



**UNIVERSIDAD DE VALPARAÍSO  
FACULTAD DE HUMANIDADES Y EDUCACIÓN  
INSTITUTO DE FILOSOFÍA  
PROGRAMA DE MAGISTER EN FILOSOFÍA**

---

**ACERCA DE LA REGLA DE NECESARIEDAD EN EL  
CÁLCULO PROPOSICIONAL MODAL DE LEWIS Y  
LANGFORD, ANTES DE LA PUBLICACIÓN DE 'UNA  
INTERPRETACIÓN DEL CÁLCULO CONECTIVO  
INTUICIONISTA' DE GÖDEL**

---

**TESIS PARA OPTAR AL GRADO ACADÉMICO DE  
MAGÍSTER EN FILOSOFÍA CON MENCIÓN EN LÓGICA Y  
FILOSOFÍA DE LAS CIENCIAS**

**AUTOR TESIS: JUAN CARLOS FIGUEROA CARVAJAL**

**PROFESOR GUÍA: WILFREDO QUEZADA PULIDO**

**VALPARAÍSO  
SEPTIEMBRE DE 2023**

# Acerca de la Regla de Necesariadad en el Cálculo Proposicional Modal de Lewis y Langford, antes de la publicación de ‘Una Interpretación del Cálculo Conectivo Intuicionista’ de Gödel

Tesis para optar al grado académico de Magíster en Filosofía con  
Mención en Lógica y Filosofía de las Ciencias

Estudiante, Juan Carlos Figueroa Carvajal  
Profesor Guía, Wilfredo Quezada Pulido

Septiembre de 2023

## Resumen

El objetivo de este trabajo es evaluar la posible dependencia que los Sistemas S de Lewis hayan mantenido con respecto a la Regla de Necesariadad (RN), propuesta por Gödel en “Una interpretación del cálculo conectivo intuicionista” (1932). RN resulta ser una herramienta especialmente útil para simplificar la inferencia en sistemas modales equivalentes a los Sistemas S de Lewis. Para ello, se analiza la formulación del Sistema de Implicación Estricta y de los Sistemas S, así como la demostración de RN (no debilitada) de McKinsey y Tarski, para S4. También se examinan las propuestas de sistemas modales equipotentes a los Sistemas S que incorporan RN, principalmente los Sistemas de Lemmon, y los teoremas presentados por Lewis y Langford en el Capítulo VI de *Symbolic Logic*, con el fin de corroborar que RN no haya sido asumida de manera intuitiva. Las principales conclusiones son que el Sistema S4 logra prescindir de RN sin que ello implique un costo para la inferencia. Las razones se basan en la formalización del Sistema de Implicación Estricta, utilizando la función de Implicación Estricta y el Modus Ponens Estricto (que muestra que el Sistema no es una extensión conservativa estándar del Cálculo Proposicional), las consecuencias de los teoremas  $(p \multimap q) \multimap (p \supset q)$  y  $(\neg \diamond \neg \neg \diamond \neg p) \multimap (\neg \diamond \neg p = p)$ , así como los resultados de incorporar el Axioma de Becker (C10) a S1. Tangencialmente, el trabajo enuncia algunos debates filosóficos, relacionados con los cuestionamientos a los sistemas modales, en los que el carácter intuitivo

de RN es un tema de interés. Se asume que la investigación abre espacios a sugestivas interrogantes. Una de ellas consiste en la clarificación del rol que desempeña RN para satisfacer el criterio de normalidad en un sistema modal. En particular, si dicha regla se requiere explícitamente como herramienta de inferencia o como consecuencia metalógica.

The aim of this work is to evaluate the possible dependence that Lewis' S Systems have maintained with respect to the Necessitation Rule (NR), proposed by Gödel in "Una interpretación del cálculo conectivo intuicionista" (1932). NR turns out to be an especially useful tool for simplifying inference in modal systems equivalent to Lewis S Systems. To do this, the formulation of the Strict Implication System and Systems S is analyzed, as well as the demonstration of NR (not weakened) by McKinsey and Tarski, for S4. The proposals for modal systems equipotent to the S Systems that incorporate NR are also examined, mainly the Lemmon Systems, and the theorems presented by Lewis and Langford in Chapter VI of Symbolic Logic, in order to corroborate that NR has not been assumed intuitively. The main conclusions are that System S4 manages to dispense with NR without implying a cost for inference. The reasons are based on the formalization of the Strict Implication System, using the Strict Implication function and the Strict Modus Ponens (which shows that the System is not a standard conservative extension of the Propositional Calculus), the consequences of the theorems  $(p \multimap q) \multimap (p \supset q)$  y  $(\neg \diamond \neg \neg \diamond \neg p) \multimap (\neg \diamond \neg p = p)$ , as well as the results of incorporating the Becker Axiom (C10) to S1.

Tangentially, the work states some philosophical debates, related to the questions of modal systems, in which the intuitive nature of NR is a topic of interest. The investigation is supposed to open spaces for suggestive questions. One of them consists of clarifying the role that NR plays in satisfying the normality criterion in a modal system. In particular, whether such a rule is explicitly required as a tool of inference or as a metalogical consequence.

# Índice

<b>1</b>	<b>Antecedentes de la Investigación</b>	<b>5</b>
1.1	Planteamiento del Problema . . . . .	5
1.1.1	Objetivos . . . . .	10
1.1.1.1	Objetivo General . . . . .	10
1.1.1.2	Objetivos Específicos . . . . .	10
<b>2</b>	<b>La primera versión del Sistema de Implicación Estricta de Lewis</b>	<b>12</b>
2.1	Consideraciones preliminares acerca del Sistema de Implicación Estricta	12
2.2	Ideas Fundamentales del Sistema de Implicación Estricta (Lewis 1918) .	15
2.3	Algunas derivaciones importantes en el Sistema de Implicación Estricta	20
2.4	Extensión del Sistema de Implicación Estricta . . . . .	26
2.5	Diferenciaciones entre los sistema de Implicación Material e Implicación Estricta . . . . .	30
2.5.1	El Sistema de Implicación Material como Sistema de Valor de Verdad . . . . .	30
2.5.2	El Postulado de Existencia . . . . .	33
<b>3</b>	<b>Del Sistema de Implicación Estricta a la formulación de los Sistemas S</b>	<b>36</b>
3.1	La formulación axiomática revisada para el Sistema de Implicación Estricta	36
3.2	La definición de los Sistemas S: primera propuesta de Lewis y Langford (1932/1959) . . . . .	44
<b>4</b>	<b>Regla de Necesariedad</b>	<b>46</b>
4.1	El axioma característico de S4 y la Regla de Necesariedad . . . . .	46
4.2	Aplicaciones del Álgebra de Boole-Schröder a los Sistemas Modales . .	47
4.3	Demostración de la Regla de Necesariedad de McKinsey y Tarski para S4	52
<b>5</b>	<b>Lemmon y los nuevos fundamentos para los sistemas modales</b>	<b>57</b>
5.1	Las razones para la formulación de los Sistemas P . . . . .	57
5.2	La formalización de los Sistemas P de Lemmon . . . . .	58
5.3	Equivalencias entre Sistemas S y Sistemas P . . . . .	60

<b>6</b>	<b>Discusión de contraste entre los Sistemas S y los sistemas que incorporan Regla de Necesariadad como principio de inferencia</b>	<b>63</b>
6.1	Sobre la inspección de teoremas derivados con independencia de Regla de Necesariadad (en versiones debilitada y no debilitada) en Sistemas S	63
6.2	La “maquinaria” S4 para prescindir de la Regla de Necesariadad y su contraste con los Sistemas de Lemmon . . . . .	65
6.3	Breve alusión a los asuntos filosóficos asociados a la comprensión de la idea de “necesidad” y los sistemas modales . . . . .	70
6.4	Interrogantes desprendidas del trabajo investigativo . . . . .	71
<b>7</b>	<b>Bibliografía</b>	<b>72</b>

# 1 Antecedentes de la Investigación

## 1.1 Planteamiento del Problema

En general, la lógica modal se entiende como un conjunto de sistemas formales que procuran aprehender las nociones de “necesidad” y “posibilidad” (a las que se agregan las de “imposibilidad” y “contingencia”). De manera equivalente, se la concibe como una extensión (conservativa) de la lógica clásica para darle un carácter capaz de tratar enunciados sobre lo necesario y lo posible, así como de expresar sus interrelaciones. Las ideas que subyacen a los sistemas modales son de antigua data, encontrándose algunas orientaciones preliminares en los análisis de Aristóteles acerca de declaraciones que contienen las expresiones “necesario” y “posible”. También destaca históricamente la definición de “necesidad” de Leibniz, abordada en términos de “mundos posibles”. Sin embargo, lo cierto es que la formalización de la lógica modal comenzó un desarrollo vertiginoso a partir de fines del siglo XIX. Entre los lógicos que contribuyeron a tal empresa encontramos a Mc Coll, Lewis, Langford, Lemmon, Carnap y Kripke, cuyos respectivos trabajos constituyen el fundamento de sistemas coherentes (consistentes) y con propiedades definidas y explicitadas. Aunque, por otro lado, existen férreos opositores a los sistemas modales. Entre ellos se encuentra Quine, quien ha cuestionado su pertinencia desde al menos tres consideraciones: la confusión que conllevaría la formulación de la Implicación Estricta en reemplazo de la Implicación Material; la prescindencia que puede realizarse de la lógica modal para el progreso de la formalización en lógica, y las dificultades asociadas a la interpretación de los sistemas modales (al respecto véase Haack, 1991).

Sea como sea, el simbolismo modal y la teoría de modelos asociada a los sistemas modales, han sido empleados en campos externos a la lógica misma. Un caso se observa en la teoría informática, en la cual estos avances contribuyeron a la formalización del razonamiento respecto del comportamiento de programas y de las propiedades dinámicas de las transiciones de estados (Goldblatt, 2005).

En la actualidad, disponemos de una comprensión profunda acerca de diversos sistemas de lógica modal. Fue principalmente a partir de las investigaciones llevadas a cabo por Lewis y Langford a comienzos del siglo XX que se establecieron los fundamentos del sistema de Implicación Estricta y de los Sistemas S, los que oscilan entre S1 y S5, y que constituyen un logro significativo en el conocimiento de los resultados susceptibles de alcanzarse en lógica modal proposicional conforme adoptemos determinados axiomas y alberguemos determinadas reglas de inferencia. Con ello, no sólo se han formalizado las ideas más elementales acerca de las nociones modales, sino que es factible obtener resultados que distan de la visión intuitiva al respecto. Por poner un caso, la iteración de modalidades o modalidades reiteradas, tal como son susceptibles de ser trabajadas en S4 y S5. Desde una aproximación filosófica anterior a esta formalización no son del todo claras, por ejemplo, las consecuencias de asumir que una proposición necesaria resulte necesariamente necesaria o de asumir que la posibilidad de una proposición la vuelve necesariamente posible. En otros sistemas complementarios, como es el caso del Sistema Brouweriano, es factible formalizar la idea relativa a la necesidad de la posibilidad de una proposición afirmada.

De este conocimiento, adquirido tras décadas de investigación, hoy en día tomamos como dato la diferencia entre aquellos sistemas modales denominados “normales” y los sistemas “no normales”. La distinción se atribuye a Kripke (1963, 1965), para quien un cálculo proposicional modal (o sistema modal axiomático) es normal si y sólo si contiene los axiomas que denominaremos A1 y A3 (a estos axiomas respectivamente se los conoce también como T o M y K), y contiene las dos reglas de inferencia que pasamos a detallar, las cuales denominaremos R1 y R2 (respectivamente, Modus Ponens y Necesidad [RN]):

A1.  $\Box A \supset A$

A2.  $\Box(A \supset B) \supset (\Box A \supset \Box B)$

R1. Si  $\vdash A$  y  $\vdash A \supset B$ , entonces  $\vdash B$

R2 o RN. Si  $\vdash A$ , entonces  $\vdash \Box A$

Sin embargo, en la actualidad, debido a la idea de Gödel (1932/2006) relativa a la traducibilidad de las nociones y fórmulas de la lógica conectiva intuicionista en una expansión de la lógica clásica, todo sistema modal proposicional se sustenta en el Cálculo Proposicional (CP) axiomático propuesto por Russell y Whitehead (1910/1981) en *Principia Mathematica* (PM). De tal manera, una forma equivalente de definir a los sistemas modales normales es como el resultado de la unión de los siguientes elementos:

$$(PM) + (A1) + (A3) + (R1) + (R2)$$

Entre los sistemas modales normales encontramos S4 y S5 de Lewis, y los Sistemas P de Lemmon. Como se observará, la regla R2 (en lo sucesivo “RN”) es la única de carácter modal y, de hecho, constituye parte del criterio de normalidad de un sistema. Respectivamente, un cálculo proposicional modal (o sistema modal axiomático) es no normal cuando no se satisface RN, regla que se ha castellanizado como “Necesariedad”. En opinión de Kripke (1965), tales sistemas resultan ser menos naturales, aunque no por ello menos “elegantes” teóricamente. Entre tales sistemas encontramos, por ejemplo, a S2 y S3 (siendo igualmente no normal el más débil de ellos: S1). Y si bien es cierto que A3 (Axioma K) colapsa en determinados sistemas no normales, la propiedad fundamental en la distinción atañe a la factibilidad de disponer de R2. Regla respecto de la cual se tiene el primer antecedente formal en la breve ponencia de Gödel titulada *Una interpretación del cálculo conectivo intuicionista*, publicada en *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums* en 1932, con el propósito de establecer la conjetura de que una fórmula cualquiera es válida en el cálculo de Heyting si y sólo si su traducción, en un cálculo proposicional ampliado, es deducible a partir del Sistema  $\Sigma$ . Este sistema se constituye por tres axiomas y la noción “p es demostrable”, que en la ponencia

original se simboliza como  $Bp$  y que representa la ampliación antes mencionada de la lógica conectiva tradicional.

Los axiomas del Sistema  $\Sigma$  son:

A1.  $Bp \supset p$

A2.  $Bp \supset (B(p \supset q) \supset Bq)$

A3.  $Bp \supset BBp$

A esto se agregan las reglas de inferencia de la lógica conectiva usual (CP) para las funciones veritativas:  $\neg$ ,  $\wedge$ ,  $\supset$  y  $\vee$ , además de la que para entonces se presentara como nueva regla de inferencia: “a partir de  $\phi$  puede inferirse  $B\phi$ ”.

Con todo, lo relevante del antecedente radica en que, hasta antes de la publicación de Gödel (1932/2006), los trabajos de Lewis ya contenían avances hacia la consecución de S4 y S5, sistemas que hoy sabemos que son normales. Las menciones iniciales acerca de estos sistemas se encuentran principalmente en los apéndices de *Symbolic Logic* de Lewis y Langford (1932/1959), para luego adquirir una nueva fundamentación a partir del trabajo de Lemmon (1957) y de otros de similares características. Sin embargo, tal como se verá en la presente investigación, la nueva fundamentación del Cálculo Proporcional Modal tampoco resulta ser clara en la distinción entre sistemas normales y no normales. Se sigue, entonces, el legítimo cuestionamiento acerca del estado de la Regla de Necesidad en las propuestas de Lewis y Langford, para lo que resulta valioso, a este respecto, el dato histórico que presentan Hughes y Cresswell (1973: 198, específicamente en nota 216), quienes conjeturan que la primera demostración de que RN es una regla en S4 parece corresponder a la ofrecida por McKinsey y Tarski en 1948. Si esta hipótesis fuese correcta, cabe preguntarse por el tratamiento de la regla en cuestión hasta antes de la publicación de Gödel, en todos los sistemas modales normales en desarrollo y, en particular, en los Sistemas S4-5. ¿Es del todo claro, *a priori*, que la “maquinaria” mediante la que se erigen los Sistemas de Lewis permite prescindir de RN? Y si esto fuese así, ¿por qué se considera, entonces, que RN es un criterio de normalidad,

si, en efecto, sistemas normales como S4-5 pueden obtenerse sin ella? Por el contrario, si RN resulta, de algún modo, imprescindible para los sistemas S4-5, ¿cómo es que no se reparó sobre ello? ¿Es que acaso se trata de un prejuicio filosófico de Lewis y de sus contemporáneos, quienes resultaron proclives a presuponer la Regla de Necesidad o a asumirla, al menos intuitivamente, como verdadera dada su simplicidad y su carácter (posiblemente) autoevidente? Esta constituye una pregunta legítima y su respuesta requiere de una inspección detallada del trabajo originado para la formalización de los actuales sistemas proposicionales modales. Además, el cuestionamiento posee un componente estrictamente lógico pero también otro filosófico e histórico asociado. No es menor reparar en que el carácter intuitivo de RN queda de manifiesto en el mismo momento en que se formaliza como parte del Sistema  $\Sigma$  de Gödel (1932/2006). Ni éste, ni sus contemporáneos inmediatos, dudaron de la aplicabilidad de la regla, y no fue sino hasta más de 15 años después que RN (en su versión estricta) sería demostrada para S4.

En su dimensión lógica, la investigación que se propone demanda del estudio de los Sistemas S propuestos principalmente por Lewis y Langford, y, luego, de los sistemas propuestos con posterioridad, como, por ejemplo, el trabajo de Lemmon. Ello procurando determinar si en la formulación de los Sistemas de Lewis es factible prescindir de RN como regla de inferencia o si, por el contrario, la misma fue presupuesta de manera intuitiva. En su dimensión filosófico-histórica, la investigación supone la capacidad de contextualizar el cálculo modal moderno en una época influenciada por el programa logicista y por determinadas concepciones con respecto a las expresiones “necesario” y “posible”, las que tienen como exponentes reconocidos a Quine y Carnap, entre otros.

## 1.1.1 Objetivos

### 1.1.1.1 Objetivo General

- Evaluar la dependencia que los Sistemas S de Lewis y Langford puedan haber mantenido con respecto a la Regla de Necesariedad, formulada por Gödel en *Una interpretación del cálculo conectivo intuicionista*, del año 1932.

### 1.1.1.2 Objetivos Específicos

- Describir las principales propiedades de los Sistemas de Lewis y Langford en sus aspectos técnicos y filosóficos principalmente asociados a los cuestionamientos sobre la Implicación Material.
- Inspeccionar las derivaciones realizadas por Lewis y Langford en el desarrollo del Sistema de Implicación Estricta a fin de determinar si la Regla de Necesariedad fue presupuesta o no.
- Contrastar la formulación de los Sistemas de Lewis y Langford con la de los Sistemas de Lemmon, en los que se incorpora la Regla de Necesariedad en sus versiones debilitada y no debilitada.

En lo que respecta a la técnica, la realización de los objetivos formulados demanda tres acciones complementarias. En primer lugar, la selección y consecuente análisis del material bibliográfico central en torno a la formulación inicial de la lógica modal moderna, es decir, como sistema axiomático, y a sus avances sucesivos conforme a la Regla de Necesidad. En segundo lugar, se requerirá presentar, de manera ordenada, el desarrollo del Sistema de Implicación Estricta –dentro de lo cual se considera el debate en oposición al Cálculo Proposicional sustentado en la Implicación Material–, los Sistemas S de Lewis y Langford, la formalización de la Regla de Necesidad y los antecedentes sobre el poder de inferencia que suministra para los sistemas modales que la incorporan. Para esto último se considera la formulación de los Sistemas P de Lemmon. En tercer lugar, el trabajo demanda la tarea de indagar sobre la posible incorporación intuitiva de la Regla de Necesidad en los sistemas modales de Lewis, algo para lo cual se deberán analizar sistemáticamente las derivaciones del Capítulo VI de *Symbolic Logic* y los apéndices de la misma obra. En caso de concluirse que no existen elementos de juicio que permitan justificar una incorporación intuitiva de la regla en cuestión en la propuesta de Lewis y Langford, la presente investigación deberá explicitar la “maquinaria” de inferencia en los Sistemas S que permite prescindir de RN.

Como fuentes de información se recurre principalmente a los trabajos en lógica modal llevados a cabo por Lewis (1918), Lewis y Langford (1932/1959), McKinsey y Tarski (1948), y Lemmon (1957). De manera complementaria, se analizan aspectos del Álgebra de Boole-Schroder, de sistemas formales modales debilitados y temáticas alusivas a los cuestionamientos filosóficos sobre la enunciación de los sistemas modales.

