UNIVERSIDAD DE VALPARAÍSO
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas

Teorema del Número Primo: Dos Enfoques de la Demostración

por

STEPHANIE MACLEAN

Tesis presentada para optar al grado de Licenciado en Matemáticas.

Profesor guía Dra. Amalia Pizarro

Valparaíso, 2014

Introducción

En la Antigua Grecia se establecieron los principios matemáticos sobre los que se ha trabajado desde entonces. Fueron los Pitagóricos los encargados de profundizar los conceptos fundamentales de la aritmética, otorgándole a los números un carácter casi místico, pues ellos creían que todas las cosas son, en esencia, números. Además comenzaron a operar con los números, dándose cuenta que existían algunos imposibles de reducir. En particular, descubrieron los números primos pitagóricos, los cuales son aquellos primos que se pueden expresar de la forma $4n + 1$, con $n \in \mathbb{N}$. Fue entonces cuando comenzó un gran interés por contar y registrar en tablas los números primos. Una pregunta natural que surge es, ¿ cuántos números primos hay?, ¿son estas tablas infinitas?.

En torno al año 300 a.C fue Euclides quien dio un primer salto cualitativo en el estudio de los números primos. En efecto, demostró que existen infinitos. Su demostración se basó en un método bastante ingenioso del razonamiento lógico: la reducción al absurdo. En principio, el argumento de Euclides establece cómo podemos encontrar números primos nuevos a partir de una cantidad finita de ellos: multiplicamos los que conocemos, sumamos uno al producto y factorizamos el número resultante. Sin embargo, este es un método no muy ágil, pues luego que se han obtenido los 200 primeros números primos la factorización se hace imposible de abordar. A la fecha se conocen varias demostraciones sobre la infinitud de los números primos, algunas de estas, que siguen el mismo espíritu de la demostración de Euclides, se encuentrarn en [Rib95].

Una vez establecida la infinitud de los números primos, se quizo cuantificar la cantidad de números primos que existen menores que un número $x > 1$ fijo. Para esto, se define la función

$$\pi(x) = \#\{q \ : q \text{ primo menor o igual que } x\}.$$

Entre 1792 y 1793, Carl Friedrich Gauss estudió la densidad de los números primos entre 1 y 3.000.000 y su distribución en intervalos de longitud 1.000. Basándose en estudios numéricos observó que la densidad de los primos, es decir la cantidad de números primos que podemos encontrar, en un entorno de n era aproximadamente $\dfrac{1}{\ln n}$, por lo que conjeturó que $\pi(x)$ se puede aproximar por la función logaritmo integral, definida como

$$\mathrm{li}(x) = \int_2^x \frac{1}{\ln u} du. \tag{1}$$

Por otro lado, en 1798 Adrien-Marie Legendre realizó un intento de aproximación de la función $\pi(x)$, estableciendo que existen constantes A y B tales que $\pi(x)$ *es cercano a*

$$\frac{x}{A \ln x + B}, \tag{2}$$

para valores de x suficientemente grandes. Luego en 1808 estableció que los valores de A y B para los cuales esto es válido son $A = 1$ y $B = -1,08366$.

Gauss y Legendre de manera independiente, a finales del siglo XVIII conjeturan entonces lo que hoy conocemos como el Teorema del Número Primo (TNP):

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\ln x} = 1. \tag{3}$$

Nótese que (1) es equivalente a (3). En efecto,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{li}(x)}{x/\ln x} = 1, \tag{4}$$

se cumple aplicando la regla de L'Hopital.

En la Tabla 1, podemos observar la proximidad entre las funciones $\pi(x)$ y $x/\ln x$. [1]

Tabla 1

x	$\pi(x)$	$x/\ln x$	$\pi(x)/(x/\ln x)$
10	4	4,34	0,921034
10^2	25	21,71	1,151292
10^3	168	144,76	1,150502
10^4	1.229	1.085,74	1,131950
10^5	9.582	8.685,89	1,104319
10^6	78.498	72.382,41	1,084489
10^7	664.579	620.420,69	1,071174
10^8	5.761.455	5.428.681,02	1,061299
10^9	50.873.534	48.254.942,43	1,053726

[1] Estos valores fueron obtenidos usando PARI GP. En la tercera columna se truncó en el segundo decimal y en la cuarta columna se truncó en el sexto decimal.

Existieron diversos intentos por demostrar TNP. Uno de los primero conocidos se remonta a 1851, año en que Pafnuti Lvóvich Chebyshev demostró [Che51], entre otras cosas, que si existe el límite de (3), su valor es 1, sin embargo no fue capaz de demostrar la existencia del límite. En 1859 Georg Friedrich Bernhard Riemann [Rie59] abordó el problema usando análisis complejo, introduciendo la función Zeta de Riemann y estableciendo además la conocida Hipótesis de Riemann. En 1896 Jacques Hadamard [Had96] y Charles-Jean de la Vallée Poussin [Pou96], de manera independiente, demostraron de manera analítica (demostración basada en análisis complejo) el teorema, haciendo uso de la función antes introducida por Riemann.

Por mucho tiempo fue un problema abierto el encontrar una demostración elemental del TNP (demostración que no requiera análisis complejo), y fue en 1949 que Atle Selberg [Sel49] y Paul Erdös [Erd49] lograron demostrar el teorema, sin el uso de análisis complejo y la función Zeta de Riemann.

El objetivo principal de esta tesis es estudiar dos enfoques de la demostracion del TNP. En el Capítulo 1, abordamos algunos conceptos previos requeridos para ambas demostraciones. En el Capítulo 2, introduciremos el concepto de función artimética y estudiaremos algunas de sus propiedades, en particular las que son de interés en el TNP. Finalmente en el Capítulo 3, se desarrollarán dos demostraciones del TNP. Una de ellas es de tipo elemental, es decir, usando sólo elementos de análisis real. La otra demostración es de tipo analítico, es decir, usando análisis complejo. En particular, se logra demostrar un resultado que nos otorgará información extra, pues haciendo uso de teoremas enunciados en esta misma tesis, obtenemos finalmente lo que necesitamos para demostrar el TNP:

$$\frac{\pi(x)}{x/\ln x} = 1 + O\left(e^{-c(\ln x)^{1/10}}\right). \tag{5}$$

Tabla de Simbología

$\mathbb{N}$	Conjunto de los números naturales.
$\mathbb{R}$	Conjunto de los números reales.
$\mathbb{C}$	Conjunto de los números complejos.
$p \mid a$	p divide a a.
$p \not\mid a$	p no divide a a.
$\mathrm{mcd}(a,b)$	Máximo común divisor entre a y b.
$\mathrm{mcm}(a,b)$	mínimo común multiplo entre a y b.
$x!$	Factorial de x.
$\{x\}$	Parte fraccionaria del número x.
$[x]$	Parte entera de x ($[x] = x - \{x\}$).
$f(x) \ll g(x)$	$f(x) = O(g(x))$
$f(x) \sim g(x)$	$f(x)$ es asintótica a $g(x)$.
B_i	Número i-ésimo de Bernoulli.
$b_i(x)$	Polinomio i-ésimo de Bernoulli.
γ	Constante de Euler.
$\ln x$	Logaritmo natural (Logaritmo en base e) de x.
$\mu(n)$	Función de Möbius.
$\Lambda(m)$	Función de Von Mangoldt.
$\varphi(n)$	Función de Euler.
$\pi(x)$	Cantidad de números primos menores o iguales a x.
$\psi(x)$, $\vartheta(x)$	Funciones de Chebyshev.
$\zeta(s)$	Función Zeta de Riemann.
$\Re(s)$	Parte real del número complejo s.
$\Im(s)$	Parte imaginaria del númer complejo s.
$\chi(n)$	Caracter de Dirichlet.
$L(s,\chi)$	Función L de Dirichlet.

Índice general

Capítulo 1

Conceptos Previos

1.1. Teoría Elemental de Números

En esta sección incluiremos algunos resultados de teoría elemental de números, en particular, con respecto a los números primos, una buena referencia sobre Teoría de Elemental de Números es [Bur80].

Definición 1.1.1. *1. Un entero $\mathtt{p} > 1$ se llama número primo si sus únicos divisores son 1 y $\mathtt{p}$.*

2. Un número entero mayor que 1 que no es primo se llama número compuesto.

3. Diremos que dos números enteros, mayores que 1, son primos relativos (o coprimos) si no tienen otro divisor común más que el 1.

Definición 1.1.2. *Sean $\mathtt{a}$ y $\mathtt{b}$ números enteros, se dice que $\mathtt{a}$ divide a $\mathtt{b}$, si existe un entero $\mathtt{c}$ tal que $\mathtt{b} = \mathtt{a} \cdot \mathtt{c}$. Se expresa como $\mathtt{a}|\mathtt{b}$.*

A continuación algunas propiedades de los números primos.

Lema 1.1.1 (Lema de Euclides)**.** *Si $\mathtt{a}|\mathtt{bc}$, tal que mcd$(\mathtt{a}, \mathtt{b}) = 1$, entonces $\mathtt{a}|\mathtt{c}$.*

DEMOSTRACIÓN. Ver [Bur80] pág 28. ♦

Teorema 1.1.1. *Si $\mathtt{p}$ es primo, tal que $\mathtt{p}|\mathtt{ab}$, entonces $\mathtt{p}|\mathtt{a}$ o $\mathtt{p}|\mathtt{b}$.*

DEMOSTRACIÓN. Si $\mathtt{p}|\mathtt{a}$, es inmediato. Supongamos $\mathtt{p} \nmid \mathtt{a}$. Como $\mathtt{p}$ primo, entonces $\mathrm{mcd}(\mathtt{p}, \mathtt{a}) = 1$. Por lo tanto, por el lema precedente se tiene que $\mathtt{p}|\mathtt{b}$. ♦

Podemos extender el teorema anterior a un producto de más de dos términos.

Corolario 1.1.1. *Si $\mathtt{p}$ es primo y $\mathtt{p}|\mathtt{a}_1 \cdots \mathtt{a}_n$, entonces $\mathtt{p}|\mathtt{a}_k$, para algún $\mathtt{k}$, donde $1 \leqslant \mathtt{k} \leqslant \mathtt{n}$.*

Lema 1.1.2 (Principio del buen orden)**.** *Todo conjunto no vacío* S *de números enteros no negativos posee primer elemento, esto es, existe* $a \in S$ *tal que* $a \leqslant b$*,* $\forall b \in S$.

DEMOSTRACIÓN. Ver [Hal00] pág 69. ♦

El siguiente teorema establece la importancia de los números primos, ya que éstos son los 'elementos básicos' con los que se construyen los enteros positivos, pues todo entero positivo puede construirse como producto de potencias de números primos de manera única. En particular, si se conoce la factorización en primos de dos números, se pueden hallar fácilmente su máximo común divisor y mínimo común múltiplo. Otra interesante aplicación, derivada de conocer la factorización en primos, es la criptografía [Rib95], método que se utiliza para codificar información, mensajes, claves, entre otros.

Ejemplo 1. $20808 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 17^2$ *y* $1200 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^2$*, no existe otra factorización (salvo orden) de estos números. Podemos deducir que* $mcd(20808, 1200) = 2^3 \cdot 3 = 24$ *y* $mcm(20808, 1200) = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 17^2$.

Teorema 1.1.2 (Fundamental de la Aritmética)**.** *Si* $n \geqslant 2$*, un número natural, entonces* n *se escribe de manera única, salvo orden, como producto de factores primos*

$$n = p_1 \cdot p_2 \cdots p_r.$$

DEMOSTRACIÓN. Inducción sobre n. Es claro que el teorema es válido para $n = 2$. Supongamos es válido para todo entero mayor que 1 y menor que n fijo.
Si n es primo, es inmediato.
Supongamos n es compuesto, entonces existe un entero d tal que $d|n$ y $1 < d < n$. Escojamos $p_1 = d$ el menor de los enteros que satisface lo anterior, lo cual es válido por el lema del buen orden. Luego p_1 es primo, ya que de lo contrario existe q tal que $1 < q < p_1$ y $q|p_1$, pero $p_1|n$, lo cual implicaría que $q|n$, lo que no puede ser pues p_1 es el menor entero que divide a n. Escribamos entonces $n = p_1 n_1$ donde p_1 es primo y $1 < n_1 < n$. Si n_1 es primo está listo, de lo contrario se prosigue con el mismo argumento anterior, obteniendo así una factorización para n de la forma $n = p_1 p_2 n_2$, se prosigue de igual manera con n_2, obteniendo finalmente la factorización de n en números primos.
Supongamos n tiene dos factorizaciones, digamos

$$n = p_1 p_2 \ldots p_s = q_1 q_2 \ldots q_t.$$

Queda por demostrar que $s = t$ y que cada p_i es igual a algún q_j. Como p_1 divide a n, entonces debe dividir a algún q_i, reordenemos $q_1 \ldots q_t$ tal que $p_1|q_1$. Entonces $p_1 = q_1$, pues ambos son primos. Se tiene

$$n/p_1 = p_2 \ldots p_s = q_2 \ldots p_t$$

si $s > 1$ o $t > 1$, entonces $1 < n/p_1 < n$. Luego por hipótesis inductiva se tiene que ambas factorizaciones de n/p_1 deben ser iguales, salvo el orden de los factores. Por lo tanto $s = t$ y se tiene que las factorizaciones de n son iguales, salvo el orden de los factores. ♦

1.2. Elementos de Análisis Real

En teoría analítica de números, una de las principales herramientas proviene del análisis real y complejo. En esta sección se presentarán algunos de estos resultados, en particular nos concentraremos en algunos de interés para demostrar el TNP.

Definición 1.2.1. *Dada dos funciones* f *y* g *definidas sobre* $[a, \infty[\subseteq \mathbb{R}$*, con* $a \geqslant 0$ *y* $g(x) > 0$ *para todo* $x \geqslant a$*, se dice que* $f(x) \in O(g(x))$ *si existen constantes* $M > 0$ *y* $x_0 = x_0(M)$*, tales que*

$$|f(x)| \leqslant M|g(x)|, \qquad \forall x \geqslant x_0.$$

Esto es, el cociente $f(x)/g(x)$ *está acotado, para todo* $x \geqslant x_0$*. A pesar que* $O(g(x))$ *está definido como conjunto, se acostumbra a escribir* $f(x) = O(g(x))$*, esta notación se conoce como la notación de Landau, o también como la notación del O grande.*
En ocaciones también se usará la notación $f(x) \ll g(x)$ *que indicará lo mismo, conocida como notación de Vinogradov.*

Observación 1.2.1. *Nótese que para todo* $t \geqslant a$*,* $f(t) = O(g(t))$*, implica*

$$\int_a^x f(t)dt = O\left(\int_a^x g(t)dt\right)$$

para $x \geqslant a$*.*

Definición 1.2.2. *Dada dos funciones* f *y* g *definidas sobre* $[a, \infty[\subseteq \mathbb{R}$*, con* $a \geqslant 0$ *y* $g(x) > 0$ *para todo* $x \geqslant a$*, se dice que* $f(x) \in o(g(x))$ *si para todo* $\epsilon > 0$*, existe* $x_0 = x_0(\epsilon)$ *tal que* $|f(x)| < \epsilon|g(x)|$*, para todo* $x \geqslant x_0$*. Esto es,*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Definición 1.2.3. *Si*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1,$$

se dice que $f(x)$ *es asintótica a* $g(x)$ *cuando* $x \to \infty$*, y se denota*

$$f(x) \sim g(x), \qquad \text{cuando } x \to \infty.$$

Observación 1.2.2. *Si* $h(x) = f(x) + O(g(x))$, *entonces* $h(x) - g(x) \in g(x)$. *Se cumple tambíen para* $o(g(x))$.

Ejemplos 1. 1. $x = O(x^2)$

2. $\dfrac{\sin x}{x} = O(1)$

3. $\dfrac{1}{x} = o(1)$

4. $x^4 = o(e^x)$

5. $\dfrac{\sin(1/x)}{1/x} \sim 1$

6. $x^2 + x \sim x^2$

1.2.1. Fórmulas de sumación

En muchos casos es posible obtener el valor de sumas parciales mediante una comparación con integrales. A continuación mostraremos tres fórmulas de sumación importantes, con las cuales se pueden demostrar algunas estimaciones, algunas de ellas útiles para la demostración del TNP.

Teorema 1.2.1 (Fórmula de suma de Euler)**.** *Sean* $x, y \in \mathbb{R}$ *tales que* $0 < y < x$. *Supongamos que* $f : [y, x] \to \mathbb{R}$ *tiene derivada continua en* (y, x), *entonces*

$$\sum_{y<n\leqslant x} f(n) = \int_y^x f(t)dt + \int_y^x (t - [t])f'(t)dt + f(x)([x] - x) - f(y)([y] - y). \quad (1.1)$$

Demostración. Ver [Apo76], pág 54. ♦

Definición 1.2.4 (Constante γ de Euler)**.** *Se define la constante* γ *de Euler como*

$$\gamma = 1 - \int_1^\infty \left(\frac{t - [t]}{t^2}\right) dt. \quad (1.2)$$

Su valor aproximado es de 0,5772156649 . . . .

Observación 1.2.3. *La integral impropia* $\displaystyle\int_1^\infty \left(\frac{t - [t]}{t^2}\right) dt$ *es convergente, pues está acotada por la integral impropia convergente* $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{t^2} dt$.

Teorema 1.2.2 (Identidad de Abel)**.** *Sea* $a(n)$ *una función* $a : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ *y*

$$A(x) = \sum_{n \leqslant x} a(n),$$

donde $A(x) = 0$ *si* $x < 1$. *Sea* f *una función con derivada continua en el intervalo* (y, x), *donde* $0 < y < x$, *se tiene*

$$\sum_{y<n\leqslant x} a(n)f(n) = A(x)f(x) - A(y)f(y) - \int_1^x A(t)f'(t)dt. \tag{1.3}$$

Demostración. Para $t < x$ definimos $f(t) = f(x) + f'(x)(t-x)$, luego si extendemos f al intervalo $[1, x]$ se tiene

$$\int_y^x A(t)f'(t)dt = \int_1^x A(t)f'(t)dt - \int_x^y A(t)f'(t)dt.$$

Si particionamos el intervalo $[1, x]$ en $[x]$ subintervalos de longitud 1 y definimos $x_i := i$, con $i = 1, \ldots, [x]$ y $x_{[x]+1} := x$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_1^x A(t)f'(t)dt &= \sum_{i\leqslant x} \int_{x_i}^{x_{i+1}} A(t)f'(t)dt \\
&= \sum_{i\leqslant x} \sum_{n\leqslant i} a(n) \int_{x_i}^{x_{i+1}} f'(t)dt \\
&= \sum_{n\leqslant i} \sum_{i\leqslant x} a(n) \int_{x_i}^{x_{i+1}} f'(t)dt \\
&= \sum_{n\leqslant i} a(n) \left(\int_1^2 f'(t)dt + \int_2^3 f'(t)dt + \ldots + \int_{[x]}^x f'(t)dt \right) \\
&= \sum_{n\leqslant x} a(n) \int_n^x f'(t)dt.
\end{aligned}$$

Análogamente,

$$\int_1^y A(t)f'(t)dt = \sum_{n\leqslant y} a(n) \int_n^y f'(t)dt,$$

entonces

$$\begin{aligned}\int_y^x A(t)f'(t)dt &= \sum_{n\leqslant x} a(n)\int_n^x f'(t)dt - \sum_{n\leqslant y} a(n)\int_n^y f'(t)dt\\ &= \sum_{n\leqslant x} a(n)(f(x)-f(n)) - \sum_{n\leqslant y} a(n)(f(y)-f(n))\\ &= A(x)f(x)-A(y)f(y) - \sum_{y<n\leqslant x} a(n)f(n).\end{aligned}$$

Despejando $\sum\limits_{y<n\leqslant x} a(n)f(n)$ obtenemos lo que queremos. ♦

Observación 1.2.4. *Como* $A(t)=0$ *para* $t<1$, *entonces si* $y<1$ *se tiene*

$$\sum_{n\leqslant x} a(n)f(n) = A(x)f(x) - \int_1^x A(t)f'(t)dt. \tag{1.4}$$

Las siguientes fórmulas, llamadas asintóticas, son obtenidas a partir de las fórmulas de sumación previamente enunciadas.

