



FACULTAD DE CIENCIAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS

Hacia una Teoría de Punto Fijo en Espacios Uniformes

MEMORIA DE TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE LICENCIADO EN
MATEMÁTICAS

NOMBRE ALUMNO: SERGIO IGNACIO PIZARRO
PROFESOR GUÍA: RAÚL FIERRO PRADENAS

Valparaíso, 2022

Índice general

Agradecimientos	3
Introducción	4
1. Hiperespacios y Correspondencias	7
1.1. Definiciones Elementales	7
1.2. Continuidad de Correspondencias	9
1.3. Métrica de Hausdorff	12
2. Espacios Uniformes	21
2.1. Definiciones y Topología Uniforme	21
2.2. Continuidad Uniforme	28
2.3. Completitud y Compacticidad	34
2.4. Metrización	37
2.5. Uniformización de Cerrados y Acotados	42
3. Teoría Topológica del Punto Fijo	44
3.1. Espacios Vectoriales Topológicos	45
3.2. Espacios Vectoriales de Dimensión Finita	51
3.3. Convexidad Local	53
3.4. Aplicaciones del Teorema de Brouwer	59
4. Teoría Métrica del Punto Fijo	68
4.1. Punto Fijo y Ordenes Parciales	69
4.2. Punto Fijo Univaluado	72
4.3. Punto Fijo Multivaluado	81

5. Condición Orbital Débil en Espacios Métricos y Uniformes	93
5.1. Condición Orbital de Banach Debilitada	93
5.2. Punto Fijo en Espacios Uniformes	99
Apéndice	112
5.3. Lema de metrización	112
5.4. Teorema de Brouwer	114

Agradecimientos

Quiero agradecer y dedicar este trabajo a mi familia, quienes desde siempre me han ayudado e impulsado a lograr mis metas.

Introducción

La teoría de punto fijo tiene una gran importancia en diversas áreas de la matemática y otras ciencias, principalmente debido a la simplicidad de sus hipótesis y a la fortaleza de las consecuencias. Entre los principales objetivos de esta teoría se encuentra la existencia y unicidad de punto fijo para una función univaluada o multivaluada. Sin lugar a dudas, esta teoría descansa sobre dos resultados fundamentales, a saber, el de Banach [6] (1922) y el de Brouwer [12] (1912). Estos resultados dieron lugar, durante el siglo XX y hasta nuestros días, a las teorías métrica y topológica del punto fijo, respectivamente. Las ideas provenientes del primero de ellos, las cuales se aplican a funciones definidas en espacios métricos, ha permitido la demostración de existencia de punto fijo para diversas variantes de la contracción de Banach. A su vez, el desarrollo de la teoría topológica, cuyo escenario son los espacios vectoriales topológicos, ha influido en la formalización de problemas en ecuaciones diferenciales parciales y ordinarias, optimización, economía, física, y otras disciplinas. De estas dos visiones de la teoría de punto fijo nació el desarrollo de resultados análogos para multifunciones o correspondencias, los cuales contienen generalizaciones de la teoría existente para funciones univaluadas.

Como vemos, esta teoría posee dos vertientes. Una de ellas se desarrolla en espacios métricos y la otra en espacios vectoriales topológicos. El principal objetivo de esta tesis es la unificación de ambas teorías. A saber, desarrollarla en espacios comunes a los mencionados anteriormente. Estos son los espacios uniformes. En efecto, tanto los espacios métricos, como los vectoriales topológicos son espacios uniformes. De modo que cualquier resultado que se obtenga, en este último tipo de espacios, será válido para los anteriores.

La mayor parte de esta tesis consiste en describir los principales resultados existentes sobre la teoría de punto fijo, junto con preliminares que nos permitirán presen-

tar, en la parte final, resultados inéditos sobre existencia de punto fijo para funciones univaluadas y multivaluadas en espacios uniformes. Uno de estos resultados es válido en espacios métricos [24], pero extiende para multifunciones el teorema principal de Hicks y Rhoades en [28].

La tesis está estructurada como se señala a continuación. En el Capítulo 1, introducimos los conceptos de hiperespacio y multifunción, para luego definir hiperespacios notables que se utilizan a lo largo del trabajo. Además, presentamos resultados sobre continuidad débil de correspondencias, los cuales nos permiten relajar, hacia el final, condiciones usuales para la existencia de puntos fijos. El objetivo principal de este capítulo es el estudio de la métrica de Hausdorff, sobre el hiperespacio de los conjuntos cerrados y acotados de un espacio métrico. Como parte de este estudio, caracterizamos las propiedades topológicas de esta métrica, tales como convergencia, clausura, compacidad, precompacidad, entre otros, y relacionamos la continuidad de correspondencias, respecto a dicha métrica, con la continuidad débil mencionada. En el segundo capítulo introducimos una nueva estructura; a saber, los espacios uniformes. Como ya hemos mencionado, esta estructura nos permitirá, en el último capítulo, unificar resultados, tanto para espacios métricos como para espacios vectoriales topológicos. Por lo pronto, caracterizamos los espacios uniformes con una familia de pseudo métricas, para luego definir una estructura uniforme sobre el hiperespacio de conjuntos cerrados y acotados. Aquí, el concepto de acotamiento fue definido por Atkin y Hejman en [4] y [27], respectivamente. Vale la pena señalar que este concepto de acotamiento coincide con el existente en espacios vectoriales topológicos, por supuesto en espacios que gozan de esta estructura. En el tercer capítulo desarrollaremos el primer eje de la teoría de punto fijo: la teoría topológica, exponiendo primero las definiciones elementales y diversas propiedades. Además, consideramos el caso particular de dimensión finita, y la propiedad de convexidad local. Luego, introducimos los conceptos de envoltura convexa y correspondencia KKM, los cuales serán de utilidad para el desarrollo de aplicaciones del teorema del punto fijo de Brouwer, tales como aquellas atribuidas a Kakutani [29], Dugundji y Granas [17], Fan [18, 19], Glicksberg [25], y Tychonoff [39], entre otros. El cuarto capítulo está dedicado al segundo eje de la teoría de punto fijo; a saber, la teoría métrica. En este escenario, los conjuntos de base son los espacios métricos. Desarrollamos resultados de punto fijo univaluado en espacios parcialmente ordenados. Entre

ellos, el teorema de Caristi, el cual también es importante en su extensión multivaluada y en espacios uniformes. A continuación, mediante el concepto de condición orbital de Banach, revisamos contracciones usuales en la literatura, y probamos de manera independiente a la condición orbital, que estas poseen punto fijo. Esta acción se realiza para funciones univaluadas y multivaluadas. En este último caso, consideramos dos condiciones orbitales. El último capítulo contiene aportes inéditos y se subdivide en dos partes. La primera, considera la condición orbital más débil entre las dos definidas en el capítulo anterior. Esto nos permite generalizar la obtención de puntos fijos en varios tipos de contracciones multivaluadas, pues probamos que varias de éstas satisfacen la condición orbital débil presentada. Además se presenta una nueva contracción multivaluada con el fin de proporcionar nuevos ejemplos de aplicación de los resultados. La segunda sección de este último capítulo, tiene como objetivo demostrar existencia de punto fijo para correspondencias definidas sobre un espacio uniforme. Introducimos una condición orbital especial que, de igual forma que en el caso métrico, asegurará existencias de puntos fijo. De manera adicional, extendemos un resultado clásico de Caristi, con el fin de obtener resultados para funciones univaluadas, pero en nuestro caso, en el contexto de espacios uniformes.

Capítulo 1

Hiperespacios y Correspondencias

1.1. Definiciones Elementales

Las correspondencias, o multifunciones como también se les llama, son un tipo especial de funciones, y están caracterizadas porque su codominio es una familia de conjuntos. Como veremos se extienden a correspondencias conceptos definidos para funciones, como es el caso de imagen, imagen inversa, semicontinuidad y otros. Estos conceptos no siempre son una generalización del correspondiente concepto para funciones, pues en algunos casos poseen un significado diferente. En [5] y [33] se abordan estos temas y sus relaciones.

Iniciamos esta sección con unas primeras notaciones y definiciones.

Definición 1.1.1. Sea X un conjunto no vacío. Definimos un *hiperespacio* en X como un subconjunto del conjunto potencia de X .

Si X es un conjunto arbitrario, algunos hiperespacios notables son:

- Conjunto potencia: 2^X , y
- $\langle X \rangle = \{A \in 2^X \mid A \text{ es finito}\}$.

Si X es un espacio topológico, definimos los hiperespacios:

- $\mathcal{C}(X) = \{A \in 2^X \mid A \text{ es cerrado}\}$, y
- $\mathcal{K}(X) = \{A \in 2^X \mid A \text{ es compacto}\}$.

En el caso que (X, d) sea un espacio métrico, algunos hiperespacios notables son:

- $\mathcal{B}(X) = \{A \in 2^X \mid A \text{ es acotado}\}$, y
- $\mathcal{CB}(X) = \mathcal{C}(X) \cap \mathcal{B}(X)$.

Los hiperespacios de interés durante este trabajo serán los definidos para espacios topológicos y espacios métricos.

Definición 1.1.2. Una *correspondencia* desde un conjunto X a un conjunto Y (ambos no vacíos) es una función $T : X \rightarrow \mathcal{H}(Y)$, donde $\mathcal{H}(Y)$ denota un hiperespacio en Y .

En lo que sigue, $T : X \rightrightarrows Y$ denotará una correspondencia con $\mathcal{H}(Y)$ un hiperespacio en Y . Además, $T(x)$ se abrevia por Tx .

Debido a la naturaleza del conjunto de llegada de una correspondencia T , los conceptos de imagen directa, imagen inversa y gráfico cambian. A continuación precisamos estos conceptos.

Definición 1.1.3. Sean $T : X \rightrightarrows Y$ una correspondencia, $A \in 2^X$ y $B \in 2^Y$, definimos los siguientes conjuntos:

- *Dominio* de T : $\text{Dom}(T) = \{x \in X \mid Tx \neq \emptyset\}$.
- *Imagen directa* de A por T : $T(A) = \bigcup_{x \in A} Tx$.
- *Imagen inversa débil* de B por T : $T^d(B) = \{x \in X \mid Tx \cap B \neq \emptyset\}$. También la denotaremos por $T^{-1}(B)$.
- *Imagen inversa fuerte* de B por T : $T^f(B) = \{x \in X \mid Tx \subset B\}$.
- *Gráfico* de T : $\text{Gr}(T) = \{(x, y) \in X \times Y \mid y \in Tx\}$.

Definición 1.1.4. Sea $T : X \rightrightarrows Y$. Definimos las siguientes correspondencias:

- El *complemento* de T , dada por $T^c : X \rightrightarrows Y$ como $T^c x = (Tx)^c$.
- Si (Y, τ) es un espacio topológico, definimos la *clausura* de T como la correspondencia $\overline{T} : X \rightrightarrows Y$ dada por $\overline{T}x = \overline{Tx}$.

Definición 1.1.5. Sean $T, R : X \rightrightarrows Y$, $S : Y \rightrightarrows Z$ correspondencias:

- La *unión* de T y R , $T \cup R : X \rightrightarrows Y$, se define como $T \cup R(x) = Tx \cup Rx$.
- La *intersección* de T y R , $T \cap R : X \rightrightarrows Y$, se define como $T \cap R(x) = Tx \cap Rx$.
- La *composición* de T con S , $S \circ T : X \rightrightarrows Z$, se define como con $S \circ T(x) = \bigcup_{y \in Tx} Sy$.

1.2. Continuidad de Correspondencias

En lo que sigue, X, Y denotarán espacios topológicos.

Definición 1.2.1. Sean X, Y espacios topológicos, $T : X \rightrightarrows Y$ una correspondencia, y $a \in \text{Dom}(T)$. Diremos que:

- T es *semicontinua inferior* en a , si para todo $b \in Ta$ y toda vecindad U de b , existe una vecindad V de a tal que, para todo $x \in V$, se tiene $Tx \cap U \neq \emptyset$.
- T es *semicontinua superior* en a , si para toda vecindad U de Ta , existe V vecindad de a tal que para todo $x \in V$ se cumple $Tx \subseteq U$.
- T es *continua* en a si es semicontinua superior e inferior en a .
- T es *semicontinua inferior* (respectivamente superior), si es semicontinua inferior (resp. superior) en cada punto de X .
- T es *continua*, si es continua en cada punto de X .

A continuación estableceremos una caracterización de la semicontinuidad global de correspondencias, análoga a la continuidad de funciones en espacios topológicos.

Proposición 1.2.1. Sea $T : X \rightrightarrows Y$ una correspondencia. Luego, T es *semicontinua inferior* en X , si y solo si, para todo abierto B en Y , la imagen inversa débil, $T^{-1}(B)$, es un abierto en X .

Demostración. Supongamos primero que T es semicontinua inferior en X . Sean B un abierto en Y y $a \in T^{-1}(B)$. Luego, $Ta \cap B \neq \emptyset$. Sea $b \in Ta \cap B$, esto implica que B es una vecindad de b y, como T es semicontinua inferior en a , existe V vecindad

de a tal que para todo $x \in V$, $Tx \cap B \neq \emptyset$, es decir, $V \subseteq T^{-1}(B)$, por lo que $T^{-1}(B)$ es un abierto en Y .

Recíprocamente, supongamos que la imagen inversa débil de todo abierto en Y es un abierto en X . Veamos que T es semicontinua inferior en a , con $a \in X$ arbitrario. Sean $a \in X$, $b \in Ta$ y U vecindad de b tal que $U \cap Ta \neq \emptyset$. Esto implica que $a \in T^{-1}(U)$, de modo que $T^{-1}(U)$ es una vecindad de a . Así, existe V vecindad de a , a saber $V = T^{-1}(U)$, tal que $V \subseteq T^{-1}(U)$ y, para todo $x \in V$, $Tx \cap U \neq \emptyset$. Esto prueba lo deseado. \square

Proposición 1.2.2. *Sea $T : X \rightrightarrows Y$ una correspondencia, son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

- (I) T es semicontinua superior,
- (II) para todo abierto G en Y , la imagen inversa fuerte $T^f(G)$ es abierto en X , y
- (III) para todo cerrado B en Y , la imagen inversa débil $T^{-1}(B)$ es cerrado en X .

Demostración. Supongamos que T es semicontinua superior en X . Sean G un abierto en Y y $x \in T^f(G)$, luego, $Tx \subseteq G$, por lo que G es una vecindad de Tx , esto implica que existe V vecindad de x tal que para todo $y \in V$, se tiene $Ty \subseteq G$, es decir, $V \subseteq T^f(G)$. Por tanto $T^f(G)$ es un abierto en X .

Recíprocamente supongamos que para todo abierto G en Y , la imagen inversa fuerte $T^f(G)$ es abierto en X . Sean $x \in X$ y U una vecindad de Tx , luego, $V = T^f(U)$ es abierto en X , $x \in V$ y para todo $y \in V$, $Ty \subseteq U$. Esto demuestra que T es semicontinua superior en x y, por consiguiente, la equivalencia de las condiciones (I) y (II).

Notemos además que $x \in (T^f(B^c))^c$ equivale a $Tx \not\subseteq B^c$, es decir, $Tx \cap B \neq \emptyset$ de modo que $x \in T^{-1}(B)$, por lo que $(T^f(B^c))^c = T^{-1}(B)$ para todo $B \in 2^Y$. Esta igualdad prueba que (II) es equivalente a (III), tomando B cerrado en Y , lo que concluye la demostración. \square

Proposición 1.2.3. *Sean X compacto y $T : X \rightarrow \mathcal{K}(Y)$ una correspondencia semicontinua superior. Entonces $T(X)$ es compacto.*

Demostración. Sea $\{G_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ un cubrimiento abierto de $T(X)$. Como $Tx \subseteq T(X)$, entonces $\{G_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ es un cubrimiento abierto de Tx , para cada $x \in X$, y como Tx es

compacto, entonces existe $\Lambda(x) \subseteq \Lambda$ finito, tal que

$$Tx \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda(x)} G_\lambda.$$

Sea $W_x = \bigcup_{\lambda \in \Lambda(x)} G_\lambda$. Como W_x es un abierto en X , entonces existe una vecindad V_x de x tal que $Ty \subseteq W_x$, para todo $y \in V_x$. Además, ya que $X = \bigcup_{x \in X} V_x$, existen x_1, \dots, x_n en X tales que $X = \bigcup_{i=1}^n V_{x_i}$. Luego, $T(X) \subseteq T(\bigcup_{i=1}^n V_{x_i})$, y por consiguiente

$$T(X) \subseteq T\left(\bigcup_{i=1}^n V_{x_i}\right) \subseteq \bigcup_{i=1}^n T(V_{x_i}) \subseteq \bigcup_{i=1}^n W_{x_i} \subseteq \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{\lambda \in \Lambda(x_i)} G_\lambda.$$

Esto prueba que $T(X)$ es compacto. \square

Definición 1.2.2. Sea $T : X \rightrightarrows Y$ una correspondencia. Diremos que T es *abierta*, si $\text{Gr}(T)$ es abierto en $X \times Y$, y que T es *cerrada*, si $\text{Gr}(T)$ es cerrado en $X \times Y$.

Proposición 1.2.4. Sea $T : X \rightrightarrows Y$ una correspondencia cerrada tal que $\text{Dom}(T) \neq \emptyset$. Entonces, para todo $x \in X$, se tiene $Tx \in \mathcal{C}(Y)$.

Demostración. Sean $x \in X$ e $y \notin Tx$. Luego, $(x, y) \in \text{Gr}(T)^c$ y como T es cerrada, existen vecindades U_x de x y V_y de y , tales que $U_x \times V_y \subseteq \text{Gr}(T)^c$. Ahora, si $z \in V_y$, entonces $(x, z) \in U_x \times V_y$, por lo que $(x, z) \notin \text{Gr}(T)$, es decir, $z \notin Tx$. Por tanto $z \in Tx^c$, lo que implica que $V_y \subseteq Tx^c$. Esto prueba que Tx^c es abierto, y por lo tanto $Tx \in \mathcal{C}(Y)$, lo cual completa la demostración. \square

El recíproco de esta proposición exige condiciones adicionales.

Proposición 1.2.5. Sean Y espacio regular y $T : X \rightarrow \mathcal{C}(Y)$ una correspondencia semicontinua superior. Entonces T es cerrada.

Demostración. pongamos que $T : X \rightarrow \mathcal{C}(Y)$ es semicontinua superior, y que Y es regular. Veamos que $\text{Gr}(T)^c$ es abierto en $X \times Y$. Sea $(x, y) \in \text{Gr}(T)^c$, luego $y \notin Tx$, y como Y es regular y Tx es cerrado, existen V_y y G abiertos en Y tales que $V_y \cap G = \emptyset$, $y \in V_y$ y $Tx \subseteq G$. Como T es semicontinua superior, entonces existe W_x vecindad de x tal que $W_x \subseteq V_x$ y $Tz \subseteq G$, para todo $z \in W_x$. Veamos que $V_x \times V_y \subseteq X \times Y \setminus \text{Gr}(T)$.

Supongamos que existe $(u, v) \in V_x \times V_y \cap \text{Gr}(T)$. Entonces $v \in Tx$, por lo que $v \in G$ y luego $v \in V_y \cap G$, lo cual es un absurdo. Por tanto $V_x \times V_y \subseteq \text{Gr}(T)^c$, lo que prueba que $\text{Gr}(T)$ es cerrado, que es lo que se quería demostrar. \square

Una caracterización más fuerte de las correspondencias cerradas es la siguiente.

Teorema 1.2.1 (Del Gráfico Cerrado). *Sea $T : X \rightrightarrows Y$ una correspondencia tal que $T(X)$ es compacto en Y . Entonces, T es cerrada, si y solo si, T es semicontinua superior y $Tx \in \mathcal{K}(Y)$, para todo $x \in X$.*

Demostración. Debido a que $T(X)$ es regular, por Proposición 1.2.5, basta probar que si T es cerrada, entonces T es semicontinua superior y posee imágenes compactas.

Supongamos que T es cerrada. Entonces, por Proposición 1.2.4, tenemos que Tx es cerrado en Y , para todo $x \in X$, y, como $Tx \subseteq T(X)$, entonces Tx es compacto.

Supongamos por absurdo que T no es semicontinua superior en $x \in X$. Luego, existe G abierto en Y , tal que para todo V vecindad de x , se tiene $V \not\subseteq \{u \in X \mid Tu \subseteq G\}$. Sea $x_V \in V$ tal que $Tx_V \not\subseteq G$, esto implica que $Tx_V \cap G^c \neq \emptyset$, sea $y_V \in Tx_V \cap G^c$. Tenemos que $\varphi_x = \{x_V \mid V \text{ es vecindad de } x\}$ es una red en X que converge a x . Además $\varphi_y = \{y_V \mid V \text{ es vecindad de } x\}$ es una red en G^c , que es un compacto en Y , por lo que existe una subred, $\varphi'_y = \{y_V \mid V \in \mathcal{V}_y(x)\}$ de φ_y , con $\mathcal{V}_y(x)$ una subfamilia de vecindades de x , tal que φ'_y converge a algún $z \in G^c$. Por tanto, la subred producto:

$$\varphi_x \times \varphi'_y = \{(x_V, y_V) \in X \times Y \mid V \in \mathcal{V}_y(x)\}$$

converge a (x, z) en $X \times Y$. Además, $(x_V, y_V) \in \text{Gr}(T)$, para todo $V \in \mathcal{V}_y(x)$, y como el gráfico es cerrado, entonces $(x, z) \in \text{Gr}(T)$, pero $Tx \subseteq G$ y $z \in G^c$, lo que implica que $(x, z) \notin \text{Gr}(T)$, un absurdo. Por tanto T es semicontinua superior, concluyendo la demostración. \square

1.3. Métrica de Hausdorff

A continuación, construiremos un hiperespacio de un espacio métrico sobre el cual se pueda definir una métrica. El objetivo principal de esta construcción apunta al estudio de continuidad en correspondencias (respecto a la topología de ambas

métricas) y su relación con la continuidad de correspondencias definida anteriormente. Este hiperespacio será el de conjuntos cerrados y acotados, $\mathcal{CB}(X)$.

Diversas propiedades topológicas y métricas de $\mathcal{CB}(X)$ se pueden obtener a partir de las propiedades de X . Estos resultados, abordados por Aliprantis en [2], y por Castaing y Valadier en [14], serán el principal objetivo de esta sección.

Definición 1.3.1. Sea X un conjunto no vacío. Una *seudo métrica* sobre X es una función $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ que satisface lo siguiente:

- Para todo x e y en X , $d(x, y) \geq 0$,
- para todo x e y en X , $d(x, y) = d(y, x)$,
- si $x = y$, entonces $d(x, y) = 0$, y
- para todo x, y y z en X , $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Lema 1.3.1. Sean (X, d) un espacio pseudo métrico y $h : \mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(X) \rightarrow \mathbb{R}_+$ una función dada por

$$h(A, B) = \sup\{d(a, B) \mid a \in A\}.$$

Entonces, para todo A y B en $\mathcal{B}(X)$, $h(A, B) = 0$, si y solo si, $A \subseteq \overline{B}$.

Demostración. Sean A y B en $\mathcal{B}(X)$ tales que $h(A, B) = 0$, entonces, para todo $x \in A$, $d(x, B) \leq h(A, B) = 0$, por lo que $d(x, B) = 0$, lo que implica $x \in \overline{B}$. Esto demuestra que $A \subseteq \overline{B}$.

Recíprocamente, supongamos que $A \subseteq \overline{B}$, luego, para todo $x \in A$, $x \in \overline{B}$, de modo que $d(x, B) = d(x, \overline{B}) = 0$, lo que demuestra que $h(A, B) = 0$. Esto concluye la demostración. \square

Lema 1.3.2. Sean (X, d) un espacio pseudo métrico y, A, B y C subconjuntos de X acotados y no vacíos. Entonces $h(A, B) \leq h(A, C) + h(C, B)$.

Demostración. Sean $a \in A$ y $c \in C$. Tenemos que $d(a, B) \leq d(a, c) + d(c, B)$. Luego,

$$d(a, B) \leq d(a, c) + \sup_{c \in C} d(c, B),$$

por lo que

$$d(a, B) - h(C, B) \leq d(a, c),$$

para todo $c \in C$. Así,

$$d(a, B) - h(C, B) \leq d(a, C),$$

y en consecuencia, $\sup_{a \in A} d(a, B) - h(C, B) \leq \sup_{a \in A} d(a, C)$. Es decir, $h(A, B) \leq h(A, C) + h(C, B)$, lo que concluye la demostración. \square

Teorema 1.3.1. *Sea (X, d) un espacio pseudo métrico. La función $\mathcal{H} : \mathcal{CB}(X) \times \mathcal{CB}(X) \rightarrow \mathbb{R}_+$ definida por*

$$\mathcal{H}(A, B) = \max\{h(A, B), h(B, A)\},$$

es una pseudo métrica sobre $\mathcal{CB}(X)$.

Demostración. Observemos que $\mathcal{H}(A, B) = 0$, si y solo si, $h(A, B) = h(B, A) = 0$. Esto implica que $A \subseteq \bar{B} = B$ y $B \subseteq \bar{A} = A$. Por tanto $A = B$.

La simetría de \mathcal{H} es inmediata. Para la desigualdad triangular, tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(A, B) &= \max\{h(A, B), h(B, A)\} \\ &\leq \max\{h(A, C) + h(C, B), h(B, C) + h(C, A)\} \\ &\leq \max\{h(A, C) + h(C, A)\} + \max\{h(C, B), h(B, C)\} \\ &= \mathcal{H}(A, C) + \mathcal{H}(B, C), \end{aligned}$$

lo que concluye la demostración. \square

La función definida en el teorema anterior se conoce como *pseudo métrica de Hausdorff* sobre $\mathcal{CB}(X)$.

Para distinguir las bolas abiertas en X y en $\mathcal{CB}(X)$, se denotará la bola de centro $A \in \mathcal{CB}(X)$ y radio $r > 0$ como $B_{\mathcal{H}}(A, r)$. Además, si $A \subseteq X$ es no vacío, para $\epsilon > 0$, escribiremos

$$A^\epsilon = \{x \in X \mid d(x, A) < \epsilon\}.$$

Una relación entre los conjuntos recién definidos, con la métrica de Hausdorff en $\mathcal{CB}(X)$, se detalla en la siguiente propiedad.

Proposición 1.3.1. *Sean (X, d) un espacio pseudo métrico y $A, B \in \mathcal{CB}(X)$. En-*

tonces

$$\mathcal{H}(A, B) = \inf\{\epsilon > 0 \mid A \subseteq B^\epsilon \wedge B \subseteq A^\epsilon\}.$$

Demostración. Sean $H = \{\epsilon > 0 \mid A \subseteq B^\epsilon \wedge B \subseteq A^\epsilon\}$ y $\epsilon \in H$, entonces $d(x, B) < \epsilon$ para cada $x \in A$, y $d(y, B) < \epsilon$ para todo $y \in B$. Así, $h(A, B) \leq \epsilon$ y $h(B, A) \leq \epsilon$, de modo que $\mathcal{H}(A, B) \leq \epsilon$ y entonces $\mathcal{H}(A, B)$ es cota inferior de H . Esto demuestra que $\mathcal{H}(A, B) \leq \inf H$.

Supongamos por absurdo que $\mathcal{H}(A, B) < \inf H$. Sea $\beta > 0$ tal que $\mathcal{H}(A, B) < \beta < \inf H$, esto implica que $\beta \notin H$, por lo que $A \not\subseteq B^\beta$, o bien $B \not\subseteq A^\beta$. Entonces $h(A, B) \geq \beta$, o $h(B, A) \geq \beta$. En ambos casos se obtiene $\mathcal{H}(A, B) \geq \beta$, lo que es una contradicción. Esto prueba lo deseado. \square

En la siguiente proposición caracterizaremos la convergencia de sucesiones en $\mathcal{CB}(X)$. La importancia de esto no será solo conocer mejor los límites de las sucesiones convergentes, sino que además nos ayudará a probar la completitud de $\mathcal{CB}(X)$ cuando X sea completo, ya que podremos conjeturar un límite en las sucesiones de Cauchy.

Proposición 1.3.2. *Sea (X, d) un espacio métrico y $(A_n : n \in \mathbb{N})$ una sucesión en $\mathcal{CB}(X)$ convergente hacia $A \in \mathcal{CB}(X)$. Entonces,*

$$A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\bigcup_{m \geq n} A_m} = \bigcap_{\epsilon > 0} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{m \geq n} A_m^\epsilon.$$

Demostración. Sean $B = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\bigcup_{m \geq n} A_m}$ y $C = \bigcap_{\epsilon > 0} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{m \geq n} A_m^\epsilon$. Probaremos las contenciones $A \subseteq B \subseteq C \subseteq A$.

Sean $x \in A$, $n \in \mathbb{N}$ y $\epsilon > 0$. Veamos que $B(x, \epsilon) \cap \bigcup_{m \geq n} A_m \neq \emptyset$. En efecto, existe $m \geq n$ tal que $\mathcal{H}(A_m, A) < \epsilon$ y por consiguiente $d(x, A_m) < \epsilon$. Luego, existe $x_m \in A_m$ tal que $d(x, x_m) < \epsilon$ y entonces $x_m \in B(x, \epsilon) \cap A_m \subset B(x, \epsilon) \cap \bigcup_{m \geq n} A_m$, por lo que $A \subseteq B$.

Sean $x \in B$ y $\epsilon > 0$. Demostraremos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $m \in \mathbb{N}$ con $m \geq n$, se tiene $x \in \bigcap_{m \geq n} A_m^\epsilon$. Debido a que $(A_n : n \in \mathbb{N})$ converge hacia A , existe $n \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $m \geq n$, se cumple $\mathcal{H}(A_m, A) < \epsilon/3$. Ya que $x \in B$, podemos escoger $m \geq n$ y $\ell \geq m$ tales que $B(x, \epsilon/3) \cap A_\ell \neq \emptyset$. Es decir,

$d(x, A_\ell) < \epsilon/3$, y así,

$$d(x, A_m) \leq d(x, A_\ell) + \mathcal{H}(A_\ell, A) + \mathcal{H}(A, A_m) < \epsilon,$$

lo que prueba que $B \subseteq C$.

Sea $x \in C$. Como A es cerrado, basta probar que $d(x, A) = 0$. Sea $\epsilon > 0$. Luego, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq N$, se tiene $\mathcal{H}(A_n, A) < \epsilon$. Además, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que, para $m \geq \max\{n, N\}$, se verifica $x \in A_m^\epsilon$, por lo que $d(x, A_m) < \epsilon$. Como $\epsilon > 0$ es arbitrario, esto implica que existe $a_m \in A_m$, tal que $d(x, a_m) < \epsilon$ y además,

$$\begin{aligned} d(x, A) &\leq d(x, a_m) + d(a_m, A) \\ &< \epsilon + \mathcal{H}(A_m, A). \end{aligned}$$

Para todo $m \geq \max\{n, N\}$, se tiene $d(x, A) < 2\epsilon$. Esto implica que $d(x, A) = 0$, que es lo que se quería demostrar. \square

En los siguientes resultados abordaremos las propiedades topológicas y métricas que se transfieren de X a $\mathcal{CB}(X)$, tales como la completitud, precompacidad y compacidad. Además, identificaremos un conjunto cerrado notable en $\mathcal{CB}(X)$, que será el de conjuntos precompactos.

Teorema 1.3.2. *Sea (X, d) un espacio métrico completo. Entonces $(\mathcal{CB}(X), \mathcal{H})$ también lo es.*

Demostración. Sean $(A_n : n \in \mathbb{N})$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{CB}(X)$, y $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\bigcup_{m \geq n} A_m}$. Demostraremos que $A \in \mathcal{CB}(X)$ y que $(A_n : n \in \mathbb{N})$ converge hacia A . Como A es una intersección contable de cerrados, entonces A también lo es, debemos verificar que es no vacío y acotado. Sea $\epsilon > 0$. Como $(A_n : n \in \mathbb{N})$ es de Cauchy, para todo $k \in \mathbb{N}$, existe $N_k \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq N_k$, entonces $\mathcal{H}(A_n, A_m) < \epsilon/2^{k+2}$. Sea $(n_k : k \in \mathbb{N})$ la sucesión definida por

$$n_k = \max\{N_\ell \mid 0 \leq \ell \leq k\},$$

y sea $x_0 \in A_{n_0}$. Como $\mathcal{H}(A_{n_0}, A_{n_1}) < \epsilon/2^2$, entonces existe $x_1 \in A_{n_1}$ tal que $d(x_0, x_1) < \epsilon/2^2$. Así, podemos escoger $x_0, \dots, x_k \in X$ de modo que $x_i \in A_{n_i}$,

para cada $i \in \{0, \dots, k\}$ y $d(x_i, x_{i-1}) < \epsilon/2^{i+2}$, si $i \leq k-1$. Además, como $d(x_k, A_{n_{k+1}}) \leq \mathcal{H}(A_{n_k}, A_{n_{k+1}}) < \epsilon/2^{k+2}$, entonces existe $x_{k+1} \in A_{n_{k+1}}$ tal que $d(x_k, x_{k+1}) < \epsilon/2^{k+2}$. Así, por inducción, tenemos que $(x_k : k \in \mathbb{N})$ es una sucesión de Cauchy, por lo que existe $x \in X$ de modo que dicha sucesión converge hacia x . Para cada $n \in \mathbb{N}$, la subsucesión $(x_m : m \geq n)$ de $(x_n : n \in \mathbb{N})$ está contenida en $\overline{\bigcup_{m \geq n} A_m}$, que es cerrado, por lo que $x \in \overline{\bigcup_{m \geq n} A_m}$. Por tanto, $x \in A$, lo que prueba que A es no vacío.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ y $m \geq n$, se tiene

$$d(x_n, x_m) \leq \sum_{k=n}^{m-1} d(x_k, x_{k+1}) \leq \sum_{k=n}^{m-1} \epsilon/2^{k+2} \leq \epsilon/2^{n+1}.$$

En particular, $d(x_0, x) \leq \epsilon/2$, por lo que para todo $x_0 \in A_{n_0}$, existe $x \in A$ tal que $d(x_0, x) < \epsilon/2$. Así, $A_{n_0} \subseteq A^{\epsilon/2}$. Veamos ahora que $A \subseteq A_{n_0}^{\epsilon/2}$. Sea $y \in A$, luego $y \in \overline{\bigcup_{m \geq n_1} A_m}$, luego $B(y, \epsilon/4) \cap \bigcup_{m \geq n_1} A_m \neq \emptyset$. Escogemos $m \geq n_1$ y $z \in A_m$ tales que $d(y, z) < \epsilon/4$, luego $d(y, A_m) < \epsilon/4$. Por ende,

$$d(y, A_{n_0}) \leq d(y, z) + d(z, A_{n_0}) \leq \epsilon/4 + \mathcal{H}(A_m, A_{n_0}) < \epsilon/2,$$

y entonces $y \in A_{n_0}^{\epsilon/2}$, por lo que $A \subseteq A_{n_0}^{\epsilon/2}$. En particular, A es acotado. Por Proposición 1.3.1, se tiene que $\mathcal{H}(A_{n_0}, A) < \epsilon/2$. Así, para todo $n \geq n_0$ se obtiene

$$\mathcal{H}(A_n, A) \leq \mathcal{H}(A_n, A_{n_0}) + \mathcal{H}(A_{n_0}, A) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

Por lo tanto $(A_n : n \in \mathbb{N})$ converge hacia A , lo que concluye la demostración. \square

Definición 1.3.2. Sea (X, d) un espacio métrico. Diremos que X es *precompacto* (o totalmente acotado), si y solo si, para todo $\epsilon > 0$, existen x_1, \dots, x_n en X tales que

$$X = B(x_1, \epsilon) \cup \dots \cup B(x_n, \epsilon).$$

Teorema 1.3.3. Sean (X, d) un espacio métrico y $\mathcal{CBT}(X)$ el subconjunto de 2^X definido por

$$\mathcal{CBT}(X) = \{A \in \mathcal{CB}(X) \mid A \text{ es precompacto}\}.$$

Entonces, $\mathcal{CBT}(X)$ es cerrado en $\mathcal{CB}(X)$.

