FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

TRATAMIENTO DE LAS TRANSFORMACIONES ISOMÉTRICAS EN TEXTOS ESCOLARES CHILENOS. UN ESTUDIO COMPARATIVO.

MEMORIA DE TÍTULO PRESENTADA POR:

YOHANA LEIVA VILLALOBOS

PAMELA MUÑOZ STUARDO

LISETTE UGARTE ROJAS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE PROFESOR DE EDUCACIÓN MEDIA EN MATEMÁTICA CON MENCIÓN EN DIDÁCTICA

PROFESOR GUÍA: GLADYS GONZÁLEZ

VALPARAÍSO - CHILE - 2013

Agradecimientos

A Dios, por iluminar mi camino y no abandonarme en aquellos momentos de mayor dificultad.

A las personas más importantes en mi vida… mis padres, Jaime y Juana, que hicieron todo en la vida para que pudiera lograr mis sueños. Gracias por confiar en mí, motivarme y darme la mano en aquellos momentos difíciles de mi carrera. Los amo.

A mi hermanita, Natalia, por brindarme su apoyo y alentarme a seguir adelante.

Al amor de mi vida, Roberto, por tu paciencia, comprensión y apoyo. Pues, preferiste sacrificar tu tiempo para que yo pudiera cumplir con el mío.

A mis maestros, que en este andar por la vida influyeron con sus lecciones y experiencias de vida en mi formación como profesional y persona.

A mis compañeras de tesis, Pamela y Lisette, por su comprensión y paciencia. Que, unidas logramos hacer realidad este sueño.

Y a una personita muy especial, mi abuelita mina, que en el cielo junto a Dios debe estar muy orgullosa de mí.

Yohana Leiva Villalobos.

Agradecimientos

Gracias a Dios

Por darme fuerza y tranquilidad en aquellos momentos que parecían difíciles y sentir su compañía en cada paso que he dado.

Gracias a mi familia

En especial a mis padres por su apoyo y confianza que pese a la distancia la sentía día a día, por sus palabras de tranquilidad y duro trabajo para ir en mi ayuda. A mi hermano Luis por sus llamadas y preocupación y a mi hermano Andrés por aquellos buenos momentos mientras ambos estábamos lejos de casa.

Gracias a Ronald Olivares

Por su apoyo y amor incondicional e inmensurable estos años, por estar a mi lado en cada alegría y tristeza y ser el mejor compañero de estudios.

Gracias a mis profesores

En especial a B. Acosta y D. Jiménez por entregar mucho más que conocimientos, los recordaré siempre. Y a aquellos que no son profesores pero sí son parte fundamental del departamento, Gerardo y don Adolfo, muchas gracias por su amabilidad.

Gracias a mis compañeras y profesora guía

Por ser parte de esta importante etapa.

Pamela Muñoz Stuardo.

Agradecimientos

Gracias a mis padres por el sacrificio de todos estos años,
a los amigos que forje en este largo camino
y a mis profesores que fueron parte imprescindible de mi formación.

Lisette Ugarte Rojas.

INDICE GENERAL

CAPÍTULO 1: Antecedentes y Objetivos de la investigación

1.1. Antecedentes de la investigación

La enseñanza de la Matemática ha sido cuestionada socialmente durante años por el bajo nivel de logro obtenido en diferentes evaluaciones ya sea a nivel nacional o internacional. Una primera evidencia de lo anterior se refleja en el Estudio Pisa[1] (2009) donde el promedio alcanzado por los estudiantes de países miembros de la OCDE[2] en Matemática fue de 496 puntos, mientras que el promedio de Chile fue de 421 puntos situándose en el lugar 49 entre los 65 países participantes.

En esta evaluación se distinguen seis niveles[3] de desempeño que indican el tipo de tarea que son capaces de desarrollar los estudiantes. De acuerdo al puntaje promedio obtenido en este estudio, el 78% de nuestros alumnos se encuentran en el nivel dos de desempeño reflejando que:

> Son capaces de interpretar y reconocer situaciones en contextos que requieren sólo inferencia directa, extraer información relevante de sólo una fuente de información a la vez y hacer uso de una sola forma de representación. Pueden utilizar algoritmos, fórmulas, procedimientos o convenciones básicas, son capaces de razonar directamente y de hacer interpretaciones literales de los resultados (Ministerio de Educación de Chile, 2009, p. 16).

[1] Estudio Pisa (Programme for International Student Assessment) perteneciente a la OCDE, evalúa cada tres años las competencias de los alumnos en Lectura, Matemática y Ciencias, contempla la aplicación de pruebas estandarizadas a una muestra nacional de jóvenes de 15 años.

[2] OCDE: Organización para la cooperación y el desarrollo económico, la cual promueve políticas para mejorar el bienestar económico y social de las personas alrededor del mundo.

[3] Los seis niveles de desempeño del estudio Pisa son presentados de manera ascendente donde el Nivel 1 es el más bajo y el Nivel 6 el más alto. Además cada nivel descrito incluye los inferiores, es decir, si un estudiante alcanza el Nivel 4, también tiene las competencias para desarrollar las tareas descritas en los niveles inferiores.

Además el 22% de los estudiantes se ubica bajo el primer nivel, lo que indica que no dominan competencias básicas y elementales (ver tabla de niveles en anexo 1).

Cabe destacar que un total de 30 puntos separa el puntaje alcanzado entre alumnos de instituciones municipales e instituciones particulares subvencionadas de Chile, elevándose aún más la brecha entre colegios municipales y particulares llegando a 124 puntos.

Un nuevo antecedente respecto de la precaria formación de estudiantes chilenos se obtiene a través de la evaluación TIMSS[4] (2011) aplicada a estudiantes de Octavo Año Básico, donde según los resultados obtenidos el puntaje promedio de los alumnos es de 416 puntos, encontrándose bajo el promedio internacional, en el lugar 31 entre los 42 países participantes. En particular en el eje de geometría (considerado como foco de esta investigación) nuestros estudiantes obtienen un promedio de 419 puntos, encontrándose en segundo lugar entre los demás contenidos matemáticos.

Según informe emitido por la División de Estudios de la Agencia de Calidad de la Educación los resultados anteriores reflejan que un 43% de nuestros alumnos muestra logros inferiores a los descritos en esta prueba, es decir, no alcanzan el puntaje mínimo (400 puntos) considerado en esta evaluación; el 34% alcanza el *nivel bajo* teniendo sólo algunos conocimientos matemáticos básicos, como realizar cálculos con números naturales; un 18% llega al *nivel intermedio*, indicando que los estudiantes son capaces de aplicar conocimientos matemáticos en situaciones reales como resolver problemas por medio de ecuaciones lineales con una incógnita; el 4% alcanzan el *nivel alto*, donde pueden aplicar su comprensión y conocimiento matemático en una amplia variedad de situaciones relativamente complejas como lo es determinar el área y volumen de figuras geométricas, y sólo el 1% está en un *nivel avanzado*, es decir, es capaz de organizar información, hacer generalizaciones, resolver problemas no rutinarios y justificar conclusiones a partir de datos

[4] TIMSS (Estudio Internacional de Tendencias en Matemáticas y Ciencias) es una prueba internacional de carácter curricular, está mide las competencias de los estudiantes en las áreas de Matemática y Ciencias determinando cuánto del curriculum vigente de cada país fue implementado por los profesores y los logros efectivos de aprendizaje

(División de Estudios de la Agencia de Calidad de la Educación, 2011, p. 47) (ver niveles en anexo 2).

Un tercer antecedente se extrae de la resolución del facsímil de la prueba PSU[5] de matemática aplicada el año 2007 desarrollado por el DEMRE[6] (2008) donde se señala que de los cuatro ejes temáticos que conforman la PSU en la parte matemática, geometría presenta cada año el más bajo porcentaje de respuestas correctas y el más alto porcentaje de respuestas omitidas (DEMRE, 2008, p. 3).

A continuación se presenta un problema inserto en dicho facsímil que pretende evidenciar aun más la problemática en el ámbito de la Geometría, en particular en las Transformaciones Isométricas.

Pregunta 40: Al punto (2,3) del plano se le aplica una traslación, obteniéndose el punto (5,2). Si al punto (-2,-1) se le aplica la misma traslación se obtiene el punto:

a) (1, -2) b) (-5,0) c) (3,-1) d) (-5,2) e) (1,0)

DEMRE, 2008

Para responder la pregunta es necesario conocer y aplicar el concepto de traslación, la cuál es definida como una función del tipo:

$$\tau: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \longrightarrow (x + a, y + b)$$

[5] PSU: Prueba de Selección Universitaria, está compuesta por cuatro pruebas que son desarrolladas, administradas, aplicadas y reportadas por el DEMRE. Son instrumentos de evaluación educacional que miden la capacidad de razonamiento de los postulantes egresados de la Enseñanza Media, teniendo como medio, los contenidos del Plan de Formación General de Lenguaje y Comunicación, de Matemática, de Historia y Ciencias Sociales y de Ciencias.

[6] DEMRE: Departamento de Evaluación, Medición y Registro Educacional. Es el organismo técnico de la Universidad de Chile responsable del desarrollo y construcción de instrumentos de evaluación y medición de las capacidades y habilidades de los egresados de la enseñanza media.

Como ejemplo se tiene que la imagen del punto $(2,3)$ es el punto $(5,2)$, es decir, que al aplicar la función se debe obtener: $\tau(2,3) = (5,2)$

De esto se puede concluir que para obtener el punto $(5,2)$ se debe aumentar en tres unidades la abscisa y disminuir en una unidad la ordenada del punto original $(2,3)$, por lo tanto la función τ para el problema planteado se define como:

$$\begin{aligned} \tau: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longrightarrow (x+3, y-1) \end{aligned}$$

De ahí, aplicando la función τ al punto $(-2,-1)$ se obtiene:

$$\begin{aligned} \tau: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (-2,-1) &\longrightarrow (-2+3, -1-1) = (1,-2) \end{aligned}$$

De esta forma el resultado del problema es el punto $(1,-2)$ siendo la alternativa a) la correcta.

Los estudios por parte del DEMRE (2008) evidencian que sólo el 34,7% de los alumnos que rindieron esta prueba contestó correctamente esta pregunta y el 39, 6% la omitió (DEMRE, 2008, p. 6) lo que indica que los estudiantes presentan dificultad en la comprensión y aplicación de la transformación isométrica traslación.

Luego de las evidencias presentadas y considerando que el Ministerio de Educación en su Actualización Curricular (2009) considera que:

> Los textos escolares desarrollan los contenidos definidos en el Marco Curricular para apoyar el trabajo de los alumnos y alumnas en el aula y fuera de ella, y les entregan explicaciones y actividades para favorecer su aprendizaje y su autoevaluación [además de ser para los docentes] una propuesta metodológica para apoyar la implementación del currículum en el aula, y los orientan sobre la extensión y profundidad con que pueden ser abordados los contenidos del Marco Curricular (Ministerio de Educación de Chile, 2009, pp. 5-6)

Surge la inquietud y el interés de estudiar la concordancia de las propuestas de enseñanza que entregan los textos escolares con el marco curricular chileno, la teoría matemática formal y el desarrollo de las habilidades de los estudiantes, considerando las transformaciones isométricas, con la finalidad de dar respuesta a las siguientes interrogantes:

¿Serán los textos escolares realmente un material de apoyo útil para cumplir con los requerimientos del programa de estudio y del marco curricular chileno respecto de las transformaciones isométricas?

¿Se organizan los conocimientos matemáticos en los textos escolares de acuerdo al marco curricular del año 2009?

¿Qué tipo de habilidades que son indicadas en el marco curricular permiten verdaderamente desarrollar las actividades propuestas por los textos escolares en la unidad de transformaciones isométricas en el plano cartesiano a nivel de primer año medio?

¿Fomentan los textos escolares, utilizados por alumnos de primer año medio, al desarrollo del razonamiento matemático, en particular, la formulación y verificación de conjeturas a través de sus definiciones, problemas y ejercicios propuestos en el tratamiento de las Transformaciones Isométricas en el Plano Cartesiano?

1.2. Objetivos de la investigación

1.2.1. Objetivo General

Indagar si los textos escolares de matemática de primer año medio responden a lo que se espera de ellos según lo establecido en el marco curricular chileno acerca del aprendizaje de las trasformaciones isométricas.

1.2.2. Objetivos Específicos

- Diseñar y aplicar una pauta que permita estudiar comparativamente el tratamiento de las transformaciones isométricas realizadas en textos escolares de primer año medio en base a los requerimientos del marco curricular chileno, la evolución de conocimientos matemáticos y el desarrollo de habilidades.

- Comparar el tratamiento de las transformaciones isométricas realizadas en textos escolares de uso frecuente en primer año medio bajo la óptica de las expectativas del curriculum chileno relativas a desarrollo de habilidades, aprendizaje de contenidos y consistencia matemática de la evolución de estos.

2.1. Requerimientos ministeriales respecto al concepto de las transformaciones isométricas.

Los programas de estudio chilenos sugieren una propuesta que permite organizar y a la vez orientar el trabajo pedagógico de los docentes en el aula, promoviendo el logro de los objetivos fundamentales (OF) y el óptimo desarrollo de los contenidos mínimos obligatorios (CMO) a través del cumplimiento de los aprendizajes esperados (AE) definidos por el marco curricular.

Los aprendizajes esperados permiten ejecutar actos cognitivos y/o motrices catalogando como habilidades “la búsqueda y comparación de caminos de solución, análisis de los datos y de las soluciones, anticipación y estimación de resultados, búsqueda de regularidades y patrones, formulación de conjeturas, formulación de argumentos y diversas formas de verificar la validez de una conjetura o un procedimiento, el modelamiento de situaciones o fenómenos” (Marco Curricular, 2009, p. 147), competencias que son parte del razonamiento matemático consideradas en este estudio.

Ahora bien, respecto a los aprendizajes esperados relacionados con el estudio de las transformaciones isométricas, se observa que en octavo año básico hay un primer acercamiento sobre este tema específico, pues los estudiantes al término de la unidad deben ser capaces de caracterizar y construir estas transformaciones en el plano euclidiano, para luego en primer año medio proyectar al plano cartesiano, proponiendo al docente enfatizar las diferencias entre ambos planos.

Cabe hacer notar que el primer aprendizaje de la unidad de geometría en primer año medio está orientado a la caracterización del plano cartesiano donde se espera que los estudiantes identifiquen y representen puntos en este, para luego dar paso al estudio de vectores, tanto su notación como su representación gráfica en el plano cartesiano, sin relacionar necesariamente este concepto con las transformaciones isométricas (en particular con las traslaciones), además de encontrar las componentes que resultan de la adición de vectores y de la multiplicación de un vector por un escalar. Posteriormente se inicia el proceso de aplicación de transformaciones isométricas a figuras geométricas en el plano cartesiano motivando la identificación de regularidades, además de la formulación y/o verificación de conjeturas ya sea por la aplicación de una o sucesivas transformaciones, relacionando esto último a la composición de funciones (el curriculum chileno sugiere relacionar con lo estudiado en la unidad de Álgebra).

2.2. Isometrías como objetos matemáticos formales:

Como se ha mencionado, en octavo año básico se comienza el estudio de las transformaciones isométricas en el plano euclidiano, para posteriormente en primer año medio, proyectar este estudio al plano cartesiano, por esto se estudiará la construcción del concepto de transformaciones isométricas en ambos plano.

Según Bracho (2003) y Ewald (1971) el plano euclidiano está dotado de un conjunto de puntos y se extiende indefinidamente a semejanza de un pizarrón, un papel o una pared, acompañado de las nociones como rectas y distancia. Este es un tipo de plano métrico que cumple con los axiomas afines, de ortogonalidad y de colineaciones. A continuación se entrega la definición de plano métrico y se detallan estos axiomas:

El Plano Métrico es una estructura de incidencia $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, I, \perp)$ donde:
$\mathcal{P}$ es un conjunto de puntos.
$\mathcal{L}$ es un conjunto de rectas.
I es una relación de incidencia entre puntos y rectas.
$\perp$ es una relación de ortogonalidad entre rectas (perpendicularidad).

Axiomas afines:

Axioma 1: Por dos puntos cualesquiera y distintos pasa una única recta (ver representación en imagen 1).

Imagen 1

Axioma 2: Cada recta contiene al menos tres puntos (ver representación en imagen 2).

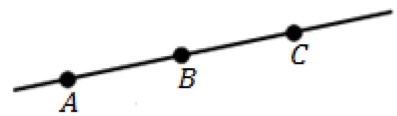


Imagen 2

Axioma 3: Existen tres puntos no colineales (ver representación en imagen 3).

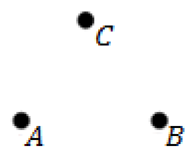


Imagen 3

Axiomas sobre la relación de ortogonalidad

Axioma 1: La relación de ortogonalidad es simétrica, es decir: Si $a, b \in \mathcal{L}$ y a es ortogonal a b entonces b es ortogonal a a.

Axioma 2: Sea $P \in \mathcal{P}, \ell \in \mathcal{L}$ entonces existe un elemento m de $\mathcal{L}$ talque P incide con m y m es ortogonal a ℓ.

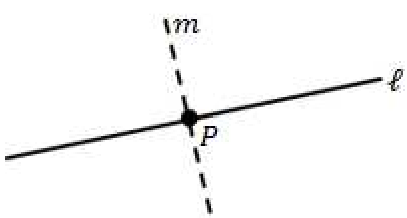


Imagen 4

Por un punto y una recta pasa siempre una recta perpendicular. Cuando $P\ I\ \ell$, m es única (ver representación en imagen 4).

Axioma 3: Si $a, b \in \mathcal{L}$ y a ortogonal a b entonces $a \cap b \neq \emptyset$. Dos rectas perpendiculares en el plano siempre se intersectan.

Axioma sobre las colineaciones de un plano métrico. Isometrías o movimientos rígidos.

Sea $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, I, \perp)$ un plano métrico. La función biyectiva: $f: \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$; $g: \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}$ se llama una colineación si:

i. *Preserva distancia:* Sea $\boldsymbol{P} \in \boldsymbol{\mathcal{P}}$ y $\boldsymbol{\ell} \in \boldsymbol{\mathcal{L}}$, $\boldsymbol{P}\ \boldsymbol{I}\ \boldsymbol{\ell}$ entonces $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{P})\ \boldsymbol{I}\ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{\ell})$

ii. *Preserva ortogonalidad:* Sea $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{\mathcal{L}}$, $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$ entonces $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) \perp \boldsymbol{g}(\boldsymbol{b})$

Reflexión:

Sea $a \in \mathcal{L}$. La colineación R_a se llama reflexión de eje a si:

i. Para todo $\boldsymbol{P} \in \boldsymbol{\mathcal{P}}$ se cumple que si $\boldsymbol{P}\ \boldsymbol{I}\ \boldsymbol{a}$ entonces $\boldsymbol{R_a}(\boldsymbol{P}) = \boldsymbol{P}$

ii. Sea $\boldsymbol{Id}$ la función identidad, entonces $\boldsymbol{R_a} \neq \boldsymbol{Id}$

Axiomas sobre reflexión:

Axioma 1: Si $a \in \mathcal{L}$ entonces existe una única reflexión R_a la cual tiene como eje la recta a (es decir, cada recta es el eje de una única reflexión)

Axioma 2: Para todo $a \in \mathcal{L}$ se tiene que $R_a \circ R_a = Id$ (ver representación en imagen 5)

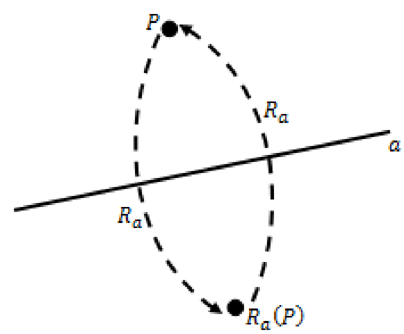


Imagen 5

Rotación:

Sean $a, b \in \mathcal{L}$ entonces se tiene que $\{P\} = a \cap b$ (ver representación en imagen 6)

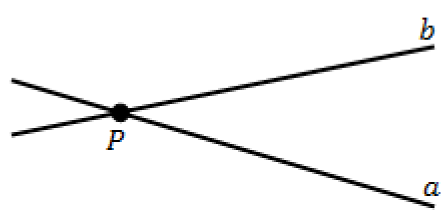


Imagen 6

Sea R_a, R_b reflexiones y A un punto cualquiera, la colineación $\Delta = R_b \circ R_a$ se llama rotación de centro P.

Sea ℓ recta talque $P\ I\ \ell$, entonces el par $(\ell, \Delta(\ell))$ se llama ángulo de rotación Δ (ver representación en imagen 7).

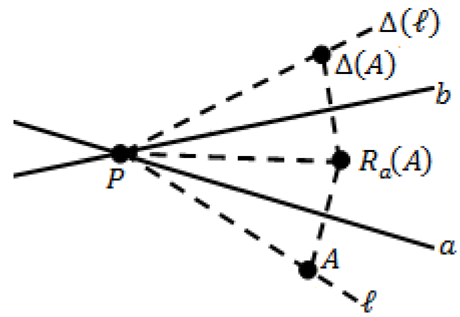


Imagen 7

Axioma sobre rotaciones:

Sea Δ una rotación de centro P.

Sea ℓ recta, $P\ I\ \ell$ y $\ell' = \Delta(\ell)$, entonces existe una recta d y un punto Q donde $P\ I\ d$ talque para todo $Q\ I\ \ell$ resulta que $\Delta(Q) = R_d(Q)$ (ver representación en imagen 8)

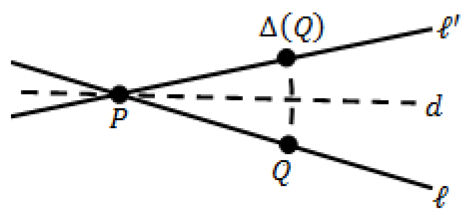


Imagen 8

Traslación:

Sean a, b y c rectas talque $a \perp c$ y $b \perp c$.

Sea R_a y R_b traslaciones. La colineación $R_a \circ R_b$ se llama traslación en la dirección de c (ver representación en imagen 9).

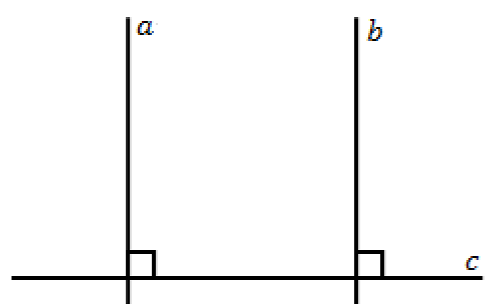


Imagen 9

Axioma sobre traslaciones:

Sea τ traslación a lo largo de t. Sea ℓ una recta talque $\ell \perp t$ y $\tau(\ell) = \ell'$.

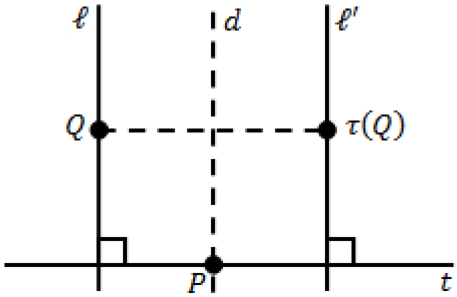


Imagen 10

Entonces existe d una recta tal que $d \perp t$ para todo $Q\ I\ \ell$ resulta $\tau(Q) = R_d(Q)$ (ver representación en imagen 10)

Plano cartesiano y transformaciones isométricas:

Desde el punto de vista funcional cada eje del plano cartesiano surge mediante la correspondencia biunívoca entre cada punto que conforma una recta del plano euclidiano y los números reales, que de acuerdo al concepto de distancia y considerando un punto como origen (que corresponde al número cero), conforman la recta numérica, luego a cada número real le corresponde un punto perteneciente a una recta del plano euclidiano y viceversa. Posteriormente, se consideran dos rectas ortogonales en el plano euclidiano cuyo punto de intersección se llamó origen, esto en conjunto al quinto postulado de Euclides: *Dada una línea recta y un punto fuera de ella, existe una única recta que pasa por el punto y que es paralela a la línea*, hizo posible identificar la posición de un punto en el plano euclidiano como sigue:

Se considera un punto P en el plano euclidiano y dos rectas perpendiculares mencionadas anteriormente definidas como ℓ_1 y ℓ_2 (ver representación en imagen 11).

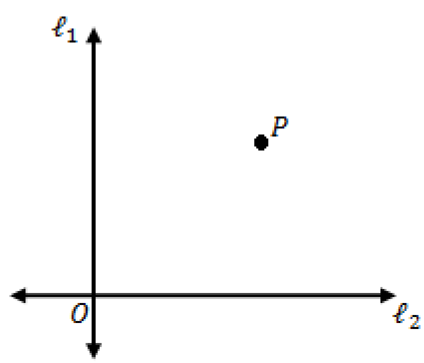


Imagen 11

Por el quinto postulado se tiene que existe una única recta que pasa por P paralela a ℓ_1 denominada $\ell_1{}'$ además, existe una única recta $\ell_2{}'$ que pasa por P y que es paralela a ℓ_2 (ver imagen 12), donde las intersecciones de $\ell_1{}'$con ℓ_2 y $\ell_2{}'$ con ℓ_1 determinan los puntos P_1 y P_2 números reales x e y respectivamente, talque $P = (x, y)$.

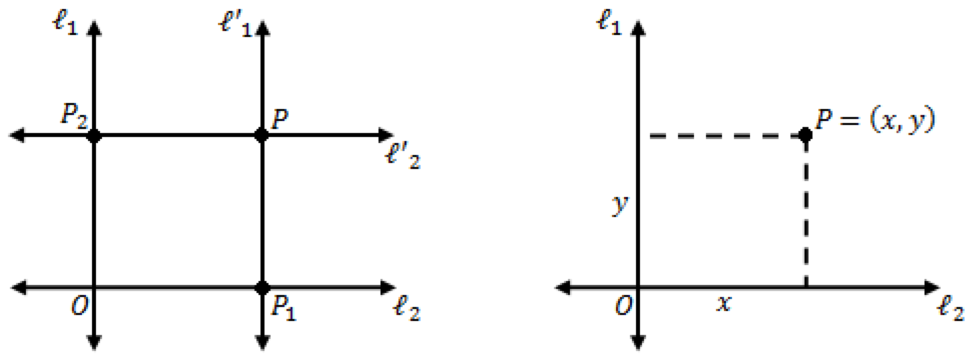


Imagen 12

De esta forma fue posible describir la ubicación de un punto en el plano euclidiano identificándolo con una pareja de números reales en el plano cartesiano, donde el conjunto de todas las parejas de número reales se denota por $\mathbb{R}^2$ que corresponde a $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, conjunto que posee características algebraicas, por lo que es posible definir una métrica o función distancia d en $\mathbb{R}^2$ que cumple las siguientes propiedades:

i. $\boldsymbol{d(x,y) \geq 0}$, para todo par $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ en $\mathbb{R}^{\mathbf{2}}$ y $\boldsymbol{d(x,y) = 0}$, si y sólo si $\boldsymbol{x = y}$.
ii. $\boldsymbol{d(x,y) = d(y,x)}$ Siempre que $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ en $\mathbb{R}^{\mathbf{2}}$.
iii. $\boldsymbol{d(x,z) \leq d(\mathrm{x},y) + d\,(y,z)}$ para todo $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}$.

Ahora, considerando el conjunto $\mathbb{R}^2$ tenemos que una transformación de un punto $A(x, y)$ es una operación o aplicación que asocia a este punto una imagen o punto transformado $A_1(x_1, y_1)$, de modo que, se puede establecer una correspondencia en el conjunto de todos los puntos del plano, tal que a cada punto de $\mathbb{R}^2$ le corresponde uno y sólo uno de los puntos del mismo plano, por consiguiente se puede definir la siguiente relación:

Definición: Una función $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es una isometría si preserva distancia. Es decir, si para todo par $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ se cumple que $d(x, y) = d(f(x), f(y))$ (ver imagen 13)

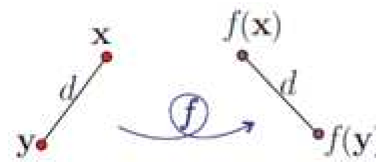


Imagen 13

Nota: En particular, la función identidad $Id: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es una isometría, para todo par $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $Id(x, y) = (x, y)$.

A continuación se entrega la demostración de tres lemas importantes que conllevan a demostrar que las isometrías forman un grupo de transformaciones:

Lema 1: Una isometría $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es inyectiva

Demostración: Esto se debe a que la distancia entre puntos diferentes es estrictamente positiva. Formalmente, supongamos que $x, y \in \mathbb{R}$ son tales que $f(x) = f(y)$. Esto implica que $d(f(x), f(y)) = 0$. Como f es isometría, entonces $d(x, y) = d(f(x), f(y)) = 0$ y por lo tanto que $x = y$.

Lema 2: Si $f, g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ son isometrías entonces $g \circ f$ también lo es.

Demostración: Usando la regla de composición y la definición de isometría dos veces (primero para g y luego para f), se obtiene que para cualquier $x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} d((g \circ f)(x), (g \circ f)(y)) &= d(g(f(x)), g(f(y))) \\ &= d\big(f(x), f(y)\big) \quad \text{(Porque } g \text{ preserva distancia)} \\ &= d(x, y) \quad \text{(Porque } f \text{ preserva distancia)} \end{aligned}$$

Y por tanto $g \circ f$ pertenece a las isometrías de $\mathbb{R}^2$ $(Iso(2))$

Lema 3: Si $f \in Iso(2)$ y tiene inversa f^{-1}, entonces $f^{-1} \in Iso(2)$.

Demostración: Dados $x, y \in \mathbb{R}$, se tiene que:

$$d(f^{-1}(x), f^{-1}(y)) = d(f(f^{-1}(x)), f(f^{-1}(y)))$$

Pues f es isometría; pero la última expresión es $d(x,y)$, lo cual demuestra que $f^{-1} \in Iso(2)$. Con lo anteriormente demostrado y sabiendo que además las isometrías son sobreyectivas se concluye que $Iso(2)$ es un grupo de transformaciones.

Ahora en particular, existen tres tipos de isometrías en el plano cartesiano, a saber, traslaciones, rotaciones y simetrías, las que se detallan a continuación:

Traslaciones

Dado un vector $b \in \mathbb{R}^2$ y un punto $x \in \mathbb{R}^2$ la traslación por b, es la función (ver imagen 14):

$$\tau_b : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\tau_b\,(x) = x + b$$

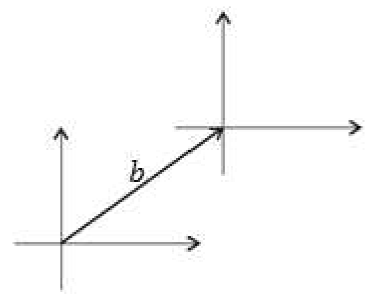


Imagen 14

Donde se debe tener en cuenta que claramente es una transformación (inyectiva, pues $x + b = y + b \Rightarrow x = y$; además es sobreyectiva, pues $\tau_b^{-1} = \tau_{-b}$). Considerando la distancia en $\mathbb{R}^2$ como d, la traslación es una isometría ($\tau_b \in Iso(2)$) pues:

$$\begin{aligned} d(\tau_b(x), \tau_b(y)) &= |\tau_b(x) - \tau_b(y)| \\ &= |(x + b) - (y + b)| \\ &= |x - y| \\ &= d(x,y)\,. \end{aligned}$$

De hecho las traslaciones forman un grupo de transformaciones de $\mathbb{R}^2$, al que denotaremos $Tra(2)$. Dicho grupo puede identificarse con el grupo aditivo $\mathbb{R}^2$, puesto que "son isomorfos", pues hay una traslación por cada elemento de $\mathbb{R}^2$, y su regla de composición es:

$$\tau_a \circ \tau_b = \tau_{a+b}$$

Puesto que los vectores $a, b \in \mathbb{R}^2$ cumplen que $a + b = b + a$ tenemos además que:

$$\tau_a \circ \tau_b = \tau_b \circ \tau_a$$

Rotaciones

Se define la rotación de un ángulo α alrededor del origen como sigue:

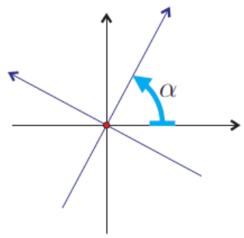


Imagen 15

$$\rho_\alpha:\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$\rho_\alpha(\theta, \mathrm{r}) = (\theta + \alpha, r)$ en coordenadas polares (ver imagen 15)**.** Nótese que entonces que se cumple, como en las traslaciones que:

$$\rho_a \circ \rho_b = \rho_{a+b}$$

Pero ahora a diferencia de las traslaciones, en las rotaciones se suman ángulos. Además se tiene que las rotaciones son transformaciones pues tienen inversa ρ_α^{-1}=$\rho_{-\alpha}$ de tal manera que las rotaciones alrededor del origen forman un grupo de transformaciones de $\mathbb{R}^2$ el cual denotaremos como $Rot(2)$.

Ahora, usando las traslaciones podemos definir las rotaciones con centro en cualquier otro lado. Para obtener la rotación de un ángulo α con centro en el punto c, denotada $\rho_{(\alpha,c)}$ podemos llevar al centro c al origen por medio de la traslación τ_{-c} rotamos ahí y luego regresa a c a su lugar (ver imagen 16), es decir, podemos definir:

$$\rho_{(\alpha,c)} = \tau_c \circ \rho_\alpha \circ \tau_{-c}$$

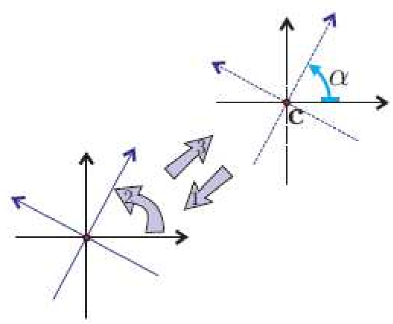


Imagen 16

Simetría

Las simetrías las podemos definir usando la proyección ortogonal a una recta. Dada una recta $\ell \subset \mathbb{R}^2$ este se puede definir por la ecuación normal $u \cdot x = c$ (ecuación unitaria), siendo u un vector unitario y $c \in \mathbb{R}$ una constante. Sabemos que para cualquier $x \in \mathbb{R}^2$ el vector que lleva a x ortogonalmente a la recta ℓ es:

$$(c - \mathrm{u} \cdot x)u$$

Pues:

$$\begin{aligned} u \cdot (x + (c - u \cdot x)u) &= u \cdot x + (c - u \cdot x)(u \cdot u) \\ &= c \end{aligned}$$

Así que definimos la simetría de $\mathbb{R}^2$ a lo largo de $\ell: u \cdot x = c$ (con $|u| = 1$) como:

$$\varphi_\ell: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$\varphi_\ell(x) = x + 2(c - u \cdot x)u$$

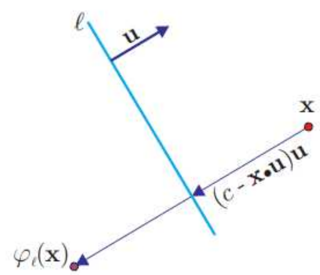


Imagen 17

Desde el punto de vista "figural", la simetría se concibe como un atributo de un objeto plano, particularmente de una figura geométrica plana. Así, una figura geométrica C desde una perspectiva concreta se considera simétrica si existen A y B subconjuntos de C, tales que existe una recta d de modo que $A \cap B = \emptyset$ ó los elementos de dicha intersección pertenezcan a d. Donde B es imagen de A por una simetría de eje d.

Es importante incluir algunas definiciones considerando $\mathbb{R}^2$ como un espacio vectorial, donde se extienden las operaciones suma y multiplicación de números reales a la noción de vectores.

Suma de vectores: dados dos vectores de coordenadas $u = (x, y)$ y $v = (x_1, y_1)$ en $\mathbb{R}^2$, se define la suma vectorial como el vector $u + v$ que resulta de sumar coordenada a coordenada:

$$u + v = (x + x_1, y + y_1)$$

Es decir:

$$(x, y) + (x_1, y_1) = (x + x_1, y + y_1)$$

Esta suma vectorial corresponde geométricamente a la regla del paralelogramo usada para encontrar la resultante de dos vectores.

Multiplicación de un vector por un escalar: dado un vector $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ y un número $t \in \mathbb{R}$ de define la multiplicación escalar $t \cdot u$ como el vector que resulta de multiplicar cada coordenada del vector por el número:

$$t \cdot u = (tx, ty)$$

La multiplicación escalar corresponde a la dilatación, contracción y/o posiblemente al cambio de dirección de un vector (ver imagen 18).

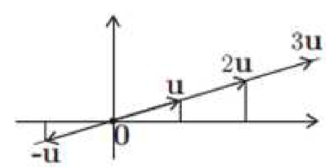


Imagen 18

2.3. Dimensiones de los Procesos Cognitivos

Para clasificar los objetivos y determinar la habilidad cognitiva que pretende desarrollar cada actividad propuesta por los textos escolares se han elegido las taxonomías que tienen como fin organizar los niveles cognoscitivos desde el más simple al más complejo, tomando como referencia las dimensiones de los procesos cognitivos trabajados por Anderson y Krathwohl (2001) en base a la taxonomía de Bloom, donde a través de seis niveles se pretende resumir las categorías de los procesos cognitivos:

Categorías de los procesos cognitivos	**Nombres alternativos**	**Definiciones y ejemplos**
1. Recordar: recuperar conocimiento relevante desde la memoria a largo plazo.		
1.1 Reconocer	Identificar	Localizar conocimiento en la memoria a largo plazo que sea consistente con el material presentado (ejemplo: reconocer las fechas importantes en la historia del país).
1.2 Rememorar	Recuperar	Recuperar conocimientos relevantes desde la memoria largo plazo (ejemplo: recordar las fechas importantes en la historia del país).
2. Comprender: construir significados desde diversos tipos de mensajes, incluyendo la comunicación oral, escrita y grafica.		
2.1 Interpretar	Clarificar, parafrasear, representar, traducir.	Cambiar una forma de representación (ejemplo: numérica) por otra (ejemplo: verbal) (ejemplo: parafrasear documentos y discursos importantes).
2.2 Ejemplificar	Ilustrar	Encontrar ejemplos específicos de un concepto o un principio (ejemplo: dar ejemplos de variados estilos pictóricos).
2.3 Clasificar	Categorizar, subsumir	Determinar que algo pertenece a una categoría (ejemplo: clasificar casos observados o descritos sobre desórdenes mentales).
2.4 Resumir	Abstraer, generalizar	Abstraer un tema general o de un ámbito mayor (ejemplo: escribir un resumen de un evento presentando un video).
2.5 Realizar inferencias	Concluir, extrapolar, interpolar, predecir	Dibujar una conclusión lógica desde información presentada (ejemplo: al aprender una lengua extranjera, inferir principios gramaticales desde ejemplos dados).

2.6 Comparar	Contrastar, calzar	Detectar correspondencia entre dos ideas u objetos (ejemplo: comparar eventos históricos con situaciones contemporáneas).
2.7 Explicar	Construir modelos	Construir un modelo de causa efecto para un sistema determinado (ejemplo: explicar las causas de eventos importantes ocurridos en Francia en el siglo XVIII).
3. Aplicar: llevar a cabo o utilizar un procedimiento en una situación determinada		
3.1 Ejecutar	Llevar a cabo	Aplicar un procedimiento para realizar una tarea conocida (ejemplo: dividir un número entero por otro entero, ambos con múltiples dígitos).
3.2 Implementar	Utilizar	Aplicar un procedimiento para realizar una tarea desconocida (ejemplo: utilizar la segunda ley de newton en situaciones donde es apropiado).
4. Analizar: desarmar materiales en sus partes constituyentes y determinar cómo las partes se relacionan entre sí y entre una estructura o propósito general.		
4.1 Diferenciar	Discriminar, distinguir, centrar, seleccionar	Distinguir las partes relevantes e irrelevantes de un material presentado (ejemplo: distinguir los números relevantes y los irrelevantes en problemas matemáticos).
4.2 Organizar	Encontrar coherencia, integrar, subrayar, estructurar	Determinar cómo los elementos calzan o funcionan dentro de una estructura (ejemplo: estructurar evidencia en una descripción histórica, que este a favor o en contra de una explicación histórica particular).
4.3 Atribuir	Deconstruir	Determinar el punto de vista, prejuicios, valores o subrayar algún aspecto dentro de un material presentado (ejemplo: determinar si el punto de vista del autor de un ensayo en términos de su perspectiva política).

5. Evaluar: establecer juicios basados en criterios y en estándares		
5.1 Probar	Coordinar, detectar, monitorear, testear	Detectar inconsistencias dentro de un proceso o producto; determinando si estos tienen consistencia interna; detectando la efectividad del procedimiento mientras es implementado (ejemplo: determinar si las conclusiones de un científico derivan de datos que ha observado).
5.2 Criticar	Juzgar	Detectar inconsistencias entre un producto y criterios externos; determinando si este tiene consistencia externa; detectando la efectividad del procedimiento frente a un problema determinado. (ejemplo: juzgar cual de dos métodos es el más apropiado para resolver un problema determinado)
6. Crear: unir elementos para formar un todo coherente o funcional; reorganizar elementos en torno a un nuevo patrón o estructura		
6.1 Generar	Formular hipótesis	Generar alternativas hipotéticas basadas en criterios. (ejemplo: formular hipótesis para dar cuenta sobre un fenómeno observado)
6.2 Planificar	Diseñar	Estructurar un procedimiento para cumplir alguna tarea. (ejemplo: planear una investigación sobre un tópico histórico dado)
6.3 Producir	Construir	Inventar un producto (ejemplo: crear tareas para determinados procesos)

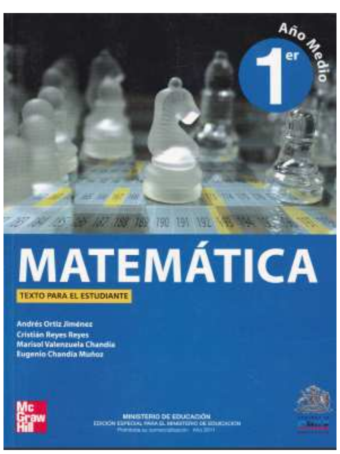
“A taxonomy for learning, teaching and assessing: A revision of Bloom’s taxonomy of educational objectives”. Anderson, L. y Krathwohl D. (2001)

Esta investigación se centra en la indagación de textos escolares y es de carácter cualitativo la cual se basa en el tópico de transformaciones isométricas de primer año de educación media, tal cual se plantea en los objetivos.

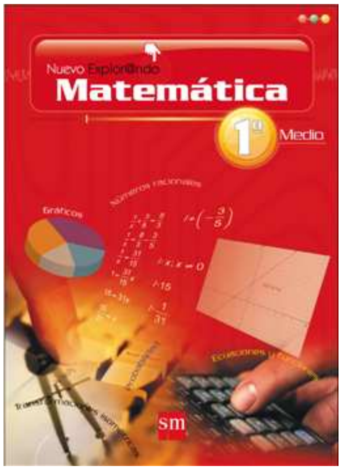
Para la selección de los textos escolares, se realizó un sondeo en aquellos establecimientos educacionales particulares y particulares subvencionados que imparten educación media en la comuna de Villa Alemana mediante contacto telefónico con las unidades técnica pedagógica, concluyendo que los textos utilizados con mayor frecuencia son los de las editoriales Santillana y SM.

Para seleccionar el texto utilizado en liceos municipales no fue necesario realizar indagación ya que el Ministerio de Educación en el año 2011 sólo distribuyó un modelo de texto a lo largo del país, siendo de la editorial Mc Graw Hill, utilizado también en algunos establecimientos particulares y particulares subvencionados.

Luego de obtener la información anterior se explicita información de los textos que serán sometidos a estudio:



Titulo:	Matemática, 1° Año Medio
Editorial:	Mc Graw Hill
Autores:	• Andrés Ortiz Jiménez • Cristián Reyes Reyes • Marisol Valenzuela Chandía • Eugenio Chandía Muñoz
Año:	2010
Unidad:	Geometría (Páginas 128-152)



Titulo: Nuevo Explorando Matemática, 1° Año Medio

Editorial: SM

Autores:
- Rossana Herrera Concha
- Mabel Vega Rojas
- Patricio Loyola Martínez

Año: 2010

Unidad: Transformaciones Isométricas (Páginas136-169)

Titulo: Bicentenario, Matemática, 1° Año Medio

Editorial: Santillana

Autores:
- Ángela Baeza Peña
- María del Pilar Blanco Casals
- Jorge Bozt Ortiz
- Felipe Calderón Concha
- María José García Zattera
- Marcela Guerra Noguera

Año: 2010

Unidad: Transformaciones isométricas en el plano cartesiano (Páginas 78-111)

El estudio de cada texto se realizará atendiendo una pauta que considera los siguientes aspectos:

a) *Desarrollo de contenidos:* Se refiere a cómo se introduce y desarrolla un concepto para la construcción del conocimiento por parte del estudiante como resultado de una transformación del conocimiento matemático formal, por medio de su adaptación a la matemática escolar o transposición didáctica en el sentido dado por Chevallard (1985).

b) *Comparación del desarrollo de contenidos con lo esperado en el curriculum chileno y la teoría matemática:* Comparación de los textos escolares con lo establecido en el programa de estudio referente a la consecución de objetivos fundamentales y aprendizajes esperados, además de la coherencia con los fundamentos y conceptos matemáticos que conllevan el tema de transformaciones isométricas, que ha sido desarrollado en el marco teórico, tanto en el plano euclidiano como cartesiano.

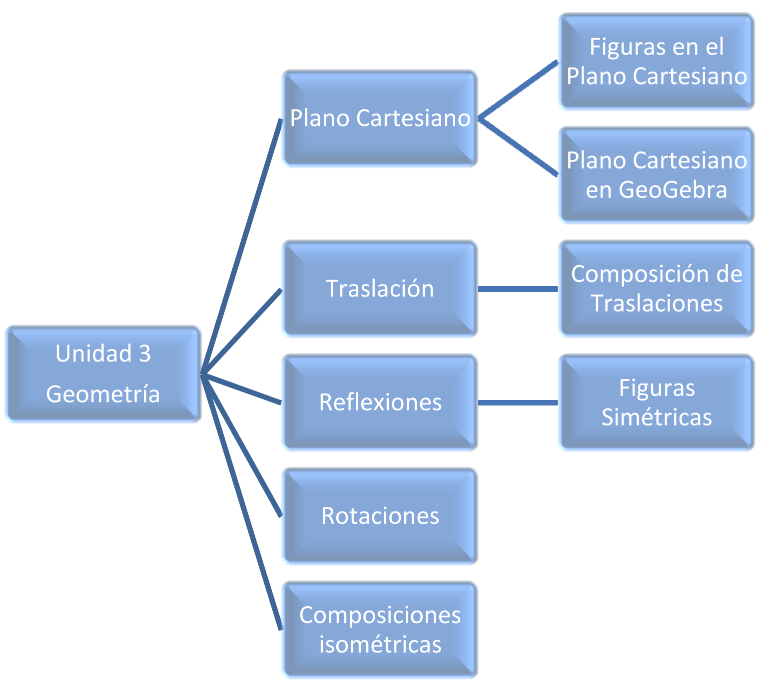
c) *Estudio de actividades propuestas para los estudiantes:* Para este estudio se ha formulado la siguiente tabla:

Puntos a considerar	**¿En qué consiste?**
Objetivo de la actividad	Tiene como finalidad catalogar el objetivo que se intenta lograr en cada actividad propuesta en los textos escolares, utilizando la taxonomía de Anderson y Krathwohl (2001).
Aprendizaje esperado involucrado	Indica el aprendizaje esperado establecido por el marco curricular que corresponde a cada actividad propuesta por el texto.
Procedimiento de resolución (técnica)	Procedimiento de resolución basado en conocimientos previos del alumno complementados con los entregados por el texto o bien por medio de un aprendizaje específico generado por el alumno en la resolución del problema basándose en la taxonomía de Anderson y Krathwohl.
Habilidad desarrollada según curriculum	Indica la habilidad que se pretende desarrollar en cada actividad propuesta por el texto teniendo como referencia las habilidades expuestas en el marco curricular (2009).
Habilidad desarrollada según taxonomía de Anderson y Krathwohl (2001)	Indica la habilidad que se pretende desarrollar en cada actividad propuesta por el texto teniendo como referencia la taxonomía de Anderson y Krathwohl (2001), indicando el nivel de habilidad cognitiva que pude alcanzar un estudiante al desarrollar cierta actividad
Conocimientos que permiten abordar la situación	Indica cuáles son los conocimientos y conceptos matemáticos que debe manejar el alumno para desarrollar la actividad propuesta por el texto.
Otros	Comentarios adicionales relacionados con el desarrollo de la actividad.

