UNIVERSIDAD DE VALPARAÍSO

FACULTAD DE CIENCIAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

NÚMEROS COMPLEJOS Y GEOGEBRA EN LA ELABORACIÓN DE FRACTALES PROMOVIENDO SENSACIONES EN ESTUDIANTES

Memoria presentada por

Germán Ignacio Holtheuer Vielma

Para optar al Título de Profesor de Matemáticas con Mención en Computación y al Grado de Licenciado en Educación

Profesora Guía:

Dra. Jeannette E. Galleguillos Bustamante

Valparaíso – Chile

2018

DEDICATORIA

Al amor de mi vida, que con paciencia y esmero me acompañó y alentó a poder finalizar la presente memoria de tesis.

Paola Fernández M.

(Personita C.)

AGRADECIMIENTOS

Quisiera agradecer en primer lugar a Dios, por ser el artífice de todos los sucesos, que por imposibles que parecían, se fueron suscitando de la forma más inexplicable que se pudiera imaginar. Y en segundo lugar a todas las personas que me permitieron llegar hasta aquí, comenzando por mi madre que siempre ha estado incondicionalmente para uno y mi padre que fue un apoyo incomprensible en su momento y que hoy, a diez años de su partida, todo parece ser más comprensible.

A todas las personas de la Universidad de Valparaíso que me apoyaron en este inesperado largo camino, y más de alguno se me quedará en el tintero, comenzando por los profesores que apoyaron con palabras de aliento, sabios consejos y humildes gestos inesperados hacia mi persona, Eduardo Stange, Jaime Contreras, Balvedé Acosta, Jorge León, Silvia Otárola, Miguel Cerda, Jesús Juyumaya y Paula Jiménez; a los funcionarios no académicos Maximiliano García, Gerardo Araya y Don Adolfo Escobar, todos ellos colaboraron de una manera no académica para que pudiera estar escribiendo estas líneas.

Por último, a Jeannette Galleguillos por creer en la alocada idea del tema propuesto, su apoyo, comprensión y guía en los momentos que no estaban claras las ideas, además de la paciencia por los largos viajes y reuniones para poder realizar este trabajo.

RESUMEN

En este trabajo se investigaron las percepciones que manifestaron los estudiantes de un tercer año de enseñanza media de un colegio de la comuna de San Antonio, al visualizar la representación geométrica de números complejos. La investigación se abordó mediante un estudio de caso, donde los casos corresponden a los estudiantes que cursan el tercer año medio. Se realizaron dos etapas, una teórica y otra con el uso del Software de Geometría Dinámica GeoGebra.

El objetivo de este trabajo fue estudiar la influencia de la visualización de los números complejos utilizando el software GeoGebra en la percepción que los estudiantes de tercer año medio tienen de la matemática. La pregunta principal de este estudio fue ¿Cómo los estudiantes de tercer año medio de un colegio de la comuna de San Antonio perciben la matemática después de la integración de una actividad que incorpora la visualización de los números complejos por medio de GeoGebra? Los datos se obtuvieron mediante entrevistas semiestructuradas a estudiantes de tercer año medio. Los resultados arrojaron dos directrices de análisis, una etapa con las percepciones previas y otra con las percepciones posteriores a la realización de la actividad central del estudio. Las percepciones que los estudiantes manifestaron tener antes de realizar la experiencia estaban gobernadas por percepciones y emociones negativas hacia la matemática, se encontraron percepciones donde las matemáticas son: aburridas, algo serio, solo pasar contenido, difícil y latoso. Una vez realizada la experiencia, los estudiantes en su mayoría, manifestaron que sus percepciones estaban relacionadas con aspectos positivos o favorables, encontrando percepciones como: fue impensado relacionar la matemática con arte, interesante, más entretenida, colorida, algo fuera de los números. Estos resultados se relacionan con categorías de placer frente a la sorpresa/novedad y placer de hacer sentido de la matemática. Las percepciones de los estudiantes manifestadas en las entrevistas fueron analizadas en base a delineaciones del constructo terórico *humanos con medios* considerando al estudiante y el software GeoGebra como un colectivo de pensamiento particular que potencia el quehacer intelectual y reorganiza la actividad humana.

ABSTRACT

In this work we investigated the perceptions expressed by students in a third year of secondary education at a school in the San Antonio district, when viewing the geometric representation of complex numbers. The research was addressed through a case study, where the cases correspond to students who are in the third year. Two stages were carried out, one theoretical and the other with the use of Dynamic Geometry Software, GeoGebra.

The objective of this work was to study the influence of the visualization of complex numbers using GeoGebra software in the perception that students in the third year of middle school have of mathematics. The main question of this study was How do the students of the third year of a school in the San Antonio district perceive mathematics after the integration of an activity that incorporates the visualization of complex numbers through GeoGebra? Data were obtained through semi-structured interviews to students in the third year. The results yielded two analysis guidelines, one stage with the previous perceptions and another with the perceptions subsequent to the realization of the central activity of the study. The perceptions that the students expressed before the experience was governed by perceptions and negative emotions towards mathematics, perceptions were found where the mathematics are: boring, something serious, only to pass content, difficult and latent. After the experience, the majority of students expressed that their perceptions were related to positive or favorable aspects, finding perceptions such as: it was unthinkable to relate mathematics with art, interesting, more entertaining, colorful, something out of numbers. These results are related to categories of pleasure versus surprise/novelty and pleasure of making sense of mathematics. The perceptions of the students expressed in the interviews were analyzed based on delineations of the theoretical construct *humans with media* considering the student and the GeoGebra software as a collective of particular thought that enhances the intellectual task and reorganizes human activity.

ÍNDICE DE CONTENIDOS

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABLAS

I. INTRODUCCIÓN

Los números, en general, no son del gusto de la mayoría de los estudiantes, más aún cuando éstos se "vuelven complejos", es en tercer año de enseñanza media cuando eso ocurre, donde la primera unidad contemplada en el plan de estudios es referente a los números complejos y que para los estudiantes son totalmente nuevos. También es destacable mencionar que la asignatura de matemáticas, generalmente es concebida por los alumnos como una disciplina difícil, descontextualizada e inútil para la vida, causándoles rompimientos cognitivos y psicológicos al abordarla (Galleguillos, 2016).

Dado el rechazo, en la mayoría de los estudiantes, al estudio de las matemáticas motivados por sus emociones y percepciones negativas de la misma, detectadas en lo que se ha experimentado como docente de matemática. Se consideró el tema de números complejos para un estudio de caso, tomando la ventaja que tienen los números complejos por tener una representación geométrica particular, así como artística y que pueden ser relacionados con fractales. La representación geométrica y la relación con fractales, es central, porque permite acercar a los estudiantes a un ámbito artístico y, posteriormente, someterlos a entrevistas, en las cuales se ven afloradas sus emociones y percepciones previas y ulteriores, las que pueden ser contradictorias si se consideran en las distintas etapas de la experiencia, la que está gobernada por la belleza de la matemática.

Lo antes mencionado, permite plantear y delimitar una directriz de investigación, centrando el foco de atención en cómo los estudiantes de tercer año medio, de un colegio de la provincia de San Antonio con bajos resultados en la prueba Simce y alto grado de vulnerabilidad, perciben la asignatura de matemática después de la integración de una actividad que incorpora la visualización de los números complejos por medio de GeoGebra.

Entonces, se espera, que los estudiantes presenten una percepción renovada de la asignatura de matemática, en particular de los números complejos.

II. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

De acuerdo al marco curricular (MINEDUC, 2009) “Objetivos fundamentales y contenidos mínimos obligatorios de la educación básica y media” del Ministerio de Educación de Chile se indica que los Contenidos Mínimos Obligatorios (CMO) explicitan los conocimientos, habilidades y actitudes implicados en todo el proceso de enseñanza-aprendizaje de los estudiantes y que éstos deben ser una oportunidad para lograr los Objetivos Fundamentales (OF), estos objetivos están formulados según lo que cada estudiante debe lograr, entonces los CMO están diseñados y elaborados desde la perspectiva de lo que cada docente debe obligatoriamente enseñar.

La asignatura de Matemática, se estructura en cuatro ejes de aprendizaje que se articulan con todo el proceso escolar de los estudiantes; estos son los ejes de Números, Álgebra, Geometría y Datos y Azar.

De estos ejes, es de interés para este trabajo centrarse en el eje de Números, que trata sobre los números complejos, específicamente en el nivel de tercer año de enseñanza media para los programas de estudio vigentes para el año 2017, los cuales establecen, entre otros, el contenido mínimo obligatorio:

> Formulación de conjeturas y demostración de propiedades relativas a los números complejos, en situaciones tales como: producto entre un número complejo y su conjugado; operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división y elevación a potencia con exponente racional de números complejos (MINEDUC, 2009).

El aprendizaje esperado 6 (AE6) ubicado temporalmente en la Unidad 1 de Números del primer semestre del programa de estudio de tercer año de enseñanza media como se aprecia en la Figura 1.

SEMESTRE 1		SEMESTRE 2	
UNIDAD 1	UNIDAD 2	UNIDAD 3	UNIDAD 4
AE 06 Representar un número complejo de forma polar y calcular la potencia, con exponente racional, de un número complejo.			**AE 20** Modelar situaciones o fenómenos mediante la distribución binomial.

Figura 1: Ubicación Temporal del AE6 en el programa de NM3 Matemática. (MINEDUC, 2009)

El AE6 al estar presente en los programas de estudio, se convierte en un contenido obligatorio de enseñar por parte de los docentes, es aquí donde dadas las características de los contenidos de tercer año de enseñanza media, para lograr el AE6 es que, según Canal Martínez (2012), depende del profesor en gran medida decidir hasta qué punto se quiere profundizar en ese tema y, a partir de mi experiencia como profesor de matemática, y en conversaciones con profesores cercanos y conocidos, es un contenido que muy escasamente se enseña por completo. De esta forma, se deja fuera una parte de este tema que permite el abordaje de los números complejos de una forma más gráfica, que se puede relacionar con la generación de fractales, cuyo surgimiento permitió el desarrollo, en la medida que la tecnología lo permitía, del arte digital, llamado *fractal art*. Al ser un tema atractivo para los estudiantes podemos utilizar la belleza de la matemática para estudiar la percepción de los estudiantes hacia la asignatura, a través de los conceptos matemáticos involucrados.

2.1 Problema de Investigación

El problema de este estudio es que se desconoce la percepción que los estudiantes tienen de la asignatura de matemática después de la integración de actividades que incorporan la visualización de los números complejos.

Villa-Ochoa y Ruiz Vahos, (2010) utilizan el software GeoGebra para estudiar el pensamiento variacional de estudiantes universitarios. El software promovió la coordinación y comprensión de los objetos matemáticos estudiados.

En un plano más artístico, Scucuglia (2012), analizó videos en forma de performances matemáticos digitales (DMP) producidos para un festival de videos. El autor caracterizó sentimientos y emociones que producen estos videos en los estudiantes. Las performances matemáticas, debido a la belleza de la matemática, pueden cambiar la percepción que los estudiantes tienen de la asignatura de matemática.

En este trabajo, aprovechamos las potencialidades de la visualización de GeoGebra con el uso de números complejos para conocer las percepciones que los estudiantes presentan sobre la asignatura de matemática.

El AE6, siendo este de gran importancia ya que es un contenido que puede ser abordado de una forma gráfica vistosa, permitiendo el uso del Software de Geometría Dinámica, GeoGebra; pudiendo así poder aprovechar los beneficios que entrega el uso de TIC en el aula. Según Farías y Pérez (2010), los estudiantes perciben las matemáticas como una "asignatura rigurosa y formal", lo que genera un rechazo a su estudio y una desmotivación generalizada en función de las emociones que genera en los estudiantes; afectando su disposición para poner atención en clases y aprender. Así, es posible aprovechar la belleza de la matemática en construcciones computacionales, como por ejemplo los fractales generados por números complejos, para investigar las percepciones y emociones que los estudiantes generan al ser enfrentados a actividades con predominancia de expresiones artísticas desconocidas para ellos y una belleza matemática fuera de lo común.

2.2 Objetivo de Investigación

El objetivo de este trabajo es conocer cómo los estudiantes perciben la asignatura de matemática, después de utilizar el software GeoGebra para la visualización de los números complejos, en un colegio de la región de Valparaíso. Considerando la visualización de los números complejos como un comienzo para posibles trabajos futuros en otros contenidos del currículum de Matemática.

La pregunta de investigación es ¿cómo los estudiantes de tercer año medio de un colegio de la región de Valparaíso perciben la asignatura de matemática después de la integración de una actividad que incorpora la visualización de los números complejos por medio de GeoGebra?

III. MARCO TEÓRICO

En este capítulo se incluyen los conceptos y constructos teóricos que sustentan y dan forma al trabajo realizado, comenzando con los números complejos, que son el elemento matemático que permite trabajar el objetivo de la investigación. Los números complejos estan seccionados en una breve parte historica, de la gestación de noción de número imaginario y complejo y, posteriormente un recorrido por los contenidos del Programa de Estudios, desde la organización de los conjuntos numéricos, representaciones y hasta las raíces de los números complejos, desde una perspectiva que usualmente es utilizada en enseñanza media, sin dejar demasiado de lado la rigurosidad propia de la asignatura.

3.1 Números Complejos

Para comenzar a hablar de los números complejos es necesario comprender cómo es que estos números fueron ganando terreno a pesar de ser considerados por mucho tiempo como "inútiles". Fue el matemático italiano Scipione dal Ferro (1465-1526) quien alrededor del 1500 podía resolver ecuaciones cúbicas reducidas del tipo $x^3 + mx = n$ y a pesar de no hacer públicos sus resultados, sí se los confirió en su lecho de muerte a su discípulo Antonio María Fior (de la primera mitad del siglo XVI) quien no era un matemático especialmente bueno y éste, como era la costumbre de la época, desafió a un muy conocido y formidable matemático de la época llamado Niccoló Fontana de Brescia (c.1499-1557), también conocido por el sobrenombre de "Tartaglia" (un soldado francés le clavo su espada en la mandíbula cuando era pequeño, causándole una tartamudez) (Kline, Martínez Pérez, Hernández, & Garciadiego, 1992); Tartaglia tuvo que lidiar con las ecuaciones cúbicas para ganar el desafío propuesto por Fior. Tartaglia una vez victorioso fue insistentemente presionado por Cardano para que le diera el método de resolución de las ecuaciones cúbicas que poseía, incluso prometió no difundir el método hasta que se enteró que la forma de resolución no era de Tartaglia sino de Dal Ferro, quién lo mejoró y publicó en su obra *Ars Magna* de 1545 otorgándole el nombre con el cual hoy en día se conoce el método de Cardano para la resolución de las ecuaciones cúbicas.

Las ecuaciones cúbicas en su resolución, que por lo demás Cardano conocía, tenían un problema que para un caso en particular de las soluciones reales se tenían que calcular las raíces cuadradas de números negativos, situación que Cardano omitió intencionadamente. Tiempo después fue Rafael Bombelli (1526-1572) continuador de los trabajos de Cardano quien tuvo la "alocada" idea de expresar el problema que tenía Cardano con las raíces cuadradas de números negativos presentes en la resolución de las ecuaciones cúbicas de la forma $a \pm b\sqrt{-1}$, probando así que las soluciones de las ecuaciones cúbicas propuestas por Cardano estaban en los correcto. Pero más importante es que Bombelli se llevó la gloria de haber resuelto el secreto de la cúbica, pues al comprensión de la naturaleza de la fórmula de Cardano terminó con el bloqueo psicológico y filosófico que generaba $\sqrt{-1}$, pero dejó el camino mucho más claro para poder trabajar $\sqrt{-1}$ con la aritmética básica.

El hallazgo de $\sqrt{-1}$ no se originó con las ecuaciones cuadráticas de la forma $x^2 + 1 = 0$; de hecho las omitieron y las llamaron "imposibles", sino más bien fue en las ecuaciones cúbicas que tenían soluciones reales pero para las cuales la fórmula de Cardano producía respuestas formales con componentes imaginarios. Nahin y Pinasco (2008), a pesar de todo el avance en destrabar la comprensión de las raíces cuadradas de números negativos quedaba por otorgarles una representación física.

La representación física de $\sqrt{-1}$ es tanto o más entramada que el propio entendimiento, pues grandes matemáticos en la historia trataron infructuosamente de otorgarles esa interpretación e incluso trabajaron con ellos sin comprenderlos completamente, entre ellos se pueden mencionar a René Descartes (1536-1650), Jean D'Alambert (1717-1783), Leonhard Euler (1707-1783), Gottfried Leibniz (1646-1716), Pierre-Simon Laplace (1749-1827), y el mismo Carl Gauss (1777-1855), cada uno de ellos hicieron aportes para poder comprenderlos como por ejemplo, según Nahin y Pinasco (2008), se le debe a Euler la introducción del símbolo de $i = \sqrt{-1}$ en 1777 y, por otro lado, según (Kline et al., 1992), fue Gauss quien introdujo el término de "número complejo" como opuesto de número imaginario y además utilizó la notación de i para $\sqrt{-1}$.

La interpretación geométrica de los números complejos se le debe en un principio a Caspar Wessel (1745-1818) quien los representó como vectores de un plano donde se añade un eje imaginario, eje y, cuya unidad es $\sqrt{-1}$ y en el eje x la unidad es el número 1, en la Figura 2 se puede ver una representación de dicho plano.

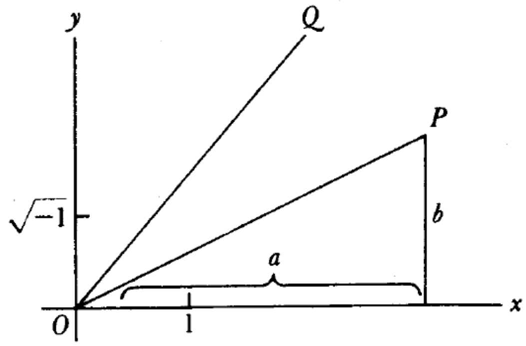


Figura 2: Representación geométrica de Wessel para los números complejos. (Nahin y Pinasco, 2008)

Otra representación geométrica de los números complejos, algo distinta, se le debe a Jean Robert Argand (1768-1822) quien observó que los números negativos eran una extensión de los positivos al combinar la magnitud con la dirección, y luego, trató de introducir un nuevo concepto para extender el sistema numérico real considerando la secuencia 1, x, -1 en la cual la operación aplicada al 1 se obtuviera x y que al aplicarla nuevamente sobre x se obtuviera -1. Argand notó que si en la Figura 3 se rota OP en $90°$ y luego se vuelve a repetir la misma rotación a OP se obtiene que P se mueve hasta Q, además combinando esta operación de rotación con la interpretación de Wessel encontró que precisamente ocurre la rotación al multiplicar 1 por $\sqrt{-1}$ y que luego al multiplicar nuevamente por $\sqrt{-1}$ se obtiene -1, de estas observaciones es que hoy en día podamos ver $\sqrt{-1}$ como una rotación positiva en $90°$ y $-\sqrt{-1}$ como una rotación negativa en $90°$ de 1. A pesar de ser la única contribución de Argand a las matemáticas (Kline et al., 1992), fue de tal magnitud que hoy en día también se le conoce al Plano Complejo como “Plano de Argand”.

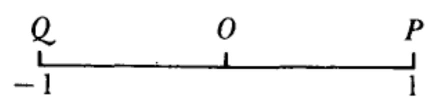


Figura 3: Segmento considerado por Argand para realizar las rotaciones. (Nahin y Pinasco, 2008)

La interpretación geométrica más aceptada es la que le dio Gauss, pues estableció una correspondencia uno a uno entre los pares ordenados del Plano Cartesiano y los números complejos, relacionando así los números complejos $a + bi$ con un punto (a, b) del Plano Cartesiano (no un vector como en las representaciones de Wessel y Argand), además describió la adición y multiplicación geométrica de los números complejos. La interpretación de Gauss para los números complejos es la que se suele utilizar hoy en día para trabajar y enseñarlos en el aula de clases.

3.1.1 Complejos en el Aula

La enseñanza de los números complejos según el programa de estudio del MINEDUC están ubicados en el nivel NM3 y contemplan la siguiente estructuración:

Semestre 1
Unidad 1: Números
AE 01: Reconocer los números complejos como una extensión del campo numérico de los números reales. AE 02: Utilizar los números complejos para resolver problemas que no admiten solución en los números reales. AE 03: Resolver problemas aplicando las cuatro operaciones con números complejos. AE 04: Formular y justificar conjeturas que suponen generalizaciones o predicciones de números complejos y sus propiedades. AE 05: Argumentar la validez de los procedimientos o conjeturas referentes a números complejos y sus propiedades. AE 06: Representar un número complejo de forma polar y calcular la potencia, con exponente racional, de un número complejo.

Para comenzar, se estructuran los conjuntos numéricos partiendo por los números Naturales $(\mathbb{N})$ y se amplían en la medida que presentan problemas con el conjunto. Es decir, el problema de los naturales $(\mathbb{N})$ es que no tienen el inverso aditivo y se tuvo que ampliar el conjunto a los números enteros $(\mathbb{Z})$, estos a su vez presentan el problema de no tener inverso multiplicativo y así nuevamente se amplía el conjunto a los Racionales $(\mathbb{Q})$. El conjunto de los racionales se puede representar como una fracción entre dos números enteros donde el número del denominador debe ser distinto de cero (Maldonado, Marambio, & Galasso, 2017), es decir:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \; tal \; que \; a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

El problema que se presenta con los números racionales es que existen algunos números que no se pueden expresar como una fracción entre dos enteros, entonces hay que ampliar el conjunto de los racionales, esos números son los Irracionales ($\mathbb{I}$), aquellos cuya representación decimal es infinita no periódica y no pueden ser representados en la forma $\frac{a}{b}$, con a y b números enteros y $b \neq 0$. (Muñoz Díaz, Jiménez Martínez, & Rupin Gutiérrez, 2013), podríamos decir entonces que los irracionales son todos los números reales que no son racionales.

$$\mathbb{I} = \{a \in \mathbb{R} \; tal \; que \; a \notin \mathbb{Q}\}$$

Cabe mencionar, que la definición expuesta es una que normalmente se utiliza en enseñanza media, dado que un número irracional es una colección infinita, como una sucesión fundamental de Cantor o una cortadura de Dedekind y entendiéndose que una definición lógica de los números irracionales es un monstruo intelectual (Kline et al., 1992).
Luego los números reales ($\mathbb{R}$) están conformados por la unión del conjunto de los números racionales ($\mathbb{Q}$) con el conjunto de los irracionales ($\mathbb{I}$) (Baeza Peña, 2008), quedando entonces expresados así:

$$\mathbb{R} = \{\mathbb{Q} \cup \mathbb{I}\}$$

Y nuevamente, el problema que se presenta en los números reales ($\mathbb{R}$) es que no dan respuesta a ecuaciones del tipo $x^2 + 1 = 0$ (es el problema más claro para introducir los números imaginarios en la enseñanza media). Es entonces que se genera la necesidad de definir lo que conocemos como la *unidad imaginaria i*

$$i^2 = -1$$

Con la definición de la unidad imaginaria entonces se pueden resolver las ecuaciones mencionadas anteriormente, es así como se tiene otro conjunto que se denomina el conjunto de los *números imaginarios*, comprendido por todos los números que se obtienen como resultado de las raíces de índice par de un número negativo y se escriben como bi.

Posteriormente se define el conjunto de los números complejos ($\mathbb{C}$), como una pareja entre un número real y un número imaginario quedando de la forma binomial $z = a + bi$ donde a y b son la parte real e imaginaria de z y se simbolizan[1] $a = \Re(z)$ y $b = \Im(z)$ respectivamente. El símbolo z representa un número complejo cualquiera del conjunto $\mathbb{C}$, entonces, el conjunto de los números complejos queda expresado de la siguiente manera:

$$\mathbb{C} = \{z = a + bi \mid a = \Re(z) \wedge b = \Im(z)\}$$

Una vez que se tienen definidos los números complejos, es que se les entrega una forma de interpretarlos, la más básica es la forma binomial $a + bi$ y es esta forma la que se interpreta de una manera geométrica relacionándolos con un par ordenado (a, b) del plano cartesiano, que se llama plano complejo. Cuando se trabaja con números complejos y utilizando esa ventaja es que también se les interpreta como un vector desde el origen del plano complejo hasta el número complejo (a, b), como se aprecia en la Figura 4.

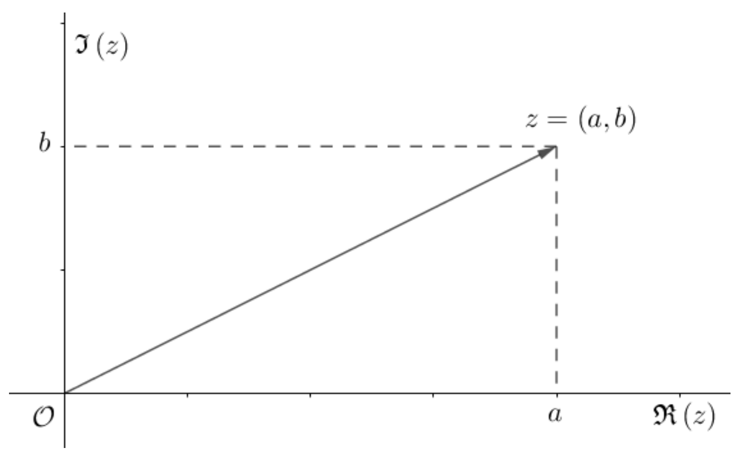


Figura 4: Representación del complejo z en el plano complejo. (Autoría propia)

3.1.2 Operatoria de Números Complejos

La operatoria de números complejos se la debemos a Gauss quien definió formalmente los números complejos de la forma en que los utilizamos hoy en día, como un cuerpo $(\mathbb{C}, +, \cdot)$; la suma de complejos también la definió con el uso de vectores (Nahin & Pinasco, 2008).

---

[1] Simbología utilizada según (Fenn, 2001, p. 120)

3.1.2.1 Adición

La adición de dos números complejos z_1 y z_2 se resuelve sumando las partes reales y las partes imaginarias de los complejos z_1 y z_2, lo que queda de la siguiente manera:
Sean los complejos $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$, entonces se define la adición[2] entre z_1 y z_2:

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di)$$
$$z_1 + z_2 = (a + c) + (bi + di)$$
$$z_1 + z_2 = \big(\Re(z_1) + \Re(z_2)\big) + \big(\Im(z_1) + \Im(z_2)\big)$$

En forma vectorial, queda determinada por la “regla del paralelogramo” para la suma de vectores, expresada en la Figura 5.

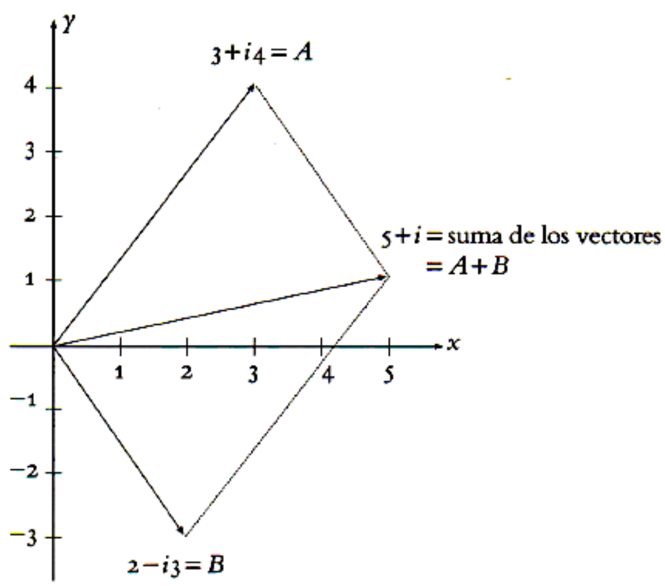


Figura 5: Suma de complejos en forma vectorial. (Nahin y Pinasco, 2008)

3.1.2.2 Sustracción

La sustracción de dos números complejos z_1 y z_2 se resuelve restando las partes reales y las partes imaginarias de los complejos z_1 y z_2, lo que queda de la siguiente manera:

[2] En términos de la notación empleada por Fenn, (2001, p. 120)

Sean los complejos $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$, entonces se define la sustracción[3] entre z_1 y z_2:

$$z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di)$$
$$z_1 - z_2 = (a - c) + (bi - di)$$
$$z_1 - z_2 = \big(\Re(z_1) - \Re(z_2)\big) + \big(\Im(z_1) - \Im(z_2)\big)$$

En forma vectorial, queda determinada por la "regla del paralelogramo" para la suma de vectores, pero la suma se realiza entre los complejos z_1 y $-z_2$ quedando expresada en la Figura 6.

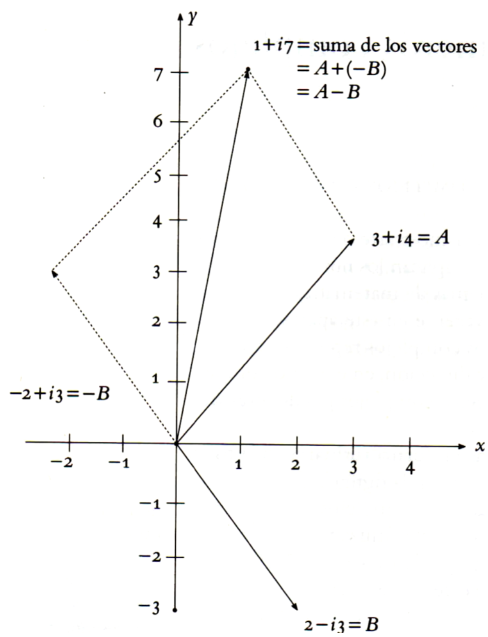


Figura 6: Resta de complejos en forma vectorial. (Nahin y Pinasco, 2008)

3.1.2.3 Multiplicación cartesiana

La multiplicación de números complejos, al tener z_1 y z_2 en su forma binomial, se realiza mediante la analogía con el producto de binomios, teniendo presente que $i^2 = -1$ entonces el producto queda expresado de la siguiente manera:

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi)(c + di)$$

[3] En términos de la notación empleada por Fenn, (2001, p. 120)

$$z_1 \cdot z_2 = ac + adi + bci + bdi^2$$
$$z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

3.1.2.4 División cartesiana

Para poder realizar la división de números complejos es necesario antes definir el concepto de *conjugación compleja*. El complejo conjugado de $z = a + bi$ está dado por:

$$\bar{z} = \overline{a + bi} = a - bi$$

y geométricamente se representa como una reflexión de z en torno al eje Real del plano complejo.