Teorema 1.2.3 (Fórmulas asintóticas)**.** *Para* $x\geqslant 1$ *se tiene*

(1.1) $\sum\limits_{n\leqslant x} \frac{1}{n} = \log x + \gamma + O\left(\frac{1}{x}\right)$

(1.2) $\sum\limits_{n\leqslant x} \frac{1}{n^s} = \frac{x^{1-s}}{1-s} + \zeta(s) + O(x^{-s})$, *con* $s>1$, *y* $\zeta(s)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$

(1.3) $\sum\limits_{n>x} \frac{1}{n^s} = O(x^{1-s})$, *con* $s>1$

(1.4) $\sum\limits_{n\leqslant x} n^{\alpha} = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + O(x^{\alpha})$, *con* $\alpha\geqslant 0$

Observación 1.2.5. *Nótese que* $x-[x]=\{x\}<1$. *En lo sucesivo escribiremos* $x-[x]=O(1)$.

Demostración.

(1.1) Tomemos, en la Fórmula de la Suma de Euler (Teorema 1.2.1) $f(t)=\frac{1}{t}$

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{n} = \sum_{1<n\leqslant x}\frac{1}{n} + 1$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_1^x \frac{dt}{t} - \int_1^x \frac{(t-[t])}{t^2}dt - \frac{x-[x]}{x} + 1 \\
&= \ln x - \int_1^x \frac{(t-[t])}{t^2}dt + O\left(\frac{1}{x}\right) + 1 \\
&= \ln x - \left(\int_1^\infty \frac{t-[t]}{t^2}dt - \int_x^\infty \frac{t-[t]}{t^2}dt\right) + O\left(\frac{1}{x}\right) + 1 \\
&= \ln x + \gamma + \int_x^\infty \frac{t-[t]}{t^2}dt + O\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (1.5) \\
&= \ln x + \gamma + O\left(\frac{1}{x}\right).
\end{aligned}
$$

La expresión en (1.5) viene dada por

$$
0 \leqslant \int_x^\infty \frac{t-[t]}{t^2}dt \leqslant \int_x^\infty \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{x}.
$$

(1.2) Análogo a (1.1), con $f(t) = t^{-s}$, con $s > 0$, $s \neq 1$. En efecto, por fórmula de sumación de Euler tenemos,

$$
\begin{aligned}
\sum_{n \leqslant x} \frac{1}{n^s} &= \int_1^x \frac{dt}{t^s} - s\int_1^x \frac{t-[t]}{t^{s+1}}dt + \frac{[x]-x}{x^s} + 1 \\
&= \frac{x^{1-s}}{1-s} - \frac{1}{1-s} + 1 - s\left(\int_1^\infty \frac{t-[t]}{t^{s+1}}dt - \int_x^\infty \frac{t-[t]}{t^{s+1}}dt\right) + O(x^{-s}) \\
&= \frac{x^{1-s}}{1-s} + 1 - \frac{1}{1-s} - s\int_1^\infty \frac{t-[t]}{t^{s+1}}dt + O(x^{-s}).
\end{aligned}
$$

Para $s > 0,\ s \neq 1$, entonces si $x \to \infty$, obtenemos

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \sum_{n=1}^{x} \frac{1}{n^s} &= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^{1-s}}{1-s} + 1 - \frac{1}{1-s} - s\int_1^\infty \frac{t-[t]}{t^{s+1}}dt + O(x^{-s})\right) \\
&= 1 - \frac{1}{1-s} - s\int_1^\infty \frac{t-[t]}{t^{s+1}}dt,
\end{aligned}
$$

luego podemos decir que

$$\zeta(s) = 1 - \frac{1}{1-s} - s\int_1^\infty \frac{t-[t]}{t^{s+1}}dt,$$

así

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{n^s} = \frac{x^{1-s}}{1-s} + \zeta(s) + O(x^{-s}).$$

(1.3) Usamos (1.2) con $s > 1$, para obtener

$$\sum_{n>x}\frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} - \sum_{n\leqslant x}\frac{1}{n^s} = -\frac{x^{1-s}}{1-s} - O(x^{-s}) = O(x^{1-s}),$$

pues $x^{-s} \leqslant x^{1-s}$.

(1.4) Tomemos $f(t) = t^\alpha$ y apliquemos la fórmula de la suma de Euler

$$\begin{aligned}
\sum_{n\leqslant x} n^\alpha &= \int_1^x t^\alpha dt + \alpha\int_1^x t^{\alpha-1}(t-[t])dt - (x-[x])x^\alpha + 1\\
&= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1} + O\left(\alpha\int_1^x t^{\alpha-1}dt\right) + 1 + O(x^\alpha)\\
&= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1} + O(x^\alpha - 1) + 1 + O(x^\alpha)\\
&= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + O(x^\alpha).
\end{aligned}$$

♦

Teorema 1.2.4. *Sea* $\{b_n\}_{n\geqslant 1}$ *una sucesión de números reales tal que*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n} < \infty.$$

Entonces $\sum_{n\leqslant x} b_n = o(x)$ *cuando* $x \to \infty$.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$, consideremos $x \geqslant 1$, debemos demostrar que existe $x(\epsilon)$ tal que

$$\left|\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x} b_n\right| < \epsilon,$$

para todo $x > x(\epsilon)$. Por hipótesis, la serie es convergente, entonces existe N_ϵ tal que si $n \geqslant N_\epsilon$, entonces $\left|\sum_{n\geqslant N_\epsilon} \frac{b_n}{n}\right| < \epsilon/2$. Si consideramos

$$g(x) = \sum_{n=1}^{N_\epsilon} b_n + \sum_{n=N_\epsilon}^{x} b_n = \sum_{n=1}^{x} b_n,$$

entonces

$$\frac{1}{x}g(x) = \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{N_\epsilon} b_n + \frac{1}{x}\sum_{n=N_\epsilon}^{x} b_n.$$

De aqui se puede ver que dado ϵ fijo, si x es suficientemente grande la diferencia

$$\frac{1}{x}g(x) - \frac{1}{x}\sum_{n=N_\epsilon}^{x} b_n = \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{N_\epsilon} b_n$$

es despreciable, luego basta con demostrar que $\frac{1}{x}\sum_{n=N_\epsilon}^{x} b_n$ es pequeño.

Ahora, sea $\{\tilde{b}_n\}_{n\geqslant 1}$ una sucesión de números reales definida como sigue:

$$\tilde{b}_n = \begin{cases} b_n & \text{si } n \geqslant N_\epsilon \\ 0 & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

Entonces, para $N_\epsilon \leqslant n \leqslant x$ usemos la identidad de Abel. Sea $a(n) = \frac{\tilde{b}_n}{n}$ y $f(t) = t$, se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{N_\epsilon \leqslant n \leqslant x} b_n &= \sum_{1\leqslant n\leqslant x} \frac{\tilde{b}_n}{n} x - \sum_{1\leqslant n\leqslant N_\epsilon} \frac{\tilde{b}_n}{n} N_\epsilon - \int_{N_\epsilon}^{x} \sum_{1\leqslant n\leqslant t} \frac{\tilde{b}_n}{n} dt \\ &= x \sum_{N_\epsilon\leqslant n\leqslant x} \frac{b_n}{n} - \int_{N_\epsilon}^{x} \sum_{N_\epsilon\leqslant n\leqslant t} \frac{b_n}{n} dt. \end{aligned}$$

Ahora, dividiendo por x a ambos lados de la igualdad y por desigualdad triangular se tiene

$$\left|\frac{1}{x}\sum_{N_\epsilon\leqslant n\leqslant x} b_n\right| \leqslant \left|\sum_{N_\epsilon\leqslant n\leqslant x} \frac{b_n}{n}\right| + \left|\frac{1}{x}\int_{N_\epsilon}^{x} \sum_{N_\epsilon\leqslant n\leqslant t} \frac{b_n}{n} dt\right|$$

$$< \quad \epsilon/2 + \left| \frac{1}{x} \int_{N_\epsilon}^{x} \sum_{N_\epsilon \leqslant n \leqslant t} \frac{b_n}{n} dt \right| . \tag{1.6}$$

Afirmamos que,

$$\left| \frac{1}{x} \int_{N_\epsilon}^{x} \sum_{N_\epsilon \leqslant n \leqslant t} \frac{b_n}{n} dt \right| < \epsilon/2.$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{x} \int_{N_\epsilon}^{x} \sum_{N_\epsilon \leqslant n \leqslant t} \frac{b_n}{n} dt \right| &< \left| \frac{1}{x} \int_{N_\epsilon}^{x} \frac{\epsilon}{2} dt \right| \\ &< \frac{1}{x} \epsilon/2(x - N_\epsilon) \\ &= \epsilon/2 - \frac{1}{x} \epsilon/2 N_\epsilon, \end{aligned} \tag{1.7}$$

donde en (1.7) $N_\epsilon > 1$, entonces $-\frac{N_\epsilon}{x}\epsilon/2 < 0$ para todo $x > 0$, luego

$$\left| \frac{1}{x} \int_{1}^{x} \sum_{N_\epsilon \leqslant n \leqslant t} \frac{b_n}{n} - M dt \right| < \epsilon/2.$$

Luego, volviendo a (1.6), tenemos

$$\left| \frac{1}{x} \sum_{N_\epsilon \leqslant n \leqslant x} b_n \right| \quad < \quad \epsilon.$$

♦

Otra fórmula de sumación que veremos, tiene estrecha relación con los números de Bernoulli.

Definición 1.2.5 (Números de Bernoulli)**.** *Se llaman números de Bernoulli a la secuencia de números* $B_0, B_1, B_2, \ldots,$ *definida inductivamente;* $B_0 = 0$ *y si* $B_1, B_2, \ldots, B_{m-1}$ *están determinados, entonces*

$$(m+1)B_m = -\sum_{k=0}^{m-1} \binom{m+1}{k} B_k. \tag{1.8}$$

Desarrollando (1.8) se obtienen las siguientes ecuaciones lineales
$1 + 2B_1 = 0$
$1 + 3B_1 + 3B_2 = 0$
$1 + 4B_1 + 6B_2 + 4B_3 = 0$
$1 + 5B_1 + 10B_2 + 10B_3 + 5B_4 = 0$
$\vdots$
De donde obtenemos $B_1 = -1/2$, $B_2 = 1/6$, $B_3 = 0$, $B_4 = -1/3$, $B_5 = 0$, $B_6 = 1/42$, ...

Definición 1.2.6 (Polinomios de Bernoulli). *Considere la secuencia* $\{b_r(x)\}_{r=0}^{\infty}$ *de polinomios definidas de manera recursiva, como sigue*

$$b_0(x) = 1, \tag{1.9}$$

$$b_r'(x) = rb_{r-1}(x) \quad (r \geqslant 1), \tag{1.10}$$

$$\int_0^1 b_r(x)dx = 0 \quad (r \leqslant 1). \tag{1.11}$$

Si desarrollamos lo anterior, obteniendo $b_r(x)$ *al integrar* (1.10)*, donde la constante de integración está determinada por* (1.11)*, obtenemos los siguientes polinomios,*
$b_1(x) = x - \frac{1}{2}$
$b_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$
$b_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$
$b_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{3}$
$\vdots$
los polinomios obtenidos de lo anterior serán llamados Polinomios de Bernoulli.

Se define la $r-$*ésima Función de Bernoulli* $B_r(x)$ como la función periódica que coincide con $b_r(x)$ con $x \in [0, 1)$, luego $B_r(x) = b_r(\{x\})$. Nótese que $B_i = B_i(0)$, para todo $i = 1, \ldots, m$. Además, todo número de Bernoulli con índice impar mayor que 1 es igual a cero. ([Mur08] pág 240).

Teorema 1.2.5 (Fórmula de sumación de Euler-Maclaurin). *Sea* k *un entero no negativo y sea* f *una función* $(k+1)$*-veces diferenciable sobre* $[a, b]$*, con* $a, b \in \mathbb{Z}$. *Entonces*

$$\sum_{a<n\leqslant b} f(n) = \int_a^b f(t)dt + \sum_{r=0}^{k} \frac{(-1)^{r+1}}{(r+1)!}(f^{(r)}(b) - f^{(r)}(a))B_{r+1} + \frac{(-1)^k}{(k+1)!}\int_a^b B_{k+1}(t)f^{(k+1)}(t)dt, \tag{1.12}$$

dónde B_i *es la función de Bernoulli.*

1.3. Elementos de Análisis Complejo

Existen diversos resultados en Teoría Analítica de Números que son obtenidos a partir del uso de funciones de variable compleja. A continuación enunciaremos algunas definiciones y teoremas relevantes para esta tesis.

En lo sucesivo $s = \sigma + it$ representa un número complejo, donde $\sigma, t \in \mathbb{R}$ y Ω denotará un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$.

Sean r y θ coordenadas polares del punto (σ, t) que corresponde a un número complejo no nulo $s = \sigma + it$, como

$$\sigma = r\cos\theta \ \text{ y } \ t = r\sin\theta,$$

s puede ser expresado en su *Forma Polar* mediante

$$s = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

El número r es la longitud del vector correspondiente a s, es decir, $r = |s|$ y θ se llama el argumento de s, se escribe $\theta = \arg s$. Así, geométricamente θ representa el ángulo que forma s con el eje real positivo, cuando s se interpreta como un vector, así

$$\arg s = \text{Arg } s + 2n\pi, \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{1.13}$$

Se obtiene el valor principal de (1.13) para $n = 0$, denotado Arg s.

Definición 1.3.1. *Se define la función logaritmo, en los puntos no nulos de* $s = r(\cos\theta + i\sin\theta)$*, con* $-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi$*, como*

$$\log s = \ln r + i(\theta + 2n\pi), \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{1.14}$$

Se obtiene el valor principal de (1.14) *para* $n = 0$ *y se denota por* Log s*, así*

$$\text{Log } s = \ln r + i\theta,$$

es decir,

$$\text{Log } s = \ln|s| + i\text{Arg } s. \tag{1.15}$$

Observación 1.3.1. *Nótese que*

$$\log s = \text{Log } s + 2n\pi i.$$

Además, si s *es un número real, entonces* Log $s = \ln|s|$*, esto es,* Log $\sigma = \ln\sigma$.

Definición 1.3.2. *Sea* $f : \Omega \to \mathbb{C}$*. La derivada* f' *de* f *en* $a \in \Omega$ *está dada por*

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

si el límite existe.

Observación 1.3.2. *Nótese que en variable compleja, la definición de derivada es análoga al caso real unidimensional.*

Definición 1.3.3. *Sea* Ω *un abierto en* $\mathbb{C}$*. Una función* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *es holomorfa en* Ω *si es derivable en todos los puntos de* Ω*. En tal caso está definida la función* $f' : \Omega \to \mathbb{C}$ *que a cada punto le asigna su derivada.*

Definición 1.3.4. *Sea* f *continua en* Ω *y* D *un disco centrado en* $s_0 \in \Omega$ *entonces, se dice que* f *es analítica en* D *si tiene una expansión para* $s \in D$ *como serie de potencias en* $(s - s_0)$*, es decir*

$$f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (s - s_0)^n,$$

para todo $s \in D$*.*

Teorema 1.3.1. *Si* f *es analítica en un disco* $D \subseteq \Omega$*, centrado en* s_0*, entonces*

$$f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (s - s_0)^n,$$

con $|s - s_0| < R$*, donde* $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(s_0)$ *con radio de convergencia mayor o igual a* R*.*

DEMOSTRACIÓN. Ver [Con78] pág 72. ♦

Corolario 1.3.1. *Si* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *es analítica, entonces* f *es infinitamente diferenciable.*

DEMOSTRACIÓN. Ver [Con78] pág 73. ♦

Definición 1.3.5.

1. f *se dice entera cuando es holomorfa en todo el plano complejo.*

2. *Sea* f *una función analítica en un subconjunto abierto* Ω *del plano complejo* $\mathbb{C}$*. Si* U *es un subconjunto abierto de* $\mathbb{C}$*, tal que* $\Omega \subseteq U$*, y* F *es una función analítica definida en* U *tal que* $F(s) = f(s)$ *para todo* $s \in \Omega$*, entonces* F *se denomina extensión analítica de* f*.*

Definición 1.3.6 (Serie de Laurent)**.** *La serie de Laurent de una función derivable compleja* $f(s)$*, es la representación de ésta como una serie de potencias, incluyendo términos de grado negativo.*
Una serie de Laurent centrada en un punto s_0 *es una serie de la forma*

$$f(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (s - s_0)^n.$$

Definición 1.3.7. *Sean* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *y* $C : s = s(t)$ *un camino en* Ω*, con* $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$*, tal que* $f(s)$ *es continua en* C*, entonces*

$$\int_C f(s)ds = \int_\alpha^\beta f(s(t))s'(t)dt.$$

Teorema 1.3.2 (Teorema de Laurent)**.** *Si* $f(s)$ *es analítica en el anillo* $r < |s-s_0| < R$*, entonces puede desarrollarse de manera única en una serie de Laurent*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_n (s - s_0)^n,$$

donde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi - s_0| = \rho} \frac{f(\xi)}{(\xi - s_0)^{n+1}} d\xi,$$

con $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ *y* $r < \rho < R$.