En este capítulo se presentará en primera instancia la organización secuencial de los contenidos entregados por cada texto escolar, para luego dar paso al estudio de los conceptos y de las actividades propuestas, para finalmente comprobar fehacientemente el cumplimiento, por parte de los textos, de los aprendizajes que se esperan de ellos y que han sido planteados por el programa de estudio, además verificar su coherencia con la teoría matemática y el desarrollo de habilidades cognitivas.

4.1. Estudio del texto de editorial Mc Graw-Hill

Los contenidos considerados para el desarrollo de la unidad de transformaciones isométricas se proyectan en el siguiente esquema:



A continuación se hace referencia a cada concepto anterior con el propósito de fragmentar el estudio de la secuencia didáctica entregada por el texto.

Plano cartesiano

Se introduce el concepto de plano cartesiano mediante un ejemplo que describe las posiciones de las piezas de un tablero de ajedrez utilizando un sistema de referencia, para enseguida proponer al estudiante la búsqueda de una dirección en el mapa de una ciudad. De esta forma se indica que es posible dotar a un plano de un sistema de referencia al considerar dos rectas que se cortan en un único punto, sin hacer alusión a que estas deben ser perpendiculares, característica importante del plano cartesiano, donde a cada recta se le fija una unidad de medida cuya longitud se considera la unidad, teniendo en cada eje una recta con números reales, definiendo así un sistema de coordenadas cartesianas en el plano.

A continuación se indica cómo determinar las coordenadas de un punto P ubicado en el plano euclidiano, que consiste en trazar por P rectas paralelas a los ejes, donde los puntos de intersección de estas rectas con los ejes se asocian a números reales que determinan las coordenadas del punto P.

Para complementar esta información se presenta una imagen en la cual no es posible distinguir de forma exacta la ordenada o la abscisa del punto $P(x, y)$ (ver imagen 19), no permitiendo al estudiante comprender correctamente la ubicación de un punto.

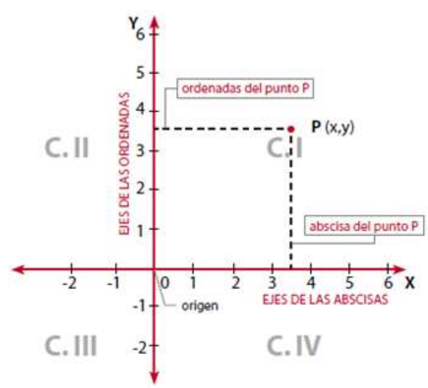


Imagen 19

Cabe destacar que no existen ejemplos o actividades resueltas en el desarrollo de este tópico, sin embargo se proponen actividades que apuntan a la representación de puntos, a la determinación del cuadrante en el que se ubican los puntos dependiendo del valor que posee su ordenada y/o abscisa y viceversa (cuya finalidad es caracterizar el plano) y a la determinación de lugares geométricos. En la actividad relacionada con lugares geométricos los estudiantes deben recurrir a conocimientos adquiridos en la unidad de Álgebra donde representaron gráficamente la función lineal, afín y constante.

Luego se incluyen dos ejercicios resueltos (Mc Graw-Hill, 2010, p. 133), donde el primero de estos corresponde a la representación de coordenadas de figuras geométricas en el plano cartesiano y el segundo a la determinación de un lugar geométrico, en particular en este último concepto se propone al alumno:

- Determinar todos los puntos del plano tal que su abscisa es el doble de su ordenada más uno.
- Determinar todos los puntos del plano que están a dos unidades del punto de coordenadas $(\mathbf{-1}, \mathbf{1})$.

Estas actividades responden al aprendizaje esperado *reconocen que los lugares geométricos se pueden describir mediante ecuaciones cartesianas* que no corresponde a los aprendizajes esperados de primer año medio. Por otra parte para la resolución del primer ejercicio el estudiante debe realizar diversas formas de representación (de lenguaje natural a lenguaje algebraico) y para el segundo debe aplicar la fórmula de distancia entre dos puntos no estando acorde a los conocimientos que poseen los estudiantes.

Posteriormente se entregan las indicaciones para graficar puntos en el plano cartesiano por medio del software geométrico GeoGebra (Mc Graw-Hill, 2010, p.134) proponiendo al estudiante dos actividades que requieren ser resueltas con el uso de este programa, lo que permite desarrollar la habilidad de interpretar y realizar inferencias, encontrándose en el nivel dos de las categorías de los procesos cognitivos (Comprender). Luego se presenta una serie de ejercicios (Mc Graw-Hill, 2010, p.135) que tienen como finalidad profundizar, apoyar y afianzar los conocimientos por medio de la aplicación de los contenidos, estas actividades consisten en la representación de puntos y figuras geométricas y la determinación de lugares geométricos.

En resumen, el aprendizaje esperado i*dentificar y representar puntos y coordenadas de figuras geométricas en el plano cartesiano, manualmente o usando un procesador* *geométrico* es abordado parcialmente pues no presenta actividades que apunten a la identificación de coordenadas de puntos en el plano cartesiano.

Concepto de Traslación

Se aborda el concepto de traslación y el de vectores de manera conjunta a través de un concepto desconocido para los estudiantes, el de velocidad (estudiado en segundo medio en la unidad fuerza y movimiento correspondiente a la asignatura de física), recurriendo a una situación en la que se intenta trasladar una casa por medio de una minga[7], cuya solución involucra tres velocidades distintas (del bote, río y la resultante). Para resolver esta actividad, el texto modela la velocidad resultante de la casa en un plano cartesiano considerando que la velocidad es un vector que indica la rapidez con la que se mueve la casa junto con la dirección de este movimiento, sin embargo omite las unidades de referencia para cada eje (por ejemplo Km/hrs).

Luego se presenta una definición informal de vector como una flecha que posee módulo, dirección y sentido indicando que estas corresponden a magnitudes vectoriales y no a las características de una magnitud vectorial.

Siguiendo con el problema se enfatiza que para determinar la posición final de la casa, luego de realizar la minga, es necesario modelar las velocidades en un plano cartesiano, por lo tanto se intenta utilizar el concepto de velocidad para describir una posición, lo que puede incurrir en un error conceptual para el alumno al confundir conceptos no incluyentes.

Cabe destacar que respecto al concepto de vectores no se explica la suma de estos ni la multiplicación de un vector por un escalar, no permitiendo lograr en su totalidad el aprendizaje referido a *representar en el plano adiciones, sustracciones de vectores y multiplicaciones de un vector por un escalar*.

[7] La minga es el proceso colaborativo de cambio de ubicación de una casa que la realizan tanto por tierra con bueyes como por mar.

Posteriormente se pretende formalizar el concepto de traslación por medio de la notación $T_{(a,b)}$ donde (a,b) indica las componentes del vector traslación, para luego definirlo como un movimiento rígido en el plano cartesiano determinado por las componentes de un vector (a,b) donde el valor de la abscisa y ordenada indican tanto la magnitud como el sentido del movimiento respectivamente.

Para afianzar el concepto se presenta un ejemplo donde ninguno de los vectores representados tiene el mismo punto de origen (ver imagen 20).

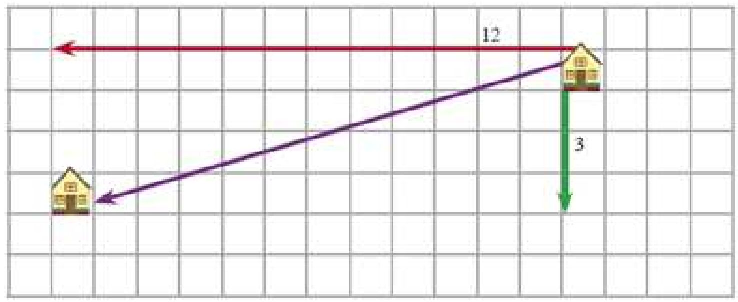


Imagen 20

En paralelo al contenido se presenta un pequeño recuadro que invita a los alumnos a investigar cual es la acción de las traslaciones $T_{(0,b)}$, $T_{(a,0)}$ y $T_{(0,0)}$, que permite comprender por medio de inferencias algunas propiedades de las traslaciones respecto a su vector (Nivel dos de la taxonomía de Anderson y Krathwohl) y al mismo tiempo busca el logro del aprendizaje referido a *identificar regularidades en la aplicación de transformaciones isométricas a figuras en el plano cartesiano*.

A continuación se presentan dos demostraciones que conllevan a deducir que las traslaciones preservan distancias y ángulos (Mc Graw-Hill, 2010, p.138). El desarrollo de la primera demostración posee afirmaciones no justificadas y se sustenta en propiedades de rectángulos que han sido aceptadas posiblemente a partir de inferencias realizadas en años anteriores.

Se afirma sin justificación que $\overline{AA'}$ mide lo mismo que $\overline{BB'}$ (ver imagen 21), de esto se deduce que $\overline{BC}$ mide lo mismo que $\overline{A'D}$ y que $\overline{AC}$ mide lo mismo que $\overline{B'D}$.

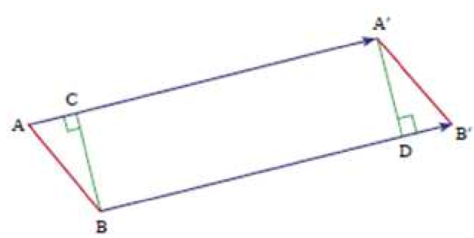


Imagen 21

La segunda demostración se propone como actividad que debe ser completada por los estudiantes aplicando conocimientos sobre ángulos que se forman entre paralelas cortadas por una trasversal.

El texto entrega algunas propiedades de las traslaciones indicando que *las traslaciones preservan ángulos y distancias*, sin embargo se preservan las medidas de los ángulos y las longitudes. Finalmente se denomina este movimiento como transformación isométrica, la cual se caracteriza como un movimiento que no encoge ni dilata.

En el tratamiento de las traslaciones en el plano cartesiano, el texto no incita a los alumnos a desarrollar un alto nivel de procesos cognitivos, sólo invita a investigar mediante preguntas algunas regularidades que resultan al aplicar ciertas traslaciones a puntos en el plano cartesiano.

Luego el texto pretende explicar el concepto de composición de traslaciones por medio de un ejemplo donde se aplican traslaciones sucesivas a una figura y a sus imágenes para posteriormente entregar una definición formal para la composición de traslaciones, aludiendo a la correspondencia de puntos en el plano, sin definirla como tal, donde al punto (x, y) se le aplican dos traslaciones sucesivas; $T_{(a,b)}$ seguida de $T_{(c,d)}$ resultando $(x + a + c, y + b + d)$, nótese que se indica brevemente que el orden en la aplicación de las traslaciones "no importa" sin fundamentar dicha afirmación por la propiedad conmutativa que se cumple en la composición de traslaciones.

A continuación se indica que una trasformación isométrica puede ser vista como una máquina que trasforma un punto en otro punto del plano, asimilando la composición de dos movimientos rígidos con la concatenación (unión) de dichas máquinas, es aquí cuando se hace mención a la notación que se empleará en el texto de la composición definiéndola como $V \circ U$ (donde V y U son traslaciones) explicando que *si aplicamos $V \circ U$ a un punto P el resultado es aplicar V al resultado de aplicar U a P*, finalmente vuelve a hacer mención a la conmutatividad de la composición de traslaciones, sin precisar algún tipo de demostración para esto, sigue con la inserción de una regla para sumar vectores sin proponer una actividad tal que el alumno sea capaz de concluir por si solo una definición.

Para afianzar la composición de traslaciones se proponen dos actividades que apuntan a un objetivo en común consistente en ejecutar la definición entregada por el texto sobre traslación en términos de coordenadas. En primer lugar se pide determinar las componentes de los vectores mediante los cuales se efectuaron dos traslaciones sucesivas a los vértices de un cuadrado, esta actividad pretende desarrollar el aprendizaje esperado que corresponde a la aplicación de composiciones de funciones para la aplicación de transformaciones isométricas en el plano cartesiano, pues se cuenta con los puntos originales y sus respectivas imágenes con lo cual es posible determinar la traslación que lleva directamente al cuadrado de su posición original a la imagen obtenida luego de la aplicación de ambas traslaciones.

En la segunda actividad se debe efectuar una traslación seguida de una rotación a determinados puntos, pero los estudiantes no poseen conocimientos para efectuarle una rotación en 90° a un punto del plano a menos que utilice instrumentos geométricos (regla y compás) aplicando lo aprendido en octavo año básico, pues hasta el momento el texto no ha entregado ninguna definición o algoritmo de la aplicación de rotaciones en el plano cartesiano.

Finalmente se presentan actividades tituladas *aplicando lo aprendido* que tienen como objeto afianzar los conocimientos adquiridos. Estas apuntan a la aplicación de traslaciones sucesivas a los vértices de polígonos en el plano cartesiano y la determinación de la traslación que lleva una figura original a la resultante luego de aplicar dicha transformación isométrica.

Concepto de Reflexión y Simetría de figuras geométricas

Para la comprensión del concepto de reflexión presenta como ejemplo la acción de mirarse a un espejo donde se obtiene por medio del reflejo una figura homóloga a la original las cuales se encuentran a la misma distancia del espejo. Nótese que este ejemplo no es adecuado para construir el concepto de reflexión al ser una imagen virtual la que se proyecta y no un movimiento rígido de una figura en el plano euclidiano, además no existe un eje de reflexión para la aplicación de esta transformación isométrica, pues el espejo no cumple esta función al no contar con las características de un eje (un espejo no es una recta).

Con el ejemplo anterior se llega a explicar que para aplicar una reflexión a un punto P es necesario considerar una recta L, luego por este punto se debe trazar una recta L' perpendicular a L, determinando sobre esta el punto P' el cuál se encuentra a la misma distancia de L que el punto P a L. Para lo anterior se grafica lo siguiente:

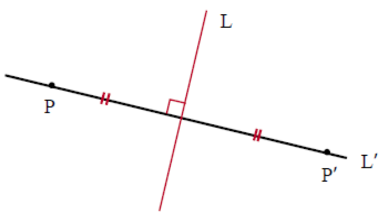


Imagen 22

En la *imagen 22* se muestra la aplicación de una reflexión al punto P obteniendo el punto P' donde $d(P,l) = d(l,P')$, sin embargo no se hace mayor énfasis en lo anterior, remitiéndose sólo a decir: *ubica P' al otro lado de la recta L, sobre L' y a la misma distancia de L.*

Luego de esta explicación en el texto se concluye que el concepto de reflexión es un movimiento rígido en el plano euclidiano con respecto a una recta con la siguiente frase: *decimos que P' es la imagen de P por la reflexión respecto a L.*

Posteriormente se presenta la demostración de la preservación de distancia en las reflexiones (propiedad que se estudia también en las traslaciones) considerando dos puntos A y B a los cuales se le ha aplicado una reflexión respecto a la recta L determinando los puntos A' y B' como muestra la siguiente imagen:

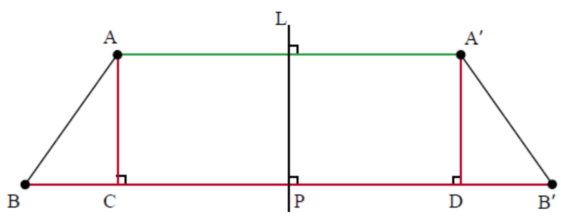


Imagen 23

La demostración inicia con lo siguiente: *nombramos por* A' *y* B' *las imágenes de* A *y* B. *El punto* C *es la intersección de la recta* BB' *con su perpendicular. Respectivamente* D *denota la intersección de la perpendicular con* BB' (Mc Graw-Hill, 2010, p.143), sin indicar que las rectas perpendiculares a la recta BB' que determinan los puntos C y D pasan por A y A' respectivamente, de lo contrario estas rectas podrían ser cualquiera. Además, es necesario explicar que las rectas AA' y BB' son paralelas al ser rectas perpendiculares a L por lo tanto tienen un mismo ángulo de inclinación lo que lleva a preservar distancias. Por último se muestra un error de escritura al indicar: $\overline{BC} = \overline{B'D''}$ pues en el dibujo no existe ningún punto D''.

A continuación se presentan ejemplos de figuras simétricas y no simétricas, donde se explica que una figura es simétrica *si se reflejan respecto a una recta que las atraviesa, resulta la misma figura idénticamente igual* (Mc Graw-Hill, 2010, p.144) mostrando como ejemplo las siguientes imágenes:

Imagen 24

En la imagen anterior se puede observar que sólo la figura uno y tres son simétricas (rana y mariposa), en cambio la figura dos no cumple las condiciones al no resultar dos figuras idénticas respecto al eje de reflexión (observar lo destacado en círculos rojos en imagen 25).

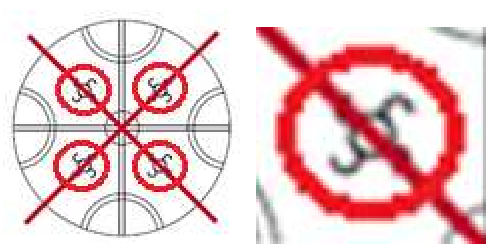


Imagen 25

Para finalizar con el estudio de los conceptos de reflexión y figuras simétricas se presenta ejercicios con el propósito de aplicar lo aprendido (Mc Graw-Hill, 2010, p.145), sin embargo es importante mencionar que en el nivel de primer año medio se debe proporcionar el concepto de simetrías en el plano cartesiano, lo que no es considerado en este texto, no cumpliendo con lo expuesto en los planes y programas de estudio.

Respecto a las actividades propuestas para el concepto de reflexión se proponen tres actividades donde las dos primeras tienen como objeto aplicar la definición entregada por el texto determinando puntos en el plano euclidiano luego de aplicar una reflexión respecto a una recta dada alcanzando el nivel tres de la taxonomía de Anderson y Krathwohl, en cambio, en la tercera actividad se pide aplicar dos simetrías axiales sucesivas a un punto en el plano cartesiano respecto a los ejes, concepto que no es entregado en este texto. Luego se proponen actividades donde se debe explicar características de trazos obtenidos por medio de una reflexión para demostrar que esta preserva ángulos alcanzando el nivel cinco de la taxonomía.

Finalmente respecto a las figuras simétricas, el objetivo principal de las actividades es determinar figuras simétricas y ejes de simetría. Cabe destacar que sólo dos de las nueve actividades propuestas se desarrollan en el plano cartesiano, no cumpliendo con las expectativas del programa de estudio.

Concepto de Rotación

En el texto de estudio se presenta el concepto de rotación en el plano euclideano, donde a modo de introducción se recurre a ejemplos relacionados con el arte, destacándose los trabajos del artista Maurits Cornelius Escher (1898-1972), en estos los alumnos podrán observar figuras rotadas en un cierto ángulo y centro de rotación, tal como se muestra en la *imagen 26*.

Sucesivamente y en pos de reforzar la idea anterior se presenta una secuencia de pasos o algoritmo que permiten llevar de un punto en otro mediante una rotación con un cierto ángulo y centro de rotación, siempre en el plano euclidiano.

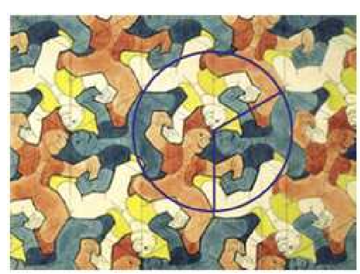


Imagen 26

Es importante destacar que en ningún momento se entrega una definición matemática formal del concepto, sino más bien una de carácter procedimental en base a una serie de pasos, que indican como rotar un punto con ayuda de instrumentos geométricos (regla, compás y transportador), dejando a modo de investigación la demostración de la premisa que las rotaciones preservan distancias y medidas de ángulos.

Respecto a las actividades propuestas en el texto se desarrollan sólo en el plano euclidiano, por lo tanto no responde a los requerimientos del programa de estudio de primer año medio, no promoviendo en los estudiantes los aprendizajes esperados contemplados en este bajo el tema de transformaciones isométricas.

Se proponen cuatro actividades (Mc Graw-Hill, 2010, p.146) donde las dos primeras tienen como finalidad desarrollar la habilidad de comprender características de la circunferencia y las dos siguientes a la aplicación de rotación a un punto alcanzando el nivel tres de la taxonomía, sin embargo estas no promueven ninguno aprendizaje esperado del nivel de primer año medio, al desarrollar el concepto sólo en el plano euclidiano.

Posteriormente se presentan cinco actividades (Mc Graw-Hill, 2010, página 147) las cuales apuntan a dos objetivos: la aplicación de rotaciones y composición de transformaciones isométricas (rotación y traslación) en el plano cartesiano; estas deben ser resueltas haciendo uso de instrumentos geométricos como regla, transportador y compás al no contar con conocimientos algebraicos para la aplicación de rotaciones en este plano.

En conclusión, el texto de editorial Mc Graw-Hill presenta una estructura similar para cada concepto presentado, comenzando con ejemplos de la vida cotidiana que asocia a cada transformación isométrica (por ejemplo el concepto de traslación se introduce con el desplazamiento de una casa por medio de una minga), luego entrega un algoritmo de los pasos a seguir para llevar a cabo la aplicación de cada uno de estos movimientos en el plano euclidiano, finalizando con ejercicios que permiten afianzar lo expuesto anteriormente. Es importante mencionar que no considera la aplicación de transformaciones isométricas en el plano cartesiano que corresponde al nivel de primer año medio, sin embargo propone actividades donde se debe utilizar este concepto.

La unidad se inicia explicando cómo se debe dotar un plano de un sistemas de coordenadas presentando de esta forma el plano cartesiano y sus características, proponiendo ejercicios que permiten el desarrollo del aprendizaje esperado referido a la representación e identificación de puntos en este plano, de forma manual o utilizando un procesador geométrico (GeoGebra).

Luego expone cada una de las transformaciones isométricas iniciando con las traslaciones, donde explica que la aplicación de este movimiento a una figura se puede realizar por medio del desplazamiento horizontal y vertical según indiquen las componentes del vector de traslación, haciendo nulo hincapié a su aplicación por medio del método geométrico y algebraico (aplicación de paralelogramos y suma de coordenadas respectivamente). Continua con la composición de traslaciones de un punto del plano cartesiano por medio de la suma de las componentes de los vectores de traslación; cabe considerar que algunas de las actividades no se pueden desarrollar pues involucran la composición de traslación y rotación de figuras planas, donde este último movimiento no ha sido abordando aún.

El texto continúa con la reflexión de puntos en el plano euclidiano respecto a una recta indicando que este movimiento preserva distancias y ángulos, además de la existencia de figuras simétricas respecto a un eje. Es importante mencionar que no proyecta este concepto al plano cartesiano como debe ser en el nivel de primer año medio, sin embargo presenta actividades que deben ser resueltas en este plano al igual que en el concepto de traslaciones.

Se prosigue con las rotaciones entregando un algoritmo para su aplicación por medio de instrumentos geométricos y se indica que este movimiento preserva distancias y ángulos al igual que los anteriores. Pese a que esta transformación isométrica es desarrollada sólo en el plano euclidiano, las actividades propuestas consideran su aplicación en el plano cartesiano, aunque no haya sido explicada en este contexto.

La unidad finaliza con la composición de transformaciones isométricas por medio de la concatenación de máquinas de composición. Se considera la composición de traslación con rotación, reflexión con traslación, rotación con rotación y reflexión con reflexión (recordar que la composición de traslaciones se estudió anteriormente en el texto), y en las actividades propuestas se busca principalmente la comparación de estas cambiando algunas condiciones para determinar si estas composiciones son conmutativas, terminando así la unidad sin cumplir las expectativas del marco curricular, pues no se realiza el estudio de las transformaciones isométricas en el plano cartesiano como corresponde en el nivel de primer año medio.

A continuación, se presentan algunos gráficos que muestran el porcentaje de actividades que permiten el desarrollo de aprendizajes esperados y habilidades según curriculum chileno, además del nivel cognitivo que alcanzan los alumnos al desarrollar dichas actividades, bajo el parámetro de las taxonomías de Anderson y Krathwohl. Esta información ha sido extraída del estudio de las actividades propuestas en el texto de editorial Mc Graw-Hill (ver código de aprendizajes esperados en anexos).

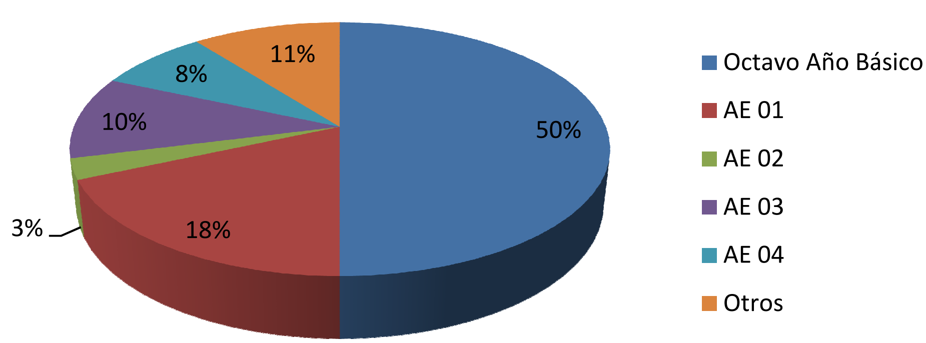
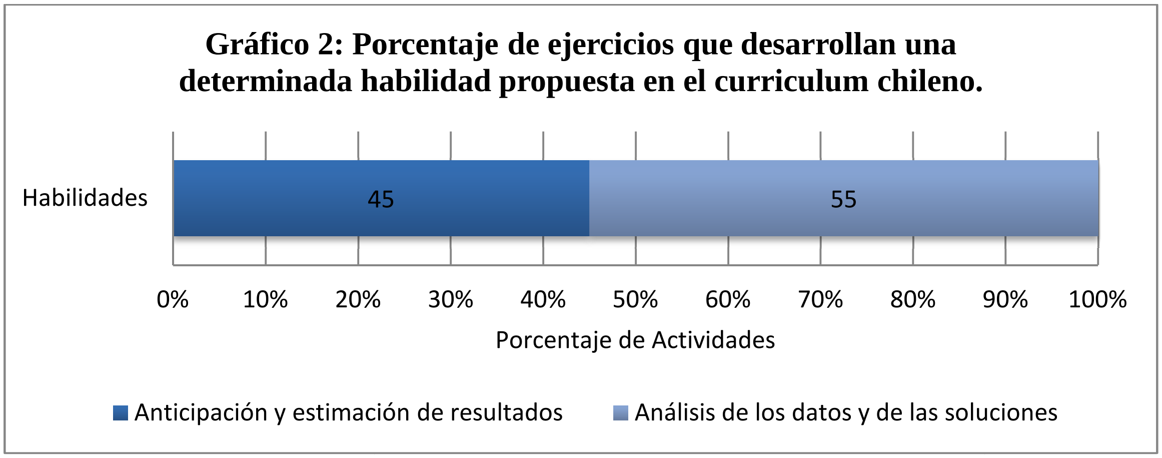


Gráfico 1: Porcentaje de actividades que desarrollan un determinado aprendizajes esperado propuestos en el curriculum chileno.

En el gráfico se observa que el 50% de las actividades propuestas en el texto de editorial Mc Graw-Hill apuntan sólo al desarrollo de aprendizajes esperados de octavo año básico por estar enfocadas en la aplicación de transformaciones isométricas en el plano euclidiano, dando un enfoque equivocado a la unidad, pues el foco principal debiese ser la aplicación de estos movimientos en el plano cartesiano. Este alto porcentaje repercute en un bajo número de actividades orientadas al desarrollo de los aprendizajes correspondiente al nivel de primer año medio, pues sólo un 18% se enfocan al logro del aprendizaje relacionado con *identificar y representar puntos y coordenadas de figuras geométricas en el plano cartesiano, manualmente o usando un procesador geométrico* (AE 01), mientras que el 3% (corresponde a un ejercicio) permite *representar en el plano, adiciones, sustracciones de vectores y multiplicaciones de un vector por un escalar* (AE 02), cuatro ejercicios, que se refleja en un 10%, hacen relación al desarrollo de *aplicar composiciones de funciones para realizar transformaciones isométricas en el plano cartesiano* (AE 03), el 8% apuntan al logro de *identificar regularidades en la aplicación de transformaciones isométricas a figuras en el plano cartesiano* y un 11% está enfocado al desarrollo de otros aprendizajes, donde tres de las cuatro actividades no corresponden al nivel de primer año medio, sino a tercer año medio. Es importante mencionar que ninguna actividad está orientada a *formular y verificar conjeturas acerca de la aplicación de transformaciones isométricas a figuras geométricas en el plano cartesiano* (AE 05) lo que puede trascender en los resultados de las pruebas internacionales que en general evalúan problemas que involucran soluciones de un nivel cognitivo de grado superior.

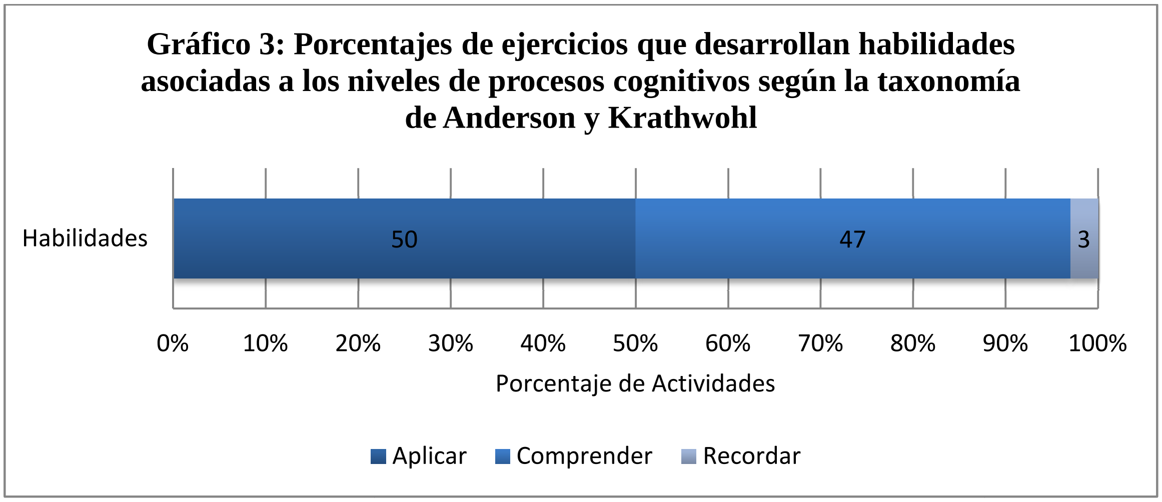
Un segundo gráfico nos presenta los porcentajes de ejercicios que permiten desarrollar las habilidades expuestas en el curriculum chileno que son: la búsqueda y comparación de caminos de solución, análisis de los datos y de las soluciones, anticipación y estimación de resultados, búsqueda de regularidades y patrones, formulación de conjeturas, formulación de argumentos y diversas formas de verificar la validez de una conjetura o un procedimiento y modelamiento de situaciones o fenómenos.



En las actividades propuestas por el texto de editorial Mc Graw-Hill sólo se busca el logro de dos habilidades expuestas en el curriculum, donde el 55% desarrolla la capacidad de análisis de los datos y de las soluciones y el 45% busca la anticipación y estimación de resultados, lo que indica, por ejemplo, que el alumno es capaz de identificar la función identidad al aplicar dos reflexiones sucesivas con un mismo eje de reflexión.

Cabe destacar que este texto no hace énfasis en actividades que permiten la adquisición de algunas habilidades que se proponen como fundamentales para la formación cognitiva de nuestros estudiantes, lo que coincide con los resultados en las pruebas internacionales como la prueba PISA, donde el mayor porcentaje de los alumnos chilenos se ubican en un nivel donde son capaces de hacer inferencias directas y utilización de algoritmos o fórmulas, es decir, una posible causa de estos bajos resultados hace relación con el hecho que el texto oficial entregado por el MINEDUC a colegios municipales no son una herramienta que permite a los alumnos desarrollar habilidades como la formulación de argumentos y diversas formas de verificar la validez de una conjetura o un procedimiento y/o el modelamiento de situaciones o fenómenos.

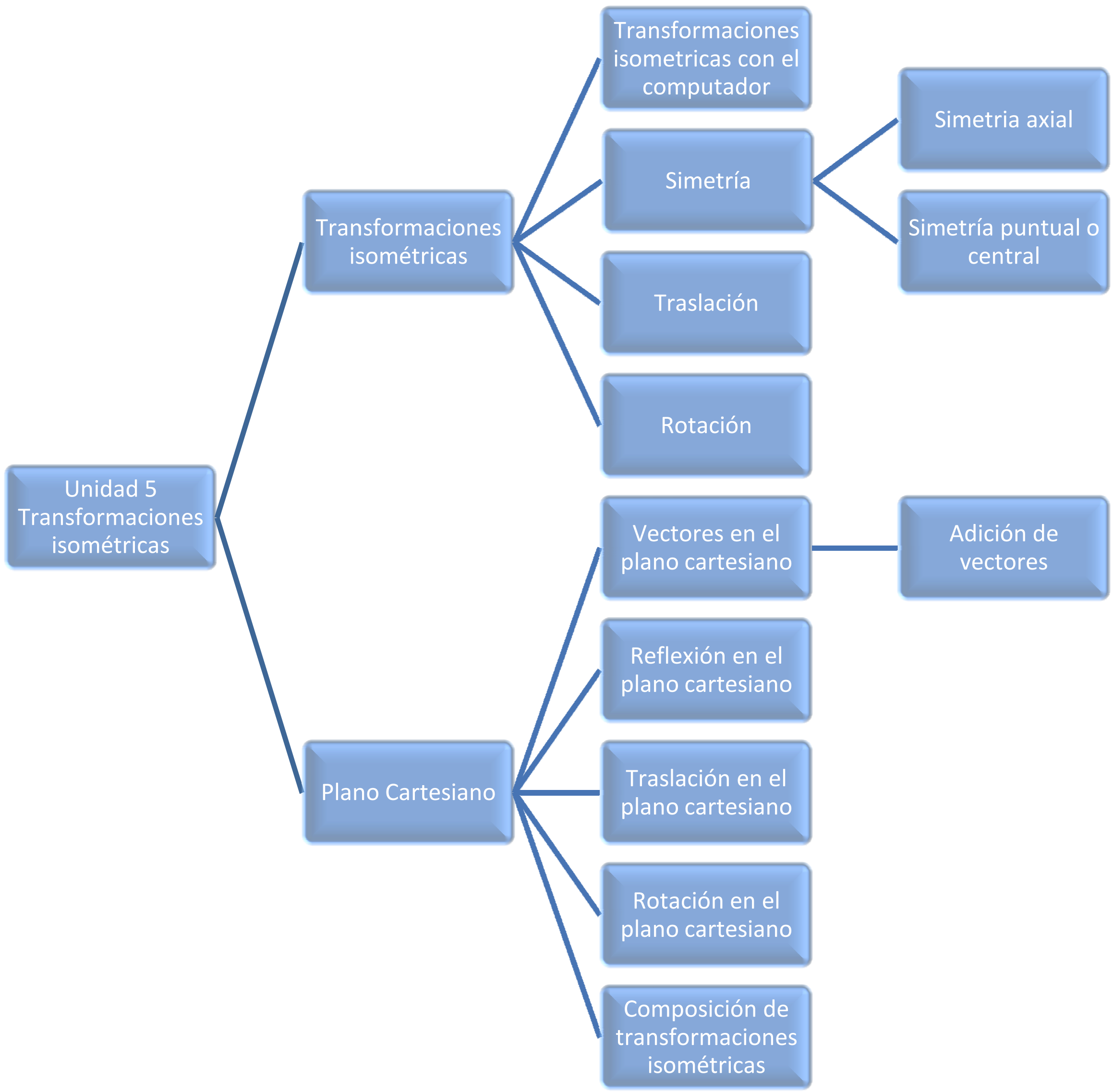
Por último se muestra un gráfico que presenta los porcentajes de ejercicios que desarrollan habilidades según los niveles de procesos cognitivos de acuerdo a las taxonomías de Anderson y Krathwohl que se divide en seis niveles que son recordar, comprender, aplicar, analizar, evaluar y crear.



En el gráfico se puede observar que la mitad de las actividades permiten desarrollar el proceso cognitivo de aplicar, ubicado en el nivel tres de las taxonomías de Anderson y Krathwohl, lo que permite concluir que existe una estrecha relación con los resultados obtenidos por ejemplo en la prueba TIMSS con las habilidades que se pueden alcanzar resolviendo estos ejercicios, ya que no permiten que los alumnos desarrollen habilidades como analizar y/o evaluar y así poder desarrollar y alcanzar altos niveles de logro en estas pruebas internacionales.

4.2. Estudio texto Nuevo Explorando, Matemática 1º Medio, Editorial SM

Las transformaciones isométricas son trabajadas en la unidad cinco y los conceptos que se desarrollan están dados por el siguiente esquema:



A continuación se indaga cada concepto desarrollado por el texto de forma secuencial acompañado del estudio de sus respectivas actividades.

Concepto Plano Cartesiano

El concepto de plano cartesiano es introducido a través de una pregunta similar a la que se formuló Descartes sobre cómo determinar la ubicación exacta de un punto en el plano Euclidiano, la cual se responde por medio de la creación de un sistema de coordenadas, más conocido como plano cartesiano, que permite identificar y representar pares ordenados.

En seguida se entregan las características del plano cartesiano mencionando que está determinado por dos rectas (ejes) que se interceptan en el origen, sin señalar que deben ser perpendiculares, y cuatro cuadrantes. En conjunto a esto ilustra un ejemplo donde se representa un punto en el plano y se indican sus respectivas coordenadas.

Es importante indicar que no se explica la relación entre el plano euclidiano y el cartesiano, no ligando aprendizajes previos, ni el procedimiento que permite determinar la ubicación de un punto empleando este sistema de referencia, pese a estar expuesto en el curriculum del nivel de primer año medio.

En relación a las actividades del texto se proponen aquellas donde el alumno debe identificar y representar puntos en el plano cartesiano ya sea manual o con la ayuda de un software geométrico (GeoGebra) desarrollando en su totalidad el aprendizaje esperado *identificar y representar puntos y coordenadas de figuras geométricas en el plano cartesiano, manualmente o usando un procesador geométrico* descrito en el programa de estudio de primer año medio.

Concepto de vector en el plano cartesiano

El concepto de vectores se introduce mediante un ejemplo que ilustra el cambio de posición de una partícula definido por una curva donde se recurre a un vector para describir el desplazamiento de esta (ver imagen 27). En el desarrollo se entregan ejemplos de las definiciones que posteriormente formaliza el texto, mencionando que la resta de las abscisas y ordenadas de los puntos final e inicial del vector respectivamente permiten determinar las coordenadas o componentes de este.

Es importante mencionar que el punto $\boldsymbol{B}$ en el ejemplo no es considerado como imagen de $\boldsymbol{A}$ por medio del desplazamiento sino que son vistos como dos puntos distintos.

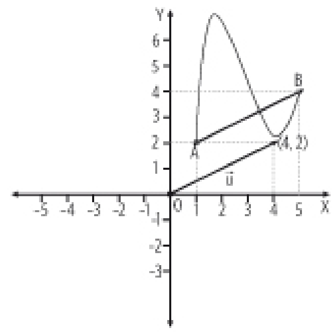


Imagen 27

Así un vector es definido como un objeto físico que esta caracterizado por su magnitud, dirección y sentido, sin explicar a que corresponde cada una de estas características. Posteriormente se proponen actividades que buscan apropiarse de la siguiente definición "…si $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, las componentes de $\overrightarrow{AB}$ están dadas por: $\overrightarrow{AB} = (x_2, y_2) - (x_1, y_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1\ )$" (SM, 2010, p.146) que consiste en determinar las componentes de un vector si se conocen las coordenadas de sus puntos del extremo y origen o su gráfica en el plano cartesiano y actividades de representación gráfica de vectores.

Luego se entrega procedimiento para sumar geométricamente dos vectores entregando los algoritmos para ejecutar dicha adición ya sea de forma triangular o de paralelogramo, no proponiendo actividades ni preguntas que provoque en el alumno la necesidad de construir por si solo algún conocimiento sobre suma de vectores. En conjunto se proponen tres tareas:

- Aplicar uno de los dos procedimientos entregados para sumar dos vectores.
- Considerar la suma de vectores a partir de las coordenadas del vector.
- Analizar un procedimiento que consiste en la resta de dos vectores mostrando la siguiente imagen que posee un error tipográfico ya que el vector que se ilustra en dicha imagen corresponde a la resta de $\vec{\boldsymbol{A}}\ \boldsymbol{y}\ \vec{\boldsymbol{B}}$, no a la suma como se indica en la imagen (ver imagen28).

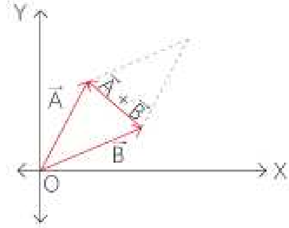


Imagen 28

Luego se define la suma vectorial como el resultado de sumar coordenada a coordenada, vale decir:

$$\vec{u}+\vec{v}=(u_1,u_2)+(v_1,v_2)=(u_1+v_1,u_2+v_2)$$

Complementando la definición anterior se proponen dos tareas: la primera consiste en aplicar la definición entregada por el texto correspondiente a suma de vectores y la segunda en evaluar la veracidad de afirmaciones relacionadas a la adición de vectores.

Es importante destacar que la resta de vectores no es definida ya que sólo se presenta una actividad donde se ilustra geométricamente dicha operación, tampoco se menciona la multiplicación de un vector por un escalar. En consecuencia las actividades presentes no desarrollan en su totalidad el aprendizaje esperado *representar en el plano adiciones, sustracciones de vectores y multiplicaciones de un vector por un escalar* ya que sólo se presentan actividades sobre representación de adiciones de vectores en el plano.

Concepto de Traslación

El texto comienza recordando lo ya visto por los estudiantes en octavo año básico trabajando con traslaciones en el plano Euclidiano (SM, 2010, p. 142), para luego definir las traslaciones en el plano Cartesiano (SM, 2010, p. 154).

Se define la traslación como una transformación isométrica que corresponde al movimiento de una figura en una dirección, magnitud y sentido del desplazamiento la cual queda representada por un vector de traslación. Para extender esta definición ahora al plano cartesiano el texto presenta la situación de la traslación de un polígono irregular en dicho plano, ilustrando la imagen original, el vector de traslación y la imagen producto de la traslación según el vector dado. Se realizan las siguientes preguntas al estudiante; *¿Cuáles son las coordenadas del vector de traslación? ¿Qué semejanzas y que diferencias puedes observar entre las coordenadas de cada imagen?* lo que permite al estudiante comparar y determinar la relación entre las coordenadas de los puntos originales y sus respectivas imágenes y las componentes del vector de traslación.

Luego se define la traslación con respecto a un vector en términos de coordenadas, en esta se menciona que esta transformación isométrica es una función que a cada punto del plano cartesiano le asocia un único punto del mismo, siendo T esa función y $\vec{u}$ vector traslación como sigue: $T_{\vec{u}}(x, y) = (x + u_1, y + u_2)$. Además se menciona que la traslación de un punto se puede asociar a la adición del vector posición, de componentes $(x, 0)$ con el vector posición de componentes $(0, y)$ haciendo así alusión a las proyecciones sobre los ejes del vector que determina el desplazamiento que realiza dicho punto.

Para este contenido el texto propone cuatro actividades donde tres de estas se resuelven aplicando la definición entregada por el texto sobre traslación y la ultima consiste en seguir indicaciones para efectuar una traslación a un polígono en el plano cartesiano con la utilización del software GeoGebra, donde se plantea la siguiente pregunta *¿Cómo son las medidas de la figura trasladada con respecto a la original?*, con esta pregunta se espera que el alumno compare las medidas de los lados de ambos polígonos, la medida de los ángulos interiores y concluya que la figura obtenida luego de la traslación es homologa a la figura original (sus medidas no cambian). Así las primeras actividades apuntan al desarrollo de la habilidad de Aplicar (nivel tres en la taxonomía de Anderson y Krathwohl), ya que los estudiantes deben ejecutar un procedimiento entregado por el texto. La actividad número cuatro apunta al desarrollo de la habilidad de Comprender (nivel dos en la taxonomía de Anderson y Krathwohl) ya que la pregunta que se plantea invita al estudiante a representar, comparar y realizar inferencias sobre las propiedades que cumplen las traslaciones.

El aprendizaje esperado que se desarrolla en estas actividades es *aplicar de composiciones de funciones para realizar transformaciones isométricas en el plano cartesiano* y la última actividad responde al aprendizaje esperado *identificar regularidades en la aplicación de transformaciones isométricas a figuras en el plano cartesiano*.

Concepto de Reflexión y Simetría de figuras geométricas.

Para el estudio de los conceptos reflexión y simetría el texto presenta un polígono al cual se le aplica una reflexión, transformación isométrica que entendemos como movimiento rígido en el plano euclidiano (lo que identifica como una simetría), utilizando como eje de reflexión uno de sus lados, obteniendo otro polígono que conserva la forma y tamaño de la figura original (ver imagen 29):

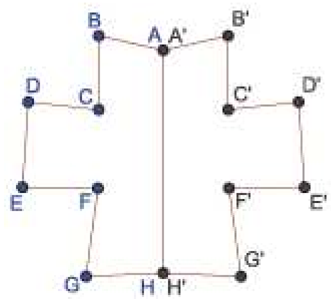


Imagen 29

De esta forma define esta transformación isométrica como sigue: *"…a cada punto de la figura original se le asocia otro punto que está a igual distancia de la recta llamada eje de simetría"*, donde no se especifica que estos dos puntos pertenecen a una misma recta, perpendicular al eje de reflexión, por lo que estos puntos no necesariamente serían homólogos respecto a una recta.

Este mismo error se repite en la definición de reflexión respecto a un punto en el plano euclidiano (identificada como simetría central), si bien en el ejemplo introductorio se explica que un punto, su imagen y el centro de reflexión son colineales, la definición dice: *"… a cada punto de la figura original se le asocia otro que está a igual distancia de un punto llamado punto o centro de simetría"* no explicando que estos tres puntos deben ser colineales pues, no necesariamente un punto que esté a la misma distancia de un centro de reflexión que otro, son entre ellos homólogos.

Luego de estudiar el concepto de reflexión en el plano euclidiano (SM, 2010, pp. 140-141) se presentan dos ejemplos de simetría axial en el plano cartesiano (SM, 2010, p. 152) lo que se titula como reflexión, refiriéndose a la relación biunívoca entre puntos en el plano cartesiano. El primer ejemplo es respecto al eje de las ordenadas y el segundo respecto al eje de las abscisas como se muestra en la siguiente imagen:

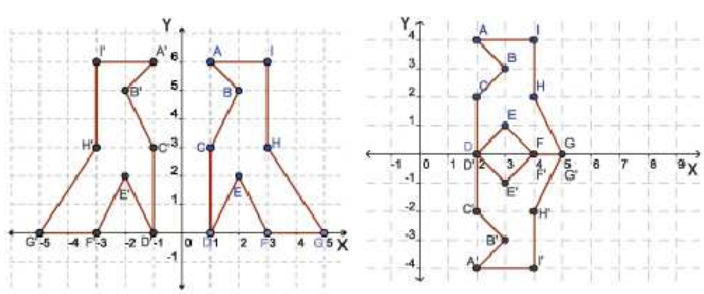


Imagen 30

Posterior a los ejemplos se plantean las siguientes preguntas:

- ¿Cuál es el eje de simetría en cada imagen?
- ¿Qué semejanzas y qué diferencias puedes observar entre las coordenadas de los vértices de las figuras en cada imagen?

