UNIVERSIDAD DE VALPARAÍSO
Facultad de Ciencias
Instituto de Matemáticas

Topologías en Hiperespacios, Continuidad de Correspondencias y Teoría de Punto Fijo

por

LUIS ARCE GONZÁLEZ

Tesis para optar al grado de Licenciado en Matemáticas

Profesor guía: Raúl Fierro Pradenas

Valparaíso, 2019

Índice general

Introducción 3

Capítulo 1. Topologías en Hiperespacios 5
1. Métrica de Hausdorff 5
2. Topología de Vietoris 12

Capítulo 2. Continuidad en Correspondencias 19
1. Correspondencias 19
2. Continuidad de Vietoris 22
3. Continuidad de Hausdorff 32

Capítulo 3. Punto Fijo Univaluado y Multivaluado 37
1. Teoremas de Knaster, Kantorovitch y Tarski 37
2. Condición de Brondsted 39
3. Punto Fijo Univaluado 40
4. Punto Fijo Multivaluado 47

Conclusión 59

Apéndice 61

Bibliografía 63

Introducción

Los espacios métricos constituyen una estructura topológica apropiada para varios modelos matemáticos y problemas en ciencias aplicadas. En particular, la teoría de punto fijo juega un rol importante en diferentes ramas de la matemática y otras ciencias. La motivación de este trabajo es mostrar diversos resultados clásicos de existencia de puntos fijos tanto para funciones univaluadas como correspondencias. Para dicho propósito, es necesario un previo estudio de topologías en hiperespacios y continuidad en correspondencias.

En el primer capítulo presentamos dos de las principales topologías que pueden definirse en hiperespacios, cuyos resultados facilitarán el análisis de diversos conceptos referentes a continuidad en correspondencias. Primero abordamos la métrica de Hausdorff, que como se hará evidente en nuestra presentación, funciona bien siempre que nos limitemos a trabajar en el hiperespacio de los subconjuntos cerrados y acotados. Veremos que varias propiedades topológicas importantes del espacio métrico dado son heredadas por el hiperespacio, como lo son la completitud y convergencia. Sin embargo, no resulta muy útil si los subconjuntos no son cerrados. Por esta razón introducimos los conceptos de topología inferior y superior, para así poder definir la topología de Vietoris, pues con esta es posible definir convergencia en subconjuntos no acotados y veremos que esta coincide con la topología inducida por la métrica de Hausdorff si nos limitamos a trabajar con subconjuntos compactos.

En el segundo capítulo se introduce el concepto de correspondencia, que generaliza el concepto de función. Estudiaremos sus propiedades básicas, también hacemos uso de las topologías estudiadas previamente en el primer capítulo para el estudio de continuidad de estas e ilustrar, que como era de esperar, los conceptos de continuidad de ambas topologías coinciden en el hiperespacio de los subconjuntos compactos.

Por último, en el tercer capítulo estudiamos diversos resultados de la Teoría del Punto Fijo apoyandonos en los teoremas de Knaster, Kantorovitch y Tarski, además de una observación hecha por Brondsted para establecer las condiciones necesarias y suficientes para garantizar la existencia de puntos fijos en diversas contracciones mediante consideraciones de orden como por ejemplo, la Condición Orbital de Banach univaluada y multivaluada, que nos ayudará a demostrar los emblematicos Teoremas de Banach y Nadler.

Se observará que, si bien, la Condición Orbital de Banach es útil para demostrar ciertos resultados de puntos fijos, cabe mencionar que es muy restrictiva. Pues exige continuidad de la función para el caso univaludado, y para el caso multivaluado que la correspondencia sea débilmente semicontinua inferior (concepto que se definirá en el tercer capítulo). Pero existen contracciones tales como la de Kannan, Chatterjea, Reich, Berinde y Ćirić que poseen punto fijo sin satisfacer las condiciones mencionadas anteriormente. Debido a esto, se debe recurrir a demostraciones más clasicas, como lo son las que usan metodos iterativos.

Capítulo 1

Topologías en Hiperespacios

1. Métrica de Hausdorff

La métrica de Hausdorff es la herramienta principal para cuantificar la distancia entre subconjuntos del espacio métrico dado. Como se hará evidente a partir de nuestra presentación, esta topología para hiperespacios funciona, siempre que nos limitemos a subconjuntos cerrados y acotados del espacio métrico en cuestión.

En esta sección presentamos los conceptos y notaciones elementales que son base para el desarrollo del presente escrito.

Definiciones 1.1. Sea (X,d) un espacio métrico. Entonces definimos las siguientes colecciones de conjuntos:

(i) $\mathcal{P}(X) = 2^X$ (conjunto potencia de X).
(ii) $\mathcal{P}_0(X) = \mathcal{P}(X) \setminus \{\varnothing\}$.
(iii) $\mathcal{C}(X) = \{A \in \mathcal{P}_0(X) : A \text{ es cerrado}\}$.
(iv) $\mathcal{CB}(X) = \{A \in \mathcal{P}_0(X) : A \text{ es cerrado y acotado}\}$.
(v) $\mathcal{K}(X) = \{A \in \mathcal{P}_0(X) : A \text{ es compacto}\}$.

Definición 1.1. Sean (X,d) un espacio métrico, A, B subconjuntos de X, ambos no vacíos, y $x \in X$. Entonces definimos la distancia entre x y el conjunto A como $d(x,A) = \text{ínf}\{d(x,a) : a \in A\}$.

Notaciones 1.1. Sean (X,d) un espacio métrico, A y B subconjuntos de X, ambos no vacíos. Denotaremos por $h(A,B)$ al supremo de $d(a,B)$ con $a \in A$, es decir, $h(A,B) = \sup\{d(a,B) : a \in A\}$.

Proposición 1.1. *Sean (X,d) un espacio métrico, A, B subconjuntos de X, ambos no vacíos, se cumple que $h(A,B) = 0$, si y solo si, A está contenido en B.*

Demostración. Supongamos que $h(A,B)=0$ y sea $x\in A$, entonces

$$d(x,B)\leq h(A,B)=0.$$

Luego, $d(x,B)=0$, para todo $x\in A$, y entonces $x\in B$, lo cual demuestra que $A\subseteq B$.

Recíprocamente, supongamos que $A\subseteq B$ y sea $x\in A$. Luego, $x\in B$, por lo tanto, tenemos que $d(x,B)=0$. Así, para todo $x\in A$, $d(x,B)=0$, lo cual concluye la demostración. ∎

Proposición 1.2. *Sean (X,d) un espacio métrico y A,B,C subconjuntos de X acotados y distintos del vacío. Entonces, $h(A,B)\leq h(A,C)+h(C,B)$.*

Demostración. Sean $a\in A$ y $c\in C$. Tenemos que $d(a,B)\leq d(a,c)+d(c,B)$. Luego, $d(a,B)\leq \mathrm{d}(a,c)+\sup_{c\in C}d(c,B)$ y entonces $d(a,B)-\sup_{c\in C}d(c,B)$ es cota inferior de $\{d(a,c):c\in C\}$. Por consiguiente,

$$\begin{aligned} d(a,B) &\leq \sup_{c\in C}d(c,B)+d(a,C)\\ &\leq \sup_{c\in C}d(c,B)+\sup_{a\in C}d(a,C)\\ &\leq h(C,B)+h(A,C). \end{aligned}$$

Luego, $\sup_{a\in A}d(a,B)\leq h(C,B)+h(A,C)$, debido a que $h(C,B)+h(A,C)$ es cota superior de $\{d(a,B):a\in A\}$, y por consiguiente,

$$h(A,B)\leq h(C,B)+h(A,C),$$

completándose la demostración. ∎

Teorema 1.1. *Sea (X,d) un espacio métrico. Entonces la función $\mathcal{H}:\mathcal{CB}(X)\times\mathcal{CB}(X)\to\mathbb{R}_+$, definida por $\mathcal{H}(A,B)=\text{máx}\{h(A,B),h(B,A)\}$ es una métrica sobre $\mathcal{CB}(X)$.*

Demostración. Sean $A,B,C\in\mathcal{CB}(X)$. Dividiremos la demostración en dos pasos.

(i) Si $\mathcal{H}(A,B)=0$, entonces $h(A,B)=0$ y $h(B,A)=0$. Por Proposición 1.1 tenemos que $A\subset B$ y $B\subset A$. Luego, $A=B$, pues A y B son cerrados. Recíprocamente, si $A=B$, entonces $A\subset B$ y $B\subset A$. Por Proposición 1.1 tenemos que $h(A,B)=0$ y $h(B,A)=0$, así $\mathcal{H}(A,B)=0$.

(ii) Por Proposición 1.2 tenemos que $h(A,B) \leq h(A,C) + h(C,B)$ y $h(B,A) \leq h(B,C) + h(C,A)$. Esto implica que

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(A,B) &= \max\{h(A,B), h(B,A)\} \\ &\leq \max\{h(A,C)+h(C,B), h(B,C)+h(C,A)\} \\ &\leq \max\{h(A,C), h(C,A)\} + \max\{h(C,B), h(B,C)\} \\ &= \mathcal{H}(A,C) + \mathcal{H}(B,C), \end{aligned}$$

lo cual completa la demostración. ∎

La función $\mathcal{H}$ definida en el teorema precedente, fue definida por Felix Hausdorff [**7**] y en la actualidad es conocida como la *Métrica de Hausdorff* sobre $\mathcal{CB}(X)$.

El ejemplo siguiente muestra que métricas equivalentes pueden generar métricas de Hausdorff que no son equivalentes.

EJEMPLO 1.1. Sean d y ρ dos métricas en $\mathbb{N}$ definidas por:

$$d(n,m) = \begin{cases} 0 & si \quad n = m \\ 1 & si \quad m \neq n \end{cases} \qquad \text{y} \qquad \rho(n,m) = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right|$$

Sabemos que ambas métricas generan la topología discreta en $\mathbb{N}$. Definamos $F_n = \{1, 2, ..., n\}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Es facil ver que $\mathcal{H}_d(F_n, \mathbb{N}) = 1$ para todo n. Por otra parte, para $k \notin F_n$, tenemos que $\rho(k, F_n) = \frac{1}{n} - \frac{1}{k}$. En consecuencia,

$$\mathcal{H}_\rho(F_n, \mathbb{N}) = \sup_k \rho(k, F_n) = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n}.$$

Por lo tanto, las métricas de Hausdoff $\mathcal{H}_d$ y $\mathcal{H}_\rho$ no son equivalentes. En la sección siguiente se demuestra que sobre $\mathcal{K}(X)$, el espacio de los conjuntos compactos, métricas equivalentes sobre X generan métricas de Hausdorff equivalentes sobre $\mathcal{K}(X)$.

Con intención de presentar una manera alternativa de definir la métrica de Hausdorff, introducimos las siguientes notaciones.

NOTACIONES 1.2. Para cada $A \in \mathcal{CB}(X)$ y $\eta > 0$, denotaremos por $\mathrm{B}_{\mathcal{H}}(A, \eta)$ la bola, con respecto a $\mathcal{H}$, de centro en A y radio η. Además, si $A \in \mathcal{P}_0(X)$ y $\epsilon > 0$, denotaremos por

$$\mathrm{B}(A, \epsilon) = \{x \in X : d(x, A) < \epsilon\}.$$

PROPOSICIÓN 1.3. *Sean* $A, B \in \mathcal{CB}(X)$. *Entonces,*

$$\mathcal{H}(A,B) = \text{ínf}\{\epsilon > 0 : A \subset \mathrm{B}(B,\epsilon) \text{ y } B \subset \mathrm{B}(A,\epsilon)\}.$$

Demostración. Sean $I = \text{ínf}\{\epsilon > 0 : A \subset \mathrm{B}(B,\epsilon) \text{ y } B \subset \mathrm{B}(A,\epsilon)\}$ y $\epsilon \in \{\epsilon > 0 : A \subset \mathrm{B}(B,\epsilon) \text{ y } B \subset \mathrm{B}(A,\epsilon)\}$. Luego, $h(A,B) < \epsilon$ y $h(B,A) < \epsilon$. Por consiguiente, $\mathcal{H}(A,B) < \epsilon$. Esto prueba que $\mathcal{H}(A,B) \leq I$. Por otra parte, si $\mathcal{H}(A,B) < \epsilon$ para algún $\epsilon > 0$, entonces

$$\sup_{x\in A} d(x,B) < \epsilon \quad \text{y} \quad \sup_{y\in B} d(y,A) < \epsilon,$$

lo cual implica que $A \subset \mathrm{B}(B,\epsilon)$ y $B \subset \mathrm{B}(A,\epsilon)$. Luego, $I \leq \epsilon$. Por consiguiente, $I \leq \mathcal{H}(A,B)$, lo cual concluye la demostración. ∎

Para estudiar la completitud del Hiperespacio $\mathcal{CB}(X)$, necesitamos el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 1.4. *Si* $(A_n : n \in \mathbb{N})$ *converge hacia* A *en* $(\mathcal{C}(X), \mathcal{H})$, *entonces*

$$A = \bigcap_n \overline{\bigcup_{m\geq n} A_m} = \bigcap_{\epsilon>0} \bigcup_n \bigcap_{m\geq n} \mathrm{B}(A_m,\epsilon).$$

Demostración. Sean $B = \bigcap_n \overline{\bigcup_{m\geq n} A_m}$ y $C = \bigcap_{\epsilon>0}\bigcup_n \bigcap_{m\geq n} \mathrm{B}(A_m,\epsilon)$. Dividiremos la demostración en tres partes, a saber, demostraremos que $A \subset B$, que $B \subset C$ y que $C \subset A$.

(i) Sea $x \in A$ y demostremos que para todos $n \in \mathbb{N}$ y $\epsilon > 0$, $\mathrm{B}(x,\epsilon) \cap \bigcup_{m\geq n} A_m \neq \varnothing$. En efecto, existe $m \geq n$ tal que $\mathcal{H}(A_m, A) < \epsilon$ y por lo tanto $d(x, A_m) < \epsilon$. Luego, existe $x_m \in A_m$ tal que $d(x, x_m) < \epsilon$, es decir

$$x_m \in \mathrm{B}(x,\epsilon) \cap A_m \subset \mathrm{B}(x,\epsilon) \cap \bigcup_{m\geq n} A_m.$$

Esto prueba que $\mathrm{B}(x,\epsilon) \cap \bigcup_{m\geq n} A_m \neq \varnothing$ y por lo tanto $x \in \overline{\bigcup_{m\geq n} A_m}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por consiguiente, $A \subseteq B$.

(ii) Demostremos ahora que $B \subset \bigcap_{\epsilon>0}\bigcup_n \bigcap_{m\geq n} \mathrm{B}(A_m,\epsilon)$. Sean $x \in B$ y $\epsilon > 0$. Por demostrar que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $m \geq n$, $x \in \mathrm{B}(A_m,\epsilon)$. Como A_n converge hacia A, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $m \geq n$, $\mathcal{H}(A_m, A) < \epsilon$. Pero

$$d(x, A_m) \leq \mathcal{H}(A_m, A) < \epsilon,$$

lo cual demuestra que $B \subset \bigcap_{\epsilon>0}\bigcup_n \bigcap_{m\geq n} \mathrm{B}(A_m,\epsilon)$.

(iii) Solo resta demostrar que $\bigcap_{\epsilon>0}\bigcup_n\bigcap_{m\geq n} \mathrm{B}(A_m,\epsilon)\subset A$.

Sea $x\in\bigcap_{\epsilon>0}\bigcup_n\bigcap_{m\geq n} \mathrm{B}(A_m,\epsilon)$. Como A es cerrado, basta demostrar que para todo $\epsilon>0$, $d(x,A)<\epsilon$. Sean $\epsilon>0$ y $n\in\mathbb{N}$ tal que $x\in\bigcap_{m\geq n}\mathrm{B}(A_m,\epsilon/2)$ y $\mathcal{H}(A_n,A)<\epsilon/2$, si $m\geq n$. Luego, para todo $y\in A_n$, $d(x,A)\leq d(x,y)+h(A_n,A)$ y por consiguiente, para todo $\epsilon>0$,

$$d(x,A)\leq d(x,A_n)+h(A_n,A)\leq d(x,A_n)+\mathcal{H}(A_n,A)<\epsilon.$$

Esto demuestra que $x\in A$ y por lo tanto, la demostración está completa. ∎

Teorema 1.2. *Si (X,d) es un espacio métrico completo, entonces $(\mathcal{CB}(X),\mathcal{H})$ también lo es.*

Demostración. Sean $(A_n;n\in\mathbb{N})$ una sucesión de Cauchy en $(\mathcal{CB}(X),\mathcal{H})$ y

$$A=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{\bigcup_{m\geq n}A_m}.$$

Probaremos que $A\in\mathcal{CB}(X)$ y que $(A_n:n\in\mathbb{N})$ converge hacia A. Es evidente que A es cerrado, pero debemos demostrar que además es no vacío y acotado. Sea $\epsilon>0$. Para todo $k\in\mathbb{N}$, existe $N_k\in\mathbb{N}$ tal que si $m,n\geq N_k$, entonces $\mathcal{H}(A_n,A_m)<\epsilon/2^{k+2}$. Sean $(n_k:k\in\mathbb{N})$ una sucesión estrictamente creciente, tal que $n_k\geq N_k$ para todo $k\in\mathbb{N}$, y $x_0\in A_{n_0}$. Supongamos que hemos elegido $x_0,\ldots,x_k\in X$ de manera que $x_i\in A_{n_i}$, para todo $i\in\{0,\ldots,k\}$, y $d(x_i,x_{i+1})<\epsilon/2^{i+2}$, si $i\leq k-1$. Como $d(x_k,A_{n_{k+1}})\leq\mathcal{H}(A_{n_k},A_{n_{k+1}})<\epsilon/2^{k+2}$, existe $x_{k+1}\in A_{n_{k+1}}$ de manera que $d(x_k,x_{k+1})<\epsilon/2^{k+2}$. Luego, $(x_k;k\in\mathbb{N})$ es una sucesión de Cauchy y por consiguiente, existe $x\in X$ tal que esta sucesión converge a x. Para cada $n\in\mathbb{N}$, la subsucesión $(x_m;m\geq n)$ de $(x_m;m\in\mathbb{N})$ está contenida en el conjunto cerrado $\overline{\bigcup_{m\geq n}A_m}$. Luego, para cada $n\in\mathbb{N}$, $x\in\overline{\bigcup_{m\geq n}A_m}$ y en consecuencia, $x\in A$, lo cual demuestra que A es no vacío. Así, $A\in\mathcal{CB}(X)$.

Para todo $n\in\mathbb{N}$ y $m\geq n$, se tiene

$$d(x_n,x_m)\leq\sum_{k=n}^{m-1}d(x_k,x_{k+1})\leq\sum_{k=n}^{m-1}\frac{\epsilon}{2^{k+2}}<\frac{\epsilon}{2^{n+1}}.$$

En particular, $d(x_0,x)\leq\epsilon/2$, lo cual demuestra que para todo $x_0\in A_{n_0}$, existe $x\in A$ tal que $d(x_0,x)<\epsilon/2$. Es decir, $A_{n_0}\subseteq\mathrm{B}(A,\epsilon/2)$. Verifiquemos ahora que $A\subseteq\mathrm{B}(A_{n_0},\epsilon/2)$. Sea $y\in A$. Luego, $y\in\overline{\bigcup_{m\geq n_0}A_m}$ y entonces $\mathrm{B}(y,\epsilon/4)\cap\bigcup_{m\geq n_0}A_m\neq\varnothing$. Podemos así escoger $m \geq n_0$ y $z \in A_m$ tal que $d(y, z) < \epsilon/4$ y entonces $d(y, A_m) < \epsilon/4$. Luego,

$$d(y, A_{n_0}) \leq d(y, z) + d(z, A_{n_0}) \leq \frac{\epsilon}{4} + \mathcal{H}(A_m, A_{n_0}) < \frac{\epsilon}{2}$$

y entonces $y \in \mathrm{B}(A_{n_0}, \epsilon/2)$, con lo cual $A \subseteq \mathrm{B}(A_{n_0}, \epsilon/2)$. Sigue entonces de Proposición 1.3 que $\mathcal{H}(A_{n_0}, A) < \epsilon/2$. En consecuencia, para todo $n \geq n_0$ se tiene

$$\mathcal{H}(A_n, A) \leq \mathcal{H}(A_n, A_{n_0}) + \mathcal{H}(A_{n_0}, A) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

Esto concluye la demostración. ∎

A continuación, presentamos resultados a un problema típico en hiperespacios. Si un espacio tiene cierta propiedad, entonces su hiperespacio también la tiene, y vice versa. Analizaremos este problema con las propiedades de acotabilidad, clausura, separabilidad y compacticidad.