Al dividir dos números complejos z_1 y z_2, nos valemos de una propiedad del conjuto $\mathbb{C}$, pues al multiplicar un número complejo por su complejo conjugado se obtiene siempre un número real

$$z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$$

entonces al multiplicar el numerador y el denominador por el complejo conjugado de este último se logra eliminar la unidad imaginaria del denominador, lo que permite resolver finalmente la división, y cuyo proceso se muestra a continuación:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a + bi)}{(c + di)}$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a + bi)}{(c + di)} \cdot \frac{(c - di)}{(c - di)}$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a + bi)(c - di)}{c^2 + d^2}$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(ac + bd)}{c^2 + d^2} + \frac{(bc - ad)}{c^2 + d^2} i$$

3.1.3 Forma Polar de un Número Complejo

Una forma de interpretar un número complejo de una manera muy simple se le debe a Caspar Wessel (1745-1818) quien utilizó lo que hoy también se conoce como la forma polar de un numero complejo. El aporte de Wessel es sobre el producto, esta forma de representarlos es bastante simple y útil y se definen los siguientes elementos: módulo y argumento del complejo. En la Figura 7 se muestran los diferentes elementos de un número complejo.

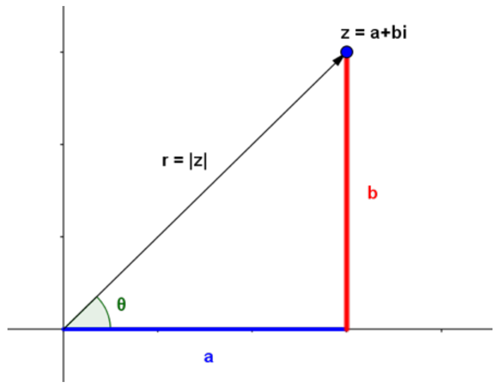


Figura 7: Los diferentes elementos de un número complejo en el plano cartesiano. (Autoría propia)

Donde r es el modulo del número complejo $z = a + bi$ y θ es el argumento de z que se determinan de la siguiente manera:

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$arg(z) = \theta = \begin{cases} Arctan\left(\frac{b}{a}\right) \; si \; a > 0 \\ \pi + Arctan\left(\frac{b}{a}\right) \; si \; a < 0 \end{cases}$$

Si $a = 0$ entonces $\theta = \frac{\pi}{2}$ si $b > 0$ y $\theta = -\frac{\pi}{2}$ si $b < 0$ como usualmente se considera que los valores de la función $Arctan$ están en el rango $-\frac{\pi}{2} < Arctan < \frac{\pi}{2}$, por supuesto θ no está definido en el origen $(0,0)$. Entonces el número complejo $z = a + bi$ en su forma cartesiana queda representado en su forma polar como $z = (r, \theta)$, donde r es el módulo y θ el argumento.

Con estos elementos se pueden representar los números complejos en su forma polar en el plano polar de la Figura 8.

Con la representación polar de los números complejos, tanto la suma como la resta no tienen variación alguna con respecto a cómo se realizan en su forma cartesiana, pero la multiplicación y la división de complejos se vuelve mucho más simple en su forma polar.

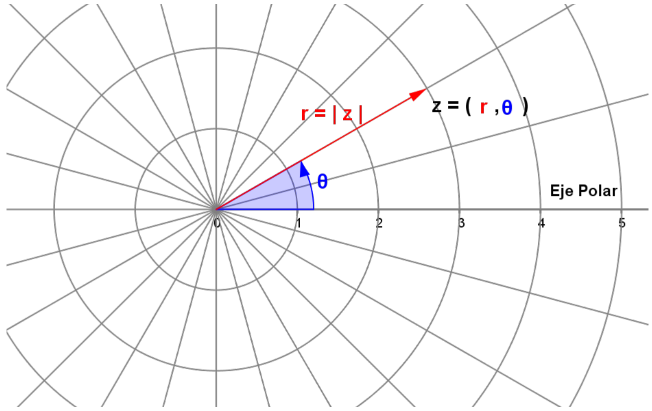


Figura 8: Representación en el plano polar del complejo $\boldsymbol{z}$. (Autoría propia)

Sean los complejos $z_1 = (r_1, \theta_1)$ y $z_2 = (r_2, \theta_2)$, entonces la multiplicación y la división polar se definen en las siguientes sub secciones:

3.1.3.1 Multiplicación Polar

El producto de z_1 y z_2 queda expresado de la siguiente forma:

$$z_1 z_2 = (r_1 r_2, \theta_1 + \theta_2)$$

y geométricamente se puede apreciar en la Figura 9 donde el producto $z_1 z_2$ genera un giro.

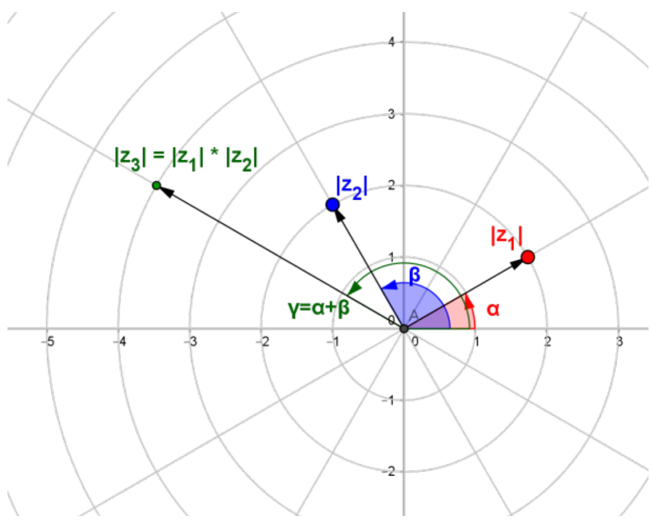


Figura 9: Representación geométrica del producto de complejos en su forma polar. (Autoría propia)

Cabe mencionar, una cuestión central en la interpretación geométrica de los números complejos, que al multiplicar cualquier número complejo por la unidad imaginaria $i = \sqrt{-1} = (1, 90°)$ se obtiene una rotación en 90° del número complejo, como se muestra en la

Figura 10. La multiplicación por potencias de i (i, i^2, i^3, i^4) produce rotaciones en 90°, 180°, 270° y 360° respectivamente.

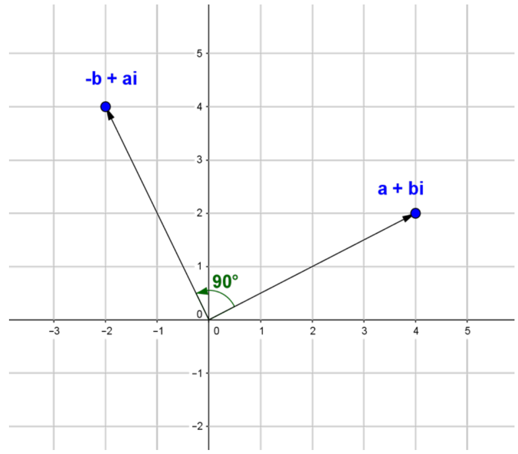


Figura 10: i como operador de rotación en el plano complejo. (Autoría propia)

3.1.3.2 División Polar

El cociente de z_1 y z_2 queda expresado de la siguiente forma:

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}, \theta_1 - \theta_2\right)$$

y geométricamente se puede apreciar en la Figura 11.

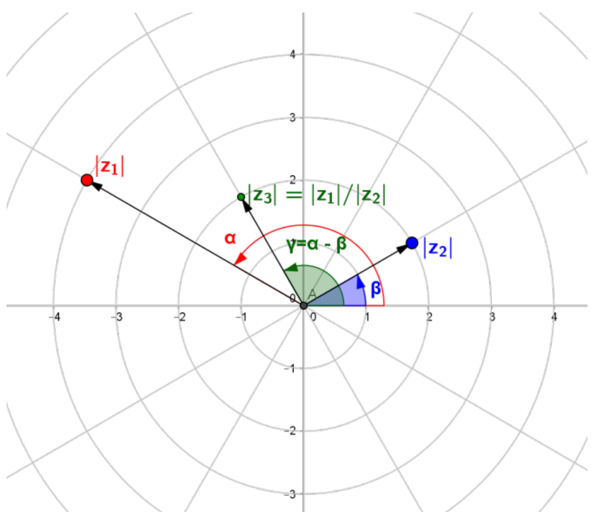


Figura 11: Representación geométrica del cociente de complejos en su forma polar. (Autoría propia)

Como se puede apreciar, para la multiplicación y la división de complejos en su forma polar basta con multiplicar los módulos y sumar los argumentos. Para la división, es tan solo dividir los módulos y restar los argumentos, entonces, en comparación con las mismas operaciones en su forma binomial (cartesiana), la polar es mucho más simple y los productos por potencias de i permiten relacionarlo, por ejemplo, con las rotaciones vistas por los estudiantes en años anteriores, lo que la hace muy idónea para enseñar en el nivel NM3.

3.1.4 Potencias y raíces

Para calcular las potencias y las raíces de los números complejos, la forma más conveniente de determinarlas es transformando el número complejo z a su forma trigonométrica. De la representación geométrica de un complejo (Figura 7) donde se muestran sus elementos en el plano se desprende que:

$$a = r\, cos\theta$$

$$b = r\, sen\theta$$

Y reemplazando estas expresiones en la forma binomial se obtiene la muy conveniente forma trigonométrica de los números complejos

$$z = r\, cos\theta + i\, r\, sen\theta$$

$$z = r(cos\theta + isen\theta)$$

Que usualmente se abrevia[4] de la siguiente manera

$$z = r\, cis(\theta)$$

O en su forma exponencial:

$$z = re^{\theta i}$$

Donde ambas igualdades se relacionan con la forma polar de un complejo como sigue

$$z = (a + bi) = (r, \theta)$$

$$z = r(cos\theta + isen\theta)$$

$$re^{\theta i} = r(cos\theta + isen\theta)$$

Esta última identidad fue descubierta por Leonard Euler alrededor de 1740, y se la conoce como la Fórmula de Euler en su honor (Needham, 1998), de la cual se obtiene la muy famosa Identidad de Euler, haciendo $r = 1$ y $\theta = \pi$

$$e^{\pi i} = -1$$

[4] $cis(\theta)$ es una abreviatura de la expresión $cos\theta + isen\theta$ tomando las iniciales de las funciones trigonométricas y la unidad imaginaria i

3.1.4.1 Potencias

Las potencias de números complejos se pueden calcular facilmente una vez se tienen en su forma trigonométrica (o exponencial), se procede a definir las potencias de los números complejos utilizando la fórmula de De Moivre.

Definición: Si z es un complejo no nulo, θ es un argumento de z $(Arg(z))$ y n es un número entero, se verifica que $n\theta \in Arg(z^n)$, es decir:

$$z^n = \left(r(\cos\theta + isen\theta)\right)^n = r^n(\cos(n\theta) + isen(n\theta))$$

La fórmula de De Moivre se puede obtener generalizando la multiplicación de complejos en su forma polar como sigue:

Sea $z = (r, \theta)$ entonces la potencia $n - ésima$ de z es:

$$\begin{gathered}
zz = z^2 = (rr, \theta + \theta) = (r^2, 2\theta) = r^2 cis(2\theta) \\
zz^2 = z^3 = (r^2 r, 2\theta + \theta) = (r^3, 3\theta) = r^3 cis(3\theta) \\
\vdots \\
zz^{n-1} = z^n = (r^{n-1} r, (n-1)\theta + \theta) = r^n cis(n\theta) \\
z^n = (r^n, n\theta) = r^n\left(\cos(n\theta) + isen(n\theta)\right)
\end{gathered}$$

Y relacionándola con la identidad de Euler, la potencia en su forma exponencial es:

$$z^n = r^n\, e^{n\theta i}$$

3.1.4.2 Raíces

La misma expresión también es válida para las raíces $n - ésimas$ de z, las cuales se obtienen de resolver la ecuación $w^n = z$ donde n es un número natural $n \geq 2$, y $z \neq 0$ conocido; entonces se escribe la ecuación en su forma trigonométrica y se aplica la expresión de De Moivre para las potencias quedando en su forma equivalente:

$$\begin{gathered}
w^n = z \\
|w|^n\left(\cos(n\varphi) + isen(n\varphi)\right) = |z|\left(\cos(\theta) + isen(\theta)\right)
\end{gathered}$$

Esta igualdad solo es válida cuando $|w|^n = |z|$ y $n\varphi = \theta + 2k\pi$ donde $k \in \mathbb{Z}$.

Ahora, $|w| = \sqrt[n]{|z|}$ porque ambos son números positivos y $\varphi_k = \frac{\theta+2k\pi}{n}$ donde $k \in \mathbb{Z}$.

Luego, para cualquier valor de φ_k se obtiene un numero complejo w_k

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}(\cos(\varphi_k) + isen(\varphi_k))$$

Tal que

$$(w_k)^n = z$$

Dado que los polinomios de grado n deben tener a lo más n soluciones, se desprende que $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$; valores que implica obtener n valores distintos de w_k los cuales son las n raíces $n - ésimas$ de z.

Quedando entonces que las n raíces $n - ésimas$ de z están dadas por la expresión

$$z_k = |z|^{1/n}\left(\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + isen\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right) \qquad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

Es de gran importancia mencionar que si se definen los números u

$$u = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + isen\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

se obtienen los números de $u_0 = 1, u, u^2, \dots u^{n-1}$ que son las $n - ésimas$ raíces de la unidad, las que permiten escribir las $n - ésimas$ raíces de z en la forma $z_k = z_0 u^k$. Cuando se multiplican complejos por u se obtienen giros cuya amplitud es de $\frac{2\pi}{n}$, entonces las n raíces de z se obtienen mediante giros sucesivos de amplitud $\frac{2\pi}{n}$ de la $n - ésima$ raíz principal de z, que es z_0.

Al representar todas las raíces $n - ésimas$ de z en el plano complejo, se obtienen n puntos sobre una circunferencia de centro $(0,0)$ y de radio $\sqrt[n]{|z|}$, los cuales conforman un polígono regular de n lados, como se puede apreciar en la Figura 12 en la cual se muestran las siete raíces séptimas de 1.

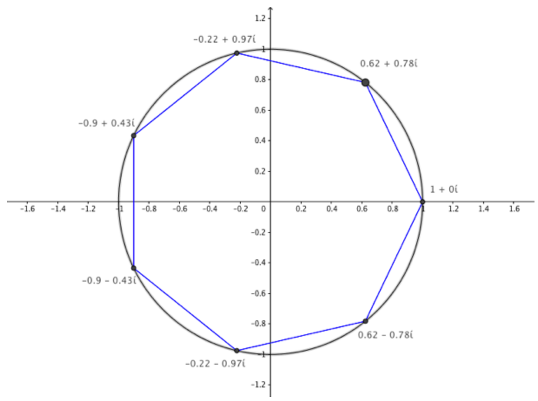


Figura 12: Raíces séptimas de la unidad. (Autoría propia)

Para finalizar la sección de números complejos, es imperioso mencionar que estos son un nexo relevante con el arte, desde un punto de vista, que permiten sacar a los estudiantes de la "burbuja de formalidad" en que se encuentran; esa relación artística es abordada desde un tema complejo para ser visto en enseñanza media, pero generoso en cuanto a potencial artístico se refiere y, que es de gran interés para el presente trabajo, estos son los Fractales.

3.2 Fractales

Con todo esto de los números complejos, su operatoria y representación geométrica se busca que los estudiantes puedan percibir una parte de la Matemática que puede ser un poco "ajena" desde el punto de vista concreto o de percepción, ya que todo lo que han estudiado hasta el momento se basa en la Geometría Euclidiana, que es una geometría que tienen al alcance de la mano. Pero también hay una geometría que tienen muy cerca, tal vez más cerca de lo que ellos mismos creen tener, y que representa de mejor manera el mundo que les rodea, esta geometría es la Geometría Fractal, que tiene como base a los números complejos; aunque no es necesario tener un curso de números complejos para apreciar los fractales, sí es necesario recurrir a ellos, pues los fractales son una consecuencia directa de ellos, viven, existen y se comprenden gracias a los números complejos.

Fue Benoite Mandelbrot (1924 - 2010) el que acuñó el término Fractal, que hace referencia a la idea de "partido" o "fracturado". Un fractal posee según Puerto Monterroza (2014) las siguientes características fundamentales a considerar:

- La autosimilaridad o autosemejanza en su forma.
- La reiteración o iteración de la formación de su modelo.
- La dimensión que intenta describir su tamaño o densidad.
- El concepto de atractor para caracterizar la figura cuando el proceso de iteración tiende al infinito.

Tratando de simplificar un tema que es complicado de abarcar matemáticamente en la educación media, se tratará de hacer y explicar de una forma simple sin perder demasiado la rigurosidad del tema en cuestión.

3.2.1 Definición de Fractal

Es importante mencionar que el propio Mandelbrot, tiene problemas con definir los fractales en base al concepto de dimensión, pues considera que la definición en base a dimensión genera problemas con los casos donde la dimensión métrica $D = 1$, ya que se puede decir que la curva es tanto fractal, como que no lo es, también ocurre lo mismo con los conjuntos donde la dimensión topológica $D_T = D$ y, más aún, en propias palabras de Mandelbrot, incomoda tener que decir que la "escalera del Diablo de Cantor" (ver Figura 13) no es fractal, a pesar de que $D_T = D = 1$ (Mandelbrot, 2009).

Manifiesta que el concepto de estructura fractal es más fundamental que un asunto de dimensión, propone que deberían ser definidos en base a la propiedad de ser invariantes (Mandelbrot, 2009).

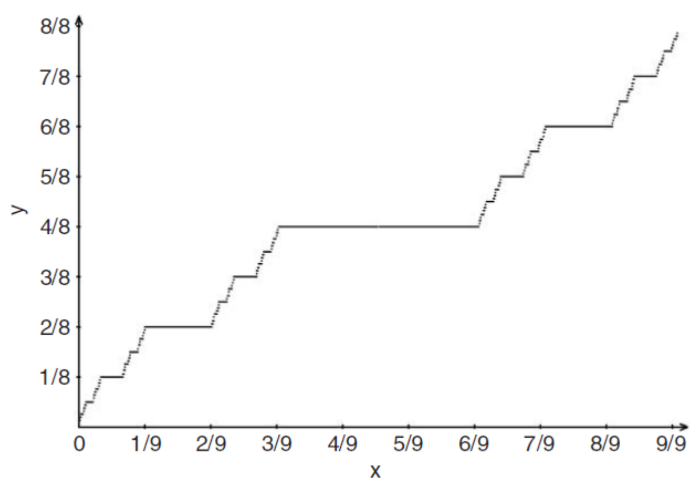


Figura 13: Gráfico de la función de Cantor conocido como "Escalera del diablo de Cantor" (Dovgoshey, Martio, Ryazanov, & Vuorinen, 2006).

Es así como la definición de fractal queda matemáticamente rigurosa pero provisional (Mandelbrot, 2009). Sin complacer del todo a Mandelbrot, la definición de fractal es:

"*Un fractal es por definición, un conjunto cuya dimensión de Hausdorff – Besicovitch es estrictamente mayor que su dimensión topológica.*"

La definición entregada por Mandelbrot en función de la dimensión queda un poco ajena y carece de mayor sentido para un estudiante de educación media, pero al mencionar una característica fundamental de los fractales como es el concepto de la *autosimilitud o autosimilaridad,* que es una propiedad que poseen todos los fractales de parecerse internamente a sí mismos en diferentes escalas, aunque no necesariamente idénticos, de las estructuras visibles. Es decir, consta de fragmentos geométricos de orientación y tamaño variable pero de aspecto similar (Rodriguez Miranda, 1995).

Al considerar esta característica nos encontramos con que cada vez que se realiza una medición más precisa de la longitud de una línea fractal, se aprecian siempre detalles cada vez más finos, así pues, a medida que aumenta la escala para medir la longitud de la línea fractal, dicha longitud también aumenta. Dada esta situación, se les asigna la dimensión métrica (D), dimensión de Hausdorff – Besicovitch (Anexo A), a los fractales, entonces, se puede decir que una línea fractal tiene una dimensión entre uno y dos, y análogamente, una superficie fractal tiene una dimensión intermedia entre dos y tres (Rodriguez Miranda, 1995).

Como es sabido, hay figuras geométricas que poseen una dimensión conocida por todos los estudiantes de las escuelas, esa dimensión es la dimensión topológica (D_T) y es la dimensión que han conocido desde siempre; que en un espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ es siempre un entero que se encuentra entre 0 y n, es decir, las líneas tienen dimensión topológica 1, los polígonos y figuras planas tienen dimensión 2, los cuerpos geométricos y poliedros tienen dimensión 3, etc. Por su contraparte hay otros elementos que poseen una dimensión métrica (D), que en la mayoría de los casos es un número decimal, esta dimensión fue formulada por Hausdorff (1868 - 1942) en 1919 y posteriormente Besicovitch (1891 - 1970) le dio su forma final (Mandelbrot, 2009).

Dado que se presentan estas características fundamentales es que las estructuras fractales se clasifican en dos categorías, los *fractales determinísticos* o *auto-similares* y los *fractales aleatorios* o *auto-afines*, entre los *fractales determinísticos* se encuentran por ejemplo el Triángulo de Sierpinski y entre los *fractales aleatorios* encontramos la mayoría de los relacionados con el *fractal art* y los que generalmente se encuentran en la naturaleza, por ejemplo las nubes.

En otras palabras, los *fractales determinísticos* se definen como objetos invariantes bajo transformaciones de escala isotrópicas (de propiedades geométricas invariantes), es decir, poseen una dilatación uniforme del sistema en cada dirección espacial. Además se pueden encontrar sistemas que son invariantes bajo transformaciones anisotrópicas (afines). Si el sistema es aleatorio y no homogéneo y se cumple que $D_T > D$, entonces se dice que la estructura es fractal en un sentido estadístico. Tanto en los fractales determinísticos como en los aleatorios, sean o no homogéneos, no extiste una escala de longitud característica, ese es un rasgo muy importante de las estructuras fractales (Nakayama & Yakubo, 2003).

3.2.2 Algunos Fractales Conocidos

Algunos de los fractales con autosimilaridad o determinísticos más famosos son el Conjunto de Cantor, la Curva de Peano, la Curva de von Koch y el Triángulo de Sierpinski, entre otros.

3.2.2.1 Conjunto de Cantor

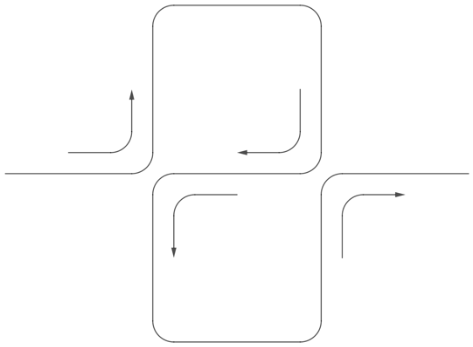
George Cantor (1845-1918) fue un matemático alemán de la Universidad de Halle, creó lo que hoy en día se conoce como Teoría de Conjuntos. El Conjunto de Cantor es un conjunto infinito de puntos en el intervalo unitario $[0,1]$.

Para construir el Conjunto de Cantor se comienza con el intervalo $[0,1]$ y luego se toma el intervalo abierto $\left]\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right[$ y se elimina, quedando los intervalos $\left[0,\frac{1}{3}\right]$ y $\left[\frac{2}{3},1\right]$ los cuales tienen una longitud de $\frac{1}{3}$, lo cual termina la construccion básica del conjunto, luego se repite el procedimiento anterior n-veces para cada uno de los intervalos $\left[0,\frac{1}{3}\right]$ y $\left[\frac{2}{3},1\right]$, siempre eliminando un tercio del intervalo, dicha construcción elaborada en GeoGebra se muestra en la Figura 14.

Figura 14: Conjunto de Cantor para distintas iteraciones de n. (Autoría propia)

3.2.2.2 Curva de Peano

En 1890 y 1891 Giuseppe Peano (1858-1932) y David Hilbert (1862-1943), respectivamente, estudiaron las curvas que estando en un plano y que siguiendo algunas reglas de iteración abarcan completamente el plano que las contiene (Rodriguez Miranda, 1995). Así surge lo que hoy se conoce como la curva de Peano, cuya construcción se realiza a partir de un segmento al cual se le inserta, aparentemente, un cuadrado por sobre el segmento y otro por debajo. Es aparente porque en realidad el patrón de generación es que a partir de un tercio del segmento se trazan cuatro segmentos de igual longitud que forman un cuadrado en la parte superior que termina en el tercio del segmento donde se comenzó, luego, desde el tercio del segmento se trazan tres segmentos hacia la parte inferior para formar un cuadrado que finaliza a la distancia de dos tercios del segmento inicial; los tercios del segmento son los que se conocen como puntos de contacto; luego este patrón se repite indefinidamente en cada uno de los segmentos creados hasta completar el plano; en la Figura 15 se muestra la construcción de dicho patrón generador que es la curva original de Peano (Mandelbrot, 2009); elaborado con GeoGebra.



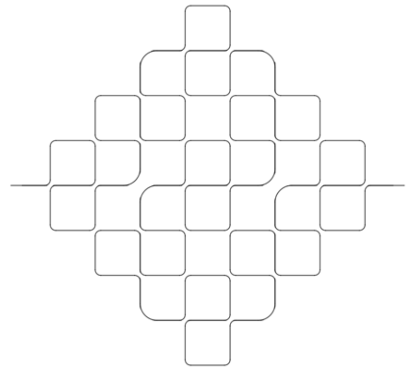


Figura 15: Curva de Peano, patrón generador a la izquierda y en un segundo paso a la derecha. (Autoría propia)

3.2.2.3 Curva de Von Koch

En 1904 Helge Von Koch (1870-1924), matemático sueco, introdujo una curva que hoy en día se conoce como curva de von Koch, la cual es generadora del famoso Copo de Nieve de Von Koch o simplemente el Copo de Koch.

Esta curva es bastante simple de construir geométricamente, comienza con un segmento el cual se divide en tres partes iguales y se extrae la del medio, posteriormente se crea un triángulo equilátero, sin base, sobre este tercio faltante, esta figura es la curva generadora de la Curva de Koch. En la Figura 16 se muestra el Copo de Nieve de Koch, posteriormente en la Figura 17 la generación de la Curva de Koch en distintas etapas, ambas elaboradas con GeoGebra.

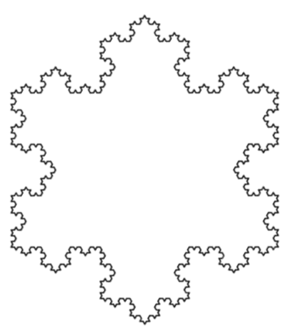


Figura 16: Copo de Koch con cuatro iteraciones.
(Autoría propia)

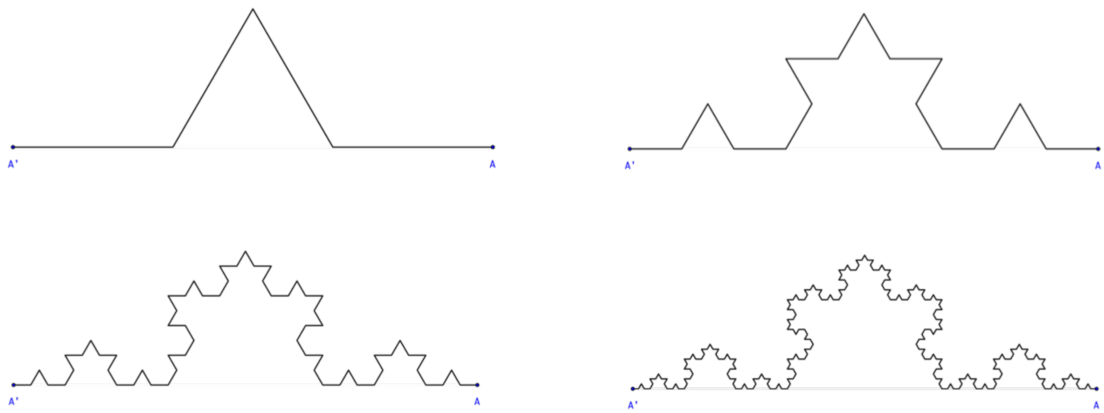


Figura 17: Curva de Koch para las cuatro primeras iteraciones. (Autoría propia)

3.2.2.4 Triángulo de Sierpinski

El triángulo de Sierpinski es un fractal muy conocido y fue introducido en 1916 por el matemático polaco Waclaw Sierpinski (1882-1969). Se construye por la extracción iterativa de los triángulos centrales de los triángulos anteriores, comenzando con un triángulo, también se puede construir con la regla siguiente: Colocando tres triángulos homotéticos de razón $\frac{1}{2}$ respecto de un triángulo original y cuyo centro es cada vértice de éste, con lo cual se obtiene el patrón de iteración, el cual se vuelve a aplicar indefinidamente en cada uno de los triángulos homotéticos, con lo que al realizar un acercamiento se van obteniendo triángulos semejantes al original. Este proceso se muestra en la Figura 18 que fue realizada en GeoGebra.

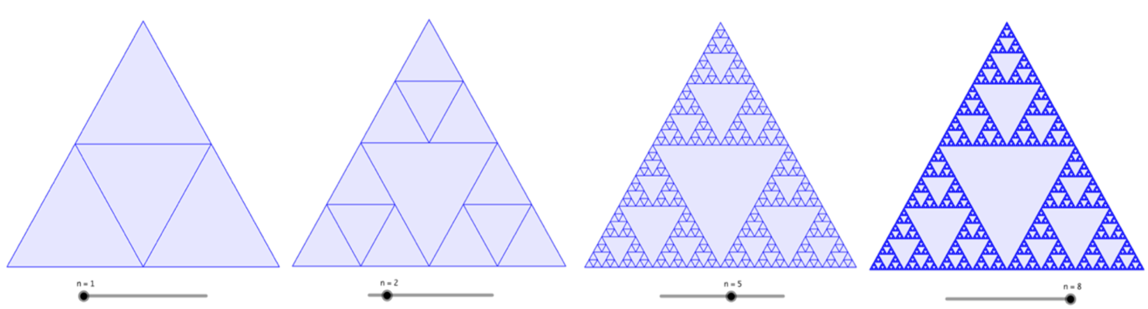


Figura 18: Triángulo de Sierpinski con distintas iteraciones. (Autoría propia)

3.2.3 Conjunto de Mandelbrot

El Conjunto de Mandelbrot (Figura 19), es por así decirlo, el trabajo más importante de Benoit Mandelbrot, su tío matemático le expuso un problema que éste no pudo resolver, y que le llevó a conocer el trabajo de Pierre Fatou (1878-1929). Mandelbrot decidió afrontar por medio de los computadores, en los cuales trabajando con números complejos se encontró con la figura que hoy en día es conocida como el Conjunto de Mandelbrot (Benoit Mandelbrot: Fractales y el arte de la fracturación | TED.com, 2010).