## 2 La primera versión del Sistema de Implicación Estricta de Lewis

### 2.1 Consideraciones preliminares acerca del Sistema de Implicación Estricta

El tratamiento formal de las nociones “necesario”, “posible” e “imposible” –además de otras vinculadas– preocupó a la lógica matemática moderna antes de los avances de Lewis, encontrándose presente, por ejemplo, en los sistemas de Mc Coll, los que fueron propuestos entre 1880 y 1906 (véase Goldblatt, 2005). Sin embargo, el Sistema de Implicación Estricta, desarrollado en *A Survey of Symbolic Logic* (1918), comporta al menos dos rasgos de interés para su tiempo. Por una parte, muestra una formalización, al menos inicial, de los elementos modales relevantes bajo la estructura de un Sistema Axiomático, algo que denota la impronta ejercida por Russell y Whitehead (1910/1981), con la publicación de *Principia Mathematica*. Así entonces, la lógica modal adquirió fundamento a través del “Método Logicista” (es decir, como Cálculo Lógico), dejando atrás la formalización que hasta ese momento había predominado con recurso al Álgebra de Boole-Schröder (el trabajo de Mc Coll es un ejemplo característico de ello). Por otro lado, el Sistema de Implicación Estricta apuntó a aprehender formalmente la relación de implicación lógica, aproximándola al uso familiar que los agentes racionales parecen hacer de ella. Expuesto al menos desde un matiz general, aquello tuvo una doble intención. Primero, sortear las paradojas de la Implicación Material –así llamada por Russell–, tal como se desprenden del Cálculo Proposicional en *Principia Mathematica* y de los trabajos preliminares de Frege. Las mismas son observables en una serie de teoremas que resultan a lo menos contraintuitivos y, como el mismo Lewis (1912, 1918) declaró, inútiles y dudosos para ser tomados “seriamente” como principios de inferencia deductiva<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>Una revisión más detallada se encuentra en Lewis (1912). En un breve artículo, el autor revisa un número amplio de teoremas que se desprenden de la regla de acuerdo con la cual una proposición falsa

Algunos de estos teoremas “peculiares” son los siguientes:

Fórmula	Descripción
$\neg p \supset (p \supset q)$	Lo que equivale a decir que de una proposición falsa se obtiene cualquier proposición.
$q \supset (p \supset q)$	Lo que equivale a decir que una proposición verdadera resulta implicada por cualquier proposición.
$\neg(p \supset q) \supset p$	Lo que equivale a decir que si es falso que la proposición p implique a la proposición q, tenemos que p es verdadera.
$\neg(p \supset q) \supset \neg q$	Lo que equivale a decir que si es falso que la proposición p implique a la proposición q, tenemos que la negación de q es verdadera.
$\neg(p \supset q) \supset (p \supset \neg q)$	Lo que implica a decir que si es falso que la proposición p implique a la proposición q, tenemos que p implica a la negación de q.
$(p \wedge q) \supset ((p \supset q) \wedge (q \supset p))$	Lo que equivale a decir que si las proposiciones p y q son, ambas, verdaderas, p implica q, y recíprocamente.
$(\neg p \wedge \neg q) \supset ((p \supset q) \wedge (q \supset p))$	Lo que equivale a decir que si las proposiciones p y q son, ambas, falsas, p implica q, y recíprocamente.

Para Lewis (1918), tales teoremas, así como varios otros igualmente distantes del sentido común, evidenciarían que un sistema sostenido sobre la Implicación Material contendrá proposiciones que no admiten ninguna aplicación para lo que se pretende representar, desde una concepción intuitiva o natural, con la idea de “inferencia válida”. Ello conllevó, en segundo lugar, a que el Sistema de Implicación Estricta fuera construido procurando desarrollar, precisamente, una noción de “implicación” apropiada, la cual capturase de mejor manera el significado de “inferencia válida” y que no permita la derivación de proposiciones como las anteriores. El componente filosófico asociado a ello es de una indiscutida complejidad y no ha admitido una resolución tajante, incluso hasta nuestros días. Baste con decir que, aunque podamos compartir con Lewis que la elucidación del significado de “inferencia válida” mantenga relación con el esclarecimiento de “implicación”, no es suficiente con asumir que un requisito del primero sea el abstenerse de aceptar teoremas intuitivamente dudosos. En algunos

---

implica cualquier proposición y de la regla que establece que una proposición verdadera se encuentra implícita en cualquier proposición. La posibilidad de que ambas reglas sean grandes absurdos, más que descubrimientos valiosos, justificó la oposición Lewis a la Implicación Material y la formulación de su propuesta alternativa (El Sistema de Implicación Estricta).

respectos la intuición es un asunto demasiado exiguo como para tomarse por criterio demarcatorio entre sistemas lógicos, aunque se trate de sistemas preservativos de la lógica clásica. La falta de acuerdo filosófico sobre la elección entre Implicación Material e Implicación Estricta lo justifica plenamente. Incluso, Lewis (1918, ver págs. 324 y sigs. ) explicitó que tal elección entre sistemas supone una petición de principio, pues asume un pleno conocimiento sobre “implica”, aquello que es precisamente lo que debe esclarecerse. En la actualidad, el debate en la materia ha tomado un rumbo distinto. Más que concentrarse en la elección entre sistemas, se centraliza en la aceptación o no de la idea Implicación Estricta y de sus consecuencias. Por ello, dos son las razones que justifican el presente capítulo. Por un lado, el Sistema de Implicación Estricta, tal como fue establecido primeramente por Lewis (1918) y con posterioridad por Lewis y Langford (1932/1959), adquiere valor intrínseco por la novedad que tuvo en el tratamiento formalizado de las nociones modales, con sugestivas consecuencias para extender la comprensión en torno al Cálculo Proposicional Bivalente. Por otro lado, las ideas albergadas en el Sistema de Implicación Estricta tuvieron directo influjo en el avance hacia los posteriores Sistemas S y en el tratamiento de las nociones modales fundamentales: “necesario”, “posible” e “imposible”. Así entonces, destinamos esta sección a exponer sus líneas argumentativas más relevantes: (i) las ideas base del Sistema de Implicación Estricta y del tratamiento que hace de las nociones modales, además de las consecuencias que se desprenden de la capacidad del sistema para contener al Sistema de Implicación Material formalizado en *Principia Mathematica*; (ii) las características de los sistemas parciales contenidos en el Sistema de Implicación Estricta: Cálculo de Consistencia y Cálculo de Inferencia Ordinaria; (iii) las extensiones que el Sistema de Implicación Estricta admite para las funciones proposicionales. Una perspectiva completa de las materias en discusión requiere de una revisión integral de *A Survey of Symbolic Logic*. Por consiguiente, acá se presupone cierta familiarización con la lógica proposicional bivalente, la teoría de funciones proposicionales, la idea de sistema axiomático y su diferenciación con respecto al Álgebra de Boole-Schröder, y el Cálculo Lógico basado en Implicación Material, entre otras materias.

## 2.2 Ideas Fundamentales del Sistema de Implicación Estricta (Lewis 1918)

En tanto Calculo Lógico, el Sistema de Implicación Estricta consta de ideas primitivas, definiciones, axiomas y principios de inferencia. Las ideas primitivas son:

- (i) Proposiciones, simbolizadas por las letras  $p, q, r$ , etcétera.
- (ii) Negación, simbolizada con  $\neg p$  (“ $p$  es falsa” o “es falso que  $p$  sea el caso”).
- (iii) Imposibilidad, simbolizada con  $\sim p$  (“ $p$  es imposible”).

Caben algunos comentarios sobre (iii), idea que otorga el carácter modalizado al Sistema de Implicación Estricta (al menos en su versión inicial) y con ello su diferencia con aquellos sistemas basados en Implicación Material. Primero, resulta relevante señalar que la misma no adquiere un tratamiento formal original en los trabajos de Lewis, encontrándose presente en los desarrollos lógicos de Mc Coll. Sin embargo, su incorporación como parte del Sistema de Implicación Estricta llevó a Lewis a sostener que el mismo asume cinco valores de verdad y no dos como los sistemas lógicos clásicos (*Principia Mathematica*, por ejemplo). Naturalmente, esta consideración dista del punto de vista moderno sobre los sistemas de lógica modal, en donde se ha establecido la correcta diferenciación entre funciones de verdad (enunciados alético-funcionales) y operadores modales (véase Hughes y Creswell, 1973, pags. 31 y siguientes). Aun así, es relevante señalar que, según Lewis, los siguientes serían los valores de verdad asumidos por el Sistema de Implicación Estricta<sup>2</sup>.

---

<sup>2</sup>Un contrapunto importante se observa en *Symbolic Logic* de Lewis y Langford (1932/1959). En su Capítulo VII, *Truth-Value Systems and The Matrix Method*, los autores fueron claros en señalar que  $\diamond p, \neg \diamond p$ , etcétera –que arriba respectivamente se han representado como:  $\neg \sim p, \sim p$ , etcétera– son funciones lógicas, aunque no funciones de verdad. En la concepción de estos lógicos, pertenecientes a una época en donde la Semántica de Mundos Posibles no se había formalizado, una función de verdad resulta ser aquella cuyo estado de verdad (su valuación) se determina únicamente por el de sus elementos constitutivos (sus proposiciones atómicas). Desarrollaremos esta idea más adelante, cuando explicitemos el contraste entre el Sistema de Implicación Material y el Sistema de Implicación Estricta. Baste por ahora con advertir que, si  $\diamond p, \neg \diamond p$  u otras fórmulas modalizadas fuesen funciones de verdad, la lógica modal no sería conservativa de la lógica clásica, al vulnerar su Principio de Bivalencia.

- (a)  $p$  (“p es verdadero”);
- (b)  $\neg p$  (“p es falso”);
- (c)  $\sim p$  (“p es imposible” o “es imposible que p sea verdadera”);
- (d)  $\neg \sim p$  (“es falso que p sea imposible” o “p es posible”);
- (e)  $\sim \neg p$  (“es imposible que p sea falsa” o “p es necesariamente verdadera”).

- (iv) Producto Lógico, el cual simbolizamos por  $pxq$ , o bien  $pq$ . Cabe destacar que conservamos la notación original propuesta por el autor, reservando así el símbolo “ $\wedge$ ” (ampliamente usado en contextos de influencia anglosajona para denotar conjunción o producto lógico) para la función de Suma Lógica Estricta (tal como más abajo se muestra).
- (v) Equivalencia, la cual simbolizamos como  $p = q$ . Se trata de Equivalencia Estricta, conforme veremos a continuación.

Estas cinco ideas preliminares permiten la generación de las siguientes definiciones, las que toman a las funciones de negación y producto lógico como primitivas, además de la noción modal de imposibilidad:

D1. Consistencia:  $p \circ q =_d \neg \sim (pq)$  Si  $\sim (pq)$  equivale a “es imposible que  $p$  y  $q$  sean ambas verdaderas”, notaremos que  $p \circ q$  equivale a “es posible que  $p$  y  $q$  sean ambas verdaderas”<sup>3</sup>.

D2. Implicación Estricta:  $p \succ q =_d \sim (p\neg q)$ . Este operador modal capta la idea de vinculación lógica. Expresa la imposibilidad de que  $p$  sea verdadera sin que  $q$  también sea verdadera. Aclaremos que la simbología para la Implicación Estricta, en el presente trabajo, difiere de la empleada por Lewis.

D3. Implicación Material:  $p \supset q =_d \neg(p\neg q)$

---

<sup>3</sup>La idea de posibilidad que se define como  $\neg \sim p$  y puede derivarse de manera simple a través de la definición de Consistencia. Sea:  $p \circ p = \neg \sim (pp)$ . Luego, sustituyendo  $q$  por  $p$  en A2 (ver axioma a continuación), tenemos  $pp \succ p$  (ver definición de Implicación Estricta a continuación). Considerando A3 y D3 (ver a continuación), tenemos inmediatamente  $pp = p$ . Se sigue,  $p \circ p = \neg \sim p$ .

D4. Suma Lógica Estricta (Disyunción Estricta):  $p \wedge q =_d \neg(\neg p \neg q)$

D5. Suma Lógica Material (Disyunción Material):  $p + q =_d \neg(\neg p \neg q)$

D6. Equivalencia Estricta:  $p = q =_d (p \rightarrow q)(q \rightarrow p)$

D7. Equivalencia Material:  $p \equiv q =_d (p \supset q)(q \supset p)$

Los axiomas (o postulados) del sistema son los siguientes ocho:

A1.  $pq \rightarrow qp$

A2.  $qp \rightarrow p$

A3.  $pp \rightarrow p$

A4.  $p(qr) \rightarrow q(pr)$

A5.  $p \rightarrow \neg(\neg p)^4$

A6.  $(p \rightarrow q)(q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$

A7.  $\sim p \rightarrow \neg p$

A8.  $(p \rightarrow q) = (\sim q \rightarrow \sim p)$

Ahora bien, sólo con fines históricos hemos mantenido este axioma (A8). No obstante, el mismo permite la derivación de  $(\sim q \rightarrow \sim p) \rightarrow (p \rightarrow q)$ , teorema que, si bien es consistente con los otros postulados del Sistema de Implicación Estricta, resulta incompatible con el significado primitivo de “imposible” y contradice la distinción entre “imposibilidad” y “falsedad” (asunto insostenible para Lewis, por destruir los fundamentos de los sistemas lógicos modales). En particular, conduce a  $\sim p = \neg p$ . La problemática de A8 fue descubierta por E. L. Post, obligando a Lewis a corregir la formulación inicial del sistema y a ajustar, entre otros asuntos, la sección de *A Survey of Symbolic Logic* destinada a mostrar que el Sistema de Implicación Material de *Principia*

---

<sup>4</sup>En un breve artículo, McKinsey (1934) demostró que A5 es derivable de A1-3 y A6. Este resultado, aunque no de manera concluyente, está implícito en los grupos de Lewis que serán revisados en el capítulo siguiente. La demostración de McKinsey consiste, en primer lugar, en derivar los siguientes tres teoremas (con sustento en A1-3 y A6): T1.  $p \rightarrow p$ , T2.  $pq = qp$ , T3.  $\neg(\neg p) \rightarrow p$ . Luego, es posible obtener  $p \rightarrow \neg(\neg p)$

*Mathematica* está contenido en el Sistema de Implicación Estricta. Tal necesidad de enmendación se suscita, precisamente, de la dependencia de algunas demostraciones con respecto al teorema  $(\sim q \rightarrow \sim p) \rightarrow (p \rightarrow q)$ . Quien mantenga interés en profundizar en esto puede consultar Lewis (1920). A continuación mostraremos cómo  $(\sim q \rightarrow \sim p) \rightarrow (p \rightarrow q)$  conduce a anular la diferencia entre “imposibilidad” y “falsedad”. El teorema en cuestión tiene numeración 2.21 en el Capítulo V de *A Survey of Symbolic Logic*, la cual mantendremos (pág. 297). Para todas las otras definiciones, axiomas o teoremas empleados en la demostración, recurrimos a la forma en que se han identificado en la presente exposición (recordamos que recurrimos a la notación original de Lewis, actualmente en desuso). Se comprenderá, entonces, por qué en *Symbolic Logic*, la formulación del Sistema de Implicación Estricta contempla como octavo axioma a  $(p \rightarrow q) \rightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$ . Al respecto retomaremos en el siguiente capítulo.

$$(1) (\sim q \rightarrow \sim p) \rightarrow (p \rightarrow q): (2.21)$$

$$(2) p \rightarrow q = \sim (p \neg q): D2$$

$$(3) \sim q \rightarrow \sim p = \sim (\sim q \neg \sim p): D2 \{ \sim q/p, \sim p/q \}$$

$$(4) (1) = [\sim (\sim q \neg \sim p) \rightarrow \sim (p \neg q)]: (3) X (2)$$

$$(5) \sim (\sim q \neg \sim p) \rightarrow \sim (p \neg q) \rightarrow [(p \neg q) \rightarrow (\sim q \neg \sim p)]: (1) \{ (\sim q \neg \sim p)/q, (p \neg q)/p \}$$

$$(6) (4) \rightarrow [(p \neg q) \rightarrow (\sim q \neg \sim p)]: (5) X (1)$$

$$(7) (p \neg \neg p) \rightarrow (\sim \neg p)(\neg \sim p): (6) \{ \neg p/q \}$$

$$(8) (7) = pp \rightarrow (\sim \neg p)(\neg \sim p): T1 (ver más abajo) X 7$$

$$(9) (8) = p \rightarrow (\sim \neg p)(\neg \sim p): T4 (ver más abajo) X 8$$

$$(10) (\sim \neg p)(\neg \sim p) \rightarrow \sim \neg p: T3 \{ \sim \neg p/p, \neg \sim p/q \}$$

$$(11) [(9)(10)] \rightarrow [p \rightarrow \sim \neg p]: A6 \{ p/p, (\sim \neg p)(\neg \sim p)/q, (\sim \neg p)(\neg \sim p, \sim \neg p)/r \}$$

$$(12) \neg p \rightarrow \sim (\neg \neg p): (11) \{ \neg p/p \}$$

$$(13) (12) = (\neg p \rightarrow \sim p): T1 (ver más abajo) X (12)$$

$$(14) \sim p \rightarrow \neg p: A7$$

$$(15) (13)(14) = (\neg p = \sim p): D6$$

Por su parte, A7 permite apreciar la vinculación entre “imposibilidad” y “negación”, y con A8 justifican la subordinación de las relaciones materiales a las relaciones estrictas (en el sistema de Lewis). Además, Lewis (1918) mostró que A8 equivale al siguiente par de axiomas:

$$\text{A8.1 } (p \supset q) \supset (\neg \sim p \supset \neg \sim q)$$

$$\text{A8.2 } (\sim p \supset \sim q) \supset (\neg p \supset \neg q)$$

El Sistema de Implicación Estricta opera con las siguientes tres reglas para derivar teoremas:

R1. Sustitución. Cualquier proposición puede ser reemplazada por  $p$ ,  $q$  o  $r$ . Expuesto a través de una concepción moderna, dotada de mayor precisión, la sustitución equivale a decir que una proposición  $p$  resulta ser la interpretación de una oración  $q$  si y sólo si puede obtenerse de  $q$ , reemplazando, en todos los casos, de la misma forma, las oraciones atómicas componentes de  $q$  por otras. Adicionalmente, debemos notar que:

Si  $p$  es una proposición, entonces  $\neg p$  y  $\sim p$  son proposiciones.

Si  $p$  y  $q$  son proposiciones, entonces  $pq$  (o bien  $pxq$ ) es una proposición.

R2. Inferencia: Si  $p$  y  $p \supset q$  son afirmadas, entonces se concluye  $q$ . Es importante advertir que, en el Sistema de Implicación Estricta, la Regla de Inferencia (R2) no se asume para la Implicación Material. Esto lo distancia de otros sistemas en que los que se dispone de *Modus Ponens* (para implicación material), como es el caso del Cálculo Proposicional desarrollado en *Principia Mathematica* y en las extensiones modales de Lemmon (1957). En lo sucesivo, ello, entre otras cosas, nos llevará a concluir que los Sistemas S resultan conservativos en una versión no estándar de la Lógica Clásica.

R3. Producción (igualmente conocida como Adjunción o Producto Lógico): Si  $p$  y  $q$  son independientemente afirmadas, entonces  $pq$  es derivable.

