

2020

INTRODUCCIÓN AL
MODELADO DE PROCESOS
COSTEROS

MONTEMAR, VALPARAÍSO

PATRICIO WINCKLER GREZ

Introducción al modelado de procesos costeros

Patricio Winckler Grez, Ingeniero Civil, MSc. PhD.
Escuela de Ingeniería Civil Oceánica, Universidad de Valparaíso, Chile

12 de agosto de 2021

Prólogo

Fue en 1999, durante un *viaje* que llamamos Expedición Holanda, que por primera vez conocí la defensa costera de Oosterscheldekering, en los Países Bajos, cuya función es proteger grandes extensiones de terreno de inundaciones que ocurren de tanto en vez en el Mar del Norte. En aquellos tiempos poco sabía de ingeniería costera y mis labores solo se remitían a las de escribano de una expedición constituida también por mis amigos Rolf Sielfeld y Jimmy Furniss. Los vientos en ese lugar arrastraban la arena sobre un cordón de dunas verdes, que se interrumpía a ratos por algún canal para la navegación de veleros. Eran los últimos años como estudiante de Ingeniería Civil y el panorama profesional como *futuro* ingeniero calculista no me parecía auspicioso. Aquellas imágenes fueron tal vez el inicio de un camino exploratorio hacia una disciplina compleja, que se desenvuelve en uno de los entornos más dinámicos del orbe. Han pasado 20 años de esa epifanía, miles de clases y ejercicios, decenas de proyectos, artículos, y muchas caras de estudiantes a ratos entusiasmados, a veces escépticos. He aprendido a documentar el material para evitar que la dispersión que caracteriza mi forma de pensar confunda a quienes atienden clases. He intentado dejar la pizarra y sentarme junto a ellos como guía más que maestro. Y en ese constante intento de formar ingenieros, he escrito este libro, que siendo el primero, probablemente tenga a la vez la torpeza y el vigor de la juventud.

La formación de ingenieros marítimos requiere cubrir temas como la meteorología, la oceanografía, la hidráulica marítima, la arquitectura naval, las estructuras, los materiales y el medio ambiente, entre muchos otros. Un libro en español que cubra todos estos temas puede tomar una vida de dedicación, por lo que he optado por dividir el universo en partes domables. Este texto se orienta a cubrir los aspectos fundamentales del modelado de procesos costeros, relacionando elementos teóricos con aplicaciones asociadas a costas violentas como la del Océano Pacífico. A pesar de ser el modelado de procesos costeros un tema relativamente árido, es apasionante. Comprender y predecir cómo se mueven o mezclan los fluidos en el ambiente costero constituye un desafío intelectual. Ello pues la zona costera es esencialmente compleja y en ella confluyen el aire, el agua y los sedimentos, generando procesos físicos que ocurren en diferentes escalas de tiempo y espacio.

Los objetivos primordiales del libro son los de presentar las ecuaciones que gobiernan los procesos físicos, introducir conceptos esenciales sobre su modelado numérico y proponer herramientas para la interpretación de los resultados. El texto está en constante metamorfosis y en un inicio fue escrito en un lenguaje más bien coloquial, como siguiendo una conversación en clases. Con el tiempo y la revisión de muchos, ha ido tomando un cariz más formal. He intentado plasmar aquí las ideas que suelen no aparecer en textos más sofisticados, o que se asumen conocidas. Donde siento que mi explicación es precaria, he procurado citar a otros autores cuyas referencias acompañan el material del curso. Como requisito de entrada al texto, es recomendable estar familiarizado con el cálculo integral y diferencial, con la programación y con la mecánica de fluidos. Es deseable, pero no imprescindible, haber tenido exposición a algoritmos y métodos numéricos como *Matlab*, *Octave* o *Scilab*. Para acotar la extensión del texto, he evitado deliberadamente profundizar en conceptos relacionados con la teoría lineal del oleaje y el modelado de procesos morfodinámicos, que asumo ya debieras manejar (el primero) o tendrás la oportunidad de hacerlo en el futuro (el segundo).

Es claro que mucho de lo expuesto en estas páginas quedará obsoleto en los años venideros -sobre todo en lo referido a técnicas de modelado numérico- pero probablemente los aspectos teóricos fundamentales sigan vigentes en la medida que no asome una revolución científica en la disciplina. Te pido por ello que me hagas llegar comentarios sobre errores, anacronismos u omisiones que pude haber cometido a través de cualquier medio. Espero que este libro te guíe por la física compleja que describe los procesos costeros y que sea un primer paso en un camino largo pero estimulante. Finalmente, confío aportar a la enseñanza, aprendizaje y difusión de una disciplina fundamental para países ribereños como el nuestro.

Estructura del texto y textos de apoyo

La estructura del documento se describe a continuación:

- En la parte 1 se introducen conceptos generales y recomendaciones de buenas prácticas sobre el proceso de modelado. Se presentan los modelos físicos y numéricos cuyas aplicaciones cubren fenómenos hidrodinámicos y morfodinámicos, procesos de mezcla y de interacción fluido estructura. Se introducen las dimensiones espaciales y sistemas de coordenadas utilizados en el modelado numérico además de conceptos útiles como la calibración y validación, el análisis de sensibilidad, la precisión y exactitud de los esquemas numéricos. Los conceptos de modelado físico de procesos costeros pueden ser complementados con la lectura del texto clásico de Hughes (1993).
- En la parte 2 se presenta un resumen de las ecuaciones fundamentales de la hidrodinámica y algunos principios elementales sobre el flujo turbulento. Se presentan las ecuaciones de conservación de la masa, momentum y energía para flujos compresibles, incompresibles, rotacionales e irrotacionales, que sirven de base para la derivación de diversas ecuaciones utilizadas a lo largo del texto. Finalmente, se reproducen algunas herramientas matemáticas que servirán de apoyo en dichas derivaciones. Esta parte, esencialmente teórica, puede ser complementada con el estudio de textos de mecánica de fluidos (Panton, 2005) o clásicos de mecánica de ondas (Dean & Dalrymple, 1991).
- En la parte 3 se introducen los procesos de mezcla y las ecuaciones fundamentales que describen la advección, la difusión, la reacción, la dispersión y combinaciones de estas que se dan en el medio. Se complementan estas ecuaciones con aquellas que se aplican en un flujo turbulento y se presentan ejemplos de este tipo de estudios en el marco de proyectos emplazados en ambientes acuáticos. Los aspectos teóricos de esta parte pueden complementarse con el texto de Fischer et al. (1979) en tanto que los conceptos de modelado numérico de descargas pueden complementarse con el texto de Wood & Wilkinson (1993).
- En la parte 4 se introducen aspectos fundamentales de la resolución de las ecuaciones mediante diferencias finitas. Se utiliza la ecuación de advección-difusión-reacción como excusa para ejemplificar conceptos de modelado numérico tales como discretización, estabilidad y convergencia. Esta elección se basa en que -si se considera a la difusividad como propiedad del material y no del flujo- la ecuación es lineal y por ende facilita la asimilación de estos conceptos. Asimismo, los procesos físicos que gobiernan la mezcla son relativamente simples y pueden también ser utilizados como *analogía* para explicar otros fenómenos como la difusión de momentum, que aparece en alguna de las versiones simplificadas de las ecuaciones de Navier-Stokes. En este texto sólo presento esquemas de modelado en diferencias finitas bajo el único argumento que son a los que más he estado expuesto. El lector debe estar consciente de que existen técnicas como los volúmenes finitos, los elementos finitos, los problemas de contorno (*boundary value problems*) o los métodos SPH (*smooth particle hydrodynamics*) que ofrecen alternativas a las diferencias finitas. Esta parte puede complementarse con el texto introductorio de Moin (2010).
- En la parte 5 se presentan los modelos de propagación de ondas, abarcando la clase de modelos que promedian y resuelven la fase. Se pone énfasis en las ecuaciones no lineales de onda larga, que son útiles para la caracterización de ondas cuya longitud es mucho mayor que la profundidad de propagación. Ejemplos de ésta en el ámbito de la ingeniería costera son la marea astronómica, los tsunamis, la marea meteorológica asociada a huracanes y centros de baja presión, el oleaje en aguas someras y otras ondas planetarias de gran escala, como las ondas de Poincare, Kelvin, Rossby y las ondas internas. Estas ecuaciones también se utilizan en inundaciones fluviales, rotura de presas, flujos de escombros y lahares, flujos piroclásticos, avalanchas y deslizamientos submarinos. Las ecuaciones de onda larga contienen términos no lineales (y eventualmente dispersivos) asociados a una física más compleja y que a la vez dificultan su implementación numérica. Los conceptos asociados a los modelos que promedian la fase se pueden consultar en el texto de Holthuijsen (2010) y aquellos relacionados con los modelos que resuelven la fase se encuentran en el texto de Svendsen (2006).

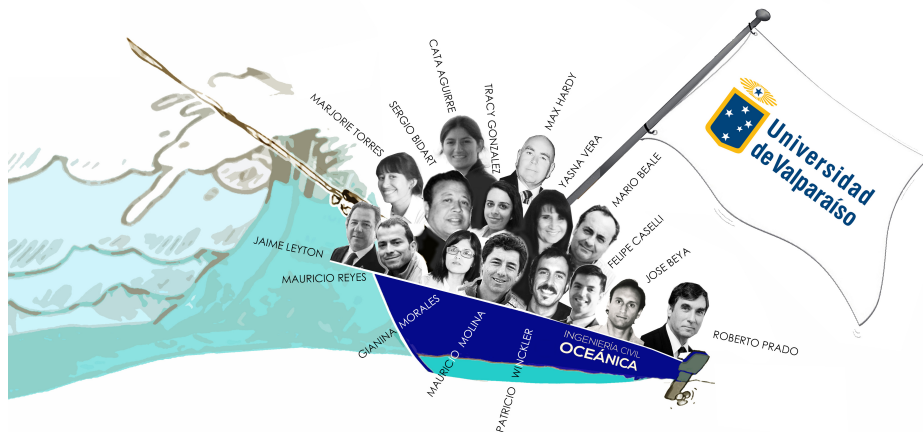


Figura 0.0.1: El equipo de Ingeniería Civil Oceánica de la Universidad de Valparaíso, hacia 2016.

- En la parte 6 concluyo con una aplicación específica de las ecuaciones de onda larga a la zona de rompiente. Estas ecuaciones permiten modelar como primera aproximación, los campos de velocidad y de elevación de la superficie del mar para batimetrías irregulares, basándose en las ecuaciones de onda larga. Bajo ciertas simplificaciones, estas ecuaciones permiten encontrar expresiones analíticas para la corriente longitudinal y el *wave setup*, ambos fenómenos a considerar en el diseño de obras costeras. Estos conceptos pueden complementarse con el texto de Svendsen (2006).
- En la parte 7 se presentan algunas técnicas de modelado utilizadas actualmente para caracterizar la evolución de las marejadas desde su generación en el océano hasta su disipación en la costa.

Agradecimientos

Este libro nace de los cursos de modelado de procesos costeros para estudiantes de Ingeniería Civil Oceánica de la Universidad de Valparaíso (EICO-UV), del Magíster Ciencias de la Ingeniería Civil en la Universidad Técnica Federico Santa María (UTFSM) y para el Magíster en Oceanografía de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (PUCV). Es un placer agradecer a todos los que hicieron posible este libro. Los primeros agradecimientos son para el Profesor Philip Liu, mi *adviser* en Cornell University, quien durante esas largas tardes de Ithaca me enseñó a mirar la vida con otros lentes. De él aprendí que es necesario comprender el fundamento de las cosas, cuestionarse lo a veces obvio, pensar críticamente y nunca descansar en la búsqueda de la verdad científica. De mi mentor y amigo Javier Vásquez aprendí cómo aterrizar, con rigurosidad y humor, los conceptos a veces áridos de la ingeniería marítima, y de don Jorge Pastene, a mirar las cosas con una perspectiva que pocas veces se ve en la ingeniería. También agradezco a los profesores Alejandro López, alguna vez Director del Instituto Nacional de Hidráulica (INH), Ludwig Stowhas y Santiago Birrer, por las conversaciones sobre lo humano y lo dividido. A ambos, ingenieros de una escuela fundacional en Chile, les agradezco con simpatía. Quiero agradecer también a aquellos que se dieron el tiempo de revisar parte o la totalidad del documento en estos tres años desde que inicié su escritura, en 2015.

En primer lugar, a los miembros del EICO-UV y a todos aquellos alumnos que con paciencia toleraron mis largas diatribas durante estos 15 años de carrera académica. Entre los revisores destaco a Manuel Contreras-López, de la Universidad de Playa Ancha, por las eternas conversaciones sobre lo que pensamos y (poco) sabemos de la ciencia que subyace a los procesos costeros. A Karla González, Luis Zamorano y al INH, por el aporte

de material de modelado física e hidráulica incluido en el texto, y que conversamos en incontables congresos de la especialidad. A los ex-alumnos y ahora colegas de la UTFSM, Matías Alday, Rolando García, Ignacio Sepúlveda, Raimundo Ibaceta, Alejandra Gubler, Raúl Flores, Matías Carvajal, Joaquín Meza y Joaquín Moris, quienes de alguna manera vibran con esta disciplina hasta el día de hoy. A Francisco Molteni, César Esparza, Adolfo Andaur, Enzo Peirano, Francisco Pinto, Carlos Torres, Pablo Díaz, Damaris Bermúdez y Bayron del Real por las correcciones al texto y buena onda cotidiana en la Escuela de Ingeniería Oceánica. A Marcos Quiroz y Lester Caravaca, doctorandos en la PUC, a Patricio Rodríguez, doctorando de la PUCV y a Gillian Ord y Alonso San Martín, ambos del Magister en Oceanografía, por la meticulosa lectura del texto. Destaco también a los miembros del Centro de Observación Marino para estudios de Riesgos del Ambiente Costero (COSTAR-UV) y al equipo del Centro Nacional de Investigación para la Gestión Integrada de Desastres Naturales (CIGIDEN-PUC), en los cuales he descubierto esas afinidades intelectuales que difícilmente se encuentran en un mundo tan especializado como este. Espero que la lista de colaboradores siga creciendo y que este texto guía se transforme en uno de tu biblioteca.

Finalmente, a Claudia Urrutia, quien ha leído línea a línea el texto con cariño y aportado una visión desde fuera de la disciplina. Y a Tomás y Martina, por todas aquellas horas que no les pude dedicar mientras escribía el libro.

¿Cómo citar el texto?

El texto debiera ser citado de la siguiente forma:

Winckler, P. (2021). Introducción al modelado de procesos costeros. Apuntes de clases. Valparaíso, Chile: Universidad de Valparaíso.

Portada

Marejada actuando en Playa Cochoa, Viña del Mar. Al fondo se observa la Estación de Biología Marina de Montemar, edificio diseñado por el Enrique Gebhard cuya primera etapa fue inaugurada en 1945. En dicho edificio comenzó a impartirse en 2002 la carrera de Ingeniería Civil Oceánica de la Universidad de Valparaíso.

Sobre el autor

Por esos azares de la vida de profesión soy Ingeniero Civil de la Universidad Técnica Federico Santa María (2002) y me he dedicado al mar luego de sendos periplos académicos en Europa y Estados Unidos en los cuales afiné el lápiz y di rienda suelta al estudio de la ingeniería costera. Tras un paso por Finlandia e Inglaterra, obtuve un Master en Tecnología Ambiental de la Universidad de Wolverhampton (2002) y, años después, un Master en Ingeniería de Puertos y Costas del Centro de Estudios y Experimentación de Obras Públicas, en España (2004). Después de años de trabajo como ingeniero de proyectos en GSI y PRDW -consultoras de ingeniería de puertos y costas- en 2005 ingresé al grupo de ingeniería oceánica en la Universidad de Valparaíso, para comenzar mi carrera académica. Entre 2010 y 2015 realicé un PhD in Civil and Environmental Engineering con especialización en mecánica de fluidos ambientales en Cornell University, Estados Unidos, bajo la dirección del Profesor Philip Liu. He sido investigador visitante en la Universidad Nacional de Singapur (2016) y en la Universidad de Tokio (2017-8), además de profesor visitante en la Pontificia Universidad Javeriana de Colombia (2017). Me he adjudicado prestigiosas becas internacionales (Fulbright, Estados Unidos; The Matsumae Foundation, Japón, Beca Alpha, Unión Europea) y nacionales (Becas Chile). Mis intereses abarcan una amplia gama de temas relacionados con la ingeniería costera, desde las condiciones ambientales hasta el diseño de obras costeras.

A la fecha he estado involucrado en más de 85 proyectos de ingeniería marítima entre los que se incluyen estudios de caracterización del medio, evaluaciones de riesgo de tsunamis, diseño de instalaciones experimentales para la modelación de ondas largas, diseños de ingeniería portuaria, proyectos de ingeniería costera, diseño de

bocatomas, emisarios y descargas submarinas, evaluación del potencial energético de oleaje y mareas, proyectos hidráulicos y estudios de transporte de sedimentos. He participado de varios comités consultivos para definir normas de diseño de edificaciones, políticas asociadas a riesgos naturales y aspectos relacionados con el impacto del cambio climático en el territorio costero. En materia internacional, representé a Chile ante la Asamblea General de las Naciones Unidas en un proceso de consulta sobre los impactos del aumento del nivel del mar a petición del Ministerio de Relaciones Exteriores (2021), participé en la COP25 como miembro de la delegación encabezada por el Ministerio de Ciencias (2019) y, a solicitud del Ministerio del Medio Ambiente, oficié de representante técnico en el Proyecto Gestión de riesgos vinculados al cambio climático en las costas de América Latina y el Caribe (2019-2022). También participé como consultor para el Banco Mundial en un proyecto de defensas costeras en Bangladesh (2014) y como jefe de proyecto en el proyecto PNUD Generación de información sobre cambios históricos y proyecciones futuras de variables en mares y océanos del Ecuador bajo escenarios de cambio climático.

A la fecha (2021) he escrito 18 publicaciones ISI, 2 Scopus, 1 SCIELO y 9 Latinindex, he participado como coautor de un libro y como coautor de varios capítulos de libros. He sido Director de un proyecto FONDECYT, Director de un proyecto PAI-CONICYT y Director Alterno de un FONDEF IDeA, investigador de un segundo FONDEF IDeA, además de haber participado de otros proyectos con financiamiento público. He guiado 19 memorias de pregrado, participado en comisiones de 5 tesis de postgrado y de 15 memorias de pregrado. He ofrecido conferencias en Estados Unidos, México, España, Corea del Sur, Singapur, Colombia, Perú y Japón. Soy investigador asociado del Centro de Investigación para la Gestión Integrada del Riesgo de Desastres (CIGIDEN) de la Pontificia Universidad Católica de Chile, y del Centro de Observación Marino para estudios de Riesgos del Ambiente Costero (COSTAR) de la Universidad de Valparaíso. Hoy comparto mis labores académicas en la Universidad de Valparaíso con esta pasión algo relegada, pero omnipresente, cual es mirar el mundo desde la óptica de la creación. Sugiero visitar www.patowinckler.cl para ver algo de aquello. Mi filosofía de enseñanza está disponible en inglés..

Te pido por ello que me hagas llegar comentarios sobre errores, anacronismos u omisiones del texto a las siguientes direcciones:

Patricio Winckler Grez

Escuela de Ingeniería Civil Oceánica, Universidad de Valparaíso

Dirección: Av. Brasil 1786, Of. 22, Valparaíso. Código postal: 2362844

Fono: +56 32 2995923

Móvil: +56 9 42572974

Web: www.patowinckler.cl

Mail: patricio.winckler@uv.cl

Valparaíso, Marzo de 2020.

Índice general

1. Introducción al modelado de procesos costeros	10
1.1. La zona costera	10
1.2. Modelos utilizados en procesos costeros	13
1.2.1. Modelos físicos y modelos numéricos	14
1.2.2. Modelos en la ingeniería marítima	15
1.2.3. Dimensiones espaciales en un modelo numérico	16
1.2.3.1. Modelos unidimensionales	17
1.2.3.2. Modelos bidimensionales	19
1.2.3.3. Modelos tridimensionales	19
1.2.3.4. Un ejemplo donde las dimensiones importan: Tsunamis generados por derrumbes	21
1.2.4. Sistemas de coordenadas en un modelo numérico	22
1.3. Calibración y validación de un modelo	24
1.4. Análisis de sensibilidad	28
1.4.1. Sensibilización de la función objetivo ante variaciones en variables independientes	28
1.4.2. Efectos de incertidumbre y/o error en la función objetivo	29
1.4.3. Optimización del comportamiento de la función objetivo	30
1.4.4. Ejemplos de análisis de sensibilidad	30
1.5. Precisión y exactitud	33
2. Ecuaciones fundamentales	36
2.1. Enfoques en mecánica de fluidos	36
2.2. Derivada total	37
2.3. Flujos incompresible y compresible	39
2.4. Principios de conservación	40
2.4.1. Conservación de la masa	40
2.4.1.1. Flujo compresible y rotacional	40
2.4.1.2. Flujo incompresible y rotacional	42
2.4.1.3. Flujo incompresible e irrotacional	43
2.4.2. Conservación de momentum	44
2.4.2.1. Flujo compresible y rotacional	44
2.4.2.2. Flujo incompresible y rotacional	45
2.4.2.3. Flujo incompresible e irrotacional	47
2.4.3. Conservación de la energía	47
2.4.4. Cómo combinar las ecuaciones de gobierno	48
2.4.4.1. Flujo compresible y rotacional	48
2.4.4.2. Flujo compresible e irrotacional	48
2.4.4.3. Flujo incompresible e irrotacional	49
2.5. Flujo en régimen turbulento	50

3. Modelado de procesos de mezcla	54
3.1. Advección	55
3.1.1. Derivación	55
3.1.2. Solución analítica	57
3.2. Difusión molecular	58
3.2.1. Derivación	59
3.2.2. Soluciones analíticas para casos simples	61
3.2.2.1. Fuente puntual e instantánea	61
3.2.2.2. Fuente distribuida e instantánea	64
3.2.2.3. Fuente puntual y constante en el tiempo	64
3.2.2.4. Solución para una fuente puntual y variable en el tiempo	65
3.2.2.5. Fuente distribuida y variable en el tiempo	65
3.2.2.6. Fuente puntual e instantánea en dos y tres dimensiones	65
3.3. Dispersión	65
3.4. Reacción	66
3.5. Advección, difusión y reacción	68
3.5.1. La ecuación de ADR	70
3.5.2. Diferencias entre la ecuación de ADR y la ecuación de momentum	71
3.6. Condiciones de borde	72
3.7. Advección, difusión y reacción en régimen turbulento	73
3.7.1. Derivación	73
3.7.2. Cálculo del coeficiente de difusión turbulenta	76
3.7.3. Ejemplo de mezcla en aguas someras	78
3.7.4. Ejemplo de emisarios de descarga	79
4. Introducción a las diferencias finitas	81
4.1. Componentes de un problema de mecánica de fluidos	81
4.2. Expresiones aproximadas de derivadas	84
4.2.1. Derivadas de primer orden	84
4.2.2. Derivadas de segundo orden	85
4.2.3. Derivadas de orden n-ésimo	86
4.3. Esquemas explícitos, implícitos y semi-implícitos	87
4.3.1. Esquemas explícitos	87
4.3.2. Esquemas implícitos	88
4.3.3. Esquemas semi-implícitos	91
4.4. Condiciones de borde	92
4.4.1. Condición de borde tipo Dirichlet	93
4.4.2. Condición de borde tipo Neumann	93
4.5. Costo computacional de la inversión de matrices	94
4.6. Un ejemplo de la ecuación de advección-difusión	95
4.7. Propiedades de los métodos de solución numérica	103
4.7.1. Estabilidad	103
4.7.2. Consistencia	106
4.7.3. Convergencia	106
4.7.4. Conservación	106
4.7.5. Exactitud	107
4.8. Modelos de elevación digital	108
4.8.1. Base de datos	108
4.8.2. Elaboración del modelo de elevación digital	110
4.8.3. Dominio de integración, resolución espacial	110

5. Modelado de propagación de ondas	113
5.1. Procesos físicos que afectan a las ondas	115
5.2. Tipos de modelos	116
5.3. Modelos que promedian la fase	122
5.3.1. Forzantes de la ecuación de balance energético.	123
5.3.1.1. Término de forzante por viento	123
5.3.1.2. Términos de interacción no lineal	126
5.3.1.3. Término de disipación	127
5.3.2. Caso estacionario y conservativo: asomeramiento y refracción	127
5.3.3. Caso estacionario y conservativo: asomeramiento para onda larga	129
5.3.4. Ejemplo de análisis de sensibilidad para modelos que promedian la fase	129
5.4. Modelos que resuelven la fase	132
5.4.1. Teoría lineal del oleaje	132
5.4.1.1. Formulación del problema de contorno	134
5.4.1.2. Campo cinemático	143
5.4.1.3. Campo dinámico	146
5.4.2. Ecuaciones de onda larga	149
5.4.2.1. Parámetros adimensionales	149
5.4.2.2. Derivación (simplificada) de las ecuaciones de onda larga	152
5.4.2.3. Derivación (algo más rigurosa) de las ecuaciones de onda larga	155
5.4.3. Ecuaciones de Boussinesq	159
5.4.4. Inclusión de otras fuerzas externas	163
5.4.5. Condiciones iniciales y de borde	172
5.4.5.1. Condiciones iniciales	172
5.4.5.2. Condiciones de borde	173
5.4.6. Resonancia	175
6. Modelado del oleaje rompientes	176
6.1. Ecuaciones de gobierno	176
6.2. Simplificaciones para una playa plana	178
6.2.1. Wave setup y setdown	179
6.2.1.1. Zona de asomeramiento (Set-down)	179
6.2.1.2. Zona de rompiente (setup)	180
6.2.1.3. Aplicación	180
6.2.2. Corrientes longitudinales	181
6.2.2.1. Flujo de momentum por efecto del oleaje	181
6.2.2.2. Fricción de fondo	182
6.2.2.3. Difusión de momentum	182
6.2.2.4. Balance de momentum en sentido longitudinal	182
6.3. Tensor de radiación	183
7. Modelado de marejadas	185
7.1. Introducción	185
7.2. El oleaje en las costas de Chile	185
7.3. Modelos de oleaje	186
7.4. Modelos de evolución de playas	191
7.5. Ejemplo de aplicación en la bahía de Valparaíso	193
7.5.1. Modelo de oleaje en escalas oceánicas	193
7.5.2. Modelo de propagación costera	193
7.5.3. Modelo de interacción oleaje-estructura	195

7.5.4. Modelo de evolución morfodinámica	197
8. Modelado descargas salinas y térmicas	203
9. Anexos	204
9.1. Herramientas matemáticas	204
9.1.1. Regla de Leibniz	204
9.1.2. Serie de Taylor	205
9.2. Clasificación de EDP's de segundo orden	206
9.3. Análisis armónico de marea	208
9.3.1. Análisis para una constituyente de marea	208
9.3.2. Análisis para M constituyentes de marea	211
9.3.3. Análisis discreto	213
9.3.4. Ejemplo de aplicación	213

Capítulo 1

Introducción al modelado de procesos costeros

1.1. La zona costera

La zona costera es una de las más dinámicas en la tierra, donde la regla es el constante cambio. En ésta interactúan los elementos básicos -agua, aire y tierra- con escalas espaciales y temporales bien marcadas y propias de una zona de transición entre el océano y el continente. El mar y su contraparte terrestre, la costa, tienen una personalidad cambiante, cíclica, irregular y no lineal; a veces predecible, otras caprichosa. Un sistema tan dinámico como éste es vulnerable a las acciones que los habitantes efectuamos sobre él. Estas acciones tienen impacto, por ejemplo, cuando vemos un río estrangulado en su desembocadura por un desarrollo inmobiliario, o una presa cortando el flujo sedimentario (la sangre que alimenta las playas) y generando erosión costera.

Para ilustrar la multiplicidad de actividades que efectuamos en el territorio costero, recurriré al ejemplo del Puerto de San Antonio, ubicado en la zona central de Chile. La Figura 1.1.1 muestra una fotografía aérea tomada a principios del siglo XXI que permite ver cómo este entorno portuario se emplaza en un territorio natural cuyas características son muy variables en el espacio y el tiempo. Sólo en la zona portuaria existen diferentes actividades entre las que destacan i) la transferencia de contenedores y carga general en la dársena exterior, ii) la actividad pesquera artesanal e industrial que se desarrolla en la pequeña dársena ubicada más cercana de la ciudad, iii) la transferencia de graneles líquidos y sólidos en la zona más expuesta del puerto, ubicada al norte de la bocana de acceso, iv) la actividad turística en el paseo costero, iv) la actividad logística en las explanadas de respaldo del puerto y v) los servicios ecosistémicos que ofrece la Laguna de Lolleo, como por ejemplo permitir alimentación y descanso a aves migratorias..

Al sur del puerto se ubica la desembocadura del río Maipo, cuyo caudal arrastra grandes cantidades de sedimentos, contaminantes y nutrientes desde la cuenca alta, donde se ubica Santiago y otras localidades de la Región Metropolitana. Durante la construcción del molo sur, en las primeras décadas del siglo XX, la línea de costa avanzó del orden de 700 metros producto de la acumulación de estos sedimentos, generando una terraza costera de baja cota donde se emplaza hoy parte de Lolleo. El avance de la línea de costa -que sería catalogado hoy como un impacto ambiental significativo- permitió el emplazamiento de dos campings -inicialmente irregulares y luego validados con alumbrado público y servicios-, uno de los cuales fue arrasado por el tsunami de 2010 (Contreras-López et al., 2013). Sobre estos campings se construiría a la postre, una explanada del puerto. Hacia el sur de la desembocadura del río Maipo se ubica la playa de Santo Domingo y más al sur el Humedal El Yali, un sitio RAMSAR de valor ecológico único.

Mediante el ejemplo de San Antonio intento mostrar i) cómo el territorio costero se modifica dramáticamente por la intervención humana y ii) que dicho territorio está indisolublemente ligado a la cuenca hidrográfica

que lo alimenta. De hecho, gran parte de los sistemas dunarios, playas y humedales se nutren de las arenas nacidas por la fragmentación de las rocas en la alta cordillera; arenas y nutrientes que llegan a la costa y son arrastradas por la fuerza del oleaje rompiente y las corrientes marinas. Prácticas donde se desconoce la relación entre la cuenca y el territorio costero han causado, por ejemplo, estragos en la costa española de Mediterráneo, donde la regulación excesiva de los ríos, la extracción de áridos y aguas de los acuíferos terminó por arrasarse con cientos de kilómetros de playas. Hoy, las playas andaluzas son rigidizadas con espigones de roca para evitar la fuga de la arena remanente, a costa, por cierto, de una pérdida de valor natural y escénico. Los deltas de los ríos Nilo, Ebro o Mississippi son otros ejemplos donde la erosión avanza sobre terrenos que fueran otrora fértiles.

A la complejidad natural la zona costera deben sumarse los riesgos asociados a las variaciones del nivel del mar debidas al cambio climático, terremotos, tsunamis y otros fenómenos sobre los que tenemos menos control, de modo de considerarlos al momento de pensar como intervenimos (si intervenimos) el medio. En una planificación inteligente, los ríos, esteros y cuerpos de agua, además de las dunas y las playas, debieran permanecer inalterados de modo de permitir su movilidad y adaptabilidad a los ciclos naturales. El uso de obras duras en la costa es, a mi juicio, sólo aceptable en zonas portuarias, industriales o urbanas donde su inversión trae aparejado un beneficio social que lo justifique, e impactos ambientales acotados. En este texto presento los elementos conceptuales y prácticos que permiten comprender los procesos que determinan el desarrollo de proyectos en el territorio costero y oceánico, de modo de satisfacer los requerimientos de explotación y aquellos de carácter ambiental.



Figura 1.1.1: Arriba: Fotografía aérea del Puerto de San Antonio, tomada a principios del siglo XXI. Al centro se muestran la dársena exterior -que alberga terminales porta-contenedores, de graneles y de carga general- y la dársena interior donde se ubica el puerto pesquero de Puertecito. Hacia el sur aparecen sucesivamente la localidad de Llolleo, la desembocadura del río Maipo, la localidad de Santo Domingo y el Humedal del Yali. Centro: Muelle pesquero en Puertecito y desembocadura del río Maipo. Abajo: Porta-contenedores atendido por grúas Gantry en el molo sur.

1.2. Modelos utilizados en procesos costeros

Un modelo es una representación simplificada de un fenómeno que interesa estudiar, comprender o predecir. La complejidad de los fenómenos naturales que ocurren en sistemas acuáticos (donde hay interacción del agua con el aire, el sedimento y las obras) es tal que nos obliga a retener los procesos dominantes y descartar aquellos que tienen una relevancia menor. En este sentido, la complejidad de un modelo depende de si su objetivo es científico o ingenieril, siendo los primeros usualmente más complejos que los segundos. En el ámbito de la ingeniería, los estudios se desarrollan con plazos y recursos acotados que obligan al ingeniero a buscar una solución aproximada a un problema. En la ciencia, en contraste, los plazos suelen ser más holgados y los modelos se utilizan para la comprensión cabal del fenómeno, sin necesariamente buscar soluciones.

Para ilustrar las diferentes aproximaciones a la realidad mediante un modelo matemático, recurramos a un ejemplo de la ingeniería estructural. La Figura 1.2.1 muestra tres modelos con diferentes grados de complejidad para representar una estructura. El más simple consiste en un modelo unidimensional donde cada piso se simula como una masa y todas las columnas como un solo elemento con propiedades equivalentes. En ese modelo podemos conocer a *grosso modo* el desplazamiento de cada piso pero desconocemos el funcionamiento de las losas y columnas en forma individual. Un modelo bidimensional, levemente más complejo, considera el piso como un marco con varias columnas y una losa. En este modelo podemos conocer un poco más sobre la interacción de losas y columnas, pero no es posible caracterizar efectos torsionales en planta. Un modelo tridimensional permite conocer el comportamiento individual de los elementos y su interacción con el resto de la estructura, con costos computacionales bastante mayores pero con una riqueza bastante mayor de la física subyacente. Idealmente, nos interesaría conocer el comportamiento de la estructura real, pero es prácticamente irrealizable porque en un proyecto real ella no se ha materializado o porque los modelos a escala 1:1 son muy costosos, entre otras razones. Estas ideas son también aplicables a modelos hidrodinámicos y aquellos orientados a comprender los procesos de mezcla.

Un modelo hidrodinámico tiene como objetivo describir las propiedades físicas del agua en movimiento que surgen como consecuencia de condiciones externas como las mareas, los vientos, las descargas de ríos, el oleaje y los gradientes densimétricos, entre otras forzantes. Entre las variables físicas de interés están la velocidad, la presión, la densidad, la salinidad, la temperatura, la concentración de alguna sustancia y el nivel de agua. Los modelos hidrodinámicos son una herramienta fundamental para cuantificar el impacto ambiental de proyectos lacustres, fluviales y costeros. A su vez, en la ingeniería portuaria y costera existen una amplia gama de variables, cada una con modelos de diferente complejidad. La Figura 1.2.2 presenta una descripción de algunas variables atmosféricas, oceanográficas y morfológicas asociadas a un proyecto de obras marítimas, muchas de las cuales requerirán de modelos individuales o acoplados (aquellos que relacionan el comportamiento de más de una

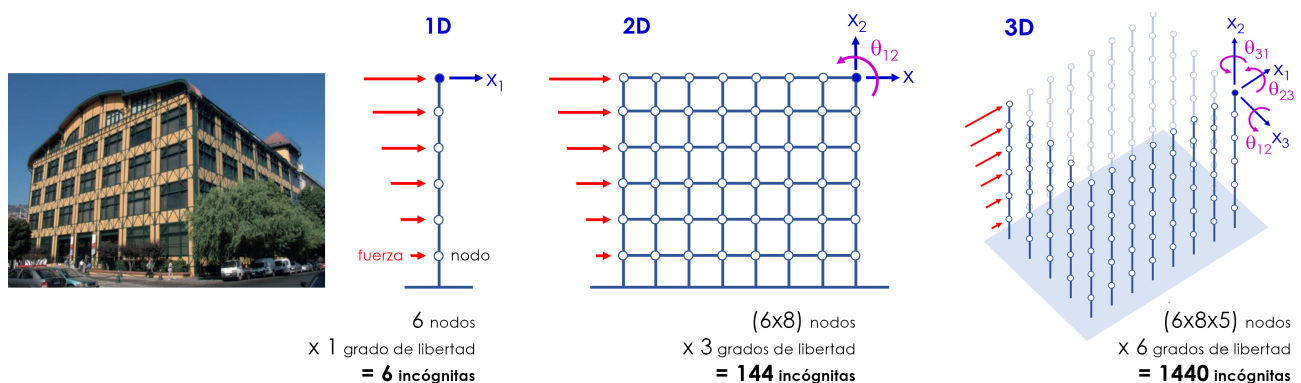


Figura 1.2.1: Esquema de un proceso de modelado: A la izquierda el edificio Hucke, de la Universidad de Valparaíso, seguido en orden de complejidad por modelos unidimensional, bidimensional y tridimensional.



Figura 1.2.2: Algunas variables típicas de un proyecto de ingeniería marítima.

variable). A estas variables se suman otras de carácter técnico que exceden el alcance de este texto. Entre ellas destacan i) la **hidrología** y la **hidráulica fluvial** que definen el régimen de las desembocaduras que alimentan a las costas, ii) la **arquitectura** y el **urbanismo** que definen los criterios de emplazamiento en el territorio costero, iii) la **biología marina**, la **oceanografía** y la **ecología** que permiten evaluar el impacto sobre el medio biótico asociado a las intervenciones humanas y iv) otras variables que rigen los marcos político, económico, turístico, social, legal y ambiental en los que se enmarcan los proyectos de ingeniería marítima. Para proyectos de descargas de efluentes en el mar existen otras variables relevantes (e.g. salinidad y temperatura del agua, oxígeno disuelto y precipitación, entre otros), que son fundamentales para comprender los procesos de mezcla de los efluentes.

1.2.1. Modelos físicos y modelos numéricos

En la ingeniería marítima existen dos tipos de modelos que son complementarios entre sí:

- Los **modelos físicos** son representaciones de un sistema real a escala y bajo condiciones controladas en un laboratorio. A diferencia de una maqueta arquitectónica donde sólo se reduce la escala, en los modelos físicos se escalan en forma simultánea las dimensiones, la cinemática (desplazamientos, velocidad y aceleración) y la dinámica (fuerzas) del prototipo en tamaño real a un modelo a escala usualmente menor, donde se ejecutan las observaciones. Un excelente recurso para aprender sobre modelos físicos es Hughes (1993).
- Los **modelos matemáticos** representan los principios de conservación de la masa, momentum y energía mediante sistemas de ecuaciones diferenciales parciales, que permiten caracterizar la evolución de las propiedades del flujo en el espacio y el tiempo. Entre estas ecuaciones destacan las de continuidad, las de Navier-Stokes, la de la energía y las ecuaciones de estado. Los modelos numéricos se pueden subdividir entre **modelos deterministas** donde los datos de entrada y las ecuaciones son lo suficientemente exactos para conocer las propiedades del flujo con gran precisión, y los **modelos estocásticos** o probabilistas, donde se incorpora la incertidumbre en los datos de entrada y/o en las ecuaciones de gobierno. Un proceso estocástico es un concepto que sirve para describir variables aleatorias que evolucionan en función de otra variable (generalmente el tiempo) y que se pueden caracterizar mediante un función de distribución de probabilidad.

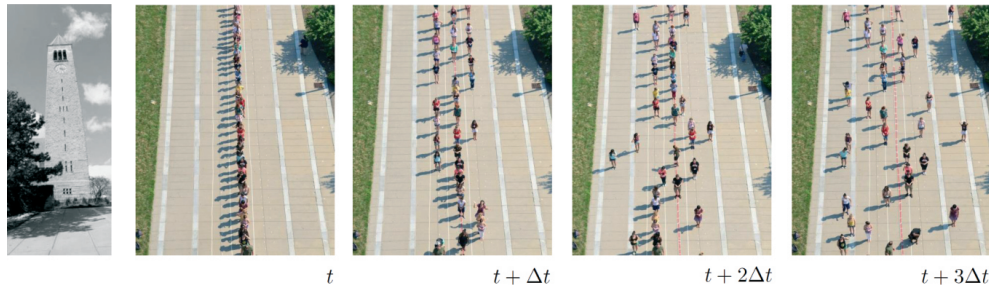


Figura 1.2.3: Experimento ilustrando el proceso de difusión de la masa de un conjunto de personas en McGraw Tower, un campanario ubicado en Cornell University, Estados Unidos. Como parte del equipo organizador de la actividad, desarrollada con niñas de high school para un campamento de verano en 2013, recomiendo ampliamente la experiencia como parte del proceso formativo de futuros estudiantes de ciencias e ingeniería.

Cabe mencionar que los modelos físicos y numéricos son complementarios. En términos simples, los primeros permiten estudiar en detalle una cantidad relativamente reducida de casos y calibrar parámetros que luego se utilizan en el modelado numérico. Los modelos numéricos permiten estudiar gran cantidad de casos e incorporar fácilmente las condiciones con y sin proyecto con relativa simpleza. Los plazos y costos necesarios para implementar un modelo físico son comparativamente altos en relación a los numéricos, y está en el diseñador lograr el balance óptimo al definir el uso de ambos. Cabe mencionar que en los proyectos, usualmente entre un 5 % y 10 % del costo total de la obra corresponde a los estudios de ingeniería y el resto para construcción. Por ende, para proyectos relativamente pequeños y simples, el modelo físico puede omitirse.

En la hidráulica existen también **modelos analógicos** que permiten inferir el comportamiento de un fenómeno a partir de otro diferente, pero que se representa mediante ecuaciones con estructura equivalente. Un ejemplo es la analogía entre un circuito eléctrico y un sistema de tuberías, o la analogía del *random walk* utilizada para explicar la difusión de un agente en un medio (Figura 1.2.3). Estos modelos se utilizan con fines pedagógicos y están actualmente en desuso para cuantificar fenómenos debido al aumento de la capacidad computacional, que permite privilegiar el uso de modelos numéricos.

1.2.2. Modelos en la ingeniería marítima

Los modelos se utilizan para estudiar una amplia gama de problemas de manejo portuario y medioambientales, entre los que se destacan los siguientes:

- Modelos de generación de oleaje en el océano abierto
- Modelos de propagación de oleaje en zonas costeras
- Modelos de agitación de oleaje en dársenas y bahías
- Modelos de resonancia en dársenas y bahías
- Modelos de hidrodinámicos forzados por mareas, vientos u otros forzantes
- Modelos de maniobra de buques en zonas de aproximación al puerto
- Modelos de buque atracado
- Modelos de evolución de playas (en planta, perfil o tridimensionales)
- Modelos de estabilidad y esfuerzos en diques
- Modelos de tsunami generados por sismos y remociones en masa (*landslide*)

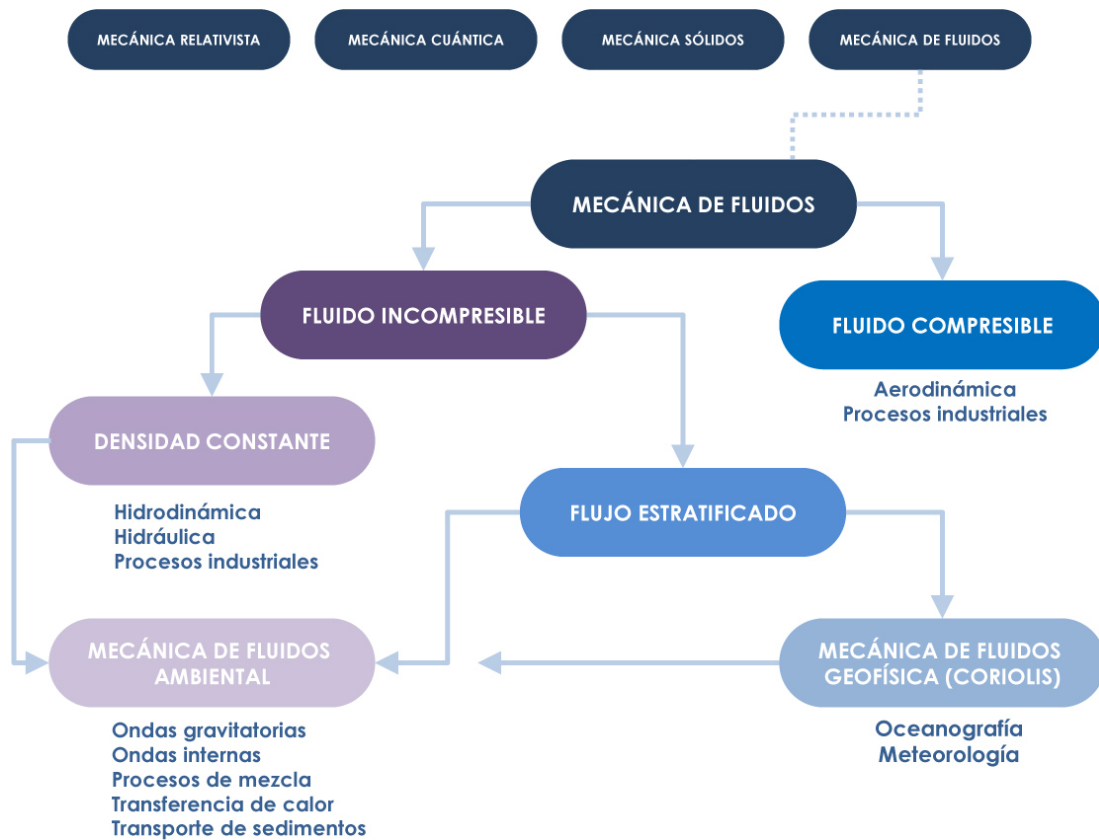


Figura 1.2.4: Ámbitos disciplinarios de la mecánica de fluidos.

- Modelos de procesos de mezcla de contaminantes
- Modelos de interacción oleaje-estructura
- Modelos CFD (*Computational Fluid Dynamics*)
- Modelos estructurales

Los modelos dependen mucho del ámbito disciplinario en que se utilicen. La Figura 1.2.4 muestra una división de diferentes subdisciplinas de la mecánica de fluidos, dentro de la cual aparece la mecánica de fluidos ambiental y la mecánica de fluidos geofísica, donde se aplican algunos de los contenidos de este libro. La mecánica de medios continuos, no contemplada en la figura, es una rama de la mecánica utilizada por algunos autores que propone un modelo unificado para la mecánica de sólidos y fluidos.

1.2.3. Dimensiones espaciales en un modelo numérico

En la naturaleza, los procesos hidrodinámicos y de mezcla ocurren en el espacio tridimensional. Por ejemplo, la Figura 1.2.5 muestra el campo de velocidades en secciones transversales a lo largo de un río, obtenido mediante un ADCP (*Acoustic Doppler Current Profiler*), obtenida de Venditti et al. (2014). Se observa que la velocidad horizontal en el sentido del flujo es superior a la vertical y que existen marcados gradientes tanto en la sección como a lo largo del río. También se observa que en el perímetro mojado del río la velocidad es nula producto de las condiciones de contorno de no deslizamiento e impermeabilidad y que la velocidad tiende a aumentar hacia la superficie y el centro de la sección. Estas mediciones evidencian que los flujos en la realidad son muy complejos y difíciles de modelar.

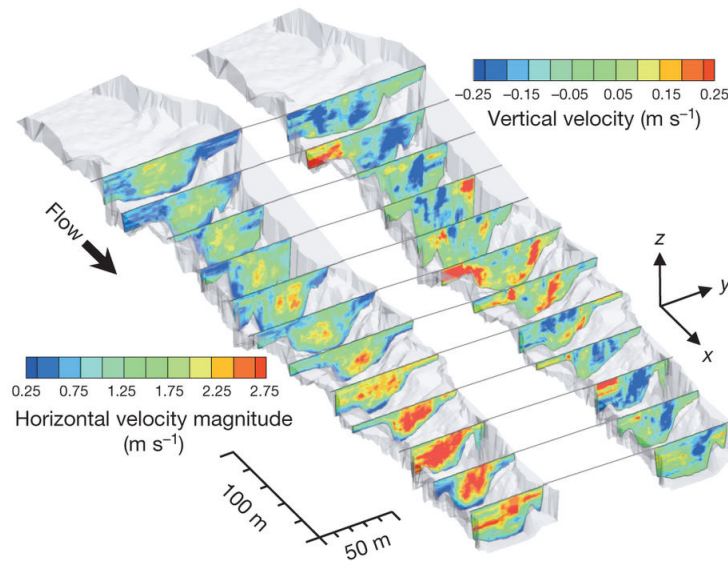


Figura 1.2.5: Registros de velocidad horizontal y vertical en la sección de un río (Venditti et al., 2014).

Dependiendo de las características del flujo y los objetivos del estudio, pueden efectuarse simplificaciones con miras a reducir el costo computacional y la complejidad del análisis. Ello, naturalmente, se hace a costa de sacrificar parte de la física cuya importancia es menor para efectos del estudio. Así, los flujos pueden ser estudiados en grados crecientes de detalle y precisión por medio de modelos en una sola dimensión (1D), de dos dimensiones en la vertical (2DV), de dos dimensiones en la horizontal (2DH) y tres dimensiones (3D). Los modelos 2D y 3D requieren de condiciones de borde e iniciales complejas, para las cuales existen soluciones analíticas sólo en casos muy simples. El incremento de las dimensiones asimismo rescata de mejor manera la física a costa de un incremento en el costo computacional. Cabe notar que en el ámbito del modelado de procesos costeros, el término unidimensional representa una dimensión espacial. Análogamente, los términos bidimensional y tridimensional consideran dos y tres dimensiones espaciales, respectivamente. En estricto rigor, no obstante, estos modelos consideran también el tiempo como una dimensión adicional.

Para ilustrar las diferencias entre modelos, veamos el ejemplo de un río en la Figura 1.2.6, donde el espacio continuo donde ocurren los procesos físicos se discretiza en elementos discretos donde se resuelven las ecuaciones. Dicha discretización es necesaria puesto que en la naturaleza, los procesos obedecen a modelos matemáticos (i.e. ecuaciones de gobierno, relaciones constitutivas y condiciones iniciales y de borde) que, salvo excepciones, tienen solución analítica. La discretización facilita la solución mediante computadores que, en esencia, obedecen a lenguajes discretos.

1.2.3.1. Modelos unidimensionales

Los **modelos 1D**, o unidimensionales, se basan en el supuesto de que el flujo a lo largo del eje del cuerpo de agua esencialmente alargado (como un río, un estuario o un fiordo) prevalece sobre las dimensiones lateral y vertical. La batimetría se introduce para secciones transversales en las cuales se calculan la profundidad media en la sección $\tilde{H}(x, t)$ y un único valor de velocidad promedio en la sección transversal $\langle u \rangle(x, t)$. Estos valores se definen como

$$\tilde{H}(x, t) = \frac{1}{B} \int_{y_1}^{y_2} H(x, y, t) dy, \quad (1.2.1)$$

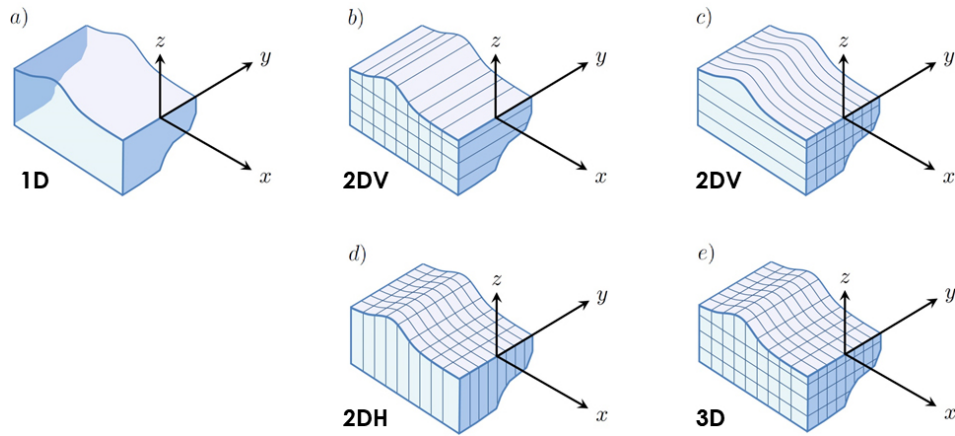


Figura 1.2.6: Tipos de modelos utilizados para flujos ambientales en un cuerpo de agua. El eje x corresponde al eje longitudinal, y es la coordenada lateral y z la coordenada vertical. a) Modelo en una dimensión 1D donde las propiedades del flujo son promediadas en la sección transversal del cuerpo de agua. b) Modelo 2DV donde el flujo se resuelve promediando en la vertical en el plano $x - z$, cuyo objetivo es conocer la distribución longitudinal del flujo. c) Modelo 2DV donde el flujo se resuelve en el plano $y - z$ de modo de conocer la distribución transversal del flujo. d) Modelo 2DH donde el flujo se resuelve en el plano $x - y$ para conocer las propiedades en planta del flujo. e) Modelo 3D donde las propiedades del flujo son calculadas puntualmente.

donde $B(x) = y_2 - y_1$ es el ancho de la sección con coordenada longitudinal x , siendo $y_2(x)$ e $y_1(x)$ los extremos izquierdo y derecho de la sección mirando la sección hacia aguas abajo y

$$H(x, y, t) = \int_{-h}^{\eta} dz \tag{1.2.2}$$

es la profundidad total del cuerpo de agua, con $z = \eta(x, y, t)$ es la superficie libre y $z = -h(x, y)$ la posición del fondo. La definición de estas variables se incluye en la Figura 1.2.7. La velocidad promedio en la sección transversal con coordenada longitudinal x se define como

$$\langle u \rangle(x, t) = \frac{1}{A} \int_{y_1}^{y_2} \int_{-h}^{\eta} u(x, y, z, t) dz dy, \tag{1.2.3}$$

donde $A(x)$ es la sección transversal. Esta aproximación no permite visualizar las variaciones transversal (en y) y vertical (en z) en la velocidad, pues han sido integradas en el espacio. La aproximación se basa en que el flujo es perpendicular a la sección transversal, lo que no es válido en ríos donde hay recirculación.

En la práctica de ingeniería hidráulica, los modelos 1D son aplicables en ríos de sección angosta donde interesa conocer el nivel de agua $\tilde{H}(x, t)$ y la velocidad media del escurrimiento $\langle u \rangle(x, t)$. Para calcular estas variables se puede usar i) una combinación de las ecuaciones de conservación de la masa y energía (Bernoulli) para valores medios en la sección transversal, o en su defecto ii) las ecuaciones de Saint-Venant (ecuaciones

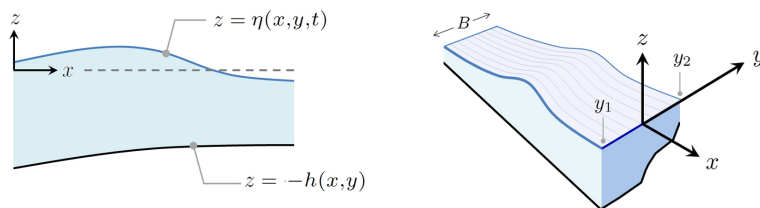


Figura 1.2.7: Esquema con las definiciones geométricas de un canal de sección variable.

5.4.93), que corresponden a los principios de conservación de masa y momentum integradas en la sección transversal.

Otra aplicación clásica es el flujo en conductos a presión (sistemas de tuberías), donde se suele recurrir a los principios de conservación de la masa y la energía (Bernoulli), con valores promediados en la sección. Para un flujo estacionario con densidad constante, se puede establecer la relación entre dos secciones mediante las expresiones

$$A_1 \langle u \rangle_1 = A_2 \langle u \rangle_2, \quad \langle z \rangle_1 + \frac{\langle p \rangle_1}{\gamma} + \frac{\langle u \rangle_1^2}{2g} = \langle z \rangle_2 + \frac{\langle p \rangle_2}{\gamma} + \frac{\langle u \rangle_2^2}{2g} + \Delta E, \quad (1.2.4)$$

donde A es el área de la sección transversal de la tubería, $\langle z \rangle$, $\langle u \rangle$ y $\langle p \rangle$ son la cota, la velocidad y la presión medias en la sección, γ es el peso específico, g es la aceleración de gravedad y ΔE es la pérdida de energía por efectos de fricción y singularidades entre las secciones 1 y 2.

1.2.3.2. Modelos bidimensionales

Los **modelos 2D**, o bidimensionales, se pueden dividir en dos. Los **modelos 2DH** reproducen los fenómenos en el plano horizontal (x, y) y los **modelos 2DV** representan modelos en los planos verticales (x, z) y (y, z) . Los modelos 2DH se basan en el supuesto de que el flujo en el plano horizontal predomina por sobre la dimensión vertical. La batimetría se introduce para todo el espacio en planta donde se calcula la profundidad total en la sección $H(x, y, t)$ y las velocidades integradas en la profundidad

$$\bar{u}(x, y, t) = \frac{1}{H} \int_{-h}^{\eta} u(x, y, z, t) dz, \quad \bar{v}(x, y, t) = \frac{1}{H} \int_{-h}^{\eta} v(x, y, z, t) dz. \quad (1.2.5)$$

En esta expresión $z = \eta(x, y, t)$ es la superficie libre y $z = -h(x, y)$ la posición del fondo. Esta expresión implica que la velocidad se promedia en la columna vertical de agua y está representada por un único valor por punto (x, y) en el instante t .

Los modelos 2DH se aplican en flujos donde la escala espacial del flujo en el plano horizontal es mucho mayor que la profundidad o en aquellos dominados por la estratificación de alguna de sus variables. Entre los primeros se encuentran ríos anchos y someros como el Biobío en su desembocadura (Figura 1.2.8), estuarios, lagos, fiordos y las ondas largas en la costa. Para flujos en que alguna de sus propiedades tiene una variaciones verticales apreciables, se pueden utilizar modelos 2DV donde se calculan las propiedades del flujo para cada sección, en cuyo caso deben introducirse otras formas de promediar.

1.2.3.3. Modelos tridimensionales

Los modelos 3D, o tridimensionales, rescatan de manera más adecuada la física pues permite determinar las tres componentes espaciales de la velocidad

$$u(x, y, z, t), \quad v(x, y, z, t), \quad w(x, y, z, t), \quad (1.2.6)$$

sin incurrir en ninguna integración espacial. En estos modelos es necesario determinar la posición de la superficie libre mediante, por ejemplo, el método VOF (*Volume Of Fluid method*). La aplicación de modelos 3D se utiliza raramente debido a la complejidad involucrada en el proceso de calibración y los costos computacionales, pero se harán cada vez más populares en el ámbito de la ingeniería en la medida que la capacidad de los computadores mejore y se desarrollen algoritmos más eficientes. El explosivo desarrollo de la capacidad computacional se ejemplifica mediante la «Ley de Moore», acuñada por el cofundador de la empresa Intel en 1965, que establece que la velocidad de procesamiento de las computadoras se duplica cada doce meses.



Figura 1.2.8: Fotografía aérea del Río Biobío en Concepción, cerca de la desembocadura.

Finalmente, cabe mencionar que las magnitudes calculadas con diferentes modelos son esencialmente diferentes. Por ejemplo, la velocidad media en la sección $\langle u \rangle(x, t)$ representa un promedio en la sección en tanto que la velocidad media en la profundidad $\bar{u}(x, y, t)$ representa el valor medio proyectado en la horizontal. La velocidad $u(x, y, z, t)$ corresponde a la velocidad en un punto. La interpretación de estas tres velocidades se ilustra en la Figura 1.2.9.

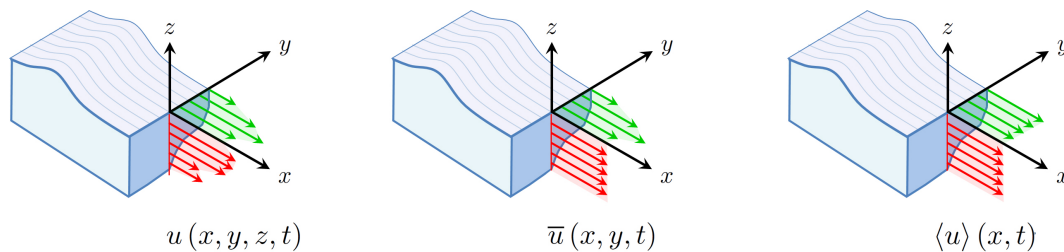


Figura 1.2.9: Ejemplo de interpretación de la velocidad en un punto $u(x, y, z, t)$ mediante un modelo 3D, la velocidad media en la profundidad $\bar{u}(x, y, t)$ mediante un modelo 2DH y la velocidad promedio en la sección $\langle u \rangle(x, t)$ mediante un modelo 1D. Las flechas verdes y rojas representan la velocidad en la horizontal y vertical, respectivamente. Así, el modelo 3D presenta variación vertical y horizontal, el modelo 2DH presenta sólo variación en la horizontal y el modelo 1D no presenta variaciones en la sección.

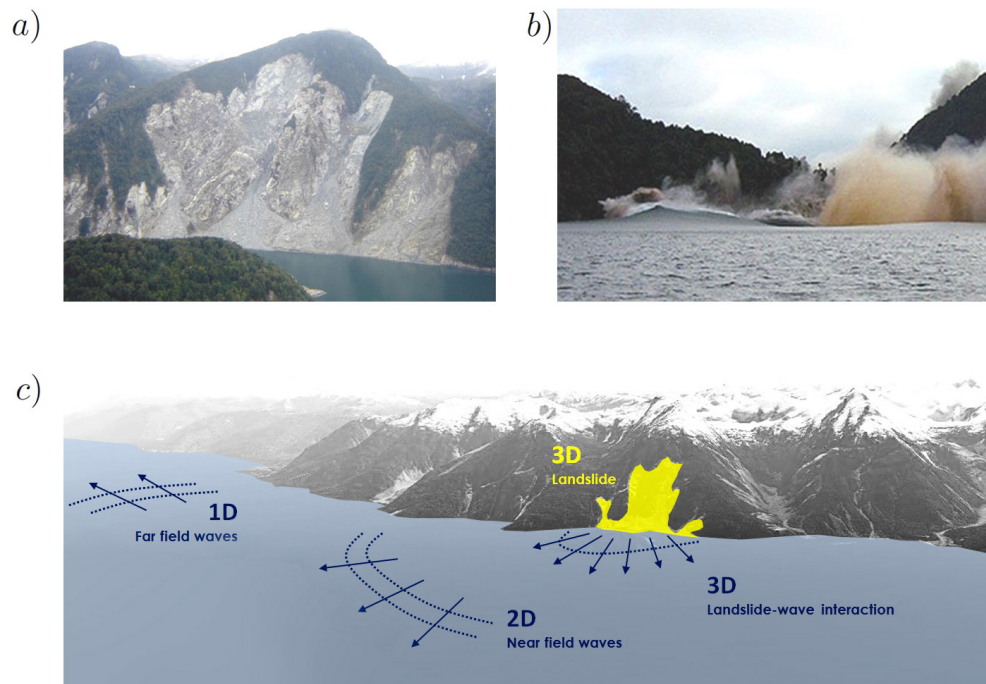


Figura 1.2.10: Imágenes de tsunami del 21 de Abril de 2007 en el fiordo Aysén, Chile, reproducidas de Winckler (2015). a) Remoción en masa de 71 millones de m^3 frente a Isla Mentirosa (Naranjo et al., 2009; Sepúlveda et al., 2010). b) La primera ola impactando la costa este de Isla Mentirosa con elevaciones del orden de 15 metros (Naranjo et al., 2009). c) Esquema de la propagación de un tsunami por remoción en masa, o *landslide tsunami*, en función de las dimensiones que predominan en el flujo.

1.2.3.4. Un ejemplo donde las dimensiones importan: Tsunamis generados por derrumbes

Los tsunamis generados por remociones en masa, o *landslide tsunamis*, son ondas destructivas que se propagan largas distancias en fiordos y lagos. La evolución de este tipo de tsunamis, desde su generación en el campo cercano hasta su propagación en el campo lejano, se presenta en la Figura 1.2.10 (Winckler, 2015). La lámina se basa en el tsunami del 21 de abril de 2007 en el Fiordo Aysén, Chile, que fue generado por varias remociones en masa producidas por un sismo de magnitud 6.2, algunas de las cuales fueron de hasta 71 millones de metros cúbicos (Naranjo et al., 2009; Sepúlveda et al., 2010). Como consecuencia del tsunami, murieron 10 personas en la ribera opuesta del fiordo y se destruyeron casas y balsa-jaulas de acuicultura.

Usemos este ejemplo para ilustrar cómo el flujo puede ser representado con más o menos dimensiones, dependiendo de los procesos físicos que dominan. En el campo cercano (*near field*), el fenómeno es complejo y altamente 3D producto de la interacción entre la remoción y la masa de agua, la turbulencia y la incorporación de aire, sedimentos y rocas. Al alejarse de la fuente, el tsunami evoluciona a una onda larga en la cual la variación del flujo en la profundidad es poco relevante y la propagación es dominada por la dispersión angular. En esta región, un modelo 2DH puede rescatar gran parte de la física. En el campo lejano (*far field*), las ondas se propagan a lo largo del eje del fiordo, por lo que las características de flujo pueden ser capturadas por ecuaciones 1D promediadas en sección, como las desarrolladas por Winckler y Liu (2015). El modelado de la remoción en masa en las fases subaérea (antes de que impacte al agua) y submarina puede ser desarrollada con ecuaciones de onda larga, introducidas en la sección 5.4.2. Se debe definir además la reología del material, que corresponde a la relación entre el esfuerzo y la deformación de un fluido; la reología puede ser modelada mediante modelos viscosos, granulares u otros.



Figura 1.2.11: Desembocadura del Río Cisnes, en la Región de Aysén. Se observan los meandros (curvas pronunciadas) que forma el río en terrenos de poca pendiente y que sugieren el uso, por ejemplo, de un sistema de coordenadas curvilíneas ortogonales (s, n) para caracterizar el flujo.

1.2.4. Sistemas de coordenadas en un modelo numérico

En la representación de un flujo tridimensional, la selección de coordenadas es arbitraria y depende de la geometría del problema en particular. Usualmente se utilizan coordenadas cartesianas caracterizadas por usar como referencia ejes ortogonales entre sí que se cortan en un punto origen, que corresponde al punto de referencia del sistema. Otras alternativas como los sistemas de coordenadas esférico, cilíndrico o curvilíneo, algunos de las cuales se presentan en la Figura 1.2.12, pueden ser adecuados para geometrías específicas. Veamos algunos ejemplos:

- Las coordenadas **cartesianas** son usadas en flujos a escalas espaciales donde la esfericidad de la tierra es irrelevante. Su masificación se debe a la simpleza de la estructura matemática.
- Las coordenadas **esféricas** son usadas en flujos a nivel planetario de las mareas, corrientes oceánicas y tsunamis. Aun cuando la superficie de la tierra tiene la forma de un geoide, el usar coordenadas esféricas asumiendo un radio constante es de uso común en oceanografía y modelos atmosféricos.
- Las coordenadas **cilíndricas** (o **polares**, en su versión 2D) son usadas en flujos en maquinaria que tiene una dirección preferente de desplazamiento. Por ejemplo, un émbolo o las tuberías de conducción de agua son ejemplos donde las coordenadas polares son apropiadas.
- Las coordenadas **curvilíneas** son usadas en cursos de aguas como ríos, donde existe una curvatura natural de la batimetría y de las líneas de flujo. La Figura 1.2.11 muestra los meandros que forma el río Cisnes, en su desembocadura, y que sugieren el uso, por ejemplo, de un sistema de coordenadas curvilíneas ortogonales (s, n) para caracterizar el flujo.

La diferencia fundamental entre los diferentes sistemas de coordenadas es que las ecuaciones de gobierno tendrán expresiones sutilmente diferentes, dependiendo de la matriz Jacobiana que los caracteriza. Esta matriz, formada por las derivadas parciales de primer orden de una función, permite transformar las expresiones entre diferentes sistemas, dependiendo de la geometría del flujo que más convenga adoptar para resolver las ecuaciones de gobierno. Por ejemplo, en los modelos de oleaje que promedian la fase (sección 5.3), la ecuación de balance de acción en coordenadas cartesianas $N(x, y, t, \sigma, \theta)$ se escribe como

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial c_{g,x} N}{\partial x} + \frac{\partial c_{g,y} N}{\partial y} + \frac{\partial c_{\sigma} N}{\partial \sigma} + \frac{\partial c_{\theta} N}{\partial \theta} = \frac{S}{\sigma}, \quad (1.2.7)$$

donde x e y son coordenadas ortogonales, t el tiempo, σ la frecuencia, θ la dirección y S el término forzante. Esta ecuación se utiliza en estudios de propagación cuando el dominio de integración es relativamente pequeño y la curvatura terrestre despreciable. Para estudios de generación donde el viento transfiere energía al oleaje en grandes distancias, es recomendable recurrir a coordenadas esféricas donde la ecuación para $N(\lambda, \varphi, t, \sigma, \theta)$ es

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial c_{g,\lambda} N}{\partial \lambda} + \cos^{-1} \varphi \frac{\partial c_{g,\varphi} \cos \varphi N}{\partial \varphi} + \frac{\partial c_{\sigma} N}{\partial \sigma} + \frac{\partial c_{\theta} N}{\partial \theta} = \frac{S}{\sigma}, \quad (1.2.8)$$

donde λ es la latitud, φ la longitud y θ el ángulo antihorario desde el Este. Ambas ecuaciones, que representan la misma física, tienen estructuras similares (términos local, advectivos, aquellos asociados a cambios en la frecuencia y la dirección, además del forzante de la mano derecha) pero la segunda tiene coeficientes adicionales. Si se conoce la transformación entre ambos sistemas de coordenadas (y la matriz Jacobiana), se puede demostrar que ambas son equivalentes.

Por simplicidad, en este texto utilizaremos coordenadas cartesianas en la derivación de las ecuaciones. Pantton (2005) ofrece una completa revisión de las ecuaciones de la mecánica de fluidos en diferentes sistemas de coordenadas.

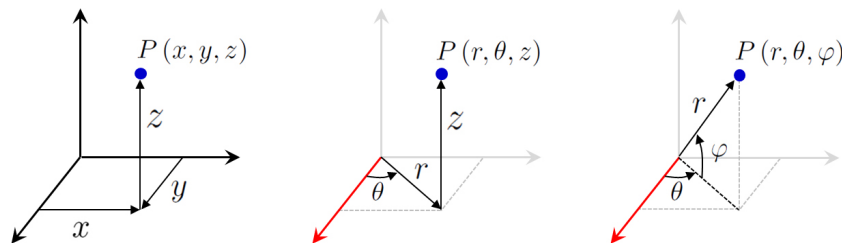


Figura 1.2.12: Sistemas de coordenadas cartesianas. De izquierda a derecha, coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas.

1.3. Calibración y validación de un modelo

Las etapas de calibración y validación son componentes fundamentales en el proceso de modelado, pues permiten conocer en qué grado el modelo es capaz de reproducir el fenómeno en cuestión.

El proceso de **calibración** se basa en ajustar i) los parámetros del modelo, ii) las condiciones iniciales y iii) las condiciones de borde para que los resultados modelados reproduzcan las mediciones en terreno. Por parámetros nos referimos, en el caso de ecuaciones hidrodinámicas, a coeficientes que se utilizan para modelar la fricción de fondo, la fricción del viento actuando sobre la superficie libre del agua o al coeficiente de viscosidad turbulenta, entre otros. Para procesos de mezcla, los parámetros típicos son el coeficiente de difusividad y el de decaimiento. La calibración de un modelo depende de la cantidad de parámetros que se incluyen en las ecuaciones de gobierno, condiciones iniciales y de borde. Por ende, ésta no es única pues más de una combinación de parámetros puede proveer de un ajuste razonable a las mediciones. En el proceso de calibración se pueden utilizar criterios cualitativos y cuantitativos; en estos últimos se utilizan estadígrafos como el coeficiente de determinación entre el modelo y el registro R^2 , entre muchos otros que se describen en el Atlas de Oleaje (Beyá et al., 2016; www.oleaje.uv.cl) y otros autores (e.g. Hamby, 1994).

El proceso de **validación**, por su parte, es una etapa en la que se utilizan los valores de los parámetros determinados en la calibración y se compara el modelo con otro set de datos, usualmente en otra ventana de tiempo o espacio. Si el modelo predice en forma adecuada el comportamiento este nuevo set de datos, podemos a lo sumo decir que no hay razones para pensar que el modelo esté malo. Sin embargo, no podemos asegurar que el modelo sea adecuado en otras situaciones en que no ha sido validado. Por ende, los procesos de calibración y validación forman parte de un ciclo continuo de mejoras en la medida que se expanden en cobertura y mejoran la física de los procesos modelados. En la Figura 1.3.2 se ilustra en forma esquemática el proceso de calibración y validación de una variable genérica $F(t)$ que depende del tiempo y que podría representar cualquier propiedad del flujo.

Cabe notar que para calibrar y validar un modelo se necesitan **mediciones** en terreno o laboratorio, las que son escasas en el océano. De hecho, al 2017, en Chile existe una inmensa disparidad entre el acceso a datos en tierra y en el océano. Por ejemplo, se dispone de 1145 estaciones de registro de precipitación, 295 de temperatura y 788 de caudal en el territorio nacional. En el ámbito de la sismología, por su parte, hay 467 instrumentos de registro de aceleración, movimiento fuerte y posicionamiento satelital. En el océano, no obstante, existen solo 40 mareógrafos para medir variaciones lentas en el nivel del mar, y los escasos registros de oleaje corresponden a mediciones de boyas escalares y direccionales discontinuas (Figura 1.3.1). De hecho, aun no existe una red permanente de medición del oleaje, como aquellas que operan desde hace décadas en países como Estados Unidos, España e Italia (Martínez et al., 2017).

Finalmente, algunas reflexiones:

- Los modelos (casi) siempre funcionan, pero la bondad de los resultados depende de la calidad de los datos de entrada, de la especificación de condiciones de borde y del análisis e interpretación de los resultados, entre otros aspectos. Si a un modelo se ingresan datos de mala calidad, los resultados serán de mala calidad pues al error asociado a esos datos se suman las limitaciones propias del modelo. En otras palabras, el error asociado a los datos de entrada se propaga a lo largo del cálculo (error de arrastre) y se suma a otros errores como el de truncamiento de las ecuaciones, por ejemplo. En la práctica anglosajona se utiliza el concepto de *Garbage in, garbage out* (GIGO) para indicar que si a un algoritmo se le ingresa basura, es exactamente eso lo que obtendremos. Para mejorar el proceso de modelado, es entonces recomendable efectuar un acucioso control de calidad en cada una de sus fases.
- En la actualidad, los modelos numéricos permiten manejar visualizaciones muy bien logradas que facilitan la interpretación de los resultados. Recomendando, sin embargo, no caer ante los aspectos estéticos de los resultados y enfocar los esfuerzos en garantizar que la física esté bien reproducida. No sacamos mucho en

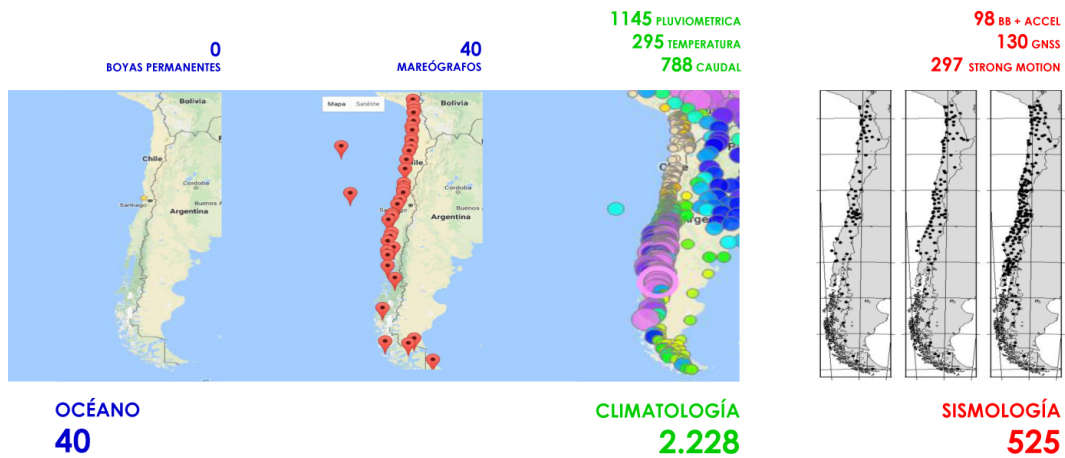


Figura 1.3.1: Instrumentos permanentes utilizados hacia 2017 en Chile para medir fenómenos oceanográficos (SHOA), climatológicos (Explorador eólico) y geofísicos (Sergio Barrientos, com. pers.).

tener salidas gráficamente bonitas si estas conducen a errores de diseño.

- En el proceso de calibración y validación es común definir tolerancias mínimas y/o máximas admisibles para evaluar si un modelo logra reproducir en forma adecuada un fenómeno físico. Williams & Esteves (2017) proponen un acabado set de tolerancias para diferentes variables utilizadas en modelos de oleaje, hidrodinámicos y sedimentológicos para costas y estuarios. Estos valores se reproducen en la Tabla 1.3.3.

Para complementar los conceptos vertidos en esta sección, recomiendo revisar el paper de Oreskes et al. (1994) que introduce técnicas de verificación, validación y confirmación de modelos numéricos en ciencias de la tierra.

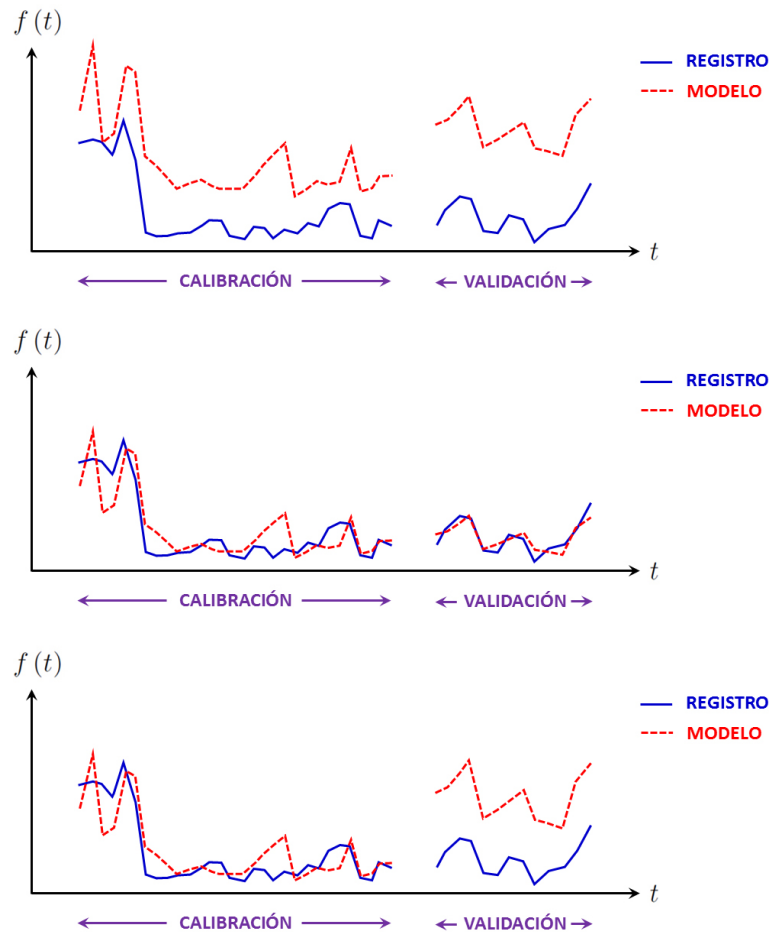


Figura 1.3.2: Esquema del proceso de calibración y validación de una variable que depende del tiempo. En el panel superior se muestra un modelo sin calibración. En el panel central se muestra un modelo calibrado cuya validación es adecuada producto de una buena determinación de los parámetros del modelo, las condiciones iniciales y/o las condiciones de borde. En el panel inferior se muestra un modelo calibrado cuya validación no es adecuada. Este caso puede deberse a parámetros y/o condiciones de borde o iniciales que no fueron identificadas como relevantes en el proceso de calibración.

TABLE 7: Statistical guidelines to establish calibration standards for a minimum level of performance for coastal and estuarine hydrodynamic and sediment models. The table is based in part on the recommendations from Evans [1] and Bartlett [2].

Model predictions	RMSE	Bias	R	SI
Bathymetry	±2.5% of the mean water depth	<0.10	>0.95	<10%
Water level (coast)	±0.1 m or 10% of the measured level (spring tide); ±15% (neap tide)	<0.10	>0.95	<10%
Water level (estuary)	±0.1 m (mouth); ±0.3 m (head) or 10% of the measured level (spring tide); ±15% (neap tide)	<0.20	>0.95	<15%
Water-level phase (coast)	±15 minutes	<0.20	>0.90	<20%
Water-level phase (estuary)	±15 minutes (mouth); ±25 minutes (head)	<0.25	>0.90	<20%
Average current speed	±0.1 m/s or ±10% to 20% of the measured speed	<0.10	>0.95	<10%
Peak current speed	Within <0.05 m/s (very good), <0.1 m/s (good), <0.2 m/s (moderate), and <0.3 m/s (poor) of the measured peak speed	<0.15	>0.90	<15%
Current direction (coastal)	±10° of the measured direction	<0.25	>0.90	<20%
Current direction (estuary)	±15° of the measured direction	<0.30	>0.90	<20%
Bed shear stress	±10% N/m ² of the measured mean stress	<0.10	>0.95	<10%
Wave height	±10% of the measured mean observed height	<0.15	>0.95	<10%
Wave period	±20% of the measured mean observed period	<0.20	>0.90	<20%
Wave direction	±30% of the measured mean observed direction	<0.25	>0.90	<25%
Mean SPM concentration	±20% of the mean measured SPM concentration	<0.20	>0.90	<20%
Accretion based on dredge volumes	±50% of the measured dredge volume	N/A	N/A	N/A
Temperature	±0.5°	—	—	—
Salinity	±1 psu	—	—	—

Figura 1.3.3: Tolerancias para diferentes variables de modelos de oleaje, hidrodinámicos y sedimentológicos para costas y estuarios. Tomado de Williams, J.J., & Esteves, L.S. (2017). *Guidance on setup, calibration, and validation of hydrodynamic, wave, and sediment models for shelf seas and estuaries. Advances in Civil Engineering, 2017.*

1.4. Análisis de sensibilidad

El análisis de sensibilidad es una herramienta muy potente en la práctica de ingeniería pues permite identificar qué parámetros o variables son relevantes en la caracterización de un fenómeno. Hamby (1994) efectúa una revisión completa sobre las diferentes técnicas utilizadas para efectuar análisis de sensibilidad, que recomiendo revisar en caso de que te interese profundizar en la materia. Para entender formalmente cómo se aplica un análisis de sensibilidad, consideremos una función dependiente, o función objetivo, de n variables mutuamente independientes

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (1.4.1)$$

En un modelo hidrodinámico la función puede ser, por ejemplo, la velocidad o la concentración de un contaminante, entre otras variables de interés. Las variables independientes pueden ser el espacio, el tiempo, los parámetros que modelan un fenómeno (e.g. coeficiente de Manning, la viscosidad turbulenta o la difusividad) o aquellos que caracterizan las forzantes del modelo.

Una aproximación formal al análisis de sensibilidad deviene del cálculo diferencial. La expresión del diferencial de la función $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ se expresa de la siguiente manera

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n} dx_n, \quad (1.4.2)$$

a partir de la cual podemos evaluar cómo varía la función (dF) respecto de variaciones en las variables independientes (dx_i), donde la dependencia de la función respecto de cada variable independiente ($\partial F/\partial x_i$) es justamente lo que interesa conocer mediante el análisis de sensibilidad. Para simplificar el análisis, evaluamos la sensibilidad de la función respecto de una variable independiente a la vez:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x_i} dx_i, \quad dx_j = 0 \quad \text{con} \quad i \neq j \quad (1.4.3)$$

manteniendo el resto de las variables constantes, o *ceteris paribus*, que corresponde a una expresión en latín utilizada comúnmente en economía que significa que «siendo las demás cosas igual. A partir de este simple ejercicio, se pueden efectuar diferentes acciones:

- Sensibilizar la función objetivo ante variaciones en variables independientes
- Cuantificar efectos de incertidumbre y/o error en la función objetivo
- Optimizar el comportamiento de la función objetivo

A continuación se describen cada una de estas acciones.

1.4.1. Sensibilización de la función objetivo ante variaciones en variables independientes

Al calcular cuánto varía la función objetivo respecto de variaciones en las variables independientes (es decir, evaluar cuán grande o pequeña es la magnitud de $\partial F/\partial x_i$), se puede definir cuáles variables son relevantes en su comportamiento, predecir **tendencias** y direcciones de cambio. Dependiendo de cómo varíe la función objetivo, la relación entre ésta y una variable independiente puede seguir las siguientes opciones:

- $\partial F/\partial x_i > 0$: al aumentar x_i , F aumenta y viceversa
- $\partial F/\partial x_i < 0$: al aumentar x_i , F disminuye y viceversa
- $\partial F/\partial x_i = 0$, $\forall x_i$: ambas variables son independientes

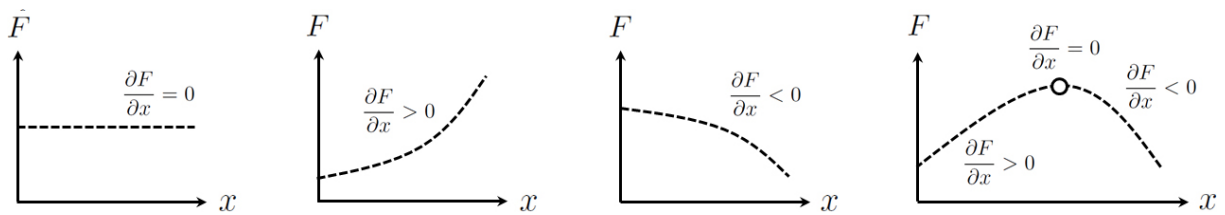


Figura 1.4.1: Ejemplos de una función F que es independiente, directamente proporcional, inversamente proporcional o cuya proporcionalidad depende del rango de valores de x .

Cabe mencionar que la función objetivo puede ser más o menos sensible dependiendo de en qué región se esté evaluando la variable dependiente, pues $\partial F/\partial x_i$ puede también depender de x_i . Un ejemplo de estos comportamientos se ilustra en la Figura 1.4.1. Para el caso de que la función objetivo sea independiente de una variable ($\partial F/\partial x_i = 0, \forall x_i$) o cuando dos variables sean redundantes (es decir, cuando x_i es dependiente de x_j), se puede reducir la cantidad de variables de entrada, simplificando el modelo. Cabe notar que el hecho de que la función objetivo sea independiente de una variable independiente en todo el dominio ($\partial F/\partial x_i = 0, \forall x_i$) es diferente a que la función sea dependiente de esta pero la derivada alcance valores nulos en algún máximo o mínimo ($\partial F/\partial x_i = 0, x_i = a$).

La relación entre la variable independiente y la función objetivo puede ser **lineal** o **directamente proporcional** (e.g. en los sólidos el esfuerzo es proporcional a la deformación unitaria, $\sigma \propto \epsilon$, cuando la deformación es pequeña), **cuadrática** (e.g. en flujos turbulentos, las fuerzas de arrastre son proporcionales al cuadrado de la velocidad, $F \propto u^2$), **cúbica** (e.g. el peso de los elementos de una defensa costera depende aproximadamente del cubo de la altura, $W \propto H^3$) o arbitraria. La **proporcionalidad inversa** es de tipo **hiperbólica** (e.g. el peso de los elementos de una defensa costera es inversamente proporcional al talud de la misma, $W \propto 1/\cot \theta$) aun cuando existen otras formas en que la variable independiente y la función objetivo cambian en sentidos opuestos.

1.4.2. Efectos de incertidumbre y/o error en la función objetivo

Se puede asimismo cuantificar la contribución de diferentes fuentes de **incertidumbre** y/o **error** de las variables independientes a la incertidumbre en la estimación de la función (Moffat, 1988). Como primera aproximación, una variable independiente (que denominaremos simplemente x , omitiendo el subíndice) puede modelarse como

$$x' = x + \epsilon_x, \quad (1.4.4)$$

donde ϵ_{x_i} es el error asociado y se considera como independiente de la variable. La variación de la función para este modelo es

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial \epsilon_x} d\epsilon_x, \quad (1.4.5)$$

donde el segundo término considera la sensibilidad de la función respecto de la incertidumbre en la variable de entrada. Naturalmente se pueden concebir modelos más complejos donde la incertidumbre es función de la variable. Un modelo intuitivo corresponde a aquel en que el error es proporcional a la magnitud de la variable, $\epsilon_x(x) = ax^b$, siendo a y b constantes. En este texto no profundizaremos en estas materias.

Por otra parte, el error total de un modelo puede separarse entre dos componentes:

- el **error sistemático**, que es aquel que se produce en todas las realizaciones con igual cuantía.
- el **error aleatorio**, que es aquel que se produce por fenómenos que no se pueden controlar durante el proceso de modelado.

1.4.3. Optimización del comportamiento de la función objetivo

Si nos remontamos a la primeras aplicaciones del cálculo en una variable, si el modelo tiene una expresión analítica, es posible encontrar máximos o mínimos derivando la expresión e igualando la derivada a cero. En el caso de aplicaciones marítimas, los modelos hidrodinámicos están expresados mediante sistemas de ecuaciones diferenciales parciales y suelen contener uno o más parámetros, por lo que la función no se conoce explícitamente. Es ahí donde el análisis de sensibilidad surge como una herramienta potente para rastrear máximos o mínimos.

1.4.4. Ejemplos de análisis de sensibilidad

Fuerza de arrastre actuando sobre un elemento esbelto

Veamos como ejemplo, la fuerza de arrastre actuando sobre un elemento esbelto sometido a oleaje y/o corrientes. La ecuación de Morison (1950) define la fuerza total como $f = f_d + f_i$, donde

$$f_d = \frac{1}{2} C_d \rho A u |u| \quad (1.4.6)$$

es la fuerza de arrastre, C_d es el coeficiente de arrastre, ρ es la densidad, A es la sección transversal que se opone al flujo y u es velocidad. La fuerza de inercia, por su parte, es

$$f_i = C_i \rho \nabla \frac{du}{dt} \quad (1.4.7)$$

donde C_i es el coeficiente de inercia, ∇ el volumen del elemento y du/dt la aceleración. La fuerza de arrastre f_d es linealmente proporcional al coeficiente de arrastre, que se considera usualmente constante para una geometría dada en régimen turbulento. La densidad, por su parte, se considera constante y por tanto no entra en el análisis de sensibilidad. La fuerza crece linealmente con el área de la sección transversal, y por tanto con el cuadrado del diámetro del elemento esbelto tipo pilote en caso de ser una sección circular, donde $A = \pi D^2/4$. Finalmente, la fuerza es proporcional al cuadrado de la velocidad, lo que obliga a estudiar en detalle este parámetro. En el caso del oleaje, por ejemplo, la velocidad orbital viene definida a través de la teoría lineal (Dean & Dalrymple, 1991) mediante la expresión

$$u = \frac{H}{2} \frac{gT}{\lambda} \frac{\cosh(2\pi[h+z]/\lambda)}{\cosh(2\pi h/\lambda)} \cos(kx - \omega t), \quad (1.4.8)$$

que depende de parámetros característicos de un estado de mar. Esta expresión sugiere analizar la sensibilidad de la fuerza de arrastre ante variaciones de la altura H , el período T , la profundidad total h y la profundidad en la cual se estima la fuerza z . Existen variables dependientes como la longitud de onda $\lambda(T, h)$, el número de onda $k = 2\pi/\lambda$ o la frecuencia angular $\omega = 2\pi/T$ que son dependientes de otras y por tanto pueden ser omitidas del análisis. Dejo como ejercicio que efectúes este análisis tanto para la fuerza de arrastre como la de inercia. Otro ejemplo de un análisis de sensibilidad para modelos de oleaje que promedian la fase se presenta en la sección 5.3.4.

