FACULTAD DE CIENCIAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO DE LAS CÓNICAS POR MEDIO DE LAS TIC, UTILIZANDO LOS NIVELES DE RAZONAMIENTO DE VAN HIELE

MEMORIA DE TÍTULO PRESENTADA POR:

JONATHAN ANDRÉS CISTERNAS JAMETT

CAMILA CONSTANZA GONZÁLEZ SILVA

JAIME ANDRÉS VALDÉS JARA

PARA OBTENER EL TÍTULO PROFESIONAL DE PROFESOR EN MATEMÁTICA, MENCIÓN DIDÁCTICA.

PROFESOR GUÍA: DR. CARLOS SILVA CÓRDOVA

VALPARAÍSO – CHILE – 2014

RESUMEN

En el presente trabajo investigamos la influencia en el aprendizaje significativo de los estudiantes al aplicar metodologías basadas en el Modelo de Van Hiele y el uso de las TIC en el contenido de Lugares Geométricos en Álgebra, en el subsector de Matemática en el nivel de Tercero año de enseñanza media diferencial.

Generalmente los estudiantes no logran un aprendizaje significativo en geometría, y en particular en el contenido de Lugares Geométricos ya que los métodos de enseñanza son muy pobres, básicos y primitivos. Por ello es necesario utilizar nuevas metodologías que tengan en cuenta los conocimientos previos y un procedimiento de aprendizaje en donde el alumno sea el que construya su propio conocimiento.

Es por eso que las clases han sido planificadas de distinta forma a las tradicionales, ahora es el estudiante el protagonista de cada clase para afrontar el aprendizaje, a través de guías didácticas que implican el uso de materiales, Geogebra y Pizarra interactiva. La metodología está basada en el Modelo de Van Hiele y la Teoría del Aprendizaje Significativo de David Ausubel.

Los resultados son a lo menos destacables, ya que los estudiantes a los que se les realizó el experimento muestran que la metodología usada logró en ellos un rendimiento superior a los grupos comparados que utilizaron una enseñanza tradicional, pudieron así destacar en el análisis de los problemas, justificar sus respuestas, y reconocer la aplicación de los contenidos aprendidos.

Esta investigación permite abrir la posibilidad a otras investigaciones futuras.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN 6

1. CAPÍTULO I: EL PROBLEMA 7

1.1. Planteamiento del problema 7

1.2. Preguntas de investigación 8

1.3. Justificación del Problema 9

1.4. Objetivo general 10

1.5. Objetivo específico 10

1.6. Lugar de trabajo o campo de acción 10

1.7. Conocimientos Previos 10

2. CAPÍTULO II: MARCO TEÓRICO 11

2.1. Modelo de Van Hiele 11

2.1.1. Historia del Modelo de Van Hiele 11

2.1.2. Los niveles de razonamiento matemático de Van Hiele 13

2.1.3. Principales características de los niveles de Van Hiele 17

2.1.4. Las fases de aprendizaje del Modelo de Van Hiele 20

2.2. Ausubel y el Aprendizaje Significativo 23

2.2.1. La teoría del Aprendizaje-Enseñanza en Ausubel 23

2.3. Recursos tecnológicos 30

2.3.1. Pizarra interactiva 30

2.3.2. Geogebra 32

3. CAPÍTULO III: METODOLOGÍA 33

3.1. Sujetos 33

3.2. Procedimientos 33

3.3. Diseño de la investigación 35

3.3.1. Hipótesis 36

3.3.2. Hipótesis Nula 36

3.3.3. Aprendizajes Esperados 36

3.4. Instrumentos de evaluación 36

3.5. Metodología de las clases 37

3.5.1. Descripción de la metodología 37
3.5.2. Herramientas tecnológicas 43
3.5.2.1. Geogebra 43
3.5.2.2. Pizarra interactiva 44
3.5.3. Pre - Test 47
3.5.3.1. Explicación del Pre Test 49
3.5.4. Post Test 51
3.5.4.1. Explicación del Post Test 52
3.5.5. Guía de Lugares Geométricos N°1 53
3.5.6. Guía de Lugares Geométricos N°2 62
3.5.7. Guía de Lugares Geométricos N°2 67
3.5.8. Guía de Lugares Geométricos N°3 72
3.5.9. La Parábola 78
3.5.10. La elipse 79
3.5.11. La hipérbola 81
3.6. Guías de ejercicios 84
3.6.1. Guía de Parábola 84
3.6.2. Guía de Elipse. 86
3.6.3. Guía de hipérbola 88
4. CAPÍTULO IV: ANÁLISIS DE DATOS 90
4.1. Análisis de la encuesta 90
4.1.1. Escalamiento tipo Likert 90
4.1.2. La encuesta 91
4.1.3. Comparación de la encuesta en los grupos experimentales y controles 92
4.2. Análisis de las pruebas 94
4.2.1. Pre Test 94
4.2.1.1. Resultados Pre Test 94
4.2.1.2. Comparación Pre-test 98
4.2.2. Post Test 101
4.2.2.1. Comparación Post-test 105
5. CAPÍTULO V: ANEXOS 108

5.1. Planificaciones 108

Conclusión 109

Bibliografía 111

INTRODUCCIÓN

En nuestro trabajo de investigación se hizo una intervención en el Liceo Bicentenario de Viña del Mar, en donde, en conjunto con alumnos de dos cursos científicos, se abordó el contenido de lugares geométricos. Experiencia que contrastaremos con otros dos cursos controles del Liceo Guillermo Rivera Cotapos de Viña del Mar. Se pretende lograr un aprendizaje significativo en cuanto al contenido de las cónicas en la Unidad de Lugares Geométricos. Para cumplir con dicho objetivo, nos apoyamos en las TIC, Tecnologías de la Información y Comunicación, específicamente en; la pizarra interactiva, para poder enseñar de mejor forma y para motivar a los alumnos en producir un interés que los hiciera construir su propio conocimiento; y en el programa Geogebra, el cual nos acerca a los alumnos, de manera en que puedan vivir la geometría desde un espacio familiar para ellos, ya que están cada vez más inmersos en esta evolución tecnológica que vivimos día a día.

En nuestro marco teórico presentamos la base de nuestra tesis; respecto al aprendizaje de las cónicas nos basamos la teoría de Dina y Pierre Van Hiele, conocida como Modelo de Van Hiele, la cual explica la construcción del aprendizaje de la geometría en función de los Niveles de Razonamiento expuestos por los mismos, además hablaremos sobre las Fases de Aprendizaje que dicho matrimonio propone. Sobre el aprendizaje significativo, hacemos referencia a David Ausubel, quien fue un importante psicólogo y psicopedagogo que hizo grandes aportes al Constructivismo, centrándonos en su Teoría del Aprendizaje Significativo. Por último, pero no menos importante, nos ayudamos de las TIC, las que, como hemos mencionado en el párrafo anterior, nos permitirán implementar clases innovadoras y distintas a lo que veníamos acostumbrados. En general, en estas tres grandes sillas descansa lo que detallaremos en las siguientes páginas.

Avanzando por nuestro trabajo nos encontraremos con los detalles de la intervención misma; el correspondiente pre-test para poder estar mejor ubicado respecto a los conocimientos que ya tenían los alumnos y alumnas y las nociones que podrían llegar a poseer; las guías de trabajo que ocupamos, lugar en donde responderemos al por qué utilizamos aquellas guías y no otras, y al porqué de su secuencia, explicando también el tipo de clases que impartimos, y por último; la prueba final que engloba todo lo aprendido tanto en las guías de trabajo como en las clases en sí.

Llegando al final de nuestra tesis, podremos apreciar un análisis estadístico de nuestra intervención en el liceo y también del desempeño en los cursos controles. Mostraremos los logros de ambos cursos experimentales y haremos un análisis comparativo refiriéndonos a los Niveles de Razonamiento de Van Hiele. Concluiremos si aprendieron o no significativamente, apoyándonos también de un análisis cualitativo, para lo que se hará una encuesta a los alumnos de los cursos experimentales y control con el propósito de saber si las clases fueron las adecuadas de acuerdo con el uso de guías, prueba y el uso de las TIC.

Esperamos que nuestro trabajo sea un aporte significativo para futuras generaciones, ya que el uso de las TIC cada vez se acrecienta más y los profesores del mañana tienen que estar preparados para hacerle frente a este nuevo desafío.

1. CAPÍTULO I: EL PROBLEMA

1.1. Planteamiento del problema

La Geometría, es sin duda, una temática que a gran parte de los estudiantes, más de alguna vez, les ha traído complicaciones. Esto se acrecienta más aún en lugares geométricos, y en particular, en los problemas de aplicaciones donde se utilizan las cónicas. En nuestra experiencia estudiantil, tanto secundaria como superior, y también en la práctica profesional y laboral, pudimos encontrar dichas dificultades.

Se puede percibir, que en nuestro país es muy común encontrarse con el modelo educacional conductista, el cual se centra en el estudio de la conducta observable para controlarla y predecirla; su objetivo es conseguir una conducta determinada. Muy contrario a lo que se espera en esta propuesta metodológica, cuyo enfoque se centra en el modelo constructivista el que se funda en tres nociones fundamentales:

- El alumno es el responsable de su propio proceso de aprendizaje. Es él quien construye el conocimiento, quien aprende. La enseñanza se centra en la actividad mental constructiva del alumno, no es sólo activo cuando manipula, explora, descubre o inventa, sino también cuando lee o escucha.

- La actividad mental constructiva del alumno se aplica a los contenidos que ya posee en un grado considerable de elaboración.

- El alumno, reconstruye objetos de conocimiento que ya están construidos. Por ejemplo, los estudiantes construyen su proceso de aprendizaje del sistema de la lengua escrita, pero este sistema ya está elaborado; lo mismo sucede con las operaciones algebraicas, y con las normas de relación social.

En cuanto a los aspectos mismos del constructivismo, podemos destacar algunas implicaciones pedagógicas tanto del profesor o facilitador como del alumno.

Profesor o Facilitador:

- El currículum debe organizarse en forma de espiral para que el estudiante construya nuevos conocimientos con base en los que ya adquirió anteriormente.
- La tarea del educador es transformar la información en un formato adecuado para la comprensión del estudiante.
- El maestro debe motivar al alumno a descubrir principios por sí mismo.
- Diseñar y coordinar actividades o situaciones de aprendizaje que sean atractivas para los educandos.
- Motivar, acoger y orientar.

- Estimular el respeto mutuo.
- Promover el uso del lenguaje (oral y escrito).
- Promover el pensamiento crítico.
- Proponer conflictos cognitivos.
- Promover la interacción.
- Favorecer la adquisición de destrezas sociales.
- Validar los conocimientos previos de los alumnos.
- Valorar las experiencias previas de los alumnos.

Alumno:

- Participar activamente en las actividades propuestas.
- Proponer y defender ideas.
- Aceptar e integrar las ideas de otros.
- Preguntar a otros para comprender y clarificar.
- Proponer soluciones.
- Escuchar tanto a sus coetáneos como al profesor o facilitador.
  (Silva, C. 2009. Adaptado de: Bruner, 1996; Rodrigo y Arnay, 1997).

Por lo anteriormente expuesto, es que esta investigación se centrará en encontrar una propuesta metodológica clave que permita lograr un aprendizaje significativo en esta unidad de tercer año medio diferencial; donde: "Se entiende que es necesaria una innovación educativa, utilizada como sinónimo de renovación pedagógica. (Silva C., 2011)". Nosotros la entendemos como un conjunto de ideas, procesos y estrategias, con una cierta sistematización, mediante los cuales se trata de introducir y provocar los cambios en las prácticas educativas vigentes.

1.2. Preguntas de investigación

¿Cómo lograr que los estudiantes de tercer año de enseñanza media de establecimientos científico-humanistas construyan, caractericen y planteen la ecuación correspondiente a la parábola, elipse e hipérbola, a partir de situaciones problemas e identifiquen los elementos que la conforman?

¿Existen mejoras en el rendimiento académico en los estudiantes que aprenden mediante la nuestra Propuesta Metodológica?

Producto de la implementación de nuestra metodología, ¿Se mejora el aprendizaje significativo de de las cónicas?

1.3. Justificación del Problema

"*El modelo de estudiantes receptores, pasivos y repetidores de frases bien elaboradas, ha ido reevaluándose con el transcurso de los años, para dar paso a planteamientos educativos donde el centro de atención es el estudiante, no como elemento vacío que debe ser colmado de conceptos, sino como un sujeto activo que debe apropiarse del conocimiento, sobre la base de una reflexión crítica de lo que aprenda." Y que "El docente ya no es el transmisor de saberes ni el cuantificador de resultados, sino el orientador y dinamizador de procesos continuos e integrales."*(Beltrán, 1999).

Los alumnos no logran un aprendizaje significativo debido a que los métodos de enseñanza son muy pobres, básicos y primitivos, donde no se consigue un estudio tangible de las cónicas, lo que hace muy difícil para el alumno visualizar e imaginar las curvas. Lo que a su vez, provoca una pérdida del sentido en el estudio de éstas.

Esta observación es difícil de justificar cuantitativamente, pues en la actualidad, en Chile no se registran estudios cuyas evaluaciones midan el contenido de cónicas para la Unidad de Lugares Geométricos. No existen pruebas que midan los contenidos propios de los cursos de matemática diferenciado. Es por esto que nos podemos basar en la experiencia más que en datos estadísticos sobre el aprendizaje de las cónicas, haciendo énfasis en el método de enseñanza que se usa, en general, en nuestro país.

Podemos ver que es necesario utilizar nuevas metodologías que tengan en cuenta los conocimientos previos de los alumnos y su capacidad de análisis e investigación. Encontrar las formas para las cuales el aprendizaje sea significativo para el alumno, es una tarea importante a la hora de querer que el conocimiento sea realmente aprendido y aplicado por el alumno.

Basta con observar a los alumnos para darse cuenta que las dudas que tienen todos es para qué sirve cada temática que se trabajan en matemática, lo que provoca el bajo interés hacia el estudio y la clase. Las cónicas no se escapan de este fenómeno pues el poco tiempo para la enseñanza, provoca que todo se limite a la enseñanza tradicional de los gráficos y su respectiva ecuación, además de ejercicios repetitivos que dejan de lado la historia de las cónicas y su aplicación, en general no se fomenta el análisis y desarrollo del pensamiento matemático.

1.4. Objetivo general

- Diseñar una propuesta donde se puedan implementar y aplicar clases en la unidad de Lugares Geométricos en Tercer año de enseñanza media diferenciado, basadas en el Modelo de Van Hiele, la Teoría de Ausubel y el uso de las Tecnologías de Información y Comunicación (TIC).

1.5. Objetivo específico

- Diseñar Actividades, guías y pruebas basadas en el Modelo de Van Hiele y la Teoría de Ausubel en la unidad de Lugares Geométricos, en tercer año de enseñanza media diferenciado.

- Determinar resultados en el rendimiento de los estudiantes con clases basadas en el Modelo de Van Hiele y la Teoría de Ausubel aplicadas en la unidad de Lugares Geométricos, en tercer año de enseñanza media diferenciado.

1.6. Lugar de trabajo o campo de acción

- Liceo Bicentenario de Viña del Mar.
- Liceo Guillermo Rivera Cotapos Viña del Mar.
- Tercero medio formación diferenciada humanístico-científica.
- Unidad 2: Lugares Geométricos.

1.7. Conocimientos Previos

- Plano cartesiano.
- Completación de cuadrados.
- Elementos Geométricos
- Figuras planas.
- Superficies.

2. CAPÍTULO II: MARCO TEÓRICO

2.1. Modelo de Van Hiele

2.1.1. Historia del Modelo de Van Hiele

La matemática desde el primer momento nos rodea en todos los momentos de trabajo, por ejemplo cuando demostramos a través de la lógica, cuando nos vemos enfrentados a definiciones formales, teoremas, etc. Si tomamos esto en cuenta más el cambio de un nivel de enseñanza a otro al cual se ve enfrentado el alumno, podemos decir que de parte de ellos hay un lógico descontento. De esto último se desprende el fracaso escolar y la mecanización del aprendizaje. También la exigencia de los profesores disminuye.

No es un problema exclusivamente actual, tampoco un problema nuevo ni de los sistemas a cargo de la educación o de los métodos que se ocupan el día de hoy. Con esto en mente Pierre Marie Van Hiele y Dina Van Hiele-Geldof, profesores holandeses de matemática del equivalente a la enseñanza media propusieron estudiar a fondo este problema para poder encontrarle alguna solución. Lo que sigue es la explicación del propio Van Hiele el origen de su interés por este tema. (Van Hiele, 1986):

"Cuando empecé mi carrera como profesor de matemáticas, pronto me di cuenta de que era una profesión difícil. Había partes de la materia en cuestión que yo podía explicar, y aún así los alumnos no entendían. Podía ver que ellos lo intentaban realmente, pero no tenían éxito. Especialmente al comienzo de la geometría, cuando había que demostrar cosas muy simples, podía ver que ellos daban el máximo de sí, pero la materia parecía ser demasiado difícil. De pronto parecía que comprendían la materia en cuestión. Podían hablar de ella con bastante sentido y a menudo decían: *No es tan difícil, pero ¿por qué nos lo explicó usted de forma tan complicada?* En los años que siguieron cambié mi explicación muchas veces, pero las dificultades se mantenían. Parecía como si siempre estuviera hablando en una lengua distinta. Y considerando esta idea descubrió la solución, los diferentes niveles de pensamiento."

En lo que explica Van Hiele en el párrafo anterior se encuentra el problema que tratábamos antes: a los alumnos les cuesta entender argumentaciones matemáticas formales, incluso cuando son muy simples. Año tras año se repite esta situación, a pesar de que el profesor se esfuerza en explicar más y con mayor claridad sus contenidos. En la geometría es en donde estos problemas se ven con mayor facilidad, ya que en esta área de la matemática se presenta una mayor manipulación de objetos didácticos, lo que no pasa en la rama de la aritmética, ya que siempre hay una componente simbólica y abstracta que no se puede eliminar ni siquiera con objetos didácticos.

Aquí nace el modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele a partir de la inquietud planteada anteriormente, este modelo plantea que existen distintos niveles de razonamiento geométrico que fluctúan entre el razonamiento visual de los niños de Educación Básica y el lógico-formal que correspondería a un matemático. Con la descripción del modelo que sirve para poder identificar los

problemas de aprendizaje, también este modelo ofrece una solución (claramente no una perfecta, tal cual como cualquier otra solución educativa) a través de la sugerencia a los profesores sobre cómo lograr que sus alumnos mejoren la calidad del razonamiento matemático. Esta solución es una organización de la enseñanza que se llaman *fases de aprendizaje*, se trata de ayudar a los alumnos a construir estructuras mentales para así poder lograr un nivel superior de razonamiento.

Van Hiele y Van Hiele-Geldof en sus tesis doctorales publicadas en 1957 se resumen los distintos niveles de razonamiento y fases de aprendizaje que constituyen el modelo de razonamiento de van Hiele. Aquí un resumen general de sus propuestas que más adelante detallaremos.

a) Es posible encontrar diferentes niveles de perfección en el razonamiento de los estudiantes de Geometría (y, en general, de matemática).
b) Un estudiante sólo podrá comprender realmente aquellas partes de la matemática que el profesor le preste de manera adecuada a su nivel de razonamiento.
c) Si una relación matemática no puede ser expresada de forma comprensible para el nivel de razonamiento actual de los estudiantes, es necesario esperar que éstos alcancen un nivel de razonamiento superior para presentársela.
d) No se puede enseñar a una persona a razonar de una determinada forma; sólo se aprende a razonar mediante la propia experiencia. Pero sí se puede ayudar a esa persona, por medio de una enseñanza adecuada de las Matemáticas, a que adquiera lo antes posible la experiencia necesaria para que llegue a razonar de esa manera.

Podemos decir que el modelo de Van Hiele pone el acento en definir que existen distintas formas de poder razonar en matemática, también le da importancia a que son los mismos profesores que tienen que considerar la capacidad de razonar matemática de sus alumnos al definir la forma y rigurosidad de sus clases.

Otro elemento a considerar en el modelo de Van Hiele es la importancia de la palabra “enseñar” en el punto 4. Como hemos mencionado anteriormente el foco de atención no es el aprendizaje de hechos y destrezas, sino la comprensión de conceptos y como perfeccionar las formas de razonamiento. Por esto, la palabra “enseñar” no hay que tomarla en el sentido tradicional escolar de enseñar una serie de conceptos junto con sus propiedades matemáticas. Hay que entenderla como una enseñanza de nuevas formas de pensar que vienen de estructuras mentales nuevas, más completas y complejas que las anteriores, que sólo a partir de la propia experiencia del estudiante pueden ser construidas.

2.1.2. Los niveles de razonamiento matemático de Van Hiele

Los Van Hiele dan existencia a cinco niveles de razonamiento. Las descripciones a continuación de estos niveles es un resumen de los propios Van Hiele y autores posteriores a ellos, que han indagado sobre las características de los niveles de este modelo. Burger, Shaughnessy (1986); Crowley (1987); Fuys, Geddes, Tischler (1988); Jaime Gutiérrez (1990), Van Hiele (1957), (1986); Van Hiele-Geldof (1957).

Nivel 1 (Reconocimiento): La capacidad de razonar geométricamente en este nivel se caracteriza porque los estudiantes:

- Utilizan propiedades poco precisas de las figuras geométricas a la hora de identificarlas, describirlas, compararlas u ordenarlas.
- Para caracterizar figuras hacen referencia a prototipos visuales.
- Ven las figuras geométricas como un todo, de manera global. Los estudiantes describen nada más que el aspecto físico de las figuras.
- Al describir o identificar figuras geométricas, incluyen atributos que son irrelevantes, lo normal es que lo hagan a través de lo físico o visual.
- Son capaces de aprender vocabulario geométrico, pueden identificar formas determinadas y si se les da una figura pueden reproducirla (los estudiantes podrían dibujar las figuras en un papel).
- Ven a las figuras geométricas como objetos individuales, o sea, los estudiantes no son capaces de generalizar las características que encuentran en una figura a otras de su misma clase.
- Hacen comparaciones y clasificaciones de figuras geométricas basándose puramente en su apariencia. Por ejemplo, utilizan expresiones como “se parece a”, “es como”, “tiene la forma de”, etc.
- No reconocen de forma explícita las propiedades matemáticas de las figuras: Si bien los estudiantes en este nivel son capaces de reconocer algunos elementos o propiedades de una figura, éstos no juegan un rol fundamental en el proceso de reconocimiento de aquella figura.
- Son capaces de identificar partes de una figura geométrica, pero:
  a) No analizan una figura a través de sus componentes.
  b) No piensan en las propiedades como característica de una clase de figuras.
  c) No generalizan sobre formas ni ocupan un lenguaje apropiado.

Nivel 2 (Análisis): El razonamiento geométrico en este nivel se caracteriza porque los estudiantes:

- Tienen consciencia de que las figuras geométricas poseen partes y de que están dotadas de propiedades matemáticas. Son capaces de hacer una descripción de sus partes y pueden también enunciar sus propiedades informalmente, usando un vocabulario apropiado para componentes y relaciones ("lados opuestos", "las diagonales se cortan en el punto medio", "los ángulos correspondientes son iguales", entre otros).
- Cuando hay que definir una figura, enuncian una lista de propiedades necesarias, en vez de que sean necesarias y suficientes.
- Hacen una comparación de figuras mediante el uso explícito de propiedades de sus componentes.
- Tienen un rechazo a las definiciones que se dan por el libro, incluso del profesor y lo ocupan a su favor en sus propias definiciones. No entienden la importancia ni la necesidad de definiciones.
- Pueden reconocer las propiedades matemáticas a través de la observación de las figuras y sus componentes. Pueden deducir propiedades generalizándolas a partir de la experimentación.
- Al momento de comprobar la validez de una afirmación, tratan la geometría como si fuera una ciencia experimental: Observan una gama de figuras y a partir de eso sacan conclusiones sobre ellas.
- Después de utilizar varias veces un tipo de ejemplo de figura geométrica, son capaces de generalizar a la figura en cuestión.
- No pueden relacionar unas propiedades con otras, por lo tanto no pueden realizar clasificaciones lógicas de figuras basándose en sus propiedades o elementos.
- No son capaces de relacionar unas propiedades con otras, porque ven a cada una de forma aislada y ven relación entre ellas.
- Aún no son capaces de explicar las relaciones entre las propiedades, no ven ninguna relación lógica entre las clases de figuras.
- Tienen una ausencia total de comprensión de qué es una demostración matemática.
- No admiten la inclusión de clases entre distintas familias de figuras, por ejemplo de cuadriláteros.

Nivel 3 (Clasificación): El razonamiento geométrico de este nivel se caracteriza porque los estudiantes:

- Empiezan a desarrollas la capacidad de razonamiento matemático: Pueden reconocer que algunas propiedades se deducen de otras y también pueden deducir esas implicaciones (de un solo paso). A pesar de esto, no entienden el significado de la deducción como un todo y menos el papel que cumplen los axiomas.
- Empiezan con el desarrollo de la capacidad de razonar matemáticamente: son capaces de reconocer que algunas propiedades se pueden deducir de otras. Pero por otro lado, no llegan a comprender el significado de la deducción como un todo ni la importancia de los axiomas.

- Entienden los pasos individuales de un razonamiento lógico formal, pero no comprenden la estructura de una demostración. Pueden entender una demostración explicada por el profesor o por el libro, pero no llegan a ser capaces de construirlas por sí mismos. Tampoco logran visualizar cómo podría alterarse el orden lógico de una demostración ni cómo construir una demostración a partir de premisas diferentes de las que han visto.
- Se manejan bien de acuerdo con un sistema del tipo lógico deductivo, pero esto no equivale a razonar con la fuerza de la lógica formal. Particularmente, no ven con claridad una implicación ($p \rightarrow q$) de su recíproca ($q \rightarrow p$).
- Son capaces de realizar razonamientos deductivos informales, utilizando de manera implícita reglas lógicas, por ej. la regla de la cadena (si $p \rightarrow q$ y $q \rightarrow r$, entonces $p \rightarrow r$).
- Pueden entender demostraciones formales cuando se las explica el profesor o el libro.
- Usan las representaciones físicas de las figuras para verificar las deducciones que ellos realizaron, más que como un medio para poder realizarlas.
- Son capaces de clasificar de manera lógica las diferentes familias de figuras a partir de propiedades de éstas ya conocidas formuladas con precisión matemática. No obstante aquello, los razonamientos lógicos de ellos se siguen basando en la manipulación y sus demostraciones son de tipo informal.
- Entienden el significado de, por ejemplo, “al menos un”, “todo”.
- Comprenden la importancia de las definiciones y pueden darlas correctamente.
- Tienen la capacidad de:
  a) Identificar distintos grupos de propiedades que caracterizan a una clase de figuras y comprobar su suficiencia.
  b) Identificar conjuntos mínimos de propiedades que pueden dar distintas características a una figura.
  c) Formular y utilizar una definición para una clase de figuras.
- Pueden cambiar definiciones y utilizar inmediatamente definiciones de nuevos conceptos.
- Hacen referencias de manera explícita a las definiciones en sus demostraciones.
- Pueden aceptar formas equivalentes de una definición.

Nivel 4 (Deducción formal): En este nivel, el razonamiento geométrico se caracteriza porque los estudiantes:

- Pueden comprender y realizar razonamientos formales lógicos. Las demostraciones, ya de varios pasos, logran tener sentido para ellos y aceptan su importancia como la única forma para poder verificar la veracidad de alguna afirmación.
- Con frecuencia realizan conjeturas e intentos de verificar las conjeturas deductivamente.
- Pueden construir, aparte de memorizar, demostraciones y ven en ello la posibilidad de desarrollarla de distintas maneras. Pueden comparar y contrastar demostraciones diferentes de un mismo teorema.

- Entienden las interacciones entre las condiciones necesarias y suficientes y logran distinguir entre una implicación ($p \rightarrow q$) y su recíproca ($q \rightarrow p$).
- Logran aceptar la existencia de definiciones equivalentes del mismo concepto y pueden demostrar su equivalencia.
- Comprenden la estructura axiomática de la matemática, o sea, el sentido y la utilidad de términos no definidos, axiomas y teoremas.
- Piensan en las mismas cosas que en el nivel anterior pero razonando o justificando las afirmaciones de manera rigurosa.
- Argumentan de manera deductivo formal, pero no investigan los distintos sistemas axiomáticos.

Nivel 5 (Rigor): El razonamiento geométrico de este nivel se caracteriza porque los estudiantes:

- Se encuentran en el máximo nivel de rigor matemático según los parámetros que se manejan hoy en día.
- Prescinden de cualquier tipo de soporte concreto para el desarrollo de su actividad matemática.
- Aceptan que existen distintos sistemas de axiomas y logran analizarlos y compararlos.

Resumiendo, podemos decir que la capacidad de razonamiento geométrico de los individuos puede evolucionar a lo largo del tiempo pasando por distintos niveles de calidad:

- Un primer nivel en el que se manipula sólo información visual y su forma de razonamiento no se considera como propiamente matemático.
- En el segundo nivel en el que se comienza a reconocer la presencia de propiedades matemáticas de los objetos, aun cuando el razonamiento se sigue basando en la percepción física.
- En el nivel número tres es en el que se comienza a desarrollar la capacidad de razonamiento riguroso y es capaz de manipular los elementos más simples del sistema formal, es decir, definiciones o implicaciones de un solo paso.
- Un cuarto nivel en el que se completa la formación del razonamiento matemático lógico-formal de los individuos.
- Por último, en el quinto nivel es en el que se adquieren los conocimientos y habilidades propias de los matemáticos profesionales.