Demostración. Ver [Der87] pág 116. ♦

Definición 1.3.8. *Una función* f *es meromorfa en un abierto* Ω*, si es holomorfa en todo* Ω *excepto en un conjunto de puntos aislados, llamados polos de la función.*

Definición 1.3.9 (Singularidades aisladas)**.** *Si* $\Omega \in \mathbb{C}$ *es un conjunto abierto y* $f : \Omega \to \mathbb{C}$*, se dice que* s_0 *es una singularidad de la función si* f *no es analítica en* s_0*, con* $s_0 \in \Omega$*. Existen tres tipos de singularidades.*

1. ***Singularidades removibles****: si* $\lim_{s \to s_0} (s - s_0)f(s) = 0$*, la singularidad es removible y es posible extender analíticamente la función en todo* Ω*. En este caso la serie de Laurent de la función alrededor de este punto tiene todos sus coeficientes de índice negativo iguales a cero.*

   Ejemplo 2. *La función* $f(s) = \dfrac{\sin(s)}{s}$ *tiene una singularidad removible en 0 y se extiende a* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definiendo* $f(0) = 1$.

2. ***Polo***: *si* $\lim_{s\to s_0} f(s) = \infty$, *entonces la singularidad es un polo. En este caso, se dice que la función es meromorfa y se cumple que la serie de Laurent de la función alrededor de este punto tiene una cantidad finita de coeficientes de índice negativo no nulos. El último índice negativo cuyo coeficiente es no nulo se llama* ***orden del polo***.

   Ejemplo 3. $f(s) = \frac{1}{s}$ *tiene un polo de orden 1 en 0.*

3. ***Singularidad esencial***: *son todas las singularidades aisladas que no son removibles ni polos. En este caso* $f(s)$ *no tiene líímite cuando* $s \to s_0$ *y la serie de Laurent tiene un número infinito de coeficientes de índice negativo no nulos.*

   Ejemplo 4. *La función* $f(s) = e^{1/s}$ *tiene una singularidad esencial en 0.*

Definición 1.3.10. *Sea* $\{a_n\}$ *una sucesión de números complejos tal que,*

$$p_n = (1 + a_1)(1 + a_2)\cdots(1 + a_n).$$

Si existe $p = \lim_{n\to\infty} p_n$, *escribimos*

$$p = \prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n). \tag{1.16}$$

Los p_n *son llamados productos parciales del producto infinito* (1.16). [1]

Teorema 1.3.3. *Supongamos* $\{a_n(s)\}$ *es una sucesión de funciones complejas sobre un conjunto* $S \subseteq \mathbb{C}$ *tal que* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(s)|$ *converge uniformemente en* S. *Entonces el producto*

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n(s)) \tag{1.17}$$

converge uniformemente en S *a una función analítica* $f(s)$ *en* S, *y* $f(s_0) = 0$, *para algún* $s_0 \in S$, *si y sólo si* $a_n(s) = -1$, *para algún* n.

Demostración. Ver [Rud70] pág 299. ♦

Teorema 1.3.4 (Teorema de Weierstrass)**.** *Supongamos que* f_n *es analítica en una región* Ω_n, *y la sucesión de funciones* $\{f_n\}$ *converge uniformemente, en cada subconjunto compacto de* Ω, *a una función límite* f *en una región de* Ω. *Entonces,* f *es analítica en* Ω. *Más aún,* f_n' *converge uniformemente a* f' *en todo subconjunto compacto de* Ω.

[1] En el estudio de las series infinitas $\sum a_n$ es importante si a_n se acerca a cero. Analogamente, en el estudio de los productos infinitos, es importante si los factores se acercan a uno, es por esto que utilizamos la notación $(1 + a_n)$, pues se acerca a 1 cuando a_n se acerca a 0.

Demostración. Ver [Alh79] pág 176. ♦

Definición 1.3.11 (Residuos)**.** *Sea* $f(s)$ *función analítica en una región* $0 < |s - s_0| < R$*, entonces* f *se puede desarrollar en una serie de Laurent alrededor de* s_0*. Donde al coeficiente*

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|s-s_0|=\rho} f(s)ds, \quad 0 < \rho < R \tag{1.18}$$

de esta serie se le llama residuo de la función $f(s)$ *en* s_0 *y lo denotaremos como* *Res*$(f(s), s_0)$.[2]

Observación 1.3.3.

1. *Si* $f(s)$ *tiene un singularidad removible en* s_0*, el residuo es* *Res*$(f(s), s_0) = 0$.

2. *Si* $f(s)$ *tiene un polo de orden* n *en* s_0*, entonces el residuo se puede calcular como*

$$\text{Res}(f(s), s_0) = \lim_{s \to s_0} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}}((s-s_0)^n f(s)).$$

En particular, si $n = 1$ *(polo simple),*

$$\text{Res}(f(s), s_0) = \lim_{s \to s_0} (s - s_0) f(s).$$

3. *Si* $f(s)$ *tiene una singularidad esencial el residuo se calcula como en* (1.18)*.*

Definición 1.3.12. *Sea* $C : [a, b] \to \mathbb{C}$ *un camino.* C *se dice camino rectificable si es una función de variación acotada.*

Teorema 1.3.5 (Teorema del residuo)**.** *Sea* C *un camino rectificable. Si* f *es analítica en* C*, excepto en un número finito de singularidades* s_k*,* $(k = 1, \dots, n)$ *interiores a* C*, entonces*

$$\int\limits_C f(s)ds = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \text{Res}(f(s), s_k). \tag{1.19}$$

Demostración. Ver [Con78] pág 112. ♦

Definición 1.3.13. *Si* C *es un camino cerrado en* Ω *tal que* C *no pase por* $a \in \mathbb{C}$*. Se define el índice de* C *alrededor de* a *(o índice de* a *con respecto a* C*), como sigue*

$$n(C, a) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{ds}{s - a}. \tag{1.20}$$

También es conocido como el número de rotaciones de C *al rededor de* a*.*

[2] Puede encontrar más información sobre residuos y singularidades en [Alh79] y [Con78], no se entregará mayor detalle en esta tesis.

Teorema 1.3.6 (Principio del Argumento)**.** *Sea* f *una función meromorfa en un abierto* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *con* s_k, $(k = 1, \ldots, n)$, *ceros y* p_j, $(j = 1, \ldots, m)$ *polos, entonces*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(s)}{f(s)}ds = \sum_{i=1}^{n} n(C, s_i) - \sum_{j=1}^{m} n(C, p_j), \tag{1.21}$$

para cada camino cerrado C *en* Ω, *tal que* C *no pase por ninguno de los polos o ceros de* f.

Demostración. Ver [Con78] pág 123. ♦

Corolario 1.3.2. *Si* g *es analítica en* Ω, *entonces*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C g(s)\frac{f'(s)}{f(s)}ds = \sum_{i=1}^{n} g(s_i)n(C, s_i) - \sum_{j=1}^{m} g(p_j)n(C, p_j). \tag{1.22}$$

Teorema 1.3.7. *Sea* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, *tal que para todo* $m, n \in \mathbb{N}$, *con mcd*$(m, n) = 1$, *se cumple* $f(mn) = f(m)f(n)$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} |f(n)|n^{-s} < \infty$, *entonces*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s} = \prod_p (1 + f(p)p^{-s} + f(p^2)p^{-2s} + \ldots). \tag{1.23}$$

Demostración. Ver [Mon06] pág 20. ♦

Capítulo 2

Funciones Aritméticas

En Teoría de Números, un objeto importante de estudio son las funciones aritméticas. En este capítulo estudiaremos el comportamiento asintótico de las funciones aritméticas fundamentales para el desarrollo de la demostración del Teorema del número primo, estas son la Función Divisor, la Función de Möbius, la Función de Von Mangoldt y la Función de Euler.

Definición 2.0.14. *Una función aritmética es cualquier función* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$.

Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ una función aritmética.

1. f es multiplicativa si para todo $m, n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{mcd}(m, n) = 1$

$$f(mn) = f(m)f(n).$$

   Si quitamos la condición $\operatorname{mcd}(m, n) = 1$, se dice que es completamente multiplicativa.

2. f es aditiva si para todo $m, n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{mcd}(m, n) = 1$

$$f(m + n) = f(m) + f(n).$$

   Si quitamos la condición $\operatorname{mcd}(m, n) = 1$, se dice que es completamente aditiva.

2.1. Función Divisor

Definición 2.1.1. *Para* $n \geqslant 1$ *se define*

$$d(n) = \sum_{d|n} 1, \tag{2.1}$$

es decir, $d(n) = \#\{d \in \mathbb{N} : \; d|n\}$.

Teorema 2.1.1. *Para todo* $x \geqslant 1$*, se tiene*

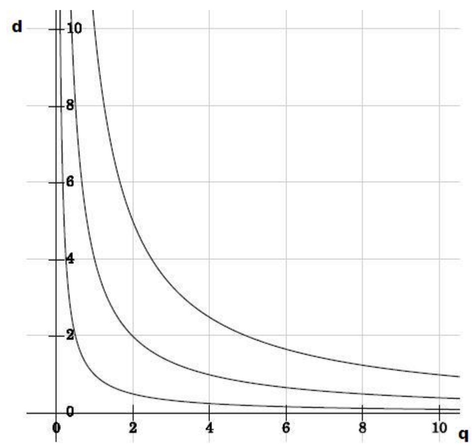
$$\sum_{n\leqslant x} d(n) = x\ln x + (2\gamma - 1)x + O(\sqrt{x}). \tag{2.2}$$

donde γ *corresponde a la constante de Euler, Definición 1.2.4.*

Demostración. Como $d(n) = \sum_{d|n} 1$, entonces se tiene [1]

$$\sum_{n\leqslant x} d(n) = \sum_{n\leqslant x}\sum_{d|n} 1 = \sum_{q,d\ ,qd\leqslant x} 1. \tag{2.3}$$

Figura (2.1)



Se considera el reticulado $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ de la forma (q,d), como en la figura (2.1), contamos aquellos puntos $1 \leqslant q \leqslant x/d$ y los sumamos sobre todos los $d \leqslant x$, así podemos escribir $\sum_{n\leqslant x} d(n) = \sum_{d\leqslant x}\sum_{q\leqslant x/d} 1$ y usando (1.1) y (1.4) del Teorema 1.2.3, con $\alpha = 0$, con la cual obtenemos la siguiente estimación

$$\begin{aligned}
\sum_{n\leqslant x} d(n) &= \sum_{d\leqslant x}\left(\frac{x}{d} + O(1)\right)\\
&= x\sum_{d\leqslant x}\left(\frac{1}{d}\right) + \sum_{d\leqslant x} O(1)\\
&= x\ln x + \gamma x + O(x)\\
&= x\ln x + O(x).
\end{aligned}$$

2

[1] Ya que $d|n$ podemos escribir como $n = qd$ y escribimos la doble suma sobre n y d como una sola suma.

[2] $\sum_{d\leqslant x} O(1) = [x]O(1) = O(x)$.

Notemos lo siguiente,

$$\begin{aligned}\frac{\sum\limits_{n\leqslant x} d(n)}{x\ln x} &= 1+\frac{O(x)}{x\ln x}\\ &= 1+O\left(\frac{1}{\ln x}\right),\end{aligned}$$

entonces, si hacemos $x\to\infty$ obtenemos la estimación

$$\sum_{n\leqslant x} d(n)\sim x\ln x.$$

Volvamos a la suma (2.3), de la cual podemos decir lo siguiente [3]

$$\begin{aligned}\sum_{q\,d\leqslant x} 1 &= \sum_{q\,d\leqslant x,\ q\leqslant\sqrt{x}} 1+\sum_{q\,d\leqslant x,\ d\leqslant\sqrt{x}} 1-\sum_{q\,d\leqslant x,\ q,d\leqslant\sqrt{x}} 1\\ &= 2\sum_{q\leqslant\sqrt{x}} 1-[\sqrt{x}]^2\\ &= 2\sum_{q\leqslant\sqrt{x}}\left[\frac{x}{q}\right]-(x+O(\sqrt{x}))\\ &= 2x\sum_{q\leqslant\sqrt{x}}\frac{1}{q}+O(1)-(x+O(\sqrt{x}))\end{aligned}$$

[4] y usando (1.1) del Teorema 1.2.3 obtenemos finalmente

$$\sum_{n\leqslant x} d(n)=x\ln x+(2\gamma-1)x+O(\sqrt{x}).$$

♦

2.2. Convolución de Dirichlet

Definición 2.2.1 (Convolución de Dirichlet). *Sean* f *y* g *funciones aritméticas, entonces se define la función aritmética* $h:\mathbb{N}\to\mathbb{C}$*, como sigue*

$$h(n):=(f*g)(n)=\sum_{d\mid n} f(d)g(n/d), \tag{2.4}$$

la cual será llamada convolución de Dirichlet.

[3] Se cuenta el número de puntos del reticulado que hay.
[4] $[\sqrt{x}]^2=(\sqrt{x}+O(1))^2=x+O(\sqrt{x})$.

Proposición 2.2.1. *Si* f *y* g *son multiplicativas, entonces la convolución de Dirichlet es multiplicativa.*

Demostración. Sean $m, n \in \mathbb{N}$ talque $\mathrm{mcd}(m,n) = 1$, entonces, si $d|mn$, se tiene que $d = ab$ con $a|m$ y $b|n$. En particular

$$\mathrm{mcd}(a,b) = \mathrm{mcd}\left(\frac{m}{a}, \frac{n}{b}\right) = 1,$$

esto induce la biyección

$$\begin{array}{rcl} \{d = ab : \ d|mn\} & \to & \{a \in \mathbb{N} : \ a|m\} \times \{b \in \mathbb{N} : \ b|n\} \\ d = ab & \mapsto & (a,b). \end{array}$$

Si $d = ab$, entonces

$$\begin{aligned} (f * g)(mn) &= \sum_{d|mn} f(d)g(mn/d) \\ &= \sum_{a|m b|n} f(ab)g(mn/ab) \\ &= \sum_{a|m b|n} f(a)f(b)g(m/a)f(n/b) \\ &= \sum_{a|m} f(a)g(m/a) \sum_{b|n} f(b)g(n/b). \end{aligned}$$

♦

Teorema 2.2.1. *Si* $h = f * g$ *y si*

$$H(x) = \sum_{n \leqslant x} h(n) \quad , \quad F(x) = \sum_{n \leqslant x} f(n) \quad y \quad G(x) = \sum_{n \leqslant x} g(n),$$

entonces

$$H(x) = \sum_{n \leqslant x} f(n)G(x/n) = \sum_{n \leqslant x} g(n)F(x/n). \tag{2.5}$$

Demostración.

$$\begin{aligned} H(x) &= \sum_{n \leqslant x} (f * g)(n) \\ &= \sum_{n \leqslant x} \sum_{d|n} f(d)g(n/d) \\ &= \sum_{n \leqslant x} f(n) \left[\frac{x}{n}\right] \end{aligned}$$

$$= \sum_{n \leqslant x} f(n)G(x/n),$$

análogamente $H(x) = \sum_{n \leqslant x} g(n)F(x/n)$. ♦

Si en el teorema anterior consideramos $g(n) = 1$, para todo n, entonces $G(x) = [x]$ y obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 2.2.1. *Si* $F(x) = \sum_{n \leqslant x} f(n)$, *se tiene*

$$\sum_{n \leqslant x} \sum_{d|n} f(d) = \sum_{n \leqslant x} f(n) \left[\frac{x}{n}\right] = \sum_{n \leqslant x} F\left(\frac{x}{n}\right). \tag{2.6}$$

2.3. Función de Möbius

Definición 2.3.1 (Función de Möbius)**.** *Se define la función de Möbius* μ *por:*

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1, \\ (-1)^r & \text{si } n = p_1 \ldots p_r \quad p_i \text{ primos distintos,} \\ 0 & \text{en otros casos.} \end{cases} \tag{2.7}$$

Una de las propiedades fundamentales de la función de Möbius es que ella nos da una fórmula simple para la suma extendida sobre los divisores enteros positivos de n, la cual veremos en el siguiente teorema.

Teorema 2.3.1. *Si* $n \geqslant 1$, *se tiene*

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \left[\frac{1}{n}\right] = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n > 1 \end{cases} \tag{2.8}$$

Demostración. Si $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k} > 1$, los únicos términos no nulos en la suma, son los provenientes de $d = 1$ y de aquellos $d|n$ que son producto de primos distintos, luego

$$\begin{aligned} \sum_{d|n} \mu(d) &= 1 + \mu(p_1) + \mu(p_2) + \ldots + \mu(p_1p_2) + \mu(p_1 \cdots p_k) + \ldots \\ &\quad +\mu(p_{k-1}p_k) + \mu(p_1p_2p_3) + \ldots + \mu(p_{k-2}p_{k-1}p_k) + \ldots + \mu(p_1 \ldots p_k) \\ &= 1 + \binom{k}{1}(-1) + \binom{k}{2}(-1)^2 + \ldots + \binom{k}{k}(-1)^k \\ &= (1-1)^k \\ &= 0 \end{aligned}$$

lo anterior, haciendo uso del Teorema del Binomio. ♦

Teorema 2.3.2 (Fórmula de inversión de Möbius)**.** *Sea* f *una función aritmética, se define*

$$F(n) = \sum_{d|n} f(d), \tag{2.9}$$

entonces $f = F * \mu$.

Demostración.

$$\begin{aligned}
(F * \mu) &= \sum_{d|n} F(d)\mu(n/d) \\
&= \sum_{ab=n} F(a)\mu(b) \\
&= \sum_{a,\ ab=n} F(a)\mu(b) \\
&= \sum_{a,\ ab=n} \sum_{d,\ d|a} f(a)\mu(b) \\
&= \sum_{a,\ ab=n} \sum_{c,\ cd=a} f(c)\mu(n/cd) \\
&= \sum_{cd|n} f(c)\mu(n/cd) \\
&= \sum_{c|n} f(c) \sum_{d|(n/c)} \mu(n/cd) \\
&= \sum_{c|n} f(c) \sum_{k|(n/c)} \mu(k) \\
&= f(n).
\end{aligned}$$

♦

Teorema 2.3.3. *Para todo* $x \geqslant 1$ *se tiene*

$$\sum_{n \leqslant x} \mu(n) \left[\frac{x}{n}\right] = 1. \tag{2.10}$$

Demostración. Hacemos $f(n) = \mu(n)$ y aplicamos el Corolario 2.2.1. ♦

El teorema precedente sugiere

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{n=1}^{x} \frac{\mu(n)}{n} = 0. \tag{2.11}$$

Este resultado es importante para la demostración elemental del TNP, se verá en el Capítulo 3. Y una consecuencia importante de (2.11) es el siguiente lema.

Lema 2.3.1.

$$\sum_{n\leqslant x}\mu(n)=o(x) \tag{2.12}$$

cuando $x\to\infty$.