Definición 1.2. Sea (X, d) un espacio métrico. Diremos que (X, d) es totalmente acotado, si y sólo si, para todo $\epsilon > 0$ existen $x_1, ..., x_n \in X$, tal que $X = \mathrm{B}(x_1, \epsilon) \cup \cdots \cup \mathrm{B}(x_n, \epsilon)$.

Teorema 1.3. *Sea $\mathcal{CTB}(X)$ la colección de subconjuntos de X definida por*

$$\mathcal{CTB}(X) = \{A \in \mathcal{CB}(X) : A \text{ es totalmente acotado}\}.$$

Entonces $\mathcal{CTB}(X)$ es cerrado en $\mathcal{C}(X)$.

Demostración. Sea $(A_n; n \in \mathbb{N})$ sucesión en $\mathcal{CTB}(X)$ que converge hacia $A \in \mathcal{C}(X)$. Luego, dado $\epsilon > 0$, existen $n \in \mathbb{N}$ tal que $h(A, A_n) < \epsilon/2$ y $x_1, \ldots, x_p \in X$ tales que las bolas de centro x_i y radio $\epsilon/2$ cubren A_n. Entonces las bolas de centro x_i y radio ϵ cubren A. En efecto, sea $x \in A$. Luego,

$$d(x, A_n) \leq d(x, A) + h(A, A_n) = h(A, A_n) < \frac{\epsilon}{2}$$

y entonces existe $y \in A_n$ tal que $d(x, y) < \epsilon/2$, Sea $i \in \{1, \ldots, p\}$ tal que $y \in \mathrm{B}(x_i, \epsilon/2)$. Por consiguiente,

$$d(x, x_i) \leq d(x, y) + d(y, x_i) < \epsilon.$$

Es decir, $x \in \mathrm{B}(x_i, \epsilon)$ y entonces

$$A \subset \mathrm{B}(x_1, \epsilon) \cup \cdots \cup \mathrm{B}(x_p, \epsilon),$$

lo cual concluye la demostración. ∎

Proposición 1.5. *Si* (X,d) *es totalmente acotado, entonces* $(\mathcal{CB}(X),\mathcal{H})$ *también lo es.*

Demostración. Sean $\epsilon > 0$ y $F = \{x_1,...,x_n\}$ tales que las bolas de centro x_i y radio ϵ cubren X. Sean $A \in \mathcal{CB}(X)$ e $I = \{i : \mathrm{B}(x_i,\epsilon) \cap A \neq \varnothing\}$. Entonces el conjunto $B = \{x_i : i \in I\}$ satisface la condición $\mathcal{H}(A,B) \leq \epsilon$, pues dado $x \in A$, $d(x,B) \leq \epsilon$ y dado $x' \in B$ tenemos que $d(x',A) \leq \epsilon$. Luego, $h(A,B) \leq \epsilon$ y $h(B,A) \leq \epsilon$. Por lo tanto, $A \in \mathrm{B}_{\mathcal{H}}(B,\epsilon)$. Finalmente, $\mathcal{CB}(X) = \bigcup_{U\in\mathcal{P}(F)} \mathrm{B}_{\mathcal{H}}(U,\epsilon)$. Como F es finito, también lo es $\mathcal{P}(F)$, completandose así la demostración. ∎

Corolario 1.1. *Si* (X,d) *es compacto, entonces* $(\mathcal{CB}(X),\mathcal{H})$ *es compacto.*

Demostración. Por Teorema 1.2 y Proposición 1.5, $(\mathcal{CB}(X),\mathcal{H})$ es completo y totalmente acotado. Por lo tanto, $(\mathcal{CB}(X),\mathcal{H})$ es compacto, completándose la demostración. ∎

Proposición 1.6. *Si* (X,d) *es completo, entonces* $\mathcal{K}(X)$ *es cerrado en* $(\mathcal{CB}(X),\mathcal{H})$.

Demostración. Sea $(A_n; n \in \mathbb{N})$ una sucesión en $\mathcal{K}(X)$ que converge hacia $A \in \mathcal{CB}(X)$. Demostremos que A es totalmente acotado. Sean $\epsilon > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ tales que $\mathcal{H}(A_N,A) < \epsilon/2$. Como A_N es totalmente acotado, existen $x_1,\dots,x_p \in X$ tales que

$$A_N \subset \mathrm{B}(x_1,\epsilon/2) \cup \cdots \cup \mathrm{B}(x_p,\epsilon/2).$$

y ya que $A \subset \mathrm{B}(A_N,\epsilon/2)$, se tiene que

$$A \subset \mathrm{B}(x_1,\epsilon) \cup \cdots \cup \mathrm{B}(x_p,\epsilon). \tag{1}$$

En efecto, si $x \in A$, entonces existe $y \in A_N$ tal que $d(x,y) < \epsilon/2$. A su vez, existe $i \in \{1,\dots,r\}$ tal que $y \in \mathrm{B}(x_i,\epsilon/2)$. Luego, $d(y,x_i) < \epsilon/2$ y entonces $d(x,x_i) < \epsilon$. Así, $x \in \mathrm{B}(x_i,\epsilon)$, lo cual demuestra (1). Esto demuestra que A es totalmente acotado, pues A está cubierto por finitas bolas y como X es completo, entonces A es relativamente compacto. Pero A es cerrado y entonces $A \in \mathcal{K}(X)$, lo cual completa la demostración. ∎

Teorema 1.4. *Supongamos que* (X,d) *es separable. Entonces* $(\mathcal{K}(X),\mathcal{H})$ *es separable.*

Demostración. Sean $D \subseteq X$ denso y contable, $\mathcal{I} = \{I \subseteq D : I \text{ es finito}\}$, $A \in \mathcal{K}(X)$ y $\epsilon > 0$. Demostremos que $\mathrm{B}_{\mathcal{H}}(A, \epsilon) \cap \mathcal{I} \neq \varnothing$. Como A es totalmente acotado, existen $x_1, \dots, x_r \in X$ tales que

$$A \subset \mathrm{B}(x_1, \epsilon/2) \cup \cdots \cup \mathrm{B}(x_r, \epsilon/2).$$

Sean $y_1, \dots, y_r \in D$ tales que $d(x_i, y_i) < \epsilon/2$, para todo $i \in \{1, \dots, r\}$. Luego,

$$A \subset \mathrm{B}(y_1, \epsilon) \cup \cdots \cup \mathrm{B}(y_r, \epsilon) = \mathrm{B}(F, \epsilon),$$

donde $F = \{y_1, \dots, y_r\}$. Por otra parte, $F \subset \mathrm{B}(A, \epsilon)$ y, por lo tanto, $\mathcal{H}(A, D) < \epsilon$. Es decir, $\mathrm{B}_{\mathcal{H}}(A, \epsilon) \cap \mathcal{I} \neq \varnothing$, lo cual completa la demostración. ∎

Proposición 1.7. *Supongamos que X es un espacio normado y sea $\mathcal{CC}(X) = \{A \in \mathcal{P}_0(X) : A$ es convexo$\}$. Entonces $\mathcal{CC}(X)$ es cerrado con la métrica de Hausdorff.*

Demostración. Sea $(A_n : n \in \mathbb{N})$ sucesión que converge hacia A. Por Proposición 1.4 sabemos que $A = \bigcap_{\epsilon > 0} \bigcup_n C_n$, donde, para todo $\epsilon > 0$, $C_n = \bigcap_{m \geq n} \mathrm{B}(A_m, \epsilon)$. Observemos que para todo $m \geq 0$, la bola $B(A_m, \epsilon)$ es convexa, por lo tanto C_n es convexo, para todo $\epsilon > 0$. Como la sucesión $(C_n : n \in \mathbb{N})$ es creciente, entonces $C = \bigcup C_n$ es convexo y por consiguiente, A es convexo, completándose la demostración. ∎

2. Topología de Vietoris

La topología inducida por la métrica de Hausdorff, aunque con varias propiedades agradables, es sin embargo demasiado restrictiva para muchos propósitos, en particular cuando se trata de conjuntos no acotados. Por ejemplo, deberíamos poder decir que si $L_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2_+ : y = \frac{1}{n} x\}$ y $L = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2_+ : x \geq 0\}$, entonces $(L_n : n \in \mathbb{N})$ converge a L en algún sentido. Si elegimos la topología inducida por la métrica de Hausdorff, entonces la convergencia deseada no es verdadera, debido a que los conjuntos no son acotados. En efecto, como L_n y L no pertenecen a $\mathcal{CB}(\mathbb{R}^2_+)$, la métrica de Hausdorff no se define en estos conjuntos y no puede haber convergencia, pues $\sup_{(x,y) \in L_n} d((x, y), L) = \sup_{(x,y) \in L_n} x/n = \infty$, entonces $(\mathcal{H}(L_n, L); n \in \mathbb{N} \setminus \{0\})$ no converge a cero. Sin embargo, si consideramos $L^r_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2_+ : y = \frac{1}{n} x, x \in [0, r]\}$ y $L^r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2_+ : 0 \leq x \leq r, y = 0\}$, entonces $\mathcal{H}(L^r_n, L^r) = r/n$ y en consecuencia $(L^r_n : n \in \mathbb{N})$ converge hacia L^r.

Para poder tratar de forma efectiva con familia de conjuntos no acotados, presentamos otras topologías para hiperespacios, estas son *La Topología Superior*, *La Topología Inferior*, bajo la cual si se tiene que $(L_n : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\})$ converge a L y *La Topología de Vietoris*. Estudiaremos también la relación de esta última con aquella inducida por la métrica de Hausdorff.

NOTACIONES 2.1. Sean (X, τ) un espacio topologico y $U \in \mathcal{P}_0(X)$. Denotamos las siguientes colecciones de subconjuntos:

(i) $\Gamma(U) = \{A \in \mathcal{P}_0(X) : A \subset U\}$, y
(ii) $\Lambda(U) = \{A \in \mathcal{P}_0(X) : A \cap U \neq \varnothing\}$.

PROPOSICIÓN 2.1. *Sean* (X, τ) *un espacio topológico y* $\mathcal{B}_u = \{\Gamma(U) : U \in \tau\}$. *Entonces,* $\mathcal{B}_u$ *es una base para una topología sobre* $\mathcal{P}_0(X)$.

Demostración. Sean $U, V \in \tau$ y $A \in \Gamma(U) \cap \Gamma(V)$. Luego, $A \in \Gamma(U \cap V) \subset \Gamma(U) \cap \Gamma(V)$ y como $\Gamma(U \cap V) \in \mathcal{B}_u$, $\mathcal{B}_u$ es una base para alguna topología sobre $\mathcal{P}_0(X)$. ∎

DEFINICIÓN 2.1. La topología sobre $\mathcal{P}_0(X)$ generada por la base $\mathcal{B}_u$, definida en la proposición precedente, se conoce como la *Topología Superior* y la denotaremos por τ_u.

Notemos que $\Gamma(U)^c = \{A \in \mathcal{C}(X) : A \cap U^c \neq \varnothing\} = \Lambda(U^c)$. Esto motiva la definición de una nueva topología.

DEFINICIÓN 2.2. Sea (X, τ) un espacio topológico. Definimos la *Topología Inferior*, como la topología generada por la subbase $\mathcal{S}_\ell = \{\Lambda(U) : U \in \tau\}$. Denotaremos esta topología por τ_ℓ.

DEFINICIÓN 2.3. La *Topología de Vietoris*, denotada por $\tau_{\mathcal{V}}$, es aquella generada por la subbase $\mathcal{B}_u \cup \mathcal{S}_\ell$.

EJEMPLO 2.1. Sean L y L_n $(n \in \mathbb{N} \setminus \{0\})$ los conjuntos definidos en el primer párrafo de esta subsección. Es decir, $L_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2_+ : y = x/n\}$ y $L = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2_+ : x \geq 0\}$. Demostremos que $(L_n : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\})$ converge a L en la topología inferior, para lo cual nos damos $U_1, \ldots, U_r$ abiertos en $\mathbb{R}^2_+$ y suponemos que $L \in \Lambda(U_1) \cap \cdots \cap \Lambda(U_r)$. De modo que $L \cap U_i \neq \varnothing$, para todo $i \in \{1, \ldots, r\}$. Como, para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$, $((x_i, x_i/n); n \in \mathbb{N} \setminus \{0\})$ converge a $(x_i, 0)$, existe $N_i \in \mathbb{N}$ tal que $(x_i, x_i/n) \in L \cap U_i$ si

$n > N_i$. Sea $N = \text{máx}\{N_1, \ldots, N_r\}$. Luego, si $n > N$, entonces $(x_i, x_i/n) \in L_n \cap U_i$, para todo $i \in \{1, \ldots, r\}$. Es decir, $L_n \cap U_i \neq \varnothing$ y entonces $L_n \in \Lambda(U_i)$, para todo $i \in \{1, \ldots, r\}$. Esto demuestra que $(L_n : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\})$ converge a L en la topología inferior.

Sin embargo, $(L_n : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\})$ no converge a L en la topología superior. En efecto, $\mathbb{R}_+ \times [0,1)$ es una vecindad de L y sin embargo, $L_n \nsubseteq \mathbb{R}_+ \times [0,1)$, para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, debido a que $(n,1) \notin \mathbb{R}_+ \times [0,1)$. Este hecho implica que $L_n \notin \Gamma(\mathbb{R}_+ \times [0,1))$ y por consiguiente, $(L_n : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\})$ no converge a L en la topología superior.

Observación 2.1. De las definiciones precedentes se desprende que los elementos basales en la topología de Vietoris son de la forma

$$\mathcal{B}(U_1, \ldots, U_r) = \Gamma(U_1) \cap \bigcap_{i=2}^{r} \Lambda(U_i),$$

donde $U_1, \ldots, U_r \in \tau$.

Proposición 2.2. *Sea X un espacio topológico. Si $i : X \to \mathcal{P}_0(X)$ es la función inclusión definida por $i(x) = \{x\}$, entonces i es continua.*

Demostración. Sea $U \in \tau$, entonces tenemos que

$$i^{-1}(\Gamma(U)) = \{x \in X : \{x\} \subseteq U\} = U.$$

Análogamente,

$$i^{-1}(\Lambda(U)) = \{x \in X : \{x\} \cap U \neq \varnothing\} = U.$$

Por lo tanto, i es continua. ∎

Proposición 2.3. *La familia de subconjuntos finitos y no vacíos de X, denotada por $\mathcal{F}$ es densa en $(\mathcal{P}_0(X), \tau_{\mathcal{V}})$.*

Demostración. Sean $U_1, ..., U_n$ abiertos en X, no vacíos. Debemos probar que existe un $B \in \mathcal{F}$ tal que $B \in \Lambda(U_1) \cap \cdots \cap \Lambda(U_{n-1}) \cap \Gamma(U_n)$. Sean $x_i \in U_i$ con $i = 1, ..., n$, entonces $B = \{x_1, ..., x_n\} \in \Lambda(U_1) \cap \cdots \cap \Lambda(U_{n-1}) \cap \Gamma(U_n) \cap \mathcal{F}$. Por lo tanto, $\mathcal{F}$ intercepta a todo elemento basal de $\tau_{\mathcal{V}}$, lo cual demuestra que $\mathcal{F}$ es densa en $(\mathcal{P}_0(X), \tau_{\mathcal{V}})$. ∎

Corolario 2.1. *Si (X, τ) es un espacio topológico Hausdorff separable, entonces $(\mathcal{P}_0(X), \tau_{\mathcal{V}})$ es un espacio topológico separable.*

Demostración. Sea $D = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ un subconjunto de X denso y contable. Sea $\mathcal{F}_D$ la colección de todos los subconjuntos finitos de D. Puesto que D intercepta a todos los conjuntos abiertos distintos del vacío, por el mismo argumento utilizado en la demostración de la Proposición 2.3, se tiene que $\mathcal{F}_D$ intercepta los elementos no vacíos de $\tau_{\mathcal{V}}$. Como $\mathcal{F}_D$ es contable, entonces $(\mathcal{P}_0(X), \tau_{\mathcal{V}})$ es separable, completándose la demostración. ∎

Para un analista, los espacios topológicos más interesantes son aquellos que al menos son Hausdorff. La siguiente proposición nos dice que bajo alguna condición razonable sobre X, el espacio topológico $(\mathcal{C}(X), \tau_{\mathcal{V}})$ tiene buenas propiedades de separación.

PROPOSICIÓN 2.4. *Si (X, τ) es un espacio topológico regular, entonces $(\mathcal{C}(X), \tau_{\mathcal{V}})$ es un espacio topológico Hausdorff.*

Demostración. Sean $A, B \in \mathcal{C}(X)$ distintos. Entonces $A \cap B^c \neq \varnothing$ o $A^c \cap B \neq \varnothing$. Supongamos que $A \cap B^c \neq \varnothing$, y sea $a \in A \cap B^c$. Ya que por hipótesis X es regular, podemos encontrar $U_1, U_2 \in \tau$ tal que $a \in U_1$, $B \subseteq U_2$ y $U_1 \cap U_2 = \varnothing$. Como $\Lambda(U_1)$ y $\Gamma(U_2)$ son elementos disjuntos de $\tau_{\mathcal{V}}$ y $A \in \Lambda(U_1)$, $B \in \Gamma(U_2)$, concluimos que $(\mathcal{C}(X), \tau_{\mathcal{V}})$ es un espacio topológico Hausdorff. ∎

A continuación estudiaremos las condiciones que garanticen la compacticidad del espacio topológico $(\mathcal{K}(X), \tau_{\mathcal{V}})$.

TEOREMA 2.1. *Si (X, τ) es un espacio topológico Hausdorff, entonces (X, τ) es compacto si y solo si $(\mathcal{C}(X), \tau_{\mathcal{V}})$ es compacto.*

Demostración. Notemos que si X es compacto, entonces $\mathcal{C}(X) = \mathcal{CB}(X) = \mathcal{K}(X)$. Luego, por Corolario 1.1 y Teorema 2.2 se desprende el resultado. ∎

El siguiente teorema relaciona la topología inducida por la métrica de Hausdorff $\tau_{\mathcal{H}}$ con la topología de Vietoris $\tau_{\mathcal{V}}$, si nos restringimos a $\mathcal{K}(X)$.

TEOREMA 2.2. *Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces la topología de Vietoris, $\tau_{\mathcal{V}}$, y la topología inducida por la métrica de Hausdorff, $\tau_{\mathcal{H}}$, coinciden sobre $\mathcal{K}(X)$.*

Demostración. Primero probaremos que $\tau_{\mathcal{V}} \subseteq \tau_{\mathcal{H}}$. Para este proposito, necesitamos probar que para todo abierto U, tanto $\Gamma(U) \cap \mathcal{K}(X)$ como $\Lambda(U) \cap \mathcal{K}(X)$ están en $\tau_{\mathcal{H}}$.

Sea $C \in \Gamma(U) \cap \mathcal{K}(X)$. Ya que $C \in \mathcal{K}(X)$, podemos encontrar $\epsilon > 0$ tal que

$$0 < \epsilon < \operatorname{ínf}\{d(x,y) : x \in C, y \in U^c\}.$$

Si $C' \in \mathrm{B}_{\mathcal{H}}(C,\epsilon) \cap \mathcal{K}(X)$, entonces $C' \subseteq \mathrm{B}(C,\epsilon) \subseteq U$, así $C' \in \Gamma(U) \cap \mathcal{K}(X)$. Por lo tanto, $\mathrm{B}_{\mathcal{H}}(C,\epsilon) \cap \mathcal{K}(X) \subseteq \Gamma(U) \cap \mathcal{K}(X)$ y esto implica que $\Gamma(U) \cap \mathcal{K}(X) \in \tau_{\mathcal{H}}$.

Ahora sea $C \in \Lambda(U) \cap \mathcal{K}(X)$. Podemos encontrar $x \in C \cap U$ y $\epsilon > 0$ tal que $\mathrm{B}(x,\epsilon) \subseteq U$. Si $C' \in \mathrm{B}_{\mathcal{H}}(C,\epsilon)$, tenemos que $C' \cap \mathrm{B}(x,\epsilon) \neq \varnothing$ y así $C' \cap U \neq \varnothing$, lo que implica que $C' \in \Lambda(U)$. Por lo tanto, $\mathrm{B}_{\mathcal{H}}(C,\epsilon) \cap \mathcal{K}(X) \subseteq \Lambda(U) \cap \mathcal{K}(X)$ y así se tiene que $\Lambda(U) \cap \mathcal{K}(X) \in \tau_{\mathcal{H}}$. Con esto queda demostrado que $\tau_{\mathcal{V}} \subseteq \tau_{\mathcal{H}}$.