Hace 36 años, cuando fue planteado el modelo de Van Hiele hasta ahora, éste ha sufrido varios cambios, típico de cualquier teoría en evolución: El planteamiento inicial (Van Hiele, 1957) constaba de tres niveles, los que corresponden a los niveles 2, 3 y 4 de los niveles anteriores. Luego, como consecuencia de la experiencia, las críticas y comentarios sugeridos, los Van Hiele (1986) explican esta modificación:

"La diferencia está causada por el hecho de no haber observado la importancia del nivel visual (el cual ahora llamamos primero) en esa época. Aun así, por entonces había personas (como Joh. Wansink) que me decían: *Creo que tus niveles de pensamiento son muy interesantes; pero no obstante me gustaría saber lo que hay en el nivel 0."*

En un dado momento, como probable consecuencia de las investigaciones realizadas en la Unión Soviética, el modelo es presentado como integrado por cinco niveles, que coinciden con los que acabamos de describir, No obstante esto, Van Hiele (1986) dice:

"Como se habrá observado, no intentamos describir niveles superiores al cuarto. Aquellos niveles superiores son mucho más difíciles de distinguir que los niveles 2, 3 y 4. Además, nos hemos dado cuenta de que esos niveles son fácilmente supervalorados. Y ¿qué vamos a hacer con esos niveles? En la escuela tenemos que trabajar con los niveles 2, 3 y 4. Si nuestros alumnos no nos comprenden, es en estos niveles y no cuando hablamos del quinto o quizás niveles superiores. Algunas personas están ahora examinando a los alumnos para ver si han alcanzado el quinto o niveles superiores. Creo que esto tiene simplemente un valor teórico."

Algunas investigaciones realizadas en los últimos años para analizar la coherencia interna de los niveles de Van Hiele han puesto importancia a la falta de consistencia del quinto nivel respecto de los anteriores (Mayberry, 1983). Estos datos, en conjunto con la realidad del quinto nivel sería poco probable alcanzarlo fuera de los últimos cursos de una Facultad de Matemática, por lo que es poco interesante desde la vereda de la didáctica), hacen que la mayoría de las investigaciones actuales se considere el Modelo de Van Hiele como formado por los niveles 1 a 4 descritos anteriormente.

2.1.3. Principales características de los niveles de Van Hiele

Desde un punto de vista didáctico, se plantean las preguntas de cómo se produce el paso de un nivel de razonamiento al siguiente y qué pueden hacer los profesores de matemática para facilitar ese paso.

La primera característica de los niveles es que no son independientes o incompatibles, o sea, que cuando adquieren un nivel, esto no supone que anulen y olviden las habilidades de razonamiento adquiridas del nivel anterior. Contrariamente, como indicamos en Jaime, Gutiérrez (1990), queda en evidencia que los 4 niveles poseen una organización de tipo jerárquica, ya que representan cuatro grados de sofisticación en el razonamiento matemático que puede utilizar una persona. Con esto, cada nivel de razonamiento se apoya en el anterior: Sin el primer nivel es imposible pensar en el segundo, ya que en el segundo nivel se sigue usando la observación de características físicas, si bien ahora estos se interpretan en términos de propiedades geométricas; pensar en un tercer nivel no es posible sin el segundo completo, ya que en el tercer nivel la persona sigue utilizando la experimentación como fuente de información y los ejemplos concretos son la base de los argumentos; pensar en base a un cuarto nivel es imposible sin la capacidad de razonamiento del tercero, pues es en este nivel en el que se adquieren los elementos básicos de los métodos de razonamiento formal.

En general, en algún nivel, los estudiantes utilizan herramientas mentales y determinadas habilidades de manera implícita, con lo que se produce el paso al siguiente nivel cuando esas habilidades y herramientas llegan a usarse de forma consciente y voluntaria, por esto es posible reflexionar sobre ellas. Por esto, para adquirir un nivel de razonamiento es necesario haber adquirido antes el nivel precedente. La tabla que se muestra a continuación resume los elementos principales, tanto explícitos e implícitos de los distintos niveles.

	Elementos explícitos	**Elementos implícitos**
Nivel 1	Objetos geométricos	Propiedades de los objetos geométricos
Nivel 2	Propiedades de los objetos geométricos	Relaciones entre propiedades y/o objetos
Nivel 3	Relaciones entre propiedades y/o objetos	Demostración formal de relaciones
Nivel 4	Demostración formal de relaciones	

En el momento de diseñar el material de enseñanza para nuestros estudiantes es cuando encontramos las implicaciones educativas de esta característica. Dependiendo de cuál sea el nivel actual de razonamiento, deberemos incluir en las clases problemas y actividades que ayuden a sacar los razonamientos de tipo implícitos, para que los mismos estudiantes los identifiquen, se den cuenta de su importancia y aprendan a usarlos. Junto al aprendizaje de conocimientos geométricos propiamente dichos, la explicitación y aprendizaje de estos elementos de razonamiento deberían ser los objetivos centrales de la enseñanza de la matemática.

Otra característica que se destaca en los niveles de Van Hiele es que el paso de un nivel a otro se produce de forma continua. A pesar de que en los escritos de los Van Hiele podemos encontrar afirmaciones en favor de la discretitud, o sea, discontinuidad de los niveles, las posteriores investigaciones y la línea hacia la que ha evolucionado el Modelo de Van Hiele a lo largo de los años nos conduce en la actualidad a considerar los niveles de manera continua. En Hershkowitz (1990) y Clements, Battista (1992) se dispone de información en detalle respecto a los resultados de estas investigaciones, así también como una perspectiva de la actual forma de entender y utilizar los niveles de Van Hiele.

Efectivamente, el aprendizaje de una nueva forma de razonar no se realiza de golpe. La experiencia en la realización de actividades y la resolución de problemas hace que poco a poco se vayan adquiriendo esas nuevas destrezas. En principio los estudiantes sólo serán capaces de aplicarlas en situaciones sencillas y con el tiempo adquirirán la confianza y destreza suficientes como para aplicarlas también en situaciones más complejas.

La última característica importante de los niveles que vamos a nombrar es que cada nivel de razonamiento lleva asociado un tipo de lenguaje específico y, por lo tanto, una determinada forma de entender a las otras personas. Las implicaciones educativas de esta característica de los niveles son evidentes, ya que como indica el propio Van Hiele (Fuys, Geddes, Tischler, 1984), dos personas que razonan en distintos niveles y que, por lo tanto, interpretan los argumentos expuestos de formas distintas, no podrán entenderse.

El ejemplo más claro de esta diferencia entre los lenguajes de los distintos niveles lo tenemos en la palabra más típicamente matemática: *Demostrar*. Los estudiantes de cada nivel entenderán lo siguiente:

En el primer nivel, esta palabra no posee significado alguno, ya que no hay razonamiento matemático y tampoco se utilizan propiedades matemáticas. Esto no quiere decir que las personas en el primer nivel no conozcan o entiendan la palabra, puesto que también se usa en el lenguaje cotidiano, pero no podrán utilizarla en el contexto de un problema de geometría.

Para una persona que está razonando en el segundo nivel, demostrar una propiedad geométrica significa, simplemente, encontrar uno o más ejemplos que se adecuados y comprobar experimentalmente (midiendo, etc.) que se verifica dicha propiedad. La constatación de pocos ejemplos (muchas veces de uno solo) le bastará para estar seguro de que la propiedad tiene validez universal.

En el nivel tercero la palabra “demostrar” ya adquiere un significado más cercano al que le damos los matemáticos, ya que las demostraciones son razonamientos lógicos. No obstante, el contenido de aquellos razonamientos es de tipo informal y se basa en la experimentación y las deducciones obtenidas a partir de casos concretos.

Finalmente, la persona que esté razonando en el cuarto nivel entenderá por la palabra “demostrar” lo mismo que los matemáticos, o sea, la organización de una serie de implicaciones de tipo formal que se basan en la hipótesis del problema y en otros elementos del sistema axiomático, como definiciones y otras propiedades ya demostradas.

Desde la perspectiva del modelo de Van Hiele frente al problema de muchos profesores, el cual es que tras plantear algún o algunos problemas a sus alumnos, viendo con desesperación cómo éstos los resuelven limitándose sólo a comprobar la veracidad de los enunciados en uno o varios casos concretos, en vez de redactar la demostración formal que los profesores esperaban. Esta desesperación está totalmente clara desde aquella perspectiva: los profesores estaban preguntando con el lenguaje del nivel 4, mientras que los estudiantes estaban respondiendo con el lenguaje del nivel 2. Y también está igualmente clara la forma de resolver el conflicto: los profesores tienen que adaptarse al nivel de razonamiento de sus alumnos, pues éstos no pueden adaptarse al de sus profesores, por más que lo intenten.

2.1.4. Las fases de aprendizaje del Modelo de Van Hiele

Según el Modelo de Van Hiele, enseñar a los estudiantes de una manera determinada no es posible; lo que es posible es enseñarles los aspectos mecánicos y lingüísticos de esa forma de razonar, pero realmente no se les enseña a razonar. Habitualmente esta situación ocurre en la enseñanza media cuando los estudiantes se enfrentan a memorizar. Por esto, cuando se evalúa a los estudiantes en el nivel de razonamiento se debe tener en cuenta entre un razonamiento real y uno aparente y poder distinguirlos.

Por otra parte, Van Hiele plantea que "la maduración que lleva a un nivel superior debe considerarse por encima de todo, como un proceso de aprendizaje y no como una maduración de tipo biológico" (Fuys, Geddes, Tischler, 1984). También dice que la adquisición de la experiencia que lleve a un nivel superior de razonamiento es independiente del método de enseñanza aplicado, claramente hay métodos que pueden facilitar este proceso, como hay otras que lo bloquean. Con esto en mente, el Modelo de Van Hiele posee una recomendación a los profesores para que se organicen su enseñanza, siguiendo pautas, que reciben el nombre de las "fases de aprendizaje".

En varios textos, por ejemplo Crowley (1987), Fuys, Geddes, Tischler (1988) y Jaime, Gutiérrez (1990), pueden encontrarse descripciones detalladas de las fases de aprendizaje. Las características de estas fases son las siguientes:

Fase 1 (Información):

Es una fase de toma de contacto, esto es que el profesor debe darle información a los estudiantes respecto al campo de estudio en el que trabajarán, los tipos de problemas a los que se enfrentarán, los conceptos que serán capaces de manejar, los materiales que van a utilizar, método de trabajo, etc.

Es también una fase en la que el profesor se informa, ya que le sirve para que averigüe los conocimientos que ellos ya poseen respecto al tema que se abordará. Puede pasar que los estudiantes hayan estudiado con anterioridad este tema, en este caso el profesor debe saber qué conocimientos, ya sean correctos o incorrectos, poseen sus alumnos y, particularmente, qué nivel de razonamiento tienen en ese tema concreto. También puede ocurrir que los estudiantes no hayan abordado con anterioridad el tema en cuestión, pero no es extraño que los estudiantes posean conocimientos geométricos intuitivos al respecto originado en contextos extraescolares, que no deben despreciarse.

Fase 2 (Orientación dirigida):

En esta fase los estudiantes comienzan a explorar el campo de estudio, resolviendo actividades y problemas que se basan en el material que se les ha provisto por el profesor. Los principales objetivos de esta fase son conseguir que los estudiantes tomen contacto con los métodos que se manejan en el nivel superior de Van Hiele al que se espera que accedan y descubran.

Los estudiantes aún no están en condiciones de realizar, por sí solos, un aprendizaje eficaz (respecto a los resultados obtenidos y al tiempo empleado), por lo que se hace necesario que las actividades que se les propongan estén dirigidas hacia los conceptos, propiedades, etc. que deben estudiar.

El objetivo del profesor es dirigir a los estudiantes en la línea de la solución cuando lo necesiten, ayudándoles a superar sus dificultades, evitando siempre llegar a dar la solución.

Fase 3 (Explicitación):

Aquí los estudiantes intercambian sus experiencias, comentan lo que se ha observado, explican cómo han resuelto las actividades, entre otras cosas, todo esto dentro de un ambiente de diálogo de grupo. Es de mucho interés que surjan puntos de vistas distintos, ya que el esfuerzo que le ponga cada estudiante por tratar de justificar su opinión hará que tenga que analizar con mucho cuidado sus ideas y expresarlas con claridad y así mismo la de sus compañeros.

Esta fase tiene el objetivo de conseguir que los estudiantes terminen de aprender el nuevo vocabulario; en la tercera fase se hace el paso del vocabulario informal creado por ellos mismos al vocabulario usual. Esta fase no hay que entenderla como un período de diálogo después de haber completado el trabajo de la segunda fase y antes de iniciar el de la cuarta. Habría que considerarla, más bien, como una actitud continua de diálogo tras cada problema o grupo de problemas durante las otras 4 fases.

Fase 4 (Orientación libre):

En esta fase los estudiantes deberán aplicar y combinar los conocimientos que han adquirido en las fases anteriores para poder hacer nuevas actividades. El campo de estudio ya es en gran parte conocido por los alumnos, pero estos aún deben perfeccionar su conocimiento del mismo (tanto en los contenidos geométricos como en las habilidades de razonamiento). Esto se puede conseguir a través del planteamiento por el profesor de problemas que, de preferencia, puedan desarrollarse de distintas formas o que admitan diversas soluciones. La misión del profesor es dar a los estudiantes indicios sobre la vía de solución de los problemas y fomentar la discusión sobre diferentes alternativas cuando las haya.

Fase 5 (Integración):

Durante las fases anteriores, los estudiantes han adquirido nuevos conocimientos y habilidades, pero aún tienen que aprender a tener una visión general de los métodos y contenidos que están a su alcance, relacionando nuevos conocimientos con otros campos que hayan estudiado con anterioridad. Aquí la misión del profesor tiene que estar enfocada en proporcionar comprensiones globales, a través de una comparación, acumulación y combinación de conocimientos que ya poseen. En esta fase, el trabajo que se realiza y las actividades que se planteen, no deben tener como objetivo producir nuevos conocimientos, sino que tienen que ayudar a organizar los ya aprendidos.

Cuando esta secuencia se completa de cinco fases de aprendizaje, los estudiantes deben haber alcanzado un nivel nuevo de razonamiento. El proceso debe comenzar de nuevo, comenzando por una nueva primera fase y, muy probable, retomando los temas que han estudiado en las anteriores fases, pero dándoles otra mirada acorde con el nuevo nivel superior de razonamiento que se quiere alcanzar.

Por esto, el Modelo de Van Hiele sugiere una enseñanza cíclica, en la que una parte de la geometría (en general, de la matemática) se retoma para poder completar y así mejorar su comprensión, usando formas de razonamiento más sofisticadas que cuando se estudió con anterioridad.

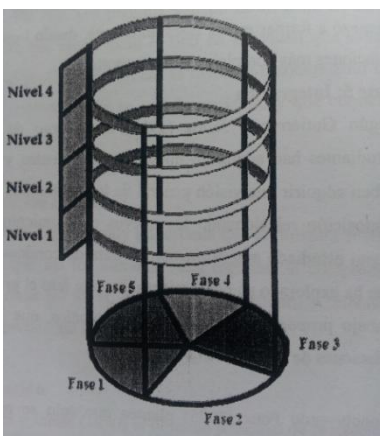


Figura 2.1: Diagrama cíclico de enseñanza del Modelo de Van Hiele

2.2. Ausubel y el Aprendizaje Significativo

2.2.1. La teoría del Aprendizaje-Enseñanza en Ausubel

David Paul Ausubel, nació el 25 de octubre de 1918 en la ciudad de Nueva York, EEUU, hijo de una familia judía emigrante de Europa Central, Se graduado de la Universidad de Pensilvania el año 1939. Ausubel hizo grandes aportes al campo de la psicología y de la pedagogía al crear la Teoría del Aprendizaje Significativo, en donde valora la experiencia que el aprendiz tiene en su mente.

La teoría que plantea Ausubel explica de manera teórica el proceso de aprendizaje, señala que la importancia al adquirir y retener un nuevo conocimiento radica en que el individuo debe poseer una estructura cognitiva adecuada, es decir, que en ella se encuentren conceptos relevantes, o adecuados, e inclusivos de manera clara y disponible, los cuales actuarán de anclaje para la incorporación de las nuevas ideas y conceptos.

"Cuando nuevas informaciones adquieren significado para el individuo a través de la interacción con conceptos existentes, siendo por estos asimiladas y contribuyendo a su diferenciación, elaboración y estabilidad, el aprendizaje se dice significativo" (Fermín María González y Joseph D. Novak, 2004).

Un aprendizaje se llama significativo cuando existe una interacción entre la nueva información y los conceptos ya existentes en la estructura cognitiva del aprendiz, es decir, la nueva información se incorpora de manera no arbitraria, esto indica que se relaciona con una parte específica de la estructura cognitiva del alumno; lo que llamaremos conocimientos previos. Un aprendizaje significativo también debe relacionarse de forma sustancial con lo que ya se sabe, esto significa que no se aprende "al pie de la letra", no debe aprenderse la palabra en su plenitud, sino que debe entenderse su sentido. Es así como los nuevos conocimientos y los antiguos se relacionan entre sí y se asimilan por parte del individuo contribuyendo a su diferenciación, elaboración y estabilidad, y una vez que todo esto ocurre, el aprendizaje logra tener significado para el individuo.

Este tipo de aprendizaje, según los entendidos en el cognitivismo, es por excelencia el mecanismo que ocupa el ser humano para poder adquirir y retener una gran cantidad de información a partir de un cuerpo de conocimientos. Así, Ausubel le da suma importancia al proceso que hay detrás del aprendizaje significativo como el más destacado del aprendizaje.

La teoría de Ausubel se basa en que las personas piensan con conceptos. Un concepto transmite el significado de alguna cosa. El concepto se puede definir como un término que representa una serie de propiedades, regularidades, características, atributos y observaciones de un objeto o un acontecimiento.

La adquisición de un conocimiento claro, organizado y estable por parte del alumno es el objetivo fundamental de enseñanza en el aula, ya que ese conocimiento cuando se adquiere, se transforma en el factor más importante, esto es porque ese conocimiento influencia la adquisición de más y nuevos conocimientos en la misma área.

El aprendizaje significativo posee varias ventajas. Primero, los conceptos que son aprendidos de manera significativa tienen la capacidad de extender el conocimiento de una persona de conceptos relacionados. Como el aprendizaje significativo implica una construcción intencional de enlaces sustantivos y lógicos, entre nuevos conceptos y conocimientos que ya existían, la información que se aprende de forma significativa es retenida por más tiempo. Por último, estos conceptos más tarde pueden servir como inclusores para un aprendizaje posterior de conceptos relacionados.

Ausubel afirma que la instrucción debería poner énfasis en los conceptos más generales e inclusivos de algún área de estudio. Su importancia radica en que pueden poseer relevancia directa con experiencias de aprendizajes posteriores, proveyendo los inclusores más generales para la incorporación significativa de nuevos y relacionados materiales de estudio y por otra parte, ayudan a los estudiantes a integrar los elementos entre el conocimiento nuevo y el que ya existe.

Por otro lado el concepto de conceptos que se acumulan en la estructura cognitiva de cada alumno es único. Por consiguiente, cada individuo podrá construir distintos enlaces de conceptos aunque esté involucrado en la misma tarea de aprendizaje. Para que los alumnos estén capacitados para esto y se pueda llevar a cabo, la instrucción tiene que permitir que los estudiantes reordenen y reformulen el material que tienen a su disposición de manera conceptual de formas que sean significativas para ellos. (Bousquet, 1982)

Moreira (1992), investigador educacional hace interesantes puntualizaciones relativo al aprendizaje significativo.

Para Moreira, el adquirir y retener un cuerpo de conocimientos implica la adquisición y retención de un cuerpo de significados, los cuales son el resultado del aprendizaje significativo. Así mismo, cuando surgen nuevos significados en el estudiante quiere decir que es la consumación de un proceso de aprendizaje significativo.

Este investigador hace referencia a los significados lógico y psicológico. El primero hace alusión al significado que es inherente al material de aprendizaje. Este material posee significado lógico en el momento en que puede relacionarse de forma sustantiva y no arbitraria con ideas adecuadas preexistentes en la estructura cognitiva. Por el otro lado, el significado psicológico se refiere a la experiencia idiosincrática del alumno. Para Moreira *es la relacionabilidad intencionada y sustancial del material lógicamente significativo con la estructura cognoscitiva de un alumno en particular lo que convierte al material potencialmente significativo para él.*

El aprendizaje significativo hace posible la transformación del significado lógico en psicológico.

No basta con que los materiales que se le presenten al alumno tengan significado lógico para que surja el significado psicológico, sino que el alumno debe tener una estructura cognitiva adecuada. También tiene que mostrar una actitud positiva hacia el aprendizaje significativo, o sea, debe hacer un esfuerzo consciente para hacer una relación de manera sustancial y no al pie de la letra el material a aprender, con su estructura cognitiva.

Independiente de cuánto significado potencial esté inherente al material de aprendizaje, si hay una actitud deliberada del alumno, de memorizar literalmente y no sustantivamente, tanto el proceso como los resultados del aprendizaje van a ser sin significado alguno y mecánicos. En cambio funciona de manera contraria si lo vemos desde el otro punto de vista, independiente de la disposición del alumno, si la tarea no posee un potencial significativo y más aún, no es deliberada ni relacionable con su estructura cognitiva, ni el proceso del aprendizaje ni los resultados de éste serán significativos.

Cuando hablamos de fenómeno idiosincrático hablamos de significado psicológico. Cuando un alumno realiza su aprendizaje de manera lógica significativa, el material pierde de forma automática su característica de no idiosincrático. A pesar de que hay una especificidad individual de los significados psicológicos, existe suficiente comunalidad entre individuos pertenecientes a una determinada cultura, lo que facilita el entendimiento y comunicación entre ellos.

El proceso del aprendizaje significativo se ve en que las ideas expresadas de manera simbólica se relacionan de modo sustancial y no arbitrario, por lo que el alumno tiene el conocimiento y lo posee en su estructura cognitiva (concepto, imagen). Cuando el aprendizaje cuyo nuevo conocimiento es guardado en la estructura cognitiva de forma literal y arbitraria es llamado como aprendizaje mecánico o memorístico.

Existe una interacción entre el nuevo conocimiento y el conocimiento existente en la estructura cognitiva que ya posee significado. Es cuando el transcurso de aquella interacción cuando el significado lógico del material se convierte en significado psicológico para el alumno. La interacción entre el antiguo conocimiento (con significado) y el conocimiento nuevo, que caracteriza el aprendizaje significativo es, a grandes rasgos, una particular interacción. En esa interacción, el conocimiento adquiere significados nuevos y el nuevo conocimiento adquiere significado para el alumno. *Desarrollándose la estructura cognitiva, aumentándose el número de elementos pertinentes en la misma para la atribución de significado a nueva información, e incrementándose por tanto, la probabilidad en el alumno de incorporar significativamente nuevos conocimientos. Este es el fundamento del aprendizaje significativo.*

*En el proceso del aprendizaje significativo (***Novak 1977),** *el resultado de la interacción entre el concepto inclusor y la nueva información conduce a alguna modificación en los dos,* el concepto inicial en la estructura cognitiva y la información recién aprendida. Podemos esquematizar el proceso como sigue:

CONCEPTO INCLUSOR EXISTENTE EN LA ESTRUCTURA COGNITIVA	+	NUEVA Y RELEVANTE INFORMACION PARA SER ATENDIDA	→	PRODUCTO DE LA INTERACCIÓN, CONCEPTO MODIFICADO EN LA ESTRUCTURA COGNITIVA
A		a'		A' a'

Esto significa que si se le pide a un alumno recordar la información aprendida de manera significativa, se puede esperar que se desvíe respecto a su respuesta en relación con la información que se le dio originalmente. De otra manera, por ejemplo, el alumno puede variar algo en las palabras que usa respecto a la que se le dio, pero la esencia del significado a la respuesta debería ser correcta.

De forma inversa, la información que se aprende memorísticamente se almacena en la estructura cognitiva sin enlazar en conceptos que existen y específicamente relevantes, y, por lo tanto, no está sujeta a la "distorsión" que se produce en el aprendizaje significativo.

El aprendizaje mecánico inhibe un nuevo y semejante aprendizaje, en cambio el aprendizaje significativo le da facilidad a los nuevos aprendizajes relacionados.

Los materiales aprendidos significativamente pueden ser retenidos durante un periodo de tiempo relativamente largo, meses, incluso años. El tiempo de retención a partir del aprendizaje mecánico o memorístico es muy corto, va de las horas hasta los días.

El aprendizaje significativo de representaciones, conceptos o proposiciones puede ocurrir de distintas maneras: *subordinado, supraordenado o combinatorio coordinado.*

Para Novak y Ausubel *la estructura cognitiva está organizada jerárquicamente*, esto es que cuando se producen nuevos significados a través de aprendizajes significativos se piensa en una relación subordinada del material de aprendizaje nuevo con la estructura cognitiva, esto último implica la asimilación de conocimientos bajo otros más amplios y generales inclusores que ya existen en la estructura cognitiva.

*El aprendizaje supraordenado*es producido cuando una idea más abstracta es aprendida, más general o más inclusora, en donde se incluyen varias ideas ya incorporadas a la estructura cognitiva. Este tipo de aprendizaje es menos común que el aprendizaje subordinado. El resumen de varias ideas que parecen ser contradictorias dentro de una idea más inclusiva y unificadora constituye un ejemplo de aprendizaje supraordenado.

Por último, en el *aprendizaje combinatorio* nuevas ideas son potencialmente significativas ya que pueden tener relación con contenidos de orden general adecuados a la estructura cognitiva, debido a la similitud con esos contenidos. La diferencia de las ideas subordinadas o supraordenadas es que no son relacionables con ideas adecuadas particulares de la estructura cognitiva.

Existen inclusores que sirven como anclaje para nuevas informaciones y otros que tienen más restricciones. *La estructura cognitiva puede ser considerada como una estructura de conceptos inclusores y de relaciones entre los mismos.*Se señaló con anterioridad que para Novak y Ausubel esta estructura está jerarquizada de tal forma que las ideas de mayor poder de explicación, más abstractas, generales, y más inclusivas están en la parte alta de la estructura; bajando por esa estructura están las ideas de nivel intermedio, hasta llegar a la base, en donde se encuentran las ideas concretas, particulares y de menor poder explicativo, que son los ejemplos.

No se trata, sin embargo, de una estructura estática, sino dinámica, que se modifica y reorganiza constantemente durante el aprendizaje significativo.

Los conceptos inclusores que se encuentran en la cima de la estructura cognitiva tienen la posibilidad de dar lugar a otros más diferenciados y amplios, los que nacen en un aprendizaje supraordenado, otros inclusores se pueden encoger, es decir, disminuir por falta de uso el grado de diferenciación alcanzada.

La dinámica de la estructura cognitiva está compuesta por dos procesos básicos que se relacionan y se producen en el transcurso del aprendizaje significativo: *diferenciación progresiva y reconciliación integradora.*

Mientras que ideas nuevas se incorporan por un cierto elemento inclusor, éstas van adquiriendo significado y el elemento inclusor se va cambiando por la incorporación de significados adicionales. Este proceso determina una *diferenciación progresiva* del elemento inclusor.

En el aprendizaje combinatorio o en el supraordenado, a medida que una nueva información se adquiere los elementos que constituyen la estructura cognitiva se pueden volver a organizar y adquirir nuevos significados.

Todo aprendizaje que tenga una reconciliación integradora, además producirá una diferenciación progresiva de los elementos inclusores, proposiciones o conceptos. La reconciliación integradora es una manera de diferenciación progresiva de la estructura cognitiva y que ocurre a lo largo del aprendizaje significativo.

La diferencia entre aprendizaje mecánico y aprendizaje significativo no se debe confundir con la distinción entre el aprendizaje por descubrimiento y el aprendizaje por recepción.

En el aprendizaje por descubrimiento el contenido principal de lo que va a ser aprendido no se le da, sino que tiene que ser descubierto por el alumno, en cambio que en el aprendizaje por recepción el contenido que será aprendido por el alumno se le presenta en su forma final. Sin embargo, después de que el aprendizaje por descubrimiento se completa, el contenido descubierto se hace significativo y de la misma forma que en el aprendizaje por recepción, donde el contenido presentado se hace significativo.

Cada una (memorística versus aprendizaje significativo y recepción vs descubrimiento) posee una dimensión independiente del aprendizaje, y muy al contrario a la creencia de que el aprendizaje por recepción es inherentemente memorístico por recepción mecánica y que el aprendizaje por descubrimiento es inevitablemente significativo, podemos afirmar que los dos tipos de aprendizaje tanto por recepción como por descubrimiento (autónomo y guiado) pueden ser memorísticos por recepción mecánica o significativo, en función de las condiciones bajo las que se produzca el aprendizaje y las estrategias utilizadas.

Para terminar, la consideración de Ausubel de *la psicología educativa como una disciplina de investigación aplicada,* con la clase como el espacio de experimentación y el *aprendizaje y retención de los cuerpos organizados de material significativo* como el foco investigativo, le agrega una variable motivadora para los buenos profesionales y deja ver una infinidad de posibilidades a la hora de tener una perspectiva educativa.