Enseguida se presenta una explicación del concepto de simetría de un punto en el plano cartesiano respecto a ambos ejes, que a su vez se define algebraicamente como una función que asocia a un punto del plano cartesiano a un único punto del mismo (para una simetría respecto al eje x es: $R_x(x, y) = (x, -y)$ y respecto al eje y es: $R_y(x, y) = (-x, y)$), además de sus respectivos ejemplos gráficos, lo cual ayuda a responder las interrogantes anteriores.

Para el concepto de simetría central, al igual que la simetría axial, se entrega la definición algebraica $R_0(x, y) = (-x, -y)$ y ejemplo gráfico, considerando sólo como centro de simetría el origen del plano cartesiano.

Al presentar el concepto de simetría axial y simetría central en el plano se proponen actividades que tienen como objetivo identificar figuras simétricas respecto a una recta dada y el centro de simetría en figuras. Además en dos de las actividades se debe aplicar respectivamente cada una de las simetrías estudiadas a ciertas figuras. Posteriormente en el estudio de simetrías en el plano cartesiano tres actividades tienen como objeto aplicar a puntos de la forma (x, y) la definición de simetría entregada por el texto y sólo un ejercicio propone analizar información entregada por medio de un software lo que permite sólo llegar al nivel tres de la taxonomía de Anderson y Krathwohl.

Concepto de Rotación

Se introduce el concepto de rotación, primeramente, en el plano euclidiano mediante un ejemplo de carácter procedimental que grafica la rotación de una figura usando instrumentos geométricos, tales como compás y transportador. Para luego dar paso a la entrega del concepto, definida como una transformación isométrica que asigna a P su punto homólogo P', tal como se muestra en la imagen:

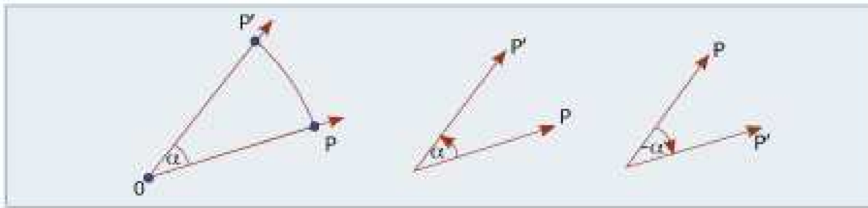


Imagen 31

Luego se presenta una actividad cuyo objetivo apunta a la puesta en práctica del procedimiento descrito referente a la rotación de puntos en el plano desarrollando la habilidad de Aplicar.

Sería importante agregar a la definición, que la distancia existente entre el punto a rotar P y su punto homólogo o imagen P' están a una misma distancia del centro de rotación O.

Por otro lado la introducción del concepto de rotación, en el plano cartesiano, se lleva a cabo mediante un ejercicio donde se propone rotar una figura dada en 90º, 180º y 270º (ver imagen 32) lo que conllevaría a la identificación de regularidades en la aplicación de rotación en el plano cartesiano sin embargo esta es entregada de forma inmediata no permitiendo desarrollar esta habilidad.

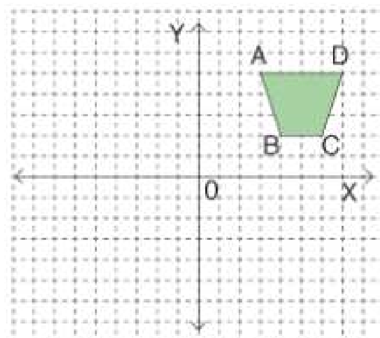


Imagen 32

Con respecto al concepto de rotación, este se caracteriza como una función $R_{(o,\alpha)}$, en el plano cartesiano, que asocia cada punto de este con un único punto del mismo, donde O corresponde al centro de rotación y α al ángulo de rotación. Es importante agregar, a la definición anterior, que la distancia existente entre el centro de rotación y el punto a rotar deber ser igual en medida a la distancia entre el centro de rotación y la imagen del punto rotado.

Seguidamente se plantean cinco tipos de tarea, la primera apunta a la identificación de la imagen obtenida luego de aplicar una rotación a una figura en el plano euclidiano, las tres primeras actividades (SM, 2010, p. 157) apuntan a un objetivo en común: aplicar las regularidades entregadas en la definición de rotación en el plano cartesiano, mientras que la restante señala técnicas para utilizar el software GeoGebra con el fin de aplicar rotaciones a vértices de polígonos dados en el plano cartesiano, sin embargo ninguna de estas promueve en el lector la formulación y verificación de conjeturas.

Dichas actividades promueven que los estudiantes sean capaces desarrollar el aprendizaje relacionado con *aplicar composiciones de funciones para realizar transformaciones isométricas en el plano cartesiano* expuesto en el plan de primer año medio.

En conclusión, el texto de la editorial SM presenta para cada concepto un ejemplo en el plano euclidiano o cartesiano según corresponda, luego formaliza lo anterior por medio de una definición con sus respectivos ejemplos tanto geométricos como algebraicos, para finalmente afianzar por medio de ejercicios. Una característica del texto es que destaca en los enunciados de cada problema la acción que debe realizar el alumno para desarrollarlos, lo que se puede asociar a las habilidades buscadas, sin embargo el planteamiento de algunas actividades no están a la par con la habilidad que dícese fomentar.

El primer concepto a estudiar en este texto es el plano cartesiano indicando sus características y proponiendo actividades que permiten lograr el aprendizaje relacionado a *identificar y representar puntos y coordenadas de figuras geométricas en el plano cartesiano, manualmente o usando un procesador geométrico*.

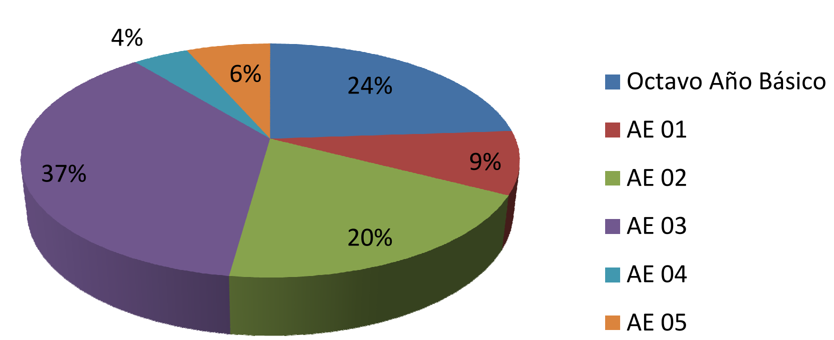
En seguida continúa con vectores en el plano cartesiano que son representados en términos de sus componentes exponiendo la adición de vectores de forma geométrica y algebraica, proponiendo actividades que permiten afianzar lo anterior. Cabe destacar que el texto no hace alusión a la multiplicación de un vector por un escalar, lo que no permite desarrollar completamente el aprendizaje referido a *representar en el plano, adiciones, sustracciones de vectores y multiplicaciones de un vector por un escalar*.

Posteriormente define como funciones en el plano cartesiano cada una de las transformaciones isométricas (simetrías, traslación y rotación) finalizando con la composición de estas. Cada uno de estos movimientos se introduce con un ejemplo donde se observa una figura geométrica y su imagen producto de una de estas transformaciones en el plano cartesiano, planteando preguntas que acercan al alumnos a la definición, pero estas son resueltas enseguida por el texto, no permitiendo que los alumnos respondan por si solos.

Es importante mencionar que el texto presenta omisiones significativas en la definición de algunos conceptos, por ejemplo al explicar la reflexión de un punto en el plano euclidiano no explicita que la recta que se debe trazar por el punto original debe ser perpendicular al eje de reflexión, de lo contrario existen infinitos puntos que cumplen con la condición de encontrarse a la misma distancia de una recta.

A continuación se presentan tres gráficos que muestran los porcentajes de actividades que permiten el logro de aprendizajes esperados y desarrollo de habilidades según el curriculum chileno, además de los niveles de procesos cognitivos que alcanzan a desarrollar los alumnos según taxonomías de Anderson y Krathwohl. Esta información ha sido extraída del estudio de las actividades propuestas en el texto de editorial SM (ver código de aprendizajes esperados en anexos).

Gráfico 4: Porcentaje de actividades que desarrollan un determinado aprendizajes esperado propuestos en el curriculum chileno.

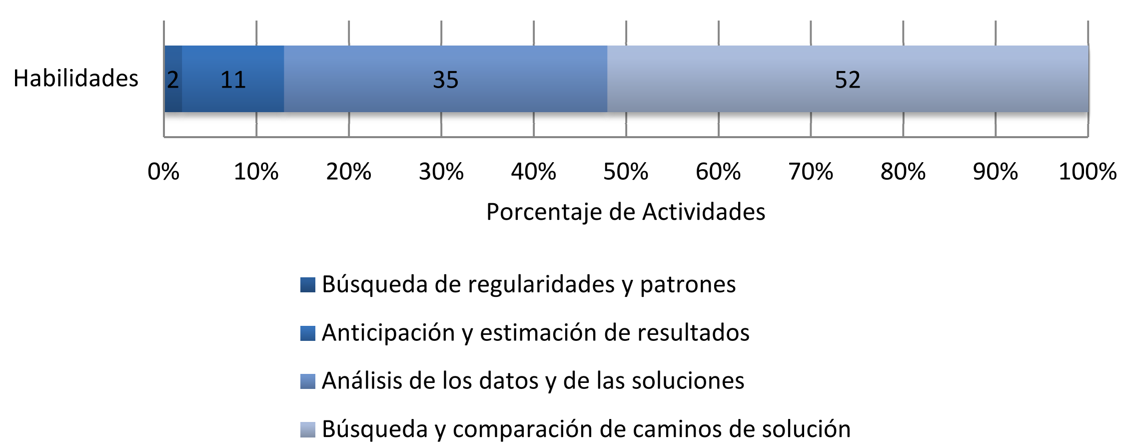


En el gráfico se puede observar que el 24% de las actividades corresponde al logro de aprendizajes de octavo año básico, debido a que el texto presenta las transformaciones isométricas en el plano euclidiano con el fin de reactivar conocimientos previos para el desarrollo de esta unidad.

Pese a que las actividades propuestas cubren todos los aprendizajes esperados del nivel de primer año medio, se puede observar que sólo un 4% y 6% buscan el logro del aprendizaje referido a *identificar regularidades en la aplicación de transformaciones isométricas a figuras en el plano cartesiano* (AE 04) y *formular y verificar conjeturas acerca de la aplicación de transformaciones isométricas a figuras geométricas en el plano cartesiano* (AE 05) respectivamente, lo que puede ser un factor importante en los bajos resultados de los alumnos chilenos en pruebas nacionales e internacionales, pues en estas se plantean problemas donde los estudiantes deben ser capaces de organizar información, generalizar y justificar conclusiones a partir de datos entregados, habilidades no logradas al ser abordadas parcialmente por los textos escolares oficiales del MINEDUC.

A continuación se muestra un gráfico que presenta los porcentajes de ejercicios que permiten desarrollar las habilidades expuestas en el curriculum chileno antes mencionadas.

Gráfico 5: Porcentaje de ejercicios que desarrollan una determinada habilidad propuesta en el curriculum chileno.

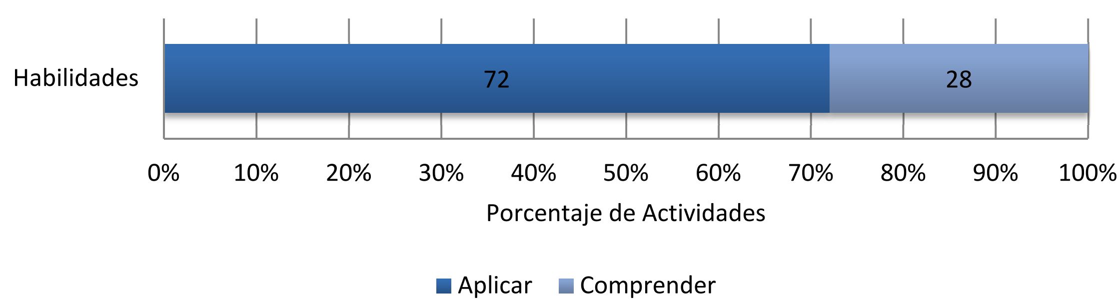


Las actividades propuestas por el texto de editorial SM buscan la adquisición de cuatro de las siete habilidades expuestas en el curriculum, donde el 52% de los problemas se desarrollan por medio de algoritmos entregados por el texto y sólo un 2% (corresponde a un problema) permite que los alumnos desarrollen la capacidad de búsqueda de regularidades y patrones.

Al igual que el texto anterior, este no presenta actividades que permitan la adquisición de habilidades que se proponen como fundamentales para la formación cognitiva de nuestros estudiantes, que puede ser la causa de los bajos resultados en pruebas internacionales mencionadas en los antecedentes de este trabajo.

Por último se muestra un gráfico que presenta los porcentajes de ejercicios que desarrollan habilidades según los niveles de procesos cognitivos según las taxonomías de Anderson y Krathwohl que se dividen en seis niveles.

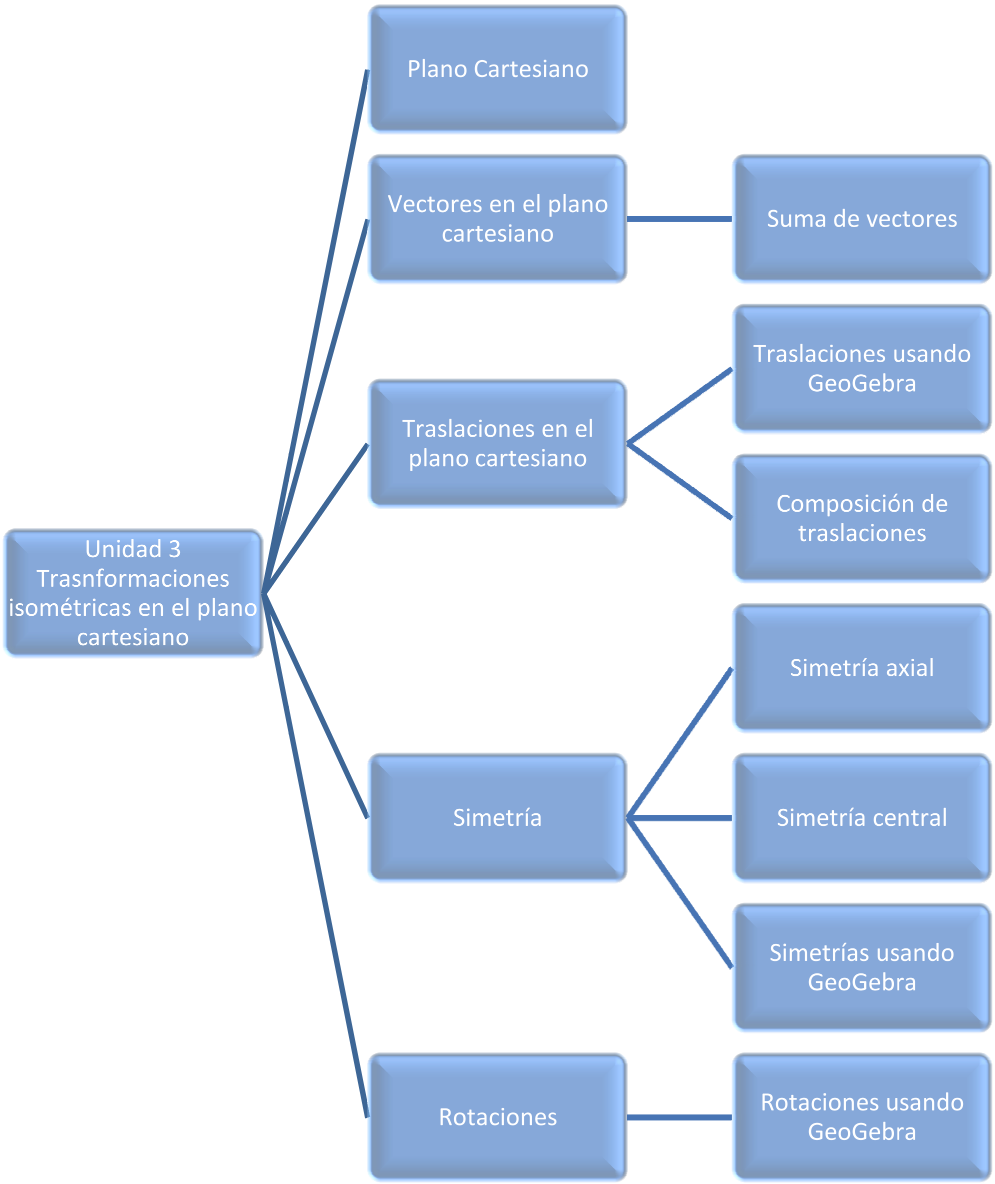
Gráfico 6: Porcentajes de ejercicios que desarrollan habilidades asociadas a los niveles de procesos cognitivos según la taxonomía de Anderson y Krathwohl



En el gráfico se puede observar que los ejercicios propuestos por el texto de editorial SM permiten llegar sólo al nivel tres de las taxonomías de Anderson correspondiente a aplicar, pues es necesario realizar procedimientos algorítmicos para realizar tareas conocidas por los estudiantes, por lo tanto se vuelve a concluir que los bajos resultados en evaluaciones estandarizadas puede ser consecuencia del no desarrollo de habilidades cognitivas de nivel superiores.

4.3. Estudio texto Bicentenario, Matemática 1 Medio, Santillana

El texto Bicentenario de Matemática titula la unidad de geometría *transformaciones isométricas en el plano cartesiano* y su contenido está dado por el siguiente esquema:



A continuación se da paso a la indagación del texto, presentada de forma secuencial donde luego de presentar el concepto se muestra el estudio de sus respectivas actividades propuestas.

Concepto de Plano Cartesiano

Se intenta acercar al alumno el concepto mediante un problema referente a describir la ubicación de un polígono en el plano euclidiano. Se pretende que el estudiante sienta la necesidad de dotar de un sistema de referencia para dar respuesta al problema, para lo cual se da la noción de plano cartesiano como aquel formado por dos rectas graduadas perpendiculares entre sí, donde cada punto se representa por un par ordenado de números (x, y), se enfatiza que dicho plano es el sistema de referencia necesario para dar solución al problema planteado.

Es importante destacar que el texto no indica cómo es posible describir la ubicación de un punto por medio de un par ordenado, solo hace alusión a la distancia recorrida por dicho punto desde el origen en dirección horizontal o vertical según indique la abscisa y ordenada del punto, tampoco hace alusión a la relación entre dicho plano y el euclidiano.

Para este concepto se proponen actividades que tiene como objeto determinar y representar puntos en el plano cartesiano apuntando al desarrollo de la habilidad de Comprender alcanzando el nivel dos de la taxonomía de Anderson y Krathwohl.

Las actividades presentes en este tópico no responden completamente al aprendizaje esperado *identificar y representar punto y coordenadas de figuras geométricas en el plano cartesiano, manualmente o usando un procesador geométrico* presente en el programa de estudio, ya que el texto no consta de actividades sobre la identificación de coordenadas de puntos.

Concepto de Vector

Se introduce mediante el planteamiento de una situación donde se recurre a vectores para representar el desplazamiento que realiza una determinada persona para ir a la casa de un amigo, este concepto es definido como una flecha que posee magnitud, dirección y sentido, explicando cada una de estas características y representado por un par ordenado llamado componente del vector donde cada una de las componentes representa el desplazamiento horizontal hacia la izquierda o derecha y el vertical hacia arriba o abajo respectivamente.

Posteriormente se trabajan los vectores en el plano cartesiano indicando que se pueden determinar sus componentes trasladando dicho vector hasta el origen del plano y también por medio de la resta de los valores de las abscisas y ordenadas de las coordenadas de sus puntos final y origen, es decir, d*ados los puntos* $A(x_1, y_1)$ *y* $B(x_2, y_2)$ *el vector que va desde A hacia B tiene componentes* $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$. Sin embargo, considerando que la resta de vectores no ha sido definida, esto no tendría sentido para el estudiante.

Se proponen actividades donde los estudiantes deben determinar las componentes de algunos vectores representados en una cuadricula y en el plano cartesiano, para luego clasificar dichos vectores según su magnitud, dirección y sentido, apuntando al desarrollo de las habilidades de Aplicar (Nivel 3), ya que los estudiantes deben aplicar la definición entregada por el texto para determinar componentes de un vector y el uso de conceptos ya que deben clasificar posteriormente dichos vectores.

Luego el texto presenta ejercicios resueltos que apuntan a la identificación de puntos en el plano cartesiano y un ejercicio resuelto titulado *preparando la PSU* que incluye una autoevaluación que sugiere al estudiante reforzar determinadas páginas en caso de responder negativamente a las preguntas (Santillana, 2010, pp.86-87).

El texto trabaja la suma de vectores retomando la situación utilizada para introducir al concepto de vectores (Santillana, 2010, p. 90), solo que esta vez antes de llegar a la casa del amigo la persona implicada debe pasar antes por otro lugar. Para determinar el vector desplazamiento de dicha distancia recorrida, se recurre a la suma de las componentes de los vectores involucrados, así se presenta la adición de vectores, como la suma de cada una de las componentes de los vectores, vale decir: $\vec{a} = (x_1, y_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2)$ las componentes del vector suma $\vec{a} + \vec{b}$ y corresponden a $(x_1 + x_2, y_1, y_2)$.

Luego de presentar el concepto composición de traslaciones se presenta dos tipos de actividades, una consiste en sumar vectores geométricamente en el plano euclidiano y la otra en sumar vectores por medio de sus componentes (Santillana, 2010, p.91). Esta última actividad responde al desarrollo de la habilidad de Aplicar, ya que el estudiante debe usar la definición entrega por el texto para sumar vectores según sus componentes. Es importante destacar que el texto no presenta la suma geométrica de vectores, por ende los estudiantes deben aplicar los conocimientos adquiridos en octavo año básico desarrollando la habilidad de Recordar.

Es importante mencionar que con respecto al desarrollo del aprendizaje esperado *representar en el plano adiciones, sustracciones de vectores y multiplicaciones de un vector por un escalar* las actividades propuestas en el texto no lo trabajan en su totalidad ya que únicamente se presentan actividades sobre la representación de la suma de vectores en el plano. En el desarrollo del concepto de vectores no se menciona otra operación que no sea la adición.

Concepto de Traslación

El texto comienza recordando lo que es una traslación indicando que esta corresponde al desplazamiento de una figura plana en la cual se conserva su forma, orientación y medidas, sin presentar alguna actividad o pregunta tal que el estudiante formule por si solo alguna conjetura sobre la aplicación de traslaciones.

Posteriormente se entrega el procedimiento para obtener la imagen de un punto al cual se le realizó una traslación según un vector dado, por medio de la suma de las componentes del vector de traslación a las coordenadas del punto original lo que no tendría sentido para el alumno ya que la suma de componentes no ha sido definida. Lo anterior se sintetiza con lo siguiente *en el plano cartesiano, la imagen de un punto* $P(x, y)$ *que se traslada según un vector* $\vec{v} = (a, b)$ *corresponde a* $P'(x + a, y + b)$ (Santillana, 2010, p.88). Es importante destacar que el texto no entrega una definición sobre traslación en el plano cartesiano, sólo entrega los procedimientos para trasladar un punto.

Se presenta una actividad que entrega los pasos para crear y trasladar un polígono usando el software Geogebra y se proponen tres actividades la primera consiste en determinar el vector que describe ciertas traslaciones de polígonos presentados en un plano cartesiano, en la siguiente actividad el estudiante debe realizar diversas traslaciones a un triángulo según los vectores dados y para finalizar debe determinar cuál es el vector de traslación empleado en una transformación dados el punto original y su homólogo. Para el desarrollo de estas actividades el estudiante debe aplicar la definición de traslación en términos de componentes entregada por el texto desarrollando la habilidad que alcanza el nivel tres de la taxonomía considerada. El aprendizaje esperado involucrado es *aplicar composición de funciones para realizar transformaciones isométricas en el plano cartesiano*.

Se define la composición de traslaciones como la aplicación de traslaciones sucesivas indicando que al aplicar dos traslaciones respecto a los vectores $\vec{\boldsymbol{u}}\ \boldsymbol{y}\ \vec{\boldsymbol{v}}$ una después de la otra respectivamente a una figura es lo mismo que aplicarle sólo una traslación con respeto al vector $\vec{\boldsymbol{u}} + \vec{\boldsymbol{v}} = (\boldsymbol{u_1} + \boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{u_2} + \boldsymbol{v_2})$.

En el breve desarrollo de este tópico no se proponen actividades que permitan identificar alguna regularidad en la aplicación sucesiva de traslaciones a figuras del plano cartesiano, presentando sólo una actividad al estudiante que consiste en la aplicación de dos traslaciones sucesivas a un triángulo ubicado en el plano cartesiano y la identificación del vector que es equivalente a aplicar ambas traslaciones.

Luego se presenta un ejercicio resuelto sobre composición de traslaciones y posteriormente se propone al estudiante un ejercicio muy similar (Santillana, 2010, p. 92), además se presenta un ejercicio titulado *preparando PSU* (Santillana, 2010, p. 93) donde se debe evaluar la veracidad de aseveraciones sobre la aplicación de traslaciones a determinados puntos, finalizando con una autoevaluación que sugiere al estudiantes reforzar determinadas páginas en caso de considerar no haber logrado lo propuesto.

Concepto de Reflexión y Simetría de figuras geométricas

El texto inicia recordando el concepto de reflexión en el plano euclidiano, denominado como una simetría, donde expone que la *distancia desde un punto de la figura al eje de reflexión debe ser igual que la distancia de su imagen a ese eje* además se puede *comprobar que la línea que une un punto cualquiera con su imagen es perpendicular al eje de reflexión* lo que se puede observar en la imagen (ver imagen 33) dada por un movimiento rígido respecto a una recta en el plano euclidiano.

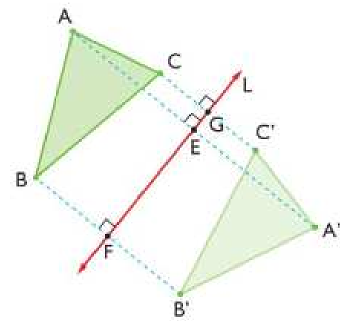


Imagen 33

Luego presenta dos ejemplos de simetría en el plano cartesiano, lo que denomina como reflexión, donde se observa la relación biunívoca de los puntos de la figura original con las de la figura obtenida luego de la aplicación de una simetría en el plano cartesiano (ver imagen 34).

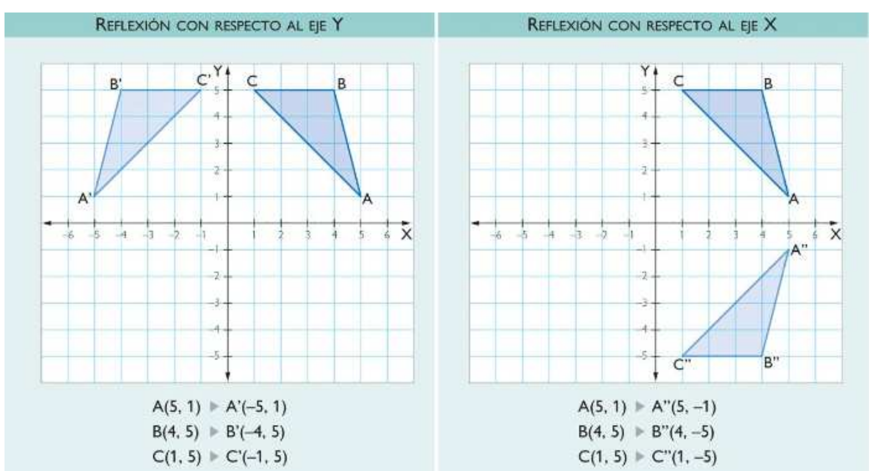


Imagen 34

Bajo los ejemplos gráficos se observa la relación entre los puntos de la figura original y sus imágenes, lo que ayuda a explicar que *cuando reflejamos con respecto al eje y, se mantiene la ordenada del punto y la abscisa cambia por su inverso aditivo* y si *reflejamos con* *respecto al eje x […] se mantiene la abscisa del punto y la ordenada cambia por su inverso aditivo* (Santillana, 2010, p.95), lo que no está relacionado explícitamente con la aplicación de una función sino sólo se ve como una regla algebraica.

Con la misma estructura anterior recuerda la reflexión respecto a un punto en el plano euclidiano, sin embargo denomina este concepto como una simetría al estar definida como un movimiento rígido donde *para cualquier punto y su imagen se cumple que el centro de simetría es el punto medio del segmento que los une* (Santillana, 2010, p. 96).

Posteriormente presenta un ejemplo de simetría central en el plano cartesiano donde se puede determinar que este concepto explica una correspondencia entre dos puntos respecto al origen del plano cartesiano considerado como centro de simetría, y al igual que en el estudio de simetría axial, entrega una regla algebraica que expone que *la imagen de un punto $P(x, y)$ que se refleja respecto al origen es $P'(-x, -y)$* (Santillana, 2010, p. 96) no explicitando que esta es una función dada por una relación biunívoca entre puntos. Para finalizar con el estudio de simetría explica cómo aplicar esta transformación isométrica en el plano cartesiano utilizando el software matemático GeoGebra.

Para afianzar el concepto de simetría axial se proponen seis ejercicios que tienen como objetivo aplicar simetría axial a un punto dado respecto a ciertas rectas en el plano cartesiano, encontrándose en el nivel tres de las taxonomías de Anderson. Luego no se presentan inmediatamente ejercicios para practicar el concepto de simetría central sino primero se expone el uso del software Geogebra para posteriormente desarrollar los ejercicios en este programa computacional, en los primeros dos ejercicios se deben aplicar ambas simetrías para que finalmente en los tres ejercicios posteriores modele e interprete la información obtenida y así determine una expresión algebraica que represente una simetría central en el plano cartesiano desarrollando los siguientes aprendizajes esperados: *aplicar composiciones de funciones para realizar transformaciones isométricas en el plano cartesiano, identificar regularidades en la aplicación de transformaciones isométricas a figuras en el plano cartesiano* y *formular y verificar conjeturas acerca de la aplicación de transformaciones isométricas a figuras geométricas en el plano cartesiano*.

Concepto de rotación

Se presenta el concepto, primeramente, con una visión de éste en el plano euclidiano; nombrando las principales características de esta transformación y los elementos importantes que la componen. Mientras que, en segunda instancia, se vuelve a presentar el concepto en el plano cartesiano, pero ahora se incorpora un ejemplo en donde se aplican rotaciones, a ángulos de $90°$ y $270°$ (sentido antihorario) con centro en el origen, al triángulo de vértices $A(3,1)$, $B(6,1)$ y $C(1,3)$, obteniendo los triángulos $A'B'C'$ y $A''B''C''$ respectivamente, donde este último corresponde a la imagen del triángulo $A'B'C'$ por medio de una rotación de $180°$ con centro en el origen.

A continuación se entrega una tabla que muestra la relación entre el punto original y su imagen luego de realizar una rotación en el plano cartesiano con centro de rotación en el origen de este, determinando una regularidad relacionada con los inversos aditivos de las coordenadas y con un cambio entre abscisas y ordenadas, por ejemplo, que al rotar un punto (x, y) en 90° con respecto al origen del plano cartesiano se obtiene $(-y, x)$, esto es, la ordenada pasa a ser la abscisa con signo contrario y la abscisa pasa a ser la ordenada sin cambio de signo.

Cabe destacar, que en el texto caracteriza el concepto de rotaciones primeramente como un movimiento en el plano euclidiano, para luego caracterizarlo como una función pues se habla de la imagen de un punto bajo la rotación dada. Presentando luego una gama de ejercicios, cuyo objetivo común es aplicar la tabla, con las principales rotaciones, a los puntos dados, alcanzado el nivel tres de las habilidades consideradas.

El texto propone ocho actividades, las que poseen objetivos comunes que apuntan principalmente a ejecutar una acción conocida como lo es aplicar una rotación a un polígono o a un punto dado arbitrariamente, según la tabla dada en la introducción del concepto, donde se muestra la relación entre el punto original y su imagen luego de realizar una rotación en el plano cartesiano con centro de rotación en el origen de éste.

En cuanto a la expectativa de cumplimiento de los aprendizajes esperados, dados en el programa de estudio, por parte de las actividades propuestas en el texto de estudio, se verifica que la mayoría de las actividades planteadas promueven que los estudiantes sean capaces de *aplicar composiciones de funciones para realizar transformaciones isométricas en el plano cartesiano,* excepto en aquellas actividades donde se apunta principalmente a conjeturar respuestas luego de aplicar rotaciones sucesivas en ciertos ángulos, que claramente promueven que los estudiantes *formulen y verifiquen conjeturas acerca de la aplicación de transformaciones isométricas a figuras geométricas en el plano cartesiano*.

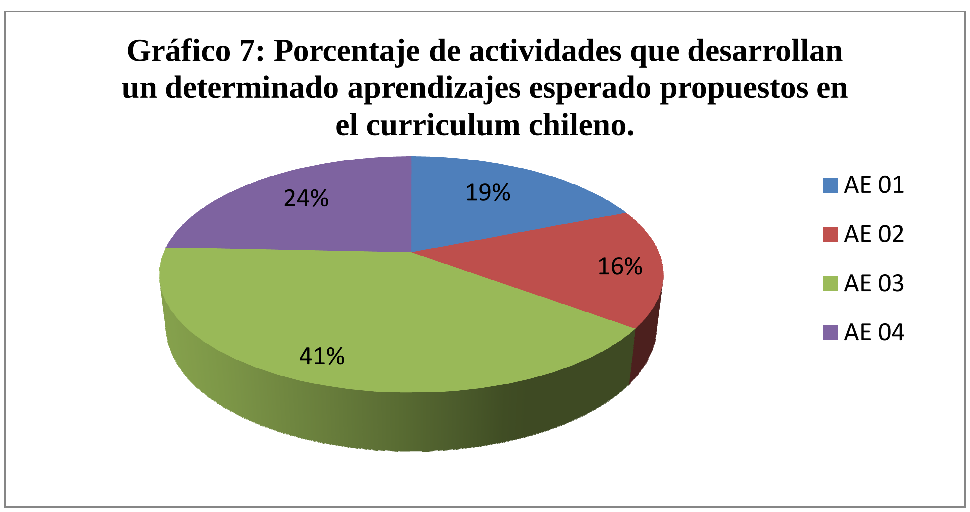
Las actividades propuestas promueven las habilidades de recordar, comprender y aplicar; pues los estudiantes deberán ser capaces de usar herramientas en situaciones concretas como lo son rotar puntos o figuras haciendo uso de instrumentos geométricos o bien de fórmulas, además de encontrar ángulos de rotación y de identificar regularidades en la aplicación de transformaciones isométricas a figuras en el plano cartesiano, respectivamente.

En conclusión, el texto de editorial Santillana tiene una estructura similar a los textos anteriores, entregando cada concepto por medio de ejemplos geométricos que recuerdan las transformaciones isométricas en el plano euclidiano para luego proyectarlas al plano cartesiano (de forma similar al texto de editorial SM), proponiendo ejercicios que en su mayoría están asociados a este sistema de referencia y a afianzar el proceso de aplicación de cada uno de estos movimientos. Es importante mencionar que este texto presenta ejercicios denominados PSU dando énfasis a esta prueba nacional.

La unidad comienza con el concepto de plano cartesiano explicando que este es un sistema de referencia que permite la ubicación de puntos de la forma (x, y) donde x indica la posición del punto respecto al eje de las abscisas e y la posición del punto respeto al eje de las ordenadas. En seguida propone ejercicios que permiten el logro del aprendizaje *identificar y representar puntos y coordenadas de figuras geométricas en el plano cartesiano, manualmente o usando un procesador geométrico* cumpliendo con los requerimientos del curriculum chileno.

Luego presenta las características de un vector y la representación de este en el plano cartesiano utilizando sus componentes. Este concepto lo utiliza en seguida para complementar las traslaciones en el plano cartesiano y proponer ejercicios relacionados, para esto recuerda las traslaciones de figuras geométricas en el plano euclidiano por medio de un ejemplo gráfico. Continua con la suma de vectores de forma geométrica y en términos de componentes para utilizarla en la composición de traslaciones en el plano cartesiano y al igual que en el texto anterior no hace alusión a la multiplicación de un escalar por un vector no permitiendo el logro del aprendizaje referido a *representar en el plano, adiciones, sustracciones de vectores y multiplicaciones de un vector por un escalar*. Posteriormente explica las simetrías y rotaciones introduciendo con ejemplos en el plano euclidiano para luego extender estos movimientos al plano cartesiano con sus respectivos ejemplos que son formalizados mediante regularidades algebraicas, finalizando con la propuesta de ejercicios relacionados. Nótese que este texto sólo explica conceptualmente la composición de traslaciones, considerando las otras composiciones únicamente en los ejercicios propuestos.

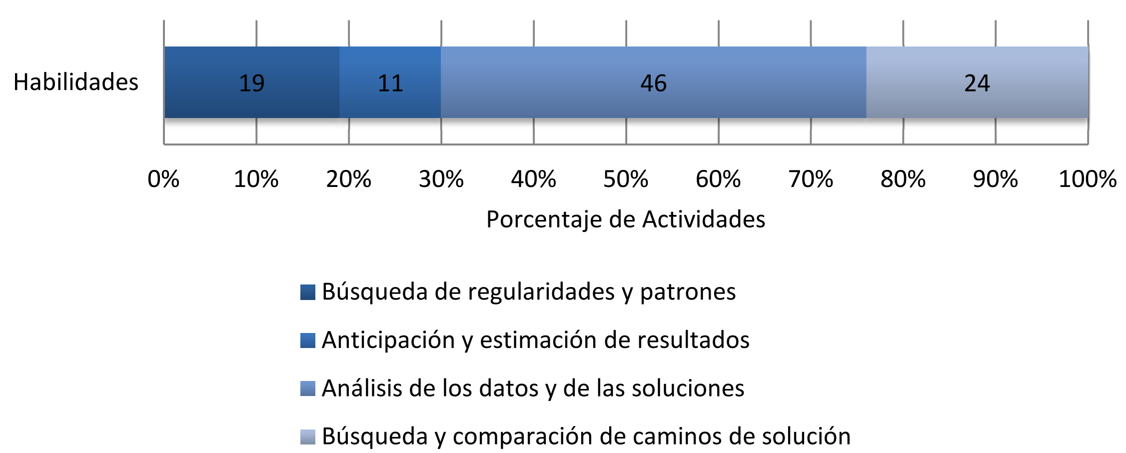
A continuación se presentan algunos gráficos que muestran los porcentajes de ejercicios que permiten el logro de un determinado aprendizaje esperado del eje de geometría y aquellos que están orientados al desarrollo de las habilidades propuestas en nuestro curriculum chileno y de los procesos cognitivos relacionados con la taxonomía de Anderson y Krathwohl (2001) (ver codificación de aprendizajes esperados en anexos).



En el gráfico se puede observar que el 100% de las actividades propuestas en el texto se desarrollan en el plano cartesiano, así el mayor porcentaje que corresponde a un 41% busca lograr el aprendizaje relacionado con *aplicar composiciones de funciones para realizar transformaciones isométricas en el plano cartesiano* (AE 03), mientras que el menor porcentaje correspondiente al l6% permite *representar en el plano, adiciones, sustracciones de vectores y multiplicaciones de un vector por un escalar* (AE 02). Nótese que el aprendizaje referido a *formular y verificar conjeturas acerca de la aplicación de transformaciones isométricas a figuras geométricas en el plano cartesiano* (AE 05) no es abordado, pese a estar propuesto en el curriculum chileno para cumplir habilidades expuestas.

A continuación se presenta un gráfico que muestra en términos de porcentajes la cantidad de ejercicios que permiten la adquisición de algunas habilidades cognitivas enmarcadas en el curriculum nacional relacionadas con las transformaciones isométricas.

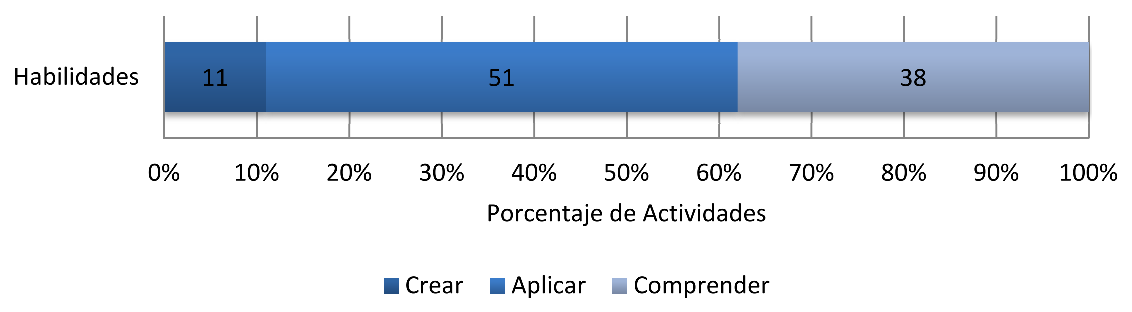
Gráfico 8: Porcentaje de ejercicios que desarrollan una determinada habilidad propuesta en el curriculum chileno.



Al igual que en el texto anterior la mayoría de las habilidades que pueden ser logradas son aquellas donde el alumno realiza procedimientos por medio de algoritmos conocidos o entregados por el texto, lo que refleja que la mayor cantidad de los ejercicios propuestos busca sólo la adquisición de habilidades de nivel inicial y no aquellas donde se fomenta grados mayores de procesos cognitivos. Además un 19% de los ejercicios propone la búsqueda de regularidades y patrones en la aplicación de las transformaciones isométricas en el plano cartesiano, por ejemplo, concluir una regularidad entre la ordenada y la abscisa de un punto que son reflejadas respecto a un eje de este plano.

Por último se muestra un gráfico que presenta los porcentajes de ejercicios que desarrollan habilidades según los niveles de procesos cognitivos de las taxonomías de Anderson y Krathwohl que se divide en seis niveles, donde el nivel seis aborda todos los demás.

Gráfico 9: Porcentajes de ejercicios que desarrollan habilidades asociadas a los niveles de procesos cognitivos según la taxonomía de Anderson y Krathwohl



Según el gráfico del texto de editorial Santillana un 11% de los ejercicios propuestos permiten lograr el nivel más alto de procesos cognitivos según las taxonomías de Anderson y Krathwohl, lo que equivale a cuatro problemas, donde el alumno debe crear, como por ejemplo alguna expresión algebraica que permita generalizar alguna situación respecto a las transformaciones isométricas en el plano cartesiano. Con esto se puede deducir que este es un texto que considera importante que el alumno sea capaz formular hipótesis y/o diseñar algún procedimiento para cumplir alguna tarea, siendo un buen material de apoyo en el proceso de enseñanza y aprendizajes de los estudiantes chilenos.

CAPÍTULO 5: Conclusión

Para comenzar esta conclusión, es necesario señalar que se enfocará de acuerdo al cumplimiento de los objetivos propuestos en este trabajo, pues es relevante a fin de comprender de mejor manera los resultados del mismo, esto es, cómo evoluciona el tratamiento de las transformaciones isométricas y determinar por medio de un análisis de gráficas si las actividades propuestas por los textos cumplen con las expectativas del curriculum (respecto a los aprendizajes esperados y habilidades), del mismo modo determinar el nivel cognitivo que alcanzan los alumnos según taxonomía de Anderson y Krathwohl, dando a conocer de manera general los resultados obtenidos en el estudio de los textos de forma comparativa.

En general, la secuencialidad y estructura de los contenidos en los textos escolares estudiados son similares, sin embargo difieren en su énfasis. Por ejemplo, los textos de editorial SM y Santillana inician el estudio de las transformaciones isométricas recordándolas en el plano euclidiano y así relacionarlas con la extensión de estas al plano cartesiano, en cambio el texto de editorial Mc Graw-Hill sólo presenta estos movimientos en el plano euclidiano, no cumpliendo con lo expuesto en el marco curricular, pese a ser el texto oficial distribuido por el MINEDUC a los establecimientos municipales.

Desde el punto de vista metodológico se observa que, en cada texto, para introducir un nuevo concepto se inicia con un ejemplo, ya sea de la vida cotidiana o la ilustración de una transformación isométrica en el plano euclidiano o cartesiano. Cabe señalar que el texto de la editorial SM propone, en conjunto a los ejemplos, interrogantes que guían al alumno a la formulación de conjeturas, acción que ayuda positivamente a la comprensión de los contenidos y desarrollo de habilidades en el alumno, sin embargo son inmediatamente respondidas por el texto no cumpliendo totalmente con el objetivo anterior.

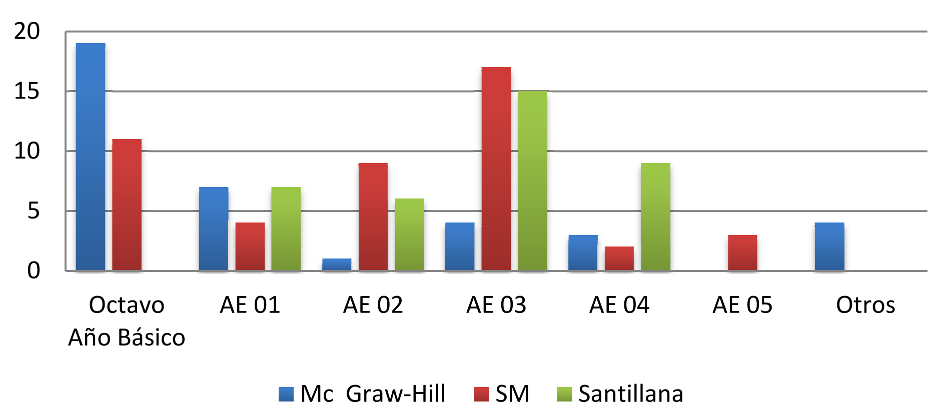
Con respecto a la evolución del conocimiento matemático, se omiten pasos importantes como mencionar la conexión y diferencias entre plano euclidiano y plano cartesiano, a excepción del texto de editorial Mc Graw-Hill que explica a cabalidad como dotar un plano euclidiano de un sistema de coordenadas cartesianas explicando así la relación entre estos.

Es importante mencionar que por medio de este estudio fue posible constatar errores conceptuales referidos principalmente a concepciones netamente matemáticas, entre las cuales se destacan:

- Confundir un movimiento rígido en el plano euclidiano con una correspondencia biunívoca de puntos en el plano cartesiano, como es el caso de una reflexión con una simetría
- Determinar erróneamente la magnitud, dirección y sentido como magnitudes vectoriales, pues estas corresponden a las características de un vector.
- Las demostraciones poseen justificaciones no verificadas y se sustentan en propiedades que han sido aceptadas posiblemente a partir de la experimentación en año anteriores, es decir, son netamente experimentales no teniendo carácter deductivo.

Con respecto a los ejercicios propuestos, se presentan tres gráficos que permiten realizar una comparación entre los textos respecto al logro de aprendizajes y habilidades. A continuación se presenta el primer gráfico que muestra el número de actividades de cada texto que permiten el logro de los aprendizajes propuestos por el curriculum chileno.

Gráfico 10: Comparación del número de ejercicios propuestos por los textos que permiten el logro de determinados aprendizajes entregados por el curriculum chileno.

