UNIVERSIDAD DE VALPARAÍSO

Facultad de Ciencias

Departamento de Matemáticas

Construcción del Plano de Hughes a través de Planos Proyectivos Finitos

Tesis presentada por **Boris Verdugo Ortiz.**
Para optar al grado de Licenciado en Matemáticas.

Profesor Guía Sr. Miguel Cerda D.

Valparaíso, 2011.

Índice general

Terminología

π	Un Determinado Plano Proyectivo de orden n.
π^*	Plano Dual de π.
$p\mathbf{I}\ell$	Punto p incidente en la recta ℓ.
α,β,γ	Colineaciones de π.
$Aut(\pi)$	$\alpha : \pi \to \pi$, α una colineación de π.
$\pi \cong \pi'$	$\alpha : \pi \to \pi'$, α un isomorfismo.
(V, l)-*perspectividad*	Colineación que fija al punto V, la recta ℓ y todos los puntos de ℓ.
$(Aut(\pi), \circ)$	Grupo de colineaciones de π.
Γ	Grupo de permutaciones.
Γ_x	Estabilizador de x.
$\Gamma_{(V,\ell)}$	Conjunto de todas las (V, ℓ)-*perspectividades*.
$\Gamma_{(\ell,\ell)}$	Unión de todos los $\Gamma_{(A,\ell)}$, con $A \varepsilon \ell$.
$\Gamma_{(\ell)}$	Unión de todos los $\Gamma_{(p,\ell)}$, con $p \varepsilon \pi$.
$\ell \setminus \{p_1, p_2 \ldots, p_n\}$	Recta ℓ, sin los puntos $p_1, p_2, \ldots, p_n$.
$\pi \setminus \{\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n\}$	Plano Proyectivo π, sin las rectas $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n$.
Δ_i	Triángulo determinado por A_i, B_i, C_i.
Δ_i^α	Triángulo determinado por $A_i^\alpha, B_i^\alpha, C_i^\alpha$.

Terminología para Teoría de Grupos

$G = G(L, C)$	Grupo de colineaciones.
$G(L)$	Grupo de traslaciones con eje L.
F	Cuerpo.
$GF(p^r)$	Cuerpo.
P_i, $i = 1, \ldots, w$	Un representante fijo del *i_ésimo* conjunto transitivo de puntos.
L_j, $j = 1, \ldots, w$	Un representante fijo del *j_ésimo* conjunto transitivo de rectas.
H_i	Subgrupo de G que fija al punto P_i, de orden h_i.
T_j	Subgrupo de G que fija a la recta L_j, de orden t_j.

Introducción

La presente tesis se ha desarrollado a través del apoyo moderno de la Geometría Proyectiva, la que a modo de síntesis consiste en una estructura matemática que estudia las incidencias de puntos y rectas sin tener en cuenta la medida.

Antes de iniciar los comentarios sobre el trabajo de la presente tesis, vale la pena comentar, a modo de una breve reseña histórica, que la geometría proyectiva es inicializada por Gérard Desargues, quien logró fundamentar a través de la matemática los métodos de la perspectividad que habían desarrollado los artistas del Renacimiento, y aunque su trabajo fue publicado en 1639, pasó desapercibido durante dos siglos. Recién en el siglo XIX, la geometría proyectiva, se estableció dentro de las matemáticas, pero lo que acabó de enraizarla, posiblemente, fue hallar un modelo analítico. Dentro del contexto de la geometría euclidiana-cartesiana se puede construir la geometría proyectiva. Este proceso finalizó definitivamente a principios del siglo XX, pues Einstein, apoyándose en los exhaustivos desarrollos geométricos de los matemáticos del siglo XIX, consiguió demostrar que, a gran escala, el universo se puede interpretar mejor con estas nuevas geometrías que con el rígido espacio euclidiano.

Para el estudio de esta tesis, en el capítulo I, vemos los dos principios de la geometría proyectiva (dos rectas se cortan en un punto y dos puntos definen una recta). Cabe destacar que en los enunciados de la geometría proyectiva, no se admite los conceptos de paralelismo, ángulo o distancia, sólo interviene el concepto de incidencia. Veremos también el principio de la Dualidad, que es de suma importancia para la demostración de reiterados teoremas en los posteriores capítulos de esta tesis. Se estudian las correspondencias 1-1 dentro de un plano proyectivo, los cuales serán llamados colineaciones, con esto, se definen cuasiperspectividades y perspectividades que más adelante darán la existencia de ciertas clases de grupo. Se definen subplanos, subplano de Baer, también isomorfismos entre planos proyectivos, y una sección con algunas definiciones necesarias correspondientes a la Teoría de Grupos. En resumen, en este capítulo introducimos las notaciones y terminologías necesarias para el desarrollo de los capítulos posteriores.

En el capítulo II, se da la definición formal de un isomorfismo de un plano proyectivo, el cual será llamado de colineación, en seguida se definen los automorfismos, lo cual dará paso a las cuasiperspectividades y el grupo de permutaciones. Unos de los temas más relevante en este capítulo es la definición de perspectividades, que actúan sobre una recta y un punto dentro de un plano proyectivo, dando paso así a las definiciones de transitividad, y a la mayoría de las definiciones, lemas y teoremas principales que se desarrollan en los capítulos III y IV. Con la definición de transitividad, en el capítulo III, se hace un estudio profundo de la existencia de la configuración de Desargues. Además se desarrollaran varios ejercicios, que son de gran utilidad para la demostración de varios teoremas de este mismo capítulo.

Siguiendo con el capítulo III, y considerando las consecuencias configuracionales de la existencia de perspectividades en un plano proyectivo y elementos no fijos sobre la misma, se estudiará la configuración de Desargues bajo la perspectiva de un punto y una recta. La configuración de Desargues, es creada gracias a las definiciones y teoremas de perspectividades de puntos no fijos y rectas, formando así pares de triángulos perspectivos compuesta de diez punto y diez rectas. En esta sección, la importancia de la configuración de Desargues, es relevante para las existencias de ciertos planos proyectivos Desarguesianos, y siguiendo una secuencia estructural en el estudio de este capítulo, también demostraremos con perspectividades y transitividades, que todo plano proyectivo transitivo, es también un plano proyectivo Desarguesiano. La demostración de esto último, da relevancia a las perspectivas colineaciones de esta sección, la cual todas ellas forman un grupo de colineaciones, y así, poder dar nociones básicas al estudio de ciertos grupos notables que viene en el capítulo posterior.

En el capítulo IV, se inicia con un pequeño resumen de los tres primeros capítulos, colineaciones y el teorema de Desargues visto en un plano de tres dimensiones, después de esto y aprovechando la existencia del teorema de Desargues, vemos que con la transitivad podemos formar grupos, por ejemplo el grupos de elaciones, colineaciones y el grupo de traslación. Luego continuamos con Planos finitos de orden n y en el Teorema de Bruck-Ryser. Las matrices juegan un rol especial para la demostración de varios teoremas junto con Bruck-Ryser, para dar existencias de planos Desarguesianos mediante propiedades y teoremas sobre teoría de grupos. Vemos también los planos de Moufang, el teorema de Artin-Zorn referente a los anillos de división finitos, y grupos doblemente transitivos.

Al final de este capítulo, y así la tesis, terminamos con la construcción de los planos de Hughes sobre planos proyectivos finitos. Usando terminología necesaria de capítulos anteriores como es la configuración de Desargues, incidencias de matrices y teoría de grupo en un plano proyectivo finito y otras definiciones más, se construye los planos de Hughes que viene dada por la extensión de una colineación a los puntos en un sistema de coordenadas en un cuerpo K. Cabe destacar, que en esta sección, las coordenadas de un punto juegan un rol importante, también las correspondencias dadas desde, un punto de un sistema de coordenadas a una matriz incidente en un plano proyectivo finito. Se da a conocer también los subconjuntos de un plano de Hughes que cumplen ciertos requisitos y tienen la particularidad de formar subplanos Desarguesianos de un plano de Hughes.

Con toda la información que se presentará en el desarrollo de este trabajo, se pretende contribuir en difundir los conocimientos sobre el estudio de la matemática en el ámbito de la geometría y sus derivadas, y poder mostrar una geometría diferente a la conocida geometría euclidiana, como también combinar conceptos y definiciones con la teoría de grupos. El objetivo de este trabajo, es poder dar un enfoque distinto a la geometría euclidiana, y mostrar, que en el ámbito de la geometría proyectiva, hay mucho por indagar, crear y establecer nuevas definiciones, teoremas y nuevas estructuras matemáticas, como también lo hicieron Bruck, Ryser, Hughes, Piper y Albert en sus investigaciones y estudios de esta área de la geometría, de la cual se extrae información relevante para la construcción de la presente tesis.

Capítulo 1

Planos Proyectivos - Resultados Preliminares

1.1. Conceptos Básicos

1.1.1 Definición. Un Plano Proyectivo π, es un conjunto de puntos y rectas llamados elementos de π, junto con una relación de incidencia $\mathbf{I}$ entre puntos y rectas que satisfacen los siguientes axiomas:

i) Dos puntos distintos inciden con una única recta.
ii) Cualquier dos rectas distintas inciden con un único punto.
iii) Existen cuatro puntos distintos, tales que, cualesquiera tres de ellos no inciden en una recta (en otras palabras, existen tres puntos que no son colineales).

1.1.2 Observación. Cualquier conjunto de puntos que satisfaga los ax(i) y ax(ii) es llamado *configuración cerrada*.

Las siguientes notaciones típicas, serán usadas para expresar el hecho de que un punto p incide en una recta ℓ, estas son: $p \ \mathbf{I} \ \ell$, p está sobre ℓ, ℓ contiene a p, o ℓ pasa a través de p. Con frecuencia será conveniente identificar una recta ℓ con el conjunto de puntos que inciden con ésta. En esta situación escribiremos $p \varepsilon \ell$.

Si ℓ es una recta que contiene dos puntos distintos A y B respectivamente, diremos que ℓ une A y B, y lo escribiremos como $\ell = AB$. Similarmente, si p es un punto que está sobre dos rectas distintas ℓ y m, escribiremos $p = \ell m$ o $p = \ell \cap m$, y llamaremos a p el punto de intersección de ℓ y m.

1.1.3 Definición.

i) Cualquier conjunto de puntos que inciden en una recta en común, se dice que son colineales.

ii) Cualquier conjunto de rectas que pasan por un punto, se dice que son concurrentes.

iii) Cualquier conjunto ordenado de 3 puntos distintos no colineales A, B, C, junto con las rectas BC , CA, AB, es llamado un triángulo.

iv) Cualquier conjunto ordenado de 4 puntos de los cuales 3 de ellos no son colineales, es llamado un cuadrángulo.

v) Cualquier conjunto ordenado de 4 rectas, tal que 3 de ellos no son concurrentes es llamado un cuadrilátero.

1.1.4 Lema. Todo plano proyectivo contiene siempre un cuadrilátero.

1.1.5 Observación. Si π es un plano proyectivo, llamaremos a π^* como el conjunto, cuyos puntos(rectas) de π^* son las rectas(puntos) de π y con la relación de incidencia $x \mathbf{I} y$ en π^* si y sólo si $y \mathbf{I} x$ en π.

Como consecuencia inmediata del **Lema 1.1.4** tenemos que π^* es un plano proyectivo el cual es llamado Plano Dual de π. Claramente $(\pi^*)^* = \pi$, así que cada plano es un plano dual.

Esta observación establece un importante resultado en el estudio de planos proyectivos, el cual está dado por el siguiente Teorema.

1.1.6 Teorema(El principio de la Dualidad). Sea $\mathfrak{A}$ cualquier teorema de planos proyectivos. Si $\mathfrak{A}^*$ es obtenido por el intercambio de palabras "*puntos*" y "*rectas*", entonces $\mathfrak{A}^*$ es también un teorema acerca de planos proyectivos.

1.1.7 Lema. Sea ℓ y m dos rectas distintas del plano proyectivo π, entonces existe un punto x de π, tal que x no está en ℓ ni en m.

El siguiente teorema es fundamental en el estudio de planos proyectivos, puesto que en ésta, se establece la existencia de correspondencias 1-1 entre puntos y también entre rectas en un plano proyectivo.

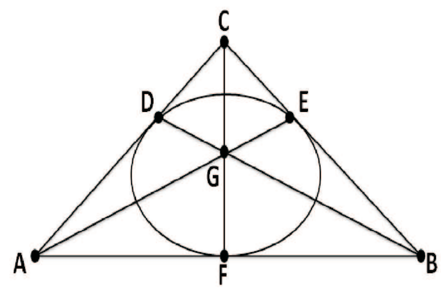
1.1.8 Teorema. Sea π un plano proyectivo. Si ℓ y m son rectas de π, por **Teorema 1.1.6**, existe una correspondencia 1-1 entre los puntos de m y ℓ. Es más, si ℓ es recta y p es punto de π, entonces hay una correspondencia 1-1 entre los puntos de ℓ y las rectas que pasan por p.

Como corolario inmediato del **Teorema 1.1.8**, tenemos que si una recta de un plano proyectivo π contiene solamente un número finito de puntos, entonces el número de puntos en cualquier recta es finita, en este caso el plano proyectivo π es llamado finito.

1.1.9 Teorema. Si π es un plano proyectivo, existe un número entero positivo $n \geq 2$, tal que:

(i) Cada recta contiene exactamente $n+1$ puntos.
(ii) Cada punto incide exactamente en $n+1$ rectas.
(iii) π contiene n^2+n+1 puntos y n^2+n+1 rectas.

1.1.10 Observación. Del teorema tenemos que un plano proyectivo debe contener al menos siete puntos y siete rectas. Como ejemplo tenemos el *Plano de Fano.*



1.1.11 Teorema (El Teorema de Bruck-Ryser).

Sea n un número entero positivo, con $n \geq 2$. Si $n \equiv 1, 2 \ (mod\ 4)$, no puede haber un plano proyectivo de orden n, al menos que n puede ser expresado como suma de dos números enteros al cuadrado, $n = a^2 + b^2$.

1.2. Subplanos

1.2.1 Definición. Sea $\pi_0 \subset \pi$, plano proyectivo con la misma relación de incidencia de π, entonces π_0 es llamado de subplano de π.

1.2.2 Definición. Un subplano π_0 de π es llamado propio, si $\pi_0 \neq \pi$

1.2.3 Definición. Un subconjunto $\mathfrak{C}$ de puntos y rectas de un plano proyectivo π, es llamado:

$i)$ Un subconjunto de Baer (o denso), si cada elemento de π es incidente con un elemento de $\mathfrak{C}$.
$ii)$ De subplano de Baer si $\mathfrak{C}$ es un subplano de π.

1.2.4 Teorema (Bruck). Sea π un plano proyectivo finito de orden n y sea un subplano propio π_0 de orden m. Entonces $n = m^2$ o $n \geq m^2 + m$.

1.3. Isomorfismo entre planos proyectivos

1.3.1 Definición. Se dice que un plano π_1 es isomorfo a un plano π_2 si existe una correspondencia 1-1, tal que

$$P_1 \rightleftarrows P_2 = (P_1)^\alpha$$

entre los puntos $\{P_1\}$ de π_1 y los puntos $\{P_2\}$ de π_2 y una correspondencia 1-1, tal que

$$k_1 \rightleftarrows k_2 = (k_1)^\beta$$

entre las rectas $\{k_1\}$ de π_1 y las rectas $\{k_2\}$ de π_2, de tal manera que si $P_1 \ \varepsilon \ k_1$, entonces $(P_1)^\alpha \ \varepsilon \ (k_1)^\beta$. Claramente, cada una de las correspondencias α o β, plenamente determina la otra, y una correspondencia 1-1 de puntos $P_1 \rightleftarrows (P_1)^\alpha$ determinará un isomorfismo si cada vez que tres puntos P_1, Q_1, R_1 de π_1 son colineales, entonces $(P_1)^\alpha$, $(Q_1)^\alpha$ y $(R_1)^\alpha$ también son colineales, es decir, están en una recta. Similarmente, una correspondencia 1-1 β de rectas, determinará si cada conjunto de tres rectas concurrentes están asignadas a una serie de tres rectas concurrentes.

Notación. $\pi_1 \cong \pi_2$ denotará que π_1 es isomorfo a π_2.

Un isomorfismo α de un plano π con si mismo, se denomina una colineación. Las colineaciones de un plano forman un grupo.

1.4. Teoría de Grupos

En esta sección veremos algunos teoremas y definiciones conocidas de la Teoría de Grupos, los cuales serán ocupados en el Capítulo 4.

1.4.1 Teorema de Lagrange (Cuatro Cuadrados). Cualquier número entero positivo puede ser escrito como la suma de cuatro cuadrados perfectos.

Para la demostración de este Teorema se emplea la identidad de Lagrange

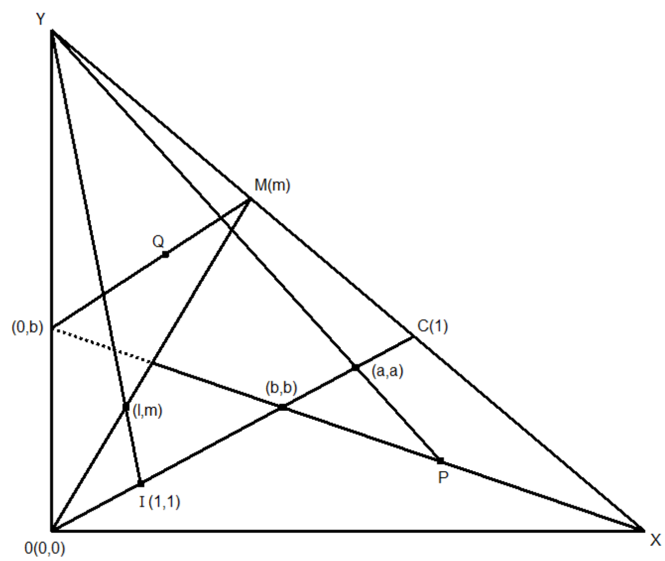
$$\begin{aligned}(a^2+b^2+c^2+d^2)(A^2+B^2+C^2+D^2) &= (aA+bB+cC+dD)^2 \\ &\quad +(aB-bA+cD-dC)^2\end{aligned}$$

$$+(aC - bD - cA + dB)^2$$
$$+(aD - dA + bC - cB)^2$$

que también es usada para la demostración de la Sección 4.2 (Planos Finitos. Bruck Ryser).

Anillo de coordenadas de un plano proyectivo

Sea π un plano proyectivo cualquiera y escojamos cuatro puntos X, Y, O, I, tal que 3 de ellos no sean colineales. Llamaremos a la recta XY como la recta infinita ℓ_∞ (recta de infinitos puntos), llamaremos a la recta OI como la recta $x = y$. (Ver figura)



En la recta OI asignaremos coordenadas $(0, 0)$ para O, $(1, 1)$ para I y coordenada unitaria (1) para un punto C que es la intersección de la recta OI y XY. Para los otros puntos de la recta OI asignaremos coordenadas (b, b) tomando diferentes valores b para puntos diferentes. Para un punto P que no está en ℓ_∞, suponemos que XP intersecta a la recta OI en el punto (b, b) y la recta YP intersecta a la recta OI en (a, a). Entonces asignamos coordenadas (a, b) para el punto P. Esta regla es compatible con haber escogido coordenadas para los puntos de OI. Sea M el punto de intersección de ℓ_∞ con la recta que une los puntos $(0, 0)$ y $(1, m)$. Asignamos a M la coordenada unitaria (m), que intuitivamente representa la pendiente de la recta que une los puntos O y M. Como vemos, tenemos asignadas las coordenadas para todos los puntos exceptuando Y, al cual se le asignará la coordenada unitaria (∞).

Usaremos las rectas de nuestro plano para definir operaciones algebraicas en un sistema de coordenadas. Este sistema algebraico será un anillo ternario, y toda recta de π, excepto ℓ_∞, tendrá una ecuación representada en términos de operaciones de un anillo ternario. Si (x, y) es un punto finito de OI, tenemos que $y = x$, y así tomamos $y = x$ como la ecuación de OI. Una recta que pasa a través de Y, diferente de ℓ_∞ tiene la propiedad que todos los puntos finitos (x, y) tendrán la misma coordenada x, digamos $x = c$, y éste lo tomaremos como la ecuación de la respectiva recta.