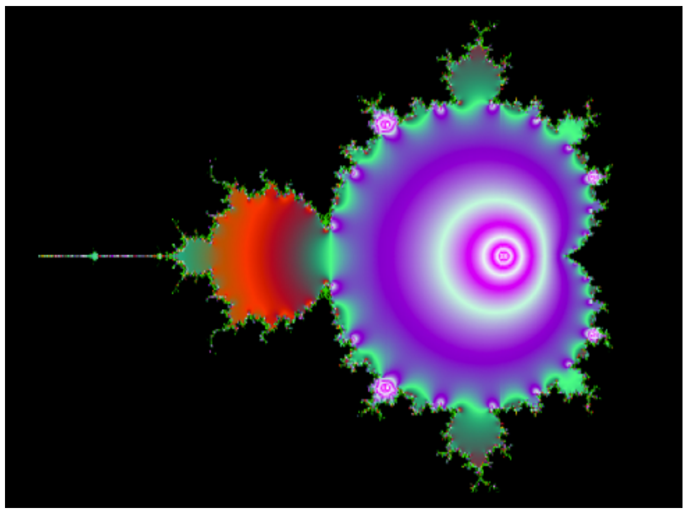


Figura 19: Conjunto de Mandelbrot elaborado con GeoGebra (Autoría propia)

El Conjunto de Mandelbrot se obtiene por la iteración sucesiva de números complejos del plano según la función recursiva:

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

comenzando con z_0 y una constante c, para así obtener z_1, luego se repite el proceso para obtener z_2, z_3, z_4, ... y así sucesivamente. Al considerar el caso más simple posible, donde $c = 0$, se obtienen los cuadrados de cada número de la iteración:

$$z_0 \rightarrow z_0^2 \rightarrow z_0^4 \rightarrow z_0^8 \rightarrow \cdots$$

Entonces se tienen los siguientes tres casos posibles para la secuencia, dependiendo de z_0:

1. Los números se vuelven cada vez más pequeños, su secuencia se aproxima a cero. Se dice que cero es un atractor para el proceso $z \rightarrow z_0^2$. Todos los puntos a una distancia menor que 1 desde este atractor, se dibujan en él.

2. Los números se vuelven más y más grandes, tendiendo hacia el infinito. Se dice que el infinito también es un atractor para este proceso. Todos los puntos más allá de la distancia de 1 desde el cero, se dibujan en él.
3. Los puntos están a una distancia de 1 desde el cero y permanecen allí. Su secuencia se encuentra en el límite entre los dos dominios de atracción, en este caso, el círculo unitario alrededor de cero.

Para este caso la situación es clara, en donde dos zonas de influencia dividen el plano, y el límite entre ellas es un simple círculo (Peitgen & Richter, 1986).

Lo asombroso ocurre cuando el valor de la constante c es distinto de cero, en que se obtienen distintos fractales en los cuales el atractor interno no es el cero y el límite ya no es uniforme. Por el contrario, el límite se vuelve cada vez más fracturado, esto es a lo que Mandelbrot llama la estructura fractal del límite (Peitgen & Richter, 1986). Es en este límite donde al realizar un zoom, se puede apreciar la muy característica e importante autosimilaridad de los fractales.

La imagen de la Figura 20 muestra el plano complejo alrededor de $\boldsymbol{c}$ para los valores de la parte real y la parte imaginaria de $\boldsymbol{c}$: $\Re(c) \in]-2{,}4; 0{,}8[$ y $\Im(c) \in]-1{,}2; 1{,}2[$

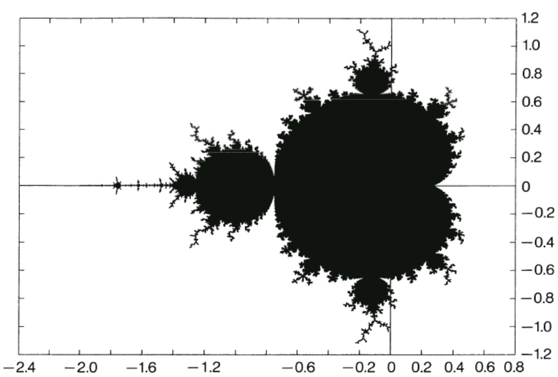


Figura 20: Conjunto de Mandelbrot para el proceso $\boldsymbol{z} \rightarrow \boldsymbol{z}^2 + \boldsymbol{c}$ (Peitgen & Richter, 1986).

Los fractales que se originan al variar el valor de c son los que se conocen como Conjuntos de Julia (ver Figura 21); de hecho en el Conjunto de Mandelbrot (ver Figura 22), los conjuntos de Julia correspondientes a los puntos dentro del conjunto de Mandelbrot están conectados. Se desintegran en conjuntos de puntos aislados a medida que el parámetro cruza el límite del conjunto de Mandelbrot. Se pueden obtener distintos Conjuntos de Julia (Peitgen & Richter, 1986).

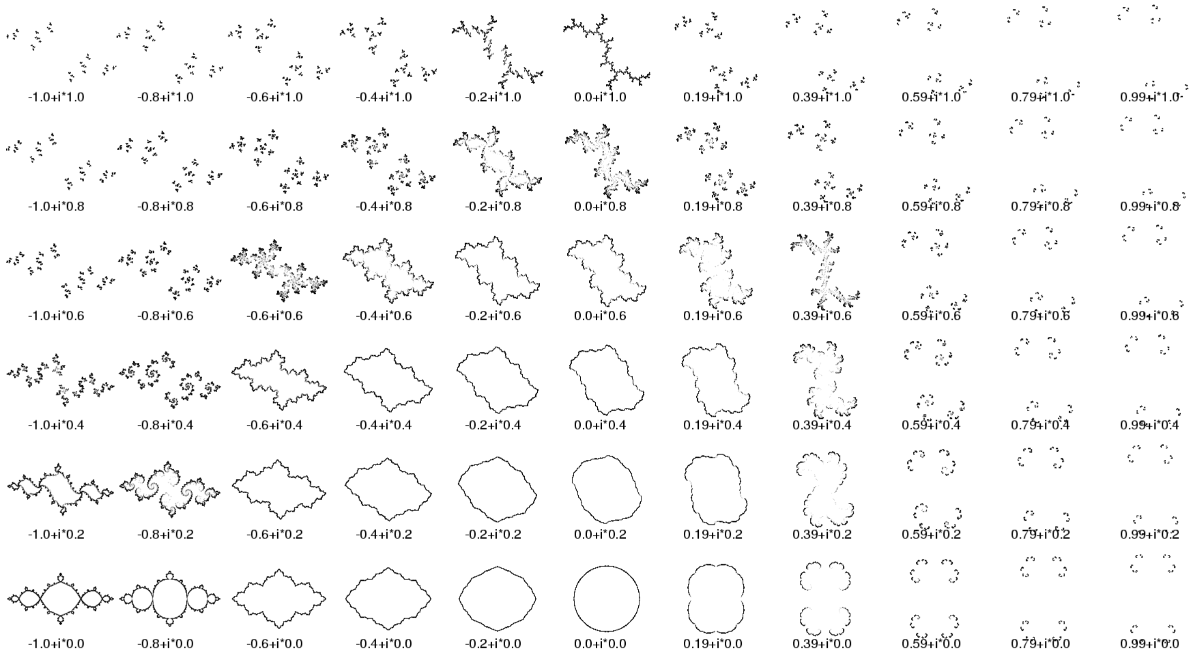


Figura 21: Conjuntos de Julia para distintos valores de c (Lehmann, 2004)

Los detalles de la regla de construcción no son esenciales porque diferentes reglas pueden conducir al mismo conjunto de Mandelbrot. Más importante es que la transición del orden al caos se describe desde un punto de vista más general. El enfoque se ha desplazado a la naturaleza de los límites entre las diferentes regiones (Peitgen & Richter, 1986).

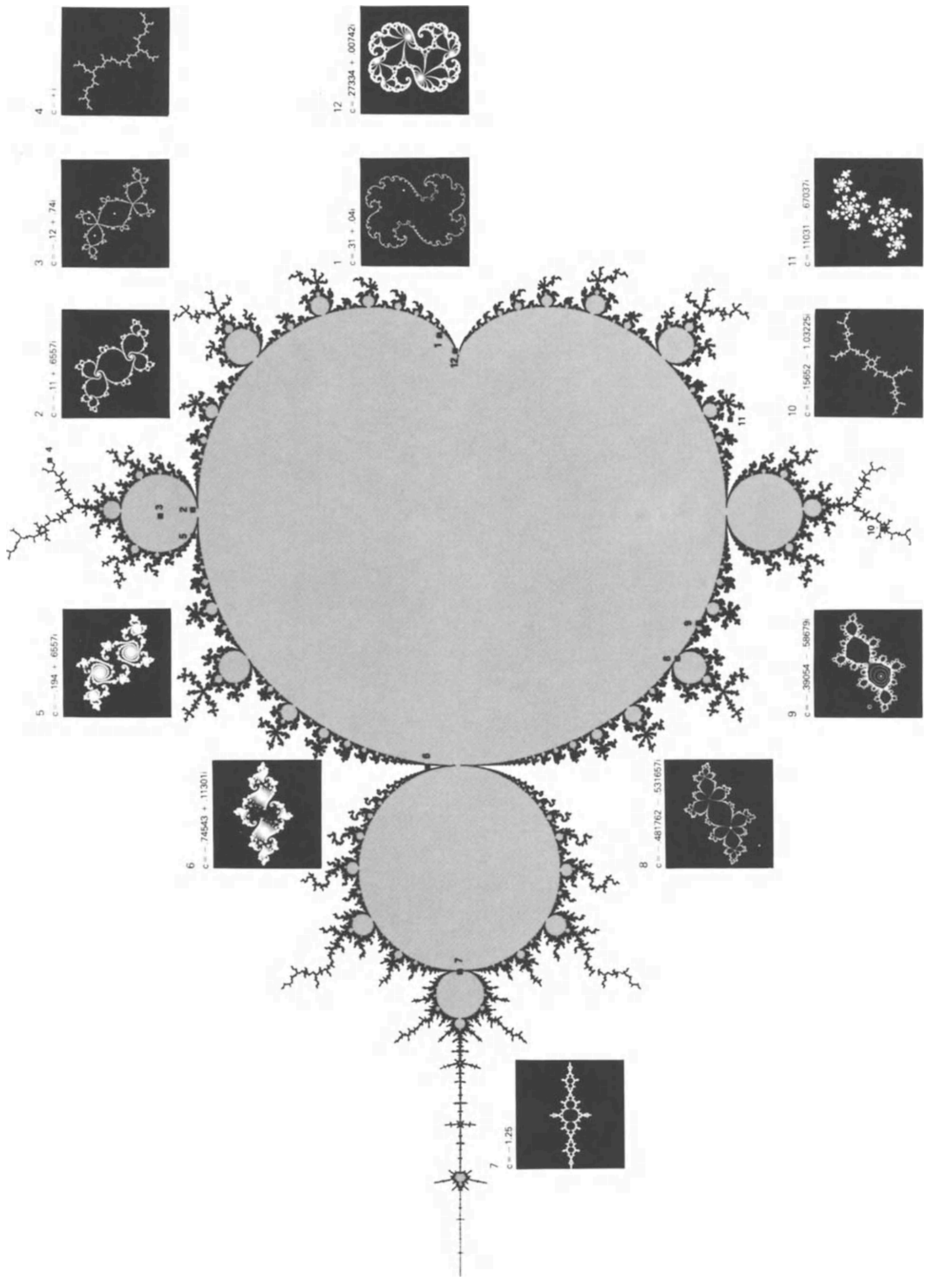


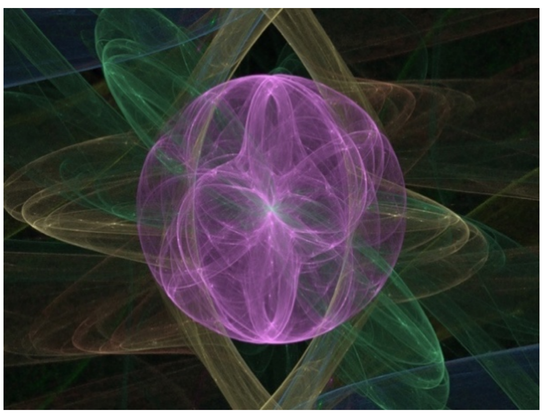
Figura 22: Conjuntos de Julia que rodean el conjunto de Mandelbrot que controla su estructura. (Peitgen & Richter, 1986)

3.2.4 Fractal Art

Como se mencionó anteriormente los fractales aleatorios o estadísticos están relacionados con el concepto de *fractal art* el cuál es un tipo de arte algorítmico o más comúnmente, generado por computador. Es un arte que se crea exclusivamente con el uso de software.

Los fractales son representaciones gráficas de ecuaciones y, al igual que los números, las posibilidades de crear imágenes fractales únicas son infinitas. Las ecuaciones o fórmulas matemáticas utilizadas para crear *fractal art* determinan cómo se forma y se colorea cada píxel de la computadora para crear la imagen resultante (Fractal Art | ArtHistory.net, s. f.)

Las imágenes que se muestran en la Figura 23 fueron creadas con el software "Fractal Architect 4" un software especializado en Fractal Art.



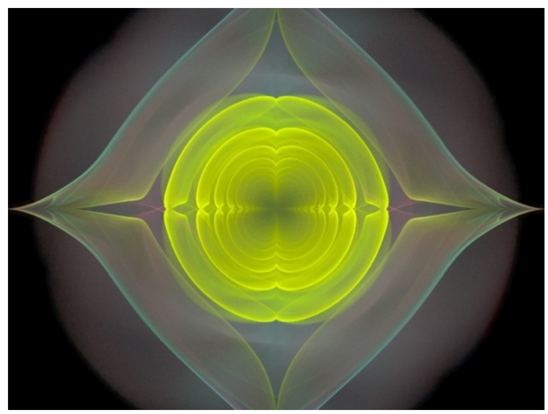


Figura 23: Imágenes de Fractal Art con Fractal Architect 4. (Autoría propia)

Los fractales mostrados en la Figura 24 fueron elaborados con un software de Fractal Art llamado "Apophysis", el cuál es un poco más sencillo de utilizar, aunque ambos tienen sus cualidades que los hacen más idóneos para ciertas tareas, como por ejemplo, Fractal Arquitect 4 permite crear videos de las animaciones de manera mucho más sencilla, y en su contraparte, Apophysis permite crear las imágenes de manera más rápida; se le considera un muy buen programa para principiantes en Fractal Art.

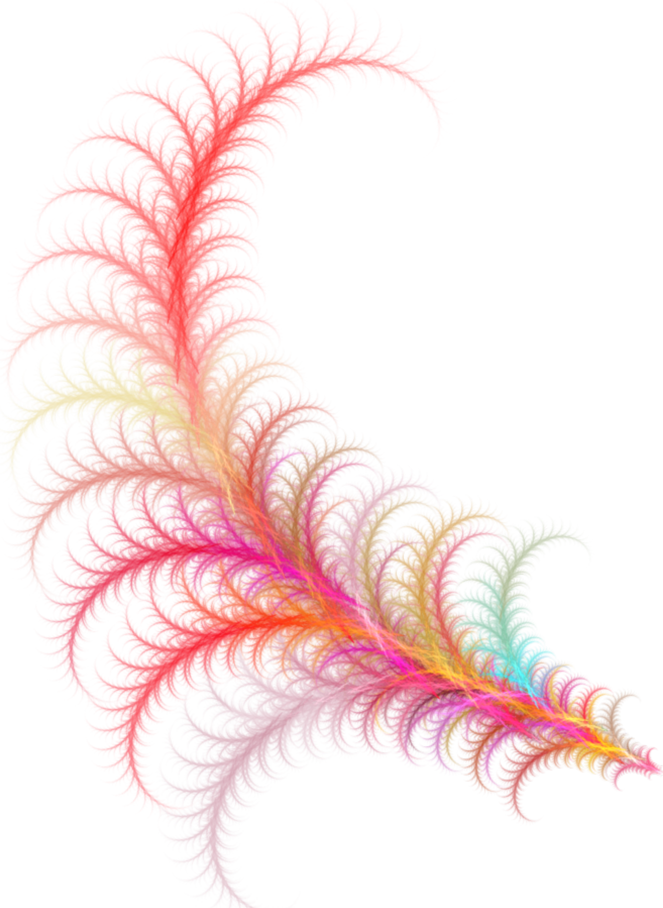


Figura 24: Imágenes de Fractal Art elaboradas con Apophysis. (Autoría propia)

Al considerar a los fractales como un elemento artístico relevante para este estudio, se pretende que los estudiantes manifiesten sus percepciones, las cuales son obtenidas de una manera visual y analizadas en base del constructo teórico de *humanos con medios*, considerando el software GeoGebra, como un artefacto mediador de los procesos de enseñanza y aprendizaje de los números complejos, donde se producen las percepciones y emergen las emociones de los estudiantes.

3.3 Visualización

Hay que hacer una diferencia entre ver y visualizar, mientras que ver hace referencia a un aspecto fisiológico, la visualización es netamente un aspecto cognitivo propio del ser humano, y según Duval (2014), se debe también hacer una distinción entre una representación visual y la visualización. Las representaciones visuales son las representaciones que se utilizan en matemática y en su enseñanza, las que cumplen diferentes funciones, como de una herramienta educativa para ayudar a la adquisición de conocimiento matemático y, en cambio, la visualización es el reconocimiento, más o menos espontáneo y rápido, de lo que es pertinente a la matemática en cualquier representación visual dada o reproducida.

Para un estudiante hay una gran diferencia entre representaciones visuales y visualización, diferencia que para los profesores no es tan marcada o notoria, además los estudiantes no siempre logran superar esa diferencia (Duval, 2014). Como los estudiantes no ven los problemas como los profesores los ven, es que Duval, para acortar o aclarar ese problema, introduce la noción de unidad figurativa, que son los diferentes elementos que un individuo reconoce rápidamente como significativo o informativo en una representación visual. Lo que puede quedar mejor expresado, según Duval, es que la visualización puede cumplir todas las funciones que son importantes para comprender y usar las matemáticas cuando uno es capaz de discernir todas las unidades figurativas que están matemáticamente relevantes en una representación visual dada.

Es sabida la importancia de la visualización en el ámbito de la educación matemática pues la mayoría de los autores consideran y ponen de manifiesto los procesos cognitivos que llevan a descubrir, interpretar e identificar habilidades en la resolución de problemas, y de esa forma también, ayudan a comprender mejor los conceptos matemáticos o geométricos que están siendo estudiados (Castellanos, 2010).

Las actividades cognitivas involucradas en la enseñanza y el aprendizaje de la geometría según Duval (1998) son tres: la construcción que hace referencia al diseño de configuraciones mediadas por instrumentos geométricos, el razonamiento relacionado con procesos discursivos y la visualización que fija su atención en las representaciones espaciales.

Cuando los estudiantes resuelven problemas apoyados en las figuras, están involucrando un proceso de visualización denominado aprehensión cognitiva (Fernández, Molina González, & Planas, 2015), que es cuando se realiza una acción sobre un dibujo o algún estimulo visual que, por lo demás, hay varias formas de interpretar ese estímulo. Se distinguen según Duval (1995) cuatro formas de aprehensión visual que son: perceptiva, secuencial, discursiva y operativa, (Fernández et al., 2015).

Aprehensión perceptiva: Se caracteriza por la identificación de una configuración, en el plano o en el espacio, sin asociarle ninguna afirmación matemática. En esta forma de aprehensión se pueden percibir varias sub-configuraciones.

Aprehensión secuencial: Se produce cuando hay que construir una configuración o describir su construcción. En este caso las diferentes sub-configuraciones emergen en un orden que están en relación con las propiedades matemáticas.

Aprehensión discursiva: Se produce una asociación de las configuraciones con afirmaciones matemáticas (definiciones, propiedades, etc.) que determinan el objeto representado.

Aprehensión operativa: Se caracteriza por la realización de alguna modificación en la configuración inicial, añadiendo, suprimiendo elementos o reorganizándolos.

De los tipos de aprehensión, la perceptiva es una base para que las otras se desenvuelvan y desarrollen, en la medida que la perceptiva se atenúa, las otras se potencian y crecen, se hace un nexo entre ellas. Es por ello que la aprehensión perceptiva es considerada básica para el aprendizaje de la geometría.

Por otro lado es importante y necesario hacer una distinción, que la visualización puede ser menospreciada cuando se trata de producciones matemáticas científicas, pero que según

Borba y Villareal (2005) la visualización debiera considerarse como una parte importante en la educación matemática porque:

- La visualización constituye una forma alternativa de acceder al conocimiento matemático.
- La comprensión de conceptos matemáticos requiere representaciones múltiples, y la representación visual puede transformar la comprensión en sí misma.
- La visualización es parte de la actividad matemática y una forma de resolver problemas.
- La tecnología con poderosas interfaces visuales está presente en las escuelas, y su uso para enseñar y aprender matemáticas requiere la comprensión de los procesos visuales.

Aunque la prueba, y considerando la visualización desde un enfoque algebraico, se ve como la ruta oficial hacia la verdad en las matemáticas académicas, esta no necesariamente se debe extrapolar al aula de matemáticas en todos los niveles escolares.

Incorporar la tecnología es de suma importancia ya que puede ayudar a visualizar los contenidos, en este caso los números complejos, para el aprendizaje de las matemáticas.

En este trabajo la aprehensión perceptiva es de gran importancia, porque permitió estudiar la percepción de los estudiantes después de realizar la actividad central de este trabajo.

3.4 Humanos con Medios y Reorganización del Pensamiento

El constructo teórico *humanos con medios* se basa en el concepto de *pensamiento colectivo* de Lévy (1993) y de la teoría de la *reorganización del pensamiento* de Tikhomirov (1981), quién considera al computador un artefacto, al igual que Vygotsky considera el lenguaje como un mediador en el proceso del aprendizaje humano. Según Borba y Villareal (2005) la computadora proporciona *feedbacks* a los sujetos proporcionando información que reorganiza la forma de aprender de los humanos (Borba & Villareal, 2005; Chiari, 2015; Galleguillos, 2016).

3.4.1 Pensamiento Colectivo (Pierre Lévy)

Pierre Lévy (1993) manifiesta que los humanos siempre han estado ligados a las tecnologías, en un principio, la oralidad fue un medio de comunicación para extender la memoria y así traspasar los conocimientos y aspectos sociales y culturales de generación en generación, dando origen a mitos y cuentos. Luego, cuando surgió la escritura, se pudo extender aún más la memoria del ser humano de manera más precisa, ya que permitió resguardar acontecimientos que no era posible hacerlo de forma oral. La escritura se mejoró considerablemente con la invención de la imprenta, cuya tecnología permitió la reproducción de libros en grandes cantidades. También, Lévy considera que la informática puede ser una extensión de la memoria y es así que nuevas formas de expresión pueden surgir en los ámbitos visual, auditivo o sensorial.

Cada uno de los actores de la comunicación construye, remodela y recorre su propio camino en un proceso no lineal de interrelación con los medios, lo que se relaciona con la metáfora de hipertexto. Esto conlleva a que el mayor tamaño de los programas actuales desempeñe un papel de tecnología intelectual: ellas reorganizan, de una forma u otra, la visión del mundo de sus usuarios y modifican sus reflejos mentales. Las redes informáticas modifican los circuitos de comunicación y de decisión en las organizaciones. En la medida en que la informatización avanza, ciertas funciones son eliminadas, nuevas habilidades aparecen y la ecología cognitiva se transforma (Levy, 1993).

3.4.2 Reorganización del pensamiento (Oleg K. Tikhomirov)

Difícilmente se puede determinar cómo las computadoras influyen en el desarrollo de los procesos mentales humanos sin tener en cuenta lo que es el pensamiento humano y lo importante de las etapas históricas en el desarrollo del pensamiento se pueden identificar hasta el momento de la aparición de las computadoras (Chiari, 2015).

En cuanto a informatizar, en términos de Tikhomirov, es que la verdadera pregunta no es cómo la computadora puede reemplazar los procesos mentales o cómo puede hacer un análisis netamente cuantitativo sumado a los procesos psicológicos ya existentes. Más bien los programas computacionales se deben considerar como un nuevo sistema simbólico que puede mediar en la actividad humana (Tikhomirov, 1981).

Tikhomirov muestra como la computadora cambia la estructura de la actividad intelectual humana, dado que en la memoria el almacenamiento y búsqueda de información se reorganizan. Esto ha producido que la comunicación haya cambiado, debido a que la interacción entre el humano y la computadora forma una nueva comunicación, ya que las relaciones humanas están mediadas por el uso de computadoras que solo crean la posibilidad de que la actividad humana alcance una estructura más completa. Esas posibilidades se realizan solo cuando las condiciones de ciertos aspectos técnicos, psicológicos y sociales se manifiestan. Las condiciones técnicas se refieren a que la computadora debe ser apta; la psicológica a que la computadora debe adaptarse a la actividad humana, y el humano a las condiciones de trabajo con la computadora y las principales condiciones son las sociales, que indican cuáles son los objetivos de uso del computador en un determinado sistema social (Tikhomirov, 1981; Kornilova, Voiskounsky, Babaeva, Berezanskaya, & Vasilyev, 2013).

3.4.3 Humanos con medios (Marcelo Borba)

Los libros, el papel y el lápiz son medios que permiten el aprendizaje y la comprensión matemática, pero están tan incorporados en las actividades escolares que sus influentes en la construcción del conocimiento matemático son casi imperceptibles o invisibles. Pero que no se puede negar su participación e influencia en procesos de enseñanza y aprendizaje. De esa misma forma, Borba y Villareal (2005) creen que el conocimiento siempre es producido por colectivos de humanos con medios. Más aún, el sujeto no aprende solo, sino en una interacción con sus pares (colectivo) y por medio de artefactos (Borba & Villareal, 2005).
Al utilizar la metáfora “humanos con medios”, se destaca que la elaboración colectiva de conocimiento va más allá del rol que los medios juegan en esa producción, pues se considera que está subestimado. Los medios, sean digitales o no, condicionan, pero no determinan, la manera como los humanos son capaces de pensar; ellos dan forma a los modos en cómo los humanos piensan y, a su vez, los humanos pueden moldearlas, lo que conlleva a un proceso dialéctico que se denomina modelado recíproco. Es importante destacar que el término "medios", en la metáfora propuesta por las investigaciones no sólo se refiere a los medios digitales. La oralidad y la escritura también son vistas como medios y la propuesta del constructo teórico sugiere que la producción de conocimiento ocurre a partir de la interacción entre humanos y oralidad, escrita, medios digitales y muchos otros (Chiari, 2015).

3.5 GeoGebra

GeoGebra es un Software de Geometría Dinámica (SGD) que permite a los estudiantes el descubrimiento, la experimentación, la exploración, la construcción de modelos, la formulación de hipótesis, la demostración, la responsabilidad, la creatividad, el análisis, el trabajo colaborativo. En fin, la actividad del estudiante sobre el objeto-conocimiento desde diferentes aristas, es decir, ver la Matemática de una manera más activa y dinámica (Puerto Monterroza, 2014).

El SGD ofrece la posibilidad de visualizar casi instantáneamente los gráficos generados por expresiones matemáticas. Esto permite generar imágenes muy agradables y coloridas (como los fractales), cuya creación implica un desafío que obliga al "artista" a poner en juego los conocimientos matemáticos necesarios para lograr un fin (Vitabar, 2010).

El aprendizaje de la geometría con GeoGebra, es muy diferente del aprendizaje sólo a través de los instrumentos tradicionales en entornos de "papel y lápiz". El software libera a los estudiantes de tareas mecánicas y rutinarias, como los procedimientos de medición, cálculo y construcción, dejando espacio para un trabajo más activo y fructífero en geometría, sin perder la rigurosidad matemática que subyace en cada secuencia de comandos (Reid, Botta Gioda, & Prieto, 2017).

El software de geometría dinámica GeoGebra permite acercar a los estudiantes a un entorno que les puede resultar más cercano y cómodo. Además, permite realizar tareas que de otra manera serían inviables. Si bien hay muchos programas que pueden realizar estas tareas, GeoGebra tiene algunas características que lo hacen particular como, por ejemplo:

- que está disponible gratuitamente para uso no comercial,
- conecta la geometría, álgebra y una hoja de cálculo de manera totalmente dinámica,
- posee una interfaz muy fácil de usar, entre otras.

Además es accesible para toda la comunidad educativa y está concebido para el alumno que aprende Matemática (Vitabar, 2010). Cabe destacar que el uso de GeoGebra para la elaboración y animación de fractales utiliza fuertemente los recursos del computador y del software.

La ventana Vista Algebraica (Figura 25 a la izquierda) es aquella que muestra las ecuaciones y coordenadas de los elementos que se visualizan en la vista Gráfica, esta última es el lugar donde se puede trabajar como si se tuviera un "lápiz y papel" pero con un maestro del dibujo ya que las construcciones son hechas perfectamente, a diferencia de hacerlos manualmente, permite tener una visión clara y precisa de los elementos construidos, además de poder realizar acercamientos y trabajar de forma dinámica las construcciones. La ventana Vista

Hoja de Cálculo (Figura 25 a la derecha) permite manejar una gran cantidad de puntos simultáneamente y se puede elegir si son mostrados o no en la ventana Vista Gráfica.

Una característica de especial utilidad y que merece ser mencionada es que GeoGebra permite trabajar con colores dinámicos (ver Figura 26), los que permiten colorear de una manera medianamente sencilla y vistosa puntos que generan a los fractales y potencias de números complejos trabajados en las actividades de esta investigación.