## 2.3 Algunas derivaciones importantes en el Sistema de Implicación Estricta

Si bien no nos abocaremos a la tarea de presentar un detalle de los teoremas que el mismo Lewis (1918) obtuvo como parte del Sistema de Implicación Estricta, sí concentraremos nuestra atención inicial en un pequeño número de derivaciones. En particular, en aquellas que permiten demostrar que los postulados utilizados para la fundamentación del Cálculo de Consistencia y del Cálculo de Inferencia Ordinaria son consecuencia del Sistema de Implicación Estricta (ver págs. 316 y sigs.). De tal manera, la exposición que sigue no se apega a la secuencia de derivaciones seguida por Lewis y, consecuentemente, la numeración de teoremas aquí empleada tampoco corresponde a la del autor. En *A Survey of Symbolic Logic* se muestra que el Sistema de Implicación Material desarrollado en *Principia Mathematica* es derivable a partir del Sistema de Implicación Estricta, lo cual tiene algunas sugestivas consecuencias, respecto de las cuales nos referiremos en lo que sigue. Advirtiéndole que en *A Survey of Symbolic Logic* están las demostraciones de los teoremas que aquí enumeraremos entre T1 y T13 (ver págs., 296 y sigs.), los mismos serán considerados sin explicitar su prueba:

---

T1. $p = \neg\neg p$	T6. $p \wedge q = \neg p \supset q$	T11. $pq \supset p \circ q$
T2. $pq = qp$	T7. $p \circ q = \neg(p \supset \neg q)$	T12. $[(pq) \supset (rs)] \supset [(p \circ q) \supset (r \circ s)]$
T3. $pq \supset p$	T8. $(p = q) = (p \supset q)(q \supset p)$	T13. $[(pq) \supset (rs)] \supset [(pq) \supset (rs)]$
T4. $pp = p$	T9. $(\neg p \supset q) \supset (\neg q \supset p)$	
T5. $q \circ p \supset \neg \sim p$	T10. $p(qr) \supset q(pr)$	

---

Dado lo anterior podemos obtener los siguientes teoremas:

$$\text{T14. } p \wedge q = \neg(\neg p \circ \neg q)$$

- (1)  $\neg(\neg p \circ \neg q) = \neg\neg \sim (\neg p \neg q)$ : D1  $\{\neg p/p, \neg q/q, \neg(\neg p \circ \neg q)/(\neg p \circ \neg q)\}$
- (2)  $\neg(\neg p \circ \neg q) = \sim (\neg p \neg q)$ : (1) X T1
- (3)  $\neg(\neg p \circ \neg q) = p \wedge q$ : (2) X D4
- (4)  $p \wedge q = \neg(\neg p \circ \neg q)$ : (3) X Eq.

$$\text{T15. } p \rightarrow q = \neg(p \circ \neg q)$$

- (1)  $p \rightarrow q = \sim (p \neg q)$ : D3
- (2)  $p \rightarrow q = \neg(\neg \sim (p \neg q))$ : (1) X T1
- (3)  $p \rightarrow q = \neg(p \circ \neg q)$ : (2) X D1

$$\text{T16. } (p \circ q) = (q \circ p)$$

- (1)  $p \circ q = \neg \sim (pq)$ : D1
- (2)  $(p \circ q \rightarrow \neg \sim (pq))(\neg \sim (pq) \rightarrow p \circ q)$ : (1) X D7
- (3)  $(p \circ q \rightarrow \neg \sim (pq))$ : (2) X T3  $\{p \circ q \rightarrow \neg \sim (pq)/q, \neg \sim (pq) \rightarrow p \circ q/q\}$
- (4)  $p \circ q \rightarrow \neg \sim (qp)$ : (3) X T2
- (5)  $p \circ q \rightarrow q \circ p$ : (6) X D1

$$\text{T17. } \neg \sim p \rightarrow (p \circ p)$$

- (1)  $p \circ p = neg \sim pp$ : D1  $\{q/p\}$
- (2)  $(p \circ p \rightarrow \neg \sim pp)(\neg \sim pp \rightarrow p \circ p)$ : 1 X D6
- (3)  $(p \circ p \rightarrow \neg \sim pp)(\neg \sim pp \rightarrow p \circ p) \rightarrow \neg \sim pp \rightarrow p \circ p$ : (2) X A2  $\{pp \circ p \rightarrow \neg \sim pp/q, \neg \sim pp \rightarrow p \circ p/p\}$
- (4)  $\neg \sim pp \rightarrow p \circ p$ : (2) X (3)X R2
- (5)  $\neg \sim p \rightarrow p \circ p$ : (4) X T4

$$T18. (pq \multimap rs) = (p \circ q \multimap r \circ s)$$

$$(1) [(pq \multimap rs) \multimap (p \circ q \multimap r \circ s)][(p \circ q \multimap r \circ s) \multimap pq \multimap rs]: T12 \times T13 \times R3$$

$$(2) (pq \multimap rs) = (p \circ q \multimap r \circ s)^5$$

Considerando, entonces, que todos los teoremas anteriores son derivables a partir de las siete definiciones, ocho axiomas y tres reglas de inferencia que contempla el Sistema de Implicación Estricta, se hará evidente que los siguientes dos sistemas parciales quedan contenidos en aquél. Como hemos señalado, al primero de éstos Lewis (1918) lo denominó “Cálculo de Consistencia” y consta, en particular, de las siguientes ideas primitivas:

---

Proposiciones: $p, q, r, \dots$	Imposibilidad: $\sim p$	Equivalencia Estricta: $p = q$
Negación: $\neg p$	Consistencia: $p \circ q$	

---

En cuanto a definiciones, el presente sistema parcial incluye las siguientes dos (en todos los casos son definiciones para relaciones estrictas):

$$D1: p \wedge q =_d \neg(\neg p \circ \neg q)$$

$$D2: p \multimap q =_d \neg(p \circ \neg q)$$

Los postulados o axiomas del sistema son los siguientes cuatro:

$$A1. (p \circ q) = (q \circ p)$$

$$A2. \neg \sim p \multimap p \circ p$$

$$A3. q \circ p \multimap \neg \sim p$$

$$A4. p = \neg \neg p$$

Explicitamos que las dos definiciones y los cuatro axiomas anteriores son derivaciones del Sistema de Implicación Estricta. En efecto, D1 y D2 corresponden a los teoremas 14 y 15. Los axiomas entre A1 y A4 corresponden, respectivamente, a los teoremas que

---

<sup>5</sup>Este teorema es derivable a partir de A8, razón por la cual fue eliminado de las sucesivas versiones del Sistema de Implicación Estricta.

antes presentamos como T16, T5, T17 y T1. Las reglas de inferencia del sistema son tres:

R1. Sustitución

R2. Inferencia (definida en los mismos términos que en el Sistema de Implicación Estricta)

No obstante, para la formalización del Cálculo de Consistencia, Lewis (1918) no asume Producción como tercera regla de inferencia. En su lugar, incorpora la transitividad de la Implicación Estricta, la cual se expresa en el sexto axioma del Sistema de Implicación Estricta. Tenemos entonces:

R3. Si  $p \rightarrow q$  y  $q \rightarrow r$ , entonces  $p \rightarrow r$

De acuerdo con Lewis (1918), el Cálculo de Consistencia presenta, entre otras, la particularidad de prescindir de las relaciones materiales, distintas de  $p$  y  $\neg p$ , pudiendo desprenderse los teoremas que exhiben analogías entre relaciones estrictas y materiales. Sin embargo, es claro que un mayor interés capta el Cálculo de Inferencia Ordinaria. El mismo contiene las siguientes ideas primitivas (la última de éstas, referida a la Suma Lógica Material, mantiene un rango de “opcional” en el sistema):

---

Proposiciones:  $p, q, r, \dots$

Imp. Estricta:  $p \rightarrow q$

Eq. Estricta:  $(p = q) = (p \rightarrow q)(q \rightarrow p)$

Negación:  $\neg p$

Producción:  $pq$

Suma Lógica:  $p + q = \neg(\neg p \neg q)$

---

Los axiomas del sistema son los siguientes ocho:

$$A1. (\neg p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow p)$$

$$A2. pq \rightarrow p$$

$$A3. p \rightarrow pp$$

$$A4. p(qr) \rightarrow q(pr)$$

$$A5. p = \neg\neg p$$

$$A6. (p \rightarrow q)(q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$$

$$A7. pq \rightarrow p \circ q$$

$$A8. (pq \rightarrow rs) = (p \circ q \rightarrow r \circ s)^6$$

Estos axiomas son, a su vez, teoremas derivables del Sistema de Implicación Estricta o axiomas del mismo. Anteriormente, los hemos identificado, respectivamente, como T9, T3, A3, T10, A5, A6, T11, T18. En cuanto a las reglas de inferencia, el presente sistema parcial mantiene las establecidas para el Sistema de Implicación Estricta: Sustitución, Inferencia y Producción. Para Lewis (1918), el Cálculo de Inferencia Ordinaria resulta más cercano a la idea de “inferencia válida” que él presupone. En este caso, conserva el Producto Lógico, pero desestima la Implicación Material, mientras que la Suma Lógica Material pasa a ser un recurso opcional. A juicio del autor, tales ideas complicarían justamente la capacidad del sistema para aproximarse al presupuesto que él mantiene sobre “inferencia válida”. Es interesante advertir que bajo el mismo argumento se considera inapropiado sustentar el sistema recurriendo a las nociones de “necesario”, “posible” e “imposible”, asumiéndose las siguientes analogías entre sistemas:

---

<sup>6</sup>Considerando las problemáticas producidas por A8 en la formulación original del Sistema de Implicación Estricta, este axioma del Cálculo de Inferencia Ordinaria (que, como hemos visto, es teorema del Sistema de Implicación Estricta) fue sustituido posteriormente por  $(pq \rightarrow rs) \rightarrow (p \circ q \rightarrow r \circ s)$ .

Sist. Imp. Estricta	Cálculo Inferencia Ordinaria
$\sim p$	$\neg(p \circ p) \circ p \rightsquigarrow \neg p$
$\sim \neg p$	$\neg(\neg p \circ \neg p) \circ \neg p \rightsquigarrow p$
$\neg \sim p$	$p \circ p \circ \neg(p \rightsquigarrow p)$

Sin embargo, más allá de estas cuestiones, lo relevante del Sistema de Inferencia Ordinaria es que se hace cargo de uno de los criterios centrales a partir de los cuales Lewis (1918) concibió la “inferencia válida”: la inadmisibilidad de teoremas contraintuitivos, como lo sería una parte significativa de aquéllos derivables a partir de la Implicación Material. En efecto, si el Sistema de Implicación Estricta es capaz de contener al Sistema de Implicación Material, entonces aquél no escaparía de la crítica susceptible de realizarse respecto de la peculiaridad o inutilidad de determinados teoremas que el sistema contiene. De ello a que, por una parte, sin el establecimiento del Cálculo de Inferencia Ordinaria, el Sistema de Implicación Estricta no sortearía las “falencias” de la Implicación Material, manteniendo, paradójicamente, la problemática que da origen a su formalización. Por otra parte, el Cálculo de Inferencia Ordinaria, como el mismo Lewis (1918) advierte, presenta la peculiaridad de sortear la “complejidad” objetable del Sistema de Implicación Estricta, a la vez que conserva la relación de consistencia  $p \circ p$  a la que el autor le otorga especial valor (entre otras razones, por formalizar la idea de *posibilidad lógica*). Con todo, este segundo argumento es discutible, pues mantiene indeterminados los elementos de juicio asumidos para esgrimir la especial “complejidad” del Sistema de Implicación Estricta y, al menos hasta la época de *A Survey of Symbolic Logic*, la justificación para la relevancia otorgada a la relación de consistencia (la que, desde una visión general, no parece más próxima a la intuición que otras definiciones o ideas primitivas, como, por ejemplo, la de “imposibilidad”).

En lo que sigue presentaremos resumidamente las ideas base de la extensión del Sistema de Implicación Estricta a las funciones proposicionales.

## 2.4 Extensión del Sistema de Implicación Estricta

La diferencia entre una proposición y una función proposicional puede expresarse de la siguiente manera. Por “proposición” nos referimos a cualquier enunciado que, en un contexto determinado, es susceptible de ser verdadero o es falso. Por ejemplo, “Platón escribió La República” o “Las gaviotas son mamíferos”. Para ambos casos resulta factible determinar la respectiva valuación de lo declarado (verdadero en el primer caso y falso en el segundo). Una función proposicional, en cambio, es una frase que contiene una o más variables que, al ser reemplazadas por elementos del dominio, la transforman en una proposición. Sea, por ejemplo,  $p(x)$ : “ $x$  es un número primo”. Es claro que  $p(x)$  cumple con la condición de ser función proposicional. Al reemplazar (instanciar)  $x$  por algún valor del dominio (digamos  $N$ ) podríamos obtener las siguientes dos proposiciones:

$p(2)$ : "2 es un número primo"

$p(4)$ : "4 es un número primo"

Ambas proposiciones son susceptibles de tomar el valor verdadero o falso (el valor *verdadero* en el primer caso y el *falso* en el segundo caso). Ahora, la extensión que hace Lewis (1918) del Sistema de Implicación Estricta a las funciones proposicionales tiene principalmente la originalidad de introducir el operador modal de imposibilidad –del que obtenemos las nociones de “necesario” y “posible”– en la teoría de funciones proposicionales, tal como fuese trabajada por Russell y Whitehead (1910/1981). Con base en ello, Lewis (1918) explicita que mientras  $\phi x$  denota una función proposicional, la expresión  $\sim \phi x$  denota una proposición. Por consiguiente, para las funciones proposicionales  $\phi x$  y  $\psi x$ , tenemos que:

$\phi x \vee \psi x$  corresponde a la proposición  $\neg \sim (\phi x \times \psi x)$

$\phi x \wedge \psi x$  corresponde a la proposición  $\sim (\neg \phi x \times \neg \psi x)$

$\phi x \supset \psi x$  corresponde a la proposición  $\sim (\phi x \times \neg \psi x)$

En rigor, Lewis (1918) asume que todas las relaciones estrictas de funciones proposicionales son proposiciones. Además, de las nociones “imposible” y “posible” se obtienen las siguientes leyes:

$\sim \phi x \supset \forall x \neg \phi x$ . En efecto, es imposible que sea verdadero que  $\phi x$  es imposible y que sea falso que  $\forall x \neg \phi x$  sea falsa.

$\exists x \phi x \supset \neg \sim \phi x$ . En efecto, es imposible que sea verdadero que exista un  $x$  que satisfaga  $\phi$  y que sea falso que  $\phi x$  es posible.

$(\phi x \supset \psi x) \supset \forall x (\phi x \supset \psi x)$ . En efecto, si  $\phi x$  implica estrictamente a  $\psi x$ , entonces  $\phi x$  implica materialmente a  $\psi x$ . Equivalentemente, puede decirse que si es imposible que  $\phi x$  sea verdadera y que  $\psi x$  sea falsa, entonces no hay un caso en el que  $\phi x$  sea verdadera y  $\psi x$  sea falsa. Este postulado se obtiene de manera directa de las definiciones 1 y 2 que más abajo presentamos<sup>7</sup>.

Los siguientes son los nuevos postulados que Lewis (1918) introduce para la extensión de la teoría de funciones proposicionales:

$$(\phi x \wedge \psi x) \supset \forall x (\phi x + \psi x)$$

$$\exists x (\phi x \wedge \psi x) \supset \forall x (\phi x \circ \psi x)$$

---

<sup>7</sup>En este punto, cabe consignar que mantenemos distancia de la notación empleada en *A Survey of Symbolic Logic*. En esta obra el cuantificador universal está representado por Pi ( $\Pi$ ), mientras que el cuantificador existencial por Sigma ( $\Sigma$ ), lo que no se condice con la representación moderna de ambos predicados de segundo orden.

Además, siendo  $\dot{z}(\phi x)$  la clase determinada por  $\phi z$ , esto es, la clase de todas las  $x$ 's tal que  $\forall \phi x = V$ , y siendo  $\alpha = \dot{z}(\phi z)$  y  $\beta = \dot{z}(\psi z)$ , las definiciones del cálculo pueden establecerse de la siguiente manera, aunque considerando que  $x_n \in \alpha = \phi x_n$  equivale a decir que “ $x$  es miembro de la clase  $\alpha$  determinada por la función  $\phi z$ ” y cuyo significado corresponde al de la valuación  $\forall \phi x_n = V$ :

$$D1. \alpha \rightarrow \beta =_d \phi x \rightarrow \psi x$$

$$D2. \alpha \supset \beta =_d \forall x(\phi x \supset \psi x)$$

$$D3. (\alpha = \beta) =_d \forall x(\phi x = \psi x)$$

$$D4. (\alpha \equiv \beta) =_d \forall x(\phi x \equiv \psi x)$$

$$D5. \neg \alpha =_d \dot{x}(\neg \phi x), \text{ o bien } \neg \alpha \equiv \dot{x}(x \notin \alpha)$$

$$D6. (\alpha \times \beta) =_d \dot{x}(\phi x \times \psi x), \text{ o bien } (\alpha \times \beta) =_d \dot{x}[(x \in \alpha) \times (x \in \beta)]$$

$$D7. \alpha + \beta =_d \dot{x}(\phi x + \psi x), \text{ o bien } (\alpha + \beta) =_d \dot{x}[(x \in \alpha) + (x \in \beta)]$$

$$D8. 1 =_d \dot{x}(\xi \rightarrow \xi), \text{ lo que equivale al Universo de Discurso}$$

$$D9. 0 =_d \neg 1, \text{ lo que equivale a la clase nula}$$

Esta extensión del Sistema de Implicación Estricta a la teoría de funciones proposicionales no admite las siguientes fórmulas como válidas (las que sí se asumen en el caso de la Implicación Material):

$$\phi x \rightarrow (\xi x \rightarrow \xi x)$$

$$\neg(\xi x \rightarrow \xi x) \rightarrow \phi x$$

Finalmente, caben algunas aclaraciones respecto de las ideas filosóficas de Lewis (1918) acerca de la generalización universal y de su posición ante la problemática referida al significado de “para cada caso de  $x$  en que  $\phi x$  implica a  $\psi x$ ”. Para el autor, esto requeriría de una distinción entre: (i) casos actuales, (ii) casos posibles, y (iii) todos los casos existentes en el universo de discurso. Si consideramos los casos existentes, Lewis advierte que ello corresponde a la situación en que para la fórmula  $\forall x(\phi x \rightarrow \psi x)$  se consideran los valores de  $x$  para los cuales  $\phi x$  (o  $\psi x$ ) es susceptible de ser verdadera o falsa. Ello, sin embargo, adquiere complejidad cuando nos cuestionamos por las  $x$ 's

que no existen. En este caso no es tan claro qué valor debe asignarse a  $\phi x$ , pudiendo ser siempre falsa, a veces falsa o a veces verdadera. Con todo, adoptándose el punto de vista del sentido común –precisamente, a lo que llama Lewis (1918)–, predicar algo sobre una cosa que no existe vuelve a la proposición falsa (por ejemplo, “el rey de Chile, coronado en el año 2023, es filósofo” sería una proposición falsa). Naturalmente, el tema no se zanja con esta postura y gran parte del debate en la materia se presenta en las ideas de Frege, Russell, Meinong y Strawson (tema y obras respecto de las cuales no ahondaremos en la presente discusión, por quedar fuera del alcance del objetivo propuesto). Baste con decir que, a la fecha de publicación de estos argumentos de Lewis, Russell ya había publicado, en su famoso artículo *On Denoting* (*Sobre el denotar*) de 1905, una posición afín a la de Lewis, siempre y cuando éste no considere que las  $x$ 's son objetos “genuinos”, puesto que, si así fuere –el mismo Russell (1905/2005) advierte– se estaría vulnerando, de manera patente, la ley de contradicción: al afirmar algo sobre objetos que subsisten, a la vez que no son objetos (problemática que no se presentaría en la teoría de Frege, debido a la distinción que realiza entre “sentido” y “referencia”). Lewis (1918) también advierte que el uso de “existe” suele ser más estrecho que el de “posibilidad”, pero que, en determinados universos de discurso, resulta más amplio que lo real. Su posición es la reconocer que la solución es más bien un asunto de convención, mostrándose favorable a la idea según la cual el uso apropiado de “existe” es aquel en que su significado depende del Universo de Discurso.

## 2.5 Diferenciaciones entre los sistema de Implicación Material e Implicación Estricta

Ahora bien, debemos concentrar la atención en explicitar aquello que diferencia al Sistema de Implicación Material del Sistema de Implicación Estricta. En rigor, no es suficiente con señalar que el segundo procure limitar la capacidad de generar los teoremas contraintuitivos derivados de la Implicación Material. Procederemos, entonces, mediante tres ideas generales: (i) la diferenciación entre ambos sistemas para trabajar como sistemas de valor de verdad; (ii) la diferenciación que mantienen ambos sistemas en lo que respecta a la aceptación de (existencia de) pares de proposiciones que no se ven mutuamente afectadas en su valuación; (iii) la extensión del Sistema de Implicación Estricta al tratamiento de teoremas existenciales (es decir, válidos para algunos casos). La prueba nunca entregada por Lewis (ni tampoco por Langford) de que el Sistema de Implicación Estricta no es reductible al Sistema de Implicación Material se tratará en el siguiente capítulo.