Difusión de una sustancia en un medio

Existen varias formas de presentar los resultados de un análisis de sensibilidad, siendo los gráficos los más útiles para ello. Para ilustrar la forma de presentar resultados consideremos el proceso de difusión en una dimensión, que será ampliamente discutido en la sección 3.7. Por simplicidad, analizaremos un caso particular, evitando las generalizaciones que se harán en dicha sección. Para un coeficiente de difusión D constante y coordenadas cartesianas, la ecuación de gobierno para resolver la función objetivo $C(x, t, D)$ es

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 10, \quad t > 0, \quad (1.4.9)$$

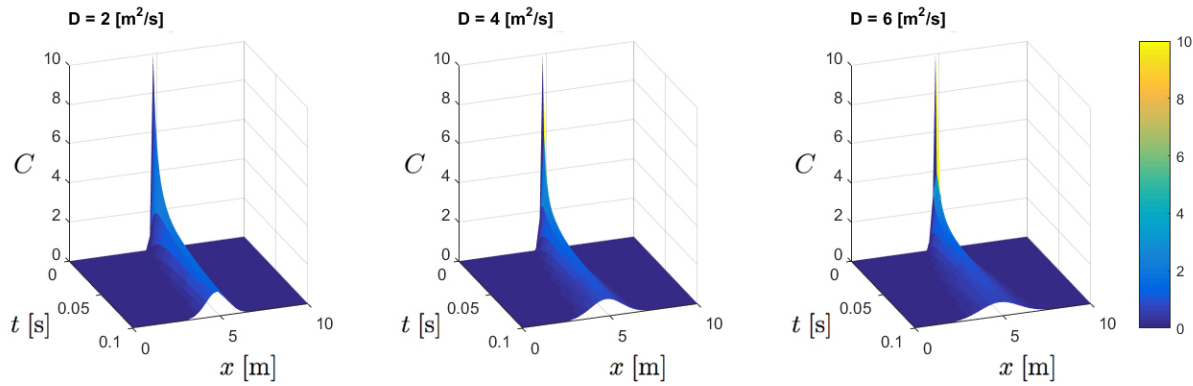


Figura 1.4.2: Análisis de sensibilidad de un proceso difusivo D , ilustrado en un gráfico tiempo-espacio, donde se inyecta un contaminante inicialmente ($t = 0$ s) cerca del centro del dominio ($x = 4,8$ m) con una concentración de $c = 10$ unidades. De izquierda a derecha se muestran casos con coeficientes de difusión crecientes, lo que hace que la concentración se distribuya más rápidamente.

sujeta a la condición inicial $C = 10$ en $x = 4,8$ y a las condiciones de borde $C = 0$ en $x = 0, 10$. En este caso, la función objetivo es la concentración C , x y t representan el tiempo y el espacio, y el coeficiente de difusión D es el único parámetro libre. La solución numérica de este problema (que se introduce en la Parte 4), se presenta en la Figura 1.4.2 para varios valores del coeficiente de difusión. El diferencial de la concentración es

$$dC = \frac{\partial C}{\partial x} dx + \frac{\partial C}{\partial t} dt + \frac{\partial C}{\partial D} dD, \quad (1.4.10)$$

donde podemos analizar la sensibilidad de la concentración ante variaciones del coeficiente de difusión. Acá tenemos libertad para diseccionar la solución como queramos de modo de comprender mejor el proceso. Por ejemplo, la Figura 1.4.3 (izquierda) muestra la solución en el espacio y un tiempo fijo para diferentes coeficientes de difusión, donde se observa que a medida que aumenta el coeficiente de difusión, el proceso es más rápido. En este caso, hacemos variar simultáneamente D y x . Otra opción es graficar la evolución en el tiempo para un punto en el dominio, como ilustra la Figura 1.4.3 (centro o derecha). En este caso varía D y t . La Figura 1.4.2, por su parte, es la más completa de la serie, pues permite entender la variación de C ante variaciones de D , x y t . En resumen, no hay recetas únicas para visualizar la sensibilidad de una función objetivo ante variaciones de las variables independientes (x, t) o de los parámetros (D). La forma de presentación de los resultados depende del problema en particular y de los elementos que el/la ingenier@ quiera mostrar con ello.

Sobrepaso de oleaje en una defensa costera

El sobrepaso de oleaje es uno de los parámetros fundamentales que se utilizan en el diseño de obras costeras. La forma tradicional de calcular el sobrepaso es utilizar fórmulas empíricas, basadas en el análisis dimensional, cuyos coeficientes se obtienen en ensayos en modelo físico a escala reducida en laboratorio. En el proceso de diseño se busca limitar el sobrepaso a valores máximos admisibles que permitan el tránsito seguro de peatones y vehículos, limiten el daño del equipamiento urbano o el daño estructural de edificaciones, según sea el caso. Existen muchas formulaciones de uso común disponibles en manuales de diseño como el Coastal Engineering Manual (CEM) y el Eurotop, y aquí se analizan dos de uso común:

- La fórmula de Owen (1980,1982) y
- La fórmula de Pedersen y Burcharth (1992), modificada por Pedersen (1996),

que en adelante las denominaremos simplemente como las fórmulas de Owen y Pedersen. Cabe mencionar que ambas fórmulas responden a diferentes geometrías y rangos de los parámetros utilizados en los ensayos, y por

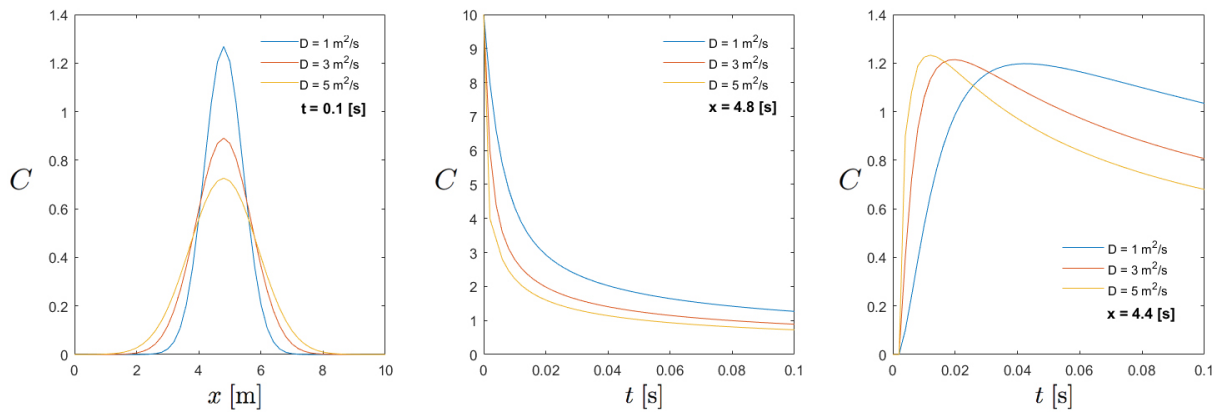


Figura 1.4.3: La imagen izquierda muestra la concentración en el tiempo final de simulación ($t = 0,1$ s) como función de diferentes coeficientes de difusión en todo el dominio espacial. Las imágenes del centro y la izquierda muestran la evolución en el tiempo para un punto central en el dominio ($x = 4,8$ m) y uno ubicado a un costado del punto de inyección del agente ($x = 4,4$ m)

tanto no son estrictamente comparables. La figura 1.4.4 ilustra las geometrías utilizadas en la derivación de ambas expresiones. Sugiero ver las figuras del CEM para mayores detalles.

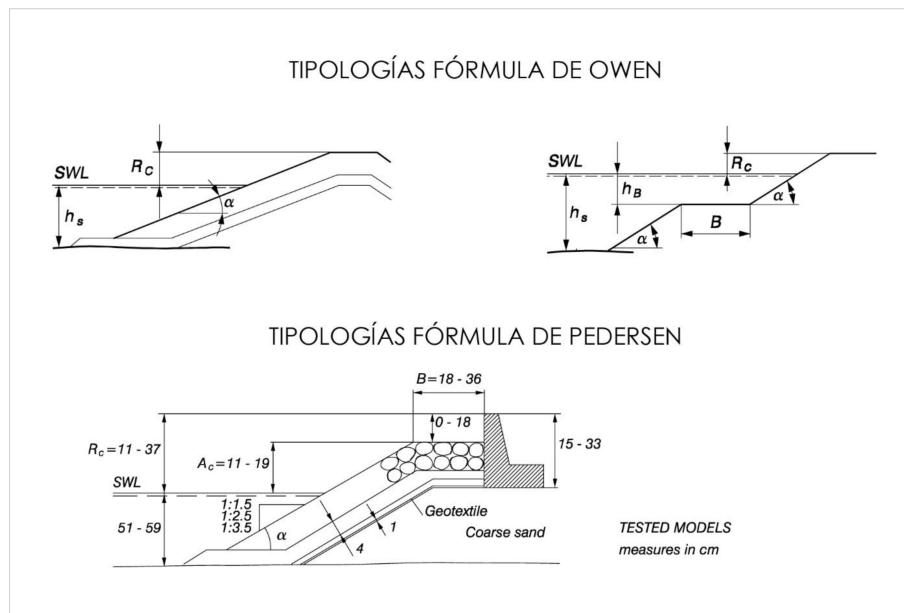


Figura 1.4.4: Geometrías utilizadas para en las fórmulas de Owen y Pedersen para del sobrepaso medio por unidad de frente de obra. Extraído de USACE (2006). Coastal Engineering Manual. Part VI, Chapter 5 Fundamentals of design.

La fórmula de Pedersen (CEM, Table VI-5-12) tiene la siguiente expresión para el sobrepaso medio por unidad de frente de obra Q :

$$\frac{Q T_{om}}{L_{om}^2} = 3,2 \times 10^{-5} \left(\frac{H_s}{R_c} \right)^3 \frac{H_s^2}{A_c B \cot \alpha}, \tag{1.4.11}$$

donde H_s es la altura significativa del oleaje, T_{om} y L_{om} son el período medio y la longitud del oleaje en aguas profundas, con $L_{om} = gT_{om}^2 / (2\pi)$, R_c es el francobordo (distancia entre el nivel del agua en reposo y

el coronamiento de la defensa), A_c es la distancia vertical entre el nivel en reposo y la cota de la coraza, B es el ancho de la berma y $\cot \alpha$ es el talud. Cabe mencionar que el franco depende del nivel del mar y todos sus componentes (e.g. marea astronómica, marea meteorológica y cambios en el nivel medio del mar debidos al cambio climático). Vista así la ecuación, podemos expresar la función objetivo (sobrepaso) mediante una relación funcional del tipo

$$Q = Q(H_s, T_{om}, R_c, A_c, B, \cot \alpha). \quad (1.4.12)$$

Un análisis de sensibilidad muy simple se presenta en la figura 1.4.5 para algunas de las variables de interés (donde para el análisis de cada variable se mantienen constante todas las variables). La fórmula de Owen (CEM, Table VI-5-8), por su parte, expresa el sobrepaso medio por unidad de frente de obra mediante la expresión:

$$\frac{Q}{g H_s T_{om}} = a \exp \left(-b \frac{R_c}{H_s} \sqrt{\frac{s_{om}}{2\pi}} \right) \frac{1}{\gamma_r}, \quad (1.4.13)$$

donde g es la aceleración de gravedad, s_{om} es la esbeltez del oleaje en aguas profundas, con $s_{om} = H_{so}/L_{om}$, a y b son parámetros que dependen del talud de la obra y eventualmente de la profundidad de rotura, y γ_r es un coeficiente de rugosidad. En este caso, la función objetivo se expresa mediante la relación funcional

$$Q = Q(H_s, T_{om}, R_c, a, b, \gamma_r). \quad (1.4.14)$$

La figura 1.4.5 ilustra un análisis de sensibilidad muy simple se presenta en la para algunas de las variables de interés. Es interesante notar que ambas expresiones son dependientes de ciertos parámetros comunes (H_s, T_{om}, R_c) y difieren de otros. Asimismo, se observa que la fórmula de Owen da valores significativamente superiores a los obtenidos con Pedersen aun cuando no sean estrictamente comparables.

1.5. Precisión y exactitud

Los conceptos de precisión y exactitud son fundamentales en la interpretación de los errores de medición, modelos numéricos y modelos físicos, entre otras aplicaciones de ingeniería.

- La **precisión** (*precision*) corresponde a la dispersión del conjunto de mediciones de una magnitud, respecto del valor medio de las mismas. Cuanto menor (mayor) es la dispersión de las mediciones, mayor (menor) es la precisión. Una medida común de la precisión es la desviación estándar de las mediciones.
- La **exactitud** (*accuracy*) corresponde a cuán cerca se encuentra el valor medido del valor real. Una medida común de la exactitud es el sesgo (*bias*) de una estimación, que corresponde en términos estadísticos a la diferencia entre el valor medido y el valor real, ya sea como una información individual o un set de datos. Cuanto menor (mayor) es el sesgo, más (menos) exacta es una estimación.

La precisión y la exactitud son propiedades independientes. La medición, modelo u operación es de mejor calidad mientras mayor sea su precisión y exactitud. Un ejemplo clásico para ilustrar estos conceptos corresponde al juego de dardos (Figura 1.5.1). En este caso la precisión tiene que ver con la distancia de los dardos entre sí, en tanto que la exactitud corresponde a la distancia de los dardos respecto del centro de la diana. Una medición es precisa cuando los dardos se concentran en un espacio pequeño, y es exacta cuando los disparos se concentran sobre el centro de la diana (que corresponde al valor real, que en este caso es desconocido). Otro concepto que se entrelaza con estos conceptos dice relación con la **resolución** del sistema de medición. Por ejemplo, la ubicación de los puntos en la Figura 1.5.1 puede tener un error inherente a en la medición dependiendo del tipo de instrumento que se utilice.

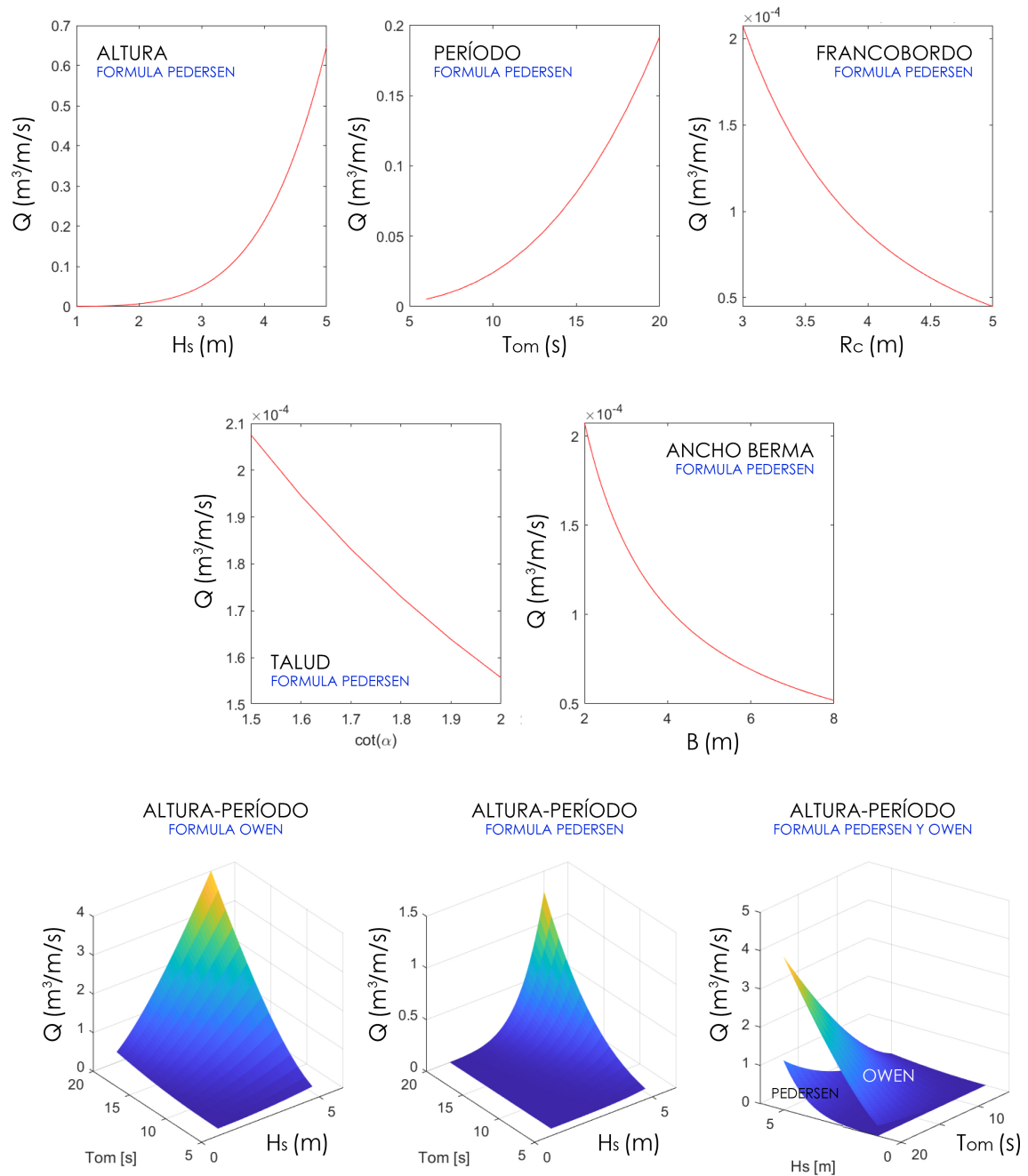


Figura 1.4.5: Ejemplos de análisis de sensibilidad del sobrepaso medio por unidad de frente de obra Q ante diferentes variables para las fórmulas de Pedersen y Owen.

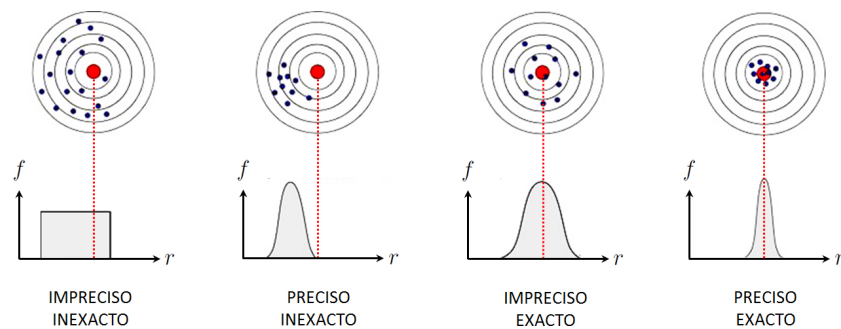


Figura 1.5.1: Analogía del juego de dardos para explicar los conceptos de precisión y exactitud. Abajo se muestran las curvas de frecuencia de ocurrencia f para un infinito número de dardos, como función de la distancia al centro del blanco.

Capítulo 2

Ecuaciones fundamentales

En esta parte se presentan las ecuaciones fundamentales de la mecánica de fluidos, que reflejan conceptos de conservación de la masa, momentum y energía en un medio continuo. Existen también relaciones constitutivas que dan cuenta de la reología del fluido, que define la relación entre el esfuerzo y la deformación en los materiales que son capaces de fluir. En la mecánica de fluidos ambiental y en la ingeniería costera en particular, usualmente nos remitimos al uso de las ecuaciones de conservación de la masa, momentum y energía para flujo incompresible. El énfasis es en ecuaciones en forma diferencial, pues ésta permite la caracterización detallada del flujo dentro de un dominio de integración. En algunos casos se presentan las expresiones en forma integral para facilitar las analogías entre ambos enfoques. Los flujos turbulentos son tratados en forma más específica en la sección 2.5. Esta parte sirve de soporte a las siguientes y puede complementarse con el estudio de textos clásicos de mecánica de fluidos (Panton, 2005) o clásicos de mecánica de ondas (Dean & Dalrymple, 1991).

2.1. Enfoques en mecánica de fluidos

En la mecánica de fluidos existen dos enfoques, el **lagrangiano** y el **euleriano**, para analizar el movimiento. La selección de uno u otro depende del tipo de información que se necesite y de la complejidad matemática necesaria para resolver el problema, entre otros criterios. En esta sección se efectúa una descripción muy somera, pues esta materia se trata en cualquier libro de mecánica de fluidos y material audiovisual disponible en la web (Shapiro, 1961).

El **enfoque lagrangiano** consiste en seguir a cada partícula fluida en su movimiento (en rigor una superficie material), mediante funciones que describen sus propiedades en el espacio y el tiempo. Este enfoque lleva su nombre en honor a Joseph Louis Lagrange (1736-1813), matemático y astrónomo francés. El enfoque lagrangiano se usa de forma natural en la mecánica de partículas. Ejemplos típicos son el movimiento parabólico que describe un proyectil o la caída libre, donde en forma lagrangiana la ecuación de gobierno

$$\sum \mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{V}), \quad (2.1.1)$$

corresponde a la segunda ley de Newton y la variación del momento se expresa en términos de la derivada total. Un ejemplo en el ámbito de la oceanografía es el uso de derivadores, que son dispositivos que como dice su nombre derivan con las corrientes y por tanto ofrecen una medición lagrangiana del flujo (Figura 2.1.1a).

El **enfoque euleriano**, por su parte, consiste en asignar a cada punto del espacio (área o volumen de control) y en cada instante, un valor para las propiedades del fluido. Este enfoque lleva su nombre en honor a Leonhard Euler (1707-1783), matemático suizo, cuyos trabajos más importantes se centraron en el campo de las matemáticas puras, la astronomía, la mecánica, la óptica y la acústica. Este enfoque no está ligado a las partículas fluidas sino a los puntos del espacio ocupados por el fluido, es decir, el valor de una propiedad en un punto e instante determinado es el de la partícula fluida que ocupa dicho punto en ese instante. En mecánica de fluidos

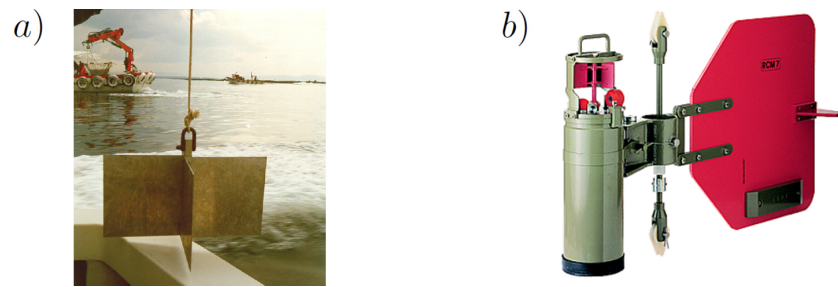


Figura 2.1.1: Medición de la corriente subsuperficial mediante un derivador biplano (correntometría lagrangiana) y un correntómetro de hélice (correntometría euleriana). Ambas mediciones son complementarias y su uso depende del propósito del estudio.

es complejo seguir una partícula, por lo que calculamos las propiedades del flujo en puntos fijos del espacio usando el enfoque Euleriano. La medición euleriana del flujo se puede lograr mediante medidores fijos, como los ADCP's (*Acoustic Doppler Current Profilers*) o los correntómetros de hélice (Figura 2.1.1b).

En términos de técnicas matemáticas, la mecánica de fluidos se puede abordar mediante el **análisis diferencial** y el **análisis integral**, cuya aplicación depende del fin del estudio. El análisis diferencial permite estudiar la complejidad del flujo mediante ecuaciones diferenciales que describen el movimiento de todo el dominio. En el modelado de procesos costeros se utiliza usualmente el análisis diferencial mediante ecuaciones derivadas de las de Navier-Stokes, cuyo objetivo es encontrar las propiedades del flujo (e.g. oleaje, corrientes, nivel del mar y otras variables) en grandes regiones costeras. Por su parte, en el análisis integral se estudia el flujo dentro de un volumen de control y a través de la superficie que lo delimita, siendo útil cuando interesan magnitudes promediadas, sin necesariamente conocer en detalle el flujo. Este tipo de análisis es útil, por ejemplo, para embalses o sistemas de tuberías donde importan más los flujos de entrada y salida que el comportamiento detallado dentro del sistema. En este libro se pone énfasis en el análisis diferencial y solo damos algunos ejemplos del análisis integral.

El **análisis dimensional**, finalmente, permite establecer las posibles relaciones dimensionales entre las variables que describen un fenómeno físico mediante la aplicación del teorema de Buckingham. Este tipo de análisis es fundamental para comprender procesos físicos complejos donde se desconoce a priori la importancia relativa de las variables. Mediante su aplicación, se pueden definir una serie de números adimensionales que se relacionan a posteriori mediante coeficientes empíricos obtenidos a partir de experimentos. Entre los números adimensionales más utilizados en ingeniería oceánica están los números de Reynolds y Froude, que relacionan las fuerzas de inercia con las fuerzas viscosas y gravitacionales, respectivamente. Ejemplo clásicos de aplicaciones del análisis dimensional son i) la expresión de fuerzas de arrastre actuando sobre un elemento esbelto, ii) las expresiones de las pérdidas de carga en tuberías o iii) las expresiones empíricas de crecimiento del oleaje ante la acción del viento que conforman el denominado método SMB (en honor a sus creadores Sverdrup, Munk y Bretshneider).

2.2. Derivada total

Las ecuaciones de conservación utilizadas en mecánica de fluidos se orientan a calcular la evolución en el tiempo y el espacio de alguna propiedad del flujo. Por esa razón son también llamadas ecuaciones de evolución. Para aplicar los conceptos del cálculo diferencial debemos asumir la **hipótesis del medio continuo**, que asume que el fluido es continuo en el espacio, ignorando su estructura molecular y las discontinuidades asociadas a ésta (Figura 2.2.1). Puesto que el fluido es un medio continuo, el uso de derivadas parciales aparece de manera natural y debemos entonces introducir el concepto de **derivada total** para caracterizar dicha evolución.

Apelando a la regla de la cadena, la derivada total de una función $f(t, \mathbf{r})$ que depende del tiempo t y del

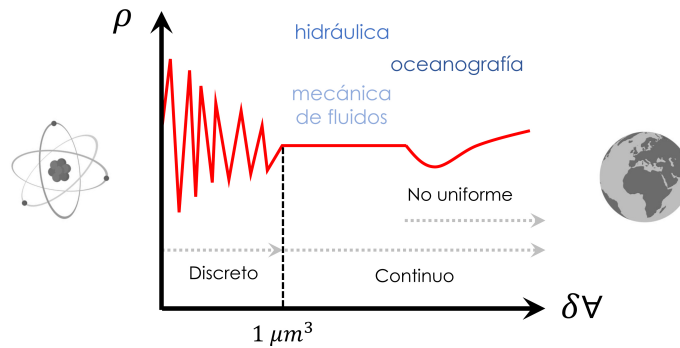


Figura 2.2.1: Diagrama que ilustra la hipótesis del continuo. Se muestra el resultado de la medición de una propiedad, como la densidad ρ , a partir de un volumen de control de volumen δV . Bajo $1 \mu m$, la medición se hace inestable por la escala molecular de la medición. A grandes tamaños, la propiedad se torna no uniforme. Esto ocurre, por ejemplo, cuando se mide la densidad del agua de mar en grandes extensiones, donde la densidad deja de ser homogénea.

espacio definido en coordenadas cartesianas por el vector posición $\mathbf{r} = \{x(t), y(t), z(t)\}$, se expresa de la siguiente manera

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + w \frac{\partial f}{\partial z}, \quad (2.2.1)$$

donde por definición $u = dx/dt$, $v = dy/dt$ y $w = dz/dt$ son las velocidades en las tres direcciones ortogonales. En términos vectoriales, esa expresión se escribe como

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla f, \quad (2.2.2)$$

donde $\mathbf{V} = (u, v, w)$ es el vector velocidad y

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (2.2.3)$$

es el gradiente. La ecuación (2.2.2) tiene profundas consecuencias en la interpretación del flujo. El lado izquierdo representa la variación total de la variable en un sistema de referencia denominado **Lagrangiano**, donde se sigue a una partícula (más formalmente a una superficie material) a lo largo de la trayectoria. El lado derecho indica que en un sistema de referencia **Euleriano**, la variación total de una función depende de cuánto cambia en el tiempo y en el espacio. El primer término en la derecha de la ecuación (2.2.2) corresponde a la **derivada local** (asociada a la variación en el tiempo) y el segundo a la **derivada advectiva** (asociada a la variación en el espacio). Cuando la derivada local es nula, decimos que el flujo es **estacionario** y si es distinta de cero, entonces el flujo es **transiente**. Cuando la derivada advectiva es nula, estamos en presencia de un flujo **uniforme** y cuando es distinta de cero, ante un flujo **variado**. En concreto, podemos encontrar los siguientes tipos de flujos

- Flujo estacionario y uniforme: $\partial f/\partial t = 0$ y $\mathbf{V} \cdot \nabla f = 0$
- Flujo transiente y uniforme: $\partial f/\partial t \neq 0$ y $\mathbf{V} \cdot \nabla f = 0$
- Flujo estacionario y variado: $\partial f/\partial t = 0$ y $\mathbf{V} \cdot \nabla f \neq 0$
- Flujo transiente y variado: $\partial f/\partial t \neq 0$ y $\mathbf{V} \cdot \nabla f \neq 0$

Por ejemplo, si la función corresponde a la velocidad, $f \equiv \mathbf{V}$, entonces

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V}, \quad (2.2.4)$$

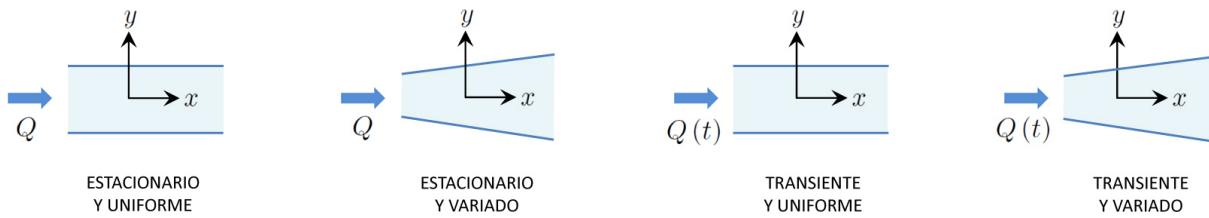


Figura 2.2.2: Ejemplo de tipos de flujo en una tubería, en función de la variación temporal y espacial. Para los casos en que el caudal de ingreso Q es constante en el tiempo, el flujo es estacionario. Cuando el caudal $Q(t)$ depende del tiempo, el flujo es transiente. Por otra parte, para secciones constantes, el flujo es uniforme y para secciones que varían en el espacio, el flujo es variado.

donde el primer término se conoce como la aceleración local y el segundo como la aceleración advectiva. La Figura 2.2.2 muestra un ejemplo de diferentes tipos de flujo en una tubería, en función de la variación temporal y espacial, para un caudal Q .

2.3. Flujos incompresible y compresible

En ingeniería costera, usualmente asumimos que el flujo es incompresible (esto es, que la densidad es constante en una parcela de fluido). En términos matemáticos esto implica que la derivada total de la densidad es nula:

$$\frac{d\rho}{dt} = 0. \tag{2.3.1}$$

En una descripción Euleriana del flujo, esta expresión se descompone como sigue

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla\rho = 0, \tag{2.3.2}$$

donde el primer término representa la variación temporal de la densidad en un punto fijo del espacio (derivada local) y el segundo término representa la variación de la densidad asociada al cambio de posición de la partícula (derivada convectiva o advectiva). Es importante notar que un **flujo incompresible** no necesariamente implica que el fluido tiene **densidad constante**. De hecho, en términos matemáticos, un flujo incompresible y ambos casos mencionados anteriormente obedecen a las siguientes expresiones:

$$\text{Flujo compresible : } \frac{d\rho}{dt} \neq 0 \tag{2.3.3}$$

$$\text{Flujo incompresible : } \frac{d\rho}{dt} = 0 \tag{2.3.4}$$

$$\text{Densidad constante : } \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0, \nabla\rho = 0 \tag{2.3.5}$$

La condición de densidad constante (en el espacio y en el tiempo) es mucho más restrictiva pues no permite trabajar con flujos estratificados. La condición de flujo incompresible, por el contrario, permite que existan partículas (en rigor, superficies materiales) de diferente densidad en el medio, pero que cada una de ellas se desplace sin cambiar de densidad. La Figura 2.3.1 presenta una analogía simple mediante globos para explicar el flujo de un fluido de densidad constante, un flujo incompresible y uno compresible.

En ingeniería oceánica usualmente utilizamos el supuesto de que el agua es incompresible, lo que implica que las variaciones de volumen son despreciables ante cambios de presión. Esto se puede demostrar a partir de la relación

$$dp = -E \frac{dV}{V}, \tag{2.3.6}$$

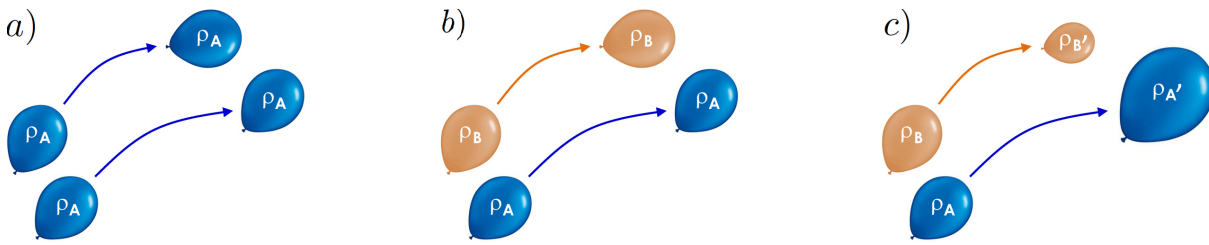


Figura 2.3.1: Una analogía simple mediante globos (en rigor superficies materiales) para explicar a) el flujo de un fluido de densidad constante, b) un flujo incompresible y c) un flujo compresible. En a) se muestran dos globos de igual masa y volumen (y por tanto igual densidad ρ_A) que se desplazan preservando su volumen y por tanto su densidad. En este caso la densidad es constante en el tiempo y en el espacio para todas las partículas. En b) se muestran dos globos de diferente masa que se desplazan cada uno manteniendo su volumen y por tanto sus densidades ρ_A y ρ_B . Este caso corresponde a un flujo incompresible donde la densidad puede ser diferente entre partículas, pero constante en su trayectoria. En c) se muestran dos globos de diferentes densidades ρ_A y ρ_B que se desplazan cambiando en volumen y por tanto su densidad, a ρ'_A y ρ'_B , lo que representa a un flujo compresible.

donde la compresibilidad del agua es $E = 22,000 \text{ [kgf/cm}^2\text{]}$. Por ejemplo, para generar una pequeña variación de $dV/V = 0,01$ en el volumen de agua, se debe imponer un incremento de presión de $dp = 220 \text{ [kgf/cm}^2\text{]}$, equivalentes a 2,200,000 [Hpa], que es bastante superior a las variaciones normales de presión atmosférica del orden de decenas de [Hpa]. En otras palabras, las variaciones normales de presión atmosférica que actúan sobre el océano son insuficientes para generar cambios en el volumen y por ende en la densidad del agua.

2.4. Principios de conservación

2.4.1. Conservación de la masa

En esta sección se introducen diferentes formas de la ecuación de conservación de la masa con supuestos cada vez más restrictivos, desde la más general para un flujo compresible y rotacional (2.4.1), hasta la más limitada para un flujo incompresible e irrotacional (2.4.22).

2.4.1.1. Flujo compresible y rotacional

En forma vectorial y diferencial, la ecuación de conservación de la masa se expresa como

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0, \tag{2.4.1}$$

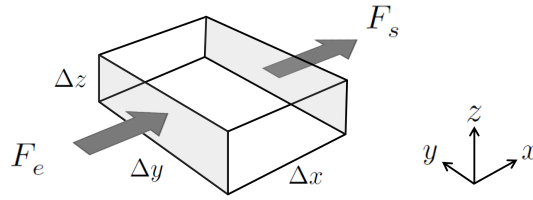
donde t es el tiempo, $\rho(\mathbf{x}, t)$ es la densidad, $\mathbf{x} = (x, y, z)$ es el vector posición, $\mathbf{V}(\mathbf{x}, t) = (u, v, w)$ es la velocidad y

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \tag{2.4.2}$$

es el gradiente en el caso de coordenadas cartesianas. Por componentes, la ecuación (2.4.1) se expresa de la siguiente manera:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) = 0, \tag{2.4.3}$$

donde la densidad y las componentes de velocidad son incógnitas. Para resolver el flujo se requieren, además, ecuaciones de momentum y una ecuación de estado para la densidad, además de condiciones iniciales y de borde.


 Figura 2.4.1: Elemento diferencial con flujos másicos en sentido x .

Sólo como complemento, la ecuación de conservación de la masa en forma integral se escribe de la siguiente forma

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} \rho d\mathcal{V} + \int_A \rho \mathbf{V} \cdot d\mathbf{A} = 0, \quad (2.4.4)$$

donde $d\mathcal{V}$ es un diferencial dentro del volumen de control y dA es un diferencial de la superficie que envuelve a dicho volumen. El término $\mathbf{V} \cdot d\mathbf{A}$ es el producto escalar entre la velocidad del flujo y el diferencial de área que cruza; representa el volumen que por unidad de tiempo cruza la superficie de control. La derivación de la expresión (1.5.1) deviene del Teorema del Transporte de Reynolds, que puede encontrarse en cualquier texto de mecánica de fluidos fundamental. Las expresiones (2.4.1) y (2.4.4) representan el mismo principio en los enfoques diferencial e integral, respectivamente. Estas expresiones no consideran fuentes o sumideros que podrían representar, por ejemplo, la precipitación o la evaporación en un sistema definido como un cuerpo de agua, en un lago. Las fuentes o sumideros se contemplan mediante términos ubicados en el lado derecho de estas ecuaciones.

Nota: Para soltar la mano y recordar ejercicios típicos de mecánica de fluidos, a continuación se deriva la ecuación (2.4.1) a modo de ejemplo. Por simplicidad, comenzaremos en una dimensión y en coordenadas cartesianas, considerando un elemento $\mathcal{V} = \Delta x \Delta y \Delta z$ a través del cual circula un flujo de agua a velocidad $u(x, t)$, según se ve en la Figura 2.4.1. El flujo másico entrando al elemento es

$$F_e = \rho u \Delta y \Delta z, \quad (2.4.5)$$

donde ρ es la densidad del medio y el subíndice e es característico de la «entrada». Dimensionalmente

$$[F_e] = [\rho u \Delta y \Delta z] = \left[\frac{M}{L^3} \cdot \frac{L}{T} \cdot L \cdot L \right] = \left[\frac{M}{T} \right], \quad (2.4.6)$$

y representa la cantidad de masa entrando por una cara del elemento por unidad de tiempo. En la expresión anterior M , L y T representan masa, longitud y tiempo, respectivamente. El flujo másico saliendo por la otra cara del elemento se puede expresar, utilizando una expansión de Taylor (sección 9.1.2), como

$$F_s = F_e + \frac{\partial F_e}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial^2 F_e}{\partial x^2} \frac{\Delta x^2}{2} + \dots + \frac{\partial^n F_e}{\partial x^n} \frac{\Delta x^n}{n!} + \mathcal{O}(\Delta x^{n+1}), \quad (2.4.7)$$

donde \mathcal{O} representan «el orden del» error de aproximación, o exactitud, de la expresión. Combinando con (2.4.5) da

$$F_s = \rho u \Delta y \Delta z + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u \Delta y \Delta z) \Delta x + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\rho u \Delta y \Delta z) \frac{\Delta x^2}{2} + \dots + \frac{\partial^n}{\partial x^n} (\rho u \Delta y \Delta z) \frac{\Delta x^n}{n!} + \mathcal{O}(\Delta x^{n+1}). \quad (2.4.8)$$

Si se asume que el volumen es constante y que u es continua, los términos de orden mayor se pueden expresar como un error de truncamiento

$$F_s = \rho u \Delta y \Delta z + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u \Delta y \Delta z) \Delta x + \mathcal{O}(\Delta x^2, \Delta y, \Delta z). \quad (2.4.9)$$

Cabe mencionar que en esta derivación no es necesario retener el tercer término pues, como se verá en adelante, desaparece al tender el volumen del elemento a cero. Una vez conocidos los flujos en ambas caras, procedemos a hacer un balance de masa

$$\frac{\partial m}{\partial t} = F_e - F_s, \quad (2.4.10)$$

donde $m = \rho \Delta x \Delta y \Delta z$ es la masa. En palabras simples, la ecuación (2.4.10) indica que la variación local de la masa es balanceada por el flujo neto en las caras. La resta de los flujos debe tener sentido en esta expresión: en caso de que el flujo entrante es mayor que el de salida, $F_e - F_s > 0$, la masa del elemento debe aumentar, esto es $\partial m / \partial t > 0$. Recurriendo a las expresiones (2.4.5) y (2.4.9) da

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \Delta x \Delta y \Delta z) = -\frac{\partial}{\partial x} (\rho u \Delta y \Delta z) \Delta x + \mathcal{O}(\Delta x^2, \Delta y, \Delta z). \quad (2.4.11)$$

Dividiendo por el volumen, $\forall = \Delta x \Delta y \Delta z$, que se asume constante, y haciendo tender las dimensiones del elemento a cero (esto es $\Delta x \rightarrow 0$) da

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho C) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) = 0. \quad (2.4.12)$$

Cabe notar que esta expresión es exacta a pesar de provenir de una aproximación de Taylor. Si repetimos el ejercicio para las restantes coordenadas, obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) = 0, \quad (2.4.13)$$

o equivalentemente

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho) + \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (\rho(u, v, w)) = 0, \quad (2.4.14)$$

expresión que en términos vectoriales equivale a la ecuación (2.4.1).

2.4.1.2. Flujo incompresible y rotacional

En un flujo incompresible se tiene

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \rho = 0, \quad (2.4.15)$$

Combinando (2.4.1) y (2.4.15) se obtiene

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \quad (2.4.16)$$

expresión que indica que la divergencia de la velocidad es cero. La divergencia de un campo vectorial como la velocidad, mide la diferencia entre el flujo entrante y el flujo saliente en una superficie que encierra un elemento diferencial. Si éste no contiene fuentes o sumideros, entonces su divergencia es cero. En coordenadas cartesianas, (2.4.16) se escribe como

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (2.4.17)$$

donde las componentes de velocidad son incógnitas, por lo que se requieren ecuaciones de momentum para resolver el flujo, además de condiciones iniciales y de borde. La densidad se asume como conocida. Esta expresión puede ser interpretada físicamente en forma simple. En la Figura 2.4.2 (izquierda) se ilustra un elemento diferencial en un sistema cartesiano con aristas Δx , Δy y Δz , junto a los flujos másicos de entrada y salida, estos últimos expresados mediante una aproximación de Taylor truncada hasta el segundo término (sección 9.1.2). La figura de la derecha muestra el flujo neto resultante para las direcciones x e y . Debido a la incompresibilidad y al supuesto de que no hay movimiento en dirección z (perpendicular a la figura), ambos flujos

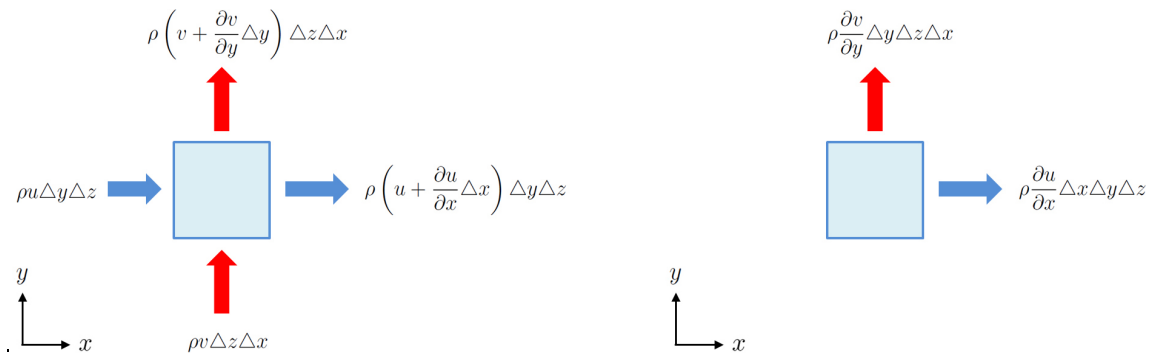


Figura 2.4.2: Diagrama para explicar la divergencia nula del campo de velocidades en un flujo incompresible. En la izquierda se ilustran los flujos de entrada y salida del elemento diferencial y a la derecha sólo se muestra el flujo neto para cada dirección.

netos deben ser iguales en magnitud y diferente signo, de modo de satisfacer la ecuación (2.4.17). En palabras simples, la cantidad de masa por unidad de tiempo que entra en el elemento diferencial es igual a la que sale.

Para un flujo incompresible, la ecuación de conservación en forma integral (2.4.4) se reduce a

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t} + \int_A \mathbf{V} \cdot d\mathbf{A} = 0. \quad (2.4.18)$$

2.4.1.3. Flujo incompresible e irrotacional

Para un flujo irrotacional, donde $\nabla \times \mathbf{V} = 0$, existe una función escalar, denominada el potencial de velocidades $\phi(x, y, z)$, tal que¹

$$\nabla \phi = \mathbf{V}. \quad (2.4.21)$$

El supuesto de incompresible e irrotacional, o **flujo potencial**, es útil pues permite la superposición de soluciones. En la realidad, el flujo potencial no existe y sólo constituye una aproximación lejos de las superficies sólidas que confinan al fluido. En estos bordes se desarrolla una capa límite, caracterizada por gradientes significativos del esfuerzo de corte y rotacionalidad en el **campo cinemático** (e.g. el campo de desplazamientos, velocidades y aceleraciones). En la capa límite, la velocidad del fluido respecto al sólido que lo confina varía desde cero en el borde (condición de no deslizamiento) hasta el 99 % de la velocidad del flujo no perturbado por el borde.

Combinando (2.4.21) y (2.4.16), se obtiene la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 \phi = 0, \quad \text{donde} \quad \nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \quad (2.4.22)$$

¹La expresión $\nabla \phi = \mathbf{V}$ se demuestra aplicando $(\nabla \times)$ a ambos lados de la misma

$$\nabla \times \nabla \phi = \nabla \times \mathbf{V}, \quad (2.4.19)$$

donde del cálculo vectorial sabemos que el rotor del gradiente de una función continua es cero (i.e., $\nabla \times \nabla \phi = 0$), dado que ambos son vectores paralelos. Matemáticamente

$$\nabla \times \nabla \phi = \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} & \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{bmatrix} = \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial y} \right) \hat{i} - \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial x} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} \right) \hat{k} = (0, 0, 0), \quad (2.4.20)$$

por lo que la expresión (2.4.19) se reduce a $\nabla \times \mathbf{V} = 0$, con lo que queda demostrado que un flujo potencial es aquel en que el rotor de la velocidad es cero y que existe una función potencial que cumple con la expresión $\nabla \phi = \mathbf{V}$.

corresponde al operador laplaciano. Esta ecuación se utiliza por ejemplo en la Teoría Lineal del Oleaje (Dean & Dalrymple, 1991) para caracterizar el campo cinemático y dinámico de ondas de pequeña amplitud. Como se muestra en la sección 5.4.1, la ecuación de Laplace tiene la ventaja, respecto de (2.4.16), de que es necesario resolver sólo para un escalar ϕ , y luego mediante (2.4.21) obtener el campo cinemático. De esta simpleza se debe que su uso sea tan difundido. Para resolver la ecuación (2.4.22), que es de carácter elíptico (Anexo 9.2), se deben incorporar condiciones de borde que responden a cada problema en particular. En coordenadas cartesianas, (2.4.22) se escribe como

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0, \quad (2.4.23)$$

Esta ecuación requiere de 6 constantes de integración (dos integraciones en cada coordenada) por lo que se deben definir 6 condiciones de borde para completar el sistema.

Finalmente, cabe mencionar que las expresiones (2.4.1), (2.4.16) y (2.4.22) y sus respectivas representaciones en cualquier sistema de coordenadas, representan el principio de conservación de la masa con supuestos cada vez más restrictivos. La ecuación (2.4.1) es la más general y no tiene restricción alguna, (2.4.16) requiere de que el fluido sea incompresible y (2.4.22) requiere de que además el flujo sea irrotacional.

2.4.2. Conservación de momentum

En esta sección se introducen diferentes formas de la ecuación de conservación del momentum con supuestos cada vez más restrictivos, desde la más general para un flujo compresible y rotacional (2.4.24), hasta la más limitada para un flujo incompresible e irrotacional (2.4.34).

2.4.2.1. Flujo compresible y rotacional

Para un fluido newtoniano y un flujo compresible, la ecuación de conservación de momentum en forma euleriana es

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{V}) + \nabla \cdot (\mathbf{V} \otimes \rho \mathbf{V}) = -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot (\mu \nabla \mathbf{V}), \quad (2.4.24)$$

donde $p(\mathbf{x}, t)$ la presión, $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$ es la aceleración de gravedad, μ es de tensor de viscosidad dinámica y el último término representa el flujo difusivo neto en un elemento diferencial, o más coloquialmente, la difusión de momentum. El producto \otimes entre vectores dado por

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{bmatrix}. \quad (2.4.25)$$

La expresión (2.4.24) consiste de tres ecuaciones escalares e introduce a la presión como nueva variable en el sistema. Para su solución se debe resolver junto con la ecuación de conservación de la masa (2.4.1) y una relación constitutiva que relacione, por ejemplo, la presión con la densidad. Para un flujo **isotrópico** (esto es, que posee las mismas propiedades físicas en todas las direcciones) y un fluido de viscosidad constante, el sistema

se escribe en coordenadas cartesianas como

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho uv) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho uw) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial z}\right), \quad (2.4.26)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho vu) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v^2) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho vw) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu \frac{\partial v}{\partial z}\right), \quad (2.4.27)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho w) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho wu) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho wv) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w^2) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial w}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial w}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu \frac{\partial w}{\partial z}\right) - \rho g. \quad (2.4.28)$$

La viscosidad dinámica en estas ecuaciones es una propiedad del fluido (no del flujo) y por ende ellas permiten resolver todas las escalas del flujo, hasta la de Kolmogorov (de orden de 0.1 a 10 mm en flujos atmosféricos), en la medida que se respete la **hipótesis del continuo**. Esta hipótesis considera que el fluido es continuo en el espacio, ignorando su estructura molecular y las discontinuidades asociadas a ésta.

En la actualidad no resulta práctico para flujos ambientales el resolver hasta la escala de Kolmogorov, razón por la cual se introducen promedios espaciales (RANS) o filtros (LES) que permiten reducir el tamaño de cálculo a costa de perder la física que ocurre a escalas inferiores al tamaño de cada grilla utilizada en la discretización de las ecuaciones diferenciales. En la sección 2.5 se demostrará que la ecuación de gobierno para un flujo turbulento tiene la misma estructura, pero la viscosidad turbulenta es propiedad del flujo (y no del fluido). Ello hace que, dependiendo de cómo se modele la viscosidad, el problema sea bastante más complejo. En la Figura 2.4.3 se muestra el uso de modelos físicos y numéricos tipo RANS y LES para el estudio de un vertedero lateral del embalse Ancoa, desarrollado por el Instituto Nacional de Hidráulica, Chile. En este caso, el modelo LES dio mejores resultados para caracterizar la descarga.

2.4.2.2. Flujo incompresible y rotacional

Para un fluido newtoniano y un flujo incompresible, la expresión (2.4.24) se puede simplificar a

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{V} \otimes \mathbf{V}) = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g} + \nabla \cdot (\nu \nabla \mathbf{V}), \quad (2.4.29)$$

donde $\nu = \mu/\rho$ es la viscosidad cinemática. Para su solución se debe resolver esta ecuación junto con la ecuación de conservación de la masa (2.4.16). A diferencia de un fluido compresible, no se requiere de una relación constitutiva que relacione, por ejemplo, la presión con la densidad. Si más aún se asume que la viscosidad es isotrópica y constante en el espacio

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{V} \otimes \mathbf{V}) = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g} + \nu \nabla^2 \mathbf{V}. \quad (2.4.30)$$

En coordenadas cartesianas la expresión (2.4.29) como

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u^2) + \frac{\partial}{\partial y}(uv) + \frac{\partial}{\partial z}(uw) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad (2.4.31)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(vu) + \frac{\partial}{\partial y}(v^2) + \frac{\partial}{\partial z}(vw) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right), \quad (2.4.32)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(wu) + \frac{\partial}{\partial y}(wv) + \frac{\partial}{\partial z}(w^2) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) - g. \quad (2.4.33)$$

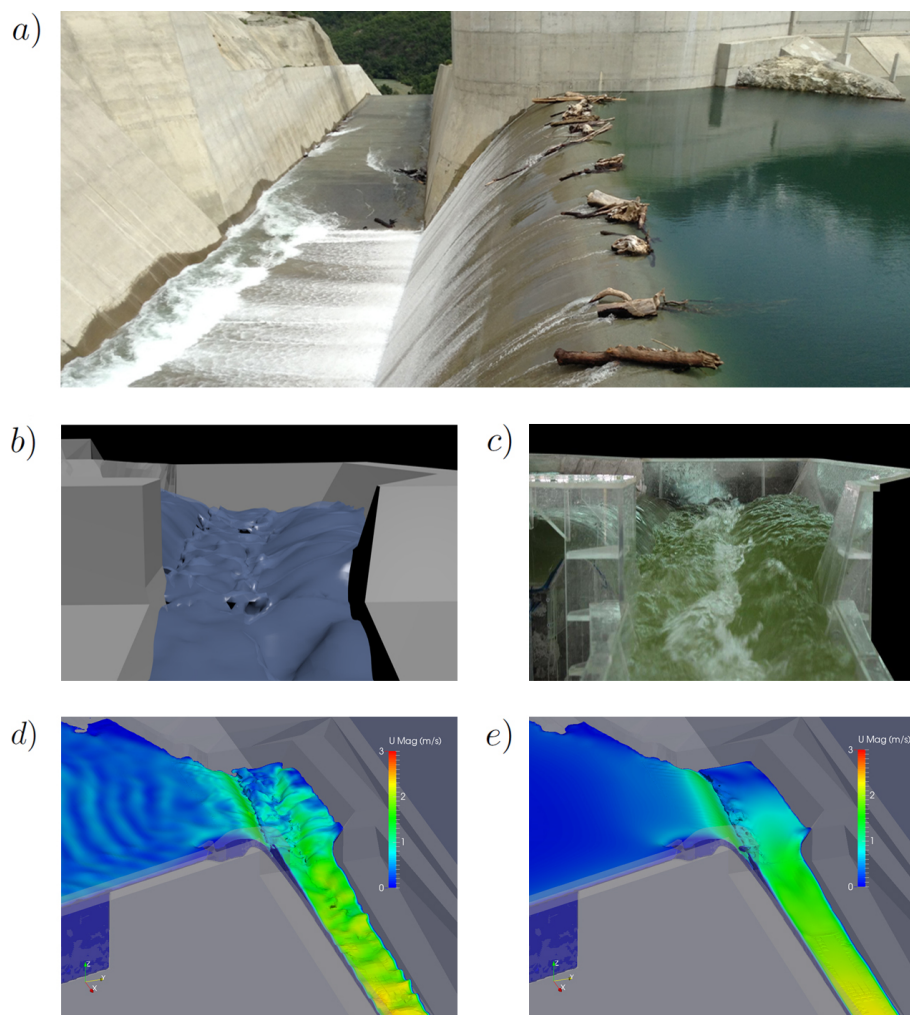


Figura 2.4.3: Aplicación de modelos físicos y numéricos para el estudio de un vertedero lateral del embalse Ancoa, desarrollado por el Instituto Nacional de Hidráulica (INH), Chile. a) Fotografía del vertedero descargando agua en exceso. b) modelo numérico desarrollado LES con Openfoam de la descarga del vertedero desde aguas abajo. c) modelo físico a escala 1:40 desde el mismo punto de vista. d) magnitud de la velocidad obtenida mediante d) un modelo LES y e) un modelo RANS. Gentileza de Karla González, Directora del INH.

2.4.2.3. Flujo incompresible e irrotacional

La ecuación de momentum para un flujo incompresible e invíscido (sin viscosidad) es

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{V} \otimes \mathbf{V}) = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g}. \quad (2.4.34)$$

Esta ecuación forma parte de las denominadas Ecuaciones de Euler. En coordenadas cartesianas y en forma conservativa, el sistema de ecuaciones es

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u^2) + \frac{\partial}{\partial y} (uv) + \frac{\partial}{\partial z} (uw) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (2.4.35)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (vu) + \frac{\partial}{\partial y} (v^2) + \frac{\partial}{\partial z} (vw) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (2.4.36)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (wu) + \frac{\partial}{\partial y} (wv) + \frac{\partial}{\partial z} (w^2) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + -g. \quad (2.4.37)$$

En un flujo incompresible, los términos advectivos pueden también escribirse en forma no conservativa, recurriendo a la ecuación de conservación de la masa. Por ejemplo, si desarrollamos la expresión correspondiente al eje x ,

$$\frac{\partial}{\partial x} (u^2) + \frac{\partial}{\partial y} (uv) + \frac{\partial}{\partial z} (uw) = u \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)}_{=0} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}. \quad (2.4.38)$$

Generalizando a tres dimensiones, se obtiene

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g}. \quad (2.4.39)$$

Este resultado puede utilizarse para escribir las ecuaciones (2.4.29), (2.4.30) y (2.4.34) en forma no conservativa. Para decidir cuál versión de las ecuaciones de momentum usar. La ecuación (2.4.24) es la más general y no tiene restricción alguna, (2.4.29) requiere de que el fluido sea incompresible y (2.4.34) requiere de que además el flujo sea irrotacional.

2.4.3. Conservación de la energía

Las ecuaciones de Euler (2.4.39) pueden integrarse en el espacio para obtener una ecuación de energía. Si se considera además que el flujo es irrotacional, entonces se introduce el potencial de velocidad

$$\nabla \phi = \mathbf{V}. \quad (2.4.40)$$

y la ecuación resultante, denominada Bernoulli para régimen transiente e irrotacional, es la siguiente

$$-\frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2g} \left[\frac{\partial \phi^2}{\partial x} + \frac{\partial \phi^2}{\partial y} + \frac{\partial \phi^2}{\partial z} \right] + \frac{p}{\gamma} + z = C(t), \quad (2.4.41)$$

que es una generalización de la reconocida ecuación de Bernoulli utilizada en mecánica de fluidos para flujo estacionario

$$\frac{u^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z = C(t). \quad (2.4.42)$$

En ambos casos, la constante de integración $C(t)$ depende del tiempo (pues la integración de (2.4.39) es en el espacio) pero es constante para todo el dominio espacial.

En general, el estudio de los fluidos comprende tanto aspectos mecánicos como térmicos. Los primeros se resuelven mediante la combinación de las ecuaciones de conservación de la masa y momentum, en tanto que los segundos requieren de la ecuación de conservación de la energía. Esta última, que forma parte integrante de las ecuaciones de Navier-Stokes, no se incluye en este documento pues es poco frecuente su uso en el modelado de procesos costeros y en la hidráulica en general. En el caso de los líquidos -salvo en casos de alta turbulencia- los aspectos térmicos suelen ser despreciados, pues siendo casi incompresibles, no absorben mucha energía por trabajo, de modo que su energía interna no cambia, a menos que se les transfiera calor intencionalmente. Una de las aplicaciones más relevantes de la ecuación de energía es la teoría lineal del oleaje (sección 5.4.1).

2.4.4. Cómo combinar las ecuaciones de gobierno

A continuación describimos los sistemas de ecuaciones de gobierno para diferentes casos.

2.4.4.1. Flujo compresible y rotacional

Las ecuaciones de gobierno para un fluido real, conocidas como las Ecuaciones de Navier-Stokes, son

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0, \quad (2.4.43)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{V}) + \nabla \cdot (\mathbf{V} \otimes \rho \mathbf{V}) = -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot (\rho \nu \nabla \mathbf{V}). \quad (2.4.44)$$

Para resolver este sistema de ecuaciones, es preciso incorporar condiciones iniciales y de borde que responden a cada problema en particular. Se debe incorporar además una fórmula complementaria (por ejemplo, una relación entre la presión y la densidad) para tener el sistema completamente determinado. Cabe notar que el término no lineal, $\nabla \cdot (\mathbf{V} \otimes \rho \mathbf{V})$, dificulta los cálculos pues genera complejas interacciones y puede inducir inestabilidades numéricas (ver sección 4.7.1).

Este sistema de ecuaciones es complejo de resolver tanto en forma analítica como numérica, por lo que usualmente recurrimos a simplificaciones. Por ejemplo, en ingeniería costera, utilizamos el supuesto de que el agua es incompresible pues las variaciones de presión atmosférica son insuficientes para generar cambios en la densidad del agua. Otro ejemplo de simplificación corresponde a las ecuaciones no lineales de onda larga, que reducen el dominio de tres dimensiones $\mathbf{x} = (x, y, z)$ a dos $\mathbf{x} = (x, y)$, usando el supuesto de que el flujo tiene una variación despreciable en la profundidad. Estas ecuaciones, utilizadas para el modelado de mareas, tsunamis y otros fenómenos cuya escala vertical es muy pequeña comparable con las escalas horizontales, son analizadas en la sección 5.

2.4.4.2. Flujo compresible e irrotacional

La forma diferencial de las ecuaciones de gobierno para un fluido ideal, conocidas como las Ecuaciones de Euler, es

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0, \quad (2.4.45)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{V}) + \nabla \cdot (\mathbf{V} \otimes \rho \mathbf{V}) = -\nabla p + \rho \mathbf{g}. \quad (2.4.46)$$

Las Ecuaciones de Euler proceden de una reducción de las Ecuaciones de Navier-Stokes despreciando términos difusivos, y por ende las derivadas parciales de orden mayor. Ello por una parte, simplifica la definición de las condiciones de borde pero impide cumplir con todas las condiciones de borde naturales, como la de no deslizamiento en la superficie de contacto con sólidos. Para muchas aplicaciones, esta condición no es relevante (por ejemplo, en la mecánica de ondas lejos del fondo), pero en otras sí (por ejemplo, en el estudio de capas límite). Como en el caso anterior, se debe incorporar además una relación entre la presión y la densidad para tener el sistema completamente determinado.

2.4.4.3. Flujo incompresible e irrotacional

En ingeniería costera usualmente consideramos flujo incompresible, por lo que las ecuaciones de gobierno se reducen a

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \quad (2.4.47)$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{V} \otimes \mathbf{V}) = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g}. \quad (2.4.48)$$

Cabe notar que esta aproximación no es adecuada para flujos estratificados. En este caso el sistema está completamente determinado pues se cuenta con cuatro ecuaciones para cuatro incógnitas (u, v, w, p).

2.5. Flujo en régimen turbulento

Un flujo turbulento corresponde al movimiento caótico de un fluido en el que las partículas se mueven desordenadamente y sus trayectorias se pueden predecir sólo hasta una cierta escala. Para establecer si un flujo es laminar, de transición o turbulento, se recurre al número de Reynolds (Reynolds, 1883), definido como

$$Re = \frac{\rho U l}{\mu} = \frac{U l}{\nu}, \quad (2.5.1)$$

donde ρ es la densidad, μ la viscosidad dinámica, ν la viscosidad cinemática, U la velocidad y l una dimensión típica de un flujo. El número de Reynolds representa el cociente entre las fuerzas inerciales y las fuerzas viscosas. Así, la condición de régimen turbulento se da para Re altos que ocurren cuando las fuerzas inerciales dominan por sobre las fuerzas viscosas. En contraste, un régimen laminar se da cuando las fuerzas viscosas son superiores a las inerciales. La definición de umbrales sobre los cuales el régimen se torna turbulento dependen del fenómeno físico a estudiar. Por ejemplo, para tuberías de sección circular, el flujo es laminar para $Re < 2100$ y turbulento para $Re > 10000$.

La Figura 2.5.1 muestra dos ejemplos de flujos turbulentos en la naturaleza, con niveles de turbulencia muy distintos. La imagen *a*) muestra una ola en fase de rompimiento, donde se observan niveles de turbulencia muy distintos. El flujo es altamente turbulento en la cresta de la ola, donde incluso hay incorporación de aire. En contraste, el flujo es menos turbulento en sectores donde no hay rotura. La imagen *b*) muestra la erupción del volcán Calbuco el 22 de abril de 2015, en el sur de Chile. Se observa la columna de humo con un flujo preferentemente vertical en un inicio, dominada por la boyantes y la velocidad con que sale despedida la descarga desde el cráter. Una vez que la densidad de la pluma se equipara con la de la atmósfera, comienza a derivar con los vientos. Una analogía directa de este fenómeno es el de la descarga de aguas servidas mediante emisarios submarinos, que se describe en la sección 3.7.4. Antes de comenzar con la derivación de las ecuaciones para flujo turbulento, recomiendo revisar un video sobre turbulencia disponible en la serie *Illustrated Experiments in Fluid Mechanics*, en *The NCFMF Book of Film Notes* (Shapiro, 1961b).

Para la derivación de las ecuaciones de un flujo en régimen turbulento, se recurre a la descomposición de Reynolds (Reynolds, 1895), que es una técnica estadística para separar el promedio de las fluctuaciones de una cantidad. La descomposición de una función $f(x, t)$ es

$$f(x, t) = \bar{f}(x) + f'(x, t), \quad (2.5.2)$$

donde la media temporal se define como

$$\bar{f}(x) = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f(x, t) dt, \quad (2.5.3)$$

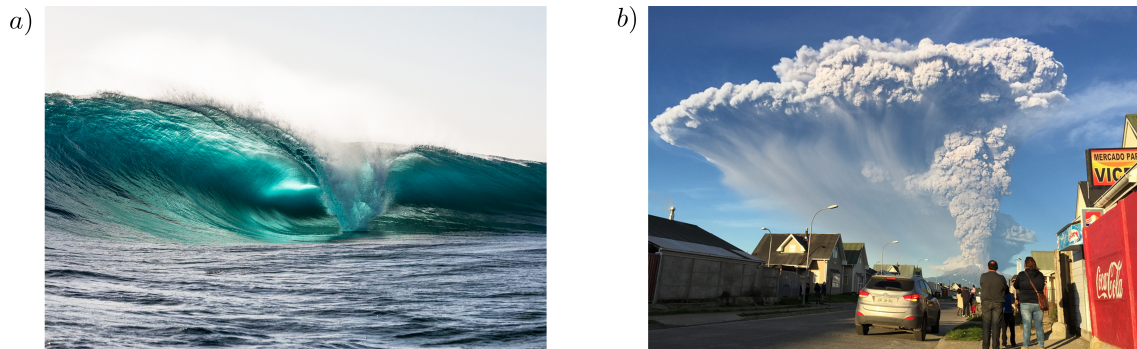


Figura 2.5.1: Ejemplos de flujos turbulentos en la naturaleza. *a*) Imagen de una ola en fase de rompimiento y *b*) la erupción del volcán Calbuco el 22 de abril de 2015, en el sur de Chile.

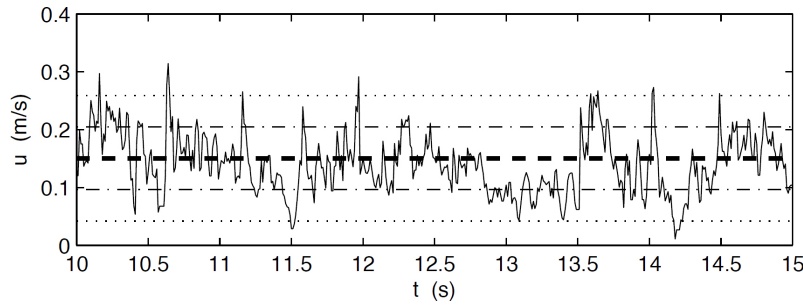


Figura 2.5.2: Registro de velocidad obtenido mediante un velocímetro Doppler. La línea continua representa las mediciones discretas de velocidad, en tanto que la línea gruesa segmentada corresponde al valor medio. Las líneas con segmentos y puntos corresponde a la media \pm una desviación estándar y las líneas punteadas representan a la media \pm dos desviaciones estándar (Adaptado de notas de Edwin «Todd» Cowen, Cornell University)

donde T es el intervalo de tiempo de la integración, que debe ser superior a la escala de tiempo típica de las fluctuaciones, y $f'(x, t)$ es la fluctuación respecto de la media. Esta descomposición se puede ilustrar en la Figura 2.5.2, donde se muestra un registro de velocidad obtenido mediante un velocímetro Doppler. La velocidad media en el tiempo de medición es de $\bar{u} = 0,1502 \text{ m/s}$ y el valor medio cuadrático RMS (*Root Mean Square*) de

$$u_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (u'_i)^2} = 0,0029 \text{ m}^2/\text{s}^2,$$

donde n es el número de mediciones, se utiliza para reportar la intensidad de la turbulencia para esta componente de velocidad. Notar que una medición alternativa del nivel de turbulencia corresponde al número de Reynolds.

Introduzcamos ahora una serie de relaciones de la media temporal, que permitirán desarrollar las ecuaciones para flujo turbulento, o RANS (*Reynolds Averaged Navier-Stokes equations*). A partir de la definición (2.5.3), se pueden demostrar las expresiones

$$\overline{f'} = 0, \quad \overline{\bar{f}} = \bar{f}, \quad \overline{f'f'} = 0 \quad \text{y} \quad \overline{f'f'} \neq 0. \quad (2.5.4)$$

Queda en tus manos demostrar estas relaciones. También se puede demostrar que, si los límites de integración en la ecuación (2.5.3) son fijos, la regla de Leibniz (9.1.1) implica que

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} \frac{\partial f}{\partial x} dt = \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f dt \quad \Rightarrow \quad \frac{\overline{\partial f}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial x}. \quad (2.5.5)$$

Ahora, apliquemos la descomposición de Reynolds a la velocidad y presión

$$\mathbf{V}(x, t) = \overline{\mathbf{V}}(x) + \mathbf{V}'(x, t), \quad p(x, t) = \bar{p}(x) + p'(x, t). \quad (2.5.6)$$

Desafortunadamente, esta descomposición incrementa de 4 incógnitas (u, v, w, p) a 8 incógnitas ($\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{p}, u', v', w', p'$), que son más que las 4 ecuaciones de Navier-Stokes para caracterizar la conservación de la masa y momentum en tres dimensiones. Con ello, el problema queda indeterminado y requerirá de modelar (no resolver) los términos asociados a las fluctuaciones. Para ilustrar el procedimiento de derivación de las RANS en forma simplificada, partamos de las ecuaciones de Navier-Stokes para un flujo incompresible, en dos dimensiones (el procedimiento

es análogo en tres dimensiones),

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (2.5.7)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u^2) + \frac{\partial}{\partial z} (uw) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial z} \right), \quad (2.5.8)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (wu) + \frac{\partial}{\partial z} (w^2) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial w}{\partial z} \right) - g. \quad (2.5.9)$$

Introduciendo (2.5.6), aplicando el promedio temporal a las ecuaciones y usando las expresiones (2.5.4) y (2.5.5) llegamos a

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0, \quad (2.5.10)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\bar{u}^2) + \frac{\partial}{\partial z} (\bar{u}\bar{w}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial x} (\overline{u'u'}) - \frac{\partial}{\partial z} (\overline{u'w'}), \quad (2.5.11)$$

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\bar{w}\bar{u}) + \frac{\partial}{\partial z} (\bar{w}^2) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial x} (\overline{w'u'}) - \frac{\partial}{\partial z} (\overline{w'w'}) - g. \quad (2.5.12)$$

Este sistema tiene la misma estructura que las ecuaciones de Navier-Stokes, pero tiene nuevos términos que aparecen de los términos advectivos en las ecuaciones de momentum. Estos términos se denominan esfuerzos de Reynolds y se deben a las fluctuaciones asociadas a la turbulencia. Estos términos deben ser modelados para permitir que el sistema tenga solución. La solución más sencilla es expresarlos en términos de los valores medios e introducir la viscosidad turbulenta ν^e , denominada también viscosidad de remolino o viscosidad de eddy. Bajo esta aproximación, se modelan los esfuerzos de Reynolds de manera análoga a los esfuerzos viscosos, siguiendo la ley de viscosidad de Newton. Si se considera que la viscosidad es isotrópica, los términos de la ecuación de momento se modelan como

$$-\overline{u'u'} = \nu^e \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}, \quad -\overline{u'w'} = \nu^e \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}, \quad -\overline{w'u'} = \nu^e \frac{\partial \bar{w}}{\partial x}, \quad -\overline{w'w'} = \nu^e \frac{\partial \bar{w}}{\partial z}, \quad (2.5.13)$$

donde la viscosidad turbulenta se puede pensar como una medida de la resistencia al flujo debida a la turbulencia y es mucho mayor que la viscosidad molecular, i.e. $\nu \ll \nu^e$. Cabe notar que, a diferencia de la viscosidad molecular, la viscosidad turbulenta es propiedad del flujo y por tanto no se conoce *a priori*. Con las expresiones en (2.5.13), el sistema de ecuaciones (2.5.10) a (2.5.12) queda como

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0, \quad (2.5.14)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\bar{u}^2) + \frac{\partial}{\partial z} (\bar{u}\bar{w}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu^e \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu^e \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right), \quad (2.5.15)$$

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\bar{w}\bar{u}) + \frac{\partial}{\partial z} (\bar{w}^2) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu^e \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu^e \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right) - g. \quad (2.5.16)$$

En términos vectoriales, las expresiones resultantes, o RANS, son:

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{V}} = 0, \quad (2.5.17)$$

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{V}}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\mathbf{V}} \otimes \bar{\mathbf{V}}) = -\frac{1}{\rho} \nabla \bar{p} + \mathbf{g} + \nabla \cdot (\nu^e \nabla \bar{\mathbf{V}}). \quad (2.5.18)$$

donde la barra representa las propiedades medias. Estas ecuaciones no dan información sobre las fluctuaciones turbulentas. Cabe mencionar que las RANS, (2.5.17) y (2.5.18), tienen la misma estructura que las ecuaciones de Navier-Stokes, (2.4.16) y (2.4.29), pero resuelven variables distintas. Las primeras están expresadas en términos de la velocidad y presión media, en tanto que las segundas contienen la velocidad y presión instantánea del flujo.

¿Qué consecuencias tiene esto en el modelado?

Los procesos viscosos ocurren a escalas espaciales muy pequeñas, lo que implica en términos de modelado, que las ecuaciones de Navier-Stokes requieren de una malla espacial con intervalos comparables a la escala de Kolmogorov. Esta escala es la escala más pequeña bajo la cual la viscosidad domina por sobre la inercia. La técnica de resolver las ecuaciones de Navier-Stokes con este tipo de escalas se denomina *Direct Numerical Simulation* (DNS) y es aplicable, con los recursos computacionales actuales a dominios pequeños, del orden de decímetros de arista. Su tremenda ventaja es que no requieren de modelar la turbulencia, sino que se resuelve en forma exacta (dadas las limitaciones propias de las ecuaciones de Navier-Stokes). En el mundo de la mecánica de fluidos ambiental -donde las escalas espaciales son mucho más grandes- se hace impracticable el uso de DNS y es ahí donde las RANS, u otras técnicas como *Large Eddy Simulation* (LES) entran en el juego. Las RANS requieren del modelado de la viscosidad turbulenta, en tanto que las LES obedecen a un filtrado de las fluctuaciones turbulentas más pequeñas. En otras palabras, ni las RANS ni las LES son exactas. En el mundo de la ingeniería oceánica, las RANS permiten modelar detalladamente los procesos involucrados en la transformación del oleaje antes y durante la rotura (Pedrozo y Torres, 2011) pero distan de caracterizar en forma exacta el flujo.

Capítulo 3

Modelado de procesos de mezcla

En esta parte se introducen los procesos físicos de advección, difusión, reacción y dispersión, que en conjunto generan mezcla de dos sustancias. Existen otros procesos que pueden ser modelados mediante ecuaciones de reacción (e.g. evaporación, biodegradación, fotooxidación y sedimentación), otros que definen el medio en el cual se produce la mezcla (e.g. estratificación) y algunos representan la forma en que se produce la mezcla (e.g. floculación, emulsificación o la disolución) que aparecen en problemas específicos no cubiertos en el texto. Los aspectos teóricos de este capítulo pueden complementarse con el texto de Fischer et al. (1979) en tanto que los conceptos de modelado numérico de descargas pueden complementarse con el de Wood & Wilkinson (1993).

Los procesos de mezcla en ingeniería oceánica (Figura 3.0.1) se observan en:

- Vertidos de aguas servidas mediante emisarios submarinos
- Vertidos de agua caliente proveniente de sistemas de refrigeración de plantas industriales y termoeléctricas
- Vertidos de agua fría proveniente de sistemas de regasificación
- Vertidos de salmuera proveniente de plantas desaladoras
- Vertidos de residuos industriales líquidos (RILes)
- Vertidos de material de dragado
- Relaves mineros
- Derrames de petróleo
- Descargas de ríos al mar conteniendo sedimento en suspensión, fertilizantes, etc.
- Procesos de mezcla de agua dulce y salada, típicos de fiordos y estuarios

Cabe mencionar que los procesos de mezcla ocurren también en la atmósfera y en sistemas a presión, entre otros, por lo que las ecuaciones de gobierno que se derivan son aplicables también a otros campos. Recomiendo tener el texto Fischer et al. (1979) en la cabecera de tu biblioteca, pues provee un buen marco teórico a los procesos de mezcla en estuarios y ríos.

Por simplicidad y salvo excepciones, las expresiones se derivan en una dimensión espacial bajo un esquema Euleriano. Definiremos al «agente», como una sustancia, constituyente o contaminante que se vierte en un fluido, denominado «medio». En los procesos de mezcla en medios acuáticos, el medio es agua dulce o salada. La concentración de un agente C , que depende del tiempo y del espacio, puede definirse de diversas formas. Aquí van algunos ejemplos:

$$C \equiv \frac{m_{agente}}{m_{medio}}, \quad C \equiv \frac{\forall_{agente}}{\forall_{medio}} \quad \text{o} \quad C \equiv \frac{m_{agente}}{\forall_{medio}}, \quad (3.0.1)$$

donde m representa la masa y \forall volumen. Las dos primeras definiciones son adimensionales y la tercera tiene unidades de masa por volumen. Existen otras medidas de concentración que se utilizan cuando las concentraciones son muy bajas, entre las que destacan los ppm, ppb y ppt para indicar partes por millón, billón y trillón, respectivamente. Por ejemplo y a propósito del cambio climático, la concentración de CO_2 en la atmósfera recientemente excedió la barrera de los 400 ppm, por primera vez desde hace 3 millones de años!. Para facilitar la derivación definiremos en forma arbitraria, la concentración como adimensional.

3.1. Advección

La advección es un proceso de transporte de una sustancia o de una propiedad (calor, humedad, salinidad, momentum, energía, entre otros) por efecto del flujo. En ingeniería oceánica, estos flujos pueden asociarse al viento, al oleaje o a las corrientes marinas.

3.1.1. Derivación

Para derivar la ecuación fundamental (en una dimensión y en coordenadas cartesianas), consideremos un elemento de volumen $\forall = \Delta x \Delta y \Delta z$ a través del cual circula un flujo de agua a velocidad $u(x, t)$, según se ve en la Figura 3.1.1. Si la masa del agente es pequeña en comparación con la masa de agua¹, podemos expresar el flujo advectivo del agente entrando al elemento como

$$F_e^A = \rho u C \Delta y \Delta z, \quad (3.1.1)$$

donde ρ es la densidad del medio, C es la concentración del agente, definida en forma adimensional. El superíndice A simboliza el flujo «advectivo» y el subíndice e es característico de la «entrada» del volumen de control. Dimensionalmente

$$[F_e^A] = [\rho u C \Delta y \Delta z] = \left[\frac{M}{L^3} \cdot \frac{L}{T} \cdot 1 \cdot L \cdot L \right] = \left[\frac{M}{T} \right], \quad (3.1.2)$$

y representa la cantidad de masa entrando por una cara del elemento por unidad de tiempo. En la expresión anterior M , L y T representan masa, longitud y tiempo, respectivamente. El flujo advectivo saliendo por la otra cara del elemento se expresa, utilizando una expansión de Taylor (sección 9.1.2), como

$$F_s^A = F_e^A + \frac{\partial F_e^A}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial^2 F_e^A}{\partial x^2} \frac{\Delta x^2}{2} + \dots + \frac{\partial^n F_e^A}{\partial x^n} \frac{\Delta x^n}{n!} + \mathcal{O}(\Delta x^{n+1}), \quad (3.1.3)$$

¹Para mezclas donde el agente tiene concentraciones altas, esta aproximación no es adecuada. Existen diversas aproximaciones matemáticas para abordar este tipo de problemas, cuya selección dependerá de las propiedades de la mezcla (homogénea, heterogénea, agente granular en medio fluido, etc.) y del grado de precisión que se busque en la solución.

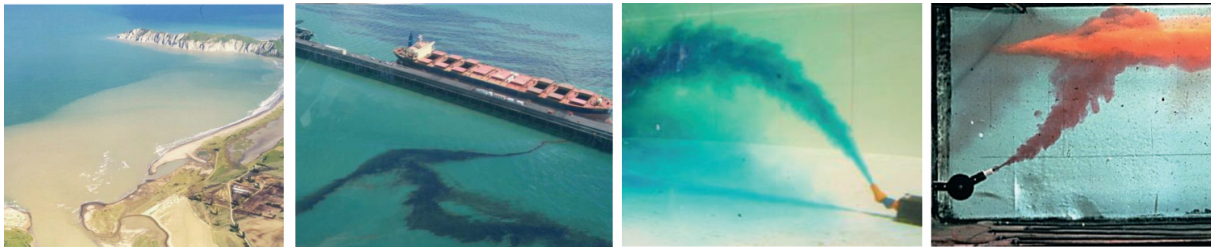


Figura 3.0.1: Ejemplos de procesos de mezcla. De izquierda a derecha: la pluma de sedimentos en suspensión proveniente de un río; un derrame de petróleo; la descarga de una pluma de boyantes negativa (e.g. salmuera proveniente de una planta desaladora) y la descarga de una pluma de boyantes positiva (e.g. aguas servidas provenientes de un emisario submarino).

donde \mathcal{O} representan «el orden del» error de aproximación, o exactitud, de la expresión. Combinando con (3.1.1) da

$$F_s^A = \rho u C \Delta y \Delta z + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u C \Delta y \Delta z) \Delta x + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\rho u C \Delta y \Delta z) \frac{\Delta x^2}{2} + \dots + \frac{\partial^n}{\partial x^n} (\rho u C \Delta y \Delta z) \frac{\Delta x^n}{n!} + \mathcal{O}(\Delta x^{n+1}). \quad (3.1.4)$$

Si se asume que el volumen del elemento es constante y que las funciones u y C son continuas, los términos de orden mayor se pueden expresar como un error de truncamiento

$$F_s^A = \rho u C \Delta y \Delta z + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u C \Delta y \Delta z) \Delta x + \mathcal{O}(\Delta x^2, \Delta y, \Delta z). \quad (3.1.5)$$

Cabe mencionar que en esta derivación no es necesario retener el tercer término pues, como se verá en adelante, desaparece al tender el volumen del elemento a cero. Una vez conocidos los flujos en ambas caras, procedemos a hacer un balance de masa del agente en el elemento

$$\frac{\partial m}{\partial t} = F_e^A - F_s^A, \quad (3.1.6)$$

donde $m = \rho C \Delta x \Delta y \Delta z$ es la masa del agente en el elemento. En palabras simples, la ecuación (3.1.6) indica que la variación local de la masa del agente en el elemento es balanceada por el flujo neto en las caras. La resta de los flujos debe tener sentido en esta expresión: en caso de que el flujo entrante es mayor que el de salida, $F_e^A - F_s^A > 0$, la masa del agente en el elemento debe aumentar, esto es $\partial m / \partial t > 0$. Recurriendo a las expresiones (3.1.1) y (3.1.5) da

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho C \Delta x \Delta y \Delta z) = - \frac{\partial}{\partial x} (\rho u C \Delta y \Delta z) \Delta x + \mathcal{O}(\Delta x^2, \Delta y, \Delta z). \quad (3.1.7)$$

Dividiendo por el volumen $\forall = \Delta x \Delta y \Delta z$, que se asume constante, y haciendo tender el elemento a cero (esto es $\Delta x \rightarrow 0$) da

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho C) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u C) = 0. \quad (3.1.8)$$

Cabe notar que en el límite cuando el elemento es infinitesimal, esta expresión es exacta a pesar de provenir de una aproximación de Taylor. Esta expresión se puede extender fácilmente a tres dimensiones considerando flujos en las otras caras del elemento. La **ecuación de advección para un flujo compresible** es

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho C) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V} C) = 0, \quad (3.1.9)$$

donde, en coordenadas cartesianas, $C(x, y, z)$ representa la concentración en el espacio tridimensional y $\mathbf{V}(x, y, z) = (u, v, w)$ corresponde al vector velocidad. Volvamos ahora a una dimensión y asumamos que la densidad del agua es constante. En términos matemáticos este supuesto implica que la derivada material de la densidad es cero (ver ecuación 2.4.15)

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0. \quad (3.1.10)$$

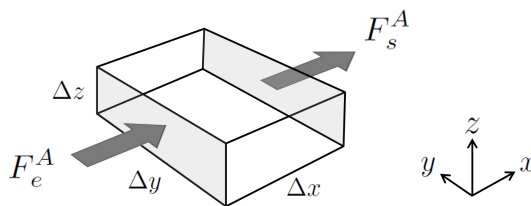


Figura 3.1.1: Elemento diferencial con flujos advectivos en sentido x .

Al combinar esta expresión con (3.1.8) y expandir cada término usando la regla del producto, se obtiene

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (uC) = 0. \quad (3.1.11)$$

Físicamente esta expresión sugiere que la masa de una sustancia en el volumen de control es balanceada por el flujo advectivo neto de dicha sustancia en los contornos del mismo. La **ecuación de advección para un flujo incompresible, en forma conservativa** se generaliza a un flujo tridimensional mediante la expresión

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{V}C) = 0. \quad (3.1.12)$$

En coordenadas cartesianas esta expresión es

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (uC) + \frac{\partial}{\partial y} (vC) + \frac{\partial}{\partial z} (wC) = 0. \quad (3.1.13)$$

La ecuación (3.1.13) se puede combinar con la ecuación de conservación de la masa

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} + w \frac{\partial C}{\partial z} + C \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 \quad (3.1.14)$$

donde el término entre paréntesis, $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$ para un flujo incompresible. En este caso, la expresión (3.1.12) se traduce en la **ecuación de advección para un flujo incompresible en forma no conservativa**

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla C = 0. \quad (3.1.15)$$

Cabe notar que la expresión (3.1.12) está escrita en forma **conservativa** y la expresión (3.1.15) en forma **no conservativa** pero en ambas expresiones se conserva la masa. Ambas formas son equivalentes para soluciones suaves pero la segunda responde al supuesto adicional de incompresibilidad. Para soluciones con cambios bruscos, denominados *shocks*, solo la solución conservativa da buenos resultados. Para lectores avanzados, sugiero visitar el capítulo 12 de Leveque (1992).

3.1.2. Solución analítica

La ecuación de advección tiene soluciones analíticas para geometrías, condiciones iniciales y de borde muy simples. En procesos de mezcla que se dan en fluidos reales, el medio se caracteriza por presentar una batimetría irregular, condiciones iniciales y condiciones de borde complejas y desconocidas, por lo que este tipo de soluciones analíticas no es aplicable. No obstante, una solución analítica es útil para evaluar la calidad de los algoritmos, lo que se hace comparando la solución numérica con la solución analítica, la que es exacta. Por ejemplo, la ecuación de advección en una dimensión para una velocidad constante

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} = 0, \quad (3.1.16)$$

tiene una solución del tipo

$$C = f(x \pm ct), \quad \text{con} \quad g(x, t) = x \pm ct, \quad (3.1.17)$$

donde $f(x, t)$ es una función arbitraria pero positiva, pues la concentración debe ser positiva. Si reemplazamos esta solución en la ecuación de advección obtenemos las expresiones

$$\frac{\partial f}{\partial g} \frac{\partial g}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial g} \frac{\partial g}{\partial x} = 0, \quad \text{y} \quad \pm c \frac{\partial f}{\partial g} + u \frac{\partial f}{\partial g} = 0, \quad (3.1.18)$$

con lo que se obtiene que $u = \mp c$. Esta ecuación implica que un contaminante con concentración de forma arbitraria se desplaza con la velocidad del flujo sin cambiar dicha forma, según se observa en la Figura 3.1.2. El desplazamiento será en sentido positivo o negativo, dependiendo del signo de la fase en la solución.

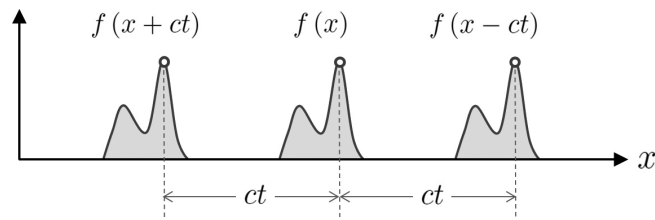


Figura 3.1.2: Solución de la ecuación de advección para un agente con concentración inicial $f(x)$.

3.2. Difusión molecular

La difusión molecular se asocia al movimiento térmico de las partículas de un fluido (líquido o gas) a temperaturas por encima del cero absoluto. En forma empírica, e incluso intuitiva, se sabe que flujo neto de moléculas ocurre de una región de mayor concentración a una de menor concentración. Este flujo puede modelarse a través de la Ley de Fick, llamada así en honor Adolf Fick (1829-1901), que establece que el flujo difusivo por unidad de área de un agente en un fluido es

$$\mathbf{F}_{masa} = -\rho D \nabla C \quad (3.2.1)$$

siendo ρ la densidad del medio y D el coeficiente de difusión (también llamado difusividad) del agente de concentración C . Nota que es una ecuación vectorial -es decir, el flujo difusivo tiene magnitud, dirección y sentido- por lo que el signo menos indica que el agente se movilará en el sentido opuesto del gradiente de concentración. El coeficiente de difusión representa la facilidad con que el agente se mueve en el fluido y depende, entre otras variables, de la viscosidad y la temperatura tanto del agente como del medio, siendo independiente (en este modelo) de la concentración. En este sentido, es correcto decir por ejemplo, que «el coeficiente de difusión de la anilina en el agua es...» e incorrecto «el coeficiente de difusión de la anilina es...», pues ambas sustancias juegan un rol importante en la difusión. En el caso particular del calor, la ley de Fick se conoce como ley de Fourier y se escribe como

$$\mathbf{F}_{calor} = -k \nabla T$$

siendo k la conductividad térmica y T la temperatura. Esta expresión implica que el flujo de calor se transmite desde regiones de mayor a menor temperatura. Si te interesa saber cómo se gestaron estas leyes y las divergencias históricas de la ciencia de entonces, te invito a leer el paper «The dichotomous history of diffusion» (Narasimhan, 2009) o a estudiar el movimiento browniano -movimiento aleatorio de las partículas que se hallan en un medio fluido- que obedece a la ecuación de difusión.