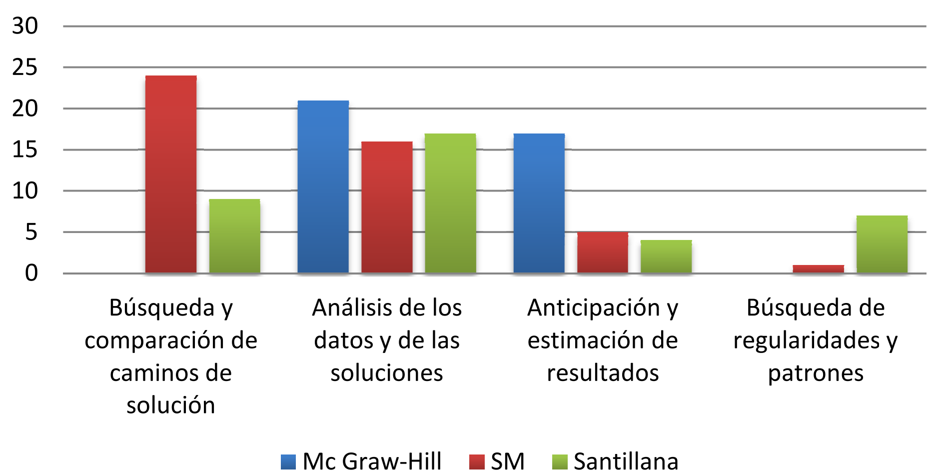


En el gráfico se puede observar que los textos de editorial Mc Graw-Hill y SM presentan ejercicios relacionados con las transformaciones isométricas en el plano euclidiano, contenido correspondiente a octavo año básico, permitiendo la activación de aprendizajes previos para un buen desarrollo de la unidad, si bien el texto de editorial Santillana no propone este tipo de ejercicios, al introducir cada transformación isométrica presenta un ejemplo geométrico de estas en el plano euclidiano.

Cabe señalar que los textos de editorial Mc Graw-Hill y Santillana no proponen ejercicios que desarrollen el aprendizaje *formular y verificar conjeturas acerca de la aplicación de transformaciones isométricas a figuras geométricas en el plano cartesiano*, lo que puede afectar directamente a los resultados de pruebas estandarizadas aplicadas en nuestro país. Además es importante mencionar que el texto de editorial Mc Graw-Hill presenta tres actividades que los alumnos no pueden desarrollar según los aprendizajes previos, al ser necesario conocimientos que se adquieren en el nivel de tercer año medio.

Un segundo gráfico muestra una comparación del número de ejercicios en que los alumnos pueden alcanzar las habilidades propuestas en el marco curricular.

Gráfico 11: Comparación de la cantidad de ejercicios que permiten desarrollan las habilidades propuestas por el curriculum chileno.



En el gráfico se observa que no existen actividades que fomenten la adquisición de la habilidad demostrativa en los alumnos pues en su mayoría apuntan a la búsqueda y comparación de caminos de solución y al análisis de los datos y soluciones, que corresponden a un nivel cognitivo menor (aplicación de una fórmula entregada por el texto), a excepción del texto de editorial Santillana que entrega una fórmula con el fin de aplicar esta para buscar alguna regularidad.

Lo anterior expuesto pone en evidencia que los textos escolares no atienden completamente a las exigencias del Curriculum que enfatiza en la importancia del desarrollo de un pensamiento creativo y critico en los estudiantes apelando a las bases del razonamiento matemático donde es necesario que el alumno desarrolle habilidades de nivel superior. Considerando que los textos escolares deben cumplir su función de ser una propuesta metodológica para apoyar el curriculum en el aula, vale decir que sus contenidos y actividades vayan en pro de desarrollar las expectativas del Marco curricular chileno, se concluye que los textos de estudio podrían ser una causante del mal desempeño obtenido a nivel nacional e internacional en las pruebas expuestas al inicio de esta investigación, ya que las actividades propuestas no apuntan ni en un 50% al desarrollo de las habilidades expuesta en el curriculum nacional.

Un último gráfico muestra una comparación del número de ejercicios que pretenden desarrollar en los alumnos habilidades asociadas a los procesos cognitivos propuestos en las taxonomías de Anderson y Krathwohl.

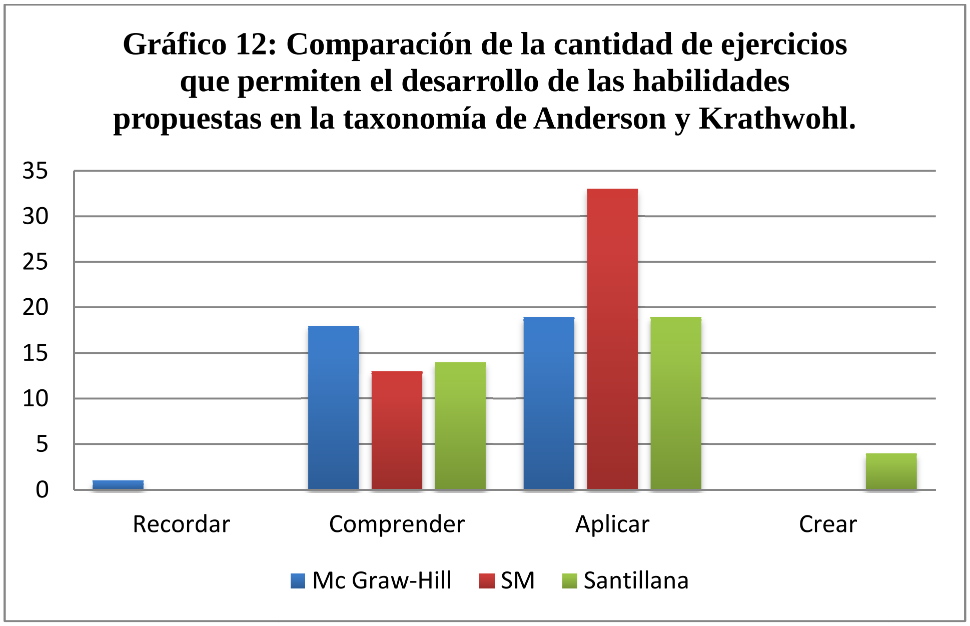


Gráfico 12: Comparación de la cantidad de ejercicios que permiten el desarrollo de las habilidades propuestas en la taxonomía de Anderson y Krathwohl.

En el grafico se logra visualizar que las actividades presentes en los tres textos están orientadas a desarrollar en los estudiantes, las habilidades pertenecientes al tercer nivel cognoscitivo; relativo a la aplicación, pues en su mayoría buscan que los estudiantes hagan uso de la información o conocimiento entregado previamente en cada uno de los textos, lo cual avala el bajo nivel en que se encuentran los estudiantes chilenos, por ejemplo según el estudio PISA, pues al encontrarse en el nivel dos mencionado en el estudio, estos son capaces de desarrollar tareas enfocadas a la utilización de algoritmos, fórmulas, procedimientos o convenciones básicas, además de razonar directamente y de hacer interpretaciones literales de los resultados, lo que guarda estrecha relación con aquellas tareas que buscan promover los textos estudiados. Cabe señalar que el texto de editorial Santillana, con algunas de sus actividades, logra promover el desarrollo de habilidades pertenecientes a un nivel cognoscitivo más alto (crear).

En general, los textos se basan en la ejercitación repetitiva que aumentan gradualmente su nivel de dificultad, orientando al alumno para la adquisición del concepto y reglas por medio de la aplicación de una definición y/o fórmula para la resolución de ejercicios. Además, los contenidos y actividades se presentan en distintas formas de representación (algebraico, gráfico y lenguaje natural), lo que permite adquirir de mejor modo cada concepto, además cuentan con un número adecuado de ejercicios con tal gradualidad que permiten afianzar sistemáticamente cada concepto, destacando el texto de editorial Santillana que presenta actividades que incitan la búsqueda de habilidades como visualizar, indagar y formular conjeturas, habilidades que buscan evaluar pruebas como la PISA y TIMSS. Sin embargo a nuestros alumnos no se les estimula un espíritu investigador, creativo ni el desarrollo de habilidades de pensamiento superior, porque los textos propician una actitud pasiva y no ejercitan el razonamiento lógico. No les exigen formular hipótesis, desarrollar experimentos sencillos o buscar estrategias alternativas cuando no conocen la fórmula.

Finalmente los textos de matemática sometidos a estudio no constituyen una fuente de perfeccionamiento ni de ayuda concreta para el profesor ya sea por presentar errores conceptuales o simplemente por no cumplir en su cabalidad con lo expuesto en el marco curricular chileno. Además, como fue indicado en este trabajo, la construcción de algunos conceptos no facilitan un estudio independiente para aquellos que deseen trabajar sin la guía del profesor, ni tampoco un material que presente grandes desafíos para alumnos aventajados, pues en general no promueven en su totalidad el desarrollo de habilidades matemáticas.

Sin embargo se debe destacar que el texto que tiene menos carencias en el desarrollo de los aprendizajes esperados y habilidades es el de la editorial Santillana, además cumple con el desarrollo gradual de cada concepto logrando así una buena construcción del aprendizaje en el marco de las transformaciones isométricas.

BIBLIOGRAFÍA

Anderson, L and Krathwohl, D. (2001). *A taxonomy for learning, teaching and assessing*. Longman. New York.

Baeza A., Blanco M., Bozt J., Calderón F., García M y Guerra M. (2010). *Bicentenario, Matemática, 1° Año Medio*. Santillana. Chile.

Bracho J. (2003). *Introducción Analítica a la Geometría*. México.

Chandía E., Ortiz A., Reyes C. y Valenzuela M. (2010). *Matemática, 1° Año Medio*.Mc Graw Hill. Chile.

Chevallard, Y. (1985). *La Transposition Didactique*. La Pensée Sauvage, Grenoble-Francia.

Ewald G. (1971). *Geometry: an introduction*. Estados Unidos.

Herrera R., Loyola P. y Vega M. (2010). *Nuevo Explorando Matemática, 1° Año Medio*. SM. Chile.

Ministerio de Educación. (2011). *Chile y el aprendizaje de Matemáticas y Ciencias según TIMSS*. Chile.

Ministerio de Educación. (2009). *Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios de la Educación Básica y Media en su Actualización Curricular 2009*. Chile.

Ministerio de Educación. (2011). *Programa de Estudio: Primer Año Medio, Matemática.* Chile.

Ministerio de Educación. (2009). *Resumen de Resultados PISA 2009.* Chile

Universidad de Chile, DEMRE. (2008). *Resolución Facsímil de Matemática parte III.* Chile.

ANEXOS

Anexo 1: Descripción de Niveles de desempeño en la escala de Matemática

Nivel 6: 670 y más puntos
Los estudiantes ubicados en este nivel , son capaces de conceptualizar, generalizar y usar información basada en su investigación y en el modelamiento de situaciones problemáticas complejas. Pueden relacionar diferentes fuentes de información y representaciones y hacer traducciones entre ellas de manera flexible. Poseen un razonamiento y pensamiento matemático avanzado, y pueden aplicarlo, junto con el dominio de las operaciones y relaciones matemáticas simbólicas y formales, en el desarrollo de nuevas aproximaciones y estrategias para enfrentar situaciones novedosas. Asimismo, son capaces de formular y comunicar con precisión las acciones y reflexiones que le surgen de sus descubrimientos, interpretaciones y argumentos, y de adecuarlas a situaciones distintas de las originales.
Nivel 5: de 607 a 669 puntos
Los estudiantes ubicados en el Nivel 5, son capaces de abordar situaciones complejas, desarrollando y utilizando modelos, identificando sus limitaciones y especificando sus supuestos. Adicionalmente, son capaces de seleccionar, comparar y evaluar estrategias de resolución de problemas, para abordar situaciones problemáticas complejas referidas a estos modelos. Estos estudiantes también son capaces de trabajar de manera estratégica estas situaciones, usando habilidades de pensamiento y razonamiento amplias y correctamente desarrolladas; presentaciones adecuadamente vinculadas, y caracterizaciones simbólicas y formales. Finalmente, también son capaces de reflexionar sobre sus acciones, y de formular y comunicar sus interpretaciones y razonamientos.

Nivel 4: de 545 a 606 puntos
Los estudiantes ubicados en el Nivel 4, son capaces de trabajar de manera eficiente con modelos explícitos de situaciones complejas concretas, que involucran condicionantes o la necesidad de reconocer supuestos. Pueden seleccionar e integrar diferentes representaciones (incluyendo las simbólicas), relacionándolas directamente con situaciones del mundo real. Asimismo, poseen la habilidad de razonar flexiblemente y de lograr cierta profundización de los contextos, y pueden elaborar y comunicar sus explicaciones y razonamientos, sobre la base de sus propias interpretaciones, argumentos y acciones.
Nivel 3: de 482 a 544 puntos
Los estudiantes ubicados en el Nivel 3 de la escala, son capaces de ejecutar procedimientos claramente descritos (incluyendo los que requieren decisiones secuenciales); de seleccionar y aplicar estrategias simples de resolución de problemas; de interpretar, y de usar representaciones basadas en diferentes fuentes de información y razonar directamente a partir de ellas. Asimisnmo, son capaces de elaborar comunicaciones breves para reportar sus interpretaciones, resultados y razonamientos.
Nivel 2: de 420 a 481 puntos
Los estudiantes que se ubican en este Nivel, son capaces de interpretar y reconocer situaciones en contextos que requieren sólo inferencia directa, extraer información relevante de sólo una fuente de información a la vez y hacer uso de una sola forma de representación. Pueden utilizar algoritmos, fórmulas, procedimientos o convenciones básicas, son capaces de razonar directamente y de hacer interpretaciones literales de los resultados.
Nivel 1: de 358 a 419 puntos
Los estudiantes que se ubican en este Nivel, pueden responder preguntas claramente definidas, que involucren contextos familiares, en los cuales toda la información relevante está presente. También son capaces de identificar información y de llevar a cabo procedimientos rutinarios, siguiendo instrucciones directas, en situaciones explícitas. Finalmente, estos estudiantes pueden realizar acciones obvias o aquellas que se desprenden directamente de los estímulos presentados.

Estudio Pisa 2009

Anexo 2: Porcentaje de estudiantes chilenos en los niveles de logro de matemática

Nivel de logro	¿Qué saben o son capaces de hacer los estudiantes del nivel?	Porcentaje de estudiantes
Avanzado	Son capaces de organizar información, hacer generalizaciones, resolver problemas no rutinarios y justificar conclusiones a partir de datos. Pueden calcular cambios porcentuales y aplicar su conocimiento acerca de conceptos numéricos y algebraicos, así como hacer relaciones para resolver problemas. Pueden resolver sistemas de ecuaciones y modelar algebraicamente situaciones simples. Pueden aplicar su conocimiento de medición y geometría en situaciones problemáticas complejas. Pueden interpretar datos a partir de una variedad de tablas y gráficos, incluyendo interpolación y extrapolación.	0%
Alto	Pueden aplicar su comprensión y conocimiento matemático en una amplia variedad de situaciones relativamente complejas. Pueden ordenar, relacionar y hacer cálculos con fracciones y decimales para resolver problemas planteados, así como operar con enteros negativos y resolver problemas en múltiples etapas que incluyen proporciones con números naturales. Pueden resolver problemas algebraicos simples, que incluyan expresiones evaluativas, resolver sistemas de ecuaciones y usar fórmulas para determinar el valor de una variable. Pueden encontrar el área y volumen de figuras geométricas simples y utilizar su conocimiento acerca de propiedades geométricas para resolver problemas. Pueden resolver problemas sobre probabilidades e interpretar datos a partir de una variedad de gráficos y tablas.	3%

Intermedio	Son capaces de aplicar conocimiento matemático en situaciones reales. Pueden sumar, restar o multiplicar para resolver problemas de una sola etapa que incluyen números naturales y decimales. Identifican representaciones de fracciones comunes y tamaños relativos de las fracciones. Comprenden relaciones algebraicas simples y resuelven ecuaciones lineales simples con una incógnita. Demuestran comprender las propiedades de los triángulos y conceptos geométricos básicos incluyendo simetría y rotación. Reconocen nociones básicas de probabilidad. Pueden leer e interpretar gráficos, tablas, mapas y escalas.	12%
Bajo	Tienen sólo algunos conocimientos matemáticos básicos. Pueden hacer cálculos básicos con números naturales sin usar calculadora y aproximar números de dos decimales al entero más próximo. Reconocen algunos términos básicos y comprenden la información que entrega un gráfico de líneas.	26%
Inferior	Muestran un conocimiento matemático inferior al mínimo que permite describir la prueba TIMSS.	59%

TIMSS 2003

Anexo 3: Aprendizaje Esperados, Unidad Geometría, Primer Año Medio

Aprendizaje esperado	**Indicadores de evaluación**
01: Identificar y representar puntos y coordenadas de figuras geométricas en el plano cartesiano, manualmente o usando un procesador geométrico.	›Identifican puntos y coordenadas de vértices de polígonos y de elementos de la circunferencia en el plano cartesiano. ›Dibujan puntos, polígonos y circunferencias en el plano cartesiano en forma manual o usando un procesador geométrico.
02: Representar en el plano adiciones, sustracciones de vectores y multiplicaciones de un vector por un escalar.	›Representan gráficamente vectores en el plano cartesiano, dados sus componentes. ›Identifican vectores y encuentran las componentes resultantes de adiciones y sustracciones entre ellos. ›Encuentran las componentes de vectores que resultan de la multiplicación de vectores por escalar.
03: Aplicar composiciones de funciones para realizar transformaciones isométricas en el plano cartesiano.	›Efectúan composiciones de transformaciones isométricas en el plano cartesiano. ›Reconocen las figuras resultantes al aplicar composiciones de transformaciones isométricas a figuras en el plano cartesiano.
04: Identificar regularidades en la aplicación de transformaciones isométricas a figuras en el plano cartesiano.	›Identifican regularidades al aplicar composiciones de reflexiones a figuras en el plano cartesiano. ›Identifican regularidades al aplicar sucesivas composiciones de traslaciones a figuras del plano cartesiano.

05: Formular y verificar conjeturas acerca de la aplicación de transformaciones isométricas a figuras geométricas en el plano cartesiano.	›Conjeturan acerca de la aplicación de composiciones de transformaciones isométricas a figuras del plano cartesiano. ›Conjeturan acerca de la conmutatividad de transformaciones isométricas y verifican las conjeturas formuladas en casos particulares. ›Verifican, en casos particulares, conjeturas formuladas acerca de la aplicación de sucesivas traslaciones a figuras en el plano cartesiano, en forma manual o usando un procesador geométrico.
06: Establecer el concepto de congruencia a partir de las transformaciones isométricas.	›Reconocen que dos figuras son congruentes cuando existen transformaciones isométricas que aplicadas en una de ellas permiten obtener la otra figura. ›Identifican las transformaciones isométricas que transforman una figura en otra que es congruente a ella.
07: Formular y verificar conjeturas acerca de criterios de congruencia en triángulos.	›Conjeturan acerca del criterio lado-ángulo-lado. ›Conjeturan acerca de criterios de congruencia en triángulos y dan ideas geométricas para verificar esas conjeturas. ›Calculan trazos en triángulos aplicando criterios de congruencia verificados. Por ejemplo, utilizan el criterio lado-lado-lado para calcular segmentos en triángulos.
08: Resolver problemas relativos a cálculos de vértices y lados de figuras geométricas del plano cartesiano y a la congruencia de triángulos.	›Resuelven problemas relativos a la congruencia en triángulos utilizando los criterios establecidos. ›Demuestran propiedades de congruencia en polígonos utilizando los criterios de congruencia en triángulos. › Resuelven problemas relativos a cálculos de medidas de segmentos en el plano cartesiano. ›Resuelven problemas relativos a coordenadas de vértices de figuras en el plano cartesiano.

Anexo 4: Estudio de actividades propuestas

Estudio de actividades propuestas en texto de editorial Mc Graw-Hill

Página 132

1. Di sin dibujar, en que cuadrante están situados los puntos $\boldsymbol{A(4,1)}$, $\boldsymbol{B(3,5)}$, $\boldsymbol{C(-1,4)}$ y $\boldsymbol{D(0,0)}$. Luego dibuja los puntos y une los puntos con segmentos. ¿Qué figura geométrica es la que trazaste? ¿Cómo puedes comprobarlo?

Objetivo de la actividad

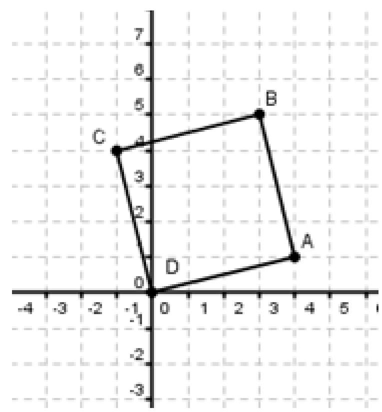
Interpretar y reconocer coordenadas en el plano cartesiano.

Aprendizaje esperado involucrado

01: Identificar y representar puntos y coordenadas de figuras geométricas en el plano cartesiano, manualmente o usando un procesador geométrico.

Procedimiento de resolución

- Clasificar las coordenadas de los puntos $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ y $\boldsymbol{D}$ para identificar el cuadrante al cual pertenece cada uno de estos, determinando que el punto $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ se ubican en el primer cuadrante, $\boldsymbol{C}$ en el segundo cuadrante y el punto $\boldsymbol{D}$ a ninguno, ya que está ubicado en la intercepción de los ejes u origen.
- Representar los puntos dados en el plano cartesiano para posteriormente unirlos (consecutivamente) por medio de segmentos (ver imagen).
- Identificar que la figura dibujada es un cuadrado.
- Ejecutar procedimiento de medición de los lados y ángulos interiores de la figura utilizando instrumentos geométricos (regla y transportador).



Habilidad desarrollada según curriculum

Análisis de datos y soluciones

Habilidad desarrollada según taxonomía de Anderson y Krathwohl

Aplicar (Nivel 3)

Conocimientos que permiten abordar la situación

- Características del plano cartesiano (cuadrantes)
- Características de los paralelogramos (medidas)

2. ¿En qué cuadrante puede estar situado un punto si la abscisa es positiva?

Objetivo de la actividad
Clasificar coordenadas en algún cuadrante del plano cartesiano
Aprendizaje esperado involucrado
01: Identificar y representar puntos y coordenadas de figuras geométricas en el plano cartesiano, manualmente o usando un procesador geométrico.
Procedimiento de resolución
• Ilustrar coordenadas con abscisa positiva en el plano cartesiano. • Concluir que cualquier coordenada de abscisa positiva pertenece al primer y cuarto cuadrante del plano cartesiano.
Habilidad desarrollada según curriculum
Anticipación y estimación de resultados.
Habilidad desarrollada según taxonomía de Anderson y Krathwohl
Comprender (nivel 2)
Conocimientos que permiten abordar la situación
• Características de plano cartesiano • Identificar coordenadas de puntos representados en el plano cartesiano.

3. ¿Qué signos tienen las coordenadas de los puntos situados en el segundo cuadrante? ¿En el tercer cuadrante? ¿En el cuarto cuadrante?

Objetivo de la actividad
Clasificar coordenadas en algún cuadrante del plano cartesiano
Aprendizaje esperado involucrado
01: Identificar y representar puntos y coordenadas de figuras geométricas en el plano cartesiano, manualmente o usando un procesador geométrico.
Procedimiento de resolución
• Ilustrar coordenadas en el segundo, tercer y cuarto cuadrante del plano cartesiano. • Concluir que en el segundo cuadrante la abscisa es un número negativo y la ordenada un número positivo, en el tercer cuadrante la abscisa y ordenada son números negativos y finalmente en el cuarto cuadrante la abscisa es un número positivo y la ordenada un número negativo.
Habilidad desarrollada según curriculum
Anticipación y estimación de resultados.

Habilidad desarrollada según taxonomía de Anderson y Krathwohl
Comprender (Nivel 2)
Conocimientos que permiten abordar la situación
• Características de plano cartesiano (cuadrantes) • Identificar coordenadas de puntos representados en el plano cartesiano.

4. ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos cuya ordenada es 5? ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos cuya abscisa es $\boldsymbol{-2}$?

Objetivo de la actividad
Reconocer gráfica obtenida luego de representar puntos en el plano cartesiano.
Aprendizaje esperado involucrado
Reconocen que los lugares geométricos se pueden describir mediante ecuaciones cartesianas (plan electivo, tercero medio)
Procedimiento de resolución
• Representar en el plano cartesiano algunos puntos de la forma $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{5})$ y puntos de la forma $(\boldsymbol{-2}, \boldsymbol{y})$, con $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ números reales, para luego unirlos respectivamente. • Identificar el lugar geométrico obtenido al determinar una recta con la unión de los puntos graficados. • Concluir que las respectivas ecuaciones son $\boldsymbol{y = 5}$ y $\boldsymbol{x = -2}$
Habilidad desarrollada según curriculum
Análisis de los datos y de las soluciones.
Habilidad desarrollada según taxonomía de Anderson y Krathwohl
Comprender (Nivel 2)
Conocimientos que permiten abordar la situación
• Definición de lugares geométricos • Ecuaciones de rectas (verticales y horizontales)
Observaciones
Esta actividad apunta al desarrollo de un aprendizaje del programa de estudio de tercer año medio correspondiente al plan electivo de matemática.

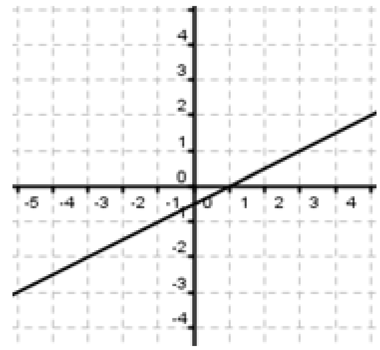
Página 133

1. Determina las coordenadas de todos los puntos del plano cartesiano donde se pudo haber trazado el vértice $\boldsymbol{C}$ del primer problema.

Objetivo de la actividad
Inferir sobre la ubicación de un punto en el plano cartesiano.
Aprendizaje esperado involucrado
01: Identificar y representar puntos y coordenadas de figuras geométricas en el plano cartesiano, manualmente o usando un procesador geométrico.
Procedimiento de resolución
• Rememorar que en un triángulo equilátero la altura dimidia la base, por lo tanto la abscisa de la coordenada del vértice $\boldsymbol{C}$ es $\frac{3}{2}$ (observar que el lado $\boldsymbol{AB}$ mide tres unidades). • Inferir que al ser un triángulo equilátero la longitud de sus lados $\boldsymbol{AC}$ y $\boldsymbol{BC}$ debe medir tres unidades al igual que su base $\boldsymbol{AB}$, por lo tanto, la única coordenada que puede adoptar el punto $\boldsymbol{C}$ es $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3}{2}\right)$.
Habilidad desarrollada según curriculum
Análisis de datos y soluciones.
Habilidad desarrollada según taxonomía de Anderson y Krathwohl
Comprender (Nivel 2).
Conocimientos que permiten abordar la situación
• Características de triángulos. • Aplicación de teorema de Pitágoras.

2. ¿Cuál es el lugar geométrico de todos los puntos del plano cartesiano tal que su abscisa es el doble de su ordenada más uno? Grafica el lugar geométrico.

Objetivo de la actividad
Representar puntos en el plano cartesiano.
Aprendizaje esperado involucrado
Reconocen que los lugares geométricos se pueden describir mediante ecuaciones cartesianas (plan electivo, tercero medio)

Procedimiento de resolución
• Interpretar la información del enunciado para llevarlo al registro algebraico. • Representar en el plano cartesiano puntos de la forma $(\mathbf{2y+1,y})$ por medio de la asignación de valores arbitrarios a $\boldsymbol{y}$ pertenecientes a los reales. Ejemplo: Cuando $\boldsymbol{y=1}$ la abscisa tiene el valor $\mathbf{2\cdot y+1=2\cdot 1+1=3}$ obteniendo así el punto (3,1). • Identificar el lugar geométrico obtenido, producto de la unión de los puntos obtenidos representado por una recta. 
Habilidad desarrollada según curriculum
Análisis de los datos y de las soluciones
Habilidad desarrollada según taxonomía de Anderson y Krathwohl
Comprender (Nivel 2)
Conocimientos que permiten abordar la situación
• Plano cartesiano (representación de puntos) • Concepto de lugar geométrico
Observaciones
Esta actividad apunta al desarrollo de un aprendizaje del programa de estudio de tercer año medio correspondiente al plan electivo de matemática.

3. Determina la expresión que deben satisfacer todos los puntos del plano cartesiano que están a dos unidades del punto de coordenadas $(\mathbf{-1,1})$.

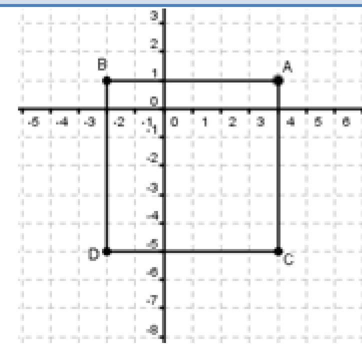
Objetivo de la actividad
Representar en lenguaje algebraico un lugar geométrico.
Aprendizaje esperado involucrado
Reconocen que los lugares geométricos se pueden describir mediante ecuaciones cartesianas (plan electivo, tercer año medio)

Procedimiento de resolución
• Concluir, por medio de la comparación del ejercicio desarrollado por el texto con lo expuesto en el problema, que la figura obtenida al unir todos los puntos que están a dos unidades del punto de coordenadas $(-\mathbf{1}, \mathbf{1})$ es una circunferencia. • Aplicando la definición de circunferencia *es el lugar geométrico de todos los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado centro* se tiene que la distancia entre el centro $(-\mathbf{1}, \mathbf{1})$ y cualquier punto $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ que pertenezca a la circunferencia es igual 2 unidades, llevando esto al algebra se tiene: $\boldsymbol{d}((-\mathbf{1}, \mathbf{1}), (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})) = \mathbf{2}$ • Aplicando fórmula para determinar la distancia entre dos puntos se tiene: $\sqrt{(\boldsymbol{x} - (-\mathbf{1}))^{\mathbf{2}} + (\boldsymbol{y} - \mathbf{1})^{\mathbf{2}}} = \mathbf{2}$ / elevar al cuadrado ambos miembros de la igualdad $(\boldsymbol{x} + \mathbf{1})^{\mathbf{2}} + (\boldsymbol{y} - \mathbf{1})^{\mathbf{2}} = \mathbf{4}$ Obteniéndose así la expresión que determina dicho lugar geométrico.
Habilidad desarrollada según curriculum
Modelamiento de situaciones o fenómenos
Habilidad desarrollada según taxonomía de Anderson y Krathwohl
Comprender (Nivel 2)
Conocimientos que permiten abordar la situación
• Definición de circunferencia • Formula distancia entre dos puntos
Observación
Esta actividad no es acorde a los conocimientos que posee un estudiante de primer año medio ya que responde a un aprendizaje esperado del plan electivo matemática tercero medio.

Página 134

1. Construye ayudándote del programa GeoGebra un cuadrado $\boldsymbol{ABCD}$ de lado 5 unidades, tal que cada uno de sus vértices se encuentre en cada cuadrante. ¿Cuántos cuadrados se pueden construir?

Objetivo de la actividad
Representar puntos en el plano cartesiano por medio de software geométrico para la construcción de figuras geométricas.

Aprendizaje esperado involucrado
01: Identificar y representar puntos y coordenadas de figuras geométricas en el plano cartesiano, manualmente o usando un procesador geométrico.
Procedimiento de resolución
• Ejecutar procedimiento para construir un cuadrado que cumpla los requerimientos pedidos. • Aplicar traslaciones con el uso de Geogebra al cuadrado creado anteriormente • Inferir que existen infinitos cuadrados que cumplen las condiciones del enunciado al ser el conjunto de los números racionales un conjunto denso, por lo tanto siempre se podrán tener cuadrados que cumplan la condición con distintas coordenadas. 
Habilidad desarrollada según curriculum
Análisis de los datos y de las soluciones
Habilidad desarrollada según taxonomía de Anderson y Krathwohl
Aplicar (Nivel 3)
Conocimientos que permiten abordar la situación
• Manejo del software Geogebra • Características de los números racionales.

2. Construye un rectángulo $\boldsymbol{ABCD}$ cuya área es de 6 unidades cuadradas y los vértices $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ tengan coordenadas $(\mathbf{1},-\mathbf{2})$ y $(\mathbf{3},\mathbf{0})$ respectivamente. ¿Cuáles son las posibles coordenadas de los vértices $\boldsymbol{C}$ y $\boldsymbol{D}$?

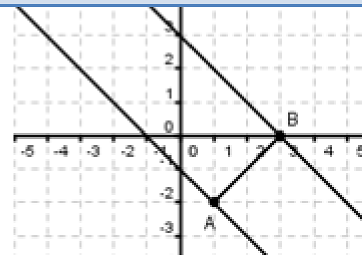
Objetivo de la actividad
Representar puntos en el plano cartesiano por medio de software geométrico para la construcción de figuras geométricas.
Aprendizaje esperado involucrado
01: Identificar y representar puntos y coordenadas de figuras geométricas en el plano cartesiano, manualmente o usando un procesador geométrico.

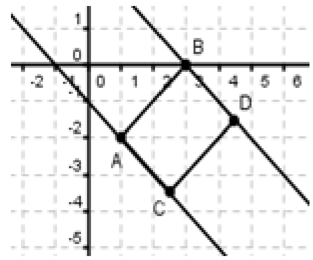
Procedimiento de resolución

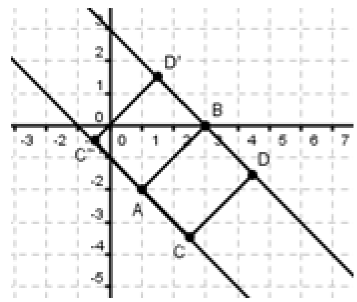
- Representar en el plano cartesiano los puntos $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ utilizando el softwere Geogebra, para luego unir estos puntos mediante un segmento y seguir con los siguientes pasos:

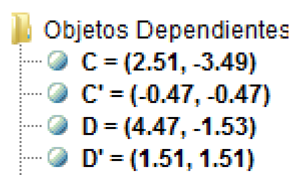
- Trazar una recta que pasa por el punto $\boldsymbol{A}$ y que es perpendicular al segmento $\overline{\boldsymbol{AB}}$ (lo mismo para el punto $\boldsymbol{B}$)
- Construir un segmento $\overline{\boldsymbol{AC}}$ de longitud 2,12 (considerando la longitud del trazo $\overline{\boldsymbol{AB}}$ =2,83 y el valor del área del rectángulo $\boldsymbol{ABCD}$) desde $\boldsymbol{A}$ y sobre la recta determinando el punto $\boldsymbol{C}$.
- Repetir el procedimiento anterior pero desde B en la misma dirección determinando el punto $\boldsymbol{D}$.
- Unir los puntos mediante un segmento.
- Repetir el procedimiento de la construcción del segmento de longitud fija con dirección contraria.

- Concluir al observar el lado izquierdo de la pantalla que las posibles coordenadas para el vértice $\boldsymbol{C}$ son: $(\boldsymbol{2,51; -3,49}), (\boldsymbol{-0,47, -0,47})$ y para el vértice $\boldsymbol{D}$ $(\boldsymbol{4,47, -1,53}), (\boldsymbol{1,51, 1.51})$.









Habilidad desarrollada según curriculum

Análisis de los datos y de las soluciones

Habilidad desarrollada según taxonomía de Anderson y Krathwohl

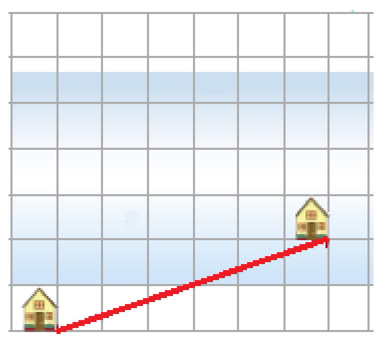
Comprender (Nivel 2)

Conocimientos que permiten abordar la situación

- Manejo del software GeoGebra.
- Construcción de polígonos.

Página 136

1. En la cuadricula traslada la casa según el vector $\vec{\boldsymbol{u}} = (\mathbf{5}, \mathbf{2})$. ¿Dónde queda la casa con respecto a la anterior?
2. Traslada la casa que obtuviste del traslado anterior según el vector $\vec{\boldsymbol{w}} = (\mathbf{1}, \mathbf{2})$. ¿Dónde queda ahora la casa?

Objetivo de la actividad
Aplicar la definición de traslación entregada por el texto en términos de vectores.
Aprendizaje Esperado involucrado
03: Aplicar composiciones de funciones para realizar transformaciones isométricas en el plano cartesiano.
Procedimiento de resolución
• Ejecutar el procedimiento entregado por el texto considerando como posición original de la casa el punto (0,0) o el extremo inferior derecho de la cuadricula. Se debe mover la casa 5 cuadriculas hacia la derecha y dos hacia arriba tal como lo indican las componentes de vector $\vec{\boldsymbol{u}} = (\mathbf{5}, \mathbf{2})$, de esta forma la casa se trasladó 5 Km hacia el este y dos Km hacia el norte • Ejecutar el procedimiento anterior considerando como posición inicial de la casa la obtenida anteriormente y el vector $\vec{\boldsymbol{w}} = (\mathbf{1}, \mathbf{2})$, de esta forma la casa se traslada 1 Km hacia el este y 2 Km hacia el norte. Para responder a la pregunta ¿Dónde quedo la casa? • Concluir por medio de la observación y considerando la posición original de la casa que esta se ha trasladado 6 Km hacia el este y 4 Km hacia el Norte (ver imagen). 
Habilidad desarrollada según curriculum
Análisis de los datos y de las soluciones
Habilidad desarrollada según taxonomía de Anderson y Krathwohl
Aplicar (Nivel 3)
Conocimientos que permiten abordar el problema
Concepto de Traslación como movimiento físico

Observaciones

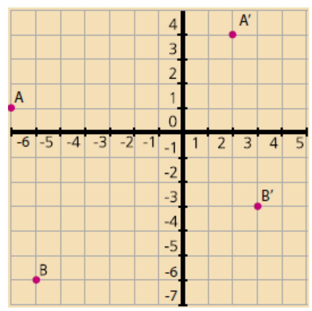
En esta actividad se debe considerar la traslación como un cambio de posición de un objeto moviéndolo tantos lugares a la derecha e izquierda como lo indica el vector ayudado de una cuadricula.

En la pregunta 2 no se indica si la posición final se debe responder con respecto a la posición original de la casa o según la obtenida luego de la traslación con respecto al vector $\vec{\boldsymbol{u}} = (\mathbf{5}, \mathbf{2})$.

Si bien se considera el aprendizaje esperado "aplicar composiciones de funciones para realizar transformaciones isométricas en el plano cartesiano" no es necesario un plano cartesiano para desarrollar la actividad.

Página 137

1. ¿Cuál es la traslación que permite ir de $\boldsymbol{A}$ hacia $\boldsymbol{A}'$? ¿Cuál es la traslación que permite ir de $\boldsymbol{A}'$ a $\boldsymbol{A}$? ¿Cuál es la relación entre estas dos traslaciones?



Objetivo de la actividad

Aplicar algoritmo para identificar la traslación de un punto en el plano cartesiano en términos de las componentes del vector

Aprendizaje Esperado

03: Aplicar composiciones de funciones para realizar transformaciones isométricas en el plano cartesiano.

Procedimiento de resolución

- Identificar las componentes del vector de traslación del punto $\boldsymbol{A}$ hacia el punto $\boldsymbol{A}'$ y viceversa en el plano cartesiano, para esto se debe contar cuantas unidades se traslada en la cuadricula de forma horizontal y vertical el punto $\boldsymbol{A}$ para llegar a la posición $\boldsymbol{A}'$ y viceversa, determinando que la traslación del punto $\boldsymbol{A}$ al punto $\boldsymbol{A}'$ se la traslación $\boldsymbol{T}(\mathbf{9}, \mathbf{3})$ y para trasladar el punto $\boldsymbol{A}'$ al punto $\boldsymbol{A}$ la traslación aplicada es $\boldsymbol{T}'(-\mathbf{9}, -\mathbf{3})$.
- Comparar ambas traslaciones y determinar que estas son opuestas ya que tienen distinto sentido pero igual distancia y dirección.

Habilidad desarrollada según curriculum
Anticipación y estimación de resultados
Habilidad desarrollada según taxonomía de Anderson y Krathwohl
Comprender (Nivel 2)
Conocimientos que permiten abordar la situación
Características de vectores

2. En general, ¿Qué ocurre si aplicamos la traslación $\boldsymbol{T}_{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}$ al plano y luego la traslación $\boldsymbol{T}_{(-\boldsymbol{a},-\boldsymbol{b})}$?

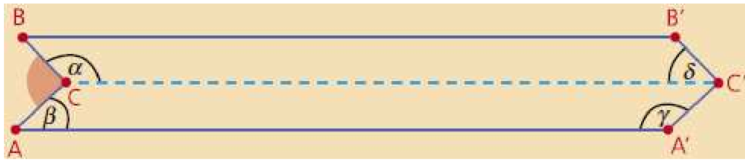
Objetivo de la actividad
Inferir con respecto a la aplicación de traslaciones en el plano cartesiano.
Aprendizaje Esperado
04: Identificar regularidades en la aplicación de transformaciones isométricas en el plano cartesiano.
Procedimiento de resolución
• Ejemplificar con algunos valores arbitrarios para $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ traslaciones en el plano cartesiano. • Concluir que al aplicar una traslación $\boldsymbol{T}_{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}$ al plano y luego una traslación $\boldsymbol{T}_{(-\boldsymbol{a},-\boldsymbol{b})}$ se llega a la posición inicial.
Habilidad desarrollada según curriculum
Anticipación y estimación de resultados
Habilidad desarrollada según taxonomía de Anderson y Krathwohl
Comprender (Nivel 2)
Conocimientos que permiten abordar la situación
Traslaciones definidas por un vector
Observaciones
El texto no formaliza el resultado obtenido de la generalización

3. Traza los vectores de traslación de $\boldsymbol{A}$ hacia $\boldsymbol{A'}$ y de $\boldsymbol{B}$ hacia $\boldsymbol{B'}$ ¿los vectores tienen la misma dirección? ¿Los vectores tienen el mismo sentido? ¿Los vectores tienen el mismo modulo? ¿Que figura geométrica determina los puntos $\boldsymbol{ABA'B'}$? ¿tiene algún relación la figura geométrica con el sentido, orientación y modulo de los vectores antes determinados?

Objetivo de la actividad
Comparar vectores según sus características en el plano cartesiano.
Aprendizaje Esperado
02: Representar en el plano, adiciones, sustracciones de vectores y multiplicaciones de un vector por un escalar.
Procedimiento de resolución
• Comparar vectores considerando su dirección, sentido y módulo en un sistema de coordenadas cartesianas, concluyendo que poseen la misma dirección y sentido por medio de la observación, con respecto a sus módulos estos se pueden medir con una regla obteniendo las mismas medidas (el módulo también se puede calcular por medio del teorema de Pitágoras utilizando la proyección de las componentes del vector a rectas paralelas a los ejes del plano cartesiano). • Reconocer como un paralelogramo la figura geométrica formada por la unión de los puntos $\boldsymbol{ABA'B'}$ respectivamente. • Concluir que la dirección y módulo de ambos vectores permiten que la figura geométrica formada sea un paralelogramo al tener este como características sus lados opuestos paralelos y de igual medida.
Habilidad desarrollada según curriculum
Análisis de datos y soluciones
Habilidad desarrollada según taxonomía de Anderson y Krathwohl
Comprender (Nivel 2)
Conocimientos que permiten abordar la situación
• Características de figuras geométricas • Características de vectores

Página 138

Esta actividad está dirigida a demostrar que las traslaciones preservan ángulos: Dibuja un ángulo cualquiera y trasládalo:



Debemos demostrar que el ángulo rojo $\angle ACB$ mide lo mismo que $\angle A'C'B'$.

a) Nota que $CC'B'B$ es un paralelogramo, lo mismo que $CC'A'A$. ¿Por qué?

b) Como los ángulos opuestos en un paralelogramo miden lo mismo, muestra que $\angle ACC' = \gamma$ y que $\angle A'C'C = \beta$.

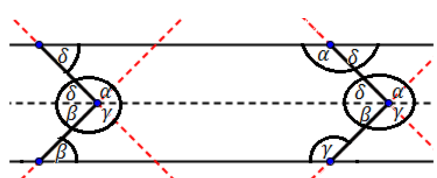
c) Demuestra que el $\angle A'C'B' = \gamma + \beta$. Como los ángulos opuestos en un paralelogramo son suplementarios (suman 180°). Muestra que $\delta = 180^\circ - \alpha$ y que $\beta = 180^\circ - \gamma$.

d) Demuestra que $\angle A'C'B' = \delta + \beta = 360^\circ - (\alpha + \gamma)$.

e) Demuestra que el ángulo rojo mide $360^\circ - (\alpha + \gamma)$. Concluye que el ángulo rojo mide lo mismo que el que resulta de la traslación.

Objetivo de la actividad
Explicar que las traslaciones preservan ángulos por medio del cumplimiento de pasos dados.
Aprendizaje esperado involucrado
Reconocer algunas propiedades de las transformaciones isométricas (octavo año básico)
Procedimiento de resolución

- Reconocer que la figura formadas por los puntos $\boldsymbol{CC'BB'}$ y $\boldsymbol{CC'AA'}$ son paralelogramos pues las traslaciones preservan distancia entre dos puntos (propiedad entregada por el texto anteriormente).
- Reconocer ángulos entre las paralelas que se forman al prolongar los trazos $\overline{\boldsymbol{AA'}}$, $\overline{\boldsymbol{CC'}}$ y $\overline{\boldsymbol{BB'}}$ respectivamente, donde $\boldsymbol{\alpha}$ y $\boldsymbol{\delta}$ son ángulos suplementarios, al igual que los ángulos $\boldsymbol{\beta}$ y $\boldsymbol{\gamma}$.
- Además, al prolongar los trazos $\overline{\boldsymbol{BC}}$, $\overline{\boldsymbol{CA}}$, $\overline{\boldsymbol{B'C'}}$ y $\overline{\boldsymbol{C'A'}}$ se puede trasladar los ángulos $\boldsymbol{\delta}$ y $\boldsymbol{\beta}$ probando que el ángulo rojo mide $\boldsymbol{360^\circ - (\alpha + \gamma)}$ (ver imagen)



Habilidad desarrollada según curriculum
Análisis de los datos y de las soluciones
Habilidad desarrollada según taxonomía de Anderson y Krathwohl
Recordar (Nivel 1)
Conocimientos que permiten abordar la situación
• Propiedades de paralelogramos • Ángulos entre paralelas cortadas por una transversal

Página 140

1. Dibuja un cuadrado que tiene vértices $\boldsymbol{A(0,0)}; \boldsymbol{B(1,0)}\, \boldsymbol{y}\, \boldsymbol{C(1,1)}$ ¿Cuál es el otro vértice? Después de una traslación el vértice $\boldsymbol{A}$ se trasformo en el vértice $\boldsymbol{A'(-3,5)}$: ¿Cuáles son las coordenadas de los otros vértices? Después de otra traslación el vértice $\boldsymbol{A'}$ se transformo en $\boldsymbol{A''(4,1)}$: ¿Cuáles son las coordenadas de los otros vértices? ¿Cuál es la traslación que lleva a $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{A'}$?

Objetivo de la actividad

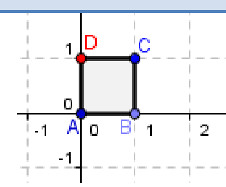
Representar un cuadrado en el plano cartesiano dado tres de sus vértices.