Demostración. Aplicar Teorema 1.2.4, con $b(n)=\mu(n)$. ♦

Teorema 2.3.4. *Para todo* $x\geqslant 1$, *se tiene*

$$\left|\sum_{n\leqslant x}\frac{\mu(n)}{n}\right|\leqslant 1. \tag{2.13}$$

Demostración. Si $x<2$, se cumple la igualdad pues hay un sólo término en la suma y $\mu(1)=1$.
Sea $x\geqslant 2$,

$$\begin{aligned}
1 &= \sum_{n\leqslant x}\mu(n)\left[\frac{x}{n}\right]\\
&= \sum_{n\leqslant x}\mu(n)\left(\frac{x}{n}-\left\{\frac{x}{n}\right\}\right)\\
&= x\sum_{n\leqslant x}\frac{\mu(n)}{n}-\sum_{n\leqslant x}\mu(n)\left\{\frac{x}{n}\right\},
\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}
x\left|\sum_{n\leqslant x}\frac{\mu(n)}{n}\right| &= \left|1+\sum_{n\leqslant x}\mu(n)\left\{\frac{x}{n}\right\}\right|\\
&\leqslant 1+\sum_{n\leqslant x}\left\{\frac{x}{n}\right\}\\
&= 1+\{x\}+\sum_{2\leqslant n\leqslant x}\left\{\frac{x}{n}\right\}\\
&\leqslant 1+\{x\}+\sum_{2\leqslant n\leqslant x}1\\
&< 1+\{x\}+[x]-1\\
&= x,
\end{aligned}$$

de donde obtenemos la desigualdad (2.13). ♦

2.4. Función de Von Mangoldt

La siguiente función está ligada directamente con ambas demostraciones del TNP, su importancia radica en su estrecha relación con la función de conteo de primos $\pi(x)$ [5].

Definición 2.4.1 (Función de Von Mangoldt)**.** *Para todo* $n \geqslant 1$ *entero, se define*

$$\Lambda(n) \quad = \quad \begin{cases} \ln p & \text{si } \; n = p^m, \text{ con } p \text{ primo} \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases} \tag{2.14}$$

Teorema 2.4.1. *Si* $n \geqslant 1$*, se tiene*

$$\ln n = \sum_{d|n} \Lambda(d). \tag{2.15}$$

Demostración. El teorema se cumple para $n = 1$.
Si $n > 1$, escribimos

$$n = \prod_{k=1}^{r} p_k^{a_k}, \quad \text{con } p_i \text{ primos, } a_k \geqslant 1$$

luego

$$\ln n = \sum_{k_1}^{r} a_k \ln p_k.$$

Consideremos el lado derecho de la igualdad (2.15). Al evaluar $\Lambda(\cdot)$, los únicos términos no nulos provienen de los $d = p_k^m$, para $m = 1, 2 \ldots, a_k$ y $k = 1, \ldots, r$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \sum_{d|n} \Lambda(n) \quad &= \quad \sum_{k=1}^{r} \sum_{m=1}^{a_k} \Lambda(p_k^m) \\ &= \quad \sum_{k=1}^{r} \sum_{m=1}^{a_k} \ln p_k \\ &= \quad \sum_{k=1}^{r} a_k \ln p_k. \end{aligned}$$

♦

Teorema 2.4.2. *Para todo* $x \geqslant 1$ *se tiene*

$$\sum_{n \leqslant x} \Lambda(n) \left[\frac{x}{n}\right] = \ln([x]!). \tag{2.16}$$

Demostración. Haciendo $f(n) = \Lambda(n)$ y aplicamos Corolario 2.2.1. ♦

[5] Esta función también es importante en el estudio de la distribución de primos, tema que no profundizaré en esta tesis, pero para quienes tengan mayor interés, un buen libro sobre este tema es [Apo76].

2.5. Función φ de Euler

Definición 2.5.1 (Indicatriz de Euler)**.**

$$\varphi(n) = \sum_{d \leqslant n \ \mathrm{mcd}(d,n)=1} 1, \tag{2.17}$$

es decir

$$\varphi(n) = \#\{m \in \mathbb{N};\ m \leqslant n \wedge \ \mathrm{mcd}(m,n) = 1\}$$

es el número de enteros positivos m*, menores o iguales que* n *y son primos, o primos relativos, con* n*.*

Una aplicación de esta función es la siguiente. Sea $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ el conjunto de las clases de equivalencias, módulo n. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ es un anillo con la suma y multiplicación usual, módulo n:

$$a \pmod{n} + b \pmod{n} = a + b \pmod{n}$$

y

$$(a \pmod{n}) \cdot (b \pmod{n}) = a \cdot b \pmod{n}.$$

Se puede demostrar que los elementos invertibles en $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ son las clases de equivalencia $a \pmod{n}$, con $\mathrm{mcd}(a,n) = 1$. Estos elementos forman el grupo $U(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ y su cardinalidad es $\varphi(n)$.

Existe una relación para este grupo, conocida como Teorema de Euler

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n},$$

para todo entero a coprimo de n.

Proposición 2.5.1. φ *es multplicativa.*

Demostración. La idea es escribir φ como la convolución de dos funciones multiplicativas. Usando el Teorema 2.3.1obtenemos,

$$\varphi(n) = \sum_{d \leqslant n} \left[\frac{1}{\mathrm{mcd}(d,n)}\right] = \sum_{d \leqslant n} \sum_{c|n \ \ c|d} \mu(c).$$

Para c fijo, divisor de n, debemos sumar sobre todos los d en el rango $1 \leqslant d \leqslant n$, que sean múltiplos de c. Si escribimos $d = tc$, entonces $1 \leqslant d \leqslant n$ si y sólo si $1 \leqslant t \leqslant n/c$, por lo tanto podemos escribir

$$\varphi(n) = \sum_{c|n} \sum_{t=1}^{n/c} \mu(c) = \sum_{c|n} \mu(c) \sum_{t=1}^{n/c} 1 = \sum_{c|n} \mu(c) \frac{n}{c} = (\mu * h)(n). \tag{2.18}$$

Como μ y h son multiplicativas, entonces φ es multiplicativa. ♦

Observación 2.5.1. *Si* p *es primo, entonces* $\varphi(p) = p - 1$.

Teorema 2.5.1. *Si* $x > 1$,

$$\sum_{n \leqslant x} \varphi(n) = \frac{3}{\pi^2} x^2 + O(x \ln x). \tag{2.19}$$

Demostración. Se tiene de (2.18) que

$$\varphi(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d},$$

luego

$$\begin{aligned}
\sum_{n \leqslant x} \varphi(n) &= \sum_{n \leqslant x} \sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d} \\
&= \sum_{q,d \;\; qd \leqslant x} \mu(q) \\
&= \sum_{d \leqslant x} \mu(d) \sum_{q \leqslant x/d} q \\
&= \sum_{d \leqslant x} \mu(d) \left(\frac{1}{2} \left(\frac{x}{d} \right)^2 + O\left(\frac{x}{d} \right) \right) \\
&= \frac{x^2}{2} \sum_{d \leqslant x} \frac{\mu(d)}{d^2} + O\left(x \sum_{d \leqslant x} \frac{1}{d} \right) \\
&= \frac{x^2}{2} \left(\frac{6}{\pi^2} + O\left(\frac{1}{x} \right) \right) + O\left(x \ln x + \gamma x + x O\left(\frac{1}{x} \right) \right) \qquad (2.20) \\
&= \frac{3}{\pi^2} x^2 + O(x \ln x).
\end{aligned}$$

La expresión obtenida en (2.20), viene dada por la estimación de Euler

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} = \frac{\pi^2}{6}, \tag{2.21}$$

y la relación entre la función de Möbius y la función Zeta de Riemann,

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}, \quad s > 1.$$

Esto se verá con mayor detalle en el Capítulo 3, ecuaciones (3.38) y (3.42). ♦

Capítulo 3

Teorema del Número Primo

Sea $\pi(x) = \#\{q \ : q$ primo menor o igual que $x\}$. El Teorema del Número Primo establece que

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}.$$

Esta expresión indica que el cociente de éstas para valores de x muy grandes es casi igual a 1.

Gauss y Legendre, a finales del siglo XVIII, fueron los primeros en hacer una conjetura sobre el comportamiento de $\pi(x)$, estableciendo, de manera independiente, que

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}. \tag{3.1}$$

Pasaron muchos años, hasta que en 1850 Chebyshev consiguiera demostrar, con un argumento combinatorio, el orden de magnitud de $\pi(x)$, pudiendo establecer que si existe el límite de

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\ln x}, \tag{3.2}$$

este límite es 1. Sin embargo no fue capaz de demostrar la existencia del límite.

En 1896 Hadamard y Valle Poussin, de manera independiente, haciendo uso de las herramientas establecidas por Riemann el año 1859, basadas en análisis complejo, demostraron de manera analítica el TNP. Casi 50 años después, en 1949, Selberg y Erdös lograron demostrar el TNP sin uso de análisis complejo, demostración que se conoce como elemental.

Previo al estudio de la función de conteo de primos, se estableció la infinitud de los números primos. Existen diversas demostraciones al respecto.

Teorema 3.0.2. *Existen infinitos primos*

Este teorema fue demostrado por varios matemáticos, a continuación mostraremos dos de estas. Algunas de estas demostraciones se encuentran en [Rib95].

Demostración.

- (Euclides).
  Supongamos hay finitos primos, digamos k, ordenados $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$. Consideremos el número natural $N = (p_1 \cdots p_k) + 1$, por Teorema Fundamental de la Aritmética, existe algún primo p_i, $i \in \{1, \ldots, k\}$ que divide a N.
  Si $p_i \mid N$ y como $p_i \mid p_1 \cdots p_k$, entonces $p_i \mid N - (p_1 \cdots p_k)$, es decir, $p_i \mid 1$, por lo tanto $p_i = 1$, lo cual es una contradicción.
  Luego $p_i \notin \{p_1, \ldots, p_k\}$.
  Por lo tanto existen infinitos números primos.

- (Stieltjes 1980).
  Supongamos existen finitos primos, digamos $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$. Sea $N = p_1 \cdots p_k$ y $N = mn$, con $n, m \geqslant 1$, cualquier factorización de N. Cada $p_i \in \{p_1, \ldots, p_k\}$ divide a uno, pero no a ambos números n y m, luego $p_i \nmid m + n$, pero como $m + n \neq 1$, tenemos una contradicción.

♦

En este capítulo estudiaremos dos demostraciones del TNP. La demostración elemental, la cual requiere sólo conocimientos de análisis real. La otra demostración que estudiaremos es la analítica, la cual requiere herramientas de análisis complejo.

3.1. Estimaciones de la Función de Conteo

En este capítulo definiremos las funciones de Chebyshev, las cuales participan en ambas demostraciones del TNP y usaremos para demostrar algunas equivalencias con éste.

Definición 3.1.1. *Función ψ de Chebyshev*
Para $x > 0$, se define

$$\psi(x) = \sum_{n \leqslant x} \Lambda(n), \tag{3.3}$$

con $\Lambda(n)$ la función de Von Mangoldt.

Se puede reescribir la definición de $\psi(x)$ como sigue:

$$\psi(x) = \sum_{n \leqslant x} \Lambda(n) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p^m \leqslant x} \Lambda(p^m) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p \leqslant x^{1/m}} \ln p. \tag{3.4}$$

Veamos cómo es la suma sobre m. Si $x^{1/m} < 2$ entonces $p < 2$, luego la suma sobre p es vacía si

$$\log_2 x < m,$$

por lo tanto la suma sobre m es finita y debemos considerar los $m \leqslant \log_2 x$.

Así tenemos

$$\psi(x) = \sum_{m \leqslant \log_2 x} \sum_{p \leqslant x^{1/m}} \ln p,$$

expresión que se puede escribir de manera diferente, definiendo la siguiente función.

Definición 3.1.2. *Función ϑ de Chebyshev*
Si $x > 0$, se define

$$\vartheta(x) = \sum_{p \leqslant x} \ln p. \tag{3.5}$$

Ahora podemos reescribir $\psi(x)$ como sigue:

$$\psi(x) = \sum_{m \leqslant \log_2 x} \vartheta(x^{1/m}). \tag{3.6}$$

Lema 3.1.1. *Para $x > 0$ se tiene*

$$0 \leqslant \frac{\psi(x)}{x} - \frac{\vartheta(x)}{x} \leqslant \frac{(\ln x)^2}{2\sqrt{x}\ln 2}. \tag{3.7}$$

Observación 3.1.1.

$$\psi(x) - \vartheta(x) = \sum_{m \leqslant \log_2 x} \vartheta(x^{1/m}) - \sum_{p \leqslant x} \ln p.$$

Vimos que si $x^{1/m} < 2$, la suma en p es vacía, entonces

$$\psi(x) - \vartheta(x) = \sum_{2 \leqslant m \leqslant \log_2 x} \vartheta(x^{1/m}). \tag{3.8}$$

Por otro lado, $p \leqslant x$, así

$$\vartheta(x) = \sum_{p \leqslant x} \ln p \leqslant x \ln x. \tag{3.9}$$

Además

$$x^{1/m} \leqslant x^{1/2}. \tag{3.10}$$

Demostración. De (3.8), (3.9) y (3.10) se obtiene

$$\psi(x) - \vartheta(x) \leqslant (\log_2 x) x^{1/2} \ln x^{1/2}, \tag{3.11}$$

finalmente dividiendo por x

$$\frac{\psi(x)}{x} - \frac{\vartheta(x)}{x} \leqslant \frac{(\ln x)^2}{2\sqrt{x} \ln 2}.$$

♦

De la desigualdad del Lema 3.1 obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.1.1. *Para* $x > 0$

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{\psi(x)}{x} - \frac{\vartheta(x)}{x} \right) = 0 \tag{3.12}$$

es decir, $\frac{\psi(x)}{x}$ *y* $\frac{\vartheta(x)}{x}$ *se encuentran lo suficientemente cerca, para* x *suficientemente grande, tal que si cualquiera de estas converge, también lo hace la otra y ambos límites son iguales.*

3.1.1. Resultados importantes

Teorema 3.1.2. *Para* $x \geqslant 2$ *se tiene*

$$\vartheta(x) = \pi(x) \ln x - \int_2^x \frac{\pi(t)}{t} dt \tag{3.13}$$

$$\pi(x) = \frac{\vartheta(x)}{\ln x} + \int_2^x \frac{\vartheta(t)}{t \ln^2 t} dt \tag{3.14}$$

Demostración. Para demostrar (3.13), sea

$$a(n) = \begin{cases} 1 & \text{si n es primo} \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

la función Característica de los primos. Podemos escribir

$$\pi(x) = \sum_{p \leqslant x} 1 = \sum_{n \leqslant x} a(n).$$

Así la Función de Chebyshev $\vartheta(x)$ se puede reescribir

$$\vartheta(x) = \sum_{p \leqslant x} \ln p = \sum_{1<n \leqslant x} a(n) \ln n$$

y por identidad de Abel (Teorema 1.2.2), con $f(n) = \ln n$ y $a(n) = \pi(n)$,

$$\pi(x) \ln x = \pi(x) \ln x - \pi(y) \ln y - \int_y^x \frac{\pi(t)}{t} dt,$$

donde, para $y = 1$,

$$\vartheta(x) = \pi(x) \ln x - \int_1^x \frac{\pi(t)}{t} dt$$

y como para todo $t < 2$, $\pi(t) = 0$, entonces

$$\vartheta(x) = \pi(x) \ln x - \int_2^x \frac{\pi(t)}{t} dt.$$

Para demostrar (3.14), sea $b(n) = a(n) \ln n$, así

$$\pi(x) = \sum_{1<n \leqslant x} \frac{b(n)}{\ln n} \text{ y } \vartheta(x) = \sum_{1<n \leqslant x} b(n).$$

Por identidad de Abel, con $f(n) = \dfrac{1}{\ln n}$ y $a(n) = \vartheta(x)$,

$$\pi(x) = \frac{\vartheta(x)}{\ln x} - \frac{\vartheta(y)}{\ln y} - \int_y^x \frac{\vartheta(t)}{t \ln^2 t} dt.$$

♦

Teorema 3.1.3. *Las siguientes relaciones son equivalentes*

(1.1) $\displaystyle \lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x) \ln x}{x} = 1$

(1.2) $\displaystyle \lim_{x \to \infty} \frac{\vartheta(x)}{x} = 1$

(1.3) $\lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1$

Demostración. Del teorema anterior podemos escribir

$$\frac{\vartheta(x)}{x} = \frac{\pi(x)\ln x}{x} - \frac{1}{x}\int_2^x \frac{\pi(t)}{t}dt$$

y

$$\frac{\pi(x)\ln x}{x} = \frac{\vartheta(x)}{x} + \frac{\ln x}{x}\int_2^x \frac{\vartheta(t)}{t\ln^2 t}dt.$$

(1.1)⇒ (1.2) Usando el teorema anterior, basta demostrar

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\int_2^x \frac{\pi(t)}{t}dt = 0,$$

de (1.1) se obtiene $\frac{\pi(x)}{x} = O\left(\frac{1}{\ln x}\right)$, para $x \geqslant 2$, luego

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\int_2^x \frac{\pi(t)}{t}dt = O\left(\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\int_2^x \frac{dt}{\ln t}\right),$$

Como

$$\int_2^x \frac{dt}{\ln t} = \int_2^{\sqrt{x}} \frac{dt}{\ln t} + \int_{\sqrt{x}}^x \frac{dt}{\ln t,}$$

y además,

$$\int_2^{\sqrt{x}} \frac{dt}{\ln t} \leqslant \frac{\sqrt{x}-2}{\ln 2}$$

[1] y

$$\int_{\sqrt{x}}^x \frac{dt}{\ln t} \leqslant \frac{x-\sqrt{x}}{\ln\sqrt{x}},$$

afirmamos,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\left(\frac{\sqrt{x}-2}{\ln 2} + \frac{x-\sqrt{x}}{\ln\sqrt{x}}\right) = 0.$$

---

[1]Nótese que $\frac{1}{\ln t}$ es decreciente .En general, si se tiene una función f decreciente, podemos acotar su integral de la siguiente manera $(b-a)f(b) \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant (b-a)f(a)$.

(1.2)$\Rightarrow$ (1.1) Usando el teorema anterior, basta probar

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} \int_2^x \frac{\vartheta(t)}{t\ln^2 t} = 0,$$

de (1.2) se obtiene $\vartheta(t) = O(t)$, luego

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} \int_2^x \frac{\vartheta(t)}{t\ln^2 t} dt = O\left(\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} \int_2^x \frac{dt}{\ln^2 t}\right).$$

Ahora

$$\int_2^x \frac{dt}{\ln^2 t} = \int_x^{\sqrt{x}} \frac{dt}{\ln^2 t} + \int_{\sqrt{x}}^x \frac{dt}{\ln^2 t} \leqslant \frac{\sqrt{x}}{\ln^2 2} + \frac{x-\sqrt{x}}{\ln^2 \sqrt{x}}$$

[2] y

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} \left(\frac{\sqrt{x}}{\ln^2 2} + \frac{x-\sqrt{x}}{\ln^2\sqrt{x}}\right) = 0.$$

(1.2)$\Rightarrow$ (1.3) Por Lema 3.1.1 se tiene que para $x > 0$

$$0 \leqslant \frac{\psi(x)}{x} - \frac{\vartheta(x)}{x} \leqslant \frac{(\ln x)^2}{2\sqrt{x}\ln 2},$$

se tiene por (1.2) que $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\vartheta(x)}{x} = 1$ y por propiedad de límites [3] y el Teorema 3.1.1, se obtiene

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1.$$

(1.3)$\Rightarrow$ (1.2) Análogo a (1.2)$\Rightarrow$ (1.3).