Sea (x, y) un punto de la recta que une $C = (1)$ y $(0, b)$ definida a través de una operación binaria de la adición

$$y = x + b$$

y tomaremos ésta como la ecuación de la respectiva recta. Si (x, y) es un punto finito de la recta que une los puntos $(0, 0)$ y (m), definiremos a través de la siguiente ecuación, una operación binaria para la multiplicación

$$y = x \cdot m$$

y tomaremos ésta como la ecuación de la respectiva recta. En general, cualquier recta que no pasa por Y interceptará ℓ_∞ en algún punto (m), y OY en algún punto $(0, b)$. Si $Q(x, y)$ es un punto de esta recta, definiremos una operación ternaria:

$$Y = x \cdot m \circ b$$

y tomaremos ésta como la ecuación de la respectiva recta. Por lo tanto, la adición y la multiplicación son casos especiales de la operación ternaria, y veremos que:

$$\begin{cases} x + b = x \cdot 1 \circ b \\ \\ x \cdot m = x \cdot m \circ O \end{cases}$$

Los elementos de 0 y q tienen la propiedad de:

$$\begin{cases} 0 + a = a + 0 = a \\ \\ O \cdot m = m \cdot O = O \\ \\ 1 \cdot m = m \cdot 1 = m \end{cases}$$

Un plano π puede ser representado por un anillo ternario R cuya operación ternaria satisface ciertas propiedades, y recíprocamente, un anillo ternario con estas propiedades determina un plano de manera unívoca.

1.4.2 Teorema. Cuatro puntos cualesquiera de un plano X, Y, O, I, tal que tres de ellos no son colineales, determina un anillo ternario R. Cada elemento de R incluye el cero 0, y una unidad $1 \neq 0$. Una operación ternaria $x \cdot m \circ b$ satisface las siguientes proposiciones:

i) $O \cdot m \circ c = a \cdot O \circ c = c$
ii) $1 \cdot m \circ O = m \cdot 1 \circ O = m$
iii) Dados a, m, c, existe exactamente un z, tal que $a \cdot m \circ z = c$.
iv) Si $m_1 \neq m_2$, b_1, b_2 son dados, existe un único x tal que $x \cdot m_1 \circ b_1 = x \cdot m_2 \circ b_2$.
v) Si $a_1 \neq a_2$, c_1, c_2 son dados, entonces existe un único par m, b, tal que $a_1 \cdot m \circ b = c_1$ y $a_2 \cdot m \circ b = c_2$.

Capítulo 2

Colineaciones de un Plano Proyectivo

2.1. Conceptos Básicos

2.1.1 Definición. Un isomorfismo α de un plano proyectivo π sobre si mismo, es llamado de colineación de π.

2.1.2 Observación.

1) Denotaremos por 1 (Id_π) a la colineación identidad de un plano proyectivo π.

2) Sea π un plano proyectivo y sea $Aut(\pi) = \{\alpha : \pi \to \pi \mid \alpha \text{ es una colineación de } \pi\}$, entonces $(Aut(\pi), \circ)$ es un grupo, llamado el grupo de las colineaciones de π.

2.1.3 Lema. Sea π un plano proyectivo y $\alpha \varepsilon Aut(\pi)$. Si $\Im(\alpha) = \{x \varepsilon \pi \mid x^\alpha = x\}$ (esto es, $\Im(\alpha)$ es el conjunto de todos los puntos y rectas fijadas por α). Entonces $\Im(\alpha)$ es una configuración cerrada (ver **Observación 1.1.2**).

Demostración. Sean A, B dos puntos distintos de $\Im(\alpha)$. Como α preserva incidencia,

$$(AB)^\alpha = A^\alpha B^\alpha.$$

Pero $A, B \varepsilon \Im(\alpha)$, luego

$$A^\alpha = A \ y \ B^\alpha = B.$$

Así

$$(AB)^\alpha = A^\alpha B^\alpha = AB$$

y es la única recta que pasa por AB, ya que π es un plano proyectivo. Por tanto $AB \varepsilon \Im(\alpha)$ esto es, se cumple el ax(i). Dualmente se cumple el ax(ii), esto es, para cualquier dos rectas distintas

$\ell, m \,\varepsilon\, \Im(\alpha)$, $\ell \cdot m \,\varepsilon\, \Im(\alpha)$. $\square$

Sigue del **Lema 2.1.3**, el siguiente Corolario.

2.1.4 Corolario. Sea $\alpha \;\varepsilon\; Aut(\pi)$. Si α fija un cuadrángulo, entonces $\Im(\alpha)$ es un subplano de π.

Demostración. Sabemos que $\Im(\alpha)$ es una configuración cerrada, y si además contiene un cuadrángulo, entonces en $\Im(\alpha)$ se cumple el ax(iii) y como $\Im(\alpha) \subset \pi$, por lo tanto $\Im(\alpha)$ es un subplano de π. $\square$

2.1.5 Definición. Sea π un plano proyectivo.

1) Si $\mathfrak{C}$ es cualquier subconjunto de puntos y rectas de π, que además sea una configuración cerrada, entonces diremos simplemente que $\mathfrak{C}$ es cerrada.

2) Si α es cualquier colineación de π, tal que $\Im(\alpha)$ es un subplano de π, diremos que α es una colineación planar o alternativamente, o simplemente que α es planar.

3) En el caso especial de que $\Im(\alpha)$ sea un subplano de Baer, α es llamado solamente de colineación de Baer.

2.2. Cuasiperspectividades

2.2.1 Definición. Una cuasiperspectividad (o colineación cuasicentral) de un plano proyectivo π, es una colineación α, tal que $\Im(\alpha)$ es un subconjunto de Baer (esto es, todo elemento de π es incidente con algún elemento de $\Im(\alpha)$).

2.2.2 Observación. Como el mismo plano proyectivo π es un subconjunto de Baer, 1 es una cuasiperspectividad.

Una *cuasiperspectividad* es un tipo especial de colineación, el siguiente teorema muestra que ello ocurre frecuentemente.

2.2.3 Teorema. Sea π un plano proyectivo.

Toda colineación α de orden 2 ($\alpha \neq 1$) es una cuasiperspectividad.

Demostración. Se demostrará que todo elemento de π, incide con un elemento de $\Im(\alpha)$, en efecto.

sea $A \varepsilon \pi$ tal que $A^\alpha \neq A$, entonces A incide en $A^\alpha A$. Ahora

$$(A^\alpha \cdot A)^\alpha = (A^\alpha)^\alpha \cdot A^\alpha = A \cdot A^\alpha = A^\alpha \cdot A.$$

Luego α fija la recta $A^\alpha A$, sigue que $A^\alpha A \varepsilon \Im(\alpha)$.

Así todo punto de π que no es fijado por α, pertenece a una recta de $\Im(\alpha)$.

Sea $\ell \varepsilon \pi$, tal que $\ell^\alpha \neq \ell$, y sea $q = \ell \cap \ell^\alpha = \ell \cdot \ell^\alpha$, entonces

$$q^\alpha = (\ell \cdot \ell^\alpha)^\alpha = \ell^\alpha \cdot (\ell^\alpha)^\alpha = \ell^\alpha \cdot \ell = \ell \cdot \ell^\alpha = q,$$

luego $q \varepsilon \Im(\alpha)$.

Así toda recta de π que no es fijada por α incide con un punto de $\Im(\alpha)$.

Sea $B \varepsilon \pi$, tal que $B^\alpha = B$, y sea $C \neq B$, tal que $C^\alpha = C$, entonces

$$(BC)^\alpha = B^\alpha \cdot C^\alpha = B \cdot C \varepsilon \Im(\alpha),$$

donde B incide en BC.

$\therefore$ Todo punto de π que es fijado por α, incide con una recta de $\Im(\alpha)$.

Sólo basta demostrar que B no es el único punto fijado por α.

Supongamos que B es el único punto fijado por α. Entonces, $\Im(\alpha)$ contiene un solo punto fijado por α, esto contradice el hecho que $\Im(\alpha)$ es una configuración cerrada. Por lo tanto existe otro punto D distinto de B que es fijado por α y está constituido en una recta de $\Im(\alpha)$.

Por último, sea $\ell \varepsilon \pi$, tal que $\ell^\alpha = \ell$, por dualidad $\exists\ q \varepsilon \Im(\alpha)$, tal que q incide en ℓ. $\square$

2.2.4 Definición. Una colineación de orden 2, es llamado una involución.

En el estudio de las cuasiperspectividades se hace necesario determinar todos los subconjuntos de Baer cerrados.

2.2.5 Teorema. Sea $\mathfrak{B}$ un subconjunto de Baer cerrado de un plano proyectivo π. Se cumplen.

(i) $\mathfrak{B}$ es un subplano, o (ii) $\mathfrak{B}$ consiste de una recta ℓ y de todos sus puntos, y un punto con todas las rectas que pasan por él.

Demostración. Si $\mathfrak{B}$ es un plano, entonces $\mathfrak{B}$ es un subplano de π, y si $\mathfrak{B}$ no es un subplano de π, por demostrar que ocurre (ii). luego $\mathfrak{B}$ no contiene un cuadrángulo.

Caso 1) Si $\mathfrak{B}$ contiene un $\triangle ABC$.

Podemos afirmar que cualquier otro punto de $\mathfrak{B}$, tiene que estar en una de las rectas AB, BC, AC. Por ejemplo, y sin perder generalidad, en BC.

Si $E \neq C, B$ y E **I** BC, y si $D \neq A, B$ y D **I** AB. Luego $ACDE$ forman un cuadrángulo, lo cual no puede ser.

Sea $D \neq B, C$ y D **I** BC, por demostrar que $D \,\varepsilon\, \mathfrak{B}$.

Ahora en π, por ser proyectivo, D debe incidir por lo menos en 3 rectas. Luego, $\exists$ la recta $m \,\varepsilon\, \pi$. Como $m \,\varepsilon\, \pi$ y $\mathfrak{B}$ es denso (Baer), $\exists$ un punto de $\mathfrak{B}$ que incide con m, pero todos los puntos de $\mathfrak{B}$ están en BC, luego $D \,\varepsilon\, \mathfrak{B}$ y D **I** m.

Ahora $A \,\varepsilon\, \mathfrak{B}$ y $D \,\varepsilon\, \mathfrak{B}$, luego $m \,\varepsilon\, \mathfrak{B}$ (ya que $\mathfrak{B}$ es cerrado).

Conclusión : Toda recta que pasa por A, incide con un punto de BC y por lo tanto un punto de $\mathfrak{B}$, luego $\mathfrak{B}$ contiene el punto A y todas las rectas que pasan por él.

Caso 2) $\mathfrak{B}$ no contiene un triángulo $\triangle ABC$.

Entonces todos los puntos de $\mathfrak{B}$ son colineales con una recta, digamos que tal recta es ℓ. Además en $\mathfrak{B}$ toda recta debe concurrir con un único punto de A (ya que no hay triángulo).

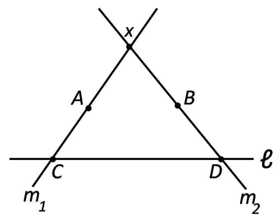
Como $\mathfrak{B}$ es de Baer, almenos debe contener dos rectas que concurren en un único punto de $\mathfrak{B}$, luego $A \,\varepsilon\, \mathfrak{B}$.

Sea $m \,\varepsilon\, \pi$, entonces $D \,\varepsilon\, \mathfrak{B}$, pues al ser $\mathfrak{B}$ denso, debe existir un punto en ℓ (ya que todos los puntos de $\mathfrak{B}$ están allí), luego D es el punto de $\mathfrak{B}$. □

2.2.6 Lema. Sea π un plano proyectivo. Si π_0 es un subplano de π que contiene a todos los puntos de una recta ℓ, entonces $\pi = \pi_0$.

Demostración. Sea $X \,\varepsilon\, \pi$ y $\ell \,\varepsilon\, \pi$, por demostrar que $X \,\varepsilon\, \pi_0$.

Como π_0 es un subplano, entonces π_0 contiene un cuadrángulo. Luego $\exists\ A, B \,\varepsilon\, \pi_0$, tal que A y B no inciden en ℓ. Luego, sea m_1 la recta que pasa a través de A y corta en la recta ℓ en el punto C, y sea m_2 la recta que pasa a través de B y corta en la recta ℓ en el punto D, como muestra la figura.



Entonces $m_1 = AC \;\varepsilon\; \pi_0$ y $m_2 = BD \;\varepsilon\; \pi_0$, y como

$$m_1 \cap m_2 = m_1 m_2 = X,$$

sigue que $X \;\varepsilon\; \pi_0$.

Resultado Dual del **Teorema 2.2.5** : Si $\pi_0 \subset \pi$ es un subplano que contiene todas las rectas que se intersectan en un punto, entonces $\pi = \pi_0$. $\square$

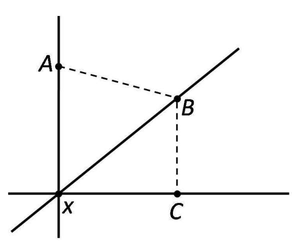
2.2.7 Teorema. Un subconjunto $\mathfrak{B}$ de Baer cerrado de un plano proyectivo π, es una configuración cerrada maximal de π.

Demostración. Sea $X \;\varepsilon\; \pi$, tal que $X \not\varepsilon\; \mathfrak{B}$, y sea $\mathfrak{C} = \cap \mathcal{C}$, tal que $\mathcal{C}$ son configuraciones cerradas que contiene a $\mathfrak{B}$ y un elemento que no está en $\mathfrak{B}$.

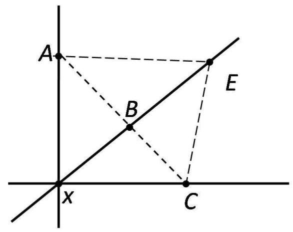
Por demostrar que $\mathfrak{C} = \pi$. En otras palabras, demostraremos que $\mathfrak{C}$ contiene un cuadrángulo.

Como $X \;\varepsilon\; \pi$ (y $X \;\varepsilon\; \mathfrak{C}$), sabemos que X incide al menos con 3 rectas, y como $\mathfrak{B}$ es de *Baer*, entonces cada una de las 3 rectas inciden con un punto de $\mathfrak{B}$. Sean A, B y C tales puntos.

Luego $X, A, B, C \;\varepsilon\; \mathfrak{C}$ forman un cuadrángulo.



Pero también puede ocurrir el caso en que A, B y C sean colineales. Por argumento anterior, sin perder generalidad, asumimos que por el punto A también pasan 3 rectas que inciden con un punto de $\mathfrak{B}$, sea E tal punto. Por lo tanto $X, A, E, C \;\varepsilon\; \mathfrak{C}$, forman un cuadrángulo.



Por lo tanto $\mathfrak{C}$ es un plano.

Caso (1) Si $\mathfrak{B}$ no es un subplano, entonces por **Teorema 2.2.5**, $\mathfrak{B}$ contiene todos los puntos de una recta. Luego por **Lema 2.2.6**, $\mathfrak{C} = \pi$.

Caso (2) Si $\mathfrak{B}$ es un subplano. Sea $x \;\varepsilon\; \mathcal{C}$, toda las rectas que pasan por x inciden en un punto de $\mathfrak{B}$ y por resultado Dual, $\mathfrak{C} = \pi$. $\square$

Ahora usaremos propiedades establecidas para subconjuntos de Baer para demostrar las siguientes importantes propiedades de cuasiperspectividades.

2.2.8 Teorema. Si α es una cuasiperspectividad de π, entonces α está completamente determinado por $\Im(\alpha)$ y la imagen de un elemento que no está en $\Im(\alpha)$.

Demostración. Por demostrar que si β es una cuasiperspectividad de π, tal que $\Im(\alpha) = \Im(\beta)$ y $X^\alpha = X^\beta$ para algún $X \;\not\varepsilon\; \Im(\alpha)$, entonces $\alpha = \beta$.

$\alpha\beta^{-1}$ fija a todos los elementos de $\Im(\alpha)$ y también a X, pues, si $A \;\varepsilon\; \Im(\alpha)$, $A^\alpha = A$ y $A \;\varepsilon\; \Im(\beta)$, $A^\beta = A$. Ahora

$$A^{\alpha\beta^{-1}} = A^{\beta^{-1}} = A^{\beta\beta^{-1}} = A$$
$$X^{\alpha\beta^{-1}} = X^{\beta\beta^{-1}} = X$$

luego $\Im(\alpha\beta^{-1})$ es una configuración cerrada que contiene propiamente a $\Im(\alpha)$ (y $\Im(\beta)$) ya que fija todos los elementos de $\Im(\alpha)$ y un punto que no está en $\Im(\alpha)$. Como $\alpha\beta^{-1}$ es una cuasiperspectividad, entonces $\Im(\alpha\beta^{-1})$ es un conjunto de Baer y que además es maximal. Luego $\Im(\alpha\beta^{-1}) = \pi$, $\Rightarrow \alpha\beta^{-1} = 1_\pi \Rightarrow \alpha = \beta$. $\square$

2.2.9 Definición. Sea $\mathcal{S}$ un conjunto y $\Gamma = \{\sigma \;\varepsilon\; \Gamma \mid x^\sigma = x\}$ el grupo de permutaciones sobre $\mathcal{S}$. Se dice que Γ actúa *semi-regularmente* sobre $\mathcal{S}$, si $\forall\; x \;\varepsilon\; \mathcal{S}$, $\Gamma = \{1\}$.

2.2.10 Lema. Si α es una cuasiperspectividad de π, entonces $< \alpha >$ actúa semi-regularmente sobre los elementos de π que no están en $\Im(\alpha)$. Esto es $<\alpha>=\{\alpha^t \mid t\,\varepsilon\,\mathbb{N}\}$ induce un grupo de permutaciones semi-regular en los elementos no fijados por α y que no están en $\Im(\alpha)$.

Demostración.

$$<\alpha>=\{\alpha^t \mid t\,\varepsilon\,\mathbb{N}\}$$

Demostraremos que si alguna potencia de α, digamos α^t, fija un elemento que no está en $\Im(\alpha)$, entonces $\alpha^t = 1$. En efecto, sea

$$\begin{aligned} A\,\varepsilon\,\Im(\alpha) \Rightarrow A^{\alpha} &= A \\ \Rightarrow A^{\alpha t} &= A^{\overbrace{\alpha\cdot\alpha\cdots\alpha}^{t\_\ veces}} \\ &= (A^{\alpha})^{\overbrace{\alpha\cdot\alpha\cdots\alpha}^{(t-1)\_\ veces}} \\ &\vdots \\ &= A^{\alpha} \\ &= A\,\varepsilon\,\Im(\alpha^t) \end{aligned}$$

Lo mismo sucede si $\ell\,\varepsilon\,\Im(\alpha)$, esto es, $\ell\,\varepsilon\,\Im(\alpha^t)$. Esto significa que $\Im(\alpha) \subsetneq \Im(\alpha^t)$. Como $\Im(\alpha)$ es maximal (ya que α es una cuasiperspectividad y un configuración cerrada) sigue que

$$\Im(\alpha^t) = \pi \Rightarrow \alpha^t = 1$$

para todo elemento de π que no está en $\Im(\alpha)$. $\square$

2.2.11 Observación. Si Γ es grupo de permutaciones sobre $\mathcal{S}$, entonces,

$$t\cdot|\Gamma| = \sum_{\alpha\,\varepsilon\,\Gamma} f(\alpha)$$

donde t es igual al números de órbitas de Γ en $\mathcal{S}$. Las órbitas de Γ en $\mathcal{S}$ se denota como

$$orb(x) = x\Gamma = \{x^{\gamma} \mid \gamma\,\varepsilon\,\Gamma\}\forall\ x\,\varepsilon\,S.$$

Y $f(\alpha)$ es igual al números de elementos de $\mathcal{S}$ que son fijados por α.

2.2.12 Teorema. Sea π un plano proyectivo. Si $\alpha \neq 1$ es una colineación de π que fija todos los puntos de una recta ℓ, entonces existe un único punto V, tal que α fija todas las rectas que pasan por V.(α no fija otro punto o recta).

Demostración. Por demostrar que $\Im(\alpha)$ es de Baer.

Es inmediato que toda recta de π contiene un punto de $\Im(\alpha)$, luego hay que demostrar que todo punto de π incide con una recta de $\Im(\alpha)$.

Supongamos que $P^\alpha = P$, $\forall\ P\ \mathbf{I}\ \ell$, y sea $B\ \varepsilon\ \pi$, tal que B no incide en ℓ.

Caso 1) Si $B^\alpha = B$, tomamos $A\ \varepsilon\ \ell$, luego $(AB)^\alpha = A^\alpha B^\alpha = AB\ \varepsilon\ \Im(\alpha)$ y $B\ \mathbf{I}\ AB$.

Caso 2) Si $B^\alpha \neq B \Rightarrow P = B^\alpha B \cap \ell$ y $P^\alpha = P$ ya que $P\ \mathbf{I}\ \ell$. Ahora

$$(PB)^\alpha = P^\alpha B^\alpha = PB^\alpha = PB$$

Luego $PB\ \varepsilon\ \Im(\alpha)$ y $B\ \varepsilon\ PB$. Luego $\Im(\alpha)$ es de Baer y como es una configuración cerrada (ya que α es una colineación) ella es maximal. Como $\Im(\alpha)$ es de Baer, puede ocurrir que: i) $\Im(\alpha)$ sea un subplano de π o ii) $\Im(\alpha)$ contiene todos los puntos de una recta y un punto y todas las rectas que inciden con ella.