Demostración. Primero observemos que $\mathcal{CBT}(X)$ es un conjunto bien definido, pues es no vacío. En efecto, $\{x\} \in \mathcal{CBT}(X)$, para cada $x \in X$ (más aún, todo subconjunto finito de X pertenece a $\mathcal{CBT}(X)$), independiente de la métrica de X , de modo que $\mathcal{CBT}(X) \subseteq \mathcal{CB}(X)$.

Para probar que $\mathcal{CBT}(X)$ es cerrado, sea $(A_n : n \in \mathbb{N})$ una sucesión en $\mathcal{CBT}(X)$ convergente hacia $A \in \mathcal{CB}(X)$, probaremos que $A \in \mathcal{CBT}(X)$. Sea $\epsilon > 0$, luego existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $h(A, A_N) < \epsilon/2$. Por la precompacidad de A_N , existen $x_1, \dots, x_p \in X$ tales que $A_N = \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \epsilon/2)$. Veamos que las bolas abiertas de centro x_i y radio $\epsilon/2$ cubren también A . Para ello, sea $x \in A$, luego,

$$d(x, A_N) \leq d(x, A) + h(A, A_N) < \frac{\epsilon}{2},$$

ya que $d(x, A) = 0$. Por ello, existe $y \in A_N$ tal que $d(x, y) < \epsilon/2$. Sea $i \in \{1, \dots, p\}$ tal que $y \in B(x_i, \epsilon/2)$. Luego,

$$d(x, x_i) \leq d(x, y) + d(y, x_i) < \epsilon.$$

Es decir, $x \in B(x_i, \epsilon)$. De modo que

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \epsilon),$$

por lo que A es precompacto, que es lo que se quería demostrar. \square

Proposición 1.3.3. *Si (X, d) es un espacio métrico precompacto, entonces $(\mathcal{CB}(X), \mathcal{H})$ también lo es.*

Demostración. Sean $\epsilon > 0$ y $F = \{x_1, \dots, x_n\}$ el conjunto de puntos en X tales que

$$X = \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \epsilon).$$

Sean $A \in \mathcal{CB}(X)$ e $I_A = \{i \in \{1, \dots, n\} \mid B(x_i, \epsilon) \cap A \neq \emptyset\}$. Sean $B_A = \{x_i \in F \mid i \in I_A\}$ y $x \in A$, luego $d(x, B_A) \leq \epsilon$ y dado $x' \in B_A$, se tiene $d(x', A) \leq \epsilon$. Así, $h(A, B_A) \leq \epsilon$ y $h(B_A, A) \leq \epsilon$, por lo que $A \in B_{\mathcal{H}}(B_A, \epsilon)$, es decir, $\mathcal{H}(A, B_A) \leq \epsilon$. Por tanto, para todo $A \in \mathcal{CB}(X)$, existe $U \subseteq F$, tal que $A \in B_{\mathcal{H}}(U, \epsilon)$. Consecuen-

temente, tenemos que

$$\mathcal{CB}(X) = \bigcup_{U \in 2^F} B_{\mathcal{H}}(U, \epsilon).$$

Dicha unión es finita, pues 2^F es finito. Esto concluye la demostración. \square

Una consecuencia inmediata de lo probado anteriormente es la compacticidad de $\mathcal{CB}(X)$, cuando X lo es. Lo detallamos a continuación.

Corolario 1.3.1. *Si (X, d) es un espacio métrico compacto, entonces $(\mathcal{CB}(X), \mathcal{H})$ también es compacto.*

Demostración. Supongamos que (X, d) es compacto, luego X es precompacto y completo. Luego por Proposición 1.3.3 y Teorema 1.3.2, $(\mathcal{CB}(X), \mathcal{H})$ es precompacto y completo, de modo que $\mathcal{CB}(X)$ es compacto, concluyendo así la demostración. \square

Para concluir con este capítulo, veremos un resultado que relaciona la continuidad de correspondencias, definida anteriormente, con la continuidad topológica sobre la familia $\mathcal{K}(X)$ de $\mathcal{CB}(X)$.

Teorema 1.3.4. *Sea Z un espacio topológico y $T : Z \rightarrow \mathcal{K}(X)$ una correspondencia. Entonces, T es continua (como correspondencia), si y solo si, T es una función continua, considerando $\mathcal{K}(X)$ espacio topológico con la métrica de Hausdorff.*

Demostración. Supongamos que T es continua como correspondencia (es decir, T es semicontinua superior e inferior). Sean $z_0 \in Z$ y $\epsilon > 0$. Como Tz_0 es compacto, existen $x_1, \dots, x_r \in Tz_0$ tales que

$$Tz_0 \subseteq \bigcup_{i=1}^r B(x_i, \epsilon) \tag{*}$$

con $Tz_0 \cap B(x_i, \epsilon) \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, \dots, r\}$. De la semicontinuidad inferior de T en z_0 , se tiene que existe $V_{z_0}^i$ vecindad de z_0 , tal que $Tz \cap B(x_i, \epsilon) \neq \emptyset$, para todo $z \in V_{z_0}^i$ y todo $i \in \{1, \dots, r\}$. Sea $V_{z_0} = V_{z_0}^1 \cap \dots \cap V_{z_0}^r$. Luego, para todo $z \in V_{z_0}$ y todo $i \in \{1, \dots, r\}$ se tiene $Tz \cap B(x_i, \epsilon) \neq \emptyset$. Demostremos que $Tz_0 \subseteq (Tz)^{2\epsilon}$, para todo $z \in V_{z_0}$. Sean $y \in Tz_0$ y $z \in V_{z_0}$. Por (*), existe $i_0 \in \{1, \dots, r\}$ tal que $d(y, x_{i_0}) < \epsilon$. Sea $y_0 \in Tz \cap B(x_{i_0}, \epsilon)$. Luego,

$$d(y, Tz) \leq d(y, y_0) \leq d(y, x_{i_0}) + d(x_{i_0}, y_0) < 2\epsilon.$$

Esto prueba que $Tz_0 \subseteq (Tz)^{2\epsilon}$, para todo $z \in V_{z_0}$. Por otra parte, $Tz_0 \subseteq (Tz_0)^\epsilon$ y, por la semicontinuidad superior de T en z_0 , existe W_{z_0} , vecindad de z_0 , tal que $Tz \subseteq (Tz_0)^\epsilon$, para todo $z \in W_{z_0}$. En consecuencia, $\mathcal{H}(Tz, Tz_0) < 2\epsilon$, para todo $z \in V_{z_0} \cap W_{z_0}$, lo cual demuestra la continuidad de T con respecto a la métrica de Hausdorff.

Recíprocamente, supongamos que T es continua respecto a la métrica de Hausdorff. Veamos que T es semicontinua superior e inferior. Sean $z_0 \in Z$ y G un abierto en X tal que $Tz_0 \subseteq G$. Como Tz_0 es cerrado, observamos que

$$Tz_0 = \bigcap_{\delta > 0} (Tz_0)^\delta,$$

lo que implica

$$\bigcap_{\delta > 0} \left(\overline{(Tz_0)^{\delta/2}} \cap G^c \right) = \emptyset.$$

Por la propiedad de la intersección finita, existe $\delta > 0$ tal que $(Tz_0)^{\delta/2} \cap G^c = \emptyset$, de modo que $(Tz_0)^{\delta/2} \subseteq G$. Por la continuidad métrica de T en z_0 , existe V_{z_0} vecindad de z_0 tal que $Tz \subseteq (Tz_0)^{\delta/2} \subseteq G$, para todo $z \in V_{z_0}$. Por tanto, T es semicontinua superior.

Sean $z_0 \in Z$ y G un abierto en X tal que $Tz_0 \cap G \neq \emptyset$, y sea $x_0 \in Tz_0 \cap G$. Sean $\epsilon > 0$ y W_{z_0} vecindad de z_0 tales que $B(x_0, \epsilon) \subseteq G$ y $\mathcal{H}(Tz_0, Tz) < \epsilon$, para cada $z \in W_{z_0}$. Así, $x_0 \in Tz_0$, y $Tz_0 \subseteq (Tz)^\epsilon$, de modo que $Tz \cap B(x_0, \epsilon) \neq \emptyset$. Por tanto, $Tz \cap G \neq \emptyset$, para cada $z \in W_{z_0}$, lo que prueba que T es semicontinua inferior. Esto concluye la demostración. \square

Capítulo 2

Espacios Uniformes

2.1. Definiciones y Topología Uniforme

Los espacios uniformes tienen su origen en el Siglo XX, y se desarrollan con la motivación de generalizar propiedades de funciones definidas sobre un espacio métrico, tales como completitud, continuidad uniforme y convergencia uniforme. Tras el profundo estudio que realiza Bourbaki en [10], donde se ahonda en las propiedades topológicas, la completación de espacios uniformes, y su caracterización en términos de una familia de pseudo métricas. Este último resultado será el pilar fundamental para desarrollar la teoría de punto fijo en espacios uniformes. De igual forma, Kelley en [32] recopila los resultados que abordaremos a continuación.

A continuación daremos notaciones a ciertas relaciones sobre un conjunto, e introduciremos el concepto de uniformidad.

En un conjunto no vacío X con relaciones R y S , se denotará su composición como la relación

$$S \circ R = \{(x, z) \in X \times X \mid (\exists y \in X)((x, y) \in R \wedge (y, z) \in S)\},$$

la relación inversa de R se denotará

$$R^{-1} = \{(y, x) \in X \times X \mid (x, y) \in R\},$$

y la relación identidad será

$$\Delta = \{(x, y) \in X \times X \mid x = y\}.$$

Definición 2.1.1. Sean X un conjunto no vacío y \mathcal{B}, \mathcal{F} dos colecciones de subconjuntos de X . Diremos que \mathcal{F} es un *filtro* en X , si y solo si:

- (I) $\emptyset \notin \mathcal{F}$,
- (II) si $A, B \in \mathcal{F}$, entonces $A \cap B \in \mathcal{F}$, y
- (III) si $A \in \mathcal{F}$ y $A \subseteq B$, entonces $B \in \mathcal{F}$.

Y diremos que \mathcal{B} es una *base de filtro* en X si:

- (I) $\emptyset \notin \mathcal{B}$, y
- (II) si $A, B \in \mathcal{B}$, existe $C \in \mathcal{B}$ tal que $C \subseteq A \cap B$.

Definición 2.1.2. Se dice que una familia \mathcal{U} de subconjuntos de $X \times X$ posee *estructura uniforme*, o que \mathcal{U} es una *uniformidad*, si cumple lo siguiente:

- \mathcal{U} es un filtro en $X \times X$,
- para todo $U \in \mathcal{U}$, $\Delta \subseteq U$,
- para todo $U \in \mathcal{U}$, $U^{-1} \in \mathcal{U}$, y
- para todo $U \in \mathcal{U}$, existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $V \circ V \subseteq U$.

Llamaremos *entourages* a los elementos de \mathcal{U} , y el par (X, \mathcal{U}) denotará un espacio uniforme.

Definición 2.1.3. Un subconjunto no vacío $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{U}$ es una *base* de la uniformidad \mathcal{U} , si y solo si, para todo $U \in \mathcal{U}$, existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $V \subseteq U$.

A continuación presentamos una importante caracterización de las bases de estructuras uniformes.

Proposición 2.1.1. *Un subconjunto $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X \times X)$ es base de alguna uniformidad en X , si y solo si, se cumple lo siguiente:*

(I) \mathcal{B} es una base de filtro en X ,

(II) para todo $V \in \mathcal{B}$, $\Delta \subseteq V$,

(III) para todo $V \in \mathcal{B}$, existe $W \in \mathcal{B}$ tal que $W \subseteq V^{-1}$, y

(IV) para todo $V \in \mathcal{B}$, existe $W \in \mathcal{B}$ tal que $W \circ W \subseteq V$.

Demostración. Supongamos que \mathcal{B} es base de una uniformidad \mathcal{U} . Como \mathcal{U} es un filtro en $X \times X$, entonces $\emptyset \notin \mathcal{U}$, lo que implica $\emptyset \notin \mathcal{B}$. Sean A y B en \mathcal{B} , luego $A \cap B \in \mathcal{U}$, por lo que existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $V \subseteq A \cap B$. Así, \mathcal{B} es una base de filtro en $X \times X$, por lo que cumple la condición (I). Sea $V \in \mathcal{B}$. Luego, como $V \in \mathcal{U}$, entonces $\Delta \subseteq V$, lo que demuestra (II). Además, $V^{-1} \in \mathcal{U}$, por lo que existe $W \in \mathcal{B}$ tal que $W \subseteq V^{-1}$, es decir, cumple la condición (III). Por último, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $U \circ U \subseteq V$, y también existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subseteq U$. Luego, $B \circ B \subseteq U \circ U \subseteq V$, lo que prueba la condición (IV).

Recíprocamente, supongamos que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X \times X)$ satisface las condiciones (I)-(IV). Sea \mathcal{U} el filtro generado por \mathcal{B} , a saber:

$$\mathcal{U} = \{U \in \mathcal{P}(X \times X) \mid (\exists V \in \mathcal{B})(V \subseteq U)\}.$$

Por la condición (II), todo elemento de \mathcal{U} contiene la relación identidad. Sean $U \in \mathcal{U}$ y $V \in \mathcal{B}$ tales que $V \subseteq U$. Luego, $V^{-1} \subseteq U^{-1}$ y, por (III), existe $W \in \mathcal{B}$ tal que $W \subseteq V^{-1} \subseteq U^{-1}$. Como $W \in \mathcal{U}$ y \mathcal{U} es un filtro, se tiene que $U^{-1} \in \mathcal{U}$, por lo que \mathcal{U} satisface su tercera condición. Finalmente, la condición (IV) implica que para cada $U \in \mathcal{U}$, existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $V \circ V \subseteq U$, lo que concluye la demostración. \square

Ejemplos:

- Todo espacio métrico es un espacio uniforme. En efecto, dado (X, d) un espacio métrico, definimos, para cada $\epsilon > 0$, el conjunto

$$U_\epsilon = \{(x, y) \in X \times X \mid d(x, y) < \epsilon\}.$$

Luego, la colección $\mathcal{B} = \{U_\epsilon \mid \epsilon > 0\}$ es una base para alguna uniformidad sobre X .

- Sea R una relación de equivalencia sobre X . Luego, el conjunto $\mathcal{B} = \{R\}$ es una base para alguna uniformidad sobre X , debido a que \mathcal{B} es una base de filtro en $X \times X$, $\Delta \subseteq R$, y además, $R^{-1} = R = R \circ R$. En particular, $\{\Delta\}$ es una base, y la uniformidad generada se conoce como uniformidad discreta.

Nuestro objetivo es asegurar la existencia de bases de una uniformidad \mathcal{U} con buenas propiedades. En el siguiente teorema, probaremos la existencia de una base con entourages simétricos, es decir, entourages R tales que $R^{-1} = R$.

Teorema 2.1.1. *Sea (X, \mathcal{U}) un espacio uniforme. Entonces, existe una base \mathcal{B} de \mathcal{U} consistente de entourages simétricos.*

Demostración. Definimos la colección

$$\mathcal{B} = \{U \in \mathcal{U} \mid U \text{ es simétrico}\}.$$

De forma rápida se verifica que \mathcal{B} satisface las condiciones (I)-(III) de la Proposición 2.1.1. Demostremos la condición (IV). Sea $U \in \mathcal{U}$. Luego, existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $V \circ V \subseteq U$. Sea $W = V \cap V^{-1}$. Así, $W \in \mathcal{B}$ y $W \circ W \subseteq V \circ V \subseteq U$. Esto demuestra que \mathcal{B} es una base para alguna uniformidad y concluye la demostración. \square

Probaremos a continuación que sobre un espacio uniforme (X, \mathcal{U}) es posible definir una topología. Antes de ello, para cada $a \in X$, $A \subseteq X$ y $V \in \mathcal{U}$, definimos los siguientes dos conjuntos de interés:

$$V[a] = \{x \in X \mid (a, x) \in V\} \quad \text{y} \quad V[A] = \bigcup_{x \in A} V[x].$$

Teorema 2.1.2. *Sea (X, \mathcal{U}) un espacio uniforme. Entonces, la colección*

$$\tau = \{A \in \mathcal{P}(X) \mid (\forall a \in A)(\exists U \in \mathcal{U})(U[a] \subseteq A)\},$$

es una topología sobre X .

Demostración. Es fácil ver que $\tau \neq \emptyset$, pues para todo $U \in \mathcal{U}$ y $a \in X$, se tiene $U[a] \in \tau$. También es directo que \emptyset y X pertenecen a τ .

Sean $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una familia en τ y $a \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$. Luego, existe $\lambda \in \Lambda$ tal que $a \in A_\lambda$. Por consiguiente, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $U[a] \subseteq A_\lambda \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$, de modo que $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \in \tau$.

Sean A y B en τ tales que $A \cap B \neq \emptyset$ y $a \in A \cap B$. Luego, existen U y V en \mathcal{U} tales que $U[a] \subseteq A$, y $V[a] \subseteq B$. Veamos que $(U \cap V)[a] \subseteq U[a] \cap V[a]$. En efecto, sea $y \in (U \cap V)[a]$, esto implica que $(a, y) \in U \cap V$, por lo que $y \in U[a]$, e $y \in V[a]$, de modo que $y \in U[a] \cap V[a]$. Por tanto, $(U \cap V)[a] \subseteq A \cap B$ y entonces $A \cap B \in \tau$. Esto concluye la demostración. \square

En lo que sigue, todo espacio uniforme (X, \mathcal{U}) se considerará espacio topológico con la topología definida en el Teorema 2.1.2. La llamaremos topología uniforme.

Ahora caracterizaremos los conjuntos abiertos y cerrados para esta topología, es decir, caracterizaremos el interior y clausura de conjuntos respecto de esta topología.

Proposición 2.1.2. *Sean (X, \mathcal{U}) un espacio uniforme y $A \subseteq X$, entonces*

$$\overset{\circ}{A} = \{x \in X \mid (\exists U \in \mathcal{U})(U[x] \subseteq A)\}.$$

Demostración. Sea $B = \{x \in X \mid (\exists U \in \mathcal{U})(U[x] \subseteq A)\}$. Para todo abierto G tal que $G \subseteq A$, se tiene que $G \subseteq B$, pues si $x \in G$, existe $U \in \mathcal{U}$ para el cual $U[x] \subseteq A$, de modo que $x \in B$. Así, $\overset{\circ}{A} \subseteq B$.

Si $y \in B$, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $U[y] \subseteq A$, por lo que para todo $x \in X$ tal que $(y, x) \in U$, se tiene $x \in A$. En particular, como $\Delta \subseteq U$ e $(y, y) \in U$, entonces $y \in A$. Esto implica que $B \subseteq A$, así que solo resta probar que B es un abierto. En efecto, sean $x \in B$ y $U \in \mathcal{U}$ tales que $U[x] \subseteq A$. Veamos que existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $V[x] \subseteq B$. Sea $V \in \mathcal{U}$ tal que $V \circ V \subseteq U$. Para todo $y \in V[x]$, se tiene $V[y] \subseteq U[x]$, pues si $z \in V[y]$, entonces $(y, z) \in V$ y, como $(x, y) \in V$, tenemos que $z \in (V \circ V)[x] \subseteq U[x]$. Así, para cada $y \in V[x]$, $V[y] \subseteq A$, de modo que $y \in B$. Luego, $V[x] \subseteq B$, lo que implica que B es un abierto contenido en A , y entonces $B \subseteq \overset{\circ}{A}$. Esto completa la demostración. \square

Una consecuencia directa del resultado precedente es el siguiente: para cada $x \in X$, $\{\text{Int}(U[x]) \mid U \in \mathcal{U}\}$ es una familia de vecindades de x .

Proposición 2.1.3. *Sean (X, \mathcal{U}) un espacio uniforme, $A \subseteq X$ y \mathcal{B} una base de \mathcal{U} .*

Entonces,

$$\bar{A} = \bigcap_{V \in \mathcal{B}} V[A].$$

Demostración. Sean $x \in \bar{A}$, $V \in \mathcal{B}$ y W un entourage simétrico tal que $W \subseteq V$. Luego, $W[x] \cap A \neq \emptyset$. Sea $y \in W[x] \cap A$. Esto implica que $x \in W[y] \subseteq W[A]$, pues $y \in A$. Además, como $W[A] \subseteq V[A]$, entonces $x \in V[A]$. De este modo, $x \in \bigcap_{V \in \mathcal{B}} V[A]$.

Para demostrar que $\bigcap_{V \in \mathcal{B}} V[A] \subseteq \bar{A}$, probaremos que $\bar{A}^c \subseteq \bigcup_{V \in \mathcal{B}} V[A]^c$. En efecto, sea $x \in \bar{A}^c$. Como \bar{A}^c es una vecindad de x , existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $V[x] \subseteq \bar{A}^c$, es decir, $V[x] \cap A = \emptyset$. Sea W un entourage simétrico tal que $W \subseteq V$, luego $W[x] \cap A = \emptyset$. Esto implica que $x \notin W[A]$, pues si $x \in W[A]$, entonces $(a, x) \in W$, para algún $a \in A$. Por consiguiente, $(x, a) \in W$, de modo que $a \in W[x]$, por lo que $W[x] \cap A \neq \emptyset$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $x \in W[A]^c$ y, por consiguiente, $x \in \bigcup_{V \in \mathcal{B}} V[A]^c$. Esto concluye la demostración. \square

Una consecuencia, a partir de la proposición anterior, es la siguiente: si $x \in X$ y $U \in \mathcal{U}$, entonces existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $\overline{V[x]} \subseteq U[x]$. Más aún, si W es un entourage tal que $W \circ W \subseteq U$, entonces existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $\overline{W[x]} \subseteq V[V[x]] \subseteq U[x]$. Este hecho lo utilizaremos en el siguiente resultado, donde demostraremos equivalencias entre axiomas de separación, para el caso de espacios uniformes.

Teorema 2.1.3. *Sea (X, \mathcal{U}) un espacio uniforme. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

- (I) X es T_1 (o satisface el primer axioma de separación),
- (II) X es un espacio de Hausdorff,
- (III) X es un espacio regular, y
- (IV) $\Delta = \bigcap_{V \in \mathcal{U}} V$.

Demostración. Supongamos que X es T_1 . Sean x e y en X tales que $x \neq y$. Esto implica que $y \notin \{x\}$, y entonces $\overline{\{x\}}^c$ es una vecindad de y . Como $\{x\}$ es cerrado, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $U[y] \cap \{x\} = \emptyset$. Sea $V \in \mathcal{U}$ tal que $\overline{V[x]} \subseteq U[y]$. Luego, $y \in \overline{V[x]}^c$ y $x \in \text{Int}(V[x])$. Esto prueba que X es un espacio de Hausdorff.

Supongamos que X es Hausdorff. Sean $x \in X$, V_x una vecindad de X y U un entourage tal que $U[x] \subseteq V_x$. Sea $V \in \mathcal{U}$ tal que $V \subseteq U$ y $\overline{V[x]} \subseteq U[x]$. Luego, $x \in \overline{V[x]}$ y $\overline{V[x]} \subseteq V_x$. Por consiguiente, X es regular.

Ahora, asumamos que X es regular. Rápidamente se tiene que $\Delta \subseteq \bigcap_{V \in \mathcal{U}} V$. Razonando como en la proposición anterior, probaremos que $\Delta^c \subseteq \bigcup_{V \in \mathcal{U}} V^c$. Sea $(x, y) \in \Delta^c$, luego $y \notin \{x\}$. Existen V_x y V_y vecindades de x e y respectivamente, tales que $V_x \cap V_y = \emptyset$, lo que implica que $V[x] \cap V[y] = \emptyset$. Sean U y W en \mathcal{U} tales que $U[x] \subseteq V_x$, y $W[y] \subseteq V_y$. Luego, $U[x] \cap W[y] = \emptyset$, de modo que $y \notin U[x]$, y por ende, $(x, y) \notin U$. Así, $(x, y) \notin \bigcap_{V \in \mathcal{U}} V$.

Finalmente, supongamos que la condición (IV) es válida. Sean x e y en X tales que $y \notin \{x\}$, es decir, $x \neq y$. Luego, $(x, y) \notin \Delta$. Por consiguiente, existe $U \in \mathcal{U}$ simétrico, tal que $(x, y) \notin U$. Esto implica que $x \notin U[y]$, de modo que $U[y] \cap \{x\} = \emptyset$. Así, $\{x\}^c$ es abierto en X . Por lo tanto, X es T_1 . Esto concluye la demostración. \square

Con la topología uniforme ya caracterizada, podemos encontrar en las uniformidades una base con mejores características: entourages simétricos y cerrados. Antes de ello, caracterizaremos las clausuras de los entourages de una uniformidad.

Teorema 2.1.4. *Sean (X, \mathcal{U}) un espacio uniforme, U un entourage, y \mathcal{B} una base de \mathcal{U} . Entonces*

$$\overline{U} = \bigcap_{V \in \mathcal{B}} (V \circ U \circ V).$$

Demostración. Sea $(x, y) \in \overline{U}^c$, luego existe $V_{(x,y)}$ vecindad de (x, y) tal que $V_{(x,y)} \subseteq \overline{U} = \emptyset$, es decir, $V_{(x,y)} \cap U = \emptyset$. Sean V_x y V_y vecindades de x e y respectivamente, tales que $V_x \times V_y \subseteq V_{(x,y)}$. Esto implica que existen entourages U y V tales que $U[x] \subseteq V_x$ y $V[y] \subseteq V_y$. Sea $W \in \mathcal{U}$ simétrico tal que $W[x] \subseteq V_x$ y $W[y] \subseteq V_y$. Luego, tenemos que $(W[x] \times W[y]) \cap U = \emptyset$. Esto nos dice que $(x, y) \notin W \circ U \circ W$. En efecto, si suponemos que $(x, y) \in W \circ U \circ W$, entonces existe $(p, q) \in U$ tal que $(x, p) \in W$ y $(q, y) \in W$. Aquello implica que $p \in W[x]$ y $q \in W[y]$, de modo que $(p, q) \in (W[x] \times W[y]) \cap U$, lo que es una contradicción. Así, hemos probado que $\bigcap_{V \in \mathcal{B}} (V \circ U \circ V) \subseteq \overline{U}$.

Sean $(a, b) \in \overline{U}$ y $V \in \mathcal{B}$. Veamos que $(a, b) \in V \circ U \circ V$. Sea W un entourage simétrico tal que $W \subseteq V$. Esto implica que $(W[a] \times W[b]) \cap U \neq \emptyset$, sea $(a, b) \in (W[x] \times W[y]) \cap U$. Luego, tenemos que $(a, x) \in W$, $(y, b) \in W$, y $(x, y) \in U$,

es decir, $(a, b) \in W \circ U \circ W$. Por consiguiente, $(a, b) \in V \circ U \circ V$, por lo que $(a, b) \in \bigcap_{V \in \mathcal{B}} (V \circ U \circ V)$. Esto completa la demostración. \square

Teorema 2.1.5. *Todo espacio uniforme admite una base de entourages simétricos y cerrados.*

Demostración. Sean (X, \mathcal{U}) espacio uniforme y \mathcal{B} una base para \mathcal{U} consistente de entourages simétricos. Definimos

$$\bar{\mathcal{B}} = \{\bar{V} \mid V \in \mathcal{B}\}.$$

Por el teorema precedente, tenemos que $\bar{V} = \bigcap_{W \in \mathcal{B}} (W \circ V \circ W)$, y como $W \circ V \circ W$ es simétrico, para cada V y W en \mathcal{B} , entonces \bar{V} también lo es. Finalmente, para cada $U \in \mathcal{B}$, existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $V \circ V \circ V \subseteq U$, por lo que $\bar{V} \subseteq V \circ V \circ V \subseteq U$. Esto prueba que $\bar{\mathcal{B}}$ es una base, lo que concluye la demostración. \square

2.2. Continuidad Uniforme

En esta sección, (X, \mathcal{U}) , (Y, \mathcal{V}) y (Z, \mathcal{W}) denotarán espacios uniformes.

A continuación estableceremos un tipo de función entre espacios uniformes, que nos permitirá relacionarlo con la continuidad bajo la topología uniforme, y generalizará la continuidad uniforme de funciones entre espacios métricos.

Definición 2.2.1. Sean (X, \mathcal{U}) e (Y, \mathcal{V}) espacios uniformes. Diremos que una función $f : X \rightarrow Y$ es *uniformemente continua* (o también *\mathcal{U} -uniformemente continua*), si y solo si, para cada $V \in \mathcal{V}$, existe $U \in \mathcal{U}$, tal que para todo $(x, y) \in U$, se tiene $(f \times f)(x, y) \in V$, donde $f \times f : X \times X \rightarrow Y \times Y$ denota, aquí y en lo que sigue, la función definida por $(f \times f)(x, y) = (f(x), f(y)) \in V$.

Teorema 2.2.1. *Sean (X, \mathcal{U}) e (Y, \mathcal{V}) espacios uniformes, $f : X \rightarrow Y$ una función, y \mathcal{B} una base de \mathcal{V} . Entonces, las tres condiciones siguientes son equivalentes:*

- (I) $f : X \rightarrow Y$ es uniformemente continua,
- (II) para todo $U \in \mathcal{B}$, la imagen inversa $(f \times f)^{-1}(U)$ es un entourage en X , y
- (III) para todo $V \in \mathcal{V}$, la imagen inversa $(f \times f)^{-1}(V)$ es un entourage en X .

Demostración. Supongamos primero que f es uniformemente continua, y sea $U \in \mathcal{B}$. Luego, existe $W \in \mathcal{U}$ tal que $W \subseteq (f \times f)^{-1}(U)$. Como \mathcal{U} es un filtro y W es un entourage, entonces $(f \times f)^{-1}(U)$ también lo es.

Asumamos válida la condición (II). Sea $V \in \mathcal{V}$. Luego, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subseteq V$ y entonces $(f \times f)^{-1}(B) \subseteq (f \times f)^{-1}(V)$. Por el mismo razonamiento anterior, tenemos que $(f \times f)^{-1}(V) \in \mathcal{U}$.

Finalmente, supongamos que la imagen inversa de todo entourage en Y , bajo $f \times f$, es un entourage en X . Sea $V \in \mathcal{V}$, luego $(f \times f)^{-1}(V) \in \mathcal{U}$, por lo que existe $U \in \mathcal{U}$, a saber $U = (f \times f)^{-1}(V)$, tal que $U \subseteq (f \times f)^{-1}(V)$. Es decir, si $(x, y) \in U$, entonces $(f(x), f(y)) \in V$. Esto prueba lo deseado. \square

Ejemplos:

- La función identidad $I : (X, \mathcal{U}) \rightarrow (X, \mathcal{U})$ es uniformemente continua.
- Toda función constante entre espacios uniformes es uniformemente continua.
- Toda función definida sobre el espacio uniforme discreto es uniformemente continua.
- Toda función entre espacios métricos que es uniformemente continua en el sentido métrico, es uniformemente continua según Definición 2.2.1. Más aún, dichos conceptos son equivalentes en un espacio métrico.

El teorema anterior nos permite relacionar la continuidad con la continuidad uniforme.

Proposición 2.2.1. *Sea $f : (X, \mathcal{U}) \rightarrow (Y, \mathcal{V})$ función uniformemente continua. Entonces f es continua respecto a las topologías uniformes.*

Demostración. Supongamos que $f : X \rightarrow Y$ es uniformemente continua. Sean $a \in X$, y $V \in \mathcal{V}$. Veamos que $a \in \text{Int}(f^{-1}(V[f(a)]))$. Observemos que

$$\begin{aligned} f^{-1}(V[f(a)]) &= \{x \in X \mid f(x) \in V[f(a)]\} \\ &= \{x \in X \mid (f(a), f(x)) \in V\}. \end{aligned}$$

Sea $U \in \mathcal{U}$ tal que $(u, v) \in U$ implica $(f(u), f(v)) \in V$. Luego, $U[a] \subseteq (f \times f)^{-1}(V[f(a)])$, de modo que $\text{Int}(U[a]) \subseteq (f \times f)^{-1}(V[f(a)])$. Esto prueba que f es continua en a , lo que concluye la demostración. \square

Una propiedad de las funciones uniformemente continuas, análoga al caso de funciones continuas, es aquella relativa a la composición de estas funciones. La detallamos a continuación.

Proposición 2.2.2. *La composición de funciones uniformemente continuas es uniformemente continua.*

Demostración. Sean $f : (X, \mathcal{U}) \rightarrow (Y, \mathcal{V})$ y $g : (Y, \mathcal{V}) \rightarrow (Z, \mathcal{W})$ funciones uniformemente continuas. Sea $W \in \mathcal{W}$. Para probar que $((g \circ f) \times (g \circ f))^{-1}(W) \in \mathcal{U}$, usaremos el hecho que

$$(g \circ f) \times (g \circ f) = (g \times g) \circ (f \times f),$$

y que $(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$, para todo $A \subseteq Z$, cuya demostración es inmediata. Así, tenemos que

$$\begin{aligned} ((g \circ f) \times (g \circ f))^{-1}(W) &= ((g \times g) \circ (f \times f))^{-1}(W) \\ &= (f \times f)^{-1}((g \times g)^{-1}(W)). \end{aligned}$$

Luego, $(g \times g)^{-1}(W) \in \mathcal{V}$, por lo que $(f \times f)^{-1}((g \times g)^{-1}(W)) \in \mathcal{U}$. Esto concluye la demostración. \square

Definición 2.2.2. Sea $f : X \rightarrow Y$. Diremos que f es un *homeomorfismo uniforme*, si y solo si, f es biyectiva, y tanto f como f^{-1} son funciones uniformemente continuas.

Una similitud de los homeomorfismos con los homeomorfismos uniformes se detalla en la siguiente proposición.

Proposición 2.2.3. *Sean (X, \mathcal{U}) e (Y, \mathcal{V}) espacios uniformes $f : X \rightarrow Y$ una función biyectiva. Entonces, f es un homeomorfismo uniforme, si y solo si, se verifica*

$$\mathcal{V} = \{(f \times f)(U) \mid U \in \mathcal{U}\}.$$

Demostración. Supongamos que f es un homeomorfismo uniforme. Sea $U \in \mathcal{U}$. Como f^{-1} es uniformemente continua, existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $V \subseteq (f \times f)(U)$, esto implica que $(f \times f)(U) \in \mathcal{V}$, con lo cual se tiene que $\{(f \times f)(U) \mid U \in \mathcal{U}\} \subseteq \mathcal{V}$. Sean $V \in \mathcal{V}$ y $U = (f \times f)^{-1}(V)$. Por la continuidad uniforme de f , tenemos que $U \in \mathcal{U}$ y además, $(f \times f)(U) = V$. Esto prueba la otra inclusión y entonces $\mathcal{V} = \{(f \times f)(U) \mid U \in \mathcal{U}\}$.

Recíprocamente, supongamos que $\mathcal{V} = \{(f \times f)(U) \mid U \in \mathcal{U}\}$. Sean $U \in \mathcal{U}$ y $V = (f \times f)(U)$. Luego, como $f \times f$ es biyectiva, tenemos que $(f \times f)^{-1}(V) = U \in \mathcal{U}$. Es decir, f es uniformemente continua. Análogamente, como $(f^{-1} \times f^{-1})^{-1}(U) = V \in \mathcal{V}$, se tiene que f^{-1} es uniformemente continua. Esto concluye la demostración. \square

Definición 2.2.3. Sean \mathcal{U}_1 y \mathcal{U}_2 dos uniformidades sobre X . Diremos que \mathcal{U}_1 es *más fina* que \mathcal{U}_2 , si la función identidad $I : (X, \mathcal{U}_1) \rightarrow (X, \mathcal{U}_2)$ es uniformemente continua. Además, diremos que la uniformidad \mathcal{U}_1 es *más gruesa* que \mathcal{U}_2 , si la función identidad $I : (X, \mathcal{U}_2) \rightarrow (X, \mathcal{U}_1)$ es uniformemente continua.