Ahora probaremos que $\tau_{\mathcal{H}} \subseteq \tau_{\mathcal{V}}$. Sean $G \in \tau_{\mathcal{H}}$ y $\epsilon > 0$. Debemos probar que para todo $C \in G$, existen conjuntos abiertos $U_1, ..., U_r \in X$ tal que $C \subseteq \mathcal{B}(U_1, ..., U_n) \cap \mathcal{K}(X) \subseteq \mathrm{B}_{\mathcal{H}}(C,\epsilon)$. Como $C \in \mathcal{K}(X)$, existen $U_2, ..., U_r$ bolas en X tal que $C \subseteq U_2 \cup \cdots \cup U_r$, donde $U_i = \mathrm{B}(x_i, \epsilon/2)$ y definamos $U_1 = \mathrm{B}(C,\epsilon)$. Así tenemos que $C \in \mathcal{B}(U_1, ..., U_r)$.

Probaremos que $\mathcal{B}(U_1, ..., U_r) \subseteq \mathrm{B}_{\mathcal{H}}(C,\epsilon)$. Para esto, dado $C' \in \mathcal{B}(U_1, ..., U_r)$ debemos mostrar que $\mathcal{H}(C', C) < \epsilon$. En efecto, si $x \in C' \subseteq \mathrm{B}(C,\epsilon)$, entonces $d(x,C) < \epsilon$. Recíprocamente, para probar que $C \subseteq \mathrm{B}(C',\epsilon)$, sea $x \in C \subseteq U_2, ..., U_r$, entonces existe $i_0 \in \{2, ..., r\}$ tal que $x \in U_{i_0}$. Como $U_{i_0} \cap C' \neq \varnothing$, pues $C' \in \bigcap_{i=2}^{r} \Lambda(U_i)$, tenemos que dado $y \in U_{i_0} \cap C'$, se tiene que $d(x,C') \leq d(x,y)$. Pero como $x, y \in U_{i_0}$, entonces $d(x,y) < \epsilon$, por lo tanto $d(x,C') < \epsilon$. Así tenemos que $C' \in \mathrm{B}_{\mathcal{H}}(C,\epsilon)$, con lo que queda demostrado que $\tau_{\mathcal{H}} \subseteq \tau_{\mathcal{V}}$. ∎

Corolario 2.2. *Si (X,d) es un espacio métrico, la topología inducida por la métrica de Hausdorff sobre $\mathcal{K}(X)$ depende de la topología de X y no de su métrica.*

Definición 2.4. Sea (X,τ) un espacio topológico. Se dice que (X,τ) es un espacio polaco, si τ es metrizable mediante una métrica d, de modo que (X,d) es un espacio métrico completo separable.

Combinando el Teorema 1.2 y la Proposición 1.6, con el Teorema 2.2, obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 2.3.

(i) *Si (X,τ) es un espacio separable y metrizable, entonces $(\mathcal{K}(X), \tau_{\mathcal{V}})$ también lo es.*

(ii) *Si* (X, τ) *es un espacio Polaco, entonces* $(\mathcal{K}(X), \tau_{\mathcal{V}})$ *también lo es.*

Otro resultado importante que nos ayuda a probar el teorema 2.2, es el "Teorema de Blaschke"

TEOREMA 2.3. *Si* (X, d) *es un espacio métrico compacto, entonces toda sucesión en* $\mathcal{K}(X)$ *posee una subsucesión convergente.*

Demostración. Por teorema 2.2 tenemos que $(\mathcal{K}(X), \tau_{\mathcal{V}}) = (\mathcal{K}(X), \tau_{\mathcal{H}})$, y por teorema 2.1 tenemos que $(\mathcal{K}(X), \tau_{\mathcal{V}})$ es compacto. Por lo tanto, el resultado es inmediato. ∎

Capítulo 2

Continuidad en Correspondencias

1. Correspondencias

Definición 1.1. Sean X e Y dos conjuntos no vacíos. Una correspondencia F de X en Y es una función de X en el conjunto potencia de Y, es decir, $F : X \to \mathcal{P}(Y)$.

Definiciones 1.1. Sean $F : X \to \mathcal{P}(Y)$ una correspondencia, A un subconjunto de X y B un subconjunto de Y. Entonces, definimos:

(i) El *dominio* de F como $Dom(F) := \{x \in X : F(x) \neq \varnothing\}$.
(ii) La *imagen* de A como $F(A) := \bigcup_{x \in A} F(x)$.
(iii) La *imagen inversa débil* de B por F como $F^{-}(B) := \{x \in X : F(x) \cap B \neq \varnothing\}$
(iv) La *imagen inversa fuerte* de B por F como $F^{+}(B) := \{x \in X : F(x) \subseteq B\}$.
(v) El *gráfico* de F como $Gr(F) := \{(x, y) \in X \times Y : y \in F(x)\}$.
(vi) La *clausura* de F, denotada por $cl(F)$, como $cl(F) := \overline{F(x)}$, para todo $x \in X$.

Definiciones 1.2. Sean $F_1, F_2 : X \to \mathcal{P}(Y)$ dos correspondencias, entonces definimos la unión, la intersección y la composición respectivamente como sigue:

(i) $(F_1 \cup F_2)(x) := F_1(x) \cup F_2(x)$.
(ii) $(F_1 \cap F_2)(x) := F_1(x) \cap F_2(x)$.
(iii) $(F_2 \circ F_1)(x) := \bigcup_{y \in F_1(x)} F_2(y)$.

Proposición 1.1. *Si $F_1, F_2 : X \to \mathcal{P}(Y)$ son dos correspondencias y $A \subseteq Y$, entonces:*

(i) $(F_1 \cup F_2)^{-}(A) = F^{-}(A) \cup F_2^{-}(A)$.
(ii) $(F_1 \cap F_2)^{-}(A) \subseteq F_1^{-}(A) \cap F_2^{-}(A)$.
(iii) $(F_1 \cup F_2)^{+}(A) = F_1^{+}(A) \cap F_2^{+}(A)$.
(iv) $(F_1 \cap F_2)^{+}(A) \supseteq F_1^{+}(A) \cup F_2^{+}(A)$.

Demostración. Solo demostraremos (i) y (ii) ya que las demostraciones de (iii) y (iv) son análogas.

(i) Tenemos que $x \in (F_1 \cup F_2)^{-}(A)$, si y solo si, $(F_1 \cup F_2)(x) \cap A \neq \varnothing$. Es decir, si y solo si, $F_1(x) \cap A \neq \varnothing$ o $F_2(x) \cap A \neq \varnothing$.

(ii) Si $x \in (F_1 \cap F_2)^{-}(A)$, entonces $A \cap (F_1(x) \cap F_2(x)) \neq \varnothing$, es decir, $A \cap F_1(x) \neq \varnothing$ y $A \cap F_2(x) \neq \varnothing$.
Sin embargo, es posible que que A intersecte a $F_1(x)$ y $F_2(x)$ sin intersectar a $F_1(x) \cap F_2(x)$. ∎

Proposición 1.2. *Si $F_1 : X \to \mathcal{P}(Y)$ y $F_2 : Y \to \mathcal{P}(Z)$ son dos correspondencias, y $C \subseteq Z$, entonces:*

(i) $(F_2 \circ F_1)^{-}(C) = F_1^{-}(F_2^{-}(C))$.
(ii) $(F_2 \circ F_1)^{+}(C) = F_1^{+}(F_2^{+}(C))$.

Demostración.

(i)
$$\begin{aligned} (F_2 \circ F_1)^{-}(C) &= \{x : (F_2 \circ F_1)(x) \cap C \neq \varnothing\} \\ &= \{x : F_2(y) \cap C \neq \varnothing,\ y \in F_1(x)\} \\ &= \{x : F_1(x) \cap F_2^{-}(C) \neq \varnothing\}. \\ &= F_1^{-}(F_2^{-}(C)). \end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned} (F_2 \circ F_1)^{+}(C) &= \{x : (F_2 \circ F_1)(x) \subseteq C\} \\ &= \{x : F_2(y) \subseteq C,\ \text{para algún y en } F_1(x)\} \\ &= \{x : F_1(x) \subseteq F_2^{+}(C)\} \\ &= F_1^{+}(F_2^{+}(C)). \end{aligned}$$

∎

Proposición 1.3. *Sea $F : X \to \mathcal{P}(Y)$ una correspondencia, A un subconjunto de Y y $\{A_\alpha : \alpha \in I\}$ una familia de de subconjuntos de Y, entonces:*

(i) $X \setminus F^{+}(A) = F^{-}(Y \setminus A)$.
(ii) $X \setminus F^{-}(A) = F^{+}(Y \setminus A)$.
(iii) $F^{-}(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in I} F^{-}(A_\alpha)$.
(iv) $F^{+}(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in I} F^{+}(A_\alpha)$.

(v) $F^-(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha) \subseteq \bigcap_{\alpha\in I} F^-(A_\alpha)$.
(vi) $F^+(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha) = \bigcap_{\alpha\in I} F^+(A_\alpha)$.

Demostración. Solo demostraremos (i) y (iv).

(i)

$$\begin{aligned} x \in X \setminus F^+(V) &\Leftrightarrow x \notin F^+(A) \\ &\Leftrightarrow F(x) \nsubseteq A \\ &\Leftrightarrow F(x) \cap (Y \setminus A) \neq \varnothing \\ &\Leftrightarrow x \in F^-(A). \end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned} x \in \textstyle\bigcup_{\alpha\in I} F^+(A_\alpha) &\Leftrightarrow x \in F^+(A_{\alpha_0}),\ \alpha_0 \in I \\ &\Leftrightarrow F(x) \subseteq A_{\alpha_0},\ \alpha_0 \in I \\ &\Leftrightarrow F(x) \subseteq \textstyle\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha \\ &\Leftrightarrow x \in F^+(\textstyle\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha). \end{aligned}$$

■

Definición 1.2. Sean $F_1 : X \to \mathcal{P}(Y_1)$ y $F_2 : X \to \mathcal{P}(Y_2)$ dos correspondencias, entonces definimos $F : X \to \mathcal{P}(Y_1 \times Y_2)$ por $F(x) = (F_1 \times F_2)(x) := F_1(x) \times F_2(x)$.

Proposición 1.4. . *Con las notaciones de la definición anterior, si $A \subseteq Y_1$ y $B \subseteq Y_2$, entonces:*

(i) $F^+(A \times B) = F_1^+(A) \cap F_2^+(B)$.
(ii) $F^-(A \times B) = F_1^-(A) \cap F_2^-(B)$.

Demostración.

(i) Tenemos que $x \in F^+(A \times B)$ si y solo si $F_1(x) \subseteq A$ y $F_2(x) \subseteq B$, es decir, si $x \in F_1^+(A) \cap F_2^+(B)$.
(ii) Análogamente, $x \in F^-(A \times B)$ si y solo si $F_1(x) \cap A \neq \varnothing$ y $F_2(x) \cap B \neq \varnothing$, es decir, si $x \in F_1^-(A) \cap F_2^-(B)$. ■

2. Continuidad de Vietoris

Las topologías inferior, superior y de Vietoris introducidas en el Capítulo 1 conducen a los conceptos de continuidad para correspondencias. En esta sección, tales conceptos serán definidos y procedemos a estudiar sus propiedades.

En esta sección, X e Y denotarán espacios topológicos Hausdorff.

Definición 2.1. Sea $F : X \to \mathcal{P}_0(X)$ una correspondencia, se dice que:

(i) F es *semicontinua superior*, si $F : X \to (\mathcal{P}_0(X), \tau_u)$ es continua.
(ii) F es *semicontinua inferior*, si $F : X \to (\mathcal{P}_0(X), \tau_\ell)$ es continua.
(iii) F es *continua*, si $F : X \to (\mathcal{P}_0(X), \tau_\mathcal{V})$ es continua.

De las definiciones de las topologías $\tau_\mathcal{V}, \tau_u, \tau_\ell$, se deducen los siguientes resultados.

Proposición 2.1. *Sea $F : X \to \mathcal{P}_0(Y)$ una correspondencia, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:*

(i) *F es semicontinua superior.*
(ii) *Para todo $A \subseteq Y$ abierto, $F^+(A)$ es abierto en X.*
(iii) *Para todo $B \subseteq Y$ cerrado, $F^-(B)$ es cerrado en X*
(iv) *Si $(x_\alpha : \alpha \in I)$ es una red que converge a $x \in X$ y $A \subseteq Y$ es un conjunto abierto tal que $F(x) \subseteq A$, entonces existe α_0 tal que $F(x_\alpha) \subseteq A$, para todo $\alpha \geq \alpha_0$.*

Demostración.

$(i) \Longleftrightarrow (ii)$. Sea A un subconjunto abierto de Y. Entonces, $F^+(A)$ es abierto en X y como $F^+(A) = \{x \in X : F(x) \subseteq A\} = \{x \in X : F(x) \in \Gamma(A)\} = F^{-1}(\Gamma(A))$ y además $\Gamma(A) \in (Y, \tau_u)$, se tiene que F es semicontinua superior. El recíproco es inmediato.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Sea B cerrado en Y. Basta probar que $Y \setminus F^-(B)$ es abierto. Pero esto es inmediato, pues por Proposición 1.3 tenemos que $Y \setminus F^-(B) = F^+(Y \setminus B)$.

$(ii) \Rightarrow (iv)$. Si $(x_\alpha : \alpha \in I)$ es una red que converge a $x \in X$ y $A \subseteq Y$ es un abierto tal que $F(x) \subseteq A$, entonces $F^+(A) \subseteq X$ es abierto. Luego, existe $\alpha_0 \in I$ tal que si $\alpha \geq \alpha_0$, entonces $x_\alpha \in F^+(A)$. Por lo tanto, $F(x_\alpha) \subseteq A$ si $\alpha \geq \alpha_0$.

$(iv) \Rightarrow (ii)$ Sea $A \subseteq Y$ abierto. Supongamos que $F^+(A)$ no es abierto, entonces existe $x_0 \in F^+(A)$ que no es punto interior de A. Consideremos el conjunto dirigido

I_0 de todas las vecindades de x_0 ordenadas parcialmente por inclusión. Luego, para cada $\alpha \in I_0$ existe x_α tal que $x_\alpha \notin F^+(A)$. Así, $(x_\alpha : \alpha \in I)$ converge a x_0 y $F(x_0) \subseteq A$, por lo tanto $F(x_\alpha) \subseteq A$ para α suficientemente grande, lo que es una contradicción. ∎

Observación 2.1. Si $f : X \to Y$ es una función y $F = \{f\}$, entonces $F^+(A) = F^{-1}(A)$ y por proposición anterior, F es semicontinua superior, si y solo si, f es continua.

Proposición 2.2. *Sea $F : X \to \mathcal{P}_0(Y)$ una correspondencia, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:*

(i) *F es semicontinua inferior.*
(ii) *Para todo $A \subseteq Y$ abierto, $F^-(A)$ es abierto en X.*
(iii) *Para todo $B \subseteq Y$ cerrado, $F^+(B)$ es cerrado en X.*
(iv) *Si $x \in X$, $(x_\alpha : \alpha \in I)$ es una red que converge a x y $A \subseteq Y$ es abierto tal que $F(x) \cap A \neq \varnothing$, entonces existe α_0 tal que si $\alpha \geq \alpha_0$ tenemos que $F(x_\alpha) \cap A \neq \varnothing$.*

Demostración. Con las notaciones del teorema 2.1, tenemos que $F^{-1}(\Lambda(A)) = \{x \in X : F(x) \cap A \neq \varnothing\} = F^-(A)$, con esto queda demostrada la equivalencia entre (i) y (ii). El resto de la demostración es análoga a la del Proposición 2.1. ∎

Observación 2.2. Si $f : X \to Y$ es una función y $F = \{f\}$, entonces $F^-(A) = F^{-1}(A)$ y por proposición anterior, F es semicontinua inferior, si y solo si, f es continua.

Definición 2.2. Una correspondencia $F : X \to \mathcal{P}_0(Y)$ se dice *cerrada en x_0*, si para toda red $((x_\alpha, y_\alpha) : \alpha \in I) \subseteq Gr(F)$ que converge a $(x_0, y_0) \in X \times Y$, tenemos que $y_0 \in F(x_0)$, es decir, que $(x_0, y_0) \in Gr(F)$. Diremos que F es *cerrada*, si es cerrada para todo $x_0 \in X$. Si esta propiedad solo se cumple para sucesiones en $Gr(F)$, entonces decimos que F es *secuencialmente cerrada*.

Notaciones 2.1. $\mathcal{N}(x)$ denotará la colección de todas las vecindades de x.

Proposición 2.3. *Una correspondencia $F : X \to \mathcal{P}_0(Y)$ es cerrada en $x \in X$, si y solo si para toda red $(x_\alpha : \alpha \in I)$ que converge a x, se cumple que*

$$\bigcap_{\alpha \in I} \overline{\bigcup_{\beta \geq \alpha} F(x_\beta)} \subseteq F(x)$$

Demostración. Sea $x \in X$ y supongamos que F es cerrada en x. Sean $(x_\alpha : \alpha \in I)$ una red que converge a x e $y \in \bigcap_{\alpha \in I} \overline{\bigcup_{\beta \geq \alpha} F(x_\beta)}$. Luego,

$$(\forall \alpha \in I)(\forall V \in \mathcal{N}(y))(\exists \beta \geq \alpha)(V \cap F(x_\beta) \neq \varnothing). \tag{2}$$

Debemos demostrar que $(x, y) \in Gr(F)$. Como F es cerrada en x, basta definir una red en $Gr(F)$ que converge a (x, y). Para este efecto, definimos el conjunto $R(y) = \{(\alpha, V) \in I \times \mathcal{N}(y) : x_\alpha \in F^-(V)\}$, el cual es un conjunto dirigido con el orden parcial $\leq$ definido por

$$[(\alpha_2, V_2) \leq (\alpha_1, V_1)] \Longleftrightarrow [\alpha_2 \leq \alpha_1 \wedge V_1 \subseteq V_2].$$

En efecto, es fácil ver que $(R(y), \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado. Sean $(\alpha, V), (\beta, W) \in R(y)$ y $U = V \cap W$. Como $(I, \leq)$ es un conjunto dirigido, existe $\delta \in I$ tal que $\alpha \vee \beta \leq \delta$. Por (2) y debido a que $U \in \mathcal{N}(y)$, existe $\gamma > \delta$ tal que $U \cap F(x_\gamma) \neq \varnothing$, vale decir, $x_\gamma \in F^-(U)$. Luego, $(\gamma, U) \in R(y)$ y es evidente que $(\alpha, V) \vee (\beta, W) \leq (\gamma, U)$. Esto prueba que $(R(y), \leq)$ es un conjunto dirigido.

Definamos $\varphi : R \to I$ por $\varphi(\alpha, V) = \alpha$ y, ya que para cada $r = (\alpha, V) \in R(y)$, $V \cap F(x_\alpha) \neq \varnothing$, podemos escoger $y_\alpha \in V \cap F(x_\alpha)$. Luego, $((x_{\varphi(r)}, y_{\varphi(r)}) : r \in R(y))$ es una red en $Gr(F)$. Demostraremos que esta red converge a (x, y). Sean U y W vecindades de x e y, respectivamente. Como $(x_\alpha : \alpha \in I)$ converge a x, entonces existe $\alpha_0 \in I$ tal que $x_\alpha \in U$, para todo $\alpha \geq \alpha_0$. Sea $r_0 = (\alpha_0, W)$. Luego, $x_{\varphi(\alpha, V)} \in U$ e $y_{\varphi(\alpha, V)} \in V \cap F(x_\alpha) \subseteq W$, para todo $(\alpha, V) \geq r_0$. Esto demuestra que la red $((x_{\varphi(r)}, y_{\varphi(r)}) : r \in R(y))$ converge a (x, y) y que, como F es cerrada, $y \in F(x)$.

Recíprocamente, sea $((x_\alpha, y_\alpha) : \alpha \in I) \subseteq Gr(F)$ una red convergente a $(x, y) \in X \times Y$. Debemos demostrar que $(x, y) \in Gr(F)$. Tenemos que $(x_\alpha : \alpha \in I)$ converge a x y entonces

$$\bigcap_{\alpha \in I} \overline{\bigcup_{\beta \geq \alpha} F(x_\beta)} \subseteq F(x).$$

Por consiguiente, es suficiente demostrar que $y \in \bigcap_{\alpha \in I} \overline{\bigcup_{\beta \geq \alpha} F(x_\beta)}$. Notemos que, para todo $\alpha \in I$, $(y_\beta : \beta \geq \alpha)$ es una sub red en $\overline{\bigcup_{\beta \geq \alpha} F(x_\beta)}$ que converge a y y, por consiguiente, $y \in \overline{\bigcup_{\beta \geq \alpha} F(x_\beta)}$. Vale decir,

$$y \in \bigcap_{\alpha \in I} \overline{\bigcup_{\beta \geq \alpha} F(x_\beta)} \subseteq F(x),$$

lo cual completa la demostración. ∎

También se tiene un resultado análogo para correspondencias secuencialmente cerradas.