Supongamos que ocurre i), esto es que $\Im(\alpha)$ es un subplano $\Rightarrow \Im(\alpha) = \pi$ (ya que $\Im(\alpha)$ es maximal) $\Rightarrow \alpha$ fija todos los puntos de $\pi \Rightarrow \alpha = 1$, esto es una contradicción. Por lo tanto ocurre ii) ($\Im(\alpha)$ contiene todos los puntos de una recta y un punto y todas las rectas que inciden con ella. □

2.3. Perspectividades

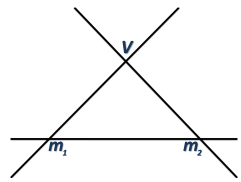
2.3.1 Definición. Sea π un plano proyectivo. Una colineación $\alpha \neq 1$ de π se dice una perspectividad, si α fija todos los puntos de una recta ℓ y ℓ es la única recta con tal propiedad.

2.3.2 Definición. Sea α una colineación que fija todos los puntos de una recta ℓ y todas las rectas que pasan por un punto V, entonces α es llamado una (V,ℓ)-*perspectividad* o una (V,ℓ)-*colineación central*.

El punto V es llamado el centro de α y ℓ el eje de α.

2.3.3 Observación. Si α es una colineación distinta a la identidad, entonces α no fija más puntos ni rectas. Dualmente, si α es una colineación distinta de la identidad que fija a un punto V y todas las rectas que pasan a través de V, entonces existe una recta L, tal que α fija a la recta L y todos los puntos de L, pero no fija más puntos ni rectas.

2.3.4 Observación. $V^\alpha = V$ (donde α es un (V,ℓ)-*perspectividad*).



Si V incide en $\ell \Rightarrow V^\alpha = V$, ya que α fija a todos los puntos de ℓ. Sólo basta ver si $V^\alpha = V$, cuando V es un punto que no incide en ℓ. Para esto sea m_1 y m_2 dos rectas que pasan por V. Como V incide en $m_1 \Rightarrow (m_1)^\alpha = m_1$ y V incide en $m_2 \Rightarrow (m_2)^\alpha = m_2$. Y como $V = m_1 \cdot m_2$,

$$V^\alpha = (m_1 \cdot m_2)^\alpha = m_1^\alpha \cdot m_2^\alpha = m_1 \cdot m_2 = V$$

2.3.5 Teorema.

a) Toda perspectividad es una cuasiperspectividad.

b) Si α es una cuasiperspectividad tal que $\Im(\alpha)$ no es un subplano, entonces α es una perspectividad.

Demostración.

a) Sea $\alpha \neq 1$ una perspectividad, entonces α fija todos los puntos de una recta ℓ, entonces por **Teorema 2.2.12**, existe un único punto V, tal que, α fija todas las rectas que inciden con V, luego α es una (V,ℓ)-perspectividad.

Luego $\forall\ P\ \varepsilon\ \ell$, $P^\alpha = P$, y $\forall$ recta m_V, tal que m_V **I** V, $(m_V)^\alpha = m_V$. Por demostrar que $\Im(\alpha)$ es denso ($\Im(\alpha)$ es ya una configuración cerrada, ya que α es una colineación).

Sea el punto $M\ \varepsilon\ \pi$ $(M \neq V)$. Como $M\ \varepsilon\ MV = m_V$ y $m_V\ \varepsilon\ \Im(\alpha)$ (ya que V es el centro de α), entonces todo punto del plano π incide con una recta de $\Im(\alpha)$.

Sea la recta $\ell_0\ \varepsilon\ \pi$ $(\ell_0 \neq \ell)$. Sea $\ell_0 \cap \ell = Q\ \varepsilon\ \Im(\alpha)$ (ya que Q I ℓ). Luego toda recta de π incide con un punto de $\Im(\alpha)$.

$\therefore \Im(\alpha)$ es de Baer (Denso).

b) Si α es una cuasiperspectividad, entonces $\Im(\alpha)$ es de Baer.

Como, por hipótesis $\Im(\alpha)$ no es un subplano, $\alpha \neq 1$, y por **Teorema 2.2.12**, α fija todos los puntos de una recta, un punto y todas las rectas que inciden con ella, luego α es una perspectividad. $\square$

2.3.6 Ejercicio. Sea π un plano proyectivo.

Si $\Gamma = aut(\pi)$ y $\Gamma_{(V,\ell)}$ es el conjunto de todas las (V,ℓ)-*perspectividades* en Γ. Probar que $\Gamma_{(V,\ell)}$ es un subgrupo de Γ.

Demostración. Por definición $\Gamma_{(V,\ell)} \subseteq \Gamma$. Sea $1 \,\varepsilon\, \Gamma_{(V,\ell)}$, por lo tanto $\Gamma_{(V,\ell)} \neq \phi$.

Sean $\alpha, \beta \,\varepsilon\, \Gamma_{(V,\ell)}$, por demostrar que $\alpha\beta^{-1} \,\varepsilon\, \Gamma_{(V,\ell)}$.

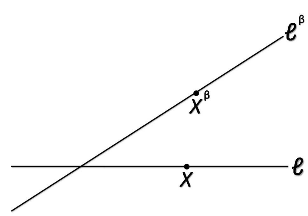
Como β es una (V,ℓ)-*perspectividad*, β^{-1} también es una (V,ℓ)-*perspectividad*, y como α es una (V,ℓ)-*perspectividad*, entonces $\alpha\beta^{-1}$ es una (V,ℓ)-*perspectividad*. Por lo tanto $\alpha\beta^{-1} \,\varepsilon\, \Gamma_{(V,\ell)}$.

$\therefore \Gamma_{(V,\ell)}$ es un subgrupo de Γ. $\square$

2.3.7 Ejercicio. Sea π un plano proyectivo.

Si α es una (V,ℓ)-*perspectividad* de π y β es una colineación cualquiera. Probar que $\beta^{-1}\alpha\beta$ es una (V^β,ℓ^β)-*perspectividad*.

Demostración. α es una (V,ℓ)-*perspectividad*, entonces $\ell^\alpha = \ell$ y $V^\alpha = V$.



Ahora

$$(V^\beta)^{\beta^{-1}\alpha\beta} = (V^{\beta\beta^{-1}})^{\alpha\beta} = V^{\alpha\beta} = (V^\alpha)^\beta = V^\beta$$

$\therefore \beta^{-1}\alpha\beta$ fija al punto V^β.

Además

$$(\ell^\beta)^{\beta^{-1}\alpha\beta} = (\ell^{\beta\beta^{-1}})^{\alpha\beta} = \ell^{\alpha\beta} = (\ell^\alpha)^\beta = \ell^\beta.$$

$\therefore\ \beta^{-1}\alpha\beta$ fija a la recta ℓ.

Ahora

$$\forall x_0\ \varepsilon\ \ell \Rightarrow (x_0)^\beta = x_0^\beta\ \varepsilon\ \ell^\beta,$$

entonces

$$(x_0^\beta)^{\beta^{-1}\alpha\beta} = (x_0^{\beta\beta^{-1}})^{\alpha\beta} = x_0^{\alpha\beta} = (x_0^\alpha)^\beta = x_0^\beta,$$

ya que α fija a todos los puntos de ℓ.

$\therefore\ \beta^{-1}\alpha\beta$ fija a todos los puntos de ℓ^β

Sólo basta demostrar que $\beta^{-1}\alpha\beta$ no fija a los puntos que no inciden en ℓ^β y sean distintos de V^β.

Sea $V \neq p \neq V^\beta$, tal que p no incide en ℓ^β.

Suponer que

$$p^{\beta^{-1}\alpha\beta} = p \Leftrightarrow p^{\beta^{-1}\alpha} = p^{\beta^{-1}} \Rightarrow (p^{\beta^{-1}})^\alpha = p^{\beta^{-1}}.$$

$\therefore\ \alpha$ fija al punto $p^{\beta^{-1}}$ (esto es una contradicción, ya que α es una (V,ℓ)-*perspectividad.*))

$\therefore\ \beta^{-1}\alpha\beta$ fija solamente a la recta ℓ^β y todos sus puntos, y además fija al punto V^β.

$\therefore\ \beta^{-1}\alpha\beta$ es una (V^β,ℓ^β)-*perspectividad.* □

2.3.8 Definición. Sea α una (V,ℓ)-*perspectividad*. Si V incide en ℓ, se dice que α es una *Elación*, si V no incide en ℓ, se dice que α es una *Homología*.

2.3.9 Lema. Sea π un plano proyectivo finito de orden n y sea α una perspectividad de π de orden k, entonces :

i) k/n y α es una elación.
o
ii) $k/(n-1)$ y α es una homología.

Demostración. α es una perspectividad de π, entonces α es una (V,ℓ)-perspectividad distinta de la identidad.

Sea la recta $m \neq \ell$. Sean $\{P_1, P_2, \ldots, P_{n+1}\}$ los $n+1$ puntos de m.

Caso (1) Supongamos que $V = m \cap \ell$ (esto es V **I** ℓ), luego α es una elación. Sin perder generalidad, podemos suponer además que $V = P_{n+1}$.

Como α es una perspectividad que fija a V, toda recta que pasa por V y todo punto de ℓ y no fija más puntos y rectas, entonces por **Lema 2.2.10**, $< \alpha >$ actúa semi-regularmente sobre $\Omega = \{P_1, \ldots, P_n\}$. Como

$$
\begin{aligned}
t \cdot |< \alpha >| &= \sum_{\alpha^i \, \varepsilon <\alpha>} f(\alpha^i) \\
&= f(\alpha^1) + f(\alpha^2) + \cdots + f(\alpha^i) \\
&= \quad 0 \quad + \quad 0 \quad + \cdots + f(\alpha^i) \\
&= f(\alpha^i) = |\Omega| = n
\end{aligned}
$$

por lo tanto,

$$
t \cdot |< \alpha >| = \sum_{\alpha^i \, \varepsilon <\alpha>} f(\alpha^i) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{Si } \alpha^i \neq 1 \\ |\Omega| & \text{Si } \alpha^i = 1 \end{array} \right.
$$

luego $t \cdot k = n \Rightarrow k/n$ y α es una elación.

Caso (2) Supongamos que $P_{n+1} = m \cap \ell$ (esto es V no incide en ℓ), luego α es una homología. Sin perder generalidad, supongamos que $V = P_n$.

Como α es una perspectividad, α fija a V, toda recta que pasa por V y todo punto de ℓ y no fija más puntos y rectas, entonces por **Lema 2.2.10**, $< \alpha >$ actúa semi-regularmente sobre $\Omega = \{P_1, \ldots, P_{n-1}\}$. Como

$$
\begin{aligned}
t \cdot |< \alpha >| &= \sum_{\alpha^i \, \varepsilon <\alpha>} f(\alpha^i) \\
&= f(\alpha^1) + f(\alpha^2) + \cdots + f(\alpha^i) \\
&= \quad 0 \quad + \quad 0 \quad + \cdots + f(\alpha^i) \\
&= f(\alpha^i) = |\Omega| = n - 1
\end{aligned}
$$

por lo tanto

$$
t \cdot |< \alpha >| = \sum_{\alpha^i \, \varepsilon <\alpha>} f(\alpha^i) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{Si } \alpha^i \neq 1 \\ |\Omega| & \text{Si } \alpha^i = 1 \end{array} \right.
$$

luego $t \cdot k = n - 1 \Rightarrow k/n - 1$ y α es una homología. $\square$

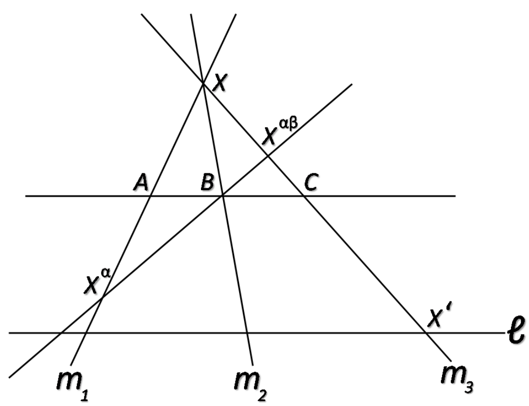
2.3.10 Teorema. Sea π un plano proyectivo de orden n y π_0 un subplano de π de orden m, entonces π_0 es un subplano de Baer si y sólo si $n = m^2$.

2.3.11 Ejercicio. Sea π un plano proyectivo.

Sea $1 \neq \alpha$ es una (A, ℓ)-*perspectividad* y $1 \neq \beta$ es una (B, ℓ)-*perspectividad* con $A \neq B$. Pruebe que $1 \neq \alpha\beta$ es una (C, ℓ)-*perspectividad*, con $C \neq A$ y $C \neq B$.

Demostración. Consideremos las rectas $m_1, m_2 \neq \ell$, tal que $A \, \varepsilon \, m_1$ y $B \, \varepsilon \, m_2$. Sea $x = m_1 \cdot m_2$, ahora $x^{\alpha\beta}$ es un punto que no pertenece a m_1 ni a m_2.

Sea m_3 la recta que une los puntos x con $x^{\alpha\beta}$, y sea x' el punto de intersección de m_3 con la recta ℓ. (Ver figura)



Por lo tanto,

$$xx^{\alpha\beta} = xC = xx' = x^{\alpha\beta}C = x^{\alpha\beta}x' = Cx',$$

ahora, como AB es la recta que pasa a través de A y B, y α y β son (A, ℓ), (B, ℓ)-*perspectividades* respectivamente, entonces

$$(AB)^{\alpha\beta} = AB y (x')^{\alpha\beta} = x',$$

ya que x' es un punto de ℓ, entonces

$$C^{\alpha\beta} = (AB \cap xx')^{\alpha\beta} = (AB)^{\alpha\beta} \cap (xx')^{\alpha\beta} = AB \cap x^{\alpha\beta}x'^{\alpha\beta} = AB \cap x^{\alpha\beta}x' = C,$$

por lo tanto $\alpha\beta$ fija al punto C, basta demostrar que $\alpha\beta$ fija toda recta que pasa por C.

Consideremos el punto $p_0 \,\varepsilon\, \ell$, tal que $p_0 \neq x'$, ahora

$$(p_0 \cdot C)^{\alpha\beta} = (p_0)^{\alpha\beta} \cdot C^{\alpha\beta} = p_0 \cdot C$$

ya que p_0 es un punto de ℓ. Como $\alpha\beta$ es la colineación que fija al punto C y todas las rectas que pasan a través de C. Por lo tanto $\alpha\beta$ es una (C, ℓ)-*perspectividad*. $\square$

2.3.12 Ejercicio. Sea $\Gamma \leq aut(\pi)$. Se define:

$$\Gamma_{(\ell,\ell)} = \bigcup_{A \,\varepsilon\, \ell} \Gamma_{(A,\ell)}$$

$$\Gamma_{(\ell)} = \bigcup_{p \,\varepsilon\, \pi} \Gamma_{(p,\ell)}$$

Demuestre que $\Gamma_{(\ell,\ell)} \trianglelefteq \Gamma_{(\ell)}$.

Demostración.

i) $\Gamma_{(\ell)} \leq \Gamma$

$i.1$) $\Gamma_{(\ell)} \subset \Gamma$ por definición.

$i.2$) $\Gamma_{(\ell)} \neq \phi$ ya que $1 \,\varepsilon\, \Gamma_{(\ell)}$

$i.3$) Sean $\alpha, \beta \,\varepsilon\, \Gamma_{(\ell)}$. Ahora α es una (p_1, ℓ)-*perspectividad* ($p_1 \,\varepsilon\, \pi$) y β es una (p_2, ℓ)-*perspectividad* ($p_2 \,\varepsilon\, \pi$), por **Ejercicio 2.3.11**, $\alpha\beta$ es una (p_3, ℓ)-*perspectividad*, entonces $\alpha\beta \,\varepsilon\, \Gamma_{(\ell)}$. Además β^{-1} es una (p_2, ℓ)-*perspectividad*, entonces $\beta^{-1} \,\varepsilon\, \Gamma_{(\ell)}$. Por lo tanto $\alpha\beta^{-1} \,\varepsilon\, \Gamma_{(\ell)}$.

ii) Por demostrar que $\beta^{-1} \cdot \Gamma_{(\ell,\ell)} \cdot \beta \subset \Gamma_{(\ell,\ell)}$, $\forall\, p \,\varepsilon\, \Gamma_{(\ell)}$.

Sea $\gamma \,\varepsilon\, \beta^{-1} \cdot \Gamma_{(\ell,\ell)} \cdot \beta$

$\Rightarrow \gamma = \beta^{-1}\alpha\beta$ con $\alpha \,\varepsilon\, \Gamma_{(\ell,\ell)}$ $\forall\, \beta \,\varepsilon\, \Gamma_{(l)}$, luego α es una (A, ℓ)-*elación*
$\Rightarrow \gamma$ es una (A^β, ℓ^β)-*perspectividad*, (por **Ejercicio 2.3.7**)
$\Rightarrow \gamma$ es una (A, ℓ)-*perspectividad*, con $A \,\varepsilon\, \ell$
$\Rightarrow \gamma$ es una (A, ℓ)-*elación*.
$\therefore \gamma \,\varepsilon\, \Gamma_{(\ell,\ell)}$. $\square$

2.3.13 Ejercicio.

Sea π un plano proyectivo y $\Gamma \leq aut(\pi)$. Si $\Gamma_{(p,\ell)}$ es no trivial para dos distintos puntos de p de ℓ.

i) Pruebe que $\Gamma_{(\ell,\ell)}$ es abeliano.

ii) Todos los elementos distintos de la identidad en $\Gamma_{(\ell,\ell)}$, tienen el mismo orden (infinito o primo).

Demostración.

i) Demostrar que $\Gamma_{(\ell,\ell)}$ es abeliano.

Caso (1). Sean $1 \neq \alpha$ una (A,ℓ)-*elación* y $1 \neq \beta$ una (B,ℓ)-*elación*, con $A \neq B$, por demostrar que $\alpha\beta = \beta\alpha$ ($\Leftrightarrow (\beta\alpha)^{-1} \cdot \alpha\beta = 1$, ed. $\alpha^{-1}\beta^{-1} \cdot \alpha\beta = 1$)

Como β es una (B,ℓ)-*elación*, entonces β^{-1} también lo es (lo mismo para α^{-1}, es una (A,ℓ)-*elación*).

Ahora por **Ejercicio 2.3.12**

$$\alpha^{-1}\beta^{-1}\alpha\beta = \underbrace{\alpha^{-1}}_{\varepsilon\,\Gamma_{(A,\ell)}} \underbrace{(\beta^{-1}\alpha\beta)}_{\varepsilon\,\Gamma_{(A,\ell)}},$$

por otro lado

$$\alpha^{-1}\beta^{-1}\alpha\beta = \underbrace{(\alpha^{-1}\beta^{-1}\alpha)}_{\varepsilon\,\Gamma_{(B,\ell)}} \underbrace{\beta}_{\varepsilon\,\Gamma_{(B,\ell)}}$$

$\Rightarrow \alpha^{-1}\beta^{-1}\alpha\beta \;\varepsilon\; \Gamma_{(A,\ell)} \cap \Gamma_{(B,\ell)} = \{1\}$
$\Rightarrow \alpha^{-1}\beta^{-1}\alpha\beta = 1$
$\Rightarrow \alpha\beta = \beta\alpha$.

Caso (2). Sean α_1, α_2 dos (A,ℓ)-*elaciones*, por demostrar que $\alpha_1\alpha_2 = \alpha_2\alpha_1$.

Sea β una (B,ℓ)-*elación* con $B \neq A$, entonces por el Caso (1), $\alpha_1\beta = \beta\alpha_1$ y $\alpha_2\beta = \beta\alpha_2$.

Ahora $\alpha_1\beta$ es una elación con centro $\neq A$ (por **Ejercicio 2.3.12**), luego $\alpha_1\beta$ conmuta con

α_2, esto es, $(\alpha_1\beta)\alpha_2 = \alpha_2(\alpha_1\beta)$.

Como $\alpha_1\beta = \beta\alpha_1$,

$\Rightarrow (\alpha_1\beta)\alpha_2 = (\beta\alpha_1)\alpha_2 = \beta(\alpha_1\alpha_2)$

$\Rightarrow \beta(\alpha_1\alpha_2) = (\alpha_2\alpha_1)\beta$

$\Rightarrow \alpha_1\alpha_2 = \alpha_2\alpha_1$

$\therefore$ Del Caso (1) y del Caso (2), se tiene que $\Gamma_{(\ell,\ell)}$ es abeliano.

ii) Demostrar que todos los elementos distintos de la identidad en $\Gamma_{(\ell,\ell)}$, tienen el mismo orden (infinito o primo).

ii.1) Caso infinito.