### 2.5.1 El Sistema de Implicación Material como Sistema de Valor de Verdad

Diremos primeramente que un sistema lógico, es un Sistema de Valor de Verdad, sólo cuando no alberga funciones –habitualmente denominadas “términos de enlace”– cuyo valor de verdad depende de condiciones ajenas al valor de verdad que asumen sus elementos básicos –proposiciones atómicas, en el lenguaje de la lógica proposicional– o bien cuando no albergue funciones entre sus elementos constitutivos, cuyo valor de verdad se mantenga indeterminado. El Sistema de Implicación Material satisface las condiciones requeridas para considerarse como Sistema de Valor de Verdad. Al trabajar sobre la base de dos valores de verdad –lo verdadero y lo falso–<sup>8</sup>, asume un total de

---

<sup>8</sup>Existe, naturalmente, una inmensa variedad de sistemas de valores de verdad que asumen más de dos valuaciones. Un ejemplo simple es el propuesto por Lukasiewicz y Tarski (en Lewis y Langford, 1932/1959: 213 y siguientes), en donde la función monádica de negación y la función diádica de implicación material ( $p$  implica  $q$ ) fueron definidas en un dominio de tres valores de verdad  $\{0, 1/2, 1\}$  (tendremos el Sistema de Implicación Material al trabajar sólo con los límites del intervalo asignado

dieciséis conectivas diádicas y un total de cuatro conectivas monádicas, cada una de las cuales expresa una función de verdad <sup>9</sup>. Más allá de las tediosas complicaciones que ofrece el Método Matricial como procedimiento de decisión para el Cálculo Proposicional (sobre todo cuando se emplea con un número igual o superior a tres proposiciones), lo cierto es que el mismo refrenda plenamente las características de un Sistema de Valor de Verdad. Permite apreciar cómo la valuación de una proposición molecular se establece en función del valor de verdad de sus respectivas proposiciones atómicas (Principio de Composicionalidad de Frege), algo que, en la concepción de Lewis (1918, 1932/1959), no aplicaría en el Sistema de Implicación Estricta.

Lo anterior no puede llevar a extraer la conclusión de que no hay otro tipo de relaciones “lógicas” o “necesarias” entre proposiciones, además de las llamadas “funciones de verdad”. Y es que, si entendemos –como lo hiciesen Lewis y Langford (1932/1959: 199 y siguientes)–, que el carácter analítico de la verdad lógica reside, fundamentalmente, en el hecho de estar contenida en las definiciones o significados conceptuales atribuidos a las expresiones, podrá advertirse la existencia de enunciados “necesarios” que no dependen de la verdad o de la falsedad de sus elementos básicos. Esto es lo que llevó a los autores a sostener, dadas las limitaciones de la época en el análisis semántico de la lógica modal, que expresiones del tipo  $\neg \sim p$  o  $\sim p$  no son funciones de verdad, pero enunciados que se construyan sobre la base de las mismas sí pueden ser verdades “lógicas” o “necesarias”<sup>10</sup>.

Y que lo serán a partir de las definiciones adoptadas. En consecuencia, mientras el

---

para la relación de “implica”). Así, “No p” =  $1 - p$  y sean  $p$  y  $q$  números en el intervalo  $[0 - 1]$  se tiene que “ $p$  implica  $q$ ”  $\left\{ \begin{array}{l} \text{si } p \leq q = 1 \\ \text{si } p > q = 1 - p + q \end{array} \right.$

<sup>9</sup>Diremos que una función de verdad es aquella que tiene por dominio a un conjunto de secuencias de valores de verdad y por rango a un subconjunto del conjunto de valores de verdad. Para el caso de la lógica bivalente, el conjunto  $\{V, F\}$ . Ahora bien, para un sistema bivalente existirían  $2^{2m}$  funciones de verdad de  $m$  argumentos. Así, tenemos 4 funciones monádicas ( $2^2$ ), 16 funciones diádicas ( $4^2$ ) y 256 funciones de verdad de tres argumentos ( $16^2$ ). Por fortuna, cuestión que no mostraremos aquí, las conectivas triádicas o superiores pueden expresarse utilizando sólo funciones diádicas. Generalizando, si el número de valores de verdad de un Sistema de Valores de Verdad es  $n$ , el número de funciones de  $m$  elementos es  $n^{nm}$  (en Lewis y Langford, 1932/1959). El lector o lectora interesados en una introducción a estos temas iniciales podrán consultar Deaño (1977: 81 y sigs.)

<sup>10</sup>Por ello precisamente que para Lewis (1918)  $\phi x$  sí es una función de verdad, mientras que la fórmula  $\sim \phi x$  no lo es.

Sistema de Implicación Material es un Sistema de Valor de Verdad, el Sistema de Implicación Estricta no lo sería (al menos no en su totalidad). En él se contienen verdades lógicas que dependen del valor de verdad de sus elementos constitutivos y verdades lógicas que lo son sólo en virtud de las definiciones adoptadas. Un contraste entre las valuaciones de la “implicación” en ambos sistemas permite refrendar la idea de Lewis y Langford<sup>11</sup>.

<b>p</b>	<b>q</b>	<b><math>p \supset q</math></b>	<b><math>p \rightarrow q</math></b>
V	V	V	Indeterminado
V	F	F	F
F	V	V	Indeterminado
F	F	V	Indeterminado

<sup>11</sup>Interesante resulta ser la afirmación entregada por Lewis y Langford (1932/1959), de acuerdo con la cual si contáramos con un sistema que albergue igual número de proposiciones verdaderas e igual número de proposiciones falsas, la probabilidad de que una proposición elegida al azar implique materialmente a una segunda proposición elegida al azar es de  $\frac{3}{4}$  (este es el valor de que la función de implicación material asuma el valor de lo verdadero). La demostración no fue entregada por los autores (quizá por su carácter rutinario), razón por la cual a continuación explicitaremos una manera de desarrollarla. Lo primero es advertir que no es posible trabajar con un número definido de proposiciones. Por ejemplo, si trabajásemos con dos proposiciones (una verdadera y una falsa), la probabilidad de que tengamos una implicación materialmente verdadera al elegir una ella al azar y sin reposición es de  $\frac{1}{2}$  (correspondiente al caso de elegir en primer lugar a la proposición falsa). Luego, el cálculo debe realizarse para un número  $n$  de proposiciones, conforme  $n$  crece. Así, siendo  $V_1$  la probabilidad de elegir una proposición verdadera y  $F_2$  la probabilidad de elegir una proposición falsa, calcularemos primeramente el valor hacia el cual converge la probabilidad de que la implicación resulte falsa (en un supuesto de que la proposición elegida no pueda volverse a escoger), esto es:  $P(V_1 \cap F_2) = P(V_1)P(F_2/V_1)$ .  $P(V_1)$  es la probabilidad de elegir una proposición verdadera y  $P(F_2/V_1)$  representa la probabilidad de elegir una proposición falsa dado que se ha elegido, en primer lugar, una proposición verdadera. Esto da como resultado  $P(V_1 \cap F_2) = \frac{n/2}{n} \frac{n/2}{n-1} = \frac{n}{4(n-1)}$  valor que converge en  $\frac{1}{4}$  conforme  $n$  crece. Luego, la probabilidad de que la Implicación Material, en las condiciones señaladas ( $n$  conformado por un número igual de proposiciones verdaderas y falsas, y elección aleatoria y sin sustitución de proposiciones), resulte verdadera es de  $1 - (\frac{1}{4}) = \frac{3}{4}$ . Es evidente que en las condiciones señaladas se imposibilita la ocurrencia de teoremas vacuamente verdaderos, del tipo  $p \supset p$ . Admitiendo tal caso, como efectivamente sucede en el Sistema de Implicación Material, la probabilidad de que una proposición elegida al azar implique materialmente a una segunda proposición, también elegida al azar, es igualmente de  $\frac{3}{4}$ . Baste con advertir que la probabilidad de que la Implicación Material sea falsa es igual a  $\frac{n/2}{n} \frac{n/2}{n} = \frac{1}{4}$ .

El cuadro, según Lewis y Langford (1932/1959: 199), permite apreciar que la Función de Implicación Material está definida en cada uno de sus casos posibles (conforme la valuación de sus proposiciones atómicas), en tanto que la Implicación Estricta solamente lo está en uno de ellos (precisamente el “mundo posible” que niega su definición, es decir, obtener un consecuente falso dado un antecedente verdadero). Desde luego que estas concepciones, poco finas en torno al plano semántico, son del todo discutibles a la luz de los trabajos modernos en lógica modal. El trabajo de Kripke en Semántica de Mundos Posibles, por cierto, que refuta las ideas de Lewis.

### 2.5.2 El Postulado de Existencia

Ya en 1932 Lewis y Langford incluyen mayores precisiones para la fundamentación definitiva del Sistema de Implicación Estricta. Los autores son conscientes de que no presentan ningún postulado que muestre que el sistema en cuestión no sea derivable del Sistema de Implicación Material. Para ello sostienen –limitadamente– que no logra obtenerse la recíproca del siguiente teorema del Sistema de Implicación Estricta<sup>12</sup>.

$$(p \supset q) \supset \neg(p \neg q)$$

Y es que si, adicionalmente, se obtuviese  $\neg(p \neg q) \supset (p \supset q)$ , la derivación de  $(p \supset q) = \neg(p \neg q)$  resultaría inmediata y, en consecuencia, todo el sistema sería una redundancia del Sistema de Implicación Material. A su turno,  $p \circ q$  expresaría de manera alternativa  $pq$  (aunque superflua), lo mismo que  $\sim \neg p$  y  $\neg \sim p$  serían maneras equivalentes y vacuas de expresar  $p$ .

Con todo, en la consideración anterior no encontramos realmente un postulado que distinga a la Implicación Material de la Implicación Estricta. Para ello, Lewis y Langford (1932/1959) recurren a las consecuencias del Postulado de Consistencia y

---

<sup>12</sup> $\neg(p \neg q)$  es la forma de definir la Implicación Material tomando como primitivas las funciones veritativas de negación y producto lógico. El teorema citado a continuación corresponde al número 12.81, demostrado por Lewis y Langford en el Capítulo VI de *Symbolic Logic*: “The Logistic Calculus of the Unanalyzed Propositions” (pág. 133).

del Postulado de Independencia entre proposiciones. Consideremos, primeramente, que una proposición  $p$  es consistente con una proposición  $q$  cuando la primera no implica la falsedad de la segunda, esto es, cuando tenemos  $\neg(p \rightarrow \neg q)$ <sup>13</sup>.

Consideremos también que dos proposiciones  $p$  y  $q$ , distintas entre sí, son independientes cuando  $p$  no implica  $q$ , esto es, cuando tenemos  $\neg(p \rightarrow q)$ . Dado lo anterior,  $p \rightarrow q$  podría significar “ $q$  puede ser consistente con  $p$  e independiente de  $p$ ”. De manera tal que:

$$\neg(p \rightarrow \neg q) \neg(p \rightarrow q)$$

Lo que equivale a decir “ninguna proposición implica nada y dos proposiciones son coherentes entre sí”. No obstante, es claro que la fórmula anterior no es posible de asumirse como verdadera para cualquier par de proposiciones  $p$  y  $q$ , sino para “algunas” de ellas. Es en este punto donde Lewis y Langford (1932/1959) introducen el recurso existencial y llegan a formular el Postulado de Existencia, el cual, a juicio de los autores, distinguiría al Sistema de Implicación Estricta del Sistema de Implicación Material (ver pág. 178).

$$\exists(p, q) : \neg(p \rightarrow \neg q) \neg(p \rightarrow q)$$

Se advertirá que el postulado equivale a decir “existen (algunos) pares de proposiciones  $p$  y  $q$ , tal que  $p$  no implica nada acerca de la verdad o falsedad de  $q$ ”. Se advertirá, también, que el Postulado de Existencia no se presenta en el Sistema de Implicación Material, en el cual, a lo sumo, se tiene:

$$(p \supset q) \vee p(\supset \neg q)$$

---

<sup>13</sup>En Lewis y Langford (1932/1959: 153) tenemos  $p \circ q = \neg(p \rightarrow \neg q)$ , lo que representa de una manera equivalente la definición de consistencia entregada por Lewis en 1918 (ver sección 2.2 del presente capítulo, específicamente D2). La definición de 1932/1959 es el teorema 4.26 del Sistema de Implicación Estricta, tal como éste fue desarrollado inicialmente por Lewis en 1918 (ver demostración en Capítulo V de *A Survey of Symbolic Logic*: “The System of Strict Implication”, pág. 308).

Entonces, si la Implicación Material coincidiera con la Implicación Estricta, las dos últimas fórmulas revisadas serían contradictorias<sup>14</sup>. Por ello Lewis y Langford (1932/1959) sostienen que no es posible la equivalencia entre ambos tipos de implicación y que la asunción del Postulado de Existencia mostraría, de manera categórica, su diferencia. El postulado, además, evidencia la capacidad del Sistema de Implicación Estricta para contener teoremas de la forma existencial, algo que no ocurre con la Implicación Material. Desde luego que la idea en cuestión entra en conflicto con el principio platonista según el cual la lógica es sólo universal (Lógica Clásica, sin considerar estas extensiones conservativas no estándar). En las secciones posteriores mostraremos cómo el Postulado de Existencia permitió a Lewis y Langford una definición más precisa del Sistema de Implicación Estricta y, conforme a ello, la derivación de los Sistemas S (S1 a S5). También revisaremos la enmendación introducida en 1920 por Lewis a su sistema. No obstante, resaltaremos la omisión de la Regla de Necesidad como parte de S4 (y, naturalmente, de S5).

---

<sup>14</sup>La fórmula corresponde al Teorema 15.72 del Capítulo VI de *Symbolic Logic* de Lewis y Langford (1932/1959): “The Logistic Calculus of Unanalyzed Propositions”. Quien mantenga interés en la derivación puede consultar la obra original. Por simplicidad, por ejemplo, puede recurrirse al Método Matricial (ello asumiendo completitud y corrección para sistemas modales, algo demostrado por Kripke). El método muestra que  $p \supset q \vee p \supset \neg q$  es tautología. Por lo tanto, si la Implicación Material coincidiera con Implicación Estricta, la fórmula anterior correspondería a la negación del Principio de Existencia. Además, resultará claro que  $(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow \neg q)$  no es derivable en el Sistema de Implicación Estricta (algo que el lector o lectora atentos pueden verificar, por ejemplo, recurriendo a las matrices que revisaremos en el próximo capítulo).

## 3 Del Sistema de Implicación Estricta a la formulación de los Sistemas S

### 3.1 La formulación axiomática revisada para el Sistema de Implicación Estricta

En el año 1932, el Sistema de Implicación Estricta ya había captado la atención de distintos lógicos, filósofos y matemáticos de la época (p.ej. Gödel, Tarski, McKinsey), muchos de los cuales compartían con Lewis su reticencia hacia los sistemas sustentados en la Implicación Material, tal como fuera concebida en *Principia Mathematica*. El interés no se deriva sólo de la crítica a estos sistemas herederos de la Lógica Clásica, sino que también de la pretensión de abordar ideas novedosas, capaces de mostrar los caminos para descubrir –o “redescubrir” para salvar la visión platónica– los resultados a los que conducen las extensiones (aunque conservativas) de la Lógica Clásica. Con todo, la Implicación Estricta se había convertido en un tema de discusión persistente desde los puntos de vista filosófico y lógico formal. Ello permitió a Lewis y Langford –este último, filósofo y lógico matemático estadounidense, quien acompañara al primero en la publicación de *Symbolic Logic*– nutrirse de los distintos descubrimientos, cuestionamientos y precisiones que hicieron del Sistema de Implicación Estricta un asunto mejor fundamentado y fuente de desafíos intelectuales abiertos y crecientes.

En 1932 Lewis y Langford presentaron las siguientes dos listas de axiomas (axiomas que, en su mayoría “sobrevivieron” a la formulación original del sistema de 1918). Como veremos en lo sucesivo, ambas listas, combinadas con propuestas posteriores, permiten la formulación de los denominados Sistemas S<sup>15</sup>. Las listas se encuentran en el Apéndice

---

<sup>15</sup>La notación utilizada se ajusta a la actualmente en uso (al menos en contextos influidos por el desarrollo anglosajón de la lógica). De ahí a que “es posible que  $p$  sea el caso” se simboliza como  $\diamond p$  y no como  $\neg \sim p$ . El lector o lectora podrán encontrar las correspondientes equivalencias para “es imposible que  $p$  sea el caso” o “es necesario que  $p$  sea el caso”. De todos modos, los Sistemas S se trabajan como sistemas con base en posibilidad. De allí a que no se requiera de un operador específico para “es necesario que  $p$  sea el caso” o “ $p$  es verdadera en todo mundo posible” (ello a diferencia de sistemas posteriormente propuestos, como el Sistema T o los Sistemas P). Sin embargo, ello no niega

II de *Symbolic Logic* (pp. 492 y siguientes).

Lista A	Lista B
A1. $pq \rightarrow qp$	B1. $pq \rightarrow qp$
A2. $qp \rightarrow p$	B2. $qp \rightarrow p$
A3. $p \rightarrow pp$	B3. $p \rightarrow pp$
A4. $p(qr) \rightarrow q(pr)$	B4. $p(qr) \rightarrow q(pr)$
A5. $p \rightarrow \neg(\neg p)$	B5. $p \rightarrow \neg(\neg p)$
A6. $(p \rightarrow q)(q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$	B6. $(p \rightarrow q)(q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$
A7. $\neg \diamond p \rightarrow \neg p$	B7. $(pp \rightarrow q) \rightarrow q$
A8. $(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg \diamond q \rightarrow \neg \diamond p)$	B8. $\diamond(pq) \rightarrow \diamond p$
	B9. $\exists(p, q)\neg(p \rightarrow \neg q)\neg(p \rightarrow q)$

Una propuesta de especial relevancia es la del filósofo y lógico matemático alemán, Oskar Becker, quien en 1930 presentó los postulados que pasan a especificarse a continuación, principalmente con la finalidad de rescatar el carácter “modalizado” del Sistema de Implicación Estricta y las propiedades de las funciones modales ( $\diamond p$ ,  $\neg \diamond p$ ,  $\diamond \neg p$ ,  $\neg \diamond \neg p$ )<sup>16</sup><sup>17</sup>, las que no quedan del todo desarrolladas en las listas A y B. Aclaremos más adelante sobre los resultados que se obtienen al combinar estos postulados los con los listados de Lewis antes revisadas:

C10.1 $\neg \diamond \neg p \rightarrow \neg \diamond \neg \neg \diamond \neg p$	C10.2 $\neg \diamond \neg \neg \diamond \neg p = \neg \diamond \neg p$
C11.1 $\diamond p \rightarrow \neg \diamond \neg \diamond p$	C11.2 $\diamond p = \neg \diamond \neg \diamond p$
C12. $p \rightarrow \neg \diamond \neg \diamond p$ (Ax. Broweriano)	

la capacidad de expresar estos sistemas con base en “necesidad”, recurriendo a la definición para este operador modal.

<sup>16</sup>Sólo con fines históricos hemos mantenido A5. En un breve artículo, McKinsey (1934) demostró que A5 es derivable de A1-3 y A6. El resultado, aunque no de manera concluyente, está implícito en los Grupos de Lewis que a continuación revisaremos.

<sup>17</sup>A partir de lo que se ha revisado previamente, se justifica que A8 no se presente como Equivalencia Estricta, sino como Implicación Estricta. La intención es evitar que el teorema  $(\sim q \rightarrow \sim p) \rightarrow (p \rightarrow q)$  sea derivable y, en consecuencia, que se anule la diferencia entre “imposibilidad” y “negación”.

La numeración que hemos asignado a los teoremas entre C10.1 y C12 es propia. En Lewis y Langford (1932/1959: 497) C10.1 y C10.2 quedan reunidos en C10, y C11.1 y C11.2 quedan reunidos en C11.