Aprendizaje Esperado

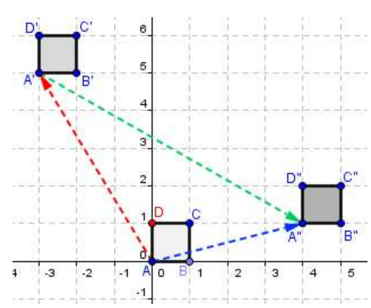
03: Aplicar composiciones de funciones para realizar transformaciones isométricas en el plano cartesiano.

Procedimiento de resolución

- Representar en el plano cartesiano los puntos dados.
- Recuperar conocimientos de características de un cuadrado para ubicar el vértice que falta, como que sus lados opuestos son paralelos y todos tienen la misma medida.



- Inferir que el vértice faltante corresponde al punto $\boldsymbol{D(0,1)}$, luego:



- Al trasladar el punto $\boldsymbol{A}$ al punto $\boldsymbol{A'}$ se obtienen las siguientes coordenadas $\boldsymbol{B'} = (\boldsymbol{-2,5})$, $\boldsymbol{C'} = (\boldsymbol{-2,6})$ y $\boldsymbol{D'} = (\boldsymbol{-3,6})$.
- Al trasladar el punto $\boldsymbol{A'}$ al punto $\boldsymbol{A''}$ se obtienen las siguientes coordenadas $\boldsymbol{B''} = (\boldsymbol{5,1})$, $\boldsymbol{C''} = (\boldsymbol{5,2})$ y $\boldsymbol{D''} = (\boldsymbol{4,2})$.
- La traslación del punto $\boldsymbol{A}$ al punto $\boldsymbol{A''}$ es $\boldsymbol{T_{(4,1)}}$

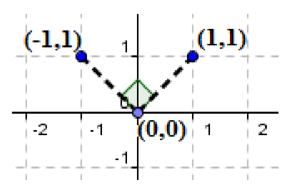
Habilidad desarrollada según curriculum
Análisis de datos y soluciones
Habilidad desarrollada según taxonomía de Anderson y Krathwohl
Comprender (Nivel 2)
Conocimientos que permiten abordar la situación
• Propiedades de un cuadrado • Concepto de traslación en el plano cartesiano

2. La Concatenación de maquinas de al lado (ver imagen) está compuesta por la maquina azul, que es la traslación $\boldsymbol{T}_{(\mathbf{1},\mathbf{1})}$ y otra máquina que es la rotación $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_{(\mathbf{0},\mathbf{90°})}$:

a) ¿Cuál punto entrega la maquina por la izquierda, si por la derecha entra $(0,0)$? ¿ y $(1,1)$? ¿y $(0.-1)$? ¿y $(1.-1)$?

b) ¿Cuál punto debe entrar para que la maquina entregue $(0,0)$?

c) ¿Hay algún punto tal que cuando entra por la maquina sale el mismo?

Objetivo de la actividad
Aplicar transformaciones isométricas consecutivas a un punto en el plano cartesiano.
Aprendizaje Esperado
03: Aplicar composición de funciones para realizar transformaciones isométricas a figuras en el plano cartesiano.
Procedimiento de resolución
Aplicar definición entregada por el texto sobre traslación "En general si al punto $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ se le aplica la traslación $T_{(a,b)}$ resulta $(x+a, y+b)$", entonces al aplicar la traslación $T_{(1,1)}$ al punto $(0,0)$ se obtiene: $T_{(1,1)}(0,0) = (0+1,0+1) = (1,1)$, luego al punto obtenido aplicar la rotación $R_{(0,90°)}$ con la ayuda de un transportador o softwere geométrico (ver imagen) 
b) Concluir por medio de la experimentación que el punto que permite que la maquina arroje el punto $(\mathbf{0},\mathbf{0})$ es el punto $(-\mathbf{1},-\mathbf{1})$
c) Esta actividad sólo se puede desarrollar por medio de la aplicación repetitiva de estos movimientos descubriendo que este punto es $(-\mathbf{1},\mathbf{0})$.

Habilidad desarrollada según curriculum

Análisis de los datos y de las soluciones

Habilidad desarrollada según taxonomía de Anderson y Krathwohl

Aplicar (Nivel 3)

Conocimientos que permiten abordar la situación

- Concepto de traslación
- Aplicación de rotación a un punto utilizando software geométrico

Observaciones

Esta actividad no es adecuada para ser propuesta a los alumnos considerando sus aprendizajes previos, si bien esta puede ser desarrollada por medio de la experimentación y/o con ayuda de un software geométrico podría ser más enriquecedora luego de haber estudiado las rotaciones en el plano cartesiano.

Página 142

1. Si a un punto $\boldsymbol{P}$ se le aplica una reflexión, resulta $\boldsymbol{P'}$, ¿qué le pasa a $\boldsymbol{P'}$ si se le aplica la misma reflexión?

Objetivo de la actividad

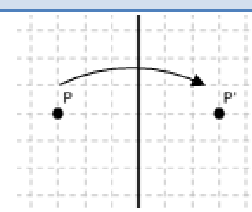
Aplicar reflexiones sucesivas a un punto en el plano euclidiano.

Aprendizaje esperado involucrado

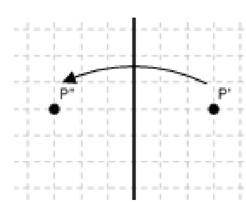
Construir transformaciones isométricas de figuras geométricas planas, utilizando regla y compás o procesadores geométricos (octavo año básico)

Procedimiento de resolución

- Ejecutar procedimiento de reflexión a un punto $\boldsymbol{P}$ respecto a un eje de reflexión cualquiera.
- Ejecutar procedimiento de reflexión al punto $\boldsymbol{P'}$ respecto al mismo eje de reflexión del ejercicio anterior



De esta forma se obtiene el punto P'' el cuál se encuentra en la misma posición que el punto original P.

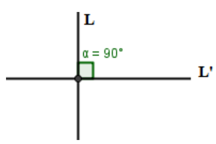
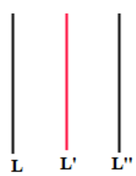
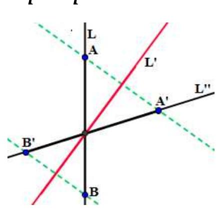


Habilidad desarrollada según curriculum

Anticipación y estimación de resultados

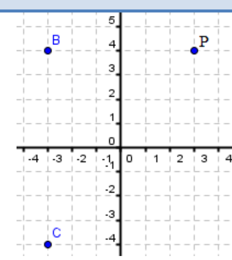
Habilidad desarrollada según taxonomía de Anderson y Krathwohl
Aplicar (Nivel 3)
Conocimientos que permiten abordar la situación
• Axioma de Euclides: Por un punto pasa una única recta perpendicular a una recta. • Construcción de la reflexión de un punto en el plano euclidiano
Observaciones
Sería favorable indicar en lenguaje natural cuál es el eje de reflexión y así acercar al alumno a la idea planteada en el texto donde se especifica que ***P’*** *es el reflejado de* ***P*** *respecto a la recta* ***L***.

2. ¿Qué les pasa a los puntos de la recta ***L*** cuando se les aplica la reflexión respecto ***L’***?

<table>
<tr><th colspan="2">Objetivo de la actividad</th></tr>
<tr><td colspan="2">Aplicar reflexiones sucesivas a un punto en el plano euclidiano.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Aprendizaje esperado involucrado</th></tr>
<tr><td colspan="2">Construir transformaciones isométricas de figuras geométricas planas, utilizando regla y compás o procesadores geométricos (octavo año básico)</td></tr>
<tr><th colspan="2">Procedimiento de resolución</th></tr>
<tr><td>1° Caso: $L \perp L'$

</td><td>Aplicar a la recta L una reflexión con respecto a L' obteniendo la misma recta L</td></tr>
<tr><td>2° Caso: $L \parallel L'$

</td><td>Aplicar a la recta L una reflexión con respecto a L' obteniendo una tercera recta L'' donde $L'' \parallel L'$ y además $d(L, L') = d(L', L'')$</td></tr>
<tr><td>3° caso: $L\ secante\ con\ L'$ $(L\ no\ perpendicular\ L')$

</td><td>Aplicar a la recta L una reflexión con respecto a la recta L' determinando un punto $A \in L$ y por este trazar una perpendicular a la recta L' determinando A' $(d(A, L') = d(L', A'))$, de igual forma se obtiene el punto B'. Por último se une A' y B' obteniendo de esta forma la recta L'' al aplicar la reflexión a L.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Habilidad desarrollada según curriculum</th></tr>
<tr><td colspan="2">Anticipación y estimación de resultados</td></tr>
</table>

Habilidad desarrollada según taxonomía de Anderson y Krathwohl
Aplicar (Nivel 3)
Conocimientos que permiten abordar la situación
• Axioma de Euclides: Por un punto pasa una única recta perpendicular a una recta. • Construcción de la reflexión de un punto en el plano euclidiano
Observaciones
Sería pertinente indicar la posición de la recta $\boldsymbol{L'}$ respecto a la recta $\boldsymbol{L}$ y así el alumno tenga claridad con el proceder del problema.

3. Si el punto $\boldsymbol{P}(\mathbf{3},\mathbf{4})$ se refleja con respecto al eje $\boldsymbol{y}$ y el resultado se refleja respecto del eje $\boldsymbol{x}$, ¿cuáles son las coordenadas del punto que resulta?

Objetivo de la actividad
Aplicar reflexiones sucesivas a un punto.
Aprendizaje esperado involucrado
03: Aplicar composiciones de funciones para realizar transformaciones isométricas en el plano cartesiano.
Procedimiento de resolución
• Aplicar procedimiento de reflexión a un punto respecto al eje de las ordenadas en el plano cartesiano por medio de algoritmo entregado por el texto, luego al punto obtenido ($\boldsymbol{B}$) aplicar una reflexión respecto al eje de las abscisas, obteniendo el punto $\boldsymbol{C} = (-\mathbf{3}.-\mathbf{4})$. 
Habilidad desarrollada según curriculum
Análisis de los datos y de las soluciones
Habilidad desarrollada según taxonomía de Anderson y Krathwohl
Aplicar (Nivel 3)
Conocimientos que permiten abordar la situación
• Identificación y representación de puntos en el plano cartesiano • Aplicación de simetría de un punto en el plano cartesiano.
Observación
El concepto que se construye en el texto hace referencia a una reflexión en el plano euclidiano, no proyectando el concepto al plano cartesiano.

Página 144

1. ¿Es un rectángulo simétrico respecto a la recta que une los puntos medios de los lados opuestos?

Objetivo de la actividad

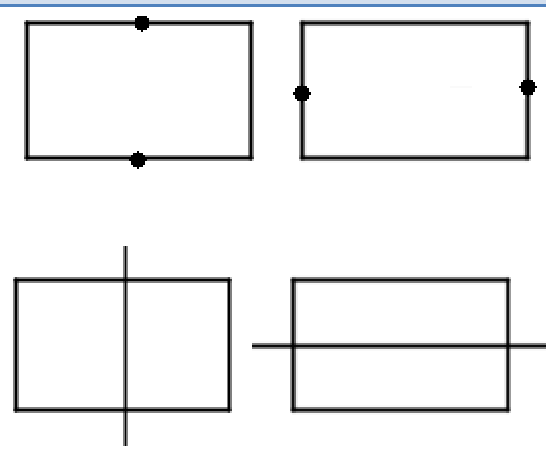
Inferir respecto a las simetrías de un polígono.

Aprendizaje esperado involucrado

Reconocer algunas propiedades de las transformaciones isométricas (octavo año básico)

Procedimiento de resolución

- Representar un rectángulo en el plano euclidiano e identificar los puntos medios de sus lados usando instrumentos geométricos (regla), luego trazar una recta que pase por los puntos medios de los lados opuestos del rectángulo.
- Concluir, en base al paralelismo de los lados opuestos de un rectángulo, que este es simétrico respecto a las rectas que pasan por los puntos medios.



Habilidad desarrollada según curriculum

Anticipación y estimación de resultados.

Habilidad desarrollada según taxonomía de Anderson y Krathwohl

Comprender (Nivel 2)

Conocimientos que permiten abordar la situación

- Determinar punto medio de un trazo
- Reconocer figuras simétricas

2. ¿Es un pentágono regular simétrico respecto a la recta que une un vértice con el punto medio del lado opuesto?

Objetivo de la actividad

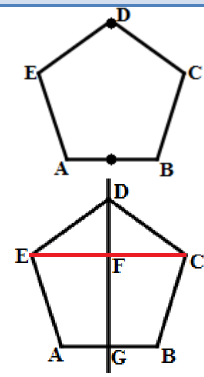
Inferir respecto a las simetrías de un polígono.

Aprendizaje esperado involucrado

Reconocer algunas propiedades de las transformaciones isométricas (octavo año básico)

Procedimiento de resolución

- Representar un pentágono regular en el plano euclidiano e identificar los puntos medios de sus lados usando instrumentos geométricos (regla), luego trazar una recta que pase por un vértice y el punto medio del lado opuesto.
- Concluir, luego de haber medido con regla que $\boldsymbol{d(E,F) = d(F,C)}$ y $\boldsymbol{d(A,G) = d(G,B)}$, por lo tanto un pentágono regular es simétrico a la recta que pasa por un vértice y el punto medio del lado opuesto a este.



Habilidad desarrollada según curriculum

Anticipación y estimación de resultados

Habilidad desarrollada según taxonomía de Anderson y Krathwohl

Comprender (Nivel 2)

Conocimientos que permiten abordar la situación

- Polígonos regulares
- Punto medio de un trazo
- Simetría de figuras planas

3. Determina la expresión algebraica del eje de simetría del triángulo rectángulo con vértices en los puntos de coordenadas $\boldsymbol{A(0,0)}$; $\boldsymbol{B(8,0)}$ y $\boldsymbol{C(0,8)}$

Objetivo de la actividad

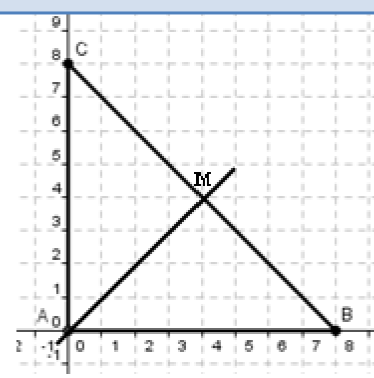
Concluir el eje de simetría de un polígono en el plano cartesiano.

Aprendizaje esperado involucrado

Analizar representaciones de la función lineal y de la función afín. (eje álgebra, primero medio)

Procedimiento de resolución

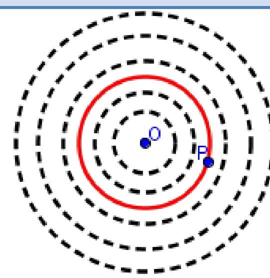
- Representar en el plano cartesiano las coordenadas $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{C}$ que determinan un triángulo rectángulo, luego ubicar el punto medio del lado $\boldsymbol{BC}$ llamado $\boldsymbol{M}$ y trazar una recta que pase por los puntos $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{M}$ determinando el eje de simetría de este triángulo.
- Concluir por medio de los puntos pertenecientes a la recta $\boldsymbol{AB}$ que su expresión algebraica es $\boldsymbol{y = x}$ (función lineal)



Habilidad desarrollada según curriculum
Análisis de los datos y de las soluciones
Habilidad desarrollada según taxonomía de Anderson y Krathwohl
Comprender (Nivel 2)
Conocimientos que permiten abordar la situación
• Identificación y representación de puntos en el plano cartesiano • Clasificación de triángulos según sus ángulos • Determinar punto medio de un trazo • Modelación de función lineal • Características de figuras simétricas.

Página 146

1. ¿Por qué existe una sola circunferencia de centro $\boldsymbol{O}$ y que pasa por $\boldsymbol{P}$?

Objetivo de la actividad
Explicar la existencia de una única circunferencia de centro $\boldsymbol{O}$ y radio $\overline{\boldsymbol{OP}}$
Aprendizaje esperado involucrado
Caracterizar la circunferencia y el circulo como lugares geométricos (8 Año Básico).
Procedimiento de resolución
• Representar en el plano euclidiano los puntos $\boldsymbol{O}$ y $\boldsymbol{P}$, luego con un compás trazar circunferencias de centro $\boldsymbol{O}$. • Concluir mediante la experimentación que existe una única circunferencia de centro $\boldsymbol{O}$ que pasa por el punto P pues el radio $\boldsymbol{OP}$ es único y constante. 
Habilidad desarrollada según curriculum
Análisis de los datos y de las soluciones
Habilidad desarrollada según taxonomía de Anderson y Krathwohl
Comprender (Nivel 2)
Conocimientos que permiten abordar la situación
• Construcción de una circunferencia usando instrumentos geométricos. • Propiedades de la circunferencia.

2. Consideremos dos puntos en el plano, digamos $\boldsymbol{P}$ y $\boldsymbol{P'}$, ¿es cierto que existe una rotación que lleva $\boldsymbol{P}$ en $\boldsymbol{P'}$? ¿Es la única?

Objetivo de la actividad

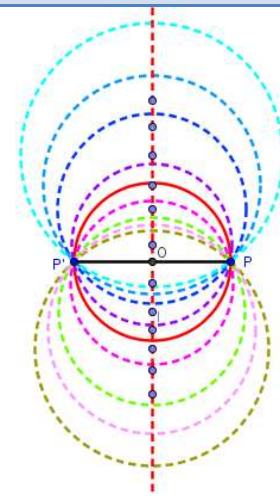
Ejecutar e inferir respecto a las rotaciones en el plano euclidiano.

Aprendizaje esperado involucrado

Reconocer algunas propiedades de las transformaciones isométricas (Octavo Año Básico)

Procedimiento de resolución

- Aplicar al punto $\boldsymbol{P}$ una rotación que lo lleve al punto $\boldsymbol{P'}$ con un centro $\boldsymbol{O}$ cualquiera en el plano euclidiano utilizando un compás (Observación: para ubicar un centro de rotación se deben unir los puntos $\boldsymbol{P}$ y $\boldsymbol{P'}$, luego por el punto medio del trazo $\overline{\boldsymbol{PP'}}$ trazar una recta perpendicular a este).
- Concluir que existen infinitas rotaciones que lleva al punto $\boldsymbol{P}$ al punto $\boldsymbol{P'}$ con distintos centros y ángulos de rotación, pues cada punto que pertenece a la recta perpendicular al trazo $\overline{\boldsymbol{PP'}}$ es centro de una circunferencia.



Habilidad desarrollada según curriculum

Anticipación y estimación de resultados

Habilidad desarrollada según taxonomías de Anderson y Krathwohl

Aplicar (Nivel 3)

Conocimientos que permiten abordar la situación

- Construcción de una circunferencia usando compás
- Propiedades de la circunferencia.

3. Si rotamos todos los puntos del plano en torno a $\boldsymbol{O}$, con ángulo $\boldsymbol{\alpha}$, ¿qué le pasa a $\boldsymbol{O}$?

Objetivo de la actividad

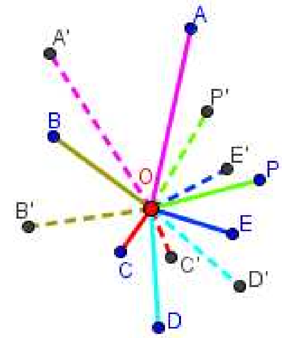
Ejecutar e inferir respecto a las rotaciones en el plano euclidiano.

Aprendizaje esperado involucrado

Reconocer algunas propiedades de las transformaciones isométricas (Octavo Año Básico)

Procedimiento de resolución

- Representar en el plano euclidiano un punto $\boldsymbol{O}$ que cumple la función de centro de rotación y algunos puntos aleatorios.
- Aplicar rotaciones a los puntos con centro de rotación $\boldsymbol{O}$ y un ángulo cualquiera (el ángulo de rotación debe ser el mismo para cada una de las rotaciones).
- Concluir que al rotar puntos utilizando el mismo centro de rotación y ángulo, no altera la posición del punto $\boldsymbol{O}$.



Habilidad desarrollada según curriculum

Anticipación y estimación de resultados

Habilidad desarrollada según taxonomía de Anderson y Krathwohl

Aplicar (Nivel 3)

Conocimientos que permiten abordar la situación

- Construcción de una circunferencia usando compás
- Propiedades de la circunferencia.

4. Si rotamos en torno a $\boldsymbol{O}$ todos los puntos del plano en 360°, ¿qué le pasa a cualquier punto $\boldsymbol{P}$?

Objetivo de la actividad

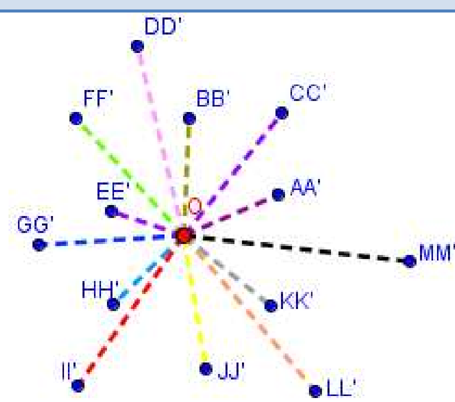
Ejecutar e inferir respecto a las rotaciones en el plano euclidiano.

Aprendizaje esperado involucrado

Reconocer algunas propiedades de las transformaciones isométricas (Octavo Año Básico)

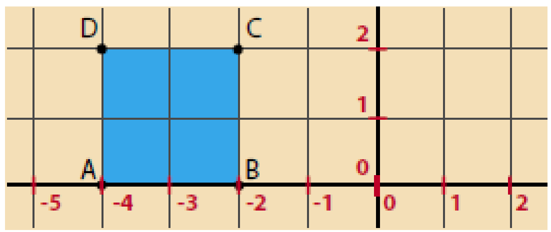
Procedimiento de resolución

- Representar puntos en el plano euclidiano seleccionando el punto $\boldsymbol{O}$ como centro de rotación.
- Aplicar una rotación a cada punto con centro $\boldsymbol{O}$ y ángulo de $\boldsymbol{360°}$.
- Concluir que todo punto que se rote en $\boldsymbol{360°}$ respecto a un centro $\boldsymbol{O}$ este vuelve a su posición original.



Habilidad desarrollada según curriculum
Anticipación y estimación de resultados
Habilidad desarrollada según taxonomía de Anderson y Krathwohl
Aplicar (Nivel 3)
Conocimientos que permiten abordar la situación
• Construcción de una circunferencia usando compás • Propiedades de la circunferencia.

Página 147



1. Rota el cuadrado en torno al origen con un ángulo de 90°.

2. Rota el cuadrado en torno a (-2,0) con un ángulo de 180°.

3. Rota el cuadrado en torno a (-3,1) con un ángulo de 270°.

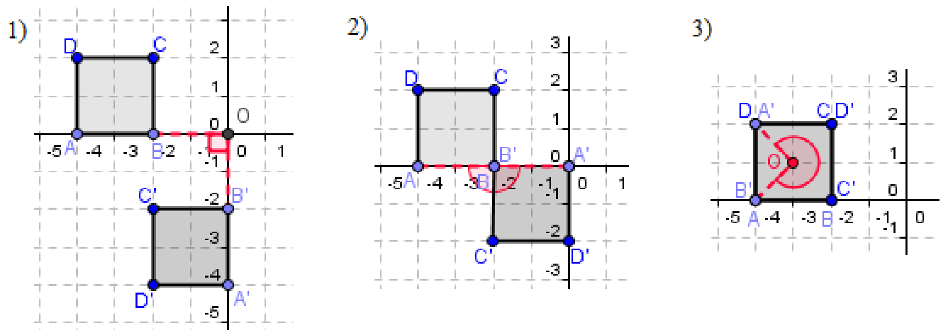
4. Al cuadrado que te resultó en el problema 1 aplícale la traslación T (4,4). ¿Se puede hacer lo mismo con un solo movimiento?

5. Aplícale la rotación de centro (-3,1) y ángulo 90° al cuadrado inicial, pero en el sentido de las manecillas del reloj. Compara tu resultado con el del problema 3.

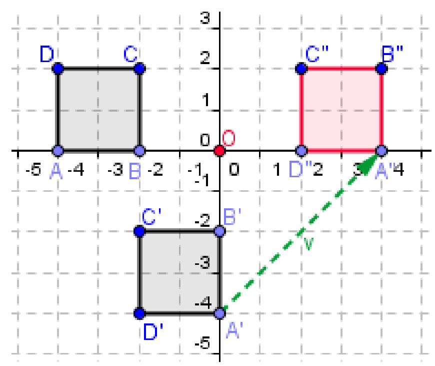
Objetivo de la actividad
Aplicar transformaciones isométricas en el plano cartesiano.
Aprendizaje esperado
04: Identificar regularidades en la aplicación de transformaciones isométricas a figuras en el plano cartesiano.

Procedimiento de resolución

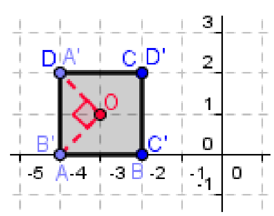
- Aplicar las rotaciones al cuadrado $\boldsymbol{ABCD}$, con los centros y ángulos indicados, en el plano cartesiano con la ayuda de instrumentos geométricos (compás y transportador) (actividades 1, 2 y 3).



- Aplicar la traslación $\boldsymbol{T_{(4,4)}}$ al cuadrado $\boldsymbol{A'B'C'D'}$ (actividad 3), luego por medio de la experimentación se busca si existe una transformación isométrica que lleve a la figura $\boldsymbol{ABCD}$ a la posición de la figura $\boldsymbol{A''B''C''D''}$, descartando cada una de estas (rotación, simetría y traslación) pues no existe ningún movimiento que lo realice.



- Aplicar una rotación de centro $(-3,1)$ y ángulo $90°$ al cuadrado $\boldsymbol{ABCD}$ en sentido horario. Luego comparar con resultado de la actividad 3, concluyendo que ambos movimientos se obtiene el mismo resultado.



Habilidad desarrollada según curriculum

Anticipación y estimación de resultados

Habilidad desarrollada según taxonomía de Anderson y Krathwohl

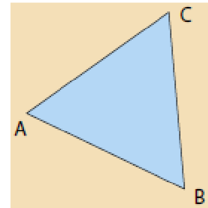
Aplicar (Nivel 3)

Conocimientos que permiten abordar la situación

- Algoritmo para rotar un punto en torno a un centro de rotación dado y un cierto ángulo de rotación, haciendo uso de regla y transportador.
- Concepto de traslación de puntos en el plano dado un vector de traslación.

Página 148

1. Rota el triángulo equilátero en torno al punto $\boldsymbol{A}$, en un ángulo de 60°. Haz lo mismo con el triángulo que resulta y luego con el triángulo que resulta. Repite lo mismo hasta obtener 5 nuevos triángulos. ¿Qué figura obtienes?



Objetivo de la actividad

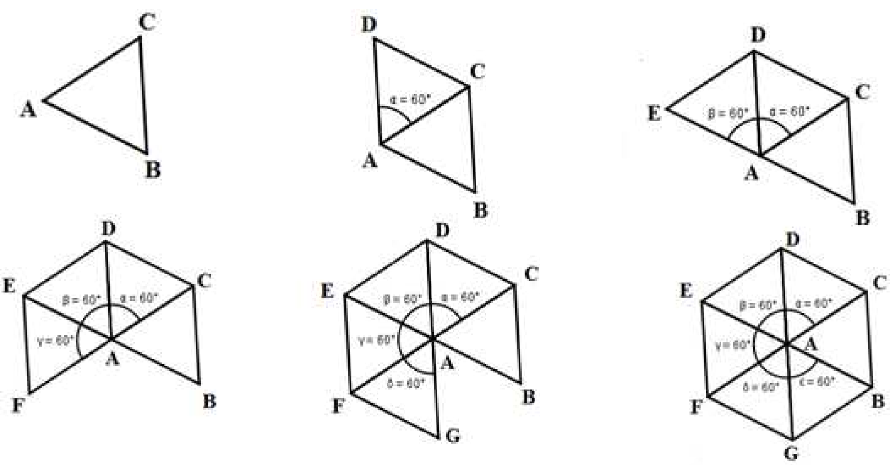
Aplicar rotaciones sucesivas a una figura con un mismo centro y ángulo de rotación en el plano euclidiano.

Aprendizaje esperado involucrado

Teselar el plano con polígonos regulares, utilizando regla y compás o procesadores geométricos (Octavo Año Básico).

Procedimiento de resolución

- Aplicar una rotación al triángulo equilátero $\boldsymbol{ABC}$ con centro en el vértice $\boldsymbol{A}$ y ángulo de rotación de $\mathbf{60°}$, luego aplicar la misma rotación al triángulo resultante y así sucesivamente cinco veces.
- Reconocer como hexágono regular la figura formada por medio de rotaciones sucesivas a un triángulo equilátero.



Habilidad desarrollada según curriculum

Análisis de los datos y de las soluciones.

Habilidad desarrollada según taxonomía de Anderson y Krathwohl

Aplicar (Nivel 3)

Conocimientos que permiten abordar la situación

- Aplicar rotaciones en el plano euclidiano con la ayuda de instrumentos geométricos.
- Clasificación de polígonos regulares.

2. Rota el triángulo equilátero en torno al centro de gravedad en un ángulo de 120°, ¿es cierto que el triángulo rotado se confunde con el original?

Objetivo de la actividad

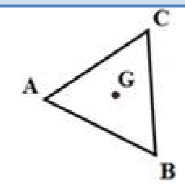
Probar que un triángulo equilátero tiene simetría rotacional.

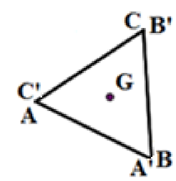
Aprendizaje esperado involucrado

Construir transformaciones isométricas de figuras geométricas planas, utilizando regla y compás o procesadores geométricos (Octavo Año Básico)

Procedimiento de resolución

- Recordar y aplicar procedimiento que permita trazar las transversales de gravedad de un triángulo rectángulo y determinar su centro de gravedad.
- Aplicar una rotación, con ayuda de instrumentos geométricos, al triángulo $\boldsymbol{ABC}$ con centro $\boldsymbol{G}$ (centro de gravedad) y ángulo de $\mathbf{120}$°.
- Concluir que luego de aplicar la rotación al triángulo, éste se confunde con el triángulo de la posición inicial.





Habilidad desarrollada según curriculum

Análisis de los datos y de las soluciones

Habilidad desarrollada según taxonomías de Anderson y Krathwohl

Aplicar (Nivel 3)

Conocimientos que permiten abordar la situación

- Elementos secundarios de un triángulo (transversal de gravedad).
- Aplicación de rotaciones en el plano euclidiano.

Observaciones

Sería adecuado ya mostrar situado en el plano cartesiano el triángulo equilátero, para que de esta forma los estudiantes eviten la construcción con regla y compás de este en el plano cartesiano.

Página 149

1. Para las mismas isometrías que vimos en los ejemplos anteriores.

a) Dibuja el cuadrado que resulta de aplicar $\boldsymbol{TR}$, al cuadrado $\boldsymbol{C}$, tal que, tres de sus vértices son $(\mathbf{0},-\mathbf{1})$, $(\mathbf{1},-\mathbf{1})$ y $(\mathbf{0},-\mathbf{2})$.

b) Al cuadrado anterior aplica $\boldsymbol{RT}$. Dibuja el cuadrado que resulta. ¿Es el mismo que antes?

c) Al cuadrado que resultó en b refléjalo respecto a la recta paralela al eje $\boldsymbol{y}$, que pasa por $\left(\frac{3}{2},0\right)$. Dibuja el cuadrado que resulta. Compara este resultado con el de $\boldsymbol{a}$, ¿es el mismo?

Objetivo de la actividad

Aplicar transformaciones isométricas sucesivas a una figura geométrica en el plano cartesiano.

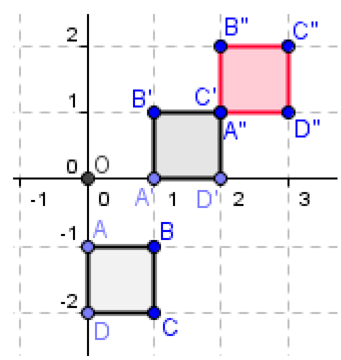
Aprendizaje esperado involucrado

04: Identificar regularidades en la aplicación de transformaciones isométricas a figuras en el plano cartesiano.

Procedimiento de resolución

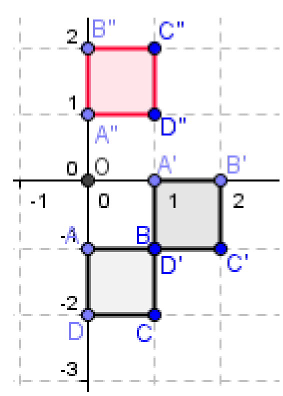
a)

- Representar en el plano cartesiano los puntos dados y deducir que el cuarto punto es $(\mathbf{1},-\mathbf{2})$.
- Llevar a cabo la composición $\boldsymbol{T}_{(\mathbf{1},\mathbf{1})} \circ \boldsymbol{R}_{(\boldsymbol{O},\mathbf{90°})}$ al cuadrado $\boldsymbol{ABCD}$ en el plano cartesiano, con la ayuda de instrumentos geométricos (regla, compás y transportador).



b)

- Llevar a cabo la composición $\boldsymbol{R}_{(\boldsymbol{O},\mathbf{90°})} \circ \boldsymbol{T}_{(\mathbf{0},\mathbf{0})}$ al cuadrado $\boldsymbol{ABCD}$ en el plano cartesiano, de igual forma que en la actividad a).
- Concluir que los cuadrados que se obtienen en ambas actividades (a y b) no son los mismos, es decir, aplicar $\boldsymbol{T}_{(\mathbf{1},\mathbf{1})} \circ \boldsymbol{R}_{(\boldsymbol{O},\mathbf{90°})}$ no es iguala a aplicar $\boldsymbol{R}_{(\boldsymbol{O},\mathbf{90°})} \circ \boldsymbol{T}_{(\mathbf{0},\mathbf{0})}$.



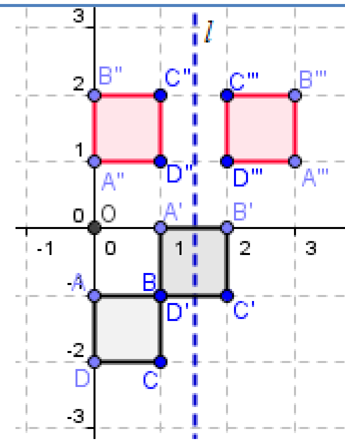
c)

Representar en el plano cartesiano una recta $\boldsymbol{l}$ paralela al eje $\boldsymbol{y}$ que pasa por el punto $\left(\frac{3}{2},\mathbf{0}\right)$.

Aplicar al cuadrado que se obtuvo en el ejercicio anterior una simetría axial respecto a la recta $\boldsymbol{l}$ obteniendo el cuadrado $\boldsymbol{A'''B'''C'''D'''}$

Comparar el cuadrado que se obtiene en los ejercicios a y c.

Concluir que los resultados que se obtiene en el ejercicio a y c no son los mismos, pese a ser la misma figura geométrica.



Habilidad desarrollada según curriculum

Anticipación y estimación de resultados.

Habilidad desarrollada según taxonomía de Anderson y Krathwohl

Aplicar (Nivel 3)

Conocimientos que permiten abordar la situación

- Aplicación de transformaciones isométricas (rotación, reflexión y traslación) con la ayuda de instrumentos geométricos (regla, compás y transportador)
- Representación de rectas paralelas.

Página 150

1. ¿Conmutan las rotaciones de diferente centro?, es decir, si $\boldsymbol{O}$ es distinto de $\boldsymbol{O}'$: ¿es cierto que $\boldsymbol{R}_{(\boldsymbol{O},\boldsymbol{\alpha})}\circ\boldsymbol{R}_{(\boldsymbol{O},\boldsymbol{\beta})}=\boldsymbol{R}_{(\boldsymbol{O'},\boldsymbol{\beta})}\circ\boldsymbol{R}_{(\boldsymbol{O'},\boldsymbol{\alpha})}$?

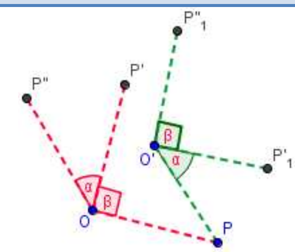
Objetivo de la actividad

Explicar por medio de ejemplos si existe la conmutatividad de rotaciones con distinto centro.

Aprendizaje Esperado involucrado

Reconocer algunas propiedades de las transformaciones isométricas (octavo año básico)

Procedimiento de resolución



- Representar en el plano euclidiano los puntos $\boldsymbol{O}, \boldsymbol{O'}$ y $\boldsymbol{P}$, donde $\boldsymbol{O}$ y $\boldsymbol{O'}$ son centros de rotación y $\boldsymbol{P}$ punto a rotar.
- Aplicar la siguiente composición de rotaciones $\boldsymbol{R}_{(\boldsymbol{O},\boldsymbol{\alpha})} \circ \boldsymbol{R}_{(\boldsymbol{O},\boldsymbol{\beta})}(\boldsymbol{P})$ con ángulo de rotación $\boldsymbol{\alpha}$ y $\boldsymbol{\beta}$ aleatorios (en este caso se ha elegido $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{45°}$ y $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{90°}$)
- Aplicar con los mismos ángulos de rotación $\boldsymbol{\alpha}$ y $\boldsymbol{\beta}$ la siguiente composición de rotaciones $\boldsymbol{R}_{(\boldsymbol{O'},\boldsymbol{\beta})} \circ \boldsymbol{R}_{(\boldsymbol{O'},\boldsymbol{\alpha})}(\boldsymbol{P})$
- Concluir que las rotaciones de diferentes centros no conmutan, es decir, aplicar $\boldsymbol{R}_{(\boldsymbol{O},\boldsymbol{\alpha})} \circ \boldsymbol{R}_{(\boldsymbol{O},\boldsymbol{\beta})}(\boldsymbol{P})$ no es igual a la aplicación de $\boldsymbol{R}_{(\boldsymbol{O'},\boldsymbol{\beta})} \circ \boldsymbol{R}_{(\boldsymbol{O'},\boldsymbol{\alpha})}(\boldsymbol{P})$

Habilidad desarrollada según curriculum

Anticipación y estimación de resultados.

Habilidad desarrollada según taxonomías de Anderson y Krathwohl

Aplicar (Nivel 3)

Conocimientos que permiten abordar el problema

Rotación de un punto en el plano euclidiano con la ayuda de instrumentos geométricos.

2. ¿Qué pasa con la composición de una reflexión respecto a la recta $\boldsymbol{L}$ con una traslación que tiene la misma dirección que $\boldsymbol{L}$? ¿Conmutan?

Objetivo de la actividad

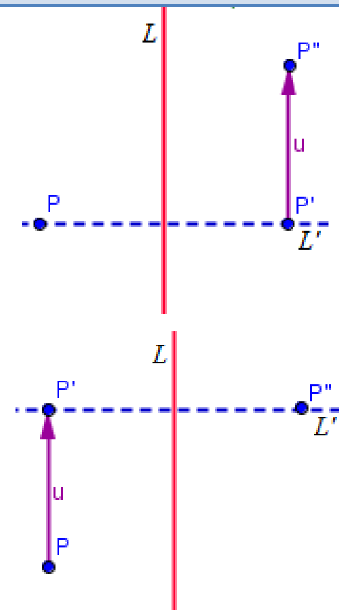
Explicar por medio de ejemplos si existe la conmutatividad de una reflexión y traslación respecto a una recta $\boldsymbol{L}$.

Aprendizaje Esperado involucrado

Reconocer algunas propiedades de las transformaciones isométricas (octavo año básico)

Procedimiento de resolución

- Representar un punto $\boldsymbol{P}$ y una recta $\boldsymbol{L}$ cualquieras en el plano euclidiano.
- Llevar a cabo la composición $\boldsymbol{T_{\vec{u}}} \circ \boldsymbol{S_L}(\boldsymbol{P})$ (con $\boldsymbol{T_{\vec{u}}}$ traslación respecto al vector $\vec{\boldsymbol{u}}$ y $\boldsymbol{S_L}$ reflexión respecto a la recta $\boldsymbol{L}$) en el plano euclidiano trazando por $\boldsymbol{P}$ una recta perpendicular a $\boldsymbol{L}$ determinando $\boldsymbol{L'}$y $\boldsymbol{P'}$ talque $\boldsymbol{d(P,L) = d(L,P')}$. Luego trasladar $\boldsymbol{P'}$ respecto al vector $\vec{\boldsymbol{u}}$ determinando el punto $\boldsymbol{P''}$ (Nota: $\vec{\boldsymbol{u}}$ es un vector cualquiera con la misma dirección que la recta $\boldsymbol{L}$)
- Llevar a cabo la composición $\boldsymbol{S_L} \circ \boldsymbol{T_{\vec{u}}}(\boldsymbol{P})$ en el plano euclidiano (se realiza en primer lugar la traslación y luego la reflexión).
- Comparar ambos resultados, concluyendo que ambas composiciones de transformaciones isométricas conmutan bajo esas características.



Habilidad desarrollada según curriculum

Anticipación y estimación de resultados.

Habilidad desarrollada según taxonomía de Anderson y Krathwohl

Aplicar (Nivel 3)

Conocimientos que permiten abordar el problema

- Aplicación de una traslación definida por un vector a un punto en el plano euclidiano.
- Aplicación de una reflexión de un punto respecto a una recta en el plano euclidiano
- Representación de rectas perpendiculares en el plano euclidiano.

3. Considera la traslación $\boldsymbol{T = T_{(4,10)}}$y la reflexión respecto a la recta $\boldsymbol{L}$ que pasa por el origen y el punto $(\boldsymbol{2}, \boldsymbol{5})$. Denotemos por $\boldsymbol{S}$ esa reflexión. Considera la concatenación $\boldsymbol{ST}$ y la concatenación $\boldsymbol{TS}$.

a) ¿Es cierto que si un punto $\boldsymbol{P}$ está en la recta $\boldsymbol{L}$, entonces $\boldsymbol{ST}$ lo transforma en un punto de $\boldsymbol{L}$?

b) ¿Es cierto que $TS(P) = ST(P)$ para cualquier punto $\boldsymbol{P}$, del plano?

Objetivo de la actividad

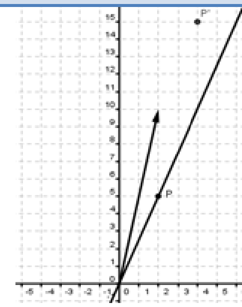
Aplicar composición de transformaciones isométricas

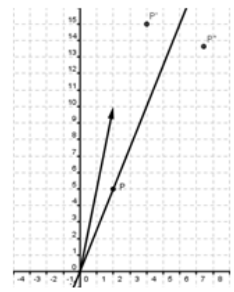
Aprendizaje Esperado

Aplicar composición de funciones para realizar transformaciones

Procedimiento de resolución

- Ejecutar el procedimiento entregado por el texto para trasladar un punto cualquiera de la recta $\boldsymbol{L}$ por ejemplo al punto $(\mathbf{2},\mathbf{5})$ obteniéndose el punto $\boldsymbol{P}$’: $\boldsymbol{T}_{(\mathbf{4},\mathbf{10})}(\mathbf{2},\mathbf{5}) = (\mathbf{4}+\mathbf{2}\,,\mathbf{10}+\mathbf{5}) = (\mathbf{6},\mathbf{15})$
- Aplicar al punto ***P’*** una reflexión con el uso de instrumentos geométricos obteniéndose el punto ***P’’***.
- Con lo anterior se responde a la pregunta, ya que se obtiene un punto ***P’’*** que no pertenece a la recta ***L***.
- Aplicar la reflexión dada al punto ***P*** obteniéndose el mismo punto ya que este pertenece al eje de simetría.
- Aplicar la definición de traslación al punto ***P*** obteniéndose el punto ***P’***$(\mathbf{6},\mathbf{15})$.
- Comparar ambos resultados.





Habilidad desarrollada según curriculum

Análisis de datos y soluciones

Habilidad desarrollada según taxonomía de Anderson y Krathwohl

Aplicar (Nivel 3)

Conocimientos que permiten abordar el problema

- Definición de traslación
- Concepto de reflexión

Página 151

1. ¿Qué se obtiene si se componen dos reflexiones que tienen el mismo eje de simetría?

Objetivo de la actividad

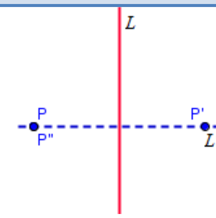
Inferir sobre la aplicación de reflexiones consecutivas a un objeto cualesquiera en torno a un mismo eje de reflexión.

Aprendizaje esperado involucrado

Reconocer algunas propiedades de las transformaciones isométricas (octavo año básico)

Procedimiento de resolución

- Representar en el plano euclidiano un punto $\boldsymbol{P}$ y recta $\boldsymbol{L}$ cualquieras.
- Llevar a cabo la composición $\boldsymbol{S_L} \circ \boldsymbol{S_L}(\boldsymbol{P})$ (con $\boldsymbol{S_L}$ una reflexión respecto a la recta $\boldsymbol{L}$) trazando un recta que pase por $\boldsymbol{P}$ y sea perpendicular a $\boldsymbol{L}$ determinando la recta $\boldsymbol{L'}$, luego determinar $\boldsymbol{P'}$ talque $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{P},\boldsymbol{L}) = \boldsymbol{d}(\boldsymbol{L},\boldsymbol{P'})$. Finamente aplicar la misma reflexión $\boldsymbol{S_L}$ al punto $\boldsymbol{P'}$ obteniendo el punto $\boldsymbol{P''}$.



- Concluir mediante la experimentación que al aplicar dos reflexiones a un punto dado en torno a un mismo eje de reflexión se obtiene el punto original.

Habilidad desarrollada según curriculum

Anticipación y estimación de resultados.

Habilidad desarrollada según taxonomía de Anderson y Krathwohl

Aplicar (Nivel 3)

Conocimientos que permiten abordar la situación

- Aplicación sucesiva (composición) de reflexión a un punto respecto a una recta usando instrumentos geométricos.

2. ¿Qué se obtiene si se componen dos reflexiones que tienen ejes de simetría paralelos no coincidentes?

Objetivo de la actividad

Inferir en base a la aplicación de reflexiones consecutivas a un objeto cualesquiera respecto a ejes de reflexión paralelos.

Aprendizaje esperado involucrado

Reconocer algunas propiedades de las transformaciones isométricas (octavo año básico).

Procedimiento de resolución

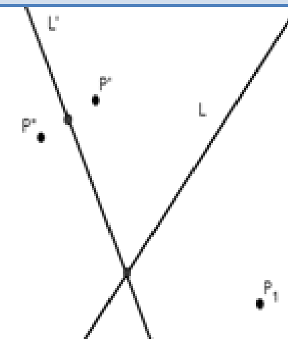
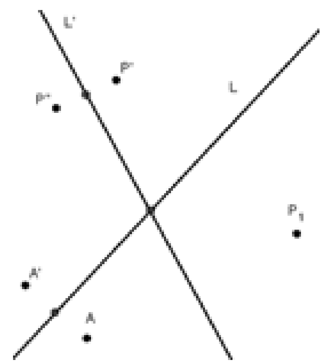
- Aplicar dos veces consecutivas procedimiento que permite reflejar un objeto determinado en torno a dos ejes de simetría paralelos y no coincidentes. Repetir procedimiento para distintos objetos y ejes de simetría.
- Concluir mediante la experimentación que al aplicar dos reflexiones a un objeto dado en torno a ejes de simetría paralelos y no coincidentes se obtiene como resultado final una figura diferente a la original, la que además se puede obtener de la aplicación directa de sólo una transformación isométrica llamada traslación.

Habilidad desarrollada según curriculum
Anticipación y estimación de resultados
Habilidad desarrollada según taxonomía de Anderson y Krathwohl
Aplicar (Nivel 3)
Conocimientos que permiten abordar la situación
• Concepto de reflexión y aplicación de este usando instrumentos geométricos. • Concepto de composición de transformaciones isométricas.

