

**APUNTES DE
GEOMETRIA DESCRIPTIVA.
I PARTE**

UNIVERSIDAD de VALPARAISO
FACULTAD de ARQUITECTURA.
ESCUELA de ARQUITECTURA.

516.6
E 36
1990
C

MARC 52 983

PUBLICADO CON FINES DOCENTES Y
DE INVESTIGACION POR...
TEDRO EIZAGUIRRE ARRIAZA
PROFESOR - ARQUITECTO DE LA
ESCUELA ARQUITECTURA DE LA
UNIVERSIDAD DE VALPARAISO.

MARZO 1990.
VALPARAISO.

ÍNDICE.

TÍTULOS.	PÁG.	TÍTULOS.	PÁG.
OBJETIVOS GENERALES	1	Rectas perpendicular a plano	44
UNIDADES	2	Rectas paralelas a plano	46
I.- INTRODUCCION. LA G.D. EN LA ARQUITECTURA.	3	5.5.-Relación Plano-plano	47
II.- SISTEMAS DE PROYECCIÓN	10	Intersección planos genéricos	47
2.1.- Conceptos generales	10	Planos perpendiculares	50
2.2.- Diversos sistemas de proyección	11	Planos paralelos	52
2.3.- Definición de los términos y condiciones en la proyección ortogonal	12	Método para proyectar dos planos genéricos de perfil.	53
III.- REPRESENTACIÓN DE PUNTOS	16	VI.- DISTANCIA ENTRE ELEMENTOS.	54
3.1.- Proyecciones auxiliares	17	Concepto de Lugar Geométrico	54
IV.- REPRESENTACIÓN DE RECTAS	23	6.1.- Distancia referida al punto	55
4.1.- Tipos de rectas	25	Distancia punto-punto	55
4.2.- Relación punto-recta	29	Distancia punto-recta	55
4.3.- V.M. de una recta	30	Distancia punto-plano	56
4.4.- Relaciones entre rectas.	32	6.2.- Distancia referida a la recta	57
Rectas que se cortan	32	Distancia recta-recta	57
Rectas perpendiculares	33	Distancia recta-plano	58
Rectas que se cruzan	34	6.3.- Distancia referida al plano	58
Rectas ortogonales	34	6.4.- Lugares Geométricos de Distancia	59
Rectas paralelas.	35	VII.- ÁNGULO ENTRE ELEMENTOS	60
V.- REPRESENTACIÓN DE PLANOS	36	7.1.- Ángulo entre rectas	60
5.1.- Tipos de planos	37	7.2.- Ángulo entre recta y plano	62
5.2.- Proyecciones especiales de planos	38	7.3.- Ángulo entre planos	63
Proyección de perfil	38	7.4.- Lugar Geométrico de ángulos	64
Proyección en V.M.	40	Bibliografía	65
5.3.- Relación punto-plano	41		
5.4.- Relación recta-plano	41		
Pertenencia recta en plano	41		
Penetración recta en plano	42		

OBJETIVOS GENERALES :

- DEFINIR LOS CONCEPTOS TEORICOS QUE INTERVIENEN EN LA REPRESENTACIÓN DE LOS ELEMENTOS EN EL ESPACIO.
- VISUALIZAR FIGURAS EN EL ESPACIO RESPECTO A PLANOS DE PROYECCION Y LAS CONDICIONES PARTICULARES QUE LAS AFECTAN.
- DETERMINAR Y ENUMERAR LAS ETAPAS NECESARIAS PARA ALCANZAR EL RESULTADO Y LA DETERMINACIÓN EXACTA DE CADA UNO DE LOS ELEMENTOS QUE EN EL INTERVIENEN.
- REALIZAR SOLUCIONES ESPACIALES, A TRAVES DE MODELOS, SEGÚN LAS CORRECTAS SOLUCIONES ALCANZADAS EN LOS DEPURADOS.
- OBTENER UN GRADO DE DESTREZA EN LA REPRESENTACION TÉCNICA DE LOS ELEMENTOS Y SISTEMAS COMPLEJOS.

UNIDADES:

1era PARTE

I.- LA GEOMETRÍA DESCRIPTIVA EN LA ARQUITECTURA.

II.- SISTEMAS DE PROYECCIONES.

III.- REPRESENTACIÓN DE PUNTOS.

IV.- REPRESENTACIÓN DE RECTAS.

V.- REPRESENTACIÓN DE PLANOS

VI.- DISTANCIAS ENTRE ELEMENTOS

VII.- ÁNGULO ENTRE ELEMENTOS

VIII.- REPRESENTACIÓN DE CUERPOS EN EL ESPACIO.

2da PARTE

IX.- REPRESENTACIÓN DE RELACIONES DE LOS CUERPOS CON LOS DEMÁS ELEMENTOS DEL ESPACIO.

X.- INTERSECCIÓN DE CUERPOS.

I.- LA GEOMETRIA DESCRIPTIVA EN LA ARQUITECTURA.

INTRODUCCION : PARA PODER ENTENDER LA GEOMETRIA DESCRIPTIVA Y SU RELACION CON LA ARQUITECTURA, SE HACE NECESARIO CONOCER UN POCO LOS ORIGENES DE LA G.D., BUSCANDO LOS MOTIVOS DE SU NATALIDAD, COMO RECONOCIMIENTO A ORDENAR Y NORMALIZAR CIERTAS LEYES GEOMETRICAS QUE PERMITIRIAN AL ARQUITECTO HACER USO DE ESTAS, PARA SU CREACION ARQUITECTONICA.

EL PRIMER TRATADISTA TEORICO ES **VITRUBIO**, CONTEMPORANEO DE AUGUSTO (63 a. de J.C. - 14 d. de J.C.) EL CUAL ESCRIBIO UN TRATADO "DE ARCHITECTURA" EN EL QUE HAY ALGUNAS INDICACIONES SOBRE LA PLANTA Y ALZADO, DE LOS EDIFICIOS. DESPUES LE SEGUIA **ALBERTO DURERO** (1471-1525) QUE COMPONE EN PLENO RENACIMIENTO UNAS "INSTITUCIONES GEOMETRICAS" PARA

ENSEÑAR A CONSTRUIR Y REPRESENTAR
LOS POLIEDROS REGULARES Y SEMIREGULARES Y SU DESARROLLO EN UN PLANO, ASÍ COMO LA HÉLICE Y OTRAS CURVAS ALABEADAS. DESPUÉS DEL PINTOR NUREMBERGUENSE, **JUAN DE HERRERA** (1530-1595) SE PREOCUPA DE DAR LECCIONES DE ESTEREOTOMIA (arte de cortar piedras o maderas) EN LAS TRAZAS QUE EJECUTÓ PARA CONSTRUIR EL MONASTERIO DEL ESCORIAL... Y SIGLO Y, MEDIO HASTA DE **AMADEO PREZIER** (1692-1773) PUBLICA EN ESTRASBURGO "LA THEORIE ET LA TRACTIQUE DE LA COUPE DES PIERRES ET DES BOIS", OBRA EN LA QUE PRECINDIENDO DE CONSIDERACIONES MECÁNICAS, RESUELVE GEOMETRICAMENTE LOS PROBLEMAS QUE SE PRESENTAN EN EL CORTE DE PIEDRAS Y MADERAS, Y QUEDA ROTUNDO EL CAMPO EN EL QUE **GASTAR MONGE** (1790-1794, frances) HABÍA DE PLANTAR LA FECUNDA SEMILLA DE NUEVOS MÉTODOS GEOMÉTRICOS.

PRIMERO ES LA ESCUELA NORMAL DE PARÍS Y LUEGO EN LA POLITECNICA, EN CUYA FUNDACIÓN 1793 Y 1795, RESPECTIVAMENTE — TOMÓ PARTE ACTIVA, **MONGE** EXPLICÓ SUS PRIMERAS LECCIONES SOBRE

EL SISTEMA PIEDRICO, QUE EN UN ESTRECHO NACIONALISMO LE PROHIBIÓ PUBLICAR, PORQUE NO CONVENÍA "FACILITAR A LOS EXTRANJEROS LA MANERA DE SER HÁBILES EN EL ARTE DE LA CONSTRUCCIÓN" PERO EL AÑO VII DE LA REPÚBLICA (1798), SE IMPRIMIO EL "TRAITE DE GEOMETRIE DESCRIPTIVE", TODA LA OBRA TIENE RANGO CIENTIFICO POR DE DOBLE OBJETIVO, SEGUN LAS PROPIAS PALABRAS DE MONGE.

"EL PRIMERO - DICE - ES DAR MÉTODOS PARA REPRESENTAR EN UNA HOJA DE DIBUJO QUE SOLO TIENE DOS DIMENSIONES: LARGO Y ANCHO, TODOS LOS CUERPOS DE LA NATURALEZA, QUE TIENEN TRES DIMENSIONES: LARGO, ANCHO Y ALTO, SIEMPRE QUE ESTOS CUERPOS SE PUEDAN DEFINIR RIGOROSAMENTE. EL SEGUNDO OBJETO ES PROPORCIONAR EL MEDIO DE RECONOCER LAS FORMAS DE LOS CUERPOS, LUEGO, DE UNA DESCRIPCIÓN EXÁCTA, Y DEDUCIR DE AQUÍ TODAS LAS VERDADES QUE RESULTAN EN SU FORMA Y EN SUS POSICIONES RESPECTIVAS."

GASTAR MONJE, RECONOCIDO COMO EL GESTOR DE LA GEOMETRIA DESCRIPTIVA CONTEMPORANEA, HA TENIDO NUMEROSOS SEGUIDORES Y MODIFICADORES DE SUS PRINCIPIOS BASICOS. APLICADOS A LOS DIFERENTES OFICIOS SEGUN SUS REQUERIMIENTOS PARTICULARES

UNO DE LOS OFICIOS MAS ANTIGUOS CONOCIDOS, ES **LA ARQUITECTURA** — QUE ES LO QUE NOS INTERESA — Y LA GEOMETRIA DESCRIPTIVA ES UNA DE LAS HERRAMIENTAS QUE UTILIZAMOS COMO LENGUAJE DE COMUNICACION PARA HABLAR DE ELLA.

EL HOMBRE EN GENERAL, YA SEA COMO INDIVIDUO O EN COLECTIVIDAD, EN BUSCA DEL CONOCIMIENTO, A TRAVES DE LA HISTORIA HA ATRIBUIDO SU IGNORANCIA O SUS LOGROS A UNA FUERZA SUPERIOR, COMO RESPUESTA A LAS INCOGNITAS QUE NO PUEDE ENTENDER O DESCUBRIR.

ASI EN SU ETERNA BUSQUEDA DE UNA RESPUESTA A SU EXISTENCIA, SE AGRUPO EN DISTINTAS RELIGIONES SECTAS GRUPOS, ETC. QUE AUNQUE UTILIZANDO

DISTINTAS FORMAS O CAMINOS EN BUSCA DE LA RESPUESTA ..., EL FIN, SIEMPRE HA SIDO EL FACTOR COMÚN ... LA BÚSQUEDA DEL CONOCIMIENTO.

ME ATREVO A DECIR QUE EN LA ARQUITECTURA, COMO PARTE DE ESTE QUEHACER, TAMBIÉN HA SEGUIDO EL MISMO CAMINO...

EN NUESTRO PLANETA EXISTE UN GRAN NÚMERO DE ESCUELAS DE ARQUITECTURA, TODAS BUSCANDO LA EXCELENCIA DEL CONOCIMIENTO, Y LA APLICACIÓN DE ÉSTE. RECONOCIÉNDOSE UN FIN COMÚN ENTRE ELLAS, AUNQUE TODAS ELIJAN SUS PROPIOS CAMINOS PARA LLEGAR AL FIN DESEADO.

SOLO QUIERO DECIR, QUE NUESTRA GEOMETRÍA DESCRIPTIVA, TAMBIÉN ES PARTICIPE DE ESTA SITUACIÓN Y EN NUESTRA ESCUELA DE ARQUITECTURA, UNIVERSIDAD DE VALPARAÍSO ... TAMBIÉN CONSIDERAMOS UNA ENSEÑANZA PARTICULAR DE LA GEOMETRÍA DESCRIPTIVA, PERSIGUIENDO LOS OBJETIVOS GENERALES YA ENUNCIADOS ANTERIORMENTE... RECONOCIENDO ...

QUE NUESTRO CAMINO ESTÁ LLANO
A ALIMENTARSE DE NUEVOS CONO-
CIMIENTOS Y MÉTODOS PARA LO-
GRAR NUESTRA EXCELENCIA
PROFESIONAL Y ACADÉMICA EN
LA PARTE QUE NOS TOCA DE
FORMACIÓN COMO ARQUITECTOS.

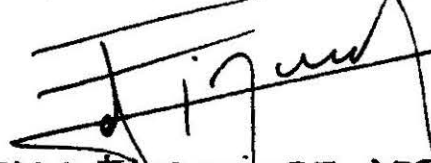
ESTOS APUNTES DE GEOMETRÍA
DESCRIPTIVA, SON SOLO UNA
PEQUEÑA ORDENACIÓN DE
OBJETIVOS BÁSICOS QUE NE-
CESITA EL ESTUDIANTE PARA
ENRIQUECER SU CONOCIMIENT-
TO Por ahora, nos persiguen
otro objetivo que este

YO TAMBIÉN FUI ALUMNO... DISCÍPULO...
TUVE MAESTROS QUE ME ENSEÑARON
LO POCO QUE SÉ... HASTA AHORA...

LOS RECUERDO... PROF. JORGE LAURÍA
PROF. ALEJANDRO NAVARRETE T.
PROF. RITA GARCÍA L.

ADVIERTO AL ALUMNO O AL LECTOR DE ESTOS
APUNTES... QUE EL LENGUAJE TÉCNICO ES
MUY PERSONAL, TANTO DEL AUTOR COMO
DEL EQUITO QUE LO ACOMPAÑA EN LA EN-
SEÑANZA DE ESTAS MATERIAS....
QUE ESTOS CONOCIMIENTOS VERTIDOS EN ES-
TOS APUNTES NO SON DOGMA DE FÉ, QUE
SOLO CONSTITUYEN UNA INFIMA PARTE DE
LA GEOMETRIA DESCRIPTIVA DE LA CUAL
EL DISCÍPULO QUE QUIERA "APRENDER"
TENDRÁ QUE PREOCUPARSE DE PROFUN-
DIZAR Y TILIR.

DE TODAS MANERAS, HABLANDO AL ALUM-
NO... PARA QUE NO OS PREOCUPEIS DE
LO FUNCIONAL-ACADÉMICO... EL TENER
CONOCIMIENTO DE LAS MATERIAS BÁSICAS
DE GEOMETRIA DESCRIPTIVA QUE EN ESTOS
APUNTES APARECEN... ASEGURA VUESTRA
APROBACIÓN EN ESTE RAMO ACADÉMICO DE
NUESTRA ESCUELA DE ARQUITECTURA.


PEDRO ELIZAGUIRRE ARRIAZA
Arquitecto - Docente.

II.-SISTEMAS DE PROYECCIÓN.

2.1.-CONCEPTOS GENERALES.

2.1.1.-DEFINICIÓN DE GEOMETRÍA DESCRIPTIVA.

LA GEOMETRÍA DESCRIPTIVA ES LA PARTE DE LAS MATEMÁTICAS QUE TIENE POR OBJETO REPRESENTAR EN PROYECCIONES PLANAS, LAS FIGURAS DEL ESPACIO, A MANERA DE PODER RESOLVER CON LA AYUDA DE LA GEOMETRÍA PLANA, LOS PROBLEMAS EN QUE INTERVIENEN TRES DIMENSIONES.

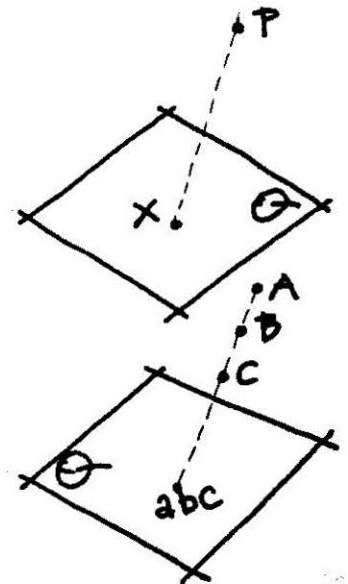
2.1.2.-ESPACIO GEOMÉTRICO.

EL LUGAR ILIMITADO EN TODOS SENTIDOS, QUE CONTIENE A TODOS LOS CUERPOS DE TRES DIMENSIONES.

2.1.3.-PROYECCIÓN:

SI TENEMOS EN EL ESPACIO UN PLANO $\bar{Q}$ Y UN PUNTO $\bar{P}$ FUERA DE ÉL Y DE ESTE ÚLTIMO BAJAMOS UNA RECTA HASTA EL PLANO, EL LUGAR X EN QUE LA RECTA TOCA AL PLANO, RECIBE EL NOMBRE DE PROYECCIÓN DEL PUNTO EN EL PLANO, LA RECTA PX SE LLAMA LÍNEA VISUAL DEL PUNTO Y EL PLANO $\bar{Q}$, PLANO DE PROYECCIÓN.

DE ESTE MODO, TODOS LOS PUNTOS QUE SE ENCUENTRAN SOBRE UNA MISMA LÍNEA VISUAL, SE PROYECTARÁN EN EL MISMO PUNTO, ES DECIR, TIENEN LA MISMA PROYECCIÓN, ASÍ $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$, PUNTOS DE LA MISMA RECTA SE PROYECTAN SIMULTANEAMENTE EN EL MISMO PUNTO a, b, c .

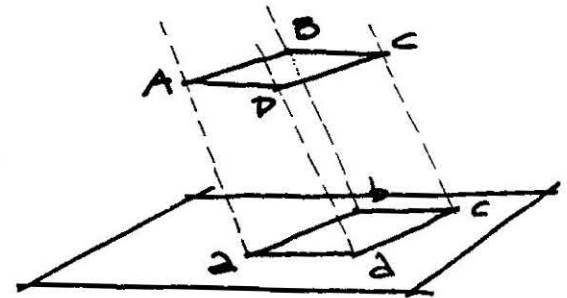


2.2.- DIVERSOS SISTEMAS DE PROYECCIÓN.

LAS DIVERSAS POSICIONES QUE GUARDAN LAS LINEAS VISUALES DE LA FIGURA, ENTRE SÍ Y CON RESPECTO AL PLANO DE PROYECCIÓN, DETERMINAN VARIOS SISTEMAS DE PROYECCIÓN, QUE SON:

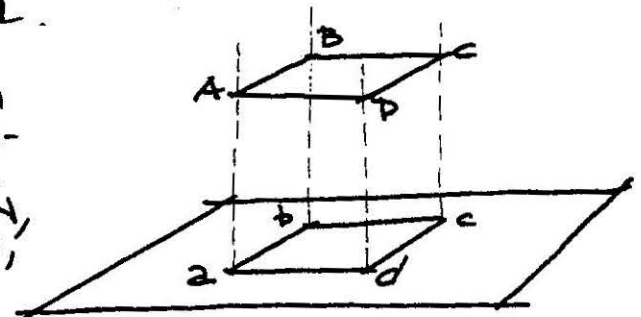
2.2.1.- PROYECCIÓN CILÍNDRICA OBLICUA (ISOMETRÍA).

Cuando las líneas visuales de la figura son paralelas entre sí, pero oblicuas con respecto al plano de proyección.



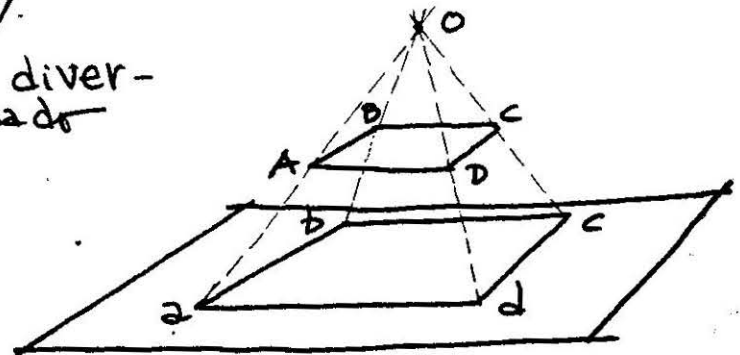
2.2.2.- PROYECCIÓN CILÍNDRICA RECTA U ORTOGONAL.

Es aquella en la cual las líneas visuales son paralelas entre sí y además, perpendiculares al plano de proyección. ÉSTA SERÁ NUESTRA FORMA USUAL DE PROYECCIÓN, CONSIDERÁNDOSE LOS OTROS SISTEMAS, COMO PROBLEMAS DE ELLA.



2.2.3.- PROYECCIÓN CÓNICA (PERSPECTIVA).

En este caso las líneas visuales divergen de un punto común, denominado vértice o polo de proyección.



2.3.- DEFINICIÓN DE LOS TÉRMINOS Y CONDICIONANTES EN LA PROYECCIÓN ORTOGONAL.

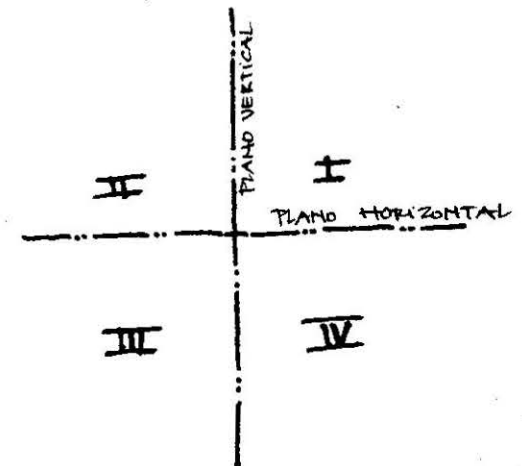
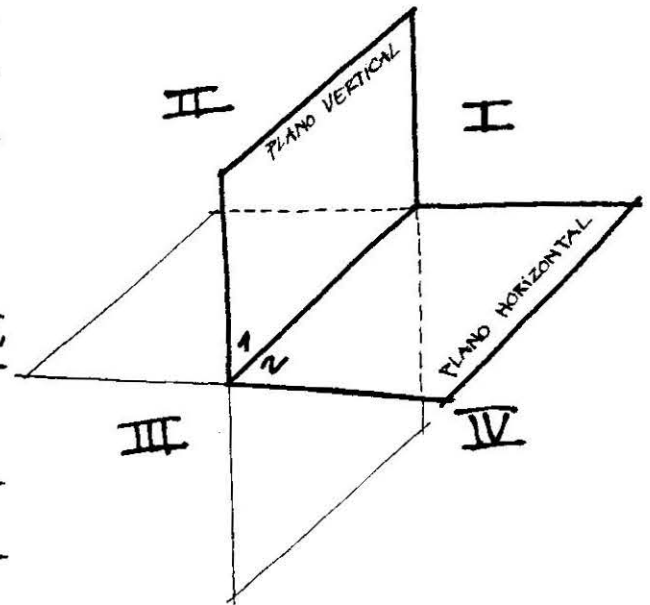
2.3.1.- LINEAS VISUALES:

SON las líneas de la vista de un observador que mira un punto o una serie de puntos. Se supone que son rectas paralelas. Las posiciones del observador, con respecto al punto o serie de puntos que está mirando, se consideran en el infinito.

2.3.2.- PLANOS DE PROYECCIÓN:

Son superficies planas, que no tienen espesor, son transparentes y son infinitos en sus dimensiones de ancho y largo. La posición de un plano de proyección es tal, que siempre es perpendicular a las líneas visuales del observador.

Estos PLANOS DE PROYECCIÓN SON GENERADOS POR LA INTERSECCIÓN PERPENDICULAR U ORTOGONAL DE DOS PLANOS, formándose cuatro diedros de proyección, del cual nosotros trabajaremos solo en el primer, DIEDRO; llamándoles PLANO DE PROYECCIÓN HORIZONTAL (plano 2) y PLANO DE PROYECCIÓN VERTICAL (plano 1).



2.3.3.- LINEAS PROYECTORAS.

Se pueden considerar como las proyecciones de las líneas visuales en los planos de proyección.

Las líneas proyectoras son $\perp$ a la recta de Π de los planos de proyecciones.