Existe una muy buena analogía para explicar la difusión, y se basa en el formalismo matemático del random walk, que está descrito claramente en Fischer et al. (1979). Esta analogía dice que la trayectoria de una partícula consiste en una sucesión de pasos aleatorios que obedecen a alguna distribución de probabilidad; la probabilidad del salto a la ubicación más cercana es independiente de la dirección o sentido. En la Figura 3.2.1 se muestra un experimento en el que se ilustra el proceso de difusión de la masa de un conjunto de personas, basado en el concepto del random walk. El experimento inicia con el grupo alineado en una fila. En cada paso de tiempo, el estudiante tiene que escoger en forma aleatoria si desplazarse a la derecha, a la izquierda o permanecer en el sitio. La elección se puede hacer con una aplicación en el celular que genere números aleatorios entre 1 y 3 (siendo 1: desplazarse a la izquierda, 2: mantenerse en el sitio y 3: desplazarse a la derecha). Cada persona entonces sigue una trayectoria aleatoria (random walk) y en su conjunto presenciamos un proceso de difusión de masa (cuantificada mediante la cantidad de personas por ubicación). En la medida que pasa el tiempo, la masa total del conjunto de personas se distribuye en el espacio, lo que implica que el proceso de difusión es conservativo. Luego se puede procesar la información y graficar la distribución espacial de masa en el tiempo. Si el ejercicio se desarrolla con más estudiantes, las curvas tienden a una distribución gaussiana. Para obligarte a entender el experimento, he deliberadamente incluido errores en las cantidades. Anímate a hacerlo con tus

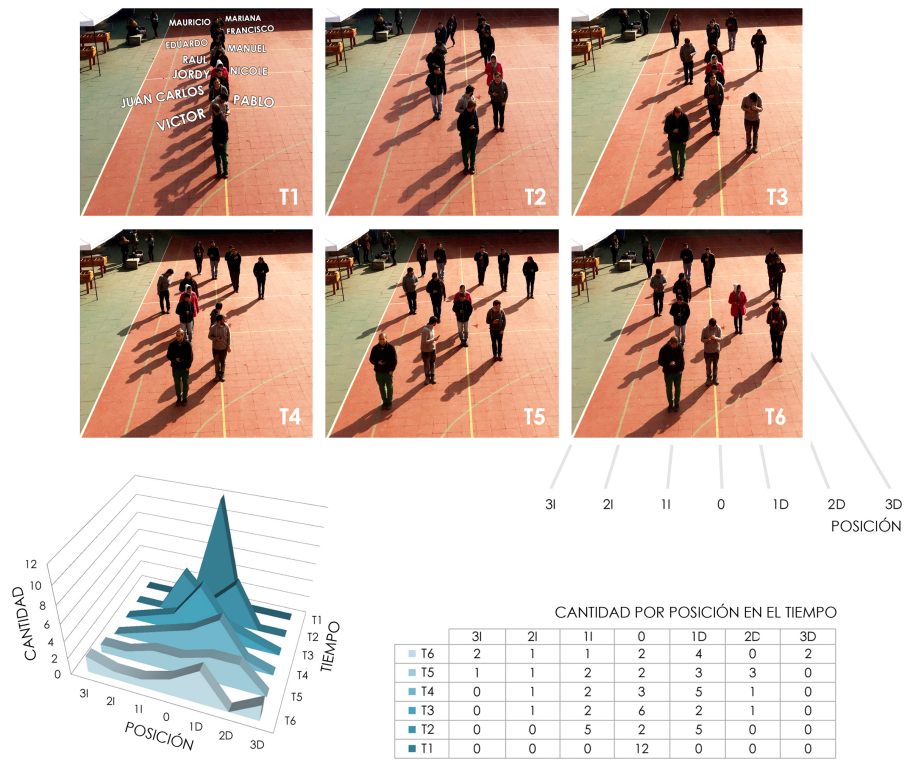


Figura 3.2.1: Experimento ilustrando el proceso de difusión de la masa de un conjunto de estudiantes de Ingeniería Civil Oceánica, en la Universidad de Valparaíso. Si el ejercicio se desarrolla con más estudiantes, las curvas tienden a una distribución gaussiana.

compañeros!

3.2.1. Derivación

Para un volumen de control ubicado en un flujo unidimensional, de sección transversal $\Delta y \Delta z$, a través del cual circulan un flujo que transporta a un agente con concentración $C(x, t)$, el flujo difusivo entrando sobre una cara de un elemento diferencial es

$$F_e^D = -\rho D_x \frac{\partial C}{\partial x} \Delta y \Delta z, \tag{3.2.2}$$

donde ρ es la densidad del medio y D_x es el coeficiente de difusión en sentido x . La Figura 3.2.2 ilustra el esquema de flujos difusivos en un elemento diferencial. Nota que el flujo difusivo tiene signo contrario al flujo

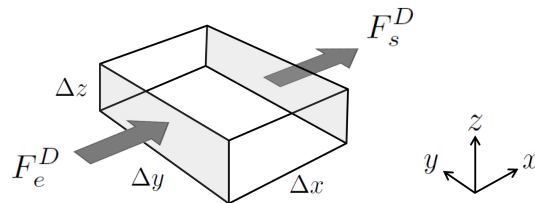


Figura 3.2.2: Elemento diferencial con flujos difusivos en sentido x .

advectivo, dado por (3.1.1), y no requiere de que el medio esté en movimiento para que se desarrolle. Podemos

expresar el flujo difusivo saliendo sobre la otra cara del elemento utilizando una expansión de Taylor

$$F_s^D = -\rho D_x \frac{\partial C}{\partial x} \Delta y \Delta z - \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho D_x \frac{\partial C}{\partial x} \Delta y \Delta z \right) \Delta x + \mathcal{O}(\Delta x^2, \Delta y, \Delta z), \quad (3.2.3)$$

donde hemos considerado que la función C son continuas. El balance de masa del agente en el elemento de masa $m = c \Delta x \Delta y \Delta z$ tiene la siguiente expresión

$$\frac{\partial m}{\partial t} = F_e^D - F_s^D. \quad (3.2.4)$$

Combinando esta expresión con (3.2.2) y (3.2.3)

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho C \Delta x \Delta y \Delta z) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho D_x \frac{dC}{dx} \Delta y \Delta z \right) \Delta x + \mathcal{O}(\Delta x^2, \Delta y, \Delta z) \quad (3.2.5)$$

y, asumiendo que el elemento es fijo, dividimos por el volumen y hacemos tender el elemento a cero para obtener la expresión

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho C) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho D_x \frac{\partial C}{\partial x} \right), \quad (3.2.6)$$

que es exacta. En caso de que el agente esté distribuido homogéneamente en el medio (esto es, que el gradiente de la concentración sea nulo) no implica que las moléculas de agente permanezcan estáticas, sino que están en movimiento pero el flujo difusivo neto es cero. Esta expresión se generaliza a un flujo tridimensional dado, en coordenadas cartesianas, por la concentración $C(x, y, z)$ y la velocidad $\mathbf{V}(x, y, z) = (u, v, w)$ como sigue:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho C) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho D_x \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho D_y \frac{\partial C}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho D_z \frac{\partial C}{\partial z} \right), \quad (3.2.7)$$

ecuación que establece que la masa de una sustancia en un volumen de control es balanceada por el flujo neto de dicha sustancia en los contornos del mismo. En términos vectoriales, la **ecuación de difusión para un flujo compresible** es

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho C) = \nabla \cdot (\rho \mathbf{D} (\nabla C)^T), \quad (3.2.8)$$

donde

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_x & 0 & 0 \\ 0 & D_y & 0 \\ 0 & 0 & D_z \end{bmatrix}$$

representa un coeficiente de difusión es anisotrópico. Las sustancias isotrópicas presentan igual comportamiento independientemente de la dirección, mientras que en las sustancias anisotrópicas las propiedades varían dependiendo de la dirección.

En esta expresión, el término de la izquierda representa la variación temporal de masa del agente en un punto y el de la derecha, el flujo neto difusivo en el mismo punto. Cabe mencionar que -al igual que en la advección- la difusión es un fenómeno conservativo, es decir, que la masa total del sistema se conserva. A diferencia de la advección (que transporta una pluma de contaminante sin deformación), la difusión tiende a deformarla en función de los gradientes de concentración, suavizando las formas en la medida que actúa. Si consideramos que la densidad no varía en el tiempo y en el espacio, obtenemos la **ecuación de difusión para una densidad constante** (que como comentamos en la sección 2.3, no corresponde a flujo incompresible)

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \nabla \cdot (\mathbf{D} \nabla C), \quad (3.2.9)$$

La ecuación de difusión se puede simplificar. Por ejemplo, si el coeficiente de difusión es isotrópico ($D_x, D_y, D_z \equiv D$) y constante en el espacio,

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D\nabla^2 C, \quad \text{o} \quad \frac{\partial C}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right). \quad (3.2.10)$$

Para geometrías, condiciones iniciales y de borde muy simples, la ecuación de difusión tiene soluciones analíticas. La extensión a casos más complejos es abordada en forma elegante por Fischer et al. (1979). Entre éstos destacan problemas que consideran bordes físicos impermeables o absorbentes, los que se solucionan utilizando el «método de las imágenes» comúnmente utilizado en flujo en medios porosos (sección 3.6).

3.2.2. Soluciones analíticas para casos simples

Como se mencionara en la sección precedente, en los procesos de mezcla que se dan en fluidos reales, el medio se caracteriza por presentar una batimetría irregular, condiciones iniciales y condiciones de borde complejas y desconocidas. Aun cuando en estos casos las soluciones analíticas no son aplicable, para evaluar la calidad de algoritmos numéricos. Veamos algunos ejemplos simples extraídos de Fischer et al. (1979) que pueden ser utilizados como referencias (o benchmarks) para validar algoritmos y para comprender casos progresivamente más complejos. Los casos analizados y algunos ejemplos prácticos en el ambiente acuático son:

- Fuente puntual e instantánea: vertido de una gota de colorante en una taza de agua.
- Fuente distribuida e instantánea:
- Fuente puntual y constante en el tiempo: vertedero descargando en el mar.
- Fuente distribuida y variable en el tiempo: descarga de un emisario submarino a través de en varias boquillas del difusor.

La explicación de cada una de estas soluciones se presenta a continuación.

3.2.2.1. Fuente puntual e instantánea

Solución en una dimensión

En una dimensión, la ecuación de difusión para un agente cuyo coeficiente de difusión es constante en el espacio se simplifica a

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}. \quad (3.2.11)$$

Esta ecuación debe integrarse una vez en el tiempo y dos veces en el espacio, por lo que se debe imponer una condición inicial y dos condiciones de borde. Para una fuente instantánea ubicada en $x = \xi$ que descarga una masa M en el tiempo $t = 0$, la condición inicial viene dada por

$$C(x, 0) = M\delta(x - \xi), \quad (3.2.12)$$

donde $\delta(x)$ es la función delta de Dirac. En términos matemáticos, esta función real es cero en todos los puntos a excepción de $x = \xi$, donde adopta un valor infinito

$$\delta(x - \xi) = \begin{cases} \infty, & x = \xi \\ 0, & x \neq \xi \end{cases} \quad (3.2.13)$$

y cumple con la propiedad

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - \xi) dx = 1. \quad (3.2.14)$$

En términos físicos, la ecuación (3.2.12) implica que toda la masa M se encuentra inicialmente en $x = \xi$, con una concentración infinita $C(\xi, 0) = \infty$. Esto se ilustra en la Figura 3.2.3 para $t = 0$. Naturalmente,

$$\int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} C(x, 0) dx = M, \quad (3.2.15)$$

con $\varepsilon \rightarrow 0$, lo que refuerza el hecho de que la masa está concentrada en dicho punto. Las condiciones de borde se definen como de cero concentración para puntos alejados a una distancia infinita de la fuente, esto es $C(\pm\infty, t) = 0$, con lo que el problema queda completamente definido. La solución analítica viene dada por

$$C(x, t) = \frac{M}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left[-\frac{(x - \xi)^2}{4Dt}\right], \quad (3.2.16)$$

y constituye una solución fundamental a partir de la cual se derivan problemas bastante más complejos. En la Figura 3.2.3 se presenta la concentración de una fuente puntual e instantánea para diferentes condiciones de borde. Se observa cómo la masa inicialmente concentrada en un punto tiende a difundirse en el espacio a medida que transcurre el tiempo como consecuencia de los gradientes espaciales de la concentración, siguiendo una distribución gaussiana. Cabe notar que la masa total en el sistema permanece constante,

$$M(t) = \int_{-\infty}^{\infty} C(x, t) dx = \text{constante}, \quad (3.2.17)$$

lo que implica que el proceso es conservativo.

Solución en dos dimensiones

La construcción a fuentes distribuidas en el espacio y tiempo sigue el mismo esquema que para una dimensión. Por ejemplo, en un espacio bidimensional, la ecuación que gobierna la concentración de un contaminante $C(x, y, t)$ cuyos coeficientes de difusión son constantes en el espacio es

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}. \quad (3.2.18)$$

Para una fuente puntual de masa M centrada en $(x, y) = (\xi, \zeta)$ la condición inicial se describe mediante la expresión

$$C(x, y, 0) = M\delta(x - \xi)\delta(y - \zeta). \quad (3.2.19)$$

Las condiciones de borde son de cero concentración para puntos alejados a una distancia infinita de la fuente, esto es $C(\pm\infty, \pm\infty, t) = 0$, expresión que representa las cuatro condiciones de borde necesarias para efectuar

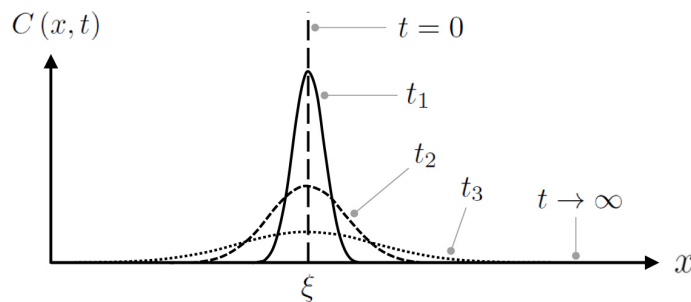


Figura 3.2.3: Solución de la ecuación de difusión para una fuente puntual e instantánea ubicada en $x = \xi$ que descarga una masa M en el tiempo $t = 0$. En este esquema $0 < t_1 < t_2 < t_3 < \infty$. La condición inicial definida por la inyección instantánea y puntual, $C(x, 0) = M\delta(x - \xi)$, corresponde a $t = 0$.

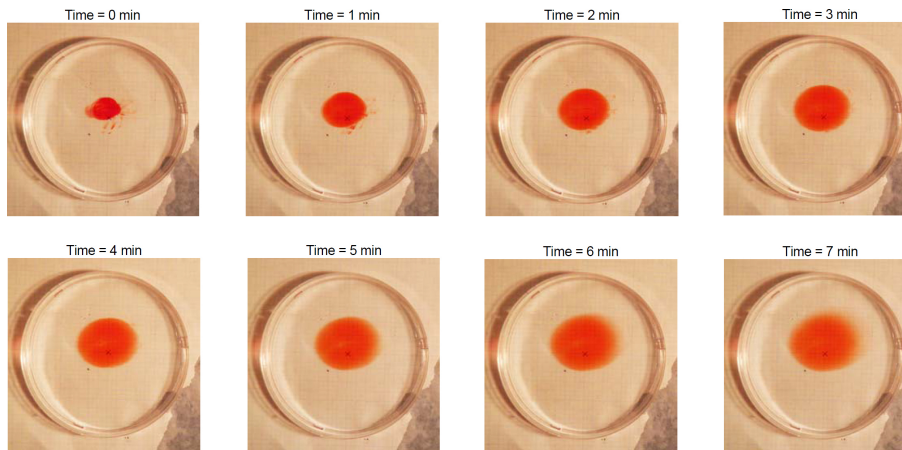


Figura 3.2.4: Experimento ilustrando el proceso de difusión molecular.

la integración. La solución es

$$C(x, y, t) = \frac{M}{4\pi t \sqrt{D_x D_y}} \exp \left[-\frac{(x - \xi)^2}{4D_x t} - \frac{(y - \zeta)^2}{4D_y t} \right]. \quad (3.2.20)$$

El proceso de difusión en dos dimensiones puede demostrarse de manera muy simple mediante un experimento como el ilustrado en la Figura 3.2.4, que puede hacerse en la casa con materiales de fácil obtención (un disco petri, anilina, una jeringa, un teléfono con cámara de fotos y un cronómetro). Este experimento permite calcular la difusión molecular pues el solvente está en estado estacionario, es decir, sin velocidad ni advección (ver sección 3.7.2). Dado que la estructura de las ecuaciones es similar para la difusión molecular y la difusión turbulenta, el procedimiento es también aplicable a flujos turbulentos.

Solución en tres dimensiones

Análogamente, la solución de la concentración de un agente $C(x, y, z, t)$ para una fuente puntual en un espacio tridimensional centrada $(x, y, z) = (\xi, \zeta, \varsigma)$ dada por

$$C(x, y, z, 0) = M \delta(x - \xi) \delta(y - \zeta) \delta(z - \varsigma), \quad (3.2.21)$$

cuyas condiciones de borde son de cero concentración para puntos alejados a una distancia infinita de la fuente, $C(\pm\infty, \pm\infty, \pm\infty, t) = 0$, es

$$C(x, y, z, t) = \frac{M}{(4\pi t)^{3/2} \sqrt{D_x D_y D_z}} \exp \left[-\frac{(x - \xi)^2}{4D_x t} - \frac{(y - \zeta)^2}{4D_y t} - \frac{(z - \varsigma)^2}{4D_z t} \right]. \quad (3.2.22)$$

Notar que M en las ecuaciones (3.2.16), (3.2.20) y (3.2.22) tiene unidades de masa por unidad de largo, masa por unidad de área y masa por unidad de volumen, respectivamente. Asimismo, la concentración decae de manera distinta dependiendo de las dimensiones consideradas para estudiar el fenómeno, lo que se desprende de las siguientes expresiones

$$C(x, t) \propto \frac{1}{t^{1/2}}, \quad C(x, y, t) \propto \frac{1}{t}, \quad C(x, y, z, t) \propto \frac{1}{t^{3/2}}, \quad (3.2.23)$$

obtenidas de las ecuaciones (3.2.16), (3.2.20) y (3.2.22). Físicamente, estas relaciones implican que el decaimiento de la concentración (en un punto del espacio a medida que pasa el tiempo) es más rápido cuanto más dimensiones contemple el proceso difusivo.

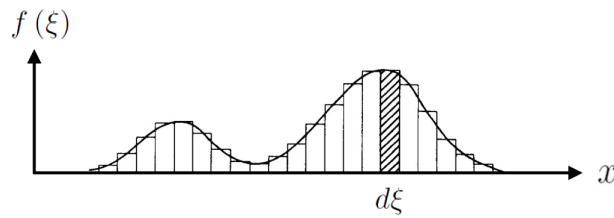


Figura 3.2.5: Esquema de superposición para una fuente distribuida e instantánea. Adaptado de Fischer et al. (1979).

3.2.2.2. Fuente distribuida e instantánea

A partir de la expresión (3.2.16), que es solución de la ecuación de gobierno de carácter lineal (3.2.11), se pueden derivar problemas más complejos con una distribución inicial definida en todo el espacio del tipo

$$C(x, 0) = f(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad (3.2.24)$$

cuya solución

$$C(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi)}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}\right] d\xi, \quad (3.2.25)$$

puede interpretarse como la suma de contribuciones elementales del tipo (3.2.16) en diferentes lugares del espacio, como se ilustra en la Figura 3.2.5.

Cabe notar que el principio de superposición se puede aplicar a cualquier sistema lineal que satisface las condiciones de aditividad, $f(x+y) = f(x) + f(y)$, y proporcionalidad $f(ax) = af(x)$. La ecuación de difusión, la función se puede expresar como

$$f(C) = \frac{\partial C}{\partial t} - D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}.$$

Luego, la condición de aditividad

$$f(C_1 + C_2) = \frac{\partial}{\partial t} (C_1 + C_2) - D \frac{\partial^2}{\partial x^2} (C_1 + C_2) = \frac{\partial C_1}{\partial t} - D \frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2} + \frac{\partial C_2}{\partial t} - D \frac{\partial^2 C_2}{\partial x^2} = f(C_1 + C_2)$$

y la de proporcionalidad

$$f(aC) = \frac{\partial}{\partial t} (aC) - D \frac{\partial^2}{\partial x^2} (aC) = a \left(\frac{\partial C}{\partial t} - D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \right) = af(C).$$

se cumplen puesto que todas las operaciones contenidas en la ecuación son también lineales..

3.2.2.3. Fuente puntual y constante en el tiempo

Para el caso donde se especifica una concentración constante en el punto $x = 0$ como función del tiempo (por ejemplo, un emisario submarino descargando un caudal constante de aguas servidas), la condición de borde es

$$C(0, t) = C_0, \quad 0 \leq t, \quad (3.2.26)$$

y la solución viene dada por

$$C(x, t) = C_0 \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}} \right) \right], \quad 0 \leq x, \quad (3.2.27)$$

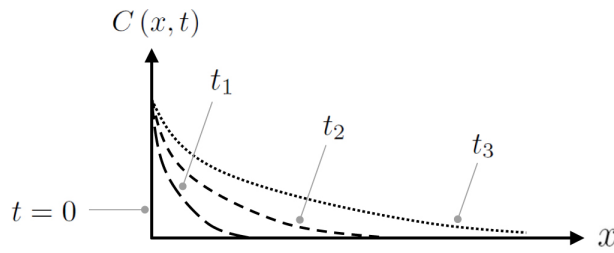


Figura 3.2.6: Concentración para una fuente puntual y constante en el tiempo. Modificado de Fischer et al. (1979).

donde $\text{erf}(x)$ corresponde a la denominada error function

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt, \tag{3.2.28}$$

y la forma se ilustra en la Figura 3.2.6. Sugiero revisar <http://mathworld.wolfram.com/Erf.html> para conocer más de esta función.

3.2.2.4. Solución para una fuente puntual y variable en el tiempo

Finalmente, si se considera una fuente con una tasa de descarga por unidad de tiempo \dot{m} , la concentración resultante se obtiene como la superposición de las contribuciones elementales generadas en tiempos diferentes. La solución

$$C(x, t) = \int_{-\infty}^t \frac{\dot{m}(\tau)}{\sqrt{4\pi D(t-\tau)}} \exp\left[-\frac{x^2}{4D(t-\tau)}\right] d\tau, \tag{3.2.29}$$

tiene la forma típica de un operador matemático de convolución, que aparece de manera natural en un sistema físico lineal en el cual se aplica el principio de superposición.

3.2.2.5. Fuente distribuida y variable en el tiempo

Siguiendo con la lógica de la superposición espacial y temporal de las soluciones (3.2.25) y (3.2.29), para una fuente que aporta una masa por unidad de tiempo y unidad espacial $\dot{m}(x, t)$, la solución es

$$C(x, t) = \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\dot{m}(\xi, \tau)}{\sqrt{4\pi D(t-\tau)}} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4D(t-\tau)}\right] d\xi d\tau. \tag{3.2.30}$$

3.2.2.6. Fuente puntual e instantánea en dos y tres dimensiones

XXXX
 Coeficiente de difusión
 XXXX

3.3. Dispersión

En los flujos medioambientales existen gradientes espaciales de velocidad debido, entre otras razones, a la condición de no deslizamiento en los bordes sólidos. En un campo de velocidades no uniforme, la pluma de una especie (soluto o contaminante), se advecta a diferentes velocidades, haciendo que se extienda longitudinalmente en forma más rápida que una nube liberada en una corriente uniforme. La advección diferencial del medio aumenta la difusividad efectiva, fenómeno que se conoce como dispersión por corte (shear dispersion), o

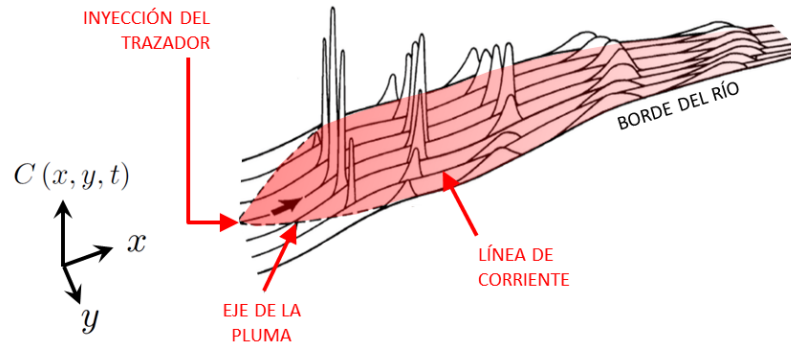


Figura 3.3.1: Dispersión de un trazador en un río. El color rojo representa la concentración máxima en cada punto.

dispersión de Taylor en honor al físico y matemático Sir Geoffrey Taylor (1886–1975). La expresión matemática de este fenómeno es

$$\frac{\partial C}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial C}{\partial x} \right) = 0, \quad (3.3.1)$$

donde en presencia de flujos con variaciones espaciales en el campo de velocidad, usualmente $D \ll \varepsilon \ll K$, es decir, la dispersión de Taylor domina por sobre la difusión turbulenta y molecular. La dispersión de Taylor surge de representar un flujo tridimensional en dos dimensiones, o de manera análoga, un flujo bidimensional en una dimensión. Es decir, cuando un flujo se representa en menos dimensiones que las que realmente ocupa. Por ende, es un artefacto matemático que surge de reducir las dimensiones para simplificar el problema real. La ecuación de dispersión para un flujo incompresible es

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \nabla \cdot (\mathbf{K} \cdot \nabla C), \quad (3.3.2)$$

donde \mathbf{K} corresponde a un tensor que incluye los coeficientes de dispersión por corte y su dimensión dependerá de a cuántas dimensiones se está reduciendo el problema tridimensional. En cuerpos de aguas naturales, la dispersión de un contaminante ocurre producto de campos de velocidad no uniformes, como se muestra en la Figura 3.3.1, adaptada de Kilpatrick (1993). Inicialmente, la distribución de concentración de un trazador vertido en el medio del río es dominada por la mezcla lateral hasta que alcanza el borde. Como consecuencia de la variación de velocidad a lo ancho del río, en la medida que el trazador avanza, se advecta más lentamente en el borde y más rápido en el centro del río. A grandes distancias, la concentración deja de ser uniforme en la sección y cubre mayor distancia a lo largo del río, proceso que se conoce como dispersión. La Figura 3.3.2 presenta un caso idealizado de dispersión en un canal de sección transversal uniforme y perfil parabólico de velocidad, donde un trazador se modela mediante partículas que se advectan y difunden a medida que la mancha se propaga aguas abajo de la zona de vertido, que corresponde a un vertido lineal e instantáneo en $x = 0$.

3.4. Reacción

La reacción es un proceso en el cual dos o más sustancias llamadas reactantes, transforman su estructura molecular y enlaces, generando otras sustancias denominadas productos. Existen reacciones de tipo químico, físico, biológico o sociológico, entre otros. La ecuación de reacción para un flujo incompresible es

$$\frac{\partial C}{\partial t} = R(C), \quad (3.4.1)$$

donde $R(C)$ define la naturaleza del proceso reactivo. Un ejemplo muy sencillo lo constituye una reacción de primer orden, que es aquella donde la velocidad de la reacción es directamente proporcional a la concentración

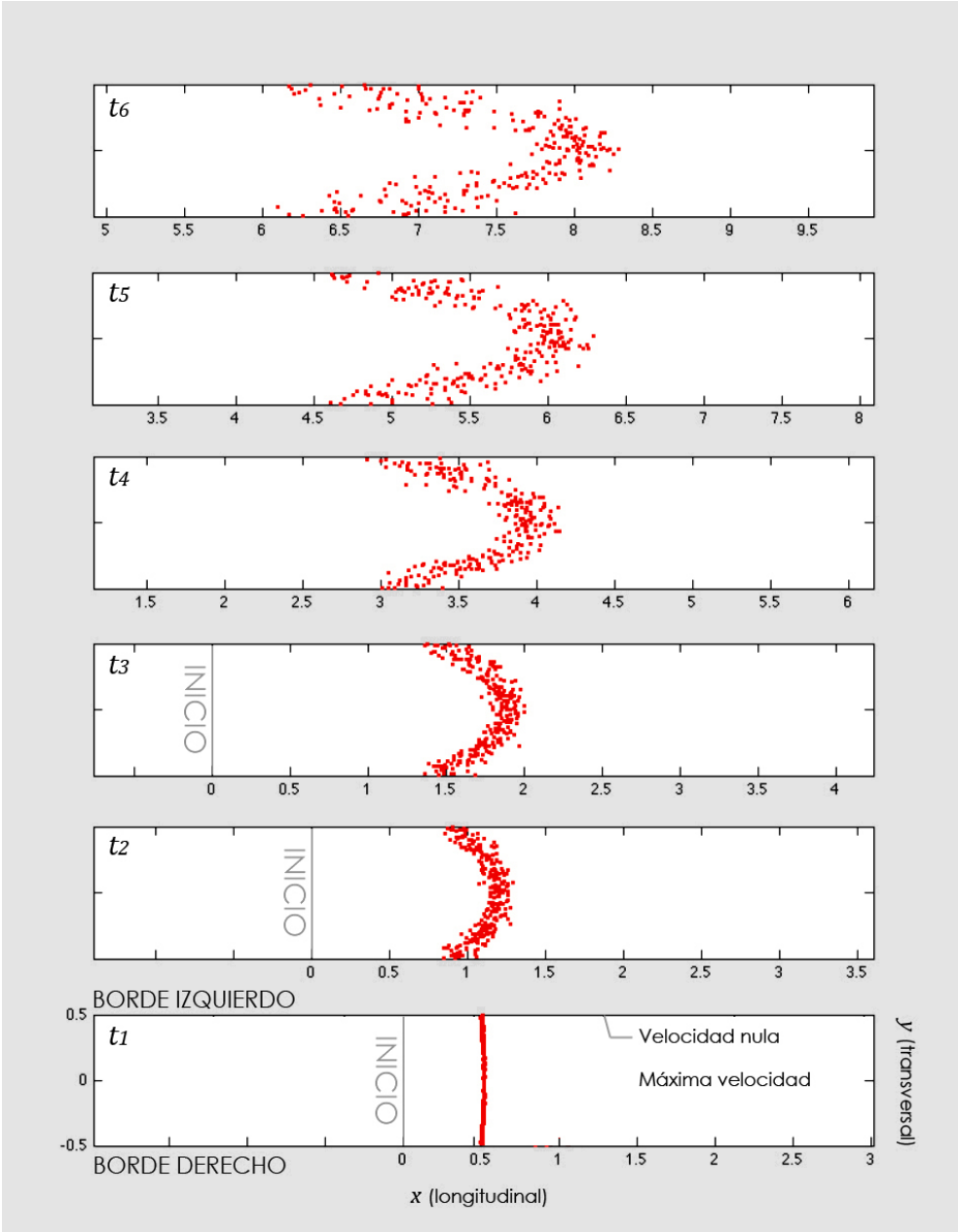


Figura 3.3.2: Caso idealizado de dispersión en un canal de sección transversal uniforme y perfil parabólico de velocidad, donde un trazador se modela mediante partículas que se advectan y difunden a medida que la mancha se propaga aguas abajo de la zona de vertido, que corresponde a un vertido lineal e instantáneo en $x = 0$.

de la sustancia. Este tipo de reacción está gobernada por la expresión

$$R(C) = -\kappa C, \quad (3.4.2)$$

donde κ representa una constante de decaimiento y tiene unidades de $[CT^{-1}]$. Si por simplicidad consideramos que la concentración es sólo función del tiempo (y no del espacio) y que κ no es función del tiempo, para este tipo de reacción podemos usar la técnica de separación de variables e integrar

$$\int_{C_0}^C \frac{dC}{C} = -\kappa \int_{t_0}^t dt, \quad (3.4.3)$$

donde C_0 corresponde a la concentración en el instante inicial t_0 . Luego de aplicar la exponencial, se obtiene la siguiente expresión

$$C(t) = C_0 \exp[-\kappa(t - t_0)], \quad (3.4.4)$$

que indica que para $\kappa > 0$, la concentración disminuye exponencialmente en el tiempo y para $\kappa < 0$ existe un aumento exponencial de la sustancia. En este caso, el proceso es no conservativo. Si $\kappa = 0$ no existe reacción y la concentración permanece constante y el proceso es conservativo. Una reacción de primer orden permite modelar varios procesos físicos, como el decaimiento de material radiactivo o de las aguas servidas vertidas al mar. Los procesos reactivos pueden ser muy complejos y actuar en diferentes escalas espaciales y temporales.

A modo de ejemplo, algunos fenómenos de reacción asociados a un vertido de petróleo son la emulsificación (mezcla del agua dentro del petróleo), la evaporación (volatilización de la fracciones ligeras del petróleo), la biodegradación (microorganismos degradan el petróleo, generando compuestos sencillos), la disolución (mezcla de componentes solubles entre el petróleo y el agua de mar), la fotooxidación (alteración superficial por efecto del sol) y la sedimentación (precipitación hacia el fondo marino).

El vertido de aguas servidas al mar, por su parte, es un proceso en el cual se efectúa un tratamiento primario, de carácter físico (cámara de rejas, desarenador, etc.), y luego se vierte el fluido remanente en el mar mediante un emisario submarino. El principio tras esta técnica es que el agua salina del mar degradará el efluente -constituido entre otras sustancias por material biológico de las heces cuyo ambiente natural es el agua dulce- si se garantiza que la solución considera un buen diseño de los difusores del emisario.

3.5. Advección, difusión y reacción

Los procesos de advección, difusión y reacción coexisten en la mezcla de un contaminante en un cuerpo de agua. Algunos ejemplos donde se superponen estos procesos se incluyen en la Figura 3.5.1. Para evaluar la importancia relativa de la advección y la difusión en un contaminante conservativo (sin reacción) se utiliza el número de Péclet, que relaciona la velocidad del flujo y la velocidad de difusión mediante la expresión

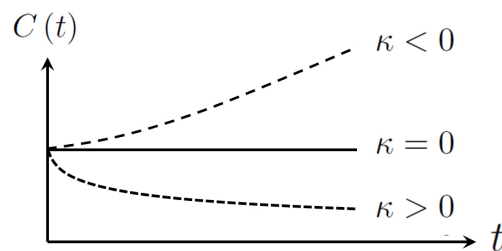


Figura 3.4.1: Solución de la ecuación de reacción en función del tiempo, para diferentes constantes de decaimiento.

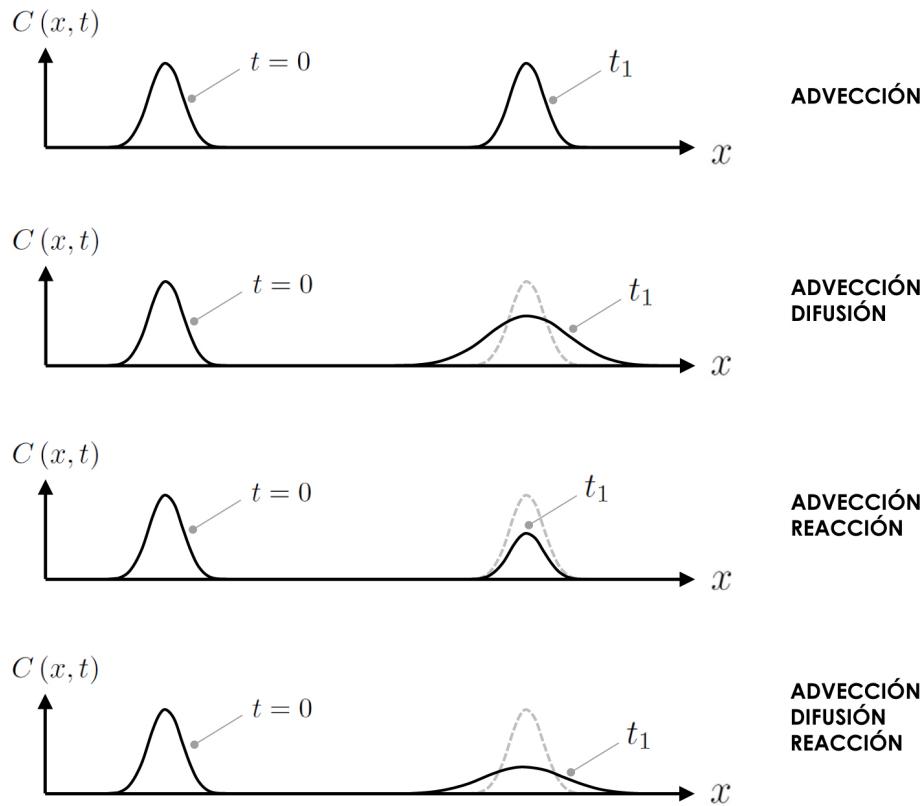


Figura 3.5.1: Ejemplos de procesos de mezcla donde se superponen los efectos de advección, reacción y difusión.

$$Pe = \frac{L_0 V_0}{D_0} = Re Sc, \tag{3.5.1}$$

donde L_0 es una longitud característica donde se mezcla el contaminante, V_0 es una velocidad característica, D_0 es la difusividad másica, Re es el número de Reynolds y Sc el número de Schmidt. Este número adimensional debe su nombre al físico francés Jean Claude Péclet (1793–1857). Para $Pe \ll 1$, la difusión es dominante, para $Pe \gg 1$ la mezcla está dominada por advección y para $Pe \sim 1$ ambos procesos son importantes. Si la velocidad del flujo es alta, la pluma del contaminante no tiene un tiempo suficiente para difundirse en el punto de medición (situado a una distancia L_0 del punto de inyección de contaminante) y por lo tanto domina la advección. Por el contrario, si el flujo es relativamente lento, la difusión tiene suficiente tiempo para evolucionar y se convierte en el proceso dominante. Una manera simple de comprender la importancia relativa entre la advección y la difusión, es recurrir a la adimensionalización de la ecuación de advección difusión

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (uC) = \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial C}{\partial x} \right), \tag{3.5.2}$$

considerando los siguientes escalamientos

$$t = \frac{L_0}{V_0} \hat{t}, \quad x = L_0 \hat{x}, \quad u = V_0 \hat{u}, \quad C = C_0 \hat{C}, \quad D = D_0 \hat{D}, \tag{3.5.3}$$

donde las variables con tongo son adimensionales y las constantes con subíndice responden a valores característicos del proceso de mezcla. Utilizando la regla de la cadena se obtienen las derivadas espacial y temporal son

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{V_0}{L_0} \frac{\partial}{\partial \hat{t}}, \quad y \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{L_0} \frac{\partial}{\partial \hat{x}}. \tag{3.5.4}$$

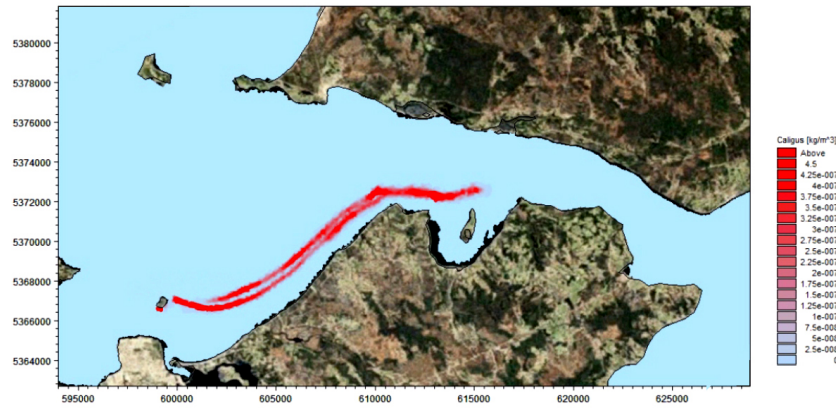


Figura 3.5.2: Modelación de una fuente continua proveniente de un módulo de acuicultura en el Canal Chacao, Chile. En rojo se ilustra la forma de la concentración, claramente dominada por advección. Gentileza de Ignacio Sepúlveda.

Combinando estas expresiones, se obtiene una expresión adimensional

$$\frac{\partial \hat{C}}{\partial \hat{t}} + \frac{\partial}{\partial \hat{x}} (\hat{u} \hat{C}) = \frac{1}{Pe} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \left(\hat{D} \frac{\partial \hat{C}}{\partial \hat{x}} \right), \quad (3.5.5)$$

donde las derivadas son todas de orden $\mathcal{O}(1)$ y la importancia relativa de cada término viene dada por los números adimensionales que se les anteponen (en este caso, sólo en la difusión). Si la advección domina el proceso, entonces $Pe \gg 1$ y la ecuación de advección-difusión se reduce a la de advección

$$\frac{\partial \hat{C}}{\partial \hat{t}} + \frac{\partial}{\partial \hat{x}} (\hat{u} \hat{C}) = 0. \quad (3.5.6)$$

Por ejemplo, la Figura 3.5.2 ilustra el vertido de un contaminante conservativo en el canal de Chacao, donde la velocidad media es $V_0 = \mathcal{O}(10^0 \text{ m/s})$, la longitud típica donde se mezcla el contaminante es de $L_0 = \mathcal{O}(10^4 \text{ m})$ y la difusividad medida in situ es de $D_0 = \mathcal{O}(10^0 \text{ m}^2/\text{s})$ es claramente dominado por advección, con $Pe = \mathcal{O}(10^4)$. En este caso el proceso de mezcla podría ser modelado mediante la ecuación de advección, sin incurrir en grandes errores. En aplicaciones de mecánica de fluidos ambiental, el número de Péclet habitualmente tiene valores elevados, lo que implica que la advección es el proceso dominante.

Para difusión térmica, el número de Péclet se define como

$$Pe = \frac{LV}{\alpha} = Re Pr \quad (3.5.7)$$

donde α es la difusividad térmica definida como $\alpha = k/\rho c_p$, siendo k la conductividad térmica, ρ la densidad del fluido, c_p la capacidad calorífica a presión constante y Pr el número de Prandtl. La analogía entre los procesos de difusión de masa y de calor es directa (e.g. Narasimhan, 2009).

3.5.1. La ecuación de ADR

Una primera aproximación para modelar estos tres procesos es asumir que son independientes y que por tanto se pueden sumar (en estricto rigor, se asume que los flujos advectivos y difusivos son independientes entre sí, e independientes de la reacción). En una dimensión, la ecuación de advección-difusión-reacción (ADR) resultante

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (uC) = \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial C}{\partial x} \right) + R(C) \quad (3.5.8)$$

es una ecuación diferencial en derivadas parciales que permite predecir la concentración de sustancias contaminantes $C(x, t)$. Para su solución se requieren de condiciones iniciales y de borde. En términos vectoriales, la **ecuación de advección-difusión-reacción** se escribe como

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{V}C) = \nabla \cdot (\mathbf{D} \cdot \nabla C) + R(C), \quad (3.5.9)$$

expresión a partir de la cual se pueden encontrar soluciones más simples para campos de velocidad, reacciones de diferente orden y coeficientes de difusión isotrópicos y/o constantes en el espacio.

En algunos casos muy sencillos existen soluciones analíticas que permiten validar algoritmos. Por ejemplo, en el flujo tridimensional con una velocidad $\mathbf{V} = (u, v, w) = (u, 0, 0)$, con una difusividad constante e isotrópica ($D_x, D_y, D_z \equiv D$) y una reacción de primer orden dada por una constante de decaimiento κ , la ecuación de gobierno es

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} = D \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right) - \kappa C. \quad (3.5.10)$$

Para una fuente puntual donde se vierte una masa M centrada en $(x, y, z) = (\xi, \zeta, \varsigma)$ en el tiempo $t = 0$, la solución resulta de una combinación de las soluciones 3.1.17 para la advección, (3.2.22) para la difusión y (3.4.4) para la reacción:

$$C(x, y, z, t) = \frac{M}{(4\pi Dt)^{3/2}} \exp \left[-\frac{([x - \xi] - ut)^2 + (y - \zeta)^2 + (z - \varsigma)^2}{4Dt} \right] \exp(-\kappa t). \quad (3.5.11)$$

El término $M/(4\pi Dt)^{3/2}$ representa la concentración máxima en el centro de la pluma. La primera exponencial representa la distribución espacial de la pluma que resulta de la acción conjunta de la advección y la difusión. Nota que el efecto de la advección resulta en un desplazamiento hacia la derecha de la nube de concentración. La segunda exponencial representa el efecto de la reacción y puede redundar en una pérdida progresiva de la masa total del sistema, en caso de que $\kappa > 0$, o en un aumento de la misma para $\kappa < 0$. Para $\kappa = 0$, la masa total del sistema permanece constante y el proceso es conservativo.

3.5.2. Diferencias entre la ecuación de ADR y la ecuación de momentum

El uso de modelos analógicos es útil para efectuar paralelismos entre fenómenos diferentes pero que atienden a ecuaciones de gobierno similares. En el caso de los procesos de mezcla existen fenómenos (como la difusión) que siguen relaciones equivalentes a las del momentum y otros (como la advección) que se comportan de manera muy distinta. Para ilustrar esta idea veamos un ejemplo donde el fluido es isotrópico. La ecuación de advección-difusión-reacción

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla C = D \nabla^2 C + \kappa C, \quad (3.5.12)$$

tiene una forma similar a la de momentum

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{V} + \mathbf{g}. \quad (3.5.13)$$

pero comportamientos disímiles en su física. La diferencia elemental entre ambas radica en que la primera representa la conservación de la masa de un agente (un escalar) y la segunda representa un balance de fuerzas (un vector), es decir, atienden a magnitudes diferentes. El **término advectivo** es esencialmente distinto pues en la ecuación ADR, si la velocidad es una magnitud conocida, $\mathbf{V} \cdot \nabla C$ es lineal y permite superposición de soluciones. En la de momentum, en contraste, $\mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V}$ es no lineal, lo que tiene consecuencias en la física y en los esquemas numéricos de resolución. En concreto el término advectivo en la ecuación de momentum i) es responsable de la generación de armónicos, ii) gobierna la producción y transporte de vorticidad y iii) puede inducir inestabilidades numéricas en la solución de ecuaciones por medio de la no linealidad. En este caso, la

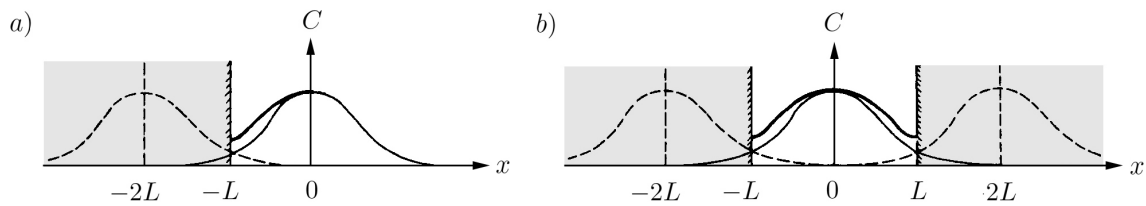


Figura 3.6.1: Ejemplos del uso del método de las imágenes. a) una fuente real a la derecha del borde, en $x = 0$, y una imagen a igual distancia a la izquierda del mismo en $x = -2L$. b) una fuente real en $x = 0$ entre dos bordes impermeables ubicados en $x = \pm L$. Adaptado de Fischer (1979).

analogía entre advección de masa y momentum no es directa.

El **término difusivo** $D\nabla^2 C$ representa la difusión de masa de contaminante en la ecuación ADR, en tanto que $\nu\nabla^2 \mathbf{V}$ representa la difusión de momentum. Ambos procesos están relacionados a través del número de Schmidt, que se utiliza para caracterizar flujos en los que hay procesos advectivos de cantidad de movimiento y masa (el análogo al número de Schmidt en transferencia de calor es el número de Prandtl). Este número adimensional, cuyo nombre se debe al ingeniero alemán Ernst Schmidt (1892-1975), se define como el cociente entre la difusión de cantidad de movimiento y la difusión de masa

$$Sc = \frac{\nu}{D},$$

donde ν es la viscosidad cinemática del fluido y D es la difusividad del fluido. Así, cuando Sc se aproxima a la unidad, es esperable que los patrones difusivos de masa y momentum sean similares.

El **término reactivo** en la ecuación ADR, en este caso dada por un modelo lineal del tipo κC , puede tener un equivalente en la fricción en la ecuación de momentum, que puede modelarse en forma sencilla a través de un término lineal del tipo $-C_f \mathbf{V}$. En este modelo sencillo, se puede inferir por analogía con la reacción en la ecuación ADR, que la presencia de un término de fricción redundará en una pérdida sucesiva de momentum. Finalmente, en el transporte de masa no existe un análogo a la presión o a la gravedad y es por ello que no aparecen en la ecuación ADR.

3.6. Condiciones de borde

El tipo de condiciones de borde más comunes utilizadas en los procesos de mezcla son i) la de Dirichlet, que prescribe el valor de la concentración y ii) la de Neumann, que prescribe el gradiente de la concentración, o el flujo, en el borde. Estas condiciones se introducen con el objeto de buscar soluciones analíticas o numéricas en presencia de bordes.

La condición de borde tipo **Dirichlet**, o de primer tipo, es aquella en que se especifican los valores de la variable dependiente en la frontera del dominio. En términos matemáticos, para una ecuación diferencial en derivadas parciales para la incógnita $y(x)$ sobre un dominio Ω , esta condición se escribe como

$$y(x) = f(x) \quad \forall x \in \partial\Omega, \quad (3.6.1)$$

donde $\partial\Omega$ corresponde al borde del dominio.

La condición de borde tipo **Neumann**, o de segundo tipo, es aquella en que se especifican los valores de la derivada de la variable dependiente en la frontera del dominio. Para una ecuación diferencial en derivadas parciales para la incógnita $y(x)$ sobre un dominio Ω , esta condición se escribe como

$$\frac{\partial y}{\partial \mathbf{n}}(x) = f(x) \quad \forall x \in \partial\Omega, \quad (3.6.2)$$

donde $\partial\Omega$ corresponde al borde del dominio y \mathbf{n} representa el vector unitario normal a dicho borde.

Afortunadamente, si la ecuación de gobierno y las condiciones de borde son lineales, como es el caso de la ecuación de advección-difusión-reacción, podemos recurrir al principio de superposición de soluciones sencillas para obtener la solución de un problema usualmente más complejo. Esta propiedad es útil cuando se busca una solución **analítica** (aquella en que la función incógnita tiene una expresión matemática explícita) en casos relativamente simples.

El **método de las imágenes** -comúnmente usado en ingeniería por su simplicidad- permite encontrar soluciones analíticas considerando una fuente ficticia (imagen) igual a la fuente real, a una distancia igual pero opuesta al borde. Por ejemplo, para una fuente puntual e instantánea de masa M ubicada en $x = 0$ que se libera en un espacio que contiene un borde impermeable en $x = -L$ como en la Figura 3.6.1a, la solución analítica viene dada por

$$C(x, t) = \frac{M}{\sqrt{4\pi Dt}} \left\{ \exp\left[-\frac{x^2}{4Dt}\right] + \exp\left[-\frac{(x+2L)^2}{4Dt}\right] \right\}, \quad (3.6.3)$$

donde se ha asumido que el coeficiente de difusión es constante. El primer término corresponde a la fuente real y el segundo a la imagen, ubicada a una distancia equivalente pero opuesta al borde que la fuente real, $x = -2L$. Ambas fuentes generan flujos iguales en magnitud pero opuestos en sentido en el borde, de modo que el flujo neto es cero (condición tipo Neumann). La Figura 3.6.1b, por otra parte, muestra el caso de un dominio con dos bordes impermeables, en el cual el método de las imágenes se traduce en infinitas fuentes ficticias que garantizan un gradiente nulo en las paredes.

Si, por el contrario, la misma fuente se libera en un espacio donde la concentración es nula en $x = -L$ (condición tipo Dirichlet), entonces la solución es

$$C(x, t) = \frac{M}{\sqrt{4\pi Dt}} \left\{ \exp\left[-\frac{x^2}{4Dt}\right] - \exp\left[-\frac{(x+2L)^2}{4Dt}\right] \right\}, \quad (3.6.4)$$

donde la imagen es negativa y la suma de ambas contribuciones es nula en $x = -L$, esto es $C(-L, t) = 0$.

Cuando el problema tiene una geometría compleja, el método de las imágenes no es aplicable y debe recurrirse a soluciones numéricas donde los bordes se definen localmente mediante las expresiones (3.6.1) y/o (3.6.2). En la Figura 3.6.3 se muestra la solución a la ecuación de difusión en dos dimensiones, implementada mediante diferencias finitas obtenida del ejercicio «Method of images for 1-D diffusion», en Winckler (2010).

3.7. Advección, difusión y reacción en régimen turbulento

La difusión turbulenta es un proceso de difusión por el cual las sustancias se mezclan debido a la presencia de remolinos (eddies) que pueden variar en tamaño desde la escala de Kolmogorov a sistemas subtropicales. En esta sección se deriva la ecuación de difusión en un régimen turbulento y se discute un procedimiento para estimar el coeficiente de difusión turbulenta utilizado de manera convencional en levantamientos oceanográficos.

3.7.1. Derivación

Por simplificación, derivaremos la ecuación en una dimensión y recurriremos a la descomposición de Reynolds, que como se comentó en la sección 2.5, es una técnica matemática para separar el promedio de las fluctuaciones

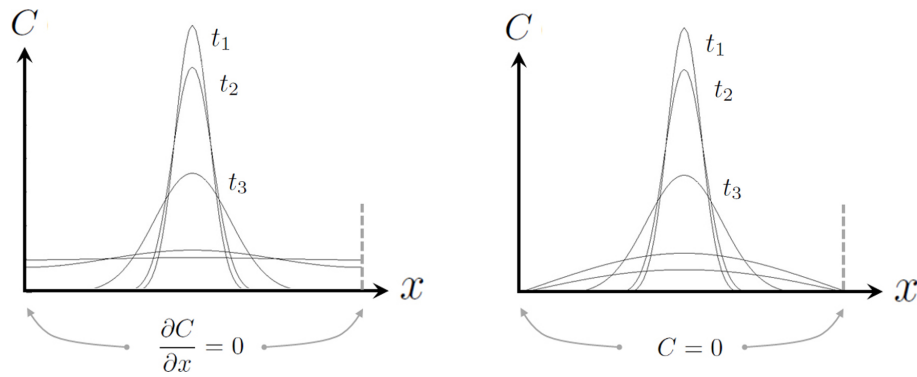


Figura 3.6.2: Concentración para una fuente cuasi puntual e instantánea. La distribución inicial no es un delta de Dirac, sino una distribución gausseana. En la imagen izquierda se ilustra un caso con bordes impermeables (tipo Neumann) que impiden la salida del agente, por lo que la masa en el dominio se conserva. En la imagen derecha se muestra un caso donde se impone el valor de la concentración (tipo Dirichlet) que promueven la salida del agente. En el infinito, la masa desaparece completamente.

de una cantidad. Descomponiendo la velocidad y la concentración

$$u(x, t) = \bar{u}(x) + u'(x, t), \quad C(x, t) = \bar{C}(x) + C'(x, t), \quad (3.7.1)$$

donde por definición

$$\bar{u}(x) = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} u(x, t) dt, \quad \bar{C}(x) = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} C(x, t) dt, \quad (3.7.2)$$

Introduciendo estas definiciones en la ecuación de advección-difusión

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (uC) - \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial C}{\partial x} \right) = 0 \quad (3.7.3)$$

da

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + \frac{\partial C'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\bar{u}\bar{C} + \bar{u}C' + u'\bar{C} + u'C') - \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} + D \frac{\partial C'}{\partial x} \right) = 0. \quad (3.7.4)$$

En adelante, iremos paso a paso para facilitar la comprensión de la derivación. Tomemos primero el promedio temporal de esta expresión

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + \frac{\partial C'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\bar{u}\bar{C} + \bar{u}C' + u'\bar{C} + u'C') - \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} + D \frac{\partial C'}{\partial x} \right) = 0. \quad (3.7.5)$$

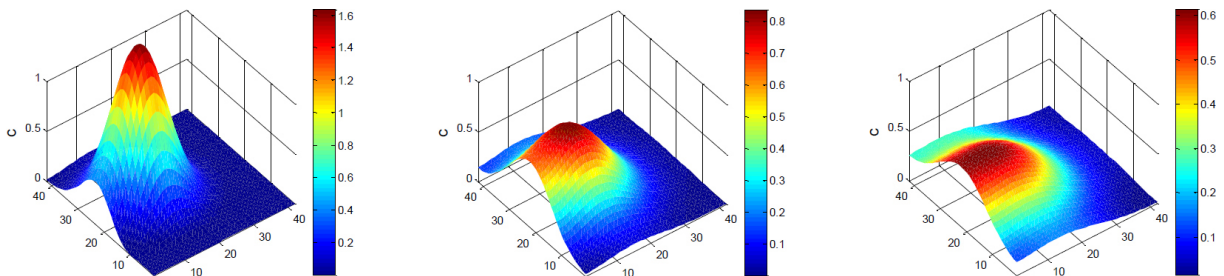


Figura 3.6.3: Solución numérica de la ecuación de difusión en dos dimensiones, con bordes impermeables (Neumann) en los contornos superior, izquierdo e inferior, y concentración constante (Dirichlet) en el borde derecho.

Puesto que el operador promedio es lineal (3.7.2), podemos separar su aplicación para cada término. Además, si se considera un volumen de control fijo en el tiempo, se puede introducir dentro de las derivadas. Con ello obtenemos la expresión

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{C}'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\bar{u}\bar{C} + \bar{u}C' + \bar{u}'\bar{C} + \bar{u}'C') - \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} + D \frac{\partial \bar{C}'}{\partial x} \right) = 0. \quad (3.7.6)$$

Por definición $\bar{C}' = 0$, $\bar{u}\bar{C} = \bar{u}\bar{C}$, $\bar{C} = \bar{C}$,

$$\bar{u}C' = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \bar{u}(x) C'(x, t) dt = \bar{u} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} C'(x, t) dt = 0 \quad (3.7.7)$$

y análogamente $\bar{u}'\bar{C} = 0$. Considerando estas expresiones en (3.7.6)

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\bar{u}\bar{C}) = \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} (\bar{u}'C'). \quad (3.7.8)$$

Esta ecuación requiere de un cierre (ecuación extra), pues tiene por incógnitas \bar{C} y $\bar{u}'C'$. Una manera sencilla de resolver el problema es relacionar las fluctuaciones turbulentas con el gradiente de concentración

$$\bar{u}'C' = -\varepsilon \frac{\partial \bar{C}}{\partial x}, \quad (3.7.9)$$

y por tanto

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\bar{u}\bar{C}) = \frac{\partial}{\partial x} \left((D + \varepsilon) \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} \right). \quad (3.7.10)$$

La hipótesis (3.7.9) podría ser probada en laboratorio si se tienen mediciones simultáneas de concentración y velocidad (a partir de las cuales se pueden calcular el término $\bar{u}'C'$) en a lo menos dos puntos suficientemente cercanos (para calcular el gradiente de la concentración $\partial \bar{C} / \partial x$). Cabe mencionar que el coeficiente de difusión molecular D es propiedad del fluido y el coeficiente de difusión turbulento ε es propiedad del flujo. En flujos reales, $D \ll \varepsilon$, lo que implica que el proceso de mezcla es mucho más eficiente en un flujo turbulento. Puedes ver un ejemplo simple para ilustrar la diferencia entre la difusión laminar y la turbulenta cuando haces un café en polvo en la mañana. Si viertes el café suavemente con una cucharita en agua caliente sin generar grandes perturbaciones en el flujo, el proceso de mezcla es lento y dominado por difusión molecular. Al revolver con la cuchara, creas un flujo turbulento que acelera la mezcla.

En la práctica, si consideramos también la reacción, la expresión que se resuelve es

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\bar{u}\bar{C}) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\varepsilon \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} \right) + R(\bar{C}), \quad (3.7.11)$$

Nota que las ecuaciones (3.5.8) y (3.7.11) son similares en estructura pero esencialmente diferentes en cuando a la magnitud que modelan; la primera modela concentraciones instantáneas y la segunda concentraciones medias. Siguiendo el argumento de que los flujos en tres dimensiones ortogonales son independientes, podemos escribir la **ecuación de advección-difusión-reacción en un flujo turbulento** como

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\mathbf{V}} \bar{C}) = \nabla \cdot (\varepsilon \cdot \nabla \bar{C}) + R(\bar{C}), \quad (3.7.12)$$

que en coordenadas cartesianas para un medio anisotrópico se escribe como

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\bar{u}\bar{C}) + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{v}\bar{C}) + \frac{\partial}{\partial z} (\bar{w}\bar{C}) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\varepsilon_x \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\varepsilon_y \frac{\partial \bar{C}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\varepsilon_z \frac{\partial \bar{C}}{\partial z} \right) + R(\bar{C}), \quad (3.7.13)$$

expresión a partir de la cual se pueden encontrar soluciones más simples para campos de velocidad, reacciones de diferente orden y coeficientes de difusión isotrópicos (por ejemplo, lejos de bordes que puedan imponer restricciones al flujo en ciertas direcciones).

3.7.2. Cálculo del coeficiente de difusión turbulenta

Los procesos de mezcla son, en la mayoría de las veces, tridimensionales. En casos donde hay una clara estratificación, se puede asumir que la escala horizontal de la pluma de descarga es mucho menor que su espesor y por tanto aproximar las ecuaciones a dos dimensiones horizontales

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\bar{u}\bar{C}) + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{v}\bar{C}) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\varepsilon_x \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\varepsilon_y \frac{\partial \bar{C}}{\partial y} \right) + R(\bar{C}), \quad (3.7.14)$$

donde todas las variables son evaluadas en la profundidad de estratificación. Este es el caso de los vertidos de petróleo, que tienen su fase líquida concentrada en la superficie, o las descargas de aguas servidas en el campo lejano, que usualmente se encuentran a cierta profundidad para evitar que el afloramiento del material orgánico. Esta expresión da pie a la medición del coeficiente de difusión usando trazadores superficiales, como la fluoresceína² o la rodamina³, como se ve en la Figura 3.7.1. El procedimiento es verter el trazador en la superficie y seguir la mancha con una embarcación. En un sistema de referencia que se mueve con la mancha a la velocidad media del flujo, la ecuación de gobierno se reduce a

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\varepsilon_x \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\varepsilon_y \frac{\partial \bar{C}}{\partial y} \right), \quad (3.7.15)$$

donde se asumen que en la escala de tiempo donde ocurre el proceso de mezcla, la reacción es despreciable. La solución se obtiene a partir de la ecuación (3.2.20)

$$C(x, y, t) = \frac{M}{4\pi t \sqrt{\varepsilon_x \varepsilon_y}} \exp \left[-\frac{x^2}{4\varepsilon_x t} - \frac{y^2}{4\varepsilon_y t} \right]. \quad (3.7.16)$$

Miremos ahora la función de densidad de probabilidad gaussiana para el caso bidimensional

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \exp \left[-\frac{(x - \mu_x)^2}{\sigma_x^2} - \frac{(y - \mu_y)^2}{\sigma_y^2} \right]. \quad (3.7.17)$$

Comparando ambas expresiones se obtienen las relaciones

$$2t\sqrt{\varepsilon_x \varepsilon_y} = \sigma_x \sigma_y, \quad \mu_x = 0, \quad \mu_y = 0. \quad (3.7.18)$$

Si el proceso de difusión es isotrópico, los coeficientes de difusión en ambas direcciones son idénticos. Por tanto, la primera relación se reduce a

$$2\varepsilon t = \sigma^2, \quad (3.7.19)$$

ecuación que aparece en el texto *Investigations on the Theory of the Brownian Movement*, del mismísimo Albert Einstein (1956, p.17, ecuación 11). En dicho texto, σ representa el desplazamiento de una partícula experimenta en promedio en una dirección o, en forma más exacta, según dice, la raíz cuadrada de la media aritmética de los cuadrados de los desplazamientos en una dirección. Esta expresión es útil para estimar los coeficientes de difusión del contaminante en el agua. La relación entre el cuadrado de la desviación estándar de la concentración y el tiempo es lineal, lo que significa que mediante la medición de las dimensiones de la mancha, el coeficiente de difusión ε puede calcularse mediante el ajuste de una regresión lineal a una serie de mediciones de (σ_i^2, t_i) , cuya pendiente es 2ε .

²La fluoresceína es una sustancia colorante orgánica insoluble de color amarillo perteneciente al grupo de las xantinas que produce un color fluorescente verde intenso en soluciones alcalinas (con pH mayor a 7). Cuando se expone a la luz, la fluorescencia absorbe ciertas longitudes de onda y emite luz fluorescente de longitud de onda larga. (<https://es.wikipedia.org/wiki/Fluoresceína>). La fluoresceína es ampliamente usada en mecánica de fluidos experimental como trazador.

³La rodamina es el nombre de una familia de compuestos orgánicos heterocíclicos fluorescentes, basados en el xanteno. Se utilizan como colorantes y como medio amplificador en los láseres de colorante. También se utilizan a menudo como un tinte indicador en el agua para determinar el volumen, la velocidad y las direcciones de flujo y transporte. (<https://es.wikipedia.org/wiki/Rodamina>)

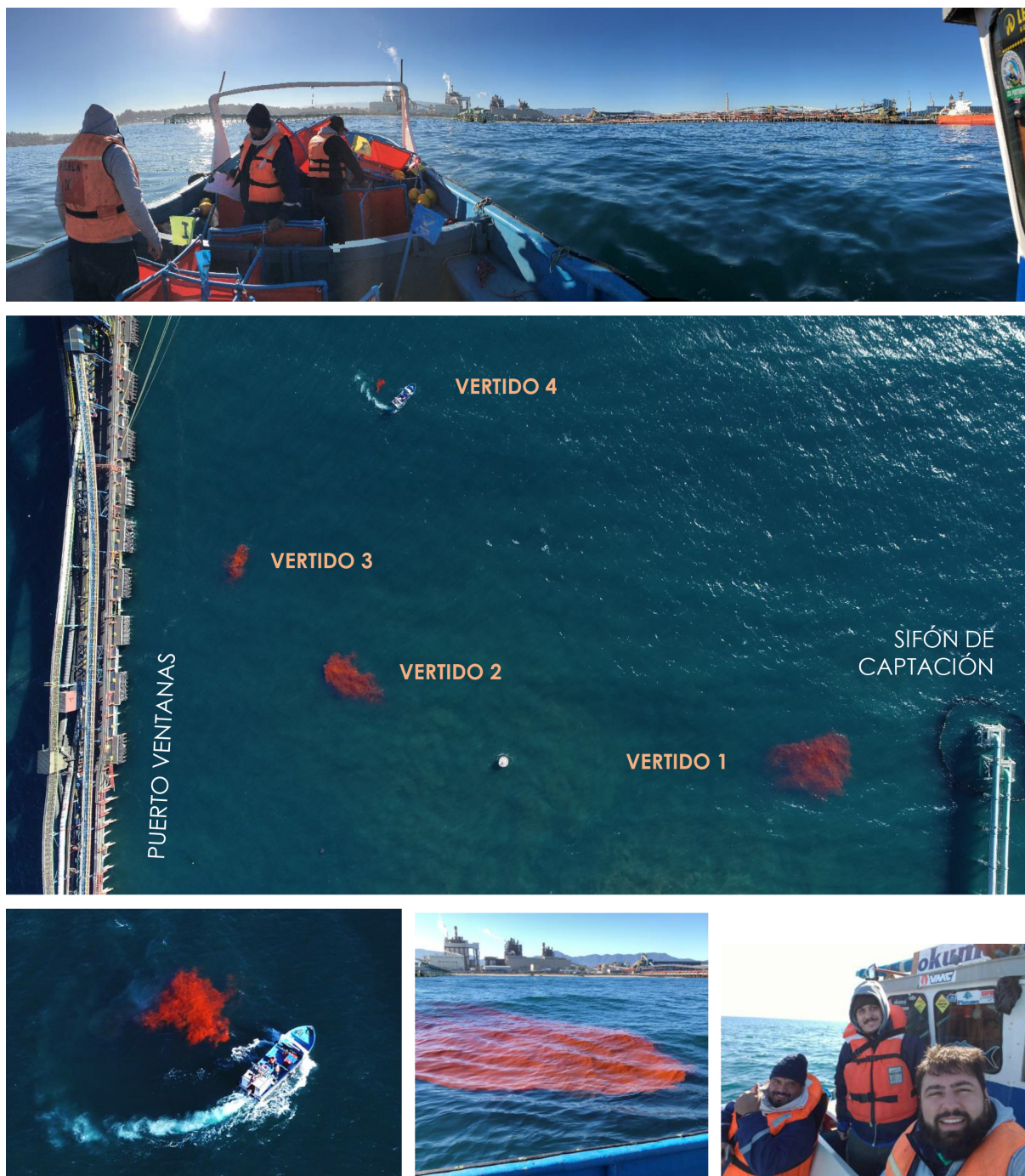


Figura 3.7.1: Vertidos de rodamina en la bahía de Quintero. El trabajo fue efectuado en 2019 desde un bote acondicionado para trabajos oceanográficos y monitoreado desde un dron. Gentileza de Matías Quezada y Felipe Rifo, ingenieros civiles oceánicos de la Empresa Ecotecnos e Ignacio Lazo.

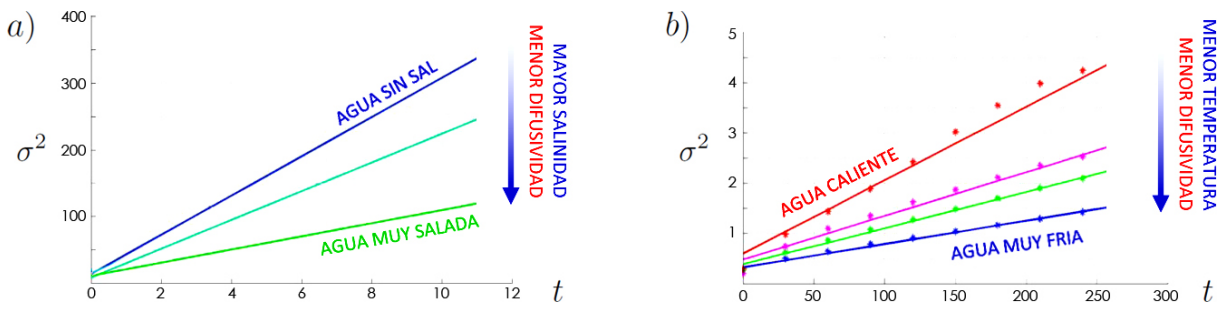


Figura 3.7.2: Tamaño de una mancha en función del tiempo siguiendo la relación $\sigma^2 = 2\epsilon t$ en un experimento como el ilustrado en la Figura 3.2.4. a) muestra el tamaño para diferentes concentraciones de sal un soluto de agua y anilina. b) ilustra el el tamaño para diferentes temperaturas del solvente, en este caso agua.

Para calcular las dimensiones de la pluma debe hacerse un supuesto práctico, ya que la dimensión típica de la mancha se obtiene por medio de observaciones visuales con un error inherente a la definición del contorno. Se asume, por ejemplo, que la distancia entre el borde y el centro de la pluma (esto es el radio característico R) está relacionada con la desviación estándar σ mediante la expresión $R = 2\sigma$. Para obtener el radio, se mide el área de la mancha A y se obtiene el diámetro mediante la expresión $R = \sqrt{A/\pi}$, suponiendo que la zona es circular. Es claro que estos supuestos son arbitrarios y afectan el valor del coeficiente de difusión. Asimismo, este procedimiento no es válido para procesos de mezcla que se dan en el espacio tridimensional, ni en flujos cuasi bidimensionales, pero que experimentan afloramientos de agua debido a vórtices.

Para ilustrar este procedimiento en un caso práctico, adjuntaré en clases el documento Winckler (2010). La Figura 3.7.2a ilustra como la difusividad es menor en la medida que el soluto (o efluente) tiene mayor salinidad y la Figura 3.7.2b muestra como la mezcla es más eficiente si el solvente (o cuerpo de agua receptor) está a mayor temperatura.

3.7.3. Ejemplo de mezcla en aguas someras

Debido a la irregularidad de la geometría de los cuerpos de aguas donde se mezclan los contaminantes, no es posible obtener soluciones analíticas para la ecuación de advección-difusión-reacción. Por ello es necesario usar técnicas numéricas para hallar una solución aproximada a las ecuaciones de gobierno. En el caso de un proceso de mezcla de un contaminante pasivo en aguas someras, se debe primero calcular el patrón hidrodinámico del cuerpo receptor mediante, por ejemplo, las ecuaciones no lineales de onda larga (sección 5.4.4)

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} = 0, \tag{3.7.20}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p^2}{H} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{pq}{H} \right) + gH \frac{\partial \eta}{\partial x} = \sum f_x, \tag{3.7.21}$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{pq}{H} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{q^2}{H} \right) + gH \frac{\partial \eta}{\partial y} = \sum f_y, \tag{3.7.22}$$

donde $\eta(x, y, t)$ es la desnivelación instantánea, $h(x, y)$ la profundidad batimétrica, $H = \eta + h$ la profundidad total, $p(x, y, t)$ y $q(x, y, t)$ los flujos integrados en la vertical en direcciones x e y , respectivamente. Los términos $\sum f_x$ y $\sum f_y$ representan la suma de fuerzas externas debidas al viento, a los gradientes de presión atmosférica, a la fricción de fondo, al efecto de Coriolis, a la turbulencia y al oleaje, entre otras (sección 5.4.4). Conocidos entonces los flujos p y q , podemos resolver la ecuación de conservación del contaminante

$$\frac{\partial \tilde{C}}{\partial t} + p \frac{\partial \tilde{C}}{\partial x} + q \frac{\partial \tilde{C}}{\partial y} = \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial x} \left(h \tilde{\epsilon}_x \frac{\partial \tilde{C}}{\partial x} \right) + \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial y} \left(h \tilde{\epsilon}_y \frac{\partial \tilde{C}}{\partial y} \right) + S. \tag{3.7.23}$$

donde \bar{C} es el valor promedio integrado en la vertical y los coeficientes de difusión turbulenta representan valores integrados en la vertical. Su derivación es explicada en forma rigurosa por Rutherford (1994).

3.7.4. Ejemplo de emisarios de descarga

Un emisario submarino es una tubería mediante el cual se bombean diferentes tipos de efluentes para conducirlos a una profundidad y distancia de la costa que promueva un proceso de mezcla eficiente. Para el caso de las **aguas servidas**, los emisarios tienen el objetivo de reducir los coliformes mediante tres procesos fundamentales: i) la dilución inicial, ii) la difusión horizontal y iii) el decaimiento de coliformes. El último proceso, de carácter reactivo, se debe a que las bacterias fecales mueren gradualmente debido a la luz ambiente, la salinidad, los nutrientes y las interacciones ecológicas con otras especies.

Un emisario usualmente termina con un difusor, constituido por portas (boquillas) que facilitan la difusión del agua en el cuerpo receptor. La ubicación del difusor deben garantizar que la pluma de descarga llegue a la costa con una concentración menor a la aceptable por normas específicas, y se determina mediante modelos matemáticos de advección, difusión y reacción que se alimentan con mediciones in situ.

La Figura 3.7.3 ilustra un modelo físico de una descarga de boyantes positiva, similar a la de una descarga de aguas servidas, en la que se muestra los complejos patrones hidrodinámicos y de mezcla. En el campo cercano, el proceso de mezcla está dominado por la boyantes y el momentum de la descarga. El efluente se denomina activo pues genera modificaciones en el patrón hidrodinámico del medio. En el campo lejano, el proceso de mezcla está dominado por las corrientes oceánicas, que pueden ser forzadas por vientos, mareas, oleaje o gradientes densimétricos, entre otros. En esta zona el efluente se denomina pasivo pues genera modificaciones en el patrón hidrodinámico del medio. En la Figura 3.7.3 se muestra también una imagen de un emisario descargando a boca llena y el lanzamiento del difusor de HDPE (polietileno de alta densidad) constituido por risers y dos boquillas horizontales que descargan en sentido transversal al eje emisario.

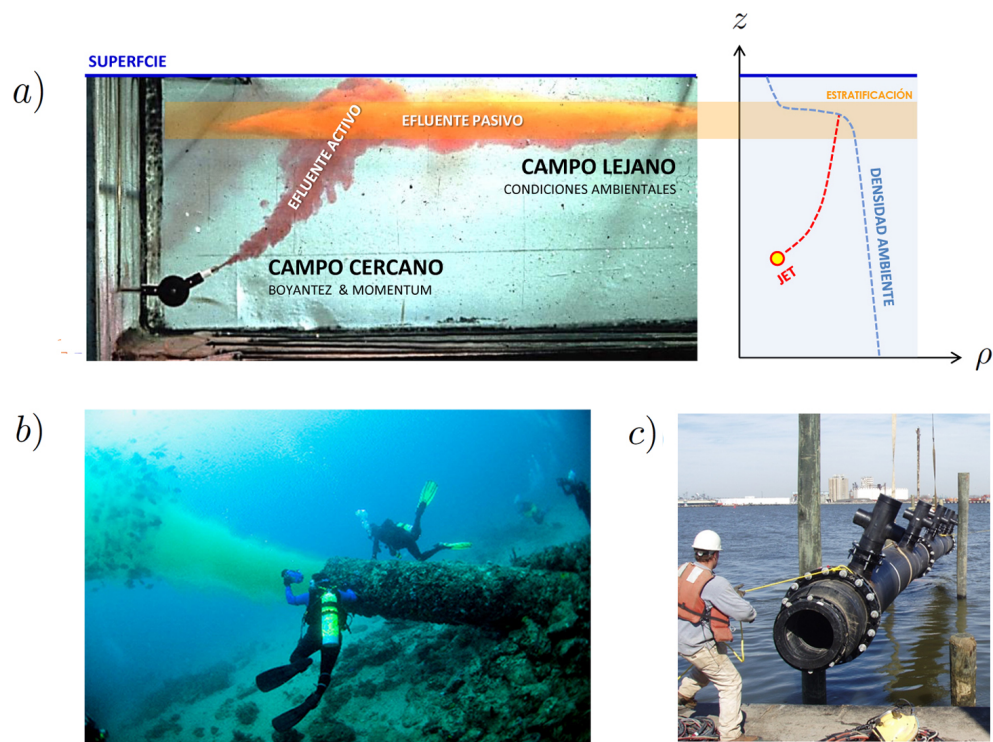


Figura 3.7.3: a) Modelo físico de una descarga de boyantes positiva, similar a la de una descarga de aguas servidas, donde se notan dos regímenes claramente definidos (Fuente: Experimento por Gerhard Jirka). b) Emisario de descarga de aguas servidas en Delrey Beach, Florida, descargando a boca llena, sin difusores, del orden de 15 a 20 millones de galones al día (Foto tomada por Steve Spring, disponible en Marine Photobank). c) Faena de lanzamiento de el difusor de un emisario submarino.

Capítulo 4

Introducción a las diferencias finitas

En esta parte se introducen aspectos fundamentales de la resolución de las ecuaciones mediante diferencias finitas. Se utiliza la ecuación de advección-difusión-reacción como excusa para ejemplificar conceptos de modelado numérico tales como discretización, estabilidad y convergencia. Esta elección se basa en que la ecuación es lineal y por ende facilita la asimilación de estos conceptos. Asimismo, los procesos físicos que gobiernan la mezcla son relativamente simples y pueden también ser utilizados como analogía para explicar otros fenómenos como la difusión de momentum, que aparece en alguna de las versiones simplificadas de las ecuaciones de Navier-Stokes. En este texto sólo presento esquemas de modelado en diferencias finitas bajo el único argumento que son a los que más he estado expuesto. El lector debe estar consciente de que existen técnicas como los volúmenes finitos, los elementos finitos, los problemas de contorno (boundary value problems) o los métodos SPH (smooth particle hydrodynamics) que ofrecen alternativas a las diferencias finitas. Esta parte puede complementarse con el texto introductorio de Moin (2010).

4.1. Componentes de un problema de mecánica de fluidos

Antes de comenzar con esta materia, cabe preguntarse por qué necesitamos utilizar métodos numéricos para resolver las ecuaciones que describen los procesos físicos de interés (e.g. ecuaciones de conservación de la masa, momentum y energía; ecuación de advección, difusión y reacción). La primera razón es que mediante su resolución podemos conocer el comportamiento de la función objetivo en el tiempo y en el espacio; comportamiento que no es siempre claro cuando la función está expresada en forma diferencial. La segunda razón es que, en gran parte de los problemas reales, no es posible encontrar una expresión analítica de la función objetivo utilizando métodos de integración en el mundo continuo. Ello se debe, entre otras razones, a que i) el medio sobre el cual ocurren los procesos físicos es irregular, ii) las condiciones iniciales y de borde son complejas y iii) los parámetros utilizados en las ecuaciones pueden no ser constantes en el tiempo o el espacio.

Los elementos necesarios para encontrar una solución numérica a un problema en mecánica de fluidos en general (y en problemas de procesos costeros en particular) son los siguientes:

- **Un modelo matemático** que comprende las ecuaciones de gobierno para resolver la función objetivo, condiciones iniciales, condiciones de borde, las dimensiones del problema (1D, 2D o 3D), el sistema de coordenadas y el nivel de aproximación adecuado al problema.

Por ejemplo, en el problema de la difusión en 1D con coeficiente de difusión constante y coordenadas cartesianas, la ecuación de gobierno para resolver la función objetivo $C(x, t)$ es

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, \quad a < x < b, \quad t > 0, \quad (4.1.1)$$

sujeta a la condición inicial

$$C(x, 0) = F(x), \quad a < x < b, \quad (4.1.2)$$

donde F es una función arbitraria que no depende del tiempo, y dos condiciones de borde, que pueden ser de diferente naturaleza (sección 3.6). Para un caso donde se define el valor de la función (tipo Dirichlet) en ambos contornos, las condiciones se definen según las expresiones

$$C(a, t) = G(t), \quad \text{y} \quad C(b, t) = H(t), \quad t > 0, \quad (4.1.3)$$

donde G y H son también funciones arbitrarias que no dependen del espacio. La exactitud de la solución numérica de este sistema dependerá de la malla numérica y del esquema de discretización utilizado.

- Una **malla numérica** que corresponde a una discretización del dominio geométrico donde se resuelve el modelo matemático. Existen mallas estructuradas, mallas estructuradas con submallas de diferente resolución o forma y mallas no estructuradas como se ilustra en la Figura 4.1.1, además de métodos numéricos de tipo lagrangiano donde no se utilizan mallas, como los SPH (smooth particle hydrodynamics). Existen asimismo, mallas que se adaptan en función de los gradientes de la función objetivo (adaptive mesh refinement) y que son utilizadas, por ejemplo, para el modelado de tsunamis en el campo lejano.

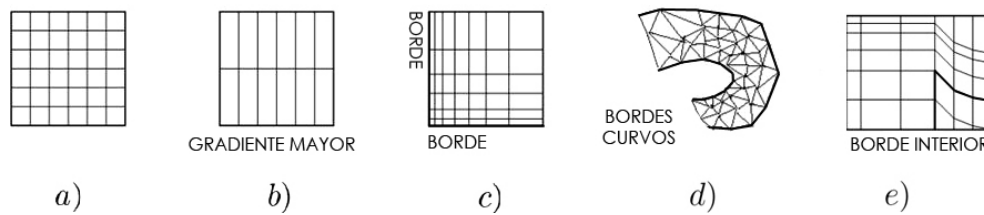


Figura 4.1.1: Tipos de mallas utilizadas para discretizar el dominio espacial. a) malla con elementos cuadrados, b) malla con elementos rectangulares, c) malla con elementos rectangulares de tamaño variable, d) malla curvilínea y e) malla estructurada con submalla de diferente forma. La malla con elementos cuadrados a) es adecuada para flujos o geometrías relativamente isotrópicas, esto es, que posee las mismas propiedades en todas las direcciones. La malla con elementos rectangulares b) es útil para flujos donde existe un gradiente horizontal mayor que el vertical. La malla con elementos rectangulares de tamaño variable c) permite caracterizar el flujo como la capa límite en los bordes sólidos. La malla curvilínea d) es adecuada para geometrías irregulares. Finalmente, la malla estructurada con submalla de diferente forma e) permite caracterizar flujos con regiones diferentes, como el vertedero de la Figura 2.4.3. La Figura 4.8.3 ilustra ejemplos de aplicación de a) y d) en la modelación de procesos costeros.

En la sección 4.8 se profundiza en esta material.

- Un **método numérico**, entre los que destacan las diferencias finitas, volúmenes finitos, elementos finitos, boundary element methods, esquemas espectrales y combinaciones de éstos.
- Un **algoritmo**, que es una serie finita de pasos a realizar siguiendo el esquema de discretización en un orden específico, y que se escribe en un lenguaje de programación.

Una buena analogía al algoritmo es una receta de un pastel. En primer lugar, en la receta se presentan los ingredientes y herramientas necesarias, lo que en el algoritmo corresponde a la inicialización de las variables. Luego en la receta se describe una serie de pasos a seguir hasta alcanzar el producto final, entre los que están la mezcla de los ingredientes, el uso del horno y la disposición de la cubierta con chocolate, por ejemplo. En el algoritmo esta etapa corresponde a la resolución de las ecuaciones, el almacenamiento de los datos, la visualización de los resultados y el cierre del algoritmo. Durante la elaboración de pastel se requiere de procesos iterativos que tienen una directa analogía con el algoritmo: se debe revolver sistemáticamente la masa hasta alcanzar una mezcla homogénea, lo que en el algoritmo correspondería a una iteración, mediante ciclos for o while, hasta alcanzar un criterio de término asociado normalmente a una tolerancia de cálculo, al fin del tiempo de cómputo o a los límites espaciales del dominio.

- Un **método de solución** que considera cómo resolver en el tiempo y/o en el espacio las ecuaciones discretas (e.g. Euler, Runge-Kutta, Lax-Wendroff, Adams-Bashforth-Moulton), los métodos de factorización para resolver los sistema lineales, especialmente asociados a esquemas implícitos (e.g. LU, LDU, QR) y cómo tratar los términos no lineales, entre otros. Dada la naturaleza introductoria de este texto, en este libro no profundizamos en esta materia.

En este texto abarcaremos la discretización de ecuaciones continuas mediante el esquema de diferencias finitas. Una de las gracias de esta técnica es que permite reemplazar un problema planteado en ecuaciones diferenciales sobre un dominio continuo por uno equivalente en operaciones matemáticas simples (sumas, restas, multiplicaciones y divisiones) sobre un dominio discreto (Figura 4.1.2). Puesto que el objeto de estas notas es presentar los fundamentos del modelado numérico en forma simple, salvo excepciones, se utilizan esquemas sencillos, mallas regulares y ecuaciones lineales unidimensionales en coordenadas cartesianas. Para simplificar la notación, definimos la siguiente equivalencia entre las funciones continuas y discretas:

$$C(x, y, z, t) \longleftrightarrow C_{(i,j,k)}^\tau, \tag{4.1.4}$$

Para una sola dimensión espacial omitiremos el paréntesis en el subíndice:

$$C(x, t) \longleftrightarrow C_i^\tau. \tag{4.1.5}$$

La coordenada espacial se discretiza como

$$x_i = a + (i - 1) \Delta x, \quad \text{con } i = 1, \dots, N \quad \text{y} \quad \Delta x = \frac{b - a}{N - 1}, \tag{4.1.6}$$

donde los bordes corresponden a $x_1 = a$ y $x_N = b$. El tiempo se discretiza como

$$t_\tau = (\tau - 1) \Delta t, \quad \text{con } \tau = 1, \dots, T, \tag{4.1.7}$$

donde el nivel τ se refiere a la información conocida en el presente. Asumimos por simplicidad que Δx y Δt son constantes. El modelo matemático de un problema 1D en el tiempo y espacio se puede graficar en un plano $x-t$ como el de la Figura 4.1.2. Como veremos en adelante, el pasar de ecuaciones continuas en derivadas parciales a ecuaciones discretas implica resolver operaciones básicas (sumas, restas, multiplicaciones y divisiones), lo que simplifica el cálculo. En contraste, al resolver un problema discreto sólo se obtiene una aproximación discontinua de la función objetivo en el tiempo y el espacio.

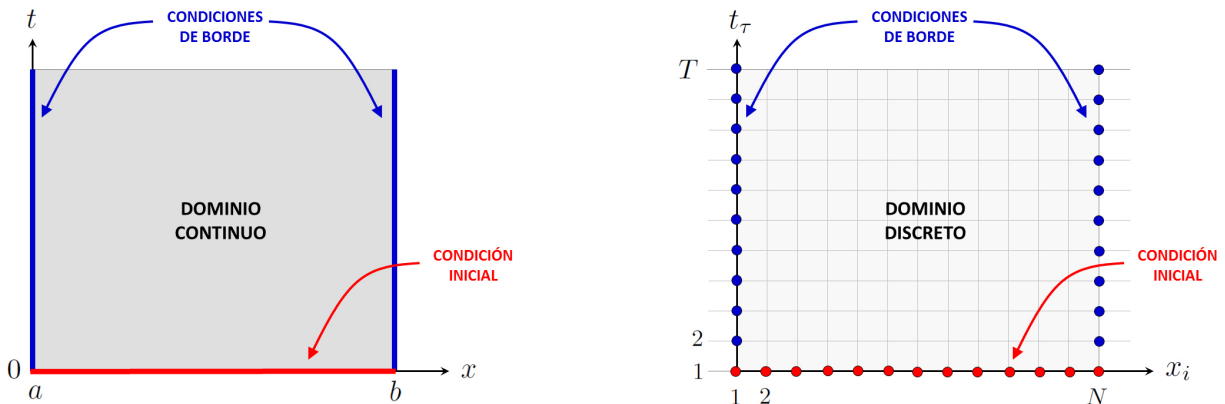


Figura 4.1.2: El modelo matemático de la difusión consistente en una ecuación de gobierno en derivadas parciales, condiciones iniciales y de borde (4.1.1 a 4.1.3) en un dominio continuo como el de la izquierda, puede aproximarse a una ecuación de gobierno, condiciones iniciales y de borde en diferencias finitas en un dominio discreto como el de la derecha.

4.2. Expresiones aproximadas de derivadas

En esta sección se derivan las expresiones utilizadas en la discretización de las ecuaciones de conservación mediante diferencias finitas. La aproximación se basa en la serie de Taylor (sección 9.1.2), que corresponde a una suma de potencias enteras de polinomios como $(x - a)^n$ que se calcula a partir de las derivadas de la función para un punto a suficientemente derivable y un entorno sobre el cual converja la serie. En términos matemáticos, la serie de Taylor tiene la siguiente expresión

$$f(x) = f(a) + f^{(1)}(a) \frac{(x-a)}{1!} + f^{(2)}(a) \frac{(x-a)^2}{2!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(a) \frac{(x-a)^n}{n!}, \quad (4.2.1)$$

donde $f^{(n)} = \partial^n f / \partial x^n$. Esta aproximación de funciones tiene por ventaja que la derivación e integración se puede realizar término a término mediante operaciones triviales. Las funciones que tienen una singularidad no pueden ser aproximadas por una serie de Taylor en cuyo caso se puede recurrir a las series de Laurent.

En la presente derivación utilizamos una versión sutilmente diferente de la serie de Taylor, buscando relacionar la función en un punto x respecto de los puntos colindantes. Para ello se asume que la función $f(x)$ y todas sus derivadas son conocidas. Usando la expansión de Taylor para dos puntos ubicados en $f(x + \Delta x)$ y $f(x - \Delta x)$

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f^{(1)}(x) \Delta x + f^{(2)}(x) \frac{\Delta x^2}{2} + \dots + f^{(n-1)}(x) \frac{\Delta x^{n-1}}{(n-1)!} + \mathcal{O}\left(f^{(n)}(x), \Delta x^n\right), \quad (4.2.2)$$

$$f(x - \Delta x) = f(x) - f^{(1)}(x) \Delta x + f^{(2)}(x) \frac{\Delta x^2}{2} - \dots + f^{(n-1)}(x) \frac{\Delta x^{n-1}}{(n-1)!} (-1)^{n-1} + \mathcal{O}\left(f^{(n)}(x), \Delta x^n\right), \quad (4.2.3)$$

donde $\mathcal{O}\left(f^{(n)}(x), \Delta x^n\right)$ representa el orden del error de aproximación de la solución, que depende del valor de la derivada evaluada en el punto de referencia $f^{(n)}(x)$ y del tamaño de la grilla Δx . Cabe mencionar que signo del error es irrelevante, pues no sabemos a priori si la aproximación es por exceso o defecto. Puesto que las derivadas son continuas y su valor acotado, suele sólo considerarse el tamaño de la grilla en la expresión del error, i.e. $\mathcal{O}(\Delta x^n)$. En el caso de ecuaciones con dependencia temporal o espacial, el error se expresa de forma $\mathcal{O}(\Delta x^n, \Delta t^m)$. En lo sucesivo se presenta la derivación para derivadas de primer, segundo y orden n .

4.2.1. Derivadas de primer orden

Las derivadas de primer orden aparecen de manera natural en las ecuaciones utilizadas en mecánica de fluidos. Para su discretización se pueden utilizar diversas expresiones que se traducen en diferentes errores en la aproximación de la ecuación diferencial. Para la **diferencia avanzada** (progresiva, adelantada, posterior o forward difference), la primera derivada se obtiene de reescribiendo la ecuación (4.2.2) como

$$f^{(1)}(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} - \mathcal{O}(\Delta x). \quad (4.2.4)$$

En este esquema, la primera derivada tiene un error en la aproximación de $\mathcal{O}(\Delta x)$ y requiere de un stencil (o arreglo) de dos puntos en el espacio (Figura 4.2.1). Para la **diferencia retrasada** (regresiva, atrasada, anterior o backward difference), la ecuación (4.2.3) se escribe como

$$f^{(1)}(x) = \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x} - \mathcal{O}(\Delta x), \quad (4.2.5)$$

que tiene un error en la aproximación de $\mathcal{O}(\Delta x)$ y considera un stencil de dos puntos en el espacio (Figura 4.2.1). Para la **diferencia centrada**, se resta (4.2.3) de (4.2.2) para obtener

$$f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x) = 2f^{(1)}(x) \Delta x + 2f^{(3)}(x) \frac{\Delta x^3}{3!} + \dots \quad (4.2.6)$$

que dividiendo por Δx , da

$$f^{(1)}(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x} - \mathcal{O}(\Delta x^2). \quad (4.2.7)$$

Esta expresión tiene un error en la aproximación de $\mathcal{O}(\Delta x^2)$ que -dado que Δx es pequeño- es bastante menor que el $\mathcal{O}(\Delta x)$ obtenido para las diferencias avanzadas o retrasadas. El aumento de exactitud de la diferencia centrada se logra a costa de utilizar un elemento más en el stencil de cómputo (Figura 4.2.1). Se pueden obtener expresiones de mayor exactitud para la primera derivada, como la siguiente (Moin, 2010)

$$f^{(1)}(x) = \frac{-f(x + 2\Delta x) + 8f(x + \Delta x) - 8f(x - \Delta x) + f(x - 2\Delta x)}{12\Delta x} - \mathcal{O}(\Delta x^4). \quad (4.2.8)$$

En este caso, el stencil espacial abarca 4 puntos, pero cubre espacialmente 5, pues el punto central no se considera en el cálculo (Figura 4.2.1). En general, la exactitud de la aproximación de la derivada depende de *i*) la cantidad de términos en la expansión de Taylor y *ii*) el tamaño de la grilla.