Sea G un grupo finito y abeliano, entonces existe un número primo p, tal que $p/|G|$, por lo tanto existe $a \,\varepsilon\, G$, tal que $a^p = Id$.

Como $\Gamma_{(\ell,\ell)}$ es abeliano y finito, entonces también existe un número primo, digamos p, tal que $p/|\Gamma_{(\ell,\ell)}|$, entonces existe $\gamma \,\varepsilon\, \Gamma_{(\ell,\ell)}$, tal que $\gamma^p = 1$, y donde γ es una (C,ℓ)-elación.

Sea $\delta \,\varepsilon\, \Gamma_{(\ell,\ell)}$, tal que δ es una (D,ℓ)-elación, con $D \neq C$. Por demostrar que $\delta^p = 1$.

En efecto, como $\Gamma_{(\ell,\ell)}$ es abeliano, entonces $\gamma\delta = \delta\gamma$, luego se cumple $(\gamma\delta)^p = \gamma^p\delta^p = \delta^p$ y así δ^p es una (D,ℓ)-elación, es decir $\delta^p \,\varepsilon\, \Gamma_{(D,\ell)}$.

Por otro lado, $\gamma\delta$ es una (E,ℓ)-elación, con $E \neq D$, entonces $(\gamma\delta)^p$ también es una (E,ℓ)-elación, luego $\delta^p \,\varepsilon\, \Gamma_{(D,\ell)} \cap \Gamma_{(E,\ell)} = \{1\}$, con $(D \neq E)$, entonces $\delta^p = 1$. Por lo tanto, toda elación de $\Gamma_{(\ell,\ell)}$ con centro distinto de C, tiene orden p.

Falta probar que toda elación distinta de γ con centro C, también tiene orden p.

Sea $\theta \,\varepsilon\, \Gamma_{(C,\ell)}$, entonces θ es una (C,ℓ)-elación con $(\theta \neq \gamma)$, por demostrar que $\theta^p = 1$.

Sea δ una (D,ℓ)-elación, con $D \neq C$, entonces $\delta^p = 1$, y como $\Gamma_{(\ell,\ell)}$ es abeliano, se cumple que $\theta\delta = \delta\theta$. También se cumple que $(\theta\delta)^p = \theta^p\delta^p = \theta^p$ es una (C,ℓ)-elación. Por otro lado θ es una (E,ℓ)-elación, luego θ^p es una (E,ℓ)-elación. Entonces $\theta^p \,\varepsilon\, \Gamma_{(C,\ell)} \cap \Gamma_{(E,\ell)} = \{1\}$, con $(C \neq E)$, entonces $\theta^p = 1$. $\square$

2.3.14 Ejercicio. Sea π un plano proyectivo finito de orden n y sea $\Gamma \leq aut(\pi)$.

Si $|\Gamma_{(A,\ell)}| > 1$ para un mínimo de dos A sobre ℓ, entonces $\Gamma_{(A,\ell)}$ es un p-grupo abeliano de orden p, donde p es un número primo divisor de n.

Demostración. Por **Ejercicio 2.3.13**, $\Gamma_{(\ell,\ell)}$ es un grupo abeliano de orden p. Como $\Gamma_{(A,\ell)} \leq \Gamma_{(\ell,\ell)}$ para todo $A\mathbf{I}\ell$, entonces $\Gamma_{(A,\ell)}$ también es abeliano.

Ahora, $|\Gamma_{(A,\ell)}|/|\Gamma_{(\ell,\ell)}|$ con $|\Gamma_{(\ell,\ell)}| = p$. Como $\Gamma_{(A,\ell)} \neq \{1\}$, ya que $|\Gamma_{(A,\ell)}| > 1$, entonces $|\Gamma_{(A,\ell)}| = p$ (ya que p es primo), luego $\Gamma_{(A,\ell)}$ es un p-grupo abeliano de orden p.

Falta probar que p/n. En efecto, sea

$$\alpha \; \varepsilon \; \Gamma_{(\ell,\ell)} = \bigcup_{A\mathbf{I}\ell} (A, \ell)$$

Entonces α es una (A, ℓ)-elación de orden p, y por resultado anterior, p/n. □

2.3.15 Ejercicio. Sea un plano proyectivo de orden n y sea $\Gamma \leq aut(\pi)$, entonces para cualquier recta ℓ de π, $|\Gamma_{(\ell,\ell)}|/n^2$

Demostración. Sea $A = \pi^\ell$, un plano proyectivo sin la recta ℓ, la cual contiene $n^2 + n$ rectas y n^2 puntos en A (plano afín). Luego

$$t \cdot |\Gamma_{(\ell,\ell)}| = \sum_{\alpha \; \varepsilon \; \Gamma_{(\ell,\ell)}} \#\{p \; \varepsilon \; \pi^\ell | p^\alpha = p\}$$

este resultado es 0 si $\alpha \neq 1$ y n^2 si $\alpha = 1$.

Por lo tanto $t \cdot |\Gamma_{(\ell,\ell)}| = n^2$, entonces $|\Gamma_{(\ell,\ell)}|/n^2$ □

2.3.16 Ejercicio. El producto de 2 elaciones con un mismo eje ℓ y $\neq$s centros V_1 y V_2, es también una elación con eje ℓ y centro $V_3 \neq V_1, V_2$.

Demostración. Sea α una (V_1, ℓ)-*elación* y β una (V_2, ℓ)-*elación*.

Sea $x \; \varepsilon \; \ell$, entonces

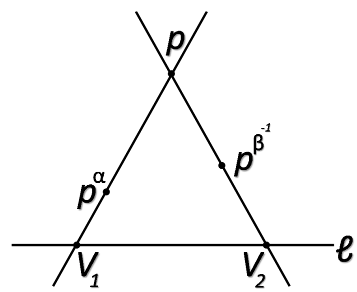
$$x^{\alpha\beta} = x^\beta = x.$$

Luego $\alpha\beta$ fija todo punto de ℓ (y $\ell^{\alpha\beta} = \ell$)

$\Rightarrow \exists!\ V_3$ fijado por $\alpha\beta$ (es decir $(V_3)^{\alpha\beta} = V_3$), tal que $\alpha\beta$ es una (V_3, ℓ)-*perspectividad*, por **Ejercicio 2.3.11**.

Por demostrar que $\alpha\beta$ es en realidad una (V_3)-*elación*, basta probar que $\alpha\beta$ no fija puntos fuera de la recta ℓ.

Supongamos que $p^{\alpha\beta} = p$ con p no incidente en $\ell \Rightarrow (p)^{\beta^{-1}} = p^{\alpha}$ donde β^{-1} es una (V_2, ℓ)-*elación*



$\therefore V_1 = pp^{\alpha} \cap \ell$ y $V_2 = p(p)^{\beta^{-1}} \cap \ell$.

Como

$$p^{\alpha} = (p)^{\beta^{-1}} \Rightarrow V_1 = V_2$$

es una contradicción, por lo tanto $\alpha\beta$ no fija puntos fuera de la recta ℓ.

Falta probar que $V_3 \neq V_1, V_2$, es inmediato por **Ejercicio 2.3.11.** □

2.4. Transitividad

2.4.1 Definición. Sea π un plano proyectivo. Se dice que π es una (V, ℓ)-*transitividad*, si para cada par de punto A y B, con $VA = VB$, $A \neq B$, y además distintos de V, A, B no incidentes en ℓ, existe una (V, ℓ)-*perspectividad* α tal que $A^{\alpha} = B$.

2.4.2 Definición. Si un plano proyectivo π es (x, ℓ)-*transitivo* para todo punto x sobre una recta m, entonces π es llamado (m, ℓ)-*transitivo*.

Si ℓ es una recta cualquiera de π, tal que π es (ℓ, ℓ)-*transitivo*, entonces ℓ es llamado *recta de translación de* π.

Si ℓ es una recta de translación de π, el plano proyectivo π es llamado un *plano de translación con relación a la recta* ℓ.

2.4.3 Teorema. Si un plano proyectivo π es (A, ℓ)-*transitivo* y (B, ℓ)-*transitivo* para A, B puntos $\neq s$ sobre ℓ, entonces ℓ es una recta de translación de π.

Demostración. Por demostrar que $\forall\ \mathfrak{c} \ \varepsilon\ \ell$, π es $(\mathfrak{c}, \ell)$-*transitivo.*

Escojamos $x, y \neq s$, tal que $x \neq \mathfrak{c} \neq y$ con $\mathfrak{c}x = y\mathfrak{c}$, y además $x, y \ \not\varepsilon\ \ell$.

Por demostrar que existe una $(\mathfrak{c}, \ell)$-*elación* γ, tal que $x^\gamma = y$.

Sea z no incidente en ℓ tal que $z = xA \cap yB$. Como π es (A, ℓ)-*transitivo*, existe una (A, ℓ)-*elación* α, tal que $x^\alpha = z$.

Como π es (B, ℓ)-*transitivo*, existe una (B, ℓ)-*elación* β, tal que $z^\beta = y$

$$x^{\alpha\beta} = (x^\alpha)^\beta = z^\beta = y.$$

Luego $\alpha\beta$ lleva x en y.

Ahora como α es una (A, ℓ)-*elación* y β es una (B, ℓ)-*elación*, entonces $\alpha\beta$ es una (V, ℓ)-*elación* (con $V \neq A$ y $V \neq B$).

Por demostrar $V = \mathfrak{c}$.

Ahora $(Vx)^{\alpha\beta} = Vx$ (ya que V es el centro de $\alpha\beta$)

$$x \ \varepsilon\ Vx \Rightarrow x^{\alpha\beta} \ \varepsilon\ (Vx)^{\alpha\beta} \Rightarrow x^{\alpha\beta} \ \varepsilon\ Vx.$$

Luego $y \ \varepsilon\ Vx$, entonces $V \ \varepsilon\ xy$, como $V \ \varepsilon\ \ell$, entonces $V \ \varepsilon\ xy \cap \ell$, y como $\mathfrak{c} \ \varepsilon\ xy \cap \ell$, se tiene que $V = \mathfrak{c}$. Por lo tanto ℓ es una recta de translación. □

2.4.4 Ejercicio. Si un plano proyectivo π es (A, ℓ)-*transitivo* y (B, ℓ)-*transitivo* para $A \neq B$. Probar que π es (AB, ℓ)-*transitivo.*

Demostración. Si $A \ \varepsilon\ \ell$ y $B \ \varepsilon\ \ell$, entonces por **Teorema 2.4.3**, π es (AB, ℓ)-*transitivo.*

Suponer que A, B no inciden en ℓ. Por demostrar que $\forall\ \mathfrak{c} \ \varepsilon\ AB$, π es $(\mathfrak{c}, \ell)$-*transitivo.*

Escojamos $x, y \neq$s tal que $x \neq \mathfrak{c} \neq y$, con $\mathfrak{c}x = y\mathfrak{c}$. Por demostrar que existe una $(\mathfrak{c}, \ell)$-*perspectividad* γ, tal que $x^\gamma = y$.

Sea z no incidente en ℓ tal que $z = xA \cap yB$. Como π es (A, ℓ)-*transitivo*, existe una (A, ℓ)-*perspectividad* α, tal que $x^\alpha = z$, y como π es (B, ℓ)-*transitivo*, existe una (B, ℓ)-*perspectividad* β, tal que $z^\beta = y$.

$$x^{\alpha\beta} = z^\beta = y.$$

Luego $\alpha\beta$ lleva x en y. Ahora, como α es una (A, ℓ)-*perspectividad* y β es una (B, ℓ)-*perspectividad*, entonces $\alpha\beta$ es una (V, ℓ)-*perspectividad* (con $V \neq A$ y $V \neq B$). Sólo basta demostrar que $V = \mathfrak{c}$.

$$(Vx)^{\alpha\beta} = Vx,$$

ya que V es el centro de $\alpha\beta$,

$$x \in Vx \Rightarrow x^{\alpha\beta} \in Vx,$$

luego $y \in Vx$, entonces $V \in xy$, como $V \in \ell$, entonces $V \in xy \cap \ell$, y como $\mathfrak{c} \in xy \cap \ell$, se tiene que $V = \mathfrak{c}$.

$\therefore$ π es (AB, ℓ)-*transitivo*. □

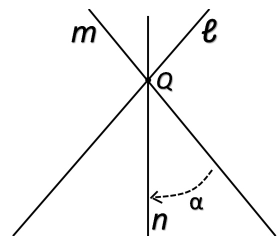
2.4.5 Ejercicio. Sea ℓ una recta de translación sobre un plano proyectivo π y $\alpha \in aut(\pi)$. Pruebe que ℓ^α es también una recta de translación de π.

Demostración. Para todo punto $V \in \ell$, entonces $V^\alpha \in \ell^\alpha$, y como ℓ es una recta de translación, existe una (V, ℓ)-*perspectividad* β, y como α es una colineación cualquiera, entonces $\alpha^{-1}\beta\alpha$ es una (V^α, ℓ^α)-*perspectividad* (por **Ejercicio 2.3.7**).

Sea $x \in VV^\alpha$, tal que $x \neq V^\alpha$, y como $\alpha^{-1}\beta\alpha$ es una (V^α, ℓ^α)-*perspectividad*, entonces $V^\alpha \neq (x)^{\alpha^{-1}\beta\alpha} \in VV^\alpha$. Por lo tanto π es (V^α, ℓ^α)-*transitivo*. Y como es para todo V, entonces ℓ^α es una recta de traslación. □

2.4.6 Teorema. Si ℓ y m son rectas de translación de un plano proyectivo π, entonces cada recta que pasa por $\ell \cdot m$ es también una recta de translación.

Demostración. Sea $\alpha \in \Gamma_{(\ell,\ell)} = aut(\pi)$

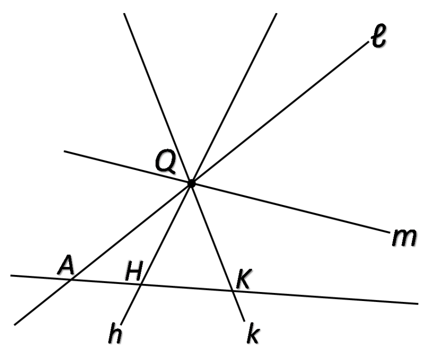


Sea Q un punto de ℓ, tal que $Q \varepsilon n \neq \ell$. Si existe α tal que $m^{\alpha} = n$, con $\alpha \varepsilon \Gamma = aut(\pi)$, m es recta de translación.

$\Rightarrow m^{\alpha}$ también lo es,

$\therefore n$ es una recta de translación.

Luego hay que probar que π es $\Gamma_{(\ell,\ell)}$-*transitivo* en las rectas $\neq$s de ℓ que pasan por $Q = \ell \cdot m$.



Sean h, k dos rectas distintas de ℓ, tal que $h \neq k$, y sea además $Q \neq A \varepsilon \ell$. Escojamos $H \varepsilon h$ y $K \varepsilon k$, tal que A, H, K sean colineales.

Como $A \varepsilon \ell$, entonces existe una (A, ℓ)-*elación* α (ya que ℓ es recta de translación), tal que es transitivo en los puntos H, K, esto es $H^{\alpha} = K$.

Ahora $h = QH$, luego

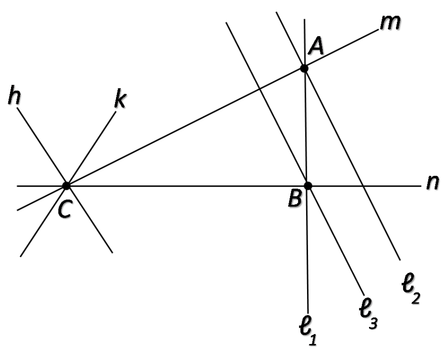
$$h^{\alpha} = Q^{\alpha} H^{\alpha} = QK = k$$

($Q^{\alpha} = Q$ ya que $Q \varepsilon \ell$).

$\therefore h^{\alpha} = k$ $\square$

2.4.7 Teorema. Si π tiene 3 rectas de translación no concurrentes, entonces cada recta de π es una recta de translación y π es llamado plano de Moufang.

Demostración.



Basta probar que π es transitivo para cualquier par de rectas que son concurrentes.

Sean ℓ_1, ℓ_2 y ℓ_3 rectas de translación (no concurrentes las 3 rectas), m y n son rectas de translación (por **Teorema 2.4.6**). Sea $c = m \cdot n$ y c incidente en h y k, por **Definición 2.4.1**, existe $\alpha \ \varepsilon \ aut(\pi)$, tal que $h^\alpha = k$, luego esto prueba que π es transitivo en cualquier par de rectas concurrentes.

Por lo tanto, sea t una recta de π, luego t es concurrente con ℓ, entonces existe α, tal que $\mathsf{t} = (\ell_1)^\alpha = \ell_1^\alpha$ (ℓ_1^α recta de translación). Es claro que t es concurrente con ℓ_2 y también con ℓ_3. Por lo tanto t es recta de translación. $\square$

Capítulo 3

Configuración de Desargues

3.1. Configuración de Desargues

Consideremos ahora las consecuencias configuracionales de la existencia de perspectividades en un plano proyectivo π. Si α es una (V,ℓ)-*perspectividad* de π, entonces α está completamente determinada por la imagen de un único elemento no fijo.

Supongamos que está dado $(p_1)^\alpha$ para algún punto fijo p_1, entonces la imagen de p_2 para algún punto no fijo p_2 no incidente en p_1V, puede ser construido tal como sigue.

Sea $p_1p_2 \cap \ell = x$, entonces desde

$$p_2 = Vp_2 \cap xp_1, p_2^\alpha = (Vp_2)^\alpha \cap (xp_1)^\alpha = Vp_2 \cap x(p_1)^\alpha$$

(Nótese que $(Vp_2)^\alpha = Vp_2$ ya que α fija todas las rectas que pasan por V).

Ahora, sea p_3 un punto no incidente en Vp_1 o Vp_2, entonces podemos construir $(p_3)^\alpha$ (por la construcción anterior), con cualquiera de los 2 puntos p_1 o p_2. Luego se desprende que, $(p_3)^\alpha$ es único, cualquier opción nos dará el mismo punto, así que ciertas incidencias son forjadas sobre π. Sea $p_2p_3 \cap \ell = y$ y $p_3p_1 \cap \ell = z$, entonces

$$(p_3)^\alpha = Vp_3 \cap z(p_1)^\alpha = Vp_3 \cap y(p_2)^\alpha.$$

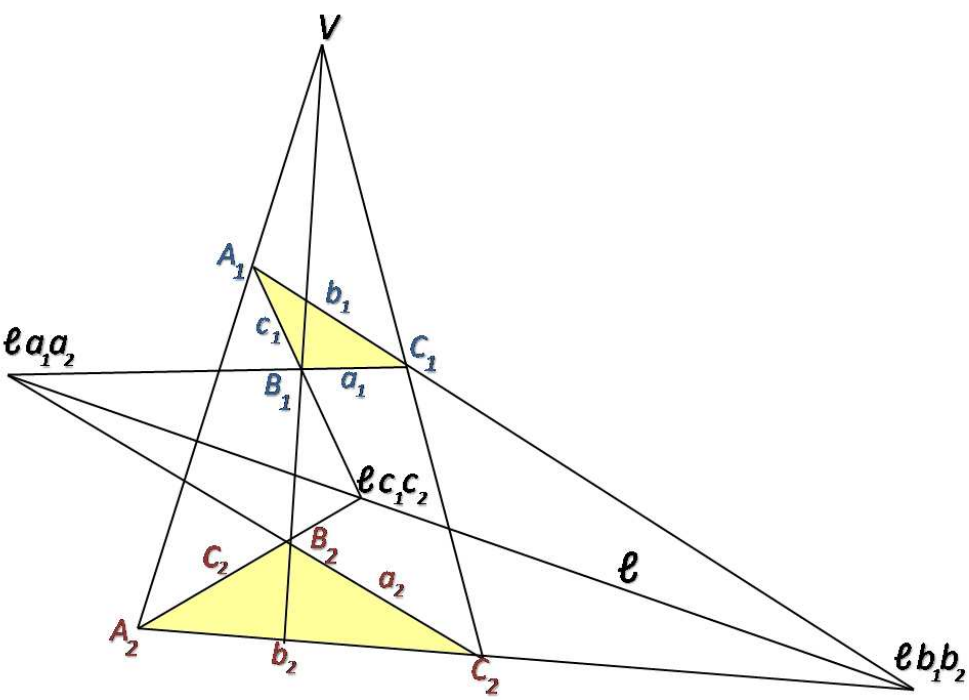
Algún subconjunto de puntos y rectas de π es llamada una *configuración* y la *configuración* formada por 10 puntos $V, x, y, z, p_1, p_2, p_3, p_1^\alpha, p_2^\alpha, p_3^\alpha$ y 10 rectas $\ell, Vp_1p_1^\alpha, Vp_2p_2^\alpha, Vp_3p_3^\alpha, xp_1p_2, xp_1^\alpha p_2^\alpha, yp_2p_3, yp_2^\alpha p_3^\alpha, zp_3p_1, zp_3^\alpha p_1^\alpha$ es llamada la ***Configuración de Desargues***. Claramente algún plano el cual admite una perspectividad tiene muchas *configuraciones de Desargues*. Sin embargo, ante de discutir alguna consecuencia de esta configuración, daremos una definición más formal.