Observemos que si \mathcal{U}_1 es más fina que \mathcal{U}_2 , entonces $\mathcal{U}_2 \subseteq \mathcal{U}_1$. Esto es inmediato de la definición anterior.

Como veremos en la siguiente proposición, una estructura uniforme más fina hereda una topología uniforme más fina.

Proposición 2.2.4. Sean \mathcal{U}_1 y \mathcal{U}_2 dos uniformidades sobre X . Si \mathcal{U}_1 es más fina que \mathcal{U}_2 , entonces la topología uniforme de \mathcal{U}_1 es más fina que la topología uniforme de \mathcal{U}_2 .

Demostración. Sean τ_1 y τ_2 las topologías uniformes de \mathcal{U}_1 y \mathcal{U}_2 , respectivamente. Sean $A \in \tau_2$, y $x \in A$. Luego, existe $U \in \mathcal{U}_2$ tal que $U[x] \subseteq A$, y como $U \in \mathcal{U}_1$, entonces $A \in \tau_1$. Esto completa la demostración. \square

De forma similar a los espacios topológicos y otras estructuras, sobre un producto cartesiano de espacios uniformes será posible construir una uniformidad producto. Lo abordaremos con detalle en el siguiente teorema.

Teorema 2.2.2. Sean X un conjunto, $\{(Y_\lambda, \mathcal{V}_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ una familia de espacios uniformes, para cada $\lambda \in \Lambda$, $f_\lambda : X \rightarrow Y_\lambda$ una función, $g_\lambda = f_\lambda \times f_\lambda$, y \mathcal{B} la familia de

todas las intersecciones finitas

$$g_{\lambda_1}^{-1}(V_1) \cap \cdots \cap g_{\lambda_r}^{-1}(V_r),$$

donde $V_i \in \mathcal{V}_{\lambda_i}$ para cada $i \in \{1, \dots, r\}$. Entonces, \mathcal{B} es una base para una uniformidad, \mathcal{U}_Λ , sobre X . Además, se verifican las dos condiciones siguientes:

- (I) \mathcal{U}_Λ es la uniformidad más gruesa sobre X , para la cual f_λ es uniformemente continua, para todo $\lambda \in \Lambda$, y
- (II) para cada espacio uniforme (Z, \mathcal{W}) y cada función $h : Z \rightarrow X$, se tiene que h es uniformemente continua, si y solo si, $h \circ f_\lambda$ es uniformemente continua, para cada $\lambda \in \Lambda$.

Demostración. Se verifica fácilmente que \mathcal{B} es una base para una uniformidad, \mathcal{U}_Λ , sobre X . Además, la condición (I) se obtiene de Teorema 2.2.1.

Si h es uniformemente continua, entonces por Proposición 2.2.2, $h \circ f_\lambda$ es uniformemente continua, para todo $\lambda \in \Lambda$. Recíprocamente, supongamos que $h \circ f_\lambda$ es uniformemente continua, para todo $\lambda \in \Lambda$. Sean $\lambda \in \Lambda$, y $U = g_\lambda^{-1}(V)$ un elemento de \mathcal{B} . Tenemos que

$$\begin{aligned} (h \times h)^{-1}(g_\lambda^{-1}(V)) &= (h \times h)^{-1}((f_\lambda \times f_\lambda)^{-1}(V)) \\ &= ((f_\lambda \times f_\lambda) \circ (h \times h))^{-1}(V) \\ &= ((f_\lambda \circ h) \times (f_\lambda \circ h))^{-1}(V) \end{aligned}$$

pertenece a \mathcal{U}_Λ , por lo que h es uniformemente continua. Esto completa la demostración. \square

Definición 2.2.4. La estructura uniforme definida en el teorema anterior la llamaremos *uniformidad generada* por la familia de funciones $\{f_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$.

Corolario 2.2.1. Sean (X, \mathcal{U}) un espacio uniforme, $\{(Y_\lambda, \mathcal{V}_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ una familia de espacios uniformes, y $f_\lambda : X \rightarrow Y_\lambda$ una función, para cada $\lambda \in \Lambda$. Si f_λ es uniformemente continua, para todo $\lambda \in \Lambda$, entonces $\mathcal{U}_\Lambda \subseteq \mathcal{U}$.

Definición 2.2.5. Sea $\{(X_\lambda, \mathcal{U}_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ una familia de espacios uniformes. Definimos el *espacio producto uniforme* como el producto cartesiano $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$, dotado de la estructura uniforme generada por la familia de funciones $\{\pi_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, donde

$$\pi_\lambda : \prod_{\gamma \in \Lambda} X_\gamma \rightarrow X_\lambda,$$

es la proyección usual, para cada $\lambda \in \Lambda$.

Observación. Por el teorema precedente, obtenemos que $f : Y \rightarrow \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ es uniformemente continua, si y solo si, para cada $\lambda \in \Lambda$, $\pi_\lambda \circ f$ es uniformemente continua.

Proposición 2.2.5. Sea d una pseudométrica sobre un espacio uniforme (X, \mathcal{U}) . Entonces d es uniformemente continua, si y solo si, para cada $r > 0$, el conjunto

$$U_r = \{(x, y) \in X \times X \mid d(x, y) < r\}$$

es un entourage.

Demostración. Supongamos que d es uniformemente continua. Consideremos en \mathbb{R} la estructura uniforme $\mathcal{U}_{\mathbb{R}} = \{U_r\}_{r>0}$, con la base métrica $U_r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid |x - y| < r\}$. Notemos que

$$(d \times d)^{-1}(U_r) = \{((x, y), (u, v)) \in (X \times X) \times (X \times X) \mid |d(x, y) - d(u, v)| < r\}.$$

Como d es uniformemente continua, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $(\pi_X \times \pi_X)^{-1}(U) \subseteq (d \times d)^{-1}(U_r)$. Es decir, para todos $(x, y) \in U$ e $(y, v) \in U$, se tiene $|d(x, y) - d(u, v)| < r$. En particular, para $u = v = y$. Así, $d(x, y) < r$. Esto prueba que $U \subseteq U_r$, de modo que U_r es un entourage.

Recíprocamente, supongamos que U_r es un entourage, para cada $r > 0$. Sean (x, y) y (u, v) en U_r . Luego, $d(x, y) \leq d(x, u) + d(u, v) + d(v, y)$, de modo que $|d(x, y) - d(u, v)| < 2r$. Como $U_{r/2} \in \mathcal{U}$, entonces $U_{r/2} \subseteq (d \times d)^{-1}(U_r)$, por lo que d es uniformemente continua. Concluye así la demostración. \square

2.3. Completitud y Compacticidad

Abordaremos en esta sección las propiedades topológicas principales que caracterizan la compacticidad de una topología uniforme. Para eso, al igual que en espacios métricos, necesitamos introducir conceptos de convergencia, precompacticidad y completitud. Observaremos la similitud existente entre estos conceptos y los correspondientes en el caso métrico.

Definición 2.3.1. Sean X un espacio topológico y \mathcal{B} una base de filtro en X . Diremos que \mathcal{B} converge a $x_0 \in X$, si y solo si, para toda V vecindad de x_0 , existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subseteq V$.

Definición 2.3.2. Sean (X, \mathcal{U}) un espacio uniforme y \mathcal{B} una base de filtro en X . Diremos que \mathcal{B} es una *base de filtro de Cauchy* (o *fundamental*), si y solo si, para cada $U \in \mathcal{U}$, existe $A \in \mathcal{B}$ tal que $A \times A \subseteq U$.

Proposición 2.3.1. Si \mathcal{B} es una base de filtro en (X, \mathcal{U}) convergente hacia $x \in X$, entonces \mathcal{B} es una base de filtro de Cauchy.

Demostración. Sean U y V en \mathcal{U} tales que $V \circ V^{-1} \subseteq U$. Como \mathcal{B} converge hacia x , existe $A \in \mathcal{B}$ tal que $A \subseteq U[x]$. Veamos que $A \times A \subseteq U$. Sea $(u, v) \in A \times A$, entonces $(x, u) \in V$ y $(v, x) \in V^{-1}$. Así, $(u, v) \in V \circ V^{-1} \subseteq U$, por lo que \mathcal{B} es de Cauchy. \square

Notemos que si \mathcal{B} y \mathcal{C} son bases de filtro en X , \mathcal{B} está subordinada a \mathcal{C} y esta es de Cauchy, entonces \mathcal{B} también es de Cauchy.

Definición 2.3.3. Diremos que un espacio uniforme (X, \mathcal{U}) es *completo*, si y solo si, toda base de filtro de Cauchy, en X , es convergente.

Proposición 2.3.2. Sea (X, \mathcal{U}) un espacio uniforme completo y $F \subseteq X$ cerrado. Entonces, (F, \mathcal{U}_F) es completo.

Demostración. Sea \mathcal{B} una base de filtro de Cauchy en F . Luego, como \mathcal{B} es de Cauchy en X , existe $x \in X$ tal que \mathcal{B} converge hacia x . Como F es cerrado, entonces $x \in F$. Esto concluye la demostración. \square

Proposición 2.3.3. Sea (X, \mathcal{U}) un espacio uniforme Hausdorff con la topología uniforme. Si $F \subseteq X$ es tal que (F, \mathcal{U}_F) es completo, entonces F es cerrado en X .

Demostración. Sea \mathcal{B} base de filtro en F que converge hacia $x \in C$. Luego, \mathcal{B} es de Cauchy en F , de modo que \mathcal{B} converge hacia y , para algún $y \in F$. Como X es Hausdorff, se tiene que $x = y$, de modo que $x \in F$. Por lo tanto, F es cerrado. \square

Definición 2.3.4. Sea (X, \mathcal{U}) un espacio uniforme. Diremos que X es *precompacto* (o *totalmente acotado*), si y solo si, para cada $U \in \mathcal{U}$, existen x_1, \dots, x_n en X tales que

$$X = U[x_1] \cup \dots \cup U[x_n],$$

o dicho de otro modo, $X = U[\{x_1, \dots, x_n\}]$. Este último conjunto también lo escribiremos como $U[x_1, \dots, x_n]$.

A continuación, caracterizamos la precompacidad mediante ultrafiltros.

Proposición 2.3.4. *Sea (X, \mathcal{U}) un espacio uniforme. Entonces, X es precompacto, si y solo si, todo ultrafiltro en X es de Cauchy.*

Demostración. Supongamos que X es precompacto. Sean \mathcal{W} un ultrafiltro en X y U un entourage. Luego, existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $V \circ V^{-1} \subseteq U$. Por hipótesis, existen x_1, \dots, x_n en X tales que

$$X = V[x_1, \dots, x_n].$$

como \mathcal{W} es un ultrafiltro, existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $V[x_i] \in \mathcal{W}$. Veamos que $V[x_i] \times V[x_i] \subseteq U$. En efecto, $V[x_i] \times V[x_i] \subseteq V \circ V^{-1} \subseteq U$. Así, \mathcal{W} es de Cauchy.

Para la segunda parte de la demostración, suponemos que X no es totalmente acotado. Luego, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que, para todo subconjunto finito $F = \{x_1, \dots, x_n\}$ de X , se verifica que $X \not\subseteq U[F]$. Podemos así, de manera inductiva, construir una sucesión $(x_n : n \in \mathbb{N})$ en X , tal que $x_{n+1} \notin U[x_1, \dots, x_n]$. Sean $B_n = \{x_k \in X \mid k \geq n\}$ y $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Como \mathcal{B} es totalmente ordenado respecto a la inclusión, tenemos que \mathcal{B} es una base de filtro en X . Sea \mathcal{F} el filtro con base \mathcal{B} , es decir,

$$\mathcal{F} = \{F \in 2^X \setminus \{\emptyset\} \mid (\exists B \in \mathcal{B})(B \subseteq F)\}.$$

Claramente, para todo $B \in \mathcal{F}$, $B \cap B_1 \neq \emptyset$. Luego, existe $x_m \in B \cap B_1$, tal que $x_m \notin B_{m+1}$, y $B_{m+1} \cap B \neq \emptyset$. Así, existe $p \geq 1$ tal que $x_{m+p} \in B_{m+1} \cap B$. Luego, $(x_m, x_{m+p}) \in B \times B$, lo cual es una contradicción, puesto que $(x_m, x_{m+p}) \notin U$. Por

consiguiente, \mathcal{W} no es un filtro de Cauchy, de modo que existe un ultrafiltro que no es de Cauchy. Esto concluye la demostración. \square

Corolario 2.3.1. *Sea (X, \mathcal{U}) un espacio uniforme. Entonces, X es totalmente acotado, si y solo si, para cada base de filtro \mathcal{B} en X , existe una base de filtro de Cauchy, \mathcal{C} , en X , tal que \mathcal{C} está subordinada a \mathcal{B} .*

Demostración. Supongamos que X es totalmente acotado. Sean \mathcal{B} base de filtro y \mathcal{F} un ultrafiltro en X , tales que $B \subseteq F$. Como \mathcal{F} es de Cauchy, entonces \mathcal{F} está subordinada a \mathcal{B} .

Recíprocamente, sea \mathcal{F} un ultrafiltro. Como \mathcal{F} es una base de filtro, entonces existe una base de filtro de Cauchy, \mathcal{C} , tal que \mathcal{C} está subordinada a \mathcal{F} . Al ser \mathcal{F} maximal, \mathcal{F} está subordinada a \mathcal{C} , y por tanto \mathcal{F} es de Cauchy. Esto concluye la demostración. \square

Teorema 2.3.1. *Sea (X, \mathcal{U}) un espacio uniforme. Entonces, X es compacto, si y solo si, X es precompacto y completo.*

Demostración. Supongamos que X es compacto. Como $\{\text{Int}(U[x])\}_{x \in X}$ es un cubrimiento abierto de X , existen x_1, \dots, x_r en X que cubren X . De este modo, tenemos que

$$X = \text{Int}(U[x_1]) \cup \dots \cup \text{Int}(U[x_r]) \subseteq U[x_1, \dots, x_r].$$

Así, X es precompacto. Para demostrar la completitud, sea \mathcal{B} una base de filtro de Cauchy. Como X es compacto, entonces \mathcal{B} posee al menos un punto de acumulación, $x \in X$, es decir, $x \in \bigcap_{B \in \mathcal{B}} \overline{B}$. Veamos que \mathcal{B} converge hacia x . Sea V una vecindad de x , luego, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $U[x] \subseteq V$, con U cerrado en $X \times X$. Como \mathcal{B} es de Cauchy, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \times B \subseteq U$ y, como x es punto de acumulación de \mathcal{B} , entonces $x \in \overline{B}$. Por consiguiente:

$$\overline{B} \times B \subseteq \overline{B \times B} \subseteq \overline{U} = U,$$

de modo que $\{x\} \times B \subseteq U$ y entonces $B \subseteq U[x] \subseteq V$. Esto implica que \mathcal{B} converge hacia x .

Recíprocamente, supongamos que X es precompacto y completo. Sea \mathcal{F} un ultrafiltro en X . Como X es precompacto, por Proposición 2.3.4, \mathcal{F} es de Cauchy, por

lo que converge en X , pues X es completo. Por lo tanto, X es compacto, con lo que se completa la demostración. \square

2.4. Metrización

La principal caracterización que tienen los espacios uniformes tiene relación con pseudo métricas. Esta caracterización nos permitirá estudiar contracciones de correspondencias en espacios uniformes en el siguiente capítulo. Además, podremos determinar condiciones en las cuales un espacio topológico es uniformizable.

La demostración del siguiente lema de pseudo metrización será abordada en el apéndice

Lema 2.4.1. *Sea X un conjunto no vacío, y $(U_n : n \in \mathbb{N})$ una sucesión de subconjuntos de $X \times X$ tales que $U_0 = X \times X$, y para cada $n \in \mathbb{N}$, se cumple que $\Delta \subseteq U_n$, y $U_{n+1} \circ U_{n+1} \circ U_{n+1} \subseteq U_n$. Entonces, existe una función $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ tal que:*

(I) *Para todo x, y y z en X , $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, y*

(II) *para cada $n \in \mathbb{N}$, $U_n \subseteq \{(x, y) \in X \times X \mid d(x, y) < 1/2^n\} \subseteq U_{n+1}$.*

Además, si U_n es simétrico, para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces d es una pseudo métrica.

Demostración. Ver apéndice. \square

Corolario 2.4.1. *Sea (X, \mathcal{U}) un espacio uniforme. Si \mathcal{U} posee una base a lo más numerable, entonces, X es pseudo metrizable. Si X es Hausdorff, entonces es metrizable.*

Demostración. Sea $\mathcal{B} = \{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ una base a lo más numerable para \mathcal{U} . Para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos suponer que V_n es simétrico, por Teorema 2.1.1, y que además verifiquen

$$V_{n+1} \circ V_{n+1} \circ V_{n+1} \subseteq V_n,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Por Lema 2.4.1, existe una pseudo métrica d en X , tal que

$$V_n \subseteq \left\{ (x, y) \in X \times X \mid d(x, y) < \frac{1}{2^{n-1}} \right\},$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea

$$U_n = \left\{ (x, y) \in X \times X \mid d(x, y) < \frac{1}{2^n} \right\},$$

luego, $V_n \subseteq U_n \subseteq V_{n+1}$. Por Proposición 2.2.4, \mathcal{B} y $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ generan la misma topología. Como \mathcal{B} posee elementos simétricos, entonces d es una pseudo métrica, con lo que se obtiene que X es pseudo metrizable.

Si X es Hausdorff, entonces $\Delta = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$. Luego, $d(x, y) = 0$ implica que $(x, y) \in U_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Por consiguiente, $(x, y) \in \Delta$. Por lo tanto, d es una métrica o, de manera equivalente, X es metrizable. Esto completa la demostración. \square

Definición 2.4.1. Sea \mathfrak{D} una familia de pseudo métricas sobre X . Diremos que \mathfrak{D} es *separadora*, si y solo si, para cada x e y en X distintos, existe $d \in \mathfrak{D}$ tal que $d(x, y) > 0$. Además, diremos que \mathfrak{D} es *saturada*, si y solo si, para cada p y q en \mathfrak{D} , existe $r \in \mathfrak{D}$ tal que $\max\{p(x, y), q(x, y)\} \leq r(x, y)$, para cada x e y en X . Denotaremos por $\tau_{\mathfrak{D}}$ a esta topología.

Una familia de pseudométricas \mathfrak{D} provee a X de una topología natural, $\tau_{\mathfrak{D}}$, que tiene como subbase la familia $\{B_d(a, \epsilon); a \in X, \epsilon > 0, d \in \mathfrak{D}\}$, donde $B_d(a, \epsilon) = \{x \in X : d(x, a) < \epsilon\}$. Además, los elementos de la base son intersecciones finitas de dichas bolas.

Proposición 2.4.1. Sea \mathfrak{D} una familia de pseudométricas en X . Entonces, \mathfrak{D} es separadora, si y solo si, la topología $\tau_{\mathfrak{D}}$ es Hausdorff.

Demostración. Supongamos que \mathfrak{D} es separadora. Sean x e y en X tales que $x \neq y$. Luego, existe $d \in \mathfrak{D}$ tal que $d(x, y) > 0$. Para $\epsilon = d(x, y)/2$, se tiene $B_d(x, \epsilon) \cap B_d(y, \epsilon) = \emptyset$. Así, $\tau_{\mathfrak{D}}$ es Hausdorff.

Recíprocamente, si \mathfrak{D} no es separadora, entonces existen x e y en X diferentes tales que $d(x, y) = 0$, para toda $d \in \mathfrak{D}$. Sean U y V vecindades de x e y , respectivamente. Luego, existen $\epsilon > 0$ y $d_1, \dots, d_n \in \mathfrak{D}$ tal que

$$B_{d_1}(x, \epsilon) \cap \dots \cap B_{d_n}(x, \epsilon) \subseteq U.$$

Como $y \in B_{d_1}(x, \epsilon) \cap \dots \cap B_{d_n}(x, \epsilon)$, entonces $y \in U$, con lo cual se tiene que $y \in U \cap V \neq \emptyset$. En consecuencia, $\tau_{\mathfrak{D}}$ no es Hausdorff. Esto completa la demostración. \square

Proposición 2.4.2. *Sea \mathfrak{D} una familia saturada de pseudo métricas sobre X . Entonces, la familia*

$$\{B_d(a, \delta) \mid a \in X, \delta > 0, d \in \mathfrak{D}\}$$

es una base para $\tau_{\mathfrak{D}}$.

Demostración. Sean $x \in X$ y V vecindad de x . Luego, existen d_{r_1}, \dots, d_{r_n} en \mathfrak{D} y $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ números reales positivos, tales que

$$\bigcap_{i=1}^n B_{d_{r_i}}(x, \epsilon_i) \subseteq V.$$

Para d_{r_1} y d_{r_2} , existe $p_1 \in \mathfrak{D}$ tal que $p_1 \geq \max\{d_{r_1}, d_{r_2}\}$. De manera recursiva, podemos encontrar una pseudo métrica $p \in \mathfrak{D}$, tal que $p \geq \max\{d_{r_1}, \dots, d_{r_n}\}$. Sea $\epsilon = \min\{\epsilon_i \mid 1 \leq i \leq n\}$. Luego,

$$B_p(x, \epsilon) \subseteq \bigcap_{i=1}^n B_{d_{r_i}}(x, \epsilon_i),$$

pues si $y \in B_p(x, \epsilon)$, entonces $p(x, y) < \epsilon$. Por consiguiente, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, $d_{r_i}(x, y) \leq p(x, y) < \epsilon$, y $\epsilon < \epsilon_i$, de modo que $y \in B_{d_{r_i}}(x, \epsilon_i)$, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Así, tenemos que $B_p(x, \epsilon) \subseteq V$. Esto concluye la demostración. \square

Los problemas de metrización (y pseudo metrización) fueron estudiados por Alexandroff y Urysohn en [1]. Dichos resultado tienen como consecuencia el siguiente teorema, que será de gran utilidad para el estudio de correspondencias en espacios uniformes. A. Weil, quien también fue precursor de dichos espacios, estudió en [40] la existencia de un homeomorfismo uniforme entre un espacio uniforme y un subespacio del producto cartesiano de espacios pseudo métricos.

Teorema 2.4.1. *Sea (X, \mathcal{U}) un espacio uniforme y Hausdorff. Entonces, existe una familia separadora de pseudométricas, \mathfrak{D} , con elementos uniformemente continuos, que generan la uniformidad \mathcal{U} .*

Demostración. Sean \mathfrak{D} la familia de todas las pseudo métricas uniformemente continuas en X , y $\mathcal{B} = \{U_{d, \epsilon}\}_{d \in \mathfrak{D}, \epsilon > 0}$, donde

$$U_{d, \epsilon} = \{(x, y) \in X \times X \mid d(x, y) < \epsilon\}.$$

Es inmediato, de Proposición 2.1.1, que \mathcal{B} es base de alguna uniformidad $\mathcal{U}_{\mathcal{B}}$ en X . Como d es \mathcal{U} -uniformemente continua, por Proposición 2.2.5, $U_{d,\epsilon} \in \mathcal{U}$, para todo $d \in \mathfrak{D}$ y $\epsilon > 0$. Esto implica que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{U}$, de modo que $\mathcal{U}_{\mathcal{B}} \subseteq \mathcal{U}$.

Recíprocamente, sean $U \in \mathcal{U}$, $U_0 = X \times X$, $U_0 = U_1$ y $(U_n; n \in \mathbb{N})$ la sucesión definida inductivamente por $U_{n+1} = U_n \circ U_n \circ U_n$, para $n \geq 1$. Por Lema 2.4.1, existe una pseudo métrica $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ que satisface

$$U_n \subseteq \{(x, y) \in X \times X : d(x, y) < 1/2^n\} \subseteq U_{n-1}, \text{ para cada } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Sean $r > 0$, $V_r = \{(x, y) \in X \times X : d(x, y) < 1/2^n\}$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/2^n < r$. Luego, $U_n \subseteq V_r$, por consiguiente, $V_r \in \mathcal{U}$, y en consecuencia, $d \in \mathfrak{D}$. Por otra parte, como $V_{1/4} \subseteq U_1 = U$, se tiene que U pertenece a la uniformidad generada por \mathcal{B} . Esto demuestra que $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{\mathcal{B}}$, y por consiguiente \mathcal{U} es generada por \mathcal{B} . Como $\tau_{\mathfrak{D}}$ es Hausdorff, se tiene que \mathfrak{D} es separadora, completándose la demostración. \square

Definición 2.4.2. Sea (X, τ) un espacio topológico. Diremos que X es *uniformizable*, si y solo si, existe una uniformidad \mathcal{U} en X cuya topología uniforme coincide con τ .

Definición 2.4.3. Sea X un espacio topológico. Diremos que X es *completamente regular*, si y solo si:

- (I) X es Hausdorff, y
- (II) para todo cerrado F en X y $p \in X \setminus F$, existe una función continua $\phi : X \rightarrow [0, 1]$ tal que $\phi(p) = 1$ y $\phi(x) = 0$ para todo $x \in F$.

Teorema 2.4.2. *Sea X un espacio topológico Hausdorff. Entonces, X es uniformizable, si y solo si, X es completamente regular.*

Demostración. Supongamos que X posee una uniformidad \mathcal{U} . Por el teorema precedente, existe una familia de pseudo métricas, \mathfrak{D} , que genera la uniformidad, y sus elementos son uniformemente continuos. Sean $a \in X$ y G una vecindad de a . Luego, existen $d_1, \dots, d_r \in \mathfrak{D}$ y $\epsilon > 0$ tales que $\bigcap_{i=1}^r B_{d_i}(a, \epsilon) \subseteq G$. En consecuencia, $\{x \in X \mid \max_{1 \leq i \leq r} d_i(a, x) < \epsilon\} \subseteq G$. Definimos la función $\phi_a : X \rightarrow [0, 1]$ como

$$\phi_a(x) = \min \left\{ 1, \max_{1 \leq i \leq r} d_i(x, a)/\epsilon \right\},$$

la cual es continua en todo X . Además, $\phi_a(a) = 0$ y $\phi_a(x) = 1$, para cada $x \in G^c$. Esto prueba que X es completamente regular.

Recíprocamente, supongamos que X es completamente regular. Sea $\rho : X \rightarrow [0, 1]^{C(X, [0, 1])}$ dada por $\rho(a) : C(X, [0, 1]) \rightarrow [0, 1]$, con $\rho(a)(f) = f(a)$. Como X es completamente regular, entonces ρ es inyectiva. Por consiguiente, $\rho(X)$ es homeomorfo a un subespacio de $Y = [0, 1]^{C(X, [0, 1])}$, el cual es uniformizable debido a que Y lo es, por ser producto de espacios uniformes. Así, $\rho(X)$ es uniformizable, y en consecuencia, X también lo es. Esto completa la demostración. \square

Teorema 2.4.3. *Sean (X, \mathcal{U}) espacio uniforme compacto, y d una pseudo métrica. Entonces, para cada vecindad V de Δ , se tiene $V \in \mathcal{U}$, y si d es continua, entonces es uniformemente continua.*

Demostración. Sean V una vecindad de Δ y $\mathcal{B} = \{U \in \mathcal{U} \mid U \text{ es cerrado en } X\}$. Sea $(x, y) \in \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U$. Como $(x, x) \in \Delta$, existe G abierto en $X \times X$ tal que $(x, x) \in G$, con $G \subseteq \Delta$. Sean W vecindad de x y $U \in \mathcal{B}$ tales que $W \times W \subseteq G$, y $U[x] \subseteq W$. Luego, $y \in U[x]$, de modo que $(x, y) \in U[x] \times U[x]$, y $U[x] \times U[x] \subseteq W \times W \subseteq V$. Así, hemos probado que $\bigcap_{B \in \mathcal{B}} B \subseteq V$. Como cada $U \in \mathcal{B}$ es compacto, entonces existen U_1, \dots, U_n en \mathcal{B} tales que

$$\bigcap_{i=1}^n U_i \subseteq V,$$

de modo que $V \in \mathcal{U}$.

Finalmente, supongamos que d es continua. Para cada $r > 0$, el conjunto $\{(x, y) \in X \times X \mid d(x, y) < r\}$ es una vecindad de Δ , por lo que pertenece a \mathcal{U} . Por Proposición 2.2.5, d es uniformemente continua. Esto concluye la demostración. \square

Corolario 2.4.2. *Sean (X, \mathcal{U}) , (Y, \mathcal{V}) espacios uniformes, X compacto y $f : X \rightarrow Y$ continua. Entonces, f es uniformemente continua.*

Demostración. Sean \mathfrak{D}_1 una familia de pseudo métricas que genera la uniformidad \mathcal{V} , $d' \in \mathfrak{D}_1$, $r > 0$ y $V = \{(x, y) \in Y \times Y \mid d'(x, y) < r\}$. Luego, V es un elemento de

una base para \mathcal{V} y

$$\begin{aligned} (f \times f)^{-1}(V) &= \{(u, v) \in X \times X \mid d'(f(u), f(v)) < r\} \\ &= \{(u, v) \in X \times X \mid (d \circ (f \times f))(u, v) < r\}. \end{aligned}$$

Como $d' \circ (f \times f)$ es una pseudo métrica uniformemente continua, entonces $(f \times f)^{-1}(V) \in \mathcal{U}$. Esto completa la demostración. \square

Concluimos esta sección de espacios uniformes con un importante resultado, cuya breve demostración da cuenta de la fortaleza de los resultados ya vistos.

Teorema 2.4.4. *Todo espacio topológico compacto es uniformizable.*

Demostración. Sea X compacto. Luego, X es normal, y por ende es completamente regular. Por Teorema 2.4.2, X es uniformizable. Esto concluye la demostración. \square

2.5. Uniformización de Cerrados y Acotados

En esta sección, (X, \mathcal{U}) denotará un espacio uniforme de Hausdorff, el cual, por el lema de pseudo metrización, supondremos generado por una familia de pseudo métricas $\{d_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$. De modo que podemos suponer $\mathcal{U} = \{U_{\lambda, \epsilon}\}_{\lambda \in \Lambda}$, donde $U_{\lambda, \epsilon} = \{(x, y) \in X \times X : d_\lambda(x, y) < \epsilon\}$.

A continuación, definiremos una condición de acotamiento en espacios uniformes, que extenderá el acotamiento en espacios métricos. Este concepto, presentado en [4], resulta apropiado para los propósitos de esta tesis.

Definición 2.5.1. Sea $A \subseteq X$. Diremos que A es acotado, si y solo si, para todo $(\lambda, \epsilon) \in \Lambda \times (0, \infty)$, existen un conjunto finito $F \subseteq X$ y $m \in \mathbb{N}$ tales que $A \subseteq U_{\lambda, \epsilon}^m[F]$, donde $U_{\lambda, \epsilon}^m = U_{\lambda, \epsilon} \circ \dots \circ U_{\lambda, \epsilon}$ m -veces.

Denotaremos por $\mathcal{CB}(X)$ el hiperespacio de subconjuntos cerrados y acotados de (X, \mathcal{U}) .

Observación. Si $K \subseteq X$ es compacto, entonces $K \in \mathcal{CB}(X)$. En efecto, como K es precompacto, entonces, para todo $U \in \mathcal{U}$, existe un conjunto finito $F \subseteq X$ tal que $K \subseteq U[F]$.

Basado en las propiedades topológicas de (X, \mathcal{U}) , es de interés definir una uniformidad sobre el conjunto $\mathcal{CB}(X)$. Para tal efecto, mediante aplicación directa de los Lemas 1.3.1 y 1.3.2, se tiene que la función $h_\lambda : \mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(X) \rightarrow [0, \infty)$ dada por

$$h_\lambda(A, B) = \sup_{a \in A} d_\lambda(a, B),$$

con $d_\lambda(x, A) = \inf_{a \in A} d_\lambda(x, a)$, verifica lo siguiente:

(I) $h_\lambda(A, C) \leq h_\lambda(A, B) + h_\lambda(B, C)$, y

(II) $h_\lambda(A, B) = 0$, si y solo si, $A \subseteq \overline{B}$,

de donde se obtiene que, para cada $\lambda \in \Lambda$, la función $H^\lambda : \mathcal{CB}(X) \times \mathcal{CB}(X) \rightarrow [0, \infty)$ dada por

$$H^\lambda(A, B) = \max\{h_\lambda(A, B), h_\lambda(B, A)\}$$

es una pseudo métrica sobre $\mathcal{CB}(X)$. Además, la familia $\{H^\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ es separadora. En efecto, si $A, B \in \mathcal{CB}(X)$ son diferentes, entonces existe $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Sin pérdida de generalidad, suponemos que $x \in A$. Como $\{d_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ es separadora y B es cerrado, entonces existe $\lambda \in \Lambda$ tal que $d_\lambda(x, B) > 0$. Luego,

$$0 < d_\lambda(x, B) \leq H^\lambda(A, B),$$

lo cual demuestra que $\{H^\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ es separadora.

Sobre $(2^X \setminus \{\emptyset\}) \times (2^X \setminus \{\emptyset\})$, la familia $\mathcal{H}(X) = \{H_U\}_{U \in \mathcal{U}}$, donde

$$H_U = \{(A, B) \in (2^X \setminus \{\emptyset\}) \times (2^X \setminus \{\emptyset\}) \mid A \subseteq U[B] \text{ y } B \subseteq U[A]\},$$

es base de alguna uniformidad sobre $2^X \setminus \{\emptyset\}$. Llamamos $\mathcal{H}(X)$ -topología a la topología uniforme sobre $2^X \setminus \{\emptyset\}$ que esta base genera.

Capítulo 3

Teoría Topológica del Punto Fijo

Uno de los objetivos de este capítulo consiste en definir y estudiar una estructura que generaliza los espacios normados, y a la vez son un ejemplo importante de espacios uniformes: los espacios vectoriales topológicos. En el contexto de esta tesis, la importancia del estudio de estos espacios radica en desarrollo de teoremas de punto fijo sobre un espacio base con una estructura diferente a un espacio métrico. Basado en el teorema del punto fijo de Brouwer, publicado en el siglo XX, la teoría de punto fijo, sobre espacios vectoriales topológicos, ha tenido un crecimiento importante.

Por la importancia de la teoría topológica del punto fijo, en este capítulo, desarrollaremos los axiomas y definiciones elementales de un espacio vectorial topológico. Además, caracterizaremos los espacios vectoriales de dimensión finita, con su única topología según la cual éstos son normados, y analizaremos las propiedades básicas de la convexidad local. Luego, introduciremos el concepto de correspondencia KKM, concepto importante en el estudio de las consecuencias y generalidades del teorema del punto fijo de Brouwer.

Las primeras secciones, consistentes en conceptos introductorios y propiedades, están basadas en el texto de Rudin [37], mientras que varios de los resultados, de la última sección, se encuentran en los textos de Aliprantis [2] y Granas y Dugundji [26], como también en los artículos de Dugundji y Granas [17], Fan [19, 20], Glicksberg [25], y Tychonoff [39].

3.1. Espacios Vectoriales Topológicos

En lo que sigue de este capítulo, \mathbb{K} denotará el cuerpo \mathbb{R} o \mathbb{C} , y $\mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{0\}$.

Sean X un espacio vectorial sobre \mathbb{K} , A y B subconjuntos de X , $\lambda \in \mathbb{K}$ y $x \in X$. Denotaremos los siguientes conjuntos notables:

- $\lambda A = \{\lambda v \mid v \in A\}$,
- $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$, y
- $x + B = \{x + b \mid b \in B\}$.

Bajo esta convención, no siempre será válido que $2A = A + A$, para $A \subseteq X$, pero sí $2A \subseteq A + A$, como es fácil de ver.

Definición 3.1.1. Sean X un espacio vectorial sobre \mathbb{K} y $A \subseteq X$. Diremos que

- A es *convexo*, si y solo si, para todo $t \in [0, 1]$, $tA + (1 - t)A \subseteq A$,
- A es *balanceado*, si y solo si, para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $|\lambda| \leq 1$, se tiene $\lambda A \subseteq A$,
y
- A es *simétrico*, si y solo si, $A = -A$.