3. En la explicación que dimos arriba, pusimos ***P*** más cerca de ***L***, ¿cómo hubiese sido la explicación si hubiese estado en ***L***?

Objetivo de la actividad
Aplicar procedimiento descrito en el texto que permite componer dos reflexiones en torno a ejes de simetría que se interceptan en un solo punto.
Aprendizaje esperado involucrado
03: Aplicar composiciones de funciones para realizar transformaciones isométricas en el plano cartesiano.
Procedimiento de resolución
• Aplicar reflexión al punto ***P*** dispuesto sobre el eje de simetría ***L***; con respecto a la recta ***L'***. • Aplicar al resultado de la reflexión anterior un nuevo movimiento de la misma naturaleza pero ahora con respecto a la recta ***L***. • Concluir mediante la experimentación que la isometría obtenida luego de aplicar ambas reflexiones es una rotación en 180°.
Habilidad desarrollada según curriculum
Buscar y comparar caminos de solución
Habilidad desarrollada según taxonomía de Anderson y Krathwohl
Comprender (Nivel 2)
Conocimientos que permiten abordar la situación
• Algoritmo que permite componer dos reflexiones en torno a ejes de simetría que se interceptan en un solo punto. • Concepto de reflexión en torno a un eje dado.

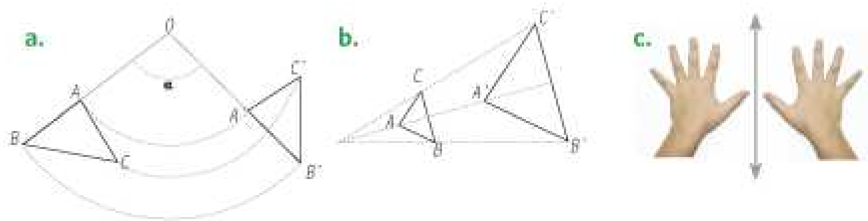
5. ¿Conmutan las reflexiones?

Objetivo de la actividad
Probar una propiedad de las reflexiones
Aprendizaje esperado involucrado
Reconocer algunas propiedades de las transformaciones isométricas (octavo año básico)
Procedimiento de resolución
• Ejecutar procedimiento para aplicar reflexiones con el uso de instrumentos geométricos. - Trazar dos rectas ***L*** y ***L'*** - Dibujar un punto $\boldsymbol{P_1}$ cualquiera • Aplicar una reflexión a un punto del plano con respecto a una recta ***L*** obteniéndose ***P'*** • Aplicar una reflexión al punto ***P'*** con respecto a la recta ***L'*** obteniéndose ***P''***. • Aplicar al punto $\boldsymbol{P_1}$ una reflexión con respecto a la recta ***L'*** obteniendo el punto ***A*** • Aplicar al punto ***A*** un reflexión con respecto a la recta ***L*** obteniendo el punto ***A'*** - Comparar ambos resultados - Concluir que las reflexiones nos conmutan  
Habilidad desarrollada según curriculum
Formulación de conjeturas
Habilidad desarrollada según taxonomía de Anderson y Krathwohl
Comprensión (Nivel 3)
Conocimientos que permiten abordar la situación
• Procedimientos entregado por el texto para reflejar un punto (pág. 142)
Observaciones
Por las herramientas entregadas por el texto esta actividad responde a requerimientos del programa de estudio de octavo año básico.

Estudio de actividades propuestas en texto de editorial SM

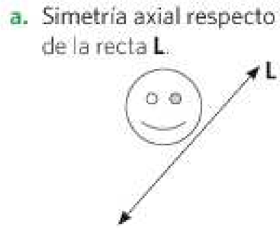
Página 138

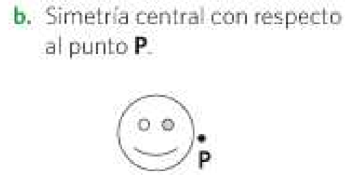
1. Clasifica las siguientes imágenes ¿son una traslación, rotación, simetría o no corresponden a una transformación isométrica de figuras planas?



Objetivo de la actividad
Clasificar imágenes según definición de transformación isométrica
Aprendizaje esperado involucrado
Caracterizar transformaciones isométricas de figuras planas y reconocerlas en diversas situaciones y contextos (octavo año básico).
Procedimiento de resolución
• Clasificar cada una de las imágenes según la definición entregada en el texto con respecto a transformaciones isométricas (Simetría, traslación y rotación). • Reconocer que la primera imagen corresponde a una rotación del triángulo $\boldsymbol{ABC}$ en un cierto ángulo alfa, que la segunda imagen no corresponde a transformación isométrica alguna pues el tamaño de los triángulos en juego varía, vale decir el triángulo $\boldsymbol{ABC}$ es más pequeño que el triángulo $\boldsymbol{A'B'C'}$. Mientras que la tercera figura corresponde a una simetría con respecto a un eje vertical.
Habilidad desarrollad según Curriculum
Anticipación y estimación de resultados
Habilidad desarrollada según taxonomía de Anderson y Krathwohl
Comprender (nivel 2)
Conocimientos que permiten abordar la situación
• Definición de transformación isométrica en el plano euclidiano.
Observaciones
El aprendizaje esperado corresponde al programa de estudio de 8 ° año básico, pues las actividades están construidas para ser desarrolladas en plano euclidiano.

2. Aplica la transformación isométrica señalada. Luego responde.



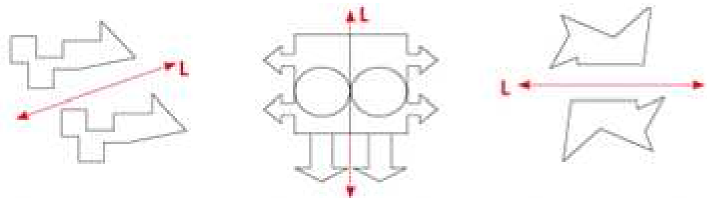


¿Qué estrategia utilizaste para realizar las transformaciones pedidas?

Objetivo de la actividad
Aplicar la transformación isométrica correspondiente.
Aprendizaje esperado involucrado
Construir transformaciones isométricas de figuras geométricas planas, utilizando regla y compás o procesadores geométricos (octavo año básico).
Procedimiento de resolución
• Ejecutar procedimiento de construcción de transformaciones isométricas pedidas en cada caso, utilizando instrumentos geométricos.
Habilidad desarrollada según Curriculum
Búsqueda y comparación de caminos de solución
Habilidad desarrollada según taxonomía de Anderson y Krathwohl
Aplicar (nivel 3)
Conocimientos que permiten abordar la situación
• Definición de simetría, reflexión. • Aplicación de simetría y reflexión con instrumentos geométricos.
Observaciones
Por las características de la figura, será imprecisa la imagen homologa resultante de la aplicación de las transformaciones isométricas pedidas.

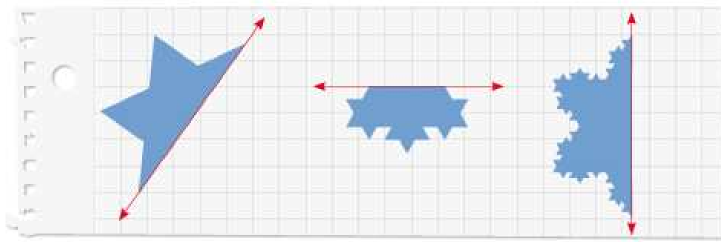
Página 140

1. Identifica cuáles de las siguientes figuras parecen ser simétricas respecto a la recta $\boldsymbol{L}$. De serlo, clasifícala en simetría interior, exterior o de contorno.



Objetivo de la actividad
Aplicar definición de simetría entregada por el texto
Aprendizaje esperado involucrado
Caracterizar transformaciones isométricas de figuras planas y reconocerlas en diversas situaciones y contextos (octavo año básico).
Procedimiento de resolución
• Aplicar procedimiento de medición, en cada una de las imágenes, para determinar que la recta que une el punto de la figura original y el punto homólogo a esta es perpendicular al eje de simetría dado. • Aplicar procedimiento de medición, en cada una de las imágenes, para determinar que las distancias existentes entre los puntos de la figura original y el eje de simetría dado son exactamente iguales a las distancias entre el eje de simetría y los puntos de la figura homóloga. • Clasificar cada una de las figuras en simetría interior, exterior o de contorno, en base a la definición entregada en texto sobre las mismas. • Concluir que sólo la segunda figura corresponde a una simetría axial de contorno.
Habilidad Desarrollada según Curriculum
Anticipación y estimación de resultados
Habilidad desarrollada según taxonomía de Anderson y Krathwohl
Aplicar (Nivel 3)
Conocimientos que permiten abordar la situación
• Definición de simetría axial. • Definición de simetría interior, exterior o de contorno.
Observaciones
El aprendizaje esperado corresponde al programa de estudio de 8 ° año básico, pues las actividades están construidas para ser desarrolladas en plano euclidiano.

2. Aplica la simetría axial respecto de cada eje pintado de color rojo.



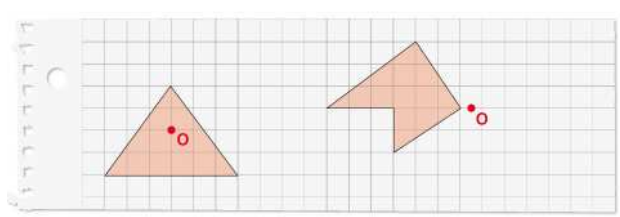
Objetivo de la actividad
Aplicar una simetría axial a figuras con el uso de instrumentos geométricos.
Aprendizaje esperado involucrado
Construir transformaciones isométricas de figuras geométricas planas, utilizando regla y compás o procesadores geométricos (octavo año básico).
Procedimiento de resolución
• Aplicar definición de simetría axial en cada una de las imágenes dadas. • Ejecutar el procedimiento que permite reflejar una figura en torno a un eje dado, midiendo las distancias que hay de los puntos de la figura original al eje de simetría dado. Para luego copiarlas desde el eje (perpendicular a este) y así trazar el punto homólogo a la figura original.
Habilidad desarrollada según Curriculum
Búsqueda y comparación de caminos de solución
Habilidad desarrollada según taxonomía de Anderson y Krathwohl
Aplicar (nivel 3)
Conocimientos que permiten abordar la situación
• Definición de simetría axial. • Definición de simetría interior, exterior o de contorno.
Observaciones
Por las características de la tercera figura (muy irregular) es bastante imprecisa la figura homologa que puede obtener el alumnos luego de aplicarle una simetría axial.

Página 141

1. Identifica, cuando sea posible, el punto o centro de simetría en las imágenes que muestran la figura original y su figura homóloga. Fundamenta.

Objetivo de la actividad
Identificar el centro de simetría en cada una de las figuras dadas.
Aprendizaje esperado involucrado
Caracterizar transformaciones isométricas de figuras planas y reconocerlas en diversas situaciones y contextos (octavo año básico).
Procedimiento de resolución
• Utilizar definición de simetría central en cada una de las imágenes dadas. • Reconocer los centros de simetría al trazar líneas rectas que unan los puntos originales de la figura con sus respectivos homólogos • Concluir que las figuras $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ y $\boldsymbol{d}$ tienen centro de simetría.
Habilidad desarrollada según Curriculum
Análisis de datos y de las soluciones
Habilidad desarrollada según taxonomía de Anderson y Krathwohl
Aplicar (Nivel 3)
Conocimientos que permiten abordar la situación
Definición de simetría central.

2. Aplica la simetría central respecto de cada punto $\boldsymbol{O}$ pintado de color rojo.

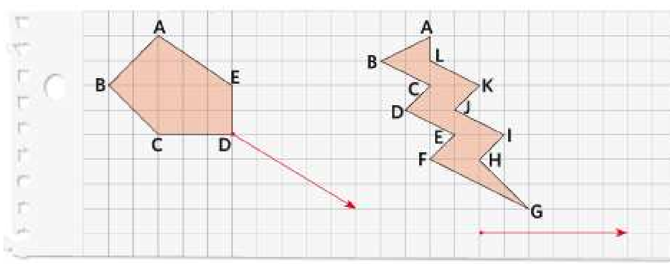


Objetivo de la actividad
Aplicar simetría central simétrica a la figura original, usando instrumentos geométricos.
Aprendizaje esperado involucrado
Construir transformaciones isométricas de figuras geométricas planas, utilizando regla y compás o procesadores geométricos (octavo año básico).

Procedimiento de resolución
• Utilizar definición de simetría central en cada una de las imágenes dadas. • Implementar, en cada una de las imágenes, el procedimiento que permite reflejar una figura en torno a un punto dado, trazando rectas que unan cada uno de los vértices de la figura con el centro de simetría dado, para luego medir la distancia entre estos y copiarlas desde el centro de rotación sobre la rectas trazadas, y así determinar el vértice homólogo.
Habilidad desarrollada según Curriculum
Búsqueda y comparación de caminos de solución
Habilidad desarrollada según taxonomía de Anderson y Krathwohl
Aplicar (Nivel 3)
Conocimientos que permiten abordar la situación
Definición de simetría central.

Página 142

1. Aplica el vector de traslación a cada figura. Luego, nombra los vértices de cada una de ellas. Destaca con distinto color la figura trasladada.

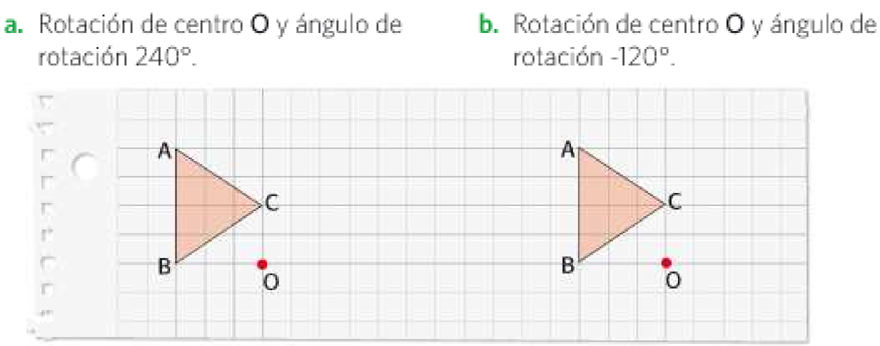


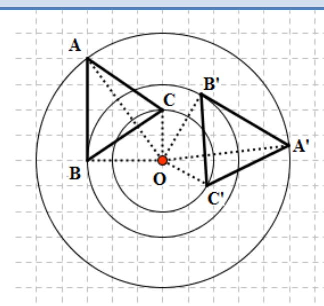
Objetivo de la actividad
Aplicar traslaciones según un vector dado con el uso de instrumentos geométricos.
Aprendizaje esperado involucrado
Construir transformaciones isométricas de figuras geométricas planas, utilizando regla y compás o procesadores geométricos (octavo año básico).
Procedimiento de resolución
• Aplicar definición de traslación. • Implementar el procedimiento que permite trasladar la figura: trazar rectas paralelas al vector dado, que pasen por cada uno de los vértices de la figura original y copiar sobre estas el vector de traslación, determinando así los puntos homólogos, para posteriormente unir dichos puntos obteniendo la figura homologa.

Habilidad desarrollada según Curriculum
Búsqueda y comparación de caminos de solución
Habilidad desarrollada según taxonomía de Anderson y Krathwohl
Aplicar (Nivel 3)
Conocimientos que permiten abordar la situación
• Definición de traslación.

Página 143

1. Construye geométricamente las rotaciones indicadas.



Objetivo de la actividad
Aplicar procedimiento descrito en el texto que permite rotar un punto, usando instrumentos geométricos.
Aprendizaje esperado involucrado
Construir transformaciones isométricas de figuras geométricas planas, utilizando regla y compás o procesadores geométricos (octavo año básico).
Procedimiento de resolución
• Ejecuta el procedimiento que permite rotar el triángulo dado en torno al centro $\boldsymbol{O}$, con un ángulo de 240°; trazando circunferencias de centro $\boldsymbol{O}$ que pasen por los puntos $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{C}$ respectivamente. Posteriormente uniendo mediante rectas el centro de rotación con cada uno de los vértices de la figura, para luego marcar el ángulo de rotación posicionando el transportador sobre cada recta y marcando sobre cada una de las circunferencias el ángulo pedido obteniéndose el punto homologo correspondiente. 

Habilidad desarrollada según Curriculum
Búsqueda y comparación de caminos de solución
Habilidad desarrollada según taxonomía de Anderson y Krathwohl
Aplicar (Nivel 3)
Conocimientos que permiten abordar la situación
• Construcción geométrica de una rotación. • Definición y característica de la rotación.

Página 144-145

1. Identifica las coordenadas de cada punto. Luego, escríbelas donde corresponde

¿Pudiste ubicar sin problemas todos los puntos?

Objetivo de la actividad
Identificar coordenadas de puntos ubicados en el plano cartesiano
Aprendizaje esperado involucrado
01: Identificar y representar puntos y coordenadas de figuras geométricas en el plano cartesiano, manualmente o usando un procesador geométrico.
Procedimiento de resolución
• Identificar las coordenadas de los puntos representados en el plano cartesiano, para esto el estudiante debe seguir las líneas punteadas para determinar la intersección con los ejes cartesianos.
Habilidad desarrollada según Curriculum
Búsqueda y comparación de caminos de solución
Habilidad desarrollada según taxonomía de Anderson y Krathwohl
Comprender (Nivel 2)
Conocimientos que permiten abordar la situación
Definición de Plano cartesiano

2. Representa en el plano cartesiano los siguientes puntos

a. $A(0, 3)$ c. $C(-2, 2)$ e. $G\left(-2{,}25; \frac{1}{3}\right)$

b. $B(3, 0)$ d. $F\left(-\frac{3}{4}, \frac{2}{5}\right)$ f. $H\left(-\frac{15}{8}, -\frac{35}{9}\right)$

Objetivo de la actividad

Representar puntos en el plano cartesiano

Aprendizaje esperado involucrado

01: Identificar y representar puntos y coordenadas de figuras geométricas en el plano cartesiano, manualmente o usando un procesador geométrico.

Procedimiento de resolución

- Representar los puntos en el plano cartesiano considerando lo siguiente: La coordenada $\boldsymbol{x}$ indica el desplazamiento del punto desde el origen en dirección horizontal hacia la izquierda si el número es negativo o derecha si el número es positivo. La coordenada $\boldsymbol{y}$ indica el desplazamiento en dirección vertical, hacia arriba si el número es positivo y hacia abajo si el número es negativo. Por ejemplo para el punto $(\mathbf{0}, \mathbf{3})$ la abscisa es 0 por lo tanto no hay desplazamiento horizontal, la ordenada es 3 por lo tanto se debe desplazar tres unidades hacia arriba (ya que el 3 es positivo).

Habilidad desarrollada según Curriculum

Búsqueda y comparación de caminos de solución.

Habilidad desarrollada según taxonomía de Anderson y Krathwohl

Comprender (Nivel 2)

Conocimientos que permiten abordar la situación

- Concepto de plano cartesiano
- Representación de puntos en el plano cartesiano

Observaciones

El texto no explica como representar puntos en el plano.

3. Identifica en qué cuadrante del plano cartesiano se ubican los siguientes puntos y completa la tabla con los signos de las coordenadas de cualquier punto que pertenezca a cada cuadrante

a. $Ñ(-1, -\pi)$ ▶

b. $P\left(\frac{15}{4}, -3\right)$ ▶

c. $S(\sqrt{2}, -\sqrt{8})$ ▶

d. $Q(0, -3)$ ▶

e. $R(3, -c)$; $c \in \mathbb{Z}^-$. ▶

f. $V\left(-\frac{\sqrt{4}}{a}, a^b\right)$; $a, b \in \mathbb{Z}^+$. ▶

Cuadrante	Abscisa	Ordenada
I		
II		
III		
IV		

¿Qué conclusión puedes obtener de esta actividad? Fundamenta

Objetivo de la actividad
Caracterizar el plano cartesiano
Aprendizaje esperado involucrado
01: Identificar y representar puntos y coordenadas de figuras geométricas en el plano cartesiano, manualmente o usando un procesador geométrico.
Procedimiento de resolución
• Reconocer el cuadrante en el que se encuentran los puntos dados luego de visualizarlos en el plano cartesiano. • Comparar signos de las abscisas y ordenas de los puntos correspondientes a cada cuadrante. • Concluir que en el primer cuadrante la ordenada y abscisa son positivas, en el segundo la abscisa es negativa y la ordenada positiva, en el tercero son ambas coordenadas negativas y finalmente en el cuarto cuadrante la abscisa es positiva y la ordenada negativa.
Habilidad desarrollada según Curriculum
Anticipación y estimación de resultados
Habilidad desarrollada según taxonomías de Anderson y Krathwohl
Comprender (Nivel 2)
Conocimientos que permiten abordar la situación
Representación de puntos en el plano cartesiano

5. Utiliza Geogebra para ubicar los puntos. Luego, señala que figura se forma al unirlos con la herramienta

a. $A(3, 7)$, $B(5, 4)$ y $C(8, 6)$

b. $J(0,0)$, $K\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $L(-1,-2)$, $M(-2,0)$ y $N\left(-\frac{3}{2}, 1\right)$

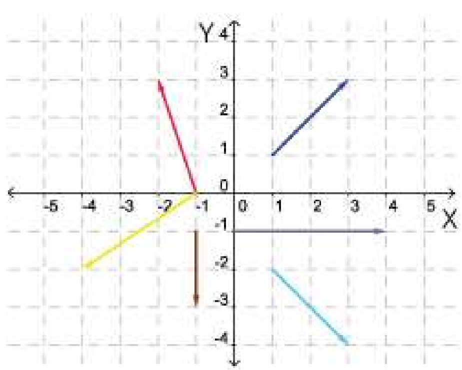
c. $V(0,0)$, $W\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$, $X\left(0, \frac{3}{2}\right)$ e $Y\left(\frac{3}{2}, 0\right)$

d. $J\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $K\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$, $L(2,3)$ y $M(0,1)$

Objetivo de la actividad
Representar puntos con la ayuda del Geogebra
Aprendizaje esperado involucrado
01: Identificar y representar puntos y coordenadas de figuras geométricas en el plano cartesiano, manualmente o usando un procesador geométrico.
Procedimiento de resolución
• Ejecutar indicaciones entregadas anteriormente por el texto. • Reconocer los polígonos formados por la unión de los puntos.
Habilidad desarrollada según Curriculum
Análisis de datos y de la soluciones
Habilidad desarrollada según taxonomía de Anderson y Krathwohl
Aplicar (Nivel 3)
Conocimientos que permiten abordar la situación
• Uso del software Geogebra • Características de polígonos

Página 146-147

1. Identifica las coordenadas de los puntos extremos de cada vector. Luego, determina las coordenadas de sus respectivos vectores posición.



Vector rojo:

Vector amarillo:

Vector café:

Vector celeste:

Vector azul:

Vector morado:

Objetivo de la actividad
Determinar coordenadas de un vector
Aprendizaje esperado involucrado
02: Representar en el plano, adiciones, sustracciones de vectores y multiplicaciones de un vector por un escalar.
Procedimiento de resolución
• Identificar en la cuadricula el punto inicial y final de cada vector. • Aplicar la definición entregada por el texto para calcular las coordenadas o componentes de cada vector.
Habilidad desarrollada según Curriculum
Análisis de los datos y de las soluciones
Habilidad desarrollada según taxonomía de Anderson y Krathwohl
Aplicar (Nivel 3)
Conocimientos que permiten abordar la situación
• Plano cartesiano. • Calculo de componentes de un vector

2. Calcula las coordenadas o componentes de los siguientes vectores

a. $\overrightarrow{AB}$; si A(1,1; 3) y B(4,1; 3). **b.** $\overrightarrow{CD}$; si C(-1, 3) y D(-4, 5). **c.** $\overrightarrow{EF}$; si $E\left(\frac{1}{2}, 4\right)$ y $F\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{7}\right)$.

Objetivo de la actividad
Determinar coordenadas de un vector
Aprendizaje esperado involucrado
02: Representar en el plano, adiciones, sustracciones de vectores y multiplicaciones de un vector por un escalar.
Procedimiento de resolución
• Aplicar el procedimiento entregado por el texto para determinar las componentes de un vector conocidos sus puntos de inicio y final, se tiene: $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = (\mathbf{4,1;3}) - (\mathbf{1,1;3}) = (\mathbf{4,1 - 1,1\,,3 - 3}\,) = (\mathbf{3,0})$ Por lo tanto la componente del $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ es $(\mathbf{3,0})$

Habilidad desarrollada según Curriculum
Análisis de los datos y de las soluciones
Habilidad desarrollada según taxonomía de Anderson y Krathwohl
Aplicar (Nivel 3)
Conocimientos que permiten abordar la situación
• Cálculo de componentes de un vector • Operatoria con números reales

3. Representa gráficamente en el plano cartesiano los vectores que permiten trasladar un punto según las siguientes indicaciones

a. $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$: la abscisa, dos unidades en sentido positivo, y la ordenada, tres unidades en sentido positivo.

b. $\overrightarrow{\boldsymbol{CD}}$: la abscisa, cuatro unidades en sentido negativo, y la ordenada, una unidad e sentido negativo.

c. $\overrightarrow{\boldsymbol{EF}}$: la abscisa se mantiene y la ordenada, cinco unidades en sentido negativo.

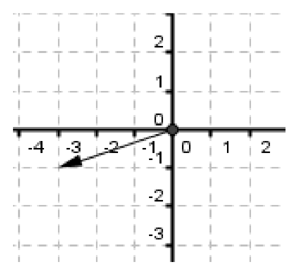
d. $\overrightarrow{\boldsymbol{GH}}$: la abscisa, tres unidades en sentido negativo y la ordenada se mantiene.

Objetivo de la actividad
Representar vectores en el plano cartesiano
Aprendizaje esperado involucrado
02: Representar en el plano adiciones, sustracciones de vectores y multiplicaciones de un vector por un escalar.
Procedimiento de resolución
• Comprender que los datos entregados en el enunciado entregan las componentes de cada uno de los vectores: "… la abscisa cuatro unidades en sentido negativo" se identifica con el valor $\boldsymbol{-4}$ "… la ordenada tres unidades en sentido negativo " se identifica con el valor $\boldsymbol{-3}$ Obteniéndose así el punto $(\boldsymbol{-4}, \boldsymbol{-3})$ • Representar los puntos obtenidos en el plano cartesiano. Trazar los vectores con punto de inicio el origen del plano y punto terminal el obtenido en el paso anterior.
Habilidad desarrollada según Curriculum
Búsqueda y comparación de caminos de solución

Habilidad desarrollada según taxonomía de Anderson y Krathwohl
Comprender (Nivel 2)
Conocimientos que permiten abordar la situación
• Representación de puntos en el plano • Definición de vector

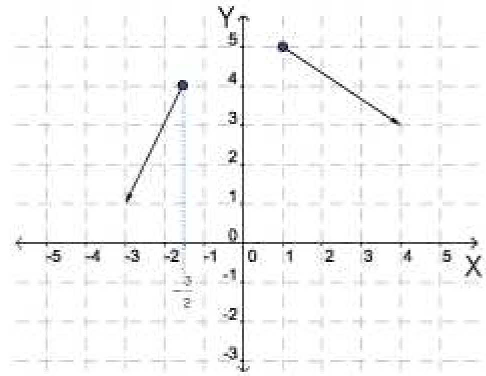
4. Resuelve el siguiente problema.

Un vector representa un desplazamiento desde el punto $A(1,4)$ hasta el punto $B(-2,3)$. Determina sus componentes y represéntalo gráficamente.

Objetivo de la actividad
Determinar componentes de un vector
Aprendizaje esperado involucrado
02: Representar en el plano adiciones, sustracciones de vectores y multiplicaciones de un vector por un escalar.
Procedimiento de resolución
Aplicar el procedimiento entregado por el texto para determinar las componentes de un vector conocidos sus puntos de inicio y final: sea $\boldsymbol{A(x_1,y_1)}$ ***y*** $\boldsymbol{B(x_2,y_2)}$, las componentes de $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ están dadas por: $\overrightarrow{AB} = (x_2,y_2) - (x_1,y_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1\ )$ $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = (\boldsymbol{-2},\boldsymbol{3}) - (\boldsymbol{1},\boldsymbol{4}) = (\boldsymbol{-2-1},\boldsymbol{3-4}\ ) = (\boldsymbol{-3},\boldsymbol{-1})$ • Representar en el plano cartesiano el vector 
Habilidad desarrollada según Curriculum
Análisis de datos y de las soluciones
Habilidad desarrollada según taxonomía de Anderson y Krathwohl
Aplicar (Nivel 3)
Conocimientos que permiten abordar la situación
• Definición entrega por el texto • Operatoria con números reales

Página 148-149

1. Aplica uno de los procedimientos para sumar los siguientes pares de vectores. Luego, determina las componentes o coordenadas del vector resultantes



Objetivo de la actividad

Sumar vectores con el uso de instrumentos geométricos

Aprendizaje esperado involucrado

02: Representar en el plano adiciones, sustracciones de vectores y multiplicaciones de un vector por un escalar.

Procedimiento de resolución

- Ejecutar procedimiento entregado por el texto; trasladar uno de los vectores con el uso de instrumentos geométricos hasta hacer coincidir su punto final con el punto inicial del otro vector, posteriormente trazar con el uso de la escuadra una recta que contenga al punto $(\mathbf{4},\mathbf{3})$ y sea paralela al vector ubicado en el segundo cuadrante $(\vec{\boldsymbol{u}})$. Desde el punto $(\mathbf{4},\mathbf{3})$ copiar la longitud del vector $(\vec{\boldsymbol{u}})$ sobre la recta.
- Identificar la coordenada del punto final del vector para formar un triangulo con un tercer vector cuyo punto coincide con el punto inicial de uno de los vectores y el final del otro vector.
- Aplicar el procedimiento entregado por el texto para determinar las componentes de un vector conocidos sus puntos de inicio y final: sea $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x_1},\boldsymbol{y_1})$ $\boldsymbol{y}$ $\mathbf{B}(\boldsymbol{x_2},\boldsymbol{y_2})$, *las componentes de* $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ *están dadas por:* $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = (\boldsymbol{x_2},\boldsymbol{y_2}) - (\boldsymbol{x_1},\boldsymbol{y_1}) = (\boldsymbol{x_2}-\boldsymbol{x_1},\boldsymbol{y_2}-\boldsymbol{y_1})$

Habilidad desarrollada según Curriculum

Análisis de los datos y de las soluciones

Habilidad desarrollada según taxonomía de Anderson y Krathwohl

Aplicar (Nivel 3)

Conocimientos que permiten abordar la situación

- Definición entrega por el texto
- Operatoria con números reales

2. Resuelve el siguiente problema.

Un estudiante debe sumar tres vectores. ¿Qué estrategia le aconsejarías para hacerlo? Justifica tu respuesta con un ejemplo

Objetivo de la actividad

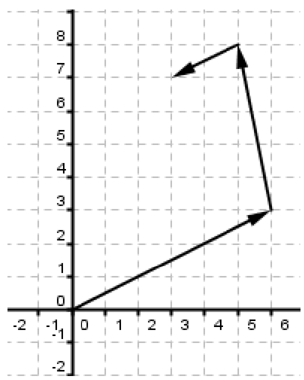
Extender el procedimiento entregado por el texto para sumar vectores.

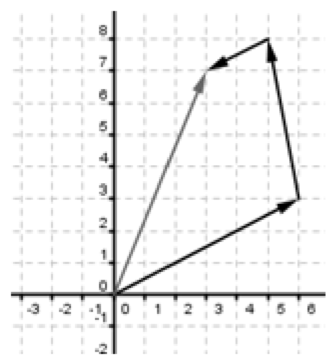
Aprendizaje esperado involucrado

02: Representa en el plano adiciones, sustracciones de vectores y multiplicaciones de un vector por un escalar.

Procedimiento de resolución

- Implementar uno de los procedimientos entregados por el texto para sumar vectores. y extenderlo para sumar tres vectores (Considerando el procedimiento utilizado en la página 148). Siguiendo el procedimiento de la forma triangular se tiene que el vector resultante posee punto inicio en $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ y final en $(\mathbf{3}, \mathbf{7})$ (ver imagen)





Habilidad desarrollada según Curriculum

Búsqueda y comparación de caminos de solución

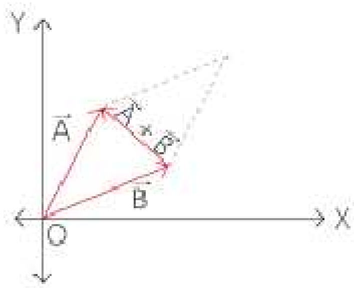
Habilidad desarrollada según taxonomía de Anderson y Krathwohl

Aplicar (Nivel 3)

Conocimientos que permiten abordar la situación

Procedimientos entregados por el texto para sumar vectores geométricamente

3. Analiza el siguiente procedimiento para obtener el vector resultante de la resta entre dos vectores. Luego, responde ¿Qué semejanza y que diferencia observas con la suma de vectores?



Objetivo de la actividad

Analizar un procedimiento

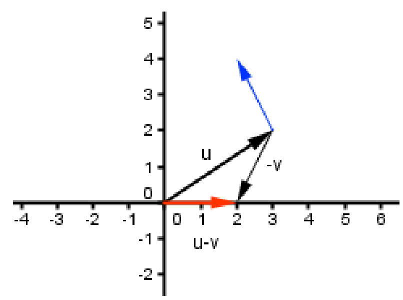
Aprendizaje esperado involucrado

02: Representar en el plano, adiciones, sustracciones de vectores y multiplicaciones de un vector por un escalar.

Procedimiento de resolución

- Analizar la imagen presentada por el texto
- Reconocer que la imagen posee un error.
- Planificar la siguiente estrategia de resolución: restar dos vectores considerando la definición de la resta como la suma del inverso y extender esta definición a los vectores. Por ejemplo:

  Para restar los vectores $\vec{u} = (3,2)$ y $\vec{v} = (1,2)$ se procede con el método de la forma triangular (ver imagen) donde le vector azul corresponde al vector $\vec{v}$.



Habilidad desarrollada según el Curriculum

Análisis de lo datos y de las soluciones.

Habilidad desarrollada según taxonomía de Anderson y Krathwohl

Analizar (Nivel 4)

Conocimientos que permiten abordar la situación

Operatoria de vectores en el plano cartesiano

Observación

Si bien el objetivo de la actividad inicialmente es analizar un procedimiento, esta se extiende a un nivel mal amplio como lo es diseñar un procedimiento (nivel 6) debido al error pictográfico presentado en la imagen.

4. Resuelve en tu cuaderno las adiciones y sustracciones de los siguientes vectores, sabiendo que: $\vec{\boldsymbol{u}} = (\mathbf{2}, \mathbf{0}), \vec{\boldsymbol{v}} = (-\mathbf{4}, \mathbf{5}), \vec{\boldsymbol{w}} = \left(\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}, -\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}}\right), \vec{\boldsymbol{z}} = \left(-\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}}, \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}\right)$

   a. $\vec{\boldsymbol{u}} + \vec{\boldsymbol{v}}$ b. $\vec{\boldsymbol{u}} + \vec{\boldsymbol{w}}$ c. $\vec{\boldsymbol{u}} - \vec{\boldsymbol{v}}$ d. $\vec{\boldsymbol{w}} + \vec{\boldsymbol{z}}$ e. $\vec{\boldsymbol{u}} + \vec{\boldsymbol{v}} + \vec{\boldsymbol{w}} + \vec{\boldsymbol{z}}$ f. $\vec{\boldsymbol{u}} + \vec{\boldsymbol{u}} - \vec{\boldsymbol{z}} + \vec{\boldsymbol{z}}$

Objetivo de la actividad
Ejecutar procedimiento para sumar vectores
Aprendizaje esperado involucrado
02: Representar en el plano adiciones, sustracciones de vectores y multiplicaciones de un vector por un escalar.
Procedimiento de resolución
• Aplicar procedimientos para sumar vectores entregado por el texto $\vec{\boldsymbol{u}} + \vec{\boldsymbol{v}} = (\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}) + (\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}) = (\boldsymbol{u_1} + \boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{u_2} + \boldsymbol{v_2})$
Habilidad desarrolla según el Curriculum
Búsqueda y comparación de caminos de solución
Habilidad desarrollada según taxonomía de Anderson y Krathwohl
Aplicar (Nivel 3)
Conocimientos que permiten abordar la situación
• Operatoria con números reales • Suma de vectores con respecto a sus componentes
Observación
En el texto no se define la resta de vectores

5. Evalúa la veracidad de las siguientes afirmaciones. Justifica cada una en tu cuaderno.

a. La adición de vectores cumple con la propiedad conmutativa.

b. La representación gráfica del vector resultante de la adición entre $\vec{\boldsymbol{u}} = (\mathbf{1}, -\mathbf{1})$ y $\vec{\boldsymbol{v}} = (-\mathbf{1}, \mathbf{1})$ es el vector cuyas componentes son $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$.

c. La representación gráfica de los vectores $\vec{\boldsymbol{w}} = (\mathbf{4}, -\mathbf{4})$ y $\vec{\boldsymbol{z}} = (-\mathbf{4}, \mathbf{4})$ es la misma.

Objetivo de la actividad
Evaluar veracidad de afirmaciones respecto al concepto de vectores
Aprendizaje esperado involucrado
02: Representar en el plano, adiciones, sustracciones de vectores y multiplicaciones de un vector por un escalar.

Procedimiento de resolución

1) Probar si adición de vectores es conmutativa:

- Aplicar procedimiento para sumar vectores: considerar dos vectores $\vec{u}$ **y** $\vec{v}$ sumarlos en distinto orden:

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1, u_2) + (v_1, v_2) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$$
$$\vec{v} + \vec{u} = (v_1, v_2) + (u_1, u_2) = (v_1 + u_1, v_2 + u_2)$$

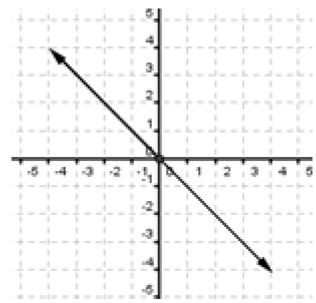
- Comparar los resultados obtenidos
- Concluir que la adición de vectores cumple la propiedad conmutativa.

2) Evaluar la situación planteada

- Aplicar el procedimiento para sumar los vectores

$$\vec{v} + \vec{u} = (1, -1) + (-1, 1) = (1 + (-1), -1 + 1) = (0,0)$$

- Identificar el resultado como el vector de coordenadas $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$
- Representar en el plano cartesiano los vectores dados.
- Concluir que dichas representaciones no son la misma ya que los vectores están en distinto sentido.



Habilidad desarrollada según Curriculum

Análisis de los datos y de las soluciones

Habilidad desarrollada según taxonomía de Anderson y Krathwohl

Aplicar (Nivel 3)

Conocimientos que permiten abordar la situación

- Características de vectores
- Adición de vectores

Página 152-153

1. Aplica las siguientes reflexiones. Luego, represéntalas gráficamente.

a. $R_x(2, 0) =$ b. $R_x(-2, 4) =$ c. $R_y\left(\frac{3}{8}, -\frac{9}{4}\right) =$ d. $R_y\left(-2\frac{2}{3}; -2{,}5\right) =$

Objetivo de la actividad

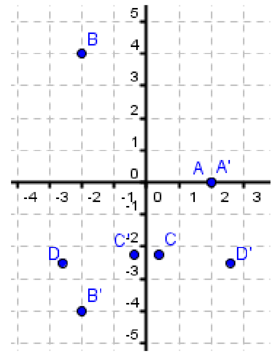
Aplicar simetrías a un punto con respecto a un eje del plano cartesiano

Aprendizaje esperado involucrado

03: Aplicar composición de funciones para realizar transformaciones isométricas en el plano cartesiano.

Procedimiento de resolución

- Aplicar las definiciones $\boldsymbol{R_x(x,y)=(x,-y)}$ ó $\boldsymbol{R_y(x,y)=(-x,y)}$ determinando el punto simétrico a los punto entregados, esto es:



a. $R_x(2{,}0)=(2{,}0)$

b. $R_x(-2{,}4)=(-2,-4)$

c. $R_y\left(\frac{3}{8},-\frac{9}{4}\right)=\left(-\frac{3}{8},-\frac{9}{4}\right)$

d. $R_y\left(-2\frac{2}{3},-2{,}5\right)=\left(2\frac{2}{3},-2{,}5\right)$

- Representar los puntos en el plano cartesiano.

Habilidad desarrollada según Curriculum

Búsqueda y comparación de caminos de solución

Habilidad desarrollada según taxonomía de Anderson y Krathwohl

Aplicar (Nivel 3)

Conocimientos que permiten abordar la situación

Reglas de simetría de un punto respecto a los ejes del plano cartesiano.

2. Aplica las siguientes reflexiones

a. $R_0(-3, 4) =$ **b.** $R_0\left(\frac{3}{4},-\frac{1}{4}\right)=$ **c.** $R_y\left(-1\frac{4}{3};-0{,}5\right)=$

Objetivo de la actividad

Aplicar simetría a puntos del plano cartesiano

Aprendizaje esperado involucrado

03: Aplicar composición de funciones para realizar transformaciones isométricas en el plano cartesiano.

Procedimiento de resolución

- Aplicar la definición $\boldsymbol{R_O(x,y)=(-x,-y)}$ determinando los puntos simétrico a los puntos dados

$R_0(-3{,}4)=(3,-4)$ $R_0\left(\frac{3}{4},-\frac{1}{4}\right)=\left(-\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right)$ $R_0\left(-1\frac{4}{3};-0{,}5\right)=\left(1\frac{4}{3};0{,}5\right)$

Habilidad desarrollada según Curriculum

Búsqueda y comparación de caminos de solución

Habilidad desarrollada según taxonomía de Anderson y Krathwohl
Aplicar (Nivel 3)
Conocimientos que permiten abordar la situación
Concepto de reflexión respecto al origen del plano cartesiano.
Observación
Nótese que no es necesario realizar esta actividad en el plano cartesiano, aplicando las reglas algebraicas entregadas por el texto se puede resolver sin ningún problema.

3. Aplica, sin graficar, las reflexiones señaladas y determina las coordenadas de la figura resultante.

a. Triángulo de vértices $\boldsymbol{A(0,0)}$, $\boldsymbol{B(3,8)}$ y $\boldsymbol{C(-2,1)}$ respecto al eje $\boldsymbol{x}$.

b. Cuadrilátero de vértices $\boldsymbol{P(-4,-3)}$, $\boldsymbol{Q\left(\frac{1}{8},-\frac{2}{3}\right)}$, $\boldsymbol{R(2,-2)}$ y $\boldsymbol{S\left(-\frac{1}{8}.-7\right)}$ con respecto al eje $\boldsymbol{y}$.

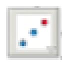
Objetivo de la actividad
Aplicar el concepto de simetría a un punto respecto a ejes del plano cartesiano.
Aprendizaje esperado involucrado
03: Aplicar composición de funciones para realizar transformaciones isométricas en el plano cartesiano.
Procedimiento de resolución
• Aplicar la definición $\boldsymbol{R_x(x,y)=(x,-y)}$ se determinan los puntos simétricos a los puntos dados como vértices de un triángulo como sigue: $R_x(0,0)=(0,0)$ $\quad R_x(3,8)=(3,-8)$ $\quad R_x(-2,1)=(-2,-1)$ • Aplicar la definición $\boldsymbol{R_y(x,y)=(-x,y)}$ se determinan los puntos simétricos a los puntos dados como vértices de un triángulo como sigue: $R_y(-4,-3)=(4,-3)$ $\quad R_y\left(\frac{1}{8},-\frac{2}{3}\right)=\left(-\frac{1}{8},-\frac{2}{3}\right)$ $R_y(2,-2)=(-2,-2)$ $\quad R_y\left(-\frac{1}{8},-7\right)=\left(\frac{1}{8},-7\right)$
Habilidad desarrollada según Curriculum
Búsqueda y comparación de caminos de solución
Habilidad desarrollada según taxonomía de Anderson y Krathwohl
Aplicar (Nivel 3)

Conocimientos que permiten abordar la situación
• Reglas algebraicas de simetría respecto a ejes del plano cartesiano

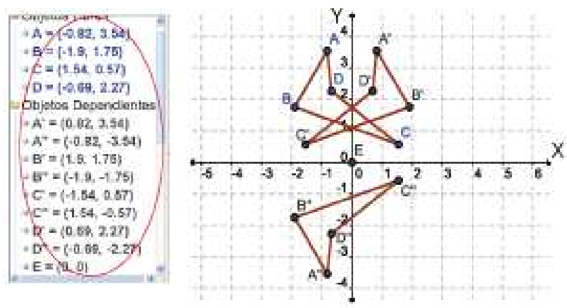
4. Analiza la información que te permitirá realizar reflexiones a figuras geométricas utilizando el programa Geogebra. Luego, resuelve:

1º Dibuja una figura en el área de trabajo

2º Si la reflexión es respecto de un eje de simetría o de un punto, dibújalo.

3º Presiona el botón correspondiente al elemento por el que se aplicará la reflexión (eje  o centro de simetría ). Luego, selecciona la figura y el eje o el centro de simetría

a) Especifica qué tipo de transformaciones fueron aplicadas a los polígonos $\boldsymbol{ABCD}$ y $\boldsymbol{A'B'C'D'}$



Objetivo de la actividad
Reconocer información entregada por una imagen respecto de la aplicación de simetrías en el plano cartesiano.
Aprendizaje esperado involucrado
03: Aplicar composición de funciones para realizar transformaciones isométricas en el plano cartesiano.
Procedimiento de resolución
• Reconocer el tipo de transformación isométrica que se le realizo a cada polígono considerando las coordenadas de los vértices de la figura original y las coordenadas de su figura homologa (mostrados en el recuadro)
Habilidad desarrollada según Curriculum
Análisis de los datos y de las soluciones
Habilidad desarrollada según taxonomía de Anderson y Krathwohl
Comprender (Nivel 2)
Conocimientos que permiten abordar la situación
Concepto de simetría axial y simetría central

b) Verifica que se cumplen las funciones: $\boldsymbol{R_x(x,y)=(x,-y)}$, $\boldsymbol{R_y(x,y)=(-x,y)}$, $\boldsymbol{R_0(x,y)=(-x,-y)}$. Observa los datos encerrados con rojo

Objetivo de la actividad
Verificar el cumplimiento de la definición del concepto de reflexión respecto a los ejes de coordenadas o el origen en el plano cartesiano
Aprendizaje esperado involucrado
05: Formular y verificar conjeturas acerca de la aplicación de transformaciones isométricas a figuras geométricas en el plano cartesiano.
Procedimiento de resolución
• Comparar los resultados presentados en la imagen. • Concluir que se cumple la relación planteada.
Habilidad desarrollada según Curriculum
Análisis de los datos y de las soluciones
Habilidad desarrollada según taxonomía de Anderson y Krathwohl
Comprender (Nivel 2)
Conocimientos que permiten abordar la situación
• Concepto de reflexión de puntos en el plano cartesiano

c) ¿Cómo son las medidas de la figura reflejada con respecto a la original?

Objetivo de la actividad
Formular conjeturas sobre la aplicación de reflexión a figuras en el plano cartesiano.
Aprendizaje esperado involucrado
05: Formular y verificar conjeturas acerca de la aplicación de transformaciones isométricas a figuras geométricas en el plano cartesiano.
Procedimiento de resolución
• Aplicar procedimiento para medir cada trazo (con el uso del software) de la figura original y la de su imagen respectivamente. • Comparar los datos obtenidos determinando que: $d(A,B)=d(A',B')=d(A'',B'')$ $\quad$ $d(C,D)=d(C',D')=d(C'',D'')$ $d(B,C)=d(B',C')=d(B'',C'')$ $\quad$ $d(D,A)=d(D',A')=d(D'',A'')$ • Concluir que las reflexiones preservan distancias.