Proposición 2.4. *Sea* $F : X \to \mathcal{P}_0(Y)$ *y supongamos que para cualquier sucesión* $(x_n : n \in \mathbb{N})$ *en* X *que converge a* x, *tenemos que* $\bigcap_{n\geq 0} \overline{\bigcup_{k\geq n} F(x_k)} \subseteq F(x)$. *Entonces* F *es secuencialmente cerrada en* x. *El recíproco es cierto si* Y *es primero contable.*

Demostración. Sea $((x_n, y_n) : n \in \mathbb{N}) \subseteq Gr(F)$ una sucesión que converge a (x, y). Debemos probar que $y \in F(x)$. Por hipótesis, $\bigcap_{n\geq 0} \overline{\bigcup_{k\geq n} F(x_k)} \subseteq F(x)$, entonces basta probar que $y \in \overline{\bigcup_{k\geq n} F(x_k)}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir, que para $V \in \mathcal{N}(y), V \cap \bigcup_{k\geq n} F(x_k) \neq \varnothing$. Como y_n converge a y, existe k_1 tal que para todo $k \geq k_1$, $y_k \in V$. Luego, basta tomar $k_2 \geq \text{máx}\{n, k_1\}$ y así $y_{k_2} \in V \cap F(x_{k_2})$. Por lo tanto, $V \cap F(x_{k_2}) \neq \varnothing$ e $y \in F(x)$.

Recíprocamente, sea $y \in \bigcap_{n\geq 0} \overline{\bigcup_{k\geq n} F(x_k)}$ y $(x_n : n \in \mathbb{N})$ una sucesión que converge a $x \in X$. Ya que Y es primero comtable, podemos definir una base local $(V_n : n \in \mathbb{N}) \subseteq \mathcal{N}(y)$. Así, para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $V_n \cap (\bigcup_{k\geq n} F(x_k)) \neq \varnothing$. Sea $(k_n : n \in \mathbb{N})$ una subsucesión, podemos encontrar k_n tal que $V_n \cap F(x_{k_n}) \neq \varnothing$. Sea $y_n \in V_n \cap F(x_{k_n})$, como (x_{k_n}, y_n) converge a (x, y), y F es secuencialmente cerrada, entonces $y \in F(x)$. ∎

Proposición 2.5. *Sea* $F : X \to \mathcal{P}_0(Y)$ *una correspondencia cerrada y* $K \in \mathcal{K}(X)$, *entonces* $F(K)$ *es cerrado en* Y.

Demostración. Sea $y \in \overline{F(K)}$, podemos encontrar una red $(y_\alpha : \alpha \in I) \subseteq F(K)$ que converge a y. Ya que $K \subseteq X$ es compacto, podemos encontrar una subred $(x_\beta : \beta \in J)$ de $(x_\alpha : \alpha \in I)$ convergente a $x \in K$. Entonces $((x_\beta, y_\beta) : \beta \in J) \subseteq Gr(F)$ converge a $(x, y) \in X \times Y$. Como $Gr(F)$ es cerrado, $(x, y) \in Gr(F)$. Por lo tanto, $y \in F(K)$, lo que implica que $F(K) \subseteq Y$ es cerrado. ∎

La siguiente proposición relaciona la noción de clausura con los conceptos de continuidad estudiados anteriormente.

Proposición 2.6. *Si* Y *es un espacio topológico regular y* $F : X \to \mathcal{C}(Y)$ *una correspondencia semicontinua superior, entonces* F *es cerrada.*

Demostración. Sea $((x_\alpha, y_\alpha) : \alpha \in I) \subseteq Gr(F)$ una red que converge a $(x, y) \in X \times Y$. Supongamos que F no es cerrada, es decir, $y \notin F(x)$. Como Y es regular, podemos encontrar dos conjuntos abiertos V_1, V_2, tal que $y \in V_1$, $F(x) \subset V_2$ y $V_1 \cap V_2 = \varnothing$. Ya que F es semicontinua superior, por proposición 2.1, podemos encontrar $\alpha_0 \in I$ tal que para $\alpha \geq \alpha_0$, $F(x_\alpha) \subseteq V_2$, mientras que $y_\alpha \in V_1$, lo que es una contradicción, pues en este caso $(x_\alpha, y_\alpha) \notin Gr(F)$. ∎

El recíproco de esta proposición no es cierto en general, lo que mostraremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.1. Sean $X = Y = \mathbb{R}_+$ y $F : X \to \mathcal{K}(Y)$ definida por

$$F(x) = \begin{cases} [0, x] \cup \{\frac{1}{x}\} & \text{si } x > 0 \\ \{0\} & \text{si } x = 0 \end{cases} \tag{3}$$

es cerrada, pero no semicontinua superior en $x = 0$, como veremos a continuación.

Sea $((x_n, y_n) : n \in \mathbb{N}) \subseteq Gr(F)$. Si $x = 0$, entonces (x_n, y_n) converge a $(0, 0)$ pues $0 \leq y_n \leq x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $0 \in F(0)$, entonces F es cerrada en $x = 0$. Si $x > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n > 0$ para todo $n > N$. Como $0 \leq y_n \leq x_n$, entonces $0 \leq y \leq x$. Por lo tanto, $y \in [0, x] \subseteq [0, x] \cup \{1/x\}$. En consecuencia, F es cerrada. Pero F no es semicontinua superior en $x = 0$, pues $F^+([0, 1)) = \{x \in \mathbb{R}_+ : F(x) \subseteq [0, 1)\} = \{x \in \mathbb{R}_+ : [0, x] \cup \{1/x\}\} \subseteq [0, 1) \cup \{0\} = \{0\}$, que es cerrado. Luego, el resultado se desprende de la Proposición 2.1.

Antes de establecer las condiciones que garanticen la validez del recíproco de la Proposición 2.6, mostraremos que para correspondencias compactas, podemos omitir el requisito de que Y sea regular. Para esto, es necesario el siguiente resultado.

Proposición 2.7. *Una correspondencia $F : X \to \mathcal{P}_0(Y)$ es compacta y semicontinua superior en x si y solo si para toda red $((x_\alpha, y_\alpha) : \alpha \in I) \subseteq Gr(F)$ tal que $(x_\alpha : \alpha \in I)$ converge a x en X, $(y_\alpha : \alpha \in I)$ tiene un punto de acumulación en $F(x)$.*

Demostración. Sea $((x_\alpha, y_\alpha) : \alpha \in I) \subseteq Gr(F)$ y asumamos que $(x_\alpha : \alpha \in I)$ converge a x. Supongamos que $(y_\alpha : \alpha \in I)$ no tiene un punto de acumulación en $F(x)$. Entonces, para todo $y \in F(x)$, podemos encontrar $V(y) \in \mathcal{N}(y)$ y $\alpha_0(y) \in I$ tal que para todo $\alpha \geq \alpha_0(y)$, $y_\alpha \notin V(y)$. Como F es compacta, la familia $\{V(y) : y \in F(x)\}$ forma un cubrimiento por abiertos para $F(x)$. Por lo tanto, existe un subcubrimiento finito $\{V(y_1, ..., V(y_N))\}$. Sea $V = \bigcup_{k=1}^{N} V(y_k) \supseteq F(x)$. Es claro que existe $\alpha_1 \in I$ tal que si $\alpha \geq \alpha_1$, entonces $y_\alpha \notin V$. Por otro lado, como F es semicontinua superior, podemos encontrar $U \in \mathcal{N}(x)$ tal que $F(U) \subseteq V$. Puesto que x_α converge a x en X, tenemos que para todo $\alpha \geq \alpha_1$, $x_\alpha \in U$ e $y_\alpha \in V$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $(y_\alpha : \alpha \in I)$ tiene un punto de acumulación en $F(x)$.

Para el recíproco, notemos que la hipotesis implica que $F(x) \in \mathcal{K}(X)$. Por Teorema 2.1, para establecer la semicontinuidad superior en x, debemos mostrar que si x_α tiende a x en X y $V \subseteq Y$ es abierto tal que $F(x) \subseteq V$, entonces existe $\alpha_0 \in I$ tal que, si $\alpha \geq \alpha_0$, $F(x_\alpha) \subseteq V$. Supongamos lo contrario, entonces podemos encontrar una subred $(x_\beta : \beta \in J)$ de $(x_\alpha : \alpha \in I)$ tal que $F(x_\beta) \cap V^c \neq \varnothing$. Sea $y_\beta \in F(_\beta) \cap V^c$, ya que x_β converge a x en X y por hipotesis $(y_\beta : \beta \in J)$ tiene un punto de acumulación $y \in F(x)$, entonces existe una subred $(y_\gamma : \gamma \in H)$ de $(y_\beta : \beta \in J)$ que converge a $y \in F(x) \cap V^c$, lo que contradice la elección de V. ∎

Una consecuencia inmediata de esta proposición es la siguiente propiedad fundamental de las correspondencias compactas (comparar con la proposición 2.5).

Corolario 2.1. *Si $F : X \to \mathcal{K}(Y)$ es semicontinua superior y $K \in \mathcal{K}(X)$, entonces $F(K) \in \mathcal{K}(Y)$.*

Demostración. Sea $(y_\alpha : \alpha \in I)$ una red en $F(K)$. Como K es compacto, podemos encontrar una subred $(x_\beta : \beta \in J)$ que converge a $x \in K$. Por proposición 2.7, $(y_\beta : \beta \in J)$ tiene un punto de acumulación $y \in F(x)$. Se sigue que podemos encontrar una subred $(y_\gamma : \gamma \in H)$ de $(y_\beta : \beta \in J)$ que converge a $y \in Y$. Por lo tanto, $F(K)$ es compacto. ∎

Ejemplo 2.2. El coroloario falla si la semicontinuidad superior es reemplazada por semicontinuidad inferior. En efecto, sean $X = Y = [0,1]$ y $F(x) = [0,x]$ si $x \in [0,1)$ y $F(1) = \{0\}$. Entonces F es semicontinua inferior con valores compactos, pero $F([0,1]) = [0,1)$.

Teniendo la Proposición 2.7, podemos probar la siguiente variante de la Proposición 2.6.

Proposición 2.8. *Si $F : X \to \mathcal{K}(Y)$ es semicontinua superior, entonces F es cerrada.*

Demostración. Sea $((x_\alpha, y_\alpha) : \alpha \in I) \subseteq Gr(F)$ una red y supongamos que converge a $(x, y) \in X \times Y$. Por proposición 2.7, tenemos que $y \in F(x)$. Por lo tanto, F es cerrada. ■

Proposición 2.9. *Si $F : X \to \mathcal{C}(X)$ es cerrada y localmente compacta (es decir, para todo $x \in X$, existe $U \in \mathcal{N}(x)$ tal que $\overline{F(U)} \in \mathcal{K}(X)$), entonces F es semicontinua superior.*

Demostración. Sea $((x_\alpha, y_\alpha) : i \in I) \subseteq Gr(F)$ una red, tal que x_α converge a x en X, mostraremos que $(y_\alpha : \alpha \in I)$ tiene un punto de acumulación en $F(x)$. Por hipotesis, podemos encontrar $U \in \mathcal{N}(x)$ tal que $\overline{F(U)} \in \mathcal{K}(Y)$, de manera que también podemos encontrar una subred $(y_\beta : \beta \in J)$ de $(y_\alpha : \alpha \in I)$, convergente a $y \in \overline{F(U)}$. Como para toda β, $(x_\beta, y_\beta) \in Gr(F)$ y $Gr(F)$ es cerrado, tenemos que $(x, y) \in Gr(F)$. Por lo tanto $(y_\alpha : \alpha \in I)$ tiene un punto de acumulación $y \in F(x)$ y por proposición 2.7 F es semicontinua superior. ■

Hemos visto que la compacticidad se preserva en correspondencias compactas semicontinuas superior, pero no semicontinuas inferior. A continuación mostraremos que la conexidad se preserva en ambos casos.

Proposición 2.10. *Si $F : X \to \mathcal{P}_0(Y)$ es conexa y semicontinua superior o inferior, entonces para todo $C \subseteq X$ conexo, $F(C)$ es conexa.*

Demostración. Supongamos que F es semicontinua inferior. Sean $V_1, V_2 \subseteq Y$ abiertos tales que $F(C) \subseteq V_1 \cup V_2$, $F(C) \cap V_1 \neq \varnothing$ y $F(C) \cap V_2 \neq \varnothing$. Debemos mostrar que $F(C) \cap V_1 \cap V_2 \neq \varnothing$. Como $F(C) \subseteq V_1 \cup V_2$ y F es semicontinua inferior, entonces $C \subseteq F^-(V_1 \cup V_2) = F^-(V_1) \cup F^{(}V_2)$. Por conexidad de C, se tiene que $F^-(V_1) \cap F^-(V_2) \neq \varnothing$. Sea $x \in C \cap F^-(V_1) \cap F^-(V_2)$, entonces $F(x) \cap V_1 \neq \varnothing$, $F(x) \cap V_2 \neq \varnothing$ y $F(x) \subseteq V_1 \cup V_2$. Como F es conexa, se deduce que $F(x) \cap V_1 \cap V_2 \neq \varnothing$ y $F(C) \cap V_1 \cap V_2 \neq \varnothing$. Por lo tanto, $F(C)$ es conexa.

En caso de que F sea semicontinua superior, los mismos argumentos son validos, pero considerando $F(C)$ cerrado y que la imagen inversa de un conjunto cerrado es cerrada (Proposición 2.1). ■

PROPOSICIÓN 2.11. *Si Y es un espacio métrico y $F : X \to \mathcal{P}_0(Y)$, entonces F es semicontinua inferior si y solo si para toda $v \in Y$, $\varphi_v(x) = d(v, F(x))$ es semicontinua superior.*

Demostración. Supongamos que F es semicontinua inferior. Debemos probar que $\varphi_v(x)$ es semicontinua superior, es decir, que para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ el conjunto $U_\lambda = \{x \in X : \varphi_v(x) < \lambda\}$ es abierto. Es claro que si $\lambda < 0$, entonces $U_\lambda = \varnothing$. Si $\lambda \geq 0$, entonces $U_\lambda = \{x \in X : \varphi_v(x) < \lambda\} = \{x \in X : F(x) \cap \mathrm{B}(v, \lambda) \neq \varnothing\} = F^{-}(\mathrm{B}(v, \lambda))$, que por hipótesis es abierto.

Recíprocamente, supongamos que $\varphi_v(x)$ es semicontinua superior. Sea $Y \subseteq Y$ abierto, probaremos que $F^{-}(V)$. Como V es abierto, lo podemos expresar como unión de abiertos, es decir, $V = \bigcup_{\alpha \in I} \mathrm{B}(v_\alpha, \epsilon_\alpha)$, donde cada $v_i \in V$ y todo $\epsilon_\alpha > 0$. Luego, $F^{-}(V) = \{x \in X : F(x) \cap V \neq \varnothing\} = \bigcup_{\alpha \in I}\{x \in X : F(x) \cap \mathrm{B}(v_\alpha, \epsilon_\alpha) \neq \varnothing\} = \bigcup_{\alpha \in I}\{x \in X : \varphi_v(x) < \epsilon_\alpha\}$. Es decir, $F^{-}(V)$ es unión de abiertos, por lo tanto es semicontinua inferior. ∎

Con una hipótesis adicional el recíproco de la proposición precedente es verdadero.

PROPOSICIÓN 2.12. *Si Y es un espacio métrico, $F : X \to \mathcal{C}(Y)$ es localmente compacta y para todo $y \in Y$, $x \to d(y, F(x))$ es semicontinua inferior, entonces F es semicontinua superior.*

Demostración. Por proposición 2.9, es suficiente probar que F es cerrada. Sea $((x_\alpha, y_\alpha) : \alpha \in I)$ una red que converge a $(x, y) \in X \times Y$. Entonces tenemos que $d(y, F(x)) \leq \liminf_{n \to \infty} d(y, F(x_n)) \leq \liminf_{n \to \infty}[d(y, y_n) + d(y_n, F(x_n))] = 0$, esto implica que $y \in F(x)$, por lo tanto F es cerrada. ∎

En lo que resta de esta sección, veremos que ciertas operaciones básicas preservan los conceptos de continuidad previamente vistos.

PROPOSICIÓN 2.13. *Una correspondencia $F : X \to \mathcal{P}_0(Y)$ es semicontinua inferior si y solo si $\overline{F}$ lo es también.*

Demostración. Sea $V \subset Y$ abierto y supongamos que F es semicontinua inferior, entonces $F^{-}(V) = \{x \in X : F(x) \cap V \neq \varnothing\} = \{x \in X : \overline{F(x)} \cap V \neq \varnothing\} = \overline{F^{-}(V)}$. ∎

Ejemplo 2.3. La proposición 2.13 no se cumple para correspondencias semicontinuas superior. Sean $X = Y = \mathbb{R}$ y $F :\to \mathcal{P}_0(Y)$ definida por $F(x) = (x-1, x+1)$. Entonces $F^+((-1,1)) = \{0\}$, luego F no es semicontinua superior. Pero $\overline{F(x)} = [x-1, x+1]$ es semicontinua superior.

Para correspondencias semicontinuas superior, tenemos el siguiente resultado más débil.

Proposición 2.14. *Si X es un espacio topológico normal y $F : X \to \mathcal{P}_0(Y)$ es semicontinua superior, entonces $\overline{F}$ tambien lo es.*

Demostración. Sea $V \subseteq Y$ abierto, debemos probar que $\overline{F(V)}$ es abierto en X. Sea $x \in \overline{F^+(V)}$, entonces $\overline{F^+(V)} \subseteq V$. Como Y es normal, podemos encontrar $V_1 \subseteq V$ abierto tal que $\overline{F^+(V)} \subseteq V_1 \subseteq \overline{V_1} \subseteq V$. Por hipótesis F es semicontinua superior, entonces podemos encontrar $U \in \mathcal{N}(x)$ tal que para todo $x' \in U$, $F(x') \subseteq \overline{V_1} \subseteq V$. Luego, $\overline{F(x')} \subseteq \overline{V_1} \subseteq V$, por lo tanto $U \subseteq \overline{F^+(V)}$ y $\overline{F^+(V)}$ es abierto en X. ∎

De las proposiciones 2.13 y 2.14 se desprende el siguiente corolario.

Corolario 2.2. *Si Y es un espacio topológico normal y $F : X \to \mathcal{P}_0(Y)$ es continua, entonces $\overline{F}$ es continua.*

Proposición 2.15. *Si $F_1, F_2 : X \to \mathcal{P}_0(Y)$ son correspondencias semicontinuas superior (respectivamente semicontinua inferior, cerrada), entonces $(F_1 \cup F_2)$ también lo es.*

Demostración. Supongamos que F_1, F_2 son correspondencias semicontinuas superior, entonces para todo $V \subseteq Y$ abierto, $(F_1 \cup F_2)^+(V) = F_1^+(V) \cup F_2^+(V)$ es abierto. Análogamente, $(F_1 \cup F_2)^-(V) = F_1^-(V) \cup F_2^-(V)$ es abierto. Por último, si F_1, F_2 son cerradas, $Gr(F_1 \cup F_2) = Gr(F_1) \cup Gr(F_2)$ es cerrado. ∎

Proposición 2.16. *Si Y es un espacio topológico normal y $F_1, F_2 : X \to \mathcal{C}(Y)$ son correspondencias semicontinuas superior, tal que para todo $x \in X$, $F_1(x) \cap F_2(x) \neq \emptyset$, entonces $(F_1 \cap F_2)(x)$ también es semicontinua superior.*

Demostración. Sea $V \subseteq Y$ abierto, debemos probar que $(F_1 \cap F_2)^+(V)$ es abierto en X. Notemos que $(F_1 \cap F_2)^+(V) = \{x \in X : F_1(x) \cap F_2(x) \setminus V = \emptyset\}$. Como $F_1(x)$ y

$F_2(x) \setminus V = F_2(x) \cap V^c$ son cerrados en Y, y este último es normal, podemos encontrar $V_1, V_2 \subseteq Y$ abiertos disjuntos tales que $F_1(x) \subseteq V_1$ y $F_2(x) \setminus V \subseteq V_2$. Sea $V_3 = V_2 \cup V$, entonces $F_2(x) \subseteq V_3$. Como F_1, F_2 son semicontinuas superior, podemos encontrar $U_1.U_2 \in \mathcal{N}(x)$ tales que para todo $x' \in U_2$, $F_1(x') \subseteq V_1$ y para todo $x' \in U_2$, $F_2(x') \subseteq V_3$. Sea $U = U_1 \cap U_2 \in \mathcal{N}(x)$, entonces si $x' \in U$, tenemos que $(F_1 \cap F_2)(x') \subseteq V_1 \cap V_3 = V_1 \cap (V_2 \cup V) \subseteq V$. Por lo tanto, $(F_1 \cap F_2)^+(V)$ es abierto, esto implica que $(F_1 \cap F_2)$ es semicontinua superior. ∎

Podemos omitir la condición de Y sea normal, si asumimos que una de las dos correspondencias es compacta. En tal caso, solo requerimos que la otra correspondencia sea cerrada.

