseudo-objetos, y la postulación arbitraria de entidades no puede justificarse como tal¹.

Mi propuesta se detiene a medio camino entre el formalismo y los constructivismos de inspiración intuicionística. Con los primeros, acepta que los objetos matemáticos no tienen existencia fuera de una convención útil, y en este caso concreto los identifica con

1. Entonces, por ejemplo, rechazo la aceptación del postulado del límite cuando el intento es definir los números Reales a partir de los Racionales; pero sí acepto la existencia de los límites cuando se definen los Reales *from scratch*, es decir, como una teoría matemática cuya analogía útil (véase más adelante) es la de estudiar las relaciones entre los puntos de una línea continua.

los signos mismos que usamos para *hacer* matemática²; pero, con los segundos, exige que todo resultado no trivial —es decir, que no se siga de las convenciones originales por pleonasmos— deba obtenerse por aplicación de las convenciones a ítemes concretos, es decir, por manipulaciones sígnicas reales llamadas *demostraciones* o *construcciones*. En la jerga tradicional de la filosofía de las matemáticas, se trata de una propuesta *nominalista convencionalista*: las entidades matemáticas abstractas *no existen* (más que en la convención de la identidad literal, que de todas formas no es exclusiva de ellas sino que la comparten con todos los signos lingüísticos) y por lo tanto ellas se *inventan*, no se descubren, aunque esta invención no siempre puede ser arbitraria.

Como todo nominalismo, esta propuesta tiene la carga de la prueba en el problema de la aplicabilidad de las matemáticas. En efecto, si ellas son efectivamente juegos de manipulaciones sígnicas sobre la base de convenciones arbitrarias, queda por justificar por qué entonces se hace posible intervenir, predecir y controlar la realidad con su ayuda. Dicho en breve, respondo a esto diciendo que las convenciones son arbitrarias *stricto sensu*, pero en tanto práctica humana y social ellas —la mayoría de las veces, puesto que *hay* excepciones notables— de hecho se adoptan pensando en analogías útiles. El ejemplo más ilustrativo es el de la aritmética: en realidad la relación entre el Uno y sus sucesores podría haber sido cualquiera que se hubiera querido, pero resulta que terminó siendo precisamente la que sirve para contar con ellos *porque* existió la necesidad de poder contar, y ellos fueron inventados con el propósito de suplir dicha necesidad.

2. Nótese que no estoy entendiendo «signo» como «grafía» sino como algo todavía más general: un gesto o un tipo de piedra o varilla también puede ser un signo genuino. En mi idea la matemática de culturas que no tienen escritura no es esencialmente distinta a la de las que sí, sólo un poco más limitada en las posibilidades de su aplicación.

Apéndice C

Verdad, Ciencia y Lógica

Este breve ensayo desarrolla las reflexiones que me llevaron a adoptar la arquitectura metalógica expuesta en la sub-sub-sección 1.2.5.3. Se trata de un trabajo indagatorio, asistemático y absolutamente inacabado, pero puede resultar útil para dar consistencia a mi propuesta a modo general, razón por la cual lo he agregado como apéndice.

“Mi originalidad es, según creo, una originalidad de la tierra, no de la semilla. Se arroja la semilla en mi tierra y crece diferente que en cualquier otro terreno.”

L. WITTGENSTEIN

Aforismos

Durante el invierno y la primavera de 2018, paralela a mi investigación para el título de Magíster, tuve oportunidad de preparar un curso personalizado de Lógica para C., colega filósofo que pasó por la desafortunada situación de no haber recibido una formación apropiada en esta área. Años atrás, en 2015, ya había trabajado en un proyecto similar, que en aquél entonces fue la redacción de un manual de Lógica para mis compañeros de la licenciatura. Aunque tímido en lo relativo a mi toma de posición, ese texto hace explícitas algunas de mis convicciones frente a la lógica, pero es muy humanista en espíritu, y en consecuencia hereda algunos prejuicios filosóficos separatistas. El curso que preparé para C. persigue una racionalidad más comprehensiva. Su propósito último es dar cuenta

de la Lógica como una práctica científica coherente y auto-conciente de sus métodos y alcances, sin descuidar su lugar dentro de la filosofía.

Pienso que la distancia más difícil de justificar para los lógicos es la que separa al eslogan filosófico («estudio de la inferencia y el argumento válido») de las excentricidades de su práctica (fórmulas, modelos, interpretaciones, pruebas y demostraciones matemáticas sobre todas estas cosas). Esta distancia es la que creo poder superar al insistir sobre la distinción entre FORMALIZACIÓN y NORMALIZACIÓN: las doctrinas clásicas nos enseñan que el tránsito del lenguaje natural al lenguaje artificial del lógico pasa por un “vaciado” de contenidos, que deja las formas lógicas desnudas. Pero este proceso casi nunca puede aplicarse directamente; primero hay que pasar por una fase de criba y deformación *en* el lenguaje natural mismo, que hace a los argumentos susceptibles de ser formalizados. Este proceso, obviado o descuidado por los lógicos clásicos, es la normalización.

Todo lo que tiene de interesante el proceso de formalización para la visión tradicional en realidad se lo lleva la normalización. En ella ocurre lo realmente importante, la formalización siendo sólo una optimización del proceso anterior. El punto aquí es que esta palabra, «normalización», no describe un proceso uniforme sino una actividad en sentido genérico: la de deformar y segregar el lenguaje natural. Normalización es, por ejemplo, cuando forzamos todas las oraciones en indicativo para que encajen en la sintaxis «El *S* es *P*», o cuando las parafraseamos para que coincidan con uno de los cuatro tipos de juicios categóricos. El caso de la reducción de la negación interna a la externa por vía obversiva (sección 2.2), o la traducción Łukasiewicz de la silogística a la Lógica de Predicados son también ejemplos particularmente buenos (en tanto escandalosos) de normalizaciones.

Aristóteles, aquél gran patriarca de la Lógica, comprendió a la perfección la necesidad de este proceso, y a sazón se refirió a la forma en que había que hacerlo. El *Órganon*, bajo estos parámetros, puede ser descrito de la siguiente forma: *De la Interpretación y Categorías* conforman un manual de normalización, *Primeros Analíticos* de formalización e implementación del sistema lógico en sentido matemático¹, y *Segundos Analíticos y Tópicos*

1. Sí, matemático. La tesis de que la lógica sólo es matemática a partir del siglo XIX es uno de los mitos que nos legó la primera filosofía analítica y que deben ser prontamente derribados.

(*Refutaciones sofísticas* siendo el último libro de los *Tópicos*) una guía de aplicación para la ciencia y la filosofía respectivamente.