♦

El siguiente teorema relaciona el teorema del número primo con el valor asintótico del n-ésimo primo.

Teorema 3.1.4. *Sea p_n el n-ésimo primo. Las siguientes relaciones son equivalentes*

(1.1) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\pi(x)\ln x}{x} = 1$

---

[2] $\dfrac{1}{\ln^2 t}$ función decreciente.

[3] Si $\lim_{x\to\infty} [f(x) + g(x)] = L$ y $\lim_{x\to\infty} g(x) = L'$., entonces $\lim_{x\to\infty} f(x)$ existe y es $L - L'$

(1.2) $\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)\ln\pi(x)}{x} = 1$

(1.3) $\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{n\ln n} = 1$

DEMOSTRACIÓN.

(1.1)⇒(1.2) Asumiendo que (1.1) se cumple y aplicando logaritmo obtenemos

$$\lim_{x\to\infty} (\ln\pi(x) + \ln\ln x - \ln x) = 0,$$

que podemos reescribir como

$$\lim_{x\to\infty} \left(\ln x \left(\frac{\ln\pi(x)}{\ln x} + \frac{\ln\ln x}{\ln x} - 1\right)\right),$$

considerando que $\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$, entonces

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{\ln\pi(x)}{\ln x} + \frac{\ln\ln x}{\ln x} - 1\right) = 0,$$

de donde obtenemos [4]

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln\pi(x)}{\ln x} = 1.$$

Usando (1.1)

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)\ln x}{x}\frac{\ln\pi(x)}{\ln x} &= 1 \\ \lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)\ln\pi(x)}{x} &= 1. \end{aligned}$$

(1.2)⇒ (1.3) Si $x = p_n$, entonces $\pi(x) = n$, luego

$$\pi(x)\ln\pi(x) = n\ln n,$$

asumiendo (1.2), podemos decir

$$\lim_{x\to\infty} \frac{n\ln n}{p_n} = 1,$$

lo cual es equivalente a (1.3).

[4] $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln\ln x}{\ln x} = 0.$

(1.3)$\Rightarrow$(1.1) Sea $p_n \leqslant x < p_{n+1}$, luego $\pi(x) = n$. Dividiento por $n \ln n$

$$\begin{aligned}
\frac{p_n}{n\ln n} &\leqslant \frac{x}{n\ln n} < \frac{p_{n+1}}{n\ln n}\\
\frac{p_n}{n\ln n} &\leqslant \frac{x}{n\ln n} < \frac{p_{n+1}}{(n+1)\ln(n+1)}\frac{(n+1)\ln(n+1)}{n\ln n}\\
\lim_{n\to\infty}\frac{p_n}{n\ln n} &\leqslant \lim_{n\to\infty}\frac{x}{n\ln n} \leqslant \lim_{x\to\infty}\frac{p_{n+1}}{(n+1)\ln(n+1)}\\
1 &\leqslant \lim_{n\to\infty}\frac{x}{n\ln n} \leqslant 1.
\end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos que (1.3) implica (1.2). Luego, queda demostrar que (1.2) implica (1.1).
Aplicando logaritmo natural en (1.2), obtenemos

$$\lim_{x\to\infty}(\ln\pi(x) + \ln\ln\pi(x) - \ln x) = 0,$$

el cual podemos reescribir así

$$\lim_{x\to\infty}\left(\ln\pi(x)\left(1 + \frac{\ln\ln\pi(x)}{\ln\pi(x)} - \frac{\ln x}{\ln\pi(x)}\right)\right) = 0.$$

Luego, como $\ln\pi(x)\to\infty$, cuando $x\to\infty$, entonces

$$\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{\ln\ln\pi(x)}{\ln\pi(x)} - \frac{\ln x}{\ln\pi(x)}\right) = 0,$$

de donde obtenemos

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\ln\pi(x)} = 0.$$

Ésto, junto con (1.2) implica (1.1).

♦

Lema 3.1.2 (Identidad de Legendre)**.** *Si para todo* $x \geqslant 1$ *se tiene que*

$$[x]! = \prod_{p\leqslant x,\ p \text{ primo}} p^{\alpha(p)},$$

entonces,

$$\alpha(p) = \sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{x}{p^m}\right].$$

Demostración. Considerando que $\Lambda(n) = 0$, a menos que n sea potencia de un primo y $\Lambda(p^m) = \ln p$, haciendo uso del Teorema 2.4.2, se tiene

$$\ln[x]! = \sum_{n \leqslant x} \Lambda(n) \left[\frac{x}{n}\right] = \sum_{p \leqslant x} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{x}{p^m}\right] \ln p,$$

donde hacemos $\alpha(p) = \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{x}{p^m}\right]$. ♦

En el siguiente teorema se mostrará que la expresión $\dfrac{n}{\ln n}$ es el grado de la magnitud de $\pi(n)$.

Teorema 3.1.5. *Para todo entero* $n \geqslant 2$ *se tiene*

$$\frac{1}{6}\frac{n}{\ln n} < \pi(n) < 6\frac{n}{\ln n}. \tag{3.15}$$

Demostración. Comenzaremos demostrando la siguiente desigualdad

$$2^n \leqslant \binom{2n}{n} < 4^n, \tag{3.16}$$

donde $\dbinom{2n}{n} = \dfrac{(2n)!}{n!n!}$ es el coeficiente binomial. La desigualdad de la izquierda se puede demostrar por inducción, para $n = 1$ se cumple, supongamos es válido para todo n, veamos qué pasa para $n + 1$

$$\begin{aligned}
\binom{2(n+1)}{n+1} &= \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} \\
&= \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+1)^2 n!n!} \\
&= \frac{2(2n+1)(2n)!}{(n+1)n!n!}.
\end{aligned}$$

Aplicando hipotesis inductiva obtenemos,

$$\begin{aligned}
2 \cdot 2^n &\leqslant \binom{2}{1}\binom{2n}{n} \\
&= 2\frac{(2n)!}{n!n!} \\
&\leqslant 2\frac{2n+1}{n+1}\frac{(2n)!}{n!n!}.
\end{aligned}$$

La desigualdad de la derecha sigue de

$$\binom{2n}{n} < \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} = 2^{2n} = 4^n.$$

Aplicando logaritmo a (3.16) obtenemos

$$n \ln 2 \leqslant \ln((2n)!) - 2\ln(n!) < n \ln 4. \tag{3.17}$$

Usando la identidad de Legendre (Lema 3.1.2), $\ln(n!) = \sum_{p \leqslant n} \alpha(p) \ln p$, donde la suma se extiende sobre los primos y

$$\alpha(p) = \sum_{m=1}^{\left[\frac{\ln n}{\ln p}\right]} \left[\frac{n}{p^m}\right].$$

Entonces (3.17) se transforma en

$$n \ln 2 \leqslant \sum_{p \leqslant 2n} \sum_{m=1}^{\left[\frac{\ln(2n)}{\ln p}\right]} \left(\left[\frac{2n}{p^m}\right] - 2\left[\frac{n}{p^m}\right]\right) \ln p < n \ln 4. \tag{3.18}$$

Estudiemos primero la desigualdad de la izquierda de (3.18). Considerando que $[2x] - 2[x]$ puede tomar los valores 0 ó 1, obteniendo así

$$n \ln 2 \leqslant \sum_{p \leqslant 2n} \left(\sum_{m=1}^{\left[\frac{\ln(2n)}{\ln p}\right]} 1 \right) \ln p \leqslant \sum_{p \leqslant 2n} \ln(2n) = \pi(2n) \ln(2n).$$

Considerando que $\ln 2 > 1/2$, obtenemos

$$\pi(2n) \geqslant \frac{n \ln 2}{\ln(2n)} = \frac{2n}{\ln(2n)} \frac{\ln 2}{2} > \frac{1}{4} \frac{2n}{\ln(2n)} > \frac{1}{6} \frac{2n}{\ln(2n)}.$$

Veamos qué pasa para los números impares,

$$\pi(2n+1) \geqslant \pi(2n) > \frac{1}{4} \frac{2n}{\ln(2n)} > \frac{1}{4} \frac{2n}{2n+1} \frac{2n+1}{\ln(2n+1)} \geqslant \frac{1}{6} \frac{2n+1}{\ln(2n+1)},$$

considerando que $2n/(2n+1) \geqslant 2/3$. Obtenemos así

$$\pi(n) > \frac{1}{6} \frac{n}{\ln n}.$$

Volvamos a (3.17) y (3.18) para estudiar la desigualdad de la derecha. De éstas teníamos que

$$\ln((2n)!) - 2\ln(n!) = \sum_{p \leqslant 2n} \sum_{m=1}^{\left[\frac{\ln(2n)}{\ln p}\right]} \left(\left[\frac{2n}{p^m}\right] - 2\left[\frac{n}{p^m}\right]\right) \ln p,$$

si extraemos el término correspondiente a $m = 1$, entonces

$$\ln((2n)!) - 2\ln(n!) \geqslant \sum_{p \leqslant 2n} \left(\left[\frac{2n}{p^m}\right] - 2\left[\frac{n}{p^m}\right] \right) \ln p.$$

Aquí, para los primos entre n y $2n$ se tiene $[2n/p] - 2[n/p] = 1$, entonces

$$\ln((2n)!) - 2\ln(n!) \geqslant \sum_{n<p\leqslant 2n} \ln p = \vartheta(2n) - \vartheta(n),$$

por lo tanto

$$\vartheta(2n) - \vartheta(n) < n \ln 4.$$

En particular, si n es potencia de 2, se tiene

$$\vartheta(2^{r+1}) - \vartheta(2^r) < 2^r \ln 4 = 2^{r+1} \ln 2.$$

Si sumamos sobre $r = 0, 1, \ldots, k$, obtenemos

$$\begin{aligned} \vartheta(2^{k+1}) &< (2 + 2^2 + \ldots + 2^{k+1}) \ln 2 \\ &= 2^{k+2}(2^{-(k+1)} + 2^{-k} + \ldots + 2^{-1}) \ln 2 \\ &< 2^{k+2} \ln 2. \end{aligned}$$

Escojamos k tal que $2^k \leqslant n < 2^{k+1}$, luego

$$\vartheta(n) \leqslant \vartheta(2^{k+1}) < 2^{k+2} \ln 2 \leqslant 4n \ln 2.$$

Sea $0 < \alpha < 1$, entonces

$$(\pi(n) - \pi(n^\alpha)) \ln(n^\alpha) < \sum_{n^\alpha < p \leqslant n} \ln p \leqslant \vartheta(n) < 4n \ln 2,$$

por lo tanto,

$$\pi(n) < \frac{4n \ln 2}{\alpha \ln n} + \pi(n^\alpha) < \frac{4n \ln 2}{\alpha \ln n} n^\alpha = \frac{n}{\ln n} \left(\frac{4 \ln 2}{\alpha} + \frac{\ln n}{n^{1-\alpha}} \right).$$

Ahora, si $c > 0$ y $x \geqslant 1$, la función $f(x) = x^{-c} \ln x$ tiene su máximo en $x = e^{1/c}$, entonces $n^{-c} \ln n \leqslant 1/(ce)$, para $n \geqslant 1$. Si tomamos $\alpha = 2/3$, obtenemos

$$\pi(n) < \frac{n}{\ln n} \left(6 \ln 2 + \frac{3}{e} \right) < 6 \frac{n}{\ln n}.$$

♦

Corolario 3.1.1. *Para $n \geqslant 1$, el $n-$ésimo primo p_n satisface la siguiente desigualdad*

$$\frac{1}{6} n \ln n < p_n < 12 \left(n \ln n + n \ln \frac{12}{e} \right). \tag{3.19}$$

3.2. Enfoque Elemental

3.2.1. Estimaciones útiles

Teorema 3.2.1. *Para* $x \geqslant 2$ *se tienen las siguientes estimaciones*

$$\sum_{n\leqslant x} \frac{\Lambda(n)}{n} = \ln x + O(1), \tag{3.20}$$

$$\sum_{p\leqslant x} \frac{\ln p}{p} = \ln x + O(1) \tag{3.21}$$

y

$$\sum_{p\leqslant x} \frac{1}{p} = \ln\ln x + \beta + O\left(\frac{1}{\ln x}\right) \quad (\textit{Estimación de Mertens}), \tag{3.22}$$

donde

$$\beta = 1 - \ln\ln 2 + \int_2^\infty \frac{O(1)}{t\ln^2 t}dt.$$

Demostración. Para (3.20), usando la identidad de Abel, con $A(x) = \sum_{n\leqslant x} 1 = [x]$ y $f(t) = \ln t$.

$$\begin{aligned}
\sum_{n\leqslant x} \ln n &= [x]\ln x - \int_1^x \frac{[t]}{t}dt \\
&= (x - O(1))\ln x - \int_1^x dt - O\left(\int_1^x \frac{dt}{t}\right) \\
&= x\ln x - O(\ln x) - (x-1) - O(\ln x) \\
&= x\ln x + O(\ln x). \qquad (3.23)
\end{aligned}$$

Por otro lado, usando la identidad de Legendre, se tiene

$$\begin{aligned}
\sum_{n\leqslant x} \ln n &= \ln([x]!) \\
&= \sum_{p\leqslant x} \alpha(p)\ln p \\
&= \sum_{p\leqslant x} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{x}{p^m}\right]\right)\ln p
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{p^m \leqslant x\,;m\geqslant 1} \left[\frac{x}{p^m}\right] \ln p \\
&= \sum_{n\leqslant x} \left[\frac{x}{n}\right] \Lambda(n) \\
&= \sum_{n\leqslant x} \left(\frac{x}{n} - O(1)\right) \Lambda(n) \\
&= x\sum_{n\leqslant x} \frac{\Lambda(n)}{n} - O\left(\sum_{n\leqslant x} \Lambda(n)\right) \\
&= x\sum_{n\leqslant x} \frac{\Lambda(n)}{n} - O(x). \qquad (3.24)
\end{aligned}
$$

La igualdad (3.24) se obtiene de lo siguiente

$$
\begin{aligned}
\sum_{n\leqslant x} \Lambda(n) &= \sum_{n\leqslant x \;\; n=p^k} \ln p \\
&= \sum_{p\leqslant x} \left[\frac{\ln x}{\ln p}\right] \ln p \\
&\leqslant \sum_{p\leqslant x} \frac{\ln x}{\ln p} \ln p \\
&= \ln x \pi(x) \\
&\leqslant \ln x \frac{6}{\ln x} x \qquad (3.25) \\
&= O(x).
\end{aligned}
$$

Se obtiene (3.25) del Teorema 3.1.5. Ahora, si comparamos (3.23) con (3.24) obtenemos

$$x\ln x + O(\ln x) = x\sum_{n\leqslant x} \frac{\Lambda(n)}{n} - O(x).$$

Dividiendo a ambos lados por x,

$$\sum_{n\leqslant x} \frac{\Lambda(n)}{n} = \ln x + O(1),$$

cuando $x \to \infty$.

Para (3.21)

$$\sum_{p\leqslant x} \frac{\ln p}{p} = \sum_{n\leqslant x} \frac{\Lambda(n)}{n} - \sum_{k\geqslant 2} \sum_{p^k\leqslant x} \frac{\ln p}{p^k}$$

$$= \ln x + O(1) - \sum_{k\geqslant 2}\sum_{p^k\leqslant x}\frac{\ln p}{p^k}, \tag{3.26}$$

en (3.26) usamos (3.20). Además

$$\sum_{k\geqslant 2}\sum_{p^k\leqslant x}\frac{\ln p}{p^k} \leqslant \sum_{p}\left(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^3}+\ldots\right)\ln p = \sum_{p}\frac{\ln p}{p(p-1)} = O(1),$$

esto considerando que para cada k, se tiene una serie geométrica de razón $1/p < 1$, luego la serie

$$\sum_{p}\frac{\ln p}{p(p-1)} = \sum_{p}\left(\frac{\ln p}{p^2}+\frac{\ln p}{p^2(p-1)}\right) \leqslant \sum_{n}\left(\frac{\ln n}{n^2}+\frac{\ln n}{n^2(n-1)}\right) = O(1),$$

ya que las series $\sum_{n}\frac{\ln n}{n^2}$, $\sum_{p}\frac{\ln n}{n^2(n-1)}$ son convergentes.

Obtenemos así

$$\sum_{p\leqslant x}\frac{\ln p}{p} = \ln x + O(1).$$

Demostraremos (3.22) usando la identidad de Abel, consideremos

$$a(n) = \begin{cases} \dfrac{\ln p}{p} & \text{si} \quad n = p \\ 0 & \text{en cualquier otro caso,} \end{cases}$$

luego

$$A(x) = \sum_{n\leqslant x} a_n = \sum_{p\leqslant x}\frac{\ln p}{p} = \ln x + O(1)$$

y $f(t) = 1/\ln t$, con $f'(t) = -1/t(\ln t)^2$, entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{p} &= \frac{A(x)}{\ln x} + \int_2^x \frac{A(t)}{t\ln^2 t}dt \\
&= \frac{\ln x + O(1)}{\ln x} + \int_2^x \frac{\ln t + O(1)}{t\ln^2 t}dt \\
&= 1 + O\left(\frac{1}{\ln x}\right) + \int_2^x \frac{dt}{t\ln t} + \int_2^\infty \frac{O(1)}{t\ln^2 t}dt - \int_x^\infty \frac{O(1)}{t\ln^2 t} \\
&= 1 + O\left(\frac{1}{\ln x}\right) + \ln\ln x - \ln\ln 2 + \int_2^\infty \frac{O(1)}{t\ln^2 t}dt
\end{aligned}$$

$$= \ln\ln x + \beta + O\left(\frac{1}{\ln x}\right).$$

♦

Teorema 3.2.2. *Si* $x \geqslant 2$,

$$\ln[x]! = x\ln x - x + O(\ln x) \tag{3.27}$$

y por lo tanto

$$\sum_{n\leqslant x} \Lambda(n)\left[\frac{x}{n}\right] = x\ln x - x + O(\ln x). \tag{3.28}$$

Demostración. Sea $f(t) = \ln t$ en la fórmula de Euler (Teorema 1.2.1) obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
\ln[x]! = \sum_{n\leqslant x} \ln n &= \int_1^x \frac{t-[t]}{t}dt - \ln x(x-[x]) \\
&= x\ln x - x + 1 + O\left(\int_1^x \frac{1}{t}dt\right) + O(\ln x) \\
&= x\ln x - x + O(\ln x),
\end{aligned}$$

luego obtenemos la igualdad (3.2.2) del Teorema 2.4.2. ♦

Corolario 3.2.1. *Para todo* $x \geqslant 2$,

$$\sum_{p\leqslant x}\left[\frac{x}{n}\right]\ln p = x\ln x + O(x). \tag{3.29}$$

Lema 3.2.1. *Para todo* $x \geqslant 2$,

$$\sum_{n\leqslant x}\psi\left(\frac{x}{n}\right) = x\ln x - x + O(\ln x). \tag{3.30}$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
\sum_{n\leqslant x}\psi\left(\frac{x}{n}\right) &= \sum_{n\leqslant x}\sum_{m\leqslant x/n}\Lambda(m) \\
&= \sum_{m\leqslant x}\Lambda(m)\left(\sum_{n\leqslant x/m} 1\right) \\
&= \sum_{m\leqslant x}\Lambda(m)\left[\frac{x}{m}\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{p^k\leqslant x,\ k\geqslant 1} \ln p \left[\frac{x}{p^k}\right] \\
&= \sum_{p\leqslant x} \left(\left[\frac{x}{p}\right] + \left[\frac{x}{p^2}\right] + \dots\right) \ln p \\
&= \ln([x]!) \\
&= x\ln x - x + O(\ln x), \qquad (3.31)
\end{aligned}$$

la última igualdad se debe al Teorema 3.2.2. ♦

Lema 3.2.2. *Para todo* $x \geqslant 2$,

$$\sum_{n\leqslant x} \left[\frac{x}{n}\right] = x\ln x + (2\gamma - 1)x + O(\sqrt{x}). \qquad (3.32)$$

Demostración. Usando Teorema 2.1.1 y considerando que

$$\sum_{n\leqslant x} d(n) = \sum_{n\leqslant x}\sum_{d|n} 1 = \sum_{q,d\ \ ,qd\leqslant x} 1 = \sum_{d\leqslant x}\sum_{q\leqslant x/d} 1 = \sum_{d\leqslant x}\left[\frac{x}{d}\right].$$

♦

3.2.2. Demostración Elemental del TNP

Teorema 3.2.3.