Por lo pronto, debemos señalar que la consistencia de ambos conjuntos de axiomas formulados por Lewis y Langford es verificable recurriendo a matrices (al respecto ver el Apendice II de *Symbolic Logic*, pp. 493-4), las cuales, a su turno, satisfacen los postulados del Álgebra de Boole (algo que abordaremos en el siguiente capítulo). Considérense las siguientes condiciones:

- (i) Todos los axiomas pertenecerán al mismo sistema si y sólo si toman el mismo valor designado para la matriz de validación empleada (1 ó 2, como veremos)<sup>18</sup>.
- (ii) Las reglas de Adjunción, Inferencia y Sustitución de Equivalentes están satisfechas por las matrices.
- (iii) Las matrices son hereditarias, lo cual significa que, si las reglas de transformación del sistema se aplican a una fórmula que toma el valor designado para el sistema, la fórmula resultante tomará ese valor designado. Ahora bien, Lewis y Langford establecieron una única matriz para el Producto Lógico y una única matriz para la Negación. Ambas pueden expresarse así:

---

<sup>18</sup>Para el caso de la Adjunción es directo que cuando  $p$  y  $q$  tienen el valor designado, la fórmula  $pq$  tendrá el valor designado (considérese que cada matriz tendrá los valores 1 ó 2 como designados). La razón es que la matriz base para el Producto Lógico satisface los postulados del Álgebra de Boole-Schröder y, por lo tanto, el teorema  $bb = b$  (en este caso  $b$  puede tomar valores entre 1 y 4). El resultado es generalizable para cualquier par de fórmulas bien formadas  $\alpha$  y  $\beta$ . Para el caso de la Inferencia (Modus Ponens para Implicación Estricta), basta con observar que, en todos los grupos, cuando  $p$  y  $p \rightarrow q$  tienen el valor designado en la matriz para  $\rightarrow$ ,  $q$  tiene el valor designado. El resultado es generalizable para cualquier par de fórmulas bien formadas  $\alpha$  y  $\beta$ . Además, es posible demostrar que en un Álgebra de Boole-Schröder extendida (al respecto ver Capítulo IV), se verifica que haciendo  $\bigvee \alpha = 1$ ,  $\bigvee (\neg * (\alpha \times \neg \beta)) = 1$ , entonces  $\bigvee \beta = 1$ . Para el caso de la Sustitución de Equivalentes, es necesario notar que si  $\alpha$  y  $\beta$  son equivalentes (estrictos) y la fórmula  $\alpha = \beta$  tiene el valor designado (1 ó 2), ello, por definición, conlleva a que  $(\alpha \rightarrow \beta)(\beta \rightarrow \alpha)$  tenga el valor designado. Dada la matriz base para el producto lógico y las matrices para  $\rightarrow$ , se comprueba que esto ocurre sólo cuando  $\alpha$  y  $\beta$  tienen el mismo valor. Luego, la sustitución de  $\alpha$  por  $\beta$ , o inversamente, no alterará el valor de la fórmula resultante.

$$\begin{bmatrix} & & & & & & \mathbf{q} \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ \mathbf{p} & \mathbf{pq} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{\neg q} \\ & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{4} \\ & \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{4} & \mathbf{3} \\ & \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{2} \\ & \mathbf{4} & \mathbf{4} & \mathbf{4} & \mathbf{4} & \mathbf{4} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

El operador modal de posibilidad, por su parte, asumirá distintos valores, generando, conjuntamente con las funciones de negación y producto lógico, las siguientes matrices para la Implicación Estricta<sup>19</sup>:

$$\text{Grupo I} \begin{bmatrix} \diamond & \rightrightarrows & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{4} & \mathbf{4} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{4} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{4} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \end{bmatrix} \quad \text{Grupo II} \begin{bmatrix} \diamond & \rightrightarrows & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{4} \\ \mathbf{4} & \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

<sup>19</sup>El lector o lectora atentos advertirán que la matriz para  $\rightrightarrows$  es sólo un recurso para la simplificación y bien puede obtenerse de la matriz para el producto lógico y para la función de negación (para cada asignación de valores a  $p$  y  $q$ ), conjuntamente con la manera en que se ha definido  $\diamond$  en el Grupo I

(y en cada grupo sucesivo). Primero, tenemos que  $\begin{bmatrix} & & & & & & \mathbf{\neg q} \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ \mathbf{p} & \mathbf{p\neg q} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ & \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ & \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \\ & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{3} \\ & \mathbf{4} & \mathbf{4} & \mathbf{4} & \mathbf{4} & \mathbf{4} \end{bmatrix}$ . Luego, considerando

la definición de  $\diamond$  (en Grupo I), la matriz anterior lleva a  $\begin{bmatrix} & & & & & & \mathbf{\neg q} \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ \mathbf{p} & \mathbf{\diamond(p\neg q)} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ & \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ & \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ & \mathbf{4} & \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{3} \end{bmatrix}$ . Finalmente,

considerando que la Implicación Estricta se define como  $\neg \diamond (p \neg q)$  y los valores asignados a la función  $\neg$ , obtenemos (el proceso seguido debe replicarse para los otros cuatro grupos que se presentan a

continuación):  $\begin{bmatrix} & & & & & & \mathbf{\neg q} \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ \mathbf{p} & \mathbf{\neg \diamond (p\neg q)} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{4} & \mathbf{4} \\ & \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{4} \\ & \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{4} \\ & \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \end{bmatrix}$



$$\left[ \begin{array}{ccccc} & & & & \mathbf{qp} \\ & & & & \\ & \mathbf{pq} \rightsquigarrow \mathbf{qp} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ \mathbf{pq} & \mathbf{1} & 2 & 2 & 2 & 2 \\ & \mathbf{2} & 2 & 2 & 2 & 2 \\ & \mathbf{3} & 2 & 2 & 2 & 2 \\ & \mathbf{4} & 2 & 2 & 2 & 2 \end{array} \right]$$

Tomamos, como otro ejemplo, a A7 en el Grupo I. Notemos lo siguiente:

$$\left[ \begin{array}{ccccc} \mathbf{p} & \diamond \mathbf{p} & \neg \diamond \mathbf{p} & \neg \mathbf{p} & \neg \diamond \mathbf{p} \rightsquigarrow \neg \mathbf{p} \\ \mathbf{1} & 1 & 4 & 4 & 2 \\ \mathbf{2} & 1 & 4 & 3 & 2 \\ \mathbf{3} & 1 & 4 & 2 & 2 \\ \mathbf{4} & 3 & 2 & 1 & 2 \end{array} \right]$$

Ahora, es inmediato el observar que, por ejemplo, mientras A1 es consistente con los axiomas de la Lista A (pues toma el valor designado para el Grupo I, en el que estamos trabajando), el axioma C10 de Becker es independiente de dicha lista (cuando se lo interpreta mediante, precisamente, el grupo en cuestión). Consideremos que  $\bigvee_{\rightsquigarrow} (\neg \diamond p, \neg \diamond \neg \neg \diamond \neg p)$  cuando  $p = 2$  (con  $\neg \diamond p = 2$  y  $\neg \diamond \neg \neg \diamond \neg p = 4$ ). El tratamiento del axioma B9, en la Lista B, podrá parecer complejo, dada su generalización existencial. No obstante, por equivalencia de cuantificadores se tiene  $\neg \forall (p, q)((p \rightsquigarrow \neg q) \vee (p \rightsquigarrow q))$ . El axioma se valida existiendo al menos valuación para  $p$  y  $q$ , tal que B9 tome el valor designado en el grupo.

- (ii) El sistema obtenido a partir de cualquiera de las listas de axiomas no se reduce a la Implicación Material. Nótese que  $\neg(p \neg q) \rightsquigarrow (p \rightsquigarrow q)$ . Presentamos resumidamente algunas de las valuaciones que conducen a fallo, específicamente cuando se considera el caso en que  $p = 1$  y  $q = 2$  (otro caso que arroja falla es cuando  $p = 3$  y  $q = 2$ ). El valor designado para cada grupo se encuentra entre paréntesis:

---

G.I(2)	$\forall \rightarrow (\neg(p \neg q)(p \rightarrow q)) = 4 \quad \forall \neg(p \neg q) = 2 \text{ y } \forall(p \rightarrow q) = 4$
G.II(1)	$\forall \rightarrow (\neg(p \neg q)(p \rightarrow q)) = 3 \quad \forall \neg(p \neg q) = 2 \text{ y } \forall(p \rightarrow q) = 4$
G.III(1)	$\forall \rightarrow (\neg(p \neg q)(p \rightarrow q)) = 4 \quad \forall \neg(p \neg q) = 2 \text{ y } \forall(p \rightarrow q) = 4$
G.IV(1)	$\forall \rightarrow (\neg(p \neg q)(p \rightarrow q)) = 4 \quad \forall \neg(p \neg q) = 2 \text{ y } \forall(p \rightarrow q) = 3$
G.V(2)	$\forall \rightarrow (\neg(p \neg q)(p \rightarrow q)) = 3 \quad \forall \neg(p \neg q) = 2 \text{ y } \forall(p \rightarrow q) = 4$

---

Los autores sostienen que ninguna de las leyes contraintuitivas de la Implicación Material asumen el valor designado en las matrices, si el signo de la Implicación Estricta se reemplaza por el de aquélla. Veamos el caso de  $\neg p \supset (p \supset q)$  y  $q \supset (p \supset q)$ , fórmulas que se presentan en el centro del cuestionamiento de Lewis a la Implicación Material (asunto filosófico hasta hoy inconcluso)<sup>20</sup>. Esto se demuestra de manera simple a continuación (se utilizan las Matrices de Lewis propuestas en el Apéndice II de *Symbolic Logic*, en las páginas 493-94):

---

G.I(2)	$\forall \rightarrow (\neg p, (p \rightarrow q)) = 4, \text{ con } \forall p = 2 \text{ y } \forall q = 2$
G.II(1)	$\forall \rightarrow (\neg p, (p \rightarrow q)) = 3, \text{ con } \forall p = 3 \text{ y } \forall q = 4$
G.III(1)	$\forall \rightarrow (\neg p, (p \rightarrow q)) = 4, \text{ con } \forall p = 2 \text{ y } \forall q = 3$
G.IV(1)	$\forall \rightarrow (\neg p, (p \rightarrow q)) = 3, \text{ con } \forall p = 3 \text{ y } \forall q = 4$
G.V(2)	$\forall \rightarrow (\neg p, (p \rightarrow q)) = 4, \text{ con } \forall p = 2 \text{ y } \forall q = 2$

---

<sup>20</sup>Desde luego que ello no libera a la implicación Estricta de sus propias paradojas. Los teoremas 19.74-77 del Capítulo VI de *Symbolic Logic* así lo muestran. En otros casos hay teoremas “contraintuitivos” de la Implicación Material que son replicables en la Implicación Estricta y que fueron, quizá convenientemente, menos abordados por Lewis y Langford. Un caso ilustrativo es  $(p \neg p) \rightarrow q$  (a su respecto los autores aluden en la pág. 250 y en la demostración presentada no se recurre a los teoremas o axiomas de S1). Este teorema asume el valor designado en los cinco grupos propuestos por los autores (algo que el lector o lectora podrán corroborar) y está contenido desde S1 a S5. Su derivación es la siguiente [usamos los teoremas 12.1 (pág. 127), 12.3 (pág. 130) y 19.57 (pág. 171) incluidos en el Capítulo VI de *Symbolic Logic*]: (1)  $p \rightarrow p$ : 12.1, (2)  $\neg \diamond (p \neg p)$ : D2 X 1, (3)  $\neg \diamond (qp \neg p)$ : 19.57 X (2), (4)  $p \neg p \rightarrow \neg q$ : D2 X 3, (5)  $(p \neg p) \rightarrow q$ : (4) X 12.1  $\{-q/q\}$ .

---

G.I(2)	$\forall_{\rightarrow}(q, (p \rightarrow q)) = 4$ , con $\forall p = 2$ y $\forall q = 3$
G.II(1)	$\forall_{\rightarrow}(q, (p \rightarrow q)) = 3$ , con $\forall p = 3$ y $\forall q = 2$
G.III(1)	$\forall_{\rightarrow}(q, (p \rightarrow q)) = 4$ , con $\forall p = 2$ y $\forall q = 3$
G.IV(1)	$\forall_{\rightarrow}(q, (p \rightarrow q)) = 3$ , con $\forall p = 1$ y $\forall q = 2$
G.V(2)	$\forall_{\rightarrow}(q, (p \rightarrow q)) = 3$ , con $\forall p = 2$ y $\forall q = 2$

---

(iii) Recurriendo al Grupo V es posible verificar que el Postulado de Consistencia (Axioma B8) es independiente de la lista A1-7 y de los axiomas B1-7 y B9. Por su parte, B9 (Postulado Existencial) se valida para el caso  $p = 1$  y  $q = 2$ . Pero B8 falla en el caso  $p = 2$  y  $q = 3$ . A8 es independiente del conjunto A1-7 y del conjunto B1-7 y B9. En el Grupo V el axioma en cuestión toma el valor 4 cuando  $p = 2$  y  $q = 3$ . B7 es independiente del conjunto B1-6 y B8-9 y del conjunto A1-6 y A8, pues el Grupo IV satisface estos axiomas. No obstante, B7 toma el valor 3 cuando  $p = 1$  y  $q = 2$ . Para el caso de la independencia de A7, basta considerar que este axioma tomará el valor 3 en el Grupo IV, cuando  $p = 1$  y  $q = 3$  (todos los otros axiomas de ambas listas asumirán el valor designado). Finalmente, para mostrar la independencia de B9, Postulado de Existencia, los autores recurrieron a la siguiente matriz. En ella  $\neg(p \rightarrow \neg q) \neg(p \rightarrow q)$  toma siempre el valor 0 (valor designado). Pero lo mismo no ocurre para los otros axiomas de ambas listas:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{pq} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{\neg p} & \mathbf{\diamond} & \mathbf{\rightarrow} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

### 3.2 La definición de los Sistemas S: primera propuesta de Lewis y Langford (1932/1959)

Tal como veremos inmediatamente, los Sistemas S son la resultante de la combinación de axiomas de las listas A y B antes revisadas, incluyéndose, en algunos casos, los axiomas propuestos por Becker. En el siguiente cuadro se presenta cada sistema:

Sistema	Axiomas
S1	B1-7
S2	B1-8
S3	A1-8
S4	B1-7 + C10
S5	B1-7 + C11

En *Symbolic Logic* los autores no entregan mayores derivaciones de cada sistema ni reglas asociadas a cada uno de ellos (salvo, naturalmente, las reglas primitivas de “Adjunción”, “Inferencia” y “Sustitución de equivalentes”). En consecuencia, no se dispone de ninguna alusión a la Regla de Necesariadad ni es posible detectar alguna referencia a la misma, aunque sea de manera no formalizada. Desde luego, esto no permite extraer la conclusión de que S4 no pueda prescindir de su consideración (las razones las presentaremos más adelante). Veremos inmediatamente a continuación que es simple comprobar que las matrices que validan S4 permiten corroborar la consistencia de la denominada Regla de Necesariadad en el sistema. También veremos que, mediante el método de McKinsey para extender el Álgebra de Boole-Schröder, RN es demostrable en S4. Seguidamente presentamos la que se reconoce como la primera demostración de Necesariadad, entregada por McKinsey y Tarski. Claramente, la preocupación se concentra en S4 y no en S5, pues todas las propiedades del primer sistema se conservan en este último, más las consecuencias de C12. Terminaremos el presente capítulo haciendo notar que, con recurso a los axiomas que dan lugar a S4, es

posible derivar todos los teoremas de S3. S4 alberga, entonces, los teoremas que son presentados en las secciones I-V del Capítulo VI de *Symbolic Logic*. Cuando se incluye B9 en este sistema, pueden derivarse los teoremas de la sección VI del capítulo. El lector o lectora interesados en una fundamentación más fina de cada Sistema S puede consultar Apéndice II de *Symbolic Logic*. Y para una revisión implícita del apéndice, aunque ilustrativa, se sugiere el trabajo de McKinsey y Tarski (1948).

## 4 Regla de Necesariadad

### 4.1 El axioma característico de S4 y la Regla de Necesariadad

Los sistemas modales han sido estudiados mediante tres estrategias: (i) Sistema Axiomático (tal como hemos visto en los capítulos precedentes); (ii) Semánticamente (dentro de lo cual el trabajo de Kripke acerca de la Semántica de Mundos Posibles es preponderante); (iii) Álgebra de Boole-Schröder (también denominado “lógica de clases”). Esta última alternativa es de antigua data, incluso fue empleada antes de la axiomatización de Lewis (aunque parte importante de su valor se observa en las matrices revisadas en el capítulo precedente). Sin embargo, resulta un recurso facilitador en el tratamiento de determinadas propiedades de S4. En especial, para comprender que la Regla de Necesariadad es demostrable en el sistema. Comenzamos, no obstante, con C10.1 (axioma característico de S4). Demostramos, a partir de las matrices y grupos de Lewis y Langford, que este axioma es consistente con, e independiente de, los demás axiomas del sistema. Para la consistencia del axioma recurrimos a la matriz base y al Grupo II (de manera que encontramos una interpretación que mantiene el valor designado para el grupo):

$$\left[ \begin{array}{cccc} \mathbf{p} & \neg \diamond \neg \mathbf{p} & \neg \diamond \neg \neg \diamond \neg \mathbf{p} & \neg \diamond \neg \mathbf{p} \rightarrow \neg \diamond \neg \neg \diamond \neg \mathbf{p} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 1 \end{array} \right]$$

Para demostrar la independencia de C10.1 de los otros axiomas de S4 recurrimos a la matriz base y al Grupo I. En este grupo, B1-7 asumen el valor característico (a saber: 2), pero no así C10.1. Dado que existe una interpretación que verifica B1-7, pero que falsea C10.1, es claro que éste resulta independiente del listado (recordamos que se trata de un sistema conservativo de la lógica clásica y, consecuentemente, que

satisface el principio de que la falsedad no es derivable de la verdad). C10.1 no asume el valor característico en el Grupo I, cuando  $p = 1$ . Adicionalmente, mediante el recurso al Grupo II de Lewis y Langford, es posible verificar que la Regla de Necesidad es consistente con los axiomas de S4. Supóngase que  $\phi$  es teorema de S4. Se sigue que tendrá el valor característico del grupo, a saber: 1 (recordamos que se trata de matrices hereditarias con respecto a las reglas de transformación del sistema). Luego, es inmediato que  $\forall(\neg \diamond \neg \phi) = 1$ .

## 4.2 Aplicaciones del Álgebra de Boole-Schröder a los Sistemas Modales

El Álgebra de Boole representa el primer intento exitoso por aplicar ideas de la matemática para el trabajo en lógica. En su versión más básica (que data del año 1847) se sostuvo sobre la base de tres ideas generales. La primera pasa por una concepción de la “elección” y por la formalización de “símbolos de elección”. La segunda por la conjetura de que la lógica de clases captura las leyes del pensamiento, en una correspondencia implícita entre lógica y psicología humana (algo que hoy es discutible a la luz de sistemas no conservativos de la Lógica Clásica y que, en más de un aspecto, se enfrentan a la visión ortodoxa sobre las “leyes del pensamiento” intuitivas). La tercera idea relevante consiste en advertir que las reglas obtenidas mediante este álgebra son las mismas que se mantendrían en un álgebra común, pero concentrada en los valores 0 y 1 (aunque con algunas excepciones forzosas). Así, los símbolos  $x, y, z$  representan el resultado de elegir todas las  $x$ 's,  $y$ 's o  $z$ 's presentes en el universo de discurso (en otras palabras, representan clases). A la vez que la “elección” puede tratarse como la operación de multiplicación. Para Boole, si del Universo de Discurso elegimos todas las  $x$ 's y luego todas las  $y$ 's, el resultado de ambas operaciones se representa por  $x \times y$  o  $xy$ . Ello sin importar si fueron las  $x$ 's o las  $y$ 's las que se eligieron en primer lugar. De manera tal que se conserva la propiedad  $xy = yx$ . En una primera fundamentación del sistema se tiene, sin embargo, una notable diferencia con

respecto al álgebra común, y es que, al entender a  $x$  como una clase, la selección de los elementos  $x$ 's del dominio dos veces (o más) no da como resultado una clase distinta de  $x$ . De ahí a que  $xx = x$  o bien  $x^2 = x$ . El álgebra, además, contenía una segunda operación binaria, la “agregación”, denotada por “+”. Da lugar a la clase que son  $x$ 's o  $y$ 's, pero no ambas. De ahí a que en esta formulación original, las clases en suma no deban tener elementos en común (la operación también es conmutativa  $x + y = y + x$ ). En tercer lugar, el álgebra incorpora la operación de “excepción”, denotada por “-”. Refiere a la situación de todas las  $y$ 's que no son  $x$ 's, esto es,  $x - y$  (Boole originalmente aceptó como equivalente la expresión  $-y + x$ ). Entre algunas definiciones primitivas encontramos las siguientes:

$$1 = \text{Universo de Discurso (dominio)}$$

$$0 = \text{Nada (vacío)}$$

De lo que se sigue que:

$$1x = x \text{ (seleccionando las } x\text{'s del universo de discurso, el resultado es } x\text{)}$$

$$0x = 0 \text{ (nada o vacío)}$$

La negativa de una clase  $x$  se denota por  $1 - x$  (todas las cosas en el dominio que no son  $x$ ).