2.3.4.- LINEA DE REFERENCIA (L.R.)

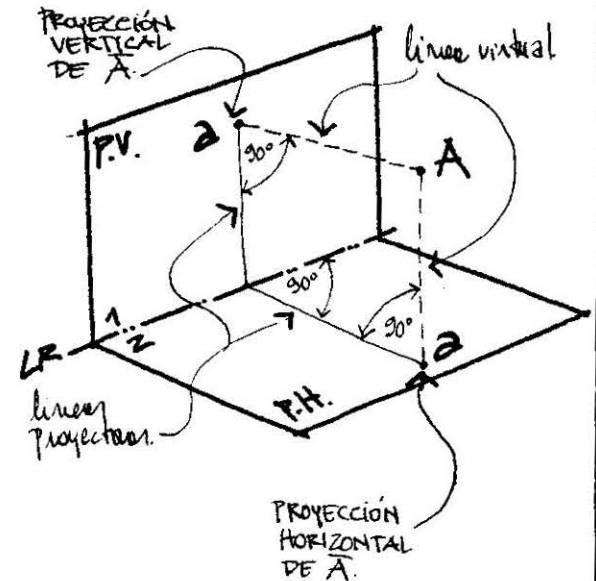
Es la recta común de dos planos de proyección que se intersectan perpendicularmente.

2.3.5.- PROYECCIÓN HORIZONTAL (vista de planta).

Es la proyección de un punto o de una serie de puntos en el espacio sobre el plano de proyección horizontal. (Esta es la vista que el observador aprecia cuando sus líneas visuales son VERTICALES, o sea, $\perp$ al plano de proyección horizontal.)

2.3.6.- PROYECCIÓN VERTICAL (vista de elevación frontal).

Es la proyección de un punto o de una serie de puntos en el espacio sobre el plano de proyección vertical. (Esta es la vista que el observador aprecia cuando sus líneas visuales son horizontales, o sea, $\perp$ al plano de proyección vertical.)



2.3.7.- CONCEPTO DE "ALEJAMIENTO" y "COTA".

a) ALEJAMIENTO: Distancia del elemento hacia el plano vertical.

b) COTA : Distancia del elemento hacia el plano horizontal.

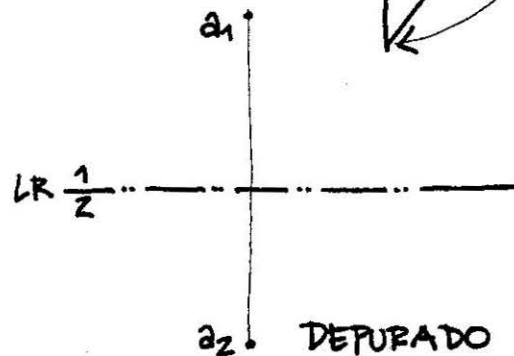
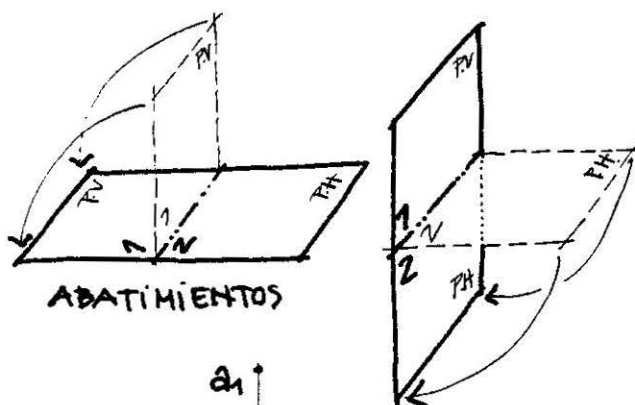
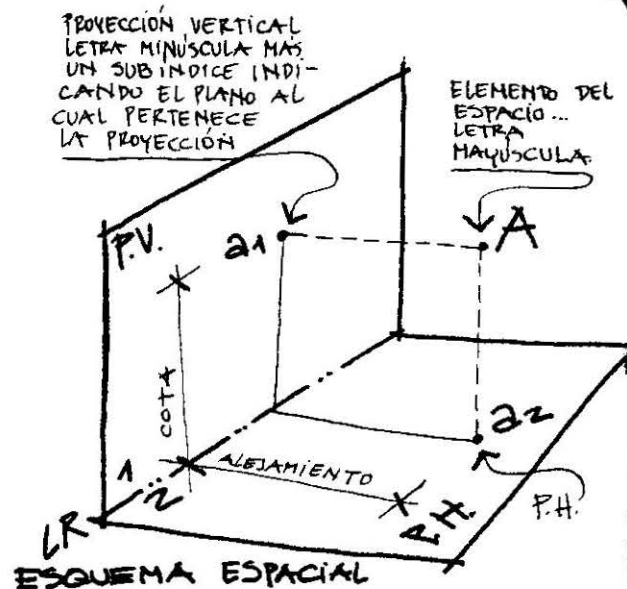
AUNQUE EN FORMA GENERAL USAREMOS EL CONCEPTO DE "COTA" PARA REFERIRNOS A TODAS LAS DISTANCIAS DE LOS ELEMENTOS RESPECTO A LOS PLANOS DE PROYECCIÓN.

2.3.8.- RELACION CONCEPTO ESPACIAL Y DEPURADO.

El esquema espacial es la representación tridimensional de un elemento, en cambio el depurado, es la representación bidimensional del elemento.

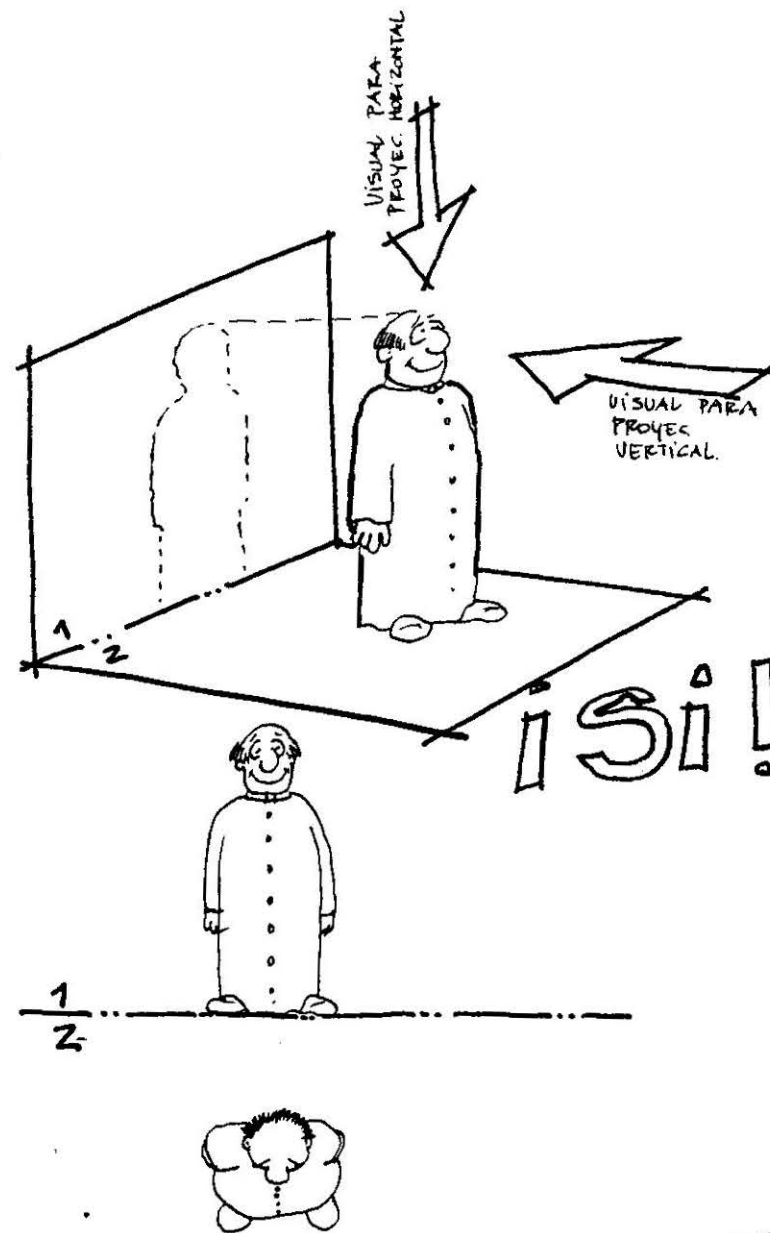
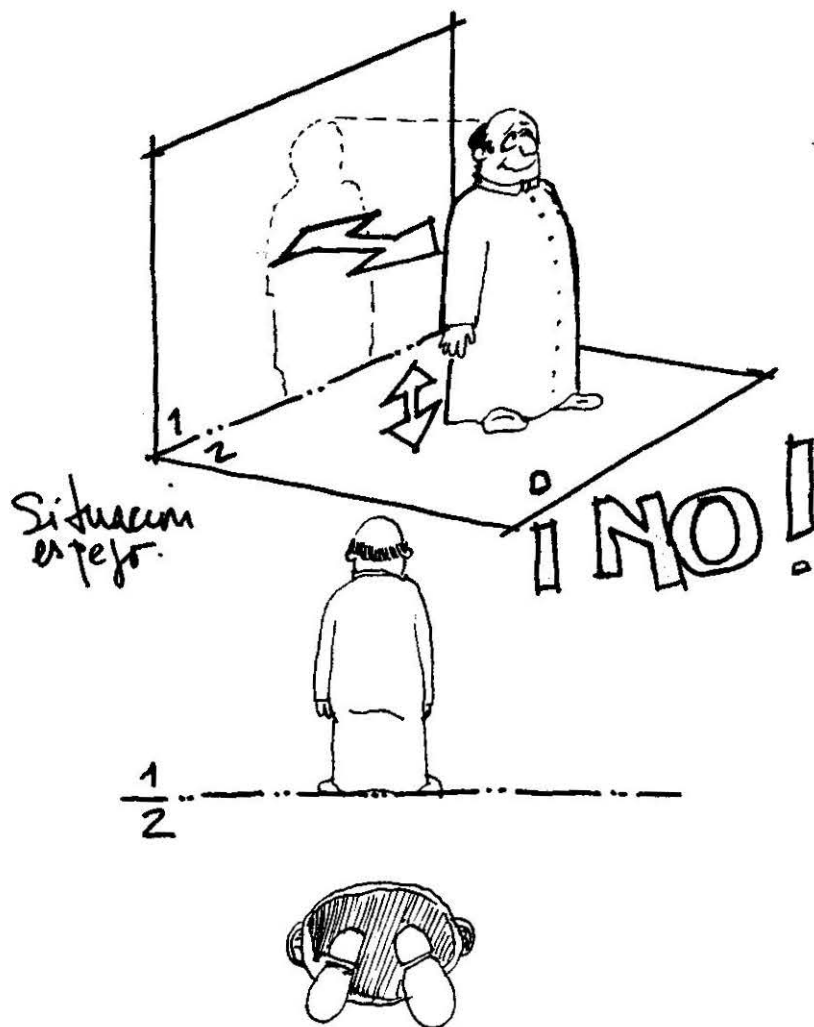
Una vez definido un elemento en el concepto espacial... esta "forma" tridimensional se transforma por medio del abatimiento de uno de sus planos, en una "forma" bidimensional.

En depurado las líneas proyectoras son $\perp$ a la L.R. y las proyecciones del elemento se definen con letra minúscula más un sub-índice definiendo el plano de proyección al cual pertenecen.



2.3.9.- CONDICIÓN PARTICULAR DEL CONCEPTO PROYECCIÓN.

Los planos de proyección no actúan como espejos, sino que proyectan la imagen que ve el observador.

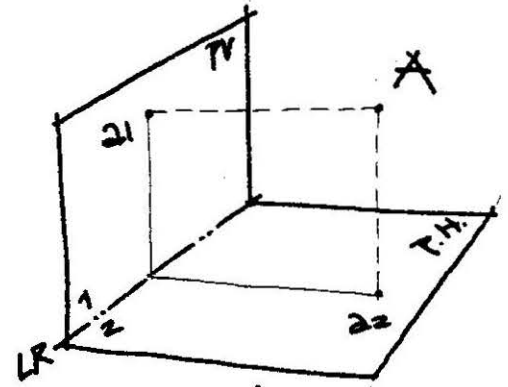


III.- REPRESENTACION DE PUNTOS.

EL PUNTO, ELEMENTO POR EXCELENCIA,
POSEE DIMENSION CERO.

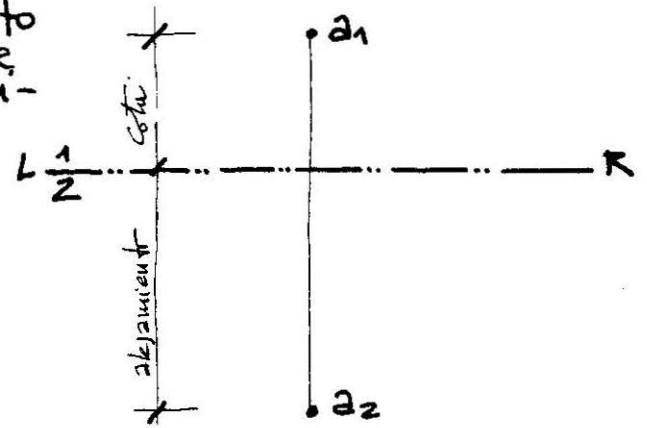
SE PUEDE DEFINIR COMO LA INTER-
SECCION DE DOS LINEAS RECTAS.

EN EL DEPURADO... UN PUNTO ES-
TARA DEFINIDO AL MENOS EN
DOS PROYECCIONES.



REPRESENTACION ESPACIAL

* la cota y alejamiento
no necesariamente
tienen igual magni-
tud.



REPRESENTACION DEPURADO.

3.1.- PROYECCIONES AUXILIARES.

Las podemos sub-dividir en: 3.1.1.- PROYECCIONES O VISTAS DE ELEVACION

3.1.2.- PROYECCIONES O VISTAS AUXILIARES INCLINADAS.

3.1.1.- PROYECCIONES O VISTAS DE ELEVACIÓN:

Es la clasificación general de las vistas, respecto a las cuales las líneas visuales del observador están o son paralelas al plano horizontal de proyección.

Esto significa que el observador puede tener un número infinito de posiciones en las cuales su línea visual permanece horizontal.

Se consideran dos clases de proyecciones de ELEVACIÓN.

- a) PROYECCIONES PRINCIPALES: que son la vertical o frontal, las laterales derecha e izquierda y la posterior.
- b) PROYECCIONES AUXILIARES: que son todas las proyecciones de elevación que no sean las principales.

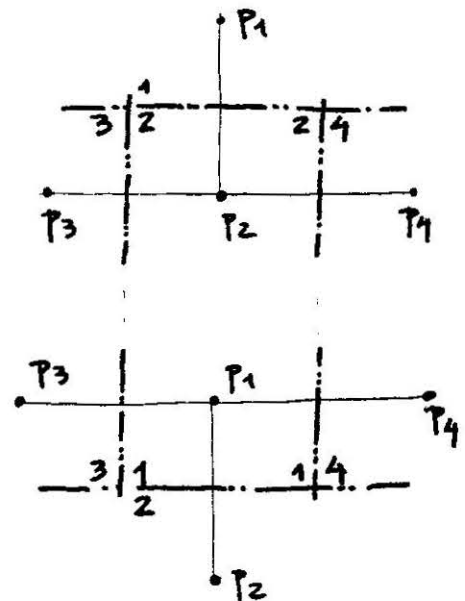
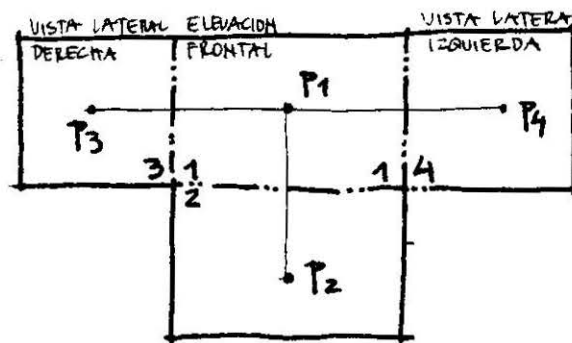
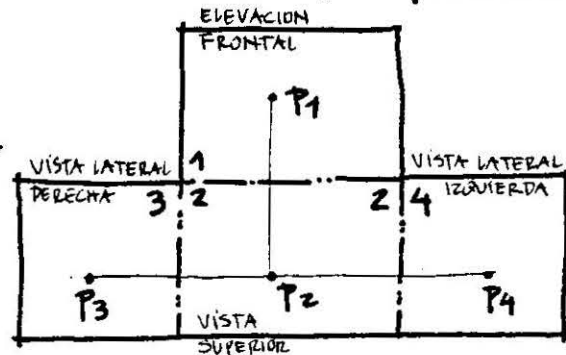
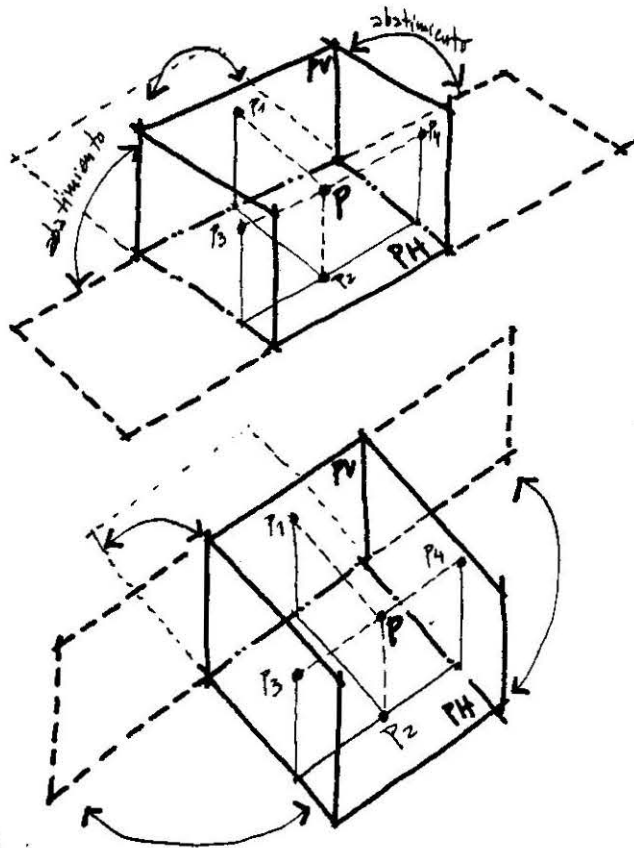
LAS CARACTERÍSTICAS PRINCIPALES DE LAS VISTAS DE ELEVACIÓN SON LAS SIGUIENTES:

- 1- Los planos de proyección de las vistas de elevación son siempre perpendiculares al plano horizontal de proyección.

2- Las líneas visuales que son perpendiculares a los planos de proyección de elevación son, por lo tanto siempre $\parallel$ al plano horizontal.

3- Como las líneas visuales en las vistas de elevación son siempre horizontales, pueden verse las distancias o "elevaciones". Esto significa que las distancias perpendiculares al plano de proyección horizontal... SIEMPRE SE VEN EN LAS VISTAS DE ELEVACION.

PROYECCIONES PRINCIPALES

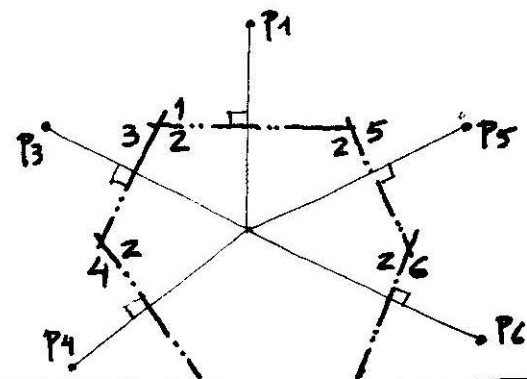
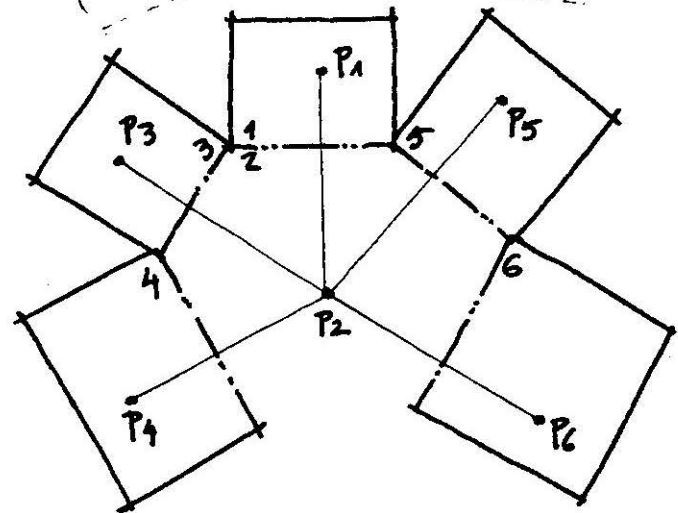
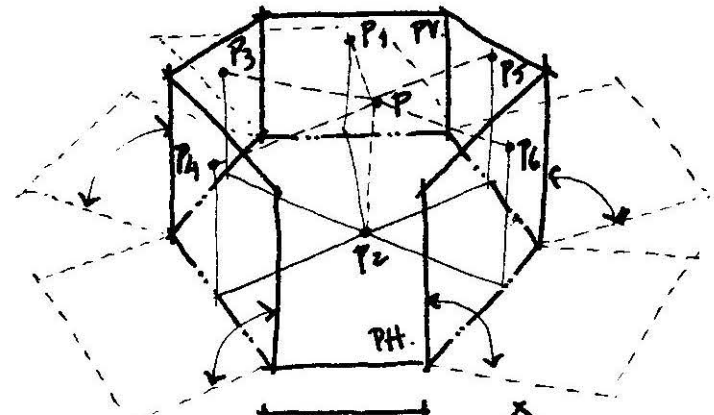


PROYECCIONES AUXILIARES.

La figura muestra una serie de planos de proyección que son perpendiculares al plano de proyección horizontal. Por definición estos planos son PLANOS DE PROYECCIÓN DE ELEVACIÓN. Uno de estos planos, el de elevación o de proyección vertical, se denota como tal (Plano 1), con lo cual automáticamente todos los demás planos de elevación en esta figura, se consideran planos auxiliares de proyección de elevación.

Plano de proyección de elevación abatido en un plano común con el plano de proyección horizontal.

Al resolver problemas en G.D. se elimina el contorno de los planos de proyección y solo se usan las líneas de Referencia para identificar a cada uno de ellos.

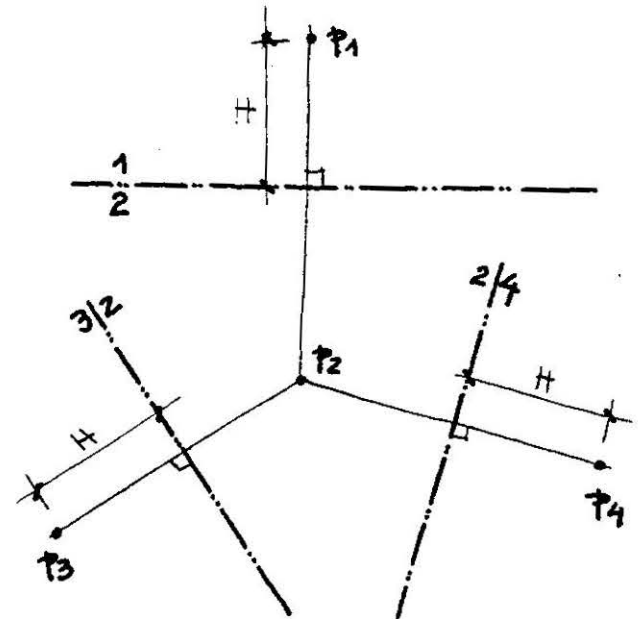


La figura muestra las proyecciones vertical, horizontal y auxiliares de un punto $\bar{P}$. Las líneas proyectoras de una vista a la otra son perpendiculares a la L.R. El punto $\bar{P}$ en el espacio está situado a una distancia "H" (Cota) del plano de proyección horizontal. Podemos ver esta distancia en todas las vistas de elevación, ya que vemos el plano de proyección horizontal como una arista en todas las vistas de elevación.