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}. \qquad (3.33)$$

Demostración. Por Teorema 3.1.3 tenemos que

$$\pi(x) \sim \frac{\psi(x)}{\ln x},$$

por lo tanto, basta probar que $\psi(x) \sim x$.
Sea

$$F(x) = \sum_{n\leqslant x}\left(\psi\left(\frac{x}{n}\right) - \left[\frac{x}{n}\right] + 2\gamma\right),$$

con γ la constante de Euler.
Por inversión de Möbius,

$$\psi(x) - [x] + 2\gamma = \sum_{n\leqslant x} \mu(b) F\left(\frac{x}{n}\right),$$

por lo cual probaremos

$$\sum_{n\leqslant x} \mu(n) F\left(\frac{x}{n}\right) = o(x), \quad \text{cuando } x \to \infty. \qquad (3.34)$$

Primero, estimemos $\mathsf{F}(x)$, la cual podemos reescribir como sigue,

$$\mathsf{F}(x) = \sum_{n \leqslant x} \psi\left(\frac{x}{n}\right) - \sum_{n \leqslant x} \left[\frac{x}{n}\right] + 2\gamma[x],$$

usando Lema 3.2.1 y Lema 3.2.2, se tiene que

$$\mathsf{F}(x) = \mathsf{O}(\sqrt{x}),$$

es decir, para todo $x \geqslant 1$, existe $k > 0$ tal que

$$|\mathsf{F}(x)| \leqslant k\sqrt{x}.$$

Ahora, sea $t > 1$. Entonces

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{n<x/t} \mu(n)\mathsf{F}\left(\frac{x}{n}\right)\right| &\leqslant \sum_{n<x/t} \left|\mathsf{F}\left(\frac{x}{n}\right)\right| \\
&\leqslant k \sum_{1\leqslant n\leqslant x/t} \left(\frac{x}{n}\right)^{1/2} \\
&\leqslant k\sqrt{x}\left(1 + \int_1^{x/t} \frac{du}{\sqrt{u}}\right) \\
&= k\sqrt{x}\left(2\left(\frac{x}{t}\right)^{1/2} - 1\right) \\
&< \frac{2kx}{\sqrt{t}}. \qquad (3.35)
\end{aligned}$$

Además, tomando particiones sobre el intervalo $[1, t]$, reescribimos

$$\sum_{x/t<n\leqslant x} \mu(n)\mathsf{F}\left(\frac{x}{n}\right) = \sum_{i=1}^{t-1}\left(\mathsf{F}(i) \sum_{x/(i+1)<n\leqslant x/i} \mu(n)\right).$$

Nótese que si $a \in \mathbb{N}$, es tal que $a \leqslant x < a+1$, entonces $\mathsf{F}(x) = \mathsf{F}(a)$, luego $x/2 < n \leqslant x \Leftrightarrow 1 \leqslant x/n < 2$, entonces $\mathsf{F}(x/n) = \mathsf{F}(1)$.
Se tiene,

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{x/t<n\leqslant x} \mu(n)\mathsf{F}\left(\frac{x}{n}\right)\right| &\leqslant |\mathsf{F}(1)|\left|\sum_{x/2<n\leqslant x} \mu(n)\right| + \ldots + |\mathsf{F}(t-1)|\left|\sum_{x/t<n\leqslant x/(t-1)} \mu(n)\right| \\
&\leqslant \max_{2\leqslant i\leqslant t}\left|\sum_{x/(i+1)<n\leqslant x/i} \mu(n)\right| (|\mathsf{F}(1)| + \ldots + |\mathsf{F}(t-1)|). \quad (3.36)
\end{aligned}$$

Por otro lado, por Lema 2.3.1, si fijamos i y $x \to \infty$, entonces

$$\sum_{x/(i+1)<n\leqslant x/i} \mu(n) = \sum_{n\leqslant x/(i-1)} \mu(n) - \sum_{n\leqslant x/i} \mu(n) = o(x),$$

Sea $\epsilon \in (0, 1/4)$, escojamos $t = \left[\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\right] \geqslant \frac{1}{2\sqrt{\epsilon}}$, entonces existe x_ϵ tal que

$$\left|\sum_{n\leqslant y} \mu(n)\right| < \epsilon y,$$

con $y > x_\epsilon$. Por lo tanto, si $x > ty$, entonces $x/i > y$, para todo $i = 1, \ldots, t$, así

$$\left|\sum_{x/(i+1)<n\leqslant x/i} \mu(n)\right| \leqslant \left|\sum_{n\leqslant x/(i-1)} \mu(n)\right| + \left|\sum_{n\leqslant x/i} \mu(n)\right| < \epsilon\left(\frac{x}{i} + \frac{x}{i-1}\right) \leqslant 2\epsilon x, \tag{3.37}$$

para $i = 2, \ldots, t$. Ahora, usando las desigualdades (3.36) y (3.37)

$$\left|\sum_{x/t<n\leqslant x} \mu(n)F\left(\frac{x}{n}\right)\right| \leqslant 2\epsilon x \sum_{i=1}^{t-1} |F(i)| \leqslant 2\epsilon x \sum_{i=1}^{t-1} k\sqrt{i} < 2k\epsilon t^{3/2} x$$

y junto con (3.37), se tiene

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{n\leqslant x} \mu(n)F\left(\frac{x}{n}\right)\right| &< \left|\sum_{n\leqslant x/t} \mu(n)F\left(\frac{x}{n}\right)\right| + \left|\sum_{x/t<n\leqslant x} \mu(n)F\left(\frac{x}{n}\right)\right|, \\
&< 5k\epsilon^{1/4} x
\end{aligned}$$

es decir,

$$\left|\sum_{n\leqslant x} \mu(n)F\left(\frac{x}{n}\right)\right| = o(x),$$

cuando $x \to \infty$. Por lo tanto $\psi(x) \sim x$. ♦

3.3. Enfoque Analítico

3.3.1. Función Zeta de Riemann

Desde Euclides (año 300 a.C.) se sabe que la susesión de números primos es infinita. En 1737 Leonhard Euler demostró que la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p_n}$$

diverge, donde p_n es el $n-$ésimo primo, lo cual conduce a otra demostración de la existencia de infinitos números primos [Rib95]. Uno de los más notables descubrimientos de Euler fue la siguiente fórmula

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} = \frac{\pi^2}{6}. \tag{3.38}$$

Esta estimación es conocida como Problema de Basilea y fue resuelto por Euler en 1735. El método inicial que utilizó Euler para llegar a este valor fue extender resultados aplicables a polinomios finitos, considerándolos también válidos para series infinitas. Sin justificación de lo anterior, Euler pudo verificar el valor correcto numéricamente frente a sumas parciales de la serie.
Recordemos el desarrollo en serie de Taylor de la función seno,

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots,$$

dividiendo por x, se obtiene

$$\frac{\sin(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^5}{7!} + \dots$$

[5] Supongamos que esta serie infinita se puede expresar como producto de factores lineales dados por las raíces de $\sin(x)/x$, las cuales son $x = n\pi$, con $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{\sin(x)}{x} &= \left(1 - \frac{x}{\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{2\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{2\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{3\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{3\pi}\right)\dots \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\dots \end{aligned}$$

Desarrollando este producto y agrupando los términos del x^2 se obtiene que el coeficiente de x^2 para la función $\sin(x)/x$ es

$$-\left(\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \dots\right) = -\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Además, en el desarrollo de la serie de Taylor de $\sin(x)/x$, se obtiene que el coeficiente de x^2 es $-1/6$, por lo tanto, por teorema de unicidad de desarrollo en serie, estos dos coeficientes deben ser iguales, es decir

$$-\frac{1}{6} = -\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},$$

[5] De igual manera que se hace con polinomios finitos.

de donde finalmente obtenemos (3.38).

En general, Euler demostró que $\zeta(s)$ se expresa en términos de los números de Bernoulli, siempre que $s = 2n$, con $n \in \mathbb{N}$ [Ire90].

En 1749 Euler observó el siguiente producto

$$\prod_{p}(1 - p^{-s})^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}, \tag{3.39}$$

para[6] $s > 1$ y p recorre todos los números primos. En general, un producto de Euler es la expansión de un producto infinito, indexado por números primos p de una serie de Dirichlet (más adelante en este mismo capítulo). Más de 100 años después Bernhard Riemann se interesó por esta fórmula. Él se basó en encontrar una relación entre la función $\pi(x)$ y la serie (3.39) [7] pero, el salto cualitativo con respecto a Euler fue considerarla como una función de variable compleja.

En lo sucesivo $s = \sigma + it$ representa un número complejo, donde $\sigma, t \in \mathbb{R}$.

Definición 3.3.1 (Función Zeta de Riemann)**.** *Para* $s \in \mathbb{C}$*, con* $\sigma > 1$*, se define*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}. \tag{3.40}$$

Proposición 3.3.1. *La serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

converge absolutamente para $\sigma > 1$*.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $N \in \mathbb{N}$, se tiene

$$\left|\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s}\right| \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{|n^s|} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{\sigma}}$$

y la serie

$$\zeta(\sigma) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{\sigma}}$$

es convergente para todo $\sigma > 1$. ♦

El producto de Euler (3.39) está estrechamente relacionado con el Teorema Fundamental de la Aritmética (Teorema 1.1.2).

[6] Euler encontró una manera de relacionar los números naturales con los números primos, es por esto que como primera instancia se considera $s \in \mathbb{R}$, más adelante veremos que Riemann define la función zeta para $s \in \mathbb{C}$.

[7] Un buen apunte sobre la función zeta de Riemann y un poco de historia es [Cal02] y [San11]

Proposición 3.3.2 (Producto de Euler)**.** *La función* $\zeta(s)$ *se puede expresar como el siguiente producto, llamado producto de Euler*

$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ primo}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}. \tag{3.41}$$

Demostración. Como $p \geqslant 2$ y $\Re(s) > 1$, cada serie geométrica converge, en efecto

$$1 + \frac{1}{p^s} + \left(\frac{1}{p^s}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{p^s}\right)^r + \ldots = \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}},$$

por lo tanto,

$$\prod_p \left(1 + \frac{1}{p^s} + \left(\frac{1}{p^s}\right)^2 + \ldots\right) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1},$$

desarrollando el lado izquierdo de la igualdad,

$$\begin{aligned}
\prod_p \left(1 + \frac{1}{p^s} + \left(\frac{1}{p^s}\right)^2 + \ldots\right) &= \left(1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{2^{2s}} + \ldots\right)\left(1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{3^{2s}} + \ldots\right) \\
&\quad \left(1 + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{5^{2s}} + \ldots\right) \cdot \ldots \\
&= 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \ldots + \frac{1}{2^{2s}} + \frac{1}{2^{3s}} + \ldots \frac{1}{2^s 3^s \ldots} + \frac{1}{2^{2s} 3^s \ldots} + \ldots
\end{aligned}$$

obtenemos el desarrollo de la función Zeta de Riemann. Al lado derecho de la igualdad se tiene

$$\prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} = \left[\left(1 - \frac{1}{2^s}\right)\left(1 - \frac{1}{3^s}\right)\left(1 - \frac{1}{5^s}\right) \cdots\right]^{-1}.$$

Nótese además que para cada p, estos generan en el denominador a los números naturales, sin repetición. Luego, si expandimos ambos productos se tendrá como término en común el siguiente

$$\frac{1}{p_1^{\alpha_1 s} \ldots p_k^{\alpha_k s}} = \frac{1}{(p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k})^s},$$

donde por Teorema Fundamental de la Aritmética se tiene la unicidad de la factoriación de cada $n \geqslant 2$. ♦

En el Capítulo 2, sección 2.3, estudiamos la función de Möbius, la cual tiene directa relación con la función Zeta de Riemann, en virtud del producto de Euler

(3.39), la inversa multiplicativa de la función Zeta también tiene una expasión en serie de Dirichlet, esto es

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{p}\left(1 - \frac{1}{p^s}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}, \tag{3.42}$$

su demostración se encuentra en [Mur08] pág 208, ejercicio 1.2.2.

3.3.2. Extensión de la Función Zeta al semi-plano $\sigma > 0$

La función $\zeta(s)$ está definida para todo $\sigma > 1$. Mediante el siguiente teorema mostraremos que tiene una prolongación meromorfa en el semi-plano $\sigma > 0$, para todo $s \in \mathbb{C}$ excepto $s = 1$.

Teorema 3.3.1. *Para todo* $\sigma > 0$*, se tiene que*

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s\int_{1}^{\infty} \frac{x - [x]}{x^{s+1}}\,dx, \tag{3.43}$$

es una función meromorfa, con polo en $s = 1$*.*

Demostración. Sea x un número real positivo y supongamos $\sigma > 1$. Usando la Identidad de Abel (1.4) con $a(n) = 1$ y $f(t) = t^{-s}$, se tiene $A(x) = \sum\limits_{n \leqslant x} a(n) = [x]$ y

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{1}{n^s} = \frac{[x]}{x^s} + s\int_{1}^{x} \frac{[t]}{t^{s+1}}\,dt,$$

haciendo $x \to \infty$, se obtiene

$$\begin{aligned}
\zeta(s) &= s\int_{1}^{\infty} \frac{t - (t - [t])}{t^{s+1}}\,dt \\
&= s\int_{1}^{\infty} \frac{dt}{t^s} - s\int_{1}^{\infty} \frac{t - [t]}{t^{s+1}}\,dt \\
&= \frac{s}{s-1} - s\int_{1}^{\infty} \frac{x - [x]}{x^{s+1}}\,dx,
\end{aligned}$$

lo cual establece la demostración para el caso $\sigma > 1$.

Nótese que la integral impropia

$$\int_1^\infty \frac{x-[x]}{x^{s+1}}dx$$

es absolutamente convergente en el semiplano $\sigma > 0$, ya que

$$\left|\frac{x-[x]}{x^{s+1}}\right| \leqslant \frac{1}{x^{\sigma+1}},$$

por lo tanto, por continuidad analítica se demuestra para todo $s \in \mathbb{C}$, $s \neq 1$ y $\sigma > 0$. ♦

3.3.3. Derivada de la Función Zeta

Proposición 3.3.3. *La función* $\zeta(s)$ *tiene derivada para todo* $s = \sigma + it \in \mathbb{C}$, $s \neq 1$, *con* $\sigma > 0$.

Demostración. En vista del Teorema 3.3.1 y la prolongación analítica. ♦

Una alternativa para estudiar la derivada logarítmica de la función Zeta es haciendo uso de Series de Dirichlet.

Series de Dirichlet

Una serie de la forma $\alpha(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ se llama Serie de Dirichlet.
A continuación algunas propiedades analíticas de las series de Dirichlet.

Teorema 3.3.2. *Sea* $a_n \in \mathbb{C}$ *con* $|a_n| \leqslant 1$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *La serie*

$$\sum_{n\geqslant 1} a_n n^{-s} \tag{3.44}$$

converge a una función $F(s)$ *analítica para* $\Re(s) > 1$. *Supongamos que se puede extender analíticamente a un conjunto abierto que contiene el semiplano* $\Re(s) \geqslant 1$. *Entonces la serie (3.44) converge a* $F(s)$ *para todo número complejo con* $\Re(s) \geqslant 1$.

Demostración. Ver [Kon12] pág 63. ♦

Definición 3.3.2. *Se define la abcisa de convergencia* σ_c *de una serie de Dirichlet* $\alpha(s)$ *como*

$$\sigma_c = \text{ínf}\{\sigma \in \mathbb{R} : \alpha(\sigma + it) \text{ converge}\}.$$

Teorema 3.3.3. *Sean*

$$\alpha(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s},$$

una serie de Dirichlet convergente en $s = s_0 = \sigma_0 + it_0$ *y* $H > 0$ *una constate arbitraria. Entonces la serie* $\alpha(s)$ *es uniformemente convergente en*

$$S = \{s : \sigma \geqslant \sigma_0, |t - t_0| \leqslant H(\sigma - \sigma_0)\}.$$

Demostración. Ver [Mon06] pág 11. ♦

Corolario 3.3.1. *Cualquier serie de Dirichlet* $\alpha(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ *tiene abcisa de convergencia* σ_c *tal que* $\alpha(s)$ *converge para todo* s *con* $\sigma > \sigma_c$ *y diverge para* s *con* $\sigma < \sigma_c$*. Más aún, si* s_0 *es tal que* $\sigma_0 > \sigma_c$*, entonces existe una vecindad de* s_0 *en donde* $\alpha(s)$ *converge uniformemente.*

El siguiente teorema es de gran importancia para el estudio de la derivada logarítmica de la función ζ de Riemann.

Teorema 3.3.4. *La serie* $\alpha(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ *es una función analítica para* $\sigma > \sigma_c$ *y se tiene que*

$$\alpha'(s) = -\sum_{n=1}^{\infty} a_n (\ln n) n^{-s}, \tag{3.45}$$

con convergencia uniforme en cualquier subconjunto compacto de $\{s : \sigma > \sigma_c\}$*.*

Demostración. Ver [Str] pág 38. ♦

Se puede expresar una serie de Dirichlet convergente como una integral absolutamente convergente.