Sea Δ_i con $(i = 1, 2)$ un triángulo con vértices A_i, B_i, C_i y los lados opuestos a_i, b_i, c_i. Si hay un punto V tal que $VA_1 = VA_2$, $VB_1 = VB_2$ y $VC_1 = VC_2$, entonces los triángulos Δ_1, Δ_2 han sido visto de la perspectividad de V. Siendo la perspectividad de una recta ℓ definida dualmente.

3.1.1 Teorema. Sea π un plano proyectivo. Si α es una (V, ℓ)-*perspectividad* y Δ es un triángulo que no tiene lados y vértices fijos por α, entonces los triángulos Δ, Δ^α son ambas perspectividad de V y ℓ. (o están en perspectividad de V y ℓ).

Notación. Sea Δ, un triángulo determinado por A, B, C, entonces Δ^α es un triángulo determinado por $A^\alpha, B^\alpha, C^\alpha$.

Ahora podemos dar una definición formal de la *Configuración de Desargues*. Sea $\Delta_i (i = 1, 2)$ algunos de los triángulos con vértices A_i, B_i, C_i y los lados opuestos a_i, b_i, c_i, tal que ellos están en perspectiva desde un punto V y una recta ℓ. Entonces la configuración formada por los 10 puntos $V, A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, \ell a_1 a_2, \ell b_1 b_2, \ell c_1 c_2$ y las 10 rectas $\ell, a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$, $VA_1A_2, VB_1B_2, VC_1C_2$, es llamada la ***Configuración de Desargues*** (Ver Fig.). En la situación especial donde $V \varepsilon \ell$, la configuración es a menudo la referencia con la menor o mas pequeña *Cofiguración de Desargues*.



3.1.2 Teorema. Todo plano proyectivo π, contiene un par de triángulos, los cuales son perspectivos desde un punto y una recta.

Demostración. Sea π un plano finito de orden n. Asumiremos que $n \geq 5$.

Sea ℓ una recta de π y sea V un punto de π^{ℓ}. Sean ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 3 rectas distintas que pasan por V, y sea A, B algunos puntos distintos incidentes en ℓ, tal que A y B no están sobre ninguna de las 3 rectas ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3, esta opción es posible desde $n \geq 5$.

Construiremos una aplicación desde los puntos de $\ell_1 \diagdown \{V, \ell\ell_1\}$ a los puntos de $\ell \diagdown \{A, B, \ell\ell_1, \ell\ell_3\}$.

Elegimos un punto $x \; \varepsilon \; \ell_1 \diagdown \{V, \ell\ell_1\}$. Unimos A con x y obtenemos $x_2 = Ax \cap \ell_2$. Ahora unimos B con x_2 y se obtiene $x_3 = Bx_2 \cap \ell_3$. Finalmente se une x con x_3 y definimos α por $x^{\alpha} = xx_3 \cap \ell$.

Claramente x, x^{α} son únicos, también es mostrado que para algún $x \; \varepsilon \; \ell_1 \diagdown \{V, \ell\ell_1\}$, el punto $x^{\alpha} \; \varepsilon \; \ell \diagdown \{A, B, \ell\ell_1, \ell\ell_3\}$. El número de opciones para elegir el punto x es $n-1$, mientras las posibilidades para x^{α} es a lo más $n-3$. Así se da la existencia de 2 puntos distintos $y, z \; \varepsilon \; \ell_1$, tal que $y^{\alpha} = z^{\alpha}$.

Para dos puntos cualesquiera $P, Q \; \varepsilon \; \ell_1 \diagdown \{V, \ell\ell_1\}$, los triángulos PP_2P_3, QQ_2Q_3, están desde la perspectiva de V. También $PP_2 \cap QQ_2 = A \; \varepsilon \; \ell$ y $P_2P_3 \cap Q_2Q_3 = B \; \varepsilon \; \ell$. Así los triángulos están en perspectiva de ℓ, si y sólo si $PP_3 \cap QQ_3 \; \varepsilon \; \ell$. Pero

$$PP_3 \cap \ell = P^{\alpha} y QQ_3 \cap \ell = Q^{\alpha}.$$

Así que los triángulos PP_2P_3, QQ_2Q_3 están en perspectividad de ℓ si y sólo si $P^{\alpha} = Q^{\alpha}$. Así los triángulos yy_2y_3 y zz_2z_3 están en perspectividad de ambos V y ℓ. □

3.1.3 Teorema (Baer). Un plano proyectivo π es (V, ℓ)-*transitivo* si y sólo si π es (V, ℓ)-*desarguesiano.*

Demostración. Suponer que π es (V, ℓ)-*transitivo.* Entonces por el **Teorema 3.1.1**, implica que π es (V, ℓ)-*desarguesiano.*

Suponer que π es (V, ℓ)-*desarguesiano.* Si dos puntos cualquiera A, A_1 distintos, tal que $A \neq V \neq A_1$, $VA = VA_1$, con A, A_1 no incidentes en ℓ, entonces construiremos una (V, ℓ)-*perspecti–vidad* γ tal que $A^{\gamma} = A_1$.

Definiremos $\alpha = \alpha_{AA_1}$ en los puntos de $(\pi \diagdown AA_1) \bigcup \{V\}$ por:

(i) Si $x \; \varepsilon \; \ell$, $x^{\alpha} = x$;
(ii) $V^{\alpha} = V$;
(iii) Si B no está en ℓ o AA_1, sea $Y = \ell \cap AB$, $B_1 = YA_1 \cap VB$ y se define $B_1 = B^{\alpha}$.

(Notar que, lo que estamos haciendo es definir α, tal que, si la colineación γ existe, entonces γ y α actúan idénticamente en los puntos de $(\pi \setminus AA_1)\bigcup\{V\}$.

Para cada punto B de $\pi\setminus AA_1$, con $B \neq V$ y no incidente en la recta ℓ, entonces podemos definir $\beta = \alpha_{BB_1}$, donde $B_1 = B^\alpha$ en un similar caso. Ahora nosotros mostraremos que, para cada punto C no incidentes en las rectas ℓ, AA_1, BB_1, $C^\alpha = C^\beta$.
Si C está en AB, entonces claramente $C^\alpha = C^\beta$. (esto se debe a que $YB_1 = YA_1$ tal que

$$C^\alpha = YA_1 \cap VC = C^\beta.$$

Notar que esto es usado del hecho que $B_1 = B^\alpha$).

Suponer que C no está en AB. Sea $C_1 = C^\alpha$, $p = AB\cap\ell$, $q = BC\cap\ell$ y $r = CA\cap\ell$. Los triángulos $ABC, A_1B_1C_1$ están en perspectiva de V. Más aún, por la definición de $\alpha, AB \cap A_1B_1 = p$ y $CA \cap C_1A_1 = r$. Así p y r están en ℓ y π es (V, ℓ)-*desarguesiano*, $BC \cap B_1C_1$, también debe estar en ℓ. Pero $BC \cap \ell = q$, por lo tanto q, B_1, C_1 son colineales y $C_1 = C^\beta$.

Nosotros podemos definir γ en los puntos de π por medio de A, A_1 y cualquier otros par de puntos B, B^α, donde B no está en VA ni en ℓ. Con el fin de ampliar γ como una colineación de π, hay que definir esta acción en las rectas.
Dada cualquier recta m distinta de ℓ y AA_1, elegimos cualquier punto $T\ \varepsilon\ m$, tal que T no incide en ℓ ni en AA_1, y definimos m^γ como la recta que une los puntos ℓm con T^γ. Si nosotros definimos

$$\ell^\gamma = \ell y (AA_1)^\gamma = (AA_1),$$

entonces para demostrar que γ sea una colineación es mostrar que m^γ es independiente de la elección de T. Para mostrar esto, simplemente tenemos que mostrar que S^γ está sobre m^γ, para cualquier $S\ \varepsilon\ m$, es decir, si S es cualquier otro punto de m, debemos mostrar que $\ell m, S^\gamma, T^\gamma$ son colineales. Pero los dos triángulos $AST, A_1S^\gamma T^\gamma$ están en perspectiva de V, y tanto $AS \cap A_1S^\gamma$ como $AT \cap A_1T^\gamma$ están en ℓ. Así, desde que π es (V, ℓ)-*desarguesiano.* $S^\gamma T^\gamma \cap ST$ está en ℓ. De ahí γ es una colineación y el teorema queda demostrado. □

Las perspectivas colineaciones de esta sección, son llamados a veces colineaciones centrales. Si tenemos el deseo de especificar el centro C y el eje L, tendremos una (C, L)-*colineación.* Claramente todas las colineaciones con centro C y eje L forman un grupo.

Consideremos el grupo $G = G(C, L)$ de la (C, L)-*colineación.* Si $P \neq C$ y P no es incidente en L, entonces para cualquier $\alpha\ \varepsilon\ G$, C, P y P^α son colineales. Si para cualquier $Q\ \varepsilon\ CP$, con $Q \neq C$, y Q no incidente en L, hay un $\alpha\ \varepsilon\ G$ tal que $P^\alpha = Q$, decimos que π es (C, L)-*transitivo.* Equivalentemente, la afirmación de que π es (C, L)-*transitivo*, significa que para una recta M que pasa a través de C, $M \neq L$, la (C, L)-*colineación* permuta transitivamente con los puntos de M, excepto para C y la intersección de M con L. Esto es válido para toda recta $M \neq L$ que pasa a través de C. Toda elación con eje L, forma un grupo $G(L)$. Nosotros llamaremos a este grupo $G(L)$ el grupo de traslación con eje L.

3.1.4 Teorema. Si para dos centros diferentes C_1 y C_2 en un eje L, los grupos de elación $G(C_1, L)$ y $G(C_2, L)$ son diferentes de la identidad, entonces todo el grupo de traslación $G(L)$ es abeliano. También para cada elemento $\neq 1$ de $G(L)$ es (1) de orden infinito o (2) de orden primo p.

Demostración. Suponemos que $1 \neq \alpha_1 \; \varepsilon \; G(C_1, L)$ y $1 \neq \alpha_2 \; \varepsilon \; G(C_2, L)$. Sea P cualquier punto que no incide en L. entonces tendremos las siguientes rectas:

$$\begin{array}{rl} L_1 : C_1 P P^{\alpha_1} & \qquad L_2 : C_2 P P^{\alpha_2} \\ (L_1)^{\alpha_2} : C_1 P^{\alpha_2} P^{\alpha_1 \alpha_2} & \qquad (L_2)^{\alpha_1} : C_2 P^{\alpha_1} P^{\alpha_2 \alpha_1} \end{array}$$

Pero

$$C_2, P^{\alpha_1}, (P^{\alpha_1})^{\alpha_2} = P^{\alpha_1 \alpha_2}$$

son colineales, y

$$C_1, P^{\alpha_2}, (P^{\alpha_2})^{\alpha_1} = P^{\alpha_2 \alpha_1},$$

también son colineales. La intersección de las distintas rectas $C_2 P^{\alpha_1}$ y $C_1 P^{\alpha_2}$ es $P^{\alpha_1 \alpha_2}$ y también $P^{\alpha_2 \alpha_1}$. Por lo tanto $\alpha_1 \alpha_2 = \alpha_2 \alpha_1$. Por lo tanto un elemento α_1 $G(C_1, L)$ permuta con cualquier elemento α_2 de cualquier $G(C_2, L)$, con $C_2 \neq C_1$. Suponer que $\beta_1 \neq 1$ es otro elemento de $G(C_1, L)$. Entonces $\beta_1 \alpha_2$ es una elación con centro $C_3 \neq C_1, C_2$. Por lo tanto α_1 permuta con $\beta_1 \alpha_2$, y desde que α_1 permuta con α_2, α_1 también permuta con β_1. Por lo tanto, $\alpha_1 \neq 1$ de $G(C_1, L)$ permuta con cualquier elemento de $G(L)$, y así $G(L)$ es abeliano. Existen ejemplos en el cual $G(C_1, L)$ no tiene por que ser abeliano si todos los demás grupos $G(C_i, L) = 1$, con $C_i \; \varepsilon \; L$.

Si cada elemento de $G(L)$ es de orden infinito, entonces tenemos (1). Si $G(L)$ contiene elementos de orden finito, entonces hay un elemento de orden primo, en otras palabras, si $\alpha_1 \; \varepsilon \; G(C_1, L)$,

$$(\alpha_1)^p = 1.$$

Ahora con $1 \neq \alpha_2 \; \varepsilon \; G(C_2, L)$, $C_2 \neq C_1$, tendremos $\alpha_1 \alpha_2 = \alpha_3 \; \varepsilon \; G(C_3, L)$, $C_3 \neq C_1, C_2$. Por lo tanto

$$(\alpha_1 \alpha_2)^p = (\alpha_2)^p = (\alpha_3)^p$$

es un elemento en común de $G(C_2, L)$ y $G(C_3, L)$, por lo tanto el elemento en común es la identidad. Así $(\alpha_2)^p = 1$. Similarmente, para $(\alpha_2)^p = 1$, sigue $(\beta_1)^p = 1$ para cualquier $\beta_1 \; \varepsilon \; G(C_1, L)$. Por lo tanto cualquier elemento de $G(L)$, excepto la identidad es de orden p. $\square$

Capítulo 4

Construcción del Plano de Hughes

4.1. Incidencia de Matrices en un Plano Proyectivo finito

Sea π un plano proyectivo de orden n. Sea $P_1, P_2, \ldots, P_v$ y $l_1, l_2, \ldots, l_b$ los puntos y rectas respectivamente del plano proyectivo π. Por el **Teorema 1.1.9** del Capítulo 1, existe un número entero $n \geq 2$, tal que π contiene exactamente $n^2 + n + 1$ puntos y rectas. Por lo tanto

$$v = b = n^2 + n + 1$$

Una matriz de incidencia A de π, es una matriz cuadrada $v \times b$ compuesta de ceros y unos solamente, tal que

$$\begin{aligned} a_{ij} &= 1 \quad si\ P_i\ \ \varepsilon\ l_j, \\ a_{ij} &= 0 \quad si\ P_i\ \notin\ l_j. \end{aligned}$$

El ejemplo que se muestra a continuación, es una de las matrices incidente de π, Esta matriz incidente corresponde a la del **Plano de Fano**, el cual contiene exactamente 7 puntos y 7 rectas.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Notamos que la matriz de incidencia está únicamente determinada por el plano. Los elementos de la matriz dependen únicamente de las incidencias de los puntos en las rectas.

Sabemos, por el teorema **Teorema 1.1.9**, que un plano proyectivo de orden n tiene exactamente $N = n^2 + n + 1$ puntos y rectas. Por lo tanto, las matrices incidentes de un plano proyectivo de orden 2 son matrices cuadrada 7×7. Las matrices incidentes de un plano proyectivo de orden 3, son matrices cuadradas 13×13, de un plano proyectivo de orden 4, son matrices cuadradas 21×21, y así sucesivamente. Es decir, las matrices incidentes de un plano proyectivo de orden n, son matrices cuadradas $N \times N$, con $N = n^2 + n + 1$.

A continuación se presenta un importante teorema sobre las matrices incidente dentro de un plano proyectivo finito de orden n.

4.1.1 Teorema. Sea A una matriz incidente de un plano proyectivo finito de orden n. Entonces $AA^t = n \cdot I_N + S_N$, donde I_N es la matriz identidad $N \times N$, y S_N es la matriz cuadrada $N \times N$, cuyos elementos son todos unos.

Demostración. Sea $AA^t = (b_{ij})$.

Consideremos primero los términos de la diagonal b_{ii} con $i = 1, \ldots, N$, esto es el producto escalar de fila i_ésima de A consigo misma, que es igual a la suma de todos los unos de la fila i_ésima de A. Por el **Teorema 1.1.9**, cada punto incide en exactamente $n+1$ rectas, por lo tanto, cada fila de la matriz A, contiene $n+1$ elementos uno. Así, cada elemento de la diagonal $b_{ii} = n + 1$, con $i = 1, \ldots N$

Similarmente, los elementos b_{ij} con $i \neq j$, es el producto escalar de la fila i_ésima de A con la fila j_ésima de A. Por el **Teorema 1.1.9**, dos rectas distintas intersectan en un único punto, por lo tanto, la multiplicación escalar de la fila i_ésima con la fila j_ésima de A es uno. Así, $b_{ij} = 1$ con $i \neq j$. La multiplicación de la matriz AA^t, da como resultado la siguiente matriz $N \times N$, con $N = n^2 + n + 1$.

$$AA^t = \begin{pmatrix} n+1 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & n+1 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & 1 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & n+1 \end{pmatrix}$$

donde I es la matriz identidad $N \times N$ y S es la matriz $N \times N$ cuyos elementos son todos unos.

Por lo tanto

$$n \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & n+1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & n+1 \end{pmatrix} = n \cdot I + S$$

Y así, $AA^t = n \cdot I + S$, y nuestro teorema queda demostrado. $\square$

4.1.2 Teorema. Sea A una matriz incidente de un plano proyectivo finito de orden n. Entonces $det(AA^t) = (n+1)^2 \cdot n^{n^2+n}$.

Demostración. Del **Teorema 4.1.1** consideramos la matriz cuadrada $N \times N$, con $N = n^2 + n + 1$

$$AA^t = \begin{pmatrix} n+1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & n+1 & \ddots & & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & n+1 \end{pmatrix} = n \cdot I + S$$

Así, la determinate de la matriz es:

$$det(AA^t) = \begin{vmatrix} n+1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & n+1 & \ddots & & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & n+1 \end{vmatrix} = det(n \cdot I + S)$$

Restando la primera fila con las filas restantes, es decir, con operaciones filas ($F_2 - F_1$, $F_3 - F_1$, $\ldots$, $F_N - F_1$), nos da como resultado el siguiente determinante

$$\begin{vmatrix} n+1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ \\ -n & n & 0 & \cdots & 0 \\ -n & 0 & n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -n & 0 & \cdots & 0 & n \end{vmatrix}$$

Ahora, sumamos la primera columna con todas las columnas restantes, es decir, con operaciones columnas ($C_1 + C_2$, $C_1 + C_3$, $\ldots$, $C_1 + C_N$), observamos que el elemento $a_{11} = n+1$ se le suman $N-1$ elementos unos. Por lo tanto, reemplazando $N = n^2 + n + 1$ procedemos a sumar

$$(n+1) + (N-1) = (n+1) + (n^2 + n + 1 - 1)$$

$$= n + 1 + n^2 + n$$

$$= n^2 + 2n + 1$$

$$= (n+1)^2$$

así, el resultado del determinante es

$$det(AA^t) = \begin{vmatrix} (n+1)^2 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ \\ 0 & n & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & n \end{vmatrix}$$

Sólo basta calcular el siguiente determinate de la matriz cuadrada $N-1 \times N-1$

$$\begin{vmatrix} n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{vmatrix}$$

Claramente el determinante es n^{N-1}, reemplazando N por $N = n^2 + n + 1$, nos da como resultado

$$\begin{aligned} n^{N-1} &= n^{n^2+n+1-1} \\ &= n^{n^2+n} \end{aligned}$$

Por lo tanto, el determinante de la matriz $AA^t = a_{11} \cdot n^{n^2+n} = (n+1)^2 \cdot n^{n^2+n}$.

□

4.1.3 Corolario. Si A es una matriz incidente de un plano proyectivo finito de orden n, entonces A es una matriz invertible.

Una colineación α de un plano proyectivo finito π, es una permutación de los puntos y también una permutación de las rectas. Como consecuencia inmediata de los teoremas de incidencia de matrices, podremos representar matrices de permutación de orden $N \times N$, con $N = n^2+n+1$.

Para esto, comenzamos con la siguiente definición.

4.1.4 Definición. Una matriz cuadrada A, es llamada matriz de permutación, si y sólo si, los elementos de la matriz son solamente unos y ceros, además cada fila de A y cada columna de A contiene exactamente un único elemento uno.