Supongamos que se conoce la proyección horizontal $\bar{P}_2$ y la proyección vertical $\bar{P}_1$ y que se desea determinar la vista auxiliar de elevación N°4 del punto $\bar{P}$.

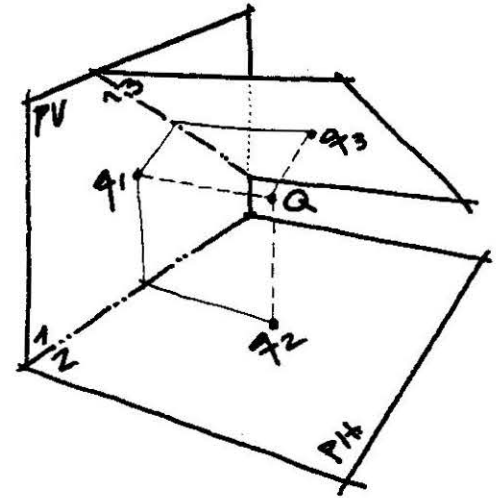
Se procede de la siguiente manera:

- Se traza una línea proyectora desde $\bar{P}_2$ perpendicular a la L.R. 2/4.
- En la vista de la proyección vertical (N°1), se mide la distancia perpendicular "H" de la L.R. 1/2 a la proyección vertical $\bar{P}_1$ (con compás).
- Se transfiere la distancia "H" (con el compás) a la vista auxiliar de elevación, midiéndola a lo largo de la línea proyectora perpendicularmente, a partir de la L.R. 2/4. El punto así localizado se denota con $\bar{P}_4$ y es la vista auxiliar de elevación buscada.

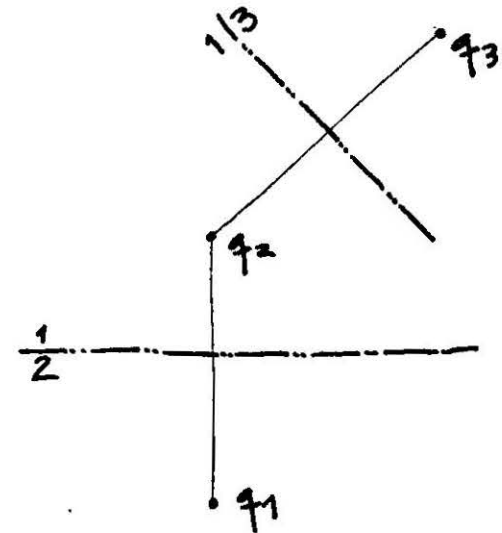


3.1.2.- VISTAS O PROYECCIONES AUXILIARES INCLINADAS.

Cuando las líneas visuales del observador no son horizontales ni verticales, sino inclinadas en un cierto ángulo, el plano de proyección que forma un ángulo de 90° con la línea visual y por lo tanto, también está inclinado respecto a los planos de proyección vertical y horizontal.



EL SISTEMA DE PROYECCIÓN QUE SE USA EN G.D. ESTÁ BASADO EN PLANOS DE PROYECCIÓN MUTUAMENTE PERPENDICULARES Y EN LÍNEAS PROYECTORAS QUE SON PERPENDICULARES A LOS PLANOS DE PROYECCIÓN.



IV.- REPRESENTACIÓN DE RECTAS.

DEFINICIÓN: ENTENDEMOS POR LINEA EN GENERAL, UNA SUCESIÓN DE PUNTOS, Y POR **LINEA RECTA** A AQUELLA EN QUE DICHA SUCESIÓN, REPRESENTA LA "distancia mínima entre dos puntos", QUE POR DEFINICIÓN ES LA DISTANCIA ENTRE ELLOS. LA LINEA RECTA SE CONSIDERA EN UNA SOLA DIMENSIÓN: LONGITUD. TAMBIÉN SE DEFINE COMO LA RESULTANTE DE LA INTERSECCIÓN DE DOS PLANOS.

LA LINEA RECTA ES INFINITA (ilimitada en su longitud), REQUIERE PARA QUEDAR DETERMINADA, CONOCER DOS PUNTOS CUALESQUIERA DE ELLA.

LA RECTA COMO TODO ELEMENTO EN EL ESPACIO, ESTARÁ DEFINIDA EN EL DIBUJO A LO MENOS EN DOS PROYECCIONES.

4.1.- TIPOS DE RECTAS:

ESTARÁN DEFINIDAS SEGÚN SEA SU RELACIÓN DE PARALELISMO, PERPENDICULARIDAD O ÁNGULO QUE FORMEN CON LOS PLANOS DE PROYECCIÓN.

a.- GENERICAS

b.- ESPECIALES

b.1.- HORIZONTALES

b.2.- VERTICALES

b.3.- DE PERFIL

b.4.- HORIZONTAL-FRONTAL

RECTAS HORIZONTALES

RECTAS DE FUGA.

RECTAS VERTICALES O FRONTALES

RECTAS DE PUNTA.

4.2.- RELACIONES PUNTO-RECTA.

- a) PUNTO CONTENIDO EN UNA RECTA
- b) PUNTO FUERA DE UNA RECTA.

4.3.- VERDADERA MAGNITUD DE UNA RECTA.

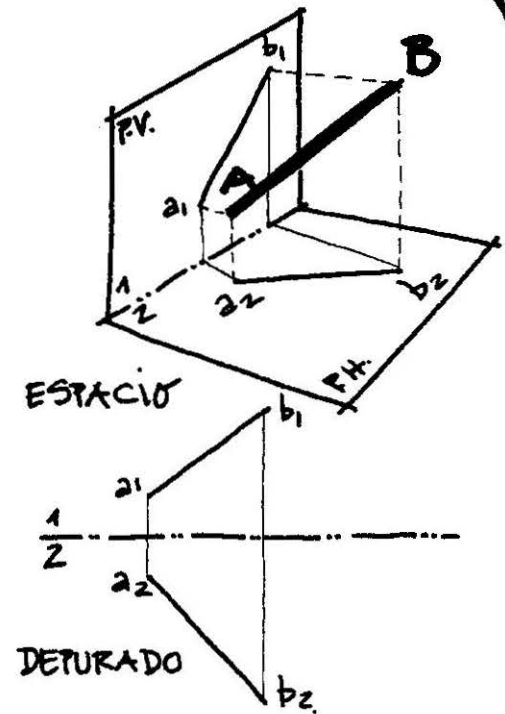
4.4.- RELACIONES ENTRE RECTAS

- a) RECTAS QUE SE CORTAN
 - a.1) PERPENDICULARES.
 - a.2) NO $\perp$.
- b) RECTAS QUE SE CRUZAN
 - b.1) ORTOGONALES
 - b.2) NO ORTOG.
- c) RECTAS PARALELAS.

4.1.a) RECTAS GENERICAS.

DEFINICION ESPACIAL: Son aquellas rectas que no tienen relación especial de paralelismo o perpendicularidad con los planos de proyección vertical y horizontal.

DEFINICION DEPURADO: Son aquellas rectas cuyas proyecciones no tienen relación especial de paralelismo o perpendicularidad con la LINEA DE REFERENCIA.



4.1.b) RECTAS ESPECIALES.

SON TODAS AQUELLAS RECTAS QUE MANTIENEN UNA RELACION DE PARALELISMO O PERPENDICULARIDAD CON LOS PLANOS DE PROYECCION VERTICAL Y HORIZONTAL.

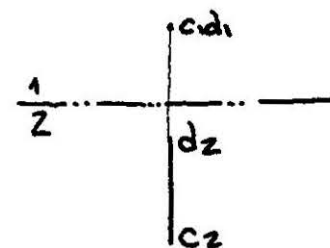
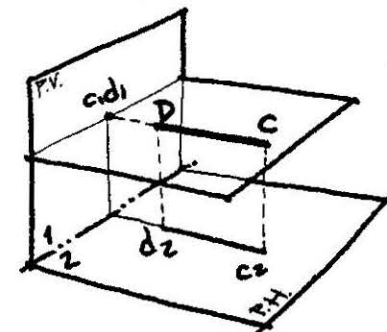
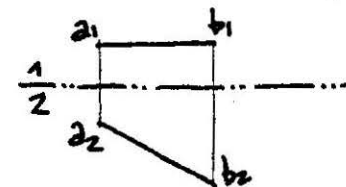
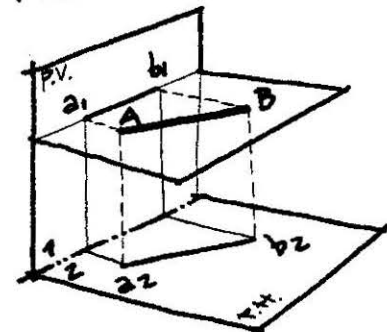
b.1.- RECTAS HORIZONTALES.

SON AQUELLAS RECTAS QUE ESTAN CONTENIDAS EN UN PLANO PARALELO AL PLANO HORIZONTAL Y PERPENDICULAR AL PLANO VERTICAL DE PROYECCIÓN.

RECTA HORIZONTAL:

DEF. ESPACIAL: Son aquellas rectas paralelas al plano horizontal de proyección, sin tener relación especial de paralelismo o perpendicularidad con el plano vertical de proyección.

DEF. DEPURADO: Son aquellas cuya proyección vertical es paralela a la L.R. y su proyección horizontal no tiene relación especial con la L.R.



RECTA DE FUGA:

DEF. ESPACIAL: Son aquellas rectas paralelas al plano horizontal y perpendicular al plano vertical.

DEF. DEPURADO: Son aquellas cuya proyección horizontal es perpendicular a la L.R. y su proyección vertical aparece como un punto.

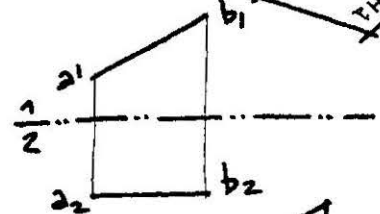
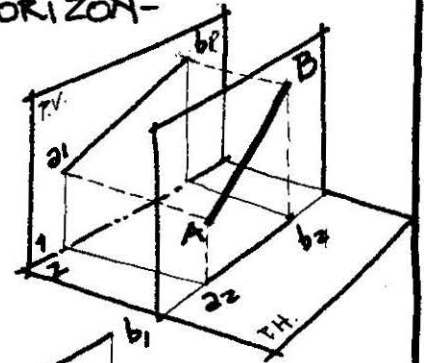
b.2.- RECTAS VERTICALES.

SON AQUELLAS RECTAS QUE ESTÁN CONTENIDAS EN UN PLANO PARALELO AL PLANO VERTICAL DE PROYECCIÓN Y PERPENDICULAR AL PLANO HORIZONTAL DE PROYECCIÓN.

RECTA VERTICAL O FRONTAL: Frontal

DEF. ESPACIAL: Son aquellas rectas paralelas al plano vertical, sin tener relación especial ($\perp$ o $\parallel$ m.r.) con el plano horizontal.

DEF. DEPURADO: Son aquellas cuya proyección horizontal es paralela a la L.R. y su proyección vertical no tiene relación especial con la L.R.

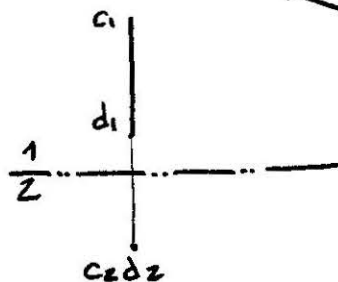
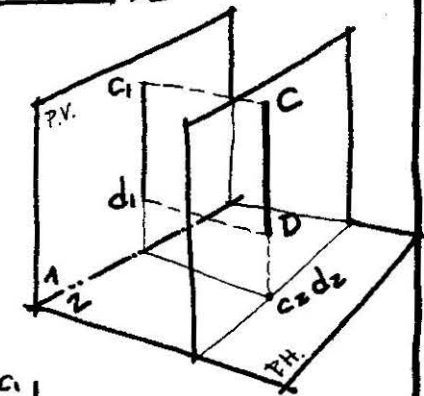


Recta Vertical

RECTA DE PUNTA:

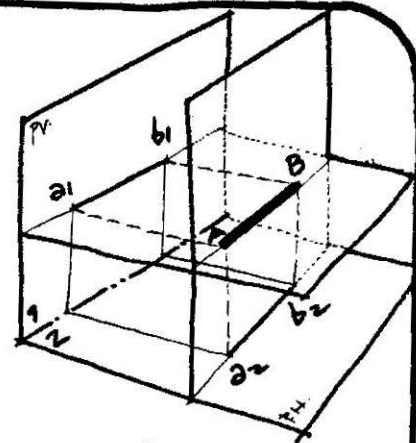
DEF. ESPACIAL: Son aquellas rectas paralelas al plano vertical y perpendicular al plano horizontal de proyección.

DEF. DEPURADO: Son aquellas cuya proyección vertical es perpendicular a la L.R. y su proyección horizontal aparece como un punto.

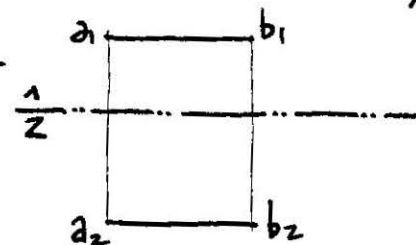


b.3.- RECTA HORIZONTAL-FRONTAL:

DEF. ESPACIAL: SON AQUELLAS RECTAS ESPECIALES QUE ESTAN CONTENIDAS SIMULTANEAMENTE EN PLANOS $\parallel$ A LOS PLANOS DE PROYECCION. SON AQUELLAS RECTAS QUE SON PARALELAS A AMBOS PLANOS DE PROYECCION.



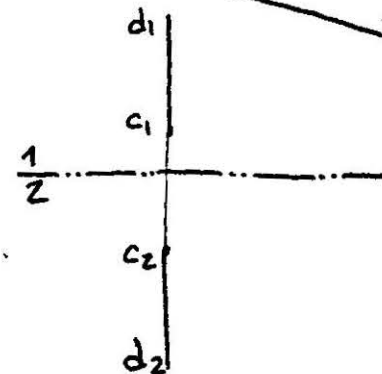
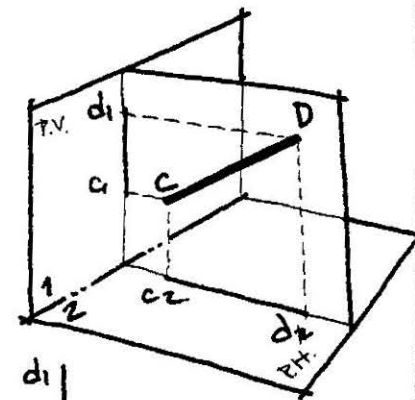
DEF. DEPURADO: SON AQUELLAS CUYAS PROYECCIONES VERTICALES Y HORIZONTALES SON PARALELAS A LA L.R.



b.4.- RECTA DE PERFIL:

DEF. ESPACIAL: SON AQUELLAS CONTENIDAS EN UN PLANO QUE ES PERPENDICULAR A AMBOS PLANOS DE PROYECCION.

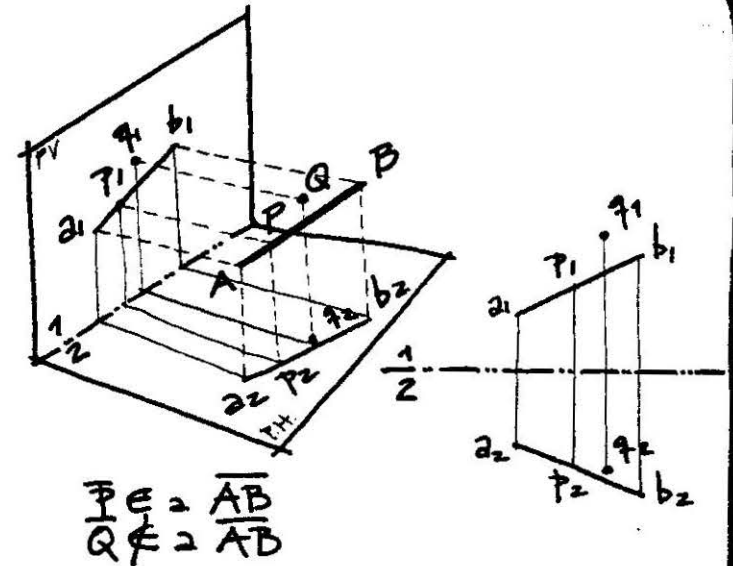
DEF. DEPURADO: SON AQUELLAS CUYAS PROYECCIONES VERTICALES Y HORIZONTALES SON PERPENDICULARES A LA L.R.



4.2-RELACIONES PUNTO-RECTA.

a) PUNTO CONTENIDO EN UNA RECTA:
Para que un punto esté contenido en una recta debe tener sus proyecciones sobre las respectivas proyecciones de la recta.

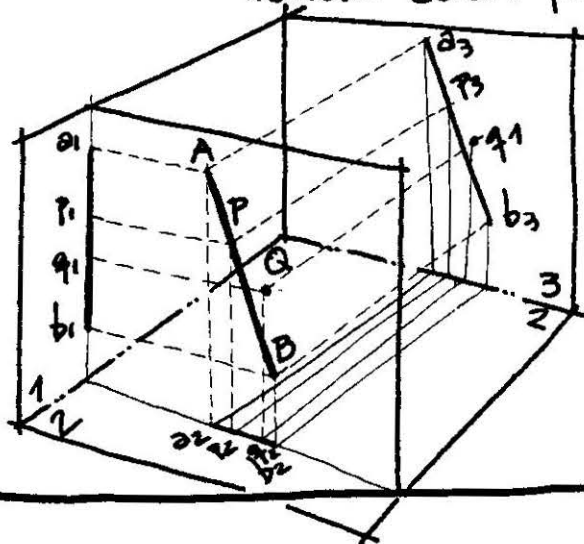
b) PUNTO FUERA DE UNA RECTA:
Si las proyecciones de un punto no se encuentran contenidas en sus homólogas de una recta, ese punto no pertenece a ella.



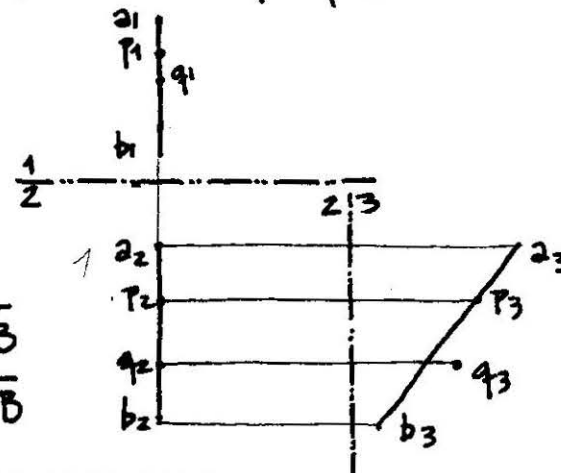
CASO ESPECIAL... Punto contenido en una recta de perfil.

Cuando las proyecciones de un punto se encuentran sobre las proyecciones de una recta de perfil... No se puede concluir que el punto pertenece a la recta.

En estos casos necesariamente se tiene que utilizar un tercer plano de proyección auxiliar para visualizar la pertenencia o no pertenencia de un punto a una recta de perfil.



$$\begin{array}{l} \overline{P} \in \overline{AB} \\ \overline{Q} \notin \overline{AB} \end{array}$$

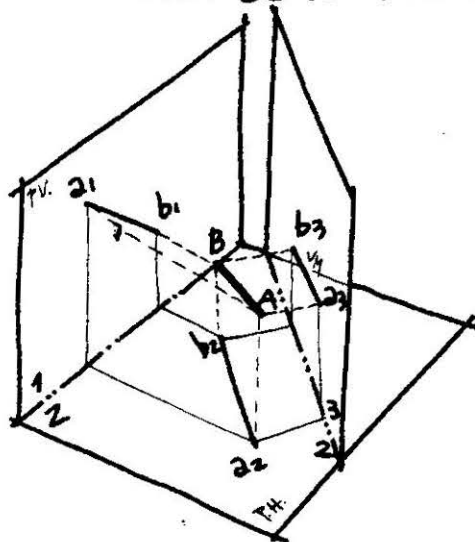
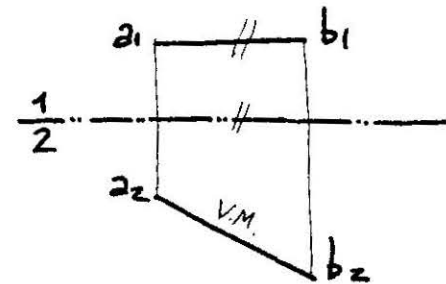
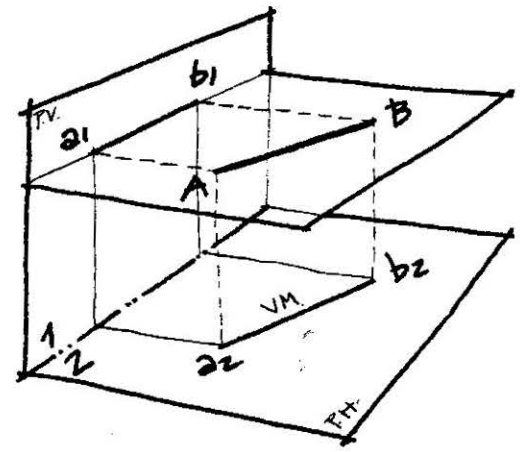


4.3.- VERDADERA MAGNITUD DE UNA RECTA.

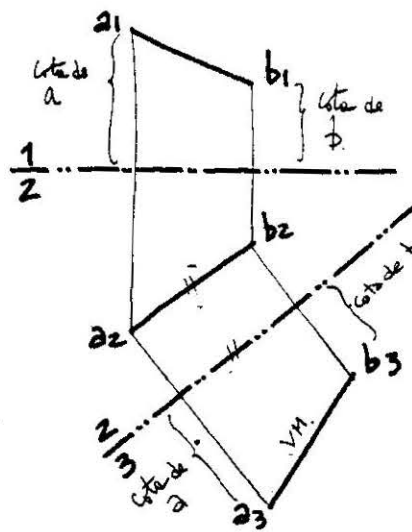
Recta en Verdadera Magnitud es aquella recta en el espacio, en la que, a lo mejor, en una de sus proyecciones, puede efectuarse una medición exacta de su longitud.

Para que esto suceda, la recta debe encontrarse paralela a un plano de proyección, quedando así una proyección paralela a L.R. y la otra proyección en Verdadera Magnitud. (V.M.).

Si se desea conocer la V.M. de una recta genérica, se trazará un plano auxiliar de proyección paralelo a ella, en el cual se encontrará la proyección de la V.M. de la recta.



L.R. $\frac{2}{3} \parallel a_2b_2$.



METODO PARA LLEVAR DOS RECTAS GENÉRICAS A VERDADERA MAGNITUD.

PASOS: El objetivo es llegar a una proyección en que una de las rectas esté como de "punta" y la otra genérica
Cualquier plano de proyección auxiliar que tracemos siempre la recta que está de punta saldrá en V.M. ...
para tener ambas en V.M. bastará con trazar un plano $\parallel$ a la recta que está genérica.