Es directo que todo conjunto balanceado es simétrico, pero el recíproco no es válido.

Definición 3.1.2. Diremos que X es un *espacio vectorial topológico* (EVT), si y solo si, existe una topología en X , llamada topología vectorial, tal que

- Para todo $x \in X$, $\{x\}$ es cerrado. Es decir, X es T_1 , y
- las funciones suma y producto por escalar, dadas por $+$: $X \times X \rightarrow X$ y \cdot : $\mathbb{K} \times X \rightarrow X$, son continuas en $X \times X$ y $\mathbb{K} \times X$, respectivamente.

Ejemplos.

- Todo espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio vectorial topológico. Esto con la topología métrica inducida por la norma $\|\cdot\|$.

- Sea Ω un dominio sobre \mathbb{C} . El espacio de funciones holomorfas sobre Ω , denotado por $H(\Omega)$, es un espacio vectorial topológico con la suma y producto usual de funciones. La topología vectorial de $H(\Omega)$ no es normable (ver [37]).
- Sean $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ el espacio de funciones continuas reales y $d : C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \times C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ la métrica invariante por traslaciones, dada por

$$d(f, g) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n(f, g)}{2^n(1 + d_n(f, g))},$$

donde $d_n(f, g) = \sup_{-n \leq t \leq n} |f(t) - g(t)|$. Con esta métrica, la suma y producto por escalar son funciones continuas por la topología inducida por d .

Un resultado básico importante es el siguiente.

Proposición 3.1.1. *Sean X un espacio vectorial topológico, $a \in X$ y $\lambda \in \mathbb{K}^*$. Entonces, las funciones $T_a : X \rightarrow X$ y $H_\lambda : X \rightarrow X$ dadas por $T_a(x) = x + a$ y $H_\lambda(x) = \lambda x$, son homeomorfismos sobre X .*

Demostración. Es fácil ver que para todo $a \in X$ y $\lambda \in \mathbb{K}^*$, T_a y H_λ son biyectivas con inversas T_{-a} y $H_{\lambda^{-1}}$ respectivamente. Basta entonces probar que T_a y H_λ son continuas.

Sean $x \in X$ y W vecindad de $T_a(x)$. Como la suma es continua, existen A_1 y A_2 vecindades de x y a , respectivamente, tales que para todo $(u, v) \in A_1 \times A_2$, se tiene $u + v \in W$. Veamos que $A_1 \subseteq T_a^{-1}(W)$. En efecto, sea $z \in A_1$, luego, $z + a \in W$. Por consiguiente, $T_a(z) \in W$, es decir, $z \in T_a^{-1}(W)$. Esto prueba que T_a es continua, y por ende, T_{-a} también lo es.

Análogamente, sea W vecindad de $H_\lambda(x)$. Como la multiplicación por escalar es continua, existen A_1 y A_2 vecindades de λ y x , respectivamente, tales que para todo α en A_1 y $w \in A_2$, se tiene $\alpha w \in W$. Veamos que $A_2 \subseteq H_\lambda^{-1}(W)$. En efecto, sea $z \in A_2$, luego $\lambda z \in W$. Por consiguiente, $H_\lambda(z) \in W$, es decir, $z \in H_\lambda^{-1}(W)$. Esto prueba que H_λ es continua. Concluye así la demostración. \square

Teorema 3.1.1. *Sea X un espacio vectorial. Luego, topológico.*

(I) $A \subseteq X$ es abierto, si y solo si, para todo $x \in X$, $x + A$ es abierto,

- (II) la topología de X queda completamente determinada por una base local de 0 ,
- (III) si A o B es abierto en X , entonces $A + B$ es abierto en X , y
- (IV) si W es una vecindad de 0 y $(\alpha_n : n \in \mathbb{N})$ una sucesión en $(0, \infty)$ que tiende hacia infinito, entonces

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \alpha_n W.$$

Demostración. (I) Esto es inmediato, porque de acuerdo a lo anterior T_x es un homeomorfismo.

(II) Sean \mathcal{B} una base local de 0 , $x \in X$ y W vecindad de x . Luego, $-x + W$ es una vecindad de 0 . Por consiguiente, existe $A \in \mathcal{B}$ tal que $A \subseteq -x + W$, es decir, $A + x \subseteq W$. Por lo tanto, una base para la topología está dada por $\{x + B; x \in X, B \in \mathcal{B}\}$, la cual solo depende de \mathcal{B} .

(III) Observemos que

$$A + B = \bigcup_{a \in A} a + B = \bigcup_{b \in B} A + b,$$

es directo de esta identidad y de 1 que si A o B es abierto en X , entonces $A + B$ lo es.

(IV) Sean $x \in X$ y V vecindad de 0 . Como la sucesión $(x/\alpha_n : n \in \mathbb{N})$ en X converge a 0 , existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x/\alpha_N \in V$. Así, $x \in \alpha_N V$, y $\alpha_N V \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \alpha_n V$. Esto completa la demostración. □

Por los resultados anteriores, una topología vectorial es invariante por traslaciones. En lo que sigue, el concepto de base local será referido a una base local en 0 .

Proposición 3.1.2. *Todo espacio vectorial topológico es uniformizable.*

Demostración. Sea X un EVT. Sea $U_V = \{(x, y) \in X \times X \mid x - y \in V\}$. La colección

$$\mathcal{B} = \{U_V \mid V \text{ es vecindad de } 0\}$$

es base de alguna uniformidad en X . En efecto, notemos que $\Delta \subseteq U_V$, para cada V vecindad de 0, de modo que $\emptyset \notin \mathcal{B}$. Además, si U_V y U_W pertenecen a \mathcal{B} , entonces $(x, y) \in U_V \cap U_W$, si y solo si, $x - y \in V \cap W$, es decir, $U_V \cap U_W = U_{V \cap W} \in \mathcal{B}$. Así, \mathcal{B} es una base de filtro.

Sea $U_V \in \mathcal{B}$. Como $-V$ es una vecindad de 0, entonces $U_{-V} \subseteq U_V^{-1}$. En efecto, sea $(x, y) \in U_{-V}$, esto implica que $x - y \in -V$, es decir, $y - x \in V$. Luego, $(y, x) \in U_V$, de modo que $(x, y) \in U_V^{-1}$. Finalmente, sean $U_V \in \mathcal{B}$ y W vecindad de 0 tal que $W + W \subseteq V$. Sea $(x, y) \in U_W \circ U_W$. Luego, existe $z \in W$ tal que $x - z$ y $z - y$ pertenecen a W . Por consiguiente, $x - y \in W + W$, de modo que $(x, y) \in U_V$. Por lo tanto, \mathcal{B} es una base de uniformidad, lo que concluye la demostración. \square

Proposición 3.1.3. *Sean X un espacio vectorial topológico y $A \subseteq X$.*

(I) *Si A es balanceado, entonces \overline{A} también lo es. Más aún, si $0 \in A$, entonces $\overset{\circ}{A}$ es balanceado, y*

(II) *si A es convexo, entonces \overline{A} y $\overset{\circ}{A}$ son convexos.*

Demostración. (I) Sea $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tal que $|\lambda| \leq 1$. Luego, como $\lambda A = M_\lambda(A)$ y el producto por escalar es continuo, tenemos que

$$M_\lambda(\overline{A}) \subseteq \overline{M_\lambda(A)} = \overline{\lambda A} \subseteq \overline{A},$$

por lo que \overline{A} es balanceado. Por otro lado, si $0 \in A$, entonces el caso particular $\lambda = 0$ se verifica. Si $\lambda \neq 0$, entonces

$$M_\lambda(\overset{\circ}{A}) \subseteq (M_\lambda(\overset{\circ}{A})) = \overset{\circ}{\lambda A} \subseteq \overset{\circ}{A}.$$

Esto prueba que $\overset{\circ}{A}$ es balanceado.

(II) Sean $A \subseteq X$ convexo y $\lambda \in [0, 1]$. Como $\lambda \overset{\circ}{A} + (1 - \lambda) \overset{\circ}{A}$ es abierto en X , entonces

$$\lambda \overset{\circ}{A} + (1 - \lambda) \overset{\circ}{A} \subseteq \lambda A + (1 - \lambda) A \subseteq A.$$

Por consiguiente, $\lambda \overset{\circ}{A} + (1 - \lambda) \overset{\circ}{A} \subseteq \overset{\circ}{A}$. Finalmente, como la función $f : X \times X \rightarrow X$ dada por $f(x, y) = \lambda x + (1 - \lambda)y$ es continua, entonces

$$f(\overline{A} \times \overline{A}) = \overline{f(A \times A)} \subseteq \overline{f(A \times A)} \subseteq \overline{A},$$

pues $f(A \times A) \subseteq A$. Por lo tanto, \overline{A} es convexo. Esto completa la demostración. \square

Proposición 3.1.4. *Sea X un espacio vectorial topológico.*

- (I) *Si V es una vecindad de 0, existe U vecindad de 0 balanceada tal que $U \subseteq V$, y*
- (II) *si V es una vecindad de 0 convexa, existe U vecindad de 0 convexa y balanceada tal que $U \subseteq V$.*

Demostración. (I) Sea V una vecindad de 0. Como el producto por escalar es continuo en $(0, 0)$, existen W vecindad de 0 y $\delta > 0$ tales que $\lambda W \subseteq V$, para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $|\lambda| < \delta$. Sea $U = \bigcup_{|\lambda| < \delta} \lambda W$. Luego, U es una vecindad de 0 balanceada, y $U \subseteq V$.

- (II) Sean V y W vecindades de 0 tales que $W \subseteq V$ con V es convexa y W balanceada, lo cual es posible por 1. Sea $A = \bigcap_{|\lambda|=1} \lambda V$. Para $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $|\lambda| = 1$, se tiene $\lambda W \subseteq W$, lo que implica $W \subseteq \lambda^{-1}W$. Por consiguiente, $\lambda^{-1}W \subseteq W$ pues $|\lambda^{-1}| = 1$, y entonces $W \subseteq \lambda W$. Así, $\lambda^{-1}W = W$. Luego, $\lambda^{-1}W \subseteq V$, por lo que $W \subseteq \lambda V$, para todo λ tal que $|\lambda| = 1$. Es decir, $W \subseteq A$, de modo que $0 \in \overset{\circ}{A}$. Además, como A es intersección de conjuntos convexos, entonces A es convexo. Como $A \subseteq V$, entonces $\overset{\circ}{A} \subseteq V$, y por Proposición 3.1.3, $\overset{\circ}{A}$ es convexo. Veamos que A es balanceado. Sea $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $|\lambda| \leq 1$. Luego, $\lambda = \rho e^{i\theta}$, para algún $\rho \in [0, 1]$ y $\theta \in [0, 2\pi[$. Así,

$$\lambda A = \bigcap_{|\alpha|=1} \rho e^{i\theta} \alpha V = \bigcap_{|\alpha|=1} \rho \alpha V = A,$$

de modo que A es balanceado, y por tanto $\overset{\circ}{A}$ también lo es. Esto completa la demostración. \square

Definición 3.1.3. *Sea X un espacio vectorial topológico. Diremos que X es localmente convexo, si y solo si, para todo $x \in X$ y V vecindad de x , existe W vecindad convexa de x tal que $W \subseteq V$.*

Por proposición precedente, todo espacio topológico posee una base local balanceada. Además, si X es localmente convexo, entonces X posee una base local balanceada y convexa.

Definición 3.1.4. Sean X un espacio vectorial topológico y $A \subseteq X$. Diremos que A es *acotado*, si y solo si, para toda vecindad V de 0, existe $t > 0$ tal que $A \subseteq tV$.

Caracterizamos, a continuación, los conjuntos acotados en términos de sucesiones en X .

Proposición 3.1.5. Sean X un espacio vectorial topológico y $A \subseteq X$. Entonces, A es acotado, si y solo si, para toda sucesión $(x_n : n \in \mathbb{N})$ en A y $(\alpha_n : n \in \mathbb{N})$ en \mathbb{K} convergente a 0, se tiene que $\alpha_n x_n$ converge a 0.

Demostración. Supongamos que A es acotado. Sean $(x_n : n \in \mathbb{N})$ y $(\alpha_n : n \in \mathbb{N})$ sucesiones en A y \mathbb{K} , respectivamente, tal que α_n converge a 0. Sea V vecindad de 0 balanceada. Como A es acotado, existe $t > 0$ tal que $A \subseteq tV$. Luego, $\alpha_n A \subseteq \alpha_n tV$. Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha_N t \leq 1$. Para todo $n \geq N$, $\alpha_n A \subseteq \alpha_n tV \subseteq 1V = V$. Así, $\alpha_n x_n \in V$, para todo $n \geq N$. Por tanto, $\alpha_n x_n$ converge a 0.

Finalmente, supongamos que A no es acotado. Luego, existe V vecindad de 0 y una sucesión $(a_n : n \in \mathbb{N})$ en \mathbb{K} que converge a ∞ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $A \not\subseteq a_n V$. Así, existe x_n en A tal que $x_n \notin a_n V$. Sea $\alpha_n = 1/a_n$, luego, $(\alpha_n : n \in \mathbb{N})$ converge a 0. Como la sucesión $(\alpha_n x_n : n \in \mathbb{N})$ está contenida en V^c , entonces no converge a 0. Esto completa la demostración. \square

Proposición 3.1.6. Sea X un espacio vectorial topológico.

- (I) Si $K \subseteq X$ es compacto, entonces K es acotado, y
- (II) si V es una vecindad de 0 y $(\alpha_n : n \in \mathbb{N})$ es una sucesión en $(0, \infty)$, decreciente y convergente hacia 0, entonces $\{\alpha_n V \mid n \in \mathbb{N}\}$ es una base local para X en 0.

Demostración. (I) Sea V vecindad de 0. Si V es balanceada, entonces $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} nV$. Luego, existen $n_1, \dots, n_m \in \mathbb{N}$ tales que

$$K \subseteq n_1 V \cup \dots \cup n_m V.$$

De este modo, $K \subseteq rV$, con $r = \max_{1 \leq i \leq m} n_i$. Así, K es acotado.

(II) Sea U vecindad de 0 balanceada. Luego, existe $t > 0$ tal que $V \subseteq tU$. Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha_N < 1/t$. Luego, $\alpha_N t < 1$ implica que $\alpha_N tU \subseteq U$. Por consiguiente, $\alpha_N tV \subseteq \alpha_N tU \subseteq U$. Por tanto, $\{\alpha_n V \mid n \in \mathbb{N}\}$ es una base local en 0. Esto completa la demostración. \square

3.2. Espacios Vectoriales de Dimensión Finita

En esta sección abordaremos propiedades particulares de los espacios de dimensión finita.

Lema 3.2.1. *Sean X un espacio vectorial topológico y F un subespacio vectorial de X localmente compacto. Entonces, E es cerrado en X .*

Demostración. Sea $x \in \overline{F}$. Como $0 \in F$, existe V vecindad de 0 tal que la clausura de V relativa a E , $K = F \cap \overline{V}$, es compacta. Sea U vecindad de 0 simétrica tal que $\overline{U} + \overline{U} \subseteq V$. Luego, $F \cap (x + U) \neq \emptyset$, pues $x + U$ es una vecindad de x . Sean y e y_0 en $F \cap (x + \overline{U})$, entonces $y - y_0 = (y - x) + (x - y_0)$. Como $y - x$ y $x - y_0$ pertenecen a \overline{U} , entonces $y - y_0 \in V \cap F$, de modo que $y - y_0 \in K$. De este modo, $y \in y_0 + K$, por lo que $F \cap (x + \overline{U}) \subseteq y_0 + K$. Así, $F \cap (x + \overline{U})$ es compacto, pues es un cerrado en $y_0 + K$, que es compacto por ser homeomorfo a K . Sea \mathcal{A} el conjunto de vecindades de 0 simétricas y que están contenidas en U . Se observa que, para todos W_1, \dots, W_r en \mathcal{A} ,

$$\emptyset \neq F \cap (x + W_1 \cap \dots \cap W_r) \subseteq F \cap (x + W_1) \cap \dots \cap F \cap (x + W_r).$$

Luego, $\{F \cap (x + \overline{W})\}_{W \in \mathcal{A}}$ es una familia de compactos con la propiedad de la intersección finita. Por consiguiente, existe $z \in E$ tal que

$$z \in \bigcap_{W \in \mathcal{W}} F \cap (x + \overline{W}).$$

Así, $z \in F$ y $z - x \in \overline{W}$, para todo $W \in \mathcal{W}$. Esto prueba que $x \in F$ y por lo tanto, F es cerrado en E . \square

Una caracterización de los funcionales lineales que generaliza el caso de espacios normados es la siguiente.

Proposición 3.2.1. *Sea $\Lambda : X \rightarrow \mathbb{K}$ un funcional lineal no nulo. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

- (I) Λ es continua,
- (II) $\text{Ker}(\Lambda)$ es cerrado, y
- (III) Λ es acotado en una vecindad de 0.

Demostración. Supongamos que Λ es continua. Luego, $\text{Ker}(\Lambda) = \Lambda^{-1}(\{0\})$ es cerrado, pues $\{0\}$ es cerrado en \mathbb{K} .

Supongamos que $\text{Ker}(\Lambda)$ es cerrado en X . Sean $x \in X$ y V vecindad de 0 balanceada tal que $(x + V) \cap \text{ker}(\Lambda) = \emptyset$. Se tiene que $\Lambda(V)$ es balanceado en \mathbb{K} . Si $\Lambda(V) = \mathbb{K}$, entonces $-\Lambda x \subseteq \Lambda(V)$. Luego, existe $y \in V$ tal que $-\Lambda x = \Lambda y$. Así, $\Lambda(x + y) = 0$, por lo que $x + y \in \text{ker}(\Lambda) \cap (x + V)$, lo que es una contradicción. Por tanto, $\Lambda(V)$ es acotado en \mathbb{K} .

Finalmente, sea V vecindad de 0 tal que $\Lambda(V)$ es acotado. Sea $\epsilon > 0$. Existe $M > 0$ tal que $|\Lambda v| \leq M$, para todo $v \in V$. Luego, $|\epsilon/2M \cdot \Lambda v| \leq \epsilon/2 < \epsilon$, es decir, $|\Lambda(\epsilon/2M)v| < \epsilon$. Así, $|\Lambda x| < \epsilon$, para todo $x \in (\epsilon/2M)V$. Por tanto, Λ es continua en 0, y en consecuencia Λ es continua. Esto concluye la demostración. \square

Proposición 3.2.2. *Sean X un espacio vectorial topológico, F subespacio vectorial de X finito-dimensional. Entonces, F es cerrado y todo isomorfismo lineal $\varphi : \mathbb{K}^n \rightarrow F$ es un homeomorfismo.*

Demostración. Sea $\varphi : \mathbb{K}^n \rightarrow F$ un isomorfismo lineal. Usaremos inducción sobre n .

Si $n = 1$, entonces, $\varphi(x) = x\varphi(1)$, para todo $x \in \mathbb{K}$, y $\varphi(1) \neq 0$. Luego, φ es continua, y $\varphi^{-1}(y) = y/\varphi(1)$ es también continua.

Supongamos que la afirmación es válida para $k < n$. Sean $\{e_1, \dots, e_n\}$ la base canónica de \mathbb{K}^n y $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. Luego $x = x_1e_1 + \dots + x_n e_n$. Por consiguiente, $\varphi(x) = x_1u_1 + \dots + x_n u_n$, donde $u_i = \varphi(e_i)$. Luego, φ es continua. Por otro lado, notemos que $\varphi^{-1} = (\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$, con $\Lambda_i : F \rightarrow \mathbb{K}$ funcional lineal, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Tenemos que

$$x = \Lambda_1(x)u_1 + \dots + \Lambda_n(x)u_n,$$

pues $\varphi^{-1}(x) = (\Lambda_1(x), \dots, \Lambda_n(x)) = \Lambda_1(x)e_1 + \dots + \Lambda_n(x)e_n$, de modo que

$$x = \varphi(\varphi^{-1}(x)) = \Lambda_1(x)\varphi(e_1) + \dots + \Lambda_n(x)\varphi(e_n).$$

Si $x \in \ker(\Lambda_i)$, entonces $x \in \mathbb{K}^{m_i}$, para $m_i \leq n - 1$. De este modo, $\varphi_i : \mathbb{K}^{m_i} \rightarrow \ker(\Lambda_i)$ es un homeomorfismo, por hipótesis inductiva. Además, $\ker(\Lambda_i)$ es localmente compacto, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ pues \mathbb{K}^{m_i} lo es. Por Lema 3.2.1, $\ker(\Lambda_i)$ es cerrado, y por Proposición 3.2.1, φ^{-1} es continua. Esto completa la demostración. \square

Proposición 3.2.3. *Sea X un espacio vectorial topológico localmente compacto. Entonces, X tiene dimensión finita.*

Demostración. Sea V vecindad de 0 tal que \overline{V} es compacto en X . Tenemos la relación

$$V \subseteq \overline{V} \subseteq \bigcup_{x \in X} (x + (1/2)V).$$

Luego, existen x_1, \dots, x_n en X tales que

$$V \subseteq \overline{V} \subseteq (x_1 + (1/2)V) \cup \dots \cup (x_n + (1/2)V) \subseteq \langle x_1 + \dots + x_n \rangle + (1/2)V.$$

Sea $F = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$. Tenemos que

$$F + (1/2)V \subseteq F + 1/2(F + (1/2)V) = F + (1/2)^2V \subseteq \dots \subseteq F + (1/2)^mV,$$

para todo $m \in \mathbb{N}$. Así, $V \subseteq \bigcap_{m \in \mathbb{N}} (F + (1/2)^mV) = \overline{F}$. Esto implica que $V \subseteq \overline{F} = F$, pues $\dim(F) = n$ y es localmente compacto. Sea $x \in X$, como $((1/n)x : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\})$ converge a 0, entonces, existe $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tal que $(1/N)x \in V$. Por consiguiente, $(1/N)x \in F$, de modo que $x \in NF$. Como $NF = F$, entonces $X = F$. Esto completa la demostración. \square

3.3. Convexidad Local

Definición 3.3.1. Una *seminorma* sobre un espacio vectorial X es una función $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ que verifica lo siguiente:

- Para todo x e y en X , $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$,
- para todo $x \in X$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, $p(\lambda x) = |\lambda|p(x)$.

De la definición, es directo que:

- p es una norma, si y solo si, $x \neq 0$ implica $p(x) \neq 0$,
- $p(0) = 0$,
- $|p(x) - p(y)| \leq p(x - y)$,
- $p(x) \geq 0$, y
- $\{x \in X \mid p(x) = 0\}$ es un subespacio vectorial de X .

Definición 3.3.2. Sea X un espacio vectorial. Diremos que un subconjunto $A \subseteq X$ es *absorbente*, si y solo si,

$$X = \bigcup_{\lambda > 0} \lambda A.$$

Definimos el *funcional de Minkowski* de A como la función $\mu_A : X \rightarrow [0, \infty)$ dada por

$$\mu_A(x) = \inf\{\lambda > 0 \mid x \in \lambda A\}.$$

Proposición 3.3.1. Sean X un espacio vectorial topológico, p una seminorma en X y $B = \{x \in X \mid p(x) < 1\}$. Entonces, B es convexo, balanceado y absorbente. Además, $p = \mu_B$.

Demostración. Sean x, y en B , y $\lambda \in [0, 1]$. Luego,

$$p(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda p(x) + (1 - \lambda)p(y) < 1,$$

de modo que B es convexo. Ahora, sean $\lambda \in \mathbb{K}$ y $x \in B$ tales que $|\lambda| \leq 1$. Luego, $p(\lambda x) = |\lambda|p(x) < 1$. Así, $\lambda x \in B$, de modo que B es balanceado.

Finalmente, sea $x \in B$ y $t > 0$ tal que $p(x) < t$. Esto implica $p((1/t)x) < 1$, de modo que $(1/t)x \in B$ y entonces $x \in tB$. Luego, $x \in \bigcup_{t > 0} tB$. Es decir, para todo $t > p(x)$, $x \in tB$, por lo que $\mu_B(x) \leq t < p(x)$, y $\mu_B(x) \leq p(x)$. Ahora, sean $\epsilon > 0$ y t_ϵ tales que $\mu_B(x) \leq t_\epsilon \leq \mu_B(x) + \epsilon$, para $x \in t_\epsilon B$. Luego, $(1/t_\epsilon)x \in B$, es decir, $(1/t_\epsilon)p(x) < 1$. Por consiguiente, $p(x) < t_\epsilon < \mu_B(x) + \epsilon$. Por lo tanto, $\mu_B(x) = p(x)$, debido a que $\epsilon > 0$ es arbitrario. Esto completa la demostración. \square

Teorema 3.3.1. Sean X un espacio vectorial topológico y $A \subseteq X$ convexo, balanceado y absorbente. Entonces, μ_A es una seminorma en X .

Demostración. Sean x e y en X , $s > \mu_A(x)$ y $t > \mu_A(y)$. Luego, $x + y \in sA + tA$, lo que implica $\mu_A(x + y) \leq s + t$. Notemos que

$$sA + tA = (s + t)(s/s + tA + t/s + tA) \subseteq (s + t)A,$$

pues A es convexo. Así, $\mu_A(x + y) \leq s + t$, lo que implica $\mu_A(x + y) \leq \mu_A(x) + \mu_A(y)$. Ahora, sean $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in X$ y $t > \mu_A(x)$. Se tiene $x \in tA$, de modo que $\lambda x \in t\lambda A$. Por consiguiente, $\lambda x \in |\lambda|t\lambda/|\lambda|A \subseteq |\lambda|tA$. De este modo, $\mu_A(\lambda x) \leq |\lambda|t$, por lo que $\mu_A(\lambda x) \leq |\lambda|\mu_A(x)$. Finalmente, notemos que

$$\mu_A(x) = \mu_A(\lambda\lambda^{-1}x) \leq 1/|\lambda|\mu_A(\lambda x).$$

Por tanto, $|\lambda|\mu_A(x) \leq \mu_A(\lambda x)$. Esto completa la demostración. □

A continuación, abordaremos resultados similares a la caracterización de espacios uniforme en el contexto de espacios vectoriales topológicos, donde resaltaremos la importancia de las seminormas y el funcional de Minkowski.

Definición 3.3.3. Sea X un espacio vectorial y \mathcal{P} una familia de seminormas en X . Diremos que \mathcal{P} es *separadora*, si y solo si, para todo $x \in X \setminus \{0\}$, existe $p \in \mathcal{P}$ tal que $p(x) > 0$.

Teorema 3.3.2. Sea X un espacio vectorial topológico. Si X posee una base local convexa y balanceada, \mathcal{B} , entonces la familia

$$\mathcal{P} = \{\mu_A \mid A \in \mathcal{B}\}$$

es una familia separadora de seminormas continuas en X .

Demostración. Sea $x \in X \setminus \{0\}$. Luego, existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $x \notin V$, lo que implica que $\mu_V(x) \geq 1$. Así, \mathcal{P} es separadora. Sea $V \in \mathcal{B}$. Como el producto por escalar es continuo, si $x \in V$, existe $t < 1$ tal que $tx \in V$. Luego, $\mu_V(x) \leq t < 1$. Sean $\epsilon > 0$ y $V_0 = \epsilon V$. Si $x - y \in V_0$, entonces $1/\epsilon(x - y) \in V$, de modo que $\mu_V(1/\epsilon(x - y)) < 1$.

Por consiguiente, $\mu_V(x - y) < \epsilon$. De este modo,

$$|\mu_V(x) - \mu_V(y)| \leq \mu_V(x - y) < \epsilon,$$

siempre que $x - y \in V_0$. Esto completa la demostración. \square

A continuación, presentamos un importante resultado que caracteriza los espacios localmente convexos.

Teorema 3.3.3. *Sea X un espacio vectorial topológico. Entonces, X es localmente convexo, si y solo si, la topología de X es generada por una familia de seminormas separadoras.*

Demostración. Supongamos que X tiene una base local \mathcal{B} que es convexa y balanceada y sea $\mathcal{P} = \{\mu_V \mid V \in \mathcal{B}\}$. Sean τ y $\tau_{\mathcal{P}}$ las topologías vectoriales y la que tiene como sub base la familia $\{B_V(\epsilon)\}_{V \in \mathcal{B}, \epsilon > 0}$, respectivamente, donde $B_V(\epsilon) = \{x \in X \mid \mu_V(x) < \epsilon\}$. Por Teorema 3.3.2, para todo $V \in \mathcal{B}$, μ_V es continua y entonces, $\tau_{\mathcal{P}} \subseteq \tau$. Sea $V \in \mathcal{B}$. Luego, $V = \{x \in X \mid \mu_V(x) < 1\} \in \tau_{\mathcal{P}}$. Por consiguiente, $\tau = \tau_{\mathcal{P}}$.

Recíprocamente, supongamos que la topología vectorial de X está generada por una familia de seminormas separadora. Sean \mathcal{P} la familia de todas las seminormas sobre X y $p \in \mathcal{P}$. Luego, $V_p = \{x \in X \mid p(x) < \alpha\}$ es un conjunto convexo y abierto para la topología generada por p . Así, $\{V_p\}_{p \in \mathcal{P}}$ es una base local y convexa de X . Esto completa la demostración. \square

Una importante herramienta para determinar si un espacio vectorial topológico es normable (y en consecuencia metrizable) es el siguiente teorema.

Teorema 3.3.4. *Sea X un espacio vectorial topológico. Entonces, X es normable, si y solo si, existe V vecindad de 0 convexa y acotada.*

Demostración. Supongamos que $\|\cdot\|$ es una norma sobre X . Así, la bola unidad, $B(0, 1) = \{x \in X \mid \|x\| < 1\}$ es acotada. En efecto, si V es una vecindad de 0, existe $\delta > 0$ tal que $B(0, \delta) \subseteq V$. Así, $tB(0, \delta) = B(0, t\delta) \subseteq tV$. Si $t > 1/\delta$, entonces $t\delta > 1$, de modo que $B(0, 1) \subseteq tV$.

Recíprocamente, sea U vecindad de 0 convexa, acotada y balanceada. Definamos $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}$ como $\|x\| = \mu_U(x)$. Al ser U acotada, entonces $\{(1/n)U\}_{n \in \mathbb{N}}$ es

una base local en 0. Sea V vecindad de 0 tal que $x \notin V$. Esto implica $\mu_V(x) > 1$. Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $(1/n_0)U \subseteq V$, es decir, $U \subseteq n_0V$. Por consiguiente, $\mu_U(x) \geq \mu_{n_0V}(x) \geq 1/n_0$. Así, $\|x\| \neq 0$, para $x \neq 0$. Finalmente, como $U = \{x \in X \mid \|x\| < 1\}$, entonces $\{x \in X \mid \|x\| < r\} = rU$ es un abierto en X . Esto completa la demostración. \square

Definición 3.3.4. Diremos que un espacio vectorial topológico X es un *espacio de Fréchet*, si y solo si, X es localmente convexo y metrizable con una métrica completa, d , invariante por traslaciones. Es decir, para todo x, y, u en X ,

$$d(x + u, y + u) = d(x, y).$$

Definición 3.3.5. Sean X un espacio vectorial y $A \subseteq X$. Definimos la *envoltura convexa*, o *cáscara convexa* de A , como el conjunto

$$\text{co}(A) = \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C,$$

donde $\mathcal{C} = \{B \in \mathcal{P}(X) \mid B \text{ es convexo y } A \subseteq B\}$.

Es directo de su definición que la envoltura convexa es el conjunto convexo más pequeño que contiene A . En particular, la envoltura convexa de A puede caracterizarse de forma más accesible como

$$\text{co}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^r \lambda_i x_i \mid r \in \mathbb{N}, x_i \in A, \lambda_i \in \mathbb{K}, \sum_i \lambda_i = 1 \right\}.$$

Algunas propiedades de este conjunto son las siguientes.

Teorema 3.3.5. *Sea X un espacio vectorial topológico.*

- (I) *Si A_1, \dots, A_n son subconjuntos de X convexos y compactos, entonces $\text{co}(A_1 \cup \dots \cup A_n)$ es compacto,*
- (II) *si X es localmente convexo y $A \subseteq X$ es precompacto, entonces $\text{co}(A)$ es precompacto en X , y*
- (III) *si X es un espacio de Fréchet y $K \subseteq X$ es compacto, entonces $\text{co}(K)$ es compacto en X .*

Demostración. (I) Sean $A = A_1 \times \cdots \times A_n$, $S = \{(s_1, \dots, s_n) \in [0, 1]^n \mid s_1 + \cdots + s_n = 1\}$ y $f : S \times A \rightarrow X$ dada por

$$f(s, a) = s_1 a_1 + \cdots + s_n a_n,$$

para $s = (s_1, \dots, s_n)$ y $a = (a_1, \dots, a_n)$, f es continua y $S \times A$ es compacto, de modo que $f(S \times A)$ también lo es. Además, $f(S \times A) \subseteq \text{co}(A_1 \cup \cdots \cup A_n)$. Primero veamos que $f(S \times A)$ es convexo. Sean $(s, a), (t, b)$ en $S \times A$ y $\lambda \in [0, 1]$. Luego,

$$\lambda f(s, a) + (1 - \lambda)f(t, b) = \sum_{i=1}^n (\lambda s_i a_i + (1 - \lambda)t_i b_i) = \sum_{i=1}^n r_i c_i,$$

donde $r_i = \lambda s_i + (1 - \lambda)t_i$ y $r_1 + \cdots + r_n = 1$. Además, $c_i = \lambda s_i a_i + (1 - \lambda)t_i b_i / (\lambda s_i + (1 - \lambda)t_i) \in A_i$, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. En efecto,

$$\frac{\lambda s_i}{\lambda s_i + (1 - \lambda)t_i} + \frac{(1 - \lambda)t_i}{\lambda s_i + (1 - \lambda)t_i} = 1,$$

de este modo, $r_1 c_1 + \cdots + r_n c_n \in f(S \times A)$. Ahora, sean $a \in A_1 \cup \cdots \cup A_n$ y $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $a \in A_j$. Así, para $a_i \in A_i$ dado $i \in I = \{1, \dots, n\} \setminus \{j\}$, tenemos que

$$a = 1 \cdot a + \sum_{i \in I} 0 \cdot a_i \in f(S \times A),$$

por lo que $A_1 \cup \cdots \cup A_n \subseteq f(S \times A)$. Al ser $f(S \times A)$ un conjunto convexo que contiene $A_1 \cup \cdots \cup A_n$, se tiene que $\text{co}(A_1 \cup \cdots \cup A_n) \subseteq f(S \times A)$. Esto prueba la igualdad, de donde se concluye que $\text{co}(A_1 \cup \cdots \cup A_n)$ es compacto.

(II) Sean U y V vecindades de 0 tales que V es convexa y $V + V \subseteq U$. Como A es precompacto, existe $F \subseteq X$ finito tal que $A \subseteq F + V$. Luego, $A \subseteq \text{co}(F) + V$, y como $F = \bigcup_{x \in F} \{x\}$ es una unión finita de conjuntos compactos y convexos, entonces $\text{co}(F)$ es compacto. Esto implica que $\text{co}(F) + V$ es convexo, y por consiguiente $\text{co}(A) \subseteq \text{co}(F) + V$. Sea $F_1 \subseteq X$ finito tal que $\text{co}(F) \subseteq F_1 + V$. Luego, $\text{co}(A) \subseteq F_1 + V + V \subseteq F_1 + U$. Esto prueba que $\text{co}(A)$ es precompacto en X .

(III) Sea X un espacio de Fréchet y $K \subseteq X$ compacto. Por lo anterior, $\text{co}(K)$ es precompacto, y como X es completo, entonces $\text{co}(K)$ es relativamente compacto. Por lo tanto, $\text{co}(K)$ es compacto, pues $\text{co}(K)$ es cerrado. Esto completa la demostración. □

3.4. Aplicaciones del Teorema de Brouwer

En adelante, $\mathbb{D}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ denotará el disco unitario en \mathbb{R}^n .