Proposición 2.17. *Si $F_1 : X \to \mathcal{C}(Y)$ es cerrada, $F_2 : X \to \mathcal{K}(Y)$ es semicontinua superior y para todo $X \in X$, $F_1(x) \cap F_2(x) \neq \varnothing$, entonces $(F_1 \cap F_2)(x)$ es semicontinua superior.*

Demostración. Sea $V \subseteq Y$ abierto, debemos probar que $(F_1 \cap F_2)^+(V)$ es abierto en X. Sea $x \in (F_1 \cap F_2)^+(V)$, notemos que $F_1(x) \cap F_2(x) \setminus V = \varnothing$ y $F_2(x) \setminus V$ es compacto. Sea $y \in F_2(x) \setminus V$, entonces $y \notin Gr(F_1)$ y como $Gr(F_1)$ es cerrado, podemos encontrar $U_y \in \mathcal{N}(x)$ y $V_y \in \mathcal{N}(y)$ tales que $(U_y \times V_y) \cap Gr(F_1) \neq \varnothing$. Por lo tanto, para $x' \in U_y$, $F_1(x') \cap V_y = \varnothing$. Como $F_2(x) \setminus V$ es compacto, podemos encontrar $\{y_1, ..., y_n\} \subseteq F_2(x) \setminus V$ tal que $F_2(x) \setminus V \subseteq \cup_{k=1}^{n} V_{y_k} = V_1$. Sea $U_1 = \bigcap_{k=1}^{n} U_{y_k} \in \mathcal{N}(x)$. Si $x' \in U_1$, entonces $F_1(x') \subseteq Y \setminus V_1$. Sea $V_2 = V \cup V_1$ y sea $U_2 \in \mathcal{N}(x)$ tales que si $x' \in U_2$, entonces $F_2(x') \subseteq V_2$ (existe, ya que por hipótesis F_2 es semicontinua superior). Si $x' \in U_1 \cap U_2 = U \in \mathcal{N}(x)$, tenemos que $(F_1 \cap F_2)(x') = F_1(x') \cap F_2(x') \subseteq (Y \setminus V_1) \cap V_2 \subseteq V$, esto prueba que $(F_1 \cap F_2)$ es semicontinua superior. ∎

Proposición 2.18. *Si $F_1 : X \to \mathcal{P}_0(Y)$ es semicontinua inferior, $F_2 : X \to \mathcal{P}_0(Y)$ tiene un gráfico abierto y para todo $x \in X$, $(F_1 \cap F_2)(x) = F_1(x) \cap F_2(x) \neq \varnothing$, entonces $(F_1 \cap F_2)(x)$ es semicontinua inferior.*

Demostración. Sea $V \subseteq Y$ un abierto distinto de vacío, $x \in (F_1 \cap F_2)^-(V)$ e $y \in F_1(x) \cap F_2(x) \cap V$. Entonces $(x, y) \in Gr(F_2)(X \times V)$. Ya que por hipótesis $Gr(F_2)$ es abierto, $Gr(F_2) \cap (X \times V)$ también lo es. Luego, podemos encontrar $U_1(X) \in \mathcal{N}(x)$ y $V_1(y) \in \mathcal{N}(y)$ tal que $U_1(x) \times V_1(y) \subseteq Gr(F_2) \cap (X \times Y)$. Notemos que $F_1(x) \cap V_1(y) \neq \varnothing$, pues contiene a y. Como por hipótesis F_1 es semicontinua inferior, podemos encontrar $U_2(x) \in \mathcal{N}(x)$ tal que para todo $x' \in U_2(x)$, $F_1(x') \cap V_1(y) \neq \varnothing$. Sea $U(x) = U_1(x) \cap U_2(x) \in \mathcal{N}(x)$, entonces para todo $x' \in U(x)$, $F_1(x') \cap V_1(y) \neq \varnothing$, además $U(x) \times V_1(Y) \subseteq Gr(F_2) \cap (X \times Y)$. Así, para todo $x' \in U(x)$, $F_1(x') \cap F_2(x') \cap V \neq \varnothing$, con lo que queda demostrado que $(F_1 \cap F_2)$ es semicontinua inferior. ∎

Proposición 2.19. *Si $F_1 : X \to \mathcal{P}_0(Y)$ y $F_2 : Y \to \mathcal{P}_0(Z)$ son semicontinuas superior (respectivamente semicontinuas inferior, continuas), entonces $(F_2 \circ F_1)$ también lo es.*

Demostración. Sea $A \subseteq Z$ abierto. Como F_2 es semicontinua superior, entonces $F_2^+(A)$ es abierto en Y. Además F_1 también es semicontinua superior, por lo que $F_1^+(F_2^+(A))$ es abierto en X. Por Proposición 1.2, $F_1^+(F_2^+(A)) = (F_2 \circ F_1)^+(A)$ es semicontinua superior. Para el caso en que F_1, F_2 sean semicontinuas inferior, la demostración es análoga. ∎

3. Continuidad de Hausdorff

En esta sección, X denotará un espacio topológico Hausdorff e Y un espacio métrico.

Definiciones 3.1. Sean $F : X \to \mathcal{P}_0(Y)$ una correspondencia. Se dice que F es:

(i) *$\mathcal{H}$-semicontinua superior* en $x_0 \in X$, si $h(F(x), F(x_0))$ es continua en x_0, es decir, para todo $\epsilon > 0$, existe $\mathrm{B}(x_0, \epsilon) \in \mathcal{N}(x_0)$, tal que para todo $x \in \mathrm{B}(x_0, \epsilon)$, $h(F(x), F(x_0)) < \epsilon$.

(ii) *$\mathcal{H}$-semicontinua inferior* en $x_0 \in X$, si $h(F(x_0), F(x))$ es continua en x_0, es decir, para todo $\epsilon > 0$, existe $\mathrm{B}(x_0, \epsilon) \in \mathcal{N}(x_0)$, tal que para todo $x \in \mathrm{B}(x_0, \epsilon)$, $h(F(x_0), F(x)) < \epsilon$.

(iii) *$\mathcal{H}$-semicontinua* en x_0 si es $\mathcal{H}$-semicontinua superior y $\mathcal{H}$-semicontinua inferior en x_0, o equivalentemente, si $F : X \to (\mathcal{P}_0(Y), \mathcal{H})$ es continua en x_0.

Compararemos los conceptos de continuidad con los de Vietoris anteriormente estudiados.

Proposición 3.1. *Si $F : X \to \mathcal{P}_0(Y)$ es semicontinua superior, entonces F es $\mathcal{H}$-semicontinua superior.*

Demostración. Ya que F es semicontinua superior, dado $\epsilon > 0$ y $x \in X$, tenemos que $F^{+}(\mathrm{B}(F(x), \epsilon)) = U \in \mathcal{N}(x)$. Entonces para todo $x' \in U$, tenemos que $F(x') \subseteq \mathrm{B}(F(x), \epsilon)$. Por lo tanto, $h(F(x'), F(x)) < \epsilon$ para todo $x' \in U$. ∎

El recíproco de la Proposición 3.1 en general no es cierto, lo que mostraremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.1. Sean $X = [0,1]$, $Y = \mathbb{R}$ y $F : X \to \mathcal{P}_0(Y)$ definida por $F(x) = [0,1]$ si $x \in [0,1)$ y $F(x) = [0,1)$ si $x = 1$. Es fácil ver que F es $\mathcal{H}$-semicontinua superior pero no semicontinua superior en $x = 1$. Notemos que $F^{+}((-1,1)) = \{1\}$ no es abierto.

Proposición 3.2. *Si $F : X \to \mathcal{C}(Y)$ es $\mathcal{H}$-semicontinua superior, entonces F es cerrada.*

Demostración. Sea $((x_\alpha, y_\alpha) : \alpha \in I) \subseteq Gr(F)$ una red, que converge a (x,y) en $X \times Y$. Entonces $d(y_\alpha, F(x)) \leq h(F(x_\alpha), F(x))$ y $h(F(x_\alpha), F(x))$ converge a 0. Como la función distancia es continua, $d(y_\alpha, F(x))$ converge a $d(y, F(x))$. Por lo tanto, $d(y, F(x)) = 0$, esto implica que $y \in F(x)$, por lo tanto F es cerrada. ∎

Proposición 3.3. *Si $F : X \to \mathcal{P}_0(Y)$ es $\mathcal{H}$-semicontinua superior, entonces para todo $v \in Y$, $\varphi_v(x) = d(v, F(x))$ es semicontinua inferior.*

Demostración. Sean $v \in Y$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Debemos probar que el conjunto $L_\lambda = \{x \in X : \varphi_v(x) \leq \lambda\}$ es cerrado. Sea $(x_\alpha : \alpha \in I) \subseteq L_\lambda$ una red que converge a x en X. Debemos probar que $x \in L_\lambda$. Sean $\epsilon > 0$ y para todo $\alpha \in I$, $y_\alpha \in F(x_\alpha)$ tal que $d(v, F(x_\alpha)) \leq d(v, y_\alpha) < d(v, F(x_\alpha)) + \epsilon$. Entonces se tiene que $\varphi_v(x) = d(v, F(x)) \leq d(v, y_\alpha) + d(y_\alpha, F(x)) \leq d(v, F(x_\alpha)) + \epsilon + d(y_\alpha, F(x)) \leq \lambda + \epsilon + h(F(x_\alpha), F(x))$. Por lo tanto, $\varphi_v(x) < \lambda + \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$, luego $\varphi_v(x) \leq \lambda$. ∎

La Proposición 3.1 nos dice que entre la semicontinuidad superior y la $\mathcal{H}$-semicontinuidad superior, esta última es un concepto más general. Sin embargo, para la semicontinuidad inferior y la $\mathcal{H}$-semicontinuidad inferior lo contrario es verdadero. Es decir, la semicontinuidad inferior es un concepto más general.

Proposición 3.4. *Si $F : X \to \mathcal{P}_0(Y)$ es $\mathcal{H}$-semicontinua inferior, entonces F es semicontinua inferior.*

Demostración. Sea $C \subseteq Y$ cerrado, basta probar que $F^{+}(C)$ es cerrado en X. Sea $(x_\alpha : \alpha \in I) \subseteq F^{+}(C)$ una red que converge a $x \in X$. Entonces $F(x_\alpha) \subseteq C$ para todo $\alpha \in I$. Como por hipótesis F es $\mathcal{H}$-semicontinua inferior, dado $\epsilon > 0$ podemos encontrar $\alpha_0 \in I$ tal que para $\alpha \geq \alpha_0$, $h(F(x), F(x_\alpha)) < \epsilon$, por lo tanto $F(x) \subseteq \mathrm{B}(F(x_\alpha), \epsilon) \subseteq \mathrm{B}(C, \epsilon)$. Ya que $\epsilon > 0$ es arbitrario y C es cerrado, tenemos que $F(x) \subseteq C$. Luego $x \in F^{+}(C)$, esto implica que $F^{+}(C)$ es cerrado, por lo tanto F es semicontinua inferior. ∎

En el cápitulo anterior vimos que $\tau_{\mathcal{V}}$ y $\tau_{\mathcal{H}}$ coinciden en $\mathcal{K}(Y)$. Por lo que era de esperar que los conceptos de continuidad tambíen coincidan.

Teorema 3.1. *Sea $F : X \to \mathcal{K}(Y)$, entonces:*

(i) *F es semicontinua superior, si y solo si es $\mathcal{H}$-semicontinua superior.*
(ii) *F es semicontinua inferior, si y solo si es $\mathcal{H}$-semicontinua inferior.*

Demostración.

(i) $\Rightarrow$: Es la proposición 3.1.
$\Leftarrow$: Por proposición 2.7, basta probar que si $((x_\alpha, y_\alpha) : \alpha \in I) \subseteq Gr(F)$ es una red tal $(x_\alpha : \alpha \in I)$ converge a x en X, entonces $(y_\alpha : \alpha \in I)$ tiene un punto de acumulación en $F(x)$. Por hipótesis tenemos que $d(y_\alpha, F(x)) \leq h(F(x_\alpha), F(x)) \to 0$. Como $F(x) \in \mathcal{K}(Y)$, podemos encontrar $z_\alpha \in F(x)$ tal que $d(y_\alpha, F(x)) = d(y_\alpha, z_\alpha)$. Sea $(z_\beta : \beta \in J)$ una subred de $(z_\alpha : \alpha \in I)$ que converge a $z \in F(x)$, entonces $d(y_\beta, z_\beta) \to 0$, luego y_β converge a $z \in F(x)$.
(ii) $\Rightarrow$: Supongamos lo contrario, entonces podemos encontrar $\epsilon > 0$, una red $(x_\alpha : \alpha \in I)$ que converge a $x \in X$ y $h(F(x), F(x_\alpha)) \geq \epsilon$ para todo $\alpha \in I$. Como F es $\mathcal{K}(Y)$-valuada, podemos encontrar $y_\alpha \in F(x)$ tal que $d(y_\alpha, F(x)) = h(F(x), F(x_\alpha) \geq \epsilon$. Sea $(y_\beta : \beta \in J)$ una subred de $(y_\alpha : \alpha \in I)$ que converge a $y \in F(x)$. Como F es semicontinua inferior, podemos encontrar $\beta_0 \in J$ tal que si $\beta \geq \beta_0$, $h(F(x), F(x_\beta)) = d(y_\beta, F(x_\beta)) \leq d(y_\beta, y) + d(y, F(x_\beta)) < d(y_\beta, y) + \epsilon/2$. Luego aplicamos límite y tenemos $\lim h(F(x), F(x_\beta)) \leq \epsilon/2 < \epsilon$, lo que es una contradicción.
$\Leftarrow$: Es la proposición 3.4. ∎

Corolario 3.1. *Una correspondencia $F : X \to \mathcal{K}(Y)$ es continua si y solo si es $\mathcal{H}$-continua.*

Proposición 3.5. *Si* $F_1, F_2 : X \to \mathcal{P}_0(Y)$ *son correspondencias* $\mathcal{H}$*-semicontinuas superior (respectivamente* $\mathcal{H}$*-semicontinuas inferior), entonces* $(F_1 \cup F_2)(x)$ *también lo es.*

Demostración. Supongamos que F_1, F_2 son $\mathcal{H}$-semicontinuas superior. Sean $x \in X$ y $\epsilon > 0$. Entonces podemos encontrar $U \in \mathcal{N}(x)$ tal que si $x' \in U$, $h(F_1(x'), F_1(x)) < \epsilon$ y $h(F_2(x'), F_2(x)) < \epsilon$. Así, $F_1(x') \subseteq B(F_1(x), \epsilon)$ y $F_2(x') \subseteq B(F_2(x), \epsilon)$. Luego tenemos que $(F_1 \cup F_2)(x') \subseteq B((F_1 \cup F_2)(x), \epsilon)$, esto implica que $h((F_1 \cup F_2)(x'), (F_1 \cup F_2)(x)) < \epsilon$, por lo tanto $(F_1 \cup F_2)$ es $\mathcal{H}$-semicontinua superior. Para el caso de que F_1, F_2 sean $\mathcal{H}$-semicontinuas inferior la demostración es análoga. ∎

Proposición 3.6. *Si* $F_1 : X \to \mathcal{C}(Y)$ *y* $F_2 : x \to \mathcal{K}(Y)$ *son correspondencias* $\mathcal{H}$*-semicontinuas superior tal que para todo* $x \in X$*,* $(F_1 \cap F_2)(x) \neq \varnothing$*, entonces* $(F_1 \cap F_2)(x)$ *es* $\mathcal{H}$*-semicontinua superior.*

Demostración. Supongamos lo contrario, entonces podemos encontrar $\epsilon > 0$, $(x_\alpha : \alpha \in I) \subseteq X$ una red que converge a $x \in X$ e $y_\alpha \in (F_1 \cap F_2)(x_\alpha)$ tal que $y_\alpha \notin B((F_1 \cap F_2)(x), \epsilon)$. Así $d(y_\alpha, (F_1 \cap F_2)(x)) \geq \epsilon$ para todo $\alpha \in I$. Pero F_2 es compacta, luego por teorema 3.1 es semicontinua superior y $F((x_\alpha : \alpha \in I)) \subseteq Y$ es compacta por corolario 2.1. Así, podemos encontrar $(y_\beta : \beta \in J)$ subred de $(y_\alpha : \alpha \in I)$ que converge a $y \in F_1(x) \cap F_2(x) = (F_1 \cap F_2)(x)$. Se sigue que $d(y_\beta, (F_1 \cap F_2)(x))$ converge a 0, lo que es una contradicción. ∎

Capítulo 3

Punto Fijo Univaluado y Multivaluado

1. Teoremas de Knaster, Kantorovitch y Tarski

En esta sección veremos que un número importante de resultados en Teoría del Punto Fijo pueden obtenerse mediante consideraciones de orden.

Sea $(P, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado y $M \subseteq P$, $M \neq \emptyset$. Recordemos que una cota superior (respectivamente inferior) de M es un elemento $p \in P$ tal que $m \leq p$ (respectivamente $m \geq p$) para todo $m \in M$; el supremo de M, si es que existe, es la menor de las cotas superiores para M. Recordemos también que un subconjunto de P totalmente ordenado es llamado cadena. Una función $F : P \to P$ es isotona si $F(x) \leq F(y)$ cuando $x \leq y$.

Definición 1.1. Sean (E, d) un espacio métrico y $T : E \to E$ una función. Se dice que $x \in E$ es un punto fijo de T, si $x = Tx$.

Teorema 1.1. *(Knaster-Tarski) Sea $(P, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado y $F : P \to P$ isótona. Si existen $b \in P$ tal que*

(i) $b \leq F(b)$
(ii) *toda cadena en $\{x : x \geq b\}$ tiene supremo*

Entonces el conjunto de puntos fijos de F es distinto de vacío y entre ellos existe un punto fijo λ que es maximal en P.

Demostración. Consideremos el conjunto parcialmente ordenado

$$Q = \{x : b \leq x \leq F(x)\}.$$

Claramente Q es no vacío, pues $b \in Q$. Sea $\mathcal{C}$ una cadena en Q, si $u = \sup C$, entonces para todo $c \in \mathcal{C}$ tenemos que $c \leq u$. Entonces por la propiedad de isotonía, para todo $c \in \mathcal{C}$ se cumple que $c \leq F(c) \leq F(u)$, mostrando que $F(u)$ es una cota superior para

$\mathcal{C}$. Por lo tanto $u \preceq F(u)$ y así, $u \in Q$. Luego, por lema de Zorn, existe un elemento máximal $\lambda \in Q$. Ya que $\lambda \preceq F(\lambda)$, tenemos que $F(\lambda) \preceq F(F(\lambda))$, luego $F(\lambda) \in Q$. En caso que $\lambda \neq F(\lambda)$ se contradice la maximalidad de λ, así, λ es un punto fijo y es el elemento máximal en P. ∎

En un conjunto parcialmente ordenado P, ha sido útil considerar una cadena contable como una sucesión, y al supremo de esta cadena, si es que existe, como el límite de esta sucesión. Guiados por esta idea, definimos una función $F : P \to P$ de modo que sea continua si y solo si para cada cadena contable $\{c_n\}$ tenemos un supremo $F(\sup\{c_n\}) = \sup(\{F(c_n)\})$. Observemos que una función continua $F : P \to P$ es necesariamente isotona; si $x \preceq y$ entonces $y = \sup\{x, y\}$, luego por continuidad, debemos tener $F(y) = \sup\{F(x), F(y)\}$. Por lo tanto, $F(x) \preceq F(y)$.

Para funciones continuas, las condiciones del teorema anterior pueden ser debilitadas y podemos encontrar un punto fijo por el metodo de aproximaciones sucesivas.

Teorema 1.2. *(Tarski-Kantorovitch) Sea* $(P, \preceq)$ *un conjunto parcialmente ordenado y* $F : P \to P$ *continua. Si existe* $b \in P$ *tal que*

(i) $b \preceq F(b)$.
(ii) *toda cadena contable en* $\{x : x \succeq b\}$ *tiene supremo.*

Entonces F *tiene un punto fijo* $\mu = \sup_n F^n(b)$ *y* μ *es el ínfimo del conjunto de puntos fijos de* F *en* $\{x : b \preceq x\}$.