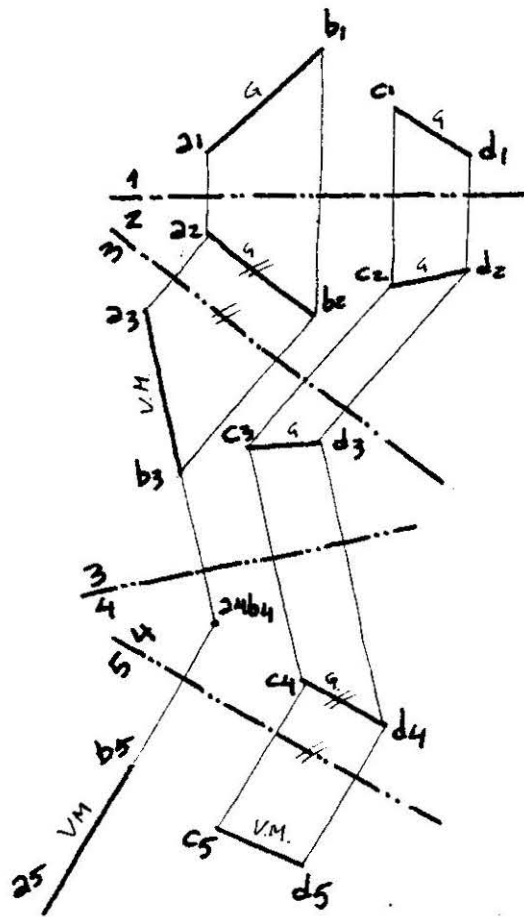
a) Podemos llevar cualquiera de las dos a una proyección de punta.

Por Ej. $\overline{AB}$.

Se lleva $\overline{AB}$ a V.M. trazando plano $3/3 \parallel$ a a_2b_2 . (c_2d_2 sigue genérica).

b) Se lleva a_3b_3 (en V.M.) a proyección de punta, trazando plano $3/4 \perp$ a a_3b_3 .

c) En proyección 4 teniendo $\overline{AB}$ de punta y $\overline{CD}$ genérica. se traza plano $4/5 \parallel$ a c_4d_4 , obteniendo así en proyección 5 ambas rectas en V.M.



44.- RELACIONES ENTRE RECTAS.

2) RECTAS QUE SE CORTAN.

- Dos rectas se cortan cuando tienen un punto en común.
- Dos rectas que se cortan generan un plano.

Definición de purador: Dos rectas se cortan cuando el punto de intersección de las proyecciones horizontales y verticales de una recta se encuentran sobre una misma línea proyectiva.

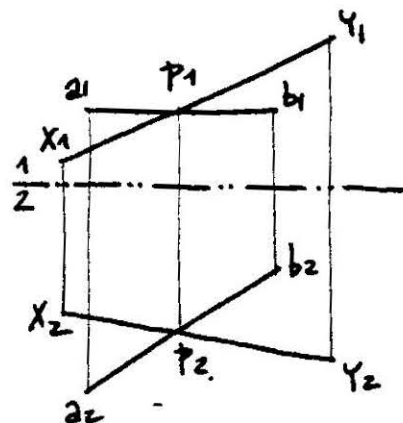
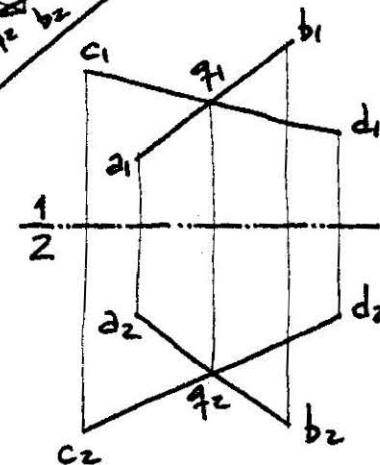
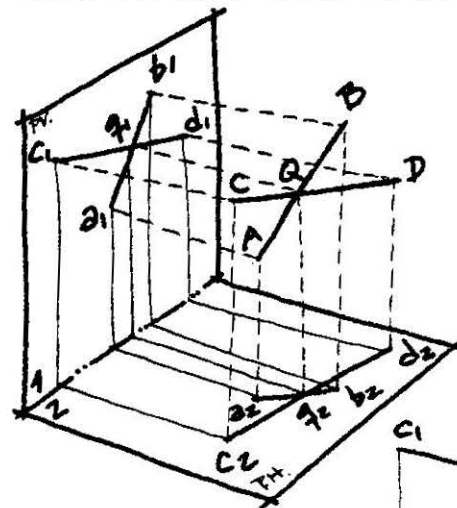
Ejercicio: Dada una recta horizontal $\overline{AB}$ se pide una recta $\overline{XY}$ genérica que la corte en el punto $\overline{P}$.

MEMORIA DEPURADO:

- Se dibuja las proyecciones verticales y horizontales de la recta horizontal $\overline{AB}$.
- Se dibuja el punto $\overline{P}$ que $\in \overline{AB}$, dicho punto será el punto de $\cap$ de la recta $\overline{XY}$ en $\overline{AB}$.
- Por $\overline{P}$ ($\overline{P_1}$ y $\overline{P_2}$) se trazan las proyecciones vertical y horizontal de la recta genérica $\overline{XY}$ que corta a $\overline{AB}$.

MEMORIA ESPACIAL:

Existen infinitas rectas genéricas que cortan a $\overline{AB}$ en el punto $\overline{P}$.



RECTAS PERPENDICULARES:

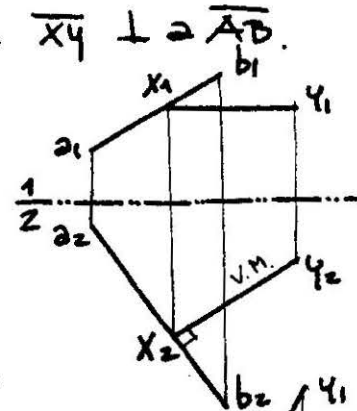
DOS RECTAS SON PERPENDICULARES CUANDO SE CORTAN FORMANDO UN ANGULO DE 90° .

EN DEPURADO DOS RECTAS SON PERPENDICULARES CUANDO SE CORTAN FORMANDO UN ANGULO DE 90° . El ángulo se visualiza cuando al menos una de las proyecciones de las rectas está en Verdadera Magnitud.

EXERCICIO: DADA UNA RECTA GÉNÉRICA $\overline{AB}$. Se pide una recta $\overline{XY} \perp \overline{AB}$.

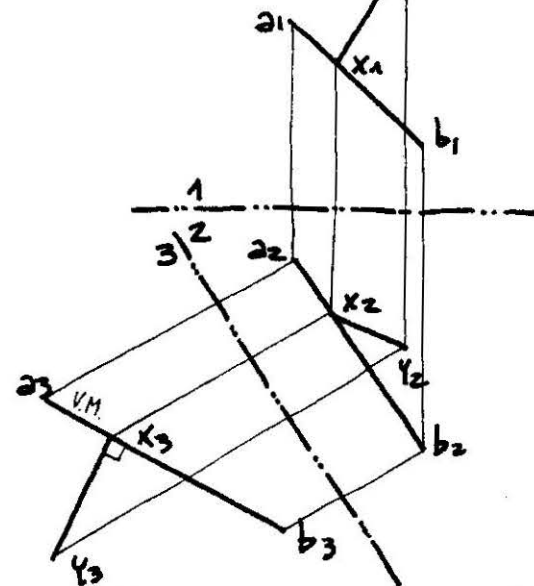
MÉTODO I (2 proyecciones).

- Se dibuja proyec. horizontal y vertical de la recta genérica.
- Se ubica un punto ($\bar{x}$) que $\in \overline{AB}$.
- En una de las proyecciones (en este caso P.H) se dibuja la proyección horizontal de la recta $\overline{XY}$, cuidando que este a 90° de a_2b_2 y se supone que $\overline{X_2Y_2}$ está en V.H.
- En proyección vertical a partir de $\bar{x}_1$, se traza $\overline{X_2Y_2} \parallel$ a l.R. obteniendo así la recta solución.



MÉTODO II (3 proyecciones).

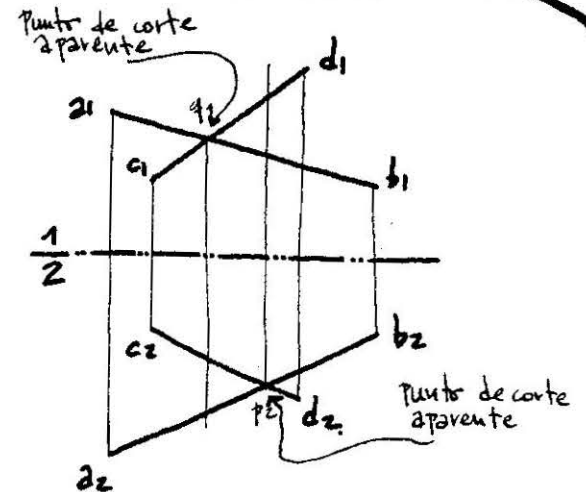
- Se dibuja proyec. horizontal y vertical de $\overline{AB}$.
- Se encuentra la V.M. de $\overline{AB}$ en proyección 3.
- En proyección 3 se traza $\overline{X_3Y_3} \perp a_3b_3$. Cuidando definir el punto de corte (en este caso X).
- Se dibuja $\overline{X_2Y_2}$ cuidando que el punto $\bar{x}_2$ coincida en la misma línea proyectora desde $\bar{x}_3$ hasta que corte a_2b_2 .
- Se dibuja proyección 1 tomando cotas del plano 3.



1.- RECTAS QUE SE CRUZAN:

DOS RECTAS, YA SEAN GENERICAS O ESPECIALES, SE CRUZAN CUANDO NO DEFINEN PLANO AL NO TENER UN PUNTO EN COMUN.

Def. Depurador: las proyecciones del punto de corte aparente, no coinciden en la misma línea proyectora.



RECTAS ORTOGONALES.

Dos rectas son ortogonales cuando se cruzan en el espacio formando un ángulo de 90° medido sobre un plano paralelo a ellas.

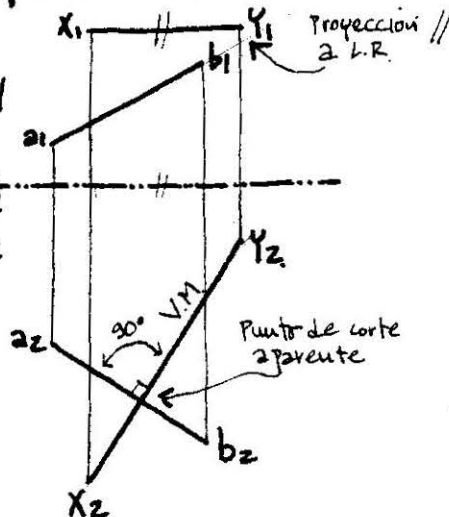
Definición Depurador. Dos rectas son ortogonales cuando se cruzan formando un ángulo de 90° . El ángulo de 90° se visualiza cuando al menos una de las proyecciones de una recta está en V.M.

EJERCICIO: DADA $\overline{AB}$ gen. Se pide $\overline{XY}$ ORTOGONAL A ELLA.

a) Se dibuja proyec. vertical y horizontal de $\overline{AB}$.

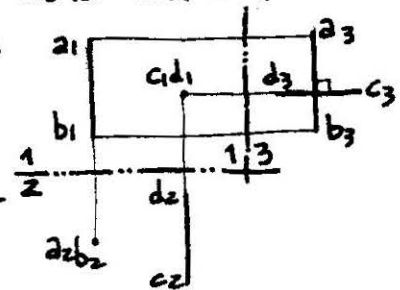
b) En proyec. 2 se traza $X_2Y_2 \perp a_2b_2$ y se supone en V.M.

c) En proyec. 1 se traza $X_1Y_1 \parallel a_1b_1$ a L.R.

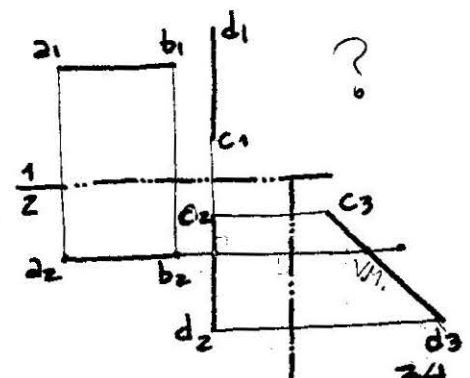


CASOS DE ORTOGONALIDAD DE RECTAS ESPECIALES.

a) Las rectas de punta y de fuga, son ortogonales entre sí, excepto cuando se cortan que pasan a ser perpendiculares.



b) Las rectas horizontal-frontal son ortogonales con las rectas de perfil, excepto cuando se cortan que pasan a ser perpendiculares.



C.-RECTAS PARALELAS.

DOS RECTAS SON PARALELAS CUANDO SUS PUNTOS MANTIENEN UNA MISMA DISTANCIA MEDIDAS PERPENDICULARMENTE.

DOS RECTAS PARALELAS NO SE CORTAN.

LOS PLANOS QUE LAS CONTIENEN SON $\parallel$ S ENTRE SI.

DEFINICION DEPURADO: DOS RECTAS SON PARALELAS...

a) Cuando sus proyecciones, del mismo nombre, sobre los planos de proyección, son $\parallel$ s.

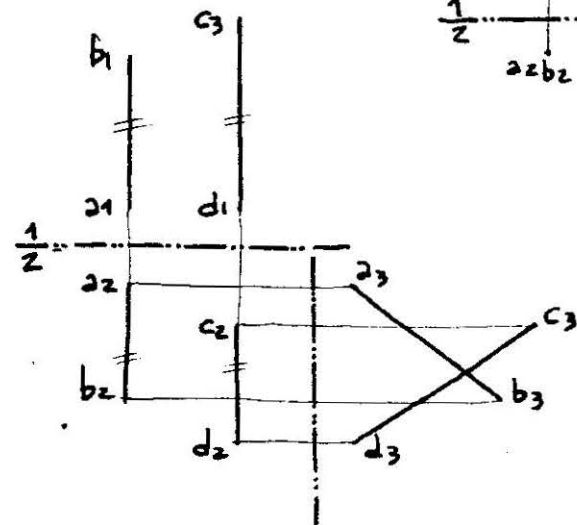
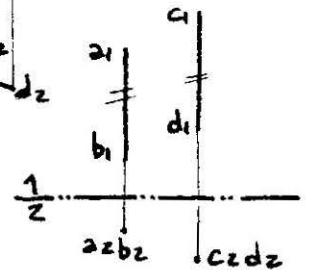
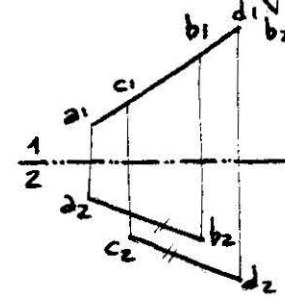
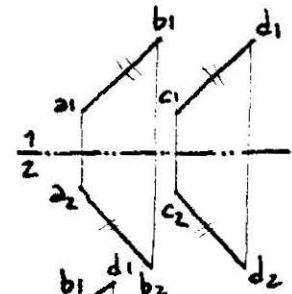
b) Cuando dos proyecciones de un mismo nombre se confunden y las otras dos aparecen $\parallel$ s.

c) Cuando dos proyecciones de un mismo nombre aparecen como punto y las otras dos aparecen $\parallel$ s.

CASO PARTICULAR:

RECTA DE PERFIL: Dos rectas de perfil son necesariamente paralelas en el espacio.

Aunque aparentemente tanto a la proyección vertical como horizontal aparecen paralelas, es necesario utilizar un tercer plano de proyección auxiliar para visualizar la existencia o no del paralelismo.



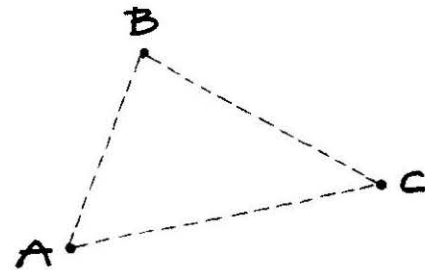
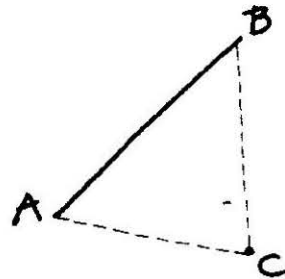
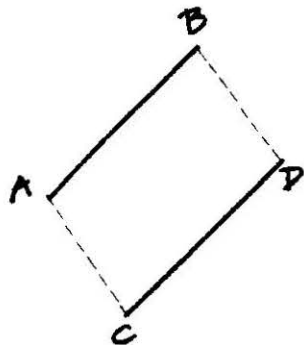
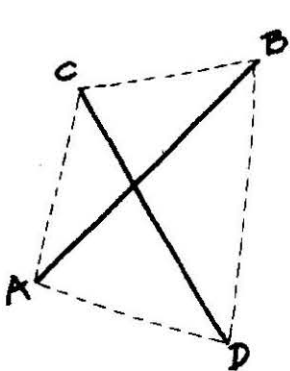
V.- REPRESENTACION DE PLANOS.

DEFINICIÓN: EL PLANO ES UN ELEMENTO GEOMÉTRICO QUE POSEE DOS DIMENSIONES ... largo y ancho.

Dos puntos generan una recta, si agregamos un tercer punto, no colineal con los otros dos puntos, tendremos la segunda dimensión ... EL PLANO.

REPRESENTACIÓN DEL PLANO ... Un plano puede conformarse por:

- a) Dos rectas que se intersectan.
- b) Dos rectas paralelas.
- c) UNA recta y un punto fuera de ella.
- d) Por tres puntos no colineales.
(que no estén en línea recta).

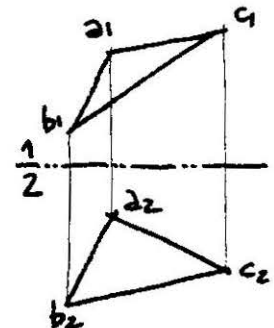
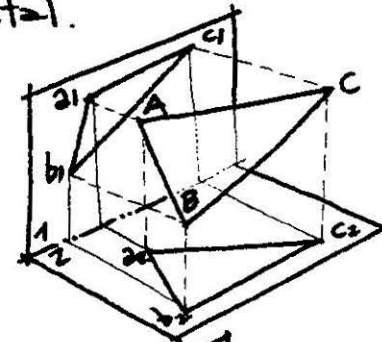


5.1-TIPOS DE PLANOS...

Segun su relación de paralelismo o perpendicularidad con los planos de proyección vertical y horizontal.

a) PLANO GENERICO:

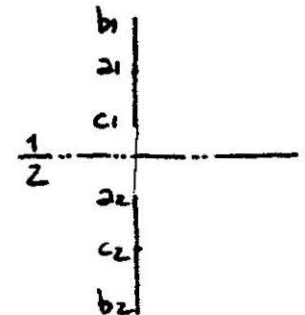
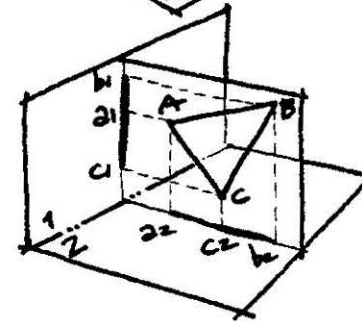
Es aquel que no guarda relación especial de paralelismo o perpendicularidad con los planos de proyección.



b) PLANO DE TERFIL.

Es aquel que es perpendicular a los planos de proyección vertical y horizontal.

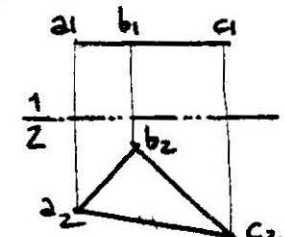
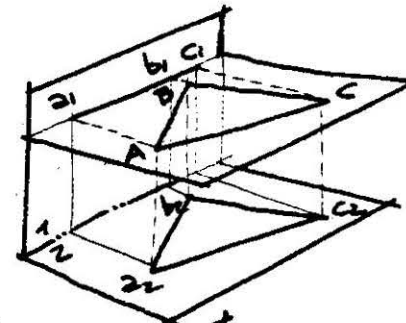
def. depurado: es aquel cuyas proyecciones vertical y horizontal son $\perp$ a l.l.R.



c) PLANO HORIZONTAL:

Es aquel que es paralelo al plano de proyección horizontal y perpendicular al plano de proyección vertical.

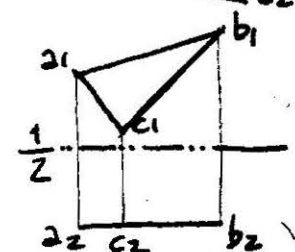
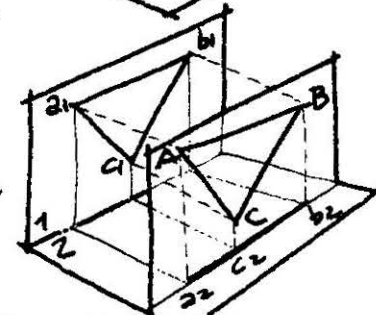
def. depurado: es aquel cuya proyección vertical aparece de perfil y $\parallel$ a l.l.R. y su proyección horizontal en V.M.



d) PLANO VERTICAL O FRONTAL

Es aquel que es paralelo al plano de proyección vertical y perpendicular al plano de proyección horizontal.

def. depurado: es aquel cuya proyección horizontal aparece de perfil y $\parallel$ a l.l.R. y su proyección vertical en V.M.



5.2.- PROYECCIONES ESPECIALES DE UN PLANO:

A PARTIR DE UN PLANO GENERICO, PODEMOS OBTENER UNA POSICIÓN ESPECIAL DE ÉL, EN LA QUE PODEMOS VERLO DE, PERFIL O BIEN EN VERDADERA MAGNITUD EN ALGUNA PROYECCIÓN.

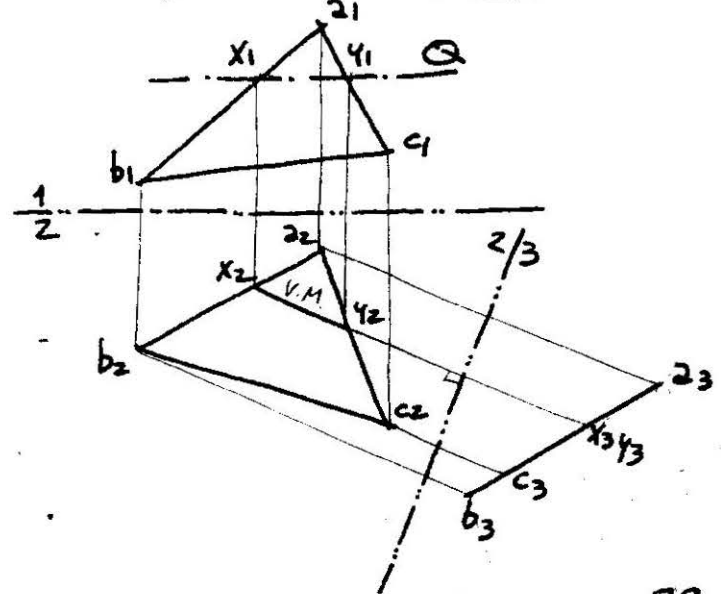
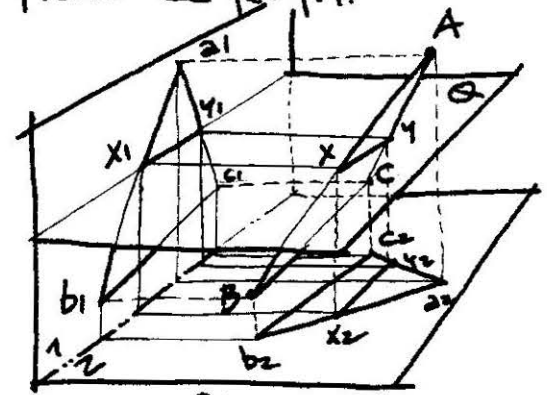
a) PROYECCIÓN DE PERFIL:

Para tener la proyección de perfil de un plano, se deberá encontrar una recta que pertenezca al plano y ésta llevarla a una proyección de punta, obteniendo así el plano de perfil.

METODO I.- Método del plano auxiliar. <tres proyecciones>

- 1.- Se traza plano horizontal $\bar{Q}$ que intersecta al plano ABC , generando una recta de intersección $\bar{XY}$, cuya proyección horizontal esté en V.M.
- 2.- La recta $\bar{XY} \in \bar{ABC}$... si la vemos de punta, el plano ABC lo veremos de perfil.
 $\bar{X_2Y_2}$ en V.M. la llevamos de punta trazando un plano aux. de proyec. $3/3 \perp$ a $\bar{X_2Y_2}$.
- 3.- Tomando cotas del plano 1 hacia L.R $1/2$, dibujamos en proyec. 3, obteniendo así el plano ABC de perfil.