4.1.5 Lema. Si A es una matriz de permutación, entonces $AA^t = I = A^tA$.

Demostración. La multiplicación escalar de la fila i_ésima de A consigo misma es 1 al igual que la multiplicación escalar de la columna i_ésima de A consigo misma, ya que cada fila y cada columna contiene un único elemento 1. Por lo tanto, los elementos de la diagonal de la matriz AA^t son todos unos al igual que la diagonal de la matriz A^tA. Todos los elementos que no están en la diagonal para ambas matrices AA^t, A^tA son todos ceros, y así $AA^t = I = A^tA$. □

4.1.6 Lema. Si A es una matriz incidente de un plano proyectivo finito π de orden n, entonces cualquier colineación puede ser representada por un par de matrices de permutaciones P y Q, tal que $PA = AQ$.

Demostración. Sea α una colineación de π. Denotaremos los puntos de π como $P_1, \ldots, P_N$ y las rectas de π como $l_1, \ldots, l_N$, con $N = n^2 + n + 1$.

Una matriz de incidencia $A = (a_{ij})$ de π, es una matriz cuadrada $N \times N$ compuesta de ceros y unos solamente, tal que

$$\begin{array}{c} a_{ij} = 1 \quad si\ P_i\ \ \varepsilon\, l_j, \quad i,j = 1,\ldots,N \\ a_{ij} = 0 \quad si\ P_i\ \not\varepsilon\ \ l_j \quad i,j = 1,\ldots,N. \end{array}$$

Definiremos dos matrices P y Q de $N \times N$ como

$$\begin{array}{c} P = (p_{ij}) \quad i,j = 1,\ldots,N \\ Q = (q_{ij}) \quad i,j = 1,\ldots,N, \end{array}$$

tal que

$$\begin{array}{c} p_{ij} = 1 \quad si\ \ P_i^\alpha = P_j, \\ q_{ij} = 1 \quad si\ \ l_i^\alpha = l_j, \end{array}$$

y los otros, $p_{ij} = 0$, $q_{ij} = 0$.

Puesto que α es una permutación de los puntos y en las rectas de π, ambas matrices P y Q son claramente matrices de permutaciones de π.

Los elementos (i,k) de la matriz PA, con $i = k = 1,\ldots,N$ es igual a

$$\sum_{j=1}^{N} p_{ij} \cdot a_{jk} = a_{xk}$$

donde x está únicamente determinado por $p_{ix} = 1$, es decir, x está únicamente determinado por $P_i^\alpha = P_x$.

Similarmente los elementos (i,k) de la matriz AQ, con $i = k = 1,\ldots,N$ es igual a

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij} \cdot q_{jk} = a_{iy}$$

donde y está únicamente determinado por $l_y^\alpha = l_k$. Sólo basta demostrar que $a_{xk} = a_{iy}$.

$$\begin{aligned} a_{xk} = 1 &\Leftrightarrow P_x \,\varepsilon\, l_k \\ &\Leftrightarrow (P_x)^{\alpha^{-1}} \,\varepsilon\, (l_k)^{\alpha^{-1}} \\ &\Leftrightarrow P_i \,\varepsilon\, \ell_y \\ &\Leftrightarrow a_{iy} = 1 \end{aligned}$$

Así $a_{xk} = a_{iy}$, y el lema es demostrado. □

4.2. Colineaciones de Grupos

4.2.1 Teorema. (Parker). Las permutaciones P de puntos y Q de rectas en una colineación, son similares como permutaciones.

4.2.2 Corolario. (Baer). Una colineación de un plano proyectivo π fija el mismo número de puntos y rectas.

Demostración. Sea π un plano proyectivo finito y sea A la matriz de incidencia de π. A continuación, por **Lema 4.1.6**, cualquier colineación α puede representar dos matrices de permutación P de puntos y Q de rectas, con $PA = AQ$. Si $P = (p_{ij})$, entonces $p_{ij} = 1$ si y sólo si $P_i^\alpha = P_j$. Si $P_i^\alpha = P_i$, entonces $p_{ii} = 1$ y el número de puntos fijos de α es la traza de la matriz P. Similarmente, el número de rectas fijas por α es la traza de la matriz Q.

Puesto que $PA = AQ$ y por el **Corolario 4.1.3**, la matriz A es invertible, tenemos que $P = AQA^{-1}$. Así, la traza de la matriz P es igual a la traza de la matriz Q. Por lo tanto, cualquier colineación α de un plano proyectivo finito, fija el mismo número de puntos y rectas. □

4.2.3 Teorema. (Parker). Un grupo de colineaciones G de π tiene el mismo número de componentes transitivos, al igual que un grupo de permutación en los puntos y también en las rectas.

Demostración. Sea G de orden g, entonces por la ecuación $Q = A^{-1}PA$ del **Corolario 4.2.2**, tenemos que G es representada como un grupo de permutación G_1 en puntos y G_2 en rectas, y estas representaciones son equivalentes. Sea x_1, x_2 son los respectivos elementos:

$$\sum_{x \, \varepsilon \, G} x_1(x) = \sum_{x \, \varepsilon \, G} x_2(x). \tag{4.1}$$

Sea,

$$\sum_{x \, \varepsilon \, G} x_1(x) = k_1 g, \quad \sum_{x \, \varepsilon \, G} x_2(x) = k_2 g, \tag{4.2}$$

donde k_1 es el número de componentes transitivos de G_1, y k_2 es el número de componentes transitivos de G_2. Por lo tanto $k_1 = k_2$, la afirmación del teorema. □

A pesar del teorema anterior, cada permutación individual de G_1 es similar como una permutación al correspondiente elemento de G_2, no es en general cierto que G_1 y G_2 son similares como grupos de permutación. Por ejemplo, en un plano Desarguesiano, el grupo de todas las colineaciones fijan a un punto P_0 que no está contenido en la recta que es fijada por todas estas colineaciones.

4.2.4 Teorema. Un plano Desarguesiano π de orden $n = p^r$ tiene un grupo de colineaciones de orden $r(n^2+n+1)(n^2+n)n^2(n-1)^2$.

Demostración. Comenzaremos por ordenar un cuadrilátero en π. Por **Teorema 1.1.9** π contiene exactamente n^2+n+1 puntos y rectas.

Elijamos un punto P_1 en π como cualquiera de los n^2+n+1 puntos de π y P_2 en π como cualquiera de lo n^2+n puntos restantes. La recta que une P_1 con P_2 contiene exactamente $n+1$ puntos, incluyendo P_1 y P_2. Escojamos un punto P_3 en π, primero que todo, P_3 no puede incidir en la recta P_1P_2, entonces P_3 puede ser elegido como cualquiera de los

$$n^2+n+1-(n+1) = n^2$$

puntos.

Para formar un cuadrilátero, necesitamos un punto P_4 de π, tal que P_4 no puede incidir en las rectas P_1P_2, P_1P_3 y P_2P_3.

Las tres rectas P_1P_2, P_2P_3 y P_1P_3 contienen exactamente $n+1$ puntos cada una, por lo tanto, el número de puntos que existen en las tres rectas es $3\cdot(n+1)-3 = 3n$, ya que los tres puntos están contabilizados dos veces. Por lo tanto P_4 puede ser elegido como cualquiera de los

$$n^2+n+1-3\cdot n = n^2-2\cdot n+1 = (n-1)^2$$

puntos.

Puesto que, el número para elegir P_1 es n^2+n+1, el punto P_2 es n^2+n, el punto P_3 es n^2 y el punto P_4 es $(n-1)^2$, el número de poder formar un cuadrilátero en un plano proyectivo finito de orden n es de

$$(n^2+n+1)\cdot(n^2+n)\cdot(n^2)\cdot(n-1)^2$$

formas.

Después de saber el número de ordenamiento de un cuadrilátero en un plano proyectivo finito de orden n, damos la existencia del grupo de colineación G de π. El subgrupo de G fija el cuadrilátero P_1, P_2, P_3, P_4, tal que, es el grupo de los automorfismos del cuerpo $GF(p^r)$ de orden r. $\Box$

4.2.5 Teorema. (Singer). Un plano Desarguesiano π de orden n tiene una colineación α de orden $N = n^2+n+1$ el cual es cíclico en los puntos y también en las rectas.

4.2.6 Teorema. (Gleason). Si para cada par P, L, con P un punto incidente en la recta L de un plano finito π, el grupo de elación $G(P, L)$ es no trivial, entonces π es Desarguesiano.

Demostración. Por el **Teorema 3.1.4** si dos grupos de elaciones no triviales (distintos de la identidad) $G(P_1, L)$ y $G(P_2, L)$ con P_1 y P_2 dos puntos diferentes en la recta L, entonces todas las elaciones con eje L forman un grupo abeliano, en el cual cada elemento distinto de 1, son de algún orden primo p. Por la dualidad de este teorema, si $G(P, L_1)$ y $G(P, L_2)$ son no triviales, con L_1 y L_2 rectas diferentes que intersectan en el punto P, entonces todas las elaciones con centro P forman un grupo abeliano cuyos elementos distintos de 1 son de algún orden primo p. Por lo tanto, bajo la hipótesis que presentamos en el teorema, cada grupo de elación $G(P, L)$ es elementalmente abeliano de orden p o potencia de p. $\Box$

4.2.7 Lema. Supongamos que H es un grupo de permutación de un conjunto finito S, y suponer que para algún primo p y cada $x \varepsilon S$, existe un elemento de H de orden p, cual fija a x, pero ningún otro elemento de S. Entonces H es transitivo.

Demostración. Consideramos S_1 un conjunto transitivo de S bajo H. Para $x \varepsilon S_1$, existe un elemento de orden p que fija a x y desplaza a todos los restantes elementos de S_1 en ciclos de longitud p. Por lo tanto el número de elementos en S_1 es congruente a 1 (mod p), y el número de elementos de otro conjunto transitivo S_2 (si existe otro) es un múltiplo de p. Pero entonces, tomamos $y \varepsilon S_2$ por el mismo argumento, el número de elementos en S_1 es un múltiplo de p. Esto es una contradicción, por lo que sólo hay un conjunto transitivo, y H es transitivo en S. $\Box$

4.2.8 Lema. Supongamos que para una recta L de un plano finito, los grupos de elación $G(P_i, L)$, para todo $P_i \varepsilon L$, tiene algún orden $k > 1$. Entonces π es un plano de translación con respecto a L.

Demostración. Sea π de orden n. Cualquiera de dos, de los $n+1$ grupos $G(P_i, L)$ de orden h, tienen sólo la identidad en común, y sus elementos juntos forman el grupo de translación $T(L)$. Por lo tanto el orden de $T(L)$ es

$$t = (n+1)(h-1) + 1.$$

Ya que sólo la identidad de $T(L)$ puede fijar un punto que no está en L, $T(L)$ permuta los n^2 puntos en conjuntos de t puntos, donde t divide n^2. Escribimos

$$n^2 = tm = [(n+1)(h-1)+1]m. \tag{4.3}$$

Considerando que $h > 1$, tenemos que $m < n$. Por otro lado, por **4.3** se tiene $n+1$ módulo, es decir:

$$n^2 \equiv 1 \equiv m \, (mod \; n+1) \tag{4.4}$$

Pero $m \equiv 1$ (mod $n+1$) y $m < n$, entonces $m = 1$, $t = n^2$, de ahí $T(L)$ es transitivo en los n^2 puntos de π que no están en L, y así π es un plano de translación con respecto a L.

Ahora podemos probar nuestro teorema. Tomamos una recta fija L de π. Para cada punto $P \varepsilon L$ el grupo de elación $G(P, M)$, donde $M \neq L$, y M es otra recta que pasa a través de P, contiene un elemento de orden p, que tiene una correspondencia de L en si mismo, además fija a P y desplaza a todos los demás puntos de L. Por lo tanto, por **Lema 4.2.7**, el grupo $G(L)$ de todas las colineaciones que fijan a L es transitivo en los puntos de L. Luego se deduce que para los $n+1$ puntos P_i de L, todos los grupos de elaciones $G(P_i, L)$, están conjugado bajo $G(L)$, que tiene el mismo orden h. Por **Lema 4.2.8**, se deduce que π es un plano de translación con respecto a L. Pero L puede ser tomado como cualquier recta de π. Así π es un plano de translación para toda recta L. □

4.2.9 Teorema. Un plano es un plano de Moufang, si y sólo si, cada anillo ternario es un anillo de división, es decir, cumple los siguientes axiomas:

a) La adición es un grupo abeliano.
b) $(a+b)m = am + bm$
c) $a(s+t) = as + at$
d) Cada $a \neq 0$ tiene un inverso a^{-1} que satisface $a^{-1}a = aa^{-1} = 1$
e) $a^{-1}(ab) = b$

f) $(ba)a^{-1} = b$
g) $a(ab) = (aa)b$; $(ba)a = b(aa)$

4.2.10 Teorema. (Artin-Zorn). Un anillo de división finito, es un cuerpo finito $GF(p^r)$.

Ahora siguiendo con el **Lema 4.2.8**, tenemos que π es un plano de translación para cada recta L, y por **Teorema 4.2.9**, π puede ser tratado por un sistema de coordenadas como el alternativo anillo de división. Por **Teorema 4.2.10** un anillo de división es un cuerpo, y así π es Desarguesiano.

Glason usa estos teoremas en el estudio de planos finito *Fano*. La configuración de Fano es la configuración de los siete puntos y siete rectas que hacen el plano finito de orden 2. Un plano es un plano *Fano* si los puntos diagonales de cada cuadrilátero están en una recta, o, lo que es lo mismo, si cada cuadrilátero genera una configuración de *Fano*. *Glason* muestra que cada plano finito de *Fano* es Desarguesiano, y que estos son los planos finitos bajo los cuerpos $GF(2^r)$.

4.2.11 Teorema. (Baer). Sea α una involución en un plano proyectivo de orden n. Entonces (1) $n = m^2$ y los puntos y rectas fijadas por α forman un subplano de orden m, o (2) α es una colineación central. En el caso (2) si n es impar, α es una homología, y si n es par, α es una elación.

Demostración. Primero mostraremos que cada punto está en una recta fija. Si P no es un punto fijo, entonces $P^\alpha \neq P$ y α fija la recta PP^α que es por tanto, una recta fija que pasa a través de P. Si P es un punto fijo, unimos P con Q, otro punto distinto de P. Puede ser que $L = PQ$ es una recta fija. Si no, $Q^\alpha \neq Q$ y $Q^\alpha \notin PQ$. Aquí, $L^\alpha = PQ^\alpha$. Entonces, si R es un tercer punto en L, $R^\alpha \varepsilon L^\alpha$. Entonces, α intercambia las rectas $Q^\alpha R$ y QR^α, cuya intersección S es otro punto fijo diferente de P. En este caso PS es una recta fija que pasa a través de P. Por un argumento dual, cada recta pasa a través de un punto fijo.

Una recta que une un par de puntos fijos, es una recta fija, y la intersección de dos rectas fijas, es un punto fijo. Por lo tanto, si existen cuatro puntos fijos, tal que tres de ellos no sean colineales, los elementos fijados por α, forman un subplano propio π_1 de π. Vamos a suponer que éste sea el caso y suponemos además que π_1 es de orden m. Entonces por **Teorema 1.2.4**, $n \geq m^2$, y por la demostración del mismo, vemos que si $n > m^2$, existe una recta de π que no pasa a través de cualquier punto de π_1. Pero tenemos demostrado que cada recta de π contiene un punto fijo. Por lo tanto, no podemos tener que $n > m^2$, y así $n = m^2$. Esto prueba la alternativa (1) del teorema.

Ahora suponemos que no existen cuatro puntos fijos, tal que tres de ellos no sean colineales. Primero mostramos que existe una recta que contiene tres puntos fijos. Una recta L_1 contiene un punto fijo P_1. Elegimos una recta L_2 que no pasa a través de P_1. Entonces L_2 contiene un punto fijo $P_2 \neq P_1$. Ahora tenemos dos puntos fijos P_1 y P_2 y la recta fija L que une a P_1 y P_2. Elegimos un tercer punto Q en L. Si Q es un punto fijo, L es la recta que buscamos. Si Q no es un punto fijo, una recta L_3 que pasa a través de Q contiene un punto fijo P_3 que no está en L. Ahora tenemos un triángulo P_1, P_2 y P_3 de puntos fijos. Consideramos una recta L_4 que no pasa a través de P_1, ni P_2, ni P_3. L_4 contiene un punto fijo P_4. Si P_4 no está en una de las rectas P_1P_2, P_1P_3, o P_2P_3, entonces P_1, P_2, P_3, P_4 son cuatro puntos fijos, tal que tres de ellos no son colineales, y esta es la situación cubierta en la primera alternativa. Por lo tanto P_4 está sobre una de estas rectas, y tenemos una recta que contiene tres puntos fijos.

Ahora tenemos una recta L que contiene tres puntos fijos P_1, P_2 y P_3. Si hubieran tantos como dos puntos fijos que no están en L, tendríamos un cuadrilátero de puntos fijos, la situación de la primera alternativa. Por lo tanto, hay un punto fijo P que no está en L o ninguno. Consideramos todos los puntos $P_i \varepsilon L$. Existe una recta K que pasa a través de P_i, diferente de la recta L, y, si existe un punto fijo P que no está en L, también la recta K es diferente de PP_i. K contiene un punto fijo, pero de nuestra elección, no hay puntos fijos que no están en L. Por lo tanto el punto fijo en la recta K es P_i, de donde se deduce que cada punto P_i de L es un punto fijo. Desde que α fija cada punto de L, α es una colineación central con eje L, la afirmación de nuestra segunda alternativa. Existen n^2 puntos de π que no están en L, y α es de orden 2. Por lo tanto, si n es un número impar, α fija un punto que no está en L y α es una homología. Si n es un número par, α fija un número par de puntos que no están en L, y al menos fija dos puntos, si es que α fija a alguno. Por lo tanto, en este caso α no puede fijar cualquier punto que no está en L y α es una elación. Esto completa la demostración de las dos partes del teorema. □

4.2.12 Teorema. (Ostrom). Si el grupo de colineaciones de un plano proyectivo finito π de orden n, donde n no es un cuadrado, es doblemente transitivo en los puntos de π, entonces π es Desarguesiano.

Demostración. Sea G el grupo de colineaciones de π. Por hipótesis, G es doblemente transitivo en los $N = n^2 + n + 1$ puntos de π. Puesto que $N(N-1) = (n^2+n+1)\cdot(n^2+n)$ divide el orden de G, G debe contener un elemento de orden 2, una involución α. Puesto que n no es un cuadrado, por **Teorema 4.2.11**, se deduce que α es una elación si n es par y α es una homología si n es impar.

4.2.13 Lema. Sea G el grupo de colineaciones de un plano proyectivo finito π de orden n. Entonces existe una elación en G.