Demostración. Ya que $b \preceq F(b)$ y F es isotona, se cumple que $F(b) \preceq F^2(b)$ e inductivamente obtenemos que $F^n(b) \preceq F^{n+1}(b)$ para $n \geq 1$. Así, $\{F^n(b) : n \geq 1\}$ es una cadena en $\{x : b \preceq x\}$, luego $\mu = \sup F^n(b)$ existe. Ya que F es continua,

$$F(\mu) = \sup F(F^n(b)) = \sup F^{n+1}(b) = \mu.$$

Luego, μ es un punto fijo. Falta probar que si μ^* es otro punto fijo en $\{x : b \preceq x\}$, entonces $\mu \preceq \mu^*$. Para esto, observemos que ya que $b \preceq \mu^*$, entonces $F(b) \preceq F(\mu^*) = \mu^*$, inductivamente tenemos que $F^n(b) \preceq \mu^*$ para todo $n \geq 1$. Así, μ^* es una cota superior para $\{F^n(b); n \geq 1\}$, entonces $\mu \geq \mu^*$. ∎

2. Condición de Brondsted

Consideremos la observación hecha por Brondsted en [**2**]:

(A) Supongamos que $(E, \preceq)$ posee un elemento maximal x^* y que $T : E \to E$ satisface $x^* \preceq Tx$, para todo $x \in E$. Entonces, T posee un punto fijo.

Veremos cómo esta simple observación es útil para demostrar teoremas de punto fijo.

Definición 2.1. Sean (E, d) un espacio métrico, $\varphi : E \to \mathbb{R}$ una función y $\preceq_\varphi$ la relación en E definida por

$$x \preceq_\varphi y, \quad \text{si y solo si,} \quad d(x, y) \leq \varphi(x) - \varphi(y).$$

Proposición 2.1. *$(E, \preceq_\varphi)$ es un conjunto parcialmente ordenado.*

Demostración. Solo probaremos antisimetría y transitividad, pues la reflexividad es trivial. Sean $x, y, z \in E$, entonces

(i) Si $x \preceq_\varphi y$ e $y \preceq_\varphi x$, se cumple que

$$d(x, y) \leq \varphi(x) - \varphi(y) \text{ y } d(y, x) \leq \varphi(y) - \varphi(x)$$

esto implica que $d(x, y) + d(y, x) = 0$. Luego $x = y$, por lo tanto $\preceq$ es antisimétrica.

(ii) Si $x \preceq_\varphi y$ e $y \preceq_\varphi z$, se cumple que

$$d(x, y) \leq \varphi(x) - \varphi(y) \text{ y } d(y, z) \leq \varphi(y) - \varphi(z)$$

esto implica que $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \leq \varphi(x) - \varphi(z)$. Por lo tanto, $\preceq_\varphi$ es transitiva. ∎

Teorema 2.1. *Sean (E, d) un espacio métrico completo y $\varphi : E \to \mathbb{R}$ una función semicontinua inferior y acotada inferiormente. Entonces, para todo $x_0 \in X$ existe un elemento maximal $x^* \in X$ tal que $x_0 \preceq_\varphi x^*$.*

Demostración. Sea $x_0 \in X$. Para cada $x \in E$, sea $I(x) = \{y \in E : x \preceq_\varphi y\}$. Puesto que φ es semicontinua inferior e $I(x) = \{y \in E : \varphi(y) + d(x, y) \leq \varphi(x)\}$, se tiene que $I(x)$ es cerrado. Sean C una cadena en $I(x_0)$ y $\mathcal{B} = \{I(x) \cap C : x \in C\}$. Luego, $\mathcal{B}$ es una base de filtro en $I(x_0)$. Sea $\epsilon > 0$. Como φ es acotada inferiormente, existe

$L = \inf\{\varphi(x) : x \in C\}$. Sea $x \in C$ tal que $\varphi(x) < L + \epsilon$. Ya que φ es decreciente, dados u y v tales que $x \preceq_{\varphi} u \preceq_{\varphi} v$, se tiene $\varphi(u) - \varphi(v) < \epsilon$ y entonces $d(u,v) < \epsilon$. Esto prueba que $\mathcal{B}$ es de Cauchy en $I(x_0)$ y, por consiguiente, converge hacia algún $v \in I(x_0)$. Puesto que para cada $x \in C$, $I(x)$ es cerrado, se tiene $\{v\} = \bigcap_{x\in C} \overline{I(x) \cap C} \subseteq \bigcap_{x\in C} I(x)$ y en consecuencia v es una cota superior de C. Por Lema de Zorn existe un elemento maximal $x^* \in I(x_0)$, concluyendo la demostración. ∎

Teorema 2.2. *(Caristi) Sean (E,d) un espacio métrico completo, $\varphi : X \to \mathbb{R}$ una función semicontinua inferior y acotada inferiormente y $T : E \to E$ una función tal que para todo $x \in E$, $d(x,Tx) \leq \varphi(x) - \varphi(Tx)$. Entonces, existe $x_0 \in E$ tal que $x_0 = Tx_0$.*

Demostración. Por Teorema 2.1, $(E, \preceq_{\varphi})$ posee un elemento maximal y por hipótesis, para todo $x \in E$, $x \preceq_{\varphi} Tx$. Luego, por la condición (A) de Brondsted, existe $x_0 \in E$ tal que $x_0 = Tx_0$, completándose la demostración. ∎

3. Punto Fijo Univaluado

Definición 3.1. Sean (E,d) un espacio métrico y $T : E \to E$ una función. Se dice que T satisface la condición orbital de Banach (COB), si existe $k \in [0,1)$ tal que, $d(Tx, T^2x) \leq kd(x,Tx)$.

Teorema 3.1. *Sean (E,d) un espacio métrico completo y $T : E \to E$ una función continua que satisface la COB. Entonces, existe $x_0 \in E$ tal que $x_0 = Tx_0$.*

Demostración. Sea $\varphi : X \to \mathbb{R}$ definida por $\varphi(x) = d(x,Tx)/(1-k)$. Luego, φ es continua. Además, para todo $x \in E$,

$$d(x,Tx) - d(Tx,T^2x) \geq (1-k)d(x,Tx),$$

con lo cual se tiene $d(x,Tx) \leq \varphi(x) - \varphi(Tx)$. Sigue entonces del teorema de Caristi que existe $x_0 \in E$ tal que $x_0 = Tx_0$, lo cual completa la demostración. ∎

Existe una amplia gama de funciones que satisfacen la condición orbital de Banach, en la siguiente proposición se verán algunos ejemplos.

Proposición 3.1. *Sean (E,d) un espacio métrico completo y $T : E \to E$ una función. Entonces, para todo $x, y \in E$ las siguientes contracciones satisfacen la COB:*

(i) *Banach:*

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y) \text{ \textit{con} } k \in [0, 1).$$

(ii) *Kannan:*

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha[d(x, Tx) + d(y, Ty)] \text{ \textit{con} } \alpha \in [0, 1/2).$$

(iii) *Chatterjea:*

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha[d(x, Ty) + d(y, Tx)] \text{ \textit{con} } \alpha \in [0, 1/2).$$

(iv) *Reich:*

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y) + \beta d(x, Tx) + \gamma d(y, Ty) \text{ \textit{con} } \alpha + \beta + \gamma \in [0, 1).$$

(v) *Berinde:*

$$d(Tx, Ty) \leq \delta d(x, y) + Ld(y, Tx) \text{ \textit{con} } \delta \in [0,1) \text{ \textit{y} } L \geq 0.$$

(vi) *Ćirić:*

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha \operatorname{máx}\{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), d(x, Ty), d(y, Tx)\},$$

con $\alpha \in [0, 1/2)$.

Demostración. Sea $x \in E$.

(i) Es inmediato que una contracción de Banach satisface la COB.

(ii) Notemos que si $d(Tx, T^2x) \leq \alpha[d(x, Tx) + d(Tx, T^2x)]$, entonces

$$\begin{aligned} d(Tx, T^2x) &\leq \alpha d(x, Tx) + \alpha d(Tx, T^2x), \\ (1-\alpha)d(Tx, T^2x) &\leq \alpha d(x, Tx), \text{ y} \\ d(Tx, T^2x) &\leq \alpha d(x, Tx)/(1-\alpha). \end{aligned}$$

Como $0 \leq \alpha < 1/2$ entonces $\alpha/(1-\alpha) < 1$. Por consiguiente, toda contracción de Kannan satisface la COB.

(iii) Sea T una contracción de Chatterjea. Luego,

$$\begin{aligned} d(Tx, T^2x) &\leq \alpha[d(x, T^2x) + d(Tx, Tx)], \\ d(Tx, T^2x) &\leq \alpha d(x, T^2x), \\ d(Tx, T^2x) &\leq \alpha d(x, Tx) + \alpha d(Tx, T^2x), \\ (1-\alpha)d(Tx, T^2x) &\leq \alpha d(x, Tx) \text{ y entonces} \\ d(Tx, T^2x) &\leq \alpha d(x, Tx)/(1-\alpha). \end{aligned}$$

Como $0 \leq \alpha < 1/2$ entonces $\alpha/(1-\alpha) < 1$ y por consiguiente, T satisface la COB.

(iv) Sea T una contracción de Reich. Luego,

$$\begin{array}{rcl} d(Tx, T^2x) & \leq & \alpha d(x, Tx) + \beta d(x, Tx) + \gamma d(Tx, T^2x), \\ (1-\gamma)d(Tx, T^2x) & \leq & (\alpha+\beta)d(x, Tx) \text{ y entonces} \\ d(Tx, T^2x) & \leq & (\alpha+\beta)d(x, Tx)/(1-\gamma). \end{array}$$

Como $\alpha+\beta+\gamma < 1$ entonces $(\alpha+\beta)/(1-\gamma) < 1$, en consecuencia toda contracción de Reich satisface la COB.

(v) Sea T una contracción de Berinde, entonces

$$\begin{array}{rcl} d(Tx, T^2x) & \leq & \delta d(x, Tx) + Ld(Tx, Tx), \\ & = & \delta d(x, Tx). \end{array}$$

Como $0 \leq \delta < 1$, T cumple con la COB.

(vi) Sea T una contracción de Ćirić. Luego,

$$\begin{array}{rcl} d(Tx, T^2x) & \leq & \alpha \max\{d(x, Tx), d(x, T^2x), d(Tx, T^2x)\}, \\ d(Tx, T^2x) & \leq & \alpha \max\{d(Tx, T^2x), \max\{d(x, Tx), d(x, T^2x)\}\}, \\ d(Tx, T^2x) & \leq & \alpha \max\{d(Tx, T^2x), d(x, Tx) + d(Tx, T^2x)\}, \\ d(Tx, T^2x) & \leq & \alpha d(x, Tx) + \alpha d(Tx, T^2x), \\ (1-\alpha)d(Tx, T^2x) & \leq & \alpha d(x, Tx) \text{ y entonces} \\ d(Tx, T^2x) & \leq & \alpha d(x, Tx)/(1-\alpha). \end{array}$$

Como $0 \leq \alpha < 1/2$, en consecuencia T cumple con la COB. ∎

Corolario 3.1. *Si $T : E \to E$ es una función continua que satisface alguna de las contracciones de la proposición precedente, entonces T posee un punto fijo.*

Demostración. Por Proposición 3.1 cada una de las contracciones mencionadas cumple con la COB, luego, como T es continua, por Teorema 3.1, T posee punto fijo. ∎

En particular se tiene el siguiente resultado.

Corolario 3.2. *(Banach) Sean (E, d) un espacio métrico completo y $T : E \to E$ una función tal que $d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$, donde $k \in [0, 1)$. Entonces, existe un único $x_0 \in E$ tal que $x_0 = Tx_0$.*

Demostración. Puesto que T es Lipschitz, T es continua y, por Proposición 3.1, satisface la COB. Luego, por Teorema 3.1, o más directamente por Corolario 3.1, T posee punto fijo. Para demostrar la unicidad, supongamos que existen $x, y \in E$ tales que $Tx = x$ y $Ty = y$. Luego

$$d(x,y) = d(Tx,Ty) \leq kd(x,y).$$

Como $k \in [0,1)$, entonces $d(x,y) = 0$ y en consecuencia $x = y$. ∎

Algunas contracciones son continuas, por ejemplo la de Banach. Pero no todas lo son y, aún así, algunas poseen punto fijo. Esto significa que, si bien el Teorema 3.1 asegura la existencia de punto fijo en varios casos, en otros esta existencia debe demostrarse mediante un método alternativo. Este es el caso de los Teoremas 3.2, 3.3 y 3.4.

TEOREMA 3.2. *(Berinde) Sean (E,d) un espacio métrico completo y $T : E \to E$ una función tal que $d(Tx,Ty) \leq \delta d(x,y) + Ld(y,Tx)$, donde $\delta \in [0,1)$ y $L \geq 0$. Entonces existe $x_0 \in E$ tal que $x_0 = Tx_0$.*

Demostración. Sea $x_0 \in E$. definamos de manera inductiva una sucesión $(x_n : n \in \mathbb{N})$ de modo que $x_{n+1} = Tx_n$. Entonces

$$\begin{aligned} d(Tx_{n-1},Tx_n) &\leq \delta d(x_{n-1},x_n) + Ld(x_n,Tx_{n-1}), \\ d(x_n,x_{n+1}) &\leq \delta d(x_{n-1},x_n). \end{aligned}$$

Inductivamente obtenemos

$$d(x_n,x_{n+1}) \leq \delta^n d(x_0,x_1), \text{ con } n = 0,1,2,...$$

y consecuentemente,

$$\begin{aligned} d(x_n,x_{n+p}) &\leq \delta^n(1+\delta+\cdots+\delta^{p-1})d(x_0,x_1) \\ &= \delta^n(1-\delta^p)d(x_0,x_1)/(1-\delta), \ n,p \in \mathbb{N}, \ n \neq 0 \end{aligned}$$

Como $\delta \in [0,1)$, entonces $(x_n : n \in \mathbb{N})$ es una sucesión de Cauchy en E y por lo tanto convergente. Denotemos por

$$x^* = \lim_{n\to\infty} x_n,$$

entonces

$$d(x^*,Tx^*) \leq d(x^*,x_{n+1}) + d(x_{n+1},Tx^*) = d(x_{n+1},x^*) + d(Tx_n,Tx^*).$$

Por hipótesis, tenemos que

$$d(Tx_n, Tx^*) \le \delta d(x_n, x^*) + Ld(x^*, Tx_n)$$

y en consecuencia,

$$\begin{aligned} d(x^*, Tx^*) &\le d(x_{n+1}, x^*) + d(Tx_n, Tx^*), \\ d(x^*, Tx^*) &\le d(x_{n+1}, x^*) + \delta d(x_n, x^*) + Ld(x^*, Tx_n), \\ d(x^*, Tx^*) &\le (1 + L)d(x^*, x_{n+1}) + \delta d(x_n, x^*). \end{aligned}$$

Tomando $n \to \infty$ obtenemos que $d(x^*, Tx^*) = 0$, es decir, x^* es un punto fijo de T. ∎

Teorema 3.3. *(Kannan) Sean (E, d) un espacio métrico completo y $T : E \to E$ una función tal que $d(Tx, Ty) \le \alpha[d(x, Tx) + d(y, Ty)]$ donde $\alpha \in [0,1/2)$. Entonces existe $x_0 \in E$ tal que $x_0 = Tx_0$.*

Demostración. Sea T una contracción de Kannan. Entonces,

$$\begin{aligned} d(Tx, Ty) &\le \alpha[d(x, Tx) + d(y, Ty)], \\ d(Tx, Ty) &\le \alpha[d(x, y) + d(y, Tx) + d(y, Tx) + d(Tx, Ty)], \\ d(Tx, Ty) &\le \alpha d(x, y) + \alpha d(y, Tx) + \alpha d(y, Tx) + \alpha d(Tx, Ty), \\ (1 - \alpha)d(Tx, Ty) &\le \alpha d(x, y) + 2\alpha d(y, Tx). \end{aligned}$$

Esto implica que

$$d(Tx, Ty) \le \frac{\alpha}{1 - \alpha} d(x, y) + \frac{2\alpha}{1 - \alpha} d(y, Tx).$$

Como $\alpha \in [0, 1/2)$, tomamos $\delta = \alpha/(1 - \alpha) \in [0, 1)$ y $L = 2\alpha/(1 - \alpha)$. Luego T es contracción de Berinde, por lo tanto posee punto fijo. ∎

Teorema 3.4. *(Chatterjea) Sean (E, d) un espacio métrico completo y $T : E \to E$ una función tal que $d(Tx, Ty) \le \alpha[d(x, Ty) + d(y, Tx)]$ donde $\alpha \in [0, 1/2)$. Entonces existe $x_0 \in E$ tal que $x_0 = Tx_0$.*

Demostración. Sea T una contracción de Chatterjea. Entonces,

$$\begin{aligned} d(Tx, Ty) &\le \alpha[d(x, Ty) + d(y, Tx)] \\ d(Tx, Ty) &\le \alpha[d(x, y) + d(y, Tx) + d(Tx, Ty) + d(y, Tx)], \\ d(Tx, Ty) &\le \alpha d(x, y) + \alpha d(y, Tx) + \alpha d(Tx, Ty) + \alpha d(y, Tx), \\ (1 - \alpha)d(Tx, Ty) &\le \alpha d(x, y) + 2\alpha d(y, Tx). \end{aligned}$$

Esto implica que

$$d(Tx,Ty) \le \frac{\alpha}{1-\alpha}d(x,y) + \frac{2\alpha}{1-\alpha}d(y,Tx)$$

Como $\alpha \in [0,1/2)$, tomamos $\delta = \alpha/(1-\alpha) \in [0,1)$ y $L = 2\alpha/(1-\alpha)$. Luego T es contracción de Berinde, por lo tanto existe T posee punto fijo. ∎

Teorema 3.5. *(Reich) Sean (E,d) un espacio métrico completo y $T : E \to E$ una función tal que $d(Tx,Ty) \le \alpha d(x,y) + \beta d(x,Tx) + \gamma d(y,Ty)$ donde $\alpha+\beta+\gamma \in [0,1)$. Entonces existe $x_0 \in E$ tal que $x_0 = Tx_0$.*

Demostración. Sea T una contracción de Reich. Entonces,

$$\begin{aligned}
d(Tx,Ty) &\le \alpha d(x,y) + \beta d(x,Tx) + \gamma d(y,Ty),\\
d(Tx,Ty) &\le \alpha d(x,y) + \beta[d(x,y) + d(y,Tx)] + \gamma[d(y,Tx) + d(Tx,Ty)],\\
d(Tx,Ty) &\le \alpha d(x,y) + \beta d(x,y) + \beta d(y,Tx) + \gamma d(y,Tx) + \gamma d(Tx,Ty),\\
(1-\gamma)d(Tx,Ty) &\le (\alpha+\beta)d(x,y) + (\beta+\gamma)d(y,Tx).
\end{aligned}$$

Esto implica que

$$d(Tx,Ty) \le \frac{\alpha+\beta}{1-\gamma}d(x,y) + \frac{\beta+\gamma}{1-\gamma}d(y,Tx).$$

Ya que $\alpha+\beta+\gamma < 1$, entonces $(\alpha+\beta)/(1-\gamma) < 1$ y así, tenemos que T es una contracción de Berinde con parametros $\delta = (\alpha+\beta)/(1-\gamma) \in [0,1)$ y $L = (\beta+\gamma)/(1-\gamma)$. Por lo tanto, T posee punto fijo. ∎

Antes de enunciar el teorema de punto fijo de Ćirić, son necesarios la siguiente definición y Lemas 3.1 y 3.2.

Definición 3.2. Sean (E,d) un espacio métrico y $T : E \to E$ una función. Para $A \subseteq E$, denotamos su diametro por $\rho(A) = \sup\{d(a,b) : a,b \in A\}$ y para todo $x \in E$ definimos los siguientes conjuntos

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}(x,n) &= \{x, Tx, \dots, T^n x\}, \quad n \in \mathbb{N} \text{ y}\\
\mathcal{O}(x,\infty) &= \{x, Tx, \dots\}.
\end{aligned}$$

Lema 3.1. *Sean (E,d) un espacio métrico, $T : E \to E$ una contracción de Ćirić y $n \in \mathbb{N}$. Entonces para todo $x \in E$ y todo $i,j \in \{1,2,...,n\}$ tenemos que $d(T^i x, T^j x) \le \alpha\rho(\mathcal{O}(x,n))$, con $\alpha \in [0,1)$.*

Demostración. Sea $x \in E$, entonces $T^{i-1}x, T^i x, T^{j-1}x, T^j x \in \mathcal{O}(x,n)$. Como T es contracción de Ćirić, tenemos que

$$\begin{aligned} d(T^i x, T^j x) &\leq \alpha \max\{d(T^{i-1}x, T^{j-1}x), d(T^{i-1}x, T^i x), d(T^{j-1}x, T^j x), \\ &\quad d(T^{i-1}x, T^j x), d(T^i x, T^{j-1}x)\} \\ &\leq \alpha\rho[\mathcal{O}(x,n)] \end{aligned}$$

■

Observación 3.1. De este lema se deduce que si T es una contracción de Ćirić y $x \in E$, entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $k \leq n$ tal que $d(x, T^k x) = \rho[\mathcal{O}(x,n)]$.