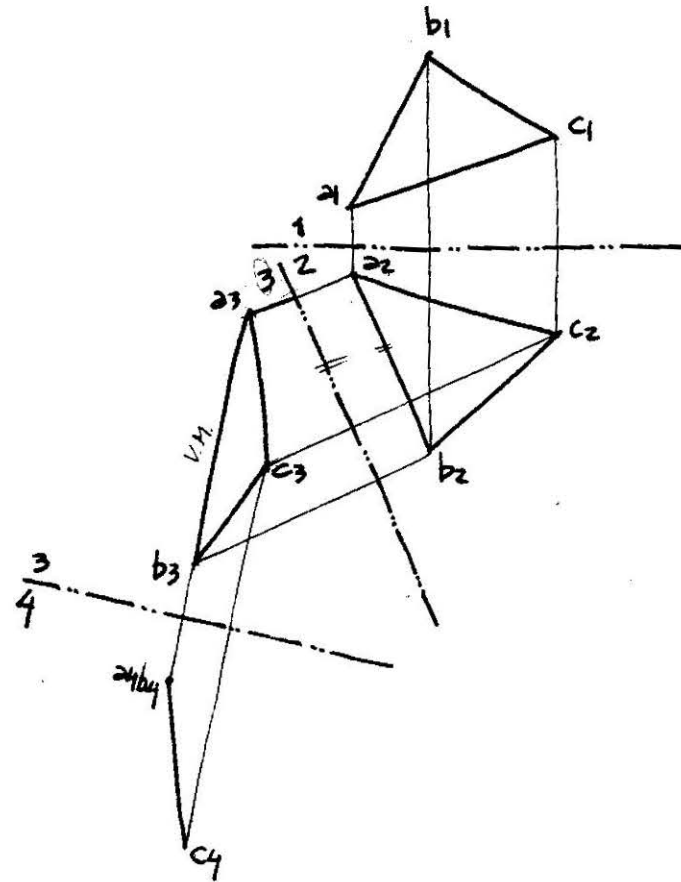
* Se recomienda tomar la cota mayor (a_1-LR) y cota menor (b_1-LR) para dibujar el plano ABC de perfil en proyección 3.



METODO II - Metodo "carretero" (4 proyecciones).

Se trata de llevar una recta definida del plano a una proyección de punta, donde por construcción el plano aparece como de perfil.

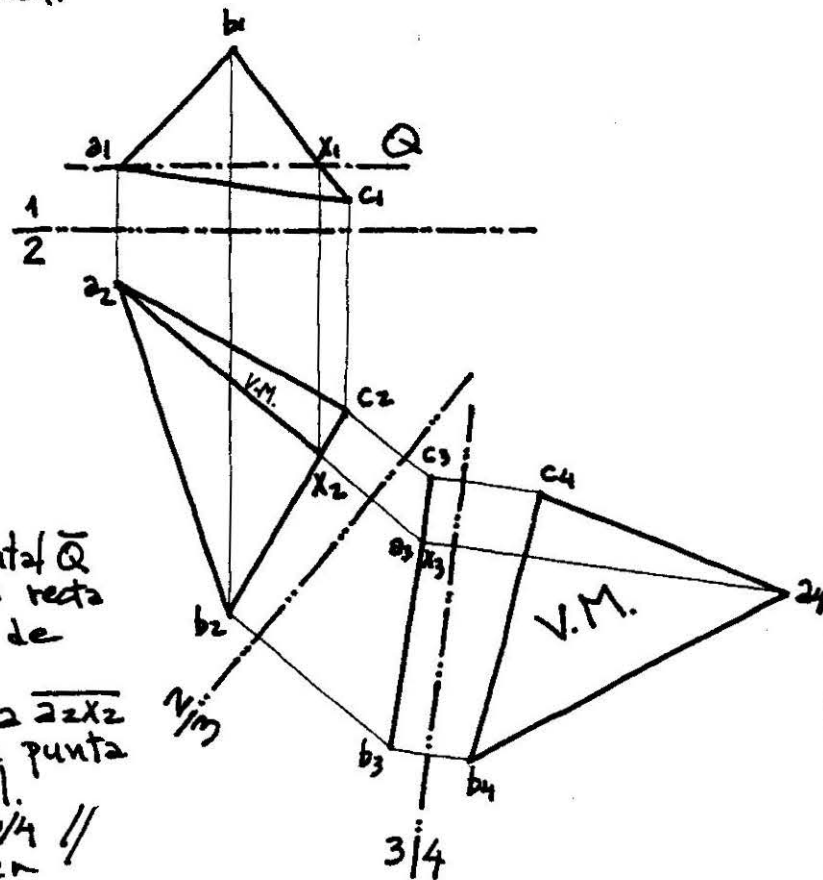
- a) Se define una recta conocida del plano para llevarla de punta.
en este caso $\overline{AB}$.
- b) Se traza L.R. $\parallel$ a a_2b_2 , llevando el plano a proyección 3.
- c) En proyección 3... a_3b_3 está en V.M.
Se traza L.R. $\perp$ a a_3b_3 .
- d) En proyección 4.... a_4b_4 parece de punta y el punto c_4 colineal a él, lo que implica que tenemos al plano ABC en una proyección de perfil.



b. PROYECCIÓN EN VERDADERA MAGNITUD DE UN PLANO.

Un plano se encuentra en V.M. cuando podemos efectuar una medición exacta de los elementos que lo componen.

Para lograr la proyección en V.M. de un plano genérico es necesario obtener una proyección de dicho plano en un plano auxiliar de proyección paralelo a él. Con este fin se ubica el plano genérico primero de perfil y luego se traza un plano auxiliar de proyección paralelo, generando así una proyección en la que aparece en Verdadera Magnitud.

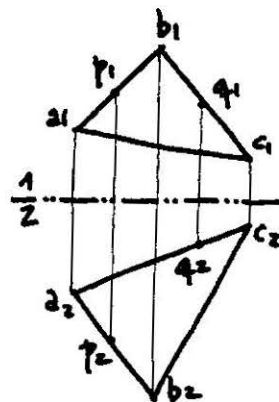
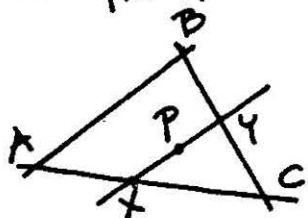


MEMORIA DEFURADO.

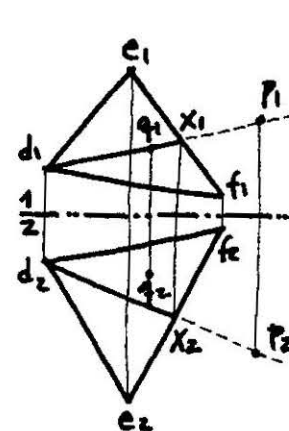
- a) En proyección 1 se traza plano horizontal $\bar{Q}$ que al intersectar al plano ABC genera recta $\bar{AX}$. Dicha proyección horizontal de esta recta está en V.M. ($22X_2$).
- b) En proyección 2 se traza L.R. $3/3 \perp 22X_2$ lo que implica que $23X_3$ estará de punta y luego obtenemos el plano de perfil.
- c) En proyección 3 trazamos L.R. $3/4 \parallel 22X_2$ de perfil para obtener en proyección 4 el plano en una proyección de V.M.

5.3.-RELACION PUNTO-PLANO.

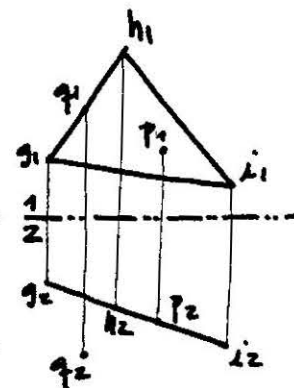
Para que un punto pertenezca a un plano debera, por lo menos, pertenecer a una recta de ese plano.



$P \in \overline{ABC}$ porque $P \in \overline{AB}$
 $Q \notin \overline{ABC}$



$P \in \overline{ABC}$ porque $P \in \overline{DX}$
 $Q \notin \overline{ABC}$



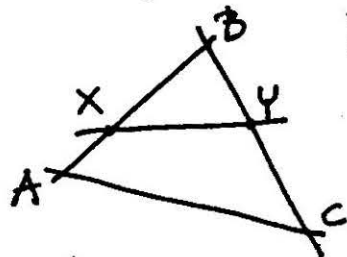
$P \in \overline{ABC}$
 $Q \notin \overline{ABC}$

5.4.-RELACION RECTA-PLANO

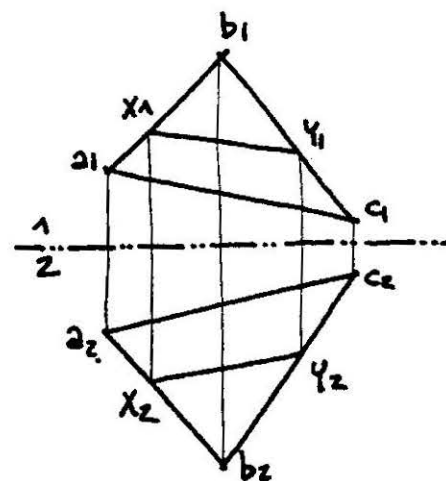
- PERTENENCIA RECTA PLANO
- PENETRACION RECTA EN PLANO
- RECTA PERTENDICULAR A PLANO
- RECTA PARALELA A PLANO.

a) PERTENENCIA RECTA EN PLANO.

Para que una recta pertenezca a un plano al menos dos puntos de dicha recta deben pertenecer al plano.



$\overline{XY} \in \overline{ABC}$
 porque $\overline{X} \in \overline{AB}$
 $\overline{Y} \in \overline{BC}$.



b.) PENETRACION RECTA EN PLANO.

Una recta no paralela a un plano, siempre lo intersectará en un punto, llamándose este PUNTO DE PENETRACION de la recta en el plano.

Existen dos métodos para encontrar la penetración de una recta en un plano.

b.1) Método en dos proyecciones o método del plano auxiliar.

b.2) Método en tres proyecciones o método del plano de perfil.

b.1) METODO DEL PLANO AUXILIAR.

Ejercicio: Dado $\overline{ABC}$ y $\overline{MN}$ genéricos.

Se pide el pto. de penetración de $\overline{MN}$ en $\overline{ABC}$.

Se traza un plano que contenga a $\overline{MN}$. DICHO PLANO ($\bar{\alpha}$) $\cap$ a $\overline{ABC}$ GENERANDO LA RECTA $\overline{DE}$. EL PUNTO DE $\cap$ ENTRE $\overline{MN}$ y $\overline{DE}$, SERA EL PUNTO DE PENETRACION PEDIDA.

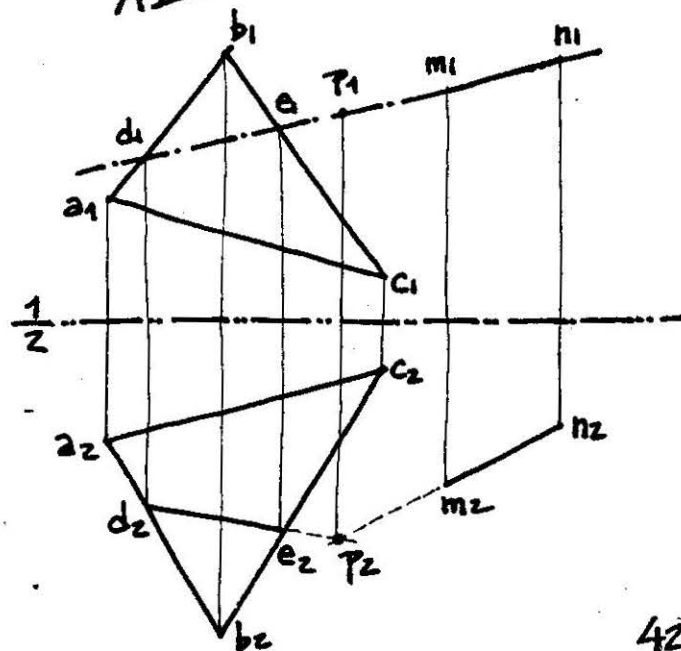
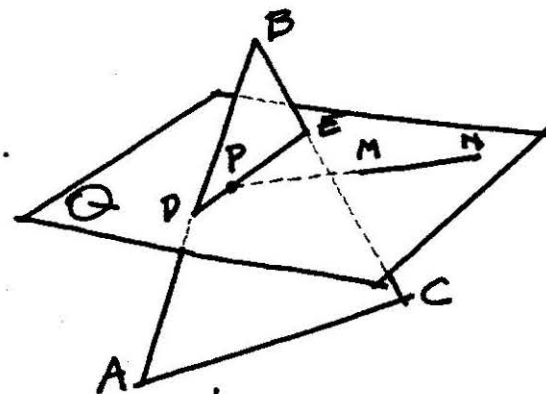
DEPORADO:

a) En proyec. 1 se traza plano $\bar{\alpha}$ de perfil que contiene a $\overline{m_1 n_1}$, este plano $\cap$ a $a_1 b_1 c_1$ generando $\overline{d_1 e_1}$.

b) Se dibuja proyección horizontal de $\overline{DE}$ ($\overline{d_2 e_2}$).

c) Se busca la intersección de $\overline{d_2 e_2}$ con $\overline{m_2 n_2}$ encontrándose $\overline{p_2}$ (proyección horizontal del punto de penetración).

d) Se traza línea proyectora a partir de $\overline{p_2}$ hacia la proyección vertical, hasta que $\cap$ el plano $\bar{\alpha}$ de perfil encontrándose $\overline{p_1}$ (pto. de penetración en proyección vertical).

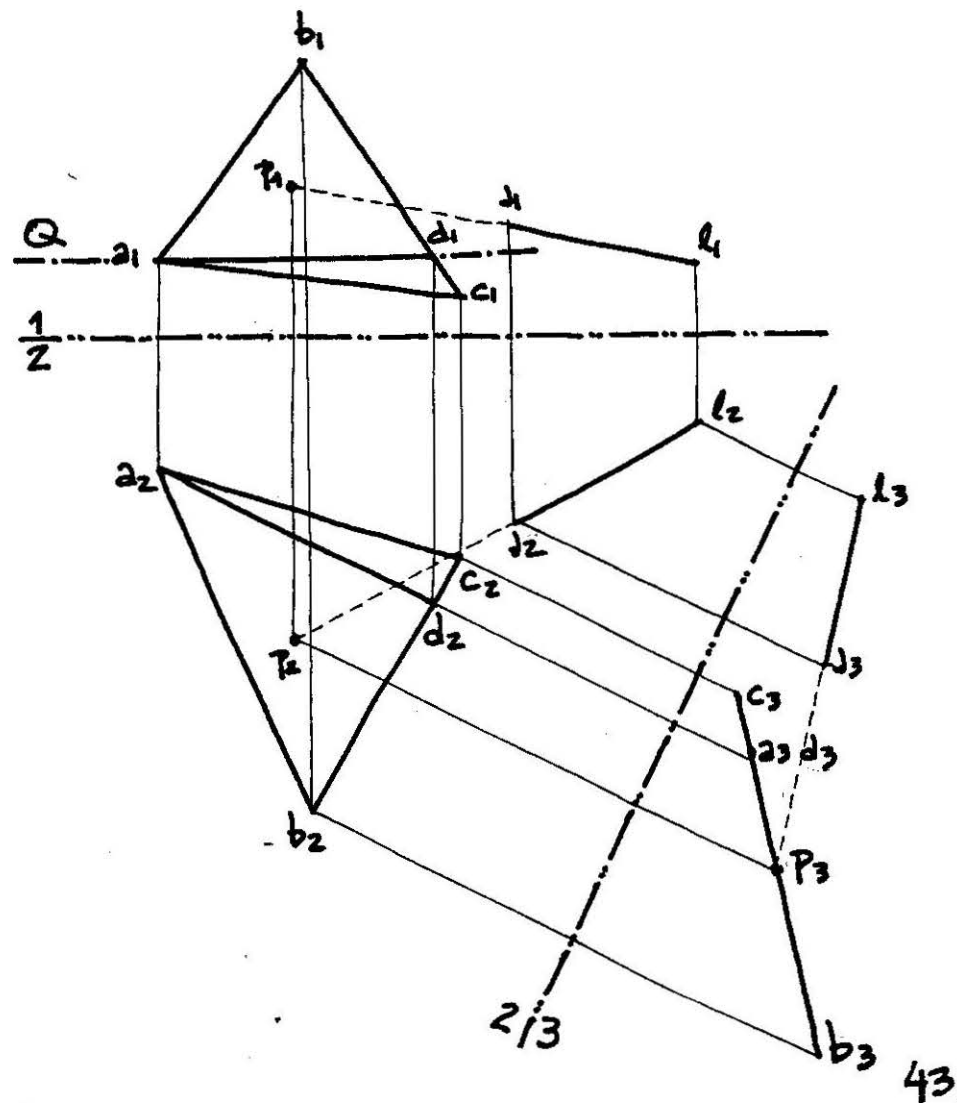


b.z.- MÉTODO DEL PLANO DE TERFIL.

EXERCICIO: DADO $\overline{ABC}$ Y $\overline{JL}$ GENÉRICOS
SE PIDE EL PUNTO DE PENE-
TRACIÓN DE $\overline{JL}$ EN $\overline{ABC}$.

Memoria de pautado:

- Se lleva $\overline{ABC}$ de perfil.
- En proyección 3, teniendo el plano de perfil ($a_3b_3c_3$), se prolonga l_3j_3 hasta que intersecte a el plano de perfil, definiéndose el punto P_3 . a partir de P_3 se traza línea proyectora hacia el plano 2 de proyección.
- En proyección 3 se prolonga l_2j_2 hasta que intersecte la línea proyectora construida a partir de P_3 encontrándose así P_2 .



C-RECTAS PERPENDICULAR A UN PLANO.

Son las que penetran a un plano en un ángulo recto. $\langle 90^\circ \rangle$.

Una recta es perpendicular a un plano cuando ésta es perpendicular u ortogonal a dos rectas de dicho plano y que no son paralelas entre ellas.

EXISTEN DOS MÉTODOS PARA ENCONTRAR UNA RECTA $\perp$ A UN PLANO.

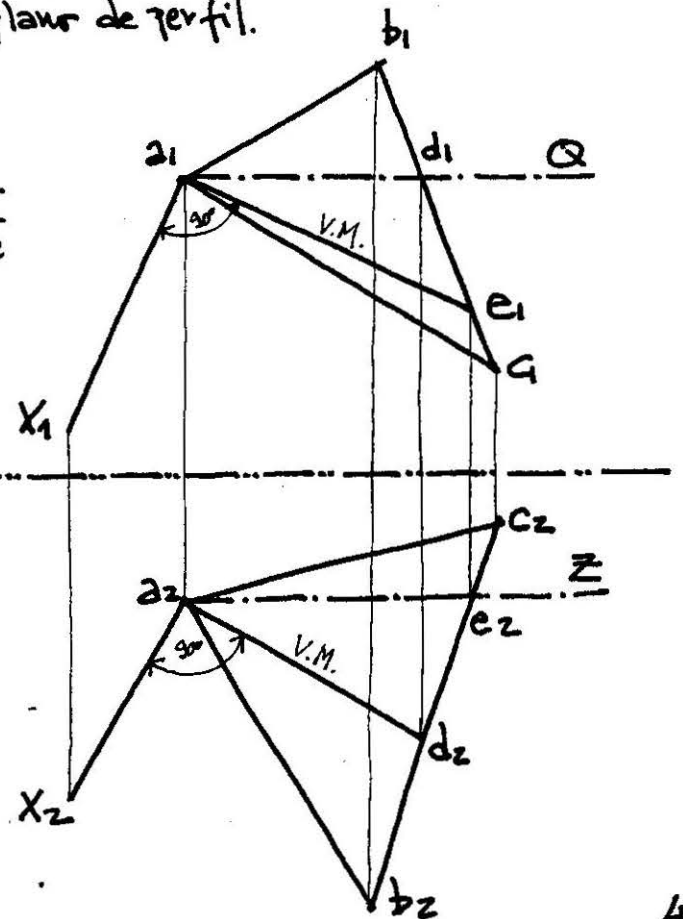
- C.1.- Método en dos proyecciones o método de los planos auxiliares.
- C.2.- Método en tres proyecciones o método del plano de perfil.

C.1.- MÉTODO DE LOS PLANOS AUXILIARES.

Un teorema geométrico nos dice que si una recta es $\perp$ a un plano, es $\perp$ a todas las rectas contenidas en el plano. Por lo tanto, la recta $\perp$ que se pide aparecerá $\perp$ a cualquier recta en V.M. situada en el plano, que se muestre en esa vista particular.

- a) Se traza plano horizontal $\bar{\alpha}$, definiendo en Proyec. 2 recta $a_2 d_2$ en V.M.
- b) Se traza plano vertical $\bar{z}$, definiendo en Proyec. 1 recta $a_1 e_1$ en V.M.
- c) En proyección 1, se traza $a_1 x_1 \perp a_1 e_1$.
- d) En proyección 2, se traza $a_2 x_2 \perp a_2 d_2$.

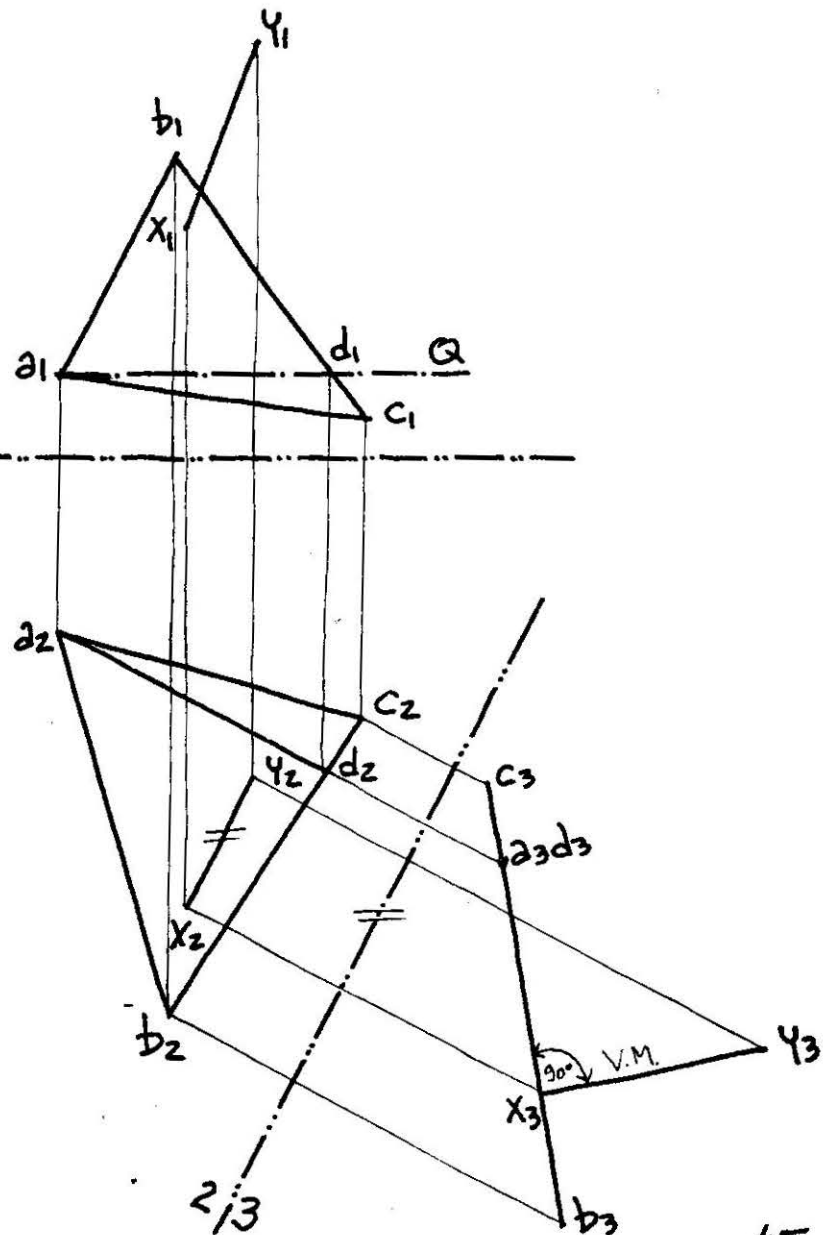
La recta $\overline{AX}$ es perpendicular a $\overline{ABC}$ porque es $\perp$ a dos rectas no paralelas del plano. $\langle \overline{AD}$ y $\overline{AE} \rangle$.