La idea clave de la teoría de Ausubel, como ya vimos anteriormente, es la naturaleza del aprendizaje significativo en contraste con el aprendizaje memorístico por repetición mecánica. Esta distinción de Ausubel es a la vez simple y profunda. Ausubel define el aprendizaje significativo como no arbitrario, no literal y que implica una incorporación sustantiva de nuevo conocimiento en la estructura cognitiva de una persona, mientras que el aprendizaje memorístico por repetición mecánica se describe como arbitrario, literal e implicando una incorporación no sustantiva de nuevo conocimiento en la estructura cognitiva.

Ausubel postula que el aprendizaje significativo requiere:

1) *Materiales de aprendizaje significativos conceptualmente transparentes* (Ebbinghaus, citado por Novak (1985) y su estudio sobre retención de conocimientos siguiendo un aprendizaje memorístico por repetición mecánica de materiales no significativos).
2) *Una actitud para aprender significativamente,* esto quiere decir que de parte del alumno tiene que existir una disposición a aprender, debe enlazar la etiqueta del concepto del nuevo material con el concepto que ya posee en su estructura cognitiva y,
3) *Una estructura cognitiva adecuada,* esto quiere decir que algunos conceptos ya presentes en aquella estructura se relacionan no arbitrariamente con las nuevas etiquetas conceptuales.

Estos requisitos postulados por Ausubel implican necesariamente que el profesional docente juegue con lo didáctico/pedagógico, ya que exigen de una parte el conocimiento de la estructura cognitiva del alumno, una planificación adecuada de currículum e instrucción y, por último, la inducción a actitudes que favorezcan al aprendizaje significativo en los alumnos y así acrecentar el potencial de motivación.

2.3. Recursos tecnológicos

2.3.1. Pizarra interactiva

Las también conocidas como PIDI son las nuevas pizarras que ya se utilizan en muchos de los establecimientos educacionales en Chile, y ¿Por qué el cambio?, porque son interactivas, lo que trae una gran ayuda a los profesores a la hora de realizar sus clases y aprovechar de mucho mejor forma los tiempos y aspectos difíciles de una clase. El problema está en su alto precio, supera el millón de pesos.

Según Alexis Krause (2010), experto en el uso de pizarras digitales, dice que en países como España, los resultados a estudios indican que efectivamente son favorables y que promueven el aprendizaje constructivista, significativo y didáctico del docente. Además Krause indica que si bien la pizarra no implica que los alumnos suban sus notas *"las pizarras interactivas proporcionan una dinámica que logra motivar muy bien a los estudiantes, permite una mayor concentración en algunas actividades y, para los docentes, facilita la presentación de contenidos difíciles."*

Suena maravilloso, pero no todo es bueno si no se sabe ocupar bien, ya que la magia no está en la pizarra propiamente tal, sino que cuán bien el profesor sepa ocuparla y la motivación que tenga para desarrollar sus clases agrega Krause.

En este sentido, Loreto Venegas (2010), asesora pedagógica, a cargo del Equipo de Pizarras Digitales Interactivas del Centro Zonal Sur de Enlaces del Ministerio de Educación y de la Universidad de Concepción, señala que se requiere de mucho más tiempo que antes para preparar clases, ya que la pizarra interactiva no permite monotonía, por lo que hay que ir variando las actividades. La recompensa está en el "*proceso de enseñanza, el desarrollo de nuevos entornos de aprendizaje, principalmente porque potencia un trabajo interactivo y colaborativo más expedito"* tanto para los estudiantes como para el profesor.

Loreto Venegas agrega que todo está en el docente, que tenga la capacidad de seleccionar o generar aplicaciones contextualizadas al nivel del curso en que esté trabajando, lo que permite sacar el verdadero provecho a la interactividad que entrega la pizarra, tanto en matemáticas como en otras áreas del aprendizaje.

¿Cuáles son las ventajas de utilizar pizarra interactiva?

Si vamos a seguir ocupando la pizarra como si fuese acrílica, entonces no vamos a ver las ventajas que trae consigo la interactividad de esta pizarra digital como lo decía Venegas.

Su mayor ventaja es utilizar todas las potencialidades de un computador y que se pueda interactuar con ello en una proyección, ya sea con los dedos o lápices, dependiendo de la pizarra que se tenga.

El desarrollo de contenidos es el mismo que con una pizarra normal, la diferencia está en que se pueden realizar actividades innovadoras y atractivas, lo que promueve un clima distinta en el aula de clases.

La cantidad de herramientas que cuenta agiliza una clase, ya que por ejemplo se cuenta con figuras geométricas hechas, de tal manera de que el único tiempo que se pierden, son los 2 segundos que uno se demora en insertar la imagen. Lo que nos permite ampliar considerablemente la cantidad de recursos a utilizar.

Hoy en día hay una gran cantidad de material en internet, acceder a él a través de un computador resulta muy simple, y ahora poder proyectarlo e interactuar con eso es más fácil aún.

Ya nada se pierde, todo el material, y las intervenciones realizadas se almacenan y se puede tener registro de todo lo desarrollado en clases.

La pizarra interactiva nos permite organizar y optimizar el tiempo durante inicio, desarrollo y cierre de una clase.

Promueve un trabajo activo y colaborativo entre estudiantes y profesor, lo que genera nuevas formas de interacción.

2.3.2. Geogebra

Geogebra es un software educativo especialmente para el área de las matemáticas, es gratis y sirve para educar en todos los niveles de aprendizaje. Reúne recursos de los ejes de número, álgebra, geometría e incluso algo de probabilidad y estadística. Se basa en gráficas, álgebra general y simbólica. Es muy sencillo de utilizar pero a su vez muy potente, entrega una amplia gama de herramientas que nos permite realizar gran parte de los contenidos de una clase de matemáticas básica, intermedia o avanzada. Ha recibido numerosas distinciones y ha sido galardonada en Europa y USA en organizaciones y foros de software educativos.

Síntesis de recursos en Geogebra

- Se encuentra en todos los idiomas
- Permite realizar gráficos, tablas y representaciones algebraicas planas y dinámicamente conectadas.
- Está directamente conectado con la web, permite crear material utilizable en HTML para que se pueda subir a la red y se pueda trabajar en cualquier lugar del mundo.

3. CAPÍTULO III: METODOLOGÍA

3.1. Sujetos

Para este estudio se utilizó dos establecimientos educacionales, el Liceo Bicentenario de Viña del Mar ubicado en 2 norte 753 y el Liceo Guillermo Rivera Cotapo ubicado en calle montaña S/N ambos en Viña del Mar. Ambos son liceos Científico – Humanista, el primero tiene cursos desde 7º básico a 4º Medio, a diferencia del segundo que solo tiene enseñanza media.

El Liceo Bicentenario cuenta con pizarras interactivas, lo que nos permite realizar satisfactoriamente nuestro proyecto, es por ello que elegimos los dos cursos de tercer año de enseñanza media del área científica de este establecimiento para que fuesen nuestros grupos experimentales, a diferencia del Liceo Guillermo Rivera que no cuenta con estas tecnologías, por lo que seleccionamos de acá nuestros dos grupos controles.

Ambos establecimientos educacionales son municipales, y administrados por la Corporación Municipal de Viña del Mar, lo que conlleva a que la mayoría de los estudiantes son de un nivel socioeconómico bajo.

Para esta investigación se trabajó en el laboratorio de matemáticas del Liceo Bicentenario ya que cuenta con las tecnologías necesarias para aplicar nuestro experimento.

3.2. Procedimientos

El procedimiento para la aplicación de esta investigación es el siguiente:

- Encontrar los establecimientos educacionales que contaran con cursos de tercero medio científico.

- Elegir la unidad a trabajar en nuestra tesis, la cual fue Lugares Geométricos del sub-sector de matemática y que corresponde al tercer año de enseñanza media diferenciado.

- Diseñar las planificaciones para los grupos experimentales, las cuales están basadas en el modelo de Van Hiele y la teoría de Ausubel.

- Crear las clases, actividades, tareas, guías y encuestas a aplicar en las clases de los grupos experimentales.

- Crear el pre-test y post test a evaluar tanto para los grupos control y grupos experimental.

- Organizar las clases en el programa ActivInspire de la pizarra interactiva.

- Solicitar a la dirección de los establecimientos seleccionados la autorización para aplicar nuestro proyecto de investigación, tanto a los directores como a las jefas de UTP de cada establecimiento.

- Enviar la planificación para acordar los tiempos de aplicación y la fecha de comienzo del experimento.

- Verificar que los grupos control realicen los mismos contenidos que los experimentales, considerando que estos grupos tendrán una enseñanza tradicional del contenido a través de su profesor.

- Validar los instrumentos de evaluación tanto pre-test como el post-test.

- Reservación del laboratorio de matemática que cuenta con carro tecnológico (20 netbook), pizarra interactiva y acrílica.

- Aplicar prueba pre-test a los cuatro cursos.

- Realizar las clases en el laboratorio de matemática aplicando la metodología creada para tal efecto.

- Aplicar prueba post-test a los cuatro cursos.

- Realizar encuesta a los estudiantes de los cursos experimentales para ver su opinión sobre nuestras clases.

- Recolectar datos y analizar tanto de las encuestas como de los resultados obtenidos por los grupos control en comparación a los grupos experimentales tanto en el pre-test y post-test.

3.3. Diseño de la investigación

En la literatura sobre la investigación podemos encontrar diferentes clasificaciones de los tipos de diseños existentes: La metodología experimental y la no experimental. La primera de éstas puede dividirse en tres categorías según Campbell y Stanley (1973), en Preexperimentos, Experimentos Puros (verdaderos) y Cuasiexperimentos.

En nuestra investigación adoptaremos la metodología Cuasi Experimental. Ésta, según Campbell y Stanley (1973) se define de la siguiente manera:

"Son aquellas situaciones sociales en que el investigador no puede presentar los valores de la Variable Independiente a voluntad, ni puede crear los grupos experimentales por aleatorización, pero sí puede, en cambio, introducir algo similar al diseño experimental en su programación de procedimientos para la recogida de datos".

En nuestro prototipo, tomaremos una muestra de cuatro grupos de estudiantes de tercer año medio científico (alumnos que fluctúan entre 16 y 17 años de edad; dos de ellos del Liceo Bicentenario de Viña del mar, y dos del Liceo Guillermo Rivera Cotapo, ambos de la comuna de Viña del Mar, V región; los cuales serán divididos en grupos experimentales (intervenidos) y grupos control (sin intervención).

Podemos definir con mayor claridad estos dos grupos:

- **Grupo Experimental:** Es aquel en donde se realizan los experimentos, es decir, donde el investigador realiza los cambios para comprobar o refutar su hipótesis. Está expuesto a la manipulación experimental bajo estudio; con el fin de establecer una comparación con el grupo control.
- **Grupo Control:** Es el grupo en el cual no hay intervención; es el grupo que se compara al grupo que experimenta la intervención y la diferencia de los resultados del grupo atribuidos al efecto de la intervención; creado al azar en diseños experimentales; creado usando medios no aleatorios en diseños cuasiexperimentales.

El grupo de control permite discriminar entre los efectos causados por el tratamiento experimental en estudio y los originados por otros factores y variables, expectativas que se tenían en el proyecto o programa, entre otros.

Para que la comparación entre los resultados de ambos sea equilibrada, el grupo de control y el experimental deben ser lo más parecidos posibles respecto a todas las características que puedan influir en los resultados.

Nuestra Propuesta Metodológica, se desarrolla en base a planificaciones realizadas con respecto a los Aprendizajes Esperados; las Actividades Genéricas, luego las Actividades Operativas, las cuales quedan plasmadas en las guías de Intervención Pedagógica.

3.3.1. Hipótesis

- Hipótesis 1: Al aplicar la metodología, los estudiantes mejoran su rendimiento académico.
- Hipótesis 2: Al aplicar la metodología, los estudiantes mejoran su aprendizaje significativo en el contenido de Lugares Geométricos.

3.3.2. Hipótesis Nula

- Hipótesis 01: Al aplicar la metodología, los estudiantes no mejoran su rendimiento académico.
- Hipótesis 02: Al aplicar la metodología, los estudiantes no mejoran su aprendizaje significativo en el contenido de Lugares Geométricos.

3.3.3. Aprendizajes Esperados

- Reconocen las cónicas como un lugar geométrico.
- Determinan elementos y caracterizan las cónicas.
- Reconocen la Parábola, la Elipse y la Hipérbola a partir de las ecuaciones cartesianas que las caracterizan.
- Resuelven problemas que involucran el uso de cónicas.

3.4. Instrumentos de evaluación

Los instrumentos de evaluación fueron cuatro:

- **Pre-test:** Una prueba diagnóstica para medir conocimientos previos, para saber y compara los conocimientos que tiene cada uno de los grupos a trabajar, tanto controles como experimentales.

- **Guías:** Las guías son trabajadas en clases y tienen una evaluación de proceso que nos permite saber cuánto han ido aprendiendo en cada clase.

- **Mapas Conceptuales:** Los mapas conceptuales son utilizados como cierre de cada contenido. Permiten identificar errores conceptuales y desarrollan el pensamiento lógico.

- **Post-test:** Esta prueba sumativa es aplicada en la última clase con el fin de medir los aprendizajes alcanzados por los estudiantes.

Todas las pruebas fueron validadas por los profesores de cada curso y las jefas de UTP de cada establecimiento para así garantizar que la prueba es óptima para medir los aprendizajes esperados requeridos en el contenido de Lugares Geométricos.

Además se realizó una encuesta al final del post-test del tipo de escalas de Likert, la cual consiste en realizar afirmaciones o juicios con el fin de medir la apreciación de los estudiantes sobre las clases realizadas, las respuestas son dadas en base a una escala de cinco puntos, y a cada punto se le asigna un valor numérico que equivale a cuán satisfactoria es para él la afirmación que allí le aparece. (Hernández, Fernández y Baptista, 2006)

3.5. Metodología de las clases

La metodología utilizada en la tesis, da cuenta de una manera distinta de enfrentar las clases de matemática y más específicamente en el área de la Geometría, donde la Teoría de Van Hiele y el uso de las TIC son los protagonistas de esta forma alternativa de enseñar. Si bien la Teoría de Van Hiele, la Teoría de Ausubel de los aprendizajes significativos y las TIC son opuestas en un punto de vista generacional, todos se complementan muy bien para un mejor aprendizaje.

3.5.1. Descripción de la metodología

Nuestra propuesta de intervención consiste básicamente en implementar una serie de guías de trabajo abarcando el contenido de Lugares Geométricos, específicamente Cónicas, basándonos en los niveles de razonamiento de Van Hiele. Claramente, esto va acompañado de la entrega de los conocimientos mediante las clases, siendo nosotros tres, los integrantes de este grupo, quienes impartiríamos los conocimientos a través de uso de las tecnologías, es decir, del uso de la pizarra electrónica y Geogebra. Esto último, en conjunto de otros elementos, ayudan al logro, por parte de los alumnos, de un aprendizaje significativo, idea relevante en la cual nos apoyamos en el recorrido de esta tesis basándonos en el autor David Ausubel y su teoría.

En cuanto al contenido, los lugares geométricos que están incorporados en el programa de estudios para el curso de tercer año de enseñanza media científico son la parábola y la elipse. Sin embargo, nosotros decidimos integrar, para las guías 1 y 2, la hipérbola. Esta decisión fue tomada por nosotros para que los alumnos tengan una noción básica de lo que es la hipérbola; de su forma y de sus propiedades que la definen como tal. Adentrándonos en los contenidos que, más adelante, muchos de ellos verán en la universidad, pues las cónicas son parte de los ramos de los primeros años en las carreras del área de las matemáticas, carreras que probablemente los alumnos seguirán debido a su elección, sea esta el área científica.

Una de las herramientas que utilizamos en nuestra tesis para alcanzar los objetivos propuestos en el principio de este trabajo es el uso de mapas conceptuales, que según González, Morón y Novak (2001), Novak (2004), son un buen instrumento de evaluación, ya que consiste en un esquema que posibilita organizar y representar gráficamente el conocimiento, los conceptos, facilitando para nosotros, los profesores, identificar la existencia de errores conceptuales. Este elemento es muy importante, pues los errores de conceptos dificultan nuestro propósito, que los alumnos dominen el contenido y que exista un amplio desarrollo de su pensamiento creativo y crítico, necesario para el descubrimiento de diversas estrategias en la solución de los ejercicios, además de la visualización de las curvas y de los problemas de planteo.

La decisión de la utilización de este sistema de representación, se debe a las diversas ventajas que poseen tanto en el área de la docencia como en el proceso de enseñanza aprendizaje. Además de ser una herramienta avalada por Joseph Novak (1991), quien establece que los mapas conceptuales son una estrategia sencilla y tremendamente poderosa, pues colabora a la organización de los materiales de aprendizaje por parte de los estudiantes y, por lo tanto, a su proceso de aprendizaje. Novak señala que existen 3 elementos fundamentales a la hora de crear un mapa conceptual, los cuales son; los conceptos, acontecimientos u objetos que se estudian; las proposiciones, que dan lugar a la unidad semántica entre los conceptos relacionados y unidos por medio del último de los elementos mencionados por el autor; las palabras enlace, utilizadas para el vínculo entre los conceptos.

De acuerdo con Silva (2011), las ventajas del uso de mapas conceptuales en cuanto a la pedagogía son que; ayudan a mostrar, de forma simple y estructurada, las relaciones que existen entre las ideas principales y secundarias; muestran clara y fácilmente la información más relevante; y entregan la información respondiendo a una jerarquización organizada. Existen además ventajas en el plano del aprendizaje, estas son que; ayudan a que el alumno sea preciso y conciso la representación de sus conocimientos; lo que a su vez potencia las capacidades de relacionar, ordenar lógicamente, sintetizar y analizar; lo que conlleva a fomentar un razonamiento deductivo, ayudando al trabajo intelectual estructurado y activo, y por último; los mapas conceptuales benefician la comprensión, la capacidad de memorizar y recuperar información por parte del alumno.

Esta propuesta posee la planificación con el uso de la pizarra interactiva de lo que sería la intervención, además conlleva las guías de trabajo que se emplearían.

Antes de comenzar, queremos señalar que, en cuanto a los Niveles de Razonamiento de Van Hiele, hemos dejado de lado el quinto de los niveles; el Rigor, pues según los autores con los que trabajamos en nuestra tesis, este nivel de razonamiento lo poseen quienes manejan un dominio profesional de las matemáticas, ya que el individuo debe ser capaz de no necesitar ningún tipo de material concreto de ayuda en el desarrollo de la actividad matemática, y también debe ser cuidadoso y exacto en el lenguaje que utiliza, siendo esto fuera de los objetivos planteados anteriormente, pues no pretendemos dicha rigurosidad en su aprendizaje, sino más bien que logren dimensionar y aplicar estos nuevos conocimientos.

A continuación explicaremos en qué consiste cada guía de trabajo, asociándolas a los niveles de razonamiento de Van Hiele y a la Teoría del Aprendizaje Significativo de David Paul Ausubel.

Guía 1 (G1):

En esta guía se busca que los estudiantes logren tener una noción general de lo que son las cónicas, que entiendan visual y físicamente como se ve una parábola, una elipse y una hipérbola.

El primer acercamiento consiste en entender el origen de las cónicas, por lo que se pide que el alumno realice distintos cortes a un cono hecho de plasticina, de manera que el alumno perciba las distintas formas que las cónicas poseen. Luego, se debe construir las cónicas en base a sus propiedades, y más adelante, en base a otros elementos de la geometría, esperando comprender los distintos caminos que hay para dibujar las cónicas. A pesar de lo recién mencionado, y siendo capaces los alumnos de reconocer algunos elementos o propiedades de las cónicas, no es fundamental, para este nivel, que las manejen con claridad, pues el objetivo es el **Reconocimiento** de ellas, como explica el Primer Nivel de Razonamiento de Van Hiele. A medida que van profundizando en el contenido, van agregando más especificidad en sus conocimientos.

La G1 termina con un reconocimiento de las cónicas por parte del alumno, haciendo un símil en la vida cotidiana, en donde tiene que mencionar lugares de su realidad en donde se pueden apreciar las formas recién vistas.

Este primer paso es tremendamente importante, ya que establece los conectores principales entre los conocimientos previos que poseen los alumnos y el conocimiento que será adquirido paulatinamente por medio de las guías de trabajo, en donde el estudiante construye este conocimiento nuevo; las cónicas. De esta forma se relacionan los elementos de la geometría, y del mundo propio que ha construido el estudiante por medio de su experiencia, con el nuevo conocimiento, adquiriendo significado para el individuo. Importancia que explica el autor Ausubel en su teoría.

Finalizando esta actividad, los profesores hacemos una retroalimentación, en donde se bautizan las cónicas con sus nombres respectivos.

Guía 2 (G2):

Esta guía tiene 2 versiones, una para trabajar a mano y otra que hace uso de las tecnologías, específicamente del programa Geogebra. Ambas tienen el mismo objetivo y responden al mismo Segundo Nivel de Razonamiento de Van Hiele.

En esta guía, buscamos que el alumno logre entender las propiedades que definen las cónicas recién aprendidas. Es por eso que esta actividad se realiza en base a la actividad realizada en la guía anterior, en donde ahora sí es importante la noción que obtuvieron acerca de las propiedades y elementos de las cónicas. Aquí queremos que el alumno analice las cónicas formadas, que considere los elementos

geométricos utilizados en las construcciones, las regularidades observadas, comparándolas y caracterizando cada una de las cónicas.

Por ser este un primer ahondamiento en las propiedades de las cónicas, se espera que los alumnos consideren propiedades y características no fundamentales a la hora de definir las cónicas.

Luego, se les pide a los estudiantes que, mediante cálculos matemáticos entre distancias dentro de las cónicas, hagan conclusiones de lo observado para así generalizar para todas las cónicas. Esto ayuda a orientar el **Análisis**, Segundo Nivel de Razonamiento de Van Hiele, intentando hacerles ver qué características observadas tienen mayor relevancia con respecto de las otras, acercándonos a las propiedades suficientes para la construcción de las cónicas, y así, a su definición.

El trabajo en base a la guía anterior ayuda a la existencia del enlace entre los conocimientos que ya poseen los alumnos en su estructura cognitiva, con estas propiedades que ellos mismos van descubriendo al ir respondiendo las interrogantes planteadas intencionalmente por nosotros, los profesores, para siempre ir encaminando un correcto aprendizaje. Es importante que los alumnos vayan relacionando constantemente los contenidos y que nada parezca aislado de lo anterior, así los aprendizajes se van incorporando de manera significativa de acuerdo con la Teoría de Ausubel, y a medida en que vamos avanzando y vamos integrando nuevos conocimientos, estos van sirviendo a su vez de anclaje para otros nuevos saberes.

Al término de esta guía y como retroalimentación, los profesores hacemos una conclusión en donde se definen las cónicas en base a las propiedades que dan forma a estos lugares geométricos.

Guía 3 (G3):

Esta guía propone que el alumno defina las cónicas por sus propios medios. Para este nivel, Tercer Nivel de Razonamiento de Van Hiele: **Clasificación**, el alumno es capaz de formular sus propias definiciones y aceptar las distintas definiciones equivalentes para un mismo concepto, por lo que se apela a que, en conjunto de una buena disposición, el alumno formule definiciones de acuerdo lo que ha aprendido hasta el momento, clasificando los distintos tipos de cónicas a partir de las propiedades ya estudiadas.

Luego los alumnos deben determinar los elementos de las cónicas mediante el uso de distintos elementos geométricos, de tal forma que en conjunto con la primera parte de la guía, los estudiantes identifiquen las propiedades necesarias y suficientes de cada una de las cónicas. A término de esta guía, se solicita a los alumnos que construyan nuevamente las cónicas a partir de elementos geométricos que dan forma a las propiedades que definen las cónicas, un nuevo camino para la construcción de estas, haciendo aún más consciente sus propiedades, por lo que se refuerza y analiza el por qué de los pasos a seguir que dan pie a las propiedades que determinan a las cónicas como tal.

Como podemos ver, a medida que vamos aumentando en los Niveles de Razonamiento de Van Hiele, vamos haciendo uso de lo que ya hemos aprendido, siempre estando presente el reconocimiento y el

análisis en este nivel de clasificación. Como hemos mencionado anteriormente, los niveles de razonamiento siempre se apoyan del nivel anterior. En este caso, no es concebible que un individuo se encuentre en el tercer nivel de razonamiento, sin tener presente los procesos de conocimiento que implican los niveles primero y segundo. Ocurre así para cada Nivel.

Mientras que vamos interiorizándonos en el aprendizaje, el alumno va creando más redes de enlaces para sus nuevos conocimientos. Mientras más formas hayan de llegar al conocimiento, mejor. Es por eso que como grupo cuidamos de abarcar todas las formas posibles.

Guía 4 (G4) y Guía 5 (G5):

Las guías 4 y 5 corresponden a las guías de parábola y elipse, respectivamente.

Antes de esto, terminando la G3, de hace entrega de la definición formal de parábola, haciendo uso tanto del lenguaje natural como del lenguaje matemático. Luego damos a conocer la ecuación canónica que modela la curva y su demostración, considerando los 4 casos dados según su orientación en el plano cartesiano, para posteriormente presentar formalmente sus elementos. Esta entrega de conocimientos se hace por medio de las tic; de la pizarra electrónica y el programa Geogebra, lo que ayuda bastante a despertar el interés y motivación de los alumnos, pues es la parte más tediosa del estudio de las cónicas. Además de que ya poseen una noción de todo esto, pues han construido su conocimiento a lo largo del desarrollo de las guías de trabajo. Al finalizar este traspaso del conocimiento desde los profesores hacia los alumnos, comienza el desarrollo de la G4. Para luego comenzar nuevamente con la definición y todo el proceso de entrega de información acerca de la elipse, proceso que ocurre análogamente al de la parábola, terminando también con el desarrollo de la G5.

Ambas guías consisten en el desarrollo de una serie de ejercicios en los que se utiliza todo lo aprendido. Los alumnos deben ser capaces encontrar las ecuaciones canónicas de las cónicas aprendidas a partir de las ecuaciones generales de estas y de algunos elementos entregados en los enunciados de los ejercicios, y viceversa. De modo que deben aplicar las propiedades y todos los conocimientos que poseen sobre las curvas y sus elementos, existiendo un vital uso del gráfico. Para que todo lo recién mencionado ocurra exitosamente es necesario que los alumnos posean un pensamiento lógico matemático, en el que ha sido trabajando a lo largo de las guías de trabajo, y que sean capaces de deducir a partir de las herramientas entregadas por los profesores, como es en el caso de la entrega de ciertos elementos de las cónicas, donde ellos deben ubicarlos en el plano y luego deducir otros elementos a considerar para la elaboración de ecuaciones canónicas y gráficos. Esto último hace alusión al Cuarto Nivel de Razonamiento de Van Hiele; la **Deducción Formal**.

Este cuarto nivel del que nos habla Van Hiele se refiere específicamente a la deducción para lograr hacer demostraciones bien hechas sobre las afirmaciones que se les plantean a los estudiantes, haciendo uso de las implicancias en ambos sentidos y de los axiomas y teoremas. En nuestra tesis, no buscamos que el alumno demuestre lo que les planteamos, sino que logre aplicar de manera efectiva las definiciones, propiedades y elementos de las cónicas. Por lo que en este punto hay una adaptación de la Teoría de Van Hiele sobre la geometría a la geometría analítica.

Guía 6 (G6):

Esta guía de trabajo corresponde al mismo Nivel de Razonamiento presenta en la G4 y G5. Corresponde a una guía de Hipérbola, por lo que la adherimos por si el profesor estima que existen las condiciones necesarias para llevarla a cabo.

En nuestra investigación no la implementamos por razones ya explicadas.

3.5.2. Herramientas tecnológicas

Las herramientas tecnológicas usadas en nuestra investigación fueron el programa Geogebra y la Pizarra interactiva las que cumplen un rol protagónico en nuestra propuesta. Ambos son sencillos de usar, especialmente Geogebra, basta con que el profesor los sepa usar para que con lo básico el estudiante pueda realizar las actividades que se le proponen. En general los estudiantes se ven muy interesados, lo que permite que aprendan a usarlos de manera muy rápida.

3.5.2.1. Geogebra

Como ya sabemos, este programa es de libre acceso, por lo que se puede tener en cualquier establecimiento educacional sin problemas.