Aunque exitosa, esta formulación original presentó problemas evidentes. Entre ellos destacan los siguientes (a este respecto véase Capítulos I y II de *A Survey of Symbolic Logic*):

- (i) El significado de  $1 + x$ . El problema se origina por la condición de que la agregación opere sobre clases que no tienen elementos en común, algo corregido posteriormente por Peirce, Jevons y otros (Lewis 1918: pp 72 y siguientes).
- (ii) El significado de  $x + x$ .

- (iii) El recurso a operaciones del álgebra ordinaria podría hacer posible la división. Pero no queda claro si es factible que  $x/y = z$  equivalga a  $x = zy$  (págs. 173 y sigs.).

Estos problemas y otros similares fueron abordados por distintos lógicos y matemáticos de la época, como Jevons, Peirce y Mc Coll (véase capítulos I y II de Lewis 1918). Sin embargo, no fue sino hasta la intervención del matemático alemán Ernst Schröder que el Álgebra de Boole logró aplicarse de manera no problemática a la lógica matemática moderna. En general, un Álgebra de Boole-Schröder satisface al menos las siguientes condiciones:

Símbolos:

Se dispone de un operador diádico o binario ( $\times$ ) y un operador unario ( $-$ ).

Postulados<sup>21</sup>:

P1. Un Álgebra de Boole se conforma por el conjunto  $K$  con al menos dos elementos<sup>22</sup>.

P2. Para todo  $a, b \in K$ ,  $-a \in K$  y  $(ab) \in K$

P3. Para todo  $a, b \in K$ ,  $(ab = ba)$

P4. Para todo  $a, b, c \in K$ ,  $a(bc) = (ab)c$

---

<sup>21</sup>Postulados equivalentes fueron propuestos por McKinsey (1941), aunque tomando las operaciones de  $+$ ,  $\times$ ,  $-$  y  $<$  como indefinidas.

<sup>22</sup>Es común que en algunos libros de texto se indique que los elementos de  $K$  pueden ser cualquier cosa, aunque añadiendo que se suelen considerar como clases (p. ej. Hughes y Creswell, 1973). No obstante, vale la pena una precisión. En su fundamentación original, el Álgebra de Boole se concibió como una herramienta de análisis lógico de relaciones en extensión, sin importar las relaciones en intensión ni las correspondencias de éstas con aquéllas. Ello tiene implicancias filosóficas relevantes, con consecuencias analíticas directas. Por poner un caso patente, mientras que la consideración en intensión de expresiones como “hada de azúcar” y “sirena” mostraría que comportan entre sí un significado distinto (pues un hada de azúcar no es lo mismo que una sirena), un análisis en extensión (como clases) revelaría que son lo mismo: la clase nula (asumiendo que no hay, en efecto, sirenas ni hadas de azúcar en el mundo, salvo como cosas pensables). De ahí a que no resulte del todo sano abrir la posibilidad a que los elementos de  $K$  puedan ser, precisamente, conceptos y no clases. Desde luego que lo anterior no imposibilita determinadas interpretaciones para un Álgebra de Boole-Schröder, como la de Hungtington (1904), en donde  $K$  representa un conjunto de regiones en un plano (interpretaciones similares, con diversos propósitos analíticos y formales, se han dado paso desde tal propuesta).

P5. Para todo  $a, b \in K$ , si existe algún  $c \in K$  tal que  $(a \times -b) = (c \times -c)$ , entonces  $(a \times b) = a$

P6. Para todo  $a, b, c \in K$ , si  $(a \times b) = a$ , entonces  $(a \times -b) = (c \times -c)$

Definiciones:

D1.  $0 =_d (a \times -a)$

D2.  $1 =_d -0$

D3.  $(a + b) =_d -(-a \times -b)$

D4.  $a \subset b =_d (a \times b) = a$

Un Álgebra de Boole-Schröder se define, al menos, como el triple ordenado  $\langle K, -, \times \rangle$ . Con base en esta estructura es posible establecer una relación con el Cálculo Proposicional (CP). Para ello se define CP tomando como primitivas a las funciones veritativas de conjunción y negación. Dada una fórmula bien formada (fbf) del CP, se asigna a cada variable de ella algún miembro de  $K$ , conforme a las siguientes reglas:

R1. Si  $\forall \alpha = a$ , entonces  $\forall(\neg\alpha) = -a$

R2. Si  $\forall \alpha = a$  y  $\forall(\beta) = \beta$ , entonces  $(\alpha\beta) = a \times b$

Un Álgebra de Boole-Schröder  $\langle K, -, \times \rangle$  verifica una fbf de CP si para cualquier asignación de miembros de  $K$  a las variables de la fbf,  $\forall = 1$ . Inversamente, si  $\forall \neq 1$ , el Álgebra falsea la fbf. Pongamos un caso simple, la ley de Tercero Excluido:  $\neg p \vee p$ . Por ley de De Morgan se tiene  $p \neg p$ . Luego,  $\forall(p \neg p) = -(a \times -a)$ . Por D.1 y D.2, tenemos  $\forall \neg(p \neg p) = 1$ .

Para obtener un Álgebra de Boole-Schröder que permita trabajar sistemas de lógica modal es necesario incluir un operador. Hughes y Cresswell consideran el siguiente modelo:  $\langle K, -, \times, * \rangle$  (el operador  $*$  es unario y posibilita el tratamiento del operador  $\diamond$ ). Más adelante veremos que el mismo resultado se obtiene con el modelo de McKinsey (1941), propuesto con la finalidad de elaborar un método de decisión para S2 y S4.

Postulados adicionales:

P7. Si  $a \in K, *a \in K$

P8. Si  $a \in K, a \subset *a$

P9.  $a, b \in K, *(a + b) = *a + *b$

P10.  $*0 = 0$

P11. Si  $a \in K, *a = **a$

Denominaremos a este álgebra un “Álgebra S4”. Notamos primeramente que, al extender la estructura básica de un Álgebra de Boole-Schröder, el Álgebra S4 verifica toda fbf de CP y verifica B1-B7 (por extensión no entregaremos la verificación de cada axioma, aunque el método es el que hemos revisado hasta ahora). También verifica el axioma C10.1 y lo revisamos a continuación.

Por definición de  $\rightarrow$ , tenemos que C10.1 equivale a  $\neg \diamond ((\neg \diamond \neg p)(\neg \neg \diamond \neg \neg \diamond \neg p))$ . Por lo que:

$\forall \neg \diamond ((\neg \diamond \neg p)(\neg \neg \diamond \neg \neg \diamond \neg p)) = -*((-* - \alpha) \times -*(-* - - * \alpha))$  Y se tiene:

- (1)  $-*((-* - \alpha) \times -*(-* - - * \alpha)) = -*((-* - \alpha) \times -*(-* - - * \alpha))$ : vacuamente verdadero
- (2)  $-*((-* - \alpha) \times -*(-* - - * \alpha)) = -*((-* - \alpha) \times -*(-* * \alpha))$ :  $\neg \neg p \equiv p$  (T1) es teorema de CP y verificable en el álgebra empleada
- (3)  $-*((-* - \alpha) \times -*(-* - - * \alpha)) = -*((-* - \alpha) \times -(* - \alpha))$ : P11 X (2)
- (4)  $-*((-* - \alpha) \times -*(-* - - * \alpha)) = -*((-* - \alpha) \times (* - \alpha))$ : T1 X (3)
- (5)  $-*((-* - \alpha) \times -*(-* - - * \alpha)) = -*0$ : D1 X (4)
- (6)  $-*((-* - \alpha) \times -*(-* - - * \alpha)) = -0$ : P10 X (5)
- (7)  $-*((-* - \alpha) \times -*(-* - - * \alpha)) = -1$ : D2 X (6)

Entonces:

$$\forall (\neg \diamond ((\neg \diamond \neg p)(\neg \neg \diamond \neg \neg \diamond \neg p))) = 1$$

A través de este álgebra también es factible verificar Regla de Necesiedad (algo que se ha querido realizar en este trabajo). Si cualquier fbf  $\alpha$  es teorema de S4, entonces  $\forall \alpha = 1$ . Luego,  $\forall(\neg \diamond \neg \alpha) = - * -\alpha$ . Entonces:

- (1)  $- * -\alpha = - * -1$ : Por hipótesis
- (2)  $- * -\alpha = - * 0$ : D2 X (1)
- (3)  $- * -\alpha = -0$ : P10 X (2)
- (4)  $- * -\alpha = 1$ : D2 X (3)

Por lo tanto, de  $\forall \alpha = 1$ , se sigue  $\forall(\neg \diamond \neg \alpha) = 1$

### 4.3 Demostración de la Regla de Necesiedad de McKinsey y Tarski para S4

La primera prueba de la Regla de Necesiedad parece corresponder a la entregada por McKinsey y Tarski en 1948, quienes manifestaron desconocer cualquier demostración de la regla desde que fuese conjeturada por Gödel, en el año 1932. La demostración de estos lógicos no es sustantivamente distinta a la antes revisada y examinaremos sus líneas generales a continuación. Sin embargo, lo relevante es que se refrenda que la regla no fue supuesta por Lewis en su trabajo de 1918 (la primera formalización del Sistema de Implicación Estricta) ni en su trabajo posterior, del año 1932, precisado junto con Langford.

Con el objeto de probar distintos teoremas presentes en el Sistema de Implicación Estricta haciendo uso de Álgebras de Cierre y Álgebras de Brouwer, McKinsey y Tarski construyen un sistema equivalente a S4, de la siguiente manera:

El sistema contiene variables (infinitas), constantes y  $()$ . Teniendo la  $n$ -ésima variable o variable de índice  $n$  se da que  $p = v_1, q = v_q, r = v_3$ . Las constantes son la Negación ( $\neg$ ), Conjunción ( $\wedge$ ) y Posibilidad ( $\diamond$ ). Las expresiones formadas a partir de variables aplicando un número finito de veces las operaciones de Conjunción, Negación y Posibilidad se denominan “fórmulas”.

En cuanto a los términos definidos, el sistema considera Disyunción, Implicación material, Equivalencia Material, Implicación Estricta y Equivalencia Estricta:

D1. Disyunción  $\alpha \vee \beta =_d \neg(\neg\alpha\neg\beta)$

D2. Implicación Material:  $\alpha \supset \beta =_d \neg(\alpha \wedge \neg\beta)$

D3. Equivalencia Material:  $\alpha \equiv \beta =_d (\alpha \supset \beta)(\beta \supset \alpha)$

D4. Implicación Estricta:  $\alpha \rightarrow \beta =_d \neg \diamond(\alpha \neg \beta)$

D5. Equivalencia Estricta:  $\alpha = \beta =_d (\alpha \rightarrow \beta)(\beta \rightarrow \alpha)$

A diferencia de la lista de Axiomas de Lewis y Langford (1932/1959), McKinsey y Tarski (1948) enuncian los siguientes 12, para cualquier fórmula  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  y  $\delta$ :

---

A1.  $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow (\beta \wedge \alpha)$

A7.  $\diamond \diamond \alpha \rightarrow \diamond \alpha$

A2.  $\alpha \wedge \beta \rightarrow \alpha$

A8.  $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \supset \beta)$

A3.  $\alpha \rightarrow \alpha \wedge \alpha$

A9.  $\alpha \supset (\beta \supset (\alpha \wedge \beta))$

A4.  $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \rightarrow \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$

A10.  $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$

A5.  $((\alpha \rightarrow \beta)(\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$

A11.  $((\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\gamma \rightarrow \delta)) \rightarrow ((\alpha \wedge \gamma) \rightarrow (\beta \wedge \delta))$

A6.  $(\alpha \wedge (\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow \beta$

A12.  $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\diamond\alpha \rightarrow \diamond\beta)$

---

Se puede advertir que el sistema definido por McKinsey y Tarski (1948) es equivalente a S4 de Lewis y Langford (1932/1959). Ello considerando, en primer lugar, que las doce fórmulas propuestas (como axiomas) son derivables de los axiomas B1, B2, B3, B4, B6 y B7, A8 y C10.1 (ver pp. 493 y sigs.) y de los teoremas (fórmulas) 12.43 (pág. 131), 14.1 (pág. 137), 14.29 (pág. 139) y 19.68 (pág. 173) del Sistema de Implicación Estricta (Capítulo VI de *Symbolic Logic*). En segundo lugar, que las reglas de Separación Estricta (Modus Ponens para Implicación Estricta) y Adjunción se verifican, respectivamente, a través de A8 y A9. A partir de A10, A11 y A12 se comprueba que la primera regla de sustitución del Sistema de Implicación Estricta se mantiene en el sistema de McKinsey y Tarski. Por lo anterior, toda fórmula demostrable en S4 es demostrable en el sistema aquí revisado.

Ahora bien, en la discusión sobre S4 los autores recurren a la notación usual de Matriz, tal como hemos expuesto precedentemente. Definen a la matriz  $M$  como el quintuple  $\langle K, D, \times, -, * \rangle$ , donde  $K$  y  $D$  son conjuntos (más específicamente,  $D$  es un subconjunto propio de  $K$  o el conjunto de elementos designados de  $D$ ).  $\times$  denota una operación binaria, mientras que  $-$  y  $*$  son operaciones unarias, definidas sobre  $K$ .  $K$  se cierra sobre las operaciones  $\times, -$  y  $*$ . Además, estas operaciones se corresponden con las funciones primitivas de negación ( $\neg$ ), conjunción ( $\wedge$ ) y posibilidad ( $\diamond$ ) de S4. Las condiciones a partir de las cuales se dice que una fórmula  $\alpha$  se satisface por la matriz son, en general, congruentes con las que hemos mostrado más arriba (específicamente al ejemplificar con la Ley de Tercero Excluido). En este caso, los autores definieron una Matriz Normal como aquella en que cuando  $\times$  y  $-(x \times -y)$  son miembros de  $D$  (es decir, cuando tengan el valor designado<sup>23</sup>), entonces  $y$  es miembro de  $D$ . Lo que garantiza Modus Ponens.

Además, se agregan las siguientes definiciones:

D6. Una matriz del tipo considerado se denomina Matriz de Lewis si satisface toda fórmula demostrable en el Sistema de Lewis.

D7. Una matriz del tipo considerado se denomina Característica si todas las formulas satisfechas por ella pueden demostrarse en el Sistema de Lewis (la recíproca de la Matriz de Lewis).

McKinsey y Tarski (1948) muestran que los resultados del sistema formalizado pueden expresarse prescindiendo de la notación usual de matriz, esto es, correlacionando cada fórmula  $a$  del Sistema de Lewis (S4 en este caso) con una función del Álgebra de Clausura, conforme a las siguientes condiciones:

---

<sup>23</sup>En referencia a las Matrices de Lewis y Langford (1932/1959) revisadas en el capítulo precedente,  $K = \{1,2,3,4\}$  y  $D$  representa el conjunto de valores designados para cada matriz (un subconjunto propio de  $K$ ).

- (i) A cada fórmula de índice  $n$  se asigna una función del Álgebra de Clausura de  $n$  argumentos. Así, para cualquier  $n$ ,  $a = v_n$ ,  $f^a$  se define por la ecuación  $f^a(x_1, \dots, x_n) = x_n$  (para los elementos  $x_1, \dots, x_n$  de cualquier Álgebra de Clausura).
- (ii) Si  $a$  es una fórmula de índice  $m$  y  $b$  una fórmula de índice  $n$ , y  $r = \max(m, n)$  o la función máximo entre  $m$  y  $n$ ,  $f^{(a \wedge b)}(x_1, \dots, x_r) = f^a(x_1, \dots, x_m) \cdot f^b(x_1, \dots, x_n)$
- (iii) Si  $a$  es una fórmula de índice  $n$ ,  $f^{(\sim a)} = -f^a(x_1, \dots, x_n)$  y  $f^{(\diamond a)} = *f^a(x_1, \dots, x_n)$

Se advertirá que las siguientes dos condiciones son equivalentes entre sí (al respecto ver teorema 1.4 de McKinsey y Tarski (1948)):

$a$  es demostrable en el Sistema de Lewis<sup>24</sup>  $f^a$  es idéntica a 1 en cualquier Álgebra de Clausura

Luego tenemos el teorema 2.1 de McKinsey y Tarski (1948): Si  $a$  es demostrable en el Sistema de Lewis (S4), entonces  $\neg \diamond \neg a$  es demostrable en el sistema.

Demostración: Por las condiciones inmediatamente anteriores, si  $a$  es demostrable en S4 (hipótesis) se sigue que  $f^a$  es igual a 1 en toda Álgebra de Clausura. Luego, es directo que  $- * - f^a$  es igual a 1 en cualquier Álgebra de Clausura. Se sigue que  $\neg \diamond \neg a$  es demostrable en el Sistema de Lewis<sup>25</sup>.

Sin perjuicio de lo anterior, es directo que existe una Matriz de Lewis tal que verifica B1-7 y C10, en la que  $\phi$  tiene el valor del grupo, pero  $\neg \diamond \neg \phi$  no lo tiene. Esto de manera que si  $\phi$  tiene el valor designado (es decir,  $\phi$  es teorema),  $\neg \diamond \neg \phi$  no asume el valor designado (como se sabe,  $p \rightarrow \neg \diamond \neg p$  no es derivable en ningún sistema modal).

---

<sup>24</sup>El lector o lectora interesados pueden corroborar esto considerando la definición de Matriz Característica S4 y las condiciones que la misma satisface en McKinsey (1941). Basta con considerar que -1 equivale a 0 en el Álgebra de Boole. Luego, es directo que se satisface la condición 1 del Teorema 2 ( $- * 0 \in D$ ). Nótese que las condiciones incluidas en la definición de Matriz Normal S2 se mantienen en la definición de Matriz Normal S4. Véanse los teoremas 1, 2, 8 y 9 de McKinsey (1941). Por consiguiente, la Regla de Necesariedad queda demostrada en S4.

<sup>25</sup>Para una revisión sobre este tipo de funciones como parte del Álgebra de Clausura remitirse a Sección 4 de McKinsey y Tarski (1944).

El Grupo I de Lewis es un ejemplo. Cuando  $V\phi = 2$ , tenemos<sup>26</sup> que  $V(\neg \diamond \neg \phi) = 4$ . Lo interesante de esto es que, insistimos, no se asume como verdadera ni derivable (asumiendo corrección y completitud para la Lógica Modal) la fbf  $\phi \mapsto \neg \diamond \neg \phi$

En el siguiente capítulo veremos que, en las nuevas fundamentaciones de los Sistemas S, la denominada Regla de Necesidad adquiere una consideración explícita que permite valorar su relevancia formal y su funcionalidad sintáctica. En particular, nos abocaremos a los Sistemas P de Lemmon (que oscilan entre P1-4), donde RN se da por supuesta con total naturalidad.