Adoptar una mirada así pone algunas prácticas pedagógicas de cabeza, sobre todo en lo retórico. Un ejemplo concreto: se nos enseñó que el paso de la Lógica Proposicional a la Lógica de Primer Orden (Clásica, pero obviemos esto por el momento) tiene que ver o se justifica en las limitaciones de la primera para recuperar la Silogística. Esta afirmación es falsa, desde un punto de vista histórico, y el hecho de que las cosas *no* hayan pasado de esa manera es cosa que nos dice que hay algo forzado en pretender que tal sea la manera racional de justificar el paso de un sistema al otro.

Más bien, habríamos de decir: ¿es realmente *necesario* justificar tal paso? Y todavía más: ¿*hay* tal paso?

Digamos mejor: La lógica Proposicional y la Lógica de Primer Orden son dos intentos diferentes de estudiar los razonamientos del Lenguaje Natural, que llevan a objetos matemáticos parecidos-pero-no-iguales, como resultado de dos procesos de normalización-formalización distintos. Por lo demás, tampoco es lisa y llanamente cierto que la Lógica de Primer Orden rescate la Silogística. Lo que más comúnmente se conoce como tal recuperación es la ya mencionada traducción de Łukasiewicz, la que no está del todo exenta de problemas. Pero hay alternativas a la traducción de Łukasiewicz, por ejemplo, la Silogística de Álvarez-Correia (ÁLVAREZ Y CORREIA, 2012) o las Redes de Demostración de Girard (GIRARD, 2007b, sec. I).

Mi colaboración con C. nos llevó a compartir, por una parte, mis reflexiones acerca de la Lógica, y por otra, sus reflexiones acerca de la filosofía de las ciencias y en particular del programa historicista de Kuhn, que él interpreta de manera más o menos *sui generis*. Esto nos llevó naturalmente a la intuición de que un análisis historicista de la Lógica podía proveer categorías críticas desde las cuales comprender mejor lo que yo considero puntos muertos en las implementaciones pedagógicas de la Lógica, que a la larga se traducen en la conservación de prácticas profesionales anticuadas. En concreto, nuestra investigación provee un marco (cuyo primer boceto es la sub-sección 1.2.3 de mi tesis de Magíster) dentro del cual se justifica sospechar de la *dignidad* de la Lógica Clásica.

Mi intuición de base es que dicha dignidad no se basa sino en una justificación circular, lo que en última instancia es pura masturbación. La circularidad, tanto más sospechosa por cuanto menos se la ve a simple vista, va más o menos así:

1. La Lógica Clásica es la «mejor» lógica, porque posee las «mejores» propiedades matemáticas².
2. Las «mejores» propiedades matemáticas fueron evaluadas y decididas como tales de manera socio-histórica.
3. Pero este desarrollo socio-histórico fue guiado por una racionalidad de estándares y criterios que no son arbitrarios.
4. ...porque *son* clásicos.

El cuadro C.1 muestra la geometría del razonamiento.

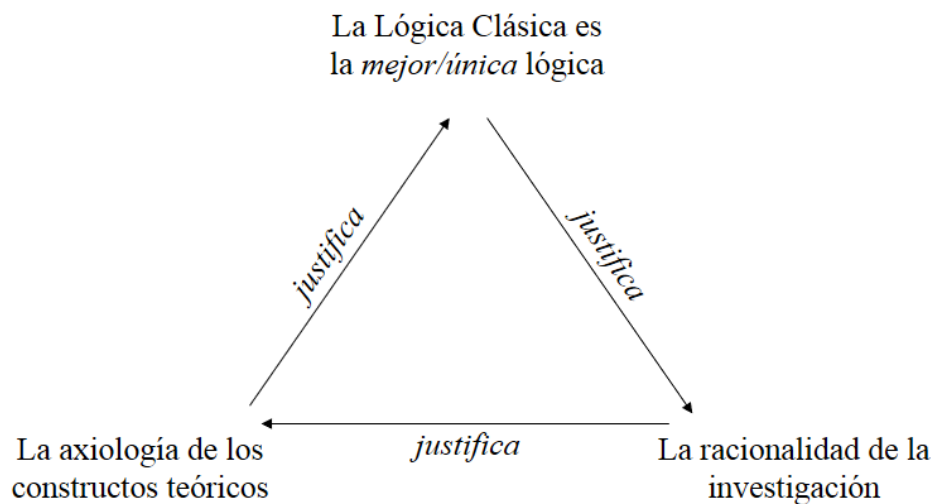


Figura C.1: La Circularidad en la dignidad de la Lógica Clásica

La circularidad queda de manifiesto una vez que aceptamos que la Lógica Clásica es la Teoría (clásica) de Conjuntos. Quiero decir que ambas expresan la misma idea, y su diferencia es sólo de forma —es decir, de *sintaxis*: es *hacer lo mismo* usando *signos*

2. El teorema de Lindström puede ser visto como una expresión concreta de este pensamiento.

diferentes. La Lógica Clásica no es recursiva sino incestuosa; *analítica* en el mal sentido, es decir, una *nugatio*. Ella es su propia justificación. Una prueba plausible de esta perversión son las demostraciones de Gödel: para la de Completitud, lo que hizo³ fue crear un modelo *para* el lenguaje *con* el lenguaje mismo, lo que es como hacer que el lenguaje se reproduzca consigo mismo, una especie de violación endogámica. Y en el (primero) de Incompletitud, va todavía más allá, pues consigue que una misma fórmula se cruce consigo misma: una auto-violación.

Quien ha comprendido el significado real de los trabajos de Boole y De Morgan comprende al final que la correspondencia Curry-Howard no es sino un re-descubrimiento, un traer a la conciencia de algo que siempre estuvo allí. Una y otra vez salta a la vista lo importante que es (e iluminadora que puede ser) la reflexión histórica en la Lógica. Y es que estamos demasiado acostumbrados a heredar *prejuicios*.

Todas las lógicas clásicas (aquellos sistemas formales matemáticamente equivalentes, salvo isomorfismo, a la Lógica Clásica, que al final no es ninguno de ellos⁴) son como piezas diferentes de un mismo estilo musical: en estricto rigor son todas diferentes, pero en un sentido muy obvio suenan tan parecido que uno puede decir que son iguales.