C.2.- MÉTODO DEL PLANO DE PERFIL.

Una proyección que muestre el plano de perfil, mostrara la verdadera magnitud de una recta $\perp$ al plano. Puesto que esta proyección muestra la distancia perpendicular en su V.M., la proyección relacionado (proyec. 2) mostrara la línea $\perp$, paralela a L.R. 2/3. El punto de penetración de la recta $\perp$ al plano, sera evidente en la vista de perfil del plano y su localización en otras vistas se determinara por simple proyección.

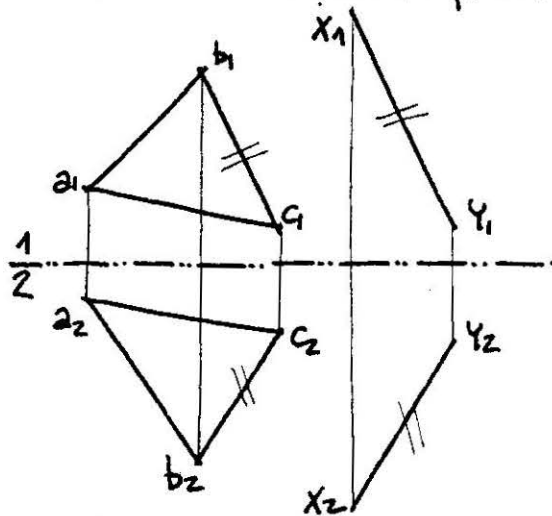
- Se lleva $\overline{ABC}$ de perfil a proyección 3.
- En proyección 3, se traza $X_3Y_3 \perp$ a $a_3b_3c_3$ de perfil.
Se supone X_3Y_3 en V.M. y formando 90° con plano de perfil.
- Se dibuja en proyec. 2, $X_2Y_2 \parallel$ a L.R. 2/3.



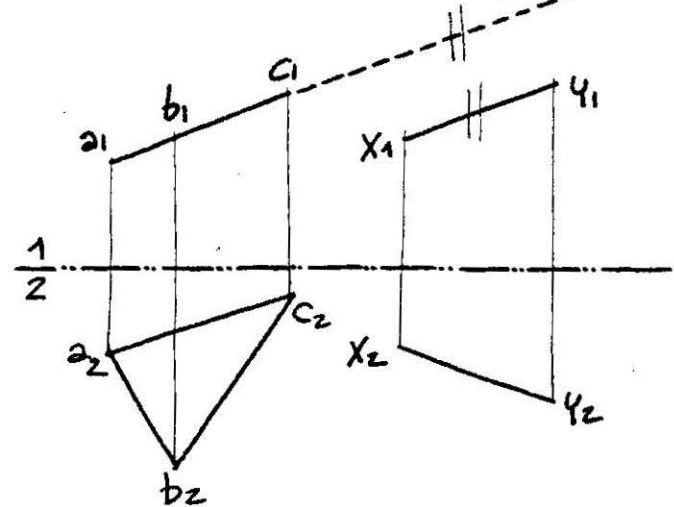
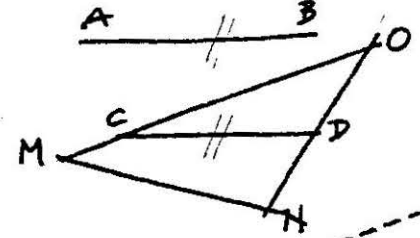
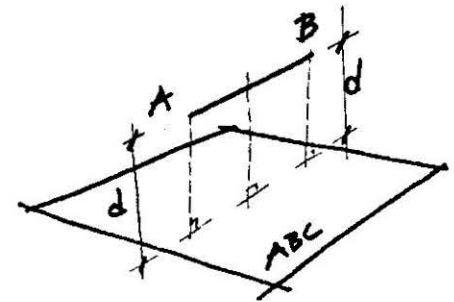
d.- RECTA PARALELA A UN PLANO.

Una recta es paralela a un plano, cuando todos los puntos de la recta son equidistantes del plano, medido perpendicularmente.

Para que una recta sea paralela a un plano es necesario y suficiente que sea paralela con una recta de dicho plano, siempre y cuando la recta pedida no este contenida en el plano.



$\overline{X_1Y_1} \parallel \overline{b_1c_1}$, porque la proyección vertical X_1Y_1 es paralela a b_1c_1 y en proyección horizontal, X_2Y_2 es paralela a b_2c_2 . $\Rightarrow \overline{X_1Y_1} \parallel \overline{b_1c_1}$ porque $\overline{X_1Y_1}$ es $\parallel$ a $\overline{b_1c_1}$ que pertenece a ΔABC .



$\overline{X_1Y_1} \parallel \overline{b_1c_1}$, pues en la proyección vertical, teniendo a ΔABC de perfil, se puede visualizar el paralelismo.

5.5.- RELACIONES PLANO-PLANO.

2) INTERSECCION ENTRE DOS PLANOS

2.1.- Intersección planos genéricos.
2.2.- Intersección planos perpendiculares.

b) PLANOS PARALELOS.

a) INTERSECCION DE PLANOS GENERICOS.

Uno de los problemas más comunes es el de determinar la línea de intersección de dos planos. Como se mencionó anteriormente, la extensión de un plano se considera infinita y, por tanto, la línea de intersección entre dos planos también se considerará de longitud indefinida. En cambio, si una superficie plana particular es "CERRADA" o limitada, la recta de intersección entre éste y otro plano se considerará también limitada.

La intersección entre dos planos genéricos es una línea recta, común a los dos planos. Por lo tanto, dos puntos cualesquiera, comunes a ambos planos, determinarán la posición de la línea recta de intersección.

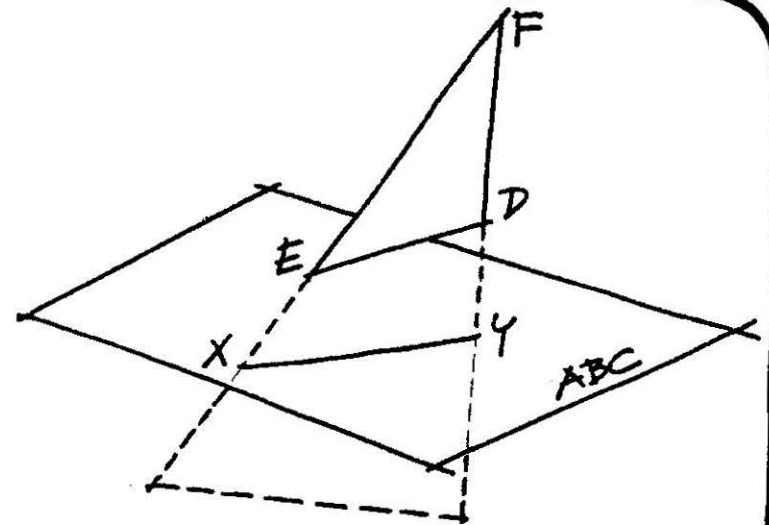
En estos apuntes de G.D. consideraremos dos métodos para encontrar la recta de intersección de dos planos genéricos.

2.1.1.- MÉTODO DE TRES PROYECCIONES O MÉTODO DEL PLANO DE PERFIL.

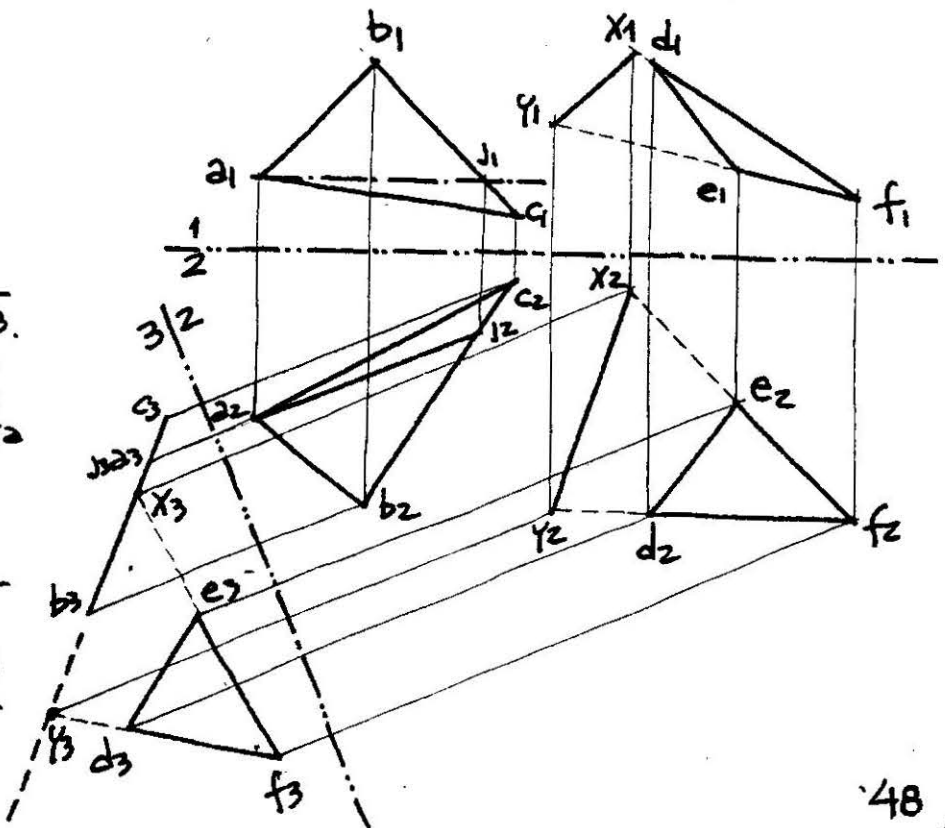
2.1.2.- MÉTODO DE DOS PROYECCIONES O MÉTODO DE LOS PLANOS AUXILIARES.

2.1.1.- INTERSECCION DE DOS PLANOS GENERICOS. METODO DEL PLANO DE PERFIL.

Dos planos no //s se cortarán a lo largo de una línea recta que es común a ambos planos. Puesto que la dirección de una línea recta se determina por dos puntos cualesquiera de la recta, es necesario localizar dos puntos que sean comunes a ambos planos. Una vista de perfil de uno de los planos mostrará los puntos de penetración donde dos rectas pertenecientes al otro plano intersectan al plano de perfil.



- a) Se lleva ABC de perfil.
- b) En proyec. 3. se busca la penetración de dos rectas que pertenezcan a DEF en el plano ABC de perfil.
- f_3e_3 penetra a $a_3b_3c_3$ definiendo X_3 .
- f_3d_3 penetra a $a_3b_3c_3$ definiendo Y_3 .
- c) En proyec. 2, se prolonga f_2e_2 hasta que se $\cap$ con la línea proyectora de X_3 , definiéndose X_2 .
Se prolonga f_2d_2 hasta que se $\cap$ con línea proyectora de Y_3 , definiéndose Y_2 .
- d) Los puntos X_2Y_2 son comunes a ambos planos, por tanto están en la recta de intersección de ambos planos.

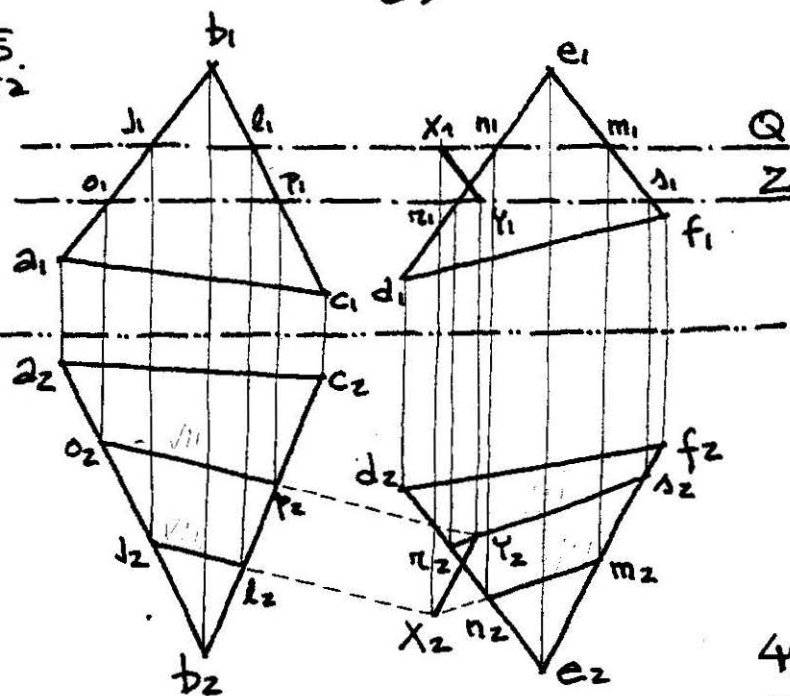
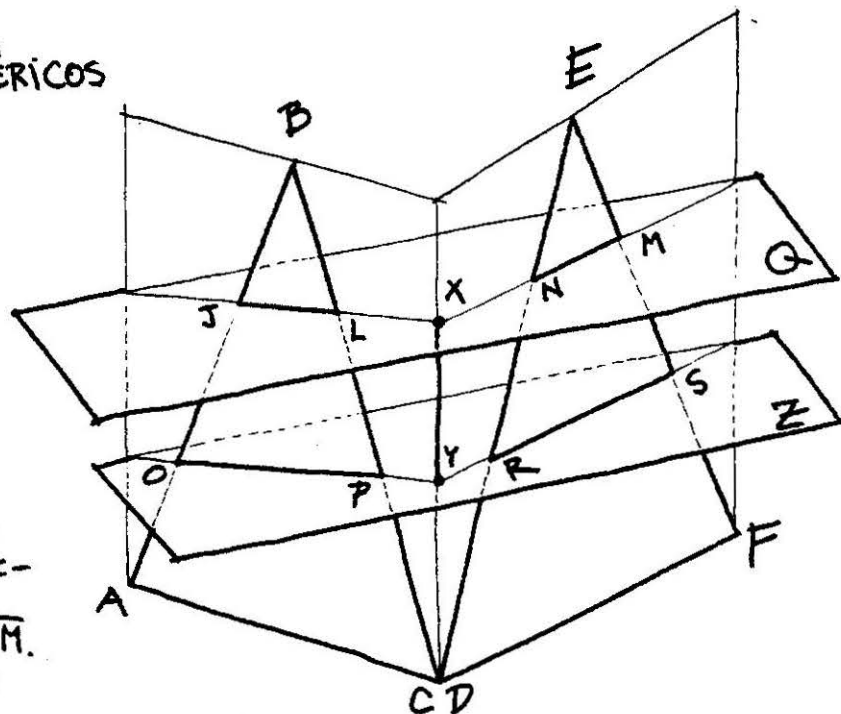


2.12- INTERSECCION DE DOS PLANOS GENERICOS METODO DE LOS PLANOS AUXILIARES.

Si dos planos genericos son intersectados por un tercer plano que aparece de perfil en una de las proyecciones, los tres planos se tocaran en un punto comun, a menos que el tercer plano sea $\parallel$ a la recta $\cap$ de los dos planos dados.

Pasos depurador.

- trazo plano horizontal $\bar{Q}$, que al intersectar a b_1c_1 define j_1l_1 y al intersectar a d_1e_1 define n_1m_1 .
- Dibujar proyecciones horizontales de $\bar{JL}$ y $\bar{NM}$.
- trazo plano horizontal $\bar{Z}$, que al $\cap$ a b_1c_1 define o_1p_1 y al $\cap$ a d_1e_1 define r_1s_1 .
- Dibujar proyecciones horizontales de $\bar{OP}$ y $\bar{RS}$.
- En proyec. 2... prolongo j_2l_2 y m_2n_2 hasta que se intersecten definiendo el punto X_2 . Luego prolongo o_2p_2 y r_2s_2 hasta que se intersecten definiendo el punto Y_2 .
- A partir de X_2 trazo linea proyectora hacia proyec. 1 y que corte el plano $\bar{Q}$, definiendo X_1 . ($\bar{JL}$ y $\bar{NM} \in$ al plano $\bar{Q}$ $\therefore$ su pto de $\cap$ tambien le pertenece).
A partir de Y_2 trazo linea proyectora hacia proyec. 1 y que corte el plano $\bar{Z}$, definiendo Y_1 . ($\bar{OP}$ y $\bar{RS} \in$ al plano $\bar{Z}$ $\therefore$ su punto de $\cap$ tambien le pertenece).



2.2.- PLANOS PERPENDICULARES.

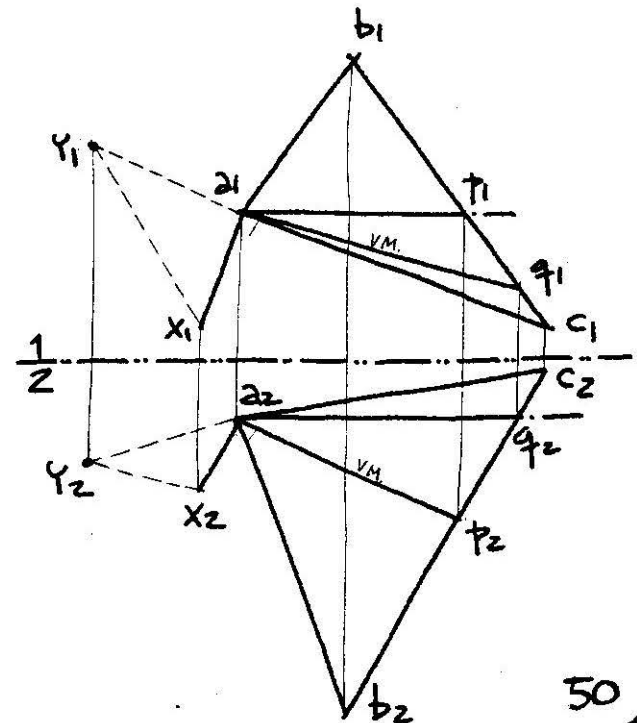
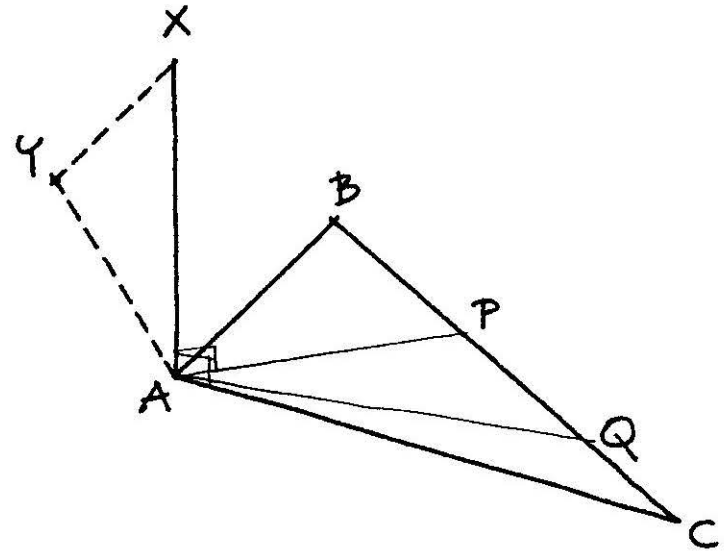
Un plano es perpendicular a otro cuando lo intersecta en un ángulo de 90° .

Todos los planos que contengan a una línea recta perpendicular a otro plano son perpendiculares a este otro plano.

EJEMPLO: $\overline{XYA} \perp \overline{ABC}$, porque la recta $\overline{XA}$ que $\in \overline{XYA}$ es $\perp$ al plano $\overline{ABC}$.
Desarrollo depurado.

2.2.1.- METODO EN DOS PROYECCIONES.

- Encuentro recta $\overline{AX} \perp$ al plano $\overline{ABC}$, por medio del método de los planos auxiliares.
- Definir cualquier punto en el espacio, en este caso el punto Y fuera de la recta.
- Uno punto Y con recta $\overline{AX}$, obteniendo así plano $\perp$ a $\overline{ABC}$.



2.2.2.- METODO EN TRES PROYECCIONES.

Memoria depuradr.

a) Se lleva $\overline{ABC}$ de perfil.

b) En proyección 3. Se traza $a_3x_3 \perp$ a la proyección de perfil del plano.

a_3x_3 se supone en V.M.

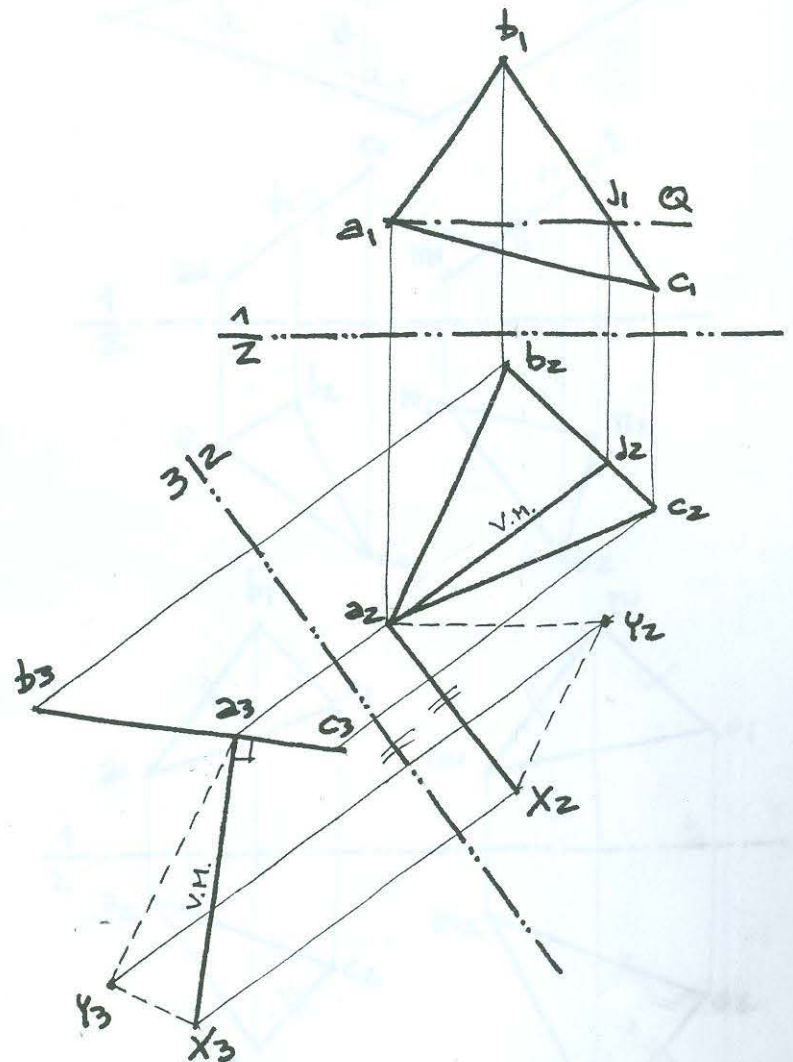
c) En proyec. 2. a partir de a_2 , se traza $a_2x_2 \parallel$ a l.R. $2/3$.

d) En proyec. 3, Se define cualquier punto que no esté en a_3x_3 , en este caso y_3 , luego se dibuja proyección y_2 .

$\overline{AX}$ es $\perp$ a $\overline{ABC}$

$\overline{AX} \in \pi \overline{AXY} \therefore$

$\overline{AXY}$ es $\perp$ a $\overline{ABC}$.