---

<sup>26</sup>Desde luego que este no es el único ejemplo que pueda entregarse. La Matriz que proponemos a continuación también verifica B1-7 y C10, pero no entrega el valor designado para  $\neg \diamond \neg \phi$ , cuando  $\phi$

los asume:

$$\begin{bmatrix} \diamond & \mapsto & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ 1 & 1 & 2 & 4 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

## 5 Lemmon y los nuevos fundamentos para los sistemas modales

### 5.1 Las razones para la formulación de los Sistemas P

En 1957 Lemmon publica *New Foundations for Modal Systems*, expresando así que los sistemas modales propuestos por Lewis y Langford eran ampliamente aceptados y reconocidos como fuente de desafíos y debates filosóficos, analíticos y, por supuesto, lógicos (aunque no exentos de ciertos cuestionamientos, los que revisaremos en el capítulo siguiente). En este último caso, se reconocen dos áreas de interés. Por un lado, superar los vacíos, paradojas y errores paulatinamente descubiertos en los Sistemas S, algo que hemos revisado en los capítulos anteriores, y, por otro, entregar bases axiomáticas distintas (aunque no por ello más poderosas) pero conducentes, entre otros propósitos, a resultados equivalentes a los sistemas de Lewis. En este segundo sentido, el trabajo de Lemmon es característico. Veremos a continuación sus líneas generales, notando que RN resulta una parte fundamental de los sistemas P1-4 propuestos y asumida con singular naturalidad. De hecho, Lemmon (1957) reconoce explícitamente la demostración de RN proporcionada en 1948 por McKinsey y Tarski.

## 5.2 La formalización de los Sistemas P de Lemmon

Como hemos visto previamente, un Sistema Modal de Lewis contiene: (i) el Cálculo Proposicional moderno (avanzado principalmente por Russell y Whitehead como sistema axiomático); (ii) la capacidad de contener los axiomas de S5; (iii) la sustitución de tautologías equivalentes, y (iv) las siguientes cuatro fórmulas:

$$F1. \Box(p \supset q) \supset (\Box p \supset \Box q)$$

$$F2. \Box(p \equiv q) \supset (\Box p \equiv \Box q)$$

$$F3. \Box(p \supset q)\Box(q \supset r) \supset \Box(p \supset r)$$

$$F4. \Box p \supset \neg\Box\neg p$$

Para Lemmon (1957), un Sistema  $\Sigma_1$  es más estricto que un Sistema  $\Sigma_2$ , si ambos son modales y el primero está contenido en el segundo, pero no al revés. S1-4 cumplen esta definición.  $\Sigma_1$  es absolutamente estricto si posee infinitas modalidades irrecutibles. S1-2 cumplen con esta definición. Ahora bien, los siguientes son los postulados de Lemmon para los Sistemas de Lewis:

L(a). Sustitución para variables proposicionales (tal como en CP, como fuera trabajado por Russell y Whitehead)

L(b). Adjunción ( $\vdash \alpha, \vdash \beta, \vdash \alpha\beta$ )

L(c). Separación estricta ( $\vdash \alpha, \vdash \alpha \multimap \beta, \Rightarrow \vdash \beta$ )

L(d). Sustitución de equivalentes estrictos

A lo anterior se suma la siguiente lista de axiomas:

---


$$L1. pq \multimap qp$$

$$L2. pq \multimap p$$

$$L3. p \multimap pp$$

$$L4. p(qr) \multimap (qr)p$$

$$L5. (p \multimap q)(q \multimap r) \multimap (p \multimap r)$$

$$L6. p \multimap \diamond p$$

$$L7. \diamond(pq) \multimap \diamond p$$

$$L8. (p \multimap q) \multimap (\diamond p \multimap \diamond q)$$

$$L9. \diamond \diamond p \multimap \diamond p$$

$$L10. \diamond p \multimap \Box \diamond p$$


---

El siguiente cuadro resume los Sistemas de Lewis a los que conducen los postulados y axiomas anteriores.

Lewis	Lemmon
S1	L1-6
S2	L1-7
S3	L1-6 + L8
S4	L1-6 + L9
S5	L1-6 + L10

Lemmon define el CP, que está a la base de los sistemas modales, mediante tres reglas (comúnmente aceptadas desde el trabajo de Russell y Whitehead):

(CPa). Si  $\alpha$  es tautología, entonces  $\vdash \alpha$

(CPb). Sustitución para variables proposicionales

(CPc). Implicación material ( $\vdash \alpha, \vdash \alpha \supset \beta, \Rightarrow \vdash \beta$ )

En la extensión a los sistemas modales, las reglas anteriores pueden formularse de la siguiente manera. Veremos que es en esta lista de reglas que RN ya aparece formalmente y sin mayores cuestionamientos sobre su origen:

(a)  $\vdash \alpha \Rightarrow \vdash \Box \alpha$ ; (a') Si  $\alpha$  es tautología o un axioma, entonces  $\vdash \Box \alpha$  <sup>27</sup>

(b)  $\vdash \Box(\alpha \supset \beta) \Rightarrow \Box(\Box \alpha \supset \Box \beta)$ ; (b') Sustitución de equivalentes estrictos.

Respecto de (a') cabe destacar que hemos mantenido la expresión original empleada por Lemmon (1957: 177): “tautología” (*if  $\alpha$  is a tautology or an axiom, then  $\vdash L\alpha$* ).

Con todo, la restricción (*tautology*) refiere a fbf del CP.

<sup>27</sup>Un antecedente histórico de especial relevancia es entregado por Lemmon, quien indica que la primera demostración de la versión debilitada de RN en S1, que acá hemos designado como (a'), habría sido entregada por Robert Feys (1950: 485): *Les Systems formalisés des modalités Aristotéliciennes. Revue Philosophique de Louvain* Vol. 48 (También referenciado por Hughes y Cresswell, 1973).

### 5.3 Equivalencias entre Sistemas S y Sistemas P

Si a las reglas se añaden los siguientes axiomas, es posible obtener P1-4 con sus correspondientes equivalencias en S1-5:

- (1)  $\Box(p \supset q) \supset \Box(\Box p \supset \Box q)$ ; (1')  $\Box(p \supset q) \supset (\Box p \supset \Box q)$
- (2)  $\Box p \supset p$
- (3)  $(\Box(p \supset q) \supset \Box(q \supset r)) \supset \Box(p \supset r)$

De tal manera<sup>28</sup>, tenemos:

Sistema	Reglas y axiomas
P1	CP, (a'), (b'), (2), (3)
P2	CP, (a'), (b'), (1'), (3)
P3	CP, (a'), (b'), (1), (2)
P4	CP, (a), (1), (2)

Ahora, si bien no nos detendremos en esto, P1-4 son equivalentes a S1-4 (en la versión *Symbolic Logic*). Esto se muestra notando que en cada Sistema P: (i) L1-4 son demostrables según CP, (a) o (a') y la definición de Implicación Estricta. (L6) se demuestra a partir de (2) y (a) o (a')<sup>29</sup>, usando la definición de Necesidad y Posibilidad. L(a) se repite como (CPb). La regla L(b) se deriva de CP; (v) la regla L(c)

<sup>28</sup>Estos sistemas se definen sobre la Negación, Implicación Material y Necesidad. La Conjunción, Disyunción y Equivalencia se definen a partir de la Negación e Implicación Material (tal como en PM), mientras que la Implicación Estricta a partir de la Necesidad e Implicación Material:  $p \rightarrow q =_d \Box(p \supset q)$ . El Operador Modal de Posibilidad se define a partir de la Negación y el Operador de Necesidad:  $\Diamond p =_d \neg \Box \neg p$

<sup>29</sup>Algo que refrenda el rol central asumido por RN en el trabajo de Lemmon (aunque para S1-3 en su versión debilitada). Estas demostraciones son rutinarias y, en todos los casos, siguen la misma forma. Veamos el caso de L1: 1.  $pq \equiv qp$ : CP, 2.  $pq \supset qp$ : Separación CP en 1 3.  $\Box(pq \supset qp)$ : (a') X (2) 4.  $pq \rightarrow qp$ : Def  $\rightarrow$  X 3.

se obtiene a partir de (CPc) y (2) usando la definición<sup>30</sup> de  $\rightarrow$ <sup>31</sup>. Las definiciones  $\rightarrow$  y  $\Box$  de Lewis son derivables como equivalencias estrictas (algo que es directo). Además, en Lemmon (1957), se muestra la Regla de Sustitución (Ld) para cada sistema P.

En P1, L5 se deriva a partir de (3), (a'), la definición de Implicación Estricta<sup>32</sup>, y (Ld) se repite como (b'). De manera tal, que P1 contiene a S1. Cabe destacar que en el caso de S2, Lemmon (1957: 178 y siguientes) entrega la demostración, recurriendo a (PCa), (a') y (1'). Para L9, Lemmon (1957: 179) entrega las referencias en el trabajo de Parry que, conjuntamente con (a), permiten su derivación.

En el caso de (Ld), el autor indica los teoremas de S2 que permiten derivar las reglas:

- (i)  $\Box(p \supset q) \supset \Box(\neg q \supset \neg p)$ <sup>33</sup>
- (ii)  $\Box(p \supset q) \supset \Box((q \supset r) \supset (p \supset r))$ <sup>34</sup>
- (iii)  $\Box(q \supset r) \supset \Box(p \supset q)(p \supset r)$ <sup>35</sup>

Otras reglas que se obtienen por las anteriores son:

---

30

1. Téngase la fbf  $\alpha$ : H
2. Téngase la fbf  $\alpha \rightarrow \beta$ : H
3.  $\Box(\alpha \supset \beta)$ : Def.  $\rightarrow$  X 2
4.  $\alpha \supset \beta$  (2) X 3
5.  $\beta$ : (CPc) X 1 X 4

31

1.  $\Box\neg p \supset \neg p$ : (2)  $\{\neg p/p\}$
2.  $\neg(\neg \diamond \neg p \cdot \neg p)$ : Def.  $\supset$ , Def.  $\diamond$  X 1
3.  $\neg(\neg \diamond p \cdot p)$ : Eq. CP X 2
4.  $p \supset \diamond p$ : Def.  $\supset$  X 3
5.  $\Box p \rightarrow p$ : Def.  $\diamond$ , (a') X 4  $\{\neg p/p\}$

<sup>32</sup>Aplicando la definición de  $\rightarrow$  en (3), se tiene  $((p \rightarrow q)(q \rightarrow r) \supset (p \rightarrow r))$ . Por (a') llegamos a  $\Box(((p \rightarrow q) \supset (q \rightarrow r)) \supset (p \rightarrow r))$ , que por definición lleva a  $((p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$ .

33

1.  $\Box((p \supset q) \supset (\neg q \supset \neg p))$ : (a') X CP
2.  $\Box(p \supset q) \supset \Box(\neg q \supset \neg p)$ : (1') X 1

<sup>34</sup>Corresponde a la línea 7 de la derivación que Lemmon (1957: 178) entrega para (L5) en P2.

<sup>35</sup>Se deriva de la misma manera que (i).

- (iv)  $\vdash \alpha = \beta \Rightarrow \vdash \neg\alpha = \neg\beta$ <sup>36</sup>
- (v)  $\vdash \alpha = \beta \Rightarrow \vdash \alpha \supset \gamma = \beta \supset \gamma$ <sup>37</sup>
- (vi)  $\vdash \alpha = \beta \Rightarrow \vdash \gamma \supset \alpha = \gamma \supset \beta$ <sup>38</sup>
- (vii)  $\vdash \alpha = \beta \Rightarrow \vdash \Box\alpha = \Box\beta$ <sup>39</sup>

Además, de (b) más la definición de  $\diamond$  se tiene la siguiente regla (contenida en P2):

$$\vdash \Box(\alpha \supset \beta) \Rightarrow \vdash (\diamond\alpha \supset \diamond\beta)$$
<sup>40</sup>

36

1.  $\alpha = \beta$ : H
2.  $(\alpha \mapsto \beta)(\beta \mapsto \alpha)$ : Def. = X 1
3.  $\Box(\alpha \supset \beta)$ : Simp. 2 X Def.  $\mapsto$
4.  $\Box(\alpha \supset \beta) \supset \Box(\neg\beta \supset \neg\alpha)$ : (i)  $\{p/\alpha, q/\beta\}$
5.  $\Box(\neg\beta \supset \neg\alpha)$ : MP X 3 X 4
6.  $\Box(\beta \supset \alpha)$ : Simp. (2), Def.  $\mapsto$
7.  $\Box(\beta \supset \alpha) \supset \Box(\neg\alpha \supset \neg\beta)$ : (i)  $\{p/\beta, q/\alpha\}$
8.  $\Box(\neg\alpha \supset \neg\beta)$ : MP X 6 X 7
9.  $\Box(\neg\beta \supset \neg\alpha)\Box(\neg\alpha \supset \neg\beta)$ : Adj.X 5 X 8 10.  $(\neg\alpha = \neg\beta)$ : Def.  $\mapsto$ , Def. = X 9

37

1.  $\alpha = \beta$ : H
2.  $(\alpha \mapsto \beta)(\beta \mapsto \alpha)$ : Def. = X 1
3.  $\Box(\beta \supset \alpha)$ : Simp. X 2, Def.  $\mapsto$
4.  $\Box(\beta \supset \alpha) \supset \Box((\alpha \supset \gamma) \supset (\beta \supset \gamma))$ : (ii)  $\{p/\beta, q/\alpha, r/\gamma\}$
5.  $\Box((\alpha \supset \gamma) \supset (\beta \supset \gamma))$ : MP X 3 X 4
6.  $\Box(\alpha \supset \beta)$ : Simp. X 2 X Def.  $\mapsto$
7.  $\Box(\alpha \supset \beta) \supset \Box((\beta \supset \gamma) \supset (\alpha \supset \gamma))$ : (ii)  $\{p/\alpha, q/\beta, r/\gamma\}$
8.  $\Box((\beta \supset \gamma) \supset (\alpha \supset \gamma))$ : MP X 6 X 7
9.  $\Box((\alpha \supset \gamma) \supset (\beta \supset \gamma))\Box((\beta \supset \gamma) \supset (\alpha \supset \gamma))$ : Adj. X 5 X 8
10.  $(\alpha \supset \gamma) = (\beta \supset \gamma)$  Def. = X 9

<sup>38</sup>La estrategia de demostración es similar a la anterior, pero con recurso a (iii).

39

1.  $\alpha = \beta$ : H
2.  $(\alpha \mapsto \beta)(\beta \mapsto \alpha)$ : Def. = X 1
3.  $\Box(\alpha \supset \beta)$ : Simp. 2
4.  $\Box(\Box\alpha \supset \Box\beta)$ : (1) X 3
5.  $\Box(\beta \supset \alpha)$ : Simp. 2
6.  $\Box(\Box\beta \supset \Box\alpha)$ : (1) X 5
7.  $\Box(\Box\alpha \supset \Box\beta)\Box(\Box\beta \supset \Box\alpha)$ : Adj. (4) X (6)
8.  $\Box\alpha = \Box\beta$ : Def. = X 7

40

1.  $\Box(\alpha \supset \beta)$ : H
2.  $\alpha \mapsto \beta = \neg\beta \mapsto \neg\alpha$ : Teorema 12.44 del Capítulo VI de *Symbolic Logic*.

## 6 Discusión de contraste entre los Sistemas S y los sistemas que incorporan Regla de Necesiedad como principio de inferencia

### 6.1 Sobre la inspección de teoremas derivados con independencia de Regla de Necesiedad (en versiones debilitada y no debilitada) en Sistemas S

Llegado a este punto se requiere abordar las principales interrogantes desprendidas del objetivo trazado para la presente investigación y que, básicamente, consisten en determinar el grado de presuposición que pudo existir de la Regla de Necesiedad en los sistemas modales de Lewis, principalmente en S4 (S1 + C10) y en S5 (S1 + C11), donde es posible trabajar con la versión no restringida de la regla en cuestión. Para ello parecen existir al menos dos alternativas. La primera, directa, es observar la estrategia con que se desarrollaron los sistemas modales propuestos desde *A Survey of Symbolic Logic* e inspeccionar si en algún teorema se logra reconocer dependencia no declarada con respecto a RN. Ello reviste el esfuerzo de examinar la correcta justificación de los teoremas con respecto a los axiomas, símbolos primitivos, definiciones, y reglas de inferencia y de transformación que son parte de la formalización del Sistema de Implicación Estricta y, posteriormente, en la sucesión de Sistemas de Lewis. Claramente, en esto no hay mayor discusión y cualquier examen acucioso notará que RN no está presupuesta en ninguna de las derivaciones presentadas, primeramente, por Lewis (1918) y luego por Lewis y Langford (1932/1959)<sup>41</sup>.

- 
3.  $\Box(\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$ : Def.  $\rightarrow$ , 1 X (1)
  4.  $\Box(\Box\neg\beta \rightarrow \neg\Box\alpha)$ : (b) X 3
  5.  $\Box(\Box\neg\beta \rightarrow \neg\Box\alpha) = \Box(\neg\Diamond\neg\neg\beta \supset \neg\Diamond\neg\neg\alpha)$ : Def.  $\Diamond$  X 3
  6.  $\Box(\neg\Diamond\neg\neg\beta \supset \neg\Diamond\neg\neg\alpha) = (\Diamond\alpha \supset \Diamond\beta)$ : (Ld) X 5

<sup>41</sup>Esta “inspección” sistemática de los teoremas del Capítulo VI de *Symbolic Logic* se ha realizado como parte de las tareas asumidas para el presente trabajo de tesis. De la misma, se ha podido constatar que, en ningún caso, Lewis y Langford dejan espacio para asumir que hayan requerido de RN como

De hecho, las falencias de las formulaciones originales del Sistema de Implicación Estricta y de los Sistemas S son principalmente tres. Que la incorporación del Axioma  $p \rightarrow q = \neg \diamond q \rightarrow \neg \diamond p$ , en la propuesta de *A Survey of Symbolic Logic* del año 1918, conduce a anular la diferencia entre negación e imposibilidad, obligando a una corrección del Sistema de Implicación Estricta en *Symbolic Logic* (asunto revisado en el Capítulo II del presente trabajo de tesis). Que A5,  $p \rightarrow \neg\neg p$ , no es axioma, puesto que es derivable de A1-3 y A6 (de hecho, el lector o lectora atentos notarán que, en las matrices propuestas por Lewis, no es posible encontrar una interpretación en que A5 no tenga el valor designado para el grupo respectivo, mientras que los otros axiomas sí lo tengan, quedando abierta la interrogante sobre si sería o no factible proponer una matriz en que si ocurra). Y que se advierten descuidos en la validación de cada sistema a través de los cinco grupos con los que se trabajó en el apéndice de *Symbolic Logic* (algo que, sin embargo, no es determinante en la fundamentación de cada sistema, ni exige corrección mayor). Fuera de estos asuntos, y de otros que demandan análisis filosófico, como el cuestionamiento sobre el tipo de función al que dan lugar los operadores de posibilidad y necesidad (entendiendo, como el mismo Lewis llegó a precisar, que no son propiamente funciones veritativas), o la discusión en torno a la iteración de modalidades (por ejemplo, el sentido vinculado a asumir que una proposición necesaria implique estrictamente que es necesariamente necesaria), cuestiones cuyo tratamiento profundo escapó de los propósitos principales de Lewis, no queda mayor espacio para la discusión sobre el fundamento de los Sistemas S. También, es claro que RN es un recurso que no interviene, ni parece un requisito para los propósitos sintácticos de *Symbolic Logic*.

---

requisito de inferencia. Incluso, reglas de inferencia dependientes de RN, como las que se obtienen en los Sistemas P, o en otros más débiles, como el Sistema T (véase Hughes y Cresswell, 1973, 1996), son prescindibles dada la “maquinaria” que interviene en la formulación de los Sistemas S.

## 6.2 La “maquinaria” S4 para prescindir de la Regla de Necesidad y su contraste con los Sistemas de Lemmon

Ahora bien, lo anterior puede llevar apresuradamente a concluir que RN es prescindible y que, para el desarrollo de S4-5, su incorporación sería accesoria. De ser esto así, para cada teorema derivado apelando a RN en un sistema modal equivalente a S4 o S5, el mismo debería ser susceptible de obtenerse, en estos sistemas, sin recurso a la regla en cuestión. La tarea implica una estrategia distinta que el atento examen sobre la ausencia de presuposición de RN en los teoremas derivados en el Capítulo VI de *Symbolic Logic*. Requiere, en otras palabras, cuestionarse sobre la manera en que un teorema derivable en un sistema equivalente a S4-5, como P4-5, que recurra a RN, es derivable en los primeros sistemas, pero sin recurso a la regla (esto es, a partir de la fundamentación propuesta en el apéndice de *Symbolic Logic*). Si esto no se lograra, cuestión que no es motivo de discusión, todo sistema en que se incorpore la regla sería lógicamente más fuerte que los Sistemas de Lewis, si en éstos RN no se formaliza (algo que, desde luego, es totalmente realizable dadas las demostraciones de RN debilitada y RN no debilitada para, respectivamente, S1-3 y S4).