Lema 3.2. *Sean (E,d) un espacio métrico y $T : E \to E$ una contracción de Ćirić. Entonces, para todo $x \in E$ se tiene que*

$$\rho[\mathcal{O}(x,\infty)] \leq \frac{1}{1-\alpha} d(x,Tx).$$

Demostración. Sea $x \in E$. Ya que $\rho[\mathcal{O}(x,1)] \leq \rho[\mathcal{O}(x,2)] \leq \cdots$, tenemos que $\rho[\mathcal{O}(x,\infty)] = \sup\{\rho[\mathcal{O}(x,n)] : n \in \mathbb{N}\}$. Por la Observación 3.1, existe $T^k x \in \mathcal{O}(x,n)$ con $1 \leq k \leq n$ tal que $d(x,T^k x) = \rho[\mathcal{O}(x,n)]$. Luego, del Lema 3.1 obtenemos

$$\begin{aligned} d(x, T^k x) &\leq d(x,Tx) + d(Tx, T^k x) \\ &\leq d(x,Tx) + \alpha\rho[\mathcal{O}(x,n)] \\ &= d(x,Tx) + \alpha d(x, T^k x). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \rho[\mathcal{O}(x,n)] &= d(x,T^k x) \\ &\leq \tfrac{1}{1-\alpha} d(x,Tx). \end{aligned}$$

Como n es arbitrario, queda demostrado el resultado. ■

Teorema 3.6. *(Ćirić) Sean (E,d) un espacio métrico completo y $T : E \to E$ una función tal que $d(Tx,Ty) \leq \alpha \max\{d(x,y), d(x,Tx), d(y,Ty), d(x,Ty), d(y,Tx)\}$ con $\alpha \in [0,1)$. Entonces existe $x_0 \in E$ tal que $x_0 = Tx_0$.*

Demostración. Sean $x \in E$ y $n, m \in \mathbb{N}$ tal que $n < m$. Entonces,

$$d(T^n x, T^m x) \leq \alpha\rho[\mathcal{O}(T^{n-1}x, m-n+1)].$$

Por Observación 3.1, existe $k \in \mathbb{N}$ con $1 \leq k \leq m-n+1$ tal que

$$\rho[\mathcal{O}(T^{n-1}x, m-n+1)] = d(T^{n-1}x, T^k T^{n-1}x).$$

Nuevamente, por Lema 3.1 tenemos que

$$\begin{aligned} d(T^{n-1}x, T^kT^{n-1}x) &\leq \alpha\rho[\mathcal{O}(T^{n-2}x, k+1)] \\ &\leq \alpha\rho[\mathcal{O}(T^{n-2}x, m-n+2)]. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} d(T^nx, T^mx) &\leq \alpha\rho[\mathcal{O}(T^{n-1}x, m-n+1)] \\ &\leq \alpha^2\rho[\mathcal{O}(T^{n-2}x, m-n+2)] \end{aligned}$$

Procediendo de esta manera, obtenemos

$$d(T^nx, T^mx) \leq \alpha\rho[\mathcal{O}(T^{n-1}x, m-n+1)] \leq \cdots \leq \alpha^n\rho[\mathcal{O}(x, m)].$$

Entonces, se sigue del Lema 3.2 que

$$d(T^nx, T^mx) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}d(x, Tx). \tag{4}$$

Ya que $\lim_{n\to\infty} \alpha^n = 0$, entonces $(T^nx : n \in \mathbb{N})$ es sucesión de Cauchy y por lo tanto convergente. Como E es completo, existe $x^* = \lim_{n\to\infty} T^nx$. Para probar que $Tx^* = x^*$ consideremos las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned} d(x^*, Tx^*) &\leq d(x^*, T^{n+1}x) + d(T^{n+1}x, Tx^*) \\ &\leq d(x^*, T^{n+1}x) + \alpha \max\{d(T^nx, x^*), d(T^nx, T^{n+1}x), \\ &\quad d(x^*, Tx^*), d(T^nx, Tx^*), d(T^{n+1}x, x^*)\} \\ &\leq d(x^*, T^{n+1}x) + \alpha[d(T^nx, T^{n+1}x) + d(T^nx, x^*) + d(x^*, Tx^*) \\ &\quad + d(T^{n+1}x, x^*)]. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$d(x^*, Tx^*) \leq \frac{1}{1-\alpha}[(1+\alpha)d(x^*, T^{n+1}x) + \alpha d(x^*, T^nx) + \alpha d(T^nx, T^{n+1}x)].$$

Como $\lim_{n\to\infty} T^nx = x^*$, entonces $d(x^*, Tx^*) = 0$, es decir, x^* es un punto fijo. ∎

4. Punto Fijo Multivaluado

Definición 4.1. Sean (E, d) un espacio métrico y $T : E \to \mathcal{P}(E)$ una correspondencia. Se dice que $x \in E$ es un punto fijo de T, si $x \in Tx$.

Definición 4.2. Sean (E, d) un espacio métrico y $T : E \to \mathcal{CB}(E)$ una correspondencia. Se dice que T satisface la condición orbital de Banach multivaluada (COBM), si existe $k \in [0, 1)$ tal que, $\mathcal{H}(Tx, T^2x) \leq kd(x, Tx)$, donde $\mathcal{H}$ es la métrica de Hausdorff.

OBSERVACIÓN 4.1. Para correspondencias, se puede establecer un teorema similar al Teorema 3.1, pero se debe pedir que la función $\varphi : E \to \mathbb{R}$ definida por $\varphi(x) = d(x, Tx)$ sea semicontinua inferior.

La siguiente definición fue introducida por R. Fierro *et al.* en [**5**] y nos ayudará a probar existencia de puntos fijos.

DEFINICIÓN 4.3. Sea (E, d) un espacio métrico y $T : E \to \mathcal{P}(E)$ una correspondencia. Decimos que T es débilmente semicontinua superior (respectivamente, débilmente semicontinua inferior) si la función $\varphi(x) = d(x, Tx)$ es semicontinua inferior (respectivamente, semicontinua superior).

TEOREMA 4.1. *Sea $T : E \to \mathcal{P}(E)$. Entonces se cumple que:*

(i) *Si T es semicontinua inferior, entonces T es débilmente semicontinua inferior.*
(ii) *Si T es semicontinua superior, entonces T es débilmente semicontinua superior.*

Demostración. Supongamos que T es semicontinua inferior. Sean $\alpha > 0$ y $A = \{x \in E : d(x, Tx) < \alpha\}$. Con el fin de probar que A es abierto, supongamos que $A \neq \varnothing$ y elijamos $a \in A$. Sean $\epsilon = \alpha - d(a, Ta)$ e $y \in Ta$ tal que $d(a, y) < \epsilon/3 + d(a, Ta)$. Ya que T es semicontinua inferior, existe una vecindad $U'(a)$ tal que $Tu \cap B(y, \epsilon/3) \neq \varnothing$ para todo $u \in U'(a)$. Sean $U(a) = U'(a) \cap B(a, \epsilon/3)$, $u \in U(a)$ y $b_u \in Tu \cap B(y, \epsilon/3)$. Se tiene que $d(u, b_u) \leq d(u, a) + d(a, y) + d(y, b_u) < \alpha$, en consecuencia $d(u, T(u)) < \alpha$. Esto prueba que A es abierto y por lo tanto, se cumple 1.

Ahora supongamos que T es semicontinua superior. Sean $\alpha \in \mathbb{R}$ y $A = \{x \in E : d(x, Tx) \geq \alpha\}$. Probaremos que A es abierto. Sea $a \in A$ y elijamos $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tal que $\gamma > \beta\alpha$ y $d(a, Ta) > \gamma$. Sea $G = \{y \in E : d(y, Ta) < (\gamma - \beta)/2\}$. Ya que $Ta \subseteq G$, G es abierto y T es semicontinua superior, existe $U'(a)$ tal que para todo $x \in U'(a)$, $Tx \subseteq G$. Esto implica que para todo $x \in U'(a)$ y todo $y \in Tx$, $d(y, Ta) < (\gamma - \beta)/2$. Por lo tanto,

$$\gamma < d(a, Ta) \leq d(a, y) + d(y, Ta) < d(a, y) + (\gamma - \beta)/2.$$

Así, $d(a, y) > (\gamma + \beta)/2$ y en consecuencia, $d(a, Tx) \geq (\gamma + \beta)/2$. Sea $U'(a) \cap B(a, \beta - \alpha)$, notemos que para todo $x \in U(a)$,

$$\beta < d(a, Tx) \leq d(a, x) + d(x, Tx) \leq \beta - \alpha + d(x, Tx).$$

Esto prueba que $U(a) \subseteq A$, por lo tanto se cumple 2. ∎

Teorema 4.2. *Sean* (E,d) *un espacio métrico completo y* $T: E \to \mathcal{CB}(E)$ *una correspondencia débilmente semicontinua superior y que satisface la COBM. Entonces, existe* $x_0 \in E$ *tal que* $x_0 \in Tx_0$.

Demostración.

Sean $\epsilon \in (0,k)$, $\varphi: X \to \mathbb{R}$ tal que

$$\varphi(x) = \left(\frac{1}{1+\epsilon} - k\right)^{-1} d(x, T(x))$$

y para cada $x \in E$, $y_\epsilon(x) \in Tx$ tal que $d(x, y_\epsilon(x)) < d(x,Tx)(1+\epsilon)$. Por hipótesis φ es semicontinua inferior. Además,

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{1+\epsilon} - k\right) d(x, y_\epsilon(x)) &< d(x,Tx) - \mathcal{H}(Tx, Ty_\epsilon(x)) \\ &\leq d(x,Tx) - d(y_\epsilon(x), Ty_\epsilon(x))\end{aligned}$$

con lo cual se tiene $d(x,T(x)) \leq \varphi(x) - \varphi(y_\epsilon(x))$. Sigue entonces del teorema de Caristi que existe $x_0 \in E$ tal que $x_0 = y_\epsilon(x_0)$. Por lo tanto, $x_0 \in Tx_0$, lo cual completa la demostración. ∎

Corolario 4.1. *Sean* (E,d) *un espacio métrico completo y* $T: E \to \mathcal{CB}(E)$ *una correspondencia semicontinua superior y que satisface la COBM. Entonces, existe* $x_0 \in E$ *tal que* $x_0 \in Tx_0$.

Demostración. Si T es una correspondencia semicontinua superior, por Teorema 4.1 es débilmente semicontinua superior. Si además, T satisface la COBM, por Teorema 4.2 se obtiene el resultado. ∎

Observación 4.2. Sea $T: \mathbb{R} \to \mathcal{CB}(\mathbb{R})$ definida por

$$Tx = \begin{cases} [-1,1] & \text{si} \quad x \neq 0; \\ \{0\} & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

Nótese que 0 es punto fijo de T, pero no es posible aplicar Corolario 4.1, pues T no es semicontinua superior ya que $T^-([-1,1]) =]-\infty, 0[\cup]0,\infty[$ no es cerrado . Sin embargo, T es débilmente semicontinua superior, como veremos a continuación.

Por Definición 4.3 sabemos que T es débilmente semicontinua superior, si la función $\varphi(x) = d(x, Tx)$ es semicontinua inferior. Observemos que si $x = 0$, $d(x, Tx) = d(0,0) = 0$. Si $0 < |x| \leq 1$, entonces

$$d(x, Tx) = d(x, [-1,1]) = 0, \quad \text{pues } x \in [-1,1].$$

Si $|x| > 1$, entonces

$$d(x, Tx) = d(x, [-1,1]) = \begin{cases} x - 1 & \text{si} \quad x > 1 \\ -1 - x & \text{si} \quad x < -1. \end{cases}$$

Es decir, $d(x, Tx) = |x| - 1$, si $|x| > 1$.

Por lo tanto, para todo $x \in \mathbb{R}$, $d(x, Tx) = \text{máx}\{|x| - 1, 0\}$ y en consecuencia, la función $x \mapsto d(x, Tx)$ es continua, por lo tanto también semicontinua inferior. En consecuencia, la existencia de punto fijo de T puede obtenerse de Teorema 4.2.

La observación anterior motiva el siguiente resultado.

TEOREMA 4.3. *Si $T : E \to \mathcal{CB}(E)$ es una correspondencia que satisface la COBM, entonces, son equivalentes*

(i) $x^* \in Tx^*$, *y*
(ii) $\varphi(x) = d(x, Tx)$ *es semicontinua inferior en* x^*.

Demostración. Sea $(x_n; n \in \mathbb{N})$ una sucesión en E que converge a x^*. Por demostrar que $d(x^*, Tx^*) \leq \liminf d(x_n, Tx_n)$. Pero esto es trivial, pues $d(x^*, Tx^*) = 0$.

Recíprocamente, si $\varphi(x)$ es semicontinua inferior, entonces T es débilmente semicontinua superior, luego el resultado se desprende del Teorema 4.2. ∎

PROPOSICIÓN 4.1. *Sean (E, d) un espacio métrico completo y $T : E \to \mathcal{CB}(E)$ una correspondencia. Entonces, las contracciones definidas por las desigualdades siguientes, satisfacen la COBM:*

(i) *Nadler:*

$$\mathcal{H}(Tx, Ty) \leq kd(x, y) \ \text{con } k \in [0,1)$$

(ii) *Kannan:*

$$\mathcal{H}(Tx, Ty) \leq \alpha[d(x, Tx) + d(y, Ty)] \ \text{con } \alpha \in [0, 1/2).$$

(iii) *Chatterjea:*

$$\mathcal{H}(Tx, Ty) \leq \alpha[d(x, Ty) + d(y, Tx)] \text{ con } \alpha \in [0, 1/2).$$

(iv) *Reich:*

$$\mathcal{H}(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y) + \beta d(x, Tx) + \gamma d(y, Ty) \text{ con } \alpha + \beta + \gamma \in [0, 1)$$

(v) *Berinde:*

$$\mathcal{H}(Tx, Ty) \leq \delta d(x, y) + L d(y, Tx) \text{ con } \delta \in [0,1) \text{ y } L \geq 0.$$

(vi) *Ćirić:*

$$\mathcal{H}(Tx, Ty) \leq \alpha \max\{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), d(x, Ty), d(y, Tx)\}$$

con $\alpha \in [0, 1/2)$.

Demostración. Sea $x \in E$. Entonces,

(i) Es inmediato que una contracción de Nadler satisface la COBM.

(ii) Sea T una contracción de Kannan. Luego,

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(Tx, T^2x) &\leq \alpha d(x, Tx) + \alpha d(Tx, T^2x),\\
\mathcal{H}(Tx, T^2x) &\leq \alpha d(x, Tx) + \alpha \mathcal{H}(Tx, T^2x),\\
(1-\alpha)\mathcal{H}(Tx, T^2x) &\leq \alpha d(x, Tx) \text{ y entonces}\\
\mathcal{H}(Tx, T^2x) &\leq \alpha d(x, Tx)/(1-\alpha).
\end{aligned}$$

Como $0 \leq \alpha < 1/2$ entonces $\alpha/(1-\alpha) < 1$. En consecuencia, toda contracción de Kannan satisface la COBM.

(iii) Sea T una contracción de Chatterjea, se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(Tx, T^2x) &\leq \alpha[d(x, T^2x) + d(Tx, Tx)],\\
\mathcal{H}(Tx, T^2x) &\leq \alpha d(x, T^2x),\\
\mathcal{H}(Tx, T^2x) &\leq \alpha d(x, Tx) + \alpha d(Tx, T^2x),\\
\mathcal{H}(Tx, T^2x) &\leq \alpha d(x, Tx) + \alpha \mathcal{H}(Tx, T^2x),\\
(1-\alpha)\mathcal{H}(Tx, T^2x) &\leq \alpha d(x, Tx) \text{ y entonces}\\
\mathcal{H}(Tx, T^2x) &\leq \alpha d(x, Tx)/(1-\alpha).
\end{aligned}$$

Como $0 \leq \alpha < 1/2$, entonces $\alpha/(1-\alpha) < 1$. En consecuencia, T satisface la COBM.

(iv) Sea T una contracción de Reich. Luego,

$$\begin{array}{rcl}
\mathcal{H}(Tx,T^2x) & \leq & \alpha d(x,Tx)+\beta d(x,Tx)+\gamma d(Tx,T^2x), \\
\mathcal{H}(Tx,T^2x) & \leq & \alpha d(x,Tx)+\beta d(x,Tx)+\gamma \mathcal{H}(Tx,T^2x), \\
(1-\gamma)\mathcal{H}(Tx,T^2x) & \leq & (\alpha+\beta)d(x,Tx) \text{ y entonces} \\
\mathcal{H}(Tx,T^2x) & \leq & (\alpha+\beta)d(x,Tx)/(1-\gamma).
\end{array}$$

Ya que $\alpha+\beta+\gamma<1$ entonces $(\alpha+\beta)/(1-\gamma)<1$. Por lo tanto, T satisface la COBM.

(v) Sea T una contracción de Berinde, entonces

$$\begin{array}{rcl}
\mathcal{H}(Tx,T^2x) & \leq & \delta d(x,Tx)+Ld(Tx,Tx) \\
 & = & \delta d(x,Tx).
\end{array}$$

Como $0\leq\delta<1$, T cumple con la COBM.

(vi) Sea T una contracción de Ćirić. Luego,

$$\begin{array}{rcl}
\mathcal{H}(Tx,T^2x) & \leq & \alpha \max\{d(x,Tx),d(x,T^2x),d(Tx,T^2x)\}, \\
\mathcal{H}(Tx,T^2x) & \leq & \alpha \max\{d(Tx,T^2x),\max\{d(x,Tx),d(x,T^2x)\}\}, \\
\mathcal{H}(Tx,T^2x) & \leq & \alpha \max\{d(Tx,T^2x),d(x,Tx)+d(Tx,T^2x)\}, \\
\mathcal{H}(Tx,T^2x) & \leq & \alpha d(x,Tx)+\alpha d(Tx,T^2x), \\
\mathcal{H}(Tx,T^2x) & \leq & \alpha d(x,Tx)+\alpha \mathcal{H}(Tx,T^2x), \\
(1-\alpha)\mathcal{H}(Tx,T^2x) & \leq & \alpha d(x,Tx) \text{ y entonces} \\
\mathcal{H}(Tx,T^2x) & \leq & \alpha d(x,Tx)/(1-\alpha).
\end{array}$$

Como $0\leq\alpha<1/2$, toda contracción de Ćirić cumple con la COBM.

Esto completa finalmente la demostración. ∎

Corolario 4.2. *Si $T:E\to\mathcal{CB}(E)$ es alguna de las contracciones de la proposición precedente y además es débilmente semicontinua superior, entonces T posee un punto fijo.*

Demostración. Por Proposición 4.1 cada una de las contracciones cumple con la COBM, luego como T es débilmente semicontinua superior, por Teorema 4.2 existe punto fijo. ∎

En particular se tiene el corolario siguiente.

Corolario 4.3. *(Nadler) Sean* (E,d) *un espacio métrico completo y* $T : E \to \mathcal{CB}(E)$ *una correspondencia tal que* $\mathcal{H}(Tx,Ty) \leq kd(x,y)$*, donde* $k \in [0,1)$*. Entonces, existe* $x_0 \in E$ *tal que* $x_0 \in Tx_0$*.*

Demostración. Como T es una contracción, T es continua con la métrica de Hausdorff y por Proposición 3.3 del Capítulo 2, T es débilmente semicontinua inferior. Además, T satisface la COBM. Sigue entonces de Teorema 4.3 que existe $x_0 \in E$ tal que $x_0 \in Tx_0$, lo cual completa la demostración. ∎

Análogamente al caso univaluado podemos débilitar las hipótesis, esta vez omitiendo la condición de que T sea débilmente semicontinua inferior, como veremos a continuación.