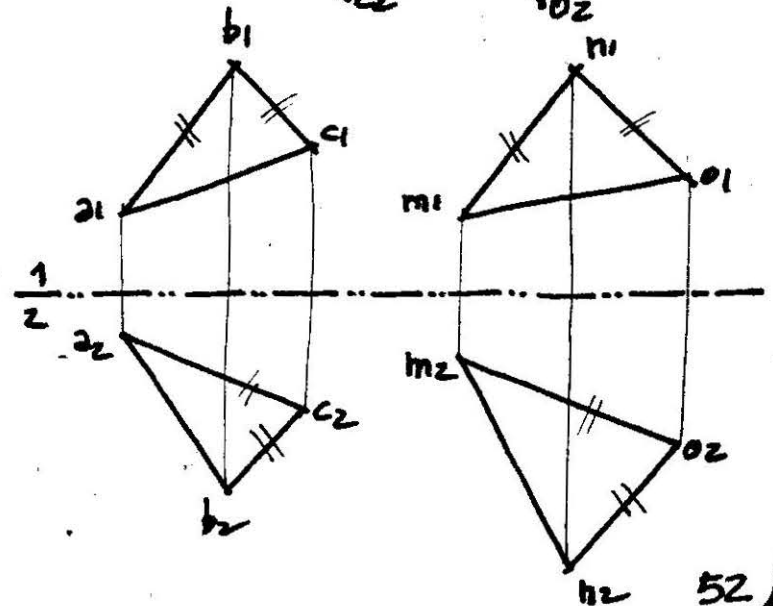
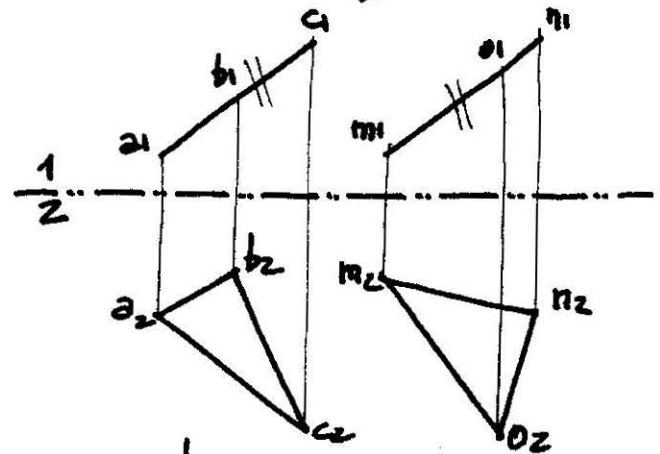
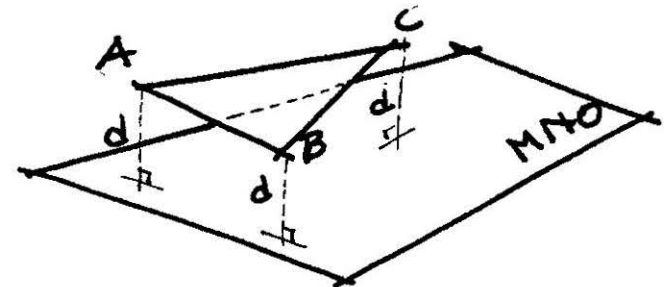
b.- PLANOS PARALELOS.

Un plano es paralelo a otro cuando al menos tres puntos no colineales de uno son equidistantes del otro plano medidos perpendicularmente.

Plano $\overline{ABC}$ es $\parallel$ a $\overline{MNO}$, se visualiza el paralelismo en la proyección 1, en que ambos están de perfil.

$\overline{ABC}$ es $\parallel$ $\overline{MNO}$ pues $\overline{AB} \parallel \overline{MN}$
 $\overline{BC} \parallel \overline{NO}$.

Para que un plano $\overline{ABC}$ sea paralelo a otro plano $\overline{MNO}$, es necesario que dos rectas del plano $\overline{ABC}$ sean paralelas al plano $\overline{MNO}$.



**C-MÉTODO PARA LLEVAR DOS PLANOS GENERICOS
A UNA PROYECCIÓN EN QUE ESTÉN AMBOS
COMO DE PERFIL.**

Dos planos genericos se intersectan generando una recta de intersección, si esta recta de intersección la veo de punta, los planos los veré de perfil.

Memoria de puradr:

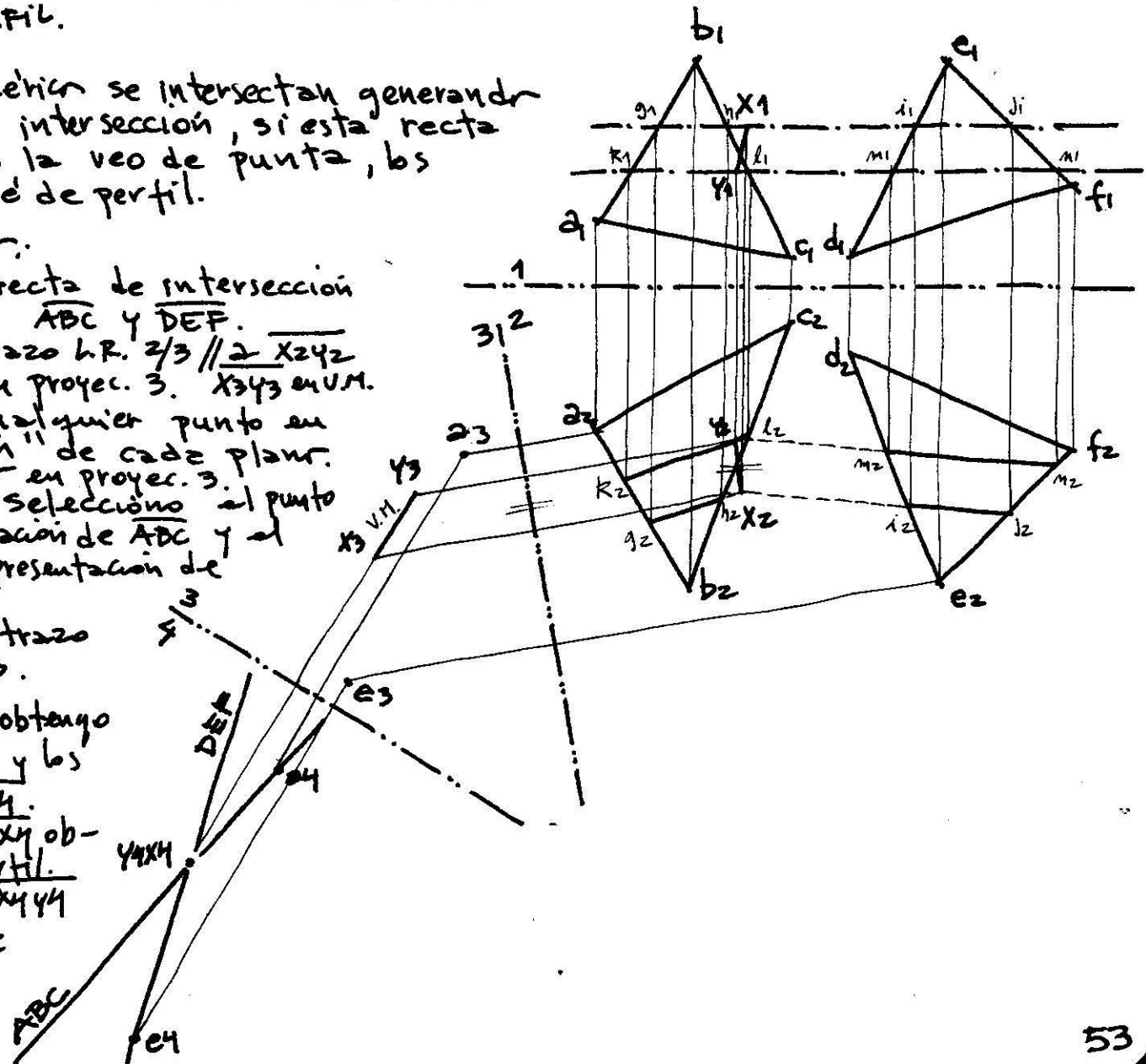
- Encuentro recta de intersección de los planos $\overline{ABC}$ y $\overline{DEF}$.
- En proyec. 2. trazo l.R. $2/3 // 2 \times 2y2$ para tener en proyec. 3. $x3y3$ en V.M. selecciono cualquier punto en "representación" de cada plano. para dibujarlo en proyec. 3. en este caso. selecciono al punto A en representación de $\overline{ABC}$ y al punto E en representación de $\overline{DEF}$.

- En proyec. 3. trazo l.R. $\perp 2 \times 3y3$.

- En proyec. 4. obtengo $x4y4$ de punta y los puntos $a4$ y $e4$.

Si uno $a4$ con $y4x4$ obtengo $\overline{ABC}$ de perfil.

Si uno $e4$ con $x4y4$ obtengo $\overline{DEF}$ de perfil.



VI. DISTANCIA ENTRE ELEMENTOS.

EL OBJETIVO TRATA DE QUE SE PUEDA REALIZAR CON ÉXITO UNA MEDICIÓN ENTRE ELEMENTOS SITUADOS EN EL ESPACIO Y ADEMÁS RESOLVER PROBLEMAS TALES COMO UBICAR NUEVOS ELEMENTOS A UNA DISTANCIA DADA DE AQUELLOS QUE YA SE ENCUENTREN EN EL ESPACIO ESTABLECIENDO SUS LEYES Y SU FORMA.

Para comprender en una forma más amplia la relación de distancia entre diferentes elementos en el espacio; vamos a recurrir a un concepto llamado LUGAR GEOMÉTRICO (L.G.) y que relaciona la totalidad de los elementos que bajo ciertas condiciones cumplan ciertas leyes geométricas.

UNIDADES.

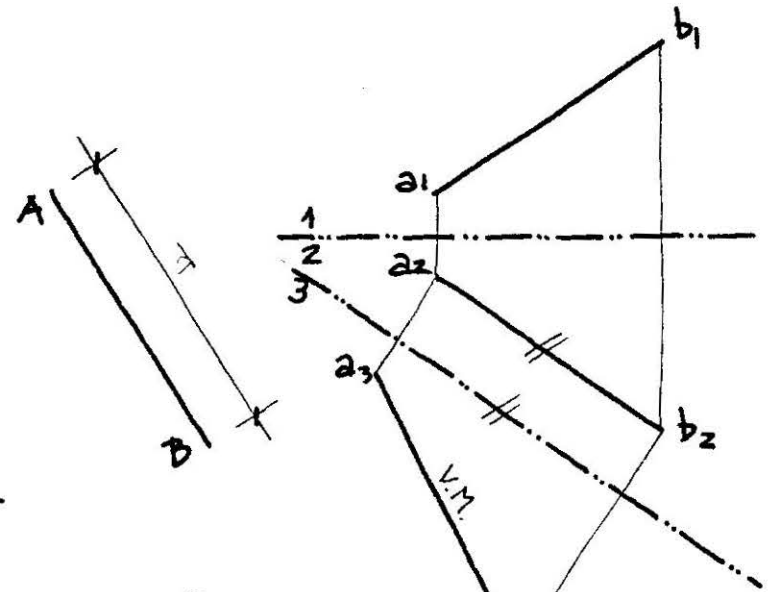
- 6.1.- CONCEPTO DE DISTANCIA REFERIDA AL PUNTO
- 6.2.- CONCEPTO DE DISTANCIA REFERIDA A LA RECTA.
- 6.3.- CONCEPTO DE DISTANCIA REFERIDA AL PLANO

6.1.- DISTANCIA REFERIDA AL PUNTO.

6.1.1.- DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS.

La distancia entre dos puntos es la longitud de la línea recta que los une, por lo tanto, para medir la distancia entre dos puntos A y B , bastará medir la longitud del segmento $\overline{AB}$.

En despurar, para efectuar esta medición es necesario tener el segmento en V.M.



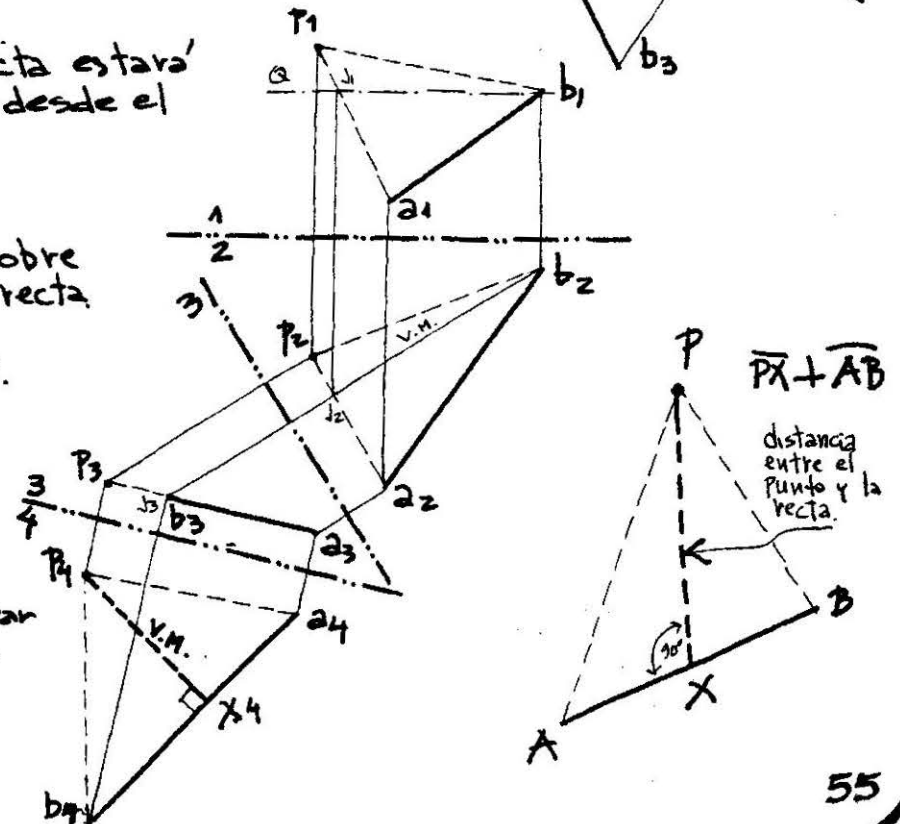
6.1.2.- DISTANCIA ENTRE PUNTO Y RECTA.

La distancia entre un punto y una recta estará medida en la recta perpendicular desde el punto a la recta dada.

Despurar: MÉTODO I.

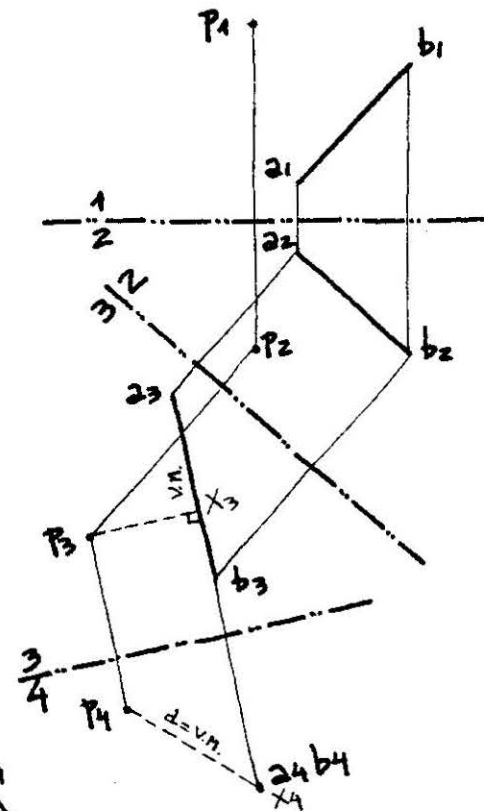
Se trata de medir la distancia sobre el plano que forman el punto y la recta.

- Con recta $\overline{AB}$ y punto P se forma plano $\overline{ABP}$.
- Se lleva $\overline{ABP}$ de perfil.
- En proyec. 3 se traza L.R. $3/4 \parallel$ al plano de perfil.
- En proyec. 4. $\overline{ABP}$ en V.M. lo que significa que P y $\overline{AB}$ al estar en un mismo plano y en V.M. se puede trazar la $\perp$ P_4X_4 para medir su longitud y así conocer la distancia pedida.



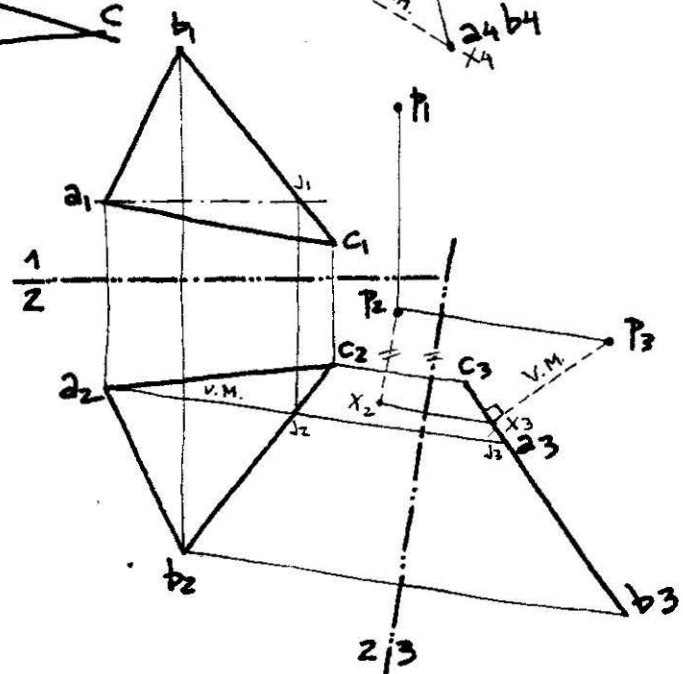
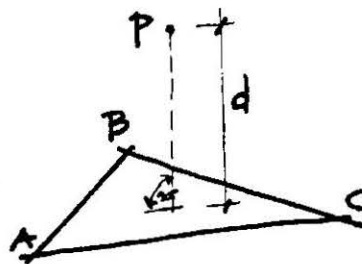
depurador: METODO II.

- a) Se lleva $\overline{AB}$ a V.M.
- b) En proyec. 3, se traza L.R. $3/4$ perpendicular a a_3b_3
- c) En proyec. 4, teniendo a_4b_4 de punta. Se traza una $\perp$ hacia el punto P_4 , siendo este segmento la distancia pedida.



6.1.3.-DISTANCIA ENTRE PUNTO Y PLANO.

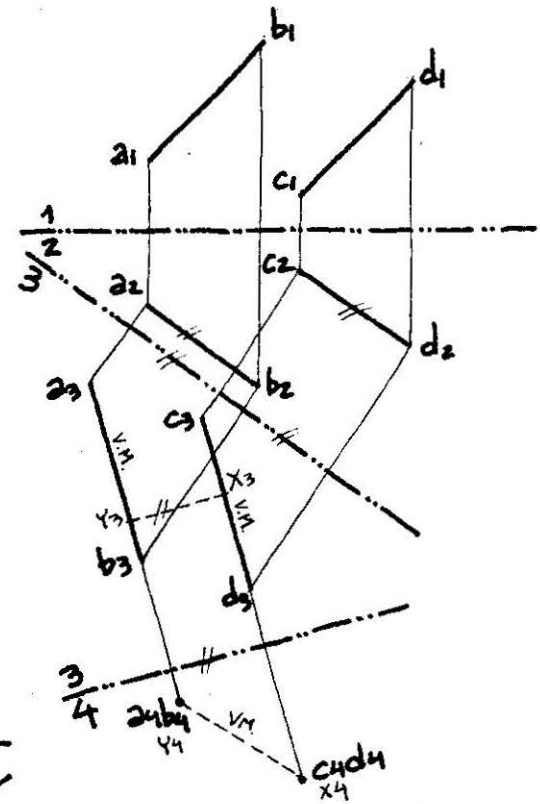
- a) Se lleva $\overline{ABC}$ de perfil
- b) En proyección 3. Por P_3 se traza $P_3X_3 \perp$ al plano de perfil, siendo la longitud de este segmento la distancia pedida.



6.2.-DISTANCIA REFERIDA A LA RECTA.

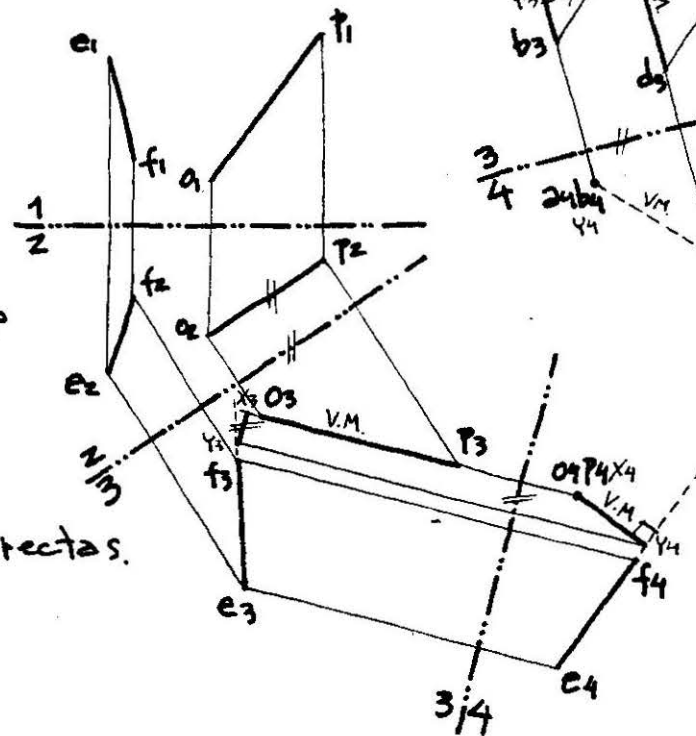
6.2.1.-DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS PARALELAS.
Estará medida en la recta perpendicular
común a ambas.

Depurado: a) se llevan $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ a V.M.
b) En proyec. 4. $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ de punta.
Se traza $\overline{X_4Y_4} \perp$ a ambas.
 $\overline{X_4Y_4}$ está en V.M. porque en
proyec. 3, $\overline{Y_3X_3}$ es $\parallel$ a L.R. 3/4.



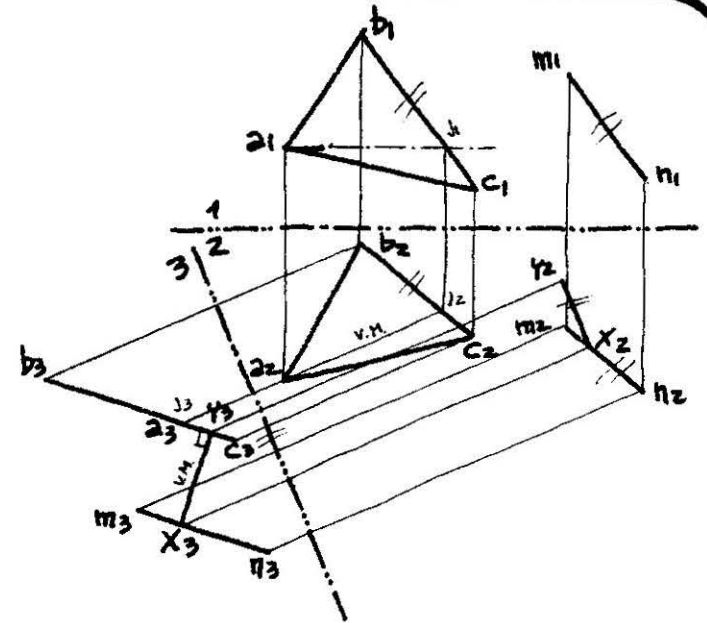
6.2.2.-DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS
QUE SE CRUZAN (genéricas).
También estará medida en
la recta perpendicular común
a ambas, considerada esta
la distancia mínima entre
ellas.

Depurado: a) Se lleva $\overline{OP}$ a V.M., luego
a de punta.
b) En proyec. 4. Se traza
 $\overline{X_4Y_4} \perp$ a $\overline{OP_4}$ y $\overline{E_4F_4}$.
 $\overline{X_4Y_4}$ está en V.M.
Siendo la distancia
mínima entre las dos rectas.



6.2.3.- DISTANCIA ENTRE RECTA Y PLANO.

La distancia de una recta a un plano, se verifica solo en el caso cuando la recta es paralela al plano y se mide del mismo modo que en el caso de distancia del punto al plano. Para ello, verificando el paralelismo, se escoge un punto de la recta y desde él se traza la perpendicular al plano estableciendo el segmento en el cual se puede efectuar la medición.