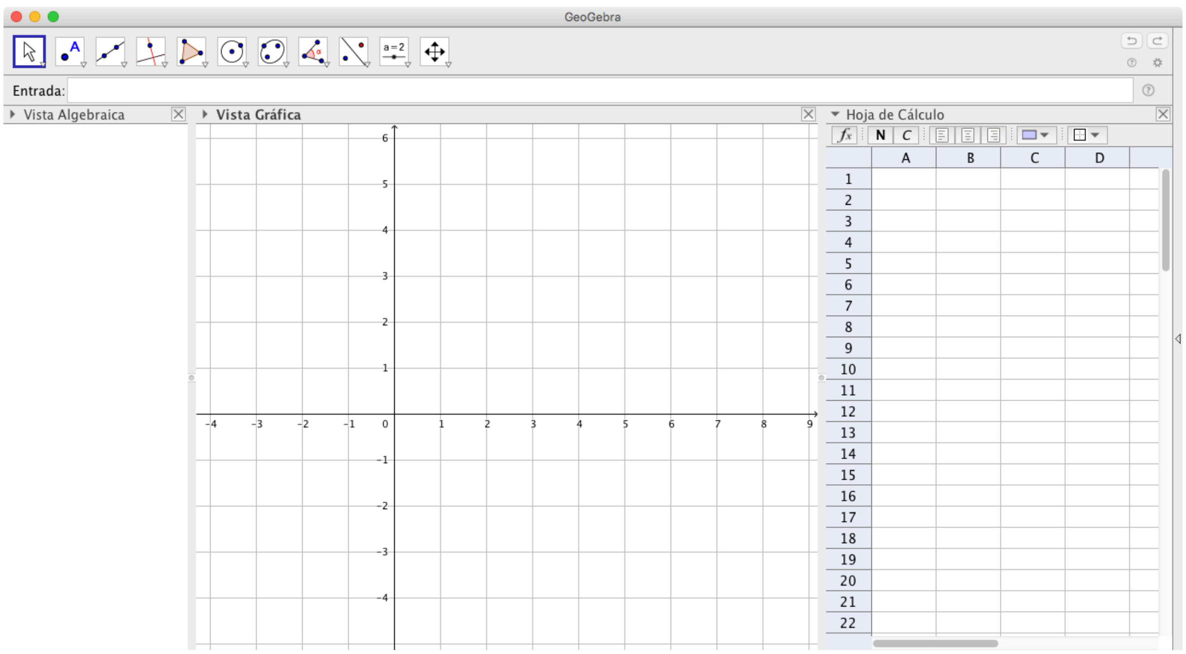


Figura 25: Ventana principal de GeoGebra con las vistas Algebraica, Gráfica y la Hoja de Cálculo. (Autoría propia)

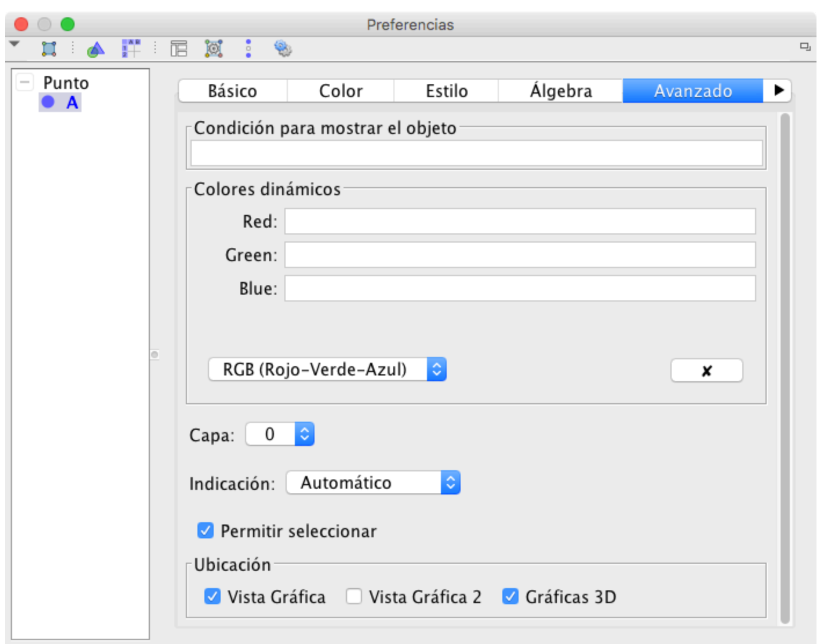


Figura 26: Menú de preferencias de objeto donde se pueden ver las casillas de colores dinámicos. (Autoría propia)

3.5.1 Humanos con GeoGebra (Villa-Ochoa)

Villa-Ochoa & Ruiz Vahos (2010) estudiaron la visualización de la noción de variación en *seres humanos con GeoGebra*, donde observaron maneras alternativas de acercarse a conceptos matemáticos por medio del software GeoGebra, pudiendo ampliar la visión de objetos matemáticos y las potencialidades del software. En su interacción con el software encontraron nuevos cuestionamientos que incentivan la exploración de GeoGebra y redimensionan la mirada de objetos matemáticos. Uno de los elementos del software es la posibilidad de generar "herramientas", las cuales permitieron un diálogo entre la visualización y los procedimientos algebraicos con lápiz y papel y, además, la validación formal de algunas conjeturas, evidenciando cómo el pensamiento matemático se transforma cualitativamente en la interacción de un colectivo pensante de *humanos con medios*.

Basandose en los principios epistemológicos del costructo teórico *humanos con medios* de Borba y Villareal (2005), ofrecen una mirada alternativa a la representación matemática proporcionada por el software GeoGebra, donde puede considerarse como una *Unidad*, cuyos registros están armonizados, es decir, dinámicamente relacionados, promoviendo la coordinación y comprensión de los objetos matemáticos.

En la investigacion, Villa-Ochoa y Ruiz Vahos (2010), no consideran el uso del software como un medio para enseñar o aprender matemática de manera más fácil, sino que, es considerado como un colectivo pensante de *seres humanos con GeoGebra*, donde la construcción del conocimiento matemático es diferente y, armoniza con elementos de una parte de la sociedad donde se han incorporado y masificado elementos tecnológicos que han pasado a ser parte inherente de la cultura.

3.5.2 Emociones (Scucuglia)

Uno de los aspectos importantes de este trabajo, se orienta en directrices de Digital Mathematical Performances (DMP), donde se engloba el software GeoGebra, con un sentido emocional importante y que ha sido estudiado, entre otros autores, por Scucuglia (2012) y Gadanidis y Borba (2008), quienes adaptaron los criterios de Jon Boorstin (1990) para el análisis de películas, para educación matemática. Los criterios (placeres) son tres y Boorstin afirma que las buenas películas ofrecen esos placeres a la audiencia: el *placer de mirar*, quien experimenta este placer posee el ojo racional, el sentido de la historia. La sorpresa es un elemento de placer fundamental para captar la atención y el interés del público por comprender la historia. Un *placer indirecto* (vicario), se refiere a las emociones, cuando el público siente lo que los actores estan sintiendo. Los primeros planos de las expresiones faciales de los actores realzan el placer vicario. Un *placer visceral* (visceral), implica experiencias directas, cuando el público siente sus propios sentimientos a través de escenas de acción, suspenso, thriller y otros.

Los criterios de Boorstin (1990) fueron adaptados por Scucuglia (2012) para la educación matemática de la siguiente manera:

- *Placer de lo nuevo/maravilloso/sorprendente* : Las DMP ofrecen formas de ver lo nuevo y lo maravilloso en matemáticas. Exploran *grandes ideas matemáticas* para sorprender a la audiencia y mostrar la alegría de las matemáticas.
- *Placer de lo que toma sentido*: Tanto la historia como las ideas matemáticas exploradas en una DMP tienen que hacerle sentido a la audiencia. El razonamiento y pensamiento matemático de los estudiantes en una DMP debe estar estructurada de tal manera que la audiencia pueda entender la idea matemática dentro del contexto de la narrativa digital. Conexiones entre representaciones e ideas son aspectos claves de las dos dimensiones desde el punto de vista del placer: debe ser sorprendente y hacerle sentido.
- *Emociones vicarias* : Las DMP conectan ideas matemáticas con eventos dramáticos. Las emociones y sentimientos retratados en la obra deben estar relacionados con los conceptos matemáticos explorados en la DMP.
- *Sensaciones viscerales* : Las DMP ofrecen experiencias directas a través del uso de materiales concretos, como lo son el uso de canciones, el énfasis en los momentos de sorpresa, con actividades manuales, y la exploración desde un sentido de ajuste matemático y estético, que también son características de las sensaciones viscerales matemáticas en una DMP.

Considerando que los estudiantes, cuando realizan arte en el aula y dejan el material disponible en línea, lo comunican a una gran audiencia, más allá de los parámetros de la sala de clases. Cuando los estudiantes trabajan con DMP forman pensamientos y sentimientos colectivos (Scucuglia, 2012).

En una DMP, es crucial la conceptualidad de la idea matemática, explorar grandes ideas matemáticas es una condición necesaria para crear una DMP conceptual, sin embargo eso no siempre se logra, impidiendo ver lo nuevo y maravilloso de las matemáticas. Aunque el uso de las artes y la tecnología digital ofrecen formas de comunicación multimodal y conexiones de representaciones múltiples, no garantizan la conceptualización de la idea matemática.

Los eventos dramáticos conectados a propiedades matemáticas o conceptos, ofrecen emociones vicarias matemáticas. Pero, como en la visión placentera, se necesitan más módulos o ejemplos de DMP que exploren las grandes ideas matemáticas y profundas conexiones entre las emociones y las Matemáticas.

En términos de sensaciones viscerales, los estudiantes usan canciones en muchas DMP, exploran momentos de sorpresa, utilizan materiales concretos y exploran los sentidos del ajuste matemático, como los patrones, simetría y relaciones entre propiedades de polígonos. Las conexiones entre las representaciones de objetos matemáticos y objetos o fenómenos cotidianos también implican sensaciones viscerales. El modelado matemático generalmente se refiere a grandes ideas matemáticas y muestra la belleza de las Matemáticas (Scucuglia, 2012).

Las categorías adaptadas por Scucuglia son de gran importancia para el presente trabajo, ya que permiten vislumbrar los análisis a la luz de los resultados obtenidos en la realización de la experiencia.

IV. MÉTODO

En este trabajo, se realizó un estudio de caso en el cual se investigó la situación de un tercero medio, de un colegio particular subvencionado que posee dificultades, durante el primer semestre del año escolar, en donde se estudió cómo influye la visualización de los números complejos en la percepción que los estudiantes tienen de la asignatura de matemática después de realizar actividades de fractales y números complejos en GeoGebra.

Un estudio de caso es un indagación que investiga un fenómeno dentro de un contexto de la vida real, para el cual no interesa obtener medidas estadísticas ni la generalización de resultados, sino comprender un caso (o más) en profundidad (Goldenberg, 2011). Un estudio de caso es apropiado para investigaciones tanto descriptivas como también explicativas. Yin (2009) destaca además que cuando se tiene poco control sobre los eventos, y cuando el foco es un fenómeno contemporáneo dentro de un contexto de la vida real, sumado a que las preguntas de investigaciones deben, preferentemente comenzar con un "cómo" o un "por qué" es que se tiene que la estrategia adecuada es un estudio de caso.

4.1 Diseño de investigación

Según Yin (2009) un estudio de caso posee cinco componentes importantes:

(1) Las preguntas de investigación
(2) Las proposiciones teóricas
(3) Las unidades de análisis
(4) El enlace lógico de los datos con las proposiciones
(5) El criterio para la interpretación de los resultados.

La pregunta de investigación de este estudio pretende responder ¿cómo influye la visualización de los números complejos en la percepción que los estudiantes tienen de la asignatura de matemática?.

(1) Las preguntas del estudio

La pregunta de este estudio es: ¿Cómo los estudiantes de tercer año medio de un colegio de la comuna de San Antonio perciben la aisgnatura de matemática después de la integración de una actividad que incorpora la visualización de los números complejos por medio de GeoGebra? al ser esta una pregunta que comienza con un "cómo" es apropiado que el trabajo sea abarcado en un Estudio de Caso según el cuadro de situaciones relevantes para diferentes métodos de investigación descrito en Yin (2009, p. 8)

(2) Proposiciones

Las proposiciones se refieren al interés de la investigación y deben tener un propósito. Como este tiene por objeto la percepción que los estudiantes tienen de la asignatura de matemática, el propósito es comprender cómo el uso de un software de geometría dinámica para la visualización de elementos matemáticos usando relaciones con números complejos, influenciaría en la percepción que los estudiantes tienen sobre la asignatura de matemática.

(3) Unidades de análisis

La unidad de análisis se refiere a qué o quién es el objeto de investigación. Nuestro objeto de investigación es la percepción que los estudiantes tienen de la asignatura de matemática, en particular del tema de números complejos, por lo que nuestra unidad de análisis corresponde a expresiones en la que estudiantes de educación media indican su percepción de la matemática, después de realizada una experiencia de clases que incluyó aspectos teóricos y el uso de herramientas digitales para la visualización de los números complejos.

(4) Vinculación lógica de los datos a las proposiciones

Los datos se obtuvieron mediante entrevistas semiestructuradas a estudiantes de tercer año medio, las cuales fueron transcritas (ver Anexo B). Las entrevistas se focalizan en conocer la percepción de los estudiantes después de visualizar los números complejos. A partir de las entrevistas se generaron categorías que resumen las percepciones de los estudiantes sobre la matemática.

(5) Criterios para interpretar los datos

Para interpretar los datos, se pretende interpretar los resultados a la luz del constructo teórico *Humanos con medios*; el que distingue que los estudiantes, por medio de tecnologías, reorganizan el pensamiento humano. Luego se procede a comparar los resultados obtenidos con resultados de otros estudios en la misma temática.

4.2 Instrumentos de evaluación

Para responder la pregunta de investigación, se recolectaron datos por medio de la grabación en audio de entrevistas semiestructuradas a estudiantes después de la experiencia.

4.3 Entrevistas

Las entrevistas comenzaron preguntando el nombre de cada estudiante y, posteriormente, se inició la sesión de preguntas que fueron básicamente cuatro, las que estaban orientadas a conocer y comprender la percepción de los estudiantes. Una vez hecha la primera pregunta, se realizaron otras de acuerdo a las respuestas obtenidas, es por eso que algunas de las entrevistas resultaron más extensas que otras. Para obtener la mayor información posible las entrevistas fueron semiestructuradas y así evitar respuestas demasiado cortas de los estudiantes. Estas se realizaron en diferentes lugares del establecimiento y en distintos días, dependiendo de la disponibilidad de horario de los estudiantes para no interferir con las otras asignaturas. Se logró entrevistar a nueve estudiantes del curso, algunos con gusto y otros sin agrado por la asignatura, así como también alumnos con buenas, malas y regulares calificaciones y alumnos tratados en el programa PIE[5] del establecimiento, para así evitar una tendencia muy marcada o condicionada en las respuestas.

Las entrevistas se grabaron con una grabadora de audio en formato MP3 las cuales comienzan preguntando el nombre de pila de cada estudiante y posteriormente las preguntas principales realizadas que guiaron las entrevistas, las cuales se detallan a continuación:

- ¿Podría haber previsto una relación entre los números complejos y la representación artística de ellos?
- ¿Esperaba un resultado así de artístico de las potencias de los complejos?, ¿Cómo percibía la asignatura antes de ver el resultado en GeoGebra?

[5] Programa de Integración Escolar con una breve descripción en 4.4

- ¿Cómo se vio afectada su percepción de los números complejos después de haber visto el resultado de las potencias de números complejos, y después de los fractales, en comparación de la que tenía en años anteriores?
- ¿Qué le pareció la actividad realizada de las potencias de números complejos y la de la elaboración de fractales?, ¿Qué sugiere para mejorarla?

4.4 Descripción del Establecimiento

El estudio se realizó en un establecimiento particular subvencionado de la comuna de San Antonio en la Región de Valparaíso, es un colegio relativamente pequeño con un promedio de 26 alumnos por curso en enseñanza media durante el año 2017. Posee enseñanza Humanista-Científica y según la Agencia de Calidad de la Educación (2017), los alumnos pertenecen al grupo socioeconómico (GSE) MEDIO-BAJO.

El colegio se ha acogido a la Subvención Escolar Preferencial (SEP) y ha sido catalogado como un colegio emergente, además de contar con Programa de Integración Escolar (PIE) que es una estrategia inclusiva del sistema escolar enfocada en mejorar la calidad de la educación con énfasis en aquellos estudiantes con necesidades educativas especiales y que permite al establecimiento contar con dos psicopedagogas, una psicóloga, una educadora diferencial y una fonoaudióloga.

El colegio posee una infraestructura algo "sencilla", la cual es parte de una casa modificada y ampliada para ser un colegio (ver Figura 27), cuenta con un laboratorio de ciencias, una

Figura 27: Vista frontal desde la entrada del colegio. (Autoría propia)

sala audiovisual, una biblioteca y dos salas de computación, una para enseñanza básica y otra para enseñanza media. Nos ocuparemos de esta última, la cual se utilizó para realizar el estudio, además porque la de enseñanza básica no posee instalado el software GeoGebra.

La sala de computación destinada para el uso de la enseñanza media (ver Figura 28) posee un proyector y una pizarra además de 20 computadores entregados por el Ministerio de Educación, de los cuales hay tres que no están disponibles por presentar fallas y todos los computadores usan el sistema operativo Windows Xp y Edubuntu, una distribución Linux dedicada especialmente para el trabajo con niños y educación, en la que se encuentra instalado GeoGebra en su versión 4.

Figura 28: Sala de computación del establecimiento. (Autoría propia)

4.4.1 Niveles de logro

El puntaje alcanzado por los estudiantes del colegio en la prueba SIMCE de Matemática de 2016 fue de 213 puntos. En el gráfico de la Figura 29 se muestran los puntajes promedios de Matemática obtenidos desde el año 2012 hasta 2016 (Agencia de Calidad de la Educación, 2017).

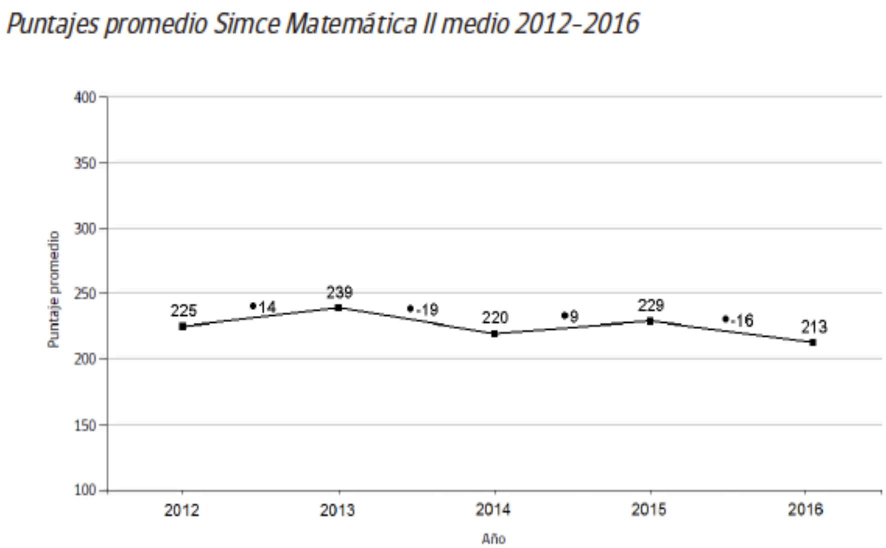


Figura 29 : Puntajes promedio SIMCE Matemática 2º medio 2012-2016. (Agencia de Calidad de la Educación, 2017)

En cuanto a establecimientos del mismo GSE los resultados se muestran en la Figura 30 y en la cual se aprecia que en Comprensión Lectora son similares y son significativamente más bajos en Matemática y Ciencias Naturales (estadísticamente se considera que una variación de 10 puntos es significativa (Agencia de Calidad de la Educación, 2017)).

	GSE del establecimiento	
		Medio Bajo
	Prueba	Comparación con establecimientos del mismo GSE
II medio	Comprensión de Lectura	● -2
	Matemática	↓ -35
	Ciencias Naturales	↓ -24

Figura 30: Comparación con establecimientos del mismo GSE. (Agencia de Calidad de la Educación, 2017)

En el Figura 31 se muestran los resultados según Niveles de Aprendizaje obtenidos por el curso de 2º medio en la prueba de Matemática desde los años 2014 al 2016.

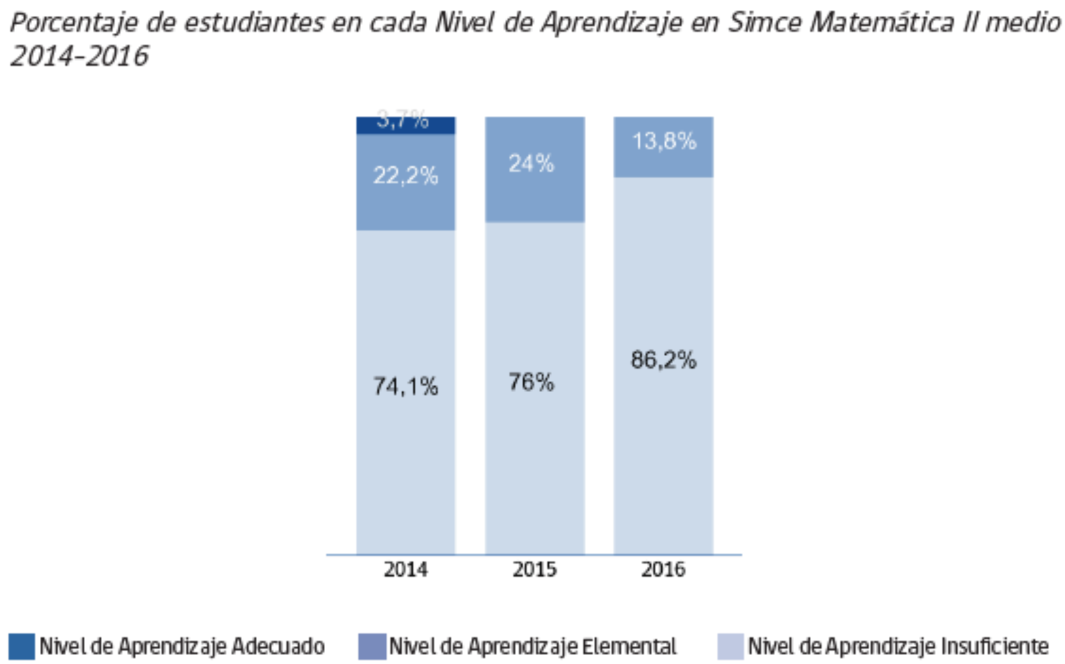


Figura 31: Resultados según Nivel de Aprendizaje. (Agencia de Calidad de la Educación, 2017)

Se aprecia que los resultados del Nivel de Aprendizaje Insuficiente desde el año 2014 al 2016 han aumentado, y más aún, son demasiado altos, esto es, de los 33 alumnos que rindieron la prueba SIMCE en 2016 aproximadamente 28 tienen un nivel de aprendizaje insuficiente y tan solo 5 logran tener un Nivel de Aprendizaje Elemental.

Otro aspecto a tomar en cuenta es el mostrado en la medición sobre Autoestima Académica y Motivación Escolar, datos entregados en los Cuestionarios de Estudiantes, los datos arrojan que como se muestra en la Figura 32, el 79% de los estudiantes se muestra con un nivel medio de Autoestima Académica y Motivación Escolar. Este aspecto es importante de considerar porque arroja indicios, por una parte, de la autopercepción y la autovaloración de los estudiantes en relación con su capacidad de aprender, y por otra, las percepciones y actitudes que tienen los estudiantes hacia el aprendizaje y el logro académico (Agencia de Calidad de la Educación, 2017).

Según el informe de la Agencia de Calidad de la Educación (2017), la autoestima académica y la motivación escolar son aspectos clave para el desarrollo integral de los niños, niñas y jóvenes durante la etapa escolar, ya que influyen no solo en el rendimiento académico, sino también en su salud, calidad de vida y nivel de bienestar general.

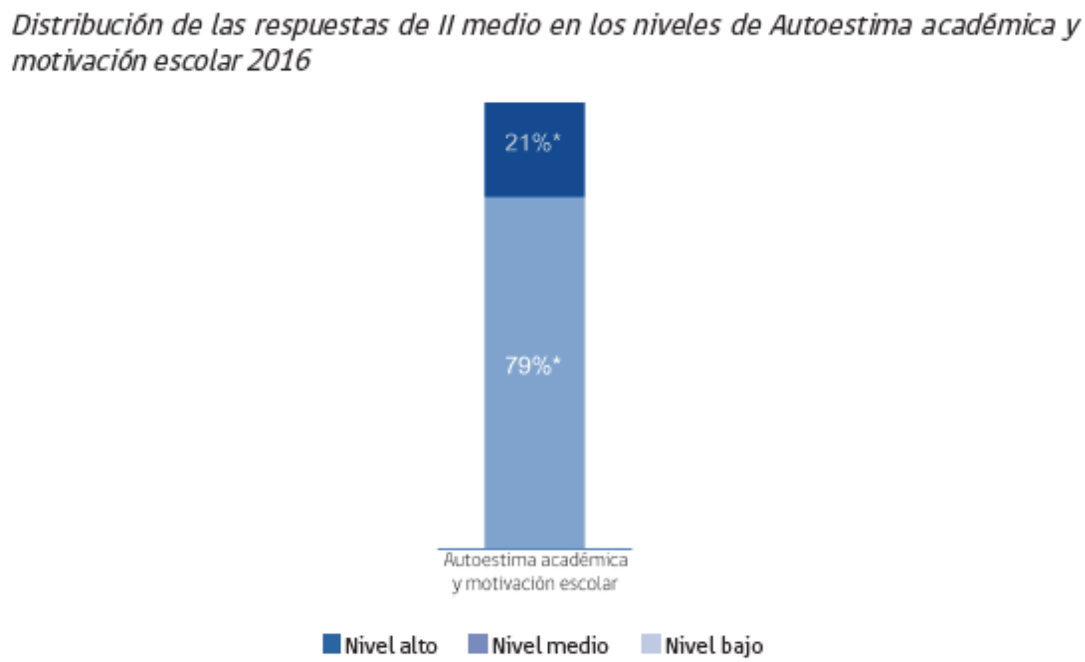


Figura 32: Autoestima Académica y Motivación Escolar. (Agencia de Calidad de la Educación, 2017)

También se destaca que el mantener una buena autoestima académica y una adecuada motivación escolar disminuyen las probabilidades de que los estudiantes incurran en conductas de riesgo o no deseables; como por ejemplo, ser víctimas o victimarios de violencia escolar, consumidores de alcohol y drogas o tener mayor ausentismo escolar (Agencia de Calidad de la Educación, 2017).

4.4.2 Descripción del Curso

El curso con el cual se trabajó es el tercer año medio, que rindió la prueba SIMCE el año 2016, por lo que los datos mostrados anteriormente (4.4.1) son todos referentes al curso en cuestión. Por su parte el curso está conformado por igual cantidad de hombres y mujeres, 20 en total; es un curso con alta tasa de atrasos por la mañana y de ausencias; además de tener una gran cantidad de alumnos que han repetido uno y, en otras ocasiones, hasta dos cursos en su vida escolar; cuenta con alrededor de 5 alumnos que pertenecen al programa PIE del establecimiento, siendo atendidos por presentar problemas de aprendizajes en distintas asignaturas, entre las cuales se encuentra Matemática, y de los cuales dos fueron entrevistados para este estudio.

4.5 Descripción de la experiencia

La experiencia se desarrolló en dos etapas. La primera de ellas, un poco más extensa en el tiempo y consistió en una observación de la parte teórica, además de otra con el uso del software GeoGebra en potencias de complejos y fractales; la segunda parte consistió en las entrevistas realizadas a nueve de los estudiantes de tercer año medio.

El proceso de la experiencia está dividido en dos sub-etapas las cuales consistieron en lo siguiente:

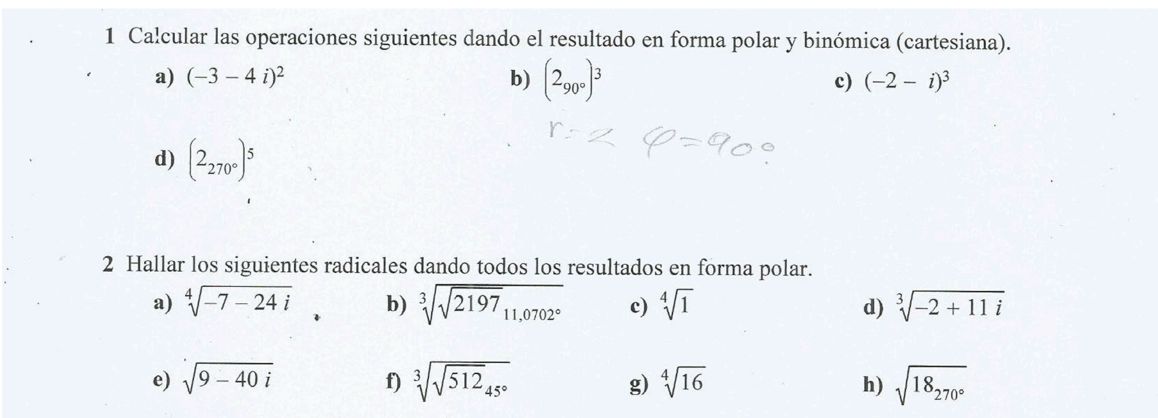
- Sub-etapa Teórica: Esta se realizó durante el periodo del primer semestre de 2017 y abarcó lo que es el contenido de números complejos, con su introducción, operatorias básicas y representaciones en el plano.
- Sub-etapa GeoGebra: Esta se realizó al término de la unidad de Números Complejos, pues el AE6 es el último en el orden cronológico y consistió en abarcar los contenidos de transformación de números complejos a su forma polar para posteriormente poder determinar las potencias y las raíces inicialmente de forma manual y luego con GeoGebra en la elaboración de las raíces, potencias y además de la elaboración de fractales para finalizar.

Nos centraremos en esta última sub-etapa que es la más significativa para el presente estudio y además la primera fue desarrollada de una forma tradicional sin mayores acontecimientos relevantes pero no menos importantes ya que sirvieron de base para la sub-etapa siguiente.

4.5.1 Desarrollo de las clases

Sub-etapa Teórica:

Las clases se desarrollaron en un principio en la sala de clases de forma teórica de acuerdo al orden y cronograma del programa de estudio de tercer año de enseñanza media. El orden fue descrito en la sección 3.1 de Complejos, posterior al contenido de números complejos se trabajó en forma tradicional con lápiz y papel el contenido de raíces y potencias de números complejos, como se puede apreciar en la Figura 33 en la cual se muestra el encabezado del trabajo realizado en clases, en el Anexo E se muestra parte del desarrollo del mismo trabajo de raíces y potencias realizado por uno de los estudiantes del curso; cabe mencionar que los trabajos tuvieron la misma dificultad y cantidad de ejercicios, todos distintos para cada uno de los estudiantes.