Teorema 4.4. *(Berinde Multivaluado) Sean* (E,d) *un espacio métrico y* $T : E \to \mathcal{CB}(E)$ *correspondencia tal que* $\mathcal{H}(Tx,Ty) \leq \delta d(x,y) + Ld(y,Tx)$*, donde* $\delta \in [0,1)$ *y* $L \geq 0$*. Entonces existe* $x_0 \in E$ *tal que* $x_0 \in Tx_0$*.*

Demostración. Sean $x_0 \in E$ y $\epsilon > 0$ tal que $\eta = (1+\epsilon)\delta < 1$. Definimos de manera inductiva una sucesión $(x_n; n \in \mathbb{N})$ de modo que $x_{n+1} \in Tx_n$ y

$$d(x_n, x_{n+1}) < (1+\epsilon)d(x_n, Tx_n).$$

Como $d(x_n,Tx_n) \leq \mathcal{H}(Tx_{n-1},Tx_n) \leq \delta d(x_{n-1},x_n)$, entonces $d(x_n,x_{n+1}) \leq \eta d(x_{n-1},x_n)$. Procediendo inductivamente se tiene $d(x_n,x_{n+1}) \leq \eta^n d(x_0,x_1)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\eta \in (0,1)$, entonces $(x_n; n \in \mathbb{N})$ es una sucesión de Cauchy y por lo tanto converge. Sea $x^* = \lim_{n\to\infty} x_n$ y entonces

$$d(x^*,Tx^*) \leq d(x^*,x_{n+1}) + d(x_{n+1},Tx^*) \leq d(x^*,x_{n+1}) + \mathcal{H}(Tx_n,Tx^*).$$

Por hipótesis

$$\mathcal{H}(Tx_n,Tx^*) \leq \delta d(x_n,x^*) + Ld(x^*,Tx_n)$$

y luego

$$d(x^*,Tx^*) \leq (1+L)d(x^*,x_{n+1}) + \delta d(x_n,x^*)$$

Tomando límite cuando $n \to \infty$, se obiene $d(x^*,Tx^*) = 0$ y como Tx^* es cerrado, entonces $x^* \in Tx^*$, completándose la demostración. ∎

TEOREMA 4.5. *(Kannan Multivaluado) Sean* (E,d) *un espacio métrico completo y* $T : E \to \mathcal{CB}(E)$ *una correspondencia tal que* $\mathcal{H}(Tx,Ty) \leq \alpha[d(x,Tx)+d(y,Ty)]$ *donde* $\alpha \in [0,1/2)$. *Entonces existe* $x_0 \in E$ *tal que* $x_0 \in Tx_0$.

Demostración. Sea T una contracción de Kannan. Entonces,

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(Tx,Ty) &\leq \alpha[d(x,Tx)+d(y,Ty)],\\
\mathcal{H}(Tx,Ty) &\leq \alpha[d(x,y)+d(y,Tx)+d(y,Tx)+d(Tx,Ty)]\\
\mathcal{H}(Tx,Ty) &\leq \alpha[d(x,y)+d(y,Tx)+d(y,Tx)+\mathcal{H}(Tx,Ty)],\\
\mathcal{H}(Tx,Ty) &\leq \alpha d(x,y)+\alpha d(y,Tx)+\alpha d(y,Tx)+\alpha\mathcal{H}(Tx,Ty),\\
(1-\alpha)\mathcal{H}(Tx,Ty) &\leq \alpha d(x,y)+2\alpha d(y,Tx).
\end{aligned}$$

Esto implica que

$$\mathcal{H}(Tx,Ty) \leq \frac{\alpha}{1-\alpha}d(x,y)+\frac{2\alpha}{1-\alpha}d(y,Tx).$$

Como $\alpha \in [0,1/2)$, tomamos $\delta = \alpha/(1-\alpha)$ y $L = (2\alpha)/(1-\alpha)$. Luego T es una contracción de Berinde Multivaluada, por lo tanto existe $x_0 \in E$ tal que $x_0 \in Tx_0$. ∎

TEOREMA 4.6. *(Chatterjea Multivaluado) Sean* (E,d) *un espacio métrico completo y* $T : E \to \mathcal{CB}(E)$ *una correspondencia tal que* $\mathcal{H}(Tx,Ty) \leq \alpha[d(x,Ty)+d(y,Tx)]$ *donde* $\alpha \in [0,1/2)$. *Entonces existe* $x_0 \in E$ *tal que* $x_0 \in Tx_0$.

Demostración. Sea T una contracción de Chatterjea. Entonces,

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(Tx,Ty) &\leq \alpha[d(x,Ty)+d(y,Tx)],\\
\mathcal{H}(Tx,Ty) &\leq \alpha[d(x,y)+d(y,Tx)+d(Tx,Ty)+d(y,Tx)],\\
\mathcal{H}(Tx,Ty) &\leq \alpha[d(x,y)+d(y,Tx)+\mathcal{H}(Tx,Ty)+d(y,Tx)],\\
(1-\alpha)\mathcal{H}(Tx,Ty) &\leq \alpha d(x,y)+2\alpha d(y,Tx).
\end{aligned}$$

Esto implica que

$$\mathcal{H}(Tx,Ty) \leq \frac{\alpha}{1-\alpha}d(x,y)+\frac{2\alpha}{1-\alpha}d(y,Tx).$$

Como $\alpha \in [0,1/2)$, tomamos $\delta = \alpha/(1-\alpha)$ y $L = 2\alpha/(1-\alpha)$. Luego T es contracción de Berinde Multivaluada, por lo tanto existe $x_0 \in E$ tal que $x_0 \in Tx_0$. ∎

TEOREMA 4.7. *(Reich Multivaluado) Sea* (E,d) *un espacio métrico completo y* $T : E \to \mathcal{CB}(E)$ *una correspondencia tal que* $\mathcal{H}(Tx,Ty) \leq \alpha d(x,y)+\beta d(x,Tx)+\gamma d(y,Ty)$ *para todo* $x,y \in E$ *y donde* $\alpha+\beta+\gamma < 1$. *Entonces, existe* $x^* \in E$ *tal que* $x^* \in Tx^*$.

Demostración. Sea T una contracción de Reich. Entonces,

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(Tx,Ty) &\leq \alpha d(x,y)+\beta d(x,Tx)+\gamma d(y,Ty),\\
\mathcal{H}(Tx,Ty) &\leq \alpha d(x,y)+\beta[d(x,y)+d(y,Tx)]+\gamma[d(y,Tx)+d(Tx,Ty)],\\
\mathcal{H}(Tx,Ty) &\leq \alpha d(x,y)+\beta[d(x,y)+d(y,Tx)]+\gamma[d(y,Tx)+\mathcal{H}(Tx,Ty)],\\
(1-\gamma)\mathcal{H}(Tx,Ty) &\leq (\alpha+\beta)d(x,y)+(\beta+\gamma)d(y,Tx).
\end{aligned}$$

Esto implica que

$$\mathcal{H}(Tx,Ty)\leq \frac{\alpha+\beta}{1-\gamma}d(x,y)+\frac{\beta+\gamma}{1-\gamma}d(y,Tx).$$

Ya que $\alpha+\beta+\gamma<1$, entonces $(\alpha+\beta)/(1-\gamma)<1$ y así, tenemos que T es una contracción de Berinde con parametros $\delta=(\alpha+\beta)/(1-\gamma)$ y $L=(\beta+\gamma)/(1-\gamma)$. Por lo tanto, existe $x^*\in E$ tal que $x^*\in Tx^*$. ∎

TEOREMA 4.8. *(Ćirić Multivaluado) Sean (E,d) un espacio métrico completo y $T:E\to\mathcal{CB}(E)$ una correspondencia tal que*

$$\mathcal{H}(Tx,Ty)\leq \alpha \max\{d(x,y),d(x,Tx),d(y,Ty),d(x,Ty),d(y,Tx)\}$$

donde $\alpha\in[0,1/2)$. Entonces existe $x_0\in E$ tal que $x_0\in Tx_0$.

Demostración. Notemos primero que para todo $A,B\in\mathcal{CB}(X)$, $a\in A$ y $c>0$ tal que $\mathcal{H}(A,B)<c$, existe $b\in B$ tal que $d(a,b)<c$. Ahora, sea $\delta>0$ tal que $\alpha<\delta<1/2$. Entonces,

$$\mathcal{H}(Tx,Ty)<\delta \max\{d(x,y),d(x,Tx),d(y,Ty),d(x,Ty),d(y,Tx)\},$$

para todo $x\neq y\in E$. Sean $x_0,x_1\in E$, por inducción sobre la afirmación anterior podemos encontrar una sucesión $(x_n:n\in\mathbb{N})$ tal que $x_{n+1}\in Tx_n$ y,

$$\begin{aligned}
d(x_{n+1},x_n) &< \delta \max\{d(x_n,x_{n-1}),d(x_n,Tx_n),d(x_{n-1},Tx_{n-1}),\\
&\qquad d(x_n,Tx_{n-1}),d(x_{n-1},Tx_n)\}\\
&= \delta\{d(x_n,x_{n-1}),d(x_{n-1},x_{n+1})\}.
\end{aligned}$$

Definamos $\gamma_1=d(x_0,Tx_0)$. De la desigualdad anterior se desprenden dos casos:

$$d(x_1,x_2)\leq \delta d(x_0,x_1) \text{ ó } d(x_1,x_2)\leq \delta d(x_0,x_2).$$

Supongamos que $d(x_1,x_2)\leq\delta d(x_0,x_1)$. Como $d(x_0,x_2)\leq d(x_0,x_1)+d(x_1,x_2)$, tenemos que

$$d(x_0,x_2)\leq(1+\delta)d(x_0,x_1)\leq\left(1+\frac{\delta}{1-\delta}\right)d(x_0,x_1).$$

En caso que $d(x_1, x_2) \leq \delta d(x_0, x_2)$, entonces de la desigualdad $d(x_0, x_2) \leq d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2)$, obtenemos que

$$d(x_0, x_2) \leq \frac{1}{1-\delta} d(x_0, x_1) \leq \frac{1}{1-\frac{\delta}{1-\delta}} d(x_0, x_1).$$

Definamos $\gamma_2 = \frac{1+\frac{\delta}{1-\delta}}{1-\frac{\delta}{1-\delta}} d(x_0, x_1)$. Notemos que en ambos casos $\gamma_1 \leq \gamma_2$ y $d(x_0, x_2) \leq \gamma_2$. Ahora por inducción mostraremos que para $n \geq 2$ existe $1 \leq m \leq n$ tal que

$$d(x_n, x_{n-1}) \leq \left(\frac{\delta}{1-\delta}\right)^{n-1} d(x_0, x_m). \tag{5}$$

Si $n = 2$, entonces $d(x_1, x_2) \leq \delta \max\{d(x_0, x_1), d(x_0, x_2)\} = \alpha d(x_0, x_m)$ para algún $1 \leq m \leq 2$. Así (4.2) se cumple para $n = 2$. Supongamos ahora que (4.2) se cumple para todo $\alpha < n$, demostraremos que se cumple para $\alpha = n$. De (4.2) tenemos que

$$d(x_n, x_{n-1}) \leq \delta \max\{d(x_{n-1} x_{n-2}), d(x_{n-2}, x_n)\}).$$

Es claro que (3.2) se cumple si $d(x_n, x_{n-1}) \leq \delta d(x_{n-1}, x_{n-2})$. Supongamos ahora que $d(x_n, x_{n-1}) \leq \delta d(x_{n-2}, x_n)$, entonces tenemos que

$$\begin{aligned} d(x_{n-2}, x_n) &\leq d(x_n, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_{n-2}) \\ &\leq \delta d(x_{n-2}, x_n) + \left(\tfrac{\delta}{1-\delta}\right)^{n-2} d(x_0, x_m), \end{aligned}$$

para algún $1 \leq m \leq n-1$. En consecuencia,

$$d(x_{n-2}, x_n) \leq \frac{1}{1-\delta} \left(\frac{\delta}{1-\delta}\right)^{n-2} d(x_0, x_m),$$

y así

$$d(x_n, x_{n-1}) \leq \left(\frac{\delta}{1-\delta}\right)^{n-1} d(x_0, x_m),$$

para algún $1 \leq m \leq n-1$. Nuevamente, por inducción definimos la sucesión no decreciente $(\gamma_n : n \in \mathbb{N})$ tal que

$$\max\{d(x_0, x_m) : 1 \leq m \leq n\} \leq \gamma_n.$$

De (3.2) tenemos que

$$\begin{aligned} d(x_0, x_m) &\leq d(x_0, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_n) \\ &\leq d(x_0, x_{n-1}) + \left(\tfrac{\delta}{1-\delta}\right)^{n-1} d(x_0, x_m), \end{aligned}$$

para algún $1 \leq m \leq n$. Si $n > m$, entonces

$$\begin{aligned} d(x_0, x_n) &\leq d(x_0, x_{n-1}) + \left(\tfrac{\delta}{1-\delta}\right)^{n-1} d(x_0, x_m) \\ &\leq \left(1 + \left(\tfrac{\delta}{1-\delta}\right)^{n-1}\right) \gamma_{n-1}. \end{aligned}$$

Si $n = m$, entonces

$$\begin{aligned} d(x_0, x_n) &\leq \frac{1}{1-(\frac{\delta}{1-\delta})^{n-1}} d(x_0, x_{n-1}) \\ &\leq \frac{1}{1-(\frac{\delta}{1-\delta})^{n-1}} \gamma_{n-1}. \end{aligned}$$

Supongamos que

$$\gamma_n = \frac{1 + \left(\frac{\delta}{1-\delta}\right)^{n-1}}{1 - \left(\frac{\delta}{1-\delta}\right)^{n-1}} \gamma_{n-1}.$$

Notemos que $\gamma_{n-1} \leq \gamma_n$, y en ambos casos $d(x_0, x_n) \leq \gamma_n$. La sucesión $(x_n : n \in \mathbb{N})$ es acotada si y solo si

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \gamma_n = \frac{\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \left(\frac{\delta}{1-\delta}\right)^{n-1}\right)}{\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{\delta}{1-\delta}\right)^{n-1}\right)} < \infty.$$

Ya que las series $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \left(\frac{\delta}{1-\delta}\right)^{n-1}\right)$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{\delta}{1-\delta}\right)^{n-1}\right)$ son convergentes, se tiene que

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \left(\frac{\delta}{1-\delta}\right)^{n-1}\right) < \infty \text{ y } \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{\delta}{1-\delta}\right)^{n-1}\right) > 0,$$

y así $\gamma < \infty$. Ahora mostraremos que $(x_n : n \in \mathbb{N})$ es una sucesión de Cauchy. Supongamos que $M = \sup\{d(x_m, x_n) : m, n \in \mathbb{N}\}$. De (4.2) se tiene que

$$d(x_n, x_{n-1}) \leq \left(\frac{\delta}{1-\delta}\right)^{n-1} M$$

Luego, si $m < n$ tenemos que si $m, n \to \infty$,

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq \textstyle\sum_{k=m}^{n-1} d(x_k, x_{k+1}) \\ &\leq \textstyle\sum_{k=m}^{n-1} \left(\frac{\delta}{1-\delta}\right)^k M < \epsilon. \end{aligned}$$

Así, $(x_n : n \in \mathbb{N})$ es una sucesión de Cauchy. Ya que (E, d) es completo, entonces existe $x^* \in E$ tal que $\lim_{n\to} x_n = x^*$. Entonces,

$$\begin{aligned} d(x^*, Tx^*) &= \lim_{n\to\infty} d(x_{n+1}, Tx^*) \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \mathcal{H}(Tx_n, Tx^*) \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \delta \max\{d(x_n, x^*), d(x_n, Tx_n), d(x^*, Tx^*), \\ &\quad d(x_n, Tx^*), d(x^*, Tx_n)\} \\ &= \delta d(x^*, Tx^*). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $d(x^*, Tx^*) = 0$ y como Tx^* es cerrado entonces $x^* \in Tx^*$, completandose la demostración. ■

Observación 4.3. La existencia de punto fijo para una contracción de Ćirić con $\alpha \in [1/2, 1)$ es un problema abierto y constituye un tema interesante para una futura investigación.

Conclusión

En esta monografía, hemos expuesto resultados clasicos de la Teoría de Punto Fijo tanto para funciones como correspondencias, haciendo uso principalmente de la Condición Orbital de Banach más ciertas condiciones relacionadas con continuidad. Pero una función sin ser continua, y en el caso de una correspondencia, sin ser debilmente semicontinua superior pueden poseer puntos fijos. De esto se desprende que si bien la Condición Orbital de Banach es bastante comoda para garantizar existencia de puntos fijos, es muy restrictiva.

Una posible continuación de este trabajo sería extender estos resultados espacios métricos más generales, como por ejemplo los b-espacios.

Apéndice

Axiomas de Separación

Definición 1. Se dice que un espacio topológico (X, τ) es Hausdorff o separable, si y sólo si, para $x, y \in X$ tal que $x \neq y$, podemos encontrar $U \in \mathcal{N}(x)$ y $V \in \mathcal{N}(y)$ tales que $U \cap V = \varnothing$.

Definición 2. Sea (X, τ) un espacio topológico Hausdorff.

(i) Se dice que X es regular, si y sólo si, para todo $x \in X$ y todo conjunto cerrado C con $x \notin C$, podemos encontrar conjuntos abiertos $U \in \mathcal{N}(x)$ y $V \supseteq C$ tal que $U \cap V = \varnothing$.

(ii) Se dice que X es normal, si y sólo si, para todo par de conjuntos cerrados disjuntos C_1, C_2, podemos encontrar conjuntos abiertos U_1, U_2 tales que $U_1 \supseteq C_1$, $U_2 \supseteq C_2$ y $U_1 \cap U_2 = \varnothing$.

Axiomas de Contabilidad

Definición 3. Sea (X, τ) un espacio topológico.

(i) Dado $x \in X$, se dice que una familia $\mathcal{U}(x)$ de entornos de x, es una base local en x, si y sólo si, para todo $V \in \mathcal{N}(x)$ existe $W \in \mathcal{U}(x)$ tal que $W \subseteq V$.

(ii) Se dice que (X, τ) es un espacio primero contable o que satisface el primer axioma de contablididad, si y sólo si, todo $x \in X$ posee una base local contable.

(iii) Se dice que (X, τ) es un espacio segundo contable o que satisface el segundo axioma de contabilidad, si y sólo si, X posee una base contable.

Convergencia

Definición 4. Sea D un conjunto no vacío y $\leq$ una relación binaria definida en D. Diremos que $\leq$ es un pre orden, si $\leq$ es una relación reflexiva y transitiva.

Definición 5. Sean $(D, \leq)$ un conjunto pre ordenado y (X, τ) un espacio topológico.

(i) D es un conjunto dirigido, si y sólo si, para todo $m, n \in D$, existe $r \in D$ tal que $m \leq r$ y $n \leq r$.
(ii) Una red en X es una función $\phi : D \to X$, donde D es un conjunto dirigido. Suele denotarse por $(x_\alpha : \alpha \in D)$.
(iii) Sean $(x_\alpha : \alpha \in D)$ una red en X y $x_0 \in X$. Se dice que x_α converge a x_0, si y sólo si, para todo $U \in \mathcal{N}(x_0)$, existe $\alpha' \in D$ tal que $x_\alpha \in U$ para todo $\alpha \geq \alpha'$.
(iv) Sean $(x_\alpha : \alpha \in D)$ una red en X y $x_0 \in X$. Se dice que x_0 es un punto de acumulación de $(x_\alpha : \alpha \in D)$, si y sólo si, para todo $U \in \mathcal{N}(x_0)$ y todo $\alpha' \in D$, existe $\alpha \geq \alpha'$ tal que $x_\alpha \in U$.

Definición 6. Dada una red $(y_\beta : \beta \in I)$, diremos que es una subred de $(x_\alpha : \alpha \in D)$, si y sólo si, existe una función $f : I \to D$ tal que

(i) $y_\beta = x_{f(\beta)}$, y
(ii) para todo $\alpha' \in D$, existe $\beta' \in I$ tal que si $\beta' \leq \beta$, entonces $\alpha' \leq f(\beta)$.

Bibliografía

[1] A. Amini-Harandi. Fixed point theory for set-valued quasi-contraction maps in metric spaces. *Applied Mathematics Letters*, 24:1791–1794, 2011.

[2] A. Brondsted. Fixed points and partial orders. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 60(2):365–366, 1976.

[3] C. Castaing and M. Valadier. *Convex Analysis and Measurable Multifunctions.* Springer-Verlag, Berlin, 1977.

[4] B. Ćirić. A generalization of Banach's contraction principle. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 45(2), 1930.

[5] R. Fierro, C. Martínez, and C. Morales. Weak conditions for existence of random fixed points. *Fixed Point Theory*, 12(1):83–90, 2011.

[6] A. Granas and J. Dugundji. *Fixed Point Theory.* Springer-Verlag, New York, 2003.

[7] F. Hausdorff. Grundzge der mengenlehre. *Viet, Leipzig*, 1914.

[8] S. Hu and N. Papageorgiou. *Handbook of Multivalued Analysis.* Kluwer Academic Publishers, The Netherlands, 1997.

[9] E. Klein and A.C. Thompson. *Theory of Correspondences.* John Wiley & Sons, New York, 1984.