Teorema 3.3.5. *Sean* $A(x) = \sum_{n<x} a_n$ *y* σ_c *la abcisa de convergencia de la serie de Dirichlet* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$*. Si* $\sigma_c < 0$ *entonces* $A(x)$ *es una función acotada y*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} = s \int_1^{\infty} A(x) x^{-s-1} dx, \tag{3.46}$$

para $\sigma > 0$*, la integral es absolutamente convergente. Si* $\sigma_c \geqslant 0$*, entonces*

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\ln |A(x)|}{\ln x} = \sigma_c$$

y (3.46) *es válida para* $\sigma > \sigma_c$ *siendo la integral absolutamente convergente.*

Demostración. Ver [Str] pág 39. ♦

Caracteres de Dirichlet

En vista que estudiaremos la derivada logarítmica de la función Zeta haciendo uso de las series de Dirichlet, es necesario introducir el concepto de caracter de Dirichlet, pues veremos más adelante que para el caracter trivial obtenemos la función Zeta de Riemann.

Definición 3.3.3. *Sea* q *un entero positivo. Un caracter de Dirichlet de período* q *(o módulo* q*) es una función* $\chi : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ *periódica, con período* q*, es decir*

$$\chi(n+q) = \chi(n), \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Además es multiplicativa, es decir

$$\chi(nm) = \chi(n)\chi(m), \quad \forall n, m \in \mathbb{Z},$$

satisface

$$\chi(1) = 1$$

y

$$\chi(n) = 0 \quad \textit{si}\ \mathrm{mcd}(n, q) > 1.$$

Definición 3.3.4. *Si* χ *es un carácter de Dirichet, se define la función* L *de Dirichlet como sigue*

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) n^{-s}, \tag{3.47}$$

para todo $s \in \mathbb{C}$*, con* $Re s > 1$*.*

En vista del Teorema 1.3.7, se tiene

$$L(s, \chi) = \prod_{p} (1 - \chi(p) p^{-s})^{-1}, \tag{3.48}$$

$\forall s \in \mathbb{C}$, $\sigma > 1$ y con p corriendo sobre todos los primos. Conocido como el producto de Euler de la función L de Dirichlet. Así podemos definir el logaritmo de $L(s, \chi)$ y haciendo uso de la expansión de Taylor, obtenemos

$$\log L(s, \chi) = -\sum_{p} \sum_{m=1}^{\infty} m^{-1} \chi(p^m) p^{-ms}, \tag{3.49}$$

la cual sigue siendo una serie de Dirichlet, es decir, $\log L(s, \chi) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$, donde

$$a_n = \chi(n) \begin{cases} m^{-1} & \text{si } n = p^m \\ 0 & \text{en otros casos.} \end{cases} \tag{3.50}$$

En vista de lo anterior y el Teorema 3.3.4, obtenemos la derivada logarítmica de la función L de Dirichlet

$$\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} = -\sum_{n=1}^{\infty} \chi(n)\Lambda(n)n^{-s}, \quad \sigma > 1, \tag{3.51}$$

donde $a_n \ln n = \chi(n)\Lambda(n)$ y $\Lambda(n)$ es la función de Von Mangoldt (2.14). Finalmente, haciendo uso del Teorema 3.3.5 podemos expresar (3.51) como sigue

$$\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} = -s\int_{1}^{\infty} \phi(x,\chi)x^{-s-1}dx, \quad \sigma > 1, \tag{3.52}$$

donde $\phi(x,\chi) = \sum_{n\leqslant x} \chi(n)\Lambda(n)$.

3.3.4. Derivada logarítmica de la Función Zeta

Nótese que por la definición de ζ como el producto de Euler (3.39) y el Teorema 1.3.3 se tiene que

$$\zeta(s) \neq 0 \quad \forall s \in \mathbb{C}, \quad \text{con } \sigma > 1,$$

así, podemos definir $\log \zeta(s)$ para cada $s \in \mathbb{C}$ con $\sigma > 1$, esto es

$$\log \zeta(s) = -\sum_{p} \log(1 - p^{-s}), \tag{3.53}$$

ahora, haciendo uso de la expansión de Taylor

$$\log(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{z^n}{n},$$

con $p^{-s} = z$, se tiene

$$-\log(1-z) = z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}z^n,$$

para todo $z \in \mathbb{C}$ con $|z| < 1$, podemos escribir (3.53) como sigue

$$\log \zeta(s) = \sum_{p} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}p^{-ns}. \tag{3.54}$$

Esta doble suma es absolutamente convergente, pues en (3.53) la suma es absolutamente convergente para todo s con $\sigma > 1$, junto con la fórmula de Taylor en

(3.54), se tiene que la suma $\sum_{p}\left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}p^{-ns}\right)$ converge para cualquier $s \in \mathbb{C}$ con $\sigma > 1$. Aplicado esto a $s > 1$ real se tiene una doble suma de términos positivos, y por lo tanto la convergencia implica convergencia absoluta a la doble suma. Para $s \in \mathbb{C}$ general, con $\sigma > 1$ la convergencia absoluta viene dada por $|p^{-ns}| = p^{-n\sigma}$.

Usando las series de Dirichlet podemos generalizar la función Zeta de Riemann, obteniendo aún así el producto de Euler (3.39) y estudiar la derivada logarítmica de ésta.

Como caso particular, para $\chi = 1$, se tiene que la función L de Dirichlet es la Función Zeta de Riemann. Así, podemos expresar la derivada logarítmica de ésta ((3.51) y (3.52)) como sigue

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = -s\int_1^{\infty} \frac{\psi(x)}{x^{s+1}}dx, \quad \sigma > 1, \tag{3.55}$$

donde $\psi(x) = \sum_{n \leqslant x} \Lambda(n) = \phi(s, 1)$ es la función ψ de Chebyshev (Definición 3.1.1).

3.3.5. Demostración Analítica del TNP

En 1859, Riemann, para su ingreso en la Academia de las Ciencias de Berlín, redactó una memoria de ocho páginas que prepararían el camino para llegar posteriormente al Teorema del Número Primo, aún conjetura cuando redactó su memoria, es equivalente al enunciado

$$\psi(x) \sim x. \tag{3.56}$$

La Hipótesis de Riemann es uno de los problemas matemáticos más importantes del momento, aún no resuelto y establece lo siguiente:

Si $\zeta(s) = 0$ para algún $s \in \mathbb{C}$ con $\sigma > 0$ y $s \neq 1$, entonces $\sigma = 1/2$.

Es decir, todos los ceros no triviales de la función Zeta de Riemann, definida como continuación analítica, están en la franja crítica vertical, formada por los números complejos s tales que $\Re(s) = 1/2$.

$\psi(x)$ y el Teorema del Número Primo

La estrategia de Riemann consistió en tratar de obtener información sobre $\psi(x)$ partiendo de las propiedades de la función $\zeta(s)$. Suponiendo cierta la hipótesis de Riemann, se da una conexión entre los ceros $\rho = \sigma + it$ de la función $\zeta(s)$

y el TNP mediante la siguiente fórmula

$$\psi(x) = x - \sum_{\rho} \frac{x^{\rho}}{\rho} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \frac{1}{2}\ln(1 - x^{-2}) \tag{3.57}$$

donde ρ recorre los ceros de la función zeta en $x \geqslant 2$, la cual fue demostrada por Von Mangoldt en 1895. La demostración de esta fórmula es posible encontrarla en [Dav80] pág 104.

Sin embargo, prescindiendo de la hipótesis de Riemann y utilizando una buena región libre de ceros de la función Zeta en la franja crítica, se deduce

$$\psi(x) = x + O(xe^{-c(\ln x)^{1/10}}), \tag{3.58}$$

donde $\psi(x) = \sum_{n \geqslant x} \Lambda(n)$ es la función ψ de Chebyshev, para $c > 0$.

A continuación veremos algunas proposiciones y teoremas para demostrar el enunciado anterior.
En lo sucesivo, usaremos la siguiente notación

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} f(s)ds = \lim_{R\to\infty} \int_{a-iR}^{a+iR} f(s)ds.$$

Observación 3.3.1. *En las demostraciones de los siguientes teoremas y lemas se integrará sobre caminos en el plano complejo, todos orientados en sentido positivo (sentido antihorario).*

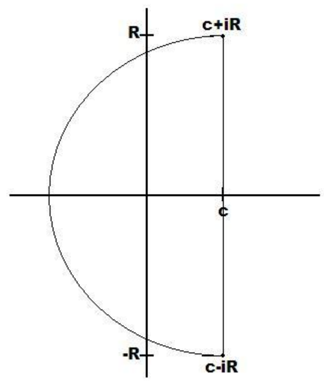
Lema 3.3.1.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{x^s}{s} ds = \begin{cases} 0 & si\ \ 0 < x < 1 \\ 1/2 & si\ \ x = 1 \\ 1 & si\ \ x > 1 \end{cases} \tag{3.59}$$

donde $c > 0$.

Demostración.

Figura (3.1)



Para $x > 1$, con $R > c$,consideremos la región ω_R que une el semicírculo S_R de Radio R y centro en c, con el segmento vertical de $c - iR$ a $c + iR$, encerrando el origen, como en la Figura (3.1) . Se tiene por Teorema del Residuo que

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\omega_R} \frac{x^s}{s} ds = \mathrm{Res}_{s=0}\left(\frac{x^s}{s}\right) = 1,$$

es decir

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{x^s}{s} ds + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S_R} \frac{x^s}{s} ds = 1,$$

solo queda probar que la segunda integral es 0. Para esto, haciendo un cambio de variables, a coordenadas polares, obtenemos

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S_R} \frac{x^s}{s} ds\right| \ll \frac{x^c}{2\pi}\int\limits_{\pi/2}^{3\pi/2} x^{R\cos\theta} d\theta.$$

En vista que $x > 1$ y $\cos\theta$ es negativo en $[\pi/2, 3\pi/2]$, se tiene que $|x^{R\cos\theta}| \leqslant 1$ y escribimos la integral como sigue

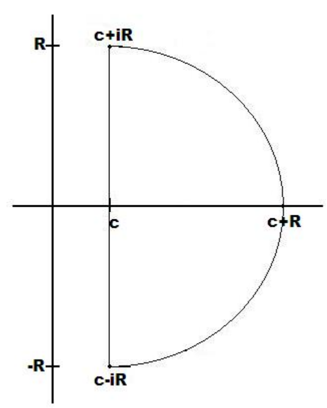
$$\int\limits_{\pi/2}^{3\pi/2} x^{R\cos\theta} d\theta \leqslant \int\limits_{\pi/2}^{\pi/2+\delta} x^{R\cos\theta} d\theta + \int\limits_{\pi/2+\delta}^{3\pi/2-\delta} x^{R\cos\theta} d\theta + \int\limits_{3\pi/2-\delta}^{3\pi/2} x^{R\cos\theta} d\theta,$$

para $\delta > 0$ arbitrario. Donde la primera y tercera integral están acotadas por δ el cual podemos escoger arbitrariamente pequeño de tal manera que las integrales converjan cero. Para la segunda integral, haciendo el cambio de variable $u = \theta - (\pi/2 + \delta)$, se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\pi/2+\delta}^{3\pi/2-\delta} x^{R\cos\theta} d\theta &= \int\limits_{0}^{\pi-2\delta} x^{R\cos(u+\pi/2+\delta)} du \\
&= \int\limits_{0}^{\pi-2\delta} x^{-R\sin(u+\delta)} du \\
&\leqslant \int\limits_{0}^{\pi-2\delta} x^{-R\sin\delta} du \\
&= x^{-R\sin\delta}(\pi - 2\delta) \\
&\leqslant \pi x^{-R\sin\delta},
\end{aligned}$$

luego cuando R tiende a infinito ésta tiende a cero.

Figura (3.2)



Para $0 < x < 1$, $R > c$, considereos la región D_R que une el segmento vertical de $c - iR$ a $c + iR$ con el semicírculo S_R de Radio R y centro en c, esta vez por la derecha del segmento, sin encerrar el origen, como en la Figura (3.2). Se tiene por Teorema del Residuo lo siguiente

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{D_R} \frac{x^s}{s} ds = 0,$$

es decir

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{x^s}{s}ds+\frac{1}{2\pi i}\int_{S_R}\frac{x^s}{s}ds=0,$$

donde vimos de lo anterior que la segunda integral se hace cero cuando R tiende a ifinito.
Para $x=1$, consideremos el camino $s(t)=c+it$, con $-R\leqslant t\leqslant R$, se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{ds}{s} &= \lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iR}^{c+iR}\frac{ds}{s}\\
&= \lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R}\frac{dt}{c+it}\\
&= \lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R}\frac{c-it}{c^2+t^2}dt\\
&= \lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-R/c}^{R/c}\frac{1}{1+u^2}du-i\int_{-R}^{R}\frac{t}{c^2+t^2}dt\right)\\
&= \lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi}\arctan u\,|_{-R/c}^{R/c}\\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

♦

Teorema 3.3.6. *Sea*

$$\delta(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{x^s}{s}ds,$$

como en el lema anterior. Sea

$$I(x,R)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iR}^{c+iR}\frac{x^s}{s}ds,$$

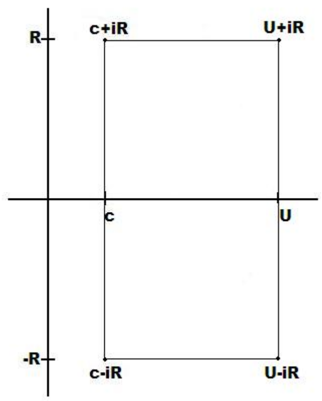
entonces

$$|I(x,R)-\delta(x)|<\begin{cases} x^c\min(1,R^{-1}|\ln x|^{-1}) & si\ \ x\neq 1\\ \dfrac{c}{R} & si\ \ x=1\end{cases}$$

para $x>0$*,* $c>0$ *y* $R>0$*.*

Demostración.

Figura (3.3)



Supongamos $0 < x < 1$. Consideremos el entorno rectangular K_U con vértices $c - iR$, $c + iR$, $U + iR$, $U - iR$, con $U > 0$, Figura (3.3). Por Teorema del Residuo,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{K_U} \frac{x^s}{s} ds = 0 = \delta(x),$$

luego

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iR}^{c+iR} \frac{x^s}{s} ds - \delta(x) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{c+iR}^{U+iR} \frac{x^s}{s} ds + \frac{1}{2\pi i}\int_{U-iR}^{U+iR} \frac{x^s}{s} ds + \frac{1}{2\pi i}\int_{c-iR}^{U-iR} \frac{x^s}{s} ds. \tag{3.60}$$

Donde, si consideramos el camino $s(t) = t + iR$, con $t \in [c, U]$, obtenemos la siguiente estimación para la primera integral de (3.60)

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{c+iR}^{U+iR} \frac{x^s}{s} ds\right| &\leqslant \frac{1}{R}\int_{c}^{U} x^t dt \\ &= \frac{1}{r\ln x}(x^U - x^c) \\ &= \frac{x^c}{R|\ln x|} \end{aligned}$$

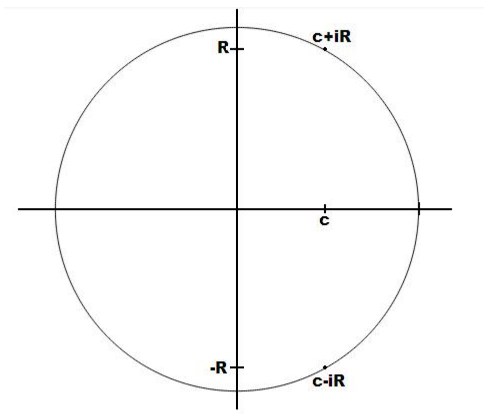
si $U \to \infty$. Para estimar la segunda integral de (3.60), consideremos $s(t) = U - iR + 2tiR$, con $t \in [0, 1]$

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{U-iR}^{U+iR} \frac{x^s}{s} ds\right| \leqslant \frac{R}{U}\int_{0}^{1} x^U dt$$

$$= \frac{Rx^u}{u},$$

la cual se hace cero si $u \to \infty$.
La tercera integral de (3.60) se estima de manera similar a la primera.