Creo que en materia de formación y maduración filosófica mi experiencia más enriquecedora en este último tiempo fue haber sido introducido al pensamiento de Jean-Yves Girard⁵. Su escritura, como la de Wittgenstein, tiene para mí la ventaja de ser lo suficientemente atrevida e imprecisa como para dejar huecos que uno puede llenar como le plazca (sea o no esa su intención), como una especie de juguete desarmable filosófico. Además de su crítica demoledora e irreverente a las pretensiones de las semánticas tarskianas (que ya acredité en la sección 5.1), el aporte más sustantivo de sus reflexiones a las mías es su jerarquía de *capas* («layers»), descritas metafóricamente como sub-suelos

3. Estoy pensando en la estrategia de Henkin, en realidad. Pero el epónimo me es más o menos indefinido, en la medida en que se entienda la idea.

4. Aunque, quizás, haya que reconocerle dicho honor a alguno de los que aparecen en los manuales más reputados, pues, como dice Kuhn, es allí donde se encuentran los ejemplares significativos que dan forma al *paradigma*.

5. Sin duda un «Jean-Yves» mucho más lúcido que el último con el que tuve la fortuna de atravesarme. Para la historia de un error, véase (ÁLVAREZ LISBOA, 2015b).

(o infiernos). La primera exposición detallada de la propuesta se encuentra en GIRARD (2011b, sec. 7.1), a la que remito sólo como una deferencia intelectual, puesto que no estoy particularmente interesado en reconstruir con fidelidad la propuesta del filósofo. Más me interesa exponer la manera en que yo la interpreté, puesto que se trata, primero, de una interpretación poco fiel, y segundo, porque es sobre la base de dicha interpretación que baso las reflexiones que vienen a continuación. He escogido, pues, reproducir aquí sólo la “metáfora del *correo*” (GIRARD, 2007a, p. 6):

- 1 : El destinatario de la carta, «hay un mensaje para el Sr. XXX»
- 2 : El contenido de la carta, «Estimado señor XXX, le escribimos para anunciarle que...»
- 3 : El proceso de escritura, el envío de la carta (precio del timbre, oficina postal, el cartero...)⁶

Que se explica de manera un poco mejor con el siguiente ejemplo concreto a la vista (GIRARD, 2007b, p. 3):

- 1 : φ toma argumentos enteros (\mathbb{N}) y da respuestas booleanas (\mathbb{B}), lo que anotamos, de manera totalmente estándar, $\mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{B}$.
- 2 : $\varphi(n) = V$ cuando n es primo, $\varphi(n) = F$ cuando no.
- 3 : φ es la criba de Eratóstenes.⁷

En estos niveles se ubican las semánticas, o, para ser más precisos, las implementaciones de las semánticas. Dice el autor:

6. La traducción es mía. Original:

- 1 : le destinataire de la lettre “il y a un message pour M. XXX”
- 2 : le contenu de la lettre “Cher Monsieur XXX, Nous vous écrivons pour vous annoncer...”
- 3 : le processus d’écriture, d’acheminement de la lettre (prix du timbre, bureau de tri, facteur...)

7. La traducción es mía. Original:

- 1 : φ prend des arguments entiers (\mathbb{N}) et donne des réponses booléennes (\mathbb{B}), ce que l’on note, de façon [sic] tout à fait standard, $\mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{B}$.
- 2 : $\varphi(n) = V$ quand n est premier, $\varphi(n) = F$ sinon.
- 3 : φ est le crible d’Eratosthène.

Historically speaking, layer -1 comes from the foundational discussion of *classical* logic; the view of proofs as functions (layer -2) must be ascribed to *intuitionism*; finally, the paradigm of proofs as actions is well adapted to *linear* logic. (GIRARD, 2007c, p. 3)

En la sub-sub-sección 1.2.5.3 la propuesta fue adaptada de manera más o menos libre para coincidir con otras tres implementaciones semánticas:

1. El nivel alético es el de las semánticas de modelos.
2. El nivel funcional es el de las semánticas de pruebas («proofs»).
3. El nivel interactivo es el de las semánticas de juegos.

A propósito de la separación del nivel interactivo de los otros dos, Nicolas Clerbout, en una conferencia en el VI Coloquio de Estudiantes de Filosofía Analítica (año 2016), mencionó que para él la perspectiva lúdica era una alternativa a la distinción entre modelos y pruebas, y por lo tanto no se reduce a alguna de las dos⁸.

La numeración tampoco es casual. Aunque no se trata de pisos fundacionales en sentido tradicional (“The three layers -1, -2, -3 are not a sort of Trinity, like the *hypostases* of neo-platonism. The idea is that everything rests upon layer -3 and that -1, -2 are only *surrogates*: the problem is therefore to retrieve them from layer -3” (GIRARD, 2007c, p. 11)), Girard ha sugerido que el sentido de la ordenación tiene que ver con hacer explícito, en cada nivel, algo que en el superior se mantenía implícito (el ejemplo del correo es particularmente ilustrativo de esto).

Sea o no parecido o acaso compatible con lo que Girard tuviera en mente al hablar sobre lo implícito y lo explícito, yo hice la conexión con lo que en el manual de lógica de 2015 llamé las *relaciones analíticas*: aquello “formal” que vincula los “contenidos” de las expresiones involucradas en un argumento y que son el sustrato de su validez lógica, y por tanto el objeto de estudio de la Lógica. Esto sugiere una arquitectura metalógica que

8. Esto hace decantar de inmediato por la *dialógica* antes que por la GTS de Hintikka y sus colaboradores, ya que para ellos subsiste una preeminencia del modelo (en sentido alético).

me parece particularmente sólida y que puede ser descrita de manera esquemática del modo siguiente:

1. El Lenguaje Natural como fenómeno humano, histórico y cultural, comprendiendo sus estadios sintácticos, semánticos y pragmáticos, constituye el nivel 0. En él todo lo lógicamente relevante —las relaciones analíticas— está implícito.
2. En el nivel alético se hace explícito el *cuándo* un argumento es válido, que es lo expresado por el criterio de PRESERVACIÓN DE VERDAD. Algo relevante para lo que diré a continuación es que en este nivel el compromiso ontológico es máximo, pues presupone un fundamento *objetivo*.
3. En el nivel funcional se hace explícito el *cómo* un argumento es válido, que es lo expresado por el criterio de EXISTENCIA DE DEMOSTRACIÓN. Su compromiso ontológico es medio, pues presupone sólo un fundamento *subjetivo*⁹.
4. En el nivel interactivo se hace explícito el *por qué* un argumento es válido, lo que remite a su poder para convencer¹⁰ y por lo tanto es expresado por el criterio de EXISTENCIA DE UNA ESTRATEGIA GANADORA. Su compromiso ontológico es mínimo, pues presupone sólo un fundamento *inter-subjetivo*¹¹.

Nótese que los niveles siguen sin ordenarse hipostáticamente: el *por qué* no presupone ni el *cuándo* ni el *cómo*, etc. Sin embargo, es claro que cada uno de ellos aporta una comprensión más profunda y esclarecedora del fenómeno que el superior, siendo el nivel 0 el de máxima oscuridad.