Demostración. Si n es un número par, existe un involución α de G, tal que α es una elación. Por lo tanto, es necesario sólo considerar el caso en que n es impar. Consideremos una involución α, la cual es una homología y dejamos que su centro sea un punto P de π y también dejamos que su eje sea una recta L de π. Sea A un punto perteneciente a L y sea $A_1 \neq P$ un punto que no está en L. Entonces, en G existe un elemento σ que lleva P en P y A en A_1. Entonces

$$\beta = \sigma^{-1}\alpha\sigma$$

es una involución cuyo centro es P y cuyo eje una recta K que pasa a través de A_1, y así K es diferente de la recta L. Entonces $\alpha\beta$ es una colineación central, ya que fija todas las rectas que pasan a través de P. Si $\rho = \alpha\beta$ fija cualquier recta T que no pasa a través de P, suponemos que $T_1 = T^{\alpha}$. Entonces β también envía a T en T_1, y si $T \neq T_1$, ρ debe fijar T y también a T_1, de ahí, por la **Observación 2.3.3**, $\rho = 1$ y $\alpha = \beta$, una contradicción, ya que α y β son involuciones con ejes diferentes. Pero si $T = T_1$. entonces T es el eje de α y también el eje de β, otra contradicción, ya que α y β tienen diferentes ejes. Por lo tanto ρ no fija más rectas que no pasan a través de P, y así ρ es una elación. Esto prueba nuestro Lema. □

Ahora podemos considerar una elación ρ con centro P y un eje L. Sea P_i cualquier otro punto de L. Entonces en G existe un elemento σ que envía a P en P_i. Entonces σ fija la recta L. Por lo tanto el grupo de colineaciones $G(L)$ que fija a la recta L, es transitivo en los puntos de L, y así, para todo punto P_i de L, los grupos de elaciones $G(P_i, L)$ tienen el mismo orden h con $h > 1$, ya que tenemos una elación ρ con centro P en L. Desde el **Lema 4.2.8** del **Teorema 4.2.6**, π es un plano de translación con respecto al eje L. Pero desde que G es doblemente transitivo en puntos, cualquier dos puntos de L pueden ser enviados a dos puntos de cualquier otra recta K por algún elemento de G. Por lo tanto π es también un plano de translación con respecto a K, y así es un plano de $Moufang$. Pero como se ha demostrado en probar el **Teorema 4.2.6**, esto significa que π es Desarguesiano. Por lo tanto queda demostrado el **Teorema 4.2.12** □

Existe una generalización de las matrices incidentes de un debido plano. Si nos damos un plano π y un grupo de colineaciones G de π, esto es una matriz cuyas entradas son elementos desde el anillo de grupo G^* de G, G^* cuyas características no dividen el orden de G. Análogamente, puede ser obtenida la incidencia de la ecuación del **Teorema 4.1.1**

$$AA^T = A^T A = nI + S$$

Puesto que, el **Teorema 4.2.3**, recordamos que el número de conjuntos transitivos de rectas bajo G, es el mismo número de los conjuntos transitivos de puntos bajo G. Vamos a llamar a este número w. Indicamos nuestra notación:

π, un determinado plano proyectivo de orden n.
G, un grupo de colineaciones de π de orden g.
P_i, $i = 1, \ldots, w$, un representante fijo del *i_ésimo* conjunto transitivo de puntos.
L_j, $j = 1, \ldots, w$, un representante fijo del *j_ésimo* conjunto transitivo de rectas.
H_i, subgrupo de G que fija a P_i, de orden h_i.
T_j, subgrupo de G que fija a L_j, de orden t_j.
$D_{ij} = \{x \mid x \varepsilon G,\ P_i x \varepsilon L_j\}$, un conjunto de d_{ij} elementos de G.

$$\delta_{ij} = \sum x,\ x \varepsilon D_{ij}, \tag{4.5}$$

$$\delta^*_{ij} = \sum x^{-1},\ x \varepsilon D_{ij},$$

$$D = (\delta_{ij})\ i, j = 1, \ldots, w,\ \texttt{una matriz sobre}\ G^*.$$
$$D' = (\delta^*_{ij})^T\ i, j = 1, \ldots, w\ \texttt{una matriz sobre}\ G^*.$$
$$\rho_i = \sum x,\ x \varepsilon H_i,\ i = 1, \ldots, w.$$

$$\tau_j = \sum x,\ x \varepsilon T_j,\ j = 1, \ldots, w.$$

$$\gamma = \sum x,\ x \varepsilon G.$$

$$S = w \times w\ \ \texttt{matriz con cada entrada}\ \gamma.$$

También usamos varias diagonales de matrices:

$$\begin{aligned} C_1 &= diag(h_1^{-1}, h_2^{-1}, \ldots, h_w^{-1}). \\ C_2 &= diag(t_1^{-1}, t_2^{-1}, \ldots, t_w^{-1}). \\ P &= diag(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_w). \\ L &= diag(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_w). \end{aligned} \tag{4.6}$$

Observamos que en los elementos del conjunto $D_{ij} = \{x \mid x \ \varepsilon \ G,\ P_i x \ \varepsilon \ L_j\}$, están completamente determinadas las incidencias en π. Para cada punto de π, puede ser escrito como $P_i u$ para algún $i = 1, \ldots, w$ y algún $u \,\varepsilon\, G$, y similarmente, cada recta es de la forma $L_j v$. Más aún, $P_i u \ \varepsilon \ L_j v$ si y sólo si, $P_i u v^{-1} \ \varepsilon \ L_j$ o si $u v^{-1} \ \varepsilon \ D_{ij}$. Por lo tanto, el conjunto D está completamente determinado en π. Si G es simplemente la identidad, vemos que D es la matriz incidente A por π.

4.2.14 Teorema. Dado un plano π de orden n y un grupo de colineaciones G de π de orden g, la colineación matricial D satisface las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} DC_2D' &= nP + S, \\ D'C_1D &= nL + S, \\ DC_2S &= (n+1)S, \\ SC_1D &= (n+1)S. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Demostración. Demostramos la primera ecuación por la evaluación del elemento $U = DC_2D'$, primero aquellos sobre la diagonal principal, y luego a aquellos que están bajo la diagonal principal. Si $U = (u_{r,s})$ $r, s = 1, \ldots, w$, entonces en primer lugar tenemos

$$u_{rr} = \sum_{j=1}^{w} \frac{\delta_{rj}\delta_{rj}^{*}}{t_j}. \tag{4.8}$$

los términos por cada j en la ecuación **4.8** para todo $r = 1, \ldots, w$ son

$$\sum \frac{xy^{-1}}{t_j}, \quad x \;\varepsilon\; D_{rj}, \;\; y \;\varepsilon\; D_{rj}. \tag{4.9}$$

Notamos que para $x \;\varepsilon\; D_{rj}$, la clase lateral entera $H_r x T_j$ está contenido en D_{rj}. Consideramos la clase lateral izquierda de H_r en G:

$$G = H_r + H_r x_2 + \cdots + H_r x_{v_r}, \quad v_r h_r = g. \tag{4.10}$$

Para un $h \;\varepsilon\; H_r$ la ecuación $xy^{-1} = h$ o $x = hy$ con $x, y \;\varepsilon\; D_{rj}$, es válido para todo $y \;\varepsilon\; D_{rj}$ con un apropiado $x \;\varepsilon\; D_{rj}$, desde que $H_r y \subseteq D_{rj}$. Por lo tanto, para un determinado $h \;\varepsilon\; H_r$, hay d_{rj} opciones, $x, y \;\varepsilon\; D_{rj}$, tal que,

$$xy^{-1} = h.$$

Por lo tanto, en la ecuación **4.8** el coeficiente de h es $\sum_j d_{rj}/t_j$. Pero d_{rj} es el número de los x's, tal que $P_r x \;\varepsilon\; L_j$ o $P_r \;\varepsilon\; L_j x^{-1}$. Para $x \;\varepsilon\; D_{rj}$ el número de rectas distintas en el conjunto $L_j x^{-1}$ es d_{rj}/t_j. Pero P_r está sobre un total de $n+1$ rectas. Por lo tanto

$$\sum_j \frac{d_{rj}}{t_j} = n + 1. \tag{4.11}$$

Por lo tanto, en la ecuación **4.8** el coeficiente de $h \;\varepsilon\; H_r$ es $n+1$.

Consideraremos una ecuación $xy^{-1} = z$, $z \;\not\varepsilon\; H_r$. Aquí $P_r, P_r z$ son puntos distintos y están unidos por una única recta $L_m v$, donde m y la clase lateral $T_m v$ está únicamente determinada. Sean $x \;\varepsilon\; D_{rj}$, $y \;\varepsilon\; D_{rj}$, para un mismo j, entonces $P_r y$ y $P_r z y = P_r x \;\varepsilon\; L_m v y$. Pero $P_r y \;\varepsilon\; L_j$, $P_r x \;\varepsilon\; L_j$, y $P_r x \neq P_r y$. Por lo tanto $L_m v y = L_j$, donde debemos tener $j = m$, $vy \;\varepsilon\; T_m$. Por lo tanto, en la ecuación **4.8** el elemento z surge solamente por el sumando cuando $j = m$, y aquí $x, y \; \varepsilon \; D_{rm}$, tenemos

$$xy^{-1} = z$$

para cada $y \; \varepsilon \; D_{rm}$ tal que

$$L_m y^{-1} = L_m v = P_r P_r z$$

y un $x \; \varepsilon \; D_{rm}$ determinada por $x = zy$. Pero estos y's son tales que y^{-1} en la clase lateral $T_m v$, y hay exactamente t_m de estos. Por lo tanto en la ecuación **4.8** el coeficiente de z es

$$t_m / t_m = 1.$$

Así tenemos en la ecuación **4.8** el coeficiente de un $h \not\varepsilon \; H_r$ como $n + 1$ y de un $z \; \varepsilon \; H_r$ como 1. Por lo tanto, hemos establecido la corrección de la primera ecuación en **4.7** lo que respecta a la diagonal principal. Para los términos que están fuera de la diagonal en $U = DC_2D'$ tenemos

$$u_{rs} = \sum_{j=1}^{w} \frac{\delta_{rj} \delta_{sj}^{*}}{t_j}, \tag{4.12}$$

los términos por cada j de la ecuación **4.12** para todo $r = 1, \ldots, w$ son

$$\sum \frac{xy^{-1}}{t_j}, \quad x \; \varepsilon \; D_{rj}, \quad y \; \varepsilon \; D_{sj}. \tag{4.13}$$

Aquí, para cualquier $z \; \varepsilon \; G$, los puntos $P_r z$ y P_s son distintos y están unidos por una única recta $L_m v$, donde m y la clases lateral $T_m v$ están únicamente determinada. Aquí, si $xy^{-1} = z$, donde para algún $j, x \; \varepsilon \; D_{rj}$, $y \; \varepsilon \; D_{sj}$, entonces $P_r x = P_r zy$ y $P_s y$ se unen por la recta $L_m vy$. Pero $P_r x \neq P_s y$ están unidos por la recta L_j. Por lo tanto, $L_m vy = L_j$, donde $j = m$ y

$$L_j y^{-1} = L_m v = P_r z P_s.$$

Pero estos y's son tales que y^{-1} es un elemento de $T_m v$, y hay t_m de estos. También para cada $y^{-1} \; \varepsilon \; T_m v$, $L_m vy = L_m$ y $P_r zy \; \varepsilon \; L_m$, donde $x = zy \; \varepsilon \; D_{rm}$. Por lo tanto el coeficiente de cualquier z en u_{rs} se reduce a t_m / t_m, y así

$$u_{rs} = \sum z, z \; \varepsilon \; G, \;\; u_r s = \gamma,$$

y así completamos la demostración de la primera relación en la ecuación **4.7**.

La segunda relación en la ecuación **4.7** es el dual de la primera relación, y así la demostración puede ser realizada de la misma manera que la primera relación.

En el cálculo

$$DC_2S = V = (v_{rs}),$$

encontramos

$$v_{rs} = \sum_j \frac{\delta_{rj}}{t_j}\gamma = \sum_j \frac{d_{rj}}{t_j}\gamma, \tag{4.14}$$

pero por **4.11**, esto es $(n+1)\gamma$. Se demuestra la tercera relación, y la cuarta relación es dual y puede ser probada de la misma manera. □

Ahora, procediendo de las relaciones **4.7**, *Hughes* ha obtenido restricciones en las posibles colineaciones en planos, similar a las restricciones del Teorema de *Bruck-Ryser*. La demostración depende (al igual que la demostración original del Teorema de *Bruc-Ryser*) en los profundos resultados de la equivalencia de formas cuadráticas racionales. En particular, encontramos lo siguiente.

4.2.15 Teorema. (Hughes). Sea π un plano de orden n, tal que satisface las condiciones de *Bruck- Ryser* sobre n. Sea G el grupo de colineaciones de π de orden primo p. Sea un número par u de puntos fijos. Luego una condición necesaria que tal colineación G exista, es que la ecuación:

$$x^2 = ny^2 + (-1)^{(p-1)/2}pz^2$$

tiene una solución en los enteros x, y, z no todos ceros.

El mismo resultado es válido para un grupo de colineación G de orden impar g (en lugar de p) si cada elemento $\neq 1$ de G desplaza los mismo puntos.

El Teorema de *Hughes*, al igual que el teorema de *Bruck-Ryser*, niega la existencia de ciertas colineaciones, pero no garantiza la existencia de colineaciones que cumplan las condiciones.

El contenido principal del siguiente teorema, es que si un plano π tiene un cierto grupo de colineaciones G, entonces π debe tener aún más específicas colineaciones. Suponemos que G es de un tipo simple. Explícitamente vamos a suponer que G es transitivo y regular en los

$$N = n^2 + n + 1$$

puntos de π, y también que G es abeliano. Este resultado fue demostrado primero por $Hall$ con G un grupo de orden N cíclico en los N puntos de π. $Bruk$ extendió este resultado al estudio de casos en el cual G es transitivo y regular, pero tuvo que asumir, además, que G es abeliano para obtener el mismo resultado. $Hoffman$ obtiene un similar resultado, suponiendo que G es cíclico en los n^2-1 puntos de π que no están en L_∞ y diferente del origen.

Suponer que tenemos un grupo G de colineaciones de un plano π de orden n, donde G es Abeliano y transitivo y regular en los N puntos de π. En este caso si P es un punto fijo de π, cada punto tiene una única representación Px, $x \varepsilon G$. Si un entero t es primo a N, entonces $x \to x^t$, todo $x \varepsilon G$ es trivialmente un automorfismo de G. Si además, para cada $x \varepsilon G$, $Px \to Px^t$ es una colineación de π, nosotros decimos que t es un multiplicador de π. Trivialmente, los multiplicadores forman un grupo multiplicativo módulo N.

4.2.16 Teorema. Si un plano π de orden n tiene un grupo de colineación G el cual es abeliano, transitivo y regular en los N puntos de π, con $N = n^2+n+1$, entonces cualquier primo p que divide a n, es un multiplicador de π.

Demostración. Bajo la hipótesis, hay solamente un único componente transitivo para puntos y también para rectas. Hay una sola representación de puntos $P = P_1$ y una sola representación de rectas $L = L_1$, y si $D_{11} = \{x_1, x_2, \dots, x_{n+1}\}$, $x_i \varepsilon G$, entonces Px_i, $i = 1, \dots, n+1$ son los puntos de L_1. Entonces $x_1u, \dots, x_{n+1}u$, $u \varepsilon G$ son los puntos de G.

Aquí tenemos $D = \delta_{11}$, $D' = \delta^*_{11}$.

$$\begin{aligned} D &= x_1 + \cdots + x_{n+1}, \\ D' &= x_1^{-1} + \cdots + x_{n+1}^{-1}. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Ahora C_2 y C_1 se reducen a la identidad. Las dos primeras relaciones de la ecuación **4.7** quedarían de siguiente forma:

$$DD' = D'D = n \cdot 1 + \gamma.$$

Las dos últimas relaciones de la ecuación **4.7**, sólo basta decir que hay $n+1$ elementos en D y D'. Para demostrar que $Px \to Px^p$ es una colineación de π, debemos demostrar que $Px_1^p, Px_2^p, \dots, Px_{n+1}^p$ están en una recta. Para esto necesitamos demostrar que para algún $u \varepsilon G$,

$$D^{(p)} = x_1^p + \cdots + x_{n+1}^p = (x_1 + \cdots + x_{n+1})u, \tag{4.16}$$

desde que los puntos de una recta arbitraria Lu son $Px_1u, Px_2u, \dots, Px_{n+1}u$. A la inversa, si la ecuación **4.16** se mantiene, entonces $Px_1^p, \ldots, Px_{n+1}^p$ son los puntos de la recta Lu, donde generalmente $P(x_1v)^p, \ldots, P(x_{n+1}v)^p$ son los puntos de la recta Luv^p, y así $Px \to Px^p$ es una colineación y p es un multiplicador. Para este teorema consideramos el anillo de grupo G^* a ser éste el anillo de grupo de G sobre los enteros. $G^*(\text{mod } p)$ es el anillo G^* con coeficientes reducidos módulo p. Tenemos:

$$D^{(p)} = x_1^p + \cdots + x_{n+1}^p \equiv (x_1 + \cdots + x_{n+1})^p = D^p \, (mod \; p), \tag{4.17}$$

puesto que los coeficientes multinomial son múltiplos de p primo y G es abeliano. Al asumir esto tenemos que $(x_i v)^p = x_i^p v^p$ y que $x \to x^p$ es un automorfismo de G. Ya que $p \mid n$ y $N = n^2+n+1$, se tiene que $(p, N) = 1$, obtenemos la ecuación **4.16**

$$DD' \equiv \gamma \, (mod \; p). \tag{4.18}$$

Multiplicando por D^{p-1}, tenemos:

$$D^p D' \equiv D^{p-1}\gamma \equiv (n+1)^{p-1}\gamma \equiv \gamma \, (mod \; p). \tag{4.19}$$

Por lo tanto, desde la ecuación **4.17**,

$$D^{(p)} D' \equiv \gamma \, (mod \; p). \tag{4.20}$$

Esto lo podemos escribir como

$$D^{(p)} D' = \gamma + pR, \tag{4.21}$$

donde (y esto es primordial para nuestra demostración) los coeficientes de los elementos en el grupo R son enteros no negativos, ya que en $D^{(p)}D'$ todos los coeficientes no son negativos, y por la ecuación **4.20**, cada término $a_i u_i$, $u_i \, \varepsilon \, G$ tiene a $a_i \equiv 1(\text{mod } p)$, con $a_i \geq 0$. Así $a_i \geq 1$ y $(a_i - 1)/p$ es un número entero no negativo, siendo éste el coeficiente de u_i en R. Ahora $x \to x^{-1}$, $x \, \varepsilon \, G$ es un automorfismo de G, y por lo tanto, determina un automorfismo $h \to h'$, para $h \, \varepsilon \, G^*$ y $D \to D'$ bajo este automorfismo. Se aplica a la ecuación **4.21**, resumiendo

$$DD'^{(p)} = \gamma + pR'. \tag{4.22}$$

Más aún, $x \to x^p$ es un automorfismo de G y determina un automorfismo $h \to h^{(p)}$ de G^*. Aplicándola a la ecuación **4.16**, se resume

$$D^{(p)}D'^{(p)} = n \cdot 1 + \gamma. \tag{4.23}$$

El producto del lado izquierdo de las ecuaciones **4.16** y **4.23** es la misma que para las ecuaciones **4.21** y **4.22**. Por lo tanto, al igualar el producto de los lados derechos de dichas ecuaciones, tenemos:

$$(n \cdot 1 + \gamma)^2 = (\gamma + pR)(\gamma + pR'). \tag{4.24}$$

El homomorfismo de G^* en los enteros determinada por $x \to 1$, $x \,\varepsilon\, G$, aplicada a la ecuación **4.21**, nos da

$$(n+1)^2 = n^2 + n + 1 + pR(1), \tag{4.25}$$

donde $R \to R(1)$ en el homomorfismo. Así $pR(1) = n$, y también $pR'(1) = n$. Pero en G^*, $pR\gamma = pR(1)\gamma = n\gamma$. Usando esto en la ecuación **4.24**, encontramos

$$n^2 \cdot 1 = (pR)(pR'). \tag{4.26}$$

Pero desde entonces pR y pR' tienen coeficientes no negativos, esto es imposible si hay más de un término en pR que es distinto de cero. Por lo tanto $pR = bu$ para algún entero b y $u \,\varepsilon\, G$. Pero $b = pR(1) = n$, donde $pR = nu$. Substituyendo en la ecuación **4.21**, tenemos

$$D^{(p)}D' = \gamma + nu. \tag{4.27}$$

Multiplicando por D, y usando la ecuación **4.16**, tenemos

$$\begin{aligned} D^{(p)}D'D &= \gamma D + nDu, \\ D^{(p)}(n+\gamma) &= (n+1)\gamma + nDu, \\ nD^{(p)} + (n+1)\gamma &= (n+1)\gamma + nDu. \end{aligned} \tag{4.28}$$

Ahora nos da:

$$D^{(p)} = Du. \tag{4.29}$$

Pero esto es precisamente la relación **4.16** que necesitábamos, y nuestro teorema queda demostrado. $\square$

Como una observación de este teorema, consideramos un plano de orden 8 con un grupo de colineación de orden 73 (necesariamente cíclico). Los puntos pueden ser representados como residuos de módulo 73. El multiplicador es 2, y si $a_1, \ldots, a_9$ son los puntos de una recta, entonces $2a_1, \ldots, 2a_9$ son $a_1 + s, \ldots, a_9 + s$ en cierto orden para un apropiado s. Entonces los puntos $a_1 - s, \ldots, a_9 - s$ están en una recta fija por el multiplicador 2. Si uno de estos residuos es 1, entonces el multiplicador 2 nos da la serie completa de puntos sobre una recta 1, 2, 4, 8, 16, 32, 37, 55, 64 (mod 73). Cualquier otra serie fijada por 2, difiere de ésta por un factor constante y da el mismo plano. El plano es el plano Desarguesiano.

Hughes ha demostrado otra consecuencia que a la vez, es más especial y más refinada que el **Teorema 4.2.15**.