4.2.2. Derivadas de segundo orden

Las derivadas de segundo orden también aparecen en las ecuaciones de conservación, como por ejemplo, en la ecuación de difusión o el término de viscosidad turbulenta en las ecuaciones de momentum (2.5.15, 2.5.16). La discretización de estos términos se puede hacer de diversas formas. Por ejemplo, para la **diferencia centrada**, se suma (4.2.2) y (4.2.3)

$$f(x + \Delta x) + f(x - \Delta x) = 2f(x) + 2f^2(x) \frac{\Delta x^2}{2} + 2f^4(x) \frac{\Delta x^4}{4!} + \dots \quad (4.2.9)$$

que reordenando y dividiendo por Δx^2 , da

$$f^{(2)}(x) = \frac{f(x + \Delta x) - 2f(x) + f(x - \Delta x)}{\Delta x^2} - \mathcal{O}(\Delta x^2). \quad (4.2.10)$$

Esta expresión tiene un error en la aproximación de $\mathcal{O}(\Delta x^2)$ y también requiere de un stencil de tres puntos en el espacio. Cabe mencionar que si la ecuación diferencial tiene derivadas espaciales de diferente orden, la discretización de cada término debe ser consistente, es decir, debe tener el mismo orden de aproximación del error para cada término. Por ejemplo, en la ecuación de advección difusión

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, \quad (4.2.11)$$

el término advectivo debiera ser resuelto con una diferencia centrada cuyo error es de orden $\mathcal{O}(\Delta x^2)$ que es consistente con el término difusivo, que es también de orden $\mathcal{O}(\Delta x^2)$. Si se usa una diferencia avanzada o retrasada para el término advectivo, se degrada la exactitud de la ecuación a $\mathcal{O}(\Delta x)$, aun cuando se haga un esfuerzo computacional en resolver el término difusivo con un orden mayor.

El problema de las derivadas espaciales de orden superior radica en los bordes pues requieren de puntos ubicados fuera del dominio físico. Una posible solución es utilizar aproximaciones de menor orden en los bordes, lo que de suyo degrada la solución en su vecindad. La otra alternativa es buscar expresiones en el contorno que sean consistentes con el orden de aproximación de la expresión al interior del dominio, lo que requiere de un trabajo algebraico suplementario.

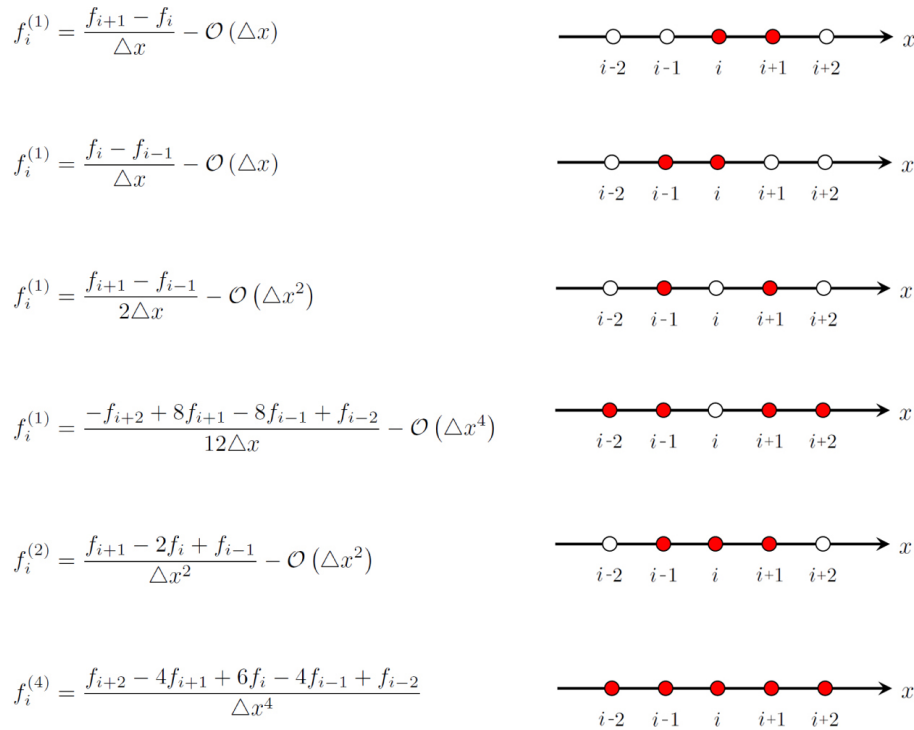


Figura 4.2.1: Stencils utilizados para derivadas de primer, segundo y cuarto orden.

4.2.3. Derivadas de orden n-ésimo

Las derivadas de orden mayor son menos frecuentes pero aparecen también en algunas ecuaciones. Un ejemplo lo constituye el término dispersivo en la ecuación de Boussinesq (5.4.162), constituido por una tercera derivada, y que es explicado en la sección de modelos de oleaje. La expresión de una **diferencia centrada** de orden n es

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{\Delta x^n} \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} f\left(x + \left[\frac{n}{2} - i\right] \Delta x\right), \quad \text{con} \quad \binom{n}{i} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad (4.2.12)$$

Por ejemplo, para $i = 2$, la expresión anterior se traduce en

$$f^{(2)}(x) = \frac{1}{\Delta x^2} \left\{ (-1)^0 \binom{2}{0} f\left(x + \left[\frac{2}{2} - 0\right] \Delta x\right) \dots \right. \\ \left. + (-1)^1 \binom{2}{1} f\left(x + \left[\frac{2}{2} - 1\right] \Delta x\right) + (-1)^2 \binom{2}{2} f\left(x + \left[\frac{2}{2} - 2\right] \Delta x\right) \right\} \quad (4.2.13)$$

que simplificando permite obtener la diferencia centrada de segundo orden

$$f^{(2)}(x) = \frac{f(x + \Delta x) - 2f(x) + f(x - \Delta x)}{\Delta x^2}. \quad (4.2.14)$$

Análogamente, para $i = 4$ se obtiene la diferencia centrada de cuarto orden

$$f^{(4)}(x) = \frac{f(x + 2\Delta x) - 4f(x + \Delta x) + 6f(x) - 4f(x - \Delta x) + f(x - 2\Delta x)}{\Delta x^4}, \quad (4.2.15)$$

que requiere un stencil de 5 puntos en el espacio para su cálculo. Esta aproximación, lamentablemente, no incluye el orden de aproximación de la expresión. Para tener una visión más amplia de los esquemas de discretización, recomiendo visitar Eberly (2015).

4.3. Esquemas explícitos, implícitos y semi-implícitos

En el estudio de procesos costeros, buscamos solucionar ecuaciones en derivadas parciales mediante métodos numéricos que discretizan el espacio y el tiempo. Para ello se dispone de esquemas explícitos, implícitos y semi-implícitos, que como veremos en esta sección, se determina a partir del tipo de discretización. Los métodos explícitos permiten estimar el estado del sistema en un momento posterior al actual, siendo este último conocido. Los métodos implícitos y semi-implícitos, en contraste, consideran tanto en estado actual como el posterior, que es desconocido. En términos prácticos esto condiciona el tipo de técnicas matemáticas de resolución. En este capítulo introducimos diferentes esquemas mediante el estudio de la ecuación de difusión en una dimensión, que por ser lineal, simplifica el análisis.

4.3.1. Esquemas explícitos

Comencemos con un modelo de difusión en una dimensión donde el coeficiente de difusión se considera constante y lo nombramos como $D_x \equiv D$. Para este modelo, la expresión de la difusión (3.2.10) se reduce a

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}. \quad (4.3.1)$$

Implementemos el esquema más sencillo de discretización numérica en el cual la derivada temporal se discretiza mediante diferencias avanzadas

$$\frac{\partial C}{\partial t}(x, t) = \frac{C(x, t + \Delta t) - C(x, t)}{\Delta t} - \mathcal{O}(\Delta t), \quad (4.3.2)$$

y la derivada espacial mediante diferencias centradas

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}(x, t) = \frac{C(x + \Delta x, t) - 2C(x, t) + C(x - \Delta x, t)}{\Delta x^2} - \mathcal{O}(\Delta x^2). \quad (4.3.3)$$

En estas expresiones se asume que los intervalos espacial y temporal son constantes. Utilizando la notación (4.1.5), las expresiones para las derivadas en forma discreta son

$$\frac{\partial C^\tau}{\partial t}_i = \frac{C_i^{\tau+1} - C_i^\tau}{\Delta t} - \mathcal{O}(\Delta t), \quad \frac{\partial^2 C^\tau}{\partial x^2}_i = \frac{C_{i+1}^\tau - 2C_i^\tau + C_{i-1}^\tau}{\Delta x^2} - \mathcal{O}(\Delta x^2).$$

Introduciendo estas expresiones en (4.3.1) da

$$\frac{C_i^{\tau+1} - C_i^\tau}{\Delta t} - D \left(\frac{C_{i+1}^\tau - 2C_i^\tau + C_{i-1}^\tau}{\Delta x^2} \right) = \mathcal{O}(\Delta x^2, \Delta t), \quad (4.3.4)$$

Encontramos entonces una expresión explícita para la concentración en el tiempo $\tau + 1$, a partir de valores que han sido calculados en el tiempo τ . Por simplicidad, denominemos el factor $A \equiv D\Delta t/\Delta x^2$ y aislamos el término desconocido

$$C_i^{\tau+1} = C_i^\tau + A(C_{i+1}^\tau - 2C_i^\tau + C_{i-1}^\tau), \quad (4.3.5)$$

o

$$C_i^{\tau+1} = AC_{i+1}^\tau + (1 - 2A)C_i^\tau + AC_{i-1}^\tau, \quad (4.3.6)$$

donde el error ha sido omitido por simplicidad. Esta expresión corresponde a un conjunto de ecuaciones lineales independientes que pueden escribirse en forma matricial como sigue:

$$\begin{pmatrix} C_1^{\tau+1} \\ C_{i-1}^{\tau+1} \\ C_i^{\tau+1} \\ C_{i+1}^{\tau+1} \\ C_N^{\tau+1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & & & \\ & A & (1-2A) & A & \\ & & A & (1-2A) & A \\ & & & A & (1-2A) & A \\ & & & & a_{N,N-1} & a_{N,N} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} C_1^\tau \\ C_{i-1}^\tau \\ C_i^\tau \\ C_{i+1}^\tau \\ C_N^\tau \end{pmatrix}, \quad (4.3.7)$$

donde los coeficientes de la primera y última filas incorporan las condiciones de borde, que pueden ser de diferente naturaleza, según se explica teóricamente en la sección 3.6 y se implementa en la sección 4.4. En forma vectorial, esta expresión se escribe como

$$\{C\}^{\tau+1} = \mathbf{A} \{C\}^\tau, \quad (4.3.8)$$

donde los coeficientes de \mathbf{A} son constantes. Este sistema de ecuaciones es muy simple de evaluar pues cada ecuación es independiente de las restantes. El uso de la expresión matricial en este caso no es estrictamente necesario pero, como se verá en adelante, es útil para los esquemas implícitos o semi-implícitos.

Cabe notar que el orden de aproximación del esquema numérico FTCS es bastante bajo, $\mathcal{O}(\Delta x^2, \Delta t)$, lo que implica que la exactitud de la solución aproximada es también baja tanto en el tiempo como en el espacio (aun cuando podría incluso ser peor en el espacio). Para garantizar la estabilidad del algoritmo, en la sección 4.7.1 se demuestra que es necesario cumplir la condición

$$0 \leq \frac{D\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}. \quad (4.3.9)$$

Esta condición se conoce como la condición de Courant, y limita la longitud del paso temporal que es necesario elegir una vez se ha elegido un paso espacial. En la Figura 4.3.1 se ilustra la solución para el problema de difusión en una dimensión mediante el esquema explícito FTCS (en rojo) respetando y violando la condición de estabilidad.

La solución de (4.3.5) requiere además de la definición de condiciones iniciales, i.e.

$$C_i^1 = F_i^1, \quad \forall i = 1, \dots, N, \quad (4.3.10)$$

y de borde, cuya expresión depende del problema a resolver. La solución del algoritmo (4.3.5) es bastante sencilla, pues se va calculando $C_i^{\tau+1}$ a partir de valores calculados en la iteración temporal anterior. Nota que si se usaren intervalos irregulares, los intervalos espaciales y temporal dependerían del punto e instante en que se evalúan, esto es Δx_i y Δt^τ . La Figura 4.3.2a presenta el esquema numérico FTCS para resolver la ecuación de difusión en una dimensión, en tanto que la Figura 4.3.2d considera 5 elementos para calcular la derivada espacial, utilizando la ecuación (4.2.15).

4.3.2. Esquemas implícitos

Implementemos ahora un esquema numérico en el cual la derivada temporal se discretiza mediante diferencias avanzadas (4.3.2) y la derivada espacial mediante diferencias centradas evaluadas en el tiempo $t + 1$. La gracia de este esquema, a diferencia del FTCS, es que no tiene problemas de estabilidad numérica. La segunda derivada se escribe como

$$\frac{\partial^2 C^\tau}{\partial x^2} = \frac{C_{i+1}^{\tau+1} - 2C_i^{\tau+1} + C_{i-1}^{\tau+1}}{\Delta x^2} - \mathcal{O}(\Delta x^2). \quad (4.3.11)$$

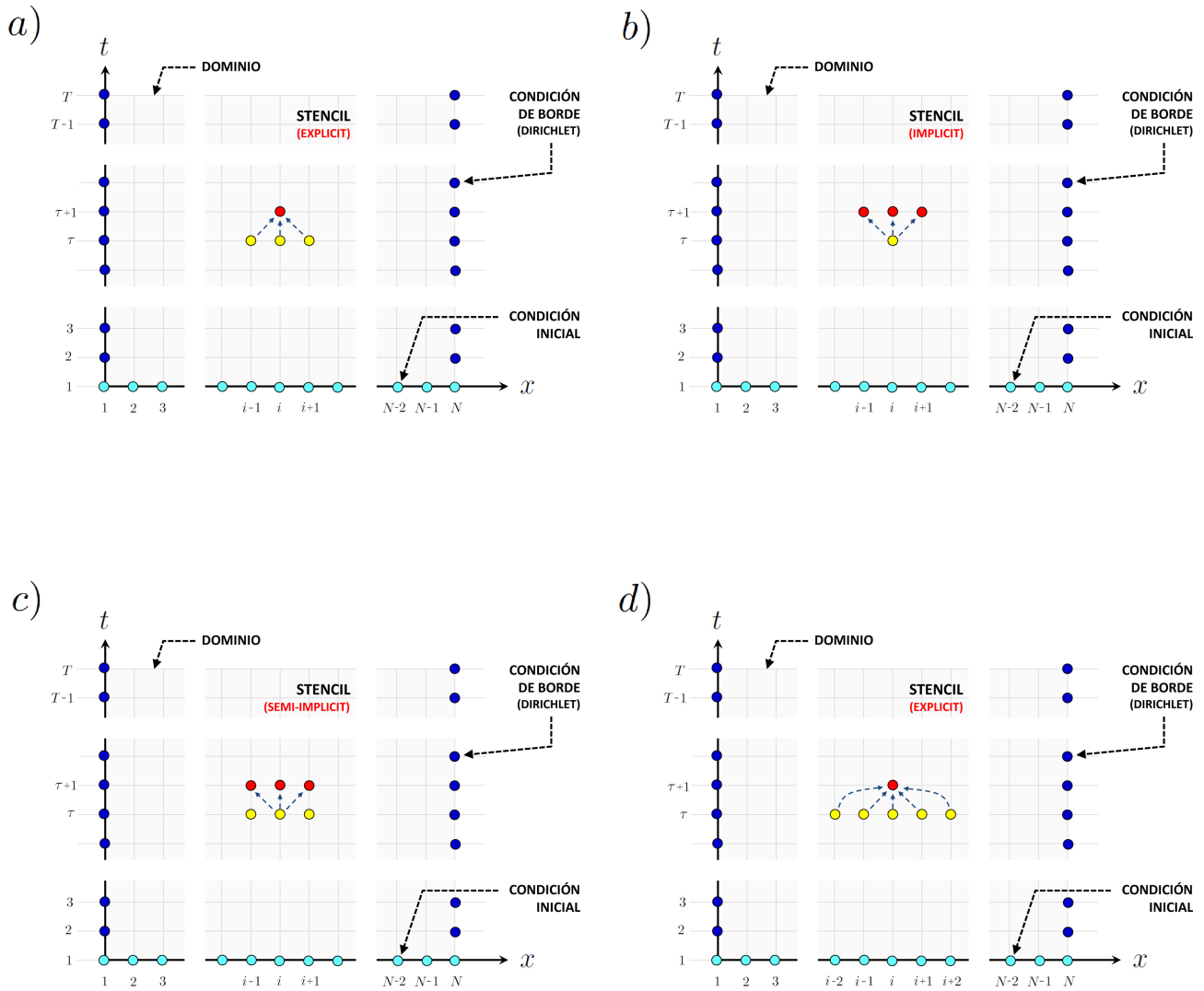


Figura 4.3.2: Esquemas numéricos para resolver la ecuación de difusión en una dimensión. a) Esquema explícito del tipo FTCS con derivada espacial evaluada en el tiempo τ . b) Esquema implícito con derivada espacial evaluada en el tiempo $\tau + 1$. c) Esquema semi-implícito con derivada espacial evaluada en el tiempo τ y $\tau + 1$. d) Esquema explícito con derivada espacial evaluada en el tiempo τ y un stencil de 5 elementos en el espacio.

dimensiones espaciales del tipo

$$\frac{\partial C}{\partial t} - D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - D_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} = 0, \quad (4.3.16)$$

la matriz correspondiente es pentadiagonal, con las diagonales superior e inferior separadas de la tridiagonal central. Para despejar el vector de incógnitas en (4.3.15), se debe multiplicar por el lado izquierdo con la inversa de la matriz

$$(\mathbf{A}^{-1} \mathbf{A}) \{C\}^{\tau+1} = \mathbf{A}^{-1} \{C\}^{\tau}, \quad (4.3.17)$$

lo que, debido a la identidad $\mathbf{I} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A}$, finalmente da el resultado

$$\{C\}^{\tau+1} = \mathbf{A}^{-1} \{C\}^{\tau}. \quad (4.3.18)$$

Este resultado indica que para obtener una solución, debemos invertir la matriz \mathbf{A} . Ésta asimismo, no debe ser (exactamente o aproximadamente) singular, pues en dicho caso la inversión no es posible. En la práctica, la inversión de matrices es una operación poco eficiente, cuyo costo computacional crece exponencialmente con el número de elementos que la constituyen (ver comentario al final de esta sección). El número de operaciones es una de las medidas, entre muchas, para estimar el costo computacional de un algoritmo. Afortunadamente, en álgebra lineal existen técnicas de factorización que eluden la inversión de matrices. En este punto, te recomiendo que revises textos clásicos de álgebra donde se toca el tema de la inversión, singularidad y los métodos de factorización (e.g. Strang, 2007). Por otra parte, software especializados incorporan solvers de inversión entre sus librerías, pues son de uso masivo en la resolución de este tipo de problemas. Por ejemplo, para resolver la expresión $\mathbf{A}x = b$, siendo \mathbf{A} una matriz y x y b vectores, Matlab, utiliza la expresión $x = \mathbf{A} \setminus b$ que se basa en diferentes tipos de descomposición.

4.3.3. Esquemas semi-implícitos

Podemos combinar esquemas explícitos e implícitos mediante la expresión

$$\frac{C_i^{\tau+1} - C_i^{\tau}}{\Delta t} - D\theta \left(\frac{C_{i+1}^{\tau+1} - 2C_i^{\tau+1} + C_{i-1}^{\tau+1}}{\Delta x^2} \right) - D(1-\theta) \left(\frac{C_{i+1}^{\tau} - 2C_i^{\tau} + C_{i-1}^{\tau}}{\Delta x^2} \right) = \mathcal{O}(\Delta x^2, \Delta t), \quad (4.3.19)$$

donde $0 \leq \theta \leq 1$ es un factor de ponderación. El valor de θ define el esquema numérico según el siguiente esquema:

- Con $\theta = 0$, se recupera el esquema explícito (4.3.4), que es condicionalmente estable.
- Con $\theta = 1/2$, se deriva el método de Crank-Nicolson, que es incondicionalmente estable y no tiene disipación numérica.
- Para $\theta > 1/2$, el método es incondicionalmente estable pero existe disipación numérica.
- Con $\theta = 1$, se recupera el esquema implícito (4.3.12).

Reutilizando la definición $A \equiv D\Delta t/\Delta x^2$ se tiene

$$-A\theta C_{i-1}^{\tau+1} + (1 + 2A\theta) C_i^{\tau+1} - A\theta C_{i+1}^{\tau+1} = A(1-\theta) C_{i-1}^{\tau} + (1 - 2A(1-\theta)) C_i^{\tau} + A(1-\theta) C_{i+1}^{\tau}, \quad (4.3.20)$$

donde el error de $\mathcal{O}(\Delta x^2, \Delta t)$ ha sido omitido por simplicidad. La Figura 4.3.2c presenta el esquema numérico semi-implícito para resolver la ecuación de difusión en una dimensión. Esta expresión corresponde a un conjunto

4.4.1. Condición de borde tipo Dirichlet

En términos matemáticos, para la ecuación de difusión sobre un dominio $a \leq x \leq b$, esta condición se escribe como

$$C(a, t) = G(t), \quad \text{y} \quad C(b, t) = H(t), \quad t > 0, \quad (4.4.1)$$

donde concentración $C(x, t)$ y $G(t)$ y $H(t)$ son funciones arbitrarias. En términos discretos, para un dominio definido por

$$x_i = a + (i - 1) \Delta x, \quad \text{con} \quad i = 1, \dots, N \quad \text{y} \quad \Delta x = \frac{b - a}{N - 1}, \quad (4.4.2)$$

esta expresión se escribe como

$$C_1^{\tau+1} = G^{\tau+1} \quad \text{y} \quad C_N^{\tau+1} = H^{\tau+1}, \quad (4.4.3)$$

donde $G^{\tau+1}$ y $H^{\tau+1}$ son valores conocidos. La correspondiente expresión matricial para un esquema FTCS (ver 4.3.7) se traduce a

$$\begin{Bmatrix} C_1^{\tau+1} \\ C_i^{\tau+1} \\ C_N^{\tau+1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & & \\ & A & (1-2A) & A & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} G^{\tau+1} \\ C_i^{\tau} \\ H^{\tau+1} \end{Bmatrix}, \quad (4.4.4)$$

cuya implementación implica generar un vector $G^{\tau+1}$ y $H^{\tau+1}$ que debe llamarse en cada iteración temporal. En caso que la condición tipo Dirichlet prescriba valores constantes arbitrarias \mathcal{A} y \mathcal{B} en ambos bordes

$$C(a, t) = \mathcal{A}, \quad \text{y} \quad C(b, t) = \mathcal{B}, \quad t > 0, \quad (4.4.5)$$

La matriz se traduce en

$$\begin{Bmatrix} C_1^{\tau+1} \\ C_i^{\tau+1} \\ C_N^{\tau+1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & & \\ & A & (1-2A) & A & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1^{\tau} \\ C_i^{\tau} \\ C_N^{\tau} \end{Bmatrix}, \quad (4.4.6)$$

versión que es más simple que la anterior (4.4.4) pues basta definir la condición inicial para los bordes, es decir $C_1^1 = \mathcal{A}$ y $C_N^1 = \mathcal{B}$.

4.4.2. Condición de borde tipo Neumann

Para este tipo condición se especifica un flujo nulo en los bordes, es decir, los bordes son impermeables. Dado que el flujo difusivo es proporcional al gradiente espacial

$$F^D \propto -\rho D \frac{\partial C}{\partial x}, \quad (4.4.7)$$

para esta condición basta prescribir un gradiente nulo. Para la ecuación de difusión, esto se traduce en las siguientes condiciones de borde

$$\frac{\partial C}{\partial x}(a, t) = 0, \quad \text{y} \quad \frac{\partial C}{\partial x}(b, t) = 0, \quad t > 0. \quad (4.4.8)$$

La forma de implementarlas depende del esquema numérico escogido. Para el FTCS, por ejemplo, se recurre al «stencil» definido por la expresión (4.3.6)

$$C_i^{\tau+1} = AC_{i+1}^\tau + (1 - 2A) C_i^\tau + AC_{i-1}^\tau, \quad (4.4.9)$$

que para los bordes toma las siguientes expresiones:

$$C_1^{\tau+1} = AC_2^\tau + (1 - 2A) C_1^\tau + AC_0^\tau, \quad (4.4.10)$$

y

$$C_N^{\tau+1} = AC_{N+1}^\tau + (1 - 2A) C_N^\tau + AC_{N-1}^\tau, \quad (4.4.11)$$

donde los valores C_0^τ y C_{N+1}^τ son valores que corresponden a nodos fuera del dominio, que hacen que en esta forma no sean útiles y requieran una modificación. Las condiciones de borde se pueden expresar mediante diferencias centradas en el borde, esto es

$$\frac{\partial C^{\tau+1}}{\partial x_1} = \frac{C_2^\tau - C_0^\tau}{2\Delta x} = 0, \quad y \quad \frac{\partial C^{\tau+1}}{\partial x_N} = \frac{C_{N+1}^\tau - C_{N-1}^\tau}{2\Delta x} = 0, \quad (4.4.12)$$

lo que se traduce en

$$C_2^\tau = C_0^\tau, \quad y \quad C_{N+1}^\tau = C_{N-1}^\tau. \quad (4.4.13)$$

Incluyendo estas expresiones en (4.4.10) y (4.4.11) da

$$C_1^{\tau+1} = 2AC_2^\tau + (1 - 2A) C_1^\tau, \quad (4.4.14)$$

y

$$C_N^{\tau+1} = 2AC_{N-1}^\tau + (1 - 2A) C_N^\tau, \quad (4.4.15)$$

por lo que la matriz se traduce en

$$\begin{pmatrix} C_1^{\tau+1} \\ C_i^{\tau+1} \\ C_N^{\tau+1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} (1 - 2A) & 2A & & & \\ & & A & (1 - 2A) & A \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & 2A & (1 - 2A) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} C_1^\tau \\ C_i^\tau \\ C_N^\tau \end{pmatrix}. \quad (4.4.16)$$

Cabe mencionar que las condiciones de borde (4.4.12) tienen una exactitud del orden de $\mathcal{O}(\Delta x^2)$, que debiera ser consistente con la exactitud de la discretización de las derivadas espaciales de la(s) ecuación(es) de gobierno. En caso de que éstas tengan una exactitud mayor, las condiciones de borde deben ser consistentes.

4.5. Costo computacional de la inversión de matrices

Sin ánimos de presentar una discusión acabada sobre el costo computacional asociado a la inversión de matrices, en esta sección se ilustra el crecimiento exponencial del costo computacional asociado al incremento en la resolución (espacial) del dominio de integración. A modo de ejemplo, contemos el número de operaciones que se requieren para «invertir» un escalar (o matriz de 1x1), una matriz de 2x2 y una matriz de 3x3. Para un escalar a , la inversa no es más que el cociente $1/a$ y por tanto se requiere sólo de 1 operación.

La inversa de una matriz 2x2

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{es} \quad A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}, \quad (4.5.1)$$

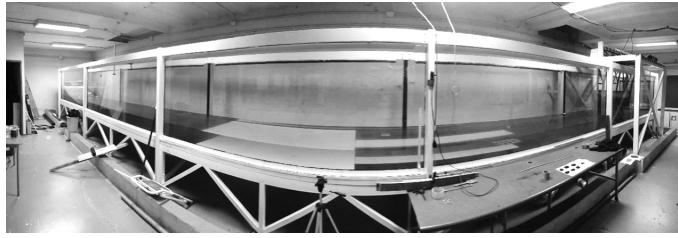


Figura 4.6.1: Canal de oleaje, corrientes y vientos del Laboceano, en la universidad de Valparaíso.

donde el determinante viene dado por

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \quad (4.5.2)$$

Para calcular la inversa se requieren 3 operaciones para calcular el determinante, 1 operación para calcular $1/\det A$, 4 operaciones para multiplicar el determinante por cada término de la matriz en (4.5.2), 2 cambios de posición de un elemento a otra posición en la diagonal principal y 2 operaciones para cambiar el signo de la diagonal opuesta. Si el cambio de ubicación es considerado como una operación, se tienen en total 12 operaciones.

Por otra parte, la inversa de una matriz 3×3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (4.5.3)$$

es

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} & a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33} & a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22} \\ a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33} & a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} & a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23} \\ a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31} & a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32} & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{bmatrix}, \quad (4.5.4)$$

donde el determinante viene dado por

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}. \quad (4.5.5)$$

En este caso se requieren 17 operaciones para calcular el determinante, 1 operación para calcular $1/\det A$ y 9 operaciones para multiplicar el determinante por cada término de la matriz en (4.5.3). Además, para cada uno de los 9 términos de la matriz, se deben efectuar 3 operaciones, lo que implica 27 operaciones. Para una matriz 3×3 se requieren por tanto 54 operaciones. En resumen, para matrices de 1×1 , 2×2 y 3×3 se requieren 1, 12 y 54 operaciones, respectivamente, y el aumento crece en forma exponencial a medida que aumenta la cantidad de elementos.

4.6. Un ejemplo de la ecuación de advección-difusión

Consideremos un experimento donde se estudian los procesos de difusión turbulenta y advección mediante un ensayo en modelo físico en el canal del Labocéano, en la Universidad de Valparaíso (Figura 4.6.1). Este experimento consiste en verter la rodamina en agua fluyendo a velocidad aproximadamente constante. A partir de videos obtenidos en una ventana de análisis (Figura 4.6.2) y mediante un post-proceso donde se identifica la mancha para diferentes instantes de tiempo (Figura 4.6.3), se busca calcular un coeficiente de difusión turbulenta y la velocidad de advección de la mezcla (Winckler et al., 2020).

Derivación de la ecuación de gobierno

En el experimento, la concentración instantánea y puntual, $c(x, y, z, t)$, está definida por la ecuación de advección-difusión turbulenta

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (Uc) + \frac{\partial}{\partial y} (Vc) + \frac{\partial}{\partial z} (Wc) = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial c}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_y \frac{\partial c}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_z \frac{\partial c}{\partial z} \right), \quad (4.6.1)$$

donde x es la coordenada longitudinal (a lo largo del canal), y la coordenada transversal y z la coordenada vertical, en sentido creciente desde el fondo a la superficie. Dado que se utilizan una sola cámara lateral para captura la evolución de la rodamina, no es posible rescatar la estructura tridimensional del flujo, por lo que debemos considerar un modelo matemático que rescata el proceso de mezcla en 2 dimensiones. Definimos, por ello, una niueva concentración como la integración de la concentración instantánea y puntual a lo largo del haz de luz, calculada mediante la expresión¹

$$c(x, z, t) = \int_y c(x, y, z, t) dy \quad (4.6.2)$$

La selección de un modelo 2D se escoge puesto que las imágenes que se utilizan para procesar la información son bidimensionales; esto es, que no se puede inferir la distribución en la dirección perpendicular a la imagen. La ecuación de gobierno para este caso es

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (UC) + \frac{\partial}{\partial z} (WC) = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_z \frac{\partial C}{\partial z} \right), \quad (4.6.3)$$

donde $C(x, z, t)$ corresponde a la concentración media en el ancho del canal. Este tipo de modelo permite resolver la estructura vertical ilustrada en la Figura 4.6.3. Si por simplicidad (para resolver una ecuación 1D siguiendo la lógica del capítulo) se asumen los siguientes supuestos:

- No existe una velocidad neta en la vertical² ($W = 0$),
- El flujo es uniforme $\partial U / \partial x = 0$,
- La difusión es isotrópica $D_x = D_z$ y constante en el espacio $\partial D_x / \partial x = \partial D_z / \partial z = 0$,

entonces la expresión (4.6.1) se reduce a

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D \frac{\partial^2 C}{\partial z^2}. \quad (4.6.4)$$

Con una ecuación como esta, se podrían obtener resultados del tipo indicado en la Figura (4.6.4) , donde

¹Esta expresión asume paralelismo entre los rayos de luz capturados por el lente de la cámara y el eje y , lo que constituye una buena aproximación cuando la cámara está lejos del canal

²Dada la naturaleza turbulenta del flujo, existen fluctuaciones turbulentas en la velocidad vertical.

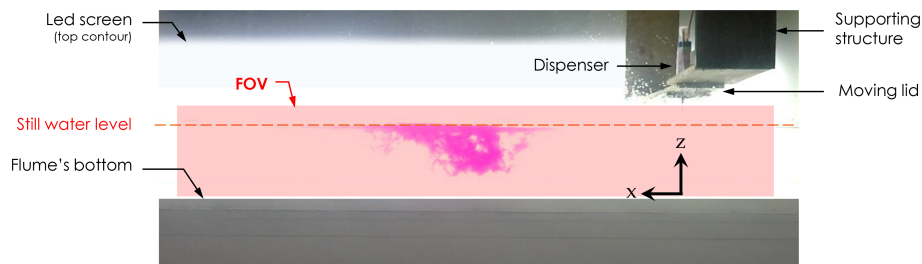


Figura 4.6.2: Canal de oleaje, corrientes y vientos del Laboceano, en la universidad de Valparaíso.

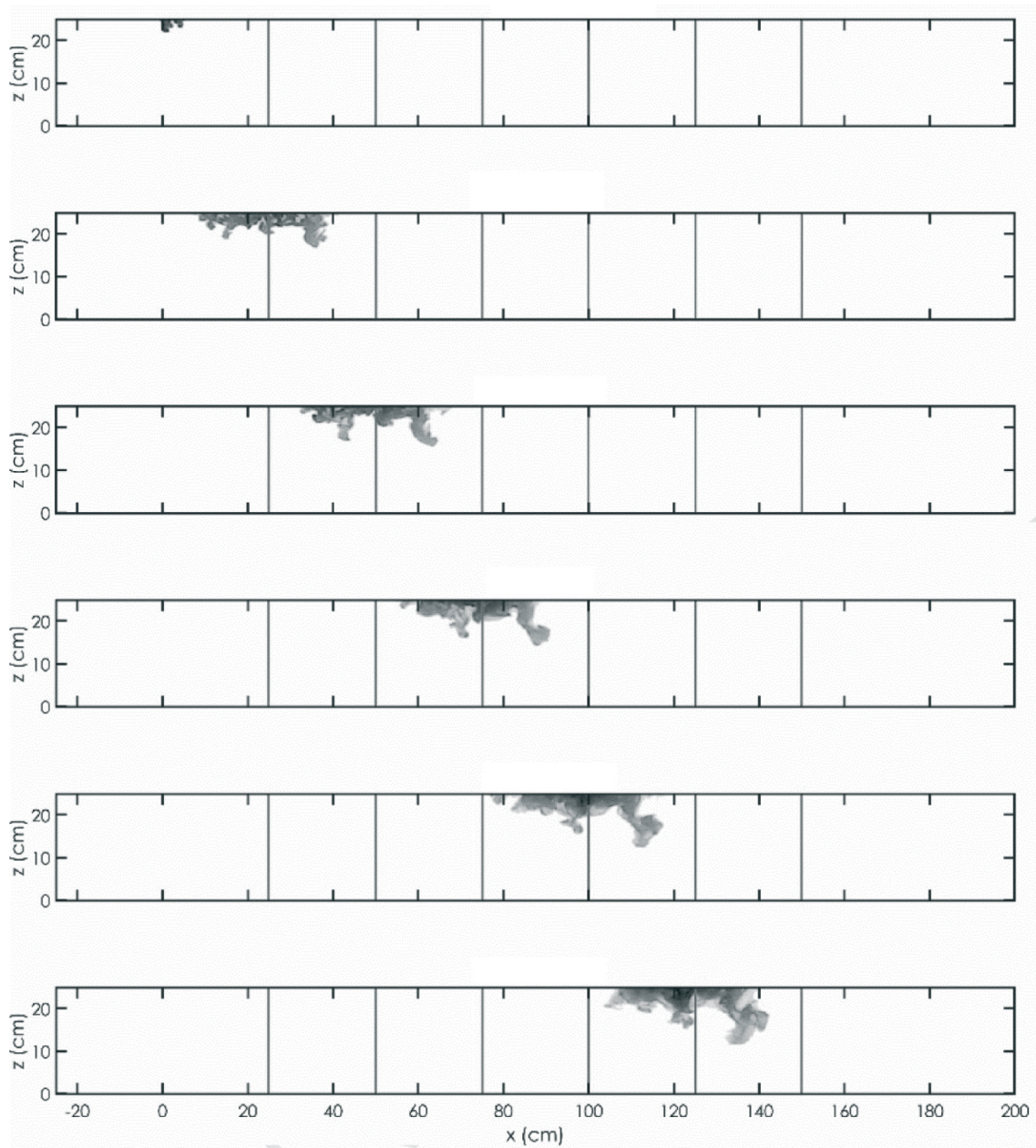


Figura 4.6.3: Imágenes donde se muestra el proceso de mezcla en diferentes intervalos de tiempo.

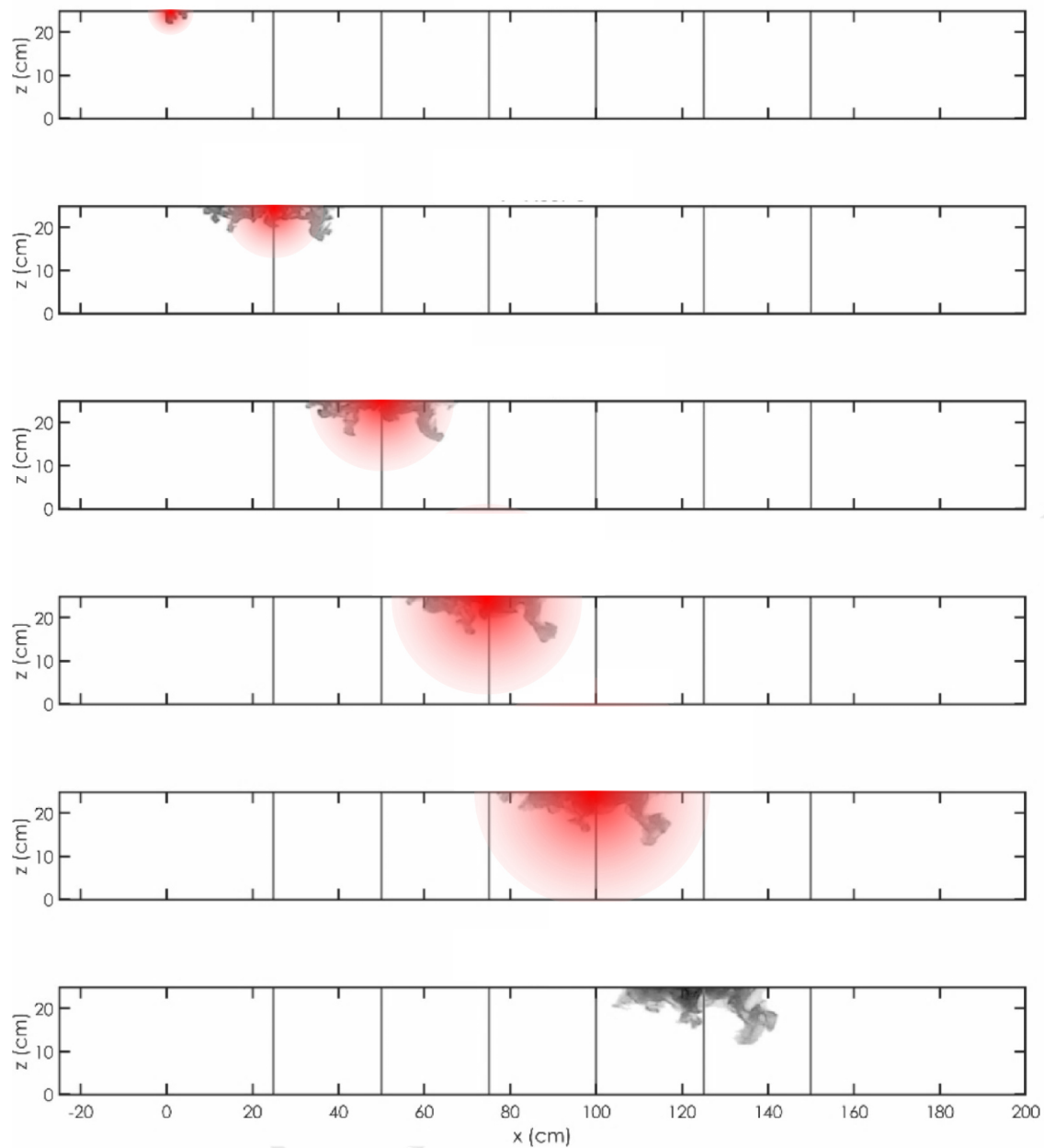


Figura 4.6.4: Imágenes donde se muestra el proceso de mezcla en diferentes intervalos de tiempo y la solución de la concentración $C(x, z, t)$ que se obtendría con la ecuación (4.6.3), $C_t + UC_x = DC_{xx} + DC_{zz}$.

efectivamente se aprecia la advección y la difusión en dos dimensiones. Para expresar el problema en una dimensión, podemos promediar la ecuación (4.6.4) en la profundidad

$$\frac{1}{h} \int_{z=0}^{z=h} \left(\frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right) dz, \quad (4.6.5)$$

donde $z = 0$ corresponde al fondo y $z = h$ a la superficie. Separando por términos (pues la integral es una operación lineal que lo permite) y simplificando la notación de los extremos de integración, se obtiene que

$$\frac{1}{h} \int_0^h \left(\frac{\partial C}{\partial t} \right) dz + \frac{1}{h} \int_0^h \left(U \frac{\partial C}{\partial x} \right) dz = \frac{1}{h} \int_0^h \left(D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \right) dz + \frac{1}{h} \int_0^h \left(D \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right) dz \quad (4.6.6)$$

Puesto que x , z y t son independientes, se pueden intercambiar las integrales por las derivadas. Además, apelando a los supuestos enunciados previamente para extraer U y D de las integrales, se obtiene la expresión

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{h} \int_h^0 C dz \right) + U \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{h} \int_h^0 C dz \right) = D \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{h} \int_h^0 C dz \right) + D \frac{1}{h} \int_h^0 \left(\frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right) dz. \quad (4.6.7)$$

El último término se integra directamente, quedando

$$\int_h^0 \left(\frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right) dz = \frac{\partial C}{\partial z} (x, 0, t) - \frac{\partial C}{\partial z} (x, h, t), \quad (4.6.8)$$

Si se considera que en el fondo no existe flujo difusivo porque el fondo es impermeable, entonces

$$F_D (x, 0, t) = \rho \frac{\partial C}{\partial z} (x, 0, t) = 0. \quad (4.6.9)$$

Además, si se asume que en la superficie no hay transporte de masa entre el agua y el aire, esto es

$$F_D (x, h, t) = \rho \frac{\partial C}{\partial z} (x, h, t) = 0, \quad (4.6.10)$$

Entonces el término de la ecuación (4.6.8) es nulo. Al definir la concentración media en la profundidad como

$$\bar{C} (x, t) = \frac{1}{h} \int_h^0 C dz \quad (4.6.11)$$

entonces la ecuación (4.6.8) se reduce a

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + U \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} = D \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial x^2}. \quad (4.6.12)$$

Naturalmente, con esta ecuación no se puede resolver la distribución vertical de la concentración observada en la Figura 4.6.3. La solución sólo contempla la advección y la difusión turbulenta en sentido x , como se muestra en la Figura 4.6.3.

Discretización numérica

Se sabe que el esquema numérico FTCS es incondicionalmente inestable³ para términos advectivos y, por ende, para la ecuación de advección-difusión (ánimate a demostrarlo con el análisis de estabilidad de von

³El esquema numérico FTCS

$$\frac{\bar{C}_i^{r+1} - \bar{C}_i^r}{\Delta t} + U \left(\frac{\bar{C}_{i+1}^r - \bar{C}_{i-1}^r}{2\Delta x} \right) = D \left(\frac{\bar{C}_{i+1}^r - 2\bar{C}_i^r + \bar{C}_{i-1}^r}{\Delta x^2} \right)$$

es incondicionalmente inestable para la ecuación de advección, esto es inestable independiente de los valores de Δt y Δx .

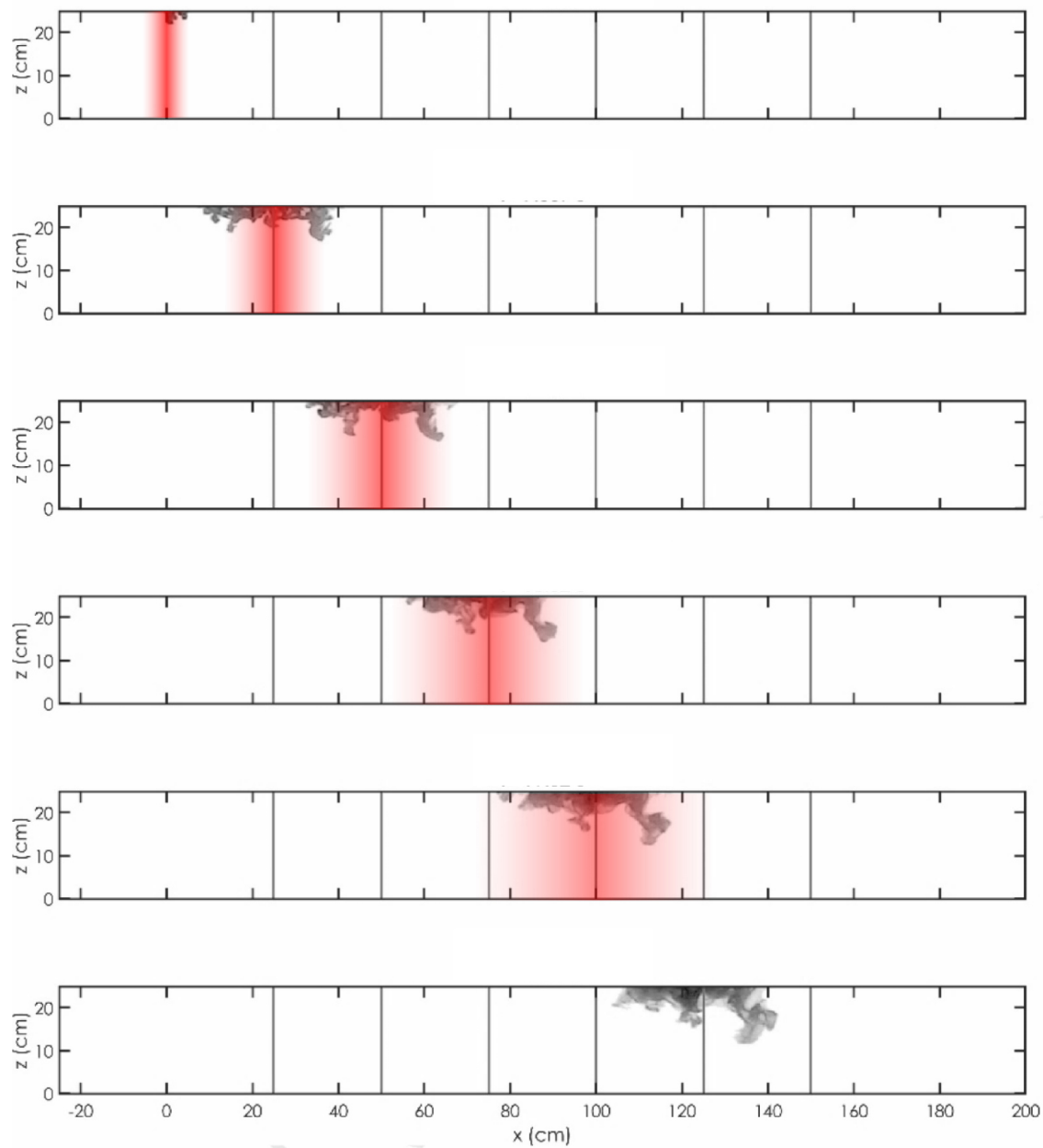


Figura 4.6.5: Imágenes donde se muestra el proceso de mezcla en diferentes intervalos de tiempo y la solución de la concentración media en la profundidad $\bar{C}(x, t)$ que se obtendría con la ecuación (4.6.3), $\bar{C}_t + U\bar{C}_x = D\bar{C}_{xx}$.

Como se mencionara en la sección de esquemas semi-implícitos (sección 4.3.3), el paréntesis en corchete en esta expresión no es fortuito. La multiplicación de $[\mathbf{B} \{C\}^T]$, que corresponde a una multiplicación de una matriz y un vector, da como un resultado un vector. Luego la multiplicación $\mathbf{A}^{-1} [\mathbf{B} \{C\}^T]$ es también una operación entre una matriz y un vector. Esto hace que los cálculos sean rápidos. Por el contrario, la operación $[\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}] \{C\}^T$ conlleva una operación de matrices que es muy costosa. Nota también que estoy utilizando \mathbf{A}^{-1} en forma simbólica pues para dominios grandes no es conveniente invertir la matriz. Para resolver la expresión en Matlab, se recurre a la factorización, que $\{C\}^{\tau+1} = \mathbf{A} \setminus [\mathbf{B} \{C\}^T]$. El algoritmo en Matlab (en lo esencial) es el siguiente:

```
% Parámetros
D = 1.4; % Coeficiente de difusión
U = 1.2; % Velocidad

% Discretización del espacio y tiempo
xmin = 0; xmax = 20; dx = 0.02; x = xmin:dx:xmax; Nx = length(x);
dt = 0.002; tmin = 0; tmax = 1.5; t = tmin:dt:tmax; Nt = length(t);

% Generación de matrices
A = U*dt/(4*dx); B = D*dt/(2*dx^2);
AA = zeros(Nx,Nx); AA(1,1) = 1; AA(Nx,Nx) = 1;
for k = 2:Nx-1
AA(k,k) = 1 + 2*B; AA(k,k+1) = A - B; AA(k,k-1) = -A - B;
end
BB = zeros(Nx,Nx); BB(1,1) = 1; BB(Nx,Nx) = 1;
for k = 2:Nx-1
BB(k,k) = 1 - 2*B; BB(k,k+1) = -A + B; BB(k,k-1) = A + B;
end

% Condición inicial
C = zeros(Nx,Nt);
sd = (xmax-xmin)/15; Co = 1/(sd*sqrt(2*pi)); xo = (xmax-xmin)/2;
C(:,1) = Co*exp(-(x-xo).^2/(2*sd^2));

% Solución de la ecuación
for l = 1: Nt-1
C(:,l+1) = AA\ [BB*C(:,l)];
end

% Gráfica
figure(1)
for tt = 1:50:Nt-1
subplot(2,1,1)
hold off; plot(x,C(:,tt),'r. '); hold on
ylim([0 Co]); xlabel('x [m]'); ylabel('C(x,t)')
subplot(2,1,2)
plot(x,C(:,tt),'- '); hold on
ylim([0 Co]); xlabel('x [m]'); ylabel('C(x,t)')
pause(0.1)
end
```

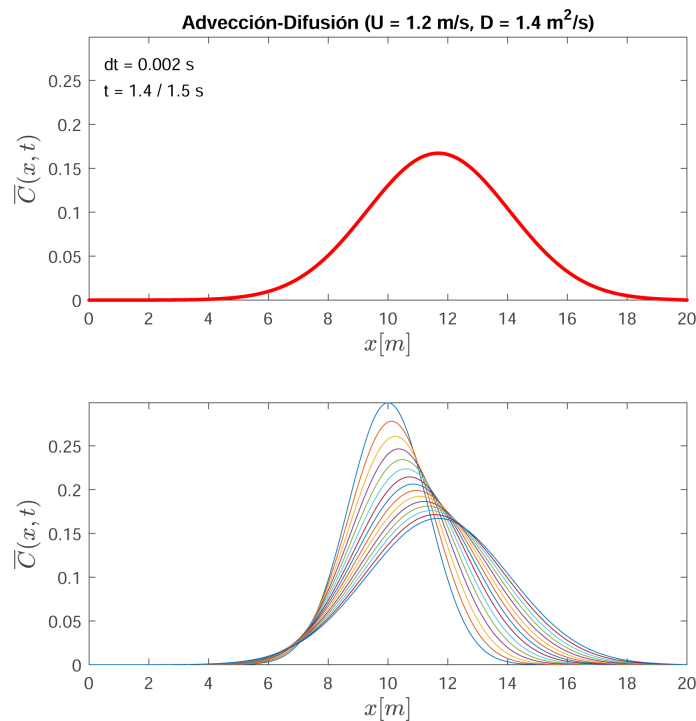


Figura 4.6.6: Concentración media $\bar{C}(x, t)$ obtenida de la ecuación de advección-difusión $\bar{C}_t + U\bar{C}_x = D\bar{C}_{xx}$. Arriba, la solución en $t = 1.4$ s; abajo la evolución de la concentración desde la condición inicial en $t = 0$ s.

La solución obtenida con este algoritmo se presenta en la Figura 4.6.6 para una velocidad de $U = 1.2$ m/s y un coeficiente de difusión de $D = 1.4$ m²/s. La Figura 4.6.7 muestra el caso particular sin difusión y la Figura 4.6.8 el caso sin advección.

4.7. Propiedades de los métodos de solución numérica

En la sección anterior introducimos algoritmos explícitos, implícitos y semi-implícitos para resolver numéricamente la ecuación de difusión utilizando el método de diferencias finitas. En este instante, cabe preguntarse sobre las condiciones se le debe exigir al algoritmo para obtener una aproximación aceptable del problema continuo. Para ello es necesario introducir los conceptos de estabilidad, consistencia, convergencia, conservación y exactitud.

4.7.1. Estabilidad

Cuando resolvemos una ecuación de conservación, esperamos que la solución numérica sea acotada y no se amplifique el error numérico. Un método estable es aquel en que los errores debidos a las aproximaciones se atenúan a medida que la computación procede, en tanto que en un método inestable, los errores se magnifican conforme el cálculo avanza. Para el análisis de estabilidad existen los métodos matricial y el análisis de von Neumann, siendo el segundo el más utilizado (Moin, 2010). Este método se basa en el análisis de la ecuación de gobierno, sin considerar los bordes, y se restringe a ecuaciones lineales de coeficientes constantes en grillas equiespaciadas. Para su explicación, recurramos a la ecuación de difusión con un coeficiente de difusión constante

$$\frac{\partial C}{\partial t} - D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = 0, \quad (4.7.1)$$

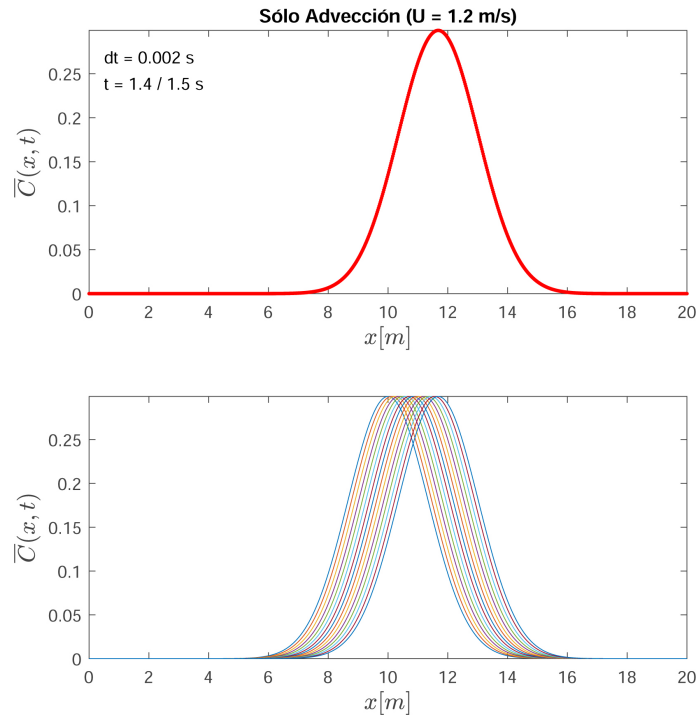


Figura 4.6.7: Concentración media $\bar{C}(x,t)$ obtenida de la ecuación de advección $\bar{C}_t + U\bar{C}_x = 0$. Arriba, la solución en $t = 1.4$ s; abajo la evolución de la concentración desde la condición inicial en $t = 0$ s.

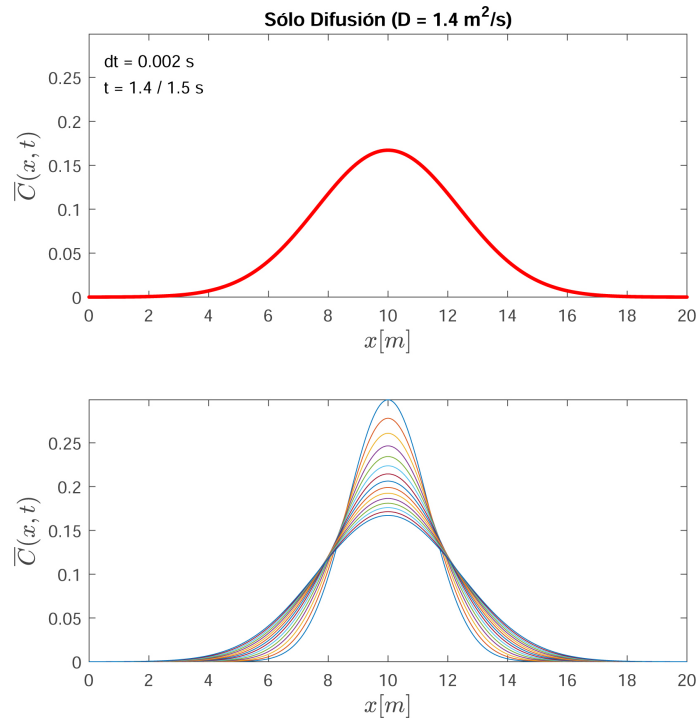


Figura 4.6.8: Concentración media $\bar{C}(x,t)$ obtenida de la ecuación de difusión $\bar{C}_t = D\bar{C}_{xx}$. Arriba, la solución en $t = 1.4$ s; abajo la evolución de la concentración desde la condición inicial en $t = 0$ s.

que utilizando un esquema FTCS de orden $\mathcal{O}(\Delta x^2, \Delta t)$ como el introducido en (4.3.4) se puede escribir como

$$C_j^{\tau+1} = C_j^\tau + \frac{D\Delta t}{\Delta x^2} [C_{j+1}^\tau - 2C_j^\tau + C_{j-1}^\tau], \quad (4.7.2)$$

donde hemos reemplazado el índice j por el i para no confundirlo con el número complejo $i = \sqrt{-1}$. El análisis de von Neumann se basa en asumir una solución del tipo

$$C(x, t) = F(t) \exp(ikx), \quad (4.7.3)$$

que se puede interpretar como una perturbación en el sistema, con una longitud de onda $k = 2\pi/\lambda$. Con esta forma se independizan el tiempo y el espacio, simplificando el análisis. La inestabilidad ocurre si $F(t)$ es creciente en el tiempo, pues en ese caso la concentración crecerá sin límites. En forma discreta, esta expresión es

$$C_j^\tau = F^\tau \exp(ikx_j). \quad (4.7.4)$$

Al combinar esta expresión con (4.7.2) se obtiene

$$F^{\tau+1} \exp(ikx_j) = F^\tau \exp(ikx_j) + \frac{D\Delta t}{\Delta x^2} F^\tau [\exp(ik[x_j + \Delta x]) - 2\exp(ikx_j) + \exp(ik[x_j - \Delta x])], \quad (4.7.5)$$

y dividiendo por $F^\tau \exp(ikx_j)$, hacemos el cociente

$$\frac{F^{\tau+1}}{F^\tau} = 1 + \frac{D\Delta t}{\Delta x^2} [\exp(ik\Delta x) - 2 + \exp(-ik\Delta x)]. \quad (4.7.6)$$

Para garantizar la estabilidad, se debe cumplir que $F(t)$ sea decreciente o constante, lo que se logra introduciendo el valor absoluto

$$\left| \frac{F^{\tau+1}}{F^\tau} \right| \leq 1, \quad \Leftrightarrow \quad -1 \leq \frac{F^{\tau+1}}{F^\tau} \leq 1. \quad (4.7.7)$$

Cabe notar que esta expresión corresponde a la norma de dicho cociente y es válida también para números complejos. Utilizando la fórmula de Euler, $\exp(ix) = \cos(x) + i\sin(x)$, además de las identidades $\cos(x) = \cos(-x)$ y $-\sin(x) = \sin(-x)$, se obtienen dos expresiones

$$-1 \leq 1 + \frac{2D\Delta t}{\Delta x^2} [\cos(k\Delta x) - 1] \quad \text{y} \quad 1 + \frac{2D\Delta t}{\Delta x^2} [\cos(k\Delta x) - 1] \leq 1. \quad (4.7.8)$$

La expresión de la derecha es siempre verdadera pues $\cos(k\Delta x) - 1 \leq 0$, por lo que no impone restricción a la discretización temporal y espacial. Para la expresión de la izquierda se tiene

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{D[1 - \cos(k\Delta x)]}, \quad (4.7.9)$$

donde el caso más restrictivo (el que genera el mayor Δt) es cuando el denominador es mínimo, esto es cuando $\cos(k\Delta x) = -1$. Con esto se llega a la restricción para el intervalo de tiempo

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{2D}, \quad (4.7.10)$$

que es válida únicamente para el esquema numérico FTCS. Naturalmente el valor máximo del intervalo de tiempo Δt_{max} depende del tipo de ecuación, en particular de los coeficientes constantes. A modo de ejercicio, te recomiendo que efectúes una análisis de estabilidad de i) la ecuación de advección y ii) la ecuación de advección-difusión. En el caso de ecuaciones no lineales, se debe linealizar el problema para aplicar el análisis de estabilidad de von Neumann. Si la linealización no es posible, entonces se debe usar el tradicional método de prueba y error fijando el tamaño de la grilla y ajustando el intervalo de tiempo hasta verificar que no surgen inestabilidades en el tiempo.

4.7.2. Consistencia

Es una condición sobre la estructura del esquema numérico, esto es, que la ecuación discretizada sea consistente con la ecuación diferencial.

4.7.3. Convergencia

Es una condición sobre la solución del esquema numérico, esto es, que la solución numérica converja a la solución de la ecuación diferencial en la medida que la discretización sea más pequeña.

4.7.4. Conservación

La solución numérica debe conservar las propiedades físicas definidas por el modelo matemático. Una buena técnica para evaluar la conservación es cuantificar la cantidad (e.g. masa, momentum o energía) en el dominio de integración y ver si se conserva en el tiempo. Por ejemplo, para un modelo hidrodinámico de onda larga en una dimensión (ver sección (5.4.2)), la masa total del sistema se define como

$$m(t) = \int_{x_{min}}^{x_{min}} [\eta(x, t) + h(x)] dx, \quad (4.7.11)$$

donde $z = -h(x)$ corresponde a la profundidad desde fondo considerado fijo, y el nivel de reposo se define como $z = \eta(x, t)$, donde η es la desnivelación instantánea respecto del nivel de equilibrio. La conservación de la masa se garantiza si

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{x_{min}}^{x_{min}} \eta(x, t) dx = 0, \quad (4.7.12)$$

lo que en términos prácticos implica integrar la solución sobre todo el dominio espacial para cada instante de tiempo y evaluar si cambia en el tiempo. Un modelo puede no conservar la masa por i) razones físicas como la existencia de fuentes (e.g. precipitación o caudal entrando por el contorno) o sumideros (e.g. evaporación, percolación o caudal de salida por el contorno) o ii) debido a que el algoritmo no conserva esa cantidad por los errores de truncamiento de las ecuaciones. El modelador debe discriminar cuál de estos mecanismos está presente en el fenómeno.

Naturalmente, cualquier algoritmo no conservará exactamente la masa (o cualquier cantidad), pues en esencia, se está discretizando un sistema de ecuaciones continuas por un equivalente discreto. Por ende, se debe establecer una tolerancia τ_m que satisfaga la expresión

$$\frac{dm}{dt} < \tau_m, \quad (4.7.13)$$

donde la pérdida de masa por unidad de tiempo debe ser mucho menor a la masa total del sistema durante la escala de tiempo en que interesa estudiar el fenómeno.

Para un sistema de advección-difusión de un contaminante de concentración $C(x, t)$ y densidad contante ρ en una dimensión (ver sección 3), las masa viene dada por

$$m(t) = \int_{x_{min}}^{x_{min}} \rho C(x, t) dx. \quad (4.7.14)$$

Puesto que la advección y la difusión son fenómenos conservativos (la primera transporta la masa y la segunda la difunde en el dominio), entonces la masa se conserva sólo si $dm/dt = 0$. Si el proceso de mezcla también está afecto a una reacción que es esencialmente no conservativa, entonces la masa no se puede conservar. En ese caso, es recomendable evaluar primero la conservación de la ecuación de advección-difusión y, una vez que se está seguro que para estos dos mecanismos se conserva la masa, incorporar el término reactivo.

El procedimiento para verificar la conservación de la cantidad de movimiento, se debe cumplir que

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{V}) < \tau_{mo}, \quad (4.7.15)$$

donde $\mathbf{V} = (u, v, w)$ para un modelo tridimensional, $\mathbf{V} = (\bar{u}, \bar{v})$ para un modelo integrado en la vertical y $\mathbf{V} = \langle u \rangle$ para un modelo unidimensional, donde $\overline{\langle \cdot \rangle}$ y $\langle \cdot \rangle$ representan la integración en la profundidad y en la sección, respectivamente. La tolerancia τ_{mo} debe cumplir similares criterios que los de conservación de la masa. De igual forma, para la energía E se debe cumplir

$$\frac{dE}{dt} < \tau_E, \quad (4.7.16)$$

donde τ_E es la tolerancia admisible para esa cantidad. En la práctica existe una diferencia entre quien desarrolla un algoritmo (usualmente para propósitos científicos) y quien utiliza un código validado por el desarrollador (para aplicaciones de ingeniería donde los plazos no son suficientes para desarrollar un modelo). En el primer caso, el modelador debe efectuar los análisis pertinentes, esto es estabilidad, convergencia, consistencia y conservación. Para el segundo caso, el modelador puede asumir que estos test fueron efectuados y el modelo está validado. Para ello, recomiendo revisar las publicaciones científicas donde se muestran estas validaciones y evaluar códigos ajenos, pues uno es finalmente responsable del trabajo.

4.7.5. Exactitud

Cuando se aproxima un modelo matemático con un método aproximado se incurre en errores de truncamiento debidos a la simplificación de procesos infinitos en un número finito de cálculos (e.g. series de Taylor). Por ejemplo, al discretizar la ecuación de advección (4.3.1)

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (4.7.17)$$

utilizando el esquema numérico FTCS (Forward Time Centered Space numerical scheme), se utilizan las expresiones

$$\frac{\partial C^\tau}{\partial t}_i = \frac{C_i^{\tau+1} - C_i^\tau}{\Delta t} - \mathcal{O}(\Delta t), \quad \frac{\partial^2 C^\tau}{\partial x^2}_i = \frac{C_{i+1}^\tau - 2C_i^\tau + C_{i-1}^\tau}{\Delta x^2} - \mathcal{O}(\Delta x^2), \quad (4.7.18)$$

donde el error de truncamiento en la derivada temporal es del orden $\mathcal{O}(\Delta t)$ y en la segunda derivada espacial es del orden $\mathcal{O}(\Delta x^2)$. Naturalmente, la exactitud en se puede incrementar incorporando más términos en la aproximación de las derivadas. Por ejemplo, la derivada temporal se podría reemplazar por una aproximación de cuarto orden en el tiempo $\mathcal{O}(\Delta t^4)$ utilizando la expresión

$$\frac{\partial C^\tau}{\partial t}_i = \frac{-C_i^{\tau+2} + 8C_i^{\tau+1} - 8C_i^{\tau-1} + C_i^{\tau-2}}{12\Delta t} - \mathcal{O}(\Delta t^4).$$

Esta expresión incrementa notablemente la exactitud en la resolución temporal pero, en contraposición, i) reduce el tiempo de cómputo y ii) requiere de a lo menos tres saltos de tiempo previos para implementar la condición inicial. En el caso de que se aumente la exactitud de la derivada espacial, se requiere conocer bastante más sobre la función y sus derivadas en los bordes, cuestión que no es trivial.

Ejemplo: Ecuación de difusión de primer orden

Resolvamos la ecuación de difusión de primer orden definida por la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \kappa C = 0, \quad (4.7.19)$$

donde κ es la constante de decaimiento. Esta ecuación fue introducida en la sección (3.4). Para la derivada temporal utilizemos un esquema de diferencias avanzadas

$$\frac{\partial C^\tau}{\partial t}_i = \frac{C_i^{\tau+1} - C_i^\tau}{\Delta t} - \mathcal{O}(\Delta t). \quad (4.7.20)$$

Combinando (4.7.19) con (4.7.20), expresando el término reactivo en el tiempo presente (τ), y aislando el término desconocido da

$$C_i^{\tau+1} = (1 - \kappa\Delta t) C_i^\tau. \quad (4.7.21)$$

Cabe notar que el subíndice espacial no es estrictamente necesario en esta fórmula iterativa, pues en la ecuación de gobierno (4.7.19), la concentración sólo depende del tiempo, i.e. $C(t)$. No obstante, si el proceso de interés también incluye advección o difusión, la ecuación de gobierno corresponde a una ecuación diferencial parcial donde $C(x, t)$, entonces es conveniente incluir el espacio. La Figura 4.7.1 ilustra la solución numérica versus la solución analítica dada por (3.4.4)

$$C(t) = C_0 \exp[-\kappa t], \quad (4.7.22)$$

con $t_0 = 0$ [s], $\kappa = 10$ [1/s] y $C_0 = 83$ (adimensional). Se ilustran tres casos donde se calcula para incremento temporales de $\Delta t = 0.05, 0.01$ y 0.001 [s]. En los paneles de la izquierda se ilustra la solución teórica (en línea azul) y la solución numérica (en círculos rojos). En los paneles de la derecha se comparan ambas soluciones mediante gráficos de correlación. Se incluye también una medida del error absoluto, definido como

$$EA = \sum_{i=1}^N |C_i^\tau - \tilde{C}_i^\tau|,$$

donde C_i^τ corresponde a la solución teórica y \tilde{C}_i^τ a la solución analítica. Cabe notar que existen abundantes medidas del error, pero el EA es utilizado aquí sólo por lo simple de calcular e interpretar. Dado que la solución numérica tiene un orden $\mathcal{O}(\Delta t)$, la solución numérica tiende a representar de mejor forma la solución analítica en la medida que el incremento temporal disminuye. El valor de EA disminuye con la reducción de dt , tendiendo asintóticamente a un valor.

4.8. Modelos de elevación digital

4.8.1. Base de datos

Uno de los problemas más comunes asociados con la calibración y validación de modelos hidrodinámicos y de mezcla se refiere a errores en los datos batimétricos. Existen diferentes fuentes de información batimétrica, entre las que destacan las bases de datos a escala oceánica, cartas náuticas electrónicas y de papel, y levantamientos monohaz, multihaz y Lidar (Light Detection and Ranging).

- Las bases de datos a escala oceánica (GEBCO, ETOPO) tienen una resolución a escala de grados, por lo que no son adecuadas para estudios en zonas costeras. No obstante, pueden servir para la modelación hidrodinámica de procesos a gran escala (e.g. mareas o tsunamis) que son posteriormente utilizados para forzar modelos locales.

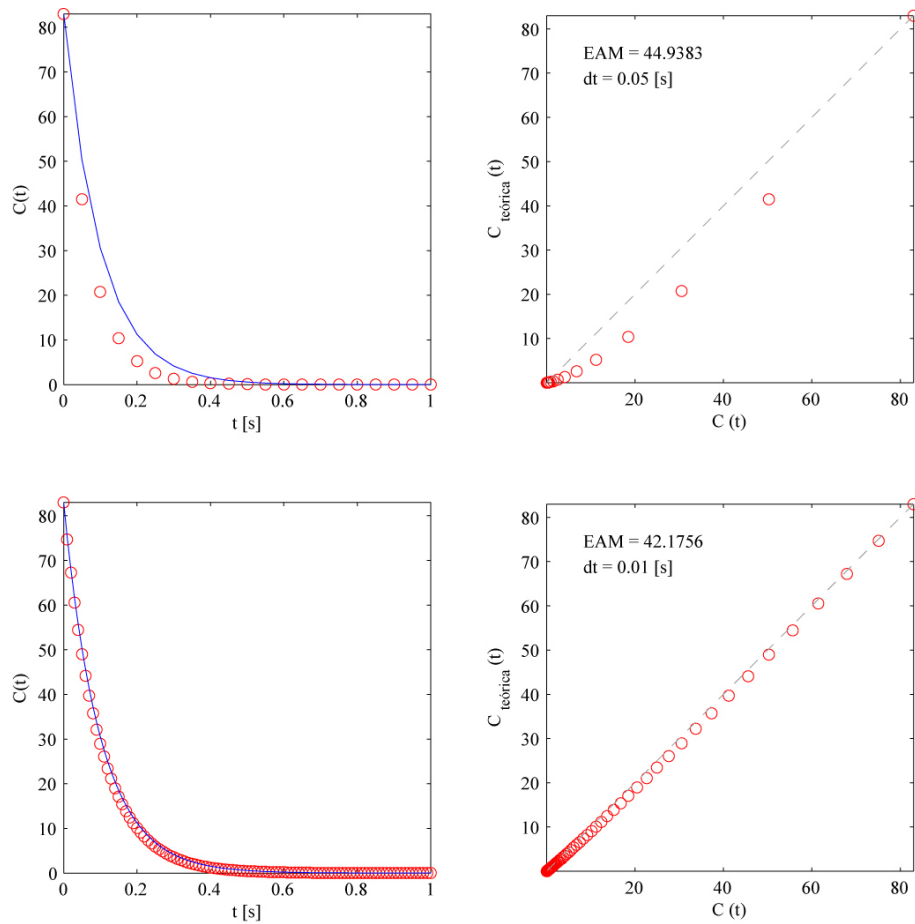


Figura 4.7.1: Ejemplo de solución de la ecuación de reacción de primer orden utilizando un esquema de forward time.

- *Las cartas náuticas (SHOA) están destinadas a la navegación, por lo que es poco frecuente contar con ella en el emplazamiento de futuras instalaciones en zonas ubicadas lejos de puertos. Su uso también se restringe a caracterizar los procesos hidrodinámicos a gran escala o a sitios donde existen instalaciones portuarias, pero en general no tienen buena resolución para modelos hidrodinámicos y de mezcla en la zona costera.*
- *Los levantamientos mediante Lidar se encuentran en fase de desarrollo y han demostrado tener una penetración de pocas decenas de metros en aguas muy transparentes, razón por la cual en la actualidad no constituyen una fuente de información para modelación costera.*
- *Los levantamientos mediante monohaz o multihaz son adecuados por contar con una cobertura aproximadamente continua del lecho marino. Por ejemplo, para efectos de una modelación de plumas de descarga o procesos hidrodinámicos que ocurren cerca de la costa, se debiera contar con una resolución del orden de metros a decenas de metros en la zona de influencia del proyecto.*

Asimismo, la selección de fuentes de información debe de preferencia privilegiar levantamientos recientes a antiguos (especialmente en lechos arenosos) y de alta resolución espacial.

4.8.2. Elaboración del modelo de elevación digital

En el proceso de generación de un DEM (Digital Elevation Model), debe verificarse que las diferentes fuentes de información tengan el mismo dátum altimétrico (NRS) y el dátum planimétrico (e.g. WGS 84). También es útil recurrir a mapas y ortofotos históricas que permitan garantizar que elementos notables como la línea de costa, roqueríos u obras marítimas sean bien representados en el DEM. El primer paso para confeccionar el DEM es integrar las diferentes bases de datos batimétricas y unificar la referencia vertical y horizontal de cada una de ellas. Este proceso de unificación deberá garantizar la continuidad de las estructuras morfológicas (e.g. cañones submarinos). De ser necesario, se deberá generar una zona de interpolación entre las distintas fuentes, la cual deberá ser de extensión suficiente como para minimizar discontinuidades. Un cuidado especial debe tenerse con la ubicación de la línea de costa, que puede presentar ser diferente entre fuentes de información producto de diferencias en el sistema vertical de referencia y/o resoluciones espaciales. La Figura 4.8.1 ilustra un ejemplo de construcción de un DEM digital a partir de varias fuentes batimétricas. Con el objetivo de permitir un control de calidad adecuado en la generación del DEM, se debieran reportar (en informes o material suplementario de papers) i) la definición y justificación del dominio de cálculo, ii) la metodología de estandarización vertical, iii) la metodología de estandarización horizontal y iv) todos los elementos mostrados en la Figura 4.8.1.

4.8.3. Dominio de integración, resolución espacial

La definición del dominio de los modelos hidrodinámico y de procesos de mezcla depende de la escala espacial del proceso físico que se quiera modelar. En general, no es posible definir tamaños mínimos o máximos del dominio de integración, pues ellos dependen mucho de la forma de la línea de costa, de la batimetría y de los procesos físicos que modelan a los agentes forzantes. Por ejemplo, los modelos que buscan simular procesos a gran escala, como las mareas meteorológicas, las mareas astronómicas o los tsunamis, suelen considerar grandes extensiones del Océano (Figura 4.8.2).

Los modelos que buscan reproducir procesos costeros asociados, por ejemplo al oleaje o las ondas largas, deben cubrir la zona costera con una alta resolución espacial (Figura 4.8.3). Por otra parte, para la modelación de plumas térmicas o salinas, el tamaño del dominio debe ser lo suficientemente grande como para capturar los procesos físicos fundamentales que definen el campo de corrientes y la profundidad instantánea en la zona de mezcla, y garantizar además que las condiciones de borde no alteren en forma espuria los resultados en el sector de emplazamiento de la descarga. En los modelos de mezcla, el dominio debe englobar los procesos de campo cercano influenciados por la propia descarga, que ocurren típicamente a unas pocas decenas de metros de la descarga, y los procesos de campo lejano, que se dan en escalas espaciales mayores.

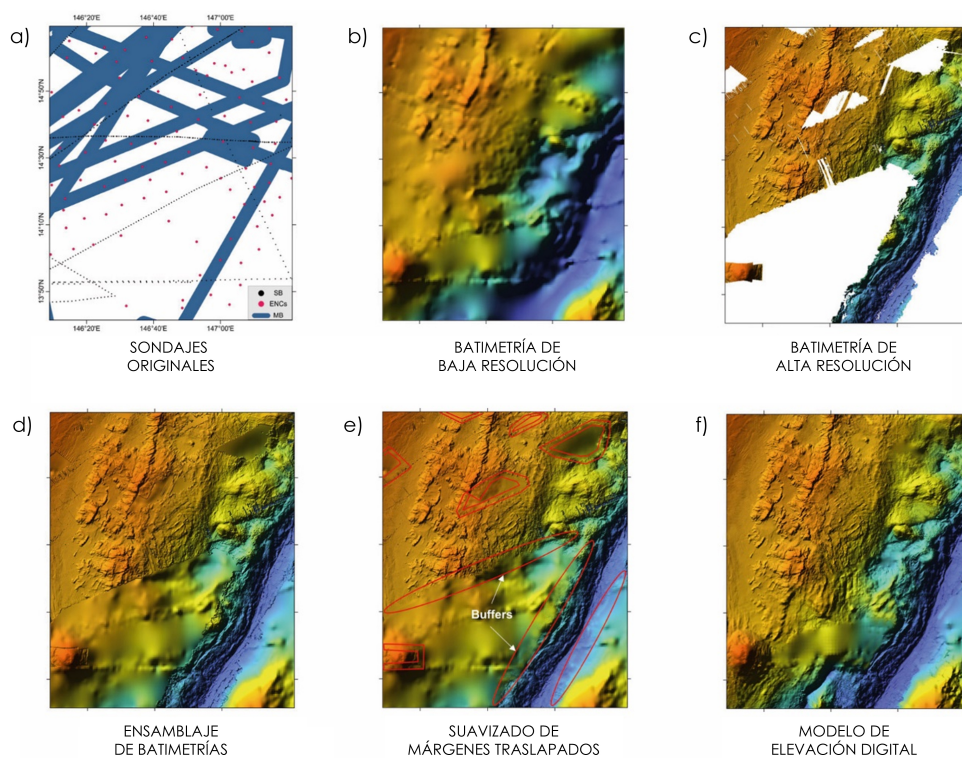


Figura 4.8.1: Ejemplo de construcción de un DEM digital a partir de varias fuentes batimétricas. Se muestran a) los sondeos originales, b) y c) todas las batimetrías de diferente resolución, d) el ensamblaje de dichas batimetrías y f) el DEM. Adaptado de Liu et al. (2019). Construction of High-Resolution Bathymetric Dataset for the Mariana Trench. *IEEE Access*, 7, 142441-142450.

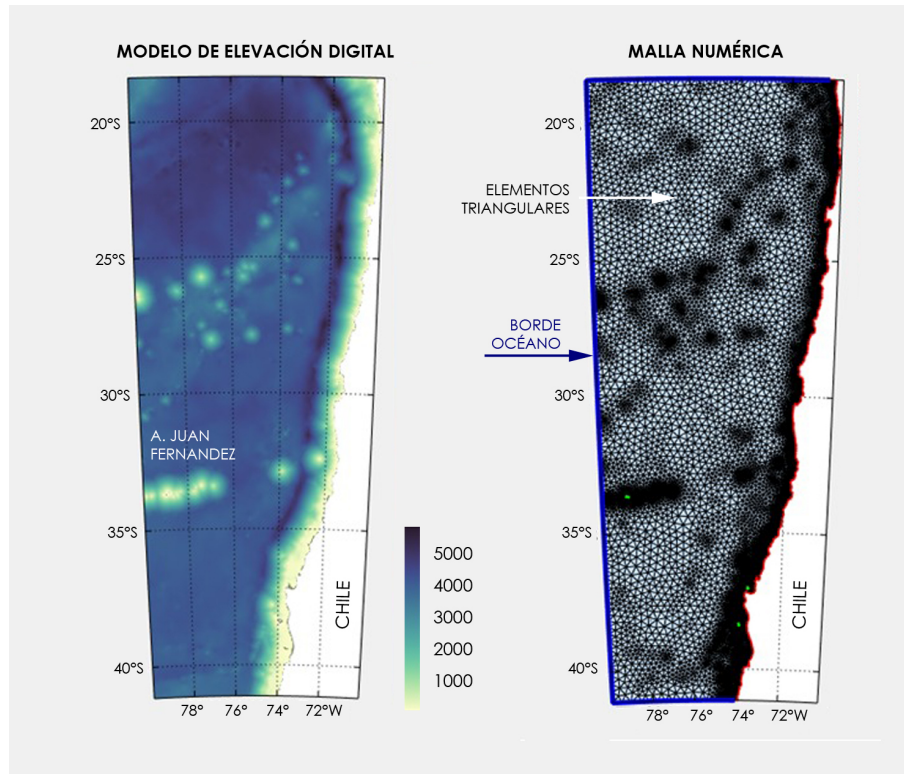


Figura 4.8.2: Ejemplo de construcción de un DEM digital a nivel oceánico para la modelación de mareas meteorológicas, mareas astronómicas o tsunamis. Gentileza y adaptado de César Esparza.

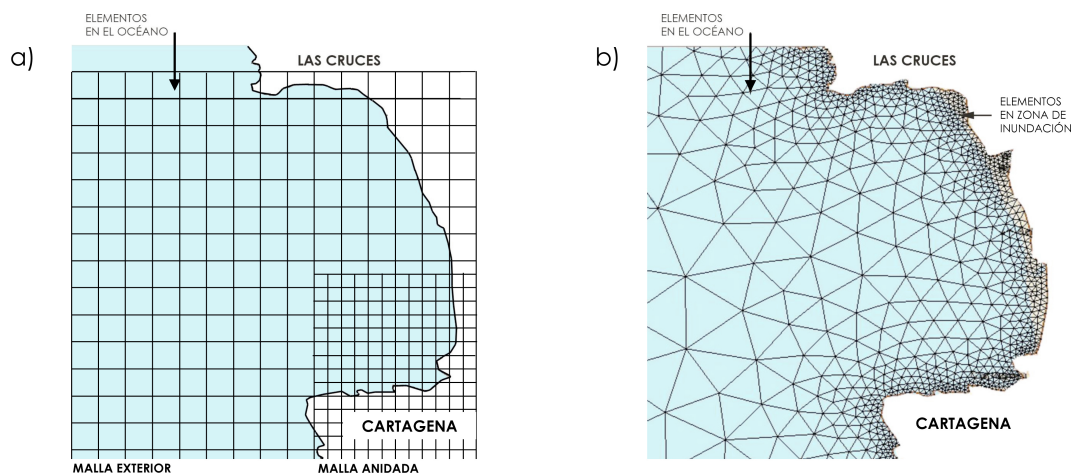


Figura 4.8.3: Ejemplo de construcción de una malla numérica a nivel costero para la modelación procesos hidrodinámicos y costeros. a) ilustra una malla constituida por elementos rectangulares en el dominio exterior y una malla anidada de menor tamaño (mayor resolución) en una zona de interés. b) muestra una malla no estructurada constituida por elementos triangulares cuyo tamaño (resolución espacial) se reduce (aumenta) hacia la costa. Gentileza y adaptado de César Esparza, Ingeniero Civil Oceánico.

Capítulo 5

Modelado de propagación de ondas

La costa es una zona dinámica en donde coexisten distintos agentes hidrodinámicos como el oleaje, la marea meteorológica, los tsunamis y la marea astronómica, entre otros. Desde la perspectiva de la ingeniería, la caracterización de estos agentes permite el estudio de:

- *La estabilidad estructural y el sobrepaso de obras costeras y portuarias*
- *Las fuerzas de impacto, arrastre y sustentación que experimentan las obras costeras y portuarias*
- *La morfodinámica de las playas a diferentes escalas espaciales y temporales*
- *La hidrodinámica de rompiente, que se asocia a variaciones del nivel del mar y a corrientes*
- *La inundación y el impacto de tsunamis y marejadas en zonas costeras*
- *La agitación generada por el oleaje en dársenas portuarias*
- *El movimiento de buques atracados*
- *El movimiento de artefactos flotantes (e.g. módulos de generación de energía o acuicultura)*
- *El impacto sobre estructuras fijas (e.g. plataforma petrolíferas)*
- *El impacto de vertidos de diferente naturaleza (capítulo 3)*
- *otros tipos de estudios.*

La caracterización de las ondas puede realizarse mediante modelado físico o numérico, siendo el segundo materia de este capítulo. En esta parte se presentan los modelos de propagación de ondas, cuyo estudio se puede complementar con los textos de Holthuijsen (2010) y Svendsen (2006). Para estudiar las ondas gravitacionales en cuerpos de agua abiertos, y en orden de complejidad creciente, existen teorías que promedian la fase (Phase-averaged models), aquellas otras que resuelven la fase (Phase-resolving models) y las basadas en lo que se conoce en forma genérica bajo el término CFD (Computational Fluid Dynamics). Esta gruesa clasificación se presenta en la Figura 5.4.1 en tanto que el Cuadro 1 presenta las dimensiones típicas utilizadas en modelos donde se implementan estas teorías. La Figura 5.0.1 ilustra algunos de los físicos, astrónomos y matemáticos que fueron responsables del desarrollo de teorías de oleaje durante el siglo XIX y que son utilizadas en la actualidad a más de un siglo de su formulación.

Característica	Modelos que promedian la fase	Modelos que resuelven la fase	Dinámica de fluidos computacional (CFD)
Dimensiones	2D	2D	3D
Incógnitas	Espectro (de oleaje) $E(\mathbf{r}, t)$, con $\mathbf{r} = (x, y)$	Desnivelación y velocidad media en la profundidad $\eta(\mathbf{r}, t)$, $\bar{u}(\mathbf{r}, t)$ y $\bar{v}(\mathbf{r}, t)$, con $\mathbf{r} = (x, y)$	Presión y velocidad puntual $p(\mathbf{r}, t)$, $u(\mathbf{r}, t)$, $v(\mathbf{r}, t)$ y $w(\mathbf{r}, t)$, con $\mathbf{r} = (x, y, z)$
Intervalo de tiempo Δt [s]	$\mathcal{O}(10^3 \sim 10^2)$	$\mathcal{O}(10^1 \sim 10^{-1})$	$\mathcal{O}(10^{-1} \sim 10^{-3})$
Tamaño la la grilla Δl [m]	$\mathcal{O}(10^2 \sim 10^0)$	$\mathcal{O}(10^0 \sim 10^{-1})$	$\mathcal{O}(10^{-1} \sim 10^{-3})$
Tamaño del dominio [m]	$\mathcal{O}(10^5 \sim 10^3)$	$\mathcal{O}(10^3 \sim 10^2)$	$\mathcal{O}(10^3 \sim 10^0)$
Aplicación (en oleaje)	Generación y propagación en aguas profundas e intermedias	Propagación en aguas profundas (Régimen de Stokes), intermedias y someras (Régimen de onda larga)	Propagación en zona rompiente e interacción con estructuras y sedimentos

Cuadro 5.1: Características típicas de los diferentes tipos de modelos. Δt corresponde al intervalo de tiempo típico de cómputo y Δl al tamaño típico de la grilla con que se resuelven las ecuaciones de conservación en la discretización numérica, cuyos valores están listados para oleaje y ondas largas. Para modelar tsunamis y mareas, éstos pueden ser mayores. El tamaño corresponde a una dimensión típica de los dominios donde se integran las ecuaciones de gobierno.



Figura 5.0.1: Físicos, astrónomos y matemáticos que fueron responsables del desarrollo de teorías de oleaje durante el siglo XIX.

5.1. Procesos físicos que afectan a las ondas

Las ondas gravitacionales, denominadas así porque la gravedad es la fuerza restauradora, experimentan diferentes procesos cuyo efecto conjunto define los patrones hidrodinámicos en la costa, los patrones de transporte litoral y la interacción con las obras costeras. Entre estos procesos se encuentran el asomeramiento, la refracción, la reflexión, la difracción y la rotura.