1 Calcular las operaciones siguientes dando el resultado en forma polar y binómica (cartesiana).

a) $(-3-4i)^2$ **b)** $\left(2_{90°}\right)^3$ **c)** $(-2-i)^3$

d) $\left(2_{270°}\right)^5$

$r=2 \quad \varphi=90°$

2 Hallar los siguientes radicales dando todos los resultados en forma polar.

a) $\sqrt[4]{-7-24i}$ **b)** $\sqrt[3]{\sqrt{2197}_{11{,}0702°}}$ **c)** $\sqrt[4]{1}$ **d)** $\sqrt[3]{-2+11i}$

e) $\sqrt{9-40i}$ **f)** $\sqrt[3]{\sqrt{512}_{45°}}$ **g)** $\sqrt[4]{16}$ **h)** $\sqrt{18_{270°}}$

Figura 33: Ejercicios de trabajo sobre potencias y raíces de complejos. (Autoría propia)

Sub-etapa GeoGebra:

Sesión 1: Posterior a la sub-etapa Teórica se trabajó en el laboratorio de computación según la planificación de la clase "Potencias y Raíces de Números Complejos" (ver Anexo C.1). Esta actividad se desarrolló comenzando con una introducción del uso de GeoGebra, dirigida a lo necesario para la elaboración de las potencias y raíces. En una primera instancia se trabajó con la elaboración de las raíces de complejos según protocolo de construcción (ver Anexo D.2), porque el resultado que se debe obtener es fijo, es decir, no hay variación de un trabajo a otro, esto debido a que en la barra de entrada se asigna a un número complejo la expresión siguiente:

$$z_k = |z|^{1/n}\left(\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + isen\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right)$$

Donde los valores de k y n son asignados como deslizadores, la expresion anterior escrita en la barra de entrada de GeoGebra tiene el siguiente formato[6]:

z_1=r^(1/n)(cos((α+2*π*k)/n)+i*sen((α+2*π*k)/n))

con la cuál se obtienen imágenes como las de la Figura 34, donde se muestra el pentágono regular que representa las cinco raíces quintas del número complejo $A = -1 + i$

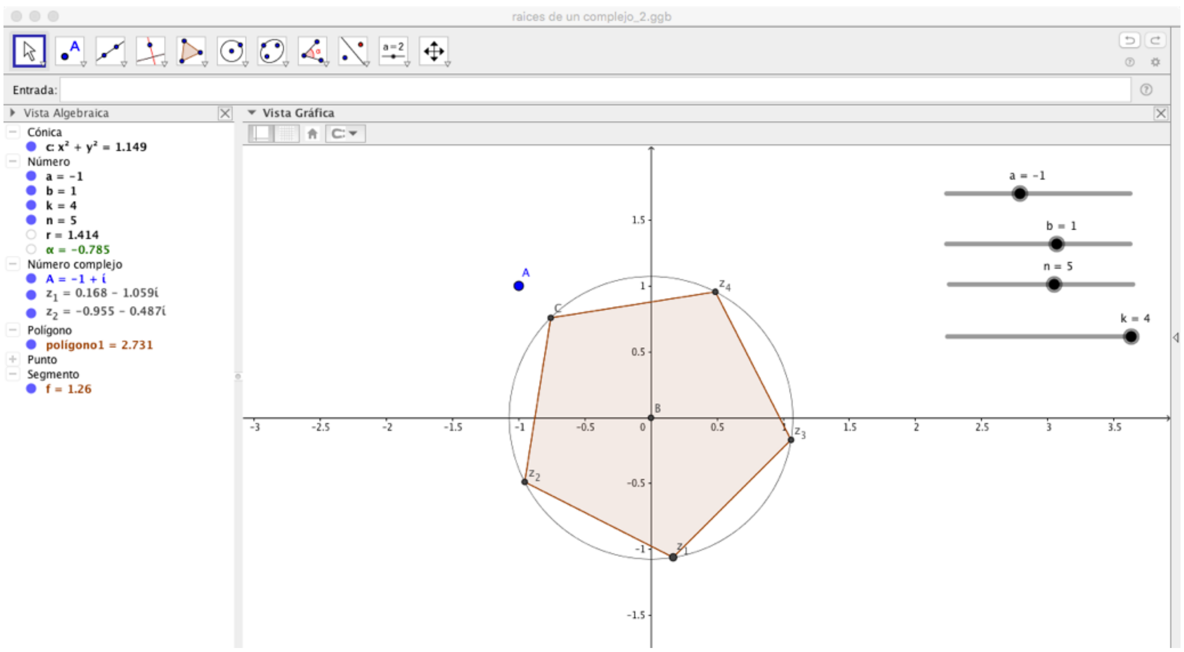


Figura 34: Resultado de las Raíces de complejos en GeoGebra. (Autoría propia)

Luego, en la segunda etapa de la clase, se entregó el protocolo de construcción "Potencias de Complejos" (ver Anexo D.1), la elaboración consistió en un trabajo con la vista Hoja de Cálculo donde se asigna un número complejo z, cualquiera, de la vista Algebraica a una celda y esta se relaciona con la celda inmediatamente inferior como una potencia de este número complejo, la secuencia se puede apreciar en el esquema de la Figura 35.

La Figura 36 muestra cómo debería quedar el trabajo de potencias, considerando que el valor del complejo A es dinámico se puede mover por todo el plano variando la imagen resultante.

---

[6] En el protocolo de construcción del Anexo D.2 hay una descripción más detallada de los elementos de la expresión en GeoGebra.

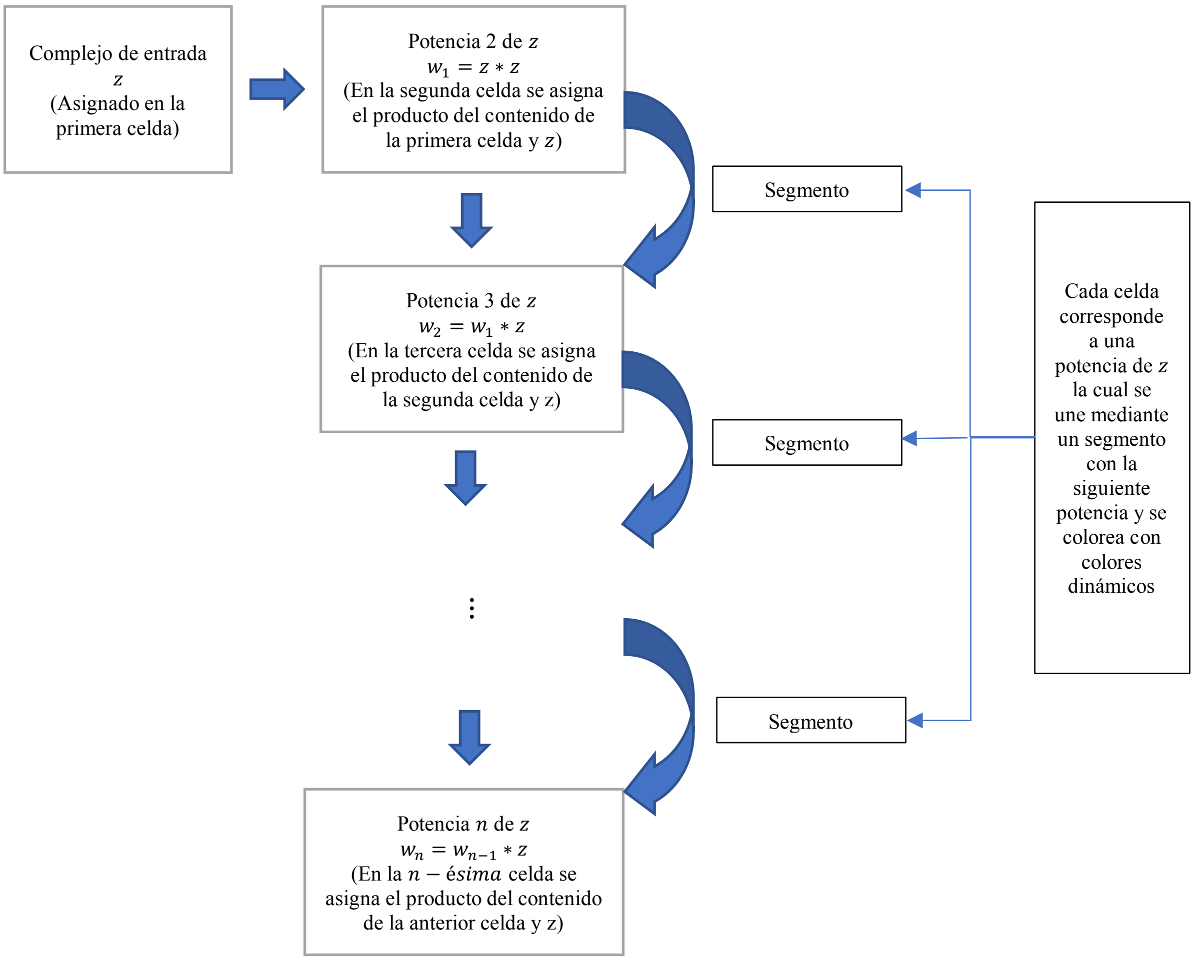


Figura 35: Esquematización del proceso de potencias de complejos en GeoGebra. (Autoría propia)

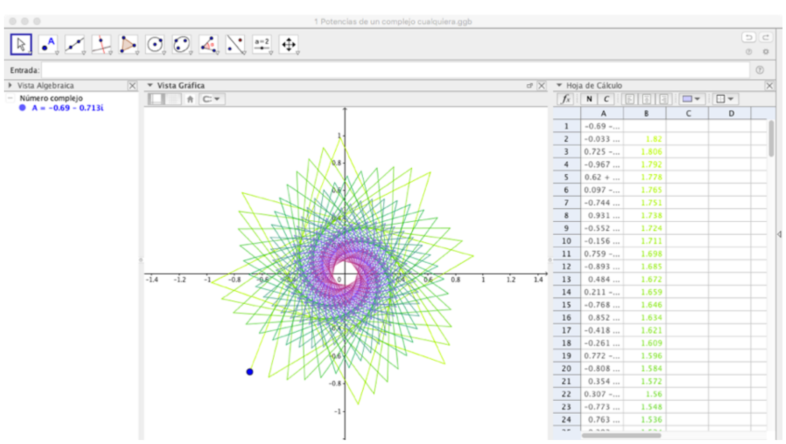
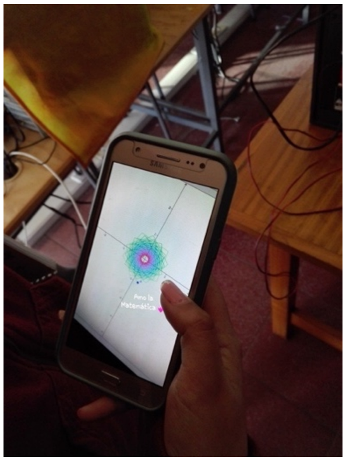


Figura 36: Resultado de las Potencias de complejos en GeoGebra. (Autoría propia)

Los trabajos fueron supervisados en cada puesto de los estudiantes, como se muestra en la Figura 36, donde se aprecia el trabajo en desarrollo (derecha) y una imagen del trabajo realizado por una estudiante captada por su teléfono celular (izquierda).



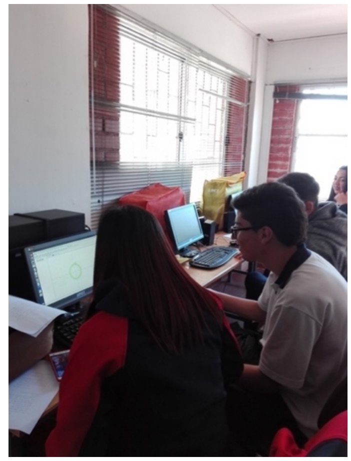


Figura 37: Estudiantes trabajando en potencias de Complejos. (Autoría propia)

<u>Sesión 2</u>: En la parte final de la sub-etapa GeoGebra, se desarrolló la clase "Fractales de Newton y Conjunto de Mandelbrot en GeoGebra" según la planificación del Anexo C.2 la cual comenzó con el recuerdo de algunos elementos de GeoGebra necesarios para la construcción de los fractales, en la primera instancia se realizó el Fractal de Newton según su protocolo de construcción (ver Anexo D.4), el Fractal de Newton es elaborado mediante la iteración de funciones del tipo:

$$z_{n+1} = z_n - \frac{p(z_n)}{p'(z_n)}$$

Donde p es una función polinómica compleja y p' su derivada, para el fractal realizado en la clase se utilizó el polinomio $p(z_n) = z^3 - 1$ y se multiplicó por el número complejo $1 + i$ quedando entonces la función utilizada en el protocolo de la siguente manera:

$$z_{n+1} = z_n - (1 + i)\frac{z_n^3 - 1}{3z_n^2}$$

La expresion anterior escrita en la barra de entrada de GeoGebra tiene el siguiente formato[7]:

A2-(1+i)*(A2^3-1)/(3*A2^2)

Es importante tener en cuenta que al hacer variaciones, ya sea en el polinomio o en el número que multiplica al polinomio se obtienen diferentes figuras fractales, la Figura 38 muestra la que se debe obtener según el protocolo trabajado (Anexo D.4).

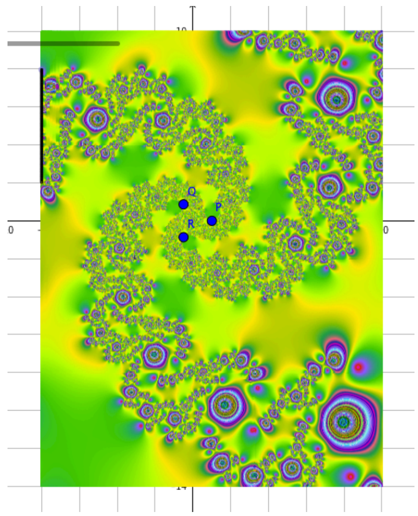


Figura 38: Variación trabajada del Fractal de Newton. (Autoría propia)

Posteriormente, en la segunda etapa de la clase, trabajaron la elaboración del Conjunto de Mandelbrot según su protocolo de construcción (ver Anexo D.3), el conjunto de Mandelbrot se obtiene por la iteración de la función recursiva

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

Donde z es la variable y c es un número complejo, en el programa GeoGebra la sintáxis de la función queda expresada en la Hoja de Cálculo como =B1^2 + $B1 y considerando que la celda B1 está definida en función del número complejo definido en forma de par ordenado como (t, A1/120) donde la parte real "t" corresponde al deslizador y es este quien hace que la hilera de puntos se mueva revelando el fractal, es importante mencionar que es esta hilera de puntos la que se colorea con colores dinámicos. El trabajo se realiza solo en la parte

[7] En el protocolo de construcción del Anexo D.1 hay una descripción más detallada de los elementos de la expresión en GeoGebra.

superior del fractal porque este es simétrico respecto del eje X, por ende los puntos se reflejan en torno al eje con el comando Refleja(B1, EjeX). En la Figura 39 se muestra el Conjunto de Mandelbrot elaborado con el protocolo de construcción trabajado en clases; se aprecian las distintas etapas de completación, además de los puntos que corresponden a las iteraciones de la función y en la imagen central-inferior se aprecia la hilera de puntos que forma el fractal. El trabajo de las clases queda de manifiesto en las imágenes de la Figura 40 donde se muestran a estudiantes en distintas etapas de su desarrollo del fractal Conjunto de Mandelbrot.

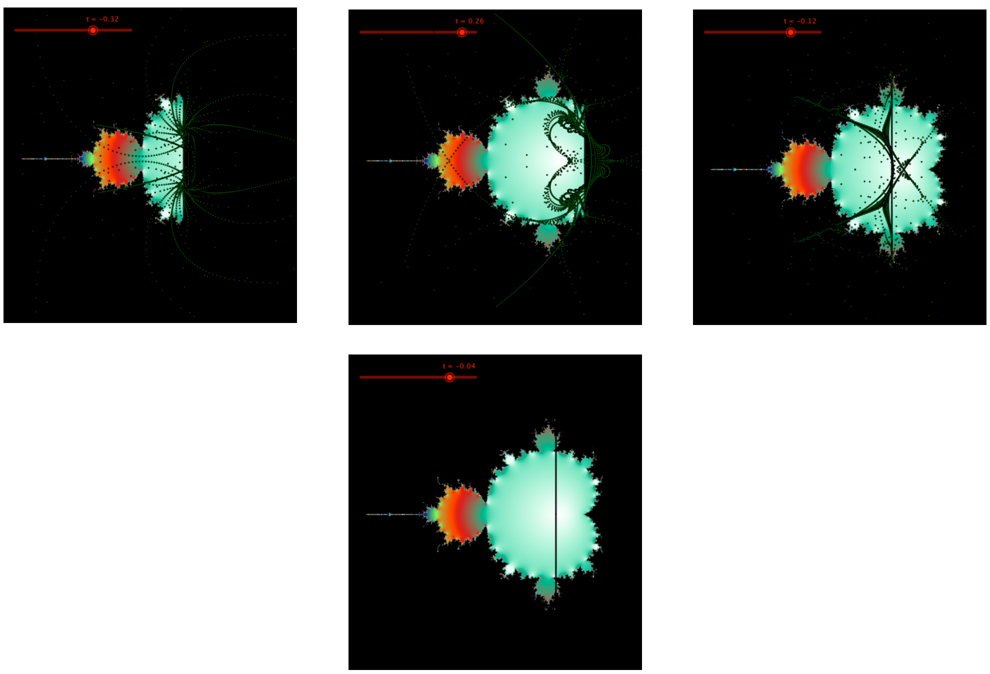


Figura 39: Distintas fases en la creación del Conjunto de Mandelbrot. (Autoría propia)

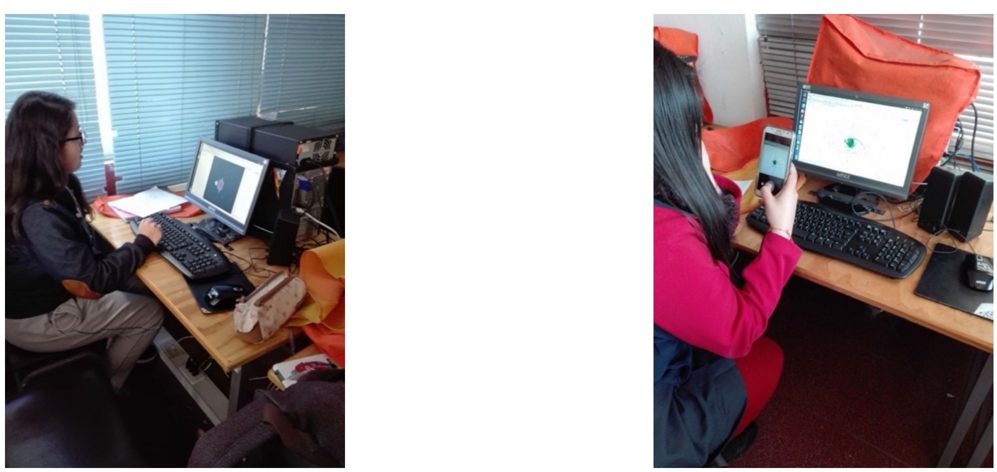
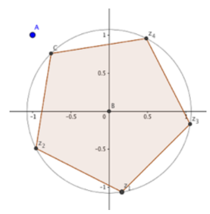
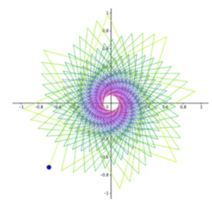
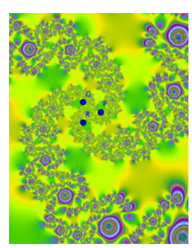
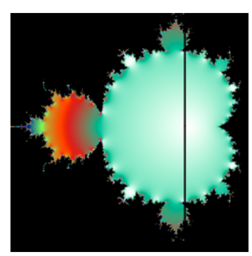


Figura 40: Distintas etapas del desarrollo del fractal “Conjunto de Mandelbrot”. (Autoría propia)

En la Tabla 1 se muestra un resumen de las etapas de la experiencia, el orden de las sesiones y contenidos realizados en el estudio.

Tabla 1: Resumen de las etapas de la experiencia

<table>
<tr><td></td><td colspan="4">ETAPAS DE LA EXPERIENCIA</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="3">TEORÍA Y GEOGEBRA</td><td>ENTREVISTAS</td></tr>
<tr><td></td><td>Sub-etapa Teórica</td><td colspan="2">Sub-etapa GeoGebra</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="9">CONTENIDOS Y ACTIVIDADES</td><td>Antecedentes Históricos</td><td colspan="2">Sesión 1: “Potencias y Raíces de Números Complejos”</td><td>Entrevistas en Anexo B</td></tr>
<tr><td>Representación de números complejos en el plano cartesiano</td><td>Raíces
</td><td>Potencias
</td><td rowspan="8">Estudiantes entrevistados (E1; E2; E3; E4; E5; E6; E7; E8; E9)</td></tr>
<tr><td>Operatoria cartesiana (suma, resta, multiplicación y división)</td><td colspan="2">Sesión 2: “Fractales de Newton y Conjunto de Mandelbrot en GeoGebra”</td></tr>
<tr><td>Módulo y conjugado</td><td rowspan="6">Fractal de Newton
</td><td rowspan="6">Fractal Conjunto de Mandelbrot
</td></tr>
<tr><td>Forma Polar</td></tr>
<tr><td>Operatoria polar (suma, resta, multiplicación y división)</td></tr>
<tr><td>Potencias</td></tr>
<tr><td>Raíces</td></tr>
<tr><td>Trabajo de Potencias y Raíces</td></tr>
</table>

Para finalizar la descripción de la experiencia, se pretende indicar algunos aspectos relevantes observados durante la realización de la misma. Se percibió que los estudiantes estaban curiosos y entusiasmados del trabajo a realizar, puede ser porque, se salió del estereotipo tradicional, para ellos, de las clases de matemáticas. Otro aspecto relevante a considerar, es el conocimiento previo del software GeoGebra, por parte de los estudiantes, no conocían o habían trabajado antes con el software, ese pudo ser un aspecto desfavorable, para realizar las actividades en los tiempos que se planificaron, esa situación provocó la extension de las clases entre una y dos horas más de lo estimado.

Se considera que los objetivos de las clases se pudieron cumplir, pues los estudiantes lograron elaborar y crear las potencias, raíces y fractales con el software Geogebra, a pesar del poco manejo del programa, eso confirma que es un progama relativamente sencillo de utilizar y lo hace idóneo para esta actividad. Al trabajar en GeoGebra, graficando los números complejos, los estudiantes lograron visualizar la representación geométrica de ellos, en las potencias y los fractales elaborados, por ellos mismos, en GeoGebra.

Como profesor de la actividad se puede decir que fue motivante, tanto para los alumnos como para uno, pues logra que los estudiantes vean y visualicen una geometría que es cercana y cotidiana, pero desconocida por ellos; permitiendo que tengan una visión más amplia del contexto que presenta la asignatura de matemática.

V. ANÁLISIS Y RESULTADOS

En este capítulo se presentan los análisis y resultados del estudio realizado sobre la percepción que tienen los estudiantes de un tercer año medio sobre la matemática después de trabajar con números complejos y su representación geométrica además de la elaboración de los fractales de Newton y Mandelbrot. Este capítulo presenta el análisis y los resultados a partir de las entrevistas que se realizaron a nueve estudiantes que vivieron la experiencia. El análisis dio origen a dos grandes categorías: Percepciones antes y después de la experiencia y Expresiones de los estudiantes.

5.1 Percepciones, antes y después de la experiencia

La primera gran categoría que se encontró en el análisis de las entrevistas del estudio son percepciones que los estudiantes manifestaron tener respecto de la asignatura y de los números complejos, de esta gran categoría se desprendieron dos grupos de categorías, un grupo de las percepciones anteriores y otro grupo de las posteriores a la experiencia realizada. Las percepciones anteriores de los estudiantes están en su mayoría relacionadas con una concepción negativa de la matemática que se puede apreciar en las siguientes categorías encontradas: Fría y solo números sin utilidad, Difícil y complicada, Aburrida y Sin interés personal. En su contraparte, las percepciones posteriores están relacionadas con elementos más favorables como son las categorías encontradas siguientes: Inesperado, Facilidad, Utilidad y Visión distinta que engloba a las subcategorías de Belleza matemática, Interesante y Entretenida. Las categorías se grafican en el árbol de categorías de la Tabla 2.

Tabla 2: Árbol de Categorías

<table>
<tr><th colspan="2">Gran Categoría</th><th>Categorías</th><th>Subcategorías</th></tr>
<tr><td rowspan="3">PERCEPCIONES</td><td>ANTES</td><td colspan="2">Fría y solo números sin utilidad
Difícil y complicada
Aburrida
Sin interés personal</td></tr>
<tr><td rowspan="2">DESPUÉS</td><td colspan="2">Inesperado
Facilidad
Utilidad</td></tr>
<tr><td>Visión distinta</td><td>Belleza matemática
Interesante
Entretenida</td></tr>
</table>

Etapa Anterior

A continuación se presentan y describen las categorías encontradas de las percepciones que los estudiantes manifestaron poseer antes se realizar la experiencia.

Fría y sólo números si utilidad

La categoría Fría y solo números sin utilidad, hace referencia a que los alumnos perciben la asignatura como algo frío, no ven en ella una aplicabilidad de la misma y tienen la idea de que es una asignatura que solo pueden relacionar con números, es lo único que perciben de ella, que es solo resolver guías de ejercicios que carecen de todo sentido para ellos, como se aprecia en los siguientes extractos de las entrevistas.

Cuando se les pregunta por su percepción de la asignatura antes de ver el resultado con GeoGebra, algunos estudiantes responden:

E1: "Como **pasar materia, nada más**, pero ahora viéndolo, muchas imágenes que están en internet que son con números complejos…"

E2: "Eh bueno la percepción es obviamente muy distinta, cambié mucho después de ver el trabajo porque bueno **los números para mí siempre fueron números** y ahora ver y relacionarlo …"

E6: "… llama la atención hacer cosas diferentes, **la Matemática se veía, así como puros números, anotar,** pero igual es más divertido esto."

E9: "Lo encontraba, así como latoso, **ejercicios y guías y ya**, pero al verla, una y todas esas cosas como que me llamó más la atención como que veía que no **sirven solamente para realizar ejercicios** y esas cosas, sino que también para varias situaciones y es como más entretenido hacer las figuras, cuesta, pero es más entretenido"

Difícil y complicada

La categoría Difícil y complicada, hace referencia a que los estudiantes tienen una percepción de la asignatura como algo difícil y que es en esencia complicada como se puede apreciar en los extractos siguientes de las entrevistas realizadas a los estudiantes cuando se les pregunta por la percepción que poseen antes de realizada la actividad.

Entrevistador: "¿Cómo percibía Ud. la asignatura antes de trabajar con GeoGebra?"
E4: "**Complicada**"
Entrevistador: "¿Cómo la percibía, Complicada?"
E4: "Si, como que **no entendía**, **no sabía hacerlo** en el cuaderno ni nada así, …"

Entrevistador: "Que ¿cómo percibía Ud. la asignatura en el fondo o los números complejos antes de llevarlos al computador?"
E4: "**Siempre fue difícil**"
Entrevistador: "Cuando vimos las sumas, las multiplicaciones, la representación gráfica de los complejos"
E4: "**Siempre fue complicado**"

E6: "Igual esta parte de la materia no es aburrida tampoco, **cuesta entenderla**"

E8: "Pensé que **era más difícil** pero ahora lo encuentro súper fácil los números complejos"
E8: "… yo pensaba que era como un idioma distinto, que **no iba a poder aprenderlo** al tiro, en cambio con el programa lo … se simplificó todo como dijo Ud. y lo pude aprender más rápido …"

En los extractos se deja entrever que cuando no se entiende la matemática, esto conlleva a que la asignatura se complique demasiado, generando esta percepción que es convertida en un círculo vicioso desfavorable para los estudiantes.

<u>Aburrida</u>

La categoría siguiente Aburrida, que no amerita mayor detalle su descripción, destaca que los estudiantes mencionan tener una percepción que la asignatura es aburrida, previo a la experiencia, como muestran los siguientes extractos de las entrevistas:

Entrevistador: "Y ¿cómo percibía antes la asignatura, antes de ver esos resultados con el GeoGebra?"

E3: "**Aburrido**, porque como que igual es entretenido llegar a eso, llegar a que se provoquen esos colores y todo ese tipo de cosas porque es como ver un universo, es un universo porque es algo infinito"

E6: "… el problema es que la Matemática al ser ... **como que me aburre**, entonces al serla [hacerla] así, diferente, llama más la atención"

E7: "Realmente la asignatura me **aburría** [sonríe] sinceramente"

E7: "…, no entiendo mucho Matemática por eso **me parece aburrida**"

E9: "Lo encontraba, así como **latoso**, ejercicios y guías y ya, pero al verla, una y todas esas cosas … entretenido hacer las figuras, cuesta, pero es más entretenido"

En los extractos se aprecia que para los estudiantes cuando la asignatura es inentendible, se les hace difícil y genera que se aburran rápidamente influyendo directamente en la percepción que tienen de la matemática, a pesar que intuyen que en algunas ocasiones se puede hacer algo entretenido en la asignatura.

<u>Interés personal</u>

La última categoría se nombró Interés personal y hace referencia a los intereses manifestados por los estudiantes hacia la asignatura dando a entender que han mantenido un desinterés por la asignatura debido a que no se entiende, generando el mismo círculo vicioso mencionado en párrafos anteriores. Esas percepciones quedan de manifiesto en los extractos de las entrevistas realizadas a algunos de los estudiantes.

Entrevistador: "Y la asignatura, ¿cómo la percibía antes de ver este resultado con GeoGebra?"

E5: "**Antes no me gustaba**" [sonríe]

Entrevistador: "¿Cómo percibía la asignatura antes de trabajar con los números complejos?"

E6: “Antes de los números complejos …”

Entrevistador: “¿Cómo veía la asignatura en años anteriores?”

E6: “Igual esta parte de la materia no es aburrida tampoco, cuesta entenderla”

Entrevistador: “¿Si?”