Si bien el programa tiene varias funciones, nosotros utilizamos la parte algebraica y geométrica, más profundamente, la parte analítica de las funciones que allí se pueden graficar, como por ejemplo lo que muestra la siguiente imagen:

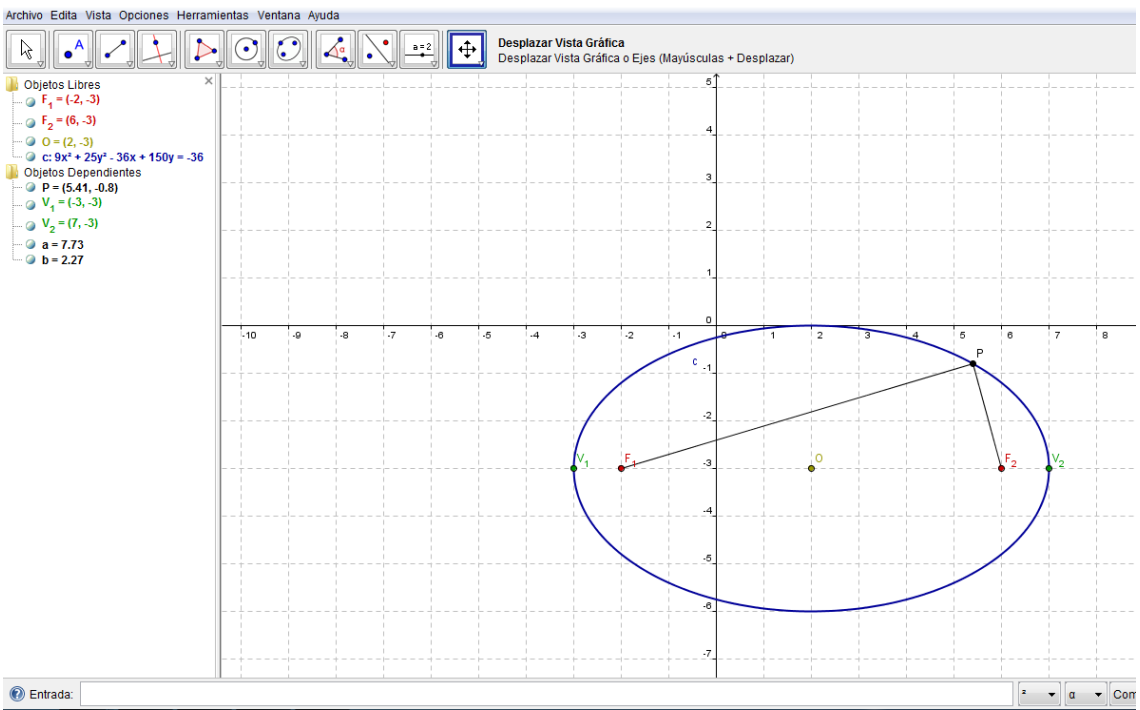


Figura 3.1: Elipse en el programa Geogebra

En la imagen se muestra una Elipse graficada en el programa Geogebra, que además nos detalla las coordenadas de los vértices, focos, centro y la ecuación general, lo que nos permite interiorizarnos aún más en ella y apreciar de mejor forma su gráfica, obtener más y mejores conclusiones sobre su construcción y sus características.

3.5.2.2. Pizarra interactiva

En todas nuestras intervenciones, las clases fueron presentadas a través de la pizarra interactiva y su programa ActivInspire que permite entregar páginas muy similares a las de un Power Point pero con muchas más utilidades como rayar sobre la misma sin la necesidad de borrar lo escrito, por lo que, nada se pierde y los estudiantes pueden acceder a la clase luego con todo lo que se hizo. Se pueden insertar planos cartesianos y cualquier figura geométrica que se desee, por lo que se gana perfección en la explicación y mucho tiempo en dibujos.

Si bien son muchas más las ventajas que trae consigo la Pizarra Interactiva, y que ya nombrábamos antes, la mayor ventaja para nosotros es que permite interactuar con el computador por completo, lo que quiere decir es que uno puede escribir sobre lo que uno quiera en el computador, aquí algunos ejemplos:

En la figura 3.1 se muestra una imagen de una página de internet y gracias a la pizarra interactiva uno puede escribir sobre ella y remarcar cosas importantes.

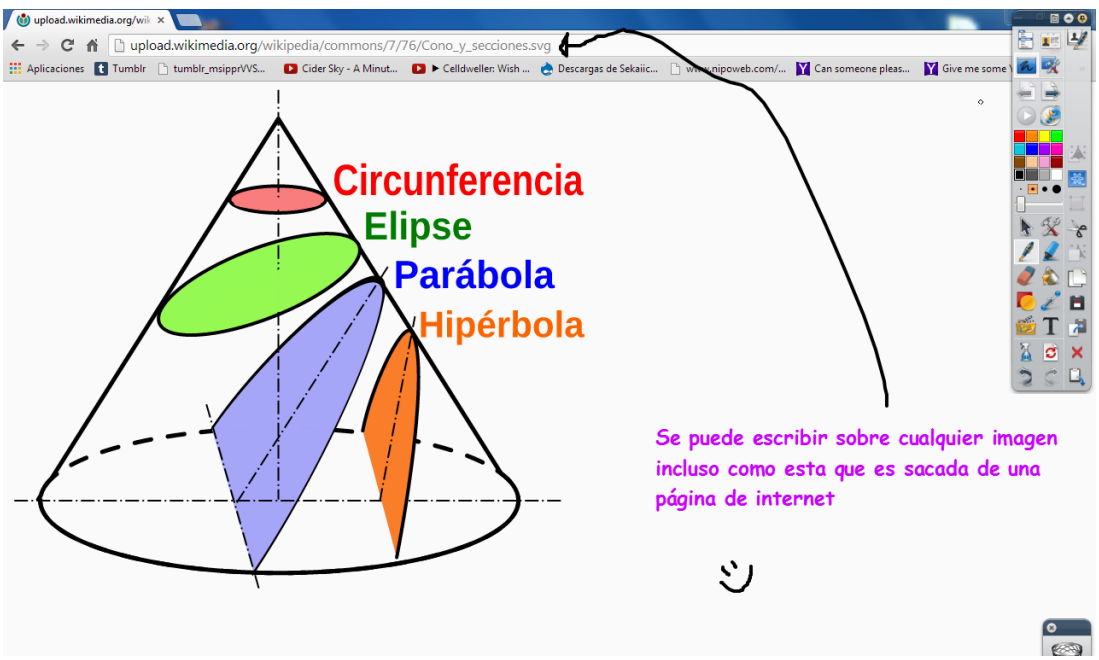


Figura 3.2: Pizarra interactiva y una imagen de internet

En esta otra imagen, la figura 3.2, se muestra cómo se raya un video directamente de youtube, lo que da cuenta de la potencia que tiene la pizarra y de las muchas actividades que se pueden hacer.

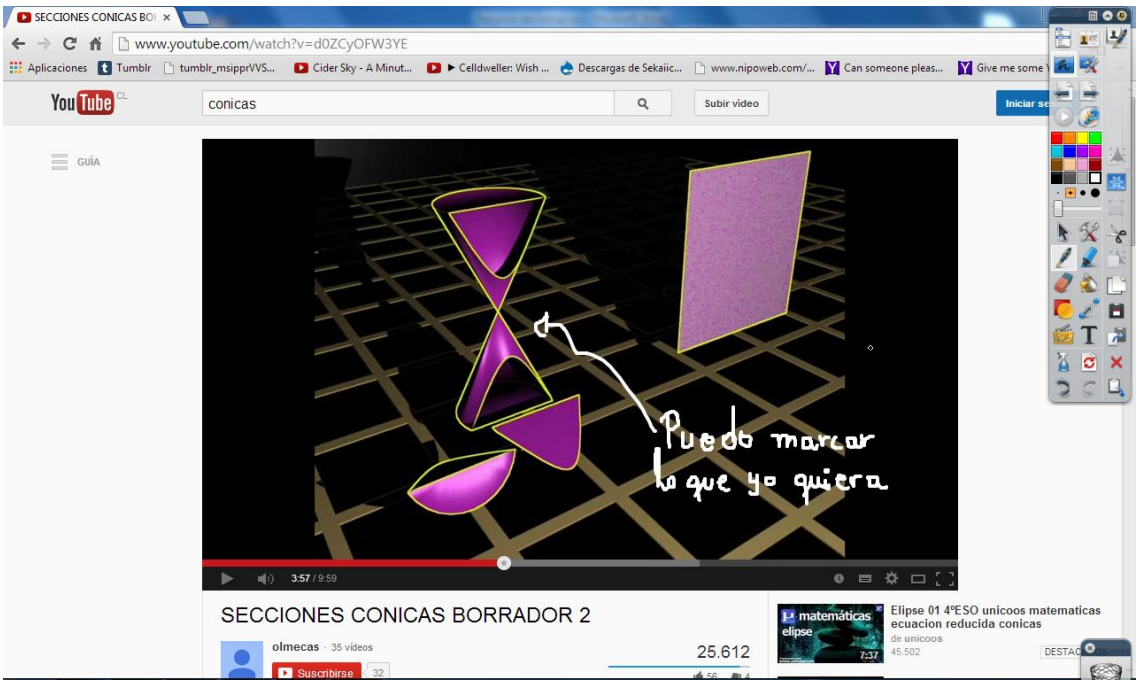


Figura 3.3: Pizarra interactiva y un video de youtube

Tanto Geogebra y la Pizarra Interactiva por sí solos son herramientas potentes que de manera muy sencilla permiten entregar una clase de alto nivel que mejora muchos aspectos de de esta misma y el aprendizaje de los estudiantes como ya lo mencionábamos.

Cuando La pizarra interactiva se mezcla con Geogebra se pueden realizar actividades realmente de alta calidad de manera muy sencilla para conseguir un mejor aprendizaje del estudiante, como por ejemplo:

Se puede mover a gusto propio el punto P con el lápiz de la pizarra, lo que hace más sencilla la tarea del cálculo de las distancias los focos a cualquier punto de la elipse. Puede marcar puntos importantes, rayar y borrar otros, todo sobre la pizarra, como se muestra en la en la figura 3.3.

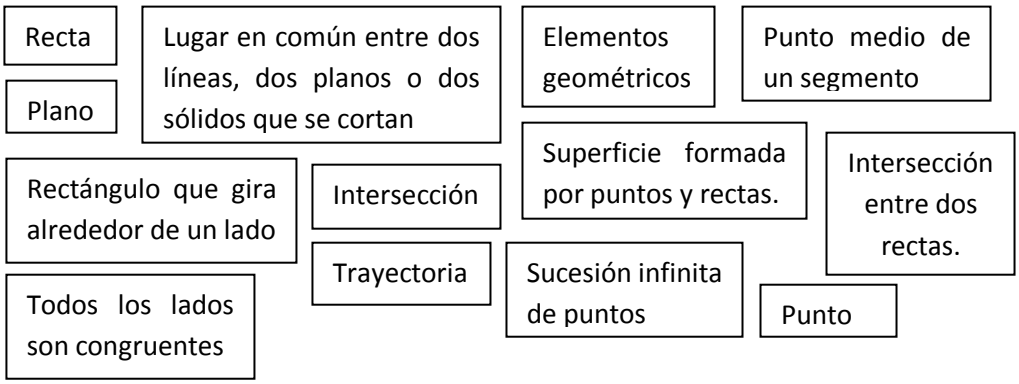
Figura 3.4: Pizarra interactiva y Geogebra mezclados

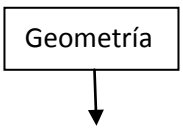
3.5.3. Pre - Test

Profesores: Jonathan Cisternas Jamett
Camila González Silva
Jaime Valdés Jara

Nombre	
Curso	
Contenido	Lugares Geométricos
Habilidades	Identificar figuras y cuerpos geométricos Representar las cónicas en el plano cartesiano
Instrucciones	La prueba es estrictamente individual No se permite el uso de calculadora
Tiempo	90 minutos

I) Crea un mapa conceptual uniendo de los siguientes conceptos y definiciones de manera coherente.





Responda las siguientes preguntas:

1) Dibuje las líneas de contorno de un cono.
2) Señale 3 cuerpos geométricos que conozca e indique 3 características de cada uno de ellos.

3) Las siguientes imágenes muestran un altavoz de 3 vías y la luz de una lámpara en una pared respectivamente. ¿Usted conoce cómo se llaman las figuras geométricas formadas por el altavoz y por la luz en la pared?, señale los nombres.

II) Completar cuadrado de las siguientes expresiones:

a) $x^2 + 6x$ b) $x^2 - 5x$

III) Grafique las siguientes ecuaciones. ¿Reconoces alguna de las figuras graficadas?, ¿son simétricas?, ¿por qué?

a) $(x+1)^2 = 4 \cdot \frac{1}{4}(y+4)$ b) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$

3.5.3.1. Explicación del Pre Test

Enseguida haremos una breve síntesis sobre lo que consiste cada ítem del pre-test que creamos y explicaremos cuál es el sentido de estos, el por qué de su presencia dentro de nuestra evaluación diagnóstica.

Este pre-test posee un total de 43 puntos, en cada uno de los ítems especificaremos su puntaje individual.

Ítem I: Mapa conceptual

En esta etapa al alumno se le presentan distintos conceptos, los cuales les sirven para que construya un mapa conceptual con sus conocimientos previamente adquiridos, de manera que el alumno debe identificar qué conceptos tienen mayor relevancia y de qué forma se relacionan entre ellos, tal que esta relación sea coherente y pertinente. Para una correcta elaboración del mapa conceptual hemos incluido el concepto principal como parte del desarrollo de este, siendo el primer concepto del mapa, para que a partir de él los alumnos relacionen los conceptos subordinados, es decir, los conceptos que dependen del concepto principal, siendo también entregados entre conceptos irrelevantes para que el alumno discrimine cuál considerar y cuál no.

Con un total de 9 puntos, este ítem nos sirve para ver si existen errores conceptuales, ver si existe la capacidad de relacionar conceptos, y para saber la manera en la que los alumnos ven la geometría analítica, aunque sea una primera aproximación de aquello.

Ítem II: Geometría

En esta fase se apela al conocimiento previo que poseen de años anteriores. Tienen que nombrar al menos tres cuerpos geométricos y dar al menos tres características de cada uno de ellos. También se les presentan dos fotos con formas parabólicas y elípticas y se espera que den una pequeña aproximación de lo que son.

Como grupo, nos interesa saber en qué nivel de dominio están los alumnos, pues la materia de Lugares Geométricos, en particular las cónicas, tienen directa relación con el contenido expresado en el párrafo anterior. Sabiendo que las cónicas son productos de cortes hechos por un plano que, en distintas direcciones, atraviesa el cono.

Este ítem posee un total de 14 puntos.

Ítem III: Completación de cuadrados

El área que comprende esta pregunta es el álgebra.

Este ítem, que tiene un total de 8 puntos, es el más concreto y trata de sacar a la luz si los alumnos saben completar cuadrados. Si bien este contenido debiera ser dominado por los estudiantes, este ítem pretende hacernos ver a nosotros, los profesores, qué tanto es el manejo en este tipo de ejercicios, pues es fundamental para el desarrollo algebraico de las cónicas.

Ítem IV: Gráfica

En esta etapa se trata de perseguir el nivel de conocimiento que podrían llegar a tener los alumnos pero que no necesariamente deberían manejar, ya que les mostramos 2 ecuaciones canónicas de manera que ellos deben ser capaces de graficarlas, usando las técnicas que ellos ya debieran poseer. A partir de la gráfica, los alumnos deben identificar a qué figura corresponde, punto en el cual podrían no responder bien, debido a que de acuerdo con el plan de estudios del Mineduc, los alumnos no poseen este contenido en sus conocimientos aún.

Luego se les pide a los alumnos que señalen si las figuras obtenidas mediante el gráfico son o no simétricas, esperando que al graficar pudieran dar cuenta de lo observado, aplicando el concepto de simetría, concepto perteneciente a los conocimientos previos de los alumnos, ya que es visto desde el primer ciclo escolar.

Este ítem posee un total de 12 puntos.

3.5.4. Post Test

Profesores: Jonathan Cisternas Jamett
Camila González Silva
Jaime Valdés Jara

Nombres	
Curso	
Contenido	Lugares Geométricos
Habilidad	Aplicar propiedades de las cónicas
Instrucciones	No se permite el uso de calculadoras ni celulares. La prueba es estrictamente individual
Tiempo	90 Minutos

1) Encuentra la ecuación canónica de la parábola sabiendo que su foco está en el punto (-4,1) y que la ecuación de su directriz es $x-2=0$.

2) Hallar la ecuación canónica de la elipse dados sus focos (-3,0) y (3,0), y la medida de su eje mayor 10.

3) Dadas las siguientes ecuaciones identifique a qué cónica corresponde, señale sus elementos y grafique.
   a) $y=x^2-6x+11$
   b) $x^2+3y^2-6x+6y=0$

4) La forma parabólica es una de las más resistentes en construcción, por lo que la Constructora Socoval hace un arco parabólico de 18m de altura y 24m de ancho. Si el gerente se para a 8m del centro del arco, ¿Qué distancia habrá hasta el techo del arco?

5) Un arco con forma semielíptica tiene un ancho de 150m y su altura es de 45m. ¿Qué medida deben tener los soportes verticales ubicados a una distancia de 50m cada uno de los extremos del arco?

6) Realice un mapa conceptual considerando las cónicas y sus propiedades.

3.5.4.1. Explicación del Post Test

En el post-test que hemos creado, buscamos evaluar todos los aprendizajes esperados para este contenido, de tal forma en que dada la secuencia de las guías de trabajo y apelando a un aprendizaje de tipo constructivista y significativo, los alumnos debieran alcanzar, en lo más óptimo, el Cuarto Nivel de razonamiento de Van Hiele. Estamos hablando de la Deducción Formal.

Para esto, sería necesario que los estudiantes hayan alcanzado previamente los niveles anteriores, como hemos descrito a lo largo de este trabajo.

Esta prueba evaluativa consta de 6 ejercicios, donde los 3 primeros tratan del desarrollo algebraico de las cónicas. Las preguntas 4 y 5 corresponden a problemas de planteo, y la última pregunta, la pregunta número 6, es sobre la construcción de un mapa conceptual que abarque todo lo aprendido en esta Unidad.

3.5.5. Guía de Lugares Geométricos N°1

Profesores: Jonathan Cisternas Jamett
Camila González Silva
Jaime Valdés Jara

Nombres	
Curso	
Contenido	Lugares Geométricos
Habilidad	Reconocer las cónicas
Instrucciones	Guía de trabajo grupal (3 o 4 personas)
Tiempo	135 minutos

Conocimientos previos:

- Elementos geométricos: Punto, recta, intersección y plano.

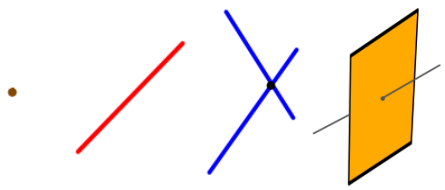


Figura 3.5: Elementos Geométricos

- Líneas de contorno: En una figura tridimensional son líneas o segmentos que estructuran su superficie.

Figura 3.6: Líneas de contorno

- Ejemplos de superficies: El cubo, la esfera, el cono y el cilindro.

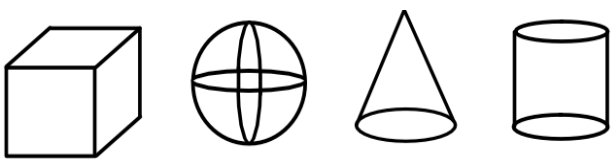


Figura 3.7: Superficies

- Ejemplos de figuras geométricas planas: El círculo, el cuadrado, el triángulo y el rectángulo.

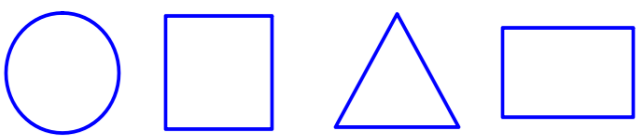


Figura 3.8: Figuras planas

Actividad 1

Objetivo: Reconocer las cónicas en el espacio como intersección de un plano y un cuerpo.

Materiales: Plasticinas, cuchillo cartonero, hojas blancas, Stampo, tijeras, pegamento.

1) Con las plasticinas construya cuatro cubos, cuatro cilindros, una esfera y ocho conos iguales.

Figura 3.9: Figuras en plasticina

Simulando ser planos que cortan los sólidos anteriores, realice los siguientes cortes con el cuchillo cartonero en cada uno de los sólidos:

<table>
<tr>
<td>

- Si el plano es paralelo a la base del objeto.

Ejemplo:

Figura 3.10: Corte horizontal

</td>
<td>

- Si el plano es perpendicular a la base del objeto.

Ejemplo:

Figura 3.11: Corte vertical

</td>
</tr>
<tr>
<td>

- Si el plano es paralelo a alguna línea del contorno.

Ejemplo:

Figura 3.12: Corte paralelo a la línea de contorno

</td>
<td>

- Si el plano es oblicuo a la base del objeto.

Ejemplo:

Figura 3.13: Corte oblicuo a la base del objeto

</td>
</tr>
</table>

2) Después coloque las mitades de los sólidos sobre el Stampo y márquelas sobre una hoja blanca, luego recorte cada una de las áreas obtenidas. Consecutivamente, ordene y pegue las áreas en los siguientes recuadros.

Áreas encontradas de la intersección de los cubos y los planos.	**Áreas encontradas de la intersección de los cilindros y los planos.**
Áreas encontradas de la intersección de la esfera y el plano.	**Áreas encontradas de la intersección de los conos y los planos.**

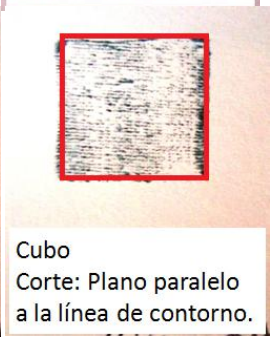
Respuesta Esperada:

Áreas encontradas de la intersección de los cubos y los planos.

Cubo
Corte: Plano oblicuo a la base del objeto.

Cubo
Corte: Plano oblicuo a la base del objeto.

Cubo
Corte: Plano paralelo a la línea de contorno.



Cubo
Corte: Plano paralelo a la línea de contorno.

Áreas encontradas de la intersección de los cilindros y los planos.

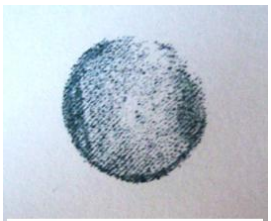
Cilindro
Corte: Plano paralelo a la base del objeto.

Cilindro
Corte: Plano paralelo a la base del objeto.

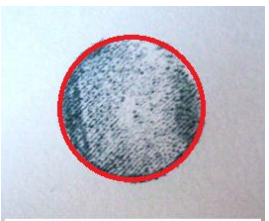
Cilindro
Corte: Plano oblicuo a la base del objeto.

Cilindro
Corte: Plano oblicuo a la base del objeto.

Áreas encontradas de la intersección de la esfera y el plano.



Circunferencia
Corte: Todos los cortes.



Circunferencia
Corte: Todos los cortes.

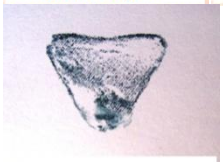
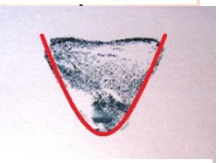
Áreas encontradas de la intersección de los conos y los planos.

Cono
Corte: Plano paralelo a la base del objeto.

Cono
Corte: Plano paralelo a la base del objeto.

Cono
Corte: Plano paralelo a la línea de contorno.

Cono
Corte: Plano paralelo a la línea de contorno.

	 Cono Corte: Plano oblicuo a la base del objeto. Cono Corte: Plano oblicuo a la base del objeto.  Cono Corte: Plano perpendicular a la base del objeto.  Cono Corte: Plano perpendicular a la base del objeto.

3) Considerando la tabla anterior responda:

a) ¿Qué figuras planas se obtuvieron en la intersección de un plano y cada superficie construida?

b) ¿Cuál o cuáles de las figuras encontradas cree usted que es o son cónicas?, justifique y póngale el nombre que usted quiera a las figuras nuevas encontradas.

Actividad 2

Objetivo: Reconocer las cónicas como una construcción mecánica.

Materiales: Cartón piedra, broches mariposa, lana, lápiz, elástico, regla, escuadra escalena.

1) Siguiendo los siguientes pasos, construya la figura pedida.

   Para poder construir esta figura los materiales necesarios son lana, cartón piedra, dos broches mariposa, un lápiz y un elástico.

   a) Se fijan los broches mariposa en el cartón piedra.
   b) Corta un trozo de lana un poco más largo que la distancia que hay entre los broches y cada extremo de la lana se fijan a esos broches.
   c) Como último paso ponemos el elástico muy cerca de la punta del lápiz para que éste no se enrede con la lana, ahora con el lápiz mantenemos tirante la lana y así trazamos nuestra figura.

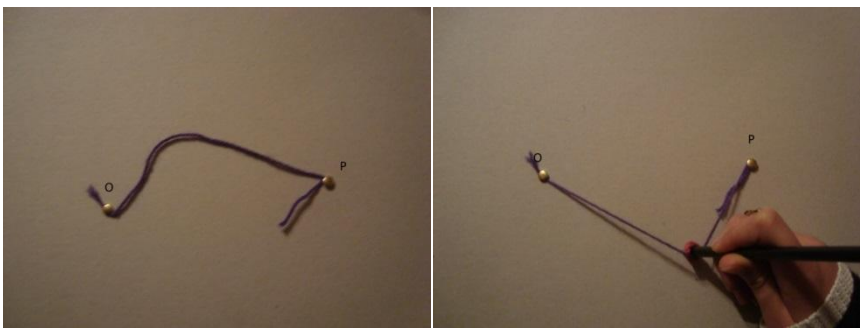


Figura 3.14 y 3.15: Construcción mecánica de una cónica

   d) ¿Qué figura es?

2) Para esta construcción necesitaremos los siguientes materiales: cartón piedra, un broche mariposa, una regla, una escuadra escalena, lana, un lápiz y un elástico. Estos son los pasos a seguir.

   a) Corte un trozo de lana que sea de igual distancia con la longitud del cateto mayor de la escuadra, el extremo de la lana se fija en el vértice A de la escuadra y el otro extremo en el broche mariposa (punto O).

   b) Ahora pondremos el lápiz (con el elástico en su punta para que no enrede en la lana) de tal manera que ponga tensa la lana y también que esté en todo momento en contacto con la escuadra como se muestra en la foto.

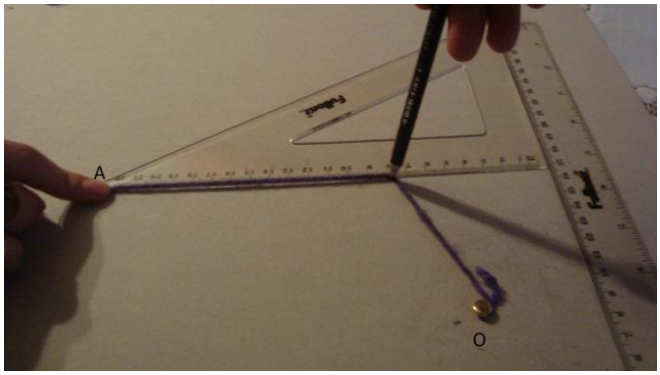


Figura 3.16: Construcción mecánica de una cónica

c) Por último la escuadra se tiene que desplazar hacia arriba y hacia abajo guiada por la regla sin dejar de tocar la escuadra y tampoco dejando de tensar la lana.

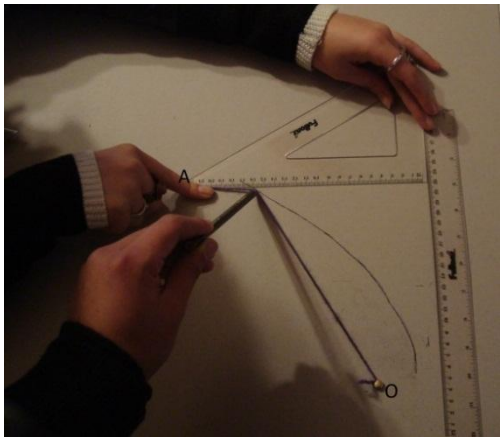


Figura 3.17: Construcción mecánica de una cónica

d) ¿Qué figura es?

3) Para poder llevar a cabo esta construcción los materiales necesarios son: 2 broches mariposa, cartón piedra, regla, lana, lápiz y elástico. Los pasos a seguir son los siguientes.

a) El primer paso es fijar los dos broches separados en el cartón piedra. (Puntos O y P).

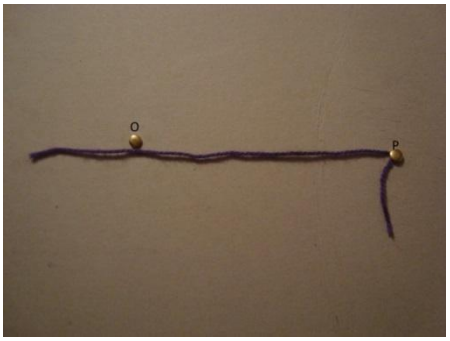


Figura 3.18: Construcción mecánica de una cónica

b) Cortamos la lana tal que coincida con el largo de la regla.
c) Fijamos un extremo de la lana a uno de los puntos (P u O).
d) Fijamos el extremo de la regla al otro punto.
e) Fijamos la otra punta de la lana al otro extremo de la regla.
f) Tensando la lana con el lápiz (con el elástico en su punta) y sin perder contacto entre lápiz y regla comenzamos a rotar ésta con centro de rotación en el broche en donde fijamos la regla hacia arriba y hacia abajo trazando nuestra figura como se muestra en la imagen.

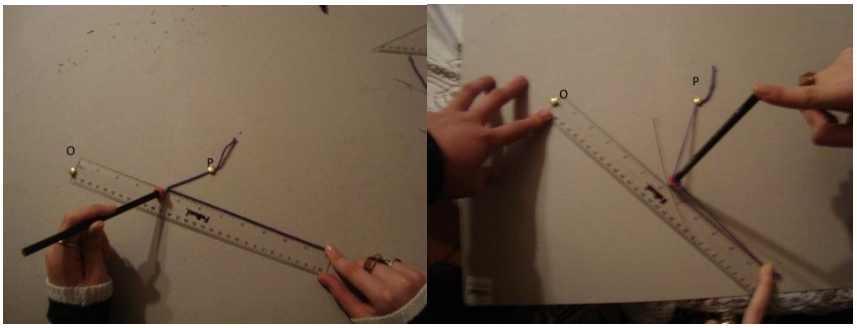


Figura 3.19: Construcción mecánica de una cónica

g) Repetimos el proceso pero empezando por el punto no elegido la primera vez.

h) ¿Qué figura es?