Para efectos ilustrativos, estos procesos se ilustran en la Figura 5.1.1 para el oleaje propagándose desde aguas profundas (donde este no siente el fondo) a la costa. Al disminuir la profundidad y producto del **asomeramiento**, las olas se reducen en longitud, aumentan en altura y se propagan más lento. Al aproximarse en forma oblicua a la costa, estas experimentan **refracción**, cambiando su altura y alineándose con los veriles del fondo. Por este efecto, en las penínsulas se genera una convergencia de energía que promueve una erosión más rápida que los sectores adyacentes como las bahías o las costas abiertas. En contraste, en las bahías se genera una divergencia de la energía del oleaje y un abrigo natural que promueve el depósito de material y la formación de playas. La **difracción** es el efecto por el cual la energía se distribuye producto de obstáculos naturales y antrópicos. En presencia de estos obstáculos, el oleaje también experimenta **reflexión**, invirtiendo su sentido de propagación. La **rotura** se produce cuando la profundidad es comparable con la altura del oleaje y se desarrolla de diferentes formas. En playas de pendiente suave, se produce una rotura en «descrestamiento» (*spilling*), que se caracteriza por varias líneas de rompientes que cubren una zona extensa. La rotura «en voluta» (*plunging*) se caracteriza por un vórtice que al romper arrastra gran cantidad de sedimentos. Finalmente, la rotura «en colapso» (*collapsing*) se produce en zonas de pendiente muy pronunciada y se caracteriza por un arrastre de sedimento menor. Cabe notar que en la zona de generación, el oleaje experimenta procesos asociados a la interacción entre el viento y la superficie del agua. Una vez que el oleaje sale de la zona de generación, experimenta otros procesos complejos que son importantes a escala oceánica como la dispersión de frecuencia, la dispersión angular (*spreading*), la interacción ola-corriente y la interacción ola-ola. El oleaje además sufre de procesos de disipación de energía

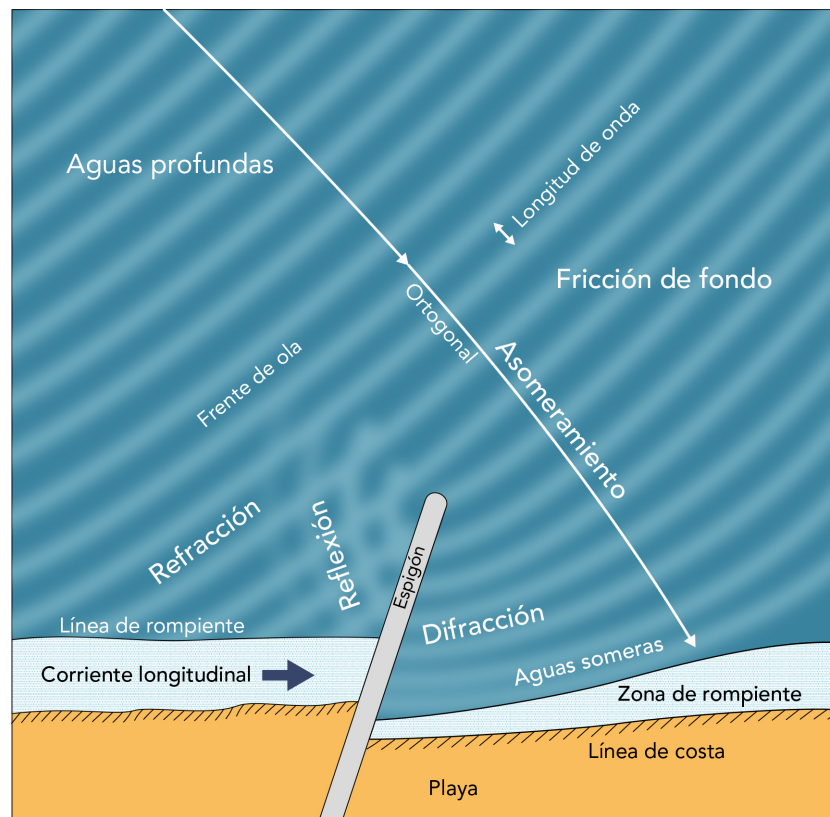


Figura 5.1.1: Procesos costeros que experimenta el oleaje al aproximarse a la costa. (Adaptado de Svendsen & Jonsson, 1976).

asociados al whitecapping y otros más importantes en aguas someras, como la fricción por fondo y la percolación.

Tal diversidad de procesos, con diferentes grados de complejidad, escalas espaciales y temporales, hace que el modelado de propagación de ondas en particular el oleaje— sea un desafío.

5.2. Tipos de modelos

Modelos que promedian la fase

Los modelos que promedian la fase se basan en una ecuación de balance de energía espectral $E(x, y, t)$ -o magnitudes similares como la acción del oleaje- y permiten calcular la evolución en el tiempo y espacio de la energía del oleaje, en la medida que dicha evolución sea suave en el espacio (i.e. lejos de zonas con accidentes geográficos abruptos). Estos modelos se conocen también como modelos espectrales y permiten caracterizar los fenómenos de asomeramiento, refracción y la disipación, entre otras. Como contraparte, no resuelven en forma adecuada la difracción y omiten la reflexión. A partir del espectro de energía se pueden calcular los parámetros espectrales de un estado de mar, como la altura significativa, periodo y dirección medias, entre otros. Los modelos basados en teorías que promedian la fase no permiten calcular el perfil de las ondas (pues no resuelven su fase), y por ende se utilizan con una resolución temporal y espacial bastante mayor. Con ello, pueden abarcar extensiones mucho mayores desde aguas profundas a las cercanías de la costa.

Una excelente referencia para conocer algo más sobre estos modelos, y en particular del software libre SWAN, es Holthuijsen (2010; capítulo 9). La Figura 5.2.1 ilustra un ejemplo de salidas obtenidas del modelo SWAN para la Isla Robinson Crusoe, en el Archipiélago Juan Fernández. La Figura 5.2.3 muestra un ejemplo de uso

de mallas anidadas con resolución progresivamente creciente para un modelo de propagación y agitación en el puerto de Iquique. Las mallas anidadas son típicas en esquemas numéricos con mallas rígidas. En esquemas con mallas flexibles o adaptativas, la malla puede adaptarse a la batimetría con celdas de mayor (menor) tamaño en profundidades mayores (menores).

Modelos que resuelven la fase

Estos modelos se basan en ecuaciones de conservación de la masa y momentum que permiten caracterizar la evolución en el tiempo y espacio de las olas individuales. Mediante estas ecuaciones se resuelven la desnivelación instantánea y dos velocidades mutuamente ortogonales. Estos modelos tienen la ventaja de que pueden dar cuenta de los fenómenos de asomeramiento, refracción, difracción, reflexión, y disipación. Sin embargo, debido a la alta resolución espacial y temporal requerida para su resolución -de 10 a 100 nodos para caracterizar una longitud de onda característica-, todavía están limitados a áreas relativamente pequeñas. Dentro de las teorías que resuelven la fase están aquellas que son válidas en el régimen de Stokes (para profundidades comparables o mayor a la longitud de onda típica) y en el régimen de onda larga (para profundidades mucho menores que la longitud de onda), dentro de los cuales existen a su vez subdivisiones en función de criterios de no linealidad, pendiente de fondo y directividad característica de las ondas.

La Figura 5.2.2 muestra un modelo que resuelve la fase donde se ilustran procesos costeros desde la condición de aguas profundas a la costa. (1) Un oleaje irregular en aguas profundas comienza a ser afectado por el fondo. (2) Debido a la reducción de la profundidad, las ondas tienden a experimentar **asomeramiento** y dejan de ser simétricas, con crestas de alta pendiente y valles más largos. (3) Debido a la irregularidad de la batimetría, en zonas bajas la onda se desacelera producto de la **refracción**. (4) Cerca de las obras costeras se produce **reflexión** y el patrón resultante de oleaje es cuasi-estacionario, con amplitudes mayores a la incidente. Eventualmente puede haber **rotura**. (5) Producto de la reflexión en las estructuras costeras y la **transferencia no lineal** entre frecuencias activada por la baja profundidad, se observan patrones de oleaje complejos y oscilaciones de mayor frecuencia. (6) Por efecto de la **difracción**, los frentes se curvan significativamente, la amplitud disminuye y se logra una dársena abrigada.

Modelos CFD

Los modelos CFD se basan en las ecuaciones 3D de Navier-Stokes, sin efectuar supuestos respecto de la estructura vertical del flujo. Estos modelos permiten calcular la velocidad y la presión en tres dimensiones. Entre estos modelos destacan las ecuaciones **RANS** (Reynolds Averaged Navier-Stokes equations) y las técnicas **LES** (Large Eddy Simulation) y **DNS** (Direct Numerical Simulation).

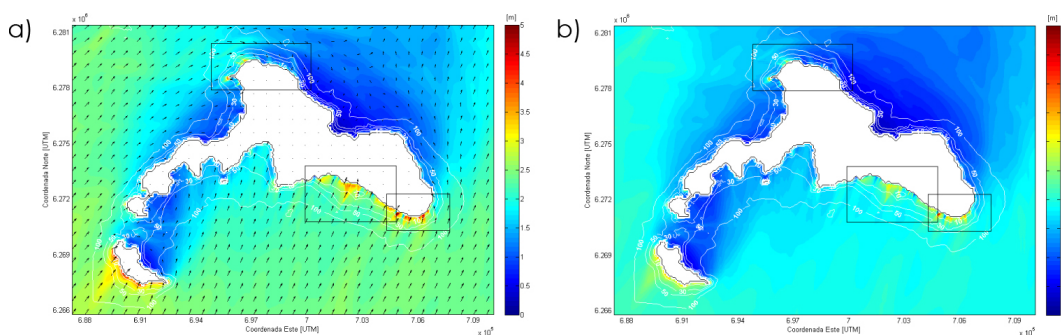


Figura 5.2.1: Modelo que promedia la fase (SWAN) para la Isla Robinson Crusoe, en el Archipiélago Juan Fernández, Chile. a) Altura significativa y dirección media y b) Altura significativa que es superada un 5 % del tiempo. Fuente: Ingeniería Civil Oceánica, Universidad de Valparaíso.

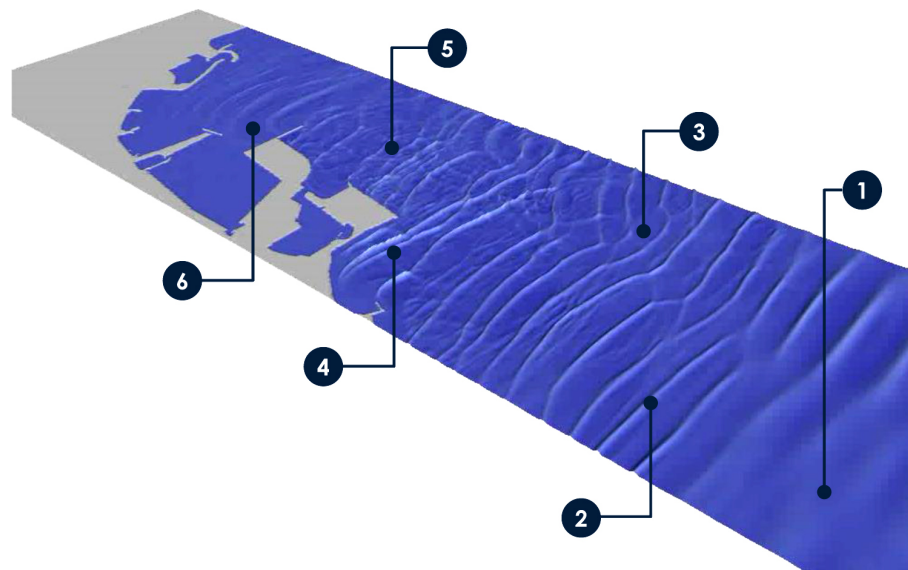


Figura 5.2.2: Ejemplo de un modelo que resuelve la fase donde se ilustran procesos costeros desde la condición de aguas profundas a la costa. Fuente: Adaptado del Danish Hydraulic Institute, desarrollador de Mike 21.

Las ecuaciones RANS, descritas en la sección 2.5, se usan comúnmente en investigación y recién comienzan a incorporarse como herramienta de modelado en ingeniería. Estas ecuaciones permiten calcular los valores medios (en rigor, los ensemble averages, o promedio de muchas realizaciones de un fenómeno) pero no dan información sobre las fluctuaciones turbulentas, a excepción de aquellas cuya escala es bastante mayor que el tamaño de la discretización espacial.

Las LES ignora las escalas más pequeñas del flujo (cuya resolución incrementa el costos computacional), utilizando un filtro pasa-bajo, pero tienen la ventaja de resolver las escalas mayores. Requieren no obstante, de una capacidad computacional mayor a las RANS y en la actualidad se reservan a investigación.

El modelado mediante DNS, que permite calcular la turbulencia hasta escalas donde actúa la viscosidad molecular, no es adecuada para problemas de ingeniería de costas pues su implementación requiere de una capacidad computacional inexistente en la actualidad.

Aplicaciones

En la práctica, estas teorías son complementarias y pueden acoplarse según sea el objetivo de estudio. Para **estudios de oleaje**, por ejemplo, la idea es comenzar con modelos de menor resolución espacial en aguas profundas (que es donde usualmente se disponen los datos de oleaje obtenidos mediante boyas o satélites) e ir incrementando en complejidad en la medida que nos acercamos a la costa. En este sentido, la secuencia lógica es partir con modelos que promedian la fase, seguir por los que resuelven la fase (si interesa la agitación y la resonancia) y terminar con CFD's (cuando se necesita estudiar la interacción entre fluido, estructura y sedimentos). Para **estudios de tsunami** se suelen usar modelos de onda larga y, solo en el caso de que interesen los efectos de sobrepaso o de estabilidad estructural de instalaciones costeras, combinarlo con modelos CFD. Para el caso de **estudios de mareas**, los estudios usualmente se restringen a modelos de onda larga.

Especial atención merecen los **estudios de oleaje**. Los modelos que promedian la fase en general son utilizados en la zona de generación de oleaje y propagación en aguas intermedias, donde los efectos de refracción y asomeramiento dominan. Estos modelos son utilizados cuando la desnivelación se puede caracterizar por una superposición de armónicos esencialmente cíclicos. No son útiles para fenómenos transientes como los tsunamis

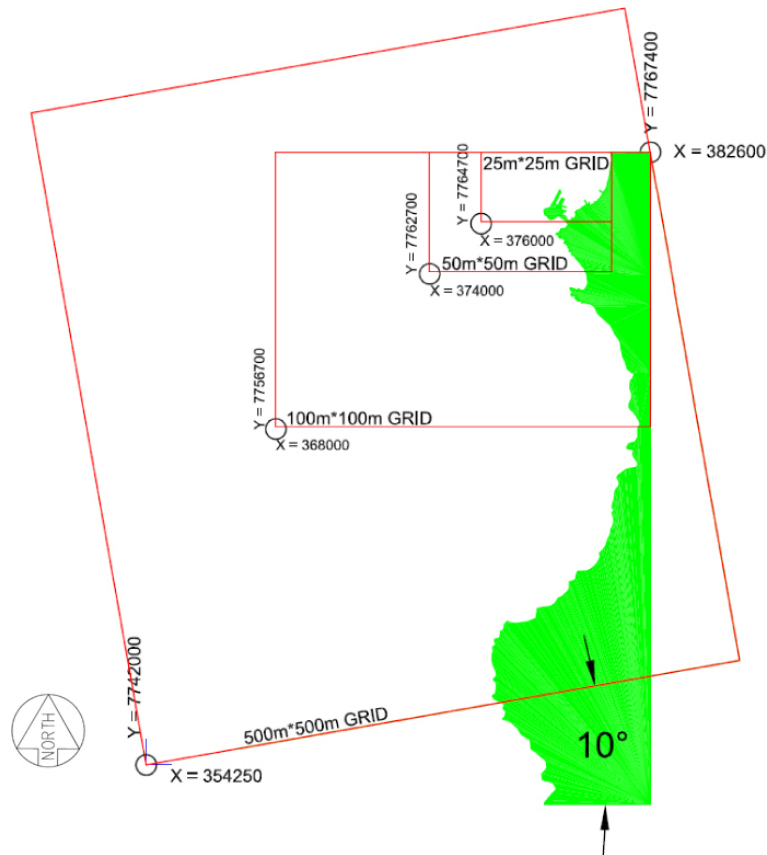


Figura 5.2.3: Ejemplo de uso de tres mallas anidadas (con celdas cuadradas de arista de 500, 100 y 50 m) para un modelo de propagación de oleaje y de una malla interior de 25 m de resolución espacial para un modelo de agitación en el puerto de Iquique. El acoplamiento se da entre mallas sucesivas, pero el más complejo es entre la malla de 50 m de arista donde se promedia la fase y la de 25 m de arista donde se ésta se resuelve. Gentileza de Javier Vásquez, PRDW.

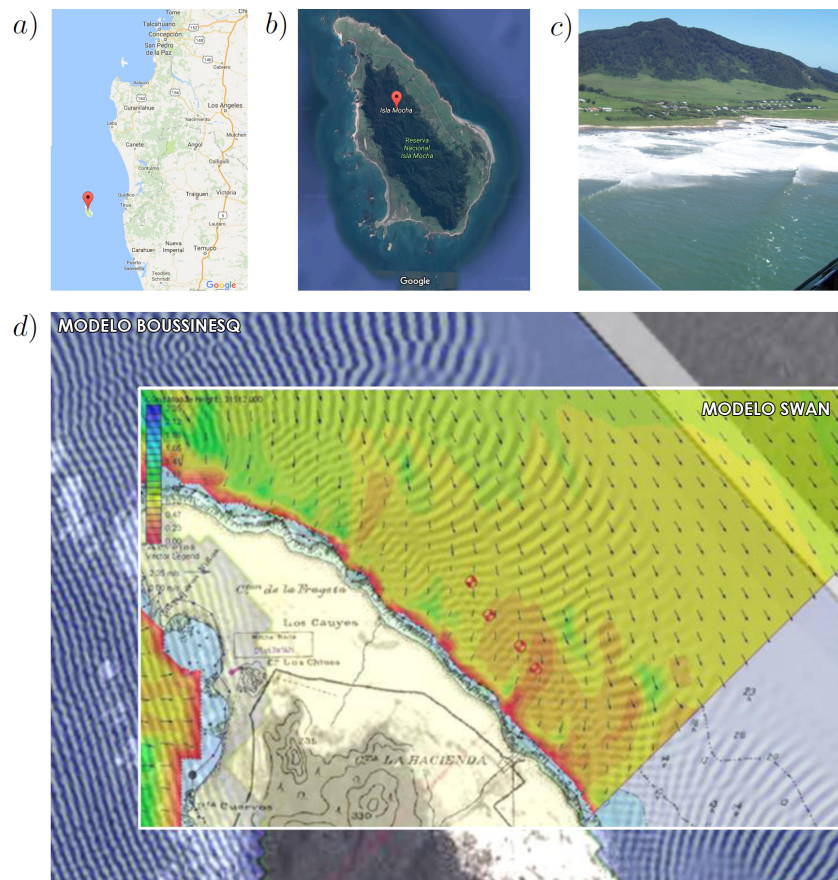


Figura 5.2.4: Comparación de modelos de oleaje en la costa oriental de Isla Mocha, Chile, desarrollada con el objetivo de definir el alineamiento de una rampa de conectividad marítima con el continente. La ubicación y una imagen satelital de la isla se presentan en a) y b), respectivamente. La imagen c) corresponde a una fotografía aérea de la costa oriental de la isla, protegida al oleaje oceánico. El oleaje corresponde a un swell del Suroeste arribando al sector de la rampa, notoriamente difractado en el extremo norte de la Isla. d) Comparación de un modelo que resuelve la fase (Boussinesq) y un modelo que promedia la fase (SWAN). Se observan diferencias notorias en la dirección del oleaje en las cercanías de la rampa. Fuente: Ingeniería Civil Oceánica, Universidad de Valparaíso.

ni para fenómenos de gran escala como las mareas, para las que interesa conocer la fase, más que valores estadísticos promedio derivados de un espectro. En playas relativamente abiertas y de pendiente suave donde no existen grandes obstáculos para la propagación del oleaje desde aguas profundas, pueden ser utilizados hasta profundidades relativamente bajas sin grandes errores asociados. Los modelos que resuelven la fase permiten caracterizar las zonas donde domina la difracción y reflexión -fenómenos donde la fase juega un rol preponderante- sobre el asomeramiento y refracción. Este es el caso de bahías cerradas y dársenas portuarias donde se busca caracterizar la agitación de ondas de las ondas de período corto (3 a 30 s) y los fenómenos asociados a la resonancia, cuyos períodos típicos son mucho mayores (30 a 1000 s). Finalmente, los modelos CFD permiten evaluar los fenómenos de rotura, interacción fluido estructura y fluido sedimentos. En la Figura 5.2.4 se ilustra una comparación de un modelo que resuelve y uno que promedia la fase en la Isla Mocha, desarrollada con el objetivo de definir el alineamiento de una rampa de conectividad marítima con el continente. Se observan diferencias notorias en la dirección del oleaje en las cercanías de la rampa, producto de las diferencias asociadas al tipo de ecuaciones utilizadas en cada modelo.

Existe poca literatura que defina formalmente metodologías de acoplamiento entre modelos numéricos. En

la práctica de la ingeniería este procedimiento es casi artesanal y tiene complicaciones. Por ejemplo, para acoplar los resultados de un modelo espectral de oleaje a uno que resuelve la fase, es necesario generar series de tiempo instantáneas de desnivelación $\eta(x, y, t)$ y velocidades integradas en la vertical $\bar{u}(x, y, t)$ y $\bar{v}(x, y, t)$ en los bordes exteriores, a partir del espectro característico de un estado de mar $E(x, y, t)$ o cualquiera de las magnitudes derivadas del mismo (como la altura significativa espectral, el período peak y la dirección peak, entre otros muchos). Observamos que i) la escala de tiempo con que se resuelven ambos modelos es diferente y ii) las variables resueltas no son equivalentes. Una de las escasas referencias que describe el acople de modelos espectrales y aquellos que resuelven la fase es Chen (2009).

Para el acoplamiento entre modelos que resuelven la fase y modelos CFD, es necesario generar información sobre la presión puntual $p(x, y, z, t)$ y las velocidades en tres dimensiones $u(x, y, z, t)$, $v(x, y, z, t)$ y $w(x, y, z, t)$, a partir de la desnivelación $\eta(x, y, t)$ y velocidades integradas en la vertical $\bar{u}(x, y, t)$ y $\bar{v}(x, y, t)$. Para ello es necesario i) asumir distribuciones verticales de velocidad y presión de modo de compatibilizar ambos modelos y ii) compatibilizar las dimensiones espacial y temporal que son diferentes entre ambos modelos. Un ejemplo de acoplamiento entre un modelo tipo Boussinesq y una RANS se presenta en Sitanggang (2009).

5.3. Modelos que promedian la fase

La información de un estado de mar se representa mediante un espectro de energía $E(\mathbf{x}, t, \sigma, \theta)$, en cada punto del espacio \mathbf{x} y tiempo t , distribuida en un rango de frecuencias σ (observada desde un sistema de referencia que se mueve con la corriente) y direcciones θ . En su forma más simple, el balance de energía implica que, en ausencia de pérdidas o ganancias, la energía se conserva según la expresión

$$\frac{dE}{dt} = 0. \quad (5.3.1)$$

En la realidad, existen diversos mecanismos de pérdida de energía, ganancia debida al viento y transferencia de energía entre componentes del espectro, que en términos sintéticos se representan como una forzante S en la expresión anterior. Esto es

$$\frac{dE}{dt} = S. \quad (5.3.2)$$

Usualmente, los modelos de oleaje permiten determinar la densidad de acción del oleaje $N(\mathbf{x}, t, \sigma, \theta)$, pues N se conserva en presencia de una corriente \mathbf{U} (considerada uniforme en la profundidad), en tanto que E no se conserva (Whitman, 1974). El balance de acción se escribe como (Mei, 1983)

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot [(\mathbf{c}_g + \mathbf{U})N] + \frac{\partial c_{\sigma} N}{\partial \sigma} + \frac{\partial c_{\theta} N}{\partial \theta} = \frac{S}{\sigma}, \quad (5.3.3)$$

donde el primer término el lado izquierdo corresponde a la variación local (en el tiempo) del balance de acción. El segundo término representa la propagación de energía en el espacio geográfico bidimensional, siendo la celeridad de grupo definida como $\mathbf{c}_g = \partial \sigma / \partial \mathbf{k}$, que se puede obtener a partir de la ecuación de dispersión de frecuencias

$$\sigma^2 = g |\mathbf{k}| \tanh(|\mathbf{k}| h), \quad (5.3.4)$$

donde $\sigma = 2\pi f$ corresponde a la frecuencia absoluta, \mathbf{k} es el número de onda y h la profundidad. El tercer término representa el desfase en la frecuencia debido a variaciones en la profundidad y en las corrientes. El cuarto término representa la refracción causada por variaciones de fondo y por la interacción del oleaje con la corriente. Las variables c_{σ} y c_{θ} representan las velocidades de propagación en el espacio espectral de frecuencia y dirección, respectivamente, cuyas expresiones se derivan en Holthuijsen (2007). El lado derecho de la ecuación contiene las fuentes o sumideros asociados a la generación, disipación y transferencia no lineal de energía entre diferentes componentes. En coordenadas cartesianas, la ecuación (5.3.3) para $N(x, y, t, \sigma, \theta)$ se escribe como

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial c_{g,x} N}{\partial x} + \frac{\partial c_{g,y} N}{\partial y} + \frac{\partial c_{\sigma} N}{\partial \sigma} + \frac{\partial c_{\theta} N}{\partial \theta} = \frac{S}{\sigma}, \quad (5.3.5)$$

y puede utilizarse cuando el dominio de integración es relativamente pequeño, de modo que la curvatura de la tierra no altera los resultados de la propagación. En términos prácticos, esta expresión puede utilizarse para **estudios de propagación** de oleaje desde aguas profundas a un punto en la costa, en la medida que la distancia de propagación es pequeña (en otras palabras, para casos donde la plataforma continental no es muy grande). Para **estudios de generación** de oleaje, donde el viento transfiere energía al oleaje a lo largo de grandes distancias, es recomendable recurrir a coordenadas esféricas. En este caso, la ecuación para $N(\lambda, \varphi, t, \sigma, \theta)$ se escribe como (Svendsen, 2006)

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial c_{g,\lambda} N}{\partial \lambda} + \cos^{-1} \varphi \frac{\partial c_{g,\varphi} \cos \varphi N}{\partial \varphi} + \frac{\partial c_{\sigma} N}{\partial \sigma} + \frac{\partial c_{\theta} N}{\partial \theta} = \frac{S}{\sigma}, \quad (5.3.6)$$

donde λ es la latitud, φ la longitud y θ el ángulo antihorario desde el Este.

En caso de que el modelo se resuelva en **modo estacionario**, la ecuación de balance de acción en coordenadas cartesianas se reduce a:

$$\frac{\partial c_{g,x} N}{\partial x} + \frac{\partial c_{g,y} N}{\partial y} + \frac{\partial c_{\sigma} N}{\partial \sigma} + \frac{\partial c_{\theta} N}{\partial \theta} = \frac{S}{\sigma}, \quad (5.3.7)$$

Proceso	Aguas Oceánicas	Plataforma Continental Costera	Aguas Costeras	Puertos
S_{in} Generación por Viento	Domina	Domina	Menor	Despreciable
S_{nl} Cuadrupletos	Domina	Domina	Menor	Despreciable
S_{tr} Triadas	Despreciable	Despreciable	Significativo	Menor
S_{ds} White-Capping	Domina	Domina	Menor	Despreciable
S_{db} Rompimiento	Despreciable	Menor	Domina	Despreciable
S_{bot} Fricción de Fondo (S_{mud} barro)	Despreciable	Significativo	Significativo	Despreciable
Corrientes	Menor	Menor	Significativo	Despreciable
Refracción-Asomeramiento	Despreciable	Despreciable	Domina	Significativo
S_{ref} Reflexión	Despreciable	Despreciable	Significativo	Domina
Difracción	Despreciable	Despreciable	Menor	Domina

Figura 5.3.1: Relevancia de los diferentes procesos físicos y en aguas oceánicas, plataforma continental, aguas costeras y puertos. Gentileza del Profesor Patricio Catalán, de la Universidad Técnica Federico Santa María.

lo que ahorra bastante tiempo de cómputo. El modo estacionario se asume para un estado de mar, que corresponde a un periodo de tiempo del orden de 1 a 3 horas, donde las propiedades estadísticas del oleaje se asumen como constantes. El uso de esta aproximación trae implícito el supuesto de que el tiempo en que el oleaje se propaga desde aguas profundas al sitio de interés es menor que la duración del estado de mar durante el cual las condiciones del oleaje permanecen constantes. En caso de que no existan corrientes, la ecuación de balance de acción se puede expresar en términos de la energía

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial c_{g,x} E}{\partial x} + \frac{\partial c_{g,y} E}{\partial y} + \frac{\partial c_{\theta} E}{\partial \theta} = S, \tag{5.3.8}$$

que no incluye el término asociado al desfase en la frecuencia debido a variaciones en la profundidad y en las corrientes.

5.3.1. Forzantes de la ecuación de balance energético.

Las teorías de generación, interacción no lineal y disipación son, en general, complejas y por tanto se recomienda al lector recurrir a literatura especializada (e.g. Booij et al, 1999a, 1999b). En términos simples y siguiendo la nomenclatura de Holthuijsen, (2007), el término fuente se puede descomponer como

$$S(\sigma, \theta) = S_{in}(\sigma, \theta) + S_{nl}(\sigma, \theta) + S_{diss}(\sigma, \theta), \tag{5.3.9}$$

donde $S_{in}(\sigma, \theta)$ corresponde a la forzante por viento, $S_{nl}(\sigma, \theta)$ representa la interacción no lineal entre componentes y $S_{diss}(\sigma, \theta)$ comprende todos los mecanismos de disipación. Estos términos se explican en las siguientes secciones. La relevancia de los diferentes procesos físicos en aguas oceánicas, plataforma continental, aguas costeras y puertos se presenta en la Figura 5.3.1.

5.3.1.1. Término de forzante por viento

El término de forzante por viento es útil para la generación de oleaje en i) grandes extensiones oceánicas y ii) cuerpos de agua cerrados o semi-cerrados, como lagos, fiordos y bahías. En Chile, el primer caso está relati-

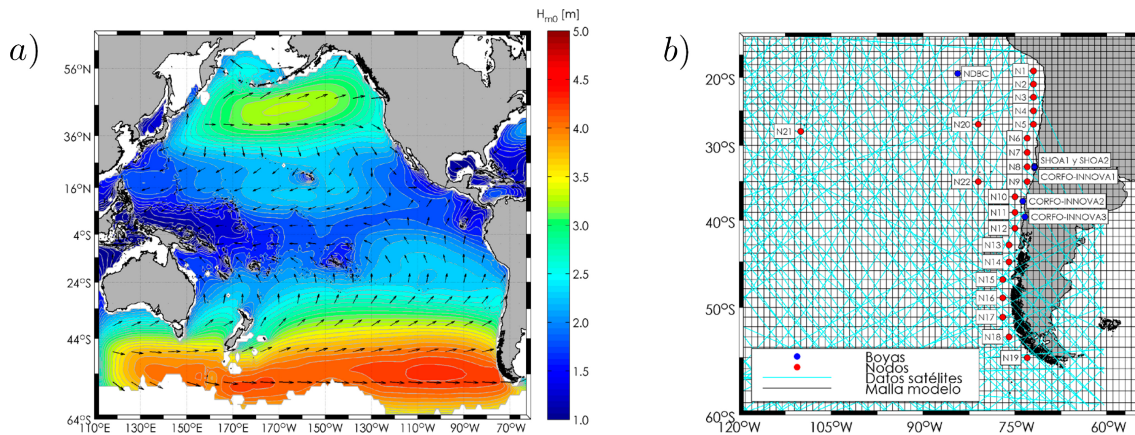


Figura 5.3.2: Ejemplo de modelo de generación utilizado en el Atlas de oleaje de Chile (Beyá et al., 2016), disponible en el sitio www.oleaje.uv.cl. a) Campos promedio de altura significativa espectral obtenida en el dominio donde se resuelve la ecuación de balance de acción mediante el software Wavewatch III, considerando forzante de vientos de la base de datos ERA Interim y NOAA CFSR. b) Nodos en aguas profundas frente a las costas chilenas donde se extraen los datos de oleaje. Se presenta además la malla utilizada en el modelo, los tracks satelitales y la ubicación de las boyas utilizadas en la calibración y validación del modelo.

vamente resuelto mediante métodos de retroanálisis (hindcasting) y pronósticos operacionales (forecasting). Un ejemplo elaborado por la Escuela de Ingeniería Civil Oceánica es el denominado Atlas de oleaje de Chile (Beyá et al., 2016), que proporciona datos gratuitos de oleaje en nodos ubicados frente a la costa (Figura 5.3.2). Dada la cercanía de los nodos al continente, estos datos pueden ser propagados hacia la costa descartando el forzante de viento, sin grandes errores a excepción de casos donde los temporales sean costeros.

La generación de oleaje en cuerpos de aguas cerrados o semicerrados, en contraste, requiere de estudios que no han sido resueltos en forma sistemática en Chile. Un ejemplo de un estudio de generación de oleaje local en Chiloé, desarrollado en el marco del proyecto del Puente sobre el Canal Chacao, se presenta en la Figura 5.3.3. En este caso es necesario contar con un registro de vientos que sea representativo del espejo de agua donde se transfiere energía de la atmósfera al oleaje. En la práctica, en ocasiones se cuenta con estadísticas de vientos en la costa y en otras lejos de la misma, lo que obliga a efectuar correcciones de los datos de viento (i.e. por altura, rugosidad de la superficie, ubicación de la estación, estabilidad térmica y duración del viento) para hacerlos representativos de la zona de generación. Afortunadamente, se están desarrollando herramientas para contar con estadísticas de campos de viento de larga data en cualquier punto de nuestro país. Un ejemplo es el Explorador de Energía Eólica desarrollado por Geofísica de la Universidad de Chile a partir del modelo WRF 3.2 (Weather Research and Forecasting), desarrollado por el National Center for Atmospheric Research de Estados Unidos. Un ejemplo de modelo de vientos obtenido del Explorador de Energía Eólica en el mar interior de Chiloé se ilustra en la Figura 5.3.4.

Existen varias metodologías empíricas para definir el término forzante por viento. El hecho de que sean empíricas se debe a que no existe una teoría satisfactoria que permita construir una función puramente analítica para describir el crecimiento del oleaje. En este texto sólo me refiero a una simple -una de las utilizadas en el modelo SWAN y explicada en Holthuijsen (2007)- con el mero objetivo de ofrecer nociones generales que servirán para interpretar otras formulaciones bastante más sofisticadas que están en constante mejora. El forzante de viento en ausencia de corrientes (supuesto que permite expresar la forzante en términos del espectro E en vez del balance de acción N) se modela mediante una expresión

$$S_{in}(\sigma, \theta) = \alpha + \beta E(\sigma, \theta), \quad (5.3.10)$$

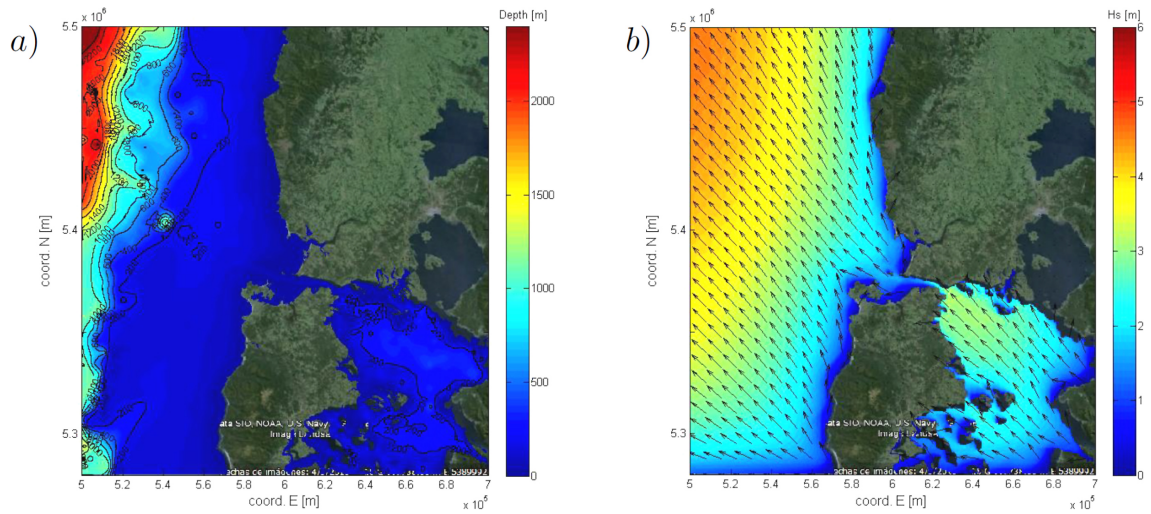


Figura 5.3.3: Ejemplo de modelo de generación oleaje local en Chiloé, desarrollado en el marco del proyecto del Puente sobre el Canal Chacao. a) Batimetría utilizada en el modelo. b) Campos de altura significativa espectral obtenida en el dominio donde se resuelve la ecuación de balance de acción mediante el software SWAN, considerando forzante de vientos SW de la base de datos ERA Interim y NOAA CFSR. (elaborado por Matías Alday y Patricio Winckler).

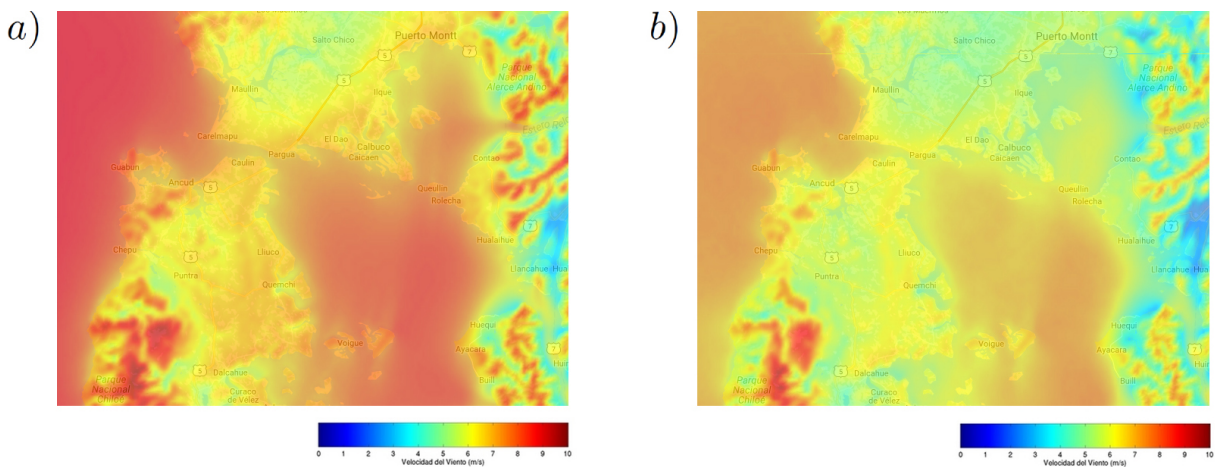


Figura 5.3.4: Ejemplo de modelo de vientos obtenido del Explorador de Energía Eólica en el mar interior de Chiloé, obtenido del sitio <http://walker.dgf.uchile.cl/Explorador/Eolico2/>. a) Velocidad del viento promedio anual a 95 metros de altura y b) Velocidad del viento promedio para enero a 95 metros de altura. Es interesante notar que i) en el océano las velocidades son relativamente altas debido a la baja rugosidad de la superficie, ii) que los cordones montañosos expuestos al océano también se generan velocidades altas debido a la contracción de las líneas de flujo del viento oceánico y iii) que en zonas continentales lejos de la costa, las velocidades son menores debido tanto a la fricción que ejerce la superficie terrestre y como a la presencia de obstáculos topográficos.

donde el primer término corresponde al crecimiento inicial del oleaje y el segundo término corresponde a un mecanismo de retroalimentación (feedback). La retroalimentación viene del hecho de que el forzante de viento depende del espectro, i.e. $S_{in} = f(E)$, y por tanto es un dato que sólo se puede obtener una vez resuelto el campo de oleaje (es un ejemplo del dilema ¿qué fue primero, el huevo o la gallina?). Esto se puede resolver en forma numérica mediante métodos iterativos u otras técnicas que son de interés para modeladores avanzados.

Los parámetros α y β dependen de la magnitud del viento a 10 metros sobre la superficie (U_{10}) y la dirección del viento superficial (θ_{wind}) en cada nodo donde se resuelve la ecuación. En mecánica de fluidos, es común caracterizar la magnitud del viento en la capa límite atmosférica¹ mediante la velocidad de fricción u_* , la que se relaciona con U_{10} a través de la expresión

$$u_*^2 = C_D U_{10}^2, \quad (5.3.11)$$

donde C_D es un coeficiente de arrastre adimensional, de carácter empírico, cuya expresión por tramos es

$$C_D = \begin{cases} 1,2875 \times 10^{-3} & U_{10} < 7,5 \text{ m/s} \\ (0,8 + 0,065U_{10}) \times 10^{-3} & U_{10} \geq 7,5 \text{ m/s} \end{cases} \quad (5.3.12)$$

Este coeficiente es constante a bajas velocidades y a partir de los 7.5 m/s depende de la magnitud del viento. Una vez conocidos el coeficiente de arrastre y la velocidad de fricción, se puede obtener el coeficiente $\alpha(\theta, \sigma)$ para cada componente del espectro, según la expresión empírica

$$\alpha(\theta, \sigma) = \begin{cases} \frac{1,5 \times 10^{-3}}{g^{2,2\pi}} [u_* \cos(\theta - \theta_{wind})]^4 G(\sigma) & |\theta - \theta_{wind}| \leq 90^\circ \\ 0 & |\theta - \theta_{wind}| > 90^\circ \end{cases} \quad (5.3.13)$$

donde la función de corte $G(\sigma)$ se define a partir de la frecuencia peak del espectro de Pierson Moskowitz (1964), σ_{PM}^* , según la expresión

$$G(\sigma) = \exp \left[- \left(\frac{\sigma}{\sigma_{PM}^*} \right)^4 \right], \quad \sigma_{PM}^* = 2\pi \frac{0,13g}{28} u_*. \quad (5.3.14)$$

Naturalmente el crecimiento inicial sólo se da para las componentes del oleaje cuyo sentido de propagación θ coincide (en sentido vectorial) con el del viento. En la versión WAM Cycle II de SWAN, el coeficiente β se define mediante la expresión

$$\beta(\theta, \sigma) = \text{máx} \left\{ 0; 0,025 \frac{\rho_{air}}{\rho_{water}} \left[28 \frac{u_*}{c} \cos(\theta - \theta_{wind}) - 1 \right] \right\} \sigma, \quad (5.3.15)$$

donde $c(h, \sigma)$ es la celeridad de la onda, ρ_{air} y ρ_{water} son la celeridad del aire y del agua, respectivamente. Esta formulación para el forzante por viento no contiene coeficientes empíricos con los cuales el modelador pueda jugar.

5.3.1.2. Términos de interacción no lineal

El término de interacción no lineal se puede subdividir en i) la interacción entre triadas, $S_{nl3}(\sigma, \theta)$, fenómeno importante en aguas profundas y ii) la interacción entre cuádrupletos, $S_{nl4}(\sigma, \theta)$ que predomina en aguas intermedias y someras

$$S_{nl}(\sigma, \theta) = S_{nl3}(\sigma, \theta) + S_{nl4}(\sigma, \theta). \quad (5.3.16)$$

¹La capa límite atmosférica es la capa inferior de la atmósfera donde domina la mezcla turbulenta del aire y donde se transfiere energía al océano.

Ambos términos deben parametrizarse en un modelo que promedia la fase (en otras palabras, estas interacciones no se resuelven sino que se modelan de modo que se asemejen al fenómeno real). En los modelos que resuelven la fase, en contraste, no es necesario parametrizar las interacciones, puesto que se resuelven en forma exacta. Por esa razón, en profundidades muy reducidas donde la interacción no lineal es muy importante, es recomendable utilizar modelos tipo Boussinesq o modelos no lineales de onda larga que resuelven la fase. Estos modelos, no obstante, requieren de una resolución espacial y temporal mucho mayor y son poco prácticos cuando la zona a cubrir es extensa. En la sección 5.4 se discuten los efectos de la interacción no lineal en la propagación de ondas.

5.3.1.3. Término de disipación

El término de disipación se puede subdividir en i) la contribución del whitecapping $S_{wc}(\sigma, \theta)$ asociada al rompimiento del oleaje en aguas profundas (conocido como mar rizada y cabritas, en forma coloquial), ii) la disipación por fricción de fondo $S_{bt,f}(\sigma, \theta)$ que es importante en aguas intermedias y someras (cuando el oleaje siente el fondo) y iii) la disipación por rotura $S_{surf}(\sigma, \theta)$:

$$S_{diss}(\sigma, \theta) = S_{wc}(\sigma, \theta) + S_{bt,f}(\sigma, \theta) + S_{surf}(\sigma, \theta) + \dots \quad (5.3.17)$$

Se pueden adicionar otros mecanismos de disipación como la percolación de agua en terrenos porosos, la disipación en medios limosos o arcillosos, el efecto de la vegetación y la disipación turbulenta, entre otros que usualmente son poco relevantes en zonas de pendiente importante, como la costa chilena abierta al Océano Pacífico.

5.3.2. Caso estacionario y conservativo: asomeramiento y refracción

La ecuación (5.3.2) es usada como una aproximación simplificada para estimar las propiedades del oleaje en un sitio de interés (como un futuro emplazamiento portuario) a partir de otro en aguas profundas donde éstas se conocen (una boya de oleaje o un modelo de retroanálisis o pronóstico). Se puede utilizar la teoría del rayo para calcular el flujo de energía entre dos «frentes» de oleaje denominados por los subíndices A y B , asumiendo i) que la ganancia o pérdida entre ambos puntos es despreciable, ii) que no hay transferencia de energía entre las «ortogonales» (esto es que no hay difracción) y iii) que la reflexión es despreciable. Con ello, se asume que los fenómenos de asomeramiento y refracción son predominantes en la propagación. Para estas condiciones, la ecuación (5.3.2) se simplifica a

$$\bar{E} = \text{constante}, \quad (5.3.18)$$

donde la energía media por unidad de área en planta para un oleaje regular de forma constante es $\bar{E} = \rho g H^2 / 8$, donde ρ es la densidad del agua, g es la aceleración de gravedad, H es la altura del oleaje. Podemos reescribir la ecuación (5.3.18) en términos del balance del flujo de energía (i.e. la cantidad de energía por unidad de tiempo) entre los dos frentes (Figura 5.3.5), como sigue

$$F_A = F_B. \quad (5.3.19)$$

De acuerdo a la teoría lineal del oleaje (Svendsen, 2006), el flujo de energía se define como $F = bc_g E$, donde b es la distancia entre ortogonales y la celeridad de grupo viene dada por $c_g = nc$, siendo

$$n = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\sinh(2kh)}{2kh} \right] \quad (5.3.20)$$

un coeficiente de profundidad relativa que depende del número de onda k y de la profundidad h . La celeridad de la onda se define mediante la ecuación de dispersión de frecuencias (5.3.4), que en términos de la celeridad se escribe como

$$c = \frac{gT}{2\pi} \tanh(kh). \quad (5.3.21)$$

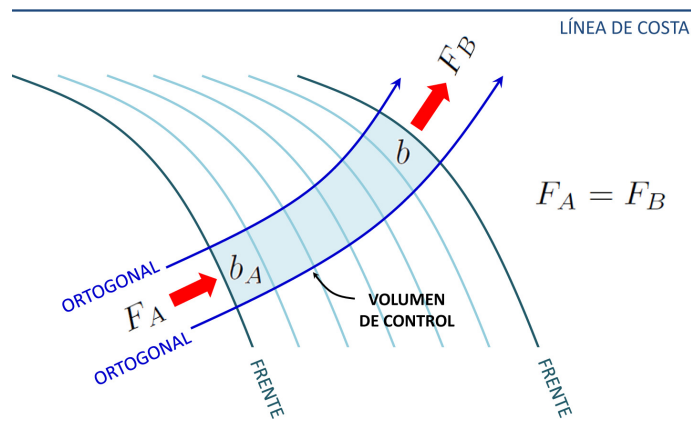


Figura 5.3.5: Volumen de control utilizado para el balance de energía entre dos frentes de olas. El balance contempla que no hay transferencia de energía entre las ortogonales (no hay difracción), generación o disipación de energía dentro del volumen de control.

Con algo de álgebra y omitiendo el subíndice de la altura en el punto desconocido, la ecuación (5.3.19) se puede escribir como

$$H = K_s K_r H_A, \quad \text{donde} \quad K_s = \sqrt{\frac{n_{ACA}}{nc}} \quad \text{y} \quad K_r = \sqrt{\frac{b_A}{b}} \quad (5.3.22)$$

representan el coeficiente de asomeramiento y refracción, respectivamente. El coeficiente de refracción puede expresarse para casos muy simples en términos del ángulo de incidencia del oleaje, utilizando la ley de Snell (dejo al lector buscar esa expresión). Cabe notar que el asomeramiento es función de la profundidad relativa dada por kh , en tanto que la refracción es un proceso en planta. La expresión (5.3.22) se puede generalizar a

$$H = K_a H_A, \quad (5.3.23)$$

donde $K_a(T_A, \theta_A, h)$ representa el coeficiente de agitación que depende del período y la dirección en el punto de referencia y de la profundidad del punto de interés. En esta expresión, el coeficiente de agitación puede incluir fenómenos adicionales a la refracción y el asomeramiento, como son la difracción y la interacción oleaje-corriente. Asimismo, el coeficiente se puede obtener para batimetrías complejas y oleaje irregular mediante modelos que promedian o resuelven la fase. Usualmente se asume que el período característico del oleaje (período medio, peak o energético) permanece constante entre el punto conocido (A) y el desconocido (B), supuesto que se basa en el «principio de conservación del número de olas». Este principio dice que la cantidad de olas que pasan por ambas secciones por unidad de tiempo es la misma o, en otras palabras, que entre ambas no se crean ni destruyen olas.

En la práctica, el punto de referencia se ubica en aguas profundas donde las propiedades estadísticas (H_o, T, θ_o) o en su defecto el espectro $S_o(f, \sigma)$ del oleaje son conocidos. En una primera aproximación, las propiedades estadísticas en el sitio se obtienen mediante las expresiones:

$$H = K_a(T, \theta_o, h) H_o, \quad \theta = \theta(T, \theta_o, h), \quad T = \text{constante}. \quad (5.3.24)$$

Existen metodologías más complejas para obtener las propiedades estadísticas en el sitio que incluiré en futuras versiones del texto.

5.3.3. Caso estacionario y conservativo: asomeramiento para onda larga

Si nos restringimos a un caso donde la refracción es despreciable (e.g. un oleaje incidiendo de manera ortogonal a una playa recta y paralela, con $K_r = 1$), podemos expresar la ecuación (5.3.22) como

$$H_B = \sqrt{\frac{n_{ACA}}{n_{BCB}}} H_A. \quad (5.3.25)$$

Más aún, si asumimos un régimen de onda larga donde $n \rightarrow 1$ y $c = \sqrt{gh}$

$$H = \sqrt[4]{\frac{h_A}{h}} H_A, \quad (5.3.26)$$

ecuación que se conoce como la ley de Green. Antes del advenimiento de la era digital, esta ecuación era utilizada para calcular la altura de ondas largas (e.g. tsunamis y mareas) a partir del valor de la altura en algún punto conocido. En la actualidad, los modelos numéricos permiten resolver ecuaciones del tipo (5.3.3) para oleaje transiente e irregular, con difracción, interacción oleaje-corriente, entre muchos otros fenómenos de interés.

5.3.4. Ejemplo de análisis de sensibilidad para modelos que promedian la fase

Los modelos de oleaje son sensibles al i) nivel del mar y ii) al viento local entre la condición de borde de aguas profundas y el punto de interés, entre otras variables y parámetros de entrada. Naturalmente, cambios en el nivel del mar modifican la profundidad sobre la cual se propaga el oleaje, y con ello la celeridad y todas las propiedades del oleaje. El viento, por su parte, puede incrementar la energía espectral y modificar las propiedades estadísticas del oleaje, como la altura significativa, el período y la dirección. Para ilustrar la sensibilidad del oleaje ante cambios de dichas variables, recorro a un modelo desarrollado para caracterizar el temporal del 8 de agosto de 2015 en la región de Valparaíso (Winckler et. al, 2017). Para contextualizar el análisis, se incluye una descripción del modelo (que puede también servir de ejemplo para informes donde se utilizan modelos similares). Aquí va el ejemplo:

Para establecer las características de oleaje en la costa se efectuó una propagación del estado de mar extremo mediante el modelo SWAN, que resuelve las ecuaciones de balance de acción (Booij et al., 1999; Ris et al., 1999). Este modelo permite caracterizar los procesos de asomeramiento, refracción y rotura, pero no resuelve en forma adecuada la difracción y reflexión generadas por obras marítimas y accidentes geográficos abruptos. Por esta razón y debido también a la escasa información batimétrica disponible en la zona costera, los resultados obtenidos son representativos de profundidades superiores a 10 m y lejos de bordes costeros rocosos. El modelo de elevación digital se generó a partir de cartas náuticas digitales del SHOA (Servicio Hidrográfico y Oceanográfico de la Armada de Chile) mediante una interpolación mediante la triangulación de Delaunay. La condición de borde en aguas profundas se definió a partir del espectro registrado por una boya Watchkeeper ubicada en aguas profundas frente a Valparaíso durante el peak del temporal. Esta condición se asumió como representativa de aguas profundas frente a las tres bahías de interés, lo que se observa en las condiciones del borde homogéneas en el límite exterior del modelo. El espectro se discretizada en 127 frecuencias comprendidas entre 0,005 a 0,64 Hz, con un intervalo de 0,005 Hz, y 120 direcciones cubriendo de 0° a 360°, cada 3°. Los modelos se realizaron en modo estacionario, incluyendo los efectos de disipación del oleaje por whitecapping, rotura y fricción.

Los modelos para evaluar la sensibilidad del modelo al nivel de marea consideran 0 m NRS (Figura 5.3.6a) y +1,8 m NRS (Figura 5.3.6b); este último valor correspondiente a la envolvente superior de combinación entre marea astronómica y meteorológica para el evento. Los resultados indican diferencias despreciables de la altura significativa a profundidades mayores a 20 m, y diferencias de hasta 2 m para el caso con marea máxima en sectores puntuales y muy bajos (Figura 5.3.6c).

Por otra parte, se comparó un caso sin forzante de viento con uno correspondiente a un viento de 10 m/s, proveniente del oeste. Cabe notar que para este evento la dirección y magnitud del viento se caracterizaron por i) una gran variabilidad temporal en cada estación meteorológica y ii) una gran diferencia entre estaciones costeras. Se constató que el modelo no es tan sensible al viento, puesto que se registran alturas significativas superiores en menos de 0,5 m en sectores muy puntuales para el modelo con viento. A falta de datos de oleaje en la costa, no se pudo efectuar un proceso de calibración y validación.

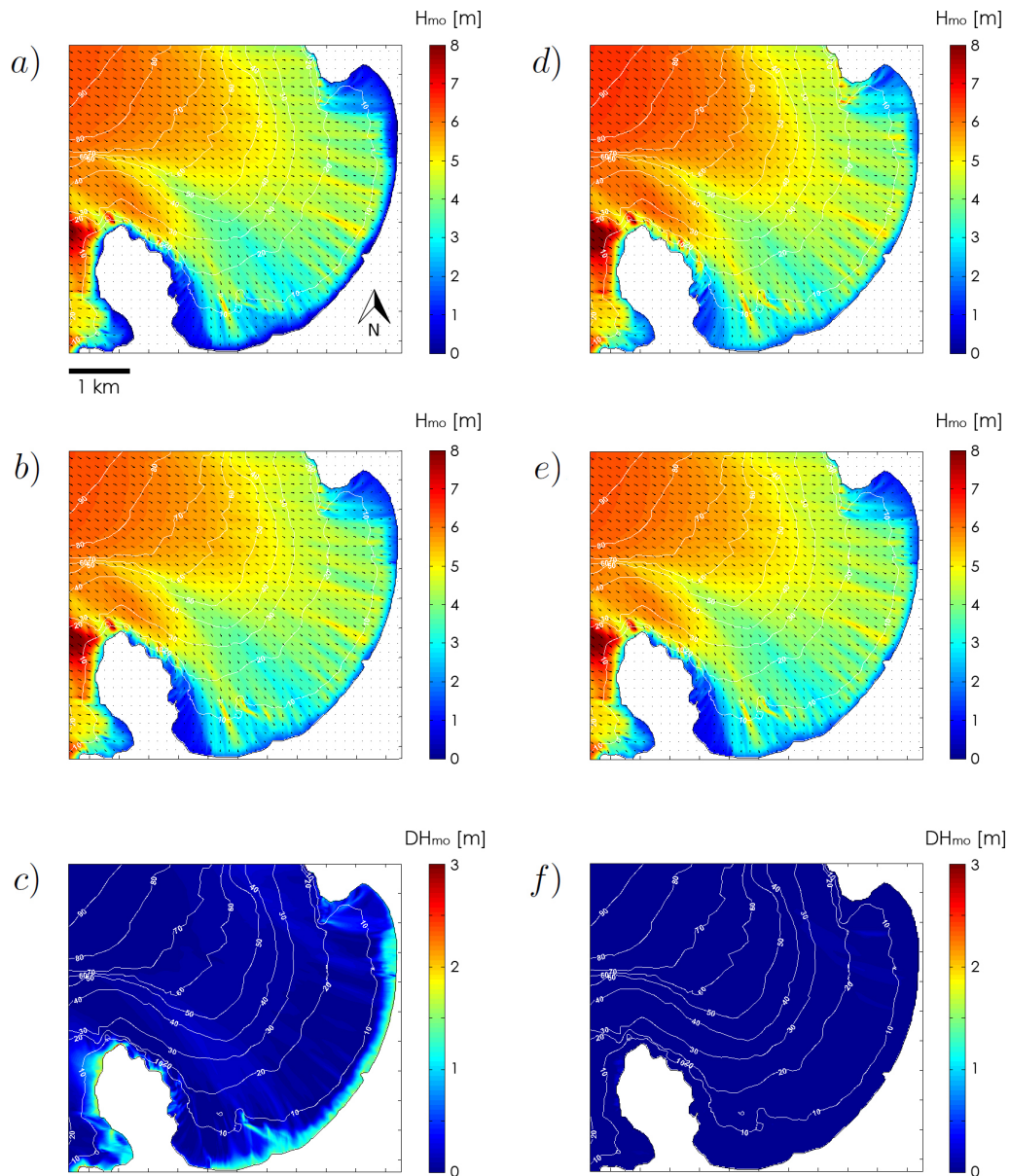


Figura 5.3.6: Modelo de propagación de oleaje desde aguas profundas a someras para el temporal 8 de agosto de 2015 en la Bahía de Quintero. Las condiciones de aguas profundas corresponden a una altura de ola significativa en aguas profundas de $H_s = 7,23$ [m], un período peak $T_p = 13,3$ [s] y una dirección de 310° . Los gráficos de la columna izquierda permiten sensibilizar resultados a variaciones de la marea, sin considerar viento: a) Modelo con marea de $z=+0,0$ m NRS, b) Modelo con marea de $z=+1,8$ m NRS y c) Modelo con marea menos sin marea (b – c). Los gráficos de la columna derecha permiten sensibilizar resultados a variaciones del viento, para una marea constante de $z=+1,8$ m NRS: d) Modelo sin viento, b) Modelo con viento oeste de 10 m/s y c) Modelo con viento menos sin viento (e – d).

5.4. Modelos que resuelven la fase

Los modelos que resuelven la fase se dividen en los regímenes de Stokes y de onda larga, según se muestra en la Figura 5.4.1. En la figura también se incluyen algunos software comúnmente utilizados en la práctica de ingeniería. Inicialmente se presenta la derivación la teoría lineal del oleaje (el caso más simple y limitado del régimen se Stokes), y luego se procede con las ecuaciones no lineales de onda larga y Boussinesq, que son versiones del régimen de onda larga de aplicación común en la ingeniería costera. El régimen de Stokes es muy apropiado para aplicaciones en aguas profundas (e.g. plataformas petrolíferas, artefactos flotantes, dispositivos de generación de energía, entre otros) y su aplicación, a excepción del caso particular de la teoría lineal del oleaje, es poco frecuente para nuestra realidad. La selección de la teoría adecuada para simular la propagación de

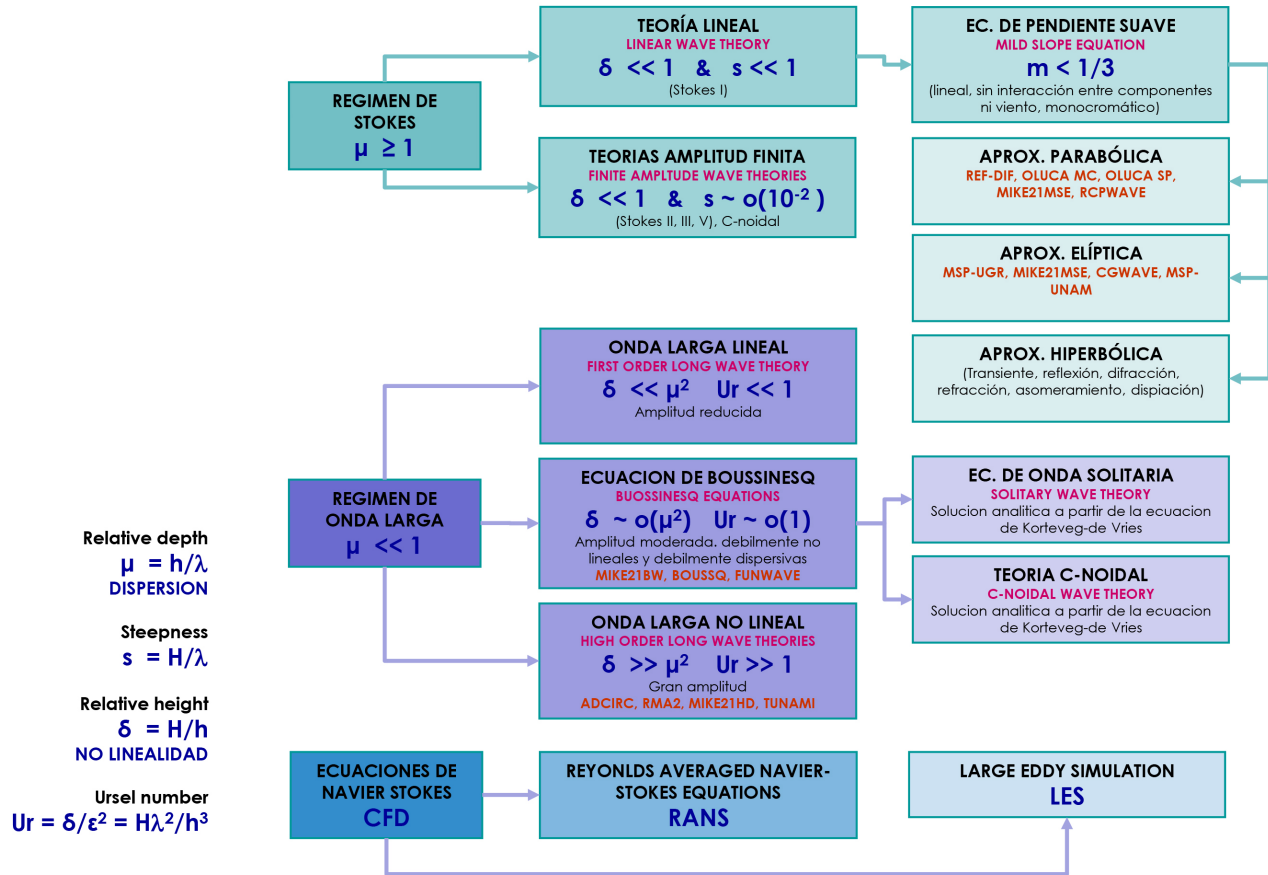


Figura 5.4.1: Teorías de ondas que resuelven la fase.

ondas tiene implicancias relevantes en la estimación de propiedades como la altura de ola, su longitud y período, la forma de la onda y el tiempo de arribo a un punto cualquiera. A modo de ejemplo, en la Figura 5.4.2 se compara una solución analítica ideal (onda solitaria) con las aproximaciones calculadas mediante teorías usadas en el régimen de onda larga, donde se hacen evidentes las diferencias según se consideren fenómenos como la no linealidad o la dispersión de frecuencia, que se introducen en la sección 5.4.2.1. Si no tienes exposición previa las teorías, se recomienda recurrir a textos clásicos de mecánica de ondas (e.g. Dean & Dalrymple, 1991)

5.4.1. Teoría lineal del oleaje

El oleaje corresponde a aquellas ondas cuyo período está entre 3 - 30 segundos y es generado por la acción del viento. El oleaje concentra un porcentaje importante de la energía de un estado de mar y constituye una de las principales sollicitaciones estructurales, de operación y de morfología costera. Para su caracterización recu-

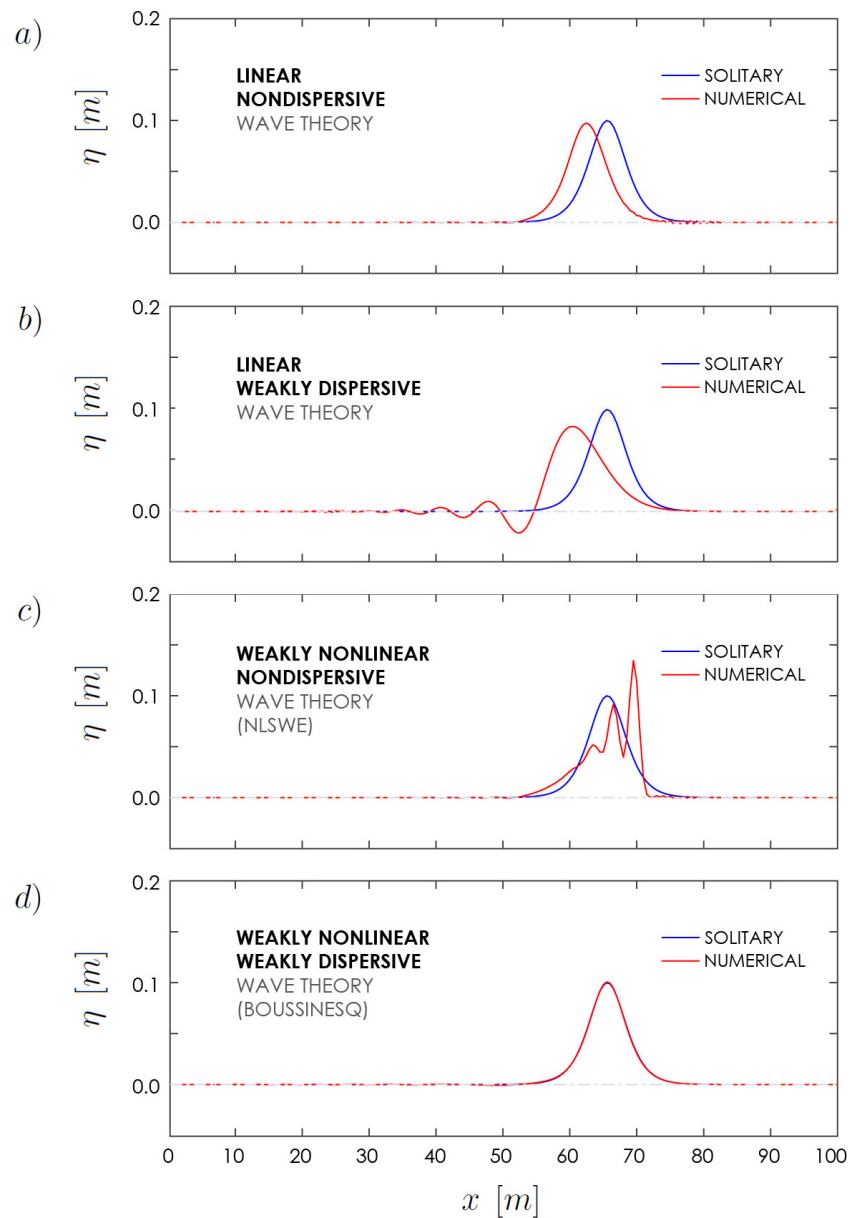


Figura 5.4.2: Propagación de una perturbación cuya forma inicial corresponde a una onda solitaria (débilmente no lineal y débilmente dispersiva) sobre un fondo plano, mediante diferentes teorías. Se muestra la solución analítica en azul y las aproximaciones numéricas en rojo para teorías a) lineal y no dispersiva, b) lineal y débilmente dispersiva, c) débilmente no lineal y no dispersiva (NLSWE) y d) débilmente no lineal y débilmente dispersiva (Boussinesq).

rriremos a la Teoría Lineal del Oleaje (TLO), que fue derivada por Sir George Biddell Airy, astrónomo inglés, en el paper «Tides and Waves» de la Encyclopaedia Metropolitana, en 1841. Para una explicación acabada de la teoría, recomiendo revisar el texto clásico de Dean & Dalrymple (1991).

El oleaje que resulta de la TLO se conoce como oleaje de pequeña amplitud, oleaje infinitesimal, oleaje sinusoidal, oleaje armónico simple u oleaje de Airy, en honor a su autor. La teoría se basa en una serie de supuestos que, aunque no se replican exactamente en la realidad, permiten caracterizar el campo cinemático (e.g. desplazamientos, velocidades y aceleraciones) y dinámico (presión) de ondas de pequeña amplitud mediante expresiones analíticas que simplifican mucho su uso. A partir de dichos resultados se pueden también calcular fuerzas de presión, arrastre, inercia y sustentación, que son relevantes en el diseño de obras marítimas.

5.4.1.1. Formulación del problema de contorno

Para simplificar la derivación, consideraremos un modelo bidimensional 2DV en el plano (x, z) en el cual se desprecian efectos de variación en planta. El hecho de asumir un fenómeno bidimensional restringe la teoría frentes de onda largos, donde los fenómenos de refracción y difracción son despreciables. Consideramos también que la única fuerza externa que existe es la gravedad. Buscamos, entonces, una solución lineal que permite la superposición de ondas, a partir de la cual se pueden estudiar los fenómenos de reflexión en estructuras, el oleaje irregular y los grupos de olas. Cabe notar que se puede obtener una gran cantidad de información sobre la mecánica del oleaje si se asume que el proceso es lineal y que la contribución de términos no lineales constituye una “corrección” a la solución lineal.

La Figura 5.4.3 ilustra el dominio de integración y las variables que definen el problema. La ecuación de Laplace es resuelta en un dominio de integración rectangular, definido por una profundidad constante y un fondo plano, el nivel estático de la superficie y dos bordes verticales distanciados a una longitud de onda λ , que corresponde a la distancia horizontal entre dos puntos que están en fase². Como veremos en adelante, la condición de borde de periodicidad asume que lo que ocurre dentro del dominio se repite periódicamente en forma indefinida, por lo que sólo es necesario resolver en una sola longitud de onda para conocer el comportamiento en todo el espacio. La altura H se define como la diferencia vertical entre la cresta y el valle y el período T como el intervalo de tiempo en que dos puntos en fase pasan por una sección x . El origen se ubica en la superficie, donde $z = 0$, y la coordenada z se define positiva sobre el nivel estático. La profundidad h se considera constante y el fondo se define en $z = -h$. La integración se efectúa sólo hasta el nivel estático, $z = 0$, por lo que sobre este la teoría no ofrece resultados. No obstante, el supuesto de que el oleaje es de amplitud infinitesimal permite extrapolar los resultados sobre el nivel estático a partir de la expansión de Taylor, como se verá en adelante. Recordemos también que este desarrollo se basa en un enfoque euleriano que permitirá especificar el potencial (y sus magnitudes derivadas) en puntos fijos del dominio.

Ecuación de gobierno

Para resolver la mecánica del oleaje, se pueden adoptar diferentes procedimientos. Una primera opción se basa en integrar el sistema de ecuaciones diferenciales parciales (EDP) dado por la ecuación de conservación de la masa y de momentum

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0, \quad (5.4.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{V}) + \nabla \cdot (\mathbf{V} \otimes \rho \mathbf{V}) = -\nabla p + \rho \mathbf{g}, \quad (5.4.2)$$

sujeta a condiciones iniciales y de borde. Esta vía es un tanto compleja pues, si se asume conocida la densidad ρ , implica resolver tres incógnitas: la presión p y las velocidades $\mathbf{V} = (u, w)$. Adicionalmente, tiene un término

²En teoría de ondas, la fase corresponde al argumento de una función periódica. Por ejemplo, en una onda sinusoidal definida por la expresión $\eta(x, t) = a \cos(kx - \omega t)$, la fase se define como $\theta = kx - \omega t$. Así, dos crestas o valles sucesivos son puntos que están en fase dado que el argumento de la función coseno es equivalente.

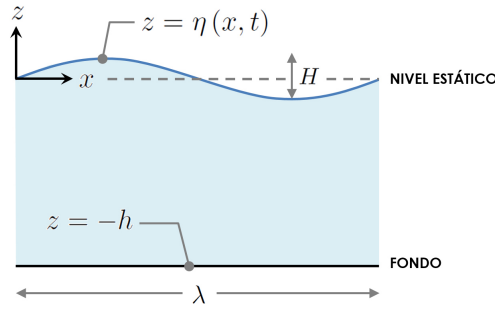


Figura 5.4.3: Dominio de integración de la TLO.

nolineal $\nabla \cdot (\mathbf{V} \otimes \rho \mathbf{V})$ que imposibilita la aplicación del principio de superposición e introduce complejidades numéricas, como la inestabilidad de los algoritmos. Con todo, esta ecuación se puede integrar mediante métodos numéricos, incluso reteniendo el término nolineal. Alternativamente, se puede recurrir a la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 \phi = 0, \quad (5.4.3)$$

la que en conjunto con condiciones de borde linealizadas permite encontrar expresiones analíticas, y por ende, de fácil aplicación. En esta expresión, $\phi(x, z, t)$ corresponde a la función escalar denominada potencial de velocidades y $\nabla^2 = (\partial^2/\partial x^2, \partial^2/\partial z^2)$ corresponde al operador Laplaciano en coordenadas cartesianas. Por componentes, esta ecuación se escribe como

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0. \quad (5.4.4)$$

Como se vio en la sección 2.4.1.3, esta ecuación representa el principio de conservación de la masa para un flujo irrotacional ($\nabla \times \mathbf{V} = 0$) e incompresible ($d\rho/dt = 0$), esto es, un flujo potencial. Ambos supuestos, además de la linealización de las condiciones de borde en la superficie, permiten la superposición de soluciones. Ello permitirá extender la teoría desde un oleaje regular o monocromático -aquel que presenta sólo una altura, período y dirección- a un oleaje irregular, que cubre un rango continuo de dichas propiedades. Cabe notar que aun cuando la ecuación de Laplace no incluye al tiempo como variable independiente, este será introducido a través de las condiciones de borde en la superficie. Ello explica por qué el potencial de velocidades depende también del tiempo, i.e. $\phi(x, z, t)$.

La ecuación de Laplace es una ecuación diferencial parcial elíptica de 2º orden en dos variables independientes (Anexo 9.2), por lo que para integrarse se deben incorporar 4 condiciones de borde que responden a cada problema en particular. Desde el punto de vista matemático, esta ecuación es un problema de contorno donde la solución está interrelacionada en todos los puntos en el dominio (Moin, 2010). Es decir, si una perturbación se introduce en un punto o en los bordes, la solución se ve afectada instantáneamente en todo el dominio. En otras palabras, la información se propaga a una velocidad infinita.

La ecuación de Laplace tiene la ventaja de que requiere resolver sólo para el escalar $\phi(x, z, t)$ y luego mediante la expresión $\nabla \phi = \mathbf{V}$, obtener el campo cinemático mediante las siguientes expresiones

$$u(x, z, t) = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad w(x, z, t) = \frac{\partial \phi}{\partial z}, \quad (5.4.5)$$

$$a_x(x, z, t) = \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad a_z(x, z, t) = \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial z}, \quad (5.4.6)$$

$$\zeta_x(x, z, t) = \int u dt = \int \frac{\partial \phi}{\partial x} dt, \quad \zeta_z(x, z, t) = \int w dt = \int \frac{\partial \phi}{\partial z} dt, \quad (5.4.7)$$

donde $\mathbf{V} = (u, w)$, $\mathbf{a} = (a_x, a_x)$ y $\zeta = (\zeta_x, \zeta_z)$ corresponden a los campos de velocidad, aceleración y desplazamiento, respectivamente. Como se verá en adelante, la presión $p(x, z, t)$ y la desnivelación instantánea de la superficie $\eta(x, t)$ se obtienen de la ecuación de energía.

Los supuestos de fluido incompresible, homogéneo y continuo implícitos en la ecuación de gobierno implican que la teoría no puede aplicarse en la zona rompiente, donde la incorporación de aire y sedimento en suspensión caracterizan el flujo. El supuesto de flujo irrotacional es válido también lejos del fondo y donde existen bordes sólidos. En la realidad, el flujo potencial no existe y sólo constituye una buena aproximación lejos de las superficies sólidas donde se desarrolla una capa límite, caracterizada por gradientes significativos del esfuerzo de corte y rotacionalidad en el campo cinemático. No obstante, la capa límite de fondo, del orden de centímetros, es pequeña frente a la profundidad de propagación de las ondas.

Condición de borde cinemática de fondo (CDBCF)

La condición cinemática para un fondo que varía en el tiempo y en el espacio, $z = -h(x, t)$, viene dada, apelando a la regla de la cadena, por

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{\partial h}{\partial x} \frac{dx}{dt} - \frac{\partial h}{\partial t} \quad \text{en } z = -h(x, t), \quad (5.4.8)$$

e implica que la velocidad normal al fondo es nula y que el fondo es impermeable. En esta expresión $\partial h / \partial x$ representa la pendiente del fondo. Puesto que por definición $u = dx/dt$ y $w = dz/dt$, y que debido al supuesto de flujo potencial $u = \partial\phi/\partial x$ y $w = \partial\phi/\partial z$, esta expresión se puede expresar como

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = -\frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial\phi}{\partial x} - \frac{\partial h}{\partial t} \quad \text{en } z = -h. \quad (5.4.9)$$

En la TLO se asume que el fondo es plano, horizontal y fijo, por lo que la CDBCF se reduce a

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = 0 \quad \text{en } z = -h. \quad (5.4.10)$$

Esta ecuación es lineal y no requiere de un tratamiento especial como ocurre en las condiciones de borde superficiales³.

Cabe observar que, siendo consistente con el supuesto de flujo irrotacional, en la TLO se omite la condición de no deslizamiento en el fondo (no-slip condition), que sólo es válida para fluidos viscosos. Las consecuencias del supuesto que el flujo es irrotacional son importantes. En primer lugar, la TLO permite que las partículas de fluido oscilen en forma paralela al fondo. En segundo lugar, no se desarrolla la capa límite y por tanto toda la riqueza que ocurre en ella se omite (e.g. transferencia de momentum normal al fondo, marcados gradientes de velocidad y esfuerzos de corte, generación de turbulencia). Para estudiar fenómenos como el transporte sedimentario en el fondo, se debe incorporar la rotacionalidad en el flujo en la capa límite de fondo⁴.

Los supuestos de fondo plano, horizontal y fijo excluyen fenómenos como las deformaciones cosísmicas que provocan tsunamis, o la variación morfológica de lechos arenosos que ocurre a escalas de tiempo bastante mayores a la que define la mecánica del oleaje.

Condición de borde cinemática de superficie (CDBCS)

La condición cinemática en la superficie $z = \eta(x, t)$ tiene la expresión

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = \frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{\partial\eta}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial t} \quad \text{en } z = \eta(x, t). \quad (5.4.11)$$

³Como se verá en la sección XXX, en la derivación de las ecuaciones no lineales de onda larga se considerará que el fondo puede ser variable tanto en el tiempo como en el espacio, y por tanto se recurrirá a la expresión (5.4.9).

⁴En la capa límite, la velocidad del fluido respecto al sólido que lo confina varía desde cero en el borde (condición de no deslizamiento) hasta el 99 % de la velocidad del flujo no perturbado por el mismo.

Esta expresión presenta la dificultad de que la desnivelación instantánea no es conocida a priori y que el primer término de la derecha es no lineal, pues incluye la multiplicación de las incógnitas ϕ y η^5 . Formalmente, la eliminación del término no lineal requiere de técnicas de escalamiento que exceden el alcance de este texto. De momento, lo consideraremos despreciable bajo el supuesto de que el oleaje es infinitesimal y confirmaremos ello una vez que se cuente con las expresiones correspondientes. Por otra parte, el hecho de que la CDBCS es evaluada en un borde desconocido y móvil se evita asumiendo que el oleaje es infinitesimal, y que esta se puede evaluar en el nivel estático. De hecho, cualquier función $f(x, z, t)$ se puede expresar mediante la expansión de Taylor en torno al nivel estático como

$$f(x, \eta, t) = f(x, 0, t) + f^{(1)}(x, 0, t)\eta + f^{(2)}(x, 0, t)\frac{\eta^2}{2!} + \dots + f^{(n)}(x, 0, t)\frac{\eta^n}{n!} + \mathcal{O}(\eta^{n+1}), \quad (5.4.12)$$

donde, para un oleaje infinitesimal donde η tiende a cero, $f(x, \eta, t) = f(x, 0, t) + \mathcal{O}(\eta)$. Con ello, la CDBCS se traduce en

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad \text{en} \quad z = 0. \quad (5.4.13)$$

Condición de borde dinámica de superficie (CDBDS)

La ecuación de Bernoulli para régimen transiente e irrotacional, es la siguiente

$$-\frac{1}{g}\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2g}\left[\frac{\partial \phi^2}{\partial x} + \frac{\partial \phi^2}{\partial z}\right] + \frac{p}{\gamma} + z = C(t). \quad (5.4.14)$$

En la superficie asumiremos que la presión atmosférica es nula y constante, es decir

$$p = 0 \quad \text{en} \quad z = \eta(x, t), \quad (5.4.15)$$

lo que implica que el campo de presiones corresponderá a la presión manométrica (se excluye la presión atmosférica). La variación de la presión atmosférica en la superficie es responsable de fenómenos como la marea meteorológica (sección XXX) cuyas escalas espacial y temporal son órdenes de magnitud superiores como para considerarlas en esta teoría.

Al igual que para la CDBCS, la eliminación de los términos no lineales (velocidades en el término de energía cinética) requiere de técnicas de escalamiento que exceden el alcance de este texto. De momento, los descartaremos para volver sobre ellos una vez que contemos con las expresiones correspondientes. Asimismo, la evaluación de esta condición se puede hacer en el nivel estático asumiendo que el oleaje es infinitesimal. Con ello se obtiene la expresión

$$-\frac{1}{g}\frac{\partial \phi}{\partial t} + \eta = C(t) \quad \text{en} \quad z = 0. \quad (5.4.16)$$

La ecuación de Bernoulli deviene de integrar las ecuaciones de Euler, que representan un fluido ideal. La CDBDS puede ampliarse para considerar la tensión superficial y la aceleración de Coriolis, que son fenómenos de menor importancia para el rango de alturas y períodos que caracterizan el oleaje. Esta condición también excluye fenómenos asociados a la disipación de energía, como el whitecapping, la disipación, la viscosidad, la fricción de fondo o la rotura del oleaje.

Condición de periodicidad (CDP)

La CDP asume que el potencial de velocidades es periódico en el tiempo y en la coordenada horizontal

$$\phi(x, z, t) = \phi(x + \lambda, z, t) \quad \text{o} \quad \phi(x, z, t) = \phi(x, z, t + T). \quad (5.4.17)$$

⁵En las ecuaciones no lineales de onda larga (sección XXX) interesa mantener la no linealidad, de modo que obviaremos esa simplificación.

Este supuesto implica que el oleaje es de forma y período constantes, lo que resulta razonable lejos de la rompiente y de las zonas de generación. En las cercanías de la rompiente, los efectos no lineales asociados a la reducción de fondo generan una asimetría progresiva que promueve la inestabilidad de la onda.

Solución del problema de contorno

La integración siguiente corresponde a una adaptación de la expuesta en Dean & Dalrymple (1991), con la diferencia de que en dicho texto el potencial es definido como $\mathbf{V} = -\nabla\phi$ (el signo no genera cambios importantes en los resultados). Una forma conveniente de integrar la ecuación de Laplace es recurrir al método de separación de variables

$$\phi(x, z, t) = X(x) Z(z) \Theta(t), \quad (5.4.18)$$

donde $X(x)$ depende sólo de la coordenada horizontal, $Z(z)$ de la coordenada vertical y $\Theta(t)$ del tiempo. Apelando al supuesto de oleaje periódico, se asume que

$$\Theta(t) = \sin(\omega t). \quad (5.4.19)$$

La CDP (5.4.17) implica que $\sin(\omega t) = \sin(\omega(t+T))$, lo que apelando a la identidad trigonométrica

$$\sin(\omega(t+T)) = \sin(\omega t) \cos(\omega T) + \cos(\omega t) \sin(\omega T) \quad (5.4.20)$$

implica que $\omega = 2\pi/T$, parámetro denominado «frecuencia angular». Cabe notar que la elección de la función $\sin(\omega t)$ es arbitraria y podría ser reemplazada por $\cos(\omega t)$, una combinación lineal de funciones trigonométricas o cualquier función que cumpla con ser periódica (la linealidad permite que soluciones de este tipo se superpongan). El potencial de velocidades

$$\phi(x, z, t) = X(x) Z(z) \sin(\omega t) \quad (5.4.21)$$

se puede introducir en la ecuación de Laplace (5.4.4) para dar

$$\left[\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} Z(z) + X(x) \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} \right] \sin(\omega t) = 0. \quad (5.4.22)$$

En adelante, nos fijamos en el paréntesis. Para separar variables, dividimos por $X(x) Z(z)$ y omitimos la dependencia de las variables independientes

$$\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = 0. \quad (5.4.23)$$

Esta ecuación es válida si los cambios en un término son de igual magnitud, pero de signo opuesto, que el otro. En términos matemáticos, esto implica que

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + k^2 X = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} - k^2 Z = 0, \quad (5.4.24)$$

donde el signo es también arbitrario y el uso de la constante k tendrá sentido en lo sucesivo. Estas son ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) y se pueden resolver en forma independiente. Aun cuando la variable k puede ser positiva, cero o negativa, en esta derivación nos focalizamos en el caso $k > 0$, con lo que las soluciones son

$$X = A \cos(kx) + B \sin(kx) \quad \text{y} \quad Z = C \exp(kz) + D \exp(-kz). \quad (5.4.25)$$

Es natural pensar que la primera estará condicionada por la condición de periodicidad (CDP) en los bordes, en tanto que la segunda dependerá de las condiciones en el fondo (CDF) y en la superficie (CDBCS y CDBDS). La CDP (5.4.17) implica que $\phi(x, z, t) = \phi(x + \lambda, z, t)$, o equivalentemente $X(x) = X(x + \lambda)$. Así

$$\begin{aligned} A \cos(kx) + B \sin(kx) &= A \cos(k(x + \lambda)) + B \sin(k(x + \lambda)), \\ &= A \cos(kx) A \cos(k\lambda) - A \sin(kx) A \sin(k\lambda) \\ &\quad + B \sin(kx) B \cos(k\lambda) + B \cos(kx) B \sin(k\lambda), \end{aligned} \quad (5.4.26)$$

lo que es válido para implica que $k = 2\pi/\lambda$, parámetro que se denomina «número de onda». Combinando (5.4.21) y (5.4.25) da

$$\phi(x, z, t) = [A \cos(kx) + B \sin(kx)] [C \exp(kz) + D \exp(-kz)] \sin(\omega t). \quad (5.4.27)$$

Basados en el principio de superposición, podemos retener una de las soluciones en x

$$\phi(x, z, t) = A \cos(kx) [C \exp(kz) + D \exp(-kz)] \sin(\omega t) \quad (5.4.28)$$

y aplicar la CDBCF (5.4.10)

$$A \cos(kx) \frac{\partial}{\partial z} (C \exp(kz) + D \exp(-kz)) \sin(\omega t) = 0 \quad \text{en } z = -h, \quad (5.4.29)$$

lo que resulta en

$$A \cos(kx) [Ck \exp(-kh) - Dk \exp(kh)] \sin(\omega t) = 0. \quad (5.4.30)$$

Para que esta expresión sea cero para cualquier x y t , debe cumplirse que el corchete sea nulo, lo que se traduce en

$$C = D \exp(2kh). \quad (5.4.31)$$

El potencial de velocidades 5.4.28, entonces, se traduce a

$$\phi(x, z, t) = A \cos(kx) [D \exp(2kh) \exp(kz) + D \exp(-kz)] \sin(\omega t). \quad (5.4.32)$$

Factorizando por $D \exp(kh)$

$$\phi(x, z, t) = AD \cos(kx) \exp(kh) [\exp(k(h+z)) + \exp(-k(h+z))] \sin(\omega t). \quad (5.4.33)$$

La expresión en corchetes se puede simplificar aun más recurriendo a la relación entre la exponencial y las funciones hiperbólicas. Con ello

$$\phi(x, z, t) = G \cos(kx) \cosh(k(h+z)) \sin(\omega t), \quad (5.4.34)$$

donde $G = 2AD \exp(kh)$ es también una constante. Reemplacemos ahora esta expresión en la CDBDS (5.4.16)

$$\eta = \frac{1}{g} G \cos(kx) \cosh(k(h+z)) \frac{\partial}{\partial t} (\sin(\omega t)) + \frac{C(t)}{g} \quad \text{en } z = 0, \quad (5.4.35)$$

lo que equivale a

$$\eta = \left[\frac{G\omega \cosh(kh)}{g} \right] \cos(kx) \cos(\omega t) + \frac{C(t)}{g}. \quad (5.4.36)$$

Por definición, el valor medio de la desnivelación instantánea debe ser cero, por lo que la constante de integración se asume como $C(t) = 0$. Si definimos $H/2 = G\omega \cosh(kh)/g$, se tiene una expresión simple para la desnivelación instantánea.

$$\eta = \frac{H}{2} \cos(kx) \cos(\omega t). \quad (5.4.37)$$

Combinando (5.4.34) y (5.4.37) da la siguiente expresión para el potencial de velocidades

$$\phi(x, z, t) = \frac{H}{2} \frac{g}{\omega} \frac{\cosh(k(h+z))}{\cosh(kh)} \cos(kx) \sin(\omega t). \quad (5.4.38)$$

Cabe mencionar que estas expresiones tienen el espacio en x y tiempo t desacoplados, por lo que corresponden a un oleaje de tipo estacionario.

Para encontrar una onda progresiva consideramos soluciones del tipo

$$\eta = -\frac{H}{2} \sin(kx) \sin(\omega t) \quad (5.4.39)$$

y

$$\phi(x, z, t) = \frac{H g \cosh(k(h+z))}{2 \omega \cosh(kh)} \sin(kx) \cos(\omega t), \quad (5.4.40)$$

que están desfasadas en 90° en x y t respecto de las anteriores, y que fueron descartadas durante la derivación. Basados en el principio de superposición, se puede restar (5.4.40) de (5.4.38) y obtener, recurriendo a las funciones trigonométricas, la función potencial

$$\phi(x, z, t) = \frac{H g \cosh(k(z+h))}{2 \omega \cosh(kh)} \sin(kx - \omega t), \quad (5.4.41)$$

y la desnivelación instantánea

$$\eta = \frac{H}{2} \cos(kx - \omega t). \quad (5.4.42)$$

Hasta acá se han efectuado una serie de elecciones arbitrarias que derivarán en soluciones sutilmente distintas para el potencial y todas las magnitudes derivadas del mismo. Así, por ejemplo, el potencial de velocidades puede adoptar las siguientes expresiones

$$\phi = \frac{H g \cosh(k(z+h))}{2 \omega \cosh(kh)} \sin(kx - \omega t) \quad \text{si} \quad \mathbf{V} = \nabla \phi \quad \text{y} \quad \Theta(t) = \cos(\omega t), \quad (5.4.43)$$

$$\phi = -\frac{H g \cosh(k(z+h))}{2 \omega \cosh(kh)} \cos(kx - \omega t) \quad \text{si} \quad \mathbf{V} = \nabla \phi \quad \text{y} \quad \Theta(t) = \sin(\omega t), \quad (5.4.44)$$

$$\phi = -\frac{H g \cosh(k(z+h))}{2 \omega \cosh(kh)} \sin(kx - \omega t) \quad \text{si} \quad \mathbf{V} = -\nabla \phi \quad \text{y} \quad \Theta(t) = \cos(\omega t) \quad (5.4.45)$$

$$\phi = \frac{H g \cosh(k(z+h))}{2 \omega \cosh(kh)} \cos(kx - \omega t) \quad \text{si} \quad \mathbf{V} = -\nabla \phi \quad \text{y} \quad \Theta(t) = \sin(\omega t) \quad (5.4.46)$$

También hay derivaciones cuyo denominador contiene la expresión $\sinh(kh)$ en vez de $\cosh(kh)$. En adelante sólo se presentan los resultados correspondientes a 5.4.41. En general, esta expresión tiene la siguiente estructura

$$\phi(x, z, t) = \phi_0 f(z) g(kx - \omega t), \quad (5.4.47)$$

donde ϕ_0 representa la magnitud, $f(z)$ una función que modula los campos cinemático y dinámico en la profundidad y $g(kx - \omega t)$ representa una onda que se desplaza en sentido x positivo. Esta estructura se repetirá para los campos de desplazamiento, velocidad, aceleración y presión. En la práctica el potencial de velocidades no se utiliza directamente, sino que son las magnitudes derivadas del mismo, expresadas mediante fórmulas analíticas las que se aplican.