En esta última sección abordaremos algunas consecuencias y desarrollo de la teoría topológica de punto fijo que dieron lugar al teorema de Brouwer. Este resultado lo enunciaremos a continuación, y su demostración será abordada en el apéndice.

Definición 3.4.1. Sean X un conjunto no vacío, $f : X \rightarrow X$ una función y $F : X \rightrightarrows X$ una correspondencia. Diremos que $z \in X$ es un *punto fijo* de f (respectivamente de T) si $f(z) = z$ (respectivamente $z \in Tz$). Definimos los siguientes conjuntos de interés.

(I) $\text{fix}(f) = \{x \in X \mid f(x) = x\}$, y

(II) $\text{Fix}(T) = \{x \in X \mid x \in Tx\}$.

Teorema 3.4.1 (Brouwer). *Toda función continua $f : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}^n$ posee un punto fijo.*

Demostración. Ver apéndice. □

El siguiente lema permite obtener resultados de punto fijo, para funciones de C en C , donde C es un subconjunto convexo y compacto de \mathbb{R}^n .

Lema 3.4.1. *Sean \mathcal{H} un espacio de Hilbert y $C \subseteq \mathcal{H}$ convexo, cerrado y no vacío. Entonces, existe una única función continua $\pi_C : \mathcal{H} \rightarrow C$, tal que para todo $x \in \mathcal{H}$, $d(x, C) = \|x - \pi_C(x)\|$.*

Demostración. Para todo $x \in \mathcal{H}$, $x - C$ es convexo, cerrado y no vacío. Por Lema de Riesz, existe único $u(x)$ tal que $\|u(x)\| = d(x, C)$. Sea $\pi_C : \mathcal{H} \rightarrow C$ dada por

$\pi_C(x) = x - u(x)$. Luego, $d(x, C) = \|x - \pi_C(x)\|$. Esto prueba existencia y unicidad de π_C .

Para la continuidad de π_C , sea $(x_n : n \in \mathbb{N})$ sucesión en \mathcal{H} convergente hacia $x \in \mathcal{H}$. Por la identidad del paralelogramo, tenemos que para $x \in \mathcal{H}$,

$$\begin{aligned} 2(\|x_n - \pi_C(x_n)\|^2 + \|x - \pi_C(x)\|^2) &= \|x_n + x - (\pi_C(x_n) - \pi_C(x))\|^2 \\ &\quad + \|x_n - x - (\pi_C(x_n) - \pi_C(x))\|^2 \\ &= 4\|1/2(x_n + x) - 1/2(\pi_C(x_n) + \pi_C(x))\|^2 \\ &\quad + \|x_n - x - (\pi_C(x_n) - \pi_C(x))\|^2 \\ &\geq 4d(1/2(x_n + x), C)^2 \\ &\quad + \|x_n - x - (\pi_C(x_n) - \pi_C(x))\|^2, \end{aligned}$$

pues C es convexo y $1/2(\pi_C(x_n) + \pi_C(x)) \in C$. Esto implica que

$$2d(x_n, C)^2 + 2d(x, C)^2 \geq 4d(1/2(x_n + x), C)^2 + (\|\pi_C(x_n) - \pi_C(x)\| - \|x_n - x\|)^2,$$

y tomando límite cuando $n \rightarrow \infty$.

$$4d(x, C)^2 \geq 4d(x, C)^2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \|\pi_C(x_n) - \pi_C(x)\|^2,$$

Así, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\pi_C(x_n) - \pi_C(x)\| = 0$, por lo que $(\pi_C(x_n) : n \in \mathbb{N})$ converge a $\pi_C(x)$. Esto completa la demostración. \square

Teorema 3.4.2. *Sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$ compacto y convexo. Entonces, toda función continua $f : C \rightarrow C$ posee un punto fijo.*

Demostración. Como C es acotado, existe $R > 0$ tal que $(1/R)C \subseteq \mathbb{D}^n$. Sean $B = (1/R)C$ y $r : \mathbb{D}^n \rightarrow B$ dada por $r(x) = \pi_B(x)$. Por Lema 3.4.1, r es continua y $r(x) = x$ para todo $x \in B$. Sea $g : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}^n$ dada por $g(x) = (1/R)(f(R \cdot r(x)))$. Tenemos que g es continua, luego, por teorema de Brouwer, existe $x_0 \in \mathbb{D}^n$ tal que $g(x_0) = x_0$. Esto implica que

$$g(x_0) = (1/R)f(R \cdot r(x_0)) = x_0 \in (1/R)C.$$

Así, $r(x_0) \in B$ y por consiguiente $R \cdot r(x_0) \in C$. Además, $x_0 \in B$, de modo que $r(x_0) = x_0$. Luego, $f(R \cdot x_0) = R \cdot x_0 \in C$ y entonces, $R \cdot x_0$ es el punto fijo buscado. Esto completa la demostración. \square

Definición 3.4.2. Sean X un espacio vectorial, $A \subseteq X$ y $G : A \rightrightarrows X$ una correspondencia. Diremos que G es una *correspondencia KKM* (Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz), si y solo si, para todo subconjunto finito $\{x_1, \dots, x_n\}$ de A , se tiene

$$\text{co}(\{x_1, \dots, x_n\}) \subseteq G(x_1) \cup \dots \cup G(x_n).$$

Ejemplo 3.1. Sean X un espacio vectorial, $C \subseteq X$ convexo y $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que $\{y \in X \mid \varphi(y) \leq \alpha\}$ es convexo, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. Sea $G : C \rightrightarrows X$ dada por

$$G(x) = \{y \in X \mid \varphi(y) \leq \varphi(x)\}.$$

Probaremos que G es una correspondencia KKM. Supongamos que no lo fuera. Luego, existen x_1, \dots, x_r en C y $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ en \mathbb{K} tales que

$$y_0 = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_r x_r \notin G(x_1) \cup \dots \cup G(x_r),$$

esto implica que $y_0 \in G(x_1)^c \cap \dots \cap G(x_r)^c$, lo que equivale a $y_0 \in \{y \in X \mid \varphi(y) \leq \varphi(x_i)\}^c$, para cada $i \in \{1, \dots, r\}$. Esto a su vez, es equivalente a $\varphi(y_0) > \varphi(x_i)$, para todo $i \in \{1, \dots, r\}$. Por consiguiente, x_1, \dots, x_r pertenecen a $\{x \in X \mid \varphi(x) < \varphi(y_0)\}$, el cual es convexo. Así, $y_0 \in \{x \in X \mid \varphi(x) < \varphi(y_0)\}$, por lo que $\varphi(y_0) < \varphi(y_0)$, lo que es una contradicción. Por tanto, G es una correspondencia KKM.

Definición 3.4.3. Sean X un espacio vectorial y $A \subseteq X$. Diremos que A es *finitamente cerrado*, si y solo si, para todo subespacio V de X de dimensión finita, $A \cap V$ es cerrado en V .

Notemos que todo subconjunto cerrado de X es finitamente cerrado.

A continuación presentamos uno de los resultados fundamentales de esta sección, abordado por Granas y Dugundji en [17], y que resulta ser una variante del teorema de Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz. En la literatura, el siguiente resultado se conoce como principio de la aplicación KKM.

Teorema 3.4.3 (Dugundji-Granas, [17]). *Sean X un espacio vectorial, $A \subseteq X$ y $G : A \rightrightarrows X$ una correspondencia KKM tal que $G(x)$ es finitamente cerrado para todo $x \in A$. Entonces, la familia $\{G(x)\}_{x \in A}$ satisface la propiedad de la intersección finita.*

Demostración. Supongamos que existen x_1, \dots, x_r en A tales que

$$G(x_1) \cap \dots \cap G(x_r) = \emptyset, \quad (\text{NPIF})$$

y sean $L = \langle x_1, \dots, x_r \rangle$ y $C = \text{co}(x_1, \dots, x_r) \subseteq L$. De forma natural, existe un homeomorfismo $\varphi : L \rightarrow \mathbb{R}^r$, lo que permite definir en L una métrica d' dada por

$$d'(x, y) = \|\varphi^{-1}(x) - \varphi^{-1}(y)\|.$$

Sean $\lambda : C \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\lambda(x) = \sum_{i=1}^r d'(x, G(x_i) \cap L)$. Por (NPIF), $\lambda(x) \neq 0$, para todo $x \in C$. Sea $f : C \rightarrow X$ dada por

$$f(x) = 1/\lambda(x) (d(x, G(x_1) \cap L)x_1 + \dots + d(x, G(x_r) \cap L)x_r).$$

Como $\lambda(x) = \sum_{i=1}^r d'(x, G(x_i) \cap L)$, $f(x)$ es una combinación lineal convexa, de modo que $f(x) \in C$. Sea $\mu_i(x) = d(x, G(x_i) \cap L)/\lambda(x)$, luego $f(x) = \mu_1(x)x_1 + \dots + \mu_r(x)x_r$, de modo que f es continua, ya que cada μ_i lo es. Así, por teorema de Brouwer, existe $x^* \in C$ tal que $f(x^*) = x^*$. Sea $I = \{i \in \{1, \dots, r\} \mid \mu_i(x^*) \neq 0\}$. Luego, $x^* \notin \bigcup_{i \in I} G(x_i)$, lo que contradice el hecho que $x^* \in \text{co}(\{x_i \mid i \in I\}) \subseteq \bigcup_{i \in I} G(x_i)$. Esto completa la demostración. \square

Cabe destacar que la validez del teorema anterior es para cualquier espacio vectorial X , sin necesidad de que este posea una topología vectorial.

Los siguientes dos teoremas y su corolario son consecuencias del principio de la aplicación KKM. Dichos resultados fueron demostrados por Fan en [19] y [20], respectivamente. Este último se le conoce en la literatura como desigualdad minimax.

Teorema 3.4.4 (Fan, [19]). *Sean X un espacio vectorial topológico, $C \subseteq X$ convexo y $G : C \rightrightarrows X$ tal que, para todo $x \in C$,*

$$(I) \quad x \in G(x),$$

(II) $G(x)$ es cerrado, y

(III) $G^{-1}(x)^c$ es convexo en C .

Entonces, $\bigcap_{x \in C} G(x) \neq \emptyset$.

Demostración. Sea $A : C \rightrightarrows C$ dada por $A(x) = G(x) \cap C$. Se tiene que A es una correspondencia KKM. En efecto, si no lo fuera, existirían x_1, \dots, x_r en C y $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ tales que

$$y_0 = \sum_{i=1}^r \lambda_i x_i \notin \bigcup_{j=1}^r A(x_j).$$

Esto implica que $y_0 \in \bigcap_{j=1}^r A(x_j)^c$, de modo que $(x_j, y_0) \notin \text{Gr}(A) \cap (C \times C)$, para todo $j \in \{1, \dots, r\}$ y entonces $y_0 \notin G(x_j) \cap C$. Así, $x_j \in G^{-1}(y_0)^c$, para todo $j \in \{1, \dots, r\}$. Como $G^{-1}(y_0)^c$ es convexo, entonces $y_0 \in G^{-1}(y_0)^c$, lo que implica $y_0 \notin G(y_0)$, que es una contradicción. Por lo tanto, $\bigcap_{x \in C} G(x) \neq \emptyset$. Esto concluye la demostración. \square

Teorema 3.4.5 (Fan, [20]). *Sean X un espacio topológico, $C \subseteq X$ compacto, convexo y $f : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

- (I) *para todo $x \in C$, la función $f(x, \cdot) : C \rightarrow \mathbb{R}$ es semicontinua inferior, y*
- (II) *$f(x, \cdot)$ es una función cuasi-cóncava, es decir, para todo $y \in C$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{x \in X \mid f(x, y) > \alpha\}$ es convexo.*

Entonces se verifica

$$\min_{y \in C} \sup_{x \in C} f(x, y) \leq \sup_{x \in C} f(x, x).$$

Demostración. Sea $\alpha = \sup_{x \in C} f(x, x)$ y supongamos que α es finito. Basta probar que $\bigcap_{x \in C} \{y \in X \mid f(x, y) \leq \alpha\} \neq \emptyset$. Sea $G : C \rightrightarrows X$ dada por

$$G(x) = \{y \in X \mid f(x, y) \leq \alpha\}.$$

Notemos que $G(x)$ es cerrado para todo $x \in C$, pues $f(x, \cdot)$ es semicontinua inferior. Además, G es una correspondencia KKM. En efecto, si no lo fuera, existirían x_1, \dots, x_r en C y $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ en \mathbb{R} tales que $\lambda_1 + \dots + \lambda_r = 1$ e $y_0 = \sum_{i=1}^r \lambda_i x_i \notin \bigcup_{j=1}^r G(x_j)$. Esto implica que $y_0 \in \bigcap_{j=1}^r G(x_j)^c$, de modo que $y_0 \in \{y \in C \mid f(x_i, y) >$

$\alpha\}$, para todo $i \in \{1, \dots, r\}$. Por consiguiente, $y_0 \in G(x_i)^c$, para cada $i \in \{1, \dots, r\}$. Luego, $x_i \in \{x \in C \mid f(x, y_0) > \alpha\}$. Así, $y_0 \in \{x \in C \mid f(x, y_0) > \alpha\}$, por lo que $\text{co}(x_1, \dots, x_r) \subseteq \{x \in C \mid f(x, y_0) > \alpha\}$. De esto, se tiene que $f(y_0, y_0) > \alpha$, lo que es una contradicción. Así, G es una correspondencia KKM y, entonces, por el principio de la aplicación KKM, $\{G(x)\}_{x \in C}$ tiene la propiedad de la intersección finita. En consecuencia, $\bigcap_{x \in C} G(x) \neq \emptyset$. Esto completa la demostración. \square

Corolario 3.4.1 (Fan, [20]). *Sean X un espacio vectorial, $C \subseteq X$ y $G : C \rightrightarrows X$ una correspondencia KKM tal que $G(x)$ es cerrado, para todo $x \in C$. Entonces, la familia $\{G(x)\}_{x \in C}$ satisface la propiedad de la intersección finita.*

Demostración. Supongamos que $G : C \rightrightarrows X$ es KKM. Como $G(x)$ es cerrado en X , entonces $G(x)$ es finitamente cerrado, para cada $x \in X$. Por el principio de la aplicación KKM, $\{G(x)\}_{x \in C}$ satisface la propiedad de la intersección finita. \square

A continuación abordaremos problemas de equilibrio desarrollados por Blum y Oettli en [9], y una aplicación directa de los resultados ya vistos.

Definición 3.4.4. Sea $f : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Un *problema de equilibrio* asociado a f consiste en determinar si existe $y^* \in C$ tal que para todo $x \in X$, $f(x, y^*) \leq 0$.

Corolario 3.4.2. *Sean X un espacio vectorial topológico, $C \subseteq X$ compacto, convexo y $f : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que*

(I) *para todo $x \in C$, $f(x, x) = 0$,*

(II) *para todo $x \in C$, la función $f(x, \cdot) : C \rightarrow \mathbb{R}$ es semicontinua inferior, y*

(III) *para todo $y \in C$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, $\{x \in C \mid f(x, y) > \alpha\}$ es convexo en C .*

Entonces, el problema de equilibrio asociado a f tiene solución.

Demostración. Por desigualdad minimax, se verifica que

$$\min_{y \in C} \sup_{x \in C} f(x, y) \leq 0.$$

Luego, existe $y^* \in C$ tal que $f(x, y^*) \leq 0$, para todo $x \in C$. Esto completa la demostración. \square

El siguiente lema (partición de la unidad), que generaliza el Lema de Urysohn, es útil para probar resultados de Browder y Tychonoff que veremos luego.

Lema 3.4.2. Sean X un espacio topológico normal y U_1, \dots, U_n un cubrimiento abierto de X . Entonces, existen funciones continuas f_1, \dots, f_n tales que $f_i : X \rightarrow [0, 1]$, $\sum_{i=1}^n f_i(x) = 1$, para cada $x \in X$ y $f_i(x) = 0$, para todo $x \in U_i^c$, y todo $i \in \{1, \dots, n\}$.

Demostración. Usaremos inducción sobre n . Si $n = 2$, es consecuencia directa del Lema de Urysohn. Supongamos que el resultado es válido para $n = k$ y sea U_1, \dots, U_{k+1} un cubrimiento abierto de X . Notemos que U_1, \dots, U_k es un cubrimiento abierto de U_{k+1}^c , el cual por ser cerrado, es normal. Por consiguiente, existen k funciones continuas $f_i : U_{k+1}^c \rightarrow [0, 1]$ tales que $\sum_{i=1}^k f_i = 1$, y para cada $x \in U_{k+1} \setminus U_i = (U_{k+1} \cup U_i)^c$, $f_i(x) = 0$, con $i \in \{1, \dots, k\}$. Sean $A = X \setminus \bigcup_{i=1}^k U_i$ y $B = U_{k+1}^c$. Luego, A y B son cerrados disjuntos en X y por Lema de Urysohn, existe $f_{k+1} : X \rightarrow [0, 1]$ continua tal que $f_{k+1}|_A = 1$ y $f_{k+1}|_B = 0$. Es decir, $f_{k+1}(x) = 1$, para todo $x \in U_{k+1}$. Luego, f_1, \dots, f_{k+1} son las funciones que cumplen las condiciones requeridas. \square

Teorema 3.4.6. Sean X un espacio vectorial topológico, $C \subseteq X$ compacto, convexo y $T : C \rightrightarrows C$ una correspondencia con valores convexos no vacíos y tal que $T^{-1}(\{y\})$ es abierto, para todo $y \in C$. Entonces, existe $x^* \in C$ tal que $x^* \in Tx^*$.

Demostración. Notemos que la familia $\{T^{-1}(y)\}_{y \in C}$ es un cubrimiento abierto de C , luego, existen y_1, \dots, y_n en C tales que $C \subseteq T^{-1}(y_1) \cup \dots \cup T^{-1}(y_n)$. Sea $U_i = T^{-1}(y_i)$, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Por lema precedente, existen n funciones continuas $f_i : C \rightarrow [0, 1]$ tales que $\sum_{i=1}^n f_i(x) = 1$, para cada $x \in C$, y $f_i(x) = 0$, para todo $x \in U_i^c$, y todo $i \in \{1, \dots, n\}$, esto último equivale a $y_i \notin Tx$. Sean $K = \text{co}(y_1, \dots, y_n)$ y $p : K \rightarrow K$ dada por $p(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x)y_i$. Bajo homeomorfismo en \mathbb{R}^n , por Teorema 3.4.2, existe $x^* \in K$ tal que $p(x^*) = x^*$. Para cada $x \in C$, sea $I_x = \{i \in \{1, \dots, n\} \mid f_i(x) > 0\}$. Así, $y_i \in Tx$, para todo $i \in I_x$, de modo que $p(x) = \sum_{i \in I_x} f_i(x)y_i \in Tx$. Por lo tanto, $x^* = p(x^*) \in Tx^*$. Esto completa la demostración. \square

El siguiente lema se requiere para la demostración del teorema de Kakutani-Fan-Glicksberg.

Lema 3.4.3. Sean (X, τ) un espacio topológico, E un espacio vectorial topológico localmente convexo y $T : X \rightrightarrows E$ una correspondencia semicontinua superior con valores convexos y compactos. Entonces, para todo abierto G en $X \times E$ tal que $\text{Gr}(T) \subseteq G$, existe una correspondencia $S : X \rightrightarrows E$ de valores convexos tal que

(I) $\text{Gr}(S)$ es abierto, y

(II) $\text{Gr}(T) \subseteq \text{Gr}(S) \subseteq G$.

Demostración. Para todo $x \in X$, $\{x\} \times Tx \subseteq \text{Gr}(T) \subseteq G$. Luego, existen U_x y V_x vecindades de x y Tx , respectivamente, tales que $\{x\} \times Tx \subseteq U_x \times V_x \subseteq G$. Como Tx es convexo y compacto, se puede suponer V_x convexo, pues existen x_1, \dots, x_n en Tx y W_1^x, \dots, W_n^x vecindades conexas de 0 tales que

$$Tx \subseteq (x_1 + W_1^x) \cup \dots \cup (x_n + W_n^x),$$

y $x_i + W_i^x + W_i^x \subseteq V_x$. Sea $W_x = W_1^x \cup \dots \cup W_n^x$. Luego, $Tx \subseteq Tx + W_x \subseteq V_x$, pues si $y \in Tx + W_x$, entonces $y \in W_i^x + Tx \subseteq x_i + W_i^x + W_i^x$, para algún $i \in \{1, \dots, n\}$. Así, $y \in V_x$ y como $Tx + W_x$ es convexo, V_x también se puede considerar convexo, pues, si no lo fuera, reemplazamos V_x por W_x .

Ahora, como T es semicontinua superior, podemos suponer $T(\overline{U}_x) \subseteq V_x$. Sean $x_1, \dots, x_r \in X$ tales que $X = U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_r}$. Definimos $I_x = \{i \in \{1, \dots, r\} \mid x \in \overline{U}_{x_i}\}$, y sea $Sx = \bigcap_{i \in I_x} V_{x_i}$. Luego, Sx es abierto y convexo, además, S es la correspondencia buscada. En efecto, sea $(x, y) \in \text{Gr}(T)$, luego $y \in Tx \subseteq T(\overline{U}_{x_i}) \subseteq V_{x_i}$. Por consiguiente $y \in \bigcap_{i \in I_x} V_{x_i} = Sx$. Sea $(x, y) \in \text{Gr}(S)$, luego $x \notin \bigcup_{i \notin I_x} \overline{U}_{x_i}$, lo que equivale a $x \in \bigcap_{i \notin I_x} \overline{U}_{x_i}^c$, que es una vecindad de x . Sea $W_x = \bigcap_{i \notin I_x} \overline{U}_{x_i}^c$, luego, para cada $u \in W_x$, $I_u \subseteq I_x$, y entonces $Sx \subseteq Su$. De este modo, $(x, y) \in W_x \times Sy$. Finalmente, sea $(u, v) \in W_x \times Sy$, entonces $u \in W_x$ y $v \in Sy$, de modo que $Sy \subseteq Su$, por lo que $(u, v) \in \text{Gr}(S)$. Esto concluye la demostración. \square

El resultado siguiente se conoce como teorema de Kakutani-Fan-Glicksberg, por los resultados principales en [18] y [25], respectivamente.

Teorema 3.4.7. Sean X un espacio vectorial topológico localmente convexo, $C \subseteq X$ compacto, convexo y $T : C \rightrightarrows C$ una correspondencia semicontinua superior con valores convexos, compactos y no vacíos. Entonces, existe $x^* \in C$ tal que $x^* \in Tx^*$.

Demostración. Sea Δ la diagonal de $C \times C$. Supongamos que $\text{Gr}(T) \subseteq \Delta^c$. Luego, Δ^c es una vecindad de $\text{Gr}(T)$, y por lema precedente, existe una correspondencia abierta $S : C \rightrightarrows C$ de valores convexos tal que $\text{Gr}(T) \subseteq \text{Gr}(S) \subseteq \Delta^c$. Como S es abierta, entonces $S^{-1}(y)$ es abierto e $y \notin Sy$, para todo $y \in X$. Luego, por Teorema 3.4.6, existe $x \in C$ tal que $Sx = \emptyset$, lo que es una contradicción. Esto completa la demostración. \square

Concluimos este capítulo con el Teorema de Tychonoff.

Teorema 3.4.8 (Tychonoff). *Sean X un espacio vectorial topológico localmente convexo, $C \subseteq X$ compacto, convexo y no vacío, y $f : C \rightarrow C$ una función continua. Entonces, existe $x^* \in C$ tal que $f(x^*) = x^*$.*

Demostración. Basta definir $T : C \rightrightarrows C$ como $Tx = \{f(x)\}$ y aplicar el teorema precedente. \square

Capítulo 4

Teoría Métrica del Punto Fijo

En este capítulo abordaremos condiciones bajo las cuales funciones definidas sobre un espacio métrico o un conjunto parcialmente ordenado tengan un punto fijo. Este tipo de problemas, que es en lo que se fundamenta la teoría métrica del punto fijo, tiene su origen en el principio de contracción de Banach sobre espacios métricos completos.

En este trabajo, cuando (X, d) es un espacio métrico, nos enfocaremos principalmente en el estudio de contracciones, $T : X \rightarrow X$ o $T : X \rightarrow X$, que satisfacen

$$d(T(x), T(y)) \leq f(d(x, T(x)), d(y, T(y)), d(x, T(y)), d(y, T(x)))$$

en el caso de funciones, o

$$\mathcal{H}(T(x), T(y)) \leq f(d(x, T(x)), d(y, T(y)), d(x, T(y)), d(y, T(x))),$$

en el caso de correspondencias, donde $f : X \times X \times X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ es una función y \mathcal{H} la métrica de Hausdorff asociada a d . La existencia de punto fijo para estas funciones y contracciones ha sido extensamente estudiada en la literatura.

En lo que sigue, (X, d) denotará un espacio métrico y (P, \preceq) un conjunto parcialmente ordenado. Sobre P , definimos el conjunto

$$[b, \rightarrow) = \{x \in P \mid b \preceq x\},$$

que lo llamaremos terminal de b en P .

4.1. Punto Fijo y Ordenes Parciales

Los primeros resultados que relacionan conjuntos parcialmente ordenados con teoría de punto fijo fueron desarrollados por Knaster. Tras el primer trabajo publicado en el área, Knaster y Tarski complementaron y mejoraron los resultados en 1939 (ver [34] y [38]). En paralelo, Kantorovitch publicó resultados adicionales en el área en 1939.

Teorema 4.1.1 (Knaster-Tarski, [38]). *Sea $T : P \rightarrow P$ una función creciente tal que existe $b \in P$ que verifica:*

$$(I) \quad b \preceq T(b), \text{ y}$$

(II) *toda cadena en $[b, \rightarrow)$ tiene supremo.*

Entonces $\text{fix}(T) \neq \emptyset$, y además, (P, \preceq) posee un elemento maximal.

Demostración. Sea $Q = \{x \in P \mid b \preceq x \preceq T(x)\}$. Claramente $Q \neq \emptyset$, pues $b \in Q$. Sea \mathcal{C} una cadena en Q , y como $Q \subseteq [b, \rightarrow)$, entonces \mathcal{C} es una cadena en $[b, \rightarrow)$. Luego, \mathcal{C} tiene un supremo $u = \sup(\mathcal{C})$. Sea $x \in \mathcal{C}$, luego $b \preceq x \preceq u$, de modo que $T(b) \preceq T(x) \preceq T(u)$. Como $T(u)$ es una cota superior de \mathcal{C} , entonces $u \preceq T(u)$. Así, $u \in Q$ y es una cota superior de \mathcal{C} . Por Lema de Zorn, existe un elemento maximal $x^* \in Q$. Por consiguiente, $b \preceq x^* \preceq T(x^*)$ y $b \preceq T(x^*) \preceq T(T(x^*))$, de modo que $T(x^*) \preceq x^*$. Como el orden \preceq es antisimétrico, concluimos que $T(x^*) = x^*$. Por lo tanto, $\text{fix}(T) \neq \emptyset$, y x^* es el elemento maximal. \square

Definición 4.1.1. Sea (P, \preceq) un conjunto parcialmente ordenado. Diremos que una función $T : P \rightarrow P$ es *seudo continua*, si y solo si, para toda cadena numerable $(e_n : n \in \mathbb{N})$, tal que $\sup(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ existe, entonces también existe $\sup(T(e_n))_{n \in \mathbb{N}}$, y además,

$$T(\sup(e_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \sup(T(e_n))_{n \in \mathbb{N}}.$$

Es directo de la definición que toda función seudo continua es creciente.

El siguiente resultado, desarrollado por Tarski y Kantorovich, establece condiciones bajo las cuales una función seudo continua tiene un punto fijo, y además caracteriza el ínfimo del conjunto de puntos fijos.

Teorema 4.1.2 (Tarski-Kantorovitch, [31]). *Sea $T : P \rightarrow P$ una función pseudo continua. Si existe $b \in P$ tal que:*

$$(I) \quad b \preceq T(b), \text{ y}$$

(II) *toda cadena \mathcal{C} en $[b, \rightarrow)$ tiene supremo.*

Entonces $x^ = \sup(T^n(b))_{n \in \mathbb{N}}$ es un punto fijo para T , y además,*

$$x^* = \inf\{x \in \text{fix}(T) \mid b \preceq x\}.$$

Demostración. Como T es pseudo continua y creciente, entonces $b \preceq T(b) \preceq T^2(b)$, y de manera inductiva, obtenemos que $T^n(b) \preceq T^{n+1}(b)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea $\mathcal{C} = \{T^n(b) \mid n \in \mathbb{N}\}$, luego \mathcal{C} es una cadena contable. Sea $x^* = \sup(T^n(b))_{n \in \mathbb{N}}$. Tenemos que

$$T(x^*) = T(\sup(T^n(b))_{n \in \mathbb{N}}) = \sup(T^{n+1}(b))_{n \in \mathbb{N}} = x^*,$$

de modo que x^* es un punto fijo. Ahora, supongamos que x^{**} es un punto fijo en $[b, \rightarrow)$. Luego, $b \preceq x^{**}$, y entonces $T^n(b) \preceq T^n(x^{**}) = x^{**}$. Se obtiene entonces que $x^* = \sup(T^n(b))_{n \in \mathbb{N}} \preceq x^{**}$, lo que prueba que $x^* = \inf([b, \rightarrow) \cap \text{fix}(T))$. Esto completa la demostración. \square

Ahora dotaremos a un espacio métrico de un orden parcial, y estableceremos resultados de punto fijo para funciones con dicho orden.

La relación que definimos a continuación se conoce como orden de Brøndsted, por el artículo [11] cuyo lleva este nombre. Sin embargo, la idea principal de este orden fue dada por Bishop-Phelps en [8].

Definición 4.1.2. Sean (X, d) un espacio métrico y $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Definimos en X la relación \preceq_φ dada por

$$x \preceq_\varphi y \Leftrightarrow d(x, y) \leq \varphi(x) - \varphi(y).$$

Proposición 4.1.1. *La relación definida anteriormente es un orden parcial sobre (X, d) . Además, φ es una función decreciente.*

Demostración. Sea x, y, z en X . Directamente $d(x, x) \leq \varphi(x) - \varphi(x) = 0$, de modo que $x \preceq_{\varphi} x$. Supongamos que $x \preceq_{\varphi} y$ e $y \preceq_{\varphi} x$. Luego, $d(x, y) \leq \varphi(x) - \varphi(y)$ y $d(y, x) \leq \varphi(y) - \varphi(x)$, por consiguiente $2d(x, y) \leq 0$, de modo que $x = y$. Ahora, supongamos que $x \preceq_{\varphi} y$ e $y \preceq_{\varphi} z$. Tenemos así que $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \leq (\varphi(x) - \varphi(y)) + (\varphi(y) - \varphi(z)) = \varphi(x) - \varphi(z)$, y entonces $x \preceq_{\varphi} z$. Esto prueba que \preceq_{φ} es una relación de orden.

Finalmente, supongamos que $x \preceq_{\varphi} y$, luego $0 \leq d(x, y) \leq \varphi(x) - \varphi(y)$, por lo que $\varphi(y) \leq \varphi(x)$. Esto concluye la demostración. \square

Teorema 4.1.3. *Sean (X, d) un espacio métrico completo y $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función semicontinua inferior acotada inferiormente. Entonces, para todo $x_0 \in X$, existe un elemento maximal $x^* \in X$ tal que $x_0 \preceq_{\varphi} x^*$.*

Demostración. Como φ es acotada inferiormente, entonces $\inf(\varphi([x_0, \rightarrow))$ existe, y entonces existe $x_1 \in [x_0, \rightarrow)$ tal que $\inf(\varphi([x_0, \rightarrow)) \leq \varphi(x_1) < \inf(\varphi([x_0, \rightarrow)) + 1/2^0$. De manera recursiva, construimos una sucesión $(x_n : n \in \mathbb{N})$ en X tal que $x_{n+1} \in [x_n, \rightarrow)$ y

$$\inf(\varphi([x_n, \rightarrow)) \leq \varphi(x_{n+1}) < \inf(\varphi([x_n, \rightarrow)) + 1/2^n,$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Así, tenemos que $x_n \preceq_{\varphi} x_{n+1}$ y $\varphi(x_{n+1}) \leq \varphi(x_n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, de modo que $d(x_n, x_{n+1}) \leq \varphi(x_n) - \varphi(x_{n+1}) = \sum_{k=n}^{n+p-1} (\varphi(x_k) - \varphi(x_{k+1})) \leq \sum_{k=n}^{n+p-1} 1/2^k$. Tomando límite cuando $n \rightarrow \infty$, obtenemos que $(x_n : n \in \mathbb{N})$ es una sucesión de Cauchy en X . Sea $x^* \in X$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$. Luego, para $m \geq n$, $x_m \in [x_n, \rightarrow) = \{x \in X \mid \varphi(x) + d(x, x_n) \leq \varphi(x_n)\}$, el cual es cerrado en X , pues la función $F : X \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $F(x) = \varphi(x) + d(x, x_n)$, es semicontinua inferior, para cada $n \in \mathbb{N}$. Luego, $x^* \in [x_n, \rightarrow)$, es decir, $x_n \preceq_{\varphi} x^*$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Finalmente, supongamos que existe $z \in X$ tal que $x^* \preceq_{\varphi} z$, luego $x_n \preceq_{\varphi} z$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Así, se tiene

$$d(x_n, z) \leq \varphi(x_n) - \varphi(z) \leq \varphi(x_n) - \inf(\varphi([x_n, \rightarrow)) < 1/2^n,$$

y tomando límite cuando $n \rightarrow \infty$, se concluye que $(x_n : n \in \mathbb{N})$ converge a z . Por lo tanto, $x^* = z$. Esto concluye la demostración. \square

Aunque el teorema de Caristi, que enunciamos a continuación, fue demostrado usando aritmética ordinal, este resultado se obtiene como consecuencia del teorema precedente.

Teorema 4.1.4 (Caristi, [13]). Sean (X, d) un espacio métrico completo, $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ y $T : X \rightarrow X$ funciones tales que φ es semicontinua inferior acotada inferiormente, y T verifica que para todo $x \in X$, $d(x, T(x)) \leq \varphi(x) - \varphi(T(x))$. Entonces, T tiene un punto fijo.

Demostración. Por hipótesis, tenemos que $x \preceq_{\varphi} T(x)$, para todo $x \in X$. Por teorema precedente, existe un elemento maximal x^* en (X, \preceq_{φ}) , de modo que $T(x^*) \preceq_{\varphi} x^*$. Además, $x^* \preceq_{\varphi} T(x^*)$. Por lo tanto, $T(x^*) = x^*$. \square

4.2. Punto Fijo Univaluado

A continuación plantearemos condiciones bajo las cuales existe punto fijo en funciones definidas sobre un espacio métrico completo. La principal de éstas, para funciones univaluadas, consiste en la condición orbital de Banach.

Definición 4.2.1. Sea (X, d) un espacio métrico. Una función $T : X \rightarrow X$ satisface la *condición orbital de Banach*, si y solo si, existe $\lambda \in [0, 1)$ tal que para todo $x \in X$,

$$d(T(x), T^2(x)) \leq \lambda d(x, T(x)).$$

Teorema 4.2.1. Sean (X, d) un espacio métrico completo y $T : X \rightarrow X$ una función continua que satisface la condición orbital de Banach. Entonces, existe $x^* \in X$ tal que $T(x^*) = x^*$.