Esta arquitectura metalógica está en pañales y sin duda sufrirá importantes modificaciones en el futuro, pero me parece que su valor actual se cifra en su poder de reunir ideas valiosas y darles coherencia entre sí; por ejemplo, permite salvar las intuiciones del

9. Desde un punto de vista fenomenológico, el compromiso subjetivo es menor al objetivo, pues en el primero sólo hay una cosa (el *ego* cartesiano), mientras que en el segundo hay al menos dos: o Dios, o el mundo, o el otro (*l'enfer* sartriano), etc.

10. Un paso atrás: de los *Analíticos* aristotélicos a la *Dialéctica* socrática. Retorno a los orígenes.

11. Lo intersubjetivo tiene un menor compromiso ontológico que lo subjetivo porque no es fenomenológico sino existencial, es decir, se da en el mundo de la vida y no en el teatro cartesiano.

pluralismo lógico sin caer en una sobresimplificación de los rasgos comunes, y también llenar el vacío al que me referí más atrás entre la motivación filosófica y la implementación matemática de la Lógica. Pero lo más importante es que devuelve honestidad a la tesis filosófica de que la Lógica es *de tópico neutral*, pues reduce al mínimo sus compromisos ontológicos (realistas para la lógica clásica, idealistas para el intuicionismo).

Las relaciones analíticas, que son el sustrato último de lo lógico (aquello de lo que depende la posibilidad de la inferencia) son aquellas relaciones que los símbolos sostienen entre sí sólo en virtud de su *significado*. A su vez, el componente semántico de un sistema formal es la doctrina del significado que la inspira. La arquitectura de niveles aquí descrita nos muestra también el tipo de doctrina de significado involucrado en sus semánticas:

- En el nivel alético el significado de los símbolos son sus condiciones de verdad¹².
- En el nivel funcional el significado son las inferencias en las que los símbolos participan¹³.
- En el nivel interactivo, el significado es el uso, de acuerdo con el *dictum* wittgensteineano; un acuerdo entre los actores.

La “profundidad” de un análisis lógico tiene que ver con su grado de auto-determinación. Lo que se hace más explícito al final es el carácter *convencional* de las relaciones analíticas mismas, y es por esto que el nivel más profundo es el interactivo¹⁴. El nivel alético, por su parte, es el más impuro; presupone el mundo, un “acerca de” que le confiere sus puntos de apoyo, su referencia. El mundo desaparece en los otros dos, y entre el segundo y el tercero quien desaparece es el Sujeto, esa ficción cartesiana denunciada por la fenomenología.

Otra de las virtudes de esta arquitectura metalógica es que permite refundar una Filosofía integral de las Ciencias con apoyo en la Lógica, a la usanza del ensayo positivista

12. Antipsicologismo.

13. Inferencialismo. Nótese que esto da al sincategorema un significado *intrínsecamente* lógico, pues es en la inferencia (i. e., en la lógica) que adquieren significado.

14. Aunque en escritos recientes (GIRARD, 2011a) Girard ha incluido un cuarto, el DEÓNTICO, que es el nivel de la lógica de las reglas mismas. Materia para indagar a futuro.

y cuyo primer intento se perdió con el fracaso del programa del Círculo de Viena. Esta refundación es sugerida por una potente analogía entre los niveles metalógicos y los siguientes tres niveles en la percepción social de la ciencia:

- El nivel ingenuo, en el cual la Ciencia *descubre* cómo son las cosas en el mundo. Se trata de una institución políticamente neutral y desinteresada que tiene por propósito aumentar nuestro conocimiento de la naturaleza para mejorar nuestra calidad de vida. Es la percepción que comparten los ciudadanos promedios, analfabetos científicos o parcialmente alfabetizados. En la Filosofía de las Ciencias corresponde a la visión positivista y la lógica que rige su metodología es principalmente alética.
- El nivel crítico, en el cual la ciencia *propone* alternativas de cómo puede ser el mundo. Como institución está afecta de decisiones políticas e intereses económicos. Es la percepción que comparten los científicos y quienes trabajan directamente con ellos. En la Filosofía de las Ciencias corresponde a las visiones críticas (Popper, Lakatos, Hanson), y por el rol crucial que cobra el Sujeto observador en estas visiones, se los alinea con la lógica funcional.
- El nivel sociológico, en el cual la Ciencia *provee soluciones* a problemas que son de índole social y política, y por lo tanto no es fácilmente distinguible de otras instituciones relacionadas con el desarrollo tecnológico o el modelo económico. Es la percepción que comparten los Filósofos de las Ciencias post-kuhneanos, así como la de otros historicismos (post-marxistas, foucaultianos, etc.), y por la preponderancia del valor de la Sociología para la comprensión de la Ciencia les corresponde metodológicamente el espíritu de la lógica interactiva.

El que el nivel alético sea sólo el primer subsuelo tiene otra consecuencia espectacular: que la *verdad* pierde su valor epistémico. Es decir que no sólo la Lógica, sino también la Ciencia y el conocimiento no dependen del concepto de verdad sino al contrario. La vieja ecuación platónica

conocimiento = creencia + verdadera + justificada

Ya desafiada por Gettier en los albores del siglo pasado, queda de pronto completamente obsoleta. La ecuación sugerida es más bien esta otra:

$$\text{verdad} = \text{conocimiento} + \text{observación}$$

Donde el conocimiento es la capacidad de resolver un problema (nivel interactivo) o ejecutar una tarea (nivel funcional). Un ejemplo ilustrativo. Ante la pregunta: *¿Por qué la homeopatía no es una ciencia?* Una respuesta en cada uno de los tres niveles da:

1. ALÉTICO: porque sus preceptos y fundamentos son *falsos*¹⁵.
2. FUNCIONAL: porque su teoría no provee explicaciones causales satisfactorias para los fenómenos que estudia, y su método está conceptual y procedimentalmente viciado e incompleto.
3. INTERACTIVO: porque no cura a la gente.