E6: “**Bastante me cuesta**, pero no es aburrida, yo sé que **si le pongo empeño** voy a entenderla y me va a gustar.”

Entrevistador: “Pero en años anteriores, ¿Cómo era su percepción de la asignatura?”

E6: “eeeeeh”

Entrevistador: “¿Cómo la veía?”

E6: “**Nunca le tomé mucho ... yo siempre he sido malo para la Matemática**”

<u>Etapa Posterior</u>

Las percepciones que los estudiantes manifestaron experimentar después de realizada la experiencia se exponen a continuación. Se encontraron las categorías: Inesperado, Facilidad, Utilidad, además de la categoría Visión Distinta, que posee tres subcategorías las cuales son: Belleza matemática, Interesante y Entretenida. Las categorías y subcategorías encontradas se describen a continuación.

<u>Inesperado</u>

La categoría Inesperado expresa las percepciones que los estudiantes experimentaron cuando son consultados por si esperaban resultados artísticos en conceptos netamente matemáticos como lo son las potencias de números complejos, los estudiantes en general acusaron que les fue totalmente inesperado, no lo habían pensado, relacionado o imaginado pues las relaciones que podían hacer con arte, se remiten al área de Geometría y en ningún caso al Álgebra, unidad del programa de estudio de tercer año de enseñanza media, donde están ubicados los números complejos. Algunas de las expresiones de los estudiantes se muestran en los siguientes extractos de las entrevistas.

Entrevistador: “¿Ud. podría haber previsto una relación entre los números complejos y la representación artística de ellos?”

E1: "No, **nunca me había imaginado** la imagen que iba a ver en esta actividad, yo ni siquiera sabía para que servían los números complejos y verlo en una expresión artística de veras que **fue impresionante**."

Entrevistador: "¿Esperaba un resultado así de artístico de las potencias de los complejos?, eso respecto a la actividad anterior."

E1: "No, porque no sé, **yo nunca había relacionado** tanto la matemática con el arte, entonces **no me esperaba tanto** que mover un punto iban a generar distintas imágenes."

Entrevistador: "Ud. ¿Esperaba un resultado así de artístico con las potencias de los complejos?"

E2: "Bueno, **en realidad no**, al principio cuando comencé haciendo el trabajo, eh lo único que vi fueron solamente los puntos y el nombre de cada ¿vector?"

Entrevistador: "¿De cada punto, de cada número complejo?"

E2: "Eso, nombre de cada número complejo, y el resultado **nunca me esperé** que fuese una especie de figura artística, de … bueno muy compleja y linda como lo veo, eso."

Entrevistador: "Ud. pudo haber previsto una relación entre los numero complejos y la representación artística de ellos?"

E3: "**No, no me lo imaginaba.**"

Entrevistador: "¿Y su impresión luego que los vio?"

E3: "Pucha fue como … como le digo, **fue algo inesperado** porque **uno no se imagina que los números se van a relacionar con algo de colores** cosas como … es como arte, es como la matemática se vuelve arte [sonríe] en algún sentido."

Entrevistador: "¿Esperaba un resultado así de artístico con las potencias de los complejos?"

E3: "**No, porque uno ve la matemática como algo serio, no como algo colorido**, algo distinto, algo fuera de los números, porque es algo como fuera de los números."

Las expresiones que indican sorpresa (algo inesperado) entre números complejos y su representación artística, se relacionan con el "*Placer de lo nuevo/maravilloso/sorprendente*", categoría adaptada por (Scucuglia, 2012).

Facilidad

La categoría Facilidad se refiere a cómo los estudiantes percibieron el trabajo en cuanto a dificultad una vez realizada la experiencia con el SGD GeoGebra, percepciones que se muestran en los siguientes extractos de las entrevistas.

Entrevistador: "Y después de los fractales ver que todo eso que vimos en un principio, que era complicado a como ocurrió después"

E4: "¿Cómo lo hicimos en el computador?"

Entrevistador: "¿Sí?"

E4: "**Fue todo más fácil"**

Entrevistador: "¿Fue más fácil?"

E4: "Si"

Entrevistador: "¿Tal vez se le "aterrizó" algo?"

E4: "Siii poh"

Entrevistador: "¿Sí?"

E4: "Como que **ahora todo está claro**"

Entrevistador: "¿Y la asignatura como la percibía antes de ver este resultado con el GeoGebra y los números complejos?"

E8: "Pensé que era más difícil pero **ahora lo encuentro súper fácil** los números complejos"

Ent: "¿El concepto se simplificó?"

E8: "**El concepto se simplifico, exacto**"

E9: "… me llamó más la atención como que veía que no sirven solamente para realizar ejercicios y esas cosas, sino que también para varias situaciones y es como más entretenido hacer las figuras, **cuesta**, pero es más entretenido"

Entrevistador: "Este resultado artístico de los números complejos, ¿cómo afectó eso en su percepción de la asignatura después de haber utilizado el programa GeoGebra?"

E9: Mmm, o sea, encontré, así como que **es una forma más didáctica** de potenciar la Matemática.

Utilidad

La categoría Utilidad, hace referencia a un aspecto que los estudiantes, dieron sentido de utilidad de la matemática, que podría ser útil en otros ámbitos, como pueden ser las artes, dada las numerosas menciones hechas por los estudiantes hacia aspectos artísticos del trabajo realizado.

Sin ir más lejos el estudiante E1 lo hace explícito al mencionar que "ahora veo la matemática súper útil" como se aprecia en el siguiente extracto de su entrevista y posteriormente del estudiante E9:

Entrevistador: "¿Cómo percibía la asignatura antes de ver el resultado con GeoGebra?"

E1: "Como pasar materia, nada más, pero ahora viéndolo, muchas imágenes que están en internet que son con números complejos y **ahora veo la matemática súper útil**."

E1: "Que los veo, … que **son súper útiles para hacer imágenes tan originales** y que sean más encima con la matemática."

E9: "Lo encontraba, así como latoso, ejercicios y guías y ya, pero al verla, una y todas esas cosas como que **me llamó más la atención como que veía que no sirven solamente para realizar ejercicios y esas cosas, sino que también para varias situaciones** y es como más entretenido hacer las figuras, cuesta, pero es más entretenido."

Estas expresiones indican que los estudiantes entienden la idea matemática dentro del contexto de la explicación digital, es decir, la idea de número complejo y su relación con fractales representados en GeoGebra, se relacionan con el "*Placer de lo que toma sentido*", categoría adaptada por Scucuglia (2012).

Visión distinta

La categoría Visión distinta se refiere a cómo los estudiantes ven la asignatura, cómo se vió afectada su perspectiva una vez realizada la experiencia, esta categoría incluye tres subcategorías: Belleza matemática, Interesante y Entretenido.

Belleza matemática

La primera subcategoría es: Belleza matemática, que muestra cómo los estudiantes relacionaron aspectos relativos a colores o interpretación de las imágenes. Las expresiones de los estudiantes se muestran en los extractos de las entrevistas siguientes:

Entrevistador: "¿Ud. podría haber previsto una relación entre los números complejos y la representación artística de ellos?"

E1: "No, nunca me había imaginado la imagen que iba a ver en esta actividad, yo ni siquiera sabía para que servían los números complejos y **verlo en una expresión artística** de veras que fue impresionante."

Entrevistador: "¿Esperaba un resultado así de artístico de las potencias de los complejos?, eso respecto a la actividad anterior."

E1: "No, porque no sé, yo **nunca había relacionado tanto la matemática con el arte**, entonces no me esperaba tanto que mover un punto iban a generar distintas imágenes."

Entrevistador: "¿Cómo percibía la asignatura antes de ver el resultado con GeoGebra?"

E1: "Como pasar materia, nada más, pero ahora viéndolo, **muchas imágenes que están en internet que son con números complejos** y ahora veo la matemática súper útil."

Entrevistador: "Ud. pudo haber previsto una relación entre los numero complejos y la representación artística de ellos?"

E3: "No, no me lo imaginaba."

Entrevistador: "¿Y su impresión luego que los vio?"

E3: "Pucha fue como … como le digo, fue algo inesperado porque uno no se imagina que **los números se van a relacionar con algo de colores** cosas como … **es como arte**, es como la matemática se vuelve arte [sonríe] en algún sentido.

Entrevistador: "¿Esperaba un resultado así de artístico con las potencias de los complejos?"

E3: "No, porque uno ve la matemática como algo serio, **no como algo colorido**, algo distinto, algo fuera de los números, porque es algo como fuera de los números."

Entrevistador: "Y ¿cómo percibía antes la asignatura, antes de ver esos resultados con el GeoGebra?"

E3: “Aburrido, porque como que igual es entretenido llegar a eso, llegar a que se **provoquen esos colores** y todo ese tipo de cosas porque es como ver un universo, es un universo porque es algo infinito.”

Entrevistador: “Ud. ¿Esperaba un resultado así de artístico con las potencias de los complejos?”

E2: “Bueno, en realidad no, al principio … lo único que vi fueron solamente los puntos y el nombre de cada ¿vector?”

Entrevistador: “¿De cada punto, de cada número complejo?”

E2: “Eso, ... nunca me esperé que fuese una especie de **figura artística**, … bueno **muy compleja y linda** como lo veo, eso.”

Esta subcategoría, en particular, presenta expresiones que indican sorpresa entre la relación de los números complejos y su representación artística que se relacionan con el “*Placer de lo nuevo/maravilloso/sorprendente*” y además contiene elementos de sorpresa con las actividades manuales y de exploración desde un sentido de ajuste matemático y estético que también se relaciona con las “*Sensaciones viscerales*” (Scucuglia, 2012)

<u>Interesante</u>

La segunda subcategoría es: Interesante, la cual se refiere a cuando los estudiantes muestran elementos que podrían manifestar un acercamiento mayor del esperado para estudiantes con una autoestima académica de nivel medio, según lo mencionado en la sección 4.4.1 de este trabajo. Las expresiones de los estudiantes se muestran en los extractos de las entrevistas siguientes:

Entrevistador: “Y ¿cómo se vio afectada su percepción de los números complejos después de haber visto estos resultados con las potencias o con los fractales en comparación a antes de trabajar con ellos?”

E2: “Eh bueno la percepción es obviamente muy distinta, cambié mucho después de ver el trabajo porque bueno los números para mí siempre fueron números y ahora ver y relacionarlo en una combinación tan grande y avanzada eh que transformarlos **de esa forma es interesante**, esa es mi percepción, que **fue muy interesante**."

Entrevistador: "¿O era igual que en años anteriores?"

E6: "Nooo, **me gustó haber hecho algo así, diferente**"

E6: "Que le preste más atención a la materia, que me importe más, el problema es que la Matemática al ser ... como que me aburre, **entonces al serla [hacerla] así, diferente, llama más la atención**."

Entrevistador: "Ok, esta representación artística que vimos con los números complejos se podría ..., ¿podría servir como un gancho para que Ud. fije más la atención en la asignatura?"

E6: "Sí"

Entrevistador: "¿Sí?"

E6: "Sí, porque **llama la atención hacer cosas diferentes**, la Matemática se veía, así como puros números, anotar, pero igual es más divertido esto."

E9: "Lo encontraba, así como latoso, ejercicios y guías y ya, pero al verla, una y todas esas cosas como que **me llamó más la atención** como que veía que no sirven solamente para realizar ejercicios y esas cosas, sino que también para varias situaciones y es como más entretenido hacer las figuras, cuesta, pero es más entretenido."

Las expresiones que indican una relación de las emociones con los conceptos matemáticos (llamar la atención trabajarlo de otra manera), números complejos y su representación artística trabajada en GeoGebra, se relacionan con las "*Emociones Vicarias*", categoría adaptada por (Scucuglia, 2012).

<u>Entretenido</u>

La tercera subcategoría es: Entretenido, que hace referencia a como los estudiantes percibieron las clases realizadas con el SGD y en general la asignatura. Las expresiones de los estudiantes se exponen a continuación con los extractos de las entrevistas realizadas:

Entrevistador: "Y ¿cómo percibía antes la asignatura, antes de ver esos resultados con el GeoGebra?"

E3: "Aburrido, porque como que igual **es entretenido llegar a eso**, llegar a que se provoquen esos colores y todo ese tipo de cosas …".

Entrevistador: "¿Con las figuras?"

E3: "Si"

Entrevistador: "¿Con las estrellitas que salían?"

E3: "**Lo hace entretenido** porque es como un juego de ilusión óptica [sonríe] lo quedas mirando y quedas como mareado [sonríe]"

Entrevistador: "¿Y con lo de las potencias, no esperaba eso de los fractales?"

E4: "No"

Entrevistador: "¿No?"

E4: "**Fue bacán [entretenido]** si jejeje [sonríe]"

Entrevistador: "¿Cómo percibía Ud. la asignatura antes de trabajar con GeoGebra?"

E4: "Complicada"

Entrevistador: "¿Y después de eso?"

E4: "¿Cuándo fuimos a la sala de computación?"

Entrevistador: "Si"

E4: "Ahí todo cambió"

Entrevistador: "¿Por qué?"

E4: "No sé, como que **fue más entretenida la clase**"

Entrevistador: "Y la asignatura, ¿cómo la percibía antes de ver este resultado con GeoGebra?"

E5: "Antes no me gustaba [sonríe]"

Entrevistador: "Ya"

E5: "Pero **ahora con el programa me gustó más y lo encuentro más entretenido**, no me quedo dormida jeje [sonríe]"

Entrevistador: "No se queda dormida"

E5: “Que eso es lo bueno jeje [sonríe] pero **es más entretenida la matemática así**”

E6: “Sí, porque llama la atención hacer cosas diferentes, la Matemática se veía, así como puros números, anotar, pero igual **es más divertido esto**.”

Entrevistador: “¿Y la asignatura cómo la percibía antes de utilizar el computador con GeoGebra”

E7: “Realmente la asignatura me aburría [sonríe] sinceramente.”

Entrevistador: “¿Y el utilizar el computador, sale de ese aburrimiento?”

E7: “mmm si un poco [titubea]”

Entrevistador: “¿O sigue siendo aburrida?”

E7: “O sea, yo encuentro que sería como aburrido, porque al principio lo encontré aburrido porque no sabía cómo hacerlo, después **cuando empecé a entender cómo hacerlo me pareció un poco más entretenido**.”

E9: “Lo encontraba, así como latoso, ejercicios y guías y ya, pero al verla, una y todas esas cosas como que me llamó más la atención como que veía que no sirven solamente para realizar ejercicios y esas cosas, sino que también para varias situaciones y **es como más entretenido hacer las figuras, cuesta, pero es más entretenido**.”

E9: “… es un poco difícil hacerla porque me enredé en el tema, pero en general la actividad es bastante buena, a mí me gustó, **me entretuve harto**, pasé dolores de cabeza, pero me gustó [sonríe], así, eso.”

Las expresiones de experiencias directas a través del uso de actividades de exploración desde un sentido matemático y estético con énfasis en los momentos de sorpresa, se relacionan con las “*Emociones viscerales*” (Scucuglia, 2012)

Se puede inferir que hay un cambio en cómo el estudiante ve la matemática respecto de antes, a como la puede ver después de realizada la experiencia donde le asocia, con cierto grado de sorpresa, ese sentido de utilidad y relacionándolo con las imágenes que conocía y que había visto en internet, además de varias situaciones como menciona el estudiante E9.

Las percepciones que se muestran en la Tabla 3 contrapone la mayoría de las percepciones antes y después descritas por los estudiantes una vez realizada la experiencia. Expone de forma resumida, en forma de concepto, las percepciones descritas por los estudiantes y que se agruparon en las categorías antes mencionadas.

Tabla 3: Percepciones descritas por los estudiantes.

PERCEPCIONES DE LOS ESTUDIANTES		
Estudiantes	Antes	Después
E1.	Solo pasar contenidos	Súper útil Relaciona imágenes digitales con matemática Espontáneo y sin relación con matemática
E2.	Solo números	Interesante Impensado relacionar ese tipo de arte con matemática
E3.	Algo serio Aburrido	Colorido Distinto Inesperado relacionar números con colores Algo fuera de los números Entretenido
E4.	Complicada	Más entretenida Más fácil con el computador Más claro Más desafiante
E5.	Sin gusto por la asignatura	Con el computador es más entretenido Es mejor
E6.	Siempre cuestan las matemáticas Sin interés personal Puros números Aburrida	Más entretenido con el computador Llama la atención la actividad
E7.	Aburrida cuando no se entiende	Más entretenido cuando se empieza a entender Visión distinta
E8.	Difícil No iba a poder aprender	Fácil Se simplificó mucho Es más fácil de entender
E9.	Latoso Solo sirven para hacer ejercicios y guías Fría y solo números sin utilidad	Difícil pero entretenido Mejor perspectiva Útil en varias situaciones

La Tabla 3 muestra las percepciones que los estudiantes manifestaron tener antes y después de realizar la actividad propuesta en este estudio. Se puede decir que los estudiantes antes de realizar las actividades mostraron poseer una percepción desfavorable hacia la asignatura, se corresponde con los resultados entregados por la prueba Simce, rendida cuando los mismos estudiantes estaban en segundo año medio, donde se aprecia en la Figura 32 de la sección 4.4.1 que el 79% de los estudiantes muestran una Autoestima Académica y Motivación Escolar de nivel MEDIO, entonces se condice que los estudiantes tengan una percepción como dijeron ellos mismos: "latosa", "aburrida", "sin sentido", "sólo números", "complicada" y "difícil", entre otras percepciones. Pero una vez realizada la actividad se aprecia que para los estudiantes fue entretenido trabajar con los computadores, la actividad estuvo desafiante, interesante y que ello les permitió mejorar a la mayoría, la percepción que tenían de la asignatura, algo que se veía lejano e improbable de obtener con alumnos que en la prueba Simce de 2016, el 86,2% de los estudiantes del curso obtuvieron un nivel de aprendizaje insuficiente y el 13,8% un nivel elemental y que ningún estudiante (0%) logró un nivel adecuado (ver Figura 31, sección 4.4.1), lo que se traduce en que lograron un puntaje que se encuentra 35 puntos más bajo que el obtenido por establecimientos del mismo GSE (ver Figura 30, sección 4.4.1) es por eso que las percepciones después de la actividad son, por así decirlo, peculiarmente llamativas pues el contenido es muy avanzado para los estudiantes, pero poseía la ventaja de mostrar un lado artístico de la matemática poco explotado en enseñanza media y fue uno de los aspectos que menos esperaban e imaginaban, al obtener las imágenes fractales que para ellos eran desconocidas.

Cabe mencionar que se encontraron aspectos (como la sorpresa, las emociones relacionadas con conceptos matemáticos, las representaciones que le hacen sentido a los estudiantes, entre otros) en relación con las categorías adaptadas a educación matemática: "*Placer de lo nuevo/maravilloso/sorprendente*"; "*Placer de lo que toma sentido*"; "*Emociones vicarias*" y "*Sensaciones viscerales*" por Scucuglia (2012). Los aspectos se correlacionaron y permitieron describir las apreciaciones y percepciones de los estudiantes en este trabajo.

Las apreciaciones de los estudiantes dejan ver la forma tradicional de enseñanza que viven los estudiantes del presente estudio, entonces, al ser enfrentados a actividades que les permiten ver otro aspecto de la matemática, ellos sufren lo que se puede decir, un cambio de paradigma en cuanto a su visión de la matemática, pues, para más de un estudiante dejó de ser algo inútil y pasó a ser algo muy útil, pero esa utilidad se logró percibir una vez que vió de forma artística y vistosa la representación de los números complejos. Otro estudiante que la percibía como algo formal y serio pasó a tener una apreciación más lúdica de la matemática, algo colorido y fuera de los números una ilusión óptica**.**

En la mayoría de los casos los estudiantes encontraron que el contenido era algo complicado y muy avanzado para su nivel, en especial para los alumnos del curso estudiado por su bajo nivel tanto académico como motivacional, eso podría considerarse como un obstáculo para enseñar, y se corresponde con que es un tema pocas veces visto en las clases, pero en este estudio puede ser visto como un potenciador en distintas áreas y que lo hace relevante de enseñar o mostrar en los cursos, esta relevancia y necesidad de enseñar algo que para los estudiantes puede ser muy avanzado se ve apoyada en que Even (2011) menciona que las matemáticas avanzadas profundizan el conocimiento de manera que permite transformar este nuevo conocimiento en conocimiento matemático útil para enseñar en la educación secundaria y mejorar la comprensión sobre qué son las matemáticas, además que destaca la importancia de estudiar matemáticas contemporáneas, entre las que se pueden considerar a la geometría fractal.

5.2 Expresiones de los estudiantes en una nueva visión de la matemática

En el análisis de las entrevistas se encontraron expresiones realizadas por los estudiantes en relación a las distintas etapas de la experiencia (ver Tabla 4) lo que abarca la segunda gran categoría encontrada en el análisis del presente estudio.

Tabla 4: Expresiones de los Estudiantes

Expresiones	Figura artística Este tipo de arte Como ver un universo Algo infinito La matemática se vuelve arte Juego de ilusión óptica Como mágico Figuras tan bonitas Como un idioma distinto

Los estudiantes no esperaban que los números complejos tuvieran una representación geométrica vistosa y atractiva, el estudiante entrevistado E2 señala al respecto:

E2: "… y el resultado **nunca esperé** que fuese una especie de **figura artística**, de … bueno muy compleja y **linda** …"

E2: "… es que es increíble que se pueda hacer este **tipo de arte** con matemática …"

Por su parte el estudiante E1 hace mención a que es algo inimaginable y que le impresionó ver que los números complejos tuvieran ese tipo de representación artística como se aprecia en un extracto de su entrevista.

E1: "No, **nunca me había imaginado** la imagen que iba a ver en esta actividad, … y **verlo en una expresión artística** de veras que fue impresionante."

También el estudiante E3 menciona y hace referencia a aspectos artísticos y efectos visuales que relaciona con un universo infinito, que se puede relacionar con la característica de autosimilaridad de los fractales que vio en las actividades realizadas, sus metáforas se muestran a continuación.

E3: "… todo ese tipo de cosas porque es como **ver un universo**, es un universo porque es algo **infinito**."

E3: "… es como **arte**, es como **la matemática se vuelve arte** [sonríe] en algún sentido."

E3: "Lo hace entretenido porque es como un **juego de ilusión óptica** [sonríe] lo quedas mirando y quedas como mareado [sonríe]"

Además el estudiante E5 que consideró las figuras con algo mágico y bello debido a la sorpresa que le causó el trabajar en las actividades planteadas como se aprecia en la siguiente parte de su entrevista

E5: “Lo encontré como **mágico** jeje [sonríe] porque te da tantas figuras que aparte igual uno empieza a mover y a mover que al final te da figuras tan **bonitas** …”

En la entrevista del estudiante E8, este se expresa de manera que se puede apreciar que tiene una preconcepción de la matemática como algo difícil de entender con la metáfora siguiente:

E8: “…yo pensaba que era como un **idioma distinto**, que no iba a poder aprenderlo al tiro …”

En resumen, esta categoría sintetiza que los estudiantes expresaron sus apreciaciones de la matemática como algo relacionado con una parte artística y visualmente atractiva de la matemática que los estudiantes no conocían y que sólo habían escuchado que la matemática se encuentra en todo ámbito, pero que no habían asimilado o trabajado en concreto con esta parte artística que se pudo obtener gracias a la interpretación geométrica de los números complejos con el uso del SGD, GeoGebra.
Estas expresiones son un reflejo de las nuevas apreciaciones de los estudiantes, que se movieron desde la frialdad, lo difícil, lo aburrido y sin utilidad a lo mágico y lo artístico de los números complejos en matemática. Este movimiento fue propiciado por un colectivo de estudiantes, profesor y fractales con el uso de GeoGebra.

VI. CONCLUSIÓN Y DISCUSIÓN

En esta sección, se discuten los resultados y se entregan las conclusiones obtenidas en este estudio, sustentadas con investigaciones, que fundamentan y se relacionan en cierta medida, con la presente investigación. En respuesta a la interrogante del estudio de cómo los estudiantes de tercer año medio de un colegio de la comuna de San Antonio perciben la matemática después de la integración de una actividad que incorpora la visualización de los números complejos por medio de GeoGebra, ésta se logra responder a continuación.

La visualización que experimentaron los estudiantes durante las actividades fue en cierta medida algo que los sorprendió, ellos no esperaban que los números complejos se pudieran representar en el Software de Geometría Dinámica de una forma vistosa, para ellos la asignatura generalmente era algo aburrido y sin sentido, porque percibían a los números, como un ente sin interpretación geométrica alguna. Esa nueva percepción que construyeron en conjunto con el software GeoGebra es avalada por Borba y Villareal (2005) donde sostienen que la producción matemática está asociada al trabajo conjunto entre las representaciones gráficas, algebraicas y tabuladas y en ese sentido son de vital importancia los softwares que permitan esa coordinación, pues ellos consideran que las representaciones gráficas en papel son cualitativamente diferentes de las realizadas con un software y es aquí donde se hace evidente el constructo teórico de *humanos con medios* porque claramente la nueva percepción se construyó en conjunto y de manera indivisible entre los estudiantes y en el software. Es así que las categorías y subcategorías encontradas en el estudio y que guiaron los resultados y análisis están en su mayoría ligadas estrechamente con el cambio de percepción experimentado por los estudiantes, en donde se encontró que para los estudiantes en algunos casos la actividad no hubiese sido entretenida, no se podrían haber visto las animaciones, ni se hubiese facilitado el contenido de fractales sin un computador presente, sin olvidar de considerar al computador, al igual que Borba y Villarreal (2005) y Tikhomirov (1981) como un medio para la actividad humana que potencia el quehacer intelectual, y reorganiza la actividad humana.

Al mismo tiempo, el proceso de visualización realizado por los estudiantes, alcanza una nueva dimensión si se considera el entorno de aprendizaje computacional como un colectivo de pensamiento particular, donde los estudiantes, profesor/investigador, medios y contenidos matemáticos residen juntos, pues es en este colectivo donde los medios adquieren otro estado, es decir, el papel de los medios en el proceso de visualización va más allá del simple acto de mostrar una imagen.

Desde el aspecto de la percepción, ésta fue abordada por los estudiantes desde un punto de vista artístico donde las emociones y metáforas utilizadas estuvieron dirigidas principalmente por la apreciación visual de las representaciones geométricas de los números complejos. Esa apreciación visual se encuentra inserta en las aprehensiones descritas por Duval (1995) y mencionadas en la sección 3.3, más concretamente dentro de la aprehensión perceptiva que como se menciona es una base para que las otras se desenvuelvan y desarrollen, en la medida que la perceptiva se atenúa, las otras aprehensiones (secuencial, discursiva y operativa) se potencian y crecen, hace un nexo entre ellas, es por ello que la aprehensión perceptiva es considerada básica y de gran importancia desarrollar para el aprendizaje de la geometría.

En lo que respecta a las potencias y a los fractales, estos últimos eran desconocidos por los estudiantes ya que no conocían el concepto matemático, pero sí habían visto imágenes más relacionadas con *fractal art*, término también desconocido por los estudiantes, y eso hace que no esperaran una representación artística de los números complejos totalmente fuera de lo común para ellos, pues sólo conocían y relacionaban las matemáticas con el tipo de arte realizado con teselaciones y figuras geométricas básicas. El mostrar este tipo de geometría en estos niveles, sabiendo que es un tema complicado de abordar matemáticamente y, considerado que Even (2011) hace hincapié en que un conocimiento más avanzado de la matemática, proporciona una visión más amplia y un mejor entendimiento general de la misma, pero este debe ser simplificado para el nivel. La simplificación en este estudio se dio relacionando el contenido con un tipo de arte y esta simplificación es fundamentada por Karsai, Rácz, Schwenk y Kalus, (2003) quienes argumentan que los problemas artísticos son muy importantes en el aula de matemáticas en todos los niveles, además los estudiantes pueden estar motivados para aprender una teoría más profunda, para obtener práctica en la experimentación matemática al permitirles crear obras de arte. La necesidad de esta motivación puede ser subrayada por el hecho de que un gran número de estudiantes tienen algunas inhibiciones hacia las matemáticas.

Por otra parte Semmer, Silva, Neves y Pilatti, (2015) mencionan y hacen hincapié en que las obras de arte (de Escher y Pollock, entre otras) se distinguen en las composiciones y en la exploración de Geometría Fractal, sin embargo el conjunto de ellas puede propiciar una nueva mirada sobre la cultura matemática existente. Consideran además que la articulación entre arte y matemática puede propiciar, no sólo saberes matemáticos en un entorno artístico sino un entendimiento de cultura, de aplicaciones de un nuevo lenguaje geométrico, que no se presenta totalmente nuevo, sino que inspiran utilizarla de forma innovadora. Esa articulación entre matemática y arte debe ser tanto por el atractivo estético como por la composición geométrica (Semmer et al., 2015).

Para finalizar y considerando lo expuesto en los párrafos anteriores es que la visualización de los números complejos en una forma artística, haciendo uso de la belleza matemática y del computador como un instrumento inseparable en el sentido del constructo teórico *Humanos con medios* es que éste fue muy importante y determinante sobre la percepción que los estudiantes mantenían sobre la asignatura, con una nueva, renovada, más fresca y general visión de la matemática.

A partir de este estudio se abre la posibilidad de desarrollar un trabajo futuro, en relación a actividades con diferentes contenidos matemáticos, que permitan acercar las matemáticas a los estudiantes, por ejemplo, en la geometría que se relaciona con los polígonos regulares. Se propone como trabajo futuro, aprovechar los fractales determinísticos, clásicos y variando con polígonos, como material más abordable y cercano a los patrones, secuencias y regularidades presentes en los programas de estudios. La potencialidad en la comprensión de los números complejos y considerando el potencial de GeoGebra en el sentido que, según Villa-Ochoa y Ruiz Vahos (2010), adquiere para considerar a los *Humanos con GeoGebra* y teniendo como parte importante las emociones captadas en Digital Mathematical Performances.

REFERENCIAS

Agencia de Calidad de la Educación. (2017). *Resultados Educativos Educación Media, Docentes y Directivos 2016* (p. 68). Recuperado a partir de http://archivos-web.agenciaeducacion.cl/resultados-simce/fileadmin/Repositorio/2016/Docentes_y_Directivos/media/IRE_MEDIA_2016_RBD-XXXX.pdf

Baeza Peña, A. (2008). *Aritmética y álgebra*. Santiago (Chile): Santillana.