Demostración. Como $d(T(x), T^2(x)) \leq \lambda d(x, T(x))$, de manera inductiva se puede probar que $d(T^n(x), T^{n+1}(x)) \leq \lambda^n d(x, T(x))$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Tomando límite cuando $n \rightarrow \infty$, tenemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} d(T^n(x), T^{n+1}(x)) = 0$. Por consiguiente, $(T^n(x) : n \in \mathbb{N})$ es una sucesión de Cauchy en X . Luego, existe x^* tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} T^n(x) = x^*$. Como T es continua, entonces

$$T(x^*) = T\left(\lim_{n \rightarrow \infty} T^n(x)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} T^{n+1}(x) = x^*.$$

Por lo tanto, x^* es un punto fijo. \square

Definición 4.2.2. Sean (X, d) un espacio métrico y $T : X \rightarrow X$ una función. Diremos que T es una *contracción univaluada* si satisface alguna de las siguientes

desigualdades, para todo x e y en X :

- (I) (*Banach*) $d(T(x), T(y)) \leq kd(x, y)$, para algún $k \in [0, 1)$,
- (II) (*Kannan*) $d(T(x), T(y)) \leq k[d(x, T(x)) + d(y, T(y))]$, para algún $k \in [0, 1/2)$,
- (III) (*Berinde*) $d(T(x), T(y)) \leq kd(x, y) + Ld(y, T(x))$, para algún $k \in [0, 1)$ y $L \geq 0$,
- (IV) (*Chatterjea*) $d(T(x), T(y)) \leq k[d(x, T(y)) + d(y, T(x))]$, para algún $k \in [0, 1/2)$,
- (V) (*Reich*) $d(T(x), T(y)) \leq kd(x, y) + \ell d(x, T(x)) + md(y, T(y))$, para k, ℓ, m en $[0, 1)$ tales que $k + \ell + m < 1$, y
- (VI) (*Ćirić*) $d(T(x), T(y)) \leq k \max\{d(x, y), d(x, T(x)), d(y, T(y)), d(x, T(y)), d(y, T(x))\}$, para algún $k \in [0, 1/2)$.

Proposición 4.2.1. Sean (X, d) un espacio métrico y $T : X \rightarrow X$ una contracción. Entonces, T satisface la condición orbital de Banach.

Demostración. Sean x e y en X .

- (I) Si T es Banach con constante $k \in [0, 1)$, entonces

$$d(T(x), T^2(x)) = d(T(x), T(T(x))) \leq kd(x, T(x)).$$

- (II) Si T es Kannan con constante $k \in [0, 1/2)$, tenemos que $d(T(x), T^2(x)) \leq k[d(x, T^2(x)) + d(T(x), T^2(x))]$, y entonces

$$d(T(x), T^2(x)) \leq kd(x, T(x)) + kd(T(x), T^2(x)),$$

de modo que

$$d(T(x), T^2(x)) \leq kd(x, T(x))/(1 - k).$$

Como $k \in [0, 1/2)$, entonces $k/(1 - k) \in [0, 1)$. Por tanto, T satisface la condición orbital de Banach.

- (III) Si T es Berinde con constantes $k \in [0, 1)$ y $L \geq 0$, entonces

$$d(T(x), T^2(x)) \leq kd(x, T(x)) + Ld(T(x), T(x)) = kd(x, T(x)).$$

(IV) Si T es Chatterjea con constante $k \in [0, 1/2)$, entonces

$$\begin{aligned} d(T(x), T^2(x)) &\leq k[d(x, T^2(x)) + d(T(x), T(x))] \\ &= kd(x, T^2(x)) \\ &\leq k[d(x, T(x)) + d(T(x), T^2(x))]. \end{aligned}$$

Por tanto, $d(T(x), T^2(x)) \leq [k/(1 - k)]d(x, T(x))$, y $k/(1 - k) < 1$.

(V) Si T es Reich con constantes k, ℓ, m , entonces

$$d(T(x), T^2(x)) \leq kd(x, T(x)) + \ell d(x, T(x)) + md(T(x), T^2(x)),$$

y por consiguiente,

$$\begin{aligned} d(T(x), T^2(x)) &\leq [k/(1 - m)]d(x, T(x)) + \ell/(1 - m)d(x, T(x)) \\ &= [(k + \ell)/(1 - m)]d(x, T(x)). \end{aligned}$$

Como $k + \ell + m < 1$, entonces $(k + \ell)/(1 - m) < 1$.

(VI) Si T es Ćirić con constante $k \in [0, 1/2)$, entonces

$$\begin{aligned} d(T(x), T^2(x)) &\leq k \text{ máx}\{d(x, T(x)), d(x, T(x)), d(T(x), T^2(x)), \\ &\quad d(T(x), T^2(x)), d(T(x), T(x))\} \\ &= k \text{ máx}\{d(x, T(x)), d(T(x), T^2(x))\} \\ &\leq k \text{ máx}\{d(x, T(x)), d(T(x), T^2(x)) + d(x, T(x))\} \\ &\leq k[d(x, T(x)) + d(T(x), T^2(x))], \end{aligned}$$

luego $d(T(x), T^2(x)) < [k/(1 - k)]d(x, T(x))$. Como $k \in [0, 1/2)$, entonces $k/(1 - k) \in [0, 1)$. Esto completa la demostración.

□

Corolario 4.2.1. Sean (X, d) un espacio métrico completo y $T : X \rightarrow X$ una contracción continua. Entonces, T tiene un punto fijo.

Demostración. Sea $T : X \rightarrow X$ alguna de las contracciones anteriores. Luego, T satisface la condición orbital de Banach, y por Teorema 4.2.1, T tiene un punto fijo. \square

A continuación, demostraremos que cada una de las contracciones anteriores tiene un punto fijo, aun cuando alguna de ellas no sea continua. Algunas de las demostraciones aquí presentadas no corresponden a la demostración original, por el correspondiente autor, pues en varias de ellas se utiliza el resultado de Berinde, expuesto a continuación.

Teorema 4.2.2 (Berinde, [7]). Sean (X, d) un espacio métrico completo y $T : X \rightarrow X$ una contracción Berinde con constantes $k \in [0, 1)$ y $L \geq 0$. Entonces, T tiene un punto fijo.

Demostración. Sea $x_0 \in X$. Definimos la sucesión $(x_n : n \in \mathbb{N})$ en X de manera recursiva como $x_{n+1} = T(x_n)$, para $n \geq 1$. Notemos que

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &= d(x_n, T(x_n)) \\ &= d(T(x_{n-1}), T(x_n)) \\ &\leq kd(x_{n-1}, x_n) + Ld(x_n, T(x_{n-1})) \\ &= kd(x_{n-1}, x_n), \end{aligned}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Así, se obtiene $d(x_n, x_{n+1}) \leq k^n d(x_0, T(x_0))$, y tomando límite cuando $n \rightarrow \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_{n+1}) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} k^n d(x_0, T(x_0)) = 0$. Por tanto, $(x_n : n \in \mathbb{N})$ es una sucesión de Cauchy en X , y existe $x^* \in X$ tal que $(x_n : n \in \mathbb{N})$

converge a x^* . Veamos que x^* es un punto fijo de T .

$$\begin{aligned}
 d(x^*, T(x^*)) &\leq d(x^*, x_n) + d(x_n, T(x^*)) \\
 &= d(x^*, x_n) + d(T(x_{n-1}), T(x^*)) \\
 &\leq d(x^*, x_n) + kd(x_{n-1}, x^*) + Ld(x^*, T(x_{n-1})) \\
 &= d(x^*, x_n) + d(x_{n-1}, x^*) + Ld(x^*, x_n),
 \end{aligned}$$

y tomando límite cuando $n \rightarrow \infty$, concluimos que $d(x^*, T(x^*)) = 0$. Por lo tanto, $T(x^*) = x^*$. \square

Teorema 4.2.3 (Kannan). *Sean (X, d) un espacio métrico completo y $T : X \rightarrow X$ una contracción Kannan con constante $k \in [0, 1/2)$. Entonces, T tiene un punto fijo.*

Demostración. Supongamos que $T : X \rightarrow X$ es Kannan, veamos que T es Berinde. En efecto, sean x e y en X y $k \in [0, 1/2)$ la constante de contracción. Luego,

$$\begin{aligned}
 d(T(x), T(y)) &\leq k[d(x, T(x)) + d(y, T(y))] \\
 &\leq k[d(x, y) + d(y, T(x)) + d(y, T(x)) + d(T(x), T(y))] \\
 &= kd(x, y) + 2kd(y, T(x)) + kd(T(x), T(y)),
 \end{aligned}$$

y por consiguiente $d(T(x), T(y)) \leq [k/(1-k)]d(x, y) + [2k/(1-k)]d(y, T(x))$. Como $k \in [0, 1/2)$, entonces $k/(1-k) < 1$. Por tanto, T es Berinde, y tiene un punto fijo. \square

Teorema 4.2.4 (Chatterjea). *Sean (X, d) un espacio métrico completo y $T : X \rightarrow X$ una contracción Chatterjea con constante $k \in [0, 1/2)$. Entonces, T tiene un único punto fijo.*

Demostración. Supongamos que $T : X \rightarrow X$ es Chatterjea, veamos que T es Berinde.

En efecto, sean x e y en X y $k \in [0, 1)$ la constante de contracción. Luego,

$$\begin{aligned} d(T(x), T(y)) &\leq k[d(x, T(y)) + d(y, T(x))] \\ &\leq k[d(x, y) + d(y, T(x)) + d(T(x), T(y)) + d(y, T(x))] \\ &= k[d(x, y) + 2d(y, T(x)) + d(T(x), T(y))]. \end{aligned}$$

Así, tenemos que

$$d(T(x), T(y)) \leq [k/(1 - k)]d(x, y) + [2/(1 - k)]d(y, T(x)),$$

de modo que T es Berinde. Por consiguiente, T tiene un punto fijo $x^* \in X$.

Finalmente, supongamos que existe $x^{**} \in X$ tal que $T(x^{**}) = x^{**}$. Luego,

$$\begin{aligned} d(x^*, x^{**}) &= d(T(x^*), T(x^{**})) \\ &\leq k[d(x^*, T(x^{**})) + d(x^{**}, T(x^*))] \\ &= 2kd(x^*, x^{**}), \end{aligned}$$

esto implica que $d(x^*, x^{**}) = 0$, pues $2k < 1$. Por lo tanto, $x^* = x^{**}$. □

Teorema 4.2.5 (Reich). *Sean (X, d) un espacio métrico completo y $T : X \rightarrow X$ una contracción Reich. Entonces, T tiene un único punto fijo.*

Demostración. Supongamos que $T : X \rightarrow X$ es Reich con constantes $k, \ell, m \in [0, 1)$ tales que $k + \ell + m < 1$. Sean x e y en X , luego,

$$\begin{aligned} d(T(x), T(y)) &\leq kd(x, y) + \ell[d(x, y) + d(y, T(x))] + m[d(x, y) + d(T(x), T(y))] \\ &= (k + \ell)d(x, y) + (\ell + m)d(y, T(y)) + md(T(x), T(y)). \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$d(T(x), T(y)) \leq [(k + \ell)/(1 - m)]d(x, y) + [(\ell + m)/(1 - m)]d(y, T(y)).$$

Como $(k + \ell)/(1 - m) < (1 - m)/(1 - m) = 1$, entonces T es Berinde, por lo que T

tiene un punto fijo $x^* \in X$.

Ahora, supongamos que existe $x^{**} \in X$ tal que $T(x^{**}) = x^{**}$. Tenemos que

$$d(x^*, x^{**}) = d(T(x^*), T(x^{**})) \leq kd(x^*, x^{**}) + ld(x^*, T(x^*)) + md(x^{**}, T(x^{**})),$$

y entonces $d(x^*, x^{**}) \leq kd(x^*, x^{**})$, pues $k < 1$. Por tanto, $x^* = x^{**}$. Esto completa la demostración. \square

En el caso de una contracción Ćirić, necesitamos introducir el concepto de órbita de un punto con índice n y las órbitas de índice infinito. Precisamos estos conceptos a continuación.

Definición 4.2.3. Sean (X, d) un espacio métrico y $T : X \rightarrow X$ una función. Para cada $x \in X$, definimos la *órbita* de x con índice $n \in \mathbb{N}$ como el conjunto

$$\mathcal{O}(x, n) = \{x, T(x), T^2(x), \dots, T^n(x)\},$$

y la *órbita* de x con índice infinito como

$$\mathcal{O}(x, \infty) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{O}(x, n).$$

Definición 4.2.4. Sean (X, d) un espacio métrico y $A \subseteq X$. Definimos el *diámetro* de A como

$$\text{diam}(A) = \sup\{d(a, b) \mid a, b \in A\}.$$

Lema 4.2.1. Sean (X, d) un espacio métrico y $T : X \rightarrow X$ una contracción Ćirić con constante $k \in [0, 1/2)$. Entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$, $x \in X$ e $i, j \in \{1, \dots, n\}$, se tiene

$$d(T^i(x), T^j(x)) \leq k \cdot \text{diam}(\mathcal{O}(x, n)).$$

Demostración. Sean $x \in X$, $n \in \mathbb{N}$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$ y $k \in [0, 1/2)$ la constante de

contracción de T . Luego,

$$\begin{aligned} d(T^i(x), T^j(x)) &\leq k \max\{d(T^{i-1}(x), T^{j-1}(x)), d(T^{i-1}(x), T^i(x)), d(T^{j-1}(x), T^j(x)), \\ &\quad d(T^{i-1}(x), T^j(x)), d(T^{j-1}(x), T^i(x))\} \\ &\leq k \cdot \text{diam}(\mathcal{O}(x, n)), \end{aligned}$$

lo que completa la demostración. \square

Una consecuencia directa es la siguiente: para todo $x \in X$ y $n \in \mathbb{N}$, existe $k \leq n$ tal que $d(x, T^k(x)) = \text{diam}(\mathcal{O}(x, n))$.

Ahora encontraremos una cota superior para las órbitas de índice infinito en una contracción Ćirić. Precisamos a continuación.

Lema 4.2.2. Sean (X, d) un espacio métrico, $x \in X$ y $T : X \rightarrow X$ una contracción Ćirić con constante $k \in [0, 1/2)$. Entonces,

$$\text{diam}(\mathcal{O}(x, \infty)) \leq [1/(1 - k)]d(x, T(x)).$$

Demostración. Sean $x \in X$ y $n \in \mathbb{N}$. Notemos que $\mathcal{O}(x, n) \subseteq \mathcal{O}(x, n + 1)$, y además, $d(x, T^k(x)) \leq \text{diam}(\mathcal{O}(x, n))$, para cada $k \leq n$. Así, $\text{diam}(\mathcal{O}(x, \infty)) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \text{diam}(\mathcal{O}(x, n))$. Por lo anterior, existe $T^k(x) \in \mathcal{O}(x, n)$, con $k \in \{1, \dots, n\}$, tal que $d(x, T^k(x)) = \text{diam}(\mathcal{O}(x, n))$. Por lema precedente, tenemos

$$\begin{aligned} d(x, T^k(x)) &\leq d(x, T(x)) + d(T(x), T^k(x)) \\ &\leq d(x, T(x)) + k \cdot \text{diam}(\mathcal{O}(x, n)) \\ &= d(x, T(x)) + kd(x, T^k(x)). \end{aligned}$$

Así,

$$\text{diam}(\mathcal{O}(x, n)) = d(x, T^k(x)) \leq [1/(1 - k)]d(x, T(x)).$$

Como $n \in \mathbb{N}$ es arbitrario, obtenemos que $\mathcal{O}(x, \infty) \leq [1/(1 - k)]d(x, T(x))$. Esto completa la demostración. \square

Con este último lema, podemos estudiar la contracción Ćirić.

Teorema 4.2.6 (Ćirić, [16]). *Sean (X, d) un espacio métrico completo y $T : X \rightarrow X$ una contracción Ćirić con constante $k \in [0, 1)$. Entonces, T tiene un punto fijo.*

Demostración. Sea $x_0 \in X$. Definimos de manera inductiva la sucesión $(x_n : n \in \mathbb{N})$ dada por $x_{n+1} = T(x_n)$, para $n \geq 1$. Sean n y m en \mathbb{N} tales que $n < m$. Luego,

$$\begin{aligned} d(T^m(x_0), T^n(x_0)) &= d(T^{m-n}(T^{n-1}(x_0)), T(T^{n-1}(x_0))) \\ &\leq k \cdot \text{diam}(\mathcal{O}(T^{n-1}(x_0), m - n + 1)). \end{aligned}$$

Luego, existe $k \in \{1, \dots, m - n + 1\}$ tal que $\text{diam}(\mathcal{O}(T^{n-1}(x_0), m - n + 1)) = d(T^{n-1}(x_0), T^k(T^{n-1}(x_0)))$. Así,

$$\begin{aligned} \text{diam}(\mathcal{O}(T^{n-1}(x_0), n - m + 1)) &= d(T^{n-1}(x_0), T^{k+n-1}(x_0)) \\ &= d(T(T^{n-2}(x_0)), T^{k-n+1}(T^{n-2}(x_0))) \\ &\leq k \cdot \text{diam}(\mathcal{O}(T^{n-2}(x_0), k - n + 1)) \\ &\leq k \cdot \text{diam}(\mathcal{O}(T^{n-2}(x_0), m - (n - 3))) \\ &\leq k^2 \cdot \text{diam}(\mathcal{O}(T^{n-3}(x_0), m - (n - 3))). \end{aligned}$$

De manera inductiva obtenemos que

$$\text{diam}(\mathcal{O}(T^{n-1}(x_0), n - m + 1)) \leq k^{n+1} \text{diam}(\mathcal{O}(x_0, m)) \leq k^{n+1} \text{diam}(\mathcal{O}(x_0, \infty)).$$

Por consiguiente, $\text{diam}(\mathcal{O}(T^{n-1}(x_0), n - m + 1)) \leq [k^{n+1}/(1 - k)]d(x_0, T(x_0))$, y tomando límite cuando $n \rightarrow \infty$, se tiene que $(T^n(x_0) : n \in \mathbb{N})$ es una sucesión de Cauchy en X . Sea $x^* \in X$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} T^n(x_0) = x^*$. Veamos que x^* es un punto

fijo para T .

$$\begin{aligned}
 d(x^*, T(x^*)) &\leq d(x^*, x_{n+1}) \\
 &= d(x^*, x_{n+1}) + d(T(x_n), T(x^*)) \\
 &\leq d(x^*, x_{n+1}) + k \max\{d(x_n, x^*), d(x^*, T(x_n)), \\
 &\quad d(x^*, T(x^*)), d(x_n, T(x_n))\} \\
 &\leq d(x^*, x_{n+1}) + k[d(x_n, T(x_n)) + d(x_n, x^*) + d(x^*, T(x^*)) + d(T(x_n), x^*)].
 \end{aligned}$$

Por tanto,

$$d(x^*, T(x^*)) \leq [1/(1 - k)][(1 + k)d(x^*, T(x_n)) + kd(x^*, x_n) + kd(x_n, T(x_n))].$$

Tomando límite cuando $n \rightarrow \infty$, obtenemos que $d(x^*, T(x^*)) = 0$. Esto completa la demostración. \square

4.3. Punto Fijo Multivaluado

En correspondencias definiremos condiciones adicionales que nos brinden resultados similares al caso de funciones univaluadas. En particular, obtendremos una extensión del teorema de Caristi.

En lo que sigue de este capítulo, (X, d) denotará un espacio métrico.

Definición 4.3.1. Sea $T : X \rightarrow \mathcal{CB}(X)$ una correspondencia. Diremos que T satisface la *condición orbital de Banach multivaluada de tipo 1* (COBM-1) (respectivamente, *tipo 2* (COBM-2)) si existe $k \in [0, 1)$ tal que para todo $x \in X$,

$$\inf_{y \in Tx} d(y, Ty) \leq kd(x, Tx) \quad (\text{respectivamente, } \sup_{y \in Tx} d(y, Ty) \leq kd(x, Tx)).$$

Observación. Notar que la COBM-2 es equivalente a la siguiente condición: Para todo $x \in X$ y todo $y \in Tx$, $d(y, Ty) \leq kd(x, Tx)$.

Ahora, introduciremos el concepto de semicontinuidad débil, abordado por Fierro, Martínez y Orellana [23], y que será de utilidad para relacionar la COBM-2 con

la existencia de punto fijo.

Definición 4.3.2. Sea $T : X \rightarrow \mathcal{CB}(X)$ una correspondencia. Diremos que T es *débilmente semicontinua superior* (respectivamente, *inferior*), si y solo si, la función $\varphi_T : X \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi_T(x) = d(x, Tx)$$

es semicontinua inferior (respectivamente, superior). Si φ_T es continua, diremos que T es *débilmente continua*.

Un resultado directo de esta definición es el siguiente.

Proposición 4.3.1. Sean $T : X \rightarrow \mathcal{CB}(X)$ y $\varphi_T : X \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\varphi_T(x) = d(x, Tx)$.

(I) Si T es semicontinua inferior, entonces φ_T es semicontinua superior, y

(II) si T es semicontinua superior, entonces φ_T es semicontinua inferior.

Demostración. (I) Supongamos que T es semicontinua inferior. Sean $\alpha > 0$ y $A = \{x \in X \mid d(x, Tx) < \alpha\}$. Sean $a \in A$ y $\beta > 0$ tales que $d(a, Ta) < \beta < \alpha$. Veamos que $B(a, (\alpha - \beta)/2) \cap \{x \in X \mid B(a, \beta) \neq \emptyset\} \subseteq A$. En efecto, sea $x \in B(a, (\alpha - \beta)/2) \cap \{x \in X \mid B(a, \beta) \neq \emptyset\}$. Luego, $d(x, Tx) \leq d(x, a) + d(a, Tx) < (\alpha - \beta) + \beta = \alpha$. Por consiguiente, A es abierto en X .

(II) Análogamente, supongamos que T es semicontinua superior, sean $\alpha > 0$ y $A = \{x \in X \mid d(x, Tx) > \alpha\}$. Sean $a \in A$ y $\beta > 0$ tales que $d(a, Ta) > \beta > \alpha$. Sean $G_\beta = \{x \in X \mid d(a, Tx) > 2\beta\}$ y $V_a = B(a, \beta) \cap \{x \in X \mid Tx \subseteq G_\beta\}$. Como $Ta \subseteq G_\beta$, entonces $a \in V_a$, de modo que V_a es una vecindad de a . Veamos que $V_a \subseteq A$. En efecto, sea $x \in V_a$. Luego,

$$\begin{aligned} 2\beta &< d(a, Tx) \\ &\leq d(a, x) + d(x, Tx) \\ &< \beta + d(x, Tx), \end{aligned}$$

y por consiguiente, $\beta < d(x, Tx)$, de modo que $d(x, Tx) > \alpha$. Esto prueba que φ_T es semicontinua superior.

□

Corolario 4.3.1. *Sea $T : X \rightarrow \mathcal{CB}(X)$. Luego,*

- (I) *si T es semicontinua inferior, entonces T es débilmente semicontinua inferior, y*
- (II) *si T es semicontinua superior, entonces T es débilmente semicontinua superior.*

Demostración. Directo de la proposición precedente. □

En general, los recíprocos de estas afirmaciones no son válidas. En efecto, consideremos las correspondencias $S, T : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ definidas por

$$S(x) = \begin{cases} \{0\} & \text{si } x \neq 0, \\ [-1, 1] & \text{si } x = 0, \end{cases} \quad \text{y} \quad T(x) = \begin{cases} [-1, 1] & \text{si } x \neq 0, \\ \{0\} & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Luego, S no es semicontinua superior y T no es semicontinua inferior. Sin embargo, las funciones φ_T y φ_S son continuas, y por tanto, T y S son débilmente continuas.

Teorema 4.3.1. *Sean (X, d) un espacio métrico completo y $T : X \rightarrow \mathcal{CB}(X)$ una correspondencia débilmente semicontinua superior que satisface la COBM-2 con constante $k \in [0, 1)$. Entonces, T tiene un punto fijo.*

Demostración. Si existe $x \in X$ tal que $d(x, Tx) = 0$, entonces como Tx es cerrado en X , $x \in Tx$. Supongamos ahora que $d(x, Tx) > 0$, para todo $x \in X$. Para todo $\epsilon > 0$, existe $y_\epsilon(x) \in Tx$ tal que $d(x, y_\epsilon(x)) < d(x, Tx) + \epsilon d(x, Tx)$, y entonces $d(x, y_\epsilon(x)) < (1 + \epsilon)d(x, Tx)$. Como T satisface la COBM, entonces $d(y_\epsilon(x), Ty_\epsilon(x)) \leq kd(x, Tx)$. Luego,

$$\begin{aligned} [1/(1 - \epsilon) - k]d(x, y_\epsilon(x)) &< d(x, Tx) - kd(x, y_\epsilon(x)) \\ &\leq d(x, Tx) - kd(x, Tx) \\ &\leq d(x, Tx) - d(y_\epsilon(x), Ty_\epsilon(x)). \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$d(x, y_\epsilon(x)) \leq d(x, Tx)/(1/(1 - \epsilon) - k) - d(y_\epsilon(x), Ty_\epsilon(x))/(1/(1 - \epsilon) - k).$$

Sea $\varphi(x) = d(x, Tx)/(1/(1 - \epsilon) - k)$. Luego, $d(x, y_\epsilon(x)) \leq \varphi(x) - \varphi(y_\epsilon(x))$, y φ es semicontinua inferior. Por Teorema de Caristi, la función $y_\epsilon : X \rightarrow X$ tiene un punto fijo $x^* \in X$. De este modo, $x^* = y_\epsilon(x^*) \in Tx^*$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, T tiene un punto fijo. \square

Corolario 4.3.2. Sean (X, d) un espacio métrico completo y $T : X \rightarrow \mathcal{CB}(X)$ una correspondencia semicontinua superior que satisface la COBM-2. Entonces, T tiene un punto fijo.

Demostración. Es consecuencia del corolario anterior. \square

Definición 4.3.3. Sea $T : X \rightarrow \mathcal{CB}(X)$ una correspondencia. Diremos que T es una *contracción multivaluada* si satisface alguna de las siguientes desigualdades, para todo x e y en X :

- (I) (Nadler) $\mathcal{H}(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$, para algún $k \in [0, 1)$,
- (II) (Kannan) $\mathcal{H}(Tx, Ty) \leq k[d(x, Tx) + d(y, Ty)]$, para algún $k \in [0, 1/2)$,
- (III) (Kannan generalizado) $\mathcal{H}(Tx, Ty) \leq k \max\{d(x, Tx), d(y, Ty)\}$, con $k \in [0, 1)$,
- (IV) (Chatterjea) $\mathcal{H}(Tx, Ty) \leq k[d(x, Ty) + d(y, Tx)]$, para algún $k \in [0, 1/2)$,
- (V) (Chatterjea generalizada) $\mathcal{H}(Tx, Ty) \leq k \max\{d(x, Ty), d(y, Tx)\}$, para algún $k \in [0, 1/2)$,
- (VI) (Berinde) $\mathcal{H}(Tx, Ty) \leq kd(x, y) + Ld(y, Tx)$, para algún $k \in [0, 1)$ y $L \geq 0$,
- (VII) (Reich) $\mathcal{H}(Tx, Ty) \leq kd(x, y) + \ell d(x, Tx) + md(y, Ty)$, para k, ℓ y m tales que $k + \ell + m < 1$, y
- (VIII) (Ćirić) $\mathcal{H}(Tx, Ty) \leq k \max\{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), d(x, Ty), d(y, Tx)\}$, para algún $k \in [0, 1/2)$.

A diferencia de las contracciones univaluadas definidas anteriormente, no todas las contracciones, en la definición precedente, satisfacen la COBM-2. De igual forma, dichas contracciones poseen puntos fijos, debido a que ellas satisfacen la COBM-1, como veremos en el capítulo siguiente. Por una razón de completitud, veremos aquí que cada una de estas contracciones posee un punto fijo. Lo haremos mediante

su demostración clásica. Sin embargo, en el capítulo siguiente, demostraremos un resultado general que permite obtener la existencia de punto fijo para cada una de ellas, con la excepción de la contracción de Ćirić.

Proposición 4.3.2. *Las contracciones Kannan y Kannan generalizada satisfacen la COBM-2.*

Demostración. (I) Si $T : X \rightarrow \mathcal{CB}(X)$ es Kannan con constante k , entonces para $x \in X$ e $y \in Tx$, tenemos que

$$\begin{aligned} d(y, Ty) &\leq \sup_{z \in Tx} d(z, Tx) \\ &= h(Tx, Ty) \\ &\leq \mathcal{H}(Tx, Ty) \\ &\leq k[d(x, Tx) + d(y, Ty)]. \end{aligned}$$

Luego, $(1 - k)d(y, Ty) \leq kd(x, Tx)$, y por consiguiente, $d(y, Ty) \leq [k/(1 - k)]d(x, Tx)$, para todo $y \in Tx$. Como $k \in [0, 1/2)$, entonces $k/(1 - k) \in [0, 1/2)$, por lo que T verifica la COBM-2.

(II) Sean $T : X \rightarrow \mathcal{CB}(X)$ Kannan generalizada con constante $k \in [0, 1)$ e $x \in X$. Si para algún $y \in Tx$, $d(x, Tx) \leq d(y, Ty)$, entonces

$$d(y, Ty) \leq kd(y, Ty),$$

lo que implica $d(y, Ty) = 0$. En otro caso, $d(y, Ty) \leq kd(x, Tx)$, para todo $y \in Tx$. En consecuencia, T satisface la COBM-2. □

Corolario 4.3.3. *Sean (X, d) un espacio métrico completo y $T : X \rightarrow \mathcal{CB}(X)$ una correspondencia débilmente semicontinua superior. Si T satisface alguna de las contracciones de la proposición anterior, entonces T posee un punto fijo.*

Demostración. Si T es alguna de las contracciones anteriores, entonces T satisface la COBM-2, y por corolario precedente, T tiene un punto fijo. □

A continuación, nuestro interés ahonda en probar la existencia de punto fijo en las contracciones anteriormente definidas. Para ello, necesitamos establecer una relación entre la \mathcal{H} -continuidad de una correspondencia T con la continuidad débil, como precisamos ahora.

Lema 4.3.1. *Sea $T : X \rightarrow \mathcal{CB}(X)$ una correspondencia continua respecto a la métrica de Hausdorff. Entonces, T es débilmente continua.*

Demostración. Sean x, y en X y $z \in Ty$. Luego,

$$\begin{aligned} d(x, Tx) &\leq d(x, y) + d(y, z) + d(z, Tx) \\ &\leq d(x, y) + \mathcal{H}(Ty, Tx) + d(y, z). \end{aligned}$$

Luego, $d(x, Tx) \leq d(x, y) + \mathcal{H}(Tx, Ty) + d(y, Ty)$, y por consiguiente $|d(x, Tx) - d(y, Ty)| \leq d(x, y) + \mathcal{H}(Tx, Ty)$. Como d y \mathcal{H} son funciones continuas, entonces la función $\varphi_T : X \rightarrow \mathbb{R}$ definida anteriormente también lo es. \square

Teorema 4.3.2 (Nadler, [35]). *Sean (X, d) un espacio métrico completo y $T : X \rightarrow \mathcal{CB}(X)$ una contracción Nadler con constante $k \in [0, 1)$. Entonces, T tiene un punto fijo.*

Demostración. Sean $T : X \rightarrow \mathcal{CB}(X)$ una contracción Nadler con constante $k \in [0, 1)$, $x_0 \in X$ y $x_1 \in Tx_0$. Como los valores de T son cerrados y acotados, existe $x_2 \in Tx_1$ tal que

$$d(x_1, x_2) \leq \mathcal{H}(Tx_0, Tx_1) + k.$$

Análogamente, existe $x_3 \in Tx_2$ tal que $d(x_2, x_3) \leq \mathcal{H}(Tx_1, Tx_2) + k^2$. Esto nos permite construir una sucesión $(x_n : n \in \mathbb{N})$ en X tal que $x_{n+1} \in Tx_n$ y $d(x_n, x_{n+1}) \leq \mathcal{H}(Tx_{n-1}, Tx_n) + k^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Por otro lado,

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &\leq \mathcal{H}(Tx_{n-1}, Tx_n) + k^n \\ &\leq kd(x_{n-1}, x_n) + k^n \\ &\leq k[\mathcal{H}(Tx_{n-2}, Tx_{n-1}) + k^{n-1}] + k^n \\ &\leq k^2d(x_{n-2}, x_{n-1}) + 2k^n. \end{aligned}$$

Procediendo inductivamente, se obtiene

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq k^n d(x_0, x_1) + nk^n,$$

para todo $n \geq 1$. En consecuencia,

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+m}) &\leq \sum_{i=0}^{m-1} d(x_{n+i}, x_{n+i+1}) \\ &\leq \left(\sum_{i=n}^{n+m-1} k^i \right) d(x_0, x_1) + \sum_{i=n}^{n+m-1} ik^i. \end{aligned}$$

Por tanto, $(x_n : n \in \mathbb{N})$ es una sucesión de Cauchy en X . Luego, existe $x^* \in X$ tal que $(x_n : n \in \mathbb{N})$ converge a x^* . Por lo tanto, $(Tx_n : n \in \mathbb{N})$ converge en $\mathcal{CB}(X)$ a Tx^* , y como $x_n \in Tx_{n-1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $x^* \in Tx^*$. Esto completa la demostración. \square

Análogo al caso univaluado, primero demostraremos que las contracciones Berinde poseen un punto fijo, y demostraremos que las contracciones Chatterjea y Reich son Berinde.

Teorema 4.3.3. *Sean (X, d) un espacio métrico completo y $T : X \rightarrow \mathcal{CB}(X)$ una contracción Berinde con constantes $k \in [0, 1)$ y $L \geq 0$. Entonces, T tiene un punto fijo.*

Demostración. Sean $\epsilon > 0$ y $x_0 \in X$. Supongamos que para todo $x \in X$, $d(x, Tx) > 0$. Luego, existe $x_1 \in Tx_0$ tal que $d(x_0, x_1) < (1 + \epsilon)d(x_0, Tx_0)$. De manera inductiva, existe $x_{n+1} \in Tx_n$ tal que

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &\leq (1 + \epsilon)d(x_n, Tx_n) \\ &\leq (1 + \epsilon)\mathcal{H}(Tx_{n-1}, Tx_n) \\ &\leq (1 + \epsilon)[kd(x_{n-1}, x_n) + Ld(x_n, Tx_{n-1})]. \end{aligned}$$

Como $x_n \in Tx_{n-1}$, entonces $d(x_n, x_{n+1}) \leq (1 + \epsilon)kd(x_{n-1}, x_n)$. Sean $\eta = (1 + \epsilon)k$. Si

escogemos $\epsilon > 0$ tal que $\eta < 1$, entonces

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \eta^n d(x_0, Tx_0),$$

de modo que la sucesión $(x_n : n \in \mathbb{N})$ es de Cauchy en X . Luego, existe $x^* \in X$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$. Veamos que dicho elemento es un punto fijo para T . En efecto,

$$\begin{aligned} d(x^*, Tx^*) &\leq d(x^*, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, Tx^*) \\ &\leq d(x^*, x_{n+1}) + \mathcal{H}(Tx_n, Tx^*) \\ &\leq d(x^*, x_{n+1}) + kd(x_n, x^*) + Ld(x^*, Tx_n) \\ &\leq d(x^*, x_{n+1}) + kd(x_n, x^*) + Ld(x^*, x_{n+1}). \end{aligned}$$

Si tomamos límite cuando $n \rightarrow \infty$, concluimos que $d(x^*, Tx^*) = 0$. Así, x^* es un punto fijo. Esto completa la demostración. \square

Teorema 4.3.4 (Kannan, [30]). *Sea $T : X \rightarrow \mathcal{CB}(X)$ una contracción Kannan con constante $k \in [0, 1/2)$. Entonces, T tiene un punto fijo.*

Demostración. Probaremos que T es Berinde. En efecto, sean x, y en X y $z \in Tx$. Luego,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(Tx, Ty) &\leq k[d(x, Tx) + d(y, Ty)] \\ &\leq k[d(d, y) + d(y, Tx) + d(y, Ty)] \\ &\leq k[d(x, y) + d(y, z) + d(z, y) + d(y, Ty)] \\ &\leq k[d(x, y) + 2d(y, z) + \mathcal{H}(Tx, Ty)]. \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\mathcal{H}(Tx, Ty) \leq [k/(1-k)]d(x, y) + [2k/(1-k)]d(y, z),$$

y entonces $\mathcal{H}(Tx, Ty) \leq [k/(1-k)]d(x, y) + [2k/(1-k)]d(y, Tx)$. Así, T es Berinde, y por tanto tiene un punto fijo. \square

Teorema 4.3.5 (Chatterjea, [15]). *Sean (X, d) un espacio métrico completo y $T :$*

$X \rightarrow \mathcal{CB}(X)$ una contracción Chatterjea con constante $k \in [0, 1/2)$. Entonces, T tiene un punto fijo.