Ecuación de dispersión de frecuencias Si se combina la CDBCS (5.4.13) con (5.4.41) y (5.4.42)

$$\frac{H g}{2 \omega} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\cosh(k(z+h))}{\cosh(kh)} \right) \sin(kx - \omega t) = \frac{H}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\cos(kx - \omega t)) \quad \text{en} \quad z = 0 \quad (5.4.48)$$

se obtiene la denominada «ecuación de dispersión de frecuencias»

$$\omega^2 = gk \tanh(kh), \quad (5.4.49)$$

expresión que también puede escribirse para la celeridad

$$c = \frac{gT}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right) \quad (5.4.50)$$

o, puesto que $c = \lambda/T$, en términos de la longitud de onda.

$$\lambda = \frac{gT^2}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right). \quad (5.4.51)$$

La función $\tanh(x)$ tiene dos límites asintóticos $\lim_{x \rightarrow 0} \tanh(x) = x$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} \tanh(x) = 1$, que definen tres diferentes regímenes del oleaje en función de lo que denominamos la «profundidad relativa», $\mu = h/\lambda$. Veamos a continuación las implicancias físicas y operativas de estos regímenes.

Condición de aguas profundas Cuando argumento de la función $\tanh(x)$ es relativamente grande (en la práctica $h/\lambda > 1/2$), el oleaje se encuentra en «**aguas profundas**» y no siente el fondo. A su vez, el fondo no siente el oleaje, por lo que fenómenos como el arrastre de sedimentos que se dan en los lechos arenosos (no contemplados en esta teoría) no ocurren. Este régimen se denomina también «profundidades indefinidas» en países como España o «deep waters» en el mundo angloparlante. En aguas profundas, la celeridad (5.4.50) se aproxima mediante la expresión

$$c \simeq \frac{gT}{2\pi} \quad \frac{h}{\lambda} > \frac{1}{2} \quad (5.4.52)$$

y depende linealmente del período. El valor de $1/2$ es escogido arbitrariamente, pero cumple con que el error en la aproximación es despreciable. Esta expresión indica que olas con distinta longitud de onda se propagan a distinta celeridad y por tanto se separan a medida que se propagan desde la fuente de generación. Este efecto se conoce como «dispersión de frecuencias», y es responsable del arribo primero de componentes de período alto seguidas de períodos progresivamente menores en un punto cualquiera. Por esta razón se dice que este régimen es «dispersivo» (dispersive). La Figura 5.4.4 muestra un ejemplo de estadística de oleaje en aguas profundas frente a Valparaíso, donde el período peak T_p presenta una forma típica de «dientes de sierra» debido a que los períodos mayores arriban primero pues su celeridad es mayor⁶. En aguas profundas, la longitud de onda (5.4.51) se aproxima a

$$\lambda \simeq \frac{gT^2}{2\pi} \simeq 1,56T^2 \quad \frac{h}{\lambda} > \frac{1}{2}, \quad (5.4.53)$$

ecuación simple que permite estimar valores típicos en diferentes cuerpos de agua. El rango de períodos de entre $T_p = 6 - 20$ (s) en Valparaíso (Figura 5.4.4) presenta, por tanto longitudes de onda abarcan entre $\lambda = 56 - 624$ (m). Utilizando la condición límite de aguas profundas, $h/\lambda = 1/2$, es posible inferir que el oleaje comienza a sentir el fondo a profundidades de entre $h = 28 - 312$ (m). Así, las olas de período mayor son más largas y sienten el fondo a mayores profundidades que las de período corto. En un lago como el Llanquihue, por el contrario, el rango de períodos se encuentra en torno a $T_p = 2 - 4$ (s), la longitud de onda abarca entre $\lambda = 6 - 25$ (m) y las olas sienten el fondo en $h = 3 - 13$ (m) aproximadamente, esto es, muy cerca de la costa.

El límite de aguas profundas, $h/\lambda = 1/2$, tiene implicancias en el modelado numérico de oleaje pues en la actualidad define la transición espacial entre modelos de generación de oleaje en aguas profundas (e.g. Wave-watch III) y modelos de propagación costera (e.g. SWAN).

Condición de aguas intermedias Cuando $1/25 < h/\lambda < 1/2$, el oleaje se encuentra en «**aguas intermedias**» y siente los efectos del fondo en forma progresiva a medida que se reduce la profundidad. En este caso se dice que el oleaje es «débilmente dispersivo» (weakly dispersive) y se denomina también «profundidades intermedias» o «transitional waters», dependiendo de la referencia bibliográfica que se consulte. En aguas intermedias, la celeridad y la longitud de onda tienen las expresiones (5.4.50) y (5.4.51). Esta última corresponde a una ecuación implícita y por tanto requiere de técnicas especiales, como el método de Newton-Raphson, para su solución.

⁶Aun cuando los parámetros de H_s y T_p representan valores estadísticos asociados a un oleaje irregular (y no al oleaje regular dado por un sólo período como el que estudiamos), pueden utilizarse para estimar la longitud de onda y por ende todas las propiedades de la mecánica del oleaje.

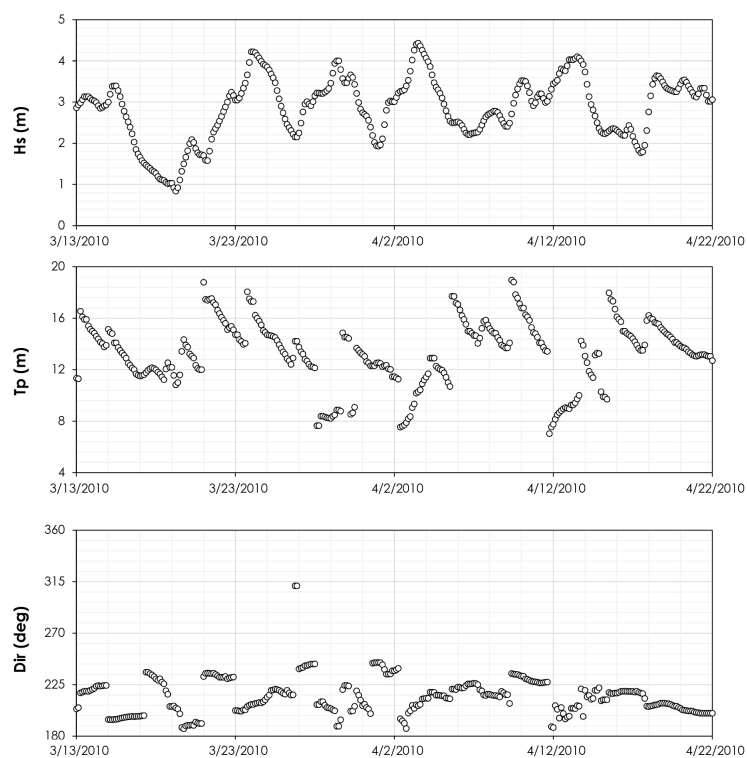


Figura 5.4.4: Ejemplo de estadística de oleaje en aguas profundas frente a Valparaíso. H_s representa la altura significativa del oleaje, T_p el período peak y Dir la dirección peak del oleaje para cada estado de mar, obtenido cada 3 horas a partir de un modelo numérico de generación de oleaje.

Condición de aguas someras Cuando $h/\lambda < 1/25$, el oleaje se encuentra en y «**aguas someras**» y está completamente afecto por el fondo. Este régimen se denomina también «profundidades reducidas», «shallow waters» o «régimen de onda larga». Cuando el argumento es muy pequeño,

$$c \simeq \frac{gT}{2\pi} \frac{2\pi h}{\lambda} = gh \frac{T}{\lambda} = \frac{gh}{c}, \quad (5.4.54)$$

y la celeridad adopta la expresión

$$c \simeq \sqrt{gh} \quad \frac{h}{\lambda} < \frac{1}{25}. \quad (5.4.55)$$

La celeridad, en este caso, no depende del periodo y por tanto el régimen es «no dispersivo» (*non dispersive*) pues olas con diferente período se propagan a la misma celeridad. Cabe notar que este régimen caracteriza a otros fenómenos como las mareas o los tsunamis de origen sísmico, cuyas longitudes de onda son de $\lambda = \mathcal{O}(10^3 - 10^4 \text{ km})$ y $\lambda = \mathcal{O}(10^2 \text{ km})$, respectivamente, y se propagan a profundidades $h = \mathcal{O}(10^0 - 10^1 \text{ km})$. Este hecho permite utilizar esta teoría para estudiar estos fenómenos cuando la no linealidad es despreciable, lo que en términos prácticos se da cuando la altura es significativamente inferior a la profundidad⁷.

En aguas someras, la longitud de onda se aproxima a

$$\lambda \simeq T\sqrt{gh} \quad \frac{h}{\lambda} < \frac{1}{25}. \quad (5.4.56)$$

En la práctica, el oleaje generado en el océano se propaga desde la fuente en una condición de aguas profundas hasta sentir el fondo en $h/\lambda = 1/2$, a partir del cual transita al régimen de aguas intermedias. En la medida que la profundidad disminuye y se alcanza el límite $h/\lambda = 1/25$, el oleaje pasa a aguas someras y, eventualmente rompe cuando su altura es comparable con la profundidad. Es decir, el oleaje transita por los tres regímenes en la medida que se acerca a la costa.

En términos operativos, para aplicar la TLO es necesario conocer la profundidad h , la altura H , la celeridad c , la longitud de onda λ y el período T . No obstante, estos parámetros no son independientes pues se relacionan mediante la ecuación de dispersión de frecuencias que liga c , λ y h y por la expresión $\lambda = cT$. Dado que es difícil medir la longitud de onda λ (pues requeriría de hacer mediciones simultáneas en dos puntos separados y que están en fase), por lo general se especifican h , H y T .

5.4.1.2. Campo cinemático

Campo de velocidades El campo de velocidades se obtiene combinando las expresiones (5.4.5) y 5.4.41. La velocidad horizontal tiene la siguiente expresión

$$u(x, z, t) = \frac{HgT}{2\lambda} \frac{\cosh(k(z+h))}{\cosh(kh)} \cos(kx - \omega t) \quad \frac{1}{25} < \frac{h}{\lambda} < \frac{1}{2}. \quad (5.4.57)$$

Para evaluar las aproximación en aguas profundas, se recurre a la propiedad $\lim_{x \rightarrow \infty} \cosh(x) = \frac{1}{2} \exp(x)$, la expresión (5.4.52) y la definición $c = \lambda/T$, con lo que la velocidad horizontal se aproxima a

$$u(x, z, t) \simeq \frac{H\pi}{T} \exp(kz) \cos(kx - \omega t) \quad \frac{h}{\lambda} > \frac{1}{2}, \quad (5.4.58)$$

Esta expresión implica que la velocidad horizontal en aguas profundas se escala linealmente con la altura (olas más altas generan mayores velocidades), es inversamente proporcional al período (olas más largas generan

⁷Como se verá en la sección XXX, cuando la no linealidad es importante, es recomendable utilizar la teoría no lineal de onda larga (nonlinear shallow water equations).

velocidades menores) y es independiente de la profundidad. En aguas someras, se combinan las expresiones $\lim_{x \rightarrow 0} \cosh(x) = 1$, (5.4.55) y la definición $c = \lambda/T$, para encontrar

$$u(x, z, t) \simeq \frac{H}{2} \sqrt{\frac{g}{h}} \cos(kx - \omega t) \quad \frac{h}{\lambda} < \frac{1}{25}, \quad (5.4.59)$$

lo que implica que la velocidad horizontal en aguas someras también se escala linealmente con la altura, es independiente del período y es inversamente proporcional a la raíz de la profundidad (a menor profundidad, la velocidad aumenta). Cabe notar también que en aguas someras, la velocidad horizontal en la TLO es constante en toda la profundidad y las partículas se mueven en forma paralela al mismo. En la realidad, la condición de no deslizamiento impone una velocidad nula en el fondo que aumenta en forma brusca hasta el valor dado por (5.4.59) en el límite exterior de la capa límite, ubicada a centímetros de la pared.

La velocidad vertical tiene la siguiente expresión

$$w(x, z, t) = \frac{HgT}{2\lambda} \frac{\sinh(k(z+h))}{\cosh(kh)} \sin(kx - \omega t) \quad \frac{1}{25} < \frac{h}{\lambda} < \frac{1}{2}. \quad (5.4.60)$$

La aproximación en aguas profundas se obtiene recurriendo a expresiones $\lim_{x \rightarrow \infty} \{\sinh(x), \cosh(x)\} = \frac{1}{2} \exp(x)$, (5.4.52) y $c = \lambda/T$, con lo que la velocidad resulta en

$$w(x, z, t) \simeq \frac{H\pi}{T} \exp(kz) \sin(kx - \omega t) \quad \frac{h}{\lambda} > \frac{1}{2}. \quad (5.4.61)$$

En aguas someras, utilizamos las expresiones $\lim_{x \rightarrow 0} \cosh(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \sinh(x) = x$, (5.4.55) y la definición $c = \lambda/T$, para encontrar

$$w(x, z, t) \simeq \frac{H\pi}{T} \left(\frac{z+h}{h} \right) \sin(kx - \omega t) \quad \frac{h}{\lambda} < \frac{1}{25}. \quad (5.4.62)$$

La relación entre las amplitudes de la velocidad vertical y horizontal

$$\frac{\|w\|}{\|u\|} = \frac{\sinh(k(z+h))}{\cosh(k(z+h))}, \quad (5.4.63)$$

es $\|w\| / \|u\| = 1$, en aguas profundas, por lo que ambas velocidades son iguales. En aguas someras, en contraste, $\|w\| / \|u\| = k(z+h)$, los que para el rango comprendido entre $z = [0, -h]$ se tiene $\|w\| / \|u\| = [kh, 0]$. Dado que $kh = 2\pi h/\lambda = 2\pi h/(T\sqrt{gh}) = 2\pi\sqrt{h}/T\sqrt{g}$, para un período típico de $T = 10$ (s) y una profundidad $h = 10$ (m), $\|w\| / \|u\| = 2\pi/10$, la velocidad horizontal es un 59% mayor (o incluso más a mayor profundidad) que la horizontal.

Cabe destacar que en la condición de aguas someras, la velocidad vertical (5.4.62) es nula en el fondo, $w(x, -h, t) = 0$, siendo consistente con la CDBCF (5.4.10). En aguas profundas, la velocidad vertical (5.4.61) tiende a cero a medida que la profundidad aumenta. En la práctica, para punto más profundo que penetra la onda se aproxima como $z = -\lambda/2$, por lo que $\exp(kz) = \exp(-\pi) = 0,043$, lo que reduce el valor de la amplitud en dos órdenes de magnitud respecto del valor en la superficie.

Finalmente, cabe notar que la celeridad de una onda c está asociada a la propagación de su forma (en términos prácticos la celeridad corresponde a la velocidad con que se mueve la cresta de la ola), en tanto que la velocidad orbital $\mathbf{V} = (u, v)$ representa al movimiento de las partículas. En otras palabras, la primera es un escalar relacionado con el transporte de energía y la segunda corresponde a una magnitud vectorial que describe el transporte de masa.

Campo de aceleraciones El campo de aceleraciones se obtiene apelando a las expresiones (5.4.6), 5.4.41 y a la ecuación de dispersión de frecuencias (5.4.51). Así, la aceleración horizontal tiene la siguiente expresión

$$a_x(x, z, t) = -\frac{H\pi g \cosh(k(z+h))}{\lambda \cosh(kh)} \sin(kx - \omega t) \quad \frac{1}{25} < \frac{h}{\lambda} < \frac{1}{2} \quad (5.4.64)$$

y las aproximaciones asintóticas son

$$a_x(x, z, t) \simeq -\frac{2\pi^2 H}{T^2} \exp(kz) \sin(kx - \omega t) \quad \frac{h}{\lambda} > \frac{1}{2} \quad (5.4.65)$$

y

$$a_x(x, z, t) \simeq -\frac{H\pi}{T} \sqrt{\frac{g}{h}} \sin(kx - \omega t) \quad \frac{h}{\lambda} < \frac{1}{25} \quad (5.4.66)$$

para aguas profundas y someras, respectivamente. La aceleración vertical tiene la siguiente expresión

$$a_z(x, z, t) = \frac{H\pi g \sinh(k(z+h))}{\lambda \cosh(kh)} \cos(kx - \omega t) \quad \frac{1}{25} < \frac{h}{\lambda} < \frac{1}{2} \quad (5.4.67)$$

y las aproximaciones asintóticas son

$$a_z(x, z, t) \simeq \frac{2\pi^2 H}{T^2} \exp(kz) \cos(kx - \omega t) \quad \frac{h}{\lambda} > \frac{1}{2} \quad (5.4.68)$$

y

$$a_z(x, z, t) \simeq \frac{2\pi^2 H}{T^2} \left(\frac{z+h}{h} \right) \cos(kx - \omega t) \quad \frac{h}{\lambda} < \frac{1}{25} \quad (5.4.69)$$

para aguas profundas y someras, respectivamente.

Campo de desplazamientos El campo de desplazamientos se obtiene apelando a las expresiones (5.4.7) y 5.4.41. El desplazamiento horizontal tiene la siguiente expresión

$$\zeta_x(x, z, t) = -\frac{H \cosh(k(z+h))}{2 \sinh(kh)} \sin(kx - \omega t) \quad \frac{1}{25} < \frac{h}{\lambda} < \frac{1}{2} \quad (5.4.70)$$

y las aproximaciones asintóticas son

$$\zeta_x(x, z, t) \simeq -\frac{H}{2} \exp(kz) \sin(kx - \omega t) \quad \frac{h}{\lambda} > \frac{1}{2} \quad (5.4.71)$$

y

$$\zeta_x(x, z, t) \simeq -\frac{HT}{4\pi} \sqrt{\frac{g}{h}} \sin(kx - \omega t) \quad \frac{h}{\lambda} < \frac{1}{25} \quad (5.4.72)$$

para aguas profundas y someras, respectivamente. El desplazamiento horizontal en aguas profundas es máximo en la superficie, con una amplitud igual a $H/2$, y en aguas someras es constante en la profundidad.

El desplazamiento vertical tiene la siguiente expresión

$$\zeta_z(x, z, t) = \frac{H \sinh(k(z+h))}{2 \sinh(kh)} \cos(kx - \omega t) \quad \frac{1}{25} < \frac{h}{\lambda} < \frac{1}{2} \quad (5.4.73)$$

y las aproximaciones asintóticas son

$$\zeta_z(x, z, t) \simeq \frac{H}{2} \exp(kz) \cos(kx - \omega t) \quad \frac{h}{\lambda} > \frac{1}{2} \quad (5.4.74)$$

y

$$\zeta_z(x, z, t) \simeq \frac{H}{2} \left(\frac{z+h}{h} \right) \cos(kx - \omega t) \quad \frac{h}{\lambda} < \frac{1}{25} \quad (5.4.75)$$

para aguas profundas y someras, respectivamente. El desplazamiento vertical en aguas profundas es también máximo en la superficie, con una amplitud igual a $H/2$, y en aguas someras es nulo en el fondo (puesto que se asume fondo impermeable) y aumenta linealmente hacia la superficie. Esto supone que en aguas profundas, las partículas describen círculos cuyo radio disminuye con la profundidad, hasta una profundidad dada por $h/\lambda = 1/2$ en que las trayectorias son nulas.

5.4.1.3. Campo dinámico

Campo de presiones El campo de presiones surge de linealizar la ecuación de Bernoulli, considerando la condición $C(t) = 0$ que garantiza que el promedio temporal de la desnivelación instantánea es cero. Despejando para la presión

$$p = \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} - \rho g z, \quad (5.4.76)$$

y apelando a (5.4.41) da

$$p(x, z, t) = -\rho g \frac{H}{2} \frac{\cosh(k(z+h))}{\cosh(kh)} \cos(kx - \omega t) - \rho g z, \quad (5.4.77)$$

donde el primer término corresponde a la presión dinámica asociada a la perturbación de la ola, y el segundo término representa la presión hidrostática. El hecho de que la presión es proporcional a la altura permite calcular esta última con sensores de presión (conocidos la cota del instrumento z , la profundidad h , el período T y calculando la longitud de onda λ mediante la ecuación de dispersión de frecuencias). La presión hidrostática está presente en ausencia o estando el oleaje presente. Las aproximaciones asintóticas son

$$p(x, z, t) \simeq \rho g \frac{H}{2} \exp(kz) \cos(kx - \omega t) - \rho g z = \rho g (\eta \exp(kz) - z) \quad \frac{h}{\lambda} > \frac{1}{2} \quad (5.4.78)$$

y

$$p(x, z, t) \simeq \rho g \frac{H}{2} \cos(kx - \omega t) - \rho g z = \rho g (\eta - z) \quad \frac{h}{\lambda} < \frac{1}{25} \quad (5.4.79)$$

para aguas profundas y someras, respectivamente. Cabe notar que para el caso de aguas someras, la presión tiene una distribución triangular superior equivalente a la presión hidrostática, es decir el paso de la ola sólo genera un aumento o descenso de carácter hidrostático en la presión. Este resultado es utilizado en la derivación de las ecuaciones no lineales de aguas someras, que son comúnmente utilizadas para modelar mareas y tsunamis.

El hecho de que el fluido está sometido a la presión, implica que si está en contacto con una superficie, desarrolla una fuerza de presión dada por

$$\mathbf{F}_p = p d\mathbf{A}, \quad (5.4.80)$$

ecuación vectorial que implica que la fuerza es ortogonal a la superficie. Las expresiones 5.4.77 a 5.4.79, no obstante, son válidas sin la presencia de obstáculos. Cuando una ola impacta una estructura, se refleja y por ende se genera un oleaje estacionario (en el caso de una reflexión perfecta) o un oleaje cuasi-estacionario (si la reflexión es parcial). Para ese caso, es necesario apelar al principio de superposición para calcular el campo de presiones. Una alternativa experimental consiste en instrumentar la estructura con sensores de presión y calcular la fuerza asignando un área representativa a cada sensor.

Fuerzas hidrodinámicas Existen otro tipo de fuerzas asociadas al paso del flujo, como las de arrastre, inercia y sustentación. Las fuerzas de arrastre e inercia actuando sobre elementos esbeltos (esto es aquellos en que su dimensión típica es mucho menor que la longitud de onda) se describen mediante la ecuación de Morison (1950)

$$F = F_d + F_i,$$

donde, para un flujo turbulento,

$$F_d = \frac{1}{2} C_d \rho A u |u| \quad (5.4.81)$$

es la fuerza de arrastre, C_d es el coeficiente de arrastre (cuyo valor se encuentra en torno a $C_d = 1$), ρ es la densidad, A es la sección transversal del objeto que se opone al flujo y u es velocidad orbital. El valor absoluto se utiliza para que la fuerza actúe en el mismo sentido de la velocidad. Cabe destacar que en un régimen laminar, la fuerza de arrastre es proporcional a la velocidad elevada a la unidad, pero en el caso del oleaje el régimen es usualmente turbulento. La fuerza de inercia, por su parte, es

$$F_i = C_i \rho \forall a_x \quad (5.4.82)$$

donde C_i es el coeficiente de inercia (cuyo valor se encuentra en torno a $C_i = 2$), \forall el volumen del elemento y a_x la aceleración. Los coeficientes adimensionales de arrastre e inercia dependen de la forma y dimensiones del cuerpo, además del nivel de turbulencia dado por el número de Reynolds.

En aguas profundas, las fuerzas de inercia predominan sobre las de arrastre en tanto que en aguas someras, son las fuerzas de arrastre las que mandan. Para ilustra esto tomemos, por ejemplo, un oleaje típico de $H = 2$ (m) y $T = 10$ (s) actuando sobre un pilote vertical cilíndrico con coeficiente $C_d = 1$ y $C_i = 2$ y diámetro $\phi = 1$ (m), ubicado a una profundidad de $h = 10$ (m). El área proyectada al flujo por metro de altura es $A = \phi \times 1 = 1$ y el volumen $\forall = \pi \phi^2 / 4 \times 1 = \pi / 4$. La magnitud de la fuerza de arrastre en aguas profundas es

$$\|F_d\| = \frac{1}{2} C_d \rho A \|u^2\| = \frac{1}{2} C_d \rho A \left\| \left(\frac{H\pi}{T} \exp(kz) \right)^2 \right\| \sim \frac{1}{2} C_d \rho A \frac{H^2 \pi^2}{T^2}, \quad (5.4.83)$$

donde $\| \cdot \|$ representa el módulo de la función. La magnitud de la fuerza de inercia, por otra parte, es

$$\|F_i\| = C_i \rho \forall \|a_x\| = C_i \rho \forall \left\| \frac{2\pi^2 H}{T^2} \exp(kz) \right\| \sim C_i \rho \forall \frac{2\pi^2 H}{T^2}. \quad (5.4.84)$$

El cociente entre ambas fuerzas es de

$$\frac{\|F_d\|}{\|F_i\|} = \frac{C_d A H}{2 C_i \forall} = \frac{1}{\pi} \quad \frac{h}{\lambda} > \frac{1}{2}, \quad (5.4.85)$$

lo que implica que la fuerza de inercia es 3 veces mayor que las de arrastre. Por el contrario, en aguas someras las magnitudes son

$$\|F_d\| = \frac{1}{2} C_d \rho A \|u^2\| = \frac{1}{2} C_d \rho A \left\| \left(\frac{H}{2} \sqrt{\frac{g}{h}} \right)^2 \right\| = \frac{1}{2} C_d \rho A \frac{H^2 g}{2 h} \quad (5.4.86)$$

y

$$\|F_i\| = C_i \rho \forall \|a_x\| = C_i \rho \forall \frac{H\pi}{T} \sqrt{\frac{g}{h}}. \quad (5.4.87)$$

Así, el cociente entre ambas es

$$\frac{\|F_d\|}{\|F_i\|} = \frac{C_d A H T}{2 C_i \forall} \sqrt{\frac{g}{h}} = \frac{10}{\pi^2} \quad \frac{h}{\lambda} < \frac{1}{25} \quad (5.4.88)$$

y la fuerza de arrastre es un 59 % mayor que la de inercia. Naturalmente, que en la medida que la estructura desplace más masa, mayor será la fuerza de inercia, en tanto que para estructuras esbeltas, suelen ser despreciables si se comparan con las de arrastre.

La fuerza de sustentación, por su parte, actúa en sentido perpendicular al flujo y viene dada por la expresión

$$F_l = \frac{1}{2} C_l \rho A u |u|, \quad (5.4.89)$$

donde C_l es el coeficiente de sustentación, que es un orden de magnitud inferior al de arrastre.

Densidad de energía La energía es una cantidad de interés fundamental en la caracterización del oleaje. La medida más utilizada para caracterizarla es la densidad de energía media por unidad de área en planta, promediada en el tiempo. Esta se define como la suma de la densidad de energía cinética y potencial, integrada en la profundidad y promediada sobre el período del oleaje. La energía potencial media por unidad de área en planta asociada solo al oleaje, se define como

$$E_{pot} = \overline{\int_{-h}^{\eta} \rho g z dz} - \int_{-h}^0 \rho g z dz = \frac{1}{2} \overline{\rho g \eta^2} = \frac{1}{4} \rho g a^2,$$

donde a corresponde a la amplitud de la onda, y

$$\bar{f} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f dt \quad (5.4.90)$$

corresponde al promedio temporal de una variable genérica f en un período de ola. La energía cinética, por su parte, se define como

$$E_{kin} = \overline{\int_{-h}^{\eta} \frac{1}{2} \rho [u^2 + w^2] dz} = \frac{1}{4} \rho g a^2. \quad (5.4.91)$$

La energía mecánica total corresponde a la suma de la energía potencial y la energía cinética

$$E = E_{pot} + E_{kin} = \frac{1}{2} \rho g a^2. \quad (5.4.92)$$

Superposición El problema de contorno que define la mecánica del oleaje se ha linealizado y por tanto admite superposición de soluciones. Recordemos que un operador lineal es aquel que cumple con la ecuación

$$\mathcal{L}(a + b) = \mathcal{L}(a) + \mathcal{L}(b).$$

Todos los términos de la ecuación de Laplace y las condiciones de borde está elevados a la unidad. Además, las derivadas son funciones lineales por lo que para n soluciones se cumple que

$$\nabla^2 (\phi_1 + \dots + \phi_n) = \nabla^2 (\phi_1) + \dots + \nabla^2 (\phi_n).$$

Por otra parte, para cada una de soluciones se cumple la ecuación de Laplace $\nabla^2 (\phi_i) = 0$ y por tanto

$$\nabla^2 (\phi_1 + \dots + \phi_n) = 0,$$

con lo que se demuestra que la ecuación de Laplace admite superposición de soluciones. El principio de superposición es muy útil en ingeniería, pues la solución permite soluciones a movimientos ondulatorios más complejos presentes en la naturaleza. Por ejemplo, cuando el oleaje impacta una estructura, se refleja y por ende se genera un oleaje estacionario (en el caso de una reflexión perfecta) o un oleaje cuasi-estacionario (si la reflexión es parcial). En algunos casos, el oleaje también puede interactuar con una corriente. El hecho de que el oleaje se asuma como la superposición de ondas de distinta altura, período y dirección se basa también en este principio.

El principio de superposición permite estudiar fenómenos como la reflexión, los grupos de olas, el oleaje irregular y la interacción oleaje-corriente. Estos procesos se desarrollarán en versiones futuras de este texto.

5.4.2. Ecuaciones de onda larga

En esta sección se introducen las ecuaciones de onda larga, conocidas también como las ecuaciones de aguas someras o *nonlinear shallow water equations* en inglés (NSWE). Estas ecuaciones permiten resolver la fase de ondas propagándose en aguas relativamente someras; esto es ondas cuya longitud es mucho mayor que la profundidad a la cual se propagan. Para ello comenzamos introduciendo los parámetros que permiten estudiar los regímenes de ondas en aguas someras y luego derivamos las ecuaciones de gobierno. Las ecuaciones de onda larga, corresponden a una versión simplificada de las ecuaciones de Navier-Stokes y son obtenidas a partir de un promedio en la dimensión vertical que es adecuada para describir el movimiento de los fluidos cuya escala horizontal es mucho mayor a la vertical. Con esta integración se simplifica el problema de tres a dos dimensiones y se reduce el costo computacional al 1 % del esfuerzo de cálculo que necesita el modelado 3D (Liu, 2009). Como contraparte, al pasar de 3 a 2 dimensiones, se pierde información sobre la estructura vertical del flujo.

Estas ecuaciones se pueden utilizar para el modelado de una serie de ondas largas, es decir, oleaje en aguas someras, mareas, tsunamis, mareas meteorológicas (*storm surge*), corrientes oceánicas (en la medida que no exista estratificación vertical), flujos de lava, lahares y ondas a escala oceánicas, como las de Poincare, Kelvin y Rossby, entre otros.

Las NSWE son también conocidas como las ecuaciones de Saint-Venant en honor a Barré de Saint Venant, quien en 1871 derivó una versión unidimensional de estas ecuaciones para el flujo de canal abierto⁸. Estas ecuaciones son válidas para problemas en los que la dinámica vertical se puede despreciar en comparación con los procesos que ocurren a escala horizontal. A diferencia de las ecuaciones de Boussinesq, las ecuaciones de onda larga se basan en el supuesto de que la presión es hidrostática, es decir, de que la aceleración vertical durante el paso de la onda es despreciable en comparación con la gravedad. La consecuencia de este supuesto es que la velocidad horizontal es uniforme en toda la profundidad. Este supuesto se viola en ondas relativamente cortas o altas, cuando hay discontinuidades de la superficie (e.g. resalto hidráulico) o cuando el fondo cambia bruscamente.

Las NSWE son no dispersivas (la celeridad de onda y grupo no dependen del número de onda), un efecto acumulativo que puede ser importante durante la propagación a largas distancias. Por esta razón, estas ecuaciones no dan soluciones permanentes debido a la no linealidad y tienden a generar asimetrías en el perfil de la onda que explican fenómenos como la rotura o los shocks. Las ecuaciones de Boussinesq, en contraste, contienen términos adicionales que tienen en cuenta este efecto y, por tanto, bajo ciertas condiciones, dan origen a ondas de forma constante (solitarias).

5.4.2.1. Parámetros adimensionales

En esta sección se introducen algunos parámetros adimensionales que permitirán estudiar los regímenes de propagación de ondas en aguas someras. Para ello, definimos tres escalas de longitud: la profundidad típica en condición de reposo \hat{h}_0 , la longitud típica de la onda $\hat{\lambda}_0$ y la amplitud típica de la onda \hat{a}_0 . El tongo en las variables indica que éstas tienen dimensiones; todas ellas de longitud. Cabe notar que la escalas no corresponden a valores exactos, sino que indican órdenes de magnitud, y sirven para tener una noción del régimen de ondas que interesa analizar. Para el régimen de onda larga, por ejemplo, asumiremos la relación $\hat{a}_0 \ll \hat{h}_0 \ll \hat{\lambda}_0$. A

⁸Las ecuaciones de Saint Venant (Chanson, 2004; ecs.16.14 y 16.15.b) son

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\langle u \rangle^2 A) + gA \frac{\partial H}{\partial x} &= gA (s_o - s_f), \end{aligned} \quad (5.4.93)$$

donde la sección transversal del flujo A y el flujo $Q = \langle u \rangle A$ son incógnitas, $\langle u \rangle$ es la velocidad promediada en la sección, s_o la pendiente de fondo y s_f la pendiente friccional. Estas ecuaciones se han usado para flujos estacionarios por más de un siglo y en forma más reciente para flujos transientes (e.g. Dessler, 1978).

partir de estas escalas definimos los números adimensionales

$$\mu = \frac{\hat{h}_0}{\hat{\lambda}_0}, \quad \text{y} \quad \epsilon = \frac{\hat{a}_0}{\hat{h}_0}, \quad (5.4.94)$$

que representan a la dispersión de frecuencias y a la no linealidad, respectivamente. La dispersión de frecuencias es responsable, por ejemplo, de la generación de pequeñas ondulaciones de celeridad menor a la onda principal (denominadas en inglés como *trailing waves* y *leading wave*, respectivamente) a medida que se alejan de la fuente. La no linealidad, por su parte, genera un aumento de la pendiente en la cara anterior de una onda que se propaga desde la fuente, induciendo eventualmente su rompimiento por inestabilidad (en términos matemáticos, esto es denominado un *shock*). En la Figura 5.4.5 se ilustran estos efectos para un pulso inicial de forma gaussiana, que se propaga a la derecha. Cabe mencionar que estos efectos son acumulativos y requieren de que las ondas se propaguen un distancia considerablemente mayor a la longitud de onda típica. También es importante saber que dispersión de frecuencias es un fenómeno lineal en tanto que la no linealidad, valga la redundancia, no lo es. Estos fenómenos aparecerán en forma explícita en las ecuaciones de Boussinesq. Introducimos también el

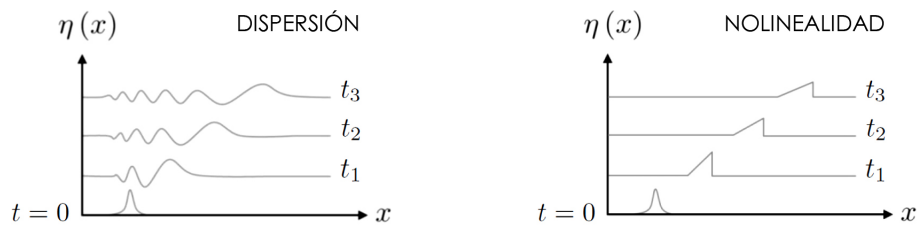


Figura 5.4.5: Efectos de la dispersión y no linealidad sobre una perturbación de la superficie, en forma Gaussiana.

número de Ursell

$$U_r = \frac{\epsilon}{\mu^2} = \frac{\hat{a}_0 \hat{\lambda}_0^2}{\hat{h}_0^3}, \quad (5.4.95)$$

que define la importancia relativa entre la no linealidad y la dispersión de frecuencias. En palabras simples, para valores grandes de U_r domina la no linealidad y mientras más pequeño, domina la dispersión de frecuencias. Este número permite establecer el régimen de ondas, en función del peso relativo de ambos efectos, según se presenta en la Figura 5.4.1. A objeto de ejemplificar cómo estos valores inciden en la propagación de ondas, estudiaremos el caso de ondas propagándose en aguas someras hacia una profundidad \hat{h} decreciente (por ejemplo, oleaje propagándose a una playa). En esta condición, las escalas típicas varían con la profundidad. En la condición de aguas someras, la amplitud \hat{a} obedece a la ley de Green (sección 5.3.3)

$$\hat{a} = \hat{a}_r \sqrt[4]{\frac{\hat{h}_r}{\hat{h}}}, \quad \Rightarrow \quad \hat{a}_0 \propto \hat{h}_0^{-1/4}, \quad (5.4.96)$$

donde el subíndice r en la expresión de la izquierda representa un punto en aguas someras donde las propiedades del oleaje son conocidas y la expresión de la derecha describe cómo varía la escala de amplitud típica con la profundidad. La Ley de Green no asume pérdidas ni ganancias de energía, omite la reflexión y se basa en los supuestos de la teoría lineal del oleaje (e.g. alturas infinitesimales, entre otros supuestos). La longitud de onda se representa mediante la expresión

$$\hat{\lambda} = \hat{T} \sqrt{\hat{g} \hat{h}}, \quad \Rightarrow \quad \hat{\lambda}_0 \propto \hat{h}_0^{1/2}. \quad (5.4.97)$$

La dispersión de frecuencias, la no linealidad y el número de Ursell presentan por tanto la siguiente dependencia con la profundidad

$$\mu = \hat{h}_0^{1/2}, \quad \epsilon = \hat{h}_0^{-5/4}, \quad \text{y} \quad U_r = \hat{h}_0^{-9/4}. \quad (5.4.98)$$

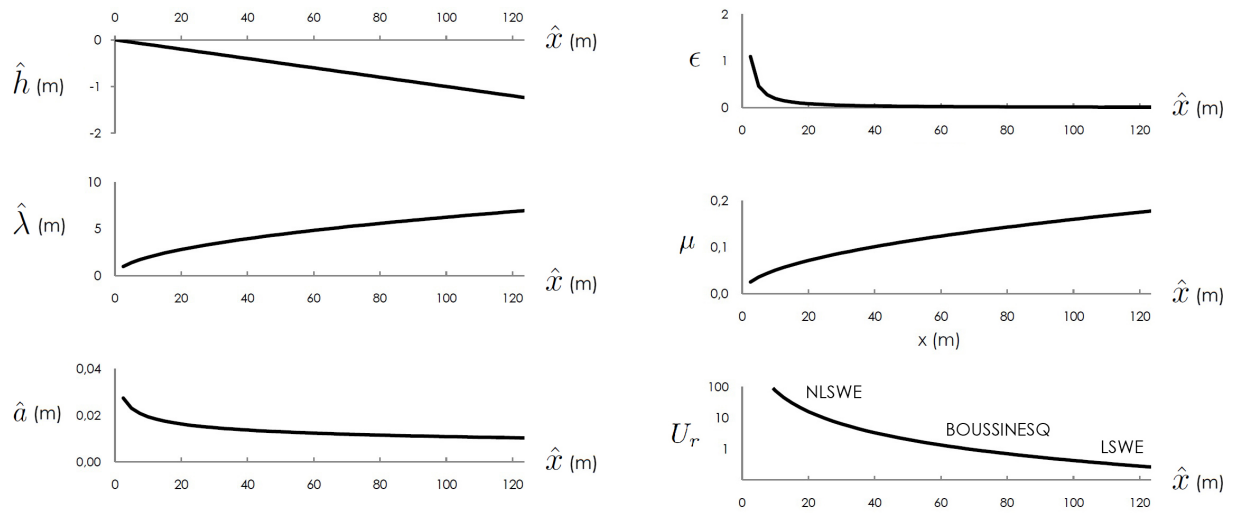


Figura 5.4.6: Magnitudes relevantes en un régimen de onda larga, en función de la profundidad. En condiciones normales, las ondas se propagan desde las profundidades mayores (derecha) a menores (izquierda) y transitan sucesivamente desde el régimen de onda larga lineal (LSWE), al de Boussinesq y al de onda larga no lineal (NLSWE) antes de la rotura.

En la Figura 5.4.6 se muestra el comportamiento de las variables relevantes en un régimen de ondas largas, en función de la profundidad. Se observa que una onda larga pasa por diferentes regímenes en la medida que se propaga desde mayores a menores profundidades. En la zona más profunda (pero siempre en el régimen de onda larga) donde $U_r \ll \mathcal{O}(1)$, domina la dispersión de frecuencias por sobre la no linealidad y el régimen corresponde al descrito por las ecuaciones lineales de onda larga (linear shallow water equations). En una zona intermedia donde $U_r = \mathcal{O}(1)$, la no linealidad es balanceada por la dispersión de frecuencias y el régimen corresponde al de Boussinesq. En la zona de menor profundidad donde $U_r \gg \mathcal{O}(1)$, la no linealidad domina y el régimen corresponde al de las ecuaciones no lineales de onda larga (nonlinear shallow water equations).

5.4.2.2. Derivación (simplificada) de las ecuaciones de onda larga

En la literatura existen varias formas para derivar las NSWE, entre las que destaco las siguientes:

- Mediante el balance de masa y momentum sobre un volumen de control infinitesimal
- Mediante las ecuaciones de Euler en forma dimensional, promediando en la profundidad (GIOCC, 2003)
- Mediante las ecuaciones de Euler adimensionales, utilizando métodos de expansión (Svendsen, 2006)
- Mediante las ecuaciones generales de onda larga adimensionales, utilizando métodos de expansión (Liu, 2004)

Los dos primeros enfoques no permiten cuantificar el orden de magnitud de los términos de las ecuaciones, mientras que los dos últimos -basados en métodos de escalamiento y perturbación- permiten retener esa información y por tanto son más rigurosos. Por simplicidad, en esta sección seguimos el primer enfoque. Las ecuaciones resultantes se expresan en forma diferencial para que sean independientes del volumen de control. El segundo enfoque se incluye en la sección 5.4.2.3.

Ecuación de conservación de la masa

Por simplicidad, derivaremos esta expresión en un sistema cartesiano de dos dimensiones, $x - z$, donde no hay variación en y , según se indica en la Figura 5.4.7. Consideremos un volumen de control que cubre desde el fondo $h(x)$, considerado fijo en el tiempo pero variable en el espacio, y la superficie del agua definida por $\eta(x, t)$. El volumen de control se define por la expresión

$$\forall = \Delta x \Delta y [h + \eta]. \tag{5.4.99}$$

A través de la cara izquierda del volumen de control ingresa un flujo de agua con una velocidad media en la profundidad, que se define mediante la expresión

$$\bar{u}(x, t) = \frac{1}{h + \eta} \int_{-h}^{\eta} u(x, z, t) dz. \tag{5.4.100}$$

El flujo másico entrando al volumen de control es

$$F_e = \rho \bar{u} \Delta y [h + \eta], \tag{5.4.101}$$

donde el subíndice e corresponde a entrada. Dimensionalmente

$$[F_e] = [\rho \bar{u} \Delta y (h + \eta)] = \left[\frac{M}{L^3} \cdot \frac{L}{T} \cdot L \cdot L \right] = \left[\frac{M}{T} \right], \tag{5.4.102}$$

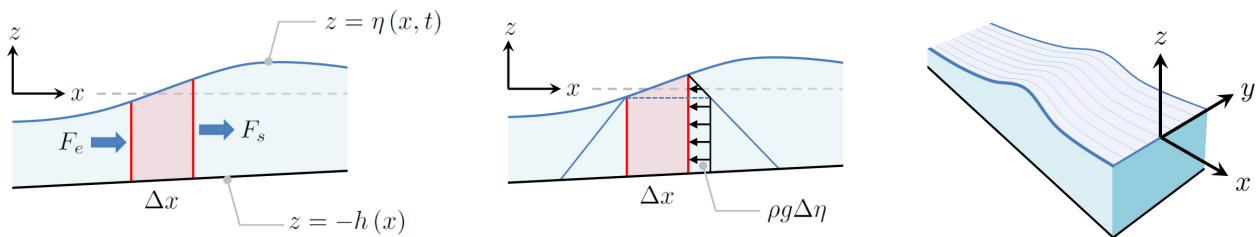


Figura 5.4.7: Sección típica utilizada para la derivación de las ecuaciones de onda larga. El volumen de control se indica en rojo

y representa la masa entrando al volumen de control por unidad de tiempo. En la expresión anterior M , L y T representan masa, longitud y tiempo, respectivamente. El flujo másico saliendo sobre la otra cara del volumen de control se puede expresar, utilizando una expansión de Taylor (sección 9.1.2), como

$$F_s = F_e + \frac{\partial F_e}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial^2 F_e}{\partial x^2} \frac{\Delta x^2}{2} + \dots + \frac{\partial^n F_e}{\partial x^n} \frac{\Delta x^n}{n!}, \quad (5.4.103)$$

que combinando con (5.4.101) da

$$F_s = \rho \bar{u} \Delta y [h + \eta] + \frac{\partial}{\partial x} (\rho \bar{u} \Delta y [h + \eta]) \Delta x + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\rho \bar{u} \Delta y [h + \eta]) \frac{\Delta x^2}{2} + \dots + \frac{\partial^n}{\partial x^n} (\rho \bar{u} \Delta y [h + \eta]) \frac{\Delta x^n}{n!}. \quad (5.4.104)$$

Si se asume que el volumen de control es constante y que la función \bar{u} es continua, los términos de orden mayor se pueden expresar como un error de truncamiento

$$F_s = \rho \bar{u} \Delta y [h + \eta] + \frac{\partial}{\partial x} (\rho \bar{u} \Delta y [h + \eta]) \Delta x + \mathcal{O}(\Delta x^2, \Delta y), \quad (5.4.105)$$

donde \mathcal{O} significa «del orden de». Cabe mencionar que en esta derivación no es necesario retener el tercer término pues, como se verá en adelante, desaparece al tender el volumen de control a uno infinitesimal. Una vez conocidos los flujos en ambas caras, procedemos a hacer un balance de masa del agente en el volumen de control

$$\frac{\partial m}{\partial t} = F_e - F_s, \quad (5.4.106)$$

donde $m = \rho \Delta x \Delta y (h + \eta)$ es la masa del agente en el volumen de control. En palabras simples, la ecuación (5.4.106) dice que la variación local de la masa en el volumen de control es balanceada por el flujo neto en ambas caras. La resta de los flujos debe tener sentido en esta expresión: en caso de que el flujo entrante es mayor que el de salida, $F_e - F_s > 0$, la masa en el volumen de control debe aumentar, esto es $\partial m / \partial t > 0$. Usando las expresiones (5.4.101) y (5.4.105) da

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \Delta x \Delta y [h + \eta]) = - \frac{\partial}{\partial x} (\rho \bar{u} \Delta y [h + \eta]) \Delta x + \mathcal{O}(\Delta x^2, \Delta y). \quad (5.4.107)$$

Dividiendo por $\Delta x \Delta y$ y haciendo tender el volumen de control a cero (esto es $\Delta x \rightarrow 0$) da

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho [h + \eta]) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho \bar{u} [h + \eta]) = 0. \quad (5.4.108)$$

Cabe notar que esta expresión es exacta, a pesar de provenir de una aproximación de Taylor. Asumamos ahora que el flujo es incompresible. En términos matemáticos, este supuesto implica que la derivada material de la densidad es cero (ver ecuación 2.4.15)

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0. \quad (5.4.109)$$

Al expandir cada término de (5.4.108) usando la regla del producto, combinar esta expresión con (5.4.109) e imponer $\partial h / \partial t = 0$, se obtiene

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\bar{u} [h + \eta]) = 0. \quad (5.4.110)$$

Físicamente esta expresión sugiere que la variación de masa en el volumen de control es balanceada por el flujo másico neto en los contornos del mismo.

Ecuación de conservación de momentum

Para la ecuación de conservación de momentum, recurrimos a la segunda ley de Newton, que indica que la suma de las fuerzas externas es equivalente a la variación del momentum

$$\sum \mathbf{F} = \frac{d\mathbf{M}}{dt}, \quad (5.4.111)$$

donde $\mathbf{M}(x, y, t) = (M_x, M_y)$ es el momentum y $\mathbf{F}(x, y, t) = (F_x, F_y)$ corresponde a la(s) fuerza(s) actuando en el plano horizontal. Como veremos en la sección 5.4.4, existen muchas fuerzas que se podrían incluir en esta suma, como las asociadas al viento, a variaciones en la presión atmosférica, a las mareas, a la fricción, a la turbulencia y a la aceleración de Coriolis, entre otras. Por el momento, solo nos concentramos en la presión del fluido. Desarrollemos el balance de momentum en la dimensión x . Para el volumen de control, el momentum se define como

$$M_x = m\bar{u} = \rho\bar{u}\Delta x\Delta y [h + \eta]. \quad (5.4.112)$$

Según la teoría lineal del oleaje (Dean & Dalrymple, 1991) para ondas largas (o lo que es equivalente, para ondas en aguas someras), la presión es hidrostática. La fuerza de presión actuando en ambas caras, de distribución triangular, puede aproximarse mediante la expresión

$$\sum F_x = -P\Delta A = -\rho g\Delta\eta\Delta y [h + \eta]. \quad (5.4.113)$$

Combinando (5.4.111), (5.4.112) y (5.4.113)

$$-\rho g\Delta\eta\Delta y [h + \eta] = \frac{d}{dt} (\rho\bar{u}\Delta x\Delta y [h + \eta]). \quad (5.4.114)$$

Dividiendo por $\Delta x\Delta y$ y tomando el límite para un elemento infinitesimal, se obtiene

$$-\rho g \frac{\partial\eta}{\partial x} [h + \eta] = \frac{d}{dt} (\rho\bar{u} [h + \eta]). \quad (5.4.115)$$

Aplicando la regla del producto al término de la derecha

$$-\rho g \frac{\partial\eta}{\partial x} [h + \eta] = \frac{d\rho}{dt} \bar{u} [h + \eta] + \rho \frac{d}{dt} (\bar{u} [h + \eta]) \quad (5.4.116)$$

e invocando el supuesto de que el flujo es incompresible (ver ecuación 2.4.15), nos permite obtener la expresión

$$-g \frac{\partial\eta}{\partial x} [h + \eta] = \frac{d}{dt} (\bar{u} [h + \eta]). \quad (5.4.117)$$

El último paso es asumir que la desnivelación es mucho menor que la profundidad, $\eta \ll h$, lo que implica que $h + \eta \approx h$. Este paso implica la linealización de la ecuación (5.4.117), puesto que en el lado izquierdo, aparece el término no lineal $\eta\partial\eta/\partial x$. Recordemos también que la profundidad no depende del tiempo. Con estos supuestos se llega a la expresión

$$-g \frac{\partial\eta}{\partial x} = \frac{d\bar{u}}{dt}. \quad (5.4.118)$$

Finalmente, aplicamos la definición de derivada total y reordenamos términos para llegar a la expresión:

$$\frac{\partial\bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial\bar{u}}{\partial x} + g \frac{\partial\eta}{\partial x} = 0, \quad (5.4.119)$$

que es la ecuación de conservación de momentum para un flujo incompresible en régimen de onda larga.

Ecuaciones de onda larga

Las ecuaciones de onda larga se resumen el siguiente sistema:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} ([\eta + h] \bar{u}) = 0, \quad (5.4.120)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0, \quad (5.4.121)$$

donde las incógnitas son la desnivelación instantánea η y la velocidad media integrada en la vertical \bar{u} . Estas expresiones se puede generalizar a un flujo bidimensional dado por una velocidad $\bar{\mathbf{V}}(x, y, t) = (\bar{u}, \bar{v})$, considerando otras fuerzas externas no contempladas en la derivación de arriba

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\bar{u} [h + \eta]) + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{v} [h + \eta]) = 0, \quad (5.4.122)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = \sum F_x, \quad (5.4.123)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + g \frac{\partial \eta}{\partial y} = \sum F_y, \quad (5.4.124)$$

que en términos vectoriales se representa mediante la expresión:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\mathbf{V}} [h + \eta]) = 0. \quad (5.4.125)$$

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{V}}}{\partial t} + \bar{\mathbf{V}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{V}} + g \nabla \eta = \sum \mathbf{F}. \quad (5.4.126)$$

5.4.2.3. Derivación (algo más rigurosa) de las ecuaciones de onda larga

A continuación se resumen los lineamientos básicos a partir de los cuales se derivan una forma relativamente estandarizada de estas ecuaciones. Las NSWE se derivan a partir de la integración en la vertical de las ecuaciones de conservación de la masa (2.4.47) y momentum (2.4.48) para un flujo incompresible e irrotacional, i.e.

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \quad (5.4.127)$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{V} \otimes \mathbf{V}) = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g}. \quad (5.4.128)$$

Por simplicidad, las ecuaciones fundamentales se muestran en dos dimensiones en el plano vertical

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (5.4.129)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u^2) + \frac{\partial}{\partial z} (uw) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (5.4.130)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (wu) + \frac{\partial}{\partial z} (w^2) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g. \quad (5.4.131)$$

La derivación a tres dimensiones sigue un esquema similar⁹. La Figura 5.4.8 ilustra la ubicación del sistema de coordenadas utilizado en la derivación.

⁹Cabe notar que los términos advectivos en las ecuaciones de momentum están escritos en forma conservativa, pero pueden ser expresados en forma no conservativa apelando a la ecuación de conservación de la masa (5.4.129). Con ello por ejemplo, la ecuación (5.4.130) se escribe como

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (5.4.132)$$

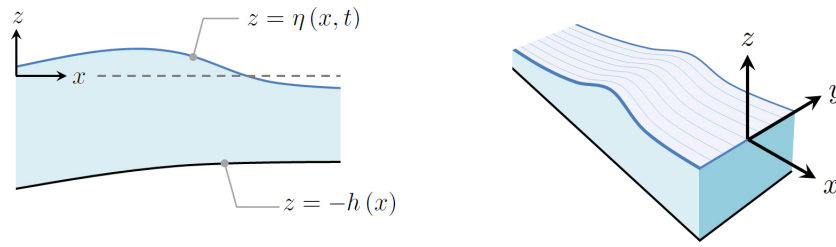


Figura 5.4.8: Sección típica utilizada para la derivación de las ecuaciones de onda larga.

Para integrar las ecuaciones (5.4.129) y (5.4.130) en la vertical y reducir el problema de tres a dos dimensiones, es necesario introducir condiciones de borde en el fondo y en la superficie. Estas condiciones de borde son de carácter cinemáticas (asociadas al movimiento) y dinámicas (asociadas al momentum o a la energía). La condición cinemática para el fondo $z = -h(x)$ viene dada por

$$w = -u \frac{\partial h}{\partial x}, \quad \text{en } z = -h(x), \quad (5.4.133)$$

e implica que la velocidad normal al fondo es nula, esto es, que el fondo es impermeable¹⁰. Esta ecuación es simple y no requiere de un tratamiento especial.

Cabe notar que, siendo consistente con el supuesto de flujo irrotacional, se omite la condición de no deslizamiento en el fondo (no-slip condition en inglés). Esta condición es válida para fluidos viscosos y establece que en una frontera líquido-sólido, el fluido tiene una velocidad nula relativa a la frontera. Las implicancias del supuesto que el flujo es irrotacional son importantes. Por ejemplo, no se desarrolla la capa límite en el fondo y por tanto toda la riqueza que ocurre en ella se omite (e.g. la transferencia de momentum normal a la pared, los marcados gradientes de velocidad y esfuerzos de corte). Fenómenos de fondo, como el transporte de sedimento, requieren de relajar este supuesto e incorporar la rotacionalidad en el flujo. Con todo, la capa límite en el fondo oceánico y lejos de la rompiente es pequeña comparada con la profundidad a la que se propagan las ondas.

Para la superficie $z = \eta(x, t)$, en contraste, la condición cinemática

$$w = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \text{en } z = \eta(x, t) \quad (5.4.134)$$

tiene la complicación de que la superficie de evaluación no es conocida a priori y el segundo término es no lineal, es decir, una multiplicación de dos incógnitas¹¹. En las ecuaciones no lineales de onda larga nos interesa mantener la no linealidad -en este caso no es estrictamente una no linealidad matemática, sino una limitación geométrica- de modo que obviaremos esa simplificación. Finalmente, en la superficie asumiremos que la presión atmosférica es nula, es decir

$$p = 0, \quad \text{en } z = \eta(x, t). \quad (5.4.135)$$

¹⁰En la teoría lineal se asume la batimetría es constante ($\partial h / \partial x = 0$) y por tanto la velocidad vertical es nula ($w = 0$). Ello implica que las propiedades mecánicas del oleaje son función de la profundidad local y no son afectadas por la variación de la batimetría en el espacio, lo que constituye una limitación. Por ejemplo, dos playas con pendientes diferentes (una muy inclinada y otra muy plana) e iguales propiedades de oleaje en aguas profundas, presentarán idénticas propiedades de oleaje a una profundidad dada, independiente de la distancia que recorran y de la «historia» de su evolución. Esta limitación es superada en las ecuaciones no lineales de onda larga -donde el término $\partial h / \partial x$ no se desprecia- en la medida que las variaciones batimétricas nos sean excesivamente abruptas.

¹¹En la teoría lineal, y bajo el supuesto de que la amplitud es pequeña, se asume que esta expresión es válida en el nivel estático, $z = \eta(x, t) \approx 0$ y se evita el problema de desconocer el contorno de integración (este supuesto se fundamenta en la expansión de Taylor). Asimismo, en dicha teoría, se asume que el término no lineal de la derecha es despreciable, supuesto que se explica en forma rigurosa mediante técnicas de escalamiento que exceden el alcance de este curso.

Cabe mencionar que en casos donde la presión atmosférica es variable, como en la marea meteorológica (o storm surge en inglés), esta restricción no es válida. Para integrar estas ecuaciones, se recurre a la regla de Leibniz

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{x=a(t)}^{x=b(t)} f dx = \int_{x=a(t)}^{x=b(t)} \frac{\partial f}{\partial t} dx + f(x=b, t) \frac{\partial b}{\partial t} - f(x=a, t) \frac{\partial a}{\partial t} \quad (5.4.136)$$

y al teorema fundamental del cálculo

$$\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial f}{\partial z} dz = f(\eta) - f(-h). \quad (5.4.137)$$

El procedimiento es el siguiente. Se integra la ecuación de conservación de la masa (5.4.129) entre el fondo $z = -h(x)$ y la superficie $z = \epsilon\eta(x, t)$, aplicando la regla de Leibniz (5.4.136), el teorema fundamental del cálculo (5.4.137) y las condiciones cinemáticas de fondo (5.4.133) y superficie (5.4.134) para obtener la expresión

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} ([h + \eta] \bar{u}) = 0, \quad (5.4.138)$$

donde la velocidad media integrada en la vertical se define como

$$\bar{u}(x, t) = \frac{1}{h + \eta} \int_{-h}^{\eta} u(x, z, t) dz. \quad (5.4.139)$$

Cabe notar que la velocidad $\bar{u}(x, t)$ no depende de la profundidad y por lo tanto no ofrece información de la estructura vertical de velocidades, que puede ser importante en casos donde hay estratificación. Si se quiere conocer dicha estructura, se deben resolver ecuaciones 3D no integradas en la vertical, o asumir, como aproximación, una estructura vertical donde el fondo tiene velocidad cero y la superficie un máximo (e.g. de tipo logarítmica). Para la ecuación de momentum (5.4.130) se procede de manera similar, con lo que se obtiene la expresión

$$\frac{\partial}{\partial t} ([h + \eta] \bar{u}) + \frac{\partial}{\partial x} ([h + \eta] \overline{uu}) = -\frac{1}{\rho} \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial p}{\partial x} dz. \quad (5.4.140)$$

Al analizar el sistema de dos ecuaciones dado por (5.4.138) y (5.4.140), se tienen cuatro incógnitas: η , \bar{u} , \overline{uu} y p . Cabe mencionar que \bar{u}^2 sólo es equivalente a \overline{uu} cuando el perfil de velocidad horizontal en la vertical $u(x, z, t)$ es constante. En el resto de los casos esto no ocurre y es por ello que \bar{u} y \overline{uu} constituyen variables independientes. En este punto debemos tomar una decisión respecto de la estrategia a seguir en la derivación. Una opción rigurosa es recurrir a métodos de escalamiento y perturbación, que permiten hacer aproximaciones a las ecuaciones conociendo el orden de magnitud del error. Esta opción requiere de conocimientos avanzados de matemáticas que asumo no tiene el lector. La otra opción adoptada aquí es simplemente asumir que

$$\bar{u}^2 = \overline{uu} + \epsilon, \quad (5.4.141)$$

donde desconocemos el orden de magnitud de ϵ , pero lo asumimos mucho menor que \overline{uu}^{12} . Bajo este supuesto reducimos el número de incógnitas a tres. Cabe mencionar que si la velocidad horizontal es efectivamente constante en la vertical, $\epsilon = 0$. Para eliminar la presión p del sistema, se recurre a la ecuación de conservación

¹²Para evaluar el error en que se incurre cuando se asume que $\bar{u}^2 = \overline{uu}$, recomiendo que hagas el ejercicio de calcular el error para una distribución parabólica de velocidades, con valor nulo en el fondo debido a la condición de no deslizamiento, y velocidad máxima en la superficie. Calcula ambas cantidades y la diferencia será el error.

de momentum en la vertical (5.4.131), haciendo el supuesto de que las aceleraciones verticales son mucho menores a la gravedad:

$$\left\| \frac{dw}{dt} \right\| = \left\| \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (wu) + \frac{\partial}{\partial z} (w^2) \right\| \ll \|-g\|. \quad (5.4.142)$$

Este supuesto es quizás el más fuerte de las ecuaciones lineales de onda larga. Implica que las ondas son no dispersivas, es decir, que la dispersión de frecuencias es despreciable y las ondas (en rigor todas las constituyentes armónicas que conforman la superficie libre) se propagan con la misma celeridad¹³. El supuesto (5.4.142) permite reducir la expresión (5.4.131) a

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g, \quad (5.4.143)$$

la que integrando desde una profundidad cualquiera z a la superficie η da

$$p(\eta) - p(z) = -\rho g (\eta - z). \quad (5.4.144)$$

Si es de interés modelar la marea meteorológica, se debe imponer una distribución espacio-temporal de la presión atmosférica, $p(\eta) = p_a(x, t)$, que debe ser conocida a partir de, por ejemplo, un modelo meteorológico (ver sección 5.4.4). Si, por el contrario, se aplica la condición de borde dinámica de superficie (5.4.135), entonces $p(\eta) = 0$. Diferenciando y considerando que z y x son independientes, se obtiene una relación entre la desnivelación de la superficie η y la presión p ,

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial p_a}{\partial x}, \quad (5.4.145)$$

donde, reitero, la presión atmosférica es conocida. Con el supuesto (5.4.142) se reducen las incógnitas del sistema (5.4.138) y (5.4.140) a dos, por lo que el sistema está determinado, en la medida que se impongan condiciones iniciales y de borde para la desnivelación instantánea η y la velocidad horizontal media en la profundidad \bar{u} . Descartando la presión atmosférica, la ecuación (5.4.140) se expresa como

$$\frac{\partial}{\partial t} ([h + \eta] \bar{u}) + \frac{\partial}{\partial x} ([h + \eta] \bar{u}^2) = -g [h + \eta] \frac{\partial \eta}{\partial x}. \quad (5.4.146)$$

Existen muchas formas de expresar el sistema de ecuaciones (5.4.138) y (5.4.146). Una de ellas es introduciendo la profundidad total como incógnita, $H(x, t) = h(x) + \eta(x, t)$, con lo que con algo de manipulación algebraica se obtienen las expresiones

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (H \bar{u}) = 0, \quad (5.4.147)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (H \bar{u}) + \frac{\partial}{\partial x} (H \bar{u}^2) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (g H^2) = g H \frac{\partial h}{\partial x}. \quad (5.4.148)$$

Sin mayor dificultad, esta expresión puede ser ampliada a dos dimensiones para dar

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (H \bar{u}) + \frac{\partial}{\partial y} (H \bar{v}) = 0, \quad (5.4.149)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (H \bar{u}) + \frac{\partial}{\partial x} \left(H \bar{u}^2 + \frac{1}{2} g H^2 \right) + \frac{\partial}{\partial y} (H \bar{u} \bar{v}) = g H \frac{\partial h}{\partial x}, \quad (5.4.150)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (H \bar{v}) + \frac{\partial}{\partial x} (H \bar{u} \bar{v}) + \frac{\partial}{\partial y} \left(H \bar{v}^2 + \frac{1}{2} g H^2 \right) = g H \frac{\partial h}{\partial y}, \quad (5.4.151)$$

¹³Para incorporar la dispersión de frecuencias en el régimen de onda larga, se debe recurrir a la aproximación de Boussinesq para ondas débilmente dispersivas y débilmente no lineales (*weakly dispersive weakly nonlinear waves*). Esta aproximación considera términos adicionales con derivadas de tercer o cuarto orden, dependiendo de si la derivada local $\partial/\partial t$ está expresada en primer o segundo orden. Recomiendo, si te interesa entender la derivación de las ecuaciones de Boussinesq, ver Svendsen (2005, capítulo 9).

donde los términos de la derecha se interpretan como forzantes asociados a los cambios espaciales de la batimetría. El sistema también se puede escribir en forma vectorial

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} = \mathbf{B}(\mathbf{Q}) \quad (5.4.152)$$

donde

$$\mathbf{Q} = (H, H\bar{u}, H\bar{v})^T \quad (5.4.153)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{Q}) = \left(H\bar{u}, H\bar{u}^2 + \frac{1}{2}gH^2, h\bar{u}\bar{v} \right)^T \quad (5.4.154)$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{Q}) = \left(H\bar{v}, H\bar{u}\bar{v}, H\bar{v}^2 + \frac{1}{2}gH^2 \right)^T \quad (5.4.155)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{Q}) = \left(0, gH \frac{\partial h}{\partial x}, gH \frac{\partial h}{\partial y} \right)^T \quad (5.4.156)$$

Existen también versiones de las ecuaciones no lineales de onda larga en función de los flujos $p = H\bar{u}$ y $q = H\bar{v}$. Estas versiones expresadas en forma conservativa y no conservativa (ver la equivalencia entre las ecuaciones (5.4.130) y (5.4.132)), que a pesar de ser equivalentes, las primeras tienen mejores propiedades para su implementación numérica. Para obtener la velocidad vertical, se integra la ecuación de conservación de la masa (5.4.129)

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \quad (5.4.157)$$

entre el fondo y una profundidad genérica z

$$w(z) = w(-h) - \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) (z + h), \quad (5.4.158)$$

donde se observa que ésta varía linealmente con la profundidad, coincidiendo con el resultado de la aproximación asintótica de la teoría lineal del oleaje para aguas someras.

5.4.3. Ecuaciones de Boussinesq

Las ecuaciones de Boussinesq incorporan el efecto de la dispersión de frecuencia. Una de las tantas formas de expresarlas fue derivada por Peregrine (1967)

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\mathbf{V}}[\eta + h]) = 0, \quad (5.4.159)$$

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{V}}}{\partial t} + \bar{\mathbf{V}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{V}} + g\nabla \eta + \frac{h^2}{6} \nabla \cdot \left(\nabla \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{V}}}{\partial t} \right) - \frac{h}{2} \nabla \cdot \left(\nabla \cdot \left[h \frac{\partial \bar{\mathbf{V}}}{\partial t} \right] \right) = 0, \quad (5.4.160)$$

donde $\bar{\mathbf{V}}$ es el vector velocidad media integrada en la vertical y η la desnivelación instantánea. En la forma propuesta por Peregrine, la conservación de la masa es exacta y las de momentum tiene implícita una aproximación, cuya magnitud es posible de conocer mediante técnicas de escalamiento y de perturbación que asumo desconocidos al lector, pero que pueden ser visitadas en el texto de Svendsen (2006, capítulo 9). Notar que la ecuación de la masa (5.4.159) es equivalente a las obtenida en las ecuaciones de onda larga (5.4.125). La ecuación de momentum (5.4.160) tiene los mismos tres primeros términos que (5.4.126), pero incluye términos adicionales asociados a la dispersión de frecuencias.

Para con profundidad constante y en una dimensión espacial, una de las tantas ecuaciones que deriva en el texto son

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} ([\eta + h] \bar{u}) = 0, \quad (5.4.161)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{h^2}{3} \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial t \partial x^2} = 0. \quad (5.4.162)$$

Cabe notar que las ecuaciones de Boussinesq se basan en el supuesto que los términos no lineales y dispersivos son mucho menores que los inerciales

$$\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \right), \left(g \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \gg \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right), \left(\frac{h^2}{3} \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial t \partial x^2} \right). \quad (5.4.163)$$

Como en las ecuaciones no lineales de onda larga, existen también muchas formas de expresar estas ecuaciones, ya sea en términos de la velocidad en la superficie, la velocidad en el fondo, el flujo, etc. Naturalmente, la selección de una forma velocidad determina la aparición de términos tanto en las ecuaciones de conservación de la masa y momentum. La selección de la velocidad también genera modificaciones en las propiedades dispersivas de las ecuaciones, esto es, en la capacidad de ellas de calcular la dispersión de frecuencia en la medida que aumenta la profundidad relativa hacia aguas profundas. Para profundizar en las ecuaciones de Boussinesq, sugiero revisar el paper de Brocchini (2013) y el libro de Dingemans (1997).

Rol de los términos inerciales, no linealidad y dispersión de frecuencias en la ecuación de Boussinesq

Para profundizar algo más sobre el peso relativo de los términos en las ecuaciones de Boussinesq, apliquemos la técnica de adimensionalización de las ecuaciones en una dimensión (5.4.161) y (5.4.162). Para ello introduzcamos tres escalas espaciales típicas para la amplitud de la onda a_0 , la profundidad h_0 y la longitud de onda λ_0 , donde asumimos que para el régimen de onda larga $a_0 \ll h_0 \ll \lambda_0$ (sección 5.4.2.1). El subíndice 0 hace referencia a un valor típico (del orden de) pero no exacto. Escalemos entonces, las variables espaciales de la siguiente forma

$$\eta = a_0 \hat{\eta}, \quad h = h_0 \hat{h}, \quad x = \lambda_0 \hat{x}, \quad (5.4.164)$$

donde el tongo representa variables no dimensionales. El tiempo se escala a partir de un argumento dimensional

$$t = \frac{\lambda_0}{c_0} \hat{t}, \quad (5.4.165)$$

donde $c_0 \sim \sqrt{gh_0}$ representa una celeridad típica aguas someras, régimen donde las ecuaciones de Boussinesq son aplicables. La velocidad media se escala de la siguiente forma¹⁴

$$\bar{u} = \frac{a_0 c_0}{h_0} \hat{u}, \quad (5.4.166)$$

A partir de la regla de la cadena, se encuentran las expresiones de las derivadas en el tiempo y el espacio:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} = \frac{1}{\lambda_0} \frac{\partial}{\partial \hat{x}}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \hat{t}} \frac{\partial \hat{t}}{\partial t} = \frac{\sqrt{gh_0}}{\lambda_0} \frac{\partial}{\partial \hat{t}}. \quad (5.4.167)$$

¹⁴En la TLO, la velocidad horizontal tiene la siguiente expresión

$$u(x, z, t) = \frac{HgT}{2\lambda} \frac{\cosh(k(z+h))}{\cosh(kh)} \cos(kx - \omega t).$$

Dado que estamos buscando escalamientos, podemos prescindir de la variación temporal. Por otra parte, en aguas someras, se combinan las expresiones $\lim_{x \rightarrow 0} \cosh(x) = 1$, $a = H/2$, $c = \lambda/T$ y $c = \sqrt{gh}$ para dar

$$\|u(x, z, t)\| = \frac{ag}{c} \simeq \frac{a\sqrt{gh}}{h} = \frac{ac}{h}.$$

Dado que esta expresión no depende de z , entonces puede asumirse que la escala de la velocidad media también es $\|\bar{u}(x, t)\| = \frac{ac}{h}$.

Reemplazando estas expresiones en (5.4.161) y (5.4.162), y haciendo algo de álgebra, se obtiene

$$\frac{\partial \hat{\eta}}{\partial \hat{t}} + \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \left([\hat{h} + \hat{\epsilon} \hat{\eta}] \hat{u} \right) = 0, \quad (5.4.168)$$

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{t}} + \hat{\epsilon} \hat{u} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \hat{\eta}}{\partial \hat{x}} - \hat{\mu}^2 \frac{\hat{h}^2}{3} \frac{\partial^3 \hat{u}}{\partial \hat{t} \partial \hat{x}^2} = 0. \quad (5.4.169)$$

donde los números adimensionales

$$\hat{\mu} = \frac{h_0}{\lambda_0}, \quad \text{y} \quad \hat{\epsilon} = \frac{a_0}{h_0}, \quad (5.4.170)$$

representan a la dispersión de frecuencias (responsable de la generación de pequeñas ondulaciones de celeridad menor a la onda principal) y a la no linealidad (que introduce asimetría y eventualmente rompimiento). Cabe notar que las ecuaciones de Boussinesq han sido derivadas bajo el supuesto de que $\mathcal{O}(\hat{\mu}^2) = \mathcal{O}(\hat{\epsilon}) \ll 1$. El hecho de adimensionalizar las ecuaciones por las escalas espaciales que caracterizan el régimen de onda larga, hacen que las derivadas sean de orden 1 y que el peso relativo de cada término esté dado por los parámetros adimensionales; es decir:

$$\overbrace{\frac{\partial \hat{\eta}}{\partial \hat{t}}}^{\mathcal{O}(1)} + \overbrace{\frac{\partial}{\partial \hat{x}} (\hat{h} \hat{u})}^{\mathcal{O}(1)} + \overbrace{\frac{\partial}{\partial \hat{x}} (\hat{\epsilon} \hat{\eta} \hat{u})}^{\mathcal{O}(\hat{\epsilon})} = 0, \quad (5.4.171)$$

$$\overbrace{\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{t}}}^{\mathcal{O}(1)} + \overbrace{\hat{\epsilon} \hat{u} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}}}^{\mathcal{O}(\hat{\epsilon})} + \overbrace{\frac{\partial \hat{\eta}}{\partial \hat{x}}}^{\mathcal{O}(1)} - \overbrace{\hat{\mu}^2 \frac{\hat{h}^2}{3} \frac{\partial^3 \hat{u}}{\partial \hat{t} \partial \hat{x}^2}}^{\mathcal{O}(\hat{\mu}^2)} = 0. \quad (5.4.172)$$

Esta representación adimensional deja claro que los términos no lineales $\mathcal{O}(\hat{\epsilon})$, y de dispersión de frecuencias $\mathcal{O}(\hat{\mu}^2)$ son mucho menores que los términos inerciales $\mathcal{O}(1)$, pues $\mathcal{O}(\hat{\mu}^2) = \mathcal{O}(\hat{\epsilon}) \ll 1$. Para interpretar el rol de los términos inerciales, consideremos la solución aproximada donde la no linealidad y dispersión son de importancia menor. Bajo estos supuestos, las expresiones (5.4.171) y (5.4.172) se reducen a

$$\frac{\partial \hat{\eta}}{\partial \hat{t}} + \frac{\partial}{\partial \hat{x}} (\hat{h} \hat{u}) = 0, \quad (5.4.173)$$

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{t}} + \frac{\partial \hat{\eta}}{\partial \hat{x}} = 0. \quad (5.4.174)$$

Asumamos también que la profundidad es constante (o que varía lentamente¹⁵) y diferenciamos cruzadamente

$$\frac{\partial \hat{\eta}}{\partial \hat{t}} + \hat{h} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} = 0, \quad \left| \frac{\partial}{\partial \hat{t}} \right. \quad (5.4.175)$$

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{t}} + \frac{\partial \hat{\eta}}{\partial \hat{x}} = 0. \quad \left| \hat{h} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \right. \quad (5.4.176)$$

Restando ambas expresiones permite obtener

$$\frac{\partial^2 \hat{\eta}}{\partial \hat{t}^2} - \hat{h} \frac{\partial^2 \hat{\eta}}{\partial \hat{x}^2} = 0. \quad (5.4.177)$$

¹⁵Esto equivale a decir que la profundidad varía en forma más lenta que la no linealidad y dispersión, es decir

$$\frac{\partial}{\partial \hat{x}} (\hat{h} \hat{u}) = \hat{h} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} + \hat{u} \frac{\partial \hat{h}}{\partial \hat{x}}, \quad \frac{\partial \hat{h}}{\partial \hat{x}} \ll \mathcal{O}(\hat{\epsilon}, \hat{\mu}^2).$$

La solución de esta ecuación de onda de segundo orden, en términos adimensionales, es

$$\hat{\eta}(\hat{x}, \hat{t}) = \sin(\hat{x} - \hat{c}\hat{t}),$$

donde \hat{c} es la celeridad (adimensional de la onda). Esta solución muestra que los términos inerciales generan una onda progresiva que se propaga con forma constante, si el fondo es plano, o deformándose muy lentamente si el fondo cambia suavemente en varias longitudes de onda. Los efectos inerciales (como el asomeramiento) responden en forma instantánea a la profundidad en tanto que la no linealidad y la dispersión de frecuencia son acumulativos, requiriendo de varias longitudes de onda para manifestarse. La dispersión de frecuencias generará pequeñas ondulaciones que se propagarán más lento que la onda inercial y la no linealidad tenderá a introducir una asimetría en el perfil de velocidades (Figura 5.4.5). Para probar esto, evaluemos cuánto pesa cada término de la ecuación (5.4.169) al integrarlo en el espacio desde un punto inicial $\hat{x} = 0$ hasta un punto genérico \hat{x} . La contribución de cada término de dicha ecuación se expresa como:

$$E_{local} = \int_0^{\hat{x}} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{t}} d\hat{x} \quad (5.4.178)$$

$$E_{nolineal} = \int_0^{\hat{x}} \hat{\epsilon} \hat{u} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} d\hat{x} \quad (5.4.179)$$

$$E_{gravedad} = \int_0^{\hat{x}} \frac{\partial \hat{\eta}}{\partial \hat{x}} d\hat{x} \quad (5.4.180)$$

$$E_{dispersión} = \int_0^{\hat{x}} \hat{\mu}^2 \frac{\hat{h}^2}{3} \frac{\partial^3 \hat{u}}{\partial \hat{t} \partial \hat{x}^2} d\hat{x} \quad (5.4.181)$$

Con algo de álgebra obtenemos

$$E_{local} = \frac{\partial}{\partial \hat{t}} \int_0^{\hat{x}} \hat{u} d\hat{x} \quad (5.4.182)$$

$$E_{nolineal} = \hat{\epsilon} \int_0^{\hat{x}} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} (\hat{u}^2) d\hat{x} = \frac{1}{2} \hat{\epsilon} \left\{ \hat{u}^2(\hat{x}) - \hat{u}^2(0) \right\} \quad (5.4.183)$$

$$E_{gravedad} = \hat{\eta}(\hat{x}) - \hat{\eta}(0) \quad (5.4.184)$$

$$E_{dispersión} = \hat{\mu}^2 \frac{\hat{h}^2}{3} \left\{ \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}}(\hat{x}) - \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}}(0) \right\} \quad (5.4.185)$$

Ahora bien, asumamos que la desnivelación instantánea es una onda progresiva con una variación lenta en el espacio. Matemáticamente, tenemos que

$$\hat{\eta}(\hat{x}) = \hat{\eta}_0 (1 + \hat{\epsilon} \hat{x}) S + \mathcal{O}(\hat{\epsilon}^2),$$

donde $S = \sin(\hat{x} - \hat{c}\hat{t})$ se utiliza para simplificar la notación, la variación lenta se expresa mediante el término $\hat{\epsilon} \hat{x}$ y $\mathcal{O}(\hat{\epsilon}^2)$ representa a los términos de orden mayor. En el régimen de ondas largas, sabemos que la velocidad se escala con la desnivelación $\hat{u} = \hat{\eta} / \sqrt{\hat{h}} + \mathcal{O}(\hat{\epsilon})$, por lo que la velocidad se expresa como

$$\hat{u}(\hat{x}) = \frac{\hat{\eta}_0}{\sqrt{\hat{h}}} (1 + \hat{\epsilon} \hat{x}) S + \mathcal{O}(\hat{\epsilon}^2).$$

A partir de esta expresión tenemos que

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}}(\hat{x}) = \frac{\hat{\eta}_0}{\sqrt{\hat{h}}} [C + S] + \hat{\epsilon} \frac{\hat{\eta}_0}{\sqrt{\hat{h}}} \hat{x} C + \mathcal{O}(\hat{\epsilon}^2)$$

donde $C = \cos(\hat{x} - \hat{c}\hat{t})$ y

$$\int_0^{\hat{x}} \hat{u} d\hat{x} = \frac{\hat{\eta}_0}{\sqrt{\hat{h}}} C + \hat{\epsilon} \frac{\hat{\eta}_0}{\sqrt{\hat{h}}} [S - \hat{x} C] + \mathcal{O}(\hat{\epsilon}^2).$$

Reemplazando estas expresiones en cada uno de los términos (5.4.182) a (5.4.185), da los siguientes resultados

$$E_{local} \propto \hat{\epsilon}\hat{x} + \mathcal{O}(\hat{\epsilon}^2) \quad (5.4.186)$$

$$E_{nolineal} \propto \hat{\epsilon}^2\hat{x} + \mathcal{O}(\hat{\epsilon}^2) \quad (5.4.187)$$

$$E_{gravedad} \propto \hat{\epsilon}\hat{x} + \mathcal{O}(\hat{\epsilon}^2) \quad (5.4.188)$$

$$E_{dispersión} \propto \hat{\epsilon}\hat{\mu}^2\hat{x} + \mathcal{O}(\hat{\epsilon}^2) \quad (5.4.189)$$

donde se ve claramente se ve que los efectos acumulativos de los términos nolineal, de orden $\mathcal{O}(\hat{\epsilon}^2)$, y de dispersión de frecuencias, de orden $\mathcal{O}(\hat{\epsilon}\hat{\mu}^2)$, son del mismo orden y mucho menores que los inerciales, de orden $\mathcal{O}(\hat{\epsilon})$, para una onda que cambia suavemente durante su propagación. Asimismo, se nota que la inercia responde con la misma escala que la forma asumida de la onda (esto es, que responde instantáneamente a los cambios de la desnivelación).

5.4.4. Inclusión de otras fuerzas externas

En las secciones anteriores se presentaron las ecuaciones nolineales de onda larga y las de Boussinesq, considerando que la única fuerza externa es la gravedad (la presión es una fuerza interna). En la realidad existen otras fuerzas que pueden ser relevantes en el modelado de ondas largas. Una clasificación algo antojadiza es la siguiente:

- **Fuerzas inerciales** asociadas a la aceleración local, advectiva y de Coriolis
- **Fuerzas de superficie** asociadas a los gradientes de presión atmosférica, al viento y a la tensión superficial
- **Fuerzas de cuerpo** asociadas a la gravedad de la tierra y al potencial de marea astronómica
- **Fuerzas disipativas** asociadas a la fricción de fondo, la turbulencia y la rompiente

Una muy buena introducción a dichas fuerzas se encuentra en Tan (1992) y Liu (2010). En esta sección se discuten conceptos básicos sobre la naturaleza de estas fuerzas y algunos ejemplos de cómo se modelan¹⁶. Para simplificar el análisis, utilizamos un caso unidimensional con profundidad uniforme. Una opción (poco rigurosa) para incorporar las fuerzas externas en el análisis, es extender la ecuación de conservación de momentum (5.4.162), o en su defecto la ecuación nolineal de onda larga, como sigue:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{h^2}{3} \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial t \partial x^2} = F_{pa} + F_v + F_b + F_t + F_g + F_m + \dots \quad (5.4.190)$$

donde F_{pa} es la fuerza asociada a los gradientes de presión atmosférica actuando sobre la superficie libre, F_v es la fuerza generada por esfuerzos de corte debidos al viento actuando en la superficie libre, F_b es la fricción de fondo, F_t es el esfuerzo asociado a la turbulencia, F_g es la fuerza de Coriolis y F_m es la fuerza debida a la marea astronómica. Los esfuerzos asociados al oleaje rompiente requieren de un tratamiento específico -el promediado temporal de las ecuaciones- que es analizado en forma específica en la sección 6. En esta expresión, las fuerzas están expresadas por unidad de masa, con unidades de m/s^2 .

La tensión superficial se omite de este análisis pues es relevante para ondas cuyo período es menor a $T = 0,1$ s. Dingemans (1997, p.513-7) incluye el efecto de la tensión superficial a través de la condición de borde dinámica de superficie, cuyo resultado es un término extra en la ecuación de momentum. Él nota asimismo que esta fuerza es importante para longitudes de onda del orden de centímetros, que son mucho menores a las que nos interesa en los procesos costeros (que van del orden de decenas de metros para oleaje a miles de kilómetros

¹⁶En este capítulo, el «modelar» una fuerza se refiere a establecer ecuaciones semi-empíricas, basadas en el análisis dimensional. Las fuerzas de inercia, presión y gravedad derivadas en (5.4.150) y (5.4.151) no están modeladas pues devienen de principios básicos y no existen coeficientes empíricos de ajuste. Fuerzas como la del viento se modelan a partir del análisis dimensional y contienen coeficientes empíricos calibrados para ciertos rangos de validez.

para mareas). Para lectores avanzados que se interesen en las ecuaciones de Boussinesq, recomiendo el texto de Dingemans.

Antes de describir estas fuerzas, interpretemos los términos de la izquierda de la ecuación (5.4.190). El término de inercial local \bar{u}_t representa la tasa instantánea de cambio de momentum en un volumen de control fijo que cubre desde el fondo a la superficie libre. El término advectivo $\bar{u}\bar{u}_x$ (también llamado convectivo dependiendo de la disciplina) representa el transporte neto de momentum a través del volumen de control y i) es responsable de la generación de armónicos, ii) gobierna la producción y transporte de vorticidad y iii) puede inducir inestabilidades numéricas en la solución de ecuaciones por medio de la no linealidad. Para comprender la generación de armónicos, recomiendo revisar Nwogu (1994). Los términos advectivo e inercial se pueden incluir en la derivada material de la velocidad

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = \frac{\partial\bar{u}}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}, \quad (5.4.191)$$

en cuyo caso la inercia está representada en forma Lagrangiana. La gravedad es explícita en el término que contiene la pendiente de la superficie $g\eta_x$ y -en ausencia de esfuerzos de superficie asociados al viento o a la presión atmosférica- suele ser el forzante más importante del sistema. De ahí que al flujo resultante se le denomine ondas de gravedad. Finalmente, el término proporcional a \bar{u}_{txx} representa la dispersión de frecuencias, donde el coeficiente que lo acompaña depende de la geometría (el valor $h^2/3$ es para un canal de profundidad constante).

Antes de especificar cada una de estas fuerzas, un comentario respecto de las fuerzas disipativas. Las ecuaciones de onda larga se pueden clasificar en i) ecuaciones para flujo irrotacional y ii) ecuaciones para flujo rotacional y turbulento (Brocchini, 2013). En los modelos de flujo irrotacional, el mecanismo fundamental de disipación es la rotura y la fricción de fondo es introducida de manera heurística (en forma intuitiva pero no necesariamente rigurosa) a posteriori en las ecuaciones de momentum, siendo inconsistente con el supuesto de flujo potencial. Para ecuaciones que incorporan la rotacionalidad desde su génesis, por el contrario, los mecanismos de disipación afloran de manera natural y los modelos son más adecuados para la zona de surf. Aun cuando estos últimos describen las estructuras vorticales y los mecanismos disipativos, en la actualidad (2016) no son utilizados en forma masiva debido a la complejidad en la especificación de las condiciones de borde y los costos computacionales asociados. Los problemas asociados al oleaje usualmente están relacionados con altos números de Reynolds. Para el caso de ondas largas sin confinamiento lateral, el número de Reynolds definido en términos de una velocidad típica U , una escala típica L y la viscosidad cinemática ν ,

$$Re = \frac{UL}{\nu} \quad (5.4.192)$$

es alto y por ende el flujo es turbulento. Para una velocidad del orden de $U = \mathcal{O}(10^0)$ m/s, una longitud de onda aproximada de $L = \mathcal{O}(10^2)$ m y una viscosidad de $\nu = 10^{-6}$ m²/s para agua, se tiene un número de Reynolds de $Re = \mathcal{O}(10^8)$. Los efectos en la capa límite de fondo y superficie están confinados a unos pocos milímetros y por tanto pueden despreciarse, salvo para ensayos a escala en laboratorios¹⁷. Por estas razones, las fuerzas disipativas en modelos de propagación de oleaje son usualmente asociadas a la fricción de fondo, la turbulencia y la rompiente.

¹⁷ Cuando la intensidad de la turbulencia es grande, el espesor de la subcapa viscosa en el fondo es menor (Tan, 1992). De hecho, este espesor, definido como

$$\delta = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}, \quad (5.4.193)$$

es del orden de $\delta = \mathcal{O}(1)$ mm para un período del orden de $T = \mathcal{O}(10^1 - 10^2)$ s. La capa límite turbulenta, por su parte, es un orden de magnitud mayor que la subcapa viscosa pero sigue siendo muy pequeña respecto de la profundidad de propagación de ondas como el oleaje, las mareas o los tsunamis. Para quien se interese en los efectos de la capa límite en la atenuación de ondas, recomiendo la siguiente secuencia de papers: Keulegan (1948), Daily & Stephan (1952), Miles (1967), Miles (1976), Chang et al. (1979), Kirby & Vengayil (1988), Dingemans (1997), Liu et al. (2006, 2007) y Winckler & Liu (2015).

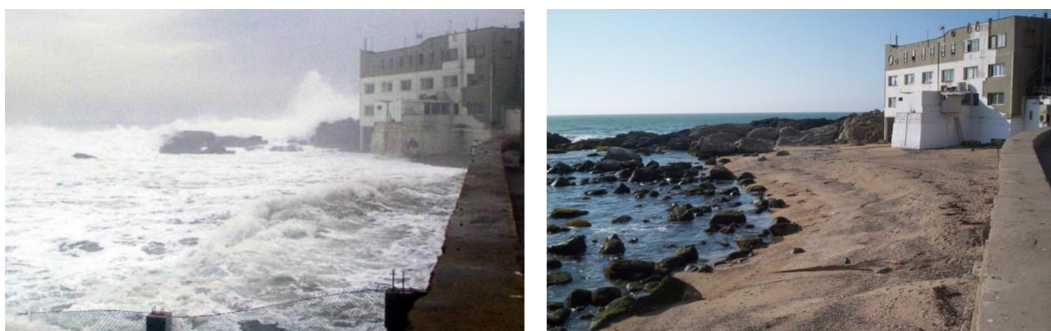


Figura 5.4.9: Marea meteorológica afectando Montemar, sede de la Facultad de Ciencias del Mar y de Recursos Naturales de la Universidad de Valparaíso, en Chile. A la derecha se observa el emplazamiento en condiciones de buen tiempo y marea media a baja. Gentileza de Mauricio Molina.

Esfuerzos generados por gradientes de presión atmosférica Las fluctuaciones asociadas a la presión atmosférica generan ondas de superficie que pueden amplificarse al acercarse a la costa. Estas fluctuaciones cubren un rango amplio de escalas temporales, desde pulsaciones rápidas que se encuentran en el rango de decenas de minutos y dan origen a los meteotsunamis (e.g. Carvajal et al., 2017; Monserrat, 2006) a aquellas que cubren desde horas a días y son responsables de la generación de la marea meteorológica (también denominada como residuo meteorológico o storm surge). Este fenómeno ocurre durante los temporales que están asociados a campos de baja presión atmosférica y vientos fuertes. Un ejemplo de marea meteorológica ocurriendo en Montemar, Valparaíso, se ilustra en la Figura 5.4.9. En la literatura se suele separar el efecto del aumento del nivel del mar por presión atmosférica (barometric setup), del de la sobre-elevación por viento (wind setup) generada por el esfuerzo de corte de éste sobre la interfaz agua-aire. La variación del nivel del mar por presión atmosférica se produce por la variación de la ésta con respecto a su valor medio (Beyá y Winckler, 2013).