Benoit Mandelbrot: Fractales y el arte de la fracturación | TED.com. (2010, febrero). Recuperado 24 de noviembre de 2017, a partir de https://www.ted.com/talks/benoit_mandelbrot_fractals_the_art_of_roughness?language=es

Borba, M. C., & Villareal, M. E. (2005). *Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking* (Vol. 39). New York: Springer-Verlag. https://doi.org/10.1007/b105001

Canal Martínez, Iván, F. V., Mario Alfredo. (2012). *Enseñanza de los números complejos en el Bachillerato* (Informe Académico) (p. 43). España: Universidad de Cantabria.

Castellanos, I. (2010, noviembre 24). *Visualización y razonamiento en las construcciones geométricas utilizando el software Geogebra con alumnos de II de magisterio de la E.N.M.P.N.* (Maestría). Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán, Tegucigalpa, Honduras.

Chiari, A. S. de S. (2015). *O papel das tecnologias digitais em disciplinas de álgebra linear a distância: Possibilidades, limites e desafios* (Doctoral). Universidade Estadual Paulista (UNESP), Rio Claro. Recuperado a partir de http://hdl.handle.net/11449/136653

Duval, R. (1995). Geometrical Pictures: Kinds of Representation and Specific Processings. En R. Sutherland & J. Mason (Eds.), *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education* (Vol. 138, pp. 142-157). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-57771-0_10

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. En C. Mammana & V. Villani (Eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century* (Vol. 5, pp. 37-51). Dordrecht: Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-011-5226-6_3

Duval, R. (2014). Commentary: Linking epistemology and semio-cognitive modeling in visualization. *ZDM*, *46*(1), 159-170. https://doi.org/10.1007/s11858-013-0565-8

Even, R. (2011). The relevance of advanced mathematics studies to expertise in secondary school mathematics teaching: practitioners' views. *ZDM*, *43*(6-7), 941-950. https://doi.org/10.1007/s11858-011-0346-1

Farias, D., & Pérez, J. (2010). Motivación en la Enseñanza de las Matemáticas y la Administración. *Formación Universitaria*, *3*(6). https://doi.org/10.4067/S0718-50062010000600005

Fenn, R. (2001). *Geometry*. London: Springer London. Recuperado a partir de http://link.springer.com/10.1007/978-1-4471-0325-7

Fernández, C., Molina González, M., & Planas, N. (Eds.). (2015). *Investigación en Educación Matemática XIX: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM* (Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática). Alicante: Universidad de Alicante.

Fractal Art | ArtHistory.net. (s. f.). Recuperado 23 de noviembre de 2017, a partir de http://www.arthistory.net/fractal-art/

Gadanidis, G., & Borba, M. (2008). Our Lives as Performance Mathematicians, *28*(1), 44-51.

Galleguillos, J. (2016). *Modelagem matemática na modalidade online: análise segundo a teoria da atividade* (Doctoral). Universidade Estadual Paulista (UNESP), Rio Claro. Recuperado a partir de http://hdl.handle.net/11449/145532

Goldenberg, M. (2011). *A arte de pesquisar: como fazer pesquisa qualitativa em ciências sociais*. Rio de Janeiro; São Paulo: Record.

Karsai, J., Veronika Rácz, É., Schwenk, A., & Kalus, N. (2003). Visualization and art in the mathematics classroom. *Zentralblatt Für Didaktik Der Mathematik*, *35*(1), 24-29. https://doi.org/10.1007/BF02652763

Kline, M., Martínez Pérez, M., Hernández, J., & Garciadiego, A. (1992). *El Pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días*. Madrid: Alianza.

Kornilova, T. V., Voiskounsky, A. E., Babaeva, Y. D., Berezanskaya, N. B., & Vasilyev, I. A. (2013). Contribution of Oleg K. Tikhomirov to the methodology, theory and experimental practice of psychology. *Psychology in Russia: State of Art*, *6*(4), 4-23. https://doi.org/10.11621/pir.2013.0401

Lehmann, L. (2004). Julia-Teppich.png - Wikimedia Commons. Recuperado 22 de mayo de 2017, a partir de https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Julia-Teppich.png#file

Levy, P. (1993). *As tecnologias da Inteligência: O Futuro do Pensamento na Era da Informática*. Rio de Janeiro: Editora 34.

Maldonado, L., Marambio, V., & Galasso, B. (2017). *Texto del estudiante Matemática 1° Medio* (Primera). Santiago, Chile: Santillana.

Mandelbrot, B. (2009). *La geometría fractal de la naturaleza.* España: Tusquets Editores.

MINEDUC. (2009). *Objetivos fundamentales y contenidos mínimos obligatorios de la educación básica y media*. Santiago: Ministerio de Educación, República de Chile. Recuperado a partir de http://curricula-depot.gei.de/bitstream/handle/11163/1939/789315076_2009_A.pdf?sequence=2

Muñoz Díaz, G. A., Jiménez Martínez, L., & Rupin Gutiérrez, P. (2013). *Matemática 2° medio. Texto del estudiante*.

Nahin, P. J., & Pinasco, J. P. (2008). *Esto no es real: la historia de i*. México, D.F.: Libraria : CONACULTA, Direccion General de Publicaciones.

Nakayama, T., & Yakubo, K. (2003). *Fractal Concepts in Condensed Matter Physics* (Vol. 140). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-662-05193-1

Needham, T. (Ed.). (1998). *Visual complex analysis*. Oxford: Clarendon Press.

Peitgen, H.-O., & Richter, P. H. (1986). *The Beauty of Fractals*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-61717-1

Puerto Monterroza, J. F. (2014). El uso de los fractales para potenciar el desarrollo del pensamiento algebraico-variacional a través del software Cabrí "Del pensamiento numérico al pensamiento Algebraico-Variacional". *Revista científica*, *2*, 665. https://doi.org/10.14483/23448350.7747

Reid, M., Botta Gioda, R., & Prieto, F. (2017, abril). Mandala: Otra forma de abordar conceptos geométricos. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, (49), 217-230.

Rodríguez Miranda, R. (1995, agosto). *La teoría de fractales: aplicación experimental e implicaciones en la metodología de la ciencia*. Universidad Autónoma de Nuevo León.

Scucuglia, R. (2012). *On the Nature of Students' Digital Mathematical Performances* (Doctoral). The University of Western, Ontario.

Semmer, S., Silva, S. de C. R. da, Neves, M. C. D., & Pilatti, L. A. (2015). Fractais, contextualização de matemática e arte. *Revista ESPACIOS | Vol. 36 (Nº 08) Año 2015*. Recuperado a partir de http://www.revistaespacios.com/a15v36n08/15360810.html

Tikhomirov, O. K. (1981). The psychological consequences of computerization. En *The Concept of Activity in Soviet Psychology* (pp. 256 – 278). New York: J. V. Wertsch, ed., M.E. Sharpe Inc. Recuperado a partir de https://es.scribd.com/document/350651051/Tikhomirov

Villa-Ochoa, J., & Ruiz Vahos, H. M. (2010). *Pensamiento variacional: seres-humanos-con-GeoGebra en la visualización de nociones variacionales Variational thinking: humans-with-GeoGebra in the visualization of variational notions* (Vol. 12). Sao Paulo.

Vitabar, F. (2010). Imágenes fractales con GeoGebra. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, (24), 161-175.

Yin, R. K. (2009). *Case study research: design and methods* (4th ed.). Los Angeles, Calif: Sage Publications.

ANEXO A: Dimensión de Hausdorff - Besicovitch

A grandes rasgos la *dimensión de Hausdorff – Besicovitch* trata de lo siguiente:
Se trabaja sobre un conjunto métrico Ω que tiene una distancia entre puntos definida convenientemente, una bola cerrada de centro ω y radio ρ, que es el conjunto de todos los puntos cuya distancia a ω es menor a ρ, el subconjunto acotado S de Ω para el cual hay muchos métodos para recubrir con bolas de radio ρ, además cuando Ω es un espacio euclídeo E – dimensional se tiene definido el concepto general de volumen (vol)

$$vol_{\{bola\ d-dimensional\ de\ radio\ \rho\}} = \gamma(d)\ \rho^d$$

Donde

$$\gamma(d) = \frac{[\Gamma(1/2)]^d}{\big(\Gamma(1 + d/2)\big)}$$

Es el contenido (puntos interiores de la esfera) de una bola de radio unidad.

A Cantor se le ocurrió que el concepto de volumen o magnitud es indispensable para las investigaciones de dimensiones de conjuntos continuos (Mandelbrot, 2009). Para simplificar la visualización mental, se evalúa de forma clásica el área de una figura plana, se empieza aproximando S por un conjunto de cuadrados muy pequeños y sumando los lados de los cuadrados a la potencia $D = 2$, al ampliar la dimensión y considerar discos en vez de cuadrados y la figura plana como parte de un espacio tridimensional, forzosamente se tiene que el espacio está recubierto por bolas que intersecan por sus ecuadores al plano. Cuando S es realmente una superficie su contenido se obtiene mediante la suma de expresiones $\pi\rho^2$, que son precisamente las bolas de recubrimiento. Y en general al tener una figura d – dimensional estándar se exige sumar expresiones del tipo

$$h(\rho) = \gamma(d)\ \rho^d$$

Donde $h(\rho)$ es una función de prueba donde d puede tomar valores fraccionarios y $\gamma(d)$ se define de modo que siga teniendo sentido. Por consiguiente, si S es bidimensional, la $h-$

$medida$ de Hausdorff para $h(\rho) = \pi\rho^2$, pero para esta medida no es necesario conocer la dimensión D de la superficie, en ese caso se deben calcular las medidas de todas las funciones de prueba $h(\rho) = \gamma(d)\ \rho^d$ cuando d es un entero, si la longitud es infinita y el volumen es nulo, entonces la figura puede ser solo bidimensional.

Besicovitch generalizó lo anterior para los casos en que d no toma valores enteros y S no es una figura estándar. Pudo demostrar que:

Para todo conjunto S existe un valor real D tal que la $d - medida$ es infinita para $d < D$ y nula para $d > D$.

Esta D se denomina *dimensión de Hausdorff – Besicovitch* de S (Mandelbrot, 2009).

ANEXO B: Transcripción de las Entrevistas

Se utilizó en la transcripción de las entrevistas la sigla para los estudiantes "E" seguida del número de la entrevista y para el entrevistador se utilizó la abreviatura Ent.

Entrevista Estudiante Nº1 (*E1*)

Entrevistador (Ent): ¿Ud. podría haber previsto una relación entre los números complejos y la representación artística de ellos?

E1: No, nunca me había imaginado la imagen que iba a ver en esta actividad, yo ni siquiera sabía para que servían los números complejos y verlo en una expresión artística de veras que fue impresionante.

Ent: ¿Esperaba un resultado así de artístico de las potencias de los complejos?, eso respecto a la actividad anterior.

E1: No, porque no sé, yo nunca había relacionado tanto la matemática con el arte, entonces no me esperaba tanto que mover un punto iban a generar distintas imágenes.

Ent: ¿Cómo percibía la asignatura antes de ver el resultado con GeoGebra?

E1: Como pasar materia, nada más, pero ahora viéndolo, muchas imágenes que están en internet que son con números complejos y ahora veo la matemática súper útil.

Ent: ¿Cómo se vio afectada su percepción de los números complejos después de haber visto el resultado de las potencias de números complejos y después de los fractales en comparación a la que tenía en años anteriores?

E1: Que los veo, como había dicho anteriormente que son súper útiles para hacer imágenes tan originales y que sean más encima con la matemática.

Ent: ¿Pero la percepción, a como estaba antes?

E1: La percepción, o sea que antes yo las veía que eran como de … como se puede decir, que sean espontaneas las imágenes y que cero relaciones con la matemática ni nada de eso, como la imaginación de uno y después, ahora verlo que es con matemática, con números complejos y no es un número complejo, son millones; eh o sea mi percepción cambió harto, porque ahora sé que esas imágenes son con matemáticas.

Ent: ¿Cambió para bien o para mal?

E1: Cambió para bien, porque ahora yo … antes yo no sabía cómo hacer esas imágenes, yo pensé que eran puros manchones y ahora yo sé que con números complejos puedo hacer esas imágenes.

Ent: ¿Qué le pareció la actividad realizada de las potencias de números complejos y la de elaboración de los fractales y que sugiere para mejorar la actividad?

E1: Más tiempo, mucho más tiempo y eh que, bueno un cambio de horario ya que igual a nosotros nos toca en la tarde y es muy agotador, pero encuentro que si le da un poco más tiempo podemos entenderlo hasta mejor.

Ent: ¿Más práctica con el programa?

E1: Si, más práctica con el programa y no sé si, eh … como todo un mes o todo un semestre, pero hacerlo más … más, como más práctica ya que así vemos lo que estamos aprendiendo.

Ent: Muchas Gracias.

Entrevista Estudiante Nº 2 (*E2*)

Entrevistador: Ud. ¿Esperaba un resultado así de artístico con las potencias de los complejos?

E2: Bueno, en realidad no, al principio cuando comencé haciendo el trabajo, eh lo único que vi fueron solamente los puntos y el nombre de cada ¿vector?

Ent: ¿De cada punto, de cada número complejo?

E2: Eso, nombre de cada número complejo, y el resultado nunca me esperé que fuese una especie de figura artística, de … bueno muy compleja y linda como lo veo, eso.

Ent: ¿Y la asignatura cómo la percibía antes de ver estos resultados?

E2: ¿Cómo percibía la asignatura?, o sea ¿antes de ver que el resultado era como artístico?

Ent: ¿Cómo veía Ud. la asignatura de Matemática antes de ver este tipo de cosas que se pueden hacer con matemáticas, estas cosas artísticas?

E2: De verdad es que es increíble que se pueda hacer este tipo de arte con matemática y aunque se ha visto, siempre se ve este tipo de arte en la matemática y es muy interesante.

Ent: Siempre le dicen que se puede relacionar con el arte con estas otras cosas

E2: Sí, me dicen siempre.

Ent: ¿pero no lo había visto?

E2: No, nunca me había puesto a tratar el tema en sí, pero siempre escucho que la matemática está en todas partes incluyendo el arte.

Ent: ¿Ud. podría haber previsto una relación entre los números complejos y esta representación artística?

E2: La verdad es que si lo pensaba en un punto más alto como en el …, como en la, la tabla así, como en lo que estaba viendo, si lo pensaba más avanzadamente creo que sí, lo podría relacionar.

Ent: Y ¿cómo se vio afectada su percepción de los números complejos después de haber visto estos resultados con las potencias o con los fractales en comparación a antes de trabajar con ellos?

E2: Eh bueno la percepción es obviamente muy distinta, cambié mucho después de ver el trabajo porque bueno los números para mí siempre fueron números y ahora ver y relacionarlo en una combinación tan grande y avanzada eh que transformarlos de esa forma es interesante, esa es mi percepción, que fue muy interesante.

Ent: Y ¿qué le pareció la actividad, tiene alguna sugerencia como para mejorarla?

E2: Una sugerencia para mejorarla, bueno en realidad, no, no tengo ninguna sugerencia, la verdad es que lo vi muy eh ... como es complejo, lo vi bastante avanzado para mí, demasiado, así creo que si lo pudiese cambiar si hablo desde la ignorancia al cambiarlo diría que habría una, podría poner otro tipo ..., crear otro tipo de, crear otro tipo de imagen, de arte.

Ent: Ah ok

E2: eso sería.

Ent: ¿Cambiar el tipo de fractal por ejemplo?

E2: Si, y crear imágenes

Ent: Distintas

E2: Distintas

Ent: Ok, Ud. dijo que eran como muy complejo, muy avanzado

E2: Si

Ent: Si, el tema en realidad es complejo, es avanzado, en realidad normalmente no se enseña en el colegio, pero este trabajo consiste precisamente en eso, en tomar algo muy avanzado que está en el programa, lo que son las potencias y raíces de números complejos, pero relacionándolo con estos fractales precisamente para que sean un poco más, más ameno, más tangibles, más …

E2: O sea, que se refiere que, al relacionarlo con otra materia, hacerlo además de más interesante, que para mí se vea más simple.

Ent: Si, es algo abstracto que a través de esto se ve un poco más concreto

E2: Sí, porque después de estar con el trabajo, o sea al principio me costó mucho y ahora que lo entiendo, lo comprendo, eh, lo hice, lo hice, lo terminé y puedo también ayudar a los demás a hacerlo, es súper, o sea ahora lo comprendo muy fácilmente.

Ent: Muchas Gracias.

Entrevista Estudiante Nº 3 (*E3*)

Entrevistador: Ud. podría con respecto a lo que hicimos de las potencias de los números complejos

E3: ¿Lo que hicimos ayer en el computador?

Ent: La semana anterior

E3: La semana anterior, ya.

Ent: Ud. pudo haber previsto una relación entre los numero complejos y la representación artística de ellos?

E3: No, no me lo imaginaba.

Ent: ¿Y su impresión luego que los vio?

E3: Pucha fue como … como le digo, fue algo inesperado porque uno no se imagina que los numero se van a relacionar con algo de colores cosas como … es como arte, es como la matemática se vuelve arte [sonríe] en algún sentido.

Ent: ¿Esperaba un resultado así de artístico con las potencias de los complejos?

E3: No, porque uno ve la matemática como algo serio, no como algo colorido, algo distinto, algo fuera de los números, porque es algo como fuera de los números.

Ent: Y ¿cómo percibía antes la asignatura, antes de ver esos resultados con el GeoGebra?

E3: Aburrido, porque como que igual es entretenido llegar a eso, llegar a que se provoquen esos colores y todo ese tipo de cosas porque es como ver un universo, es un universo porque es algo infinito.

Ent: ¿Con las figuras?

E3: Si

Ent: ¿Con las estrellitas que salían?

E3: Lo hace entretenido porque es como un juego de ilusión óptica [sonríe] lo quedas mirando y quedas como mareado [sonríe]

Ent: ¿Cómo se vio afectada su percepción de los números complejos después de haber visto ese resultado?

E3: Distinto

Ent: Con las potencias y con el fractal que hicimos ayer

E3: Es distinto, se ve como … uno ya cambia totalmente su perspectiva a lo que eran los números complejos antes porque uno, se da cuenta es que eso son los números complejos *esos colores todas esas cosas son número son como … ¿cómo se dice? son los números complejos en sí, es lo que provoca eso y uno no se lo imaginaba, yo por lo menos no me lo imaginaba.*

Ent: Respecto a la actividad, ¿qué le pareció?, en cuanto a esa elaboración de las potencias de los números complejos, de los fractales que hicimos ayer y si tiene alguna sugerencia como para mejorarla

E3: ¿Para mejorar eso?

Ent: La actividad en si

E3: La actividad en si es buena, porque es algo distinto, es algo dinámico no es como una clase seria porque te enfocas en algo serio para llegar a algo que te puede llegar a entretener, entonces es algo dinámico, algo distinto una forma distinta de trabajar la matemática.

Ent: Muchas gracias.

<u>Entrevista Estudiante Nº4 (*E4*)</u>

Entrevistador: ¿Ud. podría haber previsto una relación entre los números complejos y la representación artística de ellos?

E4: No

Ent: ¿No lo pudo haber previsto?

E4: No, no pensé que iba a pasar todo eso así

Ent: ¿Qué cosas?

E4: Que iban a aparecer esas como animaciones, cuestiones

Ent: ¿Y con lo de las potencias, no esperaba eso de los fractales?

E4: No

Ent: ¿No?

E4: Fue bacán [entretenido] *si jejeje [sonríe]*

Ent: ¿Fue bueno?

E4: Si

Ent: ¿Cómo eso de que fue bueno?, ¿qué esperaba?

E4: Yo esperaba que se quedara así no más, que no se moviera

Ent: ¿Que no se moviera?

E4: Si

Ent: Alguna forma en particular, algo, no esperaba esas cosas que salieron en el dibujo

E4: No, pensé que se iban a tirar líneas rectas, como que se iban a juntar los puntos

Ent: ¿Ud. Esperaba un resultado así de artístico con las potencias de los complejos o con los fractales?

E4: Cero posibilidades

Ent: ¿Cómo percibía Ud. la asignatura antes de trabajar con GeoGebra?

E4: Complicada

Ent: ¿Cómo la percibía? Complicada

E4: Si, como que no entendía, no sabía hacerlo en el cuaderno ni nada así, porque no le tomaba mucha atención

Ent: ¿Y después de eso?

E4: ¿Cuándo fuimos a la sala de computación?

Ent: Si

E4: Ahí todo cambió

Ent: ¿Por qué?

E4: No sé, como que fue más entretenida la clase

Ent: Fue más entretenida, ¿le permitió ver algunas otras cosas que en el cuaderno no salen?

E4: Siii poh, o sea la ayuda que sale arriba, los deslizadores y toda esa cuestión, facilito lo tenía en mano [sonríe]

Ent: ¿Cómo se vio afectada su percepción de los números complejos después de haber visto estos resultados con las potencias o los fractales?

E4: ¿Cómo?

Ent: Que ¿cómo percibía Ud. la asignatura en el fondo o los números complejos antes de llevarlos al computador?

E4: Siempre fue difícil

Ent: Cuando vimos las sumas, las multiplicaciones, la representación gráfica de los complejos

E4: Siempre fue complicado

Ent: Y después de los fractales ver que todo eso que vimos en un principio, que era complicado a como ocurrió después

E4: ¿Cómo lo hicimos en el computador?

Ent: ¿Sí?

E4: Fue todo más fácil

Ent: ¿Fue más fácil?

E4: Si

Ent: ¿Tal vez se le aterrizó algo?

E4: Siii poh

Ent: ¿Sí?

E4: Como que ahora todo está claro

Ent: ¿Y en comparación a años anteriores?

E4: ¿Pero a qué?

Ent: En comparación de la asignatura

E4: ¿De la asignatura?

Ent: De años anteriores después de ver la parte artística que se puede representar con los complejos

E4: Es que los años anteriores nunca vimos esto, o sea los años anteriores por ejemplo en primero medio nos pasaron los … ¿cómo se llama esto?

Ent: ¿El plano cartesiano?

E4: El plano cartesiano, pero eran como puras cosas fáciles, uno dos, tres cuatro, tres menos cuatro [hace referencia a los pares ordenados (1,2); (3,4); (3,-4)] cuestiones así.

Ent: ¿Y eso le aburre?

E4: ¿Eso?

Ent: Si, el que sea muy fácil

E4: Sipo, porque la terminábamos al tiro y en el segundo año medio vimos como una pura materia en todo el año, logaritmo.

Ent: ¿Logaritmo?

E4: Y eso eran todas las clases eran lo mismo, eran una guía logaritmo, después con la guía hacíamos la prueba y siempre lo mismo, siempre lo mismo y este año fue como cambiando hemos tenido varias cosas en un puro semestre.

Ent: ¿Y la actividad que se realizó, que le pareció, que le mejoraría?

E4: ¿Que le mejoraría? No, nada.

Ent: ¿Estuvo bien ese protocolo de la construcción?

E4: Si, estaba terrible bien explicado, era como para sumar dos más dos, terrible fácil jeje [sonríe]

Ent: Muchas Gracias.

Entrevista Estudiante Nº5 (*E5*)

Entrevistador: ¿Ud. podría haber previsto una relación entre los números complejos y la interpretación artística de ellos?

E5: Nunca me lo había imaginado, pero si en el ... ¿cómo se llama esto? La ... como lo hicimos en computación si nos dimos cuenta que te da esta posibilidad de hacer cosas

Ent: ¿No se hubiese imaginado que podía tener una representación así?

E5: No

Ent: ¿Qué podía haber ese tipo de imágenes por ejemplo?

E5: No, jamás jeje [sonríe]

Ent: ¿Esperaba un resultado así de artístico?, con … por ejemplo, ¿Ud. hizo el de las potencias de los complejos?

E5: Si

Ent: Si, ¿Vio la forma que quedaba cuando uno movía el punto las expresiones?

E5: Si

Ent: Con eso, son potencias al igual que las otras potencias que Ud. vio, pero ahora son potencias de números complejos, ¿se esperaba algo así de artístico?

E5: No, jamás jeje [sonríe]

Ent: Y la asignatura, ¿cómo la percibía antes de ver este resultado con GeoGebra?

E5: Antes no me gustaba [sonríe]

Ent: Ya

E5: Pero ahora con el programa me gustó más y lo encuentro más entretenido, no me quedo dormida jeje [sonríe]

Ent: No se queda dormida

E5: Que eso es lo bueno jeje [sonríe] *pero es más entretenida la matemática así*

Ent: Ok, entonces podríamos decir que su percepción antes y a posterior …

E5: Es mejor

Ent: Mejoró, y ¿después de los fractales, del fractal en sí, de esa animación que … todos esos puntos que aparecían, todo eso … que parecía un sinsentido y luego que aparezca el fractal?

E5: Lo encontré como mágico jeje [sonríe] *porque te da tantas figuras que aparte igual uno empieza a mover y a mover que al final te da figuras tan bonitas …*

Ent: ¿Que son inesperadas?

E5: Si

Ent: ¿Y en cuanto a la actividad, le cambiaria algo? Y ¿cómo se mejoraría?

E5: No, la encuentro entretenida que no tiene como que algo le falte

Ent: Al desarrollo en si

E5: En si está bueno

Ent: ¿Por qué?

E5: Porque Igual le agregaría como para que la matemática se pudiera enseñar así porque yo creo que uno aprendería más como ahora los niños más están en la tecnología [sonríe]

Ent: Claro

E5: Uno aprendería mas así que realmente con la matemática en el cuaderno con número

Ent: Más tradicional en la pizarra

E5: Si [asiente con la cabeza]

Ent: Muchas Gracias.

Entrevista Estudiante Nº6 (*E6*)

Entrevistador: ¿Ud. pudo haber previsto una relación entre los números complejos y la representación artística de ellos?

E6: Algo entendí del trabajo

Ent: ¿Pero pudo haberse imaginado que los números complejos que hemos estado viendo podían tener una representación así de artística?

E6: No

Ent: ¿No?

E6: Nooo

Ent: ¿Nunca, ni por si acaso?

E6: Nunca lo hubiera pensado

Ent: Ok, ¿Ud. esperaba un resultado así de artístico con los fractales por ejemplo?

E6: No pensé que íbamos a hacer eso

Ent: ¿No?

E6: No

Ent: ¿Cómo percibía la asignatura antes de trabajar con los números complejos?

E6: Antes de los números complejos …

Ent: ¿Cómo veía la asignatura en años anteriores?

E6: Igual esta parte de la materia no es aburrida tampoco, cuesta entenderla

Ent: ¿Si?

E6: Bastante me cuesta, pero no es aburrida, yo sé que si le pongo empeño voy a entenderla y me va a gustar

Ent: Pero en años anteriores, ¿Cómo era su percepción de la asignatura?

E6: eeeeeh

Ent: ¿Cómo la veía?

E6: Nunca le tomé mucho ... yo siempre he sido malo para la Matemática

Ent: ¿Siempre ha sido malo para la *Matemática*?

E6: S*i*

Ent: Bueno uno idealmente espera que con estas cosas mejore esta percepción

E6: ¿Ver la Matemática de otra manera?

Ent: De otra manera, no tan fría como lo pudo haber visto antes. Ahora, su percepción de los números complejos antes de ver estos resultado con fractales a como lo veíamos en el primer semestre, antes de trabajar con el computador, ¿cómo era?

E6: [carraspea la garganta]

Ent: ¿O era igual que en años anteriores?

E6: Nooo, me gustó haber hecho algo así, diferente

Ent: Y con respecto a la actividad, a la actividad en sí, al formato como se hizo, ¿qué le mejoraría?

E6: Que le preste más atención a la materia, que me importe más, el problema es que la Matemática al ser ... como que me aburre, entonces al serla [hacerla] *así, diferente, llama más la atención.*

Ent: Ok, esta representación artística que vimos con los números complejos se podría ..., ¿podría servir como un gancho para que Ud. fije más la atención en la asignatura?

E6: Sí

Ent: ¿Sí?

E6: Sí, porque llama la atención hacer cosas diferentes, la Matemática se veía, así como puros números, anotar, pero igual es más divertido esto.

Ent: Muchas gracias.

Entrevista Estudiante Nº7 (*E7*)

Entrevistador: ¿Ud. podría haber previsto una relación entre los números complejos y la representación artística de ellos?

E7: Realmente no, me sorprendió mucho el resultado que todo…, o sea las figuras que forme haciendo el trabajo, me sorprendió demasiado.

Ent: ¿No esperaba un resultado así de artístico?

E7: No, realmente no

Ent: ¿Y entre las potencias de números complejos y las formas que resultaron, se acuerda de las potencias?, ese segmento que uno tomaba un punto y salía un segmento y salía como un anillo.

E7: Si

Ent: ¿Sí?

E7: Si más o menos

Ent: En esa parte con las potencias que eran igual que las potencias que había conocido, pero ahora de un punto de vista más artístico, más gráfico, ¿se esperaba eso?

E7: No esperaba que tuviera tal grado artístico, si se puede decir algo así, no esperaba eso

Ent: ¿Y la asignatura cómo la percibía antes de utilizar el computador con GeoGebra

E7: Realmente la asignatura me aburría [sonríe] *sinceramente.*

Ent: ¿Era muy aburrida?

E7: Me sigue pareciendo aburrida porque no entiendo, no entiendo mucho Matemática por eso me parece aburrida

Ent: ¿Y el utilizar el computador, sale de ese aburrimiento?

E7: mmm si un poco [titubea]

Ent: ¿O sigue siendo aburrida?

E7: O sea, yo encuentro que sería como aburrido, porque al principio lo encontré aburrido porque no sabía cómo hacerlo, después cuando empecé a entender cómo hacerlo me pareció un poco más entretenido.

Ent: Su percepción de los números complejos, ya ahora es un poco más técnico, que es propiamente tal con la percepción de los números complejos, después de ver ese resultado con las potencias y con los fractales, ¿cómo cambió o si cambió o no su percepción en comparación a antes, a años anteriores por ejemplo?

E7: Si cambió un poco mi percepción, si cambió un poco

Ent: ¿Sí?

E7: Si

Ent: ¿En qué manera?

E7: No sé cómo explicarlo, pero si cambió algo, o sea no voy a … [ríe] no sé cómo explicarlo

Ent: ¿Le da tal vez ahora, alguna una visión distinta?

E7: Si una visión distinta

Ent: ¿Sí?

E7: Si

Ent: ¿Igual de aburrida?

E7: No tanto, pero [ríe] o sea, como dije cuándo no entiendo las cosas me parecen aburridas, pero cuando yo las entiendo ahí me empiezo como a entretener un poco.

Ent: Ok ¿Y esto le pareció entretenido?