Demostración. Sean x, y en X y $z \in Tx$. Luego,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(Tx, Ty) &\leq k[d(x, Ty) + d(y, Tx)] \\ &\leq k[d(x, y) + d(y, z) + d(z, Ty) + d(y, Tx)]. \end{aligned}$$

Por consiguiente, $\mathcal{H}(Tx, Ty) \leq [k/(1-k)]d(x, y) + [k/(1-k)](d(y, z) + d(y, Tx))$, y por tanto $\mathcal{H}(Tx, Ty) \leq [k/(1-k)]d(x, y) + [2k/(1-k)]d(y, Tx)$. En consecuencia, T es Berinde, de modo que tiene un punto fijo. \square

Teorema 4.3.6 (Reich, [36]). Sean (X, d) un espacio métrico completo y $T : X \rightarrow \mathcal{CB}(X)$ una contracción Reich con constantes k, ℓ y m . Entonces, T tiene un punto fijo.

Demostración. Sean x, y en X y $z \in Tx$. Luego,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(Tx, Ty) &\leq kd(x, y) + \ell d(x, Tx) + md(y, Ty) \\ &\leq kd(x, y) + \ell[d(x, y) + d(y, z)] + m[d(y, z) + d(x, Ty)] \\ &= (k + \ell)d(x, y) + (\ell + m)d(y, z) + kd(z, Ty). \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\mathcal{H}(Tx, Ty) \leq [(k + \ell)/(1 - m)]d(x, y) + [(\ell + m)/(1 - m)]d(y, Tx).$$

Y como $k + \ell + m < 1$, entonces $(k + \ell)/(1 - m) < 1$. Así, T es Berinde, y tiene un punto fijo. \square

La existencia de punto fijo para la contracción Ćirić multivaluada fue demostrada por Amini-Harandi en [3].

Teorema 4.3.7 (Amini-Harandi, [3]). Sean (X, d) un espacio métrico completo y $T : X \rightarrow \mathcal{CB}(X)$ una contracción Ćirić con constante $k \in [0, 1/2)$. Entonces, T tiene un punto fijo.

Demostración. Primero, observemos que para todo A, B en $\mathcal{CB}(X)$, $a \in A$ y $c > 0$ tales que $\mathcal{H}(A, B) < c$, existe $b \in B$ tal que $d(a, b) < c$. Sea $\delta > 0$ tal que $k < \delta < 1/2$. Luego,

$$\mathcal{H}(Tx, Ty) \leq \delta \max\{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), d(x, Ty), d(y, Tx)\},$$

para todo x e y en X distintos. Sean x_0 y x_1 en X . De manera inductiva, se prueba la existencia de una sucesión $(x_n : n \in \mathbb{N})$ en X tal que $x_{n+1} \in Tx_n$, y

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &\leq \delta \max\{d(x_n, x_{n-1}), d(x_n, Tx_n), d(x_{n-1}, Tx_{n-1}), \\ &\quad d(x_n, Tx_{n-1}), d(x_{n-1}, Tx_n)\} \\ &= \delta \max\{d(x_n, x_{n-1}), d(x_n, Tx_n), d(x_{n-1}, Tx_{n-1}), \\ &\quad d(x_{n-1}, Tx_n)\} \\ &\leq \delta \max\{d(x_n, x_{n-1}), d(x_{n-1}, dx_{n+1})\}. \end{aligned}$$

Así, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$d(x_n, x_{n+1}) < \delta \max\{d(x_n, x_{n-1}), d(x_{n-1}, x_{n+1})\}. \quad (4.1)$$

Sea $\gamma_n = \max\{d(x_0, x_m) \mid 1 \leq m \leq n\}$. Veamos que para cada $n \geq 1$,

$$d(x_{n-1}, x_n) \leq \gamma_n [\delta / (1 - \delta)]^{n-1}. \quad (4.2)$$

Para $n = 1$, la igualdad es válida. Supongamos entonces que (4.2) se satisface para $k < n$. De (4.1) tenemos que

$$d(x_{n-1}, x_n) \leq \delta \max\{d(x_{n-1}, x_{n-2}), d(x_{n-2}, x_n)\}.$$

Por hipótesis inductiva, (4.2) se cumple si $d(x_{n-1}, x_n) \leq \delta d(x_{n-1}, x_{n-2})$, pues en este

caso,

$$d(x_{n-1}, x_n) \leq \delta \gamma_{n-1} [\delta/(1-\delta)]^{n-2} \leq \gamma_{n-1} [\delta/(1-\delta)]^{n-1} \leq \gamma_n [\delta/(1-\delta)]^{n-1}.$$

Supongamos entonces que $d(x_{n-1}, x_n) \leq \delta d(x_{n-2}, x_n)$. Luego,

$$d(x_{n-2}, x_n) \leq d(x_n, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_{n-2}) \leq \delta d(x_{n-2}, x_n) + \gamma_{n-1} [\delta/(1-\delta)]^{n-2}.$$

Por consiguiente,

$$d(x_{n-2}, x_n) \leq [(\gamma_n - 1)/(1-\delta)] [\delta/(1-\delta)]^{n-2},$$

y así,

$$d(x_{n-1}, x_n) \leq \gamma_{n-1} [\delta/(1-\delta)]^{n-1} \leq \gamma_n [\delta/(1-\delta)]^{n-1},$$

pues $d(x_{n-1}, x_n) \leq \delta d(x_{n-2}, x_n)$. Esto prueba (4.2), para todo $n \in \mathbb{N}$. Ahora, veamos que para $n \geq 2$,

$$\gamma_n \leq \frac{1 + [\delta/(1-\delta)]^{n-1}}{1 - [\delta/(1-\delta)]^{n-1}} \gamma_{n-1}.$$

En efecto, si $\gamma_{n-1} = \gamma_n$, entonces la desigualdad se verifica. Si $\gamma_{n-1} < \gamma_n$, entonces $\gamma_n = d(x_0, x_n)$, y por (4.2),

$$\gamma_n = d(x_0, x_n) \leq d(x_0, x_{n-1}) + [\delta/(1-\delta)]^{n-1} \gamma_n.$$

Luego,

$$\gamma_n \leq \frac{d(x_0, x_{n-1})}{1 - [\delta/(1-\delta)]^{n-1}} \leq \frac{\gamma_{n-1}}{1 - [\delta/(1-\delta)]^{n-1}} \leq \frac{1 + [\delta/(1-\delta)]^{n-1}}{1 - [\delta/(1-\delta)]^{n-1}} \gamma_{n-1},$$

de modo que tenemos la desigualdad buscada. En consecuencia,

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \gamma_n \frac{\prod_{n=1}^{\infty} (1 + [\delta/(1-\delta)]^{n-1})}{\prod_{n=1}^{\infty} (1 - [\delta/(1-\delta)]^{n-1})}.$$

Debido a que las series $\sum_{n=1}^{\infty} (1 + [\delta/(1-\delta)]^{n-1})$ y $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - [\delta/(1-\delta)]^{n-1})$ son convergentes, entonces el producto $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + [\delta/(1-\delta)]^{n-1})$ es convergente, y $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - [\delta/(1-\delta)]^{n-1}) > 0$. Así, $\sup_{n \in \mathbb{N}} \gamma_n < \infty$. Luego, por (4.2), la sucesión

$(x_n : n \in \mathbb{N})$ es de Cauchy en X . Sea $x^* \in X$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$. Veamos que x^* es un punto fijo de T . En efecto,

$$\begin{aligned}
 d(x^*, Tx^*) &= \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_{n+1}, Tx^*) \\
 &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{H}(Tx_n, Tx^*) \\
 &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \delta \max\{d(x_n, x^*), d(x_n, Tx_n), d(x^*, Tx^*), \\
 &\quad d(x_n, Tx^*), d(x^*, Tx_n)\} \\
 &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \delta \max\{d(x_n, x^*), d(x_n, x_{n+1}), d(x^*, Tx^*), \\
 &\quad d(x_n, Tx^*), d(x^*, x_{n+1})\} \\
 &= \delta d(x^*, Tx^*).
 \end{aligned}$$

Como $0 \leq \delta < 1$, entonces $d(x^*, Tx^*) = 0$, y como Tx^* es cerrado en X , entonces $x^* \in Tx^*$. Esto completa la demostración. \square

Capítulo 5

Condición Orbital Débil en Espacios Métricos y Uniformes

En este último capítulo presentamos resultados inéditos en la teoría métrica de punto fijo, los cuales creemos es el aporte principal de la presente tesis. Estos resultados se dividen en dos ejes: el primero, estudia nuevas condiciones para que una contracción multivaluada, en un espacio métrico completo, tenga un punto fijo. El segundo, consiste en extender la teoría de punto fijo multivaluada, existente en espacios métricos, a espacios uniformes. Para ello, utilizaremos el concepto de pseudo métrica de Hausdorff desarrollado en la Sección 2.2 del Capítulo 2.

5.1. Condición Orbital de Banach Debilitada

En esta sección, (X, d) denotará un espacio métrico completo. Demostraremos aquí que, exceptuando el teorema de Ćirić, la existencia de puntos fijos en las contracciones multivaluadas, probada en el capítulo anterior, es consecuencia de un resultado general.

Definición 5.1.1. Sean $T : X \rightarrow \mathcal{CB}(X)$ una correspondencia, $x_0 \in X$ y $G : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Diremos que G es (x_0, T) -*orbitalmente semicontinua inferior* en $x^* \in X$, si y solo si, para toda sucesión $(x_n : n \in \mathbb{N})$ en Tx_0 tal que x_n converge a x , entonces $G(x^*) \leq \liminf G(x_n)$.

En lo que sigue, $G_T : X \rightarrow \mathbb{R}$ denotará la función dada por $G_T(x) = d(x, Tx)$.

Para una función $f : X \rightarrow X$, denotaremos por G_f a la función G_T dada por la correspondencia $Tx = \{f(x)\}$.

En los siguientes resultados, daremos cuenta que la COBM-1, junto a otras hipótesis, serán suficientes para asegurar la existencia de punto fijo.

Teorema 5.1.1. *Sea $T : X \rightarrow \mathcal{CB}(X)$ una correspondencia que satisface la COBM-1 con constante $k \in [0, 1)$. Entonces, existen $x^* \in X$ una sucesión $(x_n : n \in \mathbb{N})$ en X convergente a x^* tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} \in Tx_n$, y se verifica lo siguiente:*

- a) $d(x_n, Tx_n) \leq d(x_n, x_{n+1}) \leq k^n d(x_0, Tx_0)$, y
- b) $d(x^*, Tx_n) \leq k^{n+1} d(x_0, Tx_0) / (1 - k)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Más aún, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (I) $x^* \in Tx^*$,
- (II) G_T es (x_0, T) -orbitalmente semicontinua inferior en x^* , y
- (III) G_T es semicontinua inferior en x^* .

Demostración. Sea $\rho \in (k, 1)$. Si $d(x_0, Tx_0) = 0$, definimos $x_n = x_0$, para todo $n \geq 1$. Si $d(x_0, Tx_0) \neq 0$, entonces existe $x_1 \in X$ tal que $d(x_1, Tx_1) \leq \rho d(x_0, Tx_0)$. Si $d(x_1, Tx_1) = 0$, definimos $x_n = x_1$, para todo $n \geq 2$. De lo contrario, existe $x_2 \in Tx_1$ tal que $d(x_2, Tx_2) < \rho d(x_1, Tx_1) < \rho^2 d(x_0, Tx_0)$. Así, de manera recursiva, existe una sucesión $(x_n : n \in \mathbb{N})$ en X tal que la condición a) se cumple.

Ahora, para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+m}) &\leq \sum_{k=0}^{m-1} d(x_{n+k}, x_{n+k+1}) \\ &\leq \sum_{k=0}^{m-1} \rho^{n+k} d(x_0, Tx_0) \\ &= \rho^n \sum_{k=0}^{m-1} \rho^k d(x_0, Tx_0) \\ &\leq \rho^n \sum_{k=0}^{m-1} \rho^k d(x_0, Tx_0). \end{aligned}$$

De modo que $d(x_n, x_{n+m}) \leq \rho^n d(x_0, Tx_0) / (1 - \rho)$. En particular, $(x_n : n \in \mathbb{N})$ es una sucesión de Cauchy, por lo que existe $x^* \in X$ tal que $(x_n : n \in \mathbb{N})$ converge a

x^* . Calculando el límite cuando $m \rightarrow \infty$ a la desigualdad anterior, tenemos que

$$d(x^*, Tx_{n-1}) \leq d(x^*, x_n) \leq \rho^n d(x_0, Tx_0)/(1 - \rho), \text{ para todo } n \geq 1,$$

y en consecuencia, la condición b) se satisface.

Ahora, supongamos que $x^* \in Tx^*$. Como $G_T(x^*) = 0$, entonces G_T es (x, T) -orbitalmente semicontinua inferior en x^* , para todo $x \in X$. Así, (I) implica (II). Por otro lado, como X satisface el primer axioma de contabilidad, (II) y (III) son equivalentes. Finalmente, si G_T es semicontinua inferior en x^* , tenemos que $d(x^*, Tx^*) = G_T(x^*) \leq \liminf G_T(x_n) = 0$, de modo que $x^* \in Tx^*$. Esto completa la demostración. \square

Observación. Si $T : X \rightarrow \mathcal{CB}(X)$ es una correspondencia semicontinua inferior que satisface la COBM-1, entonces satisface las condiciones equivalentes (I)-(III). En efecto, sean $h(x) = d(x, Tx)$ para todo $x \in X$ y $a > 0$. Luego, $\{x \in X \mid h(x) < a\} = \{x \in X \mid Tx \cap B(x, a) \neq \emptyset\}$. Por tanto, h es semicontinua inferior.

El siguiente Corolario es una versión equivalente del resultado principal de Hicks y Rhoades en [28].

Corolario 5.1.1. *Sea $f : X \rightarrow X$ una función y $k \in [0, 1)$. Supongamos que existe $x_0 \in X$ tal que para todo $x \in \mathcal{O}(x_0, f)$, $d(f(x), f^2(x)) \leq kd(x, f(x))$. Entonces, existe $x^* \in X$ tal que se verifica lo siguiente:*

(I) $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x^*, f^n(x_0)) = 0$, y

(II) $d(x^*, f^n(x_0)) \leq k^n d(x_0, f(x_0))/(1 - k)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Además, $f(x^*) = x^*$, si y solo si, la función $h : X \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $h(x) = d(x, f(x))$ es (x_0, f) -orbitalmente semicontinua inferior en x^* .

Demostración. Por teorema precedente, existe una sucesión $(x_n : n \in \mathbb{N})$ convergente a x_k^* tal que $x_{n+1} = f(x_n) = f^n(x_0)$. Como la sucesión $(x_n : n \in \mathbb{N})$ solo depende de x_0 y no de k , entonces x_k^* tampoco depende de k . Por lo tanto, se cumplen las condiciones a) y b) del teorema, lo que completa la demostración. \square

Definición 5.1.2. Diremos que una correspondencia $T : X \rightarrow \mathcal{CB}(X)$ es *Hausdorff semicontinua superior*, si y solo si, para todo $x \in X$ y todo $\epsilon > 0$, existe una vecindad U de x tal que para todo $y \in U$, $Ty \subseteq B(Tx, \epsilon)$.

La semicontinuidad superior de Hausdorff es más débil que la semicontinuidad superior de correspondencia. Este concepto es importante, pues permite obtener la semicontinuidad inferior orbital de una correspondencia.

Teorema 5.1.2. *Sea $T : X \rightarrow \mathcal{CB}(X)$ una correspondencia Hausdorff semicontinua superior que satisface la COBM-1 en $x_0 \in X$. Entonces, T tiene un punto fijo.*

Demostración. Por Teorema 5.1.1, existe $x^* \in X$ y una sucesión $(x_n : n \in \mathbb{N})$ en $\mathcal{O}(x_0, T)$ convergente a x^* tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} \in Tx_n$. Sea $\epsilon > 0$. Luego, existe una vecindad U de x^* tal que $Tx \subseteq B(Tx^*, \epsilon)$, para todo $x \in U$. Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U$ para todo $n \geq N$. Por consiguiente, $Tx_n \subseteq B(Tx^*, \epsilon)$, lo que implica $\sup_{y \in Tx_n} d(y, Tx^*) \leq \epsilon$, para todo $n \geq N$. Así,

$$d(x^*, Tx^*) \leq d(x^*, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, Tx^*) \leq d(x^*, x_{n+1}) + \epsilon, \text{ para todo } n \geq N.$$

Si calculamos el límite inferior sobre n , y consideramos que ϵ es arbitrario, obtenemos que $d(x^*, Tx^*) = 0$. Por lo tanto, x^* es un punto fijo de T . \square

Corolario 5.1.2. *Sea $T : X \rightarrow \mathcal{CB}(X)$ una correspondencia continua respecto a la métrica de Hausdorff. Si T satisface la COBM-1 en $x_0 \in X$ con constante $k \in [0, 1)$, entonces, T tiene un punto fijo.*

Demostración. Como T es continua respecto a la métrica de Hausdorff, entonces T es Hausdorff semicontinua superior. Por teorema precedente, T tiene un punto fijo. \square

Observación. Una condición suficiente para que $T : X \rightarrow \mathcal{CB}(X)$ cumpla la COBM-1 es que $d(y, Ty) \leq kd(x, y)$, para todo $x \in \mathcal{O}(x_0, T)$ y todo $y \in Tx$. Para concluir esta sección, verificaremos que cada una de las contracciones multivaluadas definidas anteriormente satisface la COBM-1.

Proposición 5.1.1. *Las contracciones multivaluadas definidas en la Sección 4.3 satisfacen la COBM-1.*

Demostración. Las contracciones Kannan y Kannan generalizada fueron abordadas el capítulo anterior. Veamos las restantes.

- (I) (Nadler) Si $T : X \rightarrow \mathcal{CB}(X)$ es Nadler con constante $k \in [0, 1)$, entonces para $x \in X$ e $y \in Tx$, tenemos

$$d(y, Ty) \leq \sup_{z \in Tx} d(z, Ty) \leq \mathcal{H}(Tx, Ty) \leq kd(x, y).$$

En consecuencia, T satisface la COBM-1. Es directo del Corolario que T tiene un punto fijo.

- (II) (Chatterjea y Chatterjea generalizada) Si $T : X \rightarrow \mathcal{CB}(X)$ es Chatterjea con constante $k \in [0, 1/2)$, entonces sean $x \in X$ e $y \in Tx$. Luego,

$$d(y, Ty) \leq \mathcal{H}(Tx, Ty) \leq k(d(x, Ty) + d(y, Tx)) = kd(x, Ty).$$

Este hecho, junto con $d(x, Ty) \leq d(x, y) + d(y, Ty)$, implica

$$d(y, Ty) \leq [k/(1 - k)]d(x, y), \text{ para todo } x \in X \text{ e } y \in Tx.$$

En consecuencia, T satisface la COBM-1 con constante $k/(1 - k) \in [0, 1)$.

Si T es Chatterjea generalizada, entonces es Chatterjea, de modo que verifica la COBM-1.

- (III) (Berinde) Si $T : X \rightarrow \mathcal{CB}(X)$ es Berinde con constantes $k \in [0, 1)$ y $L \geq 0$, entonces

$$\mathcal{H}(Tx, Ty) \leq kd(x, y) + L(y, Tx) = kd(x, y), \text{ para todo } x \in X \text{ e } y \in Tx.$$

Como $y \in Tx$, se obtiene $d(y, Ty) \leq kd(x, y)$. En consecuencia, T satisface la COBM-1 con constante k .

- (IV) (Reich) Sea $T : X \rightarrow \mathcal{CB}(X)$ una contracción Reich con constantes α, β y γ en $[0, 1)$ tales que $\alpha + \beta + \gamma < 1$, entonces. Sean $x \in X$ e $y \in Tx$. Notemos que para todo $z \in Tx$,

$$d(y, Ty) \leq d(y, z) + (z, Ty),$$

y además, $d(x, Tx) \leq d(x, z)$. Luego, tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(Tx, Ty) &\leq \alpha d(x, y) + \beta d(x, z) + \gamma d(y, Ty) \\ &\leq \alpha d(x, y) + \beta(d(x, y) + d(y, z)) + \gamma(d(y, z) + d(z, Ty)) \\ &= (\alpha + \beta)d(x, y) + (\beta + \gamma)d(y, z) + \gamma d(z, Ty) \\ &\leq (\alpha + \beta)d(x, y) + (\beta + \gamma)d(y, z) + \gamma \mathcal{H}(Tx, Ty). \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\mathcal{H}(Tx, Ty) \leq [(\alpha + \beta)/(1 - \gamma)]d(x, y) + [(\beta + \gamma)/(1 - \gamma)]d(y, Tx), \text{ para todo } x \in X \text{ e } y \in Tx.$$

Como $\alpha + \beta + \gamma < 1$, entonces $(\alpha + \beta)/(1 - \gamma) < 1$ y $(\beta + \gamma)/(1 - \gamma) \geq 0$. Por lo tanto, T es una contracción Berinde, y entonces T satisface la COBM-1.

(V) Sea $T : X \rightarrow \mathcal{CB}(X)$ una contracción Ćirić con constante $k \in [0, 1/2)$. Sean $x \in X$ e $y \in Tx$. Luego,

$$\mathcal{H}(Tx, Ty) \leq k \max\{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), d(x, Ty), d(y, Tx)\},$$

y como $y \in Tx$ y $d(x, Tx) \leq d(x, y)$, entonces

$$\mathcal{H}(Tx, Ty) \leq \alpha \max\{d(x, y), d(y, Ty), d(x, Ty)\} \leq k(d(x, y) + d(y, Ty)).$$

En consecuencia,

$$d(y, Ty) \leq [k/(1 - k)]d(x, y), \text{ para todo } x \in X \text{ e } y \in Tx,$$

y por lo tanto, T satisface la COBM-1. Esto completa la demostración. □

Adicionalmente, introducimos una nueva contracción que satisface la COBM-2. En efecto, sea $T : X \rightarrow \mathcal{CB}(X)$ con la siguiente propiedad:

$$\mathcal{H}(Tx, Ty) \leq k[d(x, Ty) + d(y, Ty)], \text{ para algun } k \in [0, 1). \quad (\text{NC})$$

Observemos que para todo $x \in X$ e $y \in Tx$, se tiene

$$d(y, Ty) \leq \mathcal{H}(Tx, Ty) \leq k[d(y, Tx) + d(x, Tx)].$$

De modo que $d(y, Ty) \leq kd(x, Tx)$, para todo $y \in Tx$. Luego, T satisface la COBM-2.

5.2. Punto Fijo en Espacios Uniformes

En lo que sigue de esta sección, (X, \mathcal{U}) denotará un espacio uniforme Hausdorff con la topología uniforme, y $\mathfrak{D} = \{d_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ la familia de pseudo métricas que genera la uniformidad \mathcal{U} . Además, $\mathfrak{D}_2 = \{H^\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ denotará la familia de pseudo métricas que genera la $\mathcal{H}(X)$ -topología, la cual, según vimos en el Capítulo 2, están definidas por

$$H^\lambda(A, B) = \max \left\{ \sup_{a \in A} d_\lambda(a, B), \sup_{b \in B} d_\lambda(b, A) \right\},$$

para A y B en $\mathcal{CB}(X)$, donde $d_\lambda(x, A) = \inf_{a \in A} d_\lambda(x, a)$, para $x \in X$ y $\lambda \in \Lambda$.

Definición 5.2.1. Sea \mathcal{B} una base de filtro en X . Diremos que \mathcal{B} converge a $Y \in 2^X \setminus \{\emptyset\}$ respecto a la $\mathcal{H}(X)$ -topología, si y solo si, para todo $U \in \mathcal{U}$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subseteq U[Y]$ e $Y \subseteq U[B]$.

A continuación, definiremos una extensión a espacios uniformes, tanto para las condiciones orbitales y contracciones multivaluadas definidas en espacios métricos.

Definición 5.2.2. Sea $T : X \rightarrow \mathcal{CB}(X)$ una correspondencia. Diremos que T satisface la *condición orbital de Banach multivaluada uniforme tipo 1* (COUB-1), si y solo si, existe una familia $\{k_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ en $[0, 1)$, tal que para todo $x \in X$ y todo $\lambda \in \Lambda$,

$$\inf_{y \in Tx} d_\lambda(y, Ty) \leq k_\lambda d_\lambda(x, Tx).$$

Diremos además que T satisface la *condición orbital de Banach multivaluada uniforme tipo 2* (COUB-2), si existe una familia $\{k_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ en $[0, 1)$ tal que para todo $x \in X$, $y \in Tx$, $\lambda \in \Lambda$, se verifica

$$d_\lambda(y, Ty) \leq k_\lambda d_\lambda(x, Tx).$$

Es directo que toda correspondencia que satisface la COUB-2, también satisface la COUB-1. Además, en un espacio métrico, la COBM-1 (respectivamente COBM-2) coincide con la COUB-1 (respectivamente COUB-2), de modo que los resultados obtenidos con COUB-1 y COUB-1 serán válidos para contracciones que verifiquen la COBM-1 y COBM-2, respectivamente.

Definición 5.2.3. Sea $T : X \rightarrow \mathcal{CB}(X)$ una correspondencia. Diremos que T es una *contracción uniforme*, si T satisface alguna de las siguientes desigualdades, para todo x, y en X y $\lambda \in \Lambda$:

- (I) (*Nadler*) $H^\lambda(Tx, Ty) \leq k_\lambda d_\lambda(x, y)$, para alguna familia $\{k_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ en $[0, 1)$,
- (II) (*Kannan*) $H^\lambda(Tx, Ty) \leq k_\lambda [d_\lambda(x, Tx) + d_\lambda(y, Ty)]$, para alguna familia $\{k_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ en $[0, 1/2)$,
- (III) (*Kannan generalizada*) $H^\lambda(Tx, Ty) \leq k_\lambda \max\{d_\lambda(x, Tx), d_\lambda(y, Ty)\}$, para alguna familia $\{k_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ en $[0, 1)$,
- (IV) (*Chatterjea*) $H^\lambda(Tx, Ty) \leq k_\lambda [d_\lambda(x, Ty) + d_\lambda(y, Tx)]$, para alguna familia $\{k_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ en $[0, 1/2)$,
- (V) (*Chatterjea generalizada*) $H^\lambda(Tx, Ty) \leq k_\lambda \max\{d_\lambda(x, Ty), d_\lambda(y, Tx)\}$, para alguna familia $\{k_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ en $[0, 1/2)$,
- (VI) (*Berinde*) $H^\lambda(Tx, Ty) \leq k_\lambda d_\lambda(x, y) + L_\lambda d_\lambda(y, Tx)$, para algunas familias $\{k_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ en $[0, 1)$ y $\{L_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \in [0, \infty)$,
- (VII) (*Reich*) $H^\lambda(Tx, Ty) \leq k_\lambda d_\lambda(x, y) + \ell_\lambda d_\lambda(x, Tx) + m_\lambda d_\lambda(y, Ty)$, para familias de escalares $\{k_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}, \{\ell_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}, \{m_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ tales que $k_\lambda + \ell_\lambda + m_\lambda < 1$, para cada $\lambda \in \Lambda$, y
- (VIII) (*Ćirić*) $H^\lambda(Tx, Ty) \leq k_\lambda \max\{d_\lambda(x, y), d_\lambda(x, Tx), d_\lambda(y, Ty), d_\lambda(x, Ty), d_\lambda(y, Tx)\}$, para alguna familia $\{k_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ en $[0, 1/2)$.

Las contracciones anteriores aparecen frecuentemente en la literatura. Con el propósito de presentar una contracción adicional que satisfaga la COUB-2, conside-

raremos además la correspondencia $T : X \rightarrow \mathcal{CB}(X)$ con la propiedad siguiente:

$$H^\lambda(Tx, Ty) \leq k_\lambda[d_\lambda(x, Ty) + d_\lambda(y, Ty)], \text{ para alguna familia } \{k_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \text{ en } [0, 1/2). \quad (\text{NC})$$

La COUB-2 es estrictamente más fuerte que la COUB-1. De hecho, de manera análoga al caso métrico, las contracciones Kannan y Kannan generalizada satisfacen la COUB-2. Por el contrario, otras contracciones, como por ejemplo Nadler (y en consecuencia Berinde, junto a otras más), no satisfacen esta propiedad. Verificaremos que las contracciones de Kannan y Kannan generalizada satisfacen la COUB-2, y que las Nadler, Berinde y Ćirić satisfacen la COUB-1. Las demostraciones de las contracciones restantes son similares al caso métrico, por tal razón las omitiremos.

Proposición 5.2.1. *Las contracciones Kannan, Kannan generalizada y (NC), sobre un espacio uniforme (X, \mathcal{U}) , satisfacen la COUB-2.*

Demostración. (I) Supongamos que $T : X \rightarrow \mathcal{CB}(X)$ es Kannan con la familia de constantes $\{k_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ en $[0, 1/2)$. Sean $x \in X$, $y \in Tx$ y $\lambda \in \Lambda$, luego,

$$d_\lambda(y, Ty) \leq H^\lambda(Tx, Ty) \leq k_\lambda[d_\lambda(x, Tx) + d_\lambda(y, Ty)].$$

Por consiguiente, $(1 - k_\lambda)d_\lambda(y, Ty) \leq k_\lambda d_\lambda(x, Tx)$, de modo que

$$d_\lambda(y, Ty) \leq [k_\lambda/(1 - k_\lambda)]d_\lambda(x, Tx).$$

Como $k_\lambda \in [0, 1/2)$, entonces $k_\lambda/(1 - k_\lambda) \in [0, 1)$, por lo que T verifica la COUB-2.

(II) Sean $T : X \rightarrow \mathcal{CB}(X)$ Kannan generalizada con constantes $k_\lambda \in [0, 1)$ y $x \in X$. Si para algún $y \in Tx$ y $\lambda \in \Lambda$, $d_\lambda(x, Tx) \leq d_\lambda(y, Ty)$, entonces

$$d_\lambda(y, Ty) \leq k_\lambda d_\lambda(y, Ty),$$

lo que implica $d_\lambda(y, Ty) = 0$. En consecuencia, $d_\lambda(y, Ty) \leq k_\lambda d_\lambda(x, Tx)$. Si para todo $y \in Tx$ y todo $\lambda \in \Lambda$, $d_\lambda(y, Ty) \leq d_\lambda(x, Tx)$, entonces

$$d_\lambda(y, Ty) \leq k_\lambda d_\lambda(x, Tx).$$

Por lo tanto, T satisface la COUB-2.

(III) Sean $T : X \rightarrow \mathcal{CB}(X)$ una contracción (NC) y $x \in X$. Como $Tx \neq \emptyset$, existe $y \in Tx$, luego,

$$d_\lambda(y, Ty) \leq H^\lambda(Tx, Ty) \leq k_\lambda[d_\lambda(y, Tx) + d_\lambda(x, Tx)] = k_\lambda d_\lambda(x, Tx),$$

para todo $\lambda \in \Lambda$. En consecuencia, T satisface la COUB-2. Esto completa la demostración. □

Teorema 5.2.1. *Las contracciones Nadler, Chatterjea, Chatterjea generalizada, Berinde, Reich y Ćirić satisfacen la COUB-1.*

Demostración. Primero veremos que las contracciones Nadler, Berinde y Ćirić verifican la COUB-1. Habiendo demostrado la propiedad para dos primeras, se concluye que la propiedad también es válida para las contracciones Chatterjea, Chatterjea generalizada y Reich.

(I) Sea $T : X \rightarrow \mathcal{CB}(X)$ una contracción Nadler con constantes $\{k_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ en $[0, 1)$. Sean $x \in X$, $y \in Tx$ y $\lambda \in \Lambda$. Luego,

$$d_\lambda(y, Ty) \leq H^\lambda(Tx, Ty) \leq k_\lambda d_\lambda(x, y).$$

De modo que $\inf_{y \in Tx} d_\lambda(y, Ty) \leq k_\lambda d_\lambda(x, Tx)$.

(II) Sea $T : X \rightarrow \mathcal{CB}(X)$ una contracción Berinde con constantes $\{k_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ en $[0, 1)$ y $\{L_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ en $[0, \infty)$. Sean $x \in X$, $y \in Tx$ y $\lambda \in \Lambda$. Luego,

$$d_\lambda(y, Ty) \leq H^\lambda(Tx, Ty) \leq k_\lambda d_\lambda(x, y) + L_\lambda(y, Tx) = k_\lambda d_\lambda(x, y).$$

De modo que $\inf_{y \in Tx} d_\lambda(y, Ty) \leq k_\lambda d_\lambda(x, Tx)$. Así, T satisface la COUB-1.

(III) Sea $T : X \rightarrow \mathcal{CB}(X)$ una contracción Ćirić con constantes $\{k_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ en $[0, 1/2)$. Sean $x \in X$, $y \in Tx$ y $\lambda \in \Lambda$. Luego,

$$H^\lambda(Tx, Ty) \leq k_\lambda \max\{d_\lambda(x, y), d_\lambda(x, Tx), d_\lambda(y, Ty), d_\lambda(x, Ty), d_\lambda(y, Tx)\}.$$

Como $y \in Tx$, entonces $d_\lambda(y, Tx) = 0$ y $d_\lambda(x, Tx) \leq d_\lambda(x, y)$, y por consiguiente,

$$\begin{aligned} H^\lambda(Tx, Ty) &\leq k_\lambda \text{máx}\{d_\lambda(x, y), d_\lambda(y, Ty), d_\lambda(x, Ty)\} \\ &\leq k_\lambda \text{máx}\{d_\lambda(x, y) + d_\lambda(y, Ty), d_\lambda(y, Ty) + d_\lambda(x, y), d_\lambda(x, y) + d_\lambda(y, Ty)\} \\ &\leq k_\lambda [d_\lambda(x, y) + d_\lambda(y, Ty)]. \end{aligned}$$

En consecuencia, $d_\lambda(y, Ty) \leq k_\lambda [d_\lambda(x, y) + d_\lambda(y, Ty)]$, por lo que

$$d_\lambda(y, Ty) \leq [k_\lambda / (1 - k_\lambda)] d_\lambda(x, y).$$

Por lo tanto, T satisface la COUB-1.

□

Observemos además que, en general, las contracciones multivaluadas estudiadas (uniformes o métricas) se pueden distinguir en tres clases:

- A: Kannan y Kannan generalizada,
- B: Nadler, Chatterjea, Chatterjea generalizada, Berinde y Reich, y
- C: Ćirić.

Según lo visto previamente, las contracciones clase A verifican condiciones más exigentes en comparación con aquellas de la clase B, cuyas contracciones principales son las de Nadler y Berinde. Por otro lado, la contracción Ćirić tiene notables diferencias en los métodos de demostración de existencia de punto fijo. De hecho, la posibilidad de extender la constante de contracción, en este caso, a cualquier valor en $[0, 1)$ es un problema abierto y de cierto interés.

Definición 5.2.4. Sean \mathcal{B}_1 y \mathcal{B}_2 bases de filtro en X . Diremos que \mathcal{B}_1 está *subordinada* a \mathcal{B}_2 , si y solo si, para todo $B_2 \in \mathcal{B}_2$, existe $B_1 \in \mathcal{B}_1$ tal que $B_1 \subseteq B_2$. Esta condición la denotaremos por $\mathcal{B}_1 \vdash \mathcal{B}_2$.