La historia reciente del mundo parece secundar esta postura. De pronto este nombre provocador que han inventado: *Post-verdad*, para referirse al descuido de la vieja verdad por correspondencia en el discurso social y político nos revela algo que más bien debería caracterizarse como una *meta-verdad* (o *para-verdad*), algo que está por debajo, es primordial y por lo tanto independiente de la verdad misma¹⁶. Dicen que Feyerabend comenzaba algunas de sus conferencias preguntando: “¿qué tiene de maravillosa la verdad?” En primer lugar, ¿de dónde la sacamos? En la filosofía griega el concepto es más bien marginal. Platón, por ejemplo, declara en el *Timeo* que no está en busca de un discurso verdadero sino verosímil; Aristóteles, por su parte, la usa sólo como adminículo para su análisis lógico, ni siquiera como un concepto fundamental. Quienes trajeron el tema de la verdad sobre la palestra y lo emplazaron como un asunto de primera relevancia fueron los filósofos cristianos, pero precisamente porque para la religión el asunto de la verdad *pura y dura*, es decir, de diáfana correspondencia, es uno de los tópicos centrales en su agenda

15. Es una *pseudo-ciencia*, donde «pseudo-» proviene del griego «ψευδός», «lo falso».

16. «Meta-verdad» es un nombre insidioso. Pienso más bien en lo expresado más arriba, como la pérdida del valor epistémico de la verdad.

política. La ciencia moderna tuvo que hablar en el idioma de la Iglesia cuando hubo de desafiarla, y lo mismo la filosofía, que hasta no tanto tiempo todavía no podía desembarazarse de algunas categorías teológicas; pero ahora que hay madurez, ¿es realmente necesario conservar este concepto en un lugar tan prominente de las investigaciones?

No he indagado mucho más allá en estas reflexiones pero me parece, de entrada, un terreno fértil. Creo que una distinción en la que sería interesante insistir es en la distinción entre la Verdad Metafísica y la Verdad Lógica. Por la primera entiendo más o menos lo que Heidegger identifica con la raíz etimológica del griego «ἀλήθεια», el «poner al descubierto» de las cosas ante un observador. La segunda, en cambio, es esta ficción servil al análisis que falsifica el mundo para poder dar cuenta del *cuándo* analítico, la más obvia y menos interesante de las formas en que se nos presenta la validez lógica. El pecado original de la metafísica analítica fue identificar ambos sentidos en que se dice la Verdad, confundiendo los límites entre las relaciones sígnicas y las relaciones de significado. Tarski lo que hace no es formalizar, como se ha dicho a veces, la correspondencia entre el mundo y el lenguaje, que es la base de las doctrinas de la verdad de Aristóteles y Tomás de Aquino. La teoría de modelos es una redundancia conveniente: a estos signos los llamo «mundo», a estos otros signos los llamo «lenguaje», y ahora estudio la relación entre ellos por medio de un «metalenguaje» (más signos). El resultado son ilusiones ópticas, espejos enfrentados y tortugas sobre tortugas, como en la arquitectura ontológica del Tractatus. De la misma forma como hacer matemática no es hacer metafísica, el tratamiento lógico de la Verdad necesariamente se desentiende de su contenido metafísico. En palabras del mismo Heidegger, quien ya había comprendido estas limitaciones: “En la logística el juicio se resuelve en un sistema de “correlaciones” y se convierte en objeto de un “cálculo”, pero no en tema de una interpretación ontológica. La posibilidad e imposibilidad de una comprensión analítica de la σύνθεσις y de la διαίρεσις, de la “relación” en el juicio en general, están estrechamente vinculadas con el correspondiente estado de la problemática ontológica fundamental” (HEIDEGGER, 1997, 33:159).

Bibliografía

ÁLVAREZ LISBOA, M. (2015a) Lo gracioso en el lenguaje: una aproximación al chiste desde la lógica conversacional. *Zétesis*, 1(2) pp. 43-53.

ÁLVAREZ LISBOA, M. (2015b) *Lógica Universal y Metafísica Analítica: ejercicios para una nueva cartografía ontológica*. (Tesina de Licenciatura.) Santiago de Chile: Universidad de Chile.

ÁLVAREZ LISBOA, M. (2017) Un análisis bidimensional del desarrollo intelectual de Ayda I. Arruda. [no publicado]

ÁLVAREZ, E., CORREIA, M. (2012) Syllogistic with indefinite terms. *History and Philosophy of Logic*, 33(4), pp. 297-306.

ANDERSON, A. R., BELNAP, D. (1975) *Entailment: the logic of relevance and necessity*. New Jersey: Princeton University Press.

APABLAZA ÁVILA, C. (2018) *La disputa acerca del relativismo entre Popper y Kuhn: una disputa con alcances actuales*. (Tesis de Magíster.) [no publicado]

ARISTÓTELES (1982) *Tratados de Lógica (Tomo I)*. Traducción de Miguel Candel Sanmartín. Madrid: Editorial Gredos.

ARISTÓTELES (1988) *Tratados de Lógica (Tomo II)*. Traducción de Miguel Candel Sanmartín. Madrid: Editorial Gredos.

ARISTÓTELES (1989) *Metafísica*. (Edición trilingüe (griego-latín-español). Traducción de Valentín García-Yerba.) Madrid: Editorial Gredos.

- ARISTÓTELES (1994) *Metafísica*. Traducción de Tomás Calvo Martínez. Madrid: Editorial Gredos.
- ARISTÓTELES (1995) *The complete works of Aristotle. The revised Oxford translation*. Editado por J. Barnes. Edición digital en un volumen. Princeton: Princeton University Press.
- ARNAULD, A., NICOLE, P. (1992) *La logique ou l'art de penser*. Paris: Gallimard.
- ARRUDA, A. (1963) Uma questão de lógica. *Revista brasileira de Filosofia*, XIII(50) pp. 261-264.
- ASENJO, F. G. (1966) A calculus of antinomies. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, VII(1) pp. 103-105.
- BACON, A. (2013) Non-classical metatheory for non-classical logics. *Journal of Philosophical Logic*, 42, pp. 335-255.
- BARRIO, E. (Dir.) (2014) *La Lógica de la Verdad*. Buenos Aires: Eudeba.
- BARRIO, E., PAILOS, F., SZMUC, D. (2018) What is a paraconsistent logic? *In Contradictions, from Consistency to Inconsistency*, Springer, Cham. pp. 89-108.
- BAR-HILLEL, Y., CARNAP, R. (1953). Semantic information. *The British Journal for the Philosophy of Science*, 4(14), pp. 147-157.
- BEALL, J. C. (2009) *Spandrels of Truth*. Oxford: Oxford University Press.
- BEALL, J. C., RESTALL, G. (2000) Logical pluralism. *Australasian journal of philosophy*, 78(4), pp. 475-493.
- BELNAP, D. (1962) Tonk, Plonk and Plink. CAHN, TALISSE Y AIKIN (2001) pp. 51-58.
- BERTO, F. (2006) *Teorie dell'assurdo. I rivali del Principio di Non-Contraddizione*. Roma: Carocci Editore.
- BÉZIAU, J.-Y. (2010) Logic is not logic. *Abstracta*, 6(1), pp. 73-102.