Actividad 3

Objetivo: Reconocer las cónicas como el resultado de la figura formada por las tangentes a ella.

Materiales: Hojas blancas, compás, lápiz,

Siguiendo los pasos, construya las siguientes figuras.

1) Para formar la siguiente figura, debemos dibujar una circunferencia en la hoja de papel, marcando el centro O y un punto diferente del centro y que no pertenezca al borde de la figura, que llamaremos P. Luego dibujamos alrededor de 20 puntos sobre la circunferencia y la recortamos. Enseguida procedemos a unir cada punto perteneciente al perímetro de la circunferencia al punto P por medio de dobleces. Delinear cada doblez realizado. Al terminar de unir dichos puntos, observe la figura formada, señale a qué grupo pertenece en la tabla y explique.

2) Para formar la siguiente figura, debemos realizar un doblez paralelo al borde inferior de la hoja. Dibujamos 15 puntos o más sobre el doblez y uno exterior, encima de este, al que llamaremos P. Luego unimos cara punto sobre el doblez con el punto P por medio de dobleces. Delinear cada doblez realizado. Al finalizar el procedimiento, observe la figura formada, señale a qué grupo pertenece en la tabla y explique.

3) Para formar la siguiente figura, debemos dibujar una circunferencia en la hoja de papel, marcando su centro O y un punto externo a la circunferencia, al que llamaremos P. Luego dibujamos alrededor de 20 puntos sobre el perímetro de la circunferencia y procedemos a unir cada uno con el punto exterior P por medio de dobleces. Delinear cada doblez realizado. La curva obtenida es una parte de la figura, para formar la otra parte debemos repetir el proceso en una hoja nueva, de tal manera que el radio de la circunferencia realizada sea el mismo y que la distancia entre el punto P y el centro O, también. Luego, hacemos coincidir los puntos P tal que los centros de las circunferencias y el punto P sean colineales. Observe la figura formada, señale a qué grupo pertenece en la tabla y explique.

Actividad 4

Objetivo: Identificar cónicas en diferentes contextos del mundo que nos rodea.

1) Señale algunos ejemplos de cónicas que podamos encontrar en el medio que nos rodea, enumérelos y ordénelos por tipo de cónicas.
2) Para finalizar el profesor retroalimenta lo aprendido y bautiza cada una de las figuras construidas.

A continuación hay dos opciones de guía N°2, una sin Pizarra Interactiva y Geogebra y otra con Pizarra Interactiva y Geogebra.

3.5.6. Guía de Lugares Geométricos N°2

(Sin Pizarra interactiva y Geogebra)

Profesores: Jonathan Cisternas Jamett
Camila González Silva
Jaime Valdés Jara

Nombres	
Curso	
Contenido	Lugares Geométricos
Habilidad	Determinar elementos y características de las cónicas
Instrucciones	Guía de trabajo grupal (3 o 4 personas)
Tiempo	90 minutos

Conocimientos previos:

- Plano cartesiano y simetría.

Actividad 1

Objetivo: Determinar elementos de las cónicas

Materiales: Regla, lápiz, hojas con las cónicas, construcciones de la guía 1.

1) Considerando las construcciones realizadas en la guía 1 de lugares geométricos, responda:

   a) ¿Cuáles fueron los elementos geométricos que se utilizaron para construir las cónicas?

   b) Caracterice cada cónica y mencione diferencias entre cada una.

   c) ¿Cuál es la importancia, en las construcciones de las cónicas, de los broches mariposa?

   d) ¿Cuál(es) de la(s) cónica(s) es(son) simétricas al eje X, y cuál(es) simétrica al eje Y?

   e) ¿Qué relevancia tiene el origen del plano cartesiano en cada cónica?

   f) ¿Qué relación hay entre las distancias que tiene el broche mariposa con algún punto de la parábola, y aquel mismo punto sobre la recta formada por la regla?, ¿En algún momento miden lo mismo?, ¿Cuándo?

Objetivo: Determinar Características de las cónicas

1) Considerando cada imagen de elipse, hipérbola, parábola siga las siguientes instrucciones:

   a) Elija puntos al azar en el perímetro de la elipse y llámelos P_1, P_2, P_3, P_4 y P_5. Luego a los puntos negros (antes broches mariposa) llámelos F_1 y F_2. Ahora mida las sumas de las siguientes distancias y anote los resultados en el recurado siguiente:

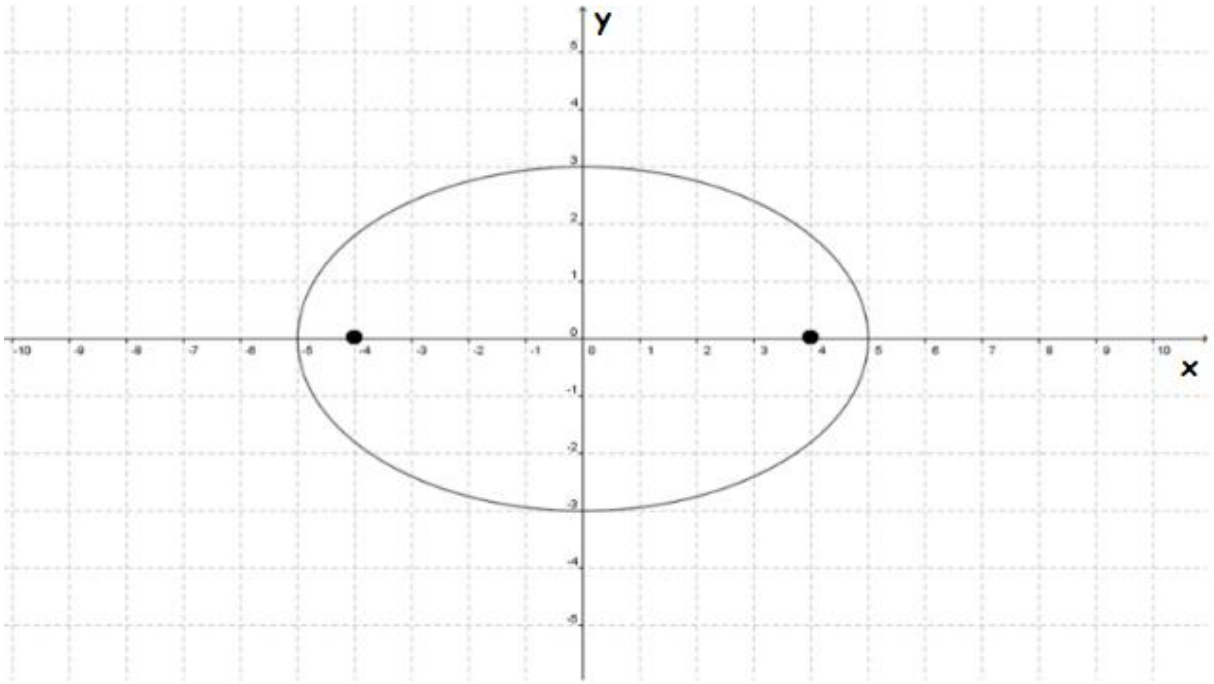


Figura 3.20: Elipse en el plano cartesiano

Suma de las distancias de los focos a los puntos elegidos del perímetro de la elipse
$\overline{P_1F_1} + \overline{P_1F_2} =$
$\overline{P_2F_1} + \overline{P_2F_2} =$
$\overline{P_3F_1} + \overline{P_3F_2} =$
$\overline{P_4F_1} + \overline{P_4F_2} =$
$\overline{P_5F_1} + \overline{P_5F_2} =$

¿Qué podrías concluir con los resultados que encontraste?

b) Elija puntos al azar en el perímetro de la hipérbola y llámelos P_1, P_2, P_3, P_4 y P_5. Luego a los puntos negros (antes broches mariposa) de la imagen llámelos F_1 y F_2. Ahora mida las diferencias de las siguientes distancias y anote los resultados. (Considere que las distancias son siempre positivas)

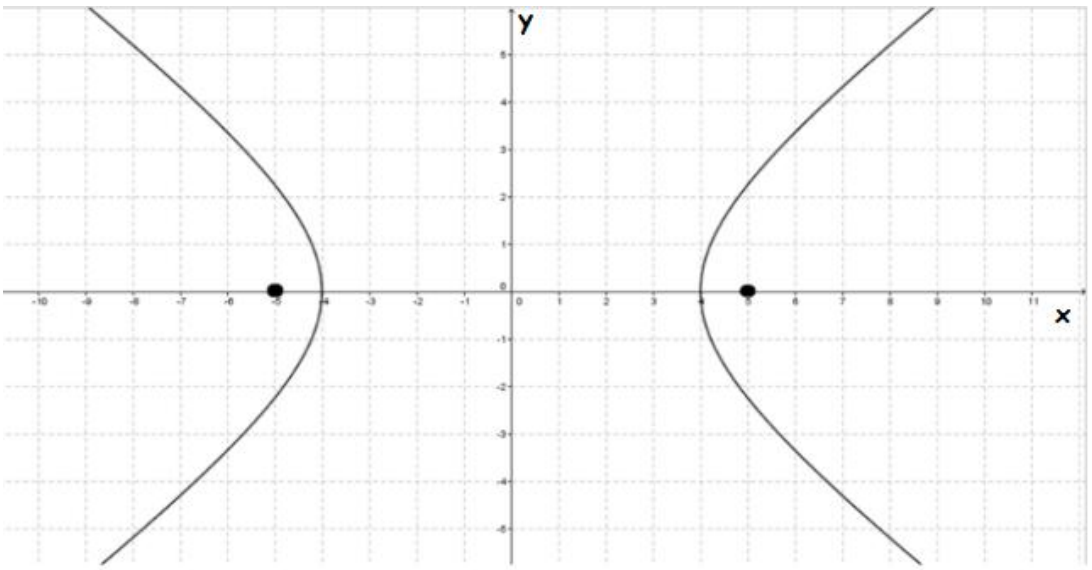


Figura 3.21: Hipérbola en el plano cartesiano

Diferencia de las distancias de los focos a los puntos elegidos del perímetro de la hipérbola
$\left\lvert \overline{P_1F_1} - \overline{P_1F_2} \right\rvert =$
$\left\lvert \overline{P_2F_1} - \overline{P_2F_2} \right\rvert =$
$\left\lvert \overline{P_3F_1} - \overline{P_3F_2} \right\rvert =$
$\left\lvert \overline{P_4F_1} - \overline{P_4F_2} \right\rvert =$
$\left\lvert \overline{P_5F_1} - \overline{P_5F_2} \right\rvert =$

¿Qué podrías concluir con los resultados que encontraste?

c) Elija puntos al azar en el perímetro de la parábola y llámelos P_1, P_2, P_3, P_4 y P_5. Luego al punto negro (antes broche mariposa) llámelo F, y a la recta (antes la regla) llámela D. Ahora mida las siguientes distancias y considere que la distancia de los puntos de la parábola a la recta son siempre perpendiculares al eje X del plano cartesiano.

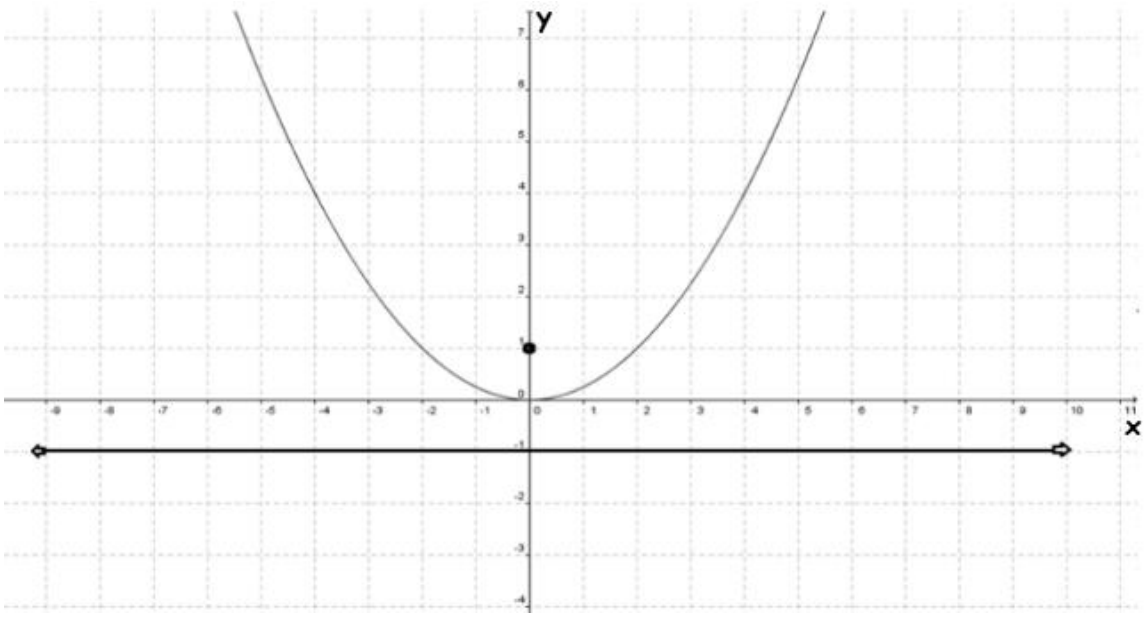


Figura 3.22: Parábola en el plano cartesiano

Distancia del punto de la parábola a la recta D	Distancia del punto de la parábola al punto F
$d(P_1, D) =$	$d(P_1, F) =$
$d(P_2, D) =$	$d(P_2, F) =$
$d(P_3, D) =$	$d(P_3, F) =$
$d(P_4, D) =$	$d(P_4, F) =$
$d(P_5, D) =$	$d(P_5, F) =$

¿Qué podrías concluir con los resultados que encontraste?

- Se comparten resultados entre grupos y junto al profesor concluyen las características de cada cónica trabajada.

- Además el profesor define la excentricidad y la importancia de ésta en las cónicas.

3.5.7. Guía de Lugares Geométricos N°2

(Con Pizarra interactiva y Geogebra)

Profesores: Jonathan Cisternas Jamett
Camila González Silva
Jaime Valdés Jara

Nombres	
Curso	
Contenido	Lugares Geométricos
Habilidad	Determinar elementos y características de las cónicas
Instrucciones	Guía de trabajo grupal (3 o 4 personas)
Tiempo	90 minutos

Conocimientos previos:

- Plano cartesiano y simetría.

Actividad 1

Objetivo: Determinar elementos de las cónicas

Materiales: Regla, lápiz, hojas con las cónicas, construcciones de la guía 1.

2) Considerando las construcciones realizadas en la guía 1 de lugares geométricos, responda:

   a) ¿Cuáles fueron los elementos geométricos que se utilizaron para construir las cónicas?

   b) Caracterice cada cónica y mencione diferencias entre cada una.

   c) ¿Cuál es la importancia, en las construcciones de las cónicas, de los broches mariposa?

   d) ¿Cuál(es) de la(s) cónica(s) es(son) simétricas al eje X, y cuál(es) simétrica al eje Y?

   e) ¿Qué relevancia tiene el origen del plano cartesiano en cada cónica?

   f) ¿Qué relación hay entre las distancias que tiene el broche con algún punto de la parábola, y aquel mismo punto sobre la recta formada por la regla?, ¿En algún momento miden lo mismo?, ¿Cuándo?

Actividad 2

Objetivo: Determinar Características de las cónicas

Dadas las cónicas en geogebra y con el programa activinspire en la pizarra interactiva siga las siguientes instrucciones:

Con la Elipse

El punto **P** es un punto de la Elipse y los puntos F_1, F_2 son los broches mariposas que utilizábamos en la construcción de la guía #1.
Considere que **a** es la distancia entre F_1 con **P**, y **b** es la distancia entre F_2 con **P**. Note que la medida de **a** y **b** están en el costado izquierdo del programa Geogebra.

Mueva el punto **P** a su gusto en la Elipse con el lápiz de la pizarra interactiva. Cada vez que lo mueva *sume* **a** con **b** ¿qué se observa?, anote sus conclusiones.

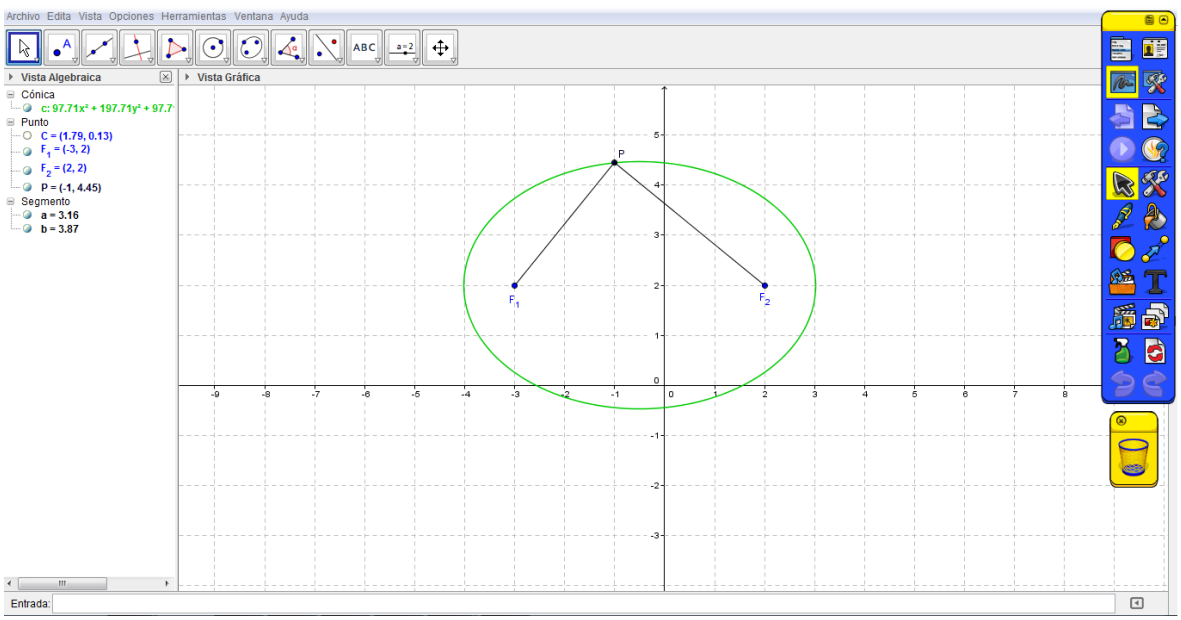


Figura 3.23: Elipse en Geogebra y Pizarra interactiva

Suma de las distancias de los focos a los puntos elegidos del perímetro de la elipse
1) $a+b=$
2) $a+b=$
3) $a+b=$
4) $a+b=$

¿Qué conclusiones puedes obtener?

Con la Parábola

D es la recta directriz de la Parábola de ecuación $y=1$, el punto **T** es un punto de la parábola y el punto **S** es un punto de la recta directriz , F es el broche mariposa que utilizábamos en la construcción de la guía #1. Considere que **a** es la distancia entre F con **T** y **b** es la distancia entre F con D. Note que la medida de **a** y **b** están en el costado izquierdo del programa Geogebra.

Mueva los puntos **T** y **Q** a su gusto en la Parábola y en la recta directriz respectivamente. ¿Cuándo **a** y **b** miden lo mismo?, anote sus conclusiones.

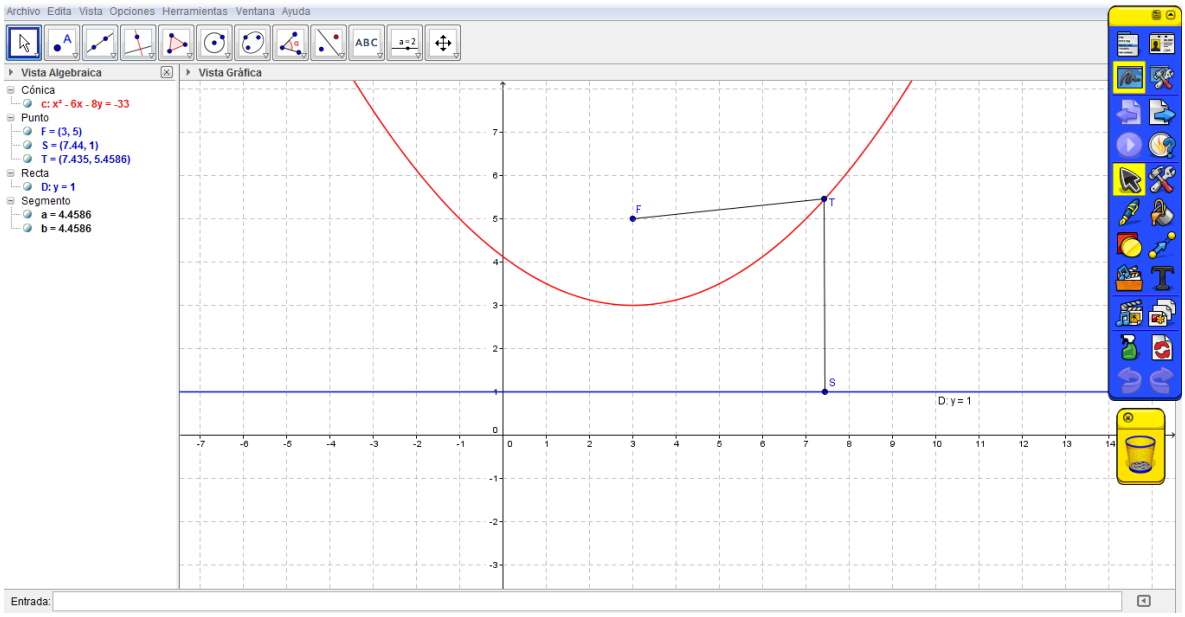


Figura 3.24: Parábola en Geogebra y Pizarra interactiva

Anote sus conclusiones:

1.-_____
2.-_____
3.-_____

Con la Hipérbola

Los puntos **Q y H** son puntos de la Hipérbola y los puntos F_1, F_2 son los broches mariposas que utilizábamos en la construcción de la guía #1.
Considere que **a** es la distancia entre F_1 con **Q**, y **b** es la distancia entre F_2 con **Q,** además **d** es la distancia entre F_1 con **H** y **e** es la distancia entre F_2 y **H**. Note que la medida de **a**, **b, d y e** están en el costado izquierdo del programa Geogebra.

Mueva el punto **Q** a su gusto en la Hipérbola con el lápiz de la pizarra interactiva. Cada vez que lo mueva *reste* **a** con **b** ¿qué se observa?, anote sus conclusiones.

Repita lo mismo con el punto **H**. Cada vez que lo haga reste **e** con **d** ¿qué se observa?, anote sus conclusiones.

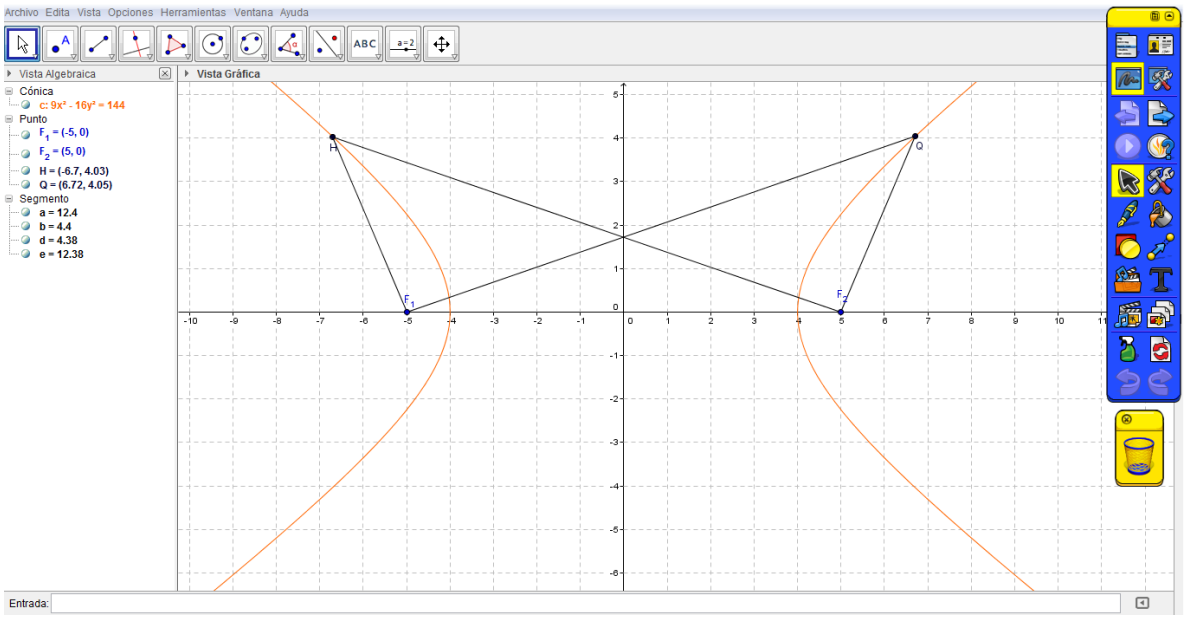


Figura 3.25: Hipérbola en Geogebra y Pizarra interactiva

Diferencia de las distancias de los focos a los puntos elegidos del perímetro de la hipérbola	
1) $\lvert a-b\rvert =$	2) $\lvert e-d\rvert =$
3) $\lvert a-b\rvert =$	4) $\lvert e-d\rvert =$
5) $\lvert a-b\rvert =$	6) $\lvert e-d\rvert =$
7) $\lvert a-b\rvert =$	8) $\lvert e-d\rvert =$

¿Qué conclusiones puedes obtener?

3.5.8. Guía de Lugares Geométricos N°3

Profesores: Jonathan Cisternas Jamett
Camila González Silva
Jaime Valdés Jara

Nombres	
Curso	
Contenido	Lugares Geométricos
Habilidad	Clasificación de las cónicas
Instrucciones	Guía de trabajo grupal (3 o 4 personas)
Tiempo	90 Minutos

Objetivos:

- Identificar las propiedades mínimas necesarias para poder definir, de manera simplificada, las cónicas.
- Utilizar algunas propiedades geométricas para encontrar los elementos de las cónicas.

Conocimientos previos:

- Elementos de las cónicas: Focos, vértices, centro, ejes de simetría, excentricidad.

Materiales:

- Papel, regla, lápiz y compás.

I) Según los elementos y propiedades conocidas a partir de la Guía N°2, define con tus propias palabras la Parábola, la Elipse y la Hipérbola.

Actividad 1

Determinando elementos de las cónicas.

Elipse: Dada la elipse y 4 puntos pertenecientes a ella.

- Con la regla trazar el segmento $\overline{AC}$ al que llamaremos eje mayor.
- Con la regla trazar el segmento $\overline{BD}$, perpendicular a $\overline{AC}$ en su punto medio, al que llamaremos eje menor.
- Llamaremos O al punto de intersección de los ejes, este será el centro de la elipse.
- Con el compás tomaremos la distancia desde O hasta el punto A o C, quienes son los vértices de la elipse. Con radio $\overline{AO}$ o $\overline{OC}$ y con centro en C, trazar una circunferencia.
- Las intersecciones entre la circunferencia y el segmento $\overline{AC}$ las designaremos como F_1 y F_2 y serán los focos de la elipse.

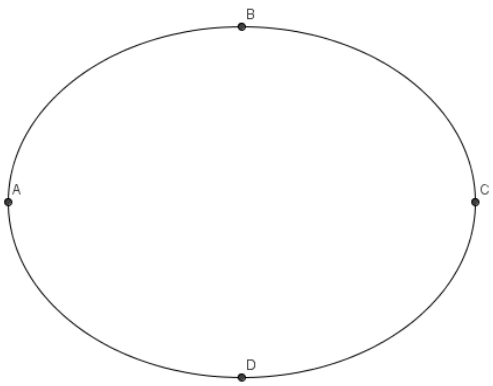


Figura 3.26: Elipse

Respuesta Esperada:

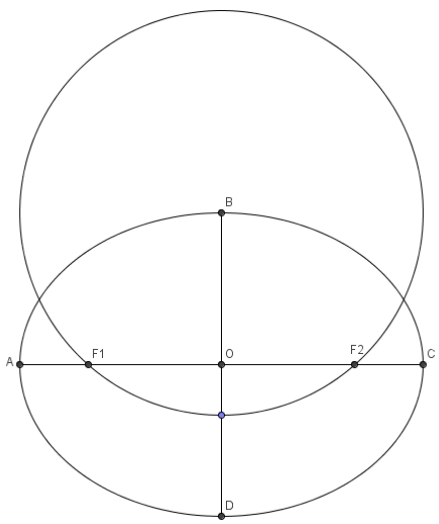


Figura 3.27: Elipse y Circunferencia

Parábola: Dada la parábola y 3 rectas tangentes a ella; L1, L2 y L3.