Habilidad desarrollada según Curriculum
Anticipación y estimación de resultados
Habilidad desarrollada según taxonomía de Anderson y Krathwohl
Aplicar (Nivel 3)
Conocimientos que permiten abordar la situación
• Uso del software GeoGebra

Página 154-155

1. Aplica las siguientes traslaciones. Luego, represéntalas gráficamente:

a. $\vec{u} = (0, -2)$, $T_{\vec{u}}(-2, -5)$ **b.** Si $\vec{v} = \left(-2\frac{1}{4}, -\frac{2}{5}\right)$, $T_{\vec{v}}(0, 0) =$

Objetivo de la actividad
Aplicar definición de traslación de un punto respecto de un vector dado.
Aprendizaje esperado involucrado
03: Aplicar composiciones de funciones para realizar transformaciones isométricas en el plano cartesiano.
Procedimiento de resolución
• Aplicar definición de traslación respecto de un vector entregada por el texto: $$\boldsymbol{T_{\vec{u}}(x, y) = (x + u_1, y + u_2)}$$
Habilidad desarrollada según Curriculum
Búsqueda y comparación de caminos de solución
Habilidad desarrollada según taxonomía de Anderson y Krathwohl
Aplicar (Nivel 3)
Conocimientos que permiten abordar la situación
• Definición del concepto de traslación respecto de un vector entregada por el texto • Operatoria con números racionales

2. Calcula las coordenadas del vector traslación $\vec{u}$ que permite obtener cada punto trasladado $\boldsymbol{P}$ a partir del respectivo punto original dado $\boldsymbol{A}$

a. A(−6, −6), P(0, −1). **c.** A(4, 2), P(3, −7). **e.** A(6, 7), $P\left(-\frac{2}{7}, -\frac{7}{2}\right)$.

b. A(7, −1), P(5, 0). **d.** $A\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$, P(5, −1). **f.** A(0,8; −1,2), P(1,2; 0,8).

Objetivo de la actividad
Aplicar definición de traslación de un punto respecto de un vector.
Aprendizaje esperado involucrado
03: Aplicar composiciones de funciones para realizar transformaciones isométricas en el plano cartesiano.
Procedimiento de resolución
• Aplicar definición de traslación respecto de un vector entregado por el texto $$\boldsymbol{T_{\vec{u}}(x, y) = (x + u_1, y + u_2)}$$
Habilidad desarrollada según Curriculum
Búsqueda y comparación de caminos de solución
Habilidad desarrollada según taxonomía de Anderson y Krathwohl
Aplicar (Nivel 3)
Conocimientos que permiten abordar la situación
• Concepto de traslación de un punto en el plano cartesiano. • Adición de números enteros. • Definición del concepto de vector de desplazamiento.

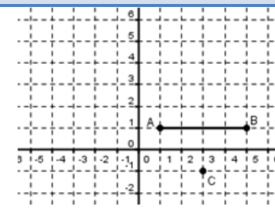
3. Represente en un plano cartesiano cada una de las siguientes situaciones:

a) La base de un triángulo isósceles tiene como extremos a los puntos $\boldsymbol{A(1,1)}$ y $\boldsymbol{B(5,1)}$, y la ordenada del vértice opuesto a $\overline{\boldsymbol{AB}}$ es $\boldsymbol{-1}$. Traslada el triángulo respecto del vector $\vec{\boldsymbol{b}} = (\boldsymbol{-4, 5})$

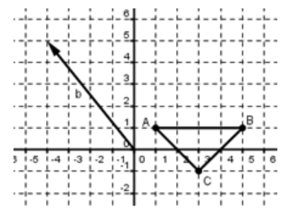
Objetivo de la actividad
Aplicar definición de traslación de un punto respecto de un vector.
Aprendizaje esperado involucrado
03: Aplicar composiciones de funciones para realizar transformaciones isométricas en el plano cartesiano.

Procedimiento de resolución

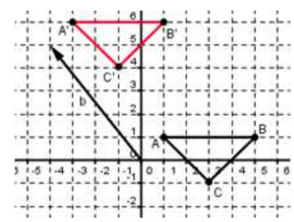
- Representar el triángulo pedido en el plano cartesiano: ubicar puntos extremos de la base del triángulo isósceles y el vértice opuesto a esta considerando que un triángulo isósceles tiene dos lados de igual medida.



- Unir los puntos $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{C}$ obteniendo el triángulo isósceles $\boldsymbol{ABC}$ y graficar el vector posición $\vec{\boldsymbol{b}} = (-\mathbf{4}, \mathbf{5})$



- Aplicar definición de traslación a cada uno de los vértices del triángulo con respecto al vector dado. Unir los puntos obtenidos.



Habilidad desarrollada según Curriculum

Análisis de los datos y de las soluciones

Habilidad desarrolladas según taxonomía de Anderson y Krathwohl

Aplicar (Nivel 3)

Conocimientos que permiten abordar la situación

- Representación de un punto en el plano cartesiano.
- Clasificación de triángulos según la medida de sus lados.
- Concepto de vectores y representación de estos en el plano cartesiano.
- Concepto de traslación en el plano cartesiano.

b) Las coordenadas de tres vértices de un rectángulo son $\boldsymbol{P}(-\mathbf{1}, -\mathbf{1})$, $\boldsymbol{Q}(\mathbf{1}, -\mathbf{1})$ y $\boldsymbol{T}(\mathbf{1}, \mathbf{4})$. Traslada el rectángulo respecto al vector $\vec{\boldsymbol{c}} = (\mathbf{3}, -\mathbf{3})$

Objetivo de la actividad

Aplicar definición de traslación de un punto respecto de un vector.

Aprendizaje esperado involucrado

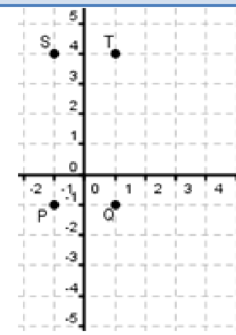
03: Aplicar composiciones de funciones para realizar transformaciones isométricas en el plano cartesiano.

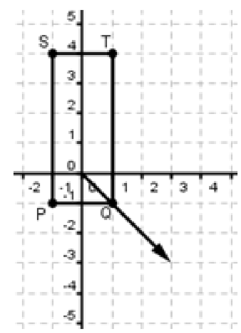
Procedimiento de resolución

- Representar los vértices del rectángulo y determinar el cuarto vértice considerando que un rectángulo tiene dos pares de lados paralelos y de igual medida.

- Unir los puntos $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{T}$ y el vértice $\boldsymbol{S}$, determinado, respectivamente obteniendo el rectángulo $\boldsymbol{PQTS}$ y graficar el vector posición $\vec{\boldsymbol{c}} = (\mathbf{3}, -\mathbf{3})$

- Aplicar definición de traslación a cada uno de los vértices del rectángulo con respecto al vector dado.





Habilidad desarrollada según Curriculum

Análisis de los datos y de las soluciones

Habilidad desarrollada según taxonomía de Anderson y Krathwohl

Aplicar (Nivel 3)

Conocimientos que permiten abordar la situación

- Representación de un punto en el plano cartesiano
- Características de rectángulos
- Concepto de vectores y representación de estos en el plano cartesiano
- Concepto de traslación en el plano cartesiano.

c) La diagonal de un cuadrado $\boldsymbol{EFGH}$ tiene como puntos extremos a $\boldsymbol{H}(-\mathbf{1}, \mathbf{2})$ y $\boldsymbol{F}(-\mathbf{4}, \mathbf{5})$. Traslada el cuadrado $\boldsymbol{EFGH}$ respecto del vector $\vec{\boldsymbol{d}} = (\mathbf{5}, -\mathbf{1})$

Objetivo de la actividad

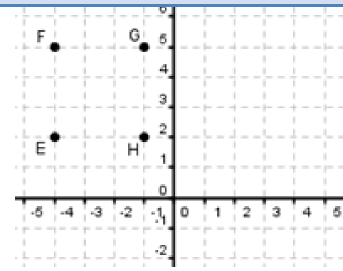
Aplicar definición de traslación de un punto respecto de un vector.

Aprendizaje esperado involucrado

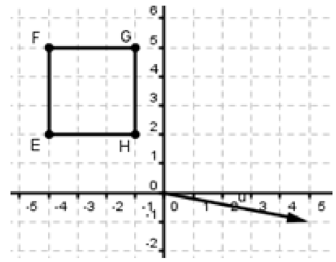
03: Aplicar composiciones de funciones para realizar transformaciones isométricas en el plano cartesiano.

Procedimiento de resolución

- Representar los puntos extremos de la diagonal del cuadrado $\boldsymbol{EFGH}$ determinando los vértices de este en el plano cartesiano, considerando que un cuadrado tiene sus cuatro lados de igual medida.

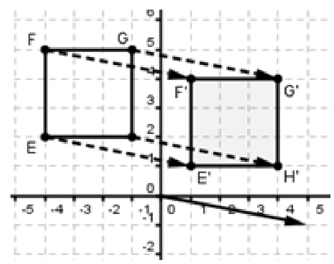


- Unir los puntos $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{G}$ y $\boldsymbol{H}$ respectivamente y graficar el vector posición $\vec{\boldsymbol{d}} = (\mathbf{5}, -\mathbf{1})$



- Aplicar definición de traslación a cada uno de los vértices del rectángulo con respecto al vector dado.

- Unir los puntos $\boldsymbol{E'}$, $\boldsymbol{F'}$, G$'$ y $\boldsymbol{H'}$ respectivamente obteniendo el cuadrado $\boldsymbol{E'F'G'H'}$ correspondiente al trasladado



Habilidad desarrollada según Curriculum

Análisis de los datos y de las soluciones

Habilidad desarrollada según taxonomía de Anderson y Krathwohl

Aplicar (Nivel 3)

Conocimientos que permiten abordar la situación

- Representación de un punto en el plano cartesiano
- Características de un cuadrado
- Concepto de vectores y representación de estos en el plano cartesiano
- Concepto de traslación en el plano cartesiano.

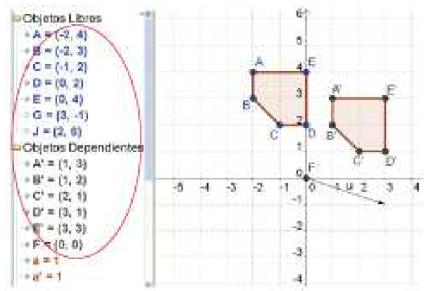
4. Analiza la información que te permitirá realizar traslaciones a figuras geométricas utilizando el programa Geogebra. Luego, resuelve.

1º Dibuja una figura en el área de trabajo

2º Dibuja el vector de traslación 

3º Presiona el botón  correspondiente a la traslación. Luego, selecciona la figura y el vector dibujado

a) Especifica qué tipo de transformación fue aplicada al polígono $ABCDE$



Objetivo de la actividad
Reconocer información entregada por una imagen respecto de la aplicación de traslaciones en el plano cartesiano
Aprendizaje esperado involucrado
03: Aplicar composición de funciones para realizar transformaciones isométricas en el plano cartesiano.
Procedimiento de resolución
• Reconocer el tipo de transformación isométrica que se le realizo al polígono considerando las coordenadas de los vértices de la figura original y las coordenadas de su figura homologa (mostrados en el recuadro)
Habilidad desarrollada según Curriculum
Análisis de los datos y de las soluciones
Habilidad desarrollada según taxonomía de Anderson y Krathwohl
Comprender (Nivel 2)
Conocimientos que permiten abordar la situación
• Concepto de traslación

b) Verifica que la función $\boldsymbol{T_{\vec{u}}(x,y) = (x+u_1, y+u_2)}$ se cumple para los puntos del polígono $\boldsymbol{ABCDE}$.

Objetivo de la actividad
Verificar el cumplimiento de la definición del concepto de traslación respecto a un vector
Aprendizaje esperado involucrado
05: Formular y verificar conjeturas acerca de la aplicación de transformaciones isométricas a figuras geométricas en el plano cartesiano.
Procedimiento de resolución
• Identificar los puntos del polígono $\boldsymbol{ABCDE}$ y su imagen $\boldsymbol{A'B'C'D'E'}$. • Reconocer que las coordenadas de los vértices del polígono $\boldsymbol{A'B'C'D'E'}$ están determinadas por medio de la definición entregada por el texto $\boldsymbol{T_{\vec{u}}(x,y) = (x+u_1, y+u_2)}$.
Habilidad desarrollada según Curriculum
Análisis de los datos y de las soluciones
Habilidad desarrollada según taxonomía de Anderson y Krathwohl
Comprender (Nivel 2)
Conocimientos que permiten abordar la situación
• Concepto de traslación de puntos en el plano cartesiano respecto a un vector

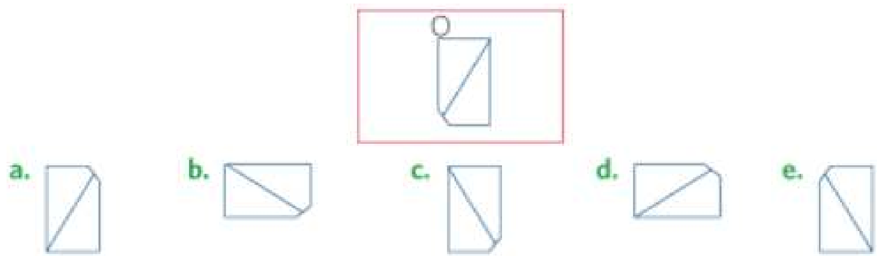
c) ¿Cómo son las medidas de la figura trasladada con respecto a la original?

Objetivo de la actividad
Formular conjeturas sobre la aplicación de traslaciones a figuras en el plano
Aprendizaje esperado involucrado
05: Formular y verificar conjeturas acerca de la aplicación de transformaciones isométricas a figuras en el plano cartesiano.
Procedimiento de resolución
• Aplicar procedimiento para medir cada trazo (con el uso del software) de la figura original y la de su imagen. • Comparar los datos obtenidos determinando que: $d(A,B) = d(A',B') = d(A'',B'')$ $\quad$ $d(D,E) = d(D',E') = d(D'',E'')$ $d(B,C) = d(B',C') = d(B'',C'')$ $\quad$ $d(E,A) = d(E',A') = d(E'',A'')$ $d(C,D) = d(C',D') = d(C'',D'')$ • Concluir que se preservan distancias.

Habilidad desarrollada según Curriculum
Anticipación y estimación de resultados
Habilidad desarrollada según taxonomía de Anderson y Krathwohl
Comprender (Nivel 2)
Conocimientos que permiten abordar la situación
• Distancia entre puntos. • Usos del software GeoGebra

Página 156-157

1. Identifica la alternativa que corresponde a la imagen de la figura encerrada en el rectángulo rojo después de aplicarle una rotación con centro en O y un ángulo de 180º



Objetivo de la actividad
Identificar la imagen de una figura producto de una rotación
Aprendizaje esperado involucrado
Construir transformaciones isométricas de figuras geométricas planas, utilizando regla y compás o procesadores geométricos (octavo año básico)
Procedimiento de resolución
• Reconocer la imagen producto de la rotación pedida.
Habilidad desarrollada según Curriculum
Análisis de datos y de las soluciones
Habilidad desarrollada según taxonomía de Anderson y Krathwohl
Aplicar (Nivel 3)
Conocimientos que permiten abordar la situación
• Concepto de rotación en el plano

2. Resuelve los siguientes problemas.

a) Al punto $\boldsymbol{A(-4,-6)}$ se le aplica una rotación respecto del origen del plano cartesiano en un ángulo de rotación de 90º. Determina las coordenadas del punto resultante.

Objetivo de la actividad
Aplicar definición de rotación a un punto del plano cartesiano.
Aprendizaje esperado involucrado
03: Aplicar composiciones de funciones para realizar transformaciones isométricas en el plano cartesiano.
Procedimiento de resolución
• Aplicar definición de rotación como sigue: $\boldsymbol{R_{(0,90°)}(x,y)=(-y,x)}$ $$\boldsymbol{R_{(0,90°)}(-4,-6)=(6,-4)}$$
Habilidad desarrollada según Curriculum
Búsqueda y comparación de caminos de solución
Habilidad desarrollada según taxonomía de Anderson y Krathwohl
Aplicar (Nivel 3)
Conocimientos que permiten abordar la situación
• Concepto de rotación en el plano cartesiano

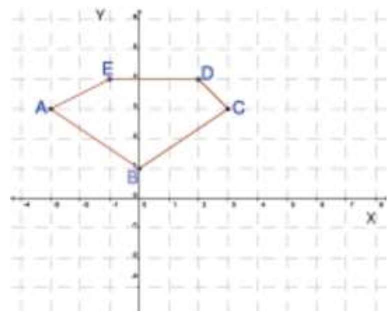
b) Si las coordenadas de un punto al ser rotado respecto del origen en -270º son $\boldsymbol{(-4,0)}$. ¿cuáles son las coordenadas del punto antes de aplicarle la transformación?

Objetivo de la actividad
Aplicar definición de rotación un punto dado en el plano cartesiano
Aprendizaje esperado involucrado
03: Aplicar composiciones de funciones para realizar transformaciones isométricas en el plano cartesiano.
Procedimiento de resolución
• Implementar definición de rotación de centro (0,0) y ángulo dado: realizar proceso inverso dado por la definición de rotación como sigue: $\boldsymbol{R_{(0,-270°)}(x,y)=(-y,x)}$ $\boldsymbol{R_{(0,-270°)}(0,4)=(-4,0)}$
Habilidad desarrollada según Curriculum
Búsqueda y comparación de caminos de solución

Habilidad desarrollada según taxonomía de Anderson y Krathwohl
Aplicar (Nivel 3)
Conocimientos que permiten abordar la situación
• Concepto de rotación en el plano cartesiano

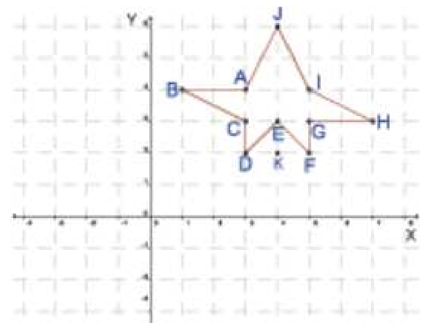
3. Aplica las rotaciones señaladas a cada figura

a) Centro de rotación $\boldsymbol{C}$ y ángulo de rotación 90º



Objetivo de la actividad
Aplicar una rotación a polígonos respecto a un centro y ángulo de rotación
Aprendizaje esperado involucrado
Construir transformaciones isométricas de figuras planas, utilizando regla y compás o procesador geométrico (octavo básico)
Procedimiento de resolución
• Ejecutar el procedimiento entregado por el texto para rotar puntos con el uso de instrumentos geométricos (pág. 143 libro SM)
Habilidad desarrollada según Curriculum
Búsqueda y comparación de caminos de solución
Habilidad desarrollada según taxonomía de Anderson y Krathwohl
Aplicar (Nivel 3)
Conocimientos que permiten abordar la situación
• Procedimiento para rotar puntos con el uso de instrumentos geométricos

b) Centro de rotación $\boldsymbol{K}$ y ángulo de rotación $-\mathbf{180°}$

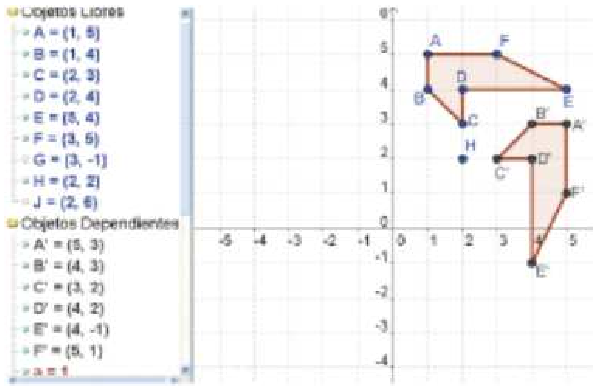


Objetivo de la actividad
Aplicar una rotación a polígonos respecto a un centro y ángulo de rotación
Aprendizaje esperado involucrado
Construir transformaciones isométricas de figuras planas, utilizando regla y compás o procesador geométrico (octavo básico)
Procedimiento de resolución
• Ejecutar el procedimiento entregado por el texto para rotar puntos con el uso de instrumentos geométricos (pág. 143 libro SM)
Habilidad desarrollada según Curriculum
Búsqueda y comparación de caminos de solución
Habilidad desarrollada según taxonomía de Anderson y Krathwohl
Aplicar (Nivel 3)
Conocimientos que permiten abordar la situación
• Procedimiento para rotar puntos con el uso de instrumentos geométricos

4. Analiza la información que te permitirá realizar rotaciones a figuras geométricas utilizando el programa Geogebra. Luego, resuelve:

1º Dibuja una figura en el área de trabajo

2º Presiona el botón  correspondiente a la rotación. Luego, selecciona la figura, el centro de rotación y escribe el ángulo de rotación en la casilla



a) Especifica qué punto se consideró como centro de rotación y en que ángulo se ha rotado el polígono $ABCDEF$

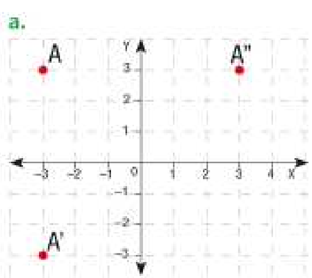
Objetivo de la actividad
Reconocer el centro y ángulo mediante el cual se efectuó una rotación a un polígono.
Aprendizaje esperado involucrado
03: Aplicar composiciones de funciones para realizar transformaciones isométricas en el plano cartesiano.
Procedimiento de resolución
• Reconocer el centro de la rotación observando el punto C y su respectiva imagen. • Ejecutar el procedimiento para rotar un punto en el software GeoGebra en un ángulo de 90° (u otro) para comprobar el ángulo usado para la rotación.
Habilidad desarrollada según Curriculum
Análisis de los datos y de las soluciones
Habilidad desarrollada según taxonomía de Anderson y Krathwohl
Comprender (Nivel 2)
Conocimientos que permiten abordar la situación
• Manipulación del software GeoGebra • Definición de rotación

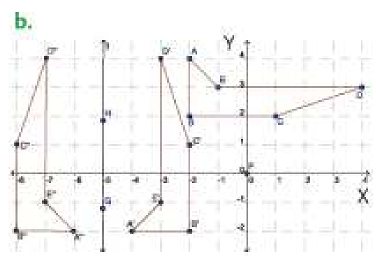
b) Si el ángulo de rotación es 90º, 180º, 270º, 360º o sus correspondientes negativos, verifica que se cumple la relación respectiva.

Objetivo de la actividad
Identificar regularidades en la aplicación de rotaciones en diversos ángulos
Aprendizaje esperado involucrado
05: Formular y verificar conjeturas acerca de la aplicación de transformaciones isométricas a figuras geométricas en el plano cartesiano.
Procedimiento de resolución
• Ejecutar procedimiento para rotar la figura según los ángulos dados. • Reconocer que las imágenes obtenidas producto de la rotación en un ángulo $\boldsymbol{\alpha}$ y en ángulo $-\boldsymbol{\alpha}$ a la figura corresponden a la imagen original y su respectiva homologa producto de otra transformación isométrica. Por ejemplo: reconocer que las imágenes obtenidas producto de una rotación en 90° y en -90° de una figura con respecto a un punto fijo, son homologas con respecto a una simetría puntual o central en dicho punto.
Habilidad desarrollada según Curriculum
Análisis de datos y de las soluciones
Habilidad desarrolladas según taxonomía de Anderson y Krathwohl
Aplicar (Nivel 3)
Conocimientos que permiten abordar la situación
• Definiciones de traslaciones, rotación, reflexión y simetría • Manipulación de software Geogebra
Observación
La actividad no lleva a la formulación de una conjetura ya que solo se limita a este ejemplo particular, no invita a generalizar.

Página 158-159

1. Identifica qué transformaciones se muestran en el siguiente gráfico.





Objetivo de la actividad
Reconocer las transformaciones isométricas involucradas en cada uno de los gráficos.
Aprendizaje esperado involucrado
03: Aplicar composiciones de funciones para realizar transformaciones isométricas en el plano cartesiano.
Procedimiento de resolución
• Identificar en cada grafica las transformaciones isométricas aplicadas de manera sucesivas a cada uno de los puntos. • Concluir que, en la primera grafica las transformaciones isométricas que llevan el punto $\boldsymbol{A}$ en el punto $\boldsymbol{A}'$ y este último en el punto $\boldsymbol{A}'''$ son respectivamente una simetría con respecto al eje $\boldsymbol{x}$ y una simetría o rotación con respecto al centro del plano cartesiano. Mientras que en la segunda gráfica, las transformaciones isométricas que llevan el polígono de vértices $\boldsymbol{ABCDE}$ en $\boldsymbol{A'B'C'D'E'}$ y este último en la figura $\boldsymbol{A''B''C''D''E''}$ son respectivamente una rotación en torno al centro del plano cartesiano con un cierto ángulo y, por otro lado, una simetría con respecto a una recta paralela al eje de las ordenadas.
Habilidad desarrollada según Curriculum
Análisis de datos y de las soluciones
Habilidad desarrollada según taxonomía de Anderson y Krathwohl
Comprender (Nivel 2)
Conocimientos que permiten abordar la situación
• Conceptos de traslación, simetría y rotación. • Concepto de composición de transformaciones isométricas.

2. Representa en el plano cartesiano. Luego, responde.

a. Al triángulo formado por los vértices $\boldsymbol{E(1,0)}$, $\boldsymbol{F(5,1)}$ y $\boldsymbol{G(4,3)}$ se le aplica la función $\boldsymbol{R_0}$, obteniendo $\boldsymbol{E'F'G'}$, y después, a la figura resultante, se le aplica la función $\boldsymbol{R_x}$ obteniendo $\boldsymbol{E''F''G''}$. ¿Cuáles son las coordenadas de los vértices del triángulo luego de las dos reflexiones. Representar gráficamente la situación.

Objetivo de la actividad
Aplicar transformaciones isométricas dadas a la figura entregada en el problema.

Aprendizaje esperado involucrado
03: Aplicar composiciones de funciones para realizar transformaciones isométricas en el plano cartesiano.
Procedimiento de resolución
• Aplicar la definición $\boldsymbol{R_0(x,y) = (-x,-y)}$ a cada uno de los vértices del triángulo dado, obteniendo un nuevo triángulo de vértices: $\boldsymbol{E'(-1,0)}$, $\boldsymbol{F'(-5,-1)}$ y $\boldsymbol{G'(-4,-3)}$. • Aplicar la definición $\boldsymbol{R_y(x,y) = (x,-y)}$ a los vértices $\boldsymbol{E'(-1,0)}$, $\boldsymbol{F'(-5,-1)}$ y $\boldsymbol{G'(-4,-3)}$ determinando un nuevo triángulo cuyos vértices están dados por los puntos $\boldsymbol{E''(-1,0)}$, $\boldsymbol{F''(-5,1)}$ y $\boldsymbol{G''(-4,3)}$. • Concluir que los vértices del nuevo triángulo luego de aplicar ambas reflexiones son: $\boldsymbol{E''(-1,0)}$, $\boldsymbol{F''(-5,1)}$ y $\boldsymbol{G''(-4,3)}$. Representarlos en el plano cartesiano.
Habilidad desarrollada según Curriculum
Búsqueda y comparación de caminos de solución
Habilidad desarrollada según taxonomía de Anderson y Krathwohl
Aplicar (Nivel 3)
Conocimientos que permiten abordar la situación
• Conceptos de traslación, simetría y rotación. • Concepto de composición de transformaciones isométricas. • Ubicación de puntos en el plano cartesiano.

b. Al cuadrilátero cuyos vértices son los puntos $P(-6,-2)$, $Q(-1,-2)$, $R(3,4)$ y $S(-6,1)$ se le aplica una reflexión con respecto al punto $O(-1,0)$, y después, a la imagen resultante $P'Q'R'S'$ se le aplica una traslación, de tal manera que el vértice S'' (imagen de S') queda ubicado en el origen del plano cartesiano. ¿Cuáles son las coordenadas del cuadrilátero luego de ser reflejado y trasladado? Dibuja el vector de traslación.

Objetivo de la actividad
Aplicar transformaciones isométricas dadas a la figura entregada en el problema.
Aprendizaje esperado involucrado
03: Aplicar composiciones de funciones para realizar transformaciones isométricas en el plano cartesiano.

Procedimiento de resolución
• Aplicar procedimiento de reflexión con respecto al punto $\boldsymbol{O}\ (\mathbf{-1,0})$, para ello deberá trazar una recta que una el punto a reflejar con el centro de reflexión, luego copiarla desde este sobre la recta trazada de tal manera que la intersección entre estas de origen a la imagen del punto original. • Aplicar definición de traslación (entrega por el texto) a cada uno de los puntos obtenidos luego de la reflexión. • Representar el vector traslación en el plano cartesiano.
Habilidad desarrollada según Curriculum
Búsqueda y comparación de caminos de solución
Habilidad desarrollada según taxonomía de Anderson y Krathwohl
Aplicar (Nivel 3)
Conocimientos que permiten abordar la situación
• Concepto de aplicación de transformaciones isométricas. • Concepto de simetría • Concepto de traslación de figuras.

c. Al triángulo cuyos vértices so los puntos $D(-5{,}4)$, $E(-5,-2)$ y $F(-3{,}5)$ se le aplica la función $R_{(O,90°)}$ y después, a la figura resultante, se le aplica una reflexión con respecto a la recta $y = x$. ¿Cuáles son las coordenadas de los vértices del triángulo luego de aplicarles ambas transformaciones?

Objetivo de la actividad
Aplicar transformaciones isométricas dadas a la figura entregada en el problema.
Aprendizaje esperado involucrado
03: Aplicar composiciones de funciones para realizar transformaciones isométricas en el plano cartesiano.
Procedimiento de resolución
• Aplicar definición $\boldsymbol{R}_{(\mathbf{0,90°})}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = (-\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$ a cada uno de los vértices del triángulo. • Aplicar definición de reflexión a cada uno de los puntos obtenidos producto de la rotación anterior con el uso de instrumentos geométricos. • Concluir que las coordenadas de los puntos del triángulo luego de aplicarles las transformaciones isométricas son $\boldsymbol{D}''(\mathbf{-5,-4})$, $\boldsymbol{E}''(\mathbf{-5,2})$ y $\boldsymbol{F}''(\mathbf{-3,-5})$.

Habilidad desarrollada según Curriculum
Búsqueda y comparación de caminos de solución
Habilidad desarrollada según taxonomía de Anderson y Krathwohl
Aplicar (Nivel 3)
Conocimientos que permiten abordar la situación
• Concepto de simetría. • Concepto de rotación.

Estudio de actividades propuestas en texto de editorial Santillana

Página 82-83

Dibuja en tu cuaderno el plano cartesiano, considerando para ambos ejes desde -8 hasta 8, y ubica los siguientes puntos.

1. A(5, 8)
2. D(4, 4)
3. G(6, –7)
4. J(1,5; –3,5)
5. B(–3, 6)
6. E(–1, –8)
7. H(–8, 0)
8. $K\left(0, -\frac{1}{3}\right)$
9. C(–7, –4)
10. F(–5, 4)
11. I(0, 5)
12. $L\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$

Objetivo de la actividad
Representar puntos en el plano cartesiano
Aprendizaje esperado involucrado
01: Identificar y representar puntos y coordenadas de figuras geométricas en el plano cartesiano, manualmente o usando un procesador geométrico.
Procedimiento de resolución
• Representar en el plano cartesiano cada uno de los puntos entregados en la actividad.
Habilidad desarrollada según curriculum
Búsqueda y comparación de caminos de solución
Habilidad desarrollada según taxonomía de Anderson y Krathwohl
Comprender (Nivel 2)
Conocimientos que permiten abordar la situación
• Ubicar puntos en el plano cartesiano en forma manual.

Indica en qué cuadrante se ubica un punto, según las siguientes condiciones.

13. Su abscisa es negativa y su ordenada es positiva
14. Su abscisa es positiva y su ordenada negativa
15. Ambas coordenadas son negativas.
16. Ambas coordenadas son positivas

Objetivo de la actividad
Inferir a partir de la información dada, en que cuadrante del plano cartesiano se encuentra el punto.
Aprendizaje esperado involucrado
01: Identificar y representar puntos y coordenadas de figuras geométricas en el plano cartesiano, manualmente o usando un procesador geométrico.
Procedimiento de resolución
• Identificar aplicando los conocimientos previos sobre plano cartesiano en que cuadrante se encuentran cada uno de los puntos según la información entregada. • Concluir que los puntos se encuentran ubicados en el segundo, cuarto, tercero y primer cuadrante.
Habilidad desarrollada según curriculum
Anticipación y estimación de resultados.
Habilidad desarrollada según taxonomía de Anderson y Krathwohl
Comprender (Nivel 2)
Conocimientos que permiten abordar la situación
• Definición de plano cartesiano (Identificación de ejes y Cuadrantes).

17. Si el punto $P(8, k-1)$ está en el eje x, ¿Cuál es el valor de k?

Objetivo de la actividad
Inferir a partir de la información dada, cual es el valor de $\boldsymbol{k}$.
Aprendizaje esperado involucrado
01: Identificar y representar puntos y coordenadas de figuras geométricas en el plano cartesiano, manualmente o usando un procesador geométrico.

Procedimiento de resolución
• Aplicar conocimiento referente a notación de coordenadas de puntos en el plano cartesiano, particularmente la de aquellos que se encuentran ubicados sobre el eje $\boldsymbol{x}$.   • Concluir mediante la igualdad de coordenadas y haciendo uso de un simple desarrollo de una ecuación de primer grado, que el valor de $\boldsymbol{k}$ es 1.
Habilidad desarrollada según curriculum
Análisis de los datos y de las soluciones.
Habilidad desarrollada según taxonomía de Anderson y Krathwohl
Comprender (Nivel 2)
Conocimientos que permiten abordar la situación
• Definición de plano cartesiano (Identificación de ejes y Cuadrantes).   • Resolución de ecuación de primer grado lineal.

18. Si el punto $Q(2k + 4, -3)$ está en el eje y, ¿cuál es el valor de k?

Objetivo de la actividad
Inferir a partir de la información dada, cual es el valor de $\boldsymbol{k}$.
Aprendizaje esperado involucrado
01: Identificar y representar puntos y coordenadas de figuras geométricas en el plano cartesiano, manualmente o usando un procesador geométrico.
Procedimiento de resolución
• Aplicar conocimiento referente a notación de coordenadas de puntos en el plano cartesiano, particularmente la de aquellos que se encuentran ubicados sobre el eje $\boldsymbol{y}$.   • Concluir mediante la igualdad de coordenadas y haciendo uso de un simple desarrollo de una ecuación de primer grado, que el valor de $\boldsymbol{k}$ es $\boldsymbol{-2}$.
Habilidad desarrollada según curriculum
Análisis de los datos y de las soluciones.
Habilidad desarrollada según taxonomías de Anderson y Krathwohl
Comprender (Nivel 2)
Conocimientos que permiten abordar la situación
• Definición de plano cartesiano (Identificación de ejes y Cuadrantes).   • Resolución de ecuación de primer grado lineal.

19. Si la figura $MNOP$ es un cuadrado y tres de sus vértices son $N(0{,}3)$, $O(3{,}0)$ y $P(3{,}3)$, ¿cuáles son las coordenadas del vértice M?

Objetivo de la actividad

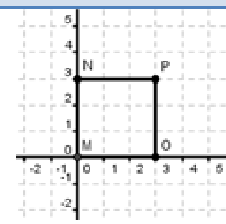
Identificar las coordenadas de un punto en el plano cartesiano.

Aprendizaje esperado involucrado

01: Identificar y representar puntos y coordenadas de figuras geométricas en el plano cartesiano, manualmente o usando un procesador geométrico.

Procedimiento de resolución

- Representar puntos dados en el plano cartesiano.
- Identificar que el punto $\boldsymbol{M}$ tiene coordenadas $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$, ya que los puntos corresponden a vértices de un cuadrado.



Habilidad desarrollada según curriculum

Búsqueda y comparación de caminos de solución

Habilidad desarrollada según taxonomías de Anderson y Krathwohl

Comprender (Nivel 2)

Conocimientos que permiten abordar la situación

- Definición de plano cartesiano (Identificación de ejes, Cuadrantes, coordenadas).

20. Calcula el área del triángulo de vértices $D(-4,-4)$, $E(6,-4)$ y $F(0{,}5)$

Objetivo de la actividad

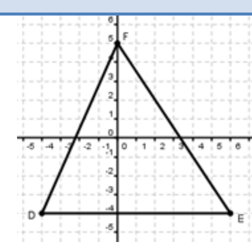
Identificar el área, del triángulo formado por los puntos dados.

Aprendizaje esperado involucrado

01: Identificar y representar puntos y coordenadas de figuras geométricas en el plano cartesiano, manualmente o usando un procesador geométrico.

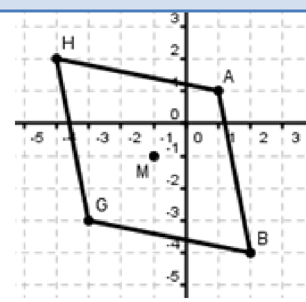
Procedimiento de resolución

- Representar puntos dados en el plano cartesiano.
- Reconocer que la altura del triángulo corresponde al segmento delimitado por el punto de intersección del eje $\boldsymbol{y}$ con el segmento $\boldsymbol{DE}$ y el punto $\boldsymbol{F}$.
- Reconocer el segmento $\boldsymbol{DE}$ como base del triángulo dado.
- Utilizar fórmula que permite calcular el área de un triángulo cualesquiera.



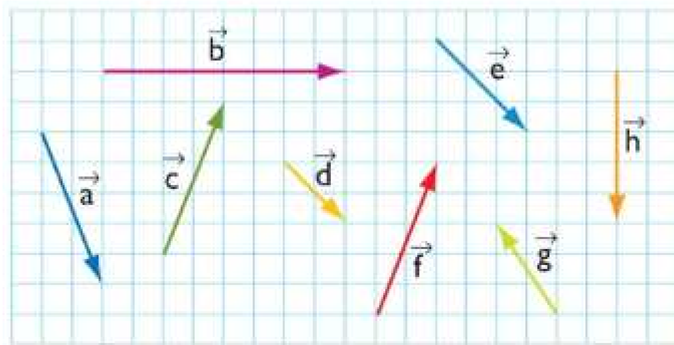
Habilidad desarrollada según curriculum
Análisis de los datos y de las soluciones
Habilidad desarrollada según taxonomías de Anderson y Krathwohl
Comprender (Nivel 2)
Conocimientos que permiten abordar la situación
• Definición de plano cartesiano. • Calculo de área de triángulos.

21. Los puntos $A(1,1)$ y $B(2,-4)$ son dos de los vértices de un rombo y $M(-1,-1)$ es el punto donde se intersecan sus diagonales. Encuentra los otros vértices.

Objetivo de la actividad
Identificar las coordenadas de los vértices del rombo.
Aprendizaje esperado involucrado
01: Identificar y representar puntos y coordenadas de figuras geométricas en el plano cartesiano, manualmente o usando un procesador geométrico.
Procedimiento de resolución
• Representar puntos dados en el plano cartesiano. • Reconocer que el punto $\boldsymbol{M}$ dimidia a ambas diagonales de la figura, para así desde el vértice $\boldsymbol{A}$, trazar una recta que pase por el punto $\boldsymbol{M}$ y copiar desde este sobre la recta trazada la longitud del trazo que une el punto $\boldsymbol{A}$ con el punto $\boldsymbol{M}$, para encontrar uno de los vértices restantes. Del mismo modo se generaliza procedimiento para encontrar el cuarto vértice, pero ahora desde el punto $\boldsymbol{B}$. 
Habilidad desarrollada según curriculum
Análisis de los datos y de las soluciones
Habilidad desarrollada según taxonomías de Anderson y Krathwohl
Comprender (Nivel 2)
Conocimientos que permiten abordar la situación
• Definición de plano cartesiano. • Características de un paralelogramo, particularmente del rombo.

Página 85

Considera los vectores de la siguiente cuadrícula



1. Determina las componentes de los vectores

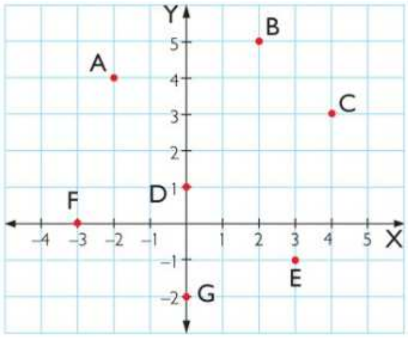
Objetivo de la actividad
Determinar componentes de los vectores dados en la cuadricula
Aprendizaje esperado involucrado
02: Representar en el plano, adiciones, sustracciones de vectores y multiplicaciones de un vector por un escalar.
Procedimiento de resolución
• Implementar procedimiento que permite encontrar las componentes de cada vector dado, donde la coordenada x corresponde al desplazamiento horizontal (positivo hacia la derecha y negativo hacia la izquierda) y la coordenada y corresponde al desplazamiento vertical (positivo hacia arriba y negativo hacia abajo).
Habilidad desarrollada según curriculum
Búsqueda y comparación de caminos de solución
Habilidad desarrollada según taxonomía de Anderson y Krathwohl
Aplicar (Nivel 3)
Conocimientos que permiten abordar la situación
• Concepto de vector. • Componentes de un vector.

Según la cuadrícula anterior, escribe pareja de vectores:

2. Equivalentes.
3. Con igual magnitud, pero distinta dirección.
4. Con igual dirección y sentido, pero distinta magnitud.
5. Con distinta dirección, sentido y magnitud.
6. Con igual magnitud y distinto sentido.

Objetivo de la actividad
Identificar y clasificar parejas de vectores que cumplan con los requerimientos entregados en la actividad.
Aprendizaje esperado involucrado
02: Representar en el plano, adiciones, sustracciones de vectores y multiplicaciones de un vector por un escalar.
Procedimiento de resolución
• Implementar procedimiento que permite encontrar la magnitud de cada uno de los vectores dados. • Identificar las parejas de vectores que satisfacen lo requerido en el enunciado de la actividad. • Clasificarlas en vectores equivalentes, con igual magnitud, pero distinta dirección, con igual dirección y sentido, pero distinta magnitud, con distinta dirección, sentido y magnitud, con igual magnitud y distinto sentido.
Habilidad desarrollada según curriculum
Análisis de los datos y de las soluciones.
Habilidad desarrollada según taxonomía de Anderson y Krathwohl
Aplicar (Nivel 3)
Conocimientos que permiten abordar la situación
• Definición de vector. • Componentes de un vector. • Definición de vector equivalente.

Considera los puntos indicados en el plano cartesiano.



7. Determina las componentes de los siguientes vectores.

a. $\overrightarrow{AB}$ **b.** $\overrightarrow{CB}$ **c.** $\overrightarrow{EF}$ **d.** $\overrightarrow{DC}$ **e.** $\overrightarrow{DG}$

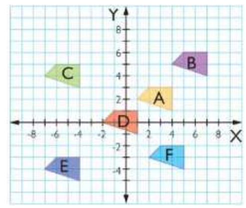
8. Existe un punto $\boldsymbol{H}$ tal que $\overrightarrow{\boldsymbol{DH}}$ sea equivalente a $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$. ¿Cuáles son las coordenadas de $\boldsymbol{H}$?

Objetivo de la actividad
Determinar las componentes de los vectores dados según los puntos graficados en la cuadrícula.
Aprendizaje esperado involucrado
02: Representar en el plano adiciones, sustracciones de vectores y multiplicaciones de un vector por un escalar.
Procedimiento de resolución
• Implementar procedimiento que permite encontrar las componentes de los vectores dados, desplazándose desde el punto inicial de cada uno de estos, ya sea a la izquierda o a la derecha o bien arriba o abajo dependiendo de la orientación de este.
Habilidad desarrollada según curriculum
Análisis de los datos y de las soluciones
Habilidad desarrollada según taxonomía de Anderson y Krathwohl
Aplicar (Nivel 3)
Conocimientos que permiten abordar la situación
• Definición de vector. • Componentes de un vector.

Página 89

Determina el vector que describe cada una de las siguientes traslaciones de los polígonos del plano.

1. $\boldsymbol{A}$ en $\boldsymbol{B}$
2. $\boldsymbol{E}$ en $\boldsymbol{D}$
3. $\boldsymbol{A}$ en $\boldsymbol{D}$
4. $\boldsymbol{E}$ en $\boldsymbol{C}$
5. $\boldsymbol{F}$ en $\boldsymbol{C}$
6. $\boldsymbol{B}$ en $\boldsymbol{F}$
7. $\boldsymbol{D}$ en $\boldsymbol{E}$
8. $\boldsymbol{F}$ en $\boldsymbol{B}$



Objetivo de la actividad

Aplicar la definición de traslación entregada por el texto

Aprendizaje esperado

03: Aplicar composición de funciones para realizar transformaciones isométricas en el plano cartesiano.

Procedimiento de resolución

- Reconocer un vértice de la figura y su respectivo homologo en la imagen de esta obtenida luego de la traslación.
- Aplicar la definición entregada por el texto: *En el plano cartesiano, la imagen de un punto* $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ *que se traslada según un vector* $\vec{\boldsymbol{v}} = (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ *corresponde a* $\boldsymbol{P}'(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a},\boldsymbol{y}+\boldsymbol{b})$ para así encontrar el vector que describe la traslación ya que se cuenta con las coordenadas del punto $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ y su imagen $\boldsymbol{P}'(\boldsymbol{x_1},\boldsymbol{y_1})$.
- Resolver las siguientes ecuaciones: $\boldsymbol{x_1} = \boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}$ $\quad \boldsymbol{y_1} = \boldsymbol{y}+\boldsymbol{b}$ despejando $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ para obtener las coordenadas del vector.

Para la traslación que lleva $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$:

- Identificar $(\boldsymbol{1},\boldsymbol{2})$ como un vértice del polígono $\boldsymbol{A}$ y su correspondiente homologo en $\boldsymbol{B}$ que es $(\boldsymbol{4},\boldsymbol{5})$ por lo que se tiene que $(\boldsymbol{4},\boldsymbol{5}) = (\boldsymbol{1}+\boldsymbol{a},\boldsymbol{2}+\boldsymbol{b})$. Resolviendo:

$$\boldsymbol{4} = \boldsymbol{1}+\boldsymbol{a} \qquad \qquad \boldsymbol{5} = \boldsymbol{2}+\boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{3} = \boldsymbol{a} \qquad \qquad \boldsymbol{3} = \boldsymbol{b}$$

Por lo tanto el vector que describe la traslación de la figura A a B es $\vec{\boldsymbol{v}} = (\boldsymbol{3},\boldsymbol{3})$.