- BÉZIAU, J.-Y. (2016) Disentangling contradiction from contrariety via incompatibility. *Logica Universalis*, 10(2-3), pp. 157-170.
- BLASS, A. (1992) A game semantics for linear logic. *Annals of Pure and Applied Logic*, 56, pp. 183-220.
- BOBENRIETH MISERDA, A. (1996) *Inconsistencias, ¿por qué no? Un estudio filosófico sobre la lógica paraconsistente*. Bogotá: Colcultura.
- BOBENRIETH MISERDA, A. (2010) The origins of the use of the argument of trivialization in the twentieth century. *History and Philosophy of Logic*, 31, pp. 111-121.
- BOOLE, G. (1960) *Análisis Matemático de la Lógica*. Traducción y notas de Armando Asti Vera. La Plata: Universidad Nacional de La Plata.
- BOOLOS, G., BURGESS, J., JEFFREY, R. (2007) *Computability and logic*. Quinta edición. Cambridge: Cambridge University Press.
- BORGES, J. L. (1980) *El libro de arena*. Buenos Aires: Alianza Editorial.
- CAHN, S., TALISSE, R., AIKIN, S. (2001) *Thinking about logic: classic essays*. Boulder: Westview Press.
- CAJORI, F. (1993) *A history of mathematical notations. Two volumes bound as one*. Nueva York: Dover Publications.
- CAMERON, M., MARENBOON, J. (2011) *Methods and methodologies: aristotelian logic east and west*. Boston: Brill.
- CARNIELLI, W., CONIGLIO, M. E. (2016) *Paraconsistent logic: consistency, contradiction and negation*. Londres: Springer.
- CHELLAS, B. F. (1980) *Modal logic: an introduction*. Cambridge: Cambridge University Press.

- CLERBOUT, N. (2013) *Étude sur quelques sémantiques dialogiques. Concepts fondamentaux et éléments de metathéorie*. (Tesis Doctoral.) Publicada en 2014 bajo el título *La Sémantique Dialogique* en Londres por College Publications.
- COOK, R. T., COGBURN, J. (2000) What negation is not: intuitionism and '0=1'. *Analysis*, 60(1), pp. 5-12.
- DA COSTA, N. A. C. (1980) *Ensaio sobre os fundamentos da logica*. São Paulo: HUCITEC EDUSP
- DA COSTA, N. A. C. (1993) *Sistemas formais inconsistentes*. Curitiba: Ed. da UFPR.
- DA COSTA, N. A. C., BÉZIAU, J.-Y., BUENO, O. (1998) *Elementos de teoria paraconsistente de conjuntos*. Campinas: Coleção CLE UNICAMP
- VAN DALEN, D. (2004) Kolmogorov and Brouwer on constructive implication and the Ex Falso rule. *Russian Mathematics Surveys*, 59(2), pp. 247-257.
- DE CAMPOS SANZ, W. (2004) Relating intuitionist negation and triviality. *Logic Journal of the IGPL*, 12(6), pp. 581-599.
- DEMOS, R. (1917) A discussion of certain type of negative proposition. *Mind*, New Series, 26(102), pp. 186-196.
- DENNETT, D. (2013) *Bombas de intuición y otras herramientas de pensamiento*. Traducción del inglés de Laura Lecuona. México D. F.: Fondo de Cultura Económica.
- D'OTTAVIANO, I. M. L., GOMES, E. L. (2017) *Para além das Colunas de Hércules, uma historia da paraconsistência: de Heráclito a Newton da Costa*. Campinas: Editora UNICAMP
- DRYMON, D., HECHT, A., SHAY, G., PISTOR, J., HILLENBURG, S. (Prod.); BOURNE, T. (Dir.) (2004) *Bob Esponja: la película*. (Cinta cinematográfica.) Estados Unidos: Nickelodeon Movies, United Plankton Movies.
- DUMMETT, M. (1994) *The logical basis of metaphysics*. Harvard: Harvard University Press.

- EBBESEN, S. (2011) What counted as logic in the thirteenth century? (CAMERON Y MARENBOON, 2011) pp. 93-108.
- FRANCHELLA, M. (1994) Brouwer and Griss on intuitionistic negation. *Modern Logic*, 4(3), pp. 256-265.
- FREGE, G. (1879) *Begriffsschrift*. HEIJENOORT (1967), pp. 1-82.
- GABBAY, D. M. (1987) What is negation in a system? *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, 124, pp. 95-112.
- GABBAY, D. M., HUNTER, A. (1999) Negation and contradiction. GABBAY Y WANSING (1999) pp. 89-100.
- GABBAY, D. M., WANSING, H. (Eds.) (1999) *What is negation?* Kluwer Academic Publishers.
- GABBAY, D., WOODS, J. (2006) *The Handbook of the History of Logic, vol. 7: Logic and the Modalities in the Twentieth Century*. North-Holland.
- GENTZEN, G. (1955) *Recherches sur la déduction logique*. Traducción al francés de R. Feys y J. Ladrière. Paris: Presses Universitaires de France.
- GIRARD, J.-Y. (1990) Mustard watches: an integrated approach to time and food. [Firmado bajo pseudónimo: Y. J. Ringard] Obtenido a través de <http://girard.perso.math.cnrs.fr/mustard/titre.html>.
- GIRARD, J.-Y. (1999) On the meaning of logical rules I: syntax versus semantics. *Computational logic* pp. 215-272.
- GIRARD, J.-Y. (2007a) La logique aujourd'hui... Obtenido a través de <http://girard.perso.math.cnrs.fr/Accueil.html>.
- GIRARD, J.-Y. (2007b) De la syllogistique à l'iconoclasme. Obtenido a través de <http://girard.perso.math.cnrs.fr/Accueil.html>.