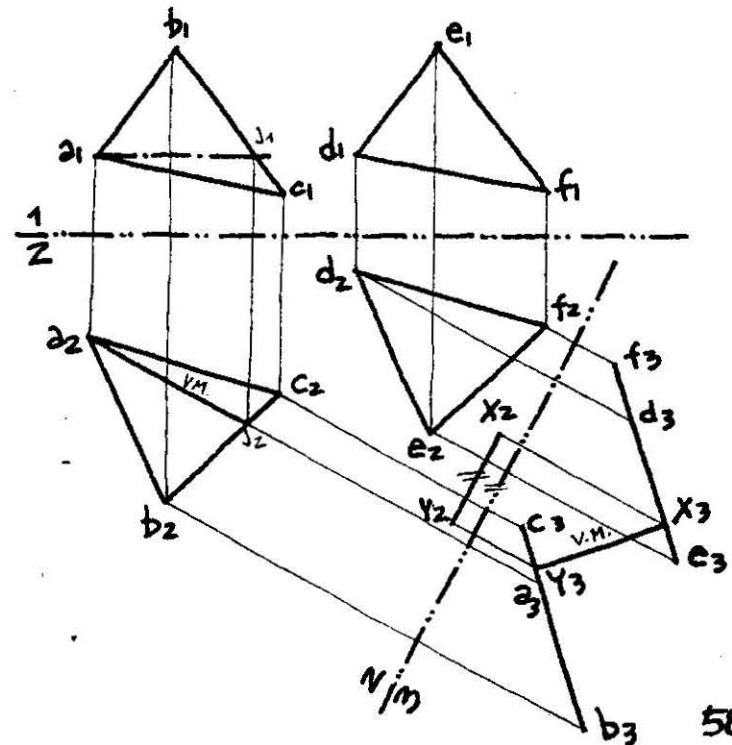


6.3.- DISTANCIA REFERIDA AL PLANO

La distancia entre dos planos se verifica solamente cuando los planos son paralelos entre sí y la distancia se mide en el segmento de recta perpendicular a ambos planos.

- depurado:
- Se llevan $\overline{ABC}$ y $\overline{DEF}$ a de perfil.
 - En proyec. 3. se traza X_3Y_3 en V.M. y $\perp$ a ambos planos.
 - En proyec. 2. X_2Y_2 es $\parallel$ a l.R. 2/3.

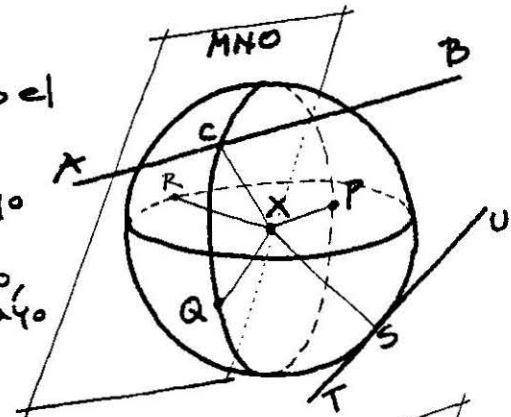
El segmento $\overline{Y_3X_3}$ es la distancia requerida.



6.4.- LUGARES GEOMÉTRICOS.

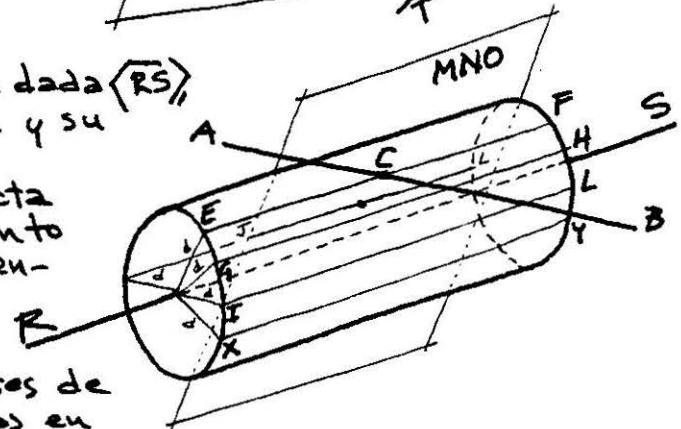
a) MANTO DE UNA ESFERA.

- a.1.- El L.G. de todos los puntos equidistantes de otro dado (X), es el manto de una esfera cuyo radio es la distancia pedida.
- a.2.- El L.G. de todas las rectas equidistantes de un punto dado, serán todas aquellas tangentes al manto de una esfera cuyo radio es la distancia pedida.
- a.3.- El L.G. de todos los planos equidistantes de un punto dado, serán todos aquellos tangentes al manto de una esfera cuyo radio es la distancia pedida.



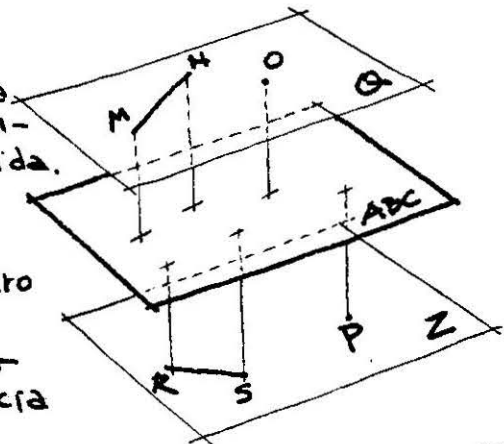
b) MANTO DE UN CILINDRO.

- b.1.- El L.G. de todos los puntos equidistantes de una recta dada (RS) es el manto de un cilindro cuyo eje es la recta dada y su radio la distancia pedida.
- b.2.- El L.G. de todas las rectas equidistantes de una recta dada serán todas aquellas contenidas en el manto de un cilindro y todas aquellas que sean tangentes al manto del cilindro cuyo eje es la recta dada y su radio la distancia pedida.
- b.3.- El L.G. de todas las rectas paralelas y equidistantes de una recta dada, serán todas aquellas contenidas en el manto de un cilindro cuyo eje es la recta dada y su radio la distancia pedida.
- b.4.- El L.G. de todos los planos equidistantes y paralelos a una recta dada, serán todos aquellos tangentes al manto de un cilindro cuyo eje es la recta dada y su radio la distancia pedida.



c) PLANOS PARALELOS.

- c.1.- El L.G. de todos los puntos y rectas equidistantes de un plano dado serán dos planos paralelos ("uno arriba y otro abajo") que estarán a la distancia pedida.
- c.2.- El L.G. de todos los planos equidistantes de un plano dado serán dos planos paralelos a él a la distancia pedida.



VII-ANGULO ENTRE ELEMENTOS.

LLAMAREMOS ÁNGULO A LA ABERTURA MENOR ENTRE DOS RECTAS, ENTRE RECTA Y PLANO O PLANO CON PLANO.

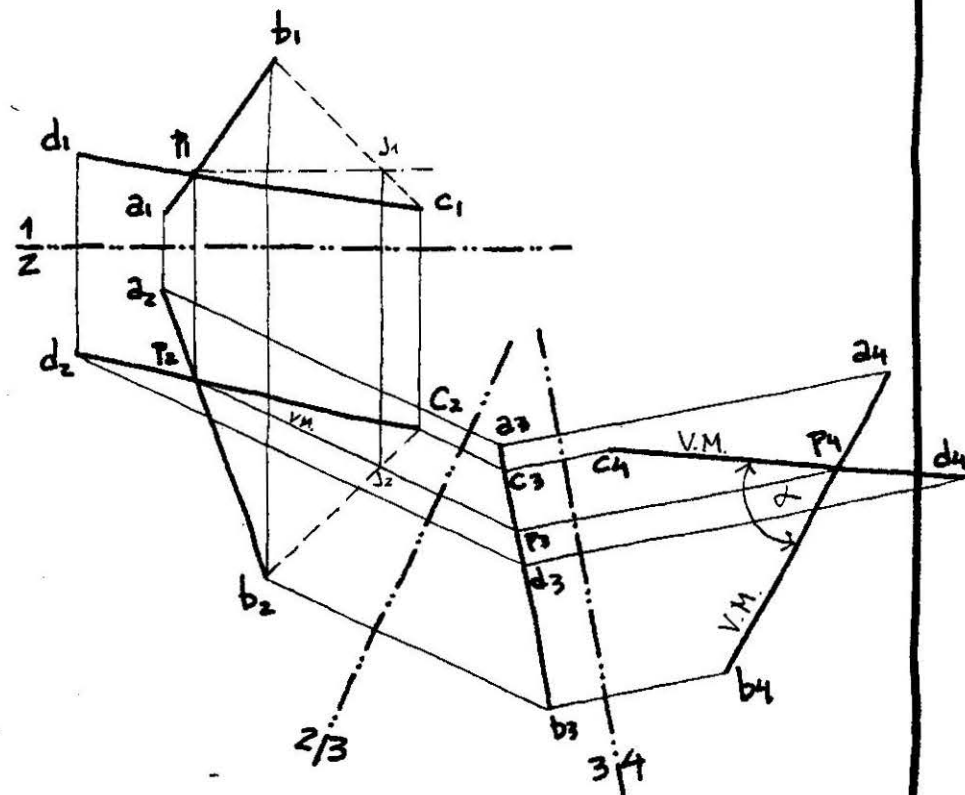
7.1-ANGULO ENTRE DOS RECTAS.

7.1.1-ANGULO ENTRE DOS RECTAS QUE SE CORTAN.

Dos rectas que se cortan forman un plano. Luego para medir el ángulo entre dos rectas, se lleva el plano que contiene a ambas rectas a V.M. y en él se verifica directamente el ángulo existente entre las rectas.

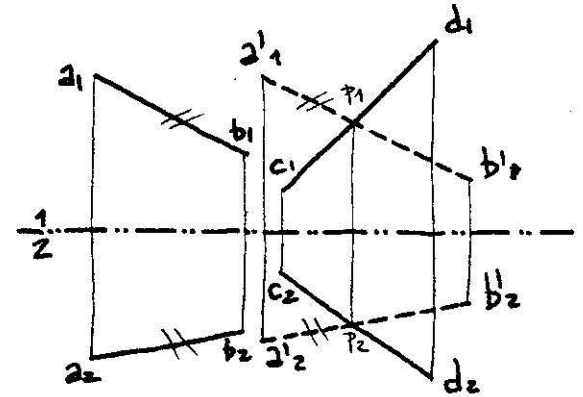
Memoria depurada.

- a) Dadas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ que se $\cap$ en $\overline{P}$. trazo línea virtual $\overline{BC}$ teniendo así un plano "reconido" PBC .
- b) PBC lo llevo a proyección de perfil. y luego a V.M. (llevando también los puntos A y D).
- c) En proyec. 4. Se obtiene las dos rectas en V.M. donde se puede medir directamente el ángulo entre las dos rectas.



7.1.2.- ANGULO ENTRE DOS RECTAS QUE SE CRUZAN.

Para medir el ángulo entre rectas que se cruzan, se traslada el problema al caso anterior, es decir por un punto cualquiera de una de las rectas se traza una recta auxiliar paralela a la otra, conformando así un plano el cual se lleva a V.M. para poder verificar el ángulo existente entre las rectas.



7.2. ÁNGULO ENTRE RECTA Y PLANO.

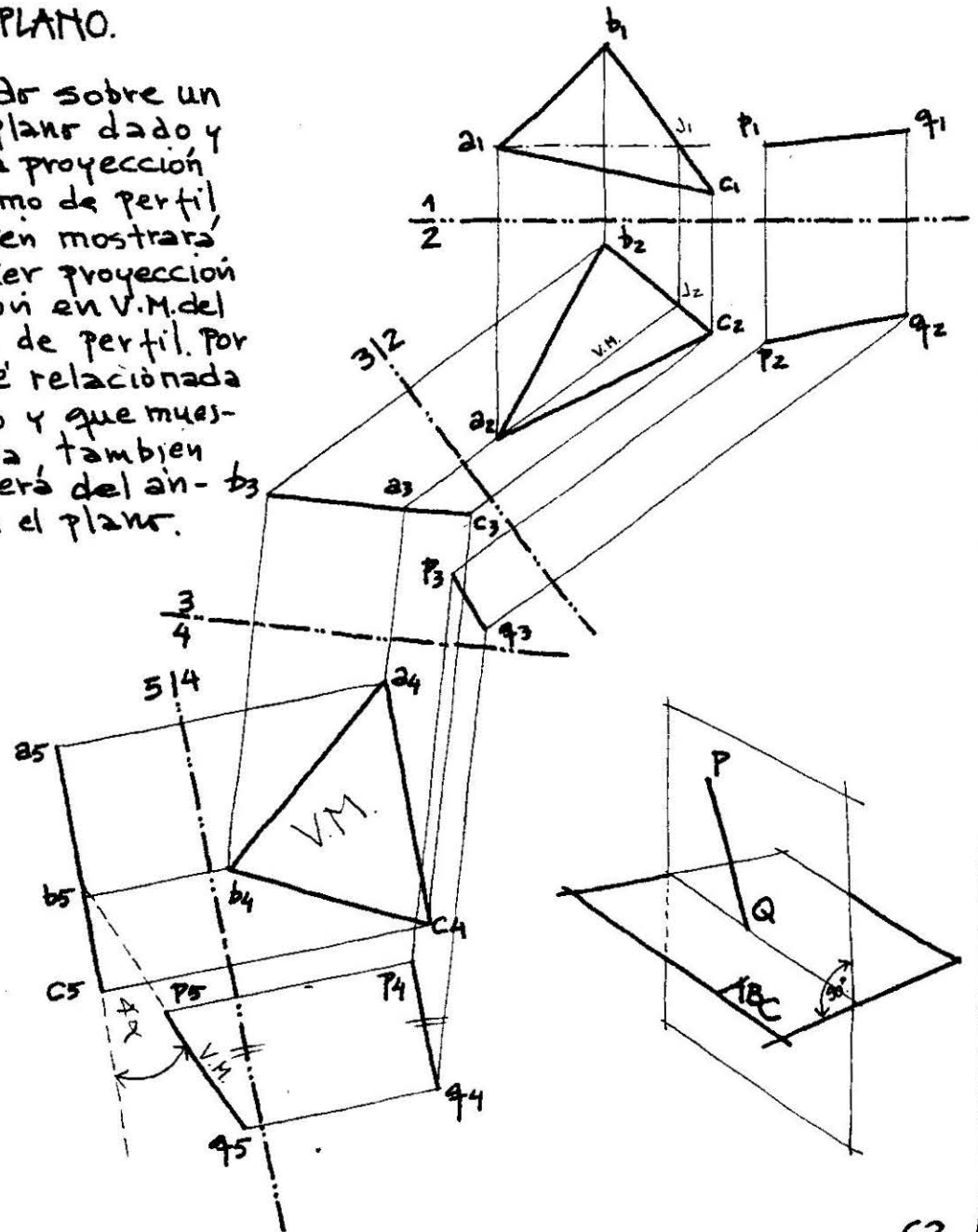
El ángulo requerido estará situado sobre un plano que es perpendicular al plano dado y contiene a la recta dada. Una proyección que muestre el plano dado como de perfil y la recta dada en V.M., también mostrará el ángulo entre ellos. Cualquier proyección relacionada con la proyección en V.M. del plano mostrará al plano como de perfil. Por tanto, una proyección que esté relacionada con la proyección de V.M. del plano y que muestre la V.M. de la recta dada, también mostrará la amplitud verdadera del ángulo que forma la recta con el plano.

Memoria depurado:

a) Llevo ABC de perfil, luego a V.M.

b) En proyección 4 trazo LR 4/5 paralela a P_4q_4 , obteniendo así en proyección 5... P_5q_5 en V.M. y el plano de perfil.

El $\angle$ formado está en V.M.

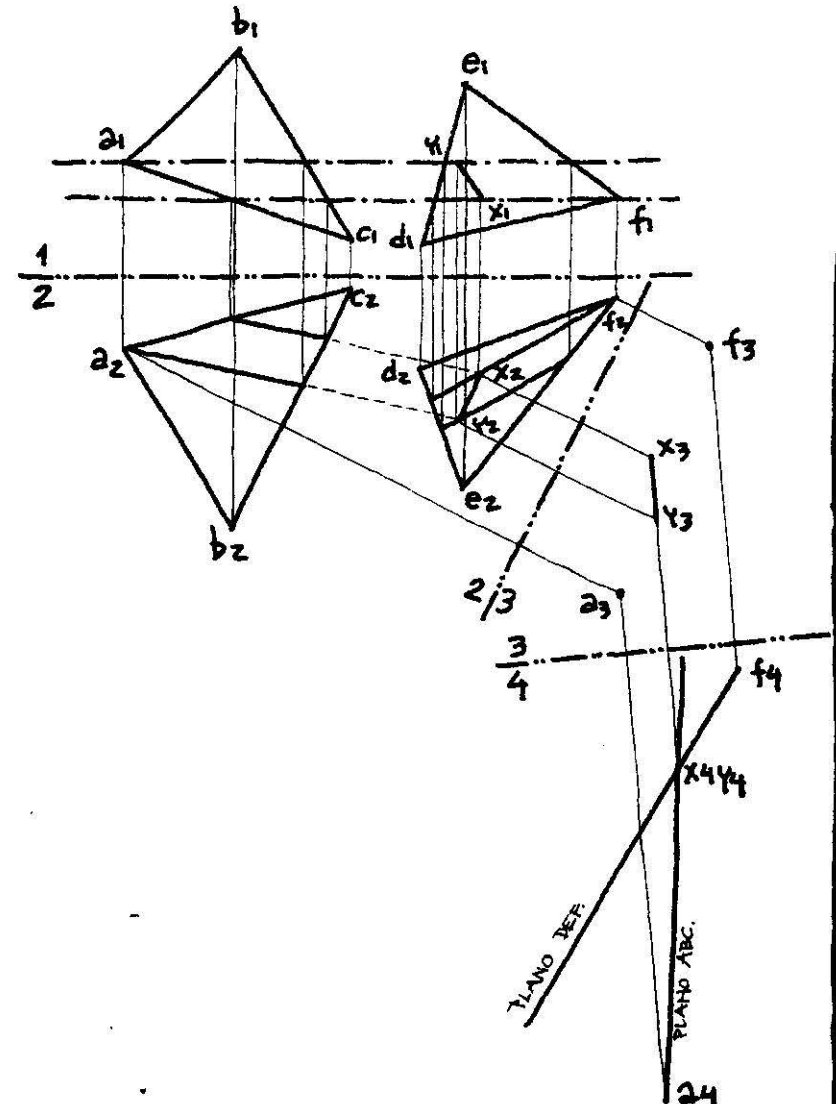


7.3.- ANGULO ENTRE DOS PLANOS.

Consiste en llevar ambos planos a una proyección perpendicular a ellos donde veríamos a dichos planos como de perfil.

Memoria depurada:

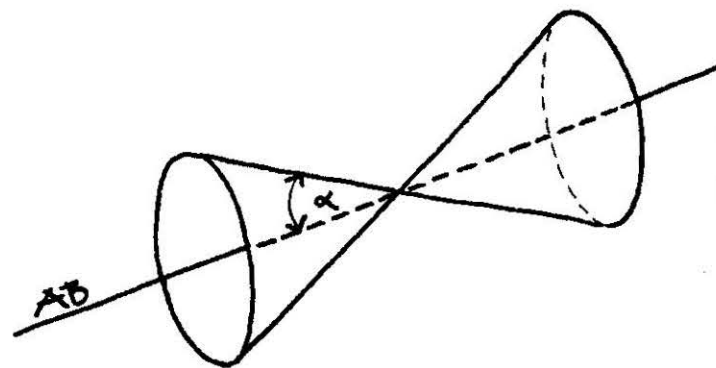
- a) Encuentro recta de intersección $\overline{XY}$.
- b) $\overline{XY}$ a V.M. luego a proyección de punta.
- c) En proyección 4 donde obtenemos X_4Y_4 de punta, por construcción tenemos ambos planos como de perfil y se podrá medir directamente el ángulo que forman entre ellos.



7.4.- LUGARES GEOMETRICOS.

CONO:

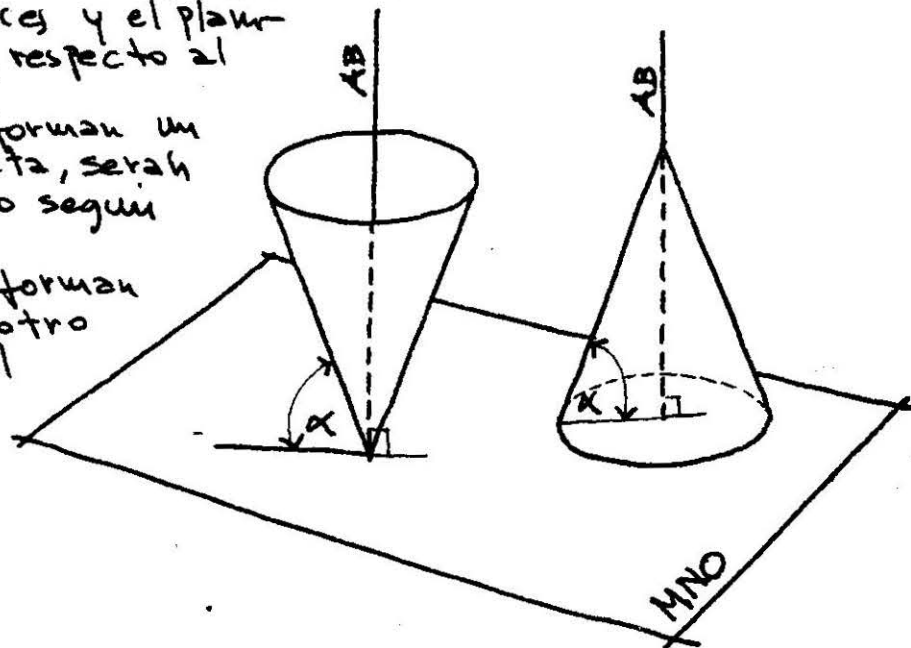
7.4.1.- El L.G. de todas las rectas que forman un determinado ángulo con una recta AB en el espacio, es el manto de un cono cuyo eje es la recta AB y las generatrices que forman el manto del cono, son las rectas que intersectan a la recta AB en un punto de ella según el ángulo determinado.



7.4.2.- El L.G. de todas las rectas que forman un determinado ángulo con un plano MNO en el espacio, es un cono cuyo eje es perpendicular al plano. Si la cúspide del cono $\in$ a MNO el ángulo de las generatrices que forman con el plano será medido exteriormente respecto al manto del cono. Si la base del cono $\in$ a MNO , entonces el $\angle$ entre las generatrices y el plano será medido interiormente, respecto al manto del cono.

7.4.3.- El L.G. de todos los planos que forman un ángulo determinado con una recta, será aquella tg. al manto de un cono según lo descrito en el punto 7.4.1.

7.4.4.- El L.G. de todos los planos que forman un ángulo determinado con otro plano, serán aquellos tg. a el manto de un cono, según lo descrito en el punto 7.4.2.



BIBLIOGRAFIA.

- SLABY, STEVE M. : Geometría Descriptiva Tridimensional.
Mexico. D.F. 1968.
- HAWK, MINOR C. : Geometría Descriptiva. Teoría y problemas.
Serie de Compandios Schaum. 1975.
- MERCADO SCHÜLER, CARLOS : Geometría. Curso de matemática elemental.
tomo III y IV. Edit. Universitaria 1978.
- DE LA TORRE CARBÓ, MIQUEL : Geometría Descriptiva. Escuela Nacional de Arquitectura
Universidad Nacional autónoma de Mexico. 1965.
- LEIGHTON-WELLMAN : Geometría Descriptiva.
Edit. Reverte. S.A. 2ª Edición 1971.
- VERA, FRANCISCO : BREVE HISTORIA DE LA GEOMETRÍA.
Edit. Losada S.A. 1948.
- EIZAGUIRRE A. PEDRO : Apuntes de Geometría Descriptiva.
Práctica básica. U. de Chile Valpo.