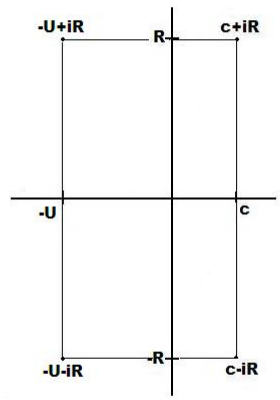
Figura (3.4)



Ahora, si consideramos el círculo de radio $\sqrt{c^2 + R^2}$ con centro en el origen, el cual pasa por los puntos $c - iR$ y $c + iR$, Figura (3.4)

$$\begin{aligned}
|I(x, R)| &\leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x^{\sqrt{c^2+R^2}} d\theta \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x^c d\theta \\
&= x^c.
\end{aligned}$$

Figura (3.5)



Supongamos $x > 1$, consideramos el entorno rectangular K_{-U}, con vértices $c+iR$, $c-iR$, $-U-iR$, $-U+iR$, con $U > 0$, esta vez encerrando el origen, Figura (3.5). Por Teorema del Residuo se tiene,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{K_U} \frac{x^s}{s}ds = 1 = \delta(x),$$

luego

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iR}^{c+iR} \frac{x^s}{s}ds - \delta(x) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iR}^{-U-iR} \frac{x^s}{s}ds - \frac{1}{2\pi i}\int_{-U-iR}^{-U+iR} \frac{x^s}{s}ds - \frac{1}{2\pi i}\int_{-U+iR}^{c+iR} \frac{x^s}{s}ds. \tag{3.61}$$

Donde, se obtienen las estimaciones de las integrales de (3.61) de igual manera que en el caso anterior. Analogamente, considerando el círculo de radio $\sqrt{c^2+R^2}$ se obtiene la segunda estimación.
Ahora, para $x = 1$, consideremos el camino $s(t) = c + it$, con $-R \leqslant t \leqslant R$, al igual que en el Lema 3.3.1, se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iR}^{c+iR} \frac{ds}{s} &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{R} \frac{c-it}{c^2+t^2}dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{c-it}{c^2+t^2}dt - \frac{1}{\pi}\int_{R}^{\infty} \frac{c-it}{c^2+t^2}dt \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\int_{R}^{\infty} \frac{c-it}{c^2+t^2}dt,
\end{aligned}$$

donde

$$\left| -\frac{1}{\pi} \int_R^{\infty} \frac{c - it}{c^2 + t^2} dt \right| < \frac{c}{R}.$$

♦

Proposición 3.3.4. *Para* $a > 1$,

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \frac{x^s}{s} ds. \tag{3.62}$$

Demostración. Por (3.55) y haciendo uso del Lema 3.3.1 tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \frac{x^s}{s} ds &= \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \frac{x^s}{s} ds \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) \left(\frac{x}{n}\right)^s \frac{ds}{s} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^s \frac{ds}{s} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n).
\end{aligned}$$

♦

Lema 3.3.2. *Para* $\sigma = \Re(s) > 0$,

$$\zeta(s) = \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m^s} - \frac{n^{-s}}{2} + \frac{n^{1-s}}{s-1} - s \int_n^{\infty} \frac{x - [x] - 1/2}{x^{s+1}} dx.$$

Demostración. Usando la fórmula de sumación de Euler-Maclaurin, con $f(t) = 1/t^s$ y $k = 0$,

$$\begin{aligned}
\sum_{m=n}^{B} &= \int_n^B \frac{dt}{t^s} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{B^s} - \frac{1}{n^s}\right) - s \int_n^B \frac{x - [x] - 1/2}{t^{s+1}} dt \\
&= \frac{1}{(1-s)B^{s-1}} - \frac{1}{(1-s)n^{s-1}} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{B^s} - \frac{1}{n^s}\right) - s \int_n^B \frac{x - [x] - 1/2}{t^{s+1}} dt,
\end{aligned}$$

haciendo $B \to \infty$

$$\begin{aligned}\sum_{m=n}^{\infty} \frac{1}{m^s} &= -\frac{1}{2n^s} - \frac{n^{1-s}}{1-s} - s\int_n^{\infty} \frac{x-[x]-1/2}{t^{s+1}}dx \\ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s} - \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m^s} &= -\frac{1}{2n^s} - \frac{n^{1-s}}{1-s} - s\int_n^{\infty} \frac{x-[x]-1/2}{t^{s+1}}dx,\end{aligned}$$

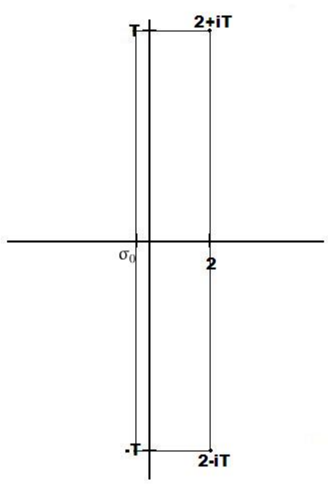
por lo tanto,

$$\zeta(s) = \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m^s} - \frac{n^{-s}}{2} + \frac{n^{1-s}}{s-1} - s\int_n^{\infty} \frac{x-[x]-1/2}{x^{s+1}}dx.$$

♦

Estudiaremos $\zeta(s)$ en la región R_T descrita por el rectángulo $2 - iT$, $2 + iT$, $\sigma_0 + iT$, $\sigma_0 - iT$, donde $\sigma_0 = 1 - 1/\ln T$, $T \geqslant e^2$.

Figura (3.6)



Lema 3.3.3. *Para* $s \in R_T$,

$$\zeta(s) - \frac{1}{s-1} = O(\ln T).$$

DEMOSTRACIÓN. Usando el lema precedente, se tiene

$$\zeta(s) - \frac{1}{s-1} = \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m^s} - \frac{1}{2n^s} + \frac{n^{1-s}-1}{s-1} - s\int_n^{\infty} \frac{x-[x]-1/2}{x^{s+1}}dx$$

$$= \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m^s} - \frac{1}{2n^s} - \int_1^n \frac{1}{x^s} dx - s \int_n^\infty \frac{x - [x] - 1/2}{x^{s+1}} dx,$$

aplicando módulo, considerando que $s = \sigma + it$ y que $|x - [x] - 1/2| \leqslant 1/2$, la desigualdad queda

$$\left| \zeta(s) - \frac{1}{s-1} \right| \leqslant \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m^\sigma} + \frac{1}{2n^\sigma} + \int_1^n \frac{1}{x^\sigma} dx + \frac{|s|}{2} \int_n^\infty \frac{dx}{x^{\sigma+1}}. \tag{3.63}$$

Ahora, nótese que

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{m=2}^{n-1} \frac{1}{m^\sigma} &\leqslant 1 + \int_1^{n-1} \frac{1}{x^\sigma} dx \\ &< 1 + \int_1^n \frac{1}{x^\sigma} dx, \end{aligned}$$

entonces (3.63) queda

$$\begin{aligned} \left| \zeta(s) - \frac{1}{s-1} \right| &\leqslant 1 + \frac{1}{2n^\sigma} + 2\int_1^n \frac{1}{x^\sigma} dx + \frac{|s|}{2} \int_n^\infty \frac{dx}{x^{\sigma+1}} \\ &< 1 + 2\left(\frac{n^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} \right) + \frac{n^{-\sigma}}{2} + \frac{|s| n^{-\sigma}}{2\sigma}. \end{aligned} \tag{3.64}$$

Tomemos $n = [T]$, en R_T con $|s| < 2 + T$ y $\sigma > 1/2$, (3.64) queda

$$\begin{aligned} \left| \zeta(s) - \frac{1}{s-1} \right| &< -\frac{3}{2(1-\sigma)} + \frac{2T^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \frac{T^{-\sigma}}{2} + |s| T^{-\sigma} \\ &\leqslant -\frac{3}{2} \ln T + T^{1/\ln T} \left(2 \ln T + \frac{1}{2T} + \frac{2+T}{T} \right) \\ &\leqslant c_1 \ln T + c_2 (c_3 \ln T + c_4 + c_5) \\ &\ll \ln T, \end{aligned}$$

con c_i, $i = 1, \ldots, 5$ constantes. ♦

Lema 3.3.4. *Para* $s \in R_T$,

$$\zeta'(s) + \frac{1}{(s-1)^2} = O(\ln^2 T).$$

Demostración. Usando el Lema 3.3.2 y derivando se obtiene,

$$
\begin{aligned}
\zeta'(s)+\frac{1}{(s-1)^2} &= -\sum_{m=1}^{n-1} m^{-s}\ln m+\frac{n^{-s}\ln x}{2}-\frac{n^{1-s}((s-1)\ln x+1)}{(s-1)^2}\\
&\quad -\int_n^{\infty}\frac{x-[x]-1/2}{x^{s+1}}dx+s\int_n^{\infty}\frac{x-[x]-1/2}{x^{s+1}}\ln x dx+\frac{1}{(s-1)^2},
\end{aligned}
$$

aplicando módulo, considerando que $s=\sigma+it$, que $|x-[x]-1/2|\leqslant 1/2$ y estimando los términos como en Lema 3.3.3, para $n=[T]$, en R_T con $|s|<2+T$ y $\sigma>1/2$, obtenemos

$$
\begin{aligned}
\left|\zeta'(s)+\frac{1}{(\sigma-1)^2}\right| &\leqslant \sum_{m=1}^{n-1} m^{-\sigma}\ln m+\frac{n^{-\sigma}\ln x}{2}+\frac{n^{1-\sigma}((\sigma-1)\ln x+1)}{(\sigma-1)^2}\\
&\quad +\frac{1}{2}\int_n^{\infty}\frac{1}{x^{\sigma+1}}dx+\frac{|s|}{2}\int_n^{\infty}\frac{1}{x^{\sigma+1}}\ln x dx+\frac{1}{(\sigma-1)^2}\\
&\leqslant 1+2T^{1-\sigma}\left(\frac{\ln T}{1-\sigma}+\frac{1}{(1-\sigma)^2}+\frac{1}{1-\sigma}\right)+\frac{2}{(1-\sigma)^2}\\
&\quad +\frac{|s|}{2}T^{-(\sigma+1)}\left(\frac{\ln T}{\sigma+1}+\frac{1}{(\sigma+1)^2}\right)\\
&\leqslant c_1(c_2\ln^2 T+c_3)+c_4\ln^2 T+c_5(c_6\ln T+c_7)\\
&\ll \ln^2 T+\ln T\\
&\ll \ln^2 T
\end{aligned}
$$

con c_i, $i=1,\dots,7$ constantes. ♦

Teorema 3.3.7. *Sea* $s=\sigma+it$. *Existen constantes positivas* c_1 *y* c_2 *tales que*

$$1-\frac{c_1}{\ln^9 T}\leqslant\sigma\leqslant 2$$

y

$$|\zeta(s)|>\frac{c_2}{\ln^7 T},$$

donde $1\leqslant|\Im(s)|\leqslant T$.

Demostración. [Mur08] pág 58. ♦

Teorema 3.3.8. *Sea* $s=\sigma+it$. *Para* $1\leqslant|t|\leqslant T$, *existe una constante* $c\geqslant 0$ *tal que*

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}=O(\ln^9 T),$$

para $1-\dfrac{c}{\ln^9 T}\leqslant\sigma\leqslant 2$.

Demostración. Del Teorema 3.3.7 obtenemos que

$$\frac{1}{\zeta(s)} = O(\ln^7 T), \tag{3.65}$$

y del Lema 3.3.4, se obtiene

$$\begin{aligned} \zeta'(s) &= O(\ln^2 T) - \frac{1}{(s-1)^2} \\ &= O(\ln^2 T), \end{aligned} \tag{3.66}$$

combinando (3.65) y (3.66) obtenemos

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = O(\ln^9 T).$$

♦

Ahora podemos demostrar (3.58).

Teorema 3.3.9. *Sea* $\psi(x) = \sum_{n \leqslant x} \Lambda(n)$, *entonces,*

$$\psi(x) = x + O(xe^{-c(\ln x)^{1/10}}),$$

para $c > 0$.

Demostración. Sea $x = n + 1/2$. Usando la Proposición 3.3.4 y aplicando el Teorema 3.3.6 podemos reemplazar la integral infinita por la siguiente integral finita

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-iT}^{a+iT} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \frac{x^s}{s} ds + O\left(\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) \min\left(1, T^{-1} \left|\ln \frac{x}{n}\right|^{-1}\right)\right), \tag{3.67}$$

para $a > 0$ y $T \geqslant 1$.
Para obtener una estimación del término de error consideremos $n < x/2$ o $n > 3x/2$, entonces $|\ln(x/n)| < \ln(3/2)$, además, por Teorema 3.3.7 se tiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^a} << \ln^9 T,$$

así podemos escoger $a = 1 + \frac{c}{\ln^9 T}$, luego $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^a} << (a-1)^{-1}$, por lo tanto se tiene

$$O\left(\frac{x^a}{T}(a-1)^{-1}\right) = O\left(\frac{x^a}{T}\ln^9 T\right).$$

Consideremos ahora $x/2 < n < 3x/2$ y sea $z = 1 - \frac{n}{x}$, entonces $|z| \leqslant 1/2$ y hacemos la expansión de Taylor

$$\ln\left(\frac{x}{n}\right) = -\ln(1-z) = z^2 + \frac{z^2}{2} + \ldots,$$

así $\left|\ln\frac{x}{n}\right| \geqslant \frac{3}{4}|z|$ por lo tanto, como $|x-n| \in \{1/2, 3/2, \ldots, 1/2 + [x]/2\}$ se tiene

$$\log x \sum_{x/2 \leqslant n \leqslant 3x/2} 2^a \frac{x}{T|x-n|} << \frac{x}{T}\ln^2 x.$$

Entonces, el término O queda

$$O\left(x^a \frac{\ln^9 T}{T} + \frac{x\ln^2 T}{T}\right).$$

Considerando que $-\zeta'(s)/\zeta(s)$ tiene un polo simple en $s = 1$ con residuo 1, en la región $a - iT$, $a + it$, $b + iT$, $b - iT$, por Teorema del Residuo se tiene

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-iT}^{a+iT} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\frac{x^s}{s}ds = x - \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{a+iT}^{b+iT} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\frac{x^s}{s}ds + \int_{b+iT}^{b-iT} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\frac{x^s}{s}ds + \int_{b-iT}^{a-iT} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\frac{x^s}{s}ds\right),$$

donde $b = 1 - \frac{c}{\ln^9 T}$. Usando el Teorema 3.3.8 podemos calcular las integrales, obteniendo así

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{a+iT}^{b+iT} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\frac{x^s}{s}ds\right| << \frac{x^a \ln^9 T}{T}$$

y

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{b+iT}^{b-iT} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\frac{x^s}{s}ds\right| << x^b \ln^{10} T.$$

Se tiene, entonces

$$\psi(x) = x + O\left(\frac{x^a \ln^9 T}{T} + x^b \ln^{10} T + \frac{x\ln^2 T}{T}\right).$$

Elegimos T tal que $2c\ln x = \ln^{10} T$, entonces el término del error queda

$$O(xe^{-c_1(\ln x)^{1/10}}),$$

con $c_1 > 0$. ♦

Así, hemos demostrado que prescindiendo de la hipótesis de Riemann podemos llegar a una buena aproximación para la función ψ. Sin embargo, ¿cómo interpretamos este resultado?, en particular hemos obtenido

$$\psi(x) - x = O(xe^{-c_1(\ln x)^{1/10}}),$$

reescribiendo esta ecuación de la siguiente manera,

$$(\psi(x) - \vartheta(x)) + \vartheta(x) - x = O(xe^{-c(\ln x)^{1/10}})$$

y haciendo uso de la Observación 3.1.1, igualdades (3.8) y (3.9), podemos decir

$$\begin{aligned} \vartheta(x) - x &= O(xe^{-c(\ln x)^{1/10}}) - O(\sqrt{x}\ln x) \\ &= O(xe^{-c_1(\ln x)^{1/10}} + c_2\sqrt{x}\ln x). \end{aligned}$$

Por Teorema 3.1.2, igualdad (3.13), reescribimos lo anterior como sigue

$$\pi(x)\ln x - \int_2^x \frac{\pi(t)}{t}dt - x = O(xe^{-c_1(\ln x)^{1/10}} + c_2\sqrt{x}\ln x),$$

de donde obtenemos la estimación para esa integral del Teorema 3.1.3, proposición (1.1),

$$\int_2^x \frac{\pi(t)}{t}dt = O\left(\int_2^x \frac{dt}{\ln t}\right),$$

nótese que aparece el Logaritmo Integral, el cual si integramos sucesivamente por partes obtenemos

$$\int_2^x \frac{dt}{\ln t} = \frac{x}{\ln x} + \frac{x}{(\ln x)^2} + \ldots + n!\frac{x}{(\ln x)^{n+1}} + (n+1)!\int_2^x \frac{dt}{(\ln t)^{n+1}}.$$

En efecto, podemos decir que

$$\int_2^x \frac{dt}{\ln t} = O\left(\frac{x}{\ln x}\right).$$

Obteniendo así,

$$\pi(x) - \frac{x}{\ln x} = O\left(\frac{xe^{-c_1(\ln x)^{1/10}}}{\ln x} + c_2\sqrt{x} + \frac{x}{(\ln x)^2}\right).$$

Nótese que es posible obtener constantes c_1' y c_2' tales que

$$c_2'\sqrt{x}\ln x < xe^{-c_1'(\ln x)^{1/10}},$$

de la misma manera, es posible obtener una constante c_1'' tal que

$$\frac{x}{(\ln x)^2} < xe^{-c_1'(\ln x)^{1/10}},$$

de lo anterior, obtenemos

$$\pi(x) - \frac{x}{\ln x} = O\left(\frac{xe^{-c(\ln x)^{1/10}}}{\ln x}\right). \tag{3.68}$$

De (3.68) podemos obtener,

$$\frac{\pi(x)}{x/\ln x} = 1 + O\left(e^{-c(\ln x)^{1/10}}\right),$$

si hacemos $x \to \infty$, el término de error se aproxima a cero, por lo tanto

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x},$$

obtenemos el TNP.

Bibliografía

[Apo76] Tom M. Apostol. Introduction to Analitic Number Theory. New York: Springer-Verlag, 1976.

[Alh79] Lars V. Alhfors. Complex Analysis. An Introduction to the Theory of Analityc Functions of One Complex Variable. New York: McGraw-Hill, Inc, 1979.

[Bur80] David M. Burton. Elementary Number Theory. U.S.A.: University of New Hampshire, 1980.

[Cal02] Catalina Calderón. La Función Zeta de Riemann. Zaragoza: Real Academia de Ciencias, 2002.

[Che51] Pafnuti L. Chebyshev. Sur la fonction qui détermine la totalité des nombres premiers inferieurs á une limite donée. Mem. Ac. Sc. St. Ptétersbourg, 6: 141-157.(a), 1851.

[Con78] John B. Conway. Functions of One Complex Variable. New York: Springer-Verlag, 1978.

[Dav80] Harold Davenport. Multiplicative Number Theory. New York: Springer-Verlag, 1980.

[Der87] William R. Derrick. Variable Compleja con Aplicaciones. México: Grupo Editorial Iberoamérica, 1987.

[Erd49] Paul Erdös.On a new method in elementary number theory which leads to an elementary proof of the prime number theorem.Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 35: 374-384: MR 10, 595, 1949.

[Had96] Jacques Hadamard.Sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ et ses conséquences arithmétiques.Bull. Soc. Math. France, 24: 199-220, 1896.

[Hal00] Paul Halmos. Naive Set Theory. New York: Springer-Verlag, 2000.

[Ire90] Kenneth Ireland and Michael Rosen. A Classical Introduction to Modern Number Theory. New York: Springer-Verlag, 1990.

[Kon12] J-M De Koninck and Florian Luca. Analythic Number Theory: Exploring the Anatomy of Integers. U.S.A: American Mathematical Society, 2012.

[Kum05] Angel Kumchev The Distribution of Prime Numbers. U.S.A, 2005.

[Mon06] Hugh L. Montgomery and Robert C. Vaughan. Multiplicative number theory I. Classical theory. Cambridge: Cambridge University Press, 2006.

[Mur08] M. Ram Murty. Problems in Analytic Number Theory. Canada: Springer, 2008.

[New98] Donald J. Newman. Analytic Number Theory. New York: Springer-Verlag ,1998.

[Pou96] Charles-Jean de la Vallée Poussin.Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers.Ann. Soc. Sci. Bruxelles, 202: 183-256, 281-297, 1896.

[Rib95] Paulo I. Ribenboim. The new book of Prime Number. New York: Springer-Verlag, 1995.

[Rie59] Bernhard Riemann.Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebener Grösse. Monatsber. Akad. Berlin, 671-680, 1859.

[Rud70] Walter Rudin. Real and complex analysis. McGraw-Hill ,1987.

[San11] José M. Sánchez M. Historias de Matemáticas: Riemann y los Números Primos. Madrid: Revista Pensamiento Matemático, 2011.

[Sel49] Atle Selberg.An elementary proof of the prime number theorem.Ann. of Math., 50: 305-313; MR 10, 595, 1949.

[Str] Andreas Strömbergsson. Lecture notes based on Davenport's book.

[Tes11] Rafael Tesoro. Aspectos Analíticos del Teorema de los Números Primos. Madrid: Universidad Autónoma de Madrid, 2011.