E7: Si

Ent: ¿Y le permitió a Ud. fijar un poco más la atención?

E7: Si

Ent: ¿Y con respecto a la actividad de los fractales y las potencias de números complejos en GeoGebra que le haría?

E7: O sea …

Ent: ¿La mejoraría, está bien así?

E7: Yo creo que está bien como está

Ent: ¿Está bien?

E7: Está bien

Ent: ¿Con el protocolo de construcción?

E7: Si

Ent: ¿Habría que mejorar la redacción tal vez en ese protocolo?

E7: Si

Ent: ¿Pero esta bien el sentido?

E7: Si, está bien

Ent: ¿Si, Alguna sugerencia?

E7: No sé, yo creo que podría ser el hecho de que en algunas situaciones donde tenía que poner los números y todo, no podía hacerlo todo con el teclado y tenía que hacerlo con el mouse y todo me daba un poco de flojera hacer eso.

Ent: Ok

E7: Pero es como una ... no sé, como mmm ... como que lo hiciera más con el teclado también, que jugara más el teclado.

Ent: Ok muchas gracias.

Entrevista Estudiante Nº8 (*E8*)

Entrevistador: ¿Ud. pudo haber previsto una relación entre los números complejos y la representación artística de ellos?

E8: Bueno cuando lo empecé a asimilar, eso de los colores cuando Ud. me dijo lo de los numeritos y que les cambiaba los colores que tal número era tal y ahí pensé que iba a dar como un resultado, ¿me entiende?

Ent: Si

E8: Pero así al principio no, no…

Ent: ¿Totalmente inesperado?

E8: Totalmente inesperado, exacto

Ent: Ok, ¿Por ende no se esperaba un resultado así de artístico con los números complejos?

E8: Si, así de artístico no, nunca me lo esperé

Ent: ¿Y la asignatura como la percibía antes de ver este resultado con el GeoGebra y los números complejos?

E8: Pensé que era más difícil pero ahora lo encuentro súper fácil los números complejos

Ent: ¿El concepto se simplificó?

E8: El concepto se simplifico, exacto

Ent: Ok, ¿Cómo se vio afectada su percepción de los números complejos después de haber visto estos resultados?

E8: En un principio yo pensaba que era como un idioma distinto, que no iba a poder aprenderlo al tiro, en cambio con el programa lo … se simplificó todo como dijo Ud. y lo pude aprender más rápido. Ahora, igual no lo sé muy bien tampoco, pero…

Ent: Claro, ¿pero cambió su percepción?

E8: Cambió mi percepción [asiente con la cabeza y sonríe]

Ent: Por ejemplo a ¿cómo era la asignatura en años anteriores, a cómo puede ser ahora en adelante

E8: Exacto ahora es más … se volvió como más fácil, más fácil de entender

Ent: Y la actividad, ¿qué le pareció, que le haría a la actividad, como la mejoraría?

E8: Más indivi… que Ud. este más con nosotros

Ent: ¿Que fuese más personalizada?

E8: Más personalizada, porque igual en algunas cosas necesitaba de su ayuda

Ent: ¿Tal vez eso se mejoraría con el dominio del programa?

E8: Exacto, dominando el programa mejor podríamos hacer las cosas más fáciles

Ent: ¿Más autónomo?

E8: Mas autónomo (asiente con la cabeza)

Ent: Muchas gracias.

Entrevista Estudiante Nº9 (*E9*)

Entrevistador: ¿Ud. podría haber previsto una relación entre los números complejos y la representación artística de ellos?

E9: No, o sea no, no me lo imaginaba

Ent: ¿No se imaginaba una representación así?

E9: No, para nada

Ent: Este resultado artístico de los números complejos, ¿cómo afectó eso en su percepción de la asignatura después de haber utilizado el programa GeoGebra?

E9: Mmm, o sea, encontré, así como que es una forma más didáctica de potenciar la Matemática.

Ent: Ya

E9: Porque atrae más poh si así puedes crear una figura y te gusta y el movimiento y quedas más fascinado y te gusta más y por lo tanto lo practicas más y así encuentro que eso igual atrae más practicar más la Matemática, de mi punto de vista

Ent: Ahora, ¿su percepción de los números complejos cómo se vio afectada después de haber hecho estas imágenes con los fractales?

E9: Lo encontraba, así como latoso, ejercicios y guías y ya, pero al verla, una y todas esas cosas como que me llamó más la atención como que veía que no sirven solamente para realizar ejercicios y esas cosas, sino que también para varias situaciones y es como más entretenido hacer las figuras, cuesta, pero es más entretenido.

Ent: Le cambió por ejemplo el ¿cómo Ud. tomaba la… o veía la Matemática antes, de ser una asignatura fría, solo números, solo calculo sin utilidad o sin algo, sin hacer Ud. las cosas?, a posterior, que Ud. hizo los fractales con el GeoGebra y se ven esos resultados

E9: Si, por supuesto, o sea si yo nunca pensé que iba a poder hacer una cosa así porque aparte que no le pego ni a la tecnología, pero sí, me cambió bastante la perspectiva.

Ent: ¿Y la actividad en general que le pareció, que podría cambiar de la actividad, o cómo la podría mejorar?

E9: No, que es un poco difícil hacerla porque me enredé en el tema, pero en general la actividad es bastante buena, a mí me gustó, me entretuve harto, pasé dolores de cabeza, pero me gustó [sonríe], así, eso.

Ent: Muchas gracias.

ANEXO C: Planificación de clases

Planificación de clases exportadas a una planilla de cálculo con el formato requerido por el colegio (Plataforma Webclass)

C.1 - Clase "Potencias y Raíces de Números Complejos"

PLANIFICACIÓN DE CLASE: Potencias y raíces de números complejos			
Profesor	: Germán Holtheuer Vielma	Inicio	:
Asignatura	: Matemática	Término	:
Unidad	: Unidad 1: Números (Programa vigente)	Duración	: 4 Horas
Nivel	: 3° Medio	Validado por	: UTP

Objetivos de la clase

Aprendizajes esperados:
AE6 -Representar un número complejo de forma polar y calcular la potencia, con exponente racional, de un número complejo.

Indicadores:

3.-Representan en el plano complejo las raíces de un número complejo.

Habilidades:

2 -Realiza inferencias

3 -Organiza la información

5 -Utiliza lenguaje disciplinario

1. -Resolver problemas con un campo numérico más amplio.

5. -Demostrar propiedades y proposiciones.

Actitudes

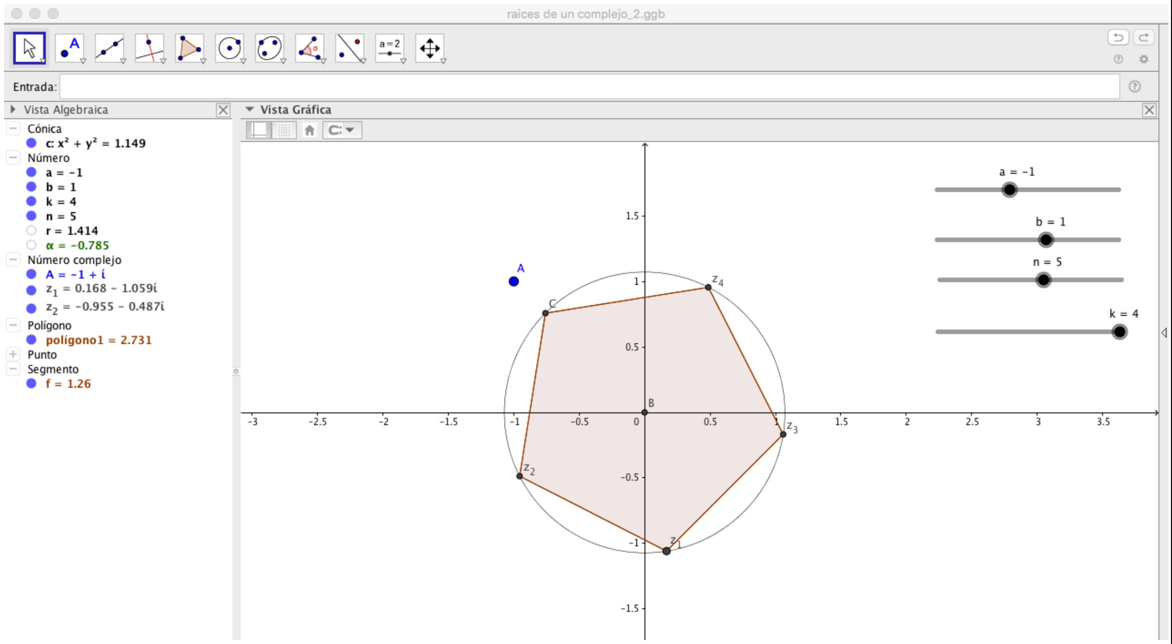
U1. - Trabajo en equipo, en forma responsable y proactiva en la solución de problemas en contextos diversos.

Actividad metodológica

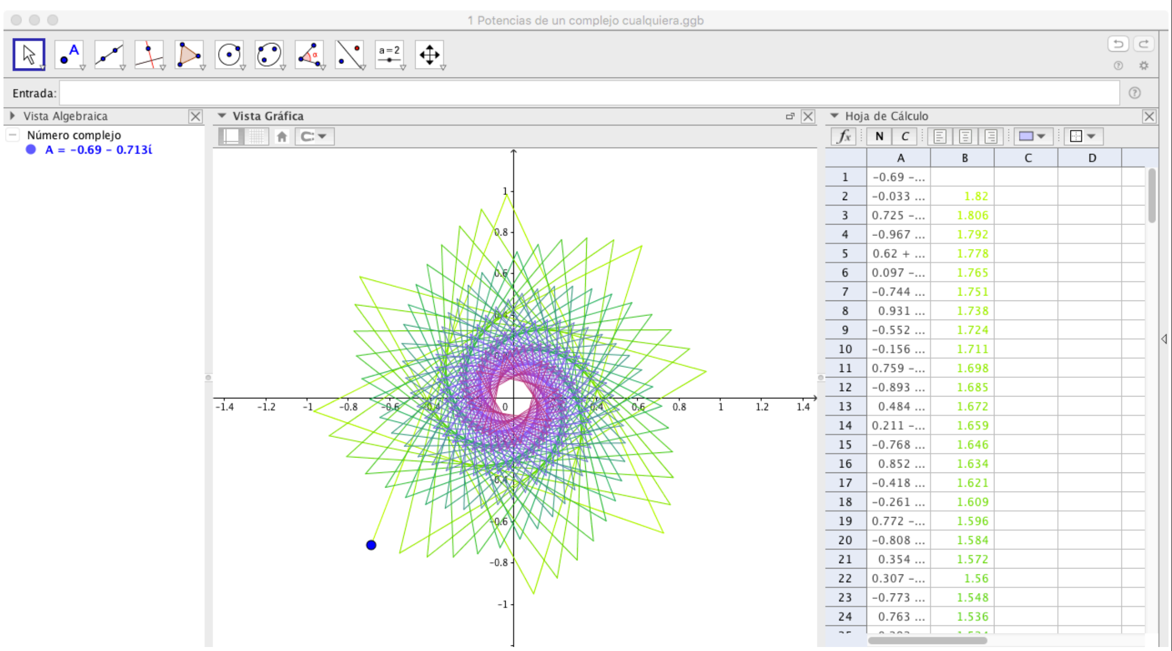
Inicio:
Se entrega el *objetivo de la clase*: Elaborar las potencias y raíces de los números complejos en GeoGebra.
Se recuerda la forma de calcular las potencias de números complejos, se entregan las indicaciones para trabajar con el programa GeoGebra se les muestra cómo crear distintos elementos como un deslizador y enlazar elementos con la hoja de cálculo con un protocolo de construcción.

Desarrollo:
Trabajan en parejas en los computadores junto con el protocolo de construcción "Raíces de Complejos", el cual muestra la relación entre las raíces $n-ésimas$ de un número complejo y los vértices del polígono de $n-lados$ que se forma con ellas.
En la segunda parte de la clase comienzan a trabajar con el protocolo de construcción "Potencias de Complejos", el cual relaciona elementos de la Vista Gráfica del programa con los de la vista Hoja de Cálculo para luego crear segmentos entre los números y sus potencias, las cuales se colorean con colores dinámicos.

Para las raíces deberían obtener, las raíces quintas del complejo $A = -1 + i$ lo siguiente:



Para las potencias deberían obtener algo similar a lo mostrado a continuación:



Cierre:

Se otorga ayuda en el trabajo con el programa y/o con la coloración dinámica de los segmentos y polígonos regulares que se forman por las raíces de los números complejos y se reciben los trabajos por correo electrónico.

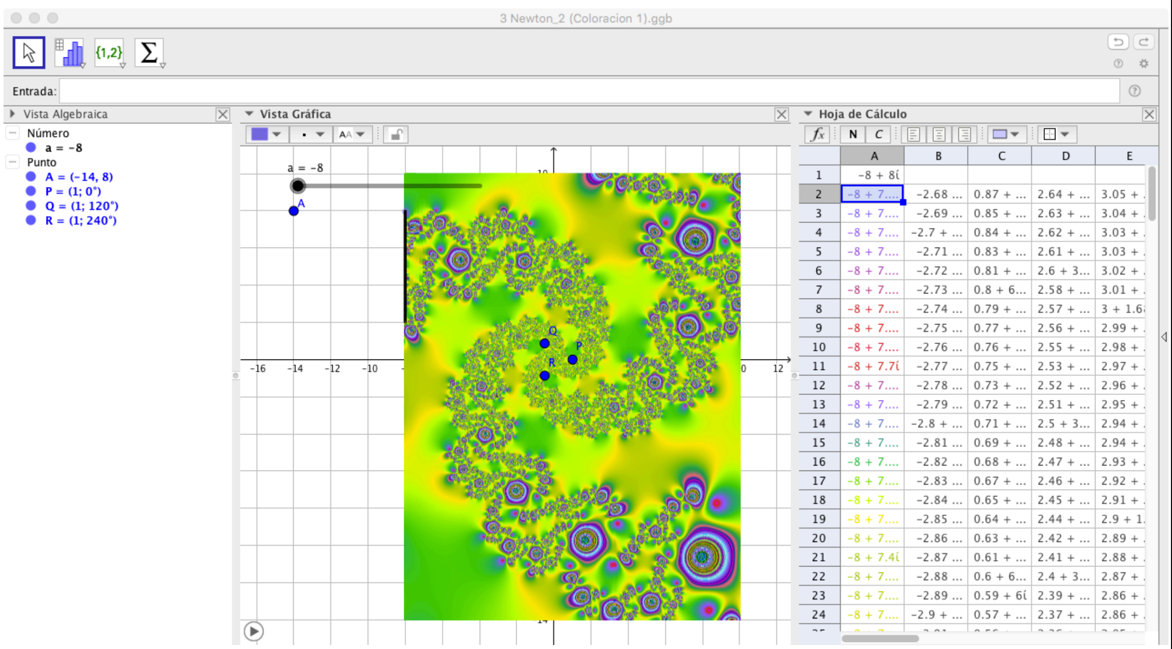
Otros recursos: Computador con GeoGebra instalado Protocolo de construcción “Potencias de Complejos”
Síntesis y evaluación
Evaluación formativa. Recepción de archivos con las construcciones geométricas. Indicadores de evaluación: AE6 - I1: Representan en el plano complejo las potencias y raíces de un número complejo.
Comentario UTP

C.2 - Clase “Fractales de Newton y Conjunto de Mandelbrot en GeoGebra”

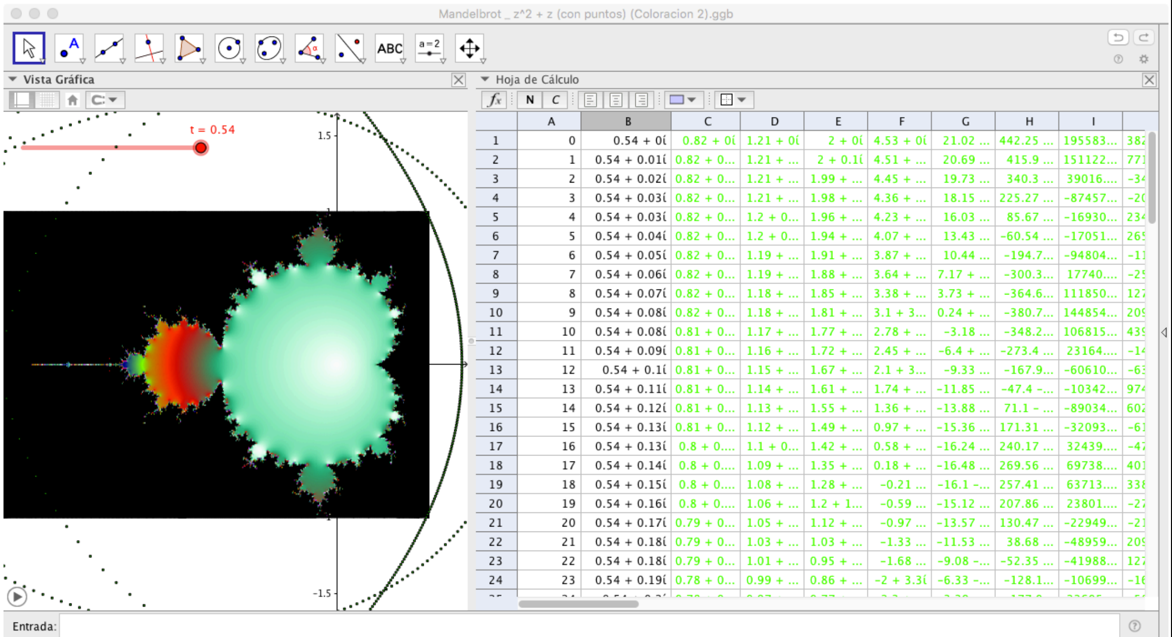
PLANIFICACIÓN DE CLASE: Fractales de Newton y Conjunto de Mandelbrot en GeoGebra			
Profesor	: Germán Holtheuer Vielma	Inicio	:
Asignatura	: Matemática	Término	:
Unidad	: Unidad 1: Números (Programa vigente)	Duración	: 4 Horas
Nivel	: 3° Medio	Validado por	: UTP
Objetivos de la clase			
Aprendizajes esperados: AE -Representar números complejos en plano para construir fractales de Mandelbrot y de Newton Indicadores: . - Representan en el plano complejo fractales de Mandelbrot y de Newton. Habilidades: 2 -Realiza inferencias 3 -Organiza la información 5 -Utiliza lenguaje disciplinario 1. -Resolver problemas con un campo numérico más amplio. 5. -Demostrar propiedades y proposiciones.			
Actitudes U1. - Trabajo en equipo, en forma responsable y proactiva en la solución de problemas en contextos diversos.			
Actividad metodológica			
Inicio:			

Se entrega el *objetivo de la clase*: Elaborar fractales de Mandelbrot y de Newton en GeoGebra.
Se recuerdan algunos elementos de la construcción de potencias y raíces de los complejos en GeoGebra de la clase anterior, por ejemplo: crear distintos elementos como un deslizador y enlazar elementos con la hoja de cálculo, propiedades de los elementos o colores dinámicos, etc.

Desarrollo:
Trabajan en parejas en los computadores junto con el protocolo de construcción del "Fractal de Newton", el cual a grandes rasgos se elabora con una matriz de puntos en las celdas de la Hoja de Cálculo los cuales tienden hacia el atractor del fractal y estos se asocian con los de la primera columna que son los puntos que en definitiva van dejando un rastro de colores dinámicos que forman el fractal, además de entregar su propia variación del fractal de Newton.
En la segunda parte de la clase los alumnos trabajan el protocolo de construcción del "Conjunto de Mandelbrot"
El Fractal de Newton debería poder mostrar una imagen similar a la siguiente:



Por su parte, el conjunto de Mandelbrot se podría ver algo similar a lo siguiente:



Cierre:
Se otorga ayuda en el trabajo con el programa y/o con la coloración dinámica de los puntos que forman el fractal y se reciben los trabajos por correo electrónico.

Otros recursos:

Computador con GeoGebra instalado
Protocolo de construcción “Fractal de Newton”
Protocolo de construcción “Conjunto de Mandelbrot”

Síntesis y evaluación

Evaluación formativa.

Recepción de archivos con las construcciones geométricas.

Indicadores de evaluación:

AE. -Representan en el plano complejo fractales de Mandelbrot y de Newton.

Comentario UTP

ANEXO D: Protocolos de construcción

Los pasos siguientes de los protocolos de construcción son los necesarios para poder crear las actividades realizadas con el SGD GeoGebra.

D.1 - Protocolo "Potencias de Complejos"

1. Definir un punto cualquiera A, en propiedades, en la pestaña Algebra, sistema de coordenadas: Número complejo.
2. Abrir la vista Hoja de cálculo.
3. En la celda A1 colocar =A.
4. En la celda A2 colocar =A1*A$1, en propiedades, desmarcar mostrar objeto y etiqueta y copiar hasta la celda A201.
5. En la celda B2 colocar =segmento[A1,A2], en propiedades de la celda B2 en pestaña Avanzado, en colores dinámicos ingresar las siguientes funciones:
   (1) Red: e^Longitud(A2);
   (2) Green: Longitud(A2);
   (3) Blue: Ln(Longitud(A2));
   Luego copiar hasta la celda B201.
6. Mover el punto A libremente y disfrutar.

D.2 - Protocolo "Raíces de Complejos"

1. Definir dos deslizadores "a" y "b" con las propiedades por defecto.
2. Definir un punto "A" y en propiedades colocar lo siguiente: en la pestaña Básico, en la casilla Definición cambiarla por: a+b*i y en la pestaña álgebra, casilla coordenadas seleccionar número complejo.
3. Definir el número α en la barra de entrada de la siguiente manera: α=arctan(b/a)
4. Posteriormente definir dos nuevos deslizadores uno que se llame "n" y que sea un número con incremento de 1 y con valores máximo 8 y mínimo 1. El otro deslizador debe ser un número con incremento 1 y con nombre "k" y con valores máximo "n-1" y un valor mínimo de 0

5. Definir en la barra de entrada el número r de la siguiente manera: r=sqrt(a^2+b^2)
6. Definir un número complejo en la barra de entrada de la siguiente manera: z_1=r^(1/n)(cos((α+2*π*k)/n)+i*sen((α+2*π*k)/n))
7. Definir el punto B=(0,0)
8. Construir una circunferencia de centro: "B" y radio: "r^(1/n)"
9. Definir otro número complejo en la barra de entrada de la siguiente manera: z_2=r^(1/n)(cos((α+2*π*(k-1))/n)+i*sen((α+2*π*(k-1))/n))
10. En la barra de entrada definir un polígono de la siguiente manera: Polígono(z_2, z_1, n) y en propiedades, en la pestaña avanzado, en la casilla condición para mostrar objeto colocar: k ≥ n - 1

D.3 - Protocolo "Conjunto de Mandelbrot"

1. Definir en la celda A1 de la vista Hoja de Cálculo el número cero
2. En la celda A2 definir lo siguiente: =A1+1 y copiar hasta la celda A120
3. Definir un deslizador de nombre "t", con los parámetros: mínimo=-2; máximo=1; incremento=0.001; velocidad=0.5
4. En la casilla B1 definir el número complejo = (t, A1/120) y copiar hasta la casilla B120
5. En la casilla C1 definir la función siguiente : =B1^2 + $B1, en propiedades, algebra, coordenadas seleccionar número complejo, estilo, tamaño del punto en 1 y cambiar el color; y copiar hasta la celda Z1 (verificar que los números estén definidos como números complejos y que la función corresponda)
6. Seleccionar las celdas desde B1 hasta Z1 y copiarlas hasta la fila 120
7. En la celda AA1 reflejar al punto B1 respecto del eje X, para eso escribir el comando: =Refleja(B1, EjeX) y copiar hasta la celda AA120
8. En la celda AB1 reflejar la celda C1 con el comando: =Refleja(C1, EjeX) y copiar hasta la celda AX1
9. Luego seleccionar desde AB1 hasta AX1 y copiar hasta la fila 120
10. Haciendo doble clic con el botón derecho sobre B1 seleccionamos en propiedades, avanzado, colores dinámicos e ingresamos las siguientes funciones en las casillas de los colores Rojo: $e^\wedge Longitud(Z1)$; Verde: $(1 + e^\wedge(Longitud(Z1)^2))/2$ y Azul:

$(1 + e\text{^}Longitud(Z1))/2$, y luego volvemos a hacer doble clic en el margen inferior derecho de la casilla para copiar estas propiedades hasta la última celda.

11. Verificar que las celdas AA1 hasta la AA120 tengan las mismas propiedades de colores dinámicos del punto 10.
12. Seleccionamos para el deslizador animación automática y a disfrutar.

D.4 - Protocolo "Fractal de Newton"

1. Crear el deslizador "a" con las siguientes características: min: -3, max: 3, incremento: 0.02, deslizador horizontal, ancho: 100, Velocidad: 0.2, oscilante.
2. Ubicar un punto cualquiera A y los puntos P= (1; 0) Q= (1; 2pi/3) y R= (1; 4pi/3).
3. Luego en la hoja de cálculo en A1 definimos el número complejo (a, y(A)) y en propiedades seleccionamos: Básico, muestra objeto, muestra rastro, en Estilo tamaño de punto 1, en álgebra número complejo.
4. En A2 definimos el punto A1+(0,-0.03) y arrastramos desde el vértice inferior derecho del rectángulo hasta el casillero 200
5. En B2 definimos A2-(1+i)*(A2^3-1)/(3*A2^2) y arrastramos hasta P2 desde el vértice inferior derecho.
6. Luego seleccionamos desde B2 hasta P2 y hacemos doble clic en el vértice inferior derecho y esperamos a que se rellenen las casillas.
7. Sombreamos las COLUMNAS desde B hasta P y haciendo doble clic con el botón derecho seleccionamos en propiedades no mostrar objeto.
8. Haciendo clic con el botón derecho sobre A2 seleccionamos en propiedades avanzado los siguientes colores dinámicos, Rojo: e^Longitud(P2); Verde: Longitud(P2) y Azul: Ln(Longitud(P2)), y luego volvemos a hacer doble clic en el margen inferior derecho de la casilla.
9. Seleccionamos para el deslizador animación automática y a disfrutar.
10. Al variar en la fórmula anterior (punto 5) el número complejo (1+i) de la fórmula A2-(1+i)*(A2^3-1)/(3*A2^2), se obtienen variedad de fractales. Ejemplos: Obtener los fractales para:
    a. -1+i
    b. 1-i
    c. 2+i
    d. 1+2i

ANEXO E: Trabajo de potencias y raíces

1 Calcular las operaciones siguientes dando el resultado en forma polar y binómica (cartesiana).

a) $(-3-4\,i)^2$ **b)** $\left(2_{90°}\right)^3$ **c)** $(-2-\ i)^3$

d) $\left(2_{270°}\right)^5$

r = 2 φ = 90°

2 Hallar los siguientes radicales dando todos los resultados en forma polar.

a) $\sqrt[4]{-7-24\,i}$ **b)** $\sqrt[3]{\sqrt{2197_{11,0702°}}}$ **c)** $\sqrt[4]{1}$ **d)** $\sqrt[3]{-2+11\,i}$

e) $\sqrt{9-40\,i}$ **f)** $\sqrt[3]{\sqrt{512_{45°}}}$ **g)** $\sqrt[4]{16}$ **h)** $\sqrt{18_{270°}}$

FECHA: / /

1. a) $(-3-4i)^2$

$|z| = \sqrt{(-3)^2+(-4)^2}$

$|z| = \sqrt{9+16}$

$|z| = \sqrt{25}$

$|z| = 5$

$\varphi = Arctg\left(\frac{b}{a}\right)$

$\varphi = 53.13010235°$

$\varphi = 180° + 53.13010235°$

$\varphi = 233,1301024°$

$z^2 = (-3-4i)^2 = 5^2\ Cis\ (2\cdot 233,130)$

$25\ Cis\ (466,26)$

$25[Cos(466,26) + i\ Sen(466,26)]$

$25[-0,279 + 0,960i]$

$\boxed{-6.975 + 24i}$

b) $(2_{90°})^3$

$r = 2 \quad \varphi = 90°$

$z^3 = 2^3\ Cis\ (3\cdot 90°)$

$z^3 = 8\ Cis\ (270)$

$8[Cos\ (270) + i\ sen\ (270)]$

$8[\ 0 \ + -1i\ ]$

$0 + (-8i)$

$\boxed{0 - 8i}$

2

a) $\sqrt[4]{-7-24i}$

$r = \sqrt{(-7)^2+(-24)^2}$; $\varphi = Arctg\left(\frac{b}{a}\right)$

$\sqrt{49+576}$; $\varphi = 73,739° + 180°$

$\sqrt{625}$; $\varphi = 253,739°$

$r = 26$

$K_0\ z = \sqrt[4]{25}\ Cis\left(\frac{253,739 + 360°\cdot 0}{4}\right)$

$\sqrt[4]{25}\ \ Cis\ \ (63,43475°)$

$\sqrt[4]{25}[Cos\ (63,43475°) + sen\ (63,43475°)]$

$\sqrt[4]{25}[0,447 + 0,894i]$

$K_0 = 0,999 + 1,999i$

$1 + 2i$

FECHA: / /

$K_1 = \sqrt[4]{25}\ Cis\left(\frac{253,739 + 360\cdot 1}{4}\right)$

$\sqrt[4]{25}\ \ Cis\ \ 153,43475°$

$\sqrt[4]{25}[Cos\ (153,43475° + i\ Sen\ (153,43475°)]$

$\sqrt[4]{25}[-0,894 + 0,447]$

$-1,999 + 0,999$

$-2 + 1i$

$K_2 = \sqrt[4]{25}\ Cis\left(\frac{253,739 + 360\cdot 2}{4}\right)$

$\sqrt[4]{25}\ Cis\ (243,434)$

$\sqrt[4]{25}[Cos\ (243,434) + i\ Sen\ (243,434)]$

$\sqrt[4]{25}[-0,447 - 0,8944]$

$-0,999 - 1,999i$

$-1 - 2i$

$K_3 = \sqrt[4]{25}\ Cis\left(\frac{253,739 + 360\cdot 3}{4}\right)$

$\sqrt[4]{25}\ Cis\ (333,43475)$

$\sqrt[4]{25}[Cos\ (333,43475) + i\ Sen\ (333,43475)]$

$\sqrt[4]{25}[+0,89444 \ - 0,447$

$+2,0 \ -0,999i$

$+2 - 1i$

2) a)