4.2.17 Teorema. Un plano π de orden n, donde $n \equiv 2$ $(mod\ 4)$, $n > 2$, no puede tener una involución.

Demostración. Suponer que π es un plano de orden n, donde $n \equiv 2(\text{mod } 4)$, $n > 2$ que posee una involución b. Entonces por **Teorema 4.2.11**, desde que n es par y no es un cuadrado, b es una elación. Sea M el eje de la elación y sea C el centro, con $C \varepsilon M$. Sea Q_i, $i = 1, \ldots, n$ el resto de los puntos en M, y K_i, $i = 1, \ldots, n$ el resto de las rectas que pasan a través de C. Escribimos $n = 2m$, donde m es impar. Las n^2 rectas de π que no pasan a través de C, pueden ser divididas como $n^2/2 = 2m^2$ clases de dos rectas, donde una clase con la recta L también contiene a Lb. En cada clase elegimos una recta L_i, $i = 1, \ldots, 2m^2$. Similarmente, los n puntos distintos de C de la recta K_i pueden ser divididos como $n/2 = m$ clases con respecto a b. En cada clase elegimos un punto y el nombre de estos puntos son P_{ij}, $j = 1, \ldots, n/2 = m$.
Definiremos el número de incidencias a_{ij}^k según la regla:

$$\begin{aligned} a_{ij}^k &= +1 \qquad si\ P_{ij}\ \varepsilon\ L_k, \\ a_{ij}^k &= -1 \qquad si\ P_{ij}b\ \varepsilon\ L_k, \\ a_{ij}^k &= 0 \qquad \texttt{(de lo contrario)}. \end{aligned} \tag{4.30}$$

4.2.18 Lema.

$$\sum_k (a_{ij}^k)^2 = n.$$

Demostración. Los puntos P_{ij} están en n rectas, L_K o $L_K b$, así el lema es inmediato. $\square$

4.2.19 Lema.

$$\sum_k a_{ij}^k a_{st}^k = 0 \qquad si \ \ (i,j) \neq (s,t).$$

Demostración. Si $i = s$, $j \neq t$, los puntos P_{ij} y $P_{ij}b$ están todos en K_i y ninguno de los dos está en otra recta, de ahí la suma es cero. Si $i \neq s$, dejamos que $P_{ij}P_{st}$ sea $L_q x$, $P_{ij}P_{st}b$ sea $L_r y$, donde x e y son 1 o b. Ahora $r \neq q$, pues si $r = q$, $x = y$, entonces $L_q x = L_r y$ contiene a P_{st} y $P_{st}b$, que son distintos puntos en K_s, una contradicción. Pero si $r = q$, $x = yb$, entonces $L_q x = L_r yb$ contienen los distintos puntos P_{ij} y $P_{ij}b$, que se encuentran en K_i, una contradicción. Por lo tanto $r \neq q$. Pero luego

$$\begin{aligned} a_{ij}^q &= a_{st}^q, \qquad & a_{ij}^q a_{st}^q &= +1, \\ a_{ij}^r &= -a_{st}^r, \qquad & a_{ij}^r a_{st}^r &= -1. \end{aligned}$$

Por lo tanto, los términos que no son ceros del **Lema** pueden juntarse para que la suma de ellos sea cero. Por lo tanto la suma del **Lema** es cero. $\square$

De nuestro *Lema* los números de incidencia a_{ij}^k pueden formar una matriz $2m^2 \times 2m^2$:

$$A = (a_{ij}^k) \quad \text{con } ij \text{ nos da las filas, } k \text{ columnas,} \tag{4.31}$$

donde, por nuestro *Lema*, A satisface

$$AA^T = nI. \tag{4.32}$$

Vamos a definir los números b_{ik} según la regla

$$b_{ik} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}^k. \ \ i = 1, \ldots, n, \ \ k = 1, \ldots, 2m^2. \tag{4.33}$$

Luego cada b_{ik} es $+1$ o -1, ya que cada recta L_k intersecta K_i en exactamente un punto, en P_{ij} o $P_{ij}b$, y exactamente un solo término de los a_{ij}^k es diferente de 0. Entonces una matriz B de $n \times 2m^2$, tal que

$$B = (b_{ik}) \quad i = 1, \ldots, n, \quad k = 1, \ldots, 2m^2, \tag{4.34}$$

es tal que, su primera fila es la suma de las primeras m filas de A, su segunda fila es la suma de las segundas m filas de A, y así sucesivamente. Ya que desde la ecuación **4.32** diferentes filas de A tienen un producto interno de ceros, lo mismo sucede con las filas de B. Podemos multiplicar las columnas de B por $+1$ ó -1 sin cambiar el producto interno, y esto lo haremos para formar la primera fila, compuestas exclusivamente por $+1$'s. Desde que $n > 2$, hay a lo menos tres filas en B, las tres primeras filas de B es de la forma:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}
\multicolumn{2}{|c|}{+1, \quad \cdots \quad ,+1} & \multicolumn{2}{c|}{+1, \quad \cdots \quad ,+1} \\
\hline
+1, \cdots ,+1 & +1, \cdots ,+1 & -1, \cdots ,-1 & -1, \cdots ,-1 \\
\hline
+1, \cdots ,+1 & -1, \cdots ,-1 & +1, \cdots ,+1 & -1, \cdots ,-1 \\
\multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} \\
\multicolumn{1}{c}{r} & \multicolumn{1}{c}{s} & \multicolumn{1}{c}{t} & \multicolumn{1}{c}{u}
\end{array}$$

Desde el producto interno de la segunda y tercera fila con la primera es igual a cero, tenemos $r + s = t + u$, $r + t = s + u$. Aquí $r + s + t + u = 2m^2$, y así

$$r + s = t + u = m^2, \quad r + t = s + u = m^2, \tag{4.35}$$

de ahí

$$u = r, \quad s = t = m^2 - r. \tag{4.36}$$

Desde que el producto interno de la segunda y tercera fila también es cero, tenemos $r + u = s + t = m^2$.

$$2r = m^2, \tag{4.37}$$

que es un conflicto por que $n \equiv 2 \pmod 4$, $n = 2m$, y m es un número impar. Por lo tanto en π no puede haber una involución, y nuestro **Teorema 4.2.17** queda demostrado. $\square$

Este resultado puede ser obtenido mediante la relación de incidencia de la ecuación **4.7** del **Teorema 4.2.14** y la correspondencia de G^* en los enteros por el homomorfismo $1 \to 1, b \to -1$.

Un ejemplo de un plano no *Desarguesiano* de orden 9, es dado por *Veblen* y *Wedderburn*. Este ejemplo ha sido demostrado por *Hughes* en un caso particular de una clase infinita. Sea $q = p^r$ para algún primo p. Entonces hemos demostrado que existe un cuerpo K de orden q^2 cuyo centro Z es el cuerpo $GF(q) = GF(p^r)$.

4.3. Planos de Hughes

Un punto P lo denotaremos como $P = (xk, yk, zk)$, x, y, z son elementos fijos de K no todos ceros, y $k \neq 0$ un elemento arbitrario de K. El **Teorema 4.2.5** de *Singer* nos da una correspondencia:

$$\begin{aligned} x &\longrightarrow a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, \\ y &\longrightarrow a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, \\ z &\longrightarrow a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z, \end{aligned} \tag{4.38}$$

donde $a_{ij} \,\varepsilon\, Z$, tal que

$$(x, y, z) = P \to PA = (a_{11}x, \ldots, a_{13}z\ ; a_{21}x, \ldots, a_{23}z\ ; a_{31}x, \ldots, a_{33}z) \tag{4.39}$$

es una colineación α de orden $m = q^2 + q + 1$ en el plano *Desarguesiano* de orden q con coordenadas en Z. El plano de *Hughes* viene dada por la extensión de la colineación α a los puntos con coordenadas en K.

Tenemos una base lineal L_t que viene dada por la ecuación

$$x + ty + z = 0. \tag{4.40}$$

Aquí tomamos $t = 1$ o $t \notin Z$, pero por lo demás t es un elemento arbitrario de K. Esto nos da $1+(q^2-q)=q^2-q+1$ base de rectas. Definimos una incidencia $P=(xk,yk,zk)\ \varepsilon\ L_t$, si y sólo si x,y,z satisface la ecuación **4.40**. Por la asociatividad de la ecuación en K y la ley de distributividad por la derecha, entonces por la ecuación **4.40** tenemos también

$$0=(x+ty+z)k=xk+t(yk)+zk, \tag{4.41}$$

y por nuestra regla de incidencia $P\ \varepsilon\ L_t$ no depende de que representante de P es elegido para que satisfaga la ecuación **4.40**. Más rectas $L_t^{\alpha^i}$, con $i=0,\ldots,m-1$ son definida simbólicamente, y decimos

$$PA^i\ \varepsilon\ L_t^{\alpha^i}\quad,\ i=0,\ldots,m-1, \tag{4.42}$$

si y sólo si, $P\ \varepsilon\ L_t$.

No es cierto que los puntos de $L_t^{\alpha^i}$ satisfacen una ecuación lineal. Para encontrar los puntos en L_t, es posible tomar x e y arbitrarios en la ecuación **4.40**, tal que la ecuación no sea cero, y determinar z en la ecuación. Esto nos da q^4-1 puntos de 3 coordenadas de los cuales q^2-1 representan el mismo punto. Por lo tanto L_t contiene $q^2+1=n+1$ puntos distintos. Por lo tanto, también, $L_t^{\alpha^i}$ contiene $n+1$ puntos. Tenemos

$$(q^2-q+1)(q^2+q+1)=q^4+q^2+1=n^2+n+1$$

en todas las rectas, conteniendo cada una $n+1$ puntos. Hay n^2+n+1 puntos en total. Por lo tanto, para demostrar que tenemos una plano proyectivo, es suficiente demostrar que para dos rectas distintas, tienen un único punto en común. La correspondencia $P\to PA$ es 1-1 y tiene un período $m=q^2+q+1$. Si $\{P\}_s$ es el conjunto de puntos en la base lineal L_s, $L_s^{\alpha^i}$ que contiene al conjunto de puntos $\{P\}_sA^i$ y $L_t^{\alpha^j}$ contiene al conjunto de puntos $\{P\}_tA^j$. Por lo tanto, para demostrar que $L_s^{\alpha^i}$ y $L_t^{\alpha^j}$ tienen un único punto en común, es suficiente demostrar que L_s y $L_t^{\alpha^{j-i}}=L_t^{\alpha^h}$ (donde el exponente de α se toman como módulos m) tienen un único punto en común.

Sea $P=(x,y,z)$ un punto de $L_t^{\alpha^h}$. Entonces PA^{-h} es un punto de L_t, e inversamente. Entonces si

$$(x,y,z)A^{-h}=(b_{11}x+b_{12}y+b_{13}z,b_{21}x+b_{22}y+b_{23}z,b_{31}x+b_{32}y+b_{33}z), \tag{4.43}$$

entonces la condición de que $P=(x,y,z)$ debería estar sobre $L_t^{\alpha^h}$ es

$$(b_{11}x+b_{12}y+b_{13}z)+t(b_{21}x+b_{22}y+b_{23}z)+(b_{31}x+b_{32}y+b_{33}z)=0. \tag{4.44}$$

Si (x, y, z) está en L_s, entonces tenemos

$$x + sy + z = 0. \tag{4.45}$$

Debemos demostrar que, aparte de un factor k a la derecha, que las ecuaciones **4.44** y **4.45** tienen una única solución (x, y, z). Resolvemos la ecuación **4.45** para x, y sustituimos en **4.44**. Esto da

$$uy + az + t(vy + bz) = 0, \tag{4.46}$$

donde

$$\begin{aligned} u &= b_{12} + b_{32} - (b_{11} + b_{31})s, \\ v &= b_{22} - b_{21}s, \\ a &= b_{13} + b_{33} - (b_{11} + b_{31}), \\ b &= b_{23} - b_{21}. \end{aligned} \tag{4.47}$$

Notamos que $a, b \varepsilon Z$, pero en general u, v no están en Z. Hay tres casos a considerar en la búsqueda de soluciones para la ecuación **4.46**

Caso 1.- $b \neq 0$. Aquí la ecuación **4.46** puede ser escrito como

$$(b^{-1}a + t)(vy + bz) + (u - b^{-1}av)y = 0, \tag{4.48}$$

usando el hecho de que a y b^{-1} están en el centro. Si ambos coeficientes $b^{-1}a + t$ y $u - b^{-1}av$ deberían ser cero, entonces $t \varepsilon Z$, $t = 1$, y $a + b = 0$, $u + v = 0$. Pero luego de que $u + v = 0$, se tiene

$$b_{12} + b_{22} + b_{32} = (b_{11} + b_{21} + b_{31})s, \tag{4.49}$$

donde $s \varepsilon Z$, y así $s = 1$. Ahora $a + b = 0$ da

$$b_{13} + b_{23} + b_{33} = b_{11} + b_{21} + b_{31}. \tag{4.50}$$

Pero con $s = 1$ y $t = 1$, se dice que las ecuaciones **4.44** y **4.45** representan la misma recta del *plano Desarguesiano* π_1 sobre $GF(q)$. Pero esto no es posible, al menos que $L_s = L_1$, $L_t^{\alpha^i} = L_1$ debido a que la matriz A es de orden $m = q^2 + q + 1$ como una colineación de π_1. Por lo tanto, ambos coeficientes son distintos de cero en la ecuación **4.48**. Por lo tanto, si $b^{-1}a + t \neq 0$, un valor arbitrario para y determina $vy + bz$ únicamente, y desde que $b \neq 0$, z es determinada únicamente. Si $b^{-1}a + t = 0$, entonces $u - b^{-1}av \neq 0$, y así $y = 0$, donde z es un valor arbitrario. Así z e y son determinados únicamente además de un factor derecho, para que a su vez la ecuación **4.45**, determine a x únicamente por y y z. Así a las ecuaciones **4.44** y **4.45**, las satisface un único punto (xk, yk, zk). Así tenemos la única solución para el *Caso* 1.

Caso 2.- $b = 0$, $a \neq 0$. Aquí la ecuación **4.46** se convierte en

$$(u + tv)y + az = 0. \tag{4.51}$$

Desde que $a \neq 0$, las ecuaciones **4.51** y **4.45** las satisface un único punto (xk, yk, zk).

Caso 3.- $b = 0$, $a = 0$. Aquí tenemos

$$\begin{aligned} b_{13} + b_{33} &= b_{11} + b_{31}, \\ b_{23} &= b_{21}, \end{aligned} \tag{4.52}$$

y vemos en que el punto $P = (k, 0, -k)$ satisface ambas ecuaciones **4.46** y **4.45**. Asimismo, desde la ecuación **4.52**, vemos que, de la ecuación **4.43**

$$PA^{-h} = (k, 0, -k)A^{-h} = (b_{11} - b_{13})(k, 0, -k) = P, \tag{4.53}$$

donde $b_{11} - b_{13} \neq 0$, desde que A^{-h} no es singular. Pero desde que A^h fija al punto P de π_1, vemos que $h \equiv 0 \pmod{m}$, y así $L_t^{\alpha^h}$ es L_t. Por lo tanto, nuestras rectas son ahora L_s y L_t, donde seguramente $s \neq t$. Para esto,

$$x + sy + z = 0 \;\; y \;\; x + ty + z = 0,$$

y así, claramente $P = (k, 0, -k)$ se encuentra en estas dos rectas, y además es único.

Así, en cada caso cualquier dos rectas distintas tienen una única intersección, y tenemos demostrado que además forman un plano proyectivo.

4.3.1 Lema. El conjunto $\mathbb{H}_0$ de todos los puntos de la forma (x_1k, x_2k, x_3k), donde $x = (x_1, x_2, x_3)$ con $x_i \varepsilon Z$, $i = 1, 2, 3$, y $k \varepsilon K$ junto con las rectas que une a ellos, forma un subplano Desarguesiano de $\mathbb{H}$ (plano proyectivo finito de Hughes).

Demostración. De la ecuación **4.44** notaremos que la recta L_tA^m de $\mathbb{H}$, puede ser representada por una ecuación de la forma $xa+yb+zc+$ $(xa'+yb'+zc')t = 0$, donde $a, b, c, a', b', c' \varepsilon Z$. Así, cualquier recta de la forma L_1A^m tiene una ecuación de la forma $xa + yb + zc = 0$ donde $a, b, c \varepsilon Z$. Además, ya que hay exactamente q^2+q+1 rectas distintas L_1A^m, cualquier ecuación de la forma $xa + yb + zc = 0$, con $a, b, c \varepsilon Z$ representa una de las rectas L_1A^m. Así, los puntos de $\mathbb{H}_0$ y la recta L_1A^m, con $m = 0, 1, \ldots, q^2+q$ forman un plano Desarguesiano de orden q. $\square$

Conclusión

En las páginas precedentes se ha aprovechado del enfoque moderno de la geometría proyectiva, para indagar en el estudio del álgebra abstracta referentes a un plano, donde solamente el concepto de incidencia es válido. Producto de fundamentos y métodos matemáticos, visto bajo las perspectivas de artistas del renacimiento y matemáticos como Gérard Desargues, se pudo dar un nuevo concepto de geometría muy similar al rígido plano euclidiano y dar un enfoque y un estudio más profundo como se pudo mostrar en menores rasgos en la presente tesis.

La imaginación humana fue clave para dar a conocer unos de los principales axiomas con los que se rige la geometría proyectiva, donde nos señala que dos rectas siempre se intersectarán en un único punto. El otro axioma principal es el mismo que emplea la geometría euclidiana, que por dos puntos distintos pasa una única recta, o podemos afirmar que dos puntos definen una única recta. Finalmente, el tercer axioma nos indica que siempre en un plano proyectivo existirán 4 puntos distintos, donde tres de ellos no son colineales, en otras palabras siempre existirá un cuadrángulo.

Tomando en cuenta estos tres axiomas, y algunas definiciones preliminares, hemos entregado resultados concreto como es el isomorfismos entre planos proyectivos, colineaciones, perspectividades, las existencias de ciertas clases de grupos entre otros, la cual se puso en manifiesto en la mayor parte del cuerpo de esta tesis.

En el primer capítulo, definimos conceptos preliminares para el desarrollo de la tesis. También pudimos apreciar definiciones, como es el isomorfismo de un plano proyectivo en sí mismo, que es llamado colineación. Algunas de estas colineaciones que cumplen ciertos requisitos fueron definidas como perspectividades, una de las herramientas más importantes para el desarrollo y demostraciones de teoremas y axiomas que se pudo mostrar en todos los capítulos restantes.

Posterior a esto, nos aprovechamos de las consecuencias configuracionales de las existencias de perspectivas en un plano proyectivo. Con esto, pudimos construir un subconjunto de un plano proyectivo con 10 puntos y 10 rectas llamada la Configuración de Desargues, en la cual dos triángulos están en perspectiva bajo un punto y una recta. Un plano que admite una perspectividad tiene muchas configuraciones de Desargues. También la configuración de Desargues puede ser construido mediante espacios de tres dimensiones con correspondencias biunívocas.

Así, con la construcción de la configuración de Desargues podemos afirmar que cualquier plano proyectivo, que admita dos triángulos que estén en perspectiva sobre un punto y una recta, es un plano Desarguesiano.

El trabajo de esta tesis, fue mostrar un estructura matemática diferente y poco conocida como es la Geometría Proyectiva, en la cual la medida, los ángulos y el paralelismo no existen, sólo el concepto de incidencia, y ver que con tan pocas definiciones se da una estructura perfecta a un modelo matemático que nos sirvió para crear nuevos planos, isomorfismos y ver que también esta geometría compacta con definiciones básicas y complejas del álgebra abstracta, la cual da la creación de nuevas estructuras matemáticas, como nuevos grupos, cuerpos, anillos entre otros. En el capítulo IV se reflejó el trabajo de los capítulos anteriores, y trabajamos la mayor parte con el álgebra abstracta, creando así grupos de traslaciones, grupo de permutaciones, grupos abelianos, etc. También nos damos cuenta de que las matrices juegan un rol especial para las demostraciones de varios teoremas en planos finitos y teoremas de Bruck-Ryser.

Todo el trabajo de la presente tesis, finaliza con la construcción de una nueva clase de planos proyectivos finitos que son los planos de Hughes, que a modo de síntesis es un plano de coordenadas. Se muestra que para cualquier número primo $p > 2$, existe un plano de Hughes de orden p^2, y el plano de Hughes más pequeño, es decir, de orden 9, fue descubierto por Veblen y Wedderburn. Mostramos también otra característica que distingue a los planos de Hughes, que los grupos de colineaciones del plano de Hughes, no fija un punto o una recta del mismo plano de Hughes. Los planos de Hughes son, de hecho, los únicos y conocidos planos proyectivos finitos no Desarguesianos con esta propiedad.

La geometría proyectiva fue trabajada solamente en planos finitos. Los planos infinitos dan noción de que hay mucho más por descubrir, nuevos teoremas, nuevas estructuras matemáticas, así también como planos afines.

Bibliografía

[1] Hughes, D. R., y Piper, F. C.(1973). *Projective Planes*. New York: Springer Verlag.

[2] Bruck, R. H., y Ryser, H. J. (1949). *The non-existence of certain finite projective planes.* Canadá: Canadian Journal of Mathematics 1.

[3] Albert, A. A.(1952). *On nonassociative division algebras.* E.E.U.U.: Transactions of the American Mathematical Society.