- Llamaremos V al punto inferior de la parábola, el cual será el vértice de ésta.
- Llamaremos M al punto de intersección entre L1 y L3.
- Trazar recta L4, de manera que sea perpendicular a la recta L1 y que pase por M.
- Llamaremos N al punto de intersección entre L2 y L3.
- Trazar recta L5, de manera que sea perpendicular a la recta L2 y que pase por N.
- El foco de la parábola será el punto de intersección entre ambas rectas perpendiculares a las tangentes es decir, L4 y L5. A este punto lo llamaremos F.
- Trazar recta R1, de manera que sea perpendicular a la recta L3 y que pase por P.
- Llamaremos A al punto de intersección entre R1 y L4.
- Trazar recta R2, de manera que sea perpendicular a la recta L3 y que pase por Q.
- Llamaremos B al punto de intersección entre R2 y L5.
- La recta que pasa por los puntos A y B será la directriz de la parábola.

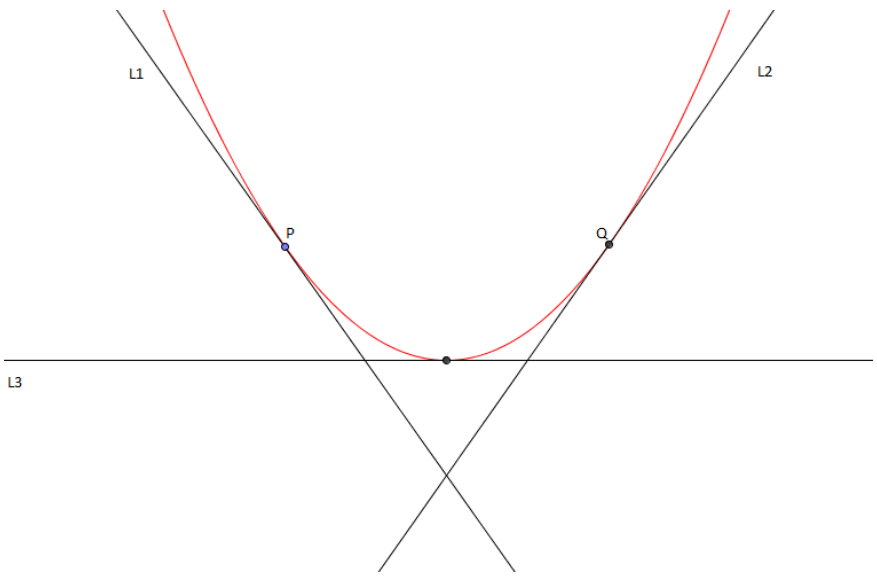


Figura 3.28: Parábola

Respuesta Esperada:

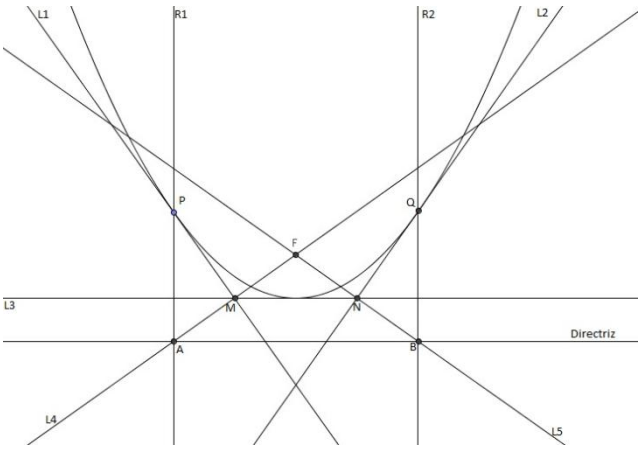


Figura 3.29: Parábola

<u>Hipérbola:</u> Dada la hipérbola, el eje de simetría y la recta L1 tangente a la hipérbola en el punto P

- Las intersecciones entre la hipérbola y el eje de simetría serán los vértices de ella, es así como las llamaremos V1 al vértice izquierdo y V2, al derecho.
- Trazar recta L2, de manera que sea perpendicular a la recta L1 y que pase por V2.
- Trazar recta L3, de manera que sea perpendicular al eje de simetría y que pase por V2.
- Llamaremos B al punto de intersección entre L1 y L3.
- Trazar recta L4, de manera que sea perpendicular a la recta L3 y que pase por B.
- Llamaremos A al punto de intersección entre L4 y L2.
- Trazar recta R, de manera que pase por P y por A.
- El punto de intersección entre R y el eje de simetría será el foco de la hipérbola. Llamaremos a este punto F.

Análogamente podemos encontrar el segundo foco de la hipérbola.

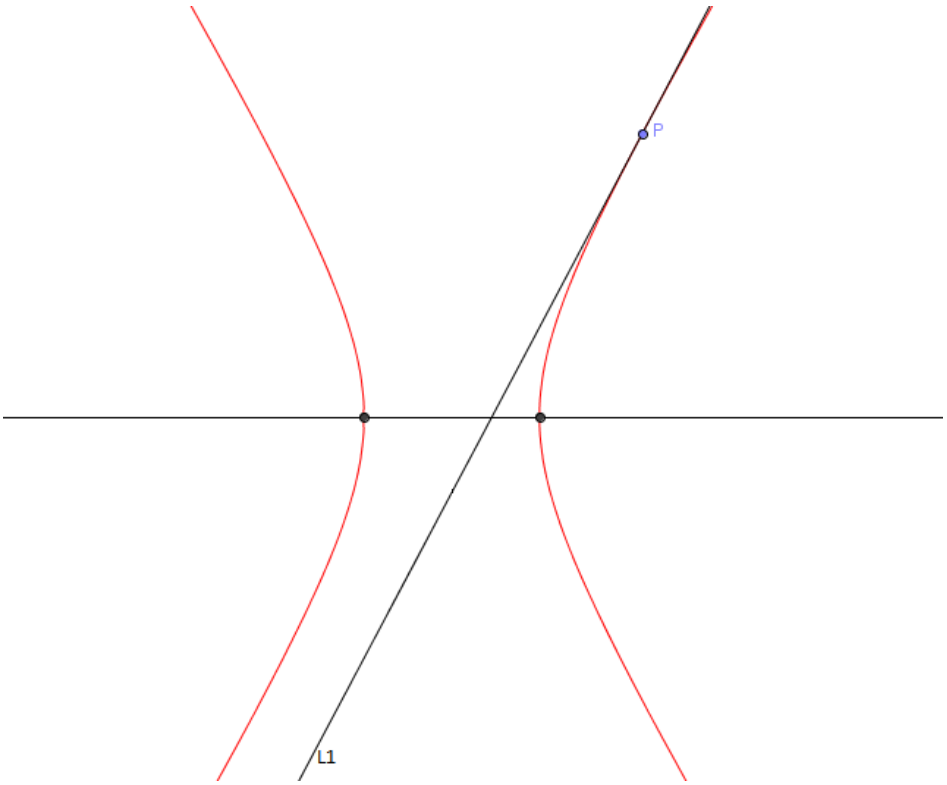


Figura 3.30: Hipérbola

Respuesta Esperada:

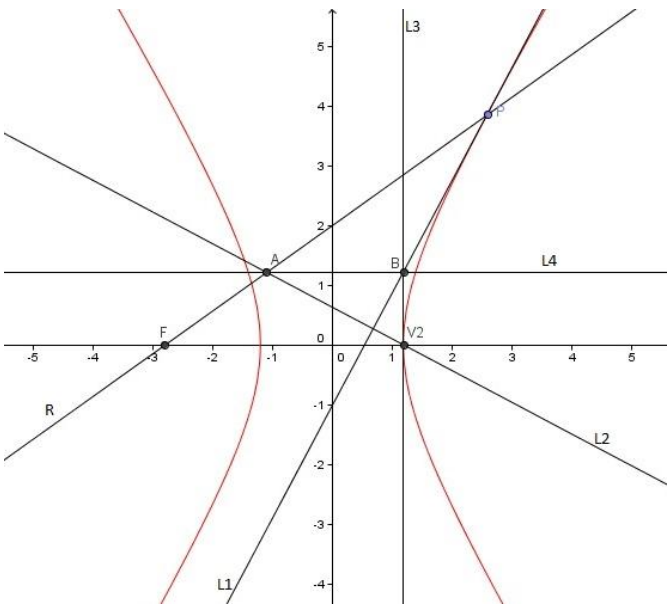


Figura 3.31: Hipérbola

Actividad 2

Construcción de cónicas usando propiedades geométricas.

Elipse:

- Dibujar una circunferencia de radio r y centro O.
- Ubicar, dentro de la circunferencia, otro punto al que llamaremos P.
- Dibujar 20 o más puntos en el perímetro de la circunferencia.
- Recortar la circunferencia.
- Dibujar las mediatrices (simetrales) de cada segmento formado por cada punto en el perímetro de la circunferencia y el punto P.
- Responde las siguientes preguntas:
  1) ¿Qué figura puedes observar?
  2) ¿Cuál es la función de los puntos P y O?

Hipérbola:

- Dibujar 2 circunferencias de radio r separadas por una distancia d.
- Llamar a los centros de las circunferencias C1 y C2 respectivamente.
- Ubicar el punto medio de la distancia d, exterior de las circunferencias, al que llamaremos punto P.
- Dibujar 20 o más puntos en cada uno del perímetro de las circunferencias.
- Dibujar las mediatrices (simetrales) de cada segmento formado por cada punto del perímetro de las circunferencias y el punto P.
- Responde las siguientes figuras:
  1) ¿Qué figura puedes observar?
  2) ¿Cuál es la función de los puntos C1 y C2?

Parábola:

- Dibujar una recta horizontal.
- Ubicar un punto fuera de la recta, en su parte superior, llamado F.
- Dibujar 15 o más puntos a lo largo de la recta.
- Trazar la mediatriz o simetral de cada segmento formado por cada punto dibujado en la recta y el punto F.
- Responde las siguientes preguntas:
  1) ¿Qué figura puedes observar?
  2) ¿Cuál es la función del punto F?
  3) ¿Cuál es la función de la recta?

3.5.9. La Parábola

Definición: Sea l una recta y sea F un punto. La parábola se define como el lugar geométrico de los puntos $Q(x,y)$ tales que su distancia al punto F es igual a su distancia con la recta l. Es decir:

Parábola $= \{Q(x,y) / d(Q,F) = d(Q,l)\}$

Se le denomina a l como la recta **directriz** y a F como el **foco** de la parábola.

Ecuación canónica

Supongamos que tenemos una parábola de vértice en el origen, y que la distancia entre el vértice y el foco es p. Y que $Q(x,y)$ representa cualquier punto de la parábola.

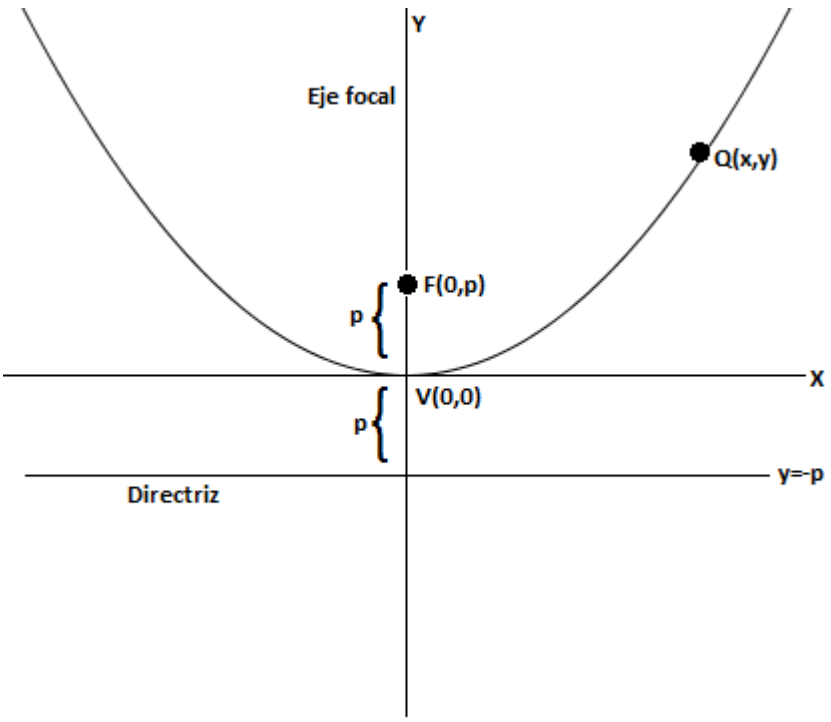


Figura 3.32: Parábola

Tenemos entonces que $d(Q,F) = \sqrt{(x-0)^2 + (y-p^2)}$ y que $d(l,Q) = |y+p|$ y por definición entonces:

$\sqrt{(x-0)^2 + (y-p^2)} = |y+p| \qquad /(\ )^2$

$x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2 \qquad /+\left(-y^2 - 2py - p^2\right)$

$x^2 - 4py = 0 \qquad /+4py$

$x^2 = 4py$ ← Ecuación canónica de la parábola

Luego se amplía el conocimiento para parábolas de vértice distinto al origen ($V(h,k)$) y con concavidad hacia abajo, derecha e izquierda.

3.5.10. La elipse

Definición: Sea F_1 y F_2 dos puntos del plano, y sea a una constante positiva. La elipse se define como el lugar geométrico de los puntos $P(x,y)$ tales que la suma de sus distancias a F_1 con su distancia a F_2 es igual a $2a$, es decir:

Elipse= $\{P(x,y) / d(P,F_1) + d(P,F_2) = 2a\}$

A F_1 y F_2 se les denomina como focos de la elipse y a representa la medida del semieje mayor de la elipse.

Ecuación canónica

Supongamos que tenemos una elipse de centro en el origen, y que la distancia entre el centro y los vértices es c. Y que $P(x,y)$ representa cualquier punto de la elipse.

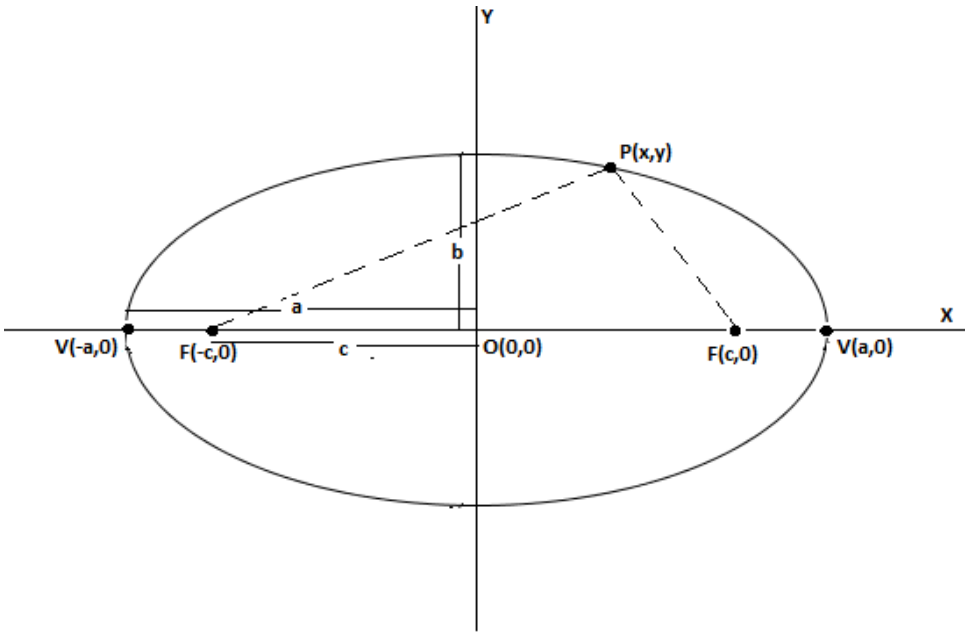


Figura 3.33: Elipse

Por Pitágoras y la definición de elipse obtenemos que $a^2 = b^2 + c^2$, por lo tanto $b^2 = a^2 - c^2$

Tenemos entonces que $d(F_1, P) = \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2}$ y $d(F_2, P) = \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2}$

Y por definición $d(F_1, P) + d(F_2, P) = 2a$

Entonces:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

Despejando $\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2}$ y elevando al cuadrado se obtiene:

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2 \qquad /+(-2cx - c^2 - y^2)$$

$$4cx + 4a^2 = 4a\sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + y^2} \qquad /:4 \quad \text{y} \quad /(\ )^2$$

$$a^4 + 2a^2cx + c^2x^2 = a^2x^2 + 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 \qquad /+(-2a^2cx - a^2c^2 - c^2x^2)$$

$$a^4 - a^2c^2 = a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 \qquad / \text{ factorizamos por } a^2 \text{ y } x^2$$

$$a^2(a^2 - c^2) = x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 \qquad /:a^2(a^2 - c^2)$$

$$1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} \qquad / b^2 = a^2 - c^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \leftarrow \text{Ecuación canónica de la elipse}$$

Luego se amplía el conocimiento para elipses de centro distinto al origen ($O(h,k)$) y con eje focal vertical.

3.5.11. La hipérbola

Definición: Sea F_1 y F_2 dos puntos del plano, y sea a una constante positiva. La elipse se define como el lugar geométrico de los puntos $P(x,y)$ tales que el valor absoluto de la diferencia de su distancia a F_1 con su distancia a F_2 sea igual a $2a$. Es decir:

Hipérbola= $\{P(x,y) / |d(P,F_1) - d(P,F_2)| = 2a\}$

A F_1 y F_2 se les denomina como focos de la Hipérbola.

Ecuación canónica

Supongamos que tenemos una hipérbola de centro en el origen, y que la distancia entre el centro y los vértices es a y a los focos es c . Y que $P(x,y)$ representa cualquier punto de la hipérbola.

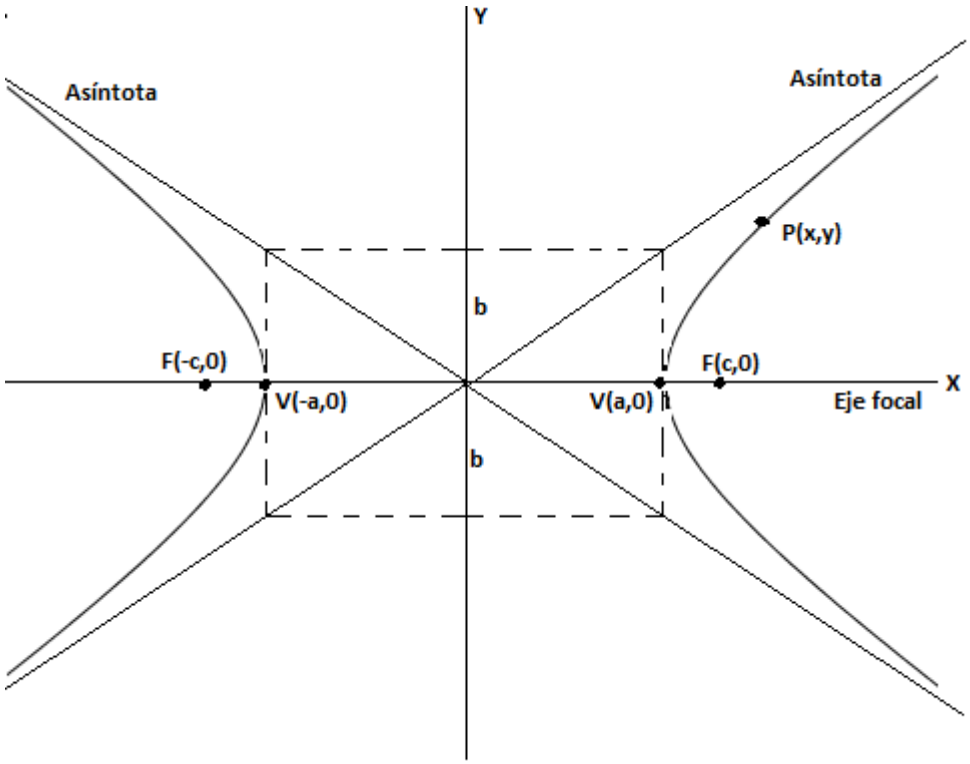


Figura 3.34: Hipérbola

Por Pitágoras y la definición de elipse obtenemos que $c^2 = a^2 + b^2$, por lo tanto $b^2 = c^2 - a^2$

Tenemos entonces que $d(F_1, P) = \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2}$ y $d(F_2, P) = \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2}$

Y por definición $d(F_1, P) - d(F_2, P) = 2a$

Entonces:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

Despejando $\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2}$ y elevando al cuadrado se obtiene:

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2 \qquad /+(+2cx - c^2 - y^2)$$

$$4cx - 4a^2 = 4a\sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + y^2} \qquad /:4 \quad \text{y} \quad /(\ )^2$$

$$a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 \qquad /+(-2a^2cx - a^2c^2 - c^2x^2)$$

$a^2c^2 - a^4 = c^2x^2 - a^2x^2 - a^2y^2$ / factorizamos por a^2 y por x^2

$a^2(c^2 - a^2) = x^2\left(c^2 - a^2\right) - a^2y^2$ $/ : a^2\left(c^2 - a^2\right)$

$1 = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2 - c^2}$ $/ b^2 = c^2 - a^2$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ← Ecuación canónica de la Hipérbola

Y para calcular la ecuación de las asíntotas ocupamos los puntos que pertenezcan a éstas, como $(-a,b)$, $(a,-b)$ en una de ellas y (a,b), $(-a,-b)$ en la otra.

Con ello obtenemos:

$l_1 : y = \left(\frac{b+b}{a+a}\right)(x+a) - b$ $\quad l_1 : y = \frac{b}{a}x$

$l_2 : y = \left(\frac{b+b}{-a-a}\right)(x-a) - b$ $\quad l_2 : y = -\frac{b}{a}x$

Luego se amplía el conocimiento para hipérbolas de centro distinto al origen ($O(h,k)$) y con eje focal vertical.

3.6. Guías de ejercicios

3.6.1. Guía de Parábola

Profesores: Jonathan Cisternas Jamett
Camila González Silva
Jaime Valdés Jara

Nombres	
Curso	
Contenido	Lugares Geométricos
Habilidad	Aplicar propiedades de la ecuación canónica de la parábola
Instrucciones	Resolver en hoja aparte, se entrega al final de la clase
Tiempo	90 minutos

1. Dada la parábolas:
   a) $x^2 = 8y$
   b) $y^2 + 8y - 6x + 4 = 0$
   c) $4x^2 - 20x - 24y + 97 = 0$

   Hallar:

   a. Forma canónica
   b. Vértices
   c. Distancia focal
   d. Coordenadas del foco
   e. Gráfico
   f. Ecuación de la directriz
   g. Lado recto

2. Hallar el foco y la longitud del lado recto de la parábola. $4y^2 = 8x$

3. Hallar la ecuación canónica de la parábola cuyo foco es el punto $\left(0,-\frac{4}{3}\right)$ y que tiene como directriz la recta $3y - 4 = 0$. Hallar además al lado recto.

4. Hallar la ecuación canónica de la parábola de vértice en el punto (3,2) y foco (5,2).

5. Hallar la ecuación canónica de la parábola de vértice en el origen, de eje *Y*, y que pase por (6,-3)

6. Hallar la ecuación canónica de la parábola de foco (4,-2) y de directriz la recta $x-2=0$
7. Hallar la ecuación canónica de las siguientes parábolas:

   a) $F(3,0)$, directriz: $x+3=0$
   b) $V(0,0)$, eje focal de coordenadas X, y que pase por (-3,6)

8. Hallar la ecuación canónica de la parábola de foco en el punto (-2,-1), directriz de ecuación $x=1$ y cuyo lado recto es el segmento entre los puntos (-2,2) y (-2,-4)

9. Hallar la ecuación canónica de la parábola de V(-2,3) y F(1,3).

10. Hallar la ecuación canónica de una parábola de eje focal vertical y que pase por los puntos (4,5), (-2,11) y (-4,21).

11. Hallar la ecuación canónica de la parábola de vértice el punto (2,3), de eje focal paralelo al de coordenadas Y, y que pase por el punto (4,5).

12. Un puente colgante es sostenido por pilares de 60m de altura, los que están a 500m de distancia entre ellos. El cable de suspensión toma forma parabólica de manera que el punto más bajo de él queda a 10m sobre la calle del puente. Si tomamos como eje x la horizontal que define el puente, y como eje y, la vertical que corresponde al eje de simetría del cable de suspensión.
    a) Encontrar la ecuación de la parábola.
    b) Si una persona se ubica a 80m del centro del puente, ¿Qué distancia habrá desde su posición hasta el cable?

13. Un vehículo, de 3m de ancho, debe transportar fruta fresca al otro lado de la ciudad, por lo que debe pasar por un túnel que tiene una forma de arco parabólico. Si el túnel tiene 5 metros de ancho, 4 metros de alto y posee sólo una pista, calcular la altura máxima que puede tener el vehículo para poder entrar en él y llevar la fruta a la ciudad de destino.

3.6.2. Guía de Elipse.

Profesores: Jonathan Cisternas Jamett
Camila González Silva
Jaime Valdés Jara

Nombres	
Curso	
Contenido	Lugares Geométricos
Habilidad	Aplicar propiedades de la ecuación canónica de la elipse
Instrucciones	Resolver en hoja aparte, se entrega al final de la clase
Tiempo	90 minutos

1. Dada las Elipses:
   a) $4x^2+9y^2-48x+72y+144=0$
   b) $16x^2-9y^2+96x-36y+36=0$
   c) $x^2+y^2-6x+4y=12$

   Hallar:

   a. Forma canónica
   b. Vértices
   c. Distancia focal
   d. Coordenadas del foco
   e. Gráfico

2. Hallar las ecuaciones canónicas de las elipses siguientes de forma que satisfaga las condiciones que se indican.
   a) Focos $(\pm 4,0)$, vértices $(\pm 5,0)$ Sol $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$
   b) Focos $(0,\pm 8)$, vértices $(0,\pm 17)$ Sol $\frac{x^2}{225}+\frac{y^2}{289}=1$
   c) Focos $(0,\pm 6)$, semieje menor = 8 Sol $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{100}=1$

3. Hallar la ecuación canónica de la elipse de centro (4,-1), uno de los focos en (1,-1) y que pase por el punto (8,0).

4. Hallar la ecuación general de la elipse cuyos focos están posicionados en los puntos $\left(0,5\sqrt{3}\right)$ y $\left(0,-5\sqrt{3}\right)$y su semieje mayor mide 20 unidades.

Sol $4x^2+y^2=100$

5. Si los focos de una elipse son los puntos $F_1=(-4,3)$ y $F_2=(2,3)$y el perímetro del triángulo isósceles cuyos vértices son los focos y un punto de la elipse, es igual a 16, determine la ecuación de la elipse.

Sol $\frac{(x+1)^2}{25}+\frac{(y-3)^2}{16}=1$

6. Determine los valores de k para que la ecuación $x^2+2y^2+2x+12y=k$ describa una elipse.

Sol $k>-19$

7. La órbita de la Tierra es una elipse en uno de cuyos focos esta el sol. Sabiendo que el semieje mayor de la elipse es 148,5 millones de kilómetros y que la razón entre los segmentos c y a de la elipse es 0,17. Hallar la máxima y la mínima distancia de la Tierra al sol. (R: 152 y 146 millones de km)

8. Un arco de 80m de luz tiene forma semielíptica. Sabiendo que su altura es de 30m, hallar la altura del arco, un punto situado a 15m del centro. (R: $15\sqrt{55/4}m$)

3.6.3. Guía de hipérbola

Profesores: Jonathan Cisternas Jamett
Camila González Silva
Jaime Valdés Jara

Nombres	
Curso	
Contenido	Lugares Geométricos
Habilidad	Aplicar propiedades de la ecuación canónica de la hipérbola
Instrucciones	Resolver en hoja aparte, se entrega al final de la clase
Tiempo	90 Minutos

1. Dadas las hipérbolas:

   a) $49x^2 - 16y^2 = 784$

   b) $9y^2 - 16x^2 - 18y - 64x - 199 = 0$

   c) $9x^2 - 16y^2 - 36x - 32y - 124 = 0$

   Hallar:

   a. Centro
   b. Vértices
   c. Coordenadas de los focos
   d. Asíntotas
   e. Gráfico

2. Hallar la ecuación canónica de la hipérbola dados el centro (0,0), un foco (8,0) y el vértice (6,0).

   Sol: $\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{28} = 1$

3. Hallar la ecuación canónica de la hipérbola de centro el origen, eje real sobre el eje de coordenadas y, longitud de lado recto 36 y distancia entre los focos igual a 24.

   Sol: $\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{108} = 1$

4. Hallar la ecuación canónica de la hipérbola de centro el origen, eje real sobre los de coordenadas X , y que pase por los puntos (3,1) y (9,5)

Sol $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{6}=1$

5. Hallar la ecuación canónica de la hipérbola de vértices $(\pm 6,0)$ y asíntotas $6y=\pm 7x$

Sol $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{49}=1$

6. Hallar la ecuación canónicade la hipérbola de centro (0,0), un vértice en (3,0) y ecuación de una asíntota 2x-3y=0

Sol $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$

7. Dibujar las hipérbolas siguientes y hallar sus puntos de intersección.
   a. $x^2-2y^2+x+8y-8=0$
   b. $3x^2-4y^2+3x+16y-18=0$

Sol $(1,1),(1,3),(-2,1),(-2,3)$

4. CAPÍTULO IV: ANÁLISIS DE DATOS

4.1. Análisis de la encuesta

4.1.1. Escalamiento tipo Likert

El escalamiento tipo Likert es el tipo de encuesta en que se basará la nuestra y consiste en un conjunto de ítems presentados en forma de afirmaciones o juicios, ante los cuales se pide a los participantes que indiquen qué tan de acuerdo, eligiendo uno de los cinco puntos o categorías de la escala, están de cada afirmación o juicio. A cada punto se le asignará un valor numérico. (Hernández, Fernández y Baptista, 2006).