Los gradientes de presión atmosférica son también responsables de la generación de vientos, que a su vez contribuyen a la marea meteorológica mediante la transmisión de esfuerzos de corte superficial a la columna de agua. La fuerza por unidad de masa asociada a los gradientes de presión atmosférica, como se introdujera en la ecuación (5.4.145), tiene la siguiente expresión

$$F_{pa} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_a}{\partial x}, \quad (5.4.194)$$

y su efecto es generar corrientes y deformar la superficie del océano. A diferencia del viento que actúa en las capas superficiales de la columna de agua, el exceso de presión atmosférica actúa sobre toda la columna de agua. Para un análisis muy simplificado de cómo afecta la presión atmosférica en el nivel del mar, supongamos que la inercia y la dispersión de frecuencia son despreciables y que la única fuerza presente es la presión atmosférica (con este supuesto eliminamos la velocidad de la ecuación de momentum y por tanto descartamos las corrientes del análisis). La ecuación (5.4.190) se reduce a

$$\rho g \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{\partial p_a}{\partial x}, \quad (5.4.195)$$

la que integrada en el espacio se reduce a

$$\eta = -\frac{1}{\rho g} p_a + C. \quad (5.4.196)$$

Esta expresión fue derivada por Jeffreys (1916, citado por Wunsch, 1997) y que se conoce como la «ley del barómetro invertido». La constante C es arbitraria y puede asumirse nula, pues esta expresión se diferencia para evaluar los cambios en el nivel del mar asociados a cambios de la presión atmosférica. En concreto, diferenciando

(5.4.196) se obtiene

$$\Delta\eta = -\frac{1}{\rho g}\Delta p_a. \quad (5.4.197)$$

Esta expresión indica que -descontando todos los efectos dinámicos- un aumento (disminución) de 1 hPa en la presión atmosférica respecto de un valor de equilibrio, genera una reducción (aumento) del orden de 1 cm en el nivel del mar. Si consideramos, por ejemplo, una presión atmosférica de referencia a nivel del mar de 1013 hPa, con el paso de un anticiclón de 1023 hPa, la variación de nivel es del orden de -10 cm. Y para los temporales, que se caracterizan por el paso de bajas presiones, el nivel del mar puede llegar a incrementarse en varias decenas de centímetros.

Consideremos, por ejemplo, el temporal del 8 de agosto de 2015 en el litoral central de Chile (). Este temporal se caracterizó por una combinación de las variables meteoceanográficas que causó la destrucción de instalaciones portuarias, obras de protección costera y edificaciones. En la Figura 5.4.10 se muestran algunas de las variables de interés registradas en las cercanías de Valparaíso. La Figura 5.4.10a muestra la serie de tiempo del nivel del mar (en azul) en Valparaíso, que incluye tanto la marea astronómica como el residuo meteorológico (en rojo), obtenidos mediante el análisis armónico explicado en el Anexo 9.3. En la Figura 5.4.10b se ilustra el residuo meteorológico versus presión atmosférica en El Yali, donde se nota que a medida que disminuye la presión atmosférica, aumenta el nivel del mar. La Figura 5.4.10b refuerza la proporcionalidad inversa entre ambas series, donde la variación de presión atmosférica de 1 Hpa genera aumentos en el nivel del mar de 1,5 cm, sutilmente superiores a los predichos por la ley del barómetro invertido.

Esfuerzos generados por el viento Para tener una visión completa de los mecanismos forzantes de la marea meteorológica, es pertinente describir a continuación los efectos del viento sobre la superficie del mar. El viento genera un esfuerzo traccional en la superficie del océano, que es responsable de la generación de oleaje, corrientes y cambios en el nivel del mar. Los cambios en el nivel del mar (o wind setup) constituyen, junto al efecto de las variaciones de la presión atmosférica, lo que conocemos como marea meteorológica. En la actualidad, la generación de oleaje asociada a las fluctuaciones rápidas del viento se abordan en modelos que promedian la fase (e.g. SWAN o Mike 21 SW). En escalas de tiempo mayores, los efectos del viento sobre las corrientes y el nivel del mar se incorporan en modelos que resuelven la fase, como las ecuaciones de onda larga o las de Boussinesq. El análisis dimensional sugiere que para un flujo turbulento, las fuerzas de arrastre son proporcionales al cuadrado de la velocidad¹⁸. Por otra parte, la turbulencia en la interfaz aire-agua genera una superficie rugosa que afecta el valor de la fuerza de arrastre (Tan,1992). Una forma relativamente estandarizada de la fuerza por unidad de masa asociada al viento tiene la siguiente expresión (e.g. Idier, 2012)

$$F_w = \frac{\kappa U |U|}{\eta + h}, \quad (5.4.198)$$

donde κ es un coeficiente de arrastre adimensional debido al viento y U es la velocidad del viento, usualmente especificada a 10 metros sobre el nivel de la superficie del mar. El hecho que exista un término de profundidad total en el denominador -que viene de dividir la ecuación de momentum primitiva por la profundidad; véase la ecuación (5.4.150)- tiene profundas consecuencias en cuerpos de agua someros. Siguiendo el mismo procedimiento desarrollado con la presión atmosférica, para aislar el efecto del wind setup, suponemos que la inercia y la dispersión de frecuencia son despreciables y que la única fuerza presente es la debida al viento. La ecuación (5.4.190) se reduce en este caso a

$$\frac{\partial\eta}{\partial x} = \frac{\kappa U |U|}{g[\eta + h]}, \quad (5.4.199)$$

¹⁸Este resultado (la proporcionalidad de la fuerza de arrastre con el cuadrado de la velocidad) es incorporado en el cálculo de la fuerza de arrastre sobre elementos esbeltos, mediante la ecuación de Morison. Esta relación cuadrática entre esfuerzos de arrastre y la velocidad puede encontrarse en la sección de análisis dimensional de textos clásicos de mecánica de fluidos.

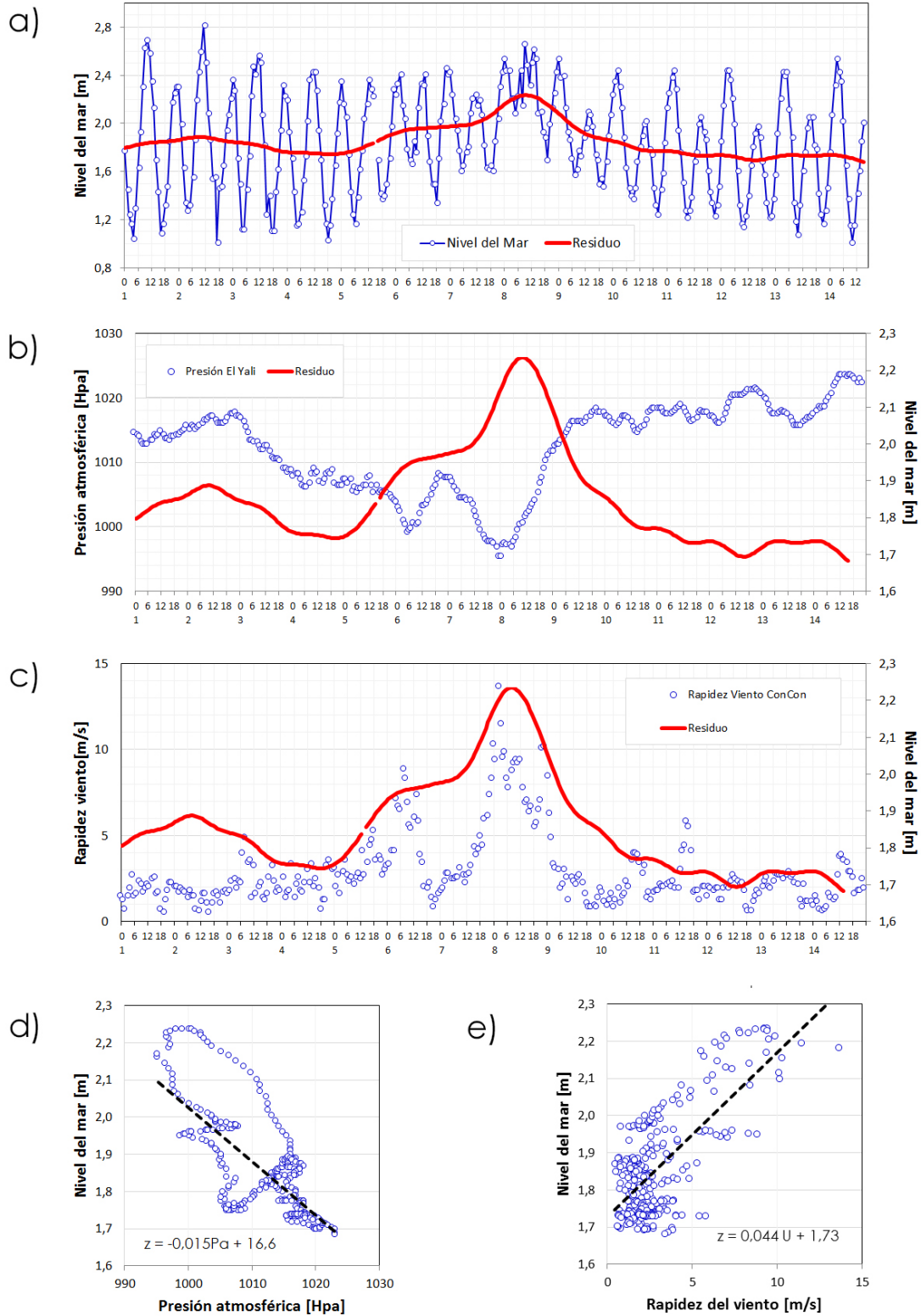


Figura 5.4.10: Variables meteoceanográficas para el temporal del 08/08/2015 en Valparaíso. a) Nivel del mar y residuo meteorológico en Valparaíso. b) Residuo meteorológico versus presión atmosférica en El Yali. c) Residuo meteorológico versus rapidez del viento en Concón. Correlaciones entre el residuo meteorológico y d) la presión atmosférica y e) la rapidez del viento (Winckler et al., 2017).

que es una ecuación diferencia ordinaria no lineal, pues tiene la incógnita η en el denominador del lado derecho. Esta ecuación es equivalente a la propuesta por Kamphuis (2010), considerando que el viento sopla alineado al eje x . Sin entrar en formalismos matemáticos (que pueden abordarse con argumentos de escala), haremos algunas simplificaciones para interpretar la física tras esta ecuación. Para linealizar (5.4.199), asumimos que la profundidad es mucho mayor que el wind setup, es decir $\eta \ll h$. También asumimos que el viento sopla en sentido x positivo, con lo que se obtiene la expresión

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\kappa U^2}{gh}. \quad (5.4.200)$$

Integrando luego de considerar que el coeficiente de arrastre, la gravedad y la densidad son constantes en el espacio da

$$\eta - \eta(x=0) = \frac{\kappa}{g} \int_0^x \frac{U^2}{h} dx. \quad (5.4.201)$$

Aquí haremos otras simplificaciones con el ánimo de rescatar la física fundamental del fenómeno. Asumimos primero, que en $x=0$ no hay wind setup. Consideramos, asimismo, el caso en que el viento es constante en el espacio (sobre lo que se denomina fetch en lenguaje técnico). Finalmente, se analiza un caso sencillo que corresponde a un dominio con profundidad constante. Con ello, la ecuación (5.4.201) se reduce a

$$\eta = \frac{\kappa U^2}{gh} x, \quad (5.4.202)$$

a partir de la cual se derivan las siguientes conclusiones, esquematizadas en la Figura 5.4.11:

- El wind setup es directamente proporcional a la distancia sobre la cual sopla el viento. Esto implica que a mayor fetch mayor es su valor.
- El wind setup es inversamente proporcional a profundidad. Esto sugiere que en cuerpos de agua someros, como en grandes bahías o desembocaduras de ríos con gran aporte sedimentario, el wind setup puede ser relevante. Para cuerpos de agua profundos, este efecto puede ser poco relevante.
- El wind setup es muy sensible a la magnitud del viento; de hecho proporcional a la magnitud del viento al cuadrado.

Usualmente, el wind setup es importante cuando alguna (o todas) de estas condiciones se dan: esto es vientos fuertes soplando en costas bajas y grandes fetchs. Un ejemplo muy claro de esta suma de factores es el Huracán Katrina, que afectó las costas de Luisiana en agosto de 2005. El huracán causó 1833 víctimas y provocó los mayores daños económicos asociados a este tipo de fenómenos de la historia de Estados Unidos. El huracán se caracterizó por vientos máximos de orden de 280 km/h actuando sobre una costa de baja profundidad en el Golfo de México y con fetchs considerables. A ello hay que sumar que las presiones atmosféricas mínimas alcanzaron del orden de 900 Hpa. La suma de estos factores redundó en una marea meteorológica máxima en torno a 9 m, que penetró decenas de kilómetros sobre un territorio costero de muy baja pendiente. Ejemplos recientes de la cuantificación de la marea meteorológica asociada a huracanes, incluyendo asimismo el oleaje han sido realizados para Nueva York (Lin et al., 2010) y para el delta del río Mississippi (Dietrich et al., 2011).

En las costa Pacífica de Sudamérica, el wind setup (y la marea meteorológica) es considerablemente menor, pero suficiente como para ser considerado en el diseño de obras marítimas. Volvamos al ejemplo del temporal del 8 de agosto de 2015 en el litoral central de Chile (Winckler et al., 2017). La Figura 5.4.10c muestra las series simultáneas del residuo meteorológico en Valparaíso y la rapidez del viento en Concón, en tanto que en la Figura 5.4.10e se observa que la estadística entre ambas variables no sigue una relación cuadrática, pero si se muestra la proporcionalidad directa entre ambas variables. Con todo, la marea meteorológica asociada a este evento fue

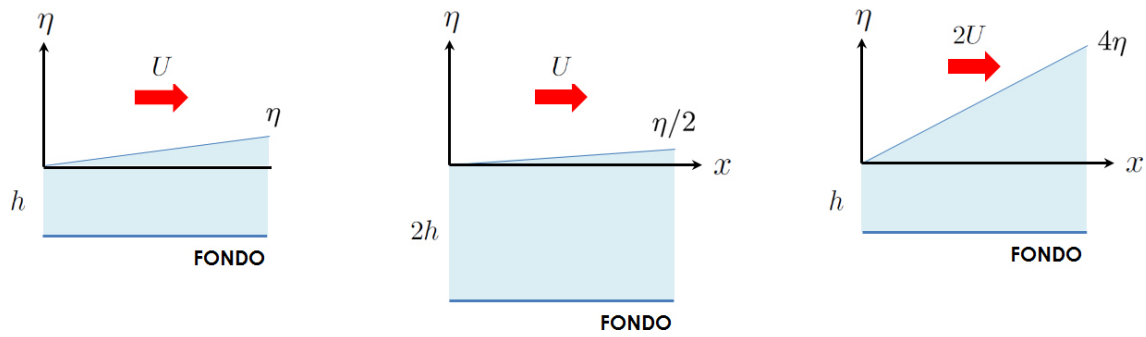


Figura 5.4.11: *Wind setup* para una geometría idealizada de fondo plano y viento constante soplando en la superficie. Este esquema asume que la masa de agua asociada al incremento del nivel del mar proviene de cuerpo de agua colindante donde no sopla el viento. Izquierda: el *wind setup* es directamente proporcional a la distancia sobre la cual sopla el viento x . Centro: El *wind setup* se reduce a la mitad por una duplicación de la profundidad a $2h$. Derecha: El *wind setup* se cuadruplica cuando la magnitud del viento se duplica a $2U$.

del orden de 30 cm. Lamentablemente en Chile existen pocos casos documentados en detalle (Beyá y Winckler, 2013; Winckler et al. 2015) y escasos datos oceanográficos confiables y de fácil acceso que permitan cuantificar el efecto de la marea meteorológica en el desempeño de las obras marítimas. En esta materia estamos en pañales. Para efectos prácticos, no obstante, podemos estimar que en las costas Chilenas, la marea meteorológica contemporánea puede alcanzar magnitudes del orden de decenas de centímetros, dependiendo de la latitud, y que en ocasiones puede ser comparable con la marea astronómica (de ahí que es importante incorporarla para efectos de diseño). Quedan muchos retos por caracterizar este fenómeno, sobre todo considerando los eventuales efectos del cambio climático que actúan en la escala de tiempo de la vida útil de la infraestructura costera.

Esfuerzos generados por la fricción de fondo En la medida que las ondas se propagan a aguas someras, los efectos de fricción de fondo se incrementan, disipando energía y modificando la forma de las mismas. La fricción de fondo genera efectos no lineales que tienden a retardar el flujo (Tan, 1992). Liu et al. (2006) indica que hay dos formas de considerar la fricción en las ecuaciones de gobierno promediadas en la vertical: i) adicionando un término extra en las ecuaciones de momentum ii) incluyendo el efecto de la capa límite a través de un término adicional en la ecuación de conservación de la masa (Winckler & Liu, 2015). La fricción de fondo por unidad de masa en la ecuación (5.4.190) se puede representar mediante la expresión

$$F_b = -\frac{C_b \bar{u} |\bar{u}|}{\eta + h}, \tag{5.4.203}$$

donde \bar{u} es la velocidad promediada en la vertical, ρ la densidad y C_b un coeficiente de fricción de fondo adimensional. A diferencia de la expresión para el esfuerzo generado por el viento (5.4.198), en este caso la fuerza depende de la velocidad del flujo, que es una incógnita. Este modelo de fricción es proporcional al cuadrado de la velocidad, según se deriva del análisis dimensional; su carácter no lineal es responsable de la generación de armónicos. Para ilustrar el concepto de generación de armónicos debido a la no linealidad, recurramos a la expansión de Taylor para $x \ll 1$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \mathcal{O}(x^4), \tag{5.4.204}$$

y usemosla a considerando que $h \ll \eta$. Con ello (5.4.203) se aproxima a

$$F_b = -\frac{C_b \bar{u} |\bar{u}|}{h} - \mathcal{O}(\eta). \tag{5.4.205}$$

Ahora consideremos una componente armónica del tipo $\bar{u} = U \sin(kx - \omega t)$. La fricción de fondo opera sobre ésta componente siguiendo la siguiente proporcionalidad

$$F_b \propto \frac{U^2}{2} [1 - \cos(2\{kx - \omega t\})], \tag{5.4.206}$$

que se asocia a un armónico de longitud de onda $k' = 2k$, es decir, generando una onda de la mitad de longitud que la primitiva. En la medida que las ondas se propagan y opera la fricción, se generan armónicos que a su vez interactúan entre ellos generando una transferencia no lineal entre componentes de frecuencia. Cabe mencionar que también existen modelos lineales de fricción, como el usado por Longuet-Higgins (1970a) para la resolución de las ecuaciones en la zona de rompiente. Estos modelos son más sencillos en términos de implementación computacional (la generación de armónicos puede inestabilizar la resolución numérica) pero omiten parte de la riqueza de la física subyacente. Finalmente, los modelos de fricción basados en la velocidad promediada en la vertical no son muy adecuados para caracterizar el transporte de sedimentos, pues no permiten caracterizar la compleja dinámica de la capa límite (*boundary layer dynamics*) donde se desencadena este proceso.

Esfuerzos generados por la turbulencia Los esfuerzos turbulentos (*turbulent stresses*) representan el intercambio de momentum debido a los siguientes mecanismos *i*) difusión molecular, *ii*) difusión turbulenta, *iii*) variación vertical de la velocidad horizontal y *iv*) variación espacial del campo de velocidad en el plano horizontal. Al actuar sobre la columna de agua, los esfuerzos turbulentos difieren desde un punto de vista físico con la fricción de fondo, que actúa como un esfuerzo de superficie. Los esfuerzos turbulentos pueden ser incluidos en forma heurística con niveles crecientes de complejidad, mediante los siguientes modelos (Tan, 1992)

- Modelos donde la viscosidad turbulenta se asume constante,
- Modelos de 1 ecuación, que se basan en resolver la ecuación de transporte de la energía cinética turbulenta (κ).
- Modelos de 2 ecuaciones, que se basan en resolver las ecuaciones de transporte de la energía cinética turbulenta y de la disipación (modelos $\kappa - \epsilon$ o $\kappa - \omega$, entre otros).

La fuerza por unidad de masa generada por la turbulencia se modelan a través de la expresión

$$F_{ts} = \frac{1}{[\eta + h]} \frac{\partial}{\partial x} \left([\eta + h] \nu^t \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right), \quad (5.4.207)$$

donde ν^t representa la viscosidad turbulenta asociada a las ecuaciones promediadas en la profundidad. Luego de descartar las fuerzas de inercia, la dispersión y otras fuerzas externas, con esta expresión podemos expresar y aproximar la ecuación de momentum (5.4.190) como sigue

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \frac{1}{[\eta + h]} \frac{\partial}{\partial x} \left([\eta + h] \nu^t \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) \approx \nu^t \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}. \quad (5.4.208)$$

Esta expresión tiene la misma estructura que la ecuación de difusión de la masa (3.2.11)

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, \quad (5.4.209)$$

por lo que los esfuerzos turbulentos tienden a difundir el momentum desde zonas donde más a menos momentum (en forma análoga a como actúa la ley de Fick para difusión de masa).

Dentro de estos modelos están los asociados a la **turbulencia asociada a la rompiente** (*wave breaking induced turbulence*), donde la intensidad de la turbulencia es mucho mayor que en la zona de asomeramiento. Debido al aumento de la no linealidad antes y durante el rompimiento, se requiere de reemplazar los modelos tipo Boussinesq (débilmente no lineales) por modelos no lineales que incluyen términos asociados a la rotura. Estos términos deben ser calibrados para cuantificar en forma correcta la cantidad de energía disipada y la distribución de armónicos generados en el proceso de rotura (Kirby, 1993). En los modelos basados en la rotacionalidad del flujo, la rotura está inherentemente incluida en las ecuaciones de momentum, por no así la inclusión de aire, a menos que sean bifásicos. Además de los modelos basados en la viscosidad turbulenta, para modelar

la rompiente se utilizan también los modelos de roller inicialmente propuestos por Svendsen. Estos modelos asumen la existencia de un roller ubicado en el frente de la ola, cuyo efecto es incluido mediante un término advectivo adicional en la ecuación de momentum. Este término genera una pérdida de energía comparable a la de un resalto hidráulico de altura equivalente a la altura de ola rompiente.

Esfuerzos generados por el efecto de Coriolis La fuerza de Coriolis surge debido a la rotación de la tierra y genera una desviación del flujo en sentido antihorario en el hemisferio sur (y en sentido horario en el hemisferio norte). Producto de esta fuerza, un flujo inicialmente rectilíneo experimenta trayectorias curvas sobre la superficie si es visto desde el punto de vista del observador en Tierra (esas mismas trayectorias serían aproximadamente rectas vistas por un observador externo que no gira con la Tierra, como un satélite geostacionario). El efecto de Coriolis no efectúa trabajo y por tanto se le denomina pseudo-fuerza. Esta fuerza es relevante cuando i) los períodos de las ondas en estudio son comparables con el período de rotación de la Tierra y ii) cuando las escalas espaciales del movimiento son comparables con el diámetro de la Tierra (GIOC, 2003). La fuerza de Coriolis por unidad de masa se expresa como sigue

$$\mathbf{F}_g = 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}, \quad (5.4.210)$$

donde $\boldsymbol{\Omega}$ es el vector de velocidad angular y \mathbf{u} la velocidad de una partícula en un sistema rotatorio. Para el caso de un flujo geostrófico donde las escalas horizontales son mucho mayores que las verticales, esta expresión, en un sistema cartesiano se simplifica a

$$(F_{gx}, F_{gy}) = 2\omega \sin \phi (\bar{v}, \bar{u}),$$

donde $\omega = 7,29 \times 10^{-5}$ rad/s es la velocidad angular de la Tierra, ϕ la latitud y (\bar{u}, \bar{v}) las velocidades horizontales en (x, y) . Dado que la ecuación de momentum (5.4.190) está escrita en una dimensión no tiene sentido incluir Coriolis pues esta fuerza actúa en sentido ortogonal al flujo. Para incluirla es necesario recurrir a dos ecuaciones (en principio ortogonales) de conservación de momentum. Finalmente, cabe notar que la fuerza de Coriolis no tiene sentido en modelos unidimensionales.

Esfuerzos generados por la marea astronómica La marea astronómica se generan como consecuencia del equilibrio entre i) la fuerza de atracción gravitatoria ejercida por el sol y la luna y ii) la fuerza centrífuga resultante de la rotación de la tierra alrededor de estos cuerpos celestes. El campo de fuerzas resultante es responsable de la generación de un potencial de marea periódico y no uniforme en la superficie de la tierra. Los principales componentes de marea se derivan de constituyentes semidiurnas asociadas al movimiento de la luna (sol) alrededor el ecuador terrestre, constituyentes diurnas asociadas a la declinación de la luna (sol) y constituyentes de período largo generadas por la declinación de la luna mensual (solar). Las fuerzas de marea también se ven afectadas por la variación de la distancia entre los cuerpos celestes a lo largo de sus trayectorias, por la geometría irregular del océano y por mecanismos de disipación como la fricción del fondo. La marea astronómica se incluye a través de términos adicionales en las ecuaciones de momento y las condiciones de contorno, basados en el concepto de la marea de equilibrio. La fuerza por unidad de masa asociada al potencial de marea es

$$F_m = -\frac{\partial \Omega}{\partial x}, \quad (5.4.211)$$

donde Ω es el potencial de mareas, en unidades de $[m^2/s^2]$. El enfoque de usar un escalar (como el potencial de mareas) en vez de fuerzas simplifica la formulación matemática. El efecto de la marea es relevante en cuerpos de agua de grandes dimensiones como los océanos, o en cuerpos de agua semicerrados donde se generan corrientes llenantes o vaciantes, como fiordos o estuarios. En estos casos, el efecto de la marea astronómica puede incorporarse a través de las condiciones de borde (Tan, 1992). Pugh y Woodworth (2014) presenta un tratado excelente sobre las mareas que recomiendo tener de cabecera en tu biblioteca.

Ecuaciones completas Considerando los efectos considerados previamente, podemos expresar la ecuación de conservación de la masa en términos de los flujos $p = \bar{u}H$ y $q = \bar{v}H$ y para un dominio de integración como sigue

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial t}, \quad (5.4.212)$$

donde la profundidad respecto del nivel estático varía en el tiempo (como es el caso de un tsunami donde se mueve el fondo). Las ecuaciones de conservación de momentum en direcciones x e y respectivamente

$$\begin{aligned} & \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p^2}{H} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{pq}{H} \right) + gH \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ & + \frac{gp\sqrt{p^2 + q^2}}{C^2 H^2} - \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x} (H\tau_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y} (H\tau_{xy}) \right] - \Omega_q - fVV_x + \frac{H}{\rho} \frac{\partial p_a}{\partial x} + \frac{\partial \Omega}{\partial x} = 0, \end{aligned} \quad (5.4.213)$$

y

$$\begin{aligned} & \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{pq}{H} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{q^2}{H} \right) + gH \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ & + \frac{gq\sqrt{p^2 + q^2}}{C^2 H^2} - \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x} (H\tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y} (H\tau_{yy}) \right] - \Omega_p - fVV_y + \frac{H}{\rho} \frac{\partial p_a}{\partial y} + \frac{\partial \Omega}{\partial y} = 0. \end{aligned} \quad (5.4.214)$$

5.4.5. Condiciones iniciales y de borde

Para que el problema de la propagación de ondas esté correctamente definido, se deben adicionar a las ecuaciones de gobierno las condiciones iniciales y las condiciones de borde, denominadas estas últimas también como condiciones de contorno. Puesto que las condiciones de borde forman parte sustancial de un problema de propagación de ondas, éstas deben definirse de forma rigurosa. En esta sección se introducen los principios básicos de este tipo de condiciones, dejando su exposición más avanzada a textos especializados (e.g. Liu, 2010; Wei & Kirby, 1995).

Para simplificar la explicación tomemos, por ejemplo, las ecuaciones no lineales de onda larga en una dimensión,

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} ([\eta + h] \bar{u}) = 0, \quad (5.4.215)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0, \quad (5.4.216)$$

definidas sobre un dominio espacial dado por $a < x < b$, con $t > 0$. El problema está completamente definido sólo si se definen las condiciones de borde en $x = a, b$ y las condiciones iniciales en $t = 0$. Veamos cómo se definen estas condiciones.

5.4.5.1. Condiciones iniciales

Las condiciones iniciales especifican las variables dependientes en el dominio en el instante inicial $t = 0$, esto es

$$\eta(x, 0) = F(x), \quad \bar{u}(x, 0) = G(x), \quad a \leq x \leq b \quad (5.4.217)$$

donde $F(x)$ y $G(x)$ son funciones arbitrarias en el espacio. Cabe notar que en la teoría no lineal de onda larga, la desnivelación instantánea y la velocidad están relacionadas, como aproximación de primer orden, mediante la expresión

$$\bar{u} = \sqrt{\frac{g}{h}} \eta, \quad (5.4.218)$$

por lo que sólo basta con especificar una de esas variables para que la otra quede completamente definida. En los problemas de propagación de ondas es usual comenzar con el sistema en reposo, esto es $F(x), G(x) = 0$, y forzarlo por los bordes (sección 5.4.5.2) o al interior del dominio. En el segundo caso, el forzamiento puede hacerse mediante esfuerzos en la superficie asociados al viento, gradientes de presión atmosférica o el efecto de la marea astronómica, según se presenta en la sección 5.4.4. En algunos modelos de mareas y oleaje, se debe esperar durante un tiempo suficiente para que los efectos transientes asociados a una condición inicial de reposo dejen de alterar los resultados.

5.4.5.2. Condiciones de borde

Las condiciones de borde definen los valores que toman las variables dependientes en la frontera del dominio. Estas se pueden clasificar en reflejantes, generadoras, absorbentes, periódicas, móviles o una combinación de ellas.

Las condiciones de borde **reflejantes** (reflective boundaries) representan el efecto de una pared impermeable. En estas se impone un flujo normal nulo y una superficie horizontal en el borde, lo que en términos matemáticos. Por ejemplo, se una condición de borde reflejante en el extremo $x = a$ se escribe como:

$$\frac{\partial \eta}{\partial x}(a, t) = 0, \quad \bar{u}(a, t) = 0. \quad (5.4.219)$$

La condición de flujo normal nulo puede ampliarse a dos dimensiones mediante la expresión $\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} = 0$, donde $\bar{\mathbf{u}} = (\bar{u}, \bar{v})$ representa el vector velocidad y \mathbf{n} es la normal a la superficie. Puesto que el producto escalar (o producto punto) se define como $\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} = \|\bar{\mathbf{u}}\| \|\mathbf{n}\| \cos(\theta)$, donde θ es el ángulo entre ambos vectores, podemos interpretar esta expresión como que la componente ortogonal del flujo a la pared es nula. Esta condición no impone restricciones a la componente paralela a la pared, la cual puede ser distinta a cero en el caso de un flujo potencial (como el asumido en la teoría lineal del oleaje), o igual a cero en el caso de un fluido viscoso. Para el caso de las ecuaciones de Boussinesq, la segunda ecuación no es estrictamente cierta debido a la presencia del término asociado a la dispersión de frecuencias (Wei & Kirby, 1995).

Las condiciones de borde **generadoras** (wavemaker boundaries) prescriben el valor de las variables dependientes en uno o ambos contornos, para todo el tiempo. Por ejemplo, para el contorno en $x = a$, se definen como

$$\eta(a, t) = H(t), \quad \bar{u}(a, t) = I(t), \quad (5.4.220)$$

donde $H(x)$ y $I(x)$ son funciones arbitrarias en el espacio. Dado que la desnivelación instantánea y la velocidad están relacionadas mediante la expresión (5.4.218), sólo basta con especificar una de estas variables para que la otra quede completamente definida. Si se contempla la generación de oleaje regular en el extremo $x = a$, por ejemplo, la desnivelación puede definirse como

$$\eta(a, t) = A \cos(\omega t + \delta), \quad (5.4.221)$$

donde A representa la amplitud y ω la frecuencia angular. La generación de un oleaje irregular se basa en la expansión mediante series de Fourier que, para M constituyentes, se expresa mediante la siguiente expresión

$$\eta(a, t) = \sum_{i=1}^M A_i \cos(\omega_i t + \delta_i). \quad (5.4.222)$$

Esta misma expresión puede utilizarse para el forzamiento de la marea astronómica a través de un borde. La diferencia fundamental es que en el caso de las mareas, las frecuencias son selectivas y obedecen a movimientos astronómicos bien conocidos (sección 9.3).

Las condiciones de borde **absorbentes, abiertas o radiativas** (*absorbing, open or radiative boundaries*) eliminan la reflexión de las ondas que inciden en el borde, por lo que estas abandonan el dominio computacional. En términos matemáticos, esto se logra mediante la expresión de primer orden

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} \pm \sqrt{gh} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = 0, \quad (5.4.223)$$

que representa una onda lineal propagándose en un sentido que depende del signo. Dado que la desnivelación y la velocidad están relacionadas, basta con utilizar la expresión (5.4.218) para definir completamente el sistema. Esta expresión asume que existe sólo una celeridad en el sistema, $c = \sqrt{gh}$, asociada a ondas que cumplen con la condición de aguas someras. En el caso de las ecuaciones de Boussinesq, la reflexión asociada a aquellas componentes del espectro que no cumplen con la condición de aguas someras son difíciles de eliminar completamente (Liu, 2010), por lo que suelen utilizarse esponjas de absorción cerca de los contornos (Wei & Kirby, 1995).

Las condiciones de borde **periódicas** (*periodic boundaries*) imponen que las ondas que salen por un borde ingresan simultáneamente por el borde opuesto. Estas son utilizadas por ejemplo en la teoría lineal del oleaje. Para el caso de las ecuaciones no lineales de onda larga, estas condiciones se traducen en la expresión

$$\eta(a, t) = \eta(b, t). \quad (5.4.224)$$

Estas condiciones, no obstante, son utilizadas en casos muy especiales, como en la prueba de algoritmos o fenómenos oscilatorios fundamentales.

Las condiciones de borde **móviles** (*moving boundaries*), que son utilizadas en modelos de inundación, permiten identificar zonas secas y mojadas, haciendo que el dominio no sea constante. Estas condiciones son comúnmente utilizadas en modelos de inundación por tsunami.

Estas condiciones de borde ampliables a modelos bidimensionales, con la sola condición de que en algunas de ellas se debe conocer el ángulo de incidencia de las ondas en los bordes. La Figura 5.4.12 ilustra la comparación de condiciones de borde reflejantes y absorbentes para un modelo de onda larga en dos dimensiones, obtenida de Thuerey y Hess (2012).

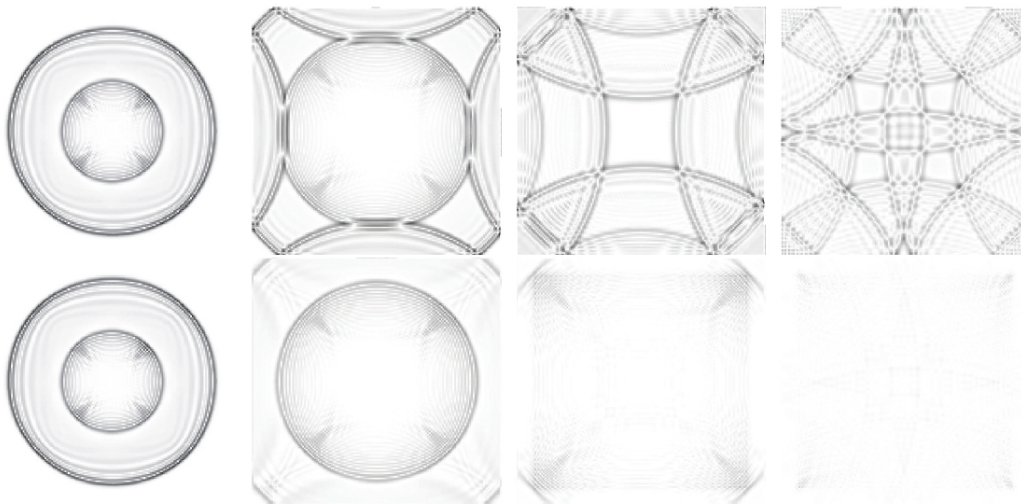


Figura 5.4.12: Comparación de CDBs reflejantes (arriba) y absorbentes (abajo) para un modelo de onda larga bidimensional (Thuerey y Hess, 2012).

5.4.6. Resonancia

La resonancia es un fenómeno que se produce cuando las frecuencias de excitación de las ondas presentes en el mar coinciden con las frecuencias de oscilación propias de una dársena, bahía, mar interior o plataforma continental. Para dimensiones típicas de las dársenas, del orden de centenares de metros, los periodos naturales de oscilación son del orden de minutos en tanto que para cuerpos de aguas mayores, como la plataforma continental, pueden ser del orden de horas. Por ejemplo, el Canal Chacao tiene períodos naturales cercanos a las 12 horas -bastante cercanos a las constituyentes semidiurnas de la marea- que explican los rangos mareales de hasta 7 metros en la zona de Puerto Montt (Winckler et al., 2017b). Para el caso de puertos, la respuesta de la onda resonante depende fundamentalmente del calado, de la configuración en planta de la dársena y de la capacidad del recinto de disipar energía tanto en sus contornos como a través de la bocana de acceso.

La resonancia se caracteriza por presentar unos movimientos verticales acusados de la superficie libre, con corrientes horizontales nulas en los antinodos, y grandes velocidades horizontales sin apenas desplazamiento vertical en los nodos (Rabinovich, 2010). El origen de dichas oscilaciones puede ser meteorológico (asociadas a la marea meteorológica o a meteotsunamis) o inducido por los grupos de olas, que se liberan de las ondas cortas en las cercanías de la costa. La aproximación numérica de los modos propios de resonancia de dársenas se efectúa utilizando las ecuaciones de onda larga (Liu & Losada, 2002) utilizando diferentes técnicas como los espectros de ruido blanco o funciones empíricas ortogonales. La resonancia dificulta o impide las operaciones de carga y descarga de los barcos amarrados a los muelles e incluso puede producir la rotura de las amarras, ocasionando graves perjuicios en la actividad portuaria.

Capítulo 6

Modelado del oleaje rompientes

La zona de rompiente se caracteriza por fenómenos hidrodinámicos y morfológicos bastante complejos. Las corrientes generadas por el oleaje, denominadas corrientes litorales o longshore currents (Figura 6.0.1, izquierda), se disipan rápidamente fuera de la línea de rompientes. Estas corrientes son generadas por las olas que rompen en un ángulo oblicuo en la costa y constituyen el mecanismo más eficiente de transporte de sedimentos en las playas. Las corrientes de retorno o rip currents (Figura 6.0.1, derecha), por su parte, se producen cuando, debido a la incidencia casi normal del oleaje, se acumula un exceso de agua en las barras litorales, que busca entonces una brecha para fluir al mar. Estas corrientes transportan sedimentos a mayores profundidades, pero con volúmenes menores que las corrientes litorales, debido a su relativo confinamiento y poca duración. En este capítulo se presentan las ecuaciones de onda larga en la zona de rompientes que permiten caracterizar estos fenómenos, además de soluciones analíticas en casos particulares para el setup de oleaje (wave setup) y las corrientes longitudinales para el caso especial de una playa con veriles rectos y paralelos. Estos conceptos pueden complementarse con la lectura del texto de Svendsen (2006).

6.1. Ecuaciones de gobierno

En esta sección se busca derivar las ecuaciones de gobierno que rigen la hidrodinámica de la rompiente. La derivación se presenta sin entrar en detalles matemáticos que se pueden encontrar en los papers originales (e.g. Longuet-Higgins, 1970). Bajo ciertas simplificaciones, estas ecuaciones permiten encontrar expresiones analíticas para las corrientes longitudinales (longshore currents) y el wave setup. En la derivación de las ecuaciones se asume: *i*) densidad constante, *ii*) flujo incompresible, *iii*) presión hidrostática, *iv*) flujo irrotacional, *v*) no hay interacción entre oleaje y corrientes, *vi*) no hay variación de la velocidad en la profundidad y *vii*) el oleaje es armónico. Con estos supuestos, las ecuaciones de Navier-Stokes pueden ser integradas en la profundidad y en el tiempo para llegar a las ecuaciones de aguas someras, con forzamiento y disipación. Las ecuaciones de gobierno

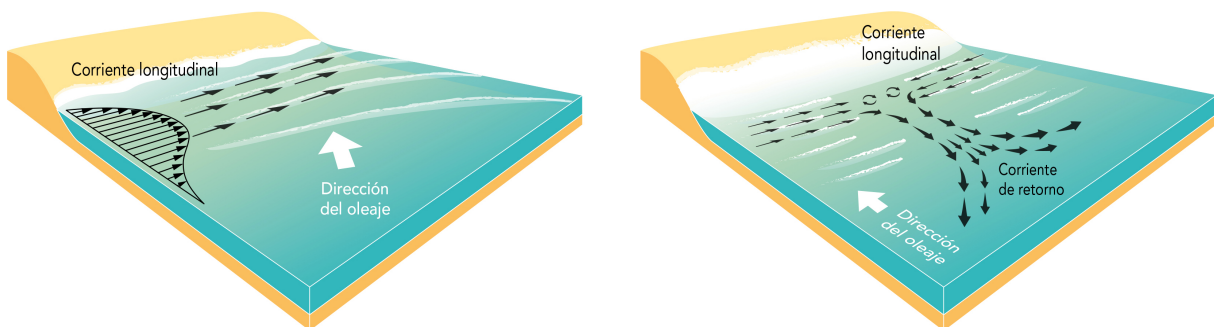


Figura 6.0.1: Corrientes litorales (longshore currents). Adaptado de The COMET Program.

son

$$\frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(\tilde{\eta} + h) \bar{u}] + \frac{\partial}{\partial y} [(\tilde{\eta} + h) \bar{v}] = 0, \quad (6.1.1)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -g \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial x} + \frac{1}{\tilde{\eta} + h} (F_x - \tau_x + R_x) \quad (6.1.2)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = -g \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial y} + \frac{1}{\tilde{\eta} + h} (F_y - \tau_y + R_y), \quad (6.1.3)$$

donde \bar{u} y \bar{v} corresponden a las velocidades promediadas en la profundidad y en el tiempo (o período para un oleaje regular), en sentido perpendicular y a lo largo de la costa (i.e. cross-shore y longshore currents)

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \left(\frac{1}{\eta + h} \int_{-h}^{\eta} u dz \right) dt, \quad \bar{v} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \left(\frac{1}{\eta + h} \int_{-h}^{\eta} v dz \right) dt \quad (6.1.4)$$

donde T es el período. $\tilde{\eta}$ es la desnivelación media en el tiempo,

$$\tilde{\eta} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \eta dt, \quad (6.1.5)$$

h es la profundidad del nivel estático, ρ es la densidad y g la aceleración de gravedad. $\mathbf{F} = (F_x, F_y)$ corresponde a las fuerzas de cuerpo en la columna de agua producidas por el oleaje y el viento (en este caso consideraremos sólo oleaje), $\boldsymbol{\tau} = (\tau_x, \tau_y)$ representa la fricción de fondo y $\mathbf{R} = (R_x, R_y)$ representa la difusión de momentum.

Forzante de oleaje

El forzante de oleaje $\mathbf{F} = (F_x, F_y)$ se expresa en términos de los esfuerzos de radiación, o radiation stresses, S_{ij} , que definen la fuerza media integrada en la vertical y promediada en un período, que actúa sobre las diferentes caras de un elemento diferencial orientado en forma paralela a la costa. La relación entre el forzante de oleaje y los tensores de radiación es:

$$F_x = -\frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial S_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial S_{xy}}{\partial y} \right], \quad F_y = -\frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial S_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial S_{yy}}{\partial y} \right] \quad (6.1.6)$$

Utilizando la teoría lineal del oleaje, el tensor de radiación se puede escribir como

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} \\ S_{yx} & S_{yy} \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} n(1 + \cos^2 \theta) - 1/2 & n \cos \theta \sin \theta \\ n \cos \theta \sin \theta & n(1 + \sin^2 \theta) - 1/2 \end{bmatrix}, \quad (6.1.7)$$

donde θ es el ángulo entre el frente y el veril de fondo,

$$E = \frac{1}{8} \rho g H^2 \quad (6.1.8)$$

SPILLING WAVES



PLUNGING WAVES



COLLAPSING



Figura 6.1.1: Oleaje con rompimiento en en descrestamiento (spilling), voluta (plunging) o colapso (collapsing).

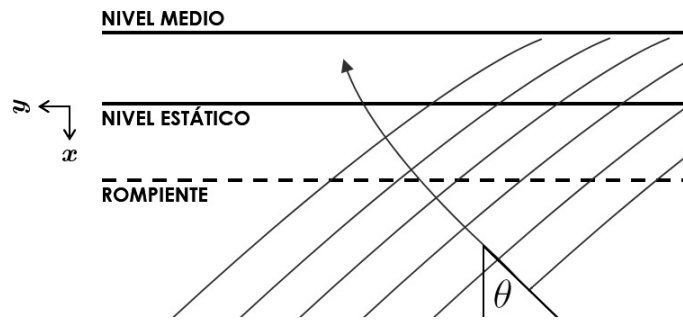


Figura 6.2.1: Esquema de una playa plana con oleaje incidiendo con un ángulo θ .

corresponde a la energía media de un oleaje monocromático, donde $H = 2a$ es la altura de oleaje, y

$$n = \frac{c_g}{c} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) \quad (6.1.9)$$

el coeficiente que define la profundidad relativa, donde c_g es la celeridad de grupo y c la celeridad de la onda. Esta derivación se puede encontrar en diversas referencias (GIOG, 2003, pp.53-56). En clases haremos el ejercicio de derivar las expresiones del tensor de radiación.

6.2. Simplificaciones para una playa plana

Para obtener ecuaciones simplificadas, asumimos que la batimetría de la playa es plana y no depende de la coordenada longitudinal y ($\partial/\partial y = 0$), como se muestra en la Figura 6.2.1. Buscaremos también simplificaciones donde las variaciones temporales son despreciables ($\partial/\partial t = 0$). Con ello, las ecuaciones (6.1.1), (6.1.2) y (6.1.3) se simplifican a

$$\frac{\partial}{\partial x} [(\tilde{\eta} + h)\bar{u}] = 0, \quad (6.2.1)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = -g \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial x} + \frac{1}{\eta + h} (F_x - \tau_x + R_x), \quad (6.2.2)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} = \frac{1}{\eta + h} (F_y - \tau_y + R_y). \quad (6.2.3)$$

De la ecuación de continuidad, se deduce que $(\tilde{\eta} + h)\bar{u}$ es una constante en x . Por otra parte, por la condición de borde en la línea de playa, $\bar{u}_{(x=0)} = 0$ y puesto que $(\tilde{\eta} + h) \neq 0$, entonces $\bar{u}_{(x)} = 0$ para todo el dominio. Por último, asumimos que τ_x y R_x dependen de \bar{u} y por tanto son nulas, e.g. $\tau_x \propto \bar{u}^2$ y $R_x \propto \partial^2 \bar{u} / \partial x^2$. Con estas simplificaciones, la ecuación (6.2.2) en sentido perpendicular a la playa (eje x) se reduce a

$$0 = -g(\tilde{\eta} + h) \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial x} + F_x, \quad (6.2.4)$$

e implica que el flujo de momentum en la columna de agua por efecto del oleaje y viento (el cual usualmente se descarta) genera una deformación de las desnivelación de la superficie, denominada setup de oleaje (wave setup).

La ecuación (6.2.3), por su parte, se reduce a

$$0 = F_y - \tau_y + R_y. \quad (6.2.5)$$

Esta ecuación indica que, a lo largo de la playa (eje y) el flujo de momentum en la columna de agua por efecto del oleaje es balanceado tanto por la fricción como por la difusión de momentum. Esta expresión se utiliza para obtener la expresión de la corriente longitudinal (longshore current). Para resolver estas ecuaciones debemos modelar los términos F_x , F_y , τ_y y R_y . Se recomienda revisar Winckler & Liu (2013) donde se sintetizan estos resultados.

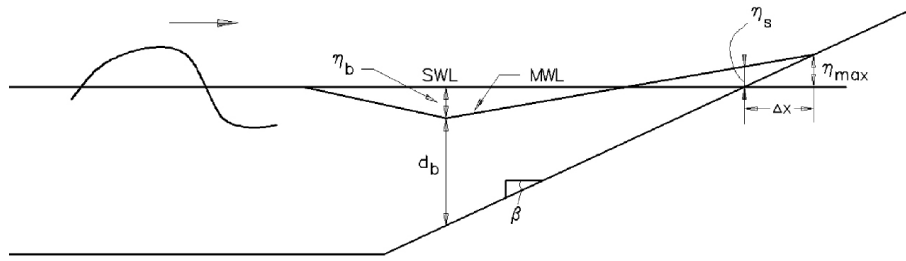


Figura 6.2.2: Diagrama del setup y set-down de oleaje (CEM, 2003).

6.2.1. Wave setup y setdown

El wave setup es un incremento del nivel medio del mar en la zona de la rompiente por efecto de una transferencia de momentum del oleaje a la columna de agua durante la rompiente. La Figura 6.2.2 muestra un diagrama del setup y setdown de oleaje. Derivaciones rigurosas se pueden encontrar en la bibliografía especializada (e.g. Longuet-Higgins, 1963; GIOC, 2003 ; Dean y Walton, 2009).

Para calcular el setup a partir de la ecuación (6.2.4), consideremos un caso simple con incidencia del oleaje ortogonal a la costa ($\theta = 0$). En ese caso, el tensor de radiación (6.1.7) se reduce a

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} \\ S_{yx} & S_{yy} \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} 2n - 1/2 & 0 \\ 0 & n - 1/2 \end{bmatrix}, \quad (6.2.6)$$

y el forzante de oleaje en la dirección ortogonal a la playa se reduce a

$$F_x = -\frac{1}{\rho} \frac{dS_{xx}}{dx}, \quad \text{con} \quad S_{xx} = E(2n - 1/2), \quad (6.2.7)$$

donde la derivada parcial se reemplaza por la derivada total pues no hay variaciones a lo largo de la playa. El balance de momentum (6.2.4) se reduce a

$$\frac{d\tilde{\eta}}{dx} = -\frac{1}{\rho g (\tilde{\eta} + h)} \frac{dS_{xx}}{dx}. \quad (6.2.8)$$

En adelante, se utilizarán los resultados de la teoría lineal del oleaje para derivar las expresiones del wave set-down en la zona de asomeramiento y del wave setup en la zona de rompiente.

6.2.1.1. Zona de asomeramiento (Set-down)

Esta derivación fue propuesta inicialmente por Longuet-Higgins y Stewart (1963). Fuera de la zona de la rompiente, la desnivelación media de la superficie libre se considera despreciable en comparación con la profundidad, i.e. $\tilde{\eta} + h \approx h$, por lo que la ecuación (6.2.8), linealizando, se reduce a

$$\frac{d\tilde{\eta}}{dx} = -\frac{1}{\rho g h} \frac{dS_{xx}}{dx}. \quad (6.2.9)$$

Utilizando los resultados de la teoría lineal del oleaje (GIOC, 2003; pp.71-73), se obtiene la siguiente expresión para el nivel medio en el punto de rotura

$$\tilde{\eta}_b = -\frac{H^2 k}{8 \sinh(2kh)}, \quad (6.2.10)$$

mientras que en aguas profundas, $\tilde{\eta} = 0$. Utilizando los criterios de aguas someras, e.g. $\sinh(2kh) \approx 2kh$, y rompiente en saturación

$$H = \gamma(\tilde{\eta} + h) \approx \gamma h, \quad x = x_b \quad (6.2.11)$$

para un oleaje infinitesimal donde $\tilde{\eta} \ll h$, da

$$\tilde{\eta}_b = -\frac{\gamma H}{16}. \quad (6.2.12)$$

Esto implica que el nivel medio disminuye a medida que nos acercamos desde aguas profundas hacia la rompiente.

6.2.1.2. Zona de rompiente (setup)

En la zona rompiente podemos utilizar la aproximación de aguas someras donde $n = 1$ a partir de (6.1.9). La componente del tensor de radiación se reduce a

$$S_{xx} = \frac{3}{16}\rho g H^2, \quad (6.2.13)$$

y su derivada, necesaria para integrar (6.2.8), es

$$\frac{dS_{xx}}{dx} = \frac{3}{8}\rho g H \frac{dH}{dx}. \quad (6.2.14)$$

Es necesario hacer otra aproximación para expresar la altura de ola H en función de un parámetro conocido, como la profundidad total $h + \tilde{\eta}$. Utilizando el criterio de rompiente en saturación

$$H = \gamma(\tilde{\eta} + h), \quad 0 \leq x < x_b \quad (6.2.15)$$

en (6.2.8)

$$\frac{d\tilde{\eta}}{dx} = -\frac{3\gamma^2}{8 + 3\gamma^2} \frac{dh}{dx}. \quad (6.2.16)$$

Esta es una ecuación diferencial ordinaria de simple solución. Integrando entre el punto de inicio de la rompiente (definido por h_b y $\tilde{\eta}_b$) y un punto genérico dentro de la zona de rompiente

$$\int_{\tilde{\eta}_b}^{\tilde{\eta}(x)} \frac{d\tilde{\eta}}{dx} dx = -\frac{3\gamma^2}{8 + 3\gamma^2} \int_{h_b}^{h(x)} \frac{dh}{dx} dx. \quad (6.2.17)$$

se obtiene

$$\tilde{\eta} - \tilde{\eta}_b = -\frac{3\gamma^2}{8 + 3\gamma^2} (h - h_b). \quad (6.2.18)$$

Para una playa recta y paralela, la profundidad se puede expresar en función de la distancia como $h = mx$, lo que implica que la variación del setup a los largo de la zona de rompiente,

$$\tilde{\eta}(x) = -\left(\frac{3\gamma^2 m}{8 + 3\gamma^2}\right)x + \tilde{\eta}_b + \frac{3\gamma^2 h_b}{8 + 3\gamma^2}, \quad (6.2.19)$$

es lineal, según se observa en la Figura 6.2.2.

6.2.1.3. Aplicación

Para ejercitar estos cálculos, se sugiere estudiar el ejemplo II-4-2 del capítulo Surf Zone Hydrodynamics del Coastal Engineering Manual (USACE, 2003).

6.2.2. Corrientes longitudinales

Para obtener una expresión analítica de las corrientes longitudinales debemos resolver la ecuación (6.2.5), que constituye un balance entre el flujo de momentum en la columna de agua por efecto del oleaje, la fricción y la difusión de momentum. Para ello debemos modelar los términos F_y , τ_y y R_y para obtener la velocidad $\bar{v}(y)$, bajo el supuesto de que la playa tiene veriles rectos y paralelos ($\partial/\partial y = 0$). Esta derivación fue introducida por Longuet-Higgins (1970).

6.2.2.1. Flujo de momentum por efecto del oleaje

De la expresión (6.1.6), para una playa recta y paralela ($\partial/\partial y = 0$) obtenemos

$$F_y = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial S_{xy}}{\partial x}, \quad (6.2.20)$$

donde, en virtud de (6.1.7)

$$S_{xy} = En \cos \theta \sin \theta, \quad n = \frac{c_g}{c} \quad (6.2.21)$$

y la energía media de un oleaje monocromático E viene dada por (6.1.8). En adelante asumimos

1. que la refracción está gobernada por la Ley de Snell, $\sin \theta/c = \text{constante}$, es decir, no hay difracción,
2. condiciones de aguas someras, i.e. $c_g = \sqrt{gh}$, y
3. que el ángulo de incidencia θ es pequeño, i.e. $\cos \theta \approx 1$.

Con ello, la ecuación (6.2.21) se reduce a

$$S_{xy}(x) = E(x) \sqrt{gh(x)} \frac{\sin \theta_0}{c_0}, \quad (6.2.22)$$

donde $\sin \theta_0$ y c_0 corresponden a los valores en aguas profundas. El valor de la altura del oleaje $H(x)$ debe obtenerse en forma separada para la zona de asomeramiento y la rompiente (Winckler & Liu, 2013), i.e.

$$H(x) = \begin{cases} H_0 K_s K_r & x > x_b \\ \gamma (\tilde{\eta} + h) & x < x_b \end{cases} \quad (6.2.23)$$

donde x_b representa la rompiente. Los coeficientes de asomeramiento y refracción se calculan según las siguientes expresiones

$$K_s(x) = \sqrt{\frac{c_{g0}}{\sqrt{gh(x)}}}, \quad K_r(x) = \sqrt{\frac{\cos \theta_0}{\cos \theta(x)}}, \quad (6.2.24)$$

donde el subíndice 0 representa as condiciones en aguas profundas. Notar que las expresiones anteriores vienen de un balance energético entre ortogonales que asume que no existe reflexión, difracción ni disipación de energía. Con las expresiones (6.2.23) y (6.2.24) y conociendo las propiedades del oleaje en aguas profundas- $c_0 = gT/2\pi$ y θ_0 - se puede obtener la expresión de la energía media del oleaje como función de la distancia a la costa $E(x)$ y evaluar la componente S_{xy} del tensor de radiación.

6.2.2.2. Fricción de fondo

La fricción de fondo puede modelarse mediante un modelo lineal (Feddersen, 2000) como

$$\tau_y = \rho c_f u_0 \bar{v}, \quad (6.2.25)$$

donde c_f es un coeficiente empírico. La magnitud de la velocidad orbital en dirección perpendicular a la playa u_0 puede obtenerse de la relación de la teoría lineal del oleaje (válida bajo el supuesto de onda larga)

$$u_0 = a \sqrt{\frac{g}{h}}, \quad (6.2.26)$$

Este modelo lineal entre τ_y y \bar{v} , es el más simple y en él subyacen los supuestos de *i*) que la corriente longitudinal es débil en comparación con la velocidad orbital de las partículas y *ii*) que el ángulo de ataque del oleaje en la zona rompiente es pequeño. El uso de un modelo tan simple tiene el objeto de encontrar una expresión analítica para $\bar{v}(y)$.

6.2.2.3. Difusión de momentum

La difusión de momentum se basa en la idea de que los vórtices desplazan momentum a través de los gradientes del momentum medio (o velocidad media). Estos vórtices cubren escalas espaciales desde los centímetros hasta el ancho típico de la zona rompiente y escalas temporales del orden de 100 segundos. Un modelo típico de difusión de momentum se expresa de la forma

$$R_y = \rho \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu_t h \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right), \quad (6.2.27)$$

donde ν_t corresponde a la viscosidad de eddy, que es función del flujo (y no del fluido como la viscosidad molecular ν). Para utilizar esta expresión se deben definir condiciones de borde en la línea de costa y costa a fuera. En la línea de costa asumimos una condición de no deslizamiento (no slip)

$$\bar{v}_{(x=0)} = 0, \quad (6.2.28)$$

y costa afuera

$$\bar{v}_{(x=\infty)} = 0, \quad (6.2.29)$$

que implica que en el infinito la transferencia de momentum por difusión es despreciable.

6.2.2.4. Balance de momentum en sentido longitudinal

Utilizando las expresiones (6.2.20), (6.2.25) y (6.2.27) en el balance dado por (6.2.5)

$$0 = - \left(\frac{g^{3/2} \sin \theta_0}{8c_0} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(H^2 \sqrt{h} \right) - \rho c_f u_0 \bar{v} + \rho \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu_t h \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right), \quad (6.2.30)$$

que corresponde a la teoría inicialmente propuesta por Longuet-Higgins (1970b). La expresión (6.2.30) puede ser integrada para obtener una expresión de la velocidad longitudinal $\bar{v}(x)$, que tiene una forma suave, con un máximo dentro de la zona de rompiente. El único parámetro que permite ajustar la forma es la viscosidad turbulenta ν_t . En el paper seminal sobre el tema (Longuet-Higgins, 1970a) no se considera la difusión de momentum y la distribución de velocidad resulta en una distribución triangular cuyo máximo se encuentra en la línea de rompiente. En la Figura 6.2.3 se ilustra la forma de los perfiles de velocidad longitudinal, obtenida en uno de los dos paper originales de Longuet-Higgins (1970). El caso sin fricción corresponde a la distribución triangular con $P = 0$, en la que no existe difusión más allá de la zona de rompientes, correspondiente a la variable normalizada

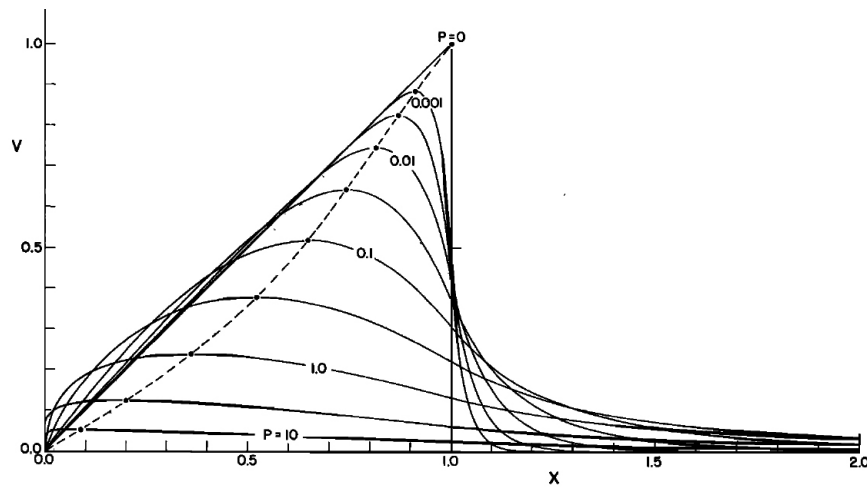


Figura 6.2.3: Forma de los perfiles de velocidad longitudinal (Longuet-Higgins, 1970). La forma de los perfiles está normalizada por la distancia a la zona de rompiente ($X = 1$) corresponde a la posición de la rompiente y por la velocidad máxima, correspondiente a $V = 1$. Se observa cómo, por efecto de la difusión de momentum, la velocidad más allá de la rompiente no es nula. En ausencia de difusión, $P = 0$ y la velocidad más allá de la rompiente ($X > 1$) es nula.

$X = 1$. En la medida que la difusión de momentum aumenta, lo hace el parámetro P , y las velocidades exhiben una distribución más amplia, alcanzando la zona de asomeramiento. Cabe mencionar que las velocidades y posiciones están normalizadas, por lo que su uso debiera efectuarse previa consulta a los documentos originales.

Cabe notar que en la realidad, el oleaje es irregular y por tanto la rompiente no ocurre siempre en el mismo punto. Como consecuencia, la distribución de velocidad es más suave que la función analítica propuesta por Longuet-Higgins. Este efecto, aunque esencialmente diferente, tiene un efecto similar que la difusión de momentum en el perfil de velocidades.

6.3. Tensor de radiación

Para derivar las ecuaciones de onda larga en la zona de rompiente (6.1), es preciso primero derivar las expresiones del tensor de radiación. La fuerza instantánea total sobre una sección vertical orientada en forma perpendicular al flujo es la siguiente

$$I_x = \int_{-h}^{\eta} [(\rho u) u + p] dz, \quad (6.3.1)$$

donde la presión considera la componente estática y la dinámica asociada al oleaje. Nos interesa evaluar esta fuerza en forma promediada en el tiempo. Para ello asumimos un oleaje armónico y promediamos en el período del oleaje

$$\tilde{I}_x = \underbrace{\int_{-h}^{\eta} \widetilde{\rho u^2} dz}_{I_{x1}} + \underbrace{\int_{-h}^{\eta} \widetilde{p} dz}_{I_{x2}}, \quad (6.3.2)$$

donde

$$\tilde{f} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f(t) dt. \quad (6.3.3)$$

La primera integral se puede separar en componentes y, asumiendo un oleaje de pequeña amplitud, simplificar como sigue

$$I_{x1} = \int_{-h}^{\eta} \widetilde{\rho u^2} dz = \int_{-h}^0 \widetilde{\rho u^2} dz + \int_0^{\eta} \widetilde{\rho u^2} dz \approx \int_{-h}^0 \widetilde{\rho u^2} dz. \quad (6.3.4)$$

Utilizando la expresión derivada de la teoría lineal del oleaje

$$\widetilde{u^2} = \frac{gA^2k}{\sinh 2kh} (1 + \cosh 2k(h+z)), \quad (6.3.5)$$

encontramos, luego de algo de álgebra

$$I_{x1} = En. \quad (6.3.6)$$

La segunda integral se puede descomponer en la presión hidrostática (p_s) y la dinámica asociada al oleaje (p_d)

$$I_{x2} = \int_{-h}^{\eta} \widetilde{p} dz = \int_{-h}^{\eta} \widetilde{p_d} dz + \int_{-h}^{\eta} \widetilde{p_s} dz = \int_{-h}^{\eta} \widetilde{p_d} dz + \rho g \frac{1}{2} (\bar{\eta} + h)^2. \quad (6.3.7)$$

Luego, considerando las expresiones (6.3.6) y (6.3.7) en la fuerza total (6.3.2), considerando las componentes dinámica y estática, es

$$\widetilde{I}_x = En + \int_{-h}^{\eta} \widetilde{p_d} dz + \rho g \frac{1}{2} (\bar{\eta} + h)^2. \quad (6.3.8)$$

La componente asociada puramente al oleaje corresponde a uno de los componentes del tensor de radiación

$$S_{xx} = En + \int_{-h}^{\eta} \widetilde{p_d} dz. \quad (6.3.9)$$

Recurriendo nuevamente a la teoría lineal del oleaje para expresar la presión dinámica, se obtiene la expresión

$$S_{xx} = E \left(n - \frac{1}{2} \right).$$

Los otros componentes del tensor son

$$S_{xx} = \int_{-h}^{\eta} (p_d + \rho u^2) dz - \frac{1}{2} \rho g (h + \bar{\eta})^2,$$

$$S_{xy} = \int_{-h}^{\eta} (\rho uv) dz = S_{yx},$$

$$S_{yy} = \int_{-h}^{\eta} (p_d + \rho v^2) dz - \frac{1}{2} \rho g (h + \bar{\eta})^2.$$

Para el caso más general de un oleaje oblicuo, el tensor de radiación se puede escribir como

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} \\ S_{yx} & S_{yy} \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} n(1 + \cos^2 \theta) - 1/2 & n \cos \theta \sin \theta \\ n \cos \theta \sin \theta & n(1 + \sin^2 \theta) - 1/2 \end{bmatrix}. \quad (6.3.10)$$

Esta derivación se puede encontrar en diversas referencias¹. El tensor de radiación es una cantidad importante en la descripción de la hidrodinámica de la rompiente. Pero son las variaciones espaciales del tensor de radiación -principalmente debidas a cambio en la altura de ola en presencia de la rompiente- las que generan corrientes y cambios en el nivel medio del mar.

¹e.g. Documentos de referencia. Dinámicas. Mecánica de ondas, pp.53-56 (GIOG, 2003).

Capítulo 7

Modelado de marejadas

7.1. Introducción

En este capítulo se presentan algunas técnicas de modelado utilizadas actualmente para caracterizar la evolución de las marejadas desde su generación en el océano hasta su disipación en la costa. El texto corresponde a una adaptación del Nuevas metodologías para el estudio de marejadas en Chile (Winckler et al., 2019), incluido en el Geolibro La zona costera de Chile: adaptación y planificación para la resiliencia, cuya audiencia es bastante amplia. Por ende, he procurado minimizar el uso de tecnicismos de la ingeniería costera, enfatizando la utilidad práctica de estos estudios y el cruce disciplinario.

Antes de proseguir, reitero un par de reflexiones relevantes que se hicieran en el capítulo 1. Los modelos (casi) siempre funcionan, pero la bondad de los resultados depende de la calidad de los datos de entrada, de la especificación de las condiciones de borde, del análisis e interpretación de los resultados y del criterio de quien los utiliza. Si un modelo se fuerza con datos erróneos, los resultados serán de mala calidad. Para mejorar el proceso de modelado, es entonces recomendable efectuar un acucioso control de calidad en cada una de sus fases y garantizar que la física esté bien reproducida, evitando caer en la interpretación ligera de gráficos que son cada vez más atractivos (¡no todo lo que brilla es oro!). Por otra parte, con el aumento de la capacidad computacional, los modelos han presentado un vertiginoso desarrollo que demanda de una constante capacitación de quienes los usamos. El modelado numérico de procesos costeros es, por tanto, una disciplina en constante cambio y probablemente las técnicas que mostramos en este capítulo queden obsoletas en los años venideros. Finalmente, los modelos deben ser considerados como herramientas para la resolución de problemas y no como un fin en sí mismos a menos, claro, que te dediques al desarrollo de algoritmos para la resolución de las ecuaciones que gobiernan los procesos físicos asociados.

7.2. El oleaje en las costas de Chile

En décadas recientes, las costas de Chile central han experimentado un intenso proceso de urbanización. La incidencia de marejadas en los últimos años, junto con el incremento en la demanda de infraestructura costera y el eventual cambio del nivel del mar atribuido al calentamiento global, aumentan el riesgo en una zona también afecta a recurrentes terremotos y tsunamis. La Figura 7.2.1 muestra el número de eventos extremos anuales entre 1958 y 2015 frente a Valparaíso, estimado mediante la selección de marejadas cuya altura significativa superó un umbral establecido como dos desviaciones estándar por sobre la media (Martínez et al., 2018). La tendencia muestra que los eventos extremos han aumentado de un promedio de 5 por año a mediados del siglo pasado a aproximadamente 20 por año en el siglo XXI. Asimismo, se ha observado un giro de la dirección del oleaje en aguas profundas del orden de 20° hacia el sur y un aumento de las alturas significativas máximas mensuales durante dicho período. Sobre la base de una recopilación de artículos de prensa digital y archivos históricos, Campos-Caba (2016) indica que las tormentas que causaron el mayor daño en el área (1965, 1968, 1986

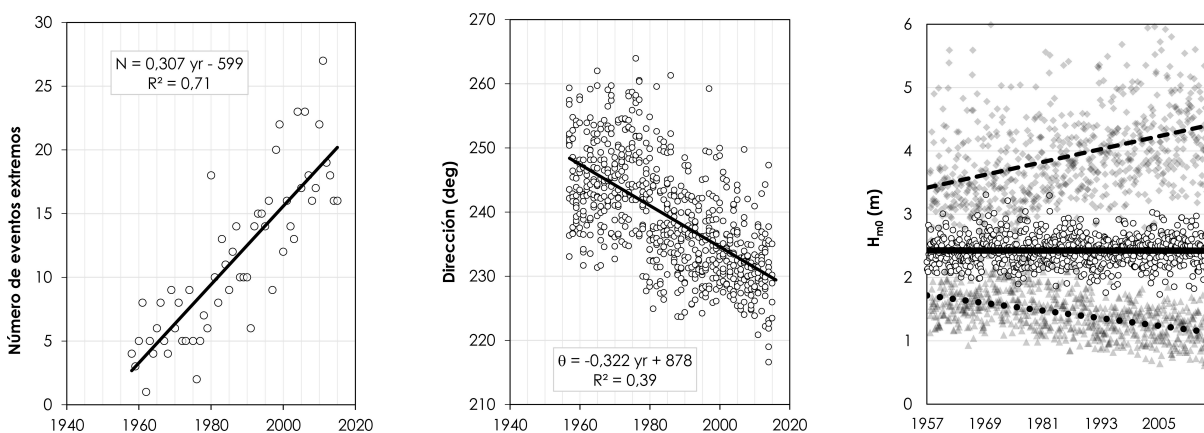


Figura 7.2.1: Evolución temporal de estadísticas de oleaje entre 1958 y 2015 en aguas profundas frente a Valparaíso. Izquierda: Número de eventos extremos anuales de oleaje. Izquierda: Dirección media mensual. Derecha: Altura significativa promedio (círculos en contorno negro), máxima (diamantes grises) y mínima mensuales (triángulos), con sus respectivas rectas de ajuste. Adaptado de Martínez et al. (2018).

y 1987) se generaron localmente durante el invierno. Recientemente, los eventos extremos no han exhibido una clara distinción estacional, ocurriendo incluso en verano (Martínez et al., 2018). Si extrapolamos este comportamiento a un futuro cercano, se espera un escenario con aumento en la frecuencia e intensidad de las marejadas.

Dado que la costa chilena se encuentra expuesta al océano Pacífico, es frecuente encontrar estados de mar compuestos por múltiples sistemas de oleaje, los cuales inciden desde distintas direcciones y con diferentes alturas, periodos y contenido espectral. Cada componente que alcanza las costas chilenas proviene de diferentes zonas de generación (Figura 7.2.2), haciendo que el oleaje sea, en general, de carácter multimodal.

En la costa de Chile continental, el clima de oleaje se encuentra dominado por los vientos asociados a la actividad ciclónica extratropical que se presenta entre las latitudes 35°S a 60°S. El oleaje generado en dicha región se propaga a través del océano Pacífico, arribando a las costas bajo una condición denominada mar de fondo (swell). Durante el invierno meridional, el Anticiclón Subtropical del Pacífico Sudeste migra en promedio desde los 33°S a los 27°S, condición que favorece el desplazamiento de ciclones extratropicales hacia latitudes más bajas, los cuales en casos extremos alcanzan la zona central con intensos vientos y olas de varios metros de altura. Este tipo de oleaje se le denomina mar de viento local (wind sea). Durante el verano meridional se forman frente a las Islas Aleutianas centros de baja presión, los cuales generan olas que se propagan a lo largo del Océano Pacífico y arriban a las costas de Chile con períodos elevados y alturas relativamente bajas. Este tipo de oleaje, denominado swell del noroeste, es de particular importancia para puertos que se encuentran expuestos al cuarto cuadrante, como es el caso de la bahía de Mejillones. En las islas oceánicas del archipiélago Juan Fernández, Isla de Pascua e Islas Desventuradas, el clima de oleaje contiene además componentes del primer y segundo cuadrantes, dada la exposición a todo el rango de direcciones. Para acceder a una descripción detallada del clima de oleaje y a estadísticas a lo largo del país, recomendamos consultar el Atlas de Oleaje de Chile (Beyá et al., 2016), disponible en www.oleaje.uv.cl.

7.3. Modelos de oleaje

La costa es una zona dinámica en donde coexisten distintos procesos físicos asociados a la hidrodinámica y al transporte de sedimentos. El oleaje, en particular, es el principal agente modelador de los procesos litorales en las costas abiertas de Chile y su comportamiento condiciona la operatividad y seguridad portuaria. Los eventos extremos, conocidos en términos coloquiales como marejadas, definen asimismo los valores para el diseño es-

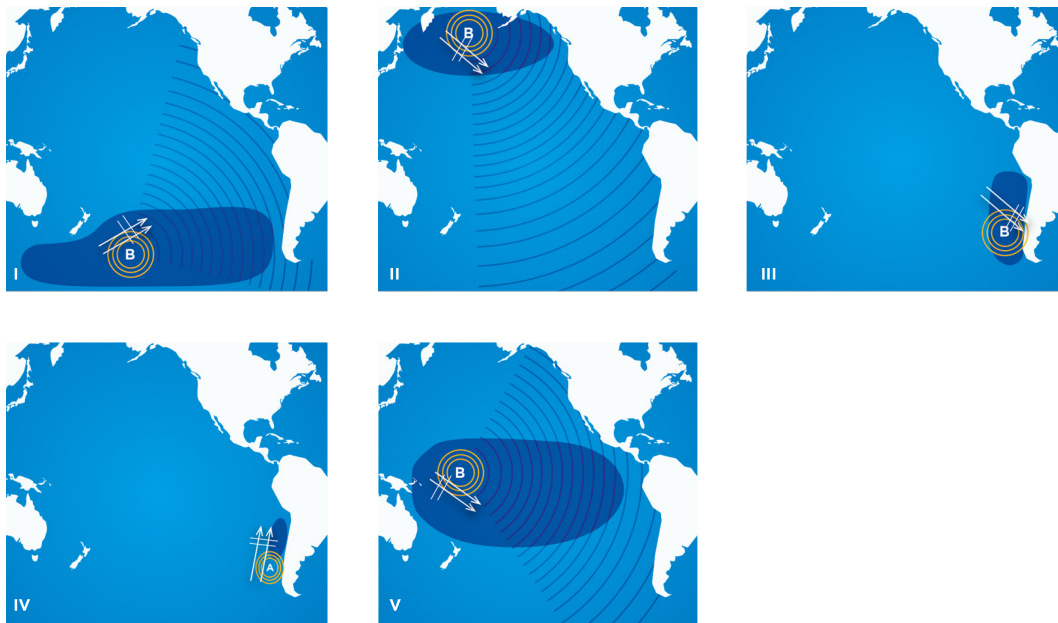


Figura 7.2.2: Zonas de generación del oleaje que alcanza las costas chilenas. I) Núcleos de bajas presiones en las latitudes medias del hemisferio sur responsables del oleaje reinante. II) Núcleos de bajas presiones en latitudes medias del hemisferio norte responsables del mar de fondo del noroeste. III) Núcleos de bajas presiones que generan mal tiempo y marejadas de mar de viento en Chile continental durante el invierno. IV) Anticiclones que generan buen tiempo, viento (surazo) y mar de viento del sur-suroeste. V) Tormentas tropicales en el Pacífico. Adaptado de Beyá et al. (2016).

tructural de obras marítimas. Estos eventos se caracterizan por olas de gran altura formadas por fuertes vientos en el área oceánica, evolucionando en diferentes escalas temporales y espaciales a medida que se propagan desde la zona de generación hacia las costas (Figura 7.3.1).

Para estudiar la evolución del oleaje, y en orden de complejidad creciente, existen i) modelos que promedian temporalmente la fase, ii) aquellos que resuelven la fase permitiendo la resolución espacio-temporal de olas individuales y iii) los basados en versiones promediadas de las ecuaciones de Navier-Stokes y que se agrupan en forma genérica bajo el término CFD (Computational Fluid Dynamics). Estos modelos se describen someramente a continuación, y se presentan en forma detallada en el capítulo 5:

- Los **modelos que promedian la fase** (Phase-averaged models) se basan en la ecuación de balance de energía y permiten calcular la evolución en el tiempo y espacio del oleaje, en la medida que ésta sea suave. Estos modelos permiten cuantificar fenómenos como el crecimiento y la disipación del oleaje en escalas oceánicas, además del asomeramiento y la refracción en zonas próximas a la costa. Sin embargo, no calculan en forma adecuada la difracción, la reflexión y la rotura del oleaje. A partir del espectro de energía, estos modelos permiten calcular los parámetros estadísticos de un estado de mar, como la altura significativa, el periodo (peak o medio) y la dirección (peak o media), entre otros. A pesar de ser simples y rápidos, estos modelos no permiten calcular olas individuales, y por ende se utilizan en extensiones relativamente grandes, desde aguas profundas a profundidades en torno a los 10-20 metros, dependiendo de si la costa es rocosa o se caracteriza por pendientes suaves.
- Los **modelos que resuelven la fase** (Phase-resolving models) se basan en ecuaciones de conservación de la masa y momentum que permiten caracterizar la evolución en el tiempo y espacio de la superficie libre y la velocidad para olas individuales. Estos modelos tienen la ventaja de que pueden dar cuenta de los fenómenos de asomeramiento, refracción, difracción, reflexión y disipación, característicos de zonas

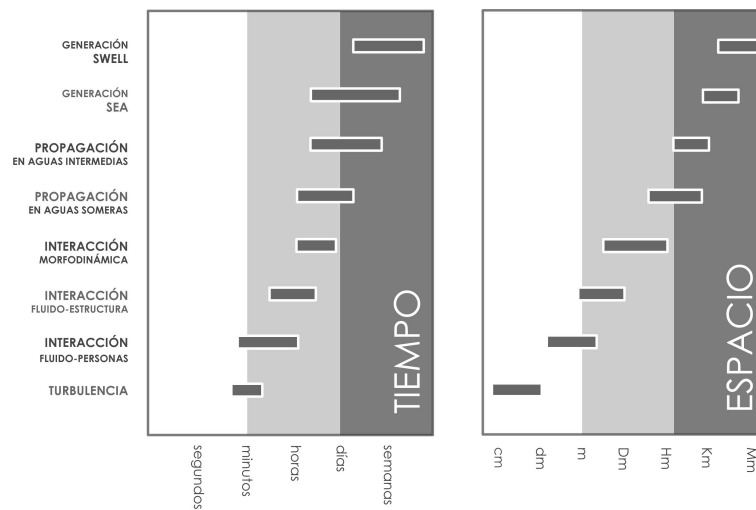


Figura 7.3.1: Escalas de evolución espacio-temporal de las marejadas. Elaboración propia.

costeras. Sin embargo, debido a la alta resolución espacial y temporal requerida para su resolución, están limitados a áreas relativamente pequeñas. Otra desventaja es que a la fecha no permiten resolver en forma adecuada la generación de oleaje por viento.

- Los **modelos CFD** se basan en versiones promediadas (en el tiempo, espacio y/o volumen) de las ecuaciones de Navier-Stokes, sin efectuar supuestos respecto de la estructura tridimensional del flujo. Estos modelos permiten calcular la velocidad y la presión en tres dimensiones, a un costo computacional comparativamente alto. Entre éstos destacan aquellos basados en las ecuaciones RANS (Reynolds Averaged Navier-Stokes equations), en técnicas de filtrado LES (Large Eddy Simulation) y en la solución de movimiento de partículas mediante SPH (Smooth Particle Hydrodynamics).

En la práctica, estos modelos son complementarios y pueden acoplarse según sea el objetivo de estudio. Los modelos que promedian la fase son utilizados en la zona de generación de oleaje (Figura 7.3) y para propagación en aguas intermedias donde los efectos de refracción y asomeramiento predominan por sobre los de interacción con obras costeras y costas abruptas (Figura 7.3.3). Para estudiar marejadas, por ejemplo, se puede propagar el oleaje desde aguas profundas a intermedias con modelos de baja resolución espacial ($10^0 \sim 10^2$ m) y temporal ($10^2 \sim 10^3$ s). La propagación se realiza usualmente a partir de aguas profundas pues es ahí donde existen condiciones de contorno conocidas, tales como datos obtenidos mediante boyas, satélites o modelos globales que no están afectados al fondo. En playas de pendiente suave donde no existen grandes singularidades, los modelos que promedian la fase pueden ser utilizados hasta las cercanías de la zona de rompiente, sin grandes errores.

La secuencia lógica es llevar los datos de aguas intermedias a la costa con modelos que resuelven la fase. Este proceso se efectúa con mejor resolución espacial ($10^{-1} \sim 10^0$ m) y temporal ($10^{-1} \sim 10^0$ s), de modo de evaluar en forma adecuada la agitación y la resonancia de bahías cerradas y dársenas debidas al oleaje. Estos modelos permiten caracterizar las zonas donde domina la difracción y reflexión por sobre el asomeramiento y refracción. Permiten asimismo, describir la zona previa a la rotura, pues consideran términos no lineales que cuantifican la asimetría del oleaje antes de romper (Figura 7.3.4). Los modelos que resuelven la fase pueden también utilizarse en otros flujos gravitacionales como las mareas astronómicas y meteorológicas, tsunamis, flujos de lava, lahares y ondas a escala oceánicas, como las de Poincaré, Kelvin y Rossby.

Los modelos CFD, por su parte, permiten evaluar fenómenos sumamente complejos como la rotura, la interacción fluido-estructura y la interacción fluido-sedimentos, con una resolución muy alta ($10^{-3} \sim 10^{-1}$ m; $10^{-3} \sim 10^{-1}$ s). Con esa capacidad se puede estimar el sobrepaso en una defensa, las velocidades de escurrimiento y las fuerzas sobre personas, vehículos, edificaciones y el equipamiento urbano (Figura 7.5.3).

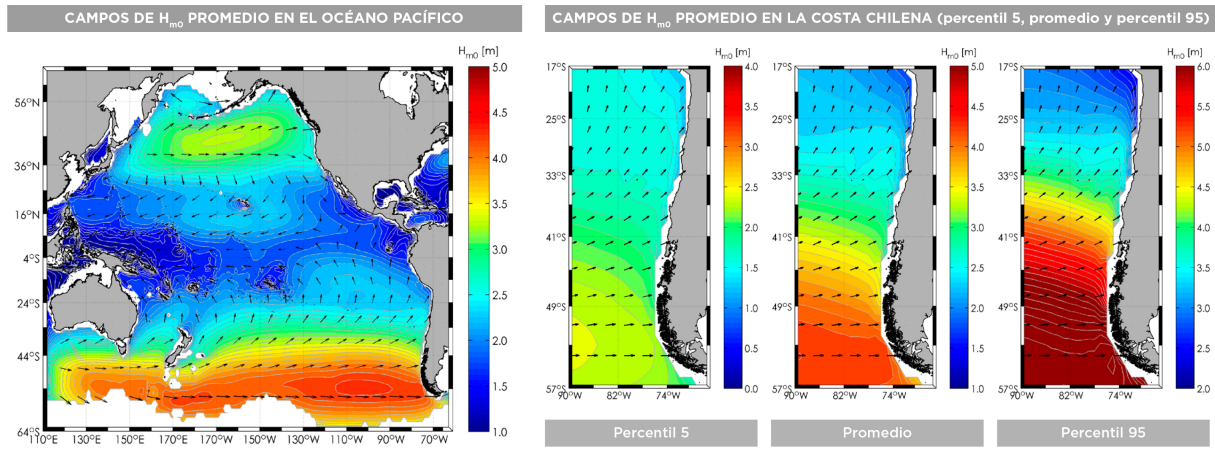


Figura 7.3.2: Modelo que promedia la fase utilizado para la generación en el Océano Pacífico, obtenidos del Atlas de Oleaje de Chile (Beyá et al., 2016, 2017).

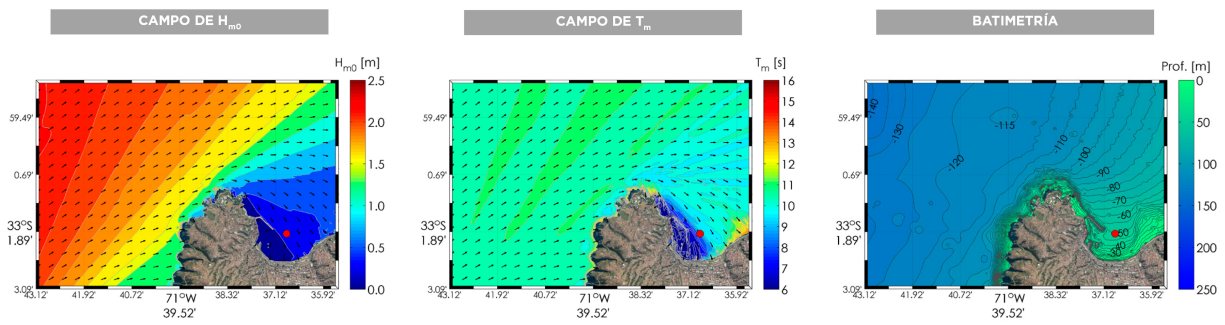


Figura 7.3.3: Modelo que promedia la fase utilizado para la propagación del oleaje desde aguas profundas a la bahía de Valparaíso, obtenidos del Atlas de Oleaje de Chile (Beyá et al., 2016, 2017). Se ilustran los campos de altura significativa y la profundidad de la bahía.

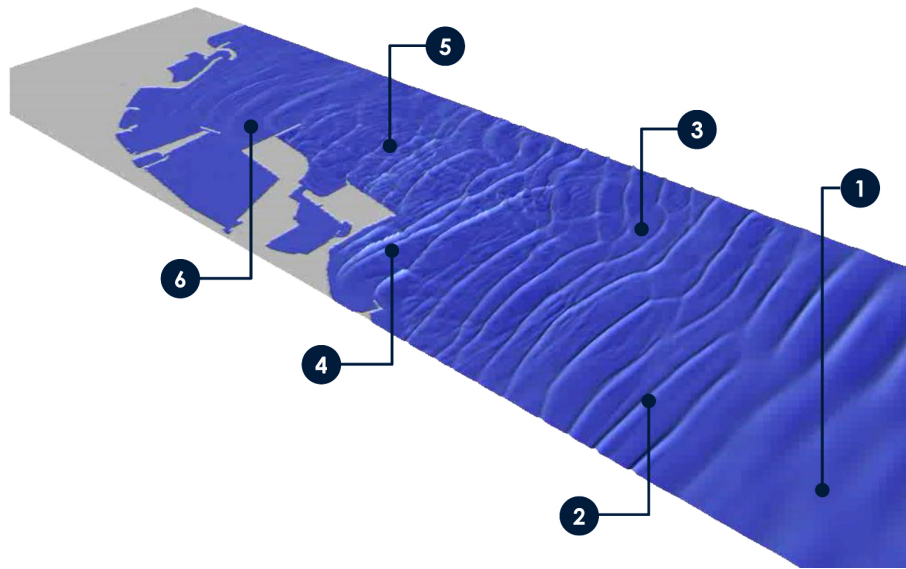


Figura 7.3.4: Modelo que resuelve la fase, donde se observan las olas individuales propagándose desde aguas profundas a la costa (adaptado de DHI). (1) Un oleaje irregular en aguas profundas comienza a ser afectado por el fondo. (2) Debido a la reducción de la profundidad, las ondas tienden a experimentar **asomeramiento** y dejan de ser simétricas, con crestas de alta pendiente y valles más largos. (3) Debido a la irregularidad de la batimetría, en zonas bajas la onda se desacelera producto de la **refracción**. (4) Cerca de las obras costeras se produce **reflexión** y el patrón resultante de oleaje es cuasi-estacionario, con amplitudes mayores a la incidente. Eventualmente puede haber **rotura**. (5) Producto de la reflexión en las estructuras costeras y la **transferencia no lineal** entre frecuencias activada por la baja profundidad, se observan patrones de oleaje complejos y oscilaciones de mayor frecuencia. (6) Por efecto de la **difracción**, los frentes se curvan significativamente, la amplitud disminuye y se logra una dársena abrigada.

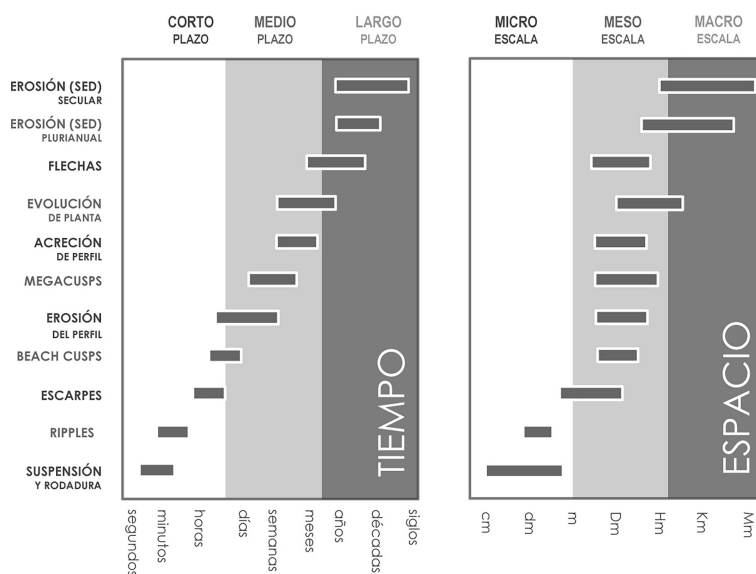


Figura 7.4.1: Escalas de evolución espacio-temporal de las costas. Adaptado de GIOC (2002).

7.4. Modelos de evolución de playas

Las playas evolucionan en un amplio rango de escalas en el tiempo y el espacio (Figura 7.4.1). En escalas asociadas al paso de una ola, se evidencian cambios relativamente pequeños y rápidos, asociados a la suspensión y rodadura del sedimento. En escala sucesivamente mayores, las playas evolucionan en pocos días durante el paso de una marejada, en escalas estacionales con la manifestación de los perfiles típicos de invierno y verano, y en escalas de tiempo decadales asociadas a procesos seculares de erosión y sedimentación. En las escalas típicas de una marejada, las playas actúan como un sistema de protección natural, donde la acción conjunta del oleaje, la marea astronómica y otros fenómenos climáticos actúa erosionando y/o depositando el sedimento disponible. Durante el ataque de las olas, las arenas se transportan mar afuera producto de la resaca o hacia la costa producto del oleaje menos energético y/o la asimetría del swash (Ibaceta et al., 2017). El potencial erosivo de estos procesos puede causar consecuencias dramáticas tanto para playas como para la infraestructura costera, lo cual ha sido evidenciado en los últimos años en diversas zonas costeras del territorio nacional (e.g. Winckler et al., 2017).