- GIRARD, J.-Y. (2007c) Truth, Modality and Intersubjectivity. *Mathematical structures in computer science*, 17(6) pp. 1153-1167.
- GIRARD, J.-Y. (2011a) La syntaxe transcendente, manifeste. Obtenido a través de <http://girard.perso.math.cnrs.fr/Accueil.html>.
- GIRARD, J.-Y. (2011b) *The Blind Spot*. Bad Langensalza: European Mathematical Society.
- GRANSTRÖM, J. G. (2011) *Treatise on Intuitionistic Type Theory*. Londres: Springer.
- HAACK, S. (1991) *Filosofía de las lógicas*. Traducción de Amador Antón, con la colaboración de Teresa Orduña. Madrid: Ediciones Cátedra.
- HALBACH, V. (2015) *The logic manual*. Oxford: Oxford University Press.
- HAND, M. (1993) Negations in conflict. *Erkenntnis*, 38, pp. 115-129.
- HAND, M. (1999) Antirealism and falsity. GABBAY Y WANSING (1999) pp. 185-198.
- HEATH, T. (1921) *A history of Greek mathematics. Volume I: From Thales to Euclid*. Oxford: Clarendon Press.
- HEIDEGGER, M. (1997) *Ser y Tiempo*. (Traducción de Jorge Eduardo Rivera.) Santiago de Chile: Editorial Universitaria.
- HEIDEGGER, M. (2004) *Lógica. La ciencia de la verdad*. (Traducción de Joaquín Alberto Ciria Cosculluela). Madrid: Alianza Editorial.
- HEIJENOORT, J. VAN (1967) *From Frege to Gödel: A source book in mathematical logic, 1879-1931*. Cambridge: Harvard University Press.
- HILBERT, D. (1925) On the infinite. HEIJENOORT (1967), pp. 367-392.
- HINTIKKA, J., SANDU, G. (2011) Game-Theoretical Semantics. en MEULEN (2011), pp. 415-465.

- HODGES, W. (2017) Ibn Sīnā on reductio ad absurdum. *The Review of Symbolic Logic*, 10(3), pp. 583-601.
- HOFSTADTER, D. R. (2010) *Gödel, Escher, Bach: un Eterno y Grácil Bucle*. Traducción de Mario Usabiaga Bandizzi y Alejandro López Rousseau. Barcelona: Tusquets editores.
- HORN, L. R. (2001) *A Natural History of Negation (Reissue Edition)*. Leland: CSLI Publications.
- HORN, L. R., WANSING, H. (2017) "Negation", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Edición del verano de 2017), Edward N. Zalta (ed.), URL = <<https://plato.stanford.edu/archives/spr2017/entries/negation/>>.
- HUNTER, G. (1996) *Metalogic: An introduction to the metatheory of standard first-order logic*. California: University of California Press.
- HUNTER, A., BESNARD, PH. (1998) *Handbook of defeasible reasoning and uncertainty management systems, Volume 2: Reasoning with actual and potential contradictions*. Kluwer: Kluwer Academic Publishers.
- JACOBI, K. (1993) *Studien und Texte zur Geistesgeschichte des Mittelalters*. Leiden: E. J. Brill.
- JAŚKOWSKI, S. Propositional calculus for contradictory deductive systems. *Studia Logica* XXIV, pp. 143-157.
- KEIFF, L. (2007) *Le pluralisme dialogique. Approches dynamiques de l'argumentation formelle*. (Tesis Doctoral.) [no publicado]
- KLEENE, S., ROSSER, J. (1935) The inconsistency of certain formal logics. *Annals of Mathematics*, Second Series, 36(3), pp. 630-636.
- KLINE, M. (1972) *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días. Versión íntegra*. Madrid: Alianza Editorial.

- KNEALE, W. (1957) Aristotle and the Consequentia Mirabilis. *The Journal of Hellenistic Studies*, 77(1), pp. 62-66.
- KNEALE, W., KNEALE, M. (1972) *El desarrollo de la lógica*. Madrid: Editorial Tecnos S. A.
- KRABBE, E. C. (2006) Dialogue logic. GABBAY Y WOODS (2006), pp. 665-704.
- KUHN, T. S. (2004) *La Estructura de las Revoluciones Científicas*. México D. F.: Fondo de Cultura Económica.
- KURBIS, N. (2000) Can Negation be Defined in Terms of Incompatibility? *Mind*, 109, pp. 781-823.
- KURBIS, N. (2015) What is wrong with classical negation? [Borrador]
- KURBIS, N. (2017) Bilateralist detours: from intuitionist to classical logic and back. [borrador]
- LACHANCE, G. (2016) Platonic contrariety (*enantia*): ancestor of the aristotelian notion of contradiction (*antifasis*)? *Logica Universalis*, 10(2-3), pp. 143-156.
- LEE, E. N. (1972) Plato on negation and not-being in The Sophist. *The Philosophical Review*, (81)3, pp. 267-304.
- LENZEN, W. (1996) Necessary conditions for negation operators. WANSING (1996) pp. 37-58.
- LENZEN, W. (1998) Necessary conditions for negation operators (with particular applications to paraconsistent negations). HUNTER Y BESNARD (1998), pp. 211-239.
- MARTIN, C. (1986) William's Machine. *Journal of Philosophy*, 83(10) pp. 564–572.
- MEULEN, A. G. TER (Ed.) (2011) *Handbook of logic and language*. Elsevier.
- MEYER, R., ROUTLEY, R., DUNN, J. M. (1979) Curry's paradox. *Analysis*, 39(3), pp. 124-128.

- MINIO-PALUELLO (Ed.) (1974) *Aristotelis categoriae et liber de interpretatione. Recognovit brevique adnotatione critica instruxit*. Oxford: Oxford University Press.
- MOLNAR, G. (2006) Truthmakers for negative truths. *Australasian Journal of Philosophy*, 78(1), pp. 72-86.
- ORTEGA Y GASSET, J. (1966) *Obras Completas. Tomo III (1917-1928)*. Madrid: Revista de Occidente.
- PALAU, G. (2002) *Introducción filosófica a las lógicas no clásicas*. Barcelona: Gedisa Editores.
- PEANO, G. (1889) The principles of arithmetic, presented by a new method. HEIJENOORT (1967), pp. 83-97.
- PLATÓN (1903) *Platonis Opera*. Edición de J. Burnet. Oxford: Oxford University Press.
- PLATÓN (1988) *Diálogos III: Fedón, Banquete, Fedro*. Traducciones, introducciones y notas de C. García Gual, M. Martínez Hernández y L. Lledó Íñigo. Madrid: Editorial Gredos.
- POPPER, SIR K. (1940) What is Dialectic? *Mind*, N. S. 49. Reimpreso en POPPER (1969) pp. 312-335.
- POPPER, SIR K. (1969) *Conjectures and Refutations*. Londres: Routledge & Kegan Paul.
- POST, E. (1921) Introduction to a general theory of elementary propositions. HEIJENOORT (1967), pp. 264-283.
- PRIEST, G. (1995) *Beyond the Limits of Thought*. Cambridge: Cambridge University Press.
- PRIEST, G. (1998) What is so bad about contradictions? *The Journal of Philosophy*, 95(8) pp. 410-426.
- PRIEST, G. (1999) What not? A defence of dialethic theory of negation. GABBAY Y WANSING (1999) pp. 101-120.