Los puntos a considerar en la encuesta y los valores asignados son:

1	Muy desacuerdo
2	Desacuerdo
3	Neutro
4	De acuerdo
5	Muy de acuerdo
N/A	No aplica

Tabla 4.1: Categorías de la escala

4.1.2. La encuesta

Se solicita al alumno/a que realice esta encuesta con justicia y honestidad.

Marque con una X según sea su opinión:

1	Muy desacuerdo.
2	Desacuerdo.
3	Neutro.
4	De acuerdo.
5	Muy de acuerdo.
N/A	No aplica.

Referido a la Metodología:

		1	2	3	4	5	N/A
P1	Considera que las guías de trabajo ayudan a un buen entendimiento del contenido.						
P2	Considera que el uso de materiales didácticos ayuda a su aprendizaje.						
P3	Considera que el uso de las tecnologías empleadas ayuda a su aprendizaje.						
P4	Considera que los trabajos realizados en grupo fortalecen su aprendizaje.						
P5	La forma de enseñar de el/ los profesor/es ha cambiado positivamente su percepción sobre las matemáticas.						
P6	Considera que la metodología usada por el/los profesor/es es la correcta.						
P7	Preferiría que la enseñanza de las matemáticas fuera siempre mediante la metodología usada por el/los profesor/es.						
P8	La metodología empleada por el/los profesor/es causa real interés de su parte.						
P9	El contenido visto tiene sentido en la vida cotidiana.						

Referido al Profesorado:

P1	El/los profesor/es se relacionan con respeto hacia los alumnos.						
P2	El/los profesor/es responden las dudas de los alumnos, velando por un buen entendimiento por parte de estos.						
P3	El/los profesores se expresan con claridad.						

Si estima necesario, escriba una observación:

_____
_____
_____
_____

4.1.3. Comparación de la encuesta en los grupos experimentales y controles

Se sacan los promedios de las respuestas de cada pregunta en las cuatro encuestas realizadas, y los resultados son los siguientes:

1	Muy desacuerdo.
2	Desacuerdo.
3	Neutro.
4	De acuerdo.
5	Muy de acuerdo.
N/A	No aplica.

Afirmaciones referidas a la metodología	GRUPO E1	GRUPO E2	GRUPO C1	GRUPO C2
P1	4	5	4	4
P2	5	5	N/A	N/A
P3	4	5	N/A	N/A
P4	4	4	4	3
P5	4	4	3	3
P6	4	4	3	2
P7	4	4	3	3
P8	4	4	2	2
P9	5	5	3	2

Tabla 4.2: Promedio de las respuestas de la encuesta realizada a cada curso

Representación gráfica de las respuestas:

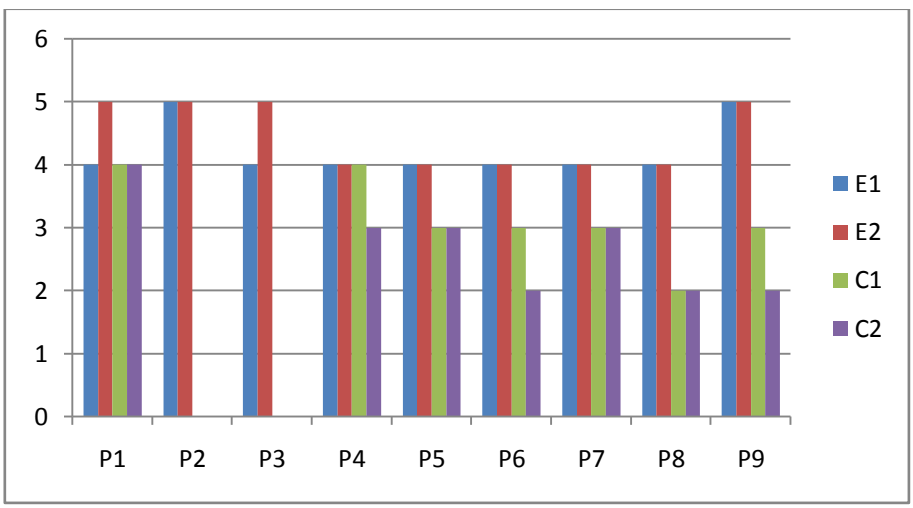


Tabla 4.3: Comparación de respuestas en encuesta de todos los cursos

Afirmaciones referidas al profesorado	GRUPO E1	GRUPO E2	GRUPO C1	GRUPO C2
P1	5	5	5	5
P2	5	5	4	4
P3	4	4	4	4

Representación gráfica de las respuestas:

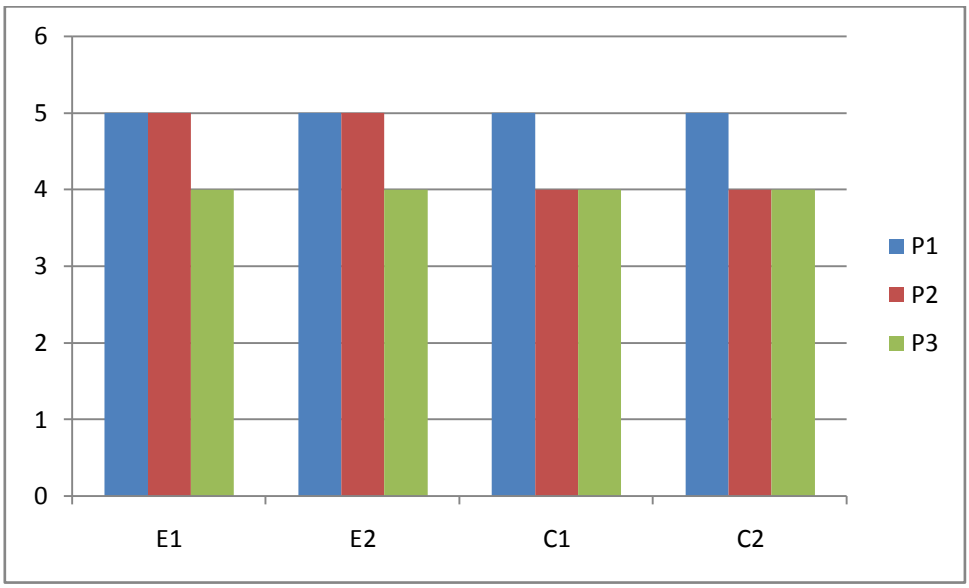


Tabla 4.4: Comparación de respuestas en encuesta de todos los cursos

Las gráficas muestran la tendencia a que nuestra metodología les resulta atractiva a los estudiantes, lo que conlleva a que ellos tengan un mayor interés por la clase, lo que provoca "una actitud para aprender significativamente, esto es una disposición de parte del alumno a enlazar cada etiqueta conceptual del nuevo material con conceptos que él o ella ya posee en su estructura cognitiva" (David Ausubel, 1985).

4.2. Análisis de las pruebas

4.2.1. Pre Test

4.2.1.1. Resultados Pre Test

Colegio: Liceo Bicentenario **Curso:** 3º Científico A **Asignación:** Curso Experimental 1 (E1)

	Nombre	Ítem I	Ítem II	Ítem III	Ítem IV	Total
1	Gerardo Cabrera	7	4	0	0	11
2	Alex Cumplido	0	5	0	0	5
3	Gabriel Estivill	8	4	0	0	12
4	Morrinson Fernández	7	5	0	0	12
5	Camila Gaete	6	0	0	0	6
6	Matías Jiménez	0	4	0	0	4
7	Pabla Vergara	4	4	0	1	9
8	Elizabeth Villablanca	8	6	0	1	15
9	Jürgen Cant	4	8	0	0	12
10	José González	3	0	0	0	3
11	Mauricio Villagrán	7	0	0	0	7
12	Dante Acevedo	1	4	0	0	5
13	Sebastián Olguín	6	4	0	1	11
14	Luis Oro	1	4	0	1	6
15	Nanethy Ramos	0	0	0	0	0
16	Francisca Valdés	3	8	0	0	11
17	Marcelo Brantes	0	8	0	0	8
18	Pablo Arancibia	1	0	0	0	1
19	Janis Pérez	1	0	0	0	1
	Promedio	3,53	3,58	0,00	0,21	7,32

Tabla 4.5: Resultados Pre-test del E1

- Gráfico 1:

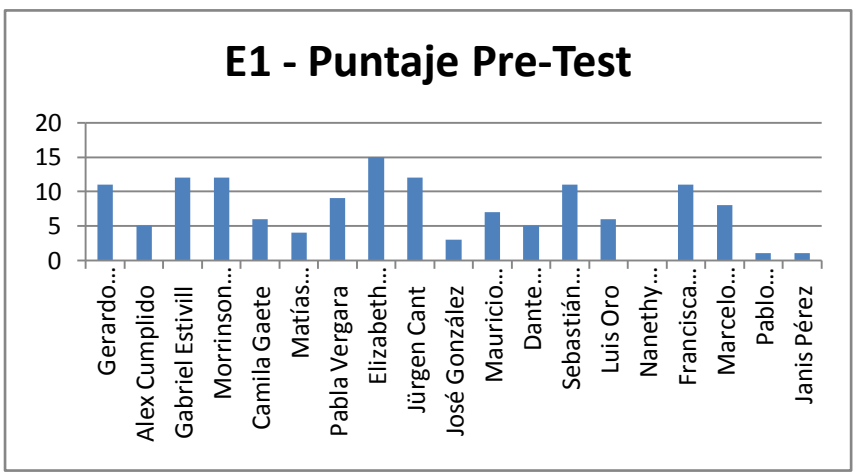


Gráfico 4.1: Resultados Pre-test del E1

Colegio: Liceo Bicentenario **Curso:** 3º Científico B **Asignación:** Curso Experimental 2 (E2)

	Nombre	Ítem I	Ítem II	Ítem III	Ítem IV	Total
1	Gustavo Aguilar	5	5	0	0	10
2	Bernabé Astudillo	4	1	0	0	5
3	Benjamín Basaure	2	2	0	0	4
4	Laura Berríos	2	0	0	0	2
5	Jasmín Carrasco	3	0	0	1	4
6	Vania Fernández	5	0	0	0	5
7	Marco Galindo	1	3	0	0	4
8	Makarena Guerrero	0	4	1	0	5
9	Fracisco Madrid	6	7	0	0	13
10	Muriel Olivares	2	1	0	0	3
11	Diego Olmedo	1	2	0	0	3
12	Felipe Padilla	4	5	0	0	9
13	Javiera Rabuco	2	6	0	0	8
14	Karla Saavedra	3	2	1	0	6
15	Macarena Silva	4	5	0	0	9
16	Diego Tapia	9	1	0	0	10
17	Cristián Toro	2	3	0	0	5
	Promedio	3,24	2,76	0,12	0,06	6,18

Tabla 4.6: Resultados Pre-test del E2

- Gráfico 2:

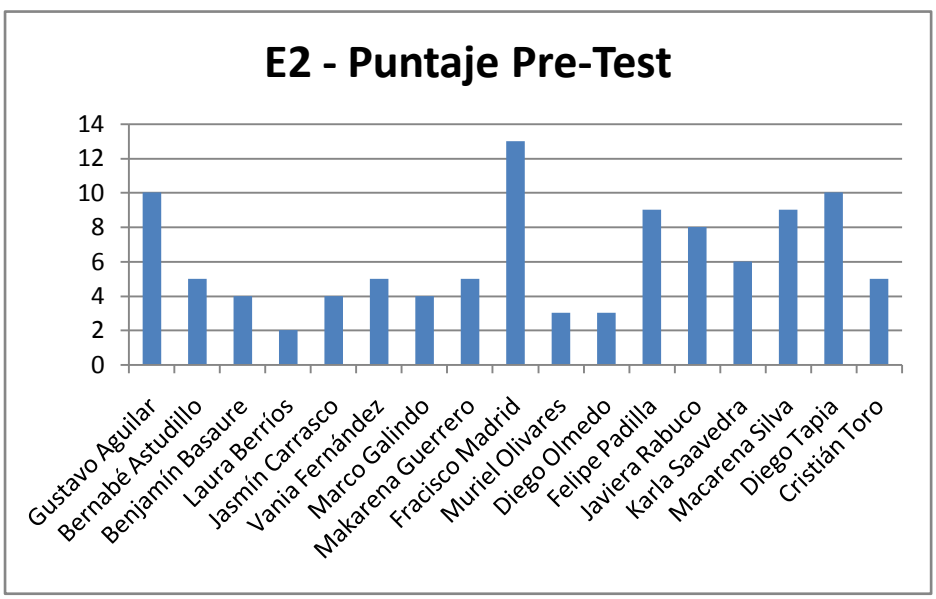


Gráfico 4.2: Resultados Pre-test del E2

Colegio: Liceo Guillermo Rivera **Curso:** 3ºC módulo A **Asignación:** Curso Control 1 (C1)

	Nombre	Ítem I	Ítem II	Ítem III	Ítem IV	Total
1	Alejandro Álvarez	9	4	6	0	19
2	Diego Aravena	8	5	0	0	13
3	Kaina Becerra	8	2	0	0	10
4	Tiare Berríos	5	6	0	0	11
5	Hans Biermuritz	0	4	3	0	7
6	Valeria Castillo	8	0	3	0	11
7	Felipe Cerda	0	4	3	0	7
8	Jacqueline Durán	4	4	0	0	8
9	Andrés García	6	3	1	0	10
10	Michel González	3	3	0	0	6
11	Cristofer Hughes	6	0	0	0	6
12	Francesca Maggiolo	3	2	3	0	8
13	Nicol Orellana	4	4	0	0	8
14	Constanza Pérez	8	4	0	0	12
15	Nicolette Pérez	4	0	0	0	4
16	Omar Silva	5	1	0	0	6
17	Jonathan Tonelli	6	7	3	0	16
18	Pablo Vega	8	0	0	0	8
19	Francisco Vega	0	2	0	0	2
20	Adrián Villalobos	3	1	0	0	4
21	Luis Franco	8	7	1	1	17
	Promedio	5,05	3,00	1,10	0,05	9,19

Tabla 4.7: Resultados Pre-test del E2

- Gráfico 3:

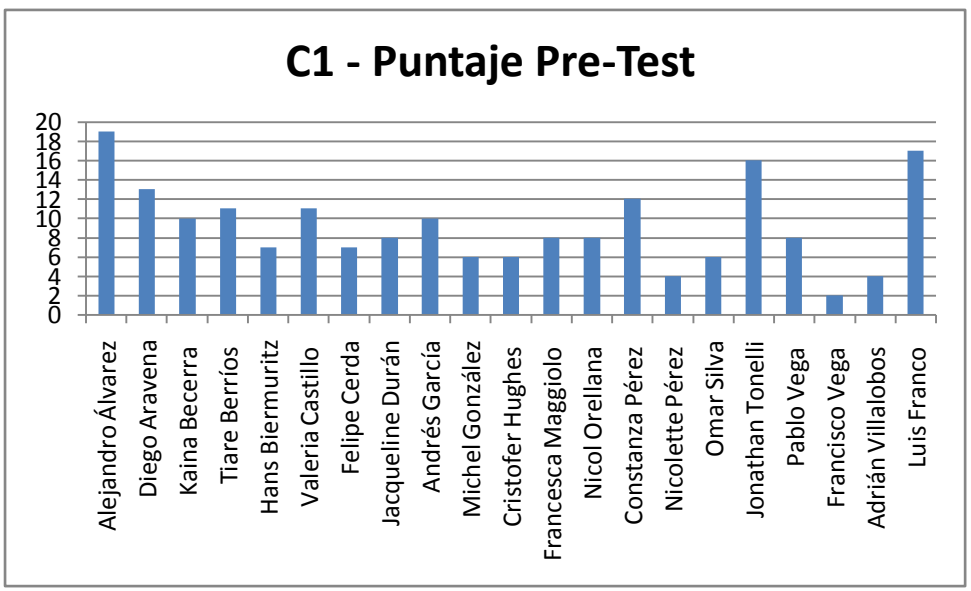


Gráfico 4.3: Resultados Pre-test del C1

Colegio: Liceo Guillermo Rivera **Curso:** 3ºC módulo B **Asignación:** Curso Control 2 (C2)

		Ítem I	Ítem II	Ítem III	Ítem IV	Total
1	Pablo Arancibia	3	6	0	0	9
2	Alejandra Barros	3	5	0	0	8
3	Karina Carvajal	4	0	0	0	4
4	Cristina Díaz	2	4	0	0	6
5	Valeria Ferrer	7	4	1	1	13
6	Fabían Foix	1	2	0	0	3
7	Fernando González	0	4	0	0	4
8	Gloria González	0	0	1	0	1
9	Gian Carlo Jerez	5	2	0	0	7
10	Mauricio Lara	4	1	0	0	5
11	Paulo Pavez	7	4	0	0	11
12	Camila Silva	8	5	1	0	14
13	Javier Tapia	2	0	0	0	2
14	Fernando Toledo	8	1	0	0	9
15	Juan Torres	0	0	0	0	0
16	Diego Vega	1	2	0	0	3
	Promedio	3,44	2,5	0,19	0,06	6,19

Tabla 4.8: Resultados Pre-test del C2

- Gráfico 4:

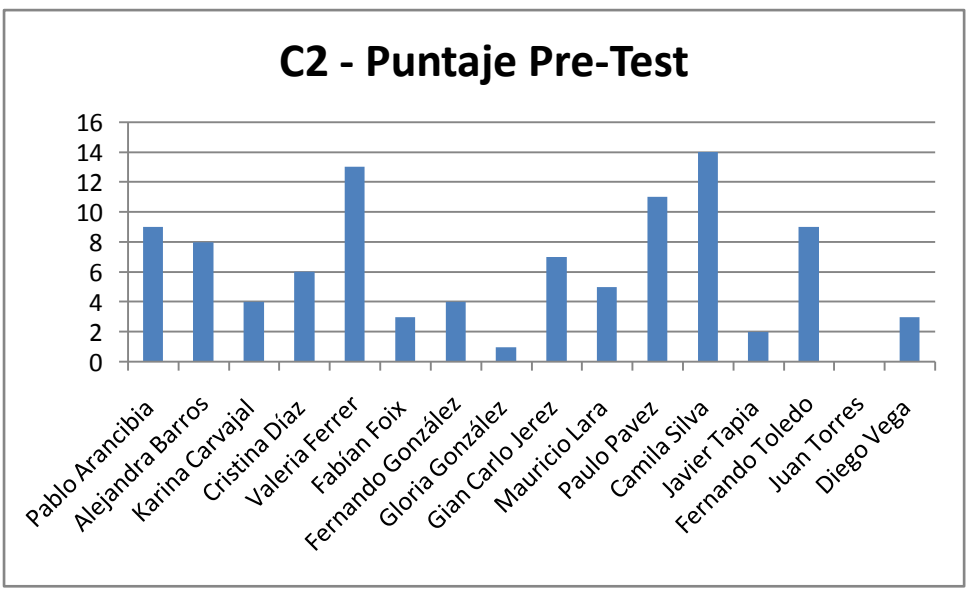


Gráfico 4.4: Resultados Pre-test del C2

4.2.1.2. Comparación Pre-test

A continuación, mostramos una Tabla Comparativa que representa el puntaje obtenido en promedio por cada uno de los cuatro ítems en los pre-test rendidos por los cursos en los que llevamos a cabo nuestra tesis. Además agregamos los promedios por cada ítem y la suma de los promedios de los puntajes obtenidos por cada curso en cada ítem.

- Tabla Comparativa Pre-test:

Ítemes	E1	E2	C1	C2	Promedio
Ítem I	3,53	3,24	5,05	3,44	3,81
Ítem II	3,58	2,76	3,00	2,50	2,96
Ítem III	0,00	0,12	1,10	0,19	0,35
Ítem IV	0,21	0,06	0,05	0,06	0,10
Suma de puntajes	7,32	6,18	9,2	6,19	

Tabla 4.9: Tabla comparativa del Pre-Test

Ahora, mostramos en un gráfico de líneas comparativo el promedio obtenido por cada ítem en cada unos de los cursos que estudiamos.

- Gráfico 5: Gráfico Comparativo Pre-test.

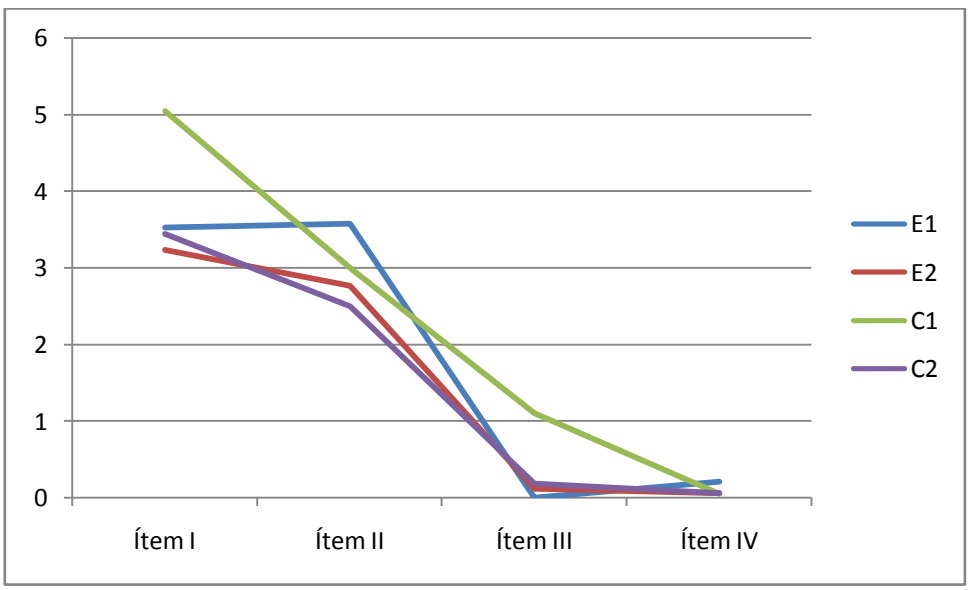


Gráfico 4.5: Tabla comparativa del Pre-Test

En los siguientes párrafos, haremos una comparación detallada y un análisis con respecto a los resultados obtenidos, haciendo cuenta de lo que significa estos resultados en cada ítem y las decisiones que tomamos como consecuencia de estos.

Ítem 1:

Podemos observar mediante el Gráfico 5 y la Tabla Comparativa que el ítem en el que obtuvieron mejores resultados era el ítem 1. Esto quiere decir que lo que mejor manejan los alumnos a este nivel es la relación entre conceptos de los conocimientos previos, lo que no quiere decir que por ser lo mejor, lo manejen de manera óptima y satisfactoria. Tres de los cursos obtuvieron un puntaje inferior a la mitad del total, siendo este último 4,5 puntos, sobresaliendo el C1, curso que obtuvo un puntaje superior a la mitad. Sin embargo, consideramos que en general poseen un conocimiento básico de los conceptos, identificamos que el problema está en cuánto a la definición de estos, más que en el orden en que los situaron. Este punto es evidenciado al ver que los alumnos, en general, poseen una muy buena jerarquización de los conceptos, ubicándolos desde lo más general a lo más detallado. A pesar de conocer los elementos geométricos descritos en la prueba, solían confundirse con las definiciones y la especificidad de estas.

Los alumnos de los cursos con los que hemos tratado, comentaron no haber trabajado anteriormente con mapas conceptuales, por lo que al verse enfrentados a una serie de conceptos y definiciones, tendían a asociar un elemento a más de una definición o a, definitivamente, asociar equívocamente los conceptos y sus definiciones, entendiendo que existía un orden lógico para la unión de los conceptos y, por otro lado, sin darse cuenta que habían palabras claves que permitían un buen uso de enlaces.

Este ítem es especialmente importante porque va relacionado al logro de un aprendizaje significativo respecto de los conocimientos previos, tal que de haber sido así, los alumnos lograrían adquirir más eficientemente los contenidos a posteriori. A raíz del poco trabajo en relación de conceptos, trabajamos en esto a lo largo de la unidad, pidiendo a los alumnos crear mapas conceptuales cada vez que terminábamos algún contenido, es decir, al final de pasar el contenido de parábola y de elipse, haciendo un nexo entre ambas y también con hipérbola, siendo estos 3 diferentes lugares geométricos, detallando también sus elementos. Este tipo de actividad se realizó de manera colectiva, haciendo un trabajo en conjunto de todos los alumnos, de tal forma en que nosotros, los profesores, retroalimentábamos inmediatamente para guiarlos en el orden y así crear correctamente los mapas conceptuales.

Ítem 2:

En este punto, los resultados de los 4 cursos un poco más parejos, variando entre los 2 y 4 puntos, siendo esto inferior a la mitad del puntaje total para este ítem, el que sería 7 puntos. Se puede concluir con claridad que los estudiantes no tienen una base sólida al momento de reconocer propiedades y características de cuerpos geométricos. Como grupo, notamos en estos cursos con los que trabajamos que existe un déficit en cuanto a los contenidos de geometría espacial, confundiendo en muchas oportunidades figuras planas con cuerpos geométricos.

Para el final de este ítem, notamos que algunos de los alumnos poseían una noción de la parábola y de la elipse, siendo capaces de reconocer, al menos, sus formas, lo que hace referencia al Nivel 1 de la Teoría de Van Hiele, el Reconocimiento.

Ítem 3:

Notamos que para este ítem, los alumnos demostraron no poseer conocimientos suficientes para un manejo bien logrado de la completación de cuadrados. Este elemento nos atrasó un poco en cuanto a lo que teníamos planificado para nuestras clases, debido a que era parte de la asignatura de matemática común, por lo que esperábamos que los alumnos tuvieran un mejor desempeño en esta área.

Lo que acabamos de mencionar nos impulsó a tener que reforzar la completación de cuadrados a lo largo de las clases, usando distintos métodos para lograrlo, pues entre los mismos alumnos existían diversas formas de llevar a cabo la completación.

Ítem 4:

En este ítem, los alumnos obtuvieron un muy bajo rendimiento, casi nulo, lo que era de esperarse debido a que no poseían las herramientas necesarias para abarcar el contenido.

Es importante destacar que los alumnos no tuvieron una correcta iniciativa para la gráfica de las ecuaciones planteadas. No se hizo uso de las conocidas técnicas para graficar, como el uso de la tabla donde se dan valores arbitrarios y convenientes a una de las variables para luego encontrar la otra.

Conclusión:

En general, observamos que los resultados obtenidos por nuestros cursos, tanto experimentales como controles, fueron los esperados, pues manifestaron mejores resultados en cuanto a los conocimientos previos y peores respecto a los referidos directamente al contenido que posteriormente abarcaríamos.

A raíz de la falta de consolides en los conocimientos de los estudiantes evidenciados en su bajo rendimiento, hicimos un repaso de los contenidos previos, sean estos los elementos geométricos, sus definiciones, características y propiedades, además de un arduo énfasis a la parte algebraica, es decir, completación de cuadrados y gráfico.

Este pre-test nos sirvió para sentar una base para las futuras clases y saber sobre sus fortalezas y debilidades en cuanto al conocimiento matemático, de manera en que pudiéramos abarcar correctamente los cimientos para luego incorporar los conocimientos nuevos fundamentados en lo sabido a priori.

4.2.2. Post Test

Esta prueba pretende demostrar todo lo aprendido por los estudiantes a lo largo de todo el experimento, se espera que lleguen al nivel 4 de razonamiento (deducción formal) de la Teoría de Van Hiele, tomando en cuenta que el nivel 5 se considera para el conocimiento que deben tener los profesionales matemáticos según Corberán R., Gutiérrez A., Huerta M., entre otros (1994), quienes describen y analizan lo expuesto por Van Hiele.