Se repite el procedimiento para los otros ejercicios

Habilidad desarrollada según curriculum

Análisis de los datos y de las soluciones

Habilidad desarrollada según taxonomía de Anderson y Krathwohl

Aplicar (Nivel 3)

Conocimientos que permiten abordar la situación
• Traslaciones en el plano cartesiano • Adición de números enteros • Ecuaciones de primer grado

Dibuja el triángulo ABC de vértices $A(-4,-3)$, $B(-4,2)$ y $C(-1,2)$ en el plano cartesiano y trasládalo según los siguientes vectores:

9. $\vec{\boldsymbol{a}} = (\mathbf{1}, \mathbf{2})$
10. $\vec{\boldsymbol{b}} = (-\mathbf{4}, \mathbf{5})$
11. $\vec{\boldsymbol{c}} = (\mathbf{6}, \mathbf{5})$
12. $\vec{\boldsymbol{d}} = (\mathbf{4}, -\mathbf{5})$
13. $\vec{\boldsymbol{e}} = (\mathbf{9}, -\mathbf{2})$
14. $\vec{\boldsymbol{f}} = (-\mathbf{3}, \mathbf{6})$

Objetivo de la actividad
Aplicar definición de traslación entregada por el texto
Aprendizaje esperado
03: Aplicar composición de funciones para realizar transformaciones isométricas en el plano cartesiano.
Procedimiento de resolución
• Aplicar la definición de traslación entregada por el texto a cada uno de los vértices para así obtener sus respectivas imágenes luego de aplicarles la traslación según el vector dado. Para la traslación del triángulo según el vector $\vec{\boldsymbol{a}} = (\mathbf{1}, \mathbf{2})$ se tiene cada vértice del triángulo se desplaza un lugar hacia la derecha y dos hacia arriba. Siguiendo el procedimiento entregada por el texto tenemos: $\boldsymbol{A}' = (-\mathbf{4} + \mathbf{1}, -\mathbf{3} + \mathbf{2}) = (-\mathbf{3}, -\mathbf{1})$, $\boldsymbol{B}' = (-\mathbf{4} + \mathbf{1}, \mathbf{2} + \mathbf{2}) = (-\mathbf{3}, \mathbf{4})$ $\boldsymbol{C}' = (-\mathbf{1} + \mathbf{1}, \mathbf{2} + \mathbf{2}) = (\mathbf{0}, \mathbf{4})$ Se repite el procedimiento para trasladar el triangulo según los vectores dados.
Habilidad desarrollada según curriculum
Búsqueda y comparación de soluciones.
Habilidad desarrollada según taxonomía de Anderson y Krathwohl
Aplicar (Nivel 3)
Conocimientos que permiten abordar la situación
• Definición de traslación • Suma de números enteros
Observaciones
Para el desarrollo de esta actividad no es necesario dibujar le triangulo en el plano cartesiano basta con considerar sus vértices para resolver aplicando la definición entregada.

15. Para cada una de las traslaciones anteriores, indica las coordenadas de la imagen del punto $\boldsymbol{C}$.

Objetivo de la actividad
Aplicar definición entrega por el texto sobre traslaciones
Aprendizaje esperado
03: Aplicar composición de funciones para realizar transformaciones isométricas en el plano cartesiano.
Procedimiento de resolución
• Aplicar definición entregada por el texto sobre traslaciones considerando el punto $\boldsymbol{C}\ (-\mathbf{1}, \mathbf{2})$ y los vectores dados anteriormente. En general para un vector $\vec{\boldsymbol{v}} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ se tiene: $\boldsymbol{C}' = (-\mathbf{1} + \boldsymbol{a}, \mathbf{2} + \boldsymbol{b})$.
Habilidad desarrollada según curriculum
Búsqueda y comparación de caminos de solución.
Habilidad desarrollada según taxonomía de Anderson y Krathwohl
Comprender (Nivel 2)
Conocimientos que permiten abordar la situación
• Definición de traslación • Adición de números enteros
Observaciones
Basta con observar el procedimiento realizado en la actividad anterior para obtener las coordenadas de $\boldsymbol{C}'$ luego de realizar la traslación según cada uno de los vectores entregados.

16. Cierta traslación convierte el punto $\boldsymbol{P}\ (\mathbf{2}, \mathbf{8})$ en $\boldsymbol{P}'\ (-\mathbf{5}, \mathbf{6}; \mathbf{6}, \mathbf{8})$. ¿Cuál es el vector de traslación?

Objetivo de la actividad
Aplicar definición de traslación
Aprendizaje esperado
03: Aplicar composición de funciones para realizar transformaciones isométricas en el plano cartesiano.

Procedimiento de resolución

- Aplicar definición entrega por el texto obteniendo lo siguiente:

  $\boldsymbol{P'(2,8+a, 8+b) = (-5,6; 6,8)}$ resolviendo las siguientes ecuaciones:

$$\boldsymbol{2,8+a=-5,6} \qquad\qquad \boldsymbol{8+b=6,8}$$

$$\boldsymbol{2,8+a=-5,6} \ \ / +(-2,8) \qquad\qquad \boldsymbol{8+b=6,8} \ \ / \ +(-8)$$

$$\boldsymbol{2,8+(-2,8)+a=-5,6+(-2,8)} \qquad\qquad \boldsymbol{8+(-8)+b=6,8+(-8)}$$

$$\boldsymbol{a=-8,4} \qquad\qquad \boldsymbol{b=-1,2}$$

  Se tiene que el vector de traslación es $\boldsymbol{\vec{v} = (-8,4; -1,2)}$

Habilidad desarrollada según curriculum

Búsqueda y comparación de caminos de solución.

Habilidad desarrollada según taxonomías de Anderson y Krathwohl

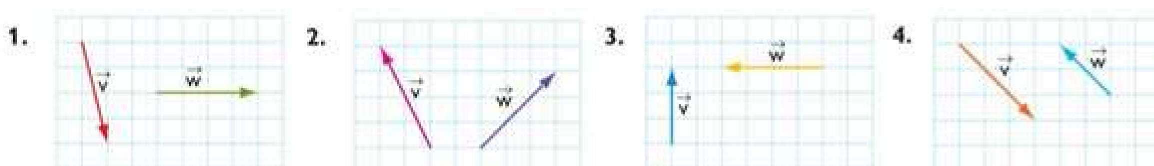
Aplicar (Nivel 3)

Conocimientos que permiten abordar la situación

- Definición de traslación entregada por el texto.
- Adición de números enteros.
- Ecuaciones de primer grado.

Página 91

Copia los vectores dados en tu cuaderno de modo que resulte el vector $\vec{v} + \vec{w}$



Objetivo de la actividad

Aplicar procedimiento que permite sumar vectores.

Aprendizaje esperado involucrado

02: Representar en el plano, adiciones, sustracciones de vectores y multiplicaciones de un vector por un escalar.

Procedimiento de resolución

- Ejecutar procedimiento que permite trasladar el vector w de tal manera que su punto de origen coincida con el punto final del vector v. Se une el inicio del vector v con el fin del vector w, dando origen a un tercer vector conocido como vector resultante.

Habilidad desarrollada según curriculum
Búsqueda y comparación de caminos de solución
Habilidad desarrollada según taxonomía de Anderson y Krathwohl
Aplicar (Nivel 3)
Conocimientos que permiten abordar la situación
• Definición de vector. • Suma de vectores.

5. Representa las sumas de los vectores de los ejercicios 1 a 4, a través de componentes.

Objetivo de la actividad
Representar suma de vectores mediante componentes de estos
Aprendizaje esperado involucrado
02: Representar en el plano adiciones, sustracciones de vectores y multiplicaciones de un vector por un escalar
Procedimiento de resolución
• Aplicar procedimientos descrito en el texto que permite sumar vectores, identificando primeramente las componentes de cada uno de estos, para luego sumar las respectivas coordenadas y de esta manera encontrar las coordenadas del vector resultante.
Habilidad desarrollada según curriculum
Análisis de los datos y de las soluciones
Habilidad desarrollada según taxonomía de Anderson y Krathwohl
Comprender (Nivel 2)
Conocimientos que permiten abordar la situación
• Concepto de vector • Calculo de coordenadas de vectores • Suma de vectores dados su componentes

6. Dibuja en el plano cartesiano el cuadrilátero $\boldsymbol{ABCD}$ de puntos $\boldsymbol{A(2,3)}$, $\boldsymbol{B(-1,4)}$, $\boldsymbol{C(-3,2)}$ y $\boldsymbol{D(-2,-1)}$. Expresa a través de sus componentes los vectores $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{BC}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{CD}}$ y $\overrightarrow{\boldsymbol{DA}}$. Calcula la suma $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} + \overrightarrow{\boldsymbol{BC}} + \overrightarrow{\boldsymbol{CD}} + \overrightarrow{\boldsymbol{DA}}$

Objetivo de la actividad

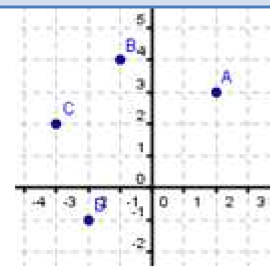
Representar suma de vectores mediante componentes de estos

Aprendizaje esperado involucrado

02: Representar en el plano adiciones, sustracciones de vectores y multiplicaciones de un vector por un escalar

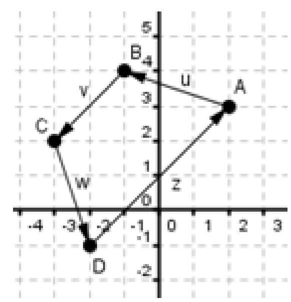
Procedimiento de resolución

- Ubicar puntos en el plano cartesiano.
- Trazar los vectores y encontrar sus respectivas componentes tal como se muestra a continuación:



$\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = (\boldsymbol{-3}, \boldsymbol{1})$ $\qquad$ $\overrightarrow{\boldsymbol{CD}} = (\boldsymbol{1}, \boldsymbol{-3})$

$\overrightarrow{\boldsymbol{BC}} = (\boldsymbol{-2}, \boldsymbol{-2})$ $\qquad$ $\overrightarrow{\boldsymbol{DA}} = (\boldsymbol{4}, \boldsymbol{4})$



- Aplicar procedimiento descrito en el texto, que permite sumar vectores usando sus respectivas coordenadas.
- Concluir que la suma de $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} + \overrightarrow{\boldsymbol{BC}} + \overrightarrow{\boldsymbol{CD}} + \overrightarrow{\boldsymbol{DA}} = (\,\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}\,)$

Habilidad desarrollada según curriculum

Análisis de los datos y de las soluciones

Habilidad desarrollada según taxonomía de Anderson y Krathwohl

Aplicar (Nivel 3)

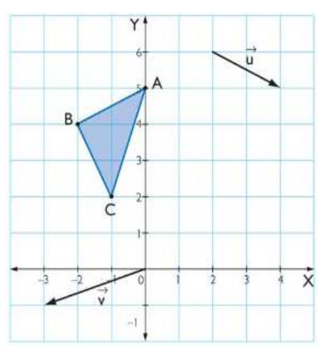
Conocimientos que permiten abordar la situación

- Concepto de vector
- Calculo de coordenadas de vectores
- Suma de vectores dados sus componentes

7. Cierta traslación descrita por el vector $\vec{v} = (-2, 5)$ transforma el punto P en P'. Si se aplica a P' una traslación con vector $\vec{u} = (8, -11)$ se obtiene P''. ¿Qué vector traslada P a P''?

Objetivo de la actividad
Determinar el vector de traslación mediante la aplicación de la definición entregada
Aprendizaje Esperado
03: Aplicar composición de funciones para realizar transformaciones isométricas en el plano cartesiano.
Procedimiento de resolución
• Aplicar definición entregada por el texto obteniéndose lo siguiente con $\vec{v} = (-2, 5)$ y $\vec{u} = (8, -11)$ $\vec{v} + \vec{u} = (-2 + 8, 5 + (-11))$ $\vec{v} + \vec{u} = (6, -6)$ Siendo el vector $\vec{w} = (6, -6)$ el que traslada el punto P a P''.
Habilidad desarrollada según curriculum
Anticipación y estimación de resultados
Habilidad desarrollada según taxonomías de Anderson y Krathwohl
Aplicar (Nivel 3)
Conocimientos que permiten abordar la situación
• Composición de traslaciones   • Adición de números enteros

8. Traslada el triangulo ABC de la figura respecto al vector $\vec{u}$, para obtener un triángulo $A'B'C'$. Luego traslada $A'B'C'$ con respecto a $\vec{v}$, para obtener $A''B''C''$. ¿Cuáles son las coordenadas de $A''B''C''$? ¿qué vector traslada directamente ABC a $A''B''C''$?



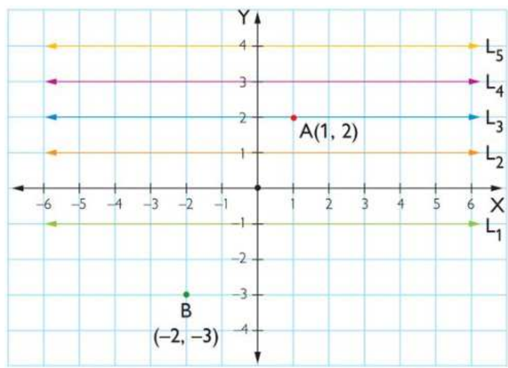
Objetivo de la actividad
Aplicar definición de traslación

Aprendizaje Esperado
03: Aplicar composición de funciones para realizar transformaciones isométricas en el plano cartesiano.
Procedimiento de resolución
• Reconocer las coordenadas del punto final y de inicio del vector $\vec{u}$ en la imagen presentada por el texto, para determinar las componentes de dicho vector mediante la resta de los valores de las abscisas y las ordenadas obteniendo lo siguiente: $$\vec{u} = (4,5) - (2,6) = (4-2, 5-6) = (2,-1)$$ • Aplicar definición de traslación a cada uno de los vértices del triángulo: "En el plano cartesiano, la imagen de un punto $P(x,y)$ que se traslada según un vector $\vec{v} = (a,b)$ corresponde a $P'(x+a, y+b)$". Por lo tanto al aplicarle la traslación descrita por el vector $\vec{u} = (2,-1)$ a los puntos A, B y C se obtiene: $$A' = (0,5) + (2-1) = (2,4)$$ $$B' = (-2,4) + (2,-1) = (0,3)$$ $$C' = (-1,2) + (2,-1) = (1,1)$$ • Reconocer las coordenadas del punto de inicio y final del vector $\vec{v}$ en la imagen presentada por el texto para determinar las componentes de dicho vector mediante la resta de los valores de las abscisas y las ordenadas obteniendo lo siguiente: $$\vec{v} = (-3,-1) - (0,0) = (-3-0, -1-0) = (-3,-1)$$ • Aplicar definición de traslación descrita por el vector $\vec{v}$ a los puntos $A' = (2,4), B' = (0,3)$ **y** $C' = (1,1)$ obtenido lo siguiente: $$A'' = (2,4) + (-3,-1) = (-1,3)$$ $$B' = (0,3) + (-3,-1) = (-3,2)$$ $$C' = (1,1) + (-3,-1) = (-2,0)$$ • Aplicar definición entregada por el texto "Si se aplica a una figura F una traslación respecto del vector $\vec{u} = (u_1, u_2)$ resulta F' y si, a esta se le aplica una traslación según el vector $\vec{v} = (v_1, v_2)$ resulta F''. Es decir, la transformación anterior es equivalente a aplicar sobre F una traslación con vector $\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$ obteniendo F".   Con $\vec{u} = (2,-1)$ y $\vec{v} = (-3,-1)$ se tiene: $$\vec{u} + \vec{v} = (2 + (-3), -1 + (-1)) = (-1,-2)$$ $(-1,-2)$ corresponde a las componentes del vector que traslada directamente ABC a $A''B''C''$.
Habilidad desarrollada según curriculum
Anticipación y estimación de resultados

Habilidad desarrollada según taxonomía de Anderson y Krathwohl
Aplicar (Nivel 3)
Conocimientos que permiten abordar la situación
• Traslaciones en el plano cartesiano • Suma de vectores • Adición de números enteros

Página 95

Copia en tu cuaderno el plano cartesiano y las siguientes rectas y puntos. Luego, realiza los ejercicios 1 a 6



1. Refleja el punto $\boldsymbol{A}$ respecto a cada una de las rectas dibujadas y respecto al eje $\boldsymbol{x}$. Escribe los resultados en la tabla

	A	Reflejando respecto a:					
		L_1	Eje X	L_2	L_3	L_4	L_5
Abscisa	1						
Ordenada	2						

Objetivo de la actividad
Aplicar definición de simetría
Aprendizaje esperado involucrado
03: Aplicar composición de funciones para realizar transformaciones isométricas en el plano cartesiano

Procedimiento de resolución

- Aplicar la definición entregada por el texto: se indica que el punto $\boldsymbol{A}$ y su imagen el punto $\boldsymbol{A'}$ obtenido luego de una reflexión equidistan del eje de simetría.
- Determinar la distancia entre el punto $\boldsymbol{A}$ y los ejes de simetría respectivos, para proceder a calcular el valor de las imágenes obtenidas luego de realizar las reflexiones indicadas.
- Observando la imagen se tiene que la distancia del punto $\boldsymbol{A}(\mathbf{1},\mathbf{2})$ a cada eje indicado son los siguientes (observar tabla):

	X	Reflejado respecto a:					
		L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6
Abscisa	1	1	1	1	1	1	1
Ordenada	2	-4	-2	0	2	4	6

Habilidad desarrollada según curriculum

Análisis de los datos y de las soluciones.

Habilidad desarrollada según taxonomías de Anderson y Krathwohl

Aplicar (Nivel 3)

Conocimientos que permiten abordar la situación

- Simetría axial

2. ¿Qué regularidad observas entre la ordenada y la abscisa del punto $\boldsymbol{A}$ al reflejado respecto a cada recta?

Objetivo de la actividad

Inferir información de datos obtenidos

Aprendizaje esperado involucrado

04: Identificar regularidades en la aplicación de transformaciones isométricas a figuras en el plano cartesiano.

Procedimiento de resolución

- Detectar regularidades en los datos de la tabla completada en la actividad 1. observando la tabla se tiene que; la coordenada de la abscisa permanece invariable.

Habilidad desarrollada según curriculum

Búsqueda de regularidades y patrones

Habilidad desarrollada según taxonomía de Anderson y Krathwohl
Comprender (Nivel 2)
Conocimientos que permiten abordar la situación
• Plano cartesiano (coordenadas, cuadrantes) • Concepto de reflexión en el plano cartesiano.

3. ¿Cómo son las rectas respecto a x? ¿En qué ordenada las rectas interceptan al eje y?

Objetivo de la actividad
Inferir información de datos obtenidos
Aprendizaje esperado involucrado
04: Identificar regularidades en la aplicación de transformaciones isométricas a figuras en el plano cartesiano.
Procedimiento de resolución
• Reconocer que las rectas presentadas son paralelas al eje x del plano cartesiano.
Habilidad desarrollada según curriculum
Análisis de los datos y de las soluciones.
Habilidad desarrollada según taxonomía de Anderson y Krathwohl
Comprender (Nivel 2)
Conocimientos que permiten abordar la situación
• Rectas. • Concepto de simetría.

4. Según la siguiente tabla, determina una expresión algebraica que relacione la ordenada del punto original con la ordenada en que las rectas interceptan al eje y para obtener la ordenada del punto reflejado.

Ordenada original (y)	2	2	2	2	2	2
Ordenada de cada recta que intersecta al eje Y (a)	–1	0	1	2	3	4
Ordenada del punto imagen de la reflexión (y')	–4	–2	0	2	4	6

Objetivo de la actividad
Diseñar un expresión algebraica que relacione que relacione la ordenada del punto original con la ordenada en que las rectas interceptan al eje y.

Aprendizaje esperado involucrado
04: Identificar regularidades en la aplicación de transformaciones isométricas a figuras en el plano cartesiano.
Procedimiento de resolución
• Diseñar una expresión que relacione la ordenada del punto original ($\boldsymbol{y}$) con la ordenada del punto de intersección de la recta con el eje $\boldsymbol{y}$ ($\boldsymbol{Y}$) para obtener la ordenada de la imagen producto de la reflexión ($\boldsymbol{y'}$). • Probar con los valores de la tabla para algunas expresiones hasta determinar la buscada $$-\boldsymbol{y}+\boldsymbol{2}\cdot\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{y'}$$
Habilidad desarrollada según curriculum
Búsqueda de regularidades y patrones.
Habilidad desarrollada según taxonomía de Anderson y Krathwohl
Crear (Nivel 6)
Conocimientos que permiten abordar la situación
• Expresiones algebraicas • Concepto de reflexión.
Observaciones
Una recta no posee ordenada, en la fila dos debería decir: ordenada del punto de intercepción de la recta con el eje $\boldsymbol{y}$.

5. Utiliza la expresión obtenida en el paso anterior para reflejar un punto $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ respecto a una recta paralela al eje $\boldsymbol{x}$, que corte al eje $\boldsymbol{y}$ en el punto $(\boldsymbol{0},\boldsymbol{a})$

Objetivo de la actividad
Aplicar una reflexión a un punto empleando expresión algebraica encontrada en actividad anterior.
Aprendizaje esperado involucrado
03: Aplicar composiciones de funciones para realizar transformaciones isométricas en el plano cartesiano
Procedimiento de resolución
• Utilizar la expresión algebraica $-\boldsymbol{y}+\boldsymbol{2}\cdot\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{y'}$ con $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{a}$ para determinar la imagen del punto $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ producto de una reflexión se tiene: $-\boldsymbol{y}+\boldsymbol{2}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{y'}$ Por lo tanto se tiene que la imagen del punto $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ respecto a la reflexión es el punto $\boldsymbol{P'}(\boldsymbol{x},-\boldsymbol{y}+\boldsymbol{2a})$.

Habilidad desarrollada según curriculum
Análisis de los datos y de las soluciones
Habilidad desarrollada según taxonomía de Anderson y Krathwohl
Aplicar (Nivel 3)
Conocimientos que permiten abordar la situación
• Expresiones algebraicas • Concepto de simetría.

6. Generaliza el resultado obtenido en 5 para una recta paralela al eje $\boldsymbol{y}$, que corte al eje $\boldsymbol{x}$ en el punto $(\boldsymbol{b}, \mathbf{0})$. Utiliza lo que obtengas para reflejar el punto $\boldsymbol{B}$ respecto a la recta que pasa por el punto $(\mathbf{2}, \mathbf{0})$

Objetivo de la actividad
Diseñar una expresión algebraica que relacione un punto con su imagen producto de una reflexión con respecto a una recta paralela al eje $\boldsymbol{y}$ que intercepta al eje $\boldsymbol{x}$ en base a la generalización obtenida en la actividad 5.
Aprendizaje esperado involucrado
04: Identificar regularidades en la aplicación de transformaciones isométricas a figuras en el plano cartesiano.
Procedimiento de resolución
En base a la expresión algebraica obtenida en la actividad 5: $-\boldsymbol{y} + \mathbf{2} \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{y}'$ • Diseñar la expresión $(-\boldsymbol{x} + \mathbf{2}\boldsymbol{b}, \boldsymbol{y})$ para determinar la imagen de un punto obtenida luego de aplicarle la reflexión a $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ con respecto a una recta paralela al eje $\boldsymbol{y}$ que intersecta al eje $\boldsymbol{x}$ en un punto $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{o})$. • Aplicar esta expresión para reflejar el punto $\boldsymbol{B}(-\mathbf{2}, -\mathbf{3})$ respecto a la recta que pasa por el punto $(\mathbf{2}, \mathbf{0})$.
Habilidad desarrollada según curriculum
Búsqueda de regularidades y patrones
Habilidad desarrollada según taxonomías de Anderson y Krathwohl
Crear (Nivel 6)
Conocimientos que permiten abordar la situación
• Expresiones algebraicas • Concepto de simetría.

Página 97

Con Geogebra dibuja el triángulo de vértices $A(3{,}0)$, $B(5{,}1)$ y $C(4,-2)$, el punto $E(2,-1)$, la recta L_1 paralela al eje y que pasa por el punto E y la recta L_2 paralela al eje x que pasa por el punto E. Luego, realiza los ejercicios del 1 a 4

1. Refleja el triángulo $\boldsymbol{ABC}$ respecto a la recta $\boldsymbol{L_1}$, y luego la imagen obtenida, $\boldsymbol{A'B'C'}$, respecto a $\boldsymbol{L_2}$. Escribe las coordenadas del triángulo $\boldsymbol{A''B''C''}$

Objetivo de la actividad

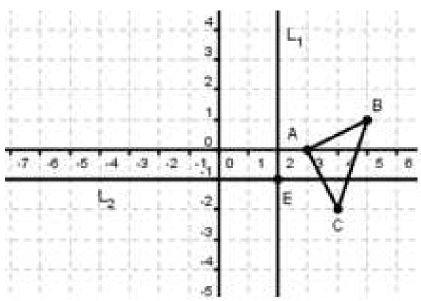
Reflejar figura geométrica con respecto a una recta dad e identificar puntos haciendo uso de software geométrico.

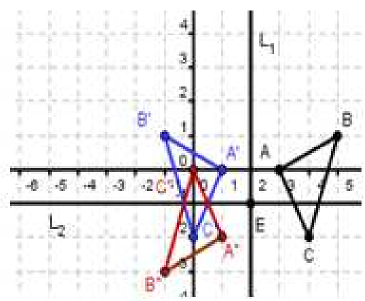
Aprendizaje esperado involucrado

03: Aplicar composiciones de funciones para realizar transformaciones isométricas en el plano cartesiano.

Procedimiento de resolución

- Recordar manejo del GeoGebra implementado en actividades anteriores para construir lo pedido para el desarrollo de la actividad:





- Reconocer coordenadas en el plano del triángulo $\boldsymbol{A''B''C''}$ (imagen 2)

$$\boldsymbol{A''(1,-2), B''(-1,-3) y\ C''(0,0)}$$

Habilidad desarrollada según curriculum

Búsqueda y comparación de caminos de solución

Habilidad desarrollada según taxonomía de Anderson y Krathwohl

Aplicar (Nivel 3)

Conocimientos que permiten abordar la situación

Uso del software GeoGebra (graficar puntos en plano cartesiano, reflejar figuras con respecto a una recta dada).

2. Refleja el triángulo $\boldsymbol{ABC}$ respecto al punto $\boldsymbol{E}$, y escribe sus coordenadas. ¿Qué puedes concluir?

Objetivo de la actividad

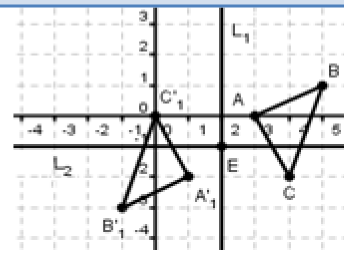
Aplicar una simetría a una figura geométrica con respecto a punto y concluir que sucede con sus respectivas imágenes.

Aprendizaje esperado involucrado

03: Aplicar composiciones de funciones para realizar transformaciones isométricas en el plano cartesiano.

Procedimiento de resolución

- Recordar uso de GeoGebra aplicado en actividades anteriores para reflejar el triángulo $\boldsymbol{ABC}$.
- Reconocer coordenadas de los vértices que conforman la imagen del triángulo $\boldsymbol{ABC}$ producto de la simetría central.



$$A'_1(-1,-2)\ ,\ \ B'_1(-1,-3)\ y\ \ C'_1(0,0)$$

- Concluir que al aplicar al triángulo $\boldsymbol{ABC}$ las reflexiones indicadas en la actividad 1, se obtienen como imágenes los vértices $\boldsymbol{A''(-1,-2)}, \boldsymbol{B''(-1,-3)}\ \boldsymbol{y}\ \boldsymbol{C''(0,0)}$, los mismos que se obtienen al aplicarle al triángulo $\boldsymbol{ABC}$ una simetría central con centro el punto $\boldsymbol{E(2,-1)}$ del plano. ($\boldsymbol{E}$ es la intercepción de las rectas)

Habilidad desarrollada según curriculum

Análisis de los datos y de las soluciones

Habilidad desarrollada según taxonomías de Anderson y Krathwohl

Aplicar (nivel 3)

Conocimientos que permiten abordar la situación

- Uso del software GeoGebra (graficar puntos en plano cartesiano, reflejar figuras con respecto a una recta dada).

3. Recuerda que la imagen de un punto $\boldsymbol{P(x,y)}$ bajo la reflexión con respecto a la recta paralela al eje $\boldsymbol{x}$ que pasa por el punto $\boldsymbol{(0,b)}$, tiene coordenadas $\boldsymbol{P'(x,2b-y)}$ y que al reflejarlo con respecto a la recta paralela al eje $\boldsymbol{y}$ que pasa por el punto $\boldsymbol{(a,0)}$ tiene coordenadas $\boldsymbol{P''(2a-x,y)}$. Completa la tabla, verificando que esto se cumple para los vértices del triángulo $\boldsymbol{ABC}$ y con los datos obtenidos en el ejercicio $\boldsymbol{2}$.

Objetivo de la actividad

Aplicar definiciones entregadas en el enunciado de la actividad

Aprendizaje esperado involucrado

03: Aplicar composiciones de funciones para realizar transformaciones isométricas en el plano cartesiano.

Procedimiento de resolución

- Aplicar definición entregada: *la imagen de un punto* $\boldsymbol{P(x,y)}$ *bajo la reflexión con respecto a la recta paralela al eje* $\boldsymbol{y}$ *que pasa por el punto* $\boldsymbol{(a,0)}$ *tiene coordenadas* $\boldsymbol{P''(2a-x,y)}$
- Como $\boldsymbol{L_1}$ es paralela al eje de las ordenadas y pasa por el punto $\boldsymbol{(2,0)}$ se aplica la definición: con $\boldsymbol{A(3,0)}$ y $\boldsymbol{(2,0)}$ perteneciente a la recta reemplazando estos puntos se tiene $\boldsymbol{A'(2\cdot 2-3{,}0=4-3{,}0=1{,}0}$, $\boldsymbol{B'=(2\cdot 2-}5,1) = (-1,1)$ y $\boldsymbol{C'=2\cdot 2-4,-2=0,-2}$
- Aplicar definición entregada: *la imagen de un punto* $\boldsymbol{P(x,y)}$*bajo la reflexión con respecto a la recta paralela al eje* $\boldsymbol{x}$ *que pasa por el punto* $\boldsymbol{(0,b)}$ *tiene coordenadas* $\boldsymbol{P'(x,2b-y)}$
- Como $\boldsymbol{L_2}$ es paralela al eje $\boldsymbol{x}$ y pasa por el punto $\boldsymbol{(0,-1)}$ se aplica la definición: Con $\boldsymbol{A(3,0)}$ y $\boldsymbol{(0,-1)}$ perteneciente a la recta reemplazando estos puntos se tiene: $\boldsymbol{A''(3,2\cdot -1-0)=(3,-2)}$
- Reemplazando para $\boldsymbol{B(5,1)}$ $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{C(4,-2)}$ se tiene: $\boldsymbol{B''(5,2\cdot -1-1)=(5,-3)}$ $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{C''(4,2\cdot -1-2=4{,}0}$
- Verificar que se cumple la propiedad para los vértices del triángulo $\boldsymbol{ABC}$

Habilidad desarrollada según curriculum

Análisis de los datos y de las soluciones

Habilidad desarrollada según taxonomías de Anderson y Krathwohl

Aplicar (Nivel 3)

Conocimientos que permiten abordar la situación

- Uso del software GeoGebra (graficar puntos en plano cartesiano, reflejar figuras con respecto a una recta dada).

4. A partir de la tabla, compara las abscisas de la columna 2 y las ordenadas de la columna 3, respecto a las coordenadas de los puntos de la columna 4. ¿Qué puedes concluir?

ΔABC	ΔABC reflejado respecto a L_1.	ΔABC reflejado respecto a L_2.	ΔABC reflejado respecto a E.
A(3, 0)			
B(5, 1)			
C(4, –2)			

Objetivo de la actividad
Inferir que tipo de reflexión permite la obtención de las imágenes dadas.
Aprendizaje esperado involucrado
04: Identificar regularidades en la aplicación de transformaciones isométricas a figuras en el plano cartesiano.
Procedimiento de resolución
• Concluir que la abscisa de la segunda columna junto con la ordenada de la tercera columna conforman los pares ordenados obtenidos producto de la reflexión del triángulo $\boldsymbol{ABC}$ respecto al punto $\boldsymbol{E}$.
Habilidad desarrollada según curriculum
Búsqueda de regularidades y patrones.
Habilidad desarrollada según taxonomías de Anderson y Krathwohl
Comprender (Nivel 2)
Conocimientos que permiten abordar la situación
• Uso del software GeoGebra (graficar puntos en plano cartesiano, reflejar figuras con respecto a una recta dada).

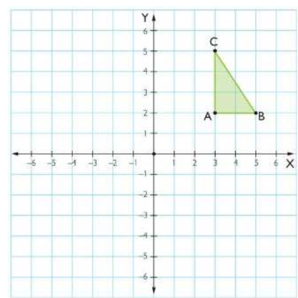
5. Usando lo anterior, determina una expresión algebraica, para las coordenadas de la imagen de un punto $\boldsymbol{P(x,y)}$ reflejado con respecto al punto $\boldsymbol{E(a,b)}$ que es la intersección de las rectas paralelas a los ejes que pasan por los puntos $\boldsymbol{A(a,0)}$ y $\boldsymbol{B(b,0)}$.

Objetivo de la actividad
Diseñar un expresión para determinar la imagen de un punto obtenida luego de realizar una reflexión con respecto a un punto $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$
Aprendizaje esperado involucrado
04: Identificar regularidades en la aplicación de transformaciones isométricas a figuras en el plano cartesiano.

Procedimiento de resolución
• Aplicar los resultados obtenidos en las actividades anteriores para determinar que la imagen de un punto $\boldsymbol{P(x,y)}$ al realizarle una reflexión con respecto al punto $\boldsymbol{E(a,b)}$ es $\boldsymbol{P'}$ de coordenadas $(\boldsymbol{2a-x, 2b-y})$
Habilidad desarrollada según curriculum
Búsqueda de regularidades y patrones.
Habilidad desarrollada según taxonomías de Anderson y Krathwohl
Crear (Nivel 6)
Conocimientos que permiten abordar la situación
• Uso del software GeoGebra (graficar puntos en plano cartesiano, reflejar figuras con respecto a una recta dada).

Página 101

Dado el triángulo ABC de la figura, realiza las transformaciones siguientes indicando, en cada caso, las coordenadas de los vértices de la imagen.



1. Rotación de $\mathbf{270}$°, centro $(\mathbf{0},\mathbf{0})$
2. Rotación de $\mathbf{180}$°, centro $(\mathbf{0},\mathbf{0})$

Objetivo de la actividad
Aplicar una rotación a un polígono respecto a un ángulo y centro en el plano cartesiano
Aprendizaje esperado involucrado
03: Aplicar composiciones de funciones para realizar transformaciones isométricas en el plano cartesiano.

Procedimiento de resolución
• Identificar las coordenadas de cada vértice del triángulo $\boldsymbol{ABC}$, donde $\boldsymbol{A(3,2)}$, $\boldsymbol{B(5,2)}$ y $\boldsymbol{C(3,5)}$ • Determinar la imagen del punto $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{C}$ aplicando una rotación con ángulo de $\boldsymbol{270}$° y $\boldsymbol{180}$° respectivamente con centro en el origen del plano cartesiano por medio de la definición entregada por el texto correspondiente a la siguiente regularidad: la imagen de un punto $\boldsymbol{P(x,y)}$ que rota en $\boldsymbol{270}$° con centro en el origen corresponde a $\boldsymbol{P'(y,-x)}$ y con un ángulo de rotación de 18$\boldsymbol{0}$° con centro en el origen corresponde a $\boldsymbol{P'(-x,-y)}$ $\boldsymbol{P(x,y) \to P'(y,-x)}$ $\boldsymbol{P(x,y) \to P'(-x,-y)}$ $\boldsymbol{A(3,2) \to A'(2,-3)}$ $\boldsymbol{A(3,2) \to A'(2,-3)}$ $\boldsymbol{B(5,2) \to B'(2,-5)}$ $\boldsymbol{B(5,2) \to B'(2,-5)}$ $\boldsymbol{C(3,5) \to C'(5,-3)}$ $C(3,5) \to C'(5,-3)$
Habilidad desarrollada según curriculum
Análisis de los datos y de las soluciones.
Habilidad desarrollada según taxonomía de Anderson y Krathwohl
Aplicar (Nivel 3)
Conocimientos que permiten abordar la situación
• Plano cartesiano • Identificación de puntos en el plano • Regla algebraica de rotación respecto al centro del plano cartesiano

3. Las coordenadas $\boldsymbol{(-5,3)}$ corresponde a la imagen de $\boldsymbol{C}$, luego de aplicar una rotación al triángulo $\boldsymbol{ABC}$ con centro en el origen. ¿Cuál es el ángulo de rotación utilizado?

Objetivo de la actividad
Identificar el ángulo de rotación aplicado a un punto conociendo su imagen
Aprendizaje esperado involucrado
03: Aplicar composiciones de funciones para realizar transformaciones isométricas en el plano cartesiano.

Procedimiento de resolución
• Comparar la imagen de la coordenada $\boldsymbol{C}$ con las regularidades de las rotaciones de un punto con respecto al origen del plano cartesiano como centro y un ángulo determinado y así concluir cuál es el ángulo de rotación utilizado, obteniendo que el ángulo de rotación es de $\mathbf{180°}$ dado que $\boldsymbol{C}(\mathbf{3},\mathbf{5}) \rightarrow \boldsymbol{C}'(-\mathbf{5},\mathbf{3})$
Habilidad desarrollada según curriculum
Análisis de los datos y de las soluciones
Habilidad desarrollada según taxonomía de Anderson y Krathwohl
Comprender (Nivel 2)
Conocimientos que permiten abordar la situación
• Concepto de rotación en el plano cartesiano.

4. Determina las coordenadas de los vértices $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$, luego de la rotación realizada en ejercicio 3.

Objetivo de la actividad
Determinar la imagen de los puntos $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ en base al ángulo de rotación concluido en el ejercicio anterior.
Aprendizaje esperado involucrado
03: Aplicar composiciones de funciones para realizar transformaciones isométricas en el plano cartesiano.
Procedimiento de resolución
• Utilizar regularidad entregada por el texto respecto al ángulo de rotación determinado en ejercicio anterior y aplicarlo a los puntos $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ obteniendo: $$\boldsymbol{A}(\mathbf{3},\mathbf{2}) \rightarrow \boldsymbol{A}''(-\mathbf{2},\mathbf{3})$$ $$\boldsymbol{B}(\mathbf{5},\mathbf{2}) \rightarrow \boldsymbol{B}''(-\mathbf{2},\mathbf{5})$$
Habilidad desarrollada según curriculum
Análisis de los datos y de las soluciones
Habilidad desarrollada según taxonomía de Anderson y Krathwohl
Aplicar (Nivel 3)
Conocimientos que permiten abordar la situación
Concepto de rotación en el plano cartesiano

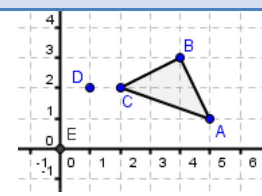
Página 103

Dibuja en Geogebra el triángulo ABC con vértices $A(5,1)$, $B(4,3)$ y $C(2,2)$. Define, además, el punto $D(1,2)$ y el origen de coordenadas $E(0,0)$. Luego, realiza lo ejercicios 1 a 8.

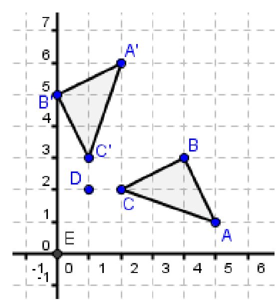
1. Rota el triángulo $\boldsymbol{ABC}$ en $\mathbf{90°}$ en sentido antihorario respecto al punto $\boldsymbol{D}$. Obtendrás el triángulo $\boldsymbol{A'B'C'}$.
2. Rota el triángulo $\boldsymbol{ABC}$ en $\mathbf{90°}$ en sentido antihorario respecto al origen de coordenadas. Obtendrás el triángulo $\boldsymbol{A''B''C''}$.
3. ¿Cómo son los lados del triángulo $\boldsymbol{A'B'C'}$ comparados con los del $\Delta\boldsymbol{A''B''C''}$? ¿qué transformación se debe aplicar al triángulo $\boldsymbol{ABC}$ para obtener el triángulo $\boldsymbol{A'B'C'}$?
4. Desplaza el punto $\boldsymbol{D}$ por el plano. ¿Se mantiene la relación entre los triángulos rotados?

Objetivo de la actividad
Aplicación de transformaciones isométricas en el plano cartesiano
Aprendizaje esperado involucrado
04: Identificar regularidades en la aplicación de transformaciones isométricas a figuras en el plano cartesiano.
Procedimiento de resolución

- Graficar datos entregados en el ejercicio en el plano cartesiano utilizando en software GeoGebra.

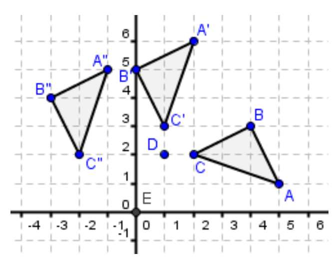


- Con la ayuda del comando rotación aplicar este movimiento al triángulo $\boldsymbol{ABC}$ con centro en $\boldsymbol{D}$ obteniendo el triángulo $\boldsymbol{A'B'C'}$



- Con la ayuda del comando rotación aplicar este movimiento al triángulo $\boldsymbol{ABC}$ respecto al origen obteniendo el triángulo $\boldsymbol{A''B''C''}$

- Concluir que los lados de los triángulos $\boldsymbol{A'B'C'}$ y $\boldsymbol{A''B''C''}$ tienen la misma longitud y que al desplazar el punto $\boldsymbol{D}$ esta relación se sigue manteniendo.



Habilidad desarrollada según curriculum
Anticipación y estimación de resultados
Habilidad desarrollada según taxonomía de Anderson y Krathwohl
Aplicar (Nivel 3)
Conocimientos que permiten abordar la situación
• Uso del software GeoGebra

Dibuja en GeoGebra los siguientes objetos, y realiza los ejercicios 9 a 14

a) Un triángulo $\boldsymbol{ABC}$ con las coordenadas que desees.

b) El punto $\boldsymbol{D}(\mathbf{0},\mathbf{0})$

c) Dos puntos $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{F}$, con las coordenadas que desees.

d) Las rectas $\overleftrightarrow{\boldsymbol{DE}}$ y $\overleftrightarrow{\boldsymbol{DF}}$

9. Refleja el triángulo $\boldsymbol{ABC}$ respecto a $\overleftrightarrow{\boldsymbol{DE}}$. Obtendrás el triángulo $\boldsymbol{A'B'C'}$
10. Refleja el triángulo $\boldsymbol{A'B'C'}$ respecto a $\overleftrightarrow{\boldsymbol{DF}}$. Obtendrás el triángulo $\boldsymbol{A''B''C''}$
11. Mide en sentido antihorario los siguientes ángulos.

a) $\measuredangle\boldsymbol{EDF}$

b) $\measuredangle\boldsymbol{ADA''}$

c) $\measuredangle\boldsymbol{BDB''}$

d) $\measuredangle\boldsymbol{CDC''}$

Para mayor comodidad, observa sus medidas en la columna izquierda de la pantalla- ¿Cuál es la relación entre estos ángulos?

12. Desplaza los puntos $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{F}$ por el plano. ¿Se mantiene la relación detectada anteriormente entre los ángulos.
13. ¿Qué transformación hay que aplicar al triángulo $\boldsymbol{ABC}$ para obtener directamente el triángulo $\boldsymbol{A''B''C''}$? ¿Cómo determinamos los elementos de esta transformación a partir de las rectas construidas?
14. Comprueba lo que dedujiste en el ejercicio anterior aplicando dicha transformación al triángulo $\boldsymbol{ABC}$.

Objetivo de la actividad

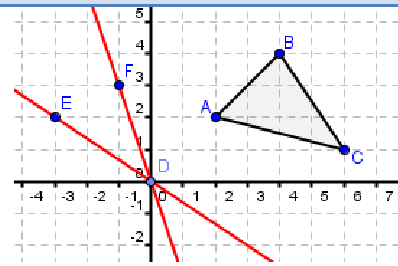
Aplicación de transformaciones isométricas en el plano cartesiano

Aprendizaje esperado involucrado

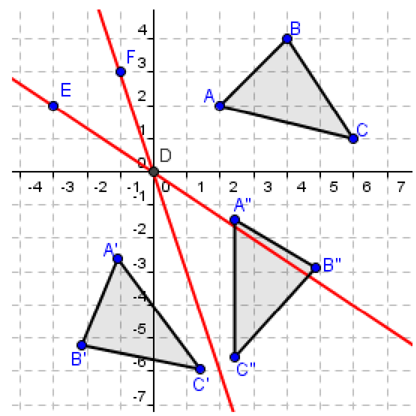
04: Identificar regularidades en la aplicación de transformaciones isométricas a figuras en el plano cartesiano.

Procedimiento de resolución

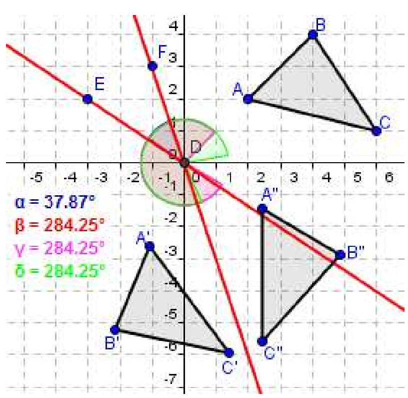
- Llevar a cabo procedimiento en software geométrico para representar en el plano cartesiano un triángulo $\boldsymbol{ABCD}$, el punto $\boldsymbol{D}(\mathbf{0},\mathbf{0})$, los puntos $\boldsymbol{F}$ y $\boldsymbol{E}$ con coordenadas arbitrarias, y las rectas $\overleftrightarrow{\boldsymbol{DE}}$ y $\overleftrightarrow{\boldsymbol{DF}}$.

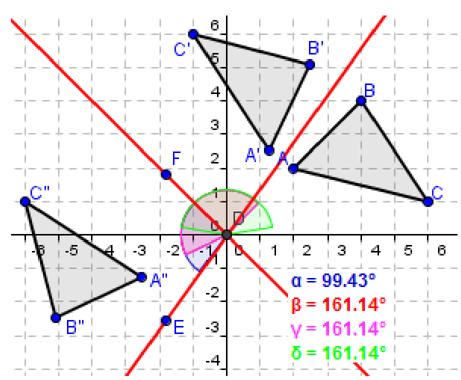


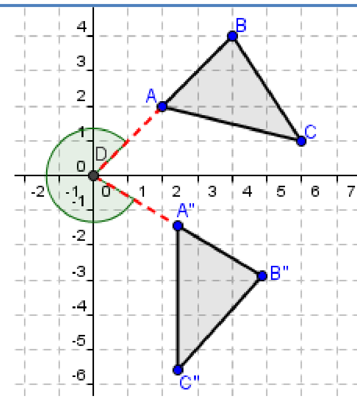
- Ejecutar procedimiento para la aplicación de una simetría del triángulo $\boldsymbol{ABC}$ respecto a la recta $\overleftrightarrow{\boldsymbol{DE}}$ determinando el triángulo $\boldsymbol{A'B'C'}$
- Ejecutar procedimiento para la aplicación de una simetría del triángulo $\boldsymbol{A'B'C'}$ respecto a la recta $\overleftrightarrow{\boldsymbol{DF}}$ determinando el triángulo $\boldsymbol{A''B''C''}$



- Llevar a cabo procedimiento de medición de los ángulos $\measuredangle\boldsymbol{EDF}$, $\measuredangle\boldsymbol{ADA''}$, $\measuredangle\boldsymbol{BDB''}$ y $\measuredangle\boldsymbol{CDC''}$ en sentido antihorario concluyendo que los ángulos $\measuredangle\boldsymbol{ADA''}$, $\measuredangle\boldsymbol{BDB''}$ y $\measuredangle\boldsymbol{CDC''}$ tienen la misma medida.
- Concluir que al desplazar los puntos $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{F}$ la relación entre los ángulos se mantiene.





• Concluir que al aplicar una rotación en sentido antihorario al triángulo $\boldsymbol{ABC}$ con centro el punto $\boldsymbol{D}$ y ángulo de rotación $\mathbf{284,25°}$ se puede llegar de forma directa al triángulo $\boldsymbol{A''B''C''}$. • Aplicar una rotación al triángulo $\boldsymbol{ABC}$ con centro $\boldsymbol{D}$ y ángulo de rotación $\mathbf{284,25°}$ en sentido antihorario.	
Habilidad desarrollada según curriculum	
Búsqueda de regularidades y patrones.	
Habilidad desarrollada según taxonomías de Anderson y Krathwohl	
Aplicar (Nivel 3)	
Conocimientos que permiten abordar la situación	
• Aplicación de transformaciones isométricas utilizando el software geométrico GeoGebra.	