A la fecha, existe poco entendimiento de la relación entre la hidro y la morfodinámica existente en las playas en Chile. Los escasos estudios se han focalizado en los impactos asociados a terremotos y sus consecuentes tsunamis (e.g.: Catalán et al., 2014, 2015) o a variaciones de la línea de playa a escala decadal en sitios específicos (Martínez et al., 2018). En este contexto de escaso entendimiento, la predicción de los cambios en la morfología litoral se hace crucial al momento de diseñar obras costeras. Esta predicción se basa en el uso de modelos numéricos calibrados y validados en condiciones distintas a las nacionales. Luego de los devastadores efectos producidos por huracanes a comienzos de siglo (e.g. Katrina), la comunidad científica estableció la necesidad de disponer de modelos numéricos capaces de reproducir la evolución morfológica de playas en la escala de tiempo de las marejadas, uno de cuyos ejemplos es Xbeach (Roelvink et al., 2009). Este tipo de modelos ha sido recientemente implementado para simular la evolución morfodinámica de playas chilenas (Ibaceta et al., 2017) y para evaluar bajo condiciones simplificadas, los cambios del perfil de playas asociados a marejadas durante eventos ENOS, en los cuales el nivel del mar varía en decenas de centímetros (Molteni et al., 2017).

Para calcular las tasas de transporte litoral y ver los impactos en la evolución de playas, se aplican varios métodos, entre los que destacan el balance sedimentológico, los sistemas de percepción remota, los levanta-

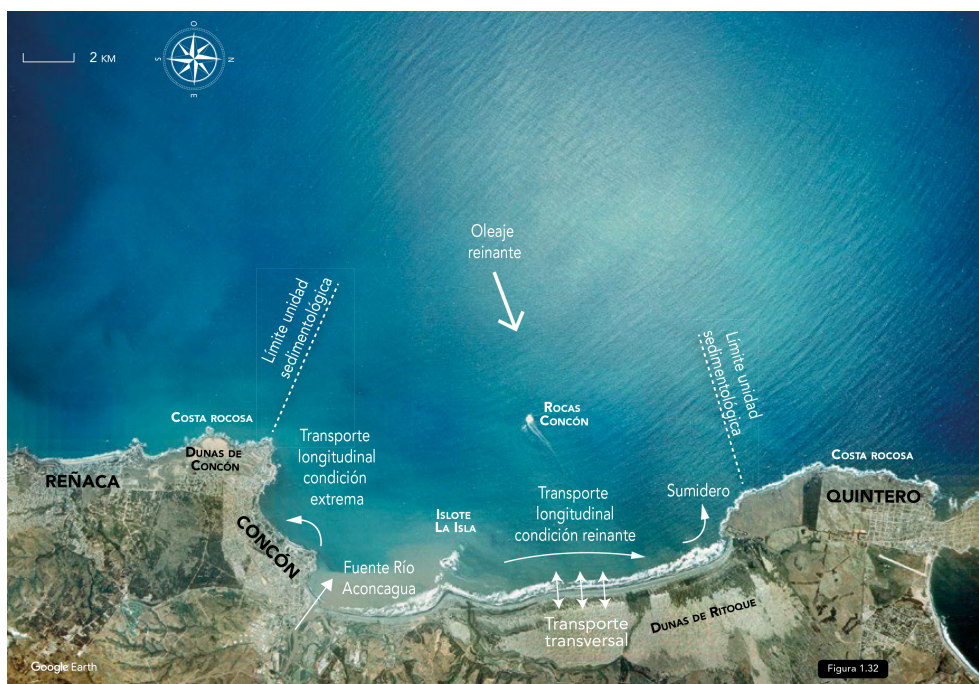


Figura 7.4.2: Balance sedimentológico en la bahía de Concón y dunas de Ritoque, Región de Valparaíso.

tamientos en terreno, la modelación numérica y el uso de trazadores, entre otros. El transporte de arena se mide o estima comúnmente a lo largo de un año, de modo de capturar el comportamiento morfodinámico de verano e invierno. Una técnica común para evaluar los cambios en la costa en escalas de tiempo relativamente grandes (anuales o decadales) es el denominado balance sedimentológico. Esta herramienta se basa en la cuantificación de las fuentes, los sumideros y las tasas de transporte, a partir de los cuales se estima la erosión o el depósito de sedimentos. Usualmente, el balance se aplica a la fracción pesada de sedimentos que se transporta por deriva litoral en la zona de rompientes. La fracción de finos en suspensión que se difunde y advecta en la columna de agua requiere para su estudio de otras técnicas, como la modelado numérico. La Figura 7.4.2 ilustra el balance sedimentológico en la bahía de Concón y dunas de Ritoque, Región de Valparaíso .

Las fuentes de información típicamente utilizadas para evaluar el cambio morfológico en la costa son las cartas náuticas, fotografías aéreas, registros del relleno de playas, registros de dragado y levantamientos geológicos. Cuando se dispone de datos históricos es posible determinar específicamente las tendencias de la erosión o de la acumulación. Si se trata de una región vasta puede hacerse un inventario de la erosión costera en diferentes tramos de ella, a partir de fotografías aéreas de la región. En algunos casos, se utilizan cartas topográficas y náuticas antiguas si se consideran que son fidedignas. Si mediante el balance sedimentológico se concluye que en un tramo de la costa se acumula más arena que la transportada por el oleaje, la línea costera acrecerá. Ello ocurre, por ejemplo, en la desembocadura de los ríos que forman deltas. Por otra parte, si el suministro de arena es menor que la cantidad que mueve el oleaje, la costa se erosionará. Cuando existe un equilibrio aproximado entre el suministro de sedimento y la capacidad de transporte litoral, la línea costera se mantiene relativamente constante. Por supuesto, hay factores externos, como los cambios de nivel del mar, alteraciones en el suministro de sedimentos o la obstrucción de rompeolas, que pueden modificar bastante esa estabilidad. Si por algún motivo, el suministro de sedimento en un tramo de playa se reduce (aumenta), se espera que ocurra erosión (acreción). La ruptura del equilibrio es resultado de factores como la alteración de los sistemas de drenajes; la construcción de edificaciones costeras; la estabilización y tierras altas producto de programas de conservación de suelos; la intervención de los ríos mediante presas o la extracción de arena. Si bien estos corresponden a la categoría de erosión causada por el hombre, las desembocaduras y los deltas están sumamente expuestos a cambios naturales del suministro de sedimentos.

7.5. Ejemplo de aplicación en la bahía de Valparaíso

En esta sección ilustramos la aplicación de diversas herramientas para la gran marejada del 8 de agosto de 2015, que se presentó como una combinación local de viento, oleaje, presión atmosférica y marea astronómica, causando graves daños en la bahía de Valparaíso (Winckler et al., 2017). El análisis abarca desde la simulación global de generación del oleaje hasta el impacto local en el borde costero mediante técnicas de modelado numérico.

7.5.1. Modelo de oleaje en escalas oceánicas

En la actualidad, el modelo más aplicado para simular el oleaje a escala oceánica es WAVEWATCH III (WW3DG, 2016), el cual corresponde a la clase de modelos numéricos de fase promediada. Dicho modelo cuantifica los procesos físicos de generación por medio de parametrizaciones físicas (Ardhuin et al., 2010, Stopa et al., 2016). En lo que sigue se resumen los resultados del trabajo de Esparza y Winckler (2017). A partir de los campos superficiales de presión atmosférica y vientos a escala oceánica, se calculan los campos de oleaje durante todo el evento (Figura 7.5.1). Los mapas de viento y presión atmosférica muestran que el temporal comienza a desarrollarse a ~1000 km de la costa central de Chile y en 12 horas el centro de baja presión migra longitudinalmente hacia sectores costeros. A las 00:00 horas del 8 de agosto, los vientos alcanzan una magnitud de 25 m/s y la presión atmosférica a nivel del mar baja hasta los 980 hPa. Dicha condición se mantiene por casi 24 horas induciendo fuertes vientos locales desde el norte, lo que favorece el forzamiento de oleaje cerca de la costa. El viento mar afuera incide por el noreste alcanzando una condición de “temporal fuerte” en la escala de Beaufort (~23 m/s), lo que explica la elevada dispersión direccional del mar de viento local. El oleaje alcanza máximas alturas significativas entre los 30° y 40°S a las 14:00 horas del 8 de agosto.

7.5.2. Modelo de propagación costera

El oleaje es transferido a la bahía mediante el modelo SWAN (Booij et al., 1999), modelo que promedia la fase. La batimetría se extrae de las cartas náuticas disponibles en la bahía de Valparaíso (SHOA, 2017). El oleaje se propaga mediante funciones de transferencia, a partir de espectros sintéticos de altura unitaria representativos del oleaje costa afuera (Monsalve, 2010). Para este trabajo se simulan 96 estados de mar del tipo JONSWAP (Hasselmann et al., 1973), abarcando periodos entre 4 y 26 s y direcciones entre 202.5° y 360°. En la Figura 6d se presentan 22 boyas virtuales ubicadas a 20 m de profundidad, entre Playa Ancha por el sur y Concón como límite norte, en las que se evalúan las propiedades estadísticas del oleaje para cada estado de mar.

En la Figura 7.5.2 se presentan las condiciones locales del oleaje en dichas estaciones bajo distintas condiciones mareales, obtenidas a partir de una serie de datos horarios del Sea Level Monitoring Facility, de UNESCO-IOC (www.ioc-sealevelmonitoring.org). Durante el instante máximo de la marejada, el oleaje presenta alturas y periodos distribuidos en forma homogénea en prácticamente todas las estaciones, con alturas significativas de 4.5 ~ 5 m y periodos peak de 12 ~ 14 s; los valores menores en la zona portuaria de Valparaíso se deben a la protección brindada por el molo de abrigo. Aun cuando se observa un incremento brusco en la altura significativa entre las 9 y 14 horas, el nivel del mar es mayor en la mañana (+1.65 m NRS) que durante el máximo de la tormenta (+0.85 m NRS), lo que hace presumir que los efectos de sobrepaso, sensibles tanto al oleaje como al nivel del mar, habrían sido altos durante toda la mañana. Las mayores alturas significativas se registran entre el Paseo Wheelwright y Avenida Perú; estaciones que no presentan abrigo al oleaje. Por el contrario, los sectores emplazados entre Caleta El Membrillo y Playa San Mateo registran alturas inferiores como consecuencia de la orientación de los veriles que favorecen la refracción de las olas incidentes.

A partir del oleaje costero se evalúan asimismo las propiedades de la zona de rompiente en un perfil transversal a la costa, considerando los efectos del asomeramiento y la refracción (Goda, 1985). Ello, pues las características de la rompiente determinan las fuerzas actuando sobre estructuras y la evolución morfológica de las playas. En el sector de Playa Ancha, se observa que el oleaje rompe a una distancia cercana a la costa (<50

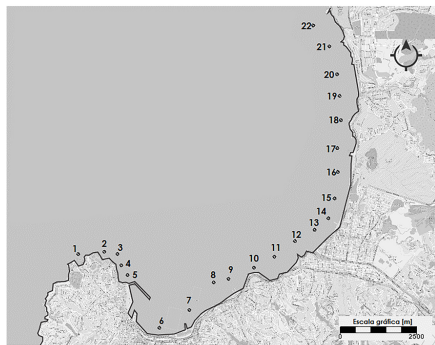
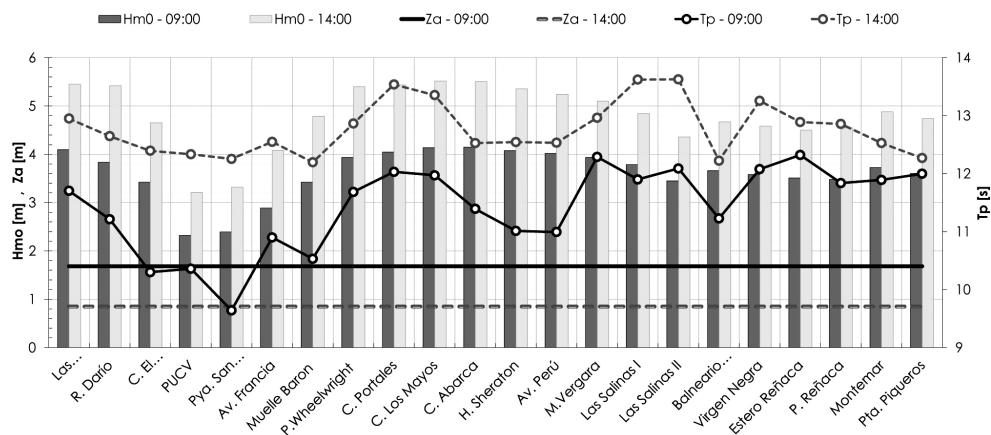
m) con la sola excepción de Caleta El Membrillo, donde los bajos fondos de Roca Remolinos ubican la zona de rompiente a una distancia de ~ 90 m de la costa. En la playa Rubén Darío se registra una altura rompiente muy próxima a la costa (~ 40 m) con una rompiente tipo voluta que explica el fuerte sobrepaso en Av. Altamirano. En playas de baja pendiente como el Paseo Wheelwright, Caleta Portales y Avenida Perú, el sobrepaso se incrementa debido al peralte del nivel medio del mar (wave-setup). El sector más crítico es Curva Los Mayos, donde se registra la mayor altura y una rompiente muy cercana a la costa, que inducen en conjunto gran sobrepaso y daño estructural (Winckler et al., 2017). Hacia el norte, las condiciones de oleaje se vuelven menos intensas.

Se observa también que el instante de la máxima altura significativa en aguas profundas, en torno a las 8 m, coincide con una bajamar (+0.6 m NRS). En contraste, la pleamar anterior, (+1.65 m NRS), habría ocurrido con alturas cercanas a 5 m. El desfase entre la máxima altura y la pleamar mayor de aquel día habría contribuido a reducir el impacto de la marejada. No obstante, se observa que el evento tuvo una persistencia de 24 horas durante las cuales el oleaje presentó una altura significativa por sobre los 5 m, lo que explica la desaparición de las playas y el daño de las defensas costera tipo escollera en la bahía (Winckler et al., 2017); pues ambas responden al efecto acumulativo de las marejadas. La Figura 7d ilustra un incremento adicional del orden de 20 cm en el nivel del mar, producto de la marea meteorológica generada por el descenso de la presión atmosférica (efecto conocido como el barómetro invertido).

7.5.3. Modelo de interacción oleaje-estructura

Para analizar la respuesta de las estructuras ante la acción del oleaje y su capacidad de disipar energía, se aplican modelos numéricos de dinámica de fluidos computacional (CFD) que incluyen los fenómenos de disipación y turbulencia mediante ecuaciones tipo RANS. A modo de ejemplo, se presenta un modelo desarrollado mediante el software olaFOAM (Higuera, 2015) en la Avenida Perú, Viña del Mar (Figura 7.5.2), que en los últimos años ha sido afectada por marejadas intensas (Winckler et al., 2017). Se ilustra la aproximación de olas individuales a la defensa sobre un fondo plano cuya pendiente representa la playa sumergida frente a la defensa costera. Este modelo es forzado en el costado izquierdo considerando las propiedades locales de oleaje obtenidas del modelo de aproximación costera, descrito en la sección anterior. La muestra el campo instantáneo de velocidades para una alternativa de mejoramiento de la defensa por medio de elementos de hormigón, denominados dolos. La estimación del sobrepaso es fundamental para dimensionar los sistemas de drenaje de la calzada y para garantizar la seguridad de personas, vehículos y estructuras. En este ejemplo, el volumen de sobrepaso instantáneo se calcula sobre una sección ubicada sobre la defensa y el volumen acumulado se obtiene integrando el sobrepaso instantáneo en el tiempo, para cada sección (Figura 7.5.3). Cabe mencionar que tierra adentro de la defensa se reemplazó la geometría real de la avenida por una piscina cuya función es acumular agua y de esta forma tener una segunda medición del volumen acumulado.

En términos generales, el sobrepaso es sensible a las propiedades estadísticas del oleaje (altura significativa, periodo y dirección del oleaje) y al wave setup inducido por el mismo en la rompiente, a la mareas astronómica y meteorológica, a la eventual presencia de meteotsunamis (Carvajal et al.; 2017) y a la pendiente del fondo, que repercute a su vez en el tipo de rompiente. A ello se suma la geometría y las propiedades hidráulicas de la defensa. El sobrepaso debe ser comparado con los caudales máximos admisibles que garantizan la seguridad de personas, vehículos y estructuras en la avenida, y que se obtienen de recomendaciones de uso común en obras marítimas. El daño a la infraestructura y la amenaza a la seguridad de las personas y vehículos pueden analizarse en forma más fina mediante el cálculo del máximo momentum asociado al flujo que estos pueden experimentar. Este máximo puede calcularse en forma analítica mediante un diagrama de cuerpo libre o mediante la modelación física, enfoques que se han adoptado para la resistencia de personas al viento (Penwarden, 1973) y para edificaciones y personas ante cargas de tsunamis (Arikawa et al., 2006). La Figura 7.5.3 ilustra curvas umbrales de la velocidad y profundidad de escurrimiento admisible que desplazarían a personas de diferente masa y vehículos, obtenidas a partir de un diagrama de cuerpo libre como el ilustrado en la Figura 9c. Este tipo de “condición umbral de operación”, sumada a las características del flujo obtenidas con modelos CFD, pueden



- | | |
|--------------------------|--------------------------|
| 1. Playa Las Torpederas | 12. Hotel Sheraton |
| 2. Rubén Darío | 13. Av. Perú |
| 3. Caleta El Membrillo | 14. Muelle Vergara |
| 4. Ciencias del Mar PUCV | 15. Playa Las Salinas I |
| 5. Playa San Mateo | 16. Playa Las Salinas II |
| 6. Metro Francia | 17. Balneario Salinas |
| 7. Muelle Barón | 18. Gruta de La Virgen |
| 8. Paseo Wheelwright | 19. Estero Reñaca |
| 9. Caleta Portales | 20. Playa Reñaca |
| 10. Curva Los Mayos | 21. Montemar |
| 11. Caleta Abarca | 22. Punta Piqueros |

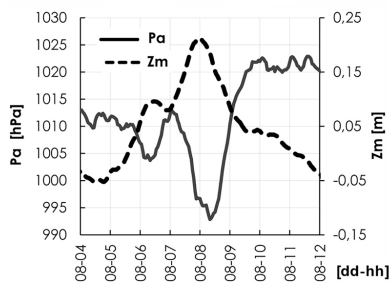
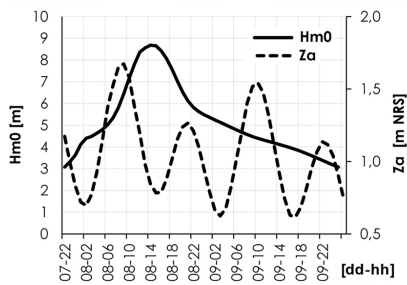
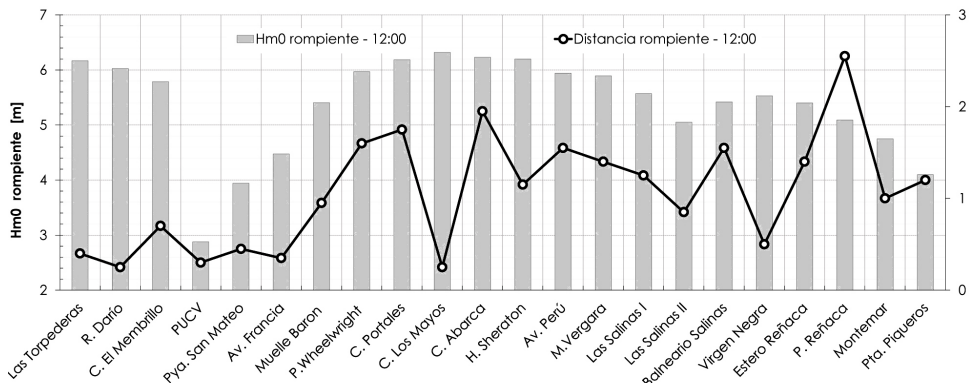


Figura 7.5.2: Propagación de oleaje para la marejada del 8 de agosto de 2015 en Valparaíso. Arriba: Altura significativa (Hm0) y período peak (Tp) en el veril -20m NRS para dos estados de mar (09:00 y 14:00 UTC), además del nivel de la marea respecto del NRS (Za). Centro: Altura rompiente Hb y distancia de rotura respecto de la costa (12:00 UTC). Abajo izquierda: Hm0 y Za obtenida de un análisis armónico del registro del SHOA en Quintero. Abajo derecha: Presión atmosférica Pa obtenida del reanálisis CFSR (Saha et al. 2014) y marea meteorológica Zm obtenida a partir del registro de Quintero.

ser utilizados en el diseño de defensas costeras.

7.5.4. Modelo de evolución morfodinámica

En esta sección se describen técnicas de modelado de la evolución morfodinámica de playas por medio del ejemplo de una defensa costera existente en la Playa Los Marineros (cerca del punto 14, Figura 7.5.2) y de la evolución morfológica en escala de marejadas de la playa Reñaca (punto 20, Figura 7.5.2), ambas localizadas en Viña del Mar. Para el primer caso, se determinan los niveles de erosión y/o acreción que permiten definir la socavación en la defensa. La metodología contempla el estudio de la respuesta de la playa mediante el software Xbeach (Roelvnik et al., 2009), el cual se valida con información de la marejada del 8 de Agosto de 2015, que provocó serios daños en la infraestructura colindante (Figura 7.5.5). Xbeach reproduce los cambios en la morfología de playas debidos al oleaje y a variaciones en el nivel del mar, posibilitando la inclusión de estructuras. El modelo calcula el oleaje mediante una ecuación de conservación de energía y las ondas infragravitatorias con las ecuaciones de onda larga (i.e. conservación de masa y momentum). El transporte de sedimentos es evaluado con una ecuación del tipo advección-difusión promediada en la vertical, la cual da como resultado las tasas de transporte de sedimento que permiten calcular los cambios del nivel de fondo en el tiempo.

Para reproducir la superficie topo-batimétrica en Playa Los Marineros, se efectúa un levantamiento batimétrico mediante multiscan y una topografía de precisión mediante dron, a partir de los cuales se genera una superficie continua tridimensional mediante el software Surfer, previo amarre altimétrico entre las dos mediciones. Las series de oleaje horarias son ingresadas mediante espectros tipo JONSWAP a 20 m de profundidad, definiendo la altura significativa, el período peak, la dirección media y otros parámetros espectrales asociados al espectro. Se define asimismo el nivel del mar como la suma de una marea astronómica semidiurna con desigualdad diurna típica de Valparaíso y una marea meteorológica asociada a las fluctuaciones de presión y el campo de vientos soplando hacia la costa. El análisis en este caso se restringe a perfiles transversales, en los cuales la defensa costera se define como una estructura no erosionable con talud de 1/6. Una de las principales características de la marejada del 8 de Agosto es que fue precedida por una marejada el día 6 que produjo una erosión significativa en las playas de la bahía. La concatenación de ambos eventos erosivos consecutivos mermó, por tanto, la capacidad de recuperación de la playa. A objeto de evaluar el efecto conjunto de ambos eventos, se efectuó una simulación de 120 horas comenzando a las 00:00 horas del 5 de Agosto. Luego de la primera marejada de ~30 horas de duración, el modelo evidencia una significativa erosión al pie de la defensa, la que se acentúa hasta alcanzar un valor de alrededor de 4 m al final de la modelación. Este valor se condice con los efectos registrados en la playa colindante. La gran socavación se explica en parte por el brusco aumento de la altura significativa al iniciar la marejada del 8 de agosto ($t \sim 75$ horas).

Una modelación similar se realizó para reproducir la evolución morfológica de un perfil de playa en el Sector 5 de la playa Reñaca ante las marejadas del 6 y 8 de Agosto del 2015 (Figura 7.5.6). Puesto que se dispone de mediciones topográficas realizadas en bajamar con un GPS diferencial antes y después de ambos eventos, este caso permite calibrar algunos parámetros de Xbeach (Ibaceta et al., 2017). Adicionalmente, se dispone de una batimetría de detalle realizada con monohaz, la que permite realizar una transferencia espectral del oleaje siguiendo procedimiento de uso común. La transferencia espectral del oleaje se realiza hasta veril -40 m, desde donde se extraen condiciones de borde para la modelación en Xbeach. Para el evento del 6 de Agosto, se observa que la erosión del perfil está bien representada mediante Xbeach, salvo la zona ubicada entre las cotas 0 y 1 m, que presenta discrepancias mayores. Cabe destacar que este escenario representa la erosión producida por el temporal previo al del 8 de Agosto, que se manifestó mediante un escarpe en la parte norte de Reñaca. Este fenómeno fue reproducido satisfactoriamente por las modelaciones. Por otro lado, si bien en playa Reñaca las condiciones hidrodinámicas del 8 de agosto fueron más desfavorables que las del 6 de Agosto, la respuesta de la playa fue del mismo orden en ambos casos. Especulamos que la tormenta precedente fue suficiente para erosionar una alta fuente de sedimento disponible y formar barras que modificaron la condición de la

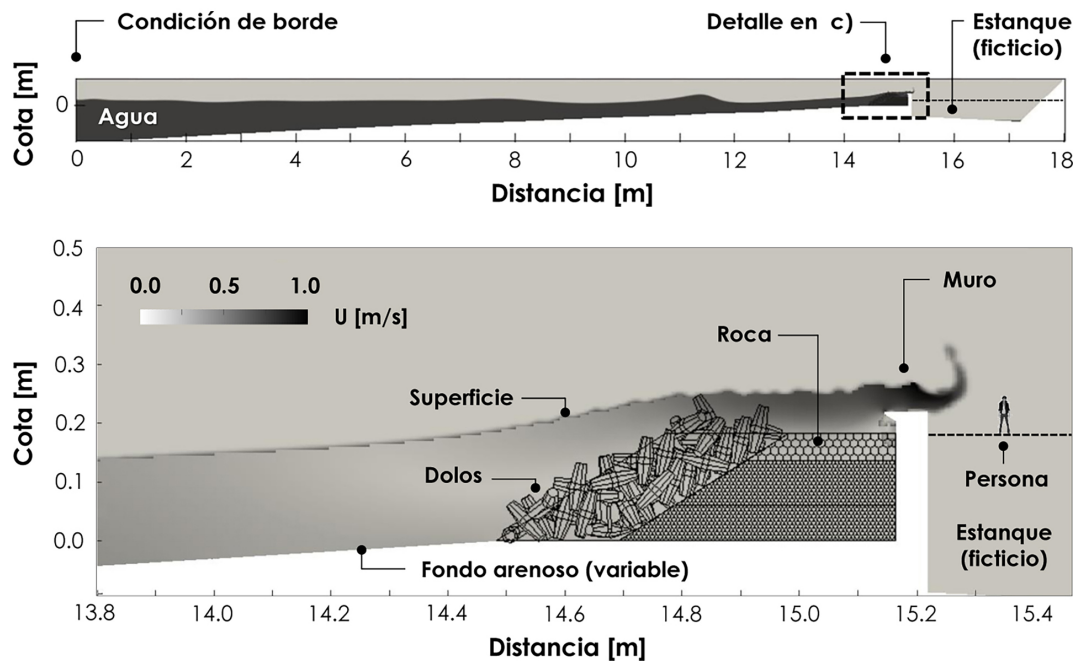


Figura 7.5.3: Modelos de interacción oleaje-estructura para la marejada del 8 de agosto de 2015 en Avenida Perú. Arriba: Fotografía tomada durante el peak de la tormenta desde el Restaurant Cap Ducal, localizado entre los puntos 12 y 13 en la Figura 6d. Centro: Modelo olaFOAM, a escala 1:30, utilizado para el cálculo de sobrepaso en la defensa costera. El agua, el aire y el fondo marino se representan con negro, gris y blanco, respectivamente. Abajo: Campo de velocidad en un instante donde se registra sobrepaso. Elaboración propia a partir de modelos de Stephanie Fritz.

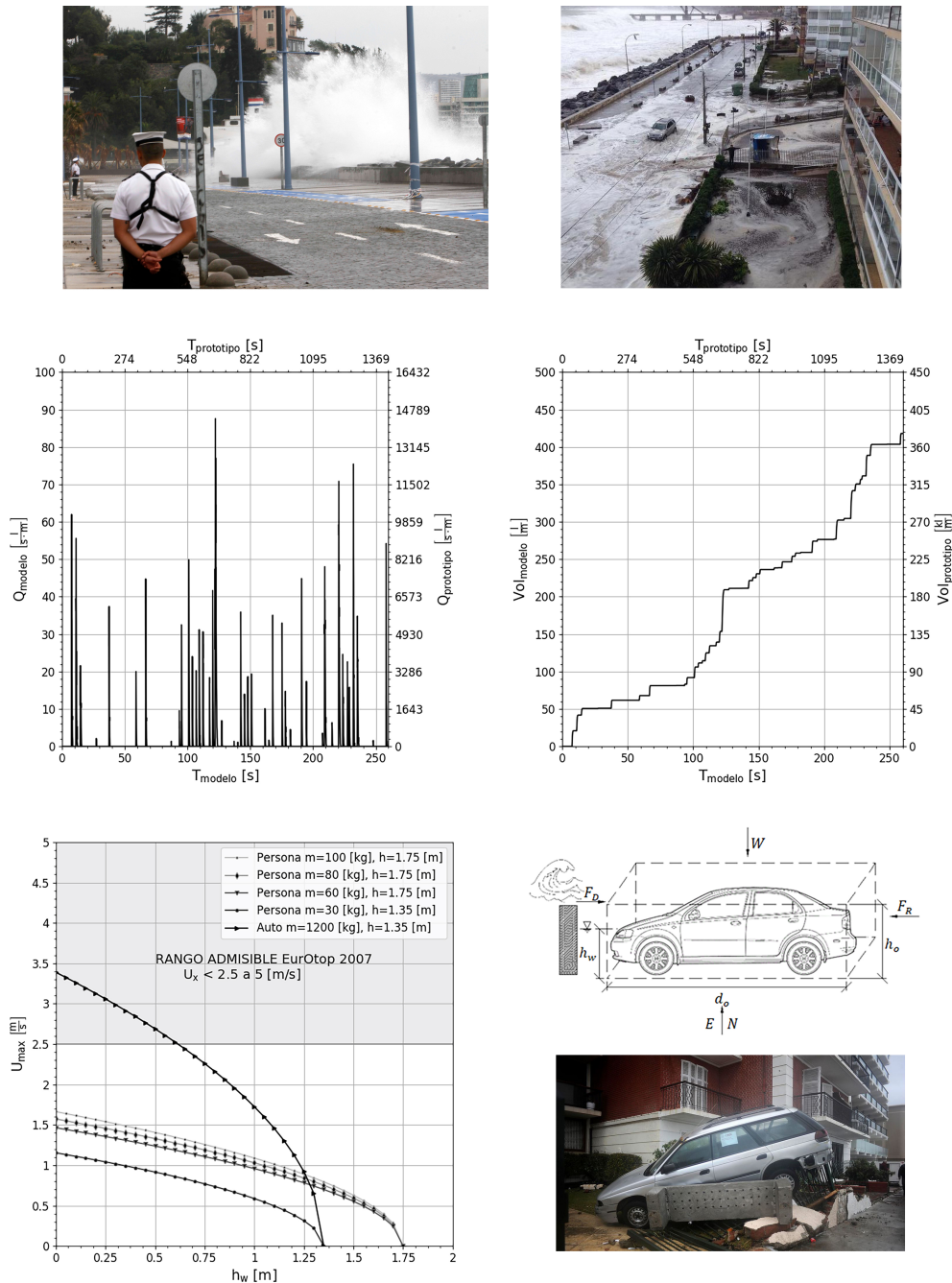


Figura 7.5.4: Centro: instantáneo y sobrepaso acumulado de oleaje para la marejada del 8 de agosto de 2015 en Avenida Perú. Abajo: Diagrama de cuerpo libre (estático) utilizado para calcular la condición de sobrepaso admisible, donde h_w representa la profundidad de escurrimiento, d_o y h_o son el largo y alto del vehículo, F_D y F_R , W , E y N representan la fuerza de arrastre debida al flujo, la fricción, el peso, el empuje y la fuerza normal, respectivamente. Se preentan la curvas umbral de operación para sobrepaso, definidas en función de la profundidad de escurrimiento h_w y la magnitud de la velocidad máxima U_{max} para personas de diferente masa y un auto tipo. Gentileza de Stephanie Fritz.

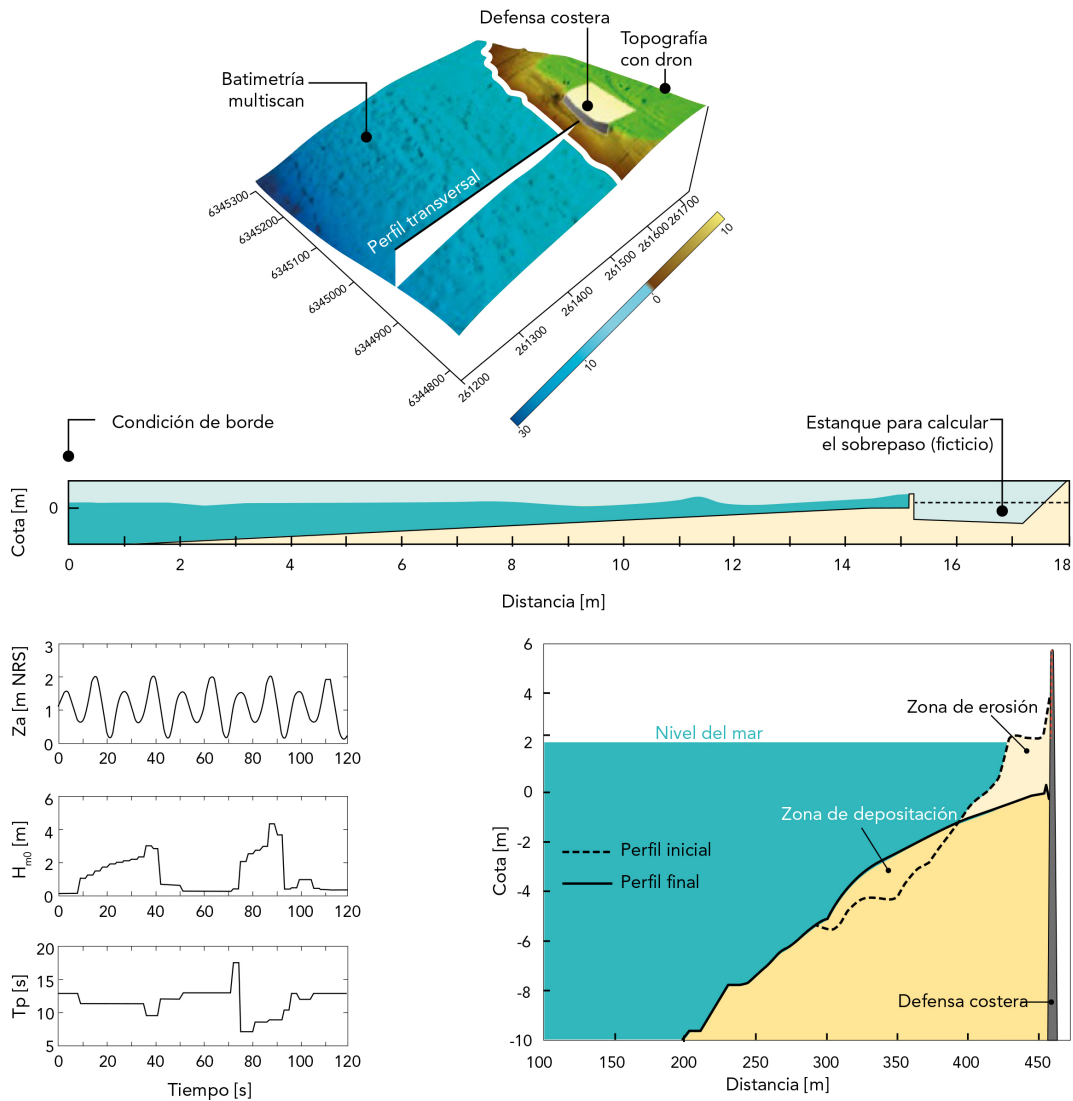


Figura 7.5.5: Modelos de respuesta de playa para la marejada del 8 de agosto de 2015. a) Socavación del orden de 4 [m] en playa El Sol luego de las marejadas. b) Vista tridimensional de la topobatimetría levantada en el sitio, incluyendo un perfil utilizado en la modelación. c) Series de tiempo de las forzantes de marea astronómica Z_a y oleaje; este último especificado mediante altura significativa H_{m0} y el período peak T_p a 20 [m] de profundidad. d) Respuesta de playa al momento de máxima socavación luego transcurridas 111 horas de modelación.

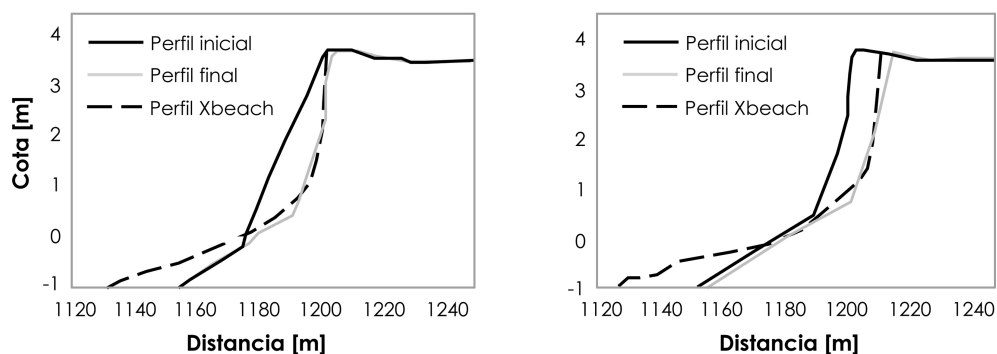


Figura 7.5.6: Arriba: Fotografía del sector norte de Reñaca tomada en la tarde del 8 de Agosto del 2015 junto a Patricio Catalán. Abajo: Resultados de la modelación con Xbeach para la marejadas del 6 de Agosto y 8 de Agosto del 2015 en Playa Reñaca. Adaptado de Winckler et al. (2019).

rompiente, promoviendo la rotura de olas grandes sobre la barra y reduciendo, por tanto, la respuesta de la playa.

Un ejemplo de monitoreo más extenso es el reportado por Agredano et al. (2015) para la playa Reñaca, en el cual se realizaron mediciones topográficas semanales con GPS diferencial entre Enero y Junio y en la primera quincena de agosto de 2015, coincidiendo con la marejada del 8 de Agosto. El análisis se centró en las alteraciones morfológicas de la playa debidas a cambios en las condiciones de oleaje en aguas profundas. Se detectó una fuerte erosión asociada al aumento en la energía del oleaje durante las marejadas, fenómeno que ocurre en un período de tiempo más corto que el asociado al proceso de acreción y con volúmenes de remoción de sedimento mayores.

Durante el evento de Agosto, se observó un cambio en el estado morfo dinámico de playa rítmica (beach cusps) a playa plana con escarpe (Figura 7.5.7), donde las socavaciones sólo se reportan en las estructuras emplazadas dentro de la playa. Este efecto también se repite para otros eventos extremos con alturas significativas superiores a 5 m, ocurridos el 17 y el 25 de junio de 2017. El análisis semanal entre Enero y Mayo de 2015 permite inferir que no siempre se cumple el patrón de acreción (erosión) generalmente asociado a la disminución (aumento) de la energía del oleaje debido a otros factores como la marea meteorológica. Se observó asimismo que después de la gran erosión de la playa provocada por el evento del día 8, marejadas menos energéticas funcionaron tanto erosionando como regenerando la playa, lo que pone de manifiesto la importancia de los estados morfológicos previos en la respuesta de la playa ante un evento específico. En concreto, eventos de características similares se comportaron de manera diferente dependiendo de la morfología presente durante el inicio del mismo.

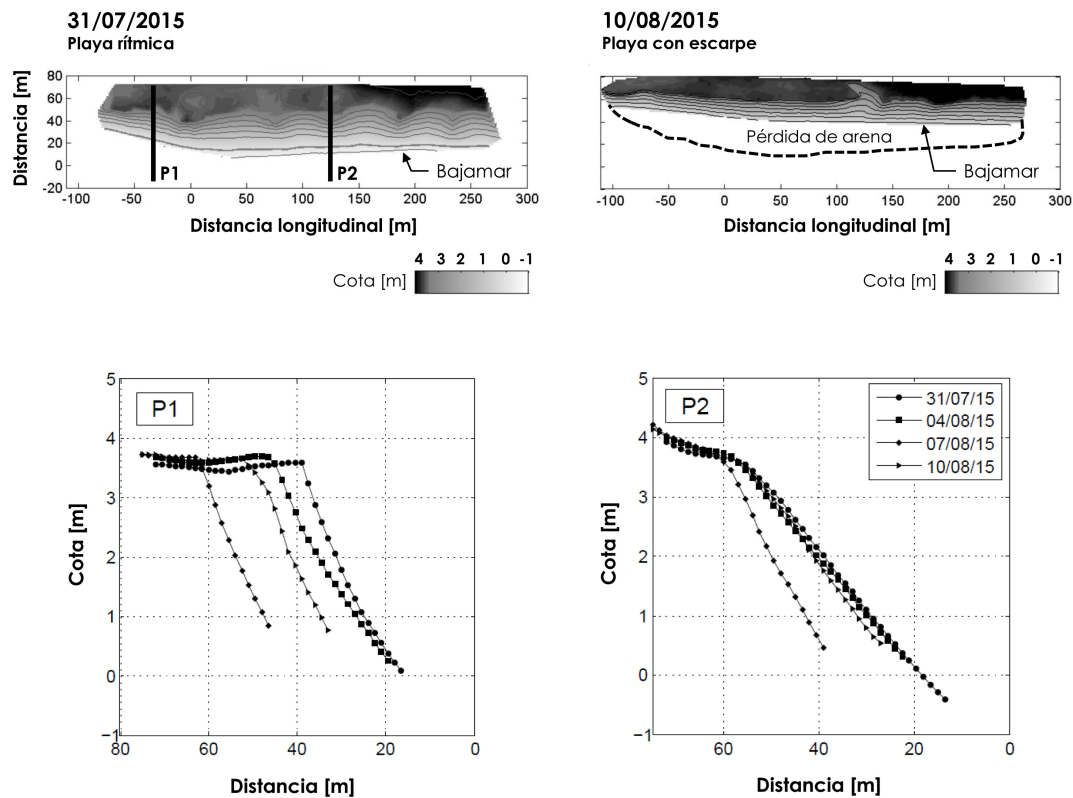


Figura 7.5.7: Comportamiento morfológico de la playa de Reñaca entre el 31 de Julio y el 10 de Agosto de 2015. Arriba: Cambio morfológico de la playa emergida después de los eventos de marejada concatenados con retroceso de hasta 40 m de la línea de costa. Abajo; evolución del perfil de playa en posiciones típicas de valle y cresta durante la misma secuencia de marejadas.

Tanto el análisis por modelación en Xbeach como el análisis por cambios morfológicos medidos con GPS indican que la respuesta morfodinámica de playas es muy sensible a la presencia de eventos concatenados y a la topo-batimetría del terreno, la que por cierto corresponde sólo a una “fotografía” de la geometría de la playa al momento en que se ejecutó. Es por ende necesario ampliar los monitoreos de playas efectuados en forma esporádica en la actualidad por campañas continuas, de modo de capturar los ciclos de erosión y acreción que suceden a escalas de tiempo mayores a las marejadas. La disponibilidad de topobatimetría de precisión permite asimismo calibrar los modelos morfodinámicos cuyo desempeño es muy sensible a múltiples parámetros incluidos en las fórmulas de transporte de sedimento y evolución del fondo (Ibaceta et al., 2017).

Capítulo 8

Modelado descargas salinas y térmicas

Este capítulo está en construcción, pero se basará en la «Guía para el modelado de la hidrodinámica y del proceso de mezcla de descargas salinas y térmicas asociadas a proyectos de plantas termoeléctricas y desalinizadoras» (Winckler, 2021), cuyo objetivo es definir los estudios de modelación necesarios para definir el área de influencia de las descargas de aguas de mar asociadas proyectos de centrales termoeléctricas y plantas desalinizadoras que descargan en aguas oceánicas, fiordos y estuarios bajo jurisdicción de la Autoridad Marítima, en Chile. La guía contempla elementos asociados a la modelación y los registros de campo necesarios para calibrar y validar estos estudios. Ha sido escrita incluyendo elementos generales de modelación y otros particulares al caso de las descargas de plumas salinas y térmicas, en un lenguaje lo más llano dentro de las complejidades propias de la disciplina. La guía está disponible en el sitio:

www.researchgate.net/profile/Patricio-Winckler/publications

Capítulo 9

Anexos

9.1. Herramientas matemáticas

A continuación se introducen algunas herramientas matemáticas que serán utilizadas sistemáticamente en la derivación de las ecuaciones de conservación. Existen otras expresiones como el teorema de la divergencia de Gauss o el teorema de Green, que son de importancia en la mecánica de medios continuos, pero que son omitidos puestos que no se utilizan en el texto.

9.1.1. Regla de Leibniz

La regla de Leibniz es una herramienta del cálculo que permite intercambiar el orden de las derivadas y las integrales, considerando casos donde los límites de integración varían. En la mecánica de fluidos, esta regla se utiliza en la derivación de expresiones para el flujo turbulento y en la derivación de las ecuaciones de onda larga, utilizadas para oleaje en aguas someras, tsunamis o mareas. Para casos donde interesa las variaciones en el tiempo y espacio de una cantidad (e.g. las ecuaciones de conservación), la expresión establece la siguiente igualdad para la función $f(x, t)$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_a^b f dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t} dx + f(x, t) \frac{\partial b}{\partial t} - f(x, t) \frac{\partial a}{\partial t}, \quad (9.1.1)$$

donde $x = a(t)$ y $x = b(t)$ son los límites de integración, que en este caso dependen del tiempo. La Figura 9.1.1 muestra la representación gráfica de la regla de Leibniz. Si los límites de integración son constantes en el

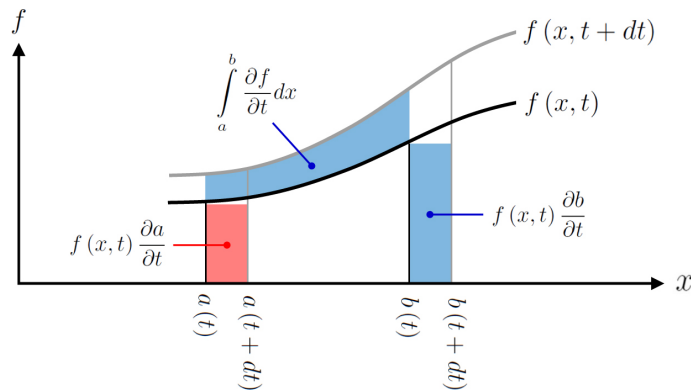


Figura 9.1.1: Representación gráfica de la regla de Leibniz.

tiempo, esta expresión se reduce a

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_a^b f dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t} dx, \quad (9.1.2)$$

en cuyo caso la derivada y la integral se pueden intercambiar sin la necesidad de incluir términos adicionales.

9.1.2. Serie de Taylor

Una serie de Taylor es una aproximación de funciones mediante una suma de potencias enteras de polinomios. Los términos se expresan en mediante las derivadas de la función para un determinado punto suficientemente derivable sobre la función y un entorno sobre el cual converja la serie. La expresión es:

$$f(x) = f(a) + f^{(1)}(a) \Delta x + f^{(2)}(a) \frac{\Delta x^2}{2!} + f^{(3)}(a) \frac{\Delta x^3}{3!} + \dots + f^{(n)}(a) \frac{\Delta x^n}{n!} + \mathcal{O}(\Delta x^{n+1}). \quad (9.1.3)$$

donde $\Delta x = x - a$ corresponde a la distancia entre el punto conocido a y el punto por evaluar x . El término $\mathcal{O}(\Delta x^{n+1})$ corresponde al error de la aproximación de la serie. En forma sintética, esta expresión se escribe como

$$f(x) = \sum_{i=0}^n f^{(i)}(a) \frac{\Delta x^i}{i!} + \mathcal{O}(\Delta x^{i+1}). \quad (9.1.4)$$

La aproximación mediante series de Taylor permite calcular el valor aproximado de una función mediante operaciones triviales (derivación e integración de los términos del polinomio). Un ejemplo de aproximación de la función exponencial $y = e^x$ en torno a $x = 0$. En este caso, $f(0) = e^0 = 1$ y las derivadas evaluadas en el punto cumplen con $f^{(i)}(0) = e^0 = 1$, para $i = 1, \dots, N$. Las cuatro primeras aproximaciones, con niveles de exactitud crecientes son:

$$\begin{aligned} n = 0 & \quad f(x) = 1 + \mathcal{O}(\Delta x), \\ n = 1 & \quad f(x) = 1 + x + \mathcal{O}(\Delta x^2), \\ n = 2 & \quad f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(\Delta x^3), \\ n = 3 & \quad f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(\Delta x^4). \end{aligned} \quad (9.1.5)$$

La Figura 9.1.2 ilustra como en la medida que se incorporan términos, la aproximación de Taylor se acerca a la función analítica. Como veremos en adelante, en las derivaciones de las ecuaciones de conservación -como la ecuación de advección o la de difusión- solo basta con retener los dos primeros términos de la serie de Taylor (pues los términos de orden superior se cancelan al hacer tender el volumen de control a cero).

En la práctica, la aplicación de las series de Taylor sólo es válida para flujos relativamente suaves donde no existen discontinuidades. Ejemplos donde las ecuaciones derivadas a partir de estas series no son estrictamente válidas son el oleaje durante la rotura, donde se genera una discontinuidad en el perfil de la ola, o en las ondas de choque producidas por un jet que viaja más rápido que la velocidad del sonido.

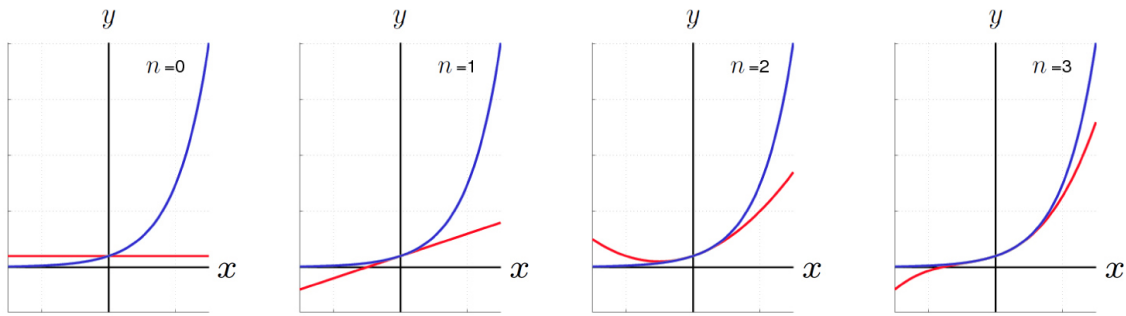


Figura 9.1.2: Ejemplos de aproximación de la función exponencial $y = e^x$ en torno a cero (en azul), para series de Taylor obtenidas a partir la suma de los primeros n términos (en rojo).

9.2. Clasificación de EDP's de segundo orden

Algunas ecuaciones diferenciales parciales (EDP) de segundo orden se pueden clasificar en parabólicas, hiperbólicas o elípticas¹. Cada clase responde a procesos físicos diferentes. Esta clasificación ofrece una guía para la definición de las condiciones iniciales, las condiciones de borde y para saber si el tipo de solución es suave o no (e.g. shock wave). Asimismo, sugiere el uso de método numérico para su resolución (por ejemplo, los volúmenes finitos son particularmente adecuados para ecuaciones hiperbólicas de conservación).

En general, una ecuación diferencial parcial de segundo orden, asumiendo $u_{xy} = u_{yx}$, tiene la forma

$$A(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = g\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, x, y\right), \quad (9.2.1)$$

donde los coeficientes A, B, C pueden depender de x e y . Si $A^2 + B^2 + C^2 > 0$ en una región de plano xy , la EDP es de segundo orden en esa región. Esta forma es análoga a la ecuación de las secciones cónicas

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad (9.2.2)$$

donde A, B, C, D, E y F son constantes. Si se reemplaza $\partial/\partial x$ por x , y de forma análoga las otras derivadas (de manera formal esto se puede hacer con una transformada de Fourier), la EDP de coeficientes constantes se puede transformar en un polinomio del mismo grado (en este caso, cuadrático). La EDP se clasifica en parabólica, hiperbólica o elíptica de la misma manera como se hace la ecuación de las secciones cónicas, en donde la clasificación se basa en el discriminante $B^2 - 4AC$. Para la EDP, no obstante, el discriminante utilizado es $B^2 - AC$, donde el factor 4 se descarta por simplicidad. La clasificación y algunos ejemplos se presentan a continuación:

Ecuaciones elípticas ($B^2 - AC < 0$)

Las ecuaciones elípticas suelen surgir del equilibrio fenómenos físicos en estado estacionario. Desde el punto de vista matemático, estas ecuaciones son problemas de contorno donde la solución está interrelacionada en todos los puntos en el dominio (Moin, 2010). Es decir, si una perturbación se introduce en un punto, la solución se ve afectada instantáneamente en todo el dominio o, en otras palabras, la información se propaga a una velocidad infinita. Los problemas elípticos se formulan en un dominio cerrado con condiciones de borde en el límite del mismo. Por ejemplo, para $A = 1, B = 0$ y $C = 1$ se obtienen las ecuaciones de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (9.2.3)$$

¹Adapted from http://en.wikipedia.org/wiki/Partial_differential_equation

y Poisson

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = g(x, y), \quad (9.2.4)$$

que son aplicadas en la Teoría Lineal del Oleaje (Dean & Dalrymple, 1991) y en la solución de las ecuaciones de Navier-Stokes, respectivamente. La ecuación de Helmholtz,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \alpha^2 u = 0 \quad (9.2.5)$$

es también parabólica y se utiliza en la solución de las ecuaciones de onda larga. La ecuación de la pendiente suave (mild slope equation), comúnmente usada en propagación de ondas, es parabólica en una de sus versiones. La forma completa de las ecuaciones de Navier Stokes es también elíptica.

Ecuaciones parabólicas ($B^2 - AC = 0$)

Las ecuaciones parabólicas suelen estar asociadas a procesos de difusión, de carácter transiente. La variable que experimenta difusión puede ser la temperatura, el momemtum o la concentración de un contaminante, entre otros. La solución suelen suavizarse en la medida que el tiempo avanza y debe construirse usando esquemas de resolución en el tiempo (e.g. time-stepping method). La ecuación de calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0, \quad (9.2.6)$$

es un ejemplo donde $u(x, t)$ es la temperatura, $\alpha(x)$ el coeficiente de difusión térmica y $A = 0$, $B = 0$ and $C = -\alpha$. En el caso de un contaminante, la ecuación de difusión es

$$\frac{\partial C}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial C}{\partial x} \right) = 0, \quad (9.2.7)$$

donde $C(x, t)$ constituye la concentración de un contaminante y $D_x(x)$ es el coeficiente de difusión. La ecuación de la pendiente suave (mild slope equation), es parabólica en su versión más simple. La aproximación de la ecuación de Navier-Stokes para la capa límite (i.e. boundary layer approximation of the Navier-Stokes equations) es también parabólica.

Ecuaciones hiperbólicas ($B^2 - AC > 0$)

En estas ecuaciones, la información se propaga en ciertas direcciones a velocidad finita, y su solución es una superposición de ondas. Las ecuaciones retienen cualquier discontinuidad en la función o sus derivadas en el instante inicial. Un ejemplo son las ecuaciones de de onda de primer y segundo orden

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (9.2.8)$$

donde c es la celeridad de la onda y u la velocidad de las partículas en mecánica de olas o el desplazamiento de las partículas en ondas elásticas (ondas P y S por ejemplo). Acá $A = 1$, $B = 0$ y $C = -c^2$. El movimiento a velocidad supersónica (shock waves, u olas en aguas someras en estado de rotura) se puede aproximar con este tipo de ecuaciones. Un ejemplo típico es la ecuación de advección de una sustancia:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) = 0, \quad (9.2.9)$$

donde ρ es una escalar (como la densidad) y u la velocidad del flujo. La ecuación de conservación de momentum se puede también escribir en forma hiperbólica:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2 + p) = 0, \quad (9.2.10)$$

En la mayoría de los casos, las ecuaciones de conservación de una sustancia (masa, impulso, etc.) se pueden escribir como un balance entre la variación en el tiempo de la sustancia en el volumen de control y los flujos (advectivos o difusivos) en las fronteras. Por lo tanto, pueden escribirse en forma hiperbólica.

9.3. Análisis armónico de marea

El análisis armónico es un método basado en la suposición que el movimiento de ascenso y descenso de la marea en un lugar puede ser expresado matemáticamente como la sumatoria de una serie de términos armónicos que se relacionan con los movimientos astronómicos del sistema Tierra-Luna-Sol. El método se aplica a registros del nivel del mar obtenidos de mareógrafos ubicados usualmente en puertos. En el caso de Chile, la red mareográfica nacional cuenta a la fecha con 42 mareógrafos cuya estadística está disponible en la plataforma Sea Level Monitoring Station².

El análisis astronómico tiene el objetivo de predecir a futuro o reconstruir el comportamiento histórico de la marea astronómica a partir del registro del nivel del mar, y de paso aislar el residuo de la señal. El residuo se asocia a la marea meteorológica, a variaciones transientes, variaciones cíclicas regulares no asociadas a la marea astronómica, a variaciones cíclicas irregulares (e.g. ENOS) y al ruido que se asocia a errores instrumentales o fenómenos físicos que no tienen explicación. En la práctica, el análisis armónico se puede efectuar mediante algoritmos de libre disposición como T-tide (Pawlowicz, 2002) o desarrollando un algoritmo mediante el esquema presentado en este documento. En esta sección se explica el fundamento teórico de dicho análisis, cubriendo, en orden de complejidad:

- Un caso donde la marea se representa por una constituyente.
- Un caso donde la marea se representa por M constituyentes
- Un caso que corresponde a la aplicación del análisis sobre un registro del nivel del mar.

Asimismo, para simplificar la notación, comenzaremos asumiendo un registro continuo y luego incorporaremos un registro discreto, siguiendo el algoritmo propuesto por Foreman (1977), que es explicado paso a paso para facilitar la comprensión del álgebra. Los datos de entrada para este análisis son el registro del nivel del mar y las frecuencias de los movimientos astronómicos.

9.3.1. Análisis para una constituyente de marea

Supongamos que se cuenta con un registro continuo que representa el nivel del mar, denominado $z(t)$, y que queremos aproximar el registro mediante una senoide cuya expresión es:

$$\hat{z}(t) = C_0 + A \cos(\omega t - \phi), \quad (9.3.1)$$

donde la frecuencia ω se asocia a uno de los movimientos astronómicos, denominados también constituyentes armónicos, que generan la marea (y por tanto es conocida), C_0 es el nivel medio del mar, A es la amplitud y ϕ el desfase. Algunos de los constituyentes más importantes se muestran en la Figura 9.3.1. La idea del análisis armónico es minimizar la diferencia entre el registro y su aproximación. Si definimos el error en cada instante como $\varepsilon(t) = \{z(t) - \hat{z}(t)\}^2$, entonces el error total para todo el registro es

$$E = \int_{t_0}^{t_1} [\{z(t) - \hat{z}(t)\}^2] dt, \quad (9.3.2)$$

donde t_0 y t_1 representan el tiempo de inicio y fin del registro, respectivamente, y la potencia cuadrática se utiliza para evitar la cancelación de diferencias de distinto signo a lo largo del registro. Combinando (9.3.1) y (9.3.2)

$$E = \int_{t_0}^{t_1} [\{z(t) - C_0 - A \cos(\omega t - \phi)\}^2] dt, \quad (9.3.3)$$

²<http://www.ioc-sealevelmonitoring.org/>

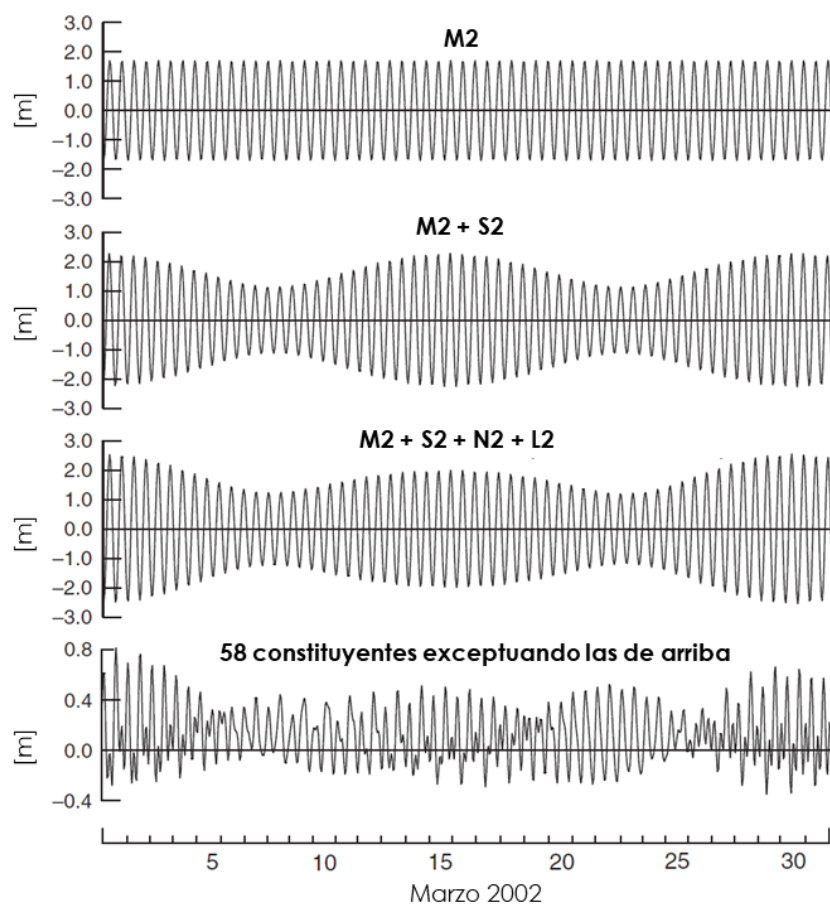


Figura 9.3.1: Suma de armónicos para una serie mensual, donde se muestra el efecto acumulativo de incluir más constituyentes en la suma. Modificado de Pugh & Woodworth (2014).

donde los parámetros utilizados para minimizar el error E son C_0 , A y ϕ_j . Para facilitar el álgebra, se recurre a la identidad trigonométrica

$$A \cos(\omega t - \phi) = A \cos(\omega t) \cos(\phi) + A \sin(\omega t) \sin(\phi) = C \cos(\omega t) + S \sin(\omega t), \quad (9.3.4)$$

con

$$C = A \cos(\phi); \quad S = A \sin(\phi). \quad (9.3.5)$$

De esta forma, las nuevas incógnitas C y S no son parte del argumento de las funciones trigonométricas. Combinando (9.3.3) y (9.3.4):

$$E = \int_{t_0}^{t_1} \{z(t) - C_0 - C \cos(\omega t) - S \sin(\omega t)\}^2 dt, \quad (9.3.6)$$

donde los parámetros que se utilizan para minimizar el error total son C_0 , C y S . En términos matemáticos, la minimización implica el cumplimiento simultáneo de las siguientes expresiones

$$\frac{dE}{dC_0} = 0; \quad \frac{dE}{dC} = 0; \quad \frac{dE}{dS} = 0; \quad (9.3.7)$$

sistema que consiste en 3 ecuaciones para 3 incógnitas, es decir, el sistema tiene solución. Recurriendo a (9.3.6) implica

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dC_0} &= \int_{t_0}^{t_1} [2\{z(t) - C_0 - C \cos(\omega t) - S \sin(\omega t)\} \{-1\}] dt = 0, \\ \frac{dE}{dC} &= \int_{t_0}^{t_1} [2\{z(t) - C_0 - C \cos(\omega t) - S \sin(\omega t)\} \{-\cos(\omega t)\}] dt = 0, \\ \frac{dE}{dS} &= \int_{t_0}^{t_1} [2\{z(t) - C_0 - C \cos(\omega t) - S \sin(\omega t)\} \{-\sin(\omega t)\}] dt = 0. \end{aligned} \quad (9.3.8)$$

Para facilitar la solución del problema, recurrimos a las matrices. Con simple álgebra, estas expresiones pueden escribirse como

$$\begin{aligned} C_0 \int_{t_0}^{t_1} dt + C \int_{t_0}^{t_1} \cos(\omega t) dt + S \int_{t_0}^{t_1} \sin(\omega t) dt &= \int_{t_0}^{t_1} z(t) dt, \\ C_0 \int_{t_0}^{t_1} \cos(\omega t) dt + C \int_{t_0}^{t_1} \cos^2(\omega t) dt + S \int_{t_0}^{t_1} \sin(\omega t) \cos(\omega t) dt &= \int_{t_0}^{t_1} z(t) \cos(\omega t) dt, \\ C_0 \int_{t_0}^{t_1} \sin(\omega t) dt + C \int_{t_0}^{t_1} \sin(\omega t) \cos(\omega t) dt + S \int_{t_0}^{t_1} \sin^2(\omega t) dt &= \int_{t_0}^{t_1} z(t) \sin(\omega t) dt, \end{aligned} \quad (9.3.9)$$

lo que en forma matricial se escribe como

$$\begin{bmatrix} \int_{t_0}^{t_1} dt & \int_{t_0}^{t_1} \cos(\omega t) dt & \int_{t_0}^{t_1} \sin(\omega t) dt \\ \int_{t_0}^{t_1} \cos(\omega t) dt & \int_{t_0}^{t_1} \cos^2(\omega t) dt & \int_{t_0}^{t_1} \sin(\omega t) \cos(\omega t) dt \\ \int_{t_0}^{t_1} \sin(\omega t) dt & \int_{t_0}^{t_1} \sin(\omega t) \cos(\omega t) dt & \int_{t_0}^{t_1} \sin^2(\omega t) dt \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_0 \\ C \\ S \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \int_{t_0}^{t_1} z(t) dt \\ \int_{t_0}^{t_1} z(t) \cos(\omega t) dt \\ \int_{t_0}^{t_1} z(t) \sin(\omega t) dt \end{Bmatrix} \quad (9.3.10)$$

donde la matriz cuadrada, denominada \mathbf{M} en adelante, contiene información de la frecuencia de la sinusoide, el vector $\{x\} = \{C_0, C, S\}^t$ corresponde a las incógnitas y el vector del lado derecho de la ecuación, denominado $\{b\}$ en adelante, contiene información del registro. Notar que esta estructura se repetirá cuando incluyamos más constituyentes armónicas en el análisis. Esta ecuación se puede escribir simbólicamente como sigue

$$\mathbf{M}\{x\} = \{b\}. \quad (9.3.11)$$

Para despejar el vector de incógnitas en (9.3.11), se debe multiplicar por el lado izquierdo con la inversa de la matriz

$$(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{M}) \{x\} = \mathbf{M}^{-1} \{b\}, \quad (9.3.12)$$

lo que, debido a la identidad $\mathbf{I} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{M}$, finalmente da el resultado

$$\{x\} = \mathbf{M}^{-1} \{b\}. \quad (9.3.13)$$

Este resultado indica que para obtener una solución, debemos invertir la matriz \mathbf{M} , la que no debe ser (exactamente o aproximadamente) singular, pues en dicho caso la inversión no es posible. Para el caso discreto veremos que, debido al alto costo computacional que demanda la inversión de matrices, en álgebra lineal se utiliza la factorización como alternativa. Una vez encontrado el vector de incógnitas, recurrimos a (9.3.5) para encontrar la amplitud y el desfase de la senoide

$$A = \sqrt{C^2 + S^2}; \quad \phi = \arctan\left(\frac{S}{C}\right), \quad (9.3.14)$$

con lo que la expresión (9.3.1) queda completamente definida. Al final de este anexo se presenta un ejemplo de aplicación del ajuste de una constituyente armónica a datos de marea.

9.3.2. Análisis para M constituyentes de marea

Consideremos ahora que el registro puede ser expresado matemáticamente como la sumatoria de una serie de M términos armónicos

$$\hat{z}(t) = C_0 + \sum_{j=1}^M A_j \cos(\omega_j t - \phi_j), \quad (9.3.15)$$

donde las frecuencias ω_j son conocidas, en tanto que el nivel del mar C_0 , las amplitudes A_j y los desfases ϕ_j son incógnitas. En este caso, el error total (9.3.2), recurriendo a (9.3.4), es

$$E = \int \left\{ z(t) - C_0 - \sum_{j=1}^M C_j \cos(\omega_j t) - \sum_{j=1}^M S_j \sin(\omega_j t) \right\}^2 dt, \quad (9.3.16)$$

donde se han eliminado los límites de la integral para que las ecuaciones sean más simples de leer. En este caso los parámetros a minimizar son el nivel medio del mar C_0 , y los coeficientes C_j y S_j . En términos matemáticos, la minimización implica el cumplimiento simultáneo de las siguientes expresiones

$$\frac{\partial E}{\partial C_0} = 0; \quad \frac{\partial E}{\partial C_j} = 0; \quad \frac{\partial E}{\partial S_j} = 0, \quad (9.3.17)$$

sistema que consiste en $1 + 2M$ ecuaciones para $1 + 2M$ incógnitas, es decir, el sistema tiene solución. Para evitar confusiones en la comprensión del álgebra, reescribiremos el error en forma extensiva

$$E = \int \{z(t) - C_0 - C_1 \cos(\omega_1 t) \dots - C_M \cos(\omega_M t) - S_1 \sin(\omega_1 t) \dots - S_M \sin(\omega_M t)\}^2 dt. \quad (9.3.18)$$

Luego (9.3.17) se escribe como

$$0 = \int [2 \{z(t) - C_0 - C_1 \cos(\omega_1 t) \dots - C_M \cos(\omega_M t) - S_1 \sin(\omega_1 t) \dots - S_M \sin(\omega_M t)\} \{-1\}] dt, \quad (9.3.19)$$

$$0 = \int [2 \{z(t) - C_0 - C_1 \cos(\omega_1 t) \dots - C_M \cos(\omega_M t) - S_1 \sin(\omega_1 t) \dots - S_M \sin(\omega_M t)\} \{-\cos(\omega_j t)\}] dt, \quad (9.3.20)$$

$$0 = \int [2 \{z(t) - C_0 - C_1 \cos(\omega_1 t) \dots - C_M \cos(\omega_M t) - S_1 \sin(\omega_1 t) \dots - S_M \sin(\omega_M t)\} \{-\sin(\omega_j t)\}] dt. \quad (9.3.21)$$

Con algo de álgebra

$$C_0 \int dt + C_1 \int \cos(\omega_1 t) dt \dots + C_M \int \cos(\omega_M t) dt \\ + S_1 \int \sin(\omega_1 t) dt \dots + S_M \int \sin(\omega_M t) dt = \int z(t) dt, \quad (9.3.22)$$

$$C_0 \int \cos(\omega_j t) dt + C_1 \int \cos(\omega_1 t) \cos(\omega_j t) dt \dots + C_M \int \cos(\omega_M t) \cos(\omega_j t) dt \\ + S_1 \int \sin(\omega_1 t) \cos(\omega_j t) dt \dots + S_M \int \sin(\omega_M t) \cos(\omega_j t) dt = \int z(t) \cos(\omega_j t) dt, \quad (9.3.23)$$

$$C_0 \int \sin(\omega_j t) dt + C_1 \int \cos(\omega_1 t) \sin(\omega_j t) dt \dots + C_M \int \cos(\omega_M t) \sin(\omega_j t) dt \\ + S_1 \int \sin(\omega_1 t) \sin(\omega_j t) dt \dots S_M + \int \sin(\omega_M t) \sin(\omega_j t) dt = \int z(t) \sin(\omega_j t) dt. \quad (9.3.24)$$

Sea

$$c_k = \int \cos(\omega_k t) dt, \quad s_k = \int \sin(\omega_k t) dt, \\ cc_{kj} = \int \cos(\omega_k t) \cos(\omega_j t) dt, \quad ss_{kj} = \int \sin(\omega_k t) \sin(\omega_j t) dt, \\ sc_{kj} = \int \sin(\omega_k t) \cos(\omega_j t) dt, \quad cs_{kj} = \int \cos(\omega_k t) \sin(\omega_j t) dt. \quad (9.3.25)$$

El sistema se escribe en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} \int dt & c_1 & \dots & c_M & s_1 & \dots & s_N \\ c_1 & cc_{11} & \dots & cc_{M1} & sc_{11} & \dots & sc_{M1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_M & cc_{1M} & \dots & cc_{MM} & sc_{1M} & \dots & sc_{MM} \\ s_1 & cs_{11} & \dots & cs_{M1} & ss_{11} & \dots & ss_{M1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_N & cs_{1N} & \dots & cs_{MN} & ss_{1N} & \dots & ss_{MN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ \vdots \\ C_M \\ S_1 \\ \vdots \\ S_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int z(t) dt \\ \int z(t) \cos(\omega_1 t) dt \\ \vdots \\ \int z(t) \cos(\omega_M t) dt \\ \int z(t) \sin(\omega_1 t) dt \\ \vdots \\ \int z(t) \sin(\omega_M t) dt \end{bmatrix} \quad (9.3.26)$$

Al igual que para el caso de una sinusoidal, la matriz cuadrada contiene información de las frecuencias de las constituyentes armónicas, el vector que la multiplica corresponde al de las incógnitas y el vector del lado derecho de la ecuación contiene información del registro. Esta ecuación se puede escribir simbólicamente como $\mathbf{M}\{x\} = \{b\}$ y su solución viene dada por $\{x\} = \mathbf{M}^{-1}\{b\}$.

9.3.3. Análisis discreto

Sea $i = 1, \dots, N$ la cantidad de datos temporales de una serie de tiempo de nivel del mar $z(t_i) \equiv z_i$ proveniente de un registro, donde $t_i = i\Delta t$ es el tiempo y Δt el intervalo de tiempo constante de la serie. Para este caso, el análisis armónico se reduce a:

$$\begin{bmatrix} \int dt & c_1 & \cdots & c_M & s_1 & \cdots & s_N \\ c_1 & cc_{11} & \cdots & cc_{M1} & sc_{11} & \cdots & sc_{M1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_M & cc_{1M} & \cdots & cc_{MM} & sc_{1M} & \cdots & sc_{MM} \\ s_1 & cs_{11} & \cdots & cs_{M1} & sc_{11} & \cdots & ss_{M1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_N & cs_{1N} & \cdots & cs_{MN} & ss_{1N} & \cdots & ss_{MN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ \vdots \\ C_M \\ S_1 \\ \vdots \\ S_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N z_i \\ \sum_{i=1}^N z_i \cos(\omega_1 t_i) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^N z_i \cos(\omega_M t_i) \\ \sum_{i=1}^N z_i \sin(\omega_1 t_i) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^N z_i \sin(\omega_M t_i) \end{bmatrix}, \quad (9.3.27)$$

donde ,

$$\begin{aligned} c_k &= \sum_{i=1}^N \cos(\omega_k t_i), & s_k &= \sum_{i=1}^N \sin(\omega_k t_i), \\ cc_{kj} &= \sum_{i=1}^N \cos(\omega_k t_i) \cos(\omega_j t_i), & ss_{kj} &= \sum_{i=1}^N \sin(\omega_k t_i) \sin(\omega_j t_i), \\ sc_{kj} &= \sum_{i=1}^N \sin(\omega_k t_i) \cos(\omega_j t_i), & cs_{kj} &= \sum_{i=1}^N \cos(\omega_k t_i) \sin(\omega_j t_i). \end{aligned} \quad (9.3.28)$$

Al igual que para el caso continuo, esta ecuación se puede escribir simbólicamente como $\mathbf{M}\{x\} = \{b\}$ y su solución viene dada por $\{x\} = \mathbf{M}^{-1}\{b\}$. La matriz \mathbf{M} sólo depende de las constituyentes escogidas para hacer el análisis armónico y se construye a partir de sumatorias de armónicos. El vector $\{b\}$, en contraste, contiene información de la señal y de las constituyentes armónicas. En la práctica, la inversión de matrices es una operación cuyo costo computacional crece exponencialmente con el número de elementos que la constituyen. En álgebra lineal existen técnicas de factorización que eluden la inversión de matrices y que son comúnmente incorporadas en programas especializados. Por ejemplo, para resolver la expresión $\mathbf{M}\{x\} = \{b\}$, Matlab, utiliza la expresión $\{x\} = \mathbf{M} \setminus \{b\}$ que se basa en diferentes tipos de factorización según sea la estructura de la matriz.

9.3.4. Ejemplo de aplicación

Desarrolla un algoritmo basado en el método de los mínimos cuadrados para ajustar una senoide de 12.42 horas de período al registro Mareasenal.txt.

Solución: La estructura del registro Mareasenal.txt es la siguiente:

```
0.0 0.66114255
1.0 0.443910539
2.0 0.618800631
3.0 0.561869322
...
7200.0 -0.398553142
```

Donde la primera columna corresponde al tiempo en minutos y la segunda al nivel del marea en [m NRS]. El algoritmo en Matlab es el siguiente:

```

data = load('Mareasenal.txt');
t = data(:,1);
z = data(:,2);
[N1 N2] = size(data);
t0 = t(1);
t1 = t(end);
T = 12.42*60;
w = 2*pi/T;

N = zeros(3,3,N1);
N(1,1,:) = ones(1,N1);
N(1,2,:) = cos(w*t);
N(1,3,:) = sin(w*t);
N(2,1,:) = N(1,2,:);
N(2,2,:) = cos(w*t).*cos(w*t);
N(2,3,:) = sin(w*t).*cos(w*t);
N(3,1,:) = N(1,3,:);
N(3,2,:) = N(2,3,:);
N(3,3,:) = sin(w*t).*sin(w*t);

b(1,1) = sum(z);
b(1,2) = sum(z.*cos(w*t));
b(1,3) = sum(z.*sin(w*t));

M = zeros(3,3);
for i = 1:3
for j = 1:3
M(i,j) = sum(N(i,j,:));
end
end

x = M\b';

Co = x(1);
C = x(2);
S = x(3);
A = sqrt(C^2 + S^2);
fi = atan(S/C);
za = Co + A*cos(w*t-fi);
figure('position',[100 100 800 350]);
plot(t/60,z,'m. ');
hold on
plot(t/60,za,'r-','linewidth',2);
xlabel('t [hr]')
ylabel('z [m NRS]')
grid on
legend('Data','Ajuste')
title('Señal de marea')

```

El resultado se presenta en la Figura 9.3.2.

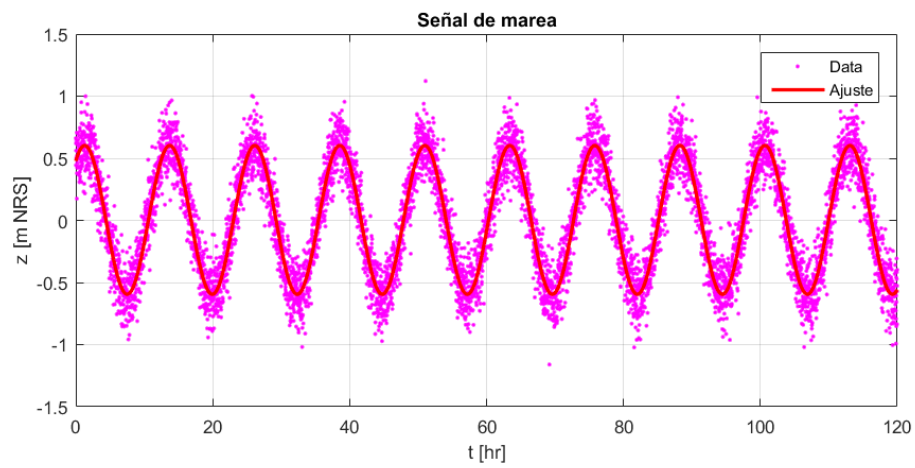


Figura 9.3.2: Análisis armónico de una señal mediante una constituyente armónica.

Bibliografía

- [1] J. Beyá, M. Álvarez, A. Gallardo, H. Hidalgo, C. Aguirre, J. Valdivia, C. Parra, L. Méndez, C. Contreras, P. Winckler, and M. Molina. Atlas de Oleaje de Chile. Escuela de Ingeniería Civil Oceánica, Universidad de Valparaíso. 2016.
- [2] J. Beyá and P. Winckler. *Inundaciones costeras: Más allá de los tsunamis*. Anales del Instituto de Ingenieros, 125, 2013.
- [3] M. Brocchini. *A reasoned overview on boussinesq-type models: the interplay between physics, mathematics and numerics*. Proceedings of The Royal Society A, 469:20130496:1–27, 2013.
- [4] M. Carvajal, M. Contreras-López, P. Winckler, and I. Sepúlveda. *Meteotsunamis occurring along the southwest coast of south america during an intense storm*. Pure and Applied Geophysics, 174(8):3313–3323, 2017.
- [5] H. Chanson. *The Hydraulics of Open Channel Flow: An Introduction. Basic principles, sediment motion, hydraulic modelling, design of hydraulic structures*. Elsevier, second edition, 2004.
- [6] W. Chen, Z. Demirbilek, and L. Lin. *Coupling phase-resolving nearshore wave models with phase-averaged spectral wave models in coastal applications*. in. In Estuarine and Coastal Modeling Conference ASCE., pages 582–600, 2009.
- [7] R. G. Dean and R. A. Dalrymple. *Water wave mechanics for engineers and scientists., volume 2 of Advanced Series on Ocean Engineering*. World Scientific, first edition, 1991.
- [8] R. G. Dean and T. L. Walton. *Handbook of coastal and ocean engineering, chapter Wave setup, pages 1–23*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2009.
- [9] J. C. Dietrich, M. Zijlema, J. J. Westerink, L. H. Holthuijsen, C. Dawson, ... Luettich, R. A., and G. W. Stone. *Modeling hurricane waves and storm surge using integrally-coupled, scalable computations*. Coastal Engineering, 58(1):45–65, 2011.
- [10] M. W. Dingemans. *Water wave propagation over uneven bottoms. Part 2. Non-linear wave propagation, volume 13 of Advanced Series on Ocean Engineering*. World Scientific, first edition, 1997.
- [11] D. Eberly. *Derivative approximation by finite differences*, April 2015.
- [12] F. Feddersen. *Longshore currents. lecture notes*. Technical report, Scripps Institute of Oceanography, 2000.
- [13] H. Fischer. *Mixing in inland and coastal waters*. Academic Press, U.S., 1979.
- [14] M. Foreman. *Manual for tide heights and prediction*. Pacific Marine Science Report 77-10, 1977.
- [15] GIOC. *Documento de Referencia: Dinámicas. Hidrodinámica de rompientes, pages 70–94*. UNICAN, Espana, 2003.

- [16] GIOC. Documento de Referencia: Dinámicas. Mecánica de ondas, *volume 1*, page 580. Espana, 2003.
- [17] D. M. Hamby. *A review of techniques for parameter sensitivity analysis of environmental models*. Environmental Monitoring and Assessment, 32:135–154, 1994.
- [18] L. H. Holthuijsen. *Waves in oceanic and coastal waters*. Cambridge University Press, 2010.
- [19] S. A. Hughes. *Physical Models and Laboratory Techniques in Coastal Engineering*. Advanced Series on Ocean Engineering, *volume 7*. World Scientific, 1993.
- [20] D. Idier, F. Dumas, and H. Muller. *Tide-surge interaction in the english channel*. Natural Hazards and Earth System Sciences, 12(12):3709–3718, 2012.
- [21] H. Jeffreys. *Causes contributory to the annual variation of latitude*. Mon. Not. R. Astron. Soc., 76:499–524, 1916.
- [22] J. W. Kamphuis. *Introduction to coastal engineering and management (Vol. 30)*. World Scientific, 2010.
- [23] G. H. Keulegan. *Gradual damping of solitary waves*. Journal of Research of the National Bureau of Standards, 40:487–498, 1948.
- [24] F. A. Kilpatrick. *Simulation of soluble waste transport and buildup in surface waters using tracers, volume 92*. US Government Printing Office, 1993.
- [25] J. T. Kirby. *Advances in Coastal Modeling, chapter Boussinesq models and applications to nearshore wave propagation, surf zone processes and wave-induced currents, pages 1–41*. Elsevier Science, 2003.
- [26] J. T. Kirby and P. Vengayil. *Nonresonant and resonant reflection of long waves in varying channels*. Journal of Geophysical Research, 93(C9):10782–10796, 1988.
- [27] R. J. LeVeque. *Numerical methods for conservation laws*. Springer, 2012.
- [28] N. Lin, K. A. Emanuel, J. A. Smith, and E. Vanmarcke. *Risk assessment of hurricane storm surge for new york city*. Journal of Geophysical Research: Atmospheres, 115(D18), 2010.
- [29] D. Liu. *Uncertainty Quantification with Shallow Water Equations. Dissertation, Carl-Friedrich-Gauss Faculty, Institute of Technology, University of Braunschweig and the Faculty of Engineering, University of Florence, 2010*.
- [30] P. L.-F. Liu and I. J. Losada. *Wave propagation modeling in coastal engineering*. Journal of Hydraulic Research, 40(3):229–240, 2002.
- [31] Philip L.-F. Liu, G. Simarro, J. Vandever, and A. Orfila. *Experimental and numerical investigation of viscous effects on solitary wave propagation in a wave tank*. Coastal Engineering, 54:181–190, 2006.
- [32] M. S. Longuet-Higgins. *Radiation stresses in water waves; a physical discussion, with applications*. Deep-sea Research, 11:529–562, 1964.
- [33] M. S. Longuet-Higgins. *Longshore currents generated by obliquely incident sea waves, 1*. Journal of Geophysical Research, 75(33):6778–6789, 1970.
- [34] M. S. Longuet-Higgins. *Longshore currents generated by obliquely incident sea waves, 2*. Journal of Geophysical Research, 75(33):6790–6801, 1970.
- [35] M. S. Longuet-Higgins and R. W. Stewart. *A note on wave setup*. Journal of Marine Research, 21(1):4–10, 1963.

- [36] C. Martínez, M. Contreras-Lopez, P. Winckler, H. Hidalgo, E. Godoy, and R. Agredano. *Coastal erosion in central Chile: A new hazard?* *Ocean & Coastal Management*, pages 1–15, 2017.
- [37] J. Miles. *Damping of weakly nonlinear shallow-water waves*. *Journal of Fluid Mechanics*, 76:251–257, 1976.
- [38] R. Moffat. *Describing the uncertainties in experimental results*. *Experimental Thermal and Fluid Science*, 1:3–17, 1998.
- [39] P. Moin. *Fundamentals of engineering numerical analysis*. *Cambridge University Press*, 2nd edition, 2010.
- [40] S. Monserrat, I. Vilibic, and A. B. Rabinovich. *Meteotsunamis: atmospherically induced destructive ocean waves in the tsunami frequency band*. *Natural Hazards and Earth System Sciences*, 6:1035–1051, 2006.
- [41] J. A. Naranjo, M. Arenas, J. Clavero, and O. Muñoz. *Mass movement-induced tsunamis: main effects during the Patagonian fjordland seismic crisis in Aysén (45°25'S), Chile*. *Andean Geology*, 36(1):137–145, January 2009.
- [42] T. N. Narasimhan. *The dichotomous history of diffusion*. *Physics Today*, pages 48–53, 2009.
- [43] O. Nwogu. *Chapter 35. Nonlinear evolution of directional wave spectra in shallow water*. In *Coastal Engineering Proceedings, volume 1*, pages 467–481, 1994.
- [44] N. Oreskes, K. Shrader-Frechette, and K. Belitz. *Verification, validation, and confirmation of numerical models in the earth sciences*. *Science*, 263(5147):641–646, 1994.
- [45] R. L. Panton. *Incompressible flow*. *Wiley*, third edition, 2005.
- [46] R. Pawlowicz, B. Beardsley, and S. Lentz. *Classical tidal harmonic analysis including error estimates in MATLAB using T-TIDE*. *Computers & Geosciences*, 28(8):929–937, 2002.
- [47] A. Pedrozo-Acuña and A. Torres-Freyermuth. *Sobre el uso de las ecuaciones de Navier-Stokes con el promedio de Reynolds en el campo de la ingeniería de costas*. *Tecnología y Ciencias del Agua*, antes Ingeniería Hidráulica en México, 11:51–67, 2011.
- [48] D. H. Peregrine. *Long waves on a beach*. *Journal of Fluid Mechanics*, 27:815–827, 1967.
- [49] D. Pugh and P. Woodworth. *Sea-Level Science: Understanding Tides, Surges, Tsunamis and Mean Sea-Level Changes*. *Cambridge*, 2014.
- [50] A. B. Rabinovich. *Seiches and harbor oscillations, chapter Seiches and harbor oscillations, pages 193–236*. *World Scientific*, 2010.
- [51] O. Reynolds. *An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels*. *Proceedings of the Royal Society of London*, 35(224-226):84–99, 1883.
- [52] O. Reynolds. *On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion*. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 186:123–164, 1895.
- [53] J. C. Rutherford. *River Mixing*. *John Wiley and Sons Ltd., England*, 1994.
- [54] S. A. Sepulveda and A. Serey. *Tsunamigenic, earthquake-triggered rock slope failures during the April 21, 2007 Aysén earthquake, southern Chile (45.5°S)*. *Andean Geology*, 36:131–136, 2009.
- [55] A. Shapiro. *Eulerian and Lagrangian descriptions in fluid mechanics*, 1961.

- [56] A. Shapiro. *Turbulence*, 1961.
- [57] K. I. Sitanggang and P. J. Lynett. *Multi-scale simulation with a hybrid boussinesq-rans hydrodynamic model*. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 62:1013–1046, 2009.
- [58] G. Strang. *Computational Science and Engineering*. <http://ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-06-linear-algebra-spring-2010/video-lectures>. *Wellesley Cambridge Press*, 2007.
- [59] I. A. Svendsen. *Introduction to Nearshore Hydrodynamics, volume 24 of Advanced Series on Ocean Engineering*. *World Scientific, 5 Toh Tuck Link, Singapore 596224, first edition*, 2006.
- [60] W. Tan. *Shallow water hydrodynamics: mathematical theory and numerical solution for a two-dimensional system of shallow water equations*. *Elsevier Oceanography Series*, 1992.
- [61] USACE. *Coastal Engineering Manual*, 2003.
- [62] J. G. Venditti, C. D. Rennie, J. Bomhof, R. W. Bradley, M. Little, and M. Church. *Flow in bedrock canyons*. *Nature*, 513(7519):534, 2014.
- [63] Ge Wei and James T. Kirby. *Time dependent numerical code for extended boussinesq equations*. *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*. ASCE, 121(5):251–261, 1995.
- [64] P. Winckler. *Assignment 2. cee 6550 transport, mixing and transformation in the environment*. *Technical report, Cornell University*, 2010.
- [65] P. Winckler. *Assignment 4. cee 6550 transport, mixing and transformation in the environment*. *Technical report, Cornell University*, 2010.
- [66] P. Winckler, M. Contreras, J. Beyá, and M. Molina. *El temporal del 8 de agosto de 2015 en la bahía de valparaíso*. In *XXII Congreso Chileno de Ingeniería Hidráulica*. *Sociedad Chilena de Ingeniería Hidráulica*, 2015.
- [67] P. Winckler, M. Contreras-López, R. Campos-Caba, J. Beya, and M. Molina. *El temporal del 8 de agosto de 2015 en las regiones de valparaíso y coquimbo, chile central*. *Latin American Journal of Aquatic Research*, 45(4):622–648, 2017.
- [68] P. Winckler and P. L.-F. Liu. *Advective diffusion of contaminants in the surf zone*. *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*. ASCE, 139(6):437–454, 2013.
- [69] P. Winckler and P. L.-F. Liu. *Long waves in a straight channel with non-uniform cross-section*. *Journal of Fluid Mechanics*, 770:156–188, 2015.
- [70] P. Winckler, I. Sepúlveda, F. Aron, and M. Contreras-López. *How do tides and tsunamis interact in a highly energetic channel? the case of canal chacao, chile*. *Journal of Geophysical Research: Oceans*, 122(12):9605–9624, 2017.
- [71] I. Wood and D. Wilkinson. *Ocean disposal of wastewater., volume 8 of Advanced Series on Ocean Engineering*. *World Scientific., first edition*, 1993.
- [72] C. Wunsch and D. Stammer. *Atmospheric loading and the oceanic inverted barometer effect*. *Reviews of Geophysics*, 35(1):79–107, 1997.



Figura 9.3.3: *Pato Winckler, por José González-Ondina.*