Colegio: Liceo Bicentenario **Curso:** 3º Científico A **Asignación:** Curso Experimental 1 (E1)

	Nombre	Preg. 1-3	Preg. 4-5	Preg. 6	TOTAL	NOTA
1	G. C.	36	16	8	60	70
2	A. C.	31	16	5	52	60
3	G. E.	31,5	16	6	53,5	62
4	M. F.	22	12	8	42	48
5	C. G.	34	12	8	54	63
6	M. F.	36	13,5	8	57,5	67
7	P. V.	35	13	8	56	65
8	E. V.	32	12	8	52	60
9	J. C.	30	16	7	53	61
10	J. G.	18	3	8	29	34
11	M. V.	22	0	7	29	34
12	D. A.	27,5	10	8	45,5	52
13	S. O.	27	2	7	40	45
14	L. O.	1	0	0	1	11
15	N. R.	9	0	8	17	24
16	F. V.	9	10	6	25	31
17	M. B.	26,5	5	6	37,5	42
18	P. A.	18	0	7	25	31
19	J. P.					Pendiente

Tabla 4.10: Resultados Post-Test de E1

Gráfico notas 1:

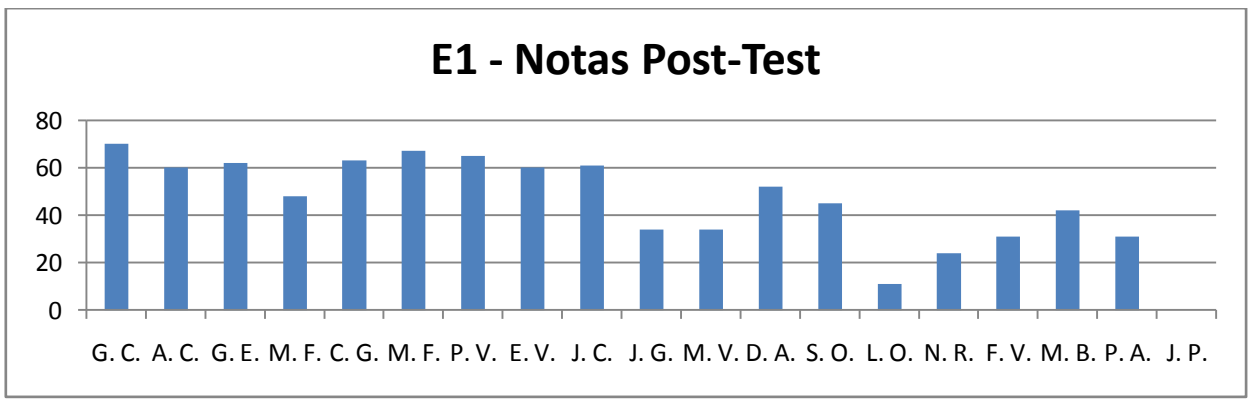


Gráfico 4.6: Resultados Post-Test de E1

Colegio: Liceo Bicentenario **Curso:** 3º Científico B **Asignación:** Curso Experimental 2 (E2)

	Nombre	Preg. 1-3	Preg. 4-5	Preg. 6	TOTAL	NOTA
1	G. A.	17	16	8	41	46
2	B. A.	29	10	6,5	45,5	52
3	B. B.	15	15	6	36	40
4	L. B.	36	16	8	60	70
5	J. C.	25	15	8	48	55
6	V. F.	32	8	6	46	53
7	M. G.	13	10	7	30	35
8	M. G.	35	14	6	55	64
9	F. M.	28	11	5	44	50
10	M. O.	20	9,5	8	37,5	42
11	D. O.	12	6	6	24	30
12	F. P.	15	3	8	26	32
13	J. R.	24	11	8	43	49
14	K. S.	19	12	7	38	43
15	M. S.	36	7	6	49	56
16	D. T.	32	14	5	51	59
17	C. T.	36	13	8	57	66

Tabla 4.11: Resultados Post-Test de E2

Gráfico notas 2:

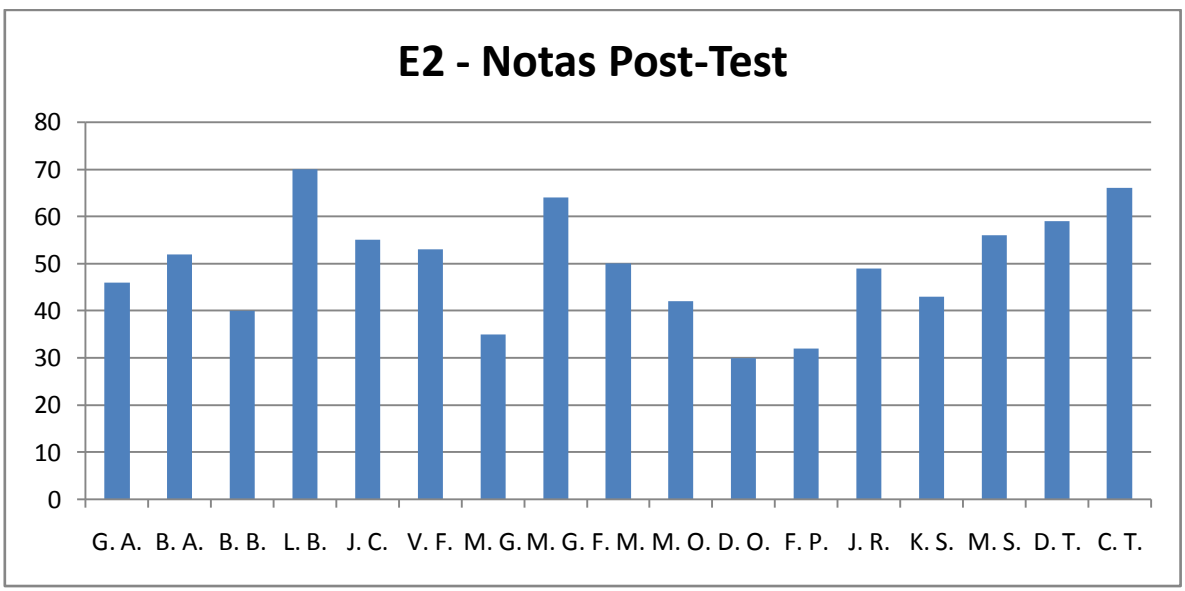


Gráfico 4.7: Resultados Post-Test de E2

Colegio: Liceo Guillermo Rivera **Curso:** 3ºC módulo A **Asignación:** Curso Control 1 (C1)

	Nombre	Preg. 1-3	Preg. 4-5	Preg. 6	TOTAL	NOTA
1	A. A.	10	0	2	12	20
2	D. A.	30	0	4	34	38
3	K. B.	28	0	3	31	36
4	T. B.	15	0	1	16	23
5	H. B.	36	0	7	43	49
6	V. C.	34	0	0	34	38
7	F. C.	18,5	0	2	20,5	27
8	J. D.	28	0	3	31	36
9	A. G.	0	0	0	0	10
10	M. G.	14	0	2	16	23
11	C. H.	6	0	0	6	15
12	F. M.	35	0	3	38	43
13	N. O.	28	0	3	31	36
14	C. P.	24	0	1	25	31
15	N. P.	12	0	1	13	21
16	O. S.	20,5	0	2	22,5	29
17	J. T.	24	0	1	25	31
18	P. V.	27	0	2	29	34
19	F. V.	35	0	1	36	40
20	A. V.	34	0	2	36	40
21	L. F.	0	0	0	0	10

Tabla 4.12: Resultados Post-Test de C1

Gráfico notas 3:

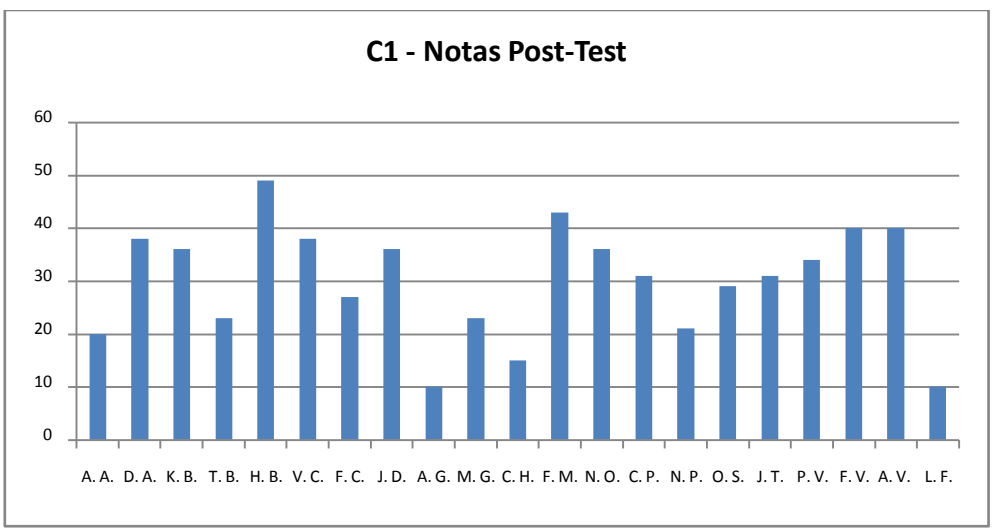


Gráfico 4.8: Resultados Post-Test de C1

Colegio: Liceo Guillermo Rivera **Curso:** 3ºC módulo B **Asignación:** Curso Control 2 (C2)

	Nombre	Preg. 1-3	Preg. 4-5	Preg. 6	TOTAL	NOTA
1	P. A.	24	0	2	26	32
2	A. B.	26	0	4	30	35
3	K. C.	34	0	2	36	40
4	C. D.	21	0	1	22	28
5	V. F.	28	0	2	30	35
6	F. F.	35,5	0	2	37,5	42
7	F. G.	0	0	0	0	10
8	G. G.	26	0	4	30	35
9	G. J.	24	0	2	26	32
10	M. L.	12	0	3	15	23
11	P. P.	32	0	1	33	38
12	C. S.	20	0	4	24	30
13	J. T.	18	0	3	21	28
14	F. T.	24	0	2	26	32
15	J. T.	30	0	3	33	38
16	D. V.	34,5	0	3	37,5	42

Tabla 4.13: Resultados Post-Test de C2

Gráfico notas 4:

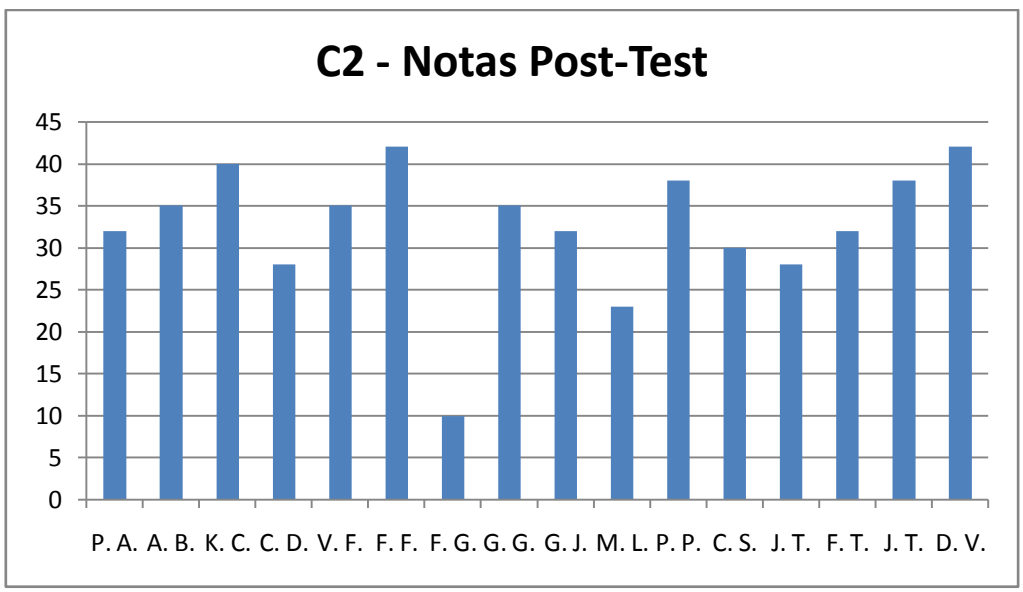


Gráfico 4.9: Resultados Post-Test de C2

4.2.2.1. Comparación Post-test

Ahora se mostrará una tabla y su correspondiente gráfico en el cual estarán las notas promedio de cada curso.

Cursos	E1	E2	C1	C2
Promedio de notas	47,78	49,53	30	32,5

Tabla 4.14: Promedio de notas de todos los cursos de la investigación

Gráfico promedio de notas:

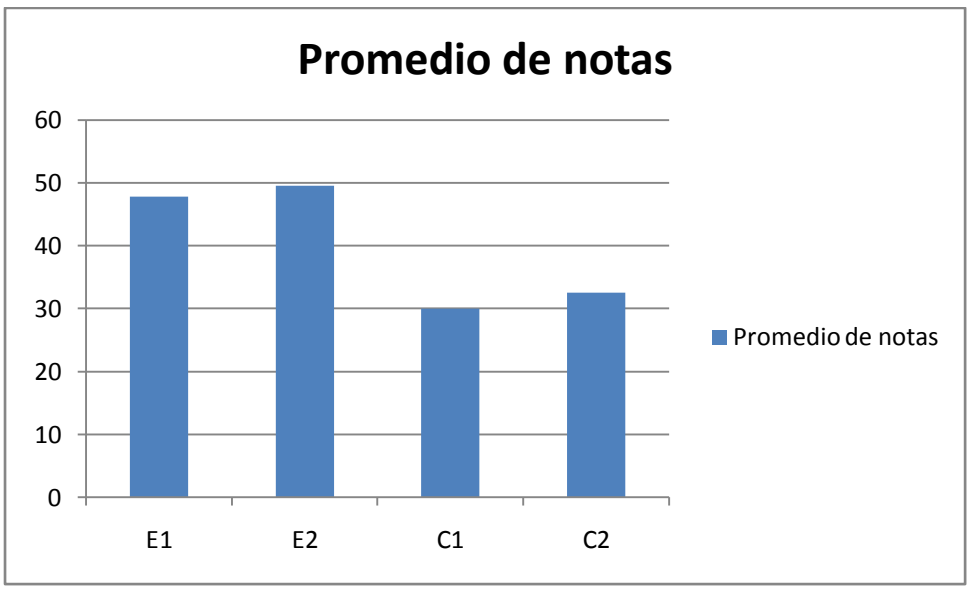


Gráfico 4.10: Promedio de notas de todos los cursos de la investigación

Como se puede apreciar fácilmente, los cursos experimentales terminaron con resultados suficientes, mientras que los cursos controles están en el sector de insuficiente. Hay una diferencia marcada entre ambos tipos de cursos. Consideramos que fue de vital importancia el trabajo en los mapas conceptuales y guías semanales. Esto queda claro en los resultados que se muestran a continuación en donde se analizará por tipo de pregunta (álgebra, problemas de planteo y mapa conceptual).

Preguntas/C	E1	E2	C1	C2
Preg. 1-3	24,75	24,94	21,86	24,31
Preg. 4-5	8,69	11,21	0	0
Preg. 6	6,83	6,85	1,9	2,38

Tabla 4.15: Puntajes de preguntas por tipo

Gráfico comparación por preguntas:

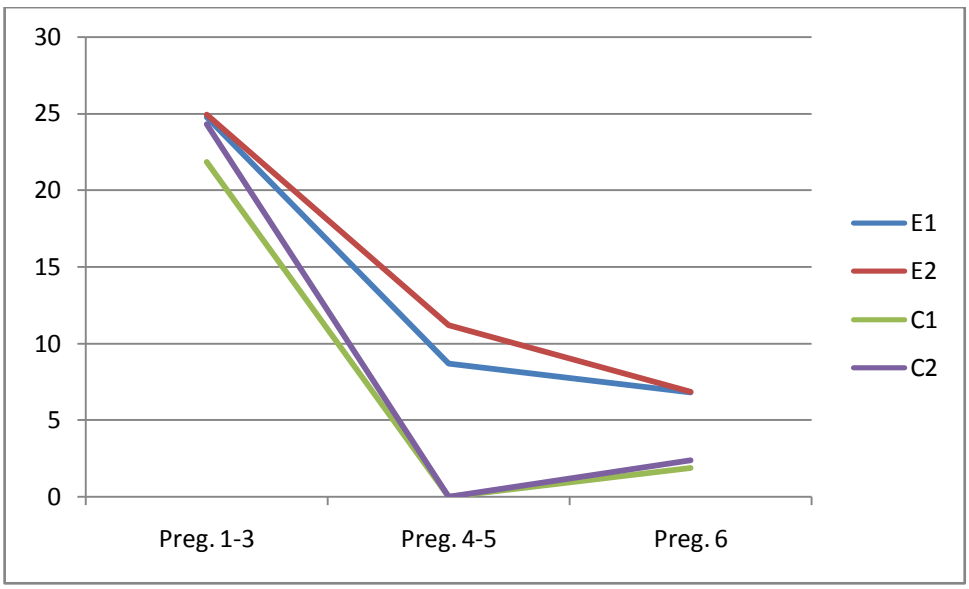


Gráfico 4.11: Puntaje de preguntas por tipo

Preguntas 1-3 (Álgebra):

En este ítem se puede apreciar que es en el que todos los cursos respondieron de manera similar, vemos que a pesar de eso, ambos cursos experimentales están levemente arriba de los controles, aquí se les pedía a los alumnos que a partir de una ecuación general de una cónica llegaran a la ecuación canónica de la misma y pudiese reconocer elementos en ella, y viceversa, que comenzando de elementos de alguna determinada cónica llegasen a su ecuación canónica.

Nos podemos dar cuenta del avance de nuestros alumnos en los cursos experimentales, a partir de la teoría de Van Hiele podemos concluir que gracias a que hace una separación en 5 niveles (4 para nuestra tesis), el logro se va dando de a poco, es necesario avanzar por completo un nivel para pasar al otro siendo el aprendizaje mucho más significativo.

Preguntas 4-5 (Problemas de planteo):

Aquí es donde se marca la mayor diferencia entre los cursos experimentales y los controles, como podemos ver en el gráfico de líneas los cursos controles tuvieron prácticamente una nula respuesta, mientras que los experimentales pudieron responder satisfactoriamente a este ítem, esto se debe a que en las guías le dimos el énfasis que merecían los problemas de planteo, ya que poniendo estos problemas a la altura de algo suficientemente cotidiano despierta que el alumno se interese en el tema. Ausubel explica esto, ya que sin interés de parte del alumnado no hay aprendizaje significativo.

Pregunta 6 (Mapa conceptual):

Aquí a los alumnos se les pide hacer un sistema de representación, en el cual, según el gráfico comparativo, queda claramente demostrado que los cursos experimentales resultaron mejor evaluados que los controles, esto es gracias a que al final de cada cónica construíamos un mapa conceptual entre todos lo que ayudó de una forma simple a organizar los conceptos principales y secundarios ayudándolos a comprender y recuperar información para así poder aplicar ese conocimiento con mayor facilidad.

5. CAPÍTULO V: ANEXOS

5.1. Planificaciones

OF - CMO	APRENDIZAJES ESPERADOS CON ENFASIS EN LA HABILIDAD	CONTENIDOS	ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE	INDICADORES DE EVALUACIÓN
Tema: Lugares geométricos Analizar, confrontar y construir estrategias personales para la resolución de problemas o desafíos que involucren lugares geométricos expresados analíticamente.	Reconocen las cónicas como un lugar geométrico. Determinan elementos y caracterizan las cónicas. Reconocen la Parábola, la Elipse y la Hipérbola a partir de las ecuaciones cartesianas que las caracterizan. Aplican propiedades de las cónicas y resuelven problemas que involucran el uso de ellas.	La Parábola y Elipse como lugar Geométrico. Deducción de la Ecuación canónica de la Parábola y Elipse. Gráfico de la Parábola y Elipse trasladadas. Resolución gráfica y analítica de problemas sencillos que involucren a las cónicas.	Realizan cortes en conos hechos de plasticina para reconocer las cónicas. Construyen mecánicamente las cónicas en base a cartón piedra, chinches, lana, dobleces en papel y lápiz. Identifican las cónicas en su entorno. Determinan los elementos geométricos de las cónicas observando sus propias construcciones. Determinan las características principales de las cónicas a través de mediciones realizadas con Geogebra y la Pizarra interactiva. Clasifican a las cónicas a través de construcciones de papel, regla, lápiz y compás. Resuelven guías de aplicación y problemas que involucran a las cónicas.	Guías de formativa Guía 1: Reconocer las cónicas. Guía 2: Determinar características y elementos de las cónicas. Guía 3: Clasificación de las cónicas. Guía 4, 5 y 6: Aplican propiedades y resuelven problemas que involucran a las cónicas. Evaluación: Parábola, elipse e Hipérbola. Determinar características, resolución y aplicación de problemas.

Tiempo: 30 a 35 horas

Conclusión

En este trabajo nos planteamos el desafío de lograr un aprendizaje significativo acerca de una de las materias en el plan de estudios del curso tercer año de enseñanza media diferenciado, estamos hablando del contenido de Cónicas para la Unidad de Lugares Geométricos.

Para esto nos apoyamos en el doctor Van Hiele y su Modelo acerca de los Niveles de Razonamiento sobre la geometría, donde explica cómo sucede el aprendizaje de esta área para la mente de los individuos. Y también en la Teoría del Aprendizaje Significativo de Davil Ausubel y en los autores que colaboran con él en el continuar de su estudio. Haciendo uso además de las TIC, que permiten una mejor comprensión por parte de los alumnos, pues los jóvenes están cada vez más ligados a las tecnologías, las que se entregan como una herramienta más de aprendizaje.

En nuestra tesis hicimos uso de una metodología de investigación de tipo cuasiexperimental. Realizamos nuestra investigación en los Liceos; Bicentenario de Viña del Mar, en donde trabajamos con los 2 cursos de matemática diferenciada de tercer año de enseñanza media y aplicamos nuestra propuesta usándolos como cursos experimentales; y el Liceo Guillermo Rivera Cotapos, en donde los 2 cursos del mismo ramo nos colaboraron siendo nuestros cursos controles, quienes recibieron una metodología tradicional de enseñanza.

Entonces, ¿podemos decir que los alumnos mejoran su rendimiento académico una vez aplicada la metodología propuesta? Haciendo referencia a nuestra primera hipótesis planteada.

Sí, hemos evidenciado cuantitativamente cómo las notas de nuestros cursos experimentales son considerablemente mejores que las de nuestros cursos controles, teniendo un promedio de post-test para los primeros de 48 y 50, y para los segundos, 30 y 33. Existiendo una diferencia máxima de 2 puntos y una mínima de 1,5 puntos, con un promedio de 1,8 puntos de diferencia. Podemos decir directamente que los alumnos que recibieron una metodología tradicional para este contenido, no aprobaron el porcentaje mínimo de conocimientos, pues han obtenido promedio rojo en su evaluación del Post-test.

Cabe destacar que los alumnos que forman parte de los cursos controles no trabajaron con problemas de planteo ni mapas conceptuales, tipo de ejercicios usados en nuestro post-test para evaluación, lo que los coloca en una situación inicial de desventaja con respecto a nuestros alumnos de los cursos experimentales, con quienes trabajamos en este tipo de ejercicios durante las clases.

Tomamos en consideración también que la metodología tradicional aplicada en los cursos control no cuenta con el uso de tecnologías que acompañen el proceso de enseñanza-aprendizaje. Entendemos que mientras más canales se abarquen para la transmisión y construcción de un saber, es mejor, pues más vías de llegada ocupamos en los alumnos.

Por estas razones, queda demostrada nuestra primera hipótesis. Y en relación a la segunda, ¿podemos decir que existe un aprendizaje mayormente significativo al aplicar nuestra metodología propuesta?

Nuevamente, la respuesta es sí. Evidenciamos esto en el desarrollo de los mapas conceptuales, herramienta que va de la mano con el aprendizaje significativo, punto explicado en el desarrollo de nuestra tesis.

En promedio, los cursos experimentales poseen 7 puntos aproximadamente en la pregunta referida a la construcción de un mapa conceptual sobre las cónicas, de un total de 8 puntos. En los cursos control, obtienen en promedio 2 puntos aproximadamente. La diferencia es clara. Con una distancia de 6 puntos, los alumnos de los cursos experimentales nos demuestran poseer un dominio mucho mejor en cuanto a la definición, clasificación y relación de los conceptos. Los alumnos de los cursos control casi no se aventuraron a la realización de este sistema de representación.

También podemos ver cómo el desarrollo de los problemas de planteo nos habla sobre la capacidad de los estudiantes de visualizar los problemas, y de qué significado adquieren las cónicas para su vida real. En los cursos experimentales, se obtuvo un promedio de 10 puntos aproximadamente de un total de 16, cifra que se aleja notoriamente del promedio de los puntos obtenidos por los cursos control para este tipo de ejercicios, siendo estos 0 puntos aproximadamente. Es así como podemos decir que las cónicas no tienen ni un significado real para los cursos control, hecho que dista mucho de la percepción sobre las cónicas para los cursos experimentales, donde por medio de nuestra metodología y de la pizarra interactiva pudimos ver claramente su influencia en la vida cotidiana, haciendo un nexo entre el conocimiento que poseen y este nuevo conocimiento; las cónicas.

Concluimos entonces que al llevar a cabo la metodología que proponemos, existe un aprendizaje mucho más significativo por parte de los alumnos.

Toda esta información está complementada con una encuesta, la cual tiene como propósito llevar un análisis cualitativo de nuestra investigación. Aquí se refuerza todo lo que hemos comentado, donde los alumnos manifiestan tener un mejor entendimiento de las cónicas mediante las guías de trabajo empleadas en nuestra metodología, expresan preferir también esta metodología innovadora y más atractiva que la tradicional, apoyando los trabajos relacionados con las manualidades y en grupo. En general se muestran más conformes quienes recibieron nuestra metodología propuesta que quienes no la recibieron, hecho reflejado en las notas como lo hemos visto.

Es así como damos fin a nuestra investigación, quedando absolutamente a gusto con los resultados. Satisfechos de haber respondido nuestras preguntas y haber probado exitosamente nuestras hipótesis. Esperamos que nuestra tesis sea un aporte para el estudio de las matemáticas y su pedagogía. Estamos agradados de haber sacado provecho de esta era del conocimiento en donde las herramientas tecnológicas tienen gran protagonismo y pueden ser usadas beneficiosamente como facilitadores del aprendizaje. Hacemos una invitación a las personas dedicadas a esta área profesional a que vivan en una constante actualización y estudio sobre las diversas herramientas del aprendizaje que van naciendo en el tiempo.

Bibliografía

- Ausubel D. (1985), *Teoría del aprendizaje significativo.*
- Beltrán Beltrán, Luis Pompilio y otros (1999), *Matemáticas con Tecnología Aplicada*. Prentice Hall de Colombia, Bogotá.
- Bousquet, (1982), *An Application of Ausubel's Learning Theory to Enviromental Education: A Study of Concept Mapping in a College Natural Resources Management Course*.
- Burger, Shaughnessy (1986), Characterizing the Van Hiele levels of development in geometry, *Journal for Research in Mathematics Education* vol. 17 n°1, pp. 31-48.
- Campbell y Stanley (1973), *Experimental and Quasi-Experimental Designs for Research,* Chicago: Rand McNally.
- Clements, Battista (1992), *Geometry and special reasoning*. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 420-464). New York: Macmillan.
- Corberán, Gutiérrez, Huerta, Jaime, Margarit, Peñas, Ruiz, (1994), *Diseño y Evaluación de una Propuesta Curricular de Aprendizaje de la Geometría en Enseñanza Secundaria basada en el Modelo de Razonamiento de Van Hiele.* Centro de Publicaciones del Ministerio de Educación y Ciencia: CIDE, España.
- Crowley (1987), *The Van Hiele Model of the Development of Geometric Thought*. In *Learning and Teaching Geometry, K-12,* 1987 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, edited by Mary Montgomery Lindquist, pp. 1-16 Reston, Va.: National Council of teachers of Mathematics.
- Fermín María González y Joseph D. Novak (2004), *Educación y futuro, monografías para la reforma aprendizaje significativo, técnicas y aplicaciones*.
- Fuys, Geddes, Tischler, (1984), *English translations of selected writings of Dina Van Hiele-Geldof and Pierre M. Van Hiele.* (School of Education, Brooklyn College, City Univ. of N. York; Brooklyn, N. York, EE.UU.).
- Fuys, Geddes, Tischler (1988), *The Van Hiele model of thinking in geometry among adolescents.* Reston, VA: National Council of teachers of Mathematics, Inc.
- Gatica, Valdivia, Krausse, Venegas, Jiménez, Palma (2010), *La Pizarra Digital, una ventana al mundo desde las aulas.* MAD, pp. 118.
- González, Morón y Novak J. D. (2001), *Errores conceptuales. Diagnosis, Tratamiento y Reflexiones.* Ediciones Eunate. Pamplona.
- Gutiérrez, Jaime (1990), *Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de Van Hiele*, en S. Linares, M. V. Sánchez (eds.), *Teoría y práctica en educación matemática* (Alfar: Sevilla, Spain), pp. 295-384 (fragmentos).
- Gutiérrez, Jaime (1990) *An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the Van Hiele levels*. *Journal for Research in Mathematics Education, 22*(3), 237-251.
- Hernández, Fernández y Baptista (2006), Metodología de la investigación.

- Hershkowitz (1990), *Psychological aspects of learning geometry.* En Nasher, P. y Kilpatrick, J. (eds) (1990) *Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for the psychology of mathematics education; pp 70-95;* Cambridge; Cambridge U. P.
- Mayberry (1983), *The Van Hiele levels of geometric thought in undergraduate preservice teachers*. *Journal of Ling-Tung College, 11,* 289-310.
- Moreira (1992), *Nuevas estrategias para la enseñanza y el aprendizaje: mapas conceptuales*. Lisboa: Plátano.
- Novak,, J. D. (1977), *A Theory of Education*. Ithaca, NY: Cornell University Press.
- Novak, J. D. (1991), *Clarify with concepts Maps. A tool for students and teachers alike, The Science teacher*, Vol. 6(3), pp. 213-223.
- Novak, J. D. (2004), *El aprendizaje, la creación y utilización del conocimiento. Mapas Conceptuales como herramientas de facilitación en las escuelas y las empresas.* Lisboa: Plátano Universitária. 252p.
- Silva, C. (2009), *Diseño y producción de material didáctico en Ciencias.* Universidad de Playa Ancha, Valparaíso, Chile.
- Silva, C. (2011), *Revista Chilena de Educación Matemática, RECHIEM.* Vol 6 N°1, pp. 47-57.
- Van Hiele, Van Hiele-Geldof (1957), *El problema de la comprensión. En conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría*, Holanda, Universidad Real de Utrecht.
- Van Hiele, (1986), *Structure and Insight: A Theory of Mathematics Education*.