A continuación, definiremos las condiciones de no vacuidad y no vacuidad fuerte sobre una base de filtro, y caracterizaremos esta última con la propiedad de ser una

base de filtro de Cauchy. Además de explorar sus propiedades, estableceremos una relación entre dicha condición con conjuntos de interés relacionados con una correspondencia. Las condiciones de no vacuidad, los conjuntos de interés mencionados y sus propiedades, en la forma como se describe en esta tesis, fueron introducidas por Fierro en [21], en el caso de espacios vectoriales topológicos, y en [22], en el caso de espacios uniformes.

Definición 5.2.5. Sea \mathcal{B} una base de filtro en un espacio uniforme (X, \mathcal{U}) . Diremos que \mathcal{B} satisface la *condición de no vacuidad* (respectivamente, *condición de no vacuidad fuerte*), si y solo si, para todo $U \in \mathcal{U}$, existe F , subconjunto finito de X (respectivamente, $x \in X$) y $B \in \mathcal{B}$, tales que $B \subseteq U[F]$ (respectivamente, $B \subseteq U[x]$).

Proposición 5.2.2. Sea \mathcal{B} una base de filtro sobre X . Entonces, \mathcal{B} satisface la *condición de no vacuidad fuerte*, si y solo si, \mathcal{B} es una base de filtro de Cauchy.

Demostración. Supongamos que \mathcal{B} satisface la condición de no vacuidad fuerte y sea $U \in \mathcal{U}$. Luego, existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $V \circ V^{-1} \subseteq U$. Entonces, existen $B \in \mathcal{B}$ y $x \in X$ tales que $B \subseteq V[x]$ y, en consecuencia, $B \times B \subseteq V \circ V^{-1} \subseteq U$, de modo que \mathcal{B} es de Cauchy. Recíprocamente, supongamos que \mathcal{B} es una base de filtro de Cauchy, y sean $U \in \mathcal{U}$ y $B \in \mathcal{B}$ tales que $B \times B \subseteq U$. Sea $x \in B$, luego, $B \subseteq U[x]$, y entonces \mathcal{B} satisface la condición de no vacuidad fuerte. Esto completa la demostración. \square

En lo que sigue de este capítulo, asumiremos que (X, \mathcal{U}) es un espacio uniforme completo.

Proposición 5.2.3. Sea \mathcal{B} una base de filtro en X . Entonces, \mathcal{B} satisface la *condición de no vacuidad*, si y solo si, para todo ultrafiltro \mathcal{C}^* , tal que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}^*$, \mathcal{C}^* es una base de filtro de Cauchy.

Demostración. Supongamos que \mathcal{B} satisface la condición de no vacuidad, y sea \mathcal{C}^* un ultrafiltro en X tal que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}^*$. Sean U y V en \mathcal{U} tales que $V \circ V^{-1} \subseteq U$. Luego, existen $B \in \mathcal{B}$ y $F \in \langle X \rangle$, tales que $B \subseteq V[F]$. Como $V[F] \in \mathcal{C}^*$, y este es un ultrafiltro, existe $x^* \in F$ tal que $A = V[x^*] \in \mathcal{C}^*$. En consecuencia, $A \times A \subseteq U$, por lo que \mathcal{C}^* es una base de filtro de Cauchy. Ahora, supongamos por absurdo que \mathcal{B} no satisface la condición de no vacuidad. Luego, existe $U_0 \in \mathcal{U}$ tal que para todo $B \in \mathcal{B}$

y todo $F \in \langle X \rangle$, $B \cap (X \setminus U_0[F]) \neq \emptyset$. Más aún, dados F_1 y F_2 en $\langle X \rangle$, tenemos $\emptyset \neq X \setminus U_0[F_1 \cup F_2] \subseteq (X \cap U_0[F_1]) \cap (X \setminus U_0[F_2])$. Esto implica que la colección $\mathcal{C} = \mathcal{B} \cup \{X \setminus U_0[F]\}_{F \in \langle X \rangle}$ es una base de filtro en X . Sea \mathcal{C}^* un ultrafiltro tal que $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}^*$. Como $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}^*$, entonces por hipótesis y completitud de X , existe $x^* \in X$ tal que \mathcal{C}^* converge a x^* . En particular, para todo $C \in \mathcal{C}^*$, $C \cap U_0[x^*] \neq \emptyset$, lo que es una contradicción, pues $X \setminus U_0[x^*] \in \mathcal{C}^*$. Esto completa la demostración. \square

Definición 5.2.6. Diremos que una base de filtro \mathcal{B} en X es *pre-Cauchy* si verifica la condición de no vacuidad.

Lema 5.2.1. Sean \mathcal{B} una base de filtro en X e $Y = \bigcap_{B \in \mathcal{B}} \overline{B}$. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:

- (I) \mathcal{B} satisface la condición de no vacuidad,
- (II) Y es compacto y no vacío, e
- (III) Y es compacto y \mathcal{B} converge a Y , respecto de la $\mathcal{H}(X)$ -topología.

Demostración. Supongamos que (I) es válido. Entonces, Y es precompacto y cerrado, por Teorema 2.3.1, Y es compacto. Sea \mathcal{C}^* un ultrafiltro en X tal que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}^*$. Por Proposición 5.2.3, \mathcal{C}^* es una base de filtro de Cauchy y por la completitud de \mathcal{U} , existe $x^* \in X$ tal que \mathcal{C}^* converge a x^* . En consecuencia, $x^* \in \bigcap_{B \in \mathcal{C}^*} B \subseteq \bigcap_{B \in \mathcal{B}} B \subseteq Y$. Esto prueba que Y es no vacío.

Ahora, supongamos que Y es compacto y no vacío. Sea $U \in \mathcal{U}$. Como $Y \subseteq U[Y]$, Y es compacto y, por Proposición 2.1.2, $\text{Int}(U[Y])$ es un abierto en X que contiene a Y , existen B_1, \dots, B_r en \mathcal{B} tales que $\overline{B_1} \cap \dots \cap \overline{B_r} \subseteq U[Y]$. Escogiendo $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subseteq B_1 \cap \dots \cap B_r$, tenemos que $B \subseteq U[Y]$. Por Teorema 2.1.4, existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $\overline{V} \subseteq U$. Así, $Y \subseteq \overline{V}[B] \subseteq U[B]$, de modo que \mathcal{B} converge a Y , respecto de la $\mathcal{H}(X)$ -topología.

Finalmente, supongamos que \mathcal{B} converge a Y respecto de la $\mathcal{H}(X)$ -topología, y que Y es compacto. Sea $U \in \mathcal{U}$, luego, existen $V \in \mathcal{U}$ y $B \in \mathcal{B}$ tales que $V \circ V \circ V \subseteq U$, $B \subseteq V[Y]$ e $Y \subseteq V[B]$. En consecuencia, $Y \subseteq (V \circ V)[Y]$, y por la compactitud de Y , existe $F \in \langle Y \rangle$ tal que $Y \subseteq (V \circ V)[F]$. Por tanto, $B \subseteq (V \circ V \circ V)[F] \subseteq U[F]$. Así, \mathcal{B} satisface la condición de no vacuidad, lo que completa la demostración. \square

Corolario 5.2.1. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:

- (I) (X, \mathcal{U}) es completo,
- (II) toda base de filtro de subconjuntos cerrados de X que verifica la condición de no vacuidad, tiene intersección no vacía, y
- (III) toda base de filtro de subconjuntos cerrados de X que verifica la condición de no vacuidad fuerte, tiene intersección no vacía.

Demostración. Por lema precedente, (I) implica (II), y de forma directa se tiene que (II) implica (III). Ahora, supongamos que (III) es válido y sea \mathcal{B} una base de filtro de Cauchy en X . Luego, $\overline{\mathcal{B}} = \{\overline{B}\}_{B \in \mathcal{B}}$ es también una base de filtro de Cauchy. Por Proposición 5.2.2, $\overline{\mathcal{B}}$ es una base de filtro de subconjuntos cerrados de X que satisface la condición de no vacuidad fuerte. Por tanto, $\bigcap_{B \in \mathcal{B}} \overline{B}$ es un singleton, y entonces \mathcal{B} converge. Así, (X, \mathcal{U}) es un espacio uniforme completo. Esto termina la demostración. \square

Definición 5.2.7. Sean (X, \mathcal{U}) un espacio uniforme, $T : X \rightarrow \mathcal{C}(X)$ una correspondencia, y $x \in X$. Definimos los siguientes conjuntos notables:

- $\mathcal{U}(x, T) = \{U \in \mathcal{U} \mid Tx \cap U[x] \neq \emptyset\}$,
- $\mathcal{B}_T(x) = \{Tx \cap \overline{U}[x]\}_{U \in \mathcal{U}(x, T)}$, y
- $\mathcal{I}_T(x) = \bigcap \mathcal{B}_T(x)$.

Lema 5.2.2. Sean $T : X \rightarrow \mathcal{C}(X)$ una correspondencia y $x \in X$. Entonces, para todo $x \in X$, $\mathcal{I}_T(x) \neq \emptyset$, si y solo si, existe una base de filtro $\mathcal{C}(x)$ en Tx tal que $\mathcal{C}(x) \vdash \mathcal{B}_T(x)$, y $\mathcal{C}(x)$ satisface la condición de no vacuidad. Además, si $\mathcal{B}_T(x)$ satisface la condición de no vacuidad, entonces $\mathcal{I}_T(x)$ es compacto.

Demostración. Primero, notemos que $\mathcal{B}_T(x)$ es una base de filtro en Tx e $\mathcal{I}_T(x)$ es el conjunto de sus puntos de acumulación. Si $\mathcal{I}_T(x) \neq \emptyset$, entonces $\mathcal{C}(x) = \mathcal{B}_T(x)$ es la base de filtro buscada. Recíprocamente, sea $\mathcal{C}(x)$ una base de filtro en Tx tal que $\mathcal{C}(x) \vdash \mathcal{B}_T(x)$ y que satisface la condición de no vacuidad, entonces $\emptyset \neq \bigcap \mathcal{C}(x) \subseteq \bigcap \mathcal{B}_T(x) = \mathcal{I}_T(x)$, que prueba lo deseado, y además, por lema precedente, $\mathcal{I}_T(x)$ es compacto. Esto completa la demostración. \square

Teorema 5.2.2. Sea $T : X \rightarrow \mathcal{C}(X)$ una correspondencia. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (I) Para todo $x \in X$, $\mathcal{I}_T(x) \neq \emptyset$,
- (II) existe $f : X \rightarrow X$ tal que para todo $x \in X$, $f(x) \in \mathcal{I}_T(x) \neq \emptyset$, y
- (III) para todo $x \in X$, existe una base de filtro $\mathcal{C}(x)$ en X tal que $\mathcal{C}(x) \vdash \mathcal{B}_T(x)$ y $\mathcal{C}(x)$ satisface la condición de no vacuidad.

Demostración. Notemos que (I) es equivalente a (II), pues $\mathcal{I}_T(x) \neq \emptyset$, si y solo si, para todo $x \in X$, existe $y \in \mathcal{I}_T(x)$, lo que equivale a que existe $f : X \rightarrow X$, dada por $f(x) = y \in \mathcal{I}_T(x)$. Además, por Lema 5.2.2, (I) y (III) son equivalentes. Esto completa la demostración. \square

Teorema 5.2.3. Sea $T : X \rightarrow \mathcal{C}(X)$ una correspondencia y $\{\varphi_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una familia de funciones, de X en \mathbb{R} , semicontinuas y acotadas inferiormente. Entonces, se satisface lo siguiente:

- (I) si para todo $x \in X$, existe $y \in Tx$ tal que para todo $\lambda \in \Lambda$, $d_\lambda(x, y) \leq \varphi_\lambda(x) - \varphi_\lambda(y)$, entonces, T tiene un punto fijo, y
- (II) si para todo $x \in X$ y $y \in Tx$ y $\lambda \in \Lambda$, $d_\lambda(x, y) \leq \varphi_\lambda(x) - \varphi_\lambda(y)$, entonces, existe $x^* \in X$ tal que $Tx^* = \{x^*\}$.

Demostración. Denotemos por \preceq_λ el orden parcial de Brøndsted (Definición 4.1.2), correspondiente a la función φ_λ , y sea \preceq el orden definido sobre X como

$$x \preceq y, \quad \text{si y solo si,} \quad x \preceq_\lambda y, \quad \text{para todo } \lambda \in \Lambda.$$

Sean $x_0 \in X$, C una cadena en $[x_0, \rightarrow)$ y $\mathcal{B} = \{[x, \rightarrow) \cap C\}_{x \in C}$. Luego, \mathcal{B} es una base de filtro en C de conjuntos cerrados. Demostremos que \mathcal{B} es pre Cauchy. Sean $\lambda \in \Lambda$, $\epsilon > 0$ y $U_{\lambda, \epsilon} = \{(x, y) \in X \times X \mid d_\lambda(x, y) < \lambda\}$. Para cada $\lambda \in \Lambda$, φ_λ es acotada inferiormente y entonces existe $L_\lambda = \inf_{x \in C} \varphi_\lambda(x)$. Sea $x_\lambda \in C$ tal que $\varphi_\lambda(x_\lambda) < L_\lambda + \epsilon$. Luego, si $y \in [x_\lambda, \rightarrow) \cap C$, entonces

$$d_\lambda(x_\lambda, y) \leq \varphi_\lambda(x_\lambda) - \varphi_\lambda(y) < L_\lambda + \epsilon - \varphi_\lambda(y) \leq \epsilon.$$

Esto demuestra que $[x_\lambda, \rightarrow) \subseteq U_{\lambda, \epsilon}[x_\lambda]$ y por consiguiente, \mathcal{B} es una base de filtro

pre Cauchy. En consecuencia, existe

$$x^* \in \bigcap_{x \in C} [x, \rightarrow) \cap C \subseteq \bigcap_{x \in C} [x, \rightarrow).$$

Por la hipótesis en (I), existe $y \in Tx^*$ tal que $x^* \preceq y$. Pero x^* es maximal y entonces $y = x^*$. Luego, $x^* \in Tx^*$, lo cual demuestra (I).

Sea $y \in Tx^*$. Asumiendo la hipótesis en (II), se tiene que $y \preceq x^*$, pero, por la maximalidad de x^* , $y = x^*$, para todo $y \in Tx^*$. Por lo tanto, $Tx^* = \{x^*\}$, lo cual completa la demostración. \square

El siguiente corolario, consecuencia directa del teorema precedente, consiste en una generalización del Teorema 4.1.4.

Corolario 5.2.2. *Sea $f : X \rightarrow X$ una función arbitraria. Si para cada $\lambda \in \Lambda$, $\varphi_\lambda : X \rightarrow \mathbb{R}$ es una función semicontinua inferior y acotada inferiormente tal que para todo $x \in X$, $d_\lambda(x, f(x)) \leq \varphi_\lambda(x) - \varphi_\lambda(f(x))$, entonces, f tiene un punto fijo.*

Demostración. Definamos la correspondencia $T : X \rightarrow \mathcal{CB}(X)$ dado por $Tx = \{f(x)\}$, para todo $x \in X$. Por (II) de Teorema 5.2.3, existe $x^* \in X$ tal que $x^* \in \{f(x^*)\}$. Es decir, $x^* = f(x^*)$. \square

Corolario 5.2.3. *Sean (X, d) un espacio métrico completo, $K \subseteq X$ cerrado en X y $f : K \rightarrow K$. Si $T : K \rightarrow X$ es una función continua, y existe $r < 0$ tal que para todo $x \in X$, $d(f(x), Tf(x)) \leq d(x, f(x)) + rd(x, f(x))$, entonces, f tiene un punto fijo.*

Demostración. Si definimos la función $\varphi_\lambda(x) = -d(x, Tx)/r$, para todo $\lambda \in \Lambda$, entonces por corolario precedente, f tiene un punto fijo. \square

A continuación, definiremos el concepto de semicontinuidad débil para correspondencias en espacios uniformes, la cual extiende la semicontinuidad débil de correspondencias definidas en el Capítulo 4.

Definición 5.2.8. Sea $T : X \rightarrow \mathcal{CB}(X)$ una correspondencia. Diremos que T es débilmente semicontinua superior, si y solo si, para todo $\lambda \in \Lambda$, la función $h_\lambda : X \rightarrow [0, \infty)$ dada por $h_\lambda(x) = d_\lambda(x, Tx)$ es semicontinua inferior.

Proposición 5.2.4. *Toda correspondencia semicontinua superior es débilmente semicontinua superior.*

Demostración. Se demuestra de manera análoga a la demostración en Proposición 4.3.1. □

Teorema 5.2.4. *Sea $T : X \rightarrow \mathcal{CB}(X)$ una correspondencia tal que:*

- (I) *T satisface la COUB-1,*
- (II) *$\mathcal{I}_T(x) \neq \emptyset$, para todo $x \in X$, y*
- (III) *T es débilmente semicontinua superior.*

Entonces, T tiene un punto fijo.

Demostración. Sea $\{k_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una familia en $[0, 1)$ tal que para todo $x \in X$ y todo $\lambda \in \Lambda$,

$$\inf_{y \in Tx} d_\lambda(y, Ty) \leq k_\lambda d_\lambda(x, Tx).$$

Por Teorema 5.2.2, la condición (II) implica que existe una función $f : X \rightarrow X$ tal que $f(x) \in \mathcal{I}_T(x)$, para todo $x \in X$. Para $\lambda \in \Lambda$ y $x \in X$, tenemos que

$$d_\lambda(f(x), Tf(x)) \leq k_\lambda d_\lambda(x, f(x)),$$

y entonces

$$(1 - k_\lambda)d_\lambda(x, f(x)) \leq d_\lambda(x, f(x)) - d_\lambda(f(x), Tf(x)).$$

Definamos $\varphi_\lambda : X \rightarrow [0, \infty)$ dada por $\varphi_\lambda(x) = d_\lambda(x, Tx)/(1 - k_\lambda)$. Así, obtenemos que

$$d_\lambda(x, f(x)) \leq \frac{d_\lambda(x, f(x))}{1 - k_\lambda} - \frac{d_\lambda(f(x), Tf(x))}{1 - k_\lambda} = \varphi_\lambda(x) - \varphi_\lambda(f(x)).$$

Por condición (III), φ_λ es semicontinua superior acotada inferiormente, para todo $\lambda \in \Lambda$. Por Corolario 5.2.2, existe $x^* \in X$ tal que $f(x^*) = x^*$. Por lo tanto, $x^* = f(x^*) \in Tx^*$, de modo que x^* es un punto fijo para T . □

El siguiente corolario es una aplicación del teorema anterior para correspondencias en un espacio métrico completo que satisfacen la COUB-1.

Corolario 5.2.4. Sean (X, d) un espacio métrico completo, $k \in [0, 1)$ y $T : X \rightarrow \mathcal{CB}(X)$ una correspondencia débilmente semicontinua superior que satisface

$$\inf_{y \in Tx} d(y, Ty) \leq kd(x, Tx),$$

para todo $x \in X$. Entonces, T tiene un punto fijo.

Demostración. Por Teorema 5.2.4, solo resta probar que $\mathcal{I}_T(x) \neq \emptyset$. En efecto, sean $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $C_n = \{y \in Tx \mid d(x, y) < d(x, Tx) + 1/n\}$ y $\mathcal{C}(x) = \{C_n(x)\}_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$. Sea $r > 0$ tal que $Tx \cap B(x, r) \neq \emptyset$. Luego, $d(x, Tx) < r$, y así, existe $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tal que $d(x, Tx) + 1/n < r$. En consecuencia, $\mathcal{C}(x) \vdash \mathcal{B}_T(x)$. Ahora, sean $y_1(x) \in C_1(x)$ y definamos, de manera recursiva, $y_{n+1}(x) \in C_n(x) \cap B(y_n(x), 1/2^n)$. Luego, $(y_n(x) : n \in \mathbb{N})$ es una sucesión de Cauchy en X , y en consecuencia, $\mathcal{C}(x)$ satisface la condición de no vacuidad. Por Teorema 5.2.2, $\mathcal{I}_T(x) \neq \emptyset$, y por tanto T tiene un punto fijo. Esto completa la demostración. \square

Corolario 5.2.5. Sea $T : X \rightarrow \mathcal{K}(X)$ una correspondencia débilmente semicontinua superior que satisface la COUB-1. Entonces, T tiene un punto fijo.

Demostración. Por Teorema 5.2.4, basta demostrar que $\mathcal{I}_T(x) \neq \emptyset$, para todo $x \in X$. Como Tx es compacto y $\mathcal{B}_T(x)$ es una base de filtro en Tx , entonces $\mathcal{I}_T(x) = \bigcap \mathcal{B}_T(x) \neq \emptyset$, para todo $x \in X$. Esto completa la demostración. \square

Corolario 5.2.6. Sea $\{k_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una familia en $[0, 1)$ y $f : X \rightarrow X$ una función continua tal que

$$d_\lambda(f(x), f^2(x)) \leq k_\lambda d_\lambda(x, f(x)),$$

para todo $x \in X$ y todo $\lambda \in \Lambda$. Entonces, f tiene un punto fijo.

Demostración. Basta definir $T : X \rightarrow \mathcal{CB}(X)$ como $Tx = \{f(x)\}$. Es directo que T cumple las condiciones del teorema anterior y, en consecuencia, T tiene un punto fijo. \square

Entre las principales contribuciones de esta tesis destacamos los resultados que enunciamos a continuación, pues estos son extensiones de resultados análogos en espacios métricos.

Corolario 5.2.7. (*Nadler uniforme*) Sea $T : X \rightarrow \mathcal{CB}(X)$ una contracción Nadler con constantes $\{k_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ en $[0, 1)$ tal que para todo $x \in X$, $\mathcal{I}_T(x) \neq \emptyset$. Entonces, T tiene un punto fijo.

Demostración. Por Teorema 5.2.1, T satisface la COUB-1, y es continua respecto a la $\mathcal{H}(X)$ -topología, en particular, T es débilmente semicontinua superior. Por Teorema 5.2.4, T tiene un punto fijo. Esto completa la demostración. \square

Corolario 5.2.8. Sea $T : X \rightarrow \mathcal{CB}(X)$ una correspondencia débilmente semicontinua superior tal que $\mathcal{I}_T(x) \neq \emptyset$, para todo $x \in X$. Si T es Berinde, Kannan, Kannan generalizada, Chatterjea, Chatterjea generalizada, o Reich, entonces, T tiene un punto fijo.

Demostración. Si T es alguna de las contracciones descritas en la Definición 5.2.3, entonces cada una de ellas satisface la COUB-1, y por tanto T tiene un punto fijo. \square

No todas las contracciones definidas anteriormente son débilmente semicontinua superior. Para constatar esto, basta exhibir un contraejemplo para una de estas contracciones definidas en un espacio métrico contenido en \mathbb{R} . Sea $T : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$Tx = \begin{cases} x/3 & \text{si } 0 \leq x < 1/2; \\ x/4 & \text{si } 1/2 \leq x \leq 1; \end{cases}$$

Esta contracción es Kannan, y entonces es Berinde. Además, con la métrica usual,

$$d(x, Tx) = \begin{cases} 2x/3 & \text{si } 0 \leq x < 1/2; \\ 3x/4 & \text{si } 1/2 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Sea $(x_n; n \in \mathbb{N})$ la sucesión dada por $x_n = n/2(n+1)$. Tenemos que converge a $1/2$ por la izquierda. Luego, $\liminf d(x_n, Tx_n) = 1/3 < T(1/2) = 3/8$. Por consiguiente, T no es débilmente semicontinua superior.

Este contraejemplo muestra que, en los resultados anteriores, la semicontinuidad superior débil no es una condición supérflua.

Apéndice

5.3. Lema de metrización

A continuación, demostraremos el Lema 2.4.1.

Lema 5.3.1. *Sea X un conjunto no vacío, y $(U_n : n \in \mathbb{N})$ una sucesión de subconjuntos de $X \times X$ tales que $U_0 = X \times X$, y para cada $n \in \mathbb{N}$, se cumple que $\Delta \subseteq U_n$, y $U_{n+1} \circ U_{n+1} \circ U_{n+1} \subseteq U_n$. Entonces, existe una función $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ tal que:*

(I) *Para todo x, y y z en X , $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, y*

(II) *para cada $n \in \mathbb{N}$, $U_n \subseteq \{(x, y) \in X \times X \mid d(x, y) < 1/2^n\} \subseteq U_{n+1}$.*

Además, si U_n es simétrico, para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces d es una pseudo métrica.

Demostración. Sea $f : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} 1/2^n & \text{si } \exists n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, (x, y) \in U_{n-1} \setminus U_n; \\ 0 & \text{si } \forall n \in \mathbb{N}, (x, y) \in U_n. \end{cases}$$

Observar que $f(x, y) = 0$, para todo $(x, y) \in \Delta$. Para cada $(x, y) \in X \times X$, sea $d(x, y) = \inf \sum_{i=0}^r f(x_i, x_{i+1})$, donde el ínfimo se toma sobre todas las sucesiones finitas x_0, \dots, x_{r+1} con $x_0 = x$ y $x_{r+1} = y$. Luego, d satisface (I). Además, $d \leq f$ y entonces $U_n \subseteq \{(x, y) \in X \times X : d(x, y) < 1/2^n\}$. Si cada U_n es simétrico, entonces $f(x, y) = f(y, x)$, para cada $(x, y) \in X \times X$, y por consiguiente, d es una pseudométrica.

Notemos en primer lugar que

$$f(x_0, x_3) \leq 2 \max\{f(x_0, x_1), f(x_1, x_2), f(x_2, x_3)\}, \text{ para todos } x_0, x_1, x_2, x_3 \in X. \quad (5.1)$$

En efecto, sean $x_0, x_1, x_2, x_3 \in X$. Existe $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tal que

$$\max\{f(x_0, x_1), f(x_1, x_2), f(x_2, x_3)\} \leq 1/2^r.$$

Luego, $(x_0, x_1), (x_1, x_2), (x_2, x_3) \in U_{r-1}$ y entonces $(x_0, x_3) \in U_r$. Por consiguiente, $f(x_0, x_3) = 1/2^{r-1} = 2/2^r$, lo cual demuestra (5.1).

Demostremos la segunda inclusión en (II). Sea $(x, y) \in X \times X$ tal que $d(x, y) < 1/2^n$. Luego, existen $x_0, \dots, x_n, x_{n+1} \in X$ tales que $x_0 = x, x_{n+1} = y$ y $\sum_{i=0}^n f(x_i, x_{i+1}) < 1/2^n$. Sean $a = \sum_{i=0}^n f(x_i, x_{i+1})$ y $k_n = \max\{k \leq n : 2 \sum_{i=0}^k f(x_i, x_{i+1}) \leq a\}$. Demostraremos que

$$f(x_0, x_{n+1}) \leq 2 \sum_{i=0}^n f(x_i, x_{i+1}), \text{ para todos } x_0, \dots, x_{n+1} \in X. \quad (5.2)$$

Por (5.1), (5.2) se satisface para $n \leq 2$. En particular, se cumple si $n = 0$. Supongamos que

$$f(x_0, x_{k+1}) \leq 2 \sum_{i=0}^k f(x_i, x_{i+1}), \text{ para todos } x_0, \dots, x_{k+1} \in X \text{ y todo } k < n.$$

Si $k_n \geq n$, entonces $f(x_0, x_1) = \dots = f(x_n, x_{n+1}) = 0$ y en consecuencia, (5.2) se satisface. Si $k_n < n$, la hipótesis de inducción implica que

$$f(x_0, x_{k_n+1}) \leq 2 \sum_{i=0}^{k_n} f(x_i, x_{i+1}) \quad \text{y} \quad f(x_{k_n+2}, x_{n+1}) \leq 2 \sum_{i=k_n+2}^n f(x_i, x_{i+1})$$

No es posible que $2 \sum_{i=k_n+2}^n f(x_i, x_{i+1}) > a$, por que si así fuera se tendría,

$$\sum_{i=k_n+2}^n f(x_i, x_{i+1}) > \sum_{i=0}^{k_n+1} f(x_i, x_{i+1})$$

y entonces

$$a = \sum_{i=0}^{k^*+1} f(x_i, x_{i+1}) + \sum_{i=k^*+2}^n f(x_i, x_{i+1}) > 2 \sum_{i=0}^{k^*+1} f(x_i, x_{i+1}) > a,$$

por la maximalidad de k^* , lo cual es una contradicción. Tenemos así que

$$f(x_0, x_{k_n+1}) \leq a, \quad f(x_{k_n+1}, x_{k_n+2}) \leq a \quad \text{y} \quad f(x_{k_n}, x_{n+1}) \leq a.$$

Por (5.1) se tiene $f(x_0, x_{n+1}) \leq 2a$, lo cual demuestra (5.2), lo cual demuestra (5.1) y entonces $f(x_0, x_{n+1}) < 1/2^{n-1}$. Es decir, $f(x, y) \leq 1/2^n$. Por lo tanto, $(x, y) \in U_{n-1}$, concluyendo la demostración. \square

5.4. Teorema de Brouwer

Si bien la demostración original del teorema de Brouwer utiliza herramientas de cálculo, abordaremos su demostración mediante grupos de homología.

Definición 5.4.1. Sean $n \geq 1$ y $f : S^n \rightarrow S^n$ una función continua. Si α es uno de los generadores del n -ésimo grupo de homología de S^n , $H_s(S^n)$, y $k \in \mathbb{Z}$ es tal que $f_*(\alpha) = k\alpha$, diremos que k es el *grado* de f .

Teorema 5.4.1 (Brouwer). *Toda función continua $f : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}^n$ tiene un punto fijo.*

Demostración. Supongamos que $f : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}^n$ no tiene punto fijo. Podemos definir $g : \mathbb{D}^n \rightarrow S^{n-1}$ como

$$g(x) = \frac{x - f(x)}{\|x - f(x)\|}.$$

Sea $h : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ la restricción de g a S^{n-1} . Luego, $\text{gr}(h) = 0$.

Por otro lado, definamos la homotopía $H : S^{n-1} \times [0, 1] \rightarrow S^{n-1}$ dada por

$$H(x, t) = \frac{x - tf(x)}{\|x - tf(x)\|},$$

la cual está bien definida, pues para $t = 1$, $f(x) \neq x$, y si $t \in [0, 1)$, entonces $\|x\| = 1$ y $\|tf(x)\| = t\|f(x)\| \leq t < 1$. En consecuencia, H es una homotopía

entre la función identidad en S^{n-1} y h , de modo que $\text{gr}(h) = 1$, lo que es una contradicción. Esto completa la demostración. \square

Bibliografía

- [1] P. Alexandroff and P. Urysohn. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, pages 625–337.
- [2] C.D. Aliprantis and K.C. Border. *Infinite Dimensional Analysis*. Masson, New York, 2006.
- [3] A. Amini-Harandi. Fixed point theory for set-valued quasi-contraction maps in metric spaces. *Applied Mathematical Letters*, Vol. 24(11), 2011.
- [4] C.J. Atkin. Boundedness in uniform spaces, topological groups, and homogeneous spaces. *Acta Mathematica Hungarica*, **57**(3-4):213–232, 1991.
- [5] J.P. Aubin and H. Frankowska. *Set-Valued Analysis*. Birkhäuser, Boston, 1990.
- [6] S. Banach. Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur applications aux équations intégrales. *Fundamenta Mathematicae.*, Vol. 3(1):133–181, 1922.
- [7] V. Berinde. On the approximation of fixed points of weak contractive mappings. *Carpathian Journal of Mathematics*, **19**(1):7–22, 2003.
- [8] E. Bishop and R.R. Phelps. The support functionals of a convex set. *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics VII, Convexity*, American Mathematical Society, pages 27–36, 1963.
- [9] E. Blum and W Oettli. From optimization and variational inequalities to equilibrium problems. *The Mathematics Student*, **63**(1-4):123–145, 1994.
- [10] N. Bourbaki. *Elements of Mathematics, General Topology. Part 1*. Hermann, Paris, 1966.

-
- [11] A. Brøndsted. On a lemma of Bishop and Phelps. *Pacific Journal of Mathematics*, **55**(2):335–341, 1974.
- [12] L.E.J. Brouwer. Über abbildungen von mannigfaltigkeiten. *Mathematische Annalen*, 70:161–115, 1912.
- [13] J. Caristi. Fixed point theorem for mappings satisfying inwardness conditions. *Transactions of the American Mathematical Society*, **215**:241–251, 1976.
- [14] C. Castaing and M. Valadier. *Convex Analysis and Measurable Multifunctions*. Springer-Verlag, New York, 1977.
- [15] S.K. Chatterjea. Fixed-point theorems. *C. R. Acad. Bulgare Sci.*, Vol. 25:727–730, 1972.
- [16] L. Ćirić. Fixed points for generalized multi-valued contractions. *Matematichki Vesnik*, **9**(24):265–272, 1972.
- [17] J. Dugundji and A. Granas. Kkm maps and variational inequalities. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa*, **5**(4):679–682, 1978.
- [18] K. Fan. Fixed-point and minimax theorems in locally convex topological linear spaces. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, **38**(2):121–126, 1952.
- [19] K. Fan. A generalization of Tychonoff’s fixed point theorem. *Mathematische Annalen*, **142**:305–310, 1961.
- [20] K. Fan. A minimax inequality and applications. In O. Shisha, editor, *Inequalities. III*, pages 103–113. Academic Press, New York, 1972.
- [21] R. Fierro. An intersection theorem for topological vector spaces and applications. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **191**(1):118–133, 2021.
- [22] R. Fierro. A condition on uniform spaces for the existence of maximal elements and fixed points. *Journal of Fixed Point Theory and Applications*, **24**(59), 2022.
- [23] R. Fierro, C. Martínez, and E. Orellana. Weak conditions for existence of random fixed points. *Fixed Point Theory*, **12**(1):83–90, 2011.

-
- [24] R. Fierro and S. Pizarro. Fixed points of correspondences satisfying a banach orbital condition. *Cubo. A Mathematical Journal*, , Submitted.
- [25] I.L. Glicksberg. A further generalization of the Kakutani fixed point theorem, with application to Nash equilibrium points. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **3**(1):170–174, 1952.
- [26] A. Granas and J. Dugundji. *Fixed Point Theory*. Springer Verlag, New York, 2003.
- [27] J. Hejzman. Boundedness in uniform spaces and topological groups. *Czechoslovak Mathematical Journal*, Vol. 9(4):544–563, 1959.
- [28] T.L. Hicks and B.E. Rhoades. A Banach type fixed point theorem. *Mathematica Japonica*, **24**(3):53–72, 1979.
- [29] S. Kakutani. A generalization of Brouwer’s fixed point theorem. *Duke Mathematical Journal*, **8**(3):457–459, 1941.
- [30] R. Kannan. Some results on fixed points II. *The American Mathematical Monthly*, Vol. 76(4):405–408, 1969.
- [31] L. Kantorovitch. The method of successive approximation for functional equations. *Acta Mathematica*, 71:63–97, 1939.
- [32] J.L. Kelley. *General Topology*. Springer, Harrisonburg, 1955.
- [33] E. Klein and A. Thompson. *Theory of Correspondences*. Wiley & Sons, New York, 1984.
- [34] B. Knaster. *Annales de la Société Polonaise de Mathématique*.
- [35] S.B. Nadler. Multivalued contraction mappings. *Pacific Journal of Mathematics*, **30**(2):475–487, 1969.
- [36] S. Reich. Some remarks concerning contraction mappings. *Canadian Mathematical Bulletin*, **14**:121–124, 1971.

- [37] W. Rudin. *Functional Analysis*. McGraw-Hill, Publishing Company Ltd, New York, 1991.
- [38] A. Tarski. A lattice-theoretical fixpoint theorem and its applications. *Pacific Journal of Mathematics*, **5**(2):285–309, 1955.
- [39] A. Tychonoff. Ein fixpunktsatz. *Mathematische Annalen*, Vol. 111:767–776, 1935.
- [40] A. Weil. *Sur les espaces à structure uniforme et sur la topologie générale*. Number 551 in Actualites scientifiques et industrielles: Publications de l'Institut mathématique de l'Université de Strasbourg. Hermann, Paris, 1937.