- PRIEST, G. (2006a) *In Contradiction. A study of the transconsistent. (Expanded edition)*. New York: Oxford University Press.
- PRIEST, G. (2006b) *Doubt Truth to be a Liar*. New York: Oxford University Press.
- PRIEST, G. (2006c) Logicians setting together contradictories: A perspective on relevance, paraconsistency, and dialetheism. *A Companion to Philosophical Logic*, pp. 651-664.
- PRIEST, G. (2016) *Uno. Una investigación sobre la unidad de la realidad y de sus partes*. Traducción de David Paradela. Barcelona: Alpha Decay.
- PRIOR, A. (1960) The runabout inference-ticket. CAHN, TALISSE Y AIKIN (2001) pp. 39-41.
- RASPA, V. (2017) *Thinking about contradictions: the imaginary logic of Nikolai Aleksandro- vich Vasil'ev*. Traducción del italiano por P. N. Dale. Suiza: Springer.
- RAYO, A. (2013) *The construction of logical space*. Oxford: Oxford University Press.
- READ, S. (2009) Generalized-Elimination Harmony and the meaning of the logical constants.
- RESTALL, G. (2000) *An introduction to substructural logics*. Londres: Routledge.
- RITCHIE, K. (2015) Can Semantics Guide Ontology? *Australasian Journal of Philosophy*, Abingdon: Francis & Taylor Group. DOI: 10.1080/00048402.2015.1045912.
- RUSSELL, SIR B. (1902) Letter to Frege. HEIJENOORT (1967), pp. 124-125.
- RUSSELL, SIR B. (1907) On some difficulties in the theory of transfinite numbers and order types. *Proceedings of the London mathematical society*, 2(1), pp. 29-53.
- RUSSELL, SIR B. (2010) *Principles of mathematics*. Londres: Routledge.
- RUSSELL, SIR B., WHITEHEAD, A. N. (1981) *Principia Mathematica (Hasta el *56)*. Traducción de J. Manuel Domínguez Rodríguez. Madrid: Paraninfo S. A.

- RUSSELL, G. (2016) “Logical Pluralism”, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Edición del invierno de 2016), Edward N. Zalta (ed.), URL = <<https://plato.stanford.edu/archives/win2016/entries/logical-pluralism/>>.
- RYLE, G. (2005) *El concepto de lo mental*. Traducción de Eduardo Rabossi. Madrid: Paidós.
- SCHÜLLER GAMBOA, P. (2018) “Piñera tras contundente fallo de La Haya: ‘La demanda nunca tuvo ningún sustento’.” *La Nación* [Medio electrónico.] Publicado el 01 de octubre de 2018. Visitado por última vez el 21 de noviembre de 2018. Obtenido a través de <http://lanacion.cl/2018/10/01/pinera-tras-contundente-fallo-de-la-haya-la-demanda> [...].
- SEXTO EMPÍRICO (1993) *Esbozos Pirrónicos*. Traducción de Antonio Gallego Cao y Teresa Muñoz Diego. Madrid: Editorial Gredos.
- SHAW-KWEI, M. (1954) Logical Paradoxes for Many-Valued Systems. *The Journal of Symbolic Logic* 19(1), pp. 37-40.
- SHRAMKO, Y., WANSING, H. (2010) “Truth values”. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Edición primavera de 2018), Edward N. Zalta (ed.), URL = <<https://plato.stanford.edu/archives/spr2018/entries/truth-values/>>.
- SILVA, M. (2016) Two forms of exclusion mean two different negations. *Philosophical Investigations*, 39(3), pp. 215-236.
- SLATER, B. H. (1995) Paraconsistent logics? *Journal of Philosophical Logic*, 24, pp. 451-454.
- SPRUYT, J. (1993) Thirteenth-century positions on the rule ‘ex impossibili sequitur quidlibet’. JACOBI (1993) pp. 161-194.
- STELZNER, W. (1996) Negation and relevance. WANSING (1996) pp. 87-103.

- SUSZKO, R. (1977) The Fregean Axiom and the polish mathematical logic in the 1920s. *Studia Logica*, XXXVI(4), pp. 377-380.
- SYLVAN, R. (1999) What is that item designated negation? GABBAY Y WANSING (1999) pp. 299-324.
- SZABÓ, Á. (1967) Greek dialectic and Euclid's axiomatics. *Studies in logic and the foundations of mathematics.*, 47, pp. 1-27.
- SZABÓ, Á. (1978) *The beginnings of Greek mathematics*. Dordrecht: Springer.
- TAPPENDEN, J. (1999) Negation, denial and language change in philosophical logic. GABBAY Y WANSING (1999), pp. 261-298.
- TARSKI, A. (1956) *Logics, Semantics, Metamathematics. Papers from 1923 to 1938*. Traducción del polaco por J. H. Woodger. Oxford: Clarendon Press.
- TARSKI, A. (1930a) On some fundamental concepts of metamathematics. TARSKI (1956), pp. 30-37.
- TARSKI, A. (1930b) Fundamental concepts of the methodology of deductive sciences. TARSKI (1956), pp. 61-109.
- TENNANT, N. (1999) Negation, absurdity and contrariety. GABBAY Y WANSING (1999), pp. 199-222.
- TENNANT, N. (1994) Intuitionistic mathematics does not need *ex falso quodlibet*. *Topoi*, 13, pp. 127-133.
- TRANCHINI, L. (2008) The role of negation in proof-theoretic semantics: A proposal. *Fuzzy Logics Interpreted as Logics of Resources*, 9, pp. 273-287.
- TROELSTRA, A. S., SCHWICHTENBERG, H. (2000) *Basic Proof Theory*. Cambridge: Cambridge University Press.

- VALLEJOS OPORTOT, G. (1983) Simbolismo, sintaxis lógica y metalenguaje en el ‘Tractatus’ de Wittgenstein. *Trilogía*, 5 pp. 5-15.
- WANSING, H. (Ed.) (1996) *Negation – A notion in focus*. New York: Walter de Gruyter.
- WANSING, H. (1999) Negation as falsity: a reply to Tennant. GABBAY Y WANSING (1999), pp. 223-238.
- WASZKIEWICZ, J., WOJCIECHOWSKA, A. (1990) On the origins of reductio ad absurdum. ZARNECKA-BIAŁY (1990), pp. 87-95.
- WEBER, Z. (2009) *Paradox and Foundation (PhD. Thesis)*. Melbourne: University of Melbourne.
- WITTGENSTEIN, L. (2001) *Tractatus logico-philosophicus*. Traducción de Isidoro Reguera y Jacobo Muñoz. Madrid: Alianza Editorial.
- ZACH, R. (Remix.) (2016) *Sets, Logic, Computation: an open logic text*. Open Logic Project.
- ZARNECKA-BIAŁY (Ed.) (1990) *Logic counts*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.