Comencemos, pues, notando la existencia de teoremas contenidos en S4 y derivados en *Symbolic Logic*, que lo son en P4 con recurso a RN. En esto no hay mayor dificultad y las estrategias de demostración, en cada caso, no revisten particular interés ni son motivo de discusión. Ilustrativo es el teorema  $\neg \diamond \neg p \rightarrow (q \rightarrow p)$ , contenido en S4 y numerado con 19.75 en el Capítulo VI de *Symbolic Logic* (pág. 174). De hecho, al no ser consecuencia de S1 + C10, el teorema está contenido en S1. En P4 el mismo teorema puede obtenerse a partir de CP, RN, el axioma (1) y la Implicación Material (al respecto ver capítulo anterior). Baste con advertir que la fórmula  $p \supset (q \supset p)$  es derivable en CP. Luego, por RN se tiene  $\Box(p \supset (q \supset p))$  y por (1) se llega a  $\Box(\Box p \supset \Box(q \supset p))$ , que es equivalente a 19.75 (téngase en cuenta que los Sistemas de Lewis se trabajaron a partir del operador primitivo de posibilidad y los Sistemas de Lemmon sobre el de Necesidad).

Incluso, a partir de  $\Box(\Box p \supset \Box(q \supset p))$  obtenemos  $\Box\Box(\Box p \supset \Box(q \supset p))$ , que es un teorema de S4, directamente dependiente de C10. En P4 el mismo teorema es la consecuencia de RN sobre  $\Box(\Box p \supset \Box(q \supset p))$ . Naturalmente, no debemos insistir en que todos los teoremas S1-3 son teoremas S4 (siempre que se adhiera B9, para el obtener los teoremas de S2 cuantificados existencialmente). Por ello que lo mismo que hemos dicho sobre la derivabilidad de estos teoremas en P4, aplique para P1-3. Tomemos otro ejemplo, el teorema  $p \multimap p$ , correspondiente al primero derivado por Lewis y Langford en el Capítulo VI de *Symbolic Logic* (numerado 12.1, pág. 127).

Se sabe que  $p \supset p$  es derivable como teorema en el CP de PM. Luego, con la sola aplicación de RN, es teorema en P4 (incluso, al ser tautología, es derivable en P1-3). Otro caso que consideraremos es el teorema  $\Box(pq) = \Box p\Box q$ , contenido en P4 empleando RN y otras reglas dependientes. Baste con señalar que una estrategia para obtener directamente el teorema en cuestión en P4 requiere derivar  $\Box(p \supset q) \supset (\Box p \supset \Box q)$  y la regla de inferencia  $\vdash \alpha = \beta \Rightarrow \vdash \Box\alpha = \Box\beta$  (el primer caso depende de (1), (2) y RN, mientras que la regla depende de  $\Box(p \supset q) \supset (\Box p \supset \Box q)$  y de RN). A partir del teorema derivado, de CP y de RN se llega a  $\Box(pq) \equiv \Box p\Box q$ . Luego, mediante la aplicación de RN, tenemos  $\Box(\Box(pq) \equiv \Box p\Box q)$ . En el Capítulo VI de *Symbolic Logic* se presenta el mismo teorema, en el numeral 19.81:  $\neg \diamond \neg(pq) = \neg \diamond \neg p \neg \diamond \neg q$ . Ejemplos como los anteriores pueden replicarse, pero no son las situaciones en las que queremos enfocar la atención. La situación interesante está dada por el tipo de teoremas sobre el que Lewis y Langford no hicieron una alusión directa en *Symbolic Logic* y que se obtienen en P4, recurriendo a RN (algo que responde, naturalmente, a que en el Apéndice de *Symbolic Logic* no se abordaron con detalle las consecuencias de S1 + C10). Aquí es donde la discusión debe detenerse para evaluar correctamente la importancia de RN en términos de inferencia. Pues, por un lado, sabemos, a partir de lo abordado en el capítulo anterior, que el listado de axiomas del Sistema de Implicación Estricta del Apéndice II de *Symbolic Logic* es reducido a teoremas en los Sistemas de Lemmon –de ahí a que resulte indiscutible que todo teorema de los Sistemas de Lewis esté contenido

en los Sistemas de Lemmon—. Sin embargo, por otro lado, ello no dice nada sobre el mecanismo o la “maquinaria” involucrada para obtener, en los Sistemas S, aquellos teoremas de los Sistemas P que dependen de RN. De hecho, en los sistemas de Lewis la iteración y reducción de modalidades no depende de una regla. Es claro que la fbf  $p \rightarrow \neg \diamond \neg p$ , no es derivable en los Sistemas S (pues implicaría volver redundante el operador de necesidad y, por extension, cualquier sistema modal que la contenga), mientras que sí lo es  $p \rightarrow \diamond p$ .

Tomaremos, primeramente,  $\Box(\Box p \rightarrow \Box p)$ . La fórmula es teorema de P4, como consecuencia de CP, RN y el Axioma (1), característico de P3-4. No obstante, al depender de RN no debilitada se trata de una fórmula no contenida en P3. Para llegar al mismo teorema en S4 es necesario, primero, notar que  $\Box p \rightarrow \Box p$  es teorema S3. Se llega a éste una vez que se ha derivado la fórmula  $p \rightarrow p$  (12.1 en *Symbolic Logic*) y luego recurriendo a A8, al teorema 12.44 y a las Reglas de Inferencia y de Sustitución. Como todo teorema S3 es teorema S4, la fbf de interés es consecuencia de C10 sobre  $\neg \diamond \neg(\neg \diamond \neg p \supset \neg \diamond \neg p)$  (debido a la relevancia del teorema para la presente argumentación, explicitaremos abajo el detalle de su derivación)<sup>42</sup>.

Otro caso ilustrativo lo presentan las fbf del CP. Si bien los Sistemas de Lewis contienen todos los teoremas del CP en la versión estricta, es decir, de manera necesaria, la estrategia es distinta a la que se emplea en Sistemas que contienen RN. Mientras que, en éstos, la versión estricta de una fbf CP, como  $(p \vee p) \supset p$ , que es axioma en el Sistema PM, se obtiene de manera directa a partir de RN (debilitada), en un Sistema de Lewis es un teorema que prescinde de tal recurso. Todos los axiomas del Sistema PM están contenidos en S1 como teoremas. Corresponden a las fórmulas 13.1, 13.21,

---

42

1.  $p \rightarrow p$ : Teorema 12.1 del Capítulo VI de *Symbolic Logic*
2.  $p \rightarrow p = \neg p \rightarrow \neg p$ : Teorema 12.44 del Capítulo VI de *Symbolic Logic*  $\{q/p\}$
3.  $(\neg p \rightarrow \neg p) \rightarrow (\neg \diamond \neg p \rightarrow \neg \diamond \neg p)$ : 2., A8  $\{p/\neg p, q/\neg p\}$
4.  $\neg \diamond \neg p \rightarrow \neg \diamond \neg p$ : Regla Inferencia (MP Estricto) 2. X 3.
5.  $\neg \diamond \neg(\neg \diamond \neg p \supset \neg \diamond \neg p)$ : Def.  $\rightarrow$
6.  $\neg \diamond \neg \neg \diamond \neg(\neg \diamond \neg p \supset \neg \diamond \neg p)$ : C10 X 5.
7.  $\Box(\Box p \rightarrow \Box p)$ : Def.  $\Box$ , Def.,  $\rightarrow$  X 6.

13.3, 14.25 y 14.28 del Capítulo VI de *Symbolic Logic*. De hecho, para el Sistema de Implicación Estricta no es un requisito asumir el CP, pues todo teorema del mismo es derivable a partir de su versión estricta. El principio que lo permite está contenido en el teorema  $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \supset q)$ , numerado 14.1 (pág. 137). De ahí a que, si los axiomas de PM son derivables en S1, en su versión estricta, todo Sistema de Lewis contendrá la versión estricta del CP y la versión material de éste. Puede, entonces, prescindirse de RN (debilitada y no debilitada) para el salto de la versión material a la versión estricta de cualquier teorema de S1.

Ahora bien, otro tanto cabe discutir sobre lo que ocurre en los sistemas en los cuales se dispone de la versión no restringida de RN y que dan paso a la iteración de modalidades. En un Sistema como P4, el salto de una fórmula de CP a una fórmula modalizada y a la iteración de modalidades se da como consecuencia de RN. Es posible transitar desde, por ejemplo,  $q \supset p \vee q$  a  $q \rightarrow p \vee q$ , y a  $\Box(q \rightarrow p \vee q)$ , y sucesivamente. En S4 el paso no requiere de la fórmula en su versión material, pues se dispondrá, antes de ella, de su versión estricta,  $q \rightarrow p \vee q$ . Y es claro que a partir de equivalencias del CP y de la definición  $\rightarrow$  en el Sistema de Implicación Estricta, se obtiene  $\neg \diamond \neg \neg \diamond \neg (q \supset p \vee q)$ , como teorema S4 (18.7 + B6 + C10, empleando Regla de Sustitución).

En torno a algunas de las consecuencias interesantes en S1, que se anexan a las que se desprenden cuando a este sistema se incorpora C10, está el teorema  $(\neg \diamond \neg \neg \diamond \neg p) \rightarrow (\neg \diamond \neg p = p)$ , deducible de 19.84. Así, cuando una proposición es necesariamente necesaria, se dispone de  $\neg \diamond \neg p = p$  y de  $\neg \diamond \neg p = \neg \diamond \neg \neg \diamond \neg p$  (C10), que permiten la reducción de modalidades. Naturalmente, en el Sistema de Implicación Estricta, el paso hasta  $(\neg \diamond \neg \neg \diamond \neg p) \rightarrow (\neg \diamond \neg p = p)$  es particularmente complejo y requiere de una larga cadena de teoremas previos.

Para el caso de P4, el par de fórmulas  $\Box \Box p \supset \Box(p \supset \Box p)$  y  $\Box \Box p \supset \Box(\Box p \supset p)$  es derivable a partir de CP, RN y los axiomas (1) y (2). Se sigue  $\Box \Box p \supset (\Box(p \supset \Box p) \Box(\Box p \supset p))$ , que por RN conduce a  $\Box(\Box \Box p \supset \Box(p \supset \Box p) \Box(\Box p \supset p))$ . Por su

parte, C10 es consecuencia de (2) y RN<sup>43</sup> (algo que no es tan directo y explicitamos).

La tesis  $\Box p \rightarrow \Box\Box p$  es derivable de CP, (1) y RN, mientras que su recíproca, de (2) y RN, lo cual, nuevamente, muestra el potencial de inferencia de la regla. Esto, naturalmente, es lo que puede explicar la intención de Gödel (1932/2006) por proponer que se incorpore el axioma de Becker (C10) al Sistema  $\Sigma$ , y obtener el primer sistema equivalente a S4 con RN. Con lo que se abrió espacio para una suerte de “inmersión” de la lógica axiomática intuicionista en la lógica modal.

¿Cuáles son, entonces, los contrastes relevantes entre la “maquinaria” de los Sistemas P y de los Sistemas S? Pues bien, observemos la formalización del Sistema de Implicación Estricta (algo sobre lo que hemos entregado los principales antecedentes en el Capítulo II). En particular, sabemos que de su axiomatización derivan como teoremas modalizados los axiomas de PM, con lo que todo el CP está contenido en S1. Las reglas de formación no son radicalmente distintas de las de un sistema axiomático como PM, aunque se agrega la función  $\rightarrow$ , definida a partir del operador  $\diamond$ . No obstante, a diferencia del Sistema PM y de otros sistemas modales, los de Lemmon, por ejemplo, como principio de inferencia se recurre a una versión estricta del Modus Ponens y al set de axiomas asumidos en las listas A1-8 y B1-9 (Apéndice II de *Symbolic Logic*), algo que explica que en S1 los teoremas modalizados, del tipo  $\Box(p \supset p)$ , se obtengan sin recurso al CP. Y como a ello se agregan las consecuencias revisadas de los teoremas  $(p \rightarrow)q \rightarrow (p \supset q)$ ,  $(\neg \diamond \neg \neg \diamond \neg p) \rightarrow (\neg \diamond \neg p = p)$  y de C10, se hace evidente que la incorporación (formal) de RN (debilitada o no) sería redundante, para el tránsito de Sistemas de Lewis.

---

43

1.  $\diamond \diamond p \rightarrow \diamond p$ : L9, derivable en P4 con recurso a (a), ver Lemmon (1957: 179).
2.  $\neg \diamond p \rightarrow \neg \diamond \diamond p$ : Eq. X 1.
3.  $\neg \neg \Box \neg p \rightarrow \neg \neg \Box \neg \neg \Box \neg p$ : Def.  $\Box$  X 2.
4.  $\neg \neg \Box p \rightarrow \neg \neg \Box \neg \neg \Box p$ : 3.  $\{\neg p/p\}$
5.  $\Box p \rightarrow \Box\Box p$ : Eq. X 4. (C10.1)
6.  $\Box\Box p \supset \Box p$ : (2)  $\{p/\Box p\}$
7.  $\Box\Box p \rightarrow \Box p$ : (2)  $\{p/\Box p\}$ : (a) X 6., Def.  $\rightarrow$
8.  $\Box\Box p = \Box p$ : 5. X 7. (C10.2)

### 6.3 Breve alusión a los asuntos filosóficos asociados a la comprensión de la idea de “necesidad” y los sistemas modales

Aunque ajeno a los intereses de la presente discusión, otro tanto cabría precisar sobre el carácter intuitivo de RN y la ausencia de discusión filosófica directa sobre su enunciación. De hecho, parte importante de los debates respecto de la Lógica Modal –al menos de los más persistentes y pioneros– pasan por despejar la idea de “necesidad”, existiendo perspectivas, como la del mismo Lemmon (en Haack, 1991), que abogan por una pluralidad de concepciones al respecto, dependiendo del sistema con el que se trabaje. Para esta posición, la “necesidad” en sistemas fuertes, equivalentes a S4-5, tiende a ser distinta de la que se extrae de formulaciones más restringidas (que, entre otras cosas, no permiten la iteración de modalidades o su reducción). Quienes están en contra de la idea de Lemmon (p. ej. Cargile, 1972 en Haack, 1991), asumen que la mejor representación de “necesidad” es la que se consigue, precisamente, a partir de los sistemas modales fuertes, con lo cual se deja espacio al debate sobre el rol de RN como parte de lo que sería la interpretación más adecuada de “necesidad” y, por consiguiente, del entendimiento más preciso sobre la lógica modal. Ahora, desde luego que parte importante del debate iniciado por Quine sobre la interpretación de la iteración de modalidades (sustentada en la idea de que LA es interpretable como “A es un teorema de la teoría L” y que LLA como “LA es un teorema de M”, donde M es un metalenguaje de L, y su concepción sobre la ausencia de univocidad de los operadores modales iterados), se ve nuevamente intervenida por las consecuencias de RN. Con todo, es indiscutible que parte importante de la posición del filósofo estadounidense está fuertemente influenciada por la rigidez con que asume la interpretación de la lógica y de su lenguaje, principalmente con miras a su empleo en el discurso científico (p. ej. Quine, 1998).

## 6.4 Interrogantes desprendidas del trabajo investigativo

Al margen de los asuntos estrictamente filosóficos sobre los sistemas modales y su pertinencia, la investigación llevada a cabo abre espacios para indagar en, a lo menos, dos cuestiones. La primera de ellas consiste en profundizar en el rol que juega RN como parte de la normalidad de un sistema modal. Ello con miras a establecer si RN debe ser una propiedad contenida en un sistema normal o una regla de inferencia requerida para el trabajo (observaciones de alcance similar podrían hacerse sobre la disponibilidad del Modus Ponens y del CP).

En segundo lugar, los resultados sugieren que es pertinente inspeccionar el criterio de fortaleza (debilidad) modal y la dependencia que mantiene con RN, pues, como se vio a lo largo del trabajo realizado, los Sistemas de S contienen una “maquinaria de inferencia” que permite prescindir de RN (debilitada y no debilitada) para la reducción de modalidades iteradas.

## 7 Bibliografía

BOOLE, G. (1984). *El Análisis Matemático de la Lógica*. Madrid: Ediciones Cátedra S.A. (Obra original publicada en 1847.)

DEAÑO, A. (1977). *Introducción a la Lógica formal. 1. Lógica de enunciados*. Madrid: Alianza Editorial.

FEYS, R. (1950). “Les Systems formalisés des modalités Aristotéliciennes”. *Revue Philosophique de Louvain*. Vol. 48.

GÖDEL, K. “Una Interpretación del cálculo conectivo intuicionista”. [Mosterín, J. (Ed.)]. *Obras Completas*. España: Alianza Editorial, pp. 138-139. [Obra original presentada en 1932, en *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, Núm. 4 (1931-32): 39-40]

GOLDBLATT, R. (2006). “Mathematical Modal Logic: A View of its Evolution”. [Gabbay & Woods (Eds.)]. *Handbook of the History of Logic*. Vol. 7, Elsevier.

HAACK, S. (1991). *Filosofía de Las Lógicas*. Madrid: Ediciones Cátedra S.A.

HUGHES G.E. & CRESSWELL M.J. (1996). *A New Introduction to Modal Logic*. Nueva York: Routledge.

HUGHES G.E. & CRESSWELL M.J. (1973). *Introducción a la Lógica Modal*. Madrid: Tecnos.

HUNTINGTON, E. (1904). “Set of Independent Postulates for the Algebra of Logic”. *Transactions of the American Mathematical society*. Vol. 5, Núm. 3: 288-309.

KRIPKE, S. (1963). “Semantical Analysis of Modal Logic I. Normal Modal Propositional Calculi”. *Logik und Grundlagen*. Vol. 9: 67-96.

KRIPKE, S. (1965). “Semantical Analysis of Modal Logic II. Non-Normal Modal Propositional Calculi”. *Symposium on the Theory of Models*. North-Holland Publ. Co., Amsterdam.

- LEMMON, E.J. (1957). "New Foundations for Lewis Modal Systems". En *The Journal of Symbolic Logic*, Vol. 22, Núm. 2.
- LEWIS, C.I. (1912). "Implication and the Algebra of Logic". En *Mind*, Vol. 21, Núm. 84: 522-531.
- LEWIS, C.I. (1912). "Interesting Theorems in Symbolic Logic". En *The Journal of Philosophy*, Vol.10.
- LEWIS, C.I. (1918). *A Survey of Symbolic Logic*. Berkeley: University of California.
- LEWIS, C.I. (1920). "Strict Implication. An Emendation", en *The Journal of Philosophy, Psychology and Scientific Methods*, Vol.17, Núm. 11.
- LEWIS, C.I. & LANGFORD, C. H. (1932/1959). *Symbolic Logic*. USA: Dover Publications, Inc. (Obra original publicada en 1932.)
- McKINSEY, J.C.C. (1934)."A Reduction in Number of the Postulates for C. I. LEWIS' System of Strict Implication". En *Bulletin of the American Mathematical Society*, Vol. 40, Núm. 6.
- McKINSEY, J.C.C. (1941). "A Solution of the Decision Problem for the Lewis systems S2 and S4, with an Application to Topology". En *The Journal of Symbolic Logic*, Vol. 16, Núm. 4.
- McKINSEY, J.C.C. & TARSKI, A. (1948). "Some Theorems About the Sentential Calculi of Lewis and Heyting". En *The Journal of Symbolic Logic*, Vol. 13, Núm. 1.
- QUINE, W.V.(1998). *Filosofía de la Lógica*. Madrid: Editorial Alianza.
- RUSSELL, B. (2005). "On Denoting". En *Mind*, Vol. 114, Núm. 456: 873-888. (Obra original publicada en 1905.)
- RUSSELL, B. & WHITEHEAD A.N. (1981). *Principia Mathematica*. Madrid: Paraninfo. (Obra